Corrección de las constantes fundamentales a partir de la observación de ocultaciones de estrellas por la Luna

Gaspar Rosselló Nicolau

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (**www.tdx.cat**) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (**www.tdx.cat**) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (**www.tdx.cat**) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

CATEDRA DE ASTRONOMIA FACULTAD DE FISICA
DEPARTAMENTO DE FISICA DE LA TIERRA Y DEL COSMOS
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

CORRECCION DE LAS CONSTANTES FUNDAMENTALES A PARTIR DE LA OBSERVACION DE OCULTACIONES DE ESTRELLAS POR LA LUNA

Memoria presentada por
Don Gaspar Rosselló Nicolau
para aspirar al grado de
Doctor en Ciencias, Sección
de Físicas

A Teresa
y Mª del Mar

INDICE

Introducción 1

1.- Cálculo de una ocultación 5

1-1 Coordenadas besselianas del centro de la Luna y del observador

1-2 Distancia del observador al eje de sombra

1-3 Libraciones de la Luna

1-4 Cartas de Watts: distancia de la estrella al borde real de la Luna

1-5 Cálculo de la posición aparente de la estrella

2.- Ecuación de condición 31

2-1 Aproximación lineal

2-2 Cálculo de las correcciones

3.- Tratamiento de los datos de observación 42

3-1 Confección del fichero de ocultaciones

3-2 Análisis de los datos

3-3 Reducción del fichero de ocultaciones

4.- Análisis y discusión de los resultados 59

4-1 Correcciones a la longitud media de la Luna

4-2 Corrección al sistema FK4

4-3 Corrección a los elementos orbitales y constantes básicas

4-4 Corrección a la constante de precesión

4-5 Conclusiones

Apéndice I 75

Apéndice II 81

Bibliografía 97

Anexo (fichero de ocultaciones fotoeléctricas)

INTRODUCCION

Entendemos por ocultación de una estrella por la Luna al fenómeno por el cual la estrella se hace invisible al pasar aparentemente por detrás del disco lunar. Las fases de una ocultación son la inmersión y la emersión, o desaparición y reaparición de la estrella por el borde lunar, respectivamente. En general, la observación de este tipo de fenómenos se hace visualmente, si bien a partir de 1947 se empezó a observar con métodos fotoeléctricos.

La observación visual de ocultaciones conlleva un error, ecuación personal, en la determinación del tiempo observado que varía según sea el sistema utilizado para el registro del tiempo (Van Flandern, 1970; Morrison, 1979). Con la observación de las ocultaciones por métodos fotoeléctricos, este error desaparece al sustituir el ojo por un fotodetector acoplado a un registrador preciso de tiempo, con lo cual se conoce con exactitud el instante en que se ha producido el fenómeno.

Hasta el siglo XVIII todas las teorías existentes consideraban uniforme el movimiento medio de la Luna. Atendiendo a las irregularidades existentes, era necesario disponer de una nueva teoría lunar que pudiera compararse con las observaciones. Fueron muchos los autores que se dedicaron a este tema, determinando variaciones y confeccionando Tablas de la Luna. Cabe destacar el trabajo realizado por Euler y otros matemáticos contemporáneos suyos, como Laplace y D'Alembert, que sustituyeron las aproximaciones geométricas utilizadas hasta entonces para calcular las variaciones por métodos analíticos que hacían más precisos los cálculos. Uno de los trabajos que más ha contribuido al desarrollo de la teoría lunar ha sido el llevado a cabo por Symon Newcomb (1878-1912) y en él cabe distinguir dos partes: en la primera de ellas desarrolla la teoría matemática de las desigualdades de largo periodo en el movimiento de la Luna y en la segunda hace un estudio de estas desigualdades a partir de observaciones

anteriores a 1850. Posteriormente Spencer Jones (1932), con las observaciones de ocultaciones de estrellas por la Luna efectuadas en el Observatorio de Ciudad del Cabo y las enumeradas por Newcomb en su trabajo, hace una revisión de la teoría desarrollada por éste, obteniendo las correspondientes correcciones a los elementos orbitales. Martin (1969) utilizando observaciones efectuadas desde 1627 a 1860 hace un análisis de todas ellas, agrupándolas en cinco épocas distintas y, por primera vez, efectuando en observaciones antiguas correcciones al limbo lunar (Watts, 1963). En estudios posteriores de Van Flandern y Morrison ya se trabaja con observaciones más recientes y las correcciones que se obtienen concuerdan en general entre ellas. Sin embargo tanto uno como otro utilizan ocultaciones observadas por métodos visuales, aunque Morrison en su último análisis incluye también observaciones obtenidas por métodos fotoeléctricos.

El tema de las ocultaciones de estrellas por la Luna ha sido de interés primordial en nuestro Departamento en los últimos años. Se empezó a trabajar en él a principios de 1971 (Pujol, 1975). Posteriormente se calculó la posición geodésica del Observatorio Astronómico, instalado en la Facultad de Física de Pedralbes, a partir de observaciones visuales de ocultaciones de estrellas efectuadas con el telescopio situado en la misma (Rosselló, 1976). Finalmente, en el año siguiente se comenzaron a observar ocultaciones rasantes, siguiendo las directrices del Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando, Cádiz, habiéndose llevado a cabo un estudio teórico y práctico sobre las mismas con los datos obtenidos (Calafat, 1977).

Asimismo en el Departamento se trabaja en Dinámica Galáctica, y precisamente la primera motivación de esta tesis fué la posibilidad de calcular la corrección al movimiento del equinocio y, consecuentemente, las correcciones a las constantes de precesión, mediante observaciones fotoeléctricas de ocultaciones de estrellas por la Luna. Más tarde esta intención se extendió al cálculo

de correcciones a los elementos orbitales del Sol y de la Luna.

El Royal Greenwich Observatory es el encargado de recopilar los datos de las observaciones de ocultaciones obtenidos en todo el mundo, y es este organismo, a través de L.V. Morrison, el que nos proporcionó cintas magnéticas que contienen los datos de todas las observaciones efectuadas desde 1943 a 1978, 108770 ocultaciones observadas con 8118 telescopios. A la vista del abundante material de que disponíamos, se decidió a proceder a su análisis utilizando sólamente observaciones fotoeléctricas, debido, como se ha indicado antes, a la impersonalidad de las mismas y a su mayor precisión y fiabilidad. Para ello fue necesario confeccionar un fichero conteniendo exclusivamente las ocultaciones fotoeléctricas, junto con las posiciones estelares extraídas de diversos catálogos (SAO, AGK3, PERTH70).

En el capítulo 1 exponemos el cálculo de una ocultación, utilizando un procedimiento vectorial que simplifica mucho la teoría, y el cálculo de la posición aparente de la estrella, utilizando un método desarrollado por Emerson (1973) de muy fácil manejo con ordenador. En el capítulo 2, a partir de la reducción de cada observación, se plantea la correspondiente ecuación de condición en función de los elementos orbitales y constantes básicas, resultando una ecuación con 19 correcciones a los parámetros, de las cuales se suponen nulas las dos relativas a la posición de la estrella. En el capítulo 3 se analiza en profundidad todos los ficheros confeccionados a partir de las cintas de datos. Finalmente en el capítulo 4 se exponen los resultados obtenidos y se efectua la discusión de cada uno de ellos.

Deseo agradecer a todos los miembros de este Departamento la ayuda prestada en la elaboración de este trabajo, muy especialmente al Profesor Dr. J.J. de Orús, al que debo mi formación astronómica y que me animó a realizarlo, y a la Dra. Mª A. Catalá que lo ha dirigido y revisado. Mención destacada merece el Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando, con cuyo

ordenador HP 1000 se han confeccionado todos los programas. Por tanto, quiero expresar mi agradecimiento a todos sus miembros y muy especialmente a A. Salazar por su constante ayuda, tanto científica como técnica.

Quiero expresar también mi agradecimiento a los Drs. C.F. Martin y T.C. Van Flandern por la documentación proporcionada y en especial a L.V. Morrison, del Royal Greenwich Observatory, por su amabilidad en recibirme al empezar a trabajar en esta tesis, por sus sugerencias para la realización de la misma y por los datos que desinteresadamente me ha proporcionado.

1.- CALCULO DE UNA OCULTACION

Clásicamente se ha tratado la teoría de ocultaciones como un caso particular de la teoría de eclipses de Sol, sin más que sustituir al Sol por la estrella y considerar a ésta a una distancia infinita (Chauvenet, 1908, pág 601; Mueller, 1964). En la presente memoria tratamos el problema vectorialmente, estableciendo las ecuaciones fundamentales independientemente de la teoría de eclipses.

Sean, en un momento dado, T el centro de la Tierra, L el centro de la Luna y E la posición de la estrella, infinitamente lejana en comparación con la distancia Tierra-Luna (fig-1). Si trazamos el cilindro de generatrices tangentes a la Luna, supuesta esférica y de dirección la determinada por E, este cilindro determina sobre la superficie de la Tierra una cierta región de sombra, siendo el eje de dicho cilindro el denominado eje de sombra.

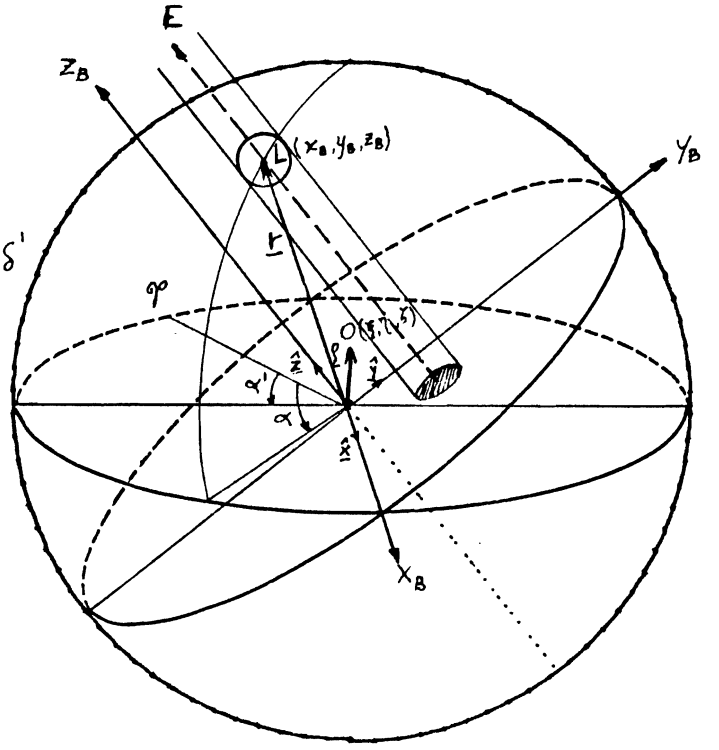


fig-1

Consideremos la base trirectangular de Bessel x_B , y_B , z_B con origen en el centro de la Tierra T, eje z_B paralelo al eje de sombra y positivo hacia la estrella, eje x_B ortogonal a z_B, en la dirección de la intersección del plano ortogonal a z_B por T -plano fundamental- con el ecuador terrestre y positivo hacia el Este, y eje y_B ortogonal a los otros dos y positivo hacia el Norte.

Calcularemos las coordenadas del centro de la Luna L y del observador O en dicha base de Bessel, es decir expresaremos en esta base los vectores de posición de la Luna $\underline{r}$ y del observador $\underline{\rho}$, referidos inicialmente a la base ecuatorial.

1-1 Coordenadas besselianas del centro de la Luna y del observador

Consideremos los vectores unitarios $\hat{\underline{x}}$, $\hat{\underline{y}}$, $\hat{\underline{z}}$ sobre los ejes x_B, y_B, z_B, respectivamente. Sus componentes en la base ecuatorial constituirán la matriz de cambio de base (fig-1).

Sea $\hat{\underline{d}}$ el vector unitario en la dirección del eje del mundo. En la base ecuatorial tendremos evidentemente:

$$\hat{\underline{d}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{eq.} \qquad \hat{\underline{z}} = \begin{bmatrix} \cos\delta' \cos\alpha' \\ \cos\delta' \operatorname{sen}\alpha' \\ \operatorname{sen}\delta' \end{bmatrix}_{eq} \qquad (1\text{-}1)$$

siendo α', δ' las coordenadas ecuatoriales aparentes de la estrella. El eje x_B es ortogonal al plano definido por el eje del mundo y el eje z_B; luego, podemos escribir:

$$\hat{\underline{x}} = \gamma\ \hat{\underline{d}} \wedge \hat{\underline{z}} \qquad \text{con } \gamma \text{ tal que } |\hat{\underline{x}}| = 1$$

Sustituyendo los valores (1-1) de $\hat{\underline{d}}$ y $\hat{\underline{z}}$ en la expresión anterior se tiene:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\cos\delta' \operatorname{sen}\alpha' \\ \cos\delta' \cos\alpha' \\ 0 \end{bmatrix}_{eq.}$$

ó también, siendo $|\hat{\underline{x}}| = \gamma \cos \delta' = 1$:

$$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\ \alpha' \\ \cos \alpha' \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{eq.}} \tag{1-2}$$

Por otra parte, según (1-1) y (1-2):

$$\hat{\underline{y}} = \hat{\underline{z}} \wedge \hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\ \delta' \cos \alpha' \\ -\text{sen}\ \delta' \text{ sen}\ \alpha' \\ \cos \delta' \end{bmatrix}_{\text{eq.}} \tag{1-3}$$

En la base ecuatorial, la expresión de $\underline{r}$ es:

$$\underline{r} = r \begin{bmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \text{ sen}\ \alpha \\ \text{sen}\ \delta \end{bmatrix}_{\text{eq}} \tag{1-4}$$

siendo α y δ las coordenadas ecuatoriales geocéntricas de la Luna. Sean ahora x_B, y_B, z_B las componentes de $\underline{r}$ en la base de Bessel. Dado que ahora, evidentemente:

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} x_B = \underline{r}.\hat{\underline{x}} \\ y_B = \underline{r}.\hat{\underline{y}} \\ z_B = \underline{r}.\hat{\underline{z}} \end{bmatrix}_{\text{Bessel}} \tag{1-5}$$

según (1-1), (1-2), (1-3) y (1-4), se tendrá:

$$\underline{r} = r \begin{bmatrix} \cos \delta \text{ sen}(\alpha - \alpha') \\ \text{sen}\ \delta \cos \delta' - \cos \delta \text{ sen}\ \delta' \cos(\alpha - \alpha') \\ \text{sen}\ \delta \text{ sen}\ \delta' + \cos \delta \cos \delta' \cos(\alpha - \alpha') \end{bmatrix}_{\text{Bessel}} \tag{1-6}$$

Tomando el radio de la Luna como unidad, la distancia Tierra- Luna puede escribirse en función de la paralaje horizontal ecuatorial de la Luna π y de la razón $k_L = 0.2725026$, entre los radios de la Luna y de la Tierra (Expl. Supp, 1974, pág 298) de la forma:

$$r = \frac{1}{k_L \operatorname{sen} \pi} \qquad (1\text{-}6')$$

Para obtener las coordenadas besselianas del observador procederemos de una forma análoga. En la base ecuatorial su vector de posición ρ se escribirá:

$$\rho = a \begin{bmatrix} \rho\cos \phi' \cos \theta \\ \rho\cos \phi' \operatorname{sen} \theta \\ \rho \operatorname{sen} \phi' \end{bmatrix}_{eq.} \qquad (1\text{-}7)$$

donde ϕ' es la latitud geocéntrica del lugar, θ el tiempo sidéreo local y a el radio ecuatorial terrestre. ρ varía entre 1 y 1-f, siendo f el achatamiento del elipsoide terrestre, y $a = \frac{1}{k_L}$ si tomamos el radio de la Luna como unidad.

Las coordenadas de cada observatorio están referidas al datum de su país, o bien a uno de los tres datum principales: el 1927 North American Datum (NAD), el European Datum (ED) y el Australian Datum (AGD). Conviene reducirlas a un mismo datum, para lo cual utilizamos, en nuestro caso, el AMOMDF68 (A Modification Of Mercury Datum Fisher 1968), siendo los parámetros del elipsoide de referencia $a = 6378.150$ Km $f = 1/298.3$.

Para referirlos al elipsoide adoptado por la UAI en 1964 ($a = 6378.160$ Km $f = 1/298.25$), las correcciones que hay que aplicar a los valores de Fisher son $\Delta a = 10$ m $\Delta f = 5.62 \times 10^{-7}$. Dichas correcciones tienen que sumarse a las correspondientes de la tabla 1.adjunta. De esta forma para cada datum tenemos los valores Δx_d, Δy_d, Δz_d, Δa, Δf que se transforman en co-

rrecciones $\Delta\phi_o$, $\Delta\lambda_o$, Δh_o a la posición del observador (Heiskanen and Moritz, 1967, pág 207). Las coordenadas del observador serán $\phi_c = \phi_o + \Delta\phi''$, $\lambda_c = \lambda_o + \Delta\lambda^s$, $h_c = h_o + \Delta h$ en metros.

TABLA 1

DATUM	Δx_a m	Δy_a m	Δz_a m	Δa m	ΔF (10^4)
NAD	-18	145	183	-56.4	-.3774 5435
ED	-81	-104	-121	-238.0	-.1467 3498
AGD	-105	-44	94	-10.0	-.0056 2000
Tokyo Datum	-162	482	671	752.845	.0955 6687
Indian Everest Datum	194	734	259	873.655	.2788 0572
Indian Intern. Datum	-49	-338	83	-238.0	-.1467 3498
South Asia Datum	32	-55	-5	-5.0	0
Adindan Datum	-151	-28	220	-99.145	-.5523 1510
Arc Datum	-166	-38	-283	-99.145	-.5523 1510
Old Hawaijan	68	-278	-193	-56.4	-.3774 5435
Marcus I.D. 1965	122	-202	-126	-238.0	-.1467 3498
Canton I.D. 1965	235	244	-467	-238.0	-.1467 3498
Iwo Jima I.D. 1952	186	85	-265	-238.0	-.1467 3498
Yap I. Datum	531	516	216	-56.4	-.3774 5435
Johnston I.D. 1961	181	-45	-198	-238.0	-.1467 3498
Mercury (NAD)	-21	34	-42	-16.0	0
Mercury (ED)	-10	-89	1	-16.0	0
Mercury (TD)	-4	-166	58	-16.0	0

Para calcular los valores de $\rho \cos \phi'$ y $\rho \operatorname{sen} \phi'$, utilizamos:

$$\rho \operatorname{sen} \phi' = (S(\phi) + H) \operatorname{sen} \phi_c$$
$$\rho \cos \phi' = (C(\phi) + H) \cos \phi_c$$

siendo los valores numéricos de $S(\phi)$, $C(\phi)$ y H (Expl. Supp, 1974, pág 515):

$$S(\phi) = 0.99497418 - 0.00167082 \cos 2\phi_c + 0.0000021 \cos 4\phi_c$$
$$C(\phi) = 1.00167997 - 0.00168208 \cos 2\phi_c + 0.00000212 \cos 4\phi_c$$
$$H = 0.1568 \times 10^{-6} h_c$$

Sean (ξ , η , ζ) las componentes de ρ en la base de Bessel. De la misma forma que en (1-5), tendremos ahora:

$$\rho = \begin{bmatrix} \xi = \rho \cdot \hat{x} \\ \eta = \rho \cdot \hat{y} \\ \zeta = \rho \cdot \hat{z} \end{bmatrix}_{\text{Bessel}}$$

y sustituyendo (1-1), (1-2), (1-3) y (1-7), en radios lunares, en la expresión anterior, tendremos:

$$\rho = \frac{1}{k_L} \begin{bmatrix} \rho \cos \phi' \operatorname{sen}(\theta - \alpha') \\ \rho \operatorname{sen} \phi' \cos \delta' - \rho \cos \phi' \operatorname{sen} \delta' \cos(\theta - \alpha') \\ \rho \operatorname{sen} \phi' \operatorname{sen} \delta' - \rho \cos \phi' \cos \delta' \cos(\theta - \alpha') \end{bmatrix}_{\text{Bessel}} \qquad (1\text{-}8)$$

Las fórmulas (1-6) y (1-8) dan las coordenadas de la Luna y del observador, respectivamente, referidas a la base de Bessel. Pero las coordenadas del observador todavía tienen que ser corregidas del efecto de refracción, que afecta a la posición relativa de la Luna (Chauvenet, 1908, pág 516). Para ello las multipli-

camos por μ_o sen$(z_L - R_A)$/sen z_L, siendo $\mu_o = 1.0002926$ el índice de refracción medio, z_L la distancia zenital de la Luna y R_A la refracción astronómica tabulada en función de la distancia cenital en las efemérides astronómicas (Efemérides Astronómicas de San Fernando). En realidad la refracción tabulada es una refracción media, pero es la única que podemos utilizar en nuestro caso, al no disponer de la presión y la temperatura para el instante en que se realizó la observación.

1-2 Distancia del observador al eje de sombra

Para calcular la distancia del observador al eje de sombra proyectamos O en O′(ξ , η , 0) sobre el plano fundamental x_B, y_B y sea G′(x_B, y_B, 0) el punto en el que el eje de sombra corta a dicho plano. Consideremos el plano paralelo al fundamental y que pasa por el punto O; el eje lo cortará en un punto G (fig-2).

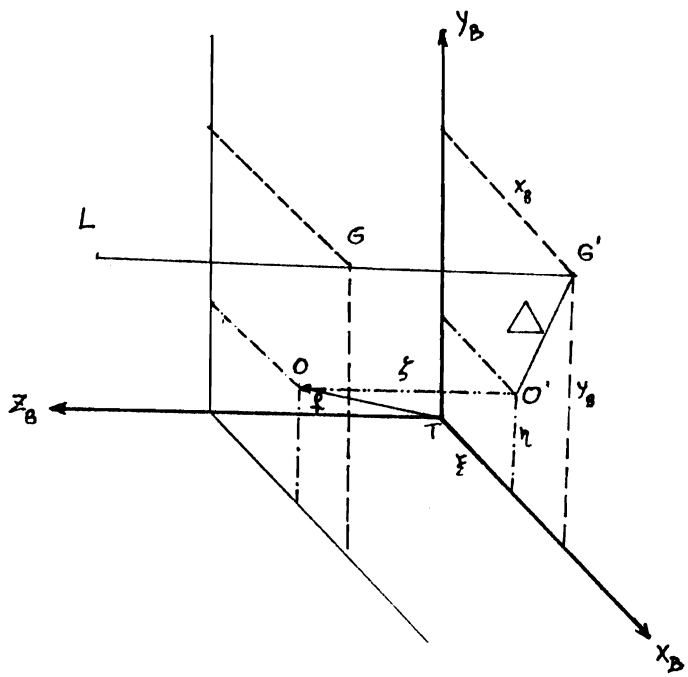


fig-2

La distancia del observador al eje de sombrá será:

$$\Delta = \overline{OG} = \overline{O'G'} = \sqrt{(x_B - \xi)^2 + (y_B - \eta)^2} \qquad (1\text{-}9)$$

y haciendo:

$$u = x_B - \xi$$
$$v = y_B - \eta$$

quedará:

$$\Delta = \sqrt{u^2 + v^2} \qquad (1\text{-}10)$$

En el instante de la ocultación esta distancia debe de ser igual al radio del cilindro de sombra ó radio de la Luna. Nos interesa calcular para dicho instante la distancia angular de la estrella al borde lunar ó "exceso de distancia aparente" de la estrella al borde de la Luna. Sea s_t el semidiámetro lunar topocéntrico. Si r_{OL} es la distancia del observador a la Luna, en radios lunares tendremos:

$$r_{OL} = \frac{1}{s_t}$$

y la distancia del observador al eje de sombra (fig-3) subtendrá desde la Luna un ángulo ν tal que:

$$\text{sen } \nu = \frac{\Delta}{r_{OL}} = s_t \sqrt{u^2 + v^2} \qquad (1\text{-}11)$$

Pero por otra parte, $\nu = s_t + \sigma_e$, siendo σ_e la distancia angular de la estrella al borde lunar. Por tanto, según (1-11), siendo ν muy pequeño:

$$\sigma_e = \nu - s_t = s_t \left(\sqrt{u^2 + v^2} - 1 \right)$$

ó también, en segundos de arco, siendo según (1-6´)

$s''_t = k_L \text{ sen } \pi / \text{sen } 1''$:

$$\sigma_e = \frac{k_L \text{ sen } \pi}{\text{sen } 1''} \left(\sqrt{u^2 + v^2} - 1 \right) \qquad (1\text{-}12)$$

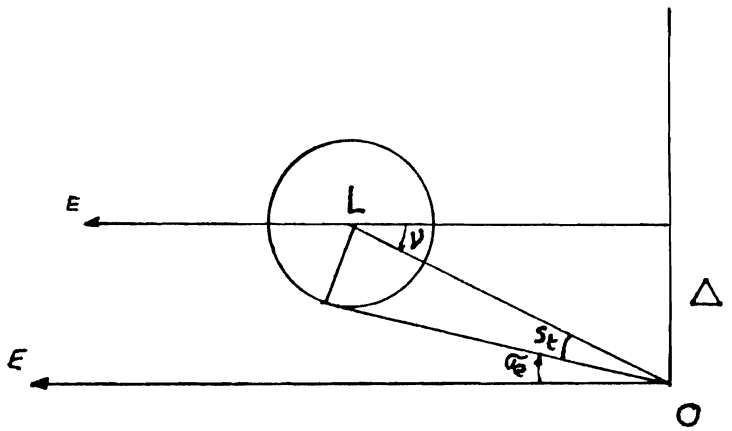


fig-3

Hasta ahora hemos considerado la Luna esférica, cuando en realidad su zona marginal presenta irregularidades que obligan a corregir el valor (1-12) hallado. Dichas irregularidades vienen tabuladas en las cartas de Watts (1963), cuyos argumentos de entrada son los valores topocéntricos de las libraciones en longitud y en latitud así como el ángulo de posición del punto donde se produce la ocultación con respecto al eje de rotación de la Luna.

