UNIVERSITAT INTERNACIONAL DE CATALUNYA

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE ARQUITECTURA

UN MODELO RACIONAL DE ORGANIZACIÓN TERRITORIAL

Aplicación a Cataluña

VOLUMEN II (ANEXOS)

TESIS DOCTORAL

AUTOR: JOSEP MARIA FRANQUET BERNIS

DIRECTOR: PROF. DR. PERE VALL i CASAS
Director del Área de Urbanismo y
Ordenación del territorio

BARCELONA, ABRIL DE 2007

QUINTA PARTE

ANEXOS (15)

-ANEXOS-

1. **Magnitudes demográficas y macroeconómicas relevantes a los efectos de la aplicación del modelo**
2. **Codificación de las provincias, comarcas y municipios catalanes**
3. **Mapas (16)**
4. **Atracción-Repulsión entre las comarcas de Cataluña. Gráficos**
   - **4.1. Grado de repulsión ρ_{ij}**
   - **4.2. Grado de atracción α_{ij}**
   - **4.3. Fuerza de atracción económica $F_{ij} = F_{ji}$**
5. **Aplicación del modelo (datos referentes a los años 1975, 1981, 1986, 1991, 1995, 1996, 1999, 2000 y 2002)**
6. **Las nuevas comarcas resultantes**
7. **Las nuevas regiones resultantes**
8. **Regionalización y conexión territorial**
9. **Una concepción topológica del territorio**
10. **Las cónicas territoriales**
11. **Una teoría acerca de los flujos económicos territoriales**
12. **Análisis estadístico y clasificación comarcal**
13. **Otras especificaciones respecto al modelo gravitatorio**

****

I. ANEXOS DE DATOS

ANEXO 1

MAGNITUDES DEMOGRÁFICAS Y MACROECONÓMICAS RELEVANTES A LOS EFECTOS DE LA APLICACIÓN DEL MODELO

ANEXO 1

MAGNITUDES DEMOGRÁFICAS Y MACROECONÓMICAS RELEVANTES A LOS EFECTOS DE LA APLICACIÓN DEL MODELO

1. POBLACIÓN DE DERECHO. 1900-1996. PROVINCIAS

	Barcelona	Girona	Lleida	Tarragona	Catalunya	Espanya	% Cat./Esp.
1900	1 052 977	303 829	283 909	343 400	**1 984 115**	18 830 649	10,5
1910	1 136 068	324 378	295 645	343 127	**2 099 218**	19 926 910	10,5
1920	1 340 906	330 774	324 894	359 334	**2 355 908**	22 012 663	10,7
1930	1 728 683	331 389	319 857	351 698	**2 731 627**	24 026 571	11,4
1940	1 935 707	324 766	308 851	346 433	**2 915 757**	26 386 854	11,1
1950	2 215 901	322 371	323 460	356 864	**3 218 596**	28 172 268	11,4
1960	2 838 801	351 645	334 567	363 472	**3 888 485**	30 776 935	12,6
1970	3 915 010	412 357	347 101	433 138	**5 107 606**	34 041 535	15,0
1975	4 389 897	441 806	348 359	480 331	**5 660 393**	36 012 254	15,7
1981	4 623 204	467 000	353 160	513 050	**5 956 414**	37 682 355	15,8
1986	4 614 364	488 342	352 049	523 883	**5 978 638**	38 473 418	15,5
1991	4 654 407	509 628	353 455	542 004	**6 059 494**	38 872 268	15,6
1996	4 628 277	530 631	356 456	574 676	**6 090 040**	39 669 394	15,4

Font: 1996 Institut d'Estadística de Catalunya. Padró municipal d'habitants 1996.
Instituto Nacional de Estadística. Renovación del Padrón municipal de habitantes 1996.
1991 Institut d'Estadística de Catalunya. Cens de població 1991.
Instituto Nacional de Estadística. Censo de población de 1991. Población de derecho y de hecho de los municipios españoles.
1986 Consorci d'Informació i Documentació de Catalunya. Padrons municipals d'habitants 1986.
Instituto Nacional de Estadística. Padrón municipal de habitantes 1986. Población de derecho y de hecho de los municipios españoles.
1900-1981 Instituto Nacional de Estadística. Censo de población. Decennal.

2. POBLACIÓN DE DERECHO. 1975, 1981, 1986, 1991 I 1996. COMARCAS, ÁMBITOS TERRITORIALES Y PROVINCIAS

	1975	1981	1986	1991	1996
Alt Camp	30 898	32 788	33 804	34 016	34 403
Alt Empordà	77 449	80 790	85 398	90 755	93 172
Alt Penedès	60 958	64 894	67 005	69 863	73 196
Alt Urgell	18 788	19 335	18 865	19 010	19 006
Alta Ribagorça	4 276	4 549	3 626	3 514	3 542
Anoia	72 701	78 201	79 594	82 450	86 964
Bages	148 256	150 657	150 421	152 177	152 586
Baix Camp	107 055	118 189	123 745	131 599	140 540
Baix Ebre	65 673	62 554	64 452	64 645	65 879
Baix Empordà	77 093	81 990	83 911	89 930	95 986
Baix Llobregat	511 971	573 461	583 354	610 192	643 419
Baix Penedès	27 429	29 722	33 211	38 080	47 550
Barcelonès	2 412 613	2 454 491	2 376 600	2 302 137	2 131 378
Berguedà	43 205	41 630	40 677	38 965	38 606
Cerdanya	12 609	12 041	12 200	12 396	12 757
Conca de Barberà	18 443	18 268	18 404	18 001	18 285
Garraf	62 904	69 084	71 816	76 915	90 435
Garrigues	20 950	20 469	20 214	19 429	19 273
Garrotxa	44 546	45 245	45 368	46 060	46 708
Gironès	107 346	115 832	122 350	125 875	129 044
Maresme	231 112	253 527	269 502	293 103	318 891
Montsià	48 543	52 971	54 027	54 307	54 765
Noguera	36 542	36 051	35 847	34 782	34 390
Osona	107 232	115 000	115 258	117 442	122 923
Pallars Jussà	14 779	14 219	13 817	12 860	12 817
Pallars Sobirà	6 115	5 450	5 464	5 418	5 815
Pla d'Urgell	28 246	28 806	28 675	28 802	29 116
Pla de l'Estany	19 074	20 805	21 416	21 072	23 833
Priorat	11 093	10 431	10 051	9 475	9 212
Ribera d'Ebre	24 327	24 984	23 650	23 055	22 442
Ripollès	29 673	29 620	28 314	27 167	26 365
Segarra	17 674	17 380	17 104	17 040	17 407
Segrià	151 480	157 200	158 677	162 904	163 691
Selva	76 071	82 606	91 238	98 255	104 833
Solsonès	11 290	10 911	10 796	10 792	11 171
Tarragonès	132 887	149 411	149 090	155 881	169 016
Terra Alta	13 983	13 732	13 449	12 945	12 584
Urgell	29 784	29 893	29 964	29 789	30 181
Val d'Aran	5 170	5 808	6 034	6 184	7 130
Vallès Occidental	545 591	598 324	620 786	649 699	685 600
Vallès Oriental	194 564	225 095	240 464	262 513	285 129
Catalunya	**5 660 393**	**5 956 414**	**5 978 638**	**6 059 494**	**6 090 040**
Àmbit Metropolità	4 019 713	4 238 876	4 229 527	4 264 422	4 228 048
Comarques Gironines	431 252	456 888	477 995	499 114	519 941
Camp de Tarragona	327 805	358 809	368 305	387 052	419 006
Terres de l'Ebre	152 526	154 241	155 578	154 952	155 670
Àmbit de Ponent	333 804	339 160	338 287	339 732	342 368
Comarques Centrals	395 293	408 440	408 946	414 222	425 007
Barcelona	4 389 897	4 623 204	4 614 364	4 654 407	4 628 277
Girona	441 806	467 000	488 342	509 628	530 631
Lleida	348 359	353 160	352 049	353 455	356 456
Tarragona	480 331	513 050	523 883	542 004	574 676

Font: 1975, 1986 i 1996 Institut d'Estadística de Catalunya. Padrons municipals d'habitants 1975, 1986 i 1996.
1981 i 1991 Institut d'Estadística de Catalunya. Censos de població 1981 i 1991.

3. RENTA BRUTA FAMILIAR DISPONIBLE. EN PESETAS CORRIENTES. 1991-1995. COMARCAS Y ÁMBITOS TERRITORIALES

Millones de pesetas

	1991	1992	1993	1994	1995(1)
Alt Camp	36 624	38 923	42 131	43 838	47 629
Alt Empordà	120 891	129 968	141 285	148 646	163 280
Alt Penedès	79 094	84 324	91 390	94 930	103 991
Alt Urgell	20 721	22 068	23 771	24 830	26 881
Alta Ribagorça	4 134	4 384	4 743	5 007	5 418
Anoia	85 401	91 158	98 810	102 980	112 239
Bages	166 569	176 509	190 519	197 818	215 810
Baix Camp	153 201	163 740	178 055	186 653	204 845
Baix Ebre	69 215	73 784	80 426	84 154	91 750
Baix Empordà	112 392	121 655	132 663	141 056	155 899
Baix Llobregat	629 551	675 962	728 913	756 727	829 599
Baix Penedès	45 180	49 387	55 128	59 754	67 490
Barcelonès	2 792 708	2 936 843	3 084 958	3 104 154	3 281 866
Berguedà	42 829	45 275	48 654	50 771	54 964
Cerdanya	17 247	18 699	20 813	22 102	24 428
Conca de Barberà	18 410	19 680	21 508	22 477	24 441
Garraf	89 208	98 628	107 855	114 284	127 475
Garrigues	19 635	21 115	22 887	23 789	25 722
Garrotxa	54 658	57 687	62 240	64 573	70 173
Gironès	155 885	166 033	178 293	183 698	198 980
Maresme	351 119	375 327	407 132	427 923	472 425
Montsià	55 649	60 213	66 242	70 215	77 157
Noguera	36 563	39 016	41 649	43 833	47 518
Osona	140 098	148 897	160 641	168 838	185 368
Pallars Jussà	15 705	16 614	17 863	18 604	19 941
Pallars Sobirà	6 898	7 427	8 171	8 744	9 695
Pla d'Urgell	29 734	31 755	34 338	36 062	39 362
Pla de l'Estany	26 206	28 405	30 633	32 005	34 835
Priorat	8 908	9 530	10 275	10 743	11 634
Ribera d'Ebre	24 125	25 475	27 817	28 624	31 171
Ripollès	30 652	32 339	35 177	37 055	40 429
Segarra	18 669	20 316	22 123	23 148	24 932
Segrià	187 652	200 829	216 362	225 308	244 285
Selva	122 539	131 889	144 487	154 106	170 449
Solsonès	11 618	12 555	13 497	14 192	15 485
Tarragonès	185 062	198 997	215 998	224 037	244 498
Terra Alta	12 165	13 120	14 329	14 906	16 135
Urgell	33 144	35 266	38 109	39 976	43 549
Val d'Aran	8 847	9 689	10 628	11 304	12 512
Vallès Occidental	693 185	743 821	803 676	836 618	919 683
Vallès Oriental	289 402	312 705	340 508	359 809	398 078
Catalunya	**7 001 490**	**7 450 006**	**7 974 695**	**8 218 291**	**8 892 020**
Àmbit Metropolità	4 924 267	5 227 610	5 564 432	5 694 444	6 133 118
Comarques Gironines	623 223	667 976	724 777	761 139	834 045
Camp de Tarragona	447 384	480 257	523 095	547 502	600 537
Terres de l'Ebre	161 154	172 592	188 815	197 899	216 213
Àmbit de Ponent	381 702	408 479	440 642	460 605	499 814
Comarques Centrals	463 761	493 092	532 934	556 702	608 293

Font: Institut d'Estadística de Catalunya.
(1) Dades provisionals.

4. RENTA BRUTA FAMILIAR DISPONIBLE POR HABITANTE. EN PESETAS CORRIENTES. 1991-1995. COMARCAS Y ÁMBITOS TERRITORIALES

Miles de pesetas

	1991	1992	1993	1994	1995(1)
Alt Camp	1 076,0	1 139,2	1 230,2	1 276,5	1 380,9
Alt Empordà	1 328,6	1 418,8	1 535,1	1 607,4	1 756,9
Alt Penedès	1 127,9	1 193,0	1 282,5	1 319,6	1 431,2
Alt Urgell	1 088,1	1 156,9	1 252,4	1 312,2	1 422,0
Alta Ribagorça	1 175,2	1 240,7	1 329,6	1 400,5	1 507,4
Anoia	1 031,6	1 093,3	1 177,2	1 216,5	1 314,9
Bages	1 094,4	1 158,1	1 249,8	1 298,1	1 416,5
Baix Camp	1 156,1	1 217,5	1 308,7	1 358,7	1 478,3
Baix Ebre	1 070,8	1 141,0	1 242,6	1 301,4	1 420,6
Baix Empordà	1 245,5	1 338,0	1 448,7	1 527,9	1 674,2
Baix Llobregat	1 026,4	1 090,2	1 166,0	1 201,0	1 304,7
Baix Penedès	1 170,0	1 231,0	1 313,9	1 360,8	1 474,6
Barcelonès	1 216,1	1 290,3	1 371,5	1 398,5	1 499,5
Berguedà	1 096,2	1 160,6	1 253,7	1 313,6	1 428,6
Cerdanya	1 387,9	1 497,7	1 653,5	1 739,5	1 907,8
Conca de Barberà	1 022,9	1 092,1	1 188,9	1 240,1	1 350,5
Garraf	1 145,2	1 234,6	1 315,9	1 358,1	1 475,3
Garrigues	1 010,3	1 086,0	1 178,5	1 227,3	1 332,1
Garrotxa	1 186,7	1 250,5	1 349,9	1 401,2	1 523,0
Gironès	1 234,0	1 306,2	1 397,7	1 436,9	1 551,8
Maresme	1 190,7	1 253,0	1 338,1	1 385,0	1 505,3
Montsià	1 022,9	1 102,5	1 211,2	1 281,2	1 403,8
Noguera	1 050,0	1 123,3	1 204,0	1 271,1	1 382,6
Osona	1 189,6	1 257,3	1 351,9	1 416,7	1 550,4
Pallars Jussà	1 224,2	1 305,0	1 412,1	1 478,0	1 593,1
Pallars Sobirà	1 264,6	1 346,0	1 472,3	1 562,3	1 700,7
Pla d'Urgell	1 032,7	1 100,0	1 186,3	1 243,5	1 356,3
Pla de l'Estany	1 190,2	1 235,2	1 325,7	1 376,9	1 491,3
Priorat	939,9	1 011,3	1 096,7	1 148,5	1 247,3
Ribera d'Ebre	1 048,3	1 110,4	1 213,1	1 252,2	1 369,7
Ripollès	1 127,3	1 194,2	1 305,4	1 379,6	1 512,5
Segarra	1 094,4	1 185,1	1 282,5	1 336,5	1 434,8
Segrià	1 152,1	1 230,3	1 324,4	1 381,0	1 500,4
Selva	1 240,3	1 320,3	1 431,0	1 508,4	1 646,6
Solsonès	1 072,5	1 152,6	1 235,4	1 297,4	1 412,8
Tarragonès	1 169,4	1 228,5	1 317,2	1 350,6	1 456,9
Terra Alta	941,1	1 018,7	1 117,0	1 169,3	1 272,6
Urgell	1 112,3	1 183,2	1 277,9	1 339,9	1 457,4
Val d'Aran	1 390,8	1 469,6	1 582,2	1 658,7	1 804,1
Vallès Occidental	1 063,3	1 130,0	1 210,5	1 250,2	1 362,5
Vallès Oriental	1 095,0	1 161,8	1 243,2	1 291,3	1 403,4
Catalunya	**1 153,2**	**1 223,3**	**1 308,3**	**1 348,0**	**1 458,0**
Àmbit Metropolità	1 153,5	1 223,2	1 303,2	1 335,9	1 441,1
Comarques Gironines	1 242,4	1 320,8	1 425,9	1 489,5	1 622,8
Camp de Tarragona	1 144,5	1 206,1	1 295,7	1 338,7	1 450,3
Terres de l'Ebre	1 039,8	1 112,8	1 216,8	1 276,2	1 395,1
Àmbit de Ponent	1 122,7	1 199,0	1 292,7	1 352,1	1 468,2
Comarques Centrals	1 117,3	1 183,6	1 276,4	1 330,2	1 450,0

Font: Institut d'Estadística de Catalunya.
(1) Dades provisionals.

5. RENTA BRUTA FAMILIAR DISPONIBLE. 1991-1995. COMARCAS Y ÁMBITOS TERRITORIALES

Millones euros

	1991	1992	1993	1994	1995[1]
Alt Camp	220,11	233,93	253,21	263,47	286,26
Alt Empordà	726,57	781,12	849,14	893,38	981,33
Alt Penedès	475,36	506,80	549,26	570,54	625,00
Alt Urgell	124,54	132,63	142,87	149,23	161,56
Alta Ribagorça	24,85	26,35	28,51	30,09	32,56
Anoia	513,27	547,87	593,86	618,92	674,57
Bages	1 001,10	1 060,84	1 145,04	1 188,91	1 297,04
Baix Camp	920,76	984,10	1 070,13	1 121,81	1 231,14
Baix Ebre	415,99	443,45	483,37	505,78	551,43
Baix Empordà	675,49	731,16	797,32	847,76	936,97
Baix Llobregat	3 783,68	4 062,61	4 380,86	4 548,02	4 985,99
Baix Penedès	271,54	296,82	331,33	359,13	405,62
Barcelonès	16 784,51	17 650,78	18 540,97	18 656,34	19 724,41
Berguedà	257,41	272,11	292,42	305,14	330,34
Cerdanya	103,66	112,38	125,09	132,84	146,82
Conca de Barberà	110,65	118,28	129,27	135,09	146,89
Garraf	536,15	592,77	648,22	686,86	766,14
Garrigues	118,01	126,90	137,55	142,97	154,59
Garrotxa	328,50	346,71	374,07	388,09	421,75
Gironès	936,89	997,88	1 071,56	1 104,05	1 195,89
Maresme	2 110,27	2 255,76	2 446,91	2 571,87	2 839,33
Montsià	334,46	361,89	398,12	422,00	463,72
Noguera	219,75	234,49	250,32	263,44	285,59
Osona	842,01	894,89	965,47	1 014,74	1 114,08
Pallars Jussà	94,39	99,85	107,36	111,81	119,85
Pallars Sobirà	41,46	44,64	49,11	52,55	58,27
Pla d'Urgell	178,70	190,85	206,38	216,74	236,57
Pla de l'Estany	157,50	170,72	184,11	192,35	209,36
Priorat	53,54	57,28	61,75	64,57	69,92
Ribera d'Ebre	144,99	153,11	167,18	172,03	187,34
Ripollès	184,22	194,36	211,42	222,71	242,98
Segarra	112,20	122,10	132,96	139,12	149,84
Segrià	1 127,81	1 207,01	1 300,36	1 354,13	1 468,18
Selva	736,47	792,67	868,38	926,20	1 024,42
Solsonès	69,83	75,46	81,12	85,30	93,07
Tarragonès	1 112,25	1 196,00	1 298,17	1 346,49	1 469,46
Terra Alta	73,11	78,85	86,12	89,59	96,97
Urgell	199,20	211,95	229,04	240,26	261,73
Val d'Aran	53,17	58,23	63,88	67,94	75,20
Vallès Occidental	4 166,13	4 470,45	4 830,19	5 028,18	5 527,41
Vallès Oriental	1 739,34	1 879,39	2 046,49	2 162,50	2 392,50
Catalunya	**42 079,80**	**44 775,44**	**47 928,88**	**49 392,92**	**53 442,12**
Àmbit Metropolità	29 595,44	31 418,57	33 442,91	34 224,30	36 860,78
Comarques Gironines	3 745,65	4 014,62	4 356,00	4 574,54	5 012,71
Camp de Tarragona	2 688,83	2 886,40	3 143,86	3 290,55	3 609,30
Terres de l'Ebre	968,56	1 037,30	1 134,80	1 189,40	1 299,47
Àmbit de Ponent	2 294,08	2 455,01	2 648,31	2 768,29	3 003,94
Comarques Centrals	2 787,26	2 963,54	3 203,00	3 345,85	3 655,91

Font: Institut d'Estadística de Catalunya.
(1) Dades provisionals.

6. RENTA BRUTA FAMILIAR DISPONIBLE POR HABITANTE. 1991-1995. COMARCAS Y ÁMBITOS TERRITORIALES

Euros

	1991	1992	1993	1994	1995(1)
Alt Camp	6 466,89	6 846,73	7 393,65	7 671,92	8 299,38
Alt Empordà	7 985,05	8 527,16	9 226,14	9 660,67	10 559,18
Alt Penedès	6 778,82	7 170,07	7 707,98	7 930,96	8 601,69
Alt Urgell	6 539,61	6 953,11	7 527,08	7 886,48	8 546,39
Alta Ribagorça	7 063,09	7 456,76	7 991,06	8 417,17	9 059,66
Anoia	6 200,04	6 570,87	7 075,11	7 311,31	7 902,71
Bages	6 577,48	6 960,32	7 511,45	7 801,74	8 513,34
Baix Camp	6 948,30	7 317,32	7 865,45	8 165,95	8 884,76
Baix Ebre	6 435,64	6 857,55	7 468,18	7 821,57	8 537,98
Baix Empordà	7 485,61	8 041,54	8 706,86	9 182,86	10 062,14
Baix Llobregat	6 168,79	6 552,23	7 007,80	7 218,16	7 841,40
Baix Penedès	7 031,84	7 398,46	7 896,70	8 178,57	8 862,52
Barcelonès	7 308,91	7 754,86	8 242,88	8 405,15	9 012,18
Berguedà	6 588,29	6 975,35	7 534,89	7 894,90	8 586,06
Cerdanya	8 341,45	9 001,36	9 937,74	10 454,61	11 466,11
Conca de Barberà	6 147,75	6 563,65	7 145,43	7 453,15	8 116,67
Garraf	6 882,79	7 420,10	7 908,72	8 162,35	8 866,73
Garrigues	6 072,03	6 526,99	7 082,93	7 376,22	8 006,08
Garrotxa	7 132,21	7 515,66	8 113,06	8 421,38	9 153,41
Gironès	7 416,49	7 850,42	8 400,35	8 635,94	9 326,51
Maresme	7 156,25	7 530,68	8 042,14	8 324,02	9 047,04
Montsià	6 147,75	6 626,16	7 279,46	7 700,17	8 437,01
Noguera	6 310,63	6 751,17	7 236,19	7 639,46	8 309,59
Osona	7 149,64	7 556,53	8 125,08	8 514,54	9 318,09
Pallars Jussà	7 357,59	7 843,21	8 486,89	8 882,96	9 574,72
Pallars Sobirà	7 600,40	8 089,62	8 848,70	9 389,61	10 221,41
Pla d'Urgell	6 206,65	6 611,13	7 129,81	7 473,59	8 151,53
Pla de l'Estany	7 153,25	7 423,70	7 967,62	8 275,34	8 962,89
Priorat	5 648,91	6 078,04	6 591,30	6 902,62	7 496,42
Ribera d'Ebre	6 300,41	6 673,64	7 290,88	7 525,87	8 232,06
Ripollès	6 775,21	7 177,29	7 845,61	8 291,56	9 090,31
Segarra	6 577,48	7 122,59	7 707,98	8 032,53	8 623,32
Segrià	6 924,26	7 394,25	7 959,80	8 299,98	9 017,59
Selva	7 454,35	7 935,16	8 600,48	9 065,67	9 896,27
Solsonès	6 445,85	6 927,27	7 424,90	7 797,53	8 491,10
Tarragonès	7 028,24	7 383,43	7 916,53	8 117,27	8 756,15
Terra Alta	5 656,12	6 122,51	6 713,31	7 027,63	7 648,48
Urgell	6 685,06	7 111,18	7 680,33	8 052,96	8 759,15
Val d'Aran	8 358,88	8 832,47	9 509,21	9 968,99	10 842,86
Vallès Occidental	6 390,56	6 791,44	7 275,25	7 513,85	8 188,79
Vallès Oriental	6 581,08	6 982,56	7 471,78	7 760,87	8 434,60
Catalunya	**6 930,87**	**7 352,18**	**7 863,04**	**8 101,64**	**8 762,58**
Àmbit Metropolità	6 932,67	7 351,58	7 832,39	8 028,92	8 661,19
Comarques Gironines	7 466,97	7 938,17	8 569,83	8 952,08	9 753,22
Camp de Tarragona	6 878,58	7 248,81	7 787,31	8 045,75	8 716,48
Terres de l'Ebre	6 249,32	6 688,06	7 313,12	7 670,12	8 384,72
Àmbit de Ponent	6 747,56	7 206,14	7 769,28	8 126,28	8 824,06
Comarques Centrals	6 715,11	7 113,58	7 671,32	7 994,66	8 714,68

Font: Institut d'Estadística de Catalunya.
(1) Dades provisionals.

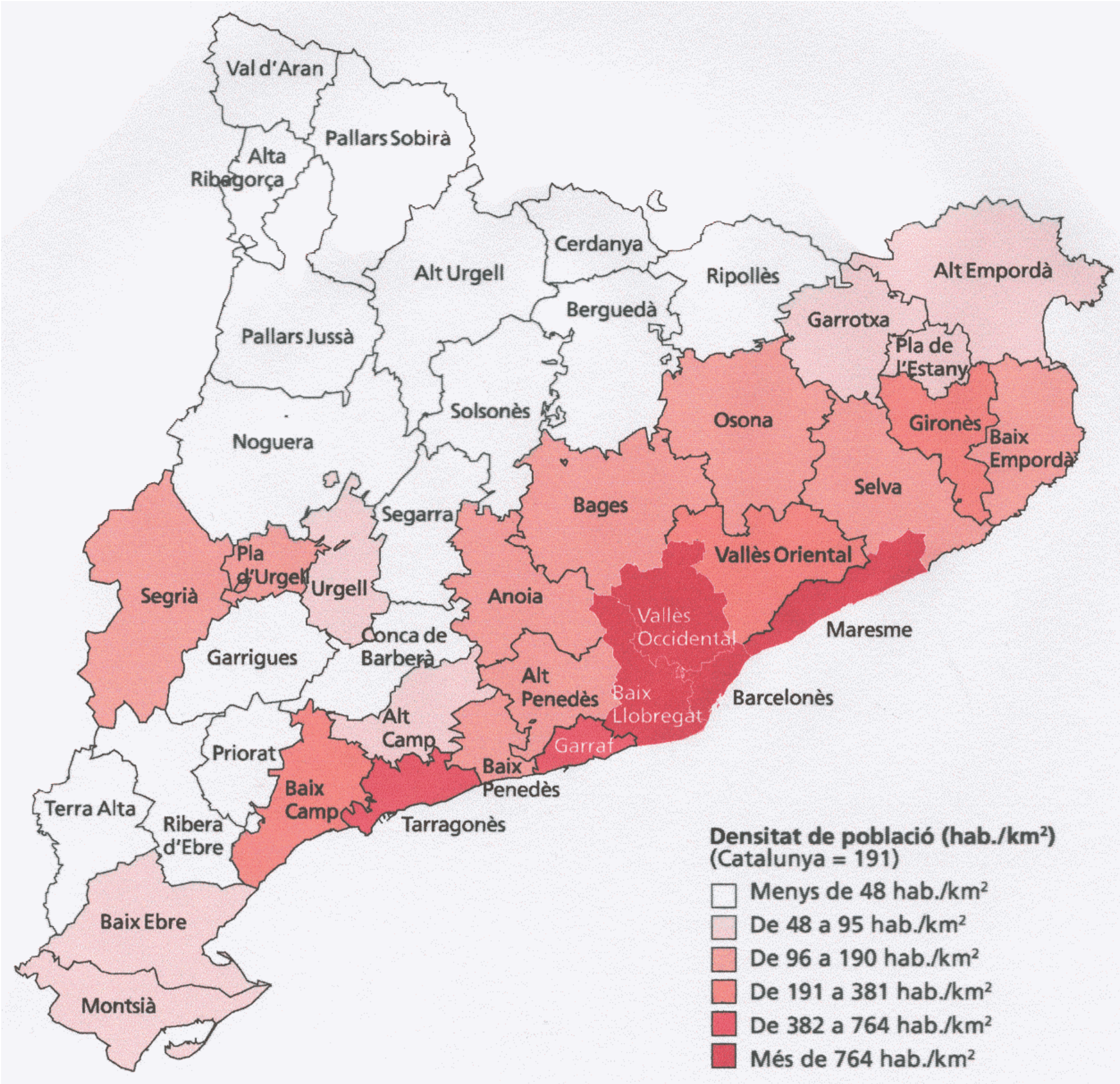
7. IDENTIFICADORES COMARCALES. NÚMERO DE MUNICIPIOS Y POBLACIÓN. 1998

Codi	Comarca	Nombre de municipis	Nombre d'habitants 1996	Capital de comarca	Província a la qual pertanyen els seus municipis	Àmbit del Pla Territorial
1	Alt Camp	23	34 403	Valls	Tarragona	Camp de Tarragona
2	Alt Empordà	68	93 172	Figueres	Girona	Comarques Gironines
3	Alt Penedès	27	73 196	Vilafranca del Penedès	Barcelona	Àmbit Metropolità
4	Alt Urgell	19	19 006	Seu d'Urgell, la	Lleida	Àmbit de Ponent
5	Alta Ribagorça	3	3 542	Pont de Suert, el	Lleida	Àmbit de Ponent
6	Anoia	33	86 964	Igualada	Barcelona	Comarques Centrals
7	Bages	35	152 586	Manresa	Barcelona	Comarques Centrals
8	Baix Camp	28	140 540	Reus	Tarragona	Camp de Tarragona
9	Baix Ebre	14	65 879	Tortosa	Tarragona	Terres de l'Ebre
10	Baix Empordà	36	95 986	Bisbal d'Empordà, la	Girona	Comarques Gironines
11	Baix Llobregat	30	643 419	Sant Feliu de Llobregat	Barcelona	Àmbit Metropolità
12	Baix Penedès	14	47 550	Vendrell, el	Tarragona	Camp de Tarragona
13	Barcelonès	5	2 131 378	Barcelona	Barcelona	Àmbit Metropolità
14	Berguedà	31	38 606	Berga	Barcelona / Lleida: Gósol	Comarques Centrals
15	Cerdanya	17	12 757	Puigcerdà	Girona / Lleida: Bellver de Cerdanya, Lles de Cerdanya, Montellà i Martinet, Prats i Sansor, Prullans i Riu de Cerdanya	Comarques Centrals
16	Conca de Barberà	22	18 285	Montblanc	Tarragona	Camp de Tarragona
17	Garraf	6	90 435	Vilanova i la Geltrú	Barcelona	Àmbit Metropolità
18	Garrigues	24	19 273	Borges Blanques, les	Lleida	Àmbit de Ponent
19	Garrotxa	21	46 708	Olot	Girona	Comarques Gironines
20	Gironès	27	129 044	Girona	Girona	Comarques Gironines
21	Maresme	30	318 891	Mataró	Barcelona	Àmbit Metropolità
22	Montsià	12	54 765	Amposta	Tarragona	Terres de l'Ebre
23	Noguera	30	34 390	Balaguer	Lleida	Àmbit de Ponent
24	Osona	51	122 923	Vic	Barcelona / Girona: Viladrau, Espinelves, Vidrà	Comarques Centrals
25	Pallars Jussà	14	12 817	Tremp	Lleida	Àmbit de Ponent
26	Pallars Sobirà	15	5 815	Sort	Lleida	Àmbit de Ponent
27	Pla d'Urgell	16	29 116	Mollerussa	Lleida	Àmbit de Ponent
28	Pla de l'Estany	11	23 833	Banyoles	Girona	Comarques Gironines
29	Priorat	23	9 212	Falset	Taragona	Camp de Tarragona
30	Ribera d'Ebre	14	22 442	Móra d'Ebre	Tarragona	Terres de l'Ebre
31	Ripollès	19	26 365	Ripoll	Girona	Comarques Gironines
32	Segarra	21	17 407	Cervera	Lleida	Àmbit de Ponent
33	Segrià	38	163 691	Lleida	Lleida	Àmbit de Ponent
34	Selva	26	104 833	Santa Coloma de Farners	Girona / Barcelona: Fogars de Tordera	Comarques Gironines
35	Solsonès	15	11 171	Solsona	Lleida	Comarques Centrals
36	Tarragonès	21	169 016	Tarragona	Tarragona	Camp de Tarragona
37	Terra Alta	12	12 584	Gandesa	Tarragona	Terres de l'Ebre
38	Urgell	20	30 181	Tàrrega	Lleida	Àmbit de Ponent
39	Val d'Aran	9	7 130	Vielha e Mijaran	Lleida	Àmbit de Ponent
40	Vallès Occidental	23	685 600	Sabadell i Terrassa	Barcelona	Àmbit Metropolità
41	Vallès Oriental	43	285 129	Granollers	Barcelona	Àmbit Metropolità
	Catalunya	**946**	**6 090 040**			

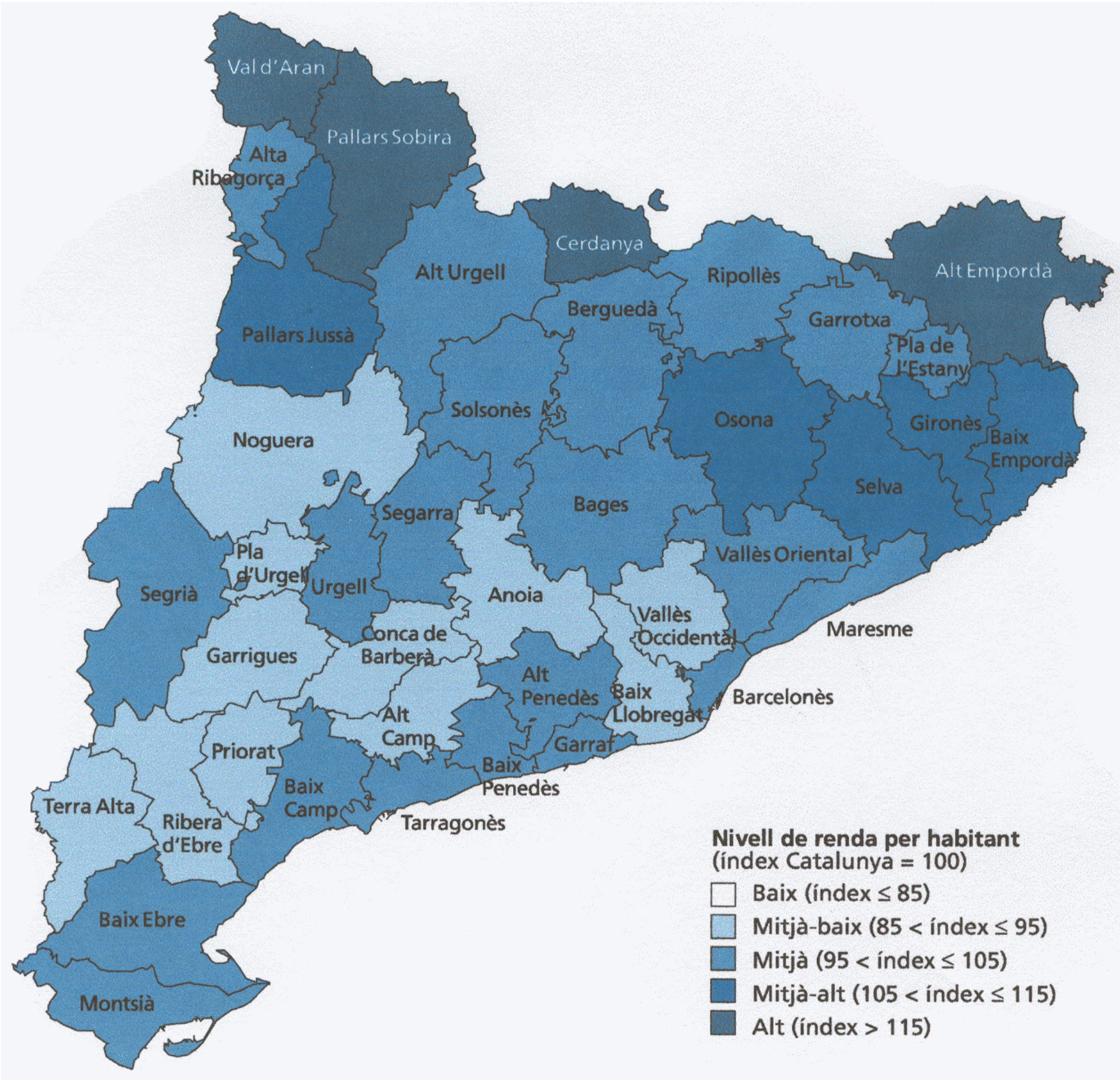
Font: Institut Cartogràfic de Catalunya.
Institut d'Estadística de Catalunya

(1) A 31 de desembre.

8. DENSIDAD DE POBLACIÓN DE CATALUÑA. AÑO 1996



9. RENTA BRUTA FAMILIAR DISPONIBLE (RBFD). AÑO 1995



10. POBLACIÓN DE LAS 41 COMARCAS ACTUALES (CENSO DEL AÑO 2001)

COMARCAS	*POBLACIÓN (nº habitantes)*
Alt Camp	35.635
Alt Empordà	99.321
Alt Penedès	80.976
Alt Urgell	19.105
Alta Ribagorça	3.477
Anoia	93.529
Bages	155.112
Baix Camp	145.675
Baix Ebre	66.369
Baix Empordà	102.566
Baix Llobregat	692.892
Baix Penedès	61.256
Barcelonès	2.093.670
Berguedà	37.995
Cerdanya	14.158
Conca de Barberà	18.766
Garraf	108.194
Garrigues	18.999
Garrotxa	47.747
Gironès	136.543
Maresme	356.545
Montsià	57.550
Noguera	34.744
Osona	129.543
Pallars Jussà	12.057

COMARCAS	*POBLACIÒN*
Pallars Sobirà	6.174
Pla d'Urgell	29.723
Pla de l'Estany	24.347
Priorat	9.196
Ribera d'Ebre	21.656
Ripollès	25.744
Segarra	18.497
Segrià	166.090
Selva	117.393
Solsonès	11.466
Tarragonès	181.374
Terra Alta	12.196
Urgell	31.026
Val d'Aran	7.691
Vallès Occidental	736.682
Vallès Oriental	321.431
Total Cataluña	**6.343.110**

11. EVOLUCIÓN DE LA POBLACIÓN (1981-2001) POR SEXO

	Sexo		
Año	**Hombres**	**Mujeres**	Total
2001	3.106.531	3.236.579	6.343.110
1996	2.971.789	3.118.251	6.090.040
1991	2.962.942	3.096.552	6.059.494
1986	2.927.889	3.050.749	5.978.638
1981	2.920.102	3.036.312	5.956.414

Fuente:
1981,1991, 2001: Idescat. Censo de población.
1996: Idescat. Estadística de población.
1986: Idescat. Padrón municipal de habitantes.

ANEXO 2

CODIFICACIÓN DE LAS PROVINCIAS, COMARCAS Y MUNICIPIOS CATALANES

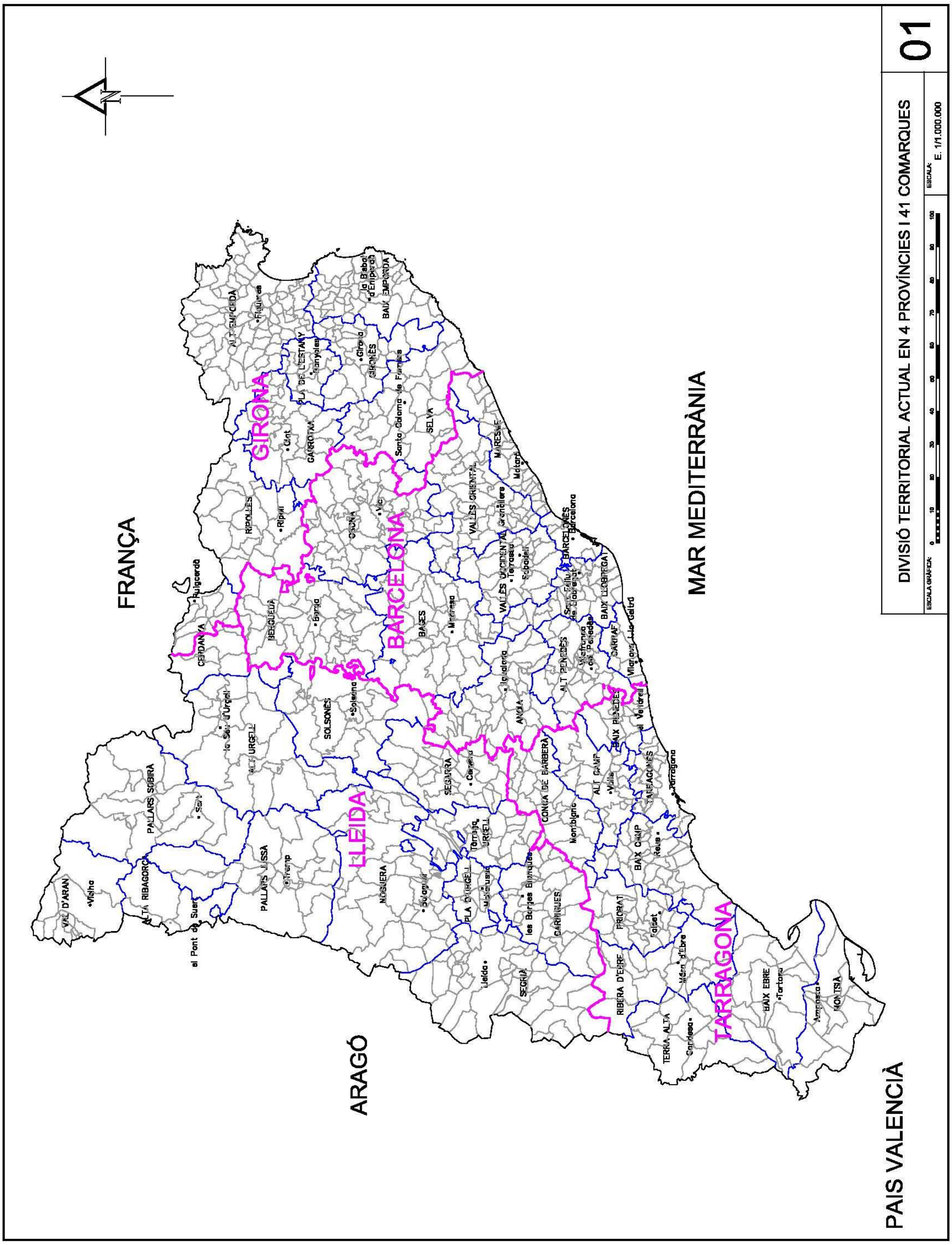
II. ANEXOS DE RESULTADOS

ANEXO 3

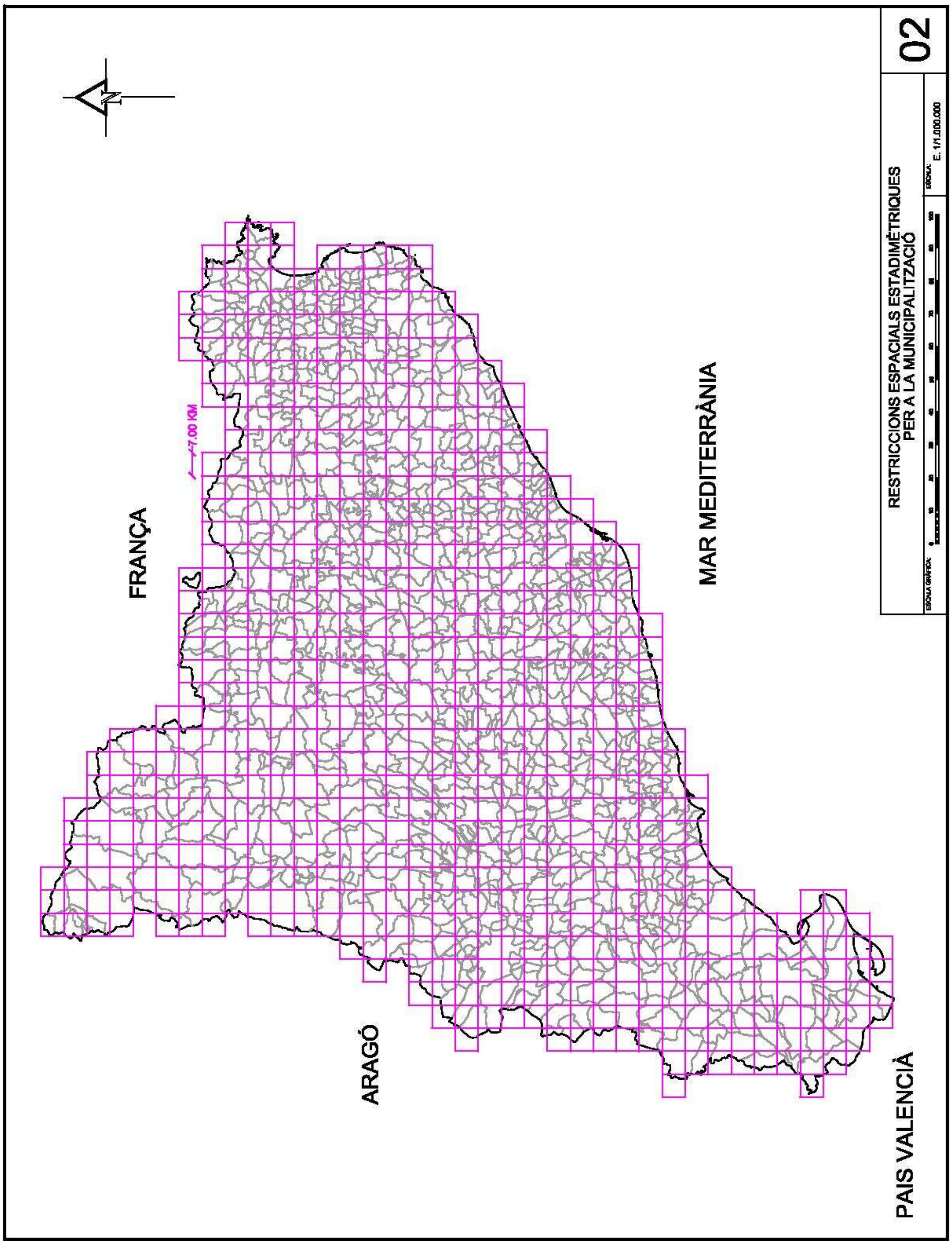
MAPAS (16)

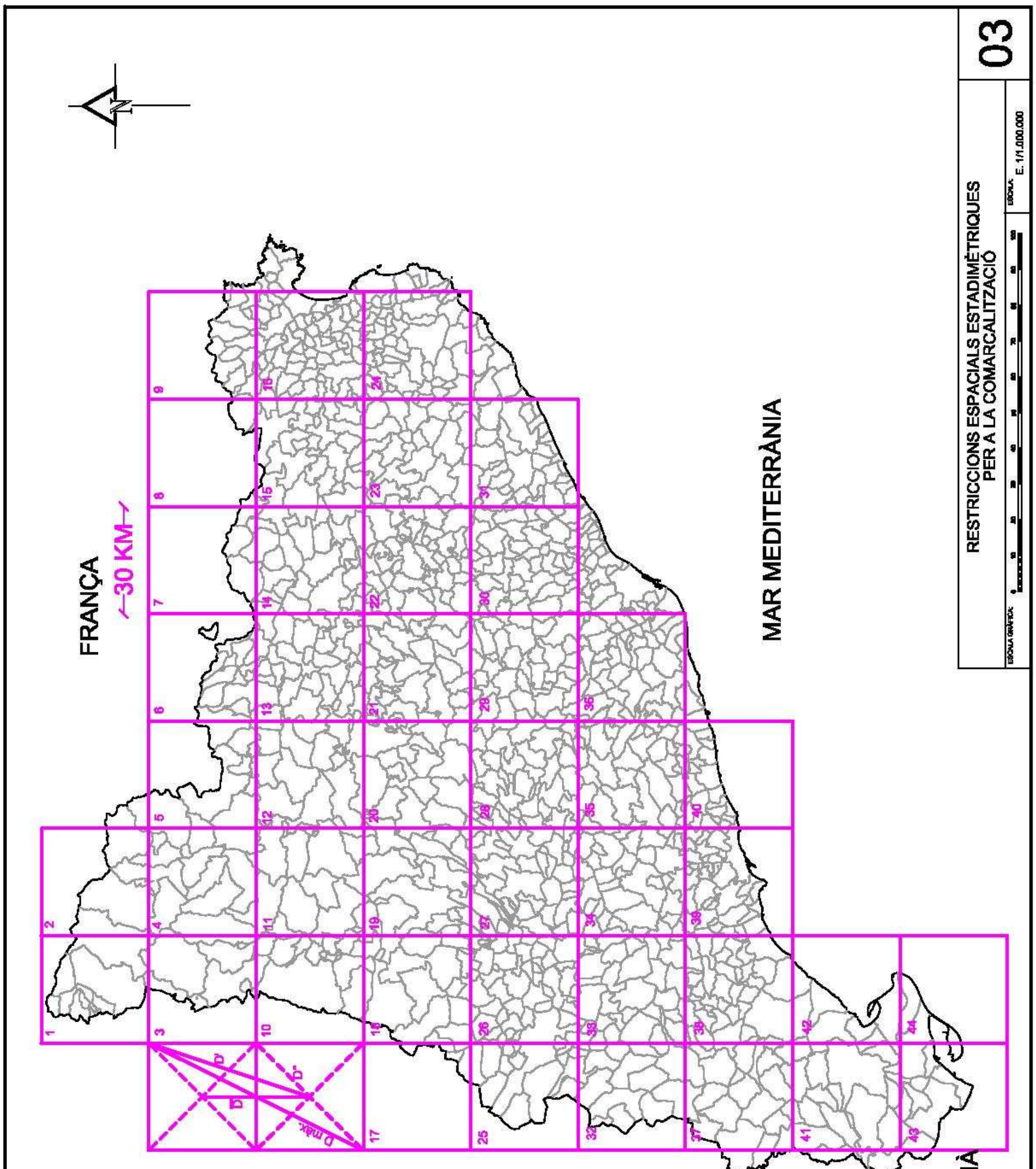
ÍNDICE DE MAPAS

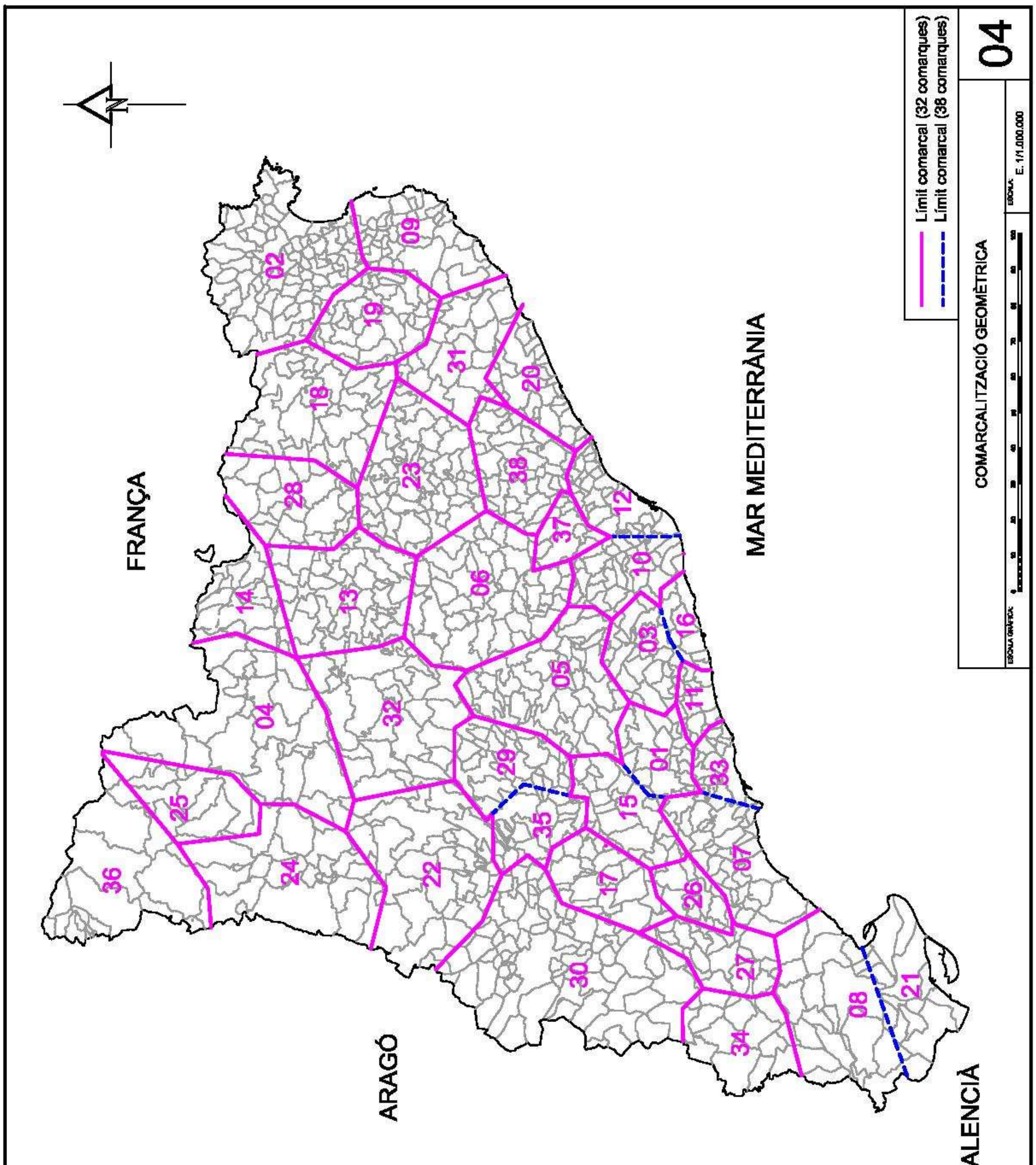
****



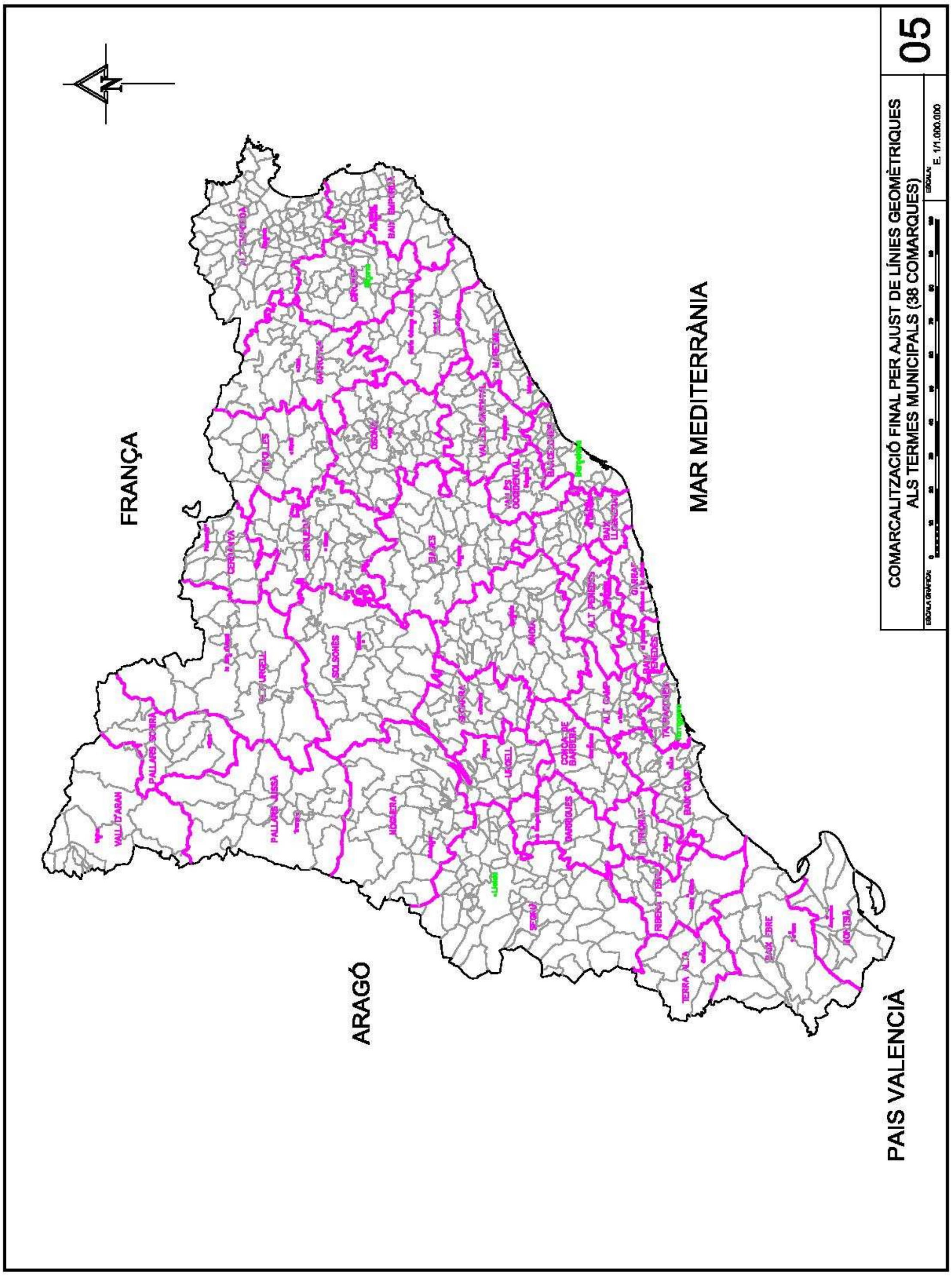
FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
GIRONA
BARCELONA
LLEIDA
TARRAGONA
DIVISIÓ TERRITORIAL ACTUAL EN 4 PROVÍNCIES I 41 COMARQUES
01
E. 1/1.000.000

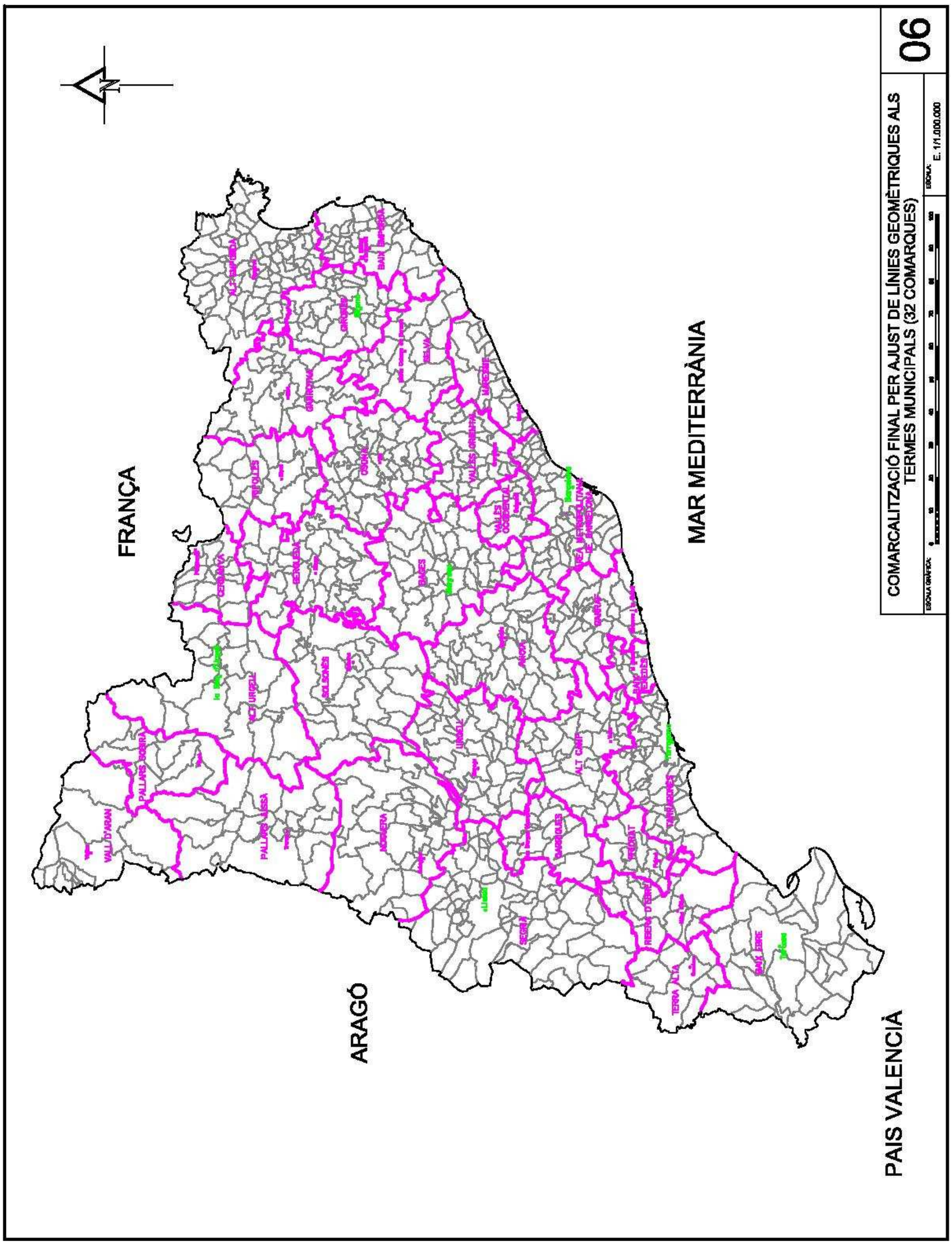

FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
7.00 KM
RESTRICCIONS ESPACIALS ESTADIMÈTRIQUES
PER A LA MUNICIPALITZACIÓ
E. 1/1.000.000
02

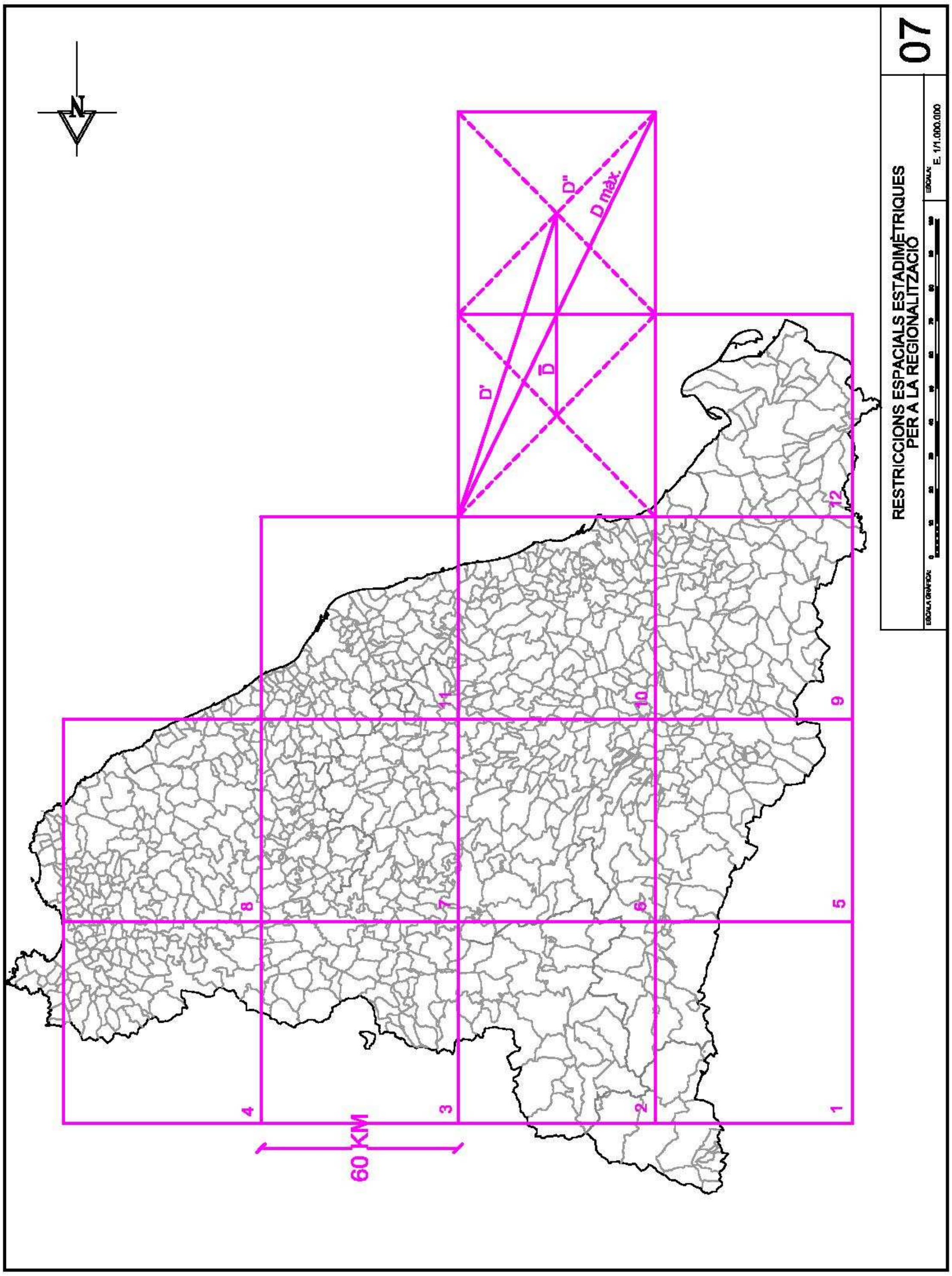

FRANÇA
30 KM
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
RESTRICCIONS ESPACIALS ESTADIMÈTRIQUES
PER A LA COMARCALITZACIÓ
E. 1/1.000.000
03

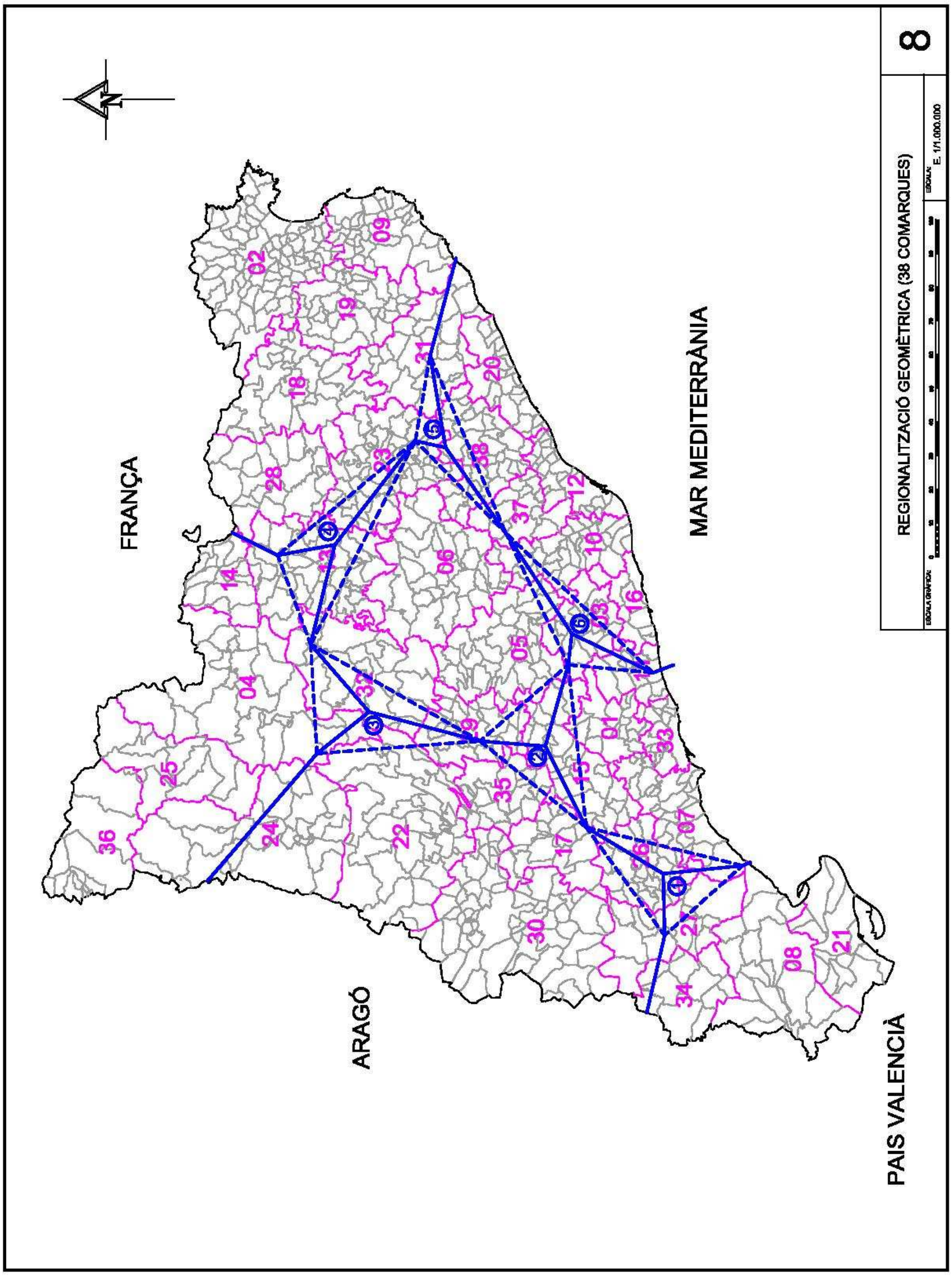


FRANÇA
ARAGÓ
MAR MEDITERRÀNIA
PAIS VALENCIÀ
Límit comarcal (32 comarques)
Límit comarcal (38 comarques)
COMARCALITZACIÓ GEOMÈTRICA
04
E. 1/1.000.000

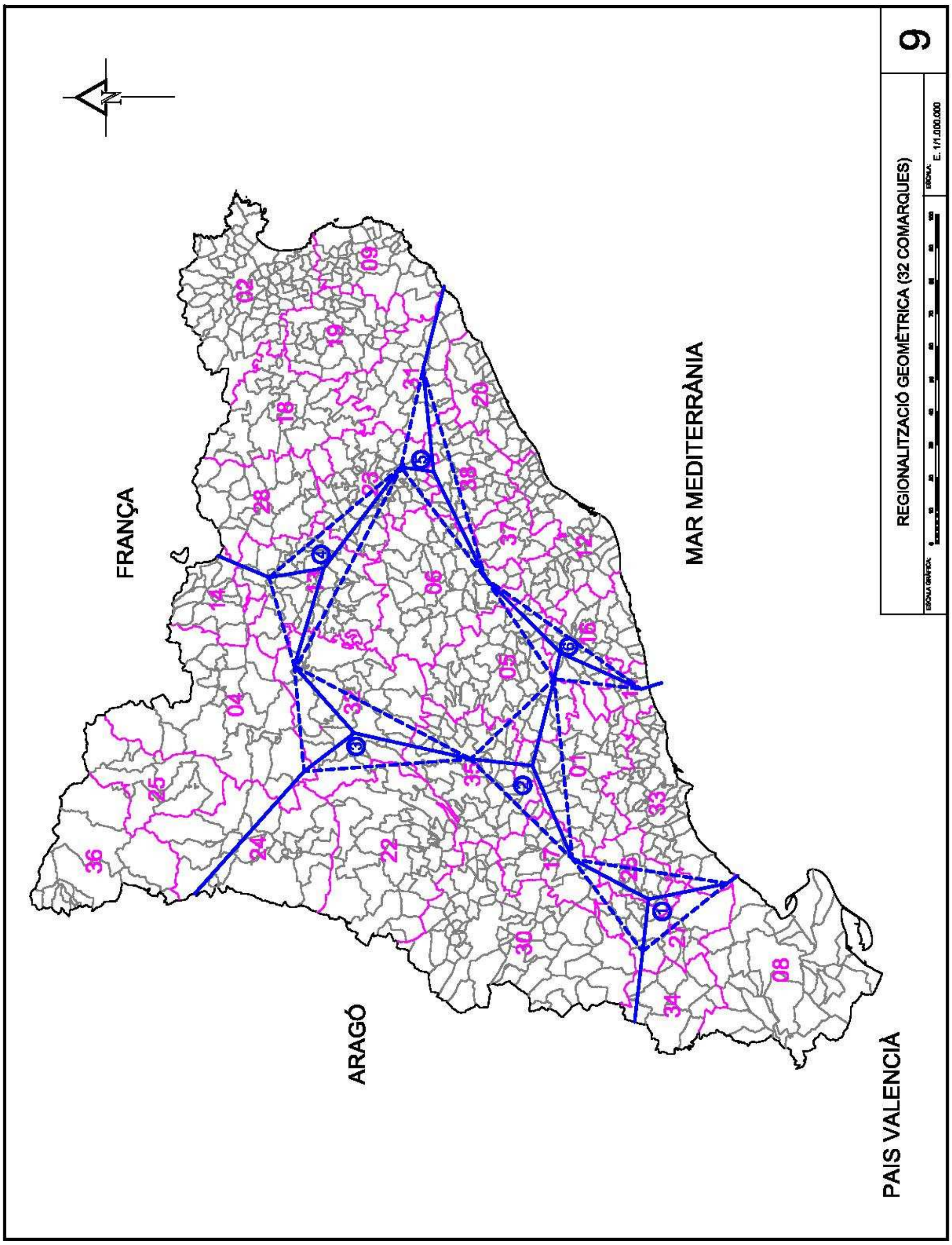

FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
COMARCALITZACIÓ FINAL PER AJUST DE LÍNIES GEOMÈTRIQUES
ALS TERMES MUNICIPALS (38 COMARQUES)
05
E. 1/1.000.000

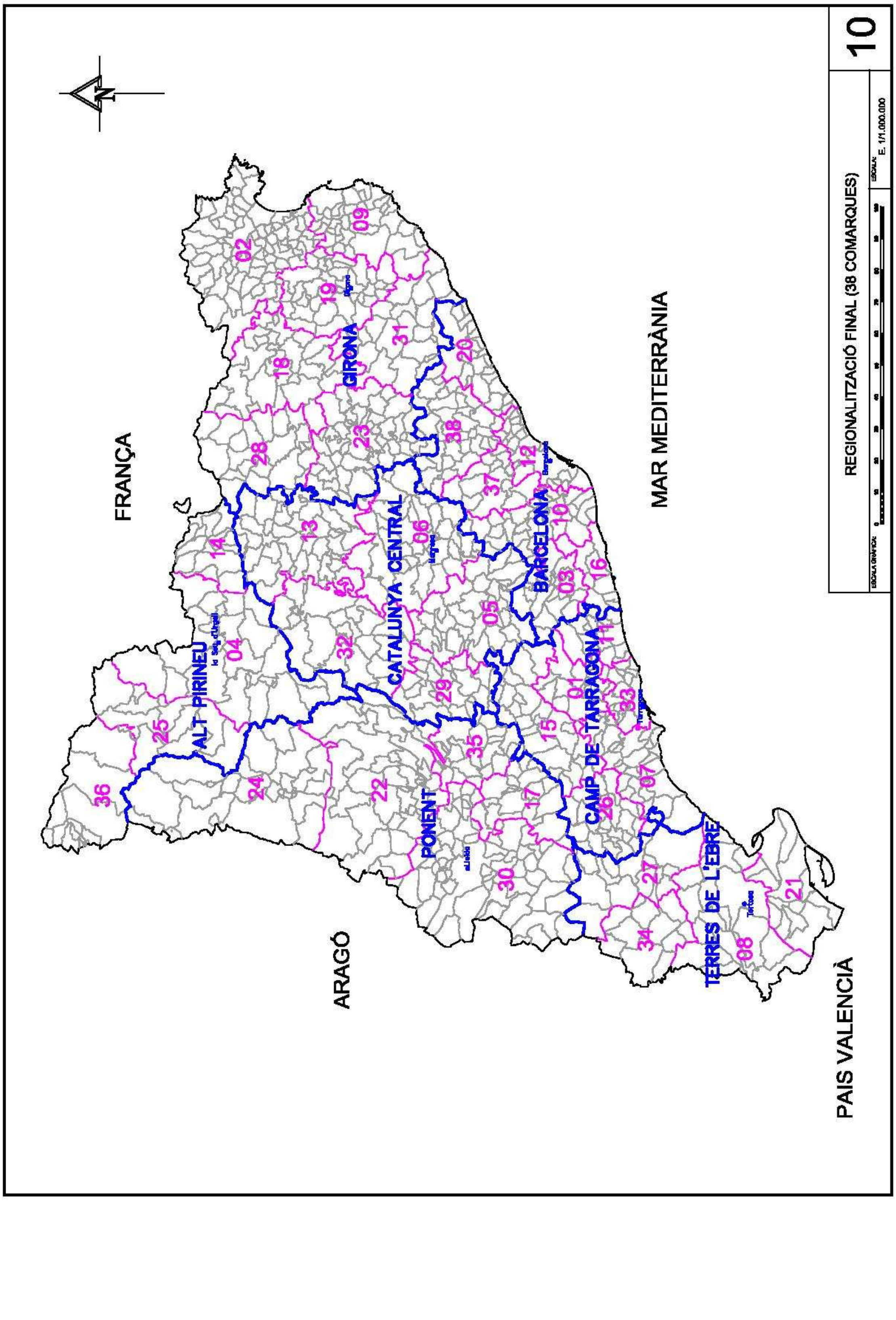

FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
COMARCALITZACIÓ FINAL PER AJUST DE LÍNIES GEOMÈTRIQUES ALS TERMES MUNICIPALS (32 COMARQUES)
06
E. 1/1.000.000

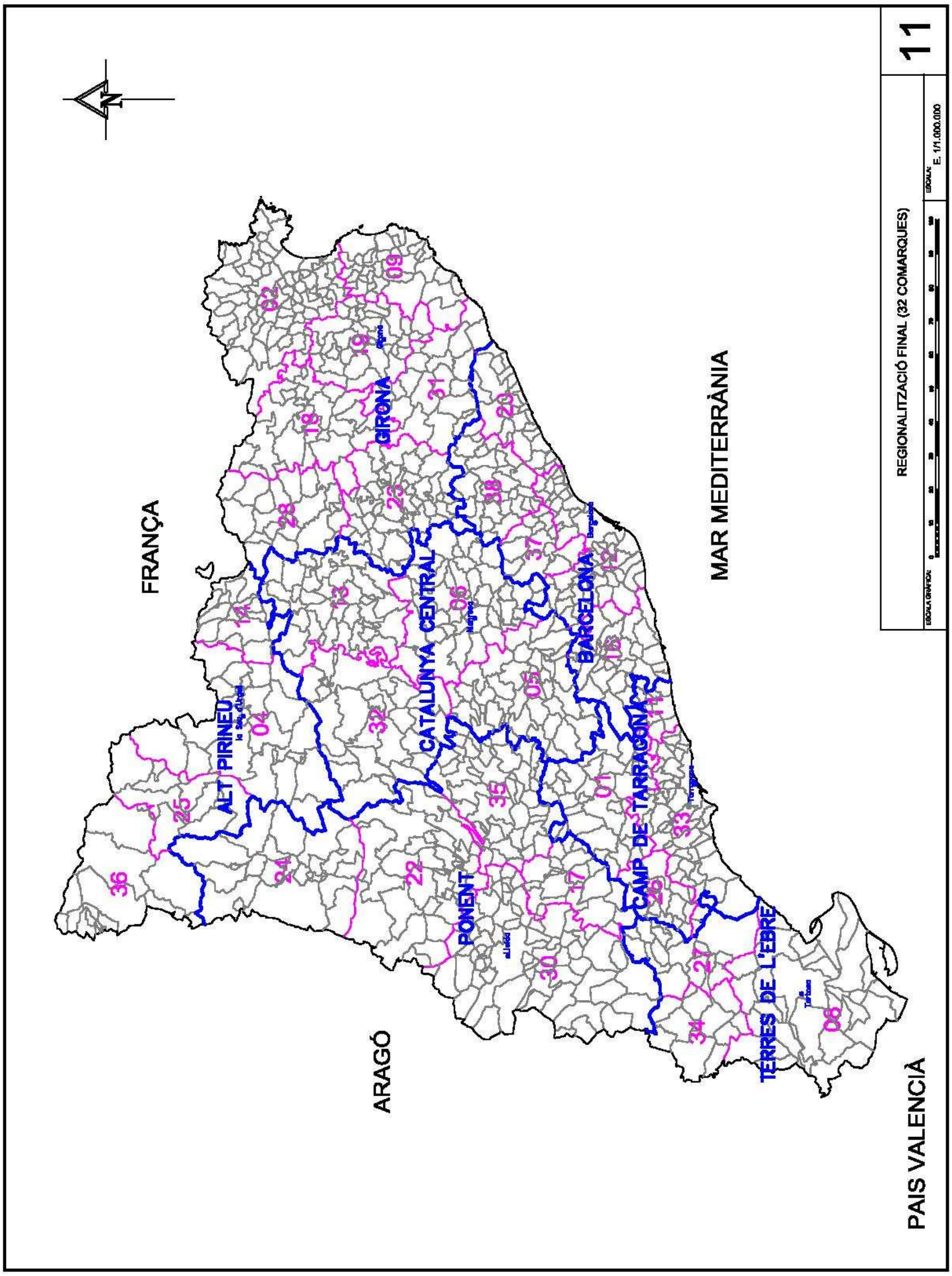

07
RESTRICCIONS ESPACIALS ESTADIMÈTRIQUES
PER A LA REGIONALITZACIÓ
E. 1/1.000.000
N
D''
D màx.
D'
D̄
60 KM
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

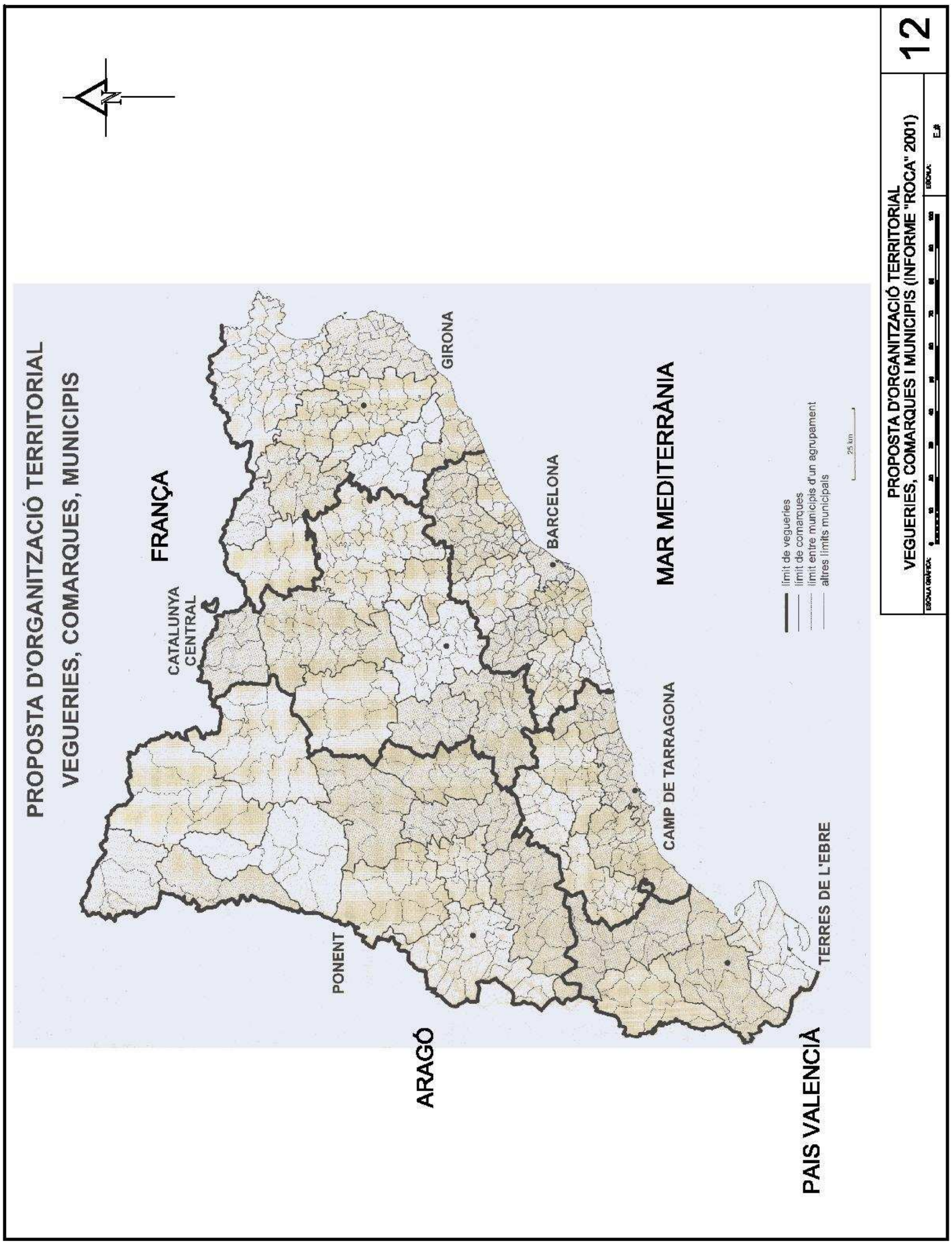


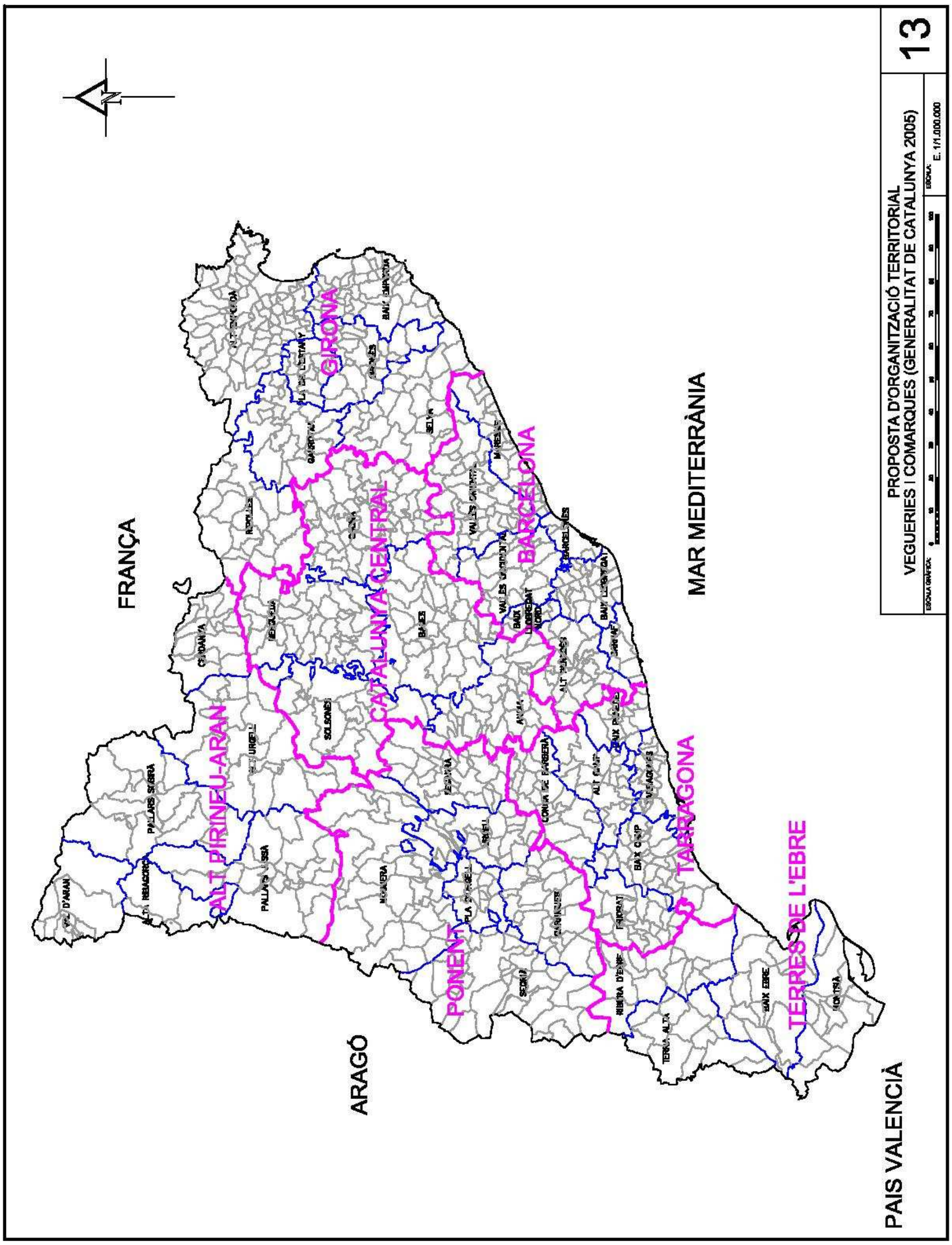
FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
REGIONALITZACIÓ GEOMÈTRICA (38 COMARQUES)
8
E. 1/1.000.000

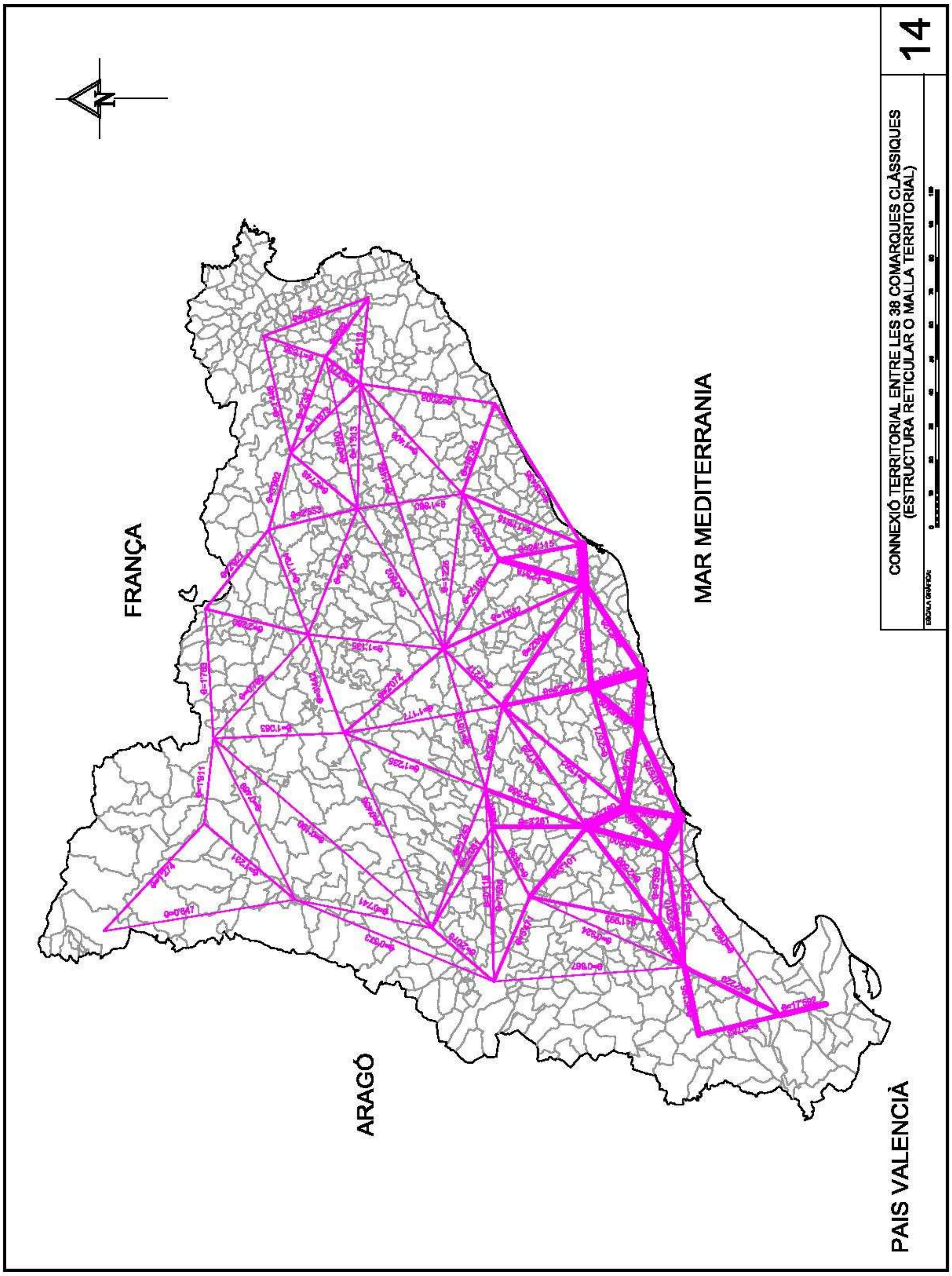

FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
REGIONALITZACIÓ GEOMÈTRICA (32 COMARQUES)
9
E. 1/1.000.000

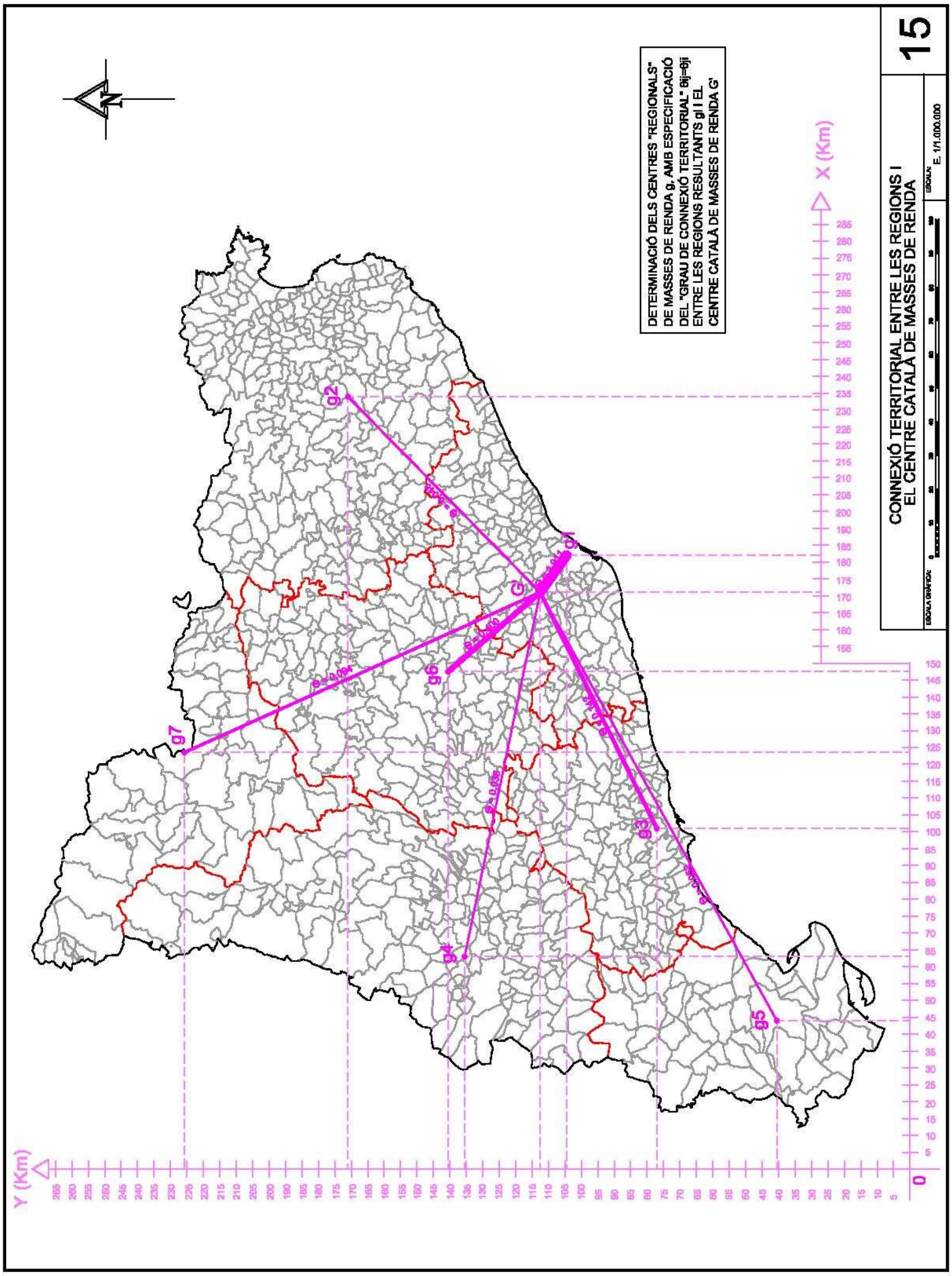

10
REGIONALITZACIÓ FINAL (38 COMARQUES)
E. 1/1.000.000
FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
ALT PIRINEU
GIRONA
CATALUNYA CENTRAL
BARCELONA
PONENT
CAMP DE TARRAGONA
TERRES DE L'EBRE

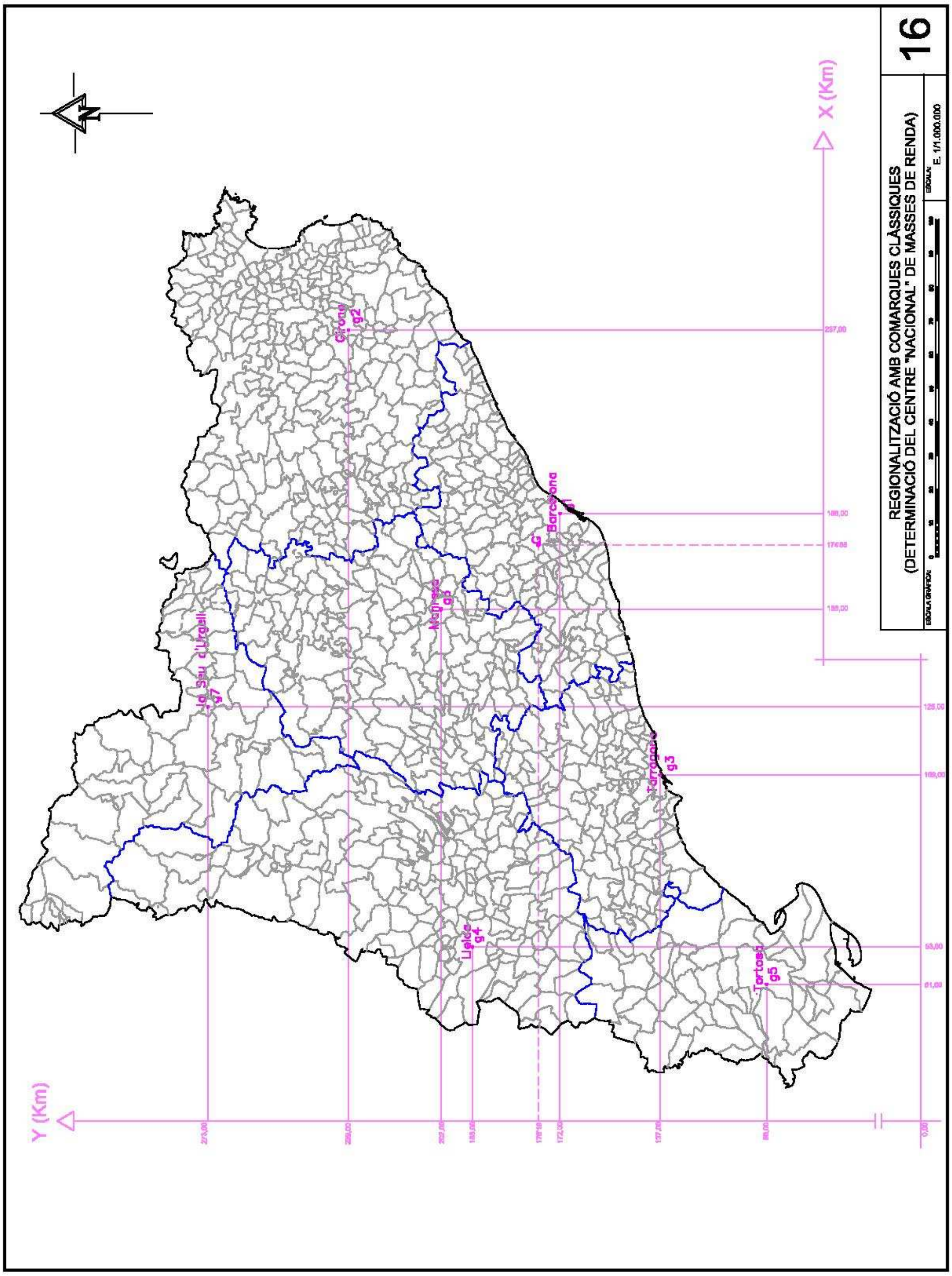

FRANÇA
MAR MEDITERRÀNIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
ALT PIRINEU
GIRONA
CATALUNYA CENTRAL
BARCELONA
PONENT
CAMP DE TARRAGONA
TERRES DE L'EBRE
REGIONALITZACIÓ FINAL (32 COMARQUES)
11
E. 1/1.000.000


PROPOSTA D'ORGANITZACIÓ TERRITORIAL
VEGUERIES, COMARQUES, MUNICIPIS
FRANÇA
CATALUNYA CENTRAL
GIRONA
BARCELONA
MAR MEDITERRÀNIA
CAMP DE TARRAGONA
TERRES DE L'EBRE
PONENT
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ
límit de vegueries
límit de comarques
límit entre municipis d'un agrupament
altres límits municipals
25 km
PROPOSTA D'ORGANITZACIÓ TERRITORIAL
VEGUERIES, COMARQUES I MUNICIPIS (INFORME "ROCA" 2001)
12


FRANÇA
ARAGÓ
MAR MEDITERRÀNIA
PAIS VALENCIÀ
GIRONA
BARCELONA
CATALUNYA CENTRAL
ALT PIRINEU-ARAN
PONENT
TARRAGONA
TERRES DE L'EBRE
PROPOSTA D'ORGANITZACIÓ TERRITORIAL
VEGUERIES I COMARQUES (GENERALITAT DE CATALUNYA 2005)
13
E. 1/1.000.000


14
CONNEXIÓ TERRITORIAL ENTRE LES 38 COMARQUES CLÀSSIQUES
(ESTRUCTURA RETICULAR O MALLA TERRITORIAL)
FRANÇA
MAR MEDITERRANIA
ARAGÓ
PAIS VALENCIÀ

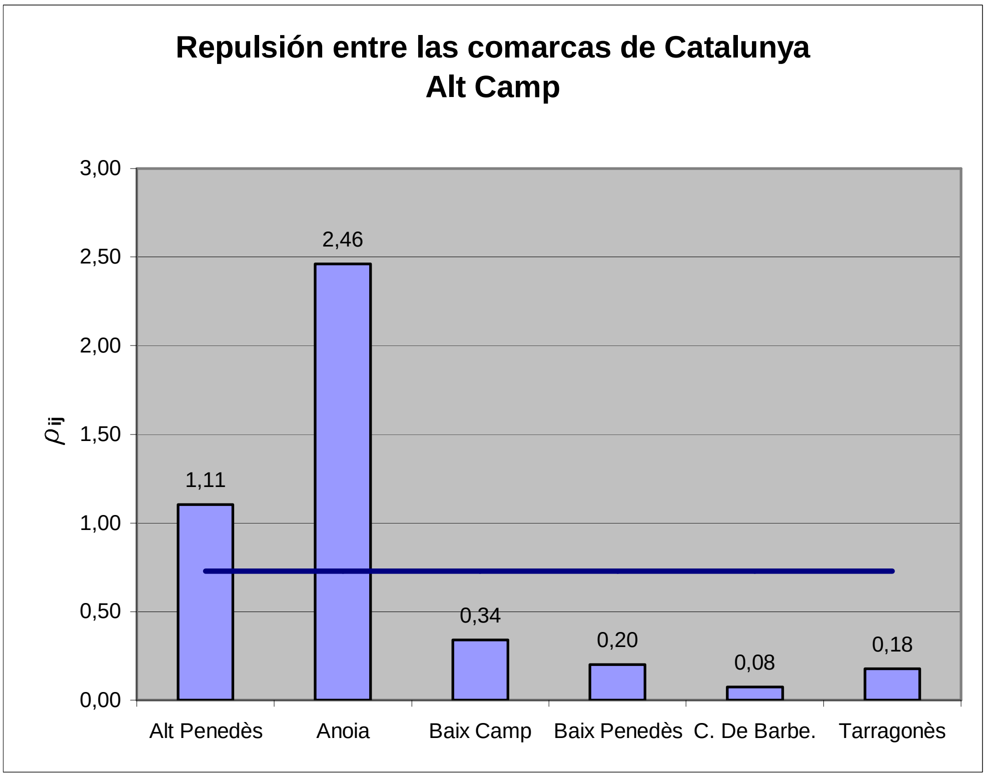

15
CONNEXIÓ TERRITORIAL ENTRE LES REGIONS I
EL CENTRE CATALÀ DE MASSES DE RENDA
ESCALA: E. 1/1.000.000
ESCALA GRÀFICA
DETERMINACIÓ DELS CENTRES "REGIONALS"
DE MASSES DE RENDA g, AMB ESPECIFICACIÓ
DEL "GRAU DE CONNEXIÓ TERRITORIAL" θij=θji
ENTRE LES REGIONS RESULTANTS gi I EL
CENTRE CATALÀ DE MASSES DE RENDA G'
X (Km)
Y (Km)
G
g1
g2
g3
g4
g5
g6
g7

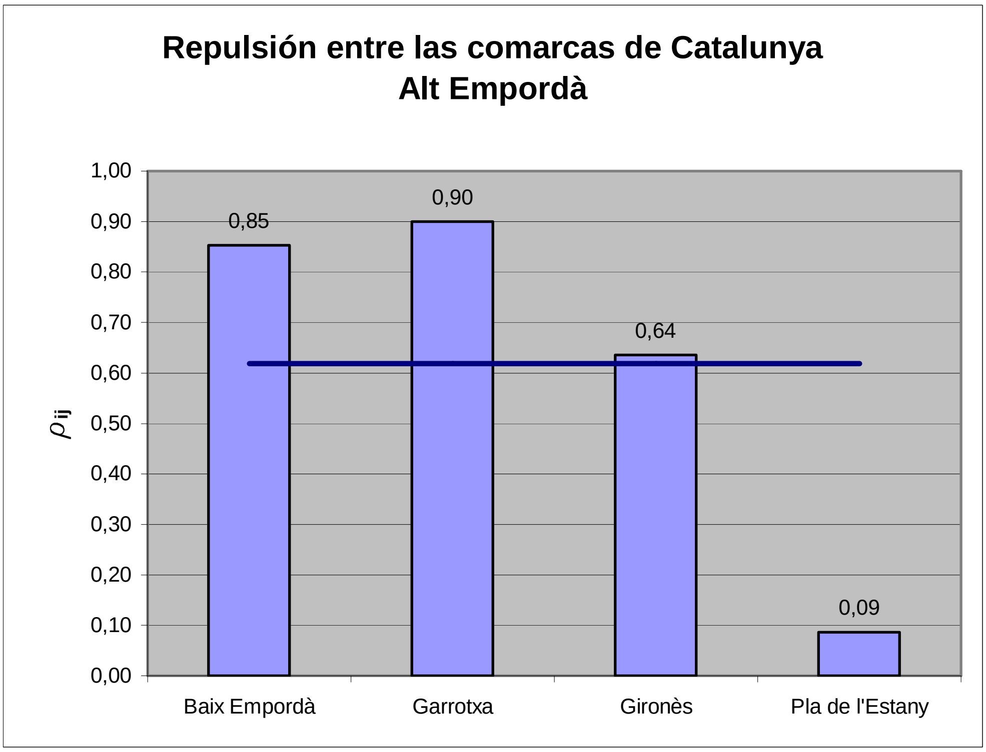

16
REGIONALITZACIÓ AMB COMARQUES CLÀSSIQUES
(DETERMINACIÓ DEL CENTRE "NACIONAL" DE MASSES DE RENDA)
E. 1/1.000.000
X (Km)
Y (Km)

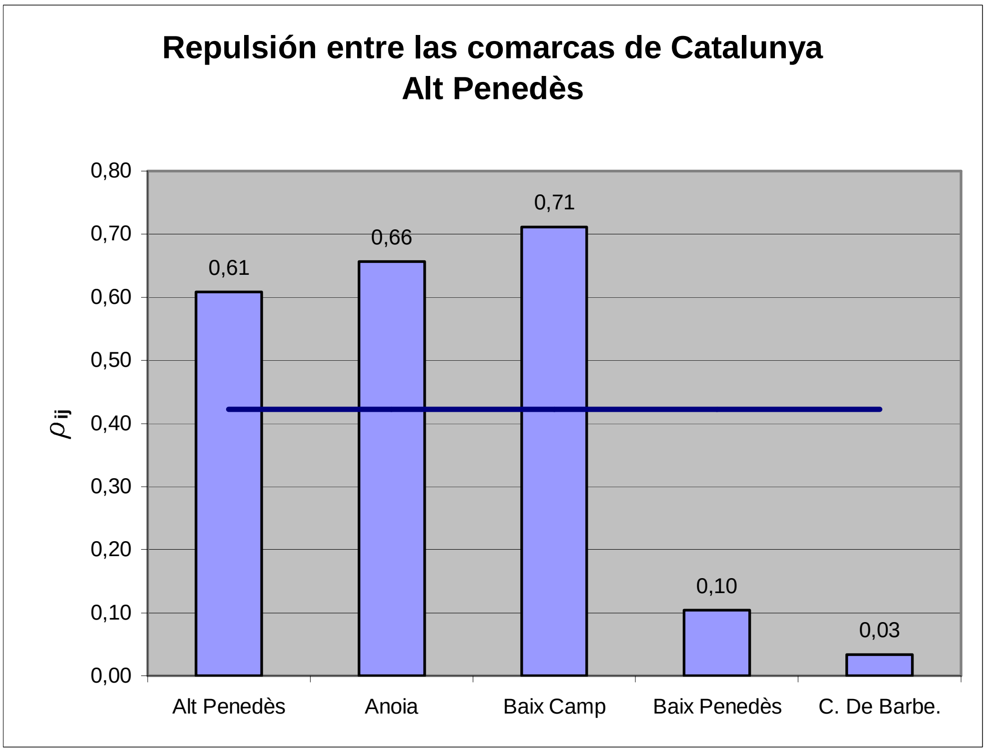
ANEXO 4

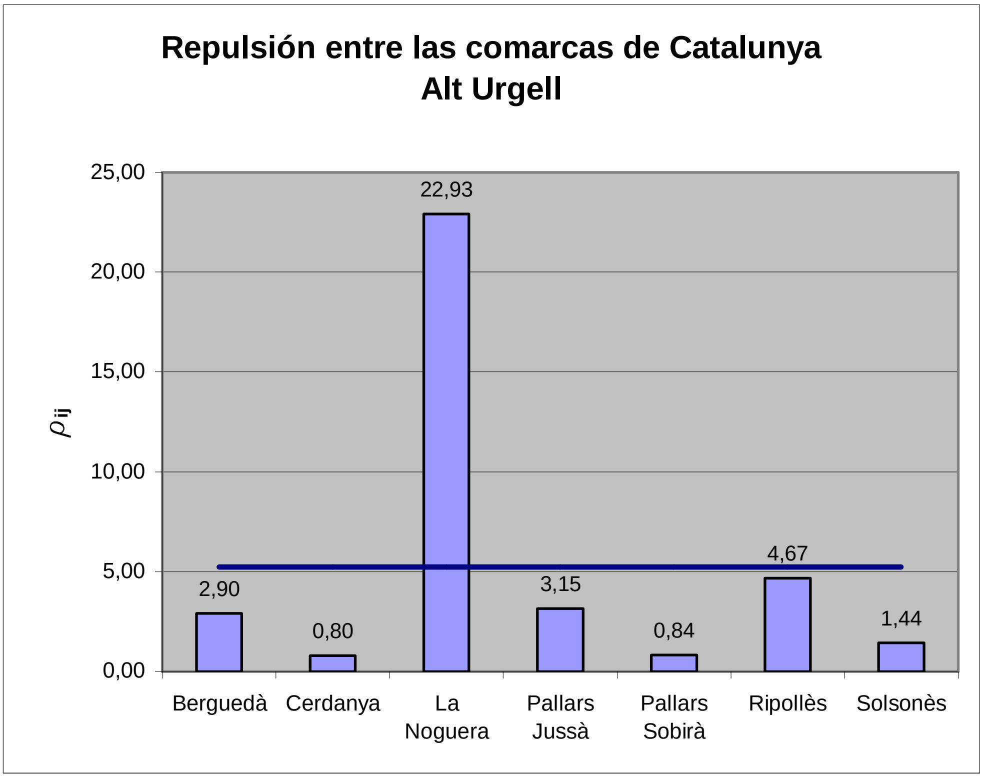
ATRACCIÓN ENTRE LAS COMARCAS DE CATALUÑA. AÑO 1996. GRÁFICOS

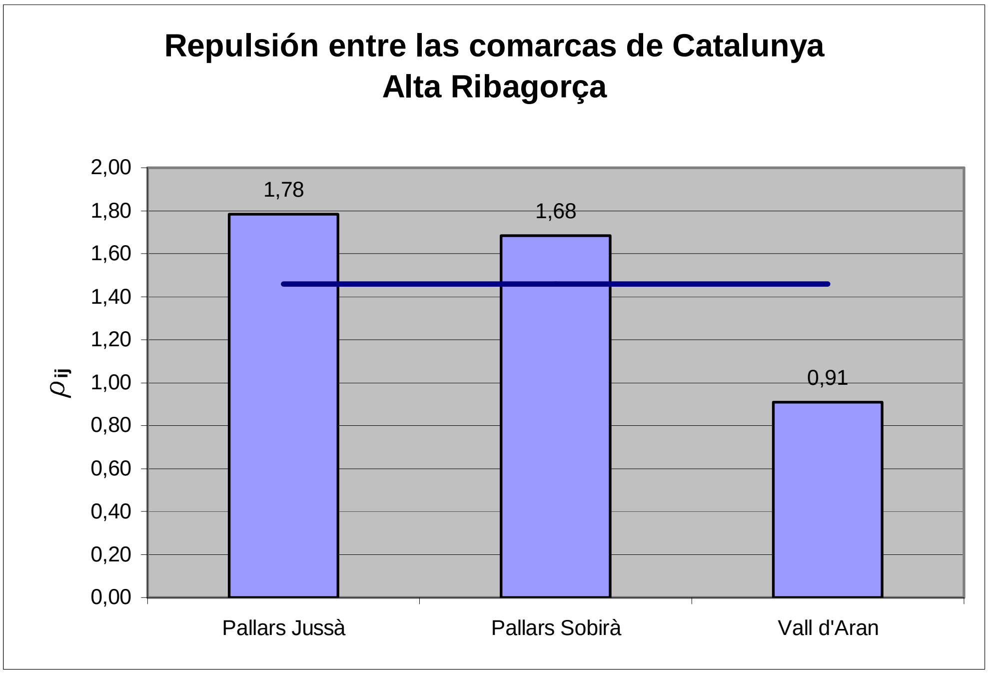
1. Grado de repulsión $\rho_{ij} = 1/\alpha_{ij}$

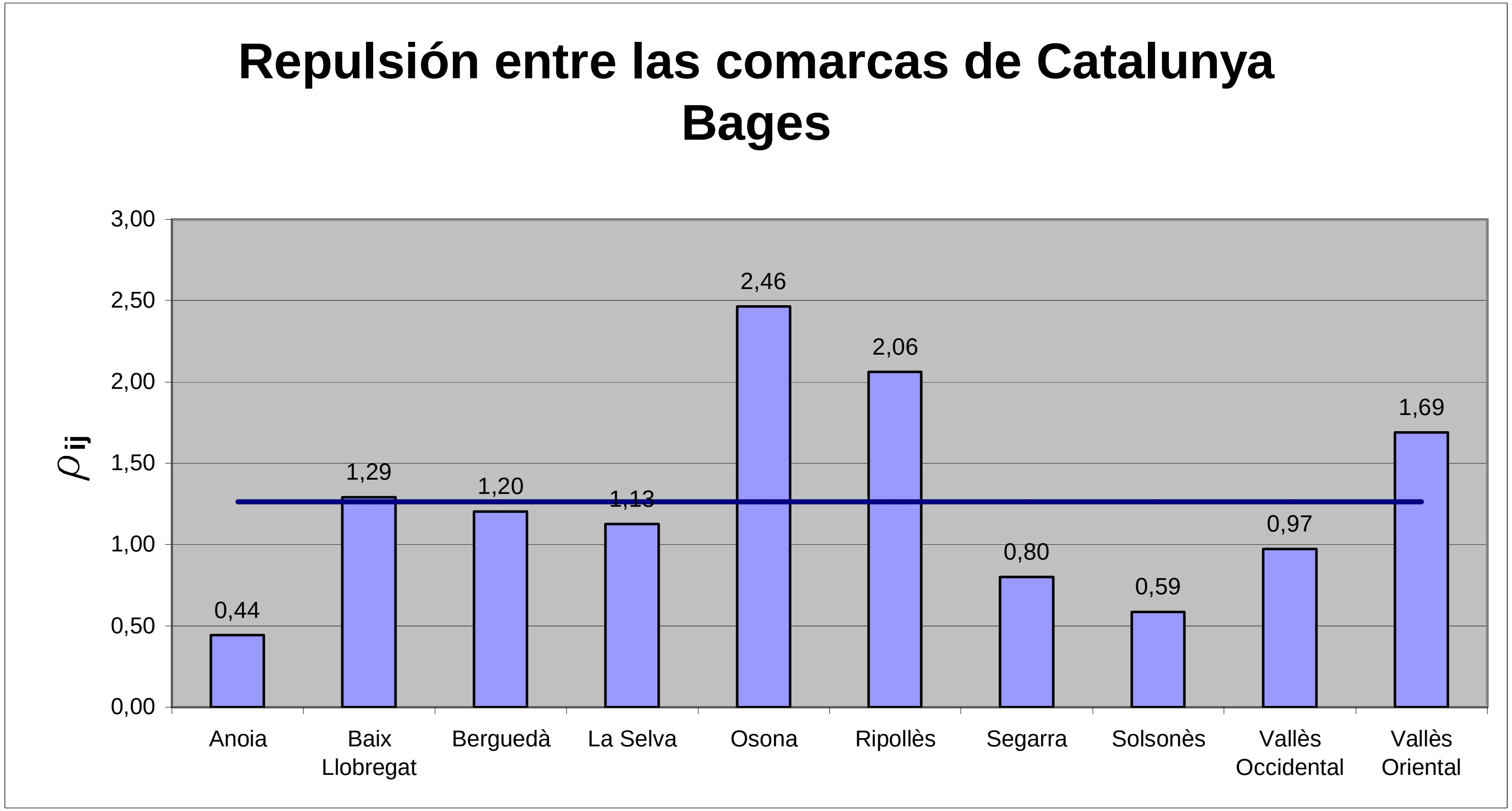


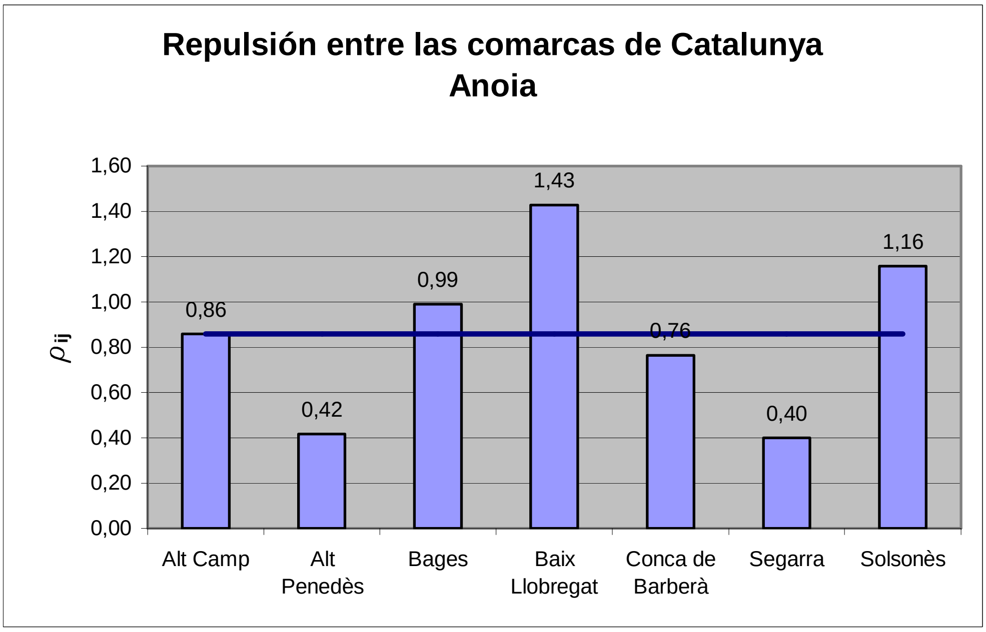

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Alt Empordà
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
ρ_{ij}
0,85
0,90
0,64
0,09
Baix Empordà
Garrotxa
Gironès
Pla de l'Estany

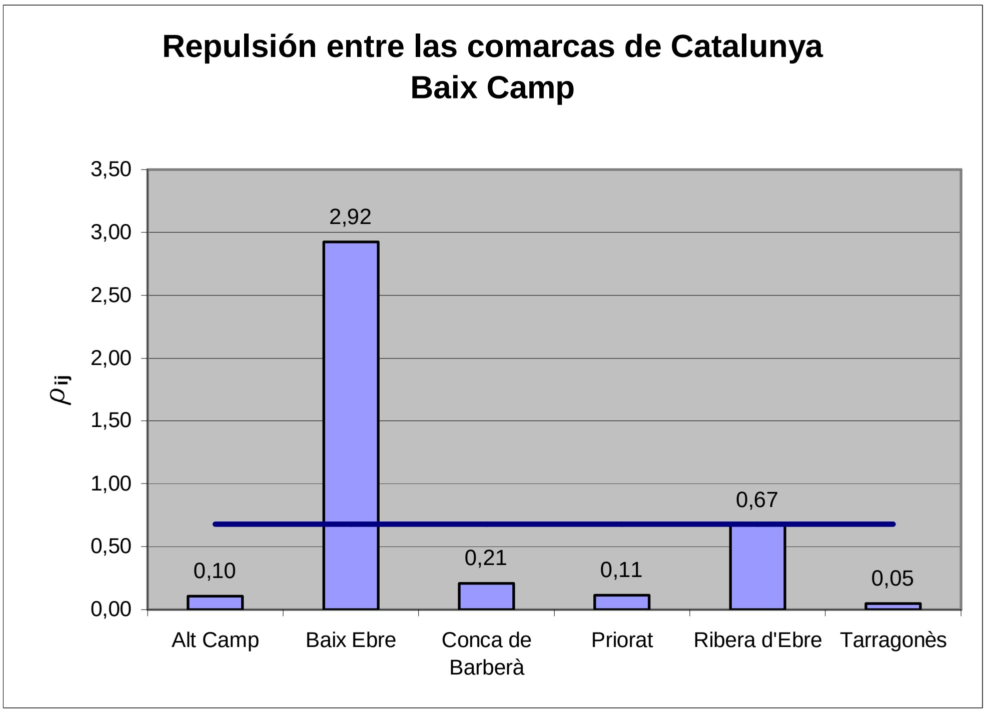

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Alt Penedès
ρij
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,61
0,66
0,71
0,10
0,03
Alt Penedès
Anoia
Baix Camp
Baix Penedès
C. De Barbe.

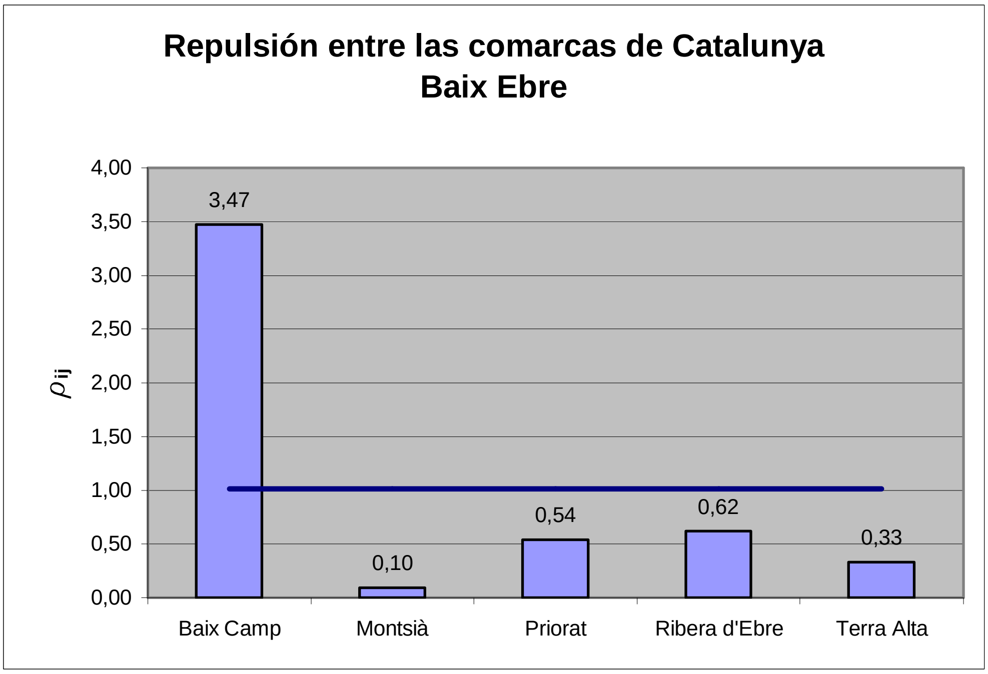

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Alt Urgell
ρ ij
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
22,93
2,90
0,80
3,15
0,84
4,67
1,44
Berguedà
Cerdanya
La Noguera
Pallars Jussà
Pallars Sobirà
Ripollès
Solsonès

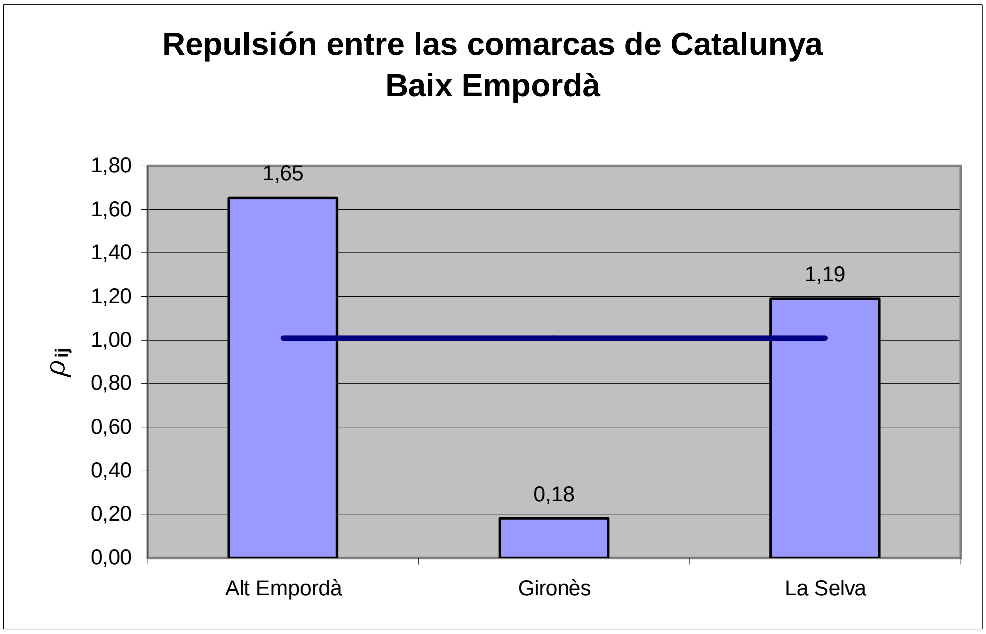

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Alta Ribagorça
ρ ij
2,00
1,80
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
1,78
1,68
0,91
Pallars Jussà
Pallars Sobirà
Vall d'Aran

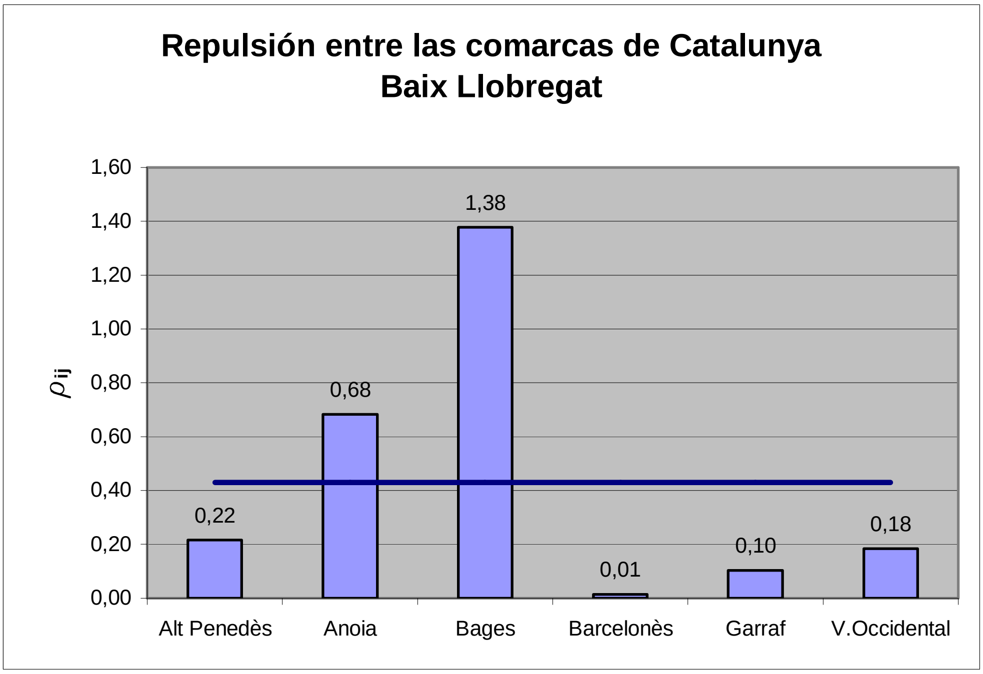

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Bages
ρ_{ij}
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,44
1,29
1,20
1,13
2,46
2,06
0,80
0,59
0,97
1,69
Anoia
Baix Llobregat
Berguedà
La Selva
Osona
Ripollès
Segarra
Solsonès
Vallès Occidental
Vallès Oriental

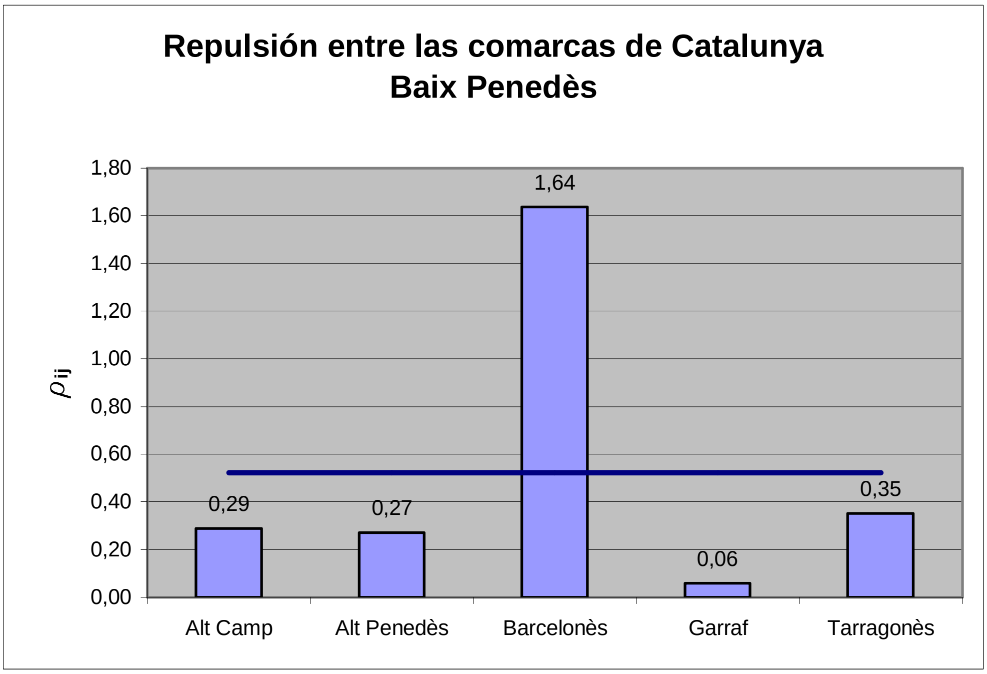

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Anoia
ρ_{ij}
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,86
0,42
0,99
1,43
0,76
0,40
1,16
Alt Camp
Alt Penedès
Bages
Baix Llobregat
Conca de Barberà
Segarra
Solsonès

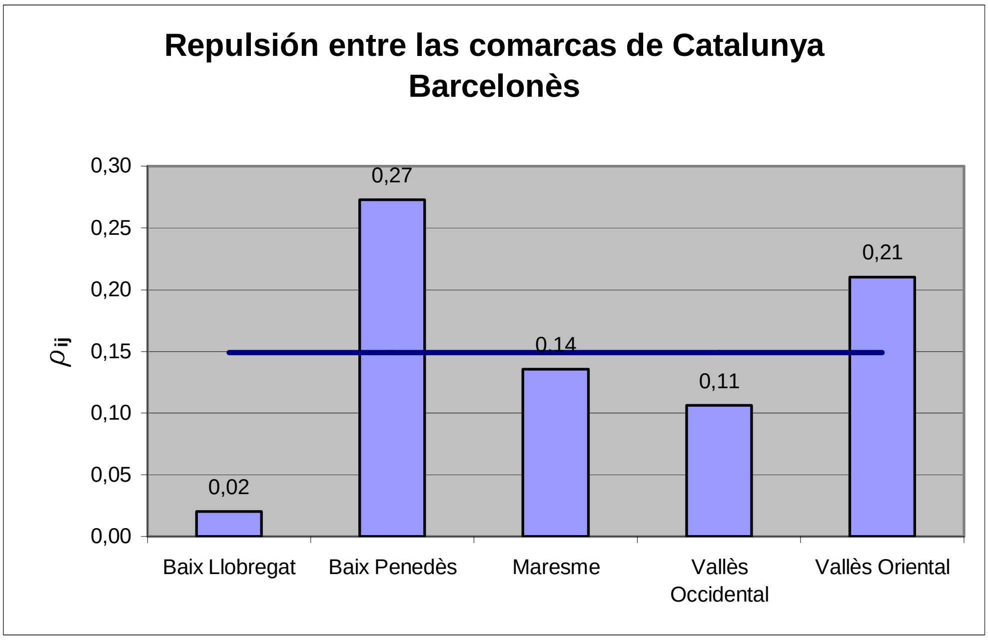

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Baix Camp
ρ_{ij}
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,10
2,92
0,21
0,11
0,67
0,05
Alt Camp
Baix Ebre
Conca de Barberà
Priorat
Ribera d'Ebre
Tarragonès

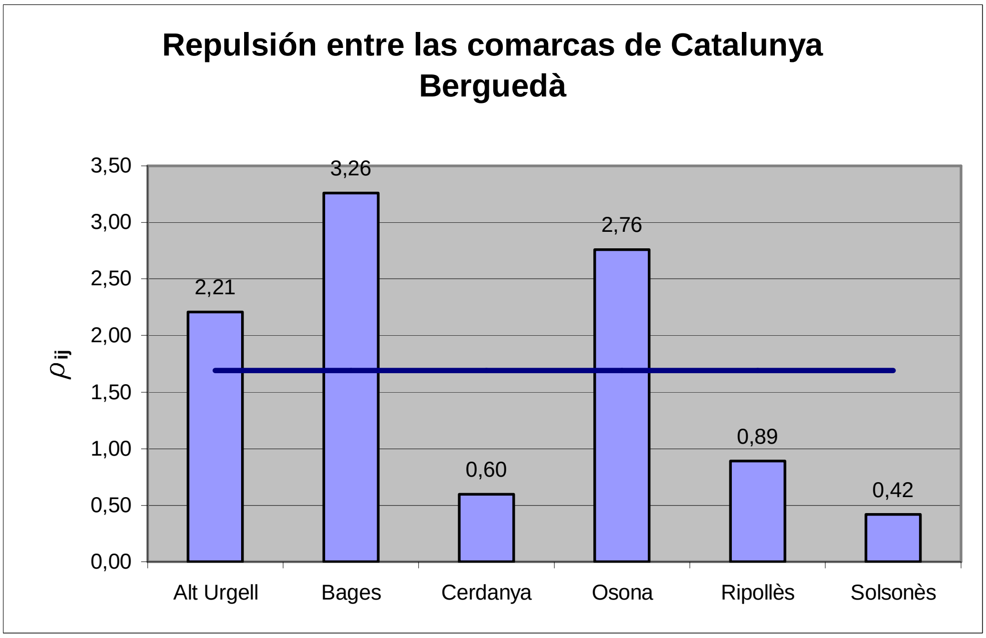

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Baix Ebre
ρij
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
3,47
0,10
0,54
0,62
0,33
Baix Camp
Montsià
Priorat
Ribera d'Ebre
Terra Alta

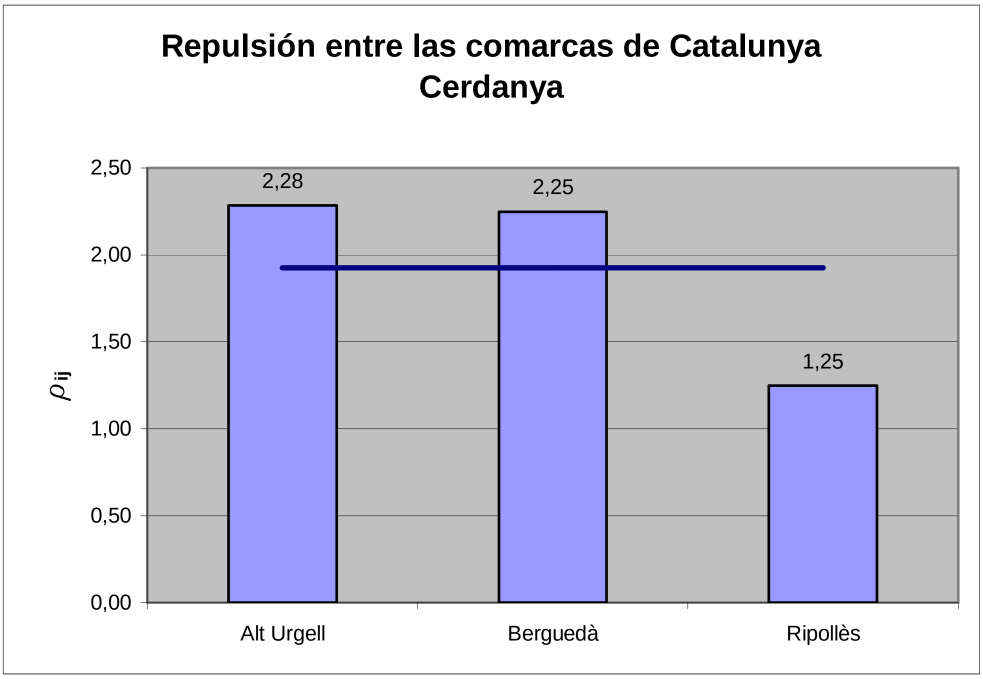

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Baix Empordà
ρij
1,80
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
1,65
0,18
1,19
Alt Empordà
Gironès
La Selva

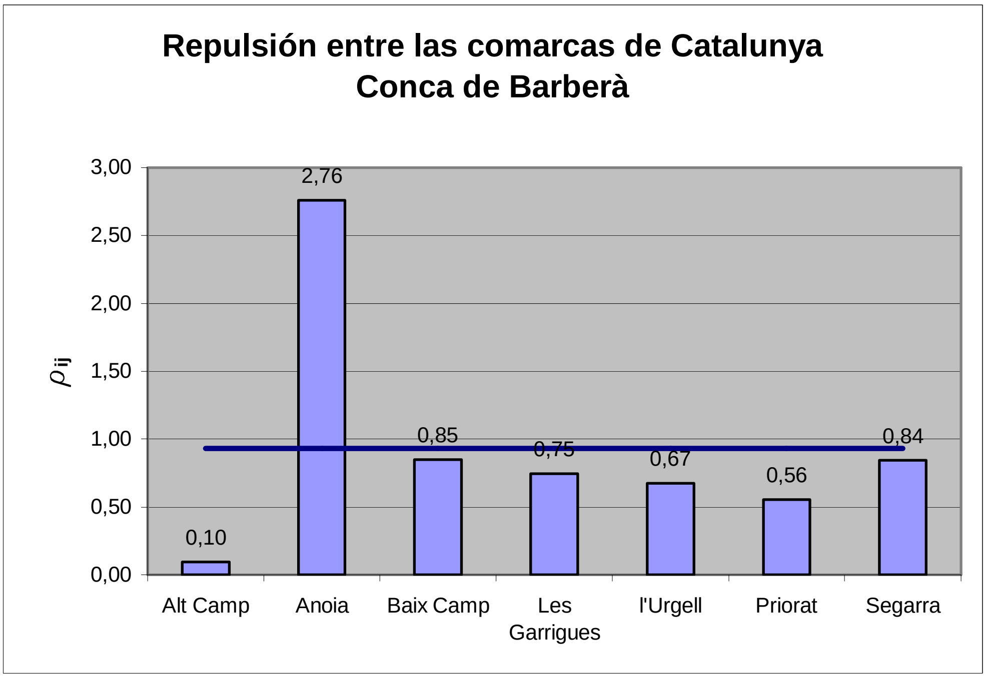

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Baix Llobregat
ρij
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,22
0,68
1,38
0,01
0,10
0,18
Alt Penedès
Anoia
Bages
Barcelonès
Garraf
V.Occidental

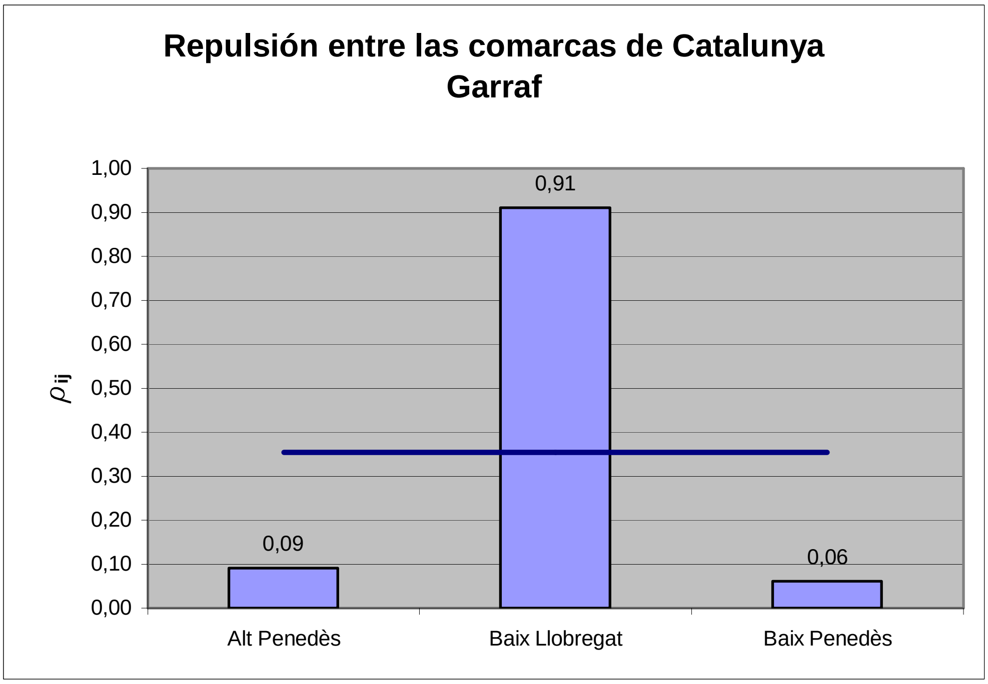

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Baix Penedès
ρij
1,80
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,29
0,27
1,64
0,06
0,35
Alt Camp
Alt Penedès
Barcelonès
Garraf
Tarragonès

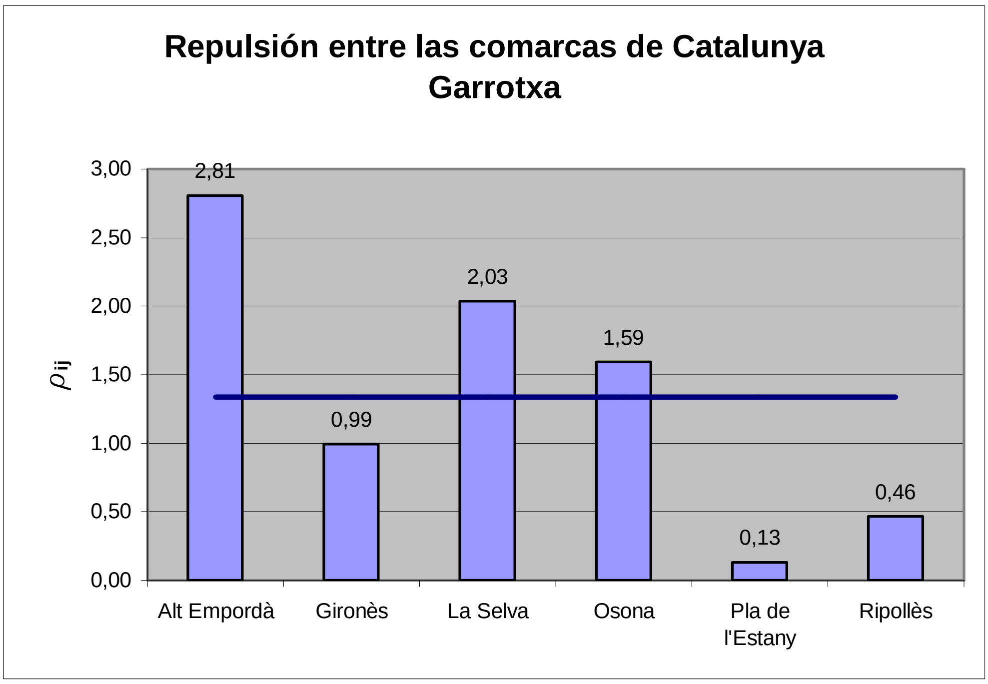

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Barcelonès
ρ_{ij}
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0,00
0,02
0,27
0,14
0,11
0,21
Baix Llobregat
Baix Penedès
Maresme
Vallès Occidental
Vallès Oriental

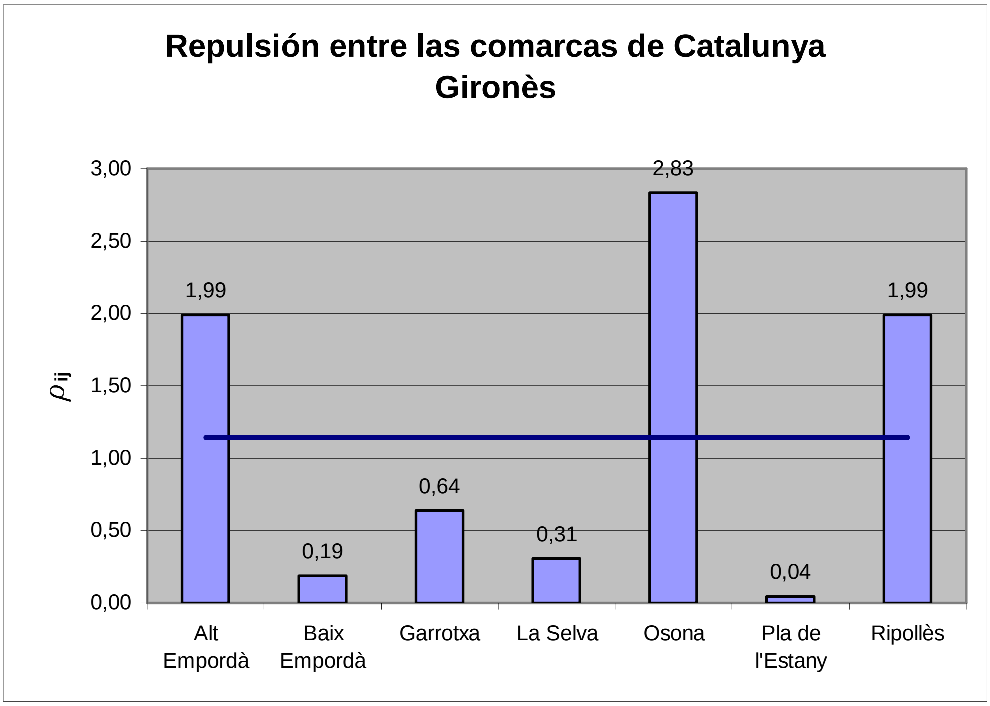

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Berguedà
ρ_{ij}
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
2,21
3,26
0,60
2,76
0,89
0,42
Alt Urgell
Bages
Cerdanya
Osona
Ripollès
Solsonès

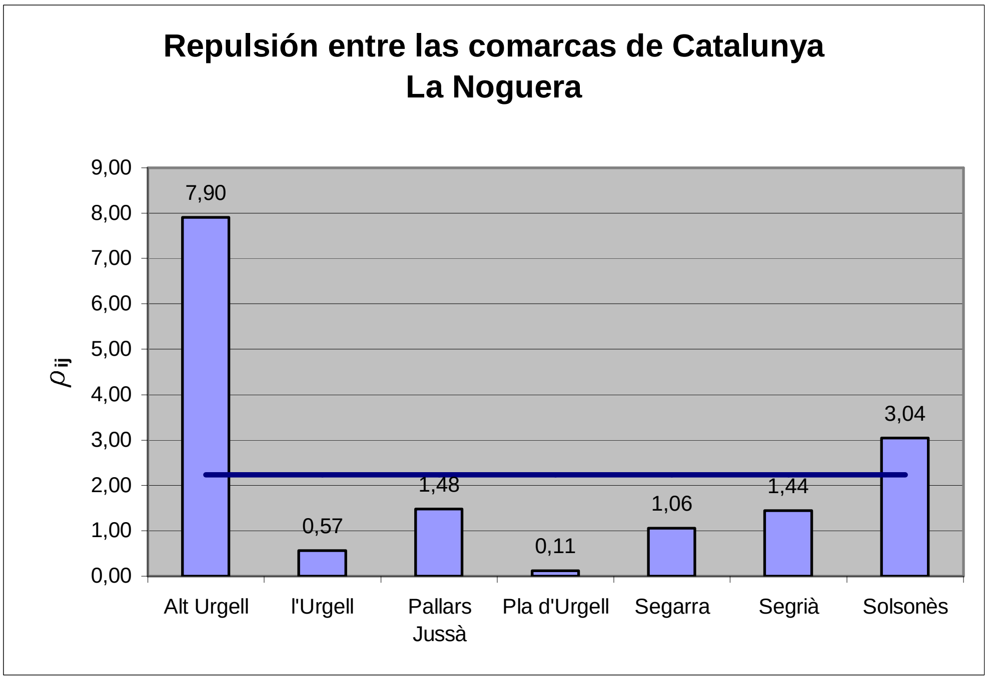

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Cerdanya
ρ ij
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
2,28
2,25
1,25
Alt Urgell
Berguedà
Ripollès

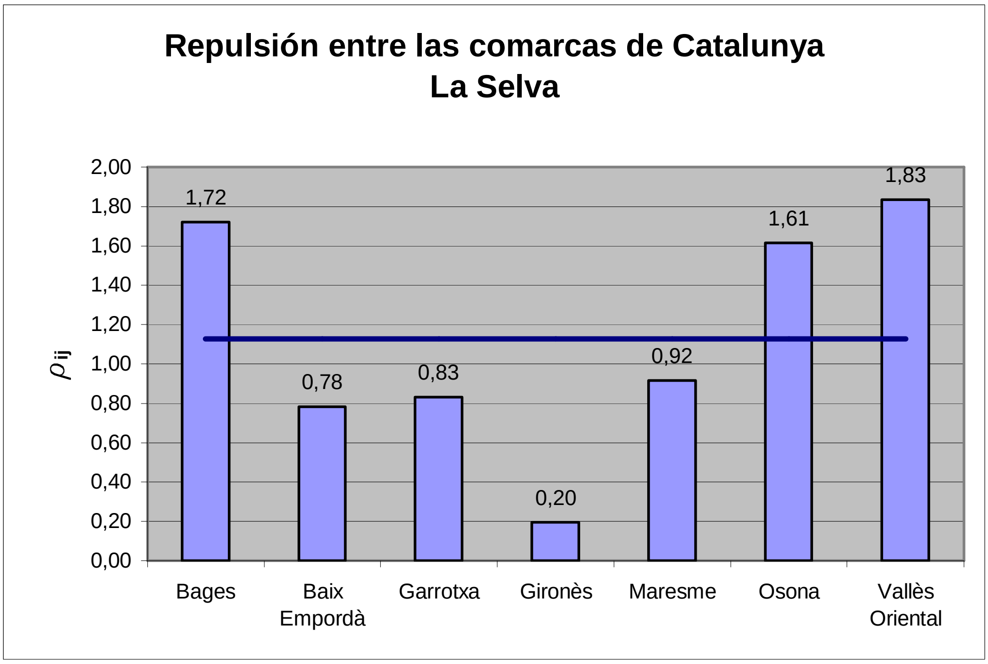

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Conca de Barberà
ρ ij
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,10
2,76
0,85
0,75
0,67
0,56
0,84
Alt Camp
Anoia
Baix Camp
Les Garrigues
l'Urgell
Priorat
Segarra

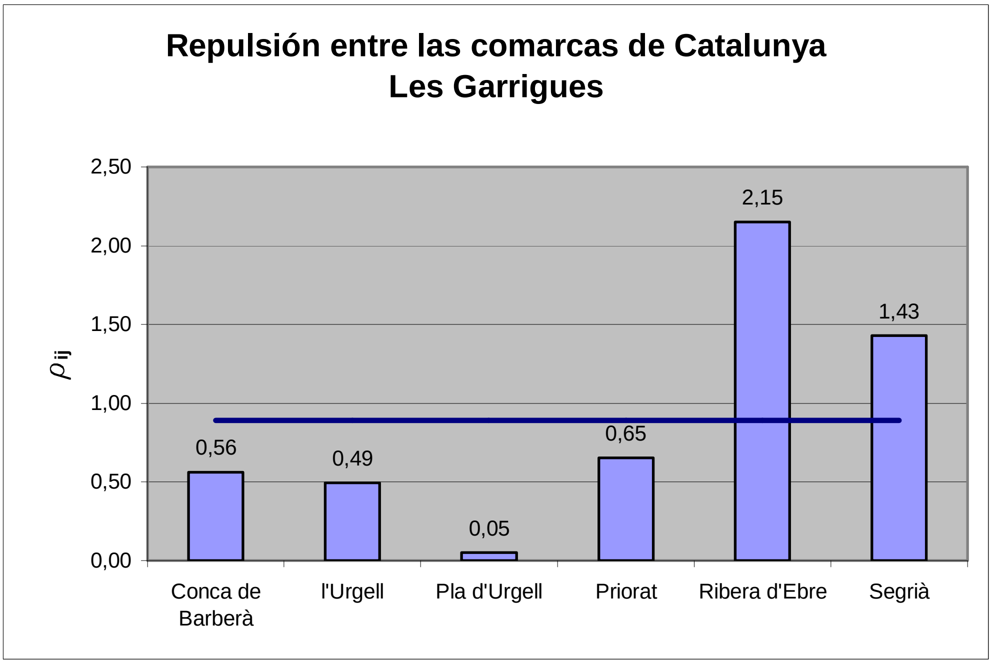

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Garraf
ρij
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,91
0,09
0,06
Alt Penedès
Baix Llobregat
Baix Penedès

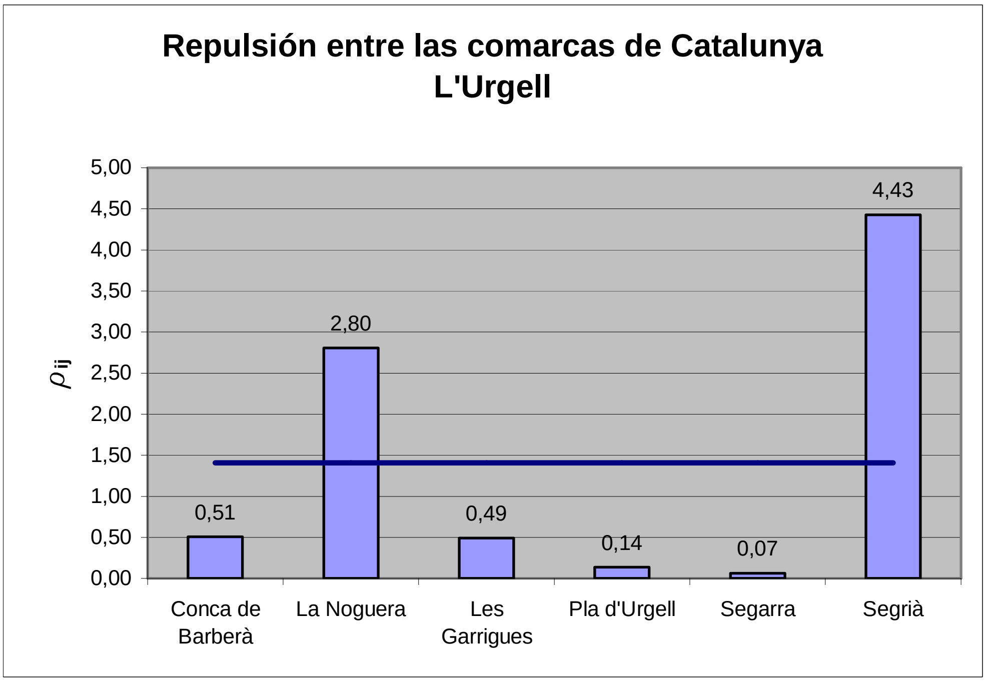

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Garrotxa
ρij
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
2,81
0,99
2,03
1,59
0,13
0,46
Alt Empordà
Gironès
La Selva
Osona
Pla de l'Estany
Ripollès

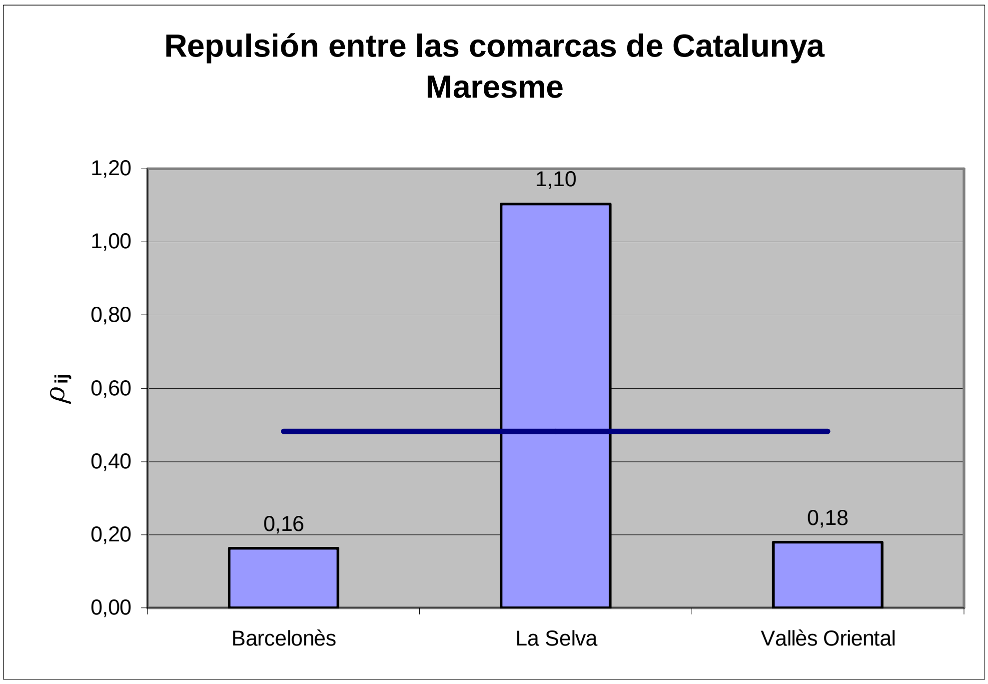

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Gironès
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
ρij
1,99
0,19
0,64
0,31
2,83
0,04
1,99
Alt Empordà
Baix Empordà
Garrotxa
La Selva
Osona
Pla de l'Estany
Ripollès

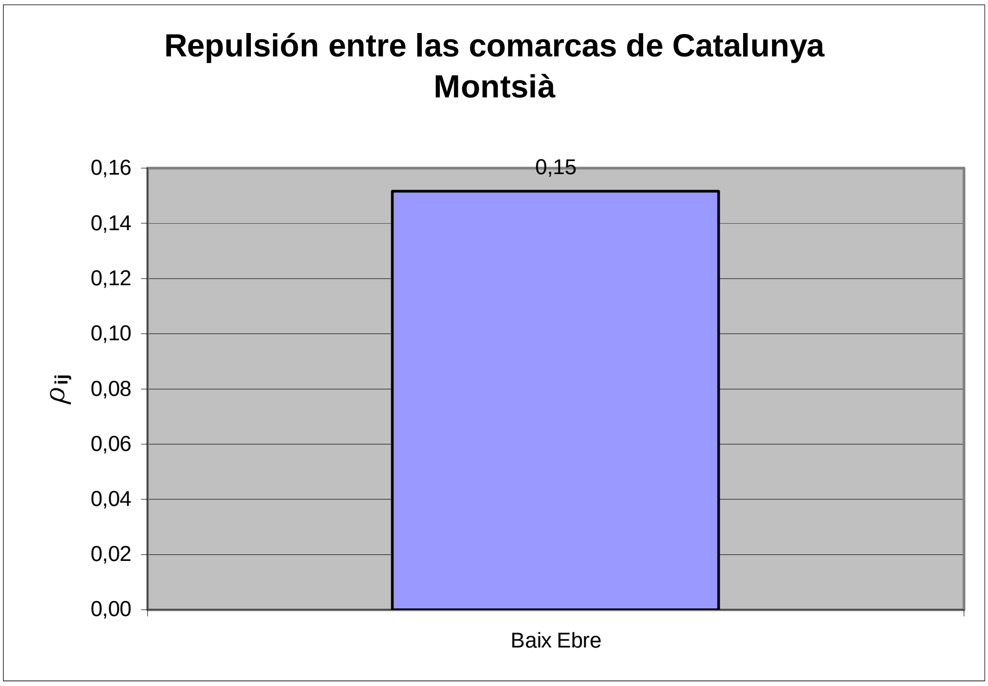

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
La Noguera
9,00
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
ρij
7,90
0,57
1,48
0,11
1,06
1,44
3,04
Alt Urgell
l'Urgell
Pallars Jussà
Pla d'Urgell
Segarra
Segrià
Solsonès

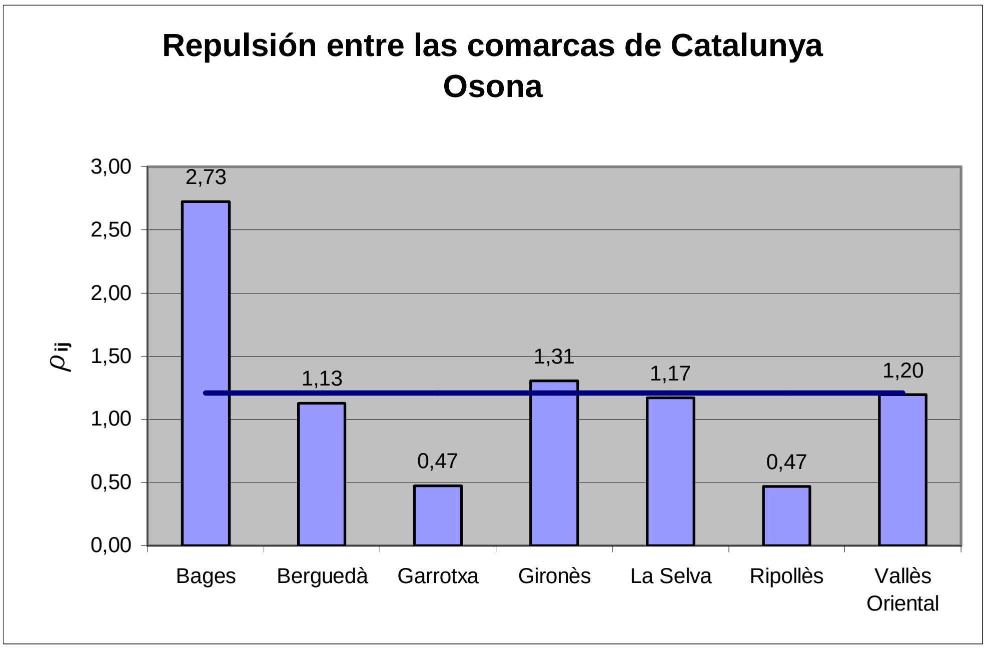

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
La Selva
ρ ij
2,00
1,80
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
1,72
0,78
0,83
0,20
0,92
1,61
1,83
Bages
Baix Empordà
Garrotxa
Gironès
Maresme
Osona
Vallès Oriental

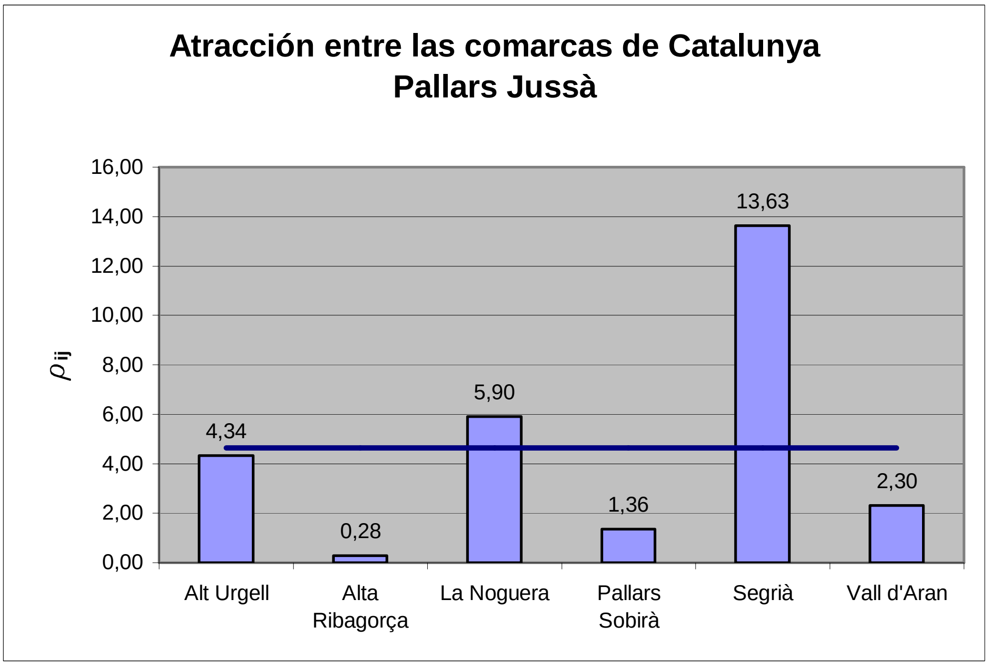

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Les Garrigues
ρ ij
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,56
0,49
0,05
0,65
2,15
1,43
Conca de Barberà
l'Urgell
Pla d'Urgell
Priorat
Ribera d'Ebre
Segrià

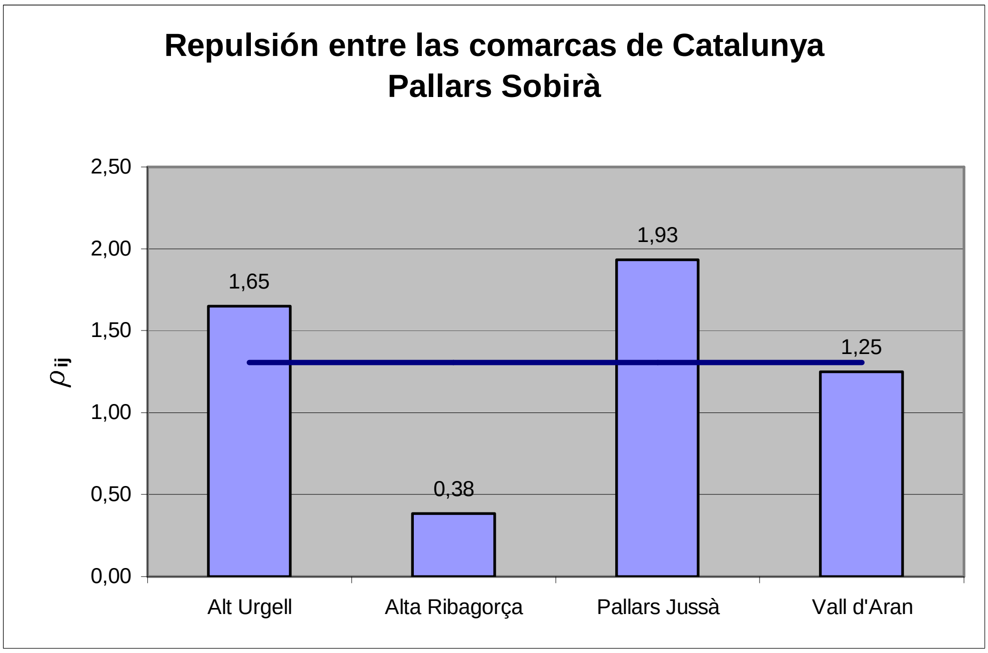

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
L'Urgell
ρij
5,00
4,50
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,51
2,80
0,49
0,14
0,07
4,43
Conca de Barberà
La Noguera
Les Garrigues
Pla d'Urgell
Segarra
Segrià

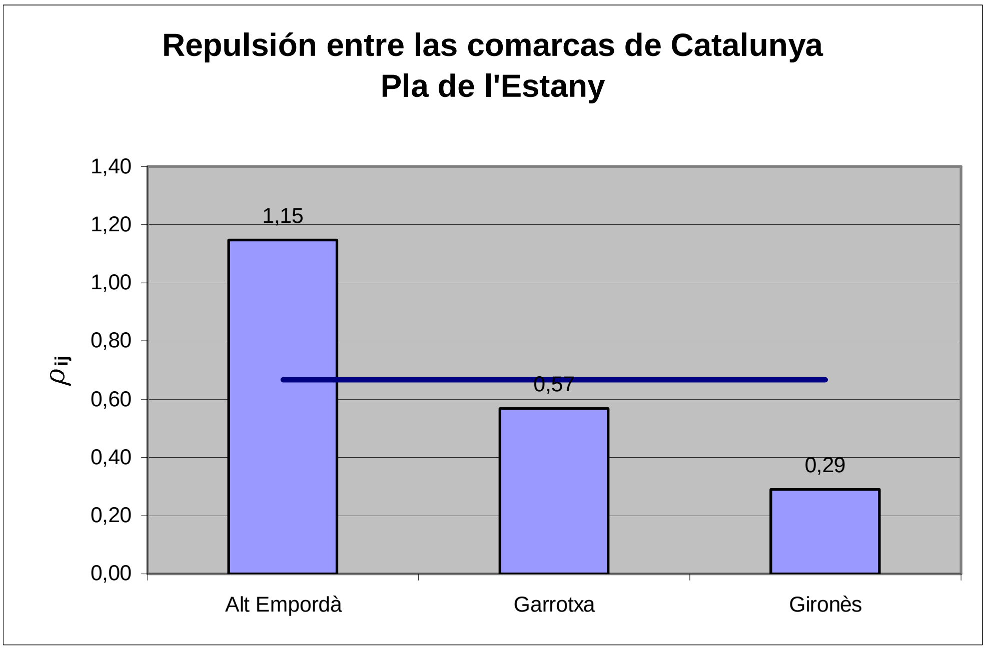

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Maresme
ρij
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,16
1,10
0,18
Barcelonès
La Selva
Vallès Oriental

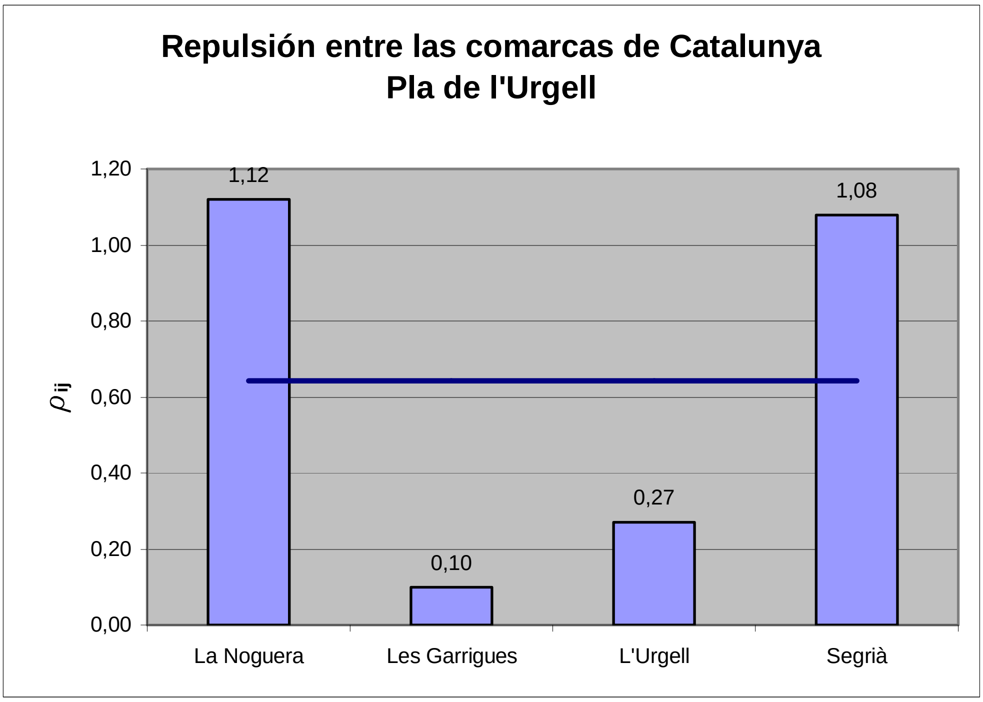

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Montsià
ρij
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
0,15
Baix Ebre

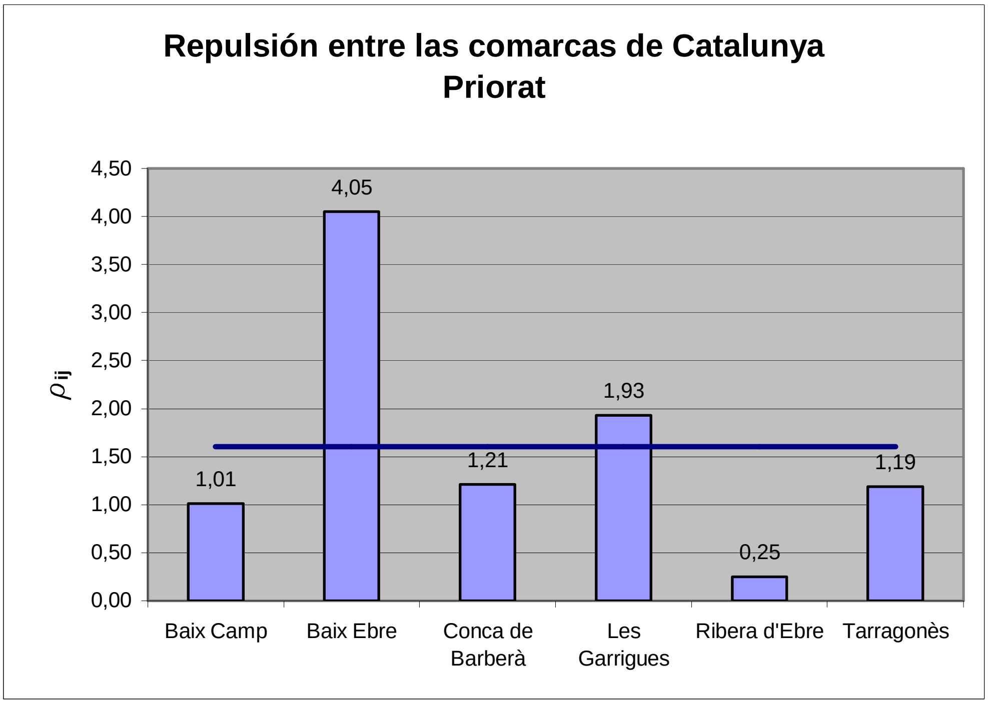

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Osona
ρij
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
2,73
1,13
0,47
1,31
1,17
0,47
1,20
Bages
Berguedà
Garrotxa
Gironès
La Selva
Ripollès
Vallès Oriental

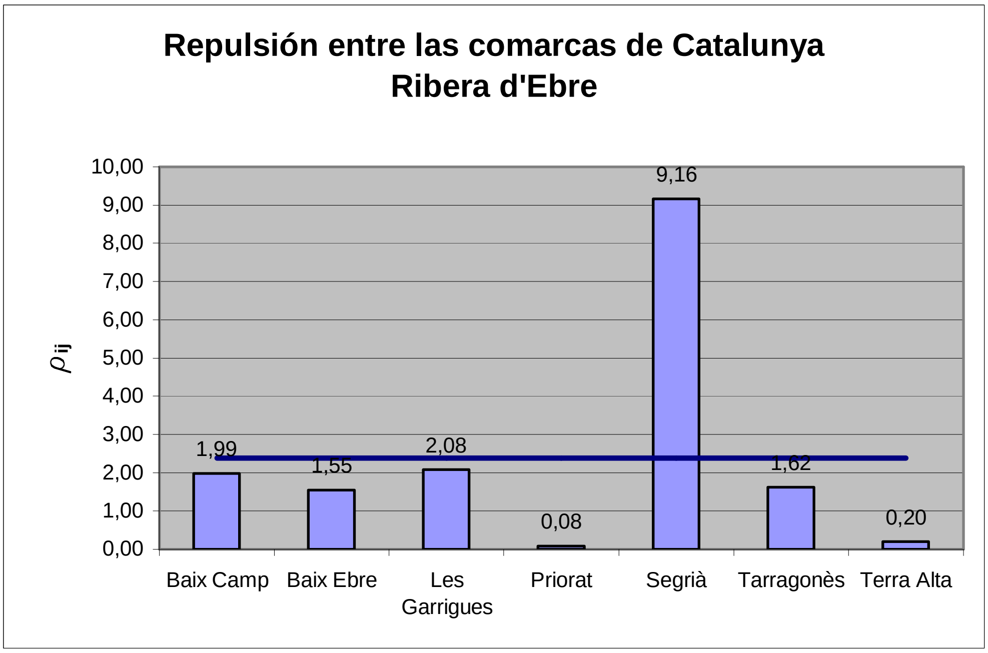

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pallars Jussà
ρ_{ij}
16,00
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
4,34
0,28
5,90
1,36
13,63
2,30
Alt Urgell
Alta Ribagorça
La Noguera
Pallars Sobirà
Segrià
Vall d'Aran

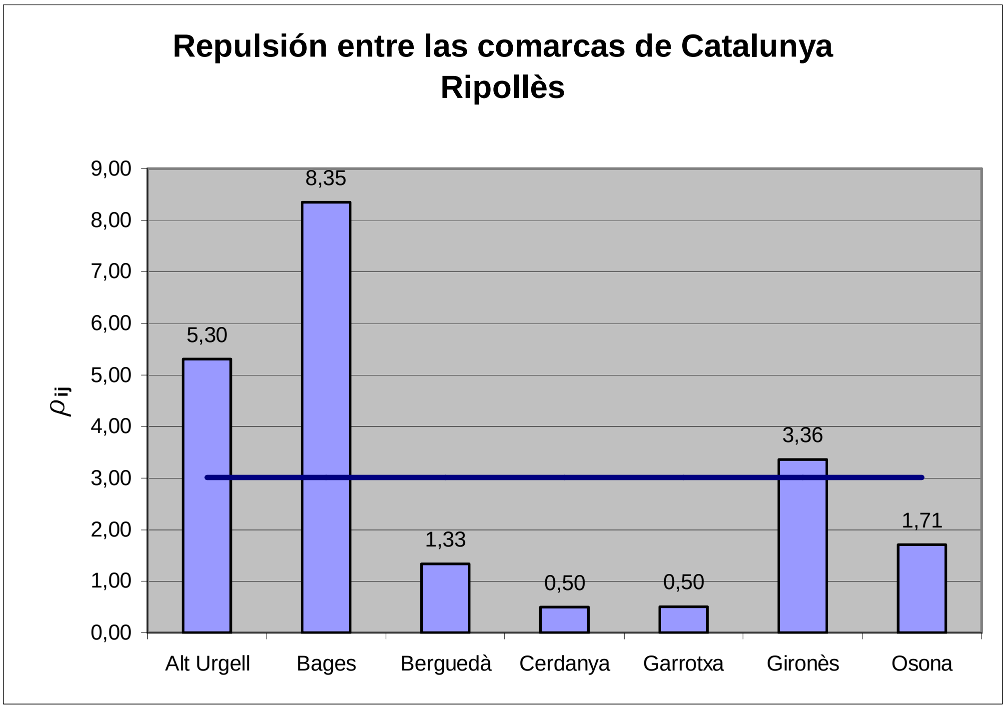

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Pallars Sobirà
ρ_{ij}
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
1,65
0,38
1,93
1,25
Alt Urgell
Alta Ribagorça
Pallars Jussà
Vall d'Aran

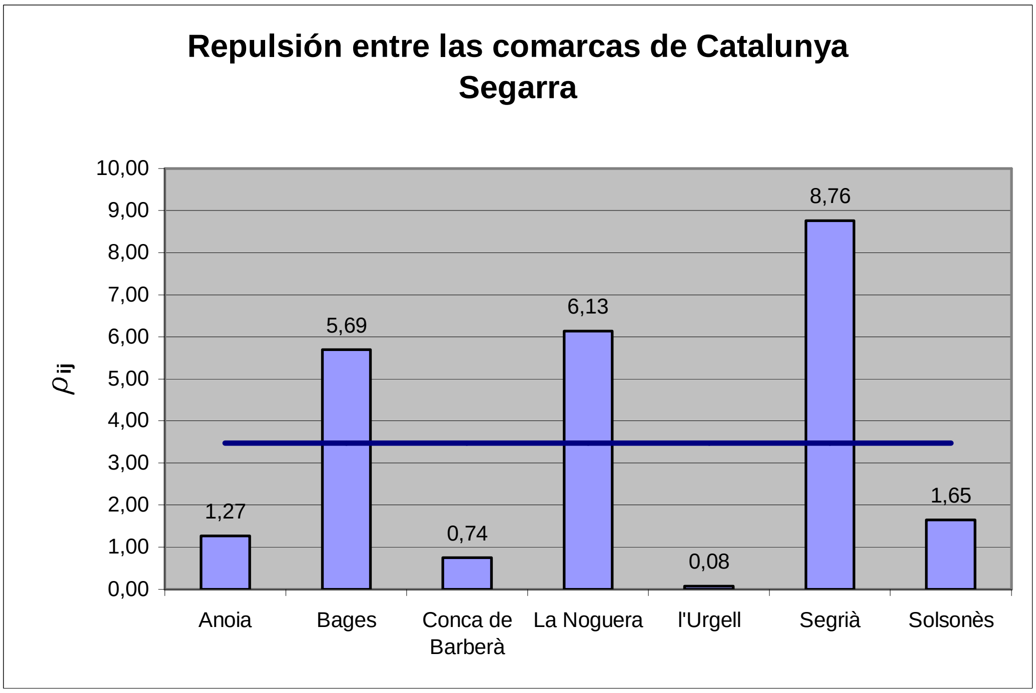

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Pla de l'Estany
ρ_{ij}
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
1,15
0,57
0,29
Alt Empordà
Garrotxa
Gironès

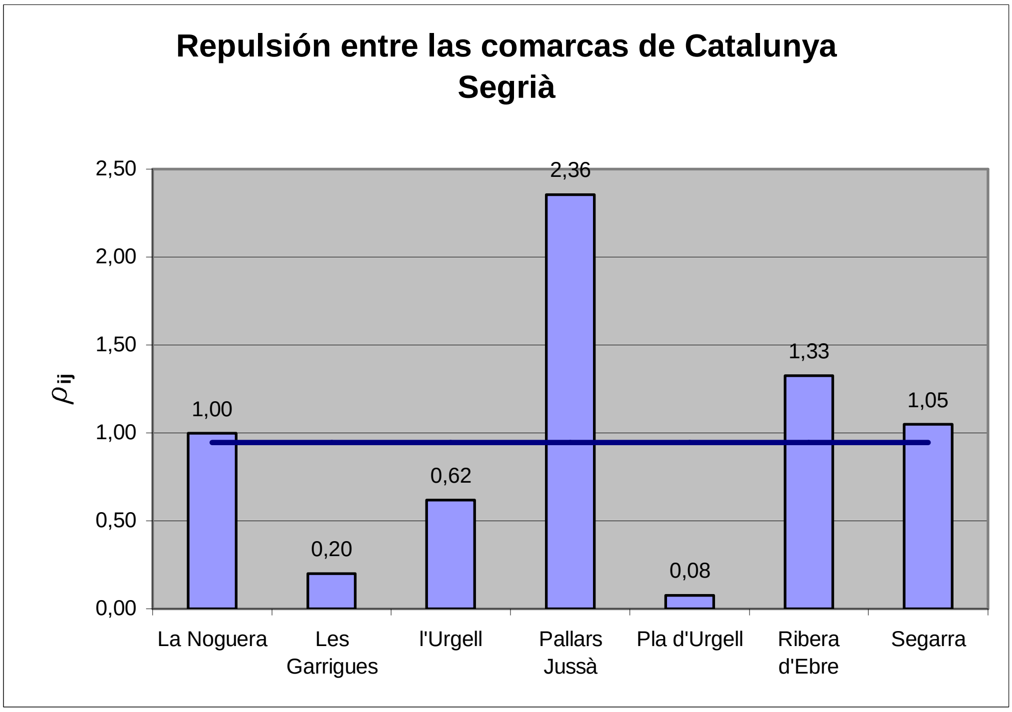

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Pla de l'Urgell
ρ_{ij}
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
1,12
0,10
0,27
1,08
La Noguera
Les Garrigues
L'Urgell
Segrià

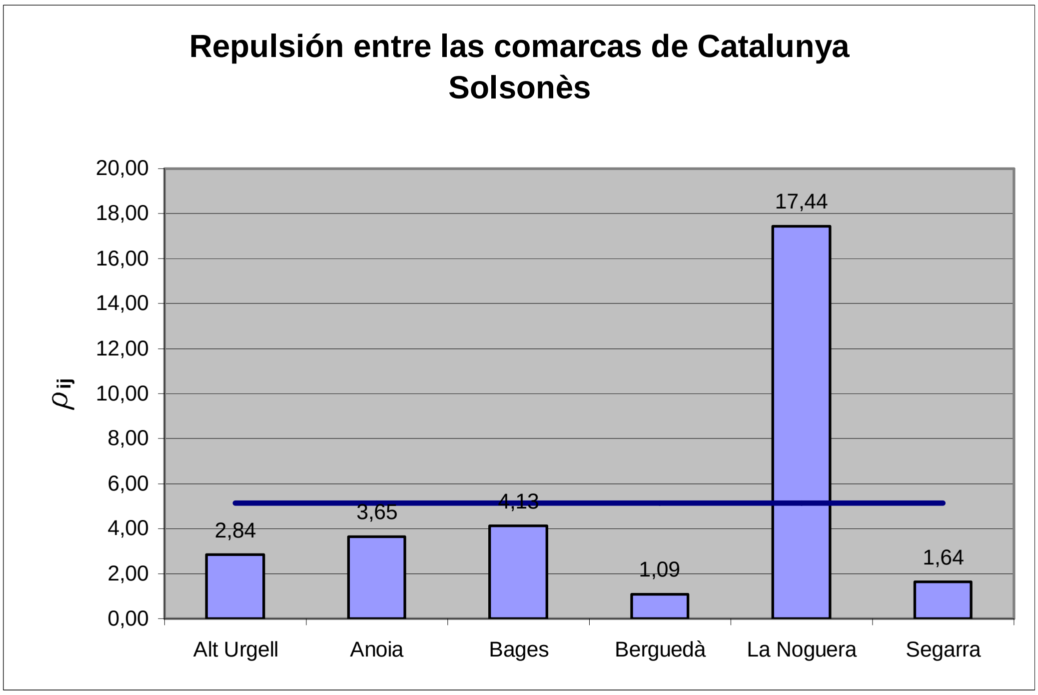

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Priorat
ρ ij
4,50
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
1,01
4,05
1,21
1,93
0,25
1,19
Baix Camp
Baix Ebre
Conca de Barberà
Les Garrigues
Ribera d'Ebre
Tarragonès

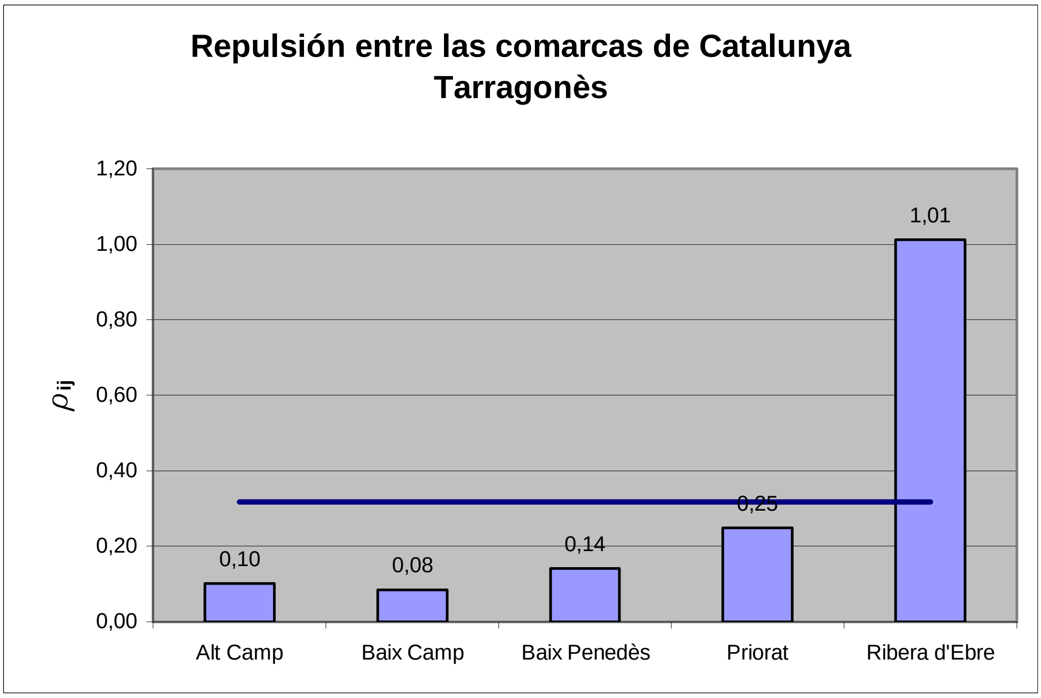

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Ribera d'Ebre
ρ ij
10,00
9,00
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
1,99
1,55
2,08
0,08
9,16
1,62
0,20
Baix Camp
Baix Ebre
Les Garrigues
Priorat
Segrià
Tarragonès
Terra Alta

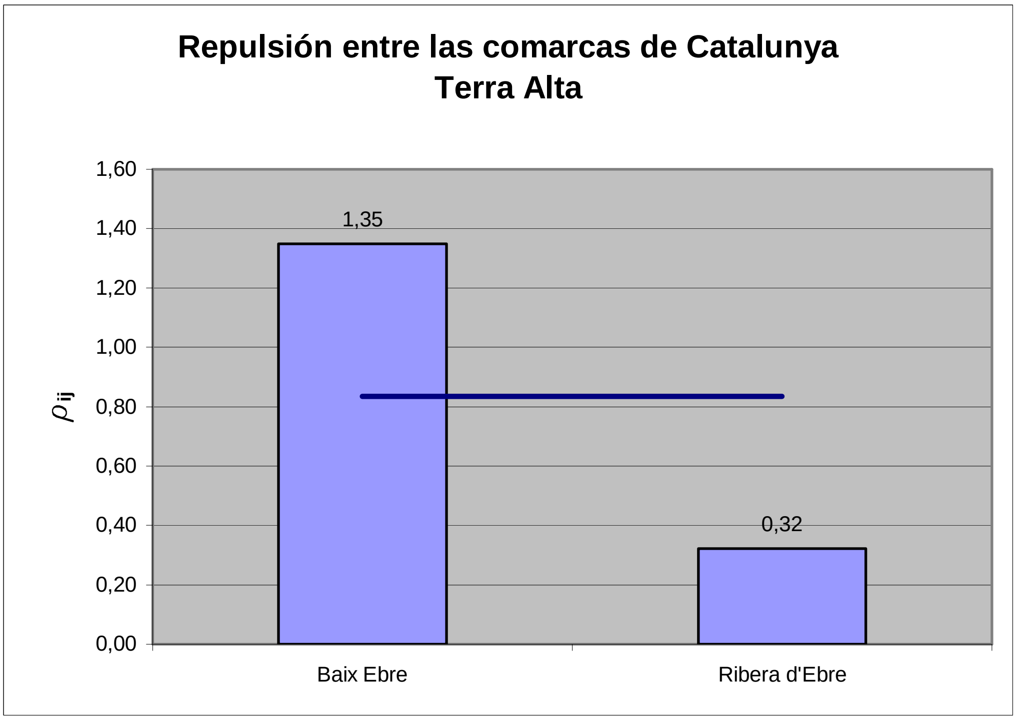

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Ripollès
ρij
9,00
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
5,30
8,35
1,33
0,50
0,50
3,36
1,71
Alt Urgell
Bages
Berguedà
Cerdanya
Garrotxa
Gironès
Osona

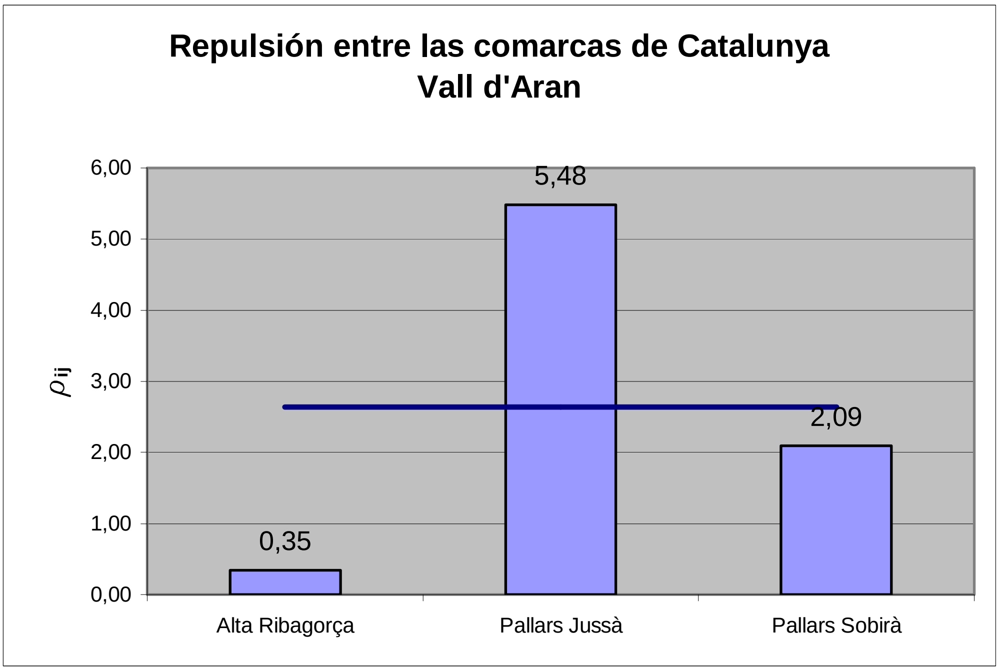

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Segarra
ρij
10,00
9,00
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
1,27
5,69
0,74
6,13
0,08
8,76
1,65
Anoia
Bages
Conca de Barberà
La Noguera
l'Urgell
Segrià
Solsonès

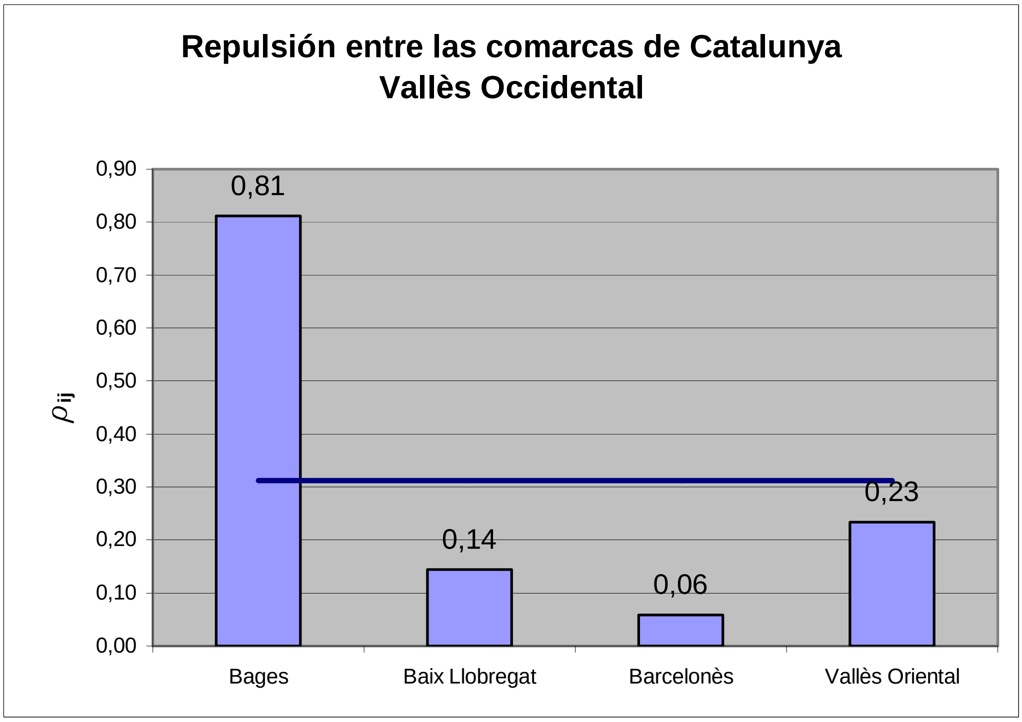

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Segrià
ρ ij
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
1,00
0,20
0,62
2,36
0,08
1,33
1,05
La Noguera
Les Garrigues
l'Urgell
Pallars Jussà
Pla d'Urgell
Ribera d'Ebre
Segarra

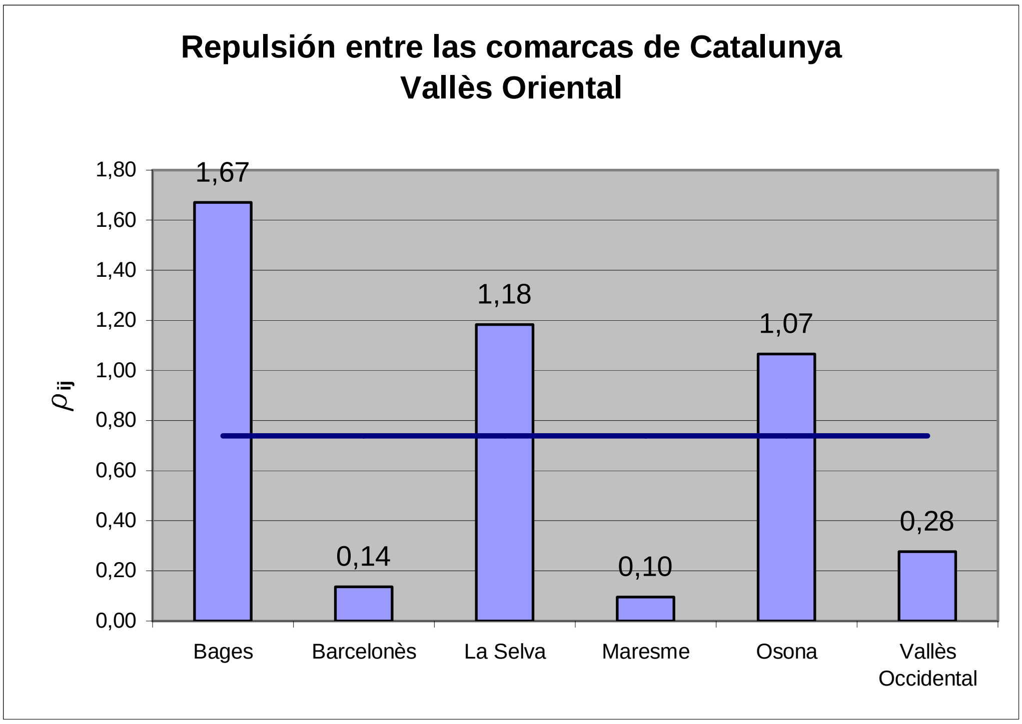

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Solsonès
ρ ij
20,00
18,00
16,00
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
2,84
3,65
4,13
1,09
17,44
1,64
Alt Urgell
Anoia
Bages
Berguedà
La Noguera
Segarra


Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Tarragonès
ρij
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,10
0,08
0,14
0,25
1,01
Alt Camp
Baix Camp
Baix Penedès
Priorat
Ribera d'Ebre

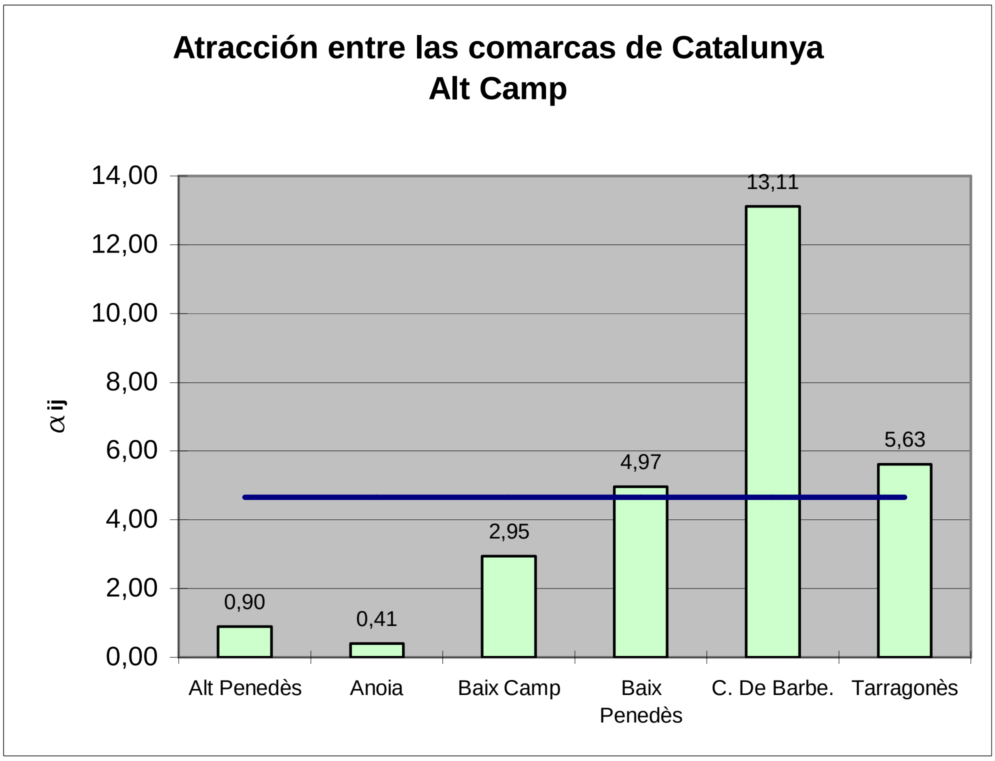

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Terra Alta
ρij
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
1,35
0,32
Baix Ebre
Ribera d'Ebre

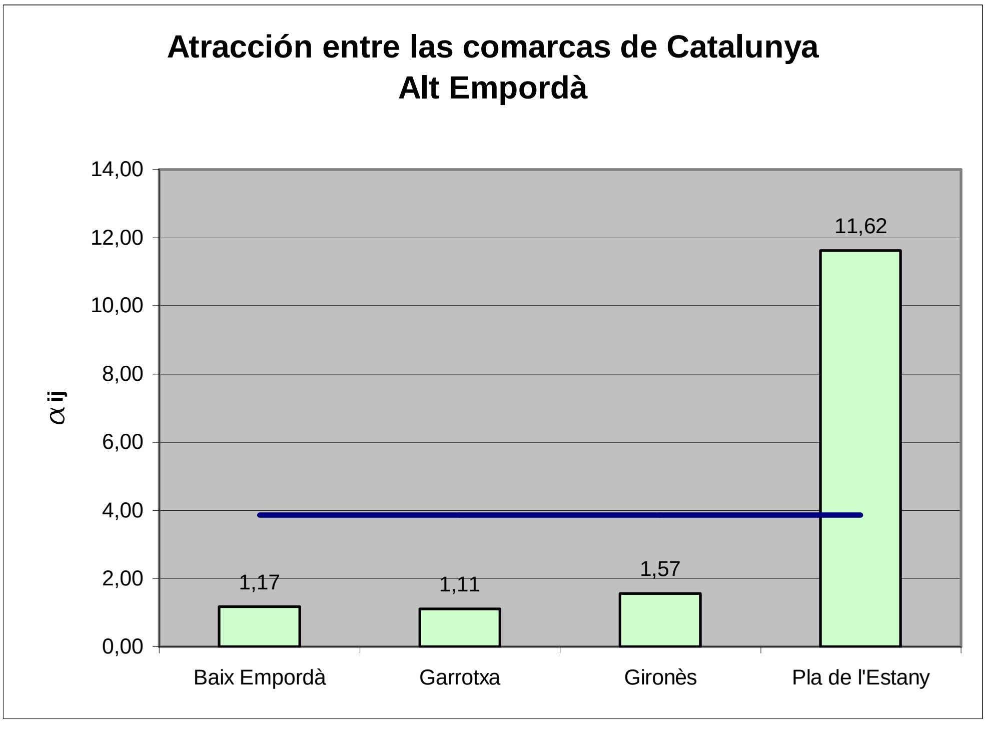

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Vall d'Aran
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
ρ ij
5,48
2,09
0,35
Alta Ribagorça
Pallars Jussà
Pallars Sobirà

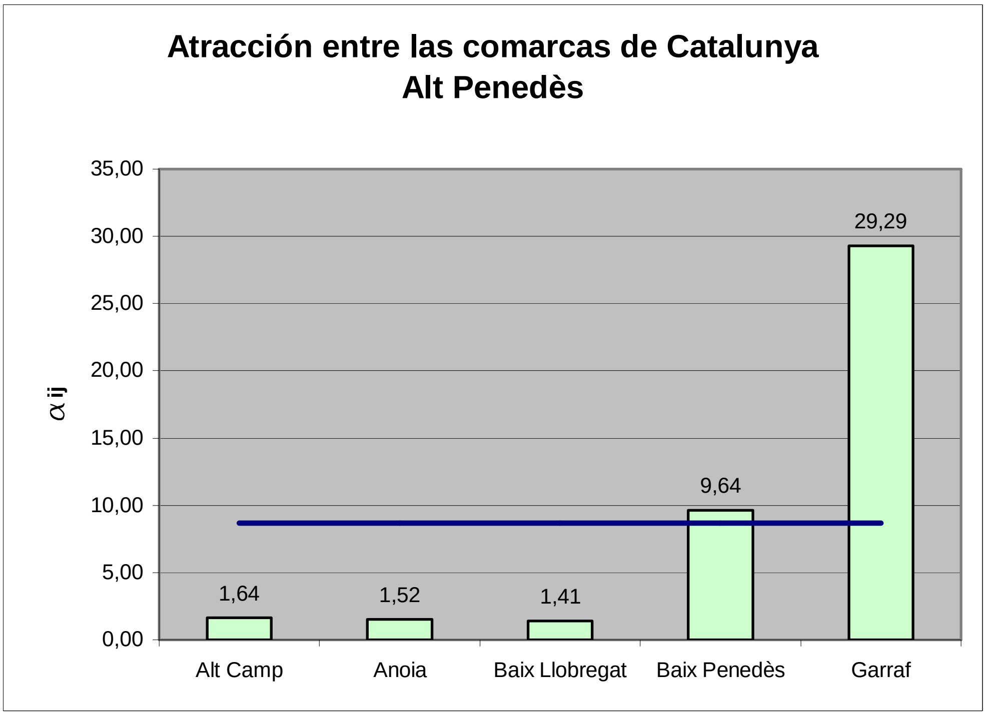

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Vallès Occidental
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
ρ ij
0,81
0,14
0,06
0,23
Bages
Baix Llobregat
Barcelonès
Vallès Oriental

