CAPÍTULO 1:

CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

1.1. SEGUROS DE VIDA: CONSIDERACIONES PREVIAS

En los últimos años, uno de los sectores empresariales que ha experimentado un mayor crecimiento es el sector asegurador. Los seguros permiten a las personas, tanto físicas como jurídicas, cubrirse del riesgo que supone el acaecimiento de sucesos desfavorables, fijándose el precio de dicha "seguridad" a través de la prima a pagar.

Respecto a los seguros de vida, que será el objeto de análisis de esta parte de la tesis, la mayor propensión al ahorro experimentado en esta última década por la sociedad española, tanto a largo plazo como a medio plazo ha revitalizado la demanda de estos productos. Respecto al largo plazo, el seguro de vida es un producto de ahorro competitivo a la hora de complementar las prestaciones de jubilación de la seguridad social. Pese a no tener las ventajas fiscales que presentan los planes de pensiones, es un producto mucho más flexible, ya que los seguros de vida pueden ser rescatados antes de la jubilación con independencia de las razones por las que se produzca dicho rescate. Los seguros de vida típicos en este caso son los planes de jubilación. Asimismo, el seguro de vida también es una buena forma de ahorro a medio plazo. Las ventajas fiscales que éstos presentan frente a los depósitos a plazo y a los fondos de inversión, y la posibilidad de alcanzar rentabilidades financieras semejantes a estos últimos con seguros de interés variable como los "unit linked", han impulsado también la demanda del seguro de vida como producto de ahorro a medio plazo.

Pero el sector asegurador no sólo ha experimentado un fuerte auge en cuanto a su volumen de negocio, sino que también se ha convertido en un sector innovador. Dicha innovación se ha plasmado en la creación de nuevos productos cuya finalidad ya no es la tradicional, es decir, la cobertura del acaecimiento de un suceso: aparecen seguros que cubren contingencias relativas a la incertidumbre que lleva aparejada trabajar con previsiones futuras (por ejemplo, seguros de tipo de cambio). Estos seguros se confunden, en ocasiones, con productos financieros también relativamente novedosos y que intentan reducir esta incertidumbre (futuros, opciones, etc.).

En este trabajo no se pretende abordar la complejidad que supondría analizar los diferentes tipos de seguros y que representaría una tarea mucho más extensa. Hemos centrado nuestro estudio en los seguros de vida, como ya ha sido comentado. Dicha elección se ha fundamentado en la constatación de una cierta incongruencia en el cálculo de las primas, al basarse este análisis, hasta hace relativamente pocos años, en la consideración de un tipo de interés cierto en la valoración actuarial.

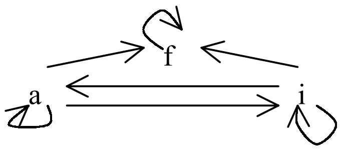
Nos parece interesante introducir brevemente algunos conceptos relacionados con los seguros de vida y que nos permitirá entrar gradualmente en su análisis.

Siguiendo a Piniés y Tornil[1] definimos un seguro de vida como "un contrato por el cual una de las partes, el asegurador, se compromete mediante una prima única o periódica que recibe del tomador del seguro, a pagar al beneficiario la cantidad o cantidades estipuladas si acaece en el plazo convenido para la duración del contrato, la eventualidad prevista en el mismo sobre la vida del asegurado". Los seguros de vida se incluirían, asimismo, dentro de un grupo más amplio que son los seguros personales.

El precio del seguro de vida se concreta en la prima del seguro. Dentro del concepto de prima debemos diferenciar la denominada "prima pura", que cubre, con carácter general, únicamente el coste que la siniestralidad supone para el asegurador; de la "prima de tarifa", que incluye la repercusión sobre el asegurado de los costes de administración, de comercialización, etc.

Respecto a los factores que inciden en la determinación de la prima son básicamente:

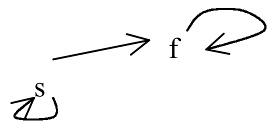
a) *La edad del asegurado*, la cual determinará el futuro comportamiento de la mortalidad, la invalidez, etc. en los sucesivos periodos. Dicho comportamiento se recoge en la tabla de mortalidad o eliminación que refleja el comportamiento del fenómeno para el colectivo al que pertenece la cabeza asegurada. A partir de ésta se deducen las probabilidades básicas que se utilizan a la hora de determinar la prima y que analizaremos con posterioridad. La inclusión de la posibilidad de invalidadez, implica trabajar con un proceso estocástico markoviano donde los posibles estados y transiciones son:



donde f es el estado de fallecimiento, a es el estado de actividad, e i es el estado de invalidez o inactividad.

[1] Tomado de Pérez Torres (1986), p.11.

En cualquier caso, nosotros no consideraremos la posibilidad de invalidez, es decir, únicamente trabajaremos con seguros de vida donde sólo se consideran dos estados: supervivencia o muerte. En este caso, el proceso estocástico con el que trabajamos es más sencillo, siendo los posibles estados y transiciones:



siendo el estado de supervivencia, s, y el de fallecimiento, f.

Dentro de los seguros que únicamente contemplan la supervivencia o fallecimiento de la cabeza asegurada, diferenciamos tres tipos:

1) *Seguros para caso de muerte:* Cubren la contingencia de fallecimiento del asegurado. El beneficiario recibe un capital a la muerte del mismo.
2) *Seguros para caso de vida:* Cubren la contingencia de supervivencia del asegurado. El beneficiario recibe un capital o renta si el asegurado sobrevive a partir de una fecha determinada.
3) *Seguros mixtos:* Se forman a partir de la combinación de los tipos anteriores, es decir, el asegurado cobra una cantidad si fallace durante la duración del seguro y otra si sobrevive a dicho plazo.

b) *El interés técnico*, que puede ser definido como el tipo de interés que se garantiza al asegurado por sus aportaciones. Así, éste debe reflejar el rendimiento que el asegurador anticipa para la inversión que realice con las primas que perciba, es decir, se trata un rendimiento a medio y largo plazo. Dado que la novedad que aportamos en el estudio que realizamos en la presente parte de la tesis se localiza en éste segundo aspecto al considerar el interés de valoración definido a través de un número borroso, su determinación será objeto de especial atención.

c) *Gastos de administración y comercialización para el asegurador.* Éstos son cargados por el asegurador al asegurado[2] bajo los conceptos de gastos de gestión externa –los gastos de comercialización o comisiones que cobra el intermediario, las cuales suele percibirlas por anticipado-, y los gastos de gestión interna -los gastos administrativos-. En cualquier caso, aunque reconozcamos la importancia de estos conceptos en la formación del precio en los seguros, no serán objeto de nuestro análisis, a fin y a efecto de acotar el objeto de estudio.

[2] El contratante del seguro, y por tanto, el pagador de las primas es el tomador del seguro, no el asegurado. Sin embargo, en los seguros de vida, a excepción de que el tomador sea una empresa que contrate un seguro de vida para sus empleados, el asegurado y tomador coincide. Por esta razón nosotros identificaremos tomador y asegurado.

Asimismo, los estudios actuariales de los seguros de vida se centran, tradicionalmente, en la determinación de la prima pura.

De esta forma, para realizar la valoración de un seguro de vida, precisamos de la modelización de dos fenómenos, uno de carácter demográfico – el comportamiento de la mortalidad en un determinado colectivo -, y otro de carácter financiero: la estimación de los tipos que regirán en el futuro en una economía, y que son los que como máximo puede ofrecer el asegurador como remuneración de las primas que perciba. Podemos distinguir tres ambientes distintos en los que enmarcar estos fenómenos:

a) *Certeza*: se conocen los diferentes estados de la naturaleza o concreciones posibles del fenómeno objeto de estudio que pueden presentarse, y en cada momento se conoce cual será el que se presente.
b) *Riesgo*: supone conocer las posibles concreciones que puede tomar el fenómeno, pero no cual se va a dar en cada momento, si bien si puede asignarse una determinada probabilidad de ocurrencia de que el fenómeno tome una u otra concreción.
c) *Incertidumbre:* se conocen los estados de la naturaleza que pueden presentarse, pero no disponemos de información para asociar una probabilidad de que se presente uno u otro.