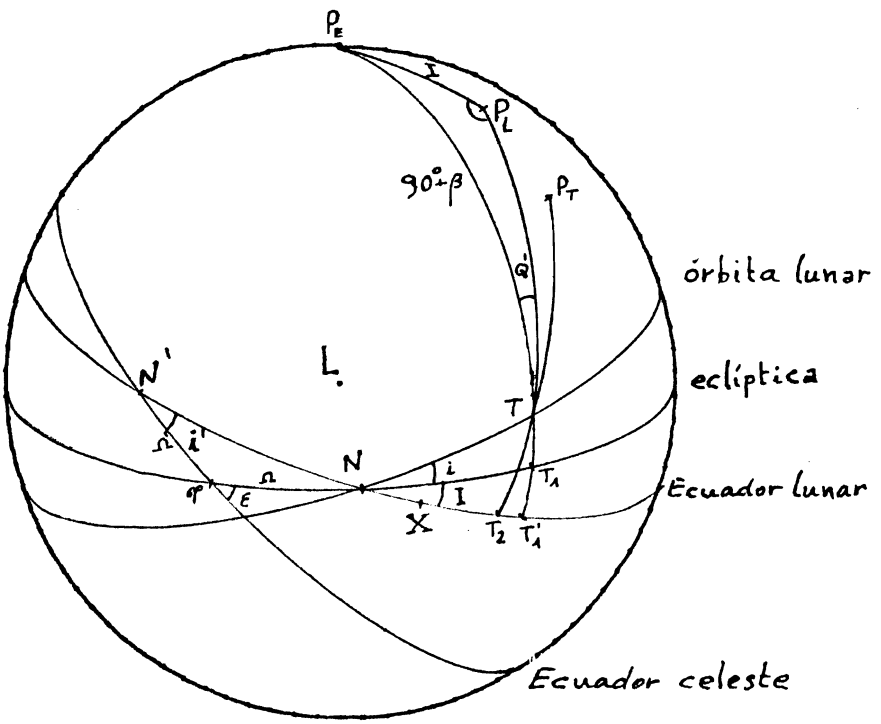
1-3 Libraciones de la Luna

Entendemos por libraciones, los pequeños desplazamientos que experimentan los detalles de la superficie lunar alrededor de su posición media. Las leyes de rotación de la Luna fueron formuladas por J.D. Cassini en 1721 y posteriormente incorporadas a la mecánica Celeste por Lagrange y Laplace, admitiendo que la Luna tiene la forma de un elipsoide alargado cuyo eje mayor está constantemente dirigido hacia la Tierra. La Luna gira en torno del

eje menor de dicho elipsoide, con un periodo medio igual al periodo sidéreo de revolución alrededor de la Tierra. Al ser el elipsoide poco diferente de una esfera, podemos tratar los problemas relativos a las libraciones suponiendo la Luna esférica.

Sean N el nodo descendente del ecuador lunar sobre la eclíptica (fig-4), I el ángulo que forma dicho ecuador con la eclíptica, i´el ángulo que forma el ecuador lunar con el celeste, ε la oblicuidad de la eclíptica, P_E el polo de la eclíptica, P_L el polo del ecuador lunar y P_T el polo del ecuador terrestre.

fig-4



Las leyes de Cassini se enuncian:

1ª) El nodo N coincide sensiblemente con el nodo ascendente medio de la órbita lunar

2ª) La inclinación I del ecuador lunar sobre la eclíptica es sensiblemente constante e igual a $1^{o}\ 32'\ 6''$. La órbita lunar forma con la eclíptica un ángulo cuyo valor medio es $5^{o}\ 9'$; la

inclinación media de la órbita lunar sobre su ecuador será pues $I + i' = 6^{o}\ 41'$.

3ª) Si X es el punto director del eje mayor del elipsoide lunar, es decir, el punto de la esfera selenocéntrica sobre el ecuador lunar correspondiente a dicho eje, se cumple:

$$\widehat{\gamma N} + \widehat{NX} \simeq L - 180^{o} \qquad (1\text{-}13)$$

donde L es la longitud media de la Luna.

a) Libraciones ópticas y físicas

Las variaciones en la posición geométrica de la Tierra relativas a la superficie lunar, durante el movimiento orbital de la Luna, dan lugar a las denominadas libraciones ópticas. Para obtenerlas, definamos un sistema de coordenadas selenocéntricas, al que referiremos los puntos de la superficie lunar y también las posiciones selenográficas del Sol y de la Tierra. Dicho sistema tendrá como ejes coordenados los del elipsoide lunar: el eje X será positivo en el sentido del punto X definido en la tercera ley de Cassini; el eje Z coincidirá con el eje de rotación del elipsoide, normal al ecuador lunar, en sentido positivo hacia el norte; el eje Y estará situado en el ecuador lunar y su sentido positivo será tal que el sistema definido sea directo.

Sea T el punto de la esfera lunar que representa la posición selenocéntrica de la Tierra (fig-4). Su longitud celeste λ_T es igual a la de la Luna λ disminuida en 180°, es decir:

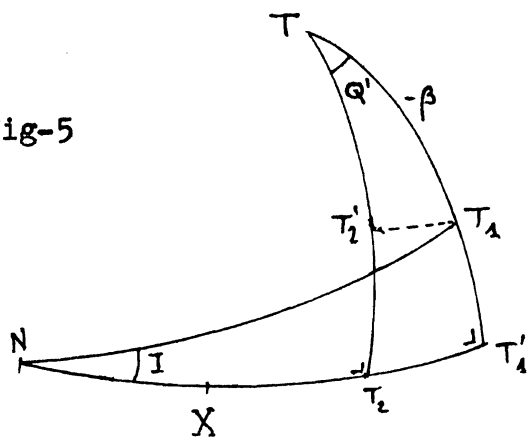
$$\lambda_T = \widehat{\gamma T_1} = \lambda - 180^{o}$$

y la latitud celeste β_T es la de la Luna β cambiada de signo:

$$\beta_T = \widehat{TT_1} = -\beta$$

Este punto T tiene las coordenadas selenográficas del de la superficie lunar que, desde el centro de la Tierra, se proyecta en el centro del disco lunar. Sean l_o y b_o sus coordenadas selenográficas (fig-5): $l_o = XT_2$ es la libración óptica en longitud y $b_o = T_2T$ es la libración óptica en latitud.

fig-5



Consideremos el triángulo $NT_1'T_1$, rectángulo en T_1'. La resolución de este triángulo nos da:

$$\text{sen } \widehat{NT_1'} \simeq \text{sen } \widehat{NT_1} = \cot I \tan \widehat{T_1T_1'}$$

y, ya que tanto I como $\widehat{T_1T_1'}$ son muy pequeños, tendremos:

$$\widehat{T_1T_1'} \simeq I \text{ sen } \widehat{NT_1}$$

Por otro lado (fig-4) se deduce:

$$\widehat{NT_1} = \widehat{\Upsilon T_1} - \widehat{\Upsilon N} = \lambda_T - \Omega = \lambda - \Omega - 180^\circ$$

donde Ω es la longitud media del nodo ascendente de la Luna. Por tanto:

$$\widehat{T_1T_1'} \simeq - I \text{ sen}(\lambda - \Omega)$$

Finalmente, siendo $b_o = \widehat{T_2T}$:

$$b_o = - \beta - I \text{ sen}(\lambda - \Omega) \qquad (1\text{-}14)$$

Tracemos ahora por T_1 un círculo máximo perpendicular a $\widehat{TT_2}$ (fig-5). Dada la pequeñez de estos triángulos, podemos considerar que $\widehat{T_2T_1'} = \widehat{T_1T_2'}$ y resolviendo el triángulo $TT_2'T_1$ obtenemos:

$$\widehat{T_2'T_1} = \widehat{T_1T_2'} = - \text{sen } \beta \text{ sen } Q'$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo P_EP_LT (fig-4):

$$\text{sen } Q' = \frac{I}{\cos \beta} \cos A$$

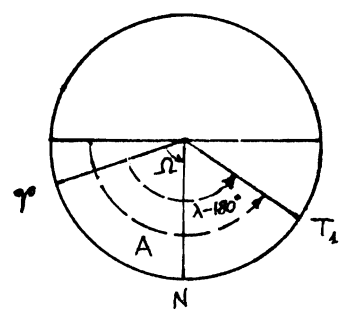
y sustituyendo esta expresión en $\widehat{T_2T_1'}$, nos queda:

$$\widehat{T_2T_1'} = - I \tan \beta \text{ sen } A$$

Para calcular el valor de sen A despreciaremos el de I, considerando que el punto Aries se encuentra sobre el ecuador lunar, y en consecuencia haciendo coincidir T_1 con T_1'. En la figura 6, que representa el ecuador lunar, vemos que:

$$A = -\left[90^\circ - (\lambda - \Omega)\right]$$

fig-6



y siendo:

$$\text{sen } A = - \cos(\lambda - \Omega)$$

obtendremos:

$$\widehat{T_2T_1'} = I \tan \beta \cos(\lambda - \Omega)$$

Finalmente, la longitud l_o valdrá:

$$l_o = \widehat{XT_2} = \widehat{NT_2} - \widehat{NX} = \widehat{NT_1'} - \widehat{T_2T_1'} - \widehat{NX} = (\lambda - \Omega - 180^\circ) -$$
$$-(L - \Omega - 180^\circ) - \widehat{T_2T_1'} = \lambda - L - T_2T_1'$$

y sutituyendo el valor de $\widehat{T_2T_1'}$:

$$l_o = \lambda - L - I \tan \beta \cos(\lambda - \Omega) \qquad (1\text{-}15)$$

Para saber cómo se presenta el disco lunar para un observador geocéntrico, es necesario calcular el ángulo de posición C_o de su eje de rotación, es decir, el ángulo que forman entre sí los polos norte lunar y terrestre. Consideremos el triángulo esférico $P_L P_T T$ (fig-7). En él, el lado $\widehat{P_L P_T}$ vale i; el lado $\widehat{P_L T}$ vale $90^o - b_o$; el ángulo en T es el de posición C_o, el ángulo en P_T vale $-(90^o - (\alpha - \Omega'))$, siendo Ω' la ascensión recta del nodo ascendente del ecuador lunar sobre el celeste (fig-4). Del triángulo $P_L P_T T$ puede deducirse, aplicando el teorema de los senos:

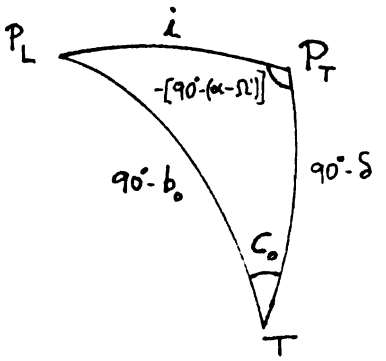


fig-7

$$\text{sen } C_o = - \frac{\text{sen } i \cos(\alpha - \Omega')}{\cos b_o} \qquad (1\text{-}16)$$

Todas las leyes enunciadas anteriormente son sólo aproximadas puesto que los nodos no coinciden de una forma rigurosa, la inclinación I sufre fluctuaciones de pequeña amplitud y la dirección del semieje mayor puede separarse algunas centésimas de grado de la definida. Estas pequeñas desviaciones constituyen las libraciones físicas. Estas libraciones físicas, muy pequeñas en comparación con las ópticas, se expresan en función de éstas en la forma (Expl. Supp, 1974, pág 322):

$$\left.\begin{aligned}
\Delta l_o &= 0^o.003 \text{ sen}(L - \varpi) - 0^o.005 \text{ sen}^2(\varpi - \Omega) - \\
&\quad - 0^o.016 \text{ sen } M' + \Delta C_o \text{ sen } b_o \\
\Delta b_o &= \left[0^o.04 \text{ sen}(\varpi - \Omega) - 0^o.003 \text{ sen}(L - \Omega)\right] \cos l_o + \\
&\quad + \left[0^o.02 \cos(\varpi - \Omega) + 0^o.003 \cos(L - \Omega)\right] \text{sen } l_o \\
\Delta C_o &= \left\{\left[0^o.04 \text{ sen}(\varpi - \Omega) - 0^o.003 \text{ sen}(L - \Omega)\right] \text{sen } l_o + \right. \\
&\quad \left. + \left[0^o.02 \cos(\varpi - \Omega) + 0^o.003 \cos(L - \Omega)\right] \cos l_o \right\} \sec b_o
\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}17)$$

siendo ϖ la longitud media del perigeo lunar y M' la anomalía media del Sol.

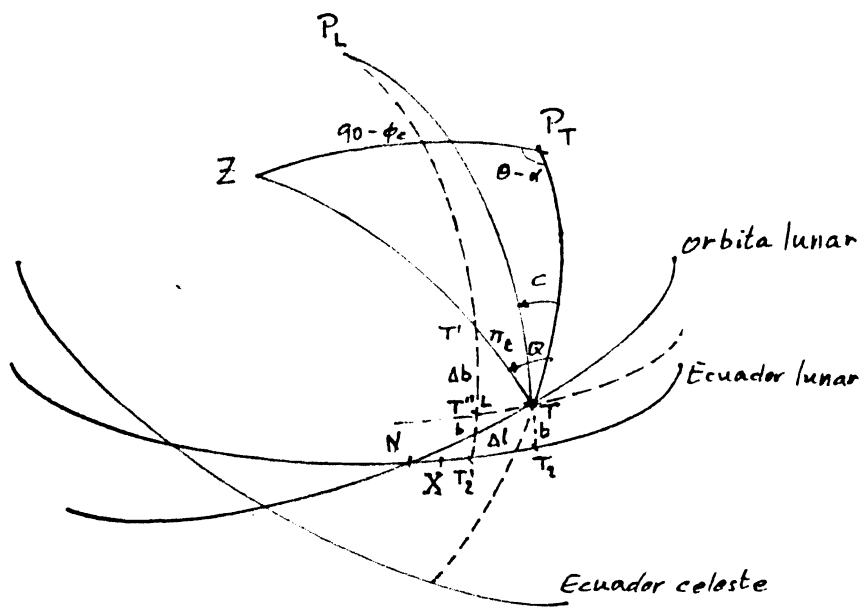
Las coordenadas selonográficas de T serán, por tanto, la suma de las libraciones ópticas y físicas:

$$\left.\begin{aligned} l &= l_o + \Delta l_o \\ b &= b_o + \Delta b_o \\ C &= C_o + \Delta C_o \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}18)$$

b) Libraciones topocéntricas

El observador se encuentra sobre la superficie de la Tierra, por lo que deberemos tener en cuenta el efecto de paralaje que da lugar a la llamada libración diurna. Designemos por Δl, Δb, ΔC las correcciones a las libraciones geocéntricas l, b y al ángulo de posición geocéntrico C debidas a la libración diurna.

fig-8



Sea T' la posición selenográfica del observador (fig-8). $\widehat{TT'}$ es la paralaje en altura π_t que viene dada en función de la paralaje horizontal π por la fórmula (Atkinson, 1951):

$$\pi_t = \pi\,(\text{sen } z_L + 0.0084 \text{ sen } 2z_L) \qquad (1\text{-}18')$$

siendo z_L la distancia cenital de la Luna. Trazamos por T un paralelo al ecuador lunar y por T′ el correspondiente meridiano lunar. Consideremos el triángulo TT′T", rectángulo en T" y muy pequeño, como si fuese plano. Por la misma razón supongamos que $T' = Q - C$; siendo Q el ángulo paraláctico, cuyo valor puede obtenerse aplicando al triángulo $P_T ZT$ las fórmulas de Bessel. Por otra parte, evidentemente, $\widehat{TT''} = -\Delta l \cos b$

Del triángulo TT′T" resulta:

$$\left.\begin{aligned} \Delta b &= \pi_t \cos(Q - C) \\ \Delta l &= -\frac{\pi_t \text{ sen}(Q - C)}{\cos b} \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}19)$$

Para obtener el valor de la corrección al ángulo de posición, ΔC, partamos de la expresión del ángulo de posición geocéntrico (1-16) y supongamos que las correcciones debidas a las libraciones físicas son nulas, $C = C_o$, $l = l_o$, $b = b_o$, con lo cual (1-16) se escribirá:

$$\text{sen } C = -\frac{\text{sen } i \cos(\alpha - \Omega')}{\cos b}$$

Para la posición topocéntrica tendremos:

$$\text{sen}(C + \Delta C) = -\frac{\text{sen } i \cos(\alpha + \Delta\alpha - \Omega')}{\cos(b + \Delta b)} \qquad (1\text{-}20)$$

siendo $\Delta\alpha$ la paralaje diurna en ascensión recta, cuyo valor es (Orús, 1966, pág 52):

$$\Delta\alpha = -\frac{\cos \phi_c \text{ sen}(\theta - \alpha)}{\cos \delta}$$

Si aplicamos el teorema de los senos al triángulo $P_T ZT$, (fig-8), tenemos:

$$\cos \phi_c \operatorname{sen}(\theta - \alpha) = \operatorname{sen} z_L \operatorname{sen} Q$$

con lo cual la expresión de $\Delta\alpha$ nos quedará

$$\Delta\alpha = -\frac{\pi \operatorname{sen} z_L \operatorname{sen} Q}{\cos \delta} = -\frac{\pi_t \operatorname{sen} Q}{\cos \delta} \qquad (1\text{-}21)$$

Desarrollando la expresión (1-20) y teniendo en cuenta que podemos despreciar sen b Δb frente a cos b, nos queda:

$$\Delta C = \tan C \tan b \, \Delta b + \frac{\operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\alpha - \Omega')}{\cos b \cos C} \Delta\alpha \qquad (1\text{-}22)$$

Aplicando la tercera fórmula de Bessel al triángulo $P_L P_T T$ (fig-7) tenemos:

$$\operatorname{sen} i \operatorname{sen}(\alpha - \Omega') = \operatorname{sen} b \cos \delta + \cos b \operatorname{sen} \delta \cos C$$

con lo cual (1-22) tomará la forma:

$$\Delta C = \tan C \tan b \, \Delta b + \frac{\operatorname{sen} b \cos \delta + \cos b \operatorname{sen} \delta \cos C}{\cos b \cos C} \Delta\alpha \qquad (1\text{-}23)$$

Sustituyendo los valores de Δb y $\Delta\alpha$ obtenidos en (1-19) y (1-21) respectivamente, y desarrollando tendremos, finalmente:

$$\Delta C = \Delta l \operatorname{sen} b - \pi_t \tan \delta \operatorname{sen} Q \qquad (1\text{-}24)$$

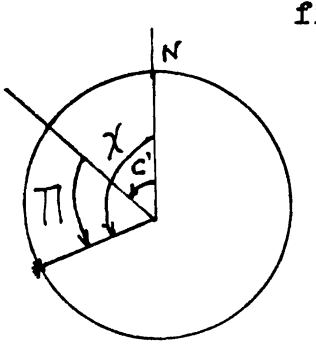
Llamando l' y b' a las libraciones topocéntricas y C' al ángulo de posición del eje, topocéntrico, nos queda:

$$\left.\begin{aligned} l' &= l + \Delta l \\ b' &= b + \Delta b \\ C' &= C + \Delta C \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}25)$$

c) <u>Angulo de posición del punto donde se produce la ocultación</u>

Como ya se ha dicho en la página 13, los argumentos de entrada en las cartas de Watts son los valores topocéntricos de las libraciones l' y b' obtenidas en (1-25) y el ángulo de posición, Π, del punto donde se produce la ocultación con respecto al eje de rotación de la Luna (fig-9):

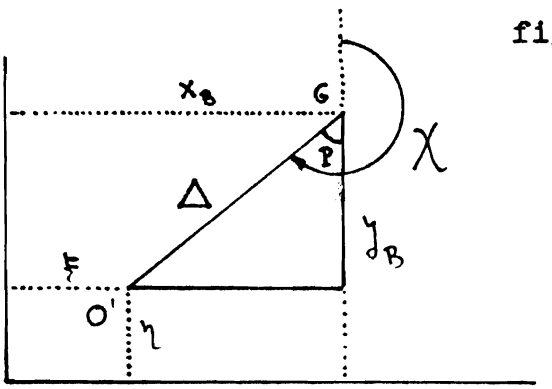
fig-9



$$\Pi = \chi - C'$$

siendo C' el valor topocéntrico del ángulo de posición del eje y χ el ángulo de posición del punto donde se produce la ocultación con respecto al meridiano celeste que pasa por el centro de la Luna, medido hacia el Este desde el Norte. Si tomamos las proyecciones de la Luna y del observador sobre el plano fundamental, según lo visto en la figura-2, y representando sobre este plano el ángulo χ (fig-10) se puede deducir:

fig-10



$$\text{sen } P = \frac{x_B - \xi}{\Delta}$$

$$\cos P = \frac{y_B - \eta}{\Delta}$$

con lo cual siendo

$\chi = 180^\circ + P$, tendremos:

$$\tan \chi = \frac{-(x_B - \xi)}{-(y_B - \eta)}$$

Un estudio debido a Morrison (1971) sugiere una corrección de $0^\circ.25$ al ángulo Π, quedando finalmente:

$$\Pi = \chi - \sigma' + 0^\circ.25 \qquad (1\text{-}26)$$

1-4 Cartas de Watts: distancia de la estrella al borde real de la Luna

Conocidas las libraciones topocéntricas y el ángulo de posición Π, estamos ya en condiciones de utilizar las cartas de Watts para hallar la distancia de la estrella al borde real de la Luna.

En dichas cartas se dan las desviaciones con respecto al nivel medio para las libraciones l' y b' que varían en $\pm 9^\circ$ y $\pm 8^\circ$, respectivamente, y para los 1800 ángulos de posición que varían desde 0° a 360° de $0^\circ.2$ en $0^\circ.2$. Las líneas de nivel son continuas ó discontinuas según se trate de una elevación o de una depresión. Sobre unas y otras figura un número que en décimas de segundo de arco da la corrección σ_W a aplicar a la distancia angular de la estrella al borde de la Luna supuesta esférica (ver gráfico en pág.58).

En general Π no coincide con el valor de ninguna carta y será necesario interpolar entre las dos más próximas. Además los valores de l' y b' no van a coincidir sobre ninguna curva y será necesario interpolar entre ellas, a veces en condiciones muy malas. Actualmente estas cartas están digitizadas (Morrison & Ward, 1971) y, como se verá en el capítulo 3, para su utilización se han tenido que confeccionar diversos programas.

La distancia angular σ_W será positiva ó negativa según que la linea correspondiente en las cartas sea continua ó discontinua, es decir según que exista una elevación o una depresión sobre el

nivel medio. La distancia entre la estrella y el borde real de la Luna será por tanto (fig-11):

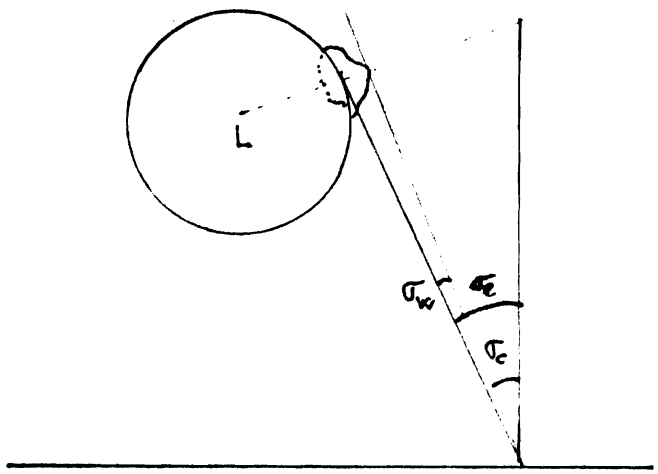


fig-11

$$\sigma_c = \sigma_e - \sigma_w \qquad (1\text{-}27)$$

con σ_e dado por (1-12).

Para calcular la reducción de una ocultación, partiendo de la posición geocéntrica de la Luna, es también útil calcular su posición topocéntrica corrigiendo de paralaje y, mediante el triángulo esférico formado por la posición de la estrella, la posición topocéntrica de la Luna y el Polo Norte terrestre, obtener la distancia angular y por tanto su diferencia con el semidiámetro topocéntrico s_t (reducida a su distancia media).

1-5 Cálculo de la posición aparente de la estrella

En los apartados anteriores hemos visto que para el cálculo de una ocultación es necesario conocer la posición aparente α', δ' de la estrella. Veamos ahora como se obtiene dicha posición.

Sean α'_0 y δ'_0 las coordenadas ecuatoriales heliocéntricas medias de una estrella, referidas a una cierta época t_0, μ_α, μ_δ sus movimientos propios en ascensión recta y declinación y V y π' su velocidad radial y paralaje respectivamente.

Las coordenadas rectangulares ecuatoriales heliocéntricas de su posición inicial $\underline{r}_0$ son:

$$\underline{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \cos \delta_0' \cos \alpha_0' \\ r_0 \cos \delta_0' \operatorname{sen} \alpha_0' \\ r_0 \operatorname{sen} \delta_0' \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}28)$$

siendo r_0 su distancia heliocéntrica.