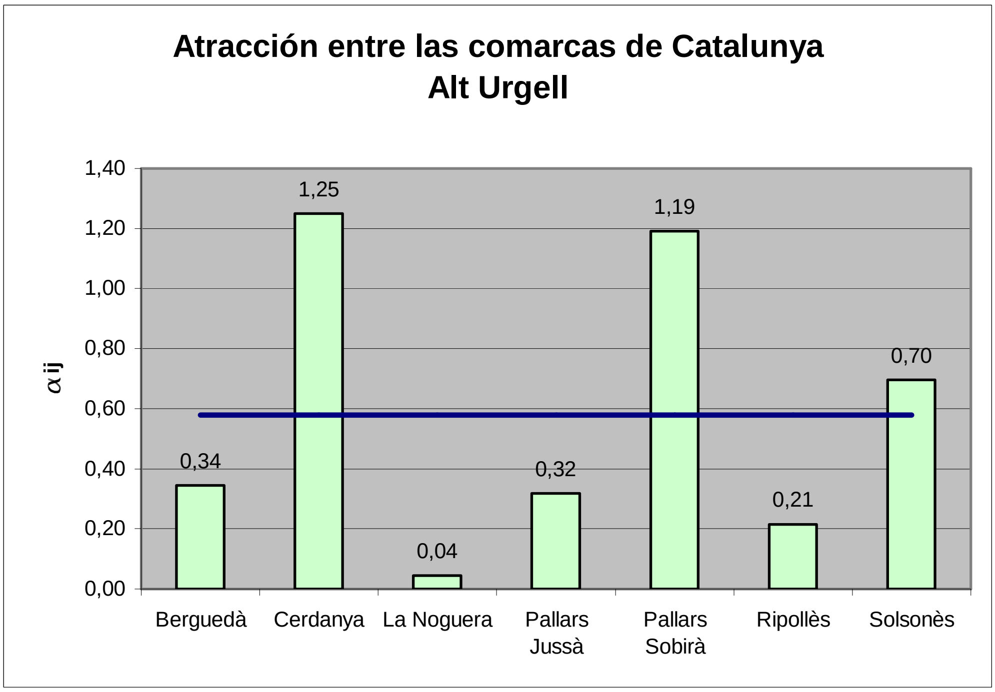

Repulsión entre las comarcas de Catalunya
Vallès Oriental
ρij
1,80
1,60
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
1,67
0,14
1,18
0,10
1,07
0,28
Bages
Barcelonès
La Selva
Maresme
Osona
Vallès Occidental

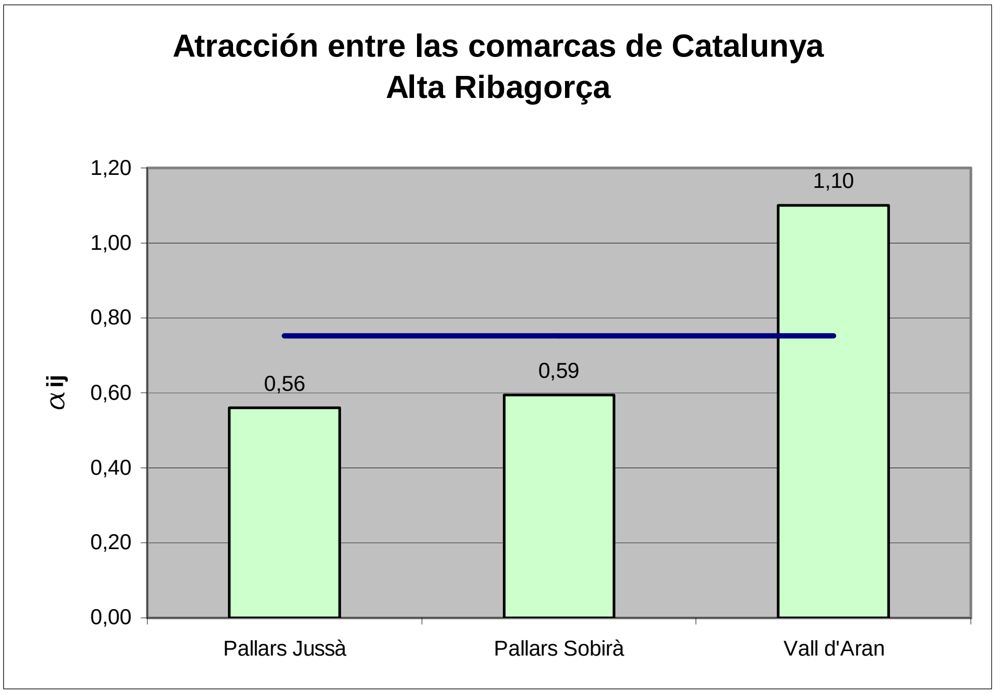
2. Grado de atracción $\alpha_{ij} = 1/\rho_{ij}$

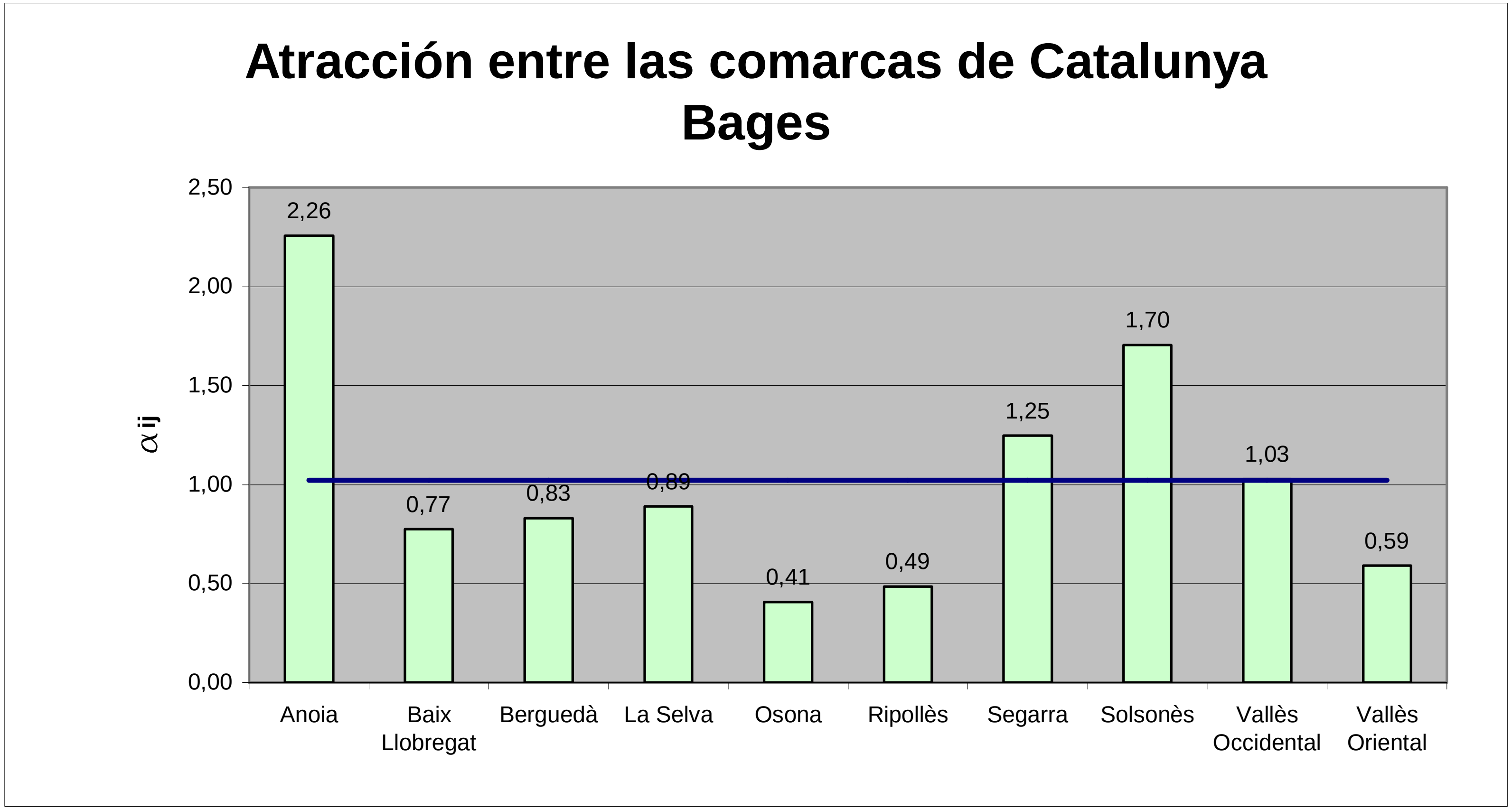

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Camp
α ij
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
0,90
0,41
2,95
4,97
13,11
5,63
Alt Penedès
Anoia
Baix Camp
Baix Penedès
C. De Barbe.
Tarragonès

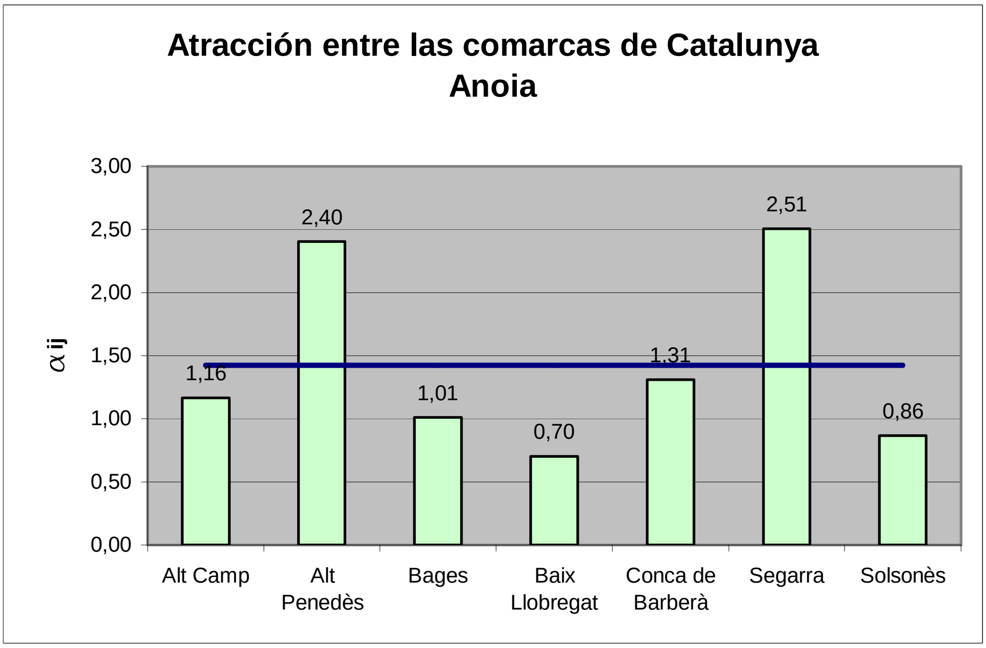

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Empordà
α ij
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
1,17
1,11
1,57
11,62
Baix Empordà
Garrotxa
Gironès
Pla de l'Estany


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Penedès
35,00
30,00
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
α ij
1,64
1,52
1,41
9,64
29,29
Alt Camp
Anoia
Baix Llobregat
Baix Penedès
Garraf

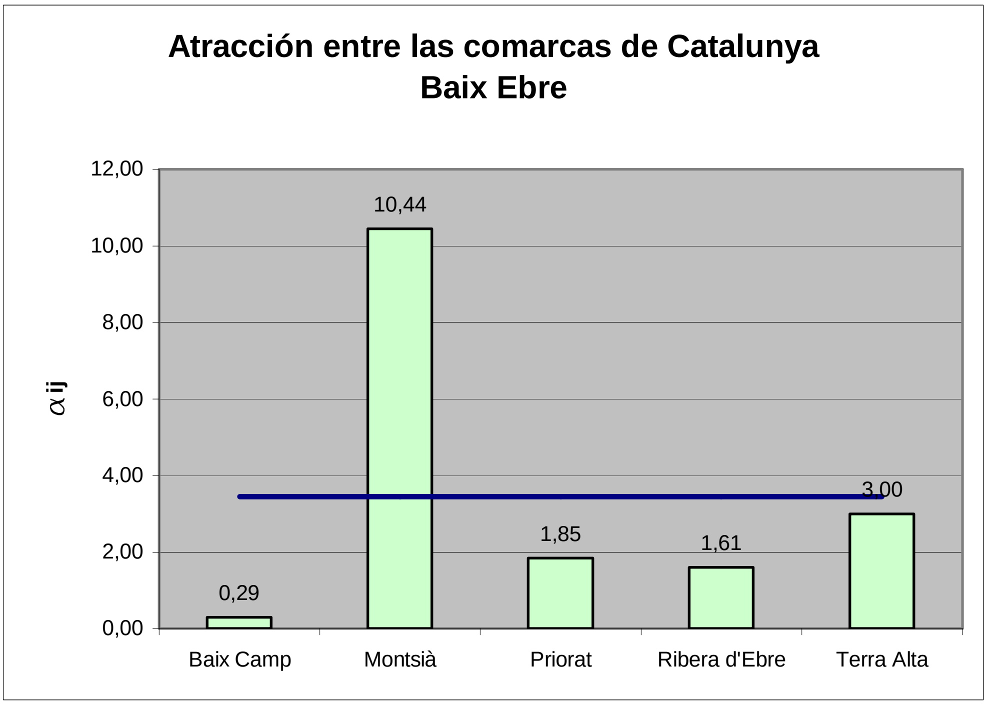

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Urgell
α ij
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,34
1,25
0,04
0,32
1,19
0,21
0,70
Berguedà
Cerdanya
La Noguera
Pallars Jussà
Pallars Sobirà
Ripollès
Solsonès

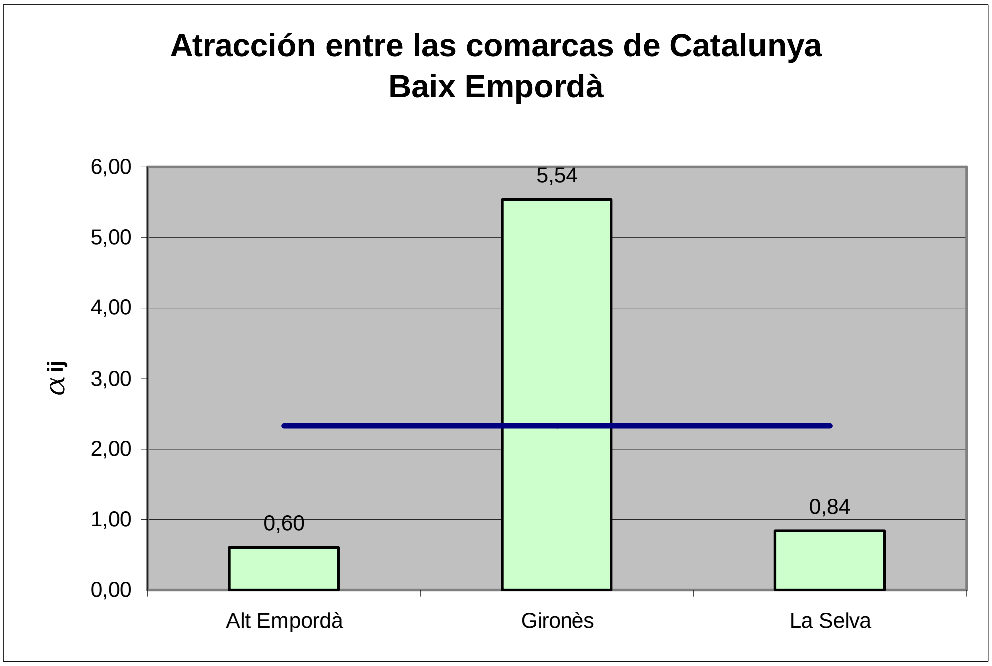

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alta Ribagorça
α ij
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,56
0,59
1,10
Pallars Jussà
Pallars Sobirà
Vall d'Aran

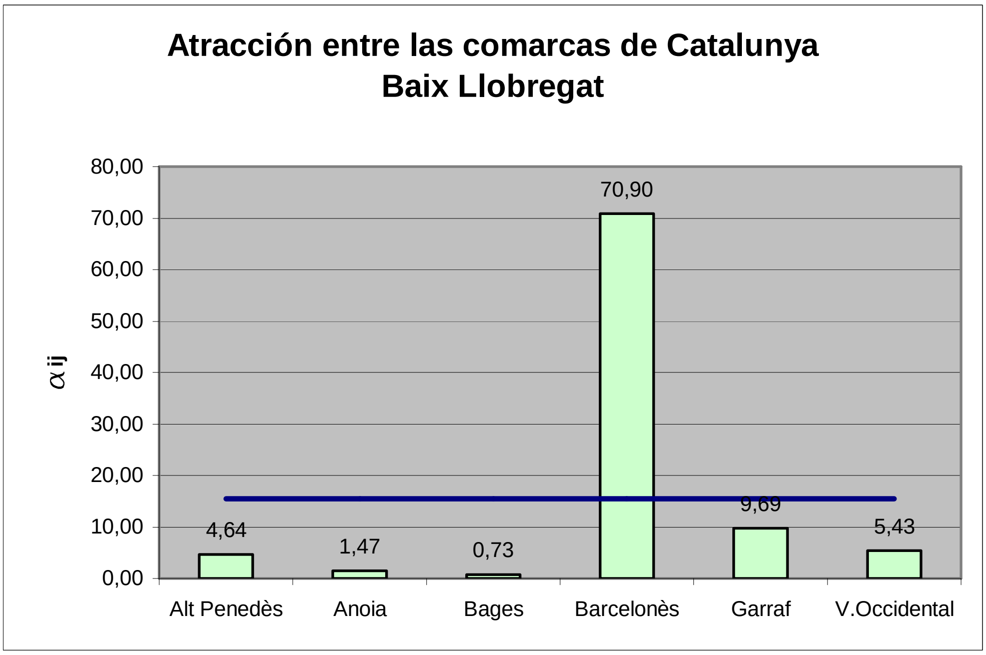

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Bages
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
α ij
2,26
0,77
0,83
0,89
0,41
0,49
1,25
1,70
1,03
0,59
Anoia
Baix Llobregat
Berguedà
La Selva
Osona
Ripollès
Segarra
Solsonès
Vallès Occidental
Vallès Oriental

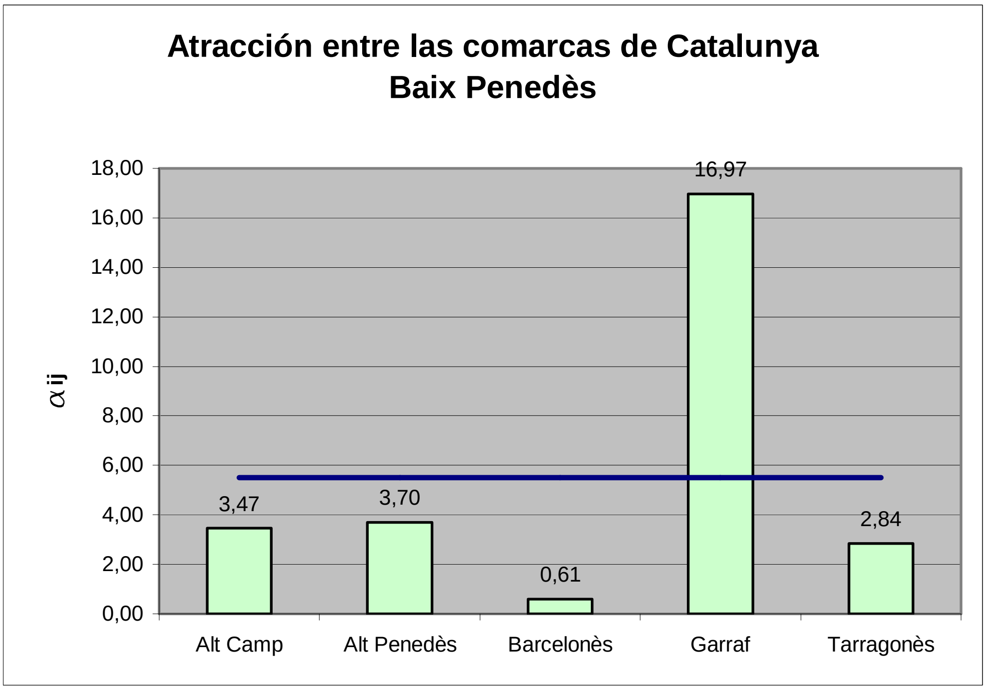

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Anoia
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
α ij
2,40
2,51
1,31
1,16
1,01
0,70
0,86
Alt Camp
Alt Penedès
Bages
Baix Llobregat
Conca de Barberà
Segarra
Solsonès

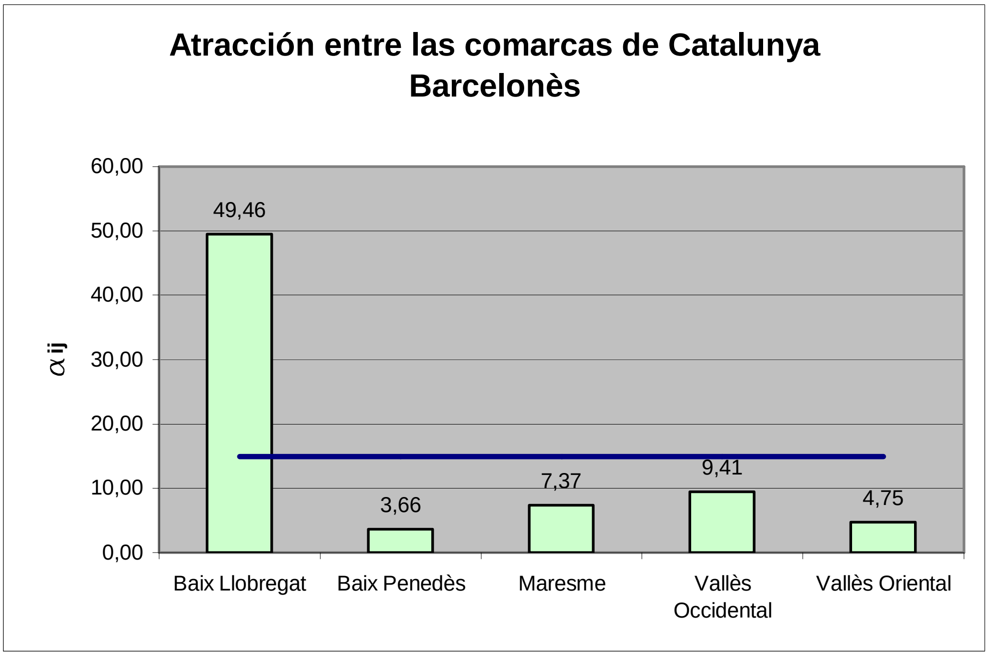

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Camp
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
α ij
21,95
9,55
8,81
4,81
0,34
1,50
Alt Camp
Baix Ebre
Conca de Barberà
Priorat
Ribera d'Ebre
Tarragonès

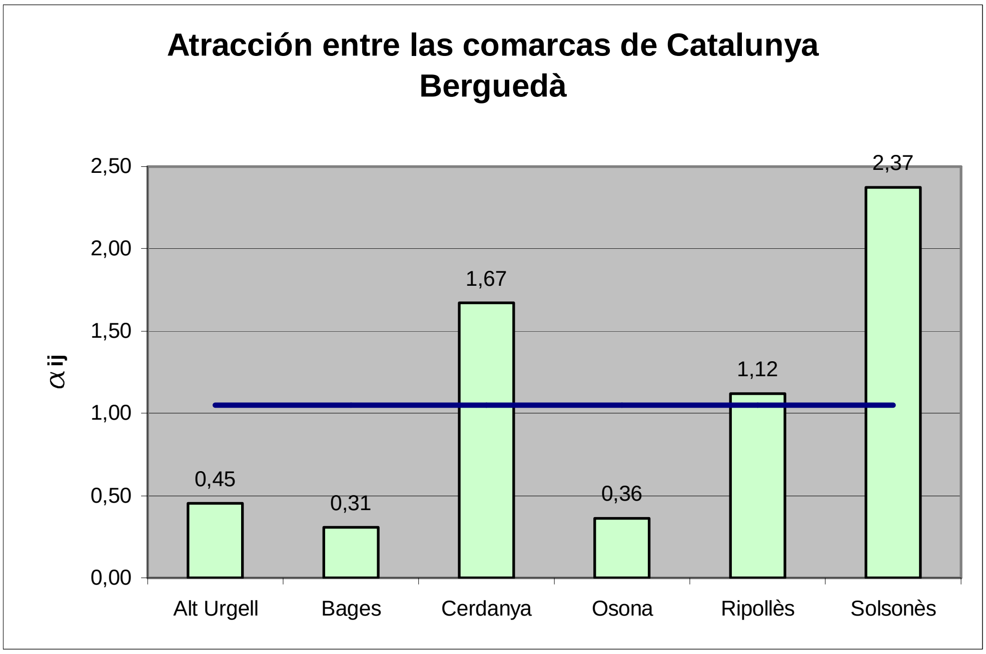

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Ebre
α ij
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
10,44
3,00
1,85
1,61
0,29
Baix Camp
Montsià
Priorat
Ribera d'Ebre
Terra Alta

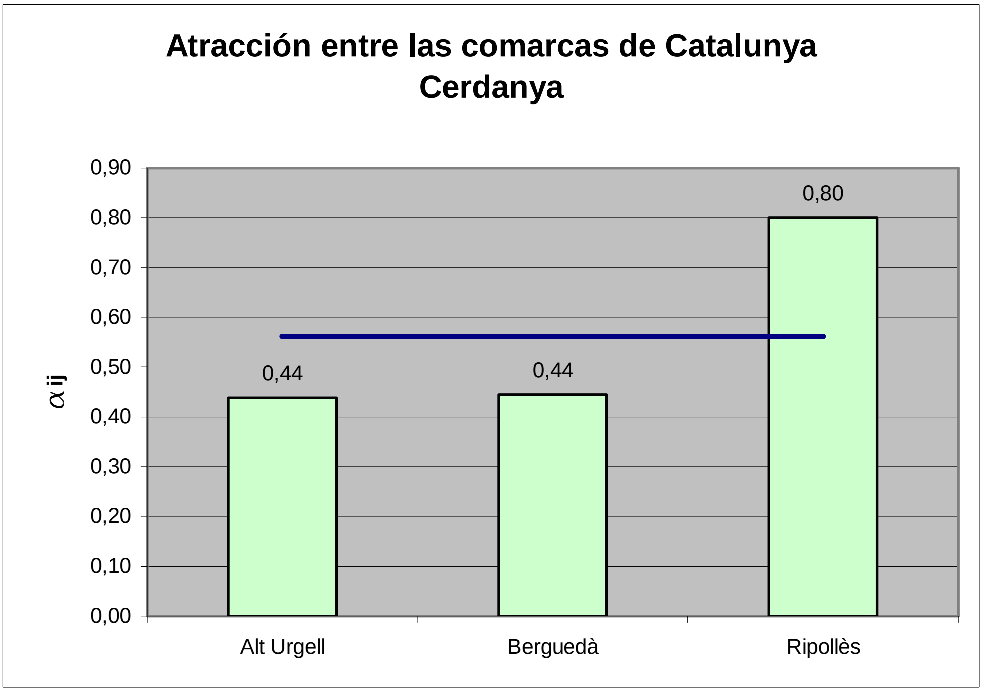

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Empordà
α ij
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
5,54
0,60
0,84
Alt Empordà
Gironès
La Selva

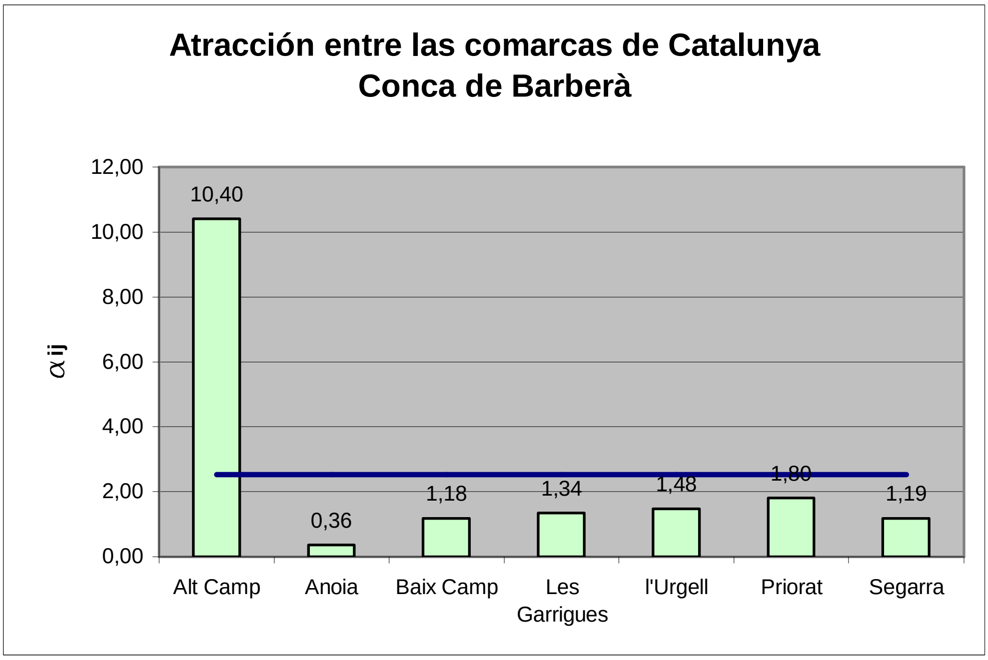

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Llobregat
α ij
80,00
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
4,64
1,47
0,73
70,90
9,69
5,43
Alt Penedès
Anoia
Bages
Barcelonès
Garraf
V.Occidental

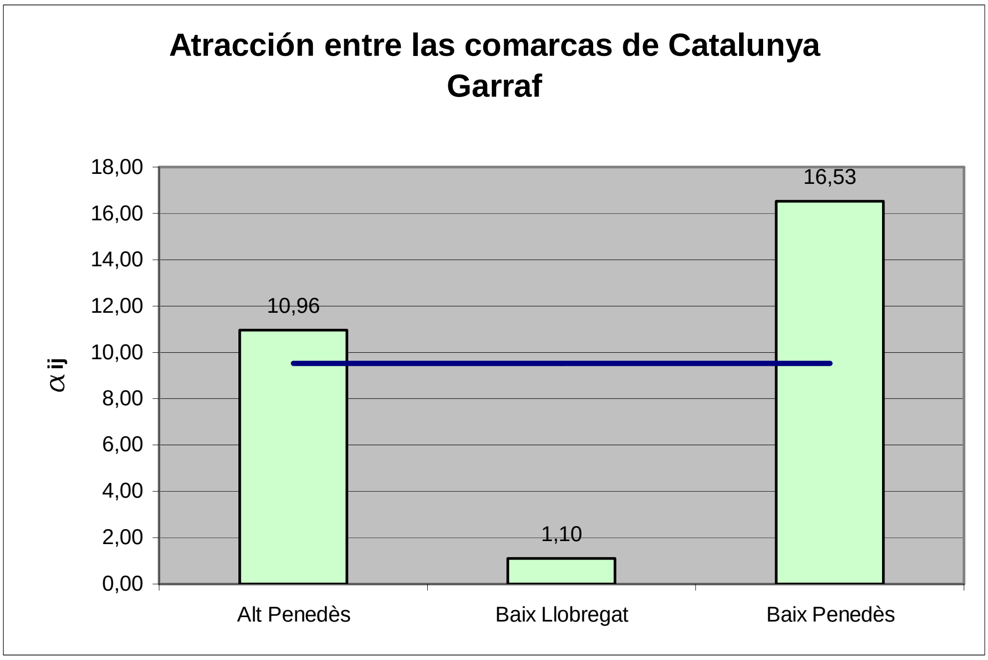

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Penedès
α ij
18,00
16,00
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
3,47
3,70
0,61
16,97
2,84
Alt Camp
Alt Penedès
Barcelonès
Garraf
Tarragonès

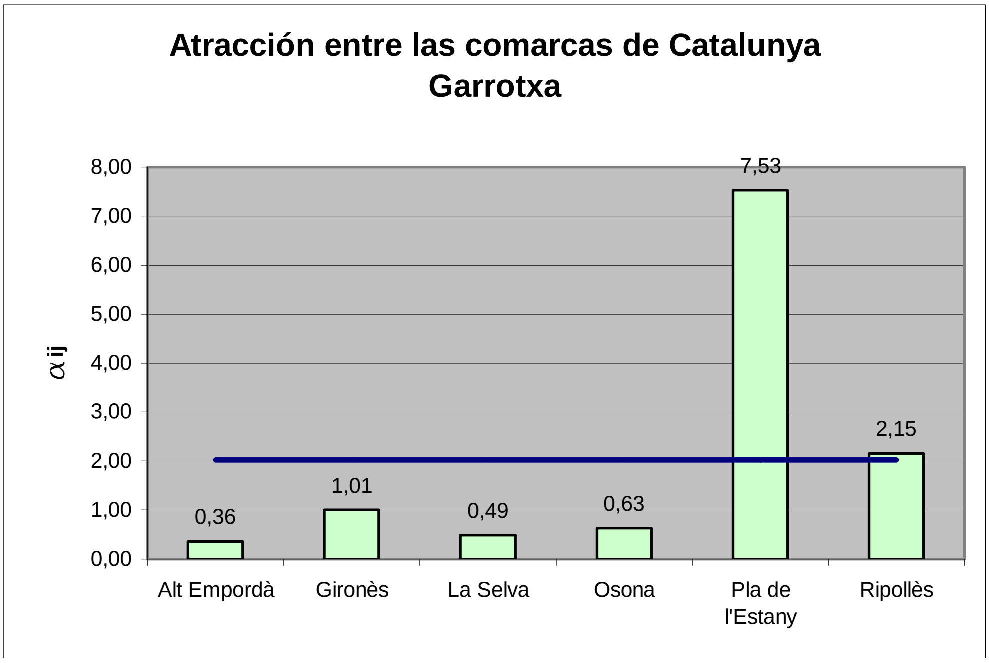

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Barcelonès
α ij
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
49,46
3,66
7,37
9,41
4,75
Baix Llobregat
Baix Penedès
Maresme
Vallès Occidental
Vallès Oriental

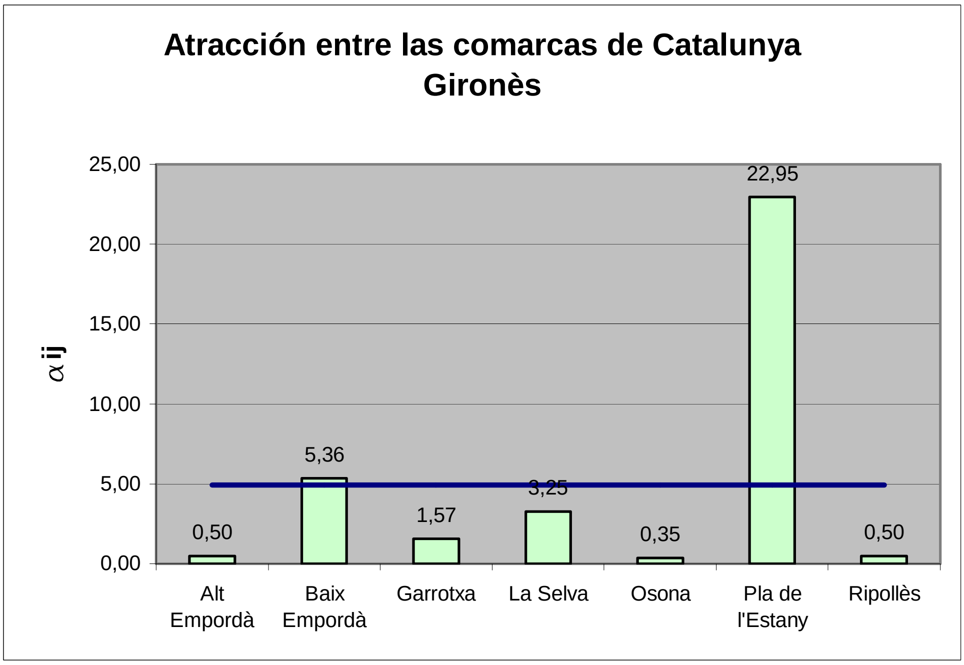

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Berguedà
α ij
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,45
0,31
1,67
0,36
1,12
2,37
Alt Urgell
Bages
Cerdanya
Osona
Ripollès
Solsonès

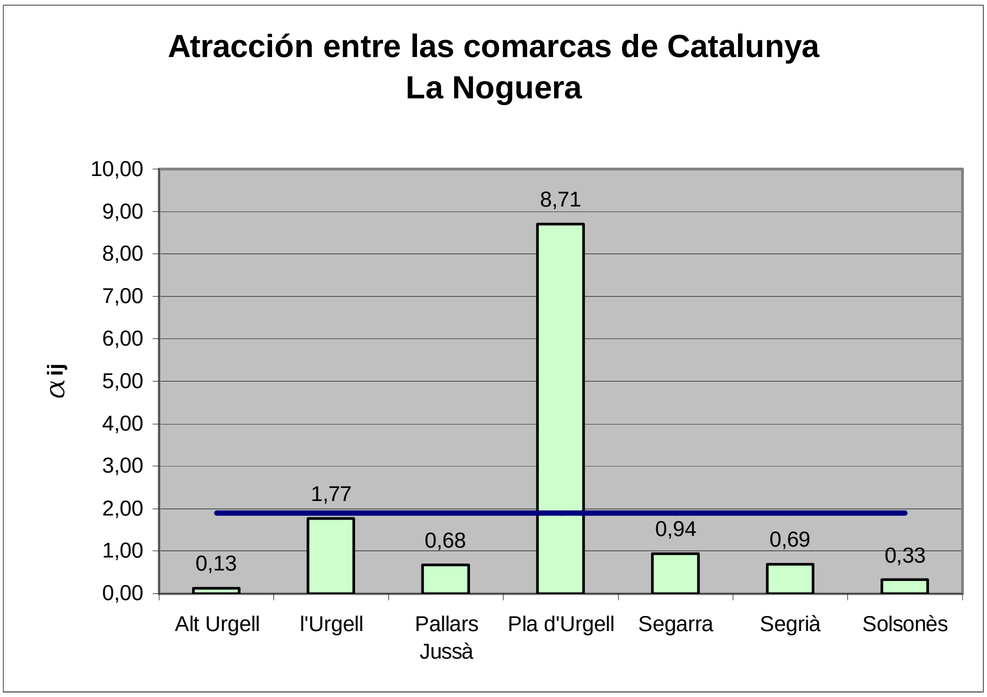

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Cerdanya
α ij
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,44
0,44
0,80
Alt Urgell
Berguedà
Ripollès


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Conca de Barberà
α ij
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
10,40
0,36
1,18
1,34
1,48
1,80
1,19
Alt Camp
Anoia
Baix Camp
Les Garrigues
l'Urgell
Priorat
Segarra

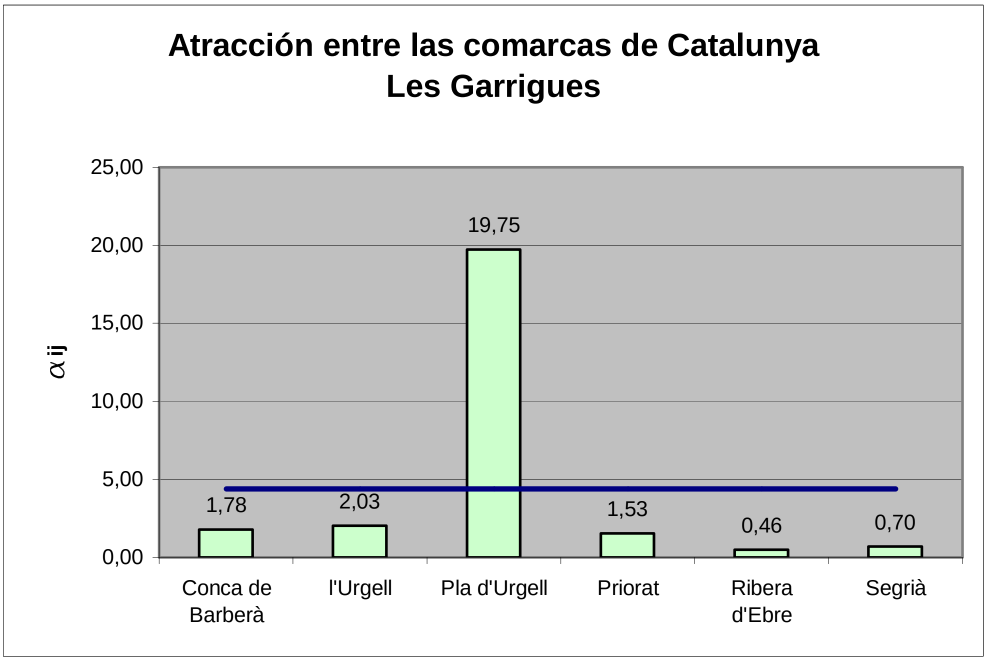

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Garraf
α ij
18,00
16,00
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
10,96
1,10
16,53
Alt Penedès
Baix Llobregat
Baix Penedès

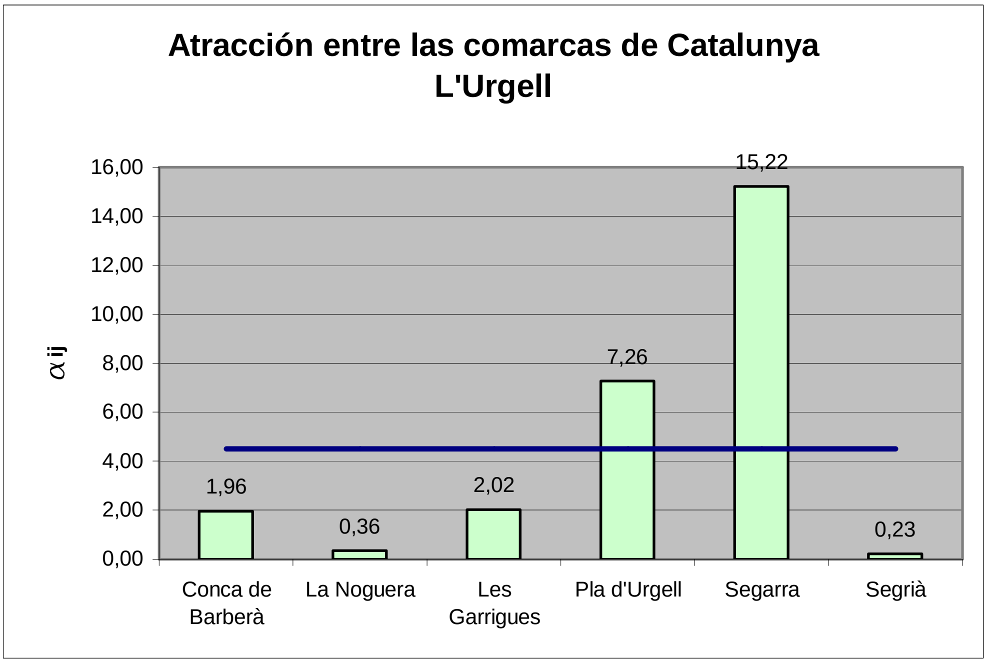

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Garrotxa
α ij
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
0,36
1,01
0,49
0,63
7,53
2,15
Alt Empordà
Gironès
La Selva
Osona
Pla de l'Estany
Ripollès

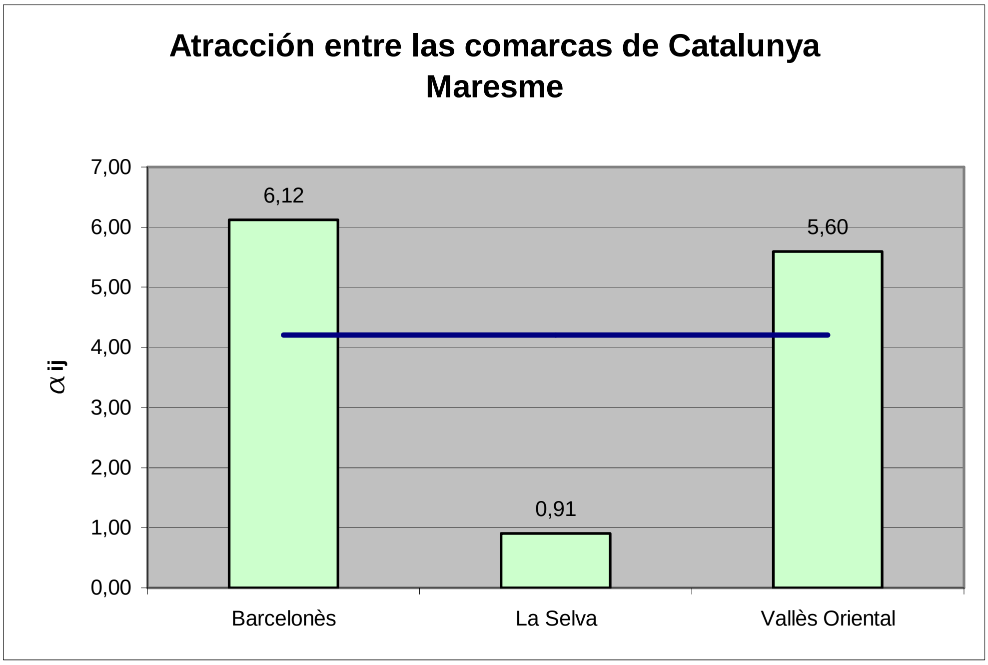

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Gironès
α ij
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
0,50
5,36
1,57
3,25
0,35
22,95
0,50
Alt Empordà
Baix Empordà
Garrotxa
La Selva
Osona
Pla de l'Estany
Ripollès

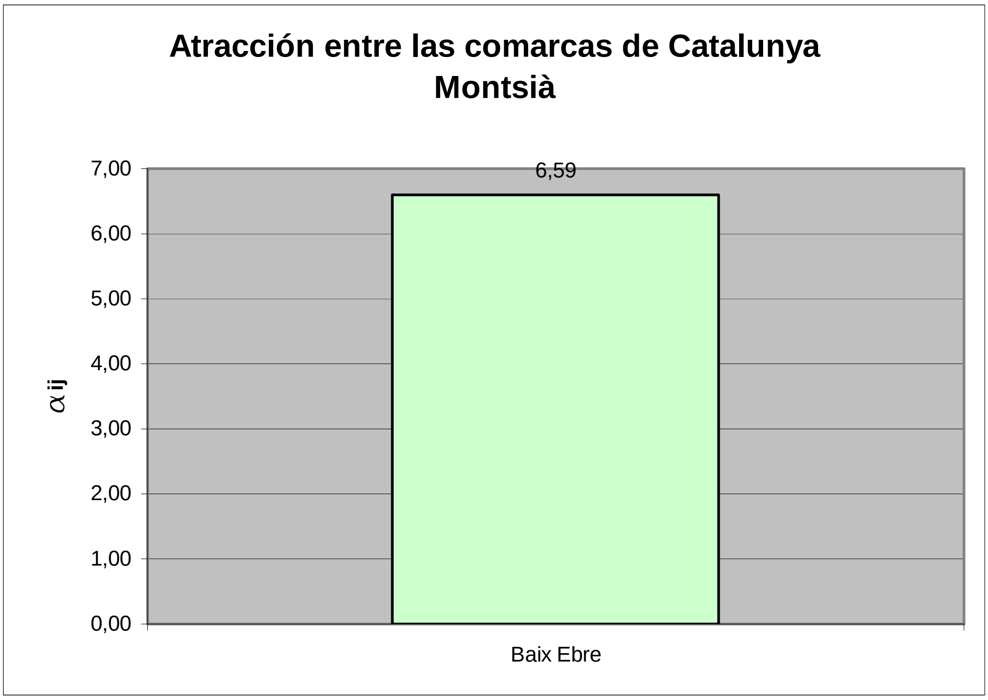

Atracción entre las comarcas de Catalunya
La Noguera
α ij
10,00
9,00
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
0,13
1,77
0,68
8,71
0,94
0,69
0,33
Alt Urgell
l'Urgell
Pallars Jussà
Pla d'Urgell
Segarra
Segrià
Solsonès

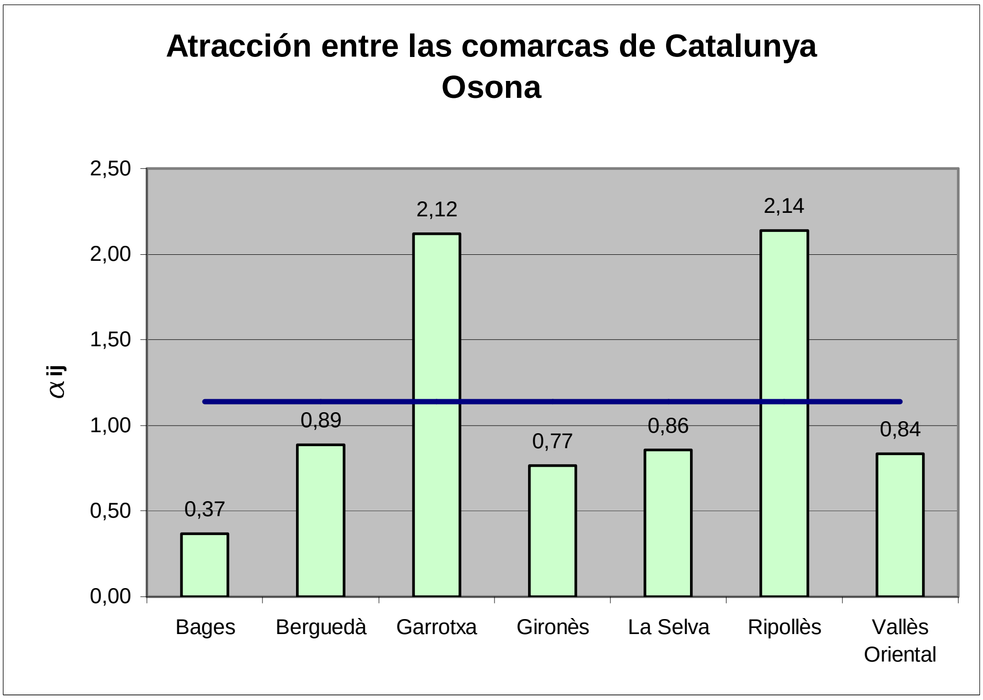

Atracción entre las comarcas de Catalunya
La Selva
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
α ij
5,11
1,28
1,20
1,09
0,58
0,62
0,55
Bages
Baix Empordà
Garrotxa
Gironès
Maresme
Osona
Vallès Oriental

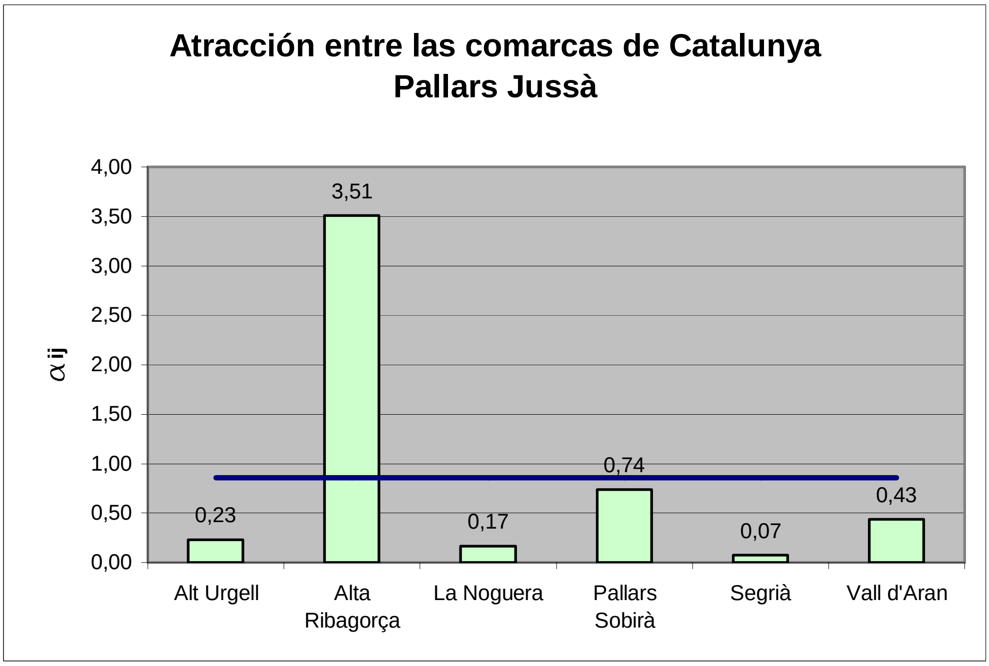

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Les Garrigues
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
α ij
19,75
1,78
2,03
1,53
0,46
0,70
Conca de Barberà
l'Urgell
Pla d'Urgell
Priorat
Ribera d'Ebre
Segrià

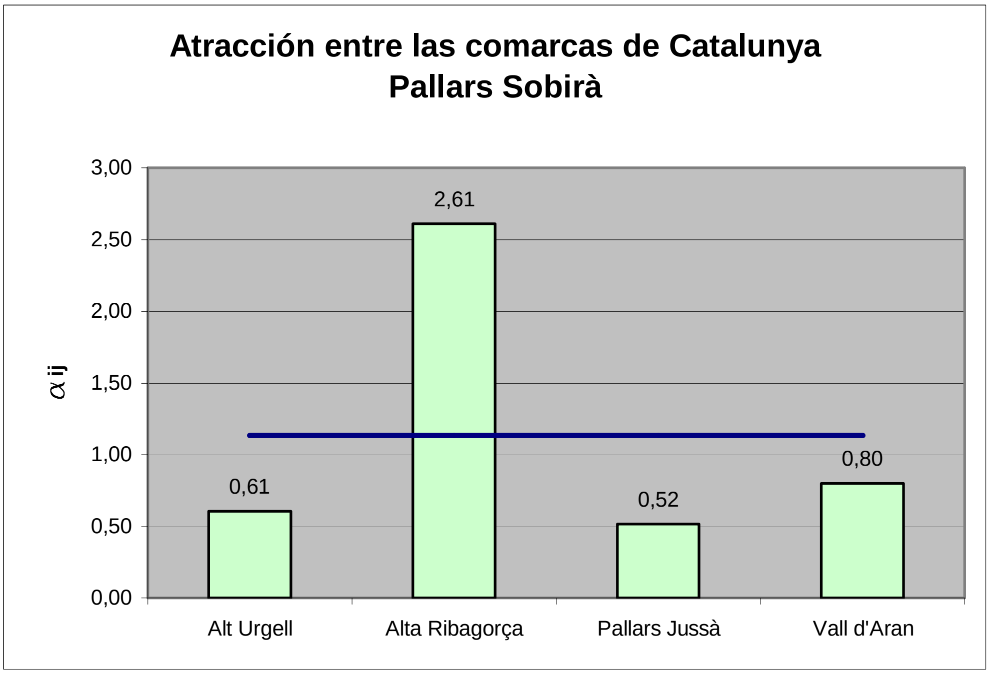

Atracción entre las comarcas de Catalunya
L'Urgell
α ij
16,00
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
1,96
0,36
2,02
7,26
15,22
0,23
Conca de Barberà
La Noguera
Les Garrigues
Pla d'Urgell
Segarra
Segrià

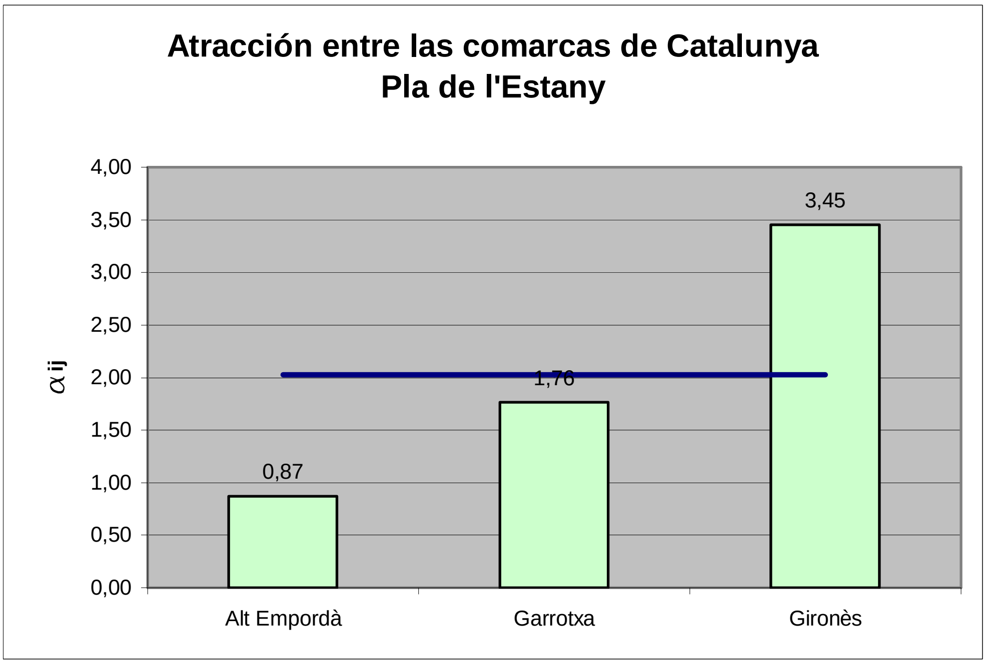

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Maresme
α ij
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
6,12
0,91
5,60
Barcelonès
La Selva
Vallès Oriental

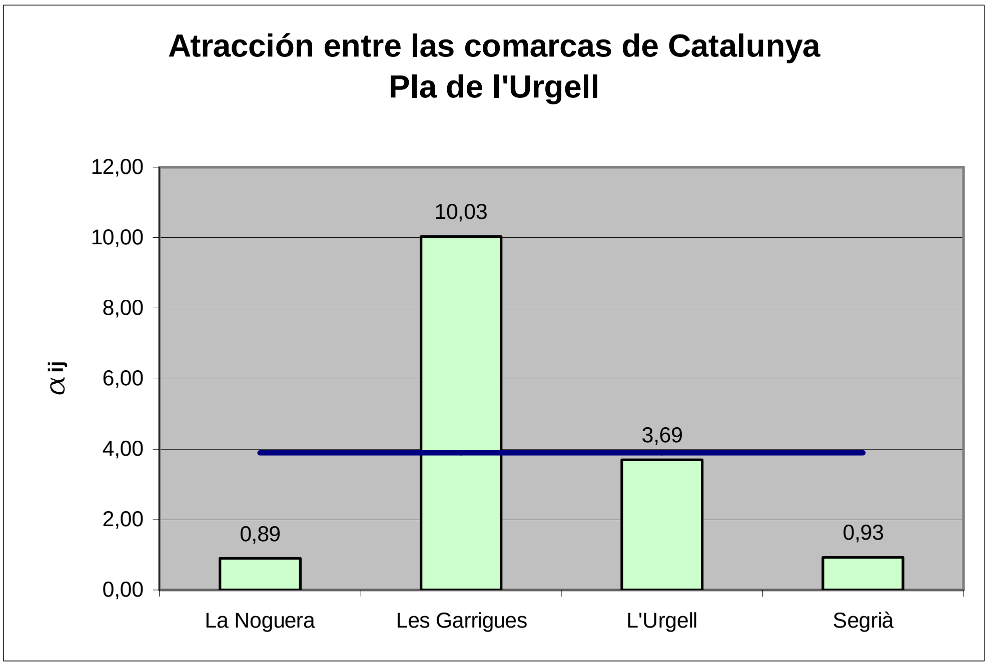

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Montsià
α ij
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
6,59
Baix Ebre

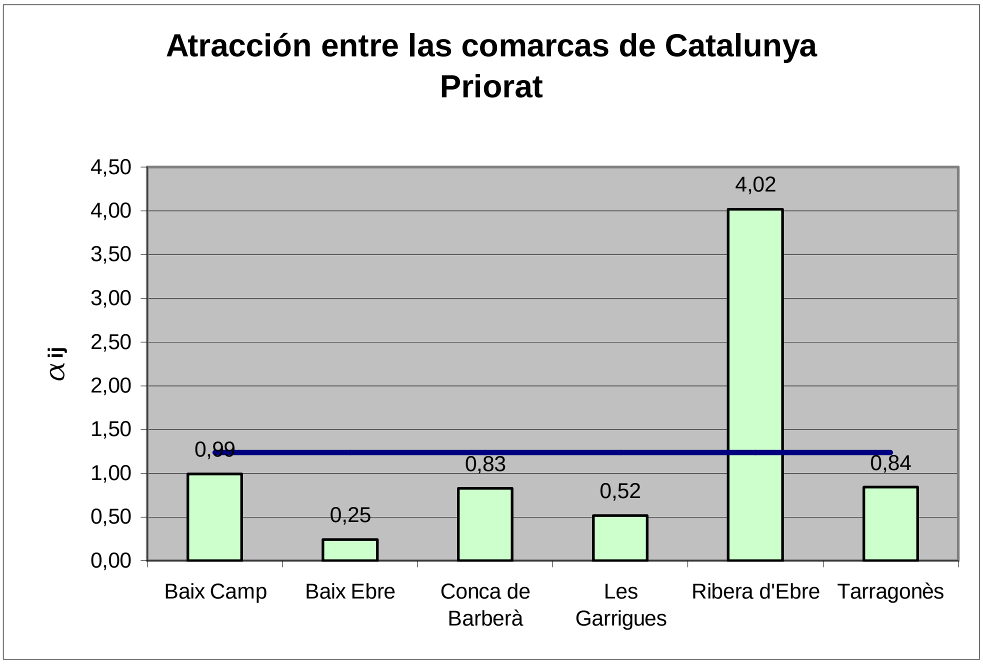

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Osona
α ij
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,37
0,89
2,12
0,77
0,86
2,14
0,84
Bages
Berguedà
Garrotxa
Gironès
La Selva
Ripollès
Vallès Oriental

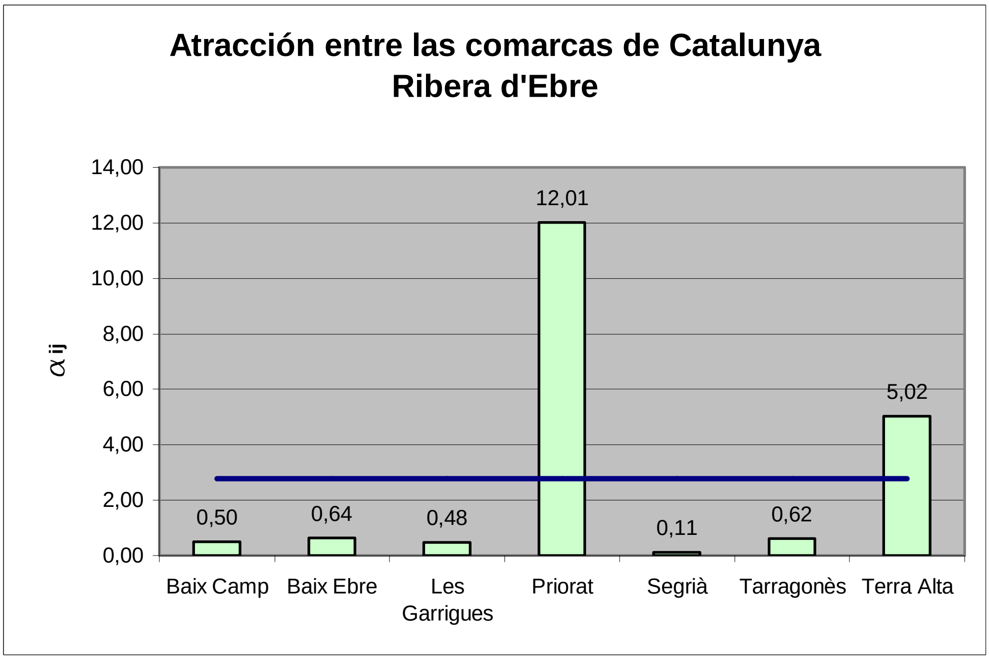

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pallars Jussà
α ij
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,23
3,51
0,17
0,74
0,07
0,43
Alt Urgell
Alta Ribagorça
La Noguera
Pallars Sobirà
Segrià
Vall d'Aran

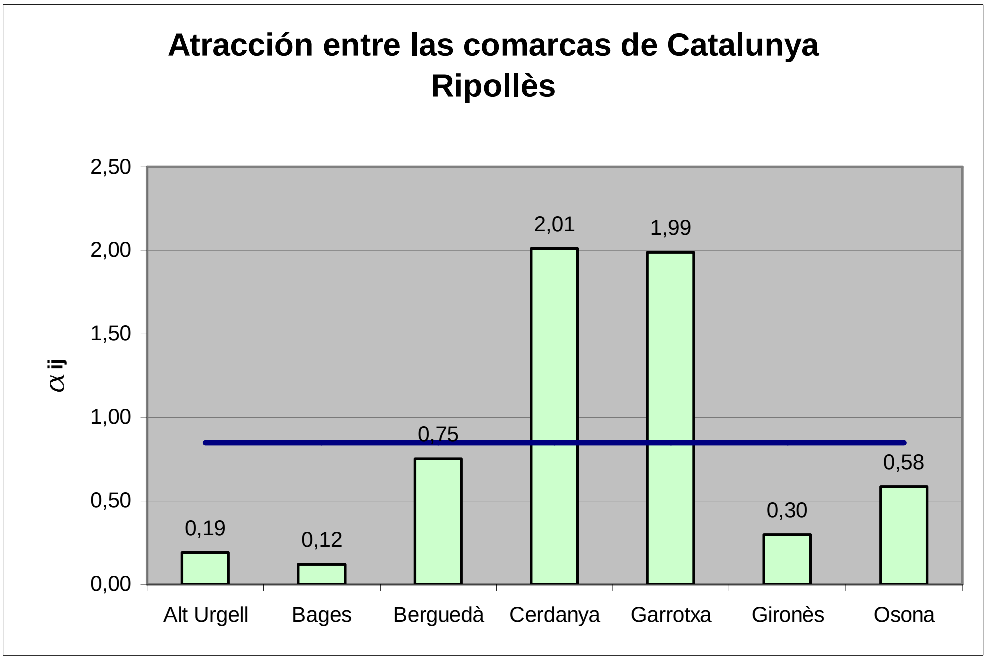

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pallars Sobirà
α ij
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,61
2,61
0,52
0,80
Alt Urgell
Alta Ribagorça
Pallars Jussà
Vall d'Aran


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pla de l'Estany
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
α ij
0,87
1,76
3,45
Alt Empordà
Garrotxa
Gironès

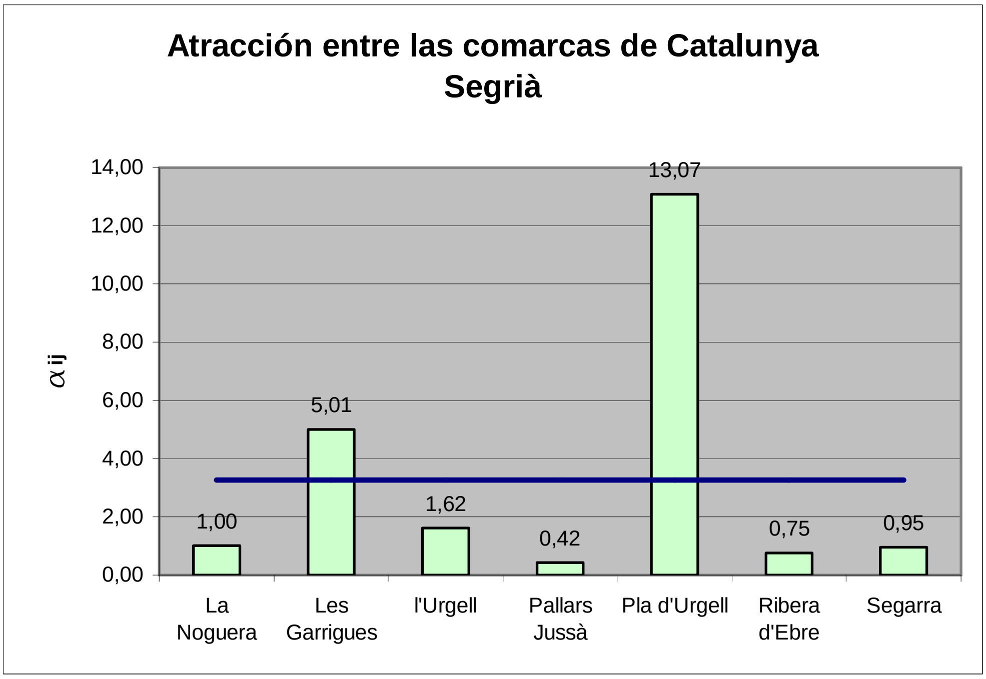

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pla de l'Urgell
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
α ij
0,89
10,03
3,69
0,93
La Noguera
Les Garrigues
L'Urgell
Segrià

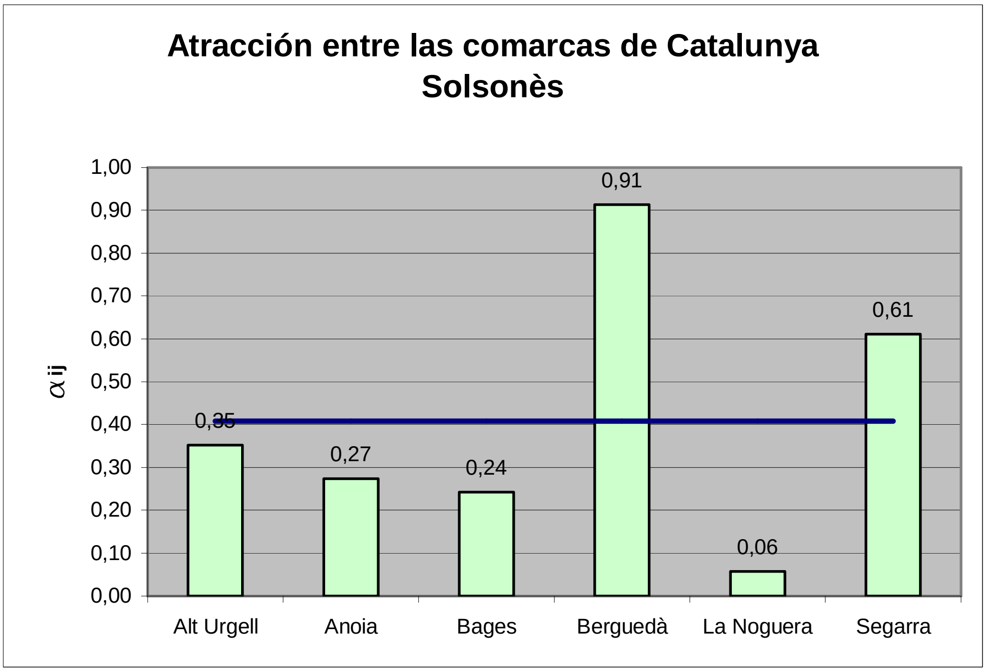

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Priorat
α ij
4,50
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,99
0,25
0,83
0,52
4,02
0,84
Baix Camp
Baix Ebre
Conca de Barberà
Les Garrigues
Ribera d'Ebre
Tarragonès

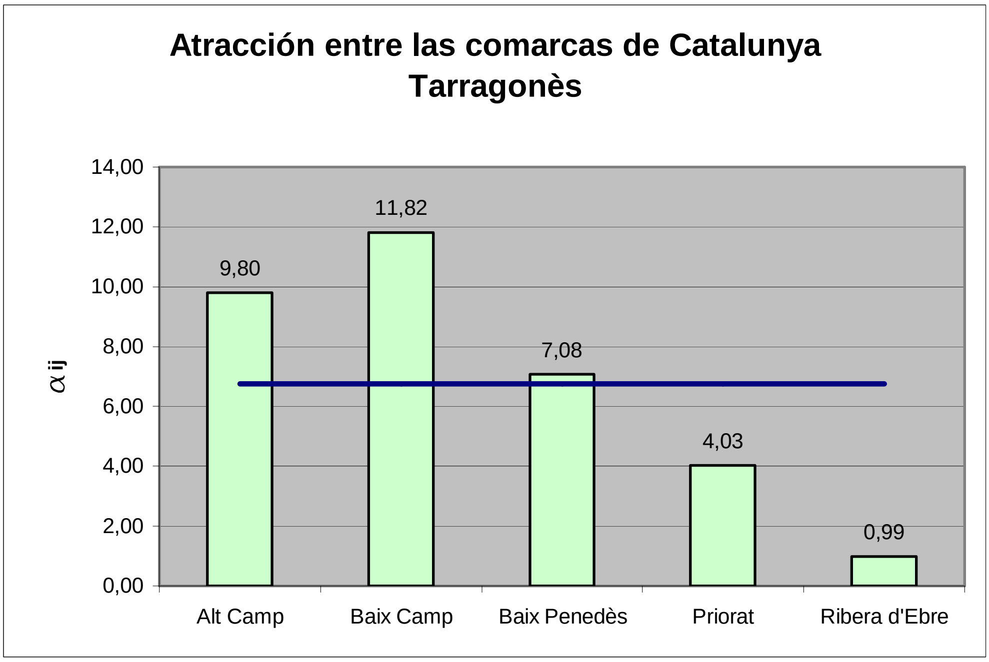

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Ribera d'Ebre
α ij
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
0,50
0,64
0,48
12,01
0,11
0,62
5,02
Baix Camp
Baix Ebre
Les Garrigues
Priorat
Segrià
Tarragonès
Terra Alta

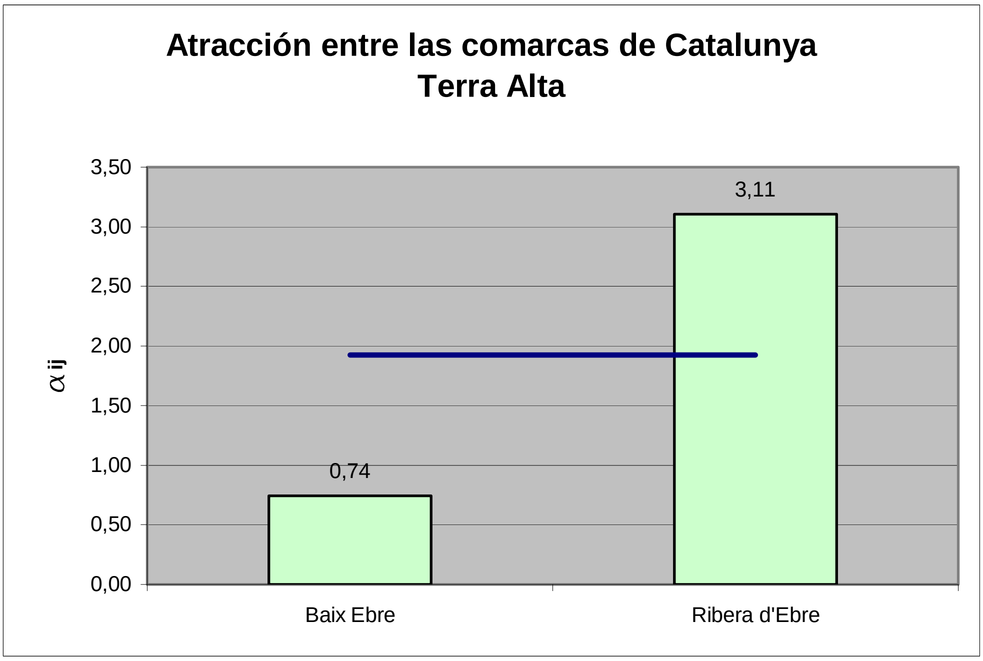

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Ripollès
α ij
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,19
0,12
0,75
2,01
1,99
0,30
0,58
Alt Urgell
Bages
Berguedà
Cerdanya
Garrotxa
Gironès
Osona

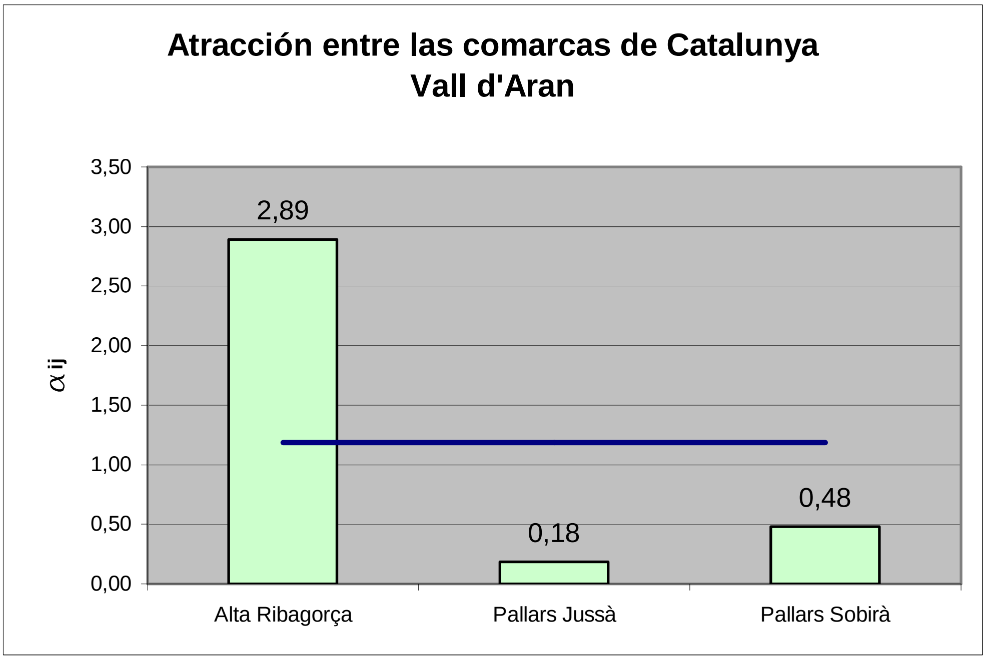

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Segarra
α ij
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
0,79
0,18
1,35
0,16
13,07
0,11
0,61
Anoia
Bages
Conca de Barberà
La Noguera
l'Urgell
Segrià
Solsonès

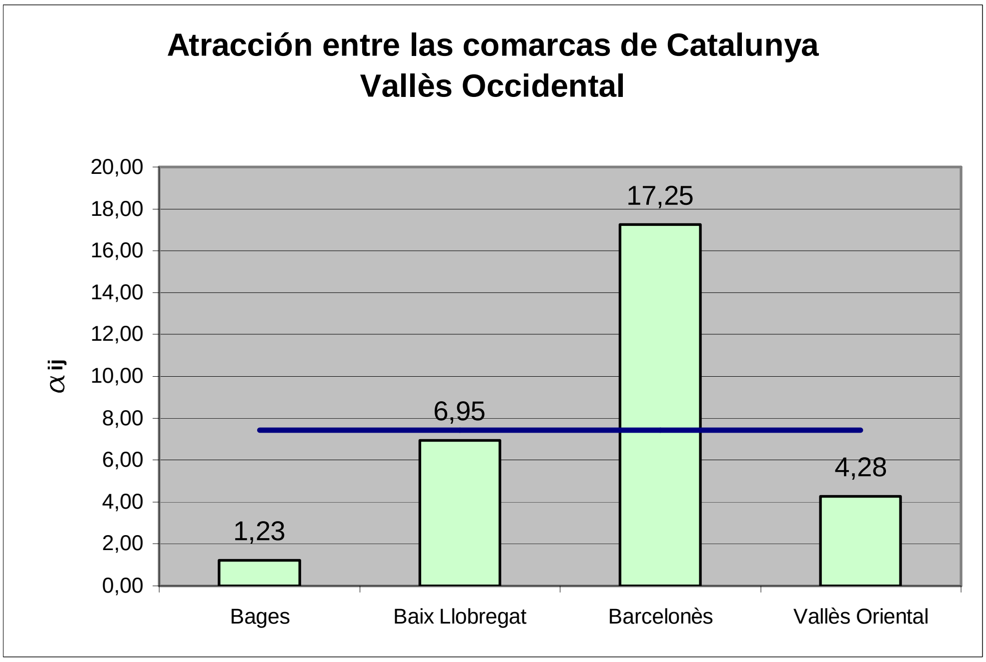

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Segrià
α ij
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
1,00
5,01
1,62
0,42
13,07
0,75
0,95
La Noguera
Les Garrigues
l'Urgell
Pallars Jussà
Pla d'Urgell
Ribera d'Ebre
Segarra

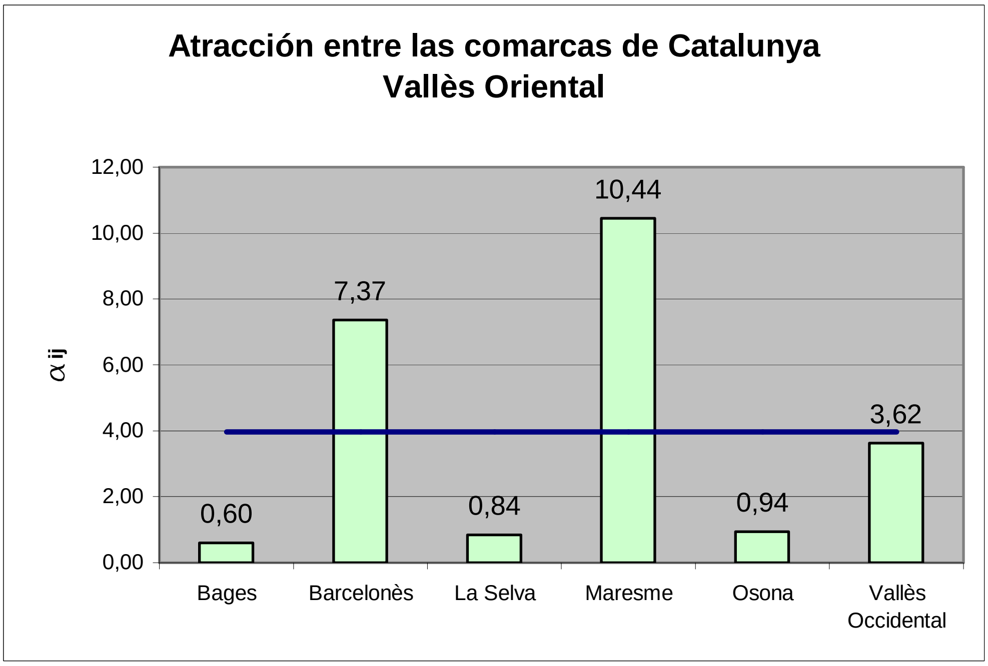

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Solsonès
α ij
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,35
0,27
0,24
0,91
0,06
0,61
Alt Urgell
Anoia
Bages
Berguedà
La Noguera
Segarra


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Tarragonès
α ij
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
9,80
11,82
7,08
4,03
0,99
Alt Camp
Baix Camp
Baix Penedès
Priorat
Ribera d'Ebre

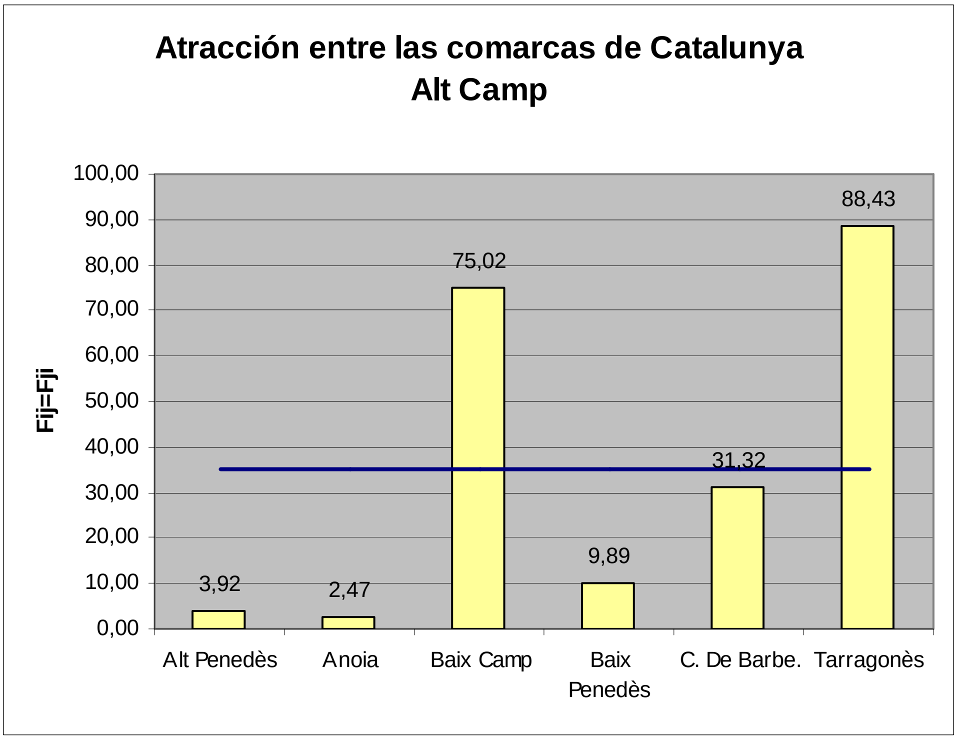

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Terra Alta
α ij
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,74
3,11
Baix Ebre
Ribera d'Ebre

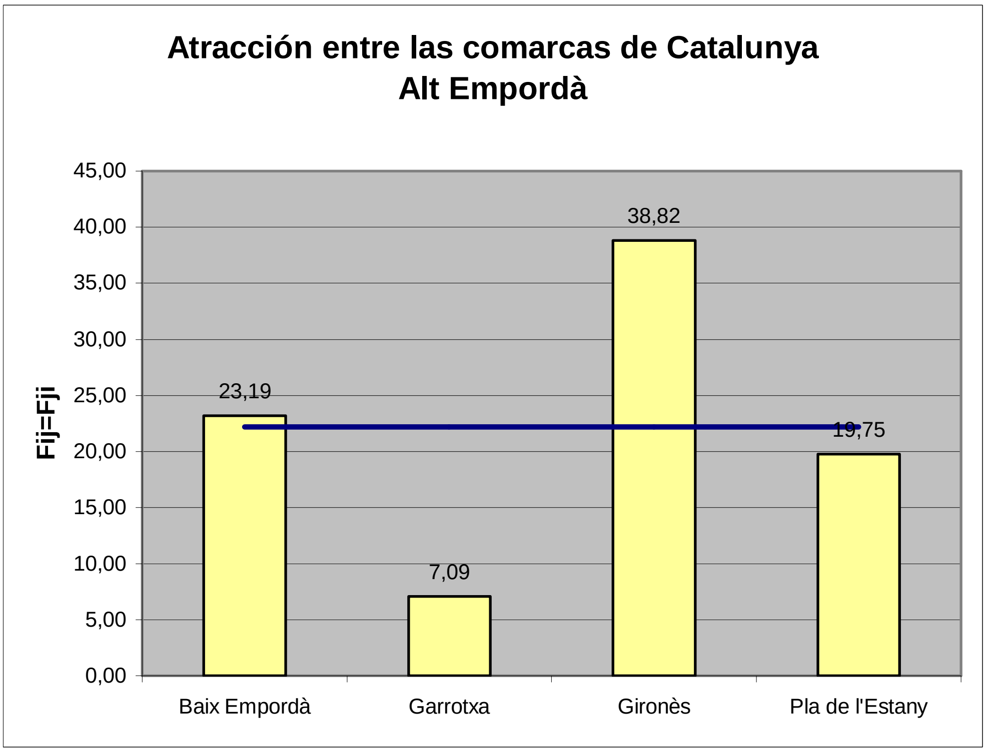

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Vall d'Aran
α ij
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
2,89
0,18
0,48
Alta Ribagorça
Pallars Jussà
Pallars Sobirà

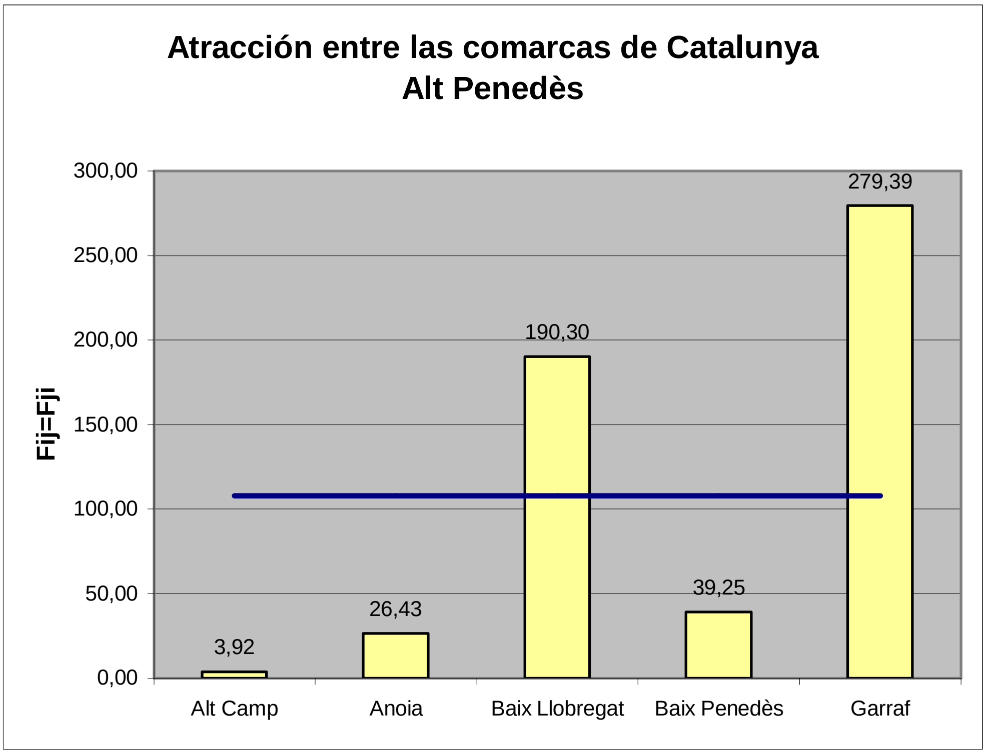

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Vallès Occidental
α ij
20,00
18,00
16,00
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
1,23
6,95
17,25
4,28
Bages
Baix Llobregat
Barcelonès
Vallès Oriental

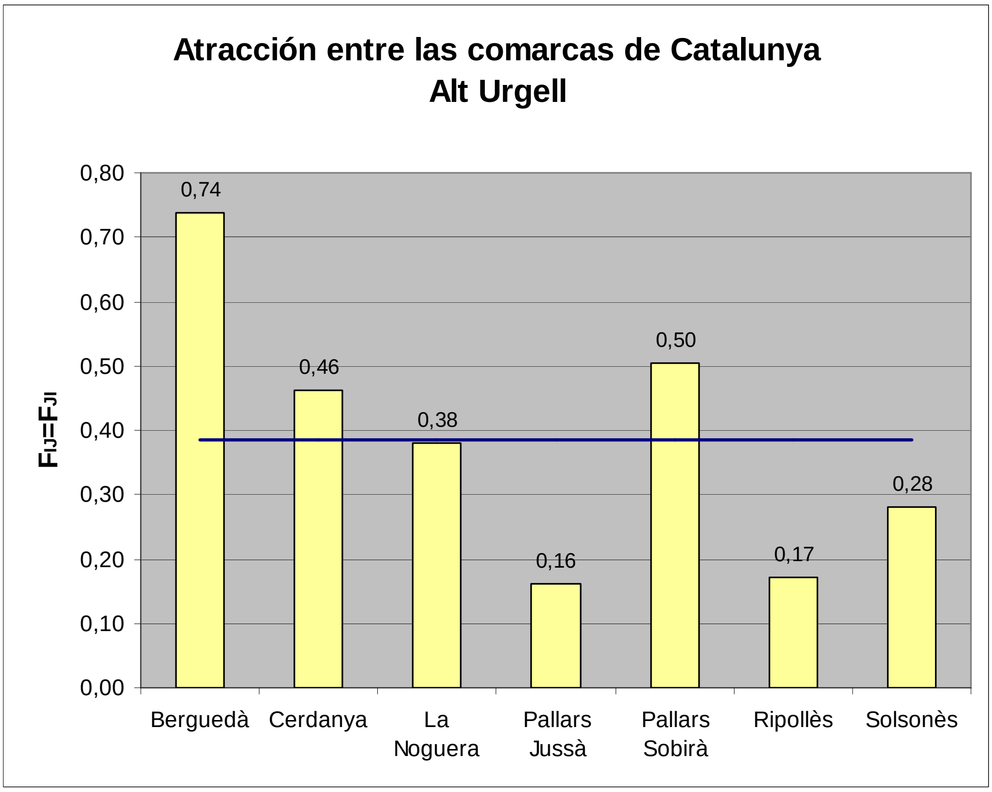

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Vallès Oriental
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
α ij
0,60
7,37
0,84
10,44
0,94
3,62
Bages
Barcelonès
La Selva
Maresme
Osona
Vallès Occidental

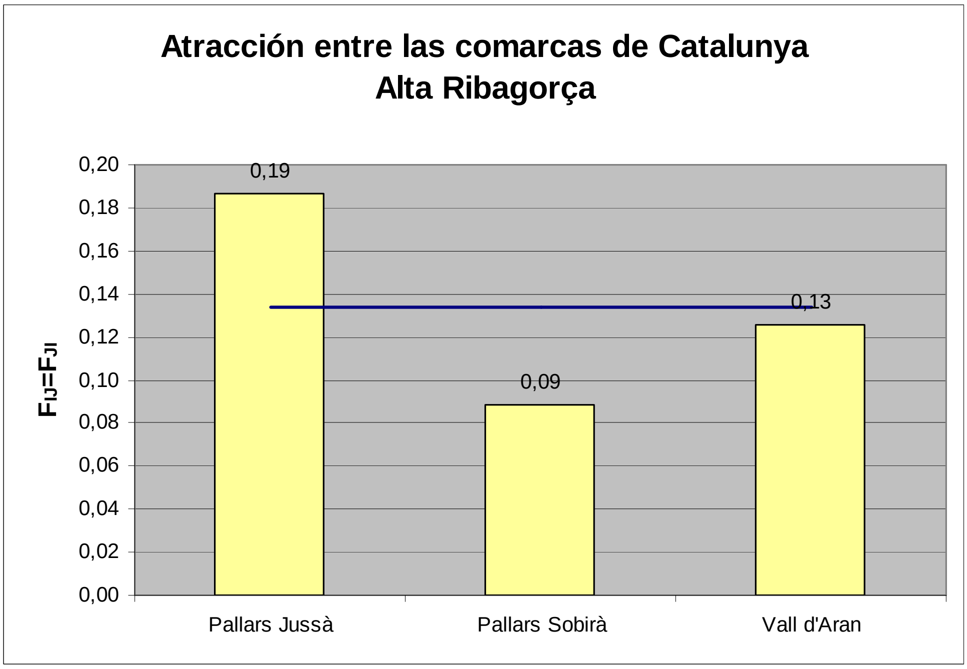
3. Fuerza de atracción económica $F_{ij} = F_{ji}$

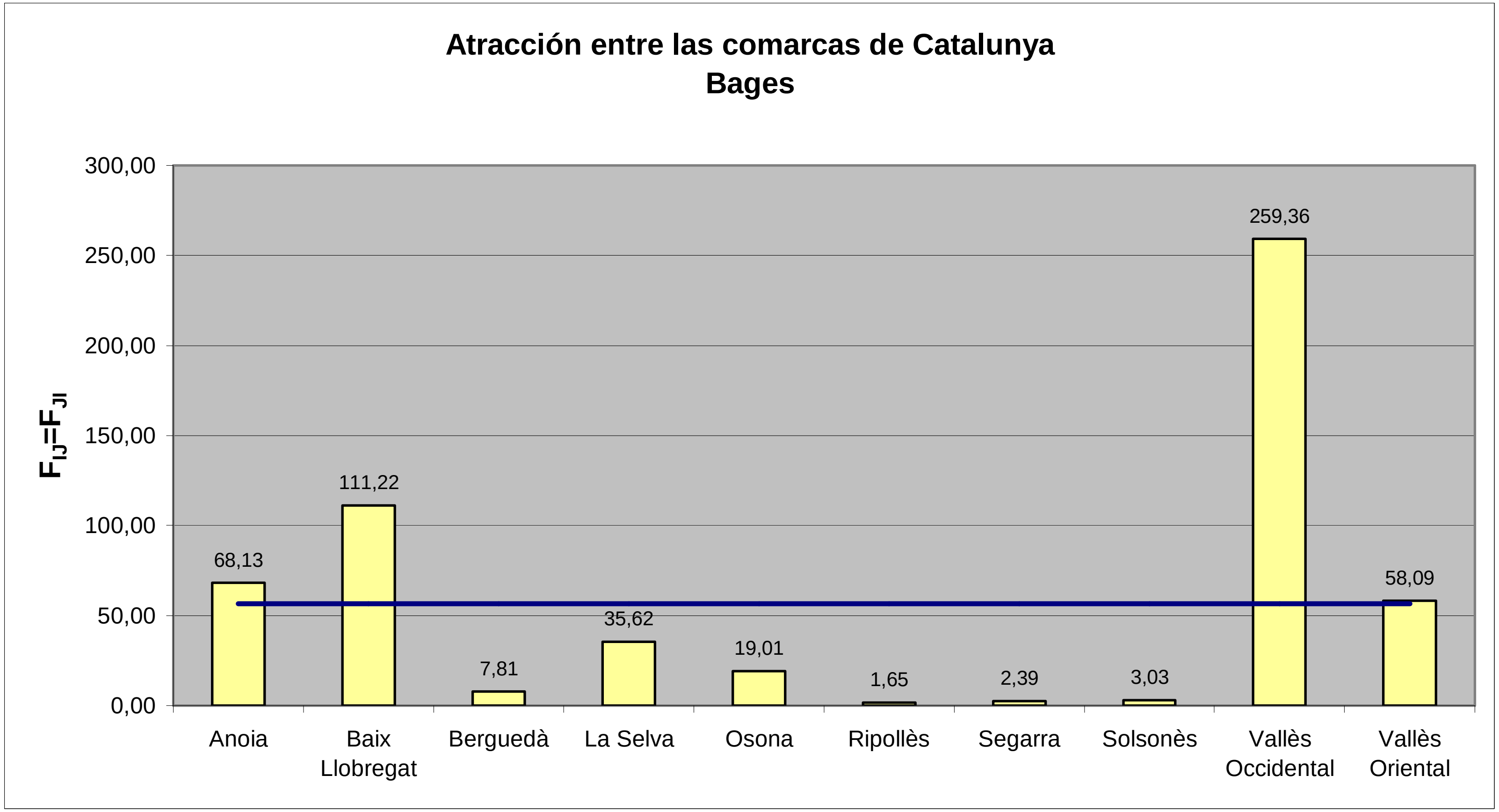

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Camp
Fij=Fji
100,00
90,00
80,00
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
3,92
2,47
75,02
9,89
31,32
88,43
Alt Penedès
Anoia
Baix Camp
Baix Penedès
C. De Barbe.
Tarragonès

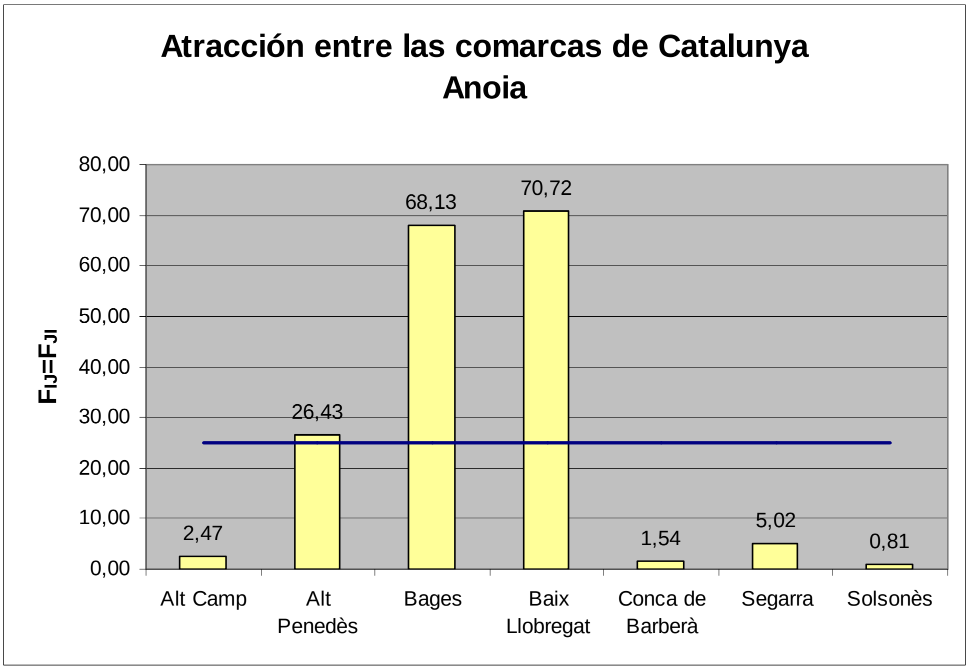

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Empordà
Fij=Fji
45,00
40,00
35,00
30,00
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
23,19
7,09
38,82
19,75
Baix Empordà
Garrotxa
Gironès
Pla de l'Estany

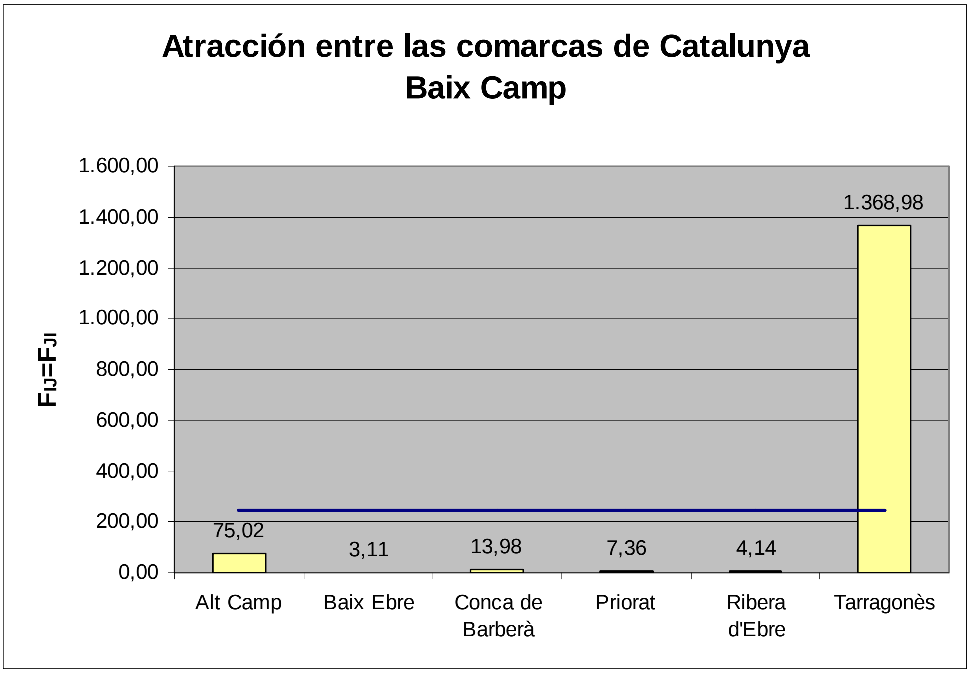

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Penedès
Fij=Fji
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
3,92
26,43
190,30
39,25
279,39
Alt Camp
Anoia
Baix Llobregat
Baix Penedès
Garraf


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alt Urgell
FIJ=FJI
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,74
0,46
0,38
0,16
0,50
0,17
0,28
Berguedà
Cerdanya
La Noguera
Pallars Jussà
Pallars Sobirà
Ripollès
Solsonès

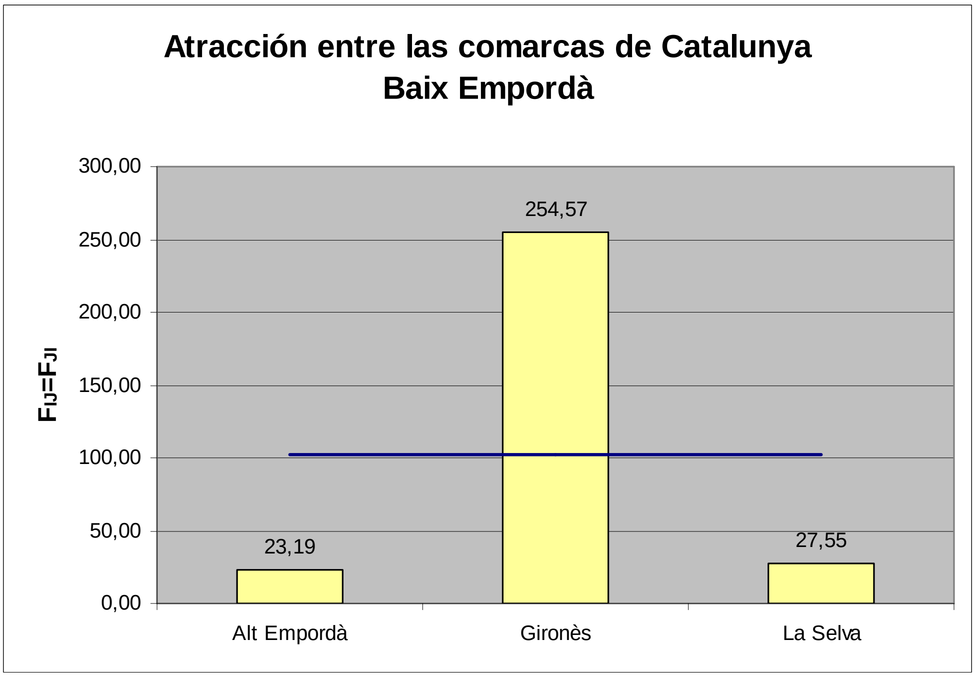

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Alta Ribagorça
FIJ=FJI
0,20
0,18
0,16
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
0,19
0,09
0,13
Pallars Jussà
Pallars Sobirà
Vall d'Aran

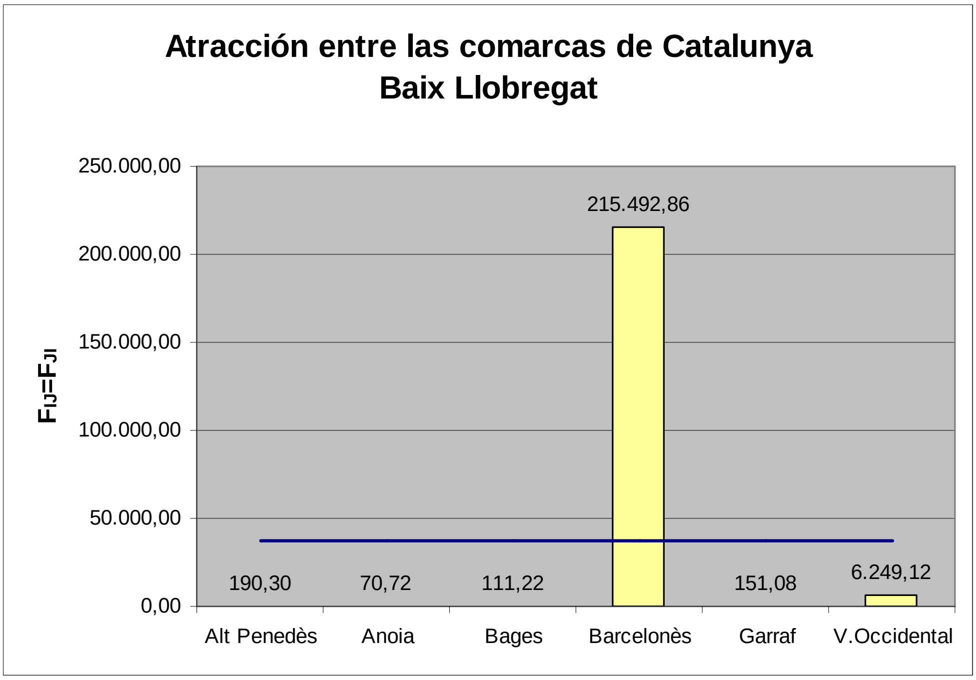

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Bages
F_IJ=F_JI
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
68,13
111,22
7,81
35,62
19,01
1,65
2,39
3,03
259,36
58,09
Anoia
Baix Llobregat
Berguedà
La Selva
Osona
Ripollès
Segarra
Solsonès
Vallès Occidental
Vallès Oriental

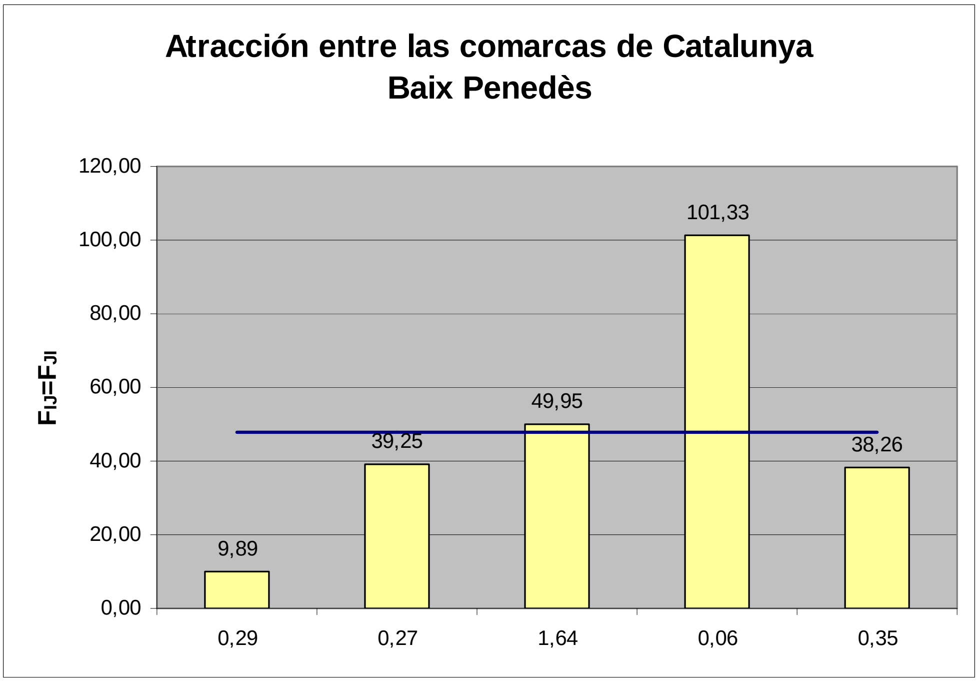

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Anoia
FIJ=FJI
80,00
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
2,47
26,43
68,13
70,72
1,54
5,02
0,81
Alt Camp
Alt Penedès
Bages
Baix Llobregat
Conca de Barberà
Segarra
Solsonès

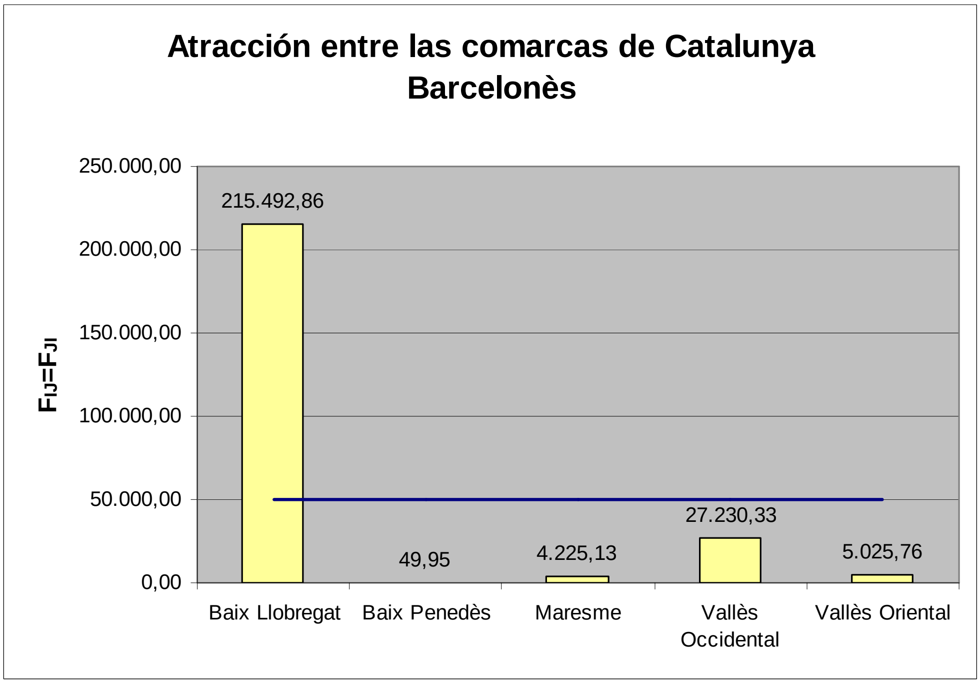

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Camp
FIJ=FJI
1.600,00
1.400,00
1.200,00
1.000,00
800,00
600,00
400,00
200,00
0,00
75,02
3,11
13,98
7,36
4,14
1.368,98
Alt Camp
Baix Ebre
Conca de Barberà
Priorat
Ribera d'Ebre
Tarragonès

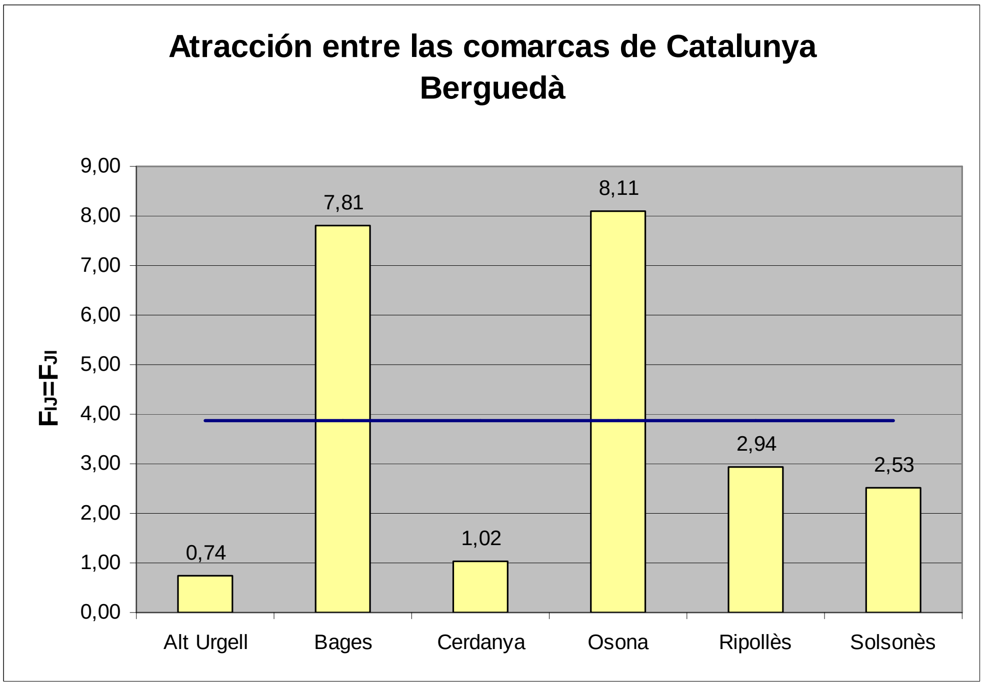

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Ebre
FIJ=FJI
180,00
160,00
140,00
120,00
100,00
80,00
60,00
40,00
20,00
0,00
161,36
3,11
0,48
3,12
2,92
Baix Camp
Montsià
Priorat
Ribera d'Ebre
Terra Alta

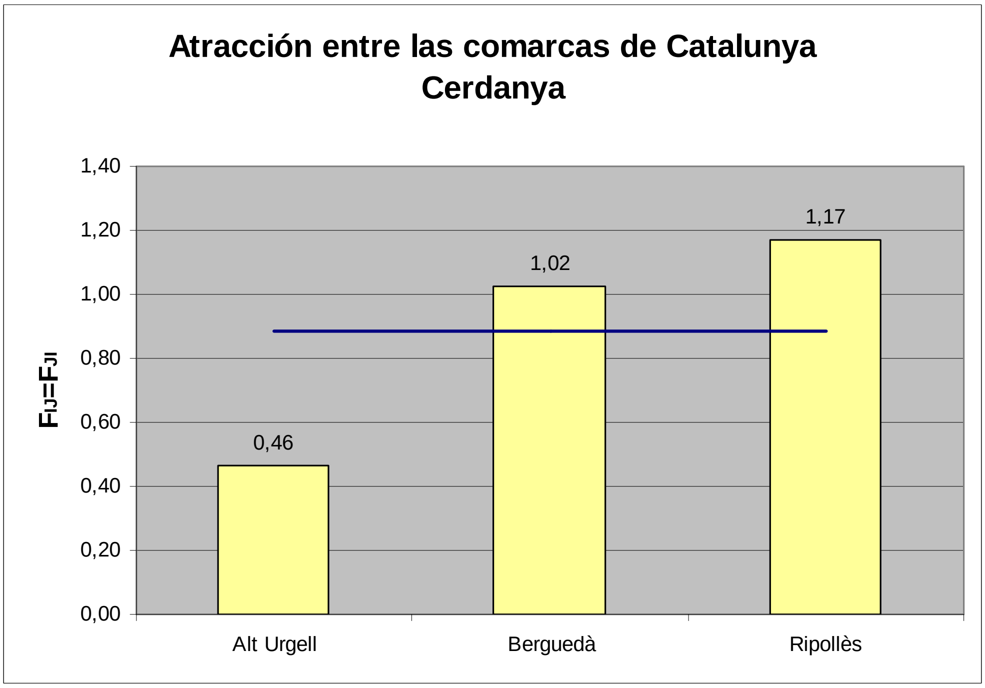

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Empordà
FIJ=FJI
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
254,57
23,19
27,55
Alt Empordà
Gironès
La Selva

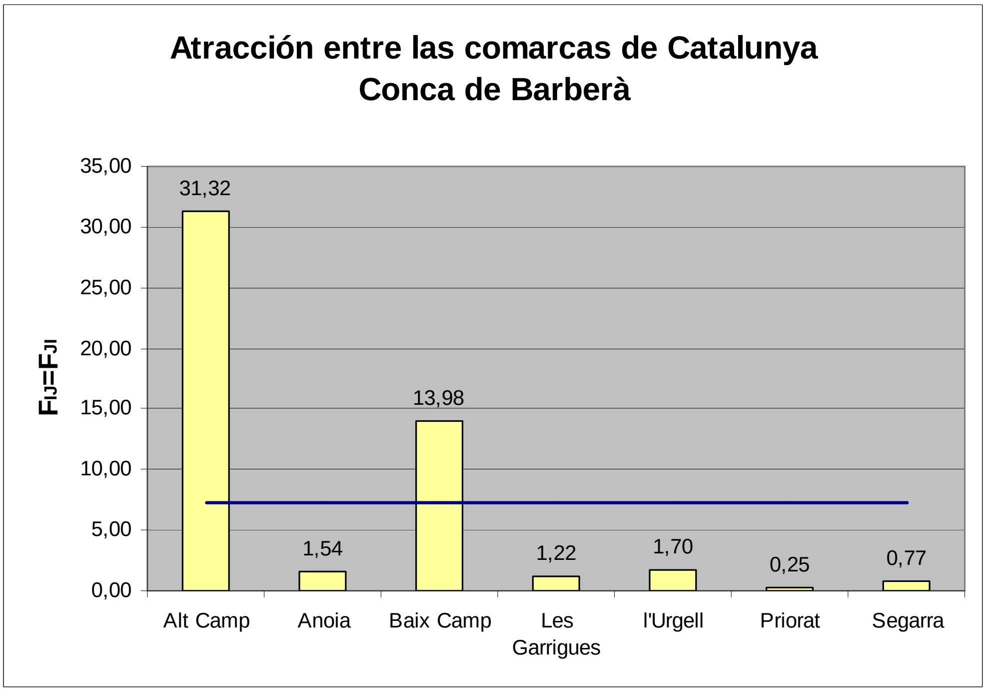

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Llobregat
$F_{IJ}=F_{JI}$
250.000,00
200.000,00
150.000,00
100.000,00
50.000,00
0,00
215.492,86
190,30
70,72
111,22
151,08
6.249,12
Alt Penedès
Anoia
Bages
Barcelonès
Garraf
V.Occidental

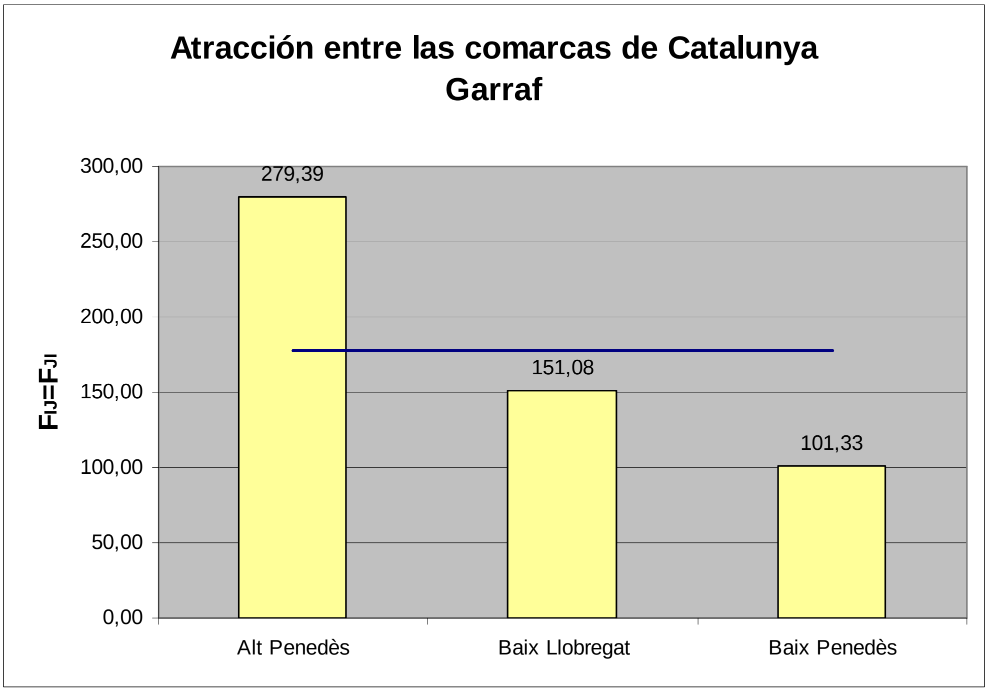

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Baix Penedès
$F_{IJ}=F_{JI}$
120,00
100,00
80,00
60,00
40,00
20,00
0,00
101,33
49,95
39,25
38,26
9,89
0,29
0,27
1,64
0,06
0,35

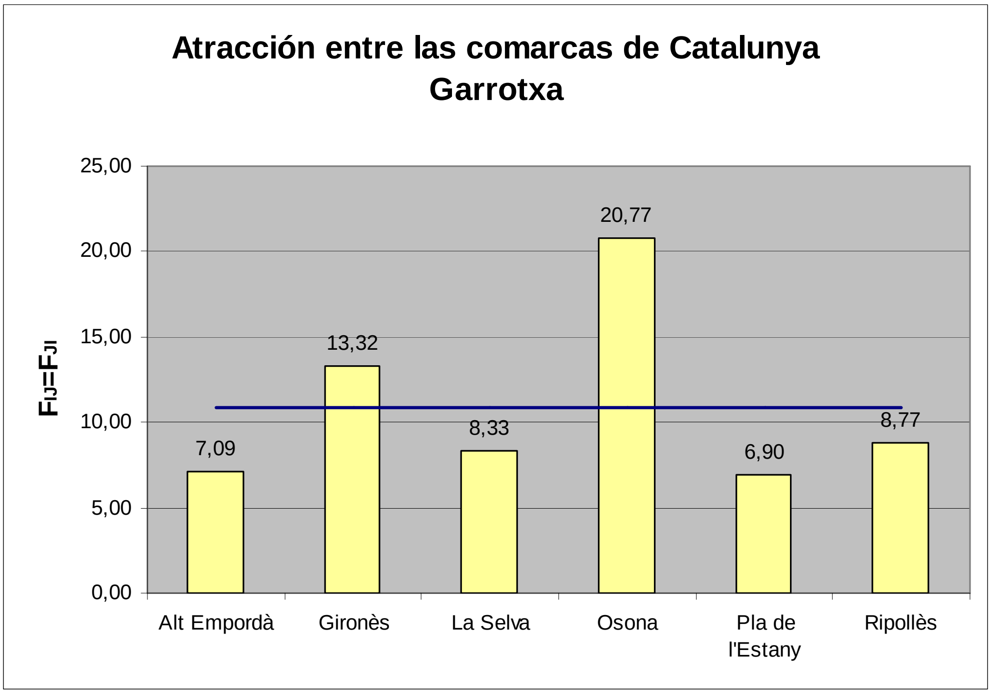

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Barcelonès
250.000,00
200.000,00
150.000,00
100.000,00
50.000,00
0,00
FIJ=FJI
215.492,86
49,95
4.225,13
27.230,33
5.025,76
Baix Llobregat
Baix Penedès
Maresme
Vallès Occidental
Vallès Oriental

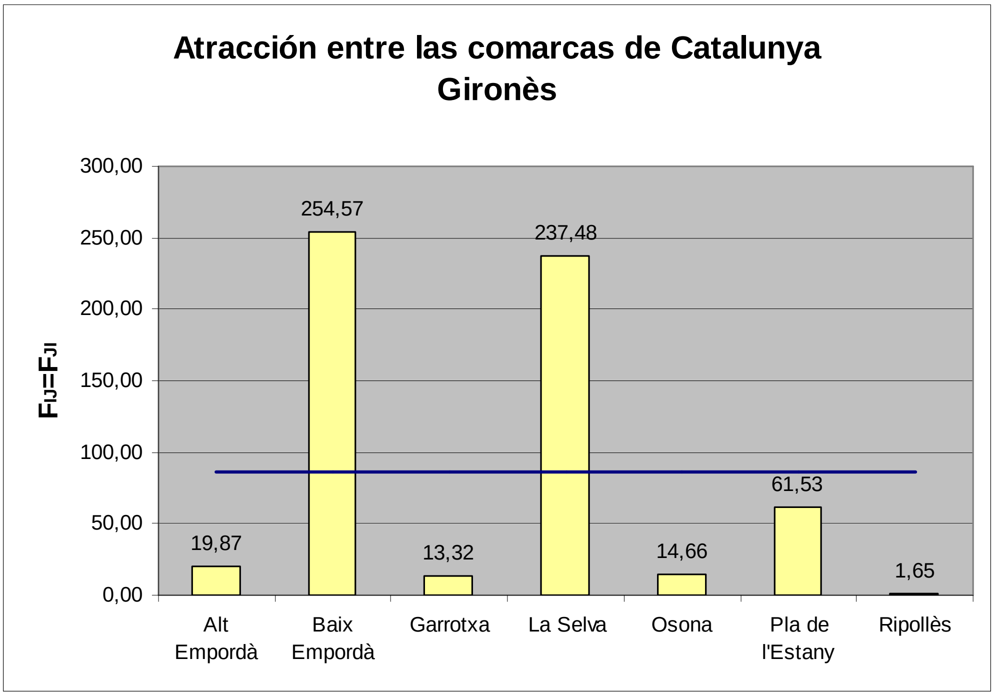

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Berguedà
9,00
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
FIJ=FJI
0,74
7,81
1,02
8,11
2,94
2,53
Alt Urgell
Bages
Cerdanya
Osona
Ripollès
Solsonès

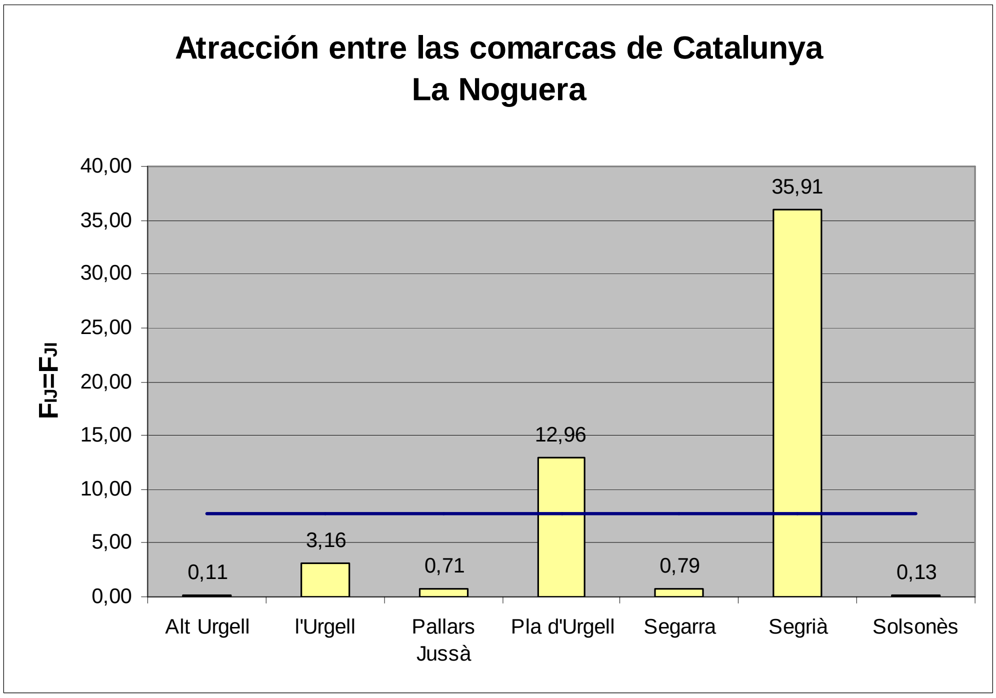

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Cerdanya
FIJ=FJI
1,40
1,20
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,46
1,02
1,17
Alt Urgell
Berguedà
Ripollès

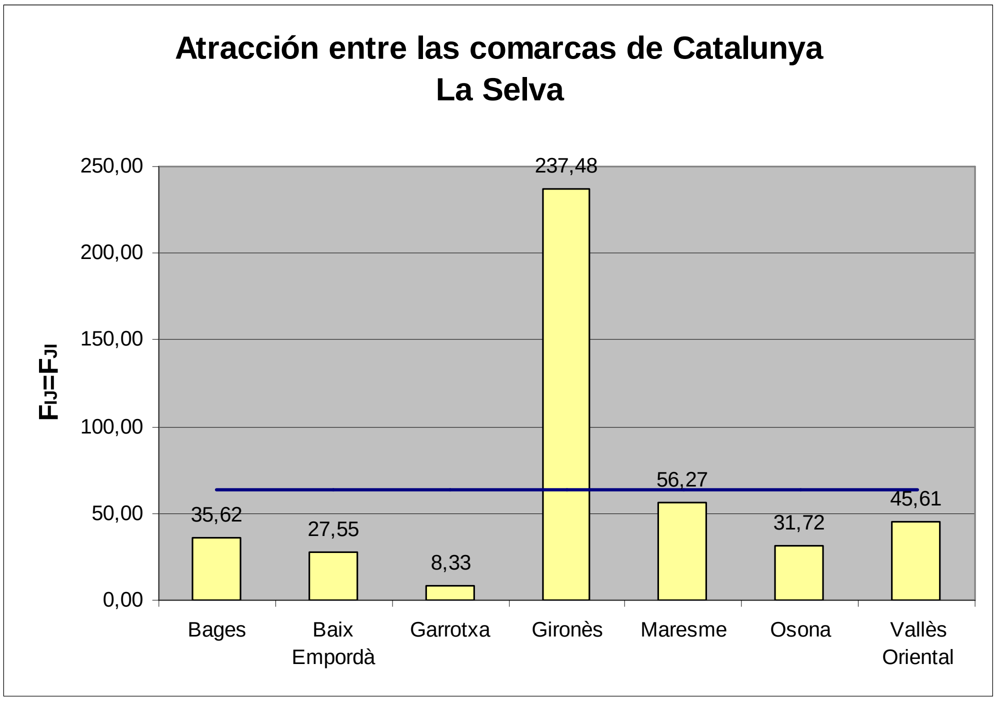

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Conca de Barberà
FIJ=FJI
35,00
30,00
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
31,32
1,54
13,98
1,22
1,70
0,25
0,77
Alt Camp
Anoia
Baix Camp
Les Garrigues
l'Urgell
Priorat
Segarra

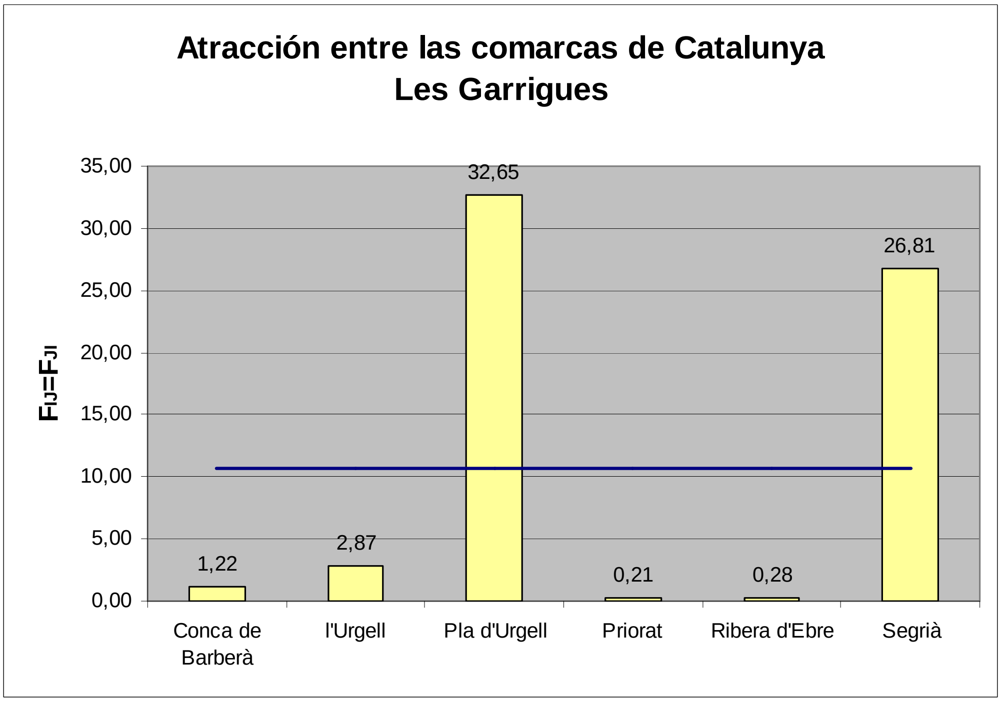

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Garraf
FIJ=FJI
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
279,39
151,08
101,33
Alt Penedès
Baix Llobregat
Baix Penedès

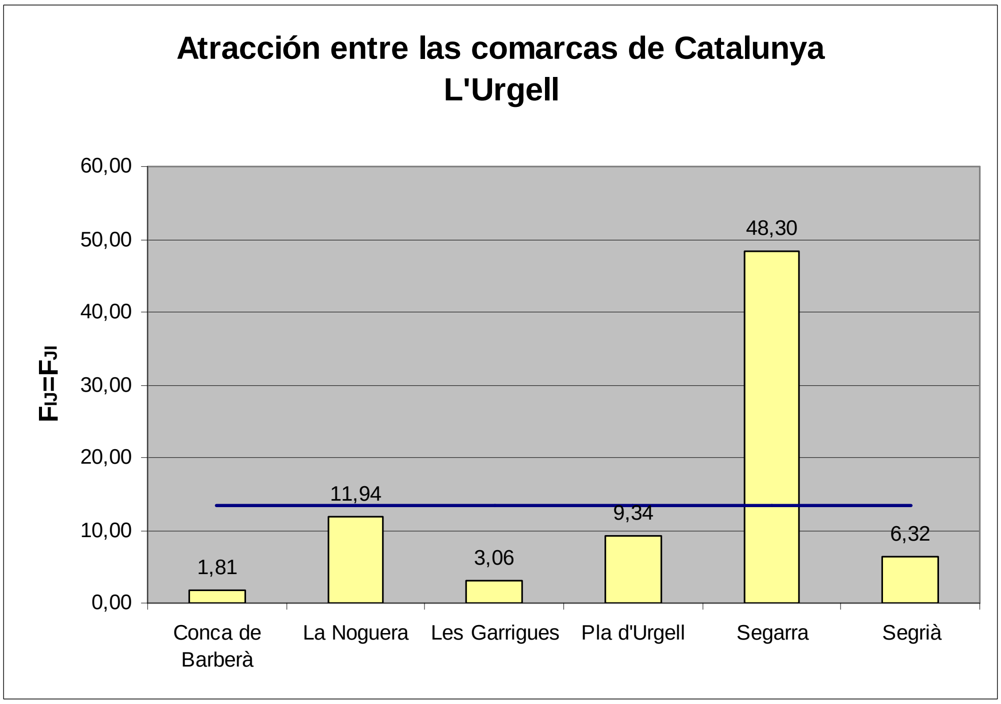

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Garrotxa
FIJ=FJI
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
7,09
13,32
8,33
20,77
6,90
8,77
Alt Empordà
Gironès
La Selva
Osona
Pla de l'Estany
Ripollès

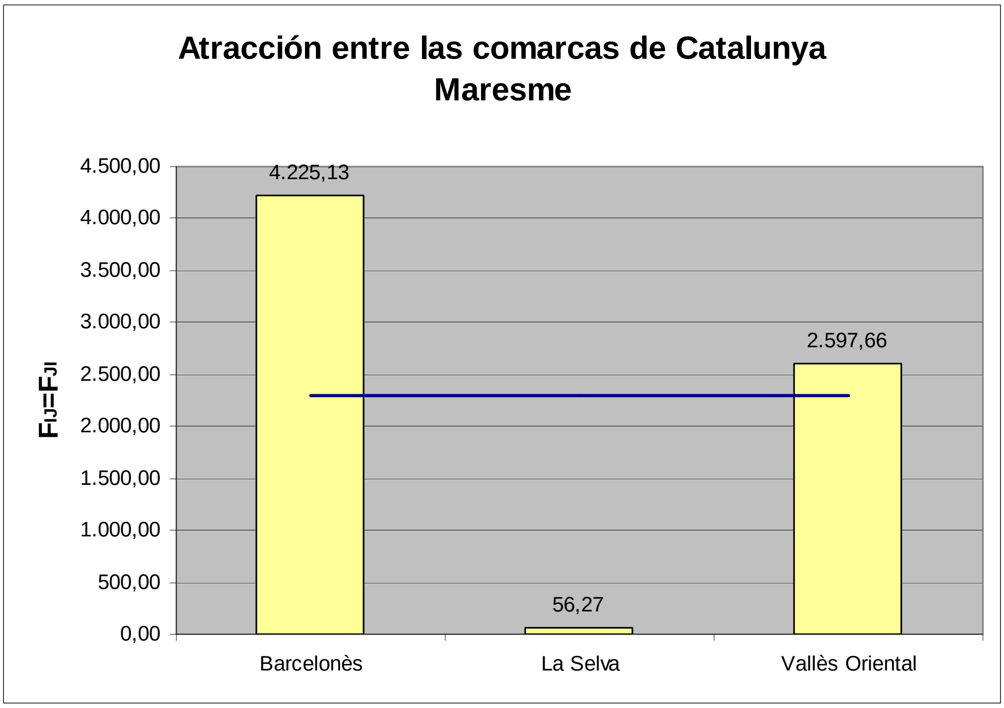

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Gironès
FIJ=FJI
300,00
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
19,87
254,57
13,32
237,48
14,66
61,53
1,65
Alt Empordà
Baix Empordà
Garrotxa
La Selva
Osona
Pla de l'Estany
Ripollès

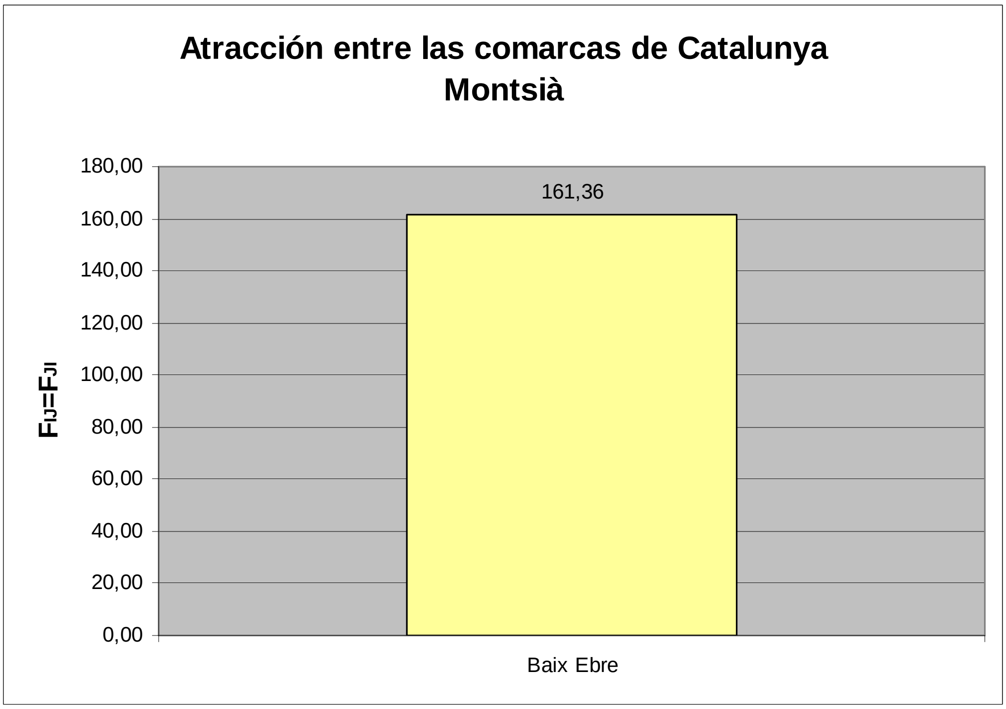

Atracción entre las comarcas de Catalunya
La Noguera
FIJ=FJI
40,00
35,00
30,00
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
0,11
3,16
0,71
12,96
0,79
35,91
0,13
Alt Urgell
l'Urgell
Pallars Jussà
Pla d'Urgell
Segarra
Segrià
Solsonès

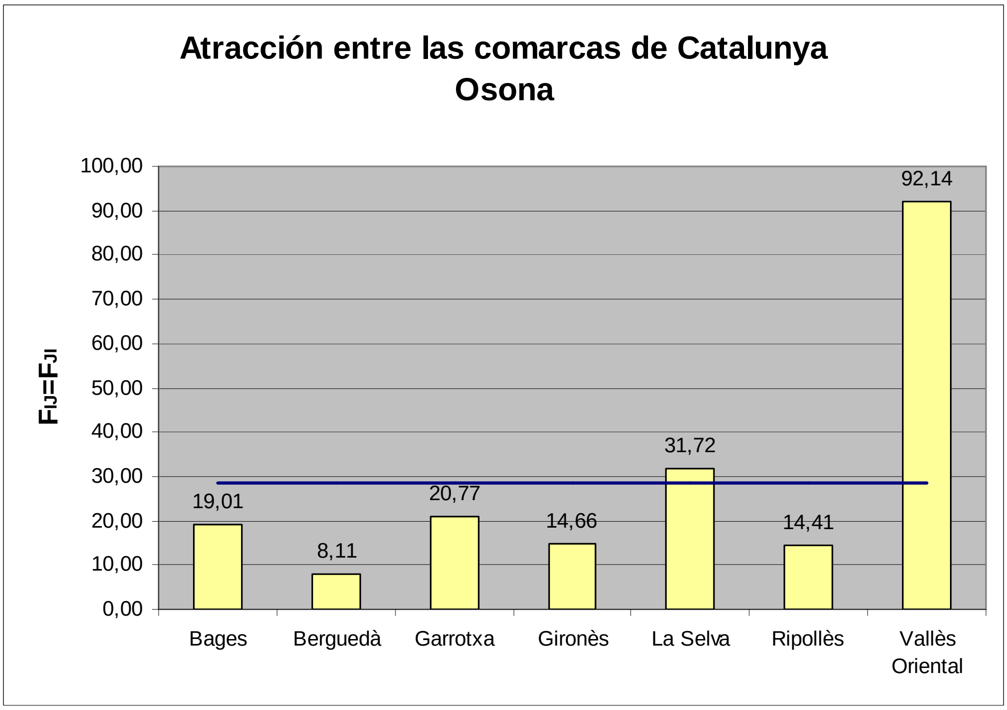

Atracción entre las comarcas de Catalunya
La Selva
FIJ=FJI
250,00
200,00
150,00
100,00
50,00
0,00
35,62
27,55
8,33
237,48
56,27
31,72
45,61
Bages
Baix Empordà
Garrotxa
Gironès
Maresme
Osona
Vallès Oriental

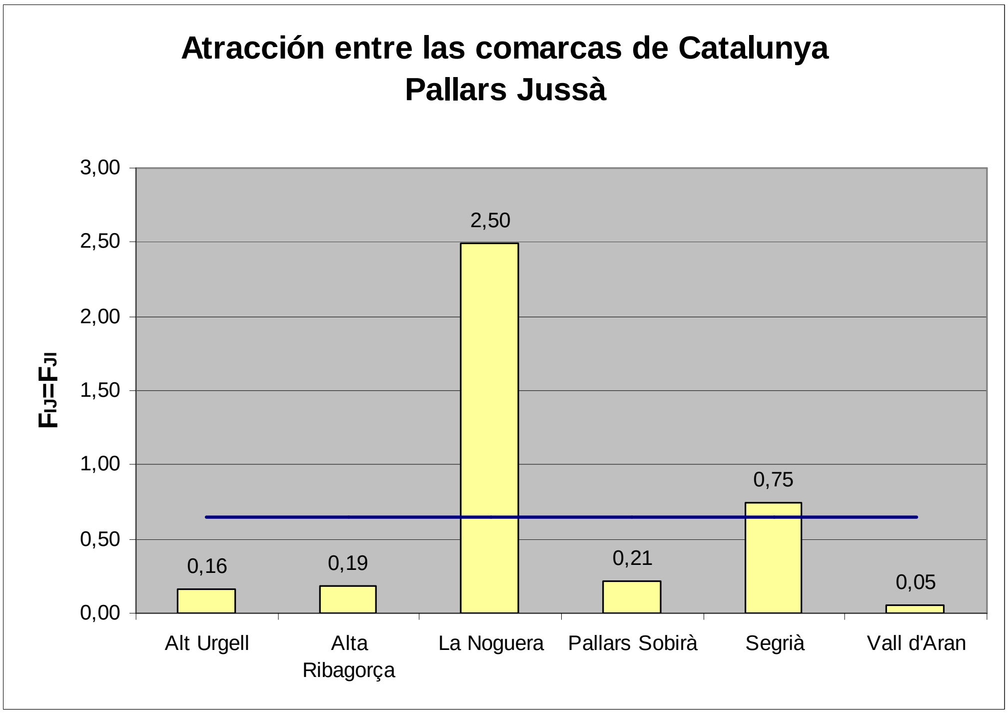

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Les Garrigues
FIJ=FJI
35,00
30,00
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
1,22
2,87
32,65
0,21
0,28
26,81
Conca de Barberà
l'Urgell
Pla d'Urgell
Priorat
Ribera d'Ebre
Segrià

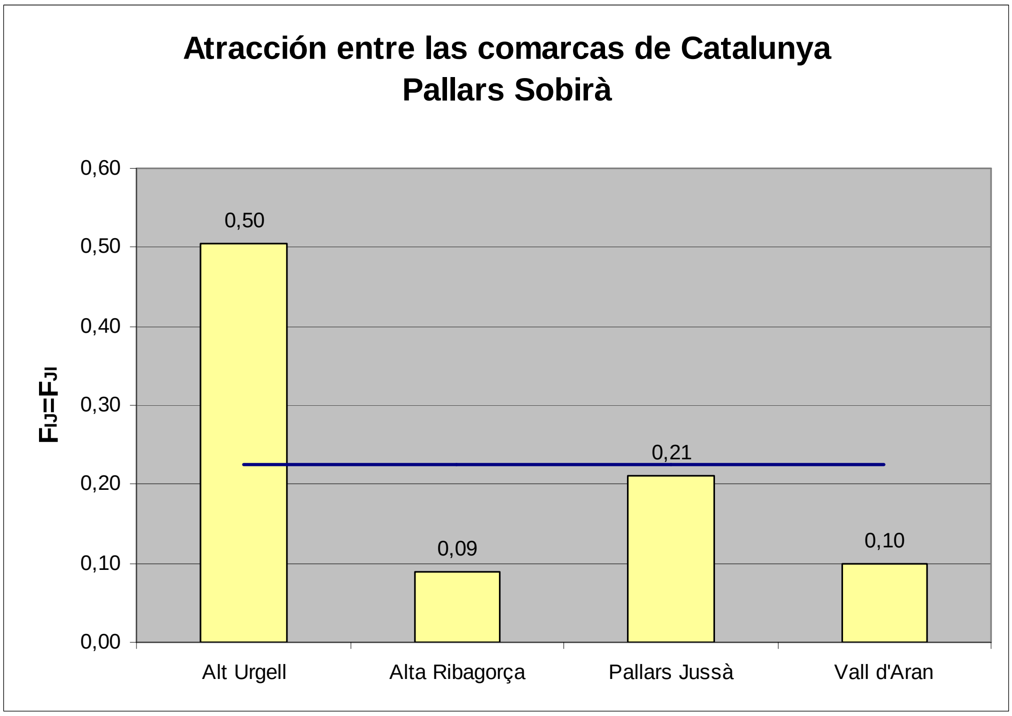

Atracción entre las comarcas de Catalunya
L'Urgell
FIJ=FJI
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
1,81
11,94
3,06
9,34
48,30
6,32
Conca de Barberà
La Noguera
Les Garrigues
Pla d'Urgell
Segarra
Segrià

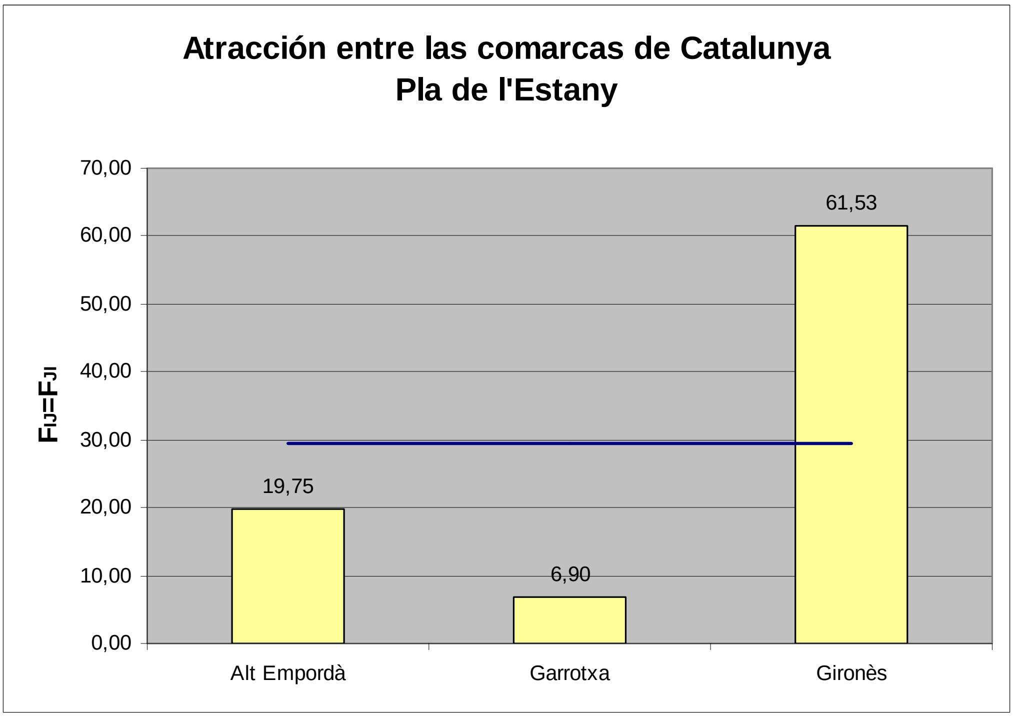

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Maresme
FIJ=FJI
4.500,00
4.000,00
3.500,00
3.000,00
2.500,00
2.000,00
1.500,00
1.000,00
500,00
0,00
4.225,13
56,27
2.597,66
Barcelonès
La Selva
Vallès Oriental

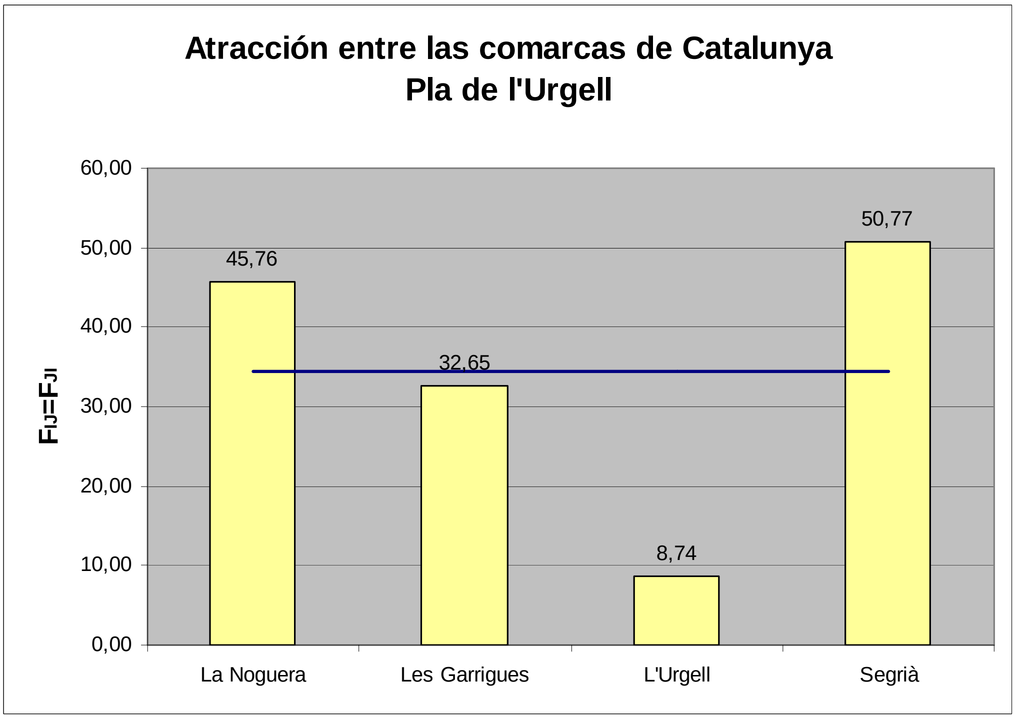

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Montsià
FIJ=FJI
180,00
160,00
140,00
120,00
100,00
80,00
60,00
40,00
20,00
0,00
161,36
Baix Ebre

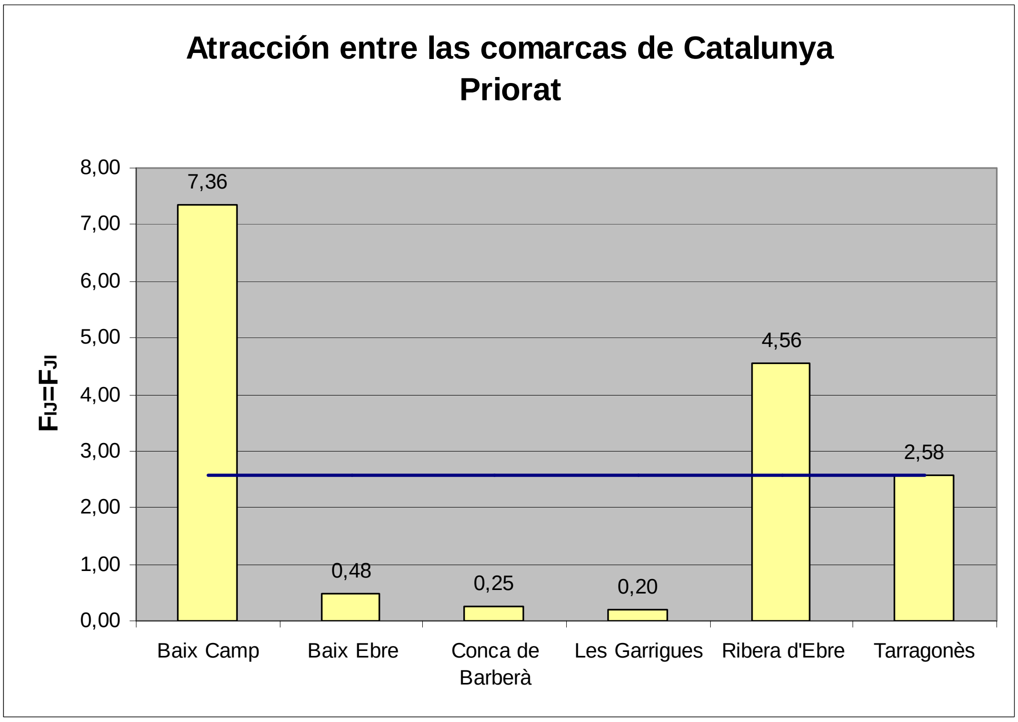

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Osona
FIJ=FJI
100,00
90,00
80,00
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
19,01
8,11
20,77
14,66
31,72
14,41
92,14
Bages
Berguedà
Garrotxa
Gironès
La Selva
Ripollès
Vallès Oriental

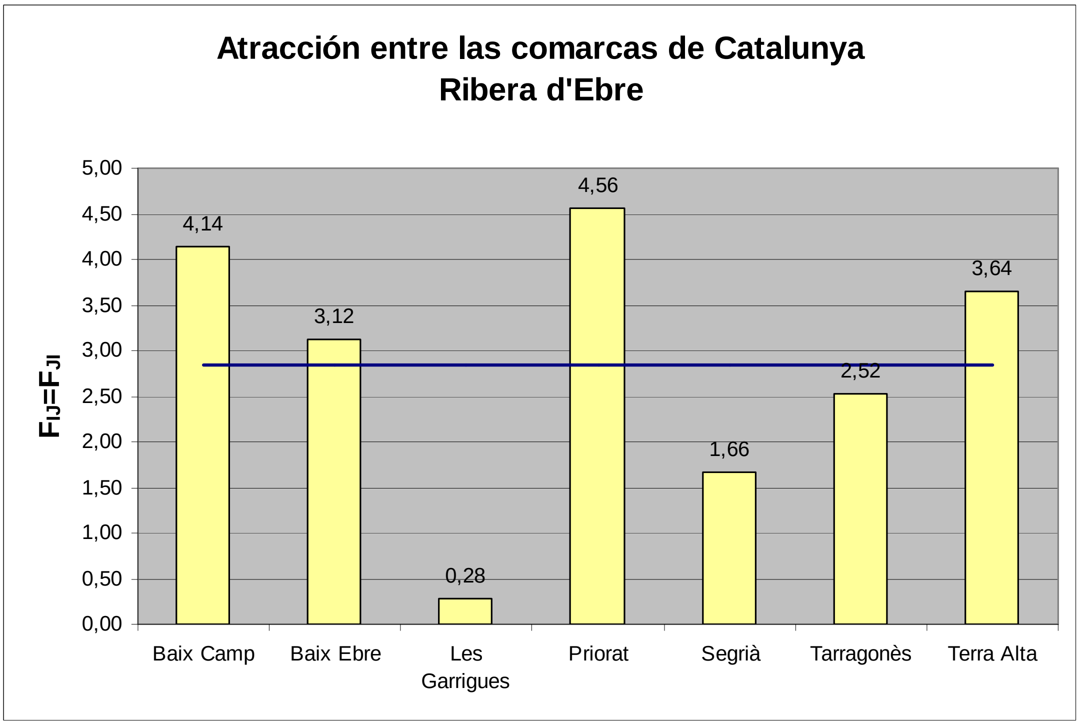

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pallars Jussà
FIJ=FJI
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,16
0,19
2,50
0,21
0,75
0,05
Alt Urgell
Alta Ribagorça
La Noguera
Pallars Sobirà
Segrià
Vall d'Aran

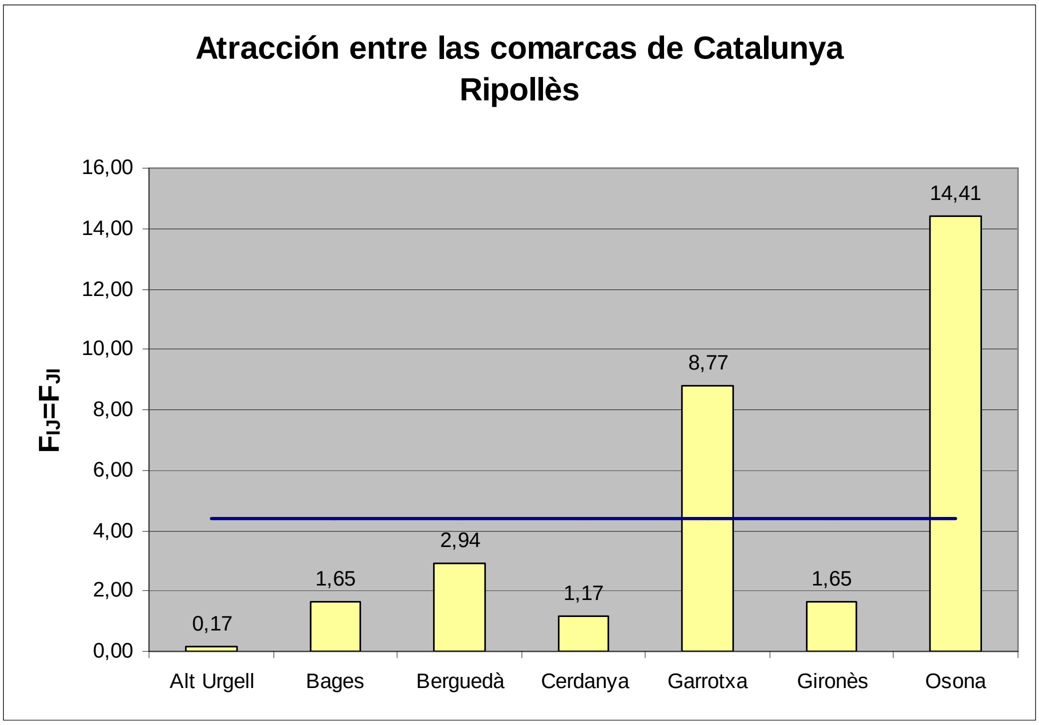

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pallars Sobirà
FIJ=FJI
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
0,50
0,09
0,21
0,10
Alt Urgell
Alta Ribagorça
Pallars Jussà
Vall d'Aran

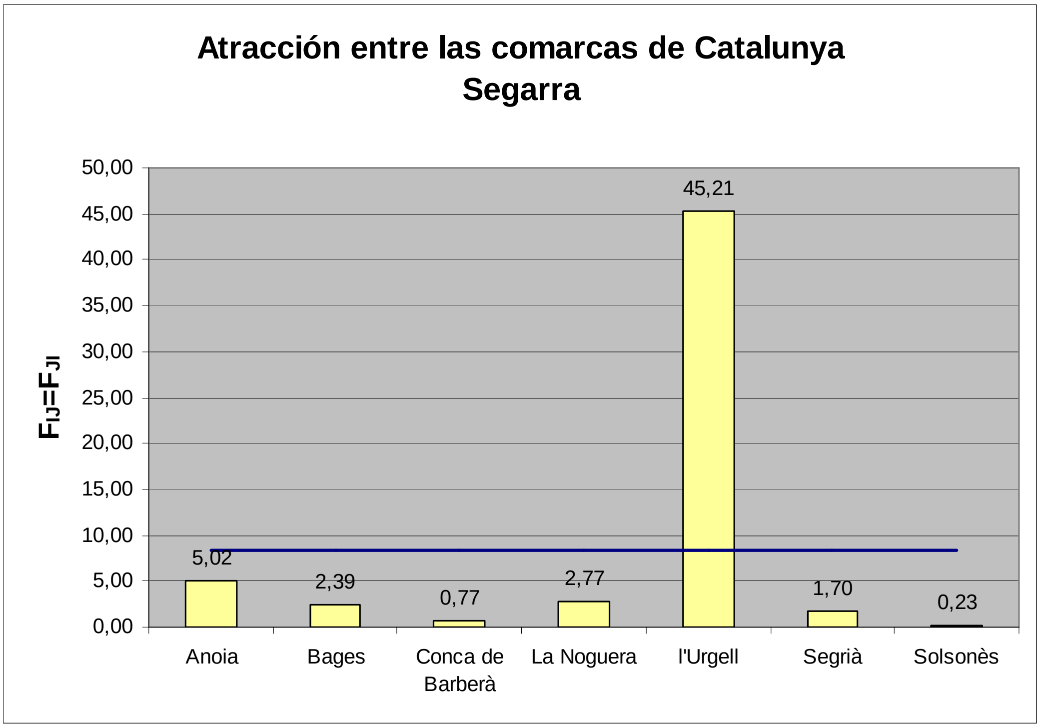

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pla de l'Estany
FIJ=FJI
70,00
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
19,75
6,90
61,53
Alt Empordà
Garrotxa
Gironès

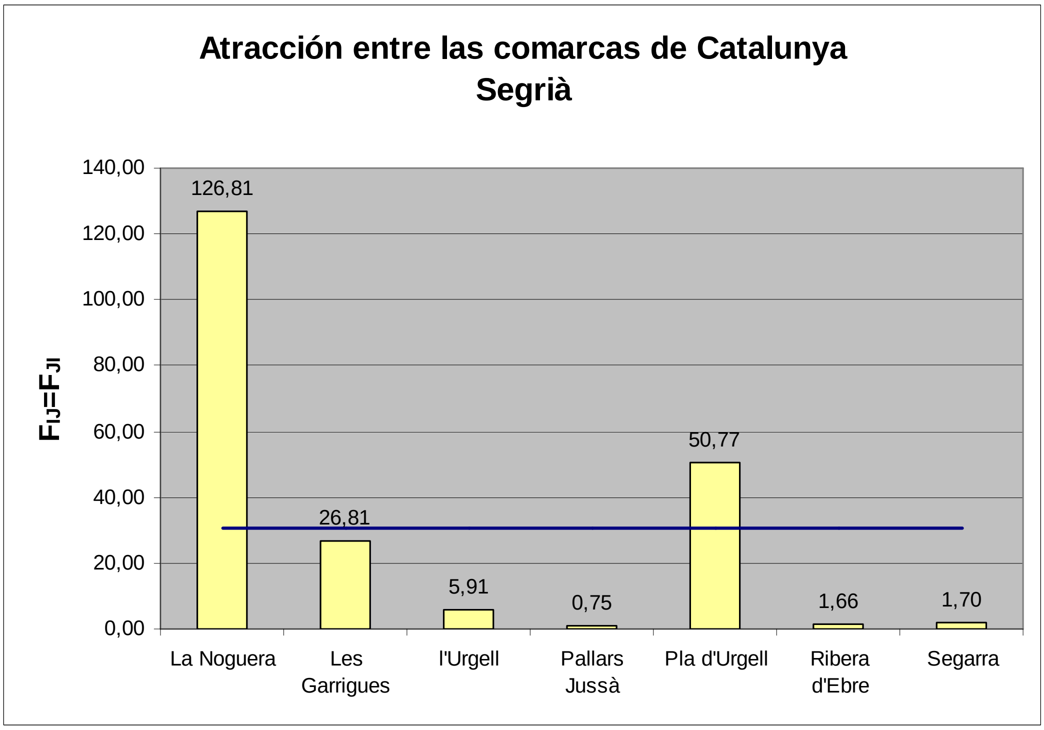

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Pla de l'Urgell
FIJ=FJI
60,00
50,00
40,00
30,00
20,00
10,00
0,00
45,76
32,65
8,74
50,77
La Noguera
Les Garrigues
L'Urgell
Segrià

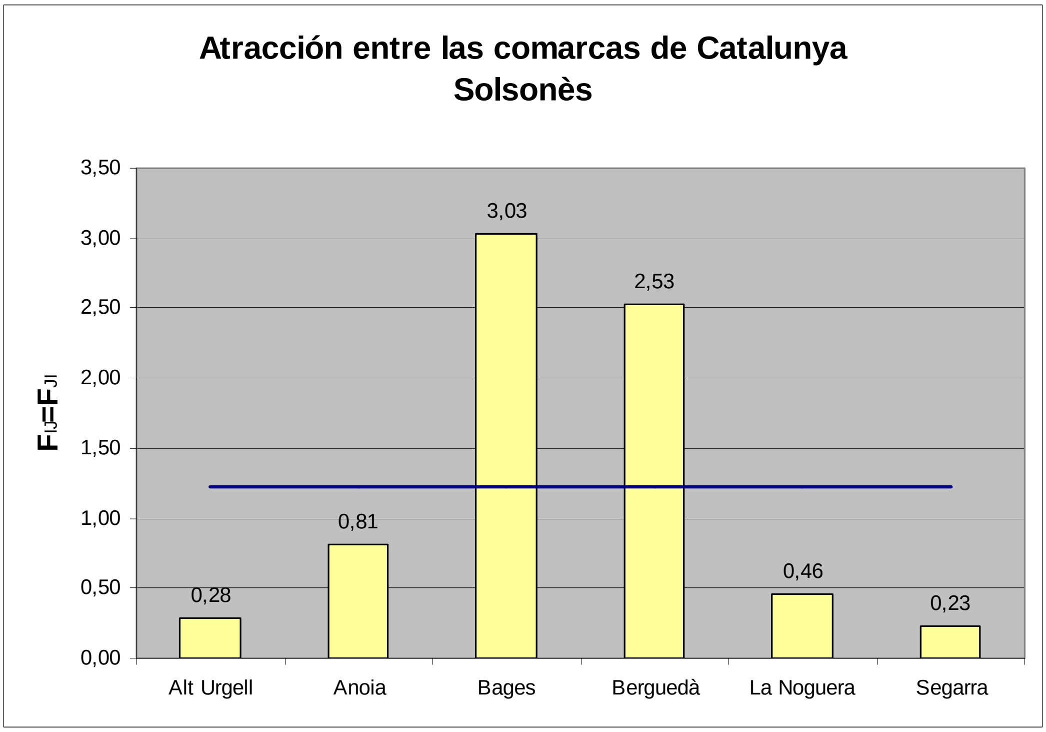

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Priorat
FIJ=FJI
8,00
7,00
6,00
5,00
4,00
3,00
2,00
1,00
0,00
7,36
0,48
0,25
0,20
4,56
2,58
Baix Camp
Baix Ebre
Conca de Barberà
Les Garrigues
Ribera d'Ebre
Tarragonès

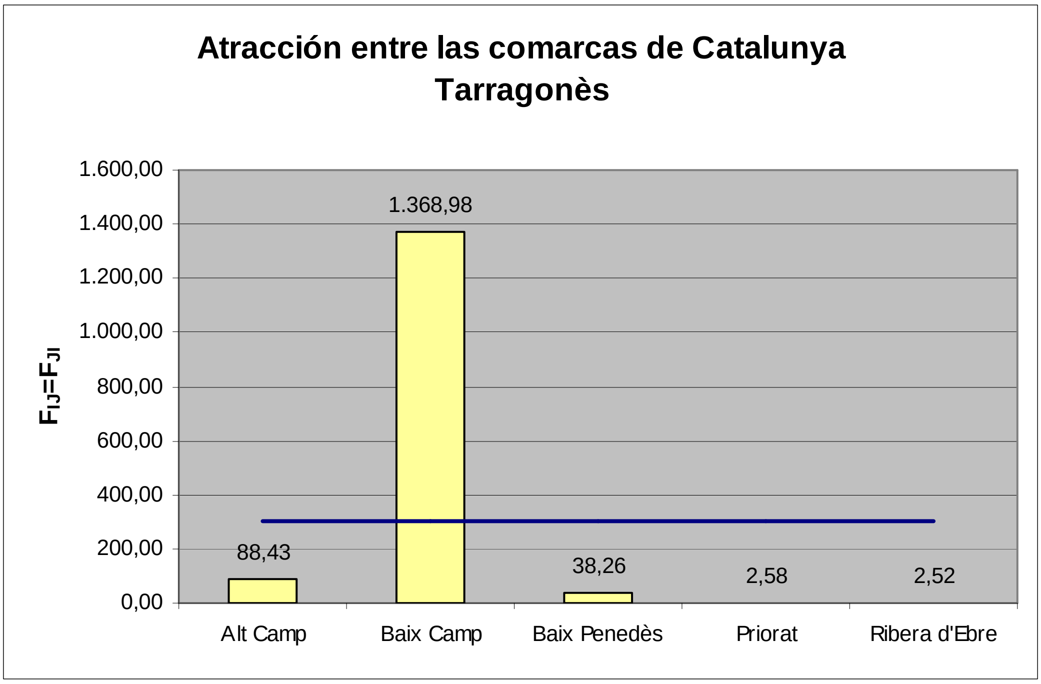

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Ribera d'Ebre
FIJ=FJI
5,00
4,50
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
4,14
3,12
0,28
4,56
1,66
2,52
3,64
Baix Camp
Baix Ebre
Les Garrigues
Priorat
Segrià
Tarragonès
Terra Alta

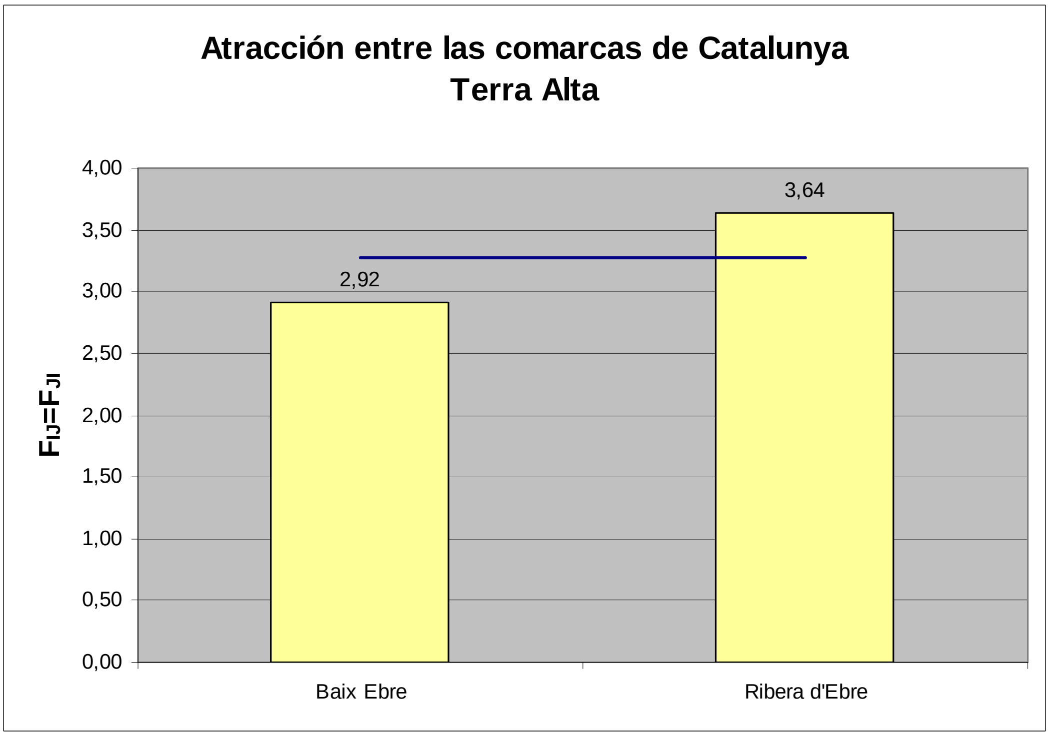

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Ripollès
$F_{IJ}=F_{JI}$
16,00
14,00
12,00
10,00
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
0,17
1,65
2,94
1,17
8,77
1,65
14,41
Alt Urgell
Bages
Berguedà
Cerdanya
Garrotxa
Gironès
Osona

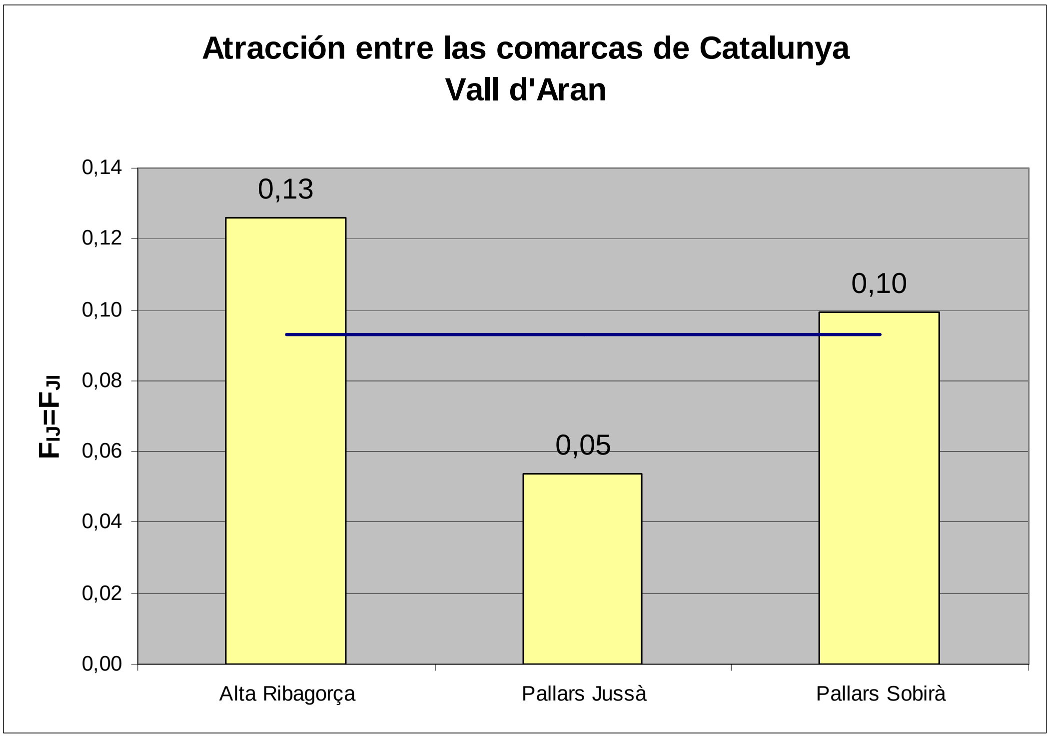

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Segarra
$F_{IJ}=F_{JI}$
50,00
45,00
40,00
35,00
30,00
25,00
20,00
15,00
10,00
5,00
0,00
5,02
2,39
0,77
2,77
45,21
1,70
0,23
Anoia
Bages
Conca de Barberà
La Noguera
l'Urgell
Segrià
Solsonès

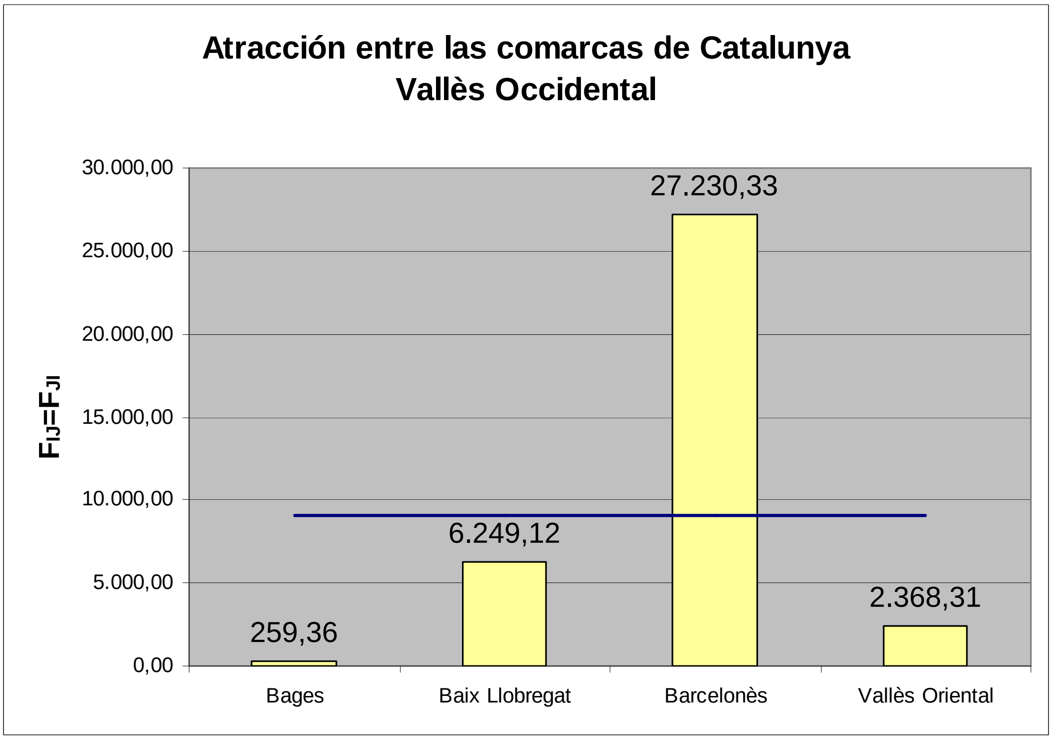

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Segrià
FIJ=FJI
140,00
120,00
100,00
80,00
60,00
40,00
20,00
0,00
126,81
26,81
5,91
0,75
50,77
1,66
1,70
La Noguera
Les Garrigues
l'Urgell
Pallars Jussà
Pla d'Urgell
Ribera d'Ebre
Segarra

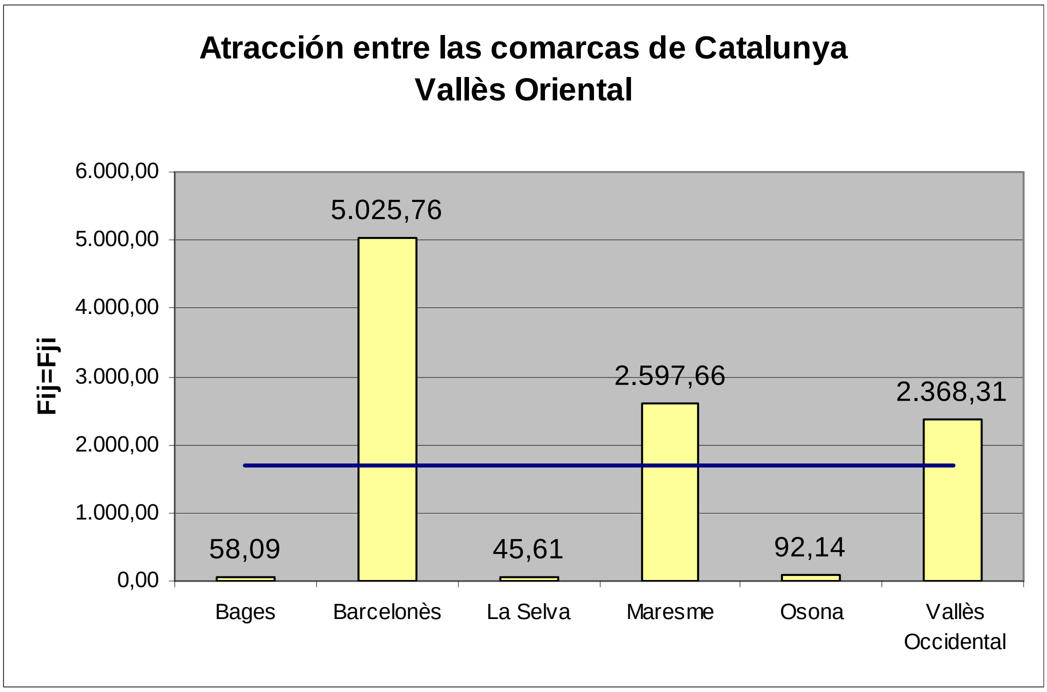

Atracción entre las comarcas de Catalunya
Solsonès
FIJ=FJI
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
0,28
0,81
3,03
2,53
0,46
0,23
Alt Urgell
Anoia
Bages
Berguedà
La Noguera
Segarra


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Tarragonès
FIJ=FJI
1.600,00
1.400,00
1.200,00
1.000,00
800,00
600,00
400,00
200,00
0,00
88,43
1.368,98
38,26
2,58
2,52
Alt Camp
Baix Camp
Baix Penedès
Priorat
Ribera d'Ebre


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Terra Alta
FIJ=FJI
4,00
3,50
3,00
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
2,92
3,64
Baix Ebre
Ribera d'Ebre


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Vall d'Aran
0,14
0,12
0,10
0,08
0,06
0,04
0,02
0,00
FIJ=FJI
0,13
0,05
0,10
Alta Ribagorça
Pallars Jussà
Pallars Sobirà


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Vallès Occidental
30.000,00
25.000,00
20.000,00
15.000,00
10.000,00
5.000,00
0,00
FIJ=FJI
259,36
6.249,12
27.230,33
2.368,31
Bages
Baix Llobregat
Barcelonès
Vallès Oriental


Atracción entre las comarcas de Catalunya
Vallès Oriental
Fij=Fji
6.000,00
5.000,00
4.000,00
3.000,00
2.000,00
1.000,00
0,00
58,09
5.025,76
45,61
2.597,66
92,14
2.368,31
Bages
Barcelonès
La Selva
Maresme
Osona
Vallès Occidental

ANEXO 5

APLICACIÓN DEL MODELO (DATOS REFERENTES A LOS AÑOS 1975, 1981, 1986, 1991, 1995, 1996, 1999, 2000 Y 2002)

1. TERRITORIO Y POBLACIÓN COMARCALES SEGÚN LA GENERALITAT DE CATALUNYA. ÁMBITOS DEL PLAN TERRITORIAL GENERAL. AÑO 1996.

Código Comarca	Nombre Comarca	Superficie (Km^2)	Población 96 (Hab.)	Densidad 96 (Hab./km^2)
1	Alt Camp	544,69	34.403	63,20
2	Alt Empordà	1.342,43	93.172	69,40
3	Alt Penedès	592,40	73.196	123,60
4	Alt Urgell	1.446,85	19.006	13,10
5	Alta Ribagorça	426,77	3.542	8,30
6	Anoia	866,60	86.964	100,40
7	Bages	1.295,17	152.586	117,80
8	Baix Camp	695,27	140.540	202,10
9	Baix Ebre	987,87	65.879	66,70
10	Baix Empordà	700,48	95.986	137,00
11	Baix Llobregat	486,50	643.419	1.322,50
12	Baix Penedès	295,51	47.550	160,90
13	Barcelonès	143,07	2.131.378	14.897,40
14	Berguedà	1.182,46	38.606	32,60
15	Cerdanya	546,37	12.757	23,30
16	Conca de Barberà	648,92	18.285	28,20
17	Garraf	184,08	90.435	491,30
18	Garrigues	799,71	19.273	24,10
19	Garrotxa	734,18	46.708	63,60
20	Gironès	575,50	129.044	224,20
21	Maresme	396,90	318.891	803,50
22	Montsià	708,73	54.765	77,30
23	Noguera	1.732,96	34.390	19,80
24	Osona	1.263,84	122.923	97,30
25	Pallars Jussà	1.289,95	12.817	9,90
26	Pallars Sobirà	1.355,22	5.815	4,30
27	Pla d'Urgell	304,49	29.116	95,60
28	Pla de l'Estany	262,73	23.833	90,70
29	Priorat	496,20	9.212	18,60
30	Ribera d'Ebre	825,29	22.442	27,20
31	Ripollès	958,72	26.365	27,50
32	Segarra	721,20	17.407	24,10
33	Segrià	1.393,74	163.691	117,40
34	Selva	995,50	104.833	105,30
35	Solsonès	998,60	11.171	11,20
36	Tarragonès	317,13	169.016	533,00
37	Terra Alta	740,04	12.584	17,00
38	Urgell	586,19	30.181	51,50
39	Val d'Aran	620,47	7.130	11,50
40	Vallès Occidental	580,70	685.600	1.180,60
41	Vallès Oriental	851,90	285.129	334,70

Código Ámbito	Nombre *Ámbito*	Superficie (Km^2)	Población 96 (Hab.)	Densidad 96 (Hab./km^2)
998	Catalunya	31.895,33	6.090.040	190,90
9981	Ámbito Metropolitano	3.235,55	4.228.048	1.306,70
9982	Comarcas de Girona	5.569,54	519.941	93,40
9983	Camp de Tarragona	2.997,72	419.006	139,80
9984	Terres de l'Ebre	3.261,93	155.670	47,70
9985	Ámbito de Poniente	10.677,55	342.368	32,10
9986	Comarcas Centrales	6.153,04	425.007	69,10

Fuente: *Institut d'Estadística de Catalunya (IDESCAT).*
Institut Cartogràfic de Catalunya.

4. RELACIÓN R_j/R_i Y FUERZA DE ATRACCIÓN ECONÓMICA ENTRE LAS COMARCAS DE CATALUÑA

	Comarca j	R_j/R_i	F
1	Barcelonès	31,12988	457,58607
2	Segrià	16,01939	0,56518
3	Baix Camp	12,47519	14,34391
4	Gironès	6,50533	1,33448
5	Baix Ebre	4,68275	0,58407
6	Tarragonès	4,45196	14,64099
7	Maresme	4,12507	26,51473
8	Bages	3,07748	1,27678
9	Anoia	2,75375	0,46959
10	Vallès Occidental	2,74699	158,35288
11	Alt Empordà	2,13561	0,33465
12	Alt Urgell	2,11919	0,01306
13	Osona	2,08576	0,30102
14	Vall d'Aran	2,00635	0,00096
15	Berguedà	1,76167	0,07208
16	Garraf	1,71666	1,80697
17	Vallès Oriental	1,61922	26,68769
18	l'Urgell	1,60548	0,19752
19	Garrotxa	1,56761	0,27500
20	Pallars Jussà	1,49664	0,00502
21	La Noguera	1,36016	0,24616
22	Alt Penedès	1,09493	1,64771
23	Alt Camp	1,02910	1,70795
24	Ribera d,Ebre	0,96859	0,04592
25	Les Garrigues	0,93744	0,12085
26	Pla d'Urgell	0,86427	0,36465
27	Alta Ribagorça	0,78131	0,00208
28	Conca de Barberà	0,76526	0,21370
29	Segarra	0,74539	0,17765
30	Cerdanya	0,68756	0,01201
31	Ripollès	0,67492	0,08784
32	Baix Penedès	0,56115	0,89547
33	Baix Llobregat	0,55551	263,72896
34	Montsià	0,52719	0,54589
35	Solsonès	0,49158	0,04017
36	Pallars Sobirà	0,43114	0,00314
37	Baix Empordà	0,41417	0,31211
38	Pla de l'Estany	0,37727	0,70007
39	La Selva	0,33072	0,33511
40	Priorat	0,32038	0,03755
41	Terra Alta	0,28542	0,01247
	X	2,93379	23,81951
	σ	5,47443	84,05392
	CV	1,86599	3,52878

5. ATRACCIÓN ENTRE COMARCAS (DATOS DE 1986)

A continuación, puede verse un conjunto de cuadros referidos a diez comarcas escogidas al azar, con datos referidos al año 1986, en los que puede comprobarse que la evolución temporal de las magnitudes estudiadas (α, λ y θ) no resulta significativa si la comparamos con la correspondiente a la del año 1995.

