

ya que $g_j(t) \geq g_j(t-1)$ (las funciones g_j son no decrecientes) y $f_{t-1} = 1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t-1) \geq$

$\geq f_t = 1 + \sum_{j=1}^m x_j g_j(t)$ por la propia naturaleza de una función de descuento. Así, es fácil comprobar

que tanto el numerador como el denominador son mayores o iguales que cero, por lo que todas las derivadas parciales son no negativas respecto de los parámetros x_j .

De esta forma, [24] puede quedar expresado como:

$${}_{t-1}f_{t\alpha} = \left[\frac{1 + \sum_{j=1}^m a_j^1(\alpha)g_j(t)}{1 + \sum_{j=1}^m a_j^1(\alpha)g_j(t-1)}, \frac{1 + \sum_{j=1}^m a_j^2(\alpha)g_j(t)}{1 + \sum_{j=1}^m a_j^2(\alpha)g_j(t-1)} \right] = \left[\frac{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}}{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}}, \frac{f_t + L^{-1}(\alpha)l_{f_t}}{f_t + L^{-1}(\alpha)l_{f_t}} \right]$$

que es la solución de ecuaciones clásica que se obtiene para los factores de actualización forward.

Así pues, como en nuestro caso las funciones $g_j(t)$ con las que nosotros trabajamos son no decrecientes y no negativas, ello implica, tal como hemos demostrado, que la función factor de actualización forward a un año es no negativo y no decreciente respecto a los parámetros que son ajustados con la regresión, a_1, a_2, \dots, a_n , por lo que podemos identificar la solución de ecuaciones clásica y la de Buckley y Qu, de forma que la solución de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ en sentido clásico siempre existe.

4.3. ESTIMACIÓN DE LOS TIPOS DE INTERÉS FUTUROS A TRAVÉS DE NÚMEROS BORROSOS

A partir del factor de actualización forward a un año dentro de $t-1$ años, podemos hallar el interés forward asociado, ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ sin más que considerar las relaciones expuestas en el apartado 1.1.3. En este caso, como el factor de actualización forward a un año es un número borroso, el tipo forward asociado también lo será, de forma que:

$${}_{t-1}\tilde{f}_1 = {}_{t-1}\tilde{f}_1^{-1} - 1$$

Siendo entonces la función de pertenencia del tipo forward:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \bigvee_{x=y^{-1}-1} \mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(y) = \mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}\left((1+x)^{-1}\right)$$

y sus α -cortes, si ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ admite solución en sentido clásico:

$$\begin{aligned} {}_{t-1}i_{1\alpha} &= [{}_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha)] = \left[\left(({}_{t-1}f_1^2(\alpha))^{-1} - 1, ({}_{t-1}f_1^1(\alpha))^{-1} - 1 \right) \right] = \left[\frac{f_{t-1}^2(\alpha)}{f_t^2(\alpha)} - 1, \frac{f_{t-1}^1(\alpha)}{f_t^1(\alpha)} - 1 \right] = \\ &= \left[\frac{f_{t-1} + L^{-1}(\alpha)r_{f_{t-1}}}{f_t + L^{-1}(\alpha)r_{f_t}} - 1, \frac{f_{t-1} - L^{-1}(\alpha)l_{f_{t-1}}}{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Asimismo, la función de pertenencia se hallará despejando de los α -cortes, el nivel de presunción α en función de los extremos. Así, la función de pertenencia que obtenemos para el tipo forward dentro de t-1 años es:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ L \left(\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} \right) & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y por tanto sus α -cortes son:

$${}_{t-1}i_{1\alpha} = [{}_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_{t-1} + L^{-1}(\alpha)r_{f_{t-1}}}{f_t + L^{-1}(\alpha)r_{f_t}} - 1, \frac{f_{t-1} - L^{-1}(\alpha)l_{f_{t-1}}}{f_t - L^{-1}(\alpha)l_{f_t}} - 1 \right]$$

En el caso en que se hubiera tenido que adoptar la solución de ecuaciones borrosas de Buckley y Qu, la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ sería:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{f}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t}{(1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} + r_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ L \left(\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} + (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}}} \right) & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α -cortes:

$${}_{t-1}i_{1\alpha} = [{}_{t-1}i_1^1(\alpha), {}_{t-1}i_1^2(\alpha)] = \left[\frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}{f_t + r_{f_t} L^{-1}(\alpha)} - 1, \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}} L^{-1}(\alpha)}{f_t - l_{f_t} L^{-1}(\alpha)} - 1 \right]$$

Asimismo, bajo el supuesto de simetría de los factores de actualización que definen los tipos al contado, la función de pertenencia de ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ vendrá dada, en el caso en que exista solución de ${}_{t-1}\tilde{f}_1$ en el sentido clásica, por:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{i}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| (1+x)^{-1} f_{t-1} - f_t \right|}{(1+x)^{-1} l_{f_{t-1}} - l_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}}{f_t + l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Y si debemos recurrir a la solución de Buckley y Qu, la función de pertenencia que obtendremos es:

$$\mu_{{}_{t-1}\tilde{i}_1}(x) = \begin{cases} L \left(\frac{\left| (1+x)^{-1} f_{t-1} - f_t \right|}{(1+x)^{-1} l_{f_{t-1}} + l_{f_t}} \right) & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + l_{f_t}} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En cualquier caso, y como ya comentamos para ${}_{t-1}\tilde{f}_1$, los tipos borrosos ${}_{t-1}\tilde{i}_1$ no mantienen la condición de número borroso L-L de Dubois y Prade. Sin embargo, y como comprobaremos a continuación, su aproximación mediante números borrosos triangulares es muy razonable cuando partimos de estimaciones triangulares de la ETTI, que son las que utilizamos en el análisis que estamos realizando en el mercado de deuda pública el 22-1-1999.

4.3.1. Estimación de los tipos futuros a través de números borrosos triangulares

En el caso particular de una estimación triangular de las rentabilidades de los bonos o del factor de actualización, ya hemos comprobado que la estimación que obtendremos de los tipos de interés futuros no mantendrá dicha triangularidad. Sin embargo, consideramos que será de interés expresar dichas estimaciones a través de números borrosos de dicha naturaleza, ya que, por una parte, su manejo y operatividad es relativamente sencilla; y por otra, es indudable que el proceso de estimación subjetiva de una determinada magnitud suele realizarse fijándose el valor más “posible/probable”, un valor mínimo y un valor máximo para la misma. La plasmación por excelencia de esta intuitiva forma de realizar estimaciones de determinación de dicha magnitud a través de números borrosos, y en concreto, mediante números borrosos triangulares.

Así, la función de pertenencia del tipo de interés a un año estimado para dentro de t-1 años, si existe solución en el sentido clásico, en nuestro caso particular es:

$$\mu_{\tilde{f}_t}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}} & \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ 1 - \frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obsérvese que hemos eliminado el valor absoluto en la función de pertenencia anterior, de forma

que $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}}$ y $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}}$ deben ser positivos. En efecto, para la primera

función, que está definida para $\frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1$, podemos observar que:

a) $f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \leq 0$, ya que $x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \Rightarrow (1+x)^{-1} > \frac{f_t}{f_{t-1}} \Rightarrow f_t < (1+x)^{-1}f_{t-1}$

b) $(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t} \leq 0$. Del dominio de la función podemos observar que

$$\frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x \text{ por lo que } f_t + r_{f_t} \geq (f_{t-1} + r_{f_{t-1}})(1+x)^{-1}. \text{ Así, } f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \geq$$

$$\geq (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t} \text{ y } (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t} \leq 0, \text{ como demostramos en a).}$$

c) Así, $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{(1+x)^{-1}r_{f_{t-1}} - r_{f_t}} \geq 0$

Para $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}}$, podemos observar que está definido para $\frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1$.

De aquí se deduce que:

a) $f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \geq 0$, ya que como $x \geq \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \Rightarrow (1+x)^{-1} \leq \frac{f_t}{f_{t-1}} \Rightarrow f_t \geq (1+x)^{-1}f_{t-1}$

b) $l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} \geq 0$. Del dominio de la función podemos observar que

$$\frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 > x \text{ por lo que } f_t - l_{f_t} < (f_{t-1} - l_{f_{t-1}})(1+x)^{-1}. \text{ Así, } f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} <$$

$$< l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} \text{ y } l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} \geq 0.$$

c) Por tanto $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} \geq 0$.

Si recurrimos a la solución de Buckley y Qu, obtenemos:

$$\mu_{\tilde{i}_{t-1}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t}{(1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} + r_{f_t}} & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \\ 1 - \frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} + (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}}} & \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde podemos comprobar que $\frac{(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t}{(1+x)^{-1}l_{f_{t-1}} + r_{f_t}}$ y $\frac{f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1}}{l_{f_t} + (1+x)^{-1}r_{f_{t-1}}}$ son positivos, ya que

$$(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t \geq 0 \quad \text{para} \quad \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t + r_{f_t}} - 1 \leq x < \frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \quad \text{y} \quad f_t - (1+x)^{-1}f_{t-1} \geq 0, \quad \text{para}$$

$$\frac{f_{t-1}}{f_t} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + r_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1. \text{ Estas últimas afirmaciones pueden deducirse con planteamientos}$$

semejantes a los expuestos cuando analizábamos la función de pertenencia de \tilde{i}_{t-1} cuando en su resolución utilizábamos el concepto de resolución en sentido clásico y también partíamos de factores de descuento spot triangulares.

Por otra parte y dada la naturaleza de las funciones que definan el factor de descuento en los métodos propuestos en los apartados 3.2.1. y 3.2.2. permiten que \tilde{f}_{t-1} tenga solución en sentido clásico, podemos comprobar que la función de pertenencia del tipo de interés estimado para dentro de t-1 año es:

$$\mu_{\tilde{i}_{t-1}}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|(1+x)^{-1}f_{t-1} - f_t|}{l_{f_t} - (1+x)^{-1}l_{f_{t-1}}} & \frac{f_{t-1} - l_{f_{t-1}}}{f_t - l_{f_t}} - 1 \leq x \leq \frac{f_{t-1} + l_{f_{t-1}}}{f_t + l_{f_t}} - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nuestra propuesta, consiste en ajustar la estimación realizada de los tipos futuros a través de un número borroso triangular que mantenga el mismo núcleo y soporte que el original, y posteriormente analizar hasta que punto es razonable sostener que $\tilde{i}_{t-1} \approx \left(i_{t-1}, l_{i_{t-1}}, r_{i_{t-1}} \right)$, con:

$$l_{i_{t-1}} = i_{t-1} - i_{t-1}^1(0) \text{ y } r_{i_{t-1}} = i_{t-1}^2(0) - i_{t-1}$$

En este caso, y como ya comentamos en el apartado 1.4.2. de la primera parte de la tesis, dado que el número borroso que pretendemos aproximar se halla como cociente de dos números borrosos triangulares, los niveles de presunción donde se cometen mayores errores en términos absolutos sobre los extremos izquierdos y derechos de los α -cortes de ${}_{t-1}\tilde{i}_t$ son, tanto si existe solución en sentido clásico como si debemos recurrir a la solución de Buckley y Qu:

$$\alpha_1^*(t-1) = \frac{f_t + r_{f_t} - \sqrt{(f_t + r_{f_t})f_t}}{r_{f_t}} \text{ y } \alpha_D^*(t-1) = \frac{\sqrt{(f_t - l_{f_t})f_t} - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}}$$

Asimismo, si en la estimación de los tipos futuros partimos de los factores de actualización spot simétricos del apartado 3.2:

$$\alpha_1^*(t-1) = \frac{f_t + l_{f_t} - \sqrt{(f_t + l_{f_t})f_t}}{l_{f_t}} \text{ y } \alpha_D^*(t-1) = \frac{\sqrt{(f_t - l_{f_t})f_t} - (f_t - l_{f_t})}{l_{f_t}}$$

A partir de estos valores, y de la forma expuesta en la primera parte de la tesis, calcularíamos los errores que como máximo se podrían producir en el error de presunción que tome un determinado valor por el hecho de utilizar una aproximación triangular para el tipo forward.

4.3.1.1. Resultados obtenidos con los métodos de estimación de la ETTI basados en la curva de rentabilidades

Si estimamos la ETTI a través de la curva de rentabilidades mediante interpolación lineal, los tipos forward para vencimientos de hasta 10 años son, el 22-1-1999, y ya aproximados triangularmente:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02955, 0, 0) | (0,02955, 0, 0) |
| 2 | (0,02786, 0, 0) | (0,02786, 0, 0) |
| 3 | (0,03489, 0,00073, 0,00073) | (0,03489, 0,00146, 0,00146) |
| 4 | (0,03249, 0,00081, 0,00081) | (0,03249, 0,00162, 0,00162) |
| 5 | (0,04083, 0,00056, 0,00056) | (0,04083, 0,00112, 0,00113) |
| 6 | (0,04461, 0,00062, 0,00062) | (0,04461, 0,00125, 0,00125) |
| 7 | (0,04471, 0,00117, 0,00117) | (0,04471, 0,00233, 0,00234) |
| 8 | (0,04487, 0,00124, 0,00124) | (0,04487, 0,00248, 0,00249) |
| 9 | (0,05121, 0,00221, 0,00222) | (0,05121, 0,00442, 0,00444) |
| 10 | (0,04176, 0,00145, 0,00145) | (0,04176, 0,00290, 0,00291) |

Con las estimaciones polinómicas de la curva de rentabilidades, los tipos forward que obtenemos son:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0'5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02881, 0,00073, 0,00073) | (0,02881, 0,00145, 0,00145) |
| 2 | (0,02960, 0,00073, 0,00073) | (0,02960, 0,00145, 0,00145) |
| 3 | (0,03208, 0,00073, 0,00073) | (0,03208, 0,00145, 0,00145) |
| 4 | (0,03547, 0,00073, 0,00073) | (0,03547, 0,00145, 0,00145) |
| 5 | (0,03912, 0,00073, 0,00073) | (0,03912, 0,00145, 0,00145) |
| 6 | (0,04253, 0,00073, 0,00073) | (0,04253, 0,00146, 0,00146) |
| 7 | (0,04531, 0,00073, 0,00073) | (0,04531, 0,00146, 0,00146) |
| 8 | (0,04726, 0,00073, 0,00073) | (0,04726, 0,00146, 0,00146) |
| 9 | (0,04830, 0,00073, 0,00073) | (0,04830, 0,00147, 0,00147) |
| 10 | (0,04859, 0,00074, 0,00074) | (0,04859, 0,00147, 0,00147) |

Los resultados que se obtienen si el modelo utilizado es el de Cohen *et al.* son:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0'5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02847, 0,00100, 0,00100) | (0,02847, 0,00199, 0,00199) |
| 2 | (0,03043, 0,00100, 0,00100) | (0,03043, 0,00199, 0,00199) |
| 3 | (0,03345, 0,00100, 0,00100) | (0,03345, 0,00199, 0,00199) |
| 4 | (0,03612, 0,00100, 0,00100) | (0,03612, 0,00199, 0,00199) |
| 5 | (0,03855, 0,00100, 0,00100) | (0,03855, 0,00200, 0,00200) |
| 6 | (0,04083, 0,00100, 0,00100) | (0,04083, 0,00200, 0,00200) |
| 7 | (0,04300, 0,00100, 0,00100) | (0,04300, 0,00200, 0,00200) |
| 8 | (0,04510, 0,00100, 0,00100) | (0,04510, 0,00201, 0,00201) |
| 9 | (0,04716, 0,00101, 0,00101) | (0,04716, 0,00201, 0,00201) |
| 10 | (0,04920, 0,00101, 0,00101) | (0,04920, 0,00202, 0,00202) |

Y para el de Bradley y Crame obtenemos:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0'5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02842, 0,00124, 0,00124) | (0,02842, 0,00248, 0,00248) |
| 2 | (0,03185, 0,00124, 0,00125) | (0,03185, 0,00249, 0,00249) |
| 3 | (0,03430, 0,00125, 0,00125) | (0,03430, 0,00249, 0,00250) |
| 4 | (0,03658, 0,00125, 0,00125) | (0,03658, 0,00250, 0,00250) |
| 5 | (0,03879, 0,00125, 0,00126) | (0,03879, 0,00251, 0,00251) |
| 6 | (0,04101, 0,00126, 0,00126) | (0,04101, 0,00251, 0,00252) |
| 7 | (0,04325, 0,00126, 0,00126) | (0,04325, 0,00252, 0,00253) |
| 8 | (0,04552, 0,00127, 0,00127) | (0,04552, 0,00253, 0,00254) |
| 9 | (0,04786, 0,00127, 0,00128) | (0,04786, 0,00255, 0,00255) |
| 10 | (0,05027, 0,00128, 0,00128) | (0,05027, 0,00256, 0,00257) |

Los errores que como máximo se cometen en el nivel de presunción al aproximar triangularmente estos tipos forward son:

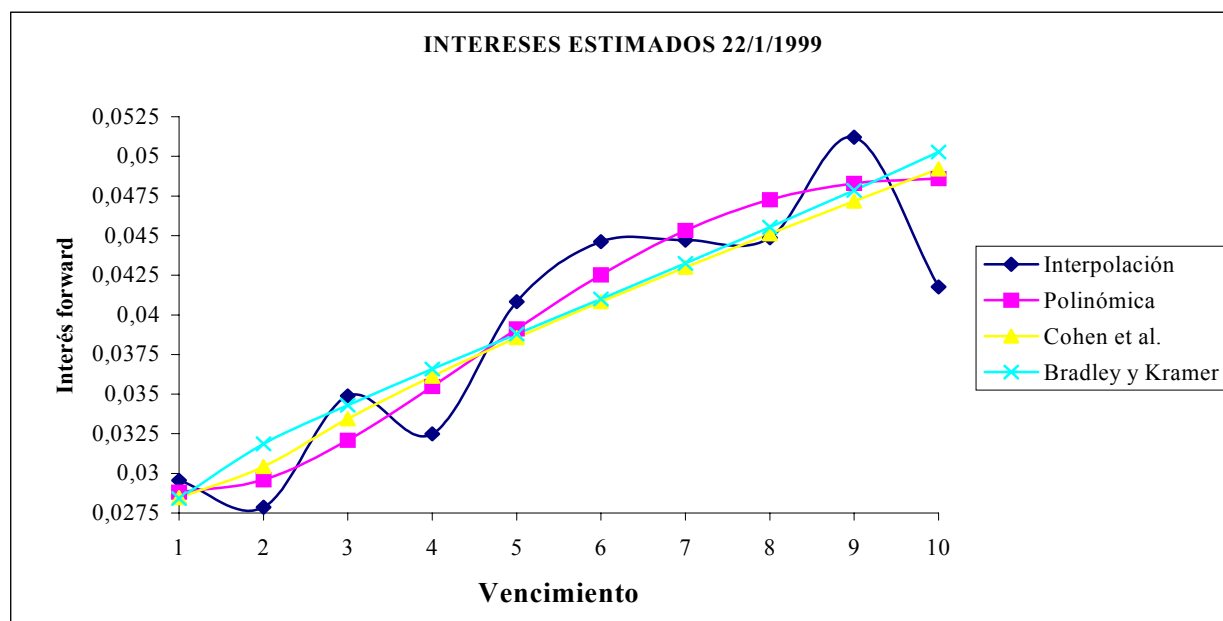
| t | Interpolación | | Polinómica | | Cohen <i>et al.</i> | | Bradley y Crame | |
|---|---------------|----------------|--------------|----------------|---------------------|----------------|-----------------|----------------|
| | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0'5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0'5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0'5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0'5$ |
| 1 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00018 | 0,00035 | 0,00024 | 0,00049 | 0,00030 | 0,00060 |
| 2 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00035 | 0,00071 | 0,00048 | 0,00097 | 0,00060 | 0,00121 |
| 3 | 0,00018 | 0,00035 | 0,00053 | 0,00106 | 0,00073 | 0,00145 | 0,00090 | 0,00181 |

| | | | | | | | | |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4 | 0,00002 | 0,00005 | 0,00070 | 0,00141 | 0,00097 | 0,00193 | 0,00121 | 0,00241 |
| 5 | 0,00016 | 0,00031 | 0,00088 | 0,00176 | 0,00121 | 0,00241 | 0,00151 | 0,00302 |
| 6 | 0,00030 | 0,00061 | 0,00105 | 0,00211 | 0,00145 | 0,00290 | 0,00181 | 0,00362 |
| 7 | 0,08909 | 0,08903 | 0,00123 | 0,00246 | 0,00169 | 0,00338 | 0,00211 | 0,00423 |
| 8 | 0,08399 | 0,08425 | 0,00140 | 0,00281 | 0,00193 | 0,00386 | 0,00242 | 0,00483 |
| 9 | 0,00025 | 0,00051 | 0,00158 | 0,00316 | 0,00217 | 0,00434 | 0,00272 | 0,00544 |
| 10 | 0,00009 | 0,00019 | 0,00175 | 0,00351 | 0,00241 | 0,00482 | 0,00303 | 0,00605 |

Podemos observar que en todos los casos la aproximación triangular de los tipos forward es más que aceptable. A continuación presentamos el nivel de presunción que los intereses futuros estimados en certeza toman en el número borroso correspondiente al tipo forward para el mismo vencimiento:

| t | Interpolación | | Polinómica | | Cohen <i>et al.</i> | | Bradley y Crame | |
|--------------|---------------|----------------|--------------|----------------|---------------------|----------------|-----------------|----------------|
| | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
| 1 | 1 | 1 | 0,77 | 0,89 | 0,85 | 0,92 | 0,75 | 0,88 |
| 2 | 1 | 1 | 0,56 | 0,78 | 0,77 | 0,88 | 0,43 | 0,71 |
| 3 | 1 | 1 | 0,72 | 0,86 | 0,96 | 0,98 | 0,32 | 0,66 |
| 4 | 1 | 1 | 0,94 | 0,97 | 0,82 | 0,91 | 0,25 | 0,63 |
| 5 | 1 | 1 | 0,61 | 0,81 | 0,78 | 0,89 | 0,21 | 0,61 |
| 6 | 1 | 1 | 0,40 | 0,70 | 0,82 | 0,91 | 0,18 | 0,59 |
| 7 | 1 | 1 | 0,40 | 0,70 | 0,93 | 0,96 | 0,16 | 0,58 |
| 8 | 1 | 1 | 0,62 | 0,81 | 0,92 | 0,96 | 0,14 | 0,57 |
| 9 | 1 | 1 | 0,97 | 0,98 | 0,72 | 0,86 | 0,13 | 0,56 |
| 10 | 1 | 1 | 0,48 | 0,74 | 0,47 | 0,74 | 0,12 | 0,56 |
| Media | 1 | 1 | 0,65 | 0,82 | 0,80 | 0,90 | 0,32 | 0,63 |

Por otra parte, la representación gráfica de la evolución de los tipos con un nivel de verdad máximo es:



4.3.1.2. Resultados obtenidos con los métodos de estimación del factor de actualización

Si estimamos la ETTI a través de la adaptación de la metodología de McCulloch realizada en 3.2.2. y modelando los factores de actualización al contado \tilde{f}_t a través de simples polinomios, inferimos los siguientes tipos de interés futuros:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02916, 0,00110, 0,00110) | (0,02916, 0,00220, 0,00220) |
| 2 | (0,03021, 0,00117, 0,00117) | (0,03021, 0,00233, 0,00235) |
| 3 | (0,03213, 0,00124, 0,00125) | (0,03213, 0,00248, 0,00251) |
| 4 | (0,03478, 0,00133, 0,00135) | (0,03478, 0,00265, 0,00271) |
| 5 | (0,03800, 0,00144, 0,00146) | (0,03800, 0,00287, 0,00294) |
| 6 | (0,04161, 0,00158, 0,00160) | (0,04161, 0,00313, 0,00323) |
| 7 | (0,04539, 0,00174, 0,00177) | (0,04539, 0,00344, 0,00357) |
| 8 | (0,04906, 0,00192, 0,00196) | (0,04906, 0,00380, 0,00397) |
| 9 | (0,05228, 0,00213, 0,00219) | (0,05228, 0,00420, 0,00443) |
| 10 | (0,05456, 0,00236, 0,00243) | (0,05456, 0,00464, 0,00494) |

A través del modelo de ETTI de McCulloch con factores de actualización especificados a través de splines polinómicos de segundo grado, los resultados que obtenemos son:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02879, 0,00141, 0,00141) | (0,02879, 0,00282, 0,00283) |
| 2 | (0,03078, 0,00104, 0,00104) | (0,03078, 0,00207, 0,00209) |
| 3 | (0,03294, 0,00063, 0,00064) | (0,03294, 0,00126, 0,00128) |
| 4 | (0,03544, 0,00030, 0,00030) | (0,03544, 0,00060, 0,00061) |
| 5 | (0,03881, 0,00039, 0,00039) | (0,03881, 0,00077, 0,00078) |
| 6 | (0,04262, 0,00053, 0,00054) | (0,04262, 0,00106, 0,00108) |
| 7 | (0,04546, 0,00063, 0,00064) | (0,04546, 0,00126, 0,00129) |
| 8 | (0,04652, 0,00064, 0,00065) | (0,04652, 0,00127, 0,00130) |
| 9 | (0,04762, 0,00064, 0,00065) | (0,04762, 0,00127, 0,00131) |
| 10 | (0,04877, 0,00064, 0,00065) | (0,04877, 0,00127, 0,00131) |

Los resultados que sobre los tipos forward se obtienen si el modelo utilizado es el de McCulloch con una especificación del factor de actualización mediante splines cúbicos son:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02921, 0,00105, 0,00106) | (0,02921, 0,00211, 0,00212) |
| 2 | (0,03006, 0,00112, 0,00112) | (0,03006, 0,00223, 0,00225) |
| 3 | (0,03176, 0,00119, 0,00120) | (0,03176, 0,00237, 0,00240) |
| 4 | (0,03445, 0,00128, 0,00129) | (0,03445, 0,00254, 0,00259) |
| 5 | (0,03825, 0,00139, 0,00140) | (0,03825, 0,00276, 0,00282) |
| 6 | (0,04264, 0,00152, 0,00154) | (0,04264, 0,00302, 0,00311) |
| 7 | (0,04650, 0,00168, 0,00171) | (0,04650, 0,00333, 0,00345) |
| 8 | (0,04964, 0,00185, 0,00189) | (0,04964, 0,00367, 0,00383) |
| 9 | (0,05186, 0,00204, 0,00210) | (0,05186, 0,00404, 0,00425) |
| 10 | (0,05295, 0,00224, 0,00231) | (0,05295, 0,00441, 0,00468) |

Y si utilizamos los splines cúbicos exponenciales propuestos en el apartado 2.2.2., entonces, los resultados de las estimaciones realizadas son:

| t | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
|----|-----------------------------|-----------------------------|
| 1 | (0,02931, 0,00103, 0,00104) | (0,02931, 0,00207, 0,00207) |
| 2 | (0,02978, 0,00097, 0,00097) | (0,02978, 0,00194, 0,00195) |
| 3 | (0,03235, 0,00092, 0,00093) | (0,03235, 0,00184, 0,00186) |
| 4 | (0,03569, 0,00089, 0,00090) | (0,03569, 0,00177, 0,00180) |
| 5 | (0,03905, 0,00087, 0,00088) | (0,03905, 0,00174, 0,00177) |
| 6 | (0,04219, 0,00086, 0,00087) | (0,04219, 0,00172, 0,00176) |
| 7 | (0,04505, 0,00087, 0,00088) | (0,04505, 0,00172, 0,00177) |
| 8 | (0,04742, 0,00088, 0,00089) | (0,04742, 0,00174, 0,00179) |
| 9 | (0,04917, 0,00089, 0,00090) | (0,04917, 0,00176, 0,00182) |
| 10 | (0,05028, 0,00090, 0,00092) | (0,05028, 0,00179, 0,00185) |

En todos los casos, a pesar de que los tipos forward no eran números borrosos triangulares, hemos expresado ya su valor aproximado a través de un número borroso de dicha naturaleza. Así, los errores que en el nivel de presunción cometemos como máximo al aproximar triangularmente dichos tipos forward son:

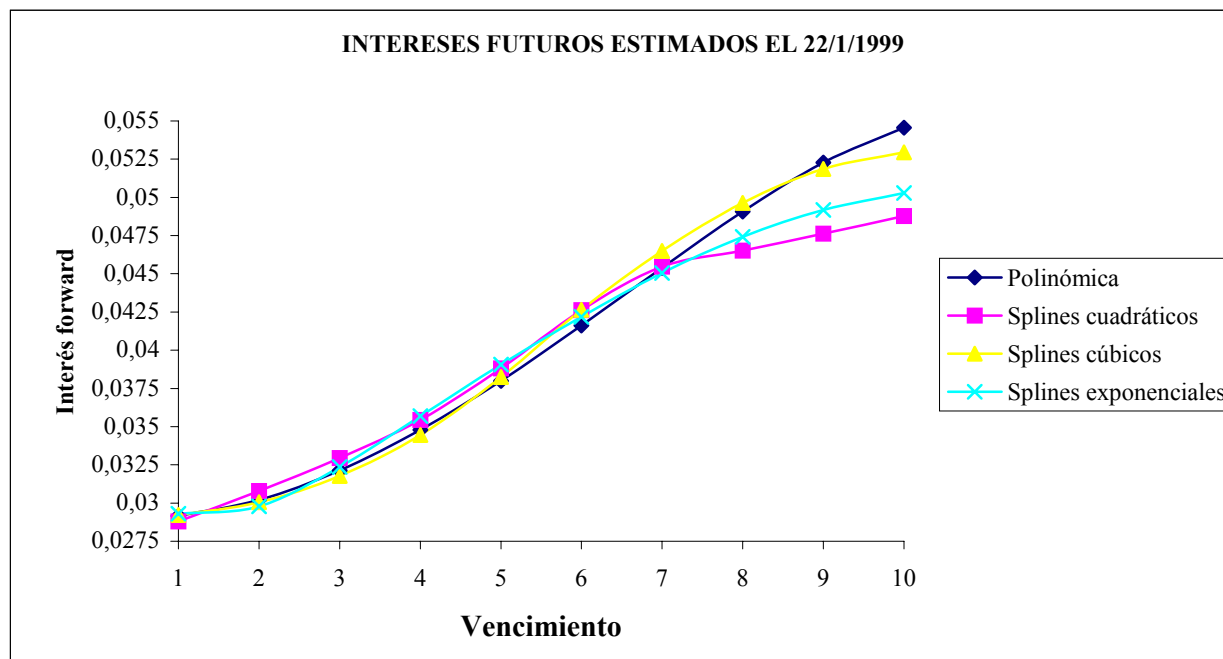
| t | Polinómica | | Splines cuadráticos | | Splines cúbicos | | Splines exponenciales | |
|----|--------------|----------------|---------------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------------|----------------|
| | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
| 1 | 0,00027 | 0,00054 | 0,00034 | 0,00069 | 0,00026 | 0,00051 | 0,00025 | 0,00050 |
| 2 | 0,00055 | 0,00110 | 0,00060 | 0,00119 | 0,00053 | 0,00106 | 0,00049 | 0,00098 |
| 3 | 0,00085 | 0,00171 | 0,00075 | 0,00150 | 0,00082 | 0,00164 | 0,00071 | 0,00143 |
| 4 | 0,00118 | 0,00236 | 0,00082 | 0,00165 | 0,00113 | 0,00227 | 0,00093 | 0,00186 |
| 5 | 0,00153 | 0,00307 | 0,00092 | 0,00184 | 0,00147 | 0,00295 | 0,00114 | 0,00229 |
| 6 | 0,00191 | 0,00384 | 0,00105 | 0,00210 | 0,00184 | 0,00369 | 0,00135 | 0,00271 |
| 7 | 0,00234 | 0,00470 | 0,00120 | 0,00241 | 0,00225 | 0,00451 | 0,00156 | 0,00313 |
| 8 | 0,00280 | 0,00564 | 0,00135 | 0,00272 | 0,00270 | 0,00542 | 0,00177 | 0,00356 |
| 9 | 0,00332 | 0,00669 | 0,00151 | 0,00303 | 0,00319 | 0,00643 | 0,00199 | 0,00399 |
| 10 | 0,00390 | 0,00786 | 0,00166 | 0,00334 | 0,00374 | 0,00754 | 0,00221 | 0,00443 |

En todos los casos podemos observar que la aproximación triangular de los tipos spot produce unos resultados más que aceptables. A continuación presentamos el nivel de presunción que los intereses futuros estimados en certeza toman en el NB correspondiente al tipo forward para el mismo vencimiento, aproximados estos mediante un número borroso triangular:

| t | Polinómica | | Splines cuadráticos | | Splines cúbicos | | Splines exponenciales | |
|---|--------------|----------------|---------------------|----------------|-----------------|----------------|-----------------------|----------------|
| | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ | $\alpha^*=0$ | $\alpha^*=0,5$ |
| 1 | 0,00 | 0,43 | 0,90 | 0,95 | 0,00 | 0,42 | 0,64 | 0,82 |
| 2 | 0,48 | 0,74 | 0,94 | 0,97 | 0,33 | 0,67 | 0,87 | 0,94 |
| 3 | 0,00 | 0,38 | 0,98 | 0,99 | 0,00 | 0,23 | 0,79 | 0,90 |
| 4 | 0,00 | 0,36 | 0,57 | 0,79 | 0,00 | 0,23 | 0,97 | 0,99 |
| 5 | 0,12 | 0,57 | 0,06 | 0,53 | 0,30 | 0,65 | 0,71 | 0,85 |
| 6 | 0,80 | 0,90 | 0,00 | 0,40 | 0,57 | 0,78 | 0,41 | 0,71 |
| 7 | 0,46 | 0,73 | 0,00 | 0,41 | 0,00 | 0,41 | 0,27 | 0,64 |

| | | | | | | | | |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 8 | 0,00 | 0,40 | 0,12 | 0,56 | 0,00 | 0,24 | 0,23 | 0,62 |
| 9 | 0,00 | 0,19 | 0,47 | 0,74 | 0,00 | 0,27 | 0,25 | 0,63 |
| 10 | 0,00 | 0,14 | 0,86 | 0,93 | 0,00 | 0,46 | 0,30 | 0,65 |
| Media | 0,19 | 0,48 | 0,49 | 0,73 | 0,12 | 0,44 | 0,54 | 0,77 |

Observándose para los tipos futuros borrosos, la siguiente evolución. Únicamente se representan los valores que poseen mayor nivel de presunción:



4.4. ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LOS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LOS TIPOS FUTUROS PROPUESTOS

A continuación realizamos algunas reflexiones sobre los resultados que se obtienen con las metodologías de estimación de intereses futuros a través de números borrosos desarrolladas en esta parte de la tesis:

- a) En todos los casos podemos comprobar que los modelos que proporcionan una mayor adecuación de los tipos spot que se obtenían econométricamente con sus correspondientes borrosos siguen siendo los que estiman unos tipos forward más cercanos a los que se obtienen mediante números borrosos.
- b) Al igual que ocurría en certeza, en la estimación de la ETTI y de los tipos forward partiendo del ajuste de las TIRs no queda eliminado en su totalidad el sesgo de cupón, ya que al ajustar la TIR mediante la utilización de una regresión borrosa, aceptamos implícitamente que el

- número borroso TIR para bonos americanos con el mismo vencimiento debe ser el mismo con independencia del cupón que estos ofrezcan.
- c) Respecto a la estimación triangular de los tipos forward, creemos que se produce mayor distorsión en la estimación realizada a través del ajuste de la TIR de los títulos, ya que partimos para ajustar los tipos forward de la aproximación triangular de factores de actualización al contado que no son realmente triangulares. Sin embargo, si partimos del ajuste directo del factor de actualización spot, éstos una vez se ha realizado su estimación si que son triangulares, por tanto, no trabajamos con aproximaciones triangulares a dichos factores de actualización.
- d) Si bien, el análisis que realizamos se limita a una sola sesión, y para ver la bondad de los métodos propuestos necesitaríamos realizar el proceso durante un número de sesiones más elevado, podemos comprobar que para los niveles para los que hemos implementado las regresiones borrosas que sirven de base para realizar las posteriores estimaciones, $\alpha^*=0$ y 0.5 , no hemos introducido excesiva incertidumbre en los tipos futuros estimados. Si el decisor quisiera, por prudencia, obtener unos tipos forward más inciertos, aumentando el nivel de presunción α^* conseguiría dicho objetivo. Otra alternativa, aunque con esta los resultados que se obtengan pueden no tener en algún caso sentido económico, es aplicar el concepto de solución de ecuaciones de borrosas de Buckley y Qu en la determinación de los factores ${}_{t-1}\tilde{f}_1$.
- e) Por otra parte, respecto a los tipos borrosos futuros estimados, creemos que debemos considerar dos condiciones a las metodologías que utilicemos. La primera de ellas es que los tipos obtenidos no presenten comportamientos explosivos, ya que a medida que se aumenta el vencimiento, parece lógico suponer que a los agentes les es más difícil distinguir entre el tipo futuro para un determinado año y el siguiente. En segundo lugar, dado que a mayor vencimiento, debe existir mayor incertidumbre en los tipos de interés que regirán en estos plazos, parece lógico exigir que a medida que el tipo futuro presente mayor vencimiento, su incertidumbre deber ser mayor, es decir, el número borroso estimado debe tener unos radios más grandes. Respecto a estos criterios, y para los modelos que estiman la ETTI a partir del ajuste de las TIR de los títulos, podemos comprobar que con el ajuste a través de la interpolación lineal de los títulos obtenemos unos tipos futuros estimados muy oscilantes, lo cual ya fue observado en certeza, a la vez que la incertidumbre de los tipos forward, tal como ocurría con los tipos spot, no parecen guardar relación con el vencimiento de los mismos. Sin embargo, si que observamos que la incertidumbre de los tipos estimados para el futuro

aumenta o se mantiene invariable con el vencimiento y los tipos spot estimados no tienen un comportamiento excesivamente oscilante con el resto de métodos de ajuste TIR-vencimiento del título la estimación a través del ajuste polinómico de las TIR es quizás el que proporciona una estimación de los tipos implícitos más explosiva-. Respecto a los modelos de estimación de la ETTI que estiman directamente la función de descuento que describen los tipos spot, podemos observar que aquellos métodos que la ajustaban mejor y que eran más congruentes con las estimaciones que de la misma realizábamos en certeza –en concreto, mediante la especificación mediante splines cuadráticos y mediante splines exponenciales de los factores de descuento-, producen unos tipos futuros cuya incertidumbre no aumenta con el vencimiento de los mismos. Esta propiedad, sin embargo, si que la cumplen las especificaciones polinómicas y mediante splines cúbicos, que por otra parte, son los que mayor incertidumbre incorporan en los tipos futuros estimados. Todos los métodos propuestos proporcionan, asimismo, unos tipos forward con una evolución suave, incluso la especificación polinómica del factor de descuento al contado.

- f) Por último, y de forma análoga a lo que ocurría en un ambiente de certeza, podemos comprobar que tanto la ETTI como los tipos de interés futuros se hallan como unas funciones borrosas continuas del tiempo si estimamos directamente el factor de descuento spot, pudiendo ser hallada la expresión analítica tanto de la función de pertenencia como de los α -cortes para los tipos forward y para los tipos spot correspondientes al vencimiento que deseemos. Ello no ocurre así si partimos del ajuste de las TIR de los títulos. Respecto a los tipos spot que hallamos, tan sólo podemos conocer la expresión analítica de los α -cortes de los factores de actualización para unos determinados vencimientos o vértices y nunca su función de pertenencia, pues, como hemos podido observar, no podíamos hallar ésta para el precio de los bono par, si bien es cierto que su ajuste triangular es bueno. A partir de los tipos spot ya ajustados a través de números borrosos L-L de Dubois y Prade, si que podemos hallar la función de pertenencia de los tipos implícitos así como sus α -cortes, pero, al igual que los tipos al contado, sólo para vencimientos discretos. Asimismo, sea cual sea la metodología empleada, hemos podido comprobar que, partiendo de una ajuste triangular de la regresión de partida –TIR o factor de descuento- los tipos futuros se pueden hallar como números borrosos y ser ajustados de forma muy satisfactoria a través de números borrosos triangulares.