Como se ha indicado en la introducción, para obtener la posición aparente de la estrella hemos seguido el método de Emerson (1973), que proporciona mayor rapidez en el cálculo con ordenador y cuya precisión es comparable a la de otros métodos clásicos (Porter & Sadler, 1953; Orús, 1966), al desarrollado en el Explanatory Supplement (pág 145) ó al método de las cartas J (Guinot, 1966).

Las correcciones necesarias se han llevado a cabo en el siguiente orden:

a) movimiento propio y velocidad radial
b) paralaje ánua
c) aberración
d) precesión
e) nutación

a) Movimiento propio y velocidad radial

La variación de la posición $\underline{r}_0$ con el tiempo vendrá definida por el vector velocidad $\dot{\underline{r}}_0$ cuyas componentes, en la base considerada y denotando con un punto la derivación con respecto al tiempo, serán:

$$\dot{\underline{r}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_0 \cos \delta_0' \operatorname{sen} \alpha_0' \, \dot{\alpha}_0' - r_0 \operatorname{sen} \delta_0' \cos \alpha_0' \, \dot{\delta}_0' + \cos \delta_0' \cos \alpha_0' \, \dot{r}_0 \\ r_0 \cos \delta_0' \cos \alpha_0' \, \dot{\alpha}_0' - r_0 \operatorname{sen} \delta_0' \operatorname{sen} \alpha_0' \, \dot{\delta}_0' + \cos \delta_0' \operatorname{sen} \alpha_0' \, \dot{r}_0 \\ r_0 \cos \delta_0' \, \dot{\delta}_0' + \operatorname{sen} \delta_0' \, \dot{r}_0 \end{bmatrix}$$

ó también:

$$\dot{\underline{r}}_o = r_o \begin{bmatrix} -\text{sen}\,\alpha_o' & -\text{sen}\,\delta_o' \cos\alpha_o' & \cos\delta_o' \cos\alpha_o' \\ \cos\alpha_o' & -\text{sen}\,\delta_o' \text{sen}\,\alpha_o' & \cos\delta_o' \text{sen}\,\alpha_o' \\ 0 & \cos\delta_o' & \text{sen}\,\delta_o' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\delta_o'\,\dot{\alpha}_o' \\ \dot{\delta}_o' \\ \frac{1}{r_o}\,\dot{r}_o \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}29)$$

Las variaciones de la ascensión recta $\dot{\alpha}_o'$ y declinación $\dot{\delta}_o'$ son precisamente los movimientos propios en ascensión recta $\mu_\alpha = \dot{\alpha}_o'$ y en declinación $\mu_\delta = \dot{\delta}_o'$, ambos expresados en radianes por siglo, y la variación de la distancia heliocéntrica $\dot{r}_o$ es la velocidad radial V de la estrella, en unidades astronómicas por siglo. Además, por la definición de paralaje de la estrella, $\frac{1}{r_o} = \pi'$. Si consideramos unidades de distancia estelar, $r_o = 1$, (1-28) y (1-29) se escribirán en la forma:

$$\underline{r}_o = \begin{bmatrix} \cos\delta_o' \cos\alpha_o' \\ \cos\delta_o' \text{sen}\,\alpha_o' \\ \text{sen}\,\delta_o' \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}30)$$

$$\dot{\underline{r}}_o = \begin{bmatrix} -\text{sen}\,\alpha_o' & -\text{sen}\,\delta_o' \cos\alpha_o' & \cos\delta_o' \cos\alpha_o' \\ \cos\alpha_o' & -\text{sen}\,\delta_o' \text{sen}\,\alpha_o' & \cos\delta_o' \text{sen}\,\alpha_o' \\ 0 & \cos\delta_o' & \text{sen}\,\delta_o' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_\alpha \cos\delta_o' \\ \mu_\delta \\ V.\pi' \end{bmatrix} \qquad (1\text{-}31)$$

Debido al movimiento propio y a la velocidad radial la posición $\underline{r}_1$ resultante será:pues:

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_o + \dot{\underline{r}}_o \Delta t \qquad (1\text{-}32)$$

siendo Δt el intervalo de tiempo transcurrido desde la época del catálogo hasta la fecha deseada. Este vector $\underline{r}_1$ está referido al sistema de referencia del catálogo.

b) Paralaje ánua

Debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, se produce un efecto de paralaje por el cual las estrellas parecen oscilar alrededor de sus posiciones medias en el transcurso del año. Debido a este fenómeno, llamdo paralaje ánua y cuya semiamplitud no alcanza nunca 1", la corrección que hay que aplicar para pasar de la posición helicéntrica $\underline{r}_1$ a la geocéntrica $\underline{r}_2$ es:

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{R}$$

donde $\underline{R}$ es la posición geocéntrica del Sol, en unidades astronómicas y referida al sistema de referencia del catálogo (para el cálculo de las componentes del vector $\underline{R}$, ver apéndice I). En nuestro caso, al tomar r_o como unidad, el vector $\underline{r}_2$ será, evidentemente:

$$\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \pi' \underline{R} \qquad (1\text{-}33)$$

c) Aberración

Debido al fenómeno de la aberración de la luz, la dirección aparente de una estrella, vista por un observador que se mueve, no coincide con la dirección de su posición geométrica. Según la teoría clásica la posición sufre un desplazamiento aparente, en la dirección de la velocidad del observador, cuyo valor no depende de la distancia de la estrella. Es por tanto necesario tener normalizado el vector de posición $\underline{r}_2$ antes de corregir por aberración obteniendo así un versor $\hat{\underline{r}}_3$ de la forma:

$$\hat{\underline{r}}_3 = \frac{\underline{r}_2}{|\underline{r}_2|} \qquad (1\text{-}34)$$

La posición de la estrella corregida por aberración, expresando el movimiento de la Tierra en función del aparente del Sol, será (Orús, 1966, pág 120):

$$\underline{r}_4 = \hat{\underline{r}}_3 - \frac{1}{c}\,\dot{\underline{R}}$$

siendo c la velocidad de la luz y $\dot{\underline{R}}$ el vector velocidad del Sol. Pero al estar los términos debidos a las componentes excéntricas de la velocidad de la Tierra incluidos en la posición de la estrella en el catálogo (al ser mínima su variación con el tiempo), el vector $\underline{r}_4$ quedará (Orús, 1966, pág 121):

$$\underline{r}_4 = \hat{\underline{r}}_3 - \frac{1}{c}\,(\dot{\underline{R}} + \underline{s}) \qquad (1\text{-}35)$$

con $\underline{s}$ definida por:

$$\underline{s} = K_a\, e'c \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \varpi' \\ \cos \varpi' \cos \varepsilon \\ \cos \varpi' \operatorname{sen} \varepsilon \end{bmatrix}$$

siendo K_a la constante de la aberración ánua, e' la excentricidad de la órbita aparente del Sol, ϖ' la longitud media del perigeo solar, ε la oblicuidad de la eclíptica.

Si el catálogo está referido al equinocio de 1950,0 los valores de las componentes de $\underline{s}$ son

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} -\ 0.00028146 \\ -\ 0.00005527 \\ -\ 0.00002397 \end{bmatrix}$$

(para el cálculo de las componentes de $\dot{\underline{R}}$ ver apéndice I).
Normalizando el vector $\underline{r}_4$ obtenemos un versor $\hat{\underline{r}}_5$:

$$\underline{\hat{r}}_5 = \frac{\underline{r}_4}{|\underline{r}_4|} \qquad (1\text{-}36)$$

De esta forma tenemos la posición de la estrella corregida de movimiento propio, velocidad radial, paralaje y aberración. Para obtener la posición aparente de la estrella deberemos efectuar todavía las correspondientes correcciones de precesión y nutación.

d) Precesión

Si $\underline{\hat{r}}_5$ es el versor de posición de la estrella referido al equinocio del catálogo, el relativo al equinocio medio de la fecha se obtendrá aplicando a $\underline{\hat{r}}_5$ la matriz de precesión (Expl. Supp, 1974 pág 31):

$$[P] = \begin{bmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{bmatrix}$$

con:

$$X_x = \cos \zeta_0 \cos \theta' \cos z' - \operatorname{sen} \zeta_0 \operatorname{sen} z'$$

$$Y_x = - \operatorname{sen} \zeta_0 \cos \theta' \cos z' - \cos \zeta_0 \operatorname{sen} z'$$

$$Z_x = - \operatorname{sen} \theta' \cos z'$$

$$X_y = \cos \zeta_0 \cos \theta' \operatorname{sen} z' + \operatorname{sen} \zeta_0 \cos z'$$

$$Y_y = - \operatorname{sen} \zeta_0 \cos \theta' \operatorname{sen} z' + \cos \zeta_0 \cos z'$$

$$Z_y = - \operatorname{sen} \theta' \operatorname{sen} z'$$

$$X_z = \cos \zeta_0 \operatorname{sen} \theta'$$

$$Y_z = - \operatorname{sen} \zeta_0 \operatorname{sen} \theta'$$

$$Z_z = \cos \theta'$$

Basándose en consideraciones teóricas, los valores de ζ_0, θ', z', fueron obtenidos por Newcomb mediante la observación. Sus valores son:

$$\zeta_0 = (2304''.250 + 1''.396\ t_0)\Delta t + 0''.302\ (\Delta t)^2 + 0.018\ (\Delta t)^3$$
$$z' = \zeta_0 + 0''.791\ (\Delta t)^2$$
$$\theta' = (\ 2004''.682 - 0''.853\ t_0)\ \Delta t - 0''.426\ (\Delta t)^2 - 0''.042(\Delta t)^3$$

siendo t_0 la época inicial del catálogo respecto a 1900,0 en siglos y Δt el intervalo de tiempo transcurrido entre la época inicial del catálogo y la deseada, en siglos.

Al ser ortogonal la matriz de precesión $[P]$, la fecha vendrá dada por el versor:

$$\underline{\hat{r}}_6 = [P]\ \underline{\hat{r}}_5 \qquad (1\text{-}37)$$

e) Nutación

Para pasar de la posición referida al equinocio medio de la fecha a la posición aprente, todavía es necesario aplicar al versor $\underline{\hat{r}}_6$ la matriz de nutación (Woolard, 1953):

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos\Delta\psi & -\operatorname{sen}\Delta\psi\cos\varepsilon_0 & -\operatorname{sen}\Delta\psi\operatorname{sen}\varepsilon_0 \\ \operatorname{sen}\Delta\psi\cos\varepsilon & \cos\Delta\psi\cos\varepsilon_0\cos\varepsilon + \operatorname{sen}\varepsilon_0\operatorname{sen}\varepsilon & \cos\Delta\psi\operatorname{sen}\varepsilon_0\cos\varepsilon - \cos\varepsilon_0\operatorname{sen}\varepsilon \\ \operatorname{sen}\Delta\psi\operatorname{sen}\varepsilon & \cos\Delta\psi\cos\varepsilon_0\operatorname{sen}\varepsilon - \operatorname{sen}\varepsilon_0\cos\varepsilon & \cos\Delta\psi\operatorname{sen}\varepsilon_0\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\varepsilon_0\cos\varepsilon \end{bmatrix}$$

donde $\Delta\psi$ es la nutación en longitud, ε_0 la oblicuidad media, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ la oblicuidad verdadera y $\Delta\varepsilon$ nutación en oblicuidad.

En definitiva la posición aparente $\underline{\hat{r}}'$ de la estrella vendrá dada por el versor:

$$\underline{\hat{r}}' = \begin{bmatrix} \cos\delta'\cos\alpha' \\ \cos\delta'\operatorname{sen}\alpha' \\ \operatorname{sen}\delta' \end{bmatrix} = [N]\ \underline{\hat{r}}_6 \qquad (1\text{-}38)$$

2.- ECUACION DE CONDICION

2-1 Aproximación lineal

La única cantidad que puede determinarse en la observación de una ocultación es la época en que ésta ha tenido lugar. A partir de esta época podemos calcular la separación angular σ_c entre la estrella y el borde real de la Luna con la fórmula (1-27) del capítulo anterior. Si designamos por σ_o la separación angular observada, la diferencia entre esta separación y la calculada será:

$$O - C = \sigma_o - \sigma_c \equiv \Delta\sigma$$

ó siendo siempre nula la separación observada:

$$- \sigma_c \equiv \Delta\sigma \qquad (2\text{-}1)$$

Generalmente el valor de σ_c es distinto de cero debido a diversas causas: mala determinación de la posición de la Luna, de la posición del observador, de la posición de la estrella ó del limbo lunar. En nuestro análisis cabe destacar que, al tratar sólamente ocultaciones obtenidas por métodos fotoeléctricos, podemos despreciar el error debido a la ecuación personal, que tuvo que tenerse en cuenta en otros análisis anteriores (Van Flandern, 1969; Martin, 1969; Morrison 1969, 1979). Además consideraremos que este tipo de observaciones se han realizado desde lugares cuya posición está bien determinada.

Así supondremos que

$$\sigma_c = \varphi(\alpha, \delta, \text{sen}\,\pi, \alpha', \delta', k_L) \qquad (2\text{-}2)$$

es una función de la posición de la Luna (α , δ), de su paralaje π (que por razones de cálculo sustituimos por sen π), de la posición de la estrella (α', δ') y de la razón entre los radios lunar

y terrestre, k_L. Si desarrollamos en serie (2-2) y tomamos únicamente los términos lineales, teniendo en cuenta (2-1), tendremos:

$$\Delta\sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\delta\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta}\delta\delta + \frac{\partial\varphi}{\partial \operatorname{sen}\pi}\delta \operatorname{sen}\pi + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'}\delta\alpha' + \frac{\partial\varphi}{\partial\delta'}\delta\delta' + \frac{\partial\varphi}{\partial k_L}\delta k_L \quad (2\text{-}3)$$

Las derivadas parciales que aparecen en (2-3) se obtienen a partir de la fórmula (1-12) que da la separación angular de la estrella y el borde real de la Luna supuesta esférica, siendo sus expresiones:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = -\frac{A}{m}x_B(u\cot(\alpha-\alpha') + v\operatorname{sen}\delta') = b_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta} = -\frac{A}{m}\left[-(u.x_B + v.y_B)\tan\delta + \frac{1}{k_L\operatorname{sen}\pi}\frac{\cos\delta'}{\cos\delta}\right] = b_2$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\operatorname{sen}\pi} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\pi}\left[\Delta\sigma - \frac{A}{m}(u.x_B + v.y_B)\right] = b_3$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'} = -\frac{A}{m}u\left[-x_B\cot(\alpha-\alpha') + \xi\cot(\theta-\alpha') - v\operatorname{sen}\delta'\right] = b_4$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\delta'} = -\frac{A}{m}\left[v^2\cot\delta' - \frac{1}{k_L\operatorname{sen}\pi}\frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\delta'} + \frac{1}{k_L}\frac{\rho\operatorname{sen}\phi'}{\operatorname{sen}\delta'}\right] = b_5$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial k_L} = -\frac{1}{k_L}\left[\Delta\sigma - \frac{A}{m}(u^2+v^2)\right] = b_6$$

con $A = \dfrac{k_L\operatorname{sen}\pi}{\operatorname{sen}1''}$ $\qquad m = \sqrt{u^2+v^2}$

Sustituyendo en la ecuación (2-3) nos queda, finalmente:

$$\Delta\sigma = b_1\delta\alpha + b_2\delta\delta + b_3\delta\operatorname{sen}\pi + b_4\delta\alpha' + b_5\delta\delta' + b_6\delta k_L \quad (2\text{-}4)$$

2-2 Cálculo de las correcciones

Las correcciones a la posición de la Luna $\delta\alpha$ y $\delta\delta$ pueden ponerse en función de las correspondientes a la longitud aparente λ,

la latitud aparente β y la oblicuidad de la eclíptica ε:

$$\left.\begin{aligned} \delta\alpha &= \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial\alpha}{\partial\beta}\,\delta\beta + \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon \\ \delta\delta &= \frac{\partial\delta}{\partial\lambda}\,\delta\lambda + \frac{\partial\delta}{\partial\beta}\,\delta\beta + \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}5)$$

Utilizando las fórmulas de paso de coordenadas eclípticas a ecuatoriales:

$$\begin{aligned} \cos\delta\,\cos\alpha &= \cos\beta\,\cos\lambda \\ \cos\delta\,\operatorname{sen}\alpha &= \cos\varepsilon\,\cos\beta\,\operatorname{sen}\lambda - \operatorname{sen}\varepsilon\,\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\delta &= \operatorname{sen}\varepsilon\,\cos\beta\,\operatorname{sen}\lambda + \cos\varepsilon\,\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

podrán escribirse las derivadas parciales de (2-5):

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} = (\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\delta\,\operatorname{sen}\beta)/\cos^2\delta = b_7$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = -\operatorname{sen}\varepsilon\,\cos\alpha/\cos\beta\,\cos\delta = b_8$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = -\tan\delta\,\cos\alpha = b_9$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \operatorname{sen}\varepsilon\,\cos\alpha = b_{10}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\beta} = (\cos\varepsilon - \operatorname{sen}\beta\,\operatorname{sen}\delta)/\cos^2\beta = b_{11}$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \operatorname{sen}\alpha = b_{12}$$

Sustituyendo estos valores en (2-5) tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \delta\alpha &= b_7\,\delta\lambda + b_8\,\delta\beta + b_9\,\delta\varepsilon \\ \delta\delta &= b_{10}\,\delta\lambda + b_{11}\,\delta\beta + b_{12}\,\delta\varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}6)$$

y llevando a su vez (2-6) a (2-4) quedará:

$$\Delta\sigma = b_{13}\delta\lambda + b_{14}\delta\beta + b_{15}\delta\varepsilon + b_3\,\delta\,\mathrm{sen}\,\pi + b_4\delta\alpha' + b_5\,\delta\delta' + b_6\delta k_L \quad (2\text{-}7)$$

donde:

$$b_{13} = b_1\,b_7 + b_2\,b_{10}$$
$$b_{14} = b_1\,b_8 + b_2\,b_{11}$$
$$b_{15} = b_1\,b_9 + b_2\,b_{12}$$

La corrección $\delta\lambda$ suele expresarse mediante una corrección δL a la longitud media de la Luna y sendas correcciones a los argumentos fundamentales y constantes básicas que aparecen en la teoría lunar (Brown, 1908; Improved Lunar Ephemerides, 1954), siendo su expresión:

$$\partial\lambda = \delta L + \frac{\partial\lambda}{\partial M}\,\delta M + \frac{\partial\lambda}{\partial M'}\,\delta M' + \frac{\partial\lambda}{\partial F}\,\delta F + \frac{\partial\lambda}{\partial D}\,\delta D + \frac{\partial\lambda}{\partial e}\,\delta e + \frac{\partial\lambda}{\partial e'}\,\delta e' + \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_c}\,\delta\gamma_c + \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha_1}\,\delta\alpha_1 \quad (2\text{-}8)$$

con los argumentos fundamentales:

- M : anomalía media de la Luna
- M′: anomalía media del Sol
- F : argumento de latitud de la Luna
- D : elongación media de la Luna

y las constantes básicas:

- e : excentricidad de la órbita de la Luna
- e′: excentricidad de la órbita aparente del Sol
- γ_c: inclinación de la órbita lunar
- α_1: constante paraláctica lunisolar

También la corrección $\delta\beta$ viene expresada en función de dichos argumentos fundamentales y constantes básicas:

$$\delta\beta = \frac{\partial\beta}{\partial M}\delta M + \frac{\partial\beta}{\partial M'}\delta M' + \frac{\partial\beta}{\partial F}\delta F + \frac{\partial\beta}{\partial D}\delta D + \frac{\partial\beta}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\beta}{\partial e'}\delta e' + \frac{\partial\beta}{\partial \gamma_c}\delta\gamma_c + \frac{\partial\beta}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 \qquad (2\text{-}9)$$

En un estudio reciente, Morrison (1979) considera que $\delta\beta$ lleva consigo una corrección al sistema de referencia estelar, $\delta\alpha_0'$, que viene expresada por el término aditivo $\cos\lambda \operatorname{sen}\varepsilon\,\delta\alpha_0'$, con lo cual la ecuación (2-9) quedará:

$$\delta\beta = \frac{\partial\beta}{\partial M}\delta M + \frac{\partial\beta}{\partial M'}\delta M' + \frac{\partial\beta}{\partial F}\delta F + \frac{\partial\beta}{\partial D}\delta D + \frac{\partial\beta}{\partial e}\delta e + \frac{\partial\beta}{\partial e'}\delta e' + \frac{\partial\beta}{\partial \gamma_c}\delta\gamma_c + \frac{\partial\beta}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 + \cos\lambda \operatorname{sen}\varepsilon\,\delta\alpha_0' \qquad (2\text{-}10)$$

La corrección $\delta\varepsilon$ no sufre ninguna variación.

Por último la corrección $\delta(\operatorname{sen}\pi)$, expresada en función de los argumentos fundamentales y de las constantes básicas, será asimismo:

$$\delta(\operatorname{sen}\pi) = \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial M}\delta M + \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial M'}\delta M' + \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial F}\delta F + \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial D}\delta D + \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial e}\delta e + \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial e'}\delta e' + \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial \gamma_c}\delta\gamma_c + \frac{\partial \operatorname{sen}\pi}{\partial \alpha_1}\delta\alpha_1 \qquad (2\text{-}11)$$

Los valores de las derivadas parciales de λ, β, $\operatorname{sen}\pi$ que figuran en (2-8), (2-10) y (2-11) con respecto a los argumentos

fundamentales y las constantes básicas se obtienen numericamente a partir de las tablas de Brown (1908) y del Improved Lunar Ephemerides (1954) y están detalladas en el apéndice II.

Llamando en (2-8), (2-10) y (2-11):

$$\frac{\partial \lambda}{\partial M} = b_{16} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial M'} = b_{17} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial F} = b_{18} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial D} = b_{19}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial e} = b_{20} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial e'} = b_{21} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_c} = b_{22} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1} = b_{23}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial M} = b_{24} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial M'} = b_{25} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial F} = b_{26} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial D} = b_{27}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial e} = b_{28} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial e'} = b_{29} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial \gamma_c} = b_{30} \qquad \frac{\partial \beta}{\partial \alpha_1} = b_{31}$$

$$\cos \lambda \operatorname{sen} \varepsilon = b_{32}$$

$$\frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial M} = b_{33} \qquad \frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial M'} = b_{34} \qquad \frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial F} = b_{35}$$

$$\frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial D} = b_{36} \qquad \frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial e} = b_{37} \qquad \frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial e'} = b_{38}$$

$$\frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial \gamma_c} = b_{39} \qquad \frac{\partial \operatorname{sen} \pi}{\partial \alpha_1} = b_{40}$$

nos queda:

$$\delta \lambda = \delta L + b_{16}\, \delta M + b_{17}\, \delta M' + b_{18}\, \delta F + b_{19}\, \delta D + b_{20}\, \delta e +$$
$$+ b_{21}\, \delta e' + b_{22}\, \delta \gamma_c + b_{23}\, \delta \alpha_1$$

$$\delta\beta = b_{24}\,\delta M + b_{25}\,\delta M' + b_{26}\,\delta F + b_{27}\,\delta D + b_{28}\,\delta e +$$
$$+ b_{29}\,\delta e' + b_{30}\,\delta\gamma_c + b_{31}\,\delta\alpha_1 + b_{32}\,\delta\alpha_o'$$
$$\delta \operatorname{sen} \pi = b_{33}\,\delta M + b_{34}\,\delta M' + b_{35}\,\delta F + b_{36}\,\delta D + \tag{2-12}$$
$$+ b_{37}\,\delta e + b_{38}\,\delta e' + b_{39}\,\delta\gamma_c + b_{40}\,\delta\alpha_1$$

Sustituyendo (2-12) en (2-7) tendremos, finalmente:

$$\Delta\sigma = b_{13}\,\delta L + b_{42}\,\delta M + b_{43}\,\delta M' + b_{44}\,\delta F + b_{45}\,\delta D +$$
$$+ b_{46}\,\delta e + b_{47}\,\delta e' + b_{48}\,\delta\gamma_c + b_{49}\,\delta\alpha_1 + b_{50}\,\delta\alpha_o' + \tag{2-13}$$
$$+ b_{15}\,\delta\varepsilon + b_4\,\delta\alpha' + b_5\,\delta\delta' + b_6\,\delta k_L$$

con

$$b_{42} = b_{13}\,b_{16} + b_{14}\,b_{24} + b_3\,b_{33}$$
$$b_{43} = b_{13}\,b_{17} + b_{14}\,b_{25} + b_3\,b_{34}$$
$$b_{44} = b_{13}\,b_{18} + b_{14}\,b_{26} + b_3\,b_{35}$$
$$b_{45} = b_{13}\,b_{19} + b_{14}\,b_{27} + b_3\,b_{36}$$
$$b_{46} = b_{13}\,b_{20} + b_{14}\,b_{28} + b_3\,b_{37}$$
$$b_{47} = b_{13}\,b_{21} + b_{14}\,b_{29} + b_3\,b_{38}$$
$$b_{48} = b_{13}\,b_{22} + b_{14}\,b_{30} + b_3\,b_{39}$$
$$b_{49} = b_{13}\,b_{23} + b_{14}\,b_{31} + b_3\,b_{40}$$
$$b_{50} = b_{14}\,b_{32}$$

Los argumentos fundamentales vienen dados en función de los

elementos orbitales por las igualdades:

$$M = L - \varpi$$
$$M' = L' - \varpi'$$
$$F = L - \Omega$$
$$D = L - L'$$

siendo

L : longitud media geométrica de la Luna (pág - 15)

ϖ: longitud media del perigeo lunar (pág- 19)

L': longitud media geométrica del Sol

ϖ': longitud media del perigeo solar

Ω: longitud media del nodo asecndente de la Luna (pág - 16)

Las variaciones de dichos argumentos fundamentales tomarán la forma:

$$\begin{aligned} \delta M &= -\delta\varpi \\ \delta M' &= \delta L' - \delta\varpi' \\ \delta F &= -\delta\Omega \\ \delta D &= -\delta L' \end{aligned} \qquad (2\text{-}14)$$

pues hay que tener en cuenta que la variación δL ya ha sido considerada al ser incluida como una corrección en la variación de $\delta\lambda$ dada en (2-8).