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Alt Camp	**Conca de Barberà**	12,00	637,95	11.705,90	13,76	10,02	11,74	23,78	11,89
Aj=548,25	**Baix Camp**	17,50	674,16	93.405,60	3,06	9,42	5,37	12,48	6,24
Rj=23.633,3	**Tarragonès**	18,00	345,02	108.623,40	5,38	9,36	7,10	14,74	7,37
	Alt Penedès	38,00	515,00	50.493,10	1,04	1,63	1,30	2,67	1,34
	Anoia	46,00	893,38	59.500,50	0,39	1,17	0,68	1,56	0,78
	Baix Penedès	24,50	264,06	28.260,60	5,94	3,23	4,38	9,17	4,58

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Alt Penedès	**Alt Camp**	38,00	548,25	23.633,30	1,63	1,04	1,30	2,67	1,34
Aj=515,00	**Baix Penedès**	20,00	264,06	28.260,60	11,49	4,00	6,78	15,49	7,74
Rj=50.493,10	**Garraf**	13,00	261,49	51.490,90	22,48	11,56	16,12	34,05	17,02
	Baix Llobregat	27,00	474,05	344.095,10	1,53	5,05	2,78	6,58	3,29
	Anoia	27,00	893,38	59.500,50	1,45	2,81	2,02	4,27	2,13

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Baix Llobregat	**Anoia**	39,00	893,38	59.500,50	1,32	0,77	1,01	2,09	1,05
Aj=474,05	**Alt Penedès**	27,00	515,00	50.493,10	5,05	1,53	2,78	6,58	3,29
Rj=344.095,10	**Garraf**	32,00	261,49	51.490,90	7,03	1,09	2,77	8,13	4,06
	Barcelonès	8,00	155,52	1.921.583,00	56,63	58,48	57,55	115,11	57,55
	V.Occidental	17,50	618,59	428.704,40	4,91	7,41	6,03	12,32	6,16
	Bages	41,00	1.295,17	113.406,60	0,66	0,87	0,76	1,53	0,77

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Baix Penedès	**Barcelonès**	57,00	155,52	1.921.583,00	0,48	4,76	1,52	5,24	2,62
Aj = 264’06	**Alt Camp**	24,50	548,25	23.633,30	3,23	5,94	4,38	9,17	4,58
Rj= 28.260’60	**Tarragonès**	27,00	345,02	108.623,40	2,54	8,14	4,54	10,68	5,34
	Garraf	16,00	261,49	51.490,90	12,23	18,07	14,87	30,30	15,15
	Alt Penedès	20,00	515,00	50.493,10	4,00	11,49	6,78	15,49	7,74

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Baix Camp	**Priorat**	24,00	517,31	5.630,20	8,56	1,01	2,94	9,57	4,78
Aj = 674'16	**Ribera d'Ebre**	39,00	825,29	14.369,50	1,49	0,52	0,88	2,01	1,00
Rj = 93.405'60	**Baix Ebre**	62,00	1.036,64	43.293,20	0,32	0,30	0,31	0,62	0,31
	Tarragonès	11,50	345,02	108.623,40	20,84	11,79	15,68	32,64	16,32
	Alt Camp	17,50	548,25	23.633,30	9,42	3,06	5,37	12,48	6,24
	Conca de Barberà	25,00	637,95	11.705,90	5,01	1,19	2,44	6,20	3,10

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Tarragonès	**Priorat**	37,00	517,31	5.630,20	3,79	0,79	1,73	4,58	2,29
Aj = 345'02	**Baix Camp**	11,50	674,16	93.405,60	11,79	20,84	15,68	32,64	16,32
Rj =108.623'40	**Baix Penedès**	27,00	264,06	28.260,60	8,14	2,54	4,54	10,68	5,34
	Alt Camp	18,00	548,25	23.633,30	9,36	5,38	7,10	14,74	7,37
	Ribera d'Ebre	50,00	825,29	14.369,50	0,95	0,59	0,75	1,54	0,77

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Terra Alta	**Baix Ebre**	28,00	1.036,64	43.293,20	0,68	3,10	1,46	3,78	1,89
Aj = 740'04	**Ribera d'Ebre**	18,00	825,29	14.369,50	3,01	5,19	3,95	8,20	4,10
Rj =7.455'50									

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Baix Ebre	**Priorat**	46,00	517,31	5.630,20	1,80	0,23	0,65	2,03	1,02
Aj = 1.036'64	**Terra Alta**	28,00	740,04	7.455,50	3,10	0,68	1,46	3,78	1,89
Rj =43.293'20	**Montsià**	12,00	659,95	33.899,30	11,42	6,17	8,40	17,59	8,80
	Baix Camp	62,00	674,16	93.405,60	0,30	0,32	0,31	0,62	0,31
	Ribera d'Ebre	33,00	825,29	14.369,50	1,61	0,61	0,99	2,22	1,11

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Montsià	**Baix Ebre**	12,00	1.036,64	43.293,20	6,17	11,42	8,40	17,59	8,80
Aj = 659'95									
Rj = 33.899'30									

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (PTA.10^6)	α_{ij}	a_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	a=θ/2
Garraf	**Alt Penedès**	13,00	515,00	50.493,10	11,56	22,48	16,12	34,05	17,02
Aj = 261'49	**Baix Penedès**	16,00	264,06	28.260,60	18,07	12,23	14,87	30,30	15,15
Rj = 51.490'90	**Baix Llobregat**	32,00	474,05	344.095,10	1,09	7,03	2,77	8,13	4,06

6. ATRACCIÓN ENTRE COMARCAS (DATOS DE 1995)

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Alt Camp	**Conca de Barberà**	12,0	648,9	24.400	13,353	10,218	11,681	23,571	11,785
A_j = 544,7	**Baix Camp**	17,5	695,3	195.700	2,927	9,617	5,306	12,544	6,272
R_j = 47.400	**Tarragonès**	18,0	317,1	249.700	5,594	9,859	7,426	15,453	7,727
	Alt Penedès	38,0	592,4	109.800	0,884	1,682	1,219	2,566	1,283
	Anoia	46,0	866,6	114.600	0,406	1,164	0,688	1,571	0,785
	Baix Penedès	24,5	295,5	66.600	5,034	3,426	4,153	8,459	4,230

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Alt Empordà	**Garrotxa**	40,0	734,2	66.700	1,104	0,359	0,630	1,463	0,731
A_j = 1.342,4	**Gironès**	32,0	575,5	207.800	1,506	0,819	1,111	2,326	1,163
R_j = 145.400	**Baix Empordà**	35,0	700,5	142.400	1,173	0,604	0,842	1,777	0,889
	Pla de l'Estany	23,0	262,7	36.300	11,428	0,887	3,183	12,315	6,157

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Alt Penedès	**Alt Camp**	38,0	544,7	47.400	1,682	0,884	1,219	2,566	1,283
A_j = 592,4	**Baix Penedès**	20,0	295,5	66.600	9,994	3,572	5,975	13,567	6,783
R_j = 109.800	**Garraf**	13,0	184,1	133.100	30,144	10,650	17,918	40,794	20,397
	Baix Llobregat	27,0	486,5	873.800	1,412	4,623	2,555	6,035	3,018
	Anoia	27,0	866,6	114.600	1,560	2,349	1,915	3,909	1,955

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Alt Urgell	**Ripollès**	65,0	958,7	37.300	0,226	0,179	0,201	0,405	0,202
A_j = 1.446,9	**Pallars Sobirà**	29,0	1.355,2	8.800	1,300	0,555	0,849	1,854	0,927
R_j = 28.600	**Pallars Jussà**	52,0	1.290,0	18.600	0,331	0,221	0,271	0,552	0,276
	La Noguera	83,0	1.733,0	50.900	0,069	0,122	0,092	0,191	0,095
	Solsonès	41,0	998,6	16.100	0,721	0,339	0,495	1,061	0,530
	Berguedà	44,0	1.182,5	49.300	0,364	0,428	0,395	0,792	0,396
	Cerdanya	39,0	546,4	23.100	1,292	0,423	0,739	1,715	0,858

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Alta Ribagorça	**Vall d'Aran**	33,0	620,5	12.300	1,158	2,749	1,784	3,907	1,953
A_j = 426,8	**Pallars Sobirà**	32,5	1.355,2	8.800	0,611	2,534	1,245	3,146	1,573
R_j = 5.900	**Pallars Jussà**	31,0	1.290,0	18.600	0,550	3,575	1,402	4,125	2,063

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha= \theta/2$
Anoia	**Solsonès**	47,0	998,6	16.100	0,872	0,272	0,487	1,144	0,572
A_j = 866,6	**Segarra**	30,0	721,2	26.300	2,516	0,785	1,405	3,301	1,651
R_j = 114.600	**Conca de Barberà**	44,0	648,9	24.400	1,333	0,356	0,689	1,689	0,844
	Alt Camp	46,0	544,7	47.400	1,164	0,406	0,688	1,571	0,785
	Alt Penedès	27,0	592,4	109.800	2,349	1,560	1,915	3,909	1,955
	Baix Llobregat	39,0	486,5	873.800	0,687	1,493	1,013	2,180	1,090
	Bages	25,0	1.295,2	207.800	1,013	2,251	1,510	3,264	1,632

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha= \theta/2$
Bages	**La Selva**	35,0	995,5	150.000	0,914	0,565	0,719	1,480	0,740
A_j = 1.295,2	**Solsonès**	37,0	998,6	16.100	1,716	0,240	0,642	1,956	0,978
R_j = 207.800	**Anoia**	25,0	866,6	114.600	2,251	1,013	1,510	3,264	1,632
	Baix Llobregat	41,0	486,5	873.800	0,758	0,741	0,749	1,499	0,749
	Vallès Occidental	32,0	580,7	970.700	1,006	1,260	1,126	2,266	1,133
	Vallès Oriental	40,0	851,9	419.800	0,580	0,610	0,595	1,190	0,595
	Osona	45,0	1.263,8	185.300	0,406	0,367	0,386	0,773	0,386
	Ripollès	61,0	958,7	37.300	0,497	0,117	0,241	0,614	0,307
	Berguedà	40,0	1.182,5	49.300	0,854	0,299	0,505	1,153	0,576
	Segarra	47,0	721,2	26.300	1,250	0,175	0,468	1,426	0,713

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha= \theta/2$
Baix Camp	**Priorat**	24,0	496,2	10.300	9,336	0,936	2,956	10,272	5,136
A_j = 695,3	**Ribera d'Ebre**	39,0	825,3	32.700	1,446	0,521	0,868	1,967	0,984
R_j = 195.700	**Baix Ebre**	62,0	987,9	90.200	0,341	0,289	0,314	0,630	0,315
	Tarragonès	11,5	317,1	249.700	21,985	11,795	16,103	33,781	16,890
	Alt Camp	17,5	544,7	47.400	9,617	2,927	5,306	12,544	6,272
	Conca de Barberà	25,0	648,9	24.400	4,936	1,150	2,382	6,085	3,043

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha= \theta/2$
Baix Ebre	**Priorat**	46,0	496,2	10.300	1,963	0,232	0,675	2,195	1,098
A_j = 987,90	**Terra Alta**	28,0	740,0	14.700	3,155	0,705	1,492	3,861	1,930
R_j = 90.200	**Montsià**	12,0	708,7	75.000	10,421	6,610	8,299	17,031	8,515
	Baix Camp	62,0	695,3	195.700	0,289	0,341	0,314	0,630	0,315
	Ribera d'Ebre	33,0	825,3	32.700	1,560	0,663	1,017	2,223	1,112

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha= \theta/2$
Baix Empordà	**Alt Empordà**	35,0	1.342,4	145.400	0,604	1,173	0,842	1,777	0,889
A_j = 700,5	**Gironès**	17,0	575,5	207.800	5,301	5,603	5,450	10,904	5,452
R_j = 142.400	**La Selva**	34,0	995,5	150.000	0,854	1,256	1,036	2,111	1,055

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Baix Llobregat	**Anoia**	39,0	866,6	114.600	1,493	0,687	1,013	2,180	1,090
A_j = 486,5	**Alt Penedès**	27,0	592,4	109.800	4,623	1,412	2,555	6,035	3,018
R_j = 873.800	**Garraf**	32,0	184,1	133.100	9,932	1,072	3,263	11,005	5,502
	Barcelonès	8,0	143,1	3.507.700	68,703	51,044	59,219	119,747	59,873
	V.Occidental	17,5	580,7	970.700	5,429	6,951	6,143	12,381	6,190
	Bages	41,0	1.295,2	207.800	0,741	0,758	0,749	1,499	0,749

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Baix Penedès	**Barcelonès**	57,0	143,1	3.507.700	0,574	3,904	1,497	4,478	2,239
A_j = 295,5	**Alt Camp**	24,5	544,7	47.400	3,426	5,034	4,153	8,459	4,230
R_j = 66.600	**Tarragonès**	27,0	317,1	249.700	2,785	7,212	4,481	9,996	4,998
	Garraf	16,0	184,1	133.100	16,845	16,651	16,748	33,496	16,748
	Alt Penedès	20,0	592,4	109.800	3,572	9,994	5,975	13,567	6,783

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Barcelonès	**Maresme**	25,0	396,9	499.300	7,721	5,838	6,714	13,559	6,779
A_j = 143,1	**Vallès Oriental**	22,0	851,9	419.800	4,921	7,115	5,918	12,037	6,018
R_j = 3.507.700	**Vallès Occidental**	16,5	580,7	970.700	9,706	16,727	12,742	26,433	13,217
	Baix Llobregat	8,0	486,5	873.800	51,044	68,703	59,219	119,747	59,873
	Baix Penedès	57,0	295,5	66.600	3,904	0,574	1,497	4,478	2,239

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Berguedà	**Cerdanya**	38,0	546,4	23.100	1,632	0,455	0,862	2,087	1,043
A_j = 1.182,5	**Alt Urgell**	44,0	1.446,9	28.600	0,428	0,364	0,395	0,792	0,396
R_j = 49.300	**Solsonès**	25,0	998,6	16.100	2,327	0,932	1,472	3,258	1,629
	Bages	40,0	1.295,2	207.800	0,299	0,854	0,505	1,153	0,576
	Osona	38,0	1.263,8	185.300	0,352	0,911	0,566	1,263	0,631
	Ripollès	32,0	958,7	37.300	1,118	0,753	0,917	1,870	0,935

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Cerdanya	**Alt Urgell**	39,0	1.446,9	28.600	0,423	1,292	0,739	1,715	0,858
A_j = 546,4	**Berguedà**	38,0	1.182,5	49.300	0,455	1,632	0,862	2,087	1,043
R_j = 23.100	**Ripollès**	33,0	958,7	37.300	0,816	1,972	1,269	2,788	1,394

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Conca de Barberà	**l'Urgell**	31,0	586,2	43.000	1,470	1,937	1,687	3,407	1,703
A_j = 648,9	**Les Garrigues**	30,0	799,7	25.800	1,364	1,744	1,542	3,108	1,554
R_j = 24.400	**Priorat**	38,0	496,2	10.300	1,860	0,801	1,220	2,661	1,331
	Baix Camp	25,0	695,3	195.700	1,150	4,936	2,382	6,085	3,043
	Alt Camp	12,0	544,7	47.400	10,218	13,353	11,681	23,571	11,785

	Anoia	44,0	866,6	114.600	0,356	1,333	0,689	1,689	0,844
	Segarra	34,0	721,2	26.300	1,170	1,367	1,265	2,537	1,268

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Garraf	**Alt Penedès**	13,0	592,4	109.800	10,650	30,144	17,918	40,794	20,397
A_j = 184,1	**Baix Penedès**	16,0	295,5	66.600	16,651	16,845	16,748	33,496	16,748
R_j = 133.100	**Baix Llobregat**	32,0	486,5	873.800	1,072	9,932	3,263	11,005	5,502

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Garrotxa	**Ripollès**	24,0	958,7	37.300	2,198	1,948	2,069	4,146	2,073
A_j = 734,2	**Osona**	30,0	1.263,8	185.300	0,625	2,127	1,153	2,753	1,376
R_j = 66.700	**La Selva**	39,0	995,5	150.000	0,504	1,173	0,769	1,677	0,839
	Gironès	35,0	575,5	207.800	0,971	1,624	1,256	2,595	1,298
	Alt Empordà	40,0	1.342,4	145.400	0,359	1,104	0,630	1,463	0,731
	Pla de l'Estany	25,0	262,7	36.300	7,460	1,779	3,643	9,239	4,620

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Gironès	**Ripollès**	59,0	958,7	37.300	0,531	0,282	0,387	0,813	0,406
A_j = 575,5	**Garrotxa**	35,0	734,2	66.700	1,624	0,971	1,256	2,595	1,298
R_j = 207.800	**La Selva**	18,0	995,5	150.000	3,456	4,811	4,078	8,267	4,134
	Baix Empordà	17,0	700,5	142.400	5,603	5,301	5,450	10,904	5,452
	Alt Empordà	40,0	1.342,4	145.400	0,524	0,964	0,711	1,489	0,744
	Osona	47,5	1.263,8	185.300	0,364	0,741	0,520	1,106	0,553
	Pla de l'Estany	17,0	262,7	36.300	23,563	3,361	8,899	26,924	13,462

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
La Noguera	**Pallars Jussà**	40,0	1.290,0	18.600	0,678	0,258	0,418	0,936	0,468
A_j = 1.733,0	**Alt Urgell**	83,0	1.446,9	28.600	0,122	0,069	0,092	0,191	0,095
R_j = 50.900	**Solsonès**	67,0	998,6	16.100	0,327	0,088	0,169	0,415	0,207
	Segarra	43,0	721,2	26.300	0,935	0,250	0,484	1,185	0,592
	l'Urgell	32,0	586,2	43.000	1,762	0,533	0,969	2,295	1,147
	Segrià	25,0	1.393,7	244.800	0,680	1,558	1,030	2,239	1,119
	Pla d'Urgell	20,0	304,5	44.600	8,580	1,380	3,441	9,960	4,980

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
La Selva	**Osona**	35,0	1.263,8	185.300	0,602	0,880	0,728	1,482	0,741
A_j = 995,5	**Gironès**	18,0	575,5	207.800	4,811	3,456	4,078	8,267	4,134
R_j = 150.000	**Bages**	35,0	1.295,2	207.800	0,565	0,914	0,719	1,480	0,740
	Vallès Oriental	40,0	851,9	419.800	0,521	0,885	0,679	1,405	0,703
	Maresme	40,0	396,9	499.300	1,055	0,937	0,994	1,992	0,996
	Garrotxa	39,0	734,2	66.700	1,173	0,504	0,769	1,677	0,839
	Baix Empordà	34,0	700,5	142.400	1,256	0,854	1,036	2,111	1,055

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Les Garrigues	**Segrià**	22,5	1.393,7	244.800	0,669	5,229	1,871	5,899	2,949
A_j = 799,7	**Ribera d'Ebre**	51,0	825,3	32.700	0,430	0,520	0,473	0,951	0,475
R_j = 25.800	**Priorat**	42,0	496,2	10.300	1,552	0,522	0,900	2,074	1,037
	Conca de Barberà	30,0	648,9	24.400	1,744	1,364	1,542	3,108	1,554
	l'Urgell	27,0	586,2	43.000	1,974	2,034	2,003	4,007	2,004
	Pla d'Urgell	12,0	304,5	44.600	19,003	10,422	14,073	29,424	14,712

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
l'Urgell	**La Noguera**	32,0	1.733,0	50.900	0,533	1,762	0,969	2,295	1,147
A_j = 586,2	**Segrià**	43,0	1.393,7	244.800	0,217	1,647	0,598	1,865	0,932
R_j = 43.000	**Les Garrigues**	27,0	799,7	25.800	2,034	1,974	2,003	4,007	2,004
	Conca de Barberà	31,0	648,9	24.400	1,937	1,470	1,687	3,407	1,703
	Segarra	10,5	721,2	26.300	14,816	13,134	13,950	27,950	13,975
	Pla d'Urgell	21,5	304,5	44.600	7,019	3,736	5,120	10,754	5,377

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Maresme	**Vallès Oriental**	15,0	851,9	419.800	5,528	10,569	4,231	16,096	8,048
A_j = 396,9	**Barcelonès**	25,0	143,1	3.507.700	5,838	7,721	3,716	13,559	6,779
R_j = 499.300	**La Selva**	40,0	995,5	150.000	0,937	1,055	0,550	1,992	0,996

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Montsià	**Baix Ebre**	12,0	987,9	90.200	6,610	10,421	8,299	17,031	8,515
A_j = 708,7									
R_j = 75.000									

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Osona	**Berguedà**	38,0	1.182,5	49.300	0,911	0,352	0,566	1,263	0,631
A_j = 1.263,8	**Bages**	45,0	1.295,2	207.800	0,367	0,406	0,386	0,773	0,386
R_j = 185.300	**Vallès Oriental**	33,0	851,9	419.800	0,821	0,954	0,885	1,775	0,888
	La Selva	35,0	995,5	150.000	0,880	0,602	0,728	1,482	0,741
	Garrotxa	30,0	734,2	66.700	2,127	0,625	1,153	2,753	1,376
	Ripollès	28,5	958,7	37.300	2,191	0,571	1,118	2,762	1,381
	Gironès	47,5	575,5	207.800	0,741	0,364	0,520	1,106	0,553

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Pallars Jussà	**Vall d'Aran**	63,0	620,5	12.300	0,466	0,170	0,282	0,636	0,318
A_j = 1.290,0	**Pallars Sobirà**	35,0	1.355,2	8.800	0,773	0,493	0,617	1,266	0,633
R_j = 18.600	**Alt Urgell**	52,0	1.446,9	28.600	0,221	0,331	0,271	0,552	0,276

	La Noguera	40,0	1.733,0	50.900	0,258	0,678	0,418	0,936	0,468
	Segrià	65,0	1.393,7	244.800	0,072	0,433	0,177	0,505	0,253
	Alta Ribagorça	31,0	426,8	5.900	3,575	0,550	1,402	4,125	2,063

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Pallars Sobirà	**Vall d'Aran**	42,0	620,5	12.300	0,817	0,468	0,618	1,285	0,642
A_j = 1.355,2	**Pallars Jussà**	35,0	1.290,0	18.600	0,493	0,773	0,617	1,266	0,633
R_j = 8.800	**Alt Urgell**	29,0	1.446,9	28.600	0,555	1,300	0,849	1,854	0,927
	Alta Ribagorça	32,5	426,8	5.900	2,534	0,611	1,245	3,146	1,573

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Pla de l'Estany	**Alt Empordà**	23,0	1.342,4	145.400	0,887	11,428	3,183	12,315	6,157
A_j = 262,7	**Gironès**	17,0	575,5	207.800	3,361	23,563	8,899	26,924	13,462
R_j = 36.300	**Garrotxa**	25,0	734,2	66.700	1,779	7,460	3,643	9,239	4,620

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Pla d'Urgell	**La Noguera**	20,0	1.733,0	50.900	1,380	8,580	3,441	9,960	4,980
A_j = 304,5	**L'Urgell**	21,5	586,2	43.000	3,736	7,019	5,120	10,754	5,377
R_j = 44.600	**Les Garrigues**	12,0	799,7	25.800	10,422	19,003	14,073	29,424	14,712
	Segrià	21,0	1.393,7	244.800	0,922	13,136	3,481	14,058	7,029

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Priorat	**Tarragonès**	37,0	317,1	249.700	0,796	4,261	1,841	5,056	2,528
A_j = 496,2	**Ribera d'Ebre**	15,0	825,3	32.700	3,664	13,164	6,945	16,828	8,414
R_j = 10.300	**Baix Camp**	24,0	695,3	195.700	0,936	9,336	2,956	10,272	5,136
	Baix Ebre	46,0	987,9	90.200	0,232	1,963	0,675	2,195	1,098
	Conca de Barberà	38,0	648,9	24.400	0,801	1,860	1,220	2,661	1,331
	Les Garrigues	42,5	799,7	25.800	0,510	1,515	0,879	2,025	1,013

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Ribera d'Ebre	**Terra Alta**	18,0	740,0	14.700	5,444	2,865	3,949	8,309	4,155
A_j = 825,3	**Baix Ebre**	33,0	987,9	90.200	0,663	1,560	1,017	2,223	1,112
R_j = 32.700	**Baix Camp**	39,0	695,3	195.700	0,521	1,446	0,868	1,967	0,984
	Priorat	15,0	496,2	10.300	13,164	3,664	6,945	16,828	8,414
	Les Garrigues	51,0	799,7	25.800	0,520	0,430	0,473	0,951	0,475
	Segrià	57,0	1.393,7	244.800	0,113	0,730	0,287	0,842	0,421
	Tarragonès	50,0	317,1	249.700	0,641	0,954	0,782	1,595	0,797

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Ripollès	**Gironès**	59,0	575,5	207.800	0,282	0,531	0,387	0,813	0,406
A_j = 958,7	**Cerdanya**	33,0	546,4	23.100	1,972	0,816	1,269	2,788	1,394
R_j = 37.300	**Alt Urgell**	65,0	1.446,9	28.600	0,179	0,226	0,201	0,405	0,202
	Berguedà	32,0	1.182,5	49.300	0,753	1,118	0,917	1,870	0,935

	Osona	28,5	1.263,8	185.300	0,571	2,191	1,118	2,762	1,381
	Garrotxa	24,0	734,2	66.700	1,948	2,198	2,069	4,146	2,073
	Bages	61,0	1.295,2	207.800	0,117	0,497	0,241	0,614	0,307

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Segarra	**Segrià**	55,0	1.393,7	244.800	0,113	0,964	0,330	1,077	0,538
A_j = 721,2	**La Noguera**	43,0	1.733,0	50.900	0,250	0,935	0,484	1,185	0,592
R_j = 26.300	**l'Urgell**	10,5	586,2	43.000	13,134	14,816	13,950	27,950	13,975
	Conca de Barberà	34,0	648,9	24.400	1,367	1,170	1,265	2,537	1,268
	Anoia	30,0	866,6	114.600	0,785	2,516	1,405	3,301	1,651
	Solsonès	44,0	998,6	16.100	0,609	0,608	0,609	1,217	0,609
	Bages	47,0	1.295,2	207.800	0,175	1,250	0,468	1,426	0,713

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Segrià	**Segarra**	55,0	721,2	26.300	0,964	0,113	0,330	1,077	0,538
A_j = 1.393,7	**Ribera d'Ebre**	57,0	825,3	32.700	0,730	0,113	0,287	0,842	0,421
R_j = 244.800	**Les Garrigues**	22,5	799,7	25.800	5,229	0,669	1,871	5,899	2,949
	l'Urgell	43,0	586,2	43.000	1,647	0,217	0,598	1,865	0,932
	La Noguera	25,0	1.733,0	50.900	1,558	0,680	1,030	2,239	1,119
	Pallars Jussà	65,0	1.290,0	18.600	0,433	0,072	0,177	0,505	0,253
	Pla d'Urgell	21,0	304,5	44.600	13,136	0,922	3,481	14,058	7,029

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Solsonès	**Alt Urgell**	41,0	1.446,9	28.600	0,339	0,721	0,495	1,061	0,530
A_j = 998,6	**Berguedà**	25,0	1.182,5	49.300	0,932	2,327	1,472	3,258	1,629
R_j = 16.100	**Bages**	37,0	1.295,2	207.800	0,240	1,716	0,642	1,956	0,978
	Anoia	47,0	866,6	114.600	0,272	0,872	0,487	1,144	0,572
	Segarra	44,0	721,2	26.300	0,608	0,609	0,609	1,217	0,609
	La Noguera	67,0	1.733,0	50.900	0,088	0,327	0,169	0,415	0,207

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Tarragonès	**Priorat**	37,0	496,2	10.300	4,261	0,796	1,841	5,056	2,528
A_j = 317,1	**Baix Camp**	11,5	695,3	195.700	11,795	21,985	16,103	33,781	16,890
R_j = 249.700	**Baix Penedès**	27,0	295,5	66.600	7,212	2,785	4,481	9,996	4,998
	Alt Camp	18,0	544,7	47.400	9,859	5,594	7,426	15,453	7,727
	Ribera d'Ebre	50,0	825,3	32.700	0,954	0,641	0,782	1,595	0,798

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$
Terra Alta	**Baix Ebre**	28,0	987,9	90.200	0,705	3,155	1,492	3,861	1,930
A_j = 740,04	**Ribera d'Ebre**	18,0	825,3	32.700	2,865	5,444	3,949	8,309	4,155
R_j = 14.700									

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km^2)	A_i (km^2)	R_i (10^6) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha=\theta/2$

Vall d'Aran	**Pallars Sobirà**	42,0	1.355,2	8.800	0,468	0,817	0,618	1,285	0,642
A_j = 620,5	**Pallars Jussà**	63,0	1.290,0	18.600	0,170	0,466	0,282	0,636	0,318
R_j = 12.300	**Alta Ribagorça**	33,0	426,8	5.900	2,749	1,159	1,784	3,907	1,954

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10⁶) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Vallès Occidental	**Bages**	32,0	1.295,2	207.800	1,260	1,006	1,126	2,266	1,133
A_j = 580,7	**Baix Llobregat**	17,5	486,5	873.800	6,951	5,429	6,143	12,381	6,190
R_j = 970.700	**Barcelonès**	16,5	143,1	3.507.700	16,727	9,706	12,742	26,433	13,217
	Vallès Oriental	19,0	851,9	419.800	4,300	3,607	3,938	7,907	3,954

Comarca j	*Comarca i*	r_{ij} (km²)	A_i (km²)	R_i (10⁶) PTA	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$	$\theta_{ij}=\theta_{ji}$	$\alpha = \theta/2$
Vallès Oriental	**Bages**	40,0	1.295,2	207.800	0,610	0,580	0,595	1,190	0,595
A_j = 851,9	**Vallès Occidental**	19,0	580,7	970.700	3,607	4,300	3,938	7,907	3,954
R_j = 419.800	**Barcelonès**	22,0	143,1	3.507.700	7,115	4,921	5,918	12,037	6,018
	Maresme	15,0	396,9	499.300	10,569	5,528	7,643	16,096	8,048
	La Selva	40,0	995,5	150.000	0,885	0,521	0,679	1,405	0,703
	Osona	33,0	1.263,8	185.300	0,954	0,821	0,885	1,775	0,888

7. COCIENTES DE RENTA, FUERZA DE ATRACCIÓN ECONÓMICA Y DETERMINACIÓN DE PUNTOS FRONTERA ENTRE LAS COMARCAS CATALANAS

ALT CAMP

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Camp -1991	Conca de Barberà	12,0	648,90	110,65	1,99	14,09	0,443	5,3
544,70	Baix Camp	17,5	695,30	920,76	0,24	37,82	0,617	10,8
220,11	Tarragonès	18,0	317,10	1.112,25	0,20	41,98	0,632	11,4
	Alt Penedès	38,0	592,40	475,36	0,46	1,91	0,564	21,4
	Anoia	46,0	866,60	513,27	0,43	1,16	0,570	26,2
	Baix Penedès	24,5	295,50	271,54	0,81	4,06	0,517	12,7
					0,69	101,02		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Camp -1996	Conca de Barberà	12,0	648,90	171,48	1,84	31,32	0,449	5,4
544,70	Baix Camp	17,5	695,30	1.274,07	0,25	75,02	0,614	10,7
315,57	Tarragonès	18,0	317,10	1.634,17	0,19	88,43	0,634	11,4
	Alt Penedès	38,0	592,40	681,48	0,46	3,92	0,564	21,4
	Anoia	46,0	866,60	763,29	0,41	2,47	0,573	26,4
	Baix Penedès	24,5	295,50	460,82	0,68	9,89	0,532	13,0
					0,64	211,04		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Camp -1999	Conca de Barberà	12,0	648,90	194,18	1,90	41,46	0,447	5,4
544,70	Baix Camp	17,5	695,30	1.461,46	0,25	100,62	0,613	10,7
368,98	Tarragonès	18,0	317,10	1.901,98	0,19	120,33	0,633	11,4
	Alt Penedès	38,0	592,40	770,48	0,48	5,18	0,561	21,3
	Anoia	46,0	866,60	857,64	0,43	3,25	0,570	26,2
	Baix Penedès	24,5	295,50	563,78	0,65	14,15	0,535	13,1
					0,65	284,99		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Camp -2000	Conca de Barberà	12,0	648,90	205,15	1,92	46,64	0,446	5,4
544,70	Baix Camp	17,5	695,30	1.539,36	0,26	112,84	0,612	10,7
392,87	Tarragonès	18,0	317,10	2.005,01	0,20	135,07	0,633	11,4
	Alt Penedès	38,0	592,40	822,24	0,48	5,89	0,561	21,3
	Anoia	46,0	866,60	915,66	0,43	3,70	0,570	26,2
	Baix Penedès	24,5	295,50	608,76	0,65	16,26	0,536	13,1
					0,65	320,40		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Camp -2002	Conca de Barberà	12,0	648,90	233,66	2,33	58,66	0,430	5,2
544,70	Baix Camp	17,5	695,30	1.788,54	0,30	144,76	0,598	10,5
433,78	Tarragonès	18,0	317,10	2.274,81	0,24	169,20	0,617	11,1
	Alt Penedès	38,0	592,40	925,26	0,59	7,31	0,544	20,7
	Anoia	46,0	866,60	1.042,58	0,52	4,65	0,554	25,5
	Baix Penedès	24,5	295,50	778,59	0,70	22,97	0,530	13,0
					0,78	407,54		

ALT EMPORDÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Empordà -1991	Garrotxa	40,0	734,20	328,50	2,21	3,73	0,434	17,4
1.342,40	Gironès	32,0	575,50	936,89	0,78	20,77	0,521	16,7
726,57	Baix Empordà	35,0	700,50	675,49	1,08	11,45	0,494	17,3
	Pla de l'Estany	23,0	262,70	157,50	4,61	9,41	0,375	8,6
					2,17	45,36		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Empordà -1996	Garrotxa	40,0	734,20	451,50	2,23	7,09	0,434	17,3
1.342,40	Gironès	32,0	575,50	1.264,79	0,80	38,82	0,519	16,6
1.005,63	Baix Empordà	35,0	700,50	988,88	1,02	23,19	0,499	17,5
	Pla de l'Estany	23,0	262,70	239,01	4,21	19,75	0,382	8,8
					2,06	88,86		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Empordà -1999	Garrotxa	40,0	734,20	566,18	1,94	9,70	0,445	17,8
1.342,40	Gironès	32,0	575,50	1.620,47	0,68	54,21	0,533	17,0
1.096,22	Baix Empordà	35,0	700,50	1.113,50	0,98	28,47	0,501	17,5
	Pla de l'Estany	23,0	262,70	284,62	3,85	25,64	0,389	9,0
					1,86	118,02		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Empordà -2000	Garrotxa	40,0	734,20	609,40	1,96	11,40	0,444	17,8
1.342,40	Gironès	32,0	575,50	1.745,38	0,69	63,75	0,531	17,0
1.196,80	Baix Empordà	35,0	700,50	1.201,64	1,00	33,54	0,500	17,5
	Pla de l'Estany	23,0	262,70	307,93	3,89	30,29	0,389	8,9
					1,88	138,97		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Empordà -2002	Garrotxa	40,0	734,20	684,24	2,00	14,63	0,443	17,7
1.342,40	Gironès	32,0	575,50	1.978,85	0,69	82,63	0,531	17,0
1.368,28	Baix Empordà	35,0	700,50	1.391,68	0,98	44,41	0,501	17,5
	Pla de l'Estany	23,0	262,70	353,03	3,88	39,70	0,389	8,9
					1,89	181,37		

ALT PENEDÈS

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Penedès -1991	Alt Camp	38,0	544,70	220,11	2,16	1,91	0,436	16,6
592,40	Baix Penedès	20,0	295,50	271,54	1,75	16,13	0,453	9,1
475,36	Garraf	13,0	184,10	536,15	0,89	116,01	0,510	6,6
	Baix Llobregat	27,0	486,50	3.783,68	0,13	91,38	0,666	18,0
	Anoia	27,0	866,60	513,27	0,93	12,40	0,506	13,7
					1,17	237,82		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Penedès -1996	Alt Camp	38,0	544,70	315,57	2,16	3,92	0,436	16,6
592,40	Baix Penedès	20,0	295,50	460,82	1,48	39,25	0,467	9,3
681,48	Garraf	13,0	184,10	900,70	0,76	279,39	0,523	6,8
	Baix Llobregat	27,0	486,50	5.496,24	0,12	190,30	0,667	18,0
	Anoia	27,0	866,60	763,29	0,89	26,43	0,509	13,8
					1,08	539,28		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Penedès -1999	Alt Camp	38,0	544,70	368,98	2,09	5,18	0,439	16,7
592,40	Baix Penedès	20,0	295,50	563,78	1,37	54,30	0,474	9,5
770,48	Garraf	13,0	184,10	1.026,79	0,75	360,09	0,524	6,8
	Baix Llobregat	27,0	486,50	6.343,56	0,12	248,32	0,669	18,1
	Anoia	27,0	866,60	857,64	0,90	33,57	0,509	13,7
					1,04	701,46		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Penedès -2000	Alt Camp	38,0	544,70	392,87	2,09	5,89	0,439	16,7
592,40	Baix Penedès	20,0	295,50	608,76	1,35	62,57	0,475	9,5
822,24	Garraf	13,0	184,10	1.101,56	0,75	412,27	0,524	6,8
	Baix Llobregat	27,0	486,50	6.713,78	0,12	280,46	0,668	18,0
	Anoia	27,0	866,60	915,66	0,90	38,25	0,509	13,7
					1,04	799,43		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Penedès -2002	Alt Camp	38,0	544,70	433,78	2,13	7,31	0,437	16,6
592,40	Baix Penedès	20,0	295,50	778,59	1,19	90,05	0,486	9,7
925,26	Garraf	13,0	184,10	1.280,20	0,72	539,15	0,527	6,9
	Baix Llobregat	27,0	486,50	7.497,40	0,12	352,44	0,668	18,0
	Anoia	27,0	866,60	1.042,58	0,89	49,01	0,510	13,8
					1,01	1.037,97		

ALT URGELL

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Urgell -1991	Pallars Sobirà	29,0	1.355,20	41,46	3,00	0,21	0,409	11,9
1.446,90	Pallars Jussà	52,0	1.290,00	94,39	1,32	0,08	0,477	24,8
124,54	La Noguera	83,0	1.733,00	219,75	0,57	0,05	0,547	45,4
	Solsonès	41,0	998,60	69,83	1,78	0,13	0,452	18,5
	Berguedà	44,0	1.182,50	257,41	0,48	0,38	0,560	24,6
	Cerdanya	39,0	546,40	103,66	1,20	0,22	0,485	18,9
					1,39	1,06		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Urgell -1996	Pallars Sobirà	29,0	1.355,20	70,23	2,50	0,50	0,424	12,3
1.446,90	Pallars Jussà	52,0	1.290,00	128,69	1,36	0,16	0,474	24,7
175,35	La Noguera	83,0	1.733,00	351,78	0,50	0,11	0,558	46,3
	Solsonès	41,0	998,60	110,20	1,59	0,28	0,461	18,9
	Berguedà	44,0	1.182,50	357,26	0,49	0,74	0,559	24,6
	Cerdanya	39,0	546,40	156,74	1,12	0,46	0,491	19,1
					1,26	2,25		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Urgell -1999	Pallars Sobirà	29,0	1.355,20	68,45	2,97	0,57	0,410	11,9
1.446,90	Pallars Jussà	52,0	1.290,00	143,09	1,42	0,21	0,471	24,5
203,05	La Noguera	83,0	1.733,00	363,95	0,56	0,13	0,548	45,5
	Solsonès	41,0	998,60	123,92	1,64	0,37	0,459	18,8
	Berguedà	44,0	1.182,50	373,45	0,54	0,89	0,551	24,2
	Cerdanya	39,0	546,40	165,65	1,23	0,57	0,483	18,8
					1,39	2,73		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Urgell -2000	Pallars Sobirà	29,0	1.355,20	73,88	2,83	0,63	0,414	12,0
1.446,90	Pallars Jussà	52,0	1.290,00	152,12	1,37	0,23	0,474	24,6
209,03	La Noguera	83,0	1.733,00	391,81	0,53	0,14	0,552	45,8
	Solsonès	41,0	998,60	132,79	1,57	0,40	0,462	19,0
	Berguedà	44,0	1.182,50	391,09	0,53	0,96	0,552	24,3
	Cerdanya	39,0	546,40	177,23	1,18	0,62	0,486	19,0
					1,34	2,99		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alt Urgell -2002	Pallars Sobirà	29,0	1.355,20	82,64	2,70	0,76	0,418	12,1
1.446,90	Pallars Jussà	52,0	1.290,00	158,37	1,41	0,25	0,472	24,5
222,89	La Noguera	83,0	1.733,00	430,46	0,52	0,17	0,555	46,0
	Solsonès	41,0	998,60	142,61	1,56	0,46	0,463	19,0
	Berguedà	44,0	1.182,50	443,07	0,50	1,16	0,557	24,5
	Cerdanya	39,0	546,40	212,84	1,05	0,80	0,496	19,3
					1,29	3,59		

ALTA RIBAGORÇA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alta Ribagorça -1991	Vall d'Aran	33,0	620,50	53,17	0,47	0,04	0,563	18,6
426,80	Pallars Sobirà	32,5	1.355,20	41,46	0,60	0,03	0,543	17,6
24,85	Pallars Jussà	31,0	1.290,00	94,39	0,26	0,08	0,609	18,9
					0,44	0,15		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alta Ribagorça -1996	Vall d'Aran	33,0	620,50	104,86	0,41	0,13	0,573	18,9
426,80	Pallars Sobirà	32,5	1.355,20	70,23	0,61	0,09	0,541	17,6
43,13	Pallars Jussà	31,0	1.290,00	128,69	0,34	0,19	0,590	18,3
					0,45	0,40		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alta Ribagorça -1999	Vall d'Aran	33,0	620,50	103,60	0,40	0,12	0,576	19,0
426,80	Pallars Sobirà	32,5	1.355,20	68,45	0,60	0,08	0,542	17,6
41,34	Pallars Jussà	31,0	1.290,00	143,09	0,29	0,20	0,602	18,7
					0,43	0,40		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alta Ribagorça -2000	Vall d'Aran	33,0	620,50	105,58	0,40	0,13	0,575	19,0
426,80	Pallars Sobirà	32,5	1.355,20	73,88	0,58	0,09	0,546	17,7
42,57	Pallars Jussà	31,0	1.290,00	152,12	0,28	0,22	0,605	18,7
					0,42	0,43		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Alta Ribagorça -2002	Vall d'Aran	33,0	620,50	128,95	0,36	0,17	0,584	19,3
426,80	Pallars Sobirà	32,5	1.355,20	82,64	0,57	0,11	0,547	17,8
46,88	Pallars Jussà	31,0	1.290,00	158,37	0,30	0,25	0,600	18,6
					0,41	0,53		

ANOIA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Anoia -1991	Solsonès	47,0	998,60	69,83	7,35	0,35	0,340	16,0
866,60	Segarra	30,0	721,20	112,20	4,57	2,13	0,376	11,3
513,27	Conca de Barberà	44,0	648,90	110,65	4,64	0,67	0,375	16,5
	Alt Camp	46,0	544,70	220,11	2,33	1,16	0,430	19,8
	Alt Penedès	27,0	592,40	475,36	1,08	12,40	0,494	13,3
	Baix Llobregat	39,0	486,50	3.783,68	0,14	32,74	0,661	25,8
	Bages	25,0	1.295,20	1.001,10	0,51	32,89	0,555	13,9
					2,95	82,33		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Anoia -1996	Solsonès	47,0	998,60	110,20	6,93	0,81	0,344	16,2
866,60	Segarra	30,0	721,20	177,57	4,30	5,02	0,381	11,4
763,29	Conca de Barberà	44,0	648,90	171,48	4,45	1,54	0,378	16,6
	Alt Camp	46,0	544,70	315,57	2,42	2,47	0,427	19,6
	Alt Penedès	27,0	592,40	681,48	1,12	26,43	0,491	13,2
	Baix Llobregat	39,0	486,50	5.496,24	0,14	70,72	0,659	25,7
	Bages	25,0	1.295,20	1.394,69	0,55	68,13	0,550	13,8
					2,84	175,12		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Anoia -1999	Solsonès	47,0	998,60	123,92	6,92	1,02	0,344	16,2
866,60	Segarra	30,0	721,20	200,18	4,28	6,36	0,381	11,4
857,64	Conca de Barberà	44,0	648,90	194,18	4,42	1,96	0,379	16,7
	Alt Camp	46,0	544,70	368,98	2,32	3,25	0,430	19,8
	Alt Penedès	27,0	592,40	770,48	1,11	33,57	0,491	13,3
	Baix Llobregat	39,0	486,50	6.343,56	0,14	91,72	0,661	25,8
	Bages	25,0	1.295,20	1.559,07	0,55	85,58	0,550	13,7
					2,82	223,45		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Anoia -2000	Solsonès	47,0	998,60	132,79	6,90	1,17	0,344	16,2
866,60	Segarra	30,0	721,20	213,67	4,29	7,25	0,381	11,4
915,66	Conca de Barberà	44,0	648,90	205,15	4,46	2,21	0,378	16,6
	Alt Camp	46,0	544,70	392,87	2,33	3,70	0,430	19,8
	Alt Penedès	27,0	592,40	822,24	1,11	38,25	0,491	13,3
	Baix Llobregat	39,0	486,50	6.713,78	0,14	103,64	0,660	25,7
	Bages	25,0	1.295,20	1.637,27	0,56	95,95	0,548	13,7
					2,83	252,15		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Anoia -2002	Solsonès	47,0	998,60	142,61	7,31	1,43	0,340	16,0
866,60	Segarra	30,0	721,20	234,29	4,45	9,05	0,378	11,3
1.042,58	Conca de Barberà	44,0	648,90	233,66	4,46	2,86	0,378	16,6
	Alt Camp	46,0	544,70	433,78	2,40	4,65	0,427	19,7
	Alt Penedès	27,0	592,40	925,26	1,13	49,01	0,490	13,2
	Baix Llobregat	39,0	486,50	7.497,40	0,14	131,77	0,659	25,7
	Bages	25,0	1.295,20	1.783,45	0,58	119,00	0,545	13,6
					2,93	317,77		

BAGES

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Bages -1991	Solsonès	37,0	998,60	69,83	14,34	1,38	0,292	10,8
1.295,20	Anoia	25,0	866,60	513,27	1,95	32,89	0,445	11,1
1.001,10	Baix Llobregat	41,0	486,50	3.783,68	0,26	54,96	0,609	25,0
	Vallès Occidental	32,0	580,70	4.166,13	0,24	127,28	0,617	19,7
	Vallès Oriental	40,0	851,90	1.739,34	0,58	27,21	0,546	21,8
	Osona	45,0	1.263,80	842,01	1,19	9,25	0,486	21,9
	Berguedà	40,0	1.182,50	257,41	3,89	4,03	0,389	15,5
					3,21	256,99		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Bages -1996	Solsonès	37,0	998,60	110,20	12,66	3,03	0,300	11,1
1.295,20	Anoia	25,0	866,60	763,29	1,83	68,13	0,450	11,2
1.394,69	Baix Llobregat	41,0	486,50	5.496,24	0,25	111,22	0,612	25,1
	Vallès Occidental	32,0	580,70	6.093,51	0,23	259,36	0,620	19,9
	Vallès Oriental	40,0	851,90	2.665,83	0,52	58,09	0,554	22,2
	Osona	45,0	1.263,80	1.242,09	1,12	19,01	0,490	22,1
	Berguedà	40,0	1.182,50	358,26	3,89	7,81	0,389	15,5
					2,93	526,65		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Bages -1999	Solsonès	37,0	998,60	123,92	12,58	3,81	0,301	11,1
1.295,20	Anoia	25,0	866,60	857,64	1,82	85,58	0,450	11,3
1.559,07	Baix Llobregat	41,0	486,50	6.343,56	0,25	143,50	0,615	25,2
	Vallès Occidental	32,0	580,70	7.210,84	0,22	343,08	0,625	20,0
	Vallès Oriental	40,0	851,90	3.118,15	0,50	75,96	0,558	22,3
	Osona	45,0	1.263,80	1.310,81	1,19	22,43	0,486	21,8
	Berguedà	40,0	1.182,50	373,45	4,17	9,10	0,383	15,3
					2,96	683,46		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Bages -2000	Solsonès	37,0	998,60	132,79	12,33	4,29	0,302	11,2
1.295,20	Anoia	25,0	866,60	915,66	1,79	95,95	0,452	11,3
1.637,27	Baix Llobregat	41,0	486,50	6.713,78	0,24	159,49	0,615	25,2
	Vallès Occidental	32,0	580,70	7.643,20	0,21	381,90	0,626	20,0
	Vallès Oriental	40,0	851,90	3.307,79	0,49	84,62	0,558	22,3
	Osona	45,0	1.263,80	1.394,76	1,17	25,06	0,487	21,9
	Berguedà	40,0	1.182,50	397,09	4,12	10,16	0,384	15,4
					2,91	761,47		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Bages -2002	Solsonès	37,0	998,60	142,61	12,51	5,02	0,301	11,1
1.295,20	Anoia	25,0	866,60	1.042,58	1,71	119,00	0,455	11,4
1.783,45	Baix Llobregat	41,0	486,50	7.497,40	0,24	194,01	0,617	25,3
	Vallès Occidental	32,0	580,70	8.491,07	0,21	462,14	0,627	20,1
	Vallès Oriental	40,0	851,90	3.763,23	0,47	104,87	0,562	22,5
	Osona	45,0	1.263,80	1.539,52	1,16	30,13	0,488	21,9
	Berguedà	40,0	1.182,50	443,07	4,03	12,35	0,386	15,4
					2,90	927,52		

BAIX CAMP

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Camp -1991	Priorat	24,0	496,20	53,54	17,20	3,57	0,279	6,7
695,30	Ribera d'Ebre	39,0	825,30	144,99	6,35	2,25	0,351	13,7
920,76	Baix Ebre	62,0	987,90	415,99	2,21	1,61	0,434	26,9
	Tarragonès	11,5	317,10	1.112,25	0,83	673,37	0,516	5,9
	Alt Camp	17,5	544,70	220,11	4,18	37,82	0,383	6,7
	Conca de Barberà	25,0	648,90	110,65	8,32	6,52	0,330	8,3
					6,52	725,13		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Camp -1996	Priorat	24,0	496,20	79,87	15,95	7,36	0,284	6,8
695,30	Ribera d'Ebre	39,0	825,30	192,65	6,61	4,14	0,348	13,6
1.274,07	Baix Ebre	62,0	987,90	581,09	2,19	3,11	0,435	27,0
	Tarragonès	11,5	317,10	1.634,17	0,78	1.368,98	0,521	6,0
	Alt Camp	17,5	544,70	315,57	4,04	75,02	0,386	6,8
	Conca de Barberà	25,0	648,90	171,48	7,43	13,98	0,339	8,5
					6,17	1.472,59		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Camp -1999	Priorat	24,0	496,20	87,42	16,72	9,24	0,281	6,7
695,30	Ribera d'Ebre	39,0	825,30	224,09	6,52	5,52	0,349	13,6
1.461,46	Baix Ebre	62,0	987,90	648,25	2,25	3,98	0,433	26,8
	Tarragonès	11,5	317,10	1.901,98	0,77	1.827,68	0,522	6,0
	Alt Camp	17,5	544,70	368,98	3,96	100,62	0,387	6,8
	Conca de Barberà	25,0	648,90	194,18	7,53	18,16	0,338	8,4
					6,29	1.965,20		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Camp -2000	Priorat	24,0	496,20	94,28	16,33	10,50	0,283	6,8
695,30	Ribera d'Ebre	39,0	825,30	234,93	6,55	6,10	0,348	13,6
1.539,36	Baix Ebre	62,0	987,90	695,98	2,21	4,50	0,434	26,9
	Tarragonès	11,5	317,10	2.005,01	0,77	2.029,38	0,522	6,0
	Alt Camp	17,5	544,70	392,87	3,92	112,84	0,388	6,8
	Conca de Barberà	25,0	648,90	205,15	7,50	20,21	0,338	8,5
					6,21	2.183,52		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Camp -2002	Priorat	24,0	496,20	107,38	16,66	13,89	0,281	6,8
695,30	Ribera d'Ebre	39,0	825,30	258,60	6,92	7,80	0,344	13,4
1.788,54	Baix Ebre	62,0	987,90	782,00	2,29	5,87	0,431	26,8
	Tarragonès	11,5	317,10	2.274,81	0,79	2.675,16	0,520	6,0
	Alt Camp	17,5	544,70	433,78	4,12	144,76	0,384	6,7
	Conca de Barberà	25,0	648,90	233,66	7,65	26,75	0,337	8,4
					6,40	2.874,23		

BAIX EBRE

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Ebre -1991	Terra Alta	28,0	740,04	73,11	5,69	1,39	0,359	10,1
987,90	Montsià	12,0	708,70	334,46	1,24	80,52	0,482	5,8
415,99	Baix Camp	62,0	695,30	920,76	0,45	1,61	0,566	35,1
	Ribera d'Ebre	33,0	825,29	144,99	2,87	1,68	0,413	13,6
					2,56	85,19		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Ebre -1996	Terra Alta	28,0	740,04	110,27	5,27	2,92	0,365	10,2
987,90	Montsià	12,0	708,70	479,85	1,21	161,36	0,484	5,8
581,09	Baix Camp	62,0	695,30	1.274,07	0,46	3,11	0,565	35,0
	Ribera d'Ebre	33,0	825,29	192,65	3,02	3,12	0,409	13,5
					2,49	170,50		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Ebre -1999	Terra Alta	28,0	740,04	116,81	5,55	3,45	0,361	10,1
987,90	Montsià	12,0	708,70	527,44	1,23	197,87	0,483	5,8
648,25	Baix Camp	62,0	695,30	1.461,46	0,44	3,98	0,567	35,2
	Ribera d'Ebre	33,0	825,29	224,09	2,89	4,04	0,412	13,6
					2,53	209,33		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Ebre -2000	Terra Alta	28,0	740,04	127,66	5,45	4,05	0,362	10,1
987,90	Montsià	12,0	708,70	560,06	1,24	225,57	0,482	5,8
695,98	Baix Camp	62,0	695,30	1.539,36	0,45	4,50	0,566	35,1
	Ribera d'Ebre	33,0	825,29	234,93	2,96	4,55	0,410	13,5
					2,53	238,67		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Ebre -2002	Terra Alta	28,0	740,04	146,97	5,32	5,24	0,364	10,2
987,90	Montsià	12,0	708,70	654,56	1,19	296,22	0,485	5,8
782,00	Baix Camp	62,0	695,30	1.788,54	0,44	5,87	0,569	35,2
	Ribera d'Ebre	33,0	825,29	258,60	3,02	5,63	0,409	13,5
					2,49	312,95		

BAIX EMPORDÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Empordà -1991	Alt Empordà	35,0	1.342,40	726,57	0,93	11,45	0,506	17,7
700,50	Gironès	17,0	575,50	936,89	0,72	128,81	0,527	9,0
675,49	La Selva	34,0	995,50	736,47	0,92	12,66	0,507	17,2
					0,86	152,92		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Empordà -1996	Alt Empordà	35,0	1.342,40	1.005,63	0,98	23,19	0,501	17,5
700,50	Gironès	17,0	575,50	1.264,79	0,78	254,57	0,520	8,8
988,88	La Selva	34,0	995,50	1.095,04	0,90	27,55	0,508	17,3
					0,89	305,32		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Empordà -1999	Alt Empordà	35,0	1.342,40	1.096,22	1,02	28,47	0,499	17,5
700,50	Gironès	17,0	575,50	1.620,47	0,69	367,27	0,531	9,0
1.113,50	La Selva	34,0	995,50	1.244,65	0,89	35,26	0,509	17,3
					0,87	431,00		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Empordà -2000	Alt Empordà	35,0	1.342,40	1.196,80	1,00	33,54	0,500	17,5
700,50	Gironès	17,0	575,50	1.745,38	0,69	426,89	0,531	9,0
1.201,64	La Selva	34,0	995,50	1.346,31	0,89	41,16	0,509	17,3
					0,86	501,59		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Empordà -2002	Alt Empordà	35,0	1.342,40	1.368,23	1,02	44,41	0,499	17,5
700,50	Gironès	17,0	575,50	1.978,85	0,70	560,54	0,529	9,0
1.391,68	La Selva	34,0	995,50	1.549,50	0,90	54,86	0,509	17,3
					0,87	659,81		

BAIX LLOBREGAT

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Llobregat -1991	Anoia	39,0	866,60	513,27	7,37	32,74	0,339	13,2
486,50	Alt Penedès	27,0	592,40	475,36	7,96	91,38	0,334	9,0
3.783,68	Garraf	32,0	184,10	536,15	7,06	61,91	0,343	11,0
	Barcelonès	8,0	143,10	16.784,51	0,23	124.037,53	0,622	5,0
	Vallès Occidental	17,5	580,70	4.166,13	0,91	2.941,26	0,508	8,9
	Bages	41,0	1.295,17	1.001,10	3,78	54,96	0,391	16,0
					4,55	127.219,77		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Llobregat -1996	Anoia	39,0	866,60	763,29	7,20	70,72	0,341	13,3
486,50	Alt Penedès	27,0	592,40	681,48	8,07	190,30	0,333	9,0
5.496,24	Garraf	32,0	184,10	900,70	6,10	151,08	0,354	11,3
	Barcelonès	8,0	143,10	20.074,15	0,27	215.492,86	0,606	4,9
	Vallès Occidental	17,5	580,70	6.093,51	0,90	6.249,12	0,509	8,9
	Bages	41,0	1.295,17	1.394,69	3,94	111,22	0,388	15,9
					4,41	222.265,30		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Llobregat -1999	Anoia	39,0	866,60	857,64	7,40	91,72	0,339	13,2
486,50	Alt Penedès	27,0	592,40	770,48	8,23	248,32	0,331	8,9
6.343,56	Garraf	32,0	184,10	1.026,79	6,18	198,78	0,353	11,3
	Barcelonès	8,0	143,10	23.245,14	0,27	288.001,84	0,607	4,9
	Vallès Occidental	17,5	580,70	7.210,84	0,88	8.535,02	0,511	8,9
	Bages	41,0	1.295,17	1.559,07	4,07	143,50	0,385	15,8
					4,50	297.219,17		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Llobregat -2000	Anoia	39,0	866,60	915,66	7,33	103,64	0,340	13,3
486,50	Alt Penedès	27,0	592,40	822,24	8,17	280,46	0,332	9,0
6.713,78	Garraf	32,0	184,10	1.101,56	6,09	225,70	0,354	11,3
	Barcelonès	8,0	143,10	23.943,10	0,28	313.962,32	0,604	4,8
	Vallès Occidental	17,5	580,70	7.643,20	0,88	9.574,77	0,511	8,9
	Bages	41,0	1.295,17	1.637,27	4,10	159,49	0,385	15,8
					4,48	324.306,37		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Llobregat -2002	Anoia	39,0	866,60	1.042,58	7,19	131,77	0,341	13,3
486,50	Alt Penedès	27,0	592,40	925,26	8,10	352,44	0,332	9,0
7.497,40	Garraf	32,0	184,10	1.280,20	5,86	292,91	0,357	11,4
	Barcelonès	8,0	143,10	26.166,18	0,29	383.160,78	0,603	4,8
	Vallès Occidental	17,5	580,70	8.491,07	0,88	11.878,43	0,510	8,9
	Bages	41,0	1.295,17	1.783,45	4,20	194,01	0,383	15,7
					4,42	396.010,35		

BAIX PENEDÈS

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Penedès -1991	Alt Camp	24,5	544,70	220,11	1,23	4,06	0,483	11,8
295,50	Tarragonès	27,0	317,10	1.112,25	0,24	15,34	0,615	16,6
271,54	Garraf	16,0	184,10	536,15	0,51	35,54	0,556	8,9
	Alt Penedès	20,0	592,40	475,36	0,57	16,13	0,547	10,9
					0,64	71,09		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Penedès -1996	Alt Camp	24,5	544,70	315,57	1,46	9,89	0,468	11,5
295,50	Tarragonès	27,0	317,10	1.634,17	0,28	38,26	0,604	16,3
460,82	Garraf	16,0	184,10	900,70	0,51	101,33	0,556	8,9
	Alt Penedès	20,0	592,40	681,48	0,68	39,25	0,533	10,7
					0,73	188,74		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Penedès -1999	Alt Camp	24,5	544,70	368,98	1,53	14,15	0,465	11,4
295,50	Tarragonès	27,0	317,10	1.901,98	0,30	54,48	0,600	16,2
563,78	Garraf	16,0	184,10	1.026,79	0,55	141,33	0,550	8,8
	Alt Penedès	20,0	592,40	770,48	0,73	54,30	0,526	10,5
					0,78	264,25		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Penedès -2000	Alt Camp	24,5	544,70	392,87	1,55	16,26	0,464	11,4
295,50	Tarragonès	27,0	317,10	2.005,01	0,30	62,01	0,598	16,1
608,76	Garraf	16,0	184,10	1.101,56	0,55	163,72	0,549	8,8
	Alt Penedès	20,0	592,40	822,24	0,74	62,57	0,525	10,5
					0,79	304,56		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Baix Penedès -2002	Alt Camp	24,5	544,70	433,78	1,79	22,97	0,451	11,1
295,50	Tarragonès	27,0	317,10	2.274,81	0,34	89,98	0,588	15,9
778,59	Garraf	16,0	184,10	1.280,20	0,61	243,35	0,541	8,7
	Alt Penedès	20,0	592,40	925,26	0,84	90,05	0,514	10,3
					0,90	446,35		

BARCELONÉS

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Barcelonès -1991	Maresme	25,0	396,90	2.110,27	7,95	2.266,87	0,334	8,3
143,10	Vallès Oriental	22,0	851,90	1.739,34	9,65	2.741,73	0,320	7,0
16.784,51	Vallès Occidental	16,5	580,70	4.166,13	4,03	15.566,45	0,386	6,4
	Baix Llobregat	8,0	486,50	3.783,68	4,44	124.037,53	0,378	3,0
					6,52	144.612,58		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Barcelonès -1996	Maresme	25,0	396,90	3.288,69	6,10	4.225,13	0,354	8,8
143,10	Vallès Oriental	22,0	851,90	2.665,83	7,53	5.025,76	0,338	7,4
20.074,15	Vallès Occidental	16,5	580,70	6.093,51	3,29	27.230,33	0,402	6,6
	Baix Llobregat	8,0	486,50	5.496,24	3,65	215.492,86	0,394	3,1
					5,15	251.974,08		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Barcelonès -1999	Maresme	25,0	396,90	3.599,37	6,46	5.354,74	0,349	8,7
143,10	Vallès Oriental	22,0	851,90	3.118,15	7,45	6.807,08	0,339	7,4
23.245,14	Vallès Occidental	16,5	580,70	7.210,84	3,22	37.313,52	0,404	6,7
	Baix Llobregat	8,0	486,50	6.343,56	3,66	288.001,84	0,393	3,1
					5,20	337.477,18		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Barcelonès -2000	Maresme	25,0	396,90	3.791,48	6,31	5.809,91	0,351	8,8
143,10	Vallès Oriental	22,0	851,90	3.307,79	7,24	7.437,90	0,341	7,5
23.943,10	Vallès Occidental	16,5	580,70	7.643,79	3,13	40.741,53	0,406	6,7
	Baix Llobregat	8,0	486,50	6.713,78	3,57	313.962,32	0,396	3,2
					5,06	367.951,65		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Barcelonès -2002	Maresme	25,0	396,90	4.392,71	5,96	7.356,19	0,356	8,9
143,10	Vallès Oriental	22,0	851,90	3.763,23	6,95	9.247,68	0,344	7,6
26.166,18	Vallès Occidental	16,5	580,70	8.491,07	3,08	49.459,63	0,407	6,7
	Baix Llobregat	8,0	486,50	7.497,40	3,49	383.160,73	0,397	3,2
					4,87	449.224,23		

BERGUEDÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Berguedà -1991	Cerdanya	38,0	546,40	103,66	2,48	0,49	0,425	16,1
1.182,50	Alt Urgell	44,0	1.446,90	124,54	2,07	0,38	0,440	19,4
257,41	Solsonès	25,0	998,60	69,83	3,69	1,15	0,393	9,8
	Bages	40,0	1.295,20	1.001,10	0,26	4,03	0,611	24,5
	Osona	38,0	1.263,80	842,01	0,31	3,95	0,597	22,7
	Ripollès	32,0	958,70	184,22	1,40	1,45	0,472	15,1
					1,70	11,44		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Berguedà -1996	Cerdanya	38,0	546,40	156,74	2,29	1,02	0,432	16,4
1.182,50	Alt Urgell	44,0	1.446,90	175,35	2,04	0,74	0,441	19,4
358,26	Solsonès	25,0	998,60	110,20	3,25	2,53	0,403	10,1
	Bages	40,0	1.295,20	1.394,69	0,26	7,81	0,611	24,5
	Osona	38,0	1.263,80	1.242,09	0,29	8,11	0,602	22,9
	Ripollès	32,0	958,70	268,56	1,33	2,94	0,476	15,2
					1,58	23,14		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Berguedà -1999	Cerdanya	38,0	546,40	165,45	2,26	1,13	0,433	16,4
1.182,50	Alt Urgell	44,0	1.446,90	203,05	1,84	0,89	0,449	19,8
373,45	Solsonès	25,0	998,60	123,20	3,03	2,94	0,409	10,2
	Bages	40,0	1.295,20	1.559,07	0,24	9,10	0,617	24,7
	Osona	38,0	1.263,80	1.310,81	0,28	8,92	0,603	22,9
	Ripollès	32,0	958,70	308,98	1,21	3,52	0,484	15,5
					1,48	26,50		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Berguedà -2000	Cerdanya	38,0	546,40	177,23	2,24	1,28	0,433	16,5
1.182,50	Alt Urgell	44,0	1.446,90	209,03	1,90	0,97	0,447	19,7
397,09	Solsonès	25,0	998,60	132,79	2,99	3,37	0,410	10,2
	Bages	40,0	1.295,20	1.637,27	0,24	10,16	0,616	24,6
	Osona	38,0	1.263,80	1.394,76	0,28	10,09	0,603	22,9
	Ripollès	32,0	958,70	330,99	1,20	4,01	0,485	15,5
					1,48	29,89		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Berguedà -2002	Cerdanya	38,0	546,40	212,84	2,08	1,72	0,439	16,7
1.182,50	Alt Urgell	44,0	1.446,90	222,89	1,99	1,16	0,443	19,5
443,07	Solsonès	25,0	998,60	142,61	3,11	4,04	0,407	10,2
	Bages	40,0	1.295,20	1.783,45	0,25	12,35	0,614	24,6
	Osona	38,0	1.263,80	1.539,52	0,29	12,43	0,602	22,9
	Ripollès	32,0	958,70	358,39	1,24	4,85	0,482	15,4
					1,49	36,55		

CERDANYA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Cerdanya -1991	Alt Urgell	39,0	1.446,90	124,54	0,83	0,22	0,515	20,1
546,40	Berguedà	38,0	1.182,50	257,41	0,40	0,49	0,575	21,9
103,66	Ripollès	33,0	958,70	184,22	0,56	0,53	0,548	18,1
					0,60	1,24		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Cerdanya -1996	Alt Urgell	39,0	1.446,90	175,35	0,89	0,46	0,509	19,9
546,40	Berguedà	38,0	1.182,50	358,26	0,44	1,02	0,568	21,6
156,74	Ripollès	33,0	958,70	268,56	0,58	1,17	0,545	18,0
					0,64	2,66		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Cerdanya -1999	Alt Urgell	39,0	1.446,90	203,05	0,82	0,57	0,517	20,2
546,40	Berguedà	38,0	1.182,50	373,45	0,44	1,13	0,567	21,6
165,65	Ripollès	33,0	958,70	308,98	0,54	1,42	0,552	18,2
					0,60	3,12		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Cerdanya -2000	Alt Urgell	39,0	1.446,90	209,03	0,85	0,62	0,514	20,0
546,40	Berguedà	38,0	1.182,50	397,09	0,45	1,28	0,567	21,5
177,23	Ripollès	33,0	958,70	330,99	0,54	1,63	0,552	18,2
					0,61	3,54		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Cerdanya -2002	Alt Urgell	39,0	1.446,90	222,89	0,95	0,80	0,504	19,7
546,40	Berguedà	38,0	1.182,50	443,07	0,48	1,72	0,561	21,3
212,84	Ripollès	33,0	958,70	358,39	0,59	2,12	0,543	17,9
					0,68	4,64		

CONCA DE BARBERÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Conca de Barberà -1991	l'Urgell	31,0	586,20	199,20	0,56	0,74	0,549	17,0
648,90	Les Garrigues	30,0	799,70	118,01	0,94	0,48	0,505	15,2
110,65	Priorat	38,0	496,20	53,54	2,07	0,11	0,440	16,7
	Baix Camp	25,0	695,30	920,76	0,12	6,52	0,670	16,7
	Alt Camp	12,0	544,70	220,11	0,50	14,09	0,557	6,7
	Anoia	44,0	866,60	513,27	0,22	0,67	0,625	27,5
	Segarra	34,0	721,20	112,20	0,99	0,32	0,501	17,0
					0,77	22,93		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Conca de Barberà -1996	l'Urgell	31,0	586,20	314,87	0,54	1,81	0,550	17,1
648,90	Les Garrigues	30,0	799,70	191,42	0,90	1,22	0,509	15,3
171,48	Priorat	38,0	496,20	79,87	2,15	0,25	0,437	16,6
	Baix Camp	25,0	695,30	1.274,07	0,13	13,98	0,661	16,5
	Alt Camp	12,0	544,70	315,57	0,54	31,32	0,551	6,6
	Anoia	44,0	866,60	763,29	0,22	1,54	0,622	27,4
	Segarra	34,0	721,20	177,57	0,97	0,77	0,503	17,1
					0,78	50,89		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Conca de Barberà -1999	l'Urgell	31,0	586,20	348,08	0,56	2,27	0,548	17,0
648,90	Les Garrigues	30,0	799,70	201,28	0,96	1,45	0,503	15,1
194,18	Priorat	38,0	496,20	87,42	2,22	0,31	0,434	16,5
	Baix Camp	25,0	695,30	1.461,46	0,13	18,16	0,662	16,6
	Alt Camp	12,0	544,70	368,98	0,53	41,46	0,553	6,6
	Anoia	44,0	866,60	857,64	0,23	1,96	0,621	27,3
	Segarra	34,0	721,20	200,18	0,97	0,99	0,503	17,1
					0,80	66,60		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Conca de Barberà -2000	l'Urgell	31,0	586,20	371,73	0,55	2,56	0,549	17,0
648,90	Les Garrigues	30,0	799,70	217,84	0,94	1,66	0,505	15,2
205,15	Priorat	38,0	496,20	94,28	2,18	0,35	0,436	16,6
	Baix Camp	25,0	695,30	1.539,36	0,13	20,21	0,662	16,5
	Alt Camp	12,0	544,70	392,87	0,52	46,64	0,554	6,6
	Anoia	44,0	866,60	915,66	0,22	2,21	0,622	27,4
	Segarra	34,0	721,20	213,67	0,96	1,12	0,503	17,1
					0,79	74,74		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Conca de Barberà -2002	l'Urgell	31,0	586,20	410,70	0,57	3,22	0,547	17,0
648,90	Les Garrigues	30,0	799,70	242,51	0,96	2,10	0,503	15,1
233,66	Priorat	38,0	496,20	107,38	2,18	0,46	0,436	16,6
	Baix Camp	25,0	695,30	1.788,54	0,13	26,75	0,663	16,6
	Alt Camp	12,0	544,70	433,78	0,54	58,66	0,551	6,6
	Anoia	44,0	866,60	1.042,58	0,22	2,86	0,622	27,4
	Segarra	34,0	721,20	234,29	1,00	1,39	0,500	17,0
					0,80	95,43		

GARRAF

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garraf -1991	Alt Penedès	13,0	592,40	475,36	1,13	116,01	0,490	6,4
184,10	Baix Penedès	16,0	295,50	271,54	1,97	35,54	0,444	7,1
536,15	Baix Llobregat	32,0	486,50	3.783,68	0,14	61,91	0,657	21,0
					1,08	213,46		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garraf -1996	Alt Penedès	13,0	592,40	681,48	1,32	279,39	0,477	6,2
184,10	Baix Penedès	16,0	295,50	460,82	1,95	101,33	0,444	7,1
900,70	Baix Llobregat	32,0	486,50	5.496,24	0,16	151,08	0,646	20,7
					1,15	531,79		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garraf -1999	Alt Penedès	13,0	592,40	770,48	1,33	360,09	0,476	6,2
184,10	Baix Penedès	16,0	295,50	563,78	1,82	141,33	0,450	7,2
1.026,79	Baix Llobregat	32,0	486,50	6.343,56	0,16	198,78	0,647	20,7
					1,11	700,20		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garraf -2000	Alt Penedès	13,0	592,40	822,24	1,34	412,27	0,476	6,2
184,10	Baix Penedès	16,0	295,50	608,76	1,81	163,72	0,451	7,2
1.101,56	Baix Llobregat	32,0	486,50	6.713,78	0,16	225,70	0,646	20,7
					1,10	801,68		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garraf -2002	Alt Penedès	13,0	592,40	925,26	1,38	539,15	0,473	6,1
184,10	Baix Penedès	16,0	295,50	778,59	1,64	243,35	0,459	7,3
1.280,20	Baix Llobregat	32,0	486,50	7.497,40	0,17	292,91	0,643	20,6
					1,07	1.075,42		

GARROTXA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garrotxa -1991	Ripollès	24,0	958,70	184,22	1,78	4,38	0,452	10,8
734,20	Osona	30,0	1.263,80	842,01	0,39	10,24	0,578	17,3
328,50	La Selva	39,0	995,50	736,47	0,45	4,08	0,567	22,1
	Gironès	35,0	575,50	936,89	0,35	7,18	0,586	20,5
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	726,57	0,45	3,73	0,566	22,6
					0,68	29,61		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garrotxa -1996	Ripollès	24,0	958,70	268,56	1,68	8,77	0,457	11,0
734,20	Osona	30,0	1.263,80	1.242,09	0,36	20,77	0,584	17,5
451,40	La Selva	39,0	995,50	1.095,04	0,41	8,33	0,573	22,4
	Gironès	35,0	575,50	1.264,79	0,36	13,32	0,585	20,5
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.005,63	0,45	7,09	0,566	22,7
					0,65	58,28		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garrotxa -1999	Ripollès	24,0	958,70	308,98	1,83	12,65	0,450	10,8
734,20	Osona	30,0	1.263,80	1.310,81	0,43	27,49	0,570	17,1
566,18	La Selva	39,0	995,50	1.244,65	0,45	11,88	0,565	22,0
	Gironès	35,0	575,50	1.620,47	0,35	21,40	0,587	20,5
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.096,22	0,52	9,70	0,555	22,2
					0,72	83,12		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garrotxa -2000	Ripollès	24,0	958,70	330,99	1,84	14,59	0,449	10,8
734,20	Osona	30,0	1.263,80	1.394,76	0,44	31,48	0,569	17,1
609,40	La Selva	39,0	995,50	1.346,31	0,45	13,83	0,566	22,1
	Gironès	35,0	575,50	1.745,38	0,35	24,81	0,587	20,5
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.196,80	0,51	11,40	0,556	22,2
					0,72	96,11		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Garrotxa -2002	Ripollès	24,0	958,70	358,39	1,91	17,74	0,446	10,7
734,20	Osona	30,0	1.263,80	1.539,52	0,44	39,01	0,567	17,0
684,24	La Selva	39,0	995,50	1.549,50	0,44	17,87	0,568	22,1
	Gironès	35,0	575,50	1.978,85	0,35	31,58	0,588	20,6
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.368,23	0,50	14,63	0,557	22,3
					0,73	120,84		

GIRONÈS

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Gironès -1991	Pla de l'Estany	17,0	262,70	157,50	5,95	30,03	0,356	6,0
575,50	Garrotxa	35,0	734,20	328,50	2,85	7,18	0,414	14,5
936,89	La Selva	18,0	995,50	736,47	1,27	118,31	0,480	8,6
	Baix Empordà	17,0	700,50	675,49	1,39	128,81	0,473	8,0
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	726,57	1,29	10,64	0,479	19,2
					2,55	294,97		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Gironès -1996	Pla de l'Estany	17,0	262,70	239,01	5,29	61,53	0,365	6,2
575,50	Garrotxa	35,0	734,20	451,40	2,80	13,32	0,415	14,5
1.264,79	La Selva	18,0	995,50	1.095,04	1,16	237,48	0,488	8,8
	Baix Empordà	17,0	700,50	988,88	1,28	254,57	0,480	8,2
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.005,63	1,26	19,87	0,481	19,2
					2,36	586,78		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Gironès -1999	Pla de l'Estany	17,0	262,70	284,62	5,69	93,88	0,359	6,1
575,50	Garrotxa	35,0	734,20	566,18	2,86	21,40	0,413	14,5
1.620,47	La Selva	18,0	995,50	1.244,65	1,30	345,84	0,478	8,6
	Baix Empordà	17,0	700,50	1.113,50	1,46	367,27	0,469	8,0
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.096,22	1,48	27,76	0,467	18,7
					2,56	856,14		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Gironès -2000	Pla de l'Estany	17,0	262,70	307,93	5,67	109,39	0,359	6,1
575,50	Garrotxa	35,0	734,20	609,40	2,86	24,81	0,413	14,5
1.745,38	La Selva	18,0	995,50	1.346,31	1,30	402,92	0,478	8,6
	Baix Empordà	17,0	700,50	1.201,64	1,45	426,89	0,469	8,0
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.196,80	1,46	32,64	0,469	18,7
					2,55	996,65		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Gironès -2002	Pla de l'Estany	17,0	262,70	353,03	5,61	142,19	0,360	6,1
575,50	Garrotxa	35,0	734,20	684,24	2,89	31,58	0,412	14,4
1.978,85	La Selva	18,0	995,50	1.549,50	1,28	525,76	0,480	8,6
	Baix Empordà	17,0	700,50	1.391,68	1,42	560,54	0,471	8,0
	Alt Empordà	40,0	1.342,40	1.368,23	1,45	42,30	0,469	18,8
					2,53	1.302,37		

LA NOGUERA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Noguera –1991	Pallars Jussà	40,0	1.290,00	94,39	2,33	0,32	0,430	17,2
1.733,00	Alt Urgell	83,0	1.446,85	124,54	1,76	0,05	0,453	37,6
219,75	Solsonès	67,0	998,60	69,83	3,15	0,05	0,406	27,2
	Segarra	43,0	721,20	112,20	1,96	0,31	0,444	19,1
	l'Urgell	32,0	586,20	199,20	1,10	1,34	0,492	15,7
	Segrià	25,0	1.393,70	1.127,81	0,19	15,86	0,633	15,8
	Pla d'Urgell	20,0	304,50	178,70	1,23	4,91	0,483	9,7
					1,68	22,84		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Noguera -1996	Pallars Jussà	40,0	1.290,00	128,69	2,73	0,71	0,417	16,7
1.733,00	Alt Urgell	83,0	1.446,85	175,35	2,01	0,11	0,442	36,7
351,78	Solsonès	67,0	998,60	110,20	3,19	0,13	0,404	27,1
	Segarra	43,0	721,20	177,57	1,98	0,79	0,443	19,1
	l'Urgell	32,0	586,20	314,87	1,12	3,38	0,491	15,7
	Segrià	25,0	1.393,70	1.595,18	0,22	35,91	0,623	15,6
	Pla d'Urgell	20,0	304,50	239,01	1,47	10,51	0,468	9,4
					1,82	51,53		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Noguera -1999	Pallars Jussà	40,0	1.290,00	143,09	2,54	0,81	0,423	16,9
1.733,00	Alt Urgell	83,0	1.446,85	203,05	1,79	0,13	0,452	37,5
363,95	Solsonès	67,0	998,60	123,92	2,94	0,15	0,411	27,5
	Segarra	43,0	721,20	200,18	1,82	0,92	0,450	19,4
	l'Urgell	32,0	586,20	348,08	1,05	3,87	0,496	15,9
	Segrià	25,0	1.393,70	1.853,05	0,20	43,16	0,632	15,8
	Pla d'Urgell	20,0	304,50	315,57	1,15	14,36	0,488	9,8
					1,64	63,39		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Noguera -2000	Pallars Jussà	40,0	1.290,00	152,12	2,58	0,93	0,422	16,9
1.733,00	Alt Urgell	83,0	1.446,85	209,03	1,87	0,14	0,448	37,2
391,81	Solsonès	67,0	998,60	132,79	2,95	0,17	0,411	27,5
	Segarra	43,0	721,20	213,67	1,83	1,05	0,450	19,3
	l'Urgell	32,0	586,20	371,73	1,05	4,44	0,496	15,9
	Segrià	25,0	1.393,70	1.979,74	0,20	49,64	0,632	15,8
	Pla d'Urgell	20,0	304,50	335,23	1,17	16,42	0,487	9,7
					1,67	72,81		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Noguera -2002	Pallars Jussà	40,0	1.290,00	158,37	2,72	1,07	0,417	16,7
1.733,00	Alt Urgell	83,0	1.446,85	222,89	1,93	0,17	0,445	37,0
430,46	Solsonès	67,0	998,60	142,61	3,02	0,20	0,409	27,4
	Segarra	43,0	721,20	234,29	1,84	1,27	0,449	19,3
	l'Urgell	32,0	586,20	410,70	1,05	5,40	0,496	15,9
	Segrià	25,0	1.393,70	2.142,70	0,20	59,03	0,631	15,8
	Pla d'Urgell	20,0	304,50	378,44	1,14	20,36	0,489	9,8
					1,70	87,49		

LA SELVA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Selva -1991	Osona	35,0	1.263,80	842,01	0,87	14,46	0,511	17,9
995,50	Gironès	18,0	575,50	936,89	0,79	118,31	0,520	9,4
736,47	Vallès Oriental	40,0	851,90	1.739,34	0,42	20,02	0,571	22,8
	Maresme	40,0	396,90	2.110,27	0,35	24,28	0,587	23,5
	Garrotxa	39,0	734,20	328,50	2,24	4,08	0,433	16,9
	Baix Empordà	34,0	700,50	675,49	1,09	12,66	0,493	16,8
					0,96	193,81		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Selva -1996	Osona	35,0	1.263,80	1.242,09	0,88	31,72	0,510	17,9
995,50	Gironès	18,0	575,50	1.264,79	0,87	237,48	0,512	9,2
1.095,04	Vallès Oriental	40,0	851,90	2.665,83	0,41	45,61	0,574	22,9
	Maresme	40,0	396,90	3.288,69	0,33	56,27	0,591	23,6
	Garrotxa	39,0	734,20	451,40	2,43	8,33	0,427	16,6
	Baix Empordà	34,0	700,50	988,88	1,11	27,55	0,492	16,7
					1,00	406,97		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Selva -1999	Osona	35,0	1.263,80	1.310,81	0,95	38,05	0,504	17,7
995,50	Gironès	18,0	575,50	1.620,47	0,77	345,84	0,522	9,4
1.244,65	Vallès Oriental	40,0	851,90	3.118,15	0,40	60,64	0,576	23,0
	Maresme	40,0	396,90	3.599,37	0,35	70,00	0,588	23,5
	Garrotxa	39,0	734,20	566,18	2,20	11,88	0,435	17,0
	Baix Empordà	34,0	700,50	1.113,50	1,12	35,26	0,491	16,7
					0,96	561,67		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Selva -2000	Osona	35,0	1.263,80	1.394,76	0,97	43,80	0,503	17,6
995,50	Gironès	18,0	575,50	1.745,38	0,77	402,92	0,522	9,4
1.346,31	Vallès Oriental	40,0	851,90	3.307,79	0,41	69,58	0,574	23,0
	Maresme	40,0	396,90	3.791,48	0,36	79,76	0,585	23,4
	Garrotxa	39,0	734,20	609,40	2,21	13,83	0,434	16,9
	Baix Empordà	34,0	700,50	1.201,64	1,12	41,16	0,491	16,7
					0,97	651,05		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
La Selva -2002	Osona	35,0	1.263,80	1.539,52	1,01	55,64	0,499	17,5
995,50	Gironès	18,0	575,50	1.978,85	0,78	525,76	0,520	9,4
1.549,50	Vallès Oriental	40,0	851,90	3.763,23	0,41	91,11	0,573	22,9
	Maresme	40,0	396,90	4.392,71	0,35	106,35	0,586	23,4
	Garrotxa	39,0	734,20	684,24	2,26	17,87	0,432	16,9
	Baix Empordà	34,0	700,50	1.391,68	1,11	54,86	0,491	16,7
					0,99	851,60		

LES GARRIGUES

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Les Garrigues -1991	Segrià	22,5	1.393,70	1.127,81	0,10	11,68	0,680	15,3
799,70	Ribera d'Ebre	51,0	825,29	144,99	0,81	0,13	0,517	26,4
118,01	Priorat	42,0	496,20	53,54	2,20	0,09	0,435	18,2
	Conca de Barberà	30,0	648,90	110,65	1,07	0,48	0,495	14,8
	l'Urgell	27,0	586,20	199,20	0,59	1,19	0,544	14,7
					0,96	13,58		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Les Garrigues -1996	Segrià	22,5	1.393,70	1.595,18	0,12	26,81	0,670	15,1
799,70	Ribera d'Ebre	51,0	825,29	192,65	0,99	0,28	0,501	25,5
191,42	Priorat	42,0	496,20	79,87	2,40	0,21	0,428	18,0
	Conca de Barberà	30,0	648,90	171,48	1,12	1,22	0,491	14,7
	l'Urgell	27,0	586,20	314,87	0,61	3,06	0,541	14,6
					1,05	31,57		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Les Garrigues -1999	Segrià	22,5	1.393,70	1.853,05	0,11	32,74	0,677	15,2
799,70	Ribera d'Ebre	51,0	825,29	224,09	0,90	0,34	0,509	26,0
201,28	Priorat	42,0	496,20	87,42	2,30	0,24	0,431	18,1
	Conca de Barberà	30,0	648,90	194,18	1,04	1,45	0,497	14,9
	l'Urgell	27,0	586,20	348,08	0,58	3,56	0,546	14,7
					0,98	38,33		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Les Garrigues -2000	Segrià	22,5	1.393,70	1.979,74	0,11	37,86	0,676	15,2
799,70	Ribera d'Ebre	51,0	825,29	234,93	0,93	0,39	0,506	25,8
217,84	Priorat	42,0	496,20	94,28	2,31	0,28	0,431	18,1
	Conca de Barberà	30,0	648,90	205,15	1,06	1,66	0,495	14,8
	l'Urgell	27,0	586,20	371,73	0,59	4,11	0,544	14,7
					1,00	44,29		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Les Garrigues -2002	Segrià	22,5	1.393,70	2.142,70	0,11	45,62	0,674	15,2
799,70	Ribera d'Ebre	51,0	825,29	258,60	0,94	0,47	0,505	25,8
242,51	Priorat	42,0	496,20	107,38	2,26	0,35	0,433	18,2
	Conca de Barberà	30,0	648,90	233,66	1,04	2,10	0,497	14,9
	l'Urgell	27,0	586,20	371,73	0,65	4,58	0,536	14,5
					1,00	53,12		

L’URGELL

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
l'Urgell -1991	La Noguera	32,0	1.733,00	219,75	0,91	1,34	0,476	104,6
586,20	Pla d'Urgell	21,5	304,50	178,70	1,11	3,58	0,395	70,6
199,20	Les Garrigues	27,0	799,70	118,01	1,69	1,19	0,485	57,3
	Conca de Barberà	31,0	648,90	110,65	1,80	0,74	0,525	58,1
	Segarra	10,5	721,20	112,20	1,78	19,31	0,272	30,5
					1,46	26,16		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
l'Urgell -1996	La Noguera	32,0	1.733,00	351,78	0,90	3,38	0,400	140,7
586,20	Pla d'Urgell	21,5	304,50	294,74	1,07	9,34	0,322	94,9
314,87	Les Garrigues	27,0	799,70	191,42	1,64	3,06	0,408	78,1
	Conca de Barberà	31,0	648,90	171,48	1,84	1,81	0,451	77,3
	Segarra	10,5	721,20	177,57	1,77	48,30	0,215	38,3
					1,44	65,89		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
l'Urgell -1999	La Noguera	32,0	1.733,00	363,95	0,96	3,87	0,389	141,6
586,20	Pla d'Urgell	21,5	304,50	315,57	1,10	11,05	0,310	97,8
348,08	Les Garrigues	27,0	799,70	201,28	1,73	3,56	0,396	79,7
	Conca de Barberà	31,0	648,90	194,18	1,79	2,27	0,432	83,9
	Segarra	10,5	721,20	200,18	1,74	60,19	0,203	40,7
					1,46	80,94		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
l'Urgell -2000	La Noguera	32,0	1.733,00	391,81	0,95	4,44	0,378	148,2
586,20	Pla d'Urgell	21,5	304,50	335,23	1,11	12,54	0,301	100,9
371,73	Les Garrigues	27,0	799,70	217,84	1,71	4,11	0,384	83,7
	Conca de Barberà	31,0	648,90	205,15	1,81	2,56	0,422	86,6
	Segarra	10,5	721,20	213,67	1,74	68,61	0,196	41,9
					1,46	92,27		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
l'Urgell -2002	La Noguera	32,0	1.733,00	430,46	0,95	5,40	0,363	156,3
586,20	Pla d'Urgell	21,5	304,50	378,44	1,09	15,64	0,286	108,1
410,70	Les Garrigues	27,0	799,70	242,51	1,69	5,06	0,368	89,3
	Conca de Barberà	31,0	648,90	233,66	1,76	3,22	0,404	94,3
	Segarra	10,5	721,20	234,29	1,75	83,12	0,186	43,7
					1,45	112,44		

MARESME

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Maresme -1991	Vallès Oriental	15,0	851,90	1.739,34	1,21	1.087,55	0,484	7,3
396,90	Barcelonès	25,0	143,10	16.784,51	0,13	2.266,87	0,666	16,7
2.110,27	La Selva	40,0	995,50	736,47	2,87	24,28	0,413	16,5
					1,40	3.378,70		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Maresme -1996	Vallès Oriental	15,0	851,90	2.665,83	1,23	2.597,66	0,483	7,2
396,90	Barcelonès	25,0	143,10	20.074,15	0,16	4.225,13	0,646	16,2
3.288,69	La Selva	40,0	995,50	1.095,04	3,00	56,27	0,409	16,4
					1,47	6.879,06		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Maresme -1999	Vallès Oriental	15,0	851,90	3.118,15	1,15	3.325,44	0,488	7,3
396,90	Barcelonès	25,0	143,10	23.245,14	0,15	5.354,74	0,651	16,3
3.599,37	La Selva	40,0	995,50	1.244,65	2,89	70,00	0,412	16,5
					1,40	8.750,19		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Maresme -2000	Vallès Oriental	15,0	851,90	3.307,79	1,15	3.715,98	0,489	7,3
396,90	Barcelonès	25,0	143,10	23.943,10	0,16	5.809,91	0,649	16,2
3.791,48	La Selva	40,0	995,50	1.346,31	2,82	79,76	0,415	16,6
					1,37	9.605,64		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Maresme -2002	Vallès Oriental	15,0	851,90	3.763,23	1,17	4.898,00	0,487	7,3
396,90	Barcelonès	25,0	143,10	26.166,18	0,17	7.356,18	0,644	16,1
4.392,71	La Selva	40,0	995,50	1.549,50	2,83	106,35	0,414	16,6
					1,39	12.360,54		

MONTSIÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Montsià -1991	Baix Ebre	12,0	987,90	415,99	0,80	80,52	0,518	6,2
708,70					0,80	80,52		
334,46								

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Montsià -1996	Baix Ebre	12,0	987,90	581,09	0,83	161,36	0,516	6,2
708,70					0,83	161,36		
479,85								

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Montsià -1999	Baix Ebre	12,0	987,90	648,25	0,81	197,87	0,517	6,2
708,70					0,81	197,87		
527,44								

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Montsià -2000	Baix Ebre	12,0	987,90	695,98	0,80	225,57	0,518	6,2
708,70					0,80	225,57		
560,06								

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Montsià -2002	Baix Ebre	12,0	987,90	782,00	0,84	296,22	0,515	6,2
708,70					0,84	296,22		
654,56								

OSONA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Osona -1991	Berguedà	38,0	1.182,50	257,41	3,27	3,95	0,403	15,3
1.263,80	Bages	45,0	1.295,20	1.001,10	0,84	9,25	0,514	23,1
842,01	Vallès Oriental	33,0	851,90	1.739,34	0,48	40,75	0,560	18,5
	La Selva	35,0	995,50	736,47	1,14	14,46	0,489	17,1
	Garrotxa	30,0	734,20	328,50	2,56	10,24	0,422	12,7
	Ripollès	28,5	958,70	184,22	4,57	6,70	0,376	10,7
					2,15	85,36		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Osona -1996	Berguedà	38,0	1.182,50	358,26	3,47	8,11	0,398	15,1
1.263,80	Bages	45,0	1.295,20	1.394,69	0,89	19,01	0,510	22,9
1.242,09	Vallès Oriental	33,0	851,90	2.665,93	0,47	92,14	0,563	18,6
	La Selva	35,0	995,50	1.095,04	1,13	31,72	0,490	17,1
	Garrotxa	30,0	734,20	451,40	2,75	20,77	0,416	12,5
	Ripollès	28,5	958,70	268,56	4,63	14,41	0,375	10,7
					2,22	186,16		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Osona -1999	Berguedà	38,0	1.182,50	373,45	3,51	8,92	0,397	15,1
1.263,80	Bages	45,0	1.295,20	1.559,07	0,84	22,43	0,514	23,2
1.310,81	Vallès Oriental	33,0	851,90	3.118,15	0,42	113,74	0,572	18,9
	La Selva	35,0	995,50	1.244,65	1,05	38,05	0,496	17,3
	Garrotxa	30,0	734,20	566,18	2,32	27,49	0,430	12,9
	Ripollès	28,5	958,70	308,98	4,24	17,50	0,382	10,9
					2,06	228,12		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Osona -2000	Berguedà	38,0	1.182,50	397,09	3,51	10,09	0,397	15,1
1.263,80	Bages	45,0	1.295,20	1.637,27	0,85	25,06	0,513	23,1
1.394,76	Vallès Oriental	33,0	851,90	3.307,79	0,42	128,38	0,571	18,9
	La Selva	35,0	995,50	1.346,31	1,04	43,80	0,497	17,4
	Garrotxa	30,0	734,20	609,40	2,29	31,48	0,431	12,9
	Ripollès	28,5	958,70	330,99	4,21	19,94	0,382	10,9
					2,05	258,75		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Osona -2002	Berguedà	38,0	1.182,50	443,07	3,47	12,43	0,398	15,1
1.263,80	Bages	45,0	1.295,20	1.783,45	0,86	30,13	0,512	23,1
1.539,52	Vallès Oriental	33,0	851,90	3.763,23	0,41	161,21	0,574	18,9
	La Selva	35,0	995,50	1.549,50	0,99	55,64	0,501	17,5
	Garrotxa	30,0	734,20	684,24	2,25	39,01	0,433	13,0
	Ripollès	28,5	958,70	358,39	4,30	23,83	0,381	10,9
					2,05	322,26		

PALLARS JUSSÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Jussà -1991	Alta Ribagorça	31,0	426,80	24,85	3,80	0,08	0,391	12,1
1.290,00	Pallars Sobirà	35,0	1.355,22	41,46	2,28	0,09	0,432	15,1
94,39	Alt Urgell	52,0	1.446,85	124,54	0,76	0,08	0,523	27,2
	La Noguera	40,0	1.733,00	219,75	0,43	0,32	0,570	22,8
					1,82	0,58		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Jussà -1996	Alta Ribagorça	31,0	426,80	43,13	2,98	0,19	0,410	12,7
1.290,00	Pallars Sobirà	35,0	1.355,22	70,23	1,83	0,21	0,450	15,7
128,69	Alt Urgell	52,0	1.446,85	175,35	0,73	0,16	0,526	27,3
	La Noguera	40,0	1.733,00	351,78	0,37	0,71	0,583	23,3
					1,48	1,26		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Jussà -1999	Alta Ribagorça	31,0	426,80	41,34	3,46	0,20	0,398	12,3
1.290,00	Pallars Sobirà	35,0	1.355,22	68,45	2,09	0,23	0,439	15,4
143,09	Alt Urgell	52,0	1.446,85	203,05	0,70	0,21	0,529	27,5
	La Noguera	40,0	1.733,00	363,95	0,39	0,81	0,577	23,1
					1,66	1,45		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Jussà -2000	Alta Ribagorça	31,0	426,80	42,57	3,57	0,22	0,395	12,3
1.290,00	Pallars Sobirà	35,0	1.355,22	73,88	2,06	0,26	0,440	15,4
152,12	Alt Urgell	52,0	1.446,85	209,03	0,73	0,23	0,526	27,4
	La Noguera	40,0	1.733,00	391,81	0,39	0,93	0,578	23,1
					1,69	1,64		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Jussà -2002	Alta Ribagorça	31,0	426,80	46,88	3,38	0,25	0,400	12,4
1.290,00	Pallars Sobirà	35,0	1.355,22	82,64	1,92	0,31	0,446	15,6
158,37	Alt Urgell	52,0	1.446,85	222,89	0,71	0,25	0,528	27,5
	La Noguera	40,0	1.733,00	430,46	0,37	1,07	0,583	23,3
					1,59	1,87		

PALLARS SOBIRÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Sobirà -1991	Vall d'Aran	42,0	620,47	53,17	0,78	0,03	0,521	21,9
1.355,20	Pallars Jussà	35,0	1.290,00	94,39	0,44	0,09	0,568	19,9
41,46	Alt Urgell	29,0	1.446,90	124,54	0,33	0,21	0,591	17,1
	Alta Ribagorça	32,5	426,80	24,85	1,67	0,03	0,457	14,9
					0,81	0,36		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Sobirà -1996	Vall d'Aran	42,0	620,47	104,86	0,67	0,10	0,533	22,4
1.355,20	Pallars Jussà	35,0	1.290,00	128,69	0,55	0,21	0,550	19,3
70,23	Alt Urgell	29,0	1.446,90	175,35	0,40	0,50	0,576	16,7
	Alta Ribagorça	32,5	426,80	43,13	1,63	0,09	0,459	14,9
					0,81	0,90		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Sobirà -1999	Vall d'Aran	42,0	620,47	103,60	0,66	0,10	0,534	22,4
1.355,20	Pallars Jussà	35,0	1.290,00	143,09	0,48	0,23	0,561	19,6
68,45	Alt Urgell	29,0	1.446,90	203,05	0,34	0,57	0,590	17,1
	Alta Ribagorça	32,5	426,80	41,34	1,66	0,08	0,458	14,9
					0,78	0,98		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Sobirà -2000	Vall d'Aran	42,0	620,47	105,58	0,70	0,11	0,530	22,2
1.355,20	Pallars Jussà	35,0	1.290,00	152,12	0,49	0,26	0,560	19,6
73,88	Alt Urgell	29,0	1.446,90	209,03	0,35	0,63	0,586	17,0
	Alta Ribagorça	32,5	426,80	42,57	1,74	0,09	0,454	14,8
					0,82	1,09		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pallars Sobirà -2002	Vall d'Aran	42,0	620,47	128,95	0,64	0,14	0,537	22,6
1.355,20	Pallars Jussà	35,0	1.290,00	158,37	0,52	0,31	0,554	19,4
82,64	Alt Urgell	29,0	1.446,90	222,89	0,37	0,76	0,582	16,9
	Alta Ribagorça	32,5	426,80	46,88	1,76	0,11	0,453	14,7
					0,82	1,32		

PLA DE L'ESTANY

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla de l'Estany -1991	Alt Empordà	23,0	1.342,40	726,57	0,22	9,41	0,625	14,4
262,70	Gironès	17,0	575,50	936,89	0,17	30,03	0,644	11,0
157,50	Garrotxa	25,0	734,20	328,50	0,48	3,31	0,561	14,0
					0,29	42,75		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla de l'Estany -1996	Alt Empordà	23,0	1.342,40	1.005,63	0,24	19,75	0,618	14,2
262,70	Gironès	17,0	575,50	1.264,79	0,19	61,53	0,635	10,8
239,01	Garrotxa	25,0	734,20	451,40	0,53	6,90	0,553	13,8
					0,32	88,19		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla de l'Estany -1999	Alt Empordà	23,0	1.342,40	1.096,22	0,26	25,64	0,611	14,0
262,70	Gironès	17,0	575,50	1.620,47	0,18	93,88	0,641	10,9
284,62	Garrotxa	25,0	734,20	566,18	0,50	10,31	0,557	13,9
					0,31	129,83		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla de l'Estany -2000	Alt Empordà	23,0	1.342,40	1.196,80	0,26	30,29	0,611	14,1
262,70	Gironès	17,0	575,50	1.745,38	0,18	109,39	0,641	10,9
307,93	Garrotxa	25,0	734,20	609,40	0,51	12,01	0,557	13,9
					0,31	151,69		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla de l'Estany -2002	Alt Empordà	23,0	1.342,40	1.368,23	0,26	39,70	0,611	14,1
262,70	Gironès	17,0	575,50	1.978,85	0,18	142,19	0,640	10,9
353,03	Garrotxa	25,0	734,20	684,24	0,52	15,46	0,555	13,9
					0,32	197,35		

PLA D'URGELL

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla d'Urgell -1991	La Noguera	20,0	1.733,00	219,75	0,81	4,91	0,517	10,3
304,50	L'Urgell	21,5	586,20	199,20	0,90	3,58	0,509	10,9
178,70	Les Garrigues	12,0	799,70	118,01	1,51	12,20	0,465	5,6
	Segrià	21,0	1.393,70	1.127,81	0,16	21,76	0,649	13,6
					0,85	42,46		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla d'Urgell -1996	La Noguera	20,0	1.733,00	351,78	0,84	12,96	0,515	10,3
304,50	L'Urgell	21,5	586,20	314,87	0,94	9,34	0,506	10,9
294,74	Les Garrigues	12,0	799,70	191,42	1,54	32,65	0,464	5,6
	Segrià	21,0	1.393,70	1.595,18	0,18	50,77	0,637	13,4
					0,87	105,72		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla d'Urgell -1999	La Noguera	20,0	1.733,00	363,95	0,87	14,36	0,512	10,2
304,50	L'Urgell	21,5	586,20	348,08	0,91	11,05	0,508	10,9
315,57	Les Garrigues	12,0	799,70	201,28	1,57	36,76	0,463	5,6
	Segrià	21,0	1.393,70	1.853,05	0,17	63,14	0,643	13,5
					0,88	125,31		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla d'Urgell -2000	La Noguera	20,0	1.733,00	391,81	0,86	16,42	0,513	10,3
304,50	L'Urgell	21,5	586,20	371,73	0,90	12,54	0,509	10,9
335,23	Les Garrigues	12,0	799,70	217,84	1,54	42,26	0,464	5,6
	Segrià	21,0	1.393,70	1.979,74	0,17	71,66	0,644	13,5
					0,87	142,88		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Pla d'Urgell -2002	La Noguera	20,0	1.733,00	430,46	0,88	20,36	0,511	10,2
304,50	L'Urgell	21,5	586,20	410,70	0,92	15,64	0,507	10,9
378,44	Les Garrigues	12,0	799,70	242,51	1,56	53,11	0,463	5,6
	Segrià	21,0	1.393,70	2.142,70	0,18	87,56	0,641	13,5
					0,88	176,67		

PRIORAT

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Priorat -1991	Ribera d'Ebre	15,0	825,29	144,99	0,37	2,30	0,582	8,7
496,20	Baix Camp	24,0	695,30	920,76	0,06	3,57	0,721	17,3
53,54	Conca de Barberà	38,0	648,90	110,65	0,48	0,11	0,560	21,3
	Les Garrigues	42,5	799,70	118,01	0,45	0,08	0,565	24,0
					0,34	6,06		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Priorat -1996	Ribera d'Ebre	15,0	825,29	192,65	0,41	4,56	0,573	8,6
496,20	Baix Camp	24,0	695,30	1.274,07	0,06	7,36	0,716	17,2
79,87	Conca de Barberà	38,0	648,90	171,48	0,47	0,25	0,563	21,4
	Les Garrigues	42,5	799,70	191,42	0,42	0,20	0,572	24,3
					0,34	12,37		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Priorat -1999	Ribera d'Ebre	15,0	825,29	224,09	0,39	5,80	0,578	8,7
496,20	Baix Camp	24,0	695,30	1.461,46	0,06	9,24	0,719	17,3
87,42	Conca de Barberà	38,0	648,90	194,18	0,45	0,31	0,566	21,5
	Les Garrigues	42,5	799,70	201,28	0,43	0,23	0,569	24,2
					0,33	15,58		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Priorat -2000	Ribera d'Ebre	15,0	825,29	234,93	0,40	6,56	0,576	8,6
496,20	Baix Camp	24,0	695,30	1.539,36	0,06	10,50	0,717	17,2
94,28	Conca de Barberà	38,0	648,90	205,15	0,46	0,35	0,564	21,4
	Les Garrigues	42,5	799,70	217,84	0,43	0,27	0,569	24,2
					0,34	17,68		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Priorat -2002	Ribera d'Ebre	15,0	825,29	258,60	0,42	8,23	0,573	8,6
496,20	Baix Camp	24,0	695,30	1.788,54	0,06	13,89	0,719	17,2
107,38	Conca de Barberà	38,0	648,90	233,66	0,46	0,46	0,564	21,4
	Les Garrigues	42,5	799,70	242,51	0,44	0,34	0,567	24,1
					0,34	22,92		

RIBERA D'EBRE

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ribera d'Ebre -1991	Terra Alta	18,0	740,04	73,11	1,98	1,82	0,443	8,0
825,30	Baix Ebre	33,0	987,90	415,99	0,35	1,68	0,587	19,4
144,99	Baix Camp	39,0	695,30	920,76	0,16	2,25	0,649	25,3
	Priorat	15,0	496,20	53,54	2,71	2,30	0,418	6,3
	Les Garrigues	51,0	799,70	118,01	1,23	0,13	0,483	24,6
	Segrià	57,0	1.393,70	1.127,81	0,13	0,88	0,665	37,9
					1,09	9,06		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ribera d'Ebre -1996	Terra Alta	18,0	740,04	110,27	1,75	3,64	0,454	8,2
825,30	Baix Ebre	33,0	987,90	581,09	0,33	3,12	0,591	19,5
192,65	Baix Camp	39,0	695,30	1.274,07	0,15	4,14	0,652	25,4
	Priorat	15,0	496,20	79,87	2,41	4,56	0,427	6,4
	Les Garrigues	51,0	799,70	191,42	1,01	0,28	0,499	25,5
	Segrià	57,0	1.393,70	1.595,18	0,12	1,66	0,669	38,1
					0,96	17,39		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ribera d'Ebre -1999	Terra Alta	18,0	740,04	116,81	1,92	4,49	0,446	8,0
825,30	Baix Ebre	33,0	987,90	648,25	0,35	4,04	0,588	19,4
224,09	Baix Camp	39,0	695,30	1.461,46	0,15	5,52	0,651	25,4
	Priorat	15,0	496,20	87,42	2,56	5,80	0,422	6,3
	Les Garrigues	51,0	799,70	201,28	1,11	0,34	0,491	25,0
	Segrià	57,0	1.393,70	1.853,05	0,12	2,24	0,669	38,1
					1,04	22,44		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ribera d'Ebre -2000	Terra Alta	18,0	740,04	127,66	1,84	5,14	0,449	8,1
825,30	Baix Ebre	33,0	987,90	695,98	0,34	4,55	0,590	19,5
234,93	Baix Camp	39,0	695,30	1.539,36	0,15	6,10	0,652	25,4
	Priorat	15,0	496,20	94,28	2,49	6,56	0,424	6,4
	Les Garrigues	51,0	799,70	217,84	1,08	0,39	0,494	25,2
	Segrià	57,0	1.393,70	1.979,74	0,12	2,51	0,671	38,2
					1,00	25,25		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ribera d'Ebre -2002	Terra Alta	18,0	740,04	146,97	1,76	6,52	0,453	8,2
825,30	Baix Ebre	33,0	987,90	782,00	0,33	5,63	0,591	19,5
258,60	Baix Camp	39,0	695,30	1.788,54	0,14	7,80	0,656	25,6
	Priorat	15,0	496,20	107,38	2,41	8,23	0,427	6,4
	Les Garrigues	51,0	799,70	242,51	1,07	0,47	0,495	25,2
	Segrià	57,0	1.393,70	2.142,70	0,12	2,99	0,669	38,1
					0,97	31,63		

RIPOLLÈS

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ripollès -1991	Cerdanya	33,0	546,40	103,66	1,78	0,53	0,452	14,9
958,70	Berguedà	32,0	1.182,50	257,41	0,72	1,45	0,528	16,9
184,22	Osona	28,5	1.263,80	842,01	0,22	6,70	0,624	17,8
	Garrotxa	24,0	734,20	328,50	0,56	4,38	0,548	13,2
					0,82	13,06		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ripollès -1996	Cerdanya	33,0	546,40	156,74	1,71	1,17	0,455	15,0
958,70	Berguedà	32,0	1.182,50	358,26	0,75	2,94	0,524	16,8
268,56	Osona	28,5	1.263,80	1.242,09	0,22	14,41	0,625	17,8
	Garrotxa	24,0	734,20	451,40	0,59	8,77	0,543	13,0
					0,82	27,29		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ripollès -1999	Cerdanya	33,0	546,40	165,65	1,87	1,42	0,448	14,8
958,70	Berguedà	32,0	1.182,50	372,45	0,83	3,51	0,516	16,5
308,98	Osona	28,5	1.263,80	1.310,81	0,24	17,50	0,618	17,6
	Garrotxa	24,0	734,20	566,18	0,55	12,65	0,550	13,2
					0,87	35,09		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ripollès -2000	Cerdanya	33,0	546,40	177,23	1,87	1,63	0,448	14,8
958,70	Berguedà	32,0	1.182,50	397,09	0,83	4,01	0,515	16,5
330,99	Osona	28,5	1.263,80	1.394,76	0,24	19,94	0,618	17,6
	Garrotxa	24,0	734,20	609,40	0,54	14,59	0,551	13,2
					0,87	40,18		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Ripollès -2002	Cerdanya	33,0	546,40	212,84	1,68	2,12	0,457	15,1
958,70	Berguedà	32,0	1.182,50	443,07	0,81	4,85	0,518	16,6
358,39	Osona	28,5	1.263,80	1.539,52	0,23	23,83	0,619	17,6
	Garrotxa	24,0	734,20	684,24	0,52	17,74	0,554	13,3
					0,81	48,54		

SEGARRA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segarra -1991	La Noguera	43,0	1.733,00	219,75	0,51	0,31	0,556	23,9
721,20	l'Urgell	10,5	586,20	199,20	0,56	19,31	0,548	5,8
112,20	Conca de Barberà	34,0	648,90	110,65	1,01	0,32	0,499	17,0
	Anoia	30,0	866,60	513,27	0,22	2,13	0,624	18,7
	Solsonès	44,0	998,60	69,83	1,61	0,09	0,461	20,3
					0,78	22,16		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segarra -1996	La Noguera	43,0	1.733,00	351,78	0,50	0,79	0,557	23,9
721,20	l'Urgell	10,5	586,20	314,87	0,56	48,30	0,548	5,7
177,57	Conca de Barberà	34,0	648,90	171,48	1,04	0,77	0,497	16,9
	Anoia	30,0	866,60	763,29	0,23	5,02	0,619	18,6
	Solsonès	44,0	998,60	110,20	1,61	0,23	0,460	20,3
					0,79	55,11		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segarra -1999	La Noguera	43,0	1.733,00	363,95	0,55	0,92	0,550	23,6
721,20	l'Urgell	10,5	586,20	248,08	0,81	42,90	0,518	5,4
200,18	Conca de Barberà	34,0	648,90	194,18	1,03	0,99	0,497	16,9
	Anoia	30,0	866,60	857,64	0,23	6,36	0,619	18,6
	Solsonès	44,0	998,60	123,92	1,62	0,29	0,460	20,2
					0,85	51,45		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segarra -2000	La Noguera	43,0	1.733,00	391,81	0,55	1,05	0,550	23,7
721,20	l'Urgell	10,5	586,20	371,73	0,57	68,61	0,546	5,7
213,67	Conca de Barberà	34,0	648,90	205,15	1,04	1,12	0,497	16,9
	Anoia	30,0	866,60	915,66	0,23	7,25	0,619	18,6
	Solsonès	44,0	998,60	132,79	1,61	0,33	0,460	20,3
					0,80	78,36		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segarra -2002	La Noguera	43,0	1.733,00	430,46	0,54	1,27	0,551	23,7
721,20	l'Urgell	10,5	586,20	410,70	0,57	83,12	0,547	5,7
234,29	Conca de Barberà	34,0	648,90	233,66	1,00	1,39	0,500	17,0
	Anoia	30,0	866,60	1.042,58	0,22	9,05	0,622	18,7
	Solsonès	44,0	998,60	142,61	1,64	0,39	0,459	20,2
					0,80	95,22		

SEGRIÀ

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segrià -1991	Ribera d'Ebre	57,0	825,29	144,99	7,78	0,88	0,335	19,1
1.393,70	Les Garrigues	22,5	799,70	118,01	9,56	11,68	0,320	7,2
1.127,81	Pla d´Urgell	21,0	304,50	178,70	6,31	21,76	0,351	7,4
	La Noguera	25,0	1.733,00	219,75	5,13	15,86	0,367	9,2
					7,19	50,19		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segrià -1996	Ribera d'Ebre	57,0	825,29	192,65	8,28	1,66	0,331	18,9
1.393,70	Les Garrigues	22,5	799,70	191,42	8,33	26,81	0,330	7,4
1.595,18	Pla d´Urgell	21,0	304,50	294,74	5,41	50,77	0,363	7,6
	La Noguera	25,0	1.733,00	351,78	4,53	35,91	0,377	9,4
					6,64	115,15		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segrià -1999	Ribera d'Ebre	57,0	825,29	224,09	8,27	2,24	0,331	18,9
1.393,70	Les Garrigues	22,5	799,70	201,28	9,21	32,74	0,323	7,3
1.853,05	Pla d´Urgell	21,0	304,50	315,57	5,87	63,14	0,357	7,5
	La Noguera	25,0	1.733,00	363,95	5,09	43,16	0,368	9,2
					7,11	141,29		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segrià -2000	Ribera d'Ebre	57,0	825,29	234,93	8,43	2,51	0,329	18,8
1.393,70	Les Garrigues	22,5	799,70	217,84	9,09	37,86	0,324	7,3
1.979,74	Pla d´Urgell	21,0	304,50	335,23	5,91	71,66	0,356	7,5
	La Noguera	25,0	1.733,00	391,81	5,05	49,64	0,368	9,2
					7,12	161,68		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Segrià -2002	Ribera d'Ebre	57,0	825,29	258,60	8,29	2,99	0,331	18,9
1.393,70	Les Garrigues	22,5	799,70	242,51	8,84	45,62	0,326	7,3
2.142,70	Pla d´Urgell	21,0	304,50	378,44	5,66	87,56	0,359	7,5
	La Noguera	25,0	1.733,00	430,46	4,98	59,03	0,369	9,2
					6,94	195,20		

SOLSONÈS

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km²)	Ri (10⁶) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Solsonès -1991	Alt Urgell	41,0	1.446,90	124,54	0,56	0,13	0,548	22,5
998,60	Berguedà	25,0	1.182,50	257,41	0,27	1,15	0,607	15,2
69,83	Bages	37,0	1.295,20	1.001,10	0,07	1,38	0,708	26,2
	Anoia	47,0	866,60	513,27	0,14	0,35	0,660	31,0
	Segarra	44,0	721,20	112,20	0,62	0,09	0,539	23,7
	La Noguera	67,0	1.733,00	219,75	0,32	0,05	0,594	39,8
					0,33	3,14		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km²)	Ri (10⁶) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Solsonès -1996	Alt Urgell	41,0	1.446,90	175,35	0,63	0,28	0,539	22,1
998,60	Berguedà	25,0	1.182,50	358,26	0,31	2,53	0,597	14,9
110,20	Bages	37,0	1.295,20	1.394,69	0,08	3,03	0,700	25,9
	Anoia	47,0	866,60	763,29	0,14	0,81	0,656	30,8
	Segarra	44,0	721,20	177,57	0,62	0,23	0,540	23,7
	La Noguera	67,0	1.733,00	351,78	0,31	0,13	0,596	39,9
					0,35	7,01		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km²)	Ri (10⁶) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Solsonès -1999	Alt Urgell	41,0	1.446,90	203,05	0,61	0,37	0,541	22,2
998,60	Berguedà	25,0	1.182,50	373,45	0,33	2,96	0,591	14,8
123,92	Bages	37,0	1.295,20	1.559,07	0,08	3,81	0,699	25,9
	Anoia	47,0	866,60	857,64	0,14	1,02	0,656	30,8
	Segarra	44,0	721,20	200,18	0,62	0,29	0,540	23,8
	La Noguera	67,0	1.733,00	363,95	0,34	0,15	0,589	39,5
					0,35	8,61		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km²)	Ri (10⁶) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Solsonès -2000	Alt Urgell	41,0	1.446,90	209,03	0,64	0,40	0,538	22,0
998,60	Berguedà	25,0	1.182,50	397,09	0,33	3,37	0,590	14,8
132,79	Bages	37,0	1.295,20	1.637,27	0,08	4,29	0,698	25,8
	Anoia	47,0	866,60	915,66	0,15	1,17	0,656	30,8
	Segarra	44,0	721,20	213,67	0,62	0,33	0,540	23,7
	La Noguera	67,0	1.733,00	391,81	0,34	0,17	0,589	39,5
					0,36	9,75		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km²)	Ri (10⁶) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Solsonès -2002	Alt Urgell	41,0	1.446,90	222,89	0,64	0,46	0,537	22,0
998,60	Berguedà	25,0	1.182,50	443,07	0,32	4,04	0,593	14,8
142,61	Bages	37,0	1.295,20	1.783,45	0,08	5,02	0,699	25,9
	Anoia	47,0	866,60	1.042,58	0,14	1,43	0,660	31,0
	Segarra	44,0	721,20	234,29	0,61	0,39	0,541	23,8
	La Noguera	67,0	1.733,00	430,46	0,33	0,20	0,591	39,6
					0,35	11,55		

TARRAGONÈS

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Tarragonès -1991	Baix Camp	11,5	695,30	920,76	1,21	673,37	0,484	5,6
317,10	Baix Penedès	27,0	295,50	271,54	4,10	15,34	0,385	10,4
1.112,25	Alt Camp	18,0	544,70	220,11	5,05	41,98	0,368	6,6
					3,45	730,69		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Tarragonès -1996	Baix Camp	11,5	695,30	1.274,07	1,28	1.368,98	0,479	5,5
317,10	Baix Penedès	27,0	295,50	460,82	3,55	38,26	0,396	10,7
1.634,17	Alt Camp	18,0	544,70	315,57	5,18	88,43	0,366	6,6
					3,34	1.495,66		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Tarragonès -1999	Baix Camp	11,5	695,30	1.461,46	1,30	1.827,68	0,478	5,5
317,10	Baix Penedès	27,0	295,50	563,78	3,37	54,48	0,400	10,8
1.901,98	Alt Camp	18,0	544,70	368,98	5,15	120,33	0,367	6,6
					3,28	2.002,49		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Tarragonès -2000	Baix Camp	11,5	695,30	1.539,36	1,30	2.029,38	0,478	5,5
317,10	Baix Penedès	27,0	295,50	608,76	3,29	62,01	0,402	10,9
2.005,01	Alt Camp	18,0	544,70	392,87	5,10	135,07	0,367	6,6
					3,23	2.226,46		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Tarragonès -2002	Baix Camp	11,5	695,30	1.788,54	1,27	2.675,16	0,480	5,5
317,10	Baix Penedès	27,0	295,50	778,59	2,92	89,98	0,412	11,1
2.274,81	Alt Camp	18,0	544,70	433,78	5,24	169,20	0,365	6,6
					3,15	2.934,34		

TERRA ALTA

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Terra Alta -1991	Baix Ebre	28,0	987,90	415,99	0,18	1,39	0,641	17,9
740,04	Ribera d'Ebre	18,0	825,29	144,99	0,50	1,82	0,557	10,0
73,11					0,34	3,20		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Terra Alta -1996	Baix Ebre	28,0	987,90	581,09	0,19	2,92	0,635	17,8
740,04	Ribera d'Ebre	18,0	825,29	192,65	0,57	3,64	0,546	9,8
110,27					0,38	6,56		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Terra Alta -1999	Baix Ebre	28,0	987,90	648,25	0,18	3,45	0,639	17,9
740,04	Ribera d'Ebre	18,0	825,29	224,09	0,52	4,49	0,554	10,0
116,81					0,35	7,94		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Terra Alta -2000	Baix Ebre	28,0	987,90	695,98	0,18	4,05	0,638	17,9
740,04	Ribera d'Ebre	18,0	825,29	234,93	0,54	5,14	0,551	9,9
127,66					0,36	9,19		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Terra Alta -2002	Baix Ebre	28,0	987,90	782,00	0,19	5,24	0,636	17,8
740,04	Ribera d'Ebre	18,0	825,29	258,60	0,57	6,52	0,547	9,8
146,97					0,38	11,75		

VALL D'ARAN

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vall d'Aran -1991	Pallars Sobirà	42,0	1.355,22	41,46	1,28	0,03	0,479	20,1
620,50	Alta Ribagorça	33,0	426,80	24,85	2,14	0,04	0,437	14,4
53,17					1,71	0,07		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vall d'Aran -1996	Pallars Sobirà	42,0	1.355,22	70,23	1,49	0,10	0,467	19,6
620,50	Alta Ribagorça	33,0	426,80	43,13	2,43	0,13	0,427	14,1
104,86					1,96	0,23		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vall d'Aran -1999	Pallars Sobirà	42,0	1.355,22	68,45	1,51	0,10	0,466	19,6
620,50	Alta Ribagorça	33,0	426,80	41,34	2,51	0,12	0,424	14,0
103,60					2,01	0,21		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vall d'Aran -2000	Pallars Sobirà	42,0	1.355,22	73,88	1,43	0,11	0,470	19,8
620,50	Alta Ribagorça	33,0	426,80	42,57	2,48	0,13	0,425	14,0
105,58					1,95	0,23		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vall d'Aran -2002	Pallars Sobirà	42,0	1.355,22	82,64	1,56	0,14	0,463	19,4
620,50	Alta Ribagorça	33,0	426,80	46,88	2,75	0,17	0,416	13,7
128,95					2,16	0,31		

VALLÈS OCCIDENTAL

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Occidental -1991	Bages	32,0	1.295,17	1.001,10	4,16	127,28	0,383	12,3
580,70	Baix Llobregat	17,5	486,50	3.783,68	1,10	2.941,26	0,492	8,6
4.166,13	Barcelonès	16,5	143,10	16.784,51	0,25	15.566,45	0,614	10,1
	Vallès Oriental	19,0	851,90	1.739,34	2,40	1.056,47	0,428	8,1
					1,98	19.691,46		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Occidental -1996	Bages	32,0	1.295,17	1.394,69	4,37	259,36	0,380	12,1
580,70	Baix Llobregat	17,5	486,50	5.496,24	1,11	6.249,12	0,491	8,6
6.093,51	Barcelonès	16,5	143,10	20.074,15	0,30	27.230,33	0,598	9,9
	Vallès Oriental	19,0	851,90	2.665,83	2,29	2.368,31	0,432	8,2
					2,02	36.107,12		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Occidental -1999	Bages	32,0	1.295,17	1.559,07	4,63	343,08	0,375	12,0
580,70	Baix Llobregat	17,5	486,50	6.343,56	1,14	8.535,02	0,489	8,6
7.210,84	Barcelonès	16,5	143,10	23.245,14	0,31	37.313,52	0,596	9,8
	Vallès Oriental	19,0	851,90	3.118,15	2,31	3.278,10	0,431	8,2
					2,10	49.469,73		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Occidental -2000	Bages	32,0	1.295,17	1.637,27	4,67	381,90	0,374	12,0
580,70	Baix Llobregat	17,5	486,50	6.713,78	1,14	9.574,77	0,489	8,6
7.643,20	Barcelonès	16,5	143,10	23.943,10	0,32	40.738,38	0,594	9,8
	Vallès Oriental	19,0	851,90	3.307,79	2,31	3.685,97	0,431	8,2
					2,11	54.381,02		

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Occidental -2002	Bages	32,0	1.295,17	1.783,45	4,76	462,14	0,373	11,9
580,70	Baix Llobregat	17,5	486,50	7.497,40	1,13	11.878,43	0,490	8,6
8.491,07	Barcelonès	16,5	143,10	26.166,18	0,32	49.459,64	0,593	9,8
	Vallès Oriental	19,0	851,90	3.763,23	2,26	4.658,67	0,433	8,2
					2,12	66.458,88		

VALLÈS ORIENTAL

Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Oriental -1991	Bages	40,0	1.295,17	1.001,10	1,74	27,21	0,454	18,2
851,90	Vallès Occidental	19,0	580,70	4.166,13	0,42	1.056,47	0,572	10,9
1.739,34	Barcelonès	22,0	143,10	16.784,51	0,10	2.741,73	0,680	15,0
	Maresme	15,0	396,90	2.110,27	0,82	1.087,55	0,516	7,7
	La Selva	40,0	995,50	736,47	2,36	20,02	0,429	17,2
	Osona	33,0	1.263,80	842,01	2,07	40,75	0,440	14,5
					1,25	4.973,73		

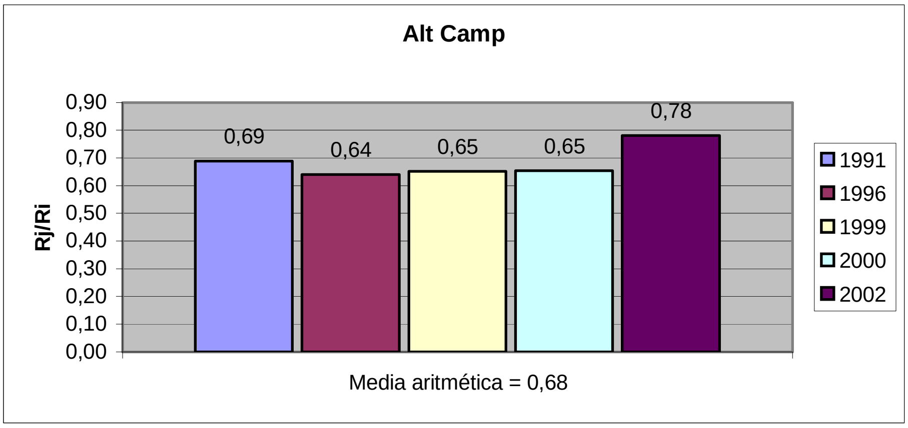
Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Oriental -1996	Bages	40,0	1.295,17	1.394,69	1,91	58,09	0,446	17,8
851,90	Vallès Occidental	19,0	580,70	6.093,51	0,44	2.368,31	0,568	10,8
2.665,83	Barcelonès	22,0	143,10	20.074,15	0,13	5.025,76	0,662	14,6
	Maresme	15,0	396,90	3.288,69	0,81	2.597,66	0,517	7,8
	La Selva	40,0	995,50	1.095,04	2,43	45,61	0,426	17,1
	Osona	33,0	1.263,80	1.242,09	2,15	92,14	0,437	14,4
					1,31	10.187,57		

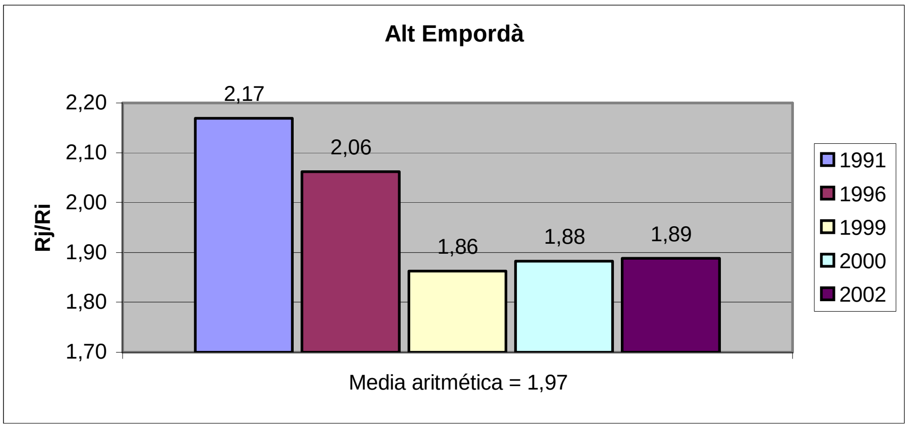
Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Oriental -1999	Bages	40,0	1.295,17	1.559,07	2,00	75,96	0,442	17,7
851,90	Vallès Occidental	19,0	580,70	7.210,84	0,43	3.278,10	0,569	10,8
3.118,15	Barcelonès	22,0	143,10	23.245,14	0,13	6.807,08	0,661	14,6
	Maresme	15,0	396,90	3.599,37	0,87	3.325,44	0,512	7,7
	La Selva	40,0	995,50	1.244,65	2,51	60,64	0,424	17,0
	Osona	33,0	1.263,80	1.310,81	2,38	113,74	0,428	14,1
					1,39	13.660,96		

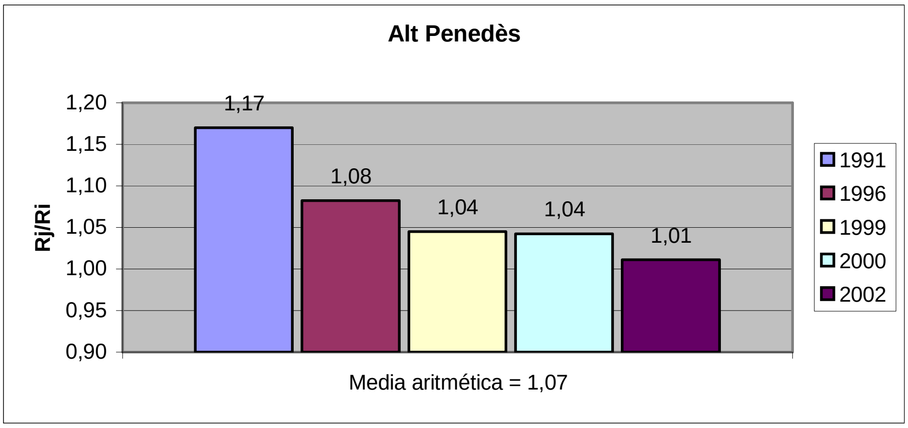
Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Oriental -2000	Bages	40,0	1.295,17	1.637,27	2,02	84,62	0,442	17,7
851,90	Vallès Occidental	19,0	580,70	7.643,20	0,43	3.685,97	0,569	10,8
3.307,79	Barcelonès	22,0	143,10	23.943,10	0,14	7.437,90	0,659	14,5
	Maresme	15,0	396,90	3.791,48	0,87	3.715,98	0,511	7,7
	La Selva	40,0	995,50	1.346,31	2,46	69,58	0,426	17,0
	Osona	33,0	1.263,80	1.394,76	2,37	128,38	0,429	14,1
					1,38	15.122,43		

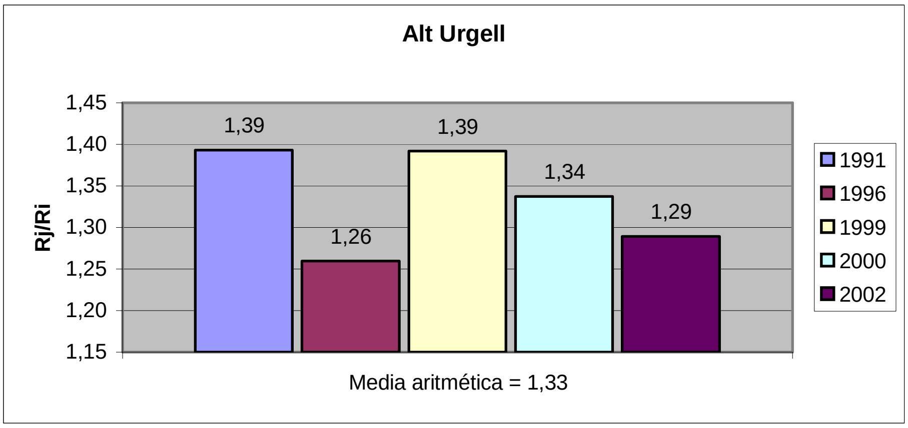
Comarca j	Comarca i	rij (km)	Ai (km^2)	Ri (10^6) €	Rj/Ri	Fij = Fji	K	rxi(km)
Vallès Oriental -2002	Bages	40,0	1.295,17	1.783,45	2,11	104,87	0,438	17,5
851,90	Vallès Occidental	19,0	580,70	8.491,07	0,44	4.658,67	0,567	10,8
3.763,23	Barcelonès	22,0	143,10	26.166,18	0,14	9.247,68	0,656	14,4
	Maresme	15,0	396,90	4.392,71	0,86	4.898,00	0,513	7,7
	La Selva	40,0	995,50	1.549,50	2,43	91,11	0,427	17,1
	Osona	33,0	1.263,80	1.539,52	2,44	161,21	0,426	14,1
					1,40	19.161,55		

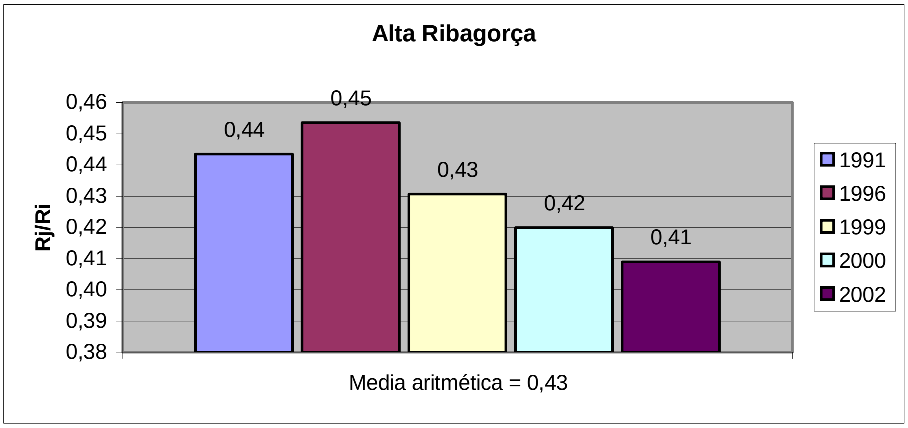
8. GRÁFICOS RELACIÓN R_j/R_i DE LAS COMARCAS CATALANAS

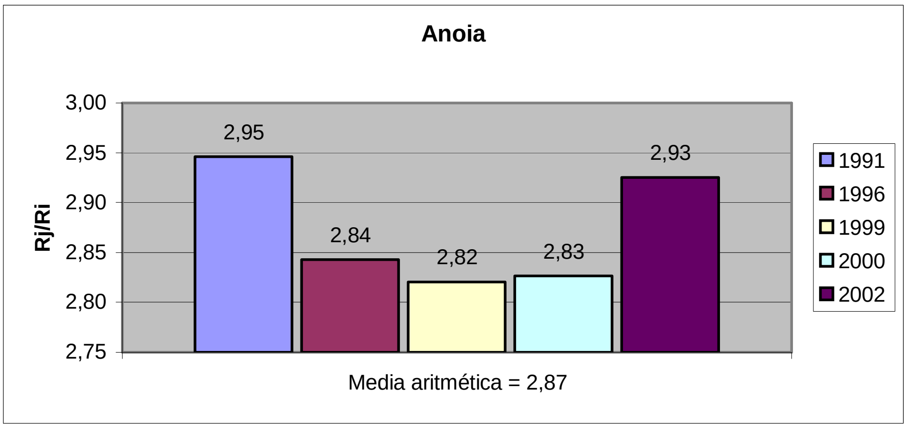


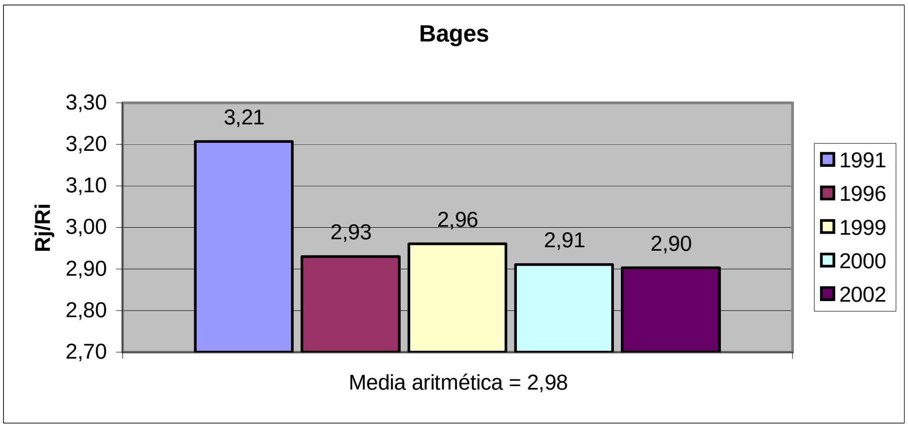


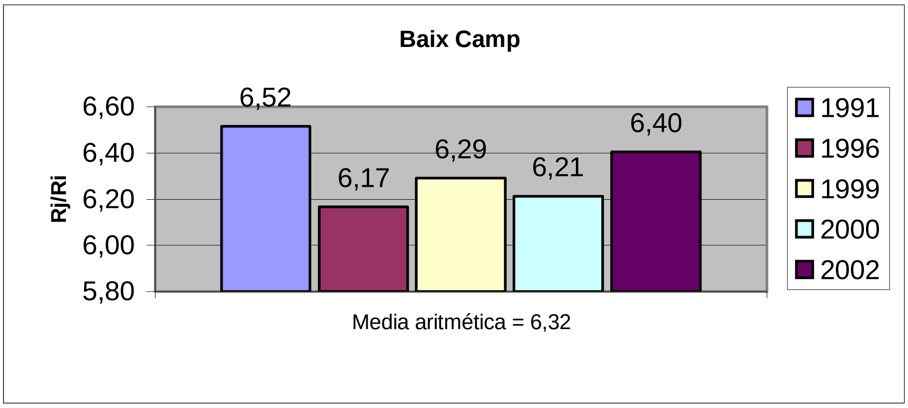


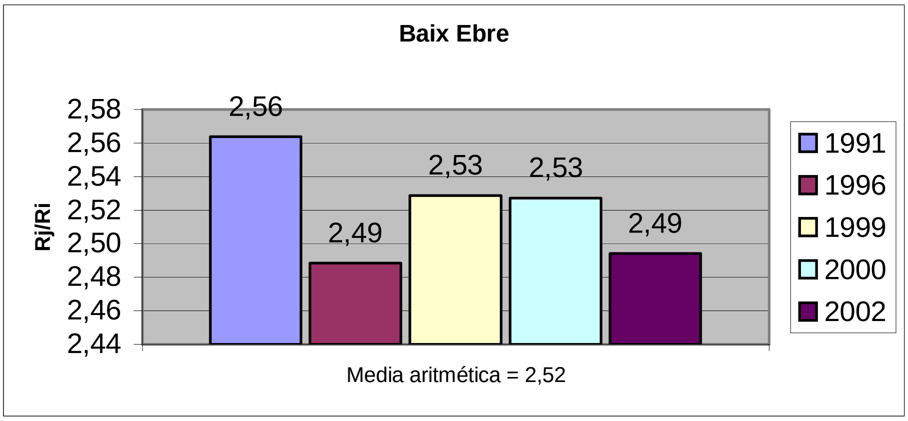

Alt Urgell
Rj/Ri
1,45
1,40
1,35
1,30
1,25
1,20
1,15
1,39
1,26
1,39
1,34
1,29
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,33

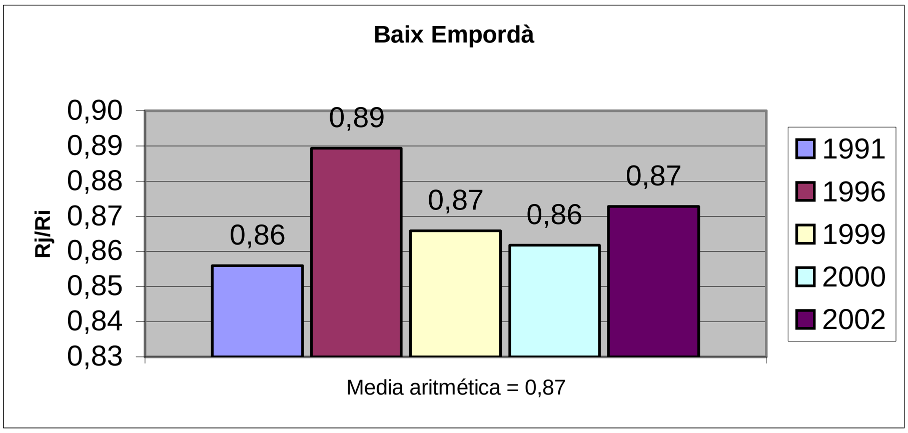

Alta Ribagorça
Rj/Ri
0,46
0,45
0,44
0,43
0,42
0,41
0,40
0,39
0,38
0,44
0,45
0,43
0,42
0,41
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,43

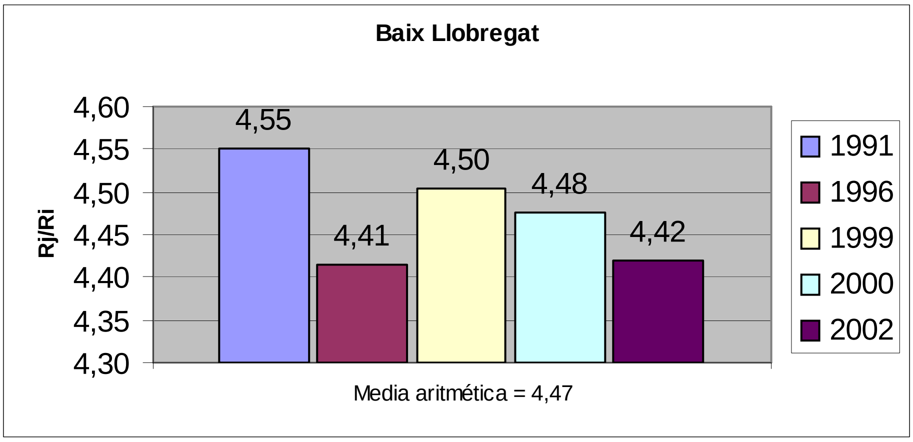

Anoia
Rj/Ri
3,00
2,95
2,90
2,85
2,80
2,75
2,95
2,84
2,82
2,83
2,93
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 2,87

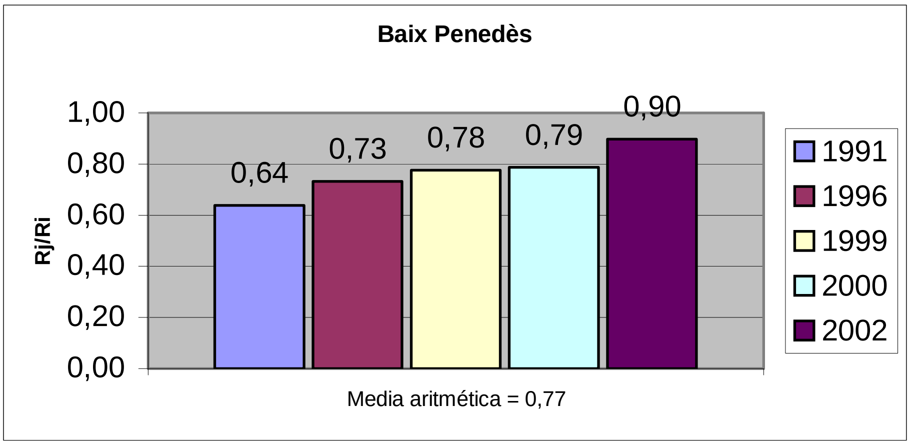

Bages
Rj/Ri
3,30
3,20
3,10
3,00
2,90
2,80
2,70
3,21
2,93
2,96
2,91
2,90
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 2,98

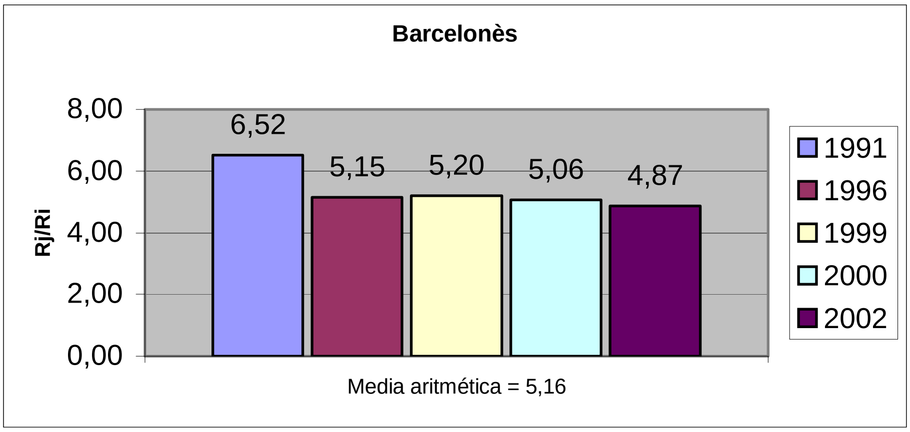

Baix Camp
Rj/Ri
6,60
6,40
6,20
6,00
5,80
6,52
6,17
6,29
6,21
6,40
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 6,32

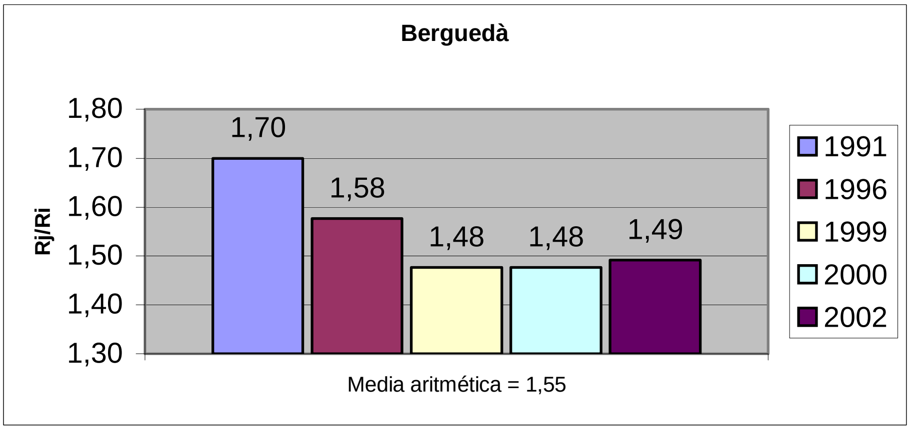

Baix Ebre
Rj/Ri
2,58
2,56
2,54
2,52
2,50
2,48
2,46
2,44
2,56
2,49
2,53
2,53
2,49
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 2,52

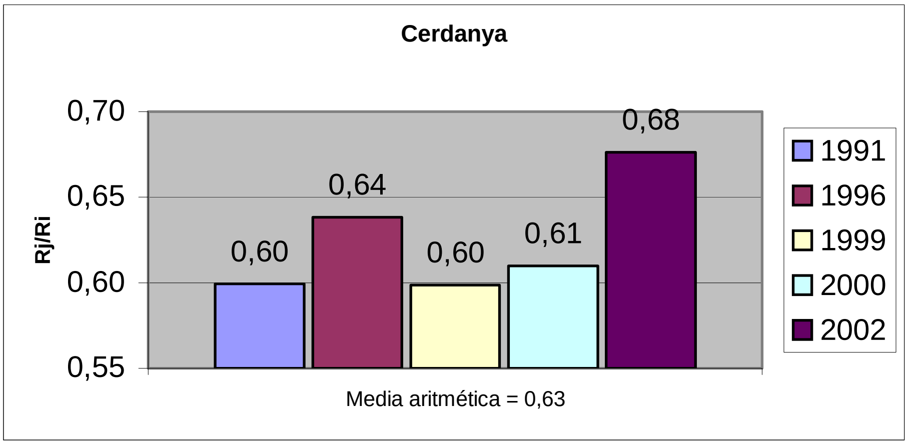

Baix Empordà
Rj/Ri
0,90
0,89
0,88
0,87
0,86
0,85
0,84
0,83
0,86
0,89
0,87
0,86
0,87
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,87

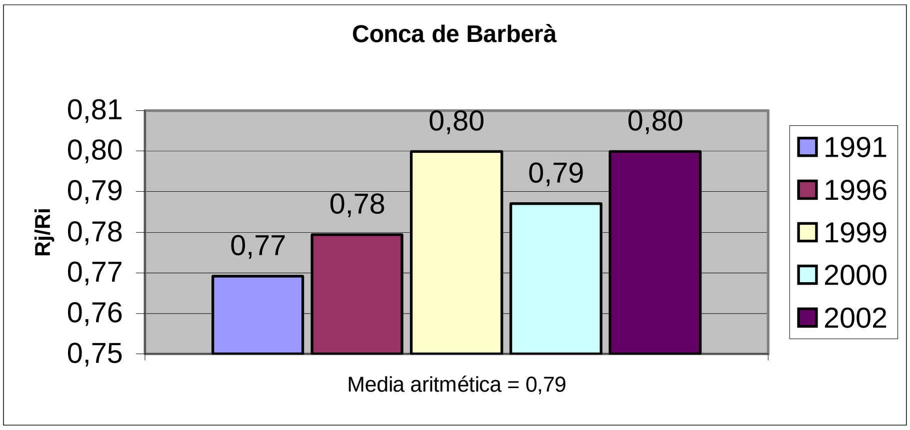

Baix Llobregat
Rj/Ri
4,60
4,55
4,50
4,45
4,40
4,35
4,30
4,55
4,41
4,50
4,48
4,42
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 4,47

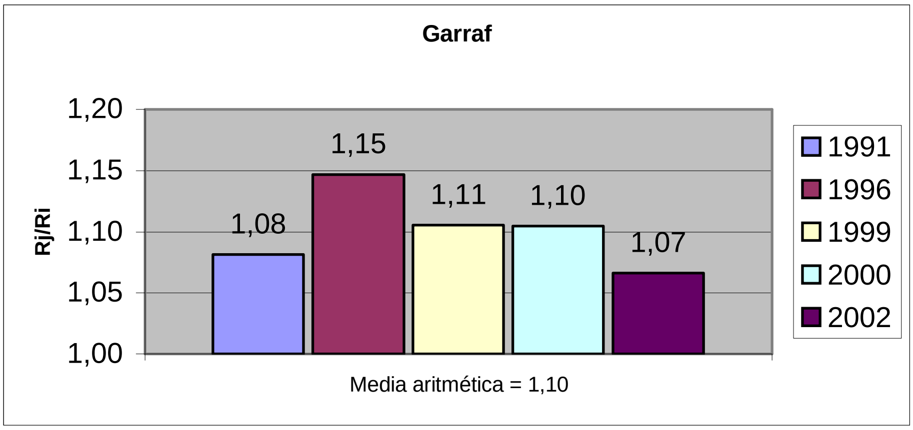

Baix Penedès
Rj/Ri
1,00
0,80
0,60
0,40
0,20
0,00
0,64
0,73
0,78
0,79
0,90
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,77

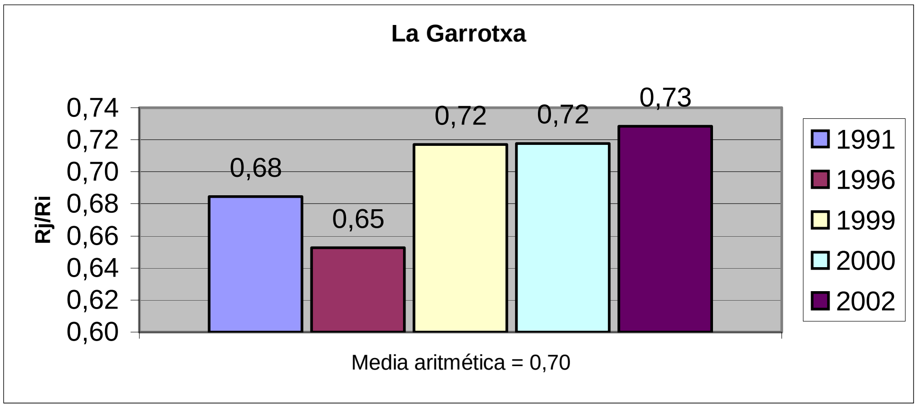

Barcelonès
Rj/Ri
8,00
6,00
4,00
2,00
0,00
6,52
5,15
5,20
5,06
4,87
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 5,16

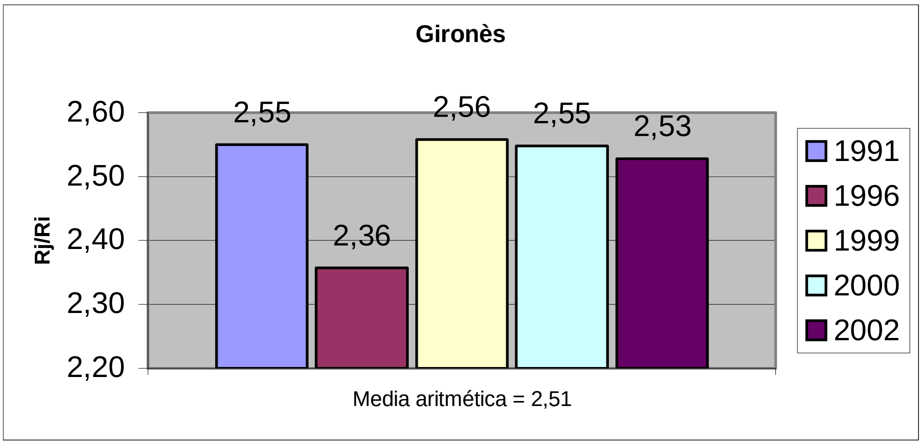

Berguedà
1,80
1,70
1,60
1,50
1,40
1,30
Rj/Ri
1,70
1,58
1,48
1,48
1,49
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,55

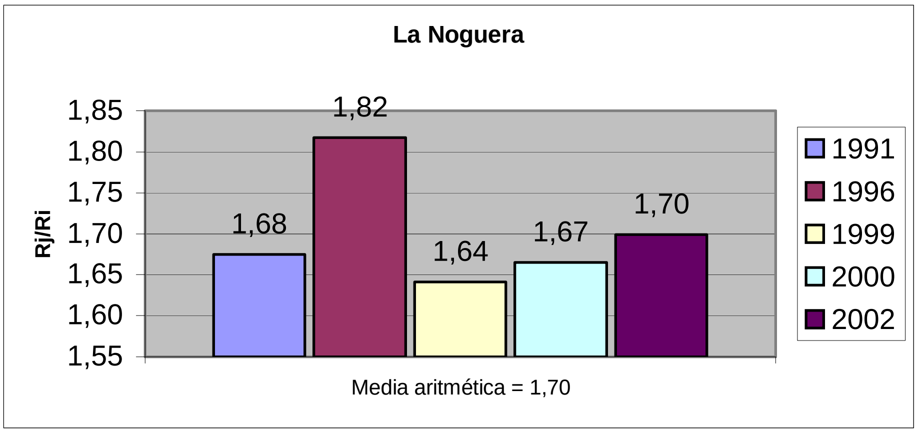

Cerdanya
0,70
0,65
0,60
0,55
Rj/Ri
0,60
0,64
0,60
0,61
0,68
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,63

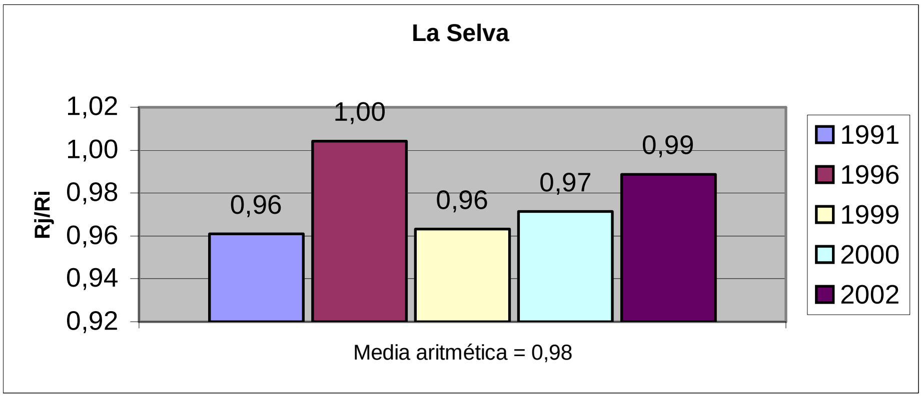

Conca de Barberà
0,81
0,80
0,79
0,78
0,77
0,76
0,75
Rj/Ri
0,77
0,78
0,80
0,79
0,80
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,79

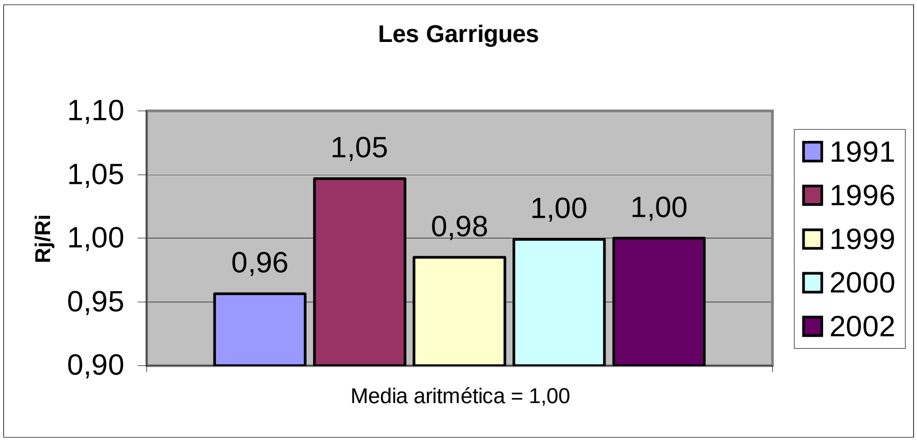

Garraf
1,20
1,15
1,10
1,05
1,00
Rj/Ri
1,08
1,15
1,11
1,10
1,07
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,10

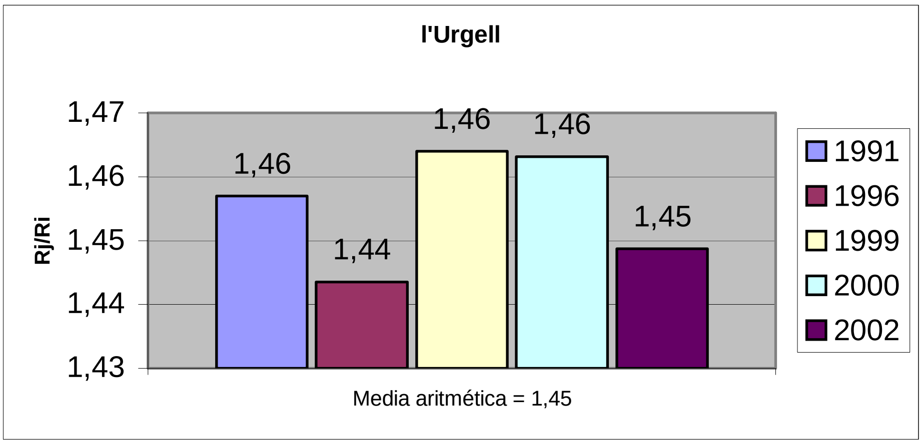

La Garrotxa
Rj/Ri
0,74
0,72
0,70
0,68
0,66
0,64
0,62
0,60
0,68
0,65
0,72
0,72
0,73
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,70

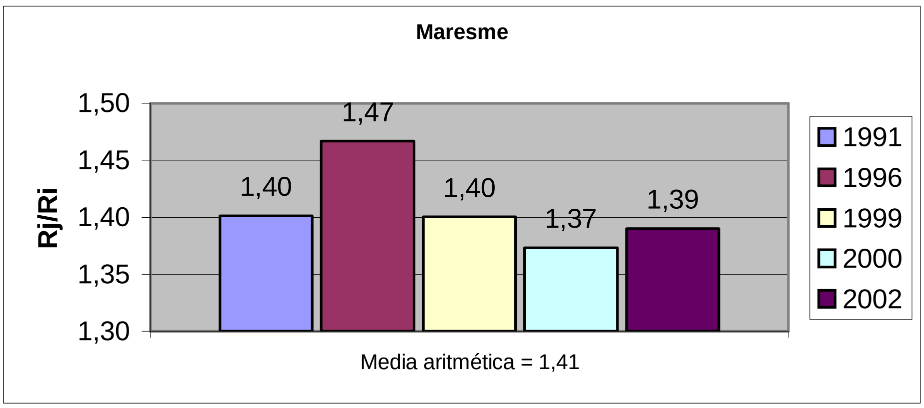

Gironès
Rj/Ri
2,60
2,50
2,40
2,30
2,20
2,55
2,36
2,56
2,55
2,53
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 2,51

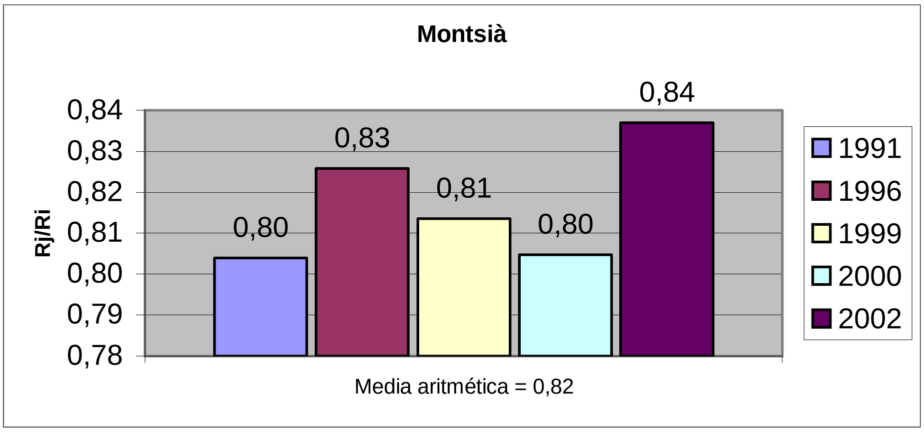

La Noguera
Rj/Ri
1,85
1,80
1,75
1,70
1,65
1,60
1,55
1,68
1,82
1,64
1,67
1,70
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,70

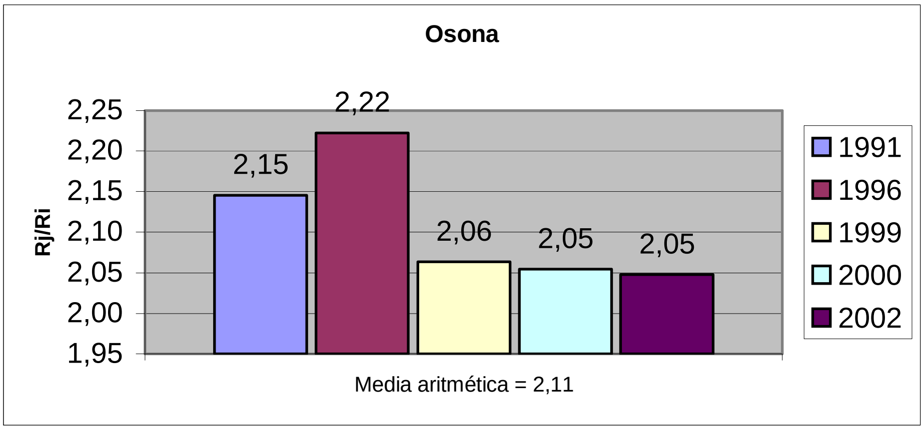

La Selva
Rj/Ri
1,02
1,00
0,98
0,96
0,94
0,92
0,96
1,00
0,96
0,97
0,99
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,98

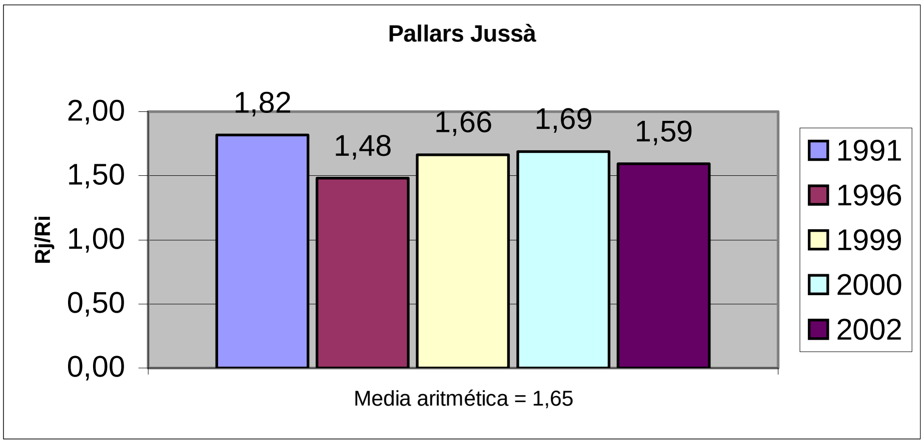

Les Garrigues
Rj/Ri
1,10
1,05
1,00
0,95
0,90
0,96
1,05
0,98
1,00
1,00
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,00

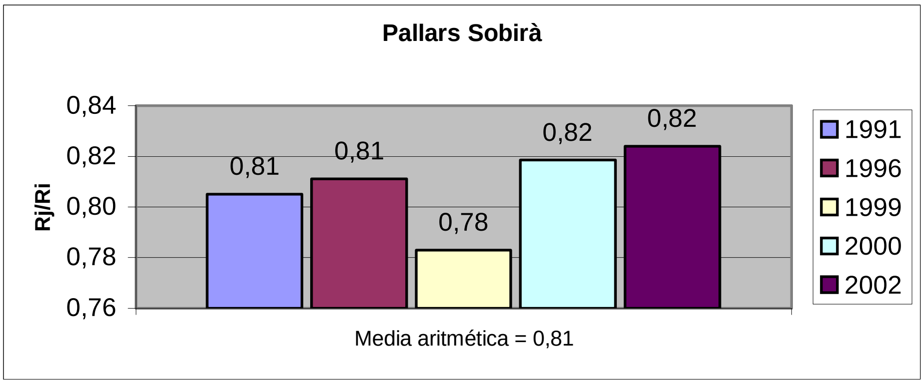

l'Urgell
Rj/Ri
1,47
1,46
1,45
1,44
1,43
1,46
1,44
1,46
1,46
1,45
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,45

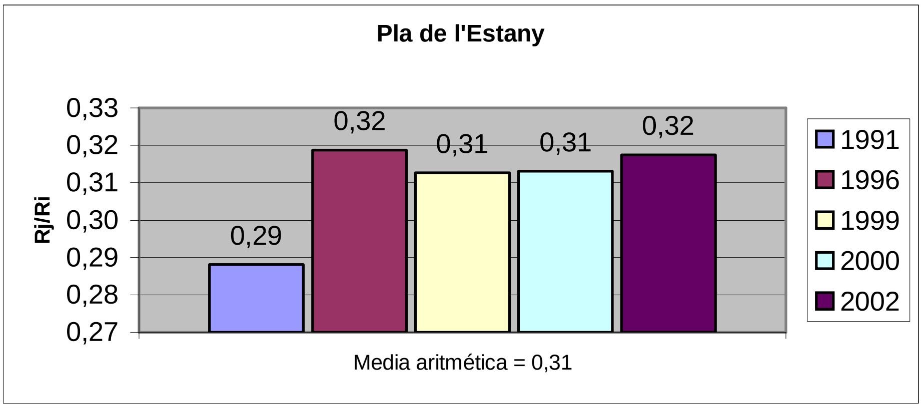

Maresme
Rj/Ri
1,50
1,45
1,40
1,35
1,30
1,40
1,47
1,40
1,37
1,39
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,41

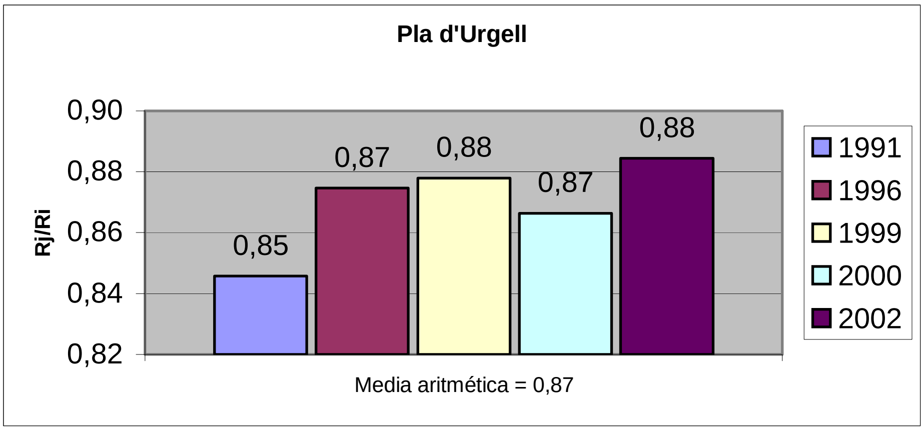

Montsià
Rj/Ri
0,84
0,83
0,82
0,81
0,80
0,79
0,78
0,80
0,83
0,81
0,80
0,84
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,82

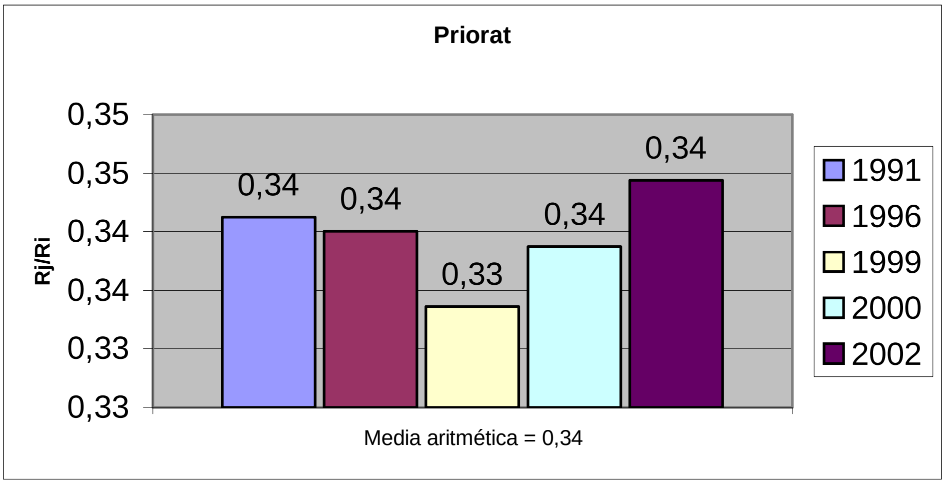

Osona
Rj/Ri
2,25
2,20
2,15
2,10
2,05
2,00
1,95
2,15
2,22
2,06
2,05
2,05
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 2,11

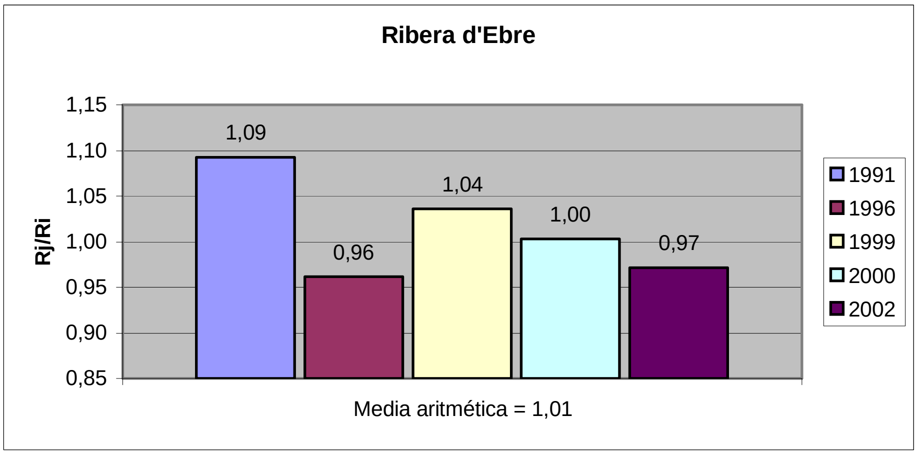

Pallars Jussà
Rj/Ri
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
1,82
1,48
1,66
1,69
1,59
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,65

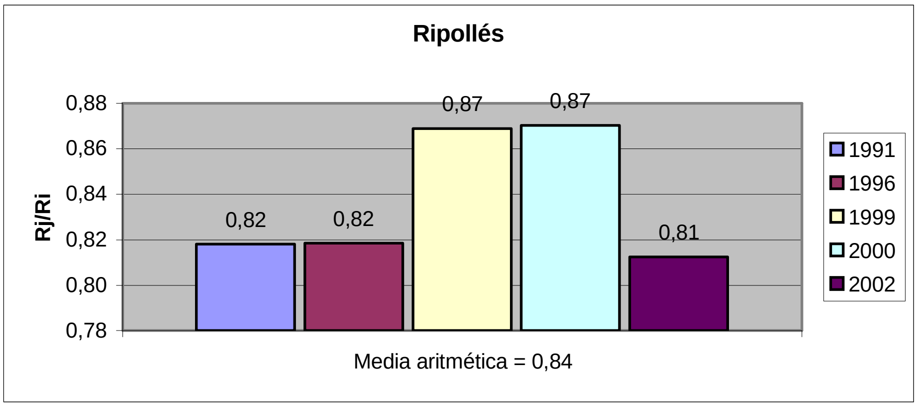

Pallars Sobirà
0,84
0,82
0,80
0,78
0,76
Rj/Ri
0,81
0,81
0,78
0,82
0,82
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,81

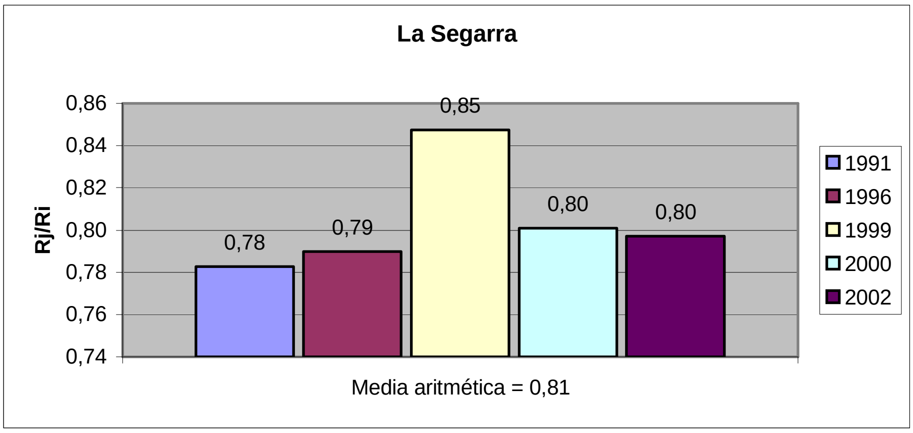

Pla de l'Estany
0,33
0,32
0,31
0,30
0,29
0,28
0,27
Rj/Ri
0,29
0,32
0,31
0,31
0,32
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,31

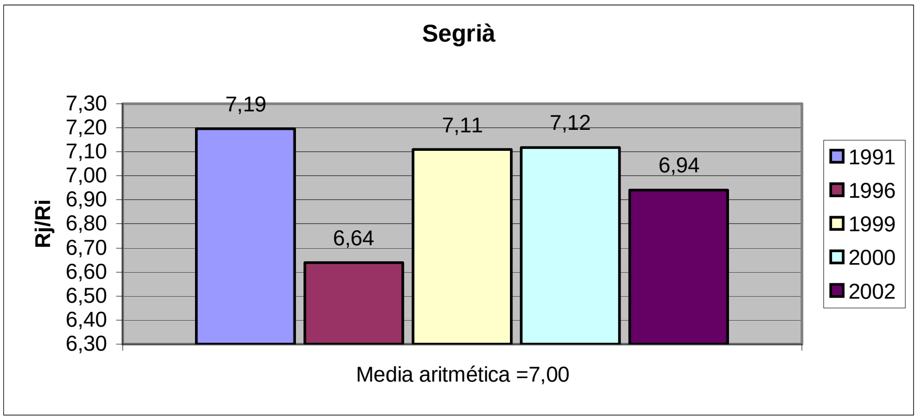

Pla d'Urgell
0,90
0,88
0,86
0,84
0,82
Rj/Ri
0,85
0,87
0,88
0,87
0,88
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,87

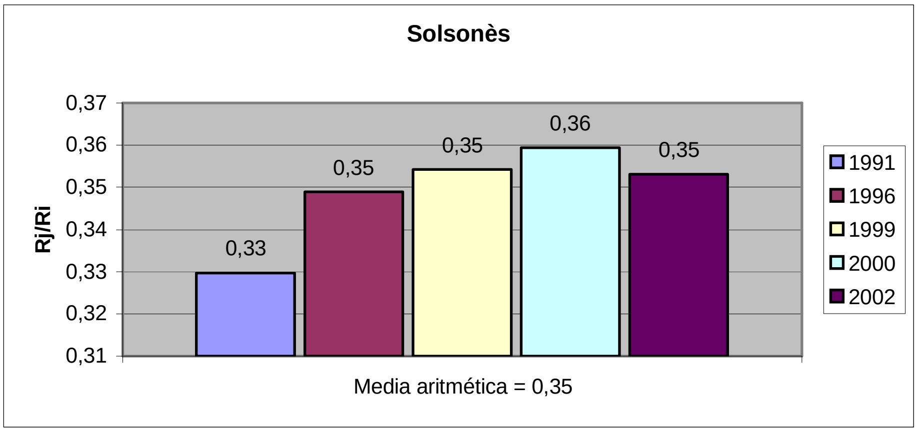

Priorat
0,35
0,35
0,34
0,34
0,33
0,33
Rj/Ri
0,34
0,34
0,33
0,34
0,34
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,34

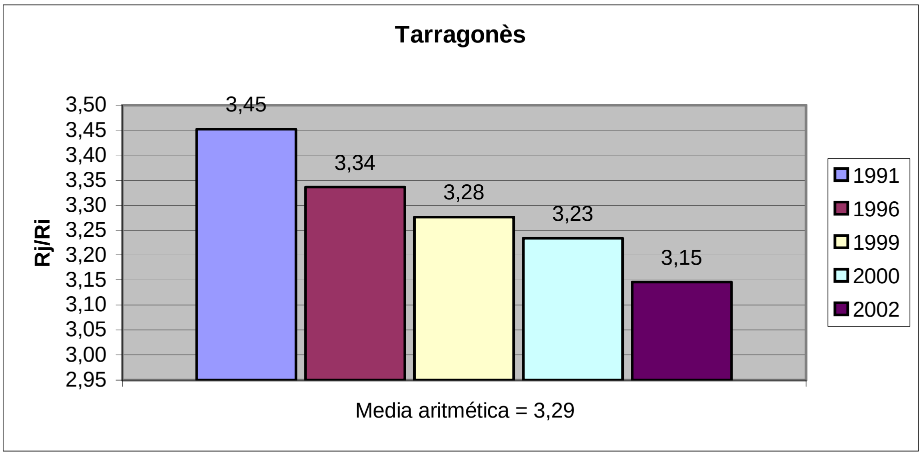

Ribera d'Ebre
1,15
1,10
1,05
1,00
0,95
0,90
0,85
Rj/Ri
1,09
0,96
1,04
1,00
0,97
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,01

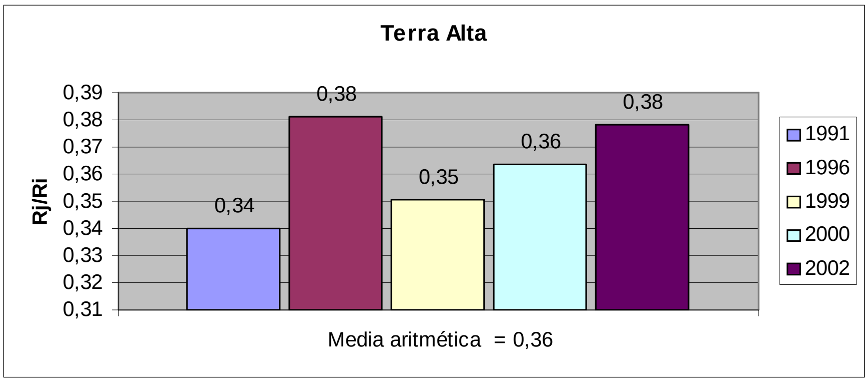

Ripollés
0,88
0,86
0,84
0,82
0,80
0,78
Rj/Ri
0,82
0,82
0,87
0,87
0,81
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,84

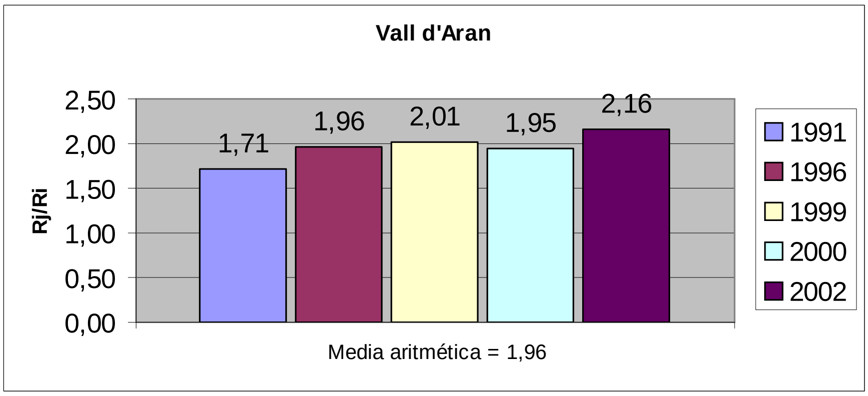

La Segarra
0,86
0,84
0,82
0,80
0,78
0,76
0,74
Rj/Ri
0,78
0,79
0,85
0,80
0,80
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,81

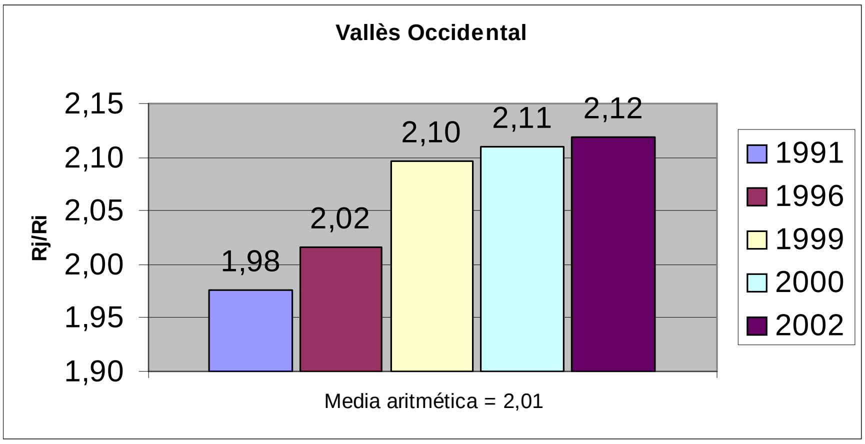

Segrià
Rj/Ri
7,30
7,20
7,10
7,00
6,90
6,80
6,70
6,60
6,50
6,40
6,30
7,19
6,64
7,11
7,12
6,94
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética =7,00

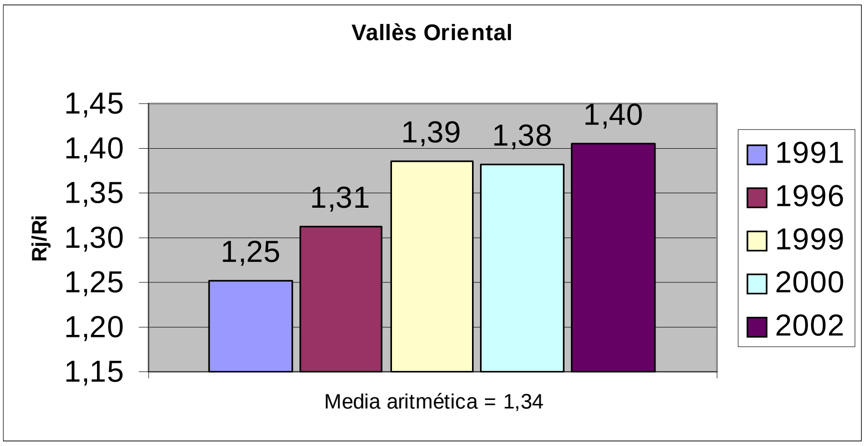

Solsonès
Rj/Ri
0,37
0,36
0,35
0,34
0,33
0,32
0,31
0,33
0,35
0,35
0,36
0,35
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,35


Tarragonès
Rj/Ri
3,50
3,45
3,40
3,35
3,30
3,25
3,20
3,15
3,10
3,05
3,00
2,95
3,45
3,34
3,28
3,23
3,15
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 3,29


Terra Alta
Rj/Ri
0,39
0,38
0,37
0,36
0,35
0,34
0,33
0,32
0,31
0,34
0,38
0,35
0,36
0,38
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 0,36


Vall d'Aran
Rj/Ri
2,50
2,00
1,50
1,00
0,50
0,00
1,71
1,96
2,01
1,95
2,16
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,96


Vallès Occidental
Rj/Ri
2,15
2,10
2,05
2,00
1,95
1,90
1,98
2,02
2,10
2,11
2,12
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 2,01


Vallès Oriental
Rj/Ri
1,45
1,40
1,35
1,30
1,25
1,20
1,15
1,25
1,31
1,39
1,38
1,40
1991
1996
1999
2000
2002
Media aritmética = 1,34

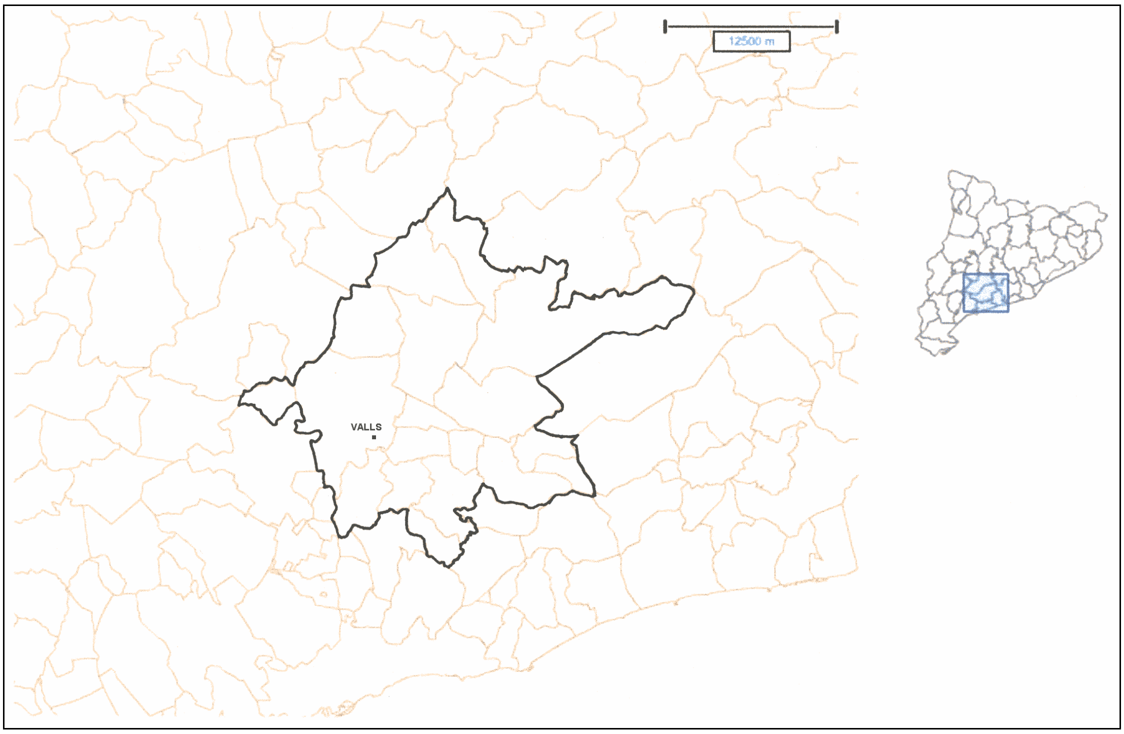
ANEXO 6

LAS NUEVAS COMARCAS RESULTANTES

ANEXO 6

LAS NUEVAS COMARCAS RESULTANTES

01 NUEVA COMARCA DE *L'ALT CAMP*



01 Nueva comarca de l'Alt Camp.

La comarca de l'Alt Camp pierde los siguientes municipios:

- 11 Mont-ral
- 02 Alcover
- 09 Milà, el
- 08 Masó, la
- 19 Rourell, el
- 16 Querol

Gana el siguiente municipio:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
-13 de la comarca 33 *(Tarragonès)*	Renau 24

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 18

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2) (1986)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	
01	01	Aiguamúrcia	237	73'10	608	611	+3	8'4
01	03	Alió	266	7'37	348	351	+3	47'6
01	04	Bràfim	236	6'29	597	592	-5	94'1
01	05	Cabra del Camp	493	27'02	409	421	+12	15'6
01	06	Figuerola del Camp	498	22'78	203	226	+23	9'9
01	07	Masllorenç	304	6'58	418	392	-26	59'6
01	10	Montferri	229	19'21	176	158	-18	8'2
01	12	Nulles	232	10'70	388	367	-21	34'3
01	13	Pla de Sta. Maria, el	381	35'09	1.461	1.498	+37	42'7
01	14	Pont d'Armentera, el	349	27'78	593	582	-11	20'9
01	15	Puigpelat	252	9'63	401	442	+41	45'9
01	24	Renau	175	8'30	27	47	+20	5'7
01	17	Riba, la	253	8'06	992	996	+4	123'6
01	18	Rodonyà	312	8'48	385	371	-14	43'8
01	20	Vallmoll	161	16'72	929	988	+59	59'1
01	21	Valls	214	55'96	18.857	19.577	+720	350'2
01	22	Vilabella	254	17'91	825	816	-9	45'6
01	23	Vila-rodona	259	32'91	1.054	1.028	-26	31'2
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 284** **σ = 91** **CV = 0'32**	**393'83**	**28.671**	**29.463**	**+792**	$\overline{X}$ **= 58'1** **σ = 76'8** **CV = 1'32**

Municipio que gana la nueva comarca.

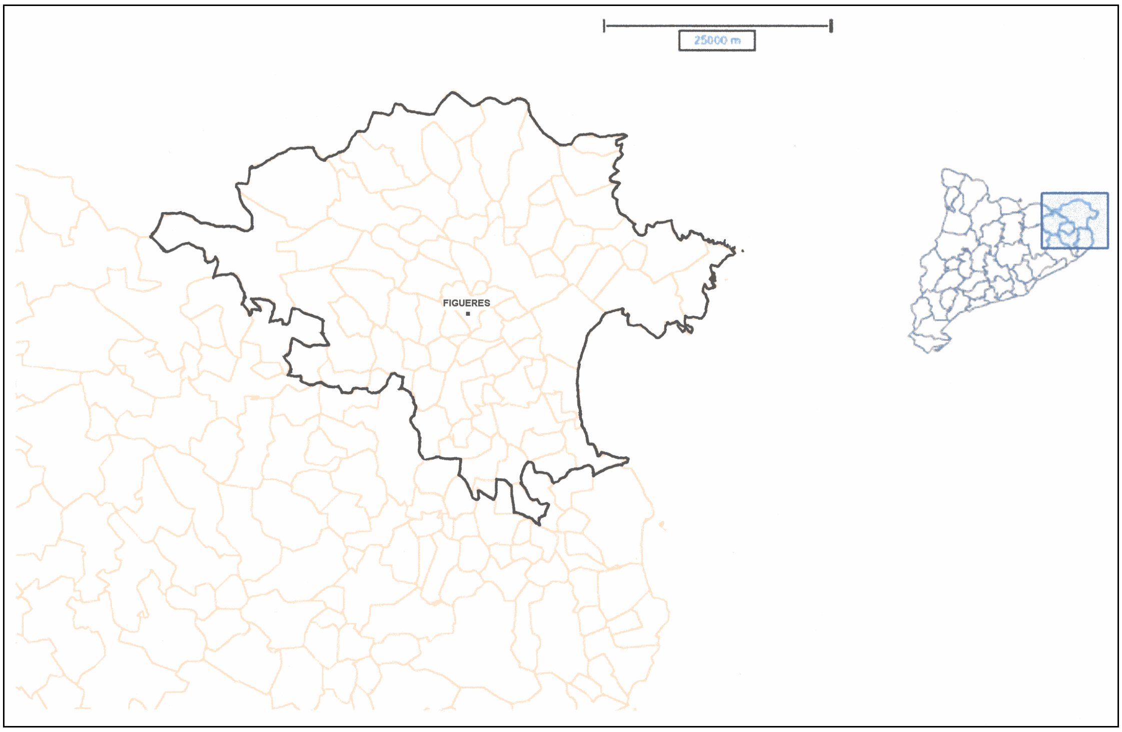
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	21’88	17’80	0’81
Población (nº habit.)	1.637	4.365	2’67

- Densidad de población comarcal (1986): 74’8 hab./km^2

- Capital comarcal: Valls.

02 NUEVA COMARCA DEL *ALT EMPORDÀ*



02 Nueva comarca de l'Alt Empordà.

La comarca 02 ALT EMPORDÀ gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 05 de la comarca 18 (Garrotxa)	Maià de Montcal 74
- 12 de la comarca 19 (Gironès)	Crespià 71
- 15 de la comarca 09 (Baix Empordà)	Jafre 73
- 01 de la comarca 09 (Baix Empordà)	Albons 69
- 07 de la comarca 09 (Baix Empordà)	Colomers 70
- 13 de la comarca 09 (Baix Empordà)	Garrigoles 72
- 36 de la comarca 09 (Baix Empordà)	Vilopriu 75

Esta comarca no pierde ningún municipio.

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 75

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
02	01	Agullana	166	27’39	693	647	-46	23’6
02	02	Albanyà	239	93’34	122	111	-11	1’2
02	69	Albons	25	11’18	481	474	-7	42’4
02	03	Armentera, l’	7	5’67	759	745	-14	131’4
02	04	Avinyonet de Puigventós	70	12’36	356	342	-14	27’7
02	05	Bàscara	66	17’28	736	752	+16	43’5
02	06	Biure	81	9’97	307	284	-23	28’5
02	07	Boadella d’Empordà	82	10’73	231	221	-10	20’6
02	08	Borrassà	73	9’36	529	497	-32	53’1
02	09	Cabanelles	194	44’93	237	267	+30	5’9
02	10	Cabanes	26	15’01	827	833	+6	55’5
02	11	Cadaqués	23	25’73	1.548	1.641	+93	63’8
02	12	Capmany	107	26’58	485	429	-56	16’1
02	13	Cantallops	200	19’67	307	259	-48	13’2
02	14	Castelló d’Empúries	17	41’84	2.657	3.354	+698	80’2
02	15	Cistella	130	25’56	224	211	-13	8’3
02	16	Colera	10	23’95	491	441	-50	18’4
02	70	Colomers	41	4’30	226	214	-12	49’8
02	71	Crespià *	138	11’11	224	213	-11	19’2
02	17	Darnius	76	34’79	470	479	+9	13’8
02	18	Escala, l’	14	16’41	4.077	4.721	+644	287’7
02	19	Espolla	124	43’09	430	404	-26	9’4
02	20	Far d’Empordà, el	44	9’08	465	434	-31	47’8
02	21	**Figueres**	39	18’87	30.412	31.942	+1.530	1.692’7
02	22	Fortià	8	10’79	493	476	-17	44’1
02	23	Garrigàs	101	19’49	345	315	-30	16’2
02	72	Garrigoles	92	9’15	154	158	+4	17’3
02	24	Garriguella	56	20’97	600	611	+11	29’1
02	73	Jafre	44	6’72	379	353	-26	52’5
02	25	Jonquera, la	110	56’90	2.415	2.582	-167	45’4
02	26	Lladó	197	13’59	509	493	-16	36’3
02	27	Llançà	6	28’01	2.996	3.253	+257	116’1
02	28	Llers	142	21’21	643	677	-34	31’9
02	29	Maçanet de Cabrenys	370	67’46	802	744	-58	11’0
02	74	Maià de Montcal	241	16’98	385	375	-10	22’1
02	30	Masarac	85	12’46	259	263	+4	21’1
02	31	Mollet de Peralada	59	3’34	180	179	-1	53’6
02	32	Navata	145	23’16	614	624	+10	26’9
02	33	Ordís	98	8’49	294	303	+9	35’7
02	34	Palau de Sta. Eulàlia	86	8’62	90	84	-6	9’7
02	35	Palau-Saverdera	78	16’19	670	667	-3	41’2
02	36	Pau	33	10’44	313	317	+4	30’4
02	37	Pedret i Marzà	2	8’51	142	148	+6	17’4
02	38	Peralada	22	43’81	1.242	1.259	+17	28’7
02	39	Pont de Molins	84	8’53	353	378	+25	44’3
02	40	Pontós	94	13’54	223	210	-13	15’5

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
02	41	Port de la Selva	12	41’30	729	768	+39	18’6
02	42	Portbou	28	9’30	2.280	2.018	-262	217’0
02	43	Rabós	106	45’06	158	147	-11	3’3
02	44	Riumors	7	6’46	217	205	-12	31’7
02	45	Roses	5	45’87	8.004	9.219	+1.215	201’0
02	46	St. Climent Sescebes	80	24’46	490	461	-29	18’8
02	47	St. Llorenç de la Muga	173	32’06	188	152	-36	4’7
02	48	St. Miquel de Fluvià	28	3’62	481	552	+71	152’5
02	49	St. Mori	60	7’44	151	131	-20	17’6
02	50	St. Pere Pescador	5	17’80	1.058	1.159	+101	65’1
02	51	Sta. Llogaia d’Àlguema	42	1’97	303	309	+6	156’9
02	52	Saus	86	11’63	724	718	-6	61’7
02	53	Selva de Mar, la	48	7’08	158	154	-4	21’8
02	54	Siurana	33	10’50	174	171	-3	16’3
02	55	Terrades	228	20’80	200	191	-9	9’2
02	56	Torroella de Fluvià	9	16’73	285	282	-3	16’9
02	57	Vajol, la	546	4’66	70	60	-10	12’9
02	58	Ventalló	28	26’14	517	482	-35	18’4
02	59	Vilabertran	26	2’29	886	789	-97	344’5
02	60	Viladamat	13	11’90	377	358	-19	30’1
02	61	Vilafant	54	8’23	1.506	1.964	+458	238’6
02	62	Vilajuïga	31	13’16	730	663	-67	50’4
02	63	Vilamacolum	5	5’49	114	118	+4	21’5
02	64	Vilamalla	45	8’66	369	492	+123	56’8
02	65	Vilamaniscle	169	5’20	114	118	+4	21’9
02	66	Vilanant	98	12’14	278	284	+6	23’4
02	67	Vila-sacra	16	6’19	385	394	+9	63’7
02	68	Vilaür	65	5’56	123	105	-18	18’9
02	75	Vilopriu	82	16’44	196	179	-17	10’9
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 85** **σ = 89** **CV = 1’05**	**1.419’00**	**82.835**	**87.379**	**+4.544**	$\overline{X}$ **=** **σ =** **CV =**

Municipios que gana la nueva comarca.
* : Este municipio ha pasado a formar parte de la nueva comarca creada con posterioridad, la nº: 40, llamada “Pla de l’Estany”.

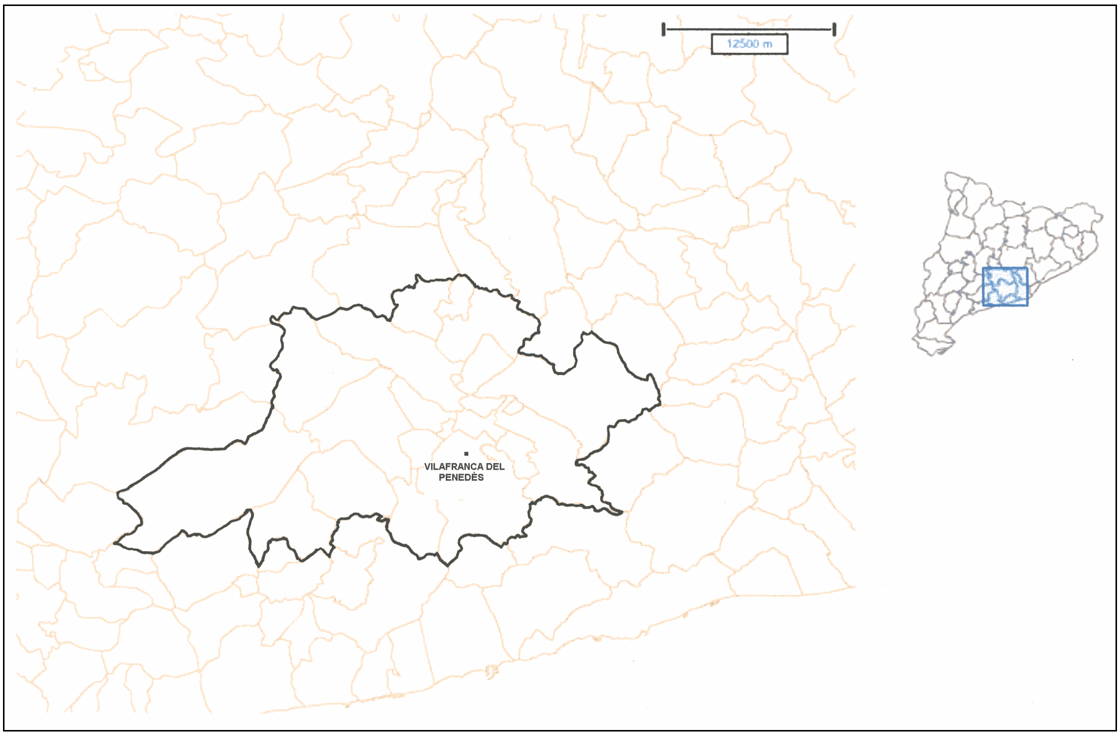
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	18’87	16’05	0’85
Población (nº habit.)	1.160	3.795	3’27

- Densidad de población comarcal (1986): 61’5 hab./km^2

- Capital comarcal: Figueres.

03 NUEVA COMARCA DE *L'ALT PENEDÈS*



03 Nueva comarca de l’Alt Penedès.

La comarca 03 de l’Alt Penedès pierde los siguientes municipios:

- 07 Mediona.
- 05 Gelida.
- 14 Sant Llorenç d’Hortons.
- 18 Sant Sadurní d’Anoia.
- 11 Pontons.

Y gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 09 de la comarca 11 (Baix Penedès)	Montmell 26
- 10 de la comarca 11 (Baix Penedès)	St. Jaume dels Domenys 27

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 22

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ	
03	01	Avinyonet del Penedès	331	29’12	1.206	1.187	-19	40’8
03	02	Cabanyes, les	252	1’19	320	359	+39	301’7
03	03	Castellví de la Marca	313	28’49	1.423	1.362	-61	47’8
03	04	Font-rubí	666	37’00	1.171	1.134	-37	30’6
03	06	Granada, la	272	6’57	1.195	1.192	-3	181’4
03	26	Montmell	494	72’58	164	232	+68	3’2
03	08	Olèrdola	233	29’87	1.579	1.578	-1	52’8
03	09	Pacs del Penedès	201	6’14	401	397	-4	64’7
03	10	Pla del Penedès, el	216	9’45	1.000	1.002	+2	106’0
03	12	Puigdàlber	239	0’40	306	307	+1	767’5
03	13	St. Cugat Sesgarrigues	266	6’29	697	744	+47	118’3
03	27	St. Jaume dels Domenys	213	24’46	1.050	1.122	+72	45’9
03	15	St. Martí Sarroca	340	35’59	2.311	2.326	+15	65’4
03	16	St. Pere Riudebitlles	441	5’35	2.170	2.184	+14	408’2
03	17	St. Quintí de Mediona	326	13’89	1.533	1.569	+36	113’0
03	19	Sta. Fe del Penedès	240	3’48	194	192	-2	55’2
03	20	Sta. Margarida i el Monjos	161	17’39	3.327	3.605	+278	207’3
03	21	Subirats	243	55’78	2.214	2.164	-50	38’8
03	22	Torrelavit	202	23’94	1.176	1.188	+12	49’6
03	23	Torrelles de Foix	367	36’80	1.128	1.137	+9	30’9
03	24	**Vilafranca del Penedès**	223	19’63	25.025	26.433	+1.408	1.346’6
03	25	Vilobí del Penedès	333	9’43	772	765	-7	81’1
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 299 σ = 1’3 CV = 0’38**	**472’84**	**50.362**	**52.179**	**+1.817**	**$\overline{X}$ = 188’9 σ = 303’1 CV = 1’61**

Municipios que gana la nueva comarca.

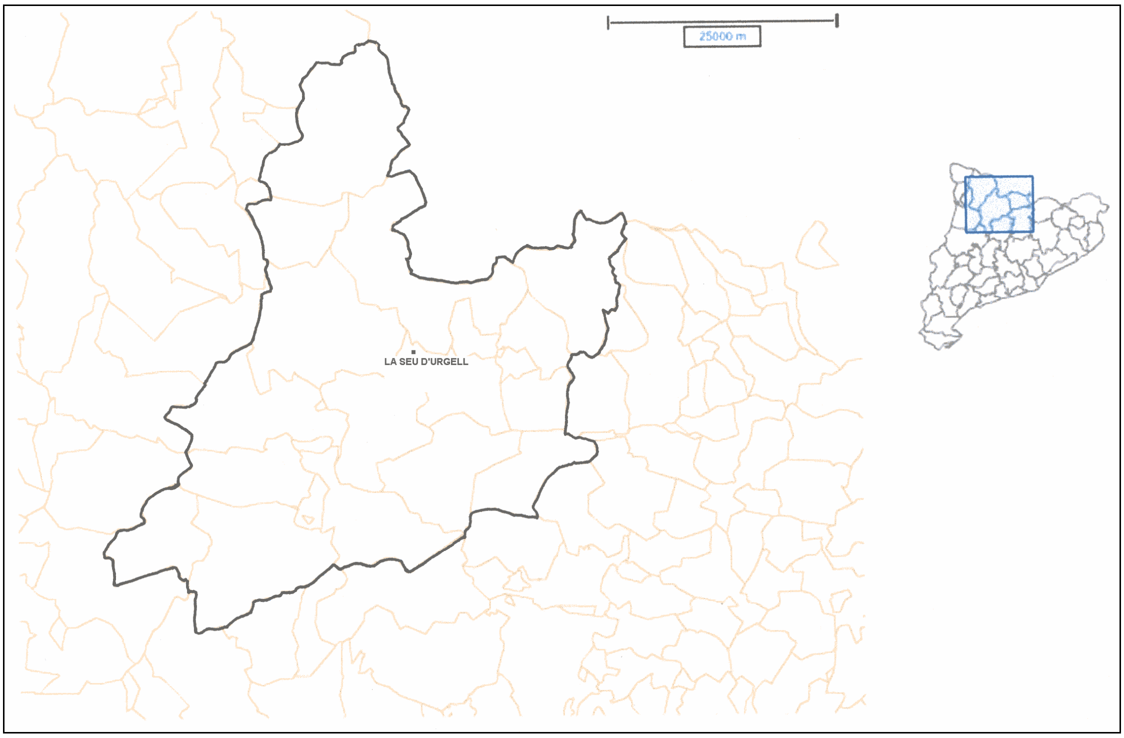
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	21’49	18’03	0’84
Población (nº habit.)	2.372	5.310	2’24

- Densidad de población comarcal (1986): 110’4 hab./km^2

- Capital comarcal: Vilafranca del Penedès.

04 NUEVA COMARCA DEL *ALT URGELL*



04 Nueva comarca de l'Alt Urgell.

La comarca 04 Alt Urgell pierde los siguientes municipios:

- 14 Peramola.
- 12 Oliana.
- 04 Bassella.

Y gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 01 de la comarca 25 (Pallars Sobirà)	Alins de Vallferrera 20
- 07 de la comarca 25 (Pallars Sobirà)	Farrera 21
- 09 de la comarca 14 (Cerdanya)	Lles de Cerdanya 22
- 01 de la comarca 24 (Pallars Jussà)	Abella de la Conca 23

Los municipios que resta en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 20

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ	
04	23	Abella de la Conca	956	78'00	184	161	-23	2'1
04	01	Alàs - Cerc	967	57'06	465	424	-41	5'6
04	20	Alins de Vallferrera	1.231	183'84	313	294	-19	1'6
04	02	Aristot-Toloriu*	202	44'16	167	171	+4	3'9
04	03	Arsèguel	768	10'52	81	83	+2	7'9
04	05	Cabó	1.291	79'51	163	159	-4	2'0
04	06	Cava	1.648	42'05	63	50	-13	1'2
04	07	Coll de Nargó	753	153'72	742	684	-58	4'4
04	08	Estamariu	1.084	21'39	135	140	+5	6'5
04	21	Farrera	1.362	63'52	75	89	+14	1'4
04	09	Fígols i Alinyà	780	102'24	410	377	-33	3'7
04	10	Josa-Tuixén	1.318	68'43	133	134	+1	2'0
04	22	Lles de Cerdanya	1.471	101'51	326	313	-13	3'1
04	11	Montferrer-Castellbò	802	177'48	609	631	+22	3'6
04	13	Organyà	558	11'54	1.143	1.079	-64	93'5
04	15	Ribera d'Urgellet	702	104'90	889	817	-72	7'8
04	16	**Seu d'Urgell, la**	691	14'89	10.190	10.101	-89	678'4
04	17	Valls d'Aguilar	669	124'53	270	234	-36	1'9
04	18	Valls de Valira	740	170'94	765	745	-20	4'4
04	19	Vansa-Fórnols, la	1.140	109'69	157	160	+3	1'5
		TOTALES	$\bar{X}$ **= 957** σ **= 346** **CV = 0'36**	**1.719'92**	**17.280**	**16.846**	**-434**	$\bar{X}$ **= 41'8** σ **= 147'4** **CV = 3'53**

Municipios que gana la nueva comarca.

* Actualmente este municipio recibe el nombre de Pont de Bar, después de haberse fusionado en 1970 los anteriores municipios de Aristot y Toloriu.

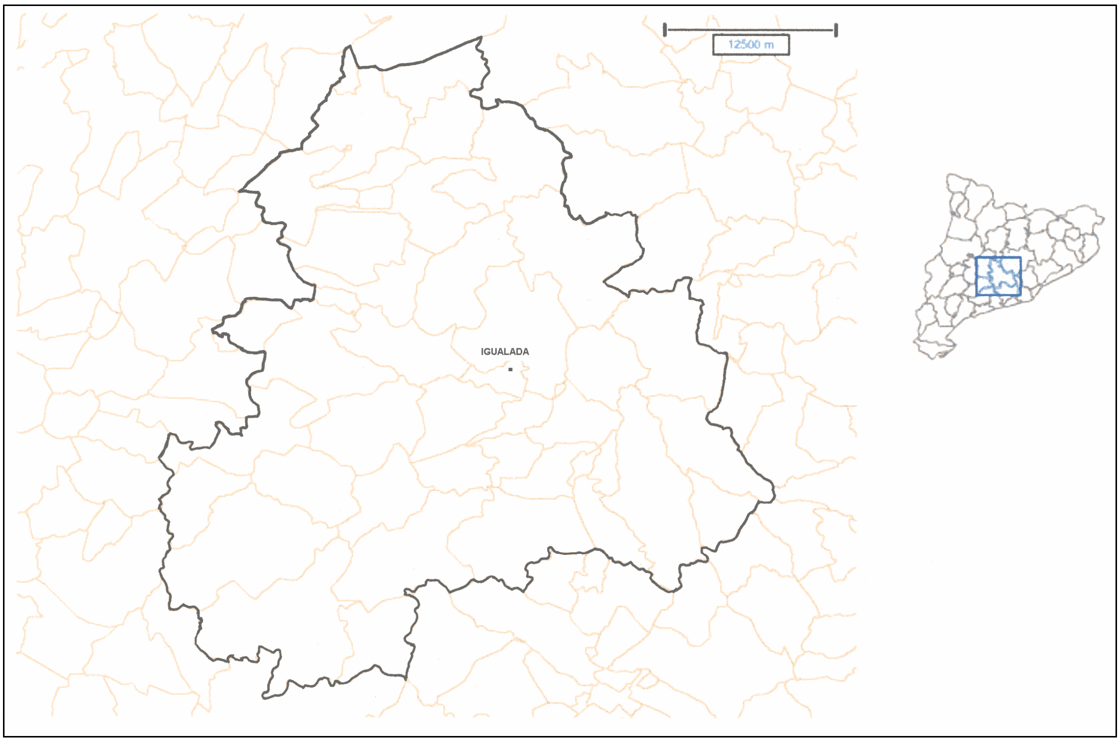
- Otras características del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	86’90	53’77	0’62
Población (nº habit.)	842	2.143	2’54

- Densidad de población comarcal (1986): 9’7 hab./km^2

- Capital comarcal: La Seu d’Urgell.

05 NUEVA COMARCA DEL *ANOIA*



05 Nueva comarca de l'Anoia.

La comarca 05 Anoia pierde el siguiente municipio:

- 09 Castellfollit de Riubregós.

Y gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 09 de la comarca 06 (Bages)	Castellfollit del Boix 36
- 07 de la comarca 03 (Alt Penedès)	Mediona 37
- 01 de la comarca 06 (Bages)	Aguilar de Segarra 35
- 12 de la comarca 15 (Conca de Barberà)	Santa Coloma de Queralt 41
- 13 de la comarca 15 (Conca de Barberà)	Sta. Perpètua de Gaià* 42
- 16 de la comarca 01 (Alt Camp)	Querol 40
- 11 de la comarca 03 (Alt Penedès)	Pontons 39
- 09 de la comarca 15 (Conca de Barberà)	Piles, les 38

***** Se trata del actual municipio de Pontils.

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 41

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
COD.	MUN.				1981	1986	Δ	
05	35	Aguilar de Segarra	641	43’02	219	216	-3	5’0
05	01	Argençola	768	47’10	221	192	-29	4’1
05	02	Bellprat	653	30’95	107	93	-14	3’0
05	03	Bruc, el	453	46’76	652	707	+55	15’1
05	04	Cabrera d’Igualada	347	17’04	139	250	+111	14’7
05	05	Calaf	680	9’35	3.231	3.205	-26	342’8
05	06	Calonge de Segarra	643	37’28	199	195	-4	5’2
05	07	Capellades	317	2’90	4.883	4.917	+34	1.695’5
05	08	Carme	351	11’22	717	697	-20	62’1
05	36	Castellfollit del Boix	702	59’43	318	317	-1	5’3
05	10	Castellolí	415	25’25	452	430	-22	17’0
05	11	Copons	432	21’53	324	307	-17	14’3
05	12	**Igualada**	284	8’67	31.532	29.175	-2.357	3.365’1
05	13	Jorba	380	30’96	471	502	+31	16’2
05	14	Llacuna, la	615	35’49	729	740	+11	20’9
05	15	Masquefa	257	17’06	2.287	2.477	+190	145’2
05	37	Mediona	430	47’61	970	993	+23	20’9
05	16	Molsosa, la	846	26’72	147	135	-12	5’1
05	17	Montmaneu	709	15’55	309	282	-27	18’1
05	18	Odena	421	52’16	2.586	2.583	-3	49’5
05	19	Orpí	477	15’42	158	151	-7	9’8
05	20	Piera	324	57’50	4.730	5.215	+485	90’7
05	21	Pierola (Hostalets de)	474	33’33	841	838	-3	25’1
05	38	Piles, les	676	22’54	126	132	+6	5’9
05	22	Pobla de Claramunt, la	246	18’37	1.683	1.685	+2	91’7
05	39	Pontons	632	25’86	213	217	+4	8’4
05	23	Prats de Rei, els	608	32’76	619	584	-35	17’8
05	24	Pujalt	770	31’72	170	180	+10	5’7
05	40	Querol	565	71’88	140	209	+69	2’9
05	25	Rubió	629	38’51	136	135	-1	3’5
05	26	Sant Pere Sallavinera	567	21’95	183	194	+11	8’8
05	41	Sta. Coloma de Queralt	675	33’96	2.743	2.618	-125	77’1
05	27	St. Martí de Tous	465	38’84	1.027	1.002	-25	25’8
05	28	St. Martí Sesgueioles	646	3’80	415	399	-16	105’0
05	29	Sta. Margarida de Montbui	391	27’82	8.178	9.088	+910	326’7
05	30	Sta. Maria de Miralles	628	25’38	98	98	0	3’9
05	42	Sta. Perpètua de Gaià	578	67’67	93	123	+30	1’8
05	31	Torre de Claramunt, la	363	14’80	1.220	1.424	+204	96’2
05	32	Vallbona d’Anoia	289	6’48	1.049	1.050	+1	162’0
05	33	Veciana	653	38’89	211	199	-12	5’1
05	34	Vilanova del Camí	302	10’54	8.368	8.609	+241	816’8
		TOTALES	$\bar{X}$ **= 518** **σ = 163** **CV = 0’31**	**1.224’07**	**82.894**	**82.563**	**-331**	$\bar{X}$ **= 192’8** **σ = 585’3** **CV = 3’04**

Municipio que gana la nueva comarca.

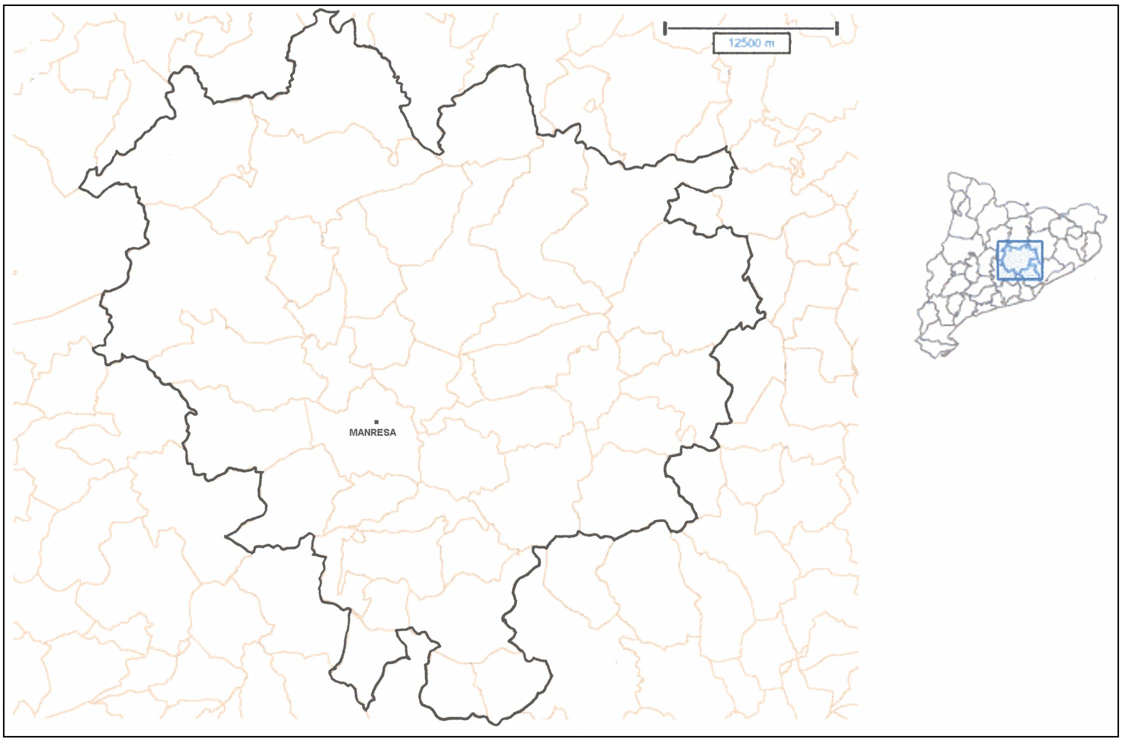
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	P A R A M E T R O S		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	29’86	15’70	0’55
Población (nº habit.)	2.014	4.826	2’34

- Densidad de población comarcal (1986): 67’5 hab./km^2

- Capital comarcal: Igualada.

06 NUEVA COMARCA DEL BAGES



06 Nueva comarca del Bages.

La comarca 06 Bages pierde los siguientes municipios:

- 01 Aguilar de Segarra.
- 09 Castellfollit del Boix.
- 12 Estany, l'.
- 26 Sant Feliu Sasserra.

Y gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 30 de la comarca 13 (Berguedà)	Viver i Serrateix 44
- 09 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Castellterçol 36
- 13 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Granera 38
- 16 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	St. Llorenç Savall 41
- 11 de la comarca 37(Vallès Occidental)	Rellinars 40
- 22 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Vacarisses 42
- 23 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Viladecavalls 43
- 13 de la comarca 10 (Baix Llobregat)	Olesa de Montserrat 39
- 06 de la comarca 10 (Baix Llobregat)	Collbató 37

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 40

CODIGO COD.	CODIGO MUN.	MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1981	1986	Δ	DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
06	02	Artés	223	19'92	4.107	4.037	-70	202'7
06	03	Avinyó	353	62'56	1.937	2.000	+63	32'0
06	04	Balsareny	327	36'44	3.624	3.511	-113	96'4
06	05	Calders	552	33'01	494	482	-12	14'6
06	06	Callús	260	12'08	1.527	1.499	-28	124'1
06	07	Cardona	506	66'38	6.608	6.723	+115	101'3
06	08	Castellvell i el Vilar	188	28'19	3.433	3.316	-117	117'6
06	10	Castellgalí	266	17'16	676	705	+29	41'1
06	11	Castellnou del Bages	469	29'21	88	107	+19	3'7
06	36	Castellterçol	726	31'61	2.057	1.982	-75	62'7
06	37	Collbató	388	17'71	592	728	+136	41'0
06	13	Fonollosa	870	52'11	633	641	+8	12'3
06	14	Gaià	481	39'86	143	149	+6	3'7
06	38	Granera	768	23'95	54	51	-3	2'1
06	15	**Manresa**	238	41'24	67.007	65.274	-1.733	1.582'8
06	16	Marganell	679	13'38	261	217	-44	16'2
06	17	Moià	717	75'15	3.083	3.023	-60	40'2
06	18	Monistrol de Calders	447	21'87	602	617	+15	28'2
06	19	Monistrol de Montserrat	161	12'04	2.609	2.625	+16	218'0
06	20	Mura	454	53'39	179	163	-16	3'1
06	21	Navarcles	269	5'52	4.588	5.010	+422	907'6
06	22	Navàs	681	81'70	5.225	5.244	+19	64'2
06	39	Olesa de Montserrat	124	16'75	13.914	14.456	+542	863'0
06	23	Pont de Vilomara-Rocafort	202	21'67	2.109	2.203	+94	101'7
06	24	Rajadell	405	45'32	256	286	+30	6'3
06	40	Rellinars	322	18'04	151	178	+27	9'9
06	25	Sallent de Llobregat	278	65'80	8.213	7.856	-357	119'4
06	27	St. Fruitós del Bages	135	22'14	3.761	4.631	+870	209'2
06	28	St. Joan de Vilatorrada	277	16'25	7.402	7.620	+218	468'9
06	41	St. Llorenç Savall	466	40'96	1.984	1.873	-111	45'7
06	29	St. Mateu de Bages	569	100'97	628	581	-47	5'8
06	30	St. Salvador de Guardiola	374	36'99	633	882	+249	23'8
06	31	St. Vicenç de Castellet	176	17'09	7.839	7.624	-215	446'1
06	32	Sta. Maria d'Oló	542	64'24	1.089	1.051	-38	16'4
06	33	Santpedor	129	16'80	3.411	3.909	+498	232'7
06	34	Súria	326	23'54	6.839	6.684	-155	283'9
06	35	Talamanca	552	29'55	60	70	+10	2'4
06	42	Vacarisses	382	40'54	443	594	+151	14'7
06	43	Viladecavalls	274	20'12	1.549	2.386	+837	118'6
06	44	Viver i Serrateix	729	66'81	235	238	+3	3'6
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 407** **σ = 196** **CV = 0'48**	**1.438'06**	**170.043**	**171.226**	**+1.183**	$\overline{X}$ **= 168'5** **σ = 305'6** **CV = 1'81**

Municipio que gana la nueva comarca.

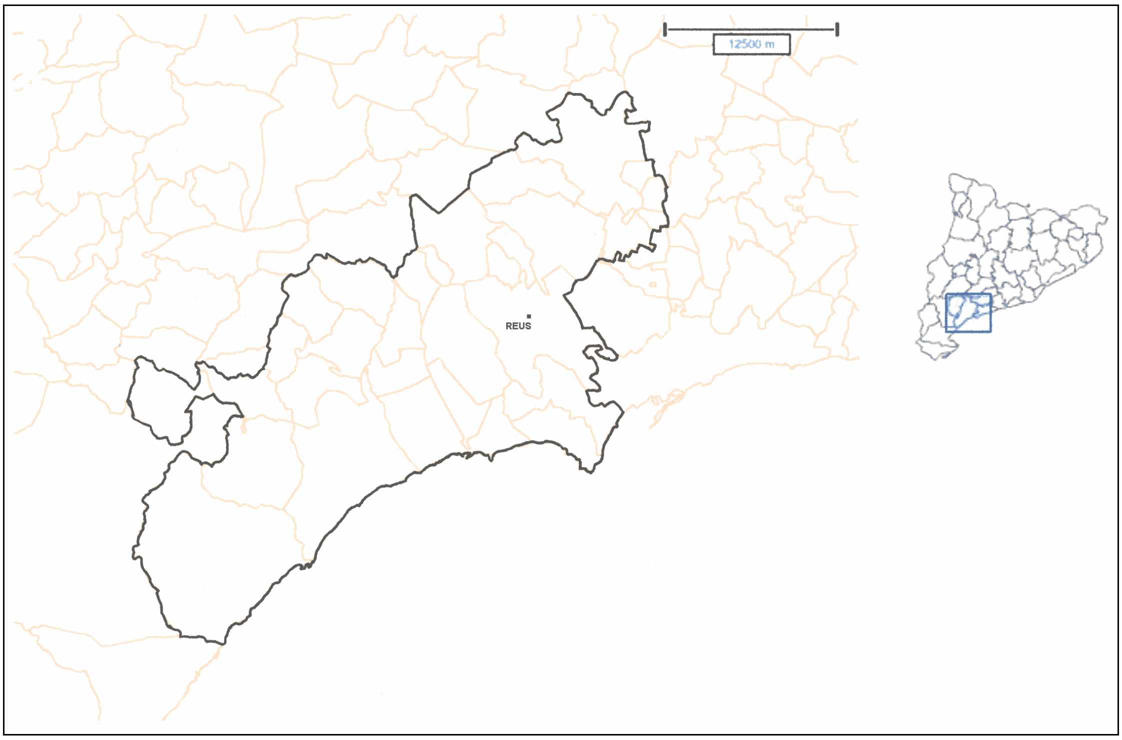
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	35'95	22'29	0'64
Población (nº habit.)	4.281	10.221	2'39

- Densidad de población comarcal (1986): 119'1 hab./km^2

- Capital comarcal: Manresa.

07 NUEVA COMARCA DEL *BAIX CAMP*



07 Nueva comarca del Baix Camp.

La comarca 07 Baix Camp pierde los siguientes municipios:

- 03 Alforja.
- 09 Capafonts.
- 13 Febró, la.
- 17 Prades.
- 26 Vilaplana del Camp.

Gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 05 de la comarca 26 (Priorat)	Capçanes 29
- 21 de la comarca 33 (Tarragonès)	Vilallonga del Camp 33
- 02 de la comarca 01 (Alt Camp)	Alcover 28
- 09 de la comarca 01 (Alt Camp)	Milà, el 31
- 08 de la comarca 01 (Alt Camp)	Masó, la 30
- 19 de la comarca 01 (Alt Camp)	Rourell, el 32
- 22 de la comarca 33 (Tarragonès)	Vila-seca i Salou 34

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 29

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
COD.	MUN.				1981	1986	Δ	
07	01	Albiol, l’	823	20’22	78	69	-9	3’4
07	28	Alcover	245	46’28	3.444	3.233	-211	69’9
07	02	Aleixar, l’	284	26’09	651	637	-14	24’4
07	04	Almoster	290	5’88	371	386	+15	65’6
07	05	Argentera, l’	344	9’83	158	153	-5	15’6
07	06	Borges del Camp, les	247	8’14	1.356	1.375	+19	168’9
07	07	Botarell	196	11’98	411	435	+24	36’3
07	08	Cambrils	24	34’76	11.136	13.492	+2.356	388’1
07	29	Capçanes	220	22’21	465	438	-27	19’7
07	10	Castellvell del Camp	227	5’31	626	699	+73	131’6
07	11	Colldejou	431	14’20	178	205	+27	14’4
07	12	Duesaigües	268	13’51	202	217	+15	16’1
07	30	Masó, la	115	3’58	287	288	+1	80’4
07	14	Maspujols	214	3’54	411	375	-36	105’9
07	31	Milà, el	403	4’00	156	154	-2	38’5
07	15	Montbrió del Camp	132	10’59	1.494	1.429	-65	134’9
07	16	Mont-roig del Camp	120	63’69	4.232	4.723	+491	74’2
07	18	Pratdip	245	36’05	481	482	+1	13’4
07	19	**Reus**	117	52’71	79.245	81.145	+1.900	1.539’5
07	20	Riudecanyes	195	16’54	593	577	-16	34’9
07	21	Riudecols	299	19’37	929	919	-10	47’4
07	22	Riudoms	125	32’38	4.862	4.763	-99	147’1
07	32	Rourell, el	114	2’20	305	288	-17	130’9
07	23	Selva del Camp, la	246	35’18	3.241	3.349	+108	95’2
07	24	Vandellòs	281	101’98	3.841	4.323	+482	42’4
07	33	Vilallonga del Camp	124	9’24	1.223	1.173	-50	126’9
07	25	Vilanova d’Escornalbou	226	17’50	461	453	-8	25’9
07	34	Vila-seca i Salou	43	36’71	16.426	17.512	+1.086	477’0
07	27	Vinyols i els Arcs	95	10’89	807	826	+19	75’8
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 231 σ = 148 CV = 0’64**	**674’56**	**138.070**	**144.118**	**+6.048**	**$\overline{X}$ = 142’1 σ = 283’6 CV = 1’98**

Municipio que gana la nueva comarca.

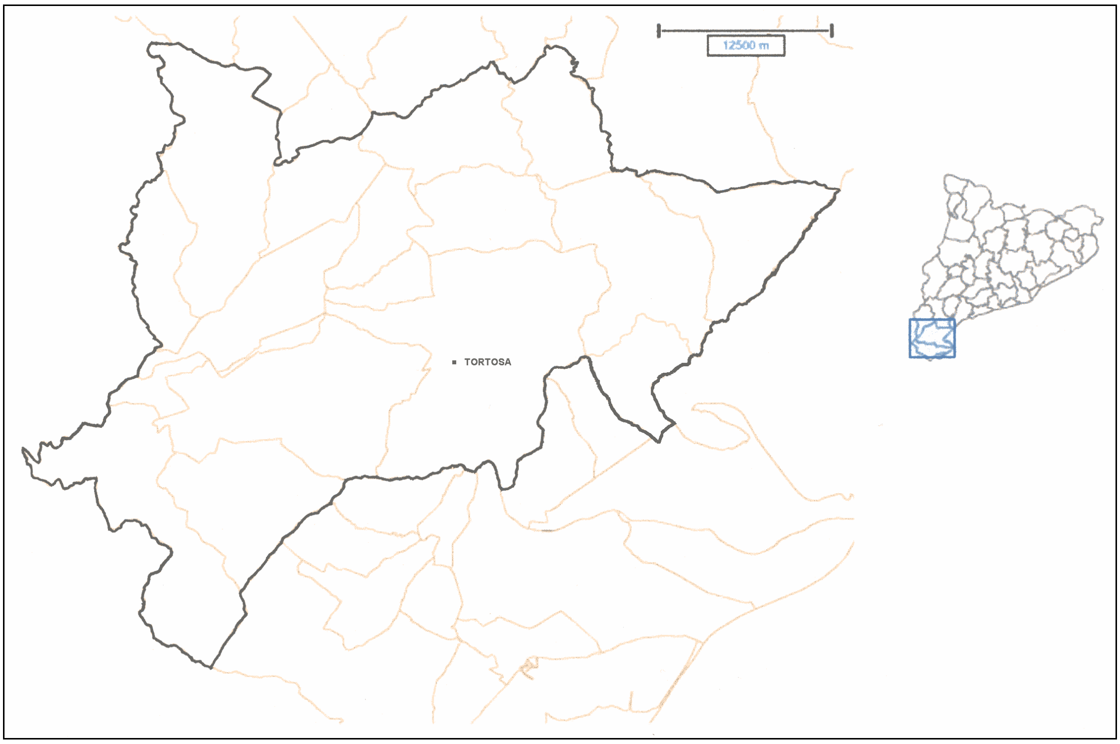
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	23’26	21’56	0’93
Población (nº habit.)	4.970	14.916	3’00

- Densidad de población comarcal (1986): 213’6 hab./km^2

- Capital comarcal: Reus.

08 NUEVA COMARCA DEL *BAIX EBRE*



08 Nueva comarca del Baix Ebre.

La comarca 08 Baix Ebre pierde los siguientes municipios:

- 06 Deltebre.
- 10 Sant Jaume d'Enveja.
- 05 Camarles.
- 14 Aldea, l'.

Y gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 10 de la comarca 21 (Montsià)	Sénia, la 19
- 06 de la comarca 21 (Montsià)	Mas de Barberans 17
- 08 de la comarca 34 (Terra Alta)	Horta de Sant Joan 16
- 01 de la comarca 34 (Terra Alta)	Arnes 15
- 10 de la comarca 27(Ribera d'Ebre)	Rasquera 18

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 15

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
COD.	MUN.				1981	1986	Δ	
08	01	Aldover	17	20'08	875	873	-2	43'5
08	02	Alfara de Carles	334	63'94	446	436	-10	6'8
08	03	Ametlla de Mar, l'	19	66'94	3.772	4.143	+371	61'9
08	15	Arnes	508	42'53	559	557	-2	13'1
08	04	Benifallet	18	62'61	1.037	1.013	-24	16'2
08	16	Horta de Sant Joan	542	119'22	1.380	1.395	+15	11'7
08	17	Mas de Barberans	340	75'60	784	784	0	10'4
08	07	Paüls	378	43'83	741	748	+7	17'1
08	08	Perelló (i l'Ampolla)	142	159'29	3.536	3.713	+177	23'3
08	18	Rasquera	174	50'31	907	906	-1	18'0
08	09	Roquetes	14	136'64	5.817	5.825	+8	42'6
08	19	Sénia, la	369	108'09	4.644	4.621	-23	42'8
08	11	Tivenys	13	52'95	1.121	1.110	-11	21'0
08	12	**Tortosa**	12	219'60	27.819	28.819	+1.000	131'2
08	13	Xerta	12	32'54	1.318	1.287	-31	39'6
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 193 σ = 192 CV = 1'00**	**1.254'13**	**54.756**	**56.230**	**+1.474**	**$\overline{X}$ = 33'3 σ = 30'4 CV = 0'91**

Municipio que gana la nueva comarca.

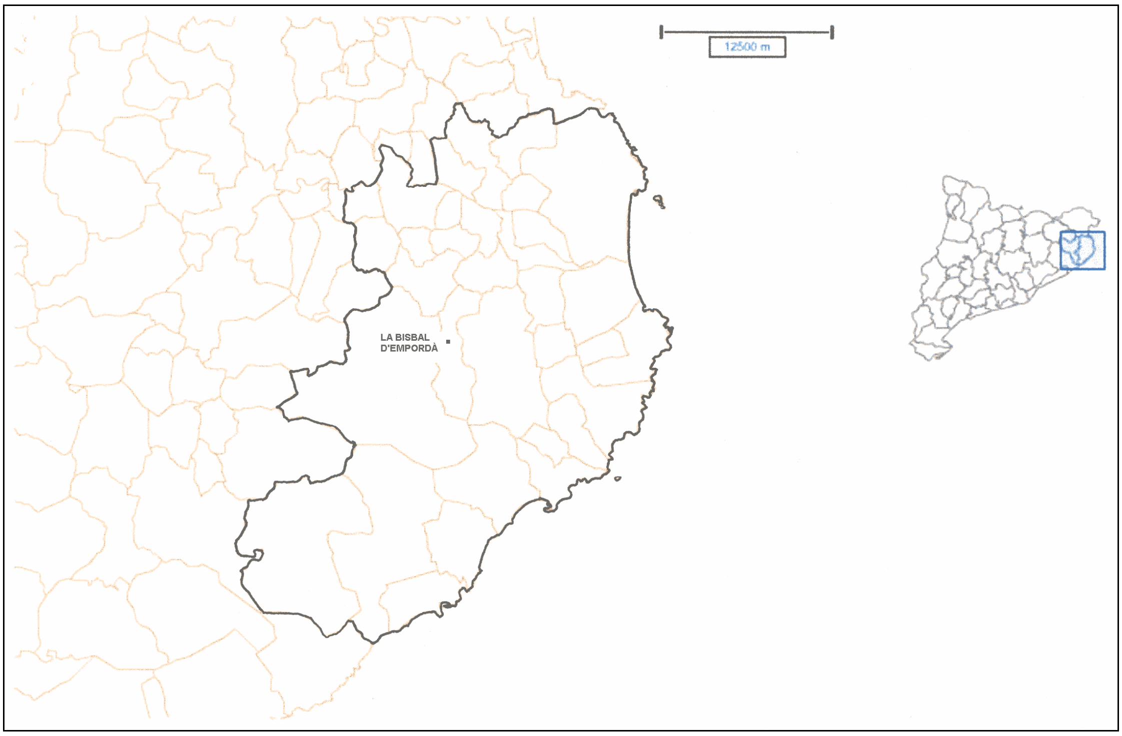
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	P A R A M E T R O S		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	83’61	52’94	0’63
Población (nº habit.)	3.749	6.905	1’84

- Densidad de población comarcal (1986): 44’8 hab./km^2

- Capital comarcal: Tortosa.

09 NUEVA COMARCA DEL *BAIX EMPORDÀ*



09 Nueva comarca del Baix Empordà.

La comarca 09 Baix Empordà pierde los siguientes municipios:

- 01 Albons.
- 07 Colomers.
- 13 Garrigoles.
- 15 Jafre.
- 36 Vilopriu.

Y gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 19 de la comarca 19 (Gironès) - 14 de la comarca 19 (Gironès)	Llagostera 37 Flaçà 36

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 33

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
COD.	MUN.				1981	1986	Δ	
09	02	Begur	200	20’64	2.292	2.527	+235	122’4
09	03	Bellcaire d’Empordà	35	13’15	485	480	-5	36’5
09	04	**Bisbal d’Empordà, la**	39	20’78	7.411	7.626	+215	367’0
09	05	Calonge	36	33’55	4.370	3.654	-716	108’9
09	05	Castell d’Aro	42	21’93	3.778	4.243	+465	193’5
09	08	Corçà	43	15’91	1.076	1.134	+58	71’3
09	09	Cruïlles-Monells-Heura	76	99’87	1.060	1.025	-35	10’3
09	36	Flaçà	34	6’67	991	960	-31	143’9
09	10	Foixà	96	19’12	334	323	-11	16’9
09	11	Fontanilles	92	9’15	154	128	-26	14’0
09	12	Forallac	51	49’97	1.529	1.467	-63	29’4
09	14	Gualta	15	9’35	313	290	-33	31’0
09	37	Llagostera	160	76’61	5.033	5.097	+34	66’5
09	16	Mont-ras	88	12’23	898	1.109	+311	90’7
09	17	Palafrugell	87	26’62	15.156	15.664	+508	588’4
09	18	Palamós	12	13’89	12.376	12.198	+178	878’2
09	19	Palau-sator	20	12’38	315	321	+6	25’9
09	20	Pals	55	25’75	1.726	1.683	-43	65’4
09	21	Parlavà	40	6’14	361	366	+5	59’6
09	22	Pera, la	89	11’51	356	371	+15	32’2
09	23	Regencós	78	6’27	283	229	-54	36’5
09	24	Rupià	66	5’37	246	218	-28	40’6
09	25	Sant Feliu de Guíxols	4	15’62	15.500	14.943	-557	956’7
09	26	Santa Cristina d’Aro	30	67’77	1.281	1.448	+167	21’4
09	27	Serra d’Aro	15	7’86	222	189	-33	24’0
09	28	Tallada d’Empordà	20	16’74	384	365	-19	21’8
09	29	Torrent	44	8’05	206	206	0	25’6
09	30	Torroella de Montgrí	31	65’34	5.651	6.271	+620	96’0
09	31	Ullà	21	9’80	848	742	-106	75’7
09	32	Ullastret	49	10’84	292	276	-18	25’5
09	33	Ultramort	30	4’50	225	214	-11	47’6
09	34	Vall-llobrega	40	5’36	209	230	+21	42’4
09	35	Verges	23	9’06	1.231	1.152	-79	127’2
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 53 σ = 42 CV = 0’80**	**737’80**	**86.592**	**87.149**	**+557**	**$\overline{X}$ = 136’2 σ = 227’8 CV = 1’67**

Municipio que gana la nueva comarca.

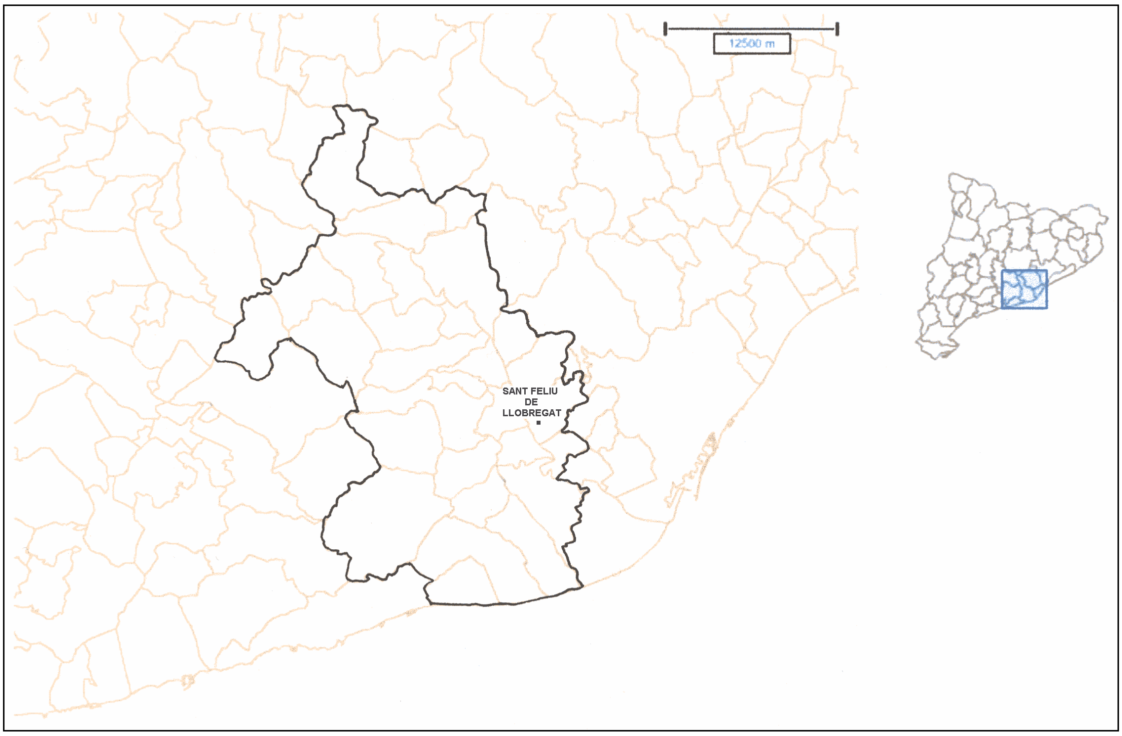
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	22’36	22’88	1’02
Población (nº habit.)	2.641	4.131	1’56

- Densidad de población comarcal (1986): 118’1 hab./km^2

- Capital comarcal: La Bisbal d’Empordà.

10 NUEVA COMARCA DEL *BAIX LLOBREGAT*



10 Nueva comarca del Baix Llobregat.

La comarca 10 Baix Llobregat pierde los siguientes municipios:

- 06 Collbató.
- 08 Cornellà.
- 13 Olesa de Montserrat.
- 16 Prat de Llobregat, el.

Y gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 04 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Castellbisbal 28
- 21 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Ullastrell 32
- 05 de la comarca 03 (Alt Penedès)	Gelida 29
- 14 de la comarca 03 (Alt Penedès)	Sant Llorenç d'Hortons 30
- 18 de la comarca 03 (Alt Penedès)	Sant Sadurní d'Anoia 31

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº DE MUNICIPIOS: 28

CODIGO COD.	CODIGO MUN.	MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1981	1986	Δ	DENSIDAD DE POBLACIÓN (h./km^2) (1986)
10	01	Abrera	105	19’89	4.221	4.346	+125	218’5
10	02	Begues	399	50’42	1.330	1.534	+204	30’4
10	28	Castellbisbal	132	30’97	3.403	4.057	+654	131’0
10	03	Castelldefels	3	12’41	24.697	27.932	+3.235	2.250’8
10	04	Castellví de Rosanes	98	17’09	350	442	+92	25’9
10	05	Cervelló	122	26’62	3.547	4.072	+525	153’0
10	07	Corbera de Llobregat	342	18’46	2.967	3.589	+622	194’4
10	09	Esparreguera	187	27’47	11.079	11.337	+258	412’7
10	10	Gavà	9	30’90	33.624	32.321	-1.303	1.046’0
10	29	Gelida	196	26’73	3.650	3.806	+156	142’4
10	11	Martorell	56	12’90	15.948	16.161	+213	1.252’8
10	12	Molins de Rei	37	16’00	18.308	18.160	-148	1.135’0
10	14	Pallejà	87	8’41	5.728	5.919	+191	703’8
10	15	Papiol, el	135	8’83	3.187	3.080	-107	348’8
10	17	St. Andreu de la Barca	42	5’52	13.196	14.298	+1.102	2.590’2
10	18	St. Boi de Llobregat	30	21’94	72.926	72.088	-838	3.285’7
10	19	St. Climent de Llobregat	124	10’73	2.083	2.111	+28	196’7
10	20	St. Esteve Sesrovires	112	18’64	1.456	1.705	-249	91’5
10	21	**St. Feliu de Llobregat**	113	18’64	38.004	37.396	-608	2.006’2
10	22	St. Joan Despí	25	11’79	25.309	23.875	-1.434	2.025’0
10	30	St. Llorenç d’Hortons	196	19’75	952	962	+9	48’7
10	31	St. Sadurní d’Anoia	162	18’65	8.596	8.805	+209	472’1
10	23	St. Vicenç dels Horts	10	5’63	20.182	20.397	+215	3.622’9
10	24	Sta. Coloma de Cervelló	173	7’52	2.520	2.662	+142	354’0
10	25	Torrelles de Llobregat	126	13’55	1.475	1.827	+352	134’8
10	32	Ullastrell	342	7’36	757	865	+108	117’5
10	26	Vallirana	177	23’93	4.377	4.845	+468	208’5
10	27	Viladecans	18	20’11	43.358	45.071	+1.713	2.241’2
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 127** σ **= 101** **CV = 0’79**	**510’86**	**367.231**	**373.663**	**+6.432**	$\overline{X}$ **= 908’4** σ **= 585’3** **CV = 1’16**

Municipio que gana la nueva comarca.

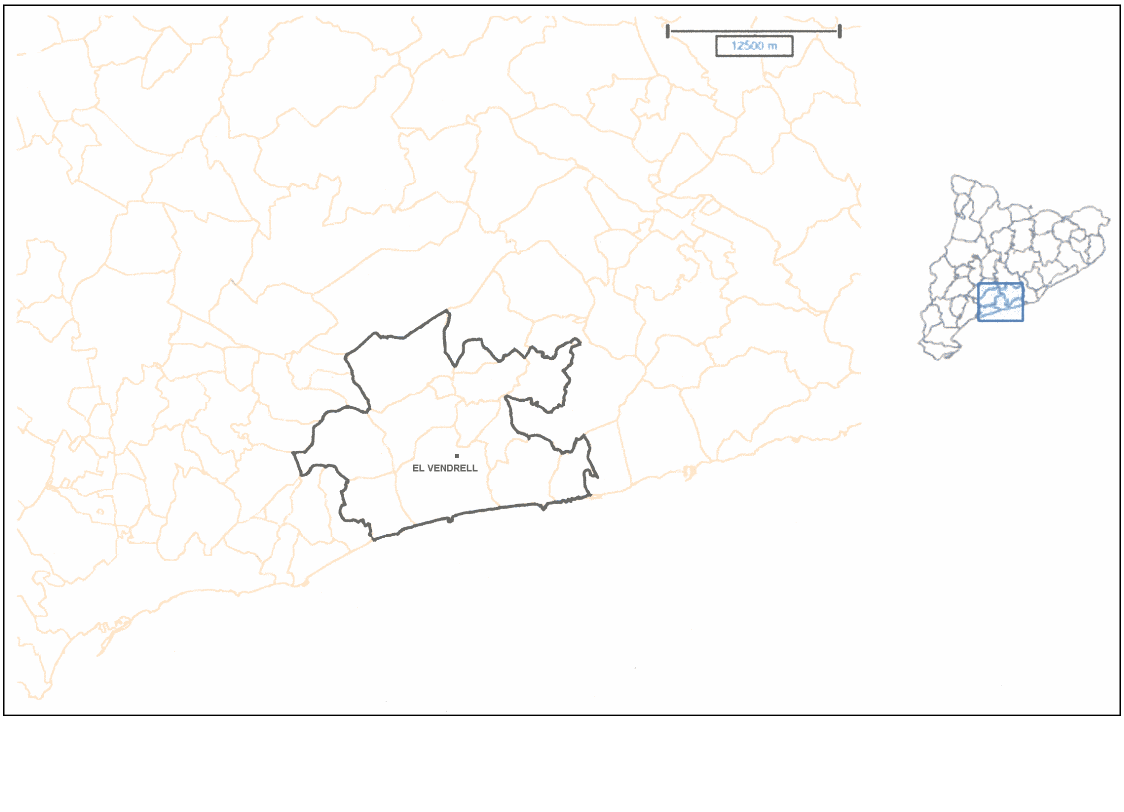
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS $\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	18’25	9’58	0’52
Población (nº habit.)	13.345	16’498	1’24

- Densidad de población comarcal (1986): 731’4 hab./km^2

- Capital comarcal: Sant Feliu de Llobregat.

11 NUEVA COMARCA DEL *BAIX PENEDÈS*



11 Nueva comarca del Baix Penedès.

La comarca del Baix Penedès pierde los siguientes municipios:

- 07 Cunit
- 09 Montmell
- 10 Sant Jaume dels Domenys

Gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº. 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 02 de la comarca 33 *(Tarragonès)*	Bonastre 13
- 15 de la comarca 33 *(Tarragonès)*	Roda de Barà 14

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 11

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
11	01	Albinyana	197	19’46	578	636	+58	32’7
11	02	Arboç, l’	166	14’17	4.038	3.728	-311	263’1
11	03	Banyeres del Penedès	172	12’14	1.555	1.583	+28	130’4
11	04	Bellvei	100	8’49	877	914	+37	107’7
11	05	Bisbal del Penedès, la	188	32’58	1.239	1.296	+57	39’8
11	13	Bonastre	177	24’86	281	275	-6	11’1
11	06	Calafell	46	19’83	4.597	5.859	+1.262	295’5
11	08	Llorenç del Penedès	162	4’64	1.229	1.228	-1	264’7
11	14	Roda de Barà	57	16’23	1.556	1.765	+209	108’7
11	11	Santa Oliva	102	9’54	1.137	1.261	+124	132’2
11	12	**Vendrell, el**	49	36’43	11.661	13.448	+1.787	49’1
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 129 σ = 56 CV = 0’44**	**198’37**	**28.749**	**31.993**	**+3.244**	**$\overline{X}$ = 130’4 σ = 96’5 CV = 0’74**

Municipios que gana la nueva comarca.

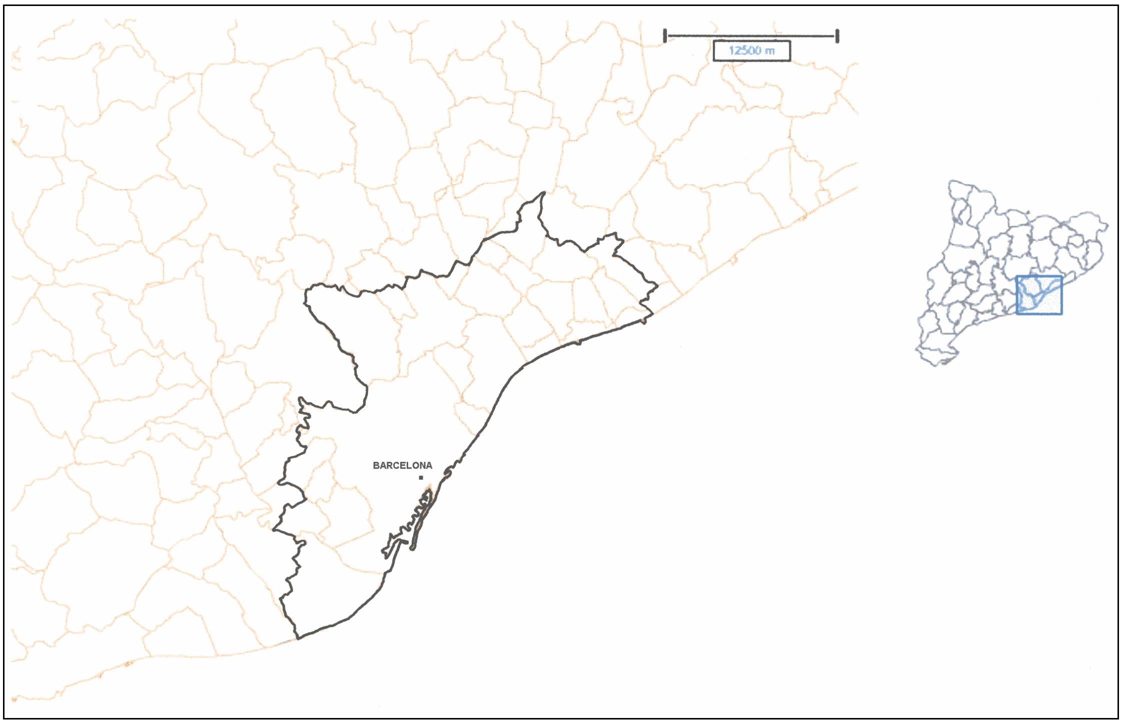
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	18’03	9’52	0’53
Población (nº habit.)	2.908	3.665	1’26

- Densidad de población comarcal (1986): 161’3 hab./km^2

- Capital comarcal: El Vendrell.

12 NUEVA COMARCA DEL *BARCELONÈS*



12 Nueva comarca del Barcelonès.

La comarca del Barcelonès no pierde ninguno de sus municipios:

Gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 01 de la comarca 20 (Maresme)	Alella 08
- 12 de la comarca 20 (Maresme)	Masnou, el 13
- 14 de la comarca 20 (Maresme)	Montgat 15
- 18 de la comarca 20 (Maresme)	Premià de Dalt 18
- 19 de la comarca 20 (Maresme)	Premià de Mar 19
- 26 de la comarca 20 (Maresme)	Teià 23
- 27 de la comarca 20 (Maresme)	Tiana 24
- 29 de la comarca 20 (Maresme)	Vilassar de Dalt 26
- 16 de la comarca 10 (Baix Llobregat)	Prat del Llobregat, el 17
- 08 de la comarca 10 (Baix Llobregat)	Cornellà de Llobregat, el 10
- 05 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Cerdanyola del Vallès 09
- 08 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Montcada i Reixac 14
- 12 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Ripollet 20
- 32 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	St. Fost de Campsentelles 21
- 20 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Martorelles 12
- 24 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Montornès del Vallès 16
- 16 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Llagosta, la 11
- 36 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Sta. Maria de Martorelles 22
- 40 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Vallromanes 25

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 26

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
12	08	Alella	90	9'59	3.381	5.283	+1.902	550'9
12	01	Badalona	6	22'17	229.780	225.016	-4.764	10.149'6
12	02	**Barcelona**	9	97'62	1.754.579	1.701.812	-52.767	17.433'0
12	09	Cerdanyola del Vallès	82	31'29	50.885	53.546	+2.661	1.711'3
12	10	Cornellà de Llobregat	27	6'90	91.563	85.828	-5.735	12.438'8
12	03	Esplugues del Llobregat	110	4'60	46.079	47.576	+1.497	10.342'6
12	04	Hospitalet del Llobregat, l'	8	12'36	295.074	279.779	-15.295	22.635'8
12	11	Llagosta, la	45	3'03	12.705	12.189	-516	4.022'8
12	12	Martorelles	96	3'61	4.336	4.523	+187	1.252'9
12	13	Masnou, el	27	3'30	14.522	15.169	+647	4.596'7
12	14	Montcada i Reixac	36	23'34	25.625	25.499	-126	1.092'5
12	15	Montgat	20	2'83	6.944	7.147	+203	2.525'4
12	16	Montornès del Vallès	116	12'32	10.187	10.427	+240	846'3
12	17	Prat de Llobregat, el	8	32'23	60.419	63.052	+2.633	1.956'3
12	18	Premià de Dalt	142	6'50	5.241	5.273	+32	811'2
12	19	Premià de Mar	8	1'92	20.034	20.068	+34	10.452'1
12	20	Ripollet	79	4'39	26.133	25.833	-300	5.884'5
12	05	Sant Adrià de Besòs	14	3'87	36.397	34.763	-1.634	8.982'7
12	06	Sant Just Desvern	122	7'85	11.022	11.590	+568	1.476'4
12	07	Sta. Coloma de Gramenet	56	7'05	140.613	135.239	-5.374	19.182'8
12	21	St. Fost de Campsentelles	112	13'16	2.969	3.820	+851	290'3
12	22	Sta. Maria de Martorelles	181	4'49	389	387	-2	86'2
12	23	Teià	128	6'66	2.258	2.872	+614	431'2
12	24	Tiana	136	7'90	3.028	3.911	+883	495'1
12	25	Vallromanes	153	10'53	383	439	+56	41'7
12	26	Vilassar de Dalt	142	9'08	5.527	6.246	+719	687'9
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 74 σ = 55 CV = 0'74**	**348'59**	**2.860.073**	**2.787.287**	**-72.786**	**$\overline{X}$ = 5.399'1 σ = 6.426'2 CV = 1'19**

Municipios que gana la nueva comarca.

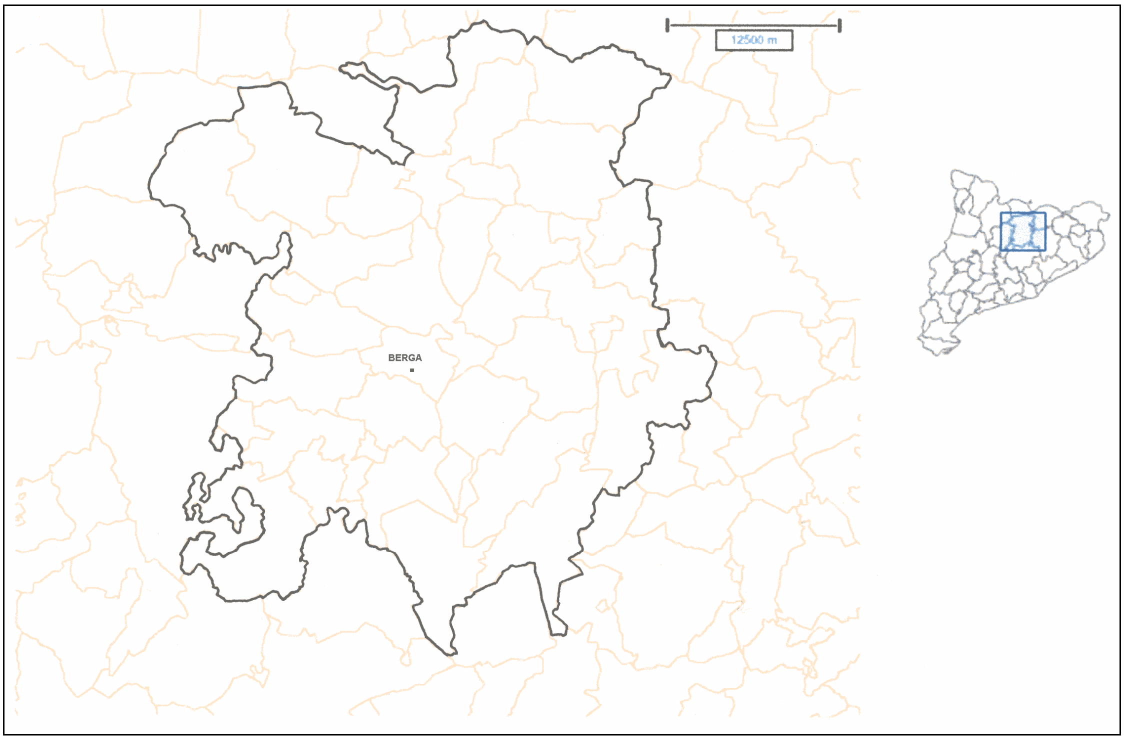
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	13'41	18'71	1'40
Población (nº habit.)	107.203	326.095	3'04

- Densidad de población comarcal (1986): 7.995'9 hab./km^2

- Capital comarcal: Barcelona.

13 NUEVA COMARCA DEL *BERGUEDÀ*



13 Nueva comarca del Berguedà.

La comarca del Berguedà pierde los siguientes municipios:

- 14 Gisclareny
- 30 Viver i Serrateix

Gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 10 de la comarca 23 *(Osona)*	Lluçà 31
- 10 de la comarca 28 *(Ripollès)*	Palmerola 32

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 30

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
13	01	Avià	677	27’14	1.827	1.803	-24	66’4
13	02	Bagà	785	42’99	2.130	2.154	+24	50’1
13	03	**Berga**	704	22’54	13.547	13.766	+219	610’7
13	04	Borredà	854	43’60	488	445	-43	10’2
13	05	Capolat	1.279	34’29	145	107	-38	3’1
13	06	Casserres	617	28’91	1.793	1.783	-10	61’7
13	07	Castell de l’Areny	954	24’56	49	34	-15	1’4
13	08	Castellar de N’Hug	1.395	46’76	157	176	+19	3’8
13	09	Castellar del Riu	1.234	32’62	108	54	-54	1’7
13	10	Cercs	650	46’93	1.901	1.827	-74	38’9
13	11	Espunyola, l’	759	35’26	311	300	-11	8’5
13	12	Fígols de les Mines	1.154	29’49	58	38	-20	1’3
13	13	Gironella	469	6’84	5.600	5.428	-172	793’6
13	15	Gósol	1.423	55’49	204	187	-17	3’4
13	16	Guardiola de Berguedà	720	73’16	1.393	1.312	-81	17’9
13	31	Lluçà	751	53’54	298	299	+1	5’6
13	17	Montclar	728	22’08	270	258	-12	11’7
13	18	Montmajor	756	75’83	739	690	-49	9’1
13	19	Nou de Berguedà, la	876	25’00	148	139	-9	5’6
13	20	Olvan	553	35’60	1.215	1.100	-115	30’9
13	32	Palmerola*	1.095	20’64	24	20	-4	1’0
13	21	Pobla de Lillet, la	843	51’32	2.003	1.915	-88	37’3
13	22	Puig-reig	455	46’23	5.361	5.084	-277	110’0
13	23	Quar, la	1.041	37’89	43	43	0	1’1
13	24	Sagàs	738	44’94	272	255	-17	5’7
13	25	Saldes	1.215	66’56	310	339	+29	5’1
13	26	St. Jaume de Frontanyà	1.072	21’15	20	20	0	0’9
13	27	Sta. Maria de Merlès	532	51’36	305	264	-41	5’1
13	28	Vallcebre	1.118	27’87	375	357	-18	12’8
13	29	Vilada	757	22’49	602	603	+1	26’8
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 873** **σ = 266** **CV = 0’30**	**1.153’08**	**41.696**	**40.800**	**-896**	$\overline{X}$ **= 64’7** **σ = 173’7** **CV = 2’68**

Municipios que gana la nueva comarca.
***Palmerola, no obstante, se integró en el municipio de Les Lloses (Ripollès) en el año 1991, por lo que la incorporación resultante al Berguedà debería ser discutida en base a estos hechos.

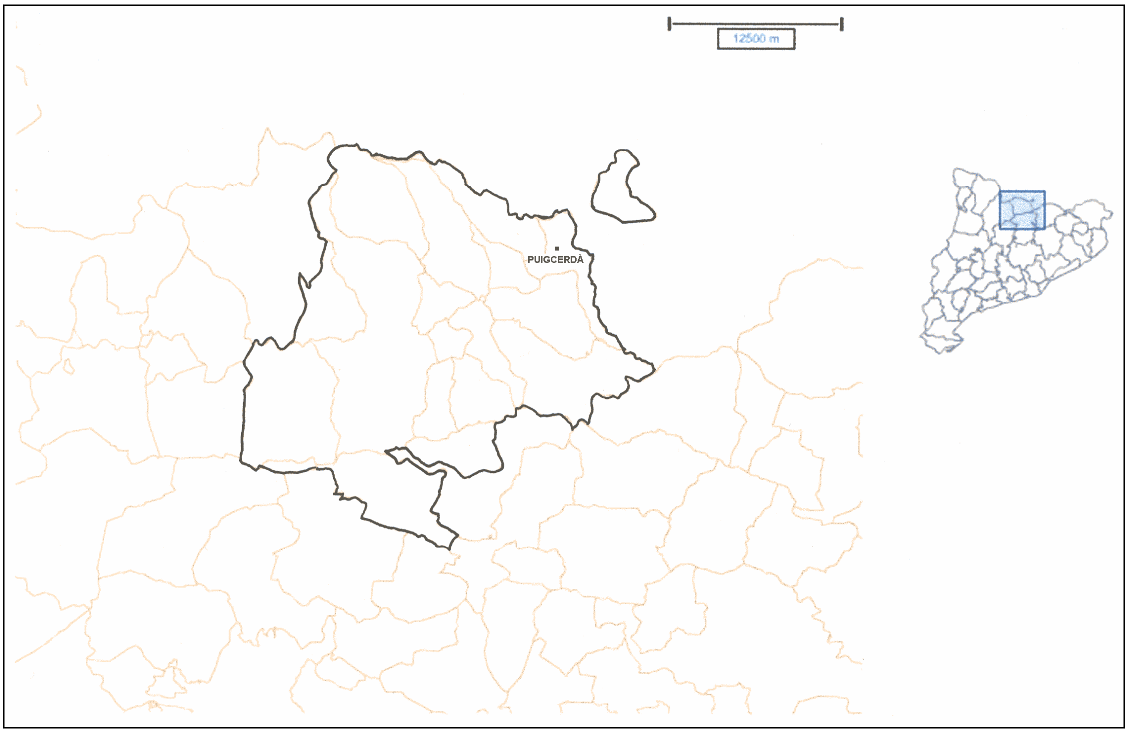
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	38’44	16’10	0’42
Población (nº habit.)	1.360	2.659	1’96

- Densidad de población comarcal (1986): 35’4 hab./km^2

- Capital comarcal: Berga.

14 NUEVA COMARCA DE *LA CERDANYA*



14 Nueva comarca de la Cerdanya.

La comarca de la Cerdanya pierde el siguiente municipio:

- 09 Lles.

Gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 14 de la comarca 13 *(Berguedà)*	Gisclareny 17

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 16

CODIGO		**MUNICIPIO**	**ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)**	**SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)**	**POBLACION DE DERECHO (hab.)**			**DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)**
COM.	**MUN.**				**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
14	01	Alp	1.158	44’25	883	894	+11	20’2
14	02	Bellver de Cerdanya	1.061	109’02	1.708	1.599	-109	14’7
14	03	Bolvir	1.145	10’62	208	218	+10	20’5
14	04	Das	1.219	14’80	134	138	+4	9’3
14	05	Fontanals de Cerdanya	1.180	28’64	313	353	+40	12’3
14	06	Ger	1.424	32’68	264	251	-13	7’7
14	17	Gisclareny	1.339	36’75	21	27	+6	0’7
14	07	Guils de Cerdanya	1.389	22’28	239	258	+19	11’6
14	08	Isòvol	1.049	10’74	197	200	+3	18’6
14	10	Llívia	1.224	12’84	921	930	+9	72’4
14	11	Meranges	1.540	37’38	64	64	0	1’7
14	12	Montellà-Martinet	1.158	54’74	561	562	+1	10’3
14	13	Prats i Sansor	1.124	9’64	106	110	+4	11’4
14	14	Prullans	1.096	21’09	184	195	+11	9’2
14	15	**Puigcerdà**	1.202	18’58	5.839	6.016	+177	323’8
14	16	Urús	1.263	17’60	94	138	+44	7’8
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 1.223** **σ = 133** **CV = 0’11**	**481’65**	**11.736**	**11.953**	**+ 217**	$\overline{X}$ **= 34’5** **σ = 76’3** **CV = 2’21**

Municipios que gana la nueva comarca.

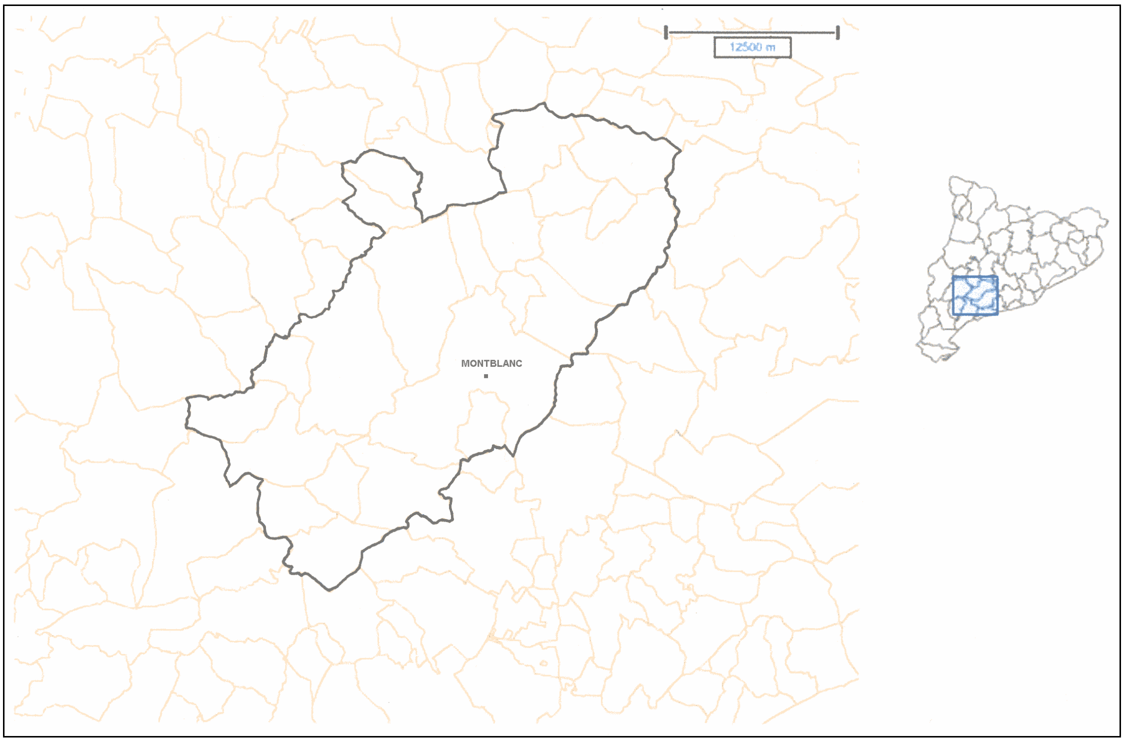
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	30’10	24’08	0’80
Población (nº habit.)	747	1.419	1’90

- Densidad de población comarcal (1986): 24’82 hab./km^2

- Capital comarcal: Puigcerdà.

15 NUEVA COMARCA DE LA *CONCA DE BARBERÀ*



15 Nueva comarca de la Conca de Barberà.

La comarca de la Conca de Barberà pierde los siguientes municipios:

- 06 Llorac.
- 09 Piles, les.
- 12 Santa Coloma de Queralt.
- 13 Santa Perpètua de Gaià (Pontils).
- 15 Savallà del Comtat.

Gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 15 de la comarca 35 (Urgell)	Omells de Na Gaia, els 25
- 11 de la comarca 01 (Alt Camp)	Mont-ral 24
- 09 de la comarca 07 (Baix Camp)	Capafonts 22
- 13 de la comarca 07 (Baix Camp)	Febró, la 23
- 17 de la comarca 07 (Baix Camp)	Prades 26
- 26 de la comarca 07 (Baix Camp)	Vilaplana del Camp 27

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 22

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2) (1986)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	
15	01	Barberà de la Conca	475	26’43	438	440	+2	16’6
15	02	Blancafort	428	14’55	435	422	-13	29’0
15	22	Capafonts	751	13’27	103	103	0	7’8
15	03	Conesa	705	28’91	145	137	-8	4’7
15	04	Espluga de Francolí, l’	411	57’16	3.507	3.696	+189	64’7
15	23	Febró, la	754	16’04	31	43	+12	2’7
15	05	Forès	864	16’52	71	64	-7	3’9
15	07	**Montblanc**	350	90’25	5.291	5.643	+352	62’5
15	24	Mont-ral	888	34’65	51	169	+118	4’9
15	25	Omells de Na Gaia, els	560	11’30	178	164	-14	14’5
15	08	Passanant	714	27’47	232	213	-19	7’8
15	10	Pira	384	8’16	382	347	-35	42’5
15	26	Prades	950	33’10	546	546	0	16’5
15	11	Rocafort de Queralt	562	8’63	309	277	-32	32’1
15	14	Sarral	465	52’33	1.466	1.409	-57	26’9
15	16	Senan	652	11’89	31	28	-3	2’4
15	17	Solivella	488	21’03	851	748	-103	35’6
15	18	Vallclara	623	13’42	80	109	+29	8’1
15	19	Vilanova de Prades	889	21’14	169	163	-6	7’7
15	27	Vilaplana del Camp	366	23’76	511	513	+2	21’6
15	20	Vilaverd	259	12’82	413	387	-26	30’2
15	21	Vimbodí	495	65’51	1.204	1.162	-42	17’7
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 592 σ = 195 CV = 0’33**	**608’34**	**16.444**	**16.783**	**+ 339**	**$\overline{X}$ = 20’9 σ = 17’7 CV = 0’85**

Municipios que gana la nueva comarca.

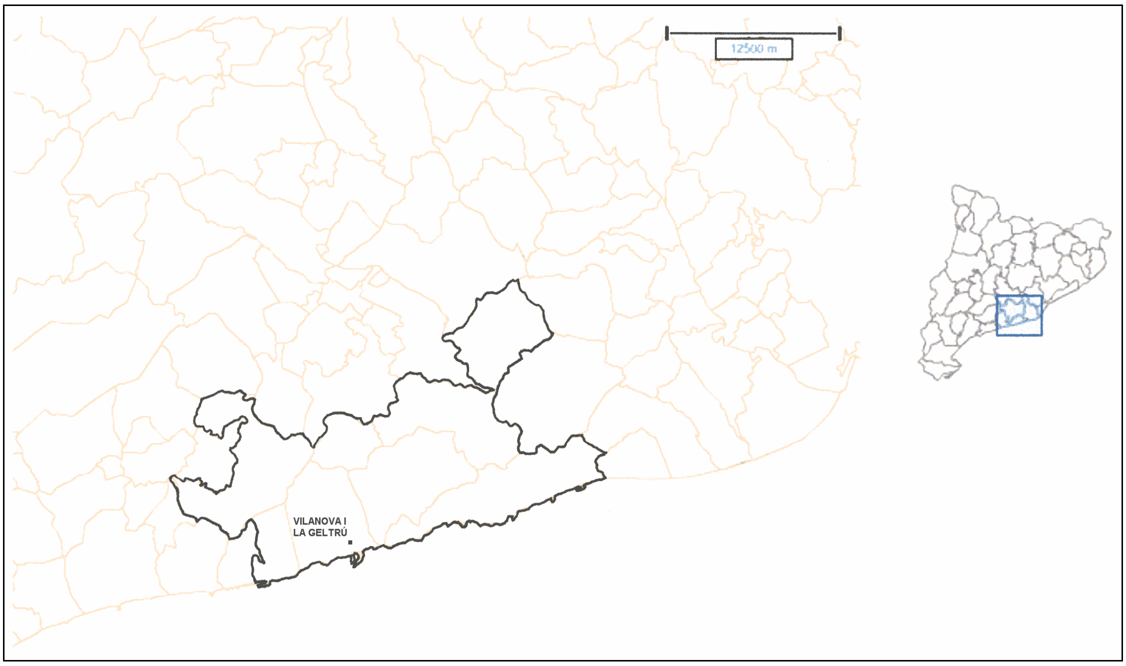
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	27’65	20’60	0’74
Población (nº habit.)	763	1.315	1’72

- Densidad de población comarcal (1986): 27’6 hab./km^2

- Capital comarcal: Montblanc.

16 NUEVA COMARCA DEL *GARRAF*



16 Nueva comarca del Garraf.

La comarca del Garraf (16) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 07 de la comarca 11 (Baix Penedès)	Cunit 09

Esta comarca no pierde ningún municipio.

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 9

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
16	01	Canyelles	142	14’02	565	597	+32	42’6
16	02	Castellet i la Gornal	159	46’48	1.059	1.050	-9	22’6
16	03	Cubelles	12	13’36	2.214	2.458	+244	184’0
16	09	Cunit	10	9’71	897	1.240	+343	127’7
16	04	Olesa de Bonesvalls	265	30’57	305	329	+24	10’8
16	05	Olivella	211	38’76	111	200	+89	5’2
16	06	Sant Pere de Ribes	44	40’71	10.517	11.691	+1.174	287’2
16	07	Sitges	10	43’67	11.844	11.652	-192	266’8
16	08	**Vilanova i la Geltrú**	22	33’50	43.915	45.039	+1.124	1.344’4
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 97 σ = 93 CV = 0’96**	**270’78**	**71.427**	**74.256**	**+ 2.829**	**$\overline{X}$ = 254’6 σ = 398’7 CV = 1’57**

Municipio que gana la nueva comarca.

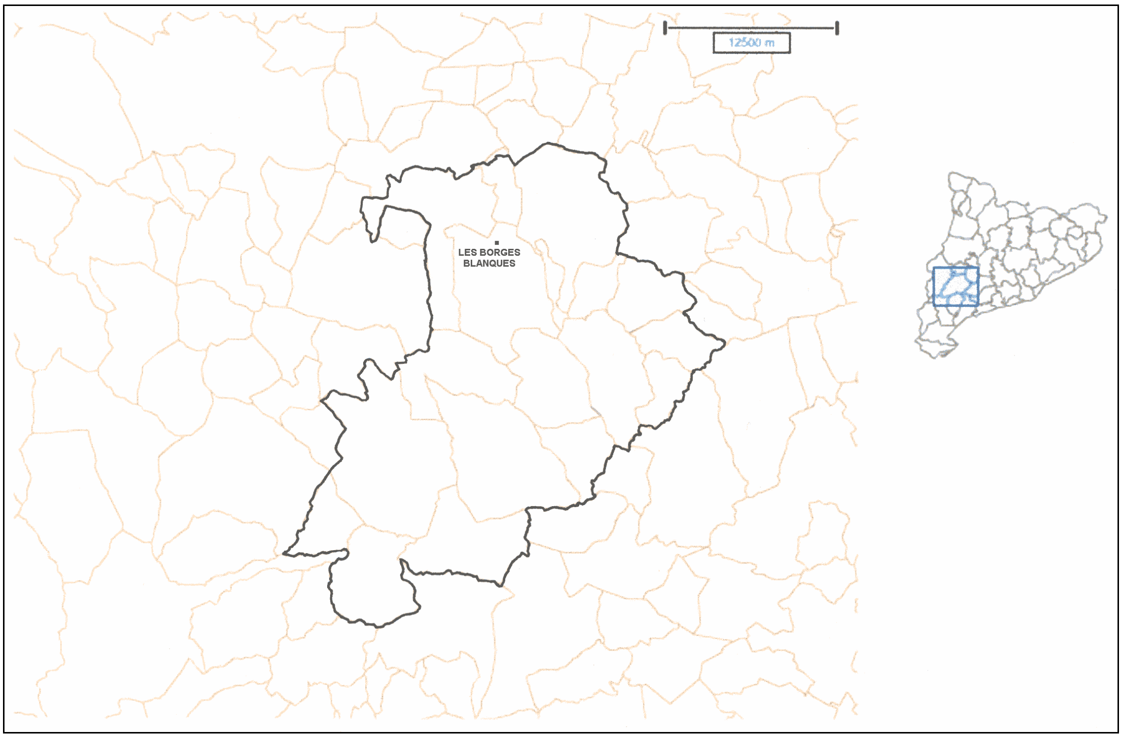
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	P A R A M E T R O S		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	30’09	13’36	0’44
Población (nº habit.)	8.251	13.734	1’66

- Densidad de población comarcal (1986): 274’2 hab./km^2

- Capital comarcal: Vilanova i la Geltrú.

17 NUEVA COMARCA DE *LES GARRIGUES*



17 Nueva comarca de les Garrigues.

La comarca de les Garrigues (17) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 13 de la comarca 26 (Priorat) - 22 de la comarca 26 (Priorat)	Margalef 26 Ulldemolins 27

Esta comarca pierde los siguientes municipios:

-01 Albagés
-05 Bovera
-06 Castelldans
-08 Cogul, el
-12 Granadella, la
-13 Granyena de les Garrigues
-20 Soleràs, el
-22 Torms, els
-23 Torregrossa

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 18

CODIGO COM.	CODIGO MUN.	MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1981	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1986	POBLACION DE DERECHO (hab.) Δ 86/81	DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2) (1986)
17	02	Albi, l’	526	32’69	796	847	+51	25’9
17	03	Arbeca	332	58’64	2.380	2.385	+5	40’7
17	04	**Borges Blanques, les**	304	61’85	5.174	5.209	+35	84’2
17	07	Cervià de les Garrigues	444	34’42	933	920	-13	26’7
17	09	Espluga Calba, l’	434	21’63	471	449	-22	20’8
17	10	Floresta, la	316	5’69	193	191	-2	33’6
17	11	Fulleda	581	16’20	121	122	+1	7’5
17	14	Juncosa	575	76’58	638	604	-34	7’9
17	15	Juneda	264	47’30	3.045	3.035	-10	64’2
17	26	Margalef	378	34’59	167	165	-2	4’8
17	16	Omellons, els	385	11’10	291	285	-6	25’7
17	17	Pobla de Cérvoles, la	639	62’44	231	194	-37	3’1
17	18	Pobla de la Granadella, la*	628	17’37	414	399	-15	23’0
17	19	Puiggròs	334	9’86	287	287	0	29’1
17	21	Tarrés	578	13’03	109	93	-16	7’1
17	27	Ulldemolins	651	37’91	583	557	-26	14’7
17	24	Vilosell, el	665	18’80	231	219	-12	11’6
17	25	Vinaixa	479	37’36	759	731	-28	19’6
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 473 σ = 132 CV = 0’28**	**597’46**	**16.823**	**16.692**	**- 131**	**$\overline{X}$ = 25’0 σ = 20’4 CV = 0’82**

Municipios que gana la nueva comarca.

* Se trata del actual municipio de Bellaguarda, que formó parte de la baronía de la Granadella y, junto a Bovera, dependía desde el punto de vista civil y eclesiástico, de este municipio hasta poco antes de mediados del siglo XIX.

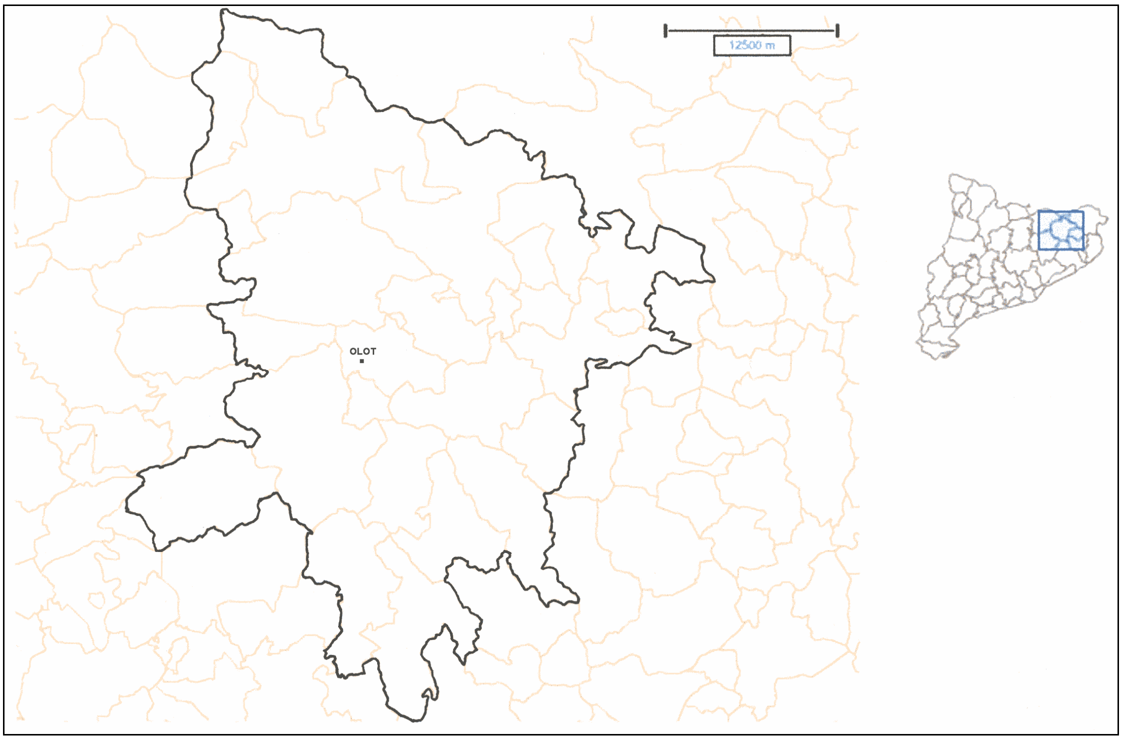
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	*PARAMETROS* $\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	33’19	20’45	0’62
Población (nº habit.)	927	1.292	1’39

- Densidad de población comarcal (1986): 27’9 hab./km^2

- Capital comarcal: les Borges Blanques.

18 NUEVA COMARCA DE *LA GARROTXA*



18 Nueva comarca de la Garrotxa.

La comarca de la Garrotxa (18) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 22 de la comarca 23 (Osona)	Rupit-Pruit 24
- 23 de la comarca 31 (La Selva)	Susqueda 27
- 17 de la comarca 28 (Ripollès)	Sant Pau de Segúries 25
- 03 de la comarca 28 (Ripollès)	Camprodon 21
- 05 de la comarca 28 (Ripollès)	Llanars 22
- 07 de la comarca 28 (Ripollès)	Molló 23
-30 de la comarca 23 (Osona)	Sant Pere de Torelló 26

Esta comarca pierde el siguiente municipio:

-05 Maià de Montcal.

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 27

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
18	01	Argelaguer	183	12’73	362	336	-26	26’4
18	02	Besalú	151	4’81	2.091	2.137	+46	444’3
18	03	Beuda	338	35’75	107	112	+5	3’1
18	04	Castellfollit de la Roca	296	0’68	1.144	1.088	-56	1.600’0
18	21	Camprodon	988	103’35	2.386	2.289	-97	22’1
18	22	Llanars	983	24’80	385	386	+1	15’6
18	06	Mieres	286	26’07	396	359	-37	13’8
18	23	Molló	1.182	43’58	404	388	-16	8’9
18	07	Montagut	276	93’41	797	818	+21	8’8
18	08	**Olot**	443	29’13	25.072	25.350	+278	870’2
18	09	Planes d’Hostoles, les	370	36’97	1.861	1.845	-16	49’9
18	10	Preses, les	474	9’53	1.403	1.351	-52	141’8
18	11	Riudaura	572	24’19	431	385	-46	15’9
18	24	Rupit-Pruit	822	47’78	414	370	-44	7’7
18	12	Sales de Llierca	260	36’39	39	54	+15	1’5
18	13	St. Aniol de Finestres	415	47’51	275	273	-2	5’7
18	14	St. Feliu de Pallerols	473	34’92	1.139	1.066	-73	30’5
18	15	St. Ferriol	366	41’76	221	180	-41	4’3
18	16	St. Jaume de Llierca	203	7’13	791	775	-16	108’7
18	17	St. Joan les Fonts	342	31’93	2.924	2.933	+9	91’9
18	25	St. Pau de Seguries	867	8’98	607	609	+2	67’8
18	26	St. Pere de Torelló	621	57’47	2.006	2.089	+83	36’3
18	18	Sta. Pau	496	48’80	1.274	1.316	+42	27’0
18	27	Susqueda	281	50’53	198	125	-73	2’5
18	19	Tortellà	276	10’98	767	751	-16	68’4
18	20	Vall de Bianya, la	480	94’02	1.126	1.060	-66	11’3
18	21	Vall d’en Bas, la	475	90’49	2.640	2.597	-43	28’7
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 478** **σ = 264** **CV = 0’55**	**1.053’69**	**51.260**	**51.042**	**- 218**	**$\overline{X}$ = 137’5** **σ = 336’8** **CV = 2’45**

Municipios que gana la nueva comarca.

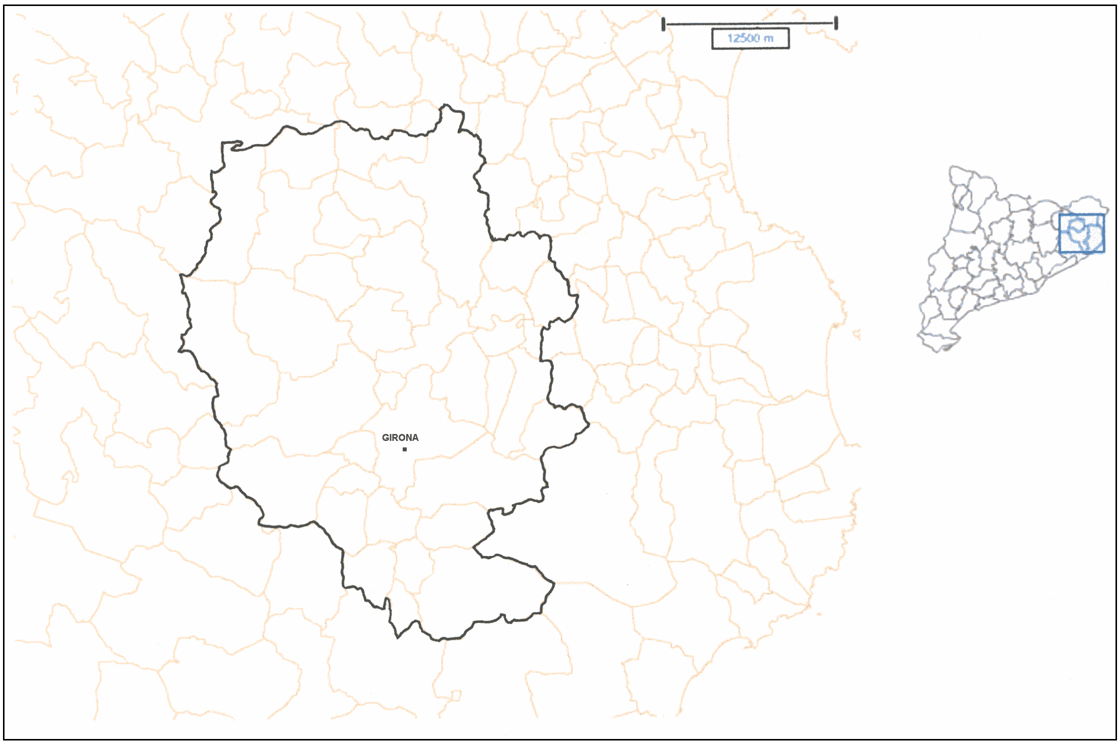
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	39’03	28’02	0’72
Población (nº habit.)	1.890	4.672	2’47

- Densidad de población comarcal (1986): 48’4 hab./km^2

- Capital comarcal: Olot.

19 NUEVA COMARCA DEL *GIRONÈS*



19 Nueva comarca del Gironès.

Esta comarca pierde los siguientes municipios.

- 12 Crespià.
- 14 Flaçà.
- 19 Llagostera.

La comarca del Gironès (19) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 17 de la comarca 31 (La Selva)	Riudellots de la Selva 39

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 36

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
19	01	Aiguaviva	169	13'91	330	358	+28	25'7
19	02	Banyoles*	172	10'89	12.451	12.854	+403	1.180'3
19	03	Bescanó	102	36'73	2.632	2.781	+149	75'7
19	04	Bordils	42	7'26	1.242	1.242	0	171'1
19	05	Camós*	216	15'34	635	618	-17	40'3
19	06	Campllong	113	8'65	309	267	-42	30'9
19	07	Canet d'Adri	217	45'19	438	453	+15	10'0
19	08	Cassà de la Selva	137	45'00	6.739	7.100	+361	157'8
19	09	Celrà	71	25'00	2.131	2.268	+137	87'6
19	10	Cervià de Ter	45	9'62	655	628	-27	65'3
19	11	Cornellà de Terri*	96	17'42	1.756	1.760	-4	101'0
19	13	Esponellà de Terri*	142	16'26	374	334	-40	20'5
19	15	Fontcoberta*	207	17'47	628	739	+111	42'3
19	16	Fornells de la Selva	102	11'84	944	995	+51	84'0
19	17	**Girona**	70	48'94	86.624	66.102	-20.522	1.350'7
19	18	Juià	94	8'38	269	274	+5	32'7
19	20	Llambilles	143	14'55	423	428	+5	29'4
19	21	Madremanya	177	13'62	202	203	+1	14'9
19	22	Palol de Revardit*	152	18'28	386	370	-16	20'2
19	23	Porqueres*	182	33'77	2.556	2.796	+240	82'8
19	24	Quart	136	37'44	1.272	1.633	+361	43'6
19	39	Riudellots de la Selva	98	13'38	1.144	1.174	+30	87'7
19	25	Salt	86	6'41	0	21.052	+21.052	3.284'2
19	26	Sant Andreu Salou	132	5'97	166	157	-9	26'3
19	27	Sant Gregori	112	43'23	1.634	1.735	+101	40'1
19	28	Sant Joan de Mollet	54	3'28	315	313	-2	95'4
19	29	Sant Jordi Desvalls	57	11'70	626	590	-36	50'4
19	30	Sant Julià de Ramis	184	10'46	1.346	1.605	+259	153'4
19	31	Sant Martí de Llémena	256	43'68	319	324	+5	7'4
19	32	Sant Martí Vell	651	17'34	199	192	-7	11'1
19	33	St. Miquel de Campmajor*	217	32'98	241	224	-17	6'8
19	34	Sarrià de Ter	66	4'16	3.779	3.533	-246	849'3
19	35	Serinyà*	188	17'33	730	702	-28	40'5
19	36	Vilablareix	118	6'06	803	901	+98	148'7
19	37	Viladasens	96	15'58	190	188	-2	12'1
19	38	Vilademuls*	120	62'08	824	757	-67	12'2
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 145** **σ = 101** **CV = 0'70**	**750'10**	**135.312**	**137.650**	**+2.338**	$\overline{X}$ **= 235'9** **σ = 598'5** **CV = 2'54**

Municipio que gana la nueva comarca.

* : Estos municios han pasado a formar parte de la nueva comarca creada con posterioridad, la nº 40, llamada *El Pla de l'Estany*.

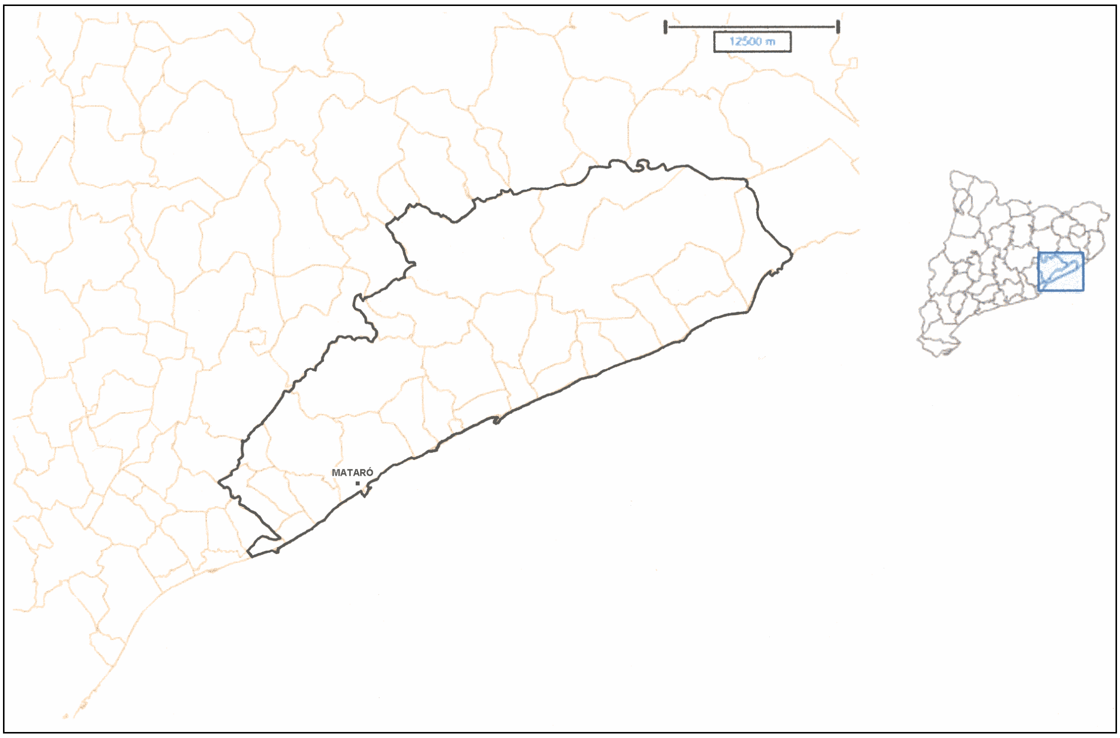
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	P A R A M E T R O S		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	20’84	15’01	0’72
Población (nº habit.)	3.824	11.249	2’94

- Densidad de población comarcal (1986): 183’5 hab./km^2

- Capital comarcal: Girona.

20 NUEVA COMARCA DEL *MARESME*



20 Nueva comarca del Maresme.

Esta comarca pierde los siguientes municipios:

- 01 Alella
- 12 Masnou, el.
- 14 Montgat.
- 18 Premià de Dalt.
- 19 Premià de Mar.
- 26 Teià.
- 27 Tiana.
- 29 Vilassar de Dalt.

La comarca del Maresme (20) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 04 de la comarca 31 (La Selva)	Blanes 31
- 09 de la comarca 31 (La Selva)	Fogars de Tordera 32
- 29 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Sant Celoni 33
- 39 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Vallgorguina 34
- 41 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Vilalba Sasserra 35

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 27

CODIGO COM.	CODIGO MUN.	MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1981	1986	Δ 86/81	DENSIDAD DE POBLACIÓN ($hab./km^2$) (1986)
20	02	Arenys de Mar	10	6’45	10.087	10.269	+182	1.592’1
20	03	Arenys de Munt	121	20’83	4.531	4.564	+33	219’1
20	04	Argentona	88	25’22	6.554	7.183	+629	284’8
20	31	Blanes	13	17’84	20.353	22.472	+2.119	1.259’6
20	05	Cabrera de Mar	104	9’05	1.703	1.977	+274	218’5
20	06	Cabrils	147	6’99	1.472	2.100	+628	300’4
20	07	Caldes d’Estac	33	0’74	1.162	1.315	+153	1.777’0
20	08	Calella	5	7’9’	10.586	11.320	+734	1.432’9
20	09	Canet de Mar	15	6’20	8.062	8.667	+605	1.397’9
20	10	Dosrius	147	40’82	737	848	+111	20’8
20	32	Fogars de Tordera	45	33’17	252	293	+41	8’8
20	11	Malgrat de Mar	4	9’05	10.972	10.776	-196	1.190’7
20	13	**Mataró**	28	22’57	97.008	100.019	+3.011	4.431’5
20	15	Órrius	259	5’57	255	315	+60	56’6
20	16	Palafolls	16	16’30	2.609	2.878	+269	176’6
20	17	Pineda de Mar	10	10’35	11.747	13.951	+2.204	1.347’9
20	20	St. Andreu de Llavaneres	114	11’90	2.949	3.432	+483	288’4
20	21	St. Cebrià de Vallalta	71	15’79	614	706	+92	44’7
20	33	Sant Celoni	152	65’44	11.946	12.275	329	187’6
20	22	St. Iscle de Vallalta	129	17’72	490	492	+2	27’8
20	23	Sant Pol de Mar	15	7’49	2.275	2.401	+126	320’6
20	24	St. Vicenç de Montalt	143	8’00	1.191	1.516	+325	189’5
20	25	Santa Susanna	10	12’45	509	652	+143	52’4
20	28	Tordera	34	83’81	7.560	7.747	+187	92’4
20	34	Vallgorguina	222	21’96	635	647	+12	29’5
20	35	Vilalba Sasserra	200	5’87	212	292	+80	49’7
20	30	Vilassar de Mar	10	3’92	9.519	10.144	+625	2.587’8
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 79** **σ = 74** **CV = 0’94**	**493’40**	**225.990**	**239.251**	**+13.261**	$\overline{X}$ **= 725’4** **σ = 1.004’2** **CV = 1’38**

Municipios que gana la nueva comarca.

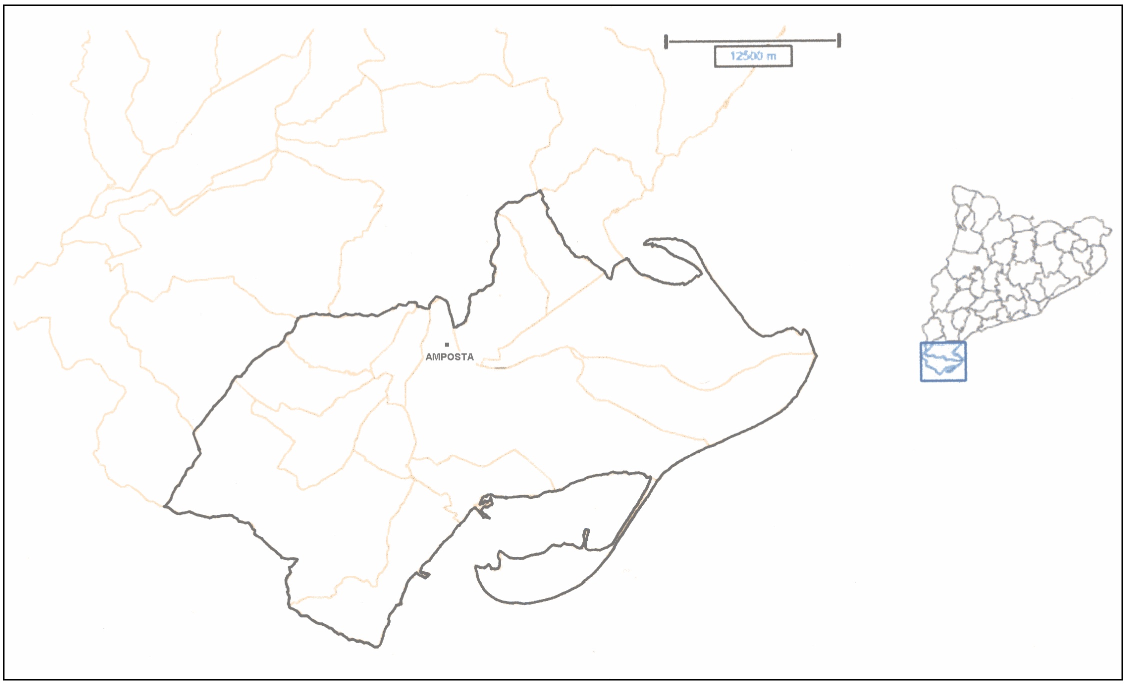
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS $\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	18’27	18’49	1’01
Población (nº habit.)	8.861	18.693	2’11

- Densidad de población comarcal (1986): 484’9 $hab./km^2$

- Capital comarcal: Mataró.

21 NUEVA COMARCA DEL *MONTSIÀ*



21 Nueva comarca del Montsià.

Esta comarca pierde los siguientes municipios:

- 10 Sénia, la
- 06 Mas de Barberans.

La comarca del Montsià (21) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº. 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 05 de la comarca 08 (Baix Ebre)	Camarles 13
- 06 de la comarca 08 (Baix Ebre)	Deltebre 14
- 10 de la comarca 08 (Baix Ebre)	St. Jaume d'Enveja 15
- 14 de la comarca 08 (Baix Ebre)	Aldea, l' 12

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 13

CODIGO		**MUNICIPIO**	**ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)**	**SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)**	**POBLACION DE DERECHO (hab.)**			**DENSIDAD DE POBLACIÓN ($hab./km^2$)**
COM.	**MUN.**				**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
21	01	Alcanar	72	41'67	7.959	8.023	+64	192'5
21	12	Aldea, l'	20	35'40	3.369	3.306	-63	93'4
21	02	**Amposta**	8	136'20	14.673	15.306	+633	112'4
21	13	Camarles	13	29'00	2.822	2.914	+92	100'5
21	14	Deltebre	6	91'05	9.881	10.209	+328	112'1
21	03	Freginals	126	17'24	414	407	-7	23'6
21	04	Galera, la	112	27'29	799	786	-13	28'8
21	05	Godall	167	33'99	823	803	-20	23'6
21	07	Masdenverge	54	14'66	848	916	+68	62'5
21	08	St. Carles de la Ràpita	11	50'94	10.051	10.306	+255	202'3
21	15	St. Jaume d'Enveja*	7	480'78	3.407	3.487	+80	71'5
21	09	Santa Bàrbara	79	28'10	3.296	3.331	+35	118'5
21	11	Ulldecona	133	126'05	5.273	5.230	-43	41'5
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 62** **σ = 55** **CV = 0'88**	**680'37**	**63.615**	**65.024**	**+1.409**	$\overline{X}$ **= 91'0** **σ = 56'2** **CV = 0'62**

Municipios que gana la nueva comarca.

* Sant Jaume d'Enveja se segregó de Tortosa en el año 1978. Posteriormente, se produjo su tránsito desde la comarca del Baix Ebre a la del Montsià.

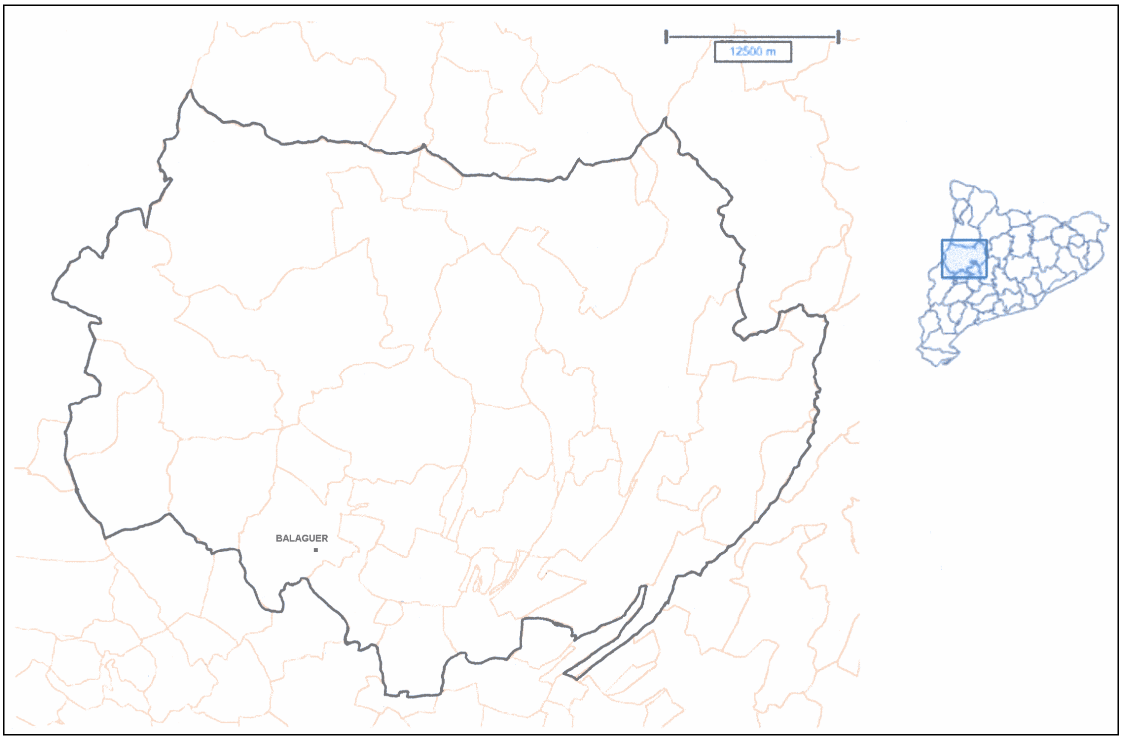
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	52’34	38’36	0’73
Población (nº habit.)	5.002	4.439	0’89

- Densidad de población comarcal (1986): 95’6 hab./km^2

- Capital comarcal: Amposta.

22 NUEVA COMARCA DE LA *NOGUERA*



22 Nueva comarca de La Noguera.

Esta comarca pierde los siguientes municipios:

- 02 Albesa.
- 03 Alfarràs.
- 09 Baronia de Rialb.
- 12 Bellvís.
- 20 Meranges.
- 25 Poal, el.
- 27 Portella, la.
- 30 Térmens.
- 31 Tiurana.
- 32 Torrelameu.
- 34 Vilanova de l'Aguda.

La comarca de La Noguera (22) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº. 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 01 de la comarca 35 (Urgell)	Agramunt 36
- 07 de la comarca 35 (Urgell)	Castellserà 37
- 18 de la comarca 35 (Urgell)	Puigverd d'Agramunt 38

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 27

CODIGO COM.	CODIGO MUN.	MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1981	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1986	POBLACION DE DERECHO (hab.) Δ 86/81	DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2) (1986)
22	01	Àger	642	160'86	684	622	-62	3'9
22	36	Agramunt	337	78'29	4.649	4.818	+169	61'5
22	04	Algerri	345	35'97	639	601	-38	16'7
22	05	Alòs de Balaguer	297	68'76	184	187	+3	2'7
22	06	Artesa de Segre	318	176'29	3.354	3.250	-104	18'4
22	07	Avellanes-Santalinya, les	567	103'31	573	549	-24	5'3
22	08	**Balaguer**	233	57'40	12.585	13.097	+512	228'2
22	10	Bellcaire d'Urgell	267	31'04	1.602	1.475	-127	47'5
22	11	Bellmunt d'Urgell	379	4'98	238	239	+1	48'0
22	13	Cabanabona	421	14'18	128	129	+1	9'1
22	14	Camarassa	321	155'46	1.019	1.004	-15	6'5
22	15	Castelló de Farfanya	358	52'97	694	631	-63	11'9
22	37	Castellserà	267	15'84	1.256	1.221	-35	77'1
22	16	Cubells	499	39'04	453	420	-33	10'8
22	17	Foradada	455	28'74	162	161	-1	5'6
22	18	Ivars de Noguera	314	26'99	379	365	-14	13'5
22	19	Linyola *	248	28'76	2.327	2.383	+56	82'9
22	21	Montgai	286	28'92	940	908	-32	31'4
22	22	Oliola	452	85'46	268	255	-13	3'0
22	23	Os de Balaguer	463	121'93	934	869	-65	7'1
22	24	Penelles	276	25'37	707	620	-87	24'4
22	26	Ponts	363	30'31	2.251	2.288	+37	75'5
22	28	Preixens	315	28'90	583	599	+16	20'7
22	38	Puigverd d'Agramunt	366	21'24	260	258	-2	12'1
22	29	Sentiu de Sió, la	281	29'47	509	509	0	17'3
22	33	Vallfogona de Balaguer	235	27'32	1.316	1.368	+52	50'1
22	35	Vilanova de Meià	633	73'88	531	521	-10	7'1
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 368 σ = 112 CV = 0'30**	**1.551'68**	**39.225**	**39.347**	**+122**	**$\overline{X}$ = 33'3 σ = 45'3 CV = 1'36**

Municipios que gana la nueva comarca.

* Este municipio ha pasado a formar parte de la nueva comarca creada con posterioridad, la nº 41, llamada *Pla d'Urgell*.

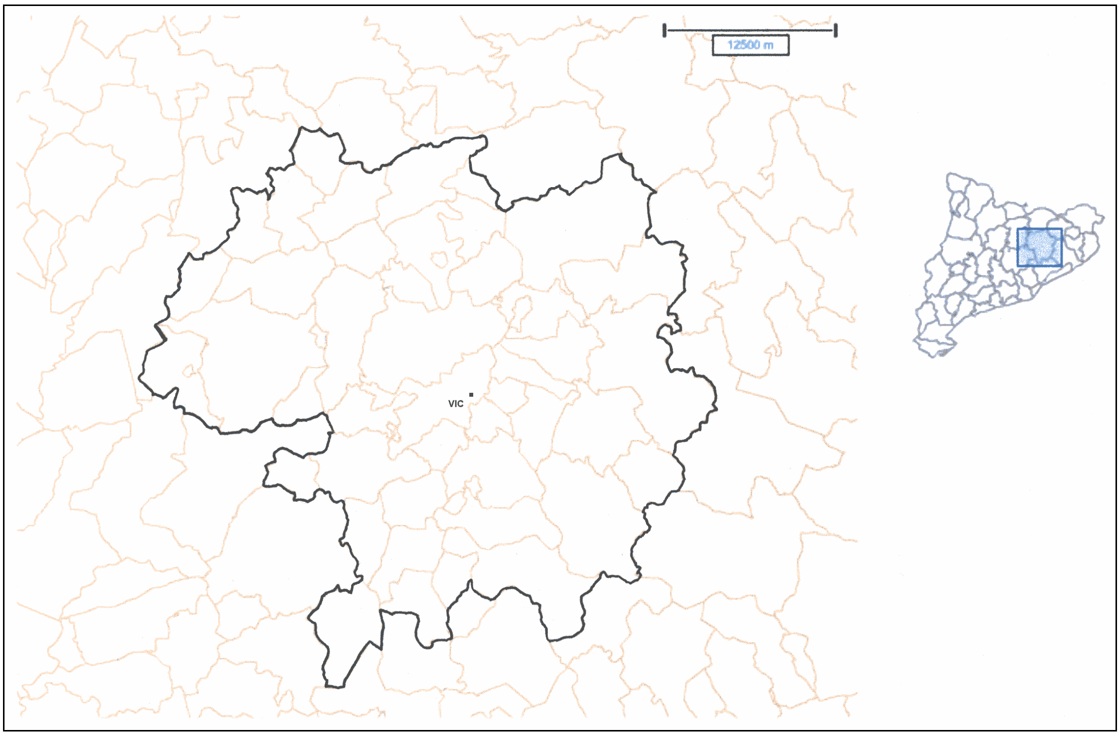
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS $\overline{X}$	PARAMETROS σ	PARAMETROS CV
Superficie (km^2)	52'47	46'80	0'81
Población (nº habit.)	1.457	2.511	1'72

- Densidad de población comarcal (1986): 25'4 hab./km^2

- Capital comarcal: Balaguer.

23 NUEVA COMARCA DE *OSONA*



23 Nueva comarca d’Osona.

Esta comarca pierde los siguientes municipios:

- 01 Alpens.
- 10 Lluçà.
- 22 Rupit-Pruit.
- 29 Sant Martí de Centelles.
- 30 Sant Pere de Torelló.
- 39 Sora.

La comarca d’Osona (23) gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 12 de la comarca 06 (Bages)	Estany, l’ 49
- 26 de la comarca 06 (Bages)	St. Feliu de Sasserra 50
- 08 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Castellcir 48

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 44

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
23	02	Brull, el	843	41’08	187	183	-4	4’5
23	03	Calldetenes	489	5’80	1.229	1.408	+179	242’8
23	48	Castellcir	694	34’50	221	211	-10	6’1
23	04	Centelles	496	15’13	5.621	5.632	+11	372’2
23	05	Collsuspina	901	14’86	350	220	-130	14’8
23	06	Espinelves	752	17’65	254	250	-4	14’2
23	49	Estany, l’	870	10’11	382	381	-1	37’7
23	07	Folgueroles	552	10’99	1.016	1.066	+50	97’0
23	08	Gurb	563	51’23	1.509	1.625	+116	31’7
23	09	Hostalets de Balenyà, els	587	18’47	2.948	3.166	+218	171’4
23	11	Malla	580	11’03	283	257	-26	23’3
23	12	Manlleu	461	17’19	15.962	16.190	+228	941’8
23	13	Masies de Roda, les	516	16’43	569	606	+37	36’9
23	14	Masies de Voltregà, les	533	22’31	2.379	2.455	+76	110’0
23	15	Muntanyola	807	40’42	199	163	-36	4’0
23	16	Olost	669	26’64	961	948	-13	35’6
23	17	Orís	703	27’33	268	231	-37	8’5
23	18	Oristà	468	71’35	963	912	-51	12’8
23	19	Perafita	754	18’48	356	362	+6	19’6
23	20	Prats de Lluçanès	707	13’29	2.266	2.470	+204	185’9
23	21	Roda de Ter	443	2’18	4.562	4.702	-140	2.156’9
23	23	St. Agustí de Lluçanès	816	13’38	132	130	-2	9’7
23	24	St. Bartomeu del Grau	868	34’67	1.034	1.081	+47	31’2
23	25	St. Boi de Lluçanès	816	13’38	520	522	+2	39’0
23	50	St. Feliu de Sasserra	617	23’14	674	633	-41	27’4
23	26	St. Hipòlit de Voltregà	1.072	0’90	3.160	3.022	-138	3.357’8
23	27	St. Julià de Vilatorta	600	16’41	1.518	1.718	+200	104’7
23	28	St. Martí d’Albars	489	14’76	162	139	-23	9’4
23	31	St. Sadurní d’Osormort	520	30’86	79	79	0	2’6
23	32	St. Vicenç de Torelló	553	6’60	1.785	1.783	-2	270’2
23	33	Sta. Cecília de Voltregà	519	8’57	194	188	-6	21’9
23	34	Sta. Eugènia de Berga	538	6’34	1.129	1.316	+187	207’6
23	35	Sta. Eulàlia de Riuprimer	568	14’01	783	809	+26	57’7
23	36	Santa Maria de Corcó	693	61’97	1.895	1.961	+66	31’6
23	37	Seva	663	29’10	1.487	1.610	+123	55’3
23	38	Sobremunt	879	13’64	63	77	+14	5’6
23	40	Taradell	623	26’80	4.114	4.259	+145	158’9
23	41	Tavèrnoles	537	19’11	187	214	+27	11’2
23	42	Tavertet	869	32’17	97	114	+17	3’5
23	43	Tona	596	16’47	5.124	5.289	+165	321’1
23	44	Torelló	508	13’51	10.941	11.132	+191	824’0
23	45	**Vic**	484	30’92	30.155	28.399	-1.756	918’5
23	46	Viladrau	821	50’61	757	802	+45	15’8
23	47	Vilanova de Sau	558	58’13	341	312	-29	5’4
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 650** **σ = 151** **CV = 0’23**	**1.021’92**	**108.816**	**109.027**	**+211**	$\overline{X}$ **= 250’4** **σ = 605’5** **CV = 2’42**

Municipios que gana la nueva comarca.

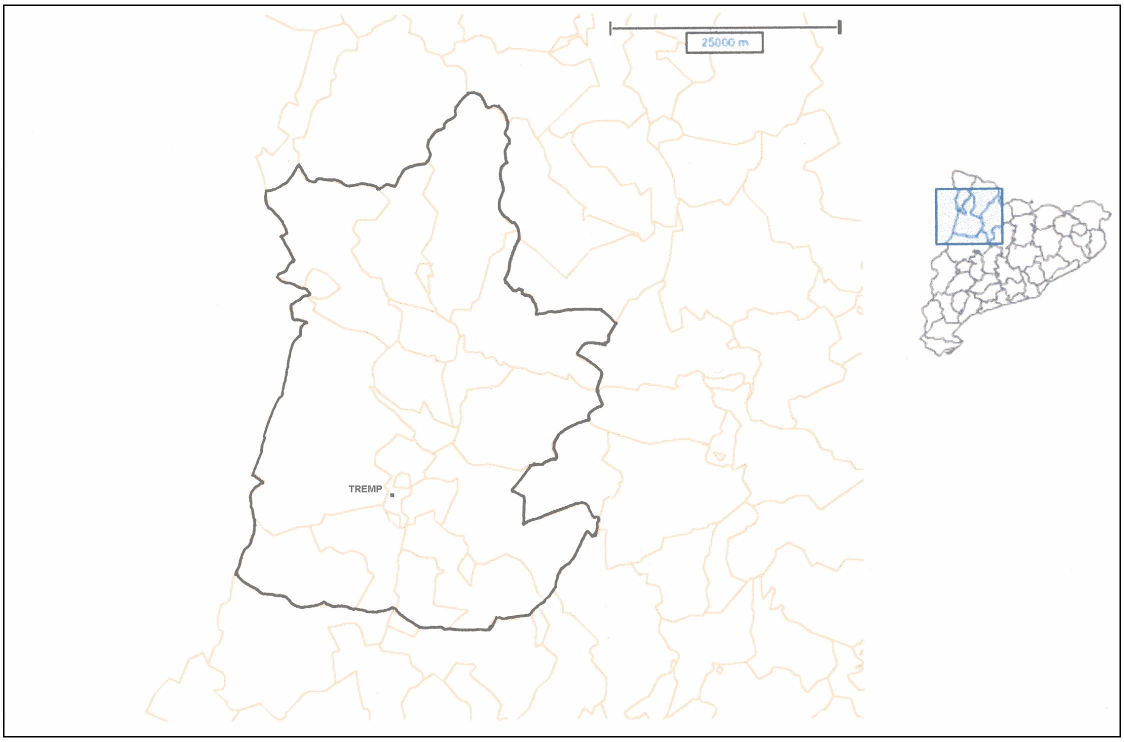
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	23’23	15’99	0’69
Población (nº habit.)	2.478	4.954	2’00

- Densidad de población comarcal (1986): 106’7/km^2

- Capital comarcal: Vic.

24 NUEVA COMARCA DEL *PALLARS JUSSÀ*



24 Nueva comarca del Pallars Jussà.

La comarca del Pallars Jussà (24) pierde los siguientes municipios:

- 01 Abella de la Conca.
- 02 Barruera.
- 17 Vilaller.

Gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº. 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 03 de la comarca 25 *(Pallars Sobirà)*	Baix Pallars 18

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 15

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
24	18	Baix Pallars	591	128’81	451	413	-38	3’2
24	03	Castell de Mur	881	63’05	205	146	-59	2’3
24	07	Conca de Dalt	768	111’27	510	479	-31	4’3
24	04	Gavet de la Conca	667	90’30	469	385	-84	4’3
24	05	Isona i Conca Dellà	659	135’27	1.565	1.502	-63	42’6
24	06	Llimiana	790	41’03	172	135	-37	3’3
24	08	Pobla de Segur, la	524	33’59	3.393	3.345	-48	99’6
24	09	Pont de Suert, el *	838	148’63	2.961	2.448	-513	16’5
24	10	Salàs de Pallars	573	20’54	417	403	-14	19’6
24	11	St. Esteve de la Sarga	875	92’05	230	138	-92	1’5
24	12	Sarroca de Bellera	1.002	87’26	151	125	-26	1’4
24	13	Senterada	729	34’55	163	126	-37	3’6
24	14	Talarn	572	27’88	436	385	-51	13’8
24	15	Torre de Cabdella	1.075	165’97	721	754	+33	4’5
24	16	**Tremp**	468	301’99	5.603	5.727	+124	19’0
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 734 σ = 172 CV = 0’23**	**1.487’19**	**17.447**	**16.511**	**- 936**	**$\overline{X}$ = 16’0 σ = 24’8 CV = 1’55**

Municipio que gana la nueva comarca.
* : Este municipio ha pasado a formar parte de la nueva comarca creada con posterioridad, la nº 39, llamada *L’Alta Ribagorça*.

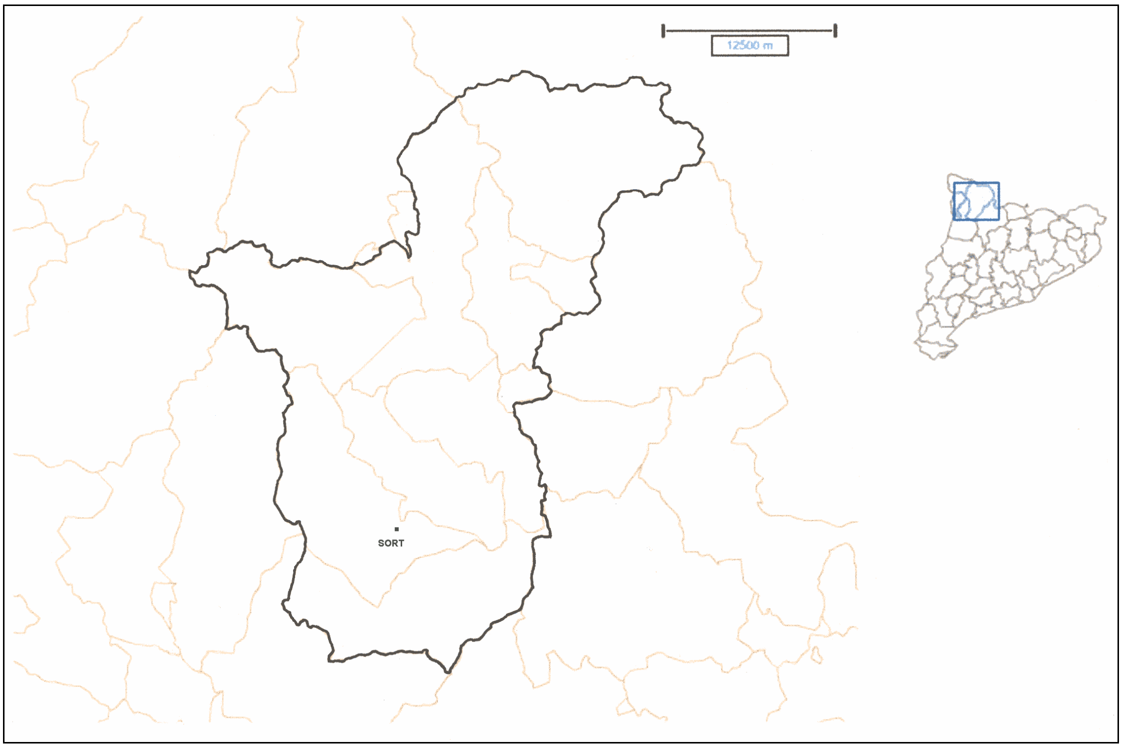
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	99'15	71'80	0'78
Población (nº habit.)	1.101	1.540	1'40

- Densidad de población comarcal (1986): 11'1 hab./km^2

- Capital comarcal: Tremp.

25 NUEVA COMARCA DEL *PALLARS SOBIRÀ*



25 Nueva comarca del Pallars Sobirà.

La comarca del Pallars Sobirà (25) pierde los siguientes municipios:

- 01 Alins de Vallferrera.
- 02 Alt Àneu.
- 03 Baix Pallars.
- 05 Esterri d'Àneu.
- 07 Farrera.

Esta comarca no gana ningún municipio.

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 10

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
25	04	Espot	1.318	97'22	227	224	-3	2'3
25	06	Esterri de Cardós	1.212	I16'50	56	64	+8	3'9
25	08	Guingueta-Jou, la	1.305	107'97	261	261	0	2'4
25	09	Lladorre	1.052	146'99	183	217	+34	1'5
25	10	Llavorsí	811	68'94	295	279	-16	4'0
25	11	Rialb	725	63'00	415	437	+22	6'9
25	12	Soriguera	1.192	105'72	260	291	+31	2'8
25	13	**Sort**	692	105'07	1.548	1.543	-5	14'7
25	14	Tírvia	991	8'76	106	109	+3	12'4
25	15	Vall de Cardós	898	56'58	369	324	-45	6'5
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 1.020** **σ = 222** **CV = 0'22**	**776'75**	**3.720**	**3.749**	**+ 29**	$\overline{X}$ **= 5'7** **σ = 4'3** **CV = 0'74**

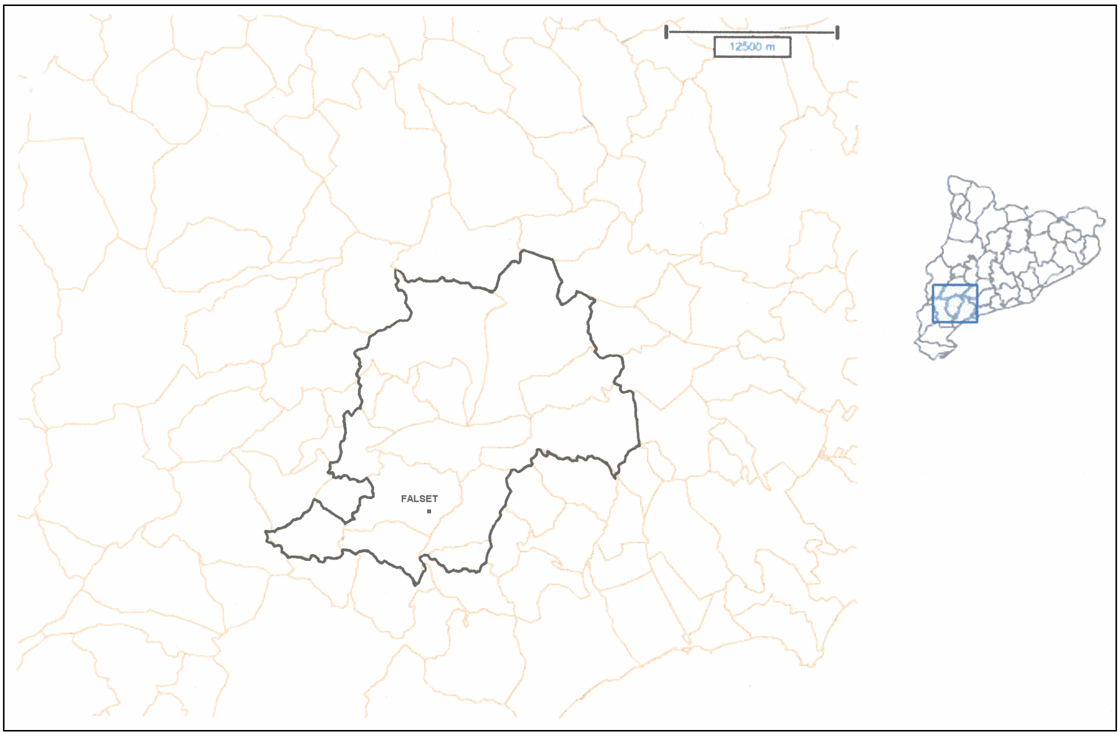
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	77'68	41'07	0'53
Población (nº habit.)	375	402	1'07

- Densidad de población comarcal (1986): 4'8 hab./km^2

- Capital comarcal: Sort.

26 NUEVA COMARCA DEL *PRIORAT*



26 Nueva comarca del Priorat.

La comarca del Priorat (26) pierde los siguientes municipios:

- 03 Bisbal de Falset, la.
- 04 Cabassers.
- 05 Capçanes.
- 08 Figuera, la.
- 10 Guiamets, els.
- 11 Lloà.
- 13 Margalef.
- 15 Molar, el.
- 22 Ulldemolins.
- 24 Vilella Baixa, la.

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº. 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 03 de la comarca 07 *(Baix Camp)*	Alforja 25

Los municipios que restan en esta comarca vienen indicados en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 15

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
26	25	Alforja	374	38’32	1.136	1.086	-50	28’3
26	01	Arbolí	714	21’11	98	130	+32	6’2
26	02	Bellmunt del Priorat	261	8’92	374	340	-34	38’1
26	06	Cornudella de Montsant	535	62’70	980	951	-29	15’2
26	07	**Falset**	363	31’80	2.647	2.584	-63	81’3
26	09	Gratallops	321	13’34	301	270	-31	20’2
26	12	Marçà	315	16’08	637	610	-27	37’9
26	14	Masroig, el	192	15’50	601	600	-1	38’7
26	16	Morera de Monsant, la	743	52’65	180	188	+8	3’6
26	17	Poboleda	343	13’73	395	385	-10	28’0
26	18	Porrera	316	28’54	496	474	-22	16’6
26	19	Pradell	463	23’87	294	279	-15	11’7
26	20	Torre de Fontaubella, la	369	5’04	82	77	-4	15’3
26	21	Torroja del Priorat	331	13’04	179	139	-40	10’7
26	23	Vilella Alta, la	327	5’24	147	140	-7	26’7
		TOTALES	$\overline{X}$ = **398** **σ = 150** **CV = 0’38**	**349’88**	**8.547**	**8.253**	**+ 294**	$\overline{X}$ = **25’2** **σ = 18’6** **CV = 0’74**

Municipio que gana la nueva comarca.

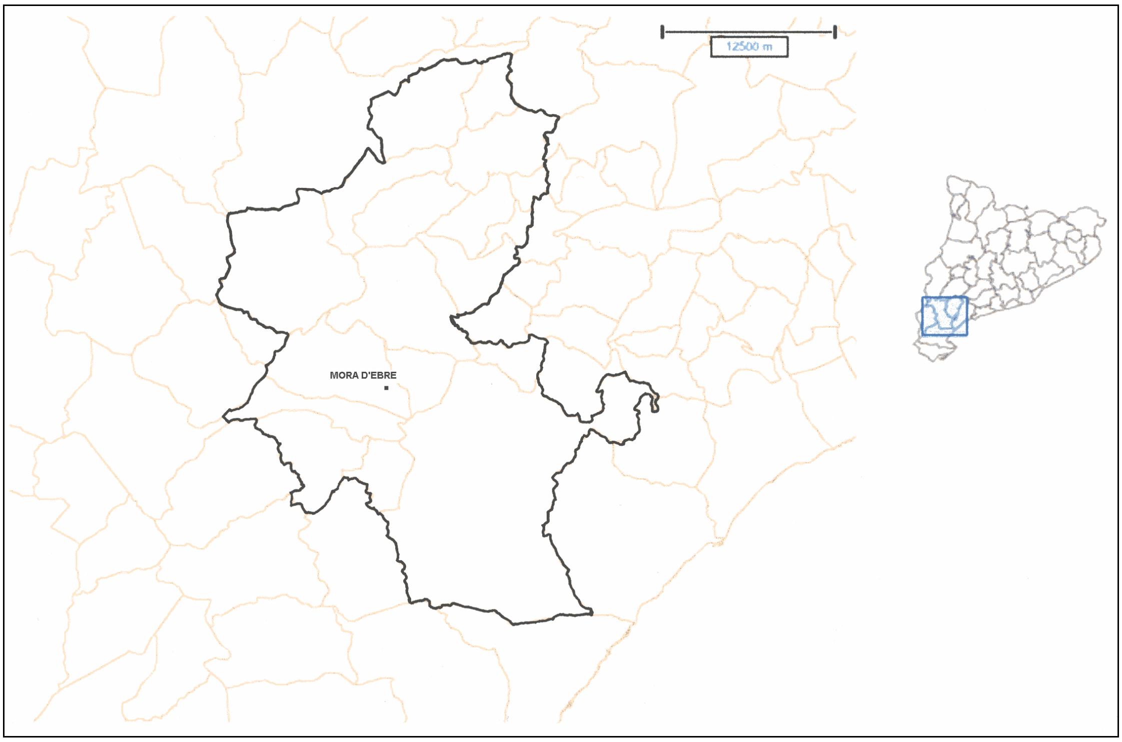
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	23’33	16’37	0’70
Población (nº habit.)	550	616	1’12

- Densidad de población comarcal (1986): 23’6 hab./km^2

- Capital comarcal: Falset.

27 NUEVA COMARCA DE LA *RIBERA D'EBRE*



27 Nueva comarca de la Ribera d'Ebre.

La comarca de la Ribera d'Ebre (27) pierde los siguientes municipios:

- 03 Flix.
- 10 Rasquera.
- 11 Riba-roja d'Ebre.

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 03 de la comarca 26 (Priorat)	Bisbal de Falset, la 15
- 04 de la comarca 26 (Priorat)	Cabassers 16
- 08 de la comarca 26 (Priorat)	Figuera, la 17
- 10 de la comarca 26 (Priorat)	Guiamets, els 18
- 11 de la comarca 26 (Priorat)	Lloà 19
- 15 de la comarca 26 (Priorat)	Molar, el 20
- 24 de la comarca 26 (Priorat)	Vilella Baixa, la 21

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguente cuadro:

Nº de municipios: 18

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
27	01	Ascó	69	73'93	2.037	1.847	-190	25'0
27	02	Benissanet	26	23'02	1.148	1.070	-78	46'5
27	15	Bisbal de Falset, la	372	14'05	328	312	-16	22'2
27	16	Cabassers	357	31'21	366	366	0	11'7
27	17	Figuera, la	575	18'73	146	141	-5	7'5
27	04	Garcia	73	51'78	638	604	-34	11'7
27	05	Ginestar	25	15'62	948	938	-10	60'1
27	18	Guiamets, els	226	11'73	309	305	-4	26'0
27	19	Lloà	219	6'80	202	168	-34	24'7
27	06	Miravet	42	32'22	865	844	-21	26'2
27	20	Molar, el	228	22'85	358	348	-10	15'2
27	07	**Móra d'Ebre**	38	44'65	4.332	4.253	-79	95'3
27	08	Móra la Nova	30	15'86	3.127	2.874	-253	181'2
27	09	Palma d'Ebre, la	335	38'30	488	481	-7	12'6
27	12	Tivissa	309	208'37	1.960	1.814	-146	8'7
27	13	Torre de l'Espanyol, la	164	27'90	856	744	-112	26'7
27	21	Vilella Baixa, la	214	5'57	194	194	0	34'8
27	14	Vinebre	34	26'42	565	486	-79	18'4
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 184** **σ = 156** **CV = 0'85**	**669'01**	**18.867**	**17.789**	**-1.078**	$\overline{X}$ **= 36'4** **σ = 40'8** **CV = 1'12**

Municipios que gana la nueva comarca.

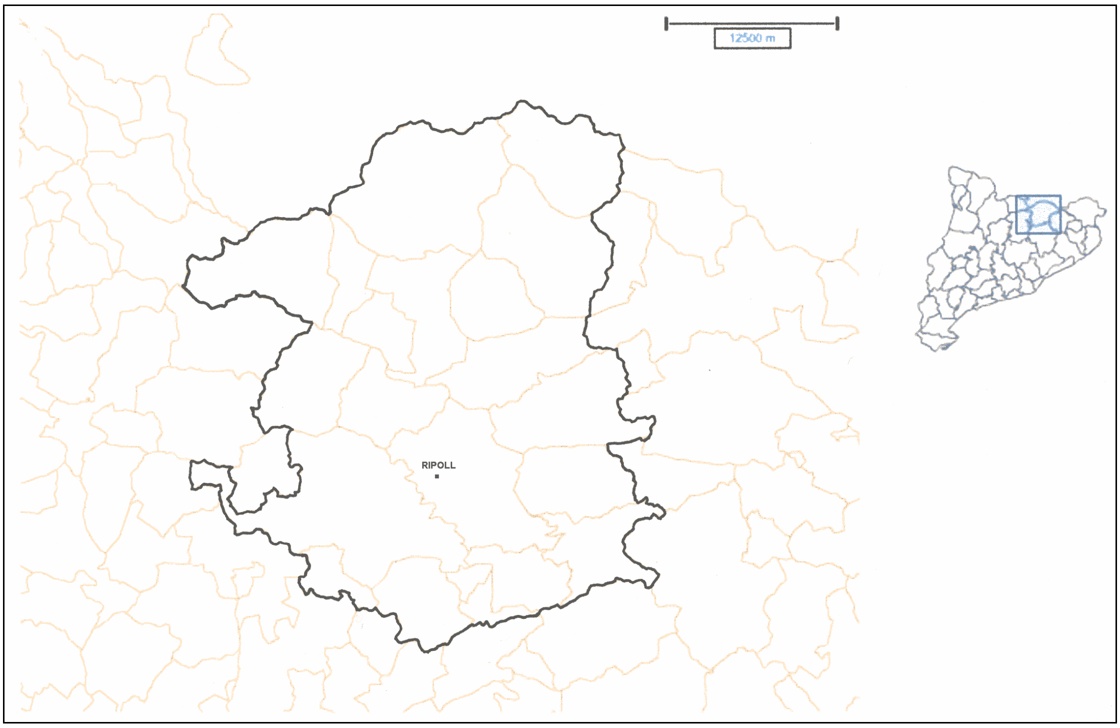
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	37’17	44’70	1’20
Población (nº habit.)	988	1.057	1’07

- Densidad de población comarcal (1986): 26’6 hab./km^2

- Capital comarcal: Móra d’Ebre.

28 NUEVA COMARCA DEL *RIPOLLÈS*



28 Nueva comarca del Ripollès.

La comarca del Ripollès (28) pierde los siguientes municipios:

- 03 Camprodon.
- 05 Llanars.
- 07 Molló.
- 10 Palmerola.
- 17 Sant Pau de Segúries.

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 01 de la comarca 23 (Osona)	Alpens 25
- 39 de la comarca 23 (Osona)	Sora 26

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguente cuadro:

Nº de municipios: 21

CODIGO		**MUNICIPIO**	**ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)**	**SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)**	**POBLACION DE DERECHO (hab.)**			**DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)**
COM.	**MUN.**				**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
28	25	Alpens	855	13’83	255	252	-3	18’2
28	01	Campdevànol	738	32’83	3.596	3.565	-31	108’6
28	02	Campelles	1.146	19’16	215	156	-59	8’1
28	04	Gombreny	919	43’84	264	258	-6	5’9
28	06	Lloses, les	1.000	114’41	525	422	-103	3’7
28	08	Montesquiu	577	4’87	1.002	932	-70	191’4
28	09	Ogassa	1.320	45’73	310	285	-25	6’2
28	11	Pardines	1.226	31’09	130	118	-12	3’8
28	12	Planoles	1.136	13’96	329	295	-34	21’1
28	13	Queralbs	1.236	93’81	223	200	-23	2’1
28	14	Ribes de Freser	912	42’15	2.794	2.627	-167	62’3
28	15	**Ripoll**	691	73’46	12.209	11.670	-539	158’9
28	16	St. Joan de les Abadesses	773	53’41	4.247	4.072	-175	76’2
28	18	St. Quirze de Besora	587	8’07	2.074	2.017	-57	249’9
28	19	Sta. Maria de Besora	866	24’93	209	200	-9	8’0
28	20	Setcases	1.279	48’91	148	161	+13	3’3
28	26	Sora	716	31’51	268	228	-40	7’2
28	21	Toses	1.444	62’18	132	126	-6	4’7
28	22	Vallfogona de Ripollès	956	38’88	264	250	-14	6’4
28	23	Vidrà	982	34’57	197	178	-19	5’1
28	24	Vilallonga de Ter	1.067	64’91	452	437	-15	6’7
		TOTALES	$\bar{X}$ = **973** **σ = 240** **CV = 0’25**	**896’51**	**29.843**	**28.449**	**- 1.394**	$\bar{X}$ = **45’9** **σ = 70’0** **CV = 1’52**

Municipios que gana la nueva comarca.

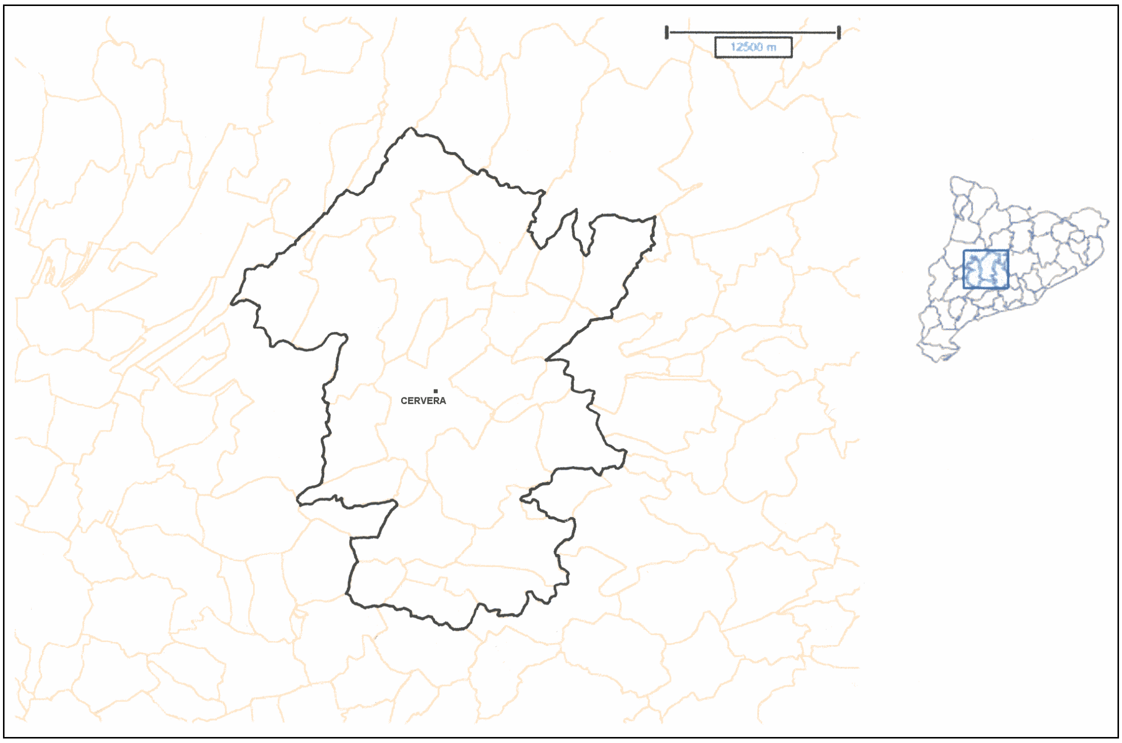
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	42’69	24’63	0’59
Población (nº habit.)	1.355	2.571	1’87

- Densidad de población comarcal (1986): 31’7 hab./km^2

- Capital comarcal: Ripoll.

29 NUEVA COMARCA DE *LA SEGARRA*



29 Nueva comarca de la Segarra.

La comarca de la Segarra (29) pierde los siguientes municipios:

- 01 Biosca.
- 13 Sanaüja.
- 19 Torà.
- 20 Torreflor.

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 09 de la comarca 05 (Anoia)	Castellfollit de Riubregós 22
- 06 de la comarca 15 (Conca de Barberà)	Llorac 23
- 15 de la comarca 15 (Conca de Barberà)	Savallà del Comtat 25
- 16 de la comarca 35 (Urgell)	Ossó de Sió 24

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguente cuadro:

Nº de municipios: 21

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
29	22	Castellfollit de Riubregós	467	26’28	276	275	-1	10’5
29	02	**Cervera**	548	55’14	6.444	6.545	+101	118’7
29	03	Estaràs	596	20’90	225	201	-24	9’6
29	04	Granyanella	501	24’15	128	119	-9	4’9
29	05	Granyena de Segarra	636	15’53	217	206	-11	13’3
29	06	Guissona	484	18’22	2.602	2.685	+83	147’4
29	07	Ivorra	567	15’29	199	190	-9	12’4
29	23	Llorac	648	22’87	100	99	-1	4’3
29	08	Massoteres	502	26’25	184	159	-25	6’1
29	09	Montoliu de Cervera	689	29’37	215	213	-2	7’3
29	10	Oluges, les	528	19’15	293	241	-52	12’6
29	24	Ossó de Sió	391	26’07	241	272	+31	10’4
29	11	Plans de Sió	412	55’96	794	742	-52	13’3
29	12	Ribera d’ Ondara	781	54’25	570	508	-62	9’4
29	14	St. Guim de Freixenet	738	24’86	1.077	1.085	+8	43’6
29	15	St. Guim de la Plana	556	12’13	209	214	+5	17’6
29	16	St. Ramon	660	18’67	652	616	-36	33’0
29	25	Savallà del Comtat	847	14’58	58	62	+4	4’3
29	17	Talavera	791	30’05	359	312	-47	10’4
29	18	Torroja de Segarra	460	7’84	225	205	-20	26’1
29	21	Vallfogona de Riucorb	573	10’97	128	113	-15	10’3
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 589** **σ = 124** **CV = 0’21**	**528’53**	**15.196**	**15.062**	**- 134**	**$\overline{X}$ = 25’0** **σ = 36’6** **CV = 1’46**

Municipios que gana la nueva comarca.

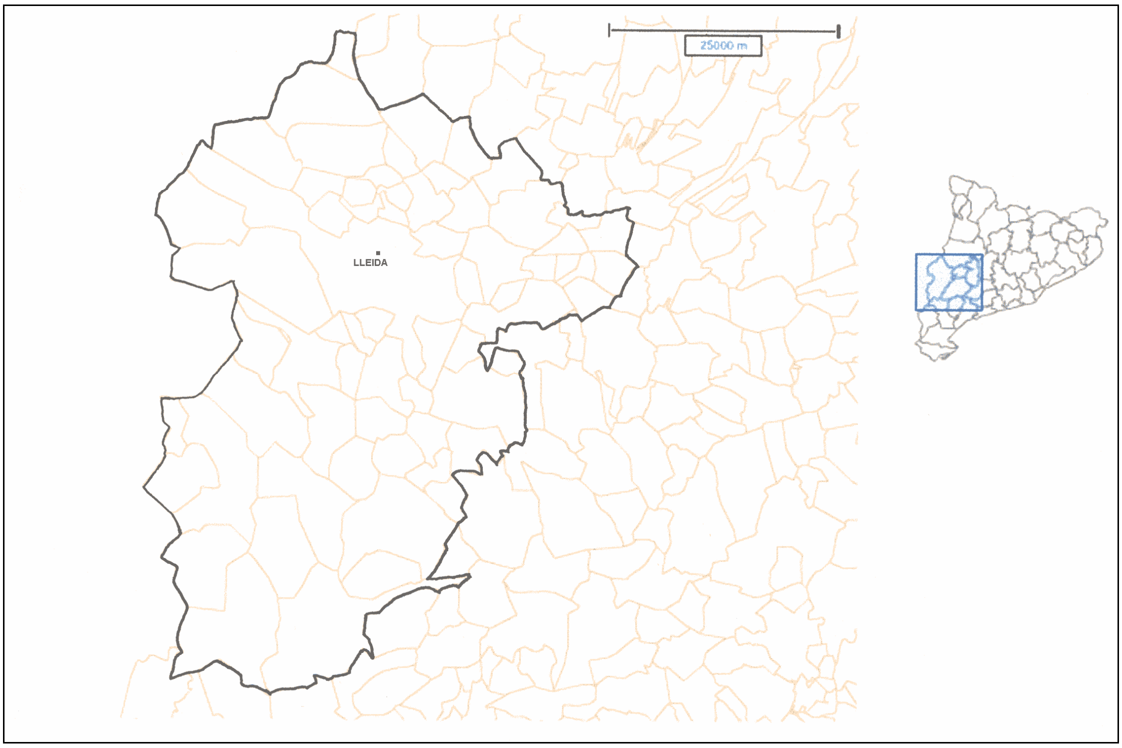
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	25’17	13’56	0’54
Población (nº habit.)	717	1.418	1’98

- Densidad de población comarcal (1986): 28’5 hab./km^2

- Capital comarcal: Cervera.

30 NUEVA COMARCA DEL *SEGRIÀ*



30 Nueva comarca del Segrià.

La comarca del Segrià (30) no pierde ningún municipio.

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 03 de la comarca 27 (Ribera d' Ebre)	Flix 50
- 11 de la comarca 27 (Ribera d'Ebre)	Riba-roja d' Ebre 56
- 05 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Bovera 47
- 12 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Granadella, la 51
- 22 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Torms, els 59
- 20 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Soleràs, el 57
- 13 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Granyena de les Garrigues 52
- 08 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Cogul, el 49
- 01 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Albagés, l' 43
- 06 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Castelldans 48
- 23 de la comarca 17 (Les Garrigues)	Torregrossa 60
- 26 de la comarca 35 (Urgell)	Vila-sana 62
- 03 de la comarca 22 (Noguera)	Alfarràs 45
- 02 de la comarca 22 (Noguera)	Albesa 44
- 27 de la comarca 22 (Noguera)	Portella, la 55
- 20 de la comarca 22 (Noguera)	Menàrguens 53
- 30 de la comarca 22 (Noguera)	Térmens 58
- 32 de la comarca 22 (Noguera)	Torrelameu 61
- 12 de la comarca 22 (Noguera)	Bellvís 46
- 25 de la comarca 22 (Noguera)	Poal, el 54

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguente cuadro:

Nº de municipios: 62

CODIGO COM.	CODIGO MUN.	MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1981	1986	Δ 86/81	DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2) (1986)
30	01	Aitona	110	67’22	2.258	2.349	+91	34’9
30	02	Alamús, els	212	20’21	664	671	+7	33’2
30	43	Albagés, l’	372	25’99	587	515	-72	19’8
30	03	Albatàrrec	147	10’74	1.066	1.020	-46	95’0
30	44	Albesa	237	37’36	1.454	1.457	+3	39’0
30	04	Alcanó	214	21’22	310	285	-25	13’4
30	05	Alcarràs	137	114’82	4.323	4.402	+79	38’3
30	06	Alcoletge	213	16’44	1.407	1.431	+24	37’0
30	45	Alfarràs	281	11’44	3.189	3.141	-48	274’6
30	07	Alfés	236	32’00	355	345	-10	10’8
30	08	Alguaire	304	50’19	2.883	2.874	-9	57’3
30	09	Almacelles	247	48’91	5.321	5.431	+110	111’0
30	10	Almatret	462	56’21	619	583	-36	10’4
30	11	Almenar	329	66’37	3.636	3.631	-5	54’7
30	12	Alpicat**	264	70’63	2.994	3.439	+445	48’7
30	13	Artesa de Lleida	202	24’06	1.178	1.182	+4	49’1
30	14	Aspa	256	10’08	288	274	-14	27’2
30	15	Bell-lloc d’ Urgell *	196	35’12	2.178	2.208	+30	62’9
30	46	Bellvís *	207	46’20	2.460	2.341	-119	50’7
30	16	Benavent de Segrià	234	7’55	737	732	-5	97’0
30	47	Bovera	297	30’90	545	504	-41	16’3
30	48	Castelldans	353	64’92	1.047	1.016	-31	15’7
30	49	Cogul, el	279	17’44	264	246	-18	14’1
30	17	Corbins	211	21’27	1.048	1.034	-14	48’6
30	50	Flix	47	116’29	5.009	5.003	-6	43’0
30	18	Fondarella *	243	5’41	516	547	+31	101’1
30	19	Golmés *	275	16’59	1.293	1.243	-50	74’9
30	51	Granadella, la	628	88’92	955	948	-7	10’7
30	20	Granja d’ Escarp, la	78	38’67	1.167	1.165	-2	30’1
30	52	Granyena de les Garrigues	636	20’33	222	200	-22	9’8
30	21	Llardecans	397	65’55	742	725	-17	11’1
30	22	**Lleida**	155	211’71	106.841	107.749	+908	508’9
30	23	Maials	395	57’14	1.262	1.188	-74	20’8
30	24	Massalcoreig	94	13’76	722	710	-12	51’6
30	53	Menàrguens	205	20’31	1.011	915	-96	45’1
30	25	Miralcamp *	287	14’62	1.194	1.203	+9	82’3
30	26	Mollerussa *	250	7’05	8.350	8.462	+112	1.200’3
30	27	Montoliu de Lleida	166	7’24	423	447	+24	61’7
30	28	Palau d’Anglesola, el *	250	12’31	1.672	1.635	-37	132’8
30	54	Poal, el *	216	8’87	728	689	-39	77’7
30	55	Portella, la	259	12’45	595	634	+39	50’9
30	29	Puigverd de Lleida	219	12’42	995	941	-54	75’8
30	56	Riba-roja d’ Ebre	76	100’02	2.104	1.774	-330	17’7
30	30	Rosselló	252	9’90	1.544	1.556	+12	157’2
30	31	Sarroca de Lleida	201	41’24	549	523	-26	12’7
30	32	Seròs	102	86’20	1.948	1.939	-9	22’5
30	33	Sidamon *	232	8’06	447	458	+11	56’8
30	57	Soleràs, el	381	12’62	541	510	-31	40’4
30	34	Sudanell	152	8’37	771	816	+45	97’5
30	35	Soses	118	30’30	1.503	1.529	+26	50’5

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN ($hab./km^2$)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
30	36	Sunyer	211	12’49	320	322	+2	25’8
30	58	Térmens	208	27’37	1.422	1.425	+3	52’1
30	59	Torms, els	476	13’38	234	225	-9	16’8
30	37	Torrebesses	287	27’61	380	369	-11	13’4
30	38	Torrefarrera	214	23’48	1.443	1.481	+38	63’1
30	60	Torregrossa *	232	40’48	2.341	2.270	-71	56’1
30	61	Torrelameu	201	10’92	611	599	-12	54’9
30	39	Torres de Segre	119	50’56	1.850	1.891	+41	37’4
30	40	Torre-Serona	197	5’79	295	308	+13	53’2
30	41	Vilanova de la Barca	195	21’15	896	871	-25	41’2
30	42	Vilanova de Segrià	255	8’48	705	689	-16	81’3
30	62	Vila-sana *	265	19’31	556	543	-13	28’1
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 245 σ = 112 CV = 0’46**	**2.194’66**	**194.968**	**195.613**	**+645**	**$\overline{X}$ = 78’7 σ = 160’3 CV = 2’04**

Municipios que gana la nueva comarca.

*: Este municipio ha pasado a formar parte de la nueva comarca creada con posterioridad, la nº 41, llamada *El Pla d’Urgell*.
**: Este municipio experimentó en 1991 la segregación de una parte del mismo, constituyéndose el nuevo municipio de Gimenells i el Pla de la Font.

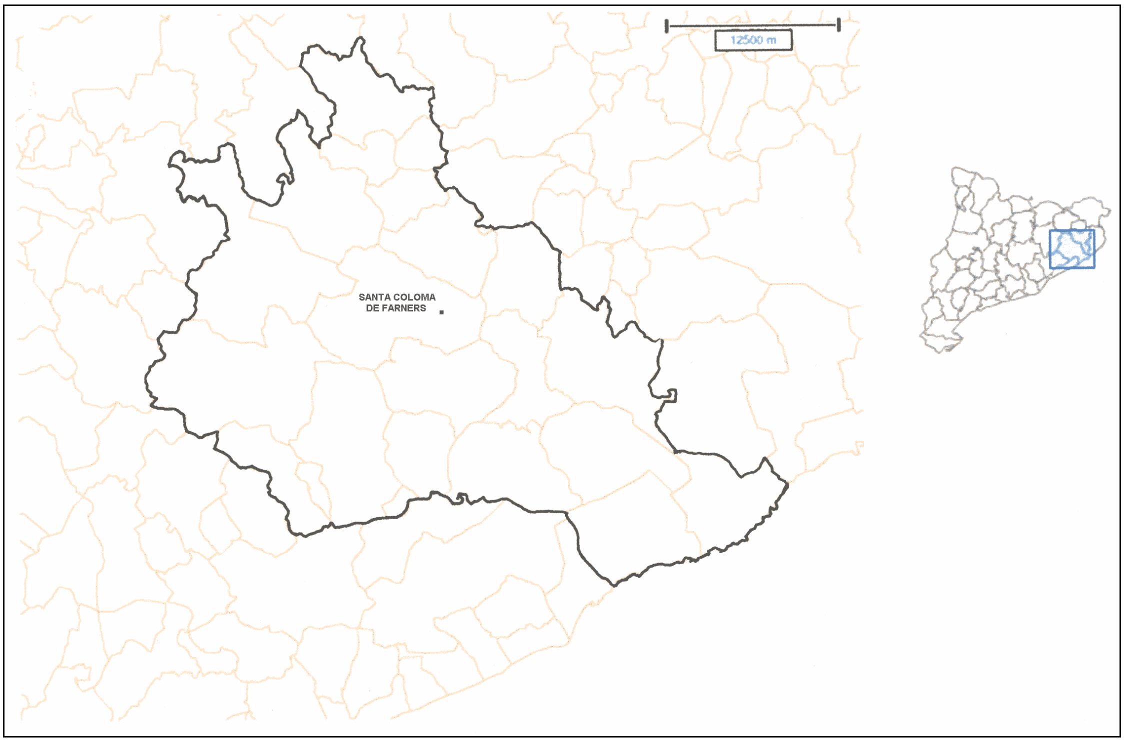
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	35’40	35’37	1’00
Población (nº habit.)	3.155	13.470	4’27

- Densidad de población comarcal (1986): 89’1 $hab./km^2$

- Capital comarcal: Lleida.

31 NUEVA COMARCA DE *LA SELVA*



31 Nueva comarca de La Selva.

La comarca de La Selva (31) pierde los siguientes municipios:

- 04 Blanes
- 09 Fogars de Tordera
- 17 Riudellots de la Selva
- 23 Susqueda

Esta comarca no gana ningún municipio.

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguente cuadro:

Nº de municipios: 22

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
31	01	Amer	186	39’00	3.303	2.410	-893	61’8
31	02	Anglès	181	16’06	5.028	5.132	+104	319’6
31	03	Arbúcies	291	86’94	4.081	4.166	+85	47’9
31	05	Breda	169	5’09	3.121	3.170	+49	622’8
31	06	Brunyola	247	36’61	499	405	-94	11’1
31	07	Caldes de Malavella	84	57’19	2.812	2.777	-35	48’6
31	08	Cellera de Ter, la	166	14’63	2.046	2.005	-41	137’0
31	10	Hostalric	189	3’39	2.672	2.685	+13	792’0
31	11	Lloret de Mar	5	47’87	10.463	13.110	+2.647	273’9
31	12	Maçanes	164	25’68	490	466	-24	18’1
31	13	Maçanet de la Selva	100	45’21	2.135	2.484	+349	54’9
31	14	Osor	340	52’62	484	517	+33	9’8
31	15	Riells i Viabrea	487	23’53	538	742	+204	31’5
31	16	Riudarenes	84	46’73	1.143	1.143	0	24’5
31	18	St. Feliu de Buixalleu	402	61’46	615	615	0	10’0
31	19	St. Hilari Sacalm	741	83’56	4.375	4.505	+130	53’9
31	20	St. Julià del Llor-Bonmatí	160	14’85	0	869	+869	58’5
31	21	**Sta. Coloma de Farners**	142	71’31	6.993	7.581	+588	106’3
31	22	Sils	76	30’32	1.865	2.058	+193	67’9
31	24	Tossa de Mar	60	38’18	2.979	3.361	+382	88’0
31	25	Vidreres	93	48’61	3.207	3.591	+384	73’9
31	26	Vilobí d’ Onyar	148	32’84	1.810	1.924	+114	58’6
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 205 σ = 162 CV = 0’79**	**881’68**	**60.659**	**65.716**	**+5.057**	**$\overline{X}$ = 135’4 σ = 197’9 CV = 1’46**

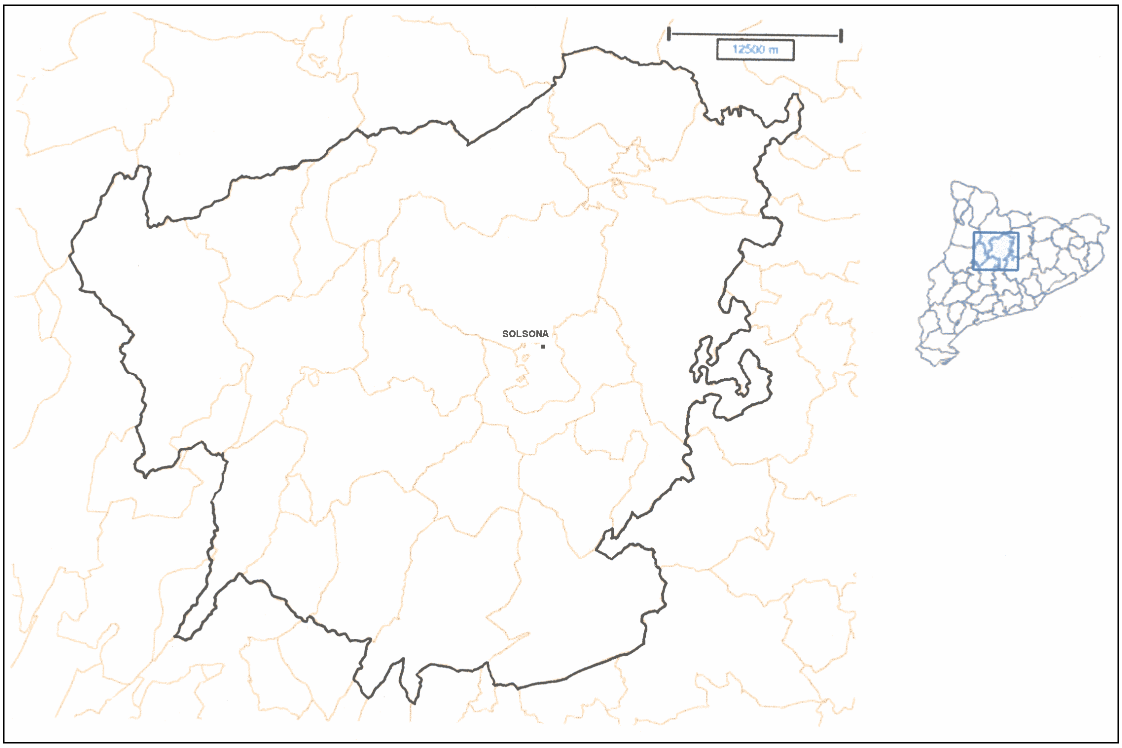
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	40’08	22’64	0’57
Población (nº habit.)	2.987	2.810	0’94

- Densidad de población comarcal (1986): 74’5 hab./km^2

- Capital comarcal: St. Coloma de Farners.

32 NUEVA COMARCA DEL *SOLSONÈS*



32 Nueva comarca del Solsonés.

La comarca del Solsonés (32) no pierde ningún municipio.

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 04 de la comarca 04 (Alt Urgell)	Bassella 16
- 14 de la comarca 04 (Alt Urgell)	Peramola 19
- 12 de la comarca 04 (Alt Urgell)	Oliana 18
- 09 de la comarca 22 (Noguera)	Baronia de Rialb 15
- 31 de la comarca 22 (Noguera)	Tiurana 21
- 34 de la comarca 22 (Noguera)	Vilanova de l' Aguda 24
- 01 de la comarca 29 Segarra)	Biosca 17
- 13 de la comarca 29 (Segarra)	Sanaüja 20
- 19 de la comarca 29 (Segarra)	Torà 22
- 20 de la comarca 29 (Segarra)	Torrefeta i Florejacs 23

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 24

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
32	15	Baronia de Rialb	474	142'68	298	275	-23	1'9
32	16	Bassella	425	70'80	400	393	-7	5'6
32	17	Biosca	485	66'33	309	283	-26	4'3
32	01	Castellar de la Ribera	657	60'12	191	169	-22	2'8
32	02	Clariana de Cardener	500	40'41	177	157	-20	3'9
32	03	Coma i la Pedra, la	1.004	60'66	228	254	+26	4'2
32	04	Guixers	844	66'05	169	160	-9	2'4
32	05	Lladurs	834	128'69	306	259	-47	2'0
32	06	Llobera	855	38'89	261	247	-14	6'4
32	07	Navès	610	145'85	365	301	-64	2'1
32	08	Odèn	1.291	113'09	391	325	-66	2'9
32	18	Oliana	469	31'92	2.104	2.075	-29	65'0
32	09	Olius	565	53'47	444	473	+29	8'8
32	19	Peramola	566	55'58	449	408	-41	7'3
32	10	Pinell del Solsonès	648	91'14	326	273	-53	3'0
32	11	Pinós	823	103'90	466	396	-70	3'8
32	12	Riner	611	47'21	284	281	-3	6'0
32	20	Sanaüja	409	32'72	511	475	-36	14'5
32	13	St. Llorenç de Morunys	925	4'28	889	885	-4	206'8
32	14	**Solsona**	664	18'14	6.267	6.477	+210	357'1
32	21	Tiurana	387	15'33	199	213	+14	13'9
32	22	Torà	448	92'01	1.279	1.225	-54	13'3
32	23	Torrefeta i Florejacs	475	89'40	739	744	+5	8'3
32	24	Vilanova de l'Aguda	409	53'48	324	295	-29	5'5
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 641 σ = 223 CV = 0'35**	**1.622'15**	**17.376**	**17.043**	**- 333**	**$\overline{X}$ = 31'3 σ = 79'6 CV = 2'54**

Municipios que gana la nueva comarca.

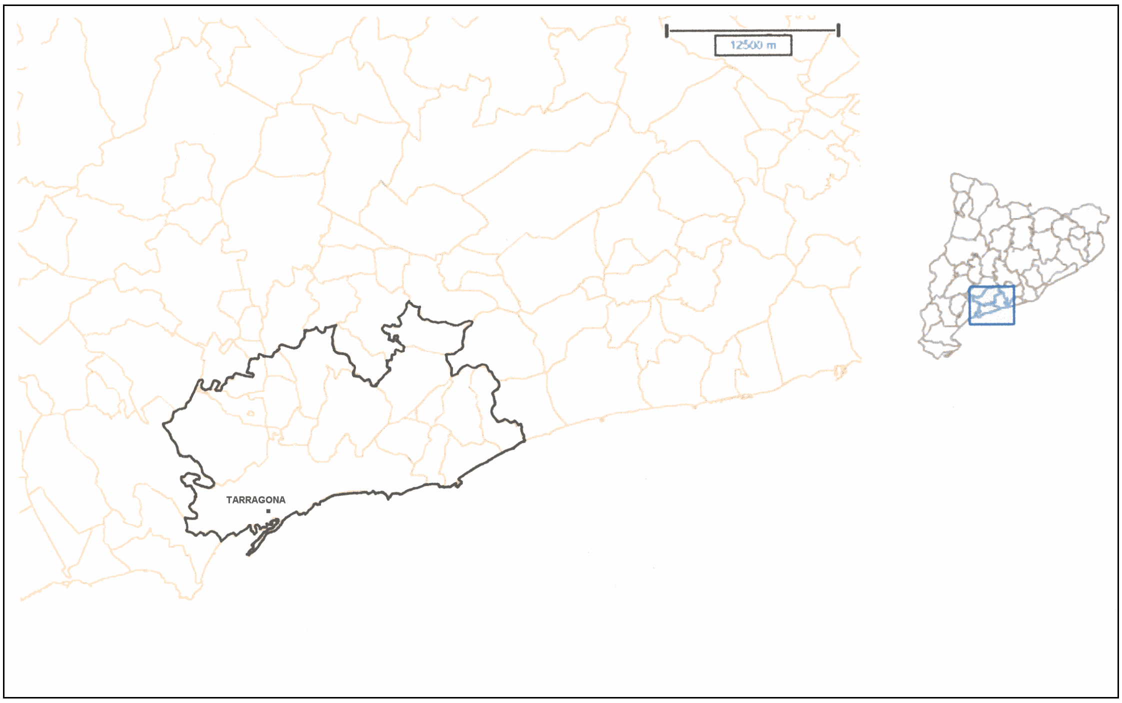
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	67'59	38'09	0'56
Población (nº habit.)	710	1.272	1'79

- Densidad de población comarcal (1986): 10'5 hab./km^2

- Capital comarcal: Solsona.

33 NUEVA COMARCA DEL *TARRAGONÈS*



33 Nueva comarca del Tarragonés.

La comarca del Tarragonés (33) pierde los siguientes municipios:

- 02 Bonastre
- 13 Renau
- 15 Roda de Berà
- 21 Villalonga del Camp
- 22 Vila-seca i Salou

Esta comarca no gana ningún municipio.

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 17

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
33	01	Altafulla	52	6’93	1.085	1.427	+342	205’9
33	03	Catllar, el	59	26’39	767	890	+123	33’7
33	04	Constantí	79	30’94	6.061	5.666	-395	183’1
33	05	Creixell	48	10’37	540	632	+92	60’9
33	06	Garidells, els	132	3’02	179	182	+3	60’3
33	07	Morell, el	103	5’94	2.214	2.248	+34	378’5
33	08	Nou de Gaià, la	94	4’30	383	370	-13	86’0
33	09	Pallaresos, els	121	5’53	364	469	+105	84’8
33	10	Perafort	125	9’68	444	498	+54	51’4
33	11	Pobla de Mafumet, la	97	6’19	833	816	-17	131’8
33	12	Pobla de Montornès, la	56	12’23	791	809	+18	66’1
33	14	Riera de Gaià, la	28	8’96	976	947	-29	105’7
33	16	Salomó	163	12’44	521	447	-74	35’9
33	17	Secuita, la	176	17’59	763	941	+178	53’5
33	18	**Tarragona**	69	62’24	109.112	106.495	-2.617	1.711’0
33	19	Torredembarra	16	8’58	5.253	5.838	+585	680’4
33	20	Vespella	191	18’24	72	69	-3	3’8
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 95** σ **= 50** **CV = 0’52**	**249’57**	**130.358**	**128.744**	**- 1.614**	$\overline{X}$ **= 231’4** σ **= 403’1** **CV = 1’74**

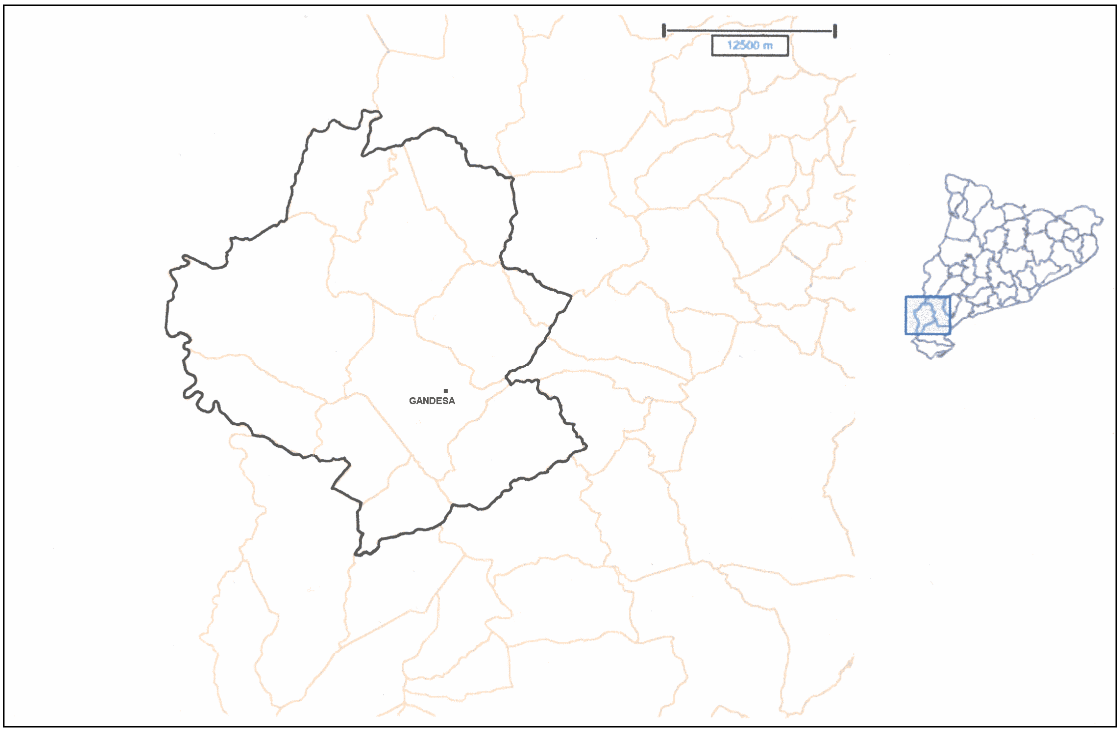
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	14’68	14’03	0’96
Población (nº habit.)	7.573	24.787	3’27

- Densidad de población comarcal (1986): 515’9 hab./km^2

- Capital comarcal: Tarragona.

34 NUEVA COMARCA DE LA *TERRA ALTA*



34 Nueva comarca de la Terra Alta.

La comarca de la Terra Alta (34) pierde los siguientes municipios:

- 01 Arnes
- 08 Horta de Sant Joan

Esta comarca no gana ningún municipio.

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 10

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	**MUN.**				**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
34	02	Batea	376	127’54	2.088	2.082	-6	16’3
34	03	Bot	289	34’70	1.027	987	-40	28’4
34	04	Caseres	359	42’58	338	343	+5	8’1
34	05	Corbera d’ Ebre	337	52’89	1.223	1.141	-82	21’6
34	06	Fatarella, la	486	56’22	1.465	1.432	-33	25’5
34	09	Pinell de Brai, el	189	56’87	1.280	1.244	-36	21’9
34	07	**Gandesa**	363	70’79	2.831	2.731	-100	38’6
34	10	Pobla de Massaluca, la	361	43’18	496	492	-4	11’4
34	11	Prat de Comte	364	26’38	257	231	-26	8’8
34	12	Vilalba dels Arcs	442	67’08	788	808	+20	12’0
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 357** **σ = 76** **CV = 0’21**	**578’23**	**11.793**	**11.491**	**- 302**	$\overline{X}$ **= 19’3** **σ = 9’3** **CV = 0’48**

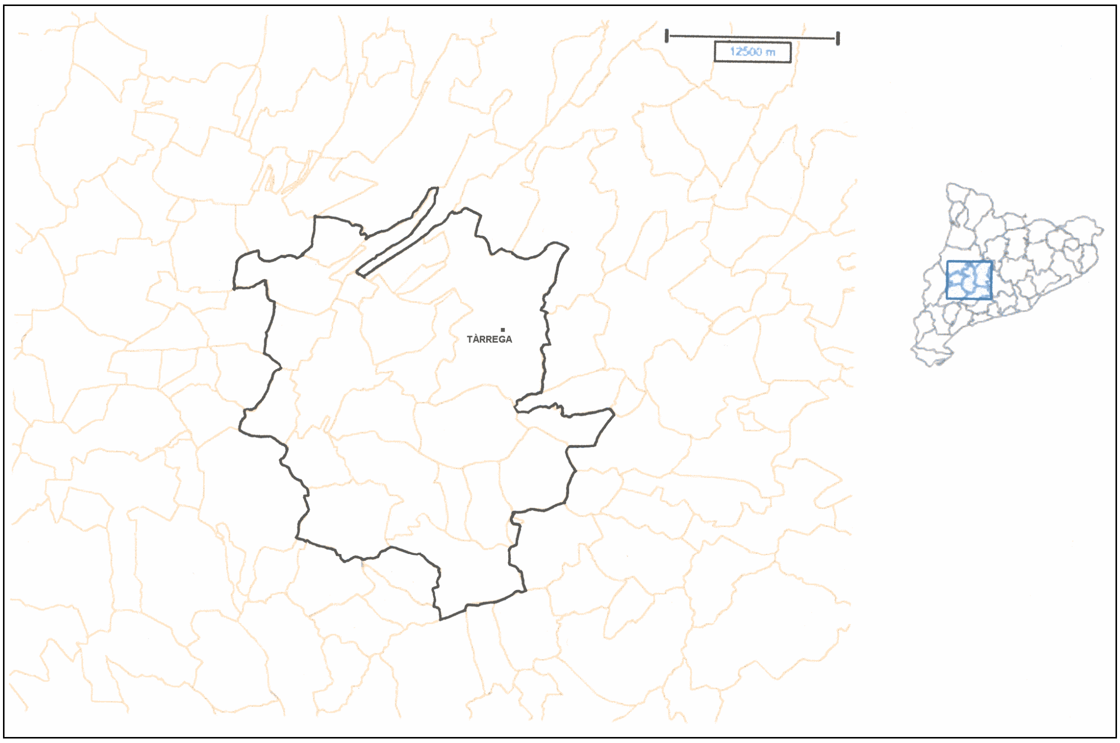
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	57’82	26’67	0’46
Población (nº habit.)	1.149	744	0’65

- Densidad de población comarcal (1986): 19’9 hab./km^2

- Capital comarcal: Gandesa.

35 NUEVA COMARCA DEL *URGELL*



35 Nueva comarca del Urgell.

La comarca del Urgell (35) pierde los siguientes municipios:

- 01 Agramunt
- 07 Castellserà
- 15 Omells de Na Gaia, els
- 16 Ossó de Sió
- 18 Puigverd d'Agramunt
- 26 Vila-sana

Esta comarca no gana ningún municipio.

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 20

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
35	02	Anglesola	335	23'68	1.349	1.337	-12	56'5
35	03	Barbens *	283	7'50	794	825	+31	110'0
35	04	Belianes	373	15'77	638	606	-32	38'4
35	05	Bellpuig	308	35'04	3.684	3.777	+93	107'8
35	06	Castellnou de Seana *	269	16'33	812	790	-22	48'4
35	08	Ciutadilla	519	16'68	289	259	-30	15'5
35	09	Fuliola, la	275	11'28	1.323	1.334	+11	118'3
35	10	Guimerà	555	25'42	512	448	-14	19'2
35	11	Ivars d' Urgell *	265	26'99	1.865	1.802	-63	66'8
35	12	Maldà	428	31'61	376	342	-34	10'8
35	13	Montornès de Segarra	605	11'99	149	132	-17	11'0
35	14	Nalec	487	9'34	115	107	-8	11'5
35	17	Preixana	328	21'14	486	473	-13	22'4
35	19	St. Martí de Riucorb	409	35'08	854	825	-29	23'5
35	20	**Tàrrega**	373	88'22	11.046	11.105	+59	125'9
35	21	Tornabous	289	20'30	958	943	-15	46'5
35	22	Vallbona de les Monges	481	44'97	275	293	+18	6'5
35	23	Verdú	434	35'18	954	934	-20	26'5
35	24	Vilagrassa	355	19'76	460	408	-52	20'6
35	25	Vilanova de Bellpuig *	290	13'75	1.273	1.276	+3	92'8
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 383** **σ = 100** **CV = 0'26**	**510'03**	**28.202**	**28.056**	**- 146**	$\overline{X}$ **= 48'9** **σ = 39'4** **CV = 0'81**

* : Estos municipios han pasado a formar parte de la nueva comarca creada con posterioridad, la nº 41, llamada *El Pla d'Urgell*.

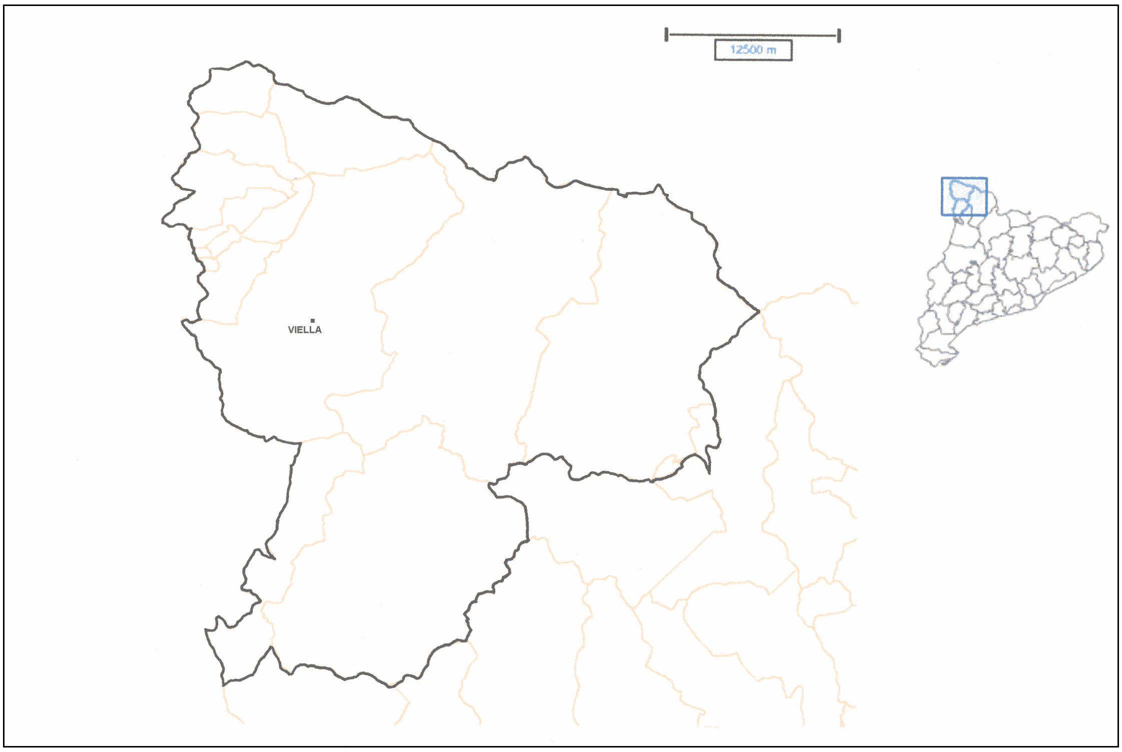
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	25’50	17’43	0’68
Población (nº habit.)	1.403	2.363	1’68

- Densidad de población comarcal (1986): 55’0 hab./km^2

- Capital comarcal: Tàrrega.

36 NUEVA COMARCA DE LA *VALL D'ARAN*



36 Nueva comarca de la Vall d'Aran.

La comarca de la Vall d'Aran (36) no pierde ningún municipio.

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 02 de la comarca 25 (Pallars Sobirà)	Alt Àneu 10
- 05 de la comarca 25 (Pallars Sobirà)	Esterri d'Àneu 12
- 02 de la comarca 24 (Pallars Jussà)	Barruera 11
- 17 de la comarca 24 (Pallars Jussà)	Vilaller 13

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 13

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
36	10	Alt Àneu	1.076	193'79	322	333	+11	1'7
36	01	Alt Aran	1.268	248'89	1.129	1.146	+17	4'6
36	02	Arres	1.000	11'53	53	49	-4	4'2
36	11	Barruera*	1.130	219'53	583	550	-33	2'5
36	03	Bausen	931	17'63	79	63	-16	3'6
36	04	Bordes, les	852	21'55	167	192	+25	8'9
36	05	Bossòst	710	28'15	727	784	+57	27'9
36	06	Canejan	906	48'31	137	122	-15	2'5
36	12	Esterri d'Àneu	957	8'52	566	586	+20	68'8
36	07	Les	634	23'29	559	622	+63	26'7
36	08	**Viella-Mig Aran**	974	205'74	2.874	2.969	+95	14'4
36	13	Vilaller *	981	58'68	1.005	628	-377	10'7
36	09	Vilamòs	1.255	15'39	83	87	+4	5'7
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 975** **σ = 177** **CV = 0'18**	**1.101'00**	**8.284**	**8.131**	**-153**	$\overline{X}$ **= 14'0** **σ = 17'9** **CV = 1'28**

Municipios que gana la nueva comarca.

* : Este municipio, denominado "la Vall de Boí", ha pasado a formar parte de la nueva comarca creada con posterioridad, la nº 39, llamada *Alta Ribagorça*.

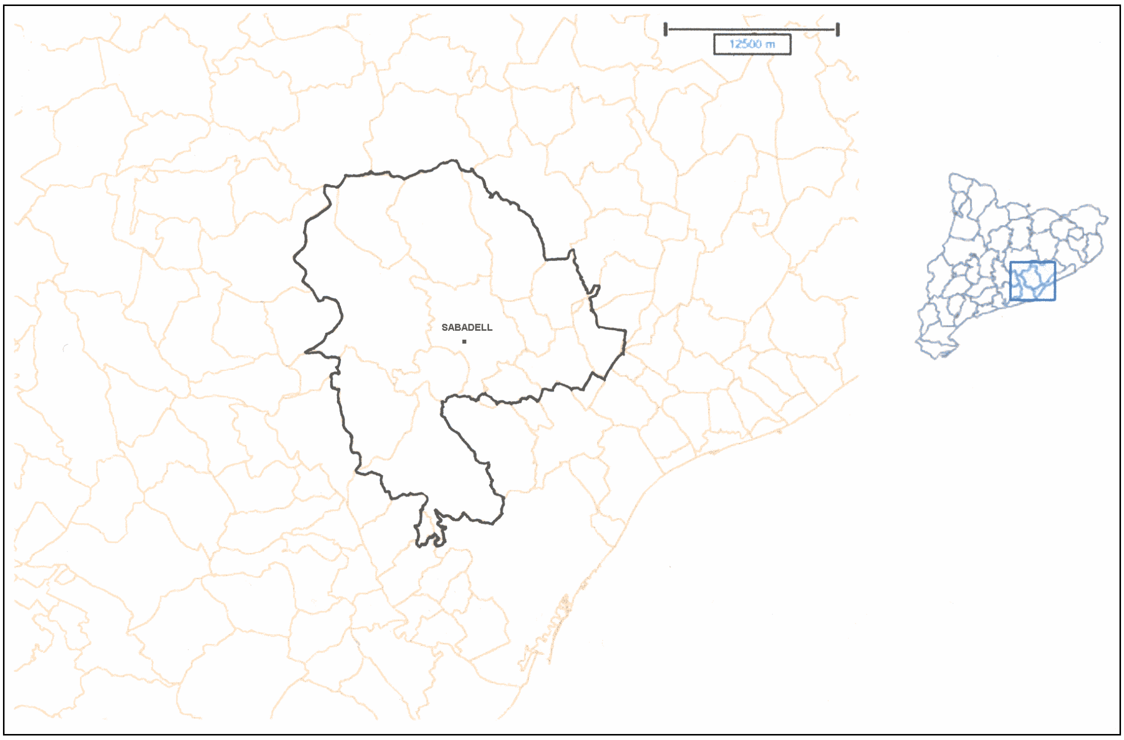
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	84’69	89’92	1’06
Población (nº habit.)	626	747	1’19

- Densidad de población comarcal (1986): 7’4 hab./km^2

- Capital comarcal: Viella (Vielha)-Mig Aran.

37 NUEVA COMARCA DEL *VALLÈS OCCIDENTAL*



37 Nueva comarca del Vallès Occidental.

La comarca del Vallès Occidental (37) pierde los siguientes municipios:

- 02 Caldes de Montbui
- 04 Castellbisbal
- 05 Cerdanyola del Vallès
- 06 Gallifa
- 08 Montcada i Reixac
- 11 Rellinars
- 12 Ripollet
- 16 Sant Llorenç Savall
- 21 Ullastret
- 22 Vacarisses
- 23 Viladecavalls

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	Municipio y nº en comarca definitiva
- 21 de la comarca 38 (Vallès Oriental)	Mollet del Vallès 24

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 13

CODIGO		MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
COM.	MUN.				1981	1986	Δ 86/81	(1986)
37	01	Barberà del Vallès	146	8’77	28.861	29.881	+1.020	3.407’2
37	03	Castellar del Vallès	331	44’70	11.008	11.637	+629	260’3
37	07	Matadepera	423	24’83	2.376	3.495	+1.119	140’8
37	24	Mollet del Vallès	65	10’72	35.480	33.223	-2.257	3.099’2
37	09	Palau de Plegamans	130	14’93	4.209	4.724	+515	316’4
37	10	Polinyà	158	8’93	2.321	2.738	+417	306’6
37	13	Rubí	123	32’01	43.839	46.360	+2.521	1.448’3
37	14	**Sabadell**	190	36’47	186.123	186.115	-8	5.103’2
37	15	Sant Cugat del Vallès	124	48’32	30.633	34.063	+3.430	704’9
37	17	Sant Quirze del Vallès	188	14’27	5.115	6.500	+1.385	455’5
37	18	Sta. Perpètua de la Mogoda	74	15’70	13.549	15.051	+1.502	958’7
37	19	Sentmenat	241	28’24	3.674	3.963	+289	140’3
37	20	Terrassa	277	70’10	155.614	156.458	+844	2.231’9
		TOTALES	**$\overline{X}$ = 190 σ = 100 CV = 0’52**	**357’99**	**522.802**	**534.208**	**+11.406**	**$\overline{X}$ = 1.428’7 σ = 1.512’1 CV = 1’06**

Municipio que gana la nueva comarca.

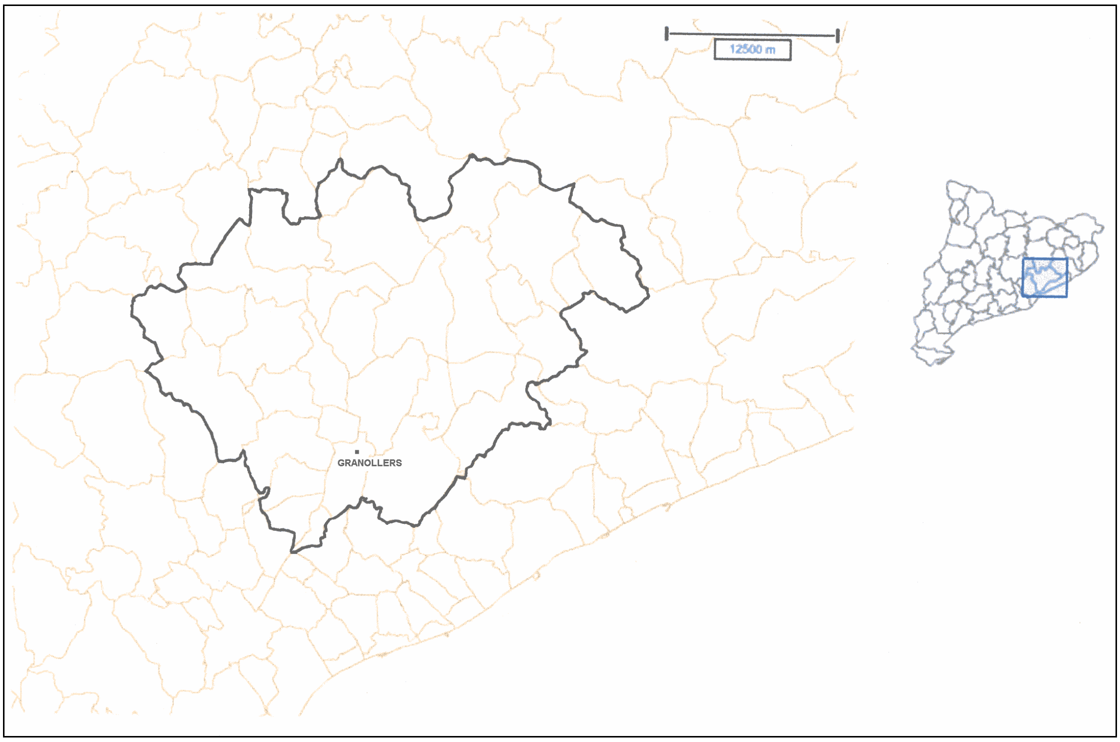
- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS		
	$\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	27’54	17’76	0’65
Población (nº habit.)	41.093	57.468	1’40

- Densidad de población comarcal (1986): 1.492’2 hab./km^2

- Capital comarcal: Sabadell.

38 NUEVA COMARCA DEL *VALLÈS ORIENTAL*



38 Nueva comarca del Vallès Oriental.

La comarca del Vallès Oriental (38) pierde los siguientes municipios:

- 08 Castellcir
- 09 Castellterçol
- 13 Granera
- 16 Llagosta, la
- 20 Martorelles
- 21 Mollet del Vallès
- 24 Montornès del Vallès
- 29 Sant Celoni
- 32 Sant Fost de Campsentelles
- 36 Santa Maria de Martorelles
- 39 Vallgorguina
- 40 Vallromanes
- 41 Vilalba Sasserra

Esta comarca gana los siguientes municipios:

Nº y comarca de procedencia (según el plano nº: 4)	**Municipio y nº en comarca definitiva**
- 29 de la comarca 23 (Osona)	Sant Martí de Centelles 44
- 06 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Gallifa 43
- 02 de la comarca 37 (Vallès Occidental)	Caldes de Montbui 42

Los municipios que restan en esta comarca se indican en el siguiente cuadro:

Nº de municipios: 31

CODIGO COM.	CODIGO MUN.	MUNICIPIO	ALTITUD DE LA CAPITAL MUNICIPAL (m.s.n.m.)	SUPERFICIE MUNICIPAL (km^2)	POBLACION DE DERECHO (hab.) 1981	1986	Δ 86/81	DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2) (1986) (2002)
38	01	Aiguafreda	404	7'96	2.034	2.019	-15	253'6
38	02	Ametlla del Vallès, l'	321	14'12	1.889	2.554	+665	180'9
38	03	Bigues i Riells	307	28'67	1.467	1.983	+516	69'2
38	42	Caldes de Montbui	203	37'94	10.153	10.407	+254	274'3
38	04	Campins	321	7'38	158	187	+29	25'3
38	05	Canovelles	175	6'75	12.138	12.557	+419	1.860'3
38	06	Cànoves	346	28'41	576	738	+162	26'0
38	07	Cardedeu	193	12'89	7.240	8.055	+815	624'9
38	10	Fogars de Montclús	621	40'15	278	278	0	6'9
38	11	Franqueses del Vallès, les	232	29'45	8.710	9.403	+693	319'3
38	43	Gallifa	502	16'37	72	80	+8	4'9
38	12	Garriga, la	252	19'72	8.178	8.636	+458	437'9
38	14	**Granollers**	145	14'89	45.348	47.967	+2.619	3.221'4
38	15	Gualba	177	23'24	631	587	-44	25'3
38	17	Lliçà de Munt	145	21'98	2.655	3.775	+1.120	171'7
38	18	Lliçà de Vall	125	10'66	1.703	2.041	+338	191'5
38	19	Llinars del Vallès	198	27'52	4.693	5.025	+336	182'6
38	22	Montmany-Figaró	330	14'70	634	632	-2	43'0
38	23	Montmeló	72	4'11	6.871	6.956	+85	1.692'5
38	25	Montseny	528	27'02	269	276	+7	10'2
38	26	Parets del Vallès	94	8'98	8.745	9.869	+1.124	1.099'0
38	27	Roca del Vallès, la	123	48'80	5.545	5.144	-401	105'4
38	28	Sant Antoni de Vilamajor	258	13'92	1.654	1.821	+167	130'8
38	30	St. Esteve de Palautordera	231	10'73	968	1.047	+79	97'6
38	31	Sant Feliu de Codines	480	15'18	3.150	3.360	+44	221'3
38	44	Sant Martí de Centelles	651	25'70	738	715	-23	27'8
38	33	Sant Pere de Vilamajor	305	34'74	702	849	+147	24'4
38	34	Sant Quirze Safaja	627	25'89	321	252	-69	9'7
38	35	Santa Eulàlia de Ronçana	162	13'99	2.346	2.489	+143	177'9
38	37	Sta. Maria de Palautordera	208	17'05	4.159	4.464	+305	261'8
38	38	Tagamanent	315	43'80	132	135	+3	3'1
		TOTALES	$\overline{X}$ **= 292** σ **= 158** **CV = 0'54**	**652'71**	**144.157**	**154.301**	**+10.144**	$\overline{X}$ **= 380'0** σ **= 686'0** **CV = 1'81**

Municipios que gana la nueva comarca.

- Otras características estadísticas del municipio medio:

CARACTERISTICAS	PARAMETROS $\overline{X}$	σ	CV
Superficie (km^2)	21'06	11'38	0'54
Población (nº habit.)	4.977	8.617	1'73

- Densidad de población comarcal (1986): 236'4 hab./km^2

- Capital comarcal: Granollers.

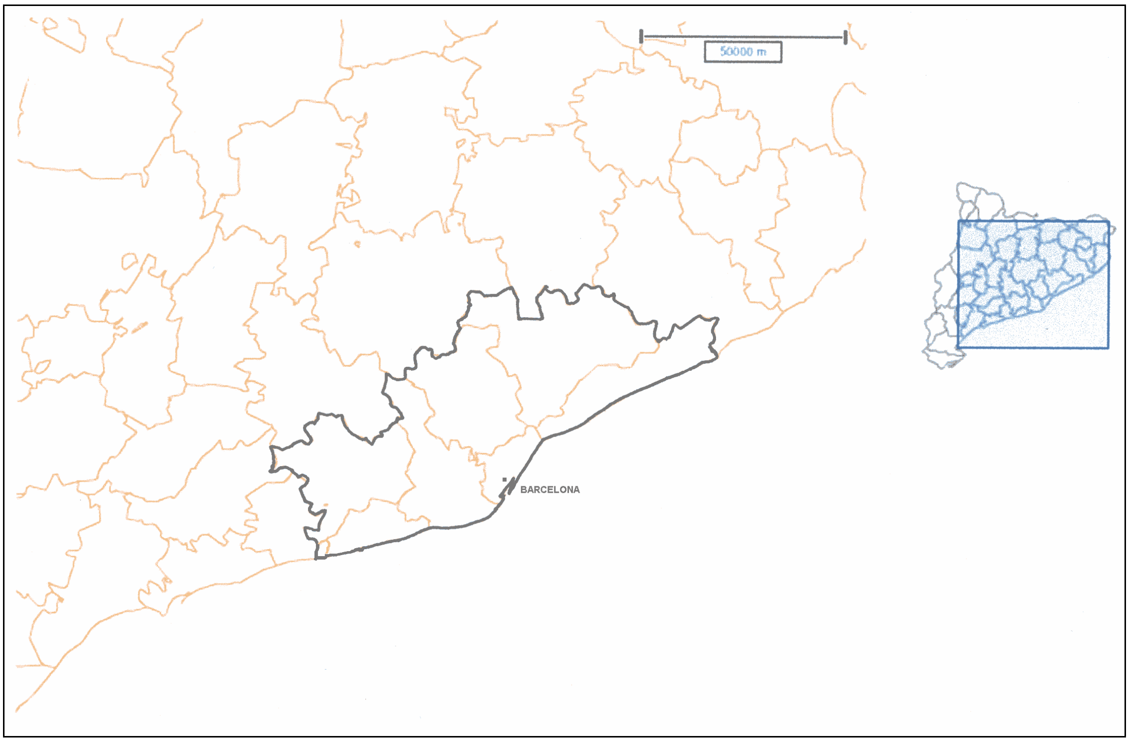
ANEXO 7

LAS NUEVAS REGIONES RESULTANTES

ANEXO 7

LAS NUEVAS REGIONES RESULTANTES

01 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *BARCELONA* (comarcas clásicas)



01 Nueva región o veguería de Barcelona (comarcas clásicas).

Nº de comarcas: 7

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
01	03	Alt Penedès	Vilafranca del Penedès	25	299	515’00	63.534	65.601	+2.067	127’4
01	10	Baix Llobregat	St. Feliu de Llobregat	27	110	474’05	516.360	519.232	+2.872	1.095’3
01	12	Barcelonès	Barcelona	7	46	155’52	2.513.544	2.435.775	-77.769	15.662’1
01	16	Garraf	Vilanova i la Geltrú	8	108	261’49	70.530	73.016	+2.486	279’2
01	20	Maresme	Mataró	30	75	396’20	253.527	269.241	+15.714	678’4
01	37	Vallès Occidental	Sabadell	23	227	618’59	608.477	626.303	+17.826	1.012’5
01	38	Vallès Oriental	Granollers	41	274	813’96	214.777	224.780	+10.003	276’1
Resumen	$\sum x_i$ =		**Barcelona**	**161**	**----**	**3.234’81**	**4.240.749**	**4.213.948**	**-26.801**	**----**
Parámetros	$\bar{x}$ =		**(cabeza**	**23**	**163**	**462’12**	**605.821**	**601.993**	**-3.828**	**2.733’0**
Estadísticos	σ =		**de**	**11**	**94**	**203’47**	**802.233**	**773.743**	**-28.490**	**5.289’0**
	CV =		**región)**	**0’49**	**0’58**	**0’44**	**1’32**	**1’29**	**-0’03**	**1’94**

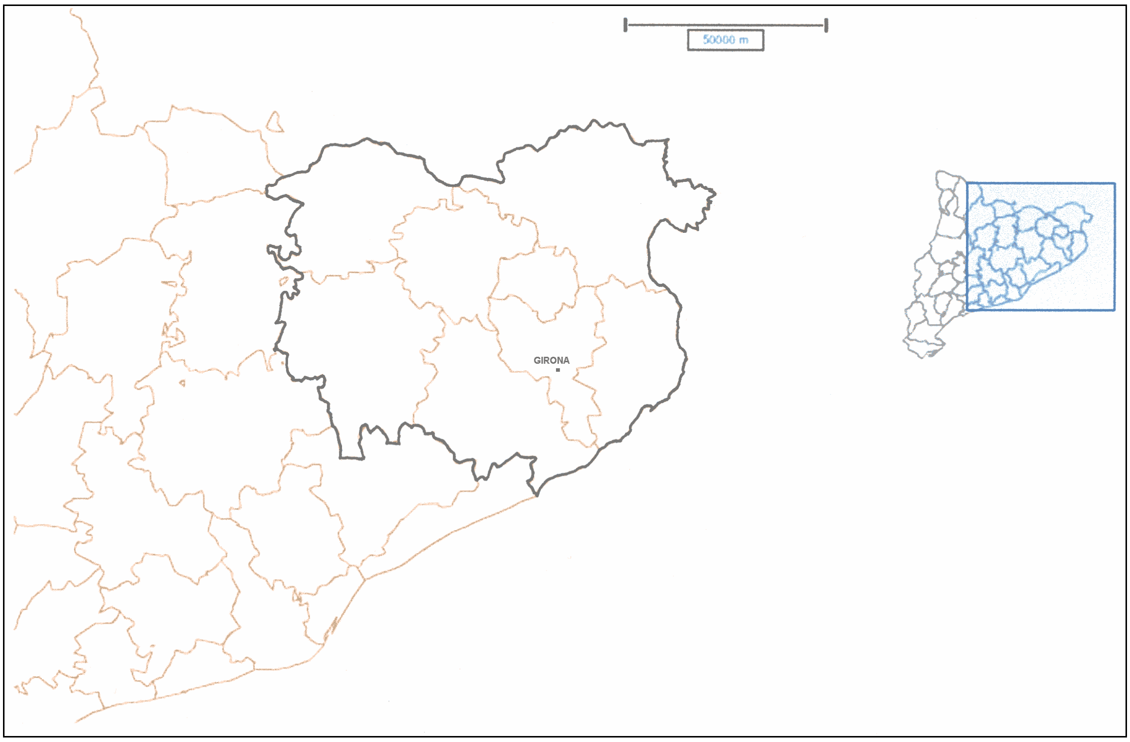
$\forall\ i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

- Desviación media de la densidad de población: 3.694’0 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 1.302’7 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 233.

02 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *GIRONA*
(comarcas clásicas)



02 Nueva región o veguería de Girona (comarcas clásicas).

Nº de comarcas: 8

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	**COM.**						**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
02	02	Alt Empordà	Figueres	68	82	1.342'43	80.790	85.196	+4.406	63'5
02	09	Baix Empordà	La Bisbal d'Empordà	36	50	700'48	81.990	82.470	+480	117'7
02	18	Garrotxa, la	Olot	21	353	734'18	45.245	45.162	-83	61'5
02	19	Gironès	Girona	38	147	838'18	136.637	142.746	+6.109	170'3
02	23	Osona	Vic	47	632	1.191'40	111.518	111.755	+237	93'8
02	28	Ripollès	Ripoll	24	999	1.031'16	33.102	32.086	-1.016	31'1
02	31	Selva, la	Sta. Coloma de Farners	26	192	995'50	82.606	89.780	+7.174	90'2
02		Pla de l'Estany	Banyoles			262'00		21.382		
Resumen	**$\sum x_i$ =**		**Girona**	**260**	**----**	**6.833'33**	**571.888**	**589.195**	**+17.307**	**----**
Parámetros	**$\bar{x}$ =**		**(cabeza**	**37**	**351**	**976'19**	**81.698**	**84.171**	**+2.473**	
Estadísticos	**σ =**		**de**	**15**	**323**	**219'57**	**32.949**	**34.768**	**+1.819**	
	CV =		**región)**	**0'41**	**0'92**	**0'22**	**0'40**	**0'41**	**+0'01**	**0'47**

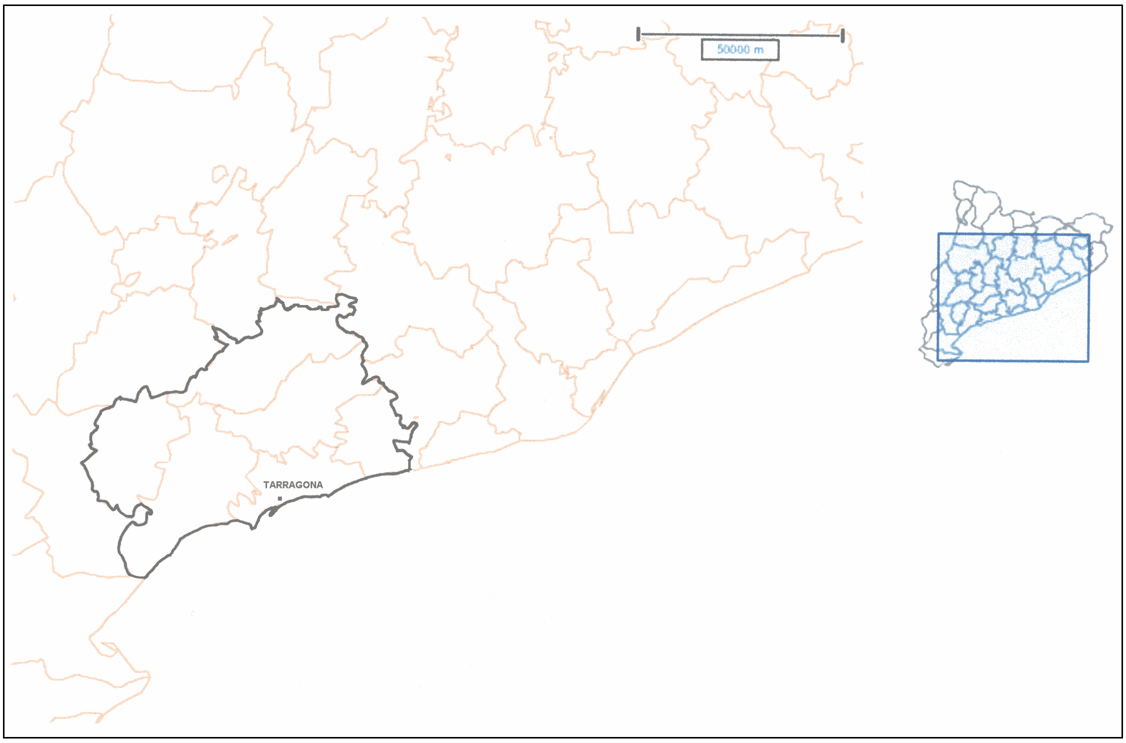
$\forall\, i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$

- Desviación media de la densidad de población: 32'3 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 86'2 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 179.

03 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DEL *CAMP DE TARRAGONA* (comarcas clásicas)



03 Nueva región o veguería del Camp de Tarragona (comarcas clásicas).

Nº de comarcas: 6

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
03	01	Alt Camp	Valls	23	317	548’25	33.027	33.757	+730	61’6
03	07	Baix Camp	Reus	27	319	674’16	118.091	123.324	+5.233	182’9
03	11	Baix Penedès	El Vendrell	12	158	264’06	29.023	32.547	+3.524	123’3
03	15	Conca de Barberà	Montblanc	21	580	637’95	18.140	18.279	+139	28’7
03	26	Priorat	Falset	24	376	517’31	10.529	10.161	-368	19’6
03	33	Tarragonès	Tarragona	22	99	345’02	149.871	149.516	-355	433’3
Resumen	$\sum x_i$ =	**Girona**	**129**	**---**	**2.986’75**	**358.681**	**367.584**	**+8.903**	**----**	
Parámetros	$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**22**	**308**	**497’79**	**59.780**	**61.264**	**+1.484**	**141’6**	
Estadísticos	σ =	**de**	**7**	**155**	**148’13**	**53.755**	**54.284**	**+529**	**142’1**	
	CV =	**región)**	**0’22**	**0’50**	**0’30**	**0’90**	**0’89**	**-0’01**	**1’00**	

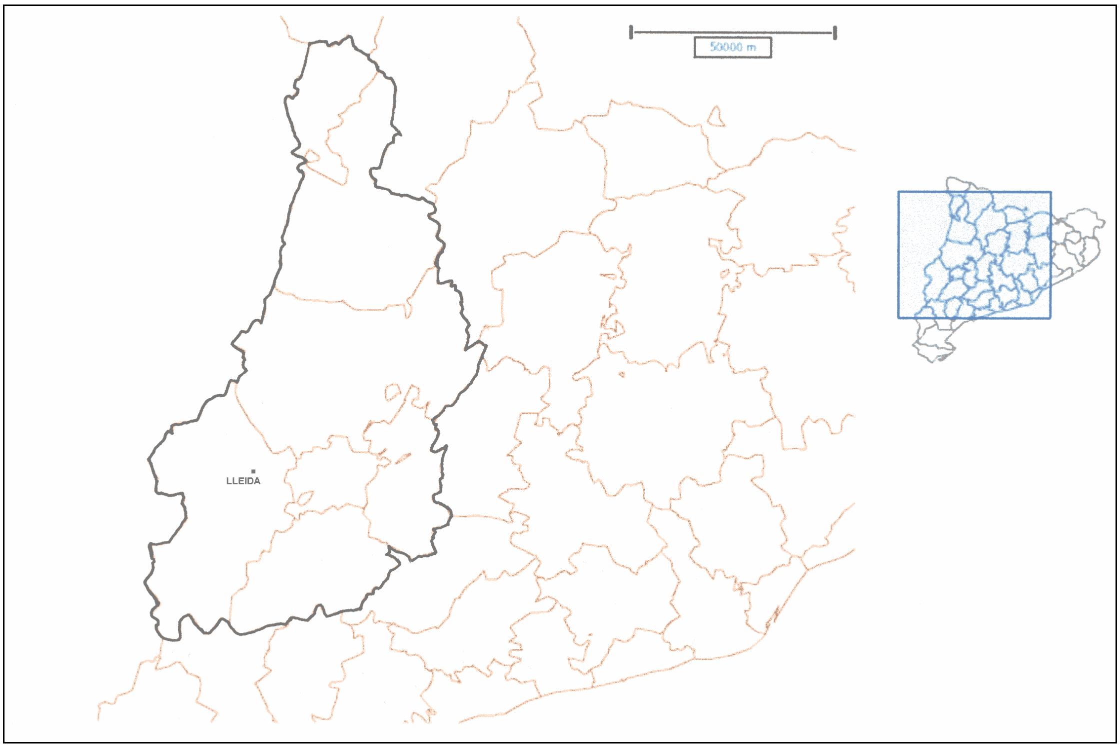
$\forall$ i $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

- Desviación media de la densidad de población: 111’0 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 123’1 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 142.

04 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *PONENT*
(comarcas clásicas)



04 Nueva región o veguería de Ponent (comarcas clásicas).

Nº de comarcas: 7

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	**COM.**						**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
04	17	Garrigues, les	Les Borges Blanques	25	446	840’19	22.809	22.404	-405	26’7
04	22	Noguera, la	Balaguer	35	344	1.840’68	45.350	45.034	-316	24’5
04	24	Pallars Jussà	Tremp	17	793	1.716’72	18.768	17.437	-1.331	10’2
04	30	Segrià	Lleida	42	223	1.469’00	169.066	170.658	+1.592	116’2
04	30	Urgell,l’	Tàrrega	26	379	679’21	35.342	35.332	-10	52’0
		Pla d’Urgell	Mollerussa			304’00		28.675		
		Alta Ribagorça	Pont de Suert			426’00		3.626		
Resumen		$\sum x_i$ =	**Lleida**	**145**	**----**	**6.545’80**	**291.335**	**290.865**	**-470**	**----**
Parámetros		$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**29**	**437**	**1.309’16**	**58.267**	**58.173**	**-94**	**45’9**
Estadísticos		σ =	**de**	**9**	**192**	**467’11**	**56.189**	**57.072**	**+883**	**37’6**
		CV =	**región)**	**0’30**	**0’44**	**0’36**	**0’96**	**0’98**	**+0’02**	**0’82**

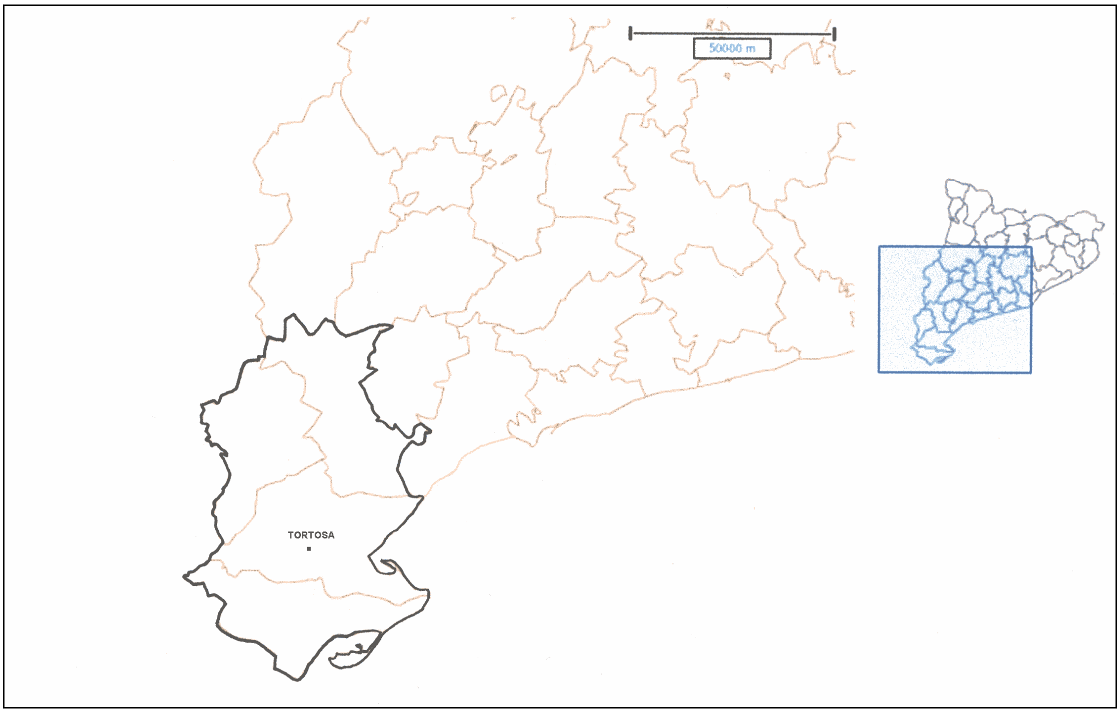
$\forall$ i $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

- Desviación media de la densidad de población: 30’5 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 44’4 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 109.

05 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *TERRES DE L'EBRE*
(comarcas clásicas)



05 Nueva región o veguería de les Terres de l'Ebre (comarcas clásicas).

Nº de comarcas: 4

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	**COM.**						**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
05	08	Baix Ebre	Tortosa	14	87	1.036'64	65.961	67.847	+1.886	65'4
05	21	Montsià	Amposta	11	134	659'95	49.564	50.513	+949	76'5
05	27	Ribera d'Ebre	Móra d'Ebre	14	103	825'29	24.984	23.638	-1.346	28'6
05	34	Terra Alta	Gandesa	12	385	740'04	13.732	13.443	-289	18'2
Resumen		$\sum x_i$ =	**Tortosa**	**51**	**----**	**3.261'92**	**154.241**	**155.441**	**+1.200**	**----**
Parámetros		$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**13**	**177**	**815'48**	**38.560**	**38.860**	**+300**	**47'2**
Estadísticos		σ =	**de**	**1**	**121**	**140'44**	**20.449**	**21.528**	**+1.079**	**24'4**
		CV =	**región)**	**0'10**	**0'68**	**0'17**	**0'53**	**0'55**	**+0'02**	**0'52**

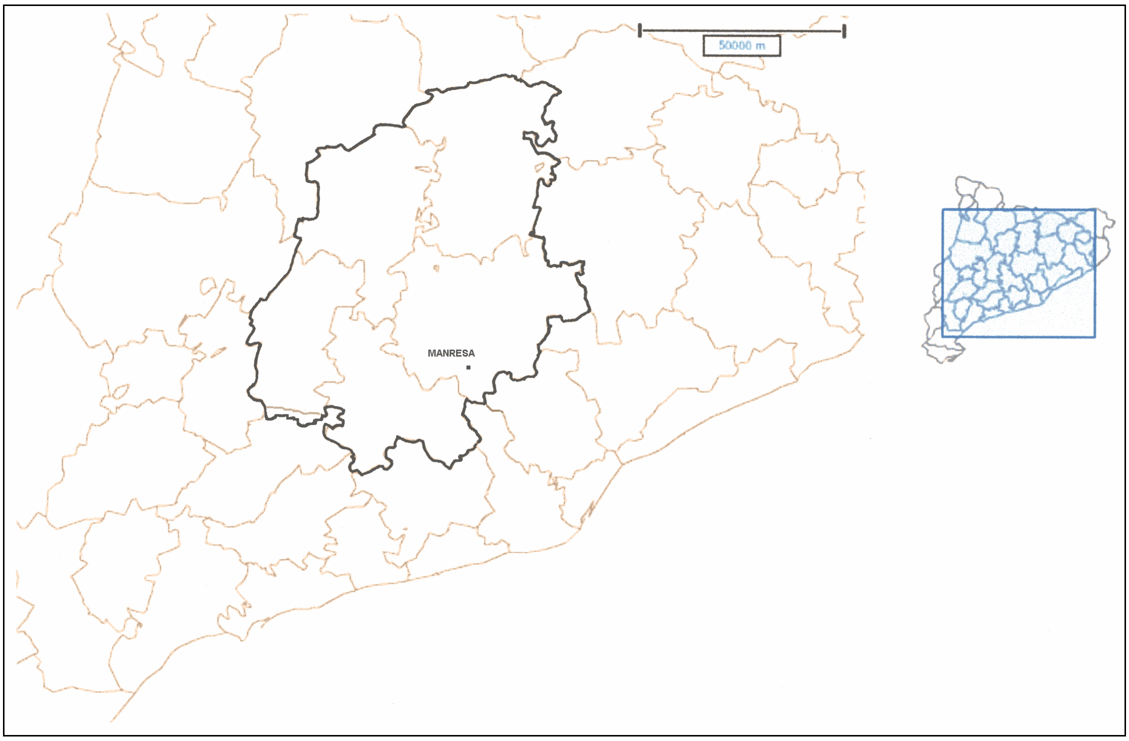
$\forall$ i $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

- Desviación media de la densidad de población: 23'8 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 47'7 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 88.

06 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *CATALUNYA CENTRAL*
(comarcas clásicas)



06 Nueva región o veguería de Cataluña central (comarcas clásicas).

Nº de comarcas: 5

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
06	05	Anoia	Igualada	34	496	893’38	78.348	78.013	-335	87’3
06	06	Bages	Manresa	35	407	1.295’17	150.657	150.287	-370	116’0
06	13	Berguedà	Berga	30	881	1.182’46	41.630	40.746	-884	34’4
06	29	Segarra	Cervera	21	560	720’18	17.359	17.085	-274	23’7
06	32	Solsonès	Solsona	14	774	971’88	10.764	10.661	-103	11’0
Resumen	$\sum x_i$ =	**Manresa**	**134**	**----**	**5.063’07**	**298.758**	**296.792**	**-1.966**	**----**	
Parámetros	$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**27**	**624**	**1.012’61**	**59.752**	**59.358**	**-394**	**54’5**	
Estadísticos	σ =	**de**	**8**	**177**	**204’98**	**51.254**	**51.227**	**-27**	**40’3**	
	CV =	**región)**	**0’30**	**0’28**	**0’20**	**0’86**	**0’86**	**+/- 0**	**0’74**	

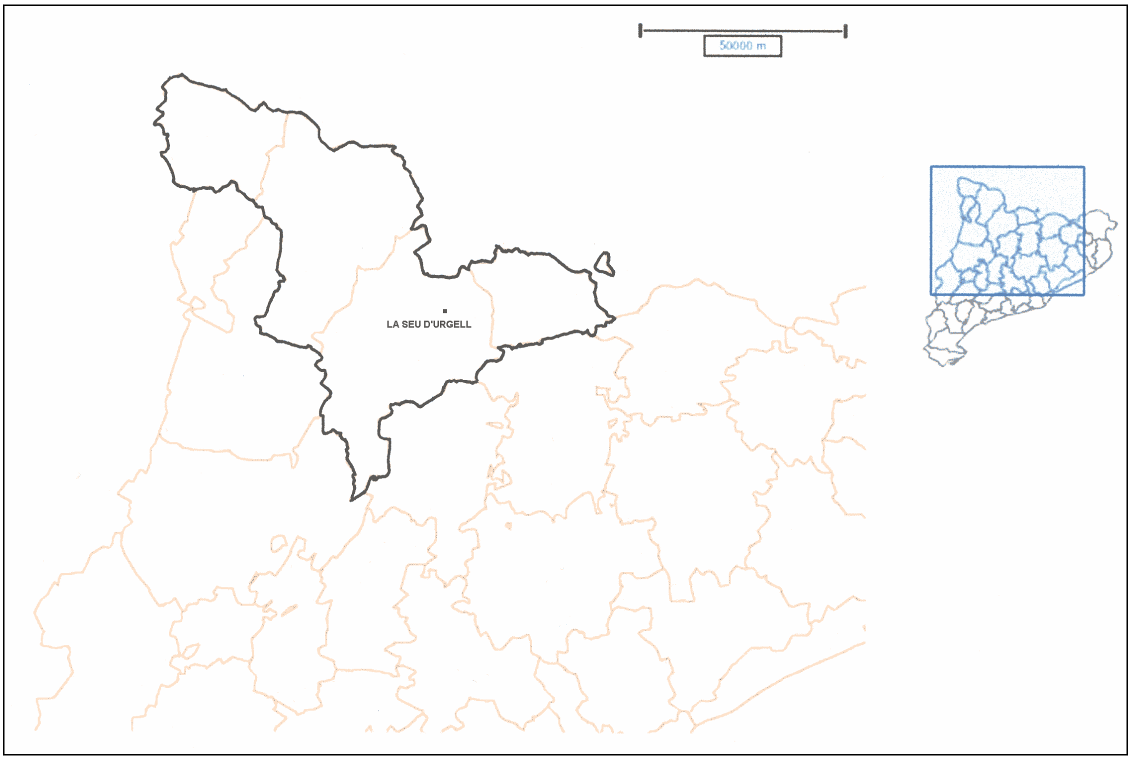
$\forall$ i $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

- Desviación media de la densidad de población: 37’7 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 58’6 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 115.

07 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE LOS *PIRINEUS* O *ALT PIRINEU* (comarcas clásicas)



07 Nueva región o veguería dels Pirineus o Alt Pirineu (comarcas clásicas).

Nº de comarcas: 4

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
07	04	Alt Urgell	La Seu d'Urgell	19	797	1.446'85	19.332	18.867	-465	13'0
07	14	Cerdanya	Puigcerdà	16	1.231	546'37	12.041	12.239	+198	22'4
07	25	Pallars Sobirà	Sort	15	1.055	1.355'22	5.450	5.464	+14	4'0
07	36	Vall d'Aran	Viella	9	887	620'47	5.808	6.034	+226	9'7
Resumen		$\sum x_i$ =	**La Seu d'Urgell**	**59**	**----**	**3.968'91**	**42.631**	**42.604**	**-27**	**----**
Parámetros		$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**15**	**993**	**992'23**	**10.658**	**10.651**	**-7**	**12'3**
Estadísticos		σ =	**de**	**4**	**166**	**410'93**	**5.652**	**5.437**	**-215**	**6'7**
		CV =	**región)**	**0'25**	**0'17**	**0'41**	**0'53**	**0'51**	**-0'02**	**0'54**

$\forall$ i $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

- Desviación media de la densidad de población: 5'4 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 10'7 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 76.

Conjunto de Cataluña (comarcas clásicas).

REGIÓN O VEGUERÍA		CABEZA DE REGION	Nº DE COM.	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE REGIONAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
							1981	1986	Δ 86/81	(1986)
I	Barcelona	Barcelona	7	161	163	3.234’81	4.240.749	4.213.948	-26.801	1.302’7
II	Girona	Girona	8	260	351	6.833’33	571.888	589.195	+17.307	86’2
III	Camp Tarragona	Tarragona	6	129	308	2.986’75	358.681	367.584	+8.903	123’1
IV	Ponent	Lleida	7	145	437	6.545’80	291.335	290.865	-470	44’4
V	Terres de l’Ebre	Tortosa	4	51	177	3.261’92	154.241	155.441	+1.200	47’7
VI	Catalunya central	Manresa	5	134	624	5.063’07	298.758	296.792	-1.966	58’6
VII	Pirineus (Alt Pirineu)	La Seu d’Urgell	4	59	993	3.968’91	42.631	42.604	-27	10’7
Resumen	$\sum x_i$ =	**Barcelona**	**41**	**939**	**----**	**31.895’29**	**5.958.283**	**5.956.429**	**-1.854**	**----**
Parámetros	$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**5**	**134**	**436**	**4.556’47**	**851.183**	**850.918**	**-265**	**239’1**
Estadísticos	σ =	**de**	**1**	**65**	**270**	**1.494’28**	**1.392.214**	**1.382.020**	**-10.194**	**435’5**
	CV =	**nación)**	**0’22**	**0’48**	**0’62**	**0’33**	**1’64**	**1’62**	**-0’02**	**1’82**

Nº de regiones: 7

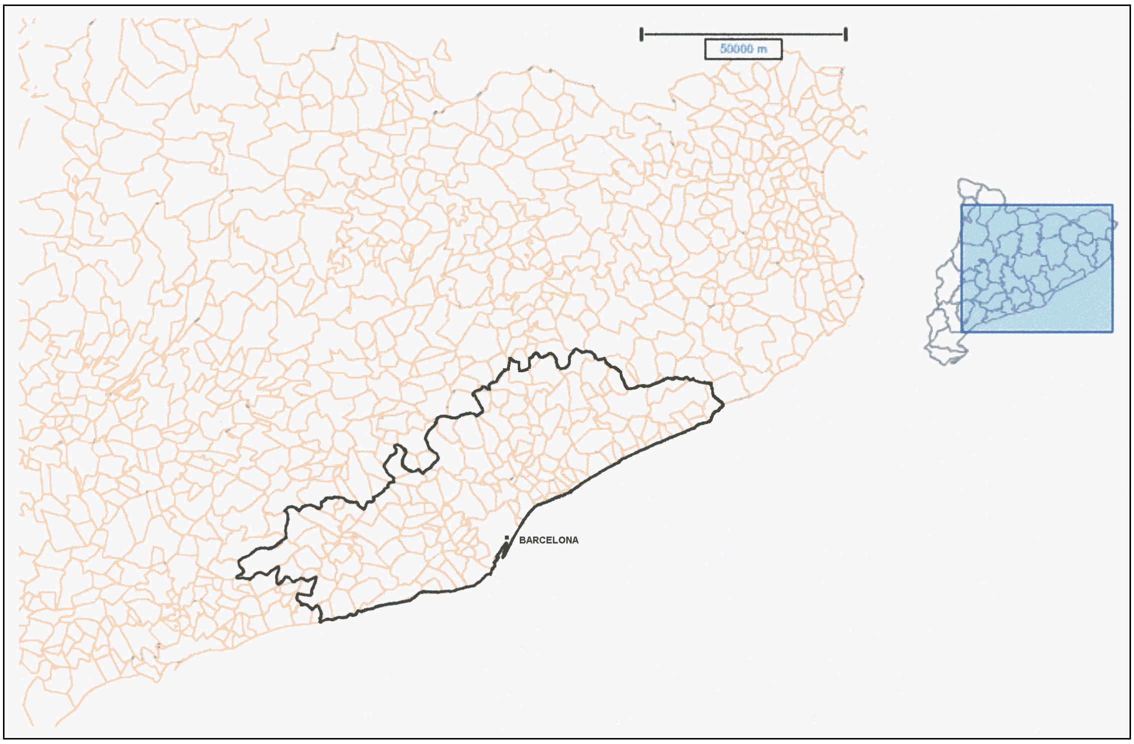
$\forall$ i $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

- Desviación media de la densidad de población: 303’9 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 186’8 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 942.

01 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *BARCELONA* (comarcas nuevas)



01 Nueva región o veguería de Barcelona (comarcas nuevas).

Nº de comarcas: 7

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
01	03	Alt Penedès	Vilafranca del Penedès	22	299	472’84	50.366	52.172	+1.806	110’3
01	10	Baix Llobregat	St. Feliu de Llobregat	28	127	510’86	367.231	373.663	+6.432	731’4
01	12	Barcelonès	Barcelona	26	74	348’59	2.860.073	2.787.287	-72.786	7.995’9
01	16	Garraf	Vilanova y la Geltrú	9	97	270’78	71.427	74.256	+2.829	274’2
01	20	Maresme	Mataró	27	79	493’40	225.990	239.251	+13.261	484’9
01	37	Vallès Occidental	Sabadell	13	190	357’99	522.802	534.208	+11.406	1.492’2
01	38	Vallès Oriental	Granollers	31	292	652’71	144.157	154.301	+10.144	286’4
Resumen		**$\sum x_i$ =**	**Barcelona**	**156**	**---**	**3.107’17**	**4.242.046**	**4.215.138**	**-26.908**	**---**
Parámetros		**$\bar{x}$ =**	**(cabeza**	**22**	**165**	**443’88**	**606.007**	**602.163**	**-3.844**	**1.617’9**
Estadísticos		**σ =**	**de**	**8**	**90**	**118’21**	**933.272**	**905.937**	**-27.335**	**2.639’0**
		CV =	**región)**	**0’34**	**0’54**	**0’27**	**1’54**	**1’50**	**-0’04**	**1’63**

$\forall$ i $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

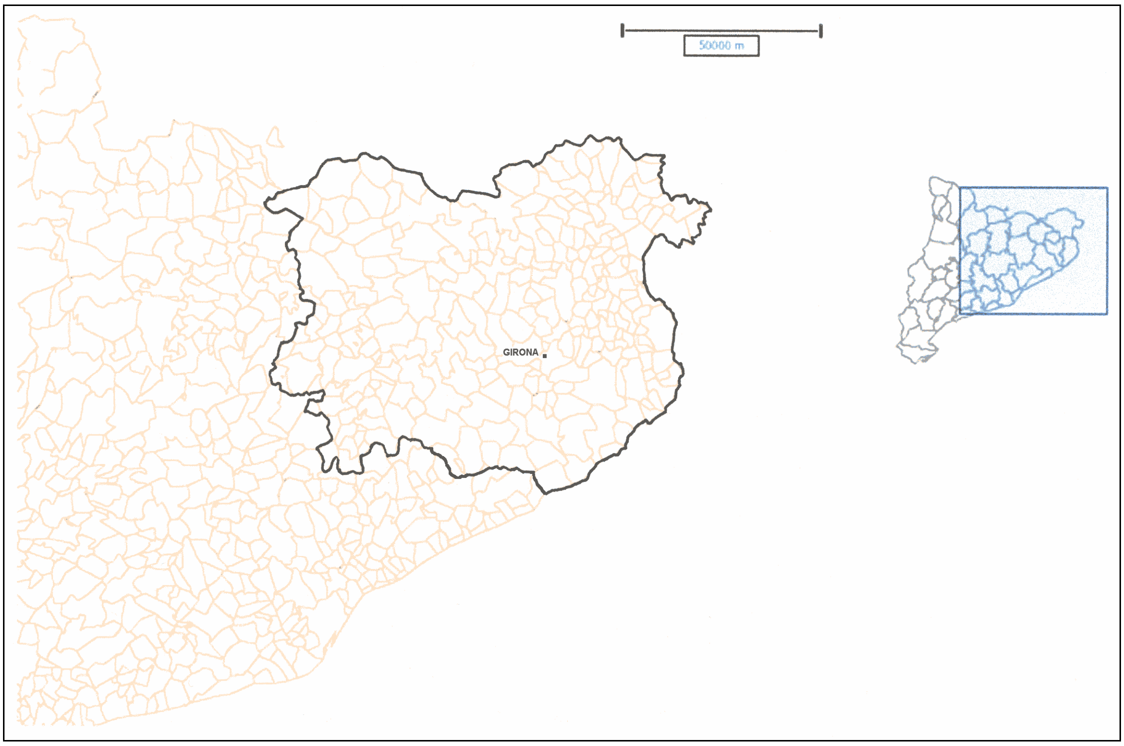
- Desviación media de la densidad de población: 1.822’3 hab./ km^2.

- Densidad de población regional (1986): 1.356’6 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 227.

