

**UNIVERSITAT
JAUME I**

ANÁLISIS DE LA DISTANCIA
EXTRÍNSECA EN UNA SUBVARIEDAD Y
APLICACIONES

MEMORIA PRESENTADA POR:
ANTONIO ESTEVE SISCAR

DIRIGIDA POR EL DOCTOR:
VICENTE PALMER ANDREU

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR

CASTELLÓN, NOVIEMBRE DE 2012

Dedicado a Cristina y Pablo

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mi familia por haberme ayudado en esta tarea y haber soportado con amabilidad y cariño los sinsabores de la misma. También a mi Director de Tesis por haber confiado en mí, por su ayuda inestimable y gran generosidad.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Análisis de la distancia extrínseca	2
1.2. Parabolicidad e Hiperbolicidad de una (sub)variedad	3
1.3. Desigualdad de Chern-Osserman	6
1.4. Conclusión	8
2. Preliminares	11
2.1. Variedades con polo. Bolas extrínsecas. Espacios modelo.	12
2.1.1. Contexto y restricciones sobre la curvatura	12
2.1.2. Productos alabeados (<i>warped products</i>) y espacios modelo	15
2.2. Análisis del Hessiano	21
2.2.1. Fórmulas de la primera y la segunda variación de la energía. Forma índice	21
2.2.2. Comparación de Hessianos en variedades ambiente	23
2.2.3. Análisis del Hessiano y del Laplaciano en subvariedades	33
2.3. Desigualdades isoperimétricas. Variedades de tipo topológico finito	39
2.3.1. Espacios de comparación isoperimétrica. Monotonía del crecimiento del volumen.	39
2.3.2. Característica de Euler de variedades orientables compactas con borde	47
2.3.3. Topología de tipo finito. Teorema de Huber	49
2.3.4. Fórmula de la co-área	54
3. Parabolicidad de una variedad	57
3.1. Introducción	58
3.2. Preliminares	59
3.2.1. Capacidad	59
3.2.2. Variedades parabólicas e hiperbólicas	64
3.2.3. Criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden	65
3.3. Condiciones necesarias para la parabolicidad e hiperbolicidad	66
3.4. Corolarios de los Teoremas	69

3.5. Demostración de las partes (A) de los Teoremas 3.3.7 y 3.3.9	74
3.6. Demostración de las partes (B) de los Teoremas 3.3.7 y 3.3.9	78
4. Desigualdad de Chern-Osserman	81
4.1. Introducción	82
4.2. Preliminares	83
4.3. Desigualdad de Chern-Osserman para superficies minimales en una variedad Cartan-Hadamard	90
4.3.1. Demostración del apartado 1	90
4.3.2. Demostración del apartado 2	94
4.4. La desigualdad de Chern-Osserman para superficies no minimales en una variedad de Cartan-Hadamard	98
4.4.1. Demostración del apartado 1	99
4.4.2. Demostración del apartado 2	105

1

Introducción

1.1. Análisis de la distancia extrínseca	2
1.2. Parabolicidad e Hiperbolicidad de una (sub)variedad	3
1.3. Desigualdad de Chern-Osserman	6
1.4. Conclusión	8

1.1. Análisis de la distancia extrínseca

Si queremos estudiar la estructura geométrica de una variedad Riemanniana podemos hacerlo investigando las propiedades analíticas de las funciones definidas en ella. Estas funciones provienen de ecuaciones diferenciales planteadas a través de operadores diferenciales (como el Laplaciano) que se relacionan con la estructura de la variedad.

Como ejemplo principal tenemos la función distancia (desde un punto fijado o desde una hipersuperficie). Como puede verse en el trabajo clásico de R. E. Greene y H. Wu [18], cotas inferiores sobre las curvaturas seccionales (o la curvatura de Ricci) de una variedad determinan cotas superiores del Hessiano (o Laplaciano) de la función distancia. Por tanto construir funciones que sólo dependen de la distancia (resolviendo, por ejemplo, ecuaciones en derivadas parciales elípticas en espacios rotacionalmente simétricos) nos da un control sobre el Hessiano y el Laplaciano de dichas funciones.

Este control nos permite relacionar las cotas de las curvaturas con la existencia de funciones armónicas (o subarmónicas) acotadas y no constantes definidas en toda la variedad. Es decir, por ejemplo, podemos relacionar la curvatura de una variedad con su carácter parabólico o hiperbólico.

Debemos notar que estas propiedades teóricas nos proporcionan, a través de información estrictamente geométrica, una descripción analítica de fenómenos físicos o probabilísticos como el movimiento Browniano definido en una variedad. O también su conductividad eléctrica si suponemos que la variedad se construye con un material conductor.

El vínculo que une estos conceptos es el llamado criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden (véanse [19] y [33]).

Nuestro objetivo es el estudio de algunas propiedades teóricas de la teoría de funciones (y teoría potencial) de una subvariedad P propiamente inmersa en una variedad Riemanniana N que posee al menos un polo. Su existencia es suficiente para que en N pueda definirse la distancia desde el polo a cualquier punto de la variedad y establecer un criterio que decida si la subvariedad es hiperbólica o parabólica.

Las técnicas usadas son las del análisis geométrico de la función distancia en la subvariedad, relacionando el Hessiano con la curvatura tal como se estableció en el Teorema de Greene y Wu en [18]. También se controla el Laplaciano, usando el análisis del Hessiano y su relación con el índice, de algunas funciones concretas a través de las curvaturas intrínsecas de N y las curvaturas extrínsecas de P en N . Todo esto con la finalidad de asegurar la parabolicidad o hiperbolicidad de P .

La conclusión es que las curvaturas extrínsecas de la subvariedad (su curvatura media) determina en gran medida algunas de las propiedades de las funciones.

Por otra parte, la distancia extrínseca definida en una superficie S , no acotada, propiamente inmersa en la variedad Riemanniana N con un polo, nos permite (con ciertas condiciones que se traducen en la ausencia de puntos críticos fuera de un compacto $K \subset S$) deducir cuestiones topológicas de S . Concretamente, bajo dichas hipótesis, pue-

de concluirse que la topología S se encuentra reducida al citado compacto K , ya que $S - K$ no es más que una unión de cilindros.

1.2. Parabolicidad e Hiperbolicidad de una (sub)variedad

Como hemos comentado anteriormente, podemos, a través del estudio analítico de la función distancia, determinar si una variedad (o subvariedad inmersa en una variedad con curvatura controlada) es parabólica o no. En primer lugar definamos variedad parabólica:

Una variedad Riemanniana M^n se denomina parabólica si no admite una función de Green positiva y finita.

Una variedad es hiperbólica si no es parabólica. Es decir, es hiperbólica si admite funciones de Green positivas y finitas.

Esta definición es sólo una de las posibles, concretamente es la usada en [32].

No obstante, en el artículo [33], T. Lyons y D. Sullivan establecen una serie de condiciones equivalentes a la hiperbolicidad. Es el llamado *criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden*.

En él se establece que la hiperbolicidad de una variedad Riemanniana M equivale a que:

- (a) **M admita una función superarmónica positiva y no constante (o equivalentemente, admita una función subarmónica no constante y acotada).**

Esta condición entronca con el análisis armónico, su enfoque puede estudiarse en [19] y se relaciona con la propiedad de Liouville. El clásico Teorema de Liouville asegura que toda función acotada y armónica definida en \mathbb{R}^n debe ser constante. Se dice que una variedad Riemanniana completa M cumple la propiedad de Liouville cuando cada función armónica y acotada definida en ella es constante. Por tanto las variedades parabólicas satisfacen la propiedad de Liouville. Desde este punto de vista el estudio de la parabolicidad e hiperbolicidad de variedades Riemanniana abarca el estudio del comportamiento geométrico cuando el Teorema de Liouville se cumple.

- (b) **M tenga capacidad positiva, es decir que exista un conjunto precompacto no vacío $D \subset M$ tal que $\text{Cap}(D, M) > 0$.**

Puede verse la relación de esta aseveración con la Teoría Potencial y del Electromagnetismo. Para verlo supongamos que una variedad Riemanniana M se fabrica con material conductor de la electricidad y consideremos que tenemos un capacitor (almacenador de energía eléctrica) compacto K de M , incluido en un dominio precompacto $\Omega \subseteq M$. Ahora imaginemos que se establece una diferencia de potencial igual a 1 entre las fronteras ∂K y $\partial\Omega$. Entonces el flujo de corriente de

electricidad que entra en $\Omega - K$ a través de ∂K está dado por la *capacidad de K* en Ω . Puede probarse que esta condición (b) implica que M es parabólica sii tiene capacidad nula, es decir existe un abierto precompacto no vacío $D \subseteq M$ tal que $Cap(D, M) = 0$.

(c) El movimiento Browniano en M sea transitorio.

Es decir que para todo conjunto abierto y precompacto no vacío Ω se tiene que, dado $x \in \Omega$ y dada una partícula Browniana que inicia su movimiento en x ésta dejará con probabilidad 1. El movimiento Browniano es el movimiento irregular de partículas microscópicas suspendidas en un líquido causado por las colisiones que experimentan estas partículas con las moléculas del líquido. Se trata de un fenómeno de naturaleza estocástica que fue descrito ya por el sacerdote y botánico R. Brown en 1828.

Encontrar una descripción geométrica de la parabolicidad (o hiperbolicidad) de una variedad Riemanniana es una cuestión central dentro de la teoría de funciones de variedades de Riemann. Dos trabajos en donde se desarrolla esta tarea son [19] y [32]. Esta descripción se puede considerar como una caracterización, como una condición sólo suficiente o como una condición sólo necesaria. La geometría involucrada abarca conceptos como el crecimiento del volumen de la variedad o la acotación de su curvatura de Ricci o seccional (véanse [1], [9], [19], [25], [26], [53] o, más recientemente, [20]).

Un intento inicial de obtener una descripción geométrica de la parabolicidad se dio en 1935. L.V. Ahlfors probó (ver [1]) que una superficie M^2 rotacionalmente simétrica es parabólica sii la integral $\int_0^\infty \frac{1}{\text{vol}(S_r)}$ es divergente, siendo S_r la esfera geodésica de radio r en M^2 . Basándose en este resultado, J. Milnor obtuvo (véase [42]) un criterio para determinar la parabolicidad/hiperbolicidad de una superficie completa rotacionalmente simétrica a través de la curvatura de Gauss. P. G. Doyle, demostró (véase [13]) cómo puede extenderse este criterio a superficies completas que tienen un sistema de coordenadas polares, es decir superficies con un polo.

Este resultado de Ahlfors fue generalizado por varios autores (véase por ejemplo [19]) a espacios rotacionalmente simétricos con dimensión mayor que 2. Son los llamados espacios modelo que se presentan en nuestro trabajo. De esta forma tenemos el siguiente Teorema (véanse [1] y [19])

Teorema (Ahlfors) *Sea M_w^n un espacio modelo completo y no compacto. Entonces M_w^n es parabólico (hiperbólico) sii*

$$\int_\rho^\infty \frac{dr}{w^{n-1}(r)} = \infty \quad (< \infty), \text{ respectivamente,}$$

donde el volumen de las esferas geodésicas S_r^w de M_w^n está dado por $\text{Vol}(S_r^w) = w^{n-1}(r)$.

Finalmente, K. Ichihara, demostró (ver [25]) que una variedad Riemanniana completa y conexa es parabólica si su curvatura de Ricci está acotada inferiormente por la curvatura de un espacio modelo que satisface la condición de Ahlfors sobre la divergencia de la integral anterior. Es hiperbólica si sus curvaturas seccionales están acotadas superiormente por la curvatura de un espacio modelo que satisfaga la condición de Ahlfors de convergencia de la integral mencionada.

Pretendemos dar una interpretación geométrica sobre la caracterización de la parabolicidad e hiperbolicidad de una variedad (o superficie).

Esta caracterización geométrica puede arrojar luz sobre algunos aspectos de la parabolicidad e hiperbolicidad de las superficies minimales en \mathbb{R}^3 . En su trabajo [39], S. Markvorsen y V. Palmer probaron que las subvariedades minimales P^m propiamente inmersas en una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard N con curvaturas seccionales acotadas superiormente por una constante b ($K^N \leq b$) son hiperbólicas si: o bien $b < 0$ y $m \geq 2$ o bien $b = 0$ y $m \geq 3$.

Hay que tener en cuenta que las superficies minimales en \mathbb{R}^3 están excluidas de este resultado (en general superficies minimales en \mathbb{R}^n). Por ejemplo, mientras la catenoide es parabólica la superficie de Scherk doblemente periódica (o la triplemente periódica superficie \mathcal{P} de Schwarz) son hiperbólicas. Sin embargo las superficies minimales en el 3-espacio hiperbólico son todas hiperbólicas como hemos comentado.

Para explicar este comportamiento se introdujo en [36] el concepto de radialidad. Este concepto de radialidad significa lo siguiente:

Si suponemos que el polo o de N también se encuentra en P (la demostración de los resultados es independiente de este hecho) y si P es totalmente geodésica entonces $\nabla^N r = \nabla^P r$ en todos los puntos y , por tanto, $\|\nabla^P r\| = 1$. Por otra parte, si P no es totalmente geodésica, dado el punto de partida $o \in P$ desde el que se miden las distancias, sabemos que $\nabla^N r(o) = \nabla^P r(o)$ (luego $\|\nabla^P r(o)\| = 1$). Por tanto, en cierta forma, la diferencia $1 - \|\nabla^P r(q)\|$ cuantifica el desvío radial de la subvariedad P respecto a la variedad ambiente N .

Para el control de este desvío se definen los conceptos de tangencia radial y curvatura media radial con el que se conforman parte de las hipótesis de los resultados.

Como ejemplo de estos resultados tenemos el siguiente Teorema:

Teorema: *Sea N^n una variedad Riemanniana y P^m subvariedad completa propiamente inmersa en N cumpliendo*

$$(1.2.1) \quad \begin{aligned} &K_{o,N}(\sigma_x) \leq b < 0 \\ &-\langle H^P, \nabla^N r \rangle_x \leq h(r(x)) \leq \sqrt{-b} \coth \sqrt{-b} r(x) \end{aligned}$$

para todo x con $r(x) > \rho$.

Si

$$(1.2.2) \quad \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{2 \int_{\rho}^t h(r) dr}}{\sinh \sqrt{-b} t} dt < \infty,$$

entonces P^m es hiperbólica.

Este Teorema se deduce fácilmente del Teorema 3.3.9.

Como puede observarse al comparar este resultado con el de Ahlfors, se considera en sentido amplio un espacio modelo con función de alabeo

$$W(t) = \frac{\sinh \sqrt{-bt}}{\sqrt{-b}e^{-2\int h(r)dr}}$$

que nos sirve para controlar tanto la curvatura del espacio ambiente como la curvatura media de la subvariedad. Este espacio modelo se utilizará también en el siguiente capítulo.

1.3. Desigualdad de Chern-Osserman

La curvatura de una variedad tiene influencia en su topología. Como punto de partida de esta cuestión podemos citar el Teorema de Gauss-Bonnet (1848): Si S es una 2-variedad compacta y orientada entonces

$$\int_S K_G d\sigma = 2\pi\chi(S),$$

donde $\chi(S)$ es el invariante topológico conocido como la característica de Euler. A la integral de la curvatura de Gauss (K_G) se le llamará curvatura total.

Posteriormente se generalizó a variedades compactas y orientables de dimensión par (véase [17])

En cuanto a superficies no acotadas, en 1935, S. Cohn-Vossen estableció que: sea S una variedad 2-dimensional, completa y con curvatura total finita ($\int_S K^S d\sigma < \infty$) entonces:

$$\int_S K^S d\sigma \leq 2\pi\chi(M).$$

En 1957, A. Huber demostró (ver [23]) que: Si S es una variedad 2-dimensional completa, conexa y orientable con curvatura total finita entonces

$$\chi(S) \neq -\infty,$$

y, además, la superficie es de topología finita.

En 1967, S. S. Chern y R. Osserman (ver [10]) demuestran para una superficie S minimal y propiamente inmersa en \mathbb{R}^n , y usando técnicas de Análisis Complejo, la relación entre curvatura total y su característica de Euler. Si S es una superficie minimal, orientable y propiamente inmersa en el espacio Euclídeo, con curvatura total finita, entonces:

$$-\chi(S) \leq -\frac{1}{2\pi} \int_S K^S d\sigma - (\text{n}^\circ \text{ finales})$$

L.P Jorge y W. Meeks III (ver [28]), en 1983, demostraron que la desigualdad anterior es, en realidad, una igualdad. Además identificaron el número de finales con el crecimiento de $\frac{\text{Vol}(D_r)}{\text{Vol}(B_r^{0,2})}$. Este cociente representa el crecimiento del volumen de las bolas extrínsecas de la superficie con respecto a las esferas en el Euclídeo.

A este respecto B. White (ver [54]) demostró más adelante (1987) su propia versión de este Teorema para superficies en \mathbb{R}^3 y aseguró que basta tener la integral de la parte negativa de la curvatura finita para concluir que S tiene topología finita. Más aún: la superficie es homeomorfa a una superficie compacta en donde se han quitado una cantidad finita de puntos (llamados finales de la superficie, realmente son las antiimágenes de entornos de dichos puntos mediante el homeomorfismo).

En 1984, M.T. Anderson demostró (ver [3]) el mismo resultado pero para subvariedades minimales. Anderson impuso la hipótesis

$$\int_P \|A^P\|^m d\sigma < \infty$$

en vez de curvatura total finita (en el caso de una superficie minimal propiamente inmersa en \mathbb{R}^n ambas son equivalentes), siendo A^P la segunda forma fundamental de P en \mathbb{R}^n y $\|A^P\|$ su norma de Hilbert-Schmidt.

En este contexto histórico, Qing Chen y Yi Cheng (véanse [7] y [8]) demostraron en 1999 mediante la siguiente desigualdad de tipo Chern-Osserman para superficies minimales, completas, propiamente inmersas en $\mathbb{H}^n(b)$ y con curvatura extrínseca finita $\int_S \|A^S\|^2 d\sigma < \infty$:

$$-\chi(S) \leq \frac{1}{4\pi} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma - \text{Sup}_{r>0} \frac{\text{Vol}(S^2 \cap B_r^{b,n})}{\text{Vol}(B_r^{b,2})}.$$

donde $B_r^{b,n}$ denota la r -bola geodésica en $\mathbb{H}^n(b)$ y $\frac{\text{Vol}(S^2 \cap B_r^{b,n})}{\text{Vol}(B_r^{b,2})}$ es el crecimiento del volumen de los dominios $S^2 \cap B_r^{b,n}$ (las bolas extrínsecas) con respecto a πr^2 .

En este trabajo demostramos una desigualdad similar para superficies minimales completas con curvatura extrínseca finita $\int_S \|A^S\|^2 d\sigma < \infty$ propiamente inmersas en una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard N con curvaturas seccionales acotadas superiormente por una cantidad negativa $b < 0$. Si denotamos como $K^N|_S$ a las curvaturas N -seccionales de los planos tangentes $T_p S$, tenemos $\int_S (b - K^N|_S) d\sigma < \infty$. Es decir, la variedad N , fuera de un compacto, no está curvada en demasía con respecto a $\mathbb{H}^n(b)$. Un ejemplo de estas variedades son las variedades asintóticamente hiperbólicas.

Bajo estas hipótesis la topología de la superficie S es finita y la desigualdad en este caso (véase Teorema 1.1 en [14]) es:

$$(1.3.1) \quad -\chi(S) \leq \frac{1}{2\pi} \int_S (b - K^N|_S) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma - \text{Sup}_{r>0} \frac{\text{Vol}(S^2 \cap B_r^N)}{\text{Vol}(B_r^{b,2})}.$$

donde B_r^N denota la r -esfera geodésica en el espacio ambiente N .

Una pregunta aparece en este contexto relacionada con la minimalidad de la superficie S : ¿se puede demostrar la finitud de la topología de una superficie que no necesariamente es minimal en una variedad de Cartan-Hadamard y, además, poder establecer una desigualdad de tipo Chern-Osserman? Es oportuno referirse a [54], donde se demuestra la finitud de la topología para superficies no necesariamente minimales en el espacio Euclídeo \mathbb{R}^n .

En la parte final de este trabajo mostramos una respuesta parcial a esta cuestión. Consideramos una superficie S completa propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard N con sus curvaturas seccionales K^N acotadas superiormente por una constante $b < 0$. Como en [14], suponemos que $\int_S \|A^S\|^2 d\sigma < \infty$ y que $\int_S (b - K^N) d\sigma < \infty$. Por otra parte suponemos que la curvatura media de S en N , H^S , está controlada por una función radial $h(r)$ (que depende sólo de la distancia de a un punto fijado $o \in N$, polo de la variedad) y su curvatura media total $\int_S \|H^S\| d\sigma$ es finita. Entonces obtenemos una desigualdad de tipo Chern-Osserman, demostrando que la topología de estas superficies no minimales es finita y generalizando los resultados de [7], [8] y [14].

En ambos casos, minimal y no minimal, las desigualdades isoperimétricas en las que se basan son aplicación del Teorema de la divergencia y el Teorema de comparación del operador Laplaciano que proviene del análisis del Hessiano para variedades con un polo. Estos resultados pueden consultarse en [18], [35] y [48].

Es particularmente interesante la estimación de la característica de Euler de una superficie propiamente inmersa

$$-\chi(S) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} (-\chi(D_t))$$

para una adecuada sucesión exhaustiva de S mediante bolas extrínsecas conexas $\{D_t\}_{t>0}$.

La demostración de este resultado está basado en la demostración del Teorema de Huber dada por White en [54]. Este resultado es clave y nos permite proceder de la misma forma que en [7] y [8] aunque nuestra variedad ambiente no sea de curvatura constante.

1.4. Conclusión

Los capítulos 3 y 4 constatan la fuerza de las herramientas usadas. En ambos casos se consiguen mejores resultados gracias a espacios modelo de comparación especialmente adaptados a las hipótesis sobre las curvaturas. Es decir, se construye un espacio modelo $M_W = [0, +\infty) \times_W S_1^{0,n-1}$ donde la función de alabeo $W(r)$ incluye los ingredientes necesarios (cota de la curvatura media de la subvariedad y, en su caso, cota de tangencia radial) para obtener los resultados deseados.

Estos espacios de comparación, que pueden consultarse más extensamente en [36] por ejemplo, son uno de los vínculos de los capítulos 3 y 4.

Otro vínculo es el teorema de comparación del Hessiano y Laplaciano debidos a Greene y Wu. Originalmente (véase [18]) este teorema imponía condiciones sobre las dimensiones de las variedades. En el capítulo 2 se demuestra el Teorema de Greene-Wu suprimiendo esta condición.

Por otra parte el estudio de la función distancia extrínseca y la forma en la que crece el volumen de las esferas geodésicas nos permitirán estudiar la estructura geométrica de la subvariedad.

2

Preliminares

2.1. Variedades con polo. Bolas extrínsecas. Espacios modelo.	12
2.1.1. Contexto y restricciones sobre la curvatura	12
2.1.2. Productos alabeados (<i>warped products</i>) y espacios modelo	15
2.2. Análisis del Hessiano	21
2.2.1. Fórmulas de la primera y la segunda variación de la energía. Forma índice	21
2.2.2. Comparación de Hessianos en variedades ambiente	23
2.2.3. Análisis del Hessiano y del Laplaciano en subvariedades	33
2.3. Desigualdades isoperimétricas. Variedades de tipo topológico finito	39
2.3.1. Espacios de comparación isoperimétrica. Monotonía del crecimiento del volumen.	39
2.3.2. Característica de Euler de variedades orientables compactas con borde	47
2.3.3. Topología de tipo finito. Teorema de Huber	49
2.3.4. Fórmula de la co-área	54

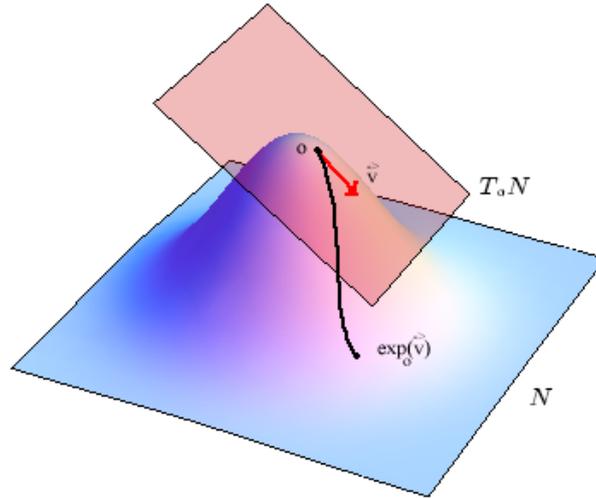
2.1. Variedades con polo. Bolas extrínsecas. Espacios modelo.

2.1.1. Contexto y restricciones sobre la curvatura

A lo largo de esta memoria consideramos $\varphi : P^m \rightarrow N^n$ una inmersión isométrica y propia, siendo N^n una variedad Riemanniana completa. Identificaremos (localmente) $P \equiv \varphi(P)$ y $x \equiv \varphi(x)$, $\forall x \in P$. Llamamos a P subvariedad de N .

Comenzamos definiendo polo en una variedad Riemanniana.

Definición 2.1.1 (Véase [18]) *Dada una variedad Riemanniana N y $o \in N$, diremos que el punto o es un polo de N si y sólo si la aplicación exponencial $\exp_o : T_o N^n \rightarrow N^n$ es un difeomorfismo.*



Nota 2.1.2 *En [12] y [50] se define polo como aquel punto o que no posee puntos conjugados a lo largo de ninguna geodésica partiendo de él. El Teorema de Cartan-Hadamard afirma que si M es una variedad Riemanniana completa y simplemente conexa y o es un polo, definido como en [12], entonces la aplicación exponencial \exp_o es un difeomorfismo. Es decir, o es un polo tal como se ha definido en 2.1.1.*

Teorema 2.1.3 (Cartan-Hadamard) (Véase [12], p.149) *Sea N variedad Riemanniana completa (es decir cualquier geodésica puede extenderse al intervalo $[0, +\infty)$) cumpliendo $\bar{K}_\sigma \leq 0$, para cualquier plano σ . Sea $o \in N$, entonces \exp_o es regular (su diferencial es de rango máximo en todos los puntos). Más concretamente, si N es simplemente conexa entonces o es un polo y la variedad N es difeomorfa a \mathbb{R}^n mediante el difeomorfismo $\exp_o : T_o N \approx \mathbb{R}^n \rightarrow N$ tal que $\exp_o(v) = \gamma_v(1)$, donde γ_v es la geodésica que cumple $\gamma_v(0) = o$ y $\gamma'_v(0) = v$.*

Definición 2.1.4 (Véase [18], página 16) Para cada $x \in N^n \setminus \{o\}$ definimos $r(x) = \text{dist}_N(o, x)$, y esta distancia se calcula con la longitud de la única geodésica desde o hasta x , que es la geodésica radial desde o .

Denotaremos por r también a la restricción $r|_P : P \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$. Esta restricción se denomina función distancia extrínseca desde o en P^m .

Los gradientes de r en N y P se denotarán por $\nabla^N r$ y $\nabla^P r$, respectivamente. Notemos que $\nabla^P r(x)$ es la componente tangencial en P de $\nabla^N r(x)$, $\forall x \in P$. Se cumple siguiente relación:

$$\nabla^N r = \nabla^P r + (\nabla^N r)^\perp,$$

donde $(\nabla^N r)^\perp(x)$ es perpendicular a $T_x P$ para todo $x \in P$.

Recordemos que

Definición 2.1.5 (Segunda forma fundamental) Sea P una subvariedad de N , variedad Riemanniana. Definimos A^P la segunda forma fundamental de la subvariedad P en N como

$$(2.1.1) \quad A^P(X, Y) = \nabla_X^N Y - \nabla_X^P Y = (\nabla_X^N Y)^\perp, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(P).$$

Definición 2.1.6 (Véase [5]) Sea $\gamma : I \rightarrow S$, una curva diferenciable en una superficie S . Definimos la curvatura geodésica de γ como

$$(2.1.2) \quad k_g = \frac{\left\langle \nabla_{\gamma'} \gamma', \frac{\iota \gamma'}{\|\gamma'\|} \right\rangle}{\langle \gamma', \gamma' \rangle}$$

donde ι es el giro de un vector $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Vamos a empezar el estudio del comportamiento de las soluciones de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias definidas en un tipo de dominios que se construyen utilizando la distancia extrínseca. Estos dominios son las llamadas bolas extrínsecas.

Definición 2.1.7 (Véanse [21] y [46]) Sea P subvariedad propiamente inmersa en una variedad Riemanniana N . Definimos bola métrica extrínseca de radio R y centro o como:

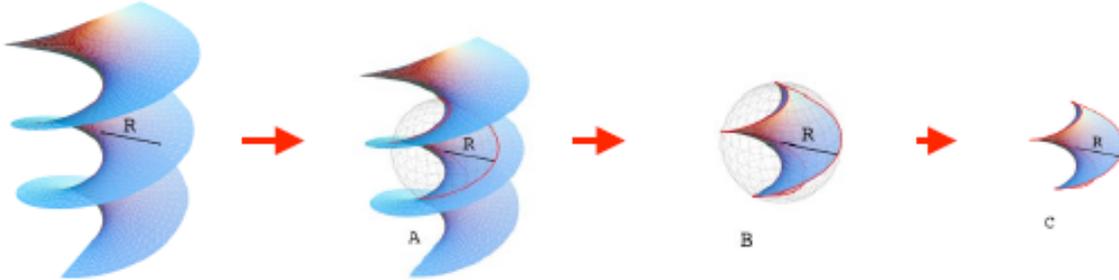
$$D_R(o) = B_R^N(o) \cap P = \{x \in P : r(x) < R\},$$

donde $B_R^N(o)$ denota la bola geodésica abierta de radio R y centro el polo o en N^n . Definimos el anillo extrínseco en P^m para $\rho < R$, centrado en o como:

$$A_{\rho, R}(o) = D_R(o) \setminus \bar{D}_\rho(o),$$

donde ahora $D_R(o)$ es la componente conexa de $B_R^N(o) \cap S$ que contiene a $D_\rho(o)$.

Ejemplo 2.1.8 En \mathbb{R}^3 consideramos la helicoides, tomamos una bola en el espacio Euclídeo de radio R y su intersección con la superficie.



Nota 2.1.9 Si P^m está propiamente inmersa en una variedad N^n y ésta tiene al menos un polo, llamado o , podemos asegurar:

1. $D_R(o)$ son precompactos es decir su clausura es un conjunto compacto.
2. Se deduce pues que $\{D_R(o)\}_{R>0}$ es una sucesión exhaustiva de precompactos y encajados. Además recubren P^m al estar centrados en un polo ya que la aplicación exponencial nos da un difeomorfismo entre N y su espacio tangente en el polo (véase 2.1.1).
3. La función distancia restringida a la subvariedad $r|_P : P \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable (salvo en el polo, si éste estuviera en P). Aplicamos el Teorema de Sard y sabemos que el conjunto de valores críticos tiene medida nula en \mathbb{R} . También, en un valor no crítico R , sabemos por el Teorema del Nivel Regular, que $r^{-1}(R) = \partial D_R$ es una subvariedad de P . Con todo ello aseguramos que existe un conjunto de radios denso en \mathbb{R} tales que ∂D_R son variedades diferenciables en P (curvas diferenciables, por tanto). Para consultar el Teorema de Sard y del Nivel Regular véanse [31] y [51], por ejemplo.
4. Las bolas extrínsecas se pueden considerar conexas definiendo $D_R(o)$ como cualquier componente conexa de $B_R^N(o) \cap P$. De esta forma, si se fija $\rho > 0$ y la subvariedad P es conexa, se puede obtener una sucesión exhaustiva de P mediante bolas extrínsecas conexas y encajadas considerando, para cada $R > \rho$, $D_R(o)$ como la componente conexa de $B_R^N(o) \cap P$ que contiene a $D_\rho(o)$.

Definición 2.1.10 (Véanse [36] y [46]) Sea N una variedad Riemanniana y $o \in N$ un punto de ella. Sea $x \in N \setminus \{o\}$ otro punto de N . La curvatura seccional $K^N(\sigma_x)$ de un 2-plano $\sigma_x \subset T_x N$ se denominará curvatura seccional o -radial de N en x si σ_x contiene al vector tangente de una geodésica minimizante desde o hasta x . Estas curvaturas se denotarán por $K_{o,N}(\sigma_x)$.

Las curvaturas medias H^P de P están involucradas en el Laplaciano de las funciones radiales restringidas $\Delta^P f(r)$ a través de su componente radial. Definamos esta componente radial.

Definición 2.1.11 Sea N una variedad Riemanniana con un polo $o \in N$ y P una subvariedad propiamente inmersa en N . Sea $r : N \rightarrow \mathbb{R}$ la función distancia desde el polo o . Definimos $\mathcal{C}(x)$, curvatura media o - radial de P en N , como:

$$\mathcal{C}(x) = -\langle \nabla^N r(x), H^P(x) \rangle,$$

donde $x \in P$ y $H^P(x)$ denota el vector curvatura media de P en N .

Nota 2.1.12 Esta nota está destinada a clarificar la convención de la curvatura. Consideraremos

$$R(X, Y) = \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X, Y]}$$

donde R indica el operador curvatura de una variedad Riemanniana M .

Un resultado básico para el estudio de las bolas métricas es el lema de Gauss.

Lema 2.1.13 (de Gauss) (Véase [49], p. 133) Consideramos la aplicación exponencial \exp_o en una bola $B(0, \varepsilon) \subset T_o N$, donde es difeomorfismo en su imagen. Sean las curvas

$$\gamma_{\vec{v}}(t) = \exp_o(t\vec{v}), \text{ donde } \vec{v} \in T_o M \text{ unitario.}$$

Para cualquier punto $q \in \exp_o(B(0, \varepsilon))$ existe t, \vec{v} tal que $\gamma_{\vec{v}}(t) = q$. Si definimos el campo $\partial_r|_q = \frac{d}{ds} \gamma_{\vec{v}}(s)|_{s=t}$ entonces

$$(2.1.3) \quad \nabla r = \partial_r,$$

siendo ∇r el gradiente de la función distancia $r(q) = d(o, q)$.

Este lema nos asegura, por tanto, que el normal a la frontera de la bola métrica (que es una hipersuperficie de la variedad) coincide con el vector tangente de las geodésicas radiales que parten del centro de la bola.