Sustituyendo (2-14) en (2-13) nos queda

$$\begin{aligned} \Delta\sigma = {} & b_{13}\,\delta L - b_{42}\,\delta\varpi + (b_{43} - b_{45})\,\delta L' - b_{43}\,\delta\varpi' - \\ & - b_{44}\,\delta\Omega + b_{46}\,\delta e + b_{47}\,\delta e' + b_{48}\,\delta\gamma_c + b_{49}\,\delta\alpha_1 + \\ & + b_{50}\,\delta\alpha_0' + b_{15}\,\delta\varepsilon + b_4\,\delta\alpha' + b_5\,\delta\delta' + b_6\,\delta k_L \end{aligned} \qquad (2\text{-}15)$$

Por otra parte, las variaciones δL, $\delta \varpi$, $\delta \Omega$ de los elementos orbitales de la Luna se expresan en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \delta L &= \delta L_0 + \delta L_1 (T - 0.69) + \delta L_2 (T - 0.69)^2 \\ \delta \varpi &= \delta \varpi_0 + \delta \varpi_1 (T - 0.69) \\ \delta \Omega &= \delta \Omega_0 + \delta \Omega_1 (T - 0.69) \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}16)$$

siendo T la fracción de siglo trópico desde 1900,0 hasta la época media, 1969,0 y 0.69 la correspondiente fracción de siglo.

Además, la corrección $\delta \alpha_0'$ puede expresarse a su vez como suma de una corrección constante δE_0 al equinocio FK4 y una corrección δE_1 al movimiento del equinocio FK4 con respecto a un equinocio ficticio (Martin & Van Flandern, 1970):

$$\delta \alpha_0' = \delta E_0 + \delta E_1 (T - 0.69) \quad (2\text{-}17)$$

Si sustituimos (2-16) y (2-17) en (2-15) tendremos una ecuación del tipo:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma = {} & a_1 \delta L_0 + a_2 \delta L_1 + a_3 \delta L_2 + a_4 \delta \varpi_0 + a_5 \delta \varpi_1 + \\ & + a_6 \delta \Omega_0 + a_7 \delta \Omega_1 + a_8 \delta L' + a_9 \delta \varpi' + a_{10} \delta e + \\ & + a_{11} \delta e' + a_{12} \delta \gamma_c + a_{13} \delta \alpha_1 + a_{14} \delta \alpha' + a_{15} \delta \delta' + \\ & + a_{16} \delta k_L + a_{17} \delta \varepsilon + a_{18} \delta E_0 + a_{19} \delta E_1 \end{aligned} \quad (2\text{-}18)$$

siendo ahora:

$$a_1 = b_{13} \qquad a_2 = b_{13}(T-0.69) \qquad a_3 = b_{13}(T-0.69)^2$$

$$a_4 = -b_{42} \qquad a_5 = -b_{42}(T-0.69) \qquad a_6 = -b_{44}$$

$a_7 = - b_{44}(T - 0.69)$ $a_8 = b_{43} - b_{45}$ $a_9 = - b_{43}$

$a_{10} = b_{46}$ $a_{11} = b_{47}$ $a_{12} = b_{48}$

$a_{13} = b_{49}$ $a_{14} = b_4$ $a_{15} = b_5$

$a_{16} = b_6$ $a_{17} = b_{15}$ $a_{18} = b_{50}$

$a_{19} = b_{50}(T - 0.69)$

En principio supondremos nulas las correcciones $\delta\alpha'$, $\delta\delta'$ relativas a la posición de la estrella. Si dispusiéramos de estrellas que hubieran sido ocultadas en diversas ocasiones, conoceríamos los valores de estas correcciones, aplicaríamos la ecuación (2-18) y obtendríamos los valores de $\delta\alpha'$, $\delta\delta'$ para dichas estrellas.

Para cada ocultación tendremos una "ecuación de condición" del tipo (2-18). Si consideramos el sistema constituido por las ecuaciones de condición correspondientes a cada una de las ocultaciones, resuelto por el método de los mínimos cuadrados obtendremos las correcciones a la longitud media de la Luna, al sistema FK4, y a los argumentos fundamentales y constantes básicas.

Expresando las ecuaciones (2-18) en forma matricial se obtiene:

$$A\ X = Y \qquad (2\text{-}19)$$

siendo A la matriz de los coeficientes, X la de las incógnitas a determinar e Y la de los residuos ($\Delta\sigma$).

La solución mínimo cuadrática vale (Simó, 1972, pág 87):

$$\tilde{X} = C^{-1}\ A^T\ Y \qquad (2\text{-}20)$$

con

$$C = A^T\ A$$

El error probable de la estimación de la componente x_i viene dado por:

$$\Delta x_i = 0.6745\sqrt{\frac{\tilde{V}^T \tilde{V}}{N - n} C_{ii}} \qquad (2\text{-}21)$$

con

$\tilde{V} = A \tilde{X} - Y$

N = número de ecuaciones de condición

n = número de incógnitas

C_{ii} = elemento ii de la matriz C

Finalmente, el elemento ij de la matriz de covarianza se obtiene por la fórmula (Brouwer y Clemence, 1961, pág 230):

$$\rho_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii} C_{jj}}} \qquad (2\text{-}22)$$

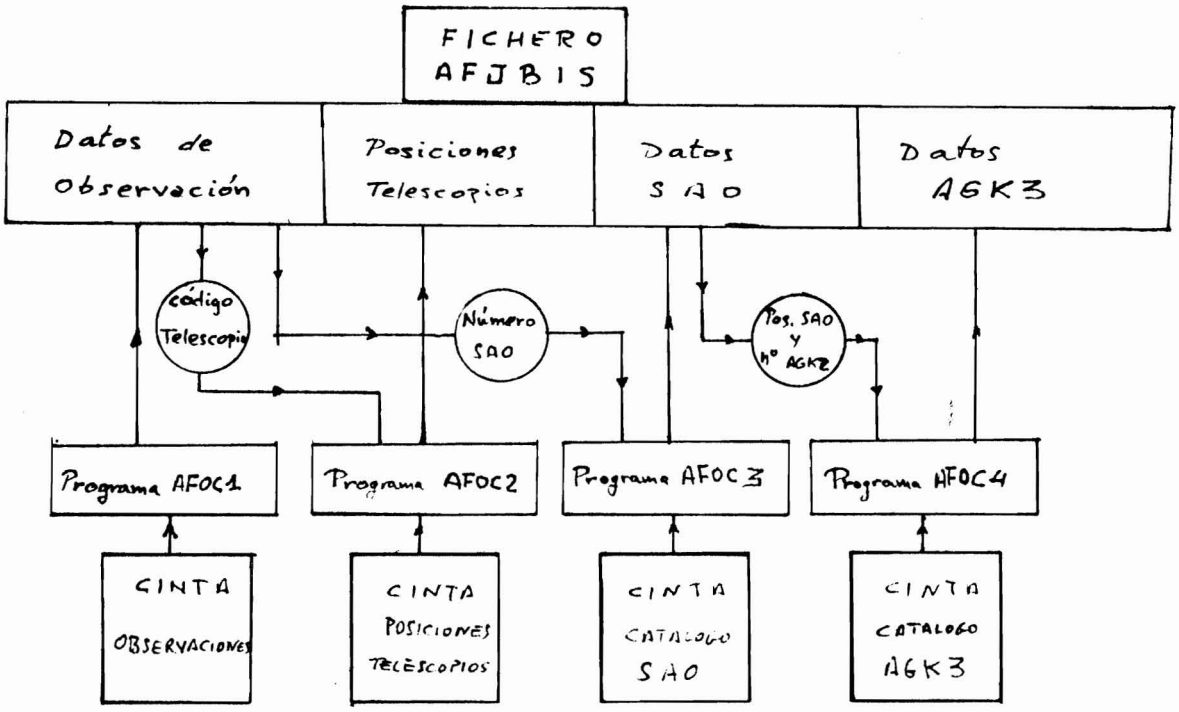
3.- TRATAMIENTO DE LOS DATOS DE OBSERVACION

Una de las dos cintas que nos ha proporcionado el Royal Greenwich Observatory, a las que nos hemos referido en la introducción, contiene información sobre 108770 observaciones, dándose para cada una de ellas la fecha en que se ha observado la ocultación (año, mes, día, hora, minuto, segundo y fracción), el número ZC y SAO de la estrella ocultada, código de la estación y del telescópio empleado, el fenómeno (inmersión ó emersión), ecuación personal del observador y otros datos complementarios. De entre estos hay que destacar algunas indicaciones sobre la precisión de las observaciones, sobre las condiciones metereológicas y sobre el método empleado para la medición del tiempo. Para los distintos códigos, es interesante consultar el catálogo de observaciones de ocultaciones de estrellas por la Luna para los años 1943 a 1978 (Morrison, 1978). La otra cinta contiene las posiciones geográficas de 8118 telescopios así como la ubicación de los mismos y un indicador que permite conocer si las coordenadas son geodésicas, referidas a uno de los datum principales o secundarios, si las coordenadas son probablemente geodésicas pero no puede asegurarse, si las coordenadas son probablemente astronómicas pero tampoco puede asegurarse ó, finalmente, si las coordenadas son astronómicas.

3-1 Confección del fichero de ocultaciones

Debido a que en nuestro análisis, como hemos indicado anteriormente, nos hemos limitado exclusivamente a las ocultaciones efectuadas por métodos fotoeléctricos, ha sido necesario crear un fichero (AFJBIS), detallado en el esquema adjunto, con dichas ocultaciones, extraidas de entre las 108770 de la cinta magnética. De dicha cinta se extrae, para introducir en el fichero y para cada observación, el número del catálogo SAO, la fecha e instante de observación, el código de la estación y telescopio y el fenómeno a que corresponde (programa AFOC1). A partir de los códigos de la estación y telescopios obtenidos y haciendo uso de la cinta

magnética de las posiciones geográficas, se introduce en el fichero la posición geográfica de cada telescopio (programa AFOC2). Por otra parte, a partir del catálogo SAO (en cinta magnética) y mediante el programa AFOC3, se introducen en nuestro fichero las posiciones medias para 1950,0 y los movimientos propios correspondientes a cada una de las estrellas que se ocultan. De dicho catálogo SAO se obtienen además el número AGK2 y DM, la magnitud visual y el espectro de cada estrella que son introducidos también en nuestro fichero. Con el número AGK2 obtenido en el programa anterior se utiliza otro programa (AFOC4) que incorpora al fichero, la ascensión recta, declinación, movimientos propios respectivos y la época de observación, obtenidos a partir de la cinta magnética correspondiente al catálogo AGK3. Este programa se restringió practicamente al hemisferio Norte por ser AGK3 un catálogo conteniendo estrellas de declinación mayor que -2°. Para las estrellas con declinaciones negativas, que por tanto no podían ser estudiadas con el AGK3, se pensó en otro catálogo que las pudiera incluir, además del SAO, y ese podría ser el PERTH 70 (1976). En nuestro fichero se ha dejado espacio para incluir todos los datos que contiene el PERTH70, ya que existen errores de paridad en la cinta correspondiente a dicho catálogo y no ha sido posible hasta el momento poder trabajar con ella.



3-2 Análisis de los datos

En el fichero confeccionado, a una observación por sector, se contabilizan en total 5579 ocultaciones fotoeléctricas, observadas desde 50 estaciones distintas y utilizando 120 telescopios. En la tabla 2 se da la lista de las 50 estaciones así como el número de observaciones que se han realizado en cada una de ellas.

TABLA 2

Nº EST	PAIS	Nº OBS	Nº EST	PAIS	Nº OBS
7	Argentina	126	502	USA	27
35	Bélgica	27	512	USA	1268
64	Canadá	1	514	USA	191
87	Checoslov.	2	549	USA	3
140	Inglaterra	2	560	USA	5
195	Francia	18	561	USA	10
202	Alemania	51	564	USA	5
206	Alemania	205	573	USA	14
274	Méjico	22	584	USA	12
284	Holanda	1	592	USA	27
338	N. Zelanda	1	594	USA	2
342	N. Zelanda	1	600	USA	1
359	Polonia	23	601	Japón	51
383	Escocia	1	622	Japón	2
394	Sudáfrica	88	623	Japón	8
399	Sudáfrica	53	625	Japón	770
401	Sudáfrica	40	627	Japón	1
409	Sudáfrica	34	628	Japón	312
443	Suiza	22	647	Japón	1743
449	URSS	2	648	Japón	1
463	URSS	14	650	Japón	53
475	URSS	2	800	USA	4
478	USA	323	801	USA	5
480	USA	1	802	USA	9
488	USA	4	807	USA	1

En la tabla 3 se da el número de observaciones efectuadas cada año. En ella se puede observar que entre los años 1971 y 1976 hay un 70% del total de ocultaciones observadas. El bajo número de observaciones que pueden apreciarse en los años 1977 y 1978 es debido a retrasos en la recepción de datos por el Royal Greenwich Observatory. En el mes de Febrero de 1979, fecha en que se confeccionaron las cintas, faltaban aún por recibirse la mayoría de las observaciones de estos años.

TABLA 3

AÑO	Nº OBS	AÑO	Nº OBS	AÑO	Nº OBS
1949	1	1959	29	1969	278
1950	7	1960	71	1970	344
1951	45	1961	77	1971	554
1952	23	1962	26	1972	763
1953	39	1963	19	1973	695
1954	69	1964	49	1974	553
1955	39	1965	51	1975	768
1956	68	1966	45	1976	546
1957	58	1967	95	1977	75
1958	30	1968	147	1978	15

El total de las observaciones está compuesto de 4405 inmersiones por limbo oscuro, 1165 emersiones por limbo oscuro, 5 inmersiones por limbo brillante y 4 emersiones por limbo brillante. La tabla 4 contiene la distribución del número de observaciones por zonas de 5° de elongación lunar. En el correspondiente histograma (fig-12) se observa un máximo para la elongación de 90° (Luna en cuarto creciente), época en que pueden observarse mejor las inmersiones. En la zona entre 180° a 195° hay un mínimo correspondiente a la Luna llena, época en la cual es muy dificil la observación. La zona de 270° a 290° contiene otro máximo por ser ésta la zona en la que se producen mayor número de emersiones

por lado oscuro. Es lógico que el número de emersiones sea inferior al de inmersiones, puesto que para observar emersiones se requiere una mayor precisión en el apuntado del telescopio. En 0° (360°) aparece evidentemente un mínimo al ser la zona de Luna nueva.

TABLA 4

ZONA	Nº OBS	ZONA	Nº OBS	ZONA	Nº OBS	ZONA	Nº OBS
5	0	95	220	185	4	275	76
10	0	100	240	190	0	280	57
15	0	105	248	195	26	285	58
20	0	110	235	200	13	290	94
25	4	115	182	205	16	295	43
30	15	120	224	210	18	300	38
35	13	125	187	215	18	305	28
40	21	130	194	220	41	310	35
45	39	135	176	225	39	315	16
50	102	140	151	230	35	320	18
55	100	145	205	235	43	325	18
60	196	150	129	240	42	330	11
65	126	155	145	245	52	335	3
70	150	160	114	250	53	340	0
75	176	165	85	255	69	345	0
80	177	170	44	260	80	350	0
85	229	175	10	265	57	355	0
90	264	180	17	270	60	360	0

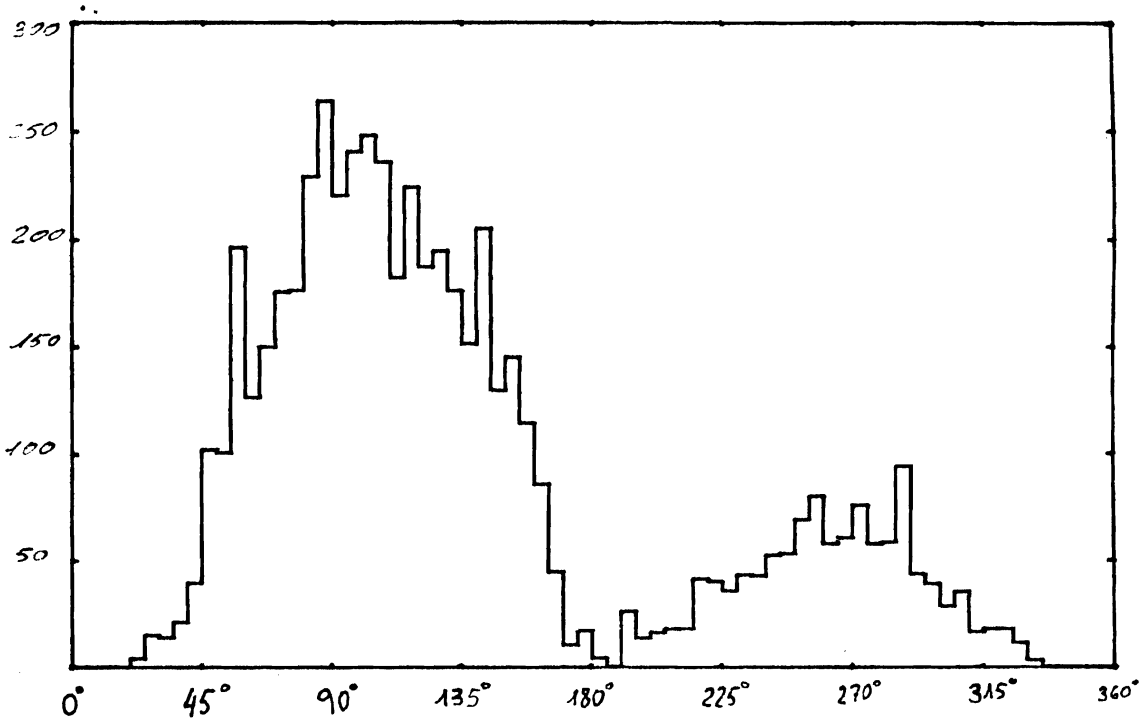


fig- 12

Para dar una idea de la homogeneidad del fichero confeccionado, en la tabla 5 se reseña la distribución de estrellas según magnitudes. En la figura 13, se representa esta distribución, comparándolas con las propias del catálogo SAO, en su totalidad. Por encima de la magnitud 10 ya no aparece ninguna estrella, por el hecho de que éste es el límite superior de magnitud de las estrellas en dicho catálogo.

TABLA 5

MAGNITUD	Nº OBS	MAGNITUD	Nº OBS
0 - 1	8	5 - 6	595
1 - 2	21	6 - 7	1068
2 - 3	16	7 - 8	880
3 - 4	138	8 - 9	2101
4-- 5	223	9 -10	529

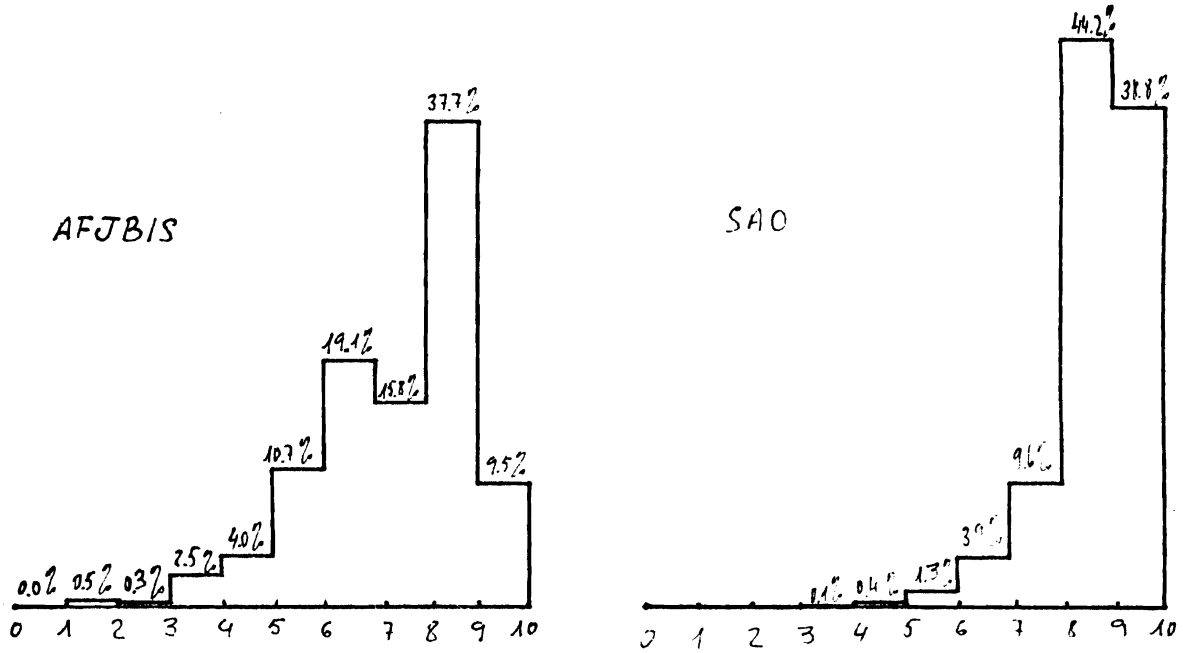


fig- 13

3-3 Reducción del fichero de ocultaciones

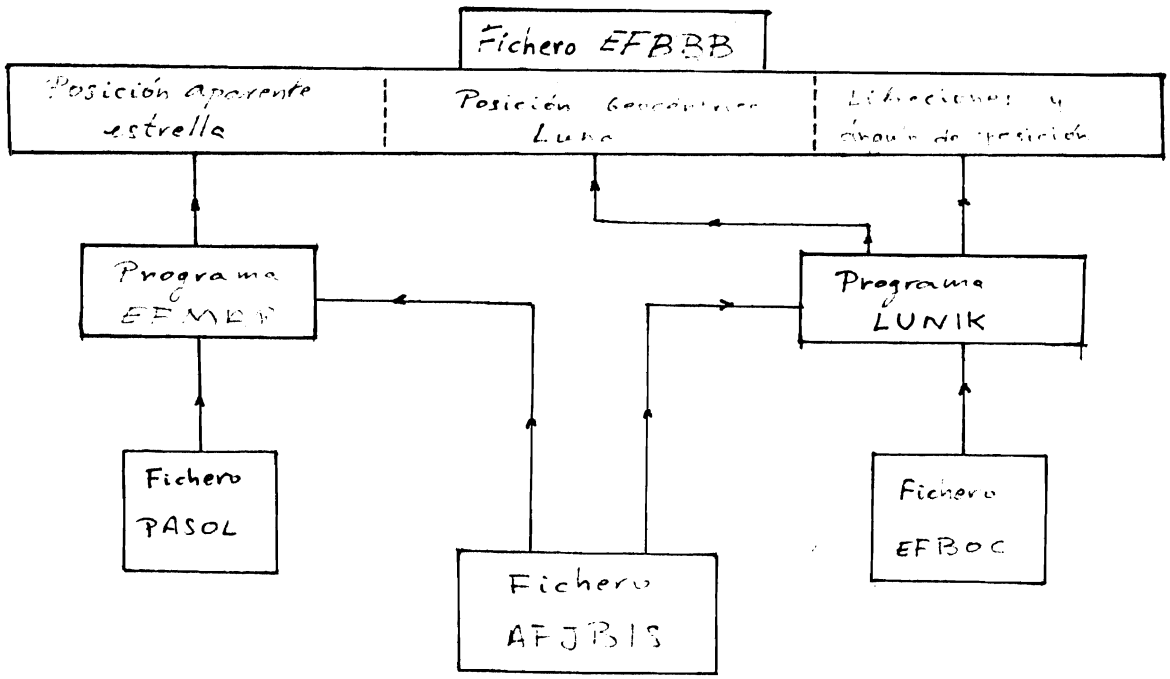
Una vez completado el fichero de todas las estrellas cuya ocultación por la Luna se ha observado fotoeléctricamente hasta el año 1978, fichero AFJBIS, ya estamos en condiciones de comenzar el análisis de dichas ocultaciones. Para ello se ha creado un segundo fichero, el EFBBB cuyo esquema se adjunta. A partir de cada sector del primero se introduce en cada sector del segundo la posición aparente de la estrella, la posición geocéntrica de la Luna (ascensión recta, declinación y paralaje), las coordenadas selenográficas de la Tierra (longitud y latitud) y el ángulo de posición del eje de rotación de la Luna referido al punto Norte (geocéntrico). Como ya se ha indicado en el capítulo 1, para el cálculo de la posición aparente se ha utilizado el método de Emerson, programa EFMAR.