NOTA: Aplicando “strictu-sensu” las restricciones espaciales del modelo gravitatorio de comarcalización, hemos visto que los 38 comarcas actuales quedan reducidos a 32. En el caso concreto de la región que estamos estudiando, las comarcas 03 (“Alt Penedès”) y 10 (“Baix Llobregat”) quedarían integradas, respectivamente, en la 16 (“Garraf”) y la 12 (“Barcelonès”).

02 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *GIRONA* (comarcas nuevas)



02 Nueva región o veguería de Girona (comarcas nuevas).

Nº de comarcas: 7

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
02	02	Alt Empordà	Figueres	75	84	1.414’90	82.660	87.027	+4.367	61’5
02	09	Baix Empordà	La Bisbal d’Empordà	33	53	737’80	86.592	87.149	+557	118’1
02	18	Garrotxa, la	Olot	27	478	1.053’69	51.260	51.042	-218	48’4
02	19	Gironès	Girona	35	145	750’10	135.312	137.650	+2.338	183’5
02	23	Osona	Vic	44	650	1.021’92	108.816	109.027	+211	106’7
02	28	Ripollès	Ripoll	21	973	875’51	29.789	28.872	-917	33’0
02	31	Selva, la	Sta. Coloma de Farmers	22	205	877’68	61.495	65.716	+4.221	74’9
Resumen		$\sum x_i =$	**Girona**	**258**	**---**	**6.731’60**	**555.924**	**566.483**	**+10.559**	**---**
Parámetros		$\bar{x} =$	**(cabeza**	**37**	**370**	**961’66**	**79.418**	**80.926**	**+1.508**	**89’4**
Estadísticos		$\sigma =$	**de**	**17**	**319**	**216’09**	**33.010**	**33.631**	**+621**	**47’6**
		CV =	**región)**	**0’47**	**0’86**	**0’22**	**0’42**	**0’42**	**+/- 0**	**0’53**

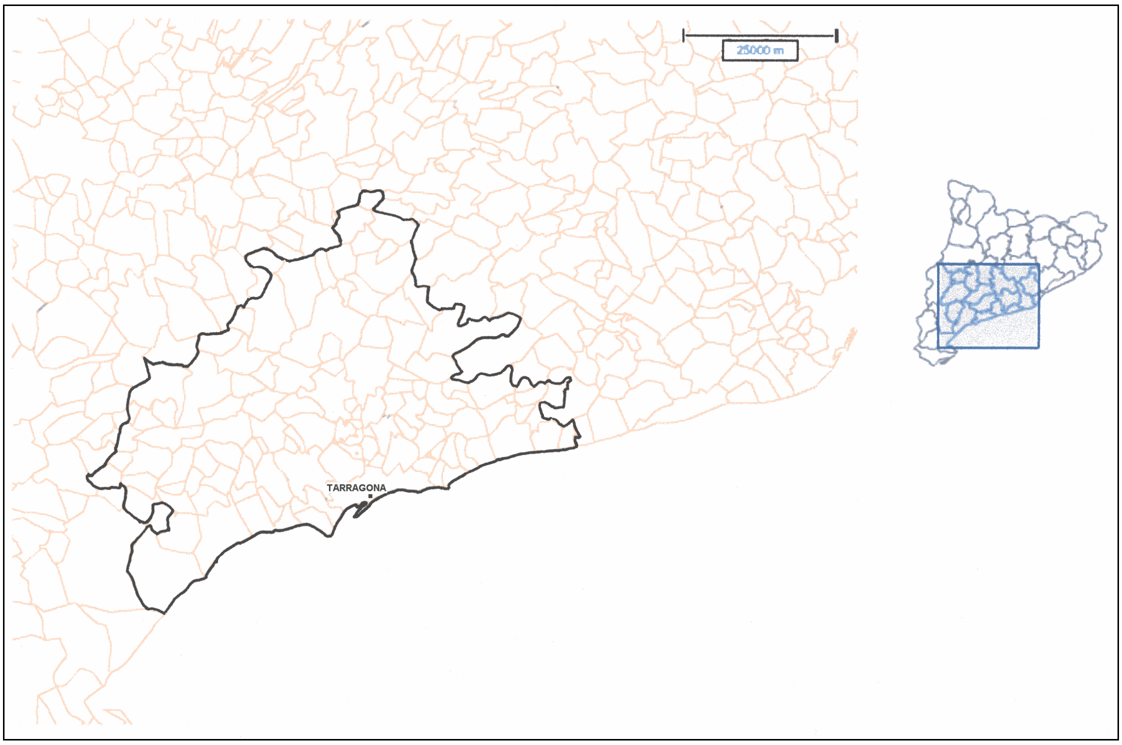
$\forall\ i \in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

- Desviación media de la densidad de población: 40’0 hab./km^2.

- Densidad de población regional (1986): 84’2 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 185.

03 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DEL *CAMP DE TARRAGONA*
(comarcas nuevas)



03 Nueva región o veguería del Camp de Tarragona (comarcas nuevas).

Nº de comarcas: 6

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
03	01	Alt Camp	Valls	18	284	393'83	28.671	29.463	+792	74'8
03	07	Baix Camp	Reus	29	231	674'56	138.070	144.118	+6.048	213'6
03	11	Baix Penedès	El Vendrell	11	129	198'37	28.749	31.993	+3.244	161'3
03	15	Conca de Barberà	Montblanc	22	592	608'34	16.444	16.783	+339	27'6
03	26	Priorat	Falset	15	398	349'88	8.547	8.253	-294	23'6
03	33	Tarragonès	Tarragona	17	95	249'57	130.358	128.744	-1.614	515'9
Resumen		$\sum x_i =$	**Tarragona**	**112**	**---**	**2.474'55**	**350.839**	**359.354**	**+8.515**	**---**
Parámetros		$\bar{x} =$	**(cabeza**	**19**	**288**	**412'43**	**58.473**	**59.892**	**+1.419**	**169'5**
Estadísticos		$\sigma =$	**de**	**6**	**168**	**174'97**	**54.058**	**54.869**	**+811**	**169'5**
		CV =	**región)**	**0'30**	**0'58**	**0'42**	**0'92**	**0'92**	**+/- 0**	**1'00**

$\forall\, i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

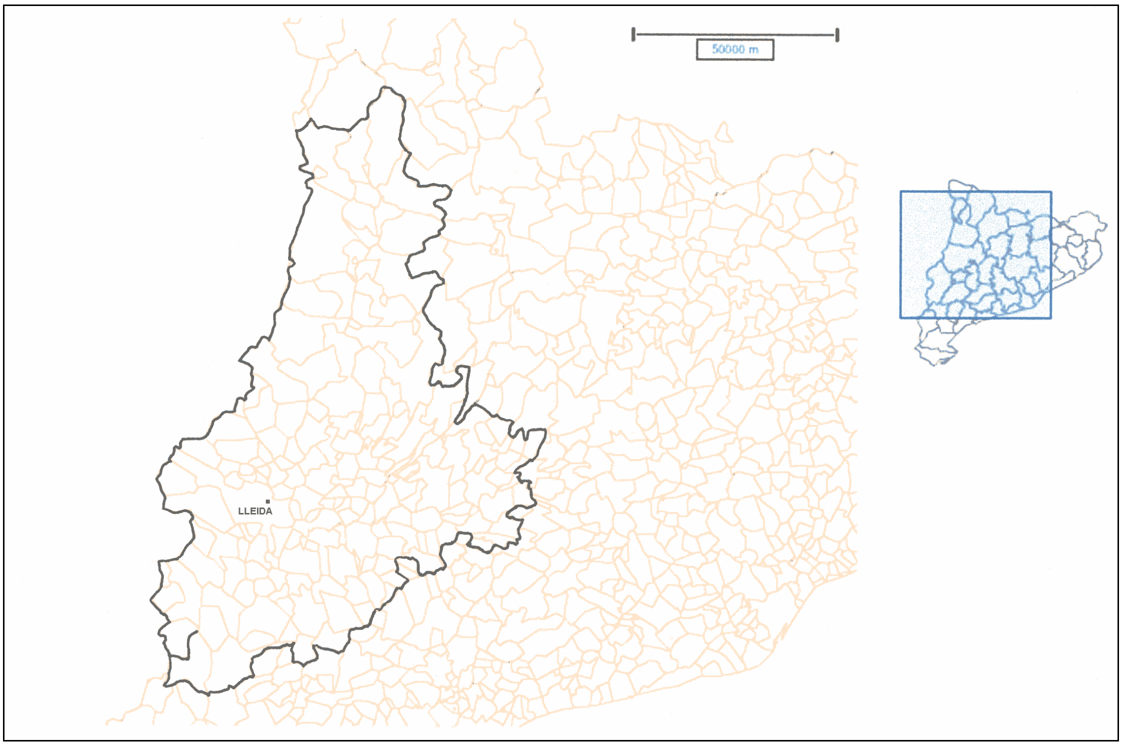
- Desviación media de la densidad de población: 130'2 hab./ km^2.

- Densidad de población regional (1986): 145'2 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 142.

NOTA: Aplicando "strictu-sensu" las restricciones espaciales del modelo gravitatorio de comarcalización, hemos visto que los 38 comarcas actuales quedan reducidos a 32. En el caso concreto de la región que estamos estudiando, las comarcas 07 ("Baix Camp") y 15 ("Conca de Barberà") quedarían integradas, respectivamente, en la 33 ("Tarragonès") y 01 ("Alt Camp").

04 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *PONENT* (comarcas nuevas)



04 Nueva región o veguería de Ponent (comarcas nuevas).

Nº de comarcas: 6

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN ($hab./km^2$)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
04	17	Garrigues, les	Les Borges Blanques	18	473	597’46	16.823	16.692	-131	27’9
04	22	Noguera, la	Balaguer	27	368	1.551’68	39.225	39.347	+122	25’4
04	24	Pallars Jussà	Tremp	15	734	1.387’19	17.447	16.511	-936	11’9
04	29	Segarra	Cervera	21	589	528’53	15.196	15.062	-134	28’5
04	30	Segrià	Leida	62	245	2.194’66	194.968	195.613	+645	89’1
04	35	Urgell, l’	Tàrrega	20	383	510’03	28.202	28.056	-146	55’0
Resumen		$\sum x_i$ =	**Lleida**	**163**	**---**	**6.769’55**	**311.861**	**311.281**	**-580**	**---**
Parámetros		$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**27**	**465**	**1.128’26**	**51.977**	**51.880**	**-97**	**39’6**
Estadísticos		σ =	**de**	**16**	**159**	**633’40**	**64.492**	**64.844**	**+352**	**25’5**
		CV =	**región)**	**0’59**	**0’34**	**0’56**	**1’24**	**1’25**	**+0’01**	**0’64**

$\forall\ i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

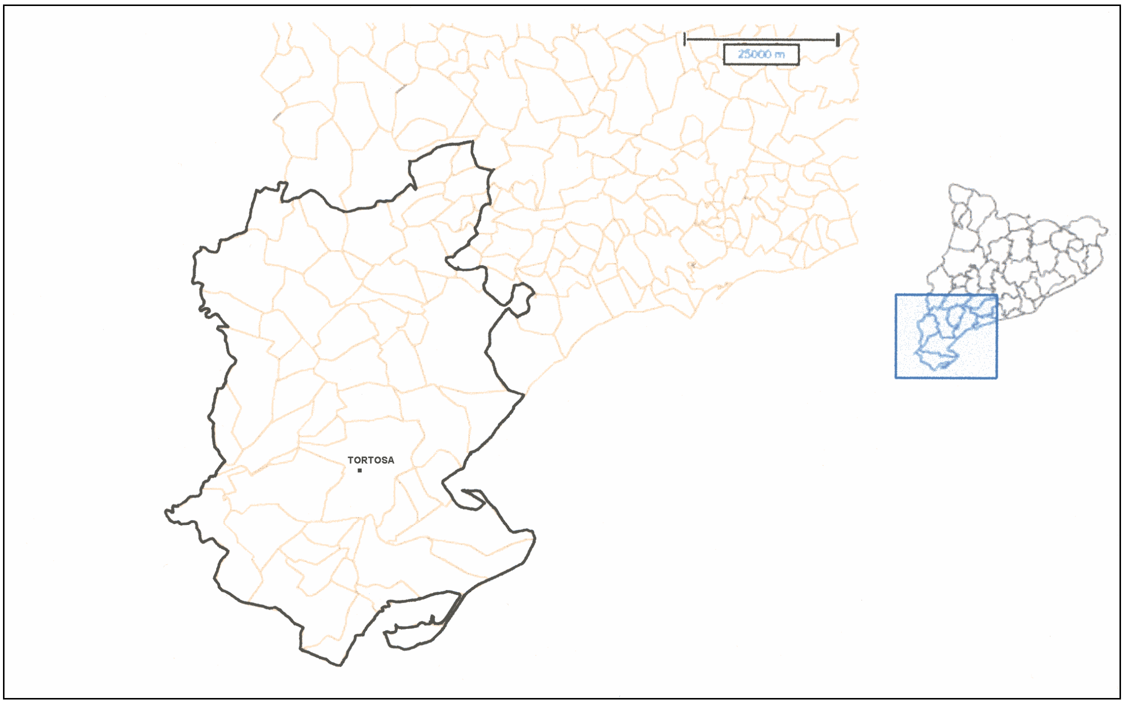
- Desviación media de la densidad de población: 21’6 hab./ km^2.

- Densidad de población regional (1986): 46’0 $hab./km^2$.

- Nº de consejeros comarcales: 128.

NOTA: Aplicando “strictu - sensu” las restricciones espaciales del modelo gravitatorio de comarcalización, hemos visto que las 38 comarcas actuales quedan reducidas a 32. En el caso concreto de la región que estamos estudiando, la comarca 29 (“Segarra”), perteneciente a la región o veguería “clásica” de *Catalunya central*, quedaría integrada en la comarca 35 (“l’Urgell”), por lo que pasaría a formar parte de la nueva región de *Ponent* y, como tal, así se presenta.

05 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *TERRES DE L'EBRE*
(comarcas nuevas)



05 Nueva región o veguería de les Terres de l'Ebre (comarcas nuevas).

Nº de comarcas: 4

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	**COM.**						**1981**	**1986**	**Δ 86/81**	**(1986)**
05	08	Baix Ebre	Tortosa	15	193	1.254'13	54.756	56.230	+1.474	44'8
05	21	Montsià	Amposta	13	62	680'37	63.615	65.024	+1.409	95'6
05	27	Ribera d'Ebre	Móra d'Ebre	18	184	669'01	18.867	17.789	-1.078	26'6
05	34	Terra Alta	Gandesa	10	357	578'23	11.793	11.491	-302	19'9
Resumen		$\sum x_i$ =	**Tortosa**	**56**	**---**	**3.181'74**	**149'031**	**150.534**	**+1.503**	**---**
Parámetros		$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**14**	**199**	**795'44**	**37.258**	**37.634**	**+376**	**46'7**
Estadísticos		σ =	**de**	**3**	**105**	**267'77**	**22.291**	**23.309**	**+1.018**	**29'7**
		CV =	**región)**	**0'21**	**0'53**	**0'34**	**0'60**	**0'62**	**+0'02**	**0'63**

$\forall\, i \in$ (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

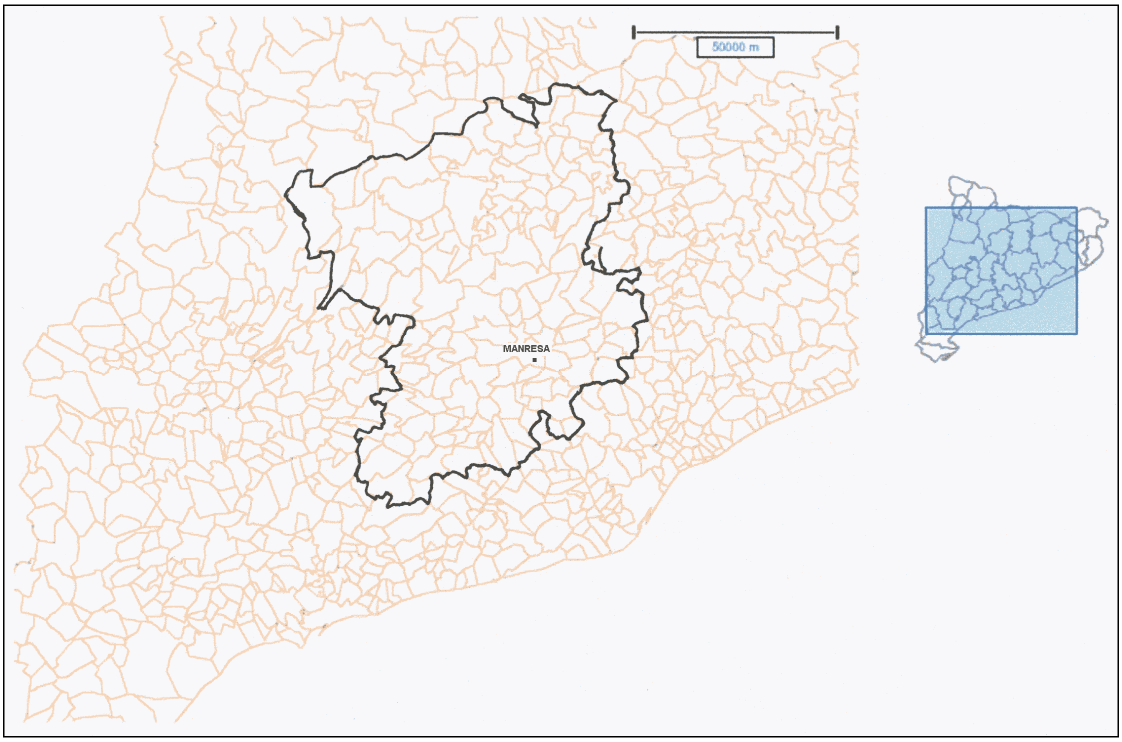
- Desviación media de la densidad de población: 24'4 hab./ km^2.

- Densidad de población regional (1986): 47'3 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 88.

NOTA: Aplicando "strictu - sensu" las restricciones espaciales del modelo gravitatorio de comarcalización, hemos visto que las 38 comarcas actuales quedan reducidas a 32. En el caso concreto de la región que estamos estudiando, la comarca 21 ("Montsià") quedaría integrada en la 08 ("Baix Ebre"), por las restricciones estadimétricas del modelo ya reseñadas.

06 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *CATALUNYA CENTRAL* (comarcas nuevas)



06 Nueva región o veguería de Cataluña central (comarcas nuevas).

Nº de comarcas: 4

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
06	05	Anoia	Igualada	41	518	1.224'07	82.894	82.563	-331	67'5
06	06	Bages	Manresa	40	407	1.396'09	169.789	171.226	+1.437	122'6
06	13	Berguedà	Berga	29	879	1.079'92	40.303	39.488	-815	36'6
06	32	Solsonès	Solsona	24	641	1.622'15	17.376	17.043	-333	10'5
Resumen		**$\sum x_i$ =**	**Manresa**	**134**	**---**	**5.322'23**	**310.62**	**310.320**	**-42**	**---**
Parámetros		**$\bar{x}$ =**	**(cabeza**	**34**	**611**	**1.330'56**	**77.591**	**77.580**	**-11**	**59'3**
Estadísticos		**σ =**	**de**	**7**	**175**	**202'16**	**58.191**	**58.971**	**+780**	**41'7**
		CV =	**región)**	**0'22**	**0'29**	**0'15**	**0'75**	**0'76**	**+0'01**	**0'70**

$\forall\ i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

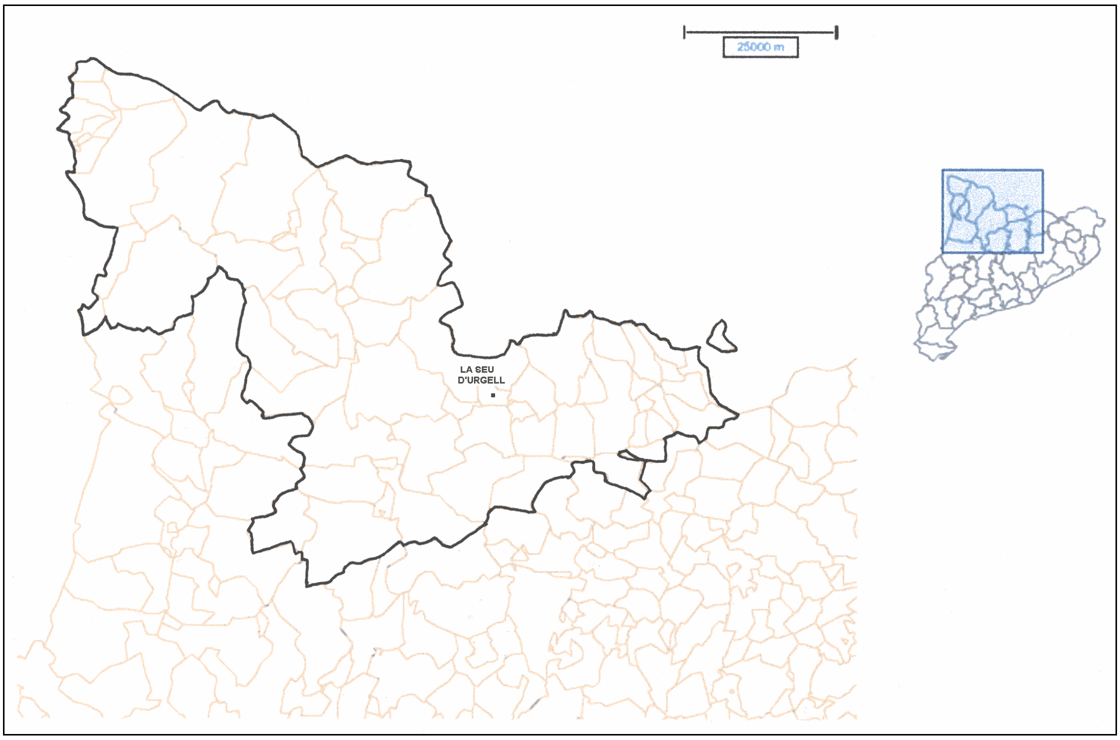
- Desviación media de la densidad de población: 35'8/km^2.

- Densidad de población regional (1986): 58'3 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 96.

NOTA: Aplicando "strictu - sensu" las restricciones espaciales del modelo gravitatorio de comarcalización, hemos visto que las 38 comarcas actuales quedan reducidas a 32. En el caso concreto de la región que estamos estudiando, la comarca 29 ("Segarra") quedaría integrada en la comarca 35 ("l'Urgell"), por lo que dejaría de formar parte de la región 06 o veguería de *Catalunya central* para integrarse en la nueva región 04 de *Ponent*.

07 NUEVA REGIÓN O VEGUERÍA DE *PIRINEUS* O *ALT PIRINEU* (comarcas nuevas)



07 Nueva región o veguería de los Pirineos o *Alt Pirineu* (comarcas nuevas).

Nº de comarcas: 4

CÓDIGO		COMARCA	CABEZA DE COMARCA	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLACIÓN (hab./km^2)
REG	COM.						1981	1986	Δ 86/81	(1986)
07	04	Alt Urgell	La Seu d'Urgell	20	937	1.669'80	17.529	17.072	-457	10'2
07	14	Cerdanya	Puigcerdà	17	1.194	554'81	13.129	13.265	+136	23'9
07	25	Pallars Sobirà	Sort	10	1.020	776'75	3.720	3.749	+29	4'8
07	36	Vall d'Aran	Viella	13	975	1.101'00	8.284	8.131	-153	7'4
Resumen		$\sum x_i$ =	**La Seu d'Urgell**	**60**	**---**	**4.102'36**	**42.662**	**42.217**	**-445**	**---**
Parámetros		$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**15**	**1.032**	**1.025'59**	**10.666**	**10.554**	**-112**	**11'6**
Estadísticos		σ =	**De**	**4**	**98**	**419'60**	**5.174**	**5.050**	**-124**	**7'4**
		CV =	**región)**	**0'25**	**0'10**	**0'41**	**0'49**	**0'48**	**-0'01**	**0'64**

$\forall\ i \in (1, 2, 3, 4)$

- Desviación media de la densidad de población: 6'2 hab./ km^2.

- Densidad de población regional (1986): 10'3 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 76.

Conjunto de Cataluña (comarcas nuevas).

Nº de regiones: 7

REGIÓN O VEGUERÍA		CABEZA DE REGIÓN	Nº DE COM.	Nº DE MUN.	ALTITUD MEDIA (m.s.n.m.)	SUPERFICIE COMARCAL (km^2)	POBLACIÓN DE DERECHO (hab.)			DENSIDAD DE POBLAC. (hab./km^2)
							1981	1986	Δ 86/81	(1986)
I	Barcelona	Barcelona	7	156	165	3.107'17	4.242.046	4.215.138	-26.908	1.356'6
II	Girona	Girona	7	258	370	6.731'60	555.924	566.483	+10.559	84'2
III	Camp Tarragona	Tarragona	6	112	288	2.474'55	350.839	359.354	+8.515	145'2
IV	Ponent	Lleida	6	163	465	6.769'55	311.861	311.281	-580	46'0
V	Terres de l'Ebre	Tortosa	4	56	199	3.181'74	149.031	150.534	+1.503	47'3
VI	Catalunya central	Manresa	4	134	611	5.322'23	310.362	310.320	-42	58'3
VII	Pirineus (Alt Pirineu)	La Seu d'Urgell	4	60	1.032	4.102'36	42.662	42.217	-445	10'3
RESUMEN	$\sum x_i$ =	**Barcelona**	**38**	**939**	**----**	**31.895'29**	**5.962.725**	**5.955.327**	**-7.398**	**---**
Y	$\bar{x}$ =	**(cabeza**	**5**	**134**	**447**	**4.556'47**	**851.818**	**850.761**	**-1.057**	**249'7**
PARAMETROS	σ =	**de**	**1**	**64**	**278**	**1.636'21**	**1.392.098**	**1.381.950**	**-10.148**	**453'5**
ESTADISTICOS	CV =	**nación)**	**0'24**	**0'48**	**0'62**	**0'36**	**1'64**	**1'62**	**-0'02**	**1'82**

$\forall\, i \in (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

- Desviación media de la densidad de población: 316'3 hab./ km^2.

- Densidad de población regional (1986): 186'8 hab./km^2.

- Nº de consejeros comarcales: 942.

NOTA: Se observan pequeñas diferencias o discrepancias en los datos referentes a superficies y población en relación a los resúmenes efectuados para el caso de las comarcas clásicas, debidos, probablemente, a la no exacta coincidencia de las diferentes fuentes de información consultadas (I.N.E., IDESCAT, Consorci d'Informació i Documentació de Catalunya, Ayuntamientos, Catalana d'Estudis Econòmics, Departament de Governació de la Generalitat de Catalunya, etc.).

ANEXO 8

REGIONALIZACIÓN Y CONEXIÓN TERRITORIAL

ANEXO 8

REGIONALIZACIÓN Y CONEXIÓN TERRITORIAL

1. INTENCIONALIDAD Y CASOS DUDOSOS

El estudio y cuantificación del parámetro que hemos denominado "grado de conexión territorial", así como de la "fuerza de atracción económica", tal como se ha definido en los epígrafes 13.1 y 13.4 del Anexo 14 de la presente tesis doctoral, ofrecen una visión enormemente útil y provechosa acerca de las relaciones de atracción y/o autonomía entre las diferentes comarcas y regiones de Cataluña, o bien con respecto a los centros de masas de renta o a cualesquiera enclaves o puntos singulares del territorio.

De este modo, se ha procedido al cálculo informatizado de los momentos territoriales estáticos y de inercia, así como de los "grados de repulsión ρ_{ij} y atracción α_{ij}" entre los territorios estudiados, sus "grados de conexión territorial" $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ ", sus "grados medios de atracción λ_{ij} y α", así como la "fuerza de atracción económica $F_{ij} = F_{ji}$ ". Ello nos suministra una valiosa información que permitirá, posteriormente, dilucidar acerca de ciertos aspectos conflictivos o dudosos de las divisiones territoriales surgidas por la aplicación estricta del modelo gravitatorio de comarcalización y regionalización que aquí se propugna (FRANQUET, 1990/91).

Concretamente, en el caso de la regionalización de Cataluña son los siguientes:

a) RIBERA D'EBRE:

Se trata de estudiar su conexión territorial con las comarcas cabeceras de la regió-III ("Tarragonès"), IV ("Segrià") y V ("Baix Ebre"). En efecto, aunque el modelo de gravitación afecta dicha comarca claramente a la regió-V, se detectan tendencias sociales o políticas de aproximación o dependencia de la regió-III (o, más exactamente, de la comarca del "Baix Camp"), por razón de las infraestructuras de comunicación o transporte.

Los valores obtenidos de los parámetros estimados son:

Comarca de referencia	$F_{ij} = F_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$
"Tarragonès" (regió-III)	0'012487	1'542
"Segrià" (regió-IV)	0'009623	0'867
"Baix Ebre" (regió-V)	0'017311	2'220

, lo que confirma, de modo inequívoco, la bondad de la asignación de la comarca de "Ribera d'Ebre" a la regió-V ("Terres de l'Ebre"), circunstancia, además bien corroborada por razones de tipo histórico y geográfico. Cabe señalar, no obstante, que la comparación de esta comarca con la del "Baix Camp" (integrada en la regió-III) ofrece unos valores: F = 0'022627 y θ = 2'010, perfectamente equiparables a los del "Baix Ebre", si bien su no condición de capitalidad regional (por las razones espaciales ya expuestas en su momento) la excluye racionalmente de dicho contraste complementario de adscripción. En cualquier caso, el desdoblamiento de la importante infraestructura viaria conocida como "Eix de l'Ebre", deberá actuar de modo clarificador al respecto.

b) PALLARS JUSSÀ:

En este caso, se trata de estudiar su grado de conexión territorial con las comarcas cabeceras de la regió-IV ("Segrià") y VII ("Alt Urgell"), puesto que algunos estudios la asignan mejor a esta última mientras que nuestro modelo gravitatorio la incluye, si bien con cierta justeza, en la veguería o regió-IV ("Ponent").

Veamos los resultados obtenidos:

Comarca de referencia	$F_{ij} = F_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$
"Segrià" (regió-IV)	0'005520	0'373
"Alt Urgell" (regió-VII)	0'001200	0'469

que sigue planteando un caso dudoso, según el parámetro que se adopte como definitorio. Ante ello, y habida cuenta del resultado ofrecido por la aplicación estricta o geométrica del modelo gravitatorio de regionalización, seguiremos incluyendo a esta comarca en la regió-IV, aunque aquí sí parecen admisibles consideraciones objetivas en sentido contrario, como de hecho ya se han producido en el *Pla Territorial General de Catalunya (PTG)*. A continuación, y al respecto de lo expuesto (a título aclaratorio del mismo) pueden verse gráficamente los seis ámbitos funcionales territoriales (AFT) del expresado Plan (GENERALITAT DE CATALUNYA, 1995):

Fig. A-8.1. Ámbitos del Plan Territorial General de Cataluña.

c) SEGARRA:

Se trata de estudiar su grado de conexión territorial con las comarcas cabeceras de la regió-IV ("Segrià") y la VI ("Bages") a la que le asigna, inicialmente, el modelo gravitatorio de regionalización. Los resultados de los parámetros complementarios estudiados, son los siguientes:

Comarca de referencia	$F_{ij} = F_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$
"Segrià" (regió-IV)	0'008531	1'118
"Bages" (regió-VI)	0'012502	1'513

, valores éstos que, como puede observarse, plantean serias dudas al respecto que posibilitarían la determinación final de su inclusión en una u otra región en base a restantes consideraciones de tipo histórico, geográfico, cultural o administrativo en las que no pormenorizaremos aquí, por razones obvias de espacio, pero que así se consideran en el *Pla Territorial General de Catalunya*.

d) OSONA:

En este caso, se trata de estudiar su grado de conexión territorial con las comarcas cabeceras de la región-II ("Gironès") y de la VI ("Bages"), asignándola inicialmente el modelo gravitatorio de regionalización a la primera de ellas. En efecto:.

Comarca de referencia	$F_{ij} = F_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$
"Gironès" (regió-II)	0'091006	0'890
"Bages" (regió-VI)	0'105854	0'802

, valores éstos que, como puede observarse, plantean serias dudas al respecto que posibilitarían la determinación final de su inclusión en una u otra región en base a restantes consideraciones de tipo histórico, geográfico, cultural o administrativo en las que no pormenorizaremos aquí, por razones obvias de espacio, pero que así se consideran en el *Pla Territorial General de Catalunya*.

e) VALL D'ARAN:

En este caso, el problema no consiste en averiguar la región o veguería a la cual debe afectarse esta comarca, que queda claramente configurada en la regió-VII ("Pirineus" o "Alt Pirineu") por aplicación del modelo gravitatorio, sino más bien determinar su "grado de desconexión o autonomía" con respecto al conjunto nacional catalán. Para ello, en la tabla correspondiente así como en el epígrafe 3 de este mismo anexo se ha calculado el parámetro $\Sigma\ \theta$ que ofrece la suma de los diferentes "grados de conexión territorial" de cada una de las 38 comarcas clásicas de Cataluña con relación a sus comarcas geográficamente circundantes. De esta forma, el que pudiéramos denominar "grado de autonomía o de desconexión territorial" de cada una de las comarcas con respecto al conjunto catalán deberá ser tanto mayor cuanto menor resulte el correspondiente parámetro $\Sigma\ \theta$ que aquí se calcula.

Pues bien, la comarca de la "Vall d'Aran" presenta la mayor desconexión de todas ellas con el conjunto catalán de un modo manifiesto ($\Sigma\ \theta$ = 1'921), seguida del "Pallars Jussà" ($\Sigma\ \theta$ = 3'461), "Pallars Sobirà" ($\Sigma\ \theta$ = 4'416), "Alt Empordà" ($\Sigma\ \theta$ = 5'868), "Alt Urgell" ($\Sigma\ \theta$ = 6'622), "Noguera" ($\Sigma\ \theta$ = 6'719) y "Cerdanya" ($\Sigma\ \theta$ = 6'990).

Obsérvese que este grupo de comarcas, hermanadas entre sí por su abrupta configuración orográfica, sugiere la perentoriedad de la creación de la veguería o regió-VII ("Pirineus"), habida cuenta de su elevado grado objetivo de autonomía con respecto al conjunto nacional de Cataluña, así como de las restantes características derivadas de su vocación ganadera, forestal y, muy especialmente, turística (sobre todo en relación a los deportes de invierno).

Desde el punto de vista topográfico, la comarca de la “Vall d’Aran” es la única de los Pirineos septentrionales, y posee una dificultosa accesibilidad desde el resto del territorio catalán, pese a la creciente modernización de su infraestructura viaria. Sin embargo, ofrece una intensa red de relaciones intermunicipales, así como una lengua propia y un ordenamiento jurídico diferenciado del resto del país. Así pues, su organización territorial parece exigir el reconocimiento de dichas diferenciaciones mediante la disposición de un estatuto propio y/o de una protección especial. Y así, concretamente la Disposició Final 1ª de la Llei 6/1987, de 4 d’Abril, sobre l’organització comarcal de Catalunya, especifica que “el reconeixement i l’actualització de les peculiaritats històriques de l’organització administrativa interna de la Vall d’Aran s’han de regular per llei específica, en el marc dels principis que estableixen les lleis de règim local i d’organització territorial de Catalunya”.

f) PRIORAT:

En este caso, se trata de estudiar su grado de conexión territorial con las comarcas cabeceras de la regió-III (“Tarragonès”) y V (“Baix Ebre”) que, pese a que nuestro modelo gravitatoria la incluye en la primera, ciertos estudios recientes derivados del Pla Territorial General de Catalunya dudan acerca de su adscripción a una u otra veguería.

Realicemos pormenorizadamente los estudios correspondientes a cada caso:

* Priorat (j) - Tarragonès (i):

$$\begin{cases} I_{ij} = r_{ij}^2 \times A_i = 37^2 \times 345'02 = 472.332 \text{ Km}^4 \\ I_{ji} = r_{ij}^2 \times A_j = 37^2 \times 517'31 = 708.197 \text{ Km}^4 \end{cases}$$

$$\rho_{ij} = \frac{I_{ij}}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}}} = \frac{472.332}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{5.630'2}{108.623'4}}} = 1'267 \; ; \quad \alpha_{ij} = 0'789 \; ;$$

$$\rho_{ji} = \frac{I_{ji}}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i}}} = \frac{708.197}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{108.623'4}{5.630'2}}} = 0'264 \; ; \quad \alpha_{ji} = 3'787 \; ;$$

La suma de los “grados de atracción” nos definirá un “grado de conexión” entre ambos territorios de:

$$\theta\ ij = \theta\ ji = \alpha\ ij + \alpha\ ji = 0'789 + 3'787 = 4'576 \text{ (caso superficial)}$$

Por otra parte, la “fuerza de atracción económica” entre ambos territorios, desde el punto de vista del modelo gravitatorio, vendrá dada por la expresión:

$$F_{ij} = F_{ji} = \frac{R_i \times R_j}{r_{ij}^3} = \frac{108.623'4 \times 5.630'2}{37^3} = 12.074 \Rightarrow 0'012074 \text{ (caso másico o ponderal estricto)}$$

* <u>Priorat (j) - Baix Ebre (i)</u> :

$$\begin{cases} I_{ij} = 46^2 \times 1.036'64 = 2.193.530 \text{ Km}^4 \\ I_{ji} = 46^2 \times 517'31 = 1.094.628 \text{ Km}^4 \end{cases}$$

$$\rho_{ij} = \frac{2.193.530}{10^6 \times \sqrt[3]{\dfrac{5.630'2}{43.293'2}}} = 4'330 \ ; \quad \alpha_{ij} = 0'231 \ ;$$

$$\rho_{ji} = \frac{1.094.628}{10^6 \times \sqrt[3]{\dfrac{43.293'2}{5.630'2}}} = 0'555 \ ; \quad \alpha_{ji} = 1'803 \ ;$$

$$\theta_{ij} = \theta_{ji} = 0'231 + 1'803 = 2'034 \text{ (caso superficial)}$$

$$F_{ij} = F_{ji} = \frac{R_i \times R_j}{r_{ij}^3} = \frac{43.293'2 \times 5.630'2}{46^3} = 2.504 \Rightarrow 0'002504 \text{ (caso másico o ponderal estricto)}$$

En definitiva, veamos un cuadro comparativo de los resultados obtenidos en ambos casos:

Comarca de referencia	**$F_{ij} = F_{ji}$**	**$\theta_{ij} = \theta_{ji}$**
“Tarragonès” (regió-III)	0’012074	4’576
“Baix Ebre” (regió-V)	0’002504	2’034

que confirman, de modo fehaciente, la corrección en la asignación de la comarca del “Priorat” a la regió-III.

Otra cosa bien diferente sería su inclusión, junto con la regió-V, en la misma área de planificación, habida cuenta de sus mayores similitudes de orden fisiográfico o antropológico, pero sin efectos decisivos sobre la división territorial que se propugna.

g) BAIX PENEDÈS:

En este caso, se trata de estudiar su grado de conexión territorial con las comarcas cabeceras de la regió-I ("Barcelonès") y III ("Tarragonès"), considerando que nuestro modelo gravitatorio de regionalización la viene asignando, justamente, a esta última.

Los cálculos efectuados son los siguientes, siguiendo la misma sistemática que en los casos anteriores:

* Baix Penedès (j) - Barcelonès (i):

$$\begin{cases} I_{ij} = 57^2 \times 155'52 = 505.285 \text{ Km}^4 \\ I_{ji} = 57^2 \times 264'06 = 857.931 \text{ Km}^4 \end{cases}$$

$$\rho_{ij} = \frac{505.285}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{28.260'6}{1.921.583}}} = 2'062 \; ; \quad \alpha_{ij} = 0'485 \; ;$$

$$\rho_{ji} = \frac{857.931}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{1.921.583}{28.260'6}}} = 0'210 \; ; \quad \alpha_{ji} = 4'757 \; ;$$

$\theta_{ij} = \theta_{ji} = 0'485 + 4'757 = 5'242$ (caso superficial)

$$F_{ij} = F_{ji} = \frac{1.921.583 \times 28.260'6}{57^3} = 293.235 \Rightarrow 0'293235 \text{ (caso másico o ponderal estricto)}$$

Con ello, se tiene el siguiente cuadro comparativo:

Comarca de referencia	$F_{ij} = F_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$
"Tarragonès" (regió-III)	0'155960	10'675
"Barcelonès" (regió-I)	0'293235	5'242

En este caso, se sigue planteando un caso dudoso, en función del parámetro territorial que se adopte como definitorio de la adscripción regional que se discute. Deben hacerse constar, por otra parte, las considerables concomitancias existentes entre esta comarca y la comarca cabecera de la regió-III ("Tarragonès"), con la que actualmente comparte, por cierto, el mismo territorio provincial.

h) RIPOLLÈS:

Se trata de cuantificar, ahora, el grado de conexión territorial de esta comarca con las comarcas cabeceras de la regió-II ("Gironès"), regió-VI ("Bages") y regió-VII ("Alt Urgell") que, en nuestro modelo gravitatorio, resulta afectada a la primera de ellas.

Los cálculos correspondientes, son los siguientes:

* <u>Ripollès (j) - Gironès (i):</u>

$$\begin{cases} I_{ij} = 59^2 \times 838'18 = 2.917.705 \text{ Km}^4 \\ I_{ji} = 59^2 \times 1.031'16 = 3.589.468 \text{ Km}^4 \end{cases}$$

$$\rho_{ij} = \frac{2.917.705}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{22.014'2}{114.667'9}}} = 5'058 \; ; \quad \alpha_{ij} = 0'198 \; ;$$

$$\rho_{ji} = \frac{3.589.468}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{114.667'9}{22.014'2}}} = 2'071 \; ; \quad \alpha_{ji} = 0'483 \; ;$$

$\theta_{ij} = \theta_{ji} = 0'198 + 0'483 = 0'681$ (caso superficial)

$$F_{ij} = F_{ji} = \frac{114.667'9 \times 22.014'2}{59^3} = 12.291 \Rightarrow 0'012291 \text{(caso másico o ponderal estricto)}$$

* <u>Ripollès (j) – Alt Urgell (i):</u>

$$\begin{cases} I_{ij} = 65^2 \times 1.446'85 = 6.112.941 \text{ Km}^4 \\ I_{ji} = 65^2 \times 1.031'16 = 4.356.651 \text{ Km}^4 \end{cases}$$

$$\rho_{ij} = \frac{6.112.941}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{22.014'2}{13.803'1}}} = 5'232 \; ; \quad \alpha_{ij} = 0'191 \; ;$$

$$\rho_{ji} = \frac{4.356.651}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{13.803'1}{22.014'2}}} = 5'090 \ ; \quad \alpha_{ji} = 0'196 \ ;$$

$\theta_{ij} = \theta_{ji}$ = 0’191 + 0’196 = 0’387 (caso superficial)

$$F_{ij} = F_{ji} = \frac{13.803'1 \times 22.014'2}{65^3} = 1.106 \Rightarrow 0'001106 \text{ (caso másico o ponderal estricto)}$$

* <u>Ripollès (j) - Bages (i):</u>

$$\begin{cases} I_{ij} = 61^2 \times 1.295'17 = 4.819.328 \text{ Km}^4 \\ I_{ji} = 61^2 \times 1.031'16 = 3.836.946 \text{ Km}^4 \end{cases}$$

$$\rho_{ij} = \frac{4.819.328}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{22.014'2}{113.406'6}}} = 8'323 \ ; \quad \alpha_{ij} = 0'120 \ ;$$

$$\rho_{ji} = \frac{3.836.946}{10^6 \times \sqrt[3]{\frac{113.406'6}{22.014'2}}} = 2'222 \ ; \quad \alpha_{ji} = 0'450 \ ;$$

$\theta_{ij} = \theta_{ji}$ = 0’120 + 0’450 = 0’570 (caso superficial)

$$F_{ij} = F_{ji} = \frac{113.406'6 \times 22.014'2}{61^3} = 10.999 \Rightarrow 0'010999 \text{ (caso másico o ponderal estricto)}$$

Con ello, se tiene el siguiente cuadro comparativo:

Comarca de referencia	**$F_{ij} = F_{ji}$**	**$\theta_{ij} = \theta_{ji}$**
“Gironès” (regió-II)	0’012291	0’681
“Bages” (regió-VI)	0’010999	0’570
“Alt Urgell” (regió-VII)	0’001106	0’387

que confirman la corrección en la adscripción ya efectuada de la comarca del “Ripollès” a la regió-II.

2. ATRACCIÓN ENTRE LAS COMARCAS DE CATALUÑA. CÁLCULOS PREVIOS

A continuación puede verse la siguiente tabla, en la que se obtienen los parámetros buscados en base a los datos comarcales de superficies (Km^2) y rentas totales (millones de €) referidas a datos del año 1996.

Atracción entre las comarcas de Cataluña. Cálculos previos.

						Millones de €							
Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	R_i	R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ_{ij}	α_{ij}	$F_{ij} = F_{ji}$
Alt Camp	Alt Penedès	592,4	38,0	22.511	855.426	681,48	315,57	2,16	0,26	1,29	1,106	0,904	3,919
Alt Camp	Anoia	866,6	46,0	39.864	1.833.726	763,29	315,57	2,42	0,29	1,34	2,461	0,406	2,475
Alt Camp	Baix Camp	695,3	17,5	12.168	212.936	1.274,07	315,57	4,04	0,47	1,59	0,339	2,949	75,020
Alt Camp	Baix Penedès	295,5	24,5	7.240	177.374	460,82	315,57	1,46	0,13	1,13	0,201	4,969	9,888
Alt Camp	Conca de Barberà	648,9	12,0	7.787	93.442	171,48	315,57	0,54	-0,20	0,82	0,076	13,115	31,316
Alt Camp	Tarragonès	317,1	18,0	5.708	102.740	1.634,17	315,57	5,18	0,55	1,73	0,178	5,626	88,425
Alt Empordà	Baix Empordà	700,5	35,0	24.518	858.113	988,88	1.005,63	0,98	-0,01	0,99	0,853	1,172	23,194
Alt Empordà	Garrotxa	734,2	40,0	29.368	1.174.720	451,40	1.005,63	0,45	-0,27	0,77	0,899	1,112	7,093
Alt Empordà	Gironès	575,5	32,0	18.416	589.312	1.264,79	1.005,63	1,26	0,08	1,08	0,636	1,572	38,816
Alt Empordà	Pla de l'Estany	262,7	23,0	6.042	138.968	239,01	1.005,63	0,24	-0,48	0,62	0,086	11,617	19,755
Alt Penedès	Alt Camp	544,7	38,0	20.699	786.547	315,57	681,48	0,46	-0,26	0,77	0,609	1,643	3,919
Alt Penedès	Anoia	866,6	27,0	23.398	631.751	763,29	681,48	1,12	0,04	1,04	0,656	1,524	26,427
Alt Penedès	Baix Llobregat	486,5	27,0	13.136	354.659	5.496,24	681,48	8,07	0,70	2,01	0,711	1,406	190,295
Alt Penedès	Baix Penedès	295,5	20,0	5.910	118.200	460,82	681,48	0,68	-0,13	0,88	0,104	9,639	39,255
Alt Penedès	Garraf	184,1	13,0	2.393	31.113	900,70	681,48	1,32	0,09	1,10	0,034	29,288	279,385
Alt Urgell	Berguedà	1182,5	44,0	52.030	2.289.320	358,26	175,35	2,04	0,24	1,27	2,905	0,344	0,737
Alt Urgell	Cerdanya	546,4	39,0	21.310	831.074	156,74	175,35	0,89	-0,04	0,96	0,801	1,249	0,463
Alt Urgell	La Noguera	1733,0	83,0	143.839	11.938.637	1.242,09	175,35	7,08	0,65	1,92	22,928	0,044	0,381
Alt Urgell	Pallars Jussà	1290,0	52,0	67.080	3.488.160	128,69	175,35	0,73	-0,10	0,90	3,146	0,318	0,160
Alt Urgell	Pallars Sobirà	1355,2	29,0	39.301	1.139.740	70,23	175,35	0,40	-0,31	0,74	0,840	1,190	0,505
Alt Urgell	Ripollès	958,7	65,0	62.316	4.050.508	268,56	175,35	1,53	0,14	1,15	4,669	0,214	0,171
Alt Urgell	Solsonès	998,6	41,0	40.943	1.678.647	110,20	175,35	0,63	-0,15	0,86	1,438	0,695	0,280
Alta Ribagorça	Pallars Jussà	1290,0	31,0	39.990	1.239.690	128,69	43,13	2,98	0,36	1,44	1,785	0,560	0,186
Alta Ribagorça	Pallars Sobirà	1355,2	32,5	44.044	1.431.430	70,23	43,13	1,63	0,16	1,18	1,684	0,594	0,088
Alta Ribagorça	Vall d'Aran	620,5	33,0	20.477	675.725	104,86	43,13	2,43	0,30	1,34	0,909	1,101	0,126

Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	Millones de € R_i	Millones de € R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ $_{ij}$	α $_{ij}$	$F_{ij} = F_{ji}$
Anoia	Alt Camp	544,7	46,0	25.056	1.152.585	315,57	763,29	0,41	-0,29	0,74	0,859	1,165	2,475
Anoia	Alt Penedès	592,4	27,0	15.995	431.860	681,48	763,29	0,89	-0,04	0,96	0,416	2,405	26,427
Anoia	Bages	1295,2	25,0	32.380	809.500	1.394,69	763,29	1,83	0,20	1,22	0,990	1,010	68,131
Anoia	Baix Llobregat	486,5	39,0	18.974	739.967	5.496,24	763,29	7,20	0,66	1,93	1,429	0,700	70,723
Anoia	Conca de Barberà	648,9	44,0	28.552	1.256.270	171,48	763,29	0,22	-0,50	0,61	0,764	1,309	1,537
Anoia	Segarra	721,2	30,0	21.636	649.080	177,57	763,29	0,23	-0,49	0,62	0,399	2,505	5,020
Anoia	Solsonès	998,6	47,0	46.934	2.205.907	110,20	763,29	0,14	-0,65	0,52	1,157	0,864	0,810
Bages	Anoia	866,6	25,0	21.665	541.625	763,29	1.394,69	0,55	-0,20	0,82	0,443	2,257	68,131
Bages	Baix Llobregat	486,5	41,0	19.947	817.807	5.496,24	1.394,69	3,94	0,46	1,58	1,292	0,774	111,222
Bages	Berguedà	1182,5	40,0	47.300	1.892.000	358,26	1.394,69	0,26	-0,45	0,64	1,203	0,831	7,807
Bages	La Selva	995,5	35,0	34.843	1.219.488	1.095,04	1.394,69	0,79	-0,08	0,92	1,125	0,889	35,621
Bages	Osona	1263,8	45,0	56.871	2.559.195	1.242,09	1.394,69	0,89	-0,04	0,96	2,462	0,406	19,010
Bages	Ripollès	958,7	61,0	58.481	3.567.323	268,56	1.394,69	0,19	-0,55	0,58	2,060	0,485	1,650
Bages	Segarra	721,2	47,0	33.896	1.593.131	177,57	1.394,69	0,13	-0,69	0,50	0,801	1,248	2,385
Bages	Solsonès	998,6	37,0	36.948	1.367.083	110,20	1.394,69	0,08	-0,85	0,43	0,587	1,705	3,034
Bages	Vallès Occidental	580,7	32,0	18.582	594.637	6.093,51	1.394,69	4,37	0,49	1,63	0,972	1,029	259,355
Bages	Vallès Oriental	851,9	40,0	34.076	1.363.040	2.665,83	1.394,69	1,91	0,22	1,24	1,692	0,591	58,094
Baix Camp	Alt Camp	544,7	17,5	9.532	166.814	315,57	1.274,07	0,25	-0,47	0,63	0,105	9,546	75,020
Baix Camp	Baix Ebre	987,9	62,0	61.250	3.797.488	581,09	1.274,07	0,46	-0,26	0,77	2,923	0,342	3,106
Baix Camp	Conca de Barberà	648,9	25,0	16.223	405.563	171,48	1.274,07	0,13	-0,67	0,51	0,208	4,811	13,983
Baix Camp	Priorat	496,2	24,0	11.909	285.811	79,87	1.274,07	0,06	-0,92	0,40	0,114	8,808	7,361
Baix Camp	Ribera d'Ebre	825,3	39,0	32.187	1.255.281	192,65	1.274,07	0,15	-0,63	0,53	0,669	1,495	4,138
Baix Camp	Tarragonès	317,1	11,5	3.647	41.936	1.634,17	1.274,07	1,28	0,08	1,09	0,046	21,947	1.368,980
Baix Ebre	Baix Camp	695,3	62,0	43.109	2.672.733	1.274,07	581,09	2,19	0,26	1,30	3,472	0,288	3,106
Baix Ebre	Montsià	708,7	12,0	8.504	102.053	479,85	581,09	0,83	-0,06	0,94	0,096	10,445	161,363
Baix Ebre	Priorat	496,2	46,0	22.825	1.049.959	79,87	581,09	0,14	-0,66	0,52	0,542	1,846	0,477
Baix Ebre	Ribera d'Ebre	825,3	33,0	27.235	898.741	192,65	581,09	0,33	-0,37	0,69	0,622	1,608	3,115
Baix Ebre	Terra Alta	740,0	28,0	20.721	580.191	110,27	581,09	0,19	-0,55	0,57	0,333	2,999	2,919

						Millones de €							
Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	R_i	R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ $_{ij}$	α $_{ij}$	$F_{ij} = F_{ji}$
Baix Empordà	Alt Empordà	1342,4	35,0	46.984	1.644.440	1.005,63	988,88	1,02	0,01	1,01	1,654	0,605	23,194
Baix Empordà	Gironès	575,5	17,0	9.784	166.320	1.264,79	988,88	1,28	0,08	1,09	0,181	5,539	254,575
Baix Empordà	La Selva	995,5	34,0	33.847	1.150.798	1.095,04	988,88	1,11	0,03	1,03	1,191	0,840	27,551
Baix Llobregat	Alt Penedès	592,4	27,0	15.995	431.860	681,48	5.496,24	0,12	-0,70	0,50	0,215	4,644	190,295
Baix Llobregat	Anoia	866,6	39,0	33.797	1.318.099	763,29	5.496,24	0,14	-0,66	0,52	0,683	1,465	70,723
Baix Llobregat	Bages	1295,2	41,0	53.102	2.177.181	1.394,69	5.496,24	0,25	-0,46	0,63	1,378	0,725	111,222
Baix Llobregat	Barcelonés	143,1	8,0	1.145	9.158	20.074,15	5.496,24	3,65	0,43	1,54	0,014	70,902	215.492,864
Baix Llobregat	Garraf	184,1	32,0	5.891	188.518	900,70	5.496,24	0,16	-0,60	0,55	0,103	9,693	151,076
Baix Llobregat	Vallès Occidental	580,7	17,5	10.162	177.839	6.093,51	5.496,24	1,11	0,03	1,03	0,184	5,433	6.249,123
Baix Penedès	Alt Camp	544,7	24,5	13.345	326.956	315,57	460,82	0,68	-0,13	0,88	0,288	3,470	9,888
Baix Penedès	Alt Penedès	592,4	20,0	11.848	236.960	681,48	460,82	1,48	0,13	1,14	0,270	3,704	39,255
Baix Penedès	Barcelonés	143,1	57,0	8.157	464.932	20.074,15	460,82	43,56	1,26	3,52	1,636	0,611	49,951
Baix Penedès	Garraf	184,1	16,0	2.946	47.130	900,70	460,82	1,95	0,22	1,25	0,059	16,970	101,333
Baix Penedès	Tarragonès	317,1	27,0	8.562	231.166	1.634,17	460,82	3,55	0,42	1,52	0,353	2,837	38,259
Barcelonès	Baix Llobregat	486,5	8,0	3.892	31.136	5.496,24	20.074,15	0,27	-0,43	0,65	0,020	49,461	215.492,864
Barcelonès	Baix Penedès	295,5	57,0	16.844	960.080	460,82	20.074,15	0,02	-1,26	0,28	0,273	3,665	49,951
Barcelonès	Maresme	396,9	25,0	9.923	248.063	3.288,69	20.074,15	0,16	-0,60	0,55	0,136	7,367	4.225,130
Barcelonès	Vallès Occidental	580,7	16,5	9.582	158.096	6.093,51	20.074,15	0,30	-0,40	0,67	0,106	9,412	27.230,327
Barcelonès	Vallès Oriental	851,9	22,0	18.742	412.320	2.665,83	20.074,15	0,13	-0,67	0,51	0,210	4,754	5.025,758
Berguedà	Alt Urgell	1446,9	44,0	63.664	2.801.198	175,35	358,26	0,49	-0,24	0,79	2,208	0,453	0,737
Berguedà	Bages	1295,2	40,0	51.808	2.072.320	1.394,69	358,26	3,89	0,45	1,57	3,260	0,307	7,807
Berguedà	Cerdanya	546,4	38,0	20.763	789.002	156,74	358,26	0,44	-0,28	0,76	0,599	1,670	1,023
Berguedà	Osona	1263,8	38,0	48.024	1.824.927	1.242,09	358,26	3,47	0,41	1,51	2,762	0,362	8,110
Berguedà	Ripollès	958,7	32,0	30.678	981.709	268,56	358,26	0,75	-0,10	0,91	0,892	1,121	2,936
Berguedà	Solsonès	998,6	25,0	24.965	624.125	110,20	358,26	0,31	-0,39	0,68	0,421	2,374	2,527
Cerdanya	Alt Urgell	1446,9	39,0	56.429	2.200.735	175,35	156,74	1,12	0,04	1,04	2,285	0,438	0,463
Cerdanya	Berguedà	1182,5	38,0	44.935	1.707.530	358,26	156,74	2,29	0,28	1,32	2,249	0,445	1,023
Cerdanya	Ripollès	958,7	33,0	31.637	1.044.024	268,56	156,74	1,71	0,18	1,20	1,249	0,800	1,171

						Millones de €							
Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	R_i	R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ_{ij}	α_{ij}	$F_{ij} = F_{ji}$
Conca de Barberà	Alt Camp	544,7	12,0	6.536	78.437	315,57	171,48	1,84	0,20	1,23	0,096	10,404	31,316
Conca de Barberà	Anoia	866,6	44,0	38.130	1.677.738	763,29	171,48	4,45	0,50	1,64	2,760	0,362	1,537
Conca de Barberà	Baix Camp	695,3	25,0	17.383	434.563	1.274,07	171,48	7,43	0,67	1,95	0,848	1,179	13,983
Conca de Barberà	Les Garrigues	799,7	30,0	23.991	719.730	191,42	171,48	1,12	0,04	1,04	0,747	1,339	1,216
Conca de Barberà	l'Urgell	586,2	31,0	18.172	563.338	294,74	171,48	1,72	0,18	1,20	0,675	1,482	1,697
Conca de Barberà	Priorat	496,2	38,0	18.856	716.513	79,87	171,48	0,47	-0,25	0,78	0,555	1,800	0,250
Conca de Barberà	Segarra	721,2	34,0	24.521	833.707	177,57	171,48	1,04	0,01	1,01	0,843	1,186	0,775
Garraf	Alt Penedès	592,4	13,0	7.701	100.116	681,48	900,70	0,76	-0,09	0,91	0,091	10,962	279,385
Garraf	Baix Llobregat	486,5	32,0	15.568	498.176	5.496,24	900,70	6,10	0,60	1,83	0,910	1,098	151,076
Garraf	Baix Penedès	295,5	16,0	4.728	75.648	460,82	900,70	0,51	-0,22	0,80	0,061	16,528	101,333
Garrotxa	Alt Empordà	1342,4	40,0	53.696	2.147.840	1.005,63	451,40	2,23	0,27	1,31	2,805	0,356	7,093
Garrotxa	Gironès	575,5	35,0	20.143	704.988	1.264,79	451,40	2,80	0,34	1,41	0,994	1,006	13,316
Garrotxa	La Selva	995,5	39,0	38.825	1.514.156	1.095,04	451,40	2,43	0,30	1,34	2,035	0,492	8,333
Garrotxa	Osona	1263,8	30,0	37.914	1.137.420	1.242,09	451,40	2,75	0,34	1,40	1,594	0,627	20,766
Garrotxa	Pla de l'Estany	262,7	25,0	6.568	164.188	239,01	451,40	0,53	-0,21	0,81	0,133	7,528	6,905
Garrotxa	Ripollès	958,7	24,0	23.009	552.211	268,56	451,40	0,59	-0,17	0,84	0,464	2,153	8,769
Gironès	Alt Empordà	1342,4	40,0	53.696	2.147.840	1.005,63	1.264,79	0,80	-0,08	0,93	1,990	0,503	19,874
Gironès	Baix Empordà	700,5	17,0	11.909	202.445	988,88	1.264,79	0,78	-0,08	0,92	0,187	5,362	254,575
Gironès	Garrotas	734,2	35,0	25.697	899.395	451,40	1.264,79	0,36	-0,34	0,71	0,638	1,567	13,316
Gironès	La Selva	995,5	18,0	17.919	322.542	1.095,04	1.264,79	0,87	-0,05	0,95	0,307	3,253	237,482
Gironès	Osona	1263,8	47,5	60.031	2.851.449	1.242,09	1.264,79	0,98	-0,01	0,99	2,834	0,353	14,659
Gironès	Pla de l'Estany	262,7	17,0	4.466	75.920	239,01	1.264,79	0,19	-0,56	0,57	0,044	22,953	61,530
Gironès	Ripollès	958,7	59,0	56.563	3.337.235	268,56	1.264,79	0,21	-0,52	0,60	1,991	0,502	1,654

Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ii} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	Millones de € R_i	Millones de € R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ ij	α ij	$F_{ij} = F_{ji}$
La Noguera	Alt Urgell	1446,9	83,0	120.089	9.967.350	175,35	351,78	0,50	-0,23	0,79	7,903	0,127	0,108
La Noguera	l'Urgell	586,2	32,0	18.758	600.269	294,74	351,78	0,84	-0,06	0,94	0,566	1,767	3,164
La Noguera	Pallars Jussà	1290,0	40,0	51.600	2.064.000	128,69	351,78	0,37	-0,34	0,72	1,476	0,677	0,707
La Noguera	Pla d'Urgell	304,5	20,0	6.090	121.800	294,74	351,78	0,84	-0,06	0,94	0,115	8,709	12,960
La Noguera	Segarra	721,2	43,0	31.012	1.333.499	177,57	351,78	0,50	-0,23	0,80	1,062	0,942	0,786
La Noguera	Segrià	1393,7	25,0	34.843	871.063	1.595,18	351,78	4,53	0,50	1,66	1,442	0,694	35,914
La Noguera	Solsonès	998,6	67,0	66.906	4.482.715	110,20	351,78	0,31	-0,39	0,68	3,044	0,328	0,129
La Selva	Bages	1295,2	35,0	45.332	1.586.620	1.394,69	1.095,04	1,27	0,08	1,08	1,720	0,581	35,621
La Selva	Baix Empordà	700,5	34,0	23.817	809.778	988,88	1.095,04	0,90	-0,03	0,97	0,783	1,278	27,551
La Selva	Garrotas	734,2	39,0	28.634	1.116.718	451,40	1.095,04	0,41	-0,30	0,74	0,831	1,203	8,333
La Selva	Gironès	575,5	18,0	10.359	186.462	1.264,79	1.095,04	1,16	0,05	1,05	0,196	5,111	237,482
La Selva	Maresme	396,9	40,0	15.876	635.040	3.288,69	1.095,04	3,00	0,37	1,44	0,916	1,091	56,269
La Selva	Osona	1263,8	35,0	44.233	1.548.155	1.242,09	1.095,04	1,13	0,04	1,04	1,615	0,619	31,723
La Selva	Vallès Oriental	851,9	40,0	34.076	1.363.040	2.665,83	1.095,04	2,43	0,30	1,35	1,834	0,545	45,612
Les Garrigues	Conca de Barberà	648,9	30,0	19.467	584.010	171,48	191,42	0,90	-0,04	0,96	0,563	1,776	1,216
Les Garrigues	l'Urgell	586,2	27,0	15.827	427.340	294,74	191,42	1,54	0,14	1,15	0,493	2,026	2,866
Les Garrigues	Pla d'Urgell	304,5	12,0	3.654	43.848	294,74	191,42	1,54	0,14	1,15	0,051	19,750	32,650
Les Garrigues	Priorat	496,2	42,0	20.840	875.297	79,87	191,42	0,42	-0,29	0,75	0,654	1,529	0,206
Les Garrigues	Ribera d'Ebre	825,3	51,0	42.090	2.146.579	192,65	191,42	1,01	0,00	1,00	2,151	0,465	0,278
Les Garrigues	Segrià	1393,7	22,5	31.358	705.561	1.595,18	191,42	8,33	0,71	2,03	1,430	0,699	26,807
l'Urgell	Conca de Barberà	648,9	31,0	20.116	623.593	171,48	314,87	0,54	-0,20	0,82	0,509	1,964	1,812
l'Urgell	La Noguera	1733,0	32,0	55.456	1.774.592	1.242,09	314,87	3,94	0,46	1,58	2,804	0,357	11,935
l'Urgell	Les Garrigues	799,7	27,0	21.592	582.981	191,42	314,87	0,61	-0,17	0,85	0,494	2,025	3,062
l'Urgell	Pla d'Urgell	304,5	21,5	6.547	140.755	294,74	314,87	0,94	-0,02	0,98	0,138	7,263	9,338
l'Urgell	Segarra	721,2	10,5	7.573	79.512	177,57	314,87	0,56	-0,19	0,83	0,066	15,223	48,298
l'Urgell	Segrià	1393,7	43,0	59.929	2.576.951	1.595,18	314,87	5,07	0,54	1,72	4,426	0,226	6,317

Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	Millones de € R_i	R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ $_{ij}$	α $_{ij}$	$F_{ij} = F_{ji}$
Maresme	Barcelonés	143,1	25,0	3.578	89.438	20.074,15	3.288,69	6,10	0,60	1,83	0,163	6,118	4.225,130
Maresme	La Selva	995,5	40,0	39.820	1.592.800	1.095,04	3.288,69	0,33	-0,37	0,69	1,104	0,906	56,269
Maresme	Vallès Oriental	851,9	15,0	12.779	191.678	2.665,83	3.288,69	0,81	-0,07	0,93	0,179	5,595	2.597,656
Montsià	Baix Ebre	987,9	12,0	11.855	142.258	581,09	479,85	1,21	0,06	1,07	0,152	6,595	161,363
Osona	Bages	1295,2	45,0	58.284	2.622.780	1.394,69	1.242,09	1,12	0,04	1,04	2,726	0,367	19,010
Osona	Berguedà	1182,5	38,0	44.935	1.707.530	358,26	1.242,09	0,29	-0,41	0,66	1,128	0,886	8,110
Osona	Garrotas	734,2	30,0	22.026	660.780	451,40	1.242,09	0,36	-0,34	0,71	0,472	2,121	20,766
Osona	Gironès	575,5	47,5	27.336	1.298.472	1.264,79	1.242,09	1,02	0,01	1,01	1,306	0,766	14,659
Osona	La Selva	995,5	35,0	34.843	1.219.488	1.095,04	1.242,09	0,88	-0,04	0,96	1,169	0,855	31,723
Osona	Ripollès	958,7	28,5	27.323	778.704	268,56	1.242,09	0,22	-0,51	0,60	0,467	2,140	14,410
Osona	Vallès Oriental	851,9	33,0	28.113	927.719	2.665,83	1.242,09	2,15	0,25	1,29	1,197	0,836	92,139
Pallars Jussà	Alt Urgell	1446,9	52,0	75.236	3.912.282	175,35	128,69	1,36	0,10	1,11	4,337	0,231	0,160
Pallars Jussà	Alta Ribagorça	426,8	31,0	13.231	410.155	43,13	128,69	0,34	-0,36	0,69	0,285	3,510	0,186
Pallars Jussà	La Noguera	1733,0	40,0	69.320	2.772.800	1.242,09	128,69	9,65	0,76	2,13	5,904	0,169	2,498
Pallars Jussà	Pallars Sobirà	1355,2	35,0	47.433	1.660.145	70,23	128,69	0,55	-0,20	0,82	1,357	0,737	0,211
Pallars Jussà	Segrià	1393,7	65,0	90.591	5.888.383	1.595,18	128,69	12,40	0,84	2,31	13,628	0,073	0,748
Pallars Jussà	Vall d'Aran	620,5	63,0	39.090	2.462.645	104,86	128,69	0,81	-0,07	0,93	2,300	0,435	0,054
Pallars Sobirà	Alt Urgell	1446,9	29,0	41.960	1.216.843	175,35	70,23	2,50	0,31	1,36	1,651	0,606	0,505
Pallars Sobirà	Alta Ribagorça	426,8	32,5	13.871	450.808	43,13	70,23	0,61	-0,16	0,85	0,383	2,610	0,088
Pallars Sobirà	Pallars Jussà	1290,0	35,0	45.150	1.580.250	128,69	70,23	1,83	0,20	1,22	1,934	0,517	0,211
Pallars Sobirà	Vall d'Aran	620,5	42,0	26.060	1.094.509	104,86	70,23	1,49	0,13	1,14	1,251	0,799	0,099
Pla de l'Estany	Alt Empordà	1342,4	23,0	30.875	710.130	1.005,63	239,01	4,21	0,48	1,61	1,146	0,872	19,755
Pla de l'Estany	Garrotas	734,2	25,0	18.355	458.875	451,40	239,01	1,89	0,21	1,24	0,567	1,763	6,905
Pla de l'Estany	Gironès	575,5	17,0	9.784	166.320	1.264,79	239,01	5,29	0,56	1,74	0,290	3,450	61,530
Pla d'Urgell	La Noguera	1733,0	20,0	34.660	693.200	1.242,09	294,74	4,21	0,48	1,62	1,120	0,893	45,762
Pla d'Urgell	Les Garrigues	799,7	12,0	9.596	115.157	191,42	294,74	0,65	-0,14	0,87	0,100	10,028	32,650
Pla d'Urgell	L'Urgell	586,2	21,5	12.603	270.971	294,74	294,74	1,00	0,00	1,00	0,271	3,690	8,741
Pla d'Urgell	Segrià	1393,7	21,0	29.268	614.622	1.595,18	294,74	5,41	0,56	1,76	1,079	0,927	50,768

Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	Millones de € R_i	Millones de € R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ ij	α ij	$F_{ij} = F_{ji}$
Priorat	Baix Camp	695,3	24,0	16.687	400.493	1.274,07	79,87	15,95	0,92	2,52	1,008	0,992	7,361
Priorat	Baix Ebre	987,9	46,0	45.443	2.090.396	581,09	79,87	7,28	0,66	1,94	4,051	0,247	0,477
Priorat	Conca de Barberà	648,9	38,0	24.658	937.012	171,48	79,87	2,15	0,25	1,29	1,209	0,827	0,250
Priorat	Les Garrigues	799,7	42,5	33.987	1.444.458	191,42	79,87	2,40	0,29	1,34	1,933	0,517	0,199
Priorat	Ribera d'Ebre	825,3	15,0	12.379	185.690	192,65	79,87	2,41	0,29	1,34	0,249	4,016	4,559
Priorat	Tarragonès	317,1	37,0	11.733	434.110	1.634,17	79,87	20,46	1,01	2,74	1,187	0,842	2,577
Ribera d’Ebre	Baix Camp	695,3	39,0	27.117	1.057.551	1.274,07	192,65	6,61	0,63	1,88	1,985	0,504	4,138
Ribera d’Ebre	Baix Ebre	987,9	33,0	32.601	1.075.823	581,09	192,65	3,02	0,37	1,44	1,554	0,643	3,115
Ribera d’Ebre	Les Garrigues	799,7	51,0	40.785	2.080.020	191,42	192,65	0,99	0,00	1,00	2,076	0,482	0,278
Ribera d’Ebre	Priorat	496,2	15,0	7.443	111.645	79,87	192,65	0,41	-0,29	0,75	0,083	12,012	4,559
Ribera d’Ebre	Segrià	1393,7	57,0	79.441	4.528.131	1.595,18	192,65	8,28	0,70	2,02	9,161	0,109	1,659
Ribera d’Ebre	Tarragonès	317,1	50,0	15.855	792.750	1.634,17	192,65	8,48	0,71	2,04	1,617	0,619	2,519
Ribera d’Ebre	Terra Alta	740,0	18,0	13.321	239.773	110,27	192,65	0,57	-0,19	0,83	0,199	5,023	3,643
Ripollès	Alt Urgell	1446,9	65,0	94.049	6.113.153	175,35	268,56	0,65	-0,14	0,87	5,303	0,189	0,171
Ripollès	Bages	1295,2	61,0	79.007	4.819.439	1.394,69	268,56	5,19	0,55	1,73	8,346	0,120	1,650
Ripollès	Berguedà	1182,5	32,0	37.840	1.210.880	358,26	268,56	1,33	0,10	1,10	1,333	0,750	2,936
Ripollès	Cerdanya	546,4	33,0	18.031	595.030	156,74	268,56	0,58	-0,18	0,84	0,497	2,011	1,171
Ripollès	Garrotas	734,2	24,0	17.621	422.899	451,40	268,56	1,68	0,17	1,19	0,503	1,989	8,769
Ripollès	Gironès	575,5	59,0	33.955	2.003.316	1.264,79	268,56	4,71	0,52	1,68	3,358	0,298	1,654
Ripollès	Osona	1263,8	28,5	36.018	1.026.522	1.242,09	268,56	4,63	0,51	1,67	1,710	0,585	14,410
Segarra	Anoia	866,6	30,0	25.998	779.940	763,29	177,57	4,30	0,49	1,63	1,268	0,789	5,020
Segarra	Bages	1295,2	47,0	60.874	2.861.097	1.394,69	177,57	7,85	0,69	1,99	5,687	0,176	2,385
Segarra	Conca de Barberà	648,9	34,0	22.063	750.128	171,48	177,57	0,97	-0,01	0,99	0,741	1,349	0,775
Segarra	La Noguera	1733,0	43,0	74.519	3.204.317	1.242,09	177,57	6,99	0,65	1,91	6,128	0,163	2,774
Segarra	l'Urgell	586,2	10,5	6.155	64.629	294,74	177,57	1,66	0,17	1,18	0,077	13,068	45,211
Segarra	Segrià	1393,7	55,0	76.654	4.215.943	1.595,18	177,57	8,98	0,73	2,08	8,764	0,114	1,703
Segarra	Solsonès	998,6	44,0	43.938	1.933.290	110,20	177,57	0,62	-0,16	0,85	1,649	0,606	0,230

						Millones de €							
Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	R_i	R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ_{ij}	α_{ij}	$F_{ij} = F_{ji}$
Segrià	La Noguera	1733,0	25,0	43.325	1.083.125	1.242,09	1.595,18	0,78	-0,08	0,92	0,996	1,004	126,807
Segrià	Les Garrigues	799,7	22,5	17.993	404.848	191,42	1.595,18	0,12	-0,71	0,49	0,200	5,008	26,807
Segrià	l'Urgell	586,2	43,0	25.207	1.083.884	294,74	1.595,18	0,18	-0,56	0,57	0,617	1,620	5,913
Segrià	Pallars Jussà	1290,0	65,0	83.850	5.450.250	128,69	1.595,18	0,08	-0,84	0,43	2,355	0,425	0,748
Segrià	Pla d'Urgell	304,5	21,0	6.395	134.285	294,74	1.595,18	0,18	-0,56	0,57	0,076	13,075	50,768
Segrià	Ribera d'Ebre	825,3	57,0	47.042	2.681.367	192,65	1.595,18	0,12	-0,70	0,49	1,325	0,754	1,659
Segrià	Segarra	721,2	55,0	39.666	2.181.630	177,57	1.595,18	0,11	-0,73	0,48	1,049	0,953	1,703
Solsonès	Alt Urgell	1446,9	41,0	59.323	2.432.239	175,35	110,20	1,59	0,15	1,17	2,840	0,352	0,280
Solsonès	Anoia	866,6	47,0	40.730	1.914.319	763,29	110,20	6,93	0,65	1,91	3,649	0,274	0,810
Solsonès	Bages	1295,2	37,0	47.922	1.773.129	1.394,69	110,20	12,66	0,85	2,33	4,132	0,242	3,034
Solsonès	Berguedà	1182,5	25,0	29.563	739.063	358,26	110,20	3,25	0,39	1,48	1,095	0,913	2,527
Solsonès	La Noguera	1733,0	67,0	116.111	7.779.437	1.242,09	110,20	11,27	0,81	2,24	17,442	0,057	0,455
Solsonès	Segarra	721,2	44,0	31.733	1.396.243	177,57	110,20	1,61	0,16	1,17	1,637	0,611	0,230
Tarragonès	Alt Camp	544,7	18,0	9.805	176.483	315,57	1.634,17	0,19	-0,55	0,58	0,102	9,803	88,425
Tarragonès	Baix Camp	695,3	11,5	7.996	91.953	1.274,07	1.634,17	0,78	-0,08	0,92	0,085	11,816	1.368,980
Tarragonès	Baix Penedès	295,5	27,0	7.979	215.420	460,82	1.634,17	0,28	-0,42	0,66	0,141	7,079	38,259
Tarragonès	Priorat	496,2	37,0	18.359	679.298	79,87	1.634,17	0,05	-1,01	0,37	0,248	4,026	2,577
Tarragonès	Ribera d'Ebre	825,3	50,0	41.265	2.063.225	192,65	1.634,17	0,12	-0,71	0,49	1,012	0,988	2,519
Terra Alta	Baix Ebre	987,9	28,0	27.661	774.514	581,09	110,27	5,27	0,55	1,74	1,348	0,742	2,919
Terra Alta	Ribera d'Ebre	825,3	18,0	14.855	267.394	192,65	110,27	1,75	0,19	1,20	0,322	3,105	3,643
Vall d'Aran	Alta Ribagorça	426,8	33,0	14.084	464.785	43,13	104,86	0,41	-0,30	0,74	0,346	2,893	0,126
Vall d'Aran	Pallars Jussà	1290,0	63,0	81.270	5.120.010	128,69	104,86	1,23	0,07	1,07	5,482	0,182	0,054
Vall d'Aran	Pallars Sobirà	1355,2	42,0	56.919	2.390.608	70,23	104,86	0,67	-0,13	0,87	2,092	0,478	0,099

						Millones de €							
Comarca $_j$	Comarca $_i$	A_i (km^2)	r_{ij} (km)	M_{ij} (km^3)	I_{ij} (km^4)	R_i	R_j	R_i / R_j	Aux.	Arrel	ρ_{ij}	α_{ij}	$F_{ij} = F_{ji}$
Vallès Occidental	Bages	1295,2	32,0	41.445	1.326.254	1.394,69	6.093,51	0,23	-0,49	0,61	0,811	1,233	259,355
Vallès Occidental	Baix Llobregat	486,5	17,5	8.514	148.991	5.496,24	6.093,51	0,90	-0,03	0,97	0,144	6,947	6.249,123
Vallès Occidental	Barcelonés	143,1	16,5	2.361	38.959	20.074,15	6.093,51	3,29	0,40	1,49	0,058	17,251	27.230,327
Vallès Occidental	Vallès Oriental	851,9	19,0	16.186	307.536	2.665,83	6.093,51	0,44	-0,28	0,76	0,233	4,283	2.368,313
Vallès Oriental	Bages	1295,2	40,0	51.807	2.072.272	1.394,69	2.665,83	0,52	-0,22	0,81	1,670	0,599	58,094
Vallès Oriental	Barcelonés	143,1	22,0	3.148	69.260	20.074,15	2.665,83	7,53	0,67	1,96	0,136	7,366	5.025,758
Vallès Oriental	La Selva	995,5	40,0	39.820	1.592.800	1.095,04	2.665,83	0,41	-0,30	0,74	1,184	0,845	45,612
Vallès Oriental	Maresme	396,9	15,0	5.954	89.303	3.288,69	2.665,83	1,23	0,07	1,07	0,096	10,441	2.597,656
Vallès Oriental	Osona	1263,8	33,0	41.705	1.376.278	1.242,09	2.665,83	0,47	-0,25	0,78	1,067	0,937	92,139
Vallès Oriental	Vallès Occidental	580,7	19,0	11.033	209.633	6.093,51	2.665,83	2,29	0,28	1,32	0,276	3,621	2.368,313

Del mismo modo, a continuación, puede verse la siguiente tabla, en la que se calculan los parámetros correspondientes, pero esta vez en base a los datos comarcales de superficie (Km^2) y rentas totales (10^6 pta.) referidos al año 1986.

COMARCA j	COMARCA i	Ai Km2	rij Km	Mij Km3	Iij Km4	Ri Mill	Rj Mill	Ri/Rj	Aux.	Arrel	Roij	Alfaij	Fij=Fji
ALT CAMP	CONCA DE BARBE.	637,95	12,00	7655	91865	11706	23633	,50	-,23	,79	,072685	13,7581	,160098
	BAIX CAMP	674,16	17,50	11798	206462	93406	23633	3,95	,46	1,58	,326429	3,06345	,411892
	TARRAGONES	345,02	18,00	6210	111786	108623	23633	4,60	,51	1,66	,185861	5,38036	,440180
	ALT PENEDES	515,00	38,00	19570	743660	50493	23633	2,14	,25	1,29	,957805	1,04405	,021747
	ANOIA	893,38	46,00	41095	1890392	59501	23633	2,52	,31	1,36	2,57168	,388851	,014447
	BAIX PENEDES	264,06	24,50	6469	158502	28261	23633	1,20	,06	1,06	,168237	5,94401	,045416
ALT PENEDES	ALT CAMP	548,25	38,00	20834	791673	23633	50493	,47	-,25	,78	,614672	1,62688	,021747
	BAIX PENEDES	264,06	20,00	5281	105624	28261	50493	,56	-,19	,82	,087045	11,4883	,178371
	GARRAF	261,49	13,00	3399	44192	51491	50493	1,02	,01	1,01	,044481	22,4815	1,18340
	BAIX LLOBREGAT	474,05	27,00	12799	345582	344095	50493	6,81	,64	1,90	,655190	1,52628	,882712
	ANOIA	893,38	27,00	24121	651274	59501	50493	1,18	,05	1,06	,687902	1,45370	,152638
BAIX LLOBREGAT	ANOIA	893,38	39,00	34842	1358831	59501	344095	,17	-,58	,56	,757030	1,32095	,345148
	ALT PENEDES	515,00	27,00	13905	375435	50493	344095	,15	-,64	,53	,198025	5,04988	,882712
	GARRAF	261,49	32,00	8368	267766	51491	344095	,15	-,63	,53	,142158	7,03441	,540703
	BARCELONES	155,52	8,00	1244	9953	1921583	344095	5,58	,57	1,77	,017659	56,6292	1291,42
	VALLES OCCID.	618,59	17,50	10825	189443	428704	344095	1,25	,07	1,08	,203848	4,90563	27,5247
	BAGES	1295,17	41,00	53102	2177181	113407	344095	,33	-,37	,69	1,50388	,664945	,566194
BAIX PENEDES	ALT CAMP	548,25	24,50	13432	329087	23633	28261	,84	-,06	,94	,310045	3,22534	,045416
	TARRAGONES	345,02	27,00	9316	251520	108623	28261	3,84	,45	1,57	,393991	2,53813	,155960
	GARRAF	261,49	16,00	4184	66941	51491	28261	1,82	,20	1,22	,081761	12,2308	,355265
	ALT PENEDES	515,00	20,00	10300	206000	50493	28261	1,79	,19	1,21	,249968	4,00051	,178371
BAIX CAMP	PRIORAT	517,31	24,00	12415	297971	5630	93406	,06	-,94	,39	,116831	8,55939	,038042
	RIBERA D'EBRE	825,29	39,00	32186	1255266	14370	93406	,15	-,62	,54	,672603	1,48676	,022627
	BAIX EBRE	1036,64	62,00	64272	3984844	43293	93406	,46	-,26	,77	3,08385	,324270	,016967
	TARRAGONES	345,02	11,50	3968	45629	108623	93406	1,16	,05	1,05	,047983	20,8406	6,67118
	ALT CAMP	548,25	17,50	9594	167902	23633	93406	,25	-,46	,63	,106195	9,41661	,411892
	CONCA DE BARBE.	637,95	25,00	15949	398719	11706	93406	,13	-,69	,50	,199531	5,01175	,069977
TARRAGONES	BAIX CAMP	674,16	11,50	7753	89158	93406	108623	,86	-,05	,95	,084783	11,7948	6,67118
	BAIX PENEDES	264,06	27,00	7130	192500	28261	108623	,26	-,45	,64	,122890	8,13737	,155960
	ALT CAMP	548,25	18,00	9869	177633	23633	108623	,22	-,51	,60	,106838	9,36000	,440180
	RIBERA D'EBRE	825,29	50,00	41265	2063225	14370	108623	,13	-,67	,51	1,05128	,951219	,012487
TERRA ALTA	BAIX EBRE	1036,64	28,00	29026	812726	43293	7456	5,81	,59	1,80	1,46080	,684555	,014704
	RIBERA D'EBRE	825,29	18,00	14855	267394	14370	7456	1,93	,22	1,24	,332767	3,00511	,018370
BAIX EBRE	TERRA ALTA	740,04	28,00	20721	580191	7456	43293	,17	-,59	,56	,322793	3,09796	,014704
	MONTSIA	659,95	12,00	7919	95033	33899	43293	,78	-,08	,92	,087592	11,4166	,849311
	BAIX CAMP	674,16	62,00	41798	2591471	93406	43293	2,16	,26	1,29	3,34861	,298632	,016967
	RIBERA D'EBRE	825,29	33,00	27235	898741	14370	43293	,33	-,37	,69	,622265	1,60703	,017311
MONTSIA	BAIX EBRE	1036,64	12,00	12440	149276	43293	33899	1,28	,08	1,08	,161957	6,17447	,849311
GARRAF	ALT PENEDES	515,00	13,00	6695	87035	50493	51491	,98	-,01	,99	,086469	11,5648	1,18340
	BAIX PENEDES	264,06	16,00	4225	67599	28261	51491	,55	-,20	,82	,055347	18,0679	,355265
	BAIX LLOBREGAT	474,05	32,00	15170	485427	344095	51491	6,68	,63	1,88	,914338	1,09369	,540703
BAGES	SOLSONES	971,88	37,00	35960	1330504	7700	113407	,07	-,90	,41	,542802	1,84229	,017240
	ANOIA	893,38	25,00	22335	558363	59501	113407	,52	-,21	,81	,450343	2,22053	,431856
	BAIX LLOBREGAT	474,05	41,00	19436	796878	344095	113407	3,03	,37	1,45	1,15364	,866818	,566194
	VALLES OCCID.	618,59	32,00	19795	633436	428704	113407	3,78	,44	1,56	,986755	1,01342	1,48370
	VALLES ORIENT.	813,96	40,00	32558	1302336	165820	113407	1,46	,13	1,14	1,47816	,676515	,293830
	OSONA	1191,40	45,00	53613	2412585	85057	113407	,75	-,10	,91	2,19199	,456206	,105854
	BERGUEDA	1182,46	40,00	47298	1891936	29573	113407	,26	-,45	,64	1,20872	,827318	,052403

COMARCA j	COMARCA i	Ai Km2	rij Km	Mij Km3	Iij Km4	Ri Mill	Rj Mill	Ri/Rj	Aux.	Arrel	Roij	Alfaij	Fij=Fji
VALLES ORIENT.	BAGES	1295,17	40,00	51807	2072272	113407	165820	,68	-,13	,88	1,82577	,547713	,293830
	VALLES OCCID.	618,59	19,00	11753	223311	428704	165820	2,59	,32	1,37	,306490	3,26274	10,3642
	BARCELONES	155,52	22,00	3421	75272	1921583	165820	11,59	,82	2,26	,170336	5,87076	29,9246
	MARESME	396,20	15,00	5943	89145	198350	165820	1,20	,06	1,06	,094630	10,5675	9,74530
	LA SELVA	995,50	40,00	39820	1592800	74078	165820	,45	-,27	,76	1,21762	,821276	,191930
	OSONA	1191,40	33,00	39316	1297435	85057	165820	,51	-,22	,80	1,03859	,962847	,392468
MARESME	VALLES ORIENT.	813,96	15,00	12209	183141	165820	198350	,84	-,06	,94	,172526	5,79623	9,74530
	BARCELONES	155,52	25,00	3888	97200	1921583	198350	9,69	,76	2,13	,207209	4,82604	24,3933
	LA SELVA	995,50	40,00	39820	1592800	74078	198350	,37	-,33	,72	1,14704	,871807	,229582
SEGRIA	RIBERA D'EBRE	825,29	57,00	47042	2681367	14370	124017	,12	-,72	,49	1,30720	,764992	,009623
	LES GARRIGUES	840,19	22,50	18904	425346	14446	124017	,12	-,72	,49	,207730	4,81395	,157284
	L'URGELL	679,21	43,00	29206	1255859	24252	124017	,20	-,54	,58	,728946	1,37184	,037829
	LA NOGUERA	1840,68	25,00	46017	1150425	29470	124017	,24	-,48	,62	,712567	1,40338	,233909
LES GARRIGUES	SEGRIA	1469,00	22,50	33053	743681	124017	14446	8,58	,72	2,05	1,52276	,656704	,157284
	RIBERA D'EBRE	825,29	51,00	42090	2146579	14370	14446	,99	,00	1,00	2,14278	,466684	,001565
	PRIORAT	517,31	42,00	21727	912535	5630	14446	,39	-,31	,73	,666562	1,50024	,001098
	CONCA DE BARBE.	637,95	30,00	19139	574155	11706	14446	,81	-,07	,93	,535279	1,86818	,006263
	L'URGELL	679,21	27,00	18339	495144	24252	14446	1,68	,17	1,19	,588478	1,69930	,017799
CONCA DE BARBE.	L'URGELL	679,21	31,00	21056	652721	24252	11706	2,07	,24	1,27	,832098	1,20178	,009529
	LES GARRIGUES	840,19	30,00	25206	756171	14446	11706	1,23	,07	1,07	,811089	1,23291	,006263
	PRIORAT	517,31	38,00	19658	746996	5630	11706	,48	-,24	,78	,585272	1,70861	,001201
	BAIX CAMP	674,16	25,00	16854	421350	93406	11706	7,98	,69	2,00	,841975	1,18768	,069977
	ALT CAMP	548,25	12,00	6579	78948	23633	11706	2,02	,23	1,26	,099781	10,0220	,160098
	ANOIA	893,38	44,00	39309	1729584	59501	11706	5,08	,54	1,72	2,97381	,336269	,008176
	SEGARRA	720,18	34,00	24486	832528	11445	11706	,98	-,01	,99	,826301	1,21021	,003409
VALLES OCCID.	BAGES	1295,17	32,00	41445	1326254	113407	428704	,26	-,44	,64	,851374	1,17457	1,48370
	BAIX LLOBREGAT	474,05	17,50	8296	145178	344095	428704	,80	-,07	,93	,134919	7,41184	27,5247
	BARCELONES	155,52	16,50	2566	42340	1921583	428704	4,48	,50	1,65	,069811	14,3245	183,386
	VALLES ORIENT.	813,96	19,00	15465	293840	165820	428704	,39	-,32	,73	,214093	4,67086	10,3642
RIBERA D'EBRE	TERRA ALTA	740,04	18,00	13321	239773	7456	14370	,52	-,22	,80	,192669	5,19025	,018370
	BAIX EBRE	1036,64	33,00	34209	1128901	43293	14370	3,01	,37	1,44	1,63048	,613317	,017311
	BAIX CAMP	674,16	39,00	26292	1025397	93406	14370	6,50	,62	1,87	1,91368	,522553	,022627
	PRIORAT	517,31	15,00	7760	116395	5630	14370	,39	-,31	,73	,085171	11,7410	,023971
	LES GARRIGUES	840,19	51,00	42850	2185334	14446	14370	1,01	,00	1,00	2,18921	,456786	,001565
	SEGRIA	1469,00	57,00	83733	4772781	124017	14370	8,63	,72	2,05	9,79005	,102145	,009623
	TARRAGONES	345,02	50,00	17251	862550	108623	14370	7,56	,67	1,96	1,69282	,590729	,012487
PRIORAT	RIBERA D'EBRE	825,29	15,00	12379	185690	14370	5630	2,55	,31	1,37	,253763	3,94068	,023971
	BAIX CAMP	674,16	24,00	16180	388316	93406	5630	16,59	,94	2,55	,990380	1,00971	,038042
	CONCA DE BARBE.	637,95	38,00	24242	921200	11706	5630	2,08	,24	1,28	1,17575	,850523	,001201
	LES GARRIGUES	840,19	42,00	35288	1482095	14446	5630	2,57	,31	1,37	2,02901	,492850	,001098
BARCELONES	MARESME	396,20	25,00	9905	247625	198350	1921583	,10	-,76	,47	,116159	8,60891	24,3933
	VALLES ORIENT.	813,96	22,00	17907	393957	165820	1921583	,09	-,82	,44	,174090	5,74415	29,9246
	VALLES OCCID.	618,59	16,50	10207	168411	428704	1921583	,22	-,50	,61	,102142	9,79031	183,386
	BAIX LLOBREGAT	474,05	8,00	3792	30339	344095	1921583	,18	-,57	,56	,017101	58,4776	1291,42
VALL D'ARAN	PALLARS SOBIRA	1355,22	42,00	56919	2390608	3441	5304	,65	-,14	,87	2,06957	,483192	,000246
	PALLARS JUSSA	1716,72	63,00	108153	6813662	12223	5304	2,30	,28	1,32	9,00005	,111110	,000259

COMARCA j	COMARCA i	Ai Km2	rij Km	Mij Km3	Iij Km4	Ri Mill	Rj Mill	Ri/Rj	Aux.	Arrel	Roij	Alfaij	Fij=Fji
PALLARS SOBIRA	VALL D'ARAN	620,47	42,00	26060	1094509	5304	3441	1,54	,14	1,16	1,26429	,790956	,000246
	PALLARS JUSSA	1716,72	35,00	60085	2102982	12223	3441	3,55	,42	1,53	3,20869	,311653	,000981
	ALT URGELL	1446,85	29,00	41959	1216801	13803	3441	4,01	,46	1,59	1,93334	,517239	,001948
ALT URGELL	PALLARS SOBIRA	1355,22	29,00	39301	1139740	3441	13803	,25	-,46	,63	,717327	1,39407	,001948
	PALLARS JUSSA	1716,72	52,00	89269	4642011	12223	13803	,89	-,04	,96	4,45769	,224331	,001200
	LA NOGUERA	1840,68	83,00	152776	12680445	29470	13803	2,14	,25	1,29	16,3282	,061244	,000711
	SOLSONES	971,88	41,00	39847	1633730	7700	13803	,56	-,19	,82	1,34491	,743545	,001542
	BERGUEDA	1182,46	44,00	52028	2289243	29573	13803	2,14	,25	1,29	2,95121	,338844	,004792
	CERDANYA	546,37	39,00	21308	831029	8971	13803	,65	-,14	,87	,719848	1,38918	,002088
CERDANYA	ALT URGELL.	1446,85	39,00	56427	2200659	13803	8971	1,54	,14	1,15	2,54055	,393615	,002088
	BERGUEDA	1182,46	38,00	44933	1707472	29573	8971	3,30	,40	1,49	2,54119	,393516	,004835
	RIPOLLES	1031,16	33,00	34028	1122933	22014	8971	2,45	,30	1,35	1,51462	,660230	,005496
BERGUEDA	CERDANYA	546,37	38,00	20762	788958	8971	29573	,30	-,40	,67	,530115	1,88638	,004835
	ALT URGELL	1446,85	44,00	63661	2801102	13803	29573	,47	-,25	,78	2,17280	,460235	,004792
	SOLSONES	971,88	25,00	24297	607425	7700	29573	,26	-,45	,64	,387879	2,57812	,014575
	BAGES	1295,17	40,00	51807	2072272	113407	29573	3,83	,45	1,57	3,24359	,308300	,052403
	OSONA	1191,40	38,00	45273	1720382	85057	29573	2,88	,35	1,42	2,44659	,408733	,045842
	RIPOLLES	1031,16	32,00	32997	1055908	22014	29573	,74	-,10	,91	,956959	1,04498	,019868
RIPOLLES	CERDANYA	546,37	33,00	18030	594997	8971	22014	,41	-,30	,74	,441127	2,26692	,005496
	BERGUEDA	1182,46	32,00	37839	1210839	29573	22014	1,34	,10	1,10	1,33604	,748481	,019868
	OSONA	1191,40	28,50	33955	967715	85057	22014	3,86	,45	1,57	1,51850	,658543	,080887
	GARROTXA	734,18	24,00	17620	422888	33524	22014	1,52	,14	1,15	,486529	2,05538	,053385
GARROTXA	RIPOLLES	1031,16	24,00	24748	593948	22014	33524	,66	-,14	,87	,516256	1,93702	,053385
	OSONA	1191,40	30,00	35742	1072260	85057	33524	2,54	,31	1,36	1,46246	,683777	,105608
	LA SELVA	995,50	39,00	38825	1514156	74078	33524	2,21	,26	1,30	1,97219	,507051	,041864
	GIRONES	838,18	35,00	29336	1026771	114668	33524	3,42	,41	1,51	1,54704	,646394	,089658
ALT EMPORDA	GARROTXA	734,18	40,00	29367	1174688	33524	68557	,49	-,24	,79	,925456	1,08055	,035911
	GIRONES	838,18	32,00	26822	858296	114668	68557	1,67	,17	1,19	1,01883	,981522	,239908
	BAIX EMPORDA	700,48	25,00	17512	437800	69448	68557	1,01	,00	1,00	,439688	2,27434	,304714
GIRONES	GARROTXA	734,18	35,00	25696	899371	33524	114668	,29	-,41	,66	,596910	1,67529	,089658
	LA SELVA	995,50	18,00	17919	322542	74078	114668	,65	-,15	,86	,278827	3,58646	1,45650
	BAIX EMPORDA	700,48	17,00	11908	202439	69448	114668	,61	-,17	,85	,171277	5,83849	1,62089
	ALT EMPORDA	1342,43	40,00	53697	2147888	68557	114668	,60	-,17	,84	1,80946	,552651	,122833
BAIX EMPORDA	ALT EMPORDA	1342,43	35,00	46985	1644477	68557	69448	,99	,00	1,00	1,63742	,610719	,111047
	GIRONES	838,18	17,00	14249	242234	114668	69448	1,65	,17	1,18	,286305	3,49278	1,62089
PALLARS JUSSA	VALL D'ARAN	620,47	63,00	39090	2462645	5304	12223	,43	-,28	,76	1,86439	,536368	,000259
	PALLARS SOBIRA	1355,22	35,00	47433	1660145	3441	12223	,28	-,42	,66	1,08806	,919067	,000981
	ALT URGELL	1446,85	52,00	75236	3912282	13803	12223	1,13	,04	1,04	4,07405	,245456	,001200
	LA NOGUERA	1840,68	40,00	73627	2945088	29470	12223	2,41	,29	1,34	3,94909	,253223	,005629
LA NOGUERA	PALLARS JUSSA	1716,72	40,00	68669	2746752	12223	29470	,41	-,29	,75	2,04843	,488179	,005629
	ALT URGELL	1446,85	83,00	120089	9967350	13803	29470	,47	-,25	,78	7,74064	,129188	,000711
	SOLSONES	971,88	67,00	65116	4362769	7700	29470	,26	-,45	,64	2,78915	,358532	,000755
	SEGARRA	720,18	43,00	30968	1331613	11445	29470	,39	-,32	,73	,971533	1,02930	,004242
	L'URGELL	679,21	32,00	21735	695511	24252	29470	,82	-,06	,94	,651765	1,53430	,021811
	SEGRIA	1469,00	25,00	36725	918125	124017	29470	4,21	,48	1,61	1,48229	,674630	,233909

COMARCA j	COMARCA i	Ai Km2	rij Km	Mij Km3	Iij Km4	Ri Mill	Rj Mill	Ri/Rj	Aux.	Arrel	Roij	Alfaij	Fij=Fji
SOLSONES	ALT URGELL	1446,85	41,00	59321	2432155	13803	7700	1,79	,19	1,21	2,95447	,338471	,001542
	BERGUEDA	1182,46	25,00	29562	739038	29573	7700	3,84	,45	1,57	1,15734	,864047	,014575
	BAGES	1295,17	37,00	47921	1773088	113407	7700	14,73	,90	2,45	4,34616	,230088	,017240
	ANOIA	893,38	47,00	41989	1973476	59501	7700	7,73	,68	1,98	3,90152	,256310	,004413
	SEGARRA	720,18	44,00	31688	1394268	11445	7700	1,49	,13	1,14	1,59117	,628469	,001035
	LA NOGUERA	1840,68	67,00	123326	8262813	29470	7700	3,83	,45	1,56	12,9246	,077372	,000755
OSONA	BERGUEDA	1182,46	38,00	44933	1707472	29573	85057	,35	-,35	,70	1,20065	,832879	,045842
	BAGES	1295,17	45,00	58283	2622719	113407	85057	1,33	,10	1,10	2,88666	,346422	,105854
	VALLES ORIENT.	813,96	33,00	26861	886402	165820	85057	1,95	,22	1,25	1,10732	,903080	,392468
	LA SELVA	995,50	35,00	34843	1219488	74078	85057	,87	-,05	,95	1,16458	,858677	,146957
	GARROTXA	734,18	30,00	22025	660762	33524	85057	,39	-,31	,73	,484462	2,06414	,105608
	RIPOLLES	1031,16	28,50	29388	837560	22014	85057	,26	-,45	,64	,533761	1,87350	,080887
LA SELVA	GIRONES	838,18	18,00	15087	271570	114668	74078	1,55	,15	1,16	,314148	3,18321	1,45650
	BAGES	1295,17	35,00	45331	1586583	113407	74078	1,53	,14	1,15	1,82858	,546873	,195939
	VALLES ORIENT.	813,96	40,00	32558	1302336	165820	74078	2,24	,27	1,31	1,70362	,586984	,191930
	MARESME	396,20	40,00	15848	633920	198350	74078	2,68	,33	1,39	,880271	1,13601	,229582
	GARROTXA	734,18	39,00	28633	1116688	33524	74078	,45	-,26	,77	,857342	1,16640	,041864
L'URGELL	LA NOGUERA	1840,68	32,00	58902	1884856	29470	24252	1,22	,06	1,07	2,01137	,497174	,021811
	SEGRIA	1469,00	43,00	63167	2716181	124017	24252	5,11	,54	1,72	4,67955	,213696	,037829
	LES GARRIGUES	840,19	27,00	22685	612499	14446	24252	,60	-,17	,84	,515355	1,94041	,017799
	CONCA DE BARBE.	637,95	31,00	19776	613070	11706	24252	,48	-,24	,78	,480909	2,07939	,009529
	SEGARRA	720,18	10,50	7562	79400	11445	24252	,47	-,25	,78	,061818	16,1766	,239774
SEGARRA	LA NOGUERA	1840,68	43,00	79149	3403417	29470	11445	2,57	,32	1,37	4,66483	,214370	,004242
	L'URGELL	679,21	10,50	7132	74883	24252	11445	2,12	,25	1,28	,096181	10,3970	,239774
	CONCA DE BARBE.	637,95	34,00	21690	737470	11706	11445	1,02	,01	1,01	,743028	1,34585	,003409
	ANOIA	893,38	30,00	26801	804042	59501	11445	5,20	,55	1,73	1,39287	,717941	,025222
	SOLSONES	971,88	44,00	42763	1881560	7700	11445	,67	-,13	,88	1,64872	,606530	,001035
ANOIA	SOLSONES	971,88	47,00	45678	2146883	7700	59501	,13	-,68	,51	1,08594	,920861	,004413
	SEGARRA	720,18	30,00	21605	648162	11445	59501	,19	-,55	,58	,374155	2,67269	,025222
	CONCA DE BARBE.	637,95	44,00	28070	1235071	11706	59501	,20	-,54	,58	,718323	1,39213	,008176
	ALT CAMP	548,25	46,00	25220	1160097	23633	59501	,40	-,31	,74	,852764	1,17266	,014447
	ALT PENEDES	515,00	27,00	13905	375435	50493	59501	,85	-,05	,95	,355445	2,81338	,152638
	BAIX LLOBREGAT	474,05	39,00	18488	721030	344095	59501	5,78	,58	1,79	1,29421	,772670	,345148
	BAGES	1295,17	25,00	32379	809481	113407	59501	1,91	,21	1,24	1,00364	,996370	,431856

3. ATRACCIÓN ENTRE LAS COMARCAS DE CATALUÑA. GRADO DE CONEXIÓN TERRITORIAL

Comparando, ahora, cada una de las comarcas de Cataluña con aquellas otras que les son fronterizas, se obtienen los siguientes valores, con datos correspondientes al año 1986:

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km.)	A_i (km^2)	R_i (10^6 ptas.)	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$	$\bar{\alpha} = \theta/2$
Alt Camp	C. de Barberà	12’00	637’95	11.705’90	13’758	10’022	11’742	23’780	11’890
(6)	Baix Camp	17’50	674’16	93.405’60	3’063	9’417	5’371	12’480	6’240
A_j = 548’25	Tarragonès	18’00	345’02	108.623’40	5’380	9’360	7’096	14’740	7’370
R_j = 23.633’30	Alt Penedès	38’00	515’00	50.493’10	1’044	1’627	1’699	2’671	1’336
	Anoia	46’00	893’38	59.500’50	0’389	1’173	0’675	1’562	0’781
	Baix Penedès	24’50	264’06	28.260’60	5’944	3’225	4’378	9’169	4’585
Alt Penedès	Alt Camp	38’00	548’25	23.633’30	1’627	1’044	1’303	2’671	1’336
(5)	Baix Penedès	20’00	264’06	28.260’60	11’488	4’001	6’780	15’489	7’745
A_j = 515’00	Garraf	13’00	261’49	51.490’90	22’482	11’565	16’125	34’047	17’024
R_j = 50.493’10	Baix Llobregat	27’00	474’05	344.095’10	1’526	5’050	2’776	6’576	3’288
	Anoia	27’00	893’38	59.500’50	1’454	2’813	2’022	4’267	2’134
Baix Llobregat	Anoia	39’00	893’38	59.500’50	1’321	0’773	1’011	2’094	1’047
(6)	Alt Penedès	27’00	515’00	50.493’10	5’050	1’526	2’776	6’576	3’288
A_j = 474’05	Garraf	32’00	261’49	51.490’90	7’034	1’094	2’774	8’128	4’464
R_j =344.095’10	Barcelonès	8’00	155’52	1.921.583’00	56’629	58’478	57’546	115’107	57’554
	V. Occidental	17’50	618’59	428.704’40	4’906	7’412	6’030	12’318	6’159
	Bages	41’00	1.295’17	113.406’60	0’665	0’867	0’759	1’532	0’766
Baix Penedès	Barcelonès	57’00	155’52	1.921.583’00	0’485	4’757	1’519	5’242	2’621
(5)	Alt Camp	24’50	548’25	23.633’30	3’225	5’944	4’378	9’169	4’585
A_j = 264’06	Tarragonès	27’00	345’02	108.623’40	2’538	8’137	4’544	10’675	5’338
R_j = 28.260’60	Garraf	16’00	261’49	51.490’90	12’231	18’068	14’866	30’199	15’150
	Alt Penedès	20’00	515’00	50.493’10	4’001	11’488	6’780	15’489	7’745

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km.)	A_i (km^2)	R_i (10^6pta.)	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$	$\bar{\alpha} = \theta/2$
Baix Camp	Priorat	24'00	517'31	5.630'20	8'559	1'010	2'940	9'569	4'785
(6)	Ribera d'Ebre	39'00	825'29	14.369'50	1'487	0'523	0'882	2'010	1'005
A_j = 674'16	Baix Ebre	62'00	1.036'64	43.293'20	0'324	0'299	0'311	0'023	0'312
R_j = 93.405'60	Tarragonès	11'50	345'02	108'623'40	20'841	11'795	15'679	32'636	16'318
	Alt Camp	17'50	548'25	23.633'30	9'417	3'063	5'371	12'480	6'240
	Conca de Barberà	25'00	637'95	11.705'90	5'012	1'188	2'440	6'200	3'100
Tarragonès	Priorat	37'00	517'31	5.630'20	3'787	0'789	1'729	4'576	2'288
(5)	Baix Camp	11'50	674'16	93.405'60	11'795	20'841	15'679	33'636	16'318
A_j = 345'02	Baix Penedès	27'00	264'06	28.260'60	8'137	2'538	4'544	10'675	5'338
R_j =108.623'40	Alt Camp	18'00	548'25	23.633'30	9'360	5'380	7'096	14'740	7'370
	Ribera d'Ebre	50'00	825'29	14.369'50	0'951	0'591	0'750	1'542	0'771
Terra Alta	Baix Ebre	28'00	1.036'64	43.293'20	0'685	3'098	1'457	3'783	1'892
(2)	Ribera d'Ebre	18'00	825'29	14.369'50	3'005	5'190	3'949	8'195	4'098
A_j = 740'04									
R_j =7.455'50									
Baix Ebre	Priorat	46'00	517'31	5.630'20	1'803	0'231	0'645	2'034	1'017
(5)	Terra Alta	28'00	740'04	7.455'50	3'098	0'685	1'457	3'783	1'892
A_j = 1.036'64	Montsià	12'00	659'95	33.899'30	11'417	6'175	8'396	17'592	8'796
R_j =43.293'20	Baix Camp	62'00	674'16	93.405'60	0'299	0'324	0'311	0'623	0'312
	Ribera d'Ebre	33'00	825'29	14.369'50	1'607	0'613	0'993	2'220	1'110
Montsià	Baix Ebre	12'00	1.036'64	43.293'20	6'175	11'417	8'396	17'592	8'796
(1)									
A_j = 659'95									
R_j = 33.899'30									
Garraf	Alt Penedès	13'00	515'00	50.493'10	11'565	22'482	16'125	34'047	17'024
(3)	Baix Penedès	16'00	264'06	28.260'60	18'068	12'231	14'866	30'299	15'150
A_j = 261'49	Baix Llobregat	32'00	474'05	344.095'10	1'094	7'034	2'774	8'128	4'064
R_j = 51.490'90									
Bages	La Selva	35'00	995'50	74.077'50	0'945	0'547	0'719	1'492	0'746
(10)	Solsonès	37'00	971'88	7.700'40	1'842	0'230	0'651	2'072	1'036
A_j = 1.295'17	Anoia	25'00	893'38	59.500'50	2'221	0'996	1'487	3'217	1'609
R_j = 113.406'60	Baix Llobregat	41'00	474'05	344.095'10	0'867	0'665	0'759	1'532	0'766
	Vallès Occidental	32'00	618'59	428.704'40	1'013	1'175	1'091	2'188	1'094
	Vallès Oriental	40'00	813'96	165.820'20	0'677	0'548	0'609	1'225	0'613
	Osona	45'00	1.191'40	85.056'70	0'456	0'346	0'397	0'802	0'401
	Ripollès	61'00	1.031'16	22.014'20	0'450	0'120	0'232	0'570	0'285
	Berguedà	40'00	1.182'46	29.573'40	0'827	0'308	0'505	1'135	0'568
	Segarra	47'00	720'18	11.445'20	1'350	0'163	0'469	1'513	0'757
Vallès Oriental	Bages	40'00	1.295'17	113.406'60	0'548	0'677	0'609	1'225	0'613
(6)	Vallès Occidental	19'00	618'59	428.704'40	3'263	4'671	3'904	7'934	3'967
A_j = 813'96	Barcelonès	22'00	155'52	1.921.583'00	5'871	5'744	5'807	11'615	5'808
R_j = 165.820'20	Maresme	15'00	396'20	198.349'80	10'568	5'796	7'826	16'364	8'182
	La Selva	40'00	995'50	74.077'50	0'821	0'587	0'694	1'408	0'704
	Osona	33'00	1.191'40	85.056'70	0'963	0'903	0'933	1'866	0'933
Maresme	Vallès Oriental	15'00	813'96	165.820'20	5'796	10'568	7'826	16'364	8'182
(3)	Barcelonès	25'00	155'52	1.021.583'00	4'826	8'609	6'446	13'435	6'718
A_j = 396'20	La Selva	40'00	995'50	74.077'50	0'872	1'136	0'995	2'008	1'004
R_j = 198.349'80									
Segrià	Segarra	55'00	720'18	11.445'20	1'016	0'102	0'322	1'118	0'559
(6)	Ribera d'Ebre	57'00	825'29	14.369'50	0'765	0'102	0'279	0'867	0'434
A_j = 1.469'00	Les Garrigues	22'50	840'19	14.446'10	4'814	0'657	1'778	5'471	2'736
R_j = 124.017'20	l'Urgell	43'00	679'21	24.251'90	1'372	0'214	0'542	1'586	0'793
	La Noguera	25'00	1.840'68	29.470'30	1'403	0'675	0'973	2'078	1'039
	Pallars Jussà	65'00	1.716'72	12.223'30	0'299	0'074	0'149	0'373	0'187
Les Garrigues	Segrià	22'50	1.469'00	124.017'20	0'657	4'814	1'778	5'471	2'736
(5)	Ribera d'Ebre	51'00	825'29	14.369'50	0'467	0'457	0'462	0'924	0'462
A_j = 840'19	Priorat	42'00	517'31	5.630'20	1'500	0'493	0'860	1'993	0'997
R_j = 14.446'10	Conca de Barberà	30'00	637'95	11.705'90	1'868	1'233	1'518	3'101	1'551
	l'Urgell	27'00	679'21	24.251'90	1'699	1'940	1'816	3'639	1'820

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km.)	A_i (km^2)	R_i (10^6 pta.)	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$	$\bar{\alpha} = \theta/2$
Conca de Barberà	l'Urgell	31'00	679'21	24.251'90	1'202	2'079	1'581	3'281	1'641
(7)	Les Garrigues	30'00	840'19	14.446'10	1'233	1'868	1'518	3'101	1'551
A_j = 637'95	Priorat	38'00	517'31	5.630'20	1'709	0'851	1'206	2'560	1'28'
R_j = 11.705'90	Baix Camp	25'00	674'16	93.405'60	1'188	5'012	2'440	6'200	3'100
	Alt Camp	12'00	548'25	23'633'30	10'022	13'758	11'742	23'780	11'890
	Anoia	44'00	893'38	59.500'50	0'336	1'392	0'684	1'728	0'864
	Segarra	34'00	720'18	11.445'20	1'210	1'346	1'276	2'556	1'278
Vallès Occidental	Bages	32'00	1.295'17	113.406'60	1'175	1'013	1'091	2'188	1'094
(4)	Baix Llobregat	17'50	474'00	344.095'10	7'412	4'906	6'030	12'318	6'159
A_j = 618'59	Barcelonès	16'50	155'52	1.921.583'00	14'325	9'790	11'842	24'115	12'058
R_j = 428.704'40	Vallès Oriental	19'00	813'96	165.820'20	4'672	3'263	3'904	7'934	3'967
Ribera d'Ebre	Terra Alta	18'00	740'04	7.455'50	5'190	3'005	3'949	8'195	4'098
(7)	Baix Ebre	33'00	1.036'64	43.293'20	0'613	1'607	0'993	2'220	1'110
A_j = 825'29	Baix Camp	39'00	674'16	93.405'60	0'523	1'487	0'882	2'010	1'005
R_j = 14.369'50	Priorat	15'00	517'31	5.630'20	11'741	3'941	6'802	15'682	7'841
	Les Garrigues	51'00	840'19	14.446'10	0'457	0'467	0'462	0'924	0'462
	Segrià	57'00	1.469'00	124.017'20	0'102	0'765	0'279	0'867	0'434
	Tarragonès	50'00	345'02	108.623'40	0'591	0'951	0'750	1'542	0'771
Priorat	Tarragonès	37'00	345'02	108.623'40	0'789	3'787	1'729	4'576	2'288
(6)	Ribera d'Ebre	15'00	825'29	14.369'50	3'941	11'741	6'802	15'682	7'841
A_j = 517'31	Baix Camp	24'00	674'16	93.405'60	1'010	8'559	2'940	9'569	4'785
R_j = 5.630'20	Baix Ebre	46'00	1.036'64	43.293'20	0'231	1'803	0'645	2'034	1'017
	Conca de Barberà	38'00	637'95	11.705'90	0'851	1'709	1'206	2'560	1'280
	Les Garrigues	42'00	840'19	14.446'10	0'493	1'500	0'860	1'993	0'997
Pallars Jussà	Vall d'Aran	63'00	620'47	5.303'90	0'536	0'111	0'244	0'647	0'324
(5)	Pallars Sobirà	35'00	1.355'22	3.441'20	0'919	0'312	0'536	1'231	0'616
A_j =1.716'72	Alt Urgell	52'00	1.446'85	13.803'10	0'245	0'224	0'234	0'469	0'235
R_j = 12.223'30	La Noguera	40'00	1.840'68	29.470'30	0'253	0'488	0'351	0'741	0'371
	Segrià	65'00	1.469'00	124.017'20	0'074	0'299	0'149	0'373	0'187
La Noguera	Pallars Jussà	40'00	1.716'72	12.223'30	0'488	0'253	0'351	0'741	0'371
(5)	Alt Urgell	83'00	1.446'85	13.803'10	0'129	0'061	0'089	0'190	0'095
A_j = 1.716'72	Solsonès	67'00	971'88	7.700'40	0'359	0'077	0'166	0'436	0'218
R_j = 12.223'30	Segarra	43'00	720'18	11.445'20	1'029	0'214	0'469	1'243	0'622
	l'Urgell	32'00	679'21	24.251'90	1'534	0'497	0'873	2'031	1'016
	Segrià	25'00	1.469'00	124.017'20	0'675	1'403	0'973	2'078	1'039
Solsonès	Alt Urgell	41'00	1.446'85	13.803'10	0'339	0'744	0'502	1'083	0'541
(6)	Berguedà	25'00	1.182'46	29.573'40	0'864	2'578	1'492	3'442	1'721
A_j = 971'88	Bages	37'00	1.295'17	113.406'60	0'230	1'842	0'651	2'072	1'036
R_j = 7.700'40	Anoia	47'00	893'38	59.500'50	0'256	0'921	0'486	1'177	0'580
	Segarra	44'00	720'18	11.445'20	0'629	0'606	0'617	1'235	0'618
	La Noguera	67'00	1.840'68	29.470'30	0'077	0'359	0'166	0'436	0'218
Osona	Berguedà	38'00	1.182'46	29.573'40	0'833	0'409	0'584	1'242	0'621
(7)	Bages	45'00	1.295'17	113.406'60	0'346	0'456	0'397	0'802	0'401
A_j = 1.191'40	Vallès Oriental	33'00	813'96	165.820'20	0'903	0'963	0'933	1'866	0'933
R_j = 85.056'70	La Selva	35'00	995'50	74.077'50	0'859	0'654	0'750	1'513	0'757
	Garrotxa	30'00	734'18	33.523'80	2'064	0'684	1'188	2'748	1'374
	Ripollès	28'50	1.031'16	22.014'20	1'874	0'659	1'111	2'533	1'267
	Gironès	47'50	838'18	114.667'90	0'479	0'411	0'444	0'890	0'445
La Selva	Osona	35'00	1.191'40	85.056'70	0'654	0'859	0'750	1'513	0'757
(7)	Gironès	18'00	838'18	114.667'90	3'183	3'587	3'379	6'770	3'385
A_j = 995'50	Bages	35'00	1.295'17	113.406'60	0'547	0'945	0'719	1'492	0'746
R_j = 74.077'50	Vallès Oriental	40'00	813'96	165.820'20	0'587	0'821	0'694	1'408	0'704
	Maresme	40'00	396'20	198.349'80	1'136	0'872	0'995	2'008	1'004
	Garrotxa	39'00	734'18	33.523'80	1'166	0'507	0'769	1'673	0'837
	Baix Empordà	34'00	700'48	69.448'00	1'262	0'851	1'036	2'113	1'057
l'Urgell	La Noguera	32'00	1.840'68	29.470'30	0'497	1'534	0'873	2'031	1'016
(5)	Segrià	43'00	1.469'00	124.017'20	0'214	1'372	0'542	1'586	0'793
A_j =679'21	Les Garrigues	27'00	840'19	14.446'10	1'940	1'699	1'816	3'639	1'820
R_j = 24.251'90	Conca de Barberà	31'00	637'95	11.705'90	2'079	1'202	1'581	3'281	1'641
	Segarra	10'50	720'18	11.445'20	16'177	10'397	12'969	26'574	13'287

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km.)	A_i (km^2)	R_i (10^6pta.)	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$	$\bar{\alpha} = \theta/2$
Segarra	Segrià	55’00	1.469’00	124.017’20	0’102	1’016	0’322	1’118	0’559
(7)	La Noguera	43’00	1.840’68	29.470’30	0’214	1’029	0’469	1’243	0’622
A_j = 720’18	l’Urgell	10’50	679’21	24.251’90	10’397	16’177	12’969	26’574	13’287
R_j = 11.445’20	Conca de Barberà	34’00	637’95	11.705’90	1’346	1’210	1’276	2’556	1’278
	Anoia	30’00	893’38	59.500’50	0’718	2’673	1’385	3’391	1’696
	Solsonès	44’00	971’88	7.700’40	0’606	0’629	0’617	1’235	0’618
	Bages	47’00	1.295’17	113.406’60	0’163	1’350	0’469	1’513	0’757
Anoia	Solsonès	47’00	971’88	7.700’40	0’921	0’256	0’486	1’177	0’589
(7)	Segarra	30’00	720’18	11.445’20	2’673	0’718	1’385	3’391	1’696
A_j = 893’38	Conca de Barberà	44’00	637’95	11.705’90	1’392	0’336	0’684	1’728	0’864
R_j = 59.500’50	Alt Camp	46’00	548’25	23.633’30	1’173	0’389	0’675	1’562	0’781
	Alt Penedès	27’00	515’00	50.493’10	2’813	1’454	2’022	4’267	2’134
	Baix Llobregat	39’00	474’05	344.095’10	0’773	1’321	1’011	2’094	1’047
	Bages	25’00	1.295’17	113.406’60	0’996	2’221	1’487	3’217	1’609
Barcelonès	Maresme	25’00	396’20	198.349’80	8’609	4’826	6’446	13’435	6’718
(5)	Vallès Oriental	22’00	813’96	165.820’20	5’744	5’871	5’807	11’615	5’808
A_j = 155’52	Vallès Occidental	16’50	618’59	428.704’40	9’790	14’325	11’842	24’115	12’058
R_j = 1.921.583’00	Baix Llobregat	8’00	474’05	344.095’10	58’478	56’629	57’546	115’107	57’554
	Baix Penedès	57’00	264’06	28.260’60	4’757	0’485	1’519	5’242	2’621
Vall d’Aran	Pallars Sobirà	42’00	1.355’22	3.441’20	0’483	0’791	0’618	1’274	0’637
(2)	Pallars Jussà	63’00	1.716’72	12.223’30	0’111	0’536	0’244	0’647	0’324
A_j = 620’47									
R_j = 5.303’90									
Pallars Sobirà	Vall d’Aran	42’00	620’47	5.303’90	0’791	0’483	0’618	1’274	0’637
(3)	Pallars Jussà	35’00	1.716’72	12.223’30	0’312	0’919	0’536	1’231	0’616
A_j =1.355’22	Alt Urgell	29’00	1.446’85	13.803’10	0’517	1’394	0’849	1’911	0’956
R_j = 3.441’20									

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km.)	A_i (km^2)	R_i (10^6pta.)	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$	$\bar{\alpha} = \theta/2$
Alt Urgell	Ripollès	65’00	1.031’16	22.014’20	0’196	0’191	0’193	0’387	0’194
(7)	Pallars Sobirà	29’00	1.355’22	3.441’20	1’394	0’517	0’849	1’911	0’956
A_j = 1.446’85	Pallars Jussà	52’00	1.716’72	12.223’30	0’224	0’245	0’234	0’469	0’235
R_j = 13.803’10	La Noguera	83’00	1.840’68	29.470’30	0’061	0’129	0’089	0’190	0’095
	Solsonès	41’00	971’88	7.700’40	0’744	0’339	0’502	1’083	0’541
	Berguedà	44’00	1.182’46	29.573’40	0’339	0’460	0’395	0’799	0’400
	Cerdanya	39’00	546’37	8.971’20	1’389	0’394	0’740	1’783	0’892
Cerdanya	Alt Urgell	39’00	1.446’85	13.803’10	0’394	1’389	0’740	1’783	0’892
(3)	Berguedà	38’00	1.182’46	29.573’40	0’394	1’886	0’862	2’280	1’140
A_j = 546’37	Ripollès	33’00	1.031’16	22.014’20	0’660	2’267	1’223	2’927	1’464
R_j = 8.971’20									
Berguedà	Cerdanya	38’00	546’37	8.971’20	1’886	0’394	0’862	2’280	1’140
(6)	Alt Urgell	44’00	1.446’85	13.803’10	0’460	0’339	0’395	0’799	0’400
A_j = 1.182’46	Solsonès	25’00	971’88	7.700’40	2’578	0’864	1’492	3’442	1’721
R_j = 29.573’40	Bages	40’00	1.295’17	113.406’60	0’308	0’827	0’505	1’135	0’568
	Osona	38’00	1.191’40	85.056’70	0’409	0’833	0’584	1’242	0’621
	Ripollès	32’00	1.031’16	22.014’20	1’045	0’749	0’885	1’794	0’897
Ripollès	Gironès	59’00	838’18	114.667’90	0’198	0’483	0’309	0’681	0’341
(7)	Cerdanya	33’00	546’37	8.971’20	2’267	0’660	1’223	2’927	1’464
A_j = 1.031’16	Alt Urgell	65’00	1.446’85	13.803’10	0’191	0’196	0’193	0’387	0’194
R_j = 22.014’20	Berguedà	32’00	1.182’46	29.573’40	0’749	1’045	0’885	1’794	0’897
	Osona	28’50	1.191’40	85.056’70	0’659	1’874	1’111	2’533	1’267
	Garrotxa	24’00	734’18	33.523’80	2’055	1’937	1’995	3’992	1’996
	Bages	61’00	1.295’17	113.406’60	0’120	0’450	0’232	0’570	0’285
Garrotxa	Ripollès	24’00	1.031’16	22.014’20	1’937	2’055	1’995	3’992	1’996
(5)	Osona	30’00	1.191’40	85.056’70	0’684	2’064	1’188	2’748	1’374
A_j =734’18	La Selva	39’00	995’50	74.077’50	0’507	1’166	0’769	1’673	0’837
R_j = 33.523’80	Gironès	35’00	838’18	114.667’90	0’646	1’675	1’040	2’321	1’161
	Alt Empordà	40’00	1.342’43	68.557’20	0’367	1’081	0’630	1’448	0’724

Comarca j	Comarca i	r_{ij} (km.)	A_i (km^2)	R_i (10^6 pta.)	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$	$\bar{\alpha} = \theta/2$
Alt Empordà (3) A_j = 1.342'43 R_j = 68.557'20	Garrotxa	40'00	734'18	33.523'80	1'081	0'367	0'630	1'448	0'724
	Gironès	32'00	838'18	114.667'90	0'982	0'553	0'737	1'535	0'768
	Baix Empordà	35'00	700'48	69.448'00	2'274	0'611	1'179	2'885	1'443
Gironès (6) A_j = 838'18 R_j = 114.667'90	Ripollès	59'00	1.031'16	22.014'20	0'483	0'198	0'309	0'681	0'341
	Garrotxa	35'00	734'18	33.523'80	1'675	0'646	1'040	2'321	1'161
	La Selva	18'00	995'50	74.077'50	3'587	3'183	3'379	6'770	3'385
	Baix Empordà	17'00	700'48	69.448'00	5'839	3'493	4'516	9'332	4'666
	Alt Empordà	40'00	1.342'43	68.557'20	0'553	0'982	0'737	1'535	0'768
	Osona	47'50	1.191'40	85.056'70	0'411	0'479	0'444	0'890	0'445
Baix Empordà (3) A_j = 700'48 R_j = 69.448'00	Alt Empordà	35'00	1.342'43	68.557'20	2'274	2'274	1'179	2'885	1'443
	Gironès	17'00	838'18	114.667'90	5'839	5'839	4'516	9'332	4'666
	La Selva		995'50	74.077'50	1'262	1'262	1'036	2'113	1'057

4. ATRACCIÓN ENTRE LAS COMARCAS DE CATALUÑA (i) Y LA COMARCA DEL "BARCELONÈS" (j)

Por otra parte, el cálculo de la atracción que tiene lugar entre la comarca del *Barcelonés* y todas y cada una de las comarcas de Cataluña, con especificación del valor de todos los parámetros correspondientes, puede verse en el siguiente cuadro o tabla, en base a los momentos territoriales superficiales o geométricos y a los datos correspondientes al año 1986. A saber:

(1)	(2)	(3)	(4) = (2) x (3)	(5) = (3)^2	(6) = (2) x (5)	(7)	(8)	(9) = (7)/(8)	(10) = (9)$^{1/3}$	(11) = (6) x (10)/10^6	(12) = 1/(11)	(13) = $\frac{(7)\times(8)}{10^6 \times (3)^3}$
Comarcas de Cataluña (i)	**A_i (km^2)**	**r_{ij} (km.)**	**M_{ij} (km^3)**	**r_{ij}^2 (km^2)**	**I_{ij} (km^4)**	**R_i (10^6 ptas.)**	**R_j (10^6 ptas.)**	**Ri / Rj**	**$\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}}$**	**ρ_{ij}**	**α_{ij}**	**$F_{ij} = F_{ji}$**
Baix Llobregat	474'05	8'00	3.792'400	64'00	30.339'20	344.095'10	1.921.583'00	0'179	0'564	0'017	58'441	1.291'421
Barcelonès (i = j)	155'52	0'00	0'000	0'00	0'00	1.921.583'00	"	1'000	1'000	0'000	∞	∞
Maresme	396'20	25'00	9.905'000	625'00	247'625'00	198.349'80	"	0'103	0'469	0'116	8'611	24'393
Vallès Occidental	618'59	16'50	10.206'735	272'25	168.411'12	428.704'40	"	0'223	0'607	0'102	9'782	183'386
Vallès Oriental	813'96	22'00	17.907'120	484'00	393.956'64	165.820'20	"	0'086	0'442	0'174	5'743	29'925
Alt Empordà	1.342'43	120'50	161.762'810	14.520'25	19.492.418'00	68.557'20	"	0'036	0'329	6'413	0'156	0'075
Baix Empordà	700'48	98'50	68.997'280	9.702'25	6.796.232'00	69.448'00	"	0'036	0'331	2'250	0'445	0'140
La Garrotxa	734'18	94'00	69.012'920	8.836'00	6.487.214'40	33.523'80	"	0'017	0'259	1'680	0'595	0'078
Gironès	838'18	85'00	71.245'300	7.225'00	6.055.850'50	114.667'90	"	0'060	0'391	2'368	0'422	0'359
La Selva	995'50	68'50	68.191'750	4.692'25	4.671.134'80	74.077'50	"	0'039	0'338	1'579	0'633	0'443
Alt Camp	548'25	79'00	43.311'750	6.241'00	3.421.628'20	23.633'30	"	0'012	0'231	0'790	1'265	0'092
Alt Penedès	515'00	40'00	20.600'000	1.600'00	824.000'00	50.493'10	"	0'026	0'297	0'245	4'086	1'516
Baix Penedès	264'06	7'00	15.051'420	3.249'00	857.930'94	28.260'60	"	0'015	0'245	0'210	4'758	0'293
Garraf	261'49	42'00	10.982'580	1.764'00	461.268'36	51.490'90	"	0'027	0''299	0'138	7'251	1'335
Tarragonès	345'02	81'50	28.119'130	6.642'25	2.291.709'00	108.623'40	"	0'057	0'384	0'880	1'136	0'386
Baix Camp	674'16	94'00	63.371'040	8.836'00	5.956.877'70	93.405'60	"	0'049	0'365	2'174	0'460	0'216

Tabla A-8.1. Atracción entre las comarcas de Cataluña y la comarca del "Barcelonès" (I).

Comarcas de Cataluña (i)	A_i (km^2)	r_{ij} (km.)	M_{ij} (km^3)	r_{ij}^2 (km^2)	I_{ij} (km^4)	R_i (10^6 ptas.)	R_j (10^6 ptas.)	Ri / Rj	$\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}}$	ρ_{ij}	α_{ij}	F_i [illegible]
Conca de Barberà	637’95	86’00	54.863’700	7.396’00	4.718.278’20	11.705’90	“	0’006	0’183	0’863	1’158	0’0[illegible]
Priorat	517’31	117’50	60.783’920	13.803’25	7.142.110’60	5.630’20	“	0’003	0’143	1’021	0’979	0’0[illegible]
Ribera d’Ebre	825’29	135’00	111.414’150	18.225’00	15.040.910’00	14.369’50	“	0’007	0’196	2’948	0’339	0’0[illegible]
Baix Ebre	1.036’64	151’00	156.532’640	22.801’00	23.636.428’00	43.293’20	“	0’023	0’282	6’665	0’150	0’0[illegible]
Montsià	659’95	156’00	102.952’200	24.336’00	16.060.543’00	33.899’30	“	0’018	0’260	4’176	0’239	0’0[illegible]
Terra Alta	740’04	152’00	112.486’000	23.104’04	17.097.872’00	7.455’50	“	0’004	0’157	2’684	0’373	0’0[illegible]
Cerdanya	546’37	120’00	65.564’400	14.400’00	7.867.728’00	8.971’20	“	0’005	0’167	1’314	0’761	0’0[illegible]
Osona	1.191’40	62’00	73.866’800	3.844’00	4.579.872’00	85.056’70	“	0’044	0’354	1’621	0’617	0’6[illegible]
Ripollès	1.031’16	92’00	94.866’700	8’464’00	8.727.736’40	22.014’20	“	0’011	0’225	1’964	0’509	0’0[illegible]
Anoia	893’38	51’00	45.562’300	2.601’00	2.323.677’30	59.500’50	“	0’031	0’314	0’730	1’371	0’8[illegible]
Bages	1.295’17	46’00	54.577’800	2.116’00	2.740.578’80	113.406’60	“	0’059	0’389	1’066	0’938	2’2[illegible]
Berguedà	1.182’46	85’00	100.509’100	7.225’00	8.543.273’50	29.573’40	“	0’015	0’249	2’127	0’470	0’0[illegible]
Solsonès	971’88	89’00	86.497’300	7.921’00	7.698.259’70	7.700’40	“	0’004	0’159	1’224	0’817	0’0[illegible]
Garrigues, les	840’19	111’00	93.261’000	12.321’00	10.351.971’00	14.446’10	“	0’008	0’196	2’029	0’493	0’0[illegible]
Noguera, la	1.840’68	124’50	229.164’600	15.500’25	28.530’992’00	29.470’30	“	0’015	0’248	7’076	0’141	0’0[illegible]
Segarra	720’18	83’00	59.774’900	6.889’00	4.961.316’70	11.445’20	“	0’006	0’181	0’890	1’114	0’0[illegible]
Segrià	1.469’00	129’50	190.235’500	16.770’25	24.635.497’00	124.017’20	“	0’065	0’401	9’879	0’101	0’1[illegible]
l’Urgell	679’21	92’50	62.826’900	8.556’25	5.811.488’20	24.251’90	“	0’013	0’233	1’354	0’739	0’0[illegible]
l’Alt Urgell	1.446’85	135’00	195.324’700	18.225’00	26.368.834’00	13.803’10	“	0’007	0’193	5’089	0’196	0’0[illegible]
Pallars Jussà	1.716’72	139’50	239.482’400	19.460’25	33.407.794’00	12.223’30	“	0’006	0’185	6’180	0’162	0’0[illegible]
Pallars Sobirà	1.355’22	146’50	198.539’700	21.462’25	29.086.066’00	3.441’20	“	0’002	0’121	3’519	0’284	0’0[illegible]
Vall d’Aran	620’47	189’00	117.268’800	35.721’00	22.163.803’00	5.303’90	“	0’003	0’140	3’103	0’322	0’0[illegible]
Total Cataluña (medias)	**839’35**	**88’38**	**74.181’753**	**7.811’02**	**6.556.183’30**	**117.255’59**	**1.921.583’00**	**0’061**	**0’394**	**2’583**	**0’387**	**0’3[illegible]**

Tabla A-8.2. Atracción entre las comarcas de Cataluña y la comarca del “Barcelonès” (II).

5. ATRACCIÓN ENTRE LAS REGIONES O VEGUERÍAS DE CATALUÑA. CÁLCULOS PREVIOS

Del mismo modo, el cálculo de la atracción que tiene lugar entre las siete regiones o veguerías y sus colindantes, que hemos considerado en nuestro proceso de organización del territorio catalán, con especificación del valor de todos los parámetros correspondientes, puede verse en el siguiente cuadro o tabla, que se nutre de los datos macroeconómicos correspondientes al año 1986:

REGIO j	REGIO i	Ai Km2	rij Km	Mij Km3	Iij Km4	Ri Mill	Rj Mill	Ri/Rj	Aux.	Arrel	Roij	Alfaij	Fij=Fji
IV-LLEIDA	V-TORTOSA	3261,92	90,00	293573	26421552	99018	204409	,48	-,24	,79	20,7505	,048192	,027764
	III-TARRAGONA	2986,75	75,00	224006	16800469	271259	204409	1,33	,09	1,10	18,4622	,054165	,131432
	I-BARCELONA	3234,81	129,50	418908	54248572	3160537	204409	15,46	,91	2,49	135,148	,007399	,297475
	VI-MANRESA	5063,07	100,00	506307	50630700	221626	204409	1,08	,03	1,03	52,0141	,019226	,045302
	VII-PIRINEUS	3968,91	106,00	420704	44594673	31519	204409	,15	-,62	,54	23,9135	,041817	,005410
V-TORTOSA	IV-LLEIDA	6545,80	90,00	589122	53020980	204409	99018	2,06	,24	1,27	67,5114	,014812	,027764
	III-TARRAGONA	2986,75	70,50	210566	14844894	271259	99018	2,74	,34	1,40	20,7715	,048143	,076653
I-BARCELONA	III-TARRAGONA	2986,75	81,50	243420	19838740	271259	3160537	,09	-,82	,44	8,75095	,114273	1,58370
	IV-LLEIDA	6545,80	129,50	847681	109774702	204409	3160537	,06	-,91	,40	44,0638	,022694	,297475
	VI-MANRESA	5063,07	46,00	232901	10713456	221626	3160537	,07	-,89	,41	4,41790	,226352	7,19628
	II-GIRONA	6833,33	85,00	580833	49370809	467345	3160537	,15	-,64	,53	26,1073	,038303	2,40515
III-TARRAGONA	V-TORTOSA	3261,92	70,50	229965	16212558	99018	271259	,37	-,34	,71	11,5867	,086306	,076653
	IV-LLEIDA	6545,80	75,00	490935	36820125	204409	271259	,75	-,09	,91	33,5061	,029845	,131432
	VI-MANRESA	5063,07	81,00	410109	33218802	221626	271259	,82	-,07	,93	31,0549	,032201	,113123
	I-BARCELONA	3234,81	81,50	263637	21486417	3160537	271259	11,65	,82	2,27	48,7105	,020529	1,58370
VI-MANRESA	IV-LLEIDA	6545,80	100,00	654580	65458000	204409	221626	,92	-,03	,97	63,7170	,015694	,045302
	I-BARCELONA	3234,81	46,00	148801	6844858	3160537	221626	14,26	,89	2,43	16,5988	,060245	7,19628
	III-TARRAGONA	2986,75	81,00	241927	19596067	271259	221626	1,22	,07	1,07	20,9615	,047706	,113123
	II-GIRONA	6833,33	87,00	594500	51721475	467345	221626	2,11	,25	1,28	66,3249	,015077	,157290
	VII-PIRINEUS	3968,91	77,50	307591	23838266	31519	221626	,14	-,65	,52	12,4431	,080366	,015007
II-GIRONA	III-MANRESA	5063,07	87,00	440487	38322377	221626	467345	,47	-,25	,78	29,8846	,033462	,157290
	I-BARCELONA	3234,81	85,00	274959	23371502	3160537	467345	6,76	,64	1,89	44,1972	,022626	2,40515
	VII-PIRINEUS	3968,91	120,00	476269	57152304	31519	467345	,07	-,90	,41	23,2638	,042985	,008525
VII-PIRINEUS	IV-LLEIDA	6545,80	106,00	693855	73548609	204409	31519	6,49	,62	1,86	137,156	,007291	,005410
	VI-MANRESA	5063,07	77,50	392388	30410064	221626	31519	7,03	,65	1,92	58,2593	,017165	,015007
	II-GIRONA	6833,33	120,00	820000	98399952	467345	31519	14,83	,90	2,46	241,740	,004137	,008525

Tabla A-8.3. Atracción entre las regiones o veguerías de Cataluña. Cálculos previos.

El significado de la función auxiliar “Aux.” del cálculo efectuado, que aparece en algunas de las tablas anteriores, es el siguiente:

$$Aux = 1/3 \ln (R_i /R_j) = 1/3 (\ln R_i - \ln R_j),$$

expresión ésta que resulta ser el logaritmo natural o neperiano de la función:

$$e^{Aux} = (R_i / R_j)^{1/3} = \text{Raíz cúbica} = \text{“Arrel”}$$

6. ATRACCIÓN ENTRE LAS REGIONES O VEGUERÍAS DE CATALUÑA. GRADO DE CONEXIÓN TERRITORIAL

Como continuación del epígrafe anterior, veamos que en la siguiente tabla, el parámetro θ definido en nuestro estudio como el “grado de conexión territorial” existente entre las dos regiones que se comparan **i** y **j**, correspondiente a la suma o adición de sus respectivos “grados de atracción” α_{ij} y α_{ji}, vendrá, por lo que se refiere a sus unidades, representado por (100·θ). Efectuados los cálculos correspondientes, se obtiene lo siguiente:

Capital Región j	Capital Región i	r_{ij} (km.)	A_i (km ^{2})	R_i (10^6 ptas.)	α_{ij}	α_{ji}	$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$	$\theta_{ij} = \theta_{ji}$	$\bar{\alpha} = \theta/2$
IV - Lleida (5) A_j = 6.545’80 R_j = 204.408’8	V - Tortosa III - Tarragona I - Barcelona VI - Manresa VII - La Seu	90’00 75’00 129’50 100’00 106’00	3.261’92 2.986’75 3.234’81 5.063’07 3.968’91	99.017’5 271.259’0 3.160.536’5 221.626’1 31.519’4	0’048 0’054 0’007 0’019 0’042	0’015 0’030 0’023 0’016 0’007	0’027 0’040 0’013 0’017 0’017	0’063 0’084 0’030 0’035 0’049	0’032 0’042 0’015 0’018 0’025
V - Tortosa (2) A_j = 3.261’92 R_j = 99.017’5	IV - Lleida III - Tarragona	90’00 70’50	6.545’80 2.986’75	204.408’8 271.259’0	0’015 0’048	0’048 0’086	0’027 0’064	0’063 0’134	0’032 0’067
I - Barcelona (4) A_j = 3.234’81 R_j= 3.160.536’5	III - Tarragona IV - Lleida VI - Manresa II - Girona	81’50 129’50 46’00 85’00	2.986’75 6.545’80 5.063’07 6.833’33	271.259’0 204.408’8 221.626’1 467.345’3	0’114 0’023 0’226 0’038	0’021 0’007 0’060 0’023	0’049 0’013 0’116 0’030	0’135 0’030 0’286 0’061	0’068 0’015 0’143 0’031
III - Tarragona (4) A_j = 2.986’75 R_j = 271.259’0	V - Tortosa IV - Lleida VI - Manresa I - Barcelona	70’50 75’00 81’00 81’50	3.261’92 6.545’80 5.063’07 3.234’81	99.017’5 204.408’8 221.626’1 3.160.536’5	0’086 0’030 0’032 0’021	0’048 0’054 0’048 0’114	0’064 0’040 0’039 0’049	0’134 0’084 0’080 0’135	0’067 0’042 0’040 0’068
VI - Manresa (5) A_j = 5.063’07 R_j = 221.626’1	IV - Lleida I - Barcelona III - Tarragona II - Girona VII - La Seu	100’00 46’00 81’00 87’00 77’50	6.545’80 3.234’81 2.986’75 6.833’333. 968’91	204.408’8 3.160.536’5 271.259’0 467.345’3 31.519’4	0’016 0’060 0’048 0’015 0’080	0’019 0’226 0’032 0’033 0’017	0’017 0’116 0’039 0’022 0’037	0’035 0’286 0’080 0’048 0’097	0’018 0’143 0’040 0’024 0’049
II - Girona (3) A_j = 6.833’33 R_j = 467.345’3	VI - Manresa I - Barcelona VII - La Seu	87’00 85’00 120’00	5.063’07 3.234’81 3.968’91	221.626’1 3.160.536’5 31.519’4	0’033 0’023 0’043	0’015 0’038 0’004	0’022 0’030 0’013	0’048 0’061 0’047	0’024 0’031 0’024
VII - La Seu (3) A_j = 3.968’91 R_j = 31.519’4	IV - Lleida VI - Manresa II - Girona	106’00 77’50 120’00	6.545’80 5.063’07 6.833’33	204.408’8 221.626’1 467.345’3	0’007 0’017 0’004	0’042 0’080 0’043	0’017 0’037 0’013	0’049 0’097 0’047	0’025 0’049 0’024

Tabla A-8.4. Atracción entre las regiones o veguerías de Cataluña. Grado de conexión territorial.

7. ATRACCIÓN ENTRE LAS REGIONES Y EL CENTRO CATALÁN DE LAS MASAS DE RENTA

Del mismo modo, el cálculo de la atracción que tiene lugar entre las siete regiones o veguerías y el centro “nacional” de las masas de renta, que hemos considerado en nuestro proceso de organización del territorio catalán y determinado geográficamente, con especificación del valor de todos los parámetros correspondientes, puede verse en los siguientes cuadros o tablas, que se nutren de los datos macroeconómicos correspondientes al año 1986:

	(2)	(3)	(4) = (2) x (3)	(5) = $(3)^2$	(6) = (2) x (5)	(7)	(8)	(9) = (7)/(8)	(10) = $(9)^{1/3}$
Regiones de Cataluña (i)	**A_i (km^2)**	**r_{ij} (km.)**	**M_{ij} (km^3)**	**r_{ij}^2 (km^2)**	**I_{ij} (km^4)**	**R_i (10^6 ptas.)**	**R_j (10^6 ptas.)**	**Ri / Rj**	**$\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}}$**
I – Barcelona	3.234’81	14’00	45.287’340	196’00	634.022’76	3.160.536’50	4.455.712’6	0’709	0’892
II – Girona	6.833’33	82’00	560.333’060	6.724’00	45.947.311’00	467.345’30	“	0’105	0’472
III – Camp de Tarragona	2.986’75	78’00	232.966’500	6.084’00	18.171.387’00	271.259’00	“	0’061	0’393
IV – Ponent	6.545’80	110’50	723.310’900	12.210’25	79.925.854’00	204.408’80	“	0’046	0’358
V – Terres de l’Ebre	3.261’92	146’50	477.871’280	21.462’25	70.008.143’00	99.017’50	“	0’022	0’281
VI – Catalunya central	5.063’07	37’00	187.333’590	1.369’00	6.931.342’80	221.626’10	“	0’050	0’368
VII – Alt Pirineu	3.968’91	119’00	472.300’290	14.161’00	56.203.735’00	31.519’40	“	0’007	0’192
Total Cataluña (media)	4.556’47	83’86	382.105’570	7.032’50	32.043.375’00	636.530’37	“	0’143	0’523

Siendo:
r_{ij} = distancia rectilínea existente entre los centros regionales de masas de renta y el centro nacional de masas de renta de Cataluña (km.). Ver la definición de dichos conceptos en los epígrafes correspondientes de esta tesis.

Tabla A-8.5. Atracción entre las regiones y el centro catalán de las masas de renta (I).

Dicha tabla puede continuarse con la siguiente, en la que se ofrecen nuevas determinaciones de gran interés para nuestro estudio:

	(11) = (6) x (10)/10^6	(12) = 1/(11)	(13)	(14) = $\sqrt{(12)\times(13)}$	(15) = (12) + (13)	(13) = = $\frac{(7)\times(8)}{10^6\times(3)^3}$
Regiones de Cataluña (i)	**ρ_{ij}**	**α_{ij}**	**α_{ji}**	**$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$**	**$\theta_{ij} = \theta_{ji}$**	**$F_{ij} = F_{ji}$**
I – Barcelona	0’566	1’768	0’143	0’503	1’911	5.132’085
II – Girona	21’687	0’046	0’002	0’010	0’048	3’777
III – Camp de Tarragona	7’141	0’140	0’002	0’017	0’142	2’547
IV – Ponent	28’613	0’035	0’001	0’006	0’036	0’675
V – Terres de l’Ebre	19’673	0’051	0’001	0’007	0’052	0’140
VI – Catalunya central	2’551	0’392	0’008	0’056	0’400	19’495
VII – Alt Pirineu	10’791	0’093	0’001	0’010	0’094	0’083
Total Cataluña (media)	16’759	0’060	0’002	0’011	0’062	4’809

Tabla A-8.6. Atracción entre las regiones y el centro catalán de las masas de renta (II).

Para la elaboración de la tabla anterior, ha sido necesario efectuar la determinación del “grado de atracción” ejercido desde **i** hasta **j**, o sea, α_{ji} (a partir de los momentos territoriales superficiales o geométricos), tal como puede comprobarse en la tabla siguiente:

Regiones de Cataluña (i)	A_i (km ^{2})	r_{ji} (km.)	M_{ji} (km^3)	r_{ji}^2 (km^2)	I_{ji} (km^4)	R_j (10^6 ptas.)	R_i (10^6 ptas.)	R_j / R_i	$\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}}$	ρ_{ji}	α_{ji}
I - Barcelona	31.895'29	14'00	446.534'06	196'00	6.251.476'8	4.455.712'6	3.160.536'50	1'410	1'121	7'008	0'143
II - Girona	"	82'00	2.615.413'80	6.724'00	214.463.930'0	"	467.345'30	9'534	2'120	454'664	0'002
III - Camp de Tarragona	"	78'00	2.487.832'60	6.084'00	194.050.940'0	"	271.259'00	16'426	2'542	493'277	0'002
IV - Ponent	"	110'50	3.524.429'50	12.210'25	389.449.460'0	"	204.408'80	21'798	2'793	1.087'732	0'001
V - Terres de l'Ebre	"	146'50	4.672.660'00	21.462'25	684.544.690'0	"	99.017'50	44'999	3'557	2.434'926	0'001
VI - Catalunya central	"	37'00	1.180.125'70	1.369'00	43.664.652'0	"	221.626'10	20'105	2'719	118'724	0'008
VII - Alt Pirineu	"	119'00	3.795.539'50	14.161'00	451.669.200'0	"	31.519'40	141'364	5'209	2.352'745	0'001
Total Cataluña (media)	31.895'29	83'86	2.674.739'00	7.032'50	224.303.630'0	4.455.712'6	636.530'37	7'000	1'913	429'093	0'002

Siendo:
$r_{ij} = r_{ji}$ = distancia rectilínea entre los centros regionales de masas de renta y el centro nacional de masas de renta de Cataluña (km.). Ver la definición de dichos conceptos en los epígrafes correspondientes de esta tesis.
$r_{ji} = r_{ji} = \overline{g_i G'}$ (ver mapas núms. 15 y 16 del Anexo nº: 3).

Tabla A-8.7. Atracción entre las regiones y el centro catalán de las masas de renta (III).

Los valores así obtenidos de los correspondientes "grados de conexión territorial" θij = θji entre las 38 comarcas clásicas (que constituyen una estructura reticular o en malla territorial) o entre las regiones y el centro catalán de las masas de renta, pueden verse gráficamente expuestos, respectivamente, en los mapas núms.: 14 y 15 del Anexo nº: 3 de nuestra tesis.

III. ANEXOS DE FUNDAMENTOS TEÓRICOS

ANEXO 9

UNA CONCEPCIÓN TOPOLÓGICA DEL TERRITORIO

ANEXO 9

UNA CONCEPCIÓN TOPOLÓGICA DEL TERRITORIO

1) La Topología, en general, es una parte de las Matemáticas que trata de la noción de "proximidad" de puntos. En el Análisis Territorial, estamos acostumbrados a describir esa proximidad mediante números o cantidades, o más concretamente mediante ciertas funciones numéricas denominadas **distancias.** Sin embargo, la proximidad también puede graduarse en abstracto, merced a ciertas familias de conjuntos que denominamos “topologías”. La aplicación de esta teoría al Análisis Territorial puede reportar, en fin, un extenso campo de utilidades (FRANQUET, 1990/91).

2) En los estudios usuales, se trabaja con el concepto de ENTORNO o MUNICIPIO CIRCULAR de un punto P de coordenadas geográficas (a,b) o UTM (X,Y). En el estudio del territorio que estamos efectuando, P podría ser un centro urbano cualquiera, mientras que su entorno circular, de "centro" P y "radio del entorno" R, sería la totalidad del municipio o término municipal correspondiente. En tal caso, se trataría del lugar geográfico de los puntos del mapa tal que:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < R,\ \forall\ R > 0\ ,$$

siendo R el "radio municipal".

En definitiva, dado un punto P(a,b) perteneciente a un dominio territorial cualquiera, se denomina ENTORNO de este punto o lugar geográfico a una parte del dominio, generalmente pequeña, y tal que P sea un punto interior a dicha parte.

Obsérvese, asimismo, que el ENTORNO así definido es “abierto”, porque los puntos del “borde” o “frontera” municipal no pertenecen a dicho entorno. Si, por el contrario, se desease un entorno “cerrado”, debería cumplirse que:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq R,\ \forall\ R > 0\ .$$

Esta última consideración conceptual resulta extensible al que luego definiremos como ENTORNO o MUNICIPIO RECTANGULAR (ver Fig. A-9.2.).

La representación gráfica vendría dada por:

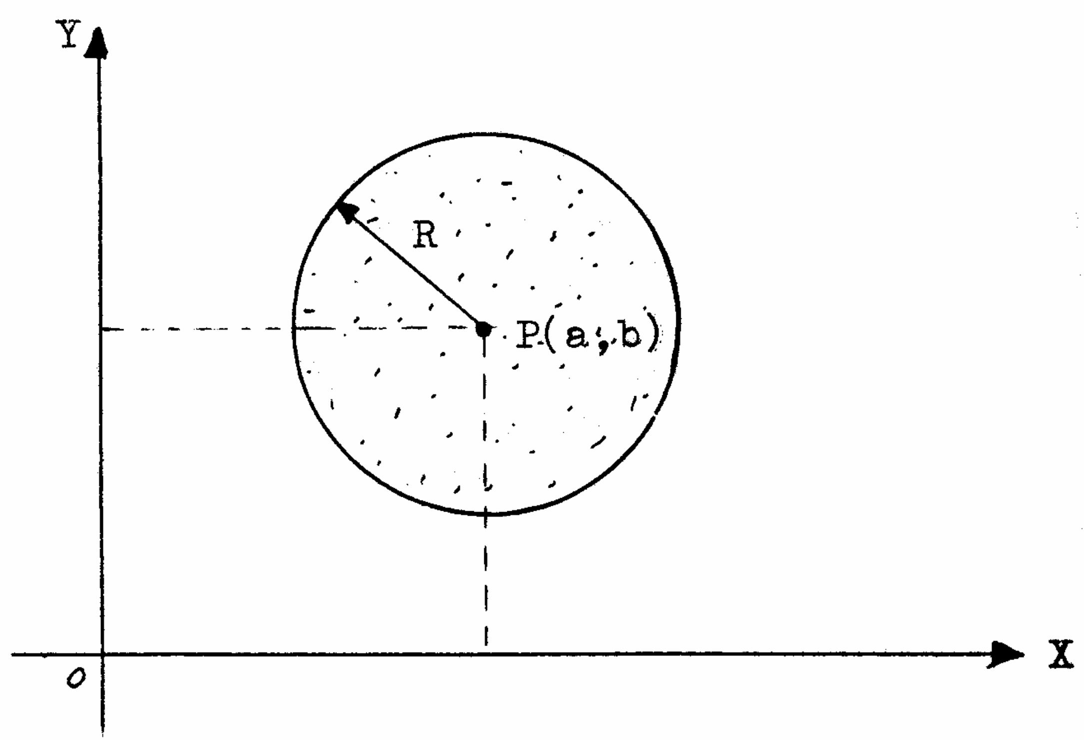


Fig. A-9.1. Entorno o municipio circular.

Pues bien, la consideración de R como "radio óptimo de acción territorial" (que no debe confundirse con el de "radio medio de giro")[1], trascendiendo del concepto administrativo y tradicional de municipio, definiría nuevos espacios o unidades territoriales de extraordinario interés para nuestro estudio.

3) Es evidente, por otra parte, que un territorio determinado (comarca, región, nación) resulta equiparable al concepto de "espacio topológico de Hausdorff", puesto que para cada par de puntos o enclaves territoriales del mismo **x** e **y / x ≠ y**, existen dos entornos o municipios, uno de **x** y otro de **y**, disyuntos (es claro que la intersección de dos municipios distintos es un elemento ínfimo o conjunto vacío).

No obstante, la clase más importante de espacios topológicos es aquélla en que la topología se deriva de una noción tan familiar como es la de "distancia".

Una **distancia** definida sobre un conjunto o territorio X es una función d, así:

$$d : X \times X \rightarrow [R^+] ,$$

[1] *Vide* la obra del doctorando ANÁLISIS TERRITORIAL (División, Organización y Gestión del territorio). Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tortosa, 1991, pp. 283-285, citada en la bibliografía.

que verifica las siguientes propiedades:

a) d(x,y) = d(y,x) (simetría)

b) d(x,y) < d(x,z) + d(z,y) (desigualdad triangular)

c) d(x,y) = 0 , si y sólo si: x = y (se trata del mismo enclave territorial)

El procedimiento de generar la topología, a partir de la distancia, es a través de los conjuntos de la forma:

$$B\,(x, R) = [y \,/\, d\,(x, y) < R]$$

donde $x \in X$ se dice **centro** del territorio y R es un número positivo que se denominaría **radio de acción territorial.**

De tal suerte definido, el conjunto B(x,R) se denominaría **bola territorial abierta de centro x y radio R.** La clase de todas las bolas abiertas es una base de cierta topología que diremos métrica o espacio métrico. Dicho concepto es equivalente al de entorno o municipio circular anteriormente expresado (FRANQUET, 1990/91).

La existencia de la distancia permite definir conceptos que carecen de sentido en una topología abstracta general, pero que sí pueden tenerlo en el Análisis Territorial. Así, podemos definir la distancia de un punto o lugar geográfico a un cierto territorio A como:

$$D\,(x, A) = \inf.\,[d\,(x, y) \,/\, y \in A]\,,$$

o bien caracterizar con precisión el concepto de "punto o enclave de adherencia", que veremos posteriormente.

Veamos, en fin, que los espacios métricos territoriales así concebidos serán siempre espacios de Hausdorff. Efectivamente, si $x \neq y$, por la tercera propiedad de las distancias se cumplirá que:

$$d\,(x\,,y) > 0.$$

Hagamos, ahora, $R = 1/2 \cdot d\,(x, y)$, entonces:

$$B\,(x, R) \cap B\,(y, R) = \varnothing\,,$$

luego **x** e **y** tienen, en este caso, entornos o municipios disyuntos y, por tanto, el espacio es topológicamente de Hausdorff, como queríamos demostrar.

4) Del mismo modo, podremos colegir que un ENTORNO o MUNICIPIO RECTANGULAR del punto o centro urbano P(a,b) es el conjunto de los puntos del mapa tales que:

$$|x - a| < r_1 \quad ; \quad |y - b| < r_2 \quad , \; \forall\, r_1\,, r_2 \in [R^+]$$

(o sea, siendo r_1 y r_2 números reales positivos), y su representación gráfica será la siguiente:

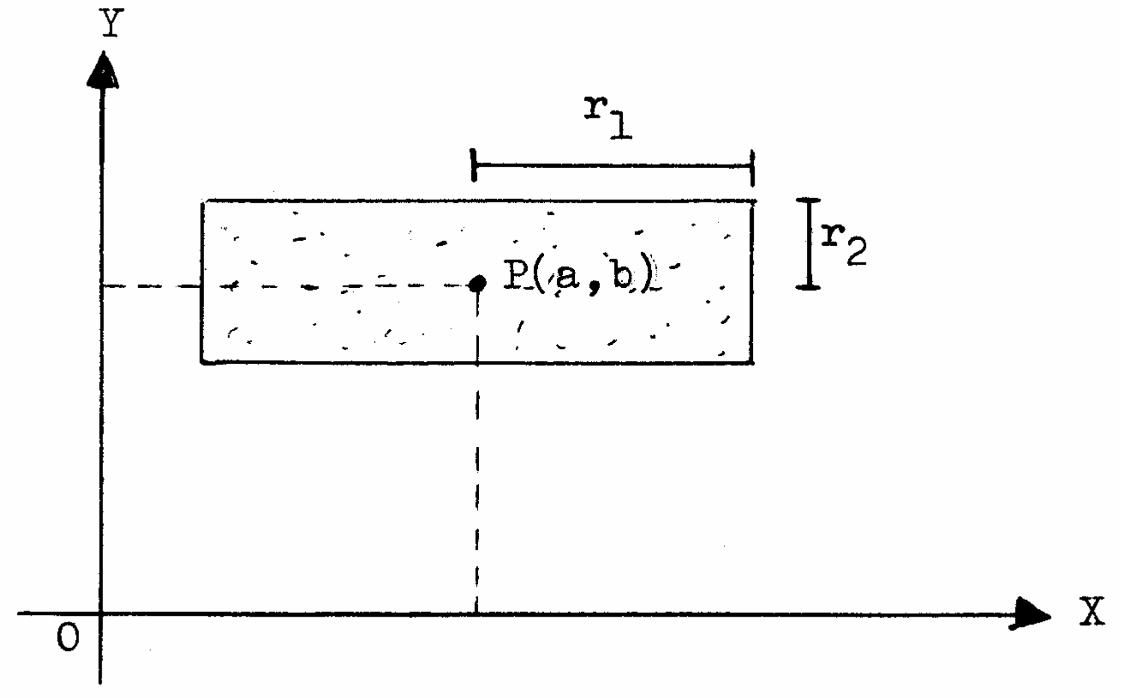


Fig. A-9.2. Entorno o municipio rectangular.

La adscripción de los municipios a uno u otro concepto (circular o rectangular) puede basarse, en buena medida, en su propia configuración planimétrica aproximada.

Otro concepto intermedio entre ambos sería el de ENTORNO o MUNICIPIO ELÍPTICO, que vendría delimitado geofísicamente por la curva cerrada de la "elipse de acción territorial (municipal)", entendiendo como tal al conjunto de los puntos o enclaves del territorio que se hallan en el interior de dicha sección cónica (FRANQUET, 1990/91). Entonces, la capitalidad o el centro municipal **O** de las masas socioeconómicas debería considerarse situado en el centro de la elipse (lugar geográfico donde se produce la intersección de sus ejes mayor y menor), pudiéndose realizar, al respecto, diversas consideraciones de gran interés en el Análisis Territorial. Todos estos conceptos se desarrollarán, convenientemente, en el anexo siguiente ("Las cónicas territoriales") de nuestra tesis, por lo que nos remitimos a él para el logro de mayores especificaciones y detalles.

5) Por otra parte, podemos clasificar los puntos de un conjunto C (comarca) de puntos del territorio, a partir de la noción de "entorno" (municipio, área comercial, etc...) de la siguiente manera:

a) PUNTO O ENCLAVE AISLADO de un conjunto comarcal C, es un punto P tal que, en su entorno, no contiene ningún punto de C. Dicho punto, como veremos a continuación, es "adherente" pero no "de acumulación". Ver figura A-9.5.

b) PUNTO O ENCLAVE DE ACUMULACION de un conjunto comarcal C es todo punto P tal que en su municipio o entorno municipal existe al menos un punto de C distinto de P. O sea, siendo M_p el municipio al que pertenece su capital P, se tiene:

$$(M_p - [P]) \cap C \neq \varnothing ,$$

pudiéndose presentar dos casos según que P pertenezca o no a la comarca C, a saber:

$P \in (C \cap M_p)$

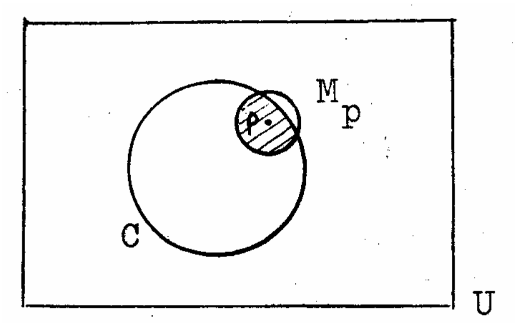


Fig. A-9.3. Punto de acumulación perteneciente a la comarca.

$P \notin C$
$P \notin (C \cap M_p)$

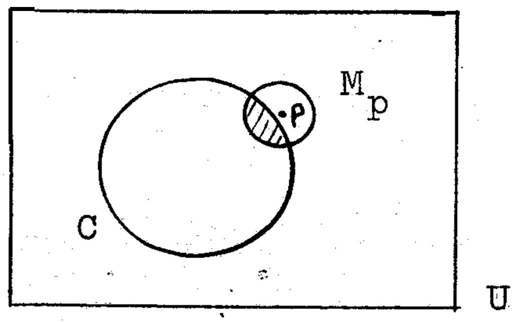


Fig. A-9.4. Punto de acumulación no perteneciente a la comarca.

Obviamente, en la representación anterior efectuada mediante diagramas de Venn-Euler, el conjunto universal U sería un nivel territorial superior al comarcal (región, nación, resto del mundo). En nuestro modelo gravitatorio, en el primer caso, decíamos que $M_p \in C$ y, en el segundo caso: $M_p \notin C$, basándose en la posición relativa del centro urbano P con respecto a la frontera geométrica comarcal teóricamente definida por la aplicación de dicho modelo entre las diferentes cabeceras de comarca.

Todo entorno de un punto P de acumulación de C contiene una infinidad de puntos de dicha comarca, pues si éstos no fueran más que un número finito y determinado, en un entorno de P cuyo radio de acción territorial fuese inferior a la menor de las distancias de P a cada uno de dichos puntos no habría ningún otro punto de C distinto de P, en contra de lo supuesto.

El conjunto de los puntos de acumulación de C se conocería por la denominación de "conjunto derivado" del conjunto comarcal C.

c) PUNTO O ENCLAVE DE ADHERENCIA de un conjunto comarcal C es un punto P del territorio, que puede o no pertenecer a C, tal que en su municipio existe al menos un punto de C (o sea, que la frontera geométrica comarcal puede separar dicho punto de P, si bien la frontera comarcal definitiva o real debe respetar la integridad del territorio municipal. Este municipio, de tal suerte definido, se erige en un serio candidato, bien al cambio de comarca de pertenencia, bien a la segregación de una parte de su territorio para la constitución de un nuevo municipio).

Obsérvese que en esta definición no se hace la exclusión del propio punto P. Es inmediato observar que son puntos de adherencia de un conjunto C todos los puntos o enclaves de C y, además, los puntos de acumulación de C que no pertenecen a C (Fig. A-9.4).

Gráficamente, podemos representar el conjunto comarcal C como formado por los puntos P(x,y) tales que:

$$\begin{cases} 0 \leq x < 1 & \text{(superficie rayada)} \\ 0 \leq y < 1 & \end{cases}$$

y, además, el punto del territorio o enclave aislado D (2 Mm.,1 Mm.) de la fig. A-9.5.

Así:

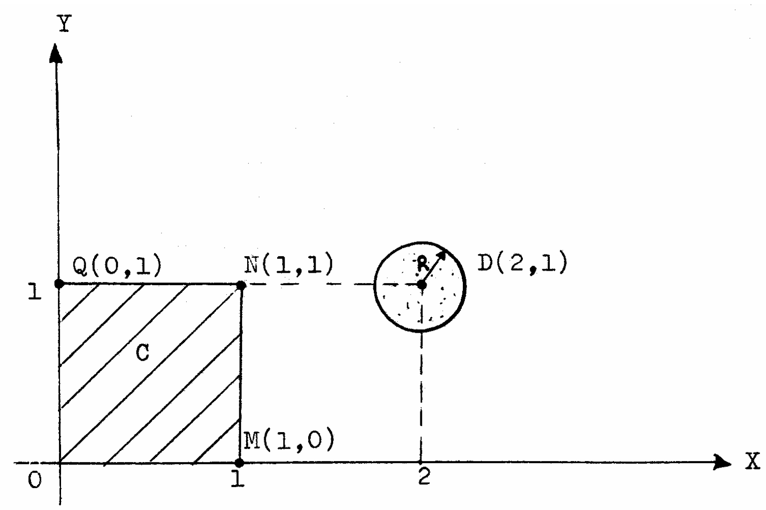


Fig. A-9.5. Punto o enclave territorial aislado.

El punto D del territorio es aislado, en este ejemplo, pues existe al menos un cierto entorno de D (representado en la figura como circular, con su radio R < 1) en el que no existe ningún punto de C, salvo el mismo D. Este caso suele presentarse en la práctica o realidad territorial, si consideramos a D no ya como un enclave sino como un municipio aislado sin contacto geofísico con su comarca de pertenencia, o bien como una comarca aislada de su región de pertenencia (con exponentes bien conocidos en ambos casos, por cierto, en la configuración territorial catalana y española).

Todos los puntos del cuadrado $\overline{\overline{OMNQ}}$, incluidos sus lados, son de acumulación, pero mientras resulta que todos los puntos interiores del cuadrado comarcal y los de los lados o fronteras comarcales OM y OQ pertenecen a C, los puntos de los lados MN y QN, que también son de acumulación, no pertenecen a C. La "adherencia" de C (o conjunto de todos los puntos adherentes a C) vendría dada, en fin, por el cuadrado OMNQ, con sus cuatro lados y, además, el punto o enclave territorial aislado D(2,1).

6) Con respecto a un determinado conjunto comarcal C, los puntos o enclaves del territorio también se pueden clasificar del siguiente modo (FRANQUET, 1990/91):

a) PUNTO O ENCLAVE INTERIOR de un conjunto comarcal C es todo punto P, tal que existe al menos un entorno de P cuya totalidad de sus puntos pertenecen a C. De un conjunto C tal que todos sus puntos son interiores en base a la anterior definición, diremos que es "abierto” (comarca abierta); alternativamente, cuando todos los puntos de acumulación de C pertenecen a C, diremos que se trata de un conjunto "cerrado" (comarca cerrada).

b) PUNTO O ENCLAVE EXTERIOR de un conjunto comarcal C es todo punto P, tal que existe al menos un entorno de P cuya totalidad de sus puntos pertenecen al conjunto contrario o complementario de C.

c) PUNTO O ENCLAVE FRONTERA de un conjunto comarcal C es aquel punto tal que en todo entorno suyo existen simultáneamente puntos de C y de su complementario C'. Dicho punto puede o no pertenecer a C.

Al respecto de lo expuesto, podremos realizar diversas consideraciones, de las que, por su interés, entresacamos las siguientes:

- La determinación del tamaño o radio del entorno (abordada en publicaciones anteriores del mismo doctorado bajo el concepto de "radio óptimo de acción territorial")[2] es trascendental en todas estas consideraciones, al delimitar geofísicamente la unidad territorial en estudio[3].

- Tanto para el "punto interior" como para el "punto exterior", respecto de un cierto conjunto C, se exige la existencia de **al menos un entorno** en el que, respectivamente, todos o ninguno de sus puntos pertenezcan al conjunto C, mientras que en el caso del "punto frontera" se precisa que **en todo entorno suyo** existan puntos pertenecientes al conjunto C y otros puntos no pertenecientes a C, esto es, pertenecientes al conjunto complementario C'.

7) Llamaremos ENTORNO o MUNICIPIO REDUCIDO del punto o centro urbano P a todo entorno del mismo en el que se ha excluido deliberadamente el propio punto P. Sería algo así como un municipio en el que se excluyera su centro o su suelo urbano y urbanizable, restando únicamente, el suelo calificado como "no urbanizable" o rústico, en los términos definidos por la vigente Ley del Suelo y sus disposiciones complementarias (FRANQUET, 1990/91).

También se consideran los entornos a la (derecha, izquierda) de P, que son intervalos abiertos cuyo extremo (izquierdo, derecho) es el mismo punto P.

8) El Algebra de Conjuntos puede, así mismo, constituir una útil herramienta de trabajo en el análisis de las diferentes unidades territoriales, de su agrupación o segregación y de sus relaciones externas e internas (operaciones algebraicas y sus propiedades, correspondencias y leyes de composición, relaciones binarias, relaciones de equivalencia y de orden,...).

9) Sea, por ejemplo, el conjunto regional constituido por cuatro comarcas: R = [a, b, c, d]. Pues bien, la familia de subconjuntos de R: J = [∅, (a,b), (c,d), R] es una "topología territorial". El conjunto formado por las tres primeras comarcas [a, b, c] es un entorno de la comarca **a**, ya que:

$$a \in (a,b) \subset (a,b,c) \text{ y } (a,b) \in J,$$

pero no es un entorno de la comarca **c**, puesto que no existe ningún abierto A $\in$ J /: c $\in$ A $\subset$ (a,b,c) .

Por el contrario, si definimos: J = [∅, (a,b,c), (d), R], entonces (a,b,c) es un conjunto territorial abierto y cerrado, mientras que (c) no es abierto ni cerrado.

[2,3] *Vide "Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio"*, pág. 246 y ss. *CADUP (Estudios)*, Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91.

10) Por último, y aún bajo el riesgo de incurrir en divagaciones excesivamente teóricas sobre el tema, podríamos seguir empleando una concepción y una semántica topológicas en el estudio de la organización del territorio, mediante el desarrollo sucesivo de la noción de espacio topológico, aplicación de los teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Heine-Borel-Lebesgue (recubrimiento), si bien juzgamos como suficientemente representativos de las enormes posibilidades que se nos presentan, en este campo, los propios conceptos introductorios hasta aquí expresados (FRANQUET, 1990/91).

ANEXO 10

LAS CÓNICAS TERRITORIALES

ANEXO 10

LAS CÓNICAS TERRITORIALES

1. LAS ELIPSES TERRITORIALES

1.1. INTRODUCCIÓN

Podemos definir la "elipse territorial" como el lugar geográfico de los puntos del territorio tales que la suma de sus distancias (medidas en línea recta sobre el mapa) a los puntos fijos o "focos territoriales" F y F' es constante. En este caso, la capitalidad territorial o centro territorial de masas, puede considerarse situado en el punto **O** (centro de la elipse o intersección de sus ejes mayor y menor. Analíticamente, puede hallarse por resolución del sistema de ecuaciones resultante de igualar a cero las primeras derivadas parciales con respecto a **x** y a **y**).

Si, por el contrario, consideramos las capitalidades o centros de masas de dos territorios distintos situados en los focos de la elipse, se obtendrá la "elipse inter-territorial", definida por ambos, una vez fijada la excentricidad de la misma en base a los criterios que veremos posteriormente o a cualesquiera otros que resulten justificados. Éste será, básicamente, el concepto de mayor utilidad en el Análisis Territorial que propugnamos (FRANQUET, 1990/91).

Efectivamente, el concepto de "elipse inter-territorial" así expresado refuerza la importancia atractiva de los ejes geográficos, infraestructurales o administrativos que unen entre sí las diversas capitalidades territoriales, frente a los propios "núcleos o polos" territoriales a los que nos venimos refiriendo hasta ahora. Por esta razón, la anchura de la franja del territorio afectado es máxima en el punto medio de la distancia focal (semieje menor de la elipse), mientras que el eje mayor contendrá al "punto frontera" donde se igualan o compensan las acciones gravitacionales procedentes de ambos focos F y F'.

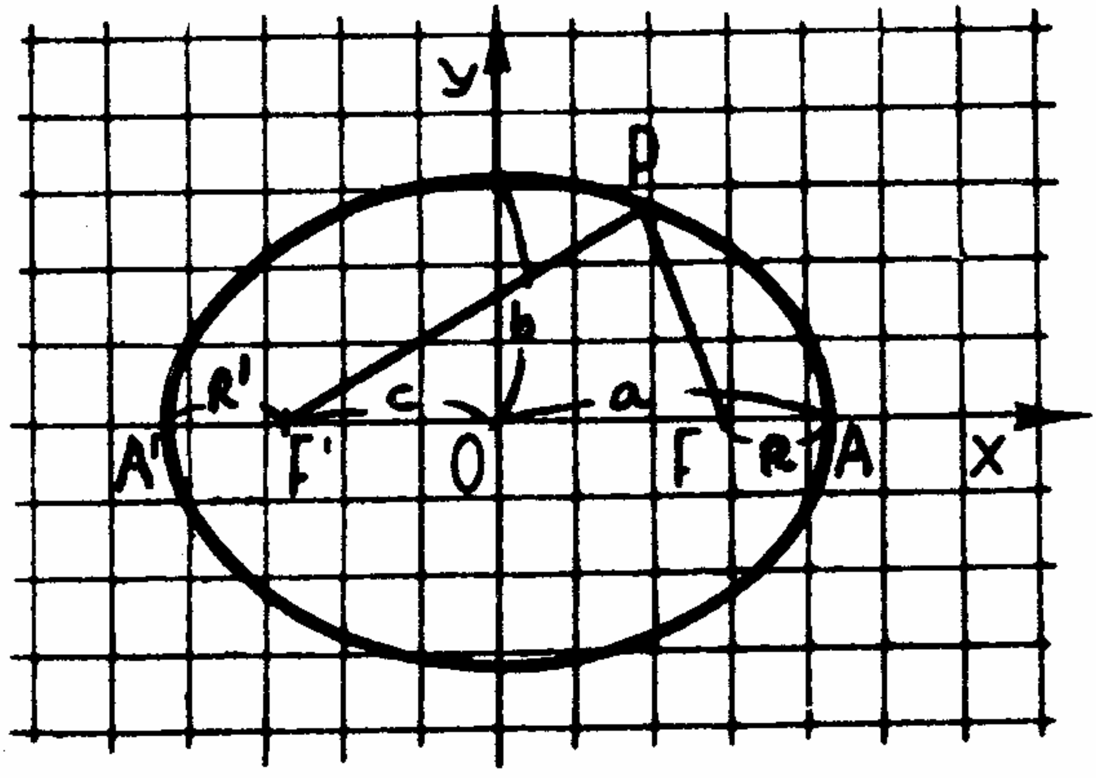


Fig. A-10.1. Elipse territorial.

Las longitudes de los segmentos $\overline{PF}$ y $\overline{PF'}$, determinados por cada punto del territorio (perteneciente a la elipse) y los focos o capitalidades, se denominarán "radios vectores territoriales" del punto, cuya suma designaremos por **2a**, o sea:

$$F'P + FP = 2a \quad (1)$$

Supongamos, ahora, que el eje OX pasa por los focos y que el origen de coordenadas se halla en el punto medio de la distancia que los separa. La medida del segmento $\overline{FF'}$, en valor absoluto, será la distancia focal de la elipse inter-territorial, y se designa por **2c**. A su inversa, utilizando un símil óptico, podría denominársele "potencia territorial":

$$P = 1 / 2c$$

que, en el esquema gravitatorio que venimos empleando, será tanto mayor cuanto menor sea la distancia rectilínea que separe ambos núcleos o polos territoriales (FRANQUET, 1990/91).

Desde luego, a, c $\in$ [R^+].

En el triángulo $\widehat{F'PF}$ será: F'F < F'P + PF, o sea: 2c < 2a, y: c < a. A la diferencia: $a^2 - c^2$, se la representa por b^2 (2), y la "excentricidad" de la elipse vendrá dada por el cociente:

$$e = (c / a) < 1 . \quad (3)$$

1.2. LOS RADIOS VECTORES TERRITORIALES

En el sistema de tal suerte definido, los focos F y F' tienen de coordenadas (± c,0). Un punto cualquiera del territorio, perteneciente a la elipse, tendrá de coordenadas genéricas (x,y). Pues bien, calculando los valores de F'P y FP, y substituyendo en la fórmula (1), se tiene:

$$F'P + FP = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (4)$$

Aislando el primer radical y elevando al cuadrado, se obtiene:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4 a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4 a \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

o sea, reduciendo términos:

$$2 c x = 4 a^2 - 2 c x - 4 a \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Trasponiendo términos y dividiendo por 4a:

$$(x - c)^2 + y^2 = (a - c/a . x)^2$$

esto es,

$$\mathbf{F P = a - e x = r} \quad (5)$$

Análogamente, aislando en la fórmula (4) el segundo radical, y repitiendo las mismas operaciones, obtendremos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + (c/a) \cdot x$$

o sea,

$$\mathbf{F'P = a + e x = r'} \quad (6)$$

Las fórmulas (5) y (6) *permiten obtener, fácilmente, las longitudes de los radios vectores territoriales.*

1.3. ECUACIÓN DE LA ELIPSE INTER-TERRITORIAL

De cualquiera de las fórmulas (5) ó (6) se puede obtener también la ecuación de la elipse. Tomando, por ejemplo, la anterior a la fórmula (5) y elevando al cuadrado, deducimos:

$$x^2 - 2 c x + c^2 + y^2 = a^2 - 2 c x + (c^2/a^2) \cdot x^2$$

Trasponiendo y sacando factores comunes, queda:

$$x^2 [1 - (c^2/a^2)] + y^2 = a^2 - c^2$$

o sea:

$$x^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2 \quad ;$$

$$x^2 \cdot (b^2/a^2) + y^2 = b^2$$

De donde, dividiendo por b^2:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \quad (7)$$

que es la *ecuación canónica* de las elipses territoriales.

1.4. VÉRTICES DE LA ELIPSE INTER-TERRITORIAL

Son los puntos en que los ejes cortan a la expresada curva cónica.

Si en la fórmula (7) hacemos $x = 0$, sale: $y = \pm b$. Haciendo $y = 0$, se obtiene $x = \pm a$. Luego en el eje OY hay dos vértices: los puntos B (0, b) y B' (0, -b); y en el eje OX hay otros dos: los puntos A (a,0) y A' (-a,0).

El segmento A'A, que es igual a $2 \cdot a$, se llama *eje mayor* de la elipse; y el segmento B'B, igual a 2b, se denomina *eje menor* de la elipse inter-territorial.

Fácilmente se ve en la figura que BF + BF' = 2a, y por tanto BF = BF' = a, y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BOF, sale la misma relación (2):

$$a^2 = b^2 + c^2$$

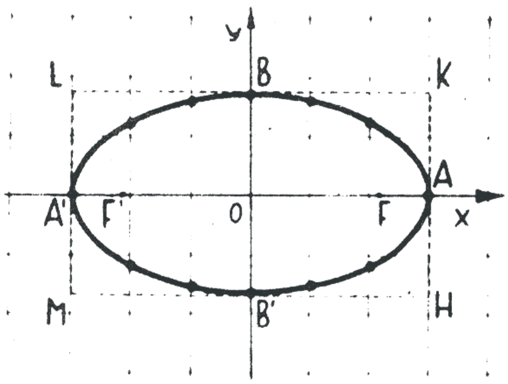


Fig. A-10.2. Vértices de una elipse inter-territorial.

1.5. INTERVALOS DE EXISTENCIA

Resolviendo la fórmula (7), primero respecto a **y**, se obtiene:

$$y^2 / b^2 = 1 - (x^2 / a^2) = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \quad ; \; y / b = \frac{+\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad ,$$

o sea:

$$y = + (b / a) \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (8)$$

Para que el valor de **y** sea real, es necesario que:

$$a^2 - x^2 \geq 0 \quad ; \text{ o sea } \quad x^2 - a^2 \leq 0$$

Esta inecuación también puede escribirse también así:

$$(x - a) \cdot (x + a) \leq 0$$

y se satisface por los valores de **x** tales que:

$$- a \leq x \leq a \quad , \text{ o sea: } \quad x \in [-a, a] \quad ,$$

que nos dice que **x** no puede recibir valores absolutos mayores que **a.**

Despejando **x** en la fórmula (7), se deduce del mismo modo que:

$$x = + (a / b) \cdot \sqrt{b^2 - y^2} \qquad (8')$$

de dónde,

$$- b \leq y \leq b \quad , \text{ o sea: } \quad y \in [-b, b]$$

que nos dice que **y** no puede tomar valores absolutos mayores que **b.** Luego si se construye el rectángulo **H K L M** (ver fig. A-10.2), con **O** como centro y de lados 2a y 2b, la elipse quedará completamente comprendida dentro del mismo. Los intervalos de existencia son (-a, a) para la **x** y (-b,b) para la **y,** ya que se verifica que:

$$\begin{cases} - a \leq x \leq a \\ - b \leq y \leq b \end{cases}$$

1.6. TANGENTE A LA ELIPSE TERRITORIAL EN UNO DE SUS PUNTOS

Sea la elipse territorial o inter-territorial de ecuación canónica:

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1 \quad (9)$$

de la que queremos trazar la tangente en uno de sus puntos de coordenadas $P(x_1, y_1)$, que puede ser un punto cualquiera del territorio.

Derivando en la expresión anterior (9) se obtiene:

$$2x / a^2 + 2yy' / b^2 = 0$$

esto es:

$$y' = \frac{-x \cdot b^2}{y \cdot a^2} \quad ; y_1' = -\frac{b^2 \cdot x_1}{a^2 \cdot y_1} \quad .$$

La tangente será:

$$y - y_1 = -\frac{b^2 \cdot x_1}{a^2 \cdot y_1} (x - x_1)$$

y transponiendo el factor b^2 y el divisor y_1:

$$\frac{y_1 \cdot y - y_1^2}{b^2} = -\frac{x_1 \cdot x - x_1^2}{a^2}$$

o sea:

$$x_1 \cdot x / a^2 + y_1 \cdot y / b^2 = x_1^2 / a^2 + y_1^2 / b^2 = 1$$

ya que el punto de coordenadas geográficas UTM (x_1, y_1) pertenece a la elipse territorial o inter-territorial.

La tangente, es pues:

$$\mathbf{x_1 \cdot x / a^2 + y_1 \cdot y / b^2 = 1} \quad (10)$$

cumpliéndose la misma regla formal que para la circunferencia.

Propiedad de la tangente: "*La tangente en un punto de la elipse territorial es la bisectriz del ángulo formado por un radio vector territorial y la prolongación del otro*" (fig. A-10.3).

En efecto, la intersección T de la tangente en un punto P(x_1, y_1) con el eje de las x se obtiene haciendo y = 0 en la ecuación (10), con lo cual resulta:

$$x_1 \cdot x / a^2 = 1 \; ; \quad \text{de donde:} \quad x = a^2 / x_1$$

Sus distancias a los focos o capitalidades territoriales, son:

$$\overline{TF} = (a^2 / x_1) - c \qquad \overline{TF'} = (a^2 / x_1) + c$$

Dividiendo, resulta:

$$\frac{\overline{TF}}{\overline{TF'}} = \frac{a^2 - c \cdot x_1}{a^2 + c \cdot x_1} = \frac{a - e \cdot x_1}{a + e \cdot x_1} = \frac{r}{r'}$$

Al respecto de lo expuesto hasta aquí, puede verse la figura siguiente:

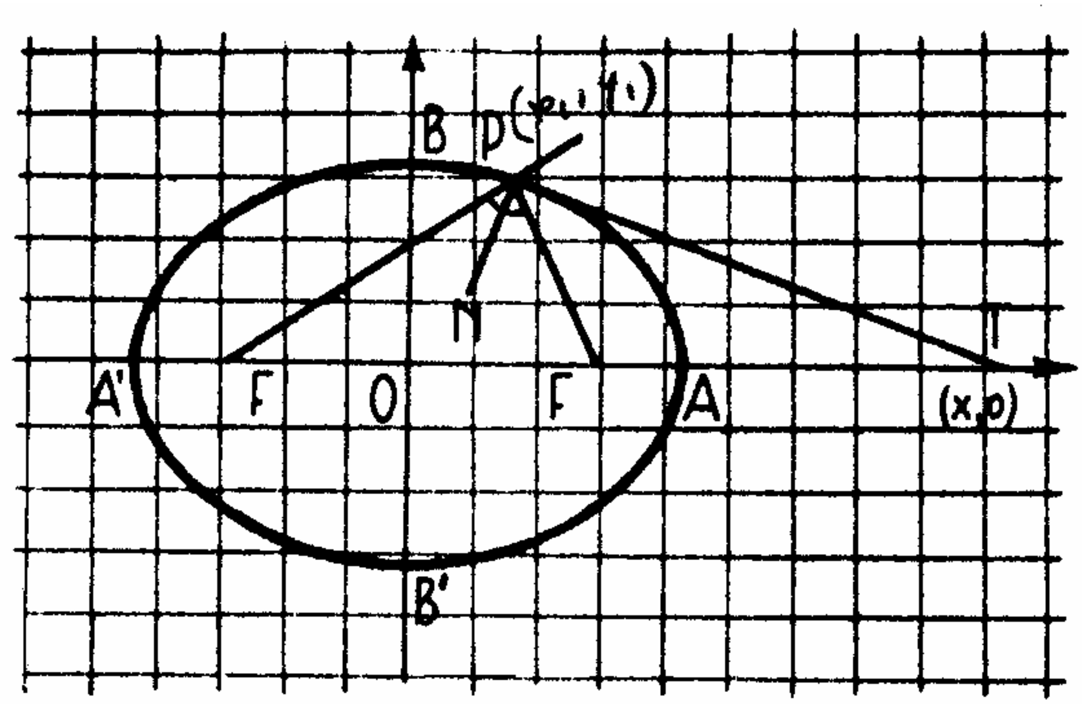


Fig. A-10.3. Tangente a la elipse territorial en un enclave.

Es decir, las distancias $\overline{TF}$ y $\overline{TF'}$ son proporcionales a los lados del triángulo PFF': por lo tanto, la tangente coincide con la bisectriz exterior, y puede tratarse de un eje territorial cualquiera.

La *normal* PN, por ser perpendicular a la tangente en el punto P, coincidirá con la bisectriz interior, o sea con la bisectriz del ángulo formado por los dos radios vectores territoriales.

1.7. OTRAS FORMAS TÍPICAS DE LA ECUACIÓN DE LAS ELIPSES INTERTERRITORIALES

La ecuación (7) expresa una propiedad geométrica característica de la elipse territorial, independientemente de su posición respecto de los ejes coordenados. Dada una elipse territorial de centro de simetría O, focos F y F' y ejes A'A y B'B (figura A-10.4) tracemos desde P una perpendicular PH al eje focal. En virtud de la fórmula (7) se tiene que:

$$\overline{OH}^2 / \overline{OA}^2 + \overline{PH}^2 / \overline{OB}^2 = 1 \quad (11)$$

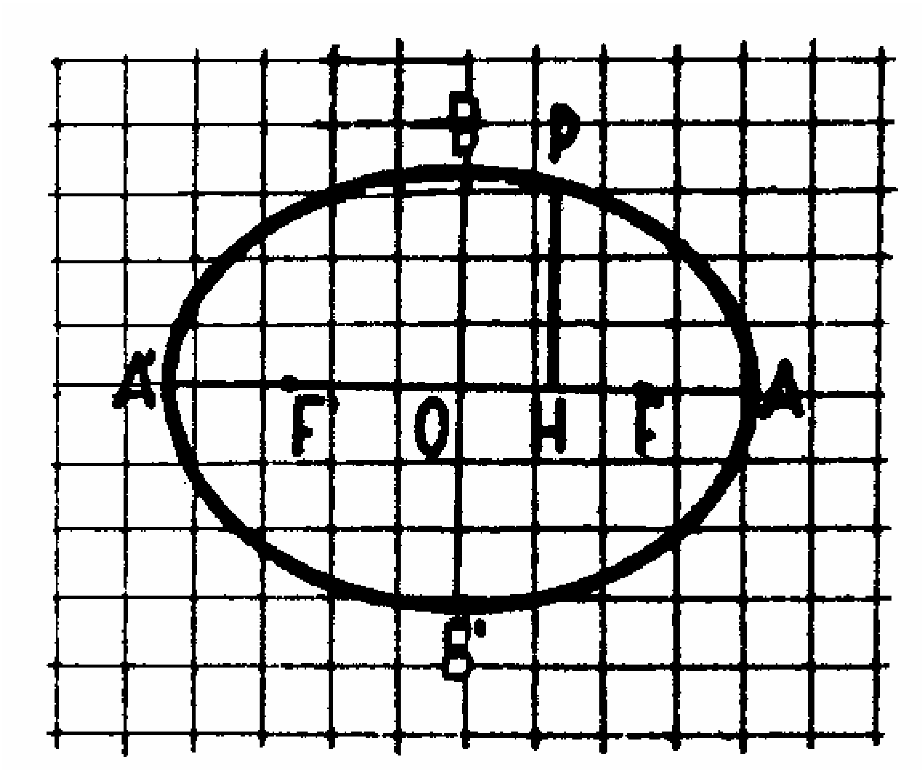


Fig. A-10.4. Propiedades de las elipses territoriales (I).

ecuación que se puede expresar así:

El cuadrado de la distancia de un punto de la elipse territorial al eje menor partido por el cuadrado del semieje focal, más el cuadrado de la distancia del mismo punto del territorio al eje focal, partido por el cuadrado del semieje no focal, es igual a 1.

La fórmula (11) permite deducir fácilmente que (FRANQUET, 1990/91):

La ecuación de una elipse territorial con centro en (α, β) *es, si el eje mayor es paralelo al eje OX (fig. A-10.5):*

$$(x - \alpha)^2 / a^2 + (y - \beta)^2 / b^2 = 1 \quad ; \quad (a > b) \quad (12)$$

Al respecto de lo expuesto hasta aquí, pueden verse las figuras siguientes:

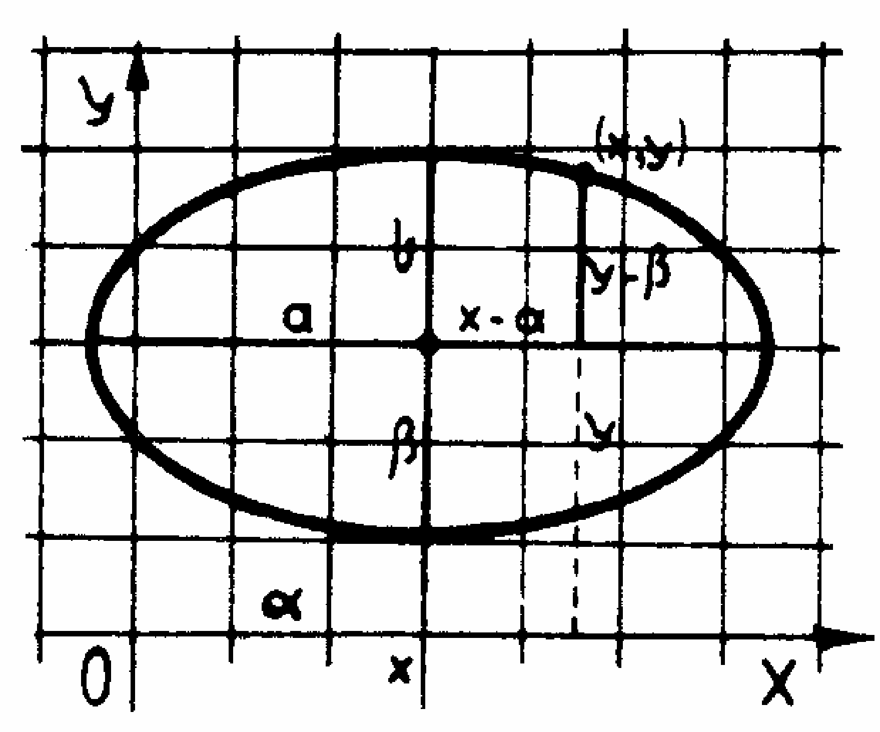


Fig. A-10.5. Propiedades de las elipses territoriales (II).

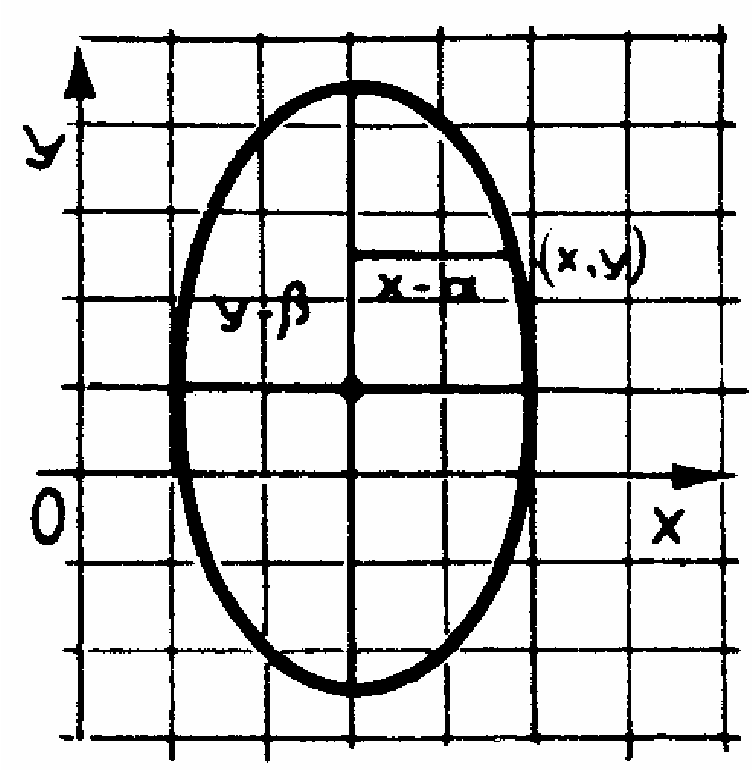


Fig. A-10.6. Propiedades de las elipses territoriales (III).

y si el eje mayor es paralelo al eje O Y (fig. A-10.6) resultará que:

$$(y - \beta)^2 / a^2 + (x - \alpha)^2 / b^2 = 1 \quad (a > b) \quad (13)$$

Veamos, por último, que dada una ecuación de la forma:

$$\mathbf{A\,x^2 + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0,}$$

donde A y C tienen el mismo signo, es fácil que completando los cuadrados en x e y, la ecuación puede, en general, reducirse a una de las formas típicas del número anterior. Pero hay dos excepciones: cuando el primer miembro puede ponerse en forma de suma de dos cuadrados y al mismo tiempo el segundo miembro es nulo o negativo. En el primer caso el lugar es evidentemente el punto de coordenadas (α, β), llamado "punto elipse"; en el segundo caso, no existe gráfica. Luego podemos expresar que:

Una ecuación de segundo grado en la cual falta el término rectangular en xy, y los coeficientes de x^2 e y^2 tienen el mismo signo, representa una elipse con los ejes paralelos a los ejes coordenados (excepcionalmente un solo punto o no existe gráfica).

Pues bien, a la ecuación anterior se la conocerá como la "ecuación general de las elipses territoriales".

1.8. APLICACIÓN AL ANÁLISIS TERRITORIAL

El problema que se presentará, en la práctica del Análisis Territorial, consistirá normalmente en hallar la ecuación de la elipse inter-territorial cuyos focos sean las capitalidades o centros de masas de renta de ambos territorios, y cuya excentricidad venga predeterminada por el hecho de que:

$$a = c + R\ (R')\ ,$$

siendo R (R') el mayor (menor) de los "radios óptimos de acción territorial" de los territorios[4] T y T', denominándosele **elipse inter-territorial mayor (menor).** También podría considerarse, a este respecto, la "elipse inter-territorial media", en que:

$$\overline{R} = \frac{R + R'}{2}$$

Ejemplo: Hallar las ecuaciones de las elipses interregionales en que las coordenadas geográficas de sus respectivas capitalidades o sedes administrativas son: F'(-1,4) y F(7,4), siendo los correspondientes radios óptimos de acción territorial:

$$\begin{cases} R' = 3'0 \text{ Mm.} = 30'0 \text{ Km.} \\ R = 8'0 \text{ Mm.} = 80'0 \text{ Km.} \end{cases}$$

a) Desde luego, la elipse mayor tendrá una excentricidad de:

$$a = c + R = 4'0 + 8'0 = 12'0 \text{ Mm.} \quad ;$$

$$e = c/a = 4'0/12'0 = 1/3 \quad ;$$

$$b^2 = a^2 \cdot (1 - e^2) = 12^2\ (1 - 1/9) = 128 \quad ; \quad b = \sqrt{128} = 11'3 \text{ Mm.}$$

con lo que su configuración planimétrica resulta sensiblemente circular.

La ecuación canónica de la elipse interregional de centro (3,4), será, pues:

$$\frac{(x-3)^2}{144} + \frac{(y-4)^2}{128} = 1 \quad ,$$

[4] *Vide* la obra del doctorando ANÁLISIS TERRITORIAL (División, Organización y Gestión del territorio). Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tortosa, 1991, p. 246 y ss.

que después de reducir, ofrece la ecuación general:

$$8x^2 + 9y^2 - 48x - 72y - 936 = 0.$$

Para comprobar que, efectivamente, se trata de una elipse, veamos su discriminante o invariante proyectivo (cúbico):

$$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} 8 & 0 & -24 \\ 0 & 9 & -36 \\ -24 & -36 & -936 \end{vmatrix} = -67.392 - 5.184 - 10.368 = -82.944 \neq 0 \ ,$$

luego es una cónica no degenerada.

El invariante afín o cuadrático, será:

$$I_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 72 > 0$$

, luego es del género elipse.

$$a_{11} \, . \, |A| = 8 \cdot (-82.944) = -663.552 < 0 \ ,$$

luego se trata de una elipse real.

El invariante métrico o lineal, será:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 8 + 9 = 17.$$

De hecho, dichos invariantes son expresiones que ligan entre sí a los distintos coeficientes, pero que se conservan en las nuevas expresiones de la curva territorial. Si ahora efectuamos una traslación y un giro de los ejes de coordenadas cartesianas rectangulares, podremos calcular la "ecuación reducida" de la elipse inter-territorial que nos ocupa. En efecto, a partir de la expresión:

$$S_1 x^2 + S_2 y^2 + I_3 / I_2 = 0 \ ,$$

siendo S_1 y S_2 las soluciones o raíces de la ecuación:

$$S^2 - I_1 \cdot S + I_2 = 0 \quad \text{, con lo que:}$$

$$S^2 - 17 \cdot S + 72 = 0 \quad \text{; esto es:}$$

$$S = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 288}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 9 = S_1 \\ 8 = S_2 \end{array} \right. \ .$$

O sea: $9x^2 + 8y^2 - 82.944 / 72 =$ $\mathbf{9x^2 + 8y^2 - 1.152 = 0}$.

Por último, los cortes o intersecciones con los ejes coordenados serán los puntos o enclaves del territorio tales que:

$$x = 0 \quad , \quad 9y^2 - 72y - 936 = 0 \quad ;$$

$$y = \frac{72 \pm \sqrt{5.184 + 33.696}}{18} = \left\langle \begin{array}{l} 14'95 \text{ Mm.} \\ -6'95 \text{ Mm.} \end{array} \right. \quad .$$

$$y = 0 \quad , \quad 8x^2 - 48x - 936 = 0 \quad ;$$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{2.304 - 29.952}}{16} = \left\langle \begin{array}{l} 14'22 \text{ Mm.} \\ -8'22 \text{ Mm.} \end{array} \right. \quad .$$

Veamos, en fin, que el área encerrada por dicha elipse vendrá dada por:

$$A = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot 12'0 \cdot 11'3 = 426'00 \text{ Mm}^2 = 42.600 \text{ Km}^2.$$

Obsérvese que dicha área sería equivalente a la de un cierto "rectángulo interregional mayor" cuya base fuera: $2 \cdot a = 2 \cdot 12'0 = 24'0$ Mm. = 240'0 Km., siendo su altura:

$$h = A / 2a = 426'00 / 24'00 = 17'75 \text{ Mm.} = 177'5 \text{ Km.}$$

b) Por el contrario, y siguiendo la misma sistemática, veamos que la elipse interregional menor tendrá una excentricidad de:

$$a' = c + R' = 4'0 + 3'0 = 7'0 \text{ Mm.}$$

$$e' = c/a' = 4/7 \quad ;$$

$$b'^2 = a'^2 (1 - e'^2) = 7^2 (1 - 16/49) = 33 \quad ;$$

$$b' = \sqrt{33} = 5'7 \text{ Mm.} \quad ,$$

y su ecuación canónica vendrá dada por:

$$\frac{(x-3)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{33} = 1 \quad ,$$

que, una vez reducida, ofrece la ecuación general:

$$33x^2 + 49y^2 - 198x - 392y - 536 = 0 ,$$

en la que no figuran términos rectangulares.

Se trata también, efectivamente, de una elipse, puesto que su discriminante o invariante proyectivo (cúbico) es:

$$I_3 = |A| = \begin{vmatrix} 33 & 0 & -99 \\ 0 & 49 & -196 \\ -99 & -196 & -536 \end{vmatrix} = -866.712 - 480.249 - 1.267.728 = \\ = -2.614.689 \neq 0$$

luego es una cónica no degenerada.

El invariante afín o cuadrático, será:

$$I_2 = A_{33} = \begin{vmatrix} 33 & 0 \\ 0 & 49 \end{vmatrix} = 1.617 > 0$$

, luego es del género elipse.

$$a_{11} \cdot |A| = 33 \cdot (-2.614.689) = -86.284.737 < 0 ,$$

luego se trata de una elipse real.

El invariante métrico o lineal, será:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 33 + 49 = 82 .$$

De este modo, la "ecuación reducida" de la elipse inter-territorial, será la siguiente:

$$S^2 - 82 \cdot S + 1.617 = 0 ;$$

$$S = \frac{82 \pm \sqrt{6.724 + 6.468}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} 49 = S_1 \\ 33 = S_2 \end{array} \right.$$

O sea: $49x^2 + 33y^2 - 2.614.689 / 1.617 =$ $\mathbf{49x^2 + 33y^2 - 1.617 = 0}$ (*)

En este caso, el área encerrada por dicha curva plana, que es la superficie elíptica interregional menor, será:

$$A' = \pi \cdot a' \cdot b' = \pi \cdot 7'0 \cdot 5'7 = 125'35 \text{ Mm}^2 = 12.535 \text{ Km}^2 ,$$

que supone sólo un: (12.535/42.600) x 100 = 29'4% de la superficie de la elipse mayor anteriormente calculada.

En este caso, también, se tendría un cierto "rectángulo interregional menor equivalente" cuya base sería: 2·a' = 2 · 7'0 = 14'0 Mm = 140'0 Km, y su altura:

h' = A' / 2a' = 125'35 / 14'00 = 8'95 Mm. = 89'5 Km.

1.9. RESTANTES ESPECIFICACIONES

a) Un problema típico que se puede presentar en el Análisis Territorial aplicado consiste, precisamente, en la construcción gráfica o trazado, sobre el mapa, de una elipse inter-territorial, conociendo la situación de los focos o centros territoriales así como sus radios óptimos de acción territorial (FRANQUET, 1990/91).

En consecuencia, de acuerdo con la exposición anterior, conocemos la situación geográfica de los puntos o vértices de la elipse A y A'. Para hallar más puntos de esta curva cerrada y plana, basta tomar un punto **Q** cualquiera en el segmento finito $\overline{AA'}$ (que pudiera ser, v. gr., el "punto frontera" existente entre ambos territorios de capitalidades F y F', donde se compensan las fuerzas de atracción ejercidas desde ambos), y haciendo centro en cada foco, se trazan dos circunferencias con radios respectivos $\overline{QA}$ y $\overline{QA'}$, las cuales se cortan en puntos del territorio pertenecientes a la curva. De este modo, a cada posición del punto **Q** corresponden cuatro de la elipse, repitiéndose la operación descrita tantas veces como haga falta al objeto de facilitar el trazado gráfico que se busca, con el auxilio de una plantilla de curvas o "plotter" adecuado.

a-1) De más sencilla construcción que la elipse sería el "óvalo territorial", cuya configuración y propiedades son sólo asimilables a los de dicha cónica territorial. Puede verse, al respecto, la siguiente figura:

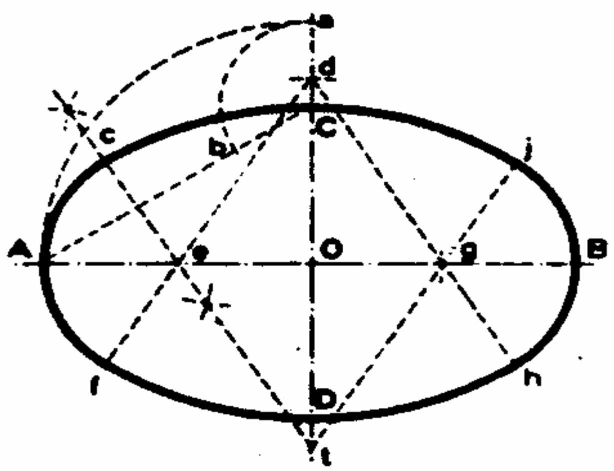


Fig. A-10.7. Óvalo territorial (I).

En este caso, los focos territoriales serían los puntos **e** y **g**. Con centro en ellos y radios territoriales óptimos eA y gB, se trazan los arcos $\overset{\frown}{fc}$ y $\overset{\frown}{hj}$, y haciendo centros en t y d con radios tC y dD, se trazarán los arcos $\overset{\frown}{cj}$ y $\overset{\frown}{fh}$, quedando resuelto el problema planteado. Otras construcciones de "óvalos territoriales" podrían ser las siguientes:

a-2) Dados los dos ejes territoriales: uniendo los extremos de los ejes formaremos un rombo ADBC. Con centro en O se describirá el arco $\overset{\frown}{CT}$ que nos dará TB como semidiferencia de ejes. Sobre un lado del rombo, tomaremos EC = TB, y los puntos M y N en que la mediatriz de AE corta a los ejes son los centros del óvalo territorial propuesto. Tomando, por último, OR = ON y OS = OM tendremos los otros dos centros. Así:

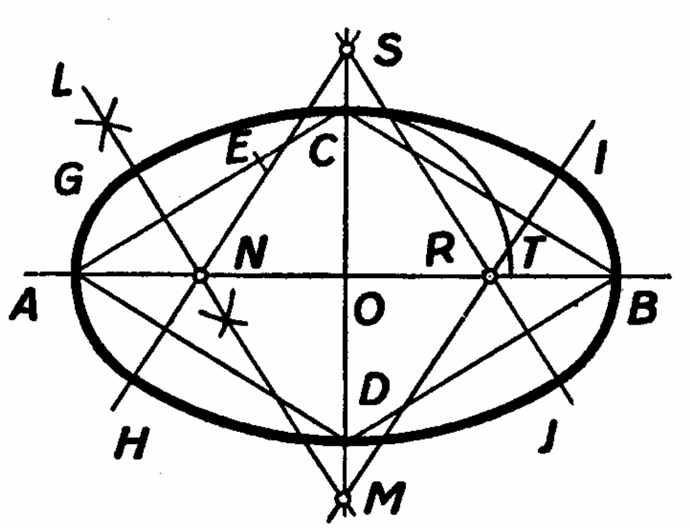


Fig. A-10.8. Óvalo territorial (II).

a-3) Dados los dos ejes territoriales: sean los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. A partir de los cuatro extremos de los mismos tomaremos una distancia cualquiera, menor que el semieje menor, obteniendo así los puntos o lugares geográficos E, F, G, H, siendo F y G dos centros de la línea; el punto T en que la mediatriz de $\overline{EF}$ corta al eje vertical será otro centro. De la misma manera, obtendríamos el cuarto centro S. A saber:

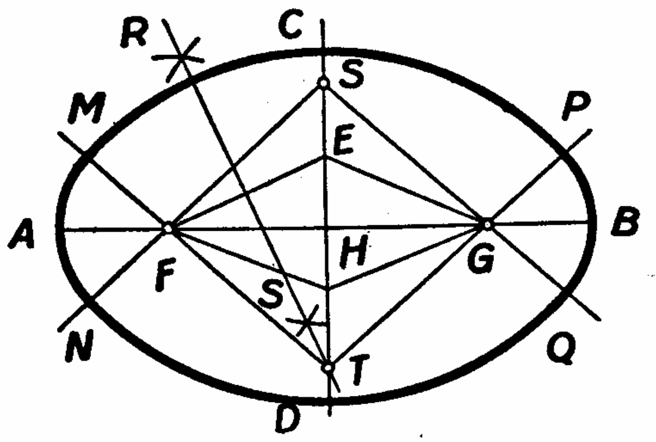


Fig. A-10.9. Óvalo territorial (III).

a-4) Dado el eje mayor: dividiremos el eje mayor en tres partes iguales $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{NB}$. Haciendo centro en M y N describiremos dos circunferencias de radio igual a una de estas partes iguales. Los puntos de concurso R y S de las dos circunferencias son centros que unidos con M y N ofrecen las líneas de separación y las longitudes de los radios. Así:

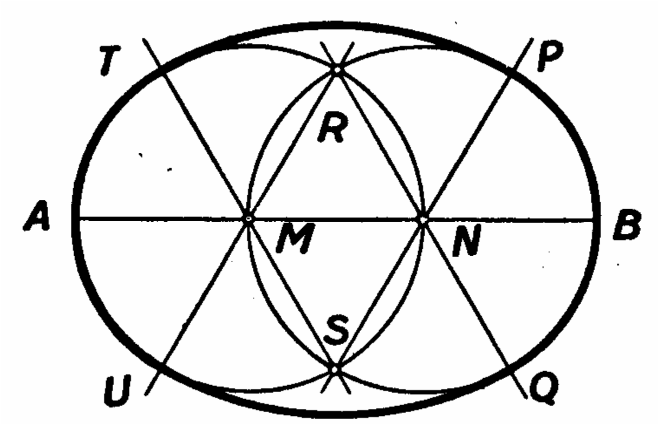


Fig. A-10.10. Óvalo territorial (IV).

a-5) Dado el eje mayor: se trata de una construcción gráfica parecida a la expuesta en el problema anterior, pero dividiendo en cuatro partes iguales al eje territorial mayor, en lugar de hacerlo en tres, con lo que: $\overline{RA} = \overline{AO} = \overline{OB} = \overline{BS}$. Entonces, los puntos A, B, G y H serán los centros de los arcos que forman el óvalo territorial. Así:

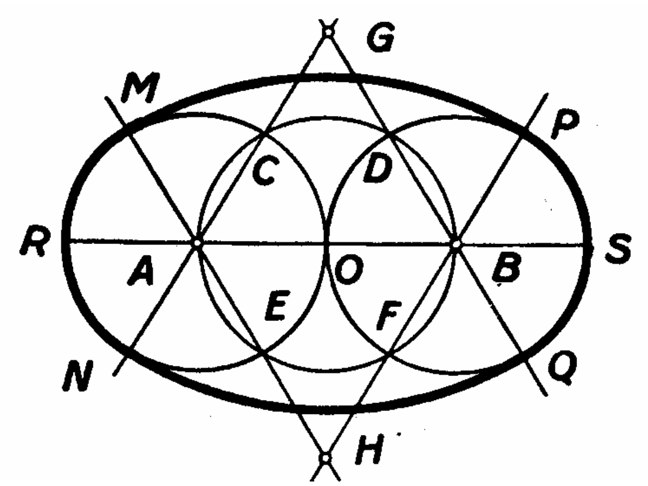


Fig. A-10.11. Óvalo territorial (V).

b) Enlazando con nuestra expuesta teoría de los momentos territoriales[5], veamos que con respecto al eje OX (eje mayor), el momento territorial de inercia de la elipse inter-territorial, viene dada por:

$$I_X = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4} \quad ,$$

con un módulo resistente territorial de:

$$W_X = I_X / v = \frac{\pi \cdot \cdot a \cdot b^3 / 4}{b} = \frac{\pi \cdot a \cdot b^2}{4} \quad .$$

Del mismo modo, con respecto al eje OY (eje menor), se tendrán:

$$I_y = \frac{\pi \cdot b \cdot a^3}{4} \quad ,$$

$$W_y = I_y / v = \frac{\pi \cdot b \cdot a^3 / 4}{a} = \frac{\pi \cdot b \cdot a^2}{4} \quad .$$

Por último, con respecto al centro O de la elipse, se tendrá:

[5] *Vide* la obra del doctorando ANÁLISIS TERRITORIAL (División, Organización y Gestión del territorio). Ed.: Universidad Nacional de Educación a Distancia. Tortosa, 1991, p. 276 y ss.

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4} + \frac{\pi \cdot b \cdot a^3}{4} = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4}(a^2 + b^2) \quad , y :$$

$$W_0 = I_0 / v = \frac{\pi \cdot b}{4}(a^2 + b^2) \quad .$$

c) 1. Llamaremos "círculos focales o directores" de un territorio a los trazados con la magnitud **2a** (eje mayor) como radio y los focos territoriales conocidos F y F' como centros. Obviamente, la ecuación del círculo director del foco F' es:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 .$$

La ecuación del círculo director del foco F es:

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 .$$

2. Llamaremos "círculos principales u homográficos" del territorio a los trazados tomando el centro de la elipse como centro de la circunferencia que los delimita, y los ejes como diámetros. De este modo, sus ecuaciones vendrán dadas por:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 & , \ y : \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases}$$

3. Veamos, en fin, que, en forma paramétrica, la ecuación de las elipses territoriales será:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \varphi \\ y = b \cdot \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

siendo φ un ángulo tal que: $\cos \varphi = x / a$.

Así mismo, en coordenadas polares, y tomando como polo un foco territorial y como eje polar el propio eje focal, la ecuación es:

$$\rho \, (1 + c/a \cdot \cos \omega) = b^2 / a \quad ,$$

Llamando "parámetro" a la cuerda perpendicular al eje mayor que pasa por un foco territorial, de valor:

$$p = b^2 / a \quad \text{(semiparámetro)} \quad ,$$

podremos escribir la anterior ecuación del siguiente modo:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\omega} \quad ,$$

poniendo el módulo en función del semiparámetro, de la excentricidad y del argumento.

2. LAS RESTANTES CÓNICAS TERRITORIALES

2.1. LA HIPÉRBOLA INTER-TERRITORIAL

Definiríamos la "hipérbola inter-territorial" como el lugar geográfico de los puntos del territorio tales que la diferencia de sus distancias (medidas en línea recta sobre el mapa) a los puntos fijos o "focos territoriales" F y F' es constante. Esto es:

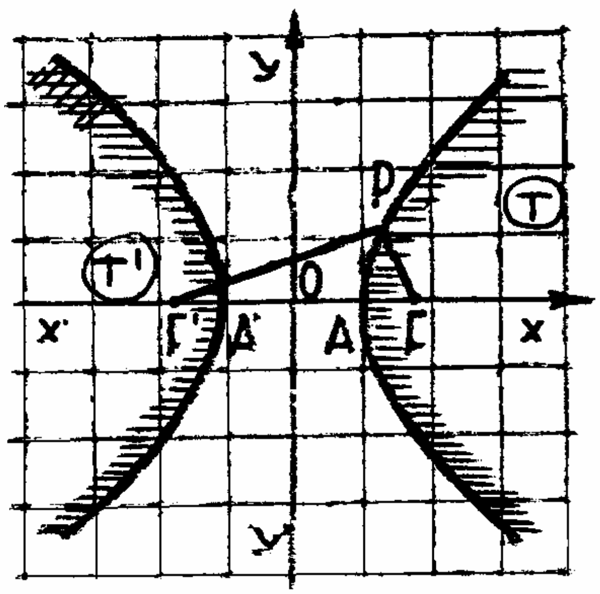


Fig. A-10.12. Hipérbola territorial.

Obsérvese que, en definitiva, la hipérbola inter-territorial más bien nos separa y delimita las zonas de influencia de los territorios T' y T (de capitalidades respectivas F' y F), de tal modo que la porción del territorio indefinida o intermedia entre ambos es de anchura mínima en el punto medio de la distancia focal $\overline{FF'}$.

Sería posible, por otra parte, desarrollar con mayor extensión y profundidad el concepto y aplicaciones que aporta esta nueva cónica territorial, al igual que lo hemos hecho en el caso anterior de las elipses territoriales.

2.2. LA PARÁBOLA TERRITORIAL

Definiremos, por último, la "parábola territorial" (FRANQUET, 1990/91) como el lugar geográfico de los puntos del territorio que equidistan de un punto fijo o foco territorial F y de un eje o recta fija llamada "directriz territorial". Esto es:

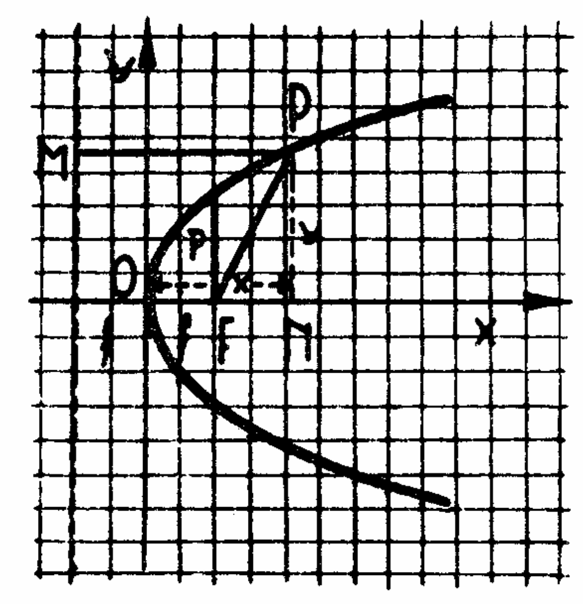


Fig. A-10.13. Parábola territorial.

La recta trazada por el foco perpendicular o la directriz se llama *eje* de la parábola. El punto en que el eje corta la curva, esto es, el punto medio entre el foco y la directriz, se llama *vértice* de la parábola. La distancia del vértice al foco la designaremos por f, o *distancia focal,* por analogía con los espejos curvos.

Tomemos el vértice de la parábola como origen de coordenadas, y el eje de la curva como eje OX: el foco es el punto F (f, o) y la directriz es la recta x = -f. Si P (x, y) es un punto cualquiera de la curva territorial, por definición de parábola se tendrá (ver fig. A-10.13):

$$F\overline{P} = \overline{M}P$$

y elevando al cuadrado:

$$\overline{FP}^2 = \overline{MP}^2$$

Es fácil ver que:

$$\overline{FP}^2 = \overline{FN}^2 + \overline{NP}^2 = (x - f)^2 + y^2$$

Además:

$$MP^2 = (x + f)^2$$

Substituyendo sale la expresión:

$$(x - f)^2 + y^2 = (x + f)^2 ,$$

o bien reduciendo términos:

$$-2 f x + y^2 = 2 f x$$

y en definitiva:

$$\mathbf{y^2 = 4 \cdot f \cdot x}$$

De la ecuación anterior se deduce que **f** y **x** deben tener el mismo signo, ya que $\mathbf{y^2}$ siempre es positivo. Luego la curva es cóncava; dirige la concavidad hacia la derecha o bien hacia la izquierda, según que **f** sea positivo o negativo. Por cada valor de **x** existen dos valores de **y**, iguales en valor absoluto pero de signos opuestos, que crecen indefinidamente a medida que también lo hace **x**; luego la curva o cónica territorial en cuestión es abierta y se extiende hasta el infinito, y además es simétrica respecto al eje de abscisas OX.

Evidentemente, la recta directriz territorial puede ser un eje geográfico, infraestructural, administrativo o imaginario, que, a su vez, sea interior, exterior o secante al territorio cuya capitalidad o centro de las masas socioeconómicas se sitúa en el foco F. Por lo que se refiere a una posible mayor profundización en estos conceptos, nos remitimos a lo señalado al respecto en el epígrafe anterior.

3. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GRÁFICOS DE INTERÉS

3.1. DETERMINACIÓN GRÁFICA DE NUEVOS CENTROS TERRITORIALES DE PRESTACIÓN DE SERVICIOS

El problema consistirá en dibujar dos circunferencias territoriales, de radio de acción conocido, que sean tangentes a otras dos circunferencias territoriales dadas, dejándolas al exterior (FRANQUET, 1990/91).

Para ello, se procederá del siguiente modo:

a) Se tienen dos circunferencias de centros de masas socioeconómicas A y B que delimitan sendos círculos de acción territorial, así como el radio que se desea de otros Entes territoriales cuya acción sea tangente o complementaria a la de los centros anteriormente reseñados.

b) Desde el centro de la primera circunferencia, A, se traza una recta hacia la izquierda. Lo mismo se realiza desde el centro de la segunda circunferencia, B, trazándose una recta hacia la derecha. Encontramos, entonces, los puntos C y D de las mismas. Desde C, siguiendo la recta anterior, se superpone el radio conocido l de las circunferencias que engloban los círculos de acción territorial buscados, hallando el punto E. Por último, al hacer lo mismo desde D hallaremos el punto del territorio F.

c) Con centro en A y radio AE, se traza una circunferencia. Con centro en B y radio BF, se traza otra circunferencia. Los puntos del territorio donde se cortan ambas circunferencias son G y H, que resultarán ser los centros de gravedad respectivos de los nuevos Entes territoriales que buscamos.

d) Se trazará, a continuación, una recta desde G hasta A, encontrándose el punto I de intersección con la circunferencia de acción territorial de centro en A. Del mismo modo operaremos trazando rectas desde G hasta B, y uniendo, así mismo, H con A y H con B. Como consecuencia de ello, encontraremos los restantes puntos del territorio J, K y L.

e) Con centro en G y radio: $\overline{GI} = \overline{GJ}$, se trazará una primera circunferencia resultado. Por último, con centro en H y radio de acción territorial $\overline{HK} = \overline{HL}$, se obtendrá la otra circunferencia resultado.

Véase, para una mejor comprensión de todo ello, la siguiente figura.

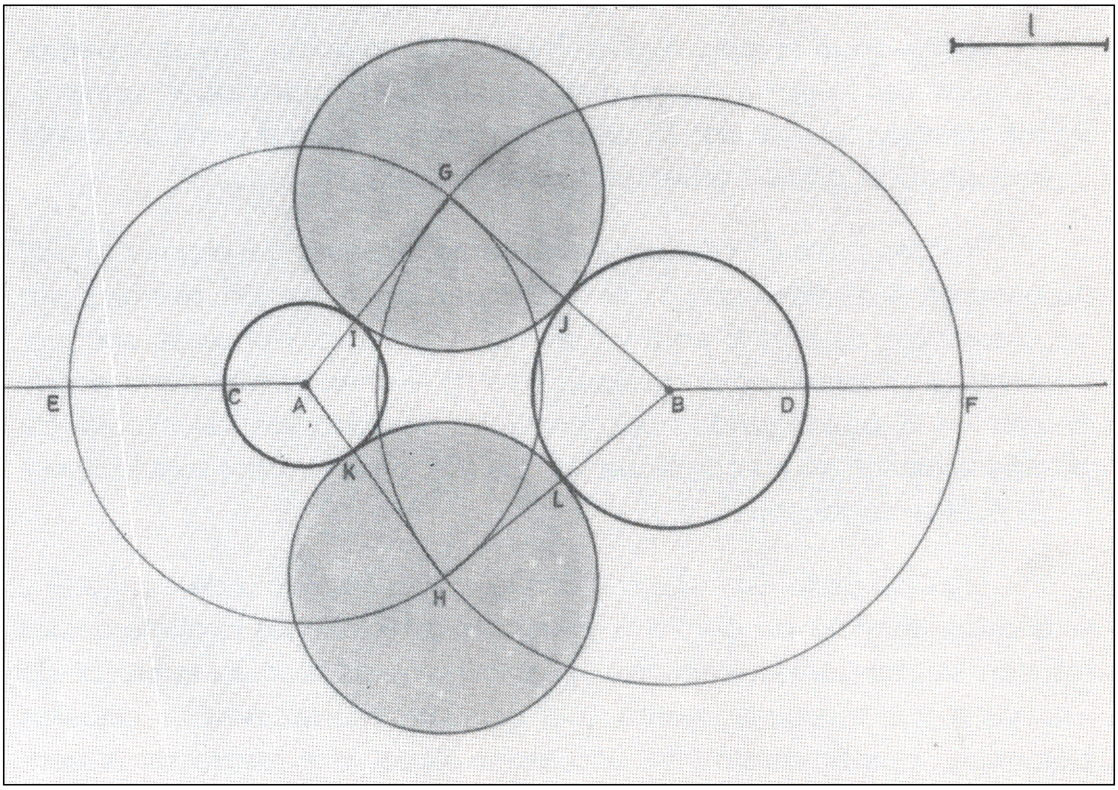


Fig. A-10.14. Nuevos círculos de acción territorial.

3.2. DETERMINACIÓN GRÁFICA DE LA ELIPSE INTER-TERRITORIAL

En este caso, el problema consistirá en dibujar dos circunferencias territoriales, de radio de acción conocido, que sean tangentes a otras dos circunferencias territoriales dadas, dejándolas al interior.

Para ello, se procederá del siguiente modo:

a) Se tienen dos circunferencias de centros de masas socioeconómicas A y B, que delimitan los círculos de acción territorial respectivos, así como el radio que se desea del Ente territorial mayor, que las engloba.

b) Se coge el radio de la primera circunferencia, A, y se superpone a partir del extremo derecho del radio, D, encontrando el punto E. Poner, también, el radio de la segunda circunferencia a partir del punto D, encontrando, como consecuencia, el otro punto F.

c) Con radio $\overline{CE}$ (siendo C el extremo izquierdo del segmento CD) y centro en A, se traza una circunferencia. A continuación, se traza otra circunferencia de centro en B y radio CF. Los puntos donde se encuentran ambas circunferencias auxiliares (G y H) se unen con los centros territoriales A y B, prolongando hasta cruzar los correspondientes círculos de acción territorial; como consecuencia de ello, encontramos seguidamente los puntos del territorio: I, J, K, L.

d) Con radio GJ = GL, se traza una circunferencia de centro G y otra circunferencia de centro H y radio $\overline{HI}$ = HK. Dichas circunferencias resultan ser tangentes exteriores a los círculos de acción territorial de centros A y B, respectivamente, y el conjunto intersección de aquellos determina, aproximadamente, una cierta elipse, que resulta ser el conjunto inter-territorial A-B que se pretende.

Véase, para una mejor comprensión de todo ello, la siguiente figura.

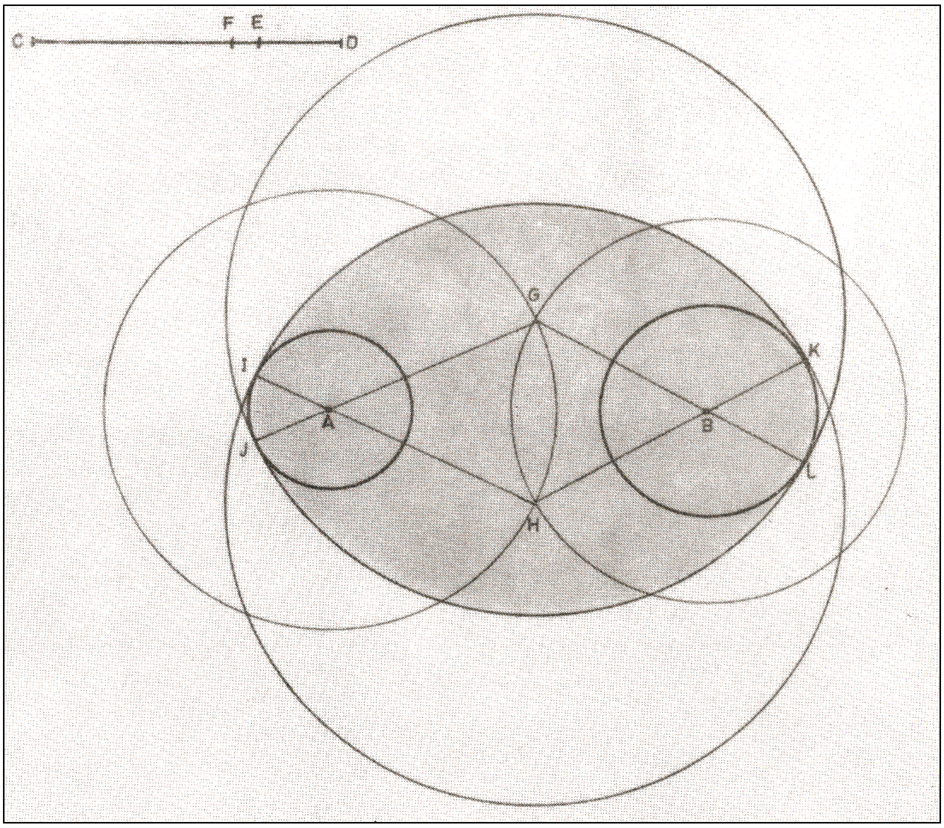


Fig. A-10.15. Delimitación geofísica de la elipse inter-territorial.

(*) Por cierto, aquí, las intersecciones con los ejes coordenados serán los puntos del territorio tales que:

$$x = 0 \quad , 49\, y^2 - 392\, y - 536 = 0 \quad ;$$

$$y = \frac{392 \pm \sqrt{153.664 + 105.056}}{98} = \left\langle \frac{9'19 \text{ Mm.}}{-1'19 \text{ Mm.}} \right.$$

$$y = 0 \quad , 33\, x^2 - 198\, x - 536 = 0 \quad ;$$

$$x = \frac{198 \pm \sqrt{39.204 + 70.752}}{66} = \left\langle \frac{8'02 \text{ Mm.}}{-2'02 \text{ Mm.}} \right.$$

ANEXO 11

UNA TEORÍA ACERCA DE LOS FLUJOS ECONÓMICOS TERRITORIALES

ANEXO 11

UNA TEORÍA ACERCA DE LOS FLUJOS ECONÓMICOS TERRITORIALES

1. LA NATURALEZA DINÁMICA DE LOS FLUJOS TERRITORIALES

1.1. CONCEPTOS PREVIOS Y CONSTANCIA DEL FLUJO ECONÓMICO

Es bien conocido cómo, en la realidad territorial, los bienes económicos, los servicios y el dinero o las órdenes de pago se desplazan desde unos núcleos territoriales a otros a través de las redes de transporte, de telecomunicación y de teleproceso. En este sentido, podemos considerar a Q (expresable en €/hora) como el **caudal económico**, o sea, la masa económica por unidad de tiempo, que fluye con cierta regularidad desde un territorio T a otro territorio T' o, más concretamente, entre sus capitalidades, sedes institucionales o centros de masas respectivos. La masa económica de recursos a conducir desde T a T' fluirá, en buena medida, debido a que en el extremo T la energía económica potencial es mayor que en el T', produciéndose el flujo bien de un modo natural o forzado.

Obviamente, todo ello implicará la consideración de una cierta **sección o capacidad económica** S (expresable en €/km.) de la vía comunicativa que constituye su nexo de unión, así como de una **velocidad** física o real v (km./hora) de desplazamiento de los recursos, volumen o masa económica V (euros) desde T hasta T'. De este modo, en dos puntos cualesquiera de dicha vía de comunicación o eje territorial 1 y 2, el caudal económico mantiene su constancia e imperturbabilidad, con lo que se cumplirá que:

$$Q = S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 = \text{cte.},$$

y ello en el triple supuesto de que:

a) No se produzcan ganancias, pérdidas o devaluaciones incontroladas del mismo a lo largo de su trayectoria por el tramo del eje comunicativo territorial $\overline{TT'}$.
b) La densidad $\delta = \rho$ □de la masa económica sea la misma en todos los puntos del eje. Ello resulta ciertamente hipotético habida cuenta de que el precio de las mercancías o servicios circulantes es diferente, a salvo de la consideración de su valor promedio para un período de tiempo suficientemente largo.
c) La hipótesis expresada de constancia del caudal económico entre los diferentes puntos o lugares geográficos de un eje comunicativo territorial,

debe entenderse como coyuntural o referida a un período determinado de tiempo y para unas concretas fuerzas económicas de demanda y oferta de la masa desplazable de bienes y servicios. Se trata, pues, de un modelo más bien estático que dinámico.

De la anterior ecuación de continuidad se deduce, así mismo, que las velocidades medias en una corriente económica son inversamente proporcionales a las secciones o capacidades económicas respectivas del eje de comunicación. Esto es:

$$\boxed{v_1 / v_2 = S_2 / S_1}$$

Desde luego, debemos suponer que los flujos económicos territoriales que nos ocupan se hallan en un régimen que podríamos calificar como teóricamente "estacionario", es decir, que su velocidad de desplazamiento no depende del tiempo. De este modo, un tramo cualquiera de un eje comunicativo podría representarse, esquemáticamente, así:

$$\delta \square = \text{cte.}$$

$$\Phi \text{ entrante} \rightarrow \underset{1}{\boxed{\quad \rightarrow \quad}}_{2} \rightarrow \Phi \text{ saliente}$$

El flujo económico que entra por un extremo es igual al flujo económico saliente por el otro extremo del eje. Con ello, se cumplirá que:

$$Q = \int_{\text{sección}} v \cdot dS = \text{cte.}$$

Al ser el flujo estacionario, implicará que Q = cte., y si las secciones o capacidades económicas son suficientemente pequeñas, tiene lugar que:

$$Q = \int_{S_1} v_1 \cdot dS_1 = \int_{S_2} v_2 \cdot dS_2 \quad \text{, de dónde:}$$

$$v_1 \cdot dS_1 = v_2 \cdot dS_2 \text{ , llegándose, en definitiva, a:}$$

$$\boxed{v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 \;,}$$

tal y como pretendíamos demostrar.

1.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD DEL FLUJO ECONÓMICO

Una generalización conceptual de los conceptos expuestos al espacio tridimensional (TORRES, 1970), conduciría a la consideración de que en el movimiento de una masa económica de bienes y servicios las velocidades de sus distintas partes dependen, en general, de cuatro variables independientes, a saber, de su posición geográfica expresable en coordenadas UTM (x,y,z) y del tiempo t. Sean, pues:

$$\boxed{u\,(x, y, z, t) \quad ; \quad v\,(x, y, z, t) \quad ; \quad w\,(x, y, z, t)}$$

las componentes del vector velocidad de desplazamiento $\vec{v}$ de la partícula de masa económica que ocupa la posición espacial (x,y,z) en el instante t, y sea ρ(x,y,z,t) la densidad de la masa económica en dicho instante y lugar (usaremos esta tipología y no la δ, para no confundirla con la simbología comúnmente empleada en la representación de las derivadas parciales en el cálculo infinitesimal de funciones de varias variables).

Consideremos (en una región o tramo de un eje comunicativo entre dos territorios, sin fuentes ni sumideros) un recinto espacial R, con una sección o capacidad económica S, y calculemos la masa económica que penetra en dicho recinto por unidad de tiempo. De una parte, será igual al flujo económico territorial entrante por la cara exterior, en dicha unidad de tiempo, o sea (aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradski):

$$-\iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \; = \; -\iiint_R \mathrm{div}\,(\vec{\rho} \cdot v\,) \cdot dV$$

Esto es: la integral de la divergencia del vector velocidad $\vec{v}$ en todo el recinto o dominio de definición R es igual al flujo o caudal económico total, siendo dσ el elemento infinitesimal de sección o capacidad económica del eje comunicativo y siendo dV el elemento infinitesimal de masa o volumen económico.

Pero también podremos formular en función de la variación de la densidad de la masa económica por unidad de tiempo δ ρ / δ t, en cada lugar geográfico de coordenadas (x,y,z), dando:

$$\iiint_R (\delta \rho / \delta t) \cdot dV$$

Igualando ambas expresiones, resultará:

$$\iiint_R \; [\,(\delta \rho / \delta t) \; + \; \mathrm{div}\,(\rho \cdot \vec{v})] \cdot dV \;\; = \;\; 0 \qquad ,$$

cualquiera que sea el recinto R o tramo del eje comunicativo considerado, lo cual exige la anulación idéntica del integrando anterior, a saber:

$$\boxed{\delta \rho / \delta t \; + \delta\,(\rho \cdot u) / \delta x + \delta\,(\rho \cdot v) / \delta y + \delta\,(\rho \cdot w) / \delta z \;\; = \;\; 0}$$

que sería la ecuación de continuidad del movimiento de la masa económica. En particular, si consideramos a la ρ = cte., dicha ecuación de continuidad quedaría reducida a:

$$\delta u / \delta x \; + \; \delta v / \delta y \; + \; \delta w / \delta z \; = \; 0\,.$$

En las aplicaciones propias del Análisis Territorial, la velocidad $\vec{v}$ dependerá exclusivamente de la posición, con lo que el flujo territorial que pasa o transcurre por un mismo lugar geográfico de un eje comunicativo lo hará siempre con la misma velocidad (en un determinado espacio de tiempo), con lo que no hallamos en presencia de un régimen "permanente" o "estacionario". Las componentes de $\vec{v}(u,v,w)$ serán sólo funciones de las coordenadas UTM x, y, z. Si, además, derivasen de un cierto potencial económico U (movimiento irrotacional), la ecuación que debe satisfacer este potencial de velocidades es también la ecuación de Laplace[6], esto es:

$$\delta^2 U / \delta x^2 + \delta^2 U / \delta y^2 + \delta^2 U / \delta z^2 = 0 \quad ; \quad \Delta U = 0 \ ,$$

puesto que u, v, w son las derivadas parciales primeras de U con respecto de x, y, z.

1.3. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA DE LOS EJES COMUNICATIVOS

En el Análisis Territorial, en fin, puede revestir cierto interés la determinación del momento territorial de inercia de un eje comunicativo AB con respecto a los ejes coordenados que puedan haberse fijado en el territorio. Con respecto a ambos ejes, los momentos respectivos vendrían dados por:

$$I_x = \int_{AB} y^2 \cdot ds \qquad ; \qquad I_y = \int_{AB} x^2 \cdot ds \quad ,$$

mientras que las coordenadas del centro del arco que forma el eje territorial AB, de ecuación F(x,y) = 0, o bien:

$$x = f(u) \qquad ; \qquad y = g(u) \quad ,$$

deberán satisfacer las relaciones (PÉREZ, 1976):

$$\begin{cases} \bar{x} \cdot s = \bar{x} \cdot \int_{AB} ds = \int_{AB} x \cdot ds \\ \bar{y} \cdot s = \bar{y} \cdot \int_{AB} ds = \int_{AB} y \cdot ds \end{cases}$$

Considérese, otrosí, que la circulación de la masa económica por un mismo eje comunicativo puede efectuarse, casi siempre, en los dos sentidos, razón por la que el estudio pormenorizado de estos flujos exigirá, bien sea su análisis por separado, bien la consideración resultante de su balance económico final en uno u otro sentido.

[6] Matemático, astrónomo y físico francés cuya obra es reconocida en la actualidad por la importancia de sus aportaciones a la Ciencia en campos tan diversos como: Astronomía, Análisis Matemático, Álgebra, Teoría de Probabilidades, Electromagnetismo, Termoquímica, Estudio del movimiento, Teoría de los gases, Capilaridad,...

2. LAS PÉRDIDAS DE CARGA ECONÓMICA

En la práctica, se producirán **pérdidas de carga o energía económica** al circular las masas de bienes y servicios por dichos ejes, que se hallan en campos económicos NO CONSERVATIVOS, a causa de los inconvenientes, desgastes, retrasos y carestía de los procesos de transporte de las personas, mercancías e información, que serán tanto mayores cuanto mayor sea también la distancia $\overline{TT'}$ o menor sea la capacidad económica S del eje comunicativo, y que explican por qué la atracción o influencia socio-económica de unos núcleos territoriales sobre otros decrece ostensiblemente con su alejamiento geofísico así como con la estrechez o precariedad de sus vías de comunicación e información. Seguirá siendo válido, no obstante, el axioma o principio de conservación de la energía económica, de tal modo que entre dos secciones de flujo cualesquiera, la suma de todas las diferentes formas de energía permanecerá constante, aunque deberán incluirse, en el balance, las pérdidas de carga económica habidas entre ambas secciones o enclaves territoriales. Esto es:

$$E_1 = E_2 + \Delta H \quad \text{, siendo:}$$

$$\begin{cases} E_1 = \text{carga económica en la sección 1 (€*)} \\ E_2 = \text{carga económica en la sección 2 (€*)} \\ \Delta H = \text{pérdida de carga económica entre 1 y 2 (€*)} \end{cases}$$

Al respecto, podríamos enunciar que en un sistema territorial económicamente aislado (esto es, que no recibe ni proporciona energía económica alguna al sistema exterior), la energía económica total permanece constante. Esto equivaldría a un cierto "principio de conservación de la energía económica", que señalaría que la energía económica no se crea ni se destruye, sólo se transforma.

Desde una perspectiva o visión estrictamente física o mecanicista de los fenómenos económicos[7], la unidad de medida de la carga o energía económica y de sus pérdidas será: €*km., y la de J (pérdida de carga económica unitaria), lógicamente, será: €* (euros-fuerza).

La pérdida de carga económica así definida podrá ser uniforme a lo largo de la trayectoria del eje territorial, o bien variar al alza en algunos puntos singulares del mismo (por ejemplo, en los "cuellos de botella" que presentan las ciudades incluidas en el trayecto), y para su determinación será necesario recurrir a la experimentación. Por cierto, un método que puede resultar

[7] Tal como se contempla en el capítulo 10: “Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas económicas” del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio*, en *CADUP (Estudios)*, Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

conveniente y simplificativo para valorar dichas pérdidas de carga accidentales consistiría en expresarlas en la forma de una longitud equivalente del eje viario que produzca idéntica pérdida de energía económica.

Desde luego, las pérdidas uniformes o continuas a lo largo de dicho eje podrán evaluarse en función de una "pérdida de carga económica unitaria" (pendiente económica) y de la propia distancia $\overline{TT'} = l$ (longitud del eje comunicativo). Así:

$$J = \Delta H / l \text{ (€/Km.)}$$, o bien con más precisión:

$$J = \lim_{\Delta l \to 0} (\Delta H / \Delta l) = dH/dl \quad ; \qquad dH = J \cdot dl \quad ;$$

$$H = \int_0^1 J \cdot dl = J \cdot [\, l \,]_0^1 = J \cdot l$$

de conocerse la función real de variable real: $J = f(l)$, en el eje territorial en estudio. También podría denominársele "pendiente motriz", y al depender de la capacidad económica de cada tramo del eje, habrá que calcularla separadamente para cada uno de ellos y sumarlos todos: $H = \Sigma\, J \cdot \Delta l$, pasando del campo continuo al discreto.

Utilizando un conocido símil hidráulico, podría ser posible cuantificar dichas pérdidas de carga, en función del caudal económico circulante, mediante una expresión del tipo:

$$\mathbf{J = n \cdot Q^2} \quad , \quad \textbf{(o, más genéricamente, } \mathbf{J = n \cdot Q^m}\textbf{)}$$

similar a la expresión de la fórmula simplificada de Darcy para el cálculo de las conducciones forzadas o tuberías a presión. Así pues, podríamos enunciar, por ejemplo, que *"la pérdida de carga económica en un eje comunicativo entre dos territorios T y T' es directamente proporcional al cuadrado del caudal económico circulante por él".* En general, será fácil deducir la influencia preponderante de la sección económica S sobre la pérdida de carga J y sobre el caudal Q, observándose que una pequeña variación de aquélla, en un eje territorial de comunicación, repercute notablemente en J, por lo que resultará más conveniente, en la praxis de la Planificación Territorial, actuar sobre la S con medidas infraestructurales (ampliando las vías de comunicación o creando otras nuevas) que actuar sobre la J (reduciendo las "fricciones" o los costes de transporte).

La última expresión puede conducirnos a otras fórmulas útiles para el cálculo o dimensionamiento económico óptimo de los ejes territoriales comunicativos, puesto que:

$$Q = \sqrt{J / n} = \beta \cdot \sqrt{J} = \beta \cdot \sqrt{\Delta H / I} \quad ,$$

$$Q^2 / \beta^2 = n \cdot Q^2 = \Delta H / I \quad , y: \quad \Delta H = n \cdot Q^2 \cdot I \quad .$$

Llegados a este punto, conocido ya el significado de las magnitudes: **S, Q, v** y **J**, veamos que, a partir del conocimiento de dos cualesquiera de ellas, podremos determinar las dos restantes. Por consiguiente, los problemas que se presenten en la práctica del Análisis Territorial pueden resumirse en los seis grupos que indicamos a continuación:

PROBLEMA	DATOS	INCÒGNITAS
I	S y J	v y Q
II	S y Q	v y J
III	S y v	Q y J
IV	Q y J	S y v
V	J y v	S y Q
VI	Q y v	S y J

Para el establecimiento de la fórmula general del movimiento uniforme de los flujos económicos territoriales por los ejes comunicativos, habrá que configurar empíricamente las relaciones que ligan entre sí aquellas cuatro variables, basándose en las siguientes consideraciones o hipótesis de partida que provocarán una simplificación del problema:

a) La pérdida de carga económica puede ser independiente de la carga o energía económica total (renta o producto total de los territorios), dependiendo esencialmente de la sección o capacidad económica del eje comunicativo, así como de la propia naturaleza de la corriente económica de bienes y servicios (que determine su mayor o menor grado de "viscosidad" o rozamiento interno).

b) Cuando la sección o capacidad económica portante de dicho eje es constante, la velocidad media de circulación es también constante y el movimiento de la masa o volumen económico será permanente y uniforme, o estacionario, para un caudal económico determinado.

3. EL MOVIMIENTO Y LA ENERGÍA ECONÓMICA DE LOS FLUJOS TERRITORIALES

3.1. CONCEPTOS PREVIOS

Denominaremos **potencia de la corriente económica**, en una sección dada del eje territorial, *a la energía económica total que lleva el flujo a través de dicha sección en la unidad de tiempo.* Expresaremos la potencia así definida como el producto de la energía económica por el caudal económico, con lo que:

$dQ = v \cdot dS$ (caudal económico instantáneo que transcurre por dS en un instante dado)

$dN = E \cdot v \cdot dS$, o sea:

$$N = \int_Q E \cdot dQ = \int E \cdot v \cdot dS$$

Veamos, en fin, que para variar interesada o artificialmente la velocidad de circulación de una corriente económica, en dirección o magnitud, será necesario suministrar al sistema, como variable de acción, una fuerza económica adicional. De acuerdo con el principio universal de acción y reacción, la masa económica ejercerá una fuerza igual y opuesta sobre el cuerpo físico o administrativo que provoque dicho cambio de velocidad, a la que denominaremos "fuerza económica dinámica" para distinguirla de las fuerzas debidas a la carga económica estática configurada por la masa de renta o de recursos.

Por otra parte, utilizando un símil mecánico, veamos que siendo **m** la masa o volumen económico comprendido, en un instante determinado, entre las secciones 1 y 2, para evaluar la variación de la "cantidad de movimiento económico" o "momento territorial cinético" de esta masa en el intervalo infinitesimal de tiempo dt, sólo será necesario tener en cuenta la cantidad de movimiento entrante en el punto 2 y saliente del punto 1, siendo ello así puesto que el producto: $G = m \cdot v$, en cada punto del eje territorial, no varía, mientras que el valor de su "energía económica cinética" (debida a la velocidad de desplazamiento de la masa económica) vendrá dado por la expresión (TORRES, 1970):

$$\mathbf{E_C = (1/2) \cdot m \cdot v^2}$$

, según se explica por el doctorando en anteriores estudios y propuestas suyas sobre el tema[8].

[8] *Vide* el capítulo 10, epígrafe 2: “Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas

Desde luego, puesto que **m** es una magnitud escalar, el vector $\vec{G}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ (cuyas componentes quedarán multiplicadas por **m**), expresándose, normalmente, en € · km./hora. Considerando, ahora, a **m** compuesta por **n** submasas o partículas económicas, tal que, $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, $\forall i \in (1, 2, ..., n)$; veamos que la "energía económica cinética total del sistema económico" vendrá dada por la suma de las energías cinéticas de todas las partículas económicas que integran el sistema, con lo que:

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} (1/2) \cdot m_i \cdot \overrightarrow{v_i^2}$$

La variación experimentada -entre dos instantes de tiempo cualesquiera- de la E_C así definida, será la suma de los trabajos económicos realizados por todas las fuerzas económicas exteriores e interiores que actúan sobre el sistema económico.

3.2. FORMULACIÓN VARIACIONAL DE LAS LEYES QUE REGULAN EL MOVIMIENTO DE LOS FLUJOS ECONÓMICOS TERRITORIALES

3.2.1. Conservación de la energía económica

Siguiendo con nuestro símil dinámico y basándonos en el Cálculo de Variaciones clásico -que tiene por objeto la determinación de curvas extremales en el plano, en el espacio o en variedades de orden superior, y, análogamente, de superficies extremales que hacen máximas o mínimas ciertas integrales extendidas sobre ellas, con determinadas condiciones de contorno- es lógico suponer que el movimiento de un punto material de masa económica **m**, situado en un campo de fuerzas de atracción económica de componentes X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z), viene regido por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de 2º orden:

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot d^2x / dt^2 &= X(x, y, z, t, x', y', z') = m \cdot x'' \\ m \cdot d^2y / dt^2 &= Y(x, y, z, t, x', y', z') = m \cdot y'' \end{aligned}}$$

económicas" del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio*, en *CADUP (Estudios)*, Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

$$\boxed{m \cdot d^2z / dt^2 = Z(x, y, z, t, x', y', z') = m \cdot z''}$$

, cuya integración nos ofrece:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = x(t, C_i) \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = y(t, C_i) \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) = z(t, C_i) \end{array}}$$

, que son las ecuaciones generales del movimiento del punto de masa económica **m**. Las 6 constantes de integración las determinaremos por las condiciones de contorno; por ejemplo, la posición y la velocidad del punto en un instante determinado ($\vec{r}_0$ y $\vec{v}_0$ en el instante t_0), serán:

$$\vec{r}_0 \begin{cases} x_0 = x_0(t_0, C_i) \\ y_0 = y_0(t_0, C_i) \\ z_0 = z_0(t_0, C_i) \end{cases} \qquad \vec{v}_0 \begin{cases} x'_0 = x'_0(t_0, C_i) \\ y'_0 = y'_0(t_0, C_i) \\ z'_0 = z'_0(t_0, C_i) \end{cases}$$

, que es un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, que quedarán así determinadas. Integrando, ahora, el sistema de ecuaciones diferenciales inicial, obtendremos ecuaciones de la forma: $f(x,y,z,t,x',y',z') = C$, que son integrales primeras (PUIG, 1965).

En el caso más general, las componentes X, Y, Z, de la fuerza de atracción económica serían funciones de la posición geográfica o coordenadas UTM del punto (x,y,z), de su velocidad de desplazamiento (x',y',z') en el caso de resistencia del medio, y del tiempo (en el caso de campo variable). Pero en el enfoque del Análisis Territorial, admitiremos simplificativamente que X, Y, Z son funciones sólo de x, y, z que, además, admiten una función potencial económica U(x,y,z), tal que:

$$U_x = X \quad ; \quad U_y = Y \quad ; \quad U_z = Z .$$

En este caso, se obtiene fácilmente una integral primera multiplicando las ecuaciones, respectivamente, por:

$$x' \cdot dt = dx \quad ; \quad y' \cdot dt = dy \quad ; \quad z' \cdot dt = dz \quad ,$$

y sumando queda la expresión:

$$m(x'' \cdot x' + y'' \cdot y' + z'' \cdot z')\, dt = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \quad \text{, o sea:}$$

$$(1/2) \cdot m \cdot d(x'^2 + y'^2 + z'^2) = dU \quad ,$$

ecuación diferencial que integrada ofrece:

$$(1/2) \cdot m \ [(dx / dt)^2 + (dy / dt)^2 + (dz / dt)^2] - U = C \ \text{(constante)}$$

, que se traducirá en el que denominaremos **teorema de la conservación de la energía económica,** abreviadamente expresado por:

$$E_c + E_p = E = \text{cte.} \ ,$$

en que, como ya hemos visto:

$$E_c = 1/2 \cdot m \cdot v^2 = 1/2 \cdot m (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

constituirá la llamada "energía económica cinética", y:

$E_p = - U$, es la "energía económica potencial",

siendo la suma de ambas una constante denominada "energía económica total" del punto o lugar geográfico del territorio en cuestión. El movimiento de los flujos territoriales se verificará, pues, manteniéndose constante dicha energía económica total.

3.2.2. La "acción económica" en el territorio

Ahora bien, el sistema de ecuaciones diferenciales relacionado al comienzo del presente epígrafe se obtiene, asimismo, al tratar de hacer mínima la integral:

$$\int (E_c - E_p) \cdot dt \ ,$$

puesto que al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange[9] (ecuaciones diferenciales de 2º orden) a la expresión:

---

[9] *Euler (1707-1783)*: Matemático suizo, nacido en Basilea. Allí fue discípulo del gran matemático Johan Bernouilli. Pasó la mayor parte de su vida en Berlín y San Petersburgo trabajando incesantemente en la enseñanza y en la investigación, a pesar de haber quedado casi completamente ciego los diecisiete últimos años de su vida. Analista, ante todo, cuidó de substituir cada vez más el simbolismo algebraico a las consideraciones geométricas. El nombre de Leonhard Euler va unido a un gran número de fórmulas y de teorías matemáticas y es sinónimo de forma concreta y elegante, de análisis sagaz y profundo. Dejó, a su muerte, doscientos tratados manuscritos, que publicó sucesivamente la Academia de San Petersburgo.
Lagrange (1736-1813): Descendiente de una familia de la Turena (Francia), nació y estudió en Turín (Italia). Su talento matemático no se reveló hasta los 16 años. Entonces comenzó a estudiar las obras de los antiguos geómetras, y sólo dos años le bastaron para ponerse al corriente de ellas. En 1774 fue nombrado profesor de la Escuela de Artillería de Turín, y poco después inventaba el cálculo de variaciones. Euler fue el primero en comprender su genio matemático, nombrándole miembro de la Academia de Berlín. En 1764 desarrolló la teoría de la *libración de la Luna* y, dos años más tarde, la de los satélites de Júpiter. En 1787 trasladó su residencia a París. Durante la Revolución Francesa de 1789 fue Presidente de la Comisión encargada de establecer el sistema métrico decimal de unidades. Napoleón I le colmó de honores y le nombró profesor de la Escuela Politécnica. Su principal contribución al Álgebra está en su memoria sobre la “resolución de las ecuaciones numéricas”. Su obra más importante es

$$(E_c \ - \ E_p) \ ,$$

en la que E_c sólo depende de las derivadas primeras: x', y', z', y E_p sólo depende de las coordenadas UTM: x, y, z, se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} - \delta E_p / \delta x \ - \ d / dt \ \cdot \ (\delta E_c / \delta x') \ = \ 0 \\ - \delta E_p / \delta y \ - \ d / dt \cdot \ (\delta E_c / \delta y') \ = \ 0 \\ - \delta E_p / \delta z \ - \ d / dt \cdot \ (\delta E_c / \delta z') \ = \ 0 \end{array}}$$

, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} X \ - (d / dt) \cdot m \cdot x' \ = \ 0 \\ Y \ - (d / dt) \cdot m \cdot y' \ = \ 0 \\ Z \ - (d / dt) \cdot m \cdot z' \ = \ 0 \end{array} \right.$$

, que coinciden con el sistema de ecuaciones diferenciales de referencia.

La expresión $(E_c - E_p) \cdot dt$, que tiene las dimensiones del producto de una energía económica por un tiempo (v. gr., €.hora, o bien, €*hora.Km.) se denominará **acción económica elemental**, y su integral será la **acción económica total**. Los movimientos óptimos o deseables de una partícula económica **m** en un campo de fuerzas de atracción económica de componentes:

$$X(x,y,z) \ ; \ Y(x,y,z) \ ; \ Z(x,y,z) \ ,$$

son, pues, *aquellos que hacen mínima la acción económica total entre dos puntos cualesquiera del territorio*, lo que constituye una adaptación al Análisis Territorial de los principios de Hamilton y de Maupertius, que se generalizan en la dinámica de los sistemas y medios continuos a través de la Mecánica Analítica (PUIG, 1965).

Como durante el movimiento es:

$$E_c \ + \ E_p \ = \ E \ = \ \text{cte.}$$

podemos considerar que: $E_c \ - \ E_p \ = \ 2 E_c \ - \ E$

y todo movimiento que haga mínima la integral que representa la "acción económica total", esto es:

$$\int (2 E_c \ - \ E) \cdot dt \ ,$$

y constante la E, hará mínima la integral:

la denominada “Mecánica Analítica”.

$$\int 2\, E_c \cdot dt \;=\; m \int v^2 \cdot dt \quad .$$

Recíprocamente, veamos que los movimientos de los flujos económicos territoriales que minimizan la integral:

$$\int v^2 \cdot dt \;=\; \int v \cdot dl \qquad \text{(puesto que: } v = dl/dt\text{)}$$

haciendo, simultáneamente, E = cte., son movimientos posibles de las masas económicas de bienes y servicios en sus desplazamientos por el territorio.

Al cabo de este breve recorrido sobre la aplicación del Cálculo de Variaciones al estudio del movimiento de los flujos económicos territoriales, conviene recapacitar un poco acerca de sus dificultades en comparación con los problemas de extremos ordinarios (máximos y mínimos absolutos y relativos o locales) de la teoría de las funciones reales. En éstos, se piden los valores numéricos de una o de varias variables independientes que hacen máxima o mínima una determinada función o variable dependiente de ellas, con un campo numérico -en el que hay que buscar estos valores- de propiedades perfectamente conocidas. Por el contrario, *en el cálculo de variaciones se busca la función o funciones que optimizan una determinada* integral, que depende de ellas; las incógnitas son aquí infinitas y el campo funcional en el que se buscan las soluciones resulta de un grado de arbitrariedad tan amplio que se impone restringirlo para hacerlo analíticamente manejable. Se comprende, así mismo, la dificultad de hallar condiciones suficientes que aseguren la existencia de la solución sin un estudio previo del campo funcional en que se opere.

3.3. ANÁLISIS DE LOS PEQUEÑOS MOVIMIENTOS DE LAS MASAS ECONÓMICAS ALREDEDOR DE POSICIONES DE EQUILIBRIO

Consideremos, ahora, para fijar las ideas, un sistema de primer orden de la forma (PUIG, 1965):

$$\boxed{\begin{array}{c} V_x = dx/dt = f(x, y, z) = x' \;\;;\;\; V_y = dy/dt = f(x, y, z) = y' \\[2ex] V_z = dz/dt = f(x, y, z) = z' \end{array}} \qquad (1)$$

en el que la variable tiempo t suponemos que no figura en los segundos miembros de las anteriores ecuaciones. Se comprueba inmediatamente que toda terna de números: α, β, γ, que satisfaga el sistema:

$$\begin{cases} f(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \\ \psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

proporciona soluciones **estacionarias** o constantes del sistema, a saber:

$$x = \alpha \quad ; \quad y = \beta \quad ; \quad z = \gamma \,. \qquad (3)$$

Estos puntos del territorio α, β, γ designan, en consecuencia, posiciones de **equilibrio** de una partícula de la masa económica móvil cuyas ecuaciones de movimiento viene dadas por (1). Con objeto de averiguar si dicho equilibrio es o no estable, estudiemos las soluciones del sistema en un entorno diferencial de dichos puntos. Para ello, pongamos:

$$x = \alpha + \xi \quad ; \quad y = \beta + \eta \quad ; \quad z = \gamma + \zeta$$

donde ξ, η, ζ, van a ser ahora las nuevas variables (supuestas infinitesimales) y el sistema (1) se transformará en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineal en ξ, η, ζ, de coeficientes constantes:

$$\boxed{\begin{aligned} d\xi / dt &= f(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta) = f_\alpha \xi + f_\beta \eta + f_\gamma \zeta = \xi' \\ d\eta / dt &= \varphi(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta) = \varphi_\alpha \xi + \varphi_\beta \eta + \varphi_\gamma \zeta = \eta' \\ d\zeta / dt &= \psi(\alpha + \xi, \beta + \eta, \gamma + \zeta) = \psi_\alpha \xi + \psi_\beta \eta + \psi_\gamma \zeta = \zeta' \end{aligned}}$$

, cuyas soluciones son de la forma: $\Sigma\, a_i \cdot e^{s_i \cdot t}$, donde las s_i son raíces de la ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} f_\alpha - s & f_\beta & f_\gamma \\ \varphi_\alpha & \varphi_\beta - s & \varphi_\gamma \\ \psi_\alpha & \psi_\beta & \psi_\gamma - s \end{vmatrix} = 0$$

Si los coeficientes de esta ecuación cumplen la condición de Hurwitz, la parte real de todas las s_i es negativa, es decir, que x, y, z, tenderán respectivamente a α, β, γ, y este punto o lugar geográfico del territorio o de un eje comunicativo marcará una posición de **equilibrio estable** de la partícula de masa económica de bienes o servicios (FRANQUET, 1990/91).

Obsérvese que del sistema de ecuaciones (1) se desprende el sistema diferencial que define las trayectorias de las partículas económicas, a saber:

$$\frac{dx}{f(x,y,z)} = \frac{dy}{\varphi(x,y,z)} = \frac{dz}{\psi(x,y,z)} = dt$$

Los puntos del territorio α, β, γ, son puntos singulares en la congruencia de tales trayectorias, puesto que anulan los tres denominadores. El sistema expuesto en (4), en definitiva, nos definirá paramétricamente dicha congruencia en las inmediaciones de tales puntos.

Para la consecución de mayores especificaciones respecto del concepto de "equilibrio territorial", más en relación a un territorio considerado en su conjunto que referido exclusivamente a una cierta partícula económica (tal como se define aquí), puede verse el apartado 2 del Anexo 15 de la presente tesis doctoral.

4. LAS VELOCIDADES MEDIAS MÁXIMAS DE CIRCULACIÓN DE LA MASA ECONÓMICA

Prescindiendo, por el momento, de las pérdidas de carga en la ecuación de continuidad económica a lo largo de un eje, a saber:

$$Q = S \cdot v = \text{cte.} \quad ,$$

deducimos que, para conducir, por una vía de comunicación entre dos territorios, un caudal económico determinado Q (€/hora), puede operarse, bien aumentando la capacidad de transporte de dicha vía **S** (con lo que disminuiremos la velocidad media de desplazamiento **v** de dicho caudal), o bien recíprocamente.

También parece, a primera vista, que por simples razones de economía o de coste de las infraestructuras, nos convendría más escoger la segunda opción, o sea, disminuir la capacidad o sección S de la vía de enlace; pero debemos tener en cuenta que, con ello, aumentaríamos peligrosamente el valor de la velocidad media **v** de circulación por encima de los límites deseables establecidos por razones de seguridad e, incluso, de coste unitario del transporte (al aumentar el consumo de carburante de los vehículos, así como el riesgo de sufrir accidentes). De este modo, fijados "a priori" determinados criterios económicos y legales limitativos de dicha velocidad (que quedaría en v'_0 km./h.), la capacidad económica de la vía en estudio quedará prefijada por la expresión:

$$S = Q / v'_0 \ (\text{€/Km.}) \ ,$$

en función del caudal económico a transportar.

En cualquier caso, para proceder a una determinación más exacta de la sección o capacidad económica óptima, habrá que empezar calculando el coste global de la infraestructura proyectada incluyendo la cuantificación económica de su impacto ambiental (de resultar posible hacerlo), el valor de las expropiaciones, ocupaciones temporales de los terrenos y servidumbres de paso por los mismos, sus gastos de mantenimiento y explotación, así como los costes financieros, amortizaciones técnicas y demás, todo ello al objeto de minimizar el conjunto de los gastos anuales; se tratará, en definitiva, de hallar el mínimo de la curva de costes totales en función de la sección económica. Pueden, incluso, emplearse variantes de los métodos clásicos empleados en Hidráulica (TORRES, 1970), como los de Labye, Girette u otros. En este sentido, la fórmula de M. Clément ofrece:

$$Q = p \cdot n_0 \cdot q\,(1 + U\sqrt{1/p \cdot n_0 - 1/n_0}\,)$$

siendo, para nuestro caso:

- Q = caudal económico para el cálculo de un tramo que alimenta $\mathbf{n_0}$, derivaciones de caudal **q**.
- p = probabilidad de demanda de una derivación.
- U = valor de la función de Gauss acumulativa de la distribución teórica de probabilidad normal, para una determinada probabilidad de fallo de servicio (para un 99% se tiene: U = 2'326, y para un 95% se tiene: U = 1'645).

El empleo conjunto de estos métodos permitirá resolver, casi matemáticamente, la optimización de la red en estudio.

Por otra parte, como ya vimos, las pérdidas de carga económica continuas pueden expresarse de la forma (utilizando el símil hidráulico):

$$h_r = J \cdot l = n \cdot Q^2 \cdot l \quad ,$$

mientras que las pérdidas de carga accidentales o coyunturales vendrían dadas por:

$$h_s = n' \cdot Q^2 \cdot k \quad ,$$

siendo k un cierto "coeficiente de resistencia en la singularidad" cuyo valor debería ser determinado empíricamente en cada caso, al igual que los parámetros **n** y **n’**. De este modo, la pérdida total de carga económica en un eje comunicativo, sería:

$$h_t = h_r + h_s = n \cdot Q^2 \cdot l + n' \cdot Q^2 \cdot k = Q^2\,(n \cdot l + n' \cdot k) \quad .$$

Si pretendemos exponer, como ya se ha dicho, la expresión de las pérdidas accidentales h_s en forma de una longitud equivalente l' de eje comunicativo que produzca la misma pérdida de energía económica, se tendrá:

$$h_s = h_r \quad ; \text{ o sea:}$$

$$n' \cdot Q^2 \cdot k = n \cdot Q^2 \cdot l' \text{ , de dónde:}$$

$$l' = n' / n \cdot k$$

5. CAUDAL ECONÓMICO DE DISTRIBUCIÓN UNIFORME

5.1. CASO CONTÍNUO

Hagamos, aquí, el supuesto teórico de la existencia de un eje territorial de comunicaciones OB, de longitud **l** y capacidad económica **S**, con "servicio en ruta" de espaciamiento uniforme y con derivaciones de fracciones del caudal económico inicial idénticas a los diferentes enclaves o municipios por los que transcurre. Si el número de estas derivaciones o salidas es suficientemente grande, se puede efectuar, con gran aproximación, el cálculo de la sección o capacidad económica necesaria del eje suponiendo que se distribuye un caudal uniformemente repartido a lo largo del trayecto, el cual se obtiene sumando todos los caudales de las derivaciones y dividiendo dicha suma por la longitud total o distancia: l = OB. Se tratará, en definitiva, de un caudal económico por unidad de longitud del eje territorial.

En estos casos, puede asimilarse el movimiento de los bienes y servicios circulantes por el eje comunicativo a una sucesión de movimientos uniformes infinitesimales de ley variable con el caudal económico -o con la capacidad económica del eje si ésta no es constante- debido a la proximidad de los cambios y a la pequeña variación del caudal. Si bien sería preciso, para la intachable resolución de este problema, el conocimiento exacto de dicha ley de variación del caudal, podríamos admitir, con buena aproximación, que el servicio en el trayecto se reparte uniformemente en toda la longitud del eje, disminuyendo el caudal económico en una cantidad **q** por unidad de longitud del eje; *es decir, que se gasta o consume un caudal económico* ***q*** *por unidad de longitud del eje.*

Utilizando la siguiente notación (TORRES, 1970):

- Q_o = caudal económico en el origen O.
- q = caudal económico derivado por unidad de longitud del eje.
- Q = caudal económico disponible en un punto genérico A del eje, situado a una distancia del origen: OA = x .

Evidentemente, se verificará la formulación:

$$Q = Q_o - q \cdot x \qquad (1) ,$$

siendo $(q \cdot x)$ el caudal ya distribuido en el trayecto $\overline{OA}$.

Expresamos la pérdida de carga económica continua, en el tramo $\overline{OA}$, mediante la fórmula:

$$z = n \cdot \int_0^x Q^2 \cdot dx = n \cdot \int_0^x (Q_o - q \cdot x)^2 \cdot dx =$$

$$= n \cdot \int_0^x (Q_o^2 - 2 \cdot q \cdot x \cdot Q_o + q^2 \cdot x^2) \cdot dx =$$

$$= n (Q_o^2 \cdot x - q \cdot Q_o \cdot x^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot x^3) =$$

$$= n \cdot [(Q + q \cdot x)^2 \cdot x - q (Q + q \cdot x) \cdot x^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot x^3] =$$

$$= n (Q^2 \cdot x + Q \cdot q \cdot x^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot x^3) \quad (2) ,$$

que es la ecuación de una parábola cúbica o función polinómica de tercer grado (FRANQUET, 1990/91).

Si llamamos Q_e al caudal económico residual o extremal que llega al punto B del territorio, tendremos, según la ecuación anterior:

$$h_r = n (Q_e^2 \cdot l + Q_e \cdot q \cdot l^2 + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^3) \qquad (3)$$

En el caso concreto de que a B ya no llegue ningún caudal económico procedente de O, dado que todo el caudal se derivase uniformemente a lo largo del eje de comunicación, se tendrá (TORRES, 1970):

$$Q_e = 0 \ , \quad \text{y, por tanto:} \ Q_o = q \cdot l \ .$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (3), resultará:

$$h_r = n/3 \cdot q^2 \cdot l^3 = n/3 \cdot (q \cdot l)^2 \cdot l = n/3 \cdot Q_0^2 \cdot l \quad (4)$$

o bien: $$J = h_r / l = n \cdot Q_0^2 / 3$$

expresiones éstas que nos indican que la pérdida de carga económica es la tercera parte de la que se produciría si el caudal económico Q_o inicial recorriera todo el eje comunicativo hasta llegar intacto al punto B.

La ecuación (4) también puede expresarse así:

$$h_r = 1/3 \cdot n \cdot Q_0^2 \cdot l = n \cdot Q'^2 \cdot l \quad \text{, de dónde:}$$

$$Q' = Q_0 / 3^{1/2} = 0'577 \cdot Q_0 \qquad (5)$$

lo que significa que la pérdida de carga económica es equivalente a la que se produciría si por el eje comunicativo circulara un caudal económico constante e igual a:

$Q_0 / 3^{1/2}$, o sea, apenas un 58% del caudal inicial Q_o .

Estudiaremos, a continuación, el procedimiento que se utilizará para determinar la capacidad económica conveniente del eje, al objeto de que pueda distribuir el caudal económico uniformemente repartido en la forma anteriormente indicada.

La ecuación (3) equivale a:

$$h_r = n\,(Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^2) \cdot l = n \cdot Q_l^2 \cdot l = J_l \cdot l \;;$$

introduciendo, ahora, un caudal económico ficticio Q_1 que, al circular por el eje de comunicación de manera constante, produzca una pérdida de carga **h**, se tendrá:

$$Q_l^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^2 \quad .$$

Pero si tenemos en cuenta que:

$$(Q_e + 1/2 \cdot q \cdot l)^2 = Q_e^2 + Q_e \cdot q \cdot l + ¼ \cdot q^2 \cdot l^2 < Q_l^2$$

$$(Q_e + 1/3^{½} \cdot q \cdot l)^2 = Q_e^2 + 2/3^{1/2} \cdot Q_e \cdot q \cdot l + 1/3 \cdot q^2 \cdot l^2 > Q_l^2$$

resultando el valor del caudal ficticio Q_1 acotado entre los límites:

$$Q_e + (1/2) \cdot q \cdot l < Q_1 < Q_e + (1/\,3^{½})\, q \cdot l \quad \text{, o lo que es lo mismo:}$$

$$Q_e + 0'5 \cdot q \cdot l < Q_1 < Q_e + 0'577 \cdot q \cdot l$$

luego puede tomarse con suficiente aproximación, como valor de Q_1, para el cálculo de la capacidad económica del eje comunicativo:

$$Q_1 = Q_e + 0'55 \cdot q \cdot l + Q''$$

siendo Q'' un caudal económico fijo para imprevistos, circunstancias excepcionales, etc.

Conociendo ya: Q_1 y $J = h_r / l$, se halla fácilmente el valor de la S objeto del problema.

Si al punto B no llegara ningún caudal económico (TORRES, 1970), deberá tomarse como valor de Q_1, según hemos demostrado:

$$Q_1 = 0'577 \cdot q \cdot l \approx 58\% \text{ de } Q_0 .$$

5.2. CASO DISCRETO

5.2.1. Concepción general

Por otra parte, en un caso discreto y no continuo de servicio o distribución del caudal económico, la pérdida total de carga económica que se producirá en una arteria de comunicación entre dos territorios que presente $\mathbf{n_o}$ derivaciones con caudal económico similar a intervalos regulares, vendrá dada por una expresión del tipo:

$$H = J \cdot l \cdot F$$

siendo $F = f(n_o)$ un coeficiente experimental de reducción por salidas o servicios, a estimar en cada caso. Por último, el cálculo de un tramo de eje comunicativo de estas características, pero que se continúe en otro eje de diferente capacidad económica, puede efectuarse prolongando ficticiamente el tramo a calcular con otro tramo imaginario de similares características, que tenga también derivaciones análogas a intervalos regulares hasta agotar completamente el caudal económico. Se calculan las pérdidas de carga económica conjuntas de ambas tramos: el real y el ficticio. A continuación, se calculan las pérdidas de carga del tramo ficticio; se restan ambas y el resultado final ofrece las pérdidas buscadas.

En cualquier caso, el cálculo de la pérdida de carga económica en un eje comunicativo territorial, con distribución discreta del caudal económico desde un territorio inicial T (origen) a otro final T' (destino último), de cuantía constante por derivación o salida y con salidas supuestamente equidistantes, para el caso en que la primera derivación estuviera a una distancia l_o del territorio T (o del centro de gravedad de sus masas económicas) igual al espaciamiento entre las derivaciones l, presenta un grado de dificultad no excesivo (FRANQUET, 1990/91).

5.2.2. Determinación del coeficiente reductor y aproximación de funciones

Como ya sabemos, la expresión que ofrece las pérdidas de carga económica totales **h** en este tipo de distribución, con un eje territorial de sección o capacidad económica constante y longitud total L, será del tipo:

$$h = J \cdot L \cdot F = n_o \cdot Q^m \cdot L \cdot F \text{ , siendo:}$$

n_o = número de derivaciones o salidas.
$F = f(n_o,m)$ coeficiente experimental de reducción por salidas.
m = coeficiente empírico en función de la sección económica y características infraestructurales del eje comunicativo, utilizado en la fórmula empleada para el cálculo de las pérdidas de carga económica (anteriormente, hemos supuesto: m = 2'00).
L = longitud total del eje comunicativo.
Q = caudal económico que fluye inicialmente desde el territorio T.

Matemáticamente, no resulta difícil demostrar que el valor de F responderá a la expresión:

$$F = 1 / n_0^{1+m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m = f(n_0) \qquad (6) \ ,$$

para cuyo cálculo puede emplearse la función aproximada:

$$F = \frac{1}{1+m} + \frac{1}{2 \cdot n_0} + \frac{\sqrt{m-1}}{6 \cdot n_0^2} = g(n_0) \qquad (7)$$

En definitiva, el problema que se plantea (FRANQUET, 2003) consiste en obtener la aproximación de la función g(x) a la función f(x) con el mínimo error posible, en un entorno del punto de abscisa: x = n0, o dicho de otro modo, que dada la función real de variable real: F = f(x), definida en x = n0, se pretende encontrar otra función real de variable real: F = g(x) lo más "sencilla" posible y que se "aproximase" suficientemente a f(x) en un entorno de radio suficientemente pequeño del punto considerado, hasta el punto que en x = n0, también se cumple que: f(n0) = g(n0). En este caso, el error que se comete en un entorno del punto x = n0, cuando en vez de f(x) se toma la función g(x), vendrá dado por:

$$E = \left| f(n0 + dx) - g(n0 + dx) \right|$$

Por otra parte, la *medida de la aproximación* de g(x) a f(x) es un cierto número **r**, tal que el límite siguiente existe, es finito y distinto de 0:

$$\lim_{dx\to 0}\frac{E}{dx^r}=\lim_{dx\to 0}\frac{\left|f(n_0+dx)-g(n_0+dx)\right|}{dx^r}$$

De alguna manera las funciones que llamamos “elementales” como sen x, cos x, log x, e^x, ..., etc., no resultan, en realidad, nada elementales; por ejemplo, si deseamos calcular sen x, encontramos que, salvo para unos pocos valores: x = 0, x = $\pi/4$, x = $\pi/2$, ..., etc., el cálculo directo de sen x es imposible. No ocurre así con las funciones polinómicas:

$$f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$

donde las operaciones a realizar son simplemente aritméticas. Por ello, tiene gran interés obtener fórmulas que permitan **aproximar** las funciones irracionales o trascendentes mediante polinomios, con el fin de calcular de manera aproximada los valores de aquéllas. Como es natural, en toda aproximación es preciso obtener estimaciones fidedignas del error cometido. Obviamente, no podemos esperar un conocimiento exacto del error, puesto que ello supondría también un conocimiento preciso de la magnitud que aproximamos y haría innecesaria la aproximación. Lo que deseamos, en cualquier caso, es **acotar**, de manera que al realizar la aproximación tengamos la seguridad de que el error cometido no supera cierta cantidad.

Recordemos que en el Análisis matemático, el concepto de diferencial supone una aproximación lineal de la función en un entorno del punto en consideración. Diríamos que si f(x) es una función derivable en el punto n0, la función afín g(x) es tal que:

$$g(x) = f(n_0) + f'(n_0) \cdot (x - n_0)$$

y aproxima los valores de f(x) en un entorno de n_0. Puede verse gráficamente así:

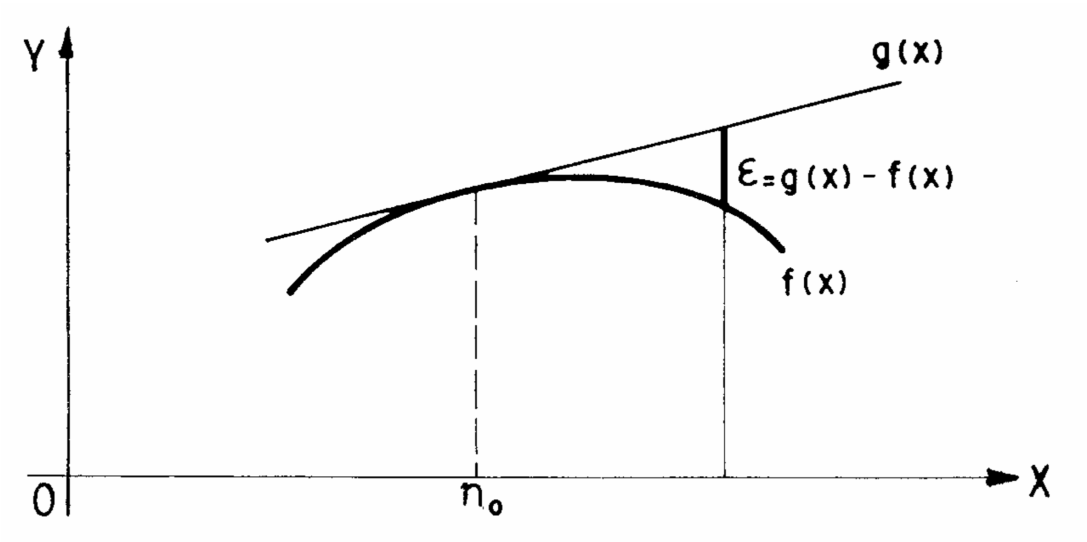


Fig. A-11.1. Aproximación entre las funciones f(x) y g(x) en el punto: $x = n_o$

No obstante, el sentido de la palabra “aproxima”, en la afirmación anterior, resulta, a nuestro juicio, excesivamente vago. Podemos precisarlo más si decimos que:

$$\lim_{x \to n_0} [g(x) - f(x)] = 0 \quad (7')$$

pero, aunque esa igualdad sugiere que f(x) y su aproximación g(x) son más y más parecidos cuánto más próximo está x de n_0, no nos proporciona una idea precisa de la magnitud del error cometido al sustituir f(x) por g(x) para un valor particular de **x**.

Siguiendo este camino podemos afirmar, aún más, que:

$$\lim_{x \to n_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - n_0} = \lim_{x \to n_0} \left(\frac{f(x) - f(n_0)}{x - n_0} - f'(n_0) \right) = f'(n_0) - f'(n_0) = 0 \quad (7'')$$

Esta afirmación contenida en la expresión (7”), aunque sigue siendo imprecisa, resulta más fuerte que la anterior (7’), y nos garantiza, no solamente que el error $|g(x)\text{-}f(x)|$ se hace más y más pequeño al acercarnos a n_0, sino también que esa cantidad comparada con $(x\text{-}n_0)$, que es una magnitud que decrece hacia cero, tiende también a cero; esto lo resumiremos diciendo que $|g(x)\text{-}f(x)|$ tiende a cero más rápidamente que $(x\text{-}n_0)$. Con símbolos, las aseveraciones anteriores se expresan escribiendo:

$$g(x) - f(x) = o(x - n_0)$$

que se lee g(x)-f(x) es un infinitésimo (una cantidad infinitamente pequeña) comparado con $(x\text{-}n_0)$. Esta notación, que se corresponde con la “o pequeña” de Landau[10] resulta muy útil en el cálculo de límites y para describir términos cuya expresión exacta puede ser complicada, pero cuyo comportamiento en el límite nos es conocido. Para precisarla mejor, damos la definición siguiente (FRANQUET, 2003):

"Decimos que la función h(x) es o((x-a)^n), h(x) = ((x-a)^n), si se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{(x - a)^n} = 0 \text{"}$$

Así pues, la notación infinitesimal: o((x-a)n) nos permite ofrecer una información cualitativa más que cuantitativa sobre el error cometido en la aproximación funcional.

Por otra parte, podemos esperar que si una función posee en un punto varias derivadas, sea posible aproximar los valores de la función en un entorno de ese punto por funciones, más que lineales, polinómicas.

En algunos puntos de la recta real, la aproximación de ambas funciones puede ser total e incluso coincidente el valor que toman f(n_0) y g(n_0). Y así, veamos cómo en un ejemplo práctico cualquiera, si hubiéramos supuesto, v. gr., un exponente de la velocidad de m = 2'00 y n_0 = 54 salidas o derivaciones de una autopista o autovía), habríamos obtenido un coeficiente teórico de reducción por salidas de:

$$F = f(n_0) = \frac{(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6n_0^2} = \frac{2n_0^2+3n_0+1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{6n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 54} + \frac{1}{6\cdot 54^2} = 0'343$$

y, también, la aplicación estricta de la fórmula aproximada conduciría a la obtención exacta del mismo resultado, puesto que:

$$F = g(n_0) = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2\cdot n_0} + \frac{\sqrt{2-1}}{6\cdot n_0^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 54} + \frac{1}{6\cdot 54^2} = 0'343$$

con lo que el error cometido en la aproximación sería nulo (E = 0).

Recordemos, por último, que al principio del presente epígrafe de nuestro estudio se decía que se pretendía hallar una cierta función g(x) "lo más

[10] Dada una cierta función f(x), con la notación o(f), se designa cualquier función φ(x) tal que se cumpla que: $\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = 0$. La condición anterior puede sustituirse por la siguiente: ∀ε >0, corresponde un entorno: ε*(a) donde: $|\varphi(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$. Una ecuación de la forma: φ = o(f) equivale, pues, a la relación anterior.

sencilla" posible y que se aproximara "lo suficiente" a la función problema. Anteriormente, ya hemos indicado cómo medir el grado de aproximación en cuestión; ahora bien, al objeto de no perdernos en subjetivismos, ¿qué debemos entender por la expresión "lo más sencilla posible"?.

En general, tomaremos como tales funciones las polinómicas o parabólicas (a partir del 2º grado), esto es, las de configuración analítica del tipo:

$$g(x) = a + b\cdot x + c\cdot x^2 + d\cdot x^3 + \ldots$$

cuyo grado nos vendrá determinado por la aproximación que deseemos obtener y donde las constantes (a, b, c, d, ...) se hallarán con la condición de que la nueva función g(x) se aproxime lo más posible a la f(x).

La aproximación más sencilla, o sea, la de primer grado, es la lineal ofrecida por la ecuación de la recta tangente a la curva dada f(x) en el punto de abscisa $x = n_0$. Las aproximaciones de orden superior podrán obtenerse por aplicación del conocido teorema de Taylor para el desarrollo de la función f(x) en dicho punto. En cualquier caso, el problema eficazmente resuelto por Christiansen alcanzó una mayor complejidad, sin que, por razones desconocidas por quien suscribe, dicho autor quisiera publicitar, en su día, la deducción matemática de su famosa fórmula, cuestión ésta que constituye, precisamente, el objeto fundamental del presente capítulo de nuestro estudio (FRANQUET, 1990/91).

En el caso concreto en que: m = 2'00, tal como hemos supuesto anteriormente utilizando el símil hidráulico correspondiente a la aplicación de la fórmula simplificada de Darcy para el cálculo de tuberías, y teniendo presente el valor de la suma de la serie numérica en cuestión[11] resultará en la expresión (6):

$$F = \frac{1}{n_0^{1+2}}\cdot\frac{n_0(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6} = \frac{(n_0+1)\cdot(2n_0+1)}{6\cdot n_0^2} =$$

$$= \frac{2n_0^2 + 3n_0 + 1}{6\cdot n_0^2} = 1/3 + 1/2\,n_0 + 1/6\,n_0^2$$

, que, como puede comprobarse, coincide exactamente con lo que resulta de la expresión (7), sustituyendo el valor: m = 2'00. De hecho, dicha expresión

[11] *Vide* el libro del autor "Cinco temas de hidrología e hidráulica", cap. II, pp. 168 y ss. Citado en la bibliografía.

aproximada fue dada por Christiansen en 1942 para el cálculo de las tuberías a presión con distribución discreta, caudal constante por derivación y salidas equidistantes, si bien su justificación teórica ha sido omitida en la bibliografía especializada existente al respecto.

Pues bien, vamos a tratar, aquí, de explicar o justificar matemáticamente la mencionada aproximación de Christiansen, basándonos, inicialmente, en el concepto de suma integral.

En efecto, veamos que la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n_0^m$$

representa la suma o adición de las áreas de los rectángulos yuxtapuestos de alturas: 1^m , 2^m , 3^m , 4^m , 5^m , ..., y de base igual a la unidad.

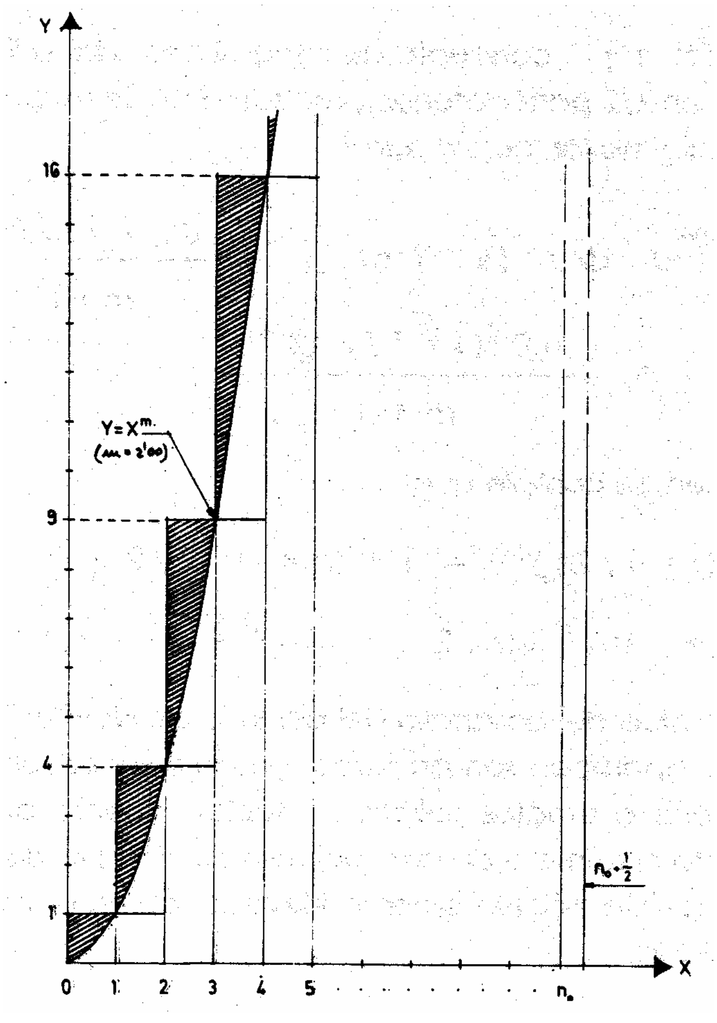


Fig. A-11.2. Representación gráfica de la función: $y = x^m$

Como puede verse en la representación gráfica adjunta (realizada, v. gr., para $m = 2'00$), la curva o función potencial $y = x^m$, encierra, entre ella y el eje de abscisas OX, un área que difiere de la buscada en aproximadamente la mitad del área del rectángulo mayor, puesto que, efectivamente, la zona representada en la figura anterior por la superficie rayada , puede considerarse equivalente a la mitad de la superficie de dicho rectángulo.

Desde luego, se obtendrá una buena aproximación a dicha determinación tomando para la expresión:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m \quad ,$$

el área existente debajo de la curva y sobre el eje de abscisas, pero entre los límites u ordenadas extremas:

$$x = 0 \qquad y \qquad x = n_o + 1/2 \quad ,$$

por aplicación del propio concepto de integral definida. El límite superior se incrementará en 1/2 para obtener, precisamente, la mitad de la superficie del rectángulo mayor, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m \int_0^{n_0+1/2} x^m \cdot dx = [\, x^{m+1} / m+1 \,]_0^{n_0+1/2} = \frac{(n_0 + 1/2)^{m+1}}{m+1} =$$

$$= \frac{n_0^{m+1}(1 + 1/2n_0)^{m+1}}{m+1} \quad .$$

Ahora bien, se cumple que:

$$(1 + 1/2n_o)^{m+1} = 1 + (m+1) \cdot 1/2\, n_o +$$

$$+ (m+1) \cdot m/2 \cdot 1/4\, n_o^2 + \ldots \quad ,$$

por la fórmula clásica del desarrollo del binomio de Newton-Tartaglia. Los términos que no aparecen son de tercer grado y sucesivos en $1/n_o$ y se pueden despreciar a efectos prácticos, habida cuenta de su bajísima magnitud cuando el número de derivaciones o salidas $\mathbf{n_o}$ del eje comunicativo territorial resulta suficientemente elevado, como acostumbra a suceder en la realidad (FRANQUET, 2003).

Así pues, el coeficiente experimental de reducción por salidas, anteriormente definido, tomará el valor:

$$F = 1 / n_o^{1+m} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} i^m =$$

$$= \frac{n_0^{m+1}\left[(1 + (m+1)\cdot 1/2 n_0 + (m+1)\cdot m / 2 \cdot 1/4 n_0^2\right]}{n_0^{m+1}\cdot(m+1)} =$$

$$= 1 / m{+}1 + 1 / 2\, n_o + m / 8\, n_o^2 \;.$$

Con ello, ya hemos obtenido los dos primeros términos de la fórmula aproximada cuya deducción es objeto de nuestro estudio, a saber:

$$1 / m{+}1 + 1 / 2\, n_o \;.$$

Ahora bien, el tercero de ellos: $m/8n_o^2$, no coincide con el $(m\text{-}1)^{1/2}/6n_o^2$, que encontramos en dicha fórmula. Sin duda, ello se debe a que este tercer término ha sido cambiado o alterado expresamente (lo cual resultaría lícito puesto que, en definitiva, nos hallamos ante un proceso de aproximación) con el único objetivo de que la fórmula sea válida para los casos particulares: m = 1, 2, 3.

Veamos, a continuación, lo que sucede con cada uno de ellos:

Para m = 1, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i = n_o(n_o + 1) / 2 = 1 + 2 + 3 + ... + n_o \;,$$

puesto que es la suma de los n_o primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad. Así:

$$F = n_o(n_o + 1) / 2\, n_o^2 = n_o{+}1 / 2\, n_o = 1 / 2 + 1 / 2\, n_o \;.$$

A este nivel, hay que cambiar el término $m/8n_o^2$ por otro como, por ejemplo, $m\text{-}1/8n_o^2$, para que se obtenga 0 cuando m = 1.

Para m = 2, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^2 = [n_o\,(n_o + 1) \cdot (2\, n_o + 1)] / 6 = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n_o^2 \quad ;$$

en efecto, ello puede demostrarse por inducción, dado que la igualdad anterior se cumple, evidentemente, para $n_o = 1$, puesto que:

$$[1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)] / 6 = 1 \ .$$

Supongámosla también cierta para n_o. Entonces, se tendrá:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n_o^2 = n_o (n_o + 1) \cdot (2n_o + 1) / 6 \ ,$$

y sumando $(n_o + 1)^2$ a los dos miembros, resultará:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n_o^2 + (n_o + 1)^2 = n_o(n_o + 1)(2n_o + 1) / 6 + (n_o + 1)^2 =$$

$$= (n_o + 1) \ [n_o(2n_o + 1) + 6(n_o + 1)] / 6 =$$

$$= (n_o + 1) \ [n_o(2n_o + 3) + 4n_o + 6] / 6 =$$

$$= (n_o + 1) [n_o (2n_o + 3) + 2(2n_o + 3)] / 6 =$$

$$= (n_o + 1)(n_o + 2)(2n_o + 3) / 6 \ ,$$

luego la igualdad resulta cierta para $(n_o + 1)$, tal como pretendíamos demostrar. Así pues, el coeficiente de reducción por salidas adoptará el valor:

$$F = [(n_o + 1) \cdot (2n_o + 1)] / 6 n_o^2 = (2 n_o^2 + 3 n_o + 1) / 6 n_o^2 =$$

$$= 1 / 3 + 1 / 2 n_o + 1 / 6 n_o^2 \ .$$

A este nivel, habrá que cambiar el término m-$1/8n_o^2$ por otro tal como m-$1/6 \ n_o^2$, para que adopte el valor 0 cuando $m = 1$, y valga $1/6n_o^2$, cuando $m = 2$.

Para m = 3, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^3 = n_o^2 (n_o + 1)^2 / 4 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n_o^3 \ ;$$

en efecto, al igual que en el caso anterior, veamos que esta identidad cúmplese para $n_o = 1$. Siguiendo el mismo método de inducción, supongámosla también cierta para n_o. Entonces:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n_o^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n_o)^2 \ ,$$

y sumando $(n_o + 1)^3$ a los dos primeros miembros de esta igualdad, resulta:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n_o^3 + (n_o + 1)^3 =$$

$$(1 + 2 + 3 + ... + n_o)^2 + (n_o + 1) \cdot (n_o + 1)^2 =$$

$$(1 + 2 + 3 + ... + n_o)^2 + n_o (n_o + 1)^2 + (n_o + 1)^2 .$$

Pero, según hemos visto en el primer caso (para m = 1), se cumple que:

$$n_o (n_o + 1) = 2 (1 + 2 + 3 + ... + n_o) \quad ,$$

luego también:

$$n_o (n_o + 1)^2 = 2 (1 + 2 + 3 + ... + n_o) \cdot (n_o + 1) \quad \text{, y, por lo tanto:}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n_o^3 + (n_o + 1)^3 =$$

$$= (1 + 2 + 3 + ... + n_o)^2 + 2 (1 + 2 + 3 + ... + n_o) \cdot (n_o + 1) + (n_o + 1)^2 =$$

$$= [\ 1 + 2 + 3 + ... + n_o + (n_o + 1)\ ]^2 \quad ,$$

lo que prueba que la igualdad es cierta para (n_o + 1), tal como pretendíamos demostrar. Luego el coeficiente reductor de las pérdidas de carga económica, adoptará el valor:

$$F = 1/n_o^4 \cdot [n_o^2 (n_o + 1)^2]/4 = (n_o^4 + 2n_o^3 + n_o^2)/4\ n_o^4 = 1/4 + 1/2n_o + 1/4\ n_o^2$$

A este nivel, hay que cambiar el término (m-1)/6n_o^2 por otro que siga valiendo 0 para m = 1, que valga 1/6n_o^2 para m = 2 y que valga 1/4n_o^2 para m = 3. En este orden de ideas, veamos que resulta útil su substitución por el término $(m-1)^{1/2}$ /6n_o^2 , pues dicha expresión vale 0 para m = 1, vale 1/6n_o^2 para m = 2, y, para m = 3 no vale 1/4n_o^2 en sentido estricto, pero sí toma un valor próximo que es: $2^{½}$ / 6 n_o^2, y $2^{½}$ /6 = 0'2357022 es aproximadamente igual a: 1/4 = 0'2500000 (concretamente, el primer valor es un 94'28% del segundo), lo que satisface, de hecho, nuestras exigencias prácticas (FRANQUET, 2003).

Siendo la fórmula así obtenida válida para los valores del exponente m = 1, m = 2, m = 3, o sea: m ∈ (1, 2, 3), resultará también válida para los números reales no enteros del tipo: m ∈ (1, 4), esto es: 1'..., 2'..., 3'..., y también, aunque con menor grado de aproximación, para los valores supuestos: 4'..., 5'..., etc., que pudiera adoptar el coeficiente utilizado en la fórmula empleada en el cálculo de las pérdidas de carga económica del eje comunicativo, según los casos.

Así pues resultará, en definitiva, un coeficiente reductor de la pérdida de carga económica de:

$$\boxed{F = 1 / (1+m) + 1 / 2n_o + (m-1)^{½} / 6n_o^2 \quad \text{c. s. q. d.}}$$

Dicha fórmula resultará válida para el caso concreto de que la primera salida esté del comienzo del eje comunicativo territorial a una distancia $\mathbf{l_o}$ igual a **l** (r = 1).

Es obvio, por otra parte, que cuando el número de derivaciones o salidas crece indefinidamente (el caudal económico se reparte a lo largo de todo el eje comunicativo), la expresión anterior se convertirá en:

$$\lim_{n_o \to \infty} F = 1 / (1+m) \quad ,$$

que constituye, en estas circunstancias, el valor al que tiende el coeficiente experimental de reducción que nos ocupa.

5.2.3. Expresión generalizada del coeficiente reductor

Hace falta, por último, efectuar alguna otra consideración. En el caso particular de que $l_o = l/2$ (primera salida de masa económica a una distancia de T igual a la mitad del espaciamiento existente entre las restantes salidas del eje comunicativo), la expresión (6) tomará la configuración siguiente:

$$F = 1 / n_o^m \cdot (n_o - 1/2) \cdot (n_o^m / 2 + \sum_{i=1}^{n_0} i^m) \quad ,$$

que, como ya se ha dicho, se cumplirá exclusivamente para la relación:

$$r = l_o / l = 1 / 2 \quad .$$

Sea, ahora, el caso general de un eje comunicativo de longitud total **L**, con servicio en ruta, provisto de $\mathbf{n_o}$ derivaciones de caudal constante **q,** espaciamiento entre salidas **l** y hallándose la 1ª derivación a una distancia $\mathbf{l_o}$ del territorio origen T. Así:

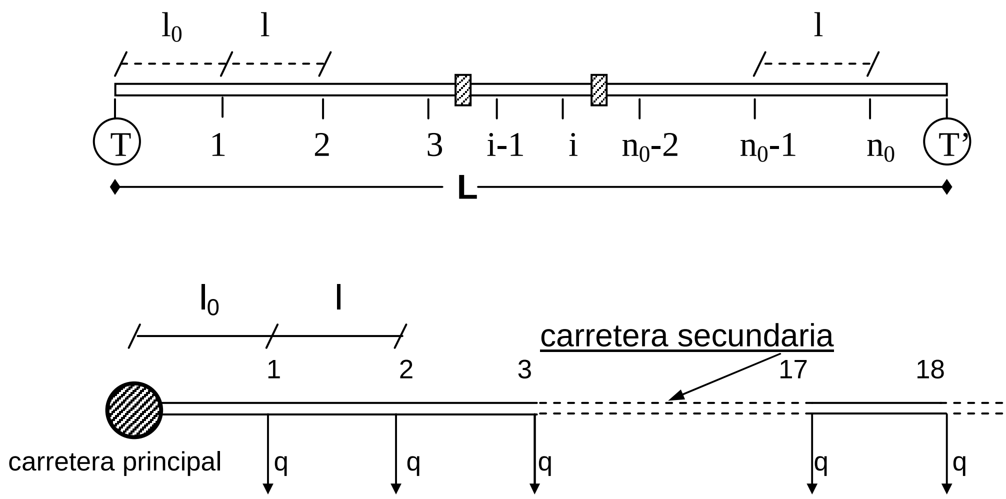


Fig. A-11.3. Eje comunicativo con servicio en ruta y derivaciones equidistantes de caudal económico constante **q**.

que se cumplirá $\forall$ I / $l_1 = l_2 = ... = l_i = l$.

Pues bien, el caudal económico de salida de T, que se agota en T', será:

$$Q = n_o \cdot q \quad , \quad (8)$$

y la longitud total del eje territorial, teniendo en cuenta que:

$$l_o = r \cdot l \quad \text{, es:}$$

$$L = l_o + (n_o - 1) \cdot l = (r + n_o - 1) \cdot l \quad (9)$$

Las pérdidas continuas de carga económica en el tramo genérico **i** del eje, comprendido entre las derivaciones **i-1** e **i**, son:

$$h_i = n \cdot l \cdot Q_i^m$$

y puesto que el caudal económico circulante por el tramo **i** es:

$$Q_i = (n_o - i + 1) \cdot q \quad ,$$

las pérdidas de carga económica en el tramo **i** podrán expresarse también como:

$$h_i = n \cdot l \cdot (n_o - i + 1)^m \cdot q^m \quad .$$

De este modo, las pérdidas de carga económica continuas en todo el eje comunicativo, serán:

$$h = \sum_{i=1}^{n_0} h_i = n \cdot q^m \sum_{i=1}^{n_0} l_i(n_o - i + 1)^m = n \cdot q^m \left[l_o \cdot n_o^m + \sum_{i=2}^{n_0} (n_o - i + 1)^m \right] \;;$$

y como, a la vez, se cumple que:

$$\sum_{i=2}^{n_0} (n_o - i + 1)^m = \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m \quad ,$$

quedará la siguiente expresión para las pérdidas de carga económica:

$$h = n \cdot q^m \cdot l(r \cdot n_o^m + \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m) = n \cdot Q^m \cdot L \cdot F$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las relaciones (8) y (9), se obtiene:

$$q^m \cdot l\,(r \cdot n_o^m + \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m) = n_o^m \cdot q^m \cdot (r + n_o - 1) \cdot l \cdot F \quad \text{; de dónde:}$$

$$r + 1 / n_o^m \cdot \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m = (r + n_o - 1) \cdot F \quad ,$$

con lo que despejando el coeficiente de reducción F (que representaremos por F_r, para cualquier valor que pueda adoptar la relación **r**), se tiene:

$$\boxed{F_r = \frac{r + 1 / n_0^m \cdot \sum_{i=1}^{n_0 - 1} i^m}{r + n_0 - 1}} \qquad (10) \quad ,$$

que constituye la expresión generalizada del coeficiente de reducción por salidas, para cualesquiera valores de los parámetros **r, n_o** y **m.**

A continuación, se han tabulado expresamente los valores de F_1(r = 1) y de $F_{1/2}$ (r = 1/2), para diferentes valores de **n_o** y de **m**, a saber:

n_0	m = 1,75	m = 1,80	m = 1,85	m = 1,90	m = 2,00
1	1, 000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	0,532	0,525	0,518	0,512	0,500
3	0,455	0,448	0,441	0,434	0,422
4	0,426	0,419	0,412	0,405	0,393
5	0.410	0,403	0,397	0,390	0,378
6	0,401	0,394	0,387	0,381	0,369
7	0,395	0,388	0,381	0,375	0,363
8	0,390	0,383	0,377	0,370	0,358
9	0.387	0,380	0,374	0,367	0,355
10	0,384	0,378	0,371	0,365	0,353
11	0,382	0,375	0,369	0,363	0,351
12	0.380	0,374	0,367	0,361	0,349
13	0.379	0,372	0,366	0,360	0,348
14	0,378	0,371	0,365	0,358	0,347
15	0,377	0,370	0,364	0,357	0,346
16	0,376	0,369	0,363	0,357	0,345
17	0,375	0,368	0,362	0,356	0,344
18	0,374	0,368	0.361	0,355	0,343
19	0,374	0,367	0,361	0,355	0,343
20	0.373	0,367	0,360	0,354	0,342
22	0.372	0,366	0.359	0,353	0,341
24	0.372	0,365	0,359	0,352	0,341
26	0.371	0,364	0.358	0,351	0.340
28	0.370	0,364	0,357	0,351	0,340
30	0,370	0,363	0,357	0,350	0.339
35	0.369	0,362	0,356	0,350	0,338
40	0.368	0,362	0,355	0,349	0,338
50	0.367	0,361	0.354	0,348	0,337
100	0.365	0,359	0,353	0.347	0,335
200	0.365	0,358	0.352	0,346	0.334
∞	0,364	0,357	0,351	0,345	0,333

Tabla A-11.1. Coeficiente de reducción F (r = 1/2)

A continuación, puede verse que cuando r = 1 se producen ligeras variantes en relación a la tabla anterior. Así:

n_0	m = 1.00	m = 1.75	m = 1.80	m = 1.85	m = 1.90	m = 2.00
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	0.750	0.650	0.644	0.639	0.634	0.625
3	0.667	0.546	0.540	0.535	0.528	0.518
4	0.625	0.497	0.491	0.486	0.480	0.469
5	0.600	0.469	0.463	0.457	0.451	0.440
6	0.583	0.451	0.445	0.435	0.433	0.421
7	0.571	0.438	0.432	0.425	0.419	0.408
8	0.563	0.428	0.422	0.415	0.410	0.398
9	0.556	0.421	0.414	0.409	0.402	0.391
10	0.550	0.415	0.409	0.402	0.396	0.385
11	0.545	0.410	0.404	0.397	0.392	0.380
12	0.542	0.406	0.400	0.394	0.388	0.376
13	0.538	0.403	0.396	0.391	0.384	0.373
14	0.536	0.400	0.394	0.387	0.381	0.370
15	0.533	0.397	0.391	0.384	0.379	0.367
16	0.531	0.395	0.389	0.382	0.377	0.365
17	0.529	0.393	0.387	0.380	0.375	0.363
18	0.528	0.392	0.385	0.379	0.373	0.361
19	0.526	0.390	0.384	0.377	0.372	0.360
20	0.525	0.389	0.382	0.376	0.370	0.359
22	0.523	0.387	0.380	0.374	0.368	0.357
24	0.521	0.385	0.378	0.372	0.366	0.355
26	0.519	0.383	0.376	0.370	0.364	0.353
28	0.518	0.382	0.375	0.369	0.363	0.351
30	0.517	0.380	0.374	0.368	0.362	0.350
32	0.516	0.379	0.373	0.367	0.361	0.349
35	0.514	0.378	0.371	0.365	0.359	0.347
40	0.513	0.376	0.370	0.364	0.357	0.345
50	0.510	0.374	0.367	0.361	0.355	0.343
60	0.508	0.372	0.366	0.359	0.353	0.342
80	0.506	0.370	0.363	0.357	0.351	0.340
100	0.505	0.369	0.362	0.356	0.350	0.338
150	0.503	0.367	0.360	0.354	0.348	0.337
300	0.502	0.365	0.359	0.353	0.346	0.335
∞	0.500	0.364	0.357	0.351	0.345	0.333

Tabla A-11.2. Coeficiente de reducción F (r = 1)

No obstante, dado el infinito número de valores posibles de **r**, resulta más práctico que tabular la ecuación anterior (10) basarse en los correspondientes valores para r = 1 para el cálculo del resto de los valores de F. En efecto, puesto que se cumple la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = \sum_{i=1}^{n_0} i^m - n_0^m \quad ,$$

y además de la ecuación (6) se deduce que:

$$\sum_{i=1}^{n_0} i^m = F \cdot n_0^{1+m} \quad ,$$

también deberá satisfacerse la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n_0-1} i^m = F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m \quad ,$$

que introducida en la expresión (10), la transforma en:

$$F_r = [r + 1 / n_0^m \cdot (F \cdot n_0^{1+m} - n_0^m)] /(r + n_0 - 1) = (r + n_0 \cdot F - 1) / (r + n_0 - 1) \quad ,$$

que permite la obtención del valor de F_r para cualquier valor de **r**, en función del correspondiente a F_1 (r = 1), para los mismos valores de los restantes parámetros $\mathbf{n_o}$ y **m**. Obviamente, para n_o = 1, también F_r = 1'00, con independencia de los valores de la relación: $r = l_o/l$.

Finalmente, hay que hacer notar que, al ser posible en la práctica del Análisis Territorial cualquier valor del parámetro **r**, este coeficiente generalizado permite el cálculo directo de las pérdidas de carga económica en un eje comunicativo de característica única, formado por un tramo inicial de cualquier longitud en régimen permanente y uniforme o estacionario y de un tramo final con distribución discreta del caudal económico y servicio en ruta.

EJEMPLO: Se trata de un eje comunicativo (autopista o autovía) con 22 salidas de la masa económica de bienes y/o servicios a otros tantos núcleos urbanos e industriales, espaciadas a un promedio de 8'5 km., estando la primera salida a 3'6 km. del centro de masas del territorio origen T.

Admitiendo, como venimos haciendo, que: m = 2'00, de la ecuación (7) resulta:

$$F = 1 / 3 + 1 / 44 + 1 / 6 \cdot 22^2 = 0'3564 \approx 0'357$$

como también puede comprobarse en la tabla correspondiente para r = 1.

En este caso, $r = l_o / l = 3'6 / 8'5 = 0'42353$, con lo que:

$$\mathbf{F_r} = (0'42353 + 22 \cdot 0'357 - 1) / (0'42353 + 22 - 1) = 7'27753 / 21'42353 = \mathbf{0'340}$$

,

que es el valor que pretendíamos hallar.

También, en este caso, se tendrá una longitud total del eje comunicativo de:

$$L = 21 \cdot 8'5 + 3'6 = 182'1 \text{ km.} \quad ,$$

con lo que, para una sección o capacidad económica de dicha infraestructura de 10^6 €/km. y una velocidad media de 65 km./hora, se tendrá un caudal económico inicialmente circulante de:

$$Q = S \cdot v = 65 \times 10^6 \text{ €/hora} \quad ,$$

lo que implica unas pérdidas de carga totales entre los territorios T y T' de:

$$h = n \cdot Q^2 \cdot L \cdot F = n \cdot (65 \times 10^6)^2 \cdot 182'1 \cdot 0'340 =$$

$$= 261.586'65 \cdot 10^{12} \cdot n \text{ (€*.km)} \ ,$$

quedando el resultado final del problema propuesto a expensas de la determinación empírica del valor del parámetro o coeficiente **n**.

6. EJE COMUNICATIVO DE CAPACIDAD VARIABLE

6.1. MÉTODO DEL EJE EQUIVALENTE

Sea el caso, por ejemplo, de un eje territorial de comunicación entre dos territorios T(A) y T'(B), con k secciones o capacidades diferentes: S_1, S_2, ..., S_k, de longitudes respectivas: l_1, l_2, ..., l_k. Las ecuaciones de continuidad y energía, anteriormente expuestas, establecen las dos siguientes relaciones que deben ser satisfechas simultáneamente (TORRES, 1970):

$$\begin{cases} Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_k \\ h = h_1 + h_2 + \dots + h_k = \sum_{i=1}^{k} h_i \end{cases}$$

Para un caudal económico dado de valor Q, la pérdida de carga total en la conducción será, despreciando las pérdidas accidentales en los puntos singulares de la misma:

$$h = J_1 \cdot l_1 + J_2 \cdot l_2 + \dots + J_k \cdot l_k = \sum_{i=1}^{k} J_i \cdot l_i \ .$$

Pues bien, puede resultar práctico el procedimiento de sustituir -a los efectos del cálculo- el eje territorial de comunicación entre ambos territorios por un único eje equivalente, de sección o capacidad económica constante. *Diremos, pues, que un eje territorial es "equivalente" a otro cuando la pérdida de carga económica, para un caudal económico dado, es la misma que la del conjunto de sub-ejes a los que sustituye.*

Siendo **l** y **S** las dimensiones del eje equivalente al eje mixto real con **k** secciones diferentes anteriormente definido, vamos a demostrar que si para un caudal económico Q se cumple la condición: h = H, siendo H la pérdida de carga del caudal económico Q en el eje equivalente, esta condición se seguirá verificando para las pérdidas correspondientes a cualquier otro caudal Q'.

Por hipótesis, se tendrá:

$$h = \sum_{i=1}^{k} h_i = H \quad ,$$

e introduciendo en ambos ejes comunicativos un nuevo caudal económico arbitrario:

$$Q' = \alpha \cdot Q \ ,$$

resultará que la pérdida de carga económica total en el sistema valdrá, ahora:

$$h' = h_1' + h_2' + ... + h'_k = \sum_{i=1}^{k} h_i' = H' \ .$$

Ahora bien, según el símil hidráulico establecido por la fórmula simplificada de Darcy (símil hidráulico), se obtiene:

$$\begin{cases} h_1 = n_1 \cdot l_1 \cdot Q^2 \ ; & h_1' = n_1 \cdot l_1 \cdot (\alpha \cdot Q)^2 \ ; \\ h_2 = n_2 \cdot l_2 \cdot Q^2 \ ; & h_2' = n_2 \cdot l_2 \cdot (\alpha \cdot Q)^2 \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_k = n_k \cdot l_k \cdot Q^2 \ ; & h_k' = n_k \cdot l_k \cdot (\alpha \cdot Q)^2 \ ; \end{cases}$$

y dividiendo ordenadamente, resultará:

$$h_1' / h_1 = h_2' / h_2 = ... = h_k' / h_k = h' / h = \alpha^2 \quad , \text{ y también:}$$

$$h' = \sum_{i=1}^{k} h_i' = \alpha^2 \ (h_1 + h_2 + ... + h_k) = \alpha^2 \cdot h \quad ,$$

y como: $H' = \alpha^2 \cdot H$, quedará también demostrado que: $H' = h'$.

En consecuencia, el problema del estudio o análisis de los ejes comunicativos de capacidad económica variable (carreteras de diferente anchura o categoría, vías férreas sencillas, dobles o de alta velocidad, sistemas convencionales de telecomunicación por cable coaxial o fibra óptica, etc.) puede reducirse al de un sólo eje de sección económica prefijada y de una cierta longitud. Puede ser conveniente, en fin, la fijación de la sección o capacidad económica del eje equivalente igual a la del sub-eje más largo del sistema territorial en estudio, quedando reducido el problema a la determinación de la longitud **l** del eje equivalente. En la práctica del Análisis Territorial, el valor de **l** podrá calcularse fácilmente introduciendo un caudal económico arbitrario cualquiera Q en el sistema real en estudio y determinando el valor correspondiente de **h**. Entonces, como sabemos que dicho caudal Q ha de producir la misma pérdida **h** en el eje equivalente de capacidad económica prefijada **S**, con los valores de **Q** y **S** se calculará la pérdida de carga económica unitaria J, con lo que:

$$l = h / J \ .$$

Supuesto de aplicación:

Así, dado un eje comunicativo entre dos territorios, de capacidad económica variable, se desea saber cuál es el caudal económico Q' capaz de producir una pérdida de carga económica total h'.

- Datos del problema: $l_1, l_2, \ldots, l_k$; $S_1, S_2, \ldots, S_k$; h' .

- Incógnita del problema: Q' .

Pues bien, sustituyendo el eje real por un eje equivalente de capacidad económica prefijada S, calcularemos **l** por el procedimiento anteriormente indicado. Por fin, en el eje equivalente, con:

J' = h' / l y S, podremos hallar el valor buscado del caudal económico Q'.

6.2. MÉTODO DE LOS PORCENTAJES

En un eje comunicativo de capacidad variable, se verifica que la pérdida de carga económica se reparte en porcentajes constantes, para cada tramo, independientemente de la cuantía del caudal económico circulante. Dichos porcentajes pueden, por tanto, determinarse haciendo circular, por el sistema territorial, un caudal económico arbitrario. Debe tenerse en cuenta, no obstante, que según la naturaleza de la masa de bienes y servicios constitutiva del flujo territorial en cuestión (tipos de mercancías o servicios profesionales, etc.) las pérdidas de carga económica también podrán ser diferentes. Ello ya ha sido expuesto en el anterior epígrafe 2.

Si hacemos circular, sucesivamente, dos caudales cualesquiera: Q y Q' = $\alpha \cdot$ Q, según hemos visto anteriormente, se tendrá que (TORRES, 1970):

$$h_1' / h_1 = h_2' / h_2 = \ldots = h_k' / h_k = h' / h = \alpha^2 \quad ,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} h_1 / h = h_1' / h' = a \quad ; \\ h_2 / h = h_2' / h' = b \quad ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_k / h = h_k' / h' = s \quad ; \qquad \text{c.s.q.d.} \end{cases}$$

Así pues, si pretendemos resolver el ejercicio del epígrafe anterior por el presente método, partiremos de un caudal económico arbitrario Q, hallándose: h_1, h_2, ... , h_k, h, con lo cual conoceremos los porcentajes:

$$h_1' / h' = a \quad ; \quad h_2' / h' = b \quad ; \quad \ldots\ldots. \quad ; \quad h_k' / h' = s \quad ,$$

y con uno de los valores: h_1', h_2', ... , h_k', y la capacidad económica correspondiente: S_1, S_2, ... , S_k, se halla el caudal económico Q' que andamos buscando. Como comprobación del método expuesto, puede hallarse el Q' en otro tramo del sistema territorial en estudio.

7. EJES COMUNICATIVOS EN PARALELO

7.1. MÉTODO GENERAL

Un caso que usualmente podrá presentarse en el Análisis Territorial, será aquél en que la comunicación entre dos núcleos territoriales A y B no es única (a través de un sólo eje) sino múltiple o compleja, mediante diversas carreteras, vías férreas o redes de telecomunicación de diferentes características dimensionales. La ligazón entre ambos polos o núcleos tendrá lugar, pues, mediante **k** ejes comunicativos. Desde luego, en este análisis pueden excluirse los enlaces marítimos o aéreos, por razones obvias de asentamiento espacial.

También puede suceder, en la práctica de la creación de nuevas infraestructuras de transporte o de telecomunicación, que cuando una vía ya existente resulte insuficiente para atender las necesidades motivadas por una ampliación o incremento del caudal económico circulante, sea más interesante el duplicar en parte o en su totalidad la longitud del eje existente mediante la creación de otro nuevo, que sustituirle por otro de mayor sección o capacidad económica. Ello se viene haciendo, por ejemplo, mediante el "doblado" de las vías férreas, o bien mediante el trazado de una autopista o autovía paralela a una carretera nacional o comarcal de tráfico sobresaturado.

A diferencia de los ejes comunicativos estudiados hasta ahora, en los que el mismo caudal económico fluye a través de todos ellos y las pérdidas de energía económica son acumulativas, en los ejes comunicativos dispuestos en paralelo las pérdidas de energía económica pueden ser las mismas o diferentes en cualquiera de ellos y los caudales son acumulativos.

Puesto que las cargas económicas y sociales (rentas familiares, depósitos bancarios, población, ...) en A y B son comunes a todos los ejes territoriales de comunicación que en ellos convergen, el caudal económico total se distribuirá en dichos ejes de acuerdo con las cargas económicas actuantes en las conexiones o núcleos territoriales. Las ecuaciones de continuidad y de energía, que deberán satisfacerse de modo simultáneo, serán las siguientes (TORRES, 1970):

$$\begin{cases} Q = Q_1 + Q_2 \ldots + Q_k = \sum_{i=1}^{k} Q_i \\ h = h_1 = h_2 = \ldots = h_k \end{cases}$$

(y ello suponiendo iguales las pérdidas de carga económica en los ejes comunicativos paralelos).

Si se conoce la pérdida de carga económica **h** entre los núcleos territoriales A y B, el caudal económico total circulante puede hallarse directamente sumando los caudales parciales:

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$$

de los diversos ejes comunicativos, entre ambos puntos.

7.2. MÉTODO DE LOS PORCENTAJES

En los ejes comunicativos en paralelo, también puede resultar práctico el resolver el problema anterior mediante el método de los porcentajes, que se basa en la circunstancia de que en un sistema de ejes en paralelo, los caudales económicos se repartirán en porcentajes constantes para cada eje, independientemente de la pérdida de carga económica que exista entre los núcleos territoriales. Dichos porcentajes, por tanto, pueden ser determinados suponiendo entre los núcleos A y B una pérdida de carga económica arbitraria.

En efecto, al circular por el sistema un caudal económico cualquiera Q se produce una pérdida de carga económica **h**, y para otro cierto caudal Q' la pérdida es: $h' = \alpha \cdot h$.

Evidentemente, se verificará:

$$\begin{cases} h = n_1 \cdot l_1 \cdot Q_1^2 = n_2 \cdot l_2 \cdot Q_2^2 = \ldots = n_k \cdot l_k \cdot Q_k^2 \quad ; \\ \alpha \cdot h = n_1 \cdot l_1 \cdot Q'^2_1 = n_2 \cdot l_2 \cdot Q'^2_2 = \ldots = n_k \cdot l_k \cdot Q'^2_k \end{cases}$$

Dividiendo ordenadamente y extrayendo la raíz cuadrada, resulta:

$$Q_1' / Q_1 = Q_2' / Q_2 = \ldots = Q_k' / Q_k = Q' / Q = \alpha^{1/2} \quad \text{, luego:}$$

$$\begin{cases} Q_1 / Q = Q_1' / Q' = a \quad ; \\ Q_2 / Q = Q_2' / Q' = b \quad ; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_k / Q = Q_k' / Q' = s \quad ; \end{cases}$$

estando: a, b, ..., s, expresados en tantos por uno (TORRES, 1970).

Supuesto de aplicación:

Sea, por ejemplo, el caso de tres ejes territoriales dispuestos en paralelo, que enlazan los núcleos territoriales A y B.

- Datos del problema: l_1, l_2 y l_3 ; S_1, S_2 y S_3 ; Q
- Incógnitas del problema: Q_1, Q_2, Q_3 y h.

Supongamos entre los núcleos territoriales A y B una pérdida de carga arbitraria h' y tendremos las correspondientes pérdidas de carga unitaria en cada eje:

$$J_1' = h' / l_1 \quad ; \quad J_2' = h' / l_2 \quad ; \quad J_3' = h' / l_3$$

Con estos valores y las respectivas secciones económicas: S_1, S_2 y S_3, hallaremos los correspondientes caudales económicos: Q'_1, Q'_2 y Q'_3, los cuales nos darán los porcentajes (expresados, en realidad, en tantos por uno):

$$Q_1'/ (Q_1' + Q_2' + Q_3') = a \; ; \; Q_2'/ (Q_1' + Q_2' + Q_3') = b \; ; \; Q_3'/ (Q_1' + Q_2' + Q_3') = c \; ;$$

$$a + b + c = 1$$

Repartiendo ahora el caudal económico total Q con arreglo a estos porcentajes para cada eje territorial, tendremos:

$$Q \cdot a = Q_1 \; ; Q \cdot b = Q_2 \; ; \; Q \cdot c = Q_3$$

y ya en uno cualquiera de los ejes, por ejemplo en el primero, conociendo Q_1 y S_1 obtendremos J_1 y, finalmente: $h = J_1 \cdot l_1$.

Como comprobación a lo expuesto, se pueden calcular las pérdidas totales: J_2 y J_3, y ver que se cumple la expresión:

$$h = J_1 \cdot l_1 = J_2 \cdot l_2 = J_3 \cdot l_3 \; .$$

7.3. MÉTODO DEL EJE EQUIVALENTE

Puede presentarse dicha situación ante la conveniencia, por ejemplo, de construir una moderna infraestructura de comunicación o de transporte en substitución de otra u otras ya existentes y obsoletas (aprovechando, a veces, el mismo trazado en todo o en parte del recorrido).

Para sustituir un sistema de ejes territoriales en paralelo por un nuevo eje equivalente de sección económica prefijada S, se procederá del siguiente modo (TORRES, 1970):

- Datos del problema: l_1, l_2 y l_3 ; S_1, S_2, S_3 y S

- Incógnitas del problema: l.

Se supone entre los núcleos territoriales A y B una pérdida de carga económica arbitraria h' y se opera como en la aplicación del apartado anterior, hasta obtener los caudales económicos: Q'_1, Q'_2 y Q'_3.

Con $Q' = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3$, y la sección S, se halla J', y el valor correspondiente de **l**, será:

$$l = h' / J' \ .$$

Un problema de ejes comunicativos en paralelo puede, pues, reducirse al de un eje sencillo y único, de capacidad económica prefijada y de una cierta longitud, pudiendo resolverse según los procedimientos ya conocidos (TORRES, 1970).

8. EJES COMUNICATIVOS RAMIFICADOS

Este caso se halla representado en la figura siguiente, en el que las ramificaciones 1-2 y 3-4 del eje principal 0-5 están constituidas por otros ejes territoriales. El problema que se planteará en la práctica será el de dimensionar los diferentes tramos para que el sistema en conjunto distribuya los caudales económicos previstos.

La representación gráfica sería la siguiente:

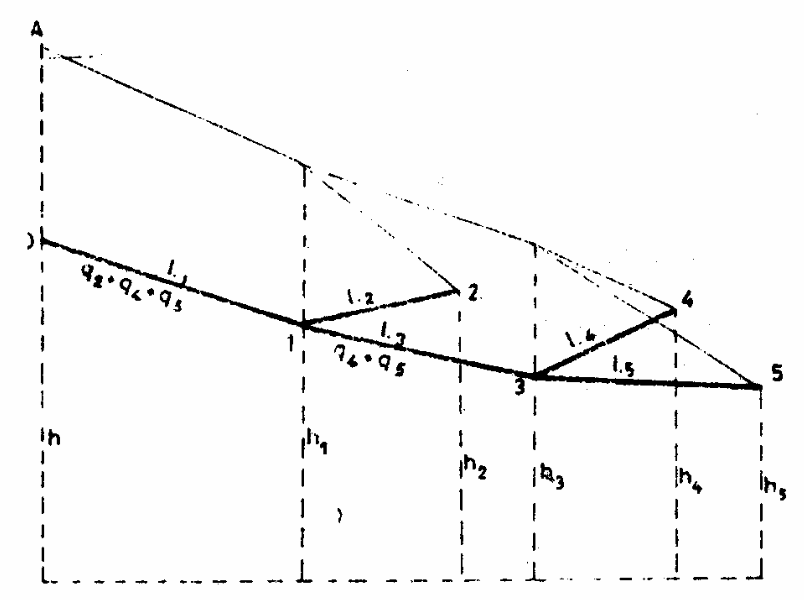


Fig. A-11.4. Eje comunicativo ramificado.

Sea O el origen del eje territorial y sea O-1 el tramo principal del mismo, que dispone de una carga económica inicial: OA + h. Numerando los elementos de cada ramal con el subíndice correspondiente al número que lleva en su extremo, y representando por las letras **h** la parte de la carga total económica comprendida entre cada punto del territorio y el plano o nivel económico de comparación, tendremos el siguiente problema:

- Datos del problema: h, h_2, h_4, h_5 ; q_2, q_4, q_5 ; l, l_2, l_3, l_4, l_5

- Incógnitas del problema: h_1, h_3 ; S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

pudiendo plantearse las cinco ecuaciones siguientes:

$$\boxed{\begin{array}{c} h - h_1 = n_1 \cdot l_1(q_2 + q_4 + q_5)^2 \\ h_1 - h_2 = n_2 \cdot l_2 \cdot q_2^2 \\ h_1 - h_3 = n_3 \cdot l_3 \cdot (q_4 + q_5)^2 \\ h_3 - h_4 = n_4 \cdot l_4 \cdot q_4^2 \\ h_3 - h_5 = n_5 \cdot l_5 \cdot q_5^2 \end{array}}$$

Los valores de los n_i , $\forall$ i $\in$ (1, ..., 5), serán función de las correspondientes S_i, de acuerdo con las fórmulas empíricas establecidas al caso. De este modo, el anterior sistema de 5 ecuaciones con 7 incógnitas es compatible indeterminado, por lo que tiene infinitas soluciones. No obstante, es posible su resolución fijando las cargas económicas h_1 y h_3 o bien la velocidad de circulación en alguno de los ramales (TORRES, 1970). En nuestro ejemplo:

$$\mathbf{h_1} : h\ ; h_2\ ; h_3 \quad , \quad \mathbf{h_3} : h_4\ ; h_5$$

El problema puede, pues, resolverse mediante aproximaciones sucesivas, o bien con el auxilio de un programa adecuado de ordenador. Al tantear la carga económica en los núcleos territoriales, debe seguirse el criterio de obtener capacidades económicas ajustadas, y que los valores de la velocidad media sean aceptables, basándose en razones de orden técnico y legal. Así mismo, se procurará que el régimen de velocidades en el sistema sea lo más uniforme posible, es decir, que no se produzcan diferencias substanciales de velocidad al pasar de un tramo del eje territorial al siguiente (lo que conllevaría desajustes, retenciones o inadaptaciones diversas).

Una generalización del problema expuesto, en la que se conocen de antemano los valores de los caudales económicos máximos que pueden circular entre los diversos núcleos territoriales (en base, claro está, a las correspondientes capacidades económicas de los tramos y a valores limitativos de las pérdidas de carga), se acomete en el epígrafe siguiente.

9. CAUDAL O FLUJO ECONÓMICO MÁXIMO A TRAVÉS DE UNA RED

9.1. LA FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL PROBLEMA

Si en vez de considerar, como hasta ahora, el caso de dos únicos puntos del territorio T(A) y T'(B) unidos entre sí por uno o varios ejes comunicativos, contemplamos el caso de diversos puntos del territorio (por ejemplo, un conjunto de ciudades pertenecientes a la misma comarca) unidos por varios ejes de diferentes características dimensionales, nos hallaremos en presencia del caso bien real de una malla o red territorial que no es más que un grafo finito y sin bucles, en el que cada arco o eje se le asocia un caudal económico máximo $c\ (u) \geq 0$, al objeto de no rebasar ciertos valores límites preestablecidos de las pérdidas de carga económica, y en el cual:

- existe un vértice x_0 y uno solo, tal que: $\Gamma^{-1}\ x_0 = \phi$. Este vértice x_0 se llamará "entrada de la red" o "fuente".

- existe un vértice z y uno solo, tal que: $\Gamma\ z = \phi$. Este vértice z se llamará "salida de la red" o "sumidero".

Por otra parte, un cierto flujo o caudal económico φ de la red es una cantidad φ (u) asociada a cada arco **u** de la red, tal que:

$$\varphi\ (u) \geq 0,\ \forall\ u \in\ U\ ,$$

además:

$$\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0 \quad , \text{si:} \quad x \neq x_0 \quad y \quad x \neq z$$

y también: $\varphi(u) \leq c(u)$,

habiendo representado por U_x^- el conjunto de arcos que inciden interiormente en x, y por U_x^+ el conjunto de arcos que inciden exteriormente en x.

Por φ_z, se representa la cantidad de bienes y/o servicios que llega al vértice z, o sea, el "valor del flujo φ".

Buscar el flujo máximo en una red equivale a hacer llegar el máximo flujo económico al vértice z. El conocido algoritmo de Ford-Fulkerson (DESBAZEILLE, 1969) permite resolver este problema, operando sucesivamente del siguiente modo:

1.º Se hace pasar por la red cualquier flujo compatible teniendo en cuenta las propiedades de los grafos.

2.º Se busca un *flujo completo.* Un flujo es completo si todo camino que va de x_0 a z contiene al menos un arco saturado, es decir, tal que $\varphi(u) = c(u)$.

3.º Sea $\varphi(x, y)$ un flujo completo; por un procedimiento iterativo se van a marcar, sucesivamente, todos los vértices del grafo a donde se puede hacer llegar una unidad de flujo suplementaria.

Se marca x_0 con el coeficiente 0.

Si x_i es un vértice marcado, se marca con el coeficiente +i todo vértice **y** no marcado, tal que:

$$(x_i, y) \in U \ \text{ y } \ \varphi(x_i, y) < c(x_i, y) \ .$$

Si x_i está marcado, se marca con el índice -i todo vértice **y** sin marcar, tal que:

$$(y, x_i) \in U \ \text{ y } \ \varphi(y, x_i) > 0 \ .$$

Si, con este procedimiento, se llegase a marcar el vértice z, existirá entre x_0 y z una cadena μ de la cual todos los vértices son distintos y marcados con el índice del vértice precedente (al signo próximo). Pongamos:

$$\varphi'(u) = \varphi(u) \ , \quad \text{si } u \notin \mu \ ; \quad \text{además:} \quad \varphi'(u) = \varphi(u) + 1 \ ,$$

si u $\in$ μ y u está orientado en el sentido de la cadena que va de x_0 a z; también:

$$\varphi'(u) = \varphi(u) - 1$$

si u $\in$ μ y u está orientado en el sentido inverso de la cadena μ que va de x_0 a z.

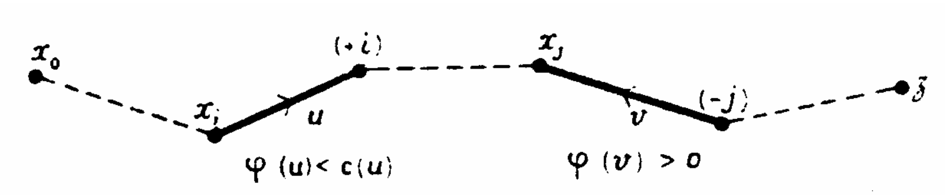


Fig. A-11.5. Cadena y flujo económico.

Es evidente que $\varphi'(u)$ es también un flujo y como $\varphi'_Z = \varphi_Z + 1$, se habrá mejorado el valor del flujo económico territorial.

4.º Si para un flujo φ^0 no se puede mejorar más el valor por el método anterior, es decir, si no se puede marcar el vértice z, el flujo φ^0 ha alcanzado su valor máximo (cf. Teorema de Ford-Fulkerson).

Recordemos, en fin, que en la Teoría de los Grafos, que es una técnica de la Investigación Operativa, se denomina "cadena" a una sucesión ordenada de arcos adyacentes con una orientación cualquiera (DESBAZEILLE, 1969).

9.2. ALGUNOS SUPUESTOS DE APLICACIÓN

Veamos, a continuación, después de operar del modo señalado, los resultados ofrecidos por tres redes diferentes de transporte entre 9, 10 y 11 puntos del territorio, respectivamente, que podían ser, por ejemplo, capitales de comarca, unidos entre sí por ejes comunicativos cuyos caudales económicos circulantes máximos vienen dados por las cifras que figuran sobre los arcos del grafo correspondiente, que se expresan en 10^6 €/hora.

Caso 1.º:

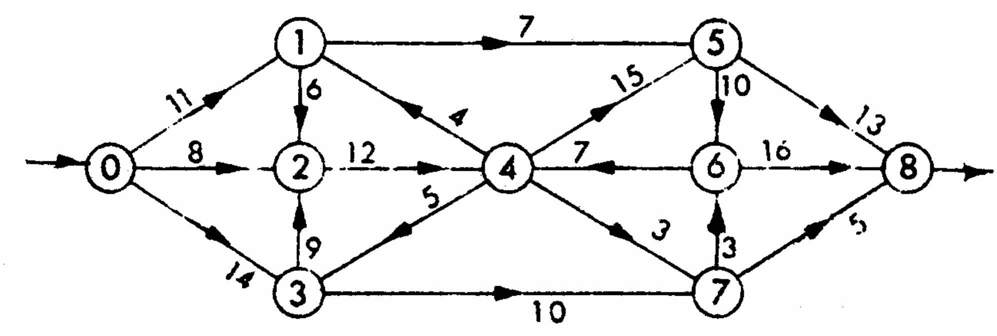


Fig. A-11.6. *Solución:* Flujo máximo = 27 millones de €/hora.

Caso 2.º:

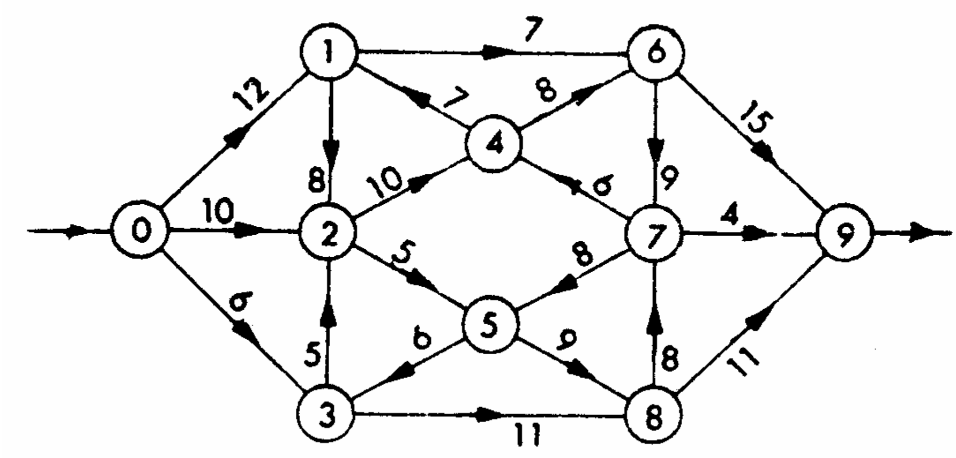


Fig. A-11.7. *Solución:* Flujo máximo = 26 millones de €/hora.

Caso 3.º:

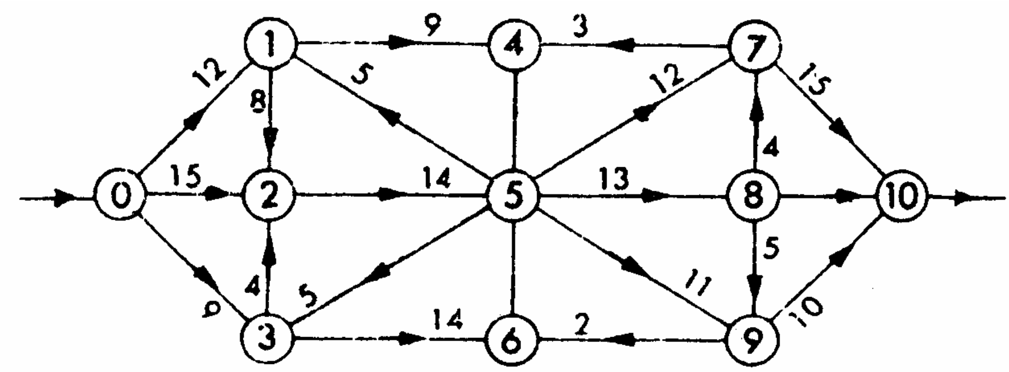


Fig. A-11.8. *Solución:* Flujo máximo = 31millones de €/hora.

Veamos, en fin, que a los efectos de nuestra discusión, supondremos que el flujo económico se puede "crear" en la fuente y "eliminar" en el sumidero. En el análisis de algunos autores, se introduce, a veces, un arco ficticio desde el sumidero hasta la fuente denominado "arco de retorno", que permite reintroducir de nuevo en la red el flujo que llega al sumidero y posibilita un tratamiento homogéneo de todos los nudos de la red en algunos algoritmos de obtención del flujo máximo. Nosotros, sin embargo, no lo consideraremos en nuestro enfoque del problema, sin que excluyamos totalmente su aplicabilidad en el Análisis Territorial (retorno de mercancías, ...).

Si denotamos por $\varphi(x_i, x_j)$ al valor del flujo económico que circula por el arco o eje territorial (x_i, x_j), y se admite que dicho flujo se puede dividir indefinidamente (habida cuenta de su propia naturaleza, esto es, formado por multitud de partículas económicas de bienes y/o servicios), y que en cada nudo o núcleo del territorio, excluyendo la fuente y el sumidero, se verifican las leyes de conservación del flujo (esto es, que el flujo de entrada es igual al de salida), se puede proceder, entonces, a la resolución del problema planteado por medio del algoritmo descrito.

También el flujo máximo por una red puede no ser único (DESBAZEILLE, 1969), en el sentido de que pueden existir diferentes esquemas de flujo que proporcionen dicho máximo. En particular, si entre dos núcleos territoriales x_i y x_j existen ejes comunicativos en ambas direcciones (x_i, x_j) y (x_j, x_i), se puede proponer un esquema óptimo de flujos para el que, o bien $\varphi(x_i, x_j) = 0$, o bien $\varphi(x_j, x_i) = 0$.

Así, por ejemplo, el flujo máximo correspondiente a la figura A-11.9. supone la circulación de un flujo por los arcos (2, 3) y (3, 2) dado por:

$$\varphi(x_2, x_3) = 2 \;\; ; \;\; \varphi(x_3, x_2) = 4 \quad .$$

Si definimos, entonces:

$$\varphi(x_2, x_3) = 0 \;\; ; \;\; \varphi(x_3, x_2) = 2 \quad ,$$

se obtiene un nuevo flujo, compatible con las restricciones, que mantiene el mismo valor del flujo total, esto es, un nuevo flujo máximo en la red, pero con la particularidad de que ahora el flujo económico por el eje territorial (2, 3) es nulo.

El problema planteado puede verse en la siguiente figura:

Caso 4.º:

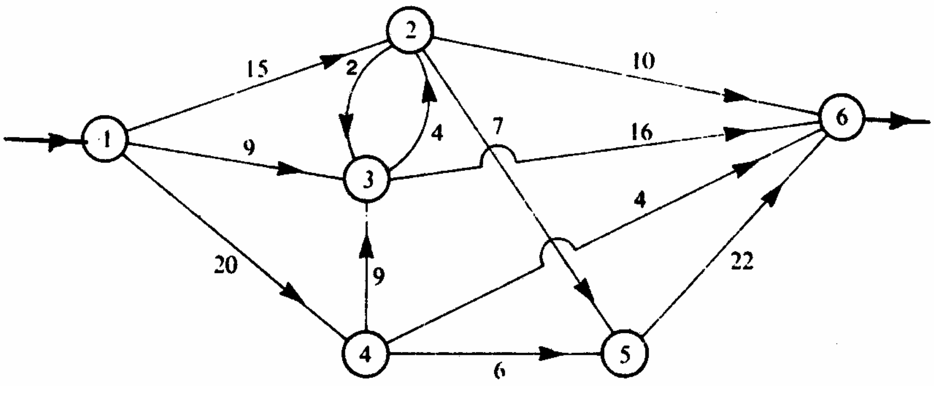


Fig. A-11.9. *Solución:* Flujo máximo = 43 millones de €/hora.

9.3. GENERALIZACIÓN Y CONCLUSIONES

De hecho, el proceso de redefinición de un esquema de flujo máximo en dos arcos o ejes en sentidos opuestos entre dos núcleos territoriales, no es más que un caso particular de la redefinición de un esquema de flujos económicos en cualquier "circuito" de la red, mediante la sustracción de un número arbitrario a los flujos que circulan por los arcos del circuito, siempre y cuando no resulten de ello flujos negativos.

En definitiva, el problema del flujo máximo consistirá en encontrar la mayor cantidad posible de caudal económico que puede pasar desde el vértice "fuente" de la red territorial al vértice "sumidero", cuando algunos -si no todos- los ejes comunicativos tienen su capacidad de flujo limitada. Para ello, habrá que buscar cuál es la sección que deja pasar menos flujo, pues, aunque otras posibles secciones de la red dejen circular mayor cantidad de flujo económico, éste no podrá llegar hasta el punto de destino, por no poder atravesar dicha mínima sección "de mínimo corte".

Hasta ahora, hemos visto cómo hallar el máximo flujo económico que puede circular por una red o grafo territorial, sin imponerle ninguna condición externa al sistema. Pudiera ocurrir, no obstante, que más de un camino ofreciera máximo flujo; si, en este caso, pudiéramos conocer los costes de los distintos arcos (costes de las infraestructuras), podríamos acometer el problema de la obtención del máximo flujo al mínimo coste, para lo que aplicaríamos el algoritmo correspondiente cuya exposición se obvia aquí por razones de espacio.

Observemos, por último, que un caso bastante general que podrá presentarse, en la práctica del Análisis Territorial, cuando se trate del estudio del paso de un flujo o caudal económico de bienes y/o servicios a través de una red territorial más o menos compleja, será el siguiente:

<u>"existen **m** localidades productoras de la masa económica, que debe transportarse a los mercados de **n** ciudades consumidoras (o bien recíprocamente, circulando el flujo económico en sentido contrario). De cada localidad productora salen ejes territoriales comunicativos directos hasta algunas de las **n** ciudades consumidoras, pero, naturalmente, no hasta todas ellas, conociéndose la capacidad o caudal económico máximo que puede circular por cada arco o eje c(u), en base a su propia capacidad infraestructural o sección económica, así como a los valores límites preestablecidos de las pérdidas de carga económica. El sistema territorial contemplado debe organizarse racionalmente, esto es, de modo que pueda transportarse la mayor cantidad posible de masa económica, pero sin exceder nunca la demanda de cada mercado ni la sección o capacidad económica máxima de cada eje comunicativo"</u> (FRANQUET, 1990/91).

10. APLICACIÓN NUMÉRICA DE LA DETERMINACIÓN DEL FLUJO ECONÓMICO MÁXIMO

10.1. ALGORITMO DE FORD-FULKERSON

Ya ha sido descrito en el apartado anterior. Vamos a aplicarlo a una malla o red territorial compuesta por 12 ciudades o núcleos territoriales, unidos entre sí por ejes comunicativos cuyas capacidades de transporte o caudales económicos máximos se conocen de antemano. A saber:

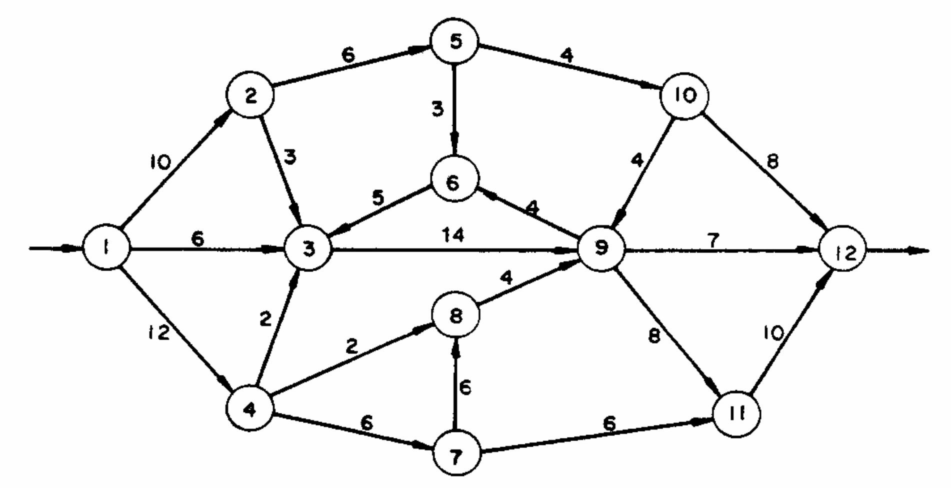


Fig. A-11.10. Algoritmo de Ford-Fulkerson (I)

donde el coste de pasar una mitad de flujo por cada arco viene dada entre paréntesis.

1.º Hacemos pasar por el camino 1-2-5-10-12 un flujo de 4.

Hacemos pasar por el camino 1-2-5-6-3-9-12 un flujo de 2, y queda:

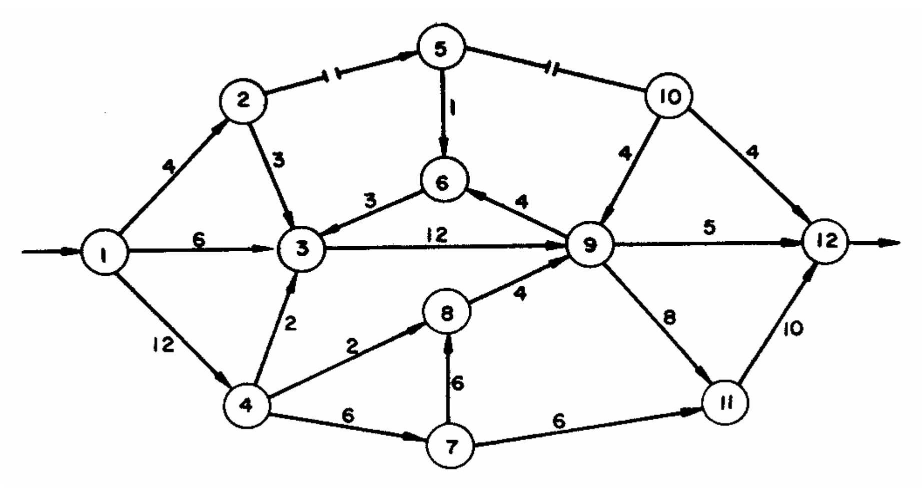


Fig. A-11.11. Algoritmo de Ford-Fulkerson (II)

2.º Si ahora se hace pasar por el camino 1-3-9-12, un flujo de 5.

Si ahora se hace pasar por el camino 1-4-7-11-12, un flujo de 6.

Si ahora se hace pasar por el camino 1-4-8-9-11-12, un flujo de 2.

Si ahora se hace pasar por el camino 1-4-3-9-11-12, un flujo de 2, queda:

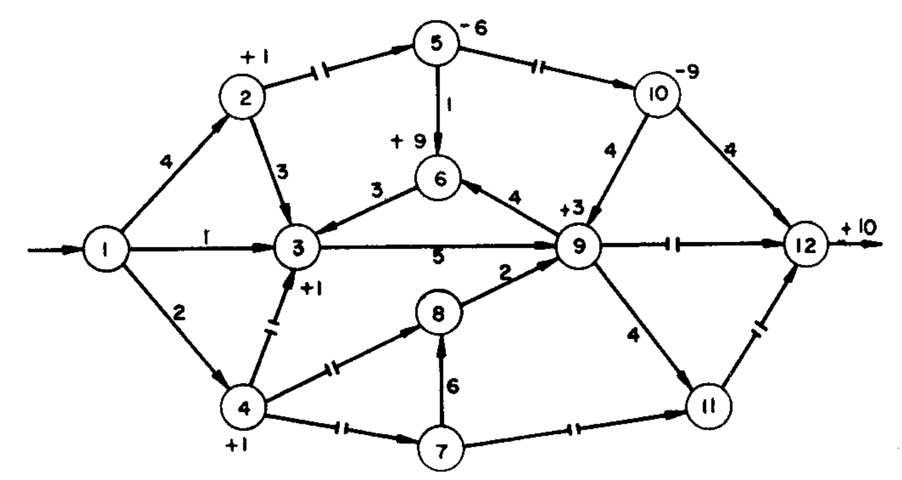


Fig. A-11.12. Algoritmo de Ford-Fulkerson (III)

El flujo ahora es completo. Por eso aparecen las señalizaciones, y con ellas, un camino: 1-3-9-10-12.

3.º Aumentando en él, el flujo en 1, queda:

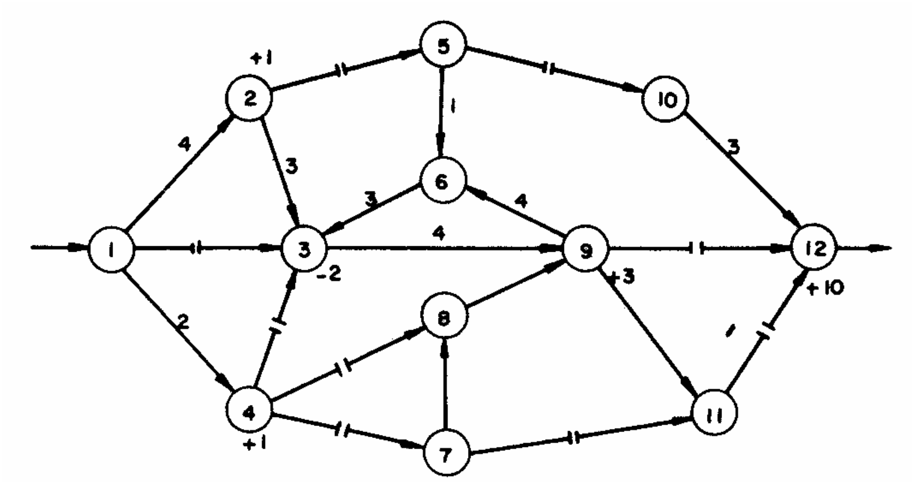


Fig. A-11.13. Algoritmo de Ford-Fulkerson (IV)

Notemos que en el arco 10-9 el flujo ha aumentado debido a su orientación.

Ya aparecen las señalizaciones y un nuevo camino:

1-2-3-9-10-12, por el que pueden circular 3 unidades. Veamos, a continuación, el siguiente grafo:

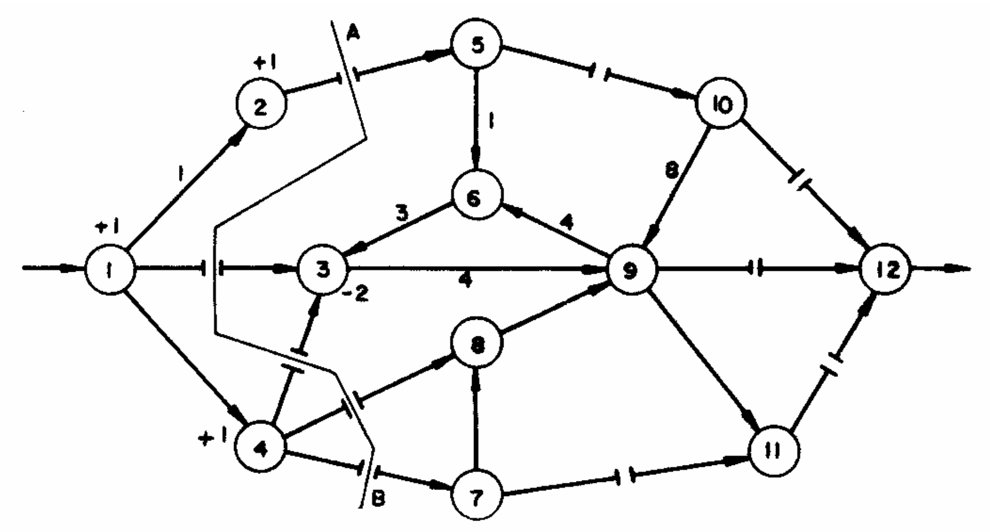


Fig. A-11.14. Algoritmo de Ford-Fulkerson (V)

donde aparecen saturados todos los caminos.

4.º El flujo circulante ha sido de:

$$4 + 2 + 5 + 6 + 2 + 2 + 1 + 3 = 25$$

Asimismo, aparece la línea de corte AB, a través de los arcos:

2 - 5 de capacidad 6

2 - 3 de capacidad 3

1 - 3 de capacidad 6

3 - 2 de capacidad 2

4 - 7 de capacidad 6

4 - 8 de capacidad 2

lo cual ofrece un corte total de 25 millones de €/hora, que representa el flujo territorial máximo que puede circular por la red en estudio.

10.2. NUEVA PROPUESTA DE RESOLUCIÓN

a) Por parte de este doctorando, surge una nueva propuesta de resolución de los problemas de obtención de flujo máximo, basada en el conocido procedimiento de la clasificación u ordenación en niveles de los vértices de un grafo, en aquellos casos en que se trata de un grafo conexo y sin circuitos, o bien resulte cómodo, por reducción, llegar fácilmente a él.

En el caso de la malla o red que venimos estudiando, vemos que existe un circuito formado por los vértices ③, ⑥ y ⑨, que constituye un subgrafo fuertemente conexo. El grafo reducido, será el siguiente (en el que sustituimos dicho circuito por el nuevo vértice Ⓐ):

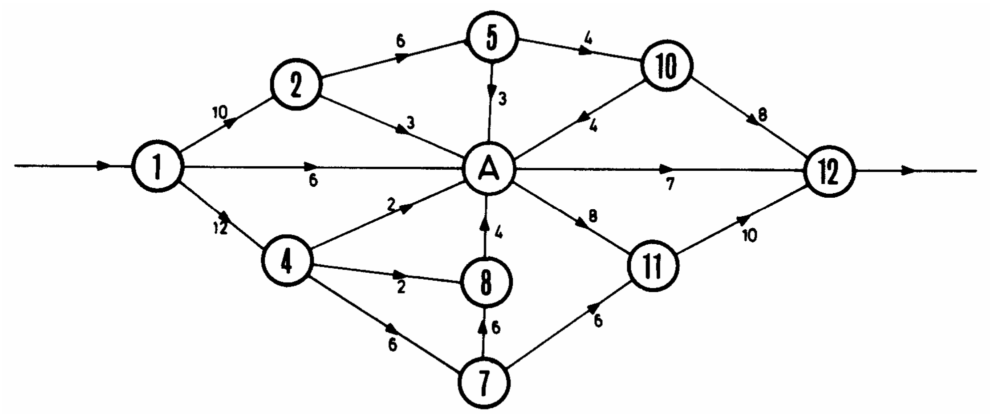


Fig. A-11.15. Substitución del circuito.

Su ordenación de vértices *hacia la antibase*, por el método también conocido como de "eliminación de descendientes", conduce a lo siguiente (FRANQUET, 1990/91):

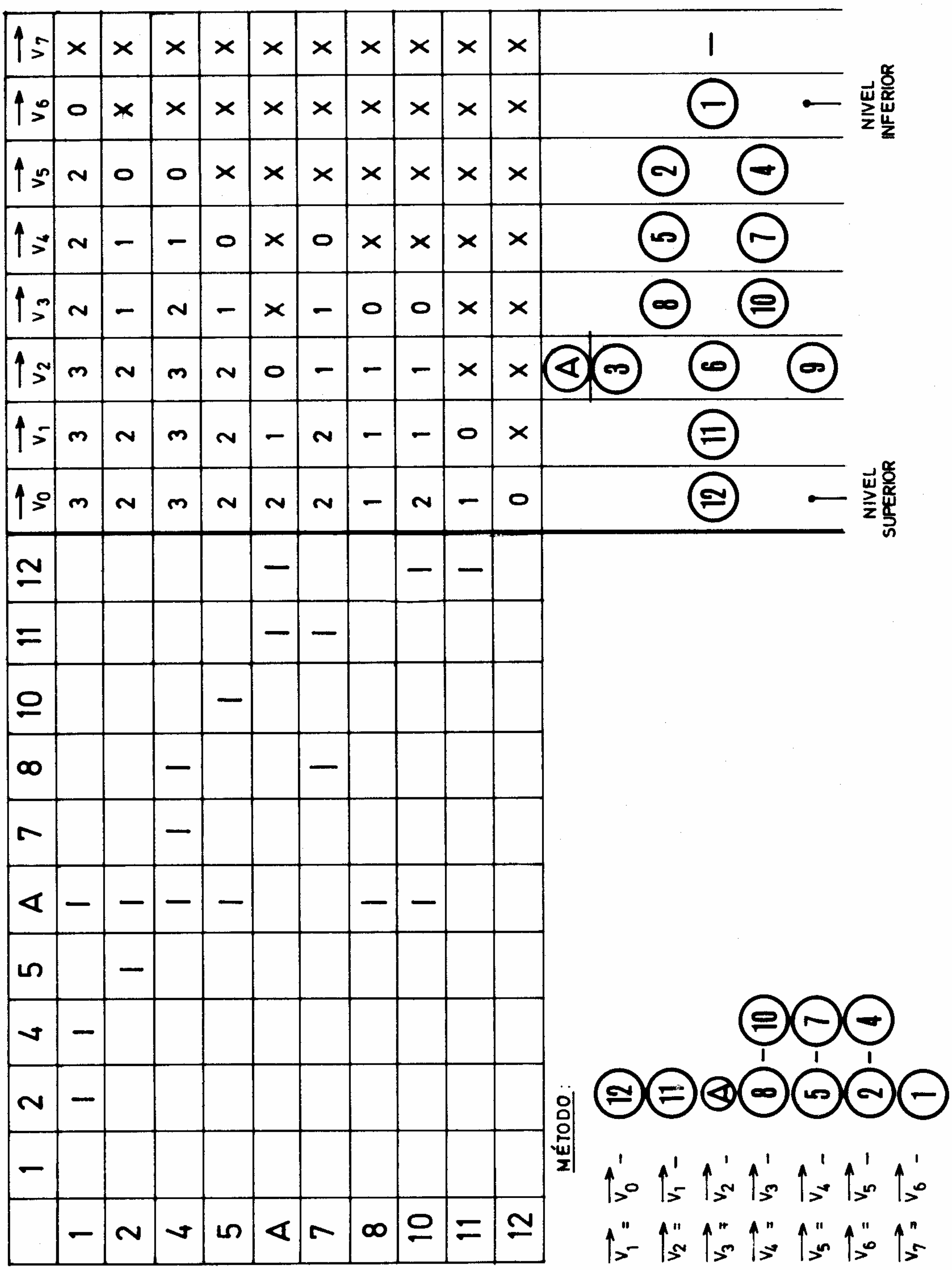


Fig. A-11.16. Ordenación de vértices hacia la antibase.

Se tiene la siguiente clasificación por etapas y niveles:

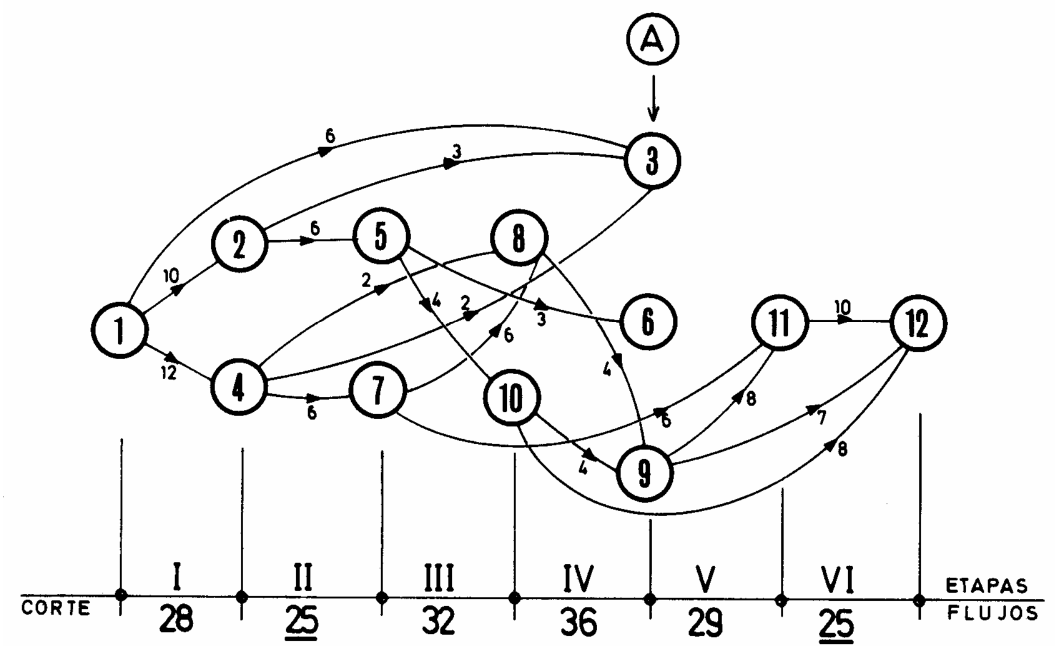


Fig. A-11.17. Clasificación por etapas y niveles.

El corte mínimo da **25** (en las etapas II y VI), luego el flujo máximo es **25**.

A través de la clasificación anterior, se ha puesto de manifiesto una prelación bien clara entre las diversas etapas del esquema de flujos económicos entre los diversos núcleos territoriales. En cualquier caso, deberá cumplirse que:

1.º) Todos los núcleos territoriales de un mismo nivel no deben poseer "ascendientes" en el nivel siguiente.

2.º) El orden de los vértices o núcleos territoriales de un mismo nivel, es independiente.

3.º) El flujo máximo que puede circular por la red territorial, vendrá dado por el de la etapa (o etapas) de flujo mínimo. En este caso, la II y la VI, con 25 millones de €/hora.

b) Del mismo modo, si tratamos, ahora, de resolver por el método aquí propuesto el grafo del caso 4º planteado en el apartado anterior, vemos que existe un circuito, formado por los vértices: ② y ③ El grafo reducido consecuente, substituyendo, v. gr., en la figura A-11.9, el circuito o camino cerrado ② - ③ por el nuevo vértice Ⓐ, ofrece:

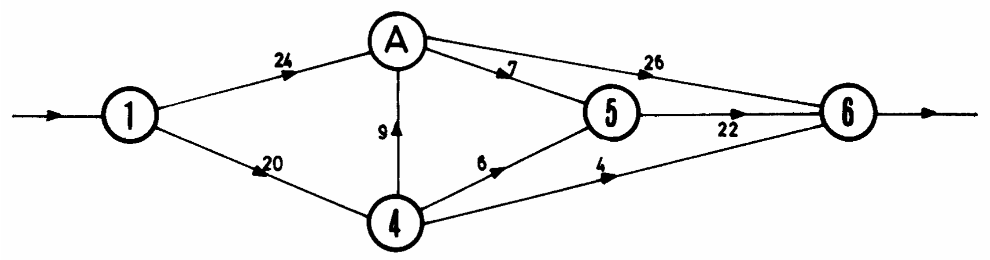


Fig. A-11.18. Grafo reducido.

Su ordenación de vértices en niveles, hacia la antibase, se realiza del siguiente modo, tratándose ya de un grafo territorial conexo y sin circuitos:

	1	A	4	5	6	$\vec{V_0}$	$\vec{V_1}$	$\vec{V_2}$	$\vec{V_3}$	$\vec{V_4}$	$\vec{V_5}$
1		1	1			2	2	2	1	0	X
A				1	1	2	1	0	X	X	X
4		1		1	1	3	2	1	0	X	X
5					1	1	0	X	X	X	X
6						0	X	X	X	X	X
						6	5	A	4	1	—
						NIVEL SUPERIOR				NIVEL INFERIOR	

MÉTODO:

$\vec{V_1} = \vec{V_0} - 6$

$\vec{V_2} = \vec{V_1} - 5$

$\vec{V_3} = \vec{V_2} - A$

$\vec{V_4} = \vec{V_3} - 4$

$\vec{V_5} = \vec{V_4} - 1$

Fig. A-11.19. Ordenación de vértices hacia la antibase.

La clasificación por etapas y niveles resultante, será la siguiente:

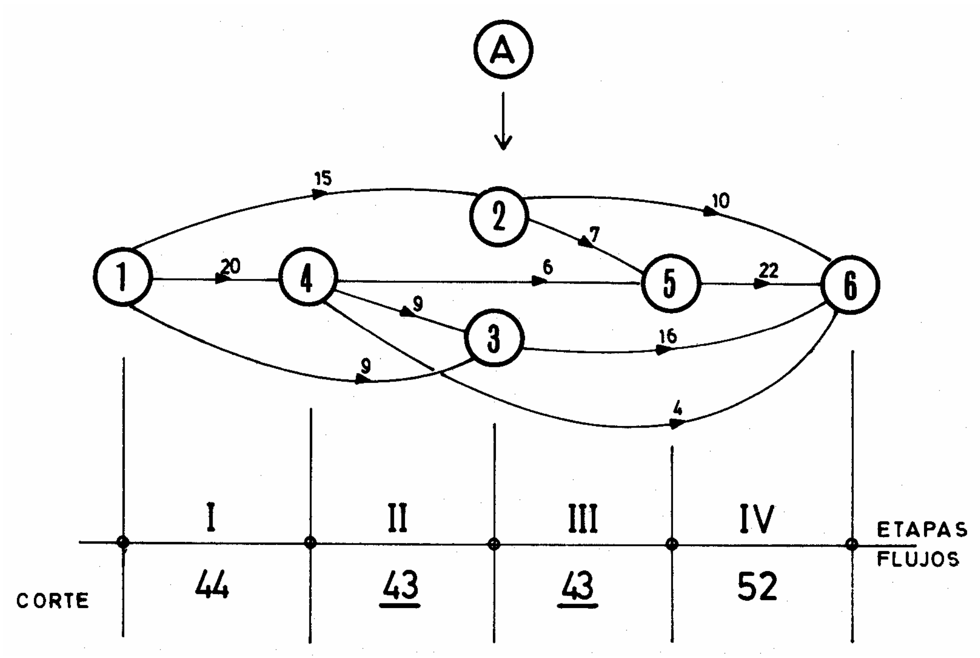


Fig. A-11.20. Clasificación por etapas y niveles.

luego, efectivamente, el corte mínimo ofrece un flujo máximo de 43 millones de €/hora, en las etapas II y III, coincidente con el resultado obtenido en el expositivo anterior.

11. LAS "PERCUSIONES" ECONÓMICAS

Puede resultar interesante, en el Análisis Territorial, el estudio de las "percusiones" en el movimiento de los flujos económicos territoriales. En este sentido, diremos que un sistema económico sufre o experimenta una "percusión" cuando sus partículas económicas componentes (bienes y/o servicios) cambian su velocidad de desplazamiento por un eje comunicativo en un tiempo extremadamente corto, sin variar sensiblemente de posición, con lo que dichas partículas se moverán, en lo sucesivo, de forma diferente (FRANQUET, 1990/91). Por tanto, el problema a resolver consistirá en calcular el $\Delta\vec{v}$ para obtener información fidedigna acerca del movimiento económico que tendrá lugar a partir del instante posterior a la "percusión". Su representación gráfica sería la siguiente, en un diagrama l - t:

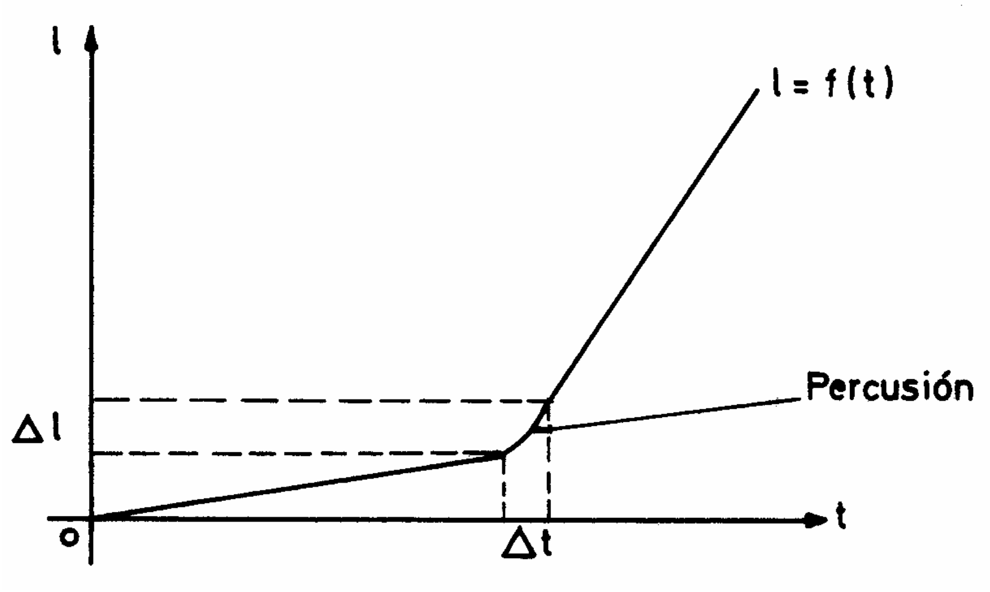


Fig. A-11.21. Percusión económica.

Supondremos, en todo momento, que dichas percusiones son originadas por fuerzas económicas muy grandes que actúan en un tiempo muy corto.

A partir de ahí, podríamos enunciar diversos teoremas cuya demostración obviaremos por razones de espacio, a saber:

1) La variación de la cantidad de movimiento económico de una partícula económica, durante un cierto intervalo de tiempo, es igual a la percusión aplicada en ese intervalo, o bien a la resultante de todas las percusiones actuantes sobre la misma. Ello resulta aplicable, así mismo, a un sistema más o menos complejo de partículas económicas.

2) La variación de la proyección de la cantidad de movimiento económico de una partícula económica sobre un eje territorial es igual a la suma de las proyecciones, sobre dicho eje, de todas las percusiones actuantes sobre ella.

3) La variación del momento económico cinético de una partícula económica es igual al momento resultante de las percusiones que actúan sobre ella, lo que también resulta extensible a un sistema de partículas económicas.

4) La variación de la cantidad de movimiento económico total de un sistema es igual cantidad de movimiento económico de su centro territorial de masas, supuesta concentrada en él la masa económica total del sistema y aplicadas -también en él- todas las percusiones exteriores.

5) Si consideramos, ahora, un flujo económico territorial como un conjunto de masas económicas aisladas y en movimiento, sometidas exclusivamente a las percusiones interiores producidas por sus propias fricciones de transporte o concurrencia en el mercado, podremos enunciar que: "la pérdida total de energía económica cinética del flujo es igual a la adición de las energías económicas cinéticas de las masas que lo componen si cada una de ellas estuviese animada de la velocidad de desplazamiento que ha perdido". Ello explica la aparición de las "viscosidades" o "rozamientos internos" a los que también nos hemos referido anteriormente en el estudio del movimiento uniforme de los flujos económicos territoriales por los ejes comunicativos, como agentes causantes de las pérdidas de carga económica entre los diferentes puntos de aquellos.

12. FLUJO ECONÓMICO DE SUCESOS

12.1. CONCEPTUALIZACIÓN GENERAL

Si en vez de suponer -como venimos haciendo hasta el momento- que el caudal económico fluye por los ejes comunicativos de un modo permanente y "continuo", contemplamos el flujo de un modo "discreto" habrá que abandonar la concepción hidrodinámica del fenómeno para enfocarlo desde la perspectiva poissoniana de los fenómenos de espera o de la Teoría de Colas.

De este modo, entenderemos por "flujo económico de sucesos" a una sucesión de éstos (llegadas de bienes, servicios o información) a intervalos aleatorios o determinados; supondremos que estos sucesos son entre sí homogéneos, por lo que el flujo se denominará así y se representará por la sucesión de puntos indicativos de los instantes temporales en que aquellos sucesos se producen: t_1, t_2, ..., t_r, ..., t_n, ... El flujo económico se dirá **regular** si los sucesos acaecen en intervalos de tiempo determinados, y **aleatorio** en caso contrario; es obvio que este supuesto parece el primero, por lo que a él nos referiremos. A tal efecto, estableceremos las siguientes definiciones:

1. *Flujos estacionarios:* Un flujo económico se dirá "estacionario" cuando la probabilidad de que en un intervalo de tiempo τ se produzca un cierto número de sucesos depende exclusivamente de la amplitud de ese intervalo y no de su posición relativa en el tiempo. Esto equivale a decir que el flujo posee una densidad constante, expresada como el número medio de demandas (o llegadas al sistema) por unidad de tiempo.

2. *Flujos autónomos:* Son aquellos en que el número de sucesos que se producen en un intervalo no depende del que acaece en los restantes intervalos, si éstos son disyuntos entre sí y respecto del primero. Esta

condición entraña que los accesos al sistema se verifican con independencia entre sí.

3. *Flujos ordinarios:* Se caracterizan porque la probabilidad de que en un intervalo de tiempo elemental Δt se produzcan dos o más sucesos es despreciable con relación a la de que acaezca uno solo. Es decir, en este tipo de flujos, la llegada al sistema, en cada intervalo elemental de tiempo, tendrá lugar elemento a elemento.

Pues bien, cuando un flujo económico reúne estas tres condiciones simultáneamente, se denomina **flujo simple** o **flujo estacionario de Poisson** (debido a que el número de sucesos que puede producirse en un intervalo fijo cualquiera sigue el proceso estocástico de Poisson). Paralelamente, notemos que este tipo de flujos posee una notable importancia en la teoría de los fenómenos de espera, tanto por su directa aplicación a las cuestiones que ésta aborda, cuanto por la posibilidad de que, en condiciones no muy restrictivas, los flujos económicos territoriales no simples pueden reducirse a los de este carácter.

12.2. EL DESPLAZAMIENTO MEDIANTE "ONDAS ECONÓMICAS"

Veamos, ahora, cómo a través de los ejes comunicativos territoriales se producen desplazamientos de la energía económica; si estos tienen lugar de forma inconstante o "discreta", como por medio de unas ciertas "ondas económicas", se enfocará su estudio desde la perspectiva poissoniana o de la teoría de los fenómenos de espera (FRANQUET, 1990/91). En efecto, imaginemos que en el instante **t** la "onda económica" ha llegado a la distancia **x**, medida desde el origen del eje comunicativo, y que en el instante **t + dt** ha sobrepasado la posición **x** alcanzando la distancia **x + dx**. Desde luego, las "densidades de energía" en dicho eje, debidas al paso de la onda económica, serán:

Instante	**Distancia desde el origen**	
	X	x + dx
t	ρ_{en}	0
t + dt	0	ρ_{en}

, de modo que se ha producido una propagación de la energía económica a una distancia **dx** en un tiempo **dt**, con una velocidad de desplazamiento:

$$v = dx/dt \quad .$$

A partir de estas consideraciones, podremos definir, para este tipo de flujos "discretos" de los sucesos económicos, el concepto de "intensidad de la onda económica": será la energía económica que atraviesa, en la unidad de tiempo, la unidad de sección económica considerada normalmente a la dirección de propagación del flujo económico discontinuo por el eje comunicativo territorial.

En efecto, consideramos un tramo cualquiera de dicho eje y pretendemos determinar la cantidad de energía económica que transcurre por un punto cualquiera o lugar geográfico de dicho eje, en un cierto tiempo **dt**.

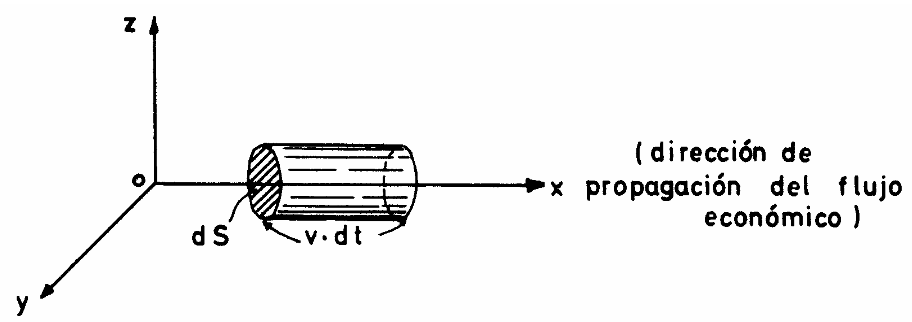


Fig. A-11.22. Cilindro de masa económica.

En un tiempo **dt**, la onda económica se habrá desplazado y la cantidad de energía económica que ha cruzado por la sección dS será la contenida en el cilindro de volumen o masa económica:

$$V\ (€) = v \cdot dt \cdot dS = m$$

Obviamente, la "energía económica" vendrá dada por el producto de dicho volumen económico por la "densidad de energía económica", esto es:

$$dE = v \cdot dt \cdot dS \cdot \rho_{en} = V \cdot \rho_{en} \ ,$$

y la "intensidad de la onda económica", que será la energía económica por unidad de sección económica y por unidad de tiempo, vendrá dada por la expresión:

$$I = \frac{dE}{dS \cdot dt} = \frac{v \cdot dt \cdot dS \cdot \rho_{en}}{dS \cdot dt} = v \cdot \rho_{en}$$

Si representamos, ahora, la intensidad de una onda económica con respecto al tiempo, obtendremos una gráfica del tipo:

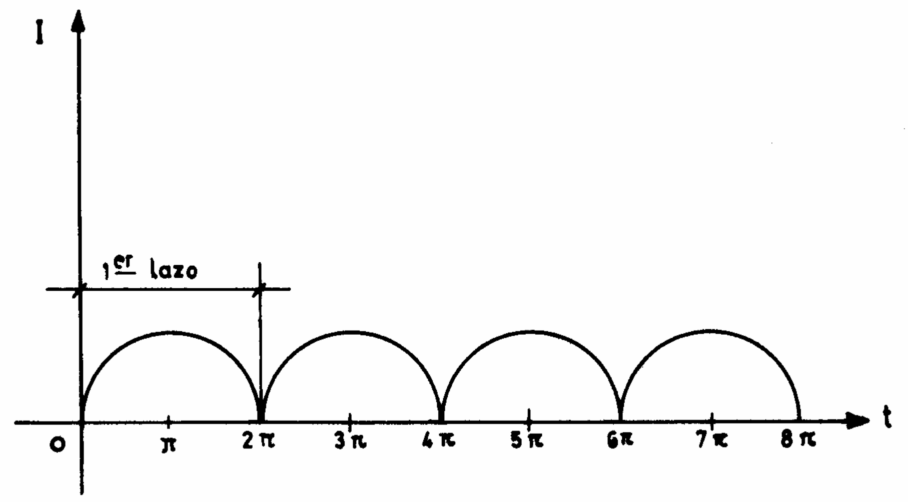


Fig. A-11.23. Representación gráfica de la función cicloide I(t).

Obsérvese, pues, que una onda económica transporta la energía "a golpes" o "pulsaciones" y no de un modo continuo. A esta intensidad de la onda, sería posible asignarle un cierto "vector radiante", cuyo significado físico fuera el que representa la intensidad instantánea de la onda económica, siendo su dirección y sentido los de propagación de la onda económica por el eje comunicativo territorial (eje viario, de telecomunicación o de teleproceso).

12.3. ALGUNAS APLICACIONES DE INTERÉS

A) Si suponemos, por ejemplo, que la figura anterior A-11.23 es una curva cicloide de ecuación (expresada en coordenadas paramétricas):

$$\begin{cases} t = a\cdot(\theta - \text{sen}\,\theta) = g(\theta) \\ I = a\cdot(1 - \cos\theta) = h(\theta) \end{cases}$$

, y tratásemos de calcular, a lo largo de un lazo de dicha curva, la integral curvilínea:

$\int_C (t^2 + I^2)\cdot dl$, se tendría lo siguiente:

$$\int_C (t^2 + I^2)\cdot dl = \int_C [a^2(\theta - \text{sen}\,\theta)^2 + a^2(1 - \cos\theta)^2]\cdot a\cdot \text{sen}\,\theta\cdot d\theta =$$

$$= a^3\int_0^{2\pi} (\theta^2\cdot \text{sen}\,\theta - 2\,\theta\cdot \text{sen}^2\,\theta + 2\,\text{sen}\,\theta - 2\cos\theta\cdot \text{sen}\,\theta)\cdot d\theta =$$

= hemos hallado, los límites de integración, ya que: $I = a(1 - \cos\theta) = 0$;

pero $a \neq 0$; luego: $1 = \cos\theta \rightarrow$ (2 soluciones) $\theta = 0$ y 2π

Integrando por partes, se tendrá:

$$\int \theta^2 \cdot \text{sen}\,\theta \cdot d\theta = \boxed{\begin{array}{c} u = \theta^2 ; du = 2\theta \cdot d\theta \\ dv = \text{sen}\,\theta \cdot d\theta \\ v = -\cos\theta \end{array}} = -\theta^2 \cdot \cos\theta + \int 2\,\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta =$$

$$= \boxed{\begin{array}{c} u = \theta \;\; ; du = d\theta \\ dv = \cos\theta \cdot d\theta \\ v = \text{sen}\,\theta \end{array}} = -\theta^2 \cdot \cos\theta + 2\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta - 2\int \text{sen}\,\theta \cdot d\theta =$$

$$= -\theta^2 \cdot \cos\theta + 2\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta + 2 \cdot \cos\theta + C$$

$$= a^3 \cdot [-\theta^2 \cdot \cos\theta + 2\,\theta \cdot \text{sen}\,\theta + 2\cos\theta]_0^{2\pi} + \ldots = \mathbf{-\,6\pi^2 a^3}\,.$$

B) Considérese, así mismo, las notables aplicaciones que, en el Análisis Territorial, puede tener la integral definida para el cálculo de longitudes de tramos de ejes comunicativos, de fronteras o distancias interterritoriales, etc. (FRANQUET, 1990/91). Y así, veamos que para la curva cicloide que nos acaba de servir de ejemplo, la longitud de un arco de la misma (suponiéndolo asimilable, v. gr., a una frontera municipal o comarcal) se desprenderá de las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} dt = a\,(1 - \cos\theta) \cdot d\theta \\ dI = a \cdot \text{sen}\,\theta \cdot d\theta \end{cases}$$

y por lo tanto: $dS = a\,\sqrt{2 - 2\cos\theta} \cdot d\theta - 2a \cdot \text{sen}\,\theta/2 \cdot d\theta$.

Un arco cualquiera, por ejemplo el primero, varía entre los valores extremos: $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$, con lo que la longitud o distancia pedida, vendrá dada por:

$$\mathbf{S} = 2a \int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta/2 \cdot d\theta = 4\,a\,[-\cos\theta/2]_0^{2\pi} = \mathbf{8\,a}\,.$$

En cualquier caso, para una curva expresada en forma paramétrica, se tendrá, como es sabido:

$$S = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \sqrt{g'(\theta)^2 + h'(\theta)^2} \cdot d\theta \;.$$

En el caso de que la ecuación de la línea o curva territorial que nos ocupa venga expresada en forma explícita, en coordenadas cartesianas rectangulares, siendo y = f(x) una función real, uniforme, continua y derivable, la distancia, siguiendo dicha línea, entre dos puntos del territorio A y B, vendrá dada por la integral definida:

$$S_{\overline{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx = \int_a^b \sqrt{d^2x + d^2y}$$

, y con la representación gráfica:

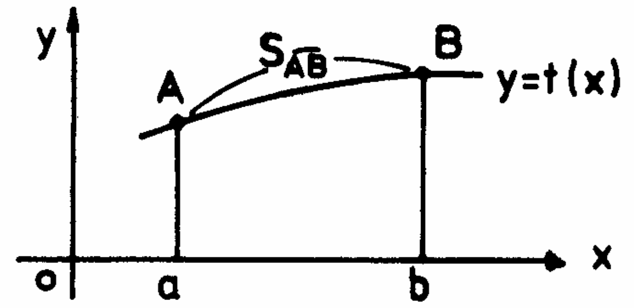


Fig. A-11.24. Distancia entre dos puntos del territorio.

integral que existirá por haber supuesto la continuidad de y'(x), pues, en este caso, es asimismo continua (y por ende integrable) la función:

$$\sqrt{1 + y'^2}$$

Sea, por ejemplo, un eje comunicativo territorial de ecuación:

$$y = x^{3/2} \ ,$$

y se trata de hallar la longitud del tramo de eje comprendido entre los puntos del territorio de abscisas: x = 0 Mm. y x = 5 Mm.

$$dy / dx = 3/2 \cdot x^{1/2} \ ;$$

$$\mathbf{S} = \int_a^b \sqrt{1 + (dy / dx)^2} \cdot dx = \int_0^5 \sqrt{1 + 9x / 4} \cdot dx =$$

$$= 8/27 \, [(1 + 9x / 4)^{3/2}]_0^5 = (335/27) \text{ Mm.} = \mathbf{124'07 \ Km.}$$

Por último, tratándose de curvas planas expresadas en coordenadas polares: $\rho = \rho(\omega)$, dónde: $x = \rho \cdot \cos \omega$; $y = \rho \cdot \operatorname{sen} \omega$,

siendo:

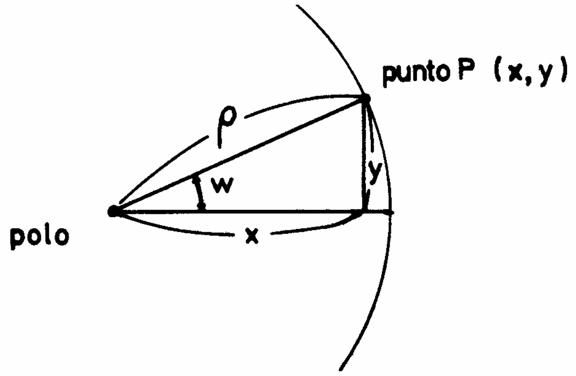


Fig. A-11.25. Transformación de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas polares.

, se tendrá:

$$S_{AB} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \cdot d\omega = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sqrt{\rho^2 \cdot d^2\omega + d^2\rho} \; ;$$

es decir: $$dS = \sqrt{(\rho \cdot d\omega)^2 + d^2\rho} \, .$$

Sea por ejemplo un territorio encerrado por la cardioide:

$$\rho = a\,(1 - \cos\omega) \quad ,$$

y tratamos de hallar el perímetro territorial correspondiente.

Obviamente, la cardioide en cuestión quedará trazada cuando ω varíe entre 0 y 2π, con lo que:

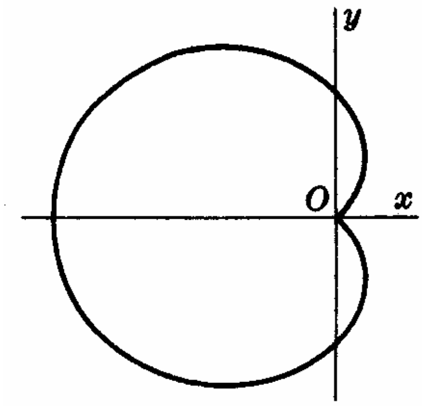


Fig. A-11.26. Territorio de planta de cardioide.

$$\rho^2 + (d\rho / d\omega)^2 = a^2\,(1 - \cos\omega)^2 + (a \cdot \operatorname{sen}\omega)^2 = 4\,a^2 \cdot \operatorname{sen}^2\omega/2 \; .$$

El perímetro buscado vendrá dado por:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (d\rho / d\omega)^2} \cdot d\omega = 2\,a \int_0^{2\pi} \text{sen}\ \omega/2 \cdot d\omega =$$

$$= -4\,a\,[\cos \omega/2]_0^{2\pi} = -4\,a \cdot (-2) = (8\,a) \text{ unidades de longitud.}$$

C) Otra aplicación interesante -que mejor encaja, de hecho, en el posterior Anexo 14-, siguiendo con el mismo ejemplo, sería *la determinación de la superficie del territorio supuestamente encerrado por un arco o lazo de dicha curva y al eje de abscisas OX.* Si consideramos el primer lazo, se tendrá: $0 \leq \theta \leq 2\pi$, con lo que:

$$\begin{cases} g(\theta) = x = a(\theta - \text{sen}\ \theta) \\ h(\theta) = y = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

y el área buscada vendrá dada por:

$$\mathbf{A} = \int_{\theta_0}^{\theta_1} h(\theta) \cdot g'(\theta) \cdot d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} a(1 - \cos \theta) \cdot a(1 - \cos \theta) \cdot d\theta =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^2 \cdot d\theta = a^2\ (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) \cdot d\theta =$$

$$= a^2 \left[\theta - 2\,\text{sen}\ \theta + \int \cos^2 \theta \cdot d\theta\right]_0^{2\pi} .$$

Los valores de las coordenadas correspondientes a los diferentes valores del parámetro θ, serán los siguientes:

θ	**X**	**y**
0	0	0
π / 2	a (π / 2 – 1)	a
π	π · a	2 a
3 π / 2	a (3 π / 2 + 1)	a
2 π	2 π a	0

Teniendo, ahora, en cuenta que:

$$\int \cos^2 \theta \cdot d\theta = \int (1 + \cos 2\theta /2) \cdot d\theta = \theta / 2 + \text{sen}\ 2\,\theta / 4 + C$$

, se tendrá que:

$$\mathbf{A} = a^2 \left[\theta - 2 \text{ sen } \theta + \theta / 2 + \text{sen } 2\theta / 4\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \mathbf{3 \pi a^2} \text{ unidades de superficie.}$$

(normalmente, en el Análisis Territorial, serán Mm^2 ó Km^2).

* * * * *

(*) El tema de las "pérdidas de carga económicas" aquí planteado no es más que una generalización del concepto de "factor de fricción" frecuentemente empleado en los estudios de Análisis Territorial. Pueden, incluso, plantearse submodelos gravitatorios en otros modelos de simulación espacial y prospectivos de la demanda de transporte de mercancías, que contemplen provechosamente la existencia de dichos "factores de fricción" (ALMIRALL, J. Y PARELLADA, M. Revista de Estudios Territoriales, 17: pp. 145-167, 1985). Para ello, debe partirse del conocimiento de una matriz cuadrada que indique los tonelajes (o valores monetarios) desplazados internamente y con el exterior de un territorio, y que se obtendrá por elaboración y expansión de los datos de intercambios de mercancías por carretera y en ferrocarril, conjuntamente con indicadores de la relevancia de cada subdivisión territorial calculados específicamente para el estudio. También se dispondrá de las matrices de tiempos de desplazamiento empleados por carretera en las diferentes zonas, y de distancias a lo largo de las vías principales de comunicación.

Para simular esta matriz base, se preferirá un modelo gravitatorio al más clásico de FRATAR u otro similar basado en factores de crecimiento zonal, debido principalmente a la insensibilidad de estas categorías de modelos a las aperturas de nuevas vías de comunicación, y a su tendencia a perpetuar inalterable un modelo porcentual de desplazamientos prefijado.

El modelo gravitatorio adoptado en el estudio mencionado, tiene la formulación:

$$T_{ij} = G_i = A_j F_{ij} K_{ij} / \Sigma_\alpha F_i\alpha K_i\alpha A\alpha$$

donde:

T_{ij}	= Toneladas/año transportadas entre las zonas i y j.
G_i y A_j	= Totales de la fila y de la columna i-ésima y j-ésima de la matriz, equivalentes respectivamente a la generación y atracción zonal.
F_{ij}	= Factor de fricción del viaje o impedancia del recorrido ("pérdida de carga económica").
K_{ij}	= Factor de ajuste de las desviaciones de la tendencia central.

Los factores de fricción están relacionados con las distancias y el tiempo de recorrido, esto es: $F_{ij} = \varphi (D_{ij}, T_{ij})$, y el criterio de ajuste consistirá en la igualdad del histograma de distancias de desplazamiento entre las matrices original y la simulada. Esta hipótesis será seleccionada tras computar diversas combinaciones distancia-tiempo, y no ser significativa la matriz de tiempos en vehículo particular.

El proceso de ajuste ha iterado las atracciones, al ser un modelo de Furness doblemente constreñido, mediante:

$$G_i = \sum_{\infty} T_{i\alpha}$$

$$A_{j\,(n+1)} = A_j \,.\, (A_j\,(n) / \Sigma\, T_{\alpha j}\,(n)\,)$$

donde A_j son los factores de atracción de la zona j en las iteraciones (n) y (n + 1).

Para los factores de fricción se efectuará un proceso de ajuste mediante estimadores de máxima probabilidad, determinando las nuevas estimaciones de los factores como:

$$F\,(L) = VT\,(L) / AT\,(L)$$

donde F (L) es el factor de fricción de los viajes separados por la impedancia L.

$$VT\,(L) = \sum_{i,j} t_{ij}$$

$\forall$ i, j observados tales que la impedancia sea L.

Debe considerarse que AT (L) es la estimación n-ésima de VT(L).

Este proceso obtiene una matriz de desplazamiento con idéntica distribución de impedancia de recorrido que la original. La concordancia de histogramas, en el estudio mencionado, resultó ser de un 95'8%, y los coeficientes de correlación entre la matriz observada y la estimada fueron superiores al 95%.

La formulación final de los factores de fricción fue la siguiente:

$$F_{ij}\,(T) = 0'385\,(T^{-0'753}) \times \exp\,(-0'152T)$$

Puede verse que la impedancia de viaje es fuertemente disuasoria para el transporte de mercancías, incluso en valores superiores a los usuales para el transporte de viajeros.

Se utilizaron factores de ajuste interzonal específicos siempre que se cumpliesen, a la vez, las siguientes condiciones:

- Que la diferencia entre términos homólogos de las matrices observada y estimada fuese superior a 100.000 Tm/año.

- Que dicha diferencia superase el 20% del término correspondiente de la matriz observada.

Con estos criterios se obtuvieron 18 factores de ajuste, los cuales se explican básicamente por las deficientes comunicaciones, o bien por tratarse de parejas de comarcas unidas directamente por autopista.

ANEXO 12

ANÁLISIS ESTADÍSTICO Y CLASIFICACIÓN COMARCAL

ANEXO 12

ANÁLISIS ESTADÍSTICO Y CLASIFICACIÓN COMARCAL

1. DISTRIBUCIÓN DEMOGRÀFICA MUNICIPAL

La distribución demográfica de los municipios catalanes, según los datos disponibles de referencia, es la siguiente:

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	f_i	$F_i\uparrow$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$	c_i	$h_i = n_i/c_i$
0-250	181	199	36.101	199	0’211	0’211	32.761	6.913	250	0’796
250-500	326	172	56.000	371	0’182	0’393	106.276	19.342	250	0’688
500-2.000	1.027	289	296.661	660	0’306	0’699	1.054.729	321.523	1.500	0’193
2.000-5.000	3.147	126	396.554	786	0’134	0’833	9.903.609	1.327.084	3.000	0’042
5.000-10.000	6.710	68	456.304	854	0’072	0’905	45.024.100	3.241.735	5.000	0’014
10.000-50.000	19.944	71	1.416.036	925	0’075	0’980	398×10^6	29.832.235	40.000	0’002
50.000-1.550.000	180.652	19	3.432.384	944	0’020	1’000	326×10^8	652.702.900	15×10^5	0’000
$\sum_{i=1}^{7}$	6.451	944 $n\Uparrow$	6.090.040		1’000			687.451.732		

Tabla A-12.1. Distribución demográfica municipal.

La tabla anterior se ha realizado basándose en los datos del Padrón Municipal de habitantes de 1996. Fuente: *Institut d’Estudis Catalans*. A partir de ella, se lleva a cabo el cálculo de los parámetros estadísticos más significativos.

a) Media aritmética:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \frac{6.090.040}{944} = 6.451 \text{ hab.}$$

b) Moda:

Como la amplitud de los intervalos de clase es diferente, se tendrá:

$$M_0 = L_{i-1} + \frac{h_{i+1}}{h_{i-1} + h_{i+1}} \times c_i = 500 + \frac{0'042}{0'688 + 0'042} \times 1.500 = 586 \text{ hab.}$$

, lo que desaconseja establecer el tamaño mínimo demográfico del municipio-tipo en 500 habitantes, por su proximidad a la moda actual. El límite de 250 habitantes parece, pues, bastante razonable para promover las agregaciones o fusiones municipales aconsejadas en el denominado “Informe Roca”, mediante el correspondiente Plan, que inducen a la constitución de las Entidades Municipales Descentralizadas en los municipios agregados.

c) Mediana:

$$Me = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 500 + \frac{472 - 371}{289} \times 1.500 = 1.024 \text{ hab.}$$

o sea, que puede afirmarse que el 50% de los municipios catalanes tienen una población inferior a los 1.024 habitantes.

d) Media cuadrática:

$$C = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 \times f_i} = \sqrt{687.451.732} = 26.219 \text{ hab.}$$

e) Medidas de dispersión:

$$\sigma^2 = c^2 - \overline{X}^2 = 687.451.732 - 40.424.164 = 647.027.568 \text{ hab.}^2 \quad \text{(variancia)}$$

$\sigma = 25.437$ hab. (desviación típica o “standard”)

$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100 = \frac{25.437}{6.451} \times 100 = 394\%$ (coeficiente de variación de Pearson)

f) Asimetría:

El primer coeficiente de asimetría de Pearson, ofrece:

$$P_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma} = \frac{6.451 - 586}{25.437} = 0'23 > 0 \quad \text{(existe asimetría a la derecha)}$$

El segundo coeficiente de asimetría o sesgo de Pearson, ofrece:

$$P_2 = \frac{3(\overline{X} - Me)}{\sigma} = \frac{3(6.451 - 1.024)}{25.437} = 0'64 \quad \text{(existe asimetría a la derecha)}$$

g) Cuartiles:

Podríamos, por ejemplo, calcular los cuartiles de esta distribución de frecuencias, así como el correspondiente “coeficiente de sesgo cuartílico”, o sea:

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 250 + \frac{236 - 199}{172} \times 250 = 304 \text{ hab.}$$

lo que indica que el 25% de los municipios actuales tiene una población de menos de 304 habitantes, y el 21’1% de los municipios tienen menos de 250 habitantes. Todo esto aconseja establecer el límite inferior o base demográfica municipal en el entorno de los 250 habitantes. Los municipios fusionados con otros, de esta forma, representarían un total de 202, tal como recomendaba el denominado “Informe Roca”, con lo que el número de municipios catalanes quedaría establecido en 758, según los datos del padrón de la población del año 1996.

Igualmente:

$$Q_3 = L_{i-1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 2.000 + \frac{708 - 660}{126} \times 3.000 = 3.143 \text{ hab.},$$

con un “recorrido semi-intercuartílico” de:

$$R = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{3.143 - 304}{3.143 + 304} = 0'82$$

y con un “coeficiente de sesgo cuartílico” de:

$$P_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{3.143 - 2 \times 1.024 + 304}{3.143 - 304} = 0'49$$

h) Medida de la concentración:

La distribución de la población entre los diferentes municipios se puede evaluar mediante el índice de GINI y la correspondiente curva poligonal de LORENZ para el conjunto de Cataluña. Por lo tanto, hace falta calcular los porcentajes acumulados del número de municipios y de su población (también se podría hacer, v.gr., en relación a su superficie, como de hecho se lleva a efecto en el apartado siguiente de nuestro estudio). Así:

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\frac{n_i}{n}\times 100$	$\frac{x_i n_i}{\sum x_i n_i}\times 100$	p_i	q_i	p_i-q_i
0-250	181	199	36.101	21’1	0’6	21’1	0’6	20’5
250-500	326	172	56.000	18’2	0’9	39’3	1’5	37’8
500-2.000	1.027	289	296.661	30’6	4’9	69’9	6’4	63’5
2.000-5.000	3.147	126	396.554	13’4	6’5	83’3	12’9	70’4
5.000-10.000	6.710	68	456.304	7’2	7’5	90’5	20’4	70’1
10.000-50.000	19.944	71	1.416.036	7’5	23’3	98’0	43’7	54’3
50.000-1.550.000	180.652	19	3.432.384	2’0	56’3	100	100	0
$\sum_{i=1}^{7}$	6.451	n $\Downarrow$ 944	6.090.040	100%	100%	502’1		316’6

Tabla A-12.2. Tabla de cálculo del índice de Gini poblacional.

Según la fórmula dada por Pulido, el valor del índice de GINI, en este caso, será de:

$$\boxed{G = \frac{\sum_{i=1}^{6}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{6} p_i} = \frac{316'6}{402'1} = 0'79}$$

Por otra parte, el índice de LORENZ será:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{6} q_i}{q_7}\text{; però amb } n = 7 \text{ i } q_7 = 100\text{, se tiene :}$$

$$L = 1 - \frac{2}{6} \times \frac{\sum_{i=1}^{6} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{6} q_i}{300}\text{, o sea :}$$

$$\boxed{L = 1 - \frac{85'5}{300} = 0'715}$$

La curva de LORENZ correspondiente, es la siguiente:

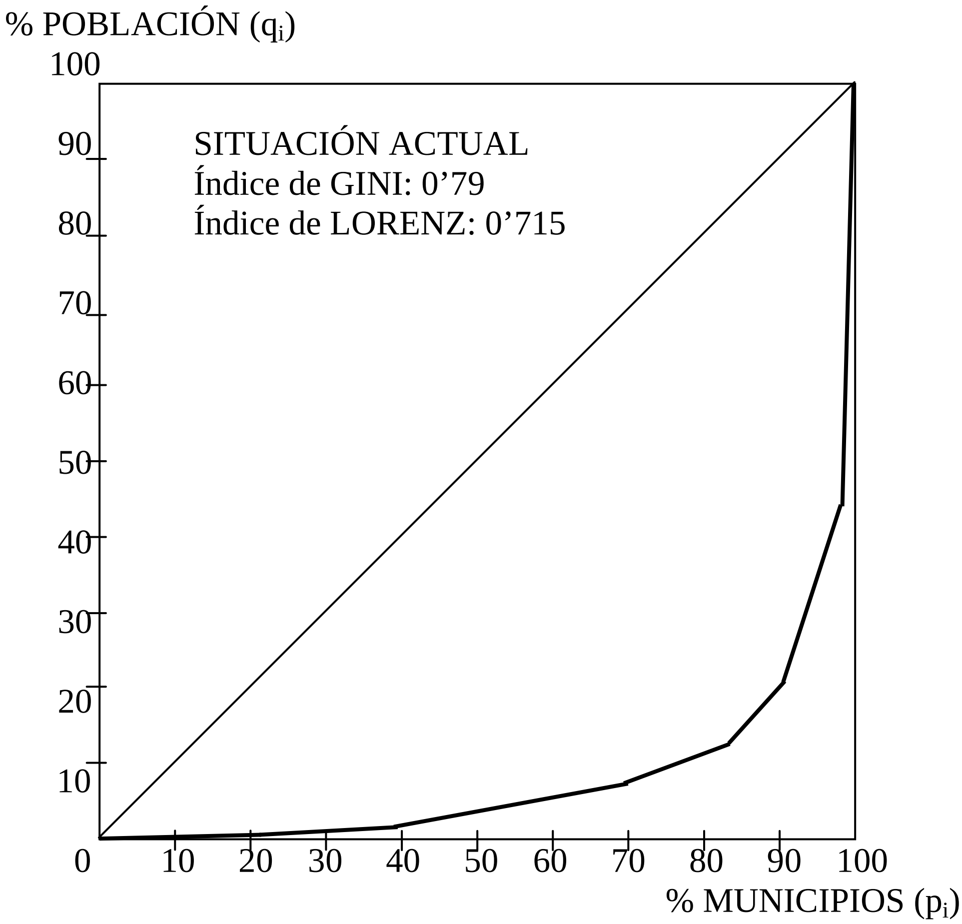


Fig. A-12.1. Curva de Lorenz de la distribución demográfica municipal.

i) “Coeficiente de uniformidad territorial”:

Este doctorando propone y define el concepto de “coeficiente de uniformidad territorial” como medida de la uniformidad en la distribución de las masas demográficas para un cierto territorio, de sentido contrario justamente al grado de variabilidad de las mismas[12].

En el análisis estadístico que hemos efectuado calculamos -entre otras determinaciones del valor central y medidas de dispersión absolutas y relativas-, el valor del coeficiente de variación de Pearson (CV), que, como es sabido, se trata de una medida abstracta, profusamente utilizada, de dispersión relativa de los valores de la variable aleatoria estadística (población municipal) que se analiza; en nuestro caso, dicha variable no es otra que la población de los municipios del territorio en estudio (Cataluña).

Parece obvio reconocer que el territorio en cuestión se encontrará tanto más “equilibrado” cuanto menores sean los valores de su correspondiente CV, o sea, cuanto menores sean las diferencias poblacionales entre los municipios que existen o componentes. Cabe destacar, del coeficiente escogido como

[12] *Vide* el Anexo 15 de esta misma tesis doctoral.

medida de la variabilidad, su adimensionalidad, es decir, su independencia de las unidades de medida, lo que permite la comparación entre grupos diferentes de datos, un hecho que, por cierto, no resulta posible establecer mediante el uso exclusivo de la varianza o de su raíz cuadrada: la desviación típica o “standard”.

De esta manera, se puede definir el siguiente “coeficiente de uniformidad medio” de las poblaciones para cada uno de los territorios que son objeto de nuestro estudio, a saber:

$$CU = 100\,(1 - 0'92 \cdot CV)$$

Como resultado de la aplicación mencionada, se obtiene:

$$\overline{\mathbf{CU}} = 100\,(1 - 0'92 \times 3'94) = \mathbf{-\,263\ \%}$$

Esta cantidad negativa es debida a que el pertinente coeficiente de variación -o, al fin y al cabo, el grado de dispersión de la población por el territorio- es bastante grande, lo que sucederá en territorios fuertemente desequilibrados desde la perspectiva analizada, como justamente es el caso del que ahora nos ocupa.

2. DISTRIBUCIÓN SUPERFICIAL MUNICIPAL

2.1. SITUACIÓN ACTUAL

La distribución actual de los municipios catalanes, según los datos disponibles en cuanto a su extensión superficial, obrantes en otros apartados de nuestro estudio, es la siguiente:

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	f_i	$F_i\uparrow$	x_i^2	$x_i^2 \cdot f_i$	c_i	$h_i=n_i/c_i$
0-5	3’33	44	146’3	44	0’047	0’047	11’09	0’52	5	8’80
5-10	7’63	135	1.030’7	179	0’143	0’190	58’22	8’33	5	27’00
10-15	12’50	128	1.600’0	307	0’136	0’326	156’25	21’25	5	25’60
15-20	17’19	110	1.890’6	417	0’117	0’443	295’50	34’57	5	22’00
20-30	24’79	158	3.917’0	575	0’167	0’610	614’54	102’63	10	15’80
30-50	38’30	182	6.971’4	757	0’193	0’803	1.466’89	283’11	20	9’10
50-100	66’76	137	9.146’8	894	0’145	0’948	4.456’90	646’25	50	2’74
100-200	126’07	43	5.550’2	937	0’045	0’993	15.893’64	715’21	100	0’43
200-300	218’18	6	1.309’1	943	0’006	0’999	47.602’51	285’62	100	0’06
300-305	302’00	1	302’0	944	0’001	1’000	91.204’00	91’20	5	0’20
TOTAL	33’75	n = 944	31.864’1		1’000			2.188’69		

Tabla A-12.3. Distribución superficial municipal.

a) Media aritmética:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i n_i}{n} = \frac{31.864'1}{944} = 33'75 \text{ Km}^2$$

b) Moda:

Como la amplitud de los 10 intervalos de clase es diferente, se tendrá:

$$M_0 = L_{i\text{-}1} + \frac{h_{i+1}}{h_{i\text{-}1} + h_{i+1}} \times c_i = 30 + \frac{2'74}{15'80 + 2'74} \times 20 = 32'96 \text{ Km}^2$$

c) Mediana:

$$Me = L_{i\text{-}1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i\text{-}1}}{n_i} \times c_i = 20 + \frac{472 - 417}{158} \times 10 = 23'48 \text{ Km}^2.$$

d) Media cuadrática:

$$C = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} x_i^2 \times f_i} = \sqrt{2.188'69} = 46'78 \text{ Km}^2.$$

e) Medidas de dispersión:

$\sigma^2 = c^2 - \overline{X}^2 = 2.188'69 - 1.139'06 = 1.049'63 \text{ Km.}^4$ (variancia)

$\sigma = 32'40 \text{ Km}^2.$ (desviación típica o "standard")

$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100 = \frac{32'40}{33'75} \times 100 = 96\%$ (coeficiente de variación de Pearson)

f) Asimetría:

El primer coeficiente de asimetría de Pearson, ofrece:

$P_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma} = \frac{33'75 - 32'96}{32'40} = 0'02 > 0$ (existe ligera asimetría a la derecha)

El segundo coeficiente de asimetría o sesgo de Pearson, ofrece:

$P_2 = \frac{3(\overline{X} - Me)}{\sigma} = \frac{3(33'75 - 23'48)}{32'40} = 0'95 > 0$ (existe asimetría a la derecha)

g) Cuartiles:

Podríamos, por ejemplo, calcular los cuartiles de esta distribución de frecuencias, así como el correspondiente "coeficiente de sesgo cuartílico", o sea:

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 10 + \frac{236 - 179}{128} \times 5 = 12'23\ \mathrm{Km}^2.$$

lo que indica que el 25% de los municipios actuales tienen una superficie de menos de 12'23 Km^2, y el 19% de los municipios de Cataluña tienen menos de 10 Km^2.

Igualmente, el cálculo del valor del tercer cuartil de la presente distribución de frecuencias ofrece:

$$Q_3 = L_{i-1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 30 + \frac{708 - 575}{182} \times 20 = 44'62\ \mathrm{Km}^2.,$$

con un "recorrido semi-intercuartílico" de:

$$R = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{44'62 - 12'23}{44'62 + 12'23} = 0'57$$

y un "coeficiente de sesgo cuartílico" de:

$$P_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{44'62 - 2 \times 23'48 + 12'23}{44'62 - 12'23} = 0'31$$

h) Medida de la concentración:

La distribución de la superficie entre los diferentes municipios también se puede evaluar mediante el índice de GINI y la correspondiente curva poligonal de LORENZ para el conjunto de Cataluña. Hará falta, para ello, calcular los porcentajes acumulados del número de municipios y de su superficie, tal como ya se ha hecho anteriormente con relación a su población. Así:

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\frac{n_i}{n}\times 100$	$\frac{x_i n_i}{\sum x_i n_i}\times 100$	p_i	q_i	$p_i - q_i$
0-5	3’33	44	146’3	4’7	0’46	4’7	0’46	4’24
5-10	7’63	135	1.030’7	14’3	3’23	19’0	3’69	15’31
10-15	12’50	128	1.600’0	13’6	5’02	32’6	8’71	23’89
15-20	17’19	110	1.890’6	11’7	5’93	44’3	14’64	29’66
20-30	24’79	158	3.917’0	16’7	12’29	61’0	26’93	34’07
30-50	38’30	182	6.971’4	19’3	21’88	80’3	48’81	31’49
50-100	66’76	137	9.146’8	14’5	28’71	94’8	77’52	17’28
100-200	126’07	43	5.550’2	4’5	17’42	99’3	94’94	4’36
200-300	218’18	6	1.309’1	0’6	4’11	99’9	99’05	0’85
300-305	302’00	1	302’0	0’1	0’95	100	100	0
TOTAL	33’75	944	31.864’1	100%	100%	635’9		161’15

Tabla A-12.4. Tabla de cálculo del índice de Gini superficial.

Según la fórmula dada por Pulido, el valor del índice de GINI, en este caso, será de:

$$\boxed{G = \frac{\sum_{i=1}^{9}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{9} p_i} = \frac{161'15}{535'9} = 0'30}$$

Por otra parte, el índice de LORENZ, en este caso, será:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{9} q_i}{q_{10}} \text{; pero con } n = 10 \text{ i } q_{10} = 100\text{, se tiene :}$$

$$L = 1 - \frac{2}{9} \times \frac{\sum_{i=1}^{9} q_i}{100}\text{, o sea :}$$

$$\boxed{L = 1 - \frac{2}{9} \times \frac{374'75}{100} = 0'167}$$

La curva de LORENZ correspondiente, es la siguiente:

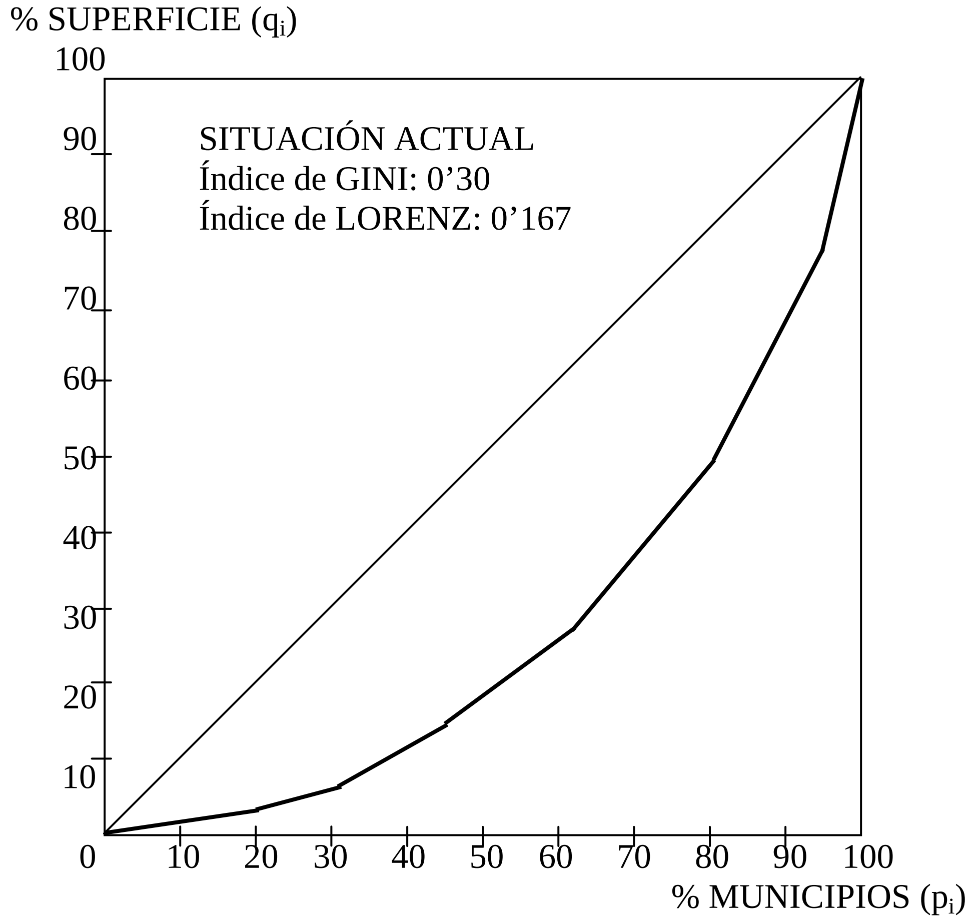


Fig. A-12.2. Curva de Lorenz de la distribución superficial municipal.

i) “Coeficiente de uniformidad territorial”:

Este doctorando propone y define el concepto de “coeficiente de uniformidad territorial” como medida de la uniformidad en la distribución de las superficies de los municipios por un cierto territorio (conjunto de Cataluña), justamente de sentido contrario al grado de variabilidad de las mismas.