2.1.2. Productos alabeados (*warped products*) y espacios modelo

Los productos alabeados (en inglés *warped products*) son generalizaciones de las superficies de revolución, véase por ejemplo [44]. Sean (B^k, g_B) y (F^l, g_F) , dos variedades Riemannianas y sea $w : B \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función positiva real en B . Supongamos que w es al menos C^2 . Consideremos la variedad producto $M^{k+l} = B \times F$ y denotamos las proyecciones sobre ambos factores de la siguiente manera: $\pi : M \rightarrow B$ y $\sigma : M \rightarrow F$, respectivamente. La métrica g en M está definida por la siguiente métrica producto:

$$(2.1.4) \quad g = \pi^*(g_B) + (w \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F).$$

Definición 2.1.14 (Véase [44]) *La variedad Riemanniana $(M, g) = (B^k \times F^l, g)$ se llama producto alabeado con función de alabeo w , variedad base B y fibra F . La denotaremos como $B^k \times_w F^l$.*

Definición 2.1.15 (Véase [19], [18]) *Un espacio w -modelo M_w^m es el producto alabeado $[0, \Lambda[\times_w \mathbb{S}_1^{m-1}$, con base $B^1 = [0, \Lambda[\subset \mathbb{R}$ (donde $0 < \Lambda \leq \infty$) y con fibra $F^{m-1} = \mathbb{S}_1^{m-1}$ (es decir, la $(m-1)$ -esfera unidad con la métrica estándar) y función de alabeo $w: [0, \Lambda[\rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, con $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$ y $w(r) > 0$ para todo $r > 0$. El punto $o_w = \pi^{-1}(0)$, donde π denota la proyección sobre B^1 , se llamará punto centro del espacio modelo. Si $\Lambda = \infty$ entonces o_w es un polo de M_w^m .*

Dado Z un campo tangente a M_w^m , la métrica de M viene dada por la expresión

$$g(Z, Z)_{(t,q)} = g_{\mathbb{R}}(d\pi(Z), d\pi(Z))_t + \omega^2(t)g_{\mathbb{S}_1^{m-1}}(d\sigma(Z), d\sigma(Z))_q,$$

por comodidad llamaremos g_S a $g_{\mathbb{S}_1^{m-1}}$.

Lema 2.1.16 (Véase [44]) *Sean los campos vectoriales $\tilde{\partial}_t$ y \tilde{X} , levantamientos horizontal y vertical respectivamente de $\partial_t \in \mathfrak{X}([0, \Lambda[)$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{m-1})$. Entonces:*

1. $\tilde{\partial}_t$ es el único campo en M_w^m π -relacionado con ∂_t , es decir el único que cumple

$$(2.1.5) \quad \begin{aligned} \pi_*|_{(r,p)}(\tilde{\partial}_t) &= \partial_t|_r \quad y \\ \sigma_*|_{(r,p)}(\tilde{\partial}_t) &= 0, \forall (r, p) \in M_w^m. \end{aligned}$$

2. \tilde{X} es el único campo en M_w^m σ -relacionado con X , es decir el único que cumple

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} \sigma_*|_{(r,p)}(\tilde{X}) &= X|_p \quad y \\ \pi_*|_{(r,p)}(\tilde{X}) &= 0, \forall (r, p) \in M_w^m \end{aligned}$$

Lema 2.1.17 (Ver [44]) *Se cumple:*

1. $[\tilde{\partial}_t, \tilde{X}] = 0$.
2. Si \tilde{Y} es otro levantamiento vertical entonces $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ es vertical.

Demostración. Sabemos (véase [44] página 25) que

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y]^\sim$$

por lo que la aserción 2 queda clara.

Por otra parte la π -relación o la σ -relación se conservan mediante los corchetes de Lie (véase [44], página 14) por lo que (a través de 2.1.5 y 2.1.6) tenemos

$$\begin{aligned} [\tilde{\partial}_t, \tilde{X}] &\text{ está } \pi\text{-relacionado con } [\partial_t, 0] = 0 \\ [\tilde{\partial}_t, \tilde{X}] &\text{ está } \sigma\text{-relacionado con } [0, X] = 0, \end{aligned}$$

como consecuencia $[\tilde{\partial}_t, \tilde{X}] = 0$ y tenemos la aserción 1. ■

Lema 2.1.18 *Sea M_w^m espacio modelo. Entonces, dado $r_0 \in]0, \Lambda[$, la esfera geodésica centrada en o_w de radio r_0 es $S_{r_0}^\omega = \pi^{-1}(r_0)$.*

Demostración. Veamos la doble inclusión:

Si (r, p) pertenece a la esfera geodésica centrada en o_w de radio r_0 entonces

$$\bar{r}(r, p) = r_0.$$

Pero ahora consideramos la hoja $[0, r[\times\{p\}$ que pasa por (r, p) , como es totalmente geodésica (por tanto es una curva geodésica) la distancia de o_w a (r, p) será r . Por lo que $r = r_0$ y el punto es (r_0, p) que pertenece por definición a $\pi^{-1}(r_0)$.

Veamos la inclusión contraria. Sea $(r_0, p) \in \pi^{-1}(r_0)$. Las hojas son totalmente geodésicas y la distancia de $(0, p)$ a (r_0, p) a lo largo de $[0, r_0[\times\{p\}$ es r_0 . Por lo (r_0, p) está en la esfera geodésica centrada en o_w y de radio r_0 . ■

Nota 2.1.19 *A partir de ahora, si no hay confusión, denotaremos de la misma forma a los campos y sus levantamientos.*

Proposición 2.1.20 *Sea M_w^m ω -modelo, entonces, dado ∂_t levantamiento horizontal del campo tangente unitario en $\mathfrak{X}([0, \Lambda])$ y X el levantamiento vertical del campo tangente $X \in \mathfrak{X}(S_1^{m-1})$,*

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_t} X &= \nabla_X \partial_t = \frac{\omega'}{\omega} X, \\ R(X, \partial_t, X, \partial_t) &= -\frac{\omega''}{\omega} \end{aligned}$$

donde ∇ y R denotan a la conexión de Levi-Civita y el operador curvatura de M_w^m , respectivamente.

Demostración. Recordemos la fórmula de Koszul (véase [12]) que relaciona la métrica con la conexión de Levi-Civita de una variedad: si A, B, C son tres campos vectoriales de la variedad, ∇ es la conexión de Levi-Civita y $\langle \cdot \rangle$ indica la métrica, entonces

$$(2.1.7) \quad \begin{aligned} 2 \langle \nabla_A B, C \rangle &= A \langle B, C \rangle + B \langle C, A \rangle - C \langle A, B \rangle \\ &- \langle A, [B, C] \rangle + \langle B, [C, A] \rangle + \langle C, [A, B] \rangle \end{aligned}$$

Vamos a hallar $\nabla_{\partial_t} X$ a través de sus proyecciones usando la fórmula de Koszul.

Si sustituimos en (2.1.7) A y C por el levantamiento horizontal de ∂_t y B por el levantamiento vertical de X despejamos fácilmente:

$$(2.1.8) \quad g(\nabla_{\partial_t} X, \partial_t) = 0,$$

por tanto $\nabla_{\partial_t} X$ es vertical.

Ahora vamos a sustituir en (2.1.7) $A = \partial_t$, $B = X$, $C = Y$ (donde X, Y son levantamientos verticales ortogonales entre sí en el modelo). Puesto que el corchete de Lie de dos campos verticales es vertical y el corchete de un campo vertical y otro horizontal (es decir el campo radial ∂_t) es cero (véase lema 2.1.6) obtenemos

$$(2.1.9) \quad 2g(\nabla_{\partial_t} X, Y) = \partial_t g(X, Y) + Xg(Y, \partial_t) - Yg(\partial_t, X)$$

$$(2.1.10) \quad -g(\partial_t, [X, Y]) + g(X, [Y, \partial_t]) + g(Y, [\partial_t, X]) = 0.$$

Por otra parte hallamos:

$$(2.1.11) \quad \begin{aligned} 2g(\nabla_{\partial_t} X, X) &= \partial_t g(X, X) = \partial_t (\omega(t)^2 g_S(d\sigma(X), d\sigma(X))_q) = \\ &= 2\omega(t)\omega'(t)g_S(d\sigma(X), d\sigma(X))_q + \omega(t)^2 \partial_t g_S(d\sigma(X), d\sigma(X))_q = \\ &= 2\omega(t)\omega'(t)g_S(d\sigma(X), d\sigma(X))_q = 2\omega(t)\omega'(t) \frac{1}{\omega(t)^2} \omega(t)^2 g_S(d\sigma(X), d\sigma(X))_q = \\ &= 2 \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} g(X, X), \end{aligned}$$

ya que

$$g_S(d\sigma(X), d\sigma(X))_q$$

es constante sobre la hoja $[0, \Lambda[\times\{p\}]$.

Hemos demostrado que:

1. $\nabla_{\partial_t} X$ es vertical.
2. Si Y es vertical y $Y \perp X$ entonces $\nabla_{\partial_t} X \perp Y$.
3. $g(\nabla_{\partial_t} X, X) = \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}$

Por lo que:

$$(2.1.12) \quad \nabla_{\partial_t} X = \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} X.$$

Y la primera parte queda demostrada.

Sabemos que $\nabla_{\partial_t} \partial_t = 0$ (es una consecuencia inmediata del lema 2.1.18)

Calculemos la curvatura

$$(2.1.13) \quad \begin{aligned} R(X, \partial_t, X, \partial_t) &= g(\nabla_{[X, \partial_t]} X, \partial_t) - g(\nabla_X \nabla_{\partial_t} X, \partial_t) + g(\nabla_{\partial_t} \nabla_X X, \partial_t) = \\ &= -X(g(\nabla_{\partial_t} X, \partial_t)) + g(\nabla_{\partial_t} X, \nabla_X \partial_t) + g(\nabla_{\partial_t} \nabla_X X, \partial_t) = \\ &= \left(\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\right)^2 g(X, X) + \partial_t g(\nabla_X X, \partial_t). \end{aligned}$$

Con la fórmula de Koszul, sabiendo que $[X, X] = [X, \partial_t] = 0$, $g(X, \partial_t) = 0$ y (2.1.12) hallamos

$$(2.1.14) \quad 2g(\nabla_X X, \partial_t) = -\partial_t g(X, X) = -2\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}g(X, X).$$

Sustituimos en (2.1.13) y tenemos

$$(2.1.15) \quad \begin{aligned} R(X, \partial_t, X, \partial_t) &= \left(\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\right)^2 g(X, X) + \partial_t \left(-\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}g(X, X)\right) = \\ &= \left(\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\right)^2 g(X, X) - \frac{\omega''(t)\omega(t) - \omega'(t)^2}{\omega(t)^2}g(X, X) - \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\partial_t g(X, X) = \\ &= \left[\left(\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\right)^2 - \frac{\omega''(t)\omega(t) - \omega'(t)^2}{\omega(t)^2} - 2\left(\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\right)^2\right] g(X, X) = \\ &= -\frac{\omega''(t)}{\omega(t)}g(X, X). \end{aligned}$$

Y queda demostrada la segunda parte. ■

Corolario 2.1.21 1. La esfera geodésica S_r^ω tiene curvatura media constante

$$\eta_\omega(r) = \frac{\omega'(r)}{\omega(r)}.$$

2. Las o_ω -curvaturas seccionales radiales de M_ω^m en cada $x \in \pi^{-1}(r)$ (para $r > 0$) están idénticamente determinadas por

$$(2.1.16) \quad K_{o_\omega, M_\omega}(\sigma_x) = -\frac{\omega''(r)}{\omega(r)}.$$

Demostración. Calculemos

$$g(A(X, X), \partial_r) = g(\nabla_X X, \partial_t) = -g(\nabla_X \partial_r, X) = \frac{\omega'(r)}{\omega(r)}g(X, X).$$

Si ahora tomamos una base ortonormal de campos e_i del tangente a la esfera de dimensión $m - 1$ tenemos

$$\eta_\omega(r) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^{m-1} g(A(e_i, e_i), \partial_r) = \frac{\omega'(r)}{\omega(r)}.$$

La segunda afirmación está demostrada en (2.1.15). ■

Proposición 2.1.22 *Un espacio ω - modelo donde*

$$(2.1.17) \quad \omega(r) = \omega_b(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b}} \sin(\sqrt{b}r) & \text{si } b > 0 \\ r & \text{si } b = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-b}} \sinh(\sqrt{-b}r) & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

es una variedad de Riemann simplemente conexa con curvatura seccional constante b . Nótese que para $b > 0$ la función $\omega_b(r)$ admite extensión diferenciable sólo hasta $r = \pi/\sqrt{b}$.

Demostración. Por la Proposición 2.1.20 sabemos que la curvatura seccional de un plano que contiene a la dirección radial es

$$-\frac{\omega_b''(r)}{\omega_b(r)} = b.$$

Por otra parte si consideramos la curvatura seccional de un plano generado por dos campos ortogonales y unitarios X, Y ambos verticales podemos calcular con la fórmula de Koszul

$$(2.1.18) \quad 2g(\nabla_X Y, \partial_r) = -\partial_r g(X, Y) = 0.$$

Por lo que $\nabla_X Y$ es también vertical por lo que si consideramos $g(\nabla_X Y, Z)$, con Z vertical y ortogonal a ambos, tenemos

$$(2.1.19) \quad 2g(\nabla_X Y, Z) = 2\omega_b(t)^2 g_S(\nabla_X Y, Z) \Rightarrow g(\nabla_X Y, Z) = \omega_b(t)^2 g_S(\nabla_X Y, Z).$$

Hallemos la curvatura

$$(2.1.20) \quad R(X, Y, X, Y) = g(\nabla_{[X, Y]} X, Y) - g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) + g(\nabla_Y \nabla_X X, Y).$$

Ahora calculemos los tres sumandos:

1. $g(\nabla_{[X, Y]} X, Y) = \omega_b(t)^2 g_S(\nabla_{[X, Y]} X, Y)$, puesto que $[X, Y]$ es vertical, y usamos (2.1.19) con $Z = [X, Y]$.

2. $g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) = X(g(\nabla_Y X, Y)) - g(\nabla_Y X, \nabla_X Y) = \omega_b(t)^2 X(g_S(\nabla_Y X, Y)) - \omega_b(t)^2 g_S(\nabla_Y X, \nabla_X Y)$, donde el primer sumando se deduce del razonamiento del punto anterior y el segundo se deduce de (2.1.18)
3. $g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) = Y(g(\nabla_X X, Y)) - g(\nabla_X X, \nabla_Y Y) = \omega_b(t)^2 Y(g_S(\nabla_X X, Y)) - \omega_b(t)^2 g_S(\nabla_X X, \nabla_Y Y) - \left(\frac{\omega'_b(t)}{\omega_b(t)}\right)^2 g(\partial_r, \partial_r)$, por los razonamientos anteriores y (2.1.14)

Con todo ello, sustituyendo en (2.1.20)

$$(2.1.21) \quad R(X, Y, X, Y) = \omega_b(t)^2 R_S(X, Y, X, Y) - \left(\frac{\omega'_b(t)}{\omega_b(t)}\right)^2.$$

Por otra parte R_S es la curvatura en la esfera de radio unidad. Como

$$\begin{aligned} g(Y, Y) = g(X, X) = 1 &\Rightarrow g_S(Y, Y) = g_S(X, X) = \frac{1}{\omega_b(t)^2} \\ g(X, Y) = g_S(X, Y) &= 0 \end{aligned}$$

tenemos

$$1 = K^S(X, Y) = \frac{R_S(X, Y, X, Y)}{g_S(X, X)g_S(Y, Y) - g_S(X, Y)^2} = \omega_b(t)^4 R_S(X, Y, X, Y),$$

siendo $K^S(X, Y)$ la curvatura seccional del plano generado por X e Y en la esfera de radio unidad. Por tanto

$$R_S(X, Y, X, Y) = \frac{1}{\omega_b(t)^4},$$

finalmente sustituyendo en (2.1.21)

$$R(X, Y, X, Y) = \frac{1}{\omega_b(t)^2} - \left(\frac{\omega'_b(t)}{\omega_b(t)}\right)^2 = \frac{1 - \omega'_b(t)^2}{\omega_b(t)^2} = b$$

como queríamos demostrar. ■

2.2. Análisis del Hessiano

2.2.1. Fórmulas de la primera y la segunda variación de la energía. Forma índice

Definición 2.2.1 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow N$ una curva C^∞ en N . Sea la función diferenciable

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow N$$

diremos que es una variación diferenciable de la curva γ sii

$$\alpha(0, t) = \gamma(t), \forall t \in [0, a]$$

Se denotará $\alpha_s(t) = \alpha(s, t)$.

Definición 2.2.2 Dada $\gamma : [0, a] \rightarrow N$ una curva \mathcal{C}^∞ en la variedad Riemanniana N y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow N$ una variación diferenciable de γ , definimos energía de la curva γ como

$$E(s) = \int_0^a g(\alpha'_s(t), \alpha'_s(t)) dt, \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Teorema 2.2.3 (Fórmula de la primera y segunda variación de la energía)
(Véase [12]) Sea N variedad Riemanniana, $\gamma : [0, a] \rightarrow N$ una curva \mathcal{C}^∞ en N y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, a] \rightarrow N$ variación diferenciable de γ . Entonces

$$(2.2.1) \quad \frac{1}{2}E'(0) = - \int_0^a g(V(t), \nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t)) dt - g(V(0), \gamma'(0)) + g(V(a), \gamma'(a))$$

y

$$(2.2.2) \quad \frac{1}{2}E''(0) = - \int_0^a g(V(t), \nabla_{\gamma'(t)}\nabla_{\gamma'(t)}V(t) + R(\gamma'(t), V(t))\gamma'(t)) dt,$$

siendo $V(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial s}(0, t)$.

Nota 2.2.4 En [12] se define energía considerando una curva diferenciable a trozos. Aquí consideramos sólo curvas diferenciables en todo el intervalo.

Definición 2.2.5 (Índice de un campo vectorial) (Ver [12]) Dado X campo vectorial a lo largo de una geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ tal que $X(0) = \vec{0}$, se define forma índice de X como

$$I_0^a(X) := \int_0^a \{g(\nabla_{\gamma'(t)}X(t), \nabla_{\gamma'(t)}X(t)) - g(R(\gamma'(t), X(t))\gamma'(t), X(t))\},$$

y se denotará forma índice.

2.2.2. Comparación de Hessianos en variedades ambiente

El análisis de la función distancia r definida en variedades con un polo se resume en el Teorema de comparación de Hessiano de la función distancia establecido en [18]. Este resultado está basado la expresión del Hessiano de dicha función en términos del índice de los campos de Jacobi a lo largo de las geodésicas radiales.

En el enunciado y demostración de esta comparación dada en [18] se consideran dos variedades Riemannianas M^m y N^n con polos o_M y o_N , así el Hessiano de la función distancia en N es menor o igual que el correspondiente Hessiano en M siempre que $n \geq m$ y las curvaturas radiales de N estén acotadas inferiormente por las curvaturas radiales de M .

En la comparación que se va a presentar una de las variedades es un espacio modelo M_ω^n como los definidos en la sección 1.1.2. Vamos a ver que, en virtud de su carácter simétrico, el utilizar para la comparación a estos espacios modelo nos permite pasar por alto la hipótesis sobre la dimensión, y, al mismo tiempo, facilita el cálculo directo del Hessiano de función distancia (véase el Teorema 2.2.17).

Cabe destacar, tal como lo hacen Green y Wu en [18], que estos resultados también se pueden obtener definiendo polo como aquel punto que no tiene puntos conjugados.

Presentaremos en esta sección unos resultados técnicos concernientes al Hessiano de una función radial (es decir funciones f que dependen únicamente de la distancia al polo).

Antes veamos las definiciones básicas (que pueden consultarse con más detalle en [12] y [50]).

Definición 2.2.6 (Gradiente) *Dada una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(N)$, definimos gradiente de f , y se denotará $\nabla^N f$, al único campo que cumple*

$$(2.2.3) \quad g(\nabla^N f, X) = X(f).$$

Definición 2.2.7 (Hessiano) *Dada una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(N)$, definimos el Hessiano de f como el $(0, 2)$ -tensor simétrico siguiente*

$$(2.2.4) \quad \text{Hess}^N f(X, Y) = g(\nabla_X^N(\nabla^N f), Y), \forall X \in \mathfrak{X}(N)$$

Un cálculo elemental nos lleva a la equivalencia siguiente:

Proposición 2.2.8

$$(2.2.5) \quad \text{Hess}^N f(X, Y) = X(g(\nabla^N f, Y)) - g(\nabla^N f, \nabla_X^N Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X^N Y)(f).$$

Definición 2.2.9 (Divergencia) *Dado un campo vectorial X en la variedad N , definimos divergencia de X en un punto p y se denotará $\text{div } X(p)$, a*

$$(2.2.6) \quad \text{div } X(p) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{e_i} X, e_i),$$

siendo $\{e_i\}$ base ortonormal de $T_p N$.

Definición 2.2.10 (Laplaciano) Dada una función $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(N)$, definimos el Laplaciano de f , y se denotará $\Delta^N f$, como la divergencia del gradiente de f , es decir

$$(2.2.7) \quad \Delta^N f = \operatorname{div} \nabla^N f.$$

Nota 2.2.11 A través de las definiciones del Hessiano, Laplaciano y divergencia se extrae fácilmente la igualdad

$$\Delta^N f = \sum_{i=1}^n \operatorname{Hess}^N f(e_i, e_i).$$

Al integrar la divergencia de un campo tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.12 (de la Divergencia II) (Véase [5], p. 152) Sea N variedad orientada y Ω un dominio en N con frontera $\partial\Omega$ diferenciable. Si ν es un campo vectorial unitario a lo largo de $\partial\Omega$, ortogonal a la frontera y apuntando hacia el exterior del dominio, entonces

$$(2.2.8) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} X \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \langle X, \nu \rangle \, d\mu,$$

siendo X cualquier campo en N .

Ahora demostraremos el resultado que relaciona el Hessiano con el Índice de un campo de Jacobi.

Teorema 2.2.13 (Véase [18],[27]) Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o . Sea $r = r(x) = \operatorname{dist}_N(o, x)$ la distancia desde o a x en N . Dado $q \in N$, consideramos $Y \in T_q N$, ortogonal a $\nabla^N r(q)$, y consideramos $\gamma(s)$, geodésica radial parametrizada por su longitud de arco, con $\gamma(0) = o$, $\gamma(b) = q$, $\gamma'(0) = v$, $\gamma'(b) = \nabla^N r(q)$. Entonces

$$(2.2.9) \quad \begin{aligned} \operatorname{Hess}^N(r|_q)(Y, Y) &= \int_0^b \{ \langle J'(t), J'(t) \rangle \\ &- \langle R(J(t), \gamma'(t))J(t), \gamma'(t) \rangle \} dt = I_{\gamma, b}(J, J) \end{aligned}$$

donde $J(t)$ es el (único) campo de Jacobi a lo largo de $\gamma(t)$ tal que $J(0) = 0$, $J(b) = Y$, y sea $I_{\gamma, b}$ el índice de γ , (véase [12] y definición 2.2.5).

Demostración. Vamos a dar un esquema de la prueba.

Consideremos

$$f(s, t) = \exp_p(tv(s))$$

una variación diferenciable no propia de γ , con $v(0) = v$. Entonces

$$J(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)) = \exp_{p*tv}(tv'(0))$$

es un campo de Jacobi (véase [12], página 111) cumpliendo $J(0) = 0$, $J(b) = Y$.

Además vamos a demostrar que $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \forall t$.

En efecto, veamos que es constante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle J(t), \gamma'(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle = \\ & \left\langle \left. \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle + \left\langle \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle = \\ & \left\langle \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{d}{dt} \exp_p(tv(s)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle + \left\langle \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)) \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \right\rangle = \\ & \left\langle \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{d}{dt} \exp_p(tv(s)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle = \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left\langle \frac{d}{dt} \exp_p(tv(s)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle = \\ (2.2.10) \quad & \frac{1}{2} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \|\gamma'(t)\| = 0. \end{aligned}$$

Y, evaluando en $t = b$,

$$\langle J(b), \gamma'(b) \rangle = \langle Y, \nabla^N r(q) \rangle = 0$$

ya que por hipótesis $Y \perp \nabla^N r(q)$.

De lo anterior se deduce que $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \forall t$.

Notemos que $f(0, t) = \gamma(t)$ y, fijando s , $f(s, t) = \exp_p(tv(s)) = \gamma_{v(s)}(t)$ es una geodésica, (parametrizada por su longitud), tal que $\gamma_{v(s)}(0) = p$ y $\gamma'_{v(s)}(0) = v(s) \forall s$.

Consideremos la función energía de $\gamma_{v(s)}(t)$

$$E(s) = \int_0^b \left\| \frac{df}{dt}(s, t) \right\|^2 dt$$

Sea la función $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \frac{1}{2}r^2(x)$. Dada $\alpha(s) = \exp_p(bv(s)) = \gamma_{v(s)}(b)$ curva en N , considerando que (fijado s) la geodésica minimizante que une el punto p con $\alpha(s)$ es $\gamma_{v(s)}(t) = \exp_p(tv(s))$ y la desigualdad de Schwarz, tenemos:

$$\begin{aligned} (g \circ \alpha)(s) &= g(\alpha(s)) = \frac{1}{2}r^2(\alpha(s)) = \frac{1}{2} \left(\int_0^b \|\gamma'_{v(s)}(t)\| dt \right)^2 = \\ & \frac{b}{2} \left(\int_0^b \|\gamma'_{v(s)}(t)\|^2 dt \right) = \frac{b}{2} \left(\int_0^b \left\| \frac{df}{dt}(s, t) \right\|^2 dt \right) = \\ (2.2.11) \quad & \frac{b}{2} E(s) \end{aligned}$$

Hemos aplicado la desigualdad de Schwarz en su versión de igualdad debido a que $\gamma_{v(s)}(t)$ es una geodésica minimizante y, por tanto, está parametrizada por su longitud de arco. Luego se cumple

$$\left(\int_0^b \|\gamma'_{v(s)}(t)\| dt \right)^2 = \left(\int_0^b 1 dt \right) \left(\int_0^b \|\gamma'_{v(s)}(t)\|^2 dt \right) = b \int_0^b \|\gamma'_{v(s)}(t)\|^2 dt.$$

Ahora, usando la fórmula de la segunda variación (véase [12], página 199) para la función energía de $\gamma_{v(s)}(t)$,

$$(2.2.12) \quad \frac{1}{2} E''(0) = I_{\gamma,b}(J, J) + \left\langle \frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{df}{ds}(s, b) \right), \gamma'(b) \right\rangle,$$

tenemos

$$(2.2.13) \quad (g \circ \alpha)''(0) = \frac{b}{2} E''(0) = b \{ I_{\gamma,b}(J, J) + \langle \nabla_{\alpha'(0)}^N \alpha'(0), \gamma'(b) \rangle \}$$

ya que $\alpha'(0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f(s, b)$ y, por tanto, $\frac{D}{ds} \Big|_{s=0} \left(\frac{df}{ds}(s, b) \right) = \nabla_{\alpha'(0)}^N \alpha'(0)$.

Por otra parte, como $Y = \alpha'(0)$, tenemos

$$\begin{aligned} (g \circ \alpha)''(0) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (dg_{\alpha(s)}(\alpha'(s))) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \langle \nabla^N g|_{\alpha(s)}, \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle \nabla_Y^N \nabla^N g, Y \rangle + \langle \nabla^N g|_q, \nabla_{\alpha'(0)}^N \alpha'(0) \rangle \\ &= \text{Hess}^N g|_q(Y, Y) + \langle \nabla^N g|_q, \nabla_{\alpha'(0)}^N \alpha'(0) \rangle \\ (2.2.14) \quad &= \text{Hess}^N g|_q(Y, Y) + b \langle \nabla^N r|_q, \nabla_{\alpha'(0)}^N \alpha'(0) \rangle \end{aligned}$$

Además,

$$(2.2.15) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^N g|_q(Y, Y) &= \langle \nabla^N r|_q, Y \rangle^2 + r(q) \text{Hess}^N r|_q(Y, Y) = \\ &b \text{Hess}^N r|_q(Y, Y) \end{aligned}$$

ya que $\nabla^N g|_q = \gamma'(b)$ es ortogonal a Y .

Por tanto, a partir de las ecuaciones (2.2.13), (2.2.14) y (2.2.15), obtenemos

$$(2.2.16) \quad \text{Hess}^N r|_q(Y, Y) = I_{\gamma,b}(J, J)$$

■

Teorema 2.2.14 (Véase [18], teorema A) *Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o , sea $M = M_w^m$ un espacio w -modelo con centro o_w , y $m \leq n$. Supongamos que cada curvatura seccional o -radial en $q \in N \setminus \{o\}$ está acotada inferiormente por las curvaturas seccionales o_w -radiales en M_w^m de la siguiente manera:*

$$(2.2.17) \quad K_{o,N}(\sigma_q) \geq -\frac{w''(r)}{w(r)}$$

para cada 2-plano radial $\sigma_q \in T_q N$ distante $r = r(q) = \text{dist}_N(o, q)$ desde o en N . Supongamos también que las geodésicas radiales minimizantes desde o y o_w no tienen puntos conjugados de o y o_w respectivamente. Entonces los Hessianos de la función distancia en N , r , y la función distancia en M_w , \bar{r} , cumplen

$$(2.2.18) \quad \text{Hess}^N r|_q(X, X) \leq \text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y)$$

para cada vector unitario X en $T_q N$ y para cada vector unitario Y en $T_{\bar{q}} M$ con $\bar{r}(\bar{q}) = r(q) = r$.

Demostración. Sabemos que, si $X = \lambda \nabla^N r$ y $Y = \bar{\lambda} \nabla^{M_w} \bar{r}$, entonces

$$(2.2.19) \quad \text{Hess}^N r(X, X) = \text{Hess}^{M_w} \bar{r}(Y, Y) = 0$$

porque, en general para cualquier variedad Riemanniana N ,

$$(2.2.20) \quad \text{Hess}^N r(X, X) = \langle \nabla_{\nabla^N r}^N \nabla^N r, \nabla^N r \rangle = 0$$

Por tanto es suficiente probar el Teorema para X e Y ortogonales a $\nabla^N r$ and $\nabla^{M_w} \bar{r}$ respectivamente.

Se cumple, a través del Teorema 2.2.13, que

$$(2.2.21) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^N r|_q(X, X) &= I_{\gamma, b}(J, J) \\ \text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y) &= I_{\bar{\gamma}, b}(\bar{J}, \bar{J}) \end{aligned}$$

donde $\gamma : [0, b] \rightarrow N$ es una geodésica minimizante en N uniendo o y q , y $J(t)$ es el campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $J(0) = 0$, $J(b) = X$ y $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \forall t \in [0, b]$, y $\bar{\gamma} : [0, b] \rightarrow M_w$ es una geodésica minimizante en M_w uniendo o_w y \bar{q} , y $\bar{J}(t)$ es el campo de Jacobi a lo largo de $\bar{\gamma}$ tal que $\bar{J}(0) = 0$, $\bar{J}(b) = Y$, $\langle \bar{J}(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle = 0 \forall t \in [0, b]$.

Sea $\{\bar{e}_i(t)\}_{i=1}^m$ una referencia ortonormal paralela de $T_{\bar{\gamma}(t)} M_w^m$, cumpliendo $\bar{e}_m(b) = Y \perp \bar{\gamma}'(b)$. Entonces podemos expresar \bar{J} respecto a esta base como

$$(2.2.22) \quad \bar{J}(t) = \sum_{i=1}^m \bar{J}_i(t) \bar{e}_i(t).$$

Vamos a construir otra referencia ortonormal en $T_{\gamma(t)}N$ siguiendo la página 239 de [4].

Como $m \leq n$ podemos encontrar una aplicación inyectiva (isometría) I definida

$$I : T_{\bar{\gamma}(b)}M_w \rightarrow T_{\gamma(b)}N,$$

tal que cumple

$$\begin{aligned} I(\bar{\gamma}'(b)) &= \gamma'(b) \\ I(\bar{J}(b)) &= \frac{\|\bar{J}(b)\|}{\|J(b)\|} J(b) = J(b), \end{aligned}$$

es decir $I(Y) = X$.

Definimos los vectores (linealmente independientes)

$$e_i(b) := I(\bar{e}_i(b)), i = 1 \dots m$$

y completamos hasta tener $\{e_i(b)\}_{i=1}^n$, una base ortonormal de $T_{\gamma(b)}N$.

A continuación trasladamos paralelamente estos vectores a lo largo de la curva $\gamma(t)$ y obtenemos $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ que es una referencia ortonormal paralela de $T_{\gamma(t)}N$.