En la ecuación (1-31) se ha considerado que tanto la velocidad radial como la paralaje de la estrella son nulas, ya que el catálogo SAO no contiene ninguno de estos datos. Deberíamos por tanto recurrir a otros catálogos estelares; pero por ejemplo en el

Brigth Stars (1964) que contiene 9110 estrellas, figuran la velocidad radial de un 74% de ellas y la paralaje trigonométrica de sólo un 35%, siendo de 7.0 la magnitud mínima en este catálogo, cuando en nuestro fichero las estrellas de magnitud menor que 7.0 representan sólo un 37% del total. Encontraríamos análogos problemas si pretendiéramos utilizar otros catálogos: Jenkins (1952), Wilson (1953). El catálogo PERTH70 (1976), lleva incluidos tanto la paralaje como la velocidad radial, pero al usarlo deberíamos reducirnos al hemisferio Sur y el análisis no sería completo.

Para calcular las componentes de la velocidad $\dot{\underline{R}}$ que figuran en la fórmula (1-35) se ha confeccionado un fichero, PASOL, en el cual para cada día tenemos las componentes de $\dot{\underline{R}}$, $\Delta\psi$ (nutación en longitud), $\Delta\varepsilon$ (nutación en oblicuidad) y ε_0 (oblicuidad media). La confección de este fichero no presenta dificultad, pero es de larguísima duración, debido a que hay que introducir en el programa las coordenadas planetarias de Jupiter, Saturno, Urano, y Neptuno para los años en los que disponemos de ocultaciones, lo cual supone trabajar constantemente con unos 5000 datos relativos a dichos planetas.

Para obtener las coordenadas de la Luna se ha confeccionado otro fichero, EFBOC, que contiene para cada día juliano los coeficientes de Chebyshev de la Luna, las coordenadas selenógráficas de la Tierra (longitud y latitud) y el ángulo de posición del eje. Mediante el programa LUNIK, utilizando este fichero, podemos calcular la posición geocéntrica de la Luna, las coordenadas selenográficas de la Tierra y el ángulo de posición del eje en el instante deseado



Por lo que se refiere a la escala de tiempo utilizada para observación, es necesario distinguir tres épocas (Morrison, 1978):

Los tiempos de observación comprendidos entre el 1 de Enero de 1943 y el 30 de Junio de 1955 vienen dados en TUO. A partir del 1 de Julio de 1955 hasta el 31 de Diciembre de 1960, el tiempo de las observaciones está dado en TU2 y desde el 1 de Enero de 1961 viene dado en TUC. Para nuestro análisis utilizamos como argumento de tiempo el tiempo dinámico TDT recomendado por la UAI en 1977 (Markowitz, 1980). El origen de esta nueva escala es el 1 de Enero de 1977 a $0^h\ 0^m\ 32^s.184$, que corresponde exactamente al 1 de Enero de 1977 a $0^h\ 0^m\ 0^s$ de TAI. En este instante el segundo de esta nueva escala es el segundo internacional a nivel del mar. El valor de TDT relativo al TAI será por tanto:

$$TDT = TAI + 32^s.184$$

Pero:

$$TAI = TUC + n^s$$

siendo n el valor que se obtiene de la tabla adjunta.

PERIODO	n = TAI - TUC
1 En. 1961 a 1 Ag. 1961	$1^s.4228180 + (MJD - 37300) \times 0^s.001296$
1 Ag. 1961 a 1 En. 1962	$1^s.3728180 +$,, ,,
1 En. 1962 a 1 Nov.1963	$1^s.8458580 + (MJD - 37665) \times 0^s.0011232$
1 Nov.1963 a 1 En. 1964	$1^s.9458580 +$,, ,,
1 En. 1964 a 1 Ab. 1964	$3^s.2401300 + (MJD - 38761) \times 0^s.001296$
1 Ab. 1963 a 1 Sep.1964	$3^s.3401300 +$,, ,,
1 Sep.1964 a 1 En. 1965	$3^s.4401300 +$,, ,,
1 En. 1965 a 1 Mar.1965	$3^s.5401300 +$,, ,,
1 Mar.1965 a 1 Jul.1965	$3^s.6401300 +$,, ,,
1 Jul.1965 a 1 Sep.1965	$3^s.7401300 +$,, ,,
1 Sep.1965 a 1 En. 1966	$3^s.8401300 +$,, ,,
1 En. 1966 a 1 Feb.1968	$4^s.3131700 + (MJD - 39126) \times 0^s.002592$
1 Feb.1968 a 1 En. 1972	$4^s.2131700 +$,, ,,
1 En. 1972 a 1 Jul.1972	$10^s.0000000$
1 Jul.1972 a 1 En. 1973	$11^s.0000000$
1 En. 1973 a 1 En. 1974	$12^s.0000000$
1 En. 1974 a 1 En. 1975	$13^s.0000000$
1 En. 1975 a 1 En. 1976	$14^s.0000000$
1 En. 1976 a 1 En. 1977	$15^s.0000000$
1 En. 1977 a 1 En. 1978	$16^s.0000000$
1 En. 1978 a 1 En. 1979	$17^s.0000000$

Finalmente queda:

$$TDT = TUC + n^s + 32^s.184$$

Para el caso de observaciones comprendidas entre el 1 de Enero de 1943 y el 31 de Diciembre de 1960, podemos conocer a partir del "Bulletin International de l'Heure" las diferencias TAI - TU0 y TAI - TU2.

Los análisis de observaciones de ocultaciones de estrellas realizados con anterioridad a nuestro trabajo nos han hecho llegar a la conclusión de que no es muy conveniente mezclar observaciones efectuadas en los distintos periodos mencionados. Por otra parte, debido a errores de paridad encontrados al efectuar la lectura de la cinta de efemérides lunares, el análisis sólo se pudo hacer a partir del 11 de Noviembre de 1959 lo cual, nos ha obligado a despreciar 418 observaciones del total de 5579, quedando por tanto 5161 observaciones útiles para el análisis

Conocida la posición aparente de la estrella, la posición geocéntrica de la Luna, las coordenadas selenográficas de la Tierra y el ángulo de posición del eje, fichero EFBBB, se calcula el valor de la distancia angular de la estrella al limbo real de la Luna:

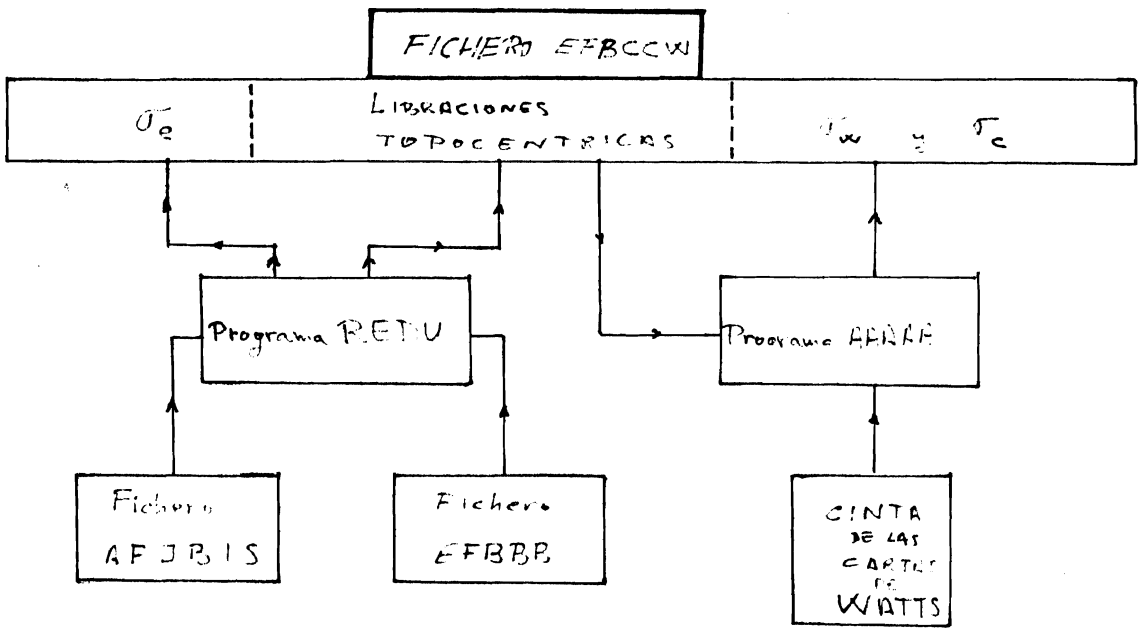
$$\sigma_c = \sigma_e - \sigma_w$$

utilizando dos programas. El primero de ellos, REDU, calcula el valor de σ_e, supuesta la Luna esférica, así como los valores topocéntricos de las libraciones y ángulo de posición del eje de rotación según lo expuesto en 1-3.

El segundo de los programas, AAAAA, utiliza la versión digitizada de las cartas de Watts (Morrison & Martin, 1971), calculando para cada observación, la corrección σ_w. Al aplicar este programa se encontraron 357 observaciones para las cuales no se pudo interpolar adecuadamente el valor σ_w, debido a que hay zonas de la Luna, regiones de Cassini, que cuando son visibles desde la Tierra no están iluminadas, por lo que las cartas de Watts, obtenidas por métodos fotográficos, no contienen corrección alguna.

De entre las 5161 observaciones hay 152 para las cuales es $\sigma_e > 3''$, valor que consideramos demasiado grande para que sean incluidas para el análisis. Estudiados estos valores tan grandes

de σ_e, vimos que son atribuibles a errores en las cintas iniciales de datos, número SAO equivocado ó fecha errónea (mes, día, hora etc....). Tanto el valor de σ_e como los valores topocéntricos de las libraciones y ángulo de posición del eje de rotación están incluidos en un nuevo fichero (EFBCCW) cuyo esquema se adjunta.



En la tabla 6 aparecen por zonas de 5° de ángulo de posición, el número de observaciones con σ_c bien calculado, el número de observaciones con σ_w no calculado y el tanto por ciento de σ_w no calculados con respecto al total (fig-14). En ella puede observarse que los valores más elevados del tanto por ciento corresponden a las zonas de ángulo de posición comprendido entre 175° y 205°. Acudiendo a las cartas de Watts puede verse que para estos ángulos de posición por las razones antes citadas, hay mayores zonas en blanco (fig-16).

En la tabla 7, a intervalos de 0".1, puede verse el número de observaciones existantes para cada valor de σ_c. Las observaciones

incluidas entre -1".5 y 1".5 (fig-15) constituyen el 90% del total, y son las que utilizaremos para el análisis ya que opinamos que valores de $|\sigma_c|>1".5$ constituyen probablemente valores erróneos, dada la precisión de las cartas de Watts y del catálogo SAO.

Nos quedan por tanto 4190 observaciones válidas para el análisis. En la ecuación (2-19), A es una matriz de 4190x17 e Y es una matriz columna de 4190. La matriz C que aparece en (2-20) será cuadrada de 17x17 y su inversión la hacemos utilizando el método de Gauss-Jordan mediante una subrutina que aparece en la colección SSP (Scientific Subroutine Package) editado por la IBM en 1970.

TABLA-6

ZONA	NUM TOTAL	NUM SIN σ_w	%	ZONA	NUM TOTAL	NUM SIN σ_w	%	ZONA	NUM TOTAL	NUM SIN σ_w	%
5	16	6	35.29	125	145	8	5.52	245	36	4	11.11
10	22	2	9.09	130	139	8	5.76	250	54	4	7.41
15	20	1	5	135	157	9	5.73	255	42	4	9.52
20	35	1	2.86	140	120	4	3.33	260	45	5	11.11
25	63	7	11.11	145	95	2	2.11	265	48	1	2.08
30	84	6	7.41	150	80	4	5	270	66	11	16.67
35	87	2	2.30	155	75	3	4	275	48	5	10.42
40	97	5	5.19	160	56	3	5.36	280	50	2	4
45	104	9	8.65	165	40	1	2.56	285	46	3	6.52
50	136	8	5.88	170	22	0	0	290	40	4	10
55	131	6	4.58	175	32	11	34.38	295	50	2	4
60	126	3	2.38	180	8	6	75	300	39	2	5.13
65	151	12	7.95	185	1	0	0	305	46	3	6.52
70	160	14	8.75	190	6	5	83.33	310	35	3	8.57
75	166	11	6.63	195	7	4	57.14	315	41	2	4.88
80	173	11	6.36	200	16	2	12.5	320	30	0	0
85	179	10	5.59	205	12	6	50	325	21	2	9.52
90	190	15	7.89	210	22	2	9.09	330	17	0	0
95	194	15	7.73	215	32	1	3.13	335	14	2	14.29
100	154	12	7.79	220	34	4	11.76	340	16	1	6.25
105	170	12	7.06	225	31	4	12.90	345	12	1	8.33
110	173	6	3.47	230	44	4	9.09	350	3	0	0
115	156	7	4.49	235	31	5	16.13	355	7	0	0
120	160	10	6.25	240	60	9	15	360	0	0	0

TABLA 7

$\Delta\sigma''$	Nº OBSERV.	$\Delta\sigma''$	Nº OBSERV
-3.0 y -2.9	3	0.0 y 0.1	158
-2.9 y -2.8	6	0.1 y 0.2	168
-2.8 y -2.7	1	0.2 y 0.3	133
-2.7 y -2.6	9	0.3 y 0.4	126
-2.6 y -2.5	7	0.4 y 0.5	129
-2.5 y -2.4	10	0.5 y 0.6	110
-2.4 y -2.3	13	0.6 y 0.7	97
-2.3 y -2.2	15	0.7 y 0.8	84
-2.2 y -2.1	23	0.8 y 0.9	87
-2.1 y -2.0	31	0.9 y 1.0	80
-2.0 y -1.9	31	1.0 y 1.1	54
-1.9 y -1.8	35	1.1 y 1.2	55
-1.8 y -1.7	42	1.2 y 1.3	41
-1.7 y -1.6	47	1.3 y 1.4	34
-1.6 y -1.5	64	1.4 y 1.5	45
-1.5 y -1.4	95	1.5 y 1.6	19
-1.4 y -1.3	87	1.6 y 1.7	18
-1.3 y -1.2	116	1.7 y 1.8	16
-1.2 y -1.1	147	1.8 y 1.9	9
-1.1 y -1.0	184	1.9 y 2.0	16
-1.0 y -0.9	183	2.0 y 2.1	9
-0.9 y -0.8	215	2.1 y 2.2	11
-0.8 y -0.7	200	2.2 y 2.3	10
-0.7 y -0.6	238	2.3 y 2.4	5
-0.6 y -0.5	271	2.4 y 2.5	6
-0.5 y -0.4	235	2.5 y 2.6	4
-0.4 y -0 3	228	2.6 y 2.7	5
-0.3 y -0.2	182	2.7 y 2.8	3
-0.2 y -0.1	217	2.8 y 2.9	2
-0.1 y 0.0	191	2.9 y 3.0	2

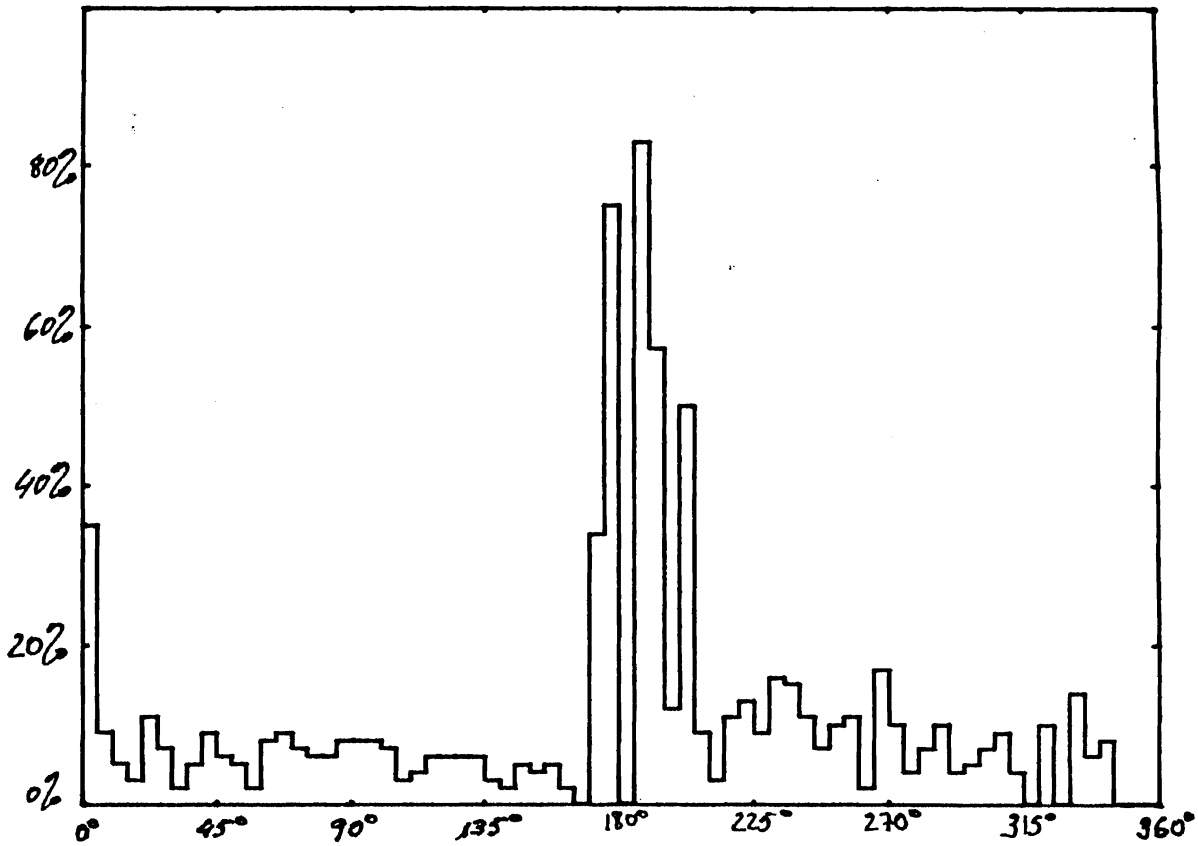

80%
60%
40%
20%
0%
0°
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°
360°

fig-14

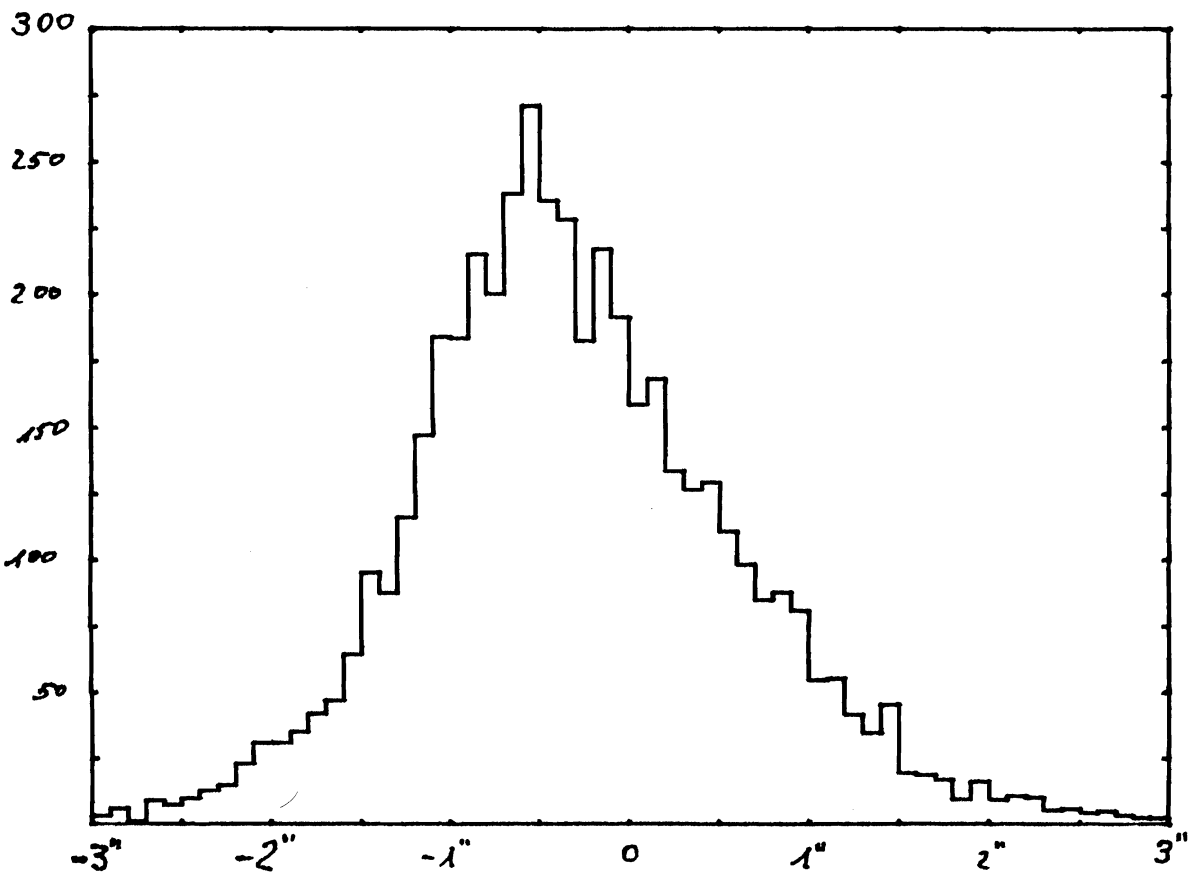

300
250
200
150
100
50
-3"
-2"
-1"
0
1"
2"
3"

fig-15

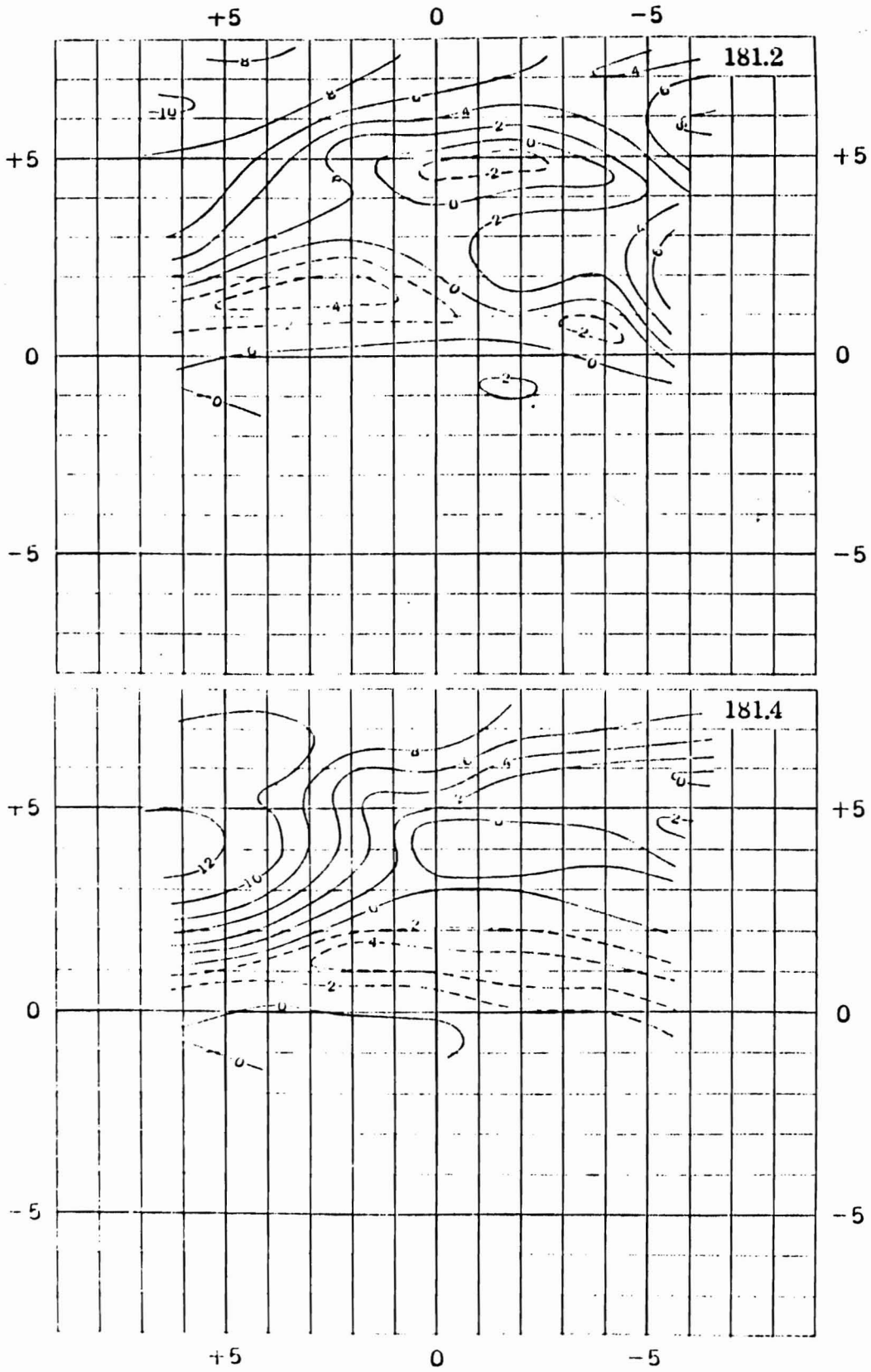


fig.-16

4.- ANALISIS Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Resueltas las ecuaciones de condición (2-18), con $\delta\alpha' = \delta\delta' = 0$ según hemos indicado, hemos obtenido:

$$\left.\begin{aligned} \delta L_0 &= -0''.61 \pm 0''.01 \\ \delta L_1 &= 0''.44 \pm 0''.21 \text{ siglo}^{-1} \\ \delta L_2 &= -9''.80 \pm 3''.80 \text{ siglo}^{-2} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}1)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta E_0 &= 0''.87 \pm 0''.06 \\ \delta E_1 &= 1.67 \pm 0.75 \text{ siglo}^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}2)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\Omega_0 &= 1''.60 \pm 0''.21 \\ \delta\varpi_0 &= -0''.59 \pm 0''.09 \\ \delta L' &= 0''.79 \pm 0''.23 \\ \delta\varpi' &= -20''.85 \pm 3''.48 \\ \delta e &= 0''.013 \pm 0''.005 \quad (0.06 \pm 0.02)\times 10^{-6} \\ \delta e' &= -0''.13 \pm 0''.05 \quad (0.63 \pm 0.24)\times 10^{-6} \\ \delta\gamma_c &= -0''.080 \pm 0''.010 \\ \delta\alpha_1 &= -0''.17 \pm 0''.07 \\ \delta\varepsilon &= -0''.017 \pm 0''.012 \\ \delta k_L &= 0''.02 \pm 0''.01 \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3)$$

En (4-3) no aparecen los valores de $\delta\varpi_1$ y $\delta\Omega_1$ al no considerarlos en el análisis definitivo, tal como se verá en la página 65.

Antes de proceder a la discusión de estos resultados, estudiemos las causas de error que pueden influir en un análisis de ocultaciones de estrellas por la Luna. Van Flandern (1970) considera siete puntos a tener en cuenta:

1) Diferencias entre TU1 y TUC
2) Corrección al datum para las coordenadas geodésicas

de cada observatorio

3) Ecuación personal en la observación de ocultaciones visuales

4) Distribución de las observaciones visuales en relación a las fotoeléctricas

5) No uniformidad en la observación de las ocultaciones

6) Correlaciones con otros parámetros

7) Inclusión de observaciones anteriores a 1955,5 (fecha adoptada para la escala de tiempo atómico)

En nuestro análisis, al considerar exclusivamente observaciones de ocultaciones obtenidas por métodos fotoeléctricos, podemos eliminar los efectos de la ecuación personal (3) y de la distribución de observaciones visuales con respecto a las fotoeléctricas (4). Al considerar solamente observaciones posteriores al 1 de Julio de 1955 desaparece la influencia mencionada en séptimo lugar. Al estar las coordenadas de cada observatorio referidas al datum de su país, o bien a uno de los datum principales, hemos considerado imprescindible reducirlos todas a un mismo datum; para ello hemos utilizado el AMOMDF68, (pág-8), que da las correcciones de los distintos datum para pasar al tomado como referencia.

De las tres causas restantes, que puedan afectar a nuestro análisis, la que menos influirá será la diferencia entre TU1 y TUC, ya que solamente afecta al cálculo del ángulo horario de la estrella. Quedan dos causas que no podemos evitar: la no uniformidad de la distribución de observaciones, que es de difícil solución puesto que siempre existen mucho más inmersiones que emersiones tal como puede observarse en la figura 12 (cap 3), y las correlaciones entre los parámetros, tal como puede verse en la tabla 8. Por otra parte, consideramos que dos fuentes de error muy importantes, que curiosamente no son citadas por otros autores, son: las irregularidades del limbo lunar, que se encuentran tabuladas en las cartas de Watts (1963) y la imprecisión de los catálogos estelares empleados.

En efecto, Salazar (1979), a la vez que confirma la corrección

TABLA-8

	δL_0	δL_1	δL_2	$\delta\varpi$	$\delta\Omega$	$\delta L'$	$\delta\varpi'$	δe	$\delta e'$	$\delta\gamma_c$	$\delta\alpha_1$	δE_0	δE_1	$\delta\varepsilon$	δk_L
δL_0	-	-0.34	-0.52	-0.05	0.05	-0.18	-0.28	-0.14	-0.01	0.02	0.01	-0.04	-0.01	-0.05	-0.10
δL_1		-	-0.32	0.01	-0.06	-0.01	0.04	0.11	-0.03	-0.03	0.01	-0.05	0.06	0.06	0.02
δL_2			-	-0.03	0.00	0.04	0.03	0.10	-0.07	-0.01	-0.06	-0.09	-0.06	-0.01	-0.04
$\delta\varpi$				-	-0.02	0.35	0.25	-0.08	-0.06	0.00	-0.06	-0.03	0.02	0.01	-0.11
$\delta\Omega$					-	0.03	0.01	-0.01	0.00	0.16	0.06	0.30	-0.38	-0.37	0.06
$\delta L'$						-	0.34	-0.17	-0.04	-0.16	0.14	-0.04	0.03	0.03	0.12
$\delta\varpi'$							-	0.05	0.05	0.01	0.12	-0.03	-0.02	0.01	0.09
δe								-	-0.02	-0.01	-0.05	0.00	0.00	-0.01	0.01
$\delta e'$									-	0.00	-0.22	0.00	0.01	0.01	-0.05
$\delta\gamma_c$										-	0.04	-0.13	-0.46	-0.21	0.05
$\delta\alpha_1$											-	-0.03	0.00	0.03	0.84
δE_0												-	-0.58	-0.18	-0.04
δE_1													-	0.33	0.00
$\delta\varepsilon$														-	0.01
δk_L															-

aditiva de $0^{\circ}.25$ al ángulo del eje, obtenida por Morrison (1970), halla una corrección vertical VPC (Vertical Profile Correction) que varía con el ángulo de posición y la libración en latitud. Sería de gran utilidad el poder tener en cuenta esas correcciones pero, al tratarse de observaciones de ocultaciones rasantes, corresponden a zonas para cuyo ángulo de posición existen pocas observaciones (fig-15). Para las demás zonas no se conocen las correcciones a aplicar y hasta que en cada una de ellas no se disponga de un número de observaciones suficientemente elevado no será posible obtenerlas. Por lo que respecta a la imprecisión de los catálogos estelares, ésta varía según el catálogo que se haya utilizado en el análisis, figurando en la tabla 10 (pág. 67) el catálogo utilizado en dicho análisis por cada autor. Puede observarse que la mayoría trabaja con el Roberston CZ (referido al sistema FK3) y sólamente Van Flandern y nosotros utilizamos el SAO. Este catálogo tiene la ventaja de estar referido al sistema FK4 y de ser bastante completo al cubrir los dos hemisferios, lo cual no sucede ni con el AGK3 ni con el PERTH70, como ya se ha indicado en el capítulo 3.

Una cartografía de la zona marginal más precisa así como un catálogo estelar más homogéneo, como será en un futuro el del satélite astrométrico HIPPARCOS, mejorarán los resultados obtenidos en un análisis de ocultaciones.

4-1 Correcciones a la longitud media de la Luna

La corrección a la longitud media de la Luna viene dada por la ecuación (2-16). Sustituyendo en esta ecuación los valores expresados en (4-1) tendremos:

$$\delta L = (0''.61 \pm 0''.01) + (0''.44 \pm 0''.21)(T-0.69) - (9''.81 \pm 3''.80)(T-0.69)^2$$

Las partes constantes y lineal de esta expresión están dentro de los márgenes de las determinaciones de otros autores (Van Flandern, 1969; Morrison, 1979). Sin duda alguna el término más sujeto a

discusión en esta expresión es el cuadrático. En efecto, la longitud media de la Luna deducida de las tablas de Brown, es:

$$L = 270^{\circ}\ 26'\ 11''.71 + 1336^{r}\ 307^{\circ}\ 53'\ 26''.06\ T + 7''.14\ T^{2} + 0''.0068\ T^{3}$$

En Septiembre de 1952 fúe adoptada por la UAI, e incluida en el Improved Lunar Ephemerides, la corrección a esta longitud:

$$-8''.72 - 26''.75\ T - 11''.22\ T^{2}$$

donde el término cuadrático, $-11''.22\ T^{2}$ debido a la aceleración de las mareas, está basado en un trabajo de Spencer Jones (1939) y fué propuesto posteriormente por Clemence (1948). En la tabla 9 presentamos los valores del coeficiente de dicho término, obtenidos por diversos autores y en este trabajo, asi como el método utilizado por cada uno de ellos y su diferencia con el adoptado por la UAI en 1952.

TABLA 9

AUTOR	METODO EMPLEADO	VALOR OBTENIDO	DIF
Murray (1957)	Ob. eclipses antiguos	$-20''.6 \pm 3''.2$	$-9''.4$
Murray (1957)	Mag. eclipses Luna	$-23'' \pm 6''$	$-12''$
Van Flandern (1970)	Ocultaciones	$-26'' \pm 2''$	$-15''$
Newton (1970)	Ob. eclipses	$-20''.9$	$-9''.7$
Oesterwinter y Cohen (1972)	Mét. integración cálculo órbitas	$-19'' \pm 2''$	$-8''$
Morrison (1972)	Combinación obs. antiguas y modernas	$-15'' \pm 2''$	$-4''$
Morrison (1973)	Ocultaciones	$-21''.2 \pm 3''.8$	$-10''.0$
Morrison y Ward (1975)	Trán. Mercurio	$-13'' \pm 1''$	$-2''$
Morrison (1979)	Ocultaciones	$-24'' \pm 2''$	$-13''$
Este trabajo	Ocult. fotoeléctricas	$-21''.02 \pm 3''.80$	$-9''.80$

En la tabla 9, entre los cuatro valores que se han obtenido mediante análisis de ocultaciones de estrellas por la Luna, se aprecian ligeras diferencias, si bien son compatibles entre sí. Además también están de acuerdo con los restantes valores de la tabla, obtenidos por métodos muy dispares como puede apreciarse. Por todo ello dada la disparidad existente entre estos valores y el adoptado internacionalmente, creemos sería aconsejable una revisión del término cuadrático de la longitud media de la Luna.

La correlación existente entre δL_0 y δL_2, -0.52, puede ser debida tal como sugiere Morrison (1979), a la presencia en los residuos de errores en la determinación de las perturbaciones planetarias en la teoría lunar de Brown.

4-2 Corrección al sistema FK4

La corrección al sistema FK4 debe ser sumada a la ascensión recta de cada estrella a fin de referir su posición al equinocio dinámico actual. En nuestro análisis, llevando los valores (4-2) a (2-17) obtenemos:

$$\delta\alpha_0' = (0''.87 \pm 0''.06) + (1''.67 \pm 0''.75)(T - 0.69) \qquad (4\text{-}4)$$

La parte lineal de esta corrección es $1''.67 \pm 0''.75$ siglo^{-1}, con un error standard relativamente grande. Ello se debe a que el periodo de observación en nuestro análisis es corto para obtener un mejor resultado.

Morrison (1979) obtiene para esta corrección el valor $1''.5 \pm 0''.2$ siglo^{-1}, pero considera más fiable el dado por Fricke (1967), $1''.20 \pm 0''.11$, utilizándolo para el resto de su análisis y adoptando como corrección resultante:

$$\delta\alpha_0' = (0''.82 \pm 0''.02) + (1''.20 \pm 0''.11)(T - 0.59)$$

Van Flandern y Martin (1970), utilizando observaciones que cu-

bren los períodos desde 1627 a 1860 y desde 1950 a 1968, obtienen para esta corrección lineal un valor de 1".36 ± 0".06 que está de acuerdo con el dado por Fricke. En el capítulo 2 ya se ha señalado que este valor, obtenido mediante análisis de ocultaciones, es en realidad el movimiento del equinocio FK4 con respecto al dinámico y, como se verá más adelante, es factible interpretarlo como una corrección a la precesión.

La correlación entre las partes constante δE_0 y δE_1 a la corrección al sistema FK4, -0.58, confirma lo dicho en la página anterior respecto a la indeterminación de la parte lineal.

4-3 Correcciones a los elementos orbitales y constantes básicas

Al igual que ha sucedido con la obtención del valor de la corrección al término cuadrático de la longitud media de la Luna, las correcciones a los elementos orbitales y constantes básicas han sido alcanzadas por diversos autores utilizando distintos métodos y, junto con las obtenidas en el presente trabajo, figuran especificadas en las tablas 10 y 11.

Teóricamente habíamos supuesto que tanto la corrección a a la longitud del nodo lunar como a la longitud del perigeo (2-16), constaban de una parte constante y de otra lineal. Sin embargo en un análisis previo, pudimos observar la fuerte correlación exitente entre ambas partes, por lo que en el análisis definitivo decidimos no tener en cuenta las partes lineales $\delta\Omega_1$ y $\delta\varpi_1$, las cuales no aparecen por lo tanto en (4-3).

El conjunto de los resultados obtenidos en el presente trabajo, para las correcciones a los elementos orbitales y constantes básicas, concuerda bastante bien con los obtenidos por otros autores (tablas 10 y 11). En particular los valores de $\delta\gamma_c$, $\delta\varepsilon$ y δk_L son muy parecidos y ciertamente muy pequeños. Por otra parte los valores de $\delta\varpi$, $\delta\Omega$, $\delta L'$, y δe presentan una cierta novedad al ser ligeramente distintos a los restantes, como era

de esperar al haber efectuado el análisis mediante observaciones fotoeléctricas.

Los valores correspondientes a las correcciones de los elementos orbitales del Sol $\delta L'$, $\delta\varpi'$, $\delta e'$ mantienen la tónica de una dispersión con los otros resultados a excepción de $\delta L'$. En su último análisis Morrison (1979) obtiene para $\delta\varpi'$ valores que oscilan entre -7" y -14". Por nuestra parte, según las muestras que utilicemos, obtenemos valores comprendidos entre -14" y -20". Esto nos sugiere que el método de ocultaciones no corrige adecuadamente estos elementos.

Por último en cuanto se refiere a la corrección $\delta\alpha_1$ notamos que Morrison (1979), mediante el análisis reducido de un pequeño número de ocultaciones fotoeléctricas, obtiene un valor -0".03 ± 0".22, con un error muy considerable y distinto del valor obtenido en su análisis general 0".46 ± 0".03. El obtenido por nosotros, con un análisis general de un número mayor de observaciones fotoeléctricas, es -0".17 ± 0".07, mejorando sensiblemente el dado por Morrison.

Si observamos la tabla 8 podemos ver la fuerte correlación entre $\delta\alpha_1$ y δk_L, 0.84, debida a la relación existente entre las dos a través de la paralaje lunar.

Si queremos referir las correcciones de los elementos orbitales al equinocio del FK4, hay que tener en cuenta la corrección $\delta\alpha_0'$ (4-4) que sobre la eclíptica será $\delta\alpha_0' \cos\varepsilon$ = 0".80 ± 0".05 (tomando $\varepsilon = 23^\circ\ 26'\ 36''$, época 1969.0), con lo cual las correcciones para dicha época 1969,0 refridas al FK4 son:

$$\delta\varpi_0 = -1''.39 \pm 0''.14$$

$$\delta\Omega_0 = 0''.80 \pm 0''.26$$

$$\delta L' = -0''.01 \pm 0''.28$$

$$\delta\varpi' = -21''.65 \pm 3''.53$$

TABLA-10

AUTOR	EFEM. LUNARES	CAT. ESTELARES	CORE. LIMBO	EPOCA	METODO
				1781.5	
				1792.5	
C.F. MARTIN (1969)	Tablas Brown j=2	Roberston CZ	Watts	1811.5	Ocultaciones
				1830	
				1850	
SPENCER JONES (1932)	Tablas Brown	Hedrick	-	1850.0	Ocultaciones
SPENCER JONES (1925)	,, ,,	Newcomb	-	1900.0	,,
BROUWER-WATTS (1946)	,, ,,	Hammond	Hayn	1937.5	,,
MURRAY (1950)	Brown +corr. latitud	Roberston CZ	-	1942	,,
VAN FLANDERN (1969)	Tablas Brown j=2	-	-	1958.5	Círculo Meridiano
VAN FLANDERN (1969)	,, ,,	SAO	Watts	1959.5	Ocultaciones
MORRISON (1979)	,, ,,	Roberston CZ	Watts	1959.5	,,
MORRISON-B.S.(1970)	Tablas Brown j=1	Roberston CZ	Watts	1963.0	,,
Este Trabajo (1980)	Tablas Brown j=2	SAO	Watts	1969.0	,,

TABLA - 11

AUTOR	EPOCA	$\delta\varpi''$	$\delta\Omega''$	$\delta L''$	$\delta\varpi''$	$\delta e \times 10^6$	$\delta e' \times 10^6$	$\delta \gamma_c''$	$\delta \alpha_1''$	$\delta \varepsilon''$	$\delta k_h''$
C.F. MARTIN (1969)	1781,5	-3.79 ± 2.77	-7.96 ± 6.67	—	—	28 ± 7	—	-0.55 ± 0.28	—	—	—
	1792,5	-2.04 ± 2.37	-7.03 ± 4.57	—	—	4.4 ± 6.6	—	-0.37 ± 0.19	—	—	—
	1811,5	+0.07 ± 1.51	-0.98 ± 5.32	—	—	-4.5 ± 4.5	—	-0.34 ± 0.27	—	—	—
	1830	-0.51 ± 0.84	-2.21 ± 1.71	—	—	-2.1 ± 0.3	—	-0.11 ± 0.04	—	—	—
	1850	-1.95 ± 0.45	-1.60 ± 0.92	—	—	0.8 ± 1.3	—	-0.05 ± 0.03	—	—	—
SPENCER JONES (1932)	1850,0	-1.64 ± 0.59	-1.78 ± 1.18	—	—	—	—	—	—	—	—
SPENCER JONES (1925)	1900,0	-2.64 ± 0.49	1.87 ± 0.87	—	—	-0.1 ± 0.1	—	—	—	—	—
BROUWER-WATTS (1946)	1937,5	-2.4 ± 0.7	-0.4 ± 2.0	—	—	-0.07 ± 0.14	—	-0.07 ± 0.07	—	—	—
MURRAY (1950)	1942,5	—	-0.6	—	—	—	—	-0.13	—	—	—
VAN FLANDERN (1959)	1958,5	-1.8 ± 0.2	2.55 ± 0.28	-15.5 ± 9		0.145 ± 0.101	1.21 ± 0.73	-0.147 ± 0.012	—	—	—
VAN FLANDERN (1969)	1959,5	-0.86 ± 0.03	2.06 ± 0.06	-0.28 ± 0.18	-0.7 ± 2.8	0.200 ± 0.021	0.92 ± 0.19	-0.057 ± 0.006	—	-0.032 ± 0.011	—
MORRISON (1979)	1959,5	-0.86 ± 0.03	2.02 ± 0.06	0.68 ± 0.08	-10.2 ± 1.3	0.22 ± 0.02	-0.82 ± 0.10	-0.053 ± 0.003	-0.03 ± 0.22 0.46 ± 0.03	0.014 ± 0.008	0.152 ± 0.006
MORRISON-McB.S. (1970)	1963,5	-1.57 ± 0.07	2.3 ± 0.2	—	—	0.42 ± 0.02	-1.45 ± 0.01	-0.01 ± 0.01	—	—	—
Este trabajo (1980)	1969,5	-0.59 ± 0.07	1.60 ± 0.21	0.79 ± 0.23	-20.8 ± 3.48	0.06 ± 0.02	0.63 ± 0.24	-0.08 ± 0.01	-0.17 ± 0.07	-0.017 ± 0.012	0.02 ± 0.01

4-4 Corrección a la constante de la precesión

Es interesante mencionar ahora las correcciones a las constantes de precesión, ya que la discusión sobre sus valores está lejos de haber finalizado. Si bien para estas constantes se han adoptado internacionalmente los valores $\Delta n = 0''.44$ siglo^{-1} y $\Delta k = -0''.19$ siglo^{-1} (Fricke, 1967) , como puede verse en las tablas 12 y 13, especialmente para Δk, se obtienen valores dispares según el método utilizado, deduciéndose los valores de la tabla 12 a partir del estudio de los movimientos propios de los catálogos fundamentales y siendo obtenidos los de la tabla 13 analizando directamente los movimientos propios de las estrellas con respecto a galaxias lejanas.

Para el cálculo de estos valores mediante el estudio de movimientos propios con respecto a objetos extragalácticos, se fotografían regiones del cielo en épocas separadas por largos intervalos de tiempo y se comparan con los movimientos propios de un catálogo fundamental:

$$\Delta\mu = \mu_{gal} - \mu_{cat}$$

con lo cual, conocidas las componentes $\Delta\mu_\alpha$ y $\Delta\mu_\delta$ de $\Delta\mu$, podremos calcular Δn y Δk mediante las fórmulas:

$$\Delta\mu_\alpha = -\Delta k - \Delta n \operatorname{sen}\alpha \tan\delta$$

$$\Delta\mu_\delta = -\Delta n \cos\alpha$$

El método empleado para la determinación de Δn y Δk mediante el análisis de los movimientos propios de un catálogo fundamental puede verse, por ejemplo, en Núñez (1976).

Por otra parte, estas correcciones vienen dadas por las expresiones (Fricke, 1978):

$$\left.\begin{aligned} \Delta n &= \Delta p_1 \text{ sen } \varepsilon \\ \Delta k &= \Delta p_1 \cos \varepsilon - (\Delta \Lambda + \Delta E_2) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}5)$$

donde Δp_1 es la corrección a la precesión lunisolar, $\Delta \Lambda$ la corrección a la precesión planetaria y ΔE_2 la corrección debida a un error en el movimiento de equinocio de Newcomb (cabe señalar que en dinámica galáctica se denotan $\Delta \lambda$ y Δe las correcciones $\Delta \Lambda$ y ΔE_2, respectivamente).

Conociendo los valores de Δn y Δk por uno de los dos métodos citados anteriormente, pueden calcularse los valores Δp_1 y de $\Delta \Lambda + \Delta E_2$; pero no puede hallarse el valor de ΔE_2 a menos que se adopte un valor en la corrección $\Delta \Lambda$. Sin embargo en nuestro análisis de ocultaciones el valor de la corrección ΔE_2 se obtiene directamente, coincidiendo con la que hemos designado δE_1.

El valor de Δp_1 puede calcularse haciendo una comparación entre los movimientos del nodo y del perigeo lunar, observado y calculado; pero en la práctica este valor no ha podido ser obtenido en ningún análisis de los efectuados hasta el momento, al no conocer los valores del movimiento del nodo y del perigeo lunares. El valor de $\Delta \Lambda$ tiene que calcularse mediante observación planetaria (Fricke, 1978).

En la tabla 14 figuran los valores de ΔE_2 obtenidos en diversos análisis de ocultaciones, incluido el nuestro, así como el de Δk deducido adoptando el valor internacional para Δn $0''.44$ siglo^{-1} (que equivale a un $\Delta p_1 = 1''.10 \pm 0''.05$ siglo^{-1}). Para $\Delta \Lambda$ tomamos el valor obtenido por Lieske (1977) mediante observaciones de Marte $\Delta \Lambda = -0''.03 \pm 0''.01$ siglo^{-1}.

TABLA 12

Sistema	Δn("/siglo)	Δk("/siglo)	Autor
FK3/N30	+ 0.30±0.10	-0.40±0.10	Morgan-Oort (1951)
Auwers/PGC/GC/FK3	+ 0.43±0.10	-0.24±0.10	Gordon (1952)
FK4/N30	+ 0.44±0.06	-0.19±0.09	Fricke(1967)
AGK3 (preliminar)	+ 0.51±0.01	-0.32±0.01	Dieckvoss (1967)
FK4/FK4 Supl.	+ 0.47±0.08	-0.23±0.07	Rius (1974)
FK4/N30	+ 0.39±0.02	-0.21±0.06	Thüring (1975)
AGK3 (final)	+ 0.44±0.02	-0.36±0.02	Asteriadis(1975)
CK	+ 0.49±0.06	-0.31±0.04	Polozhentsev (1979)

TABLA 13

Pulkovo-AGK3$_{prel.}$	+0.41±0.12	+0.43±0.12	Fatchikhin (1970)
Lick I y II-AGK3$_{pr.}$	+0.31±0.07	-0.78±0.09	Vasilevskis & Klemola (1971)
Lick II-AGK3$_{pr.cor.}$	+0.48±0.23	-0.08±0.22	Vasilevskis & McNamara (1973)
Lick-AGK3$_{final.cor.}$	+0.38±0.06	-0.34±0.11	Du Mont (1975)
Tashkent-AGK3$_{final}$	+0.18±0.18	-0.24±0.18	Rakhinov (1978)
Galaxias-Moscu	+0.37±0.14	-0.08±0.16	Transactions of the IAU 17A, Part 2 (1979)

TABLA 14

Autor	ΔE_2	Δk
Martin&Van Flandern (1970)	1".36 ± 0".06	-0".32 ± 0".08
Morrison (1979)	1".5 ± 0".2	-0".5 ± 0".3
Este trabajo	1".67 ± 0".75	-0".63 ± 0".77

El valor que obtenemos para Δk presenta un error standard grande, al serlo el atribuido a ΔE_2, por los motivos explicados en el apartado 4-2. Pero este valor de Δk en valor absoluto es mayor que el obtenido por el análisis de movimientos de los catálogos fundamentales (tabla 12), lo cual desde hace tiempo parece estar confirmándose con los programas extragalácticos de Lick y, como puede observarse en la tabla 13, está en concordancia con el dado por Vasilevskis y Klemola (1971).

Un mayor número de observaciones de ocultaciones, obtenidas por métodos fotoeléctricos, ayudará a mejorar el valor de ΔE_2 y a conocer el valor de Δp_1, lo cual supondrá el poder calcular el valor de Δk con datos sacados de ocultaciones.