En el análisis estadístico que hemos efectuado calculamos -entre otras determinaciones del valor central y medidas de dispersión absolutas y relativas-, el valor del coeficiente de variación de Pearson (CV), que, como ya se ha dicho, se trata de una medida abstracta, profusamente empleada, de dispersión relativa de los valores de la variable aleatoria estadística (superficie municipal) que se analiza; en nuestro caso, dicha variable no es otra que la superficie de los municipios del territorio en estudio (Cataluña).

También aquí parece obvio reconocer que el territorio en cuestión se encontrará tanto o más “equilibrado” cuanto menores sean los valores de su correspondiente CV, o sea, cuanto menores sean las diferencias superficiales entre los municipios que abarca.

De esta manera, se puede definir el siguiente “coeficiente de uniformidad medio” superficial para el conjunto de los municipios que son objeto de nuestro estudio, a saber:

$$\boxed{\overline{CU} = 100\,(1 - 0'92 \cdot CV)}$$

Como resultado de la susodicha aplicación, se obtiene el valor:

$$\overline{\mathbf{CU}} = 100\,(1 - 0'92 \times 0'96) = \mathbf{11'68\ \%}\ ,$$

lo que nos indica un grado apreciable de uniformidad territorial por lo que se refiere a la variable territorial “superficie municipal”.

3. DETERMINACIÓN DEL“ÍNDICE DE MASA COMARCAL”

3.1. ANÁLISIS ESTADÍSTICO SIMPLIFICADO DE LA VARIABLE “POBLACIÓN COMARCAL”

3.1.1. Situación actual

En base a los datos poblacionales del censo de 1996, teniendo en cuenta las comarcas clásicas definidas en las LOT-87, más las tres posteriormente creadas, se tiene la siguiente distribución de frecuencias (excluyendo, por razones obvias, la comarca del Barcelonès).

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	c_i
0-5.000	3.542	1	3.542	1	5.000
5.000-20.000	13.223	11	145.457	12	15.000
20.000-50.000	33.359	10	333.594	22	30.000
50.000-100.000	80.057	7	560.397	29	50.000
100.000-350.000	176.295	9	1.586.653	38	250.000
350.000-700.000	664.510	2	1.329.019	40	350.000
$\sum$	X = 98.967	n = 40	3.958.662		

Fuente: “Les comarques i els municipis de Catalunya” (M. Salvador Segarra) y elaboración propia.

Tabla A-12.5. Tabla de cálculo de la variable “población comarcal”.

3.1.2. Media aritmética

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{3.958.662}{40} = 98.967\ \text{hab.}$$

3.1.3. Mediana

$$Q_2 = Me = L_{i\text{-}1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i\text{-}1}}{n_i} \times c_i = 20.000 + \frac{20-12}{10} \times 30.000 = 44.000 \text{ hab.}$$

3.1.4. Cuartiles

El primer cuartel de la distribución de frecuencias, será:

$$Q_1 = L_{i\text{-}1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i\text{-}1}}{n_i} \times c_i = 5.000 + \frac{10-1}{11} \times 15.000 = 17.273 \text{ hab.}$$

El tercer cuartil, será:

$$Q_3 = L_{i\text{-}1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i\text{-}1}}{n_i} \times c_i = 100.000 + \frac{30-29}{9} \times 250.000 = 127.778 \text{ hab.}$$

Además, Q_0 = 3.542 habitantes ("Alta Ribagorça") y Q_4 = 685.600 habitantes ("Vallès Occidental"). Con el siguiente esquema de la distribución poblacional comarcal:

PUNTUACIÓN	0	1	2	3	4
	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
CUARTILES	(3.542)	(17.273)	(44.000)	(127.778)	(685.600)

3.2. ANÁLISIS ESTADÍSTICO SIMPLIFICADO DE LA VARIABLE "SUPERFICIE COMARCAL"

3.2.1. Situación actual

En base a los datos superficiales, teniendo en cuenta las comarcas clásicas definidas en las LOT-87, más las tres posteriormente creadas, se tiene la siguiente distribución de frecuencias (excluyendo, por razones obvias, la comarca del Barcelonès).

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	c_i
0-400	293’47	6	1.760’8	6	400
400-800	622’47	18	11.204’4	24	400
800-1.200	958’38	8	7.667’0	32	400
1.200-1.600	1.341’03	7	9.387’2	39	400
1.600-2.000	1.733’00	1	1.733’0	40	400
$\sum$	X = 739’81	n = 40	31.752’4		

Fuente: “Les comarques i els municipis de Catalunya” (M. Salvador Segarra) y elaboración propia.

Tabla A-12.6. Tabla de cálculo de la variable “superficie comarcal”.

3.2.2. Media aritmética

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{31.752'4}{40} = 739'81\,\mathrm{Km}^2.$$

3.2.3. Mediana

$$Q_2 = Me = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 400 + \frac{20-6}{18} \times 400 = 555'56\,\mathrm{Km}^2.$$

3.2.4. Cuartiles

El primer cuartel de la distribución de frecuencias, será:

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 400 + \frac{10-6}{18} \times 400 = 488'89\,\mathrm{Km}^2.$$

El tercer cuartil, será:

$$Q_3 = L_{i-1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 800 + \frac{30-24}{8} \times 400 = 1.100'00\,\mathrm{Km}^2.$$

Además, Q_0 = 184’1 Km^2 (“Garraf”) y Q_4 = 1.733’0 Km^2 (“Noguera”). Con el siguiente esquema de la distribución superficial comarcal:

PUNTUACIÓN	0	1	2	3	4
	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
CUARTILES	(184’10)	(488’89)	(555’56)	(1.100’00)	(1.733’00)

3.3. ANÁLISIS ESTADÍSTICO SIMPLIFICADO DE LA VARIABLE “PIB COMARCAL”

3.3.1. Situación actual (1999, expresada en millones de euros)

La evolución del Producto Interior Bruto total, en el periodo 1993-1999, expresado en millones de pesetas constantes del año 1986, para todas y cada una de las 41 comarcas clásicas del Principado, queda reflejada en la siguiente tabla cuya fuente es *Caixa de Catalunya (2000)*, y que nos dará una medida de la variable “PIB comarcal”:

							1999	
Comarca	1993	1994	1995	1996	1997	1998	En ptas.	En euros
Alt Camp	53.375	55.770	58.820	58.638	61.414	64.317	66.171	397,7
Alt Empordà	107.144	112.055	117.056	120.369	124.122	128.717	134.652	809,3
Alt Penedès	76.053	77.853	79.118	80.264	83.302	86.504	90.329	542,9
Alt Urgell	22.625	22.891	23.616	24.281	24.875	25.617	26.207	157,5
Alta Ribagorça	4.367	4.413	4.306	4.523	4.522	4.570	4.739	28,5
Anoia	84.224	86.182	88.658	89.074	92.552	96.360	98.715	593,3
Bages	153.297	157.131	162.917	165.019	171.134	178.213	183.772	1.104,5
Baix Camp	171.125	176.252	181.673	186.065	192.793	199.048	205.835	1.237,1
Baix Ebre	76.801	77.897	82.339	83.273	86.954	90.204	92.585	556,4
Baix Empordà	101.828	105.629	110.952	112.947	116.897	122.593	128.046	769,6
Baix Llobregat	546.852	564.643	589.258	599.268	625.456	658.237	686.103	4.123,6
Baix Penedès	49.512	50.947	53.296	53.432	55.520	58.099	60.837	365,6
Barcelonès	2.719.902	2.796.474	2.899.250	2.959.187	3.073.789	3.182.094	3.288.739	19.765,7
Berguedà	37.499	38.063	38.509	39.342	40.648	41.984	42.874	257,7
Cerdanya	14.283	15.016	15.337	15.660	16.086	16.591	17.270	103,8
Conca de Barberà	20.992	21.956	23.081	23.204	24.069	25.290	25.868	155,5
Garraf	72.779	75.236	77.827	79.362	82.868	86.407	90.632	544,7
Garrigues	15.452	15.824	16.124	17.356	17.672	18.162	18.459	110,9
Garrotxa	56.755	58.654	60.483	61.377	63.697	66.259	68.050	409,0
Gironès	172.072	177.878	186.053	190.639	197.997	205.736	212.286	1.275,9
Maresme	259.837	269.774	276.512	278.776	289.575	302.437	311.821	1.874,1
Montsià	59.244	59.410	61.438	61.950	64.158	66.672	68.788	413,4
Noguera	32.226	33.266	33.693	35.187	35.939	37.385	37.899	227,8
Osona	133.608	137.810	141.593	144.033	149.212	154.801	158.485	952,5
Pallars Jussà	13.887	13.671	13.553	14.170	14.344	14.549	14.809	89,0
Pallars Sobirà	5.902	5.873	5.907	6.200	6.177	6.253	6.510	39,1
Pla d'Urgell	30.929	31.218	32.043	32.901	33.583	34.893	35.817	215,3
Pla de l'Estany	24.260	24.835	26.289	26.812	27.738	28.856	30.016	180,4
Priorat	8.428	8.645	8.794	8.909	9.413	9.674	9.814	59,0
Ribera d'Ebre	47.364	48.341	49.833	52.439	54.164	55.627	57.052	342,9
Ripollès	31.929	32.653	34.313	34.804	36.012	37.092	38.176	229,4
Segarra	22.267	22.536	22.796	23.375	24.177	25.236	25.589	153,8
Segrià	185.459	192.707	194.928	201.812	205.767	212.882	218.803	1.315,0
Selva	118.721	123.622	128.867	130.791	135.105	140.466	146.223	878,8
Solsonès	12.848	12.781	12.925	13.350	13.610	14.165	14.554	87,5
Tarragonès	253.828	261.525	273.505	280.488	291.282	300.400	311.159	1.870,1
Terra Alta	12.044	11.898	12.345	12.649	13.283	13.734	13.866	83,3
Urgell	31.823	32.025	32.773	33.809	34.874	36.311	37.173	223,4
Val d'Aran	9.840	10.251	10.697	11.021	11.240	11.489	11.811	71,0
Vallès Occidental	682.093	705.375	733.960	743.279	774.654	811.447	840.433	5.051,1
Vallès Oriental	307.057	317.815	333.627	337.883	352.303	368.993	383.647	2.305,8
Catalunya	**6.840.531**	**7.046.795**	**7.309.064**	**7.447.918**	**7.732.977**	**8.038.364**	**8.314.614**	**49.971,8**

Tabla A-12.7. Evolución del PIB comarcal en el período 1993-99.

Ahora, en base a los datos del PIB comarcal, teniendo en cuenta las comarcas clásicas definidas en las LOT-87, más las otras tres creadas con posterioridad, se tiene la siguiente distribución de frecuencias (excluyendo, por razones obvias, la comarca del Barcelonès).

Operando en millones de euros sobre la base de pesetas constantes del año 1986, se tiene:

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	c_i
0-500	191’37	23	4.401’5	23	500
500-1.000	705’94	8	5.647’5	31	500
1.000-2.000	1.446’22	6	8.677’3	37	1.000
2.000-4.000	2.305’80	1	2.305’8	38	2.000
4.000-6.000	4.587’35	2	9.174’7	40	2.000
$\sum$	X = 755’17	n = 40	30.206’8		

Fuente: “Anuari Econòmic Comarcal 2000” (Caixa de Catalunya) y elaboración propia.

Tabla A-12.8. Tabla de cálculo de la variable “PIB comarcal”.

3.3.2. Media aritmética

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{30.206'8}{40} = 755'17 \text{ millones de euros.}$$

3.3.3. Mediana

$$Q_2 = Me = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 0 + \frac{20-0}{23} \times 500 = 434'78 \text{ millones de euros.}$$

3.3.4. Cuartiles

El primer cuartel de la distribución de frecuencias, será:

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 0 + \frac{10-0}{23} \times 500 = 217'39 \text{ millones de euros.}$$

El tercer cuartil, será:

$$Q_3 = L_{i-1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 500 + \frac{30-23}{8} \times 500 = 937'50 \text{ millones de euros.}$$

Además, Q_0 = 28’5 millones de euros (“Alta Ribagorça”) y Q_4 = 5.051’1 millones de euros (“Vallès Occidental”). Con el siguiente esquema de la distribución del PIB comarcal:

PUNTUACIÓN	0	1	2	3	4
	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
CUARTILES	(28’50)	(217’39)	(434’78)	(937’50)	(5.051’10)

3.4. ANÁLISIS ESTADÍSTICO SIMPLIFICADO DE LA VARIABLE “INVERSIÓN DE LA GENERALITAT EN EL BIENIO 1998-99”

3.4.1. Situación actual

La inversión presupuestada por la Generalitat de Cataluña, en el periodo 1998-1999, expresada en millones de pesetas, para todas y cada una de las 41 comarcas clásicas del Principado, así como su variación porcentual, queda reflejada en la siguiente tabla cuya fuente es *Caixa de Catalunya (2000)*, y que nos dará medida de la variable “Inversión de la Generalitat en el bienio 1998-1999”. Para ello, se han sumado aparte las cifras correspondientes a ambos ejercicios económicos. A saber:

Comarca	1998	1999	Variación %
Alt Camp	597	693	16,1
Alt Empordà	2.650	4.074	53,7
Alt Penedès	819	1.473	79,9
Alt Urgell	505	667	32,1
Alta Ribagorça	6	21	250,0
Anoia	4.027	4.930	22,4
Bages	2.880	2.734	–5,1
Baix Camp	1.403	2.324	65,6
Baix Ebre	4.203	2.711	–35,5
Baix Empordà	3.063	2.965	–3,2
Baix Llobregat	15.295	13.044	–14,7
Baix Penedès	2.933	4.040	37,7
Barcelonès	20.567	17.695	–14,0
Berguedà	488	1.271	160,5
Cerdanya	215	914	325,1
Conca de Barberà	98	499	409,2
Garraf	1.451	2.534	74,6
Garrigues	324	913	181,8
Garrotxa	752	605	–19,5
Gironès	3.352	4.484	33,8
Maresme	12.712	2.393	–81,2
Montsià	1.443	267	–81,5
Noguera	4.517	2.553	–43,5
Osona	3.448	3.863	12,0
Pallars Jussà	328	711	116,8
Pallars Sobirà	278	329	18,3
Pla d'Urgell	500	587	17,4
Pla de l'Estany	75	1.958	2.510,7
Priorat	98	466	375,5
Ribera d'Ebre	385	1.076	179,5
Ripollès	627	745	18,8
Segarra	436	109	–75,0
Segrià	4.105	4.362	6,3
Selva	1.384	157	–88,7
Solsonès	744	935	25,7
Tarragonès	4.862	3.301	–32,1
Terra Alta	213	358	68,1
Urgell	155	485	212,9
Val d'Aran	605	689	13,9
Vallès Occidental	6.555	8.816	34,5
Vallès Oriental	4.618	5.121	10,9
Catalunya	**113.716**	**107.872**	**–5,1**

Tabla A-12.9. Evolución de la inversión presupuestada de la Generalitat por comarcas en el bienio 1998-99.

En base a los datos de inversión presupuestada de la Generalitat de Cataluña en el bienio 1998-99, y teniendo en cuenta las comarcas clásicas definidas en las LOT-87 más las otras tres posteriores, se tiene la siguiente distribución de frecuencias (excluyendo, por razones obvias, la comarca del Barcelonés).

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	c_i
0-1.000	507’3	7	3.551	7	1.000
1.000-2.000	1.366’2	14	19.127	21	1.000
2.000-5.000	3.009’3	4	12.037	25	3.000
5.000-10.000	7.483’0	12	89.796	37	5.000
10.000-30.000	19.605’0	3	58.815	40	20.000
$\sum$	X = 4.583’2	n = 40	183.326		

Fuente: “Anuari Econòmic Comarcal de Catalunya” (*Caixa de Catalunya*) y elaboración propia.

Tabla A-12.10. Tabla de cálculo de la variable “inversión comarcal de la Generalitat”.

3.4.2. Media aritmética

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{183.326}{40} = 4.583'2 \text{ millones de pesetas.}$$

3.4.3. Mediana

$$Q_2 = Me = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 1.000 + \frac{20-7}{14} \times 1.000 = 1.928'6 \text{ millones de pesetas.}$$

3.4.4. Cuartiles

El primer cuartil, será:

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 1.000 + \frac{10-7}{14} \times 1.000 = 1.214'3 \text{ millones de pesetas.}$$

El tercer cuartil, será:

$$Q_3 = L_{i\text{-}1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i\text{-}1}}{n_i} \times c_i = 5.000 + \frac{30-25}{12} \times 5.000 = 7.083'3 \text{ millones de pesetas.}$$

Además, Q_0 = 27 millones de PTA ("Alta Ribagorça") y Q_4 = 28.339 millones de PTA ("Baix Llobregat"). Con el siguiente esquema de la distribución de la inversión de la Generalitat:

PUNTUACIÓN	0	1	2	3	4
	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
CUARTILES	(27'0)	(1.214'3)	(1.928'6)	(7.083'3)	(28.339'0)

3.5. ANÁLISIS ESTADÍSTICO SIMPLIFICADO DE LA VARIABLE "NÚMERO DE MUNICIPIOS"

3.5.1. Situación actual

En base a la propuesta del Prof. J. Burgueño que consta en el *Informe sobre la revisió del model d'organització territorial de Catalunya* sobre la agregación o fusión de municipios de población inferior a los 250 habitantes, se tiene la siguiente distribución de frecuencias (excluyendo, por razones obvias, la comarca del Barcelonès).

L_i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	c_i
1-11	7'77	13	101	13	10
12-21	16'46	13	214	26	10
22-31	26'10	10	261	36	10
32-41	37'00	3	111	39	10
42-51	51'00	1	51	40	10
$\sum$	X = 18'45	n = 40	738		

Fuente: Propuesta de Jesús Burgueño a la Comisión de Expertos y elaboración propia.

Tabla A-12.11. Tabla de cálculo de la variable "número de municipios".

3.5.2. Media aritmética

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{738}{40} = 18'45 \text{ municipios} \quad .$$

3.5.3. Mediana

$$Q_2 = Me = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{2} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 12 + \frac{20-13}{13} \times 10 = 17'38 \text{ municipios}.$$

3.5.4. Cuartiles

El primer cuartel de la distribución de frecuencias, será:

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 1 + \frac{10-0}{13} \times 10 = 8'69 \text{ municipios}.$$

El tercer cuartil, será:

$$Q_3 = L_{i-1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \times c_i = 22 + \frac{30-26}{10} \times 10 = 26'00 \text{ municipios} .$$

Además, Q_0 = 3 municipios (“Alta Ribagorça”) y Q_4 = 51 municipios (“Alt Empordà”). Con el siguiente esquema del número de municipios por comarca:

PUNTUACIÓN	0	1	2	3	4
	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
CUARTILES	(3’00)	(8’69)	(17’38)	(26’00)	(51’00)

3.6. EVALUACIÓN DEL ÍNDICE DE MASA COMARCAL

Al objeto de simplificar los cálculos, y por cada uno de los cinco índices resultantes del análisis de cada una de las variables territoriales escogidas, se ha tomado el valor intermedio entre cada dos cuartiles consecutivos, a excepción de las comarcas exactamente coincidentes con ellos. Se han considerado, pues, los cinco índices siguientes, que consideramos suficientemente representativos para medir o cuantificar la realidad territorial comarcal del país:

I_{pob} (Índice de población)

I_{sup} (Índice de superficie)

I_{pib} (Índice del producto interior bruto)

I_{inv} (Índice de inversión de la *Generalitat*)

I_{mun} (Índice del número de municipios)

Como puede verse, los dos primeros son de carácter demográfico y geográfico, los dos siguientes son de carácter económico y el último de tipo administrativo.

La fórmula que proponemos para determinar el índice de masa comarcal final, constituye una media aritmética ponderada que resulta ser la siguiente:

$$I = 0'2\times I_{pob} + 0'2\times I_{sup} + 0'2\times I_{pib} + 0'2\times I_{inv} + 0'2\times I_{mun} ,$$

, donde se han empleado los mismos coeficientes de ponderación (0'2) para cada uno de los 5 índices anteriores (20%), no habiendo otras determinaciones o razones específicas para la diferenciación de esas ponderaciones. Obviamente, el resultado final se puede ajustar mejor, ya sea modificando, en su caso, estos coeficientes de ponderación y/o recalculando con exactitud los diferentes índices. **En cualquier caso, la magnitud del índice final obtenido nos señala aquellas comarcas LOT-87 que son, *a priori*, susceptibles de ser particionadas para la consecución de un mayor equilibrio territorial comarcal en el país, habida cuenta del elevado valor que alcanza su índice de masa comarcal (≥3'0).**

A continuación, se puede ver la tabla resultante de los cálculos de los índices relacionados para cada una de las comarcas clásicas definidas en las LOT-87, habiéndose excluido el Barcelonès por razones obvias, así como una lista jerarquizada de las mismas en base al índice obtenido de masa comarcal con señalamiento de las mayores en letra negrilla. A saber:

Comarcas	I_{pob}	I_{sup}	I_{pib}	I_{inv}	I_{mun}	I
1.Alt Camp	1’5	1’5	1’5	1’5	2’5	**1’7**
2.**Alt Empordà**	2’5	3’5	2’5	2’5	4’0	**3’0**
3.Alt Penedès	2’5	2’5	2’5	2’5	3’0	**2’6**
4.Alt Urgell	1’5	3’5	0’5	0’5	1’5	**1’5**
5.Alta Ribagorça	0’0	0’5	0’0	0’0	0’0	**0’1**
6.Anoia	2’5	2’5	2’5	3’5	2’5	**2’7**
7.**Bages**	3’5	3’5	3’5	2’5	3’5	**3’3**
8.Baix Camp	3’5	2’5	3’5	2’5	2’5	**2’9**
9.Baix Ebre	2’5	2’5	2’5	2’5	1’5	**2’3**
10.Baix Empordà	2’5	2’5	2’5	2’5	3’5	**2’7**
11.**Baix Llobregat**	3’5	0’5	3’5	4’0	3’5	**3’0**
12.Baix Penedès	2’5	0’5	1’5	2’5	1’5	**1’7**
13.Berguedà	1’5	3’5	1’5	1’5	1’5	**1’9**
14.Cerdanya	0’5	1’5	0’5	0’5	1’5	**0’9**
15.Conca de Barberà	1’5	2’5	0’5	0’5	1’5	**1’3**
16.Garraf	2’5	0’0	2’5	2’5	0’5	**1’6**
17.Garrigues	1’5	2’5	0’5	1’5	2’5	**1’7**
18.Garrotas	2’5	2’5	1’5	1’5	2’5	**2’1**
19.**Gironès**	3’5	2’5	3’5	3’5	2’5	**3’1**
20.Marcéeme	3’5	0’5	3’5	3’5	3’5	**2’9**
21.Montsià	2’5	2’5	1’5	1’5	1’5	**1’9**
22.Noguera	1’5	4’0	1’5	2’5	2’5	**2’4**
23.**Osona**	2’5	3’5	3’5	3’5	3’5	**3’3**
24.Pallars Jussà	0’5	3’5	0’5	0’5	0’5	**1’1**
25.Pallars Sobirà	0’5	3’5	0’5	0’5	0’5	**1’1**
26.Pla de l’Estany	1’5	0’5	0’5	2’5	0’5	**1’1**
27.Pla d’Urgell	1’5	0’5	0’5	0’5	1’5	**0’9**
28.Priorat	0’5	1’5	0’5	0’5	1’5	**0’9**
29.Ribera d’Ebre	1’5	2’5	1’5	1’5	1’5	**1’7**
30.Ripollès	1’5	2’5	1’5	1’5	1’5	**1’7**
31.Segarra	1’5	2’5	0’5	0’5	1’5	**1’3**
32.**Segrià**	3’5	3’5	3’5	3’5	3’5	**3’5**
33.Selva	2’5	2’5	2’5	1’5	2’5	**2’3**
34.Solsonès	0’5	2’5	0’5	1’5	0’5	**1’1**
35.Tarragonès	3’5	0’5	3’5	3’5	2’5	**2’7**
36.Terra Alta	0’5	2’5	0’5	0’5	1’5	**1’1**
37.Urgell	1’5	2’5	1’5	0’5	2’5	**1’7**
38.Vall d’Aran	0’5	2’5	0’5	1’5	0’5	**1’1**
39.**Vallès Occidental**	4’0	2’5	4’0	3’5	2’5	**3’3**
40.**Vallès Oriental**	3’5	2’5	3’5	3’5	3’5	**3’3**
I medio	**2’5**	**2’5**	**2’5**	**2’5**	**2’5**	**2’5**

Tabla A-12.12. Índices resultantes de masa comarcal.

Lo que ofrece el siguiente gráfico:

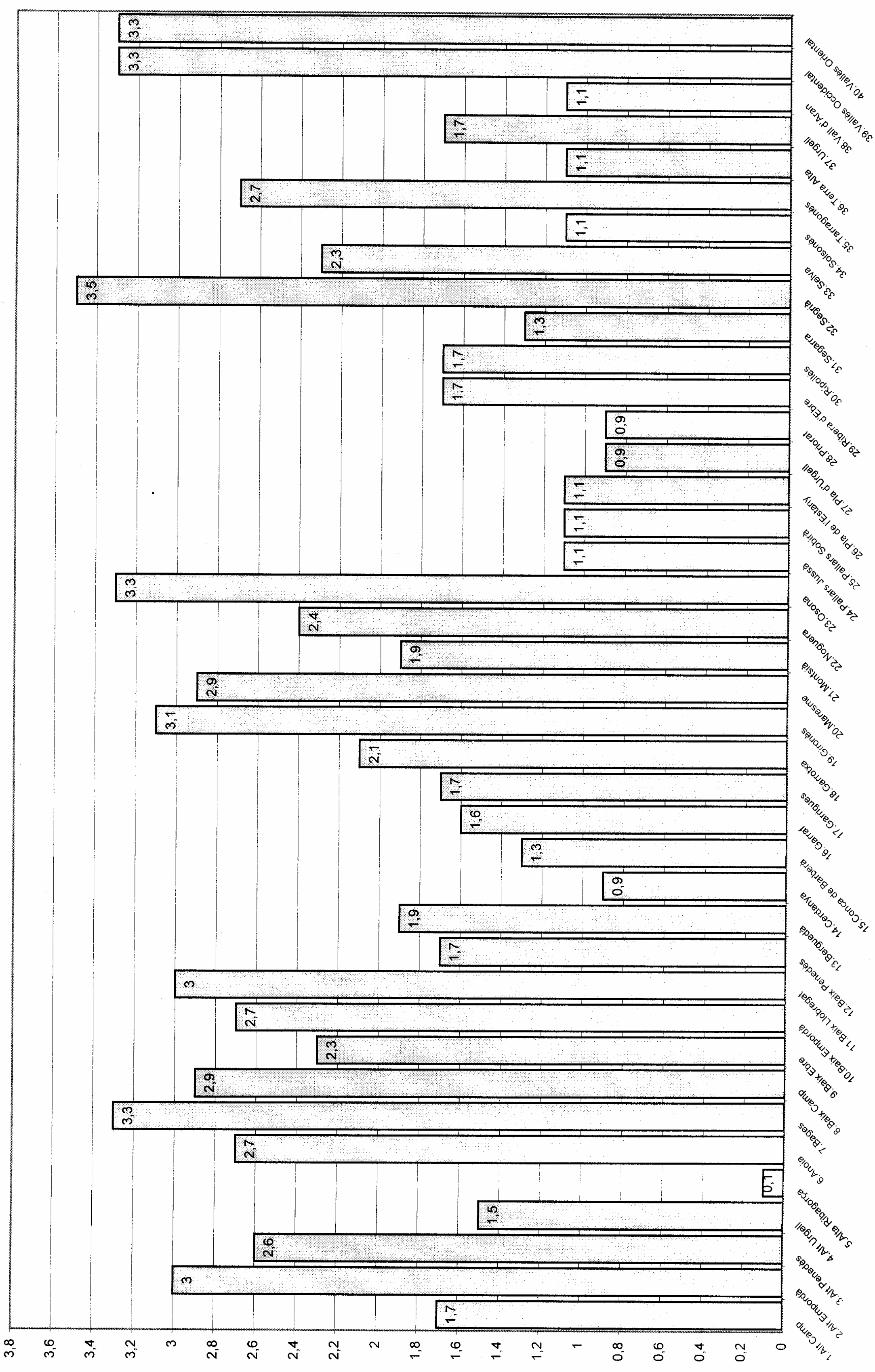


Fig. A-12.3. Comarcas de Cataluña. Índice de masa comarcal.

A continuación, podemos ver el listado de las comarcas jerarquizadas por el valor anteriormente calculado de su *índice de masa comarcal*, y con el señalamiento expreso de aquellas susceptibles de ser particionadas por su excesivo índice de masa comarcal (I ≥ 3’0):

COMARCA	I.M.C. (I)
Segrià	**3’5**
Bages	**3’3**
Osona	**3’3**
Vallès Occidental	**3’3**
Vallès Oriental	**3’3**
Gironès	**3’1**
Alt Empordà	**3’0**
Baix Llobregat	**3’0**
Baix Camp	2’9
Maresme	2’9
Anoia	2’7
Baix Empordà	2’7
Tarragonès	2’7
Alt Penedès	2’6
Noguera	2’4
Baix Ebre	2’3
Selva	2’3
Garrotxa	2’1
Berguedà	1’9
Montsià	1’9
Alt Camp	1’7
Baix Penedès	1’7
Garrigues	1’7
Ribera d’Ebre	1’7
Ripollès	1’7
Urgell	1’7
Garraf	1’5
Alt Urgell	1’4
Conca de Barberà	1’3
Segarra	1’3
Pallars Jussà	1’1
Pallars Sobirà	1’1
Pla de l’Estany	1’1
Solsonès	1’1
Terra Alta	1’1
Vall d’Aran	1’1
Cerdanya	0’9
Pla d’Urgell	0’9
Priorat	0’9
Alta Ribagorça	0’1

Tabla A-12.13. Jerarquización comarcal por el I.M.C.

Veamos, por último, que según el anteriormente citado “Informe sobre la revisión del modelo de organización territorial de Cataluña”, más conocido como “Informe Roca”, se propone la necesidad de incorporar seis nuevas comarcas que vienen detalladas en la siguiente tabla, con especificación de sus comarcas clásicas de procedencia y habiendo señalado en negrilla aquellas comarcas de mayor IMC resultantes de nuestro estudio:

COMARCAS PROPUESTAS	COMARCAS DE PROCEDENCIA	Nº MUNICIPIOS
SEGRE MITJÀ	La Noguera y Alt Urgell	13
BAIX LLOBREGAT NORD	Anoia, Alt Penedès, **Vallès Occidental** y **Baix Llobregat**	14
MOIANÈS	**Osona**, **Bages** y **Vallès Oriental**	10
ALTA SEGARRA	Solsonès, **Bages**, Anoia y Segarra	15
SELVA MARÍTIMA	La Selva y Maresme	13
VALL DE CAMPRODON	Ripollès	6
LLUÇANÈS*	**Osona**, **Bages** y Berguedà	13

(*) Esta comarca no se hallaba expresamente indicada como de posible constitución en el mencionado “Informe Roca”.

Aparte de las citadas, hay que considerar la petición de otras comarcas o subcomarcas que se ha venido produciendo en los últimos tiempos por parte de diversos estamentos, como es el caso del Delta de l’Ebre, Vall de Ribes, Pla de Montserrat, Guilleries-Montseny, Vall de Sió, ...

ANEXO 13

OTRAS ESPECIFICACIONES RESPECTO AL MODELO GRAVITATORIO

ANEXO 13

OTRAS ESPECIFICACIONES RESPECTO AL MODELO GRAVITATORIO

1. LA REPARTICIÓN GRAVITATORIA DE LOS TRIÁNGULOS INTERMEDIOS

1.0. INTRODUCCIÓN

Como tendremos ocasión de ver posteriormente en el caso concreto catalán, la aplicación práctica del modelo de división territorial que aquí se propugna puede inducir la aparición, sobre el mapa del territorio, de espacios vacíos o complementarios de extensión variable y forma triangular, que, obviamente, no deben quedar al margen de la división geométrica resultante. Ello puede presentarse tanto en los procesos de comarcalización como en los de regionalización o municipalización.

Pues bien, en los siguientes epígrafes, desarrollaremos una teoría cuya praxis pueda ser eficiente para la resolución racional de este problema, siguiendo diferentes procedimientos analíticos.

1.1. JUSTIFICACIÓN METODOLÓGICA. ASIGNACIONES PARCIALES

1.1.1. Los problemas métricos mínimo-cuadráticos

La representación gráfica de un triángulo intermunicipal, intercomarcal o interregional cualquiera sobre un plano XOY de coordenadas cartesianas rectangulares o espacio afín euclídeo bidimensional E_2, siendo P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2) y P_3 (x_3, y_3) sus tres vértices conocidos y G (x_0, y_0) su baricentro, centro de gravedad o "centro de masas", puede verse en la página siguiente.

Se desea, en dicho plano, al objeto de proceder a la repartición de la superficie geográfica de dicho triángulo o figura plana entre sus tres comarcas o regiones colindantes A, B y C, resolver un doble problema métrico mínimo-cuadrático, a saber:

1.º) Hallar un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los tres lados o fronteras geométricas comarcales o regionales sea mínima. O bien:

2.º) Hallar el punto o lugar geométrico del plano tal que la suma de los cuadrados de sus distancias a los tres vértices del triángulo sea mínima.

1er. PROBLEMA

a) Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$, o bien, en forma implícita o general:

$$r_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0.$$

Distancia del punto G (x_0, y_0) a dicha recta:

$$d_1 (G,r_1) = \frac{|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

b) Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_3:

$$\frac{x - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_3 - y_1}$$, o bien, en forma implícita o general:

$$r_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Distancia del punto G (x_0, y_0) a dicha recta:

$$d_2 (G,r_2) = \frac{|a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

c) Ecuación de la recta que pasa por los puntos P_2 y P_3:

$$\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}$$, o bien, en forma implícita o general:

$$r_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 = 0.$$

Distancia del punto G (x_0, y_0) a dicha recta:

$$d_3 (G,r_3) = \frac{|a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3|}{\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

Se trataría, pues, de minimizar la expresión cuadrática:

$$D = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \sum_{i=1}^{3} d_i^2$$

, que adquiere cierta complejidad.

2.º PROBLEMA

Mayor interés puede tener, en nuestro caso, la resolución de este segundo problema métrico, habida cuenta de la sencilla obtención de dicho punto por métodos estrictamente geométricos (FRANQUET, 1990/91).

En este caso, se tendrían:

a) Distancia del punto G (x_0, y_0) al punto P_1 (x_1, y_1):

$$d'_1(P_1, G) = \left|\overrightarrow{P_1G}\right| = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2} \quad .$$

b) Distancia del punto G (x_0, y_0) al punto P_2 (x_2, y_2):

$$d'_2(P_2, G) = \left|\overrightarrow{P_2G}\right| = \sqrt{(x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2} \quad .$$

c) Distancia del punto G (x_0, y_0) al punto P_3 (x_3, y_3):

$$d'_3(P_3, G) = \left|\overrightarrow{P_3G}\right| = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2} \quad .$$

Con ello, la expresión a minimizar se convertirá en:

$$D' = d'^2_1 + d'^2_2 + d'^2_3 = \sum_{i=1}^{3} d'^2_i = \sum_{i=1}^{3} \left(\sqrt{(x_0 - x_i)^2 + (y_0 - y_i)^2}\right)^2$$

Genéricamente, la expresión que hay que minimizar será del tipo:

$$Z = S(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right) \quad ;$$

tratándose del mínimo relativo (local) no condicionado de una función real de dos variables reales. La condición necesaria o de primer grado para la existencia de extremo relativo, será:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta Z}{\delta x} = S'_x = 2\sum_{i=1}^{3}(x - x_i) = 2\big((x - x_1) + (x - x_2) + (x - x_3)\big) = 0 \\ \dfrac{\delta Z}{\delta y} = S'_y = 2\sum_{i=1}^{3}(y - y_i) = 2\big((y - y_1) + (y - y_2) + (y - y_3)\big) = 0 \end{cases}$$

de dónde se obtienen las coordenadas buscadas:

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}}$$ que,

como es sabido, corresponden al baricentro del triángulo dado.

Así mismo, la condición suficiente, o de 2º grado, será:

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x^2} = S''_{x^2} = 2\sum_{i=1}^{3}(1) = 6 \quad .$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{\delta^2 Z}{\delta y \cdot \delta x} = \text{(según el lema de Schwärtz)} = 0 \quad .$$

$$\frac{\delta^2 Z}{\delta y^2} = S''_{y^2} = 2\sum_{i=1}^{3}(1) = 6 \quad .$$

El determinante funcional hessiano, ofrecerá:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} S''_{x^2} & S''_{xy} \\ S''_{xy} & S''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \quad ,$$

y, por otra parte, el menor principal de 1er. orden o primer elemento del determinante anterior, ofrece:

$S''_{x^2} = 6 > 0$, luego se trata de un **mínimo relativo o local** en el punto:

G (x_0, y_0).

COMPROBACIÓN: CENTRO DE LAS MASAS SOCIOECONÓMICAS DEL TRIÁNGULO INTER-TERRITORIAL

Como comprobación de lo anteriormente expuesto, determinemos las coordenadas del centro de gravedad del triángulo intermunicipal, intercomarcal o interregional en función de las coordenadas de sus vértices.

Al punto medio M (p,q) del lado $\overline{P_2 P_3}$, corresponde:

$$\overrightarrow{MP_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{MP_3} \quad (1) \quad .$$

Si multiplicamos escalarmente los dos miembros de esta igualdad por el versor o vector unitario correspondiente al vector $\overrightarrow{P_2P_3}$ y representamos por (MP_2) y (MP_3) los productos correspondientes, resulta el parámetro:

$$\frac{(MP_2)}{(MP_3)} = \lambda = -1 \, .$$

Ateniendo a dicha relación, se dice que el punto M(p,q) divide al segmento orientado $\overline{P_2P_3}$ en la razón: $\lambda = -1$. Evidentemente, este valor resulta negativo al ser M un punto interior de dicho segmento, o sea, $M \in \overline{P_2P_3}$, pues los productos escalares (MP_2) y (MP_3) son de signos opuestos. En cambio, si M fuera exterior a dicho segmento (pero sí perteneciente a la recta que determinan los dos anteriores), entonces $\lambda > 0$, pues esos productos tendrían el mismo signo.

Multiplicando escalarmente por $\vec{i}$ y por $\vec{j}$ los dos miembros de la igualdad (1), se obtiene, respectivamente:

$$\begin{cases} (x_2 - p) = \lambda(x_3 - p) \\ (y_2 - q) = \lambda(y_3 - q) \end{cases}$$

de dónde se deducen las coordenadas del punto M:

$$p = \frac{x_2 - \lambda \cdot x_3}{1 - \lambda} \; ; \; q = \frac{y_2 - \lambda \cdot y_3}{1 - \lambda} \quad ; (2)$$

que, en nuestro caso, con $\lambda = -1$, ofrece:

$$p = \frac{x_2 + x_3}{2} \; ; \; q = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

y como sabemos que el baricentro del triángulo se encuentra, sobre una mediana cualquiera, a los 2/3 del vértice y a 1/3 de la base, dividirá a la mediana $\overline{P_1M}$ en la razón:

$$\lambda = \frac{-2/3}{1/3} = -2 \quad ,$$

con lo que, aplicando nuevamente las expresiones (2), se obtendrá:

$$x_0 = \frac{x_1 + 2p}{1 + 2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i}{3}$$

$$y_0 = \frac{y_1 + 2p}{1 + 2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{\sum_{i=1}^{3} y_i}{3}$$

, *luego las coordenadas del baricentro del triángulo inter-territorial son la media aritmética de las coordenadas correspondientes de los tres vértices del mismo,* como queríamos comprobar.

De hecho, el triángulo en cuestión puede descomponerse en franjas paralelas a sus lados, cada una de ellas asimilable a un segmento cuyo centro de gravedad individual se encuentra en su punto medio y, por lo tanto, el centro de gravedad de todo el triángulo se hallará en el baricentro o punto de intersección de sus tres medianas. Dicho centro, además, coincide con el centro de gravedad de tres masas económicas puntuales iguales colocadas en sus vértices (FRANQUET, 1990/91).

Precisamente, una ampliación analítica a lo expuesto en el presente epígrafe, puede efectuarse a partir de la consideración del baricentro como punto de intersección de las tres medianas. Sus ecuaciones serán:

- Recta mediana $\mathbf{m_1}$ que pasa por los puntos P_1 y G:

$$\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_0 - y_1} \quad \text{; esto es:}$$

$$x (y_0 - y_1) - x_1 (y_0 - y_1) - y (x_0 - x_1) + y_1 (x_o - x_1) = 0 \quad ,$$

que desarrollado ofrece:

$$xy_0 - xy_1 - x_1y_0 - x_1y_1 - yx_0 - yx_1) + y_1x_o - y_1x_1) = 0 \quad ,$$

y agrupando términos y simplificando:

$$\underbrace{(y_0 - y_1)}_{A_1} x + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{B_1} y \underbrace{- x_1y_0 + y_1x_o}_{C_1} = 0 \quad ,$$

con ecuación implícita o general:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \ .$$

- Recta mediana **m_2** que pasa por los puntos P_2 y G:

$$\frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_0 - y_2} \quad \text{; esto es:}$$

$$x\,(y_0 - y_2) - x_2\,(y_0 - y_2) - y\,(x_0 - x_2) + y_2\,(x_o - x_2) = 0 \ ,$$

que desarrollado ofrece:

$$xy_0 - xy_2 - x_2y_0 + x_2y_2 - yx_0 + yx_2 + y_2x_o - x_2y_2 = 0 \ ,$$

y agrupando términos y simplificando:

$$(y_0 - y_2)\,x + (x_2 - x_0)\,y - x_2y_0 + y_2x_o = 0 \ ,$$

$$A_2 \qquad\qquad B_2 \qquad\qquad C_2$$

con ecuación implícita o general:

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \ .$$

- Recta mediana **m_3** que pasa por los puntos P_3 y G:

$$\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} = \frac{y - y_3}{y_0 - y_3} \quad \text{; esto es:}$$

$$x\,(y_0 - y_3) - x_3\,(y_0 - y_3) - y\,(x_0 - x_3) + y_3\,(x_o - x_3) = 0 \ ,$$

que desarrollado ofrece:

$$xy_0 - xy_3 - x_3y_0 + x_3y_3 - yx_0 + yx_3 + y_3x_o - x_3y_3 = 0 \ ,$$

y agrupando términos y simplificando:

$$(y_0 - y_3)\,x + (x_3 - x_0)\,y - x_3y_0 + y_3x_o = 0 \ ,$$

$$\boxed{A_3} \qquad\qquad \boxed{B_3} \qquad\qquad \boxed{C_3}$$

con ecuación implícita o general:

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 \ .$$

Evidentemente, la búsqueda analítica del baricentro se limitará a la del punto de intersección de dichas medianas, tomadas dos a dos. En concreto, para la primera y la segunda, se tendrá:

$$\begin{cases} m_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \\ m_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Como aplicación del Teorema de Rouché-Frobenius-Krönecker, se tratará de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, no homogéneo, compatible y determinado, cuya resolución puede efectuarse por aplicación de la Regla de Cramer, del método de la inversión de la matriz o de la triangularización de Gauss.

Llamando (M) a la matriz de los coeficientes de las incógnitas y (A) a la matriz orlada o ampliada con los términos independientes, se tiene:

$$(M) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}; \quad (A) = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

Los rangos o características de dichas matrices son iguales a 2, por lo que su solución única vendrá dada por:

$$x = x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{|M|} \quad ; \quad y = y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{|M|}$$

siempre y cuando el determinante del denominador sea tal que:

$|M| \neq 0$, o sea, cuando (M) es una matriz regular (no singular).

Operaremos del mismo modo con las medianas m_1 y m_3, así como con m_2 y m_3.

Respectivamente, para las tres medianas se tendrán las siguientes ecuaciones en forma continua:

$$m_1 \longrightarrow -\frac{x - x_1}{B_1} = \frac{y - y_1}{A_1} \quad ;$$

Vector de dirección, director o asociado:
$\vec{V}_1 (-B_1, A_1) = (x_0 - x_1 , y_0 - y_1)$.

$$m_2 \longrightarrow -\frac{x - x_2}{B_2} = \frac{y - y_2}{A_2} \quad ;$$

Vector de dirección, director o asociado:
$\vec{V}_2\ (-B_2, A_2) = (x_0 - x_2\ , y_0 - y_2)$.

$$m_3 \longrightarrow -\frac{x - x_1}{B_1} = \frac{y - y_1}{A_1} \quad ;$$

Vector de dirección, director o asociado:
$\vec{V}_3\ (-B_3, A_3) = (x_0 - x_3\ , y_0 - y_3)$.

1.1.2. La asignación o afectación de superficies

A su vez, el triángulo intercomarcal o interregional $\overset{\triangle}{P_1P_2P_3}$ quedará descompuesto, a partir de la determinación de su centro de gravedad, en otros tres subtriángulos que se adjudicarán a cada una de las comarcas o regiones colindantes, con sus áreas respectivas de:

$$\overset{\triangle}{G\,P_1\,P_2} \longrightarrow S_A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\triangle}{G\,P_1\,P_3} \longrightarrow S_B = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\triangle}{G\,P_2\,P_3} \longrightarrow S_C = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

La suma algebraica de dichas áreas nos ofrece la del triángulo inicial, a saber:

$$\overset{\triangle}{P_1\,P_2\,P_3} \longrightarrow S = S_A + S_B + S_C = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Estas expresiones nos permitirán el cálculo de la superficie de dichos triángulos a partir del conocimiento de las coordenadas geográficas o UTM de sus vértices y de su baricentro. De hecho, el área de los triángulos hallados por las anteriores fórmulas podrá ser positiva o negativa, según el orden en que se hayan tomado los vértices. En general, consideraremos el área como una magnitud esencialmente positiva y emplearemos dichas fórmulas para hallar el número de unidades cuadradas, con independencia del signo (FRANQUET, 1990/91).

1.1.3. Criterio de subdivisión en partes proporcionales

En este caso, puede considerarse perfectamente aceptable la repartición del triángulo problema intermunicipal, intercomarcal o interregional $P_1 P_2 P_3$ en partes proporcionales a tres números dados **m, n** y **p,** cuyo valor resulta conocido o se halla prefijado de antemano (que pudieran ser, paradigmáticamente, las superficies de las tres comarcas o regiones colindantes, sus respectivas poblaciones o rentas totales, etc...). Esta división o afijación proporcional (que no es la utilizada en nuestro trabajo, basada, como ya se ha explicado, en la determinación del centro de masas, pero que sí puede revestir interés práctico en ciertas ocasiones) tendría lugar mediante líneas rectas que, partiendo de los tres vértices, concurran en un cierto punto 0 (x_0 , y_0).

Véase, para una mejor comprensión gráfica del presente ejercicio, la figura A-13.1.

Llamando S_A S_B y S_C a las áreas de los tres triángulos que estamos buscando, y S a la del triángulo principal, podemos establecer las siguientes proporciones:

$$\frac{m+n+p}{S} = \frac{m}{S_A} = \frac{n}{S_B} = \frac{p}{S_C}$$

De aquí, resultará que:

$$S_A = \frac{m \times S}{m+n+p}$$, con una altura de valor: $\overline{P_2 a}$.

Pero, observando la figura, tenemos que:

$$S_A = \overline{P_1 P_2} \times \frac{1}{2} \overline{P_2 a}$$, luego:

$$\frac{m \times S}{m + n + p} = \frac{\overline{P_1P_2} \times \overline{P_2a}}{2} \quad \text{, de dónde:}$$

$$\overline{P_2\,a} = \frac{2 \times m \times S}{\overline{P_1P_2} \times (m + n + p)} \quad .$$

Del mismo modo, se tendrá que:

$$S_B = \frac{n \times S}{m + n + p} = \frac{\overline{P_1P_2} \times \overline{P_2a}}{2} \quad \text{; de dónde:}$$

$$\overline{P_3\,b} = \frac{2 \times n \times S}{\overline{P_1P_3} \times (m + n + p)}$$

Podemos, pues calcular $\overline{P_2\,a}$ y $\overline{P_3\,b}$, y trazando a esas distancias sendas rectas paralelas a $\overline{P_1\,P_2}$ y $\overline{P_1\,P_3}$, el punto O(x_0,y_0) en que se encuentran, unido con los vértices P_1, P_2 y P_3, resuelven el problema planteado.

Complementariamente, la resolución gráfica de este problema parte de la división del lado $P_2\,P_3$ en tres partes: P_2 D, DE y EP_3 proporcionales, respectivamente, a las cantidades **m, n** y **p**. Uniendo estos puntos con el vértice P_1 obtendremos tres triángulos cuyas áreas son proporcionales a los números **m**, **n** y **p**, puesto que se trata de triángulos de la misma altura, cuyas superficies serán, en consecuencia, directamente proporcionales a la magnitud de sus bases.

Trazando, ahora, por el punto D (x_4 , y_3), una recta DO paralela a $\overline{P_1\,P_2}$ y por el punto E (x_5 , y_5) otra recta paralela a $\overline{P_1\,P_3}$, el punto de intersección de ambas rectas O (x_0 , y_0) resuelve gráficamente el problema.

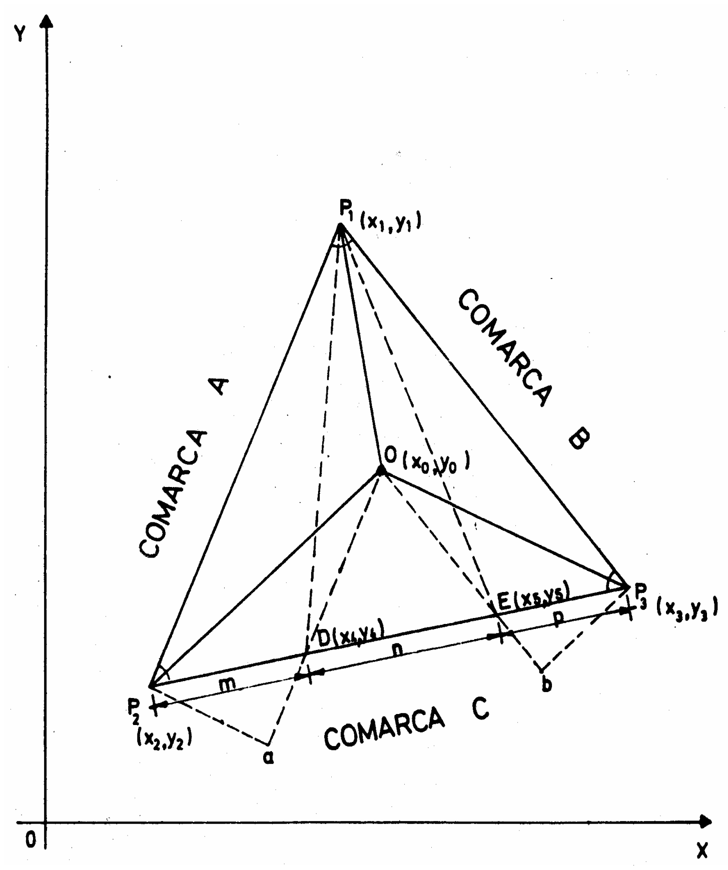


Fig. A-13.1. Criterio de subdivisión del triángulo en partes proporcionales a tres números prefijados.

En efecto, el triángulo $\triangle O P_1 P_2$ es equivalente al triángulo $\triangle D P_1 P_2$ por tener la misma base $\overline{P_1 P_2}$ así como la misma altura, que es la distancia entre las rectas paralelas DO y $P_1 P_2$, de valor:

$$\text{Recta } P_1 P_2 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ldots \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\text{Recta } D O \equiv a_4 x + b_4 y + c_4 = 0 \ldots \frac{x - x_0}{x_4 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_4 - y_0}$$

$$d\,(r_1\,,\,r_4) \;=\; d\,(O,\,r_1) \;=\; \frac{|a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

Igualmente, el triángulo $\overset{\triangle}{O P_1 P_3}$ es equivalente al triángulo $\overset{\triangle}{E P_1 P_3}$ por las mismas razones que en el caso anterior y, por tanto, los terceros triángulos serán también equivalentes. Y como los segundos triángulos hemos visto que son proporcionales a las cantidades prefijadas **m**, **n** y **p**, también los primeros lo serán y, además, resuelven eficazmente las condiciones del problema original.

1.2. ASIGNACIÓN TOTAL DE LA SUPERFICIE

Veamos, por último, que la asignación o afectación objetiva del triángulo intermunicipal, intercomarcal o interregional entre sus tres territorios colindantes puede efectuarse también globalmente a uno cualquiera de ellos, previo el cálculo de los correspondientes momentos territoriales estáticos y de inercia de dicho triángulo o porción del territorio en relación a ejes o puntos concretos del mismo (como pudieran ser, por ejemplo, los lados del propio triángulo, sus vértices o las capitales de los territorios vecinos), lo que nos sugerirá, de algún modo, el grado de atracción que dichas referencias espaciales ejercen sobre el triángulo intermedio problema. La definición de dichos conceptos se realiza en algunos epígrafes siguientes de nuestro estudio (FRANQUET, 1990/91).

Para el logro de mayores especificaciones y detalles sobre este particular, véase el siguiente anexo de nuestro trabajo, donde se desarrolla la teoría correspondiente y algunas aplicaciones numéricas de interés.

2. EL CENTRO TERRITORIAL DE MASAS

2.1. LA CONCEPCIÓN FÍSICO-ESTÁTICA DEL PROBLEMA

2.1.1. Introducción

La determinación del punto de aplicación de la fuerza-peso de un cuerpo cualquiera -que, en nuestro caso, asimilaremos a la comarca o a la región- puede realizarse como resultante de los "pesos" de todas y cada una de las partes en que aquél se supone descompuesto, o sea, los municipios. En este caso, el baricentro recibirá el nombre de "centro de gravedad comarcal o regional".

Desde un punto de vista puramente teórico y simplificativo, la determinación de la posición del "centro de gravedad territorial" podría resultar un problema sencillo si se supone que dicha unidad territorial (comarca, región o nación) es homogénea y posee un centro de simetría, por lo que su centro de gravedad debe coincidir con aquél, dado que la resultante de todos los pesos elementales de las partículas simétricas del territorio estudiado pasará por dicho centro de simetría. Si la comarca o región sólo poseyeran eje de simetría, su centro de gravedad, por razones análogas, debería hallarse situado sobre el expresado eje. No obstante, ni la homogeneidad en la distribución de las masas de población o de renta ni la configuración espacial simétrica constituyen características tradicionales de las unidades territoriales que nos ocupan.

Otro procedimiento, que contempla la posibilidad de la aparición de masas elementales diferentes en el territorio, como son los propios municipios, conllevaría la descomposición en fragmentos municipales cuyo centro de gravedad resulta fácil de determinar (suponiéndolo concentrado, v.gr., en el centro urbano del municipio). Posteriormente, por una simple composición de fuerzas aplicadas en el centro de gravedad de aquellos fragmentos, podría llegarse a determinar la posición exacta del centro de gravedad del conjunto comarcal o regional que, desde luego, *no tiene por qué coincidir con las coordenadas geográficas de la capital de la comarca o de la región.*

Del mismo modo, el centro de masas o centro de gravedad de una región puede encontrarse también determinando primeramente los centros de gravedad comarcales, en los cuales se imaginan reunidas, a su vez, las masas de los grupos de puntos municipales y, estableciendo el centro de gravedad para éstos, se hallaría el centro de gravedad de todo el sistema regional. Ello se deduce, desde luego, de la propia ecuación definitoria del centro de gravedad, dado que en la suma de los momentos se reúnen distintas sumas parciales que pueden ser reemplazadas por los momentos de sus masas reunidas en el centro de gravedad. Puesto que la suma de los momentos de varias componentes puede sustituirse por el momento de su resultante, podremos enunciar que **no se altera el centro de gravedad de un territorio sustituyendo algunas de las masas por su suma concentrada en el mismo.**

Así, imaginemos un sistema de puntos materiales o municipios con las masas: m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n, que serían las rentas familiares disponibles estimadas en el MODELO ESTRUCTURAL por procedimientos directos o indirectos (ver anterior Capítulo 3º), y cuya masa total comarcal es la siguiente:

$$m = m_1 + m_2 + ... + m_i + ... + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \quad .$$

También dichas masas podrían representar poblaciones, depósitos bancarios o cualquiera otra variable de interés geo-económico para nuestro estudio (FRANQUET, 1990).

Dicho sistema determina, por la posición relativa de sus puntos materiales, el "centro comarcal de masas", que quedará definido por la siguiente ecuación:

$$m \cdot \vec{s} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_i \vec{r}_i + \dots + m_n \vec{r}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i ,$$

en donde $\vec{s}$ el es radio vector dirigido hacia el centro de masas comarcal S desde un punto cualquiera del espacio 0, mientras que $\vec{r}_i$ es el radio vector desde el mismo punto del espacio 0 dirigido hacia el punto material o municipio m_i. La suma se extenderá, obviamente, a la totalidad de los municipios de la comarca.

Véase, al respecto, la figura siguiente:

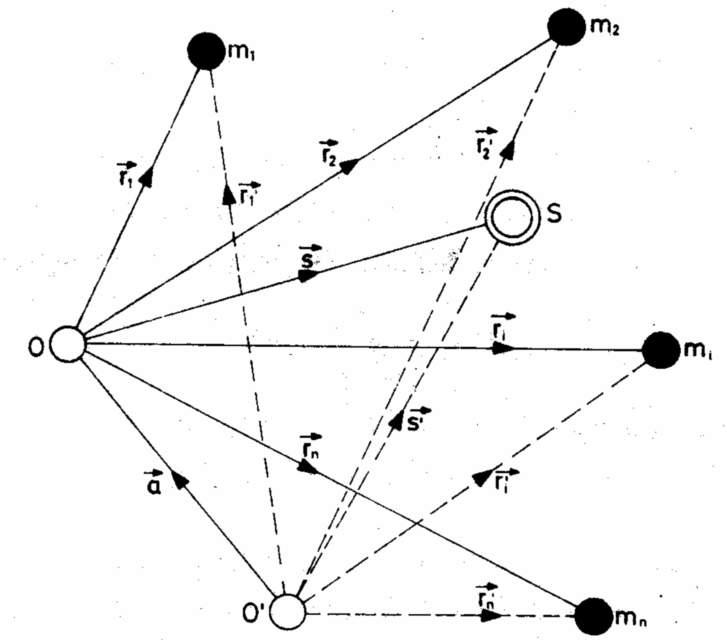


Fig. A-13.2. Sistema municipal (elemental) de masas de renta.

Si aplicamos la anterior ecuación de definición del centro de masas, que representa una masa centrada, a otro cierto punto O' en el espacio, desde el cual se trazan los radios vectores:

$$\vec{r}\,'_i = \vec{a} + \vec{r}_i \text{ , se verificará:}$$

$$m. \ \vec{s}\,' = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}\,'_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (\vec{a} + \vec{r}_i) = m(\vec{a} + \vec{s}) ,$$

con lo cual queda demostrado que el extremo de $\vec{s}\,'$ determina de nuevo el mismo punto S que el extremo del vector $\vec{s}$. *El centro de masas comarcal es, por lo tanto, independiente de la elección del punto de referencia,* y tan sólo queda determinado por las propias masas municipales m_i y por su posición recíproca. Es decir, en todo cambio de ejes, las coordenadas geográficas del centro de masas sufren la misma transformación que las coordenadas de los demás puntos, con lo que el mencionado centro de masas es un punto independiente del sistema de ejes elegidos.

A la expresión m. $\vec{s}$ la denominaremos "momento estático de m referido al punto O". Correlativamente, $m_i\ \vec{r}_i$ será el "momento estático de m_i referido al punto O". Si el punto de referencia coincidiera con el centro comarcal de masas, se verificará la nulidad: $\vec{s}$ = 0, por lo que también:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\ \vec{r}_i = 0\ .$$

Si ahora suponemos, simplificativamente, que el territorio en estudio constituye una espacio continuo y no discreto (lo que no acostumbra a suceder en la realidad), la repartición de las masas municipales en él será homogénea, con lo que, en lugar de la suma de los momentos de los distintos puntos materiales aislados, se tendría la integral:

$$m\ .\vec{s} = \int \vec{r}\ .\, dm\ ,$$

en la cual r representa el radio vector desde el punto común de referencia O hacia el elemento infinitesimal de masa dm.

Si nos encontrásemos en el sencillo supuesto de que todo el sistema regional se considera constituido por sólo 2 comarcas c_1 y c_2 , con los centros de gravedad respectivos S_1 y S_2 , se verificará que:

$$m\ .\ \vec{s} = c_1\ \vec{s}_1 + c_2\ \vec{s}_2\ .$$

Tomando el centro de masas como punto de referencia, se deduce de ello que:

$$0 = c_1\ \vec{s}_1 + c_2\ \vec{s}_2\ ,$$

es decir, que el centro regional de masas de renta se encuentra en la línea de unión de S_1 y S_2, a la que divide en relación inversa a la de masas c_1 y c_2 (la misma relación existe entre 2 fuerzas paralelas de igual sentido P_1 y P_2 y su resultante o componente: $R = P_1 + P_2$, que pasa siempre por un punto situado sobre la línea que une los puntos de aplicación A_1 y A_2 de las fuerzas, y divide al segmento $A_1\ A_2$ en razón inversa a la de ambas fuerzas, de manera que aún en el caso de que giren las fuerzas alrededor de sus puntos de aplicación conservando el paralelismo, la resultante girará de igual modo alrededor del suyo).

En definitiva, la ecuación de definición del centro de gravedad de un territorio F, en representación vectorial, se deducirá de la expresión (que utilizaremos, posteriormente, para definir el "momento territorial estático"):

$$m \cdot \vec{s} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i = \int \vec{r} \cdot dm$$

Así mismo, se pueden también establecer tres ecuaciones componentes. Si (x_S, y_S, z_S) representan las coordenadas del centro de masas y (x_i, y_i, z_i) las coordenadas de los distintos municipios (bien de sus centros urbanos, bien de sus propios centros municipales de masas estáticamente determinados), se tendrá:

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot x_S &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = \int x \cdot dm \\ m \cdot y_S &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i = \int y \cdot dm \\ m \cdot z_S &= \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i = \int z \cdot dm \end{aligned}}$$

, donde la 3.ª coordenada representaría, efectivamente, la cota o altitud relativa de cada municipio (sobre el plano de comparación XOY) o la altitud absoluta del mismo (medida sobre el nivel medio del mar, tal como se ofrece en los resultados de la aplicación del modelo gravitatorio que acabamos de ver). En cualquier caso, creemos justificable el prescindir de esta tercera coordenada en los estudios usuales de ordenación territorial, para evitar complicaciones hasta cierto punto innecesarias en el proceso de cálculo.

En esta tesitura, tienen lugar las siguientes particularidades:

- Si $x_S = 0$, es decir, si el plano YOZ pasa por el centro de gravedad territorial (plano de gravedad), se verificará que:

$$\int x \cdot dm = 0 \ .$$

En general, la distancia x_S del centro de gravedad comarcal o regional a un plano YOZ se deduce de la expresión anteriormente contemplada:

$$m \cdot x_S = \int x \cdot dm \ .$$

- Si $\int x \cdot dm = \int y \cdot dm = 0$, el eje de las Z es una línea de gravedad que pasa por el centro de gravedad territorial.

2.1.2. Momento territorial estático

A la vista de la figura A-13.2, veamos que dada una distribución discreta de masas municipales m_i , aplicadas en los puntos del territorio A_i , y en un punto o lugar geográfico cualquiera, se define el "momento territorial estático de la distribución de masas socioeconómicas", respecto al punto O, por la expresión anteriormente enunciada:

$$\overrightarrow{M_0} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i \quad \text{, en dónde:} \quad \vec{r}_i = OA_i$$

En el caso de una distribución continua de la masa económica, de densidad: $\gamma = \gamma(\vec{r})$, se tendrá:

$$M_0 = \iiint_F \vec{r} \cdot dm = \iiint_F \vec{r} \cdot \gamma \cdot dV \;.$$

Para hallar, ahora, la relación existente entre los momentos territoriales estáticos respecto a dos puntos distintos O y O', comenzaremos por calcular el segundo de ellos, a saber:

$$\overrightarrow{M_{0'}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{O'A_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OA_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{OA_i} =$$

$$= \overrightarrow{O'O} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i + M_0 \;;$$

es decir:

$$\overrightarrow{M_{0'}} = \overrightarrow{M_0} + \overrightarrow{O'O} \cdot m \quad \text{, siendo:} \quad \begin{cases} \overrightarrow{O'O} = \vec{a} \\ \\ \overrightarrow{O'A} = \vec{r}\,'_i \end{cases} ,$$

que podríamos enunciar diciendo que *"el momento territorial estático de una distribución de masas económicas respecto a un punto O', es igual al momento territorial estático respecto a otro punto O, más el momento de la masa económica total* ***m*** *supuestamente aplicada en el punto O".*

Como consecuencia de ello, si $m \neq 0$, el momento territorial respecto de cada punto es distinto, y en el caso de que exista uno, S, en el que $\overrightarrow{M_S} = 0$, a dicho punto S se le considerará como el centro de las masas económicas municipales m_i. Precisamente, tratándose de una distribución continua de las masas, el momento será:

$$\overrightarrow{M} = \iiint \vec{r} \cdot dm$$

y siendo la densidad económica del territorio: $\gamma = \gamma(\vec{r})$, se tiene que:

$$\overrightarrow{M} = \iiint \vec{r} \cdot \gamma \cdot dV \quad ,$$

que, en el caso particular de considerar γ = cte, quedará (por la propiedad de linealidad):

$$\overrightarrow{M} = \gamma \iiint \vec{r} \cdot dV$$

Siendo constante o no la densidad económica, definiremos como "momento geométrico del territorio F" al valor:

$$\overrightarrow{M} = \iiint_F \vec{r} \cdot dV \, ,$$

en el que se han sustituido las masas por volúmenes (o por áreas, en el caso corriente del Análisis Territorial, al considerar la densidad económica expresable en: €/Km^2), lo que equivale a suponer la densidad constante e igual a la unidad.

Interés especial reviste la consideración del momento estático respecto de una recta o eje territorial cualquiera (infraestructural, geográfico, administrativo o imaginario). En efecto, dado un cierto eje **e**, un versor o vector unitario **u**, de la misma dirección, y un punto O del eje territorial en cuestión, se define el momento estático respecto de este eje como la proyección sobre un plano perpendicular a **e**, que pase por O, del momento estático respecto a O. Vectorialmente, se cumple que:

$$\overrightarrow{M} = (\vec{u} \wedge \overrightarrow{M_O}) \wedge \vec{u} = (\vec{u} \wedge \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i) \wedge \vec{u} = \sum_{i=0}^{n} m_i (\vec{u} \wedge \vec{r}_i) \wedge \vec{u}$$

Resulta equivalente el tomar el momento estático respecto a O y proyectarlo sobre el plano, que considerar cada una de las proyecciones $\vec{\rho}_i$ de los vectores $\vec{r}_i$ sobre dicho plano (es decir, suponer proyectadas las masas económicas municipales m_i), quedando la expresión del momento estático:

$$\overrightarrow{M_e} = \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot \vec{\rho}_i \quad .$$

De hecho, la anterior concepción del momento estático respecto de un eje territorial resulta mucho más intuitiva. La equivalencia citada puede probarse sin más que considerar que:

$\vec{\rho}_i = (\vec{u} \Lambda \vec{r}_i) \Lambda \vec{u}$, y sustituirlo en los sumatorios.

Intuitivamente, se observa que, en la anterior expresión, $\overrightarrow{M_e}$ no depende del punto de referencia considerado. Efectivamente, siendo O y O' dos puntos del eje territorial, se cumplirá, como ya se ha visto antes:

$$\overrightarrow{M_{O'}} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{O'O} \cdot m \text{ , y, de aquí, se obtiene:}$$

$$(\vec{u} \Lambda \overrightarrow{M_{O'}}) \Lambda \vec{u} = (\vec{u} \Lambda \overrightarrow{M_O}) \Lambda \vec{u} + (\vec{u} \Lambda \overrightarrow{O'O}) \Lambda \vec{u} \ . \ m = (\vec{u} \Lambda \overrightarrow{M_O}) \Lambda \vec{u} \quad ,$$

pues, al ser los vectores u y $\overrightarrow{O'O}$ colineales, el segundo sumando es cero.

Siguiendo este proceso, conocido el momento territorial estático $\overrightarrow{M_e}$ podríamos deducir el momento respecto de otro eje territorial paralelo e' II e (como pudiera ser un meridiano o un paralelo geográfico respecto a otro), aunque obviaremos dicha determinación por comprensibles razones de espacio.

2.2. DETERMINACIÓN DEL CENTRO DE MASAS TERRITORIAL

2.2.1. En el espacio discreto

Con una repartición de masas municipales (de renta, de población, ...) teóricamente homogénea (cosa difícil, habida cuenta de las notorias desigualdades que tienen lugar en la realidad, no ya sólo entre municipios más o menos próximos o colindantes, sino incluso en el interior de un mismo municipio), podríamos valernos para efectuar la determinación del centro de masas del procedimiento analítico basado en las ecuaciones componentes, pudiendo tenerse en cuenta relaciones especiales de simetría. Sin embargo, tal método podría llegar a resultar inaplicable, dada la considerable dificultad de las integraciones subsiguientes.

Para la determinación práctica del centro de gravedad de una repartición de masas municipales que considerásemos homogénea a efectos reales, se descompondría la masa total (regional) de un modo apropiado, al objeto de que los centros de gravedad parciales (comarcales) puedan hallarse fácilmente, determinando después gráficamente el centro de gravedad S del sistema de los n municipios así obtenido por medio de la ecuación:

$$m.\vec{s} = \sum_{i=0}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

, que define el "momento territorial estático" de la distribución de las masas económicas, respecto al punto O, anteriormente definido.

Si reducimos nuestro problema al de una superficie plana, bastará con descomponerla en fajas paralelas y, a continuación, *efectuar la determinación del centro de gravedad valiéndonos del correspondiente polígono funicular,* aplicando a los centros de gravedad parciales (comarcales) de las distintas secciones fuerzas paralelas cuya resultante se determina. Finalmente, haciendo esto para dos direcciones perpendiculares entre sí, se obtiene el centro de gravedad buscado como punto de intersección de ambas resultantes. En la figura que sigue, puede verse el procedimiento seguido para la determinación del centro de gravedad de la superficie de una comarca o región en forma asimilable a una semielipse. El eje de simetría de la semielipse es una línea de gravedad; la otra dirección, que no es más que la resultante del sistema de fuerzas comarcal o regional, se ha construido por medio del polígono funicular. Así:

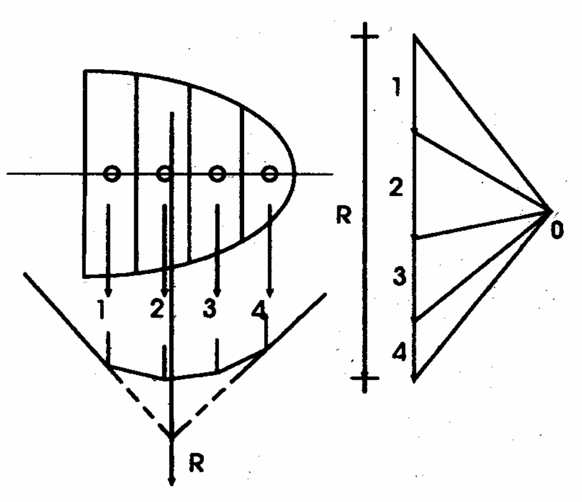


Fig. A-13.3. Centro de masas de un territorio semielíptico.

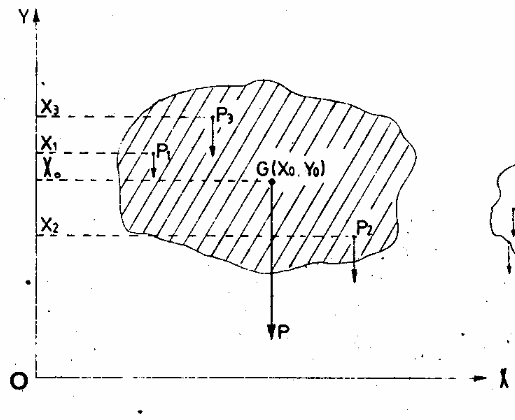
La determinación práctica del centro de masas de renta territorial la llevaremos a cabo analíticamente, determinando sus coordenadas con respecto a un sistema de ejes auxiliares y estableciendo un símil estático-gravitacional que nos ayudará a comprender mejor el problema planteado.

Supongamos que un territorio cualquiera (municipio, comarca, región, nación) es un cuerpo plano como el representado en la figura A-13.4, referido a 2 ejes coordenados, y dividido en **n** porciones elementales municipales (puntos pesados en el límite) de masas de renta: m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n . Apliquemos el teorema de Varignon ("el momento de la suma de varios vectores concurrentes es igual a la suma de los momentos de los vectores componentes") al sistema de fuerzas-peso de cada una de estas masas. Como dichas fuerzas valen:

$$P_i = m_i \cdot g$$

(g sería la aceleración de la gravedad, de valor medio 9,8062 m./seg^2), tendremos, llamando P al peso total o resultante de todo el territorio:

$$P = m_1\, g + m_2\, g + ... + m_i\, g + ... + m_n\, g = g \sum_{i=0}^{n} m_1 = g \cdot m \,.$$



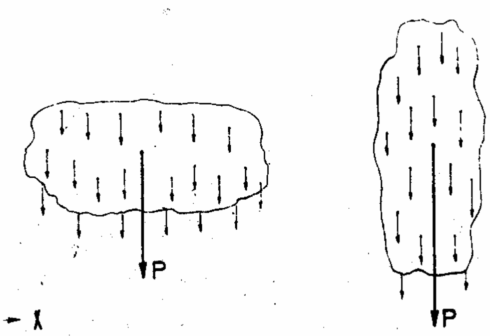


Fig. A-13.4. Determinación del c. d. g. de un territorio.

Fig. A-13.5. Centro de gravedad de un territorio.

El citado teorema de Varignon nos permite escribir, tomando como centro de momentos el origen de coordenadas:

$$x_1 m_1 g + x_2 m_2 g + ... + x_i m_i g + ... + x_n m_n g = x_0 g \sum_{i=0}^{n} m_i = x_0 g m = g \sum_{i=0}^{n} x_i m_i \;;$$

de dónde se obtendrá el valor de la abscisa:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i m_i}{m} \quad .$$

Análogamente, podría demostrarse que las coordenadas restantes (ordenada y cota taquimétrica) del centro de masas buscado vienen dadas por:

$$y_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i m_i}{m} \quad ; \quad z_0 = \frac{\sum_{i=0}^{n} z_i m_i}{m} \quad .$$

En el campo continuo, como tendremos ocasión de comprobar posteriormente, las coordenadas correspondientes al centro territorial de masas vendrían dadas por:

$$x_0 = \frac{\int x \cdot dm}{m} \quad ; \quad y_0 = \frac{\int y \cdot dm}{m} \quad ; \quad z_0 = \frac{\int z \cdot dm}{m} \quad .$$

Así pues, la distancia desde dicho centro de masas a una recta o eje territorial es la media ponderada de las distancias a que se encuentran, de dicho eje, cada una de las masas económicas o sociales que componen el sistema territorial en estudio, siendo el "peso" de cada sumando la masa de cada punto del territorio. Como consecuencia inmediata de ello, resultará que si estas distancias son todas ellas positivas, la media resultante será también positiva; es decir, que si todas las masas económicas se hallan en el mismo semiplano determinado por un eje, el centro territorial de masas estará en este mismo semiplano, y tomando varios ejes que encierren al conjunto de las masas económicas, dicho centro se hallará en el interior de la mínima figura convexa que encierre a las masas.

Obsérvese que, dadas las relaciones anteriores, las coordenadas del centro de gravedad de una unidad territorial cualquiera (municipio, comarca, región, nación) son independientes de su presencia o no en un campo gravitatorio, puesto que en ellas no aparece el valor de la constante **g,** y, por ello, juzgamos más correcto denominarle "centro de masas".

2.2.2. En el espacio continuo

Determinemos, ahora, las coordenadas del centro de masas de población o de renta de un territorio cualquiera A. Dividámoslo en los dominios parciales Δs_i muy pequeños (podrían ser, v. gr., los municipios). Si suponemos que la densidad superficial es igual a 1, la masa del dominio parcial será igual a su área. Si convencionalmente, suponemos que toda la masa de población o de renta de Δs_i está concentrada en alguno de sus puntos $P_i(\xi_i,\eta_i)$, podemos considerar el territorio como sistema de puntos materiales. En este caso, en virtud de las fórmulas anteriores, las coordenadas del centro de gravedad de este territorio serán determinadas, aproximadamente, por las igualdades:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i \cdot \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i} \quad ; \quad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \eta_i \cdot \Delta s_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i} \quad .$$

Pasando al límite, cuando $\Delta s_i \to 0$, las sumas integrales en los numeradores y los denominadores de las fracciones se transforman en las integrales dobles, con lo que obtenemos las fórmulas exactas para calcular las coordenadas del centro territorial de masas de renta o de población:

$$x_0 = \frac{\iint_A x \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} \qquad y_0 = \frac{\iint_A y \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} \quad .$$

Estas fórmulas, deducidas para un territorio de densidad superficial igual a 1, son válidas, también, para otro territorio, que tenga otra densidad γ cualquiera, constante en todos los puntos.

Si la densidad superficial es variable:

$$\gamma = \gamma\,(x\,,\,y)\,,$$

las fórmulas correspondientes toman, entonces, la forma:

$$x_0 = \frac{\iint_A \gamma\,(x\,,\,y)\cdot x \cdot dx \cdot dy}{\iint_A \gamma\,(x\,,\,y)\cdot dx \cdot dy} \quad ; \quad y_0 = \frac{\iint_A \gamma\,(x\,,\,y)\cdot y \cdot dx \cdot dy}{\iint_A \gamma\,(x\,,\,y)\cdot dx \cdot dy} \quad .$$

Las expresiones de los numeradores respectivos:

$$M_y = \iint_A \gamma(x,\,y) \cdot x \cdot dx \cdot dy \qquad \text{y} \qquad M_x = \iint_A \gamma\,(x,\,y) \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

se llaman "momentos territoriales estáticos" del territorio A respecto a los ejes coordenados Oy y Ox, como veremos posteriormente en el epígrafe correspondiente del siguiente Anexo de nuestra tesis, y son de tipo másico o ponderal.

La integral del denominador: $m = \iint \gamma(x,\,y)\cdot dx \cdot dy$ expresa la magnitud de la masa de población o de renta del territorio que nos ocupa.

Añadiendo una 3ª coordenada (de hecho, cualquier punto del territorio viene determinado por sus tres coordenadas UTM), y suponiendo el territorio como un volumen homogéneo, referido a ejes cartesianos rectangulares, las coordenadas del centro territorial de las masas socio-económicas vendrán dadas, análogamente, por:

$$x_0 = \frac{\iiint_F x \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F dx \cdot dy \cdot dz} \; ; \; y_0 = \frac{\iiint_F y \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F dx \cdot dy \cdot dz} \; ; \; z_0 = \frac{\iiint_F z \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{\iiint_F dx \cdot dy \cdot dz}$$

que resultan válidas para un territorio de densidad socioeconómica constante. Si la densidad fuera variable, por generalización del caso anterior, se tendría que:

$$\gamma = \gamma\,(x, y, z) \quad ,$$

con lo que las fórmulas anteriores tomarán la configuración:

$$x_0 = \frac{\iiint_F \gamma\,(x\,,y\,,z)\cdot x\cdot dx\ \cdot dy\ \cdot dz}{\iiint_F \gamma\,(x\,,y\,,z)\cdot dx\ \cdot dy\ \cdot dz}\ ;\quad y_0 = \frac{\iiint_F \gamma\,(x\,,y\,,z)\cdot y\cdot dx\ \cdot dy\ \cdot dz}{\iiint_F \gamma\,(x\,,y\,,z)\cdot dx\ \cdot dy\ \cdot dz}$$

$$z_0 = \frac{\iiint_F \gamma\,(x\,,y\,,z)\cdot z\cdot dx\ \cdot dy\ \cdot dz}{\iiint_F \gamma\,(x\,,y\,,z)\cdot dx\ \cdot dy\ \cdot dz}$$

mientras que la integral de los denominadores:

$$m = \iiint_F \gamma\ \ (x, y, z)\cdot dx \cdot dy \cdot dz\ ,$$

expresará la magnitud de la masa socioeconómica del territorio en cuestión (FRANQUET, 1990/91).

2.2.3. Territorio de contorno poligonal

Podemos primero buscar el punto medio de cada lado A_1, A_2, A_3 que es el centro de gravedad de cada uno de ellos; y aplicarle un vector proporcional a la longitud, P_1, P_2, P_3 y encontrar la resultante por medio de un polígono funicular y sobre esta resultante habrá de estar el centro de gravedad. Si variamos la dirección de los vectores P_1, P_2, P_3 convirtiéndolos en P'_1, P'_2, P'_3, sobre la nueva resultante R', también debe de encontrarse el centro de gravedad pues es invariable, cuando varía la dirección; la intersección será el centro de gravedad.

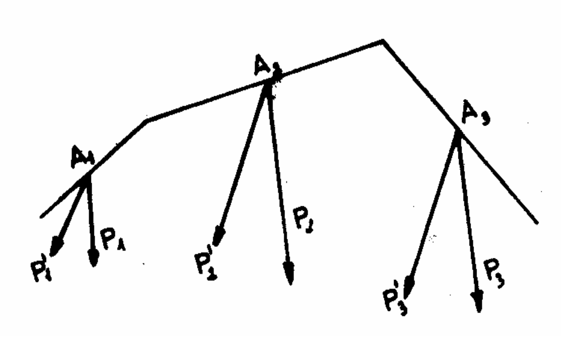


Fig. A-13.6. Contorno poligonal irregular.

Si fuese un contorno poligonal regular procederíamos de la manera siguiente: Unamos los extremos A y E, por el centro O del círculo; tracemos el eje OY paralelo a esa cuerda y bajemos la OI perpendicular: OX es el eje de simetría; así pues en él estará el centro de gravedad. Sean x_1, x_2 y x_3 las coordenadas del centro de gravedad de los lados del polígono, y teniendo un número de elementos proporcionales a ella, tendremos para abscisa x_0 del centro de gravedad la que se expresa a continuación.

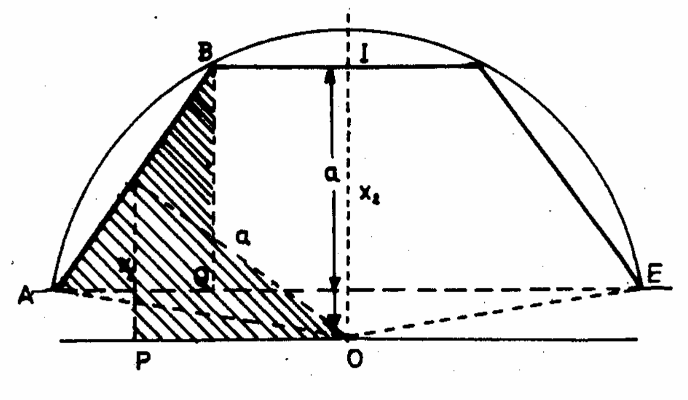


Fig. A-13.7. Contorno poligonal regular.

$$x_0 = \frac{1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + \ldots}{1+1+1+\ldots} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

, siendo **n** el número de lados del polígono territorial en estudio.

Unamos ahora **O** con el punto medio de un lado cualquiera AB; la apotema OM es igual para todos los lados, llamémosla **a**. Proyectemos AB sobre AE. Los triángulos ABQ y MPO nos dan:

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{MO}}{\overline{AB}} = \frac{a}{l}; \overline{MP} = x_1; \frac{x_1}{\overline{AQ}} = \frac{a}{l}; x_1 = \frac{a \times \overline{AR}}{l}$$

Como obtendríamos lo mismo para las diferentes abscisas, la suma de todas ellas: $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ será igual a la relación constante a/l por la suma total de las proyecciones, que es AE, y tendremos, para valor de x_0:

$$x_0 = \frac{\overline{AE}}{nl} a$$

o sea, una cuarta proporcional entre la apotema, la cuerda y el perímetro. Si el contorno excediese de una semicircunferencia, algunas abscisas serían negativas, pero la fórmula general sería la misma. Si AE = 0, es decir, si se cerrase el contorno x_0= 0, se confundirían el centro de gravedad y el de la figura. La expresión de OG la podemos construir fácilmente haciendo un triángulo rectángulo MM'B cuya altura MM' = a y la hipotenusa M'E = L. Si llevamos sobre la hipotenusa BC = AE y trazamos una paralela, ésta será igual a x_0.

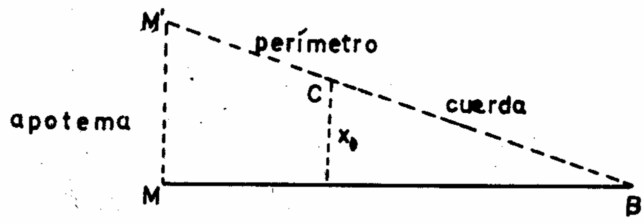


Fig. A-13.8. Triángulo auxiliar de cálculo.

Una extensión del caso anterior nos llevaría a la determinación del centro de masas de un territorio cuya planta fuera asimilable a la de un arco de círculo. En efecto, como que un círculo no es más que un polígono de infinito número de lados, puede aplicarse la fórmula anterior. La apotema se habrá convertido en radio y la proyección de todos los lados será la cuerda, de manera que:

$$x_0 = (r \cdot \text{cuerda})/L$$

Alternativamente, también puede encontrarse de la manera que sigue: Sobre la tangente en I del arco llevemos una longitud igual al semi-arco rectificado; unamos B' y O; en el punto B levantemos una perpendicular a BA hasta que encuentre en C a OB'; por último, desde C bajemos la perpendicular CG sobre OI, G es el centro de gravedad del territorio que nos ocupa, pues:

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{IB'}}; \quad \frac{\overline{OG}}{r} = \frac{1/2\overline{AB}}{1/2L}; \quad \overline{OG} = \frac{r \times \overline{AB}}{L}$$

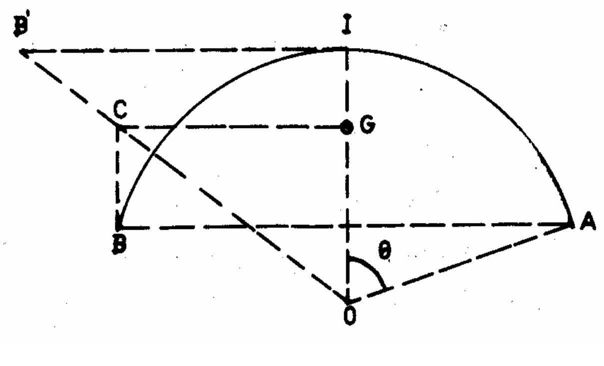


Fig. A-13.9. Centro de masas de un territorio circular.

Analíticamente, tendremos que la longitud del arco será: 2rθ y la longitud de la cuerda: 2r x senθ; la fórmula será:

$$x_0 = \frac{2r^2 x \mathrm{sen}\ \theta}{2r\theta} = \frac{r x \mathrm{sen}\ \theta}{\theta}$$

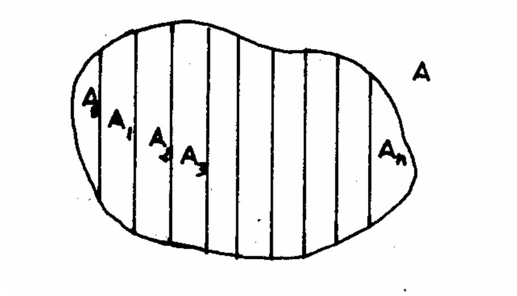


Fig. A-13.10. Territorio de configuración irregular.

Cuando se trate de una superficie territorial irregular podemos descomponerla en trapecios: A_0, A_1, A_2, A_3, ... A_n, si bien conviene a veces hacer las fajas más estrechas y considerarlas como rectángulos: B_0, B_1, B_2 ... cuyos centros de gravedad ya veremos más adelante cómo se hallan.

2.3. EJEMPLOS GENERALES DE APLICACIÓN

2.3.0. Simplificación operativa en la determinación del centro territorial de masas

Sin entrar en el detalle de los diversos procedimientos matemáticos, geométricos o analíticos -u otros artificios más o menos aproximados- que pueden emplearse en la determinación del centro de gravedad de un territorio cualquiera, que resultan sobradamente conocidos o que, en todo caso, pueden hallarse en numerosos formularios y textos de consulta, admitiremos, en el Análisis Territorial, el siguiente convenio práctico:

1.º) El centro de gravedad de la superficie de un territorio se supondrá siempre situado sobre el eje longitudinal del mismo, tanto si se trata de un territorio simple como compuesto por varios sub-territorios o cuadriláteros.

2.º) En un territorio simple, si sus lados menores son paralelos, el centro de gravedad se hallará, evidentemente, en el eje longitudinal. Si estos no son paralelos (convergentes o divergentes), se tomará como centro del territorio la proyección ortogonal, sobre dicho eje, del verdadero centro de gravedad de la superficie del territorio.

3.º) En el caso de un territorio compuesto por varios cuadriláteros, se determinará separadamente el centro de gravedad de cada porción, según se acaba de indicar. En cada uno de ellos, se aplicará un peso equivalente a la superficie del sub-territorio correspondiente y se determinará el centro de gravedad de la totalidad del territorio tomando momentos respecto al origen del eje longitudinal, suponiendo a éste rectificado.

Sea, por ejemplo, el territorio (región) compuesto por tres cuadriláteros (comarcas) siguiente (FRANQUET, 1990):

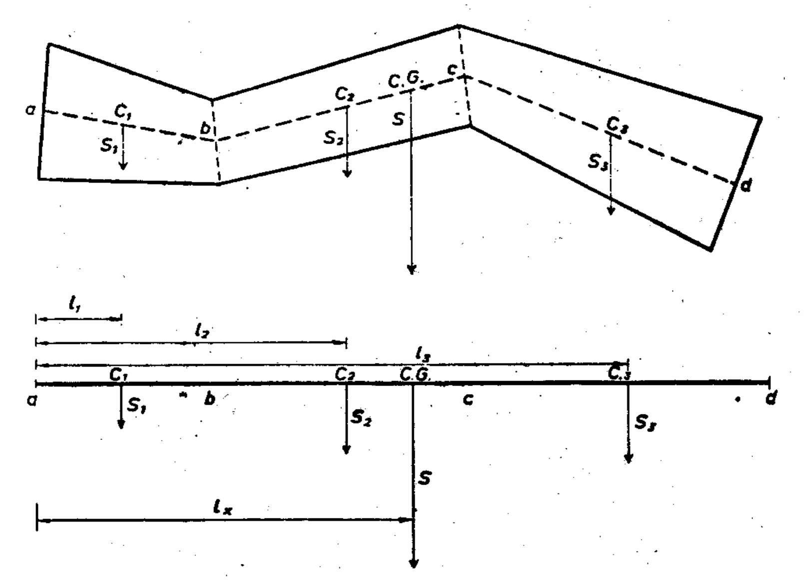


Fig. A-13.11. Territorio poligonal irregular.

Tomando momentos con respecto al punto **a**, origen del eje longitudinal del territorio, tendremos:

$$S \cdot l_x = S_1 \cdot l_1 + S_2 \cdot l_2 + S_3 \cdot l_3 \text{ , de dónde:}$$

$$l_x = (S_1 \cdot l_1 + S_2 \cdot l_2 + S_3 \cdot l_3)/S$$

Generalizando al caso de un territorio compuesto por **n** porciones cuadrangulares, se utilizará la siguiente fórmula aproximada:

$$l_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_i \cdot l_i}{S} \text{ , siendo } S = \sum_{i=1}^{n} S_i \text{ , en la que:}$$

l_x =distancia del centro de gravedad o de masas al comienzo del eje longitudinal, situado en el lado transversal tomado como origen o cabecera del territorio.
l_i =distancia del centro de gravedad o de masas de cada sub-territorio al mismo punto o lugar geográfico origen.
S_i=superficie del sub-territorio correspondiente.
S =superficie total del territorio.

Todas las distancias se entenderán tomadas a lo largo del desarrollo del eje longitudinal y se expresarán, normalmente, en Km, mientras que las superficies lo serán en Km^2. También podrán usarse el Mm y el Mm^2.

El procedimiento analítico descrito es el que consideramos más práctico y aconsejable. No obstante, puede seguirse cualquier otro sistema, como el de la estática gráfica al que también nos hemos referido anteriormente, en el que se determina la línea de aplicación de la resultante mediante el polígono de fuerzas y el correspondiente polígono funicular, así:

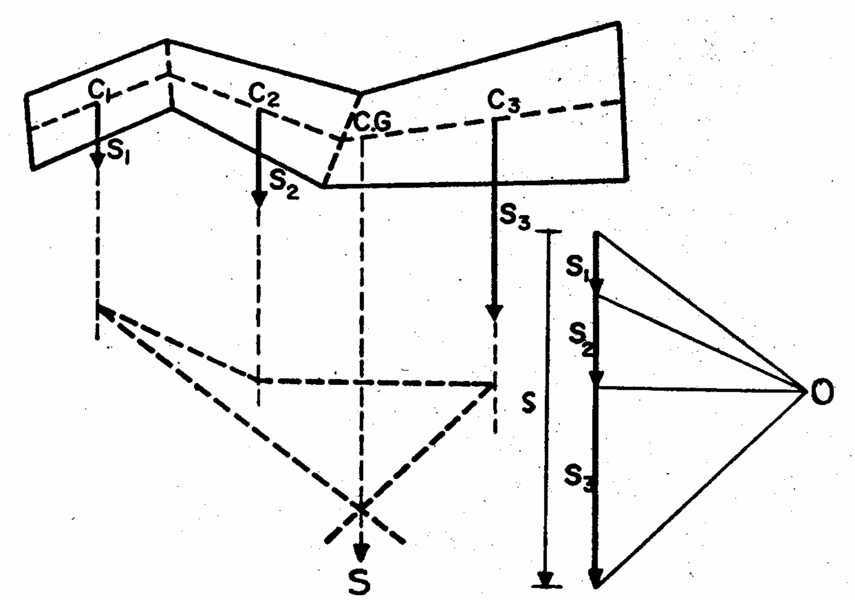


Fig. A-13.12. Polígonos de fuerzas y funicular.

2.3.1. Masas no homogéneas en el campo discreto

Se trata de hallar el centro de masas de las rentas de una cierta región compuesta por tres comarcas: C_1, C_2 y C_3, cuya configuración planimétrica se ha simplificado en la figura siguiente, y con los siguientes datos de población de derecho, renta “per capita” y distancias:

P_1 = 351.000 habitantes	a = 60 Km.
w_1 = 7.150 €/hab.	b = 30 Km.
P_2 = 408.000 habitantes	c = 50 Km.
w_2 = 7.970 €/hab.	r = 20 Km.
P_3 = 192.000 habitantes	
w_3 = 8.620 €/hab.	

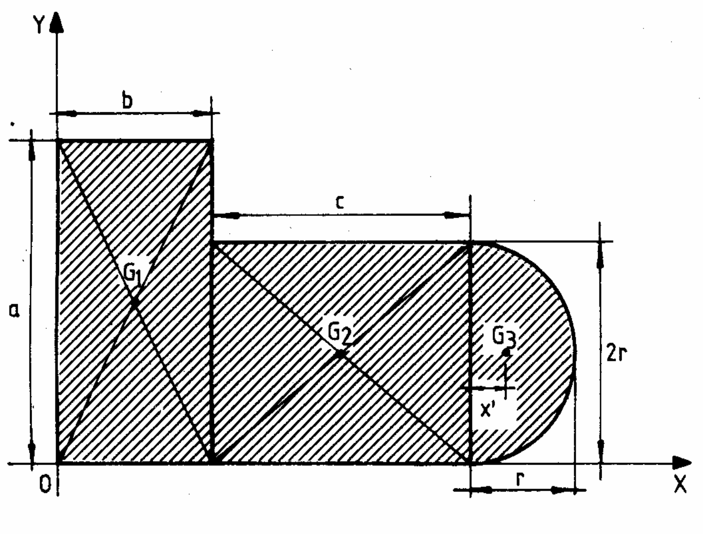


Fig. A-13.13. Región compuesta de tres comarcas.

Solución:

Los centros de gravedad G_1, G_2 y G_3 de cada comarca son conocidos, puesto que se trata de los centros geométricos de los respectivos rectángulos por intersección de sus diagonales, en el caso de los dos primeros; en cuanto a G_3, lo calcularemos aplicando el 2º teorema de Guldin o de Pappus, a saber: "El volumen engendrado por una superficie que gira alrededor de un eje que no la corta y que se halla situado en su plano, es igual al área de aquélla multiplicada por la longitud de la circunferencia descrita por su centro de gravedad" (FRANQUET, 1990).

En nuestro caso, el semicírculo engendra, al girar alrededor de su diámetro, una esfera de volumen:

$V = S\cdot 2\cdot\pi\cdot x'$; luego, desarrollando esta expresión:

$(4/3)\cdot\pi\cdot r^3 = (\pi\cdot r^2/2)\cdot 2\cdot\pi\cdot x'$, de donde se tiene el valor de la abscisa parcial que hemos representado o acotado en la figura anterior:

$$x' = 4r/3\pi$$

Pues bien, tomemos el punto O como centro u origen de coordenadas de 2 ejes ortogonales OX y OY, respecto de los cuales tomaremos momentos como aplicación del teorema de Varignon, así:

$$R_1 = P_1 \cdot w_1 = 351 \cdot 7.150 = 2.509.650$$
$$R_2 = P_2 \cdot w_2 = 408 \cdot 7.970 = 3.251.760$$
$$R_3 = P_3 \cdot w_3 = 192 \cdot 8.620 = 1.655.040$$

R (total)= ....= 7.416.450

que son, respectivamente, las rentas totales de las 3 comarcas que constituyen la región en estudio, y la renta total regional, expresadas en 10^3 €.

Así mismo, se tendrá:

$$\begin{cases} R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3 = R_{total} \cdot x_0 \\ R_1y_1 + R_2y_2 + R_3y_3 = R_{total} \cdot y_0 \end{cases}$$

con lo que, sustituyendo términos, se tiene para la abscisa:

$$x_0 = \frac{R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3}{R_{Total}} =$$

$$= \frac{R_1\frac{b}{2} + R_2(b + \frac{c}{2}) + R_3(b + c + \frac{4r}{3\pi})}{R_{Total}} =$$

$$= \frac{2.509.650 \times \frac{30}{2} + 3.251.760 \times (30 + \frac{50}{2}) + 1.655.040(30 + 50 + \frac{4 \times 20}{3\pi})}{7.416.450} =$$

= **48’94 Km.**

Del mismo modo, se tendrá para la ordenada:

$$y_0 = \frac{R_1y_1 + R_2y_2 + R_3y_3}{R_{Total}} == \frac{R_1\frac{a}{2} + R_2r + R_3r}{R_{Total}} =$$

$$= \frac{2.509.650 \times \frac{60}{2} + 3.251.760 \times 20 + 1.655.04020}{7.416.450} =$$

= 23'38 Km.

, luego el centro regional de masas de renta será el punto del territorio de coordenadas:

G(48'94, 23'38)

El resumen de las características de la región estudiada sería el siguiente:

-Población total = 351.000 + 408.000 + 192.000 = 951.000 habitantes.
-Superficie comarcal $C_1 = a \cdot b = 60 \cdot 30 = 1.800$ Km^2.
-Superficie comarcal $C_2 = c \cdot 2 \cdot r = 50 \cdot 2 \cdot 20 = 2.000$ Km^2.
-Superficie comarcal $C_3 = (\pi \cdot r^2)/2 = (\pi \cdot 20^2)/2 = 628$ Km^2.
-Superficie total regional = 1.800 + 2.000 + 628 = 4.428 Km^2.
-Densidad de población = 951.000/4.428 = 214'8 hab./Km^2.
-Densidad de renta media regional = $(7.416.450 \cdot 10^3)/4.428$ = =1.674.898'4 €/km^2.
-Renta "per capita" media regional = $(7.416.450 \cdot 10^3)/(951 \cdot 10^3)$ = =7.798'58 €/hab.

2.3.2. Masa de renta homogénea en el campo continuo

Si la masa de renta por unidad superficial es la misma en todo el territorio estudiado, decimos que su densidad de renta es constante. Sabemos, por otra parte, que el momento de un área plana con respecto a una línea es el producto de dicha área por la distancia directa de su centro de masas a la línea en cuestión. Pues bien, acumulativamente, el momento de un área compuesta (región) con respecto a la línea vendrá dada por la suma de los momentos de las áreas parciales (comarcas) con respecto a dicha línea.

Para un territorio cualquiera de área A y de centro de masas $G(x_0, y_0)$, los momentos con respecto a los ejes coordenados serán:

$$\begin{cases} M_x = A \cdot y_0 \\ M_y = A \cdot x_0, \end{cases}$$

a los que, posteriormente, denominaremos "momentos territoriales estáticos" superficiales o geométricos.

a) En el siguiente ejemplo, trataremos de determinar el centro de masas de las rentas de una cierta comarca que supondremos homogénea, cuya configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

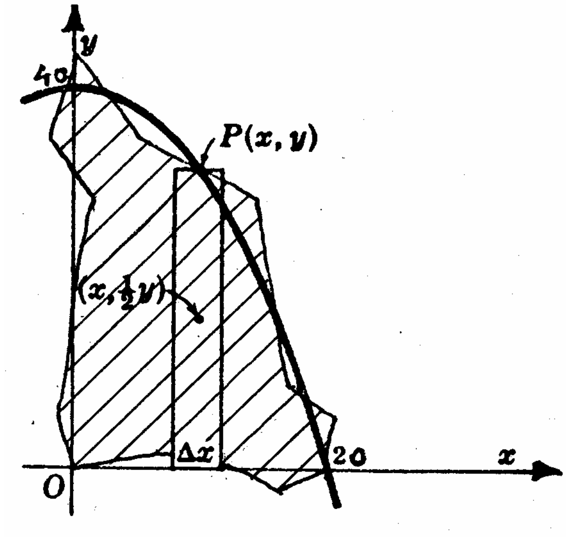


Fig. A-13.14. Comarca de asimilación parabólica.

Como puede observarse, puede asimilarse con gran aproximación el área o superficie de esta comarca con la que determina la parábola de ecuación = y = 4 - x^2, en el primer cuadrante.

El centro del rectángulo aproximado o genérico tendrá de coordenadas: (x, y/2). Para el logro de una mayor simplicidad operativa, se han expresado las distancias en miriámetros (1 Mm. = 10 Km.), con lo que se tendrá la siguiente superficie comarcal, en base al propio concepto de integral definida:

$$A = \int_0^2 y \cdot dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = (4x - x^3/3)_0^2 = 16/3 \text{ Mm.}^2 = 533 \text{ Km}^2$$

También, se tendrá el momento comarcal estático:

$$M_x = \int_0^2 1/2 y \cdot y \cdot dx = 1/2 \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = 1/2 \int_0^2 (16 + x^4 - 8x^2) dx =$$
$$= 1/2(16x + x^5/5 - 8x^3/3)_0^2 = 1/2(32 + 32/5 - 64/3) = 128/15 \text{ Mm.}^3 =$$
$$= 8.533 \text{ Km}^3.$$

Del mismo modo:

$$M_y = \int_0^2 x \cdot y \cdot dx = \int_0^2 x(4 - x^2) \cdot dx = \int_0^2 (4x - x^3) \cdot dx =$$
$$= (4x^2/2 - x^4/4)_0^2 = 4 \text{ Mm.}^3 = 4.000 \text{ Km.}^3$$

, con lo que las coordenadas del centro comarcal de masas G, serán:

$$\begin{cases} x_0 = M_y/A = 4.000/533 = 7'50 \text{ Km.} \\ y_0 = M_x/A = 8.533/533 = 16'00 \text{ Km.} \end{cases}$$

Complementariamente, si conocemos que dicha comarca tiene una población de derecho de: P = 160.000 habitantes, con una renta familiar disponible "per capita" de 8.500 €/Hab., se tendrán las siguientes características comarcales:

-Renta total = P · w = 160 · 8.500 = 1.360.000 €
-Densidad de población = 160.000/533 = 300'0 hab./Km^2.
-Densidad de renta comarcal = 1.360.000/533 = 2.551'59 €/Km^2.

b) En el presente ejemplo, determinaremos las coordenadas del centro O de las masas de renta de una región homogénea, cuya configuración planimétrica se asemeje al área encerrada, en el primer cuadrante, por la elipse de ecuación reducida o canónica:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

(expresando los semiejes territoriales **a** y **b** en Mm.).

En este caso, aplicaremos las fórmulas deducidas en el epígrafe correspondiente, con lo que se tendrá la abscisa:

$$x_0 = \frac{\iint_A x \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} x \cdot dy\right) \cdot dx}{\int_0^a \left(\int_0^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} dy\right) \cdot dx} = \frac{b/a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot x \cdot dx}{\pi \cdot a \cdot b/4} =$$

$$= \frac{-\,b/3a\left[(a^2 - x^2)^{3/2}\right]_0^a}{\pi \cdot a \cdot b/4} = \frac{4a}{3\pi}\,\text{Mm}.$$

Operando del mismo modo, obtendremos la ordenada:

$$y_0 = \frac{\iint_A y \cdot dx \cdot dy}{\iint_A dx \cdot dy} = \frac{M_x}{A} = \frac{\int_0^a \left(\int_0^{b/a\sqrt{a^2-x^2}} y \cdot dy\right) \cdot dx}{\pi \cdot a \cdot b/4} = \frac{4b}{3\pi}\,\text{Mm}.$$

, siendo el valor de los momentos regionales estáticos con respecto a ambos ejes coordenados:

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \frac{4b}{3\pi}\cdot\frac{\pi\cdot ab}{4} = \frac{a\cdot b^2}{3}\,Mm^3. \\ M_y &= \frac{4a}{3\pi}\cdot\frac{\pi\cdot ab}{4} = \frac{a^2\cdot b}{3}\,Mm^3. \end{aligned}}$$

Veamos, en fin, que el área o superficie de la región podría haberse determinado aplicando el propio concepto de integral definida. Efectivamente, de la ecuación de la elipse, se deduce que:

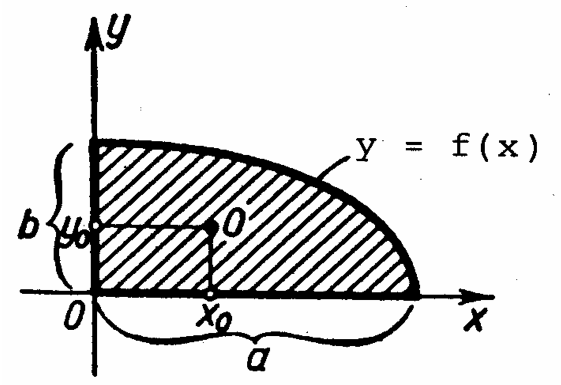


Fig. A-13.15. Región de configuración elíptica.

$y^2 / b^2 = 1 - x^2 / a^2 = (a^2 - x^2)/a^2$; $y^2 = b^2/a^2 \cdot (a^2 - x^2)$, de dónde:

$$y = b / a \sqrt{a^2 - x^2} = f(x) \text{ . O sea:}$$

$$A = \int_0^a b / a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = b / a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

que es la integral de una función irracional, por lo que efectuaremos la sustitución o cambio de variable independiente:

$$\boxed{\begin{gathered} x = a \cdot \text{sen } t \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t \\ dx = a \cdot \cos t \cdot dt \end{gathered}}$$

y los nuevos límites de integración serán:

$$\begin{cases} x = 0 \ldots \qquad \text{sen } t = 0 \ldots \quad t = 0 \\ \end{cases}$$

$x = a \ldots \qquad \text{sen } t = 1 \ldots \qquad t = \pi / 2$, con lo que:

$$A = b / a \int_0^{\pi/2} a \cdot \cos t \cdot a \cdot \cos t \cdot dt = a \cdot b \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt =$$

$$= a \cdot b \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos\ 2t}{2} \cdot dt = \frac{a \cdot b}{2} \left(t + \frac{\text{sen}2t}{2}\right)_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4} \text{ Mm.}^2$$, como se quería demostrar.

c) Veamos, así mismo, cómo este tipo de problemas, en el Análisis Territorial, pueden enfocarse y resolverse a partir de la aplicación del concepto de integral curvilínea. Por ejemplo, en el caso que nos ocupa, se trataría de calcular el área del territorio encerrada por una elipse en el primer cuadrante del círculo, viniendo expresada la ecuación de dicha sección cónica por sus coordenadas paramétricas, a saber:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \text{sen } t \end{cases}$$

En efecto, sabiendo que el área total del territorio encerrada por una curva viene dada por la expresión de una integral continua del tipo :

$1/2 \int_c (x \cdot dy - y \cdot dx)$, se tendrá una superficie de:

$$A = 1/4 \cdot 1/2 \int_c (x \cdot dy - y \cdot dx) = 1/8 \int_0^{2-\pi} (ab \cdot \cos^2 t + ab \cdot \text{sen}^2 t) \cdot dt =$$

$$= \frac{a \cdot b}{8} \int_0^{2-\pi} dt = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{4} \text{ Mm.}^2$$, c. s. q. d.

d) En este mismo orden de ideas, si se tratara de un territorio de configuración planimétrica asimilable a una curva hipocicloide de 4 puntas, cuyas ecuaciones paramétricas fueran:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos^3 t \\ y = r \cdot \text{sen}^3 t \end{cases}$$

el área de territorio encerrado por la misma vendría dada por:

$$\begin{cases} dx = -3\,r \cdot \cos^2 t \cdot \text{sen}\, t \cdot dt \\ dy = 3\,r \cdot \text{sen}^2 t \cdot \cos t \cdot dt \end{cases}$$

, con lo que se tendrá una superficie contenida de:

$$A = 1/2 \int_c (x \cdot dy - y \cdot dx) =$$

$$= 1/2 \int_c (3\,r^2 \cdot \cos^4 t \cdot \text{sen}^2 t + 3\,r^2 \cdot \text{sen}^4 t \cdot \cos^2 t)\, dt =$$

$$= 3\,r^2 / 2 \int_c \cos^2 t \cdot \text{sen}^2 t \cdot dt$$

De hecho, la hipocicloide en cuestión será la curva:

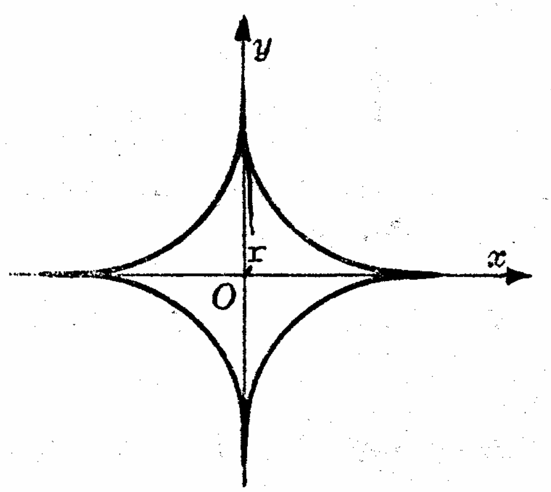


Fig. A-13.16. Territorio de planta en hipocicloide.

, luego los límites de integración serán: 0 y $\pi/2$, con lo que:

$$A = \frac{3r^2}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot \text{sen}^2 t \cdot dt = 6\,r^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\text{sen}^2 2\,t}{4}\, dt =$$

$$= 6r^2/4\ [\,t/2 - \text{sen}\ 4\,t/8\,]_0^{\pi/2} = \frac{6\pi \cdot r^2}{16} = \frac{3\pi \cdot r^2}{8}\ \text{Mm}^2\,.$$

2.3.3. Masa de renta de densidad variable en el campo contínuo

a) Si la masa de renta por unidad superficial es distinta a lo largo y ancho del territorio estudiado, tendremos que su densidad de renta es también variable. Este supuesto puede considerarse perfectamente real, dado que es fácil sospechar que dicha densidad de renta es mayor con frecuencia en las proximidades de la capital municipal, comarcal o regional, disminuyendo progresivamente con el alejamiento físico de dicho centro urbano (FRANQUET, 1990/91).

b) En el siguiente ejemplo, trataremos de hallar las coordenadas del centro de masas de una comarca cuya densidad de renta disminuye continuamente, punto a punto, con la distancia a la capital comarcal. Su configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

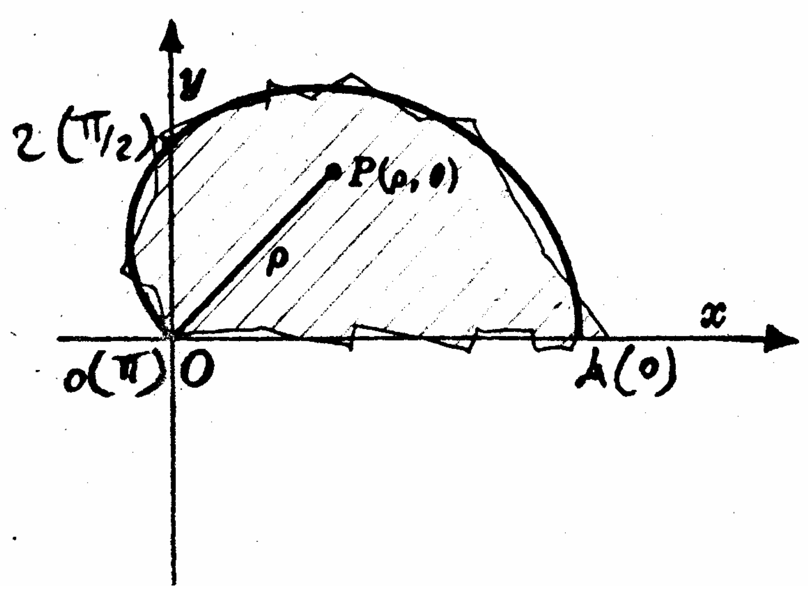


Fig. A-13.17. Comarca con masa de renta de densidad variable.

En este caso, el contorno o perímetro comarcal ha sido asimilado a la curva semicardioide correspondiente a las ordenadas positivas (1º y 2º cuadrantes del círculo), de ecuación expresada en coordenadas polares:

$$\rho = 2\ (1 + \cos\theta)$$

y la densidad de la renta varía con la distancia desde el polo o capital comarcal. (A la vista de su planta en forma de medio corazón, es lícito sospechar que se trataría de una comarca "romántica").

Al efectuar el cambio de variable en la integral doble para pasar de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas polares, se tiene:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

, tal como puede comprobarse de la contemplación de la figura siguiente:

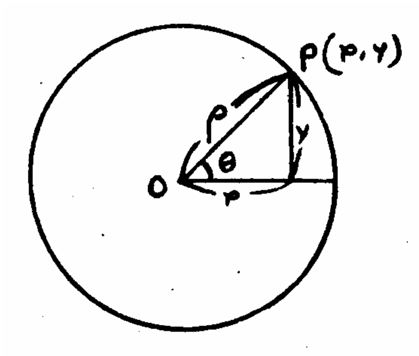


Fig. A-13.18. Coordenadas polares de un enclave territorial.

El determinante funcional jacobiano IJI de la transformación, que deberá tomarse siempre en valor absoluto, vendrá dado por:

$$|J| = \frac{\delta(x,y)}{\delta(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \delta x/\delta\rho & \delta x/\delta\theta \\ \delta y/\delta\rho & \delta y/\delta\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\cdot\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cdot\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\cdot\cos^2\theta + \rho\cdot\operatorname{sen}^2\theta = \rho \neq 0\ ,\quad \forall(\rho,\theta)\neq(0,0)$$

(que es el jacobiano de las variables x e y con respecto al módulo ρ y al argumento θ), luego el nuevo elemento infinitesimal de superficie, será:

$$dA = dx\cdot dy = |J|\cdot d\rho\cdot d\theta = \rho\cdot d\rho\cdot d\theta\ ;$$

Se ve que el elemento de área en coordenadas polares corresponde al área de un recinto plano limitado por las dos circunferencias con centro en el origen y radios: ρ, ρ + dρ, y las dos semirrectas que parten del origen y forman con el eje OX los ángulos: θ, θ + dθ.

La masa de renta, será:

$$m = \iint_R \delta(\rho,\theta)\cdot dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\cdot\rho\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta = k\int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} \rho^2\cdot d\rho\cdot d\theta =$$

$$= k\int_0^{\pi}\left(p^3/3\right)_0^{2(1+\cos\theta)} d\theta = 8/3\cdot k\cdot\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\cdot d\theta = (20/3\cdot\pi\cdot k)\ \text{euros}$$

Del mismo modo, se tendrán los momentos estáticos comarcales de tipo ponderal o másico, a saber:

$$M_x = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,y\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\cdot\rho\cdot\rho\cdot sen\,\rho\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta =$$

$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} \rho^3\cdot sen\,\theta\cdot d\rho\cdot d\theta = k\int_0^{\pi}\left(p^4/4\right)_0^{2(1+\cos\theta)} sen\,\theta\cdot d\theta =$$

$$= 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cdot sen\,\theta\cdot d\theta = (128/5k)\ \text{euros}\cdot\text{Mm} = (256\cdot k)\ euros\cdot\text{Km.}$$

y el otro momento estático comarcal será:

$$M_y = \iint_R \delta(\rho,\theta)x\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\cdot\rho\cdot\rho\cdot\cos\theta\cdot\rho\cdot d\rho\cdot d\theta =$$
$$= k\int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} \rho^3\cdot\cos\theta\cdot d\rho\cdot d\theta = k\int_0^{\pi}\left(p^4/4\right)_0^{2(1+\cos\theta)}\cos\theta\cdot d\theta =$$
$$= 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cdot\cos\theta\cdot d\theta = (14\pi\cdot k)\ \text{euros}\cdot\text{Mm} = (140\pi\cdot k)\ euros\cdot\text{Km.}$$

Así mismo, la superficie comarcal vendrá dada por la siguiente integral definida (de hecho, es conocido que dicha área equivaldrá a seis veces la del semicírculo generador de diámetro igual a 2 Mm. = 20 Km.):

$$A = 1/2\int_{\theta_2}^{\theta_1} p^2\cdot d\theta = 1/2\int_0^{\pi} 4(1+\cos\theta)^2\cdot d\theta =$$
$$= 2\int_0^{\pi}(1+\cos^2\theta + 2\cos\theta)\cdot d\theta = (por\ \text{descomposición}) =$$
$$= 2\int_0^{\pi} d\theta + 2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\cdot d\theta + 4\int_0^{\pi}\cos\theta\cdot d\theta =$$

= (por aplicación sucesiva de la regla de Barrow) =

$$= 2\cdot(\theta)_0^{\pi} + 2(\theta/2 + \text{sen } 2\theta/4)_0^{\pi} + 4\cdot(\text{sen }\theta)_0^{\pi} =$$
$$= 2\cdot\pi + 2\cdot\pi/2 + 4\cdot 0 = 3\cdot\pi\ \text{Mm.}^2 = 942\ \text{Km.}^2.$$

$$(\text{Nótese que}: \int\cos^2\theta\cdot d\theta = \int\left(\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}\right)^2\cdot d\theta =$$
$$= \int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = 1/2\int(1+\cos 2\theta)\cdot d\theta =$$

= θ/2 + sen 2θ/4 + C , como queríamos demostrar).

Con ello, las coordenadas del centro comarcal de masas de renta G, vendrán dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} x_0 = M_y / m = \dfrac{14\pi\cdot k}{20/3\cdot\pi\cdot k} = 2'100\ \text{Mm.} = 21'00\ \text{Km.} \\ \\ y_0 = M_x / m = \dfrac{128/5\cdot k}{20/3\cdot\pi\cdot k} = 1'222\ \text{Mm.} = 12'22\ \text{Km.} \end{cases}$$

Si conocemos que dicha comarca tiene una población de derecho de 290.000 habitantes, con una renta familiar disponible "per capita" de 8.350 €/habitante, se tendrán las siguientes características comarcales:

- Renta total = P x w = 290 x 8.350 = 2.421.500 x 10^3 €
- Densidad de población = 290.000/942 = 307'8 hab./Km^2.
- Densidad media de renta comarcal = 2.421.500 x 10^3/942 = =2.570.594'5 €/Km^2.

2.3.4. Generalizaciones

Una generalización del problema presentado en el anterior epígrafe al espacio tridimensional (agregando la variable "cota taquimétrica" o "altitud topográfica" del territorio estudiado) nos conduciría a considerar el elemento infinitesimal de masa:

$$dm = \delta\,(x, y, z) \cdot dV \quad ,$$

puesto que la masa de un cuerpo homogéneo de volumen V y densidad δ viene dada por la expresión: $m = \delta \cdot V$.

En nuestro caso, por tratarse de una masa de densidad variable, se tendrá que:

$$m = \iiint_R \delta(x,y,z)\cdot\overline{dx\cdot dy\cdot dz}^{\,dV} = \int_{x_1}^{x_2} dx\ \overline{\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} dy}^{\,x=cte.}\ \overline{\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \delta(x,y,z)dz}^{\,\substack{x=cte.\\ y=cte.}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta V_i \quad ,$$

siendo R un dominio de integración en el espacio tridimensional, limitado por una superficie, y siendo: δ (x, y, z) una función real de tres variables reales, continua en el dominio de definición R.

Del mismo modo, podemos realizar el cambio de variable a **u**, **v** y **w**, relacionadas con las coordenadas cartesianas **x**, **y**, y **z** mediante las fórmulas:

$$\begin{cases} x = h_1\,(u, v, w) \\ y = h_2\,(u, v, w) \\ z = h_3\,(u, v, w) \end{cases}$$

donde las variables **x**, **y** y **z** están definidas en los puntos (u, v, w) de un recinto V' y admiten derivadas primeras continuas, con lo que (PUIG, 1970):

$$\iiint_V \delta\,(x, y, z) \cdot dx\cdot dy\cdot dz =$$

$$= \iiint_{V'} \delta \; [h_1 (u,v,w), h_2 (u, v, w), h_3 (u, v, w)] \cdot \mathrm{I\,J\,I} \cdot du \cdot dv \cdot dw \quad ,$$

siendo IJI el determinante funcional jacobiano distinto de cero para todo (u, v, w) $\in$ V', expresado así:

$$\mathrm{IJI} = \begin{vmatrix} \delta x / \delta u & \delta x / \delta v & \delta x / \delta w \\ \delta y / \delta u & \delta y / \delta v & \delta y / \delta w \\ \delta z / \delta u & \delta z / \delta v & \delta z / \delta w \end{vmatrix} = \delta(x,y,z) / \delta(u,v,w), \text{ y también:}$$

$$V \xrightarrow{\text{Transform.}} V'$$

mientras que: IJI · du · dv · dw , representa el elemento infinitesimal de volumen expresado en coordenadas curvilíneas.

Si generalizamos al caso de una función de **n** variables, definida en un dominio n-dimensional, es decir, en un conjunto convexo, denso y cerrado de puntos del espacio métrico n-dimensional que tales variables definen, en la que se incorporarían nuevas variables o características a las estrictamente geográficas del territorio estudiado, se tendría la integral múltiple:

$$\iiint \underbrace{\ldots\ldots}_{n} \int_T \delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_n}{\prod_{i=1}^{n} dx_i}$$

con las mismas especificaciones teóricas que en los casos anteriores.

En el caso particular de realizar el cambio de variable en la integral triple para pasar de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas semipolares o cilíndricas, se tendrán las fórmulas:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi \,, \quad y = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \,, \quad z = z \,,$$

o bien las correspondientes para la transformación inversa:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \,, \quad \varphi = \text{arc tag } y/x \,, \quad z = z \,.$$

Véase, al respecto, la figura siguiente:

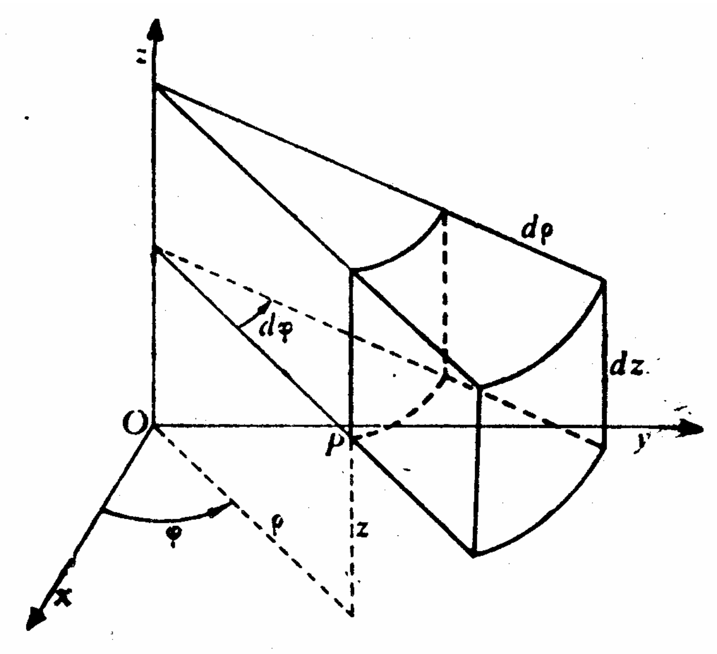


Fig. A-13.19. Coordenadas semipolares o cilíndricas.

A partir de ellas, se calcula el jacobiano de la transformación:

$$|J| = \delta(x,y,z) / \delta(\rho,\varphi,z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\cdot\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \rho\cdot\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \ ;$$

luego el elemento de volumen en dichas coordenadas es:

$$\rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz \ .$$

Contemplando la figura A-13.19 a partir del triedro de referencia Oxyz, veamos que este volumen corresponde al de un recinto limitado por dos cilindros de eje Oz y cuyos radios son: ρ y $\rho + d\rho$, los dos semiplanos limitados por el eje Oz y que forman con el plano Oxz los ángulos φ y $\varphi + d\varphi$, y los dos planos paralelos al plano Oxy por los puntos de cotas z y z + dz.

Así mismo, el paso de coordenadas cartesianas rectangulares a coordenadas polares o esféricas, se regirá por las fórmulas:

$$x = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\varphi \ , \ \ y = r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \ , \ \ z = r \cdot \cos\theta$$

, para cuya transformación inversa se tiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \ \ \theta = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x^2 + y^2} / z \ , \ \ \varphi = \operatorname{arc\,tg} y/x$$

A partir de ellas, se deduce el jacobiano (PUIG, 1970):

$$|J| = \delta(x,y,z) / \delta(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi & r\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta & -r\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\varphi & r\cdot\operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\theta & r\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\cdot\operatorname{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

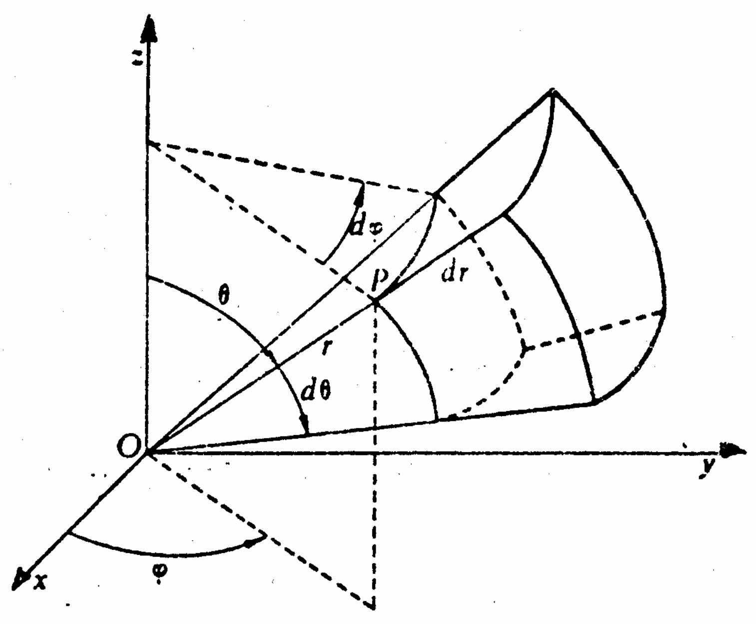


Fig. A-13.20. Coordenadas polares o esféricas.

De este modo, el elemento de volumen en estas coordenadas se expresará por: $r^2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$.

Este volumen, según puede verse en la figura A-13.20, corresponde al de un cuerpo limitado por dos esferas de centro en el origen de coordenadas y radios r y r + dr, los dos conos de revolución que tienen por eje Oz y cuyos semiángulos cónicos son θ y $\theta + d\theta$, y los dos semiplanos limitados por el eje Oz que forman con el plano Oxz los ángulos φ y $\varphi + d\varphi$.

Por otra parte, también el área de una superficie territorial (municipio, comarca, región, nación) puede ser perfectamente determinada por una integral de superficie, tanto si logramos deducir su ecuación en forma paramétrica o explícita.

En general, las integrales de campo encuentran numerosas e importantes aplicaciones en el Análisis gravitatorio territorial, a saber:

a) Si T es un territorio homogéneo, esto es, de densidad constante, y P (x,y,z) representa un punto genérico del mismo, las coordenadas (α,β,γ) de su centro de gravedad o de masas vienen dadas por las siguientes relaciones:

$$\alpha = 1/C \int_T x \cdot dT\ , \quad \beta = 1/C \int_T y \cdot dT\ , \quad \gamma = 1/C \int_T z \cdot dT\ ,$$

donde C representará la medida (longitud, área, volumen) de dicho territorio.

b) Si T no fuera homogéneo, sino que la densidad de población o de renta en cada uno de sus puntos (núcleos urbanos, municipios, ...) fuera una función: δ (x, y, z), su masa **m** se expresará mediante la integral:

$$m = \int_T \delta \cdot dT.$$

2.3.5. Aplicación de la integral de Riemann-Stieltjes

Veamos, a continuación, la aplicabilidad de esta conocida integral a la determinación del centro de las masas socioeconómicas de un territorio.

Sea f(x) una función continua, $\varphi(x)$ una función monótona creciente con una discontinuidad no evitable de 1ª especie (esto es, que carece de límite por ser diferentes ambos límites laterales) en los puntos del territorio: $c_1, c_2, ..., c_k$, ..., que pueden llegar a constituir una infinidad numerable, y sean $s_1, s_2, ..., s_k$,... los saltos correspondientes. Definiendo la función (MARTÍNEZ, 1975):

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c_1 , \\ s_1 & \text{si } c_1 \leq x < c_2 , \\ s_1 + s_2 & \text{si } c_2 \leq x < c_3 \text{ , etc.} \end{cases}$$

encontramos que esta función es monótona creciente, ya que por serlo □(x) todos los saltos son positivos, así como que la función:

$$\Phi(x) = \varphi(x) - \psi(x)$$

resulta continua y monótona creciente; admitiendo que sea derivable (las circunstancias en que esto no sucede se presentarán raramente en las aplicaciones territoriales) podemos escribir:

$$\int_a^b f \ d\varphi = \int_a^b f \ d\Phi + \int_a^b f \ d\psi \ ;$$

pero, al ser f continua y tener Φ una derivada continua Φ', la integral de Stieltjes se reducirá a la de Riemann, con lo que:

$$\int_a^b f \ d\Phi = \int_a^b f \ \Phi' \, dx \quad ,$$

mientras que la integral $\int_a^b f \ d\psi$ se reduce a la suma (o serie):

$$\Sigma_k f(c_k) \, s_k \ ,$$

ya que se anulan todas las diferencias $\psi(x_{i+1}) - \psi(x_i)$ cuando los puntos del territorio x_i y x_{i+1} están comprendidos entre c_k y c_{k+1}.

Por tanto, queda la expresión:

$$\int_a^b f \; d\varphi = \int_a^b f \;\; \Phi' \, dx \; + \sum_k f\,(c_k)\, s_k \quad . \qquad (1)$$

Se ve, pues, que una suma finita, o una serie, o una integral en el sentido de Riemann, pueden considerarse casos particulares de un proceso más general como es la integral de Stieltjes; así se comprende su utilidad en problemas donde se consideren distribuciones de masas, de probabilidades, etc., en parte continuas y en parte discretas, como podrán presentarse en el Análisis Territorial.

EJEMPLO: propongamos hallar el centro de gravedad de una distribución de masas socioeconómicas repartidas en el intervalo territorial [0, 1] Mm. y definida por la función:

$$\varphi(x) = x + 1/\,2^k \quad , \quad \text{si} \quad 1/2^k < x < 1/2^{k-1}$$

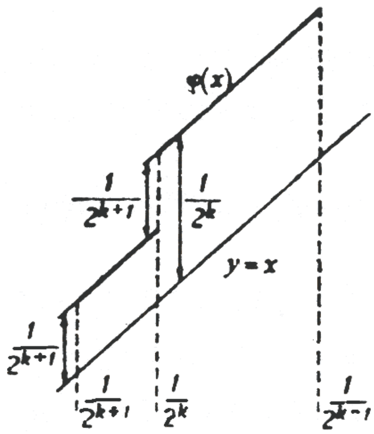


Fig. A-13.21. Centro de masas según Riemann-Stieltjes.

SOLUCIÓN: Haciendo f(x) = 1 en la anterior expresión (1), se observará que, en este caso, resulta:

$$\Phi(x) = x \qquad ; \qquad c_k = 1/2^k \qquad ; \qquad s_k = 1/2^{k+1} \qquad .$$

Se trata de determinar la suma de la serie: $1/2^{k+1}$ .Vamos, en primer lugar, a determinar el carácter de esta serie numérica, por aplicación del criterio de D'Alembert o del cociente, a saber:

$$\lim_{k \to \infty} . \, a_k \,/\, a_{k-1} = \lim_{k \to \infty} . \frac{1\,/\,2^{k+1}}{1\,/\,2^{k}} = \lim_{k \to \infty} . \;\; 2^k \,/\, 2^{k+1} = 1/2 < 1 \qquad ,$$

luego es convergente.

En realidad, consiste en una serie geométrica:

$$S_k = 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots + 1/2^{k+1} + \ldots ,$$

cuyo valor absoluto de la razón es:

$$|r| = 1/2 < 1$$

, luego su suma es una cantidad finita y determinada, a saber:

$$S = \lim_{k\to\infty} . S_k = \frac{a}{1-r} = \frac{1/4}{1-1/2} = 1/2 \quad .$$

La masa socioeconómica total del territorio será igual a:

$$\int_0^1 d\varphi(x) = \int_0^1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{k+1} = 1 + 1/2 \equiv (3/2)\cdot k \text{ euros} .$$

Así pues, procede, solamente, el cálculo de la integral de Stieltjes:

$$I = \int_0^1 x \cdot d\varphi(x) .$$

Para ello, deberá tenerse en cuenta que, ahora f(x) = x, y además:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k \cdot 1/2^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{2k+1} ,$$

cuyo carácter también es convergente, habida cuenta de que:

$$\lim_{k\to\infty} . a_k / a_{k-1} = \lim_{k\to\infty} . \frac{1/2^{2k+1}}{1/2^{2(k-1)+1}} = \lim_{k\to\infty} . 2^{k-1}/2^{k+1} = 1/4 < 1 \qquad ,$$

En realidad, trátase de la serie geométrica:

$$S_k = 1/8 + 1/32 + 1/128 + \ldots + 1/2^{2k+1} + \ldots ,$$

cuyo módulo de la razón es:

$|r| = 1/4 < 1$, con una suma finita y determinada, de valor:

$$S = \frac{a}{1-r} = \frac{1/8}{1-1/4} = 1/6 .$$

Volviendo a aplicar la fórmula (1), se tendrá:

$$I = \int_0^1 x\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^{2k+1} = \left(x^2/2\right)_0^1 + 1/6 = 1/2 + 1/6 = (2/3)\cdot k \text{ euros} \cdot \text{ Mm.}$$

Consecuentemente, la abscisa del centro de las masas socioeconómicas del territorio estudiado, será:

$$\boxed{x_0 = \frac{2 \cdot k / 3}{3 \cdot k / 2} = 4/9 \text{ Mm.} = 4'44 \text{ Km.}}$$

En la mayoría de las aplicaciones concretas que se pueden presentar en el Análisis Territorial, al igual que en el presente ejemplo, el cálculo de la integral de Riemann-Stieltjes que resuelve el problema planteado se lleva a cabo mediante el cálculo de integrales simples y de sumas finitas o series.

ANEXO 14

UNA CONCEPCIÓN MECÁNICA DEL TERRITORIO

ANEXO 14

UNA CONCEPCIÓN MECÁNICA DEL TERRITORIO

1. MOMENTO TERRITORIAL ESTÁTICO

Este concepto ya ha sido introducido en los anteriores apartados 2.2.2 y 2.3.2 ("Masa de renta homogénea en el campo continuo") del anterior Anexo 13 de nuestra tesis, donde lo empleábamos eficazmente para la determinación de las coordenadas geográficas de los centros territoriales de las masas de renta. Pues bien, siguiendo con nuestro símil físico-mecánico, y por aplicación a la ordenación territorial del teorema físico de momentos, veamos que *"el momento territorial estático, o momento de 1er. orden de un territorio A con respecto a otro punto o eje del territorio es igual a la suma algebraica de los productos de las áreas elementales (como las municipales) por sus respectivas distancias al punto o eje considerado, denominándose, respectivamente, momento territorial estático polar o áxico".* Así definido, en función del área, se trata evidentemente de un momento superficial o geométrico (FRANQUET, 1990/91).

De este modo, dado un territorio A y un "eje" **e** situado en sus inmediaciones (pudiera considerarse, como tal, un río, una vía de comunicación o, simplemente, una frontera territorial), denominaremos como "momento estático de A con respecto al eje **e**", a la suma integral expresada por:

$$M_e = \int_A y \cdot dA = \sum_i A_i \cdot y \quad ,$$

siendo **y** la distancia del elemento infinitesimal de superficie dA a dicho eje geográfico, infraestructural, administrativo o imaginario. Al respecto, pueden verse las figuras siguientes:

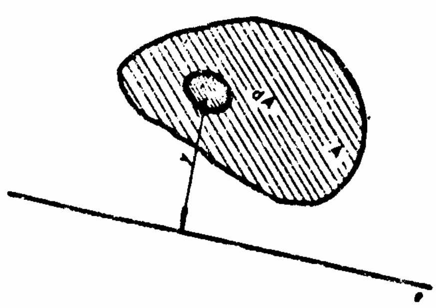


Fig. A-14.1. Momento estático de un territorio en relación a un eje cualquiera.

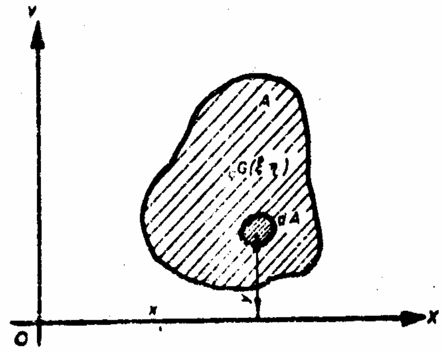


Fig. A-14.2. Momento estático de un territorio en relación a los ejes cartesianos rectangulares.

Igualmente, por definición y aplicando el teorema de Varignon, se tendrán los siguientes momentos con respecto a los dos ejes coordenados, para un territorio cualquiera de área A y de centro de masas de renta G (ξ, η):

$$\begin{cases} M_x = A \cdot \eta = \int_A y \cdot dA = \int_A y \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot y \\ M_y = A \cdot \xi = \int_A x \cdot dA = \int_A x \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x \end{cases}$$

expresiones éstas en las que las coordenadas ξ y η del punto G nos definen el centro de gravedad o "centro de masas" del territorio estudiado, que es el punto en el que puede concebirse concentrada el área total del territorio. Lógicamente, en el caso de operar con un territorio de densidad de renta continua y homogénea (constante), también en dicho punto puede suponerse concentrada la masa de renta total del territorio, sin que varíen los resultados. De dichas expresiones se deduce, en fin, que el momento estático de un territorio respecto de todo eje que pase por su "centro de masas" es nulo, dado que será igual al producto del área del territorio por la coordenada nula del centro de las masas socioeconómicas respecto de dicho eje territorial.

Por otra parte, el momento territorial estático polar del territorio A con respecto al punto o polo 0 (o, o), vendrá dado por la suma integral:

$$M_o = \int_A r \cdot dA = \sum_i A_i \cdot r$$

Como **r** es la distancia del elemento (municipal) dA al origen de coordenadas, por el teorema de Pitágoras se tendrá que:

$$M_o = \int_A r \cdot dA = \int_A \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dA = \iint_A \sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx \cdot dy$$

, o bien, en el campo discreto:

$$M_o = \sum_i A_i \cdot r = \sum_i A_i \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como ya hemos visto anteriormente, si un territorio fuera de configuración plantar simétrica con respecto a un determinado eje, su centro de masas se hallaría sobre dicho eje de simetría siempre y cuando su densidad de masa fuese continua y homogénea. Esto resulta evidente por el hecho de que los momentos de las áreas que se encuentran en los lados opuestos del eje de simetría son numéricamente iguales pero de signos contrarios. Así mismo, si el territorio posee un centro geométrico o geográfico, éste será, precisamente, su centro de masas en el supuesto, claro está, de trabajar con masas de renta homogéneas en el campo continuo.

Normalmente, la unidad física de medida de los momentos territoriales estáticos, que se empleará en los estudios de Ordenación Territorial, será el Km^3 o el Mm^3.

2. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA Y CENTRÍFUGOS

De entrada, podríamos conceptuar la "inercia territorial" como una propiedad en virtud de la cual un cierto territorio opone resistencia a toda causa que tienda a modificar fehacientemente su actual "status" económico-espacial.

Pues bien, definiremos como *"momento de inercia de un territorio A con respecto a otro punto o eje del territorio a la suma algebraica de los productos de las áreas elementales (como las municipales) por los cuadrados de sus respectivas distancias al punto o eje considerado, denominándose, respectivamente, momento territorial de inercia polar o áxico (ecuatorial)".* Constituye, obviamente, una extensión provechosa del concepto definido en el epígrafe anterior, tratándose, también, de un momento superficial o geométrico.

De este modo, dado un cierto territorio A y un "eje" **e** situado en sus inmediaciones (geográfico, infraestructural, administrativo o imaginario), denominaremos como "momento de inercia de A con respecto al eje" a la expresión integral:

$$I_e = \int_A y^2 \cdot dA = \sum_i A_i \cdot y^2 ,$$

siendo **y** la distancia del elemento infinitesimal de superficie del territorio dA a dicho eje. Así:

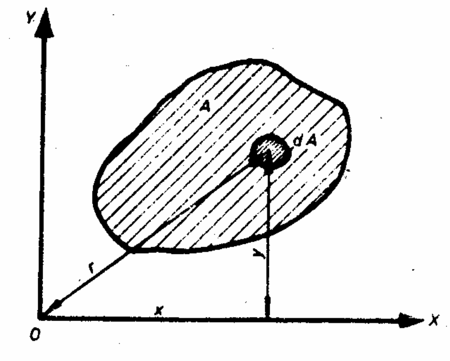


Fig. A-14.3. Momento de inercia polar de un territorio (ejes coordenados).

De igual forma, dado un cierto territorio A y los ejes coordenados **x** e **y**, los momentos territoriales de inercia ecuatoriales con respecto a los ejes **x** e **y** vendrán dados, respectivamente, por las expresiones (PÉREZ, 1976):

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot y^2$$

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = \iint_A x^2 \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x^2 \ ,$$

y el momento de inercia polar del territorio A con respecto al punto o polo O (0,0), será la suma integral:

$$I_o = \int_A r^2 \cdot dA = \iint_A (x^2 + y^2)\, dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot r^2 \ ,$$

por lo que también se cumplirá que:

$$I_o = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = \int_A x^2 \cdot dA + \int_A y^2 \cdot dA = I_y + I_x = \sum_i A_i \cdot (x^2 + y^2) \ ,$$

que resulta evidente por la propiedad aditiva del integrando, con lo que podremos enunciar el siguiente teorema:

"el momento de inercia polar de un territorio es igual a la suma de sus momentos de inercia ecuatoriales respecto a dos ejes rectangulares que pasen por el polo".

Sean ahora dos ejes oblicuos, formando un ángulo θ y un territorio A del que queremos calcular el momento de inercia polar en función de los momentos de inercia simples y compuesto (cuyo concepto veremos seguidamente).

$x = \overline{OA} \cdot \text{sen}\,\theta$

$\overline{OA} = x / \text{sen}\,\theta$

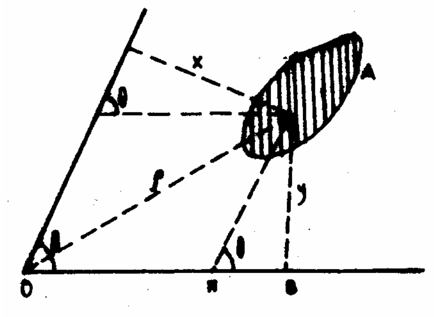


Fig. A-14.4. Momento de inercia polar de un territorio (ejes oblicuos).

El momento elemental es: $\rho^2 \cdot dw$, pero se tiene que:

$$\rho^2 = y^2 + \overline{OB}^2 = y^2 + \left(\overline{OA} + \overline{AB}^2\right) = y^2 + \overline{OA}^2 + 2 \times \overline{OA} \times \overline{AB} + \overline{AB}^2$$

Ahora bien:

$y / \overline{AB} = \text{sen}\,\theta / \cos\theta = \text{tg}\,\theta$; $\overline{AB} / y = \cos\theta / \text{sen}\,\theta = \text{cotg}\,\theta$, o sea:

$\overline{AB} = y \cdot \cos\theta / \text{sen}\,\theta = y \cdot \text{cotg}\,\theta$; además, se cumple que: $\overline{OA} = x / \text{sen}\,\theta$

de dónde:

$$\rho^2 = y^2 + \frac{x^2}{\text{sen}^2\theta} + \frac{2 \cdot xy \cdot \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} + \frac{y^2 \cdot \cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{y^2 + x^2 + 2xy \cdot \cos\theta}{\text{sen}^2\theta} .$$

$$I_O = \int \rho^2 \cdot dw = 1 / \text{sen}^2\,\theta \left[\int y^2 \cdot dw + \int x^2 \cdot dw + \int 2xy \cdot \cos\theta \cdot dw\right] =$$

$$= 1 / \text{sen}^2\,\theta \cdot [\, I_y + I_x + 2\cos\theta \cdot I_{xy} \,] . \quad (*)$$

Así pues, genéricamente, el momento de inercia polar de un territorio es igual a una fracción que tiene por numerador la suma de los momentos simples y del doble del producto del compuesto por el coseno del ángulo que forman los ejes coordenados, y por denominador el cuadrado del seno de dicho ángulo.

Si consideramos, ahora, a un territorio como si de un sólido o cuerpo físico se tratase, con una cierta masa **m** (de renta disponible, población de derecho, recursos, ...), el momento territorial de inercia se obtendrá multiplicando los elementos de masa (municipales) por los cuadrados de las distancias al elemento de referencia considerado; es decir, basta con introducir el factor "densidad" (d, δ) fuera o dentro de las integrales, según se trate de un territorio homogéneo o no.

En efecto, veamos que, razonando en los mismos términos que en el epígrafe 2.2.2 del anexo anterior, si la densidad superficial γ no es igual a 1 y es, por otra parte, una cierta función de **x** e **y**, es decir, si se cumple que:

$$\gamma = \gamma\,(x, y) \quad ,$$

entonces la masa de población o de renta del dominio parcial Δs_i, será igual a:

$$\gamma \cdot (\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\, s_i$$

(con precisión de hasta las infinitesimales de orden superior) y, por esto, el momento de inercia territorial respecto al origen de coordenadas, vendrá dado por:

$$I_0 = \iint_A \gamma\ (x, y) \cdot (x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy \quad ,$$

y sería del tipo másico o ponderal.

Se denominará, así mismo, *"módulo resistente territorial, a la relación o razón entre el momento de inercia territorial y la distancia mayor entre el centro de masas del territorio y cualquier otro lugar geográfico del mismo",* por lo que vendrá expresado, normalmente, en Km^3. Esto es:

$$W = I / d_{máx.}$$

En general, desde la perspectiva de la geometría de las masas socioeconómicas de población o de renta, veamos que en el caso de que se trate de un territorio con distribución continua de la masa socioeconómica en él contenida, se supone definida una cierta función de densidad: $\gamma = \gamma\ (\vec{r})$, en dónde γ es la densidad en un punto o lugar geográfico cuyo vector de posición es $\vec{r}$.

Por otra parte, se denomina *"producto de inercia, momento centrífugo o momento de inercia compuesto respecto a dos ejes perpendiculares entre sí **x** e **y** de un territorio A, a la suma algebraica de los productos de los elementos de superficie (municipios) por las respectivas distancias a ambos ejes", que designaremos por:*

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x \cdot y \quad ,$$

que opone una función subintegral rectangular frente al integrando cuadrático de los momentos territoriales de inercia simples, ya definidos. También podría denominársele "momento de desviación territorial", correspondiendo, la anterior definición, al de tipo superficial o geométrico.

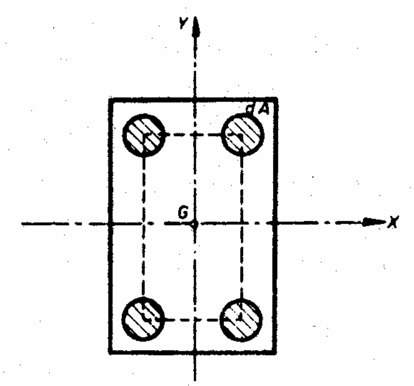
De hecho, tanto los momentos de inercia como los centrífugos de un territorio serán momentos de 2º orden. Evidentemente, si las superficies territoriales analizadas no constituyen un sistema o espacio contínuo sino discreto (habida cuenta de la notoria heterogeneidad en la distribución de las masas), las anteriores sumas integrales pasarán a ser sumas algebraicas, expresando el signo $\int$ (integral) por su sustituto $\sum$ (sumatorio), que es lo que venimos haciendo en todos los casos.

Si se verifica la nulidad del momento territorial centrífugo anteriormente definido, o sea:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = 0 = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \sum_i A_i \cdot x \cdot y \quad ,$$

diremos que ambos ejes coordenados son "principales de inercia", pues a todo producto: x · y · dA, le corresponde otro de igual valor absoluto y de signo contrario. Es decir, que a un área elemental o municipal dA del territorio de abscisa **x** le corresponde otra superficie infinitesimal igual de abscisa **-x** al otro lado del eje de ordenadas, con lo que podremos enunciar que: ***"****Dos ejes territoriales son principales de inercia cuando son perpendiculares entre sí y el momento centrífugo respecto a ellos es nulo".*

Fig. A-14.5. Ejes territoriales principales de inercia.



Así pues, si a un territorio determinado pudieran asimilársele -con cierto grado de aproximación, habida cuenta de su configuración geométrica- dos ejes de simetría, estos ejes serían "principales de inercia". Si dicho territorio sólo tuviera un eje de simetría, este eje y su normal que pasase por el centro territorial de masas serían "principales de inercia" y el momento territorial centrífugo respecto a ellos resultaría nulo.

La unidad física de expresión de los productos territoriales de inercia será, normalmente, el Km^4, o sea, la misma que la de los momentos territoriales de inercia, pero con la diferencia notoria, respecto a éstos, de que el resultado no tiene por qué ser siempre positivo, sino que puede ser una cantidad negativa o nula, ya que **x** e **y** pueden ser negativos, positivos o nulos, mientras que en el caso de los momentos territoriales de inercia polares o áxicos, su magnitud resulta esencialmente positiva.

3. RADIOS TERRITORIALES DE GIRO

3.1. RADIO DE GIRO TERRITORIAL SUPERFICIAL O GEOMÉTRICO

Íntimamente ligado al concepto de "momento de inercia territorial" está el del "radio medio de giro". En las aplicaciones prácticas de los estudios de ordenación territorial que nos honramos en propugnar, serán frecuentes y no necesariamente odiosas las comparaciones entre los momentos de inercia territoriales y el área total del propio territorio (municipio, comarca, región, nación); dichas relaciones nos conducirán a obtener, alternativamente, el radio de giro territorial, que viene expresado por la raíz cuadrada del momento de inercia respecto a un eje dividido por el área del territorio, así:

$$\rho_e = \sqrt{I_e / a} = \sqrt{\int_A y^2 \cdot dA / A} = \sqrt{\sum_i A_i \cdot y^2 / A}$$

con el siguiente significado:

$$\begin{cases} I_e = & \text{momento territorial de inercia del territorio A con respecto a un eje cualquiera } \mathbf{e} \ (km^4 \text{ ó } Mm^4). \\ \rho_e = & \text{distancia al eje considerado del centro territorial de masas, supuesta aplicada en dicho centro el área o superficie total del territorio (km.ó Mm.).} \\ A = & \text{área total del territorio analizado } (km^2 \text{ ó } Mm^2). \end{cases}$$

En el caso normal de trabajar en un espacio discreto, el radio de giro coincidirá con la distancia en línea recta entre las capitalidades o centros de masas de los territorios estudiados.

Paralelamente, los radios de giro o medios del territorio A respecto a los ejes coordenados **x** e **y** se expresarán, respectivamente, por:

$$\rho_x = \sqrt{I_x / A} \qquad \text{y} \qquad \rho_y = \sqrt{I_y / A}$$

Por último, definiremos el "momento territorial medio" como el cuadrado del correspondiente radio de giro, con lo que:

$$\begin{cases} I_x \text{ medio} = I_x / A = \rho_x^2 \\ I_y \text{ medio} = I_y / A = \rho_y^2 \end{cases}$$

3.2. RADIO DE GIRO TERRITORIAL MÁSICO O PONDERAL

En el caso de considerar al territorio como si se tratara de un sólido de masa **m** (que representara, por ejemplo, la renta familiar disponible total), el radio territorial de giro representaría, entonces, la distancia a la que habría que suponer situada una masa única de valor **m** para que tuviera el mismo momento ecuatorial de inercia respecto de dicho eje territorial **e**. En este caso, diremos que:

$$\rho_e = \sqrt{I_e / m}$$

y el momento de inercia I_e se habrá tenido que calcular, entonces, a partir de dicha masa **m**, y no en relación al área A.

Idénticas especificaciones metodológicas podríamos realizar para el caso de considerar a los ejes coordenados **x** e **y.** Efectivamente, en general, el momento territorial de inercia másico o ponderal vendrá dado por la adición de un número infinito de sumandos, a saber:

$$I = \sum_i m_i \cdot r^2 = \int_a^b r^2 \cdot dm$$

, siendo los límites de integración **a** y **b** los valores extremos que puede tomar la distancia **r.** Al respecto, conviene realizar las siguientes puntualizaciones:

- *El momento de inercia másico o ponderal de un territorio A con relación a un punto o lugar geográfico,* es igual a la suma de los productos de la masa de renta de cada punto por el cuadrado de la distancia al punto o lugar geográfico de referencia.

- *El momento de inercia másico o ponderal de un territorio A con relación a un eje territorial,* será lo mismo que en el caso anterior, pero computándose las distancias hasta dicho eje.

- *El momento de inercia másico o ponderal de un territorio A con relación a un plano territorial,* se definirá de un modo análogo a los casos anteriores, pero tomándose las distancias hasta el plano en cuestión (que podría ser, v. gr., una superficie de nivel altimétrico).

Desde luego, conviene tener presente que el momento territorial de inercia con relación a un eje es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a tres planos perpendiculares que pasan por dicho punto del territorio; de manera que si en un territorio cualquiera consideramos un punto O como origen de coordenadas, por el que pasan los tres ejes OX, OY y OZ, perpendiculares entre sí, el momento de inercia territorial con relación a cada uno de dichos tres ejes vendrá dado respectivamente, por las expresiones:

$$I_x = \sum_i m_i (y^2 + z^2) = \int_m (y^2 + z^2) \cdot dm$$

$$I_y = \sum_i m_i (x^2 + z^2) = \int_m (x^2 + z^2) \cdot dm$$

$$I_z = \sum_i m_i (x^2 + y^2) = \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm$$

habiendo generalizado el planteamiento del problema al espacio tridimensional, si bien, normalmente, el Análisis Territorial convencional limitará su campo de actuación al plano o espacio afín bidimensional euclídeo.

4. DETERMINACIONES USUALES

4.1. MOMENTOS ESTÁTICOS Y CENTROS TERRITORIALES DE MASAS

El momento estático territorial de A respecto de un cierto eje y, que supondremos forma parte de su contorno, o que es tangente a él, viene dado por la expresión:

$$M_y = \iint_A x \cdot dx \cdot dy = \int_0^a x \cdot \eta \cdot dx$$

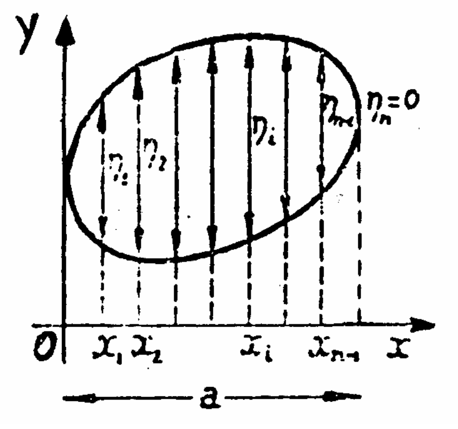


Fig. A-14.6. Territorio dividido en **n** subintervalos.

donde los η_i representan cada segmento de vertical de abscisa x comprendido en el interior del territorio. Dividiendo, ahora, el intervalo cerrado [O, a] en un número par de subintervalos iguales de amplitud unitaria (PUIG, 1970):

$$h = a / n \quad , \text{ y siendo:}$$

η_0, η_1, η_2, ..., η_i, ..., η_n, los segmentos de ordenadas interiores del territorio, correspondientes a los puntos de división, podremos aplicar a continuación cualquiera de las fórmulas aproximadas usuales de la Geometría métrica

(Poncelet, Simpson, Newton-Côtes, Gauss, Tchébishev u otras) al cálculo de dicha integral.

Desde luego, el número **n** de los puntos de división del intervalo es arbitrario; pero cuanto mayor sea este número tanto mayor será la precisión de los resultados a obtener. Para determinar el número de puntos de división que se deben tomar para calcular la integral con un grado de precisión dado, se pueden utilizar las fórmulas de evaluación de los errores cometidos durante el cálculo aproximado de la integral (FRANQUET, 1990/91).

Empleando, v. gr., la formulación de Simpson (que sustituye los arcos de curvas por arcos de parábolas cuadráticas o cúbicas), resultará:

$$\boxed{\begin{array}{c} y_0 = x_0 \cdot \eta_0 = 0 \\ y_1 = x_1 \cdot \eta_1 = h \cdot \eta_1 \\ y_2 = 2 \cdot h \cdot \eta_2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ y_{n-1} = (n-1) \cdot h \cdot \eta_{n-1} \\ y_n = n \cdot h \cdot \eta_n = 0 \end{array}}$$

De donde se tiene que:

$$M_y = h^2/3\ [0 + 4 \cdot \eta_1 + 2 \cdot 2 \cdot \eta_2 + 4 \cdot 3 \cdot \eta_3 + 2 \cdot 4 \cdot \eta_4 + \ldots + 4(n-1)\ \eta_{n-1} + 0]$$

$$A = h/3\ [0 + 4 \cdot \eta_1 + 2 \cdot \eta_2 + 4 \cdot \eta_3 + 2 \cdot \eta_4 + \ldots + 4 \cdot \eta_{n-1} + 0]$$

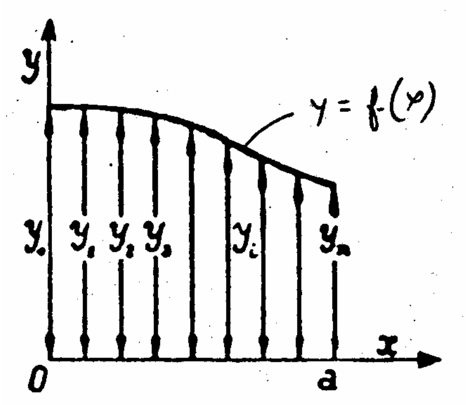
La distancia del centro territorial de masas al eje de ordenadas **y** será, pues:

$$\boxed{\xi = h\ \frac{4 \cdot \eta_1 + 2 \cdot 2 \cdot \eta_2 + 4 \cdot 3 \cdot \eta_3 + 2 \cdot 4 \cdot \eta_4 + \ldots + 4(n-1)\eta_{n-1}}{4 \cdot \eta_1 + 2 \cdot \eta_2 + 4 \cdot \eta_3 + 2 \cdot \eta_4 + \ldots + 4 \cdot \eta_{n-1}}}$$

Análogamente, podemos hallar la distancia del centro territorial de masas al eje **x** de abscisas, dividiendo o particionando el territorio en fajas horizontales paralelas.

Si se trata de un territorio de configuración geométrica asimilable a la de un trapecio mixtilíneo, como el que aparece representado en la figura siguiente:

Fig. A-14.7. Territorio de configuración trapecial mixtilínea.



, podemos también calcular el momento estático respecto del eje **x** integrando en la integral doble respecto a la función **y**, es decir, empleando la fórmula (PUIG, 1970):

$$M_X = \int_0^a \int_0^{y(x)} y \cdot dx \cdot dy = 1/2 \int_0^a y^2 \cdot dx$$

y aplicando a ella la fórmula de Simpson, resulta:

$$M_X = h/6\ (y_0^2 + 4\ y_1^2 + 2\ y_2^2 + 4\ y_3^2 + 2\ y_4^2 + 4\ y_5^2 + \ldots + y_n^2) \quad ,$$

cuyo cociente por el área del territorio, como es sabido, nos dará la ordenada η del centro territorial de masas, a saber:

$$h = 1/2 \times \frac{y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_4^2 + 4y_5^2 + \ldots + y_n^2}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n}$$

considerando, también, que:

$$A = \int_0^a y \cdot dx = \iint_A dx \cdot dy \ ,$$

desde el propio concepto de integral definida e integral doble, respectivamente.

Veamos, en fin, que el conocimiento o deducción, siquiera aproximados, de la forma algebraica de la función real: y = f(x), que nos determina el contorno del territorio en estudio, posibilita, incluso, el cómputo mecanizado del área del mismo mediante el empleo de calculadoras científicas programables al respecto y existentes en el mercado. En cualquier caso, también los *software* derivados del diseño asistido por ordenador (CAD) y similares permiten la realización de los expresados cálculos con precisión y rapidez.

4.2. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA

a) Territorio rectangular:

Tendrá, aproximadamente, una configuración planimétrica del tipo:

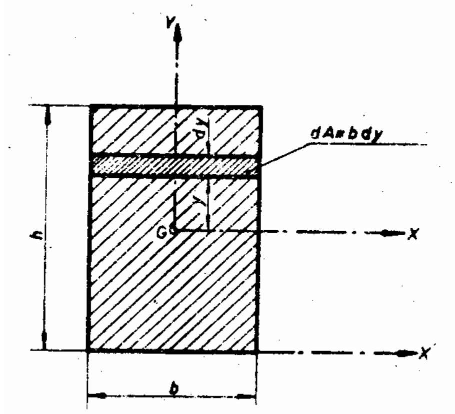


Fig. A-14.8. Territorio aproximadamente rectangular.

Por definición, el momento de inercia superficial o geométrico del territorio con respecto al eje **x** que pasa por el centro territorial de masas, es:

$$I_x = \int_A y^2 \cdot dA = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 \cdot dy = b \cdot h^3 / 12$$

Del mismo modo, por analogía, se tendrá que:

$$I_y = \int_A x^2 \cdot dA = h \cdot b^3/12$$, y con respecto a la base:

$$I_{x'} = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot h^3 / 3$$

En el caso particular de que b = h (territorio sensiblemente cuadrado):

$$I_x = I_y = b^4 / 12 \quad ; \quad I_{x'} = I_{y'} = b^4 / 3$$

La "elipse principal de inercia territorial", cuyo centro coincide con el centro territorial de masas, tendrá una ecuación de la forma:

$$K^2 = I_x \cdot \xi^2 + I_y \cdot \eta^2 = b \cdot h / 12 \, (h^2 \xi^2 + b^2 \eta^2) = b^3 h^3 / 12 \, (\xi^2/b^2 + \eta^2/h^2)$$

, que constituye una elipse semejante a la inscrita en el rectángulo territorial. Se puede afirmar, sin necesidad de efectuar cálculo alguno, que el producto territorial de inercia I_{xy} es nulo por la simetría de la figura y, por lo tanto, de la elipse.

Por otra parte, en el caso de un territorio rectangular, se tendrá un "módulo resistente territorial", con respecto al eje **x**, de:

$$W_X = b \cdot h^3 / 12 : h / 2 = b \cdot h^2 / 6$$

Además, siendo el momento de inercia polar I_0 con respecto del centro territorial de las masas socioeconómicas:

$$I_0 = b \cdot h\,(b^2 + h^2) / 12 \quad ,$$

se tendrá un módulo resistente territorial polar, con relación a dicho centro territorial de masas, de:

$$W_0 = \frac{b \cdot h(b^2 + h^2)/12}{\sqrt{(b/2)^2 + (h/2)^2}} = \frac{b \cdot h(b^2 + h^2)}{6\sqrt{(b^2 + h^2)}} = \frac{b \cdot h\sqrt{(b^2 + h^2)}}{6} \quad .$$

Se comprende, por otra parte, que en la praxis de la delimitación geofísica de un territorio cuya planta sea de configuración aproximadamente rectangular (por parte de la Administración Pública competente al respecto), si se disminuye el valor de la base **b** y aumenta, en la misma proporción, el de la altura **h,** se incrementará el valor de los momentos de inercia territoriales I_X e $I_{X'}$, contrariamente a lo que sucederá con I_y. Ello resultará de particular importancia al considerar los "grados de conexión territorial" definidos en el posterior epígrafe 13 del presente anexo de nuestra tesis, así como su incidencia en el equilibrio territorial, puesto que al aumentar el momento de inercia disminuye la atracción ejercida desde el eje territorial de referencia considerado hacia el resto del territorio en estudio.

b) Territorio circular:

Tendrá, aproximadamente, una configuración planimétrica del tipo:

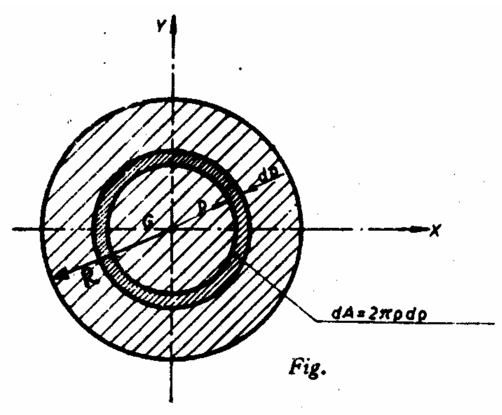


Fig. A-14.9. Territorio aproximadamente circular.

Por definición, el momento polar de inercia superficial o geométrico I_0

respecto del centro territorial de masas, dividiendo el círculo del territorio en anillos de espesor dρ, será:

(Teniendo en cuenta que la ecuación de la circunferencia, expresada en coordenadas polares es: $\rho = R$).

$$I_0 = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_0^{d/2} 2\pi \cdot \rho^3 \cdot d\rho = \pi \cdot d^4 / 32 = \pi \cdot R^4 / 2 \quad \text{, y también:}$$

$$I_x = I_y = \pi \cdot d^4 / 64 = \pi \cdot R^4 / 4$$

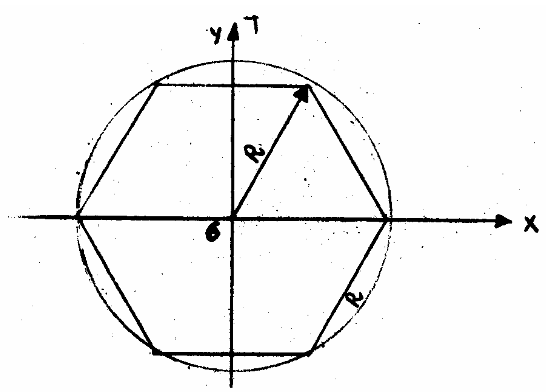
, puesto que sumando los momentos territoriales de inercia respecto de dos diámetros rectangulares, resulta que: $I_x + I_y = 2\, I_x = 2\, I_y = I_0$.

Del mismo modo, los módulos resistentes territoriales con relación al eje **x** y el polar con relación al centro territorial de masas, vendrán dados, respectivamente, por:

$$W_x = \pi \cdot R^3 / 4 = \pi \cdot d^3 / 32 \quad \text{, y también: } W_0 = \pi \cdot R^3 / 2 = \pi \cdot d^3 / 16 \ ,$$

de lo que se infiere que: $\boxed{W_0 = 2 \cdot W_x}$

Una variante de la configuración circular, mayormente aproximativa a la realidad territorial, tendería a considerar el perímetro del territorio en cuestión como formado por bases rectas, configurando polígonos regulares (pentágonos, hexágonos, octógonos,...). Y así, veamos que en el caso concreto del hexágono, se tendrá:



$$I_x = 5\sqrt{3} / 16 \cdot R^4 \approx 0'5413 \cdot R^4 \ ,$$

Fig. A-14.10. Territorio de perímetro poligonal hexagonal.

, con un "módulo resistente territorial", con respecto al mismo eje **X**, de:

$$W_x = 5/8 \cdot R^3 = 0'625 \cdot R^3 \ .$$

En el caso del octógono, se tendrá:

$I_X = \frac{1+2\sqrt{2}}{6} \cdot R^4 \approx 0'6381 \cdot R^4$,

y también: $W_X = 0'6906 \cdot R^3$.

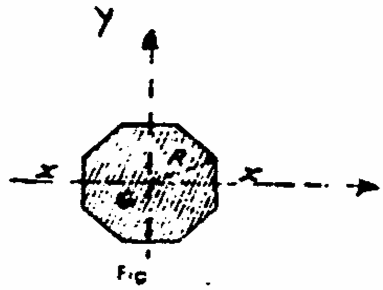


Fig. A-14.11. Territorio de perímetro poligonal octogonal.

Veamos, por último, que una deformación de la planta circular puede conducir a la configuración elíptica asimilable de un territorio cualquiera, así:

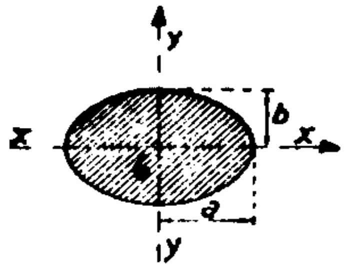


Fig. A-14.12. Territorio de planta elíptica.

, siendo **2a** el semieje mayor y **2b** el semieje menor, con unos módulos resistentes territoriales respectivos, de:

$$\begin{cases} W_{xx} = I_{xx} / b = \pi \cdot a \cdot b^2 / 4 \\ W_{yy} = I_{yy} / a = \pi \cdot b \cdot a^2 / 4 \end{cases} ,$$

de los que pueden deducirse las relaciones genéricas:

$\boxed{a^2 \cdot I_{xx} = b^2 \cdot I_{yy}}$ y , también:

$\boxed{a \cdot W_{xx} = b \cdot W_{yy}}$

c) Ejemplos de aplicación:

Como aplicación sencilla e ilustrativa de los supuestos anteriores (FRANQUET, 1990), calculemos ahora los momentos territoriales de Cataluña y de la provincia de Tarragona, asimilando ambos territorios, respectivamente, a un triángulo isósceles y a un rectángulo, tal como puede verse a continuación (se tratará, pues, de momentos estrictamente superficiales o geométricos):

a) Caso de Cataluña:

En el caso del conjunto de Cataluña, por tratarse de un territorio triangular, se tendrá un momento ecuatorial de inercia con respecto **al eje X que pasa por el centro territorial de masas G** (sito sobre la comarca del "Solsonès", y próximo a su punto de confluencia con las comarcas del "Bages" y "Anoia"):

$$I_X = b \cdot h^3 / 36 = 35'5 \times 25'3^3 / 36 = \mathbf{15.969\ Mm^4} \quad ,$$

y con respecto al mismo eje, se tendrá un módulo resistente territorial de:

$$W_X = b \cdot h^2 / 24 = 35'5 \times 25'3^2 / 24 = \mathbf{946'8\ Mm^3 = 946.800\ Km^3}$$

El momento de inercia con respecto al eje de la base que resulta ser, en este caso, el eje NE-SW de la costa mediterránea, será, como ya se ha visto:

$$I_b = b \cdot h^3 / 12 = 3 \cdot I_X = \mathbf{47.908\ Mm^4}$$

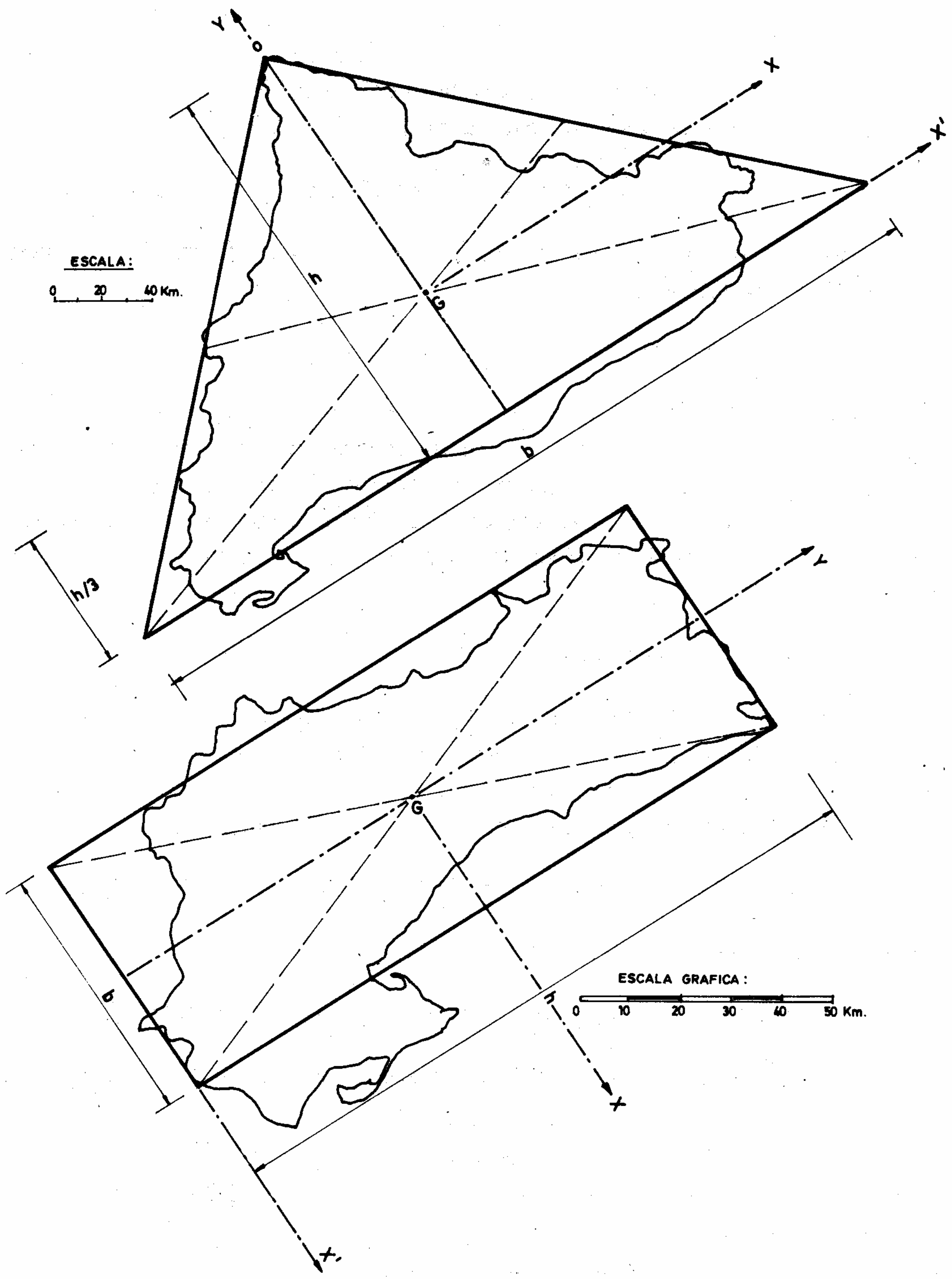


Fig. A-14.13. Momentos territoriales de inercia de Cataluña y de la provincia de Tarragona.

Por último, el momento de inercia con respecto al vértice superior 0 del Principado (que aquí se considera el extremo noroccidental de la comarca de la Vall d'Aran, en los confines del término municipal de Bausén, según el dibujo anexo), vendrá dado por:

$$I_0 = b \cdot h^3 / 4 = 9 \cdot I_x = \mathbf{143.724\ Mm^4} \quad .$$

Obsérvese que en la asimilación geométrica efectuada, el área del territorio catalán será de:

$$A = b \cdot h / 2 = 355 \text{ x } 253 / 2 = \mathbf{44.907'5\ Km^2} \quad ,$$

superior en un 40,8% a la superficie real del Principado, que resulta ser exactamente de 31.895,3 Km^2. Al respecto, digamos que en trabajos de este tipo deberá procurarse ajustar al máximo el dibujo del polígono regular sustitutivo a la superficie territorial real en estudio, al objeto de limitar, en la medida de lo posible, la aparición de notorias discrepancias métricas.

b) Caso de la provincia de Tarragona:

Por tratarse de un territorio de planta aproximadamente rectangular, se tendrá un momento de inercia de dicha provincia con respecto al eje **X** que pasa por el centro territorial de masas G (sito sobre la comarca del "Priorat", a escasos kilómetros al sur de la capital Falset):

$$I_x = b \cdot h^3 / 12 = 54 \text{ x } 137^3 / 12 = 11.571.088 \text{ Km}^4 = \mathbf{1.157'11\ Mm^4}$$

, con un módulo resistente territorial de:

$$W_x = b \cdot h^2 / 6 = 54 \text{ x } 137^2 / 6 = 168.921 \text{ Km.}^3 = \mathbf{168'9\ Mm^3} \; .$$

El momento de inercia polar, con respecto al centro territorial de masas G, será:

$$I_0 = \frac{b \cdot h(b^2 + h^2)}{12} = \frac{5'4 \times 13'7(5'4^2 + 13'7^2)}{12} = \mathbf{1.336'88\ Mm^4} \quad ,$$

con un módulo resistente territorial correspondiente de:

$$W_0 = \frac{b \cdot h\sqrt{b^2 + h^2}}{6} = \frac{5'4 \times 13'7\sqrt{5'4^2 + 13'7^2}}{6} = \mathbf{181'57\ Mm^4}$$

Así mismo, con respecto al eje **Y**, se tendrá:

$$I_y = h \cdot b^3 / 12 = 13'7 \text{ x } 5'4^3 / 12 = \mathbf{179'77\ Mm^4} \quad \mathbf{,}$$

mientras que, con respecto a la base o frontera con el *País Valencià* (eje **X’**), se tendrá un momento de inercia de:

$$I_{X'} = b \cdot h^3 / 3 = 5'4 \text{ x } 13'7^3 / 3 = \mathbf{4.628'44\ Mm^4} \quad ,$$

correspondiendo, también, un radio de giro provincial superficial o geométrico, con respecto a dicho eje, de:

$$\rho_{X'} = \sqrt{I_{x'} / A} = \sqrt{4.628'44 / 5'4 \times 13'7} = \mathbf{7'91\ Mm.\ =\ 79'1\ Km.}$$

Las restantes determinaciones a efectuar surgirán de los propios conceptos teóricos anteriormente explicados. De este modo, por ejemplo, el momento territorial estático (superficial o geométrico) de esta provincia con relación al eje-frontera meridional X’ con el País Valencià vendrá dado por la expresión:

$$M_{X'} = \int_A y \cdot dA = \int_0^h y \cdot b \cdot dy = b \cdot [\, y^2 / 2\,]_0^h = b \cdot h^2 / 2 =$$

$$= 5'4 \cdot 13'7^2 / 2 = \mathbf{506'76\ Mm^3 = 506.763\ Km^3} \,.$$

d) Tablas simplificadas de cálculo:

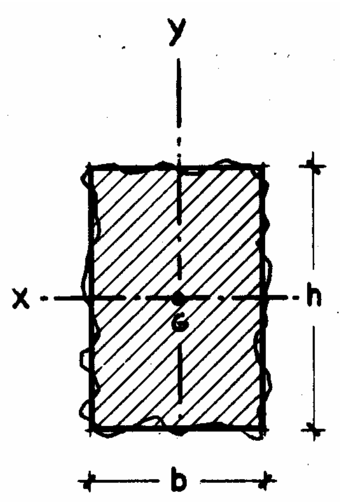


Fig. A-14.14. Territorio de planta aproximadamente rectangular.

$$I_X = b \cdot h^3 / 12 \qquad ; \qquad I_y = h \cdot b^3 / 12$$

En este caso, para entrar en la tabla siguiente, deben tomarse los valores de **b** por **h**, y recíprocamente. Esto es:

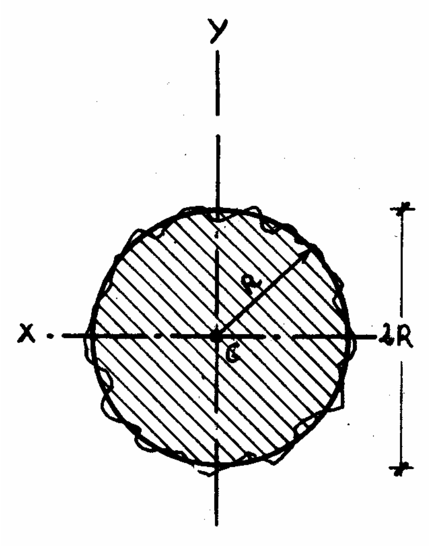
b (km)	*h* en km									
	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
10	833	2 812	6 666	13 020	22 500	35 729	53 333	75 937	104 166	138 646
15	1 250	4 219	10 000	19 531	33 750	53 595	80 000	113 906	156 250	207 969
20	1 667	5 625	13 333	26 041	45 000	71 458	106 666	151 875	208 333	277 292
25	2 083	7 031	16 667	32 552	56 250	89 323	133 333	189 844	260 417	346 614
30	2 500	8 437	20 000	39 062	67 500	107 187	160 000	227 812	312 500	415 937
35	2 917	9 844	23 333	45 573	78 750	125 052	186 667	265 781	364 583	485 260
40	3 333	11 250	26 666	52 082	90 000	142 916	213 333	303 750	416 666	554 583
45	3 750	12 656	30 000	58 594	101 250	160 781	240 000	341 719	468 750	623 906
50	4 167	14 062	33 333	65 104	112 500	178 646	266 667	379 687	520 833	693 229
55	4 583	15 468	36 667	71 614	123 750	196 511	293 333	417 656	572 917	762 552
60	5 000	16 875	40 000	78 125	135 000	214 375	320 000	455 625	625 000	831 875
65	5 417	18 281	43 333	84 635	146 250	232 240	346 667	493 593	677 083	901 198
70	5 833	19 687	46 667	91 146	157 500	250 104	373 333	531 562	729 167	970 520
75	6 250	21 094	50 000	97 656	168 750	267 969	400 000	569 531	781 250	1 039 843
80	6 666	22 500	53 333	104 168	180 000	285 833	426 667	607 500	833 333	1 109 166
85	7 083	23 906	56 667	110 667	191 250	303 698	453 333	645 469	885 416	1 178 489
90	7 500	25 312	60 000	117 187	202 500	321 562	480 000	683 437	937 500	1 247 812
95	7 917	26 718	63 333	123 698	213 750	339 427	506 667	721 406	989 583	1 317 135
100	8 333	28 125	66 666	130 208	225 000	357 292	533 333	759 375	1 041 667	1 386 458

Tabla A-14.1. Momentos de inercia de territorios aproximadamente rectangulares (km^4)

h en Km								*b* (Km)
60	65	70	75	80	85	90	100	
180 000	228 854	285 833	351 562	426 667	511 771	607 500	833 333	10
270 000	343 281	428 750	527 343	640 000	767 565	911 250	1 250 000	15
360 000	457 708	571 667	703 125	853 333	1 023 542	1 215 000	1 666 666	20
450 000	572 135	714 583	878 906	1 066 667	1 279 427	1 518 750	2 083 333	25
540 000	686 563	857 500	1 054 687	1 280 000	1 535 312	1 822 500	2 500 000	30
630 000	800 990	1 000 416	1 230 468	1 493 333	1 791 198	2 126 250	2 916 667	35
720 000	915 417	1 143 333	1 406 250	1 706 667	2 047 083	2 430 000	3 333 333	40
810 000	1 029 844	1 286 250	1 528 031	1 920 000	2 302 969	2 733 750	3 750 000	45
900 000	1 144 271	1 429 167	1 757 812	2 133 333	2 558 854	3 037 500	4 166 667	50
990 000	1 258 698	1 572 083	1 933 533	2 346 667	2 814 739	3 341 250	4 583 333	55
1 080 000	1 373 125	1 715 000	2 109 375	2 560 000	3 070 625	3 645 000	5 000 000	60
1 170 000	1 487 552	1 857 917	2 285 156	2 773 333	3 326 510	3 948 750	5 416 667	65
1 260 000	1 601 979	2 000 833	2 460 937	2 986 666	3 582 396	4 252 500	5 833 333	70
1 350 000	1 716 406	2 143 750	2 636 719	3 200 000	3 838 281	4 556 250	6 250 000	75
1 440 000	1 830 834	2 286 667	2 812 500	3 413 333	4 094 167	4 860 000	6 666 667	80
1 530 000	1 945 261	2 429 583	2 988 285	3 626 667	4 350 052	5 163 750	7 083 333	85
1 620 000	2 059 688	2 572 500	3 164 062	3 840 000	4 605 937	5 467 500	7 500 000	90
1 710 000	2 174 115	2 715 416	3 339 844	4 052 222	4 861 823	5 771 250	7 916 667	95
1 800 000	2 288 542	2 858 333	3 515 625	4 266 667	5 117 708	6 075 000	8 333 333	100

Tabla A-14.1'(Continuación). Momentos de inercia de territorios aproximadamente rectangulares (km^4)

En el caso de un territorio de configuración planimétrica aproximadamente circular, se tendría la siguiente tabla simplificativa de los cálculos a efectuar:



$$I_x = \pi \cdot R^4 / 4 = I_y$$

Fig. A-14.15. Territorio de planta aproximadamente circular.

2R	$I_x = I_Y$	2R	$I_x = I_Y$	2R	$I_x = I_Y$	2R	$I_x = I_Y$
20	7 854	40	125 664	60	636 172	80	2 010 619
21	9 547	41	138 709	61	679 651	81	2 113 051
22	11 499	42	152 745	62	725 332	82	2 219 347
23	13 737	43	167 820	63	773 272	83	2 329 605
34	16 286	44	183 984	64	823 550	84	2 443 920
25	19 175	45	201 289	65	876 240	85	2 562 392
26	22 432	46	219 787	66	931 420	86	2 685 120
27	26 087	47	239 531	67	989 166	87	2 812 205
28	30 172	48	260 576	68	1 049 556	88	2 943 748
29	34 719	49	282 979	69	1 112 660	89	3 079 853
30	39 761	50	306 796	70	1 178 588	90	3 220 623
31	45 333	51	332 086	71	1 247 393	91	3 366 165
32	51 472	52	358 908	72	1 319 167	92	3 516 586
33	58 214	53	387 323	73	1 393 995	93	3 671 992
34	65 597	54	417 393	74	1 471 963	94	3 832 492
35	73 662	55	449 180	75	1 553 156	95	3 998 198
36	82 448	56	482 750	76	1 637 662	96	4 169 220
37	91 998	57	518 166	77	1 725 571	97	4 345 671
38	102 354	58	555 497	78	1 816 972	98	4 527 664
39	113 561	59	594 810	79	1 911 967	99	4 715 315

Tabla A-14.2. Momentos de inercia de territorios aproximadamente circulares.

e) Territorio de forma triangular:

Fundamentalmente, como ya se ha visto con anterioridad, nos encontraremos en este caso al tratar de estudiar la asignación o afectación global de los triángulos intercomarcales o interregionales a su territorio de pertenencia (ver el apartado 7 del anterior Capítulo 7, así como el apartado 1 del Anexo 13).

De una manera simplificada, se tendrá una configuración planimétrica del tipo:

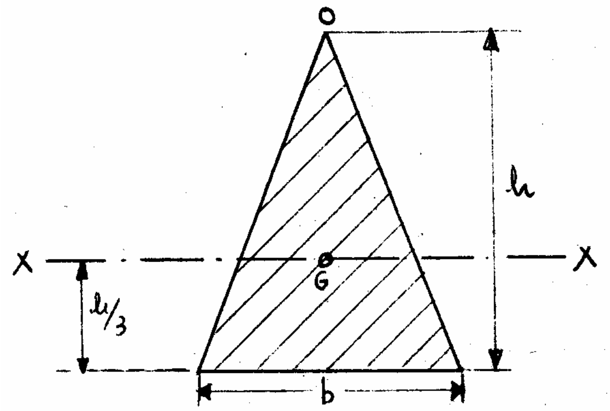


Fig. A-14.16. Territorio aproximadamente triangular.

El momento ecuatorial de inercia con respecto al eje **X-X'**, que pasa por el centro territorial de masas, viene dado por la expresión:

$$I_X = b \cdot h^3 / 36 \,.$$

Por aplicación del teorema de Steiner, que estudiaremos seguidamente, se tendrá que el momento de inercia del territorio triangular con respecto al eje de su base, será:

$$I_b = b \cdot h^3 / 36 + b \cdot h / 2 \cdot (h / 3)^2 = b \cdot h^3 / 12$$

Del mismo modo, el momento de inercia de dicho territorio respecto a su vértice superior O, será:

$$I_0 = b \cdot h^3 / 36 + b \cdot h / 2 \cdot (2h / 3)^2 = b \cdot h^3 / 4 \,,$$

y así procederemos sucesivamente para la determinación de los restantes momentos territoriales de inercia respecto de los demás vértices o ejes territoriales.

Por último, veamos que el módulo resistente territorial con respecto al mismo eje **X-X'**, vendrá dado por la siguiente expresión:

$$W_X = I_X / d_{máx.} = (b \cdot h^3 / 36) : (2h / 3) = b \cdot h^2 / 24$$

f) Territorio de forma irregular:

Será el caso general o normal que nos encontraremos en los estudios de Ordenación Territorial. Para su eficaz resolución, podemos suponer concentrada toda el área (o la masa de renta) del territorio en su centro de gravedad conocido, bien por tratarse del centro urbano de su capitalidad territorial o sede institucional, bien por haberse determinado por los procedimientos indicados en el ejemplo desarrollado para Cataluña.

Para ello, se divide la superficie del territorio (dibujada a escala sobre un plano o mapa del mismo) mediante rectas paralelas al eje con respecto al cual se pretende determinar el momento territorial de inercia. Ello debe realizarse en **k** fajas suficientemente estrechas como para que puedan considerarse, a efectos prácticos, como rectángulos yuxtapuestos; del dibujo se deducen las áreas f_i de dichas fajas, así como las distancias y_i de sus centros de gravedad al eje territorial **e**, disponiéndose el cálculo subsiguiente en forma tabular y formándose la suma:

$$I_e = \sum_{i=1}^{k} y_i^2 \cdot f_i$$

Para que este método resulte operativo y no origine un error de medición apreciable, es preciso que las franjas de territorio sean tan estrechas que el momento de inercia de cada una de ellas, con respecto a la paralela al eje que pasa por su propio centro de gravedad, esto es:

$$b \cdot h^3 / 12 = f \cdot h^2 / 12$$

sea despreciable en comparación con el producto: $y^2 \cdot f$.

Si hay una proporción importante del territorio -o varias- de la cual puedan determinarse fácilmente: el área **f**, la ordenada $\mathbf{y_S}$ del centro de gravedad y el momento de inercia $\mathbf{I_S}$ (con respecto a la paralela al eje que pasa por su centro de gravedad o de masas), no habrá que dividir dicha porción territorial en fajas paralelas, pero en la adición total, en vez del producto: $y^2 \cdot f$, deberá considerarse la expresión: $y_S^2 \cdot f + \mathbf{I_S}$, que resulta como consecuencia de la aplicación, a este caso, del teorema de Steiner, que veremos en el siguiente epígrafe de nuestro estudio.

Así mismo, si se tiene un territorio cuyo centro de masas de renta G no nos es conocido todavía, y hay que determinar su momento territorial de inercia con respecto a un eje paralelo a una dirección dada (por ejemplo: una vía importante de comunicación terrestre) y que pase por dicho punto G, se empezará por calcular, como se sabe, el momento de inercia para una paralela cualquiera al eje, y luego se reduce dicho momento al eje que pasa por G restándole el producto:

$$F \cdot y_S^2 \quad \text{, siendo:}$$

F = superficie total del territorio (Km^2).

y_S = distancia del centro territorial de masas de renta al eje provisional (km).

5. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA CON RELACIÓN A EJES PARALELOS

Determinaremos dichos momentos de inercia por aplicación de los teoremas y fórmulas de Steiner, de gran utilidad en la Mecánica Física (PÉREZ, 1976), puesto que estos casos también pueden presentarse, con cierta frecuencia, en los estudios de Ordenación Territorial. Ello nos permitirá calcular los momentos territoriales de inercia áxicos o ecuatoriales $\mathbf{I_x}$ e $\mathbf{I_{y'}}$, el momento territorial de inercia polar $\mathbf{I_0}$ y el momento centrífugo $\mathbf{I_{xy'}}$, respecto a los ejes de un sistema coordenado rectangular, en función de los momentos I_ξ, I_η e $I_{\xi\eta}$ respecto a otros ejes paralelos a los anteriores con origen en el centro de masas G del territorio A:

a) Momentos de inercia relativos a ejes paralelos:

Sean *a* y *b* las coordenadas del centro de masas G del territorio A respecto al sistema de coordenadas cartesianas rectangulares OXY, y r = $\overline{OG}$.

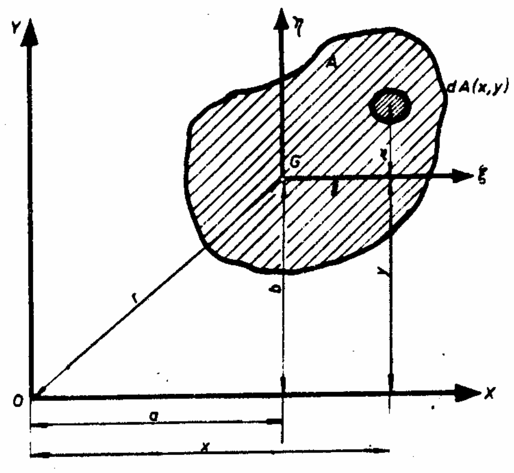


Fig. A-14.17. Momento de inercia relativo a ejes paralelos.

Las coordenadas del elemento infinitesimal de superficie dA son:

$$x = a + \xi \qquad \text{e} \qquad y = b + \eta \ ,$$

siendo ξ y η las coordenadas del elemento respecto al sistema G ξ η que contiene al centro de masas del territorio estudiado.

Por definición, el momento de inercia del territorio respecto al eje **Ox** viene dado por:

$$I_X = \int_A y^2 \cdot dA = \int_A (b + \eta)^2 \cdot dA = \int_A b^2 \cdot dA + \int_A \eta^2 \cdot dA +$$

$$+ \int_A 2b \cdot \eta \cdot dA = b^2 \int_A dA + \int_A \eta^2 \cdot dA + 2b \int_A \eta \cdot dA =$$

$$= b^2 \cdot A + I_\xi = I_X$$

al ser: $\int_A dA = A$ el área total del territorio, $\int_A \eta^2 \cdot dA = I_\xi$ el momento de inercia respecto al eje Gη, y: $\int_A \eta \cdot dA = 0$, por ser el momento estático de la superficie del territorio respecto al eje Gη que contiene su centro de gravedad (ver epígrafe 1 de este mismo Capítulo).

Del mismo modo, con respecto al eje **Oy**, se cumplirá que:

$$I_y = I_\eta + a^2 \cdot A = I_\eta + a^2 \cdot m$$

, para los casos superficial o ponderal, respectivamente.

Estas fórmulas dan origen al que podríamos denominar “teorema del eje paralelo territorial”, a saber:

El momento de inercia de un territorio respecto a un eje fijo cualquiera que no pase por su centro de masas es igual al momento de inercia respecto a otro eje paralelo a él que pasa por su centro de masas más el producto del área (o de la masa de renta, población, ...), por el cuadrado de la distancia entre ambos ejes.

De todo lo expuesto también se deduce que *el radio medio o de giro respecto de un eje territorial cualquiera vendrá dado por la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son, respectivamente, el radio de giro del eje paralelo que pasa por el centro territorial de las masas socioeconómicas y la distancia geográfica entre ambos ejes.*

b) Momento de inercia polar:

Sumando miembro a miembro las expresiones anteriores, obtenemos:

$$I_o = I_x + I_y = I_\xi + I_\eta + (a^2 + b^2)\, A = I_G + r^2 \cdot A$$

que puede traducirse en el siguiente teorema:

El momento de inercia polar de un territorio respecto a un polo O es igual al momento de inercia polar respecto a su centro de gravedad más el producto de su área por el cuadrado de la distancia existente entre O y G.

El centro territorial de masas queda, pues, caracterizado por la circunstancia de que, para él, el momento de inercia polar del territorio es un mínimo (FRANQUET, 1990/91).

Existe también una relación de correspondencia entre los radios de giro de un territorio con respecto a los ejes paralelos, uno de los cuales pasa por el centro territorial de masas. Así,

$$\rho_x^2 = \rho_\xi^2 + b^2$$

$$\rho_y^2 = \rho_\eta^2 + a^2 \qquad \text{ó bien: } \rho_0^2 = \rho_G^2 + r^2$$

c) Momento de inercia compuesto:

El "momento centrífugo del territorio" respecto a los ejes OX y OY es:

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA = \int_A (\xi + a) \cdot (\eta + b) \cdot dA =$$

$$= \int_A \eta \cdot \xi \cdot dA + a \cdot \int_A \eta \cdot dA + b \int_A \xi \cdot dA + a \cdot b \int_A dA$$

$$, \text{ y:} \qquad I_{xy} = I_{\xi\eta} + a \cdot b \cdot A$$

Si los ejes Oξ y Oη son principales de inercia (ejes de simetría), se tendrá que:

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi \cdot \eta \cdot dA = 0 \,, \qquad \text{luego: } \mathbf{I_{xy}} = a \cdot b \cdot A$$

6. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA CON RELACIÓN A EJES CONCURRENTES GIRATORIOS

Vamos ahora a relacionar los momentos territoriales de inercia respecto de ejes concurrentes que forman cierto ángulo con los ejes iniciales de referencia, por aplicación del conocido Teorema de Poinsot[13].

Sean I_x e I_y los momentos de inercia de un territorio A respecto a los ejes rectangulares OX y OY, e I_{xy} su momento centrífugo respecto a los mismos ejes.

Calculemos ahora el momento de inercia I_u del territorio respecto a otro eje Ou que está definido por el ángulo α que forma con el eje OX en función de I_x, I_y e I_{xy}.

Como resulta que: $u = \overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha$

$$v = \overline{CM} = \overline{CN} - \overline{NM} = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

y sustituyendo estos valores, obtenemos:

$$I_u = \int_A v^2 \cdot dA = \int_A (y \cdot \cos\alpha - x \cdot \operatorname{sen}\alpha)^2 \cdot dA =$$

$$= \cos^2\alpha \int_A y^2 \cdot dA + \operatorname{sen}^2\alpha \int_A x^2 \cdot dA - 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \int_A x \cdot y \cdot dA$$

De donde se deduce que:

$$I_u = I_x \cdot \cos^2\alpha + I_y \cdot \operatorname{sen}^2\alpha - I_{xy} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

(realizaremos idénticas consideraciones para los momentos territoriales ponderales o másicos)

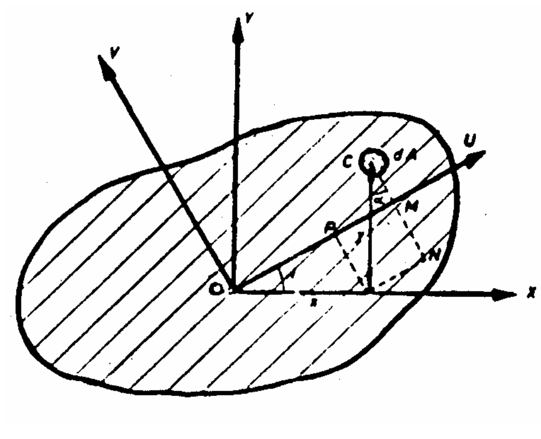


Fig. A-14.18. Momento de inercia relativo a ejes concurrentes giratorios.

Análogamente, con respecto al otro eje Ov, se tendrá que:

[13] Podemos también determinar el momento de inercia territorial con respecto a un eje comunicativo cualquiera en función de los momentos de inercia con respecto a tres ejes de referencia dados. La expresión que se obtiene se conoce, en la dinámica del sólido rígido, como Teorema de Poinsot.

$$I_v = \int_A u^2 \cdot dA = I_x \cdot sen^2 \alpha + I_y \cdot cos^2 \alpha + I_{xy} \cdot sen\ 2\alpha$$

y de igual forma, el valor del producto de inercia o momento territorial centrífugo, será:

$$I_{uv} = \int_A u \cdot v \cdot dA = \frac{I_x - I_y}{2}\ sen\ 2\alpha + I_{xy} \cdot cos\ 2\alpha$$

Si sumamos las dos igualdades anteriores, se verifica:

$I_x + I_y = I_u + I_v$ enunciándose, consecuentemente, que *"el momento de inercia polar es invariante en toda rotación de los ejes".* Ello nos permitirá, en fin, el conocimiento del momento de inercia del territorio al girar alrededor de cualesquiera de los infinitos ejes que pasan por su centro de masas (PÉREZ, 1976).

7. EJES TERRITORIALES PRINCIPALES DE INERCIA

Reciben el nombre de "ejes principales de inercia" de un cierto territorio, dos direcciones $O\xi$ y $O\eta$, perpendiculares o normales entre sí, respecto a las cuales los momentos de inercia del territorio son máximo y mínimo, respectivamente (correspondiendo a la atracción económica mínima y máxima en relación a dichos ejes territoriales, como tendremos ocasión de desarrollar posteriormente).

Para determinarlos, bastará con hallar los valores de α que hagan máximo o mínimo al momento de inercia I_u lo cual se consigue despejando α de la ecuación que resulte al igualar a cero la derivada de I_u respecto a la variable independiente α; es decir (condición necesaria o de primer grado):

$$d\ I_u / d\ \alpha = - 2\ I_x \cdot sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha + 2\ I_y \cdot sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha - 2 \cdot I_{xy} \cdot cos\ 2\alpha = 0$$

Por relaciones trigonométricas, se tiene que:

$$- I_x \cdot sen\ 2\alpha + I_y \cdot sen\ 2\alpha = 2\ I_{xy} \cdot cos\ 2\alpha \text{ ; sacando factor común:}$$

$$sen\ 2\alpha\ (I_y - I_x) = 2 \cdot I_{xy} \cdot cos\ 2\alpha \text{ , de dónde:}$$

$$tag\ 2\alpha = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x} \quad .$$

Esta ecuación suministra dos valores para α: α_0 y $\alpha_0 + 90^o$, que definen dos direcciones perpendiculares entre sí, denominados *ejes principales de inercia;* de los cuales uno hace máximo a I_u y el otro lo hace mínimo (como puede comprobarse en el cálculo de la condición suficiente o de 2º grado).

La misma relación se obtiene si igualamos a cero la derivada de I_V con relación a α; es decir, $d\, I_V / d\, \alpha = 0$.

Los momentos correspondientes a estas direcciones se denominan *momentos principales* y los designaremos por I_ξ e I_η.

Si hubiéramos elegido como ejes coordenados los principales de inercia $O\xi$ y $O\eta$, el primer miembro de la ecuación anterior sería nulo, lo cual exige que el numerador del segundo miembro $I_{\xi\eta}$ debe ser también nulo (PÉREZ, 1976).

Los ejes principales de inercia están pues caracterizados por la propiedad de ser el momento centrífugo respecto a ellos nulo ($I_{\xi\eta} = 0$), siendo además perpendiculares entre sí.

Así, si un territorio tiene un eje de simetría, éste y su perpendicular son principales de inercia, pues el momento centrífugo respecto a ellos es nulo.

8. MOMENTOS TERRITORIALES PRINCIPALES DE INERCIA

Calculemos ahora los momentos principales de inercia I_ξ e I_η en función de I_x, I_y e I_{xy}, en el caso de un territorio cualquiera.

Según las fórmulas anteriores, si en lugar de dos ejes genéricos *x* e *y*, se toman como referencia los ejes principales $O\xi$ y $O\eta$, e indicando con OX y OY los ejes móviles, las ecuaciones anteriores se transforman, teniendo en cuenta que $I_{\xi\eta} = 0$, en las siguientes (PÉREZ, 1976):

$$\begin{cases} I_x = I_\xi \cdot \cos^2 \alpha_0 + I_\eta \cdot \mathrm{sen}^2 \alpha_0 \\ I_y = I_\xi \cdot \mathrm{sen}^2 \alpha_0 + I_\eta \cdot \cos^2 \alpha_0 \\ I_{xy} = \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \ \mathrm{sen}\, 2\alpha_0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones anteriores, obtenemos:

$$\begin{cases} I_x + I_y = I_\xi + I_\eta \\ I_y - I_x = (I_\eta - I_\xi)\cdot \cos 2\alpha_0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que, resueltas, teniendo en cuenta al simplificar las expresiones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha_0 = \frac{1-\cos 2\alpha_0}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos^2 \alpha_0 = \frac{1+\cos 2\alpha_0}{2} \qquad \text{dan:}$$

$$\begin{cases} I_\xi = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \dfrac{I_x - I_y}{2} \sec 2\alpha_0 \\[2ex] I_\eta = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \dfrac{I_x - I_y}{2} \sec 2\alpha_0 \end{cases}$$

Ahora bien, como: $\sec 2\alpha_0 = \sqrt{1 + \operatorname{tag}^2 2\alpha_0} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{I_{xy}}{I_x - I_y / 2}\right)^2}$

valor que substituido en las ecuaciones anteriores, las transforman en:

$$\boxed{\begin{array}{l} I_\xi = \dfrac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad \text{, y también} \\[3ex] I_\eta = \dfrac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \end{array}}$$

fórmulas que nos determinan los momentos de inercia principales máximo y mínimo, respectivamente, para el territorio en cuestión.

9. TRAZADO GRÁFICO: CÍRCULO DE MOHR-LAND

El trazado del círculo de inercia de Mohr-Land[14], de gran utilidad en la Mecánica Física, facilita otrosí la resolución numérica de los problemas sobre los momentos de inercia territoriales.

Las ecuaciones anteriores transformadas en (PÉREZ, 1976),

[14] Círculo de Mohr: Lugar geométrico de los extremos del vector tensión referido a sus componentes normal y tangencial, que actúan sobre los planos paralelos a una dirección principal. Referido a sus componentes cartesianas, el vector tensión describiría una elipse principal del elipsoide de tensiones.

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{I_\xi + I_\eta}{2} + \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\ \\ I_y = \dfrac{I_\xi + I_\eta}{2} - \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\ \\ I_{xy} = \dfrac{I_\xi - I_\eta}{2} \cdot \text{sen } 2\alpha_0 \end{cases}$$

nos sugieren una sencilla representación gráfica por el modo de variar I_x, I_y e I_{xy} al variar el ángulo α_0 que forma el eje OX con el eje Oξ, ya que si se consideran I_x e I_y como abscisas e I_{xy} como ordenada de un punto en un plano, las ecuaciones últimas son las ecuaciones paramétricas de un círculo cuyo centro C está sobre el eje de abscisas a una distancia:

$\dfrac{I_\xi + I_\eta}{2}$ del origen O, y cuyo radio es igual a: $\dfrac{I_\xi - I_\eta}{2}$.