Definimos el campo $V(t)$

$$(2.2.23) \quad V(t) = \sum_{i=1}^m \bar{J}_i(t) e_i(t)$$

Veamos que campo vectorial $V(t)$ definido en (2.2.23) satisface las siguientes propiedades:

1. $V(0) = 0 = J(0)$, como se sigue fácilmente de las definiciones de ambos campos.
2. $V(b) = X = J(b)$, ya que

$$\begin{aligned} V(b) &= \sum_{i=1}^n \bar{J}_i(b) e_i(b) = \sum_{i=1}^n I(\bar{J}_i(b) \bar{e}_i(b)) = \\ I(\bar{J}(b)) &= J(b) = X. \end{aligned}$$

3. $\|V(t)\| = \|\bar{J}(t)\|, \forall t$. En efecto, al ser las dos referencias ortonormales

$$\begin{aligned} \|V(t)\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^n \bar{J}_i(t) e_i(t), \sum_{i=1}^n \bar{J}_i(t) e_i(t) \right\rangle = \\ \sum_{i=1}^n \bar{J}_i^2(t) &= \langle \bar{J}(t), \bar{J}(t) \rangle = \|\bar{J}(t)\|. \end{aligned}$$

4. $\|V'(t)\| = \|\bar{J}'(t)\| \forall t$. De forma similar al punto anterior y utilizando que $e_i(t)$ son paralelos tenemos

$$\begin{aligned} \|V'(t)\|^2 &= \left\langle \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \bar{J}_i(t) e_i(t), \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \bar{J}_i(t) e_i(t) \right\rangle = \\ &\left\langle \sum_{i=1}^n \bar{J}'_i(t) e_i(t), \sum_{i=1}^n \bar{J}_i(t) e_i(t) \right\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{J}_i'^2(t) = \\ &\langle \bar{J}'(t), \bar{J}'(t) \rangle = \|\bar{J}'(t)\|. \end{aligned}$$

5. $\langle V(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \forall t$. Como

$$\langle V(b), \gamma'(b) \rangle = \langle \bar{J}(b), \gamma'(b) \rangle = 0,$$

por la definición del campo de Jacobi \bar{J} , basta con demostrar que $\langle V(t), \gamma'(t) \rangle$ es constante. Derivemos

$$(2.2.24) \quad \frac{d}{dt} \langle V(t), \gamma'(t) \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{J}'_i(t) \langle e_i(t), \gamma'(t) \rangle.$$

Ahora veamos que

$$(2.2.25) \quad \langle e_i(t), \gamma'(t) \rangle = \langle \bar{e}_i(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle, \forall i = 1 \dots n.$$

En efecto

$$\frac{d}{dt} (\langle e_i(t), \gamma'(t) \rangle - \langle \bar{e}_i(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle) = 0$$

por ser $\gamma'(t), \bar{\gamma}'(t)$ y $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ campos paralelos. Por otra parte

$$\begin{aligned} \langle e_i(b), \gamma'(b) \rangle - \langle \bar{e}_i(b), \bar{\gamma}'(b) \rangle &= \\ \langle I(\bar{e}_i(b)), I(\bar{\gamma}'(b)) \rangle - \langle \bar{e}_i(b), \bar{\gamma}'(b) \rangle &= \\ \langle \bar{e}_i(b), \bar{\gamma}'(b) \rangle - \langle \bar{e}_i(b), \bar{\gamma}'(b) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Hemos probado (2.2.25), sustituyendo en (2.2.24)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V(t), \gamma'(t) \rangle &= \sum_{i=1}^n \bar{J}'_i(t) \langle e_i(t), \gamma'(t) \rangle = \\ \sum_{i=1}^n \bar{J}'_i(t) \langle \bar{e}_i(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \bar{J}'_i(t) \bar{e}_i(t), \bar{\gamma}'(t) \right\rangle = \\ \langle \bar{J}'(t), \bar{\gamma}'(t) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

por hipótesis.

Recordemos el lema del índice

Lema 2.2.15 (del Índice) (Véase, por ejemplo, [12]) Sea $\gamma : [0, b] \rightarrow N$ una geodésica en una variedad Riemanniana N sin puntos conjugados de $\gamma(0)$ en $[0, b]$. Sea $J(t)$ un campo de Jacobi a lo largo de γ tal que $\langle J(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \forall t$. Sea $V(t)$ un campo a lo largo de γ tal que $\langle V(t), \gamma'(t) \rangle = 0 \forall t$. Supongamos que $V(0) = J(0)$ y $V(b) = J(b)$. Entonces

$$I_{\gamma,b}(J, J) \leq I_{\gamma,b}(V, V)$$

Aplicando este lema a los campos $J(t)$ y $V(t)$, obtenemos

$$(2.2.26) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^N r|_q(X, X) &= I_{\gamma,b}(J, J) \leq I_{\gamma,b}(V, V) \\ &= \int_0^b \{ \|V'\|^2 - \langle R(V, \gamma')V, \gamma' \rangle \} dt \end{aligned}$$

Ahora, usando la hipótesis (2.2.17) de las curvaturas seccionales de planos radiales que contienen geodésicas radiales como γ y $\bar{\gamma}$, tenemos la siguiente desigualdad para las curvaturas seccionales de los planos radiales generados por $\{\gamma', V\}$ y por $\{\bar{\gamma}', \bar{J}\}$:

$$(2.2.27) \quad \begin{aligned} K_{o,N}(\gamma', V) &= \frac{\langle R^N(V, \gamma')V, \gamma' \rangle}{\|V\|^2} \\ &\geq \frac{\langle R^{M_w}(\bar{J}, \bar{\gamma}')\bar{J}, \bar{\gamma}' \rangle}{\|\bar{J}\|^2} = K_{o_w, M_w}(\bar{\gamma}', \bar{J}) \end{aligned}$$

Por tanto, según las propiedades 1,2, 3, 4 y 5 demostradas anteriormente, tenemos

$$(2.2.28) \quad \begin{aligned} &\|\bar{J}'\|^2 - \langle R^{M_w}(\bar{J}, \bar{\gamma}')\bar{J}, \bar{\gamma}' \rangle \\ &\geq \|V'\|^2 - \langle R^N(V, \gamma')V, \gamma' \rangle \end{aligned}$$

luego

$$(2.2.29) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^N r|_q(X, X) &\leq \int_0^b \{ \|V'\|^2 - \langle R(V, \gamma')V, \gamma' \rangle \} dt \\ &\leq \int_0^b \{ \|\bar{J}'\|^2 - \langle R^{M_w}(\bar{J}, \bar{\gamma}')\bar{J}, \bar{\gamma}' \rangle \} dt = I_{\bar{\gamma},b}(\bar{J}, \bar{J}) \\ &= \text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y) \end{aligned}$$

■

Si cambiamos el signo de la desigualdad que cumplen las curvaturas seccionales, y suponiendo que la dimensión del modelo M_w es mayor que la dimensión de la variedad N , tenemos el siguiente Teorema:

Teorema 2.2.16 (Véase [18], Teorema A) *Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o , sea $M = M_w^m$ un w -modelo con centro o_w , y $m \geq n$. Supongamos que cada curvatura seccional o -radial en $q \in N \setminus \{o\}$ está acotada superiormente por las curvaturas seccionales o_w -radiales en M_w^m de la siguiente forma:*

$$(2.2.30) \quad K_{o,N}(\sigma_q) \leq -\frac{w''(r)}{w(r)}$$

para cada 2-plano radial $\sigma_q \in T_q N$ a distancia $r = r(q) = \text{dist}_N(o, q)$ desde o en N . Supongamos también que las geodésicas radiales minimizantes desde o y o_w no tienen puntos conjugados de o y o_w respectivamente. Entonces el Hessiano de la función distancia en N , r , y de la función distancia en M_w , \bar{r} , cumplen

$$(2.2.31) \quad \text{Hess}^N r|_q(X, X) \geq \text{Hess}^M \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y)$$

para cada vector unitario X en $T_q N$ y cada vector unitario Y en $T_{\bar{q}} M$ con $\bar{r}(\bar{q}) = r(q) = r$.

Demostración. Vamos a dar un esquema de la demostración. Comenzamos como en el Teorema 2.2.14. Ahora consideramos, no obstante, los campos de Jacobi a lo largo de la geodésica γ , $J(t)$, expresando ésta en términos de una referencia paralela ortonormal de $T_{\gamma(t)} N$ a lo largo de γ , $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$, tal que $e_m(b) = X$.

Tenemos

$$J(t) = \sum_{i=1}^n J_i(t) e_i(t)$$

Entonces dado $\{\bar{e}_i(t)\}_{i=1}^m$ una referencia paralela ortonormal de $T_{\bar{\gamma}(t)} M_w^m$, con $\bar{e}_m(b) = Y$, definimos, como $m \geq n$,

$$\bar{V}(t) = \sum_{i=1}^n J_i(t) \bar{e}_i(t)$$

Ahora, argumentando como antes, aplicamos el lema del índice y, usando la nueva hipótesis sobre las curvaturas seccionales radiales, obtenemos,

$$(2.2.32) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y) &= I_{\bar{\gamma}, b}(\bar{J}, \bar{J}) \leq I_{\bar{\gamma}, b}(\bar{V}, \bar{V}) \\ &\leq I_{\gamma, b}(J, J) = \text{Hess}^N r|_q(X, X) \end{aligned}$$

■

Como observábamos en la introducción, la comparación con el espacio modelo permite evitar la hipótesis sobre las dimensiones de los espacios, es decir, sólo las hipótesis sobre las curvaturas seccionales radiales nos da la comparación sobre los Hessianos de

las funciones distancia, cuando comparamos una variedad Riemanniana de cualquier dimensión con un espacio modelo de cualquier dimensión.

La razón es que $\text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y)$ no depende de la dimensión m cuando Y es unitario y ortogonal a $\nabla^{M_w} \bar{r}$ como puede verse en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.17 *Sea M_w^m un espacio modelo, sea $\bar{q} \in M_w$ un punto tal que $\bar{r}(\bar{q}) = r$, y sea $Y \in T_{\bar{q}}M_w$ un vector unitario ortogonal a $\nabla^{M_w} \bar{r}$. Entonces*

$$(2.2.33) \quad \text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y) = \eta_w(r)$$

Demostración. Tomemos $\bar{\gamma}(t)$, geodésica radial en M_w desde el polo o_w y

$$\{\bar{e}_i(t), \nabla^{M_w} \bar{r}\}_{i=1}^{m-1}$$

una referencia paralela ortonormal a lo largo de $\bar{\gamma}(t)$ de $T_{\bar{\gamma}(t)}M_w$. Dado Y unitario y ortogonal a $\nabla^{M_w} \bar{r}$, tenemos

$$(2.2.34) \quad Y = \sum_{i=1}^{m-1} \langle Y, \bar{e}_i(t) \rangle \bar{e}_i(t)$$

Por tanto,

$$(2.2.35) \quad \nabla_Y^{M_w} \nabla^{M_w} \bar{r} = \sum_{i=1}^{m-1} \langle Y, \bar{e}_i(t) \rangle \nabla_{\bar{e}_i}^{M_w} \nabla^{M_w} \bar{r}$$

Pero $\nabla^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}$ es ortogonal a la r -esfera geodésica en M_w , S_r^w . Por tanto, si denotamos como $L_{\nabla^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}}$ a la aplicación de Weingarten de S_r^w asociada al vector normal $\nabla^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}$, tenemos

$$(2.2.36) \quad \nabla_{\bar{e}_i}^{M_w} \nabla^{M_w} \bar{r} = -L_{\nabla^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}} \bar{e}_i(r) = \eta_w(r) \bar{e}_i(r)$$

Por lo que

$$(2.2.37) \quad \nabla_Y^{M_w} \nabla^{M_w} \bar{r} = \sum_{i=1}^{m-1} \eta_w(r) \langle Y, \bar{e}_i(r) \rangle \bar{e}_i(r)$$

Finalmente, como $\text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y) = \langle \nabla_Y^{M_w} \nabla^{M_w} \bar{r}, Y \rangle$ obtenemos (recordemos que $\|Y\| = 1$ y que $\langle Y, \nabla^{M_w} \bar{r} \rangle = 0$):

$$(2.2.38) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^{M_w} \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y) &= \sum_{i=1}^{m-1} \eta_w(r) \langle Y, \bar{e}_i(r) \rangle^2 \\ &= \eta_w(r) (\|Y\|^2 - \langle Y, \nabla^{M_w} \bar{r} \rangle^2) = \eta_w(r) \end{aligned}$$

y $\eta_w(r) = \frac{w'(r)}{w(r)}$ no depende de la dimensión de M_w ■

Nota 2.2.18 Cuando $Y \in T_{\bar{q}}M_w$ no es unitario ni ortogonal a $\nabla^{M_w}\bar{r}$, entonces

$$(2.2.39) \quad \text{Hess}^{M_w}\bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y) = \eta_w(r)(\|Y\|^2 - \langle Y, \nabla^{M_w}\bar{r} \rangle^2)$$

En este caso, $\text{Hess}^{M_w}\bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y)$ no depende de la dimensión de M_w^m en el siguiente sentido: para todo n , existe un espacio w -modelo n -dimensional M_w^n y existe un vector tangente $\tilde{Y} \in TM_w^n$ tal que $\langle Y, \nabla^{M_w^m}\bar{r} \rangle = \langle \tilde{Y}, \nabla^{M_w^n}\bar{r} \rangle$ y $\|Y\| = \|\tilde{Y}\|$.

Como consecuencia de este resultado los Teoremas 2.2.14 y 2.2.16 pueden fundirse en el siguiente resultado:

Corolario 2.2.19 Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o , y sea $M = M_w^m$ un espacio w -modelo con centro o_w . Supongamos que cada curvatura seccional o -radial en $q \in N \setminus \{o\}$ está acotada inferiormente (superiormente) por las curvaturas seccionales o_w -radiales en M_w^m de la siguiente forma:

$$(2.2.40) \quad K_{o,N}(\sigma_q) \geq (\leq) - \frac{w''(r)}{w(r)}$$

para cada 2-plano radial $\sigma_q \in T_qN$ a distancia $r = r(q) = \text{dist}_N(o, q)$ desde o en N . Supongamos también que las geodésicas radiales minimizantes desde o y o_w no tienen puntos conjugados de o y o_w respectivamente. Entonces los Hessianos de la función distancia en N , r , y de la función distancia en M_w , \bar{r} , cumplen

$$(2.2.41) \quad \text{Hess}^N r|_q(X, X) \leq (\geq) \text{Hess}^M \bar{r}|_{\bar{q}}(Y, Y)$$

para cada vector unitario X en T_qN y para cada vector unitario Y en $T_{\bar{q}}M$ con $\bar{r}(\bar{q}) = r(q) = r$ y $\langle \nabla^N r(q), X \rangle_N = \langle \nabla^M \bar{r}(\bar{q}), Y \rangle_M$.

Nota 2.2.20 Destacamos que estos resultados son válidos también si se considera la definición de polo más general, es decir que un punto p es polo si y sólo si no tiene puntos conjugados tal como comentan Greene y Wu en [18].

2.2.3. Análisis del Hessiano y del Laplaciano en subvariedades

Consideremos ahora una subvariedad P inmersa en una variedad Riemanniana N con un polo o . Sea $r : N \rightarrow \mathbb{R}$ la función distancia r desde el polo o . Vamos a ver en esta sección cómo los Hessianos (en P y N), de una función radial definida en la subvariedad P están relacionados a través de la segunda forma fundamental de P en N .

Proposición 2.2.21 Sea N^n una variedad con un polo p , y sea P^m una subvariedad inmersa en N . Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable entonces, dado $q \in P$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(P)$,

$$(2.2.42) \quad \text{Hess}^P f|_q(X, Y) = \text{Hess}^N f|_q(X, Y) + \langle A_q^P(X, Y), \nabla^N f(q) \rangle$$

donde A_q^P es la segunda forma fundamental de P en N calculada en el punto $q \in P$.

Demostración. Si aplicamos la definición de Hessiano (ver 2.2.7) y de segunda forma fundamental (ver (2.1.1)) para hallar $\text{Hess}^P f$ obtenemos:

$$(2.2.43) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^P f|_q(X, Y) &= \langle \nabla_X^P \nabla^P f, Y \rangle = \langle \nabla_X^N \nabla^P f, Y \rangle = \\ &\langle \nabla_X^N (\nabla^N f - (\nabla^P f)^\perp), Y \rangle = \langle \nabla_X^N \nabla^N f, Y \rangle - \langle \nabla_X^N (\nabla^P f)^\perp, Y \rangle \\ \text{Hess}^N f|_q(X, Y) &- \langle \nabla_X^N (\nabla^P f)^\perp, Y \rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$(2.2.44) \quad \begin{aligned} \langle \nabla_X^N (\nabla^P f)^\perp, Y \rangle &= - \langle (\nabla^P f)^\perp, \nabla_X^N Y \rangle = \\ &- \langle (\nabla^P f)^\perp, A^P(X, Y) \rangle = - \langle \nabla^N f, A^P(X, Y) \rangle, \end{aligned}$$

sustituyendo en (2.2.43) obtenemos

$$(2.2.45) \quad \text{Hess}^P f|_q(X, Y) = \text{Hess}^N f|_q(X, Y) + \langle \nabla^N f, A^P(X, Y) \rangle,$$

tal como queríamos. ■

Proposición 2.2.22 *Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o . Sea $r = r(x) = \text{dist}_N(o, x)$ la función distancia desde o a x en N . Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, dado $q \in N$ y $X, Y \in T_q N$,*

$$(2.2.46) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^N F \circ r|_q(X, Y) &= F''(r)(\nabla^N r \otimes \nabla^N r)(X, Y) + \\ &F'(r) \text{Hess}^N r|_q(X, Y) \end{aligned}$$

Demostración. Aplicando la definición de Hessiano 2.2.7 tenemos

$$(2.2.47) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^N F \circ r|_q(X, Y) &= \langle \nabla_X (\nabla^N F \circ r), Y \rangle = \\ &\langle \nabla_X (F'(r) \nabla^N r), Y \rangle = \langle X(F'(r)) \nabla^N r + F'(r) \nabla_X \nabla^N r, Y \rangle = \\ &X(F'(r)) \langle \nabla^N r, Y \rangle + F'(r) \langle \nabla_X \nabla^N r, Y \rangle = \\ &\langle \nabla^N F'(r), X \rangle \langle \nabla^N r, Y \rangle + F'(r) \text{Hess}^N r(X, Y) = \\ &F''(r) \langle \nabla^N r, X \rangle \langle \nabla^N r, Y \rangle + F'(r) \text{Hess}^N r(X, Y) \end{aligned}$$

Es conocido que, dados $X, Y \in T_q N$ y dado el tensor (0,2) $\nabla^N r \otimes \nabla^N r$, tenemos

$$(2.2.48) \quad \begin{aligned} (\nabla^N r \otimes \nabla^N r)(X, Y) &= \nabla^N r(X) \nabla^N r(Y) = X(r)Y(r) \\ &= \langle \nabla^N r, X \rangle \langle \nabla^N r, Y \rangle \end{aligned}$$

Entonces

$$(2.2.49) \quad \text{Hess}^N F \circ r|_q(X, Y) = F''(r)(\nabla^N r \otimes \nabla^N r)(X, Y) + F'(r) \text{Hess}^N r(X, Y)$$

■

Proposición 2.2.23 Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o , y sea P^m una subvariedad inmersa en N . Sea $r|_P$ la función distancia extrínseca. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, dado $q \in P$ y $X, Y \in T_q P$,

$$(2.2.50) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^P F \circ r|_q(X, Y) &= F''(r) \langle \nabla^N r|_q, X \rangle \langle \nabla^N r|_q, Y \rangle + \\ &F'(r) \{ \text{Hess}^N r|_q(X, Y) + \\ &\langle \nabla^N r|_q, A_q^P(X, Y) \rangle \} \end{aligned}$$

Demostración. Basta con aplicar la Proposición 2.2.21 a la función $f = r$, de esa forma tenemos

$$\text{Hess}^P r|_q(X, Y) = \text{Hess}^N r|_q(X, Y) + \langle \nabla^N r|_q, A^P(X, Y) \rangle.$$

Ahora aplicamos la Proposición anterior y sustituyendo la igualdad anterior se obtiene

$$(2.2.51) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^P F \circ r|_q(X, Y) &= F''(r) (\nabla^N r \otimes \nabla^N r)(X, Y) + \\ &F'(r) \left\{ \text{Hess}^N r|_q(X, Y) + \langle \nabla^N r|_q, A^P(X, Y) \rangle \right\}. \end{aligned}$$

■

Ahora podemos combinar la Proposición 2.2.23 con el corolario 2.2.19 para obtener:

Proposición 2.2.24 Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o , sea M_w^m un espacio w -modelo con centro o_w y sea P^m una subvariedad inmersa en N . Sea $r|_P$ la función distancia extrínseca. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(A) Supongamos que se satisface uno de los siguientes conjuntos de acotaciones:

$$\left\{ K_{o,N}(\sigma_q) \geq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \geq 0 \forall r \right\} \text{ ó } \left\{ K_{o,N}(\sigma_q) \leq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \leq 0 \forall r \right\}.$$

Entonces, dado $q \in P$ y $X \in T_q P$ (unitario),

$$(2.2.52) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^P F \circ r(X, X) &\leq \{ F''(r) - F'(r)\eta_w(r) \} \langle X, \nabla^N r \rangle^2 \\ &+ F'(r) \{ \eta_w(r) + \langle \nabla^N r, A^P(X, X) \rangle \} \end{aligned}$$

(B) Supongamos que se satisface uno de los siguientes conjuntos de acotaciones:

$$\left\{ K_{o,N}(\sigma_q) \geq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \leq 0 \forall r \right\} \text{ ó } \left\{ K_{o,N}(\sigma_q) \leq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \geq 0 \forall r \right\}.$$

Entonces, dado $q \in P$ y $X \in T_q P$ (unitario),

$$(2.2.53) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^P F \circ r(X, X) &\geq \{ F''(r) - F'(r)\eta_w(r) \} \langle X, \nabla^N r \rangle^2 \\ &+ F'(r) \{ \eta_w(r) + \langle \nabla^N r, A^P(X, X) \rangle \} \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\bar{q} \in M_w^m$ cumpliendo $\bar{r}(\bar{q}) = r(q)$, donde \bar{r} es la función distancia en el espacio modelo.

Sea \bar{X} vector unitario perteneciente a $T_{\bar{q}}M_w^m$ tal que $\langle X, \nabla^N r \rangle = \langle \bar{X}, \nabla^{M_w} \bar{r} \rangle$.

Usando la Proposición 2.2.23 y el corolario 2.2.19 podemos escribir,

$$(2.2.54) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^P F \circ r|_q(X, X) &= F''(r) \left\langle \nabla^N r|_q, X \right\rangle^2 + \\ &F'(r) \{ \text{Hess}^N r|_q(X, X) + \\ &\left\langle \nabla^N r|_q, A_q^P(X, X) \right\rangle \} \leq (\geq) F''(r) \left\langle \nabla^N r|_q, X \right\rangle^2 + \\ &F'(r) \{ \text{Hess}^{M_w} \bar{r}(\bar{X}, \bar{X}) + \\ &\left\langle \nabla^N r|_q, A_q^P(X, X) \right\rangle \}. \end{aligned}$$

Como $\text{Hess}^{M_w} \bar{r}(\bar{X}, \bar{Y}) = \eta_w(r)(1 - \langle X, \nabla^N r \rangle \langle Y, \nabla^N r \rangle)$, sustituimos en la desigualdad anterior y obtenemos (según el signo de F' y la versión del corolario 2.2.19)

$$(2.2.55) \quad \begin{aligned} \text{Hess}^P F \circ r|_q(X, X) &\leq (\geq) F''(r) \left\langle \nabla^N r|_q, X \right\rangle^2 + \\ &F'(r) \{ \eta_w(r)(1 - \langle X, \nabla^N r \rangle^2) \\ &+ \left\langle \nabla^N r|_q, A_q^P(X, X) \right\rangle \} \end{aligned}$$

que son las desigualdades queridas. ■

Como una consecuencia de este resultado tenemos la siguiente desigualdad de los Laplacianos:

Proposición 2.2.25 *Sea $N = N^n$ una variedad con un polo o , sea M_w^m un espacio w -modelo con centro o_w y sea P^m una subvariedad inmersa en N . Sea $r|_P$ la función distancia extrínseca. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable.*

(A) *Supongamos que uno de los siguientes conjuntos de acotaciones se satisface:*

$$\{K_{o,N}(\sigma_q) \geq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \geq 0 \forall r\} \text{ ó } \{K_{o,N}(\sigma_q) \leq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \leq 0 \forall r\}.$$

Entonces, dado $q \in P$ y $X \in T_q P$ (unitario),

$$(2.2.56) \quad \begin{aligned} \Delta^P(F \circ r) &\leq (F''(r) - F'(r)\eta_w(r)) \|\nabla^P r\|^2 \\ &+ mF'(r) (\eta_w(r) + \langle \nabla^N r, H_P \rangle) \quad , \end{aligned}$$

donde H^P denota el vector curvatura media de P en N .

(B) *Supongamos que uno de los siguientes conjuntos de acotaciones se satisface:*

$$\{K_{o,N}(\sigma_q) \geq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \leq 0 \forall r\} \text{ ó } \{K_{o,N}(\sigma_q) \leq -\frac{w''(r)}{w(r)} \text{ y } F'(r) \geq 0 \forall r\}.$$

Entonces, dado $q \in P$ y $X \in T_q P$ (unitario),

$$(2.2.57) \quad \begin{aligned} \Delta^P(F \circ r) &\geq (F''(r) - F'(r)\eta_w(r)) \|\nabla^P r\|^2 \\ &+ mF'(r) (\eta_w(r) + \langle \nabla^N r, H_P \rangle) \quad , \end{aligned}$$

donde H^P denota el vector curvatura media de P en N .

Demostración. Simplemente se hallan las trazas de las desigualdades (2.2.52) y (2.2.53) y se tiene en cuenta la nota 2.2.11. ■

Veamos una Proposición que se obtiene a partir de estos resultados y que se utilizará en próximos capítulos:

Proposición 2.2.26 *Sea S^2 una superficie minimal propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard N . Supongamos que tiene sus curvaturas seccionales acotadas superiormente por una constante $b \leq 0$, es decir*

$$K^N \leq b \leq 0.$$

Sea D_t , ($t > 0$), las bolas extrínsecas en S . La curvatura geodésica de las esferas extrínsecas ∂D_t , denotada por k_g^t , está acotada inferiormente de la siguiente forma:

$$(2.2.58) \quad k_g^t \geq \left\{ \eta_{\omega_b}(t) + \left\langle \nabla^\perp r, A^S \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right) \right\rangle \right\} \frac{1}{\|\nabla^S r\|},$$

donde A^S es la segunda forma fundamental de S en N , y $\eta_{\omega_b}(t) = \frac{\omega'_b(t)}{\omega_b(t)}$ es la curvatura media de las esferas geodésicas en las formas espaciales reales.

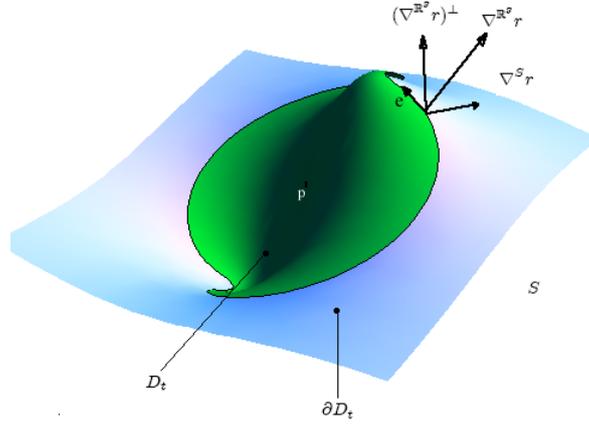
Demostración. Si calculamos la curvatura geodésica de la curva ∂D_t usando la definición 2.1.6 obtenemos

$$(2.2.59) \quad k_g^t = - \left\langle \nabla_e^S e, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right\rangle$$

siendo $e, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}$ los vectores unitarios tangente y normal (hacia afuera), respectivamente, a la curva ∂D_t .

En el gráfico siguiente tenemos una superficie S inmersa en \mathbb{R}^3 en donde vemos descompuestos los gradientes en un punto de la frontera de la esfera de distancia extrínseca centrada en p . El polo considerado es el punto p . También se ha representado el vector

tangente e a la curva ∂D_t .



A través de la definición 2.2.7 de Hessiano obtenemos

$$(2.2.60) \quad \text{Hess}^S r(e, e) = \langle \nabla_e^S \nabla^S r, e \rangle$$

y al ser $\nabla^S r$ y e ortogonales

$$(2.2.61) \quad k_g^t = \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \text{Hess}^S r(e, e).$$

Por otra parte N es una variedad de Cartan Hadamard luego sus curvaturas seccionales o -radiales están acotadas para todo $x \in N - \{o\}$:

$$(2.2.62) \quad K_{o,N}(\sigma_x) \leq b = -\frac{\omega_b''(r)}{\omega_b(r)},$$

donde

$$(2.2.63) \quad \omega_b(r) = \begin{cases} r & \text{si } b = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-b}} \sinh(\sqrt{-b}r) & \text{si } b < 0. \end{cases}$$

Como $\langle \nabla^N r, e \rangle = 0$ (al ser las fronteras de las bolas extrínsecas las curvas de nivel de gradiente $\nabla^N r$), si aplicamos la desigualdad (2.2.53) sustituyendo $F(r)$ por r , obtenemos

$$(2.2.64) \quad k_g^t \geq \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \{ \eta_{\omega_b}(r) + \langle \nabla^\perp r, A^S(e, e) \rangle \}.$$

Por otra parte como S es minimal y $\{e, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\}$ es una base ortonormal del tangente a la superficie tenemos

$$(2.2.65) \quad A^S(e, e) = -A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right)$$

y por tanto

$$(2.2.66) \quad k_g^t \geq \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ \eta_{\omega_b}(r) - \left\langle \nabla^\perp r, A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right) \right\rangle \right\}.$$

■

2.3. Desigualdades isoperimétricas. Variedades de tipo topológico finito

2.3.1. Espacios de comparación isoperimétrica. Monotonía del crecimiento del volumen.

La propiedad sobre la monotonía del crecimiento del volumen de las bolas extrínsecas es un hecho bien conocido cuando consideramos superficies minimales en espacios Euclídeos e hiperbólicos (véase [2] y [38]).

Puede probarse una propiedad similar cuando la variedad ambiente no tiene curvatura seccional constante o la superficie no es minimal. La demostración utiliza ciertas desigualdades isoperimétricas basadas en el Teorema de la divergencia aplicado a estos contextos geométricos (véanse [24], [38], [37] y [36]).

Vamos a construir un espacio modelo al que llamaremos $C_{\omega_b, h}^2$, donde $h(r)$ es una función tal que $h \circ r$ acota superiormente la curvatura media de la superficie y $\omega_b(r)$ es la función *de alabeo* descrita en (2.1.17).

Posteriormente estudiaremos cómo obtener la propiedad clásica de monotonía usando una comparación isoperimétrica ligeramente más general que la establecida en [46]. Esta comparación isoperimétrica está basada, en esta ocasión, en una condición de balance más general.

Definición 2.3.1 (Véanse [24] y [36]) *Dada una función radial $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, el espacio de comparación isoperimétrico $C_{\omega_b, h}^2$ es el espacio W -modelo $C_{\omega_b, h}^2 = [0, +\infty) \times_W S_1^{0,1}$ con base $B = [0, +\infty)$ y función de alabeo $W(r)$ definida por:*

$$(2.3.1) \quad W(t) = \frac{\sinh \sqrt{-b}t}{\sqrt{-b}e^{2 \int_0^t h(s)ds}},$$

donde

$$(2.3.2) \quad W(0) = 0, W'(0) = 1.$$

Nota 2.3.2 La función de alabeo $W(r)$ es la solución de la ecuación diferencial:

$$(2.3.3) \quad \frac{W'(r)}{W(r)} = \frac{w'_b(r)}{w_b(r)} - 2h(r) \quad .$$

con la condición inicial:

$$(2.3.4) \quad W(0) = 0.$$

Nota 2.3.3 Observemos que $C_{w_b, h}^2$ es en realidad un espacio modelo $C_{w_b, h}^2 = M_W^2$ bien definido:

Tiene un polo en $r = 0$ al que denotaremos o_W . Se cumple $W(r) \geq 0$ para todo r y $W(r)$ es 0 sólo en $r = 0$. También, a partir de (2.3.3),

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} W'(t) &= W(t) \left(\sqrt{-b} \coth \sqrt{-bt} - h(t) \right) = \\ &= \frac{\sinh \sqrt{-bt}}{\sqrt{-b} e^{2 \int_0^t h(s) ds}} \left(\sqrt{-b} \coth \sqrt{-bt} - h(t) \right) = \\ &= e^{-2 \int_0^t h(s) ds} \left(\cosh \sqrt{-bt} - h(t) \sinh \sqrt{-bt} \right), \end{aligned}$$

luego se cumple $W'(0) = 1$.

Por otra parte, dada una función de alabeo $W(r)$, introducimos la función cociente isoperimétrico $q_W(r)$ para el correspondiente espacio W -modelo $C_{w_b, h}^2$ de la siguiente forma:

$$(2.3.6) \quad q_W(r) = \frac{\text{Vol}(B_r^W)}{\text{Vol}(S_r^W)} = \frac{\int_0^r W(t) dt}{W(r)},$$

donde B_r^W denota la r -bola geodésica centrada en el polo de radio r en $C_{w_b, h}^2$ con borde la esfera S_r^W .

Definición 2.3.4 Un espacio de comparación isoperimétrico $C_{w_b, h}^2$ se llamará fuertemente balanceado sii

$$(2.3.7) \quad |h(r)| \leq \frac{1}{2} \left(\eta_{w_b}(r) - \sqrt{-b} \right), \forall r > 0,$$

donde $\eta_{w_b}(t) = \frac{w'_b(t)}{w_b(t)} = \sqrt{-b} \coth \sqrt{-bt}$ es la curvatura media de las esferas geodésicas de radio t en el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(b)$.

Ahora presentamos las constelaciones de comparación isoperimétrica:

Definición 2.3.5 (Véase [21]) La terna $\{N^n, S^2, C_{w_b, h}^2\}$ recibe el nombre de constelación de comparación isoperimétrica acotada superiormente en el intervalo $[0, \infty)$ sii

1. N^n es una variedad de Cartan-Hadamard con curvaturas seccionales acotadas inferiormente por una cota negativa $K^N \leq b < 0$.
2. Si $o \in N$ es un polo de N , la curvatura media o -radial de S está acotada superiormente por una función diferenciable radial $h(r)$:

$$(2.3.8) \quad \mathcal{C}(x) \leq h(r(x)).$$

3. $C_{\omega_b, h}^2$ es el espacio W -modelo con la función de alabeo W construida en la definición 2.3.1 a través de ω_b y h .

Nota 2.3.6 Una posible constelación de comparación isoperimétrica correspondería a la terna $\{\mathbb{R}^3, S^2, \mathbb{R}^2\}$ donde S es una superficie minimal (luego $h = 0$).

Nuestro primer resultado es el siguiente Teorema de comparación isoperimétrica:

Teorema 2.3.7 Sea $\{N^n, S^m, C_{\omega_b, h}^2\}$ una constelación de comparación isoperimétrica acotada superiormente. Supongamos el espacio modelo $C_{\omega_b, h}^2$ está fuertemente balanceado. Entonces existe un $t_0 \geq 0$ tal que:

$$(2.3.9) \quad \frac{\text{Vol}(\partial D_R)}{\text{Vol}(D_R) - \text{Vol}(D_{t_0})} \geq \frac{\text{Vol}(\partial B_R^W)}{\text{Vol}(B_R^W)}, \forall R \geq t_0.$$

Demostración. Veamos antes dos lemas:

Lema 2.3.8 Si el espacio de comparación isoperimétrico $C_{\omega_b, h}^2$ está fuertemente balanceado entonces

1. La función $h(t)$ cumple

$$(2.3.10) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = 0$$

2. La función $q_W(t) = \frac{\int_0^t W(s) ds}{W(t)}$ cumple

$$(2.3.11) \quad q_W(t) \leq \frac{1}{\sqrt{-b}} \quad \forall t > 0$$

- 3.

$$(2.3.12) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t) &= +\infty \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} q_W(t) &= \frac{1}{\sqrt{-b}} \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} q_W(t) &= 0 \end{aligned}$$

Demostración. Como $0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} |h(t)| \leq \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_{\omega_b}(t) - \sqrt{-b}) = 0$, tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

Se demuestra (2.3.11) a través de la relación $h(r) \leq |h(r)| \leq \frac{1}{2}(\eta_{\omega_b}(r) - \sqrt{-b})$, para todo $r \geq 0$, y la ecuación (2.3.3).

Para demostrar (2.3.12) basta con considerar que $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ y que $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = +\infty$, como se demuestra fácilmente, y aplicamos la regla de L'Hôpital adecuadamente para obtener los límites buscados. ■

Lema 2.3.9 *Consideremos un espacio de comparación isoperimétrico $C_{\omega_b, h}^2$. Si $C_{\omega_b, h}^2$ está fuertemente balanceado en $[0, \infty)$ entonces existe cierto $t_0 \geq 0$ tal que se cumple la siguiente desigualdad para todo $r \in [t_0, \infty)$:*

$$(2.3.13) \quad q_W(r) (\eta_{\omega_b}(r) - h(r)) \geq \frac{1}{2} \text{ (condición de balance)}$$

donde

$$(2.3.14) \quad q_W(t) = \frac{\text{Vol}(B_t^W(o_W))}{\text{Vol}(\partial B_t^W(o_W))} = \frac{\int_0^t W(s) ds}{W(t)},$$

siendo o_W el centro del espacio modelo.

Demostración. Aplicando las igualdades (2.3.12) del lema 2.3.8 se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_W(t) (\eta_{\omega_b}(t) - h(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_W(t) \lim_{t \rightarrow \infty} (\eta_{\omega_b}(t) - h(t)) = 1$$

Por tanto, aplicando la definición de límite cuando t tiende a infinito con $\epsilon = \frac{1}{2}$ obtenemos que existe $t_0 \geq 0$ tal que $q_W(t) (\eta_{\omega_b}(t) - 2h(t)) \geq \frac{1}{2}$. ■

Vamos a demostrar el Teorema. Sea $R > t_0$, $t \in [t_0, R]$. Construimos la función

$$(2.3.15) \quad \psi(t) = \int_t^R \frac{1}{W(u)} \left(\int_0^u W(s) ds \right) du, \quad \forall t \geq t_0.$$

Se cumple

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= -q_W(t) = -\frac{\text{Vol}(B_t^W)}{\text{Vol}(\partial B_t^W)} \leq 0 \\ \psi''(t) &= -1 + q_W(t) (\eta_{\omega_b}(t) - 2h(t)). \end{aligned}$$

Trasplantamos ψ a S definiendo

$$(2.3.16) \quad \bar{\psi} : D_R - D_{t_0} \rightarrow \mathbb{R} / \bar{\psi}(x) = \psi(r(x))$$

y aplicamos la desigualdad 2.2.56 puesto que $K_{o,N}(\sigma(x)) \leq b < 0$ y $\psi'(t) \leq 0$:

(2.3.17)

$$\Delta^S \psi(r(x)) \leq (\psi''(r(x)) - \psi'(r(x))\eta_{\omega_b}(r(x))) \|\nabla^S r\|^2 + 2\psi'(r(x))(\eta_{\omega_b}(r(x)) - h(t)).$$

Como $r(x) \geq t_0$ se tiene que

(2.3.18)

$$\psi''(r(x)) - \psi'(r(x))\eta_{\omega_b}(r(x)) \geq 0,$$

por cumplirse el lema 2.3.9 $\forall t \geq t_0$. Luego, al ser $\|\nabla^S r\|^2 \leq 1$,

(2.3.19)

$$\begin{aligned} \Delta^S \psi(r(x)) &\leq \psi''(r(x)) - \psi'(r(x))\eta_{\omega_b}(r(x)) + \\ &2\psi'(r(x))(\eta_{\omega_b}(r(x)) - h(r(x))) \leq \\ &-1 + q_W(r(x))(\eta_{\omega_b}(r(x)) - 2h(r(x))) + \\ &q_W(r(x))\eta_{\omega_b}(r(x)) - \\ &2q_W(r(x))(\eta_{\omega_b}(r(x)) - h(r(x))) \leq -1. \end{aligned}$$

Integramos la desigualdad 2.3.19 en el anillo

(2.3.20)

$$A_{t_0}^R = D_R - D_{t_0}$$

Para ello vamos a aplicar el Teorema de la divergencia. Como el vector normal (hacia afuera) de las curvas ∂D_R y ∂D_{t_0} en el anillo son, respectivamente, $\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}$ y $\frac{-\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}$ obtenemos:

(2.3.21)

$$\text{Vol}(A_{t_0}^R) \leq \int_{A_{t_0}^R} -\Delta^S \psi(r(x)) d\mu = -\psi'(R) \int_{\partial D_R} \|\nabla^S r\| d\mu + \psi'(t_0) \int_{\partial D_{t_0}} \|\nabla^S r\| d\mu.$$

Al cumplirse la desigualdad

(2.3.22)

$$\int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu \leq \int_{\partial D_t} d\mu = \text{Vol}(\partial D_t)$$

podemos deducir, sustituyéndola en (2.3.21) y teniendo en cuenta $-\psi'(t) = q_W(t) \geq 0$,

(2.3.23)

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D_R) - \text{Vol}(D_{t_0}) &\leq \\ q_W(R) \text{Vol}(\partial D_R) - q_W(t_0) \int_{\partial D_{t_0}} \|\nabla^S r\| d\mu &\leq \\ q_W(R) \text{Vol}(\partial D_R) &= \frac{\text{Vol}(B_R^W)}{\text{Vol}(S_R^W)} \text{Vol}(\partial D_R). \end{aligned}$$

Si $R \geq t_0$ podemos despejar

(2.3.24)

$$\frac{\text{Vol}(S_R^W)}{\text{Vol}(B_R^W)} \leq \frac{\text{Vol}(\partial D_R)}{\text{Vol}(D_R) - \text{Vol}(D_{t_0})}$$

y el Teorema queda demostrado. ■

Nota 2.3.10 *Puede consultarse en [17] que*

$$\text{Vol}(B_r^{b,m}) = \text{Vol}(\mathbb{S}^{0,m-1}) \int_0^r \omega_b^{m-1}(s) ds,$$

donde $\mathbb{S}^{0,m-1}$ es la esfera de radio 1 en el Euclídeo ($b = 0$).

Como corolario del Teorema 2.3.7 tenemos los siguientes resultados:

Corolario 2.3.11 *Dada N^n una variedad Riemanniana con un polo o y dada $\{N, S, C_{\omega,h}^2\}$ constelación de comparación isoperimétrica acotada superiormente. Supongamos que el espacio modelo $C_{\omega,h}^2$ está fuertemente balanceado. Sabemos que existe un valor t_0 a partir del cual se cumple la condición de balance (2.3.13). Denotaremos $v(t) = \text{Vol}(D_t)$, el volumen de las bolas extrínsecas y $v_0 = \text{Vol}(D_{t_0})$. Sea $B_t^W(o_W)$ la bola geodésica en el W -espacio modelo. Entonces la función*

$$(2.3.25) \quad \frac{v(t) - v_0}{\text{Vol}(B_t^W(o_W))}$$

es no decreciente a partir de t_0 .

Demostración. Llamemos

$$(2.3.26) \quad f(t) = \frac{\text{Vol}(D_t) - v_0}{\text{Vol}(B_t^W)}$$

y

$$(2.3.27) \quad G(t) = \ln f(t).$$

Partiendo de la fórmula de la co-área obtenemos que

$$(2.3.28) \quad v'(t) = \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} d\mu \geq \int_{\partial D_t} d\mu = \text{Vol}(\partial D_t),$$

luego

$$(2.3.29) \quad \frac{d}{dt} \text{Vol}(D_t) \geq \text{Vol}(\partial D_t).$$

También sabemos (ver, por ejemplo, [19]) que en un producto alabeado, en nuestro caso con función de alabeo W ,

$$(2.3.30) \quad \text{Vol}(B_t^W)' = \text{Vol}(\partial B_t^W).$$

Con todo ello calculamos

$$(2.3.31) \quad G'(t) = \frac{v'(t)}{v(t) - v_0} - \frac{\text{Vol}(\partial B_t^W)}{\text{Vol}(B_t^W)} \geq \frac{\text{Vol}(\partial D_t)}{v(t) - v_0} - \frac{\text{Vol}(\partial B_t^W)}{\text{Vol}(B_t^W)}$$

En esta situación estamos en condiciones de aplicar el corolario (2.3.7), anteriormente visto, de esta forma sabemos que

$$(2.3.32) \quad \frac{\text{Vol}(\partial D_t)}{\text{Vol}(D_t) - v_0} \geq \frac{\text{Vol}(\partial B_t^W)}{\text{Vol}(B_t^W)}$$

y deducimos que $G'(t) \geq 0$.

Ahora $G(t)$ es creciente y, por ende, también la función

$$(2.3.33) \quad e^{G(t)} = f(t).$$

■

Corolario 2.3.12 (Monotonía no minimal) *Sea $\{N, S, C_{\omega, h}^2\}$ una constelación de comparación isoperimétrica acotada superiormente y supongamos que el espacio modelo $C_{\omega, h}^2$ está fuertemente balanceado. Entonces la función $\frac{v(t)-v_0}{\cosh \sqrt{-bt}-C}$ es no decreciente en $[t_0, +\infty)$, donde t_0 es el valor dado por el lema 2.3.9 y la constante C está definida como*

$$(2.3.34) \quad C = \inf_{t>0} \left(\cosh \sqrt{-bt} - q_W(t) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \right).$$

Como consecuencia la función $\frac{v(t)-v_0}{\cosh \sqrt{-bt}}$ es no decreciente en $[t_0, +\infty)$, donde $v_0 = \text{Vol}(D_{t_0})$.

Demostración. Vamos a estudiar la definición de la constante C , para ello veamos una consecuencia del lema 2.3.8:

Lema 2.3.13 *Consideremos la constelación de comparación isoperimétrica $\{N, S, C_{\omega, h}^2\}$ acotada superiormente y supongamos que el espacio modelo $C_{\omega, h}^2$ está fuertemente balanceado. Definimos la función $f(t) := \cosh \sqrt{-bt} - q_W(t) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \quad \forall t > 0$. Entonces $f(t) > 0 \quad \forall t > 0$ y $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$.*

Demostración. Aplicando (2.3.12) del lema 2.3.8 tenemos:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$$

Finalmente como $q_W(t) \leq \frac{1}{\sqrt{-b}} \quad \forall t > 0$ entonces:

$$f(t) \geq \cosh \sqrt{-bt} - \sinh \sqrt{-bt} \geq 0 \quad \forall t > 0$$

■

Ahora la demostración del corolario se desarrolla como sigue: aplicando el lema 2.3.9 y el lema 2.3.13 la función $f(t)$ es no negativa y $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1$. Por tanto el ínfimo C existe y tenemos

$$(2.3.35) \quad 0 \leq C \leq 1.$$

Notemos que C depende, en última instancia, de las funciones $h(r)$ y $\omega_b(r)$, es decir $C = C_{h,b}$.

Ahora factorizamos:

$$(2.3.36) \quad \frac{v(t) - v_0}{\cosh \sqrt{-bt} - C} = \frac{v(t) - v_0}{\int_0^t W(s) ds} \frac{\int_0^t W(s) ds}{\cosh \sqrt{-bt} - C}$$

La función $\frac{\int_0^t W(s) ds}{\cosh \sqrt{-bt} - C} > 0$ es no decreciente para todo $t \geq 0$ si y sólo si, para todo $t \geq 0$,

$$(2.3.37) \quad W(t)(\cosh \sqrt{-bt} - C) - \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \int_0^t W(s) ds \geq 0$$

lo que equivale a la desigualdad $C \leq \cosh \sqrt{-bt} - q_W(t) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \quad \forall t \geq 0$, pero esto es cierto por la definición de C .

Por otra parte, como $C_{\omega_b, h}^2$ es un espacio fuertemente balanceado, podemos aplicar el corolario 2.3.11 para concluir que la función $\frac{v(t) - v_0}{\text{Vol}(B_t^W(p_W))}$ es no decreciente en $[t_0, +\infty)$, para cierto $t_0 \geq 0$.

Por lo tanto tenemos el producto de dos funciones positivas y no decrecientes en $[t_0, \infty)$, luego el resultado de ese producto es no decreciente en $[t_0, \infty)$ como queríamos probar.

Por último la función $\frac{v(t) - v_0}{\cosh \sqrt{-bt}}$ es no decreciente en $[t_0, +\infty)$. Esto se sigue directamente del hecho de que, para todo $0 \leq C \leq 1$, y para todo $t \geq t_0$, se cumple

$$(2.3.38) \quad \begin{aligned} 0 &\leq v'(t)(\cosh \sqrt{-bt} - C) - (v(t) - v_0) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \\ &\leq v'(t) \cosh \sqrt{-bt} - (v(t) - v_0) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \end{aligned}$$

■

Corolario 2.3.14 (Monotonía minimal) *Consideremos una constelación de comparación isoperimétrica $\{N^n, S^2, C_{\omega_b, h}^2\}$, donde S es minimal (y por tanto $h(r) = 0$). Entonces la función $\frac{v(t)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})} = \frac{\sqrt{-b}}{2\pi} \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt}) - 1}$ es no decreciente en $[0, +\infty)$*

Demostración. Como $h(t) = 0$ el espacio $C_{w_b, h}^2$ es ahora el espacio hiperbólico $\mathbb{H}^2(b)$. En este caso la condición de balance se satisface a partir de $t_0 = 0$ y tenemos la siguiente desigualdad isoperimétrica (véase [36] y [46])

$$(2.3.39) \quad \frac{\text{Vol}(\partial D_R)}{\text{Vol}(D_R)} \geq \frac{\text{Vol}(\partial B_R^{b,2})}{\text{Vol}(B_R^{b,2})}, \forall R \geq 0.$$

como consecuencia de (2.3.39) tenemos la propiedad de monotonía para superficies minimales propiamente inmersas en una variedad de Cartan-Hadamard con curvatura estrictamente negativa (véase [2] y [36]). Esta propiedad también se satisface para superficies minimales en el espacio Euclídeo (véase [36]). ■

2.3.2. Característica de Euler de variedades orientables compactas con borde

En este apartado llamaremos superficie a una variedad Riemanniana conexa de dimensión 2 y seguiremos, fundamentalmente, [22] (páginas 252-265) y [40] (capítulo 1)

Definición 2.3.15 Una región $A \subset S$ se define como una unión de conjuntos abiertos en S , conexos y con frontera.

Una región $A \subset S$ es regular si es compacta y su frontera es una unión finita de curvas regulares cerradas y sin autointersecciones.

Diremos que una región regular $A \subset S$ es una región simple si es homeomorfa a un disco y su frontera es la imagen de una curva cerrada y simple diferenciable a trozos.

Definición 2.3.16 (Véanse [22] y [40]) Sea S variedad 2-dimensional orientada, una triangulación de una región regular $A \subset S$ es una familia finita de conjuntos cerrados T_i homeomorfos a triángulos de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i=1}^n$ tales que:

1. $\cup_{i=1}^n T_i = A$
2. Si $i \neq j$ y $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ entonces los dos triángulos o bien comparten sólo una cara o bien sólo un vértice.

Definición 2.3.17 (Véase [22]) Para una triangulación dada \mathcal{T} de una región regular $A \subset S$ sean: C el número de triángulos (en la definición anterior $C = n$), A número de lados de los triángulos y V el número de vértices. Entonces:

$$C - A + V = \chi$$

es la característica de Euler de la región.

Teorema 2.3.18 (Véase [22]) *Cada región regular de una superficie admite una triangulación.*

Teorema 2.3.19 (Véase [22]) *Para una región regular $A \subset S$ de una superficie, la característica de Euler de A es independiente de la triangulación elegida, por tanto puede denotarse por $\chi(A)$.*

Teorema 2.3.20 (Véase [40], Teorema 5.1) *Toda superficie compacta es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos.*

Definición 2.3.21 (Véase [40]) *Dadas dos superficies disjuntas S_1 y S_2 . Sean $S'_i = S_i - D_i$ donde D_i son conjuntos cerrados homeomorfos a 2-bolas del Euclídeo. Llamaremos suma conexa al espacio cociente $S'_1 \cup S'_2$ que identifica los puntos del borde de D_1 y D_2 mediante un homeomorfismo.*

Definición 2.3.22 (Véase [40]) *Una superficie compacta que sea suma conexa de g toros o g planos proyectivos se dice de género g . Una esfera es de género 0.*

Teorema 2.3.23 (Véase [40]) *Sea S una superficie compacta de género g con borde, entonces*

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g, & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - g, & \text{si } S \text{ es no orientable} \end{cases} .$$

Vamos a introducir el concepto de variedad con borde, se utilizará fundamentalmente para el estudio de las bolas extrínsecas.

Definición 2.3.24 (Véase [40]) *Una superficie con borde es un espacio de Hausdorff tal que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a una 2-bola de \mathbb{R}^2 o bien al espacio*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0\}$$

Nota 2.3.25 *Sea S una superficie compacta y con borde ∂S . Supongamos que el borde tiene c componentes conexas. Cada componente conexa del borde es una 1-variedad conexa y compacta, por tanto homeomorfa a una circunferencia. Si tomamos c discos cerrados y pegamos cada componente conexa del borde ∂S con el borde de cada disco construimos una superficie compacta sin borde a la que denotaremos S^* .*

Definición 2.3.26 (Véase [40]) *El género de una superficie compacta S y con borde se define como el género de la superficie compacta S^* (sin borde) que se obtiene adhiriendo discos a las componentes conexas del borde de S .*

Teorema 2.3.27 (Véase [40]) Sea S una superficie compacta con borde ∂S . Supongamos que ∂S tiene c componentes conexas. Sea S^* la superficie compacta sin borde que se obtiene a partir de S adhiriendo discos a cada componente conexa del borde ∂S (véase nota 2.3.25). Entonces

$$\chi(S) = \chi(S^*) - c.$$

Ahora estamos en disposición de formular el corolario que nos da la característica de Euler de una superficie compacta con borde (siendo c el número de componentes conexas del borde, que coincide con el número de triángulos quitados a la superficie sin borde) usando el Teorema anterior y el Teorema 2.3.23:

Corolario 2.3.28 Sea S una superficie compacta con borde entonces

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g - c, & \text{si } S \text{ es orientable} \\ 2 - g - c, & \text{si } S \text{ es no orientable} \end{cases}$$

siendo c el número de componentes conexas del borde ∂S y g el género de la superficie S .

Teorema 2.3.29 (Gauss-Bonnet) (Véase [22]) Sea $A \subset S$ una región regular de una superficie orientada S cuya frontera ∂A es la unión de las curvas regulares a trozos, cerradas, simples C_1, \dots, C_n . Supongamos que la orientación en C_i es positiva, y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ los ángulos interiores de las curvas C_i . Entonces

$$(2.3.40) \quad \sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \int_A K^S d\sigma = 2\pi\chi(A) - \sum_{i=1}^p (\pi - \alpha_i),$$

donde s es la longitud de arco, k_g la curvatura geodésica, K^S es la curvatura de Gauss.

Corolario 2.3.30 Si A es una región con frontera suave ∂A (sin vértices) entonces

$$(2.3.41) \quad \int_{\partial A} k_g(s) ds + \int_A K^S d\sigma = 2\pi\chi(A)$$

2.3.3. Topología de tipo finito. Teorema de Huber

Definición 2.3.31 (Véase [31]) Una colección exhaustiva de S es una colección de subconjuntos $\{D_t \subseteq S\}_{t>0}$ tal que cumple las siguientes dos condiciones:

1. $D_t \subseteq D_s$ cuando $s \geq t$
2. $\cup_{t>0} D_t = S$

Definamos superficie de tipo topológico finito

Definición 2.3.32 (Véanse [45] y [54]) Diremos que una superficie S no compacta es de tipo topológico finito sii es homeomorfa a $S^* - \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ siendo S^* superficie compacta sin borde. A los puntos p_i se les denomina finales de la superficie S .

Teorema 2.3.33 (Morse) (Véase [43]) Sea M una variedad diferenciable. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sean $a < b$ y supongamos que $f^{-1}[a, b]$ es compacto y que no contiene puntos críticos de f . Entonces $f^{-1}(-\infty, a]$ es difeomorfo a $f^{-1}(-\infty, b]$

Como consecuencia del Teorema de Morse anterior tenemos el siguiente resultado relativo a superficies minimales:

Teorema 2.3.34 Sea S una superficie minimal completa propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard N con curvaturas seccionales acotadas superiormente por una cantidad negativa $K^N \leq b < 0$. Supongamos que $\int_S \|A^S\|^2 d\sigma < \infty$ y que $\|A^S\|(q) \leq h_b(r(q))$ fuera de un conjunto compacto $K \subset S$, donde $r(q) = \text{dist}_N(o, q)$, la distancia a un polo fijado $o \in N$. Entonces

(i) S es difeomorfo a una superficie compacta S^* donde se suprimen un número finito de puntos.

(ii) Para todo valor suficientemente grande $t > R_0 > 0$ se cumple $\chi(S) = \chi(D_t)$ siendo $\{D_t\}_{t>0}$ una colección exhaustiva de S por bolas extrínsecas centradas en el polo $o \in N$, y por tanto

$$-\chi(S) = \liminf_{t \rightarrow \infty} (-\chi(D_t)) < +\infty.$$

Demostración. Consideremos una colección exhaustiva $\{E_t\}_{t>0}$ de S por bolas extrínsecas centradas en el polo $o \in N$. Apliquemos la Proposición 2.2.26 a las curvas $\partial E_t = \Gamma_t$: Como se cumple

$$-\|A^S\| \leq \langle A^S(e, e), \nabla^\perp r \rangle \leq \|A^S\|$$

tenemos, en los puntos de la curva $q \in \Gamma_t$,

$$(2.3.42) \quad \begin{aligned} \|\nabla^S r\|(q) \cdot k_g^{\Gamma_t}(q) &\geq h_b(r_p(q)) + \langle A^S(e, e), \nabla^\perp r \rangle(q) \\ &\geq h_b(r_p(q)) - \|A^S\|(q) \end{aligned}$$

Como sabemos por hipótesis que $\|A^S\|(q) \leq h_b(r(q)) \quad \forall q \in S \setminus K$ obtenemos, para todos los puntos $q \in \Gamma_t$ y para t suficientemente grande,

$$(2.3.43) \quad \|\nabla^S r\|(q) \cdot k_g^{\Gamma_t}(q) > 0$$

Por tanto, $\|\nabla^S r\| > 0$ en Γ_t , para valores de t suficientemente grandes. Fijando un radio R_0 suficientemente grande podemos concluir que la función distancia extrínseca r no tiene puntos críticos en $S \setminus E_{R_0}$.

La anterior desigualdad implica (a través del Teorema 2.3.33) que existe un difeomorfismo

$$\Phi : S \setminus E_{R_0} \rightarrow \Gamma_{R_0} \times [0, \infty[$$

En particular S sólo tiene un número finito de finales (componentes no acotadas de la superficie) cada uno de tipo finito.

Para demostrar esto podemos aplicar 2.3.33 para concluir que el anillo extrínseco $A_{R_0, R}(o) = E_R(o) \setminus E_{R_0}(o)$ no contiene puntos críticos de la función distancia $r : S \rightarrow \mathbb{R}$ por la desigualdad (2.3.43), entonces $E_R(o)$ es difeomorfo a $E_{R_0}(o)$ para todo $R \geq R_0$.

El difeomorfismo anteriormente comentado implica que podemos construir S desde E_{R_0} adhiriendo anillos y que $\chi(S \setminus E_t) = 0$ donde $t \geq R_0$. Entonces, para todo $t > R_0$,

$$\chi(S) = \chi(E_t \cup (S \setminus E_t)) = \chi(E_t)$$

■

Nota 2.3.35 Si S es una superficie minimal propiamente inmersa en una variedad Riemanniana de curvatura seccional constante igual a $b \leq 0$ sabemos, por los resultados de Anderson ([3]) y Oliveira ([11]), que se obtiene el Teorema anterior sin necesidad de imponer $\|A^S\|(q) \leq h_b(r(q))$.

Vamos a demostrar una versión extrínseca del Teorema clásico de A. Huber dado por B. White en [54]. Este es un resultado clave que nos permitirá usar un argumento como en [7] y [8].

Teorema 2.3.36 Sea S^2 una superficie completa y conexa propiamente inmersa en una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard N con curvaturas seccionales acotadas superiormente por una cantidad $b \leq 0$. Sea $\{D_{r_i}\}_{i=1}^{\infty}$ una colección exhaustiva de S por bolas extrínsecas conexas donde $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de radios tales que $r_i \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$. Si tenemos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{-\chi(D_{r_k})\}_{k=i}^{\infty}) < +\infty$$

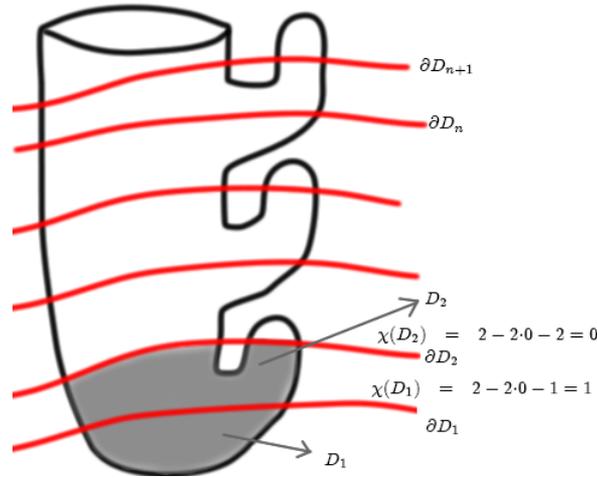
Entonces

1. S^2 tiene topología finita
2. $-\chi(S) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{-\chi(D_{r_k})\}_{k=i}^{\infty}) < +\infty$

Demostración. Como las bolas extrínsecas D_r en una superficie propiamente inmersa son precompactas y conexas, se tiene, aplicando el corolario 2.3.28:

$$-\chi(D_r) = 2g(r) + c(r) - 2$$

donde $g(r)$ y $c(r)$ son el género y el número de componentes conexas del borde de D_r , respectivamente.



Por tanto, si consideramos una sucesión de radios $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $r_i \rightarrow \infty$ cuando $i \rightarrow \infty$, tenemos, tomando límites

$$(2.3.44) \quad \begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{-\chi(D_{r_k})\}_{k=i}^{\infty}) \\ & = 2 \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{g(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) + \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{c(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) - 2 < \infty \end{aligned}$$

Por tanto, como $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{g(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) \geq 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{c(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) \geq 0$ y $g(r)$ es una función de r , con imágenes enteras, no negativas y no decreciente,

$$(2.3.45) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{g(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(r_i) = g < \infty$$

Como $c(r)$ también es una función de r que toma valores enteros positivos entonces

$$(2.3.46) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{c(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) < \infty.$$

Por otra parte, como $\{c(r_k)\}_{k=i}^{\infty}$ (a la que denotaremos $\{c_k\}_{k=i}^{\infty}$ por comodidad) es una sucesión de números naturales, entonces el ínfimo se da en el conjunto, llamemos $c_{l(i)}$, con $l(i) \geq i$ a ese mínimo de $\{c_k\}_{k=i}^{\infty}$, es decir

$$\inf(\{c_k\}_{k=i}^{\infty}) = \min(\{c_k\}_{k=i}^{\infty}) = c_{l(i)},$$

y como consecuencia la sucesión de números naturales $\{c_{l(i)}\}_{i=1}^{+\infty}$ es monótona (es creciente puesto que se cumple $\{c_k\}_{k=i+1}^{\infty} \subset \{c_k\}_{k=i}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, por tanto $c_{l(i+1)} = \min\{c_k\}_{k=i+1}^{\infty} \geq \min\{c_k\}_{k=i}^{\infty} = c_{l(i)}$) y acotada por $\lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{c(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) < \infty$, luego existe un número c tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_{l(i)} = c < \infty.$$

En consecuencia, existe un número natural k_0 tal que, $\forall i \geq k_0$, $c_{l(i)} = c$. Luego, para todo $i \geq k_0$

$$\begin{aligned} g(r_{l(i)}) &= g \\ c(r_{l(i)}) &= c \end{aligned}$$

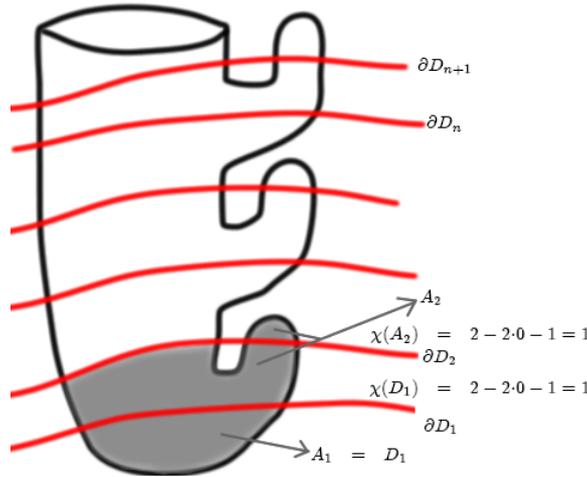
y cualquier conjunto compacto de

$$S \setminus D_{r_{l(k_0)}}$$

tiene cero agujeros.

Ahora, identificando $r_{l(i)} = r_i$, dada la sucesión $\{r_i\}_{i=k_0}^{\infty}$ y para cada r_i , sea A_i la unión de D_{r_i} con las componentes conexas de $S \setminus D_{r_i}$ son compactos (si no hubiera ninguno entonces $A_i = D_{r_i}$). Sea $g(A_i)$ y $c(A_i)$ el número de agujeros y componentes de la frontera, respectivamente, de A_i . Como A_i es precompacto entonces, dado $j \geq i$ suficientemente grande

$$D_{r_i} \subseteq A_i \subseteq D_{r_j}$$



Por tanto, como $j > i \geq k_0$, $g = g(r_{l(i)}) \leq g(A_{l(i)}) \leq g(r_{l(j)}) = g$, luego

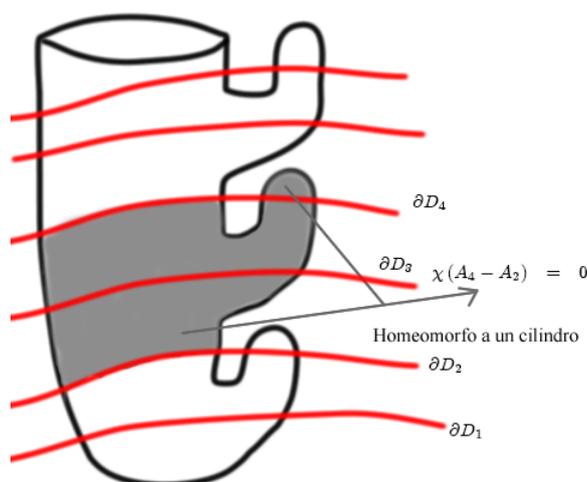
$$(2.3.47) \quad g(A_i) = g \quad \forall i \geq k_0$$

y, por la construcción de $A_{l(i)}$, tenemos que $c(A_i) \leq c(r_i) \quad \forall i \geq k_0$, por lo que podemos concluir que

$$(2.3.48) \quad c(A_i) \leq c \quad \forall i \geq k_0$$

Como consecuencia de (2.3.47) y (2.3.48), tenemos que A_i ($i \geq k_0$) son homeomorfos, con $A_{l(i+1)}$ obtenido desde A_i pegando anillos.

Luego, S tiene topología finita, ya que $S = A_{k_0} \cup S \setminus A_{k_0}$, A_{k_0} es compacto y $S \setminus A_{k_0}$ es homeomorfo a una unión finita de cilindros.



Además

$$(2.3.49) \quad \chi(S) = \chi((S \setminus A_{l(k_0)}) \cup A_{l(k_0)}) = \chi(S \setminus A_{l(k_0)}) + \chi(A_{l(k_0)}) = \chi(A_{l(k_0)})$$

luego, como $g(A_k) = g(r_k) = g$ y $c(A_k) \leq c(r_k) \leq c$,

$$\chi(S) = \chi(A_k) \geq 2 - 2g - c$$

luego

$$-\chi(S) \leq 2g + c - 2$$

y concluimos

$$(2.3.50) \quad \begin{aligned} & -\chi(S) \leq 2g + c - 2 = \\ & 2 \liminf_{i \rightarrow \infty} (\{g(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) + \liminf_{i \rightarrow \infty} (\{c(r_k)\}_{k=i}^{\infty}) - 2 = \\ & \liminf_{i \rightarrow \infty} (\{-\chi(D_{r_k})\}_{k=i}^{\infty}) < +\infty \end{aligned}$$

■

2.3.4. Fórmula de la co-área

Consideremos una función diferenciable propia (es decir si $K \subset \mathbb{R}$ es un compacto entonces $f^{-1}(K) \subset M$ es también compacto) $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida en una variedad Riemanniana M . El conjunto de puntos críticos de f es un conjunto de medida nula (véase

[50], página 63) de \mathbb{R} y el conjunto de valores regulares O es un conjunto abierto de \mathbb{R} . Entonces para $t \in O$, $f^{-1}(t) = \Gamma_t = \{p \in M : f(p) = t\}$ es una hipersuperficie compacta de M y dado $q \in \Gamma_t$, $\nabla^M f(q)$ es perpendicular a Γ_t . Definimos $\Omega_t = \{p \in M : f(p) \leq t\}$ y $v(t) = \text{Vol}(\Omega_t)$. Entonces

Proposición 2.3.37 (*Fórmula de la Co-área, Teorema 5.8, [50]*) Sea M una variedad Riemanniana con métrica g . Sea f una función C^∞ definida en M . Para una función u integrable en M se tiene:

1. Si g_t es la métrica inducida en $\Gamma_t := \{p \in M; f(p) = t\}$ desde g entonces

$$(2.3.51) \quad \int_M u \|\nabla f\| d\nu_g = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{\Gamma_t} u d\nu_{g_t}$$

2. Si $t \rightsquigarrow V_t := \text{vol}\{p \in M; f(p) < t\}$ es una función C^∞ con valor regular t de f tal que $V_t < +\infty$ entonces

$$(2.3.52) \quad \frac{d}{dt} V_t = \int_{\Gamma_t} \|\nabla f\|^{-1} d\nu_{g_t}$$

Si S es una superficie propiamente inmersa en una variedad Riemanniana N usaremos esta Proposición cuando la función $f(x)$ es la función distancia extrínseca $r(x)$.

Por tanto, aplicando la Proposición anterior tenemos:

Corolario 2.3.38 Sea S superficie propiamente inmersa en N , variedad Riemanniana y $D_t \subset S$ la bola extrínseca de radio t . Si consideramos en la fórmula de la co-área la función distancia $r(x)$ tendremos que Γ_t es ahora ∂D_t , el borde de las bolas extrínsecas, y V_t es ahora $\text{Vol}(D_t)$, al que denotaremos $v(t)$. Entonces

$$(2.3.53) \quad \int_S u(x) \|\nabla r\| d\sigma = \int_0^{+\infty} \int_{\partial D_t} u(x) d\mu dt$$

$$(2.3.54) \quad v'(t) = \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla r\|} d\mu$$

3

Parabolicidad de una variedad

3.1. Introducción	58
3.2. Preliminares	59
3.2.1. Capacidad	59
3.2.2. Variedades parabólicas e hiperbólicas	64
3.2.3. Criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden	65
3.3. Condiciones necesarias para la parabolicidad e hiperbolicidad	66
3.4. Corolarios de los Teoremas	69
3.5. Demostración de las partes (A) de los Teoremas 3.3.7 y 3.3.9	74
3.6. Demostración de las partes (B) de los Teoremas 3.3.7 y 3.3.9	78

3.1. Introducción

Supondremos en este capítulo que P^m es una subvariedad no compacta propiamente inmersa en una variedad Riemanniana completa N^n . Además N^n tiene al menos un polo (véase definición 2.1.1). Para cada $x \in N^n \setminus \{o\}$ definimos $r(x) = \text{dist}_N(o, x)$. Recordemos que la restricción a P^m se llamará *función distancia extrínseca* desde o y que tenemos la siguiente relación entre los gradientes en N y en P :

$$(3.1.1) \quad \nabla^N r = \nabla^P r + (\nabla^N r)^\perp.$$

Consideraremos el criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden (establecido por Lyons, Sullivan (véase [33] y Teorema 3.2.17)) para dar una interpretación geométrica de la parabolicidad/hiperbolicidad de las subvariedades a través del *crecimiento del volumen* y acotaciones sobre la curvatura seccional (o la de Ricci).

L.V. Ahlfors caracterizó la parabolicidad de los espacios modelo mediante condiciones sobre el crecimiento del volumen de las esferas geodésicas.

Concretamente:

Teorema 3.1.1 (Ahlfors) (Ver [1]) *Un espacio modelo M_ω^n es parabólico (hiperbólico) si y sólo si $\int_\rho^\infty \frac{dr}{\omega^{n-1}(r)} = \infty$ ($< \infty$), respectivamente, donde $\text{Vol}(S_r^\omega) = \omega^{n-1}(r)$.*

K. Ichihara demostró en [25] que una variedad conexa y completa es parabólica si su curvatura de Ricci está acotada inferiormente por las correspondientes de un espacio modelo en el que se satisface una condición de divergencia de la integral anterior.

Teorema 3.1.2 (Ichihara) (Ver [25] y [26]) *Sea M^n variedad Riemanniana conexa con su curvatura de Ricci acotada inferiormente (superiormente) por la de un espacio modelo M_ω que satisface $\int_\rho^\infty \frac{dr}{\omega^{n-1}(r)} = \infty$ ($< \infty$). Entonces M es parabólica (hiperbólica), respectivamente.*

En este trabajo vamos a exigir acotaciones sobre las curvaturas seccionales radiales dadas por un espacio modelo. A partir de ello, e intentando generalizar los resultados de Ahlfors e Ichihara, se establecerán condiciones necesarias y suficientes sobre la parabolicidad o hiperbolicidad de P (Teoremas 3.3.7 y 3.3.9).

Estos resultados amplían los resultados de [37] y [36] usando las mismas técnicas: los Teoremas de comparación del Hessiano y Laplaciano establecidos por Greene y Wu, y el criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden. En particular se demuestra la hiperbolicidad de P encontrando un compacto con capacidad positiva y la parabolicidad encontrando un compacto con interior no vacío con capacidad nula. Este método está inspirado en el método de los cortes de Rayleigh en la teoría clásica de electricidad, que ya usaron Milnor y Doyle.

3.2. Preliminares

Vamos a introducir la definición de parabolicidad e hiperbolicidad de una variedad. Los contenidos de esta sección están tomados, principalmente, de los trabajos [19] y [32].

3.2.1. Capacidad

Definición 3.2.1 (Véase [49]) Una función $u : N \rightarrow \mathbb{R}$ definida en una variedad Riemanniana N es armónica si

$$(3.2.1) \quad \Delta^N u = 0.$$

Es subarmónica (superarmónica) si

$$(3.2.2) \quad \Delta^N u \geq (\leq) 0$$

Teorema 3.2.2 (Principio fuerte del máximo) (Véase [49], pág. 257) Sea $u : N \rightarrow \mathbb{R}$, N variedad Riemanniana y $u \in C^\infty(N)$. Si u es subarmónica (superarmónica) y tiene un máximo (mínimo) global entonces u es constante.

Nota 3.2.3 1. Existe un principio débil del máximo por el que toda función subarmónica $u : N \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte (recordemos que el soporte de u es el conjunto $\{x \in N \mid u(x) \neq 0\}$) compacto es constante.

2. Una función armónica no constante definida en un abierto precompacto toma el máximo y mínimo en el borde.

3. En las variedades compactas, en donde todas las funciones tienen máximo global, se deduce que si $u : N \rightarrow \mathbb{R}$ es subarmónica entonces u es constante y por tanto $\Delta u = 0$ (véase [29], tomo II, pág. 338), es el llamado Principio de Hopf.

Una forma de construir funciones armónicas es resolviendo el problema de Dirichlet en un conjunto precompacto B de N , es decir, encontrar la única función $u \in C(\bar{B}) \cap C^2(B)$ tal que

$$(3.2.3) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 \\ u|_{\partial B} &= f \end{aligned}$$

para cierta función continua f dada.

Vamos a definir el concepto de capacidad que acabará relacionándose con las funciones de Green y el movimiento Browniano a través del concepto de variedad parabólica.

Definición 3.2.4 Sean dos espacios métricos X, Y siendo d_X y d_Y las métricas en ambos espacios. Sea $\phi : X \rightarrow Y$ una función, diremos que es localmente de Lipschitz sii para todo $x \in X$ existe un entorno $U \subset X$ y una constante C tal que

$$d_Y(\phi(x), \phi(x')) \leq C d_X(x, x'), \forall x' \in U.$$

Si en particular consideramos N una variedad Riemanniana completa y $d(p, q)$ la distancia entre dos puntos $p, q \in N$, una función $\phi : N \rightarrow \mathbb{R}$ es localmente de Lipschitz sii $\forall p \in N$ existe $U \subset N$, entorno de p , y una constante C verificando

$$|\phi(p) - \phi(q)| \leq C d(p, q), \forall q \in U.$$

Definición 3.2.5 (Capacidad) (Ver [19]) Sea Ω un abierto en N y K un compacto contenido en Ω , definimos:

$$(3.2.4) \quad \text{Cap}(K, \Omega) = \inf_{\phi \in \mathcal{L}(K, \Omega)} \int_{\Omega} \|\nabla \phi\|^2 d\sigma$$

donde $\mathcal{L}(K, \Omega)$ son las funciones localmente de Lipschitz en N con soporte compacto en $\bar{\Omega}$ tales que $0 \leq \phi \leq 1$ y $\phi|_K = 1$.

Si $D \subset \Omega$ es precompacto se define $\text{Cap}(D, \Omega) = \text{Cap}(\bar{D}, \Omega)$.

Nota 3.2.6 Por la definición de $\mathcal{L}(K, \Omega)$ cuanto mayor es Ω más funciones se considerarán y por tanto el ínfimo decrecerá. Es decir

$$(3.2.5) \quad \text{Si } \Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \text{Cap}(K, \Omega_1) \geq \text{Cap}(K, \Omega_2).$$

Por otra parte, fijado Ω , cuanto mayor sea K mayor será el ínfimo, por tanto

$$(3.2.6) \quad \text{Si } K_1 \subset K_2 \Rightarrow \text{Cap}(K_1, \Omega) \leq \text{Cap}(K_2, \Omega).$$

Nota 3.2.7 (Véase [52]) Podemos extender la definición gracias a las propiedades anteriores:

1. Si U es un abierto contenido en Ω

$$(3.2.7) \quad \text{Cap}(U, \Omega) = \sup_{K \subset U} \text{Cap}(K, \Omega),$$

donde K es compacto.

2. Si A es un conjunto cualquiera incluido en Ω

$$(3.2.8) \quad \text{Cap}(A, \Omega) = \inf_{A \subset U \subset \Omega} \text{Cap}(U, \Omega),$$

donde U es abierto.

3. Si K es un compacto, podemos definir su capacidad en la variedad:

$$(3.2.9) \quad \text{Cap}(K, N) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \text{Cap}(K, \Sigma_i),$$

siendo $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{+\infty}$ una colección exhaustiva de N formada por precompactos tales que $\Sigma_0 = K$ y $\Sigma_i \subset \Sigma_j \forall j \geq i$. No depende de la colección exhaustiva (véase [19]).

Nota 3.2.8 (Véase [19]) Sea $\Omega \subset N$ precompacto, entonces el ínfimo en 3.2.4 es alcanzado por la función armónica que es solución del problema de Dirichlet en $\Omega - K$ siguiente:

$$(3.2.10) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u|_{\partial K} = 1 \end{cases} .$$

Por tanto, si ϕ es dicha solución del problema de Dirichlet, podemos escribir

$$\text{Cap}(K, \Omega) = \int_{\Omega} \|\nabla\phi\|^2 d\sigma$$

Proposición 3.2.9 Sea $u : \Omega - K \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{L}(K, \Omega)$, solución del problema de Dirichlet anterior en $\Omega - K$, siendo Ω precompacto, K compacto y ambos con frontera diferenciable, entonces:

$$(3.2.11) \quad \text{Cap}(K, \Omega) = \int_{\partial K} \|\nabla u\| d\mu$$

Demostración. Por una parte tenemos, al ser $u|_K = 1$ y por tanto $\nabla u = 0$ en K , y por la nota anterior

$$(3.2.12) \quad \text{Cap}(K, \Omega) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 d\sigma = \int_{\Omega - K} \|\nabla u\|^2 d\sigma.$$

Por otra si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base ortonormal tenemos

$$(3.2.13) \quad \begin{aligned} \text{div}(u\nabla u) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i}(u\nabla u), e_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n e_i(u) \langle \nabla u, e_i \rangle + u \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla u, e_i \rangle = \\ &= \langle \nabla u, \nabla u \rangle + u\Delta u = \|\nabla u\|^2 + u\Delta u. \end{aligned}$$

Y si usamos la fórmula (3.2.13), el Teorema de la divergencia 2.2.12, teniendo en cuenta que $\Delta u = 0$ en $\Omega - K$ y que ν el normal hacia el exterior es $-\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ en $\partial\Omega$ y $\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ en ∂K , obtenemos

$$(3.2.14) \quad \begin{aligned} \text{Cap}(K, \Omega) &= \int_{\Omega-K} \|\nabla u\|^2 d\sigma = \int_{\Omega-K} (-u\Delta u + \text{div}(u\nabla u)) d\sigma = \\ &= - \int_{\Omega-K} u\Delta u d\sigma + \int_{\partial(\Omega-K)} \langle u\nabla u, \nu \rangle d\mu = \\ &= \int_{\partial K} u \frac{\|\nabla u\|^2}{\|\nabla u\|} d\mu - \int_{\partial\Omega} u \frac{\|\nabla u\|^2}{\|\nabla u\|} d\mu = \int_{\partial K} \|\nabla u\| d\mu. \end{aligned}$$

■

Nota 3.2.10 Sea $v = 1 - u$, donde u es solución de (3.2.10). Entonces v es solución de

$$(3.2.15) \quad \begin{cases} \Delta v = 0 \\ v|_{\partial\Omega} = 1 \\ v|_{\partial K} = 0 \end{cases} .$$

y, por la Proposición anterior,

$$\text{Cap}(K, \Omega) = \int_{\partial K} \|\nabla v\| d\mu.$$

Una vez definida la capacidad en una variedad Riemanniana vamos a definir capacidad en anillos de una subvariedad P propiamente inmersa en una variedad Riemanniana completa N .

Definición 3.2.11 (Véase [19]) Si $P \subset N$ es una subvariedad propiamente inmersa en N , completa, podemos definir la capacidad del anillo extrínseco $A_{\rho,R}(o) = D_R(o) - D_\rho(o)$ en P como

$$(3.2.16) \quad \text{Cap}(A_{\rho,R}(o)) = \text{Cap}(D_\rho(o), D_R(o)),$$

donde $\rho < R$ y $D_r(p)$ es la bola extrínseca centrada en el polo $o \in N$ (eventualmente en P)

Proposición 3.2.12 (Véase [39], Proposición 5.1) Sea la forma espacial real $\mathbb{K}^n(b)$. Sea también el anillo $A_{\rho,R}^{b,m} = D_R^{b,m}(p) - D_\rho^{b,m}(p)$, donde las bolas extrínsecas en las subvariedades $\mathbb{K}^m(b)$ (que son totalmente geodésicas en $\mathbb{K}^n(b)$, suponiendo $m < n$) son las bolas geodésicas. Entonces:

$$(3.2.17) \quad \text{Cap}(A_{\rho,R}^{b,m}) = \frac{\text{vol}(S_1^{0,m-1})}{\int_\rho^R \omega_b(t)^{1-m} dt},$$

donde

$$(3.2.18) \quad \omega_b(t) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{bt}}{\sqrt{b}} & \text{si } b > 0 \\ t & \text{si } b = 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{-bt}}{\sqrt{-b}} & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

Demostración. Vamos a aplicar la nota 3.2.10. Sea la función $\Psi : D_R^{b,m} - D_\rho^{b,m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$(3.2.19) \quad \Psi(x) = \frac{\int_\rho^{r(x)} \omega_b^{1-m}(s) ds}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s) ds},$$

se cumple

$$\begin{aligned} \Psi|_{\partial D_\rho(p)} &= 0, \\ \Psi|_{\partial D_R(p)} &= 1. \end{aligned}$$

Definimos la función $\bar{\Psi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$\bar{\Psi}(t) = \frac{\int_\rho^t \omega_b^{1-m}(s) ds}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s) ds},$$

luego $\bar{\Psi}(r(x)) = \Psi(x)$.

Derivando $\bar{\Psi}$ respecto de t

$$(3.2.20) \quad \bar{\Psi}'(t) = \frac{\omega_b^{1-m}(t)}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s) ds} \geq 0.$$

Podemos aplicar el Teorema 2.2.25 (en este caso se aplican ambas desigualdades ya que la variedad es de curvatura seccional constante) considerando $\mathbb{K}^m(b) \subset \mathbb{K}^n(b)$ y como $\|\nabla^{\mathbb{K}^n(b)} r\| = \|\nabla^{\mathbb{K}^m(b)} r\| = 1$, por ser $\mathbb{K}^m(b)$ subvariedad totalmente geodésica en $\mathbb{K}^n(b)$, tenemos

$$(3.2.21) \quad \Delta^{\mathbb{K}^m(b)} \Psi = \bar{\Psi}''(t) + (m-1) \bar{\Psi}'(t) \frac{\omega_b'(t)}{\omega_b(t)}.$$

Calculamos

$$(3.2.22) \quad \bar{\Psi}''(t) = \frac{(1-m)\omega_b^{-m}(t)\omega_b'(t)}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s) ds}.$$

Sustituyendo y operando

$$(3.2.23) \quad \Delta^{\mathbb{K}^m(b)}\Psi = \frac{(1-m)\omega_b^{-m}(t)\omega'_b(t)}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s)ds} + (m-1)\frac{\omega_b^{1-m}(t)}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s)ds} \frac{\omega'_b(t)}{\omega_b(t)} = 0.$$

Hemos comprobado que la función Ψ es la solución del problema de Dirichlet, por lo que, como las bolas geodésicas son precompactos, aplicamos la nota 3.2.10:

$$(3.2.24) \quad \begin{aligned} Cap(A_{\rho,R}^{b,m}) &= \int_{D_R^{b,m}(p)} \|\nabla^{\mathbb{K}^n(b)}\Psi\|^2 d\sigma = \int_{A_R^{b,m}(p)} \|\nabla^{\mathbb{K}^n(b)}\Psi\|^2 d\sigma = \\ &= \int_{\partial D_\rho^{b,m}(p)} \left\langle \nabla^{\mathbb{K}^n(b)}\Psi, \frac{\nabla^{\mathbb{K}^n(b)}r}{\|\nabla^{\mathbb{K}^n(b)}r\|} \right\rangle d\sigma = \\ &= \int_{S_\rho^{b,m-1}(p)} \langle \nabla^{\mathbb{K}^n(b)}\Psi, \nabla^{\mathbb{K}^n(b)}r \rangle d\sigma = \int_{S_\rho^{b,m-1}(p)} \Psi'(t) d\sigma = \\ &= \frac{\omega_b^{1-m}(\rho)}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s)ds} \int_{S_\rho^{b,m-1}(p)} d\mu = \\ &= \frac{vol(S_\rho^{b,m-1}(p))}{\omega_b^{m-1}(\rho)} \frac{1}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s)ds} = \frac{vol(S_1^{0,m-1}(p))}{\int_\rho^R \omega_b^{1-m}(s)ds}. \end{aligned}$$

Ya que $Vol(S_\rho^{b,m-1}) = \omega_b^{m-1}(\rho) Vol(S_1^{0,m-1})$. ■

3.2.2. Variedades parabólicas e hiperbólicas

Vamos a introducir el concepto de variedad parabólica (y su complementario: variedad hiperbólica) según la Teoría de Funciones. Este es el enfoque que puede encontrarse en [32], por ejemplo.

Definición 3.2.13 (Núcleo de calor) Sea N variedad Riemanniana, se llamará núcleo de calor en N a la menor función positiva $p : (0, +\infty) \times N \times N \rightarrow \mathbb{R}$, que satisface la ecuación del calor sobre la variedad Riemanniana N

$$(3.2.25) \quad \partial_t p - \frac{1}{2} \Delta^N p = 0.$$

Definición 3.2.14 (Funciones de Green) Definimos la función de Green en N como la función $G : N \times N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} p(t, x, y) dt$, siendo p el núcleo de calor en N .

Definición 3.2.15 (Parabolicidad e hiperbolicidad) *Una variedad N se llamará parabólica sii no admite funciones de Green positivas y finitas. En caso contrario, si admite al menos una función de Green positiva y finita se llamará hiperbólica. Es decir, N es hiperbólica sii es no parabólica.*

Nota 3.2.16 (Ver [19]) *Las funciones p pueden considerarse como funciones densidad de un proceso de Markov. Concretamente la probabilidad de que un movimiento Browniano que actúe sobre un punto x de Ω lo mantenga en el abierto Ω en un tiempo t es*

$$(3.2.26) \quad \int_{\Omega} p(t, x, y) d\mu(y).$$

3.2.3. Criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden

En el trabajo [33], T. Lyons y D. Sullivan establecieron una lista de condiciones equivalentes para la hiperbolicidad de una variedad (el llamado criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden).

Teorema 3.2.17 (Criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden) (véanse [19] y [33]) *Una variedad Riemanniana N es hiperbólica si una (y por tanto todas) de las siguientes condiciones equivalentes se cumplen:*

1. *Existe una función superarmónica no constante y positiva en N , o de forma equivalente existe una función subarmónica no constante y acotada en N .*
2. *N tiene capacidad positiva, es decir la capacidad $Cap(\Omega, N) > 0$ para cierto Ω abierto precompacto de N (véase 3.2.5)*
3. *El movimiento Browniano en N es transitorio. Es decir, para todo Ω abierto y precompacto de N se tiene que, dado $x \in \Omega$, la probabilidad de que una partícula sujeta al movimiento Browniano que parte de x abandone Ω es positiva.*

Por tanto, según el criterio de Kelvin-Nevanlinna-Royden, N es hiperbólica sii $Cap(\Omega, N) > 0$ para un precompacto $\Omega \subset N$. La variedad es parabólica sii no es hiperbólica, según la definición 3.2.15. Entonces N es parabólica sii para todo abierto precompacto Ω tenemos que $Cap(\Omega, N) = 0$. Veamos que podemos asegurar que una variedad es parabólica encontrando un abierto precompacto Ω con $Cap(\Omega, N) = 0$.

Proposición 3.2.18 (Véase Teorema 5.1 de [19]) *Una variedad Riemanniana N con un polo $o \in N$ es parabólica sii $Cap(K, N) = 0$ para un conjunto K compacto, con interior no vacío (o equivalentemente $Cap(D, N) = 0$ para un conjunto D abierto y precompacto, no vacío).*

Demostración. Vamos a utilizar el siguiente lema que paso a enunciar:

Lema 3.2.19 (Véase [52], Proposición 3.2) Sean D_1 y D_2 compactos tales que $D_1 \subset \subset D_2 \subset \subset \Omega$ dominio conexo. Entonces

$$\text{Cap}(D_1, \Omega) = 0 \Rightarrow \text{Cap}(D_2, \Omega) = 0$$

Demostremos la implicación no trivial de la Proposición. Supongamos que existe un compacto $K \subset N$ tal que $\text{Cap}(K, N) = 0$. Vamos a demostrar que dado $K_1 \subset N$, compacto, entonces $\text{Cap}(K_1, N) = 0$. Para ello consideremos $\{U_i\}$, una colección exhaustiva de N (existe por tener N un polo). Podemos asegurar que existe un i_0 tal que

$$\begin{aligned} K &\subset U_{i_0} \subset \bar{U}_{i_0} \\ K_1 &\subset U_{i_0} \subset \bar{U}_{i_0}. \end{aligned}$$

Como sabemos $\text{Cap}(K, N) = 0$, usando el lema 3.2.19, tenemos $\text{Cap}(\bar{U}_{i_0}, N) = 0$ y por tanto, usando (3.2.6),

$$\text{Cap}(K_1, N) \leq \text{Cap}(\bar{U}_{i_0}, N) = 0,$$

luego $\text{Cap}(K_1, N) = 0$. ■

3.3. Condiciones necesarias para la parabolicidad e hiperbolicidad

Definición 3.3.1 Diremos que una subvariedad P de N cumple la condición de tangencia radial en un polo $o \in N$ cuando existe una función positiva diferenciable,

$$(3.3.1) \quad g : P \mapsto \mathbb{R}_+,$$

tal que

$$(3.3.2) \quad \mathcal{T}(x) = \|\nabla^P r(x)\| \geq g(r(x)) > 0 \quad \forall x \in P.$$

Recordamos la definición de curvatura media o-radial.

Definición 3.3.2 La curvatura media o-radial $\mathcal{C}(x)$ de P en N se define en términos del producto interior de H^P y del gradiente en N de la función distancia $r(x)$ de la siguiente forma:

$$(3.3.3) \quad \mathcal{C}(x) = -\langle \nabla^N r(x), H^P(x) \rangle, \quad x \in P,$$

donde $H^P(x)$ denota el vector curvatura media de P en N .

Nótese que la curvatura media o-radial de una subvariedad minimal es $\mathcal{C}(x) = 0 \quad \forall x \in P$.

Relacionado con $\mathcal{C}(x)$ podemos definir

Definición 3.3.3 1. La subvariedad P se llama radialmente 0-convexa sii $\mathcal{C}(x) \geq 0 \forall x \in P$. Esta condición se satisface por las hipersuperficies de un forma espacial real $\mathbb{K}^m(b)$ de curvatura constante b (véase [47]) así como por todas las subvariedades minimales.

2. La subvariedad P se llama radialmente minimal sii $\mathcal{C}(x) = 0 \forall x \in P$. Esta condición la satisfacen todas las subvariedades minimales.

Veamos unas definiciones previas a los Teoremas principales de este capítulo.

Definición 3.3.4 Sea N^n una variedad Riemanniana, completa con un polo $o \in N$, y sea P^m una subvariedad propiamente inmersa en N . Dada una función $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ que sólo depende de la distancia extrínseca r en P , $h(r(x))$ para todo $x \in P$, diremos que la función $h(r)$ está balanceada superiormente con respecto a la función de alabeo $\omega(r)$ de una espacio modelo M_ω^m si

$$(3.3.4) \quad \mathcal{M}(r) = m(\eta_\omega(r) - h(r)) \geq 0 \forall r$$

y diremos que $h(t)$ está balanceada inferiormente si

$$(3.3.5) \quad \mathcal{M}(r) = m(\eta_\omega(r) - h(r)) \leq 0 \forall r$$

Definición 3.3.5 Sea N^n una variedad Riemanniana, completa con un polo $o \in N$, y sea P^m una subvariedad propiamente inmersa en N . Consideramos también el espacio modelo M_ω^m .

(i) Definimos $\Lambda(r)$ como la función

$$(3.3.6) \quad \Lambda(r) = \omega(r) \exp \left(- \int_\rho^r \mathcal{M}(t) dt \right).$$

(ii) Si suponemos que P cumple la condición de tangencia radial en $o \in N$, definimos $\Lambda_g(r)$ como la función

$$(3.3.7) \quad \Lambda_g(r) = \omega(r) \exp \left(- \int_\rho^r \frac{\mathcal{M}(t)}{g^2(t)} dt \right).$$

Nota 3.3.6 En los criterios para establecer la parabolicidad e hiperbolicidad juega un papel fundamental la convergencia o divergencia de las integrales impropias $\int_\rho^\infty \Lambda_g(t) dt$ y $\int_\rho^\infty \Lambda(t) dt$. Por ello queremos remarcar que si $\mathcal{M}(r) \geq 0$ para todo $r > 0$, entonces $\int_\rho^\infty \Lambda_g(t) dt \leq \int_\rho^\infty \Lambda(t) dt$ y, por otra parte, si $\mathcal{M}(r) \leq 0$ para todo $r > 0$, entonces $\int_\rho^\infty \Lambda_g(t) dt \geq \int_\rho^\infty \Lambda(t) dt$.

Teorema 3.3.7 (Parabolicidad) *Sea N^n una variedad Riemanniana completa con un polo o , supongamos que*

$$(3.3.8) \quad K_{o,N}(\sigma_x) \geq -\frac{\omega''(r)}{\omega(r)}$$

para todo x con $r = r(x) \in [0, \infty)$.

Sea P^m una subvariedad completa y propiamente inmersa en N con curvatura media o -radial $\mathcal{C}(x)$ acotada inferiormente por la función radial $h(r(x))$:

$$(3.3.9) \quad \mathcal{C}(x) \geq h(r(x)) \text{ para todo } x \in P^m \text{ con } r(x) \in [0, \infty).$$

Entonces:

(A) *Supongamos que la subvariedad P satisface la condición de tangencia radial en $o \in N$ (es decir, existe una función diferenciable $g : P \mapsto \mathbb{R}_+$, tal que $\|\nabla^P r(x)\| \geq g(r(x)) > 0$ para todo $x \in P$) y que la función $h(r)$ está balanceada superiormente con respecto a la función de alabeo $\omega(r)$, ($\mathcal{M}(r) \geq 0 \forall r$).*

Si se cumple

$$(3.3.10) \quad \int_{\rho}^{\infty} \Lambda_g(t) dt = \infty,$$

entonces P^m es parabólica.

(B) *Supongamos que la función $h(r)$ está balanceado inferiormente con respecto a la función de alabeo $\omega(r)$ ($\mathcal{M}(r) \leq 0 \forall r$).*

Si se cumple

$$(3.3.11) \quad \int_{\rho}^{\infty} \Lambda(t) dt = \infty,$$

entonces P^m es parabólica.

Nota 3.3.8 *El apartado (A) del Teorema 4.3.1 fue establecido y demostrado en [36] (véase Teorema 9.2) bajo condiciones de balance más restrictivas.*

Teorema 3.3.9 (Hiperbolicidad) *Sea N^n una variedad Riemanniana completa con un polo o , y supongamos que*

$$(3.3.12) \quad K_{o,N}(\sigma_x) \leq -\frac{\omega''(r)}{\omega(r)}$$

para todo x con $r = r(x) \in [0, \infty)$. Sea P^m una subvariedad completa propiamente inmersa en N con curvatura media o -radial $\mathcal{C}(x)$ acotada superiormente por la función radial $h(r(x))$:

$$(3.3.13) \quad \mathcal{C}(x) \leq h(r(x)) \text{ para todo } x \in P^m \text{ con } r(x) \in [0, \infty).$$

Entonces

(A) Supongamos que la subvariedad P satisface la condición de tangencia radial en el polo $o \in P$, y que la función $h(r)$ está balanceada inferiormente con respecto a la función de alabeo $\omega(r)$, ($\mathcal{M}(r) \leq 0 \forall r$).

Si se cumple

$$(3.3.14) \quad \int_{\rho}^{\infty} \Lambda_g(t) dt < \infty,$$

entonces P^m es hiperbólica.

(B) Supongamos que la función $h(r)$ está balanceada superiormente con respecto a la función de alabeo $\omega(r)$, ($\mathcal{M}(r) \geq 0 \forall r$).

Si se cumple

$$(3.3.15) \quad \int_{\rho}^{\infty} \Lambda(t) dt < \infty,$$

entonces P^m es hiperbólica.

Nota 3.3.10 El apartado (B) del Teorema 3.3.9 fue establecido y probado en [37], con notación distinta. Siguiendo la notación del artículo [37], tenemos

$$(3.3.16) \quad \mathcal{G}(r) = \exp\left(\int_{\rho}^r h(t) dt\right)$$

y es fácil comprobar que $\int_{\rho}^{\infty} \frac{\mathcal{G}^m(r)}{\omega^{m-1}(r)} dr < \infty$ si y sólo si $\int_{\rho}^{\infty} \Lambda(t) dt < \infty$.

Nota 3.3.11 Tenemos los siguientes ejemplos de aplicación directa de los Teoremas 4.3.1 y 3.3.9. Con respecto al Teorema 4.3.1, podemos ver que los conos y los paraboloides (ambos superficies convexas en \mathbb{R}^3) son parabólicos (véase [36]). Respecto al Teorema 3.3.9 tenemos que las superficies P^2 en $\mathbb{H}^3(b)$ con curvatura media $H^P(x) \leq H_0 < \frac{1}{2}\sqrt{-b}$, donde H_0 es constante, son hiperbólicos (véase corolario B del trabajo [37]).

3.4. Corolarios de los Teoremas

Veamos los corolarios de los Teoremas anteriores, alguno de los cuales son resultados anteriores citados en los preliminares de este capítulo.

Corolario 3.4.1 *Sea N^n una variedad Riemanniana completa con polo o , y sea P^m una subvariedad completa propiamente inmersa en N , satisfaciendo las desigualdades (3.3.8) y (3.3.9) del Teorema 3.3.7.*

(A) *Supongamos que $\mathcal{M}(r) \geq 0 \forall r$.*

Si P es hiperbólica entonces

(A.1) *O no existe una función diferenciable positiva*

$$(3.4.1) \quad g : P \mapsto \mathbb{R}_+ ,$$

tal que $\|\nabla^S r(x)\| \geq g(r(x)) > 0$ para todo $x \in P$

(A.2) *O, si P satisface la condición de tangencia radial en $o \in P$ con función diferenciable positiva $g : P \mapsto \mathbb{R}_+$, entonces $\int_\rho^\infty \Lambda_g(r) dr < \infty$.*

(B) *Supongamos que $\mathcal{M}(r) \leq 0 \forall r$.*

Si P es hiperbólica, entonces $\int_\rho^\infty \Lambda(r) dr < \infty$.

Demostración. (A) La variedad ambiente N y la subvariedad P cumplen las hipótesis (3.3.8) y (3.3.9) en el Teorema 4.3.1. Por tanto, si P no es parabólica entonces tenemos la negación de ambos conjuntos de suposiciones fijados en las afirmaciones (A) y (B) del Teorema 4.3.1. En particular la afirmación (A) no debe cumplirse. Como $\mathcal{M}(r) \geq 0 \forall r$, entonces concluimos que no puede existir ninguna función positiva diferenciable

$$(3.4.2) \quad g : P \mapsto \mathbb{R}_+ ,$$

tal que $\|\nabla^S r(x)\| \geq g(r(x)) > 0$ para todo $x \in P$ o, si existe esta función, entonces $\int_\rho^\infty \Lambda_g(r) dr < \infty$.

(B) En este caso, $\mathcal{M}(r) \leq 0 \forall r$, y, como la afirmación (B) del Teorema 4.3.1 no se cumple, concluimos que $\int_\rho^\infty \Lambda(r) dr < \infty$. ■

Corolario 3.4.2 *Sea P^2 una superficie completa, propiamente inmersa en \mathbb{R}^3 y radialmente 0-convexa. Si P^2 es hiperbólica, entonces*

(i) *O no existe una función diferenciable positiva*

$$(3.4.3) \quad g : P \mapsto \mathbb{R}_+ ,$$

tal que $\|\nabla^P r(x)\| \geq g(r(x)) > 0$ para todo $x \in P$

(ii) *O, en el caso en que P cumpla la condición de tangencia radial en $o \in P$ con una función diferenciable positiva $g : P \mapsto \mathbb{R}_+$, entonces $\int_\rho^\infty r e^{-\int_\rho^r \frac{2}{tg^2(t)} dt} dr < \infty$.*

Demostración. Se sigue del corolario 3.4.1, si consideramos la variedad ambiente como \mathbb{R}^3 (lo que implica función de alabeo $\omega(r) = r$) y, teniendo en cuenta que por hipótesis $h(r(x)) = 0$ para todo $x \in P$, y por tanto $\mathcal{C}(x) = \eta_\omega(r(x)) - h(r(x)) = \frac{1}{r} > 0$ para todo $x \in P$. ■

Corolario 3.4.3 *Sea N^n una variedad Riemanniana completa con polo o , y sea P^m una subvariedad propiamente inmersa en N , cumpliendo las desigualdades (3.3.12) y (3.3.13) del Teorema 3.3.9.*

(A) *Supongamos que $\mathcal{M}(r) \geq 0 \forall r$.*

Si P es parabólica, entonces

$$(3.4.4) \quad \int_{\rho}^{\infty} \Lambda(t) dt = \infty.$$

(B) *Supongamos que $\mathcal{M}(r) \leq 0 \forall r$.*

Si P es parabólica, entonces

(B.1) *O bien no existe una función diferenciable positiva*

$$(3.4.5) \quad g : P \mapsto \mathbb{R}_+,$$

tal que $\|\nabla^S r(x)\| \geq g(r(x)) > 0$ para todo $x \in P$

(B.2) *O bien si P satisface la condición de tangencia radial en $o \in P$ con función diferenciable y positiva $g : P \mapsto \mathbb{R}_+$, entonces $\int_{\rho}^{\infty} \Lambda_g(r) dr = \infty$.*

Demostración. (A) La variedad ambiente N y la subvariedad P cumplen las hipótesis (3.3.12) y (3.3.13) en el Teorema 3.3.9. Por tanto, si P no es hiperbólica, entonces tenemos la negación de los dos conjuntos de afirmaciones (A) y (B) del Teorema 3.3.9. En particular, una de las dos, (A) o (B), no se cumple. Como $\mathcal{M}(r) \geq 0 \forall r$, tenemos

$$(3.4.6) \quad \int_{\rho}^{\infty} \Lambda(t) dt = \infty.$$

(B) En este caso, $\mathcal{M}(r) \leq 0 \forall r$, y so negamos la afirmación (A) del Teorema 3.3.9 como antes, tenemos dos posibilidades: la primera es que la subvariedad P no satisfaga la condición de tangencia radial en $o \in P$. Por tanto no existe una función diferenciable positiva

$$(3.4.7) \quad g : P \mapsto \mathbb{R}_+,$$

tal que $\|\nabla^P r(x)\| \geq g(r(x)) > 0$ para todo $x \in P$.

La segunda es que P satisfaga la condición de tangencia radial para una función diferenciable positiva $g : P \mapsto \mathbb{R}_+$ en $o \in P$, entonces $\int_{\rho}^{\infty} \Lambda_g(r) dr = \infty$. ■

Corolario 3.4.4 *Sea M_{ω}^n un espacio modelo, y sea P^m una subvariedad propiamente inmersa en M_{ω}^n . Supongamos que la curvatura media o -radial de P en M_{ω}^n es igual a la función $\eta_{\omega}(r(x))$, es decir*

$$(3.4.8) \quad \mathcal{C}(x) = \eta_{\omega}(r(x)) \text{ para todo } x \in P^m \text{ con } r(x) \in [0, \infty).$$

Entonces P^m es parabólica si y sólo si $\int_{\rho}^{\infty} \omega(r) dr = \infty$.

Corolario 3.4.5 (K. Ichihara) (Véase [25]) Si M^n es una variedad Riemanniana completa, conexa y con curvaturas seccionales acotadas inferiormente (resp. superiormente) por las de un espacio modelo, es decir $K_{\text{sec}}^M \geq -\frac{\omega''(t)}{\omega(t)}$, que satisface $\int_{\rho}^{\infty} \frac{dr}{\omega^{n-1}(r)} = \infty$ ($< \infty$) entonces M^n es parabólica (hiperbólica), respectivamente.

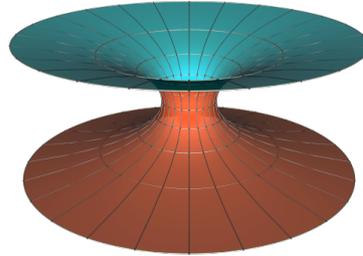
Corolario 3.4.6 (Véase [36]) Sea P^m ($m \geq 2$) una subvariedad no acotada inmersa en una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard con curvaturas seccionales acotadas superiormente por una constante $b < 0$. Si la curvatura media H^P de P cumple: $H^P(x) \leq H_0 < \frac{m-1}{m}\sqrt{-b}$, $\forall x \in P$ fuera de algún abierto compacto, siendo H_0 constante, entonces P^m es hiperbólica.

Corolario 3.4.7 (Véase [37]) Sea N^n una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard con curvaturas seccionales acotadas superiormente por una constante $b < 0$. Entonces cualquier subvariedad minimal P^m propiamente inmersa en N^n es hiperbólica.

Este Teorema se deduce de nuestro Teorema B utilizando un modelo con la función de alabeo $\omega_b(t) = \frac{\sinh \sqrt{-b}t}{\sqrt{-b}}$.

Nota 3.4.8 Veamos algunas superficies a modo de ejemplo:

1. La catenoide:

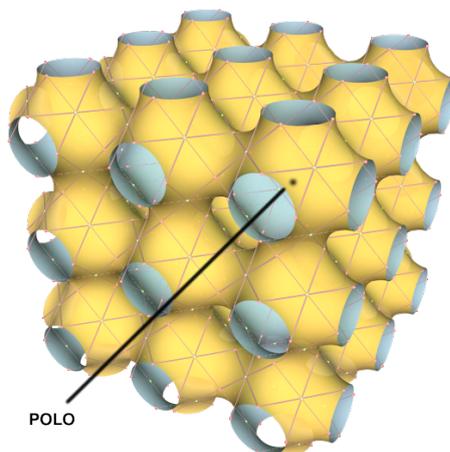


Hallamos

$$(3.4.9) \quad \mathcal{T}(x) = \|\nabla^P r\|_x = \frac{r(x) + \sinh r(x) \cosh r(x)}{\cosh r(x) \sqrt{r(x)^2 + \cosh^2 r(x)}} > \sqrt{\frac{2 \ln r(x)}{1 + 2 \ln r(x)}} = g(r(x)), \forall r(x) > 1$$

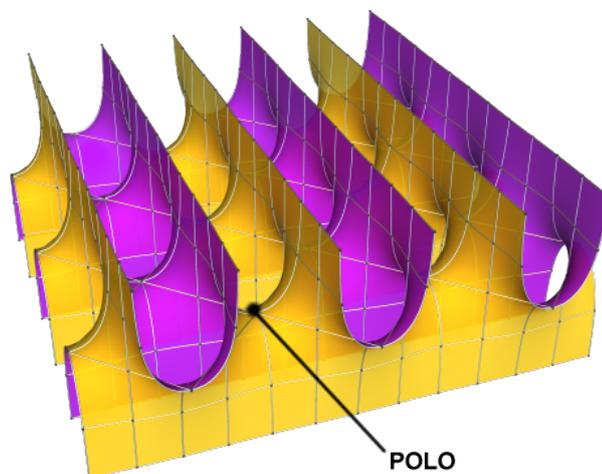
y tenemos $\int_1^{+\infty} \Lambda_g(t) dt = +\infty$.

Luego, por Teorema 3.3.7, la catenoide es parabólica.

2. La \mathcal{P} superficie de Schwarz:

Es hiperbólica y minimal. Es fácil deducir que $\|\nabla^P r\|_x$ se anula infinitas veces en determinadas direcciones en donde la superficie es ortogonal a las direcciones radiales desde el polo. Por tanto no se cumple la condición de tangencia como asegura el corolario 3.4.2 para superficies hiperbólicas.

3. La superficie de Scherk doblemente periódica:



Sabemos que es hiperbólica (ver [35]), el corolario 3.4.1 nos explica el comportamiento de esta superficie. Efectivamente:

$\nabla^P r$ es la proyección de $\nabla^{\mathbb{R}^3} r$ en los planos tangentes a la superficie. El ángulo entre $\nabla^P r$ y $\nabla^{\mathbb{R}^3} r$ en p_1 está entre $\frac{-\pi}{2}$ y 0.

Sin embargo en p_2 está entre -2π y $\frac{-3\pi}{2}$. En algún punto p “entre p_1 y p_2 ” el ángulo será de $\frac{-\pi}{2}$ y por tanto $\|\nabla^P r\|_p = 0$. Como esto ocurrirá una infinidad de veces podemos deducir que no existe una función g tal que $\mathcal{T}(x) = \|\nabla^P r\| \geq g(r(x)) > 0$.

3.5. Demostración de las partes (A) de los Teoremas 3.3.7 y 3.3.9

Como la subvariedad P satisface la condición de tangencia radial para una función positiva y diferenciable $g : P \rightarrow \mathbb{R}_+$, podemos definir un operador de segundo orden para funciones de una variable real como sigue:

$$(3.5.1) \quad L_g \psi(r) = \psi''(r) + \psi'(r) \left(\frac{\mathcal{M}(r)}{g^2(r)} - \eta_\omega(r) \right).$$

Resolvemos el problema de Dirichlet-Poisson asociado a L_g :

$$(3.5.2) \quad \begin{cases} L_g \psi & = 0 \text{ en } [\rho, R] \\ \psi(\rho) & = 0 \\ \psi(R) & = 1 \end{cases}$$

a cuya solución vamos a llamar $\psi_{\rho,R}(r)$.

La expresión explícita de la solución viene dada por la siguiente Proposición.

Proposición 3.5.1 *La solución del problema de Dirichlet 3.5.2 sólo depende de r y es explícitamente, vía la función $\Lambda_g(r)$ introducida en la definición 3.3.5 (ii):*

$$(3.5.3) \quad \psi_{\rho,R}(r) = \frac{\int_\rho^r \Lambda_g(t) dt}{\int_\rho^R \Lambda_g(t) dt}.$$

La correspondiente capacidad direccional es

$$(3.5.4) \quad \begin{aligned} \text{Cap}_{L_g}(A_{\rho,R}^w) &= \int_{\partial D_\rho^w} \langle \nabla^M \psi_{\rho,R}, \nu \rangle dA \\ &= \text{Vol}(\partial D_\rho^w) \Lambda_g(\rho) \left(\int_\rho^R \Lambda_g(t) dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Demostración. Basta con comprobar que cumple todas las condiciones del problema. Calculemos

$$(3.5.5) \quad \psi'_{\rho,R}(r) = \frac{1}{\int_\rho^R \Lambda_g(t) dt} \Lambda_g(r)$$

y

$$\begin{aligned} \psi''_{\rho,R}(r) &= \\ \frac{1}{\int_{\rho}^R \Lambda_g(t) dt} &\left(\omega'(r) \exp\left(-\int_{\rho}^r \frac{\mathcal{M}(t)}{g^2(t)} dt\right) - \omega(r) \frac{\mathcal{M}(r)}{g^2(r)} \exp\left(-\int_{\rho}^r \frac{\mathcal{M}(t)}{g^2(t)} dt\right) \right) = \\ (3.5.6) \quad &\left(\frac{\omega'(r)}{\omega(r)} - \frac{\mathcal{M}(r)}{g^2(r)} \right) \psi'_{\rho,R}(r) = \left(\eta_{\omega}(r) - \frac{\mathcal{M}(r)}{g^2(r)} \right) \psi'_{\rho,R}(r), \end{aligned}$$

por lo que $L_g \psi_{\rho,R}(r) = 0$.

Por otra parte

$$\begin{aligned} \psi_{\rho,R}(\rho) &= \frac{\int_{\rho}^{\rho} \Lambda_g(t) dt}{\int_{\rho}^R \Lambda_g(t) dt} = 0 \\ \psi_{\rho,R}(R) &= \frac{\int_{\rho}^R \Lambda_g(t) dt}{\int_{\rho}^R \Lambda_g(t) dt} = 1. \end{aligned}$$

Que termina la comprobación. ■

Pasemos a la demostración de los apartados de los Teoremas:

Afirmación (A) del Teorema 3.3.7.

Relativo a la demostración del apartado (A) en el Teorema 3.3.7 es fácil ver que, usando los cálculos (3.5.6) y la condición de balance (3.3.4), que la solución $\psi_{\rho,R}$ del problema (3.5.2) cumple:

$$(3.5.7) \quad \begin{aligned} \psi'_{\rho,R}(r) &\geq 0 \\ \psi''_{\rho,R}(r) - \psi'_{\rho,R}(r) \eta_{\omega}(r) &= -\psi'_{\rho,R}(r) \frac{\mathcal{M}(r)}{g^2(r)} \leq 0 \end{aligned}$$

Ahora trasplantamos las soluciones $\psi_{\rho,R}(r)$ de la ecuación (3.5.2) en el anillo extrínseco $A_{\rho,R} = D_R(o) \setminus \bar{D}_{\rho}(o)$ en P definiendo

$$(3.5.8) \quad \Psi_{\rho,R}: A_{\rho,R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi_{\rho,R}(x) = \psi_{\rho,R}(r(x)).$$

Donde la bola extrínseca $D_{\rho}(o)$ sigue la definición (2.1.7), y $D_R(o)$ es la componente de $B_R(o) \cap P$ que contiene a $D_{\rho}(o)$.

Teniendo en cuenta la hipótesis (3.3.8) sobre las curvaturas seccionales y la condición (3.3.9) sobre la curvatura media σ -radial podemos aplicar la acotación de la Proposición 2.2.25 (i) (recordemos que $\psi'_{\rho,R}(r) \geq 0$)

$$(3.5.9) \quad \begin{aligned} \Delta^P \psi_{\rho,R}(r) &\leq (\psi_{\rho,R}(r)''(r) - \psi_{\rho,R}(r)'(r) \eta_{\omega}(r)) \|\nabla^P r\|^2 \\ &+ m \psi_{\rho,R}(r)'(r) (\eta_{\omega}(r) - h(r)). \end{aligned}$$

Luego, aplicando la segunda igualdad de (3.5.7) y que $\|\nabla^P(r)\| \geq g(r)$, se cumple:

$$(3.5.10) \quad \begin{aligned} \Delta^P \psi_{\rho,R}(r(x)) &\leq (\psi''_{\rho,R}(r(x)) - \psi'_{\rho,R}(r(x))\eta_\omega(r(x))) g^2(r(x)) \\ &\quad + m\psi'_{\rho,R}(r(x)) (\eta_\omega(r(x)) - h(r(x))) \\ &= g^2(r(x)) L_g \psi_{\rho,R}(r(x)) = 0 = \Delta^P v(x) \quad , \end{aligned}$$

donde $v(x)$ es la función potencial de Laplace para el anillo extrínseco $A_{\rho,R} = D_R \setminus D_\rho$, siendo $v|_{\partial D_\rho} = 0$ y $v|_{\partial D_R} = 1$.

Ahora aplicamos el principio del máximo a la desigualdad (3.5.10). Ya que

$$\psi_{\rho,R} - v = 0$$

en el borde del anillo extrínseco y al ser la función 0 armónica, aplicamos la Proposición 3.2.1 ($\psi_{\rho,R} - v$ es superarmónica) y obtenemos

$$\psi_{\rho,R}(r(x)) - v(x) \geq 0 \quad , \quad \text{para todo } x \in A_{\rho,R}$$

y

$$(3.5.11) \quad \psi_{\rho,R}(r(x)) \geq v(x) \quad , \quad \text{para todo } x \in A_{\rho,R} \quad .$$

Esto implica que en ∂D_ρ tenemos

$$(3.5.12) \quad \|\nabla^P \psi_{\rho,R}\| \geq \|\nabla^P v(x)|_{\partial D_\rho}\|$$

Usando la ecuación (3.2.9), concluimos

$$(3.5.13) \quad \begin{aligned} \text{Cap}(A_{\rho,R}) &= \int_{\partial D_\rho} \|\nabla^P v(x)\| d\mu \\ &\leq \int_{\partial D_\rho} \|\nabla^P \Psi_{\rho,R}\| d\mu \\ &= \psi'_{\rho,R}(\rho) \int_{\partial D_\rho} \|\nabla^P r\| d\mu \\ &= \frac{\text{Cap}_{L_g}(A_{\rho,R}^\omega)}{\text{Vol}(\partial D_\rho^\omega)} \int_{\partial D_\rho} \|\nabla^P r\| d\mu. \end{aligned}$$

Por otra parte $D_\rho(o)$ es precompacto con borde diferenciable y por tanto

$$(3.5.14) \quad \int_{\partial D_\rho} \|\nabla^P r\| d\mu > 0.$$

Ahora usamos las ecuaciones (3.5.4) y (3.3.10) para obtener:

$$(3.5.15) \quad \begin{aligned} & \text{Cap}(\bar{D}_\rho(o), P^m) = \\ & \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Cap}(\bar{D}_\rho(o), D_R(o)) \\ & \leq \left(\int_{\partial D_\rho} \|\nabla^P r\| d\mu \right) \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Cap}_{L_g}(A_{\rho,R}^\omega)}{\text{Vol}(\partial D_\rho^\omega)} \right) = 0 \end{aligned}$$

Como conclusión $D_\rho(o)$ es un conjunto precompacto no vacío con capacidad nula en P^m y, por tanto, la variedad es parabólica.

Apartado (A) del Teorema 3.3.9.

Respecto a la demostración del apartado (A) del Teorema 3.3.9 y bajo la condición de balance (3.3.5), tenemos que la solución del problema (3.5.2) satisface:

$$(3.5.16) \quad \begin{aligned} & \psi'_{\rho,R}(r) \geq 0 \\ & \psi''_{\rho,R}(r) - \psi'_{\rho,R}(r)\eta_\omega(r) = -\psi'_{\rho,R}(r) \frac{\mathcal{M}(r)}{g^2(r)} \geq 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\|\nabla^P r\|^2 \geq g$ y $\psi''_{\rho,R}(r) - \psi'_{\rho,R}(r)\eta_\omega(r) \geq 0$ obtenemos, aplicando la Proposición 2.2.25 (ii) al trasplantado de la solución $\psi_{\rho,R}$,

$$(3.5.17) \quad \begin{aligned} \Delta^P \psi_{\rho,R}(r(x)) & \geq (\psi''_{\rho,R}(r(x)) - \psi'_{\rho,R}(r(x))\eta_\omega(r(x))) g^2(r(x)) \\ & \quad + m\psi'_{\rho,R}(r(x)) (\eta_\omega(r(x)) - h(r(x))) \\ & = g^2(r(x)) L_g \psi_{\rho,R}(r(x)) = 0 = \Delta^P v(x) \quad . \end{aligned}$$

Ahora consideremos la desigualdad (3.5.17) y procedemos como en la demostración del Teorema 3.3.7, pero con las desigualdades invertidas. Aplicando el principio del máximo de la misma manera tenemos en ∂D_ρ

$$(3.5.18) \quad \|\nabla^S \psi_{\rho,R}\| \leq \|\nabla^P v(x)|_{\partial D_\rho}\|$$

y usando la ecuación (3.2.9), tenemos

$$(3.5.19) \quad \text{Cap}(A_{\rho,R}) \geq \frac{\text{Cap}_{L_g}(A_{\rho,R}^\omega)}{\text{Vol}(\partial D_\rho^\omega)} \int_{\partial D_\rho} \|\nabla^S r\| d\mu.$$

Por último, teniendo en cuenta la desigualdad (3.5.14), y la condición $\int_\rho^\infty \Lambda_g(t) dt < \infty$ obtenemos

$$(3.5.20) \quad \text{Cap}(\bar{D}_\rho(o), P^m) \geq \left(\int_{\partial D_\rho} \|\nabla^P r\| d\mu \right) \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\text{Cap}_{L_g}(A_{\rho,R}^\omega)}{\text{Vol}(\partial D_\rho^\omega)} > 0$$

Por tanto $\bar{D}_\rho(o)$ es un conjunto compacto con capacidad positiva en P^m , como consecuencia P es hiperbólica.

3.6. Demostración de las partes (B) de los Teoremas 3.3.7 y 3.3.9

Vamos a definir el operador diferencial de segundo orden L :

$$(3.6.1) \quad L\phi(r) = \phi''(r) + \phi'(r)(\mathcal{M}(r) - \eta_\omega(r)).$$

Es la misma definición que en las demostraciones anteriores pero con $g(r) = 1$, $\forall r$. Y considerando la solución explícita $\phi_{\rho,R}(r)$ del problema de Dirichlet-Poisson asociado al operador L y definido en el intervalo $[\rho, R]$. Como en la demostración de los apartados (A) (véase la Proposición 3.5.1), es fácil comprobar que

$$(3.6.2) \quad \phi_{\rho,R}(r) = \frac{\int_\rho^r \Lambda(t) dt}{\int_\rho^R \Lambda(t) dt},$$

donde $\Lambda(r)$ es la función introducida en la definición 3.3.5 (i).

La capacidad direccional del operador L es

$$(3.6.3) \quad \begin{aligned} \text{Cap}_L(A_{\rho,R}^\omega) &= \int_{\partial D_\rho^\omega} \langle \nabla^P \phi_{\rho,R}, \nu \rangle dA \\ &= \text{Vol}(\partial D_\rho^\omega) \Lambda(\rho) \left(\int_\rho^R \Lambda(t) dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Apartado (B) del Teorema 3.3.7.

Respecto a la afirmación (B) en el Teorema 3.3.7, usaremos la ecuación (3.6.2) y la condición de balance (3.3.5) para obtener

$$(3.6.4) \quad \begin{aligned} \phi'_{\rho,R}(r) &\geq 0 \\ \phi''_{\rho,R}(r) - \phi'_{\rho,R}(r)\eta_\omega(r) \\ &= -\phi'_{\rho,R}(r)\mathcal{M}(r) \geq 0 \end{aligned}$$

ya que $\mathcal{M}(r) \leq 0$.

Teniendo en cuenta que $\|\nabla^P r\|^2 \leq 1$ y $\phi''_{\rho,R}(r) - \phi'_{\rho,R}(r)\eta_\omega(r) \geq 0$ obtenemos, aplicando la Proposición 2.2.25 (i) al trasplantado de la función $\phi_{\rho,R}$,

$$(3.6.5) \quad \begin{aligned} \Delta^P \phi_{\rho,R}(r(x)) &\leq (\phi''_{\rho,R}(r(x)) - \phi'_{\rho,R}(r(x))\eta_\omega(r(x))) \\ &\quad + m\phi'_{\rho,R}(r(x))(\eta_\omega(r(x)) - h(r(x))) \\ &= L\phi_{\rho,R}(r(x)) = 0 = \Delta^P v(x) \quad . \end{aligned}$$

En esta última desigualdad, $v(x)$ es la función potencial de Laplace para el anillo extrínseco $A_{\rho,R} = D_R \setminus D_\rho$, siendo $v|_{\partial D_\rho} = 0$ y $v|_{\partial D_R} = 1$.

Ahora para probar la parabolicidad de P se sigue como en la demostración de apartado (A) del Teorema 4.3.1.

Apartado (B) del Teorema 3.3.9.

Para demostrar la afirmación (B) del Teorema 3.3.9 consideremos el operador L definido anteriormente, con la misma solución explícita $\phi_{\rho,R}(r)$ del problema de Dirichlet-Poisson definido en el intervalo $[\rho, R]$.

Pero ahora se cumple

$$(3.6.6) \quad \begin{aligned} \phi'_{\rho,R}(r) &\geq 0 \\ \phi''_{\rho,R}(r) - \phi'_{\rho,R}(r)\eta_\omega(r) &= -\phi'_{\rho,R}(r)\mathcal{M}(r) \leq 0 \end{aligned}$$

porque $\mathcal{M}(r) \geq 0$.

Teniendo en cuenta que $\|\nabla^P r\|^2 \leq 1$ y $\phi''_{\rho,R}(r) - \phi'_{\rho,R}(r)\eta_\omega(r) \leq 0$ obtenemos, aplicando la Proposición 2.2.25 (ii) al trasplantado de la función $\phi_{\rho,R}$,

$$(3.6.7) \quad \begin{aligned} \Delta^P \phi_{\rho,R}(r(x)) &\geq (\phi''_{\rho,R}(r(x)) - \phi'_{\rho,R}(r(x))\eta_\omega(r(x))) \\ &\quad + m\phi'_{\rho,R}(r(x))(\eta_\omega(r(x)) - h(r(x))) \\ &= L\phi_{\rho,R}(r(x)) = 0 = \Delta^P v(x) \quad . \end{aligned}$$

Finalmente se demuestra la hiperbolicidad de P como en la afirmación (A) del Teorema 3.3.9.

4

Desigualdad de Chern-Osserman

4.1. Introducción	82
4.2. Preliminares	83
4.3. Desigualdad de Chern-Osserman para superficies minimales en una variedad Cartan-Hadamard	90
4.3.1. Demostración del apartado 1	90
4.3.2. Demostración del apartado 2	94
4.4. La desigualdad de Chern-Osserman para superficies no minimales en una variedad de Cartan-Hadamard	98
4.4.1. Demostración del apartado 1	99
4.4.2. Demostración del apartado 2	105

4.1. Introducción

S.S. Chern y R. Osserman establecieron en [10] que si la curvatura de Gauss K_G de una superficie minimal completa M en \mathbb{R}^n tiene integral finita se cumple

$$(4.1.1) \quad -\chi(M) \leq \frac{-1}{2\pi} \int_M K_G d\sigma - k,$$

donde k es el número de finales de M .

Posteriormente L.P. Jorge y W. H. Meeks en [28] obtuvieron la expresión

$$(4.1.2) \quad -\chi(M) = \frac{-1}{2\pi} \int_M K_G d\sigma - \text{Sup}_{t>0} \frac{v(t)}{\text{Vol}(B^{0,2}(t))},$$

donde $v(t)$ es el volumen de las bolas extrínsecas de radio t y $B^{0,2}(t)$ es la bola geodésica de dimensión 2 en \mathbb{R}^n .

El cociente de volúmenes $\frac{v(t)}{\text{Vol}(B^{0,2}(t))}$, cuando estamos considerando una subvariedad minimal propiamente inmersa en una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard, es una función no decreciente, como se puede ver en [2] y en [38].

Concretamente:

Si la subvariedad M se encuentra en una variedad ambiente N de Cartan-Hadamard cumpliendo

$$(4.1.3) \quad K^N \leq b \leq 0$$

entonces la función

$$(4.1.4) \quad \psi(r) = \frac{v(r)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})},$$

donde $B_t^{b,2}$ es la bola geodésica de radio r en la *forma espacial real* de curvatura constante b , es monótona no decreciente.

Apoyándose en este hecho, Chen Qing y Cheng Yi en [7] generalizan la desigualdad de Chern-Osserman para superficies minimales completas en el espacio hiperbólico de curvatura constante -1 .

Si la superficie es minimal en \mathbb{H}^n se deduce directamente de la ecuación de Gauss que

$$(4.1.5) \quad K_G = -1 - \frac{1}{2} \|A^S\|^2,$$

donde A^S es la segunda forma fundamental de la superficie S en \mathbb{H}^n . Por lo que la curvatura de Gauss K_G no puede tener integral acotada. De hecho Chen Qing y Cheng Yi imponen a la superficie la hipótesis

$$(4.1.6) \quad \int_M \|A\|^2 d\sigma < +\infty,$$

(que equivale en el caso de superficies minimales en \mathbb{R}^n a curvatura total finita).

Apoyándose en este hecho demuestran que el cociente $\frac{\text{Vol}(D_t)}{\text{Vol}(B_t^{1,2})} = \frac{v(t)}{2\pi(\cosh t - 1)}$ está acotado (a las superficies con esta característica se le denominará superficie con crecimiento minimal del área o *minimal area growth*) y que

$$(4.1.7) \quad -\chi(M) \leq \frac{1}{4\pi} \int_M \|A\|^2 d\sigma - \text{Sup}_{t>0} \frac{v(t)}{2\pi(\cosh t - 1)}.$$

En este capítulo demostraremos un primer resultado que es una generalización del de Chen Qing y Cheng Yi para superficies minimales completas propiamente inmersas en una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard N cuya curvatura seccional K^N está acotada superiormente por una constante $b < 0$.

Se trata por tanto de dar una condición suficiente para que una superficie minimal completa S propiamente inmersa en una variedad Riemanniana de Cartan-Hadamard sea de tipo topológico finito.

También demostraremos un resultado similar al anterior para superficies completas no minimales con curvatura media y segunda forma fundamental controladas mediante técnicas desarrolladas por A. Hurtado, S. Markvorsen y V. Palmer, [24], que nos permite la construcción de un espacio modelo $C_{\omega_b, h}^2$ en el que conseguir relaciones isoperimétricas en nuestra superficie (de forma similar al espacio hiperbólico en el caso minimal).

4.2. Preliminares

Supondremos en todo este capítulo que S^2 es una superficie completa y no compacta propiamente inmersa en una variedad Riemanniana N^n de Cartan-Hadamard. Sabemos que todos los puntos de N^n son polos según el Teorema 2.1.3. Es decir, podemos asegurar para cada o punto de N que $\exp_o: T_o N^n \rightarrow N^n$ es un difeomorfismo. Así podemos definir la función distancia y la restricción a S que será la distancia extrínseca (véase la definición 2.1.1).

Notemos que el gradiente $\nabla^S r(x)$ es la parte tangencial (en S) de $\nabla^N r(x)$ (cuya norma es 1), para todo $x \in S$. Tenemos la relación:

$$(4.2.1) \quad \nabla^N r = \nabla^S r + (\nabla^N r)^\perp,$$

donde $(\nabla^N r)^\perp(x) = \nabla^\perp r(x)$ es la componente normal a $T_x S$ para todo $x \in S$.

Vamos a definir la norma de Hilbert-Schmidt de la segunda forma fundamental.

Definición 4.2.1 (Norma de Hilbert-Schmidt) Sea P^m una subvariedad inmersa en la variedad Riemanniana N^n . Si A^P es la segunda forma fundamental de P en N entonces se define $\|A^P\|$, la norma de Hilbert-Schmidt de A^P , como

$$(4.2.2) \quad \|A^P\|_p = \sqrt{\sum_{i,j=1}^m g(A_p^P(e_i, e_j), A_p^P(e_i, e_j))},$$

siendo $\{e_i\}_{i=1}^m$ base ortonormal de T_pP .

Nota 4.2.2 Por otra parte, si S es una superficie inmersa en una variedad Riemanniana M consideramos $\|H^S\|$ definida como

$$(4.2.3) \quad \|H^S\|_p = \sqrt{g(H_p^S, H_p^S)},$$

donde H^S es la curvatura media de S en N .

Con estas consideraciones podemos establecer:

Proposición 4.2.3 Sea S^2 subvariedad de dimensión 2 en una variedad N . Si $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de campos vectoriales en la superficie y σ es el plano generado por ellos, tenemos

$$(4.2.4) \quad \bar{K}_\sigma^N = K_\sigma^S + \frac{1}{2} \left(\|A^S\|^2 - 4 \|H^S\|^2 \right)$$

Demostración. Según la ecuación de Gauss para subvariedades:

$$(4.2.5) \quad \bar{K}_\sigma^N = K_\sigma^S + g(A^S(e_1, e_2), A^S(e_1, e_2)) - g(A^S(e_1, e_1), A^S(e_2, e_2)).$$

Por otra parte se cumple: $2H^S = A^S(e_1, e_1) + A^S(e_2, e_2)$. Consideramos la norma de Hilbert-Schmidt de A^S

$$(4.2.6) \quad \|A^S\|^2 = g(A^S(e_1, e_1), A^S(e_1, e_1)) + 2g(A^S(e_1, e_2), A^S(e_1, e_2)) + g(A^S(e_2, e_2), A^S(e_2, e_2)).$$

La norma de H^S es

$$(4.2.7) \quad 4 \|H^S\|^2 = g(A^S(e_1, e_1), A^S(e_1, e_1)) + 2g(A^S(e_1, e_1), A^S(e_2, e_2)) + g(A^S(e_2, e_2), A^S(e_2, e_2)).$$

Si restamos ambas expresiones

$$(4.2.8) \quad \|A^S\|^2 - 4 \|H^S\|^2 = 2(g(A^S(e_1, e_2), A^S(e_1, e_2)) - g(A^S(e_1, e_1), A^S(e_2, e_2)))$$

Y por tanto

$$(4.2.9) \quad \bar{K}_\sigma^N = K_\sigma^S + \frac{1}{2} \left(\|A^S\|^2 - 4 \|H^S\|^2 \right)$$

■

Definición 4.2.4 Sea A^S la segunda forma fundamental de S en N , definimos

$$(4.2.10) \quad R(t) = \int_{D_r(o)} \|A^S\|^2 d\sigma$$

donde la norma es la de Hilbert-Schmidt (véase la definición 4.2.1).

Definición 4.2.5 Dada una superficie S inmersa en una variedad Riemanniana N . Consideremos el cociente

$$(4.2.11) \quad \psi(t) = \frac{\text{Vol}(B_t(o) \cap S)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})},$$

donde $B_t^{b,2}$ es la bola geodésica de radio t en un forma espacial real de curvatura seccional constante b .

Nota 4.2.6 (Véase [2]) Si N tiene sus curvaturas seccionales menores que una constante $b < 0$ sabemos (véase 2.3.32) que $\psi(t)$ es no decreciente.

Definición 4.2.7 Sea S una superficie propiamente inmersa en una variedad Riemanniana N . Diremos que tiene crecimiento minimal del área (en inglés minimal area growth) si

$$\psi(t) = \frac{\text{Vol}(B_t(o) \cap S)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})}$$

está acotada.

Nota 4.2.8 (Véase [17] y nota 2.3.10) Recordemos los volúmenes de las bolas $B_t^{b,2}$ y $B_t^{b,3}$

$$(4.2.12) \quad \begin{aligned} \text{Vol}(B_t^{b,2}) &= \frac{-2\pi}{b} (\cosh(t\sqrt{-b}) - 1) \\ \text{Vol}(B_t^{b,3}) &= \frac{-\pi}{b\sqrt{-b}} (\sinh(t\sqrt{-b}) - 2t\sqrt{-b}) \end{aligned}$$

Nota 4.2.9 Sabemos que las bolas extrínsecas $D_R(o)$ en nuestro caso conjuntos precompactos (véase 2.1.9)

Nota 4.2.10 Como consecuencia también de la nota 2.1.9 la clausura de $D_R(o)$ es una variedad compacta con borde diferenciable para casi todo $R > 0$. El Teorema de Gauss-Bonnet establece en este caso (véase 2.3.41)

$$(4.2.13) \quad \int_{\partial D_R(o)} k_g^t d\mu + \int_{D_R(o)} K^S d\sigma = 2\pi\chi(D_R(o)),$$

siendo k_g^t la curvatura geodésica de la curva diferenciable $\partial D_R(o)$ y K^S la curvatura de Gauss de S .

Nota 4.2.11 Si aplicamos la Proposición 2.3.38 sustituyendo f por r (la función distancia) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \text{Vol}(D_r(o)) &= \frac{d}{dr} \int_{D_r(o)} d\sigma = \\ & \int_{\partial D_r(o)} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} d\mu \leq \int_{\partial D_r(o)} d\mu = \text{Vol}(\partial D_r(o)). \end{aligned}$$

Proposición 4.2.12 Sea S^2 una superficie minimal propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard N , la cual tiene sus curvaturas seccionales acotadas superiormente de esta manera

$$K^N \leq b \leq 0.$$

Sean D_t , ($t > 0$), las bolas extrínsecas en S . El volumen $v(t) = \text{Vol}(D_t)$ satisface la desigualdad

$$(4.2.14) \quad 2\pi\chi(D_t) \geq \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - \int_{\partial D_t} \left\langle \frac{\nabla^\perp r}{\|\nabla^S r\|}, A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right) \right\rangle d\mu + \int_{D_t} K^S d\sigma$$

donde K^S es la curvatura de Gauss de S .

Demostración. Si sustituimos en el Teorema de Gauss-Bonnet (4.2.13) la curvatura geodésica usando (2.2.58) tenemos

$$(4.2.15) \quad 2\pi\chi(D_t) \geq \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ \eta_{\omega_b}(r) - \left\langle \nabla^\perp r, A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right) \right\rangle \right\} d\mu + \int_{D_t} K^S d\sigma.$$

Sabemos (véase Proposición 2.3.38)

$$(4.2.16) \quad v'(t) = \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} d\mu.$$

Luego

$$\int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \eta_{\omega_b}(r) d\mu = \eta_{\omega_b}(t)v'(t)$$

y al sustituir obtenemos

$$(4.2.17) \quad 2\pi\chi(D_t) \geq \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\langle \nabla^\perp r, A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right) \right\rangle d\mu + \int_{D_t} K^S d\sigma,$$

que es la desigualdad buscada. ■

Proposición 4.2.13 *Sea S^2 una superficie minimal propiamente inmersa en una variedad de Cartan-Hadamard N con sus curvaturas seccionales acotadas superiormente por $b < 0$, es decir:*

$$K^N \leq b < 0.$$

Sea D_t , ($t > 0$), las bolas extrínsecas en S . Entonces, si $t > s > 0$,

$$(4.2.18) \quad \frac{\int_{D_t} \cosh \sqrt{-br} d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bt}} - \frac{\int_{D_s} \cosh \sqrt{-br} d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} \geq \int_{D_t - D_s} \frac{1 + \sinh^2 \sqrt{-br} \|\nabla^\perp r\|^2}{\cosh^3 \sqrt{-br}} d\sigma$$

Demostración. Si usamos la desigualdad (2.2.57) sustituyendo la función $f(r) = \cosh \sqrt{-br}$ tenemos

$$(4.2.19) \quad \begin{aligned} \Delta^S \cosh \sqrt{-br} &\geq (-b \cosh \sqrt{-br} - \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-br} \eta_{\omega_b}(r)) \|\nabla^S r\|^2 \\ &+ 2\sqrt{-b} \sinh \sqrt{-br} \eta_{\omega_b}(r) = -2b \cosh \sqrt{-br}. \end{aligned}$$

Sabemos que el unitario normal a ∂D_t hacia afuera es $\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}$ y que

$$(4.2.20) \quad \nabla^S f(r) = f'(r) \nabla^S r,$$

para toda función $f(r)$ radial.

Integramos y aplicamos el Teorema de la divergencia

$$(4.2.21) \quad \begin{aligned} \int_{D_t} \Delta^S \cosh \sqrt{-br} d\sigma &= \int_{\partial D_t} \left\langle \nabla^S \cosh \sqrt{-br}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right\rangle d\mu = \\ &\sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu. \end{aligned}$$

Y, con la desigualdad anterior,

$$(4.2.22) \quad \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu \geq -2b \int_{D_t} \cosh \sqrt{-br} d\sigma.$$

Ahora derivemos el cociente $\frac{\int_{D_t} \cosh \sqrt{-br} d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bt}}$ usando la fórmula de la co-área (2.3.38):

$$(4.2.23) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\int_{D_t} \cosh \sqrt{-br} d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bt}} = \\ \frac{1}{\cosh^3 \sqrt{-bt}} \left(\cosh \sqrt{-bt} \int_{\partial D_t} \frac{\cosh \sqrt{-br}}{\|\nabla^S r\|} d\sigma - 2\sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \int_{D_t} \cosh \sqrt{-br} d\sigma \right). \end{aligned}$$

Considerando (4.2.22) y sustituyendo en la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \frac{\int_{D_t} \cosh \sqrt{-br} \, d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bt}} \geq \\
& \frac{1}{\cosh^3 \sqrt{-bt}} \left\{ \cosh \sqrt{-bt} \int_{\partial D_t} \frac{\cosh \sqrt{-br} \, d\sigma}{\|\nabla^S r\|} - \sinh \sqrt{-bt} \int_{\partial D_t} \sinh \sqrt{-br} \|\nabla^S r\| \, d\mu \right\} = \\
& \frac{1}{\cosh^3 \sqrt{-bt}} \left\{ \int_{\partial D_t} \left(\frac{\cosh^2 \sqrt{-br}}{\|\nabla^S r\|} - \sinh^2 \sqrt{-br} \|\nabla^S r\| \right) d\mu \right\} = \\
& \int_{\partial D_t} \left(\frac{\cosh^2 \sqrt{-br} - \sinh^2 \sqrt{-br} (1 - \|\nabla^\perp r\|^2)}{\|\nabla^S r\| \cosh^3 \sqrt{-bt}} \right) d\mu = \\
(4.2.24) \quad & \int_{\partial D_t} \left(\frac{1}{\|\nabla^S r\|} \frac{1 + \sinh^2 \sqrt{-br} \|\nabla^\perp r\|^2}{\cosh^3 \sqrt{-bt}} \right) d\mu.
\end{aligned}$$

Integrando y aplicando co-área (2.3.38) al último término obtenemos la desigualdad deseada.

■

La siguiente Proposición es de carácter general.

Proposición 4.2.14 *Sea $S^2 \hookrightarrow N^n$ una superficie y sea $b \leq 0$ y $\{D_t\}_{t>0}$ una colección exhaustiva de S por bolas extrínsecas. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función positiva C^∞ .*

Se cumple

$$(4.2.25) \quad \int_S e^{-\sqrt{-br}} f(x) d\sigma < +\infty \iff \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{-bt}} \int_{D_t} f(x) \, d\sigma \, dt < +\infty$$

y, si las integrales convergen,

$$(4.2.26) \quad \int_S e^{-\sqrt{-br}} f(x) d\sigma = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{-bt}} \int_{D_t} f(x) \, d\sigma \, dt$$

Demostración. Apliquemos la fórmula de la co-área (2.3.38), por una parte

$$(4.2.27) \quad \int_{D_t} e^{-\sqrt{-br}} f(x) d\sigma = \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{\partial D_s} \frac{f(x)}{\|\nabla^S r\|} d\mu ds$$

por otra

$$(4.2.28) \quad \frac{d}{ds} \int_{D_s} f(x) d\sigma = \int_{\partial D_s} \frac{f(x)}{\|\nabla^S r\|} d\mu.$$

Sustituyendo y aplicando integración por partes (y teniendo en cuenta que $\int_{D_0} f d\sigma = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{D_t} e^{-\sqrt{-b}r} f(x) d\sigma &= \int_0^t e^{-\sqrt{-b}s} \left(\frac{d}{ds} \int_{D_s} f(x) d\sigma \right) ds \\ &= e^{-\sqrt{-b}t} \int_{D_t} f(x) d\sigma + \sqrt{-b} \int_0^t e^{-\sqrt{-b}s} \int_{D_t} f(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Si ahora tomamos límites cuando t tiende a infinito

$$(4.2.29) \quad \int_S e^{-\sqrt{-b}r} f(x) d\sigma = \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{-b}t} \right) \int_S f(x) d\sigma + \sqrt{-b} \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{-b}s} \int_{D_t} f(x) d\sigma.$$

Con esta relación se deduce la doble implicación.

Si $\int_S e^{-\sqrt{-b}r} f(x) d\sigma < +\infty$ entonces se deduce la acotación de las otras dos (ya que son las tres positivas), en particular:

$$(4.2.30) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{-b}t} \int_{D_t} f(x) d\sigma dt < +\infty.$$

En sentido contrario, suponemos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{-b}t} \int_{D_t} f(x) d\sigma dt < +\infty$$

se deduce por tanto que existe una sucesión $\{t_i\}$ divergente tal que

$$\int_{D_{t_i}} f(x) d\sigma \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0.$$

Como $\{D_t\}_{t>0}$ es exhaustiva tenemos que

$$\int_S f(x) d\sigma = 0$$

luego

$$(4.2.31) \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{-b}t} \right) \int_S f(x) d\sigma = 0.$$

Por tanto de (4.2.29) se deduce

$$\int_S e^{-\sqrt{-b}r} f(x) d\sigma < +\infty.$$

■

4.3. Desigualdad de Chern-Osserman para superficies minimales en una variedad Cartan-Hadamard

Teorema 4.3.1 *Sea N^n una variedad de Cartan-Hadamard, con curvaturas seccionales acotadas superiormente de la forma siguiente*

$$K^N \leq b < 0.$$

Sea S^2 una superficie minimal completa y conexa propiamente inmersa en N , cumpliendo

$$(4.3.1) \quad \int_S \|A^S\|^2 d\sigma < +\infty \quad y \quad \int_S (b - K^N) d\sigma < +\infty$$

donde A^S denota la segunda forma fundamental de S en N .

Entonces:

1. $\text{Sup}_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})} < +\infty$, es decir S tiene crecimiento minimal del área.
2. S^2 es de tipo topológico finito, además: $-\chi(S) \leq \frac{1}{2\pi} \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma - \text{Sup}_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})} < +\infty$.

4.3.1. Demostración del apartado 1

Teniendo en cuenta la desigualdad de la Proposición 4.2.12, sumando a ambos términos $b v(t)$, sustituyendo K^S por $K^N - \frac{1}{2} \|A^S\|^2$ y considerando la definición 4.2.4 de $R(t)$ se obtiene:

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} & \eta_{\omega_b}(t)v'(t) + b v(t) \leq \\ & - \int_{D_t} (K^N - \frac{1}{2} \|A^S\|^2) d\sigma + \\ & \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\langle A\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \nabla^\perp r \right\rangle d\mu + 2\pi\chi(D_t) + \int_{D_t} b d\sigma = \\ & - \int_{D_t} (K^N - b) d\sigma + \frac{1}{2} R(t) + \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\langle A\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \nabla^\perp r \right\rangle d\mu + 2\pi\chi(D_t). \end{aligned}$$

Recordemos que

$$(4.3.3) \quad \eta_{\omega_b}(t) = \sqrt{-b} \frac{\cosh(\sqrt{-bt})}{\sinh(\sqrt{-bt})} = \sqrt{-b} \coth(\sqrt{-bt}),$$

luego

$$(4.3.4) \quad \eta_{\omega_b}(t)v'(t) + b v(t) = \sqrt{-b} \frac{\cosh^2(\sqrt{-bt})}{\sinh(\sqrt{-bt})} \frac{d}{dt} \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})}.$$

Sustituyendo esta igualdad y despejando en (4.3.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})} &\leq \frac{1}{\sqrt{-b}} \frac{\sinh(\sqrt{-bt})}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \left\{ - \int_{D_t} (K^N - b) d\sigma + \frac{1}{2} R(t) + \right. \\ &\left. \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\langle A\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \nabla^\perp r\right) d\mu + 2\pi\chi(D_t) \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, siempre se cumple que

$$(4.3.5) \quad \frac{\sinh(\sqrt{-bt})}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \leq 2e^{-\sqrt{-bt}}$$

y, si k es el número de componentes de ∂D_t , que (ver [40], página 43):

$$(4.3.6) \quad \chi(D_t) \leq 2 - k \leq 1$$

Con estas dos acotaciones tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})} &\leq \\ &\frac{1}{\sqrt{-b}} \left\{ 2e^{-\sqrt{-bt}} \int_{D_t} (-K^N + b) d\sigma + e^{-\sqrt{-bt}} R(t) + \right. \\ &\left. \int_{\partial D_t} \frac{\sinh(\sqrt{-bt})}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\langle A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \nabla^\perp r\right) d\mu + 4e^{-\sqrt{-bt}} \pi \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Integrando los dos términos de la desigualdad entre 0 y t .

Teniendo en cuenta que $\frac{v(0)}{\cosh 0} = 0$ podemos escribir:

$$\begin{aligned}
(4.3.7) \quad \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})} &\leq \frac{1}{\sqrt{-b}} \left\{ 2 \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} (-K^N + b) d\sigma ds + \right. \\
&\int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} R(s) ds + \int_{D_s} \frac{\sinh(\sqrt{-bt})}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \left\langle A^S \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right), \nabla^{\perp} r \right\rangle d\mu - \\
&\left. \frac{4\pi}{\sqrt{-b}} (e^{-\sqrt{-bt}} - 1) \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{-b}} \left\{ 2 \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} (-K^N + b) d\sigma ds + \right. \\
&\left. \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} R(s) ds + \int_{D_t} \frac{\sinh(\sqrt{-bs})}{\cosh^2(\sqrt{-bs})} \left\langle A^S \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right), \nabla^{\perp} r \right\rangle d\mu \right\} - \frac{4\pi}{b}.
\end{aligned}$$

Por hipótesis (I) sabemos que

$$(4.3.8) \quad \int_S \|A^S\|^2 d\sigma < +\infty,$$

en particular también se cumplirá

$$(4.3.9) \quad \int_S e^{-\sqrt{-br}} \|A^S\|^2 d\sigma < +\infty.$$

Si usamos la Proposición 4.2.14 para $f(x) = \|A^S\|_x^2$, sabiendo la convergencia de la integral anterior y recordando la definición de $R(t)$ tenemos:

$$(4.3.10) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{-bt}} R(t) dt < +\infty$$

De la misma manera, por hipótesis (II) y si tomamos $f(x) = -K^N(x) + b (\geq 0)$:

$$(4.3.11) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{-bt}} \int_{D_t} (-K^N + b) d\sigma dt < +\infty$$

Con estas acotaciones tenemos la desigualdad

$$\begin{aligned}
(4.3.12) \quad \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})} &\leq \\
C + \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_{D_t} \frac{\sinh(\sqrt{-bs})}{\cosh^2(\sqrt{-bs})} &\left\langle A^S \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right), \nabla^{\perp} r \right\rangle d\mu.
\end{aligned}$$

donde C es una constante. Veamos el siguiente lema para la acotación final.

Lema 4.3.2 *Existe una constante C_2 tal que*

$$(4.3.13) \quad \int_{D_s} \frac{\sinh(\sqrt{-bt})}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \left\langle A^S \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right), \nabla^\perp r \right\rangle d\sigma \leq C_2 \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})}}$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a los productos escalares $\int fg$ y $\langle X, Y \rangle$ (y teniendo en cuenta que $\|A^S\|^2 \geq \|A^S(v, v)\|$, para cualquier vector v)

$$(4.3.14) \quad \begin{aligned} & \int_{D_s} \frac{\sinh(\sqrt{-bt})}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \left\langle A^S \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right), \nabla^\perp r \right\rangle d\sigma \leq \\ & \int_{D_t} \sinh(\sqrt{-bt}) \|A^S\| \frac{\|\nabla^\perp r\|}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} d\sigma \leq \\ & \sqrt{\int_{D_t} \frac{\|A^S\|^2 d\sigma}{\cosh(\sqrt{-bt})}} \sqrt{\int_{D_t} \frac{\sinh^2(\sqrt{-bt}) \|\nabla^\perp r\|^2 d\sigma}{\cosh^3(\sqrt{-bt})}} \end{aligned}$$

(se ha aplicado Cauchy-Schwarz a $\frac{\|A^S\|}{\cosh^{\frac{1}{2}}(\sqrt{-bt})}$ y $\frac{\sinh(\sqrt{-bt})\|\nabla^\perp r\|}{\cosh^{\frac{3}{2}}(\sqrt{-bt})}$).

Tomando $s = 0$ en la Proposición 4.2.13 tenemos

$$(4.3.15) \quad \begin{aligned} & \frac{\int_{D_t} \cosh(\sqrt{-bs}) d\sigma}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \geq \\ & \int_{D_t} \frac{1 + \sinh^2(\sqrt{-bs}) \|\nabla^\perp r\|^2}{\cosh^3(\sqrt{-bs})} d\sigma \geq \int_{D_t} \frac{\sinh^2(\sqrt{-bs}) \|\nabla^\perp r\|^2}{\cosh^3(\sqrt{-bs})} d\sigma. \end{aligned}$$

Además

$$(4.3.16) \quad \frac{\int_{D_t} \cosh(\sqrt{-bs}) d\sigma}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} \leq \frac{\cosh(\sqrt{-bt})v(t)}{\cosh^2(\sqrt{-bt})} = \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})}$$

por ser $\cosh(\sqrt{-bt})$ creciente. Así

$$(4.3.17) \quad \int_{D_t} \frac{\sinh^2(\sqrt{-bs}) \|\nabla^\perp r\|^2}{\cosh^3(\sqrt{-bs})} d\sigma \leq \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})}$$

y sustituyendo en (4.3.14):

$$\begin{aligned} & \int_{D_t} \frac{\sinh(\sqrt{-bs})}{\cosh^2(\sqrt{-bs})} \left\langle A^S \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|} \right), \nabla^\perp r \right\rangle \leq \\ & \sqrt{\int_{D_t} \frac{\|A^S\|^2}{\cosh(\sqrt{-bs})}} \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bs})}}. \end{aligned}$$

Puesto que se cumple $\frac{1}{\cosh \sqrt{-bt}} \leq 2e^{-\sqrt{-bt}}, \forall t > 0$ tenemos

$$(4.3.18) \quad \sqrt{\int_{D_t} \frac{\|A^S\|^2 d\sigma}{\cosh(\sqrt{-bs})}} \leq \sqrt{\int_S 2e^{-\sqrt{-br}} \|A^S\|^2 d\sigma} < +\infty,$$

y tenemos el resultado. ■

Volviendo a (4.3.7), y usando el lema, hemos obtenido:

$$(4.3.19) \quad \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})} \leq C_1 + C_2 \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})}}.$$

Si $g(t) = \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})}}$ la desigualdad puede escribirse

$$(4.3.20) \quad g^2 - C_2g - C_1 \leq 0$$

por tanto los valores de $g(t)$ deben estar entre los puntos de corte de la parábola

$$(4.3.21) \quad y = x^2 - C_2x - C_1$$

que son reales y distintos (por ser $C_i \geq 0$ y no nulos simultáneamente), luego $g(t)$ (y por tanto $g(t)^2$) está acotada.

Hemos demostrado que $\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})} < C$ para algún número C .

Luego

$$(4.3.22) \quad v(t) \leq C \cosh(\sqrt{-bt})$$

y

$$(4.3.23) \quad \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt}) - 1} \leq \frac{C \cosh(\sqrt{-bt})}{\cosh(\sqrt{-bt}) - 1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} C.$$

Y queda demostrada la primera afirmación del Teorema.

4.3.2. Demostración del apartado 2

Sabemos que, además de ser no decreciente (por Teorema 1 de [2] y por [38]), el cociente $\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})-1}$ está acotado según el resultado de la parte anterior de este Teorema.

Partiremos de la desigualdad (4.3.2), vista en la demostración del apartado anterior:

$$\eta_{\omega_b}(t)v'(t) + b v(t) \leq - \int_{D_t} (K^N - b)d\sigma + \frac{1}{2}R(t) + \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\langle A\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \nabla^\perp r \right\rangle d\mu + 2\pi\chi(D_t)$$

Definimos, por comodidad:

$$(4.3.24) \quad I(t) = \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\langle A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \nabla^\perp r \right\rangle d\mu,$$

por lo que nuestra desigualdad queda

$$(4.3.25) \quad -2\pi\chi(D_t) \leq - \int_{D_t} (K^N - b)d\sigma + \frac{1}{2}R(t) + I(t) - \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - b v(t)$$

Nuestro objetivo es acotar el término de la derecha. Sabemos por hipótesis que $\int_S (b - K^N)d\sigma$ y $\int_S \|A^S\|^2 d\sigma$ son convergentes. Sólo nos queda, por tanto, acotar $I(t) - \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - b v(t)$. Para ello demostremos el lema siguiente:

Lema 4.3.3 $\int_0^t \cosh(\sqrt{-bs}) v'(s)ds \geq \frac{\cosh(\sqrt{-bt})+1}{2}v(t)$

Demostración. Sabemos, por el no decrecimiento de $\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})-1}$ (corolario 2.3.14) que

$$(4.3.26) \quad \left(\cosh(\sqrt{-bt}) - 1\right) v'(t) \geq v(t)\sqrt{-b} \sinh(\sqrt{-bt}),$$

luego, integrando por partes:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \cosh(\sqrt{-bs}) v'(s)ds = \\ & v(t) \cosh(\sqrt{-bt}) - \sqrt{-b} \int_0^t v(s) \sinh(\sqrt{-bs})ds \geq \\ & v(t) \cosh(\sqrt{-bt}) - \int_0^t (\cosh(\sqrt{-bs}) - 1)v'(s)ds = \\ & v(t)(\cosh(\sqrt{-bt}) + 1) - \int_0^t \cosh(\sqrt{-bs}) v'(s)ds. \end{aligned}$$

Despejando $\int_0^t \cosh(\sqrt{-b}s) v'(s) ds$ se obtiene el resultado. ■

Si usamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la relación $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ en $I(t)$ nos queda:

$$\begin{aligned}
 I(t) &\leq \int_{\partial D_t} \|A^S\| \frac{\|\nabla^\perp r\|}{\|\nabla^S r\|} d\mu = \int_{\partial D_t} \frac{\|A^S\|}{\sqrt{\eta_{\omega_b}(t)} \sqrt{\|\nabla^S r\|}} \frac{\|\nabla^\perp r\|}{\sqrt{\eta_{\omega_b}(t)} \sqrt{\|\nabla^S r\|}} d\mu \leq \\
 &\frac{1}{2} \int_{\partial D_t} \left(\frac{\|A^S\|^2}{\|\nabla^S r\|} + \frac{\eta_{\omega_b}(t) \|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} \right) d\mu \leq \\
 (4.3.27) \quad &\frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)} \int_{\partial D_t} \frac{\|A^S\|^2}{\|\nabla^S r\|} + \eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{\|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu.
 \end{aligned}$$

El primer sumando, por la fórmula de la co-área (véase la nota 2.3.38), es:

$$(4.3.28) \quad \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)} R'(t) = \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)} \int_{\partial D_t} \frac{\|A^S\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu,$$

Con el último lema vamos a acotar $\int_{\partial D_t} \frac{\|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu$:

$$\begin{aligned}
 &\eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{\|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu = \eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{1 - \|\nabla^S r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu \leq \\
 &\eta_{\omega_b}(t) v'(t) - \eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\sigma \leq \\
 &\eta_{\omega_b}(t) v'(t) - \frac{2\eta_{\omega_b}(t)\sqrt{-b}}{\sinh(\sqrt{-b}t)} \int_0^t \cosh(\sqrt{-b}s) v'(s) ds \leq \text{(por (4.2.22))} \\
 &\eta_{\omega_b}(t) v'(t) - \frac{v(t)\eta_{\omega_b}(t)\sqrt{-b}}{\sinh \sqrt{-b}t} (\cosh \sqrt{-b}t + 1) \text{(por (4.3.3))} = \\
 (4.3.29) \quad &\eta_{\omega_b}(t) v'(t) - \eta_{\omega_b}(t)^2 v(t) - \frac{\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t)v(t)}{\sinh \sqrt{-b}t}.
 \end{aligned}$$

Por (4.3.27) y (4.3.29) se obtiene:

$$(4.3.30) \quad I(t) \leq \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)} R'(t) + \eta_{\omega_b}(t) v'(t) - \eta_{\omega_b}(t)^2 v(t) - \frac{\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t)v(t)}{\sinh \sqrt{-b}t}.$$

Ahora consideramos (4.3.25), aplicamos (4.3.30) y despejamos $2\pi\chi(D_t)$:

$$(4.3.31) \quad \begin{aligned} & -2\pi\chi(D_t) \leq \int_{D_t} (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2}R(t) + \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)}R'(t) + \\ & \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - \eta_{\omega_b}(t)^2v(t) - (\eta_{\omega_b}(t)v'(t) + b v(t)) - \frac{\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t)v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} \leq \\ & \int_{D_t} (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2}R(t) + \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)}R'(t) + v(t)(-b - \eta_{\omega_b}(t)^2) - \frac{\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t)v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}}, \end{aligned}$$

Se cumple

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)(-b - \eta_{\omega_b}(t)^2) = \\ & \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{bv(t)}{\sinh^2 \sqrt{-bt}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} \frac{b}{\sinh \sqrt{-bt}} \right) = \\ & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}} \frac{b}{\sinh \sqrt{-bt}} \right) = C \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

ya que, en la primera parte de este Teorema, se ha demostrado que $\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}}$ estaba acotado.

Puesto que $\int_S \|A^S\|^2 d\sigma = \int_0^{+\infty} R'(t)dt < +\infty$ (véase nota 2.3.38) sabemos que existe una sucesión monótona creciente $\{t_i\}_{i=1}^{+\infty}$, tendiendo a infinito, de forma que

$$(4.3.32) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} R'(t_i) = 0.$$

Por lo que también

$$(4.3.33) \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t_i)}R'(t_i) = \frac{0}{\sqrt{-b}} = 0.$$

Consideramos la familia $\{D_{t_i}\}_{i=1}^{+\infty}$ formada por bolas extrínsecas abiertas, con clausura compacta. Su unión es S y se cumple $\bar{D}_{t_i} \subset D_{t_{i+1}}$. Si tomamos límite inferior cuando i tiende a $+\infty$ en (4.3.31) obtenemos según las consideraciones anteriores:

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow +\infty} \inf (-2\pi\chi(D_{t_i})) \leq \\ & \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma + \text{Sup}_{t>0} \frac{b \cdot v(t)}{\sinh(\sqrt{-bt})}. \end{aligned}$$

Según el Teorema 2.3.36 tenemos $-\chi(S) \leq \lim_{i \rightarrow +\infty} \inf (-2\pi\chi(D_{t_i}))$, luego

$$(4.3.34) \quad -2\pi\chi(S) \leq \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma + \text{Sup}_{t>0} \frac{b \cdot v(t)}{\sinh(\sqrt{-bt})}.$$

Por otra parte sabemos que

$$(4.3.35) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sinh \sqrt{-bt}}{\cosh \sqrt{-bt}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sinh \sqrt{-bt}}{\cosh \sqrt{-bt} - 1} = 1$$

y también que $\text{Vol}(B_t^{b,2}) = \frac{-2\pi}{b} (\cosh \sqrt{-bt} - 1)$ por lo que podemos escribir la desigualdad (4.3.34) así:

$$(4.3.36) \quad -2\pi\chi(S) \leq \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma - 2\pi \text{Sup}_{t>0} \frac{v(t)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})}.$$

Despejando $-\chi(S)$ obtenemos el resultado querido.

4.4. La desigualdad de Chern-Osserman para superficies no minimales en una variedad de Cartan-Hadamard

Teorema 4.4.1 *Consideremos una constelación isoperimétrica $\{N^n, S^2, C_{\omega_b, h}^2\}$, donde $b < 0$. Supongamos que el espacio modelo $C_{\omega_b, h}^2 = M_W^2$ está fuertemente balanceado.*

Supongamos que se cumple

$$(I) \quad \int_S (b - K^N) d\sigma < +\infty,$$

$$(II) \quad \int_S \|A^S\|^2 d\sigma < +\infty$$

$$(III) \quad \int_S \|H^S\| d\sigma < +\infty$$

Entonces

$$1. \quad \text{Sup}_{t>0} \frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}} < +\infty, \text{ donde } v(t) = \text{Vol}(D_t) \quad \forall t > 0$$

2. S^2 es de tipo topológico finito y, además,

$$(4.4.1) \quad -\chi(S) \leq \frac{1}{2\pi} \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma - C \text{Sup}_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})} + \frac{\sqrt{-b}}{\pi} \int_S \|H^S\| d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_S \|H^S\|^2 d\sigma - \frac{bv(t_0)}{2\pi}$$

donde $C = \text{Inf}_{t>0} (\cosh \sqrt{-bt} - q_W(t) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt}) \in [0, 1]$.

4.4.1. Demostración del apartado 1

Como $K^N \leq b$ se cumple (según la (2.2.57) de la Proposición 2.2.25), siempre que f' sea una función positiva,

$$(4.4.2) \quad \Delta^S(f \circ r) \geq (f'' - f'\eta_{\omega_b}) \|\nabla^S r\|^2 + 2f'(\eta_{\omega_b} + \langle \nabla^N r, H^S \rangle),$$

como

$$(4.4.3) \quad |\langle \nabla^N r, H^S \rangle| \leq \|H^S\|$$

entonces

$$(4.4.4) \quad -\|H^S\| \leq \langle \nabla^N r, H^S \rangle \leq \|H^S\|$$

y tenemos

$$(4.4.5) \quad \Delta^S(f \circ r) \geq (f'' - f'\eta_{\omega_b}) \|\nabla^S r\|^2 + 2f'(\eta_{\omega_b} - \|H^S\|).$$

Sustituyendo $f = \cosh \sqrt{-br}$ y al ser

$$(4.4.6) \quad f' = \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt}, \quad f'' = -b \cosh \sqrt{-bt} = -bf$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta^S \cosh \sqrt{-br} &\geq \\ \|\nabla^S r\|^2 &\left\{ -b \cosh \sqrt{-br} - \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-br} \frac{\sqrt{-b} \cosh \sqrt{-br}}{\sinh \sqrt{-br}} \right\} + \\ 2\sqrt{-b} \sinh \sqrt{-br} &\left\{ \frac{\sqrt{-b} \cosh \sqrt{-br}}{\sinh \sqrt{-br}} - \|H^S\| \right\}. \end{aligned}$$

Simplificando

$$(4.4.7) \quad \Delta^S \cosh \sqrt{-br} \geq -2b \cosh \sqrt{-br} - 2\sqrt{-b} \sinh \sqrt{-br} \|H^S\|.$$

Calculemos ahora la curvatura geodésica de S para un campo e , tangente a ∂D_r , unitario y utilicemos la comparación de Greene-Wu (Proposición 2.2.25) para $f = 1$

$$\begin{aligned} k_g^t &= \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \text{Hess}^S r(e, e) \geq \\ &\frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ -\eta_{\omega_b} \langle e, \nabla^N r \rangle^2 + \eta_{\omega_b} + \langle A^S(e, e), \nabla^N r \rangle \right\} = \\ &\frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ \eta_{\omega_b} + \langle A^S(e, e), \nabla^N r \rangle \right\}, \end{aligned}$$

porque $\langle e, \nabla^N r \rangle = 0$. Como

$$(4.4.8) \quad H^S = \frac{1}{2} \left[A^S(e, e) + A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right) \right],$$

sustituyendo en la desigualdad anterior,

$$(4.4.9) \quad \begin{aligned} k_g^t &\geq \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ \eta_{\omega_b}(t) + 2 \langle H^S, \nabla^N r \rangle - \left\langle A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \nabla^{\perp} r \right\rangle \right\} \geq \\ &\frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ \eta_{\omega_b}(t) - 2 \|H^S\| - \left\langle A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \nabla^{\perp} r \right\rangle \right\}. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Gauss-Bonnet (ver nota 4.2.10):

$$(4.4.10) \quad \int_{\partial D_t} k_g^t d\mu + \int_{D_t} K^S d\sigma = 2\pi\chi(D_t),$$

sustituyendo la curvatura geodésica por la expresión anterior

$$\begin{aligned} 2\pi\chi(D_t) &\geq \\ &\int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ \eta_{\omega_b}(t) - 2 \|H^S\| - \left\langle A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \nabla^{\perp} r \right\rangle \right\} d\mu + \int_{D_t} K^S d\sigma. \end{aligned}$$

Recordemos la definición:

$$(4.4.11) \quad I(t) = \int_{\partial D_t} \left\langle A^S\left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}\right), \frac{\nabla^{\perp} r}{\|\nabla^S r\|} \right\rangle d\mu,$$

aplicando la fórmula de la co-área

$$(4.4.12) \quad 2\pi\chi(D_t) \geq \int_{D_t} K^S d\sigma + \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - (n-2) \int_{\partial D_t} \frac{\|H^S\|}{\|\nabla^S r\|} d\mu - I(t).$$

Sumamos y restamos $b \cdot v(t)$

$$(4.4.13) \quad 2\pi\chi(D_t) \geq \int_{D_t} (K^S - b) d\sigma + \eta_{\omega_b} v'(t) + b \cdot v(t) - 2 \int_{\partial D_t} \frac{\|H^S\|}{\|\nabla^S r\|} d\mu - I(t)$$

Como

$$(4.4.14) \quad \eta_{\omega_b}(t)v'(t) + b \cdot v(t) = \sqrt{-b} \frac{\cosh^2 \sqrt{-bt}}{\sinh \sqrt{-bt}} \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\cosh \sqrt{-bt}} \right)$$

podemos despejar

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\cosh \sqrt{-bt}} \right) \leq \frac{\sinh \sqrt{-bt}}{\sqrt{-b} \cosh^2 \sqrt{-bt}} \left\{ 2\pi \chi(D_t) + \int_{D_t} (b - K^S) d\sigma + 2 \int_{\partial D_t} \frac{\|H^S\|}{\|\nabla^S r\|} d\mu + I(t) \right\}$$

Aplicamos la desigualdad

$$(4.4.15) \quad \frac{\sinh \sqrt{-bt}}{\cosh^2 \sqrt{-bt}} \leq 2e^{-\sqrt{-bt}}$$

y al ser $\chi(D_t) \leq 1$ tenemos, si integramos ambos términos de 0 a t ,

$$\begin{aligned} \frac{v}{\cosh \sqrt{-bt}} &\leq \frac{1}{\sqrt{-b}} \left\{ 4\pi \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} ds + 2 \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} (b - K^S) d\sigma ds + \right. \\ &4 \int_0^t \int_{\partial D_t} e^{-\sqrt{-bs}} \frac{\|H^S\|}{\|\nabla^S r\|} d\mu ds + \left. \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds \right\} = \\ &\frac{4\pi}{b} (e^{-\sqrt{-bt}} - 1) + \frac{2}{\sqrt{-b}} \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} (b - K^S) d\sigma ds + \\ &\frac{4}{\sqrt{-b}} \int_{D_t} e^{-\sqrt{-bt}} \|H^S\| d\sigma + \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds \left\} \end{aligned}$$

Como

$$(4.4.16) \quad \frac{4\pi}{b} (e^{-\sqrt{-bt}} - 1) \leq \frac{-4\pi}{b}$$

y

$$(4.4.17) \quad \int_{D_t} e^{-\sqrt{-bt}} \|H^S\| d\sigma \leq \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma \leq \int_S \|H^S\| d\sigma,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{v}{\cosh \sqrt{-bt}} &\leq -\frac{4\pi}{b} + \frac{2}{\sqrt{-b}} \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} (b - K^S) d\sigma ds + \\ &\frac{4}{\sqrt{-b}} \int_S \|H^S\| d\sigma + \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds. \end{aligned}$$

Ahora sustituimos K^S según la fórmula de la Proposición 4.2.3:

$$\begin{aligned}
& \frac{v}{\cosh \sqrt{-bt}} \leq -\frac{4\pi}{b} + \frac{2}{\sqrt{-b}} \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} (b - K^N) d\sigma ds + \\
& \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} \|A^S\|^2 d\sigma ds - \frac{4}{\sqrt{-b}} \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} \|H^S\|^2 d\sigma ds + \\
& \frac{4}{\sqrt{-b}} \int_S \|H^S\| d\sigma + \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds \geq \\
& -\frac{4\pi}{b} + \frac{2}{\sqrt{-b}} \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} (b - K^N) d\sigma ds + \\
& \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^t e^{-\sqrt{-bs}} \int_{D_s} \|A^S\|^2 d\sigma ds + \\
(4.4.18) \quad & \frac{4}{\sqrt{-b}} \int_S \|H^S\| d\sigma + \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds.
\end{aligned}$$

Por las hipótesis (I) y (II), la Proposición 4.2.14 nos asegura la acotación de los sumandos segundo, tercero y cuarto del segundo término de la desigualdad. Vamos a acotar el último, para ello veamos dos resultados:

Lema 4.4.2

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_{D_t} \left(\cosh \sqrt{-br} - \|H^S\| \frac{\sinh \sqrt{-br}}{\sqrt{-b}} \right) d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bt}} - \frac{\int_{D_s} \left(\cosh \sqrt{-br} - \|H^S\| \frac{\sinh \sqrt{-br}}{\sqrt{-b}} \right) d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} \geq \\
& \int_{D_t - D_s} \frac{1 + \sinh^2 \sqrt{-br} \|\nabla^\perp r\|^2 - \frac{\sinh \sqrt{-br} \cosh \sqrt{-br}}{\sqrt{-b}} \|H^S\|}{\cosh^3 \sqrt{-br}} d\sigma
\end{aligned}$$

Demostración. Integrando y aplicando el Teorema de la divergencia a (4.4.7)

$$\begin{aligned}
(4.4.19) \quad & \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu \geq \\
& -2b \int_{D_t} \cosh \sqrt{-bs} d\sigma - 2\sqrt{-b} \int_{D_t} \|H^S\| \sinh \sqrt{-bs} d\sigma,
\end{aligned}$$

despejando

$$\begin{aligned}
& \int_{D_t} \left(\cosh \sqrt{-bs} - \frac{\|H^S\| \sinh \sqrt{-bs}}{\sqrt{-b}} \right) d\sigma \leq \\
& \frac{1}{2} \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\sqrt{-b}} \int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu
\end{aligned}$$

Ahora derivemos la siguiente expresión y usemos la desigualdad anterior

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{\int_{D_r} \left(\cosh \sqrt{-br} - \|H^S\| \frac{\sinh \sqrt{-br}}{\sqrt{-b}} \right) d\sigma}{\cosh^2 \sqrt{-bt}} \right) \geq \\ & \frac{1}{\cosh^3 \sqrt{-bt}} \left\{ \int_{\partial D_t} \frac{\cosh^2 \sqrt{-br} - \frac{\sinh \sqrt{-br} \cosh \sqrt{-br}}{\sqrt{-b}} \|H^S\| - \sinh^2 \sqrt{-br} \|\nabla^S r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu \right\} = \\ & \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} \left\{ \frac{1 + \sinh^2 \sqrt{-br} \|\nabla^\perp r\|^2 - \frac{\sinh \sqrt{-br} \cosh \sqrt{-br}}{\sqrt{-b}} \|H^S\|}{\cosh^3 \sqrt{-bt}} \right\} d\mu \end{aligned}$$

Integrando y aplicando la fórmula de la co-área se obtiene el lema. ■

Lema 4.4.3 *Existen dos constantes tales que*

$$(4.4.20) \quad \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds \leq C_1 \sqrt{C_2 + \frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}}}$$

Demostración. Aplicando la fórmula de co-área y usando el lema 4.4.2 para $s = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds = \int_{D_t} \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} \left\langle A \left(\frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \frac{\nabla^S r}{\|\nabla^S r\|}, \nabla^\perp r \right) \right\rangle d\sigma \leq \\ & \int_{D_t} \frac{\sinh \sqrt{-br} \|A^S\| \|\nabla^\perp r\|}{\cosh^2 \sqrt{-br}} d\sigma \leq \\ & \sqrt{\int_{D_t} \frac{\|A^S\|^2}{\cosh \sqrt{-br}} d\sigma} \sqrt{\int_{D_t} \frac{\sinh^2 \sqrt{-br} \|\nabla^\perp r\|^2}{\cosh^3 \sqrt{-br}} d\sigma} \leq \\ & \sqrt{\int_{D_t} \frac{\|A^S\|^2}{\cosh \sqrt{-br}} d\sigma} \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}} + \sqrt{-b} \int_{D_t} \frac{\sinh \sqrt{-br}}{\cosh^2 \sqrt{-bt}} \|H^S\| d\sigma} \leq \\ (4.4.21) \quad & \sqrt{\int_{D_t} 2e^{-\sqrt{-br}} \|A^S\|^2 d\sigma} \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}} + \sqrt{-b} \int_{D_t} e^{-\sqrt{-br}} \|H^S\| d\sigma} \end{aligned}$$

Luego, aplicando las hipótesis (II) y (III):

$$(4.4.22) \quad \int_0^t \frac{\sinh \sqrt{-bs}}{\cosh^2 \sqrt{-bs}} I(s) ds \leq C_1 \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}}} + C_2$$

y el lema queda demostrado. ■

Retomando (4.4.18) y con todas las acotaciones demostradas

$$(4.4.23) \quad \frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}} \leq C_3 + C_1 \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}}} + C_2$$

Si llamamos $g(t) = \sqrt{\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}}} + C_2$

$$(4.4.24) \quad g(t)^2 - C_2 \leq C_3 + C_1 g(t)$$

Luego puede expresarse

$$(4.4.25) \quad g(t)^2 - C_1 g(t) - C_2 - C_3 \leq 0; \quad A, B \in \mathbb{R}$$

por lo que $g(t)$ debe encontrarse entre los puntos de corte de la parábola $y = x^2 + Ax + B$ con el eje de las abscisas (existen y son distintos por ser C_i positivos) y también lo estará la función $\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}}$.

Hemos demostrado que $\frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt})} \leq C_4$, para algún número C_4 . Luego

$$(4.4.26) \quad v(t) \leq C_4 \cosh(\sqrt{-bt})$$

y

$$(4.4.27) \quad \frac{v(t)}{\cosh(\sqrt{-bt}) - 1} \leq \frac{C_4 \cosh(\sqrt{-bt})}{\cosh(\sqrt{-bt}) - 1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} C_4.$$

La primera parte del Teorema queda demostrada.

4.4.2. Demostración del apartado 2

Demostremos el siguiente lema previo:

Lema 4.4.4 $\int_0^t \cosh \sqrt{-bt} v'(s) ds \geq \frac{\cosh \sqrt{-bt} + C}{2} v(t) - \frac{v_0(\cosh \sqrt{-bt} - 1)}{2}$

Demostración. Como $\frac{v(t)-v_0}{\cosh \sqrt{-bt}-C}$ es una función no decreciente en $]t_0, +\infty[$ (corolario 2.3.12) tenemos

$$(4.4.28) \quad (\cosh \sqrt{-bt} - C)v'(t) \geq (v(t) - v_0) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt}, \forall t \geq t_0.$$

Por otra parte, aplicando la fórmula de la co-área, sabemos que la función $v(t)$ es no decreciente, por tanto se cumple también la desigualdad para t tal que $0 \leq t \leq t_0$. Luego

$$(4.4.29) \quad (\cosh \sqrt{-bt} - C)v'(t) \geq (v(t) - v_0) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt}, \forall t \geq 0.$$

Integrando

$$(4.4.30) \quad \begin{aligned} & \int_0^t \cosh \sqrt{-bt} v'(s) ds = \\ & v(t) \cosh \sqrt{-bt} - \int_0^t \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} v(s) ds \geq \\ & v(t) \cosh \sqrt{-bt} - v_0 (\cosh \sqrt{-bt} - 1) - \\ & \int_0^t (\cosh \sqrt{-bt} - C)v'(s) ds = \\ & v(t) \cosh \sqrt{-bt} - v_0 (\cosh \sqrt{-bt} - 1) + \\ & Cv(t) - \int_0^t \cosh \sqrt{-bt} v'(s) ds. \end{aligned}$$

y obtenemos el resultado despejando $\int_0^t \cosh \sqrt{-bt} v'(s) ds$. ■

Recordemos ahora la desigualdad (4.4.13):

$$(4.4.31) \quad \begin{aligned} -2\pi\chi(D_t) \leq & - \int_{D_t} (K^S - b) d\sigma - \eta_{\omega_b} v'(t) - bv(t) + \\ & 2 \int_{\partial D_t} \frac{\|H^S\|}{\|\nabla^S r\|} d\mu + I(t) \end{aligned}$$

Como ya se hizo en la demostración del Teorema 4.3.1, podemos escribir la desigualdad

$$(4.4.32) \quad I(t) \leq \frac{R'(t)}{\eta_{\omega_b}(t)} + \eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{\|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu.$$

Si aplicamos la desigualdad (2.2.57) para $f(t) = \cosh \sqrt{-bt}$ tenemos

$$(4.4.33) \quad \begin{aligned} \Delta^S(\cosh \sqrt{-br}) &\geq 2f'(t) (\eta_{\omega_b}(t) - \|H^S\|) = \\ &- 2b \cosh \sqrt{-bt} - 2\sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \|H^S\|. \end{aligned}$$

Integramos y aplicamos el Teorema de la divergencia, luego

$$(4.4.34) \quad \begin{aligned} &\int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu \geq \\ &\frac{2\sqrt{-b}}{\sinh \sqrt{-bt}} \int_{D_t} \cosh \sqrt{-bs} d\sigma - \frac{2}{\sinh \sqrt{-bt}} \int_{D_t} \sinh \sqrt{-bs} \|H^S\| d\sigma. \end{aligned}$$

Por ser $\sinh \sqrt{-bs}$ creciente:

$$(4.4.35) \quad \int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu \geq \frac{2\sqrt{-b}}{\sinh \sqrt{-bt}} \int_{D_t} \cosh \sqrt{-bs} d\sigma - 2 \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma.$$

Y con la fórmula de la co-área

$$(4.4.36) \quad \begin{aligned} &\int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu \geq \\ &\frac{2\sqrt{-b}}{\sinh \sqrt{-bt}} \int_0^t \cosh \sqrt{-bt} v'(s) d\sigma - 2 \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma. \end{aligned}$$

Si aplicamos esta desigualdad tenemos

$$(4.4.37) \quad \begin{aligned} &\eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{\|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\sigma_t \leq \eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{1}{\|\nabla^S r\|} d\mu - \\ &\eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \|\nabla^S r\| d\mu \leq \eta_{\omega_b}(t) v'(t) - \\ &\frac{2\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} \int_0^t \cosh \sqrt{-bt} v'(s) ds + 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma. \end{aligned}$$

Luego, aplicando ahora el Lema 4.4.4 podemos escribir

$$\begin{aligned}
 & \eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{\|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu \leq \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - \\
 & \frac{2\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} \left(\frac{v(t)(\cosh \sqrt{-bt} + C)}{2} - \frac{v_0(\cosh \sqrt{-bt} - 1)}{2} \right) + \\
 & 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma \leq \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - \eta_{\omega_b}(t)^2 v(t) - \\
 & 2C\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t) \frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} + \\
 (4.4.38) \quad & \eta_{\omega_b}(t) \frac{\sqrt{-b}(\cosh \sqrt{-bt} - 1)}{\sinh \sqrt{-bt}} v_0 + 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma.
 \end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$\frac{\sqrt{-b}(\cosh \sqrt{-bt} - 1)}{\sinh \sqrt{-bt}} \leq \eta_{\omega_b}(t)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \eta_{\omega_b}(t) \int_{\partial D_t} \frac{\|\nabla^\perp r\|^2}{\|\nabla^S r\|} d\mu \leq \\
 & \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - \eta_{\omega_b}(t)^2 v(t) - 2C\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t) \frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} + \\
 (4.4.39) \quad & \eta_{\omega_b}(t)^2 v_0 + 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma.
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 I(t) & \leq \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)} R'(t) + \eta_{\omega_b}(t)v'(t) - \eta_{\omega_b}(t)^2 v(t) - 2C\sqrt{-b}\eta_{\omega_b}(t) \frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} + \\
 & \eta_{\omega_b}(t)^2 v_0 + 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma \leq \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)} R'(t) + \eta_{\omega_b}(t)v'(t) + bv(t) + \\
 (4.4.40) \quad & 2Cb \frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} + \eta_{\omega_b}(t)^2 v_0 + 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma
 \end{aligned}$$

Volviendo a la desigualdad (4.4.13) y por la Proposición 4.2.3,

$$\begin{aligned}
 & \eta_{\omega_b}(t)v'(t) + b v(t) \\
 & \leq \int_{D_t} (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2} R(t) - 2 \int_{D_t} \|H^S\|^2 d\sigma + I(t) + 2\pi\chi(D_t)
 \end{aligned}$$

y aplicando (4.4.40)

$$(4.4.41) \quad \begin{aligned} & -2\pi\chi(D_t) \leq \int_{D_t} (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2}R(t) + \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)}R'(t) + \\ & 2Cb \frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} + \eta_{\omega_b}(t)^2 v_0 + 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma - 2 \int_{D_t} \|H^S\|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Con esta desigualdad podemos deducir, despejando convenientemente

$$\begin{aligned} 2 \int_{D_t} \|H^S\|^2 d\sigma & \leq \int_{D_t} (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2}R(t) + \frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)}R'(t) + \\ & 2Cb \frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}} + \eta_{\omega_b}(t)^2 v_0 + 2\eta_{\omega_b}(t) \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma. \end{aligned}$$

Como $\chi(D_t) \leq 1$ (las bolas extrínsecas son conexas) y el resto de sumandos también están acotados, podemos concluir

$$\int_S \|H^S\|^2 d\sigma < +\infty.$$

Por otra parte, al cumplirse

$$(4.4.42) \quad \begin{aligned} & \int_S \left(\frac{\|A^S\|^2}{\eta_{\omega_b}(t)} + \|H^S\| \right) d\sigma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{D_t} \left(\frac{\|A^S\|^2}{\eta_{\omega_b}(t)} + \|H^S\| \right) d\sigma \leq \\ & \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\eta_{\omega_b}(t)} \int_{D_t} \|A^S\|^2 d\sigma + \int_{D_t} \|H^S\| d\sigma \right) \\ & = \frac{1}{\sqrt{-b}} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma + \int_S \|H^S\| d\sigma < +\infty, \end{aligned}$$

existirá una (sub)sucesión monótona creciente $\{t_i\}_{i=1}^\infty$, cuyo límite es $+\infty$ cuando $i \rightarrow \infty$, tal que

$$(4.4.43) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial D_{t_i}} \left(\frac{\|A^S\|^2}{\eta_{\omega_b}(t_i) \|\nabla^S r\|} + \frac{\|H^S\|}{\|\nabla^S r\|} \right) d\mu = 0$$

luego, como ambos sumandos no son negativos, tenemos

$$(4.4.44) \quad \begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial D_{t_i}} \frac{\|A^S\|^2}{\eta_{\omega_b}(t_i) \|\nabla^S r\|} d\mu = 0 \\ & \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial D_{t_i}} \frac{\|H^S\|}{\|\nabla^S r\|} d\mu = 0. \end{aligned}$$

Consideremos ahora una colección exhaustiva de S formada con bolas extrínsecas $\{D_{t_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Como en el Teorema 4.3.1, ya que $\{D_{t_i}\}_{i=1}^{\infty}$ es una familia de precompactos abiertos conexos que cubren S , entonces $\{-\chi(D_{r_i})\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona no decreciente. Entonces tenemos, sustituyendo t por t_i y tomando límites cuando $i \rightarrow \infty$ en la desigualdad (4.4.41), que

$$(4.4.45) \quad \begin{aligned} & 2\pi \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{-\chi(D_{r_k})\}_{k=i}^{\infty}) \leq \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma + \\ & bC \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt} - 1} - 2 \int_S \|H^S\|^2 d\sigma + 2\sqrt{-b} \int_S \|H^S\| d\sigma - bv_0, \end{aligned}$$

ya que coinciden el límite de $\frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt} - 1}$ y el de $\frac{v(t)}{\sinh \sqrt{-bt}}$.

Aplicamos en este momento el Teorema de Huber 2.3.36, S^2 tiene topología finita y

$$(4.4.46) \quad \begin{aligned} & -2\pi\chi(S) \leq 2\pi \lim_{i \rightarrow \infty} \inf(\{-\chi(D_{r_k})\}_{k=i}^{\infty}) \leq \\ & \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{2} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma + \\ & bC \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt} - 1} - 2 \int_S \|H^S\|^2 d\sigma + 2\sqrt{-b} \int_S \|H^S\| d\sigma - bv_0. \end{aligned}$$

Con esto se termina la demostración del apartado 2.

Corolario 4.4.5 *Sea N^n una variedad de Cartan-Hadamard ($K^N \leq b < 0$) completa y S^2 una superficie propiamente inmersa. Supongamos que la curvatura media de S está acotada de la siguiente forma*

$$(4.4.47) \quad -\langle H^S, \nabla^N r \rangle_x \leq \frac{\sqrt{-b}}{T} e^{-2\sqrt{-b}r(x)}, \forall x \in S,$$

donde $T > 1$.

Además supongamos que se cumple

$$\begin{aligned} (I) \quad & \int_S (b - K^N) d\sigma < +\infty, \\ (II) \quad & \int_S \|A^S\|^2 d\sigma < +\infty \\ (III) \quad & \int_S \|H^S\| d\sigma < +\infty \end{aligned}$$

entonces

1. $\text{Sup}_{t>0} \frac{v(t)}{\cosh \sqrt{-bt}} < +\infty$, donde $v(t) = \text{Vol}(D_t) \forall t > 0$

2. S^2 tiene topología finita y

$$(4.4.48) \quad -\chi(S) \leq \frac{1}{2\pi} \int_S (b - K^N) d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_S \|A^S\|^2 d\sigma - C_T \text{Sup}_{t>0} \frac{\text{Vol}(D_t)}{\text{Vol}(B_t^{b,2})} + \frac{\sqrt{-b}}{\pi} \int_S \|H^S\| d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_S \|H^S\|^2 d\sigma - \frac{bv(t_0)}{2\pi}$$

$$\text{donde } C_T = \frac{1}{4\sqrt{T}} \left(2e^{\frac{1}{T}} \sqrt{T} + (T-2)\sqrt{\pi} \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right) \right).$$

Demostración. En este caso la función $h(t)$ es

$$(4.4.49) \quad h(t) = \frac{\sqrt{-b}}{T} e^{-2\sqrt{-bt}}.$$

Veamos los siguientes hechos que nos permitirán aplicar el Teorema 4.4.1.

1. Es positiva y tiende a 0.

2. Podemos hallar

$$(4.4.50) \quad f(t) = \cosh \sqrt{-bt} - q_W(t) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} = \frac{e^{-\frac{e^{-2\sqrt{-bt}}}{K}}}{4\sqrt{T}} (2\sqrt{T} (e^{\frac{1}{T}} + e^{\frac{e^{-2\sqrt{-bt}}}{T} - \sqrt{-bt}}) + (T-2)\sqrt{\pi} \left(\text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right) - \text{erf} \left(\frac{e^{-\sqrt{-bt}}}{\sqrt{T}} \right) \right)),$$

que es decreciente. Luego el ínfimo de $f(t)$ coincide con el límite y:

$$(4.4.51) \quad C_T = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\cosh \sqrt{-bt} - q_W(t) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-bt} \right) = \frac{1}{4\sqrt{T}} \left(2e^{\frac{1}{T}} \sqrt{T} + (T-2)\sqrt{\pi} \text{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \right) \right),$$

donde

$$(4.4.52) \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

3. Veamos que $q_W(t) \leq \frac{1}{\sqrt{-b}}$.

Sabemos que $h(t) = \frac{\sqrt{-b}}{T} e^{-2\sqrt{-b}t} \leq \frac{1}{2} (\eta_{\omega_b}(t) - \sqrt{-b})$ (para $T \geq 1$) luego

$$W'(t) = (\eta_{\omega_b}(t) - 2h(t)) W(t) \geq \sqrt{-b}W(t),$$

integrando

$$W(t) \geq \sqrt{-b}IW(t),$$

por lo que

$$q_W(t) \leq \frac{1}{\sqrt{-b}}.$$

4. La condición de balance se cumple para cierto t_0 (siendo este valor dependiente de T)

En efecto, se cumple

$$(4.4.53) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} q_W(t)(\eta_{\omega_b}(t) - h(t)) = 1$$

por lo debe existir ese t_0 de manera que la función rebase $\frac{1}{2}$ a partir de él (ya que de no ser así no podría ser el límite igual a 1)

Cumplen, por consiguiente, los requisitos para que $\{N^n, S^2, C_{\omega_b, h}^2\}$ sea constelación isoperimétrica adaptada, aplicamos el Teorema 4.4.1 y hemos demostrado el corolario.

■

Nota 4.4.6 Si S es una superficie minimal:

1. Podemos tomar la función radial $h(t) = 0$, obviamente, ya que ahora la curvatura media es 0.

2. Obtenemos

$$(4.4.54) \quad q_W(t) = q_{\omega_b}(t) = \frac{\int_0^t \sinh \sqrt{-b} s ds}{\sinh \sqrt{-b} t} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \frac{\cosh \sqrt{-b} t - 1}{\sinh \sqrt{-b} t}.$$

De esta forma $C = \inf_{t>0} (\cosh \sqrt{-b} t - q_W(t) \sqrt{-b} \sinh \sqrt{-b} t) = \inf_{t>0} 1 = 1$.

3. Recordemos que la condición de balance (ver 2.3.13) es: $q_W(t) (\eta_{\omega_b}(t) - h(t)) \geq \frac{1}{2}$. Sustituyendo $h(t)$ y $q_W(t)$ por sus valores en una superficie minimal (según se ha comentado en los puntos anteriores) tenemos

$$(4.4.55) \quad q_W(t) (\eta_{\omega_b}(t) - h(t)) = \frac{1}{\sqrt{-b}} \frac{\cosh \sqrt{-bt} - 1}{\sinh \sqrt{-bt}} \frac{\sqrt{-b} \cosh \sqrt{-bt}}{\sinh \sqrt{-bt}} = \frac{\cosh^2 \sqrt{-bt} - \cosh \sqrt{-bt}}{\sinh^2 \sqrt{-bt}}.$$

Puede comprobarse que la función anterior es creciente y que su límite cuando t tiende a 0 es $\frac{1}{2}$ (aplicando L'Hôpital, por ejemplo). Por tanto: $q_W(t) (\eta_{\omega_b}(t) - h(t)) \geq \frac{1}{2}, \forall t \geq 0$ y el valor t_0 a partir del cual se cumple el balance es 0. Se deduce por tanto que $v_0 = 0$ en el Teorema 4.3.1.

Luego, por todo lo anteriormente dicho, del Teorema 4.4.1 se obtiene como corolario el Teorema 4.3.1.

Índice alfabético

- Anillo extrínseco, 13
- Bola extrínseca, 13
- Capacidad, 60
- Característica de Euler, 47
- Condición de balance, 42
- Conexión, 17
- Constelación de comparación isoperimétrica, 40
- Crecimiento minimal del área, 83, 85
- Criterio de Kelvin-Nevalinna-Royden, 65
- Curvatura
 - geodésica, 13
 - media, 19, 66, 69, 72, 83, 109
 - de las esferas de distancia, 37
 - media radial, 15, 66
 - seccional o-radial, 14
- Distancia extrínseca, 13
- Divergencia
 - operador, 23
- Ecuación del calor, 64
- Energía de una curva, 22, 25
- Espacio de comparación isoperimétrico, 39
 - fuertemente balanceado, 40
- Fórmula de Koszul, 17
- Final de una superficie, 50, 82
- Forma índice de un campo, 22
- Función
 - armónica, 59
 - de Green, 64
 - localmente Lipschitz, 60
 - propia, 54
 - subarmónica, 59
 - superarmónica, 59
- Función de Green, 64
- Género de una superficie, 48
- Geodésica radial, 13
- Gradiente, 23
- Hessiano
 - operador, 23
- Hiperbolicidad, 65
- Laplaciano
 - operador, 24
- Lema de Gauss, 15
- Movimiento Browniano, 65
 - transitorio, 65
- Núcleo de calor, 64
- Norma
 - Hilbert-Schmidt, 83
- Parabolicidad , 65
- Polo, 12
- Problema de Dirichlet, 61, 64
- Productos deformados, 15
- Región, 47
 - regular, 47
 - simple, 47
- Segunda forma fundamental, 13, 37, 83, 84, 90
- Suma conexa, 48

Superficie con borde, 48

Teorema de Gauss-Bonnet, 49

Teorema de la Divergencia, 24

Teorema de Morse, 50

Tipo topológico finito, 50

Triangulación, 47

Variación de una curva, 22

Variedad

 completa, 12

 hiperbólica, 65

 parabólica, 65

Warped product, 15

Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors, *Sur le type d'une surface Riemanniana*, C.R. Acad. Sci. Paris, **201** (1935), 30–32.
- [2] M.T. Anderson, *Complete Minimal Varieties in Hyperbolic Space*, *Inventiones Mathematicae*, **69** (1982) 477-494.
- [3] M. T. Anderson, *The compactification of a minimal submanifold in Euclidean space by the Gauss map*, I.H.E.S. Preprint, 1984.
- [4] Y. D. Burago y V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, 1988.
- [5] I. Chavel, *Riemannian Geometry, A modern introduction*, Cambridge University Press (2006).
- [6] Q. Chen, *On the total curvature and area growth of minimal surfaces in \mathbb{R}^n* , *Manuscripta Math.* **92** (1997), 135–142.
- [7] Q. Chen, *On the area growth of minimal surfaces in \mathbb{H}^n* , *Geometriae Dedicata*, **75** (1999), 263–273.
- [8] Q. Chen y Y. Cheng *Chern-Osserman inequality for minimal surfaces in \mathbb{H}^n* , *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (1999), 2445–2450.
- [9] S.Y. Cheng y S.T. Yau, *Differential equations on Riemannian manifolds and their applications*, *Comm. Pure Appl. Math* **28** (1975), 333–354.
- [10] S.S. Chern y R. Osserman *Complete minimal surfaces in Euclidean n -space*, *Journal d'Analyse Mathématique*, **19**, Number 1 (1967), 15-34.
- [11] G. De Oliveira, *Compactification of minimal submanifolds of Hyperbolic Space*, *Communications in Analysis and Geometry*, Volumen **1** Número 1 (1993), 1-29.
- [12] M.P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser (1992).

- [13] P. G. Doyle, *On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic*, in "Geometry of random motion: proceedings of the AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference 1987", AMS Bookstore, (1988).
- [14] A. Esteve y V. Palmer, *Chern-Osserman Inequalities for minimal surfaces in Cartan-Hadamard manifold with strictly negative sectional curvatures*, preprint, arxiv: 1104.5417 (2012).
- [15] A. Esteve y V. Palmer, *On the characterization of parabolicity and hyperbolicity of submanifolds*, J. London Math. Soc. **84**, Number 1 (2011), 120-136.
- [16] A. Esteve y V. Palmer, *Mean curvature and compactification of surfaces in a negatively curved Cartan-Hadamard manifold*, preprint, arxiv: 1206.6748 (2012).
- [17] A. Gray, *Tubes*, Ed. Addison Wesley (1990).
- [18] R. Greene y H. Wu, *Function theory on manifolds which possess a pole*, Lecture Notes in Math., vol. 699, Springer-Verlag, Berlin y New York (1979).
- [19] A. Grigor'yan, *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 135-249.
- [20] I. Holopainen y P. Koskela, *Volume growth and parabolicity*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 3425-3435.
- [21] I. Holopainen, S. Markvorsen y V. Palmer, *p-capacity and p-hyperbolicity of submanifolds*, Revista Matemática Iberoamericana, Volumen **25-2** (2009), 709-738.
- [22] C.C. Hsiung, *A first course in differential geometry*, John Wiley and sons (1981).
- [23] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13-72.
- [24] A. Hurtado, S. Markvorsen y V. Palmer, *Torsional rigidity of submanifolds with controlled geometry*, Math. Ann. **344**, (2009), 511-542.
- [25] K. Ichihara, *Curvature, geodesics and the Brownian motion on a Riemannian manifold I; Recurrence properties*, Nagoya Math. J. **87** (1982), 101-114.
- [26] K. Ichihara, *Curvature, geodesics and the Brownian motion on a Riemannian manifold II; Explosion properties*, Nagoya Math. J. **87** (1982), 115-125.
- [27] L. P. Jorge y D. Koutroufiotis, *An estimate for the curvature of bounded submanifolds*, Amer. J. Math. **103**, 4 (1981), 711-725.

- [28] L. P. Jorge y W. H. Meeks, *The topology of minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, *Topology* 22 (1983), 203-221.
- [29] S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations on Differential Geometry*, John Wiley and sons (1969).
- [30] E. Kreyszig, *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*, University of Toronto Press, 1968.
- [31] J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, Graduate Studies in Mathematics (107), AMS (2009) (suplemento en <http://webpages.acs.ttu.edu/jlee/Supp.pdf>).
- [32] P. Li, *Curvature and function theory on Riemannian manifolds*, *Surveys in Diff. Geometry*, vol. VII, International Press, (2000), 375-432.
- [33] T. Lyons y D. Sullivan, *Function theory, random paths and covering spaces*, *J. Diff. Geometry* 19 (1984), 299–323.
- [34] S. Markvorsen, S. McGuinness y C. Thomassen *Transient random walks on graphs and metric spaces with applications to hyperbolic surfaces*, *Proc. Lond. Math. Soc.* 64 (1992), 1–20.
- [35] S. Markvorsen y M. Min-Oo, *Global Riemannian Geometry: Curvature and Topology*, Advanced Courses in Mathematics; CRM Barcelona, Birkhäuser (2003).
- [36] S. Markvorsen y V. Palmer, *Extrinsic isoperimetric analysis on submanifolds with curvatures bounded from below*, *J. Geom. Anal.* 20 (2010) 388–421.
- [37] S. Markvorsen y V. Palmer, *How to obtain transience from bounded radial mean curvature*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 357, no. 9, (2005), 3459–3479.
- [38] S. Markvorsen y V. Palmer, *The relative volume growth of minimal submanifolds*, *Archiv der Mathematik*, 79 (2002), 507–514.
- [39] S. Markvorsen y V. Palmer, *Transience and capacity of minimal submanifolds*, *GAFA, Geometric Functional Analysis* 13 (2003), 915–933.
- [40] W.S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [41] W. H. Meeks III y H. Rosenberg, *Minimal surfaces of finite topology*, *Global theory of minimal surfaces: proceedings of the Clay Mathematics Institute*, Volumen 2 (2005).
- [42] J. Milnor, *On deciding whether a surface is parabolic or hyperbolic*, *Amer. Math. Monthly* 84 (1977), 43-46.

-
- [43] J. Milnor, *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies **51**, Princeton University Press (1969).
- [44] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press (1983)
- [45] R. Osserman, *A survey of Minimal Surfaces*, Dover publications, inc (1986).
- [46] V. Palmer, *Isoperimetric inequalities for extrinsic balls in minimal submanifolds and their applications*, J. London Math. Soc. **60**, (2) (1999), 607–616.
- [47] V. Palmer, *Mean exit time from convex hypersurfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **126**, (7) (1998), 2089–2094.
- [48] V. Palmer, *On deciding whether a submanifold is parabolic or hyperbolic using its mean curvature*, Simon Stevin Transactions on Geometry, vol 1. 131-159, Simon Stevin Institute for Geometry, Tilburg, The netherlands, 2010.
- [49] P. Petersen, *Riemannian Geometry*, Springer(2006).
- [50] T. Sakai, *Riemannian Geometry*, Addison-Wesley, Reading, MA (1990).
- [51] M. Spivak, *Calculus in manifolds*, W. Benjamin, inc (1965).
- [52] M. Troyanov, *Parabolicity of manifolds*, Siberian advances in Mathematics **9** (1999),125-150.
- [53] N. Varopoulos, *The Poisson kernel on positively curved manifolds*, J. Funct. Anal. **94** (1981), 359-380.
- [54] B. White, *Complete surfaces of finite total curvature*, J. Diff. Geom., **26** (1987), 315-326.
- [55] <http://www.indiana.edu/~minimal/archive>, Bloomington’s Virtual Minimal Surface Museum.