4-5 Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido la elaboración de un catálogo conteniendo observaciones de ocultaciones de estrellas por la Luna, libres de errores observacionales (obtenidas por métodos fotoeléctricos), y su ulterior análisis para la obtención de correcciones a las constantes fundamentales.

El catálogo confeccionado contiene 5579 observaciones y su análisis se ha efectuado exclusivamente con posiciones y movimientos propios extraidos del catálogo SAO, al no disponer para el hemisferio Sur de una fuente de datos equivalente al AGK3.

Para la obtención de las correcciones a las constantes fundamentales se han planteado las correspondientes ecuaciones de condición (2-18) que, resueltas por el método de los mínimos cuadrados, han suministrado los resultados que se exponen en el capítulo 4 (pág. 59). A la vista de dichos resultados, el análisis y discusión de los mismos permiten enunciar las siguientes conclusiones:

- Sería aconsejable que fuese revisada la corrección al término cuadrático de la longitud media de la Luna adoptada internacionalmente, dada la disparidad existente entre la misma y las que aparecen en la tabla 9.

- El valor obtenido para la parte lineal de la corrección al sistema FK4, diferente del sugerido por Fricke (1967), nos hace pensar que es necesario un más largo período de observación para poder alcanzar una corrección más exacta.

- Las correcciones a los elementos orbitales y constantes básicas casi coinciden con las obtenidas por otros autores (tablas 10 y 11). En particular, los valores $\delta\gamma_c$, $\delta\varepsilon$, δk_L son muy parecidos y ciertamente muy pequeños. Por otra parte, los valores $\delta\varpi$, $\delta\Omega$, $\delta L'$, δe constituyen una cierta novedad al ser ligeramente distintos de los admitidos, como era de esperar ocurriese al efectuar un análisis utilizando únicamente observaciones fotoeléctricas.

-Los valores correspondientes a las correcciones de los elementos orbitales del Sol, salvo $\delta L'$, mantienen una tónica de dispersión con los resultados obtenidos por otros autores. Esto nos sugiere que el método de análisis de observaciones de ocultaciones de estrellas por la Luna no corrige adecuadamente estos elementos. En cuanto al valor de $\delta\alpha_1$, tal como sugirió Morrison en su último análisis, mejora sensiblemente el obtenido por otros autores.

- Finalmente se ha evaluado la corrección a la constante de la precesión en ascensión recta δk, obteniéndose un valor distinto del internacionalmente adoptado, pero que, sin embargo, está de acuerdo con los resultados recientemente obtenidos en los programas extragalácticos (tablas 12 y 13).

APENDICE·I

CALCULO DEL VECTOR DE POSICION Y VELOCIDAD DEL SOL

Utilizando las tablas del Sol de Newcomb, calculamos la longitud y latitud referidas al equinocio medio de la fecha y el radio vector del Sol. Para ello se toma como época inicial la fecha juliana correspondiente al 0 de Enero de 1900 a las 12^h de T.E, es decir 2415020.0, siendo los parámetros necesarios para el cálculo funciones del intervalo de tiempo transcurrido desde esa época.

Para la longitud media del Sol referida al equinocio medio de la fecha, partimos de la longitud media geométrica referida al equinocio medio de la fecha, cuya expresión es

$$L' = 279^\circ.696678 + 0^\circ.9856473354\ d + 0^\circ.00002267\ B^2$$

con

d = día juliano de la fecha - 2415020.0
$B = d/10000$

La acción gravitacional de los planetas produce perturbaciones en la órbita terrestre. Estas perturbaciones dependen de las posiciones relativas de estos planetas respecto a la Tierra, o lo que es lo mismo, de sus respectivas anomalias medias.

Si llamamos M' a la anomalía media de la Tierra y M_p a la del planeta, la variación en la longitud viene dada por (Newcomb, 1898):

$$\Delta L_p = v_c \cos(j\ M_p + i\ M') + v_s \operatorname{sen}(j\ M_p + i\ M') =$$
$$= \mu \cos(K - j\ M_p - i\ M')$$

siendo v_c, v_s, μ , K valores tabulados en las Tablas de Newcomb para difrentes valores de j e i, para los planetas que perturban.

La proximidad de la Luna perturba la órbita terrestre con mayor intensidad que los planetas, pero el período de la perturbación es más pequeño al ser más rápido el movimiento de la Luna con respecto a la Tierra. La corrección a la longitud viene expresada por:

$$\Delta L_{☾} = 6''.454 \text{ sen } D + 0''.013 \text{ sen } 3D + 0''.177 \text{ sen}(D + M) -$$
$$- 0''.424 \text{ sen}(D - M) + 0''.039 \text{ sen}(3D - M) - 0''.064 \text{ sen}(D + M') -$$
$$- 0''.013 \text{ sen}(D - M - M') - 0''.013 \text{ sen } (2u')$$

siendo

D: elongación media heliocéntrica de la Luna

M: anomalía media de la Luna

u′: distancia angular media del Sol desde el nodo descendente de la Luna

La expresión para la ecuación de centro viene expresada por:

$$\Delta L_c = (6910''.057 - 17''.24\ T - 0''.052\ T^2) \text{ sen } M' +$$
$$+ (72''.338 - 0''.361\ T) \text{ sen } 2M' +$$
$$+ (1''.054 - 0''.001\ T) \text{ sen } 3M' +$$
$$+ 0''.018 \text{ sen } 4M'$$

y se obtiene a partir del valor tabulado en las tablas de Newcomb para la excentricidad:

$$e' = 3455''.150 - 8''.621\ T - 0''.026\ T^2$$

Por último, la variación secular ΔL_s de la longitud viene expresada por:

$$\Delta L_s = (1''.882 - 0''.016\ T)\ \mathrm{sen}(57^\circ.24 + 150^\circ.27\ T) +$$
$$+ 0''.202\ \mathrm{sen}(315^\circ.6 + 893^\circ.3\ T) + 6''.40\ \mathrm{sen}(231^\circ.19 + 20^\circ.2\ T) +$$
$$+ 0''.266\ \mathrm{sen}(31^\circ.8 + 119^\circ.0\ T)$$

Aplicando a la longitud L′ todas las correcciones anteriormente citadas tendremos:

$$\lambda' = L' + \Delta L_p + \Delta L_{☾} + \Delta L_c + \Delta L_s$$

longitud media del Sol referida al equinocio medio de la fecha.

Por lo que respecta a la latitud también hay que tener en cuenta las perturbaciones planetarias y lunares.

En virtud de las perturbaciones planetarias la variación en latitud es:

$$\Delta\beta_p = \beta_c \cos(j\ M_p + i\ M') + \beta_s\ \mathrm{sen}(j\ M_p + i\ M') =$$
$$= \beta_T \cos(K - j\ M_p - i\ M')$$

siendo β_c, β_s, β_T, y K los valores tabulados en las tablas de Newcomb para diferentes valores de j e i.

La variación en latitud debida a las perturbaciones producidas por la acción de la Luna viene expresada por:

$$\Delta\beta_{☾} = 0''.576\ \mathrm{sen}\ u_L + 0''.016\ \mathrm{sen}(u_L + M') - 0''.047\ \mathrm{sen}(u_L - M) +$$
$$+ 0''.021\ \mathrm{sen}(u_L - 2u') + 0''.005\ \mathrm{sen}(u_L - 2u' - M) +$$
$$+ 0''.005\ \mathrm{sen}(u_L + M') + 0''.005\ \mathrm{sen}(u_L - M')$$

siendo u_L el argumento de latitud de la Luna.

La latitud eclíptica de la fecha será por tanto

$$\beta' = \Delta\beta_p + \Delta\beta_{☾}$$

Por último, la variación del logaritmo decimal del radio vector del Sol debida a las perturbaciones planetarias viene expresada en la forma:

$$\Delta_p(\log R) = \rho_c \cos(j\, M_p + i\, M') + \rho_s \operatorname{sen}(j\, M_p + i\, M') =$$
$$= \rho_T \cos(K - j\, M_p - i\, M')$$

siendo ρ_c, ρ_s, ρ_T, K los valores tabulados en las tablas de Newcomb para diferentes valores de j e i

La corrección al logaritmo del radio vector del Sol, debida a la acción de la Luna es:

$$\Delta_{☾}(\log R) = 1336 \cos D + 3 \cos 3D + 37 \cos(D + M) -$$
$$- 133 \cos(D - M) + 8 \cos(3D - M) - 14 \cos(D + M') +$$
$$+ 36 \cos(D - M') - 3 \cos(D - M - M') + 3 \cos 2u'$$

y viene dada en unidades de 10^{-8}.

El logaritmo del radio vector del Sol en la órbita elíptica viene expresado por:

$$\Delta(\log R) = 3057 - 15\, T + (-727412 + 1814\, T + 5\, T^2) \cos M' +$$
$$+ (-9138 + 46\, T) \cos 2M' + (-145 + T) \cos 3M' -$$
$$- 2 \cos 4M'$$

todo en unidades de 10^{-8}

El logaritmo del radio vector del Sol será por tanto:

$$\log R = \Delta(\log R) + \Delta_p(\log R) + \Delta_{☾}(\log R)$$

Una vez conocidos la longitud y latitud del Sol referidas al equinocio medio de la fecha así como el radio del Sol, podemos calcular sus coordenadas rectangulares ecuatoriales:

$$X/R = \cos\delta'_s \cos\alpha'_s = \cos\beta' \cos\lambda'$$
$$Y/R = \cos\delta'_s \operatorname{sen}\alpha'_s = \cos\beta' \operatorname{sen}\lambda' \cos\varepsilon - \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen}\varepsilon$$
$$Z/R = \operatorname{sen}\delta'_s = \cos\beta' \operatorname{sen}\lambda' \operatorname{sen}\varepsilon + \operatorname{sen}\beta' \cos\varepsilon$$

donde ε es la oblicuidad media de la eclíptica. Estas coordenadas están referidas al equinocio medio y ecuador de la fecha. Si las queremos referidas a 1950,0, habrá que aplicarles la matriz de precesión [P] (pág. 29), de forma que

$$X_S = X_x X + X_y Y + X_z Z$$
$$Y_S = Y_x X + Y_y Y + Y_z Z$$
$$Z_S = Z_x X + Z_y Y + Z_z Z$$

siendo X_x, X_y, X_z,..... los elementos de la matriz de precesión .

Las coordenadas del Sol referidas al centro de masas serán evidentemente:

$$X_B = X_S + \sum\left[m_n x_n/(1+\sum m_n)\right]$$
$$Y_B = Y_S + \sum\left[m_n y_n/(1+\sum m_n)\right]$$
$$Z_B = Z_S + \sum\left[m_n z_n/(1+\sum m_n)\right]$$

donde m_n representa la masa de cada planeta en unidades de masa del Sol y x_n, y_n, z_n son las coordenadas heliocéntricas del planeta las cuales vienen tabuladas en "Planetary Coordinates" y refe-

ridas al equinocio de 1950,0.

El vector velocidad $\dot{\underline{R}}$, referido al centro de masas, se deduce a partir de las variaciones de las coordenadas del Sol y de los planetas, de modo que:

$$\dot{X}_B = \dot{X}_S + \sum m_n' \dot{x}_n$$

$$\dot{Y}_B = \dot{Y}_S + \sum m_n' \dot{y}_n$$

$$\dot{Z}_B = \dot{Z}_S + \sum m_n' \dot{z}_n$$

con

$$m_n' = m_n/(1 + \sum m_n)$$

Para calcular las variaciones de las coordenadas del Sol y de los planetas, utilizamos el método de diferenciación numérica (Danjon 1959, pág 403) hasta terceras diferencias.

APENDICE II

Coeficientes de $\frac{\partial \lambda}{\partial M}$ M: Anomalía media de la Luna

e	e^2
1.979 cos(M + 4D)	0.426 cos(2M + 4D)
191.953 cos(M + 2D)	28.774 cos(2M + 2D)
22639.500 cos M	1538.032 cos(2M)
-4586.426 cos(M - 2D)	-423.312 cos(2M - 2D)
-38.428 cos(M - 4D)	-61.546 cos(2M - 4D)
-0.393 cos(M - 6D)	-1.140 cos(2M - 6D)

ee'	$e\alpha_1$
-2.921 cos(M + M' + 2D)	- 8.466 cos(M + D)
-109.667 cos(M + M')	18.609 cos(M - D)
-205.962 cos(M + M' - 2D)	3.125 cos(M - 3D)
-4.391 cos(M + M' - 4D)	
0.283 cos(M - M' + 4D)	e^3
14.577 cos(M - M' + 2D)	3.180 cos(3M + 2D)
147.693 cos(M - M')	108.372 cos(3M)
28.475 cos(M - M' - 2D)	39.579 cos(3M - 2D)
0.636 cos(M - M' - 4D)	3.561 cos(3M - 4D)
	0.879 cos(3M - 6D)

e^2e'	ee'^2
-0.580 cos(2M + M' + 2D)	-1.167 cos(M + 2M')
-15.298 cos(2M + M')	-7.412 cos(M + 2M' - 2D)
-17.254 cos(2M + M' - 2D)	-0.311 cos(M + 2M' - 4D)
-5.480 cos(2M + M' - 4D)	0.757 cos(M - 2M' + 2D)
2.362 cos(2M - M' + 2D)	2.580 cos(M - 2M')
19.406 cos(2M - M')	2.533 cos(M - 2M' - 2D)
-4.988 cos(2M - M' - 2D)	
0.720 cos(2M - M' - 4D)	

$e\gamma_c^2$

$-0.992 \cos(M + 2F + 2D)$
$-45.099 \cos(M + 2F)$
$-0.179 \cos(M + 2F - 2D)$
$-0.301 \cos(M + 2F - 4D)$
$-6.382 \cos(M - 2F + 2D)$
$39.532 \cos(M - 2F)$
$9.366 \cos(M - 2F - 2D)$
$0.202 \cos(M - 2F - 4D)$

e^4

$7.752 \cos(4M)$
$-3.808 \cos(4M - 2D)$

e^3e'

$-1.653 \cos(3M + M')$
$-1.446 \cos(3M + M' - 2D)$
$-0.300 \cos(3M + M' - 4D)$
$2.043 \cos(3M - M')$
$-0.549 \cos(3M - M' - 2D)$

$e^2\gamma^2$

$-0.246 \cos(2M + 2F + 2D)$
$-7.992 \cos(2M + 2F)$
$1.114 \cos(2M + 2F - 2D)$
$-0.918 \cos(2M - 2F + 2D)$
$-2.596 \cos(2M - 2F)$
$1.076 \cos(2M - 2F - 2D)$
$0.346 \cos M - 2F - 4D)$

e^5

$0.565 \cos(5M)$

$e^2\alpha_1$

$-1.172 \cos(2M + D)$
$3.500 \cos(2M - D)$
$2.450 \cos(2M - 3D)$

$ee'\alpha_1$

$1.267 \cos(M + M' + D)$
$0.137 \cos(M + M' - D)$
$0.233 \cos(M + M' - 3D)$
$-0.122 \cos(M - M' + D)$
$-1.089 \cos(M - M' - D)$
$-0.276 \cos(M - M' - 3D)$

$e^2e'^2$

$-0.594 \cos(2M + 2M' - 2D)$
$-0.322 \cos(2M + 2M' - 4D)$
$0.394 \cos(2M - 2M')$
$0.508 \cos(2M - 2M' - 2D)$

ee'^3

$+0.250 \cos(M + 3M' - 2D)$

$ee'\gamma_c^2$

$0.263 \cos(M + M' + 2F)$
$0.426 \cos(M + M' - 2F - 2D)$
$-0.304 \cos(M - M' + 2F)$
$-0.372 \cos(M - M' - 2F + 2D)$

$e^3\alpha_1$

$0.390 \cos(3M - D)$

$e^2e'\alpha_1$

$-0.704 \cos(2M - M' - D)$

Coeficientes de $\frac{\partial \lambda}{\partial M'}$ M′ Anomalía del Sol

e'

$-0.289 \cos(M' + 4D)$
$-24.420 \cos(M' + 2D)$
$-668.111 \cos M'$
$-165.145 \cos(M' - 2D)$
$-1.877 \cos(M' - 4D)$

e'^2

$-0.378 \cos(2M' + 2D)$
$-14.972 \cos(2M')$
$-16.192 \cos(2M' - 2D)$
$-0.302 \cos(2M' - 4D)$

$e^2 e'$

$-0.290 \cos(2M + M' + 2D)$
$-7.649 \cos(2M + M')$
$-8.627 \cos(2M + M' - 2D)$
$-2.740 \cos(2M + M' - 4D)$
$-1.181 \cos(2M - M' + 2D)$
$-9.703 \cos(2M - M')$
$2.494 \cos(2M - M' - 2D)$
$-0.360 \cos(2M - M' - 4D)$

e'^3

$-0.309 \cos(3M')$
$-1.032 \cos(3M' - 2D)$

$e^2 e'^2$

$-0.594 \cos(2M + 2M' - 2D)$
$-0.322 \cos(2M + 2M' - 4D)$
$-0.394 \cos(2M - 2M')$
$-0.508 \cos(2M - 2M' - 2D)$

ee'

$-2.921 \cos(M + M' + 2D)$
$-109.667 \cos(M + M')$
$-205.962 \cos(M + M' - 2D)$
$-4.391 \cos(M + M' - 4D)$
$-0.283 \cos(M - M' + 4D)$
$-14.577 \cos(M - M' + 2D)$
$-147.693 \cos(M - M')$
$-28.475 \cos(M - M' - 2D)$
$-0.636 \cos(M - M' - 4D)$

$e'\alpha_1$

$0.150 \cos(M' + 3D)$
$18.023 \cos(M' + D)$
$0.560 \cos(M' - D)$

ee'^2

$-2.334 \cos(M + 2M')$
$-14.824 \cos(M + 2M' - 2D)$
$-0.622 \cos(M + 2M' - 4D)$
$-1.514 \cos(M - 2M' + 2D)$
$-5.160 \cos(M - 2M')$
$-5.066 \cos(M - 2M' - 2D)$

$e'\gamma_c^2$

$0.415 \cos(M' + 2F)$
$-2.152 \cos(M' + 2F - 2D)$
$-1.440 \cos(M' - 2F + 2D)$
$0.384 \cos(M' - 2F - 2D)$

$ee'\alpha_1$

1.267 cos(M + M′ + D)
0.137 cos(M + M′ - D)
0.233 cos(M + M′ - 3D)
0.122 cos(M - M′ + D)
1.089 cos(M - M′ - D)
0.276 cos(M - M′ - 3D)

$ee'\gamma_c^2$

0.263 cos(M + M′ + 2F)
0.426 cos(M + M′ - 2F - 2D)
0.304 cos(M - M′ + 2F)
0.372 cos(M - M′ - 2F + 2D)

e^3e'

-0.551 cos(3M + M′)
-0.482 cos(3M + M′ - 2D)
-0.100 cos(3M + M′ - 4D)
-0.681 cos(3M - M′)
0.183 cos(3M - M′ - 2D)

ee'^3

-0.750 cos(M + 3M′ - 2D)

$e^2e'\alpha_1$

0.352 cos(2M - M′ - D)

Coeficientes de $\frac{\partial\lambda}{\partial F}$ F: Argumento en latitud de la Luna

γ_c^2

-11.482 cos(2F + 2D)
-823.216 cos(2F)
-110.346 cos(2F - 2D)

$e'\gamma_c^2$

0.830 cos(M′ + 2F)
-4.304 cos(M′ + 2F - 2D)
2.880 cos(M′ - 2F + 2D)
-0.768 cos(M′ - 2F - 2D)

$ee'\gamma_c^2$

0.526 cos(M + M′ + 2F)
-0.852 cos(M + M′ - 2F - 2D)
-0.608 cos(M - M′ - 2F)
0.744 cos(M - M′ - 2F + 2D)

$e\gamma_c^2$

-1.984 cos(M + 2F + 2D)
-90.198 cos(M + 2F)
-0.358 cos(M + 2F - 2D)
-0.602 cos(M + 2F - 4D)
12.764 cos(M - 2F + 2D)
-79.064 cos(M - 2F)
-18.732 cos(M - 2F - 2D)
-0.404 cos(M - 2F - 4D)

$\gamma_c^2\alpha_1$

0.510 cos(2F + D)
1.168 cos(2F - D)
0.508 cos(2F - 3D)

$e^3 \gamma_c^2$

$+0.660 \cos(3M + 2F)$

$0.184 \cos(3M + 2F - 2D)$

$e \gamma_c^4$

$0.360 \cos(M + 4F)$

$0.320 \cos(M - 4F)$

γ_c^4

$1.672 \cos(4F + 2D)$

Coeficientes de $\frac{\partial \lambda}{\partial D}$ D: Elongación media de la Luna

1

$0.762 \cos(6D)$

$55.608 \cos(4D)$

$4739.804 \cos(2D)$

e^2

$0.852 \cos(2M + 4D)$

$28.774 \cos(2M + 2D)$

$423.312 \cos(2M - 2D)$

$123{,}092 \cos(2M - 4D)$

$3.420 \cos(2M - 6D)$

e'^2

$+0.378 \cos(2M' + 2D)$

$16.192 \cos(2M' - 2D)$

$0.604 \cos(2M' - 4D)$

γ_c^2

$-11.482 \cos(2F + 2D)$

$110.346 \cos(2F - 2D)$

e

$7.916 \cos(M + 4D)$

$383.906 \cos(M + 2D)$

$9172.852 \cos(M - 2D)$

$152.712 \cos(M - 4D)$

$2.358 \cos(M - 6D)$

ee'

$-5.842 \cos(M + M' + 2D)$

$411.924 \cos(M + M' - 2D)$

$17.564 \cos(M + M' - 4D)$

$1.132 \cos(M - M' + 4D)$

$29.154 \cos(M - M' + 2D)$

$-56.950 \cos(M - M' - 2D)$

$-3.816 \cos(M - M' - 4D)$

$e \alpha_1$

$+8.466 \cos(M + D)$

$-18.609 \cos(M - D)$

$-9.645 \cos(M - 3D)$

$e'\alpha_1$

0.450 cos(M′ + 3D)
18.023 cos(M′ + D)
-0.560 cos(M′ - D)

e^2e'

-0.580 cos(2M + M′ + 2D)
17.254 cos(2M + M′ - 2D)
10.960 cos(2M + M′ - 4D)
2.362 cos(2M - M′ + 2D)
4.988 cos(2M - M′ - 2D)
-1.440 cos(2M - M′ - 4D)

$e\gamma_c^2$

-1.984 cos(M + 2F + 2D)
0.358 cos(M + 2F - 2D)
1.204 cos(M + 2F - 4D)
-12.764 cos(M - 2F + 2D)
-18.732 cos(M - 2F - 2D)
-0.808 cos(M - 2F - 4D)

$ee'\alpha_1$

1.267 cos(M + M′ + D)
-0.137 cos(M + M′ - D)
-0.699 cos(M + M′ - 3D)
-0.122 cos(M - M′ + D)
1.089 cos(M - M′ - D)
0.828 cos(M - M′ - 3D)

e^4

1.904 cos(4M - 2D)

ee'^3

0.500 cos(M + 3M′ -2D)

e^3

2.120 cos(3M + 2D)
26.386 cos(3M - 2D)
4.748 cos(3M - 4D)
1.758 cos(3M - 6D)

ee'^2

14.824 cos(M + 2M′ - 2D)
1.244 cos(M + 2M′ - 4D)
1.514 cos(M - 2M′ + 2D)
-5.066 cos(M - 2M′ - 2D)

e'^3

0.688 cos(3M′ - 2D)

$e'\gamma_c^2$

4.304 cos(M′ + 2F - 2D)
-2.880 cos(M′ - 2F + 2D)
-0.768 cos(M′ - 2F - 2D)

$e^2\alpha_1$

-0.586 cos(2M + D)
-1.750 cos(2M - D)
-3.674 cos(2M - 3D)

$\gamma_c^2\alpha_1$

0.255 cos(2F + D)
-0.584 cos(2F - D)
-0.762 cos(2F - 3D)

e^3e'

0.964 cos(3M + M′ - 2D)
0.400 cos(3M + M′ - 4D)
0.366 cos(3M - M′ - 2D)

$e^2 e'^2$

0.594 cos(2M + 2M′ - 2D)
0.644 cos(2M + 2M′ - 4D)
-0.508 cos(2M - 2M′ - 2D)

$ee'\gamma_c^2$

-0.852 cos(M + M′ - 2F - 2D)
-0.744 cos(M - M′ - 2F + 2D)

$e^2 e'\alpha_1$

0.352 cos(2M - M′ - D)

$e^2 \gamma_c^2$

+0.246 cos(2M + 2F + 2D)
-1.114 cos(2M + 2F - 2D)
-0.918 cos(2M - 2F + 2D)
-1.076 cos(2M - 2F - 2D)
-0.692 cos(2M - 2F - 4D)

$e^3 \alpha_1$

-0.130 cos(3M - D)

Coeficientes de $\frac{\partial \lambda}{\partial e}$ e: excentricidad de la Luna e=0.054900489

e

36.047 sen(M + 4D)
3496.381 sen(M + 2D)
412373.376 sen M

ee'

-53.205 sen(M + M′ + 2D)
-1997.560 sen(M + M′)
-3751.551 sen(M + M′ - 2D)
-79.981 sen(M + M′ - 4D)
5.155 sen(M + M′ + 4D)
265.517 sen(M - M′ + 2D)
2690.195 sen(M - M′)
518.666 sen(M - M′ - 2D)
11.585 sen(M - M′ - 4D)