Efectivamente, trazando este círculo y la recta CM que forma el ángulo $2\alpha_0$, con el eje de abscisas, la ordenada y la abscisa del punto M satisface a las ecuaciones anteriores.

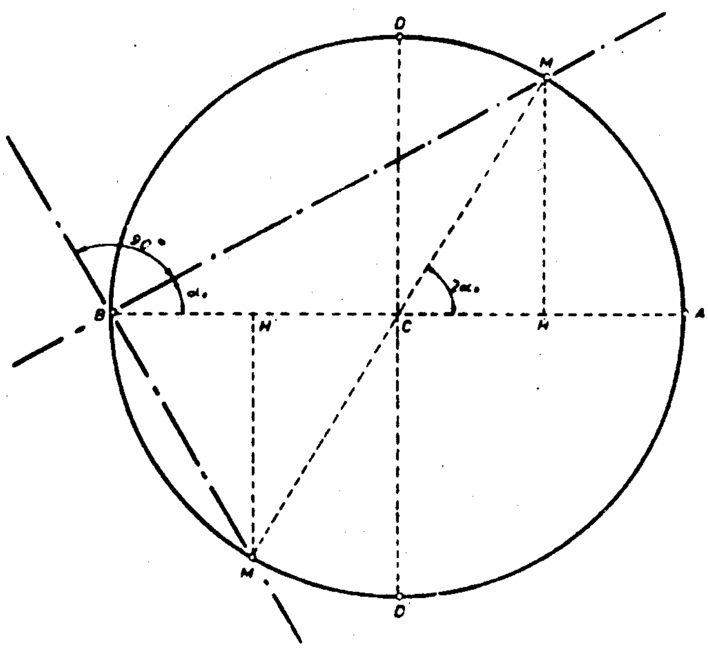


Fig. A-14.19. Círculo territorial de Mohr-Land.

El ángulo α_0 caracteriza las direcciones principales; entonces tomamos: $I_\xi = I_{máx.}$ e $I_\eta = I_{min}$, transformándose las expresiones mencionadas en las siguientes:

$$\begin{cases} I_x = \dfrac{I_{máx} + I_{min}}{2} + \dfrac{I_{máx} - I_{min}}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\[2ex] I_y = \dfrac{I_{máx} + I_{min}}{2} - \dfrac{I_{máx} - I_{min}}{2} \cdot \cos 2\alpha_0 \\[2ex] I_{xy} = \dfrac{I_{máx} - I_{min}}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha_0 \end{cases}$$

Para $\alpha_0 = 0^o$ y $\alpha_0 = 90^o$ ($\pi/2$ radianes) se obtienen los puntos A y B, para los que la abscisa se hace máxima y mínima, respectivamente, e igual a:

$\overline{OA} = I_\xi = I_{máx}$ y $\overline{OB} = I_\eta = I_{min}$, mientras que la ordenada, o sea $I_{\xi\eta}$, se anula.

Para el caso particular $\alpha_0 = 45^o$ ($\pi/4$ radianes) o $\alpha_0 = 135^o$ ($3\pi/4$ radianes) se obtienen los puntos D y D', para los cuales la ordenada correspondiente, o sea I_{xy}, es máxima e igual a:

$$I_{\xi\eta} = \frac{I_\xi - I_\eta}{2} \quad \text{, mientras que:} \quad I_x = I_y = \frac{I_\xi + I_\eta}{2}$$

Problema inverso:

Como en las aplicaciones territoriales puede ser interesante determinar los momentos principales I_ξ e I_η, así como las direcciones principales en función de los momentos I_x, I_y e I_{xy} respecto a los ejes ortogonales X e Y, veremos, a continuación, la construcción inversa.

Dados u obtenidos I_x e I_y, se toman sobre un eje orientado: $\overline{OH} = I_x$ y $\overline{OH'} = I_y$. A partir de H y perpendicularmente llevamos $\overline{HM} = I_{xy}$. Tomando como centro C (punto medio del segmento $\overline{HH'}$) y radio $\overline{CM}$ trazamos el círculo que cortará al eje orientado en los puntos A y B, tal que:

$$I_{máx} = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{CA} = \overline{OC} + \overline{CM} = \frac{\overline{OH} + \overline{OH'}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\overline{OH} - \overline{OH'}}{2}\right)^2 + \overline{HM}^2} =$$

$$= \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{min} = \overline{OB} = \overline{OC} - \overline{CB} = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Como α_0 es el ángulo que forma con una de las direcciones principales, éstas quedan perfectamente definidas con las rectas perpendiculares $\overline{BM}$ y $\overline{BM}'$ (*direcciones principales).*

Veamos, por último, que el momento de inercia axial para un eje de gravedad es un mínimo entre todos los momentos territoriales de inercia para ejes paralelos. Si I_1 y I_2 son dos momentos de inercia de los territorios de masas de renta respectivas m_1 y m_2, referidos a dos ejes de gravedad paralelos, el momento de inercia del territorio formado por ambos con respecto a su eje de gravedad paralelo, será:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + e^2 \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}} \quad ,$$

en donde **e** es la distancia entre los ejes de gravedad paralelos de las dos masas de renta de ambos territorios.

10. EL TENSOR TERRITORIAL DE INERCIA

Generalizando las teorías expuestas al espacio tridimensional, veamos cómo los momentos territoriales de inercia respecto de todos los ejes que pasan por un punto cualquiera del territorio, quedarán sencillamente relacionados por una ecuación del tipo:

$$I = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \cos^2 \beta + I_z \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot I_{xy} -$$

$$- 2 \cos \alpha \cdot \cos \gamma \cdot I_{xz} - 2 \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot I_{yz}$$

donde I_x, I_y e I_z representan los momentos de inercia territoriales respecto de los tres ejes coordenados, mientras I_{xy}, I_{xz} e I_{yz} serán los productos territoriales binarios de inercia respecto de los pares de planos coordenados.

Ello indica que las nueve componentes o elementos de la matriz cuadrada simétrica o "matriz de inercia" siguiente:

$$[\,I\,] = \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{vmatrix}$$

bastan para definir el momento territorial de inercia respecto de un eje cualquiera que pasa por el punto o lugar geográfico en cuestión. Nos hallamos en presencia, pues, del **tensor territorial de inercia,** que viene a completar o a sustituir el concepto de “momento de inercia territorial” que hemos introducido anteriormente.

Por otra parte, si se elige el origen de coordenadas justamente en el centro territorial de masas, de tal forma que los tres ejes coordenados ocupen los tres ejes de simetría del territorio en estudio (considerado como un sólido de masa económica **m**), resultará que los productos territoriales de inercia (momentos centrífugos) se anularán, puesto que las masas económicas se hallan uniformemente distribuidas alrededor de dicho centro. De este modo, el tensor inercial territorial quedará diagonalizado, así:

$$[\,I\,] = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}$$

, cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios, autovalores o raíces características o latentes de la expresada matriz de inercia.

Los momentos principales territoriales de inercia, en definitiva, lo son alrededor de los ejes territoriales que cumplirán las siguientes condiciones:

- ser perpendiculares entre sí.
- tener el origen en el centro territorial de masas de renta.
- tener distribuida la masa económica, alrededor de ellos, de un modo regular y simétrico.

Desde luego, en la práctica del Análisis Territorial, se trabajará normalmente en un espacio bidimensional, con lo que el tensor inercial territorial será, simplemente, una matriz cuadrada de dimensiones 2 x 2.

La aplicación al Análisis Territorial que acabamos de exponer, ofrece una idea de la génesis física del concepto de "tensor". Desde el punto de vista estrictamente matemático, el tensor es un ente abstracto formado por nueve componentes (en el espacio afín euclídeo E_3), pero desde el punto de vista físico o económico, el tensor aparece como un conjunto de infinitos vectores concurrentes (tensiones físicas o económicas), relacionados de tal modo que es posible expresarlos todos **linealmente** en función de tres de ellos. Trátase, en definitiva, de una **función vectorial lineal**, de coeficientes cosenos directores. En el caso de los tensores de segundo orden, como los que aquí hemos presentado, se trata de un **trinomio vectorial lineal,** pudiéndose generalizar el concepto a matrices de mayor número de elementos.

Si imaginamos, ahora, la "deformación" de un territorio producida por efecto de un conjunto de fuerzas económicas exteriores al mismo (ver posterior epígrafe 13.3.2), podrán engendrarse en su seno esfuerzos elásticos que tienden a equilibrar dichas fuerzas. Pues bien, en el tensor territorial resultante, la transformación que le caracteriza matemáticamente como tal resultará exclusivamente como consecuencia de una relación vectorial lineal, al margen de la significación económica de los vectores. De hecho, siempre que un fenómeno de actuación o influencia económica sobre un territorio venga definido por una radiación de vectores relacionados linealmente en un sistema ortogonal, podremos representar matemáticamente el susodicho fenómeno por medio de un tensor (PUIG, 1970).

11. ELIPSES TERRITORIALES DE INERCIA

Determinaremos, ahora, el momento de inercia de un territorio A respecto a cierto eje OL que pasa por un punto o polo O tomado como origen de coordenadas. Sea φ el ángulo formado por la recta OL con la dirección positiva del eje de abscisas OX (ver fig. A-14.20).

La ecuación normal de la recta OL, es (PUIG, 1970):

$$x \cdot \operatorname{sen} \varphi - y \cdot \cos \varphi = 0 \ .$$

La distancia **r** de un punto cualquiera M (x,y) a esta recta es igual a:

$$r = | x \cdot \operatorname{sen} \varphi - y \cdot \cos \varphi | \ .$$

El momento de inercia I_e del territorio A en relación a la recta OL, según las definiciones que ya hemos dado, se expresará mediante la integral doble (caso superficial o geométrico):

$$I_e = \iint_A r^2 \cdot dx \cdot dy = \iint_A (x \cdot \operatorname{sen} \varphi - y \cdot \cos \varphi)^2 \, dx \cdot dy =$$

$$= \text{sen}^2\, \varphi \cdot \iint_A x^2 \cdot dx \cdot dy - 2\, \text{sen}\, \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \iint_A xy \cdot dx \cdot dy +$$

$$+ \cos^2 \varphi \cdot \iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy = I_y \cdot \text{sen}^2\, \varphi - 2\, I_{xy} \cdot \text{sen}\, \varphi \cdot \cos \varphi + I_x \cdot \cos^2 \varphi =$$

$$= I_x + (I_y - I_x) \cdot \text{sen}^2\, \varphi - I_{xy} \cdot \text{sen}\, 2\varphi \quad . \qquad (1)$$

Dividiendo todos los términos de esta ecuación por I_e, obtendremos:

$$I = I_x \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I_e}} \right)^2 - 2 \cdot I_{xy} \left(\frac{\text{sen}\, \varphi}{\sqrt{I_e}} \right) \left(\frac{\cos \varphi}{\sqrt{I_e}} \right) + I_y \left(\frac{\text{sen}\, \varphi}{\sqrt{I_e}} \right)^2 \qquad (2)$$

Tomemos, ahora, en la recta OL un cierto punto N(X,Y), tal que se cumpla que:

$$\overline{ON} = 1 / \sqrt{I_e}$$

Distintos valores de I_e y diferentes puntos N corresponden a varias direcciones del eje OL, es decir, a diferentes valores del ángulo φ. Hallemos el lugar geométrico o geográfico de los puntos N del territorio en estudio. Es evidente que:

$$X = \frac{1}{\sqrt{I_e}} \cos \varphi \qquad , \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{I_e}} \text{sen}\, \varphi \ .$$

En virtud de la igualdad (2), las magnitudes X e Y se hallan ligadas entre sí por la relación:

$$1 = I_x \cdot X^2 - 2\, I_{xy} \cdot XY + I_y \cdot Y^2 \qquad (3)$$

De este modo, el lugar geométrico de los puntos N (X,Y) es la forma cuadrática igualada a cero o curva de segundo grado u orden representada mediante la expresión anterior.

Para proceder a la demostración de que dicha curva es una cónica del género elipse, partiremos de la denominada "desigualdad de Buniakovski-Schwarz", a saber:

$$\iint_A [f\,(x,y) - \lambda \cdot \varphi\,(x,y)]^2 \cdot dx \cdot dy > 0 \quad ,$$

donde λ es una constante. El signo de igualdad puede tener lugar sólo en el caso en que:

$$f(x,y) - \lambda \cdot \varphi(x,y) \equiv 0 \text{ , es decir, cuando:}$$

$$f(x,y) = \lambda \cdot \varphi(x,y) \; .$$

Si suponemos que:

$$\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} = \text{cte.} = \lambda \; ,$$

siempre tendrá lugar el signo de desigualdad. De este modo, abriendo los paréntesis bajo el signo de integral, obtendremos:

$$\iint_A f^2(x,y) \cdot dx \cdot dy - 2\lambda \iint_A f(x,y) \cdot \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy + \lambda^2 \iint_A \varphi^2(x,y) \cdot dx \cdot dy > 0$$

Analicemos, ahora, la expresión del primer miembro como una función de λ. Se trata de un polinomio de segundo grado que jamás se anula. Por tanto, sus raíces son números complejos, lo que puede tener lugar sólo en el caso de que el discriminante formado por los coeficientes del polinomio cuadrático sea negativo, es decir:

$$[(\iint_A f(x.y) \cdot \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy)^2 - \iint_A f^2(x,y) \cdot dx \cdot dy \cdot \iint_A \varphi^2(x,y) \cdot dx \cdot dy] < 0 \text{ , o bien:}$$

$$(\iint_A f(x,y) \cdot \varphi(x,y) \cdot dx \cdot dy)^2 < \iint_A f^2(x,y) \cdot dx \cdot dy \cdot \iint_A \varphi^2(x,y) \cdot dx \cdot dy \; ,$$

que constituye la mencionada desigualdad de Buniakovski-Schwarz (**), cuya mayor especificación conceptual puede verse al final del presente capítulo de nuestra tesis.

En nuestro caso, se cumple que:

$$f(x,y) = x \quad ; \quad \varphi(x,y) = y \quad ; \quad x / y = \text{cte.} \quad ,$$

por lo que se tendrá que:

$$(\iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy)^2 < (\iint_A x^2 \cdot dx \cdot dy) \cdot (\iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy) \text{ , o bien:}$$

$$I_x \cdot I_y - I_{xy}^{\,2} > 0$$

Al respecto, debe considerarse que el discriminante de la cónica representada en la ecuación (3), a saber:

$$g = I_X \cdot X^2 - 2\, I_{xy} \cdot X \cdot Y + I_y \cdot Y^2 - 1 = 0 \quad ,$$

vendrá dado por el determinante simétrico de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - I_X \cdot I_y + I_{xy}^2 < 0 \ ,$$

luego se trata de una cónica no degenerada del género elipse.

Como también:

$$I_X \cdot (I_{xy}^2 - I_X \cdot I_y) = I_X \cdot I_{xy}^2 - I_X^2 \cdot I_y \ < \ 0 \quad ,$$

se trata de una elipse real, cuyo centro viene dado por las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\delta g / \delta x = 0 \quad ; \quad \delta g / \delta y = 0 \quad ; \quad \text{esto es:}$$

$$\begin{cases} I_X \cdot x - I_{xy} \cdot y = 0 \\ - I_{xy} \cdot x + I_y \cdot y = 0 \end{cases}$$

, que es un sistema homogéneo y compatible, que admite la única solución impropia o trivial:

$$x = y = 0 \ .$$

Por otra parte, la ecuación reducida de dicha "primera elipse territorial de inercia", vendrá dada por la expresión:

$$S_1 \cdot X^2 + S_1 \cdot Y^2 + I'_3 / I'_2 = 0 \ ,$$

siendo S_1 y S_2 las raíces o soluciones de la ecuación de 2º grado:

$$S^2 - I'_1 \cdot S + I'_2 = 0 \text{ , dónde:}$$

$$\begin{cases} I'_1 = I_x + I_y = I_0 & \text{(invariante métrico o lineal).} \\ I'_2 = I_x \cdot I_y - I_{xy}^2 & \text{(invariante afín o cuadrático).} \\ I'_3 = - I_x \cdot I_y + I_{xy}^2 = - I'_2 & \text{(invariante proyectivo o cúbico).} \end{cases}$$

Con ello, la ecuación reducida de la elipse territorial de inercia buscada será del tipo:

$$S_1 \cdot X^2 + S_2 \cdot Y^2 = 1 .$$

La noción de **elipse territorial de inercia** puede tener gran trascendencia en el Análisis Territorial (FRANQUET, 1990/91). Notemos que las longitudes de sus ejes y su posición en el plano dependen de la forma o configuración del territorio. Como la distancia entre el origen de coordenadas y un punto arbitrario N de la elipse es igual a:

$$ON = 1/\sqrt{I_e}$$

donde I_e es el momento territorial de inercia respecto al eje ON, resultará que, al construir la elipse, será fácil calcular el momento territorial de inercia respecto a una recta cualquiera que pase por el origen de coordenadas. En particular, es inmediato comprobar que el momento territorial de inercia es máximo respecto al eje menor de esta elipse, y mínimo respecto a su eje mayor. Sus ejes, en fin, coinciden con los ejes principales de inercia del polo O (ver el epígrafe anterior 7).

La elipse correspondiente al centro territorial de masas, recibirá la denominación de "elipse central del territorio".

Por otra parte, calculando el "radio medio o de giro" (definido en el epígrafe 3) correspondiente a los momentos territoriales de inercia referidos a ejes que pasen por un polo O, y trazando rectas paralelas a dichos ejes, la envolvente de ellas constituye la **segunda elipse territorial de inercia** (dichas dos elipses serán semejantes y estarán semejantemente colocadas).

Si sobre el primer eje principal, de los que pasan por el centro territorial de masas de renta o de población, se toma a ambos lados del mismo una cierta longitud, se obtienen los **focos territoriales de inercia.** Los momentos territoriales de inercia con respecto a todas las rectas que pasan por ellos tienen el mismo valor; la elipse se convierte, pues, en un **círculo territorial de inercia.**

Valiéndose de los mencionados focos de inercia, podremos determinar inmediatamente, para cualquier punto o enclave del territorio, las direcciones de los dos ejes principales territoriales de inercia: serán las bisectrices de los ángulos que forman los dos radios que partiendo de dichos focos se dirigen al punto de referencia.

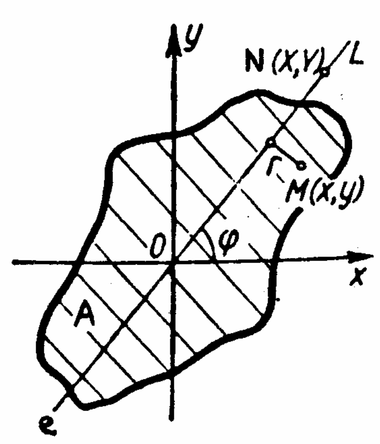


Fig. A-14.20. Elipse territorial de inercia (I).

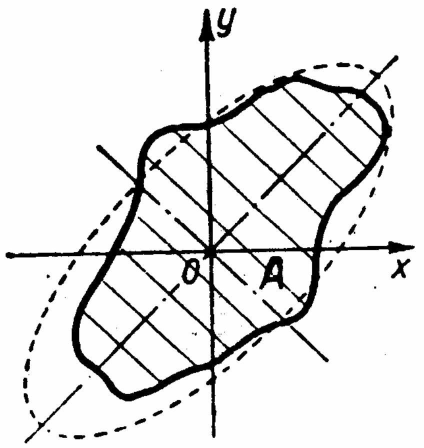


Fig. A-14.21. Elipse territorial de inercia (II).

12. CÁLCULO MECÁNICO DE LOS MOMENTOS TERRITORIALES

En general, en el cálculo de los momentos territoriales estáticos y de inercia, debe actuarse del siguiente modo:

a) Tomar los elementos de referencia, como los ejes (geográficos, administrativos, vías de comunicación...) o los puntos del territorio (centros de masas, capitalidades territoriales...) y también las coordenadas geográficas UTM que posibiliten los cálculos más sencillos.

b) Referir a esos momentos territoriales de inercia, más simples, los demás que se precisen, mediante los teoremas demostrados como aplicación de la Mecánica Física (Poinsot y Steiner).

c) Agrupar los elementos equidistantes del punto (POLO) o eje respecto del cual se está calculando el momento territorial que nos ocupa.

d) Se traza, sobre un mapa o plano del territorio suficientemente preciso, una franja representativa y su rectángulo genérico correspondiente.

e) Se efectúa el producto del área del rectángulo por la distancia de su centro geométrico o centroide al eje territorial o punto de referencia, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

f) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral, suponiendo que el número de estos rectángulos crece indefinidamente.

A efectos operativos, conviene tener presente que el momento estático y el momento de inercia de un territorio A, respecto al eje x, vienen dados, respectivamente, por:

$$M_X = \iint_A y \cdot dx \cdot dy = 1/2 \int_C y^2 \cdot dx \ ; \ I_X = \iint_A y^2 \cdot dx \cdot dy = 1/3 \int_C y^3 \cdot dx$$

extendidas las integrales curvilíneas de los segundos miembros al contorno del recinto territorial. Se consigue una obtención mecánica de dichas integrales con el dispositivo indicado esquemáticamente en la figura siguiente A-14.22, denominada "integrador", cuya descripción desarrollamos a continuación (PUIG, 1970).

El estilete **E** describe la curva arrastrando una varilla **l** sobre la que va montada una ruedecilla **R** que se desliza y gira sobre el papel. El otro extremo está obligado a describir la recta respecto de la cual se calcula el momento (eje x). Al girar esta varilla, gira solidariamente a ella una rueda con la que engranan otras dos de radios mitad y un tercio y que giran, por tanto, ángulos dobles y triples del ángulo θ girado por **l**. Estas ruedas arrastran a su vez sendos vástagos sobre las que van montadas dos nuevas ruedecillas R_2, R_3 (la R_2 en un eje perpendicular). Al cerrar la curva, la suma de los corrimientos periféricos de cada una de estas ruedas, debidos a las rotaciones instantáneas de **l,** son nulas (excluimos el caso en que **l** da un giro completo), de modo que R_1, R_2, R_3 sólo integran sus corrimientos debidos a las traslaciones dx, que son, respectivamente, proporcionales a: sen $\theta \cdot$ dx, cos $2\theta \cdot$ dx, sen $3\theta \cdot$ dx. Las lecturas suministradas por R_1, R_2 y R_3, serán, pues, proporcionales, respectivamente, a las integrales trigonométricas:

$$\int \text{sen}\ \theta \cdot dx \quad , \quad \int \cos 2\theta \cdot dx \quad , \quad \int \text{sen}\ 3\theta \cdot dx$$

Ya sabemos que la lectura de R_1 da el área Ω encerrada por la curva perimetral del territorio A.

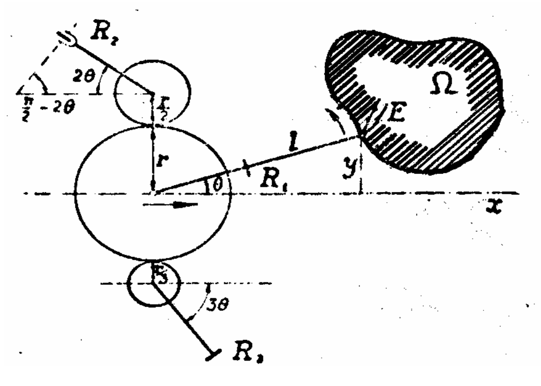


Fig. A-14.22. Integrador.

Ahora bien, $1/2\ y^2 = 1/2\ l^2 \cdot \text{sen}^2\ \theta = l^2/4 \cdot (1 - \cos 2\theta)$, de donde:

$$1/2 \int_C y^2 \cdot dx = - l^2/4 \int_C \cos 2\theta \cdot dx$$

, integral que vendrá dada por la lectura en R_2 y análogamente:

$$1/3 \int_C y^3 \cdot dx = 1/3 \int_C l^3 \cdot sen^3\, \theta = l^2/12 \int_C (3l \cdot sen\, \theta - l \cdot sen\, 3\theta)\, dx$$

, que vendrá dada por combinación de las lecturas en R_1 y R_3. Relacionando, por último, dichas lecturas con la escala gráfica del plano o mapa del territorio estudiado (que debe ser suficientemente preciso), obtendremos los valores de los momentos territoriales buscados, a expresar, respectivamente, en Km^3 y Km^4 (o bien en Mm^3 ó Mm^4).

13. EL "GRADO DE CONEXIÓN TERRITORIAL"

13.1. ATRACCIÓN TERRITORIAL

Resulta obvio que los momentos territoriales de inercia denotan, de algún modo, el grado de atracción o repulsión experimentado por un territorio respecto de un eje o de un punto situados dentro o fuera de él. De este modo, podemos medir el que pudiéramos denominar "grado de repulsión" entre dos núcleos territoriales **i** y **j** (por ejemplo, dos cabeceras de comarca, o entre una cabecera de comarca y otra de región o nación) mediante una expresión del tipo:

$$\rho'_{ij} = I_{ij}$$

, ya sea utilizando los momentos territoriales de inercia superficiales o los ponderales.

Sin embargo, como -en buena lógica- deberíamos introducir en nuestra formulación elementos que denuncien o subrayen la influencia biyectiva o biunívoca de las masas territoriales respectivas de población o de renta en las mencionadas atracciones o repulsiones económicas, emplearemos las rentas totales familiares disponibles R_i y R_j en forma de cociente entre las mismas, esto es: R_i/R_j, cuya determinación habremos efectuado previamente mediante el correspondiente modelo estructural (ver capítulo 3), o bien mediante la obtención de datos secundarios (existen publicaciones diversas que ofrecen información acerca de esta importante variable macroeconómica y de su evolución temporal). Pues bien, coordinando esta formulación con la empleada anteriormente para el modelo estrictamente gravitatorio (ver el apartado 2 del anterior capítulo 5), y al objeto de no incurrir en una ponderación excesiva de dicho efecto másico, se tendrá que:

$$\rho_{ij} = (I_{ij} / 10^6) \cdot \sqrt[3]{R_i / R_j} \quad ,$$

donde la ponderación tiene lugar mediante la raíz cúbica de la expresada relación de masas de renta, y cuya inversa nos determinaría, contrariamente, el "grado de atracción" ejercido desde el punto **j** hacia la superficie del territorio A cuya capitalidad o centro de masas viene dado por el punto **i**. O sea:

$$\alpha_{ij} = 1 / \rho_{ij} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i}} \quad ,$$

y, del mismo modo, recíprocamente, se tendrá:

$$\alpha_{ji} = 1 / \rho_{ji} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i}}{I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j}} \quad .$$

Obsérvese que, al objeto de obtener unos coeficientes cómodamente manipulables a los efectos del cálculo numérico y de su aplicabilidad posterior, hemos introducido el factor corrector adimensional de valor 10^6 en las fórmulas precedentes.

Del mismo modo, podemos definir el "grado medio de atracción" entre los territorios **i** y **j** como la media geométrica (raíz cuadrada del producto) de sus respectivos "grados de atracción". Esto es:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \sqrt{\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}} \quad ; \quad \text{o también: } \lambda_{ij} / \alpha_{ji} = \alpha_{ij} / \lambda_{ij}$$

con lo que, substituyendo valores, obtendremos la expresión:

$$\lambda_{ij} = \sqrt{\frac{10^6}{I_{ij}} \times \frac{\sqrt[3]{R_j}}{\sqrt[3]{R_i}} \times \frac{10^6}{I_{ji}} \times \frac{\sqrt[3]{R_i}}{\sqrt[3]{R_j}}} = \sqrt{\frac{10^{12}}{I_{ij} \cdot I_{ji}}} = \frac{10^6}{\sqrt{I_{ij} \cdot I_{ji}}} \quad ,$$

que posee la particularidad interesante de no depender más que de los momentos territoriales de inercia recíprocos I_{ij} e I_{ji} y, globalmente, de su media geométrica, en proporción inversa (FRANQUET, 1990/91).

Considerando, así mismo, que:

$$I_{ij} \times I_{ji} = A_i \times A_j \times r_{ij}^{\ 4}$$

se tendrá la expresión (en función de la superficie de ambos territorios y de la distancia que los separa):

$$\boxed{\lambda_{ij} = \frac{10^6}{r_{ij}^2 \times \sqrt{A_i \cdot A_j}}} \quad .$$

Debe hacerse constar, llegados a este punto, que en las diferentes formulaciones que aquí se propugnan sería posible sustituir alternativamente las distancias entre los núcleos territoriales (ya sean medidas por carretera o en línea recta sobre el mapa) por los "tiempos de desplazamiento" que, de poderse conocer con cierto grado de aproximación resultarían indicadores mayormente fiables que subsumirían las dificultades del trazado viario, el estado de conservación o la categoría de las carreteras y la consecuente velocidad media que los vehículos pueden alcanzar por las mismas.

Considerando, ahora, los momentos territoriales de inercia recíprocos del tipo másico o ponderal, resultará que:

$$I_{ij} \cdot I_{ji} = R_i \cdot R_j \cdot r_{ij}^4 \quad ,$$

con lo que se tendrá (en función de las rentas familiares disponibles totales de ambos territorios y de la distancia que los separa):

$$\lambda_{ij} = \frac{10^6}{r_{ij}^2 \times \sqrt{R_i \cdot R_j}} = \lambda_{ji} \quad ,$$

al tiempo que los "grados de atracción" correspondientes, serán:

$$\alpha_{ij} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{r_{ij}^2 \cdot R_i \cdot \sqrt[3]{R_i}} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{r_{ij}^2 \cdot \sqrt[3]{R_i^4}} = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i^4}} \quad ,$$

y, del mismo modo:

$$\alpha_{ji} = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j^4}} \quad .$$

(Efectivamente, se tendrá que:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \sqrt{\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji}} = \sqrt{\alpha_{ij}} \cdot \sqrt{\alpha_{ji}} =$$

$$= \left(\frac{10^3}{r_{ij}} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_j}{R_i^4}}\right) \cdot \left(\frac{10^3}{r_{ij}} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_i}{R_j^4}}\right) = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \frac{\sqrt[6]{R_i \cdot R_j}}{\sqrt[6]{(R_i \cdot R_j)^4}} =$$

$$= \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{(R_i \cdot R_j)^3}} = \frac{10^6}{r_{ij}^2 \cdot \sqrt{R_i \cdot R_j}} \quad \text{, c.s.q.d.)}$$

13.2. COMPENSACIÓN TERRITORIAL

Si ahora imponemos la condición de igualdad estricta de los "grados de atracción" respectivos entre los territorios **i** y **j**, resultará lo siguiente (cuando tenga lugar dicho equilibrio económico-espacial):

$$\alpha_{ij} = \frac{10^6}{I_{ij}} \cdot \frac{\sqrt[3]{R_j}}{\sqrt[3]{R_i}} = \frac{10^6}{I_{ji}} \cdot \frac{\sqrt[3]{R_i}}{\sqrt[3]{R_j}} = \alpha_{ji} \quad ,$$

pero como los momentos territoriales de inercia recíprocos, serán:

$$\begin{cases} I_{ij} = A_i \cdot r_{ij}^2 \\ I_{ji} = A_j \cdot r_{ij}^2 \end{cases}$$

sustituyendo en la identidad primera y reduciendo términos, obtendremos:

$$\frac{\sqrt[3]{R_j}}{A_i \cdot \sqrt[3]{R_i}} = \frac{\sqrt[3]{R_i}}{A_j \cdot \sqrt[3]{R_j}} \quad ; \quad \text{o sea:} \quad A_i \cdot \sqrt[3]{R_i^2} = A_j \cdot \sqrt[3]{R_j^2} \quad ;$$

de dónde:

$$\frac{A_i}{A_j} = \sqrt[3]{\frac{R_j^2}{R_i^2}} \quad ; \quad (A_i / A_j)^3 = (R_j / R_i)^2 \quad \text{, o bien:}$$

$$A_i^3 \cdot R_i^2 = A_j^3 \cdot R_j^2 \quad ,$$

que podría enunciarse así: **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de sentidos opuestos cuando el cubo de la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón inversa de sus rentas totales"** (caso superficial o geométrico).

En el caso de considerar los momentos territoriales de inercia del tipo másico o ponderal, tendrá lugar, del mismo modo, la identidad atraccional siguiente:

$$R_j / R_i^4 = R_i / R_j^4 \quad \text{, o sea: } R_i^5 = R_j^5 \quad \text{, lo que implica: } \mathbf{R_i = R_j} \text{ ,}$$

luego, correlativamente, podremos enunciar que **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de sentidos opuestos cuando sus rentas totales son iguales"** (caso ponderal o másico), lo que se deduce inmediatamente de las fórmulas de dichos grados de atracción.

Si introducimos, ahora, el concepto de "densidad de renta", obtenido como medida relativa del anterior modelo estructural (véase el capítulo 3 de nuestro trabajo), se tendrá, en dicha condición de equilibrio:

$$\delta_i = R_i / A_i \ ; \quad \delta_j = R_j / A_j \quad \text{con lo que:}$$

$$\begin{cases} R_i = \delta_i \cdot A_i \\ R_j = \delta_j \cdot A_j \end{cases} \quad \text{; o sea: } A_i^5 \cdot \delta_i^2 = A_j^5 \cdot \delta_j^2 \text{ ,}$$

o también: $(A_i / A_j)^5 = (\delta_j / \delta_i)^2 = (d_j \cdot w_j / d_i \cdot w_i)^2$

que, a su vez, podría enunciarse así: **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de sentidos opuestos cuando la quinta potencia de la razón de sus áreas es igual al cuadrado de la razón inversa de sus densidades de renta"** (caso superficial o geométrico).

Obsérvese que hemos considerado, en la formulación antecedente, que:

$$P_i = d_i \cdot A_i \ ; \quad R_i = P_i \cdot w_i = d_i \cdot A_i \cdot w_i$$

$$P_j = d_j \cdot A_j \ ; \quad R_j = P_j \cdot w_j = d_j \cdot A_j \cdot w_j \quad \text{; de dónde:}$$

$$\delta_i = R_i / A_i = d_i \cdot w_i$$

$$\delta_j = R_j / A_j = d_j \cdot w_j \qquad \text{c.s.q.d. , siendo:}$$

$$\begin{cases} A = \text{áreas de los territorios (km}^2\text{).} \\ R = \text{rentas totales de los territorios (€).} \\ P = \text{poblaciones de los territorios (hab.).} \\ w = \text{rentas "per capita" de los territorios (€/hab.).} \\ d = \text{densidades de población de los territorios (hab./km}^2\text{).} \\ \delta = \text{densidades de renta de los territorios (€/km}^2\text{).} \\ r = \text{distancia entre los territorios (km).} \end{cases}$$

Por último, veamos que en el caso ponderal o másico, se cumplirá que:

$R_i = R_j$, o sea: $A_i \cdot \delta_i = A_j \cdot \delta_j$, con lo que, también:

$$A_i / A_j = \delta_j / \delta_i = d_j \cdot w_j / d_i \cdot w_i \ ,$$

que podemos enunciar del siguiente modo: **"los grados de atracción recíproca económico-espacial entre dos territorios son de igual magnitud pero de signos opuestos cuando la razón de sus áreas es igual a la razón inversa de sus densidades de renta"** (caso ponderal o másico).

13.3. LIGAZÓN O CONEXIÓN TERRITORIAL

13.3.1. Concepto y definición

Llegados a este punto, podemos definir como "grado de conexión" entre dos territorios **i** y **j** a la suma de sus respectivos "grados de atracción", que, para valores suficientemente próximos $\alpha_{ij} \approx \alpha_{ji}$, puede asimilarse a: $2\cdot\lambda_{ij} = 2\cdot\overline{\alpha}$, siendo la media aritmética o semisuma de los "grados de atracción":

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} \quad .$$

En el caso general de suponer un símil estático-gráfico en el que las fuerzas de atracción territoriales se hallen representadas por vectores que actúan en la dirección del "eje de conexión territorial" que une los centros de masas de renta o de población de ambos territorios, de sentidos opuestos y cuya magnitud o módulo será el "grado de atracción" antes definido, dicho "grado de conexión" vendrá dado por la expresión (FRANQUET, 1990/91):

$$\theta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}}{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i}} + \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i}}{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_j}} =$$

$$= \frac{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j} \cdot \sqrt[3]{R_j} \cdot I_{ji} + 10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i} \cdot \sqrt[3]{R_i} \cdot I_{ij}}{(I_{ij} \cdot I_{ji}) \cdot \sqrt[3]{R_i \cdot R_j}} =$$

$$= \frac{10^6 \cdot (I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i^2} + I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j^2})}{(I_{ij} \cdot I_{ji}) \cdot \sqrt[3]{R_i \cdot R_j}} = \theta_{ji} \ ,$$

que nos determina la cuantía del "esfuerzo de tracción" territorial de aquel eje rígido, siguiendo con nuestro símil físico-mecánico.

En definitiva, el "grado de conexión" entre dos territorios, que acabamos de definir, se halla en función de varios parámetros propios y bien característicos de los mismos, a saber:

- de sus áreas superficiales.
- de las distancias entre sus "centros de masas" o capitales.
- de sus rentas "per capita".
- de sus poblaciones,

lo que le dota de un nivel de información que se estima suficiente a los efectos de su credibilidad y eficiencia.

Por otra parte, como:

$$\lambda_{ij}^2 = \frac{10^{12}}{I_{ij} \cdot I_{ji}} \quad \text{, se tendrá que:}$$

$$\theta_{ij} = \lambda_{ij}^2 \ . \ \frac{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i^2} + I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j^2}}{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i \cdot R_j}} =$$

$$= \lambda_{ij}^2 \left(\frac{I_{ij} \cdot \sqrt[3]{R_i}}{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_j}} + \frac{I_{ji} \cdot \sqrt[3]{R_j}}{10^6 \cdot \sqrt[3]{R_i}} \right) =$$

$$= \frac{\lambda_{ij}^2}{10^6}\left(I_{ij}\cdot\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}} + Iji\cdot\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i}}\right);$$

teniendo, ahora, presente las anteriores definiciones, a saber:

$$\frac{1}{\alpha_{ij}\cdot I_{ij}} = \frac{\rho_{ij}}{I_{ij}} = \frac{1}{10^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j}}$$, y también:

$$\frac{1}{\alpha_{ji}\cdot I_{ji}} = \frac{\rho_{ji}}{I_{ji}} = \frac{1}{10^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i}} \quad ,$$

de dónde resultará, en definitiva, que:

$$\theta_{ij} = \frac{\lambda_{ij}^2}{\alpha_{ij}} + \frac{\lambda_{ij}^2}{\alpha_{ji}} = \lambda_{ij}^2\,(\rho_{ij} + \rho_{ji}) = \theta_{ji}$$

, expresión ésta de gran utilidad y significación, puesto que nos relaciona entre sí a todos los parámetros que definimos en nuestro estudio acerca de la conexión o ligazón territorial.

13.3.2. Rigidez, deformación y segregación de un territorio

En este orden de ideas, diremos que un territorio (entendido como un sistema de partículas o masas económicas elementales ligadas por fuerzas económicas de atracción mutua, es decir, por fuerzas interiores) permanecerá "rígido" o invariable en su configuración actual si las distancias mutuas entre todos sus puntos permanecen constantes. Ello sucederá porque entre aquellos puntos o lugares geográficos actuarán fuerzas interiores de atracción y repulsión que les obligarán a mantener una cierta posición relativa, y cuya evaluación o cuantificación tendrá lugar mediante los parámetros que acabamos de definir. Por otra parte, dichas fuerzas económicas internas resistirán ilimitadamente a las influencias externas, por lo que no se producirán "deformaciones" en las dimensiones del territorio.

Sin embargo, en la práctica podemos encontrarnos con territorios que se hallan lejos de tener una "rigidez" estructural o resistencia ilimitada a la acción de las fuerzas económicas exteriores provenientes de los territorios vecinos, pudiendo “deformarse" fácilmente bajo la acción de las mismas, por lo que deberían estudiarse las reacciones o esfuerzos internos que se desarrollan en dichos territorios para contrarrestar la acción modificativa de las fuerzas económicas que le son aplicadas desde el sistema exterior. De este modo, cuando un territorio se somete a la acción de fuerzas exteriores, se desarrollan en su interior esfuerzos o tensiones que provocan más o menos "deformación", y el conocimiento, siquiera aproximado, de los valores de dichos esfuerzos y deformaciones puede resultar de gran importancia en los estudios de Ordenación Territorial. En algunos casos, las tensiones económico-sociales experimentadas en el territorio por la acción de las fuerzas económicas exteriores constituirán el factor decisivo, mientras que, en otros casos, será la "deformación" planimétrica producida (modificativa de las fronteras administrativas) el factor más transcendente.

Sería posible, en definitiva, y tomando como base las ideas aquí expuestas, el planteamiento y desarrollo de una cierta "teoría del contraste de los grados o fuerzas económicas de atracción y repulsión" entre los diferentes territorios, al objeto de establecer racionalmente sus posibles segregaciones y/o agrupaciones administrativas y económicas. Y así, por ejemplo, sería factible establecer -por imperativo legal- la cuantía mínima que debería alcanzar el "grado de conexión territorial" θ_{ij}, o bien la que, en el epígrafe siguiente denominaremos "fuerza de atracción económica" F_{ij}, que tienen lugar entre un municipio cualquiera i y una parte del mismo j (normalmente se tratará de una pedanía, entidad local menor o entidad municipal descentralizada) que pretenda su segregación administrativa para constituir un nuevo municipio. Dicho procedimiento, como ya se ha visto, tendría en cuenta diversos parámetros bien característicos del territorio (superficie, población, distancia y rentas), y los trámites previstos y regulados en las correspondientes leyes de régimen local para la concesión de aquella segregación únicamente deberían iniciarse a partir del cumplimiento de dicho requisito mínimo.

Del mismo modo cabría operar con la adscripción administrativa racional, por lo menos desde el punto de vista del equilibrio económico-espacial, de un municipio a una determinada comarca, o bien de una comarca a una determinada región. Ello se ejemplificará posteriormente en la aplicación de nuestro estudio a Cataluña y en la resolución de diversos casos dudosos de adscripción alternativa de comarcas a determinadas regiones o veguerías.

La precaución mencionada, sin duda alguna, tendería a evitar la formación de pequeños núcleos por razones viscerales y extrañas -con frecuencia- a la racionalidad administrativa en la organización territorial y en la prestación de los servicios públicos, con un coste político y social elevado (tal como hemos podido comprobar en Cataluña en los últimos tiempos, así como en otras Comunidades Autónomas) y en contra del criterio -mucho más moderno y operativo- de la formación de economías de escala o de acumulación en la prestación de dichos servicios.

Veamos, en fin, que idéntica problemática segregacionista o independentista podría presentarse y resolverse, racionalmente, en lo relativo a la pertenencia de determinadas provincias o regiones a las naciones o a los Estados (FRANQUET, 1990/91).

13.4. EL ENFOQUE GRAVITATORIO DEL PROBLEMA

El concepto de "fuerza de atracción económica" F_{ij}, definido en nuestro modelo gravitatorio de división territorial (ver el anterior apartado 2 del capítulo 5) entre dos núcleos territoriales **i** y **j**, puede resultar especialmente útil para el estudio y evaluación del grado de conexión territorial entre los mismos. En efecto, se tiene, genéricamente, que:

$$F_{ij} = G \text{ x } \frac{(w_i \cdot P_i^{\alpha}) \times (w_j \cdot P_j^{\beta})}{r_{ij}^{b}} = F_{ji} \ ,$$

siendo, para nuestro caso:

P_i	=	población del núcleo **i** (hab.)
P_j	=	población del núcleo **j** (hab.)
w_i	=	renta per capita del núcleo **i** (€/hab.)
w_j	=	renta per capita del núcleo **j** (€/hab.)
r_{ij}	=	distancia que separa los núcleos **i** y **j** (km.)
G	=	constante correspondiente a la gravitación universal. Resulta determinable por estudios empíricos. Aquí, le daremos el valor: G = 1.
$\alpha = \beta = 1$ (parámetros experimentales).		
b	=	3 (parámetro experimental).

Como puede observarse -en aras de una mayor uniformidad conceptual- hemos optado por conferir a los parámetros o coeficientes de la fórmula anterior unos valores similares a los ya adoptados para el modelo gravitatorio anteriormente expuesto. Con ello, en definitiva, resultará la expresión siguiente (en función, ahora, de las rentas totales familiares disponibles de ambos núcleos territoriales):

$$F_{ij} = \frac{R_i \times R_j}{r_{ij}^3} = \frac{\delta_i \times \delta_j \times A_i \times A_j}{r_{ij}^3} = \frac{\delta_i \times \delta_j \times I_{ij} \times I_{ji}}{r_{ij}^7} = F_{ji}$$

que, al contrario de los anteriormente definidos "grados de atracción" α_{ij} y α_{ji}, posee un carácter bidireccional, y cuyos valores específicos para el caso de las comarcas y regiones catalanas en 1986 y 1996, han sido convenientemente calculados y tabulados (ver el capítulo correspondiente de nuestro trabajo).

Por último, notemos que su relación con el "grado de conexión" territorial anteriormente definido, contemplará que:

$$\sqrt[3]{R_i \cdot R_j} = r_{ij} \times \sqrt[3]{F_{ij}} \quad \text{, con lo que:}$$

$$\theta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \frac{10^6 (I_{ij} \times R_i^{2/3} + I_{ji} \times R_j^{2/3})}{I_{ij} \times I_{ji} \times r_{ij} \times \sqrt[3]{F_{ij}}} =$$

$$= \frac{10^6 (I_{ij} \times R_i^{2/3} + I_{ji} \times R_j^{2/3})}{A_i \times A_j \times r_{ij}^5 \times \sqrt[3]{F_{ij}}} = \theta_{ji} \ .$$

Razonando paralelamente (FRANQUET, 1990/91), veamos que el "grado de conexión territorial" entre dos territorios **i** y **j** vendrá dado, en el caso ponderal o másico, por la siguiente expresión:

$$\theta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = \frac{10^6}{r_{ij}^2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i^4}} + \sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j^4}} \right) =$$

$$= \lambda_{ij} \cdot \sqrt{R_i \cdot R_j} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{R_j}{R_i^4}} + \sqrt[3]{\frac{R_i}{R_j^4}} \right) =$$

$$= \frac{\lambda_{ij} \cdot \sqrt{R_i} \cdot \sqrt{R_j} \cdot \sqrt[3]{R_j}}{\sqrt[3]{R_i^4}} + \frac{\lambda_{ij} \cdot \sqrt{R_i} \cdot \sqrt{R_j} \cdot \sqrt[3]{R_i}}{\sqrt[3]{R_j^4}} =$$

$$= \frac{\lambda_{ij} \cdot R_j^{5/6}}{R_i^{5/6}} + \frac{\lambda_{ij} \cdot R_i^{5/6}}{R_j^{5/6}} = \lambda_{ij} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_j^5}{R_i^5}} + \lambda_{ij} \cdot \sqrt[6]{\frac{R_i^5}{R_j^5}} =$$

$$= \lambda_{ij} \left(\sqrt[6]{\left(\frac{R_j}{R_i}\right)^5} + \sqrt[6]{\left(\frac{R_i}{R_j}\right)^5} \right) = \theta_{ji}$$

Del mismo modo, en el caso ponderal o másico, la "fuerza de atracción económica" $F_{ij} = F_{ji}$ entre dos núcleos territoriales **i** y **j**, vendrá dada por:

$$F_{ij} = \frac{R_i \times R_j}{r_{ij}^3} = \frac{I_{ij} \times I_{ji}}{r_{ij}^7} \quad ,$$

que, por su propia naturaleza, como ya se ha dicho, posee un carácter bidireccional.

Veamos, en fin, que la determinación de la constante G podría realizarse desde la expresión:

$$G = \frac{F_{ij} \cdot r_{ij}^b}{(w_i \cdot P_i^\alpha) \times (w_j \cdot P_j^\beta)} = \frac{F_{ij} \cdot r_{ij}^b}{m_i \cdot m_j} \quad ,$$

a partir del conocimiento previo de la fuerza de atracción económica $F_{ij} = F_{ji}$, mediante la Dinámica Económica[15], de las magnitudes de las masas económicas ponderadas de ambos territorios (empleando los correspondientes estudios estructurales) y de la distancia que separa sus centros territoriales de masas (previa la determinación de los mismos por los procedimientos señalados en el apartado 2 del anterior Anexo), ya sea desde el punto de vista estricto de la longitud geofísica en línea recta o por carretera, o bien de los tiempos de desplazamiento entre ambos.

Por otra parte, la determinación más precisa de G permitirá hallar, indirectamente, la masa económica de los territorios conociendo el valor de las restantes variables, y teniendo presente que la "constancia" de G puede estar sólo limitada a ciertos campos gravitatorios económicos, debiendo ser recalculada para los restantes.

[15] Se sugiere, al respecto, la consulta del capítulo 10 (“Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas económicas”) del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio*, en *CADUP (Estudios)*, Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

Es obvio, en cualquier caso, que la constante G representará la fuerza económica con la cual se atraen dos territorios **i** y **j** cuyas masas económicas sean iguales a la unidad de masa de población (habitantes) o de renta (euros), separados entre sí por una distancia igual a la unidad de distancia considerada (expresable, normalmente, en Km ó Mm, o bien en horas si se tratase de tiempos de desplazamiento).

14. PROBLEMAS EN EL CAMPO CONTÍNUO

14.1. MOMENTOS TERRITORIALES ESTÁTICOS

Si la masa de renta por unidad superficial es prácticamente la misma en todo el territorio estudiado, podemos también suponer que su densidad de renta: δ = cte. Sabemos, por otra parte, que el momento territorial estático o de primer orden de un territorio **A** con respecto a un eje territorial cualquiera (momento áxico o ecuatorial) es igual a la suma de los productos de sus áreas elementales por sus respectivas distancias a dicho eje. Dicha hipótesis de trabajo, nos equipara las determinaciones de los momentos territoriales superficiales con los ponderales o másicos (FRANQUET, 1990/91).

Sea, por ejemplo, una cierta comarca que supondremos homogénea, y cuya configuración planimétrica aproximada puede verse en la figura siguiente:

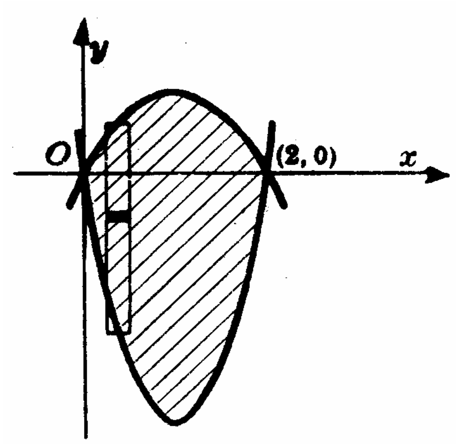


Fig. A-14.23. Comarca de densidad de renta constante (I).

Obsérvese que podemos asimilar, con buena aproximación, el área o superficie de esta comarca con la determinada por la intersección de las parábolas cuadráticas de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = 3x^2 - 6x \end{cases}$$

en el primer y cuarto cuadrantes del círculo, respectivamente.

Como siempre, para el logro de una mayor simplicidad operativa, se han expresado las distancias en miriámetros (1 Mm = 10 Km), con lo que se tendrá la siguiente superficie comarcal, empleando para su cómputo la integración doble:

$$A = \iint_A dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy \cdot dx = \int_0^2 (2x - x^2 - 3x^2 + 6x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (8x - 4x^2) \cdot dx = [\,4x^2 - 4x^3/3]_0^2 = 48/3 - 32/3 = 16/3 \text{ Mm}^2 = 533 \text{ Km}^2$$

El momento estático comarcal con respecto al eje OX, será:

$$M_x = \iint_A y \cdot dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y \cdot dy \cdot dx =$$

$$= 1/2 \int_0^2 [(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2] \cdot dx =$$

$$= 1/2 \int_0^2 (4x^2 + x^4 - 4x^3 - 9x^4 - 36x^2 + 36x^3) \cdot dx =$$

$$= 1/2 \int_0^2 (32x^3 - 8x^4 - 32x^2) \cdot dx = 4\,[x^4]_0^2 - 4/5\,[x^5]_0^2 - 16/3\,[x^3]_0^2 =$$

$$= 64 - 128/5 - 128/3 = -\,64/15 \text{ Mm}^3 = -\,4.267 \text{ Km}^3 \,.$$

El momento estático comarcal con respecto al eje OY, será:

$$M_y = \iint_A x \cdot dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x \cdot dy \cdot dx = \int_0^2 x \cdot (8x - 4x^2) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (8x^2 - 4x^3) \cdot dx = 8/3\,[x^3]_0^2 - [x^4]_0^2 = 64/3 - 16 =$$

$$= 16/3 \text{ Mm}^3 = 5.333 \text{ Km}^3 \,.$$

Desde luego, tal como vimos en epígrafes anteriores, también aquí podemos determinar las coordenadas del centro comarcal de masas G, esto es:

$$\begin{cases} x_0 = M_y / A = 5.333 / 533 = 10'00 \text{ Km.} \\ y_0 = M_x / A = -\,4.267 / 533 = -\,8'00 \text{ Km.} \end{cases}$$

, o sea, G (10'00, -8'00), que se halla, lógicamente, sobre el eje central territorial de simetría, donde también se hallan los extremos relativos o locales de la función perimetral, esto es, los puntos del territorio de coordenadas expresadas en Km.: MÁX. (10'00, 10'00) y MÍN. (10'00, -30'00).

14.2. MOMENTOS TERRITORIALES DE INERCIA

a) Masa de renta homogénea (δ = cte.):

Con las mismas hipótesis de homogeneidad en la distribución de las masas de renta que en el caso anterior, y sabiendo que el momento territorial de inercia de A con respecto a un eje será la suma de los productos de las áreas elementales por los cuadrados de sus respectivas distancias a dicho eje territorial, consideremos, ahora, una cierta comarca cuya configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

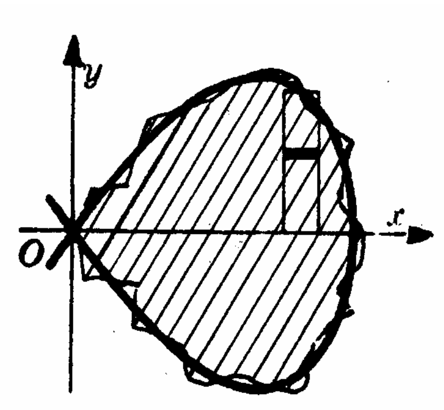


Fig. A-14.24. Comarca de densidad de renta constante (II).

En este caso, asimilaremos el área o superficie de esta comarca con la encerrada o comprendida por la curva de ecuación:

$$y^2 = x^2 (2 - x) \text{ , denominada "lazo",}$$

habida cuenta de su configuración planimétrica, en el primer y cuarto cuadrantes del círculo.

La superficie comarcal vendrá dada por:

$$A = \iint_A dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy \cdot dx = 2\int_0^2 x \cdot \sqrt{2-x} \cdot dx \quad ,$$

Se trata de la integral de una función irracional, por lo que emplearemos el siguiente cambio de variable:

$$\boxed{\begin{array}{c} 2 - x = z2 \\ x = 2 - z2 \\ dx = - 2z \cdot dz \end{array}}$$

, resultando los nuevos límites de integración:

$$\begin{cases} \text{para } x = 0 \;\text{———}\; z = \sqrt{2} \\ \text{para } x = 2 \;\text{———}\; z = 0 \end{cases}$$

esto es:

$$A = - 4 \int_{\sqrt{2}}^{0} z2\ (2 - z2) \cdot dz = - 4\ (2/3\ z3 - z5/5)_{\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= 32\sqrt{2}/15 \text{ Mm2} \approx 302 \text{ Km2}$$

El momento de inercia comarcal ecuatorial con respecto al eje OX, vendrá dado por:

$$Ix = \iint_A y2 \cdot dA = 2 \int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} y2 \cdot dy \cdot dx = 2/3 \int_0^2 x3(2 - x)3/2 \cdot dx =$$

$$= - 4/3 \int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - z2)3 \cdot z4 \cdot dz = - 4/3\ (8/5 \cdot z5 - 12/7 \cdot z7 + 2/3 \cdot z9 - z11/11)_{\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= 2.048\sqrt{2} / 3.465 \text{ Mm4} = 8.359 \text{ Km4} = 64 / 231 \text{ A.}$$

Del mismo modo, el momento de inercia comarcal ecuatorial con respecto al eje OY, será:

$$I_y = \iint_A x^2 \cdot dA = 2 \int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2 \cdot dy \cdot dx = 2 \int_0^2 x^3 \sqrt{2-x} \cdot dx =$$

$$= - 4 \int_{\sqrt{2}}^{0} (2 - z^2)^3 \cdot z^2 \cdot dz = - 4\ [8/3 \cdot z^3 - 12/5 \cdot z^5 + 6/7 \cdot z^7 - 1/9 \cdot z^9]_{\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= 1.024\sqrt{2} / 315 \text{ Mm}^4 = 45.973 \text{ Km}^4 = 32 / 21 \text{ A.}$$

Por último, el momento de inercia polar comarcal con respecto al centro de coordenadas O (0,0), será:

$$I_0 = I_x + I_y = 2.048\sqrt{2} / 3.465 + 11.264\sqrt{2} / 3.465 =$$

$$= 13.312\sqrt{2} / 3.465 \text{ Mm}^4 = 54.332 \text{ Km}^4 = 416 / 231 \text{ A.}$$

En lo referente a la determinación de los **radios de giro comarcales** con respecto ambos ejes territoriales OX y OY, veamos que, al ser constante la densidad de renta a lo largo y ancho del territorio en estudio, serán del tipo superficial o geométrico, con lo que:

$$\rho_X = \sqrt{I_x / A} = \sqrt{8.359 / 302} = 5'26 \text{ Km.}$$

$$\rho_Y = \sqrt{I_y / A} = \sqrt{45.973 / 302} = 12'34 \text{ Km.}$$

b) Masa de renta no homogénea o heterogénea (δ = variable):

b-0) Si la masa de renta por unidad superficial es distinta a lo largo y ancho del territorio estudiado, tendremos que su densidad de renta es también variable en el campo continuo. Este supuesto o hipótesis de trabajo puede considerarse perfectamente real, dado que no resulta difícil sospechar que dicha densidad de renta se acrecienta en las proximidades de la capital territorial, disminuyendo progresivamente con el alejamiento geofísico de dicho centro urbano.

b-1) En el siguiente ejercicio (FRANQUET, 1990/91), se trata de calcular el momento de inercia con respecto al eje OX de un municipio delimitado aproximadamente por el arco de la curva: y = sen x, y el propio eje de abscisas, sabiendo que su densidad de renta varía con la distancia a dicho eje territorial (la densidad de cada punto del territorio es proporcional a su distancia al eje OX).

Su configuración planimétrica puede verse en la figura siguiente:

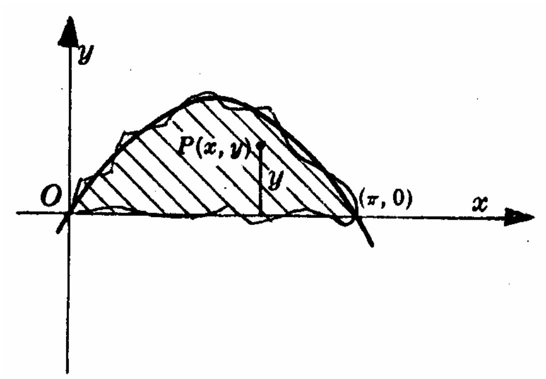


Fig. A-14.25. Municipio de densidad de renta variable (I).

Se tendrá la siguiente superficie municipal, en base al propio concepto de integral definida:

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen } x \cdot dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 =$$

$$= 2\ Mm^2 = 200\ Km^2$$

La masa de renta municipal vendrá dada por la integral doble:

$$m = \iint_A \delta\ (x, y) \cdot dA = \int_0^{\pi}\int_0^{senx} k \cdot y \cdot dy \cdot dx = k/2\int_0^{\pi} sen^2\ x \cdot dx =$$

$$= k/2 \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos\ 2x}{2}\ dx = k/4\ [\ x - \frac{sen\ \ 2x}{2}\ ]_0^{\pi} = (k \cdot \pi / 4)\ €$$

Así pues, la densidad media de la renta municipal, será:

$$\bar{\delta} = m / A = \frac{k \cdot \pi / 4}{200} = (k\ .\ \pi / 800)\ €/Km^2$$

El momento de inercia municipal con respecto al eje OX, vendrá dado por la expresión:

$$I_X = \iint_A \delta(x, y) \cdot y^2 \cdot dA = \int_0^{\pi}\int_0^{senx} k \cdot y \cdot y^2 \cdot dy \cdot dx = k/4\int_0^{\pi} sen^4\ x \cdot dx =$$

= (empleando fórmulas adecuadas de reducción) =

$$= k/4\ [\ - \frac{sen^3 x \cdot \cos\ x}{4} + 3/4\int sen^2\ x \cdot dx\ ]_0^{\pi} =$$

$$= k/4\ [\ - \frac{sen^3 x \cdot \cos\ x}{4} + 3/4\ (x/2 - sen2x/4)\ ]_0^{\pi} = k/4\ (3 \cdot \pi / 8) =$$

$$= (\frac{3\pi \cdot k}{32})\ € \cdot Mm^2 = (29'45 \cdot k)\ € \cdot Km^2 = 3/8\ m\ \ ,$$

que resulta ser del tipo másico o ponderal.

En este caso, el momento municipal estático con respecto al mismo eje OX, será:

$$M_X = \iint_A \delta\ (x, y) \cdot y \cdot dA = \int_0^{\pi}\int_0^{senx} k \cdot y \cdot y \cdot dy \cdot dx =$$

$$= k/3\int_0^{\pi} sen^3\ x \cdot dx = k/3\int_0^{\pi} sen\ x \cdot sen^2\ x \cdot dx =$$

$$= k/3 \int_0^{\pi} \text{sen } x\,(1 - \cos^2 x) \cdot dx =$$

$$= k/3 \left[-\cos x + \cos^3 x/3 \right]_0^{\pi} = (4k / 9)\ € \cdot \text{Mm} = (40k / 9)\ € \cdot \text{Km.}$$

Por otra parte, al tener dicho territorio un eje de simetría en la recta de ecuación:

$$x = \pi / 2$$

, sobre él se hallará el centro de las masas municipales de renta G. Así pues, las coordenadas de dicho centro, como se sabe, vendrán dadas por las expresiones:

$$\begin{cases} y_o = M_x / m = \dfrac{40\ k\ /\ 9}{k \cdot \pi\ /\ 4} = \dfrac{160}{\pi \cdot 9} = 5'66 \text{ Km.} \\[2ex] x_o = M_y / m = \pi / 2 = 15'71 \text{ Km.} \end{cases}$$

, o sea: G (15'71 Km, 5'66 Km).

En este caso, de un modo indirecto, podemos deducir el valor del momento municipal estático con respecto al eje OY, puesto que:

$$M_y = x_o \cdot m = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k \cdot \pi}{4} = \left(\frac{k \cdot \pi^2}{8}\right) € \cdot \text{Mm} = \left(\frac{5 \cdot k \cdot \pi^2}{4}\right) € \cdot \text{Km,}$$

con lo que completaremos el cálculo de los momentos territoriales del municipio en cuestión (el conocimiento de los restantes momentos de inercia: I_y, I_o e I_{xy}, resulta de menor interés en este caso).

Por último, el radio municipal de giro con respecto al eje OX, que será del tipo másico o ponderal, se obtiene inmediatamente así:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{3m\ /\ 8}{m}} = 0'612 \text{ Mm} = 6'12 \text{ Km}$$

b-2) En el ejercicio que desarrollamos a continuación (FRANQUET, 1990/91), trátase de calcular el momento territorial de inercia, con respecto al eje OY, de un municipio delimitado por la curva: $y^2 = 1 - x$, en el primer cuadrante del círculo, sabiendo que la densidad de renta en cada punto es igual a **y** (desde luego, en las magnitudes reales, será: $\delta = k \cdot y$).

Su configuración planimétrica aproximada puede verse en la figura siguiente:

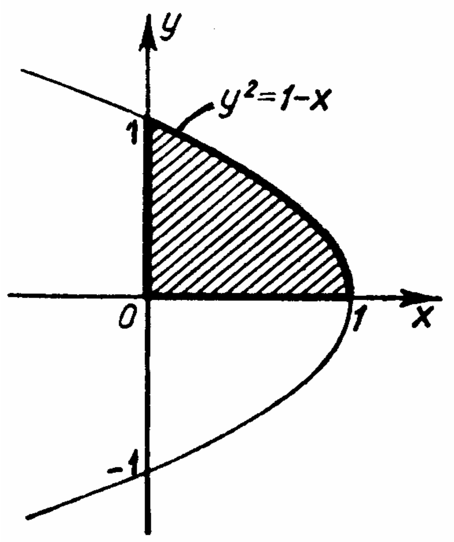


Fig. A-14.26. Municipio de densidad de renta variable (II).

Se tendrá la siguiente superficie municipal, en base al propio concepto de integral definida y de integral doble (es la integral de una función irracional, por lo que efectuaremos el oportuno cambio de variable):

$$A = \iint_A dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x}} dy \cdot dx = \int_0^1 \sqrt{1-x} \cdot dx =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1 - x = t^2 \\ x = 1 - t^2 \\ dx = -2t \cdot dt \end{array}}$$

$$= -2\int_1^0 t^2 \cdot dt = -2\,[\,t^3/3\,]_1^0 = 2/3\ \text{Mm}^2 = 66'66\ \text{Km}^2\ .$$

Por otra parte, el momento de inercia municipal con respecto al eje OY, vendrá dado por la expresión:

$$I_y = \iint_A \delta(x, y) \cdot x^2 \cdot dA = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} y \cdot x^2 \cdot dy\right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 [x^2 \cdot y^2 / 2]_0^{\sqrt{1-x}} \cdot dx = 1/2 \int_0^1 x^2 (1 - x) \cdot dx = 1/24 \equiv (k / 24)\ € \cdot \text{Mm}^2 =$$

$$= (4'17 \cdot k)\ € \cdot \text{Km}^2 = m / 6\ .$$

Así mismo, la masa de renta municipal vendrá dada por la integral doble:

$$m = \iint_A \delta(x, y) \cdot dA = \iint_A y \cdot dx \cdot dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} y \cdot dy \right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 [y^2 / 2]_0^{\sqrt{1-x}} \cdot dx = \int_0^1 [(1-x)/2] \cdot dx = 1/2 \int_0^1 (1 - x) \cdot dx =$$

$$= 1/2 \left([x]_0^1 - [x^2 / 2]_0^1 \right) = 1/2 (1 - 1/2) = 1/4 \equiv (k / 4) \text{ €},$$

con lo que la densidad media de la renta municipal, será:

$$\delta = \frac{m}{a} = \frac{k/4}{200/3} = \left(\frac{3k}{800}\right) \text{ €/Km}^2 .$$

En este caso, el radio municipal de giro representa la distancia a la que debe suponerse situada una masa única de renta **m** para que tenga idéntico momento ecuatorial de inercia respecto del eje territorial OY (ver epígrafe anterior 3.2). Esto es:

$$\rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{k/24}{k/4}} = \sqrt{\frac{1}{6}} = 0'408 \text{ Mm} = 4'08 \text{ Km}.$$

que es un radio territorial de giro másico o ponderal.

La determinación consecuente de los momentos municipales estáticos $\mathbf{M_x}$ y $\mathbf{M_y}$, restantes momentos de inercia (I_x, I_{xy} e I_0) así como del radio municipal de giro medio ρ_x y de las coordenadas del centro municipal de las masas de renta, se deducirán inmediatamente de las fórmulas anteriormente relacionadas.

* * * * *

(*) Si se trata de ejes rectangulares, se cumplirá que: $\theta = \pi/2$, sen $\theta = 1$; cos $\theta = 0$, con lo que: $I_0 = I_x + I_y$, como ya hemos visto con anterioridad.

(**) También es demostrable dicha desigualdad de Buniakovski-Schwarz para funciones f(x) y φ(x) integrables de una sola variable, adoptando entonces la configuración:

$$\left[\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx\right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) \cdot dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x) \cdot dx .$$

En efecto, $\forall\, \lambda \in$ [R] , se tiene:

$$\int_a^b [f(x) + \lambda \cdot \varphi(x)]^2 \cdot dx \geq 0 \quad \text{, esto es:}$$

$$\int_a^b f^2(x)\cdot dx + 2\lambda \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) \cdot dx + \lambda^2 \int_a^b \varphi^2(x) \cdot dx \geq 0 \ .$$

Se cumple que: $\int_a^b \varphi^2(x) \cdot dx > 0$, pues para $\varphi(x) = 0$ la desigualdad de Buniakovski-Schwarz resulta trivial, y también el determinante funcional simétrico:

$$\begin{vmatrix} \int_a^b \varphi^2(x)\cdot dx & \int_a^b \varphi(x)\cdot f(x)\cdot dx \\ \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\cdot dx & \int_a^b f^2(x)\cdot dx \end{vmatrix} \geq 0 \quad , \quad \text{c . s. q. d.}$$

ANEXO 15

UNIFORMIDAD Y EQUILIBRIO DEL TERRITORIO

ANEXO 15

UNIFORMIDAD Y EQUILIBRIO DEL TERRITORIO

1. DEFINICIÓN Y CONCEPTOS PREVIOS

Es frecuente oír hablar, en los últimos tiempos, tanto a los políticos como a los sociólogos, economistas, urbanistas, geógrafos, ingenieros, juristas, etc., acerca de la conveniencia de que el "territorio se halle equilibrado", o bien de que deba alcanzarse un cierto grado de "equilibrio territorial", o de que no debe trastocarse el ya existente, sin que, a continuación, se intente explicar o clarificar el significado real que tales palabras y expresiones encierran (FRANQUET, 1990/91).

Desde un primer punto de vista, **el equilibrio territorial se logrará cuando las masas socioeconómicas de población y de renta** (que vienen siendo objeto de estudio en anteriores capítulos de nuestro trabajo) **se hallen distribuidas por el territorio del modo más uniforme y homogéneo posible**, sin discontinuidades, pero también sin grandes concentraciones desequilibradoras. En términos matemáticos, y también en los que hemos venido utilizando en nuestro Análisis Territorial, ello equivaldría a procurar la asimilación del territorio que se planifica hacia un espacio de tipo continuo y no discreto.

En otro orden de ideas, el equilibrio territorial puede asimilarse a un estado del sistema físico en el cual todos sus componentes o elementos disfruten de un similar grado de accesibilidad a los servicios públicos y privados (educación, sanidad, cultura, transporte, comercio, ocio, ...).

El caso de Cataluña, que por cierto nos servirá para analizar paramétricamente el equilibrio de un territorio específico, es bastante típico por lo que se refiere al desequilibrio territorial que aquí tratamos de estudiar. Desde luego, en el fenómeno de la capital macrocefálica (en este caso, Barcelona), la compresión de los desequilibrios en la distribución espacial de las masas de población y de renta debe entenderse ligada a la concentración tradicional de las inversiones en infraestructuras y servicios diversos (abastecimientos de agua, depuradoras, hipermercados, servicios culturales y recreativos, etc...) en el área de la gran capital y en detrimento del resto del territorio de su jurisdicción, es decir, en este caso, de las 4 provincias, 41 comarcas, 944 municipios y 54 entidades locales menores (o entidades municipales descentralizadas) que conforman, actualmente, el conjunto catalán.

Es digno de remarcar, no obstante, que si las inversiones mencionadas se han venido concentrando y limitando al área macrocefálica es, esencialmente, la naturaleza del tipo de infraestructura escogido la que provoca que siempre se localicen dichas actuaciones -por razones de rentabilidad interna- en las proximidades de la capital congestionada del país. No juzgamos necesario entrar aquí en la discusión pormenorizada acerca de los mecanismos financieros y/o especulativos que, con gran frecuencia, acompañan a la promoción y construcción de los grandes elementos de infraestructura, aunque sí creemos conveniente denunciar el funcionamiento absurdamente autónomo con que estas operaciones acostumbran a plantearse; de este modo, prácticamente los únicos estímulos que explican la implantación de las mismas serán el consumo generado por la propia infraestructura y los beneficios esperables de su misma construcción.

Aceptando esta lógica constructiva con la que aquí discreparemos (autopistas, grandes hipermercados, etc.) el punto de destino beneficiado por la inversión acabará estando siempre en la capital del territorio o en sus aledaños. Y si, por alguna razón fortuita, dicha inversión notable se localiza a mayor distancia, lo será con un grado de concentración o peligrosidad tan fuerte (centrales nucleares para la producción de energía eléctrica, plantas de tratamiento de residuos industriales, ...) que ello constituye una forma subrepticia de colonizar una porción más del territorio para la capital.

Por todo ello, juzgamos necesario crear nuevos tipos o nuevas condiciones de los elementos de las infraestructuras, que permitan romper la lógica rutina de la concentración en la capital o para la capital y que, además, refuercen y hagan posible la acción de fomento armónico del crecimiento en el conjunto del territorio. Dicha política no es técnicamente imposible, ni debe suponer, siquiera, la aparición de deseconomías de gestión. Y ello, precisamente, porque la gestión concentrada resulta compatible con una cierta dispersión espacial, y porque es posible rechazar la naturaleza tan "determinísticamente" definida de los prototipos de infraestructura que venimos criticando.

Todo ello implicará conceder un papel fundamental a las comarcas y a los municipios (en el orden político, económico y cultural), potenciando la ligazón y los intercambios entre los diferentes enclaves territoriales; de este modo, se producirá una interrelación saludable de las actividades económicas y culturales, de tal suerte que los sub-territorios no se centren en una sola especialidad. Debe tenderse, en fin, a que la estructura económica de las unidades territoriales de ámbito local presente una diversificación notoria entre los diferentes sectores económicos, mediante la aplicación de conceptos tales como el de la "industrialización difusa", el aprovechamiento de los recursos turísticos y otros.

El desarrollo coherente de estos principios de actuación, concretándolos en actuaciones específicas, debería configurar, ciertamente, el núcleo de una política territorial eficiente y moderna. Pero el hecho es que, en numerosas ocasiones, las actuaciones que los gobiernos emprenden están impulsadas por la necesidad urgente de cubrir déficits de todo tipo. Y es que, debe distinguirse entre la perentoriedad de las acciones puntuales (con frecuencia ineludibles) y las actuaciones programadas para el conjunto del territorio con miras al logro de su reequilibrio, lo cual exige tomar decisiones para influir positivamente en la orientación de las grandes tendencias. *Para conseguir todo ello, juzgamos deseable, en nuestros administradores y políticos, un buen bagaje de ideas claras junto al sentido de la perseverancia y de la continuidad.*

Ahora bien, cabe hacerse diversas preguntas, como por ejemplo: ¿cuáles son y habrán de ser las grandes tendencias de distribución de la población y de las actividades socioeconómicas en el territorio? ¿Qué papel deberá desempeñar la capital más o menos macrocefálica y el resto del territorio? ¿Es razonable que los ritmos de crecimiento cuantitativo de dicha capital se mantengan en el futuro o, por el contrario, resulta más lógico que se modere o incluso anule el ritmo de crecimiento de la región metropolitana en beneficio del resto del territorio de su jurisdicción? De conseguirse esto último, se podría llegar a una doble situación: a) que en la región metropolitana se pondría más énfasis en las mejoras cualitativas, y b) que, en el resto del territorio, un crecimiento más acelerado permitiría obtener, también, un mayor crecimiento cualitativo, puesto que tanto en tecnología como en cultura, sanidad, enseñanza, etc., las dimensiones demográficas y económicas posibilitan la aparición de iniciativas mayormente ambiciosas. Trátase, en definitiva, de que la región metropolitana encauce su futuro en base, fundamentalmente, a mejoras cualitativas, mientras que el resto del territorio debería realizarlo simultáneamente con mejoras cualitativas y cuantitativas, sin perder de vista, no obstante, que las tendencias de la distribución de las masas socioeconómicas por el territorio no se pueden manipular o "pilotar" con facilidad, en la mayor parte de los casos.

Sí podemos intuir, sin embargo, que la oferta de puestos de trabajo por parte de los centros urbanos e industriales no tendrá, en el futuro, la misma intensidad que en pasado. La diversificación sectorial de las actividades y la disminución de las distancias físicas o de los tiempos de desplazamiento hacen que la creatividad económica se halle cada vez más generalizada a lo largo y ancho del territorio, sin tener que concentrarse, necesariamente, en poblaciones de rancia tradición industrial, o bien poseedoras de otras ventajas diferenciales. *En cualquier caso, con independencia de tendencias espontáneas, la acción de gobierno deberá enfocar al desarrollo equilibrado y armónico del conjunto territorial, basándose en su diversificación sectorial, en el* *aumento general del nivel de conocimientos, en la abolición de la frontera existente entre el mundo urbano y el rural, en la facilidad de las comunicaciones, en la industrialización difusa y en el apoyo, generoso y decidido, a las zonas relativamente deprimidas.*

La transformación, en los términos expuestos, de los modelos macrocéfalos actuales en la articulación del territorio, exigirá, en fin, unas bases de gestión urbana diferentes a las que se han venido empleando mayoritariamente hasta la fecha, y que tomen como alternativa el fomento decidido de la capacidad de todos y cada uno de los enclaves del territorio en cuestión, conjugando eficazmente la unidad con la diversidad (FRANQUET, 1990/91).

2. EQUILIBRIO TERRITORIAL: SÍMIL ESTÁTICO-MECÁNICO

2.1. CONDICIONES DE EQUILIBRIO TERRITORIAL

El concepto de "fuerza económica" y "momento de una fuerza económica", que ya han sido expuestos por el doctorando en algunas publicaciones[16], servirán de base a la exposición que sigue. Consideremos, ahora, un territorio sobre el que actúan varias fuerzas económicas $\vec{F}_i$, aplicadas en lugares geográficos diversos del mismo, así como un cierto punto 0 relevante de aquel (pudiera ser su centro de masas, o una capitalidad importante o un nudo de comunicaciones, etc.) y para componer dichas fuerzas las trasladamos a 0 agregando sus correspondientes momentos $\vec{M}_i$ aplicados en 0, con la dirección y sentido que les corresponden. Sumando vectorialmente las fuerzas por un lado y los momentos por otro, obtendremos una sola fuerza económica aplicada en 0, llamada **resultante general**, y un solo vector momento o **momento resultante**; es decir, que al componer un sistema de fuerzas económicas cualesquiera, aplicadas a un territorio, se obtendrá una **resultante general** y un par o **momento resultante**.

Pues bien, utilizando el símil estático, podríamos afirmar que para que un territorio -sobre el que actúan diversas fuerzas económicas- "esté equilibrado", deberá suceder que la "resultante general" y el "momento resultante" de aquéllas sean simultáneamente nulos. Esto es, deberá cumplirse que:

---

[16] *Vide* al respecto, el capítulo 10 (“Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas económicas”) del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio,* en *CADUP (Estudios),* Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

$$\begin{cases} \vec{F} = \sum \vec{F_i} = 0 \\ \vec{M} = \sum \vec{M_i} = 0 \end{cases}$$

, ecuaciones vectoriales que, para un territorio bidimensional, equivaldrán a las 4 ecuaciones escalares siguientes:

$$\begin{cases} F_x = F_y = 0 \\ M_x = M_y = 0 \end{cases}$$

2.2. CLASES DE EQUILIBRIO TERRITORIAL

Comparativamente con la Estática, podemos considerar dos clases de equilibrio en un territorio (FRANQUET, 1990/91):

a) *Estable*, en la que al aplicar una determinada fuerza económica, la posición geográfica del centro de masas no varía substancialmente. Entonces, la energía del centro de masas no varía substancialmente. Entonces, la energía económica potencial del territorio es mínima[17].

b) *Inestable*, sería un estado de equilibrio territorial en que, al contrario que en el caso anterior, la aplicación de un determinada fuerza económica o social implicara un desplazamiento especial significativo del centro territorial de masas. La cuestión exigible, a continuación, estribaría en determinar la cuantía necesaria de dicho desplazamiento para poderlo calificar de "significativo" y, en su consecuencia, considerar al territorio en estudio como en estado de "equilibrio inestable o desequilibrio".

Desde luego, en este último caso, la energía económica potencial es máxima, y debido a la tendencia "natural" de transformarse la energía potencial económica en energía cinética económica, en el equilibrio inestable cualquier pequeña acción o fuerza económica podría dar lugar a una desestabilización notoria, pues no es necesaria energía económica exterior al sistema para que pueda tener lugar.

Podríamos generalizar la explicación mecanicista anterior de equilibrio de un territorio diciendo que, bajo la acción de cualquier fuerza económico-social (son multitud las fuerzas las que actúan, en cada momento), dicho territorio se hallará en equilibrio estable o inestable según que al variar

[17] *Vide* al respecto, el capítulo 10 (“Una interpretación mecanicista de los desplazamientos de las masas económicas”) del libro del mismo doctorando titulado: *Análisis Territorial. División, Organización y Gestión del Territorio,* en *CADUP (Estudios),* Centro Asociado de la UNED. Tortosa, 1990/91. Citado en la bibliografía.

ligeramente la posición de su centro de masas, aumente o disminuya su energía potencial económica. Por el contrario, si dicha energía permaneciera constante después de la expresada perturbación, se podría hablar, por último, de un territorio en régimen de equilibrio "indiferente".

3. EQUILIBRIO TERRITORIAL: UNIFORMIDAD

3.1. INTRODUCCIÓN

De la definición de equilibrio territorial que hemos visto en el primer apartado del presente anexo, se infiere su relación biunívoca, concomitancia o biyectividad con los conceptos de uniformidad y homogeneidad en la distribución espacial de las masas socioeconómicas por el territorio (FRANQUET, 1990/91).

En el siguiente epígrafe 3.5. ("Aplicación a Cataluña"), hemos calculado el coeficiente de variación de Pearson (que, como es sabido, trátase de una medida abstracta de dispersión relativa de los valores de la variable aleatoria estadística, profusamente utilizada) para cada una de las nuevas comarcas y nuevas regiones en que proponemos la división del territorio catalán, y para diferentes variables explicativas: población y superficies municipales, densidades de población, altitud topográfica, etc. Es obvio que, desde los respectivos puntos de vista, el territorio en cuestión se hallará tanto más equilibrado cuanto menores sean los valores de su CV referido a la variable aleatoria estadística que toma valores para cada una de las partes en que se considera espacialmente dividido dicho territorio. Destaca, del coeficiente elegido como medida de la variabilidad, su adimensionalidad, es decir, su independencia de las unidades de medida, permitiendo la comparación entre grupos diferentes de datos, lo que no resulta posible establecer mediante el exclusivo empleo de la varianza o de la desviación típica de la correspondiente distribución de frecuencias.

Al respecto, y como medida de la uniformidad en la distribución de las masas socioeconómicas por un territorio cualquiera, pueden utilizarse los diversos coeficientes que propondremos a continuación (expresados en %), de sentido contrario a la variabilidad antedicha.

El primero de ellos podría ser el siguiente:

$\mathbf{CU_1 = 100(1 - CV)}$, de gran sencillez y aplicabilidad, siendo: $CV = \sigma/\overline{X}$

, en que $\overline{X}$ es la media aritmética de los valores de la variable analizada (población, renta, etc.) y $\boldsymbol{\sigma}$ es su desviación típica o "standard" (desviación cuadrática media).

3.2. ESTUDIO PORMENORIZADO DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

3.2.1. La distribución teórica de probabilidad

El significado físico del CV se deduce claramente si aceptamos que todos los valores de la variable elegida en el territorio en estudio, se distribuyen de acuerdo con la curva campaniforme de una distribución normal y, por lo tanto, se tendrá lo siguiente:

a) Prácticamente, todos los valores observados se hallarán comprendidos en el entorno: $(1 \pm 3 \cdot CV)\overline{X}$.

b) Aproximadamente, el 95% de las observaciones se encuentran comprendidas en el entorno: $(1 \pm 2 \cdot CV)\overline{X}$.

c) Si de toman las n/4 observaciones de valores más bajos del total de los **n** valores medidos de la variable en cuestión (cuyo valor superior será el primer cuartil Q_1 de la distribución de frecuencias), su media aritmética será igual a: $q_{25}=(1-1'27 \cdot CV)\overline{X}$.

d) El 68'27% de las observaciones realizadas estarán en el intervalo: $(1 \pm CV)\overline{X}$.

Por todo ello, y según los valores que adopte dicho coeficiente CV (o el CU_1), podríamos establecer una clasificación de los territorios según su grado o índice de uniformidad en relación a la correspondiente característica o variable territorial digna de evaluación.

Otros coeficiente de uniformidad territorial podrían definirse a partir de las siguientes expresiones:

$\mathbf{CU_2 = (Q_1 / \overline{X}) \times 100}$ (de menor aplicabilidad) y $\mathbf{CU_3 = (q_{25} / \overline{X}) \times 100}$,

siendo q_{25}, como ya se ha visto, el valor medio del cuarto inferior de los valores de la variable analizada.

Desde luego, la ecuación matemática de la función de la distribución normal viene dada, como es sabido, por la expresión:

$$\boxed{y = 1 / \sigma \sqrt{2\pi} \cdot e^{-1/2\,(x-\alpha/\sigma)^2}}$$

, en la que se ha tomado, como es usual, $\overline{X} = \alpha$, y que coincide con la expresión matemática de la célebre "ley de los errores", debida a Gauss, siendo y = f(x) la denominada "función de densidad normal". Así mismo, se tendrá:

$$F(x_j) = P(x \leq x_j) = P(-\infty < x \leq x_j) = \int_{-\infty}^{x_j} f(x)\,dx$$

, (función de distribución normal), que es la probabilidad de que la variable aleatoria territorial toma un valor $\leq x_j$.

Las áreas bajo la curva normal representan probabilidades; en estas condiciones, la probabilidad de que $x \in\ ]x_1, x_2]$ será:

$$P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = P(x \leq x_2) - P(x \leq x_1) =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\cdot dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx\,.$$

Cuando x viene expresada en unidades de desviación: $Z = (x-\alpha)/\sigma$, se tiene la **distribución normal tipificada**, así:

$$y = 1 / \sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2}$$

, y decimos que la variable Z se distribuye normalmente con media cero (α=0) y varianza uno ($\sigma^2 = 1$).

Vamos a proceder, seguidamente, al estudio más pormenorizado de ambas curvas.

1) **Como acabamos de ver, la ecuación de la curva normal tipificada es:**

$$y = 1 / \sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \quad ; \ \alpha = 0 \quad ; \quad \sigma^2 = 1 \quad ,$$

que es la función de densidad normal reducida.

• *Extremos relativos y puntos de inflexión:*

Se tiene:

$$y' = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \cdot (-z) = 0 \quad ; \quad z = 0 \text{ (origen) } ;$$
$$y'' = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \cdot \left(z^2 - 1\right) \ ; \ \forall z = 0 \rightarrow y'' = 1/\sqrt{2\pi} < 0$$

luego existe un **máxima relativo o local** en el punto (0, $1 / \sqrt{2\pi}$), de intersección con el eje de ordenadas OY, y no habrá intersección con el eje de abscisas OZ a distancia finita, esto es:

$$\forall y = 0 : \qquad z = +\infty \quad y \quad z = -\infty \quad .$$

De y'' = 0, o sea: z^2-1 = 0, saldrán los **puntos de inflexión**, que son: z = ±1; o sea, los puntos de coordenadas: (1, 1 / $\sqrt{2\pi \cdot e}$) y (-1, 1 / $\sqrt{2\pi \cdot e}$).

• *Crecimientos y decrecimientos:*

Veamos que:

∀ z < 0 → y' > 0 → CRECIENTE

∀ z > 0 → y' < 0 → DECRECIENTE

• *Asíntotas:*

$$\lim_{z\to+\infty} 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0$$

$$\lim_{z\to-\infty} 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 1/\sqrt{2\pi} \cdot 1/e^{\infty} = 1/\infty = 0$$

Luego tiene por asíntota horizontal el eje OZ.

•*Simetrías:*

- Respecto al eje OY, pues al cambiar (z) por (-z), no sufre variación (se trata de una función par).

•*Concavidades y convexidades:*

De: $y'' = 1/\sqrt{2\pi} \cdot e^{-z^2/2} \cdot \left(z^2 - 1\right)$, se deduce que:

∀z ∈]-∞, -1[→ y'' > 0 → CÓNCAVA
∀z ∈]-1, -1[→ y'' < 0 → CONVEXA
∀z ∈]1, +∞[→ y'' > 0 → CÓNCAVA

Su representación gráfica, en definitiva, será la siguiente:

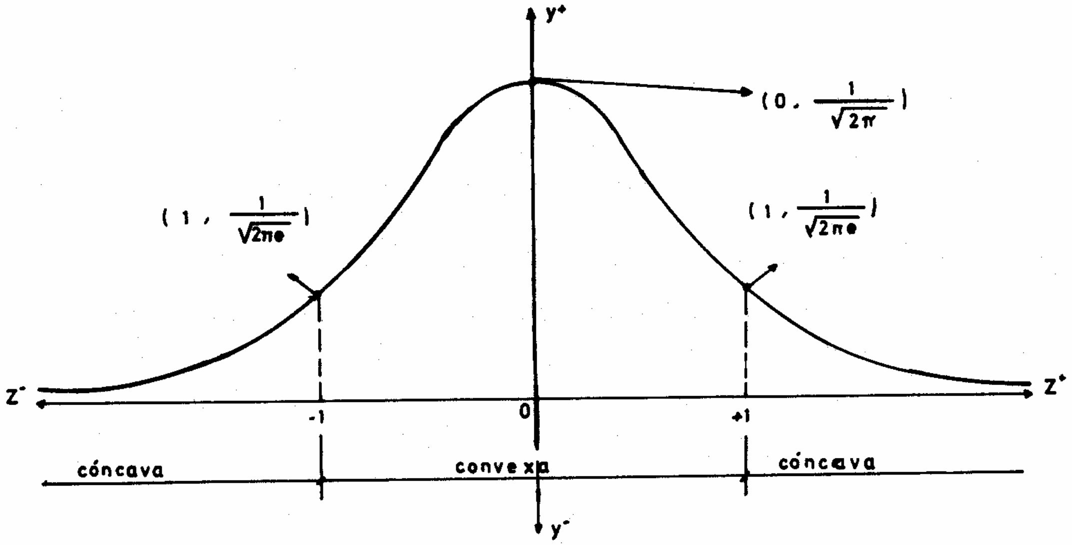


Fig. A-15.1. Curva normal tipificada.

Veamos que en esta distribución teórica de probabilidad, como en todas las simétricas, se cumple, como puede observarse fácilmente, la igualdad entre la media aritmética, la mediana y la moda, valores que, en este caso, coinciden con cero.

2) **La ecuación de la curva normal sin tipificar es:**

$y = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(X-\alpha)^2/2\sigma^2}$ (función de densidad normal)

•*Asíntotas:*

$$\lim_{x \to +\infty} \; y = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(x-\alpha)^2/2\sigma^2} = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 0 \;;$$

$$\lim_{x \to -\infty} \; y = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(x-\alpha)^2/2\sigma^2} = 1/\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\infty} = 0$$

luego tiene por asíntota horizontal el eje OX.

•*Cortes con los ejes:*

Cortará al eje OY en el punto de coordenadas $(0, 1 / \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\alpha^2/2\sigma^2})$ y no cortará al eje OX a distancia finita.

•*Extremos relativos y puntos de inflexión:*

$$y' = 1/\sigma\sqrt{2\pi}\cdot e^{-(x-\alpha)^2/2\sigma^2}\cdot\left[(\alpha - x)/\alpha^2\right] = y\cdot(\alpha - x)/\sigma^2 = 0\ ; \rightarrow x = \alpha$$

$$y'' = y'\cdot(\alpha - x)/\sigma^2 - y\cdot 1/\sigma^2 = y\cdot\left[(\alpha - x)/\sigma^2\right]^2 - y\cdot 1/\sigma^2 =$$

$$= y\cdot(\alpha - x)^2/\sigma^4 - y\,\sigma^2/\sigma^4 = y\cdot\left[(\alpha - x)^2 - \sigma^2\right]/\sigma^4\ ;$$

$$\forall\, x = \alpha \rightarrow y'' = y\cdot\left(-\sigma^2\right)/\sigma^4 = -y/\sigma^2 < 0$$

luego existe un máximo relativo o local en el punto (α, 1 / $\sigma\sqrt{2\pi}$).

Por otra parte, de y''=0, o sea: $(\alpha - x)^2 = \sigma^2$, saldrán los **puntos de inflexión**, que son: $\pm(\alpha - x)^2 = \pm\sigma^2$; o sea: $x = \alpha + \sigma$, o bien: $x = \alpha - \sigma$, esto es, los puntos de las coordenadas cartesianas rectangulares:

$$\left(\alpha + \sigma, 1/\sigma\sqrt{2\pi e}\right) \quad y \quad \left(\alpha - \sigma, 1/\sigma\sqrt{2\pi e}\right)$$

, siendo convexa la curva entre dichos puntos, y cóncava en el resto del intervalo de existencia, como puede comprobarse del estudio de la segunda derivada y''. Así pues, es cóncava hacia la región positiva de OY, para: $-\infty < x < \alpha-\sigma$, y para $\alpha+\sigma < x < +\infty$, y cóncava hacia la región negativa del eje de ordenadas (convexa hacia las y+) en el intervalo o dominio de definición: $\alpha-\sigma < x < \alpha+\sigma$.

•*Simetrías:*

La curva es simétrica con respecto a la ordenada correspondiente al punto α, por ser una función par con respecto a la diferencia: $(x-\alpha)$.

•*Crecimientos y decrecimientos:*

Veamos que $\begin{cases} \forall\, x < \alpha \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{ CRECIENTE} \\ \forall\, x > \alpha \rightarrow y' < 0 \rightarrow \text{ DECRECIENTE} \end{cases}$

Su representación gráfica será:

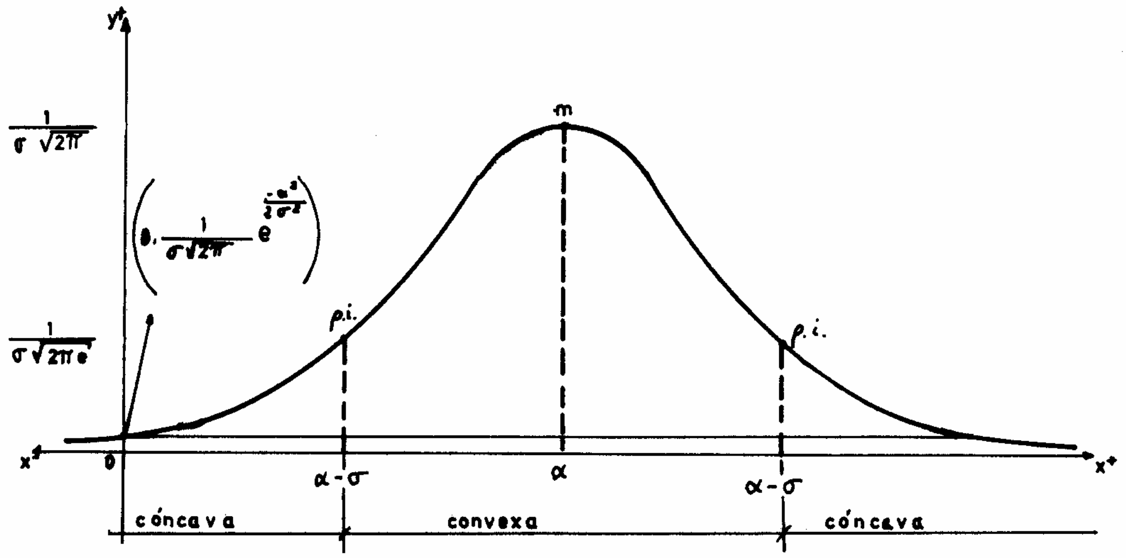


Fig. A-15.2. Curva normal sin tipificar.

3.2.2. Las áreas bajo la curva normal

El estudio detenido que acabamos de realizar, desde el punto de vista del análisis matemático, de las distribuciones normales tipificadas y sin tipificar, nos permitirá aprovechar los conocimientos que la ciencia estadística proporciona acerca de dicha distribución teórica de frecuencias para obtener ciertas conclusiones de tipo cuantitativo, de gran aplicación en el Análisis Territorial.

Y así, se tendrá lo siguiente:

% de casos	INTERVALOS
50'00	$[(1 - 0'68CV)\,\overline{X},\ (1 + 0'68\,CV)\overline{X}]$
64'24	$[(1 - 0'92CV)\,\overline{X},\ (1 + 0'92\,CV)\overline{X}]$
68'27	$[(1 - CV)\,\overline{X},\ (1 + CV)\overline{X}]$
95'00	$[(1 - 1'96CV)\,\overline{X},\ (1 + 1'96\,CV)\overline{X}]$
95'45	$[(1 - 2\,CV)\,\overline{X},\ (1 + 2\,CV)\overline{X}]$
99'00	$[(1 – 2'58\,CV)\,\overline{X},\ (1 + 2'58\,CV)\overline{X}]$
99'73	$[(1 - 3\,CV)\,\overline{X},\ (1 + 3\,CV)\overline{X}]$

, que podría representarse, gráficamente, del siguiente modo:

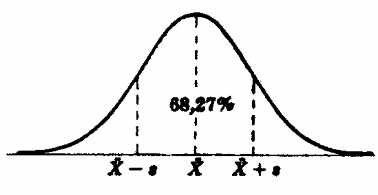


Fig. A-15.3. Áreas bajo la curva curva normal (I).

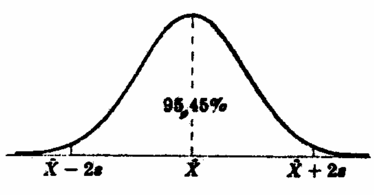


Fig. A-15.4. Áreas bajo la curva normal (II).

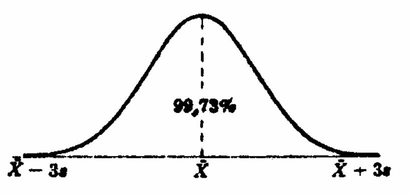


Fig. A-15.5. Áreas bajo la normal (III).

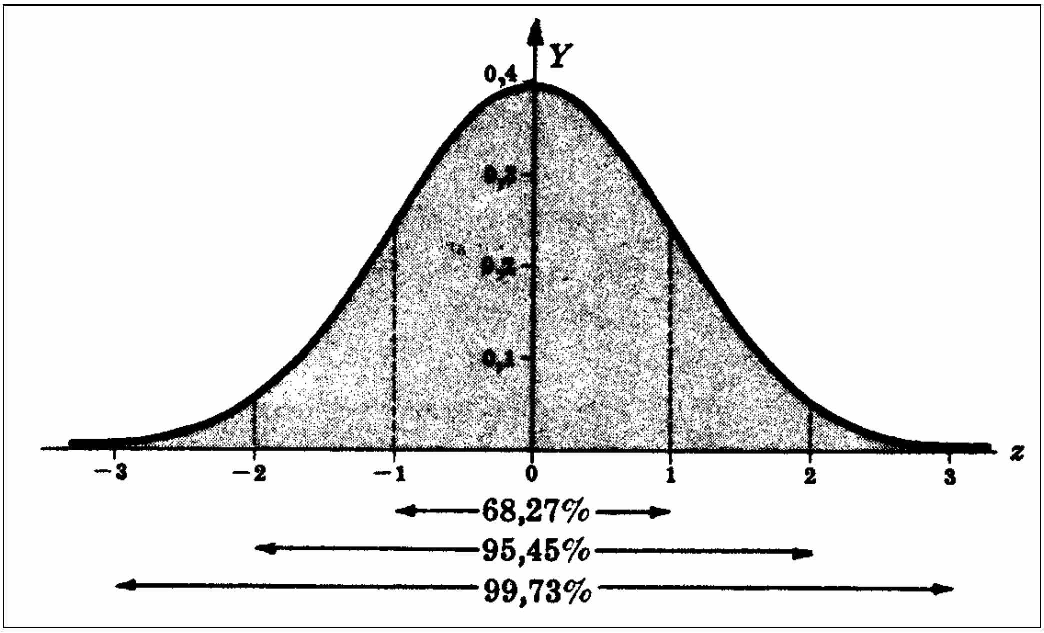


Fig. A-15.6. Áreas bajo la curva normal (IV).

En la siguiente tabla se presentan las áreas: $\int_0^x f(x)\cdot dx$ (multiplicadas por 1.000) bajo la curva normal. A saber:

x	1.000 *A*	*x*	1.000 *A*	*x*	1.000 *A*	*x*	1.000 *A*
0,0	000	1,0	341	2,0	477	3,0	498,6
0,1	040	1,1	364	2,1	482	3,1	499,0
0,2	079	1,2	385	2,2	486	3,2	499,3
0,3	118	1,3	403	2,3	489	3,3	499,5
0,4	156	1,4	419	2,4	492	3,4	499,7
0,5	191	1,5	433	2,5	493,8	3,5	499,77
0,6	226	1,6	445	2,6	495,3	3,6	499,84
0,7	258	1,7	455	2,7	496,5	3,7	499,89
0,8	288	1,8	464	2,8	497,4	3,8	499,93
0,9	316	1,9	471	2,9	498,1	3,9	499,95

Tabla A-15.1. Áreas bajo la curva normal.

De aquí, pueden resolverse las siguientes cuestiones (RODRÍGUEZ-ARENALES, 1988):

a) **Área total bajo la curva normal y probabilidad de que la variable territorial tome un valor cualquiera de su recorrido o campo de variación (de -∞ a +∞).**

La simple observación de la tabla A-15.1 nos dice que el área bajo la curva normal, desde 0 a 3'9, toma el valor:

$$499'95 / 1.000 = 0'49995 \approx 0'5$$

Por la simetría de la curva de Gauss, ésta es la mitad del área total, que vale la unidad (probabilidad total).

b) **Área bajo la curva determinada por las ordenadas en los extremos de los intervalos (1, 2) y (-1, -2). ¿Cuál es el valor de la probabilidad de que la variable territorial x tome un valor comprendido entre 1 y 2? ¿Y entre -2 y -1?**

Según puede verse en la tabla anterior, las áreas bajo la curva comprendidas entre el eje de ordenadas (x=0) y las ordenadas x=2 y x=1, son, respectivamente:

$$477 / 1.000 = 0'477 \qquad y \qquad 341 / 1.000 = 0'341 \quad ;$$

entonces, el área pedida será la diferencia:

$$\int_0^2 f(x)\ dx \ - \ \int_0^1 f(x)\ dx = 0'477 - 0'341 = 0'136 = \int_1^2 f(x)\ dx = 13'6\%$$

que es también la probabilidad de que la variable territorial **x** tome un valor comprendido entre 1 y 2.

El área comprendida entre las ordenadas x = -2 y x = -1 es la misma anterior y la probabilidad de que **x** tome un valor del intervalo (-2, -1) es también igual, en virtud de la simetría de la figura, a:

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = 0'136 \qquad y \qquad P(-2 < x < -1) = 0'136 \quad .$$

c) **Intervalo (-a, a) cuyas ordenadas extremas delimiten el 50 por 100 del área total normal y su expresión probabilística.**

Hemos de encontrar un valor x = a, tal que delimite hasta el eje de ordenadas el 25 por 100 del área total (por simetría, el intervalo (-a, 0) delimitará el otro 25 por 100).

Según la tabla, este valor comprendido entre x = 0'6 y x = 0'7, y las áreas respectivas, a saber, 0'226 y 0'258, incluyen la de valor 0'250 pedido.

De la proporción:

$$\frac{0'258 - 0'226}{0'7 - 0'6} = \frac{0'250 - 0'226}{a - 0'6}$$

obtendremos a = 0'68, con lo que:

$$\int_{-0'68}^{0'68} f(x)\, dx = 0'50 \qquad \text{y} \qquad P(-0'68 < x < 0'68) = 0'50 \quad .$$

d) **Valor de <u>a</u> tal que las colas (áreas a la izquierda de -a y a la derecha de +a) que existen bajo la curva normal sumen el 5 por 100 del área total.**

Por razón de simetría, el área de cada cola debe medir el 2'5 por 100 del área total; entonces el valor de **a** ha de satisfacer la condición:

$$\int_{0}^{a} f(x)\, dx = 0'500 - 0'025 = 0'475$$

Según la tabla, este valor de **a** está comprendido entre 1'9 y 2'0 y se puede estimar según la proporción:

$$\frac{477 - 471}{2 - 1'9} = \frac{475 - 471}{a - 1'9} \quad ; \quad a = 1'9667 \approx 2.$$

En la práctica, se suelen tomar los valores de -2 y 2 para definir la cola del 5 por 100, o lo que es igual:

$$P(-2 < x < 2) = 0'95 \ .$$

3.3. EFECTO DEL COEFICIENTE DE VARIACIÓN EN LA UNIFORMIDAD DEL TERRITORIO

En relación a la uniformidad territorial a la que nos venimos refiriendo en el presente capítulo, veamos que la propiedad más interesante de la distribución normal de los valores de la variable territorial analizada (población o su densidad, renta, etc.) es que si se toma el 25% de los valores más bajos, su valor medio, es decir, lo que hemos denominado q_{25}, valdrá (según hemos visto en el punto c) del epígrafe 3.2.1. anterior):

$$q_{25} = (1 - 1'27 \cdot CV) \cdot \overline{X} \quad ,$$

con lo que el coeficiente de uniformidad CU_3 anteriormente definido, tomará el valor:

$$CU_3 = 100\ (1 - 1'27 \cdot CV) < CU_1$$

Si suponemos, v.gr., un territorio en el que analizando la distribución espacial de sus rentas municipales obtendremos un CV = 0'32, veamos que:

$$CU_1 = 100\ (1 - 0'32) = 68'00\%$$

$$CU_3 = 100\ (1 - 1'27 \times 0'32) = 59'36\% \quad ,$$

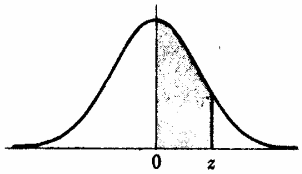
aunque dependería de las circunstancias el escoger uno u otro índice para la medida de la uniformidad territorial que se pretende. De hecho, el CU_3 siempre ofrecerá, expresado en %, por su propia configuración analítica, valores absolutos más bajos que el correspondiente CU_1, tanto si se trata de valores positivos como negativos (véase, al respecto, el gráfico de la figura A-15.8).

Por otra parte, consideremos, ahora, una región cualquiera estructurada en comarcas que, a su vez, se dividen en municipios para los que conocemos los valores de las diferentes variables territoriales analizadas (población, renta, etc.). Llamando "e" al número de municipios que integran una comarca determinada, resultará que cuanto mayor sea "e" menor será la probabilidad de que todos los municipios de esa comarca pertenezcan al 25% más bajo de la región en estudio. En este caso, la expresión del coeficiente de uniformidad propuesto se transformaría en:

$$\boxed{CU_3 = \left(1 - 1'27 \cdot CV / \sqrt{e}\right)}$$

Habida cuenta de su interés para la realización de este tipo de cálculos, a continuación se presenta una tabla que ofrece las áreas existentes bajo la curva normal tipificada, limitadas por la ordenada z = 0 y cualquier valor positivo de z. A partir de esta misma tabla, se pueden encontrar las áreas comprendidas entre dos ordenadas cualesquiera, utilizando la simetría de la curva de Gauss en relación al eje de ordenadas z = 0. Por último, se incluye también una tabla con los valores de las ordenadas (y) de la curva normal tipificada para los diferentes valores de z.

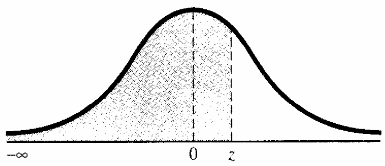
Veámoslas a continuación:



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

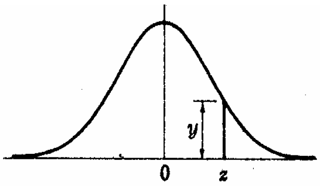
Tabla A-15.2. Áreas bajo la curva normal tipificada de 0 a z.

$$F(z) = P(Z \leqslant z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0.9788	0.9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Tabla A-15.3. Áreas bajo la curva normal tipificada de -∞ a z.



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

Tabla A-15.4. Ordenadas (y) de la curva normal tipificada en z.

Por otra parte, según acabamos de ver en el epígrafe anterior, se cumplirá que: $Q_1 = (1 - 0'68\ CV) \cdot \overline{X}$, que será el intervalo correspondiente al

50% de los casos o "rango intercuartílico" (Q_3 - Q_1) de la distribución de probabilidad, con lo que también:

$$\mathbf{CU_2 = 100\ (1 - 0'68\ CV)} \quad ,$$

que, lógicamente, será el mayor de los cuatro coeficientes de uniformidad territorial aquí definidos (ver figura A-15.7).

Así pues, y en base al valor de dichos coeficientes, resulta un $\overline{CU}$ (medio) de : Z = -0'9375 (media aritmética), o bien Z = -0'9117 (media geométrica), por lo que podríamos considerar, como medida "standard" de la uniformidad de un territorio cualquiera, un $\overline{CU}$= 100 (1 - 0'92 CV), cuyo intervalo, bajo la hipótesis de normalidad en la distribución espacial de los valores de la variable territorial, abarcaría un 64'24% de los caos, según puede comprobarse mediante las tablas más completas de áreas y ordenadas bajo la función normal, que adjuntamos en las páginas precedentes.

En el ejemplo anteriormente propuesto, se tendrá:

$$\begin{cases} CU_2 = 100\left(1 - 0'68 \times 0'32\right) = 78'24\% \\ \overline{CU} = 100\left(1 - 0'92 \times 0'32\right) = 70'56\% \end{cases}$$

, pudiendo, en la práctica, escoger cualquiera de ellos como medida de la uniformidad territorial que deseamos realizar.

3.4. OTROS COEFICIENTES DE UNIFORMIDAD TERRITORIAL

3.4.1. Basados en la desviación media absoluta

La "desviación media" es la media aritmética de las desviaciones absolutas de los **n** valores de la variable socioeconómica analizada respecto a un promedio cualquiera (FRANQUET, 1990/91). Si tomamos como dicho promedio la media aritmética $\overline{X} = \alpha$, su expresión será, en el caso de una distribución de frecuencias unitarias:

$$DM = \frac{|x_1 - \overline{X}| + |x_2 - \overline{X}| + \ ... \ + |x_n - \overline{X}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{X}|}{n}$$

(este valor resultaría mínimo si en vez de considerar la $\overline{X}$ hubiéramos tomado la mediana M_e = Q_2 o valor central de la correspondiente distribución de frecuencias).

Por otra parte, en el caso de operar con frecuencias agrupadas o conjuntas, lo que sucederá cuando se opte por agrupar los valores de la variable territorial analizada por intervalos de clase, se tendrá que:

$$n_1 + n_2 + \ \ldots \ + \ n_n = \sum_{i=1}^{h} n_i = n$$

$$DM = \frac{|x_1 - \overline{X}| \cdot n_1 + |x_2 - \overline{X}| \cdot n_2 \ + \ \ldots \ + |x_h - \overline{X}| \cdot n_h}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{h} |x_i - \overline{X}| \cdot n_i}{n} = \sum_{i=1}^{h} |x_i - \overline{X}| \cdot f_i$$

Pues bien, en base a ella, podríamos definir el siguiente nuevo coeficiente de uniformidad:

$$\mathbf{CU_4 = 100\ (1 - DM / \overline{X})} \quad ,$$

que, en realidad, resulta similar al CU_1, habiendo substituido la desviación típica o "standard" por la desviación media absoluta, como medida absoluta de dispersión espacial por el territorio de los valores de la variable aleatoria estadística. Normalmente, para un mismo territorio, se cumplirá que:

$$CU_3 < CU_1 < \overline{CU} < CU_4 < CU_2 < CU_5$$

estando los valores de todos estos coeficientes de uniformidad limitados o acotados superiormente en el 100%, según podrá comprobarse de modo gráfico en la figura A-15.7.

3.4.2. Basados en índices diversos

Veamos, en fin, que también resulta posible la conceptualización y posterior medición o cuantificación de la uniformidad territorial, mediante el empleo del índice de GINI (variable entre 0 y 1) y la correspondiente curva de LORENZ (línea poligonal a un lado de la bisectriz del primer cuadrante). Para ello, habrá que calcular los porcentajes acumulados de los valores de las variable territoriales en estudio que, normalmente, serán:

a) Superficie (p_i) / Población (q_i)

b) Superficie (p_i) / Renta (q_i)

c) Superficie (p_i) / Depósitos bancarios (q_i)

Obviamente, la distribución espacial de las masas socioeconómicas (q_i) por el territorio será tanto más equitativa cuanto más bajo sea el valor de dicho índice, de expresión general (según la fórmula dada por Pulido):

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i}$$

Así, por ejemplo, a un 50% de la superficie del territorio deberá corresponder, aproximadamente, un porcentaje similar de la variable territorial, y a la inversa, para que se puede afirmar con propiedad que el territorio hállase "equilibrado".

Teóricamente, la distribución perfecta de la variable territorial analizada tendrá lugar cuando todos sus valores sean iguales, lo que constituye un *desideratum* ideal pero, en cualquier caso, presenta una medida de la uniformidad en su distribución territorial. En este caso, al representar los porcentajes acumulados de la variable frente a los porcentajes acumulados del territorio, se obtendrá la recta de ecuación: $q_i = p_i$, coincidente con la bisectriz del primer cuadrante, y el índice de GINI valdrá 0. Obviamente, este índice se encuentra más próximo a 1 cuanto peor está distribuida, por el territorio, la variable que estamos evaluando (FRANQUET, 1990/91).

En los libros de A. PULIDO SAN ROMÁN[18] y de A. ALCAIDE INCHAUSTI[19], podemos encontrar presentaciones diferentes de la medida que hemos empleado para parametrizar la concentración de la variable. Para interpretar correctamente su significado, resulta suficiente con observar que G varia entre los valores extremos 0 y 1, tomando el valor mínimo o nulo cuando cada $\mathbf{p_i}$ es igual a su correspondiente $\mathbf{q_i}$, lo que provoca la anulación del numerador de su expresión definitoria.

Este concepto puede precisarse mejor representando, en un diagrama, la función: $p_i = f(q_i)$, o bien la inversa: $q_i = \varphi(p_i)$, que nos permitirán la obtención de una línea poligonal construida sobre (o por debajo) la diagonal de un cuadrado que tiene un extremo en el centro u origen de coordenadas cartesianas rectangulares (0,0) y el otro extremo en el punto de coordenadas (100,100). Esta figura constituye la mencionada curva de LORENZ, frecuentemente usada en el Análisis estructural económico, y la distribución por el territorio de la variable en estudio $\mathbf{q_i}$ será tanto más equitativa cuanto la superficie del área comprendida entre dicha línea poligonal (que tenderá a convertirse en una curva al aumentar el número de puntos en estudio) y la diagonal de equidistribución sea menor, y recíprocamente.

[18]*Estadística y Técnicas de Investigación Social*. Ed. ANAYA. Madrid, 1971, pág. 111.
[19]*Estadística Económica*. Ed. SAETA. Madrid, 1973, pág. 294.

En el mismo orden de ideas, también es recomendable la utilización, a estos mismos efectos, del denominado "índice de Williamson", que nos dará idea acerca del nivel de agrupación de los valores de la variable territorial (q_i) respecto al valor central o promedio de la correspondiente distribución de frecuencias.

Las fórmulas pertinentes, en relación a la superficie territorial, serán, respectivamente, las siguientes (FRANQUET, 1995):

$$\text{a) } W_{P,S} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[(P_i / S_i) - (P / S)^2 \right] \cdot S_i / S}}{P/S}$$

$$\text{b) } W_{Y,S} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[(Y_i / S_i) - (Y / S)^2 \right] \cdot S_i / S}}{Y/S}$$

$$\text{c) } W_{D,S} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left[(D_i / S_i) - (D / S)^2 \right] \cdot S_i / S}}{D/S}$$

$\forall$ i $\in$ (1, 2, ... , n), siendo **n** el número de subunidades territoriales a las que se refieren los valores de la variable territorial en estudio (municipios, comarcas, ...), y también:

Y_i = renta de cada subunidad territorial **i**.
D_i = depósitos bancarios de cada subunidad territorial **i**.
S_i = superficie de cada subunidad territorial **i**.
P_i = población de cada subunidad territorial **i**.
Y = renta total del territorio.
D = depósitos bancarios totales del territorio.
S = superficie total del territorio.
P = población total del territorio.

En otros trabajos de este doctorando, puede verse la aplicación de los índices de Williamson aquí definidos, por ejemplo, a la estimación del grado de concentración/dispersión de la propiedad de la tierra en el territorio que pudiéramos denominar “región catalana del Ebro”, constituida por las cuatro comarcas de la veguería de les Terres de l’Ebre (Baix Ebre, Montsià, Ribera d’Ebre i Terra Alta), por lo que nos remitiremos simplemente a ellos para el logro de mayores especificaciones y detalles[20].

A mayor abundamiento, desarrollaremos el cálculo de un nuevo índice denominado “Índice de concentración de Lorenz” desde el mismo diagrama o curva que hemos propuesto anteriormente. Tal como se ha venido considerando, se obtendrán siempre curvas cóncavas hacia las **y** positivas, y que se hallan situadas por debajo de la diagonal del cuadrado que pasa por el origen de coordenadas y por el punto (100,100). El cálculo de ambos índices (Gini y Lorenz) se ha venido realizando profusamente en el anterior Anexo nº: 12 de nuestro trabajo (“Análisis estadístico y clasificación comarcal”), como puede comprobarse.

Así pues, tendremos (FRANQUET, 1995):

$$L = \frac{(a - q_1) + (2a - q_2) + ... + [(n-1)a - q_{n-1}]}{a + 2a + ... + (n-1)a} \quad (1) ,$$

donde **a** es la media aritmética de los porcentajes de la variable correspondientes a cada intervalo de clase, o sea:

$$X_i = \frac{x_i \bullet n_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i \bullet n_i} \times 100 \quad ; \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{q_n}{n} \quad ;$$

De esta manera, se cumplirá también que:

$$q_1 = X_1$$

$$q_2 = X_1 + X_2$$

$$q_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

……………………..

$$q_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

[20] *Vide* FRANQUET BERNIS, José Mª: *Estructura de la Propietat Agrària. Aplicació a la Regió Catalana de l’Ebre.* Tesis doctoral. Departamento de Econometría, Estadística y Economía española. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Barcelona. Barcelona, 1995. Citada en la bibliografía.

o sea: $q_i = \sum_{j=1}^{i} X_i$

que es justamente el criterio que hemos seguido para la elaboración de la tabla correspondiente. **Debe tenerse bien presente que, en este caso, la ordenación de los valores de las X_i es preciso realizarla de menor a mayor** (FRANQUET, 1990/91).

Desarrollando la expresión anterior (1), obtendremos:

$$L = \frac{a + 2a + ... + (n-1)a - (q_1 + q_2 + ... + q_{n-1})}{a + 2a + ... + (n-1)a} =$$

$$= 1 - \frac{q_1 + q_2 + ... + q_{n-1}}{a + 2a + ... + (n-1)a} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{\frac{n(n-1)}{2} a} =$$

$$= 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} \qquad ,$$

ya que: $1 + 2 + ... + (n-1) = n \cdot (n-1)/2$,

dado que se trata de la adición de los (n-1) primeros términos consecutivos de una progresión aritmética de razón igual a la unidad (demostrable por inducción completa), y además: $n \cdot a = q_n$, por la propia definición que hemos considerado de la media aritmética **a**.

Veamos, entonces, los valores que adopta este nuevo índice en los casos extremos posibles. Efectivamente, **si la concentración de la variable territorial es máxima**, tendremos que:

$$X_1 = X_2 = X_{n-1} = 0, \quad \text{y también} : q_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{0}{q_n} = 1 \qquad ,$$

dado que: $\sum_{i=1}^{n-1} q_i = 0$.

Sin embargo, **si la concentración de la variable territorial es mínima**, o sea, la distribución de la misma variable territorial es teóricamente perfecta desde el punto de vista estadístico, se tendrá lo siguiente:

$$X_1 = X_2 = ... = X_n = a,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_i = \frac{n(n-1)}{2} a$$

en cuyo caso, el índice de concentración de Lorenz será:

$$L = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{\sum_{i=1}^{n-1} q_i}{q_n} = 1 - \frac{2}{n-1} \times \frac{n \bullet (n-1) \bullet a}{2 \bullet n \bullet a} = 1 - 1 = 0$$

De hecho, estos valores extremos del índice analizado se corresponden con similares valores del índice de Gini anteriormente estudiado. Podemos ver que, cuando: L = 0 (X_1=X_2=...=X_n=a), sucede justamente que: q_n= n·a, razón por la cual la curva pertinente es el segmento recto coincidente con la diagonal del cuadrado al que nos hemos referido con anterioridad. En el caso de la concentración máxima, resulta: L = 1 (X_1=X_2=...=X_{n-1}=0), y la curva poligonal de Lorenz, que constituye un triángulo rectángulo, viene dada por los dos lados normales o perpendiculares del cuadrado construido al objeto de trazar el diagrama en cuestión. Obviamente, cuanto más se aproxime la curva a la diagonal relacionada, más perfecta será -al menos desde el punto de vista estadístico- la distribución de la variable territorial en estudio. Incluso podemos dar una interpretación geométrica del índice de Lorenz de esta manera: el numerador de la fórmula (1) se puede considerar como la adición de las áreas de (n-1) rectángulos de base igual a la unidad y altura: ($h \cdot a - q_h$), $\forall h \in$ [1,2,...,(n-1)]. El denominador, en este caso, es la suma de las áreas de (n-1) rectángulos de base unidad y altura: h·a, $\forall h \in$[1,2,...,(n-1)]. Si observamos lo que representa la suma de estos rectángulos, deduciremos que el numerador de la expresión (1) es el área comprendida entre la curva poligonal de Lorenz y la diagonal del cuadrado, mientras que el denominador es precisamente el área de la mitad de dicho cuadrado[21].

Este índice es equivalente al anteriormente estudiado de Gini y obliga a la realización del cálculo de la superficie rayada de la figura, comprendida entre la diagonal y la correspondiente curva o poligonal de Lorenz. Un valor aproximado es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que resulta muy empleada en los trabajos prácticos (FRANQUET, 1995).

[21]Así pues, también el índice de concentración de Lorenz será tanto más pequeño cuanto menor sea el valor del área limitada por la diagonal del primer cuadrante y la misma curva poligonal.

3.5. APLICACIÓN A CATALUÑA

En el Capítulo 7 de nuestro estudio, se procede a la regionalización del territorio de Cataluña, esto es, a su división territorial en 7 regiones o veguerías, utilizando como elementos componentes de las mismas las comarcas que pudiéramos denominar "clásicas" (ya definidas hace unos 70 años por la Generalitat republicana) o bien las "nuevas" (resultantes de la aplicación de los modelos objetivos de división territorial aquí propugnados a la realidad socioeconómica del país imperante en los últimos años), que, a su vez, han sido establecidas en el Capítulo 6.

Los resultados de dicha división territorial, que exponemos en este estudio, pueden ser analizados desde el punto de vista del equilibrio territorial de las regiones resultantes, mediante el cálculo y posterior análisis de los correspondientes coeficientes de uniformidad anteriormente establecidos. Habida cuenta de la definición que hemos hecho de los mismos, es posible la obtención de CU (coeficientes de uniformidad territorial) negativos cuando los coeficientes de variación -o, en definitiva, el grado de dispersión de las masas socioeconómicas por el territorio- sean muy elevados, lo que sucederá en territorios altamente desequilibrados.

Utilizaremos, como variable territorial cuya distribución espacial se cuantifica, la "densidad de población" (expresada en habitantes/km^2, en el censo del año 1986, justamente un año antes de la aparición de las cuatro leyes de organización territorial a las que nos hemos referido con anterioridad), puesto que subsume, a la vez, los conceptos de población y de superficie; en caso de ser conocida, por las mismas razones, resultaría también interesante emplear la "densidad de renta" (expresada en €/km^2).

Es obvio, por otra parte, que amén de las restantes consideraciones que ya han sido expuestas en nuestro Análisis Territorial, el "diseño" de nuevas unidades territoriales deberá tener bien presente el concepto aquí estudiado del equilibrio territorial. Y así, por ejemplo, deberá procurarse que los nuevos territorios resultantes -bien sea de la partición o de la división geográfica de una unidad territorial mayor, o bien de la reunión o agrupación de otras- tengan coeficientes de uniformidad positivos (refiriéndonos, generalmente, al CU1) y, obviamente, que éstos sean los mayores posibles.

En el caso del ejemplo catalán al que nos venimos refiriendo, sucederá lo siguiente:

Capitales de Regiones o Veguerías		COEFICIENTES DE UNIFORMIDAD					
		Regionalización con comarcas clásicas			Regionalización con comarcas nuevas		
		CU_1	CU_3	CU_4	CU_1	CU_3	CU_4
01	Barcelona	- 94%	- 146%	- 35%	- 63%	- 107%	- 13%
02	Girona	53%	40%	64%	53%	40%	55%
03	Tarragona	± 0%	- 27%	22%	± 0%	- 27%	23%
04	Lleida	18%	- 4%	34%	36%	19%	46%
05	Tortosa	48%	34%	50%	37%	20%	48%
06	Manresa	26%	6%	31%	30%	11%	40%
07	Seu d'Urgell	46%	31%	46%	36%	19%	47%
TOTAL	CATALUÑA	- 82%	- 131%	- 27%	- 82%	- 131%	- 27%

Tabla A-15.5. Coeficientes de uniformidad de la distribución espacial de la variable territorial "densidad de población" de Cataluña, en el año 1986.

Resulta curioso comprobar cómo la regionalización efectuada con las comarcas "nuevas" aporta el mismo grado de equilibrio territorial que el efectuado con las comarcas clásicas. De las 7 regiones que componen el conjunto catalán, 3 de ellas aumentan su índice de uniformidad o equilibrio (Barcelona, Ponent y Catalunya central), 2 de ellas permanecen igual (Girona y Camp de Tarragona) y las dos restantes pierden uniformidad (Terres de l'Ebre y Alt Pirineu). Ello podría conducir a determinaciones correctoras de dichas regionalizaciones; y así, en el caso de estas dos últimas regiones o veguerías, podría pensarse en adoptar la regionalización clásica, puesto que las dota de un mayor equilibrio territorial, mientras que podría mantenerse la regionalización con las comarcas "nuevas" en todos los demás casos.

Es digno de resaltar, así mismo, cómo el fenómeno distorsionante de la macrocefalia interviene, en el caso de Cataluña, desequilibrando el conjunto del territorio hasta niveles decididamente preocupantes (CU_1 = -82%).

4. OTRAS CARACTERÍSTICAS INTERESANTES DE LA DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LAS VARIABLES TERRITORIALES

4.1. ECUACIONES DE LIGADURA ENTRE LOS COEFICIENTES DE UNIFORMIDAD

Evidentemente, existen en la metodología estadística otras medidas del grado de concentración y/o dispersión de las variables territoriales que pueden emplearse eficazmente en la medida de la uniformidad o del equilibrio territorial (el recorrido "semi-intercuartílico", el "coeficiente de apertura", el "recorrido relativo", etc.), debiéndose tener en cuenta que, para distribuciones moderadamente asimétricas, se pueden aplicar, con buena aproximación, las fórmulas empíricas siguientes (donde Q_1 i Q_3 son, respectivamente, el primer y tercer cuartil de la correspondiente distribución de frecuencias):

$$DM \approx (4/5)\cdot\sigma \quad ; \quad (Q_3 - Q_1)/2 \approx (2/3)\cdot\sigma$$

, que no son más que consecuencias directas del hecho de que, para distribuciones normales, se tiene que la desviación media absoluta DM y el "rango semi-intercuartílico" son, respectivamente, iguales a 0,7979 y 0,6745 veces la desviación típica o "standard" σ.

Desde esta perspectiva, y para distribuciones territoriales aproximadamente normales con suficiente número de valores de la variable territorial en estudio ($n \geq 30$), los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos pueden representarse, geométricamente, por rectas o funciones lineales cuya variable independiente o explicativa sea el coeficiente de variación de Pearson CV (FRANQUET, 1990/91).

En concreto, se tendrá que:

$$CU_4 = 100\ (1 - 0{,}7979 \cdot \sigma/\overline{X}) \approx 100 \cdot (1 - 0{,}80 \cdot CV)$$

La representación gráfica será la siguiente:

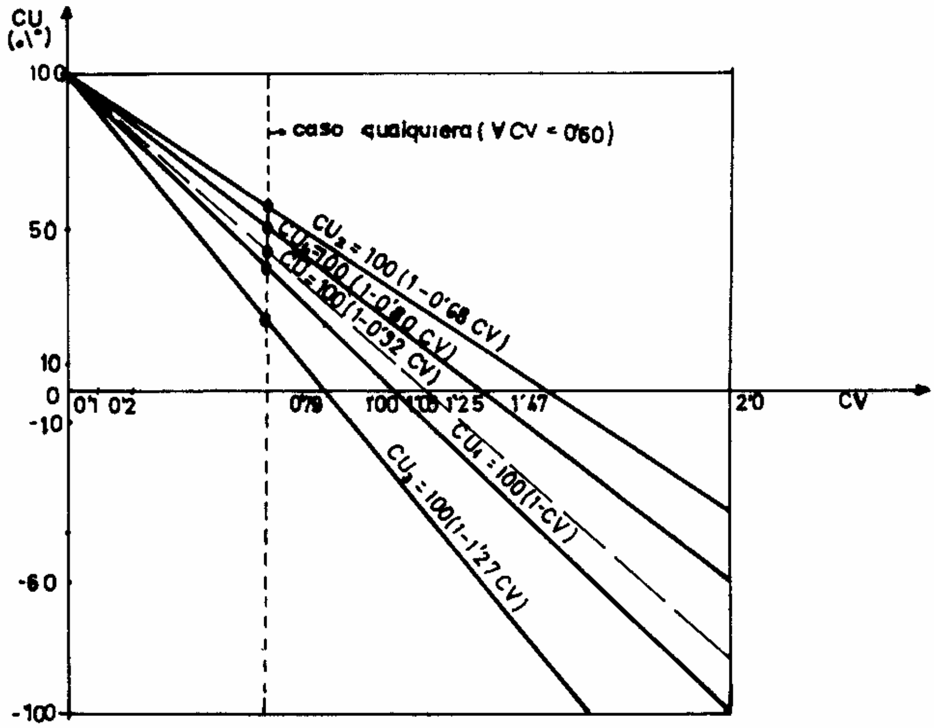


Fig. A-15.7. Coeficientes de uniformidad en función del coeficiente de variación de Pearson.

A su vez, las relaciones que ligan entre sí los diferentes coeficientes de uniformidad territorial aquí definidos, pueden deducirse del siguiente modo:

$$\boxed{\begin{array}{c} CU_1 = 100\ (1 - CV) = 100 - 100 \cdot CV \\ CU_2 = 100\ (1 - 0{,}68 \cdot CV) = 100 - 68 \cdot CV \\ CU_3 = 100\ (1 - 1{,}27 \cdot CV) = 100 - 127 \cdot CV \\ CU_4 = 100\ (1 - 0{,}80 \cdot CV) = 100 - 80 \cdot CV \\ \overline{CU} = 100(1 - 0{,}92 \cdot CV) = 100 - 92 \cdot CV \end{array}}$$

De donde se obtiene:

$CU_1 - CU_3$	$= 100 - 100CV - 100 + 127\ CV$	=	$27\ CV$
$CU_3 - CU_4$	$= 100 - 127\ CV - 100 + 80\ CV$	=	$-47\ CV$
$CU_1 - CU_4$	= ....(27 CV - 47 CV)	=	$-20\ CV$

Se tendría que:

$$CU_1 / CU_3 = (1 - CV) / (1 - 1{,}27 \cdot CV) \qquad ;$$

$$CU_1 - 1{,}27 \cdot CV \cdot CU_1 = CU_3 - CV \cdot CU_3 \qquad ;$$

$$CU_1 - CU_3 = 27\ CV = 1{,}27\ CV \cdot CU_1 - CV \cdot CU_3 \qquad ;$$

$$27 = 1{,}27 \cdot CU_1 - CU_3 \quad ; \quad CU_3 + 27 = 1'27 \cdot CU_1 \quad ; \text{ y:}$$

$$\mathbf{CU_1 = (CU_3 + 27) / 1{,}27}$$

Así mismo:

$$CU_1 / CU_4 = (1 - CV) / (1 - 0{,}8 \cdot CV) \qquad ;$$

$$CU_1 - 0{,}8 \cdot CV \cdot CU_1 = CU_4 - CV \cdot CU_4 \qquad ;$$

$$CU_1 - CU_4 = -20 \cdot CV = 0{,}8 \cdot CV \cdot CU_1 - CV \cdot CU_4 \qquad ;$$

$$-20 = 0{,}8 \cdot CU_1 - CU_4 \ ; \ CU_4 - 20 = 0{,}8 \cdot CU_1 \quad ; \text{ y:}$$

$$\mathbf{CU_1 = (CU_4 - 20) / 0{,}8}$$

Si observamos la representación gráfica adjunta A-15.8, la convergencia de ambas rectas tendrá lugar para los valores:

$$(CU_3 + 27) / 1{,}27 = (CU_4 - 20) / 0{,}8 \qquad \text{y} \qquad CU_3 = CU_4$$

, lo que implica que, en dicho punto, tendrá lugar la máxima uniformidad territorial posible, con:

$$\mathbf{CU_1 = CU_3 = CU_4 = 100\% = CU_2 = \overline{CU}}$$

También se cumplirá que:

$$CU_3 / CU_4 = (1 - 1{,}27 \cdot CV) / (1 - 0{,}8 \cdot CV) \quad ;$$

$$CU_3 - 0{,}8 \cdot CV \cdot CU_3 = CU_4 - 1{,}27 \cdot CV \cdot CU_4 \quad ;$$

$$CU_3 - CU_4 = - 47 \cdot CV = 0{,}8 \cdot CV \cdot CU_3 - 1{,}27 \cdot CV \cdot CU_4 \quad ;$$

$$1{,}27 \cdot CU_4 - 47 = 0{,}8 \cdot CU_3 \ \ ; \text{y}$$

$$\mathbf{CU_3 = (1{,}27 \cdot CU_4 - 47) / 0{,}8}$$

Las relaciones existentes entre los diferentes coeficientes de uniformidad territorial anteriormente definidos, y que ya han sido expresadas analíticamente, pueden verse gráficamente a continuación:

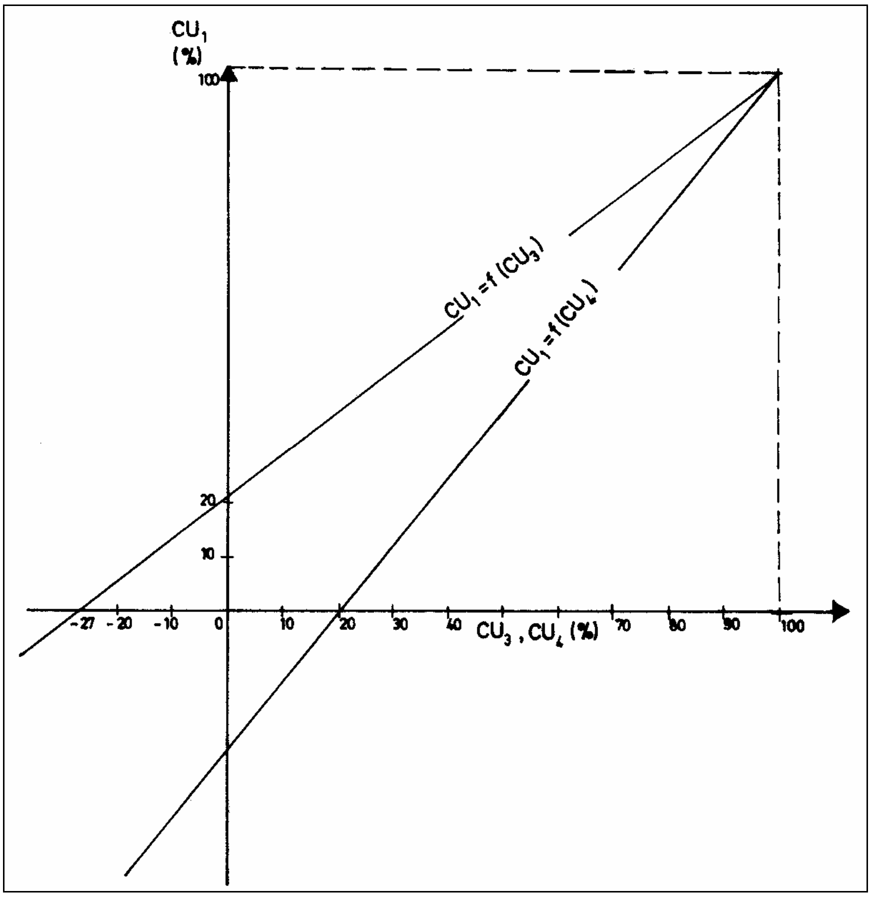


FIG. A-15.8. Relaciones entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones territoriales aproximadamente normales (I).

El gráfico anterior puede complementarse, por su elevado interés práctico, con el siguiente, que relaciona el coeficiente de uniformidad CU_3 con el CU_4 del siguiente modo:

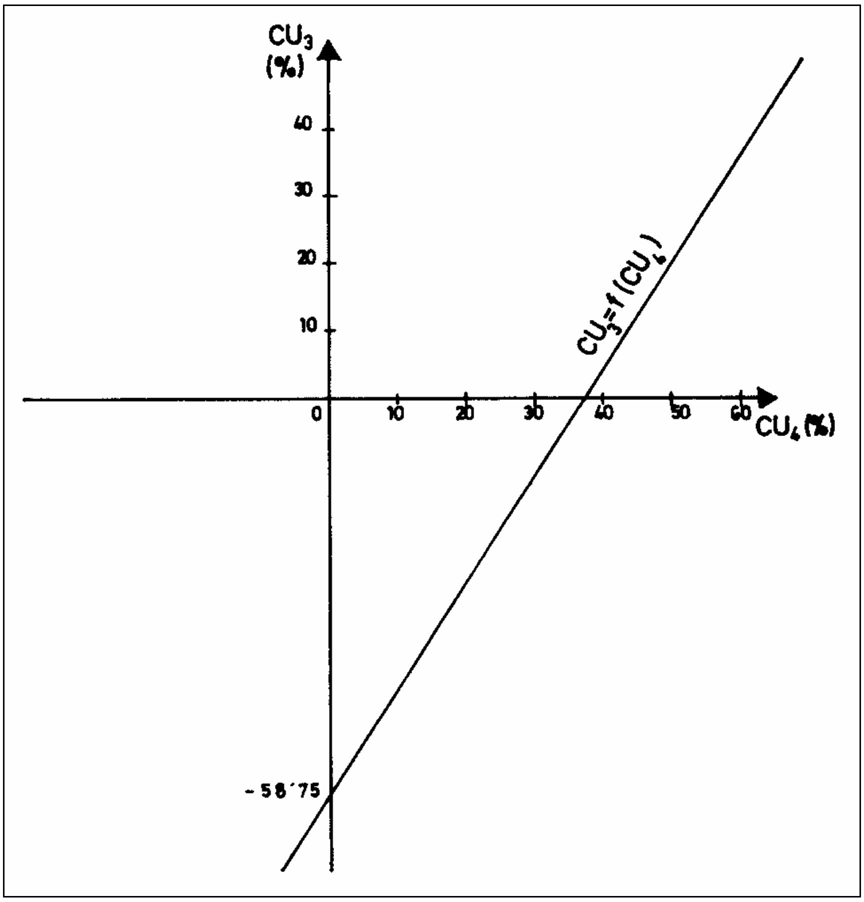


FIG. A-15.9. Relaciones entre los diferentes coeficientes de uniformidad, para distribuciones territoriales aproximadamente normales (II).

De las expresiones anteriores, se deducen las tres siguientes, hasta completar las seis relaciones posibles entre los índices territoriales de tal suerte definidos:

$$\mathbf{CU_3 = 1{,}27 \cdot CU_1 - 27 \quad ; \quad CU_4 = 0{,}8 \cdot CU_1 + 20 \quad ;}$$

$$\mathbf{CU_4 = (0{,}8 \cdot CU_3 + 47) / 1{,}27}$$

Idénticas consideraciones podríamos realizar respecto a CU_2 y a $\overline{CU}$ en relación con los tres restantes coeficientes de uniformidad territorial anteriormente definidos.

4.2. AGRUPAMIENTO EN "CLASES" Y OTRAS CARACTERÍSTICAS DE LAS DISTRIBUCIONES TERRITORIALES

4.2.1. Los intervalos de clase

Así mismo, cuando el número **n** de los valores de la variable territorial analizada sea grande, lo que tendrá lugar en aquellos territorios compuestos por un número elevado de subunidades territoriales menores, resultarán poco manejables las tablas estadísticas que recojan todos los valores con sus correspondientes frecuencias (FRANQUET, 1990/91). En tales casos, se agruparán los valores de la variable en "clases", que podrán ser de la misma o diferente amplitud; una norma práctica genérica pudiera ser el establecer una misma amplitud equivalente al 10% de la observación mayor, con lo que el número de clases oscilará alrededor de la decena. Cuando esto acontezca, el cálculo de la desviación típica necesaria para el hallazgo de los CV y de los pertinentes coeficientes de uniformidad registrará algo de error, debido, precisamente, al "error de agrupamiento" en clases. Para ajustarnos mejor a la realidad, se utilizará entonces la varianza corregida, ofrecida por la denominada "corrección Sheppard", a saber (SPIEGEL, 1981):

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 - c^2/12$$

siendo **c** la amplitud del intervalo de clase escogido y $\boldsymbol{\sigma^2}$ la varianza de los datos agrupados, y ello tendrá lugar en distribuciones continuas donde las "colas" van gradualmente convergiendo a 0 en ambas direcciones.

En líneas generales, veamos que un número excesivo de "clases" reduce las ventajas de la agrupación, pero un número escaso puede anular la significación de los datos. Respecto a la amplitud de las "clases" establecidas, conviene observar que, en general, es conveniente sea la misma para todas; sin embargo, esto dependerá mucho de los propios datos y del objetivo final de la distribución territorial de la variable en estudio. En principio, si la distribución es más o menos uniforme, todas las "clases" serán de igual amplitud, y si, por el contrario, presenta grandes oscilaciones, puede ser interesante considerar intervalos de amplitud diferente.

De hecho, la construcción de una distribución numérica -como la mayoría de las que elaboraremos aquí- consta de tres etapas fundamentales: 1) determinar las “clases” con sus intervalos más procedentes, tal como ya hemos expresado antes, en las que se han de agrupar los datos de la variable territorial en estudio, 2) clasificar (o distribuir) los datos en las clases apropiadas, y 3) contar el número de casos de cada clase. Como sea que las dos últimas etapas son puramente mecánicas, así como el establecimiento de la correspondiente “marca de clase” (obtenida normalmente, a falta de más datos, como la semisuma de los valores extremos del intervalo de clase), nos fijaremos sólo en la primera. Por esto, hace falta determinar el número de clases así como la amplitud del intervalo de los valores de la variable aleatoria estadística con la que trabajamos (población, superficie, depósitos bancarios, ...). Con ello, en términos generales, se pueden observar al efecto las siguientes normas:

a) Pocas veces emplearemos menos de 6 ó más de 15 clases; el número exacto de las mismas dependerá de la naturaleza, cuantía e intervalo que cubren los datos.

b) Siempre escogeremos las clases de manera que todos los datos queden comprendidos.

c) Se procurará, siempre que sea posible, que todos los intervalos de clase tengan la misma amplitud, lo que obviará la determinación de las "densidades de frecuencia" -que determinan la altura de los rectángulos yuxtapuestos del histograma- para el cálculo de algunas medidas centrales de la correspondiente distribución de frecuencias (como la "moda") o la representación gráfica de los histogramas.

Veamos, por último, que mediante el razonamiento que sirve para definir la "desviación típica o standard" como una medida de dispersión absoluta de los valores de la variable territorial, se puede afirmar que si este estadístico resulta pequeño, los valores se encuentran concentrados en el entorno de la media aritmética y, además, si la desviación típica es grande, los valores están mucho más esparcidos o dispersos en relación a los centrales. Para comprender este razonamiento sobre una base algo menos intuitiva, nos referiremos brevemente al conocido *Teorema de Tchebyshev*, que expresa que **para cualquier clase de datos (poblaciones o muestras), al menos el 75% de los datos se encuentran sobre el intervalo que se extiende a cada lado de la media aritmética en dos veces el valor de la desviación típica ($\pm 2\sigma$).** Según este teorema, también se puede afirmar que por lo menos el 88'8% de los datos se encuentran dentro del intervalo de tres veces ($\pm 3\sigma$) la desviación típica (a ambos lados de la media aritmética) y que al menos el 96% de los mismos se hallan comprendidos dentro del intervalo de amplitud de cinco veces la desviación típica ($\pm 5\sigma$).

Precisamente, una característica importante del expresado teorema de Tchèbyshev es que resulta válido para cualquier tipo de datos. No obstante, si se dispone de alguna información adicional en relación a la forma global de la distribución que estamos trabajando, también se pueden realizar afirmaciones mucho más estrictas. Por ejemplo, si una distribución es *campaniforme* o gaussiana, se puede esperar que aproximadamente el 95% de los datos (en lugar de al menos el 75%) se encuentren dentro del intervalo $\pm 2\sigma$ y el 99% de los datos (en lugar de al menos el 88’8%) se encuentran dentro del intervalo ± 3σ. Estos porcentajes, en definitiva, corresponden a la llamada *distribución normal*, que es objeto de estudio en diversas partes de nuestro trabajo.

4.2.2. Forma de la distribución de frecuencias

También existen otras características de menor interés práctico, que tratan de precisar la *forma de la distribución* de la variable que se estudia en relación con una distribución normal. Así, la curva de Gauss sabemos que es simétrica respecto de la ordenada $x = \alpha$ (el parámetro α, como ya se ha visto anteriormente, es la media aritmética o esperanza matemática de una distribución normal de frecuencias) y la distribución observada puede ser *asimétrica* respecto a la ordenada correspondiente e, incluso, dicha asimetría puede representar una mayor área bajo la curva, a la derecha o a la izquierda de dicha ordenada; por otra parte, a la distribución observada puede corresponderle un área bajo la curva más achatada (platicúrtica) o más alargada (leptocúrtica o apuntada) que la correspondiente área de una distribución normal (mesocúrtica); a tal característica la denominaremos *kurtosis* o *medida de apuntamiento*.

Todas estas características, bien conocidas por otra parte, de una distribución de frecuencias originan medidas exactas si están utilizando todos los posibles valores de la variable territorial, es decir, si corresponden a la población o universo de datos; pero un objetivo esencial de la Inferencia Estadística es el de estimar dichas características poblacionales a partir de una muestra o subconjunto poblacional, lo que en el Análisis Territorial sucederá sólo en casos muy concretos de territorios para los que se manejen grandes cantidades de datos de la variable territorial. En estos casos, las características de la *distribución muestral* suelen ser, en general, los mejores *estimadores* de las características de la distribución de la población, pero las *estimaciones* que originan han de presentarse, como sabemos, acompañadas de los errores de muestreo y de otras medidas de naturaleza probabilística, que permiten apreciar el grado de confianza o fiabilidad de la correspondiente estimación de la característica poblacional, y que no procede analizar aquí con mayor profundidad por razones obvias (FRANQUET, 1990/91).

4.2.3. Otros coeficientes de uniformidad territorial

Veamos, por último, que en base a los mismos o parecidos conceptos, sería posible la definición de otros coeficientes de uniformidad territorial. Y así, valga como ejemplo el que tendría en cuenta el valor del primer y tercer cuartil de la distribución de frecuencias de la variable territorial contemplada, a saber:

$$\boxed{CU_5 = 100 \times \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}}}$$

que ofrecerá, en el caso de una distribución moderadamente asimétrica (aproximadamente normal), un valor en función de Q_3 y de σ equivalente a:

$$Q_3 - Q_1 \approx 4\sigma/3 \text{ ; esto es:}$$

$$(Q_3 - Q_1)/Q_3 \approx 4\sigma/3Q_3 \approx 1 - (Q_1/Q_3)\text{; de donde:}$$

$$\sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{1-(\frac{4\sigma}{3Q_3})} \text{ , con lo que:}$$

$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = \sqrt{10.000} \cdot \sqrt{1-\frac{4\sigma}{3Q_3}} = \sqrt{10.000 - \frac{40.000 \cdot \sigma}{3Q_3}}$$

5. EJEMPLO PRÁCTICO

5.1. DATOS Y ENFOQUE DEL PROBLEMA

Sea una nación geográficamente determinada, constituida por 1.000 pequeñas subunidades territoriales o municipios, de los que conocemos la correspondiente densidad de renta según datos del año 2000, expresada en 10^6 ptas./km^2. Los valores de esta variable territorial se hallan agrupadas en ocho "clases" de la misma amplitud, concretamente: 5 x 10^6 ptas./km^2, constituyéndose la primera y última clases de la tabla en "intervalos abiertos", ya que no se han fijado el extremo inferior de la primera y el extremo inferior de la última, que corresponderían, respectivamente, a las densidades de renta más baja y más alta del territorio en cuestión.

La tabla en cuestión es la siguiente:

DENSIDADES MUNICIPALES DE RENTA						
L_i 10^6 ptas./km^2	f. simple n_i	f. acumul. ascen. $N_i\uparrow$	f. acumul. descen. $N_i\downarrow$	f. simple f_i	f. acumul. ascen. $F_i\uparrow$	f. acumul. descen. $F_i\downarrow$
Menos de 150	3	3	997	0'003	0'003	0’997
De 150 a 155	15	18	982	0'015	0'018	0’982
De 155 a 160	50	68	932	0'050	0'068	0’932
De 160 a 165	240	308	692	0'240	0'308	0’692
De 165 a 170	312	620	380	0'312	0'620	0’380
De 170 a 175	235	855	145	0'235	0'855	0’145
De 175 a 180	108	963	37	0'108	0'963	0’037
De 180 y más	37	1.000	0	0'037	1'000	0’000
TOTAL	1.000	///	///	1'000	///	///

Tabla A-15.6. Tabla de frecuencias municipales de la variable “densidad de renta”.

Para interpretar correctamente dicha tabla, deben formularse las siguientes observaciones:

a) La columna de las frecuencias simples, encabezada por n_i, $\forall i \in (1, 2, ..., 8)$, recoge la *frecuencia absoluta* de cada uno de los ocho *intervalos de clase*; así, 240 es el número de municipios cuya densidad de renta está comprendida entre 160 (inclusive) y 165 x 10^6 ptas./km^2. La *frecuencia total* toma el valor n = 1.000.

b) Las *frecuencias acumuladas ascendentes* las hemos designado por $N_i\uparrow$ (i=1, 2, ... , 8) y a cada una de ellas corresponde el número de municipios con densidad de renta inferior al extremo superior de la clase; así, $N_4\uparrow$= 308, significa que se han hallado 308 municipios con una densidad de renta inferior a 165 x 10^6 ptas./km^2.

c) Las *frecuencias relativas* ordinarias y acumuladas ascendentes encabezadas, respectivamente, por f_i, $F_i\uparrow$ y $F_i\downarrow$ vienen determinadas por el cociente de dividir la correspondiente frecuencia absoluta o acumulada (ascendente o descendente) por la frecuencia total. Así:

f_4 = 240 / 1.000 = 0'240; $F_4\uparrow$= 308 / 1.000 = 0'308; $F_4\downarrow$ = 692/1.000 = 0’692

La suma de las frecuencias relativas ordinarias y la última frecuencia relativa acumulada ascendente han de ser siempre iguales a la unidad, puesto que representan la probabilidad total.

d) La representación gráfica de una tabla de frecuencias ordinarias (absolutas o relativas), cuando la variable es continua (como es el caso de la mayoría de las variables territoriales, que pueden tomar valores entre dos consecutivos) está distribuida en clases -como las de la tabla número A-15.6-, debe realizarse mediante un *histograma de rectángulos yuxtapuestos* (fig. A-15.10), que se construye tomando como abscisas los extremos de los intervalos y levantando sobre cada intervalo, tomado como base, un rectángulo cuya área sea directamente proporcional a la correspondiente frecuencia (absoluta o relativa). Si todos los intervalos de clase son de la misma amplitud (caso de la tabla núm. A-15.6), en este caso 5 x 10^6 ptas./km^2, la altura de cada rectángulo es proporcional a la correspondiente frecuencia. En nuestra figura siguiente se ha supuesto que el extremo inferior de la variable es 145 y el superior 185 x 10^6 ptas./km^2, aunque, de hecho, los extremos inferior y superior, respectivamente, del campo de existencia de la misma, son de 120 y 208 x 10^6 ptas./km^2, correspondientes a los municipios de densidades municipales de renta mínima y máxima.

Veamos que a las alturas de cada rectángulo del histograma se le denomina “densidad de frecuencia” del intervalo considerado. En este caso, al ser todos los intervalos de clase de la misma amplitud, las alturas de los rectángulos yuxtapuestos coinciden con las correspondientes frecuencias simples sin acumular $\mathbf{n_i}$.

Se tendría, pues, la siguiente representación gráfica:

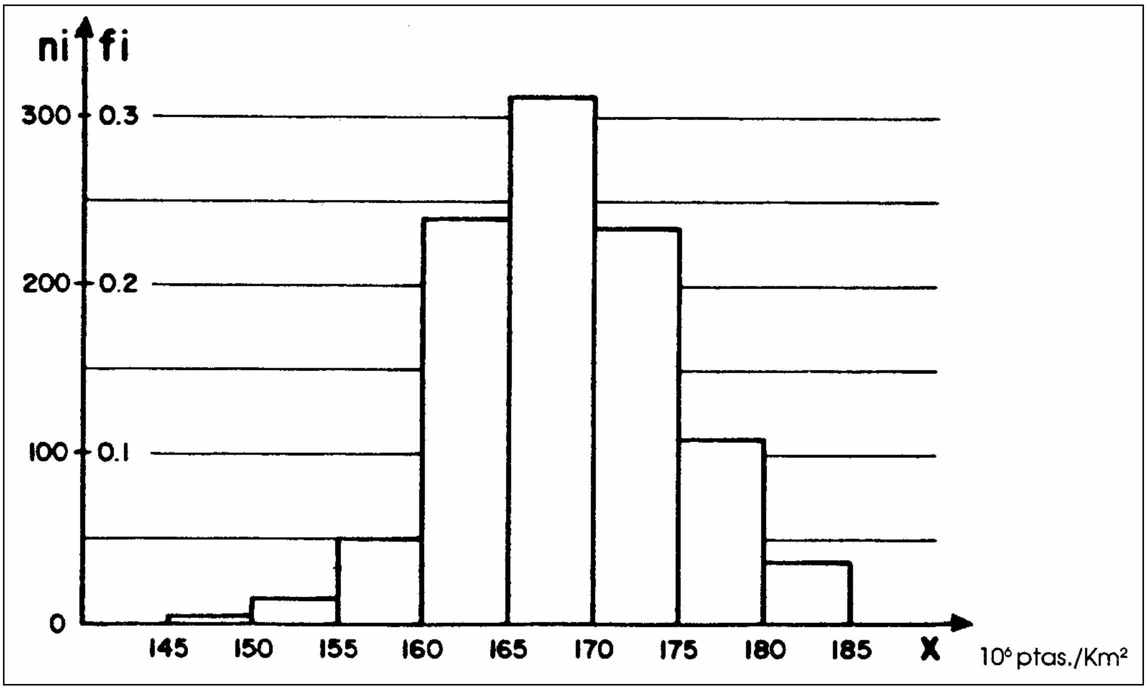


Fig. A-15.10. Histograma de las frecuencias municipales.

e) La representación gráfica de una tabla de frecuencias acumuladas ascendentes, cuando la variable se ha distribuido en intervalos de clase (figura A-15.11), se obtiene mediante un **polígono de frecuencias o diagrama acumulativo ascendente**, que consiste en unir mediante una línea poligonal los puntos cuyas abscisas son los extremos superiores de cada intervalo de clase (150, 155, 160, etc., en nuestro ejemplo) y cuyas ordenadas son las correspondientes frecuencias acumuladas. En la figura A-15.11, para un valor cualquiera de la variable territorial **x**, la ordenada correspondiente representa el número (absoluto o relativo) de municipios que tienen su densidad de renta inferior o dicho valor de **x**. El diagrama suele partir de un punto de ordenada cero cuya abscisa es el extremo inferior de la tabla (en nuestro ejemplo hemos tomado para dicho extremo la abscisa x = 145>120); a partir del extremo superior de la tabla (185<208, en nuestro caso) la línea es una recta paralela al eje de abscisas cuya altura constante es la frecuencia total (n = 1.000, en nuestro caso).

Veamos que, como regla general para formar los intervalos de las distribuciones de frecuencia de las variables territoriales, deberíase:

1) Determinar el mayor y el menor entre los datos registrados y así encontrar el recorrido o rango entre ellos (por diferencia entre ambos valores). 2) Dividir el rango entre un número conveniente de intervalos de clase del mismo tamaño; si ello no fuera posible, utilizar intervalos de clase de diferente tamaño o bien abiertos, eligiéndose de tal forma que las marcas de clase o puntos medios coincidan con los datos realmente observados, lo que tiende a aminorar el denominado “error de agrupamiento” que se comete en los tratamientos matemáticos posteriores. Sin embargo, los límites de clase podrán no coincidir con dichos datos reales.

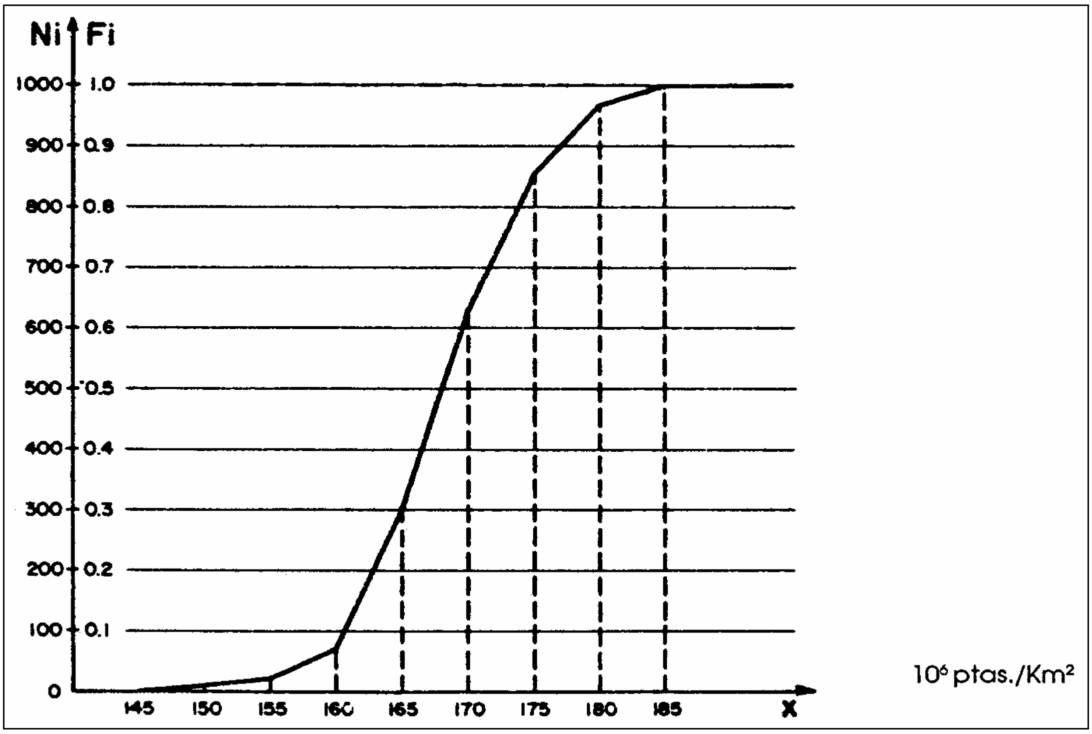


Fig. A-15.11. Diagrama acumulativo ascendente de las densidades municipales de renta.

5.2. "NORMALIZACIÓN" DEL PROBLEMA

Una variable aleatoria que se distribuya con la función de densidad que ya hemos relacionado en otras partes de este mismo trabajo, recibe el nombre de *normal* debido a que la distribución binomial, considerada en su caso límite, es la que corresponde corrientemente o habitualmente a la mayor parte de las variables empíricas, entre ellas las territoriales.

Desde luego, entre las muchas distribuciones continuas que se utilizan en Estadística y que pueden tener provechosas aplicaciones en el estudio de las variables territoriales, tal como vemos en este mismo capítulo, la *curva normal* o *distribución normal* es, con mucho, la más importante de ellas. Su estudio data de investigaciones sobre la naturaleza de los errores experimentales, llevadas a cabo en el siglo XVIII. Se observaba entonces que las discrepancias entre las medidas repetidas de la misma cantidad física mostraban un sorprendente grado de regularidad; sus aspectos (distribución), según se encontró, podían aproximarse muy bien mediante un cierto tipo de curva de distribución continua, denominada “curva normal de errores” y atribuida a las leyes del azar. Las propiedades matemáticas de este tipo de curva de distribución continua y su base teórica fueron investigadas, por primera vez, por Abraham de Moivre (1667-1745), Pierre Laplace (1749-1827) y Karl Gauss (1777-1855). Este último fue un gran matemático alemán que, con sus brillantes aportaciones sobre las geometrías no euclideanas, hizo posible la aparición de las ciencias formales.

La importancia de la distribución normal radica, en primer lugar, en que son muy numerosas las variables aleatorias que la siguen, resultando adecuada para describir la distribución de muchos conjuntos de datos. En efecto, numerosas medidas físicas, datos meteorológicos, características biológicas, variables económicas y sociales, etc., siguen la ley normal, así como también aparece en muchas investigaciones teóricas. En segundo lugar, como consecuencia del teorema del límite central, que establece que la suma de un número elevado de variables aleatorias converge a una distribución normal, sea cual sea la distribución de estas variables. Además, en ciertas condiciones, las distribuciones discretas pueden ser substituidas por distribuciones normales, lo que simplifica notablemente los cálculos correspondientes. Hay que tener mucho cuidado, en fin, al suponer que un determinado conjunto de observaciones se puede aproximar por una distribución normal, pues será necesario realizar una comprobación previa.

Como se sabe, la curva normal tiene forma de campana extendida indefinidamente en ambas direcciones, positiva y negativa, siendo asintótica en relación al eje de abscisas. Rara vez es necesario extender las colas de la curva normal muy lejos de la media, porque el área comprendida bajo la curva y el eje horizontal que queda a más de cuatro o cinco desviaciones típicas de la media aritmética o esperanza matemática resulta insignificante para la mayoría de los fines prácticos y, entre ellos, los propios del Análisis Territorial. Debe tenerse en cuenta que no todas las distribuciones acampanadas simétricas en relación al eje de ordenadas son distribuciones normales, y las palabras *distribución normal* refiérense al hecho de que el área bajo la curva se distribuye de una manera determinada.

Una importante propiedad de la curva normal es que está completamente determinada por su media y su desviación típica. Es decir, la ecuación matemática de dicha curva es tal que se puede determinar el área existente bajo la curva entre dos puntos cualesquiera del eje horizontal si se conoce el valor que adoptan ambos parámetros, aunque en la práctica dichas áreas se obtienen valiéndose de tablas especiales elaboradas al efecto. Por otra parte, la probabilidad o frecuencia relativa con que una variable territorial tomará valores entre dos puntos es el área bajo la curva comprendida entre los dos puntos del eje horizontal.

Si se representa gráficamente esta función (Fig. A-15.12.), encontraremos que está definida para todos los valores de x (desde -∞ hasta +∞) y con las siguientes propiedades:

a) Solamente existe la curva para valores positivos de las ordenadas.

b) El eje de abscisas 0X es una asíntota de la curva.

c) Existe un máximo para el punto x = α.

d) Es creciente hasta el máximo y después es decreciente.

e) Existen dos puntos de inflexión: para x = α-σ y para x = α+σ.

f) Es cóncava hacia la región positiva del eje 0Y, para -∞ < x < α-σ y para α+σ < x < +∞ y cóncava hacia la región negativa del eje de ordenadas en el intervalo: α-σ < x < α+σ.

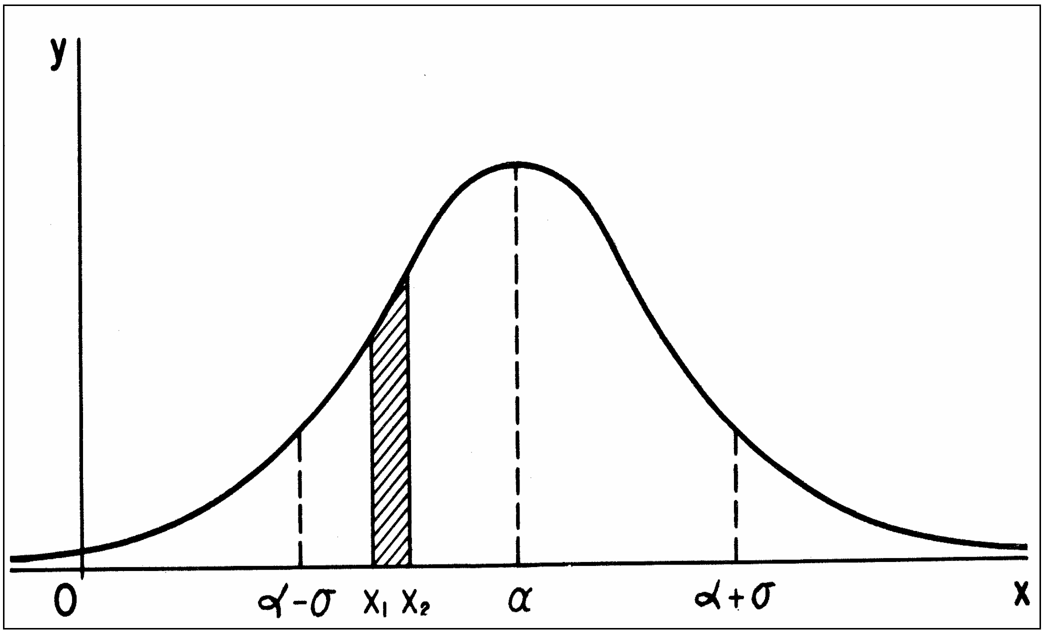


Fig. A-15.12. Área bajo la curva normal entre los puntos x_1 y x_2

Dentro de la ley normal los valores más próximos a α son más frecuentes que los más alejados de α. La utilización e interpretación de esta función para Gauss puede verse a través de un ejemplo como el siguiente: supongamos que se efectúan 1.000 estimaciones de la densidad de renta de un municipio determinado, cuyo valor verdadero es de 168 x 106 ptas./km2; en este caso se dice que α = 168 ptas./km2. Las medidas efectuadas se acumularán en mayor proporción alrededor de α cuanto más próximas estén a dicho valor y serán menos frecuentes cuanto más alejadas se encuentren de α.

El parámetro σ está relacionado con la precisión de las mediciones realizadas al medir el parámetro α. Si se hace igual a la unidad el área comprendida entre la curva y el eje de abscisas y se supone que las densidades municipales de renta estimadas que han estado comprendidos entre los valores x_1 y x_2 representan el diez por ciento de las 1.000 estimaciones realizadas, el área rayada de la Fig. A-15.15. debe ser igual a 0'10. También sabemos hoy que el área comprendida entre la curva, el eje de abscisas y las ordenadas $x = \alpha-\sigma$ y $x = \alpha+\sigma$ corresponde, aproximadamente, al 64 por ciento del área total. Por lo tanto, ya tenemos un significado del hasta ahora desconocido parámetro σ: cuanto menor sea el valor de σ (que se denomina *desviación típica o standard* en la terminología estadística) serán de menor cuantía los errores que se cometen al estimar la densidad de renta α; es decir, si la estimación de la variable territorial es más perfecta o si es más hábil la persona encargada de medirla, σ será un número menor que en el caso contrario.

La función de densidad normal o la función de distribución normal son dos modelos matemáticos inspirados por la conocida "ley de los errores" o ley de Gauss. Pues bien, la Estadística ha incorporado a su metodología –como un modelo probabilístico esencial– esta ley de Gauss con el nombre de *función de densidad normal*. Si y = f(x) es dicha función de densidad, se puede definir a partir de ella la denominada *función de distribución normal* F(x), tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\cdot dx \ ,$$

y dicha integral impropia de primera especie significa que a cada valor de **x** corresponde un número F(x) determinado por la probabilidad de que la variable territorial tome un valor menor o igual a **x**.

Las áreas comprendidas bajo la curva normal y el eje de abscisas representan probabilidades. En estas condiciones, la probabilidad de que la variable **x** tome un valor comprendido entre x_1 y x_2, vendría dada de la siguiente forma, aplicando la propiedad de la aditividad del intervalo de integración:

$$P_r(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(x)\cdot dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x)\cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \times dx = \frac{1}{6'36\times\sqrt{2\pi}} \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x\text{-}168'325)^2}{2\times 6'36^2}} \times dx =$$

$$= 0'063 \times \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x\text{-}168'325)^2}{80'9}} \times dx$$

es decir, como la última integral permite conocer el área rayada de la Fig. A-15.12., dicha área representa la probabilidad de que la variable x = Q (que en el Cálculo de Probabilidades es una *variable aleatoria* o *estocástica*, en lugar de una *variable estadística*) tome un valor comprendido entre $x_1 = Q_1$ y $x_2 = Q_2$.

En el caso de que la Tabla anterior correspondiera a 1.000 mediciones distintas de una misma densidad de renta (en lugar de corresponder a las densidades de renta medidas en 1.000 municipios distintos), la distribución de frecuencias determinada por las columnas encabezadas por "10^6 ptas./km^2" y por "fi" presentaría una *imagen empírica* de una función de densidad normal. Si los resultados se hubieran obtenido a partir del modelo matemático, en lugar de constituir una observación de la realidad, para: x_1 = 165 y x_2 = 170, se tendría que:

$$\int_{165}^{170} f(x)\, dx = 0'312$$

Conocidas la media y la desviación típica se pueden tabular las áreas bajo la curva normal.

En realidad, para a = 168 (media aritmética de aquella distribución de frecuencias) y para s = 6'36 (desviación típica) se tiene que:

$$\int_{165}^{170} f(x)\, dx = 0'303 \quad ,$$

cuya diferencia: 0'312 - 0'303 = 0'009 es una medida de la discrepancia existente entre la realidad y el modelo teórico que ha sido considerado y para la clase particular "de 165 a 170".

Las áreas comprendidas entre menos infinito y **x** son los valores de la función de distribución para cada valor de la variable territorial **x**.

De la misma manera, la distribución de frecuencias determinada por la primera columna de la Tabla A-15.6. y la encabezada por $F_i\uparrow$, constituyen una *imagen empírica de la función de distribución normal* que venimos considerando. En este caso, los resultados empírico y teórico, para x = 170, serían, respectivamente:

$$\int_{-\infty}^{170} f(x)\,dx = 0'620, \text{ y también: } \int_{-\infty}^{170} f(x)\,dx = 0'622$$

que implicarían una discrepancia absoluta de 0'002 y relativa del 0'32% entre el valor teórico y el correspondiente valor observado, que resulta ser francamente baja.

5.3. CARACTERÍSTICAS DE LA DISTRIBUCIÓN TERRITORIAL

5.3.1. Medidas centrales o promedios

Comenzaremos, como es habitual, por el cálculo de los diferentes promedios o valores de la distribución de la variable territorial "densidad municipal de renta". Para ello, y a partir de la tabla inicial, elaboraremos la siguiente:

TABLA DE CÁLCULOS DE LA DISTRIBUCIÓN DE DENSIDADES MUNICIPALES DE RENTA								
$n_i \cdot \log x_i$	$\log x_i$	(10^6 ptas./Km²)	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$N_i\uparrow$	$x_i^2 \cdot n_i$	n_i / x_i
6'506	2'1687920	Menos de 150	147'5	3	442'5	3	65.268'75	0'020
32'749	2'1832698	De 150 a 155	152'5	15	2.287'5	18	348.843'75	0'098
109'864	2'1972806	De 155 a 160	157'5	50	7.875'0	68	1.240.312'50	0'318
530'605	2'2108534	De 160 a 165	162'5	240	39.000'0	308	6.337.500'00	1'477
693'893	2'2240148	De 165 a 170	167'5	312	52.260'0	620	8.753.550'00	1'863
525'645	2'2367891	De 170 a 175	172'5	235	40.537'5	855	6.992.718'75	1'362
242'913	2'2491984	De 175 a 180	177'5	108	19.170'0	963	3.402.675'00	0'608
83'667	2'2612629	De 180 y más	182'5	37	6.752'5	1.000	1.232.331'25	0'203
2.225'842	///////	TOTAL	///	1000	168.325'0	///	28.373.200'00	5'949

Tabla A-15.7. Cálculos auxiliares de la distribución de densidades municipales de renta.

*** Media Aritmética:** a partir de los correspondientes resultados se tiene que (distribución conjunta):

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{h} x_i \cdot n_i / n = \alpha = 168.325/1.000 = 168.325.000 \text{ ptas./km}^2$$

que constituye la media aritmética o esperanza matemática de la distribución de frecuencias de la variable territorial analizada.

Por otra parte, y por lo que se refiere a la determinación de otros promedios o medidas centrales de esta distribución de frecuencias, veamos que, a partir de la primera columna y de la encabezada por $N_i\uparrow$ (ver las tablas A-15.6. y A-15.7.) se obtienen los siguientes resultados promedios (como $N_i\uparrow$= 500 está en el intervalo del 165 a 170, en él se encuentra la mediana o segundo cuartil):

*** Mediana:** M_e = 165 + (500-308) / 312 x 5 = 168 x 10^6 ptas./km^2

que se halla situada en el punto de intersección de los diagramas acumulativos ascendente y descendente, por definición.

*** 1.er cuartil:** Q_1 = 160 + (250-68) / 240 x 5 = 164 x 10^6 ptas./km^2

*** 3.er cuartil:** Q_3 = 170 + (750-620) / 325 x = 173 x 10^6 ptas./km^2

Es decir, entre los municipios integrantes de la nación en estudio, la mitad de ellos tienen una densidad de renta inferior a 168 x 10^6 ptas./km^2, la cuarta parte, una densidad de renta inferior a 164, otra cuarta parte, más de 173 y entre las densidades 164 y 173 se encuentran el 50% de aquellos municipios.

Otros promedios interesantes serían:

*** Moda:** Mo = 165 + (235 / 240+235) x 5 = 167'47 x10^6 ptas./km^2

*** Media cuadrática:**

$$C = \sqrt{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 \cdot n_i \ / \ n} = \sqrt{28.373.200 \ / \ 1.000} = 168'44 \times 10^6 \ \text{ptas./km}^2$$

*** Media geométrica:**

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{8} \cdot x_i^{n_i}} = \text{antilog.} \sum_{i=1}^{8} n_i \cdot \log x_i \ / \ n =$$

$$= \text{antilog}\, 2.225'842 / 1.000 = 168'2062 \times 10^6 \ \text{ptas./km}^2,$$

*** Media armónica:**

$$H = n \ / \sum_{i=1}^{8} n_i \ / \ x_i = 1.000 \ / \ 5'949 = 168'0955 \times 10^6 \ \text{ptas./km}^2,$$

Desde luego, las cuatro medias aquí estudiadas quedan ordenadas con arreglo a su magnitud del modo siguiente:

armónica < geométrica < aritmética < cuadrática

(H = 168'0955) < (G = 168'2062) < ($\overline{X} = 168'3250$) < (C=168'4435) (*)

De hecho, la relación matemática existente entre las medias aritmética, geométrica, cuadrática y armónica, para una misma distribución de frecuencias con todos sus datos positivos, debe cumplir la monotonía ascendente:

$$H \leq G \leq \overline{X} \leq C$$

En efecto. Consideremos el caso más sencillo de una distribución con dos valores de la variable con frecuencias unitarias y que con dichos valores pueden calcularse los cuatro promedios antedichos:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$$

$$G = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}; C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

Vamos a demostrar en primer lugar que H ≤ G, o sea:

$$\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \leq \sqrt{x_1 x_2}$$

Elevando al cuadrado los miembros de la anterior desigualdad y operando:

$$4x_1^2x_2^2 \leq x_1x_2(x_1 + x_2)^2 \quad ; \quad 4x_1x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$
$$4x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \quad ; \quad 0 \leq x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$
$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

Con lo que queda demostrado que H ≤ G. Por otro lado G ≤ $\overline{X}$ ya que:

$$\sqrt{x_1x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \;;\; 4x_1x_2 \leq (x_1 + x_2)^2$$

Con lo que se tendrá que:

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2$$

Por tanto, queda demostrado que H ≤ G ≤ $\overline{X}$. Por último, teniendo en cuenta la relación que liga la media cuadrática con la aritmética y la varianza, esto es: $C^2 = \overline{X}^2 + \sigma^2$, se deduce que: $\overline{X} \leq C$, como se quería demostrar.

Esta demostración puede generalizarse para cualquier número de valores de la variable territorial en estudio. En cualquier caso, la demostración de la última desigualdad también puede realizarse analíticamente a partir de la definición de ambas medias:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2}{2} \ ; \ C = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}$$

$$\overline{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{4} \ ; \ C^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4}$$

$$\overline{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{x_1x_2}{2} \ ; \ C^2 - \overline{X}^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} - \frac{x_1x_2}{2} \ ;$$

Obsérvese que esta diferencia de fracciones debe ser necesariamente positiva o nula. En efecto, se trata de comparar las expresiones:

$\frac{x_1^2 + x_2^2}{4}$ y $\frac{2x_1x_2}{4}$, o más concretamente sus numeradores, o sea:

$x_1^2 + x_2^2$ y $2x_1x_2$. Como se tiene que el cuadrado de una diferencia ofrece:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 0 \ \Rightarrow \ x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2 \ ,$$

con lo que también: $C^2 \geq \overline{X}^2$, y además: $\overline{X} \leq C$, c.s.q.d.

5.3.2. Medidas de dispersión o concentración

Por lo que se refiere a la desviación típica o "standard", como medida de la dispersión absoluta de la distribución por el territorio de nuestra variable territorial, veamos que su valor vendrá dado por:

$$\sigma = \sqrt{C^2 - \overline{X}^2} = \sqrt{168'44^2 - 168'33^2} = 6'36 \times 10^6 \text{ ptas./km}^2,$$

y un coeficiente de variación de Pearson (medida de dispersión relativa) de :

$$CV = \sigma / \overline{X} = 6'35 \text{ x}10^6 \ / \ 168'32 \text{ x } 10^6 \approx 0'038 = 3'8\% \ .$$

Recorrido intercuartílico:

$$Q_3 - Q_1 = 173 - 164 = 9 \text{ x } 10^6 \text{ ptas./km}^2,$$

Recorrido semi-intercuartílico:

$$(Q_3 - Q_1) / (Q_3 + Q_1) = 9 / (173 + 164) = 0'02671,$$

es decir, que en ambos casos, la medida de dispersión empleada viene a representar sólo alrededor del 3% del correspondiente promedio. **Desde luego, ello indicaría que el grado de uniformidad y equilibrio del territorio que nos ocupa resulta francamente elevado. En efecto, los coeficientes de uniformidad anteriormente definidos, tomarán, en este caso, los siguientes valores:**

$$\begin{cases} CU_1 = 100 \cdot (1 - CV) = 100 \cdot (1 - 0'038) = 96'2\% \\ CU_3 = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 1'27 \cdot 0'038) = 95'2\% \\ CU_4 = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot CV) = 100 \cdot (1 - 0'80 \cdot 0'038) = 97'0\% \end{cases}$$

debiendo considerarse también que:

$$CU_2 = \left(Q_1 / \overline{X}\right) \cdot 100 = (163'79 / 168'32) \cdot 100 = 97'3\%$$

, si bien otra determinación del mismo coeficiente de uniformidad territorial conduciría al valor:

$$CU_2 = 100\ (1 - 0'68 \cdot CV) = 100\ (1 - 0'68 \times 0'038) = 97'4\% \ ,$$

cuya pequeña discrepancia (+0'1%) con el resultado anterior débese al propio ajuste de normalidad, o bien al proceso de cálculo decimal.

Veamos, por último, que el "coeficiente de uniformidad territorial medio", ofrecerá un valor de:

$$\overline{CU} = 100\ (1 - 0'92 \cdot CV) = 100\ (1 - 0'92 \times 0'038) = 96'5\% \ ,$$

mientras que también:

$$CU_5 = 100 \cdot \sqrt{\frac{Q_1}{Q_3}} = 100 \cdot \sqrt{\frac{163'79}{172'77}} = 97'4\%$$

La representación gráfica de los valores de los diferentes coeficientes de uniformidad hallados, en definitiva, es la siguiente:

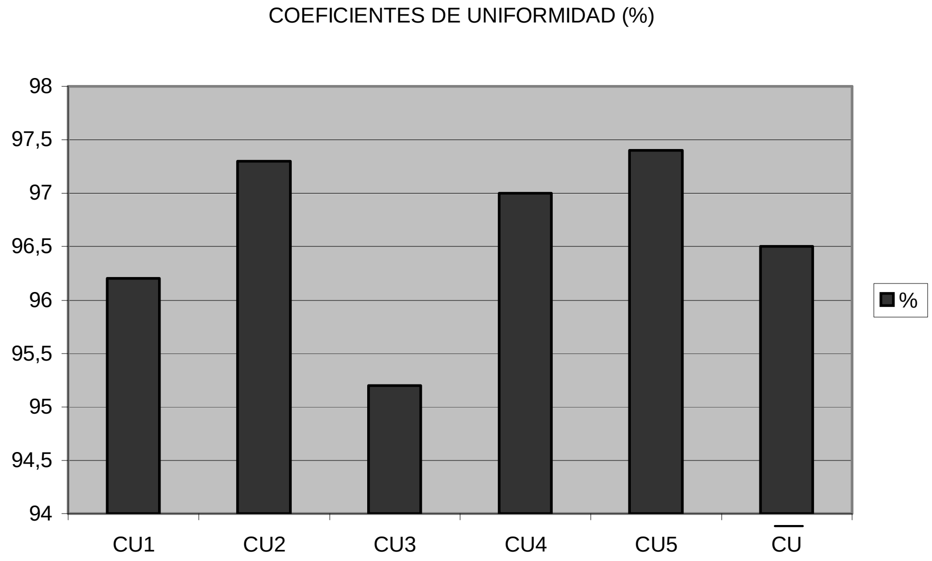


Fig. A-15.13. Valores de los diferentes coeficientes de uniformidad.

5.3.3. Otras características de la distribución espacial

Por lo que se refiere a las restantes características de la distribución espacial de la variable territorial "densidad municipal de renta", veamos que una de la asimetría o sesgo la constituye el denominado "primer coeficiente de asimetría de Pearson":

$$P_1 = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma} = \frac{168'32 - 167'47}{6'36} = 0'134 \approx 0 \quad ,$$

luego se trata de una distribución prácticamente simétrica.

También podríamos calcular el "segundo coeficiente de asimetría de Pearson", a saber:

$$P_2 = \frac{3 \cdot \left(\overline{X} - M_e\right)}{\sigma} = \frac{3 \cdot (168'32 - 168'08)}{6'36} = 0'113 \quad ,$$

o bien por el "coeficiente de sesgo cuartílico", de valor:

$$\frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1} = \frac{172'77 - 2 \cdot 168'08 + 163'79}{172'77 - 163'79} = 0'045 \quad ,$$

que conducen, en todos los casos, a conclusiones similares. Cabe observar, no obstante, una ligera asimetría o sesgo hacia la derecha, puesto que: $P_1>0$, $P_2>0$ y también:

$$\overline{X} = 168'32 > Me = 168'00 > Mo = 167'47$$

Así mismo, se elaborará la siguiente tabla:

	n_i	x_i - 168	$(x_i - 168)^3 n_i$	$(x_i - 168)^4 n_i$	$\mid x_i - 168 \mid n_i$
	3	- 20'5	- 25.844'4	529.810'2	61'5
	15	- 15'5	- 55.851'2	865.693'6	232'5
	50	- 10'5	- 57.881'3	607.753'6	525'0
	240	- 5'5	- 39.930'0	219.615'0	1.320'0
	312	- 0'5	- 39'0	19'5	156'0
	235	4'5	21.414'6	96.365'7	1.057'5
	108	9'5	92.596'5	879.666'7	1.026'0
	37	14'5	112.800'0	1.635.600'0	536'5
$\sum_{i=1}^{8}$	1.000	/ / / /	47.265'2	4.834.524'3	4.915'0

Tabla A-15.8. Tabla auxiliar de cálculo.

De los resultados de la tabla anterior, se deduce que el momento central (respecto a la media aritmética) de tercer orden es:

$$m_3 = 47'2652 \quad ,$$

por lo que se tendrá un "coeficiente directo de asimetría" o "coeficiente de sesgo de Fisher" de:

$$g_1 = m_3 / \sigma^3 = 47'2652 / 6'36^3 = 0'18 \quad ,$$

que confirma la existencia de una distribución aceptablemente simétrica (en curvas simétricas como la normal, se cumple que: $g_1 = g_1^2 = 0$).

Por otra parte, m_4 = 4.834'5243 (momento central o respecto al origen de 4º orden) y, por tanto, se tendrá un “coeficiente de curtosis o apuntamiento de Fisher” de:

$$g_2 = (m_4 / \sigma^4) - 3 = (4.834'5243 / 6'36^4) - 3 = 2'95 - 3 = - 0'05 \approx 0 \quad ,$$

lo que permite asegurar que la distribución es **mesocúrtica** y aproximadamente normal (la curva normal tiene: $g_2 = 0$).

Veamos, así mismo, que la anterior tabla auxiliar de cálculo A-15.8, en su última columna, nos permitirá el cálculo de otra medida de dispersión absoluta a la que ya nos hemos referido con anterioridad: la desviación media respecto a la media aritmética (que será mínima con respecto a la mediana), a saber:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{8} \left| x_i - \overline{X} \right| \cdot n_i}{n} = 4.915 / 1.000 = 4'915 \approx 4\sigma / 5 =$$
$$= 4 \cdot 6'36 / 5 = 5'088$$

Este valor de la DM (5’088 x 106 ptas./km2) en la presente distribución agrupada de frecuencias, conducirá a una determinación más ajustada y directa del valor del coeficiente de uniformidad territorial CU4, a saber:

$$CU_4 = 100 \cdot (1 - 4'915 / 168'325) = 97'08\ \% \quad ,$$

prácticamente coincidente con el anteriormente calculado mediante procedimientos indirectos.

5.3.4. Índice de Gini y curva de Lorenz

Para la determinación de dichos ítems, es necesaria la elaboración de la siguiente tabla de cálculos auxiliares:

L_i	x_i	n_i	$Q_i = x_i \cdot n_i$	$\frac{n_i}{n} \times 100$	$\frac{x_i \cdot n_i}{\sum x_i \cdot n_i} \times 100$	p_i	q_i	$p_i - q_i$
<150	135’0	3	405’0	0’3	0’24	0’3	0’24	0’06
150-155	152’5	15	2.287’5	1’5	1’36	1’8	1’60	0’20
155-160	157’5	50	7.875’0	5’0	4’67	6’8	6’27	0’53
160-165	162’5	240	39.000’0	24’0	23’12	30’8	29’39	1’41
165-170	167’5	312	52.260’0	31’2	30’97	62’0	60’36	1’64
170-175	172’5	235	40.537’5	23’5	24’03	85’5	84’39	1’11
175-180	177’5	108	19.170’0	10’8	11’36	96’3	95’75	0’55
>180	194’0	37	7.178’0	3’7	4’25	100	100	0’00
$\sum_{i=1}^{8}$		n = 1.000	Q = 168.713’0	100%	100%	383’5	378’0	5’50

Tabla A-15.9. Cálculos auxiliares para la determinación del índice G.

En este caso, al objeto de precisar mejor los cálculos, los valores de la primera y última marca de clase: x_1 = 135’0 x 10^6 ptas./km^2 y x_8 = 194’0 x 10^6 ptas./km^2 se han estimado teniendo en cuenta los valores extremos: Q_0 = 120’0 x 10^6 ptas./km^2 y Q_4 = 208’1 x 10^6 ptas./km^2

Así pues, según la fórmula dada por Pulido, el valor del índice de Gini, en este caso, será de:

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{K-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{K-1} p_i} = \frac{5'50}{283'5} = 0'02 = 2\%$$

Habida cuenta del bajísimo valor del índice obtenido, podemos afirmar que la distribución de las densidades municipales de renta por el territorio estudiado es casi perfecta desde el punto de vista estadístico.

La correspondiente curva poligonal de Lorenz apenas se separa de la diagonal o bisectriz del primer cuadrante, dado el bajísimo valor del índice de Gini ya obtenido, por lo que obviaremos su representación gráfica, a efectos prácticos.

5.3.5. Índice de Williamson

En nuestro caso, como ya es sabido, la variable territorial en estudio es la densidad de renta municipal. Por ello, la fórmula pertinente, en relación al número de municipios, vendrá dada por la expresión (FRANQUET, 1990/91):

$$W_{Q,n} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{Q_i}{n_i} - \frac{Q}{n}\right)^2 \times \frac{n_i}{n}}{Q/n}} \text{ , } \forall\, i \in (1,2,...,8)$$

Esto es:

$$W = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}\left(x_i - \frac{168.713}{1.000}\right) \times f_i}{168'713}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(135'0\text{-}168'713)^2 \times 0'003 + (152'5 - 168'713)^2 \times 0'015 + (157'5\text{-}168'713)^2 \times 0'05 +}{168'713}}$$

$$\sqrt{\frac{+(162'5 - 168'713)^2 \times 0'24 + (167'5\text{-}168'713)^2 \times 0'312 + (172'5 - 168'713)^2 \times 0'235 +}{168'713}}$$

$$\sqrt{\frac{+(177'5\text{-}168'713)^2 \times 0'108 + (194'0 - 168'713)^2 \times 0'037}{168'713}} = \sqrt{\frac{58'73}{168'713}} = 0'59$$

que, como era de esperar, resulta ser muy bajo.

5.3.6. Índice de concentración de Lorenz

En el caso que nos ocupa, veamos que un valor aproximado de este índice es el que se obtiene mediante la aplicación de la fórmula basada en los porcentajes acumulados, que se emplea comúnmente en los trabajos prácticos. Aquí, la fórmula correspondiente explicada en epígrafes anteriores de este mismo capítulo de nuestro trabajo, tomará la configuración simplificada (con n = 8 y q_n = 100):

$$L = 1 - \frac{2}{7} \times \frac{\sum_{i=1}^{7} q_i}{100} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{7} q_i}{350}$$

El resultado que ofrece la aplicación de la fórmula anterior es el siguiente, teniendo en cuenta, como ya se ha dicho, que resulta necesario ordenar los valores de la variable territorial en estudio de menor a mayor, para la aplicación correcta de la fórmula, así:

	X_i	q_i
	0’24	0’24
	1’36	1’60
	4’25	5’85
	4’67	10’52
	11’36	21’88
	23’12	45’00
	24’03	69’03
	30’97	100’00
$\sum_{i=1}^{8}$	100’00	254’12

Tabla A-15.10. Ordenación creciente de los porcentajes acumulados de las densidades municipales de renta.

A esta distribución de probabilidad le corresponde, pues, el índice de Lorenz:

$$\mathbf{L} = 1 - \frac{154'12}{350} = \mathbf{0'56}$$

5.4. AJUSTE A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

5.4.1. La hipótesis de normalidad y el estadígrafo χ^2

La distribución que venimos estudiando de la variable territorial "densidad municipal de renta", en la nación considerada, se ajusta muy aceptablemente a una distribución normal. De este modo, la distribución teórica de las densidades municipales de renta vendrá dada, como ya se ha visto, por la función de densidad normal:

$$y = (1/6'36 \cdot \sqrt{2\pi}) \cdot e^{\frac{(x-168'325)^2}{80'8992}}$$

Pese a que existen muchas de ellas, la distribución normal o de Gauss es, sin duda, la más importante y la de más provechosas aplicaciones territoriales de entre todas las distribuciones teóricas de probabilidad de tipo continuo. No obstante, hay que tener mucho cuidado al suponer que un determinado conjunto de observaciones de variables territoriales se puede aproximar con suficiente exactitud por una distribución normal, pues será necesario llevar a cabo una comprobación previa.

Mediante los métodos adecuados de la Estadística Matemática, sería posible justificar la bondad de este ajuste contrastando la **hipótesis de normalidad** mediante el empleo del estadígrafo χ^2 de Pearson, tal como ya se realiza en algún otro apartado de esta misma tesis doctoral. En la fig. A-15.14 se ha representado gráficamente la función anterior. En realidad, tal representación significa el **ajuste de una función de densidad normal** a la distribución de las densidades municipales de renta observadas. Utilizando una tabla de la distribución normal, podemos obtener las áreas de las superficies que están limitadas por la curva normal, el eje de abscisas y las ordenadas en los extremos o límites de los intervalos de clase. Dado que, como es bien sabido, dicha área total es igual a la unidad, resultará que cada una de ellas expresa la probabilidad p_i de que la variable territorial "densidad de renta" tome un valor perteneciente al correspondiente intervalo de clase.

Para proceder al ajuste es necesario transformar los valores observados de la variable territorial (en este caso representados por el límite superior L_i de cada intervalo de clase) en *valores tipificados* o "estandarizados", lo que se consigue restando de cada L_i la media 168 (columna 2ª de la Tabla A-15.11) y dividiendo dicha diferencia por la desviación típica 6'36 x 10^6 ptas./km^2 de la distribución observada (3ª columna), al objeto de poder emplear las tablas de la distribución normal, obtenidas para una distribución de media aritmética o esperanza matemática $\alpha = 0$ y desviación típica $\sigma = 1$.

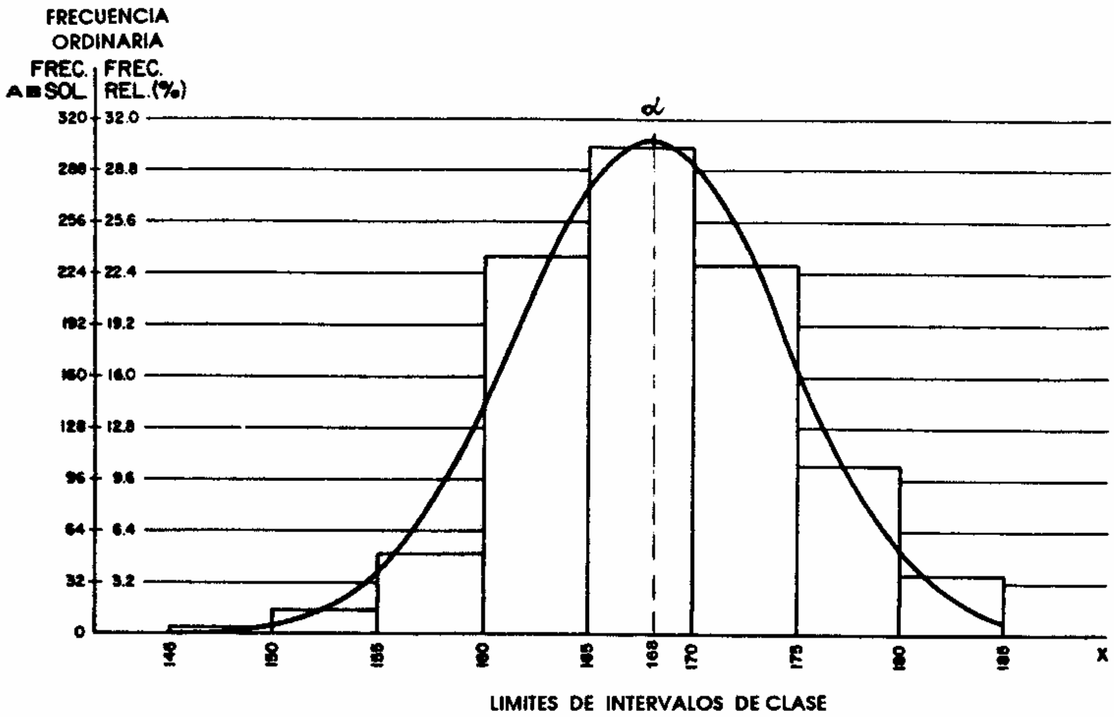


Fig. A-15.14. Distribución campaniforme o gaussiana de la variable territorial.

AJUSTE DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL A LA DE "DENSIDADES DE RENTA"						
L_i	L_i-168	$t=\frac{L_i-168}{6{,}36}$	P	p_i	T_i	n_i
150	−18	−2,817	0,002	0,002	2	3
155	−13	−2,034	0,021	0,019	19	15
160	−8	−1.252	0,105	0,084	84	50
165	−3	−0,469	0,319	0,214	214	240
170	2	0,313	0,622	0,303	303	312
175	7	1,095	0,864	0,242	242	235
180	12	1,878	0,971	0,107	107	108
∞	∞	∞	1,000	0,029	29	37
				1,000	1.000	1.000

Tabla A-15.11. Ajuste de una distribución normal a la de “densidades municipales de renta”.

Las áreas bajo la curva normal se obtienen como diferencia entre los valores correspondientes de la función de distribución. A partir de estos valores tipificados se puede emplear la Tabla de la Distribución Normal, calculando mediante las oportunas interpolaciones, en su caso, los valores P, tales que:

$$P_1 = \int_{-\infty}^{-2'817} f(t)\,dt = 0'002 \quad ; \quad P_2 = \int_{-\infty}^{-2'034} f(t)\,dt = 0'021 \;\; ; \text{etc.},$$

siendo:

$$t = Z = (x - \alpha) / \sigma$$

La diferencia entre dos P_i consecutivas determina las probabilidades p_i de que la variable territorial tome un valor comprendido entre L_{i-1} y L_i, de tal manera que:

$$p_1 = P_1 = 0'002 \quad ;$$

$$p_2 = P_2 - P_1 = 0'021 - 0'002 = 0'019 \quad ; \text{ etc.}$$

Las frecuencias teóricas son proporcionales a las correspondientes áreas bajo la curva normal. Distribuyendo la frecuencia total, n= 1.000 en nuestro caso, proporcionalmente respecto a las probabilidades pi, se obtienen *frecuencias teóricas* Ti, que corresponderían a las densidades municipales de renta observadas si dicha variable territorial se ajustara *exactamente* al modelo teórico de la distribución normal. En nuestro ejemplo, las discrepancias entre los valores observados ni y los teóricos Ti son lo suficientemente pequeñas como para que pueda aceptarse la hipótesis de que la *variable territorial sigue una distribución normal*, a pesar de la determinación que realizaremos a continuación.

En cualquier caso puede realizarse, como ya se ha apuntado, un contraste de la bondad del ajuste utilizando el estadígrafo χ^2 de Pearson, con (n-1) grados de libertad, a saber:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - T_i)^2}{T_i}$$

puesto que $\forall\ T_i > 5$, a excepción del correspondiente al primer intervalo de clase L_1, ya que $T_1 = 2$.

De este modo, se tendrá un valor del estadígrafo:

$$\chi^2 = \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(15-19)^2}{19} + \frac{(50-84)^2}{84} + \frac{(240-214)^2}{214} + \frac{(312-303)^2}{303} + \\ + \frac{(235-242)^2}{242} + \frac{(108-107)^2}{107} + \frac{(37-29)^2}{29} = 20'95$$

El valor de χ^2 con: 8-1 = 7 g.l., para una probabilidad del 5% es 14'067 < 20'95, *luego se rechaza la hipótesis nula y, en su consecuencia, el ajuste o asimilación a una distribución normal será sólo orientativo, pero no aceptable estrictamente*.

5.4.2. Determinación y fiabilidad del coeficiente de correlación no lineal

Podemos, no obstante, calcular el coeficiente de determinación o crítico del ajuste anterior, a partir de la siguiente fórmula de la varianza residual:

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n} = \frac{2.044}{8} = 255'5 \quad ; \quad S_{n_i}^2 = 12.617 \quad ;$$

$$R = r^2 = 1 - \frac{S_e^2}{S_{n_i}^2} = 1 - \frac{255'5}{12.617} = 0'980 \quad ,$$

lo que implica un coeficiente de correlación de:

$$r = \pm\sqrt{0'980} = \pm\ \mathbf{0'990}$$

que resulta suficientemente aceptable, razón por la que aceptaremos como válido el presente ajuste normalizado.

Por otra parte, y por lo que se refiere a la fiabilidad del coeficiente de correlación hallado **r**, definimos la variable aleatoria:

$$z = 1/2 \cdot \ln\,[(1+r) / (1-r)] \quad ; \quad e^{2z} = [(1+r) / (1-r)] \quad ;$$

con ρ = 0'990 y n = 8.

Se trata de determinar un intervalo de valores entre los que puede razonablemente esperarse (con una probabilidad del 95%) que se encuentre **r**, con media:

$$\mu_z = \frac{\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}}{2} = \frac{\ln\frac{1'99}{0'01}}{2} = 2'647$$

y desviación típica:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0'447$$

El intervalo será:

$$Z = m_Z \pm 2 \cdot s_Z = 2'647 \pm 0'894 = 3'541 \text{ y } 1'753 \quad ,$$

valores éstos que corresponden, respectivamente, a: r_1 = 0'998 y r_2 = 0'942 .

Así pues, puede afirmarse que la probabilidad de que se cumpla la desigualdad: 0'942 < r < 0'998, es del 95%.

Aunque la relación precedente simplifique, de modo notable, el problema de determinar la exactitud de **r** como estimador de **ρ**, tiene la desventaja de no ser fiable si las dos variables analizadas no poseen una distribución normal conjunta. En su consecuencia, a menos que se esté bastante seguro de que estas variables tengan tal distribución -por lo menos con buena aproximación- no debe confiarse grandemente en los resultados obtenidos.

5.4.3. Distribución exponencial

También se le suele llamar *distribución exponencial negativa* (FRANQUET, 2003).

Diremos que una variable aleatoria X, de tipo continuo, sigue una **distribución exponencial** de parámetro **a**, siendo $a \in \Re$ y a > 0, si su *función de densidad* es:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot e^{-ax} & , \forall x > 0 \\ 0 & , \forall x \leq 0 \end{cases}$$

Abreviadamente lo indicaremos por:

$$X \rightarrow \text{Exp}(a)$$

Constituye un caso particular de la distribución teórica de probabilidad “gamma” $\Gamma(\alpha,a)$ que se presenta cuando: $\alpha = 1$, circunstancia que da lugar a esta “distribución exponencial”. O sea, se tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x/\beta}}{\beta}, & \forall x > 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases}$$

En nuestro caso, asimilamos: $\beta = \overline{X} = 168'713 \times 10^6$ ptas./km^2 (media aritmética de la distribución o esperanza matemática de la misma), con lo que:

$$f(x) = \frac{1}{168'713} \cdot e^{-\frac{x}{168'713}}$$

Así pues, si se trata, por ejemplo, de saber la probabilidad de encontrar, en esta nación, un municipio de densidad de renta inferior a 160×10^6 ptas./km^2, el problema estriba en calcular la integral definida:

$$F(x < 160) = \int_{135}^{160} \frac{e^{\frac{-x}{168'713}}}{168'713} \cdot dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x/168'713 \\ dx = 168'713 \cdot dt \end{array} \right\} =$$

(haciendo el correspondiente cambio de variable)

$$= \int_{0'80}^{0'95} e^{-t} \cdot dt = \left[-e^{-t} \right]_{0'80}^{0'95} = -e^{-0'95} + e^{-0'80} = 0'45 - 0'39 = 0'06 = 6\%$$

resultado éste que diverge algo del que se deduce de la tabla anterior, donde correspondería el 6'8%, como se puede comprobar. De hecho, la determinación del grado de exactitud del ajuste de la distribución anterior a la distribución teórica exponencial se habría de contrastar mediante un *test* de hipótesis χ^2 con (k-1) grados de libertad, siendo **k** el número de pares de clase comparados. En nuestro caso, tendríamos que:

$$e_i = \frac{e^{-\frac{x_i}{168'713}}}{168'713} \cdot n = \frac{5'93}{e^{x_i/168'713}};$$

Obviamente, el valor del estadígrafo es:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}$$

que resulta ser elevado e inapropiado, habida cuenta del carácter descendente de esta distribución teórica de probabilidad, que no se corresponde con la realidad del caso práctico cuya resolución nos ocupa, con lo que, la discrepancia entre los valores teóricos (propios de la distribución exponencial) y los reales es bastante grande, y haría falta buscar una distribución mejor, circunstancia que excede las pretensiones de nuestro problema, ya que $\chi^2_{0'95}$ (5 g.l.) = 11'07, en el caso de escoger una región crítica del 5%.

5.4.4. Corrección por agrupamiento en "clases"

Veamos, por último, que por haberse realizado, en este ejemplo práctico, un agrupamiento en clases o intervalos de amplitud: c= 5 x 10^6 ptas./km^2 de los valores de la variable territorial analizada (la "densidad municipal de renta"), procede aplicar la corrección de Sheppard para la determinación de la desviación típica más ajustada de los datos del problema (SPIEGEL, 1981). Esto es:

$$\sigma_c^2 = \sigma^2 - \frac{c^2}{12} = 168'44^2 - 168'32 - \frac{5^2}{12} = 38'33 \quad \text{(varianza corregida)}$$

$$\sigma_c = \sqrt{38'33 \times 10^{12}} = 6'19 \times 10^6 \text{ ptas./km}^2 \text{ (desviación típica corregida),}$$

que lógicamente, resultan ser de alguna menor cuantía que en la primera determinación efectuada. Ello podría obligar a una ligera revisión de los cálculos posteriores en los que se haya hecho intervenir a la expresada medida de la dispersión espacial de los valores de la variable territorial estudiada.

(*) Por lo que se refiere a las caracterización del valor central, veamos que G. Udny Yule, estadístico inglés, en su "Introducción a la Teoría de la Estadística", ha precisado las condiciones que debe cumplir una buena caracterización del valor central de una serie. En resumen son las siguientes:

a) *La característica del valor central debe ser definida objetivamente a partir de los datos de la serie, sin que haya lugar a intervenir ninguna apreciación del estadístico.*

b) *Debe depender de todas las observaciones de la serie, a ser posible. Señalemos que, no obstante, hay veces que se plantea el problema de decidir si debe tenerse en cuenta una observación que es notablemente distinta de todas las demás de su conjunto o si puede ser rechazada por considerar que tal observación tiene carácter excepcional debido a algún factor extraño a la serie como, por ejemplo, un error de observación.*

c) *Debe tener, en la medida de lo posible, una significación concreta, sencilla y fácil de comprender. Si se tiene en cuenta que muchos de los valores centrales de las series han de ser utilizados por personas poco familiarizadas con la Estadística, se comprende la preferencia que en la realidad se ha dado a la media aritmética como característica del valor central de que goza esta propiedad, de una interpretación sencilla.*

d) *Debe ser de cálculo fácil y rápido.*

e) *Debe ser poco sensible a las fluctuaciones del muestreo*. Frecuentemente las observaciones se efectúan, no sobre el conjunto completo de elementos a estudiar, sino sobre una parte de éstos que reciben el nombre de muestra. Las observaciones hechas sobre los elementos componentes de la muestra constituyen la serie estadística de la cual se determina el valor central. Es evidente que "a priori" no puede asegurarse que el valor central correspondiente a la muestra adoptada coincida con el valor central que se obtendría si se hiciese una serie estadística que abarcase todo el conjunto completo de elementos a estudiar, ni que coincidan siquiera con los correspondientes a distintas muestras que se eligiesen al azar. Ahora bien, dado que en la práctica se procede casi siempre por muestreo, conviene que la característica elegida del valor central sea de tal naturaleza que dicho valor central sea sensiblemente el mismo para las distintas muestras. (Conviene hacer notar que esta elección del valor central sólo será posible cuando se conozca la ley de distribución del fenómeno en estudio; la variación del valor central y de otros estadísticos en las distintas muestras entra de lleno en la parte de la Teoría Estadística conocida por la denominación de Teoría de las Muestras).

f) *Debe ser adecuada a los cálculos algebraicos posteriores*. Se comprende fácilmente la importancia de tal condición con sólo pensar en el caso muy frecuente de tratar de determinar el valor central que corresponde a una serie global resultado de reunir varias series estadísticas parciales.

De entre las cuatro medias expresadas, se ve inmediatamente que la aritmética es la que mejor reúne las anteriores condiciones de Yule, si bien ni ella ni las otras tres proporcionan indicación alguna acerca de la repartición de los datos de la series o de sus posiciones respectivas ni sobre las desviaciones de unos respecto a otros. Se limitarán a condensar todos los datos de la serie en uno solo, **la media**, como síntesis de todos ellos.

En particular, las medias aritméticas ($\bar{x}$) y cuadrática (C) dan mucho relieve a los elementos grandes de la serie y, desde luego, la segunda todavía más que la primera. Por el contrario, las medias geométrica y armónica destacan la influencia de los valores pequeños y reducen la influencia de los valores grandes, lo que habrá que tener bien presente en los estudios de Análisis Territorial.

Recordemos, por último, que las medias deben calcularse a partir de datos homogéneos y numerosos, condiciones ambas inherentes a toda buena estadística en materias territoriales (FRANQUET, 1990/91).