1.4. APROXIMACIÓN DE NÚMEROS BORROSOS

En este apartado proponemos diversas formas de aproximar números borrosos mediante números borrosos como los L-R de Dubois y Prade, y, de forma más particular como números borrosos triangulares o trapezoidales. Ello viene motivado porque, normalmente, en un determinado problema, cuando los datos de partida vienen estimados a través de unos números borrosos $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$, suelen estar asociados a estimaciones subjetivas de un experto o un conjunto de expertos, y por tanto, no son datos que puedan ser considerados como objetivos, modelizables mediante números ciertos o mediante variables aleatorias. Dada la naturaleza subjetiva de los datos de partida, no es necesaria una extrema precisión en su representación, y por tanto se suele utilizar en su cuantificación expresiones relativamente sencillas, de forma más general números L-R de Dubois y Prade, y de forma particular, números borrosos trapezoidales o triangulares, ya que permiten en muchos casos una fácil operatoria, y adicionalmente admiten una interpretación muy intuitiva.

Sin embargo, cuando inferimos una magnitud $\widetilde{B}$ resultante de aplicar una determinada función $\widetilde{B} = f\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n\right)$, el resultado no será normalmente un número L-R de Dubois y Prade aunque los datos estimados inicialmente, $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$ si lo sean. Por otra parte, en muchos casos no será posible hallar la función de pertenencia de $\widetilde{B}$, $\mu_{\widetilde{B}}(x)$, aunque si podamos hallar sus α-cortes, B_α, para una escala de verdad prefijada. Creemos que ambas cuestiones plantean ciertos problemas. En primer lugar, al no conocerse la función de pertenencia de $\widetilde{B}$, se produce una pérdida de información respecto a la que disponemos de partida. En segundo lugar, la interpretación que podamos realizar del número borroso $\widetilde{B}$ no es tan sencilla e intuitiva como la interpretación que se podía realizar de los números borrosos de los que partimos. En tercer lugar, si deseamos realizar posteriores transformaciones sobre $\widetilde{B}$, su manipulación puede ser más complicada que si este fuera L-R de Dubois y Prade o trapezoidal, por ejemplo.

Por todo ello, creemos que puede ser de interés aproximar $\widetilde{B}$ a través de un número borroso $\widetilde{B}'$ que tenga la misma naturaleza que los números borrosos de partida, $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n$, ya que el posible error que se cometa, puede ser compensado por las ventajas que proporcionará el número borroso aproximado, $\widetilde{B}'$. Asimismo, tal como se demuestra en Jiménez y Rivas (1996), si posteriormente trabajamos con números borrosos aproximados, debido a la naturaleza de los operadores máximo y mínimo, el error de partida no va aumentando.

Concretamente, analizaremos tres enfoques distintos para la aproximación de números borrosos:

1) En primer lugar, e inspirándonos en Dubois y Prade (1993), generalizaremos a funciones de n números borrosos L-L de Dubois y Prade la propuesta que ellos realizan para aproximar funciones de dos variables.
2) Expondremos la metodología propuesta en Jiménez y Rivas (1996) para medir la calidad de la aproximación de funciones de números borrosos triangulares por un número borroso triangular que mantenga el mismo soporte y núcleo.
3) Expondremos un método propuesto por Delgado *et al.* (1998a) para aproximar cualquier número borroso a través de un número borroso triangular o trapezoidal.

1.4.1. Aproximación a través de un número L-L de Dubois y Prade de una función de números L-L de Dubois y Prade

Sea una función $y=f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, suponemos que el valor de las n variables ha sido estimado mediante números L-L de Dubois y Prade, de forma que la i-ésima la podemos representar como $\tilde{A}_i = (a_{Ci}, l_{Ai}, r_{Ai})_L$, i=1,2,...,n. El valor de la función, si ésta es continua, será un número borroso $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n)$. Supondremos asimismo, que la relación funcional que induce a $\tilde{B}$, $y=f(x_1, x_2, \ldots ,x_n)$, es monótona creciente respecto a las m primeras variables, donde $m \leq n$, y monótona decreciente respecto al resto, es decir:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \geq 0,\ i=1,2,\ldots,m;\quad \frac{\partial y}{\partial x_i} \leq 0,\ i=m+1,m+2,\ldots,n$$