$e^2 \alpha_1$

-21.348 sen(2M + D)
63.752 sen(2M - D)
44.626 sen(2M - 3D)

e^2

7.759 sen(2M + 4D)
524.112 sen(2M + 2D)
28014.905 sen(2M)
-7710.532 sen(2M - 2D)
-1121.046 sen(2M - 4D)
-20.765 sen(2M - 6D)

$e\alpha_1$

-154.206 sen(M + D)
338.959 sen(M - D)
58.560 sen(M - 3D)

e^3

57.923 sen(3M + 2D)
1973.971 sen(3M)
-720.923 sen(3M - 2D)
-64.863 sen(3M - 4D)
-16.011 sen(3M - 6D)

e^2e'

-10.565 sen(2M + M′ + 2D)
-278.650 sen(2M + M′)
-314.278 sen(2M + M′ - 2D)
-99.817 sen(2M + M′ - 4D)
43.023 sen(2M - M′ + 2D)
353.476 sen(2M - M′)
-90.855 sen(2M - M′ - 2D)
13.115 sen(2M - M′ - 4D)

$ee'\alpha_1$

23.078 sen(M + M′ + D)
2.495 sen(M + M′ - D)
4.244 sen(M + M′ - 3D)
-2.222 sen(M - M′ + D)
-19.836 sen(M - M′ - D)
-5.027 sen(M - M′ - 3D)

e^4

141.201 sen (4M)
-69.362 sen(4M - 2D)

$e^2e'^2$

-10.820 sen(2M + 2M′ - 2D)
-5.865 sen(2M + 2M′ - 4D)
7.177 sen(2M - 2M′)
9.253 sen(2M - 2M′ -2D)

$ee'\gamma_c^2$

4.790 sen(M + M′ + 2F)
7.759 sen(M + M′ + 2F - 2D)
-5.537 sen(M - M′ + 2F)
-6.776 sen(M - M′ - 2F + 2D)

ee'^2

-21.257 sen(M + 2M′)
-135.008 sen(M + 2M′- 2D)
-5.665 sen(M + 2M′- 4D)
13.789 sen(M - 2M′+ 2D)
46.994 sen(M - 2M′)
46.138 sen(M - 2M′- 2D)

$e\gamma_c^2$

-18.069 sen(M + 2F + 2D)
-821.468 sen(M + 2F)
-3.260 sen(M + 2F - 2D)
-5.483 sen(M + 2F - 4D)
-116.247 sen(M - 2F + 2D)
720.066 sen(M - 2F)
170.600 sen(M - 2F - 2D)
3.679 sen(M - 2F - 4D)

e^3e'

-30.109 sen (3M + M′)
-26.339 sen (3M + M′ - 2D)
-5.464 sen (3M + M′ - 4D)
37.213 sen (3M - M′)
-10.000 sen (3M - M′ - 2D)

$e^2\gamma_c^2$

-4.481 sen(2M + 2F + 2D)
-145.572 sen(2M + 2F)
20.291 sen(2M + 2F - 2D)
-16.721 sen(2M - 2F + 2D)
-47.286 sen(2M - 2F)
19.599 sen(2M - 2F - 2D)
6.302 sen(2M - 2F - 4D)

ee'^3

-4.555 sen(M + 3M′ - 2D)

$e^3\alpha_1$

7.104 sen(3M - D)

$e^2e'\alpha_1$

-12.823 sen(2M - M′ - D)

e^5

10.291 sen(5M)

Coeficientes de $\frac{\partial\lambda}{\partial e'}$ e′: excentricidad del Sol e′= 0.016722198

e'

-17.282 sen(M′ + 4D)
-1460.334 sen(M′ + 2D)
-39953.540 sen M′

e'^2

-22.605 sen(2M′ + 2D)
-895.337 sen(2M′)
-968.294 sen(2M′ - 2D)
-18.060 sen(2M′ - 4D)

e^2e'

-17.342 sen(2M + M′ + 2D)
-457.416 sen(2M + M′)
-515.901 sen(2M + M′ - 2D)
-163,854 sen(2M + M′ - 4D)
70.625 sen(2M - M′ + 2D)
580.247 sen(2M - M′)
-149.143 sen(2M - M′ - 2D)
21.528 sen(2M - M′ - 4D)

ee'^2

308.572 sen (M - 2M′)
302.951 sen (M - 2M′ - 2D)

ee'

-174.678 sen(M + M′ + 2D)
-6558.169 sen(M + M′)
-12316.682 sen(M + M′ - 2D)
-262.585 sen(M + M′ - 4D)
16.924 sen(M - M′ + 4D)
871.716 sen(M - M′ + 2D)
8832.152 sen(M - M′)
1702.826 sen(M - M′ - 2D)
38.033 sen(M - M′ - 4D)

$e'\alpha_1$

8.970 sen(M′ + 3D)
1077.789 sen(M′ + D)
33.488 sen(M′ - D)

e'^3

-18.478 sen(3M′)
-61.714 sen(3M′ - 2D)

ee'^2

-139.575 sen(M + 2M′)
-886.486 sen(M + 2M′ -2D)
-37.196 sen(M + 2M′ -4D)
90.538 sen(M - 2M′ +2D)

$ee'\alpha_1$

75.768 sen(M + M' + D)
8.193 sen(M + M' - D)
13.934 sen(M + M' - 3D)
-7.296 sen(M - M' + D)
-65.123 sen(M - M' - D)
-16.505 sen(M - M' - 3D)

$e'\gamma_c^2$

24.817 sen(M' + 2F)
-128.691 sen(M' + 2F - 2D)
-86.113 sen(M' - 2F + 2D)
22,963 sen(M' - 2F - 2D)

$ee'\gamma_c^2$

15.728 sen(M + M' + 2F)
25.475 sen(M + M' - 2F - 2D)
-18.179 sen(M - M' + 2F)
-22.246 sen(M - M' - 2F + 2D)

e^3e'

-32.950 sen(3M + M')
-28.824 sen(3M + M' - 2D)
-5.980 sen(3M + M' - 4D)
40.724 sen(3M - M')
-10.944 sen(3M - M' - 2D)

$e^2e'^2$

-35.522 sen(2M + 2M' - 2D)
-19.256 sen(2M + 2M' - 4D)
23.561 sen(2M - 2M')
30.379 sen(2M - 2M' - 2D)

ee'^3

- 44.851 sen(M + 3M' - 2D)

$e^2e'\alpha_1$

-21.050 sen(2M - M' - D)

Coeficientes de $\frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_c}$ γ_c:constante de inclinación

$\gamma_c = 0.044886967$

γ_c^2

-255.798 sen(2F + 2D)
-18339.756 sen(2F)
-2458.308 sen(2F - 2D)

$e'\gamma_c^2$

18.491 sen(M' + 2F)
-95.885 sen(M' + 2F - 2D)
-64.161 sen(M' - 2F + 2D)
17.110 sen(M' - 2F - 2D)

$e\gamma_c^2$

-44.200 sen(M + 2F + 2D)
-2009.447 sen(M + 2F)
-7.976 sen(M + 2F - 2D)
-13.411 sen(M + 2F - 4D)
-284.359 sen(M - 2F + 2D)
1761.402 sen(M - 2F)
417.315 sen(M - 2F - 2D)
9.000 sen(M - 2F - 4D)

$e^2 \gamma_c^2$

-5.480 sen(2M + 2F + 2D)
-178.047 sen(2M + 2F)
24.818 sen(2M + 2F - 2D)
-20.451 sen(2M - 2F + 2D)
-57.834 sen(2M - 2F)
23.971 sen(2M - 2F - 2D)
7.708 sen(2M - 2F - 4D)

$ee' \gamma_c^2$

11.718 sen(M + M' + 2F)
18.981 sen(M + M' - 2F -2D)
-13.545 sen(M - M' + 2F)
-16.575 sen(M - M' - 2F + 2D)

$\gamma_c^2 \alpha_1$

11.362 sen(2F + D)
26.021 sen(2F - D)
11.317 sen(2F - 3D)

$e^3 \gamma_c^2$

-14.704 sen(3M + 2F)
4.099 sen(3M + 2F - 2D)

$e \gamma_c^4$

8.020 sen(M + 4F)
-7.129 sen(M - 4F)

γ_c^4

37.249 sen(4F + 2D)

Coeficientes de $\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha_1}$ α_1: desigualdad paraláctica

α_1

160.727 sen (3D)
-49902.726 sen D

$e^2 \alpha_1$

-233.712 sen(2M + D)
697.946 sen(2M - 3D)

$\gamma_c^2 \alpha_1$

101.701 sen(2F + D)
232.914 sen(2F - D)
101.302 sen(2F - 3D)

$e^2 e' \alpha_1$

-140.387 sen(2M + M' - D)

$e \alpha_1$

-3376.462 sen(M + D)
7421.756 sen(M - D)
1282.226 sen(M - 3D)

$ee' \alpha_1$

505.313 sen(M + M' + D)
54.639 sen(M + M' D)
92.926 sen(M + M' - 3D)
-48.657 sen(M - M' + D)
-434.322 sen(M - M' - D)
-110.076 sen(M - M' - 3D)

$e^3 \alpha_1$

51.847 sen(3M - D)

Coeficientes de $\dfrac{\partial \operatorname{sen} \eta}{\partial M}$

e

$-3.0861 \operatorname{sen}(M + 2D)$

$-186.5398 \operatorname{sen} M$

$-34.3117 \operatorname{sen}(M - 4D)$

ee'

$0.9490 \operatorname{sen}(M + M')$

$-1.4437 \operatorname{sen}(M + M' - 2D)$

$-0.2302 \operatorname{sen}(M - M' + 2D)$

$-1.1528 \operatorname{sen}(M - M')$

$0.2257 \operatorname{sen}(M - M' - 2D)$

e^2e'

$0.2076 \operatorname{sen}(2M + M')$

e^2

$-0.5666 \operatorname{sen}(2M + 2D)$

$-20.3314 \operatorname{sen}(2M)$

$0.6078 \operatorname{sen}(2M - 2D)$

$-0.7444 \operatorname{sen}(2M - 4D)$

$e\alpha_1$

$0.1093 \operatorname{sen}(M + D)$

e^3

$-1.8645 \operatorname{sen}(3M)$

$0.3561 \operatorname{sen}(3M - 2D)$

$e\gamma_c^2$

$0.7136 \operatorname{sen}(M - 2F)$

Coeficientes de $\dfrac{\partial \operatorname{sen} \eta}{\partial M'}$

Universitat de Barcelona Biblioteca Secció de Física

e'

$0.3000 \operatorname{sen}(M' + 2D)$

$0.3997 \operatorname{sen} M'$

$-1.9178 \operatorname{sen}(M' - 2D)$

$e'\alpha_1$

$-0.1494 \operatorname{sen}(M' + D)$

ee'

$0.9490 \operatorname{sen}(M + M')$

$-1.4437 \operatorname{sen}(M + M' - 2D)$

$0.2302 \operatorname{sen}(M - M' + 2D)$

$1.1528 \operatorname{sen}(M - M')$

$-0.2257 \operatorname{sen}(M - M' - 2D)$

e^2e'

$0.1038 \operatorname{sen}(2M + M')$

$0.1268 \operatorname{sen}(2M - M')$

Coeficientes de $\frac{\partial \operatorname{sen} n}{\partial F}$

γ_c^2

0.2104 sen(2F - 2D)

$e\gamma_c^2$

-1.4272 sen(M - 2F)

Coeficientes de $\frac{\partial \operatorname{sen} n}{\partial D}$

α_1

-56.4666 sen(2D)

e'

0.6000 sen(M′ + 2D)
3.8356 sen(M′ - 2D)

e^2

-0.5666 sen(2M + 2D)
-0.6078 sen(2M - 2D)
1.4888 sen(2M - 4D)

γ_c^2

-0.2104 sen(2F - 2D)

$e\alpha_1$

0.1093 sen (M + D)

e

-6.1722 sen(M + 2D)
68.6234 sen(M - 2D)
2.4032 sen(M - 4D)

α_1

0.9781 sen D

ee'

2.8874 sen(M + M′ - 2D)
-0.4604 sen(M - M′ + 2D)
-0.4514 sen(M - M′ - 2D)

$e'\alpha_1$

-0.1494 sen(M′ + D)

e^3

-0.2374 sen(3M - 2D)

Coeficientes de $\frac{\partial \operatorname{sen} n}{\partial e}$

e

56.2126 cos(M + 2D)
3397.7803 cos(M)
624.9799 cos(M - 2D)

e

10.9434 cos(M - 4D)

e^2

10.3205 cos(2M + 2D)
370.3319 cos(2M)
-11.0709 cos(2M - 2D)
13.5591 cos(2M - 4D)

$e\alpha_1$

-1.9909 cos(M + D)

$e\gamma_c^2$

-12.9381 sen(M - 2F)

ee'

-17.2858 cos(M + M')
26.2967 cos(M + M' 2D)
4.1930 cos(M - M' + 2D)
20.9980 cos(M - M')
-4.1111 cos(M - M' - 2D)

e^3

33.9614 cos(3M)
-6.4863 cos(3M - 2D)

e^2e'

-3.7814 cos(2M + M')
4.6193 cos(2M - M')

Coeficientes de $\frac{\partial \operatorname{sen} \eta}{\partial e'}$

e'

-17.9402 cos(M' + 2D)
-23.9024 cos(M')
114.6859 cos(M' - 2D)

$e'\alpha_1$

8.9342 cos(M' + D)

e'^2

10.9794 cos(2M' - 2D)

ee'

-56.7609 cos(M + M')
86.3343 cos(M + M' - 2D)
13.7661 cos(M - M' + 2D)
68.9383 cos(M - M')
-13.4970 cos(M - M' - 2D)

e^2e'

-6.2073 cos(2M + M')
7.5827 cos(2M - M')

Coeficientes de $\frac{\partial \operatorname{sen} \eta}{\partial \gamma_c}$

γ_c^2

-4.6873 cos(2F - 2D)

$e\gamma_c^2$

-31.7954 cos(M + D)

Cálculo de coeficentes de $\frac{\partial \operatorname{sen} \eta}{\partial \alpha_1}$

α_1 — $-390.0919 \cos D$

$e\,\alpha_1$ — $-43.5917 \cos(M + D)$

$e'\alpha_1$ — $59.5846 \cos(M' + D)$

Cálculo de coeficientes de $\frac{\partial \beta}{\partial M}$

$1010.698 \cos(M + F)$ $990.071 \cos(M - F)$

$-206.265 \cos(M - F - 2D)$ $-165.012 \cos(M + F - 2D)$

$123.759 \cos(2M + F)$

Cálculo de coeficentes de $\frac{\partial \beta}{\partial F}$

$18460.700 \cos(F)$ $1010.698 \cos(M + F)$

$-990.071 \cos(M - F)$ $-618.794 \cos(F - 2D)$

$206.265 \cos(M - F - 2D)$ $-165.012 \cos(M + F - 2D)$

$123.759 \cos(F + 2D)$

Cálculo de coeficientes de $\frac{\partial \beta}{\partial D}$

$1237.589 \cos(F - 2D)$

Cálculo de coeficientes de $\frac{\partial \beta}{\partial e}$

$18398.821 \operatorname{sen}(M + F)$ $18213.182 \operatorname{sen}(M - F)$

$-3630.261 \operatorname{sen}(M - F - 2D)$ $-3032.093 \operatorname{sen}(M + F - 2D)$

$2248.286 \operatorname{sen}(2M + F)$ $1155.083 \operatorname{sen}(2M - F)$

$598.168 \operatorname{sen}(M - F + 2D)$ $-556.915 \operatorname{sen}(2M + F - 2D)$

Cálculo de coeficientes de $\frac{\partial \beta}{\partial e'}$

$$-1773.877 \text{ sen}(M' + F - 2D) \quad -721.927 \text{ sen}(M' - F + 2D)$$
$$-556.915 \text{ sen}(M + M' - F - 2D)$$

Cálculo de coeficentes de $\frac{\partial \beta}{\partial \gamma_c}$

$$411292.023 \text{ sen}(F) \qquad 22503.490 \text{ sen}(M + F)$$
$$22276.599 \text{ sen}(M - F) \qquad -13902.248 \text{ sen}(F - 2D)$$
$$-4434.693 \text{ sen}(M - F - 2D) \qquad -3712.766 \text{ sen}(M + F - 2D)$$
$$2619.563 \text{ sen}(F + 2D) \qquad 1381.9742 \text{ sen}(2M + F)$$
$$742.553 \text{ sen}(M - F + 2D) \qquad 701.300 \text{ sen}(2M - F)$$
$$-660.047 \text{ sen}(M' + F - 2D)$$

BIBLIOGRAFIA

Asteriadis, G. 1975, "Determination of precession and galactic rotation from the proper motions of the AGK3". Diss. Naturwiss. Gesamtfakultät Ruprecht-Karl Univ. Heidelberg.

Atkinson, R. 1951, "The Computation of Topocentric Librations". M.N.R.A.S 111, 448.

Brouwer, D. y Clemence, G.M. 1961, "Methods of Celestial Mechanics". Academic Press. New York.

Brown, E.W. 1908, "Tables of the Moon". New Haven.

Bureau International de l'Heure, 1978, "Annual Report". Paris.

Calafat, R. 1977, "Ocultaciones rasantes de estrellas por la Luna". Cátedra de Astronomía. Universidad de Barcelona.

Chauvenet, W. 1908, "Spherical and Practical Astronomy". J.B. Lippincott. Philadelfia.

Clemence, G.M. 1948, "On the System of Astronomical Constants". A.J 53, 169.

Danjon, A. 1959, "Astronomie General". J&R Sennac. París.

Diekvoss, W. 1967, "Solar motion and galactic rotation terms from AGK3 proper motions". Astron. Nachr. 290, 141.

Emerson, B. 1973, "A method of calculating apparent places of Stars". Royal Greenwich Observatory Bulletins 178, Appendix II.

Fatchikin, N.V. 1970, "Some determinations at Pulkovo of absolute stellar proper motions relative to galaxies". Sov. Astron. - A.J 14, 495.

Fischer, I. 1968, "A modification of Mercury Datum Fischer 1968" Technical Report nº 67. Army Map Service.

Fotheringham, J.M. 1909, "The Eclipse of Hipparcus". M.N.R.A.S 69, 204.

Fricke, W. 1967, "Precession and galactic rotation derived from fundamental proper motions of distant stars". A.J 72, 1368.

Fricke, W. 1978, "Basic material for determination of precession and of galactic rotation and a Rewiew of methods and results". Astronomisches Rechen Institut Veroff. 28.

Guinot, B. 1966, "La methode des hauteurs égales dans l'Astronomie". Cours et document de Mathématique et de Phisique. Observatoire Paris.

Heiskanen, W.A y Moritz, H. 1967, "Phisical Geodesy". W.H Freman&Company. San Francisco.

Hoffleit, D. 1964, "Catalogue of Bright Stars". Yale Univ.

I.B.M Aplication Programs 1970, "System 360/ Scientific Subroutine Package. IBM Corporation Technical.

Jenkins, L.F. 1952, "General Catalogue of Trigonometric Stellar Paralaxes". New Haven.

Lieske, L.H, Lederle, T., Fricke, W., Morando, B. 1977, "Expression for the Precession Quantities Based upon the IAU (1976) System of Astronomical Constants". Astron. Astrophys. 58, 1.

Markowitz, M.Z. 1980, "Dinamical Time". Mc Graw-Hill. Encyclopedy of Science and Technology.

Martin, C.F. 1969, "A Study of the Rate of Rotation of the Earth from occultations of stars by the Moon 1627-1860". Tesis doctoral. Yale Univ.

Morgan, H.R., Oort, J.H. 1951, "A new determination of the precession and the constants of galactic rotation". Bull.Astron.Inst.Neth. 11, 379.

Morrison, L.V. 1969, "An analysis of Lunar occultations 1960-1966". M.N.R.A.S. 144, 129.

Morrison, L.V., Martin, R.J. 1971, "A digitized version of C.B. Watts Charts of the Marginal zone of the Moon". The Moon 2, 463.

Morrison, L.V. 1972, "The secular accelerations of the Moon's orbital motion and the Earth's rotation". The Moon 5, 253.

Morrison, L.V., Ward, C.G. 1975, "An analysis of the Transits of Mercury 1677-1973", M.N.R.A.S. 173, 183.

Morrison, L.V. 1978, "Catalogue of Observations of Occultations of Stars by the Moon for the years 1943 to 1971". Royal Greenwich Observatory Bulletins 183.

Morrison, L.V. 1979, "An analysis of Lunar Occultations in the years 1943-1974 for corrections to the constants Brown's theory, the right ascension system of the FK4 and Watts lunar profile datum". M.N.R.A.S. 187, 41.

Mueller, I. 1964, "Introduction to satellite Geodesy". Frederick Ungar Publis. New York.

Murray, C.A. 1957, "The secular acceleration of the Moon and Lunar tidal couple". M.N.R.A.S. 117, 478.

Nautical Almanac Office H.M. 1954, "Improved Lunar Ephemerides". London: Stationery Office.

Nautical Almanac Office H.M. 1958, "Planetary Coordinates for the years 1960-1980". London: Stationery Office.

Nautical Almanac Office H.M. 1974, "Explanatory Supplement to the American Ephemerides and Nautical Almanac". London: Stationery Office.

Newcomb, S. 1898, "Tables of the Sun". Astr. Pap. Vol 6. Part I y II. Washington.

Newcomb, S. 1912, "Researches on the motion of the Moon (Part II). Astr. Pap. Vol 9. Part I. Washington.

Newton, R.R. 1970, "Ancient Astronomical Observations and tidal accelerations of the Earth and Moon". John Hoppins Press. London.

Núñez, J. 1976, "Determinación del campo galáctico de velocidades a partir de la corrección de la constante de la precesión". Cátedra de Astronomía. Universidad de Barcelona.

Orús, J.J. de 1966, "Apuntes de Astronomía". Cátedra de Astronomía. Universidad de Barcelona.

Oesterwinter C., Cohen C.J. 1972, "New orbital elements for the Moon and Planets". Cel. Mechanics. 5, 317.

PERTH70 1976, "A Catalogue of positions of 24200 Stars". Abhandlungen aus der Hamburger Sternwarte. Hamburg

Porter, J.C., Sadler, D.H. 1953, "The accurate calculation of Apparent Places of Stars". M.N.R.A.S. 113, 455.

Pujol, L. 1975, "Corrección de coordenadas geodésicas mediante el análisis de ocultaciones de estrellas por la Luna". Actas de la I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica.

Polozhentsev, D.D. 1979, "Parameters of Solar motions, Galactic rotation and corrections to the precession constant in the system of proper motions in right ascension of the

General Catalogue for the Southern Hemisphere".Ann. Obs. Tartu, 137

Rakninov, A.G. 1978, "Research of the Tashkent Catalogue of proper motions of stars with reference to galaxies". Tr. Astron. Inst. Tashkent 2, 59.

Rius, A. 1974, "Análisis tridimensional del campo galáctico de velocidades en el entorno del Sol". Tesis doctoral. Cátedra de Astronomía. Universidad de Barcelona.

Rosselló, G. 1976, "Determinación de las coordenadas geodésicas mediante observación de ocultaciones de estrellas por la Luna". Cátedra de Astronomía. Universidad de Barcelona.

Salazar, A. 1979, "Correcciones al datum de Watts mediante ocultaciones de estrellas por la Luna". Cátedra de Astronomía. Universidad de Barcelona.

Simó, C. 1972, "Elementos de cálculo numérico y estadística". Cátedra de Astronomía. Universidad de Barcelona.

Spencer Jones, H. 1932, "Discussion of Observations of Occultations of stars by the Moon 1672-1908". Ann. Cape Observatory, Vol I, III, VIII, XIII.

Thüring, B. 1975, "New determination of the precession by the principle of the maximum set of stars without proper motion". Astron. Nachr. 296, 83.

Van Flandern, T.C. 1969, "A discussion of 1950-1968 Occultations of Stars by the Moon". Tesis doctoral. Yale Univ.

Van Flandern, T.C. 1970, "The secular acceleration of the Moon". A.J 75, 657.

Van Flandern, T.C. 1971a, "Notes on Equinox motion and corrections to precession". Cel. Mechanics 4, 182.

Van Flandern, T.C. 1971b, "Precission Timing of Occultations". Comunicación privada.

Van Flandern, T.C. 1975, "A determination of the rate of change of G". M.N.R.A.S. 170, 333.

Vasilevskis, S., Klemola, A.R. 1971, "On determination of correction of precession from stellar proper motions". A.J. 76, 508.

Vasilevskis, S., McNamara, B.J. 1973, "On determination of the correction to precession". A.J. 78, 639.

Watts, C.B. 1963, "The marginal zone of the Moon". Astr. Pap. Vol XVII. Washington.

Wilson, R.E. 1953, "General Catalogue of Stellar Radial Velocity". Papers of Mt. Wilson Obs. VIII. Washington.

Woolard, E.W. 1953, "Theory of rotation of the Earth around its center of mass". Astr, Pap. XV part I. Washington

UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Leida esta Memoria el día diecisiete de enero de 1981 en la Facultad de Física, ante el siguiente Tribunal:

PRESIDENTE

VOCALES

José Mª Codina

A. Catalán

fué calificada de "Sobresaliente-cum laude"