Respecto a la mortalidad, podemos afirmar que se trata de un fenómeno “natural”, no existe en la actualidad ninguna controversia sobre su carácter eminentemente estocástico, es decir, que este fenómeno se enmarcaría dentro de un ambiente de riesgo. Si las tablas de mortalidad que se utilicen están bien ajustadas, la información que ofrecen es suficiente para calcular la probabilidad de ocurrencia sobre cualquier suceso relacionado con la vida de un individuo. De hecho, el marco conceptual para este fenómeno sobre el que trabajan los actuarios data de los siglos XVIII y XIX, donde Dobson, Gompertz o Makeham son autores fundamentales a este respecto.

Sin embargo, el esfuerzo de la ciencia actuarial en los últimos años se centra en formalizar la incertidumbre inherente al fenómeno financiero asociado al seguro de vida, siendo utilizado en la mayor parte de trabajos, la teoría de los procesos estocásticos, con lo cual se sitúa al interés en un ambiente de riesgo. Creemos que, si bien esta metodología puede dar éxitos relativos, no es quizá el instrumento más realista para formalizar el tipo de interés, siendo en nuestra opinión, más acertado, situar éste en un ambiente de incertidumbre, y utilizar para su formalización un instrumento más adecuado y flexible para trabajar con la vaga información de que se dispone sobre el interés a largo plazo, cuantificándolo a través de números borrosos.

1.2. BREVE ANÁLISIS SOBRE EL TRATAMIENTO DEL FENÓMENO DE LA MORTALIDAD EN LOS SEGUROS DE VIDA

El estudio de fenómenos biológicos como la mortalidad, la invalidez, etc. en un colectivo determinado es realizado desde el punto de vista estadístico por la biometría. En el caso de la mortalidad, su comportamiento queda reflejado en las tablas de mortalidad, las cuales aproximan numéricamente dicho fenómeno. En ellas se indica, para un colectivo inicial de recién nacidos arbitrario (100.000 o 1.000.000 de personas habitualmente) cual es el número de supervivientes de cada edad, y para edades enteras. De esta forma, si denominamos como x a una edad cualquiera, el número de supervivientes de esa edad l_x es de lo que nos informará una tabla de mortalidad. Así, notaremos como l_0 al número de individuos del colectivo inicial. Dado que el ser humano no vive eternamente, existe una edad a partir de la cual no existirá vivo ningún individuo del colectivo, que notaremos como w, es decir, l_w =0. A w también se le denomina primera edad no alcanzable o "infinito actuarial", el cual, por supuesto, es un número finito.

Para el enfoque de valoración actuarial por el que optaremos nosotros, y partiendo de que la posible cabeza a asegurar tiene una edad x, la variable aleatoria sobre la cual se basa todo el planteamiento a realizar es el número de años enteros que puede sobrevivir una cabeza de dicha edad, x, la cual deberá ser inferida de la tabla de mortalidad utilizada y que será notada como T_x. El conjunto de sucesos elementales asociados a esta variable aleatoria es $\Omega=\{0,1,\ldots,t,\ldots,w\text{-}x\text{-}1\}$, siendo la probabilidad de que el asegurado de edad x sobreviva t años enteros, o lo que es lo mismo, que fallezca durante el t-ésimo año:

$$_{t|}q_x = \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x}$$

A partir de esta probabilidad básica podemos, hallar las probabilidades de los siguientes sucesos, relevantes en la valoración actuarial:

a) Probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva a la edad x+n, $_np_x$:

$$_np_x = \sum_{t=n}^{w-x-1} {}_{t|}q_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

b) Probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en los n años siguientes, $_nq_x$:

$$_nq_x = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x$$

Un concepto fundamental para el ajuste de las tablas de mortalidad o ley de mortalidad de una determinada población es el tanto instantáneo de mortalidad, que para una edad x+t notamos como μ_{x+t}. Dicho tanto indica la tasa unitaria y anual continua de decrecimiento de la población para un elemento de edad x+t. Analíticamente su expresión es:

$$\mu_{x+t} = -\frac{d\ln l_{x+t}}{dt} = -\frac{dl_{x+t}}{dt}\cdot\frac{1}{l_{x+t}}$$

Conociendo la expresión analítica del tanto instantáneo de mortalidad podemos inferir las magnitudes biométricas ya definidas anteriormente -su análisis más detallado puede encontrarse en Vegas (1981, p. 284-370)-. Así obtenemos:

a) Los individuos supervivientes del colectivo inicial de edad x, l_x son:

$$l_x = \int_0^{w-x} l_{x+t}\mu_{x+t}dt$$

b) La probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva n años a su edad, ${}_np_x$:

$${}_np_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{x+t}dt\right)$$

c) La probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva exactamente r años enteros:

$${}_{r|}q_x = \int_r^{r+1} {}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

d) La probabilidad de que un individuo de edad x fallezca en los próximos n años:

$${}_nq_x = \int_0^n {}_tp_x\mu_{x+t}dt$$

Respecto a las expresiones analíticas del tanto instantáneo de mortalidad más utilizadas en aplicaciones académicas –por ejemplo en la valoración actuarial en el campo continuo- o prácticas, podemos mencionar la ley de Moivre, la ley de Gompertz y las dos leyes de Makeham. La ley Moivre postula para el tanto instantáneo de mortalidad la expresión:

$$\mu_x = \frac{A}{B-Ax}\text{, con } A>0$$

mientras que la ley de Gompertz se define como:

$\mu_x = A \cdot B^x$, con A>0 y B>1.

La primera ley de Makeham no es más que una pequeña variación de la ley de Gompertz, y según ésta:

$\mu_x = C + A \cdot B^x$, con A>0 y B>1.

Y la segunda ley de Makeham nos indica que:

$\mu_x = C + Dx + A \cdot B^x$, con A>0 y B>1.

Las tablas de mortalidad para una determinada población suelen ser construidas ajustando mediante métodos econométricos máximo-verosímiles alguno de los tantos instantáneos de mortalidad recién expuestos. Normalmente, la población para la que se desea construir una tabla de mortalidad suele dividirse en tres segmentos: el segmento de edades "pequeñas" –por ejemplo, hasta 10 años-, el extremo de edades "elevadas" –por ejemplo, a partir de 85 años- y el segmento de edades "centrales", que comprenderá el espectro de edades más elevado e importante desde el punto de vista del negocio del asegurador. Para los segmentos extremos suele ajustarse una ley de Gompertz, y para el segmento central suele utilizarse la primera ley de Makeham.

En el análisis que realizaremos de los seguros de vida supondremos un devengo de capitales anual, ya que permitir un devengo inferior, si bien es un supuesto realista, no aportaría nada relevante al análisis que llevaremos a cabo además de complicar más la notación. Si pretendemos trabajar con una periodicidad inferior al año y dado que las tablas de mortalidad nos informan sobre el comportamiento de la mortalidad para edades enteras, deberíamos realizar algún supuesto adicional sobre el comportamiento del tanto instantáneo de mortalidad dentro de un año con el fin de obtener el número de superviventes para una edad l_{x+t} siendo 0<t<1. Algunas aproximaciones usualmente utilizadas en la práctica, y que vienen comentadas con más detalle en Bowers *et al.* (1986. p.67-71) son:

a) Suponer que la mortalidad se distribuye uniformemente dentro de las edades. En este caso:

   $l_{x+t} = (1\text{-}t)l_x + tl_{x+1}$, siendo $\mu_{x+t} = \dfrac{{}_1q_x}{1 - t_1q_x}$ 0<t<1.

b) Que el tanto instantáneo de mortalidad en (x, x+1) es constante. En este caso $\mu_{x+t} = \mu = -\ln{}_1p_x$. De esta forma:

   $l_{x+t} = l_x e^{-\mu t}$

c) La hipótesis de Balducci, según la cual:

$$\mu_{x+t} = \frac{{}_1q_x}{1-(1-t)\,{}_1q_x},\ 0<t<1$$

y por tanto, para hallar l_{x+t} debemos resolver:

$$\frac{1}{l_{x+t}} = \frac{1-t}{l_x} + \frac{t}{l_{x+1}}$$

1.3. PROPUESTAS SOBRE EL INTERÉS A APLICAR EN LOS CONTRATOS DE SEGUROS DE VIDA

1.3.1. Consideraciones previas

El tipo de interés técnico es el tipo de interés utilizado en la valoración de un seguro de vida y en general se acepta que la determinación de su valor debe basarse en el rendimiento medio que conseguirá la compañía durante la duración del contrato invirtiendo las aportaciones de los asegurados, siendo en muchos casos, la duración de dichos contratos muy elevada. Sin embargo, respecto a la conceptualización del tipo de interés de valoración de los contratos de seguros, podemos encontrar varias concepciones. La primera es la que postularía que, en general, la valoración debe realizarse a una única tasa. En esta línea, Prieto (1993) considera que el interés técnico en las operaciones del Seguro de Vida permite:

1) El establecimiento de la equivalencia financiero-actuarial entre primas y prestaciones, así como el cálculo de la reserva matemática en periodos intermedios de la operación.
2) Expresa el tanto de interés mínimo garantizado al asegurado por sus aportaciones o primas.

Asimismo, dado que el rendimiento que tiene que ofrecer un proyecto de inversión para poder ser aceptado es:

$$I = I_L + P + \pi$$

donde I es la rentabilidad –por ejemplo, la TIR- del proyecto, I_L la tasa real de interés sin riesgo, P la prima de riesgo, que tomará mayor valor si el proyecto es más arriesgado y π la tasa de inflación, Prieto considera que el interés técnico, único para todo el contrato, debe incluir I_L y π -éste último dado generalmente vía reparto de beneficios- y nunca un interés superior. En este último caso se ofrecería al asegurado una prima de riesgo, y es el asegurador el que corre con el riesgo de inversión de las primas que satisface el asegurado, y no éste último.

En la misma línea se manifiesta Devolder (1988), el cual conceptualiza el interés técnico también como un interés único, que debe reflejar el tipo de interés que se espera que rija a largo plazo en una ecomomía. En este caso, el tipo de interés técnico a ofrecer en un contrato debe ser[3]:

Tipo técnico = Tasa real de interés a largo plazo +λ·Tasa anticipada de inflación a largo plazo.

Donde $0 \leq \lambda \leq 1$ indica el porcentaje de la inflación anticipada que se tiene en cuenta, a priori, para fijar las primas del seguro. A posteriori, mediante una clausula de reparto de beneficios, se disminuyen las primas a pagar o bien se revalorizan los capitales asegurados, protegiéndose de esta forma totalmente al asegurado de la disminución que causa la inflación en el valor de dichos capitales.

Asimismo, Devolder indica que el tipo de interés real que debe considerarse a largo plazo, debe estar alrededor del 2%-3%, siendo necesario para la determinación del interés técnico a ofrecer, únicamente, la anticipación de una inflación que sea razonable a largo plazo.

Sin embargo, muchos autores aceptan la utilización de diferentes tipos de interés a lo largo del tiempo. Por ejemplo Gerber (1995, p. 57) acepta que es posible realizar la valoración actuarial mediante la utilización de tipos de interés forward. De esta forma, a nuestro entender, en este caso quedarían recogidas las expectativas que tienen los agentes económicos respecto al comportamiento del interés sin riesgo a lo largo del tiempo, y que pueden ser inferidas a través de la ETTI, como ya hemos expuesto.

Otros autores como Ostasiewski (1993) o Babbell y Merrill (1997) proponen, dado que el interés que ofrece el asegurador debe ser un interés sin prima de riesgo, y por tanto, íntimamente ligado con la rentabilidad de la deuda pública, utilizar una estructura temporal de tipos de interés de la deuda pública en la valoración de los contratos, es decir, actualizar cada uno de los flujos (primas y prestaciones) que conforman el contrato al tipo de interés spot que les corresponde por su vencimiento. Es remarcable que esta alternativa está contemplada por la regulación española para el cálculo de las provisiones matemáticas –que no es más que el valor de las obligaciones pendientes debidas a los contratos en vigor-, si el conjunto de pólizas que se analizan tienen un conjunto de activos expresamente asignado. Para un detallado análisis de la normativa española en materia del tipo de interés a considerar en la valoración de los seguros de vida puede consultarse en Lozano (1999).

[3] Obsérvese que en ambos casos subyace la idea de que $i_n=i_r+\pi$, donde i_n es el interés nominal, i_r el interés real y π la tasa de inflación. Ello es sólo una aproximación a la relación de Fisher que indica que $i_n = i_r + \pi + i_r\pi$. El último sumando suele tener un

1.3.2. Modelización de la incertidumbre del tipo de interés técnico en la literatura actuarial

En general, las compañías de seguro utilizan un interés técnico conocido, fijo, único y suficientemente prudente para el cálculo de la prima, y en el mejor de los casos, recalculan anualmente dicha prima en función de la variación del interés estimado. Resulta paradójico que para el cálculo de la prima de seguro, cuya finalidad es la cobertura de un riesgo, se tome una magnitud incierta como es el tipo de interés futuro, o el tipo de interés que el asegurador conseguirá invirtiendo las primas del seguro, como si fuera conocida, y más paradójico todavía es que esta circunstancia no haya sido objeto de atención de los académicos hasta hace relativamente pocos años, siendo la materia, casi exclusiva de su atención, el análisis del riesgo de los contratos de seguros de vida únicamente en la vertiente biométrica.

Hasta finales de los 70 y principios de los 80 no aparecen diferentes trabajos que incorporan la incertidumbre sobre el tipo de valoración a aplicar suponiéndose que éste es una variable aleatoria. En este caso, la aleatoriedad asociada al valor actual de las prestaciones de un seguro tiene una doble vertiente aleatoria: el comportamiento de la mortalidad y el tipo de interés de valoración, que se supone que tiene un comportamiento estocástico. Así pues, para cada contingencia comtemplada por el contrato –supervivencia o fallecimiento-, aunque las prestaciones sean ciertas, su valor actual es aleatorio, ya que el interés de valoración lo es. Por tanto, en el análisis de los seguros de vida con esta metodología será necesario trabajas con distribuciones de probabilidad (por la naturaleza estocástica del interés) condicionadas (a cada una de las posibles contingencias que sobre la vida del asegurado contempla el contrato).
Uno de los primeros autores en considerar la aleatoriedad del tipo de interés es Boyle (1976). En este trabajo supone que los tipos de interés de valoración para cada año (tipos forward) son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, haciéndose especial hincapié en el caso en que la tasa instantánea de interés correspondiente a cada periodo sigue una distribución normal, siendo por lo tanto, el factor de actualización correspondiente a cada periodo una variable aleatoria logarítmico-normal. En dicho trabajo se dan, bajo las hipótesis de partida, las expresiones de la esperanza matemática y de la varianza del valor actual de algunas de las estructuras actuariales más habituales en la práctica aseguradora.

En esta línea Panjer y Bellhouse (1980) y (1981), abundando en la normalidad de la tasa instantánea de valoración, suponen que ésta se comporta según una serie temporal autoregresiva

valor relativamente pequeño, y recoge la depreciación de los intereses debidos a la inflación, el cual, como puede comprobarse, en los casos que analizamos es despreciado.

de orden 1 o 2, y, como Boyle, hallan el valor esperado y la varianza matemática de capitales de fallecimiento y rentas de supervivencia.

A pesar de la sofisticación conseguida con este enfoque, Giaccotto (1986) demuestra que en los últimos años el comportamiento del interés no ha sido estacionario, e intenta resolver esta problemática planteando dos enfoques alternativos. En el primero de ellos se discute la posibilidad de modelizar mediante una serie ARMA(p,q), la variación que a lo largo de la vida del contrato experimenta el interés correspondiente a cada año, de forma que este enfoque no es más que una generalización del enfoque propuesto por Panjer y Bellhouse. La segunda propuesta consiste en la utilización del conocido modelo de valoración para opciones sobre tipos de interés de Vasicek, y en ella se propone que los derechos o las obligaciones correspondientes a cada periodo sean valorados con el tipo spot correspondiente al bono cupón cero con el mismo vencimiento del ingreso o gasto. Así pues, se propone para la valoración de los seguros de vida uno de los modelos de equilibrio dinámico de la ETTI que fueron reseñados en el apartado 1.4.2. de la segunda parte de la tesis.

Por otra parte, Beekman y Fuelling (1990) y (1991) analizan los parámetros estadísticos más importantes asociados al valor actual de las rentas actuariales, bajo la hipótesis de que el tipo de interés sigue un proceso de difusión de Ornstein-Uhlenbeck, también conocido como de "reversión a la media", siendo dicho proceso estocástico, por otra parte, muy utilizado en economía financiera para modelizar el comportamiento del tipo de interés a corto plazo.

Asimismo, en el ya mencionado trabajo de Babbell y Merrill se aboga por la utilización de modelos de estructura temporal de tipos de interés estocásticos que sean al menos bifactoriales, como el ya mencionado modelo de Heath, Jarrow y Morton. Remarcamos que hemos reseñado los trabajos que nos han parecido más significativos en este sentido, ya que desde finales de los 70 hasta la actualidad, la literatura que analiza el problema del interés técnico desde una vertiente del riesgo ha sido muy abundante.

Sin embargo, no todos los autores están de acuerdo en modelizar la incertidumbre en el tipo de interés considerando éste aleatorio. Gerber (1995) sostiene que si bien, a corto plazo, podemos considerar que el interés se comporta de forma aleatoria, los seguros de vida están particularmente relacionados con el comportamiento del tipo de interés a largo plazo, el cual no tiene un comportamiento aleatorio. En este sentido, Kaufmann y Gil Aluja (1986, p. 74) afirman "*no sólo existe una gran variedad de tipos de mercado, según el momento y la empresa a quien corresponde realizar la inversión, sino que éstos resultan variables a lo largo del tiempo. Si a esto se añade la incertidumbre con que se plantea el futuro, no es extraño que se haya recurrido* *a la utilización de tipos de interés borrosos*". Lemaire (1990) esboza posibles aplicaciones de la teoría de los subconjuntos borrosos en la ciencia actuarial. Dentro de esta "agenda" incluye la valoración actuarial mediante intereses borrosos. Lemaire considera que la estimación de los tipos de interés futuros es indudablemente uno de los más complejos problemas de modelización, y sobre todo cuando se pretende estimar intereses a tan largo plazo como un seguro de vida, ya que en su formación se entremezclan variables políticas, sociales, etc. es decir, variables humanas de difícil modelización estocástica. Lemaire propone la utilización de un único tipo de interés en la valoración actuarial estimado a través de un número borroso, de forma que éste nos permita obtener, dada nuestra ignorancia sobre el comportamiento del interés futuro, una medida parcial de la rentabilidad que se obtendrá invirtiendo las primas del contrato. Un somero análisis de la valoración actuarial con intereses borrosos también puede ser encontrado en Ostasiewski (1993). Las razones que éste último apunta para considerar esta modelización como viable para los tipos de interés que deben intervenir en la valoración actuarial son:

1) La enorme complejidad del proceso de formación de los tipos de interés nominales en el mercado y por tanto su estimación, la cual se vuelve más compleja, si cabe, si se pretenden estimar los tipos de interés reales y la inflación. Ello hace inviable una modelización estocástica en el largo plazo para el interés.
2) Por otra parte, la tendencia de las variables que reflejan el comportamiento de los mercados de capitales, en nuestro caso, el interés, están evidentemente marcadas por los agentes económicos que en ellos intervienen, y por tanto por la particular percepción del riesgo de cada uno de los agentes, por sus expectativas, etc., con un fuerte comportamiento subjetivo. Es indiscutible que una herramienta natural para modelizar dichas apreciaciones subjetivas es la teoría de los subconjuntos borrosos.

Asimismo, otros autores que modelizan el tipo de interés técnico a través de números borrosos son Terceño *et al.* (1996), Bonet *et al.* (1999) y Betzuen *et al.* (1997), estos últimos en la determinación del porcentaje de salario a detraer a los trabajadores para constituir un plan de pensiones de prestación definida.

1.3.3. Propuestas para la determinación del tipo (los tipos) a aplicar en el cálculo de la prima de un seguro de vida

A continuación proponemos algunas alternativas para la estimación de el tipo o los tipos de valoración de los contratos de los seguros de vida, la mayor parte de las cuales estarán basadas en la utilización de una forma u otra de la ETTI borrosa. Asimismo, estas propuestas pueden dividirse en dos grupos distintos:

a) La estimación de un tipo de interés único de valoración. Mediante esta vía, lo que pretendemos aplicar es el tipo de interés medio que se estima que se obtendrá con la inversión de las primas durante todo el horizonte temporal del seguro de vida. La utilización de una única tasa de interés es lo más habitual en la práctica, lo cual permite, asimismo, una mayor facilidad en el cómputo de valores financiero o actuariales.
b) La utilización de más de un tipo de interés, bien sea porque para cada periodo se estimen unos tipos distintos (los tipos forward), o bien porque los flujos asociados al contrato se descuenten al tipo spot sin riesgo correspondiente que rige en el mercado.

1.3.3.1. Propuestas para la estimación de un tipo de interés único

Propuesta 1

Una primera idea es partir de la conceptualización del tipo de interés que se plantea en el ya mencionado trabajo de Devolder (1988), es decir, a partir de la concepción más clásica del tipo de interés técnico. En este caso, construimos el tipo de interés técnico como la suma de el tipo de interés real a largo plazo más un porcentaje de la inflación anticipada a largo plazo. Aunque dicho autor no lo explicita, ni probablemente tenga conciencia de ello, podemos comprobar que su concepto de interés técnico es borroso o fuzzy más que estocástico o cierto. Respecto al interés real considera que debe ser "*alrededor del 2% o 3%*" y que la proyección de la inflación debe ser una estimación "*razonable a largo plazo*". De esta forma, podemos modelizar el tipo de interés técnico como un tipo de interés borroso:

$$\tilde{i} = \{x / \mu_{\tilde{i}}(x)\} = \{i_\alpha = [i^1(\alpha), i^2(\alpha)] / 0 \le \alpha \le 1\}$$

que se halla como:

$$\tilde{i} = \tilde{i}_R + \lambda\tilde{\pi}$$

Donde:

$\tilde{i}_R$: Es el interés real, representado por el número borroso "aproximadamente el 2'5%", o el $0'0\widetilde{25}$. Asimismo también vendrá dado por su función de pertenencia y por sus α-cortes como:

$$\tilde{i}_R = \{x / \mu_{\tilde{i}_R}(x)\} = \{i_{R\alpha} = [i_R^1(\alpha), i_R^2(\alpha)] / 0 \le \alpha \le 1\}$$

λ: Es el porcentaje de la inflación proyectada que se repercute al asegurado.

$\tilde{\pi}$: Es la inflación a largo plazo que se estima como "razonable". Evidentemente esta conceptualización, admite su estimación a través de números borrosos, siendo de utilidad para su predicción la utilización de un haz de números borrosos, donde a cada experto que interviene en el proceso se le da un peso probabilístico, o la metodología del Fuzzy Delphi descrita en Kaufmann y Gil Aluja (1986). La inflación borrosa vendrá dada asimismo por un número borroso como:

$$\tilde{\pi} = \{x / \mu_{\tilde{\pi}}(x)\} = \{\pi_\alpha = [\pi^1(\alpha), \pi^2(\alpha)] / 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Por ejemplo, en el contexto actual, tras la constitución de la Unión Monetaria Europea, una estimación del interés real y la inflación al largo plazo razonable, podría ser realizada a través de los números borrosos triangulares:

$$\tilde{i}_R = (0'015, 0'025, 0'035),\ \tilde{\pi} = (0'01, 0'025, 0'045)$$

Así, para una participación en la inflación anticipada del 50%, el interés técnico a aplicar sería el número borroso triangular $\tilde{i}$ = (0’015, 0’025, 0’035) + 0’5·(0’01, 0’025, 0’045) = (0’02, 0’0375, 0’0575)

<u>Propuesta 2</u>

El interés técnico a aplicar durante toda la vida del contrato es un número borroso $\tilde{i}$ correspondiente a una proporción del interés promedio que el asegurador puede conseguir si adquiriera en el momento de valoración una cartera de renta fija y tesorería que replicara la que actualmente tiene en vigor. Un ejemplo de la valoración actuarial construyendo el tipo de interés de valoración de esta forma puede ser encontrado en Vergés[4] (1995). Si la cartera del asegurador se compone de m títulos, una aproximación a la rentabilidad global de la cartera vendría dada por:

$$\tilde{r}_C \approx \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{r}_j$$

Donde $\tilde{r}_C$ sería el número borroso correspondiente a la rentabilidad de la cartera, w_j la proporción que el título del tipo j tiene dentro de la cartera de renta fija del asegurador y $\tilde{r}_j$ el número borroso estimado para el rendimiento medio del título j. De esta forma $\tilde{i} = \lambda \tilde{r}_C$ con $0<\lambda<1$, siendo λ la proporción de la rentabilidad de la cartera del asegurador que se ofrece como remuneración al asegurado.

[4] Al menos en España, según Vergés (1995) la cartera activa del asegurador de vida contiene aproximadamente un 75% en renta fija y tesorería, de forma que, utilizando esta conceptualización del interés tenemos en cuenta el rendimiento correspondiente a la mayor parte de inversiones del asegurador, que suele materializarse en instrumentos financieros de poco o ningún riesgo de insolvencia.

Asimismo, si trabajamos con números borrosos, no vemos ninguna razón por la cual el asegurador no pueda repercutir un interés técnico $\tilde{i} = \tilde{r}_C$. En este casi el asegurador estaría considerando, de entrada, todos los escenarios posibles que respecto a las rentabilidades que por término medio conseguirá invirtiendo las primas. La prudencia podrá ser introducida en un momento posterior, cuando desfuzzyfique el valor resultante de las valoraciones realizadas y se deba determinar el precio del seguro como un valor cierto.

Evidentemente, aunque la cartera del asegurador se componga, básicamente, de activos de renta fija o monetarios, no podemos conocer en muchas ocasiones su rendimiento medio por las siguientes razones:

a) Ya comentamos que, en primer lugar, el precio de los títulos de renta fija (y por tanto también de renta variable) que se negocian durante una sesión en los mercados no se manifiestan de forma cierta, sino que sus precios se negocian dentro de un intervalo, que puede cuantificarse a través de un número borroso.
b) Para los rendimientos intermedios de los títulos, es decir, los cupones, no se suele conocer el tipo de interés de reinversión futuro. En cualquier caso, nosotros consideramos que, en base a los datos actuales, estos pueden ser estimados por los tipos implícitos correspondientes que se deducen de la estructura temporal de los tipos de interés para el mercado de deuda pública estatal.
c) Si no se desea mantener el título hasta el vencimiento, aunque los cupones suelen venir prefijados desde el inicio de la emisión, no se conoce el interés que regirá en el mercado en el momento de venta, el cual determinará el precio del título en dicho momento. Sin embargo, hemos propuesto en la segunda parte de la tesis instrumentos para poder estimarlo a través de números borrosos.

De esta forma, si el rendimiento del j-ésimo título ha sido estimado como:

$$\tilde{r}_j = \left\{ x / \mu_{\tilde{r}_j}(x) \right\} = \left\{ r_{j\alpha} = \left[r_j^1(\alpha), r_j^2(\alpha) \right] / 0 \leq \alpha \leq 1 \right\}$$

la función de pertenencia de $\tilde{r}_C$ vendrá dada por:

$$\mu_{\tilde{r}_C}(x) = \bigvee_{x=\sum_{j=1}^{m} w_j x_j} \left[\bigwedge_{j=1}^{m} \mu_{\tilde{r}_j}(x_j) \right]$$

y por tanto, sus α-cortes serán:

$$r_{C\alpha} = \left[\sum_{j=1}^{m} w_j r_j^1(\alpha), \sum_{j=1}^{m} w_j r_j^2(\alpha) \right]$$

Por supuesto, si $\tilde{r}_j$, j=1,2,…,m son números borrosos triangulares, y por tanto los podemos representar mediante tripletas como $\tilde{r}_j = (r_j^1, r_j^2, r_j^3)$, la rentabilidad global de la cartera también lo será, de forma que:

$$\tilde{r}_C = \left(\sum_{j=1}^{m} w_j r_j^1, \sum_{j=1}^{m} w_j r_j^2, \sum_{j=1}^{m} w_j r_j^3 \right)$$

La última cuestión que nos queda por resolver es la obtención del rendimiento medio hasta el vencimiento para un título de renta fija. Existen tres enfoques básicos, cuyo análisis en un ambiente de certeza puede ser encontrado en Mascareñas (1991a), (1991b) y Haugen (1990).

a) El enfoque de la media aritmética

En este caso, el rendimiento del j-ésimo título, $\tilde{r}_j$, cuyo vencimiento es t_j se halla como la media aritmética de la tasas de rendimiento a un año estimadas para cada uno de los t_j años de vida del título, es decir, la media aritmética de los tipos implícitos. En la segunda parte de esta tesis ya ha sido propuesta una metodología de determinación de estos tipos futuros. De esta forma, si denominamos como ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ al tipo implícito del t-ésimo año de vida del título y t_j es entero:

$$\tilde{r}_j = \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}\tilde{i}_1}{t_j}$$

Así, los α-cortes de $\tilde{r}_j$ vendrán dados a través de los de ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ como:

$$r_{j_\alpha} = \left[r_j^1(\alpha), r_j^2(\alpha)\right] = \left[\frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^1(\alpha)}{t_j}, \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^2(\alpha)}{t_j} \right]$$

Si los tipos forward vienen dados a través de números borrosos triangulares, $\tilde{r}_j$ también será un número borroso triangular que para ${}_{t-1}\tilde{i}_1 = \left({}_{t-1}i_1^1, {}_{t-1}i_1^2, {}_{t-1}i_1^3\right)$, se hallará como:

$$\widetilde{r}_j = \left(r_j^1, r_j^2, r_j^3\right) = \left(\frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^1}{t_j}, \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^2}{t_j}, \frac{\sum_{t=1}^{t_j} {}_{t-1}i_1^3}{t_j}\right)$$

Esta forma de cálculo del rendimiento medio de los títulos implica asumir que se mantiene la misma inversión en pesetas durante toda la vida del título, de forma que las ganancias que se obtienen al final de un periodo, sean cupones o incrementos de capital, son retiradas y no reinvertidas –por ejemplo, vendiendo la proporción que corresponda del título para mantener el mismo "saldo" que supone la inversión inicial- y que las pérdidas, si existieran, serían repuestas con nuevas aportaciones.

b) El enfoque de la media geométrica

En este caso, el rendimiento del título j, $\widetilde{r}_j$, cuyo vencimiento es t_j se halla como la media geométrica de la tasas de rendimiento a un año –es decir, tipos forward- estimadas para cada uno de los t_j años de vida del título. Si la correspondiente al t-ésimo año se ha estimado a través de ${}_{t-1}\widetilde{i}_1$ y t_j es entero:

$$\widetilde{r}_j = \sqrt[t_j]{\prod_{t=1}^{t_j}\left(1 + {}_{t-1}\widetilde{i}_1\right)} - 1 = \widetilde{i}_{t_j}$$

Es decir, el rendimiento del título con vencimiento en t_j se identifica con el tipo spot a dicho vencimiento $\widetilde{i}_{t_j}$.

En esta forma de calculo del rendimiento medio de un título también subyace una hipótesis clara: el inversor no hará efectivas las ganancias de capital hasta el vencimiento del título, mientras que los cupones que sean percibidos se reinvertirán a los tipos forward estimados.

c) El enfoque de la tasa interna de rentabilidad (TIR)

Ya comentamos con anterioridad que la TIR de un título de renta fija negociable durante una sesión no suele ser un número cierto, sino que para dicho título se negocia una horquilla de precios, y por tanto, de TIRes. Si cuantificamos dicha horquilla de precios a través de un número borroso, la TIR que obtendremos será también un número borroso cuya forma de cálculo fue comentada en la segunda parte de la tesis. Otras alternativas para estimar con este enfoque la rentabilidad del j-ésimo título de renta fija que compone la cartera del asegurador a través de un número borroso, podrían ser asimilar la TIR a la rentabilidad correspondiente a su vencimiento, t_j, en la curva de rendimiento ajustada según los procedimientos expuestos en el apartado 3.1.2. de la segunda parte de la tesis. De esta forma obtendríamos $\tilde{r}_j$ directamente como un número borroso triangular si los parámetros que definan la curva de rentabilidades son triangulares. También podríamos partir del precio borroso que obtendremos para dicho título de los parámetros que definen al factor de descuento spot ajustados ya mediante números borrosos, siendo las posibles formas para realizar dicho ajuste, las ya analizadas en el apartado 3.2. de la segunda parte de esta tesis.

A partir de los métodos propuestos en este subepígrafe se obtiene un tipo de interés único para toda la vida del contrato a aplicar en la valoración de los contratos de seguros. De esta forma, a partir de $\tilde{i}$ podemos hallar el factor de actualización de una unidad monetaria con vencimiento a t años como el número borroso $\tilde{f}_t$:

$$\tilde{f}_t = (1+\tilde{i})^{-t}$$

Su función de pertenencia se obtiene aplicando el principio de extensión de Zadeh, y se halla a partir de la de $\tilde{i}$ como:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{i}}\left(x^{-\frac{1}{t}} - 1\right)$$

y los α-cortes de $\tilde{f}_t$, $f_{t\alpha}$:

$$f_{t\alpha} = \left[(1+i^2(\alpha))^{-t}, (1+i^1(\alpha))^{-t}\right]$$

Si $\tilde{i}$ se estima como un número borroso triangular, $\tilde{i}$ = (i^1, i^2, i^3), obtendremos el factor de descuento de una unidad monetaria con vencimiento a t años, como un número borroso $\tilde{f}_t$, cuya función de pertenencia expresamos a través de $\mu_{\tilde{i}}(x)$ como:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} \dfrac{1+i^3 - x^{-\frac{1}{t}}}{i^3 - i^2} & \text{si } (1+i^3)^{-t} \le x < (1+i^2)^{-t} \\ \dfrac{x^{-\frac{1}{t}} - (1+i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1+i^2)^{-t} \le x < (1+i^1)^{-t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo sus α-cortes,

$$f_{t\alpha} = \left[(1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{-t}, (1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{-t}\right]$$

1.3.3.2. Propuestas para la determinación de un tipo de interés variable

Propuesta 1

La primera alternativa que proponemos es ofrecer al asegurado una proporción de los tipos futuros –o todos, ya que partimos de escenarios optimistas y pesimistas con un grado de verdad asignado- que han sido estimados a través de la ETTI. El hecho de que el horizonte para el que somos capaces de estimar la ETTI sea inferior a la duración del contrato de seguro provoca que, a partir de cierto vencimiento, el asegurador no tenga un interés de referencia con el que valorar los flujos con dicho o superior vencimiento. Podemos proponer dos formas de solventar este problema:

1) Una alternativa es tomar el tipo forward para el vencimiento más lejano estimado y aplicarlo en los periodos más alejados, para los cuales no se tiene información de las expectativas del mercado sobre los tipos que regirán en los mismos. Como fue comentado, los agentes económicos son menos capaces de discernir entre tipos forward a medida que los vencimientos están más alejados, de forma que, con esta solución, estaríamos suponiendo que el tipo forward tiene un comportamiento asintótico, lo cual es, cuanto menos, razonable.
2) Alternativamente, para los periodos en los que no se disponga de una estimación de los tipos forward podemos utilizar un tipo de interés único estimado por los procedimientos propuestos en el apartado 1.3.3.1.

Si se opta por introducir esta forma de variabilidad en el tipo de interés de actualización, el interés a aplicar durante el t-ésimo año del contrato vendrá dado por el número borroso:

$$_{t\text{-}1}\tilde{i}_1 = \left\{x / \mu_{_{t-1}\tilde{i}_1}(x)\right\} = \left\{_{t-1}i_{1\alpha} = \left[_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha)\right] / 0 \le \alpha \le 1\right\}$$

de esta forma, el factor de actualización para una cuantía con vencimiento a t años será el número borroso $\tilde{f}_t$, que se hallará como:

$$\tilde{f}_j = \prod_{j=1}^{t} \left(1 + {}_{j-1}\tilde{i}_1\right)^{-1}$$

Siendo entonces sus α-cortes:

$$f_{t\alpha} = \left[\prod_{j=1}^{t} \left[1 + {}_{t-1}i_1^2(\alpha)\right]^{-1}, \prod_{j=1}^{t} \left[1 + {}_{t-1}i_1^1(\alpha)\right]^{-1} \right]$$

y su función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \bigvee_{x=\prod_{j=1}^{t}(1+x_j)^{-1}} \left[\bigwedge_{j=1}^{m} \mu_{{}_{j-1}\tilde{i}_1}(x_j) \right]$$

Desde esta óptica, la utilización de un tipo de interés único en la valoración actuarial podría ser interpretado como la consecuéncia de utilizar una ETTI borrosa plana. Podríamos comprobar que en este caso, podemos hallar una correspondencia con trabajos que tratan el interés como una variable aleatoria, como el ya mencionado trabajo de Boyle (1976), donde la hipótesis que se realiza es que los intereses correspondientes a cada periodo de la vida del contrato son variables aleatorias idénticamente distribuidas.

<u>Propuesta 2</u>

Otra alternativa, ya propuesta en el mencionado trabajo de Ostasiewski (1993), consistiría en utilizar una ETTI borrosa, cuya construcción ha sido el objeto de análisis de la segunda parte de la tesis. Cuando utilizamos un tipo de interés único borroso, estamos suponiendo una ETTI plana. Sin embargo, en contadas ocasiones la ETTI de un mercado –en nuestro caso nos interesa el de deuda pública-, tendrá esa forma. Así, Ostasiewski considera que una alternativa válida sería tomar una ETTI fuzzyficada, de forma que con dicha fuzzyficación quede plasmada la incertidumbre que tiene el asegurador sobre los tipos de interés futuros, la vaguedad de los mecanismos de política económica en su influencia sobre los tipos de interés a largo plazo, la anticipación de la inflación por parte de los agentes económicos, etc. Bien es cierto, como ya ha sido comentado con anterioridad, que posiblemente la ETTI estimada no cubra los vencimientos de las primas o prestaciones más alejadas en el tiempo. En este caso, para estimar los tipos spot más lejanos, podemos suponer que a partir de un determinado vencimiento éste es un tipo único. Para la estimación de dicho tipo spot constante podemos tomar el más alejado estimado –se asume un comportamiento asintótico de la ETTI- o un tipo de interés estimado con los métodos propuestos en el apartado 1.3.3.1. De esta forma, para un vencimiento t, si hemos estimado el tipo spot borroso $\tilde{i}_t$ como:

$$\tilde{i}_t = \left\{x / \mu_{\tilde{i}_t}(x)\right\} = \left\{i_{t\alpha} = \left[i_t^1(\alpha), i_t^2(\alpha)\right] / 0 \le \alpha \le 1\right\}$$

El factor de descuento para un vencimiento t, $\tilde{f}_t$ se obtendrá como:

$$\tilde{f}_t = (1+\tilde{i}_t)^{-t}$$

Cuya función de pertenencia, aplicando el principio de extensión de Zadeh será:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \mu_{\tilde{i}_t}\left(x^{-\frac{1}{t}} - 1\right)$$

y los α-cortes de $\tilde{f}_t$, $f_{t\alpha}$:

$$f_{t\alpha} = \left[(1+i_t^2(\alpha))^{-t}, (1+i_t^1(\alpha))^{-t}\right]$$

Si $\tilde{i}_t$ se estima como un número borroso triangular, $\tilde{i}_t = (i_t^1, i_t^2, i_t^3,)$, obtendremos para el valor hoy de una unidad monetaria con vencimiento a t años, $\tilde{f}_t$, a través de su función de pertenencia, como:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} \dfrac{1+i_t^3 - x^{-\frac{1}{t}}}{i_t^3 - i_t^2} & \text{si } (1+i_t^3)^{-t} \le x < (1+i_t^2)^{-t} \\ \dfrac{x^{-\frac{1}{t}} - (1+i_t^1)}{i_t^2 - i_t^1} & \text{si } (1+i_t^2)^{-t} \le x < (1+i_t^1)^{-t} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y a través de sus α-cortes como,

$$f_{t\alpha} = \left[(1+i_t^3 - (i_t^3 - i_t^2)\alpha)^{-t}, (1+i_t^1 + (i_t^2 - i_t^1)\alpha)^{-t}\right]$$

Evidentemente, si utilizamos los métodos de estimación de la ETTI propuestos en el apartado 3.2. de la segunda parte de la tesis, aplicando la expresión [16] de dicho apartado, correspondiente a $\tilde{f}_t$, el factor de decuento para cualquier vencimiento es un número L-L de Dubois y Prade. Así, si hubieramos ajustado unos parámetros triangulares para [16], $\tilde{f}_t$ también será un número borroso triangular.

1.3.3.3. Utilización de tipos de interés con periodicidad inferior al año

Ya comentamos en el apartado 1.2., en el cual dimos unos breves esbozos sobre el tratamiento que se da al fenómeno de la mortalidad en la valoración actuarial, que normalmente la periodicidad de las prestaciones o de las primas de un seguro, suelen ser inferiores al año. En este caso, sería más cómodo realizar la valoración de los contratos con un tanto (o tantos) de interés de dicha periodicidad. Sin embargo, en el mundo del seguro suele considerarse que el interés o intereses que se utilizan son tantos efectivos anuales, o, en estudios más académicos, que son tantos instantáneos. Para hallar un tanto efectivo de frecuencia m, con m>1, $\tilde{i}_m$ equivalente a un tanto efectivo anual borroso $\tilde{i}$ el cual viene dado por su función de pertenencia o, alternativamente, a través de sus α-cortes como:

$$\tilde{i} = \{x / \mu_{\tilde{i}}(x)\} = \{i_\alpha = [i^1(\alpha), i^2(\alpha)] / 0 \le \alpha \le 1\}$$

Dado que se obtiene $\tilde{i}_m$ como:

$$\tilde{i}_m = (1+\tilde{i})^{1/m} - 1$$

su función de pertenencia será:

$$\mu_{\tilde{i}_m}(x) = \mu_{\tilde{i}}\left[(1+x)^m - 1\right]$$

y los α-cortes de $\tilde{i}_m$, $i_{m\alpha}$:

$$i_{m\alpha} = \left[i^1_m(\alpha), i^2_m(\alpha)\right] = \left[\left(1+i^1(\alpha)\right)^{1/m} - 1, \left(1+i^2(\alpha)\right)^{1/m} - 1\right]$$

Si $\tilde{i}$ se estima como un número borroso triangular, $\tilde{i} = (i^1, i^2, i^3)$, podemos obtener la función de pertenencia de $\tilde{i}_m$, $\mu_{\tilde{i}_m}(x)$, a través de $\mu_{\tilde{i}}(x)$ como:

$$\mu_{\tilde{i}_m}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^m - (1+i^1)}{i^2 - i^1} & \text{si } (1+i^1)^{1/m} - 1 \le x < (1+i^2)^{1/m} - 1 \\ \dfrac{1+i^3 - x^m}{i^3 - i^2} & \text{si } (1+i^2)^{1/m} - 1 \le x < (1+i^3)^{1/m} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y los α-cortes como,

$$i_{m\alpha} = \left[(1+i^1+(i^2-i^1)\alpha)^{1/m} - 1, (1+i^3-(i^3-i^2)\alpha)^{1/m} - 1\right]$$

De esta forma, con lo comentado en el apartado 1.2 y en éste subepígrafe, aunque el análisis que realicemos se referirá a periodos anuales, trasponer éste a periodicidades inferiores (mensuales, trimestrales, etc.) no deberá suponer ningún problema. Bastará con trabajar con una tabla de eliminación donde se refleje la evolución de la mortalidad del colectivo analizado para periodicidades inferiores al año, lo cual no es difícil de conseguir empleando alguna de las hipótesis sobre el comportamiento del tanto instantáneo de mortalidad dentro de cada edad, las cuales fueron apuntadas en el apartado 1.2.; y realizando las correspondientes valoraciones financieras con un tanto efectivo cuya periodicidad sea la deseada. Ya hemos comprobado que éstos pueden ser inferidos a través del tanto o los tantos efectivos anuales que el asegurador desee utilizar sin ningún problema.

1.3.3.4. Intervalo esperado y valor esperado del factor de actualización.

Cuando calculamos valores actuales, lo cual es necesario para determinar primas, provisiones matemáticas o determinados parámetros asociados al riesgo de mortalidad que soporta el asegurador, si el interés que utilizamos en el proceso de actualización es un número borroso, dichos valores serán, generalmente, números borrosos. Sin embargo, en muchas ocasiones, deberemos plasmar dichas estimaciones mediante un número crisp que represente razonablemente bien el número borroso que ha sido obtenido. Para ello, nosotros propondremos la utilización del valor esperado de dicho número borroso, que, como ya comentamos en la primera parte de la tesis, permite introducir la aversión al riesgo del decisor en el proceso de desfuzzyficación. En todos los casos, dichos parámetros se obtendrán como combinación lineal de los valores esperados asociados a los factores de descuento que se utilicen en la valoración del seguro o de la estructura actuarial que sea analizada. Por ello dedicamos una especial atención a la desfuzzyficación de los factores de actualización, ya que la obtención del valor esperado del resto de parámetros que sean analizados será inmediata.

De forma general, podemos notar al factor de descuento asociado a un vencimiento t, como un número borroso que vendrá dado por su función de pertenencia y sus α-cortes como:

$$\widetilde{f}_t = \left\{x / \mu_{\widetilde{f}_t}(x)\right\} = \left\{f_{t\alpha} = \left[f_t^1(\alpha), f_t^2(\alpha)\right] / 0 \leq \alpha \leq 1\right\}$$

Siendo su intervalo esperado:

$$\mathrm{IE}[\widetilde{f}_t] = \left[\int_0^1 f_t^1(\alpha)d\alpha, \int_0^1 f_t^2(\alpha)d\alpha\right]$$

De esta forma, para un grado de aversión al riesgo del decisor, $\beta \in [0,1]$, el valor esperado de $\widetilde{f}_t$ será:

$$\mathrm{VE}[\widetilde{f}_t;\beta] = (1-\beta)\int_0^1 f_t^1(\alpha)d\alpha + \beta\int_0^1 f_t^2(\alpha)d\alpha$$

A partir de esta expresión general distinguiremos dos casos particulares.

Caso 1

Suponemos que trabajamos directamente con los factores de actualización obtenidos en el apartado 3.2. de la segunda parte de la tesis, suponiéndose además que son números borrosos triangulares. En este caso, podemos notarlos por la tripleta[5] $\left(f_t^1, f_t^2, f_t^3\right)$, donde f_t^1 es el factor de actualización más pequeño posible, f_t^2 es el factor de actualización al que se le asigna máxima presunción y f_t^3 es el factor de actualización mayor. En este caso:

$$IE[\tilde{f}_t] = \left[\frac{f_t^1 + f_t^2}{2}, \frac{f_t^2 + f_t^3}{2}\right]$$

y,

$$VE[\tilde{f}_t;\beta] = (1-\beta)\frac{f_t^1 + f_t^2}{2} + \beta\frac{f_t^2 + f_t^3}{2} = \frac{(1-\beta)f_t^1 + f_t^2 + \beta f_t^3}{2}$$

Caso 2

Se utilizan los intereses spot estimados en la valoración durante todo el horizonte temporal, y éstos son números borrosos triangulares, que pueden ser variables o constantes. En este último caso aplicamos un único tipo de valoración, siendo la ETTI plana o bien se ha tomado para realizar la valoración del seguro un tipo "medio" para todo el horizonte planificador. Así, en este supuesto, $\tilde{i}_0 = \tilde{i}_1 = ... = \tilde{i}_n = \tilde{i}$. Sea cual cual sea la circunstáncia a la que nos enfrentemos –la más particular o la más general-, para un vencimiento t, el interés vendrá dado pues por la tripleta: $\tilde{i}_t = \left(i_t^1, i_t^2, i_t^3\right)$. En este contexto, debemos distinguir tres supuestos:

a) Si t=0, no existe actualización, siendo por tanto $f_{0\alpha}$=[1,1] y por tanto:

$$\mu_{\tilde{f}_0}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

De esta forma:

$IE[\tilde{f}_0]$ = [1,1] y $VE[\tilde{f}_0;\beta]$ = 1

[5] Obsérvese que la notación que utilizamos para los factores de actualización es distinta a la utilizada en el apartado anterior. En aquél, la tripleta estaba compuesta por el valor de máxima presunción, la desviación a la izquierda, cuya sustracción del primer valor nos permitiría obtener el valor del mínimo posible, y la desviación a la derecha, cuya adición al valor de máxima presunción nos permitirá obtener el mayor valor estimado.

b) Si t=1,

$$EI[\widetilde{f}_1]=\left[\int_0^1 (1+i_t^3-(i_t^3-i_t^2)\alpha)^{-1}d\alpha, \int_0^1 (1+i_t^1+(i_t^2-i_t^1)\alpha)^{-1}d\alpha\right]=\left[\frac{\ln\frac{1+i_t^3}{1+i_t^2}}{i_t^3-i_t^2}, \frac{\ln\frac{1+i_t^2}{1+i_t^1}}{i_t^2-i_t^1}\right]$$

y por tanto,

$$VE[\widetilde{f}_1;\beta]=(1-\beta)\frac{\ln\frac{1+i_t^3}{1+i_t^2}}{i_t^3-i_t^2}+\beta\frac{\ln\frac{1+i_t^2}{1+i_t^1}}{i_t^2-i_t^1}$$

c) Si t=2,3,…,n

$$EI[\widetilde{f}_t]=\left[\int_0^1 (1+i_t^3-(i_t^3-i_t^2)\alpha)^{-t}d\alpha, \int_0^1 (1+i_t^1+(i_t^2-i_t^1)\alpha)^{-t}d\alpha\right]=\left[\frac{\left(1+i_t^2\right)^{-t+1}-\left(1+i_t^3\right)^{-t+1}}{(t-1)\left(i_t^3-i_t^2\right)},\right.$$

$$\left.\frac{\left(1+i_t^1\right)^{-t+1}-\left(1+i_t^2\right)^{-t+1}}{(t-1)\left(i_t^2-i_t^1\right)}\right]$$

y por tanto,

$$VE[\widetilde{f}_t;\beta]=(1-\beta)\frac{\left(1+i_t^2\right)^{-t+1}-\left(1+i_t^3\right)^{-t+1}}{(t-1)\left(i_t^3-i_t^2\right)}+\beta\frac{\left(1+i_t^1\right)^{-t+1}-\left(1+i_t^2\right)^{-t+1}}{(t-1)\left(i_t^2-i_t^1\right)}$$

1.4. FORMULACIÓN DEL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA ESTÁTICO EN EL SUPUESTO DE INTERÉS INCIERTO

Ya hemos comentado en el epígrafe anterior que muy pocos autores han modelizado la incertidumbre del fenómeno financiero inherente a un seguro de vida cuantificando el interés o intereses de valoración a través de números borrosos. En todos estos trabajos, a la hora de realizar la valoración financiero-actuarial del contrato, por ejemplo, en la determinación de las primas, se ha utilizado el enfoque más "clásico" de la matemática de los seguros de vida, basado en el denominado principio de equivalencia estático. Este enfoque consiste en reducir los capitales financieros que intervienen en la operación, cuyo devengo depende de un determinado suceso sobre la vida del asegurado, a su esperanza matemática.

De forma más precisa Vegas Asensio y Nieto del Alba (1993, p.9), respecto al principio de equivalencia estático, afirman:

> "*Este principio considera a la operación en su total duración. Existe equivalencia actuarial cuando el valor actual de las aportaciones es igual al valor actual de las*

prestaciones, calculados estos valores actuales por medio de la esperanza matemática de los correspondientes capitales que definen el proceso financiero-estocástico".

Así, el principio de equivalencia estático parte de que un seguro de vida es una operación financiero-aleatoria donde los capitales devengan ante el acaecimiento de determinados sucesos. Esta operación siempre tiene una duración finita [0, T], y se divide en t periodos, donde $t \in [0, T]$.

Si denotamos por x la edad del asegurado, consideramos la variable aleatoria ξ_x^t asociada a sucesos relacionados con la vida del asegurado, en nuestro caso, supervivencia o fallecimiento durante un determinado periodo, cuyas realizaciones determinarán el devengo de los capitales pactados en el contrato.

Así, distinguimos dos subprocesos en un contrato de seguros de vida. En primer lugar el de primas, que podemos notar como:

$P(\xi_x^r, t)$; $t \in [0,T]$, siendo $P(\xi_x^r, t)$ una cuantía aleatoria asociada a la prima a pagar por parte del asegurado en un momento t.