De esta forma, los α-cortes de $\tilde{B}$, B_α son:

$$\begin{aligned} B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha)\right] = \Big[& f\left(a_{1C} - l_{A1}L^{-1}(\alpha),\ldots,a_{mC} - l_{Am}L^{-1}(\alpha), a_{(m+1)C} + r_{A(m+1)}L^{-1}(\alpha),\ldots,a_{nC} + r_{An}L^{-1}(\alpha)\right), \\ & f\left(a_{1C} + r_{A1}L^{-1}(\alpha),\ldots,a_{mC} + r_{Am}L^{-1}(\alpha), a_{(m+1)C} - l_{A(m+1)}L^{-1}(\alpha),\ldots,a_{nC} - l_{An}L^{-1}(\alpha)\right)\Big] \end{aligned}$$

Normalmente, $\tilde{B}$ no será un número L-L de Dubois y Prade. Sin embargo, sí podemos aproximar sus α-cortes con un desarrollo en serie de Taylor, a partir del valor de $f(a_{1C},\ldots,a_{mC},a_{(m+1)C},\ldots,a_{nC})$. Asimismo, para simplificar notamos como a_C al vector $a_C = (a_{1C},\ldots,a_{mC},a_{(m+1)C},\ldots,a_{nC})$. De esta forma, el extremo inferior del α-corte de $\tilde{B}$ puede ser aproximado por:

$$B^1(\alpha) \approx f(a_C) + \nabla f(a_C) \begin{pmatrix} -l_{A1}L^{-1}(\alpha) \\ \ldots \\ -l_{Am}L^{-1}(\alpha) \\ r_{A(m+1)}L^{-1}(\alpha) \\ \ldots \\ r_{An}L^{-1}(\alpha) \end{pmatrix} = f(a_C) - \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} l_{Ai} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} r_{Ai} \right) L^{-1}(\alpha)$$

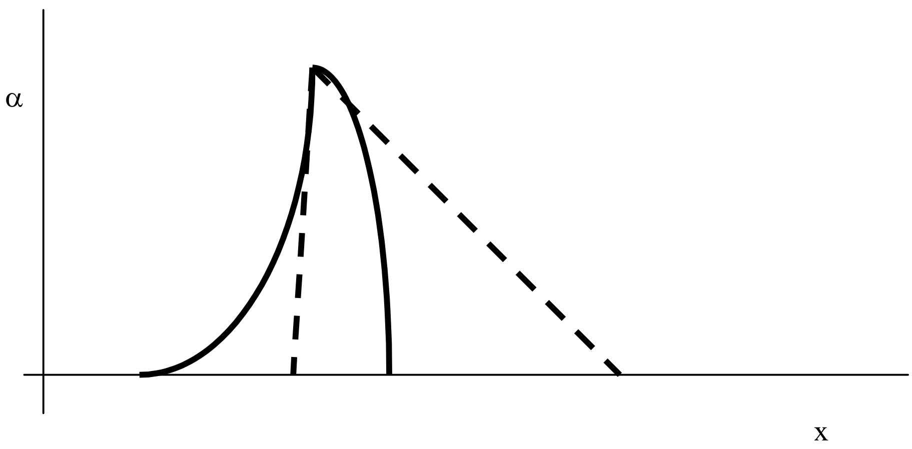
y el superior por:

$$B^2(\alpha) \approx f(a_C) + \nabla f(a_C) \begin{pmatrix} r_{A1} L^{-1}(\alpha) \\ \ldots \\ r_{Am} L^{-1}(\alpha) \\ -l_{A(m+1)} L^{-1}(\alpha) \\ \ldots \\ -l_{An} L^{-1}(\alpha) \end{pmatrix} = f(a_C) + \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} r_{Ai} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} l_{Ai} \right) L^{-1}(\alpha)$$

de esta forma, es razonable aproximar a $\widetilde{B}$ mediante un número borroso $\widetilde{B}'$ = (b_C, l_B, r_B)$_L$ donde:

$$b_C = f(a_C),\ l_B = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} l_{Ai} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} r_{Ai},\ r_B = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} r_{Ai} - \sum_{i=m+1}^{n} \frac{\partial f(a_C)}{\partial x_i} l_{Ai}$$

Gráficamente, la relación entre $\widetilde{B}$ y $\widetilde{B}'$ es, suponiendo que éste último es triangular:



Obsérvese que si aceptamos que dos de las características más significativas de un número borroso son el núcleo y el soporte; el número borroso que aproxima a $\widetilde{B}$, $\widetilde{B}'$ mantiene el núcleo pero no mantiene el soporte. Asimismo, para niveles de presunción de α bajos, el error cometido en los α-cortes por el hecho de tomarse la aproximación triangular puede ser muy elevado.

1.4.2. Una metodología para medir la calidad de la aproximación a través de un número borroso triangular de una función de números borrosos triangulares que mantenga su mismo soporte y núcleo

En este apartado, para una función de números borrosos triangulares $\widetilde{B} = f(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n)$, propondremos aproximar $\widetilde{B}$ a través de un número borroso triangular que tenga su mismo soporte y núcleo. Por otra parte, únicamente analizaremos el caso de números borrosos triangulares, ya que para el caso más general de trapezoidales, la transposición de los resultados es inmediata.

Una vez aproximado $\widetilde{B} = f\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n\right)$ deberemos evaluar dicha aproximación, para ello propondremos como metodología la desarrollada por Jiménez y Rivas (1996).

Estos autores consideran que un número borroso $\widetilde{B}$ está bien representado por otro $\widetilde{B}'$, si el error máximo que en el nivel de pertenencia de un determinado valor x se comete por tomar $\mu_{\widetilde{B}'}(x)$ en lugar de $\mu_{\widetilde{B}}(x)$ es pequeño. Matemáticamente, diremos que la aproximación de $\widetilde{B}$ mediante un número borroso $\widetilde{B}'$ será admisible si:

$$\left|\mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{B}'}(x)\right| \leq \varepsilon \quad \forall x$$

donde ε es un valor convenientemente pequeño. Respecto al máximo error admisible, podemos interpretar que ε vendrá dado por el grado de matización de la verdad que adopte el decisor, es decir, por la escala de verdad por la que opte. Si se distinguen pocos matices de verdad –por ejemplo, se toma una escala pentaria-, el decisor aceptará que se comentan errores más elevados que si se adopta una escala más detallada –por ejemplo, una escala endecadaria-. En concreto, si denominamos como p los grados de verdad de la escala lingüística adoptada, hallamos ε como:

$$\varepsilon = \frac{1}{p-1}$$

de forma que, si adoptamos una escala endecadaria, que es el caso más habitual, ε=0'1.

Bien es cierto que en muchas ocasiones, no conoceremos la función de pertenencia del número borroso que aproximamos $\widetilde{B}$, por lo que el máximo de $\left|\mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{B}'}(x)\right|$ tampoco será conocido. Sin embargo, en el mencionado trabajo de Jiménez y Rivas se da una cota superior a $\left|\mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{B}'}(x)\right|$ a través de los α-cortes de $\widetilde{B}$ y $\widetilde{B}'$, $B_\alpha=[B^1(\alpha),B^2(\alpha)]$ y $B'_\alpha=[B'^1(\alpha),B'^2(\alpha)]$. En concreto, si denominamos como α_I^* al valor que maximiza la distancia $|B^1(\alpha)-B'^1(\alpha)|$ y α_D^* al que lo hace para $|B^2(\alpha)-B'^2(\alpha)|$, y dichos niveles de presunción son conocidos, podemos hallar las desviaciones máximas en los extremos izquierdos y derechos de los α-cortes que con la aproximación de $\widetilde{B}$, $\widetilde{B}'$, se cometen. Estos serán notados como D_I^* y D_D^*, respectivamente y se calculan como:

$$D_I^* = |B^1(\alpha_I^*)-B'^1(\alpha_I^*)|$$
$$D_D^* = |B^2(\alpha_D^*)-B'^2(\alpha_D^*)|$$

De esta forma, el error que podemos cometer en el nivel de presunción de un valor x por tomar como función de pertenencia de $\widetilde{B}$ la de su aproximación $\widetilde{B}'$ viene acotado por:

$$\left|\mu_{\widetilde{B}}(x)-\mu_{\widetilde{B}'}(x)\right| \leq \text{Max}\left\{\frac{D_I^*}{B^1(1)-B^1(0)},\frac{D_D^*}{B^2(0)-B^2(1)}\right\}$$

En Kaufmann (1986) se dan las expresiones de D_I^* y D_D^* para diversas operaciones binarias o monarias, $\widetilde{B}=f\left(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2\right)$ y $\widetilde{B}=f\left(\widetilde{A}\right)$ respectivamente, donde los datos de partida son números borrosos triangulares, las cuales expondremos a continuación. Si se trata de una operación binaria, notaremos a los datos de partida como $\widetilde{A}_1=\left(a_1^1,a_1^2,a_1^3\right)$ y $\widetilde{A}_2=\left(a_2^1,a_2^2,a_2^3\right)$. Si la operación es monaria, el valor inicial es un único número borroso $\widetilde{A}=(a^1, a^2, a^3)$. En todos los casos supondremos que los números borrosos de partida son positivos, es decir, que su soporte está formado por reales positivos.

a) Para $\widetilde{B}=\widetilde{A}_1\otimes\widetilde{A}_2$, $\widetilde{B}'=\left(a_1^1\cdot a_2^1, a_1^2\cdot a_2^2, a_1^3\cdot a_2^3\right)$, y las desviaciones a la izquierda y a la derecha son:

$$D_I^*=\frac{\left(a_1^2-a_1^1\right)\left(a_2^2-a_2^1\right)}{4}$$

$$D_D^*=\frac{\left(a_1^3-a_1^2\right)\left(a_2^3-a_2^2\right)}{4}$$

b) Para $\widetilde{B}=\widetilde{A}^{-1}$, $\widetilde{B}'=\left(\frac{1}{a^3},\frac{1}{a^2},\frac{1}{a^1}\right)$, y las desviaciones son:

$$D_I^*=\frac{1}{\sqrt{a^2}}-\frac{1}{\sqrt{a^3}}$$

$$D_D^*=\frac{1}{\sqrt{a^1}}-\frac{1}{\sqrt{a^2}}$$

c) Para $\widetilde{B}=\widetilde{A}_1\div\widetilde{A}_2$, $\widetilde{B}'=\left(\frac{a_1^1}{a_2^3},\frac{a_1^2}{a_2^2},\frac{a_1^3}{a_2^1}\right)$, y D_I^* y D_D^* son:

$$D_I^*=\frac{a_1^1}{a_2^3}+\left(\frac{a_1^2}{a_2^2}-\frac{a_1^1}{a_2^3}\right)\alpha_I^*-\frac{a_1^1+\left(a_1^2-a_1^1\right)\alpha_I^*}{a_2^3-\left(a_2^3-a_2^2\right)\alpha_I^*}$$

$$D_D^*=\frac{a_1^3}{a_2^1}-\left(\frac{a_1^3}{a_2^1}-\frac{a_1^2}{a_2^2}\right)\alpha_D^*-\frac{a_1^3-\left(a_1^3-a_1^2\right)\alpha_D^*}{a_2^1+\left(a_2^2-a_2^1\right)\alpha_D^*}$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{a_2^3 - \sqrt{a_2^3 \cdot a_2^2}}{a_2^3 - a_2^2} \text{ y } \alpha_D^* = \frac{\sqrt{a_2^1 \cdot a_2^2} - a_2^1}{a_2^2 - a_2^1}$$

c) Si $\widetilde{B} = \ln \widetilde{A}$, $\widetilde{B}' = (\ln(a^1), \ln(a^2), \ln(a^3))$ y las desviaciones D_I^* y D_D^* son:

$$D_I^* = \ln\left(a^1 + \left(a^2 - a^1\right)\alpha_I^*\right) - \ln a^1 - \left(\ln a^2 - \ln a^1\right)\alpha_I^*$$

$$D_D^* = \ln\left(a^3 - \left(a^3 - a^2\right)\alpha_D^*\right) - \ln a^3 + \left(\ln a^3 - \ln a^2\right)\alpha_D^*$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{1}{\ln a^2 - \ln a^1} - \frac{a^1}{a^2 - a^1} \text{ y } \alpha_D^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \frac{1}{\ln a^3 - \ln a^2}$$

d) Si $\widetilde{B} = e^{\widetilde{A}}$, $\widetilde{B}' = \left(e^{a^1}, e^{a^2}, e^{a^3}\right)$ y las desviaciones son:

$$D_I^* = e^{a^1} + \left(e^{a^2} - e^{a^1}\right)\alpha_I^* - e^{a^1 + \left(a^2 - a^1\right)\alpha_I^*}$$

$$D_D^* = e^{a^3} - \left(e^{a^3} - e^{a^2}\right)\alpha_D^* - e^{a^3 - \left(a^3 - a^2\right)\alpha_D^*}$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{1}{a^2 - a^1}\left[\ln\left(\frac{e^{a^2} - e^{a^1}}{a^2 - a^1}\right) - a^1\right] \text{ y } \alpha_D^* = \frac{1}{a^3 - a^2}\left[a^3 - \ln\left(\frac{e^{a^3} - e^{a^2}}{a^3 - a^2}\right)\right]$$

e) Si $\widetilde{B} = \widetilde{A}^n$, distinguimos dos casos:

<u>Caso 1</u>

Si $k \in R^+ - \{0,1\}$, el ajuste[2] propuesto es $\widetilde{B}' = \left(\left(a^1\right)^n, \left(a^2\right)^n, \left(a^3\right)^n\right)$. Así, si $n>1$, las desviaciones máximas son:

$$D_I^* = \left(a^1\right)^n + \left[\left(a^2\right)^n - \left(a^1\right)^n\right]\alpha_I^* - \left(a^1 + \left(a^2 - a^1\right)\alpha_I^*\right)^n$$

$$D_D^* = \left(a^3\right)^n - \left[\left(a^3\right)^n - \left(a^2\right)^n\right]\alpha_D^* - \left(a^3 - \left(a^3 - a^2\right)\alpha_D^*\right)^n$$

y si $n \in (0,1)$

[2] No consideramos n=0, porque sino obtenemos el número cierto 1, ni n=1, ya que en este caso $\widetilde{B}$ es triangular, y así no hace falta aproximarlo

$$D_I^* = \left(a^1 + \left(a^2 - a^1\right)\alpha_I^*\right)^n - \left(a^1\right)^n - \left[\left(a^2\right)^n - \left(a^1\right)^n\right]\alpha_I^*$$

$$D_D^* = \left(a^3 - \left(a^3 - a^2\right)\alpha_D^*\right)^n - \left(a^3\right)^n + \left[\left(a^3\right)^n - \left(a^2\right)^n\right]\alpha_D^*$$

En ambos casos:

$$\alpha_I^* = \left(\frac{\left(a^2\right)^n - \left(a^1\right)^n}{n\left(a^2 - a^1\right)^n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

$$\alpha_D^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{\left(a^3\right)^n - \left(a^2\right)^n}{n\left(a^3 - a^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Adicionalmente, si asumimos que $n = \frac{1}{k}$, donde k=2,3,..., es decir, $\tilde{B} = \sqrt[k]{\tilde{A}}$, la expresión de los niveles de presunción en los que se produce mayor desviación en los α-cortes es:

$$\alpha_I^* = \left(\frac{k\left[\left(a^2\right)^{1/k} - \left(a^1\right)^{1/k}\right]}{\left(a^2 - a^1\right)^{1/k}}\right)^{\frac{k}{1-k}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

$$\alpha_D^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{k\left[\left(a^3\right)^{1/k} - \left(a^2\right)^{1/k}\right]}{\left(a^3 - a^2\right)^{1/k}}\right)^{\frac{k}{1-k}}$$

Caso 2

Si n<0, la aproximación propuesta es $\tilde{B}' = \left(\left(a^3\right)^n, \left(a^2\right)^n, \left(a^1\right)^n\right)$. Las desviaciones máximas a la izquierda y a la derecha son, en este caso:

$$D_I^* = \left(a^3\right)^n - \left[\left(a^3\right)^n - \left(a^2\right)^n\right]\alpha_D^* - \left(a^3 - \left(a^3 - a^2\right)\alpha_D^*\right)^n$$

$$D_D^* = \left(a^1\right)^n + \left[\left(a^2\right)^n - \left(a^1\right)^n\right]\alpha_I^* - \left(a^1 + \left(a^2 - a^1\right)\alpha_I^*\right)^n$$

donde:

$$\alpha_I^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{\left(a^3\right)^n - \left(a^2\right)^n}{n\left(a^3 - a^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\alpha_D^* = \left(\frac{\left(a^2\right)^n - \left(a^1\right)^n}{n\left(a^2 - a^1\right)^n} \right)^{\frac{1}{n-1}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

Adicionalmente, si asumimos que $n = -\frac{1}{k}$, donde k=2,3,..., y por tanto, $\widetilde{B} = \frac{1}{\sqrt[k]{\widetilde{A}}}$, la expresión de los niveles de presunción en los que se produce mayor desviación en los α-cortes es:

$$\alpha_I^* = \frac{a^3}{a^3 - a^2} - \left(\frac{k\left[\left(a^2\right)^{-1/k} - \left(a^3\right)^{-1/k}\right]}{\left(a^3 - a^2\right)^{-1/k}} \right)^{-\frac{k}{1+k}}$$

$$\alpha_D^* = \left(\frac{k\left[\left(a^1\right)^{-1/k} - \left(a^2\right)^{-1/k}\right]}{\left(a^2 - a^1\right)^{-1/k}} \right)^{-\frac{k}{1+k}} - \frac{a^1}{a^2 - a^1}$$

1.4.3. Una metodología para la aproximación de cualquier número borroso a través de un número borroso trapezoidal o triangular

Delgado *et al.* (1998a) consideran que las características básicas de un número pueden ser resumidas en un valor representativo, y un coeficiente que cuantifique la incertidumbre de dicho número borroso –características basadas en los conceptos estadísticos de la media y la varianza-. Como consecuencia, cualquier número borroso $\widetilde{A}$ puede ser aproximado por otro $\widetilde{A}'$ que sea trapezoidal