4.4.2. Análisis de la función de distribución y los cuantiles de la variable borroso aleatoria pérdida si se cobra la prima pura única

En este caso, la variable borroso aleatoria pérdida, $\widetilde{L}_p$ vendrá caracterizada, para un nivel α, por una variable aleatoria inferior y por una variable aleatoria superior las cuales presentarán la siguiente forma tras ordenar sus realizaciones en orden creciente:

$L_p^i(\alpha) = f_{w-x-t}^i(\alpha) - P_p$ con ${}_{w\text{-}x\text{-}1\text{-}t|}q_x$ siendo t=0,1,…,w-x-1 e i=1,2.

Asimismo, la función de distribución, $\widetilde{F}[X]$ puede ser expresada, para un α prefijado, por la función de distribución inferior, $F^1[X](\alpha)$ y superior $F^2[X](\alpha)$. Éstas tienen la siguiente forma:

$$F^{3-i}[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < f_{w-x}^i(\alpha) - P_P \\ \sum_{r=0}^{t} {}_{w-x-1-r|}q_x & \text{si } f_{w-x-t}^i(\alpha) - P_P \le X < f_{w-x-(t+1)}^i(\alpha) - P_p, t = 0,1,...,w-x-2 \\ 1 & \text{si } X \ge f_1^i(\alpha) - P_p \end{cases},$$

i=1,2.

Asimismo, el 1-ε percentil, de la variable borroso aleatoria $\widetilde{L}_p$, $\widetilde{Q}^\varepsilon$, será un número borroso, que presenta como α-cortes:

- Si $0<1-\varepsilon\le {}_{w\text{-}x\text{-}1|}q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = \left[f_{w-x}^1(\alpha), f_{w-x}^2(\alpha)\right] - P_p$.
- Si $\sum_{r=0}^{t} {}_{w-x-1-r|}q_x < 1-\varepsilon \le \sum_{r=0}^{t+1} {}_{w-x-1-r|}q_x$, $Q_\alpha^\varepsilon = \left[f_{w-x-(t+1)}^1(\alpha), f_{w-x-(t+1)}^2(\alpha)\right] - P_p$, donde $t\in\{0,1,\ldots,w\text{-}x\text{-}2\}$

De esta forma, el recargo de seguridad cierto que debe repercutirse para asegurar un nivel de solvencia ε, vendrá dado para un nivel de aversión al riesgo de interés β', y si $0<1-\varepsilon\le {}_{w\text{-}x\text{-}1|}q_x$, como:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta')\int_0^1 f_{w-x}^1(\alpha)d\alpha + \beta'\int_0^1 f_{w-x}^2(\alpha)d\alpha - P_p$$

y en el supuesto en que $\sum_{r=0}^{t} {}_{w-x-1-r|}q_x < 1-\varepsilon \le \sum_{r=0}^{t+1} {}_{w-x-1-r|}q_x$, para $t\in\{0,1,\ldots,w\text{-}x\text{-}2\}$, se obtiene:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta)\int_0^1 f_{w-x-(t+1)}^1(\alpha)d\alpha + \beta\int_0^1 f_{w-x-(t+1)}^2(\alpha)d\alpha - P_p$$

4.4.3. Determinación de las primas cuando el interés de actualización viene dado a través de un único número borroso triangular para toda la duración del contrato

Los α-cortes de la prima pura borrosa, si el interés técnico es un número $\tilde{i}$ constante a lo largo de toda la operación financiera, se obtienen sin más que sustituir $i^1(\alpha)=i^1+(i^2-i^1)\alpha$ en el extremo superior del los factores de actualización e $i^2(\alpha)=i^3-(i^3-i^2)\alpha$ en el inferior, de forma que:

$$P_{p_\alpha} = A_{x_\alpha} = \left[\sum_{t=0}^{w-x-1}(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}{}_{t|}q_x,\ \sum_{t=0}^{w\text{-}x\text{-}1}(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}{}_{t|}q_x\right]$$

Así, la prima pura para una aversión al riesgo dada a través de un parámetro β será:

$$P_p = (1-\beta)\sum_{t=0}^{w-x-1}{}_{t|}q_x\int_0^1(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(t+1)}d\alpha + \beta\sum_{t=0}^{w\text{-}x\text{-}1}{}_{t|}q_x\int_0^1(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(t+1)}d\alpha =$$

$$= (1-\beta)\left[\frac{\ln\frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2}{}_{0|}q_x + \sum_{t=1}^{w-x-1}\frac{\left(1+i^2\right)^{-t}-\left(1+i^3\right)^{-t}}{t\left(i^3-i^2\right)}{}_{t|}q_x\right] + \beta\left[\frac{\ln\frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1}{}_{0|}q_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=1}^{w-x-1}\frac{\left(1+i^1\right)^{-t}-\left(1+i^2\right)^{-t}}{t\left(i^2-i^1\right)}{}_{t|}q_x\right]$$

Una vez obtenidos los α-cortes de las variables aleatorias inferior y superior que se deducen para P_p, $L^1{}_p(\alpha)$ y $L^2{}_p(\alpha)$, podemos hallar las funciones de distribución superior e inferior como:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x)} - P_P \\ \sum_{r=0}^{t}{}_{w-x-1-r|}q_x & \text{si } (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x-t)} - P_P \le X \\ & < (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x-(t+1))} - P_p,\ t=0,\dots,w-x-2 \\ 1 & \text{si } X \ge (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x)} - P_P \\ \sum_{r=0}^{t}{}_{w-x-1-r|}q_x & \text{si } (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x-t)} - P_P \le X \\ & < (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x-(t+1))} - P_p,\ t=0,\dots,w-x-2 \\ 1 & \text{si } X \ge (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1} - P_p \end{cases}$$

De esta forma, los α-cortes de $\tilde{Q}^\varepsilon$, son:

- Si $0<1-\varepsilon\le{}_{w-x-1|}q_x$, $Q_\alpha{}^\varepsilon = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x)}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x)}\right] - P_p$

- Si $\sum_{r=0}^{t}{}_{w-x-1-r|}q_x < 1-\varepsilon \le \sum_{r=0}^{t+1}{}_{w-x-1-r|}q_x$,

$Q_\alpha^\varepsilon = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x-(t+1))}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x-(t+1))}\right] - P_p$ donde $t \in \{0,1,\ldots,w\text{-}x\text{-}2\}$

Por tanto el recargo de seguridad cierto a repercutir, Q^ε, de forma que se obtenga a un nivel ε de estabilidad, para un parámetro β' prefijado se halla como:

- Si $0<1\text{-}\varepsilon\leq {}_{w\text{-}x\text{-}1|}q_x$:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta')\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-(w-x)}d\alpha + \beta'\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-(w-x)}d\alpha - P_p =$$

$$= (1-\beta')\frac{\left(1+i^2\right)^{-w+x+1} - \left(1+i^3\right)^{-w+x+1}}{(w-x-1)\left(i^3-i^2\right)} + \beta'\frac{\left(1+i^1\right)^{-w+x+1} - \left(1+i^2\right)^{-w+x+1}}{(w-x-1)\left(i^2-i^1\right)} - P_p$$

Si buscamos Q^ε tal que $\sum_{r=0}^{t} {}_{w-x-1-r|}q_x < 1\text{-}\varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} {}_{w-x-1-r|}q_x$, para $t \in \{0,1,\ldots,w\text{-}x\text{-}3\}$, se obtiene:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta')\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-w+x+t+1}d\alpha + \beta\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-w+x+t+1}d\alpha - P_p =$$

$$= (1-\beta')\frac{\left(1+i^2\right)^{-w+x+t+2} - \left(1+i^3\right)^{-w+x+t+2}}{(w-x-t-2)\left(i^3-i^2\right)} + \beta'\frac{\left(1+i^1\right)^{-w+x+t+2} - \left(1+i^2\right)^{-w+x+t+2}}{(w-x-t-2)\left(i^2-i^1\right)} - P_p$$

Evidentemente, si w-x-3<0, $\{0,\ldots,w\text{-}x\text{-}3\}$ es un conjunto vacío.

Y para Q^ε tal que $\sum_{r=0}^{w-x-2} {}_{w-x-1-r|}q_x < 1\text{-}\varepsilon \leq \sum_{r=0}^{w-x-1} {}_{w-x-1-r|}q_x$, entonces el resultado es:

$$Q^\varepsilon = (1-\beta')\int_0^1 (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-1}d\alpha + \beta'\int_0^1 (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-1}d\alpha - P_p =$$

$$= (1-\beta')\frac{\ln\frac{1+i^3}{1+i^2}}{i^3-i^2} + \beta'\frac{\ln\frac{1+i^2}{1+i^1}}{i^2-i^1} - P_p$$

4.4.4. Aplicación numérica

Ejemplificamos el análisis efectuado para un seguro de vida entera correspondiente a un asegurado de 35 años, usándose el mismo interés de valoración y las mismas tablas que las que venimos utilizando a lo largo de toda esta parte de la tesis para realizar el análisis. Asimismo, el capital asegurado es de 1000 unidades monetarias. Es inmediato comprobar que la prima pura borrosa es $\widetilde{P}_P = \widetilde{A}_{35}$, por tanto los α-cortes $P_{P\alpha}$ se hallan como:

$$P_{P\alpha} = \left[1000 \cdot \sum_{t=0}^{79} (1'05 - 0'02\alpha)^{-(t+1)} \, {}_{t|}q_{35}, 1000 \cdot \sum_{t=0}^{79} (1'02 + 0'01\alpha)^{-(t+1)} \, {}_{t|}q_{35}\right]$$

y, entonces, es inmediato comprobar que para una aversión al riesgo β dada, la prima pura, P_p, se obtiene como:

$$P_{P\alpha}=(1-\beta)210 + 357'94\beta$$

de forma que para β = 0'75, P_P = 320'95.

De esta forma, la variable borroso aleatoria pérdida $\widetilde{L}_P$, vendrá dada por la variable aleatoria pérdida inferior, $L^1_P(\alpha)$ y superior $L^2_P(\alpha)$, para cada nivel de presunción α con el que trabajemos, siendo éstas respectivamente:

$$L^1_P(\alpha) = 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80+t} - 320'95 \text{ con } {}_{79-t|}q_{35}, \; t = 0,1,...,79$$

y,

$$L^2_P(\alpha) = 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80+t} - 320'95 \text{ con } {}_{79-t|}q_{35}, \; t = 0,1,...,79$$

De esta forma, las funciones de distribución inferior y superior vienen dadas por:

$$F^1[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80} - 320'95 \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{t} {}_{79-r|}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80+t} - 320'95 \le X \\ & < 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-80+(t+1)} - 320'95, \; t = 0,1,...,78 \\ 1 & \text{si } X \ge 1000 \cdot (1'02 + 0'01\alpha)^{-1} - 320'95 \end{cases}$$

$$F^2[X](\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } X < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80} - 320'95 \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{t} {}_{79-r|}q_{35} & \text{si } 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80+t} - 320'95 \le X \\ & < 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-80+(t+1)} - 320'95, \; t = 0,1,...,78 \\ 1 & \text{si } X \ge 1000 \cdot (1'05 - 0'02\alpha)^{-1} - 320'95 \end{cases}$$

Podríamos obtener los α-cortes y la función de pertenencia para X=0, la cual nos indicaría, como ya señalamos anteriormente, la probabilidad de que la prima pura única cobrada en una cartera de un único asegurado sea suficiente para hacer frente a los compromisos adquiridos. Su función de pertenencia, $\mu_{\widetilde{F}[0]}(x)$, es la correspondiente al siguiente subconjunto borroso discreto que toma como forma:

x	0,162	0,191	0,223	0,256	0,29	0,325	0,361	0,396	0,431	0,466	0,499	0,532	0,563	0,593	0,621	0,648	0,673
μ(x)	0,01	0,05	0,08	0,12	0,17	0,21	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,51	0,56	0,62	0,69	0,75	0,82

x	0,697	0,719	0,74	0,759	0,778	0,794	0,81	0,825	0,838	0,851	0,863	0,874	0,884	0,894	0,903	0,911	0,919
μ(x)	0,9	1	0,97	0,93	0,88	0,83	0,78	0,73	0,67	0,61	0,54	0,47	0,39	0,31	0,22	0,12	0,02

Respecto a la expresión de los α-cortes de los cuantiles borrosos, podemos observar dependiendo del nivel de solvencia elegido, que sus expresiones son:

- Si $0<1-\varepsilon\leq {}_{79|}q_{35}$:

$$Q_\alpha{}^{\varepsilon}=\left[1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-80}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-80}\right]-320'95$$

- Si $\sum_{r=0}^{t} {}_{79-r|}q_{35} < 1-\varepsilon \leq \sum_{r=0}^{t+1} {}_{79-r|}q_{35}$, $t\in\{0,1,\ldots,78\}$

$$Q_\alpha{}^{\varepsilon}=\left[1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-80+(t+1)}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-80+(t+1)}\right]-320'95$$

Así, los α-cortes de $\widetilde{Q}^{0'1}$, $\widetilde{Q}^{0'05}$ y $\widetilde{Q}^{0'01}$ que son los valores que reducen la probabilidad de insuficiencia de la prima finalmente repercutida al 10%, 5% y 1% y son, respectivamente:

$Q_\alpha{}^{0'1}=[1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-25}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-25}]-320'95$

$Q_\alpha{}^{0'05}=[1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-18}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-18}]-320'95$

$Q_\alpha{}^{0'01}=[1000\cdot(1'05-0'02\alpha)^{-7}, 1000\cdot(1'02+0'01\alpha)^{-7}]-320'95$

Para obtener los α-cortes del cuantil borroso que deseamos buscar, y que será el que nos permita calcular el recargo a aplicar sobre la prima pura, deberemos fijar, en primer lugar, la probabilidad de insolvencia que pretendemos obtener tras repercutir el recargo, ε (por ejemplo, 0'1). De esta forma, la probabilidad que debe acumular el cuantil borroso que buscamos es de 1-ε (en nuestro caso el 90%). Posteriormente hallamos t tal que, en nuestro ejemplo:

$$\sum_{r=0}^{t} {}_{79-r|}q_{35} < 0'9 \leq \sum_{r=0}^{t+1} {}_{79-r|}q_{35}$$

y de esta forma, la otención del cuantil es inmediata. Por ejemplo, para este nivel de solvencia elegido, en nuestro ejemplo, t=54.

Asimismo, el valor de $Q^{0'1}$, $Q^{0'05}$ y $Q^{0'01}$, con $\beta' = 0'75$, la prima recargada, y la proporción que ésta representa sobre la prima pura, la desviación estándar y la varianza vienen dadas en el siguiente cuadro:

ε	Q^{ε}	P_R	P_p	$V^*[L_P]$	$D^*[L_P]$
0’1	172,01	500,31	52,40%	0,91%	125,10%
0’05	277,29	605,59	84,46%	1,47%	201,67%
0’01	492,94	821,23	150,15%	2,61%	358,50%

A través de los α-cortes de $\widetilde{F}[X]$, podremos obtener para X=492’94, 277’29 y 172’01, $\mu_{\widetilde{F}[492'94]}(x)$, $\mu_{\widetilde{F}[277'29]}(x)$ y $\mu_{\widetilde{F}[172'01]}(x)$. Ello nos permitirá analizar hasta que punto estos recargos aseguran la no existencia de pérdidas para el asegurador para unas probabilidades del 1%, 5% y 10% respectivamente:

$Q^{0'1}$=172’01		$Q^{0'05}$=277’29		$Q^{0'01}$=492’94	
x	$\mu(x)$	x	$\mu(x)$	x	$\mu(x)$
0,7944	0,06	0,9193	0,20	0,9856	0,21
0,8102	0,12	0,9267	0,31	0,9880	0,49
0,8248	0,19	0,9336	0,42	0,9902	1,00
0,8385	0,26	0,9401	0,54	0,9922	0,83
0,8512	0,34	0,9461	0,67	0,9940	0,49
0,8630	0,42	0,9516	0,83		
0,8740	0,50	0,9568	1,00		
0,8843	0,60	0,9615	0,91		
0,8939	0,70	0,9659	0,80		
0,9029	0,81	0,9699	0,68		
0,9114	1,00	0,9737	0,53		
0,9193	0,97	0,9771	0,37		
0,9267	0,90	0,9802	0,17		
0,9336	0,82				
0,9401	0,74				
0,9461	0,64				
0,9516	0,54				
0,9568	0,42				
0,9615	0,29				
0,9659	0,14				

4.5. ANÁLISIS DEL SEGURO TEMPORAL

4.5.1. Determinación de la prima pura única

En este caso, para una prima única borrosa, $\widetilde{P}$, la pérdida del asegurador vendrá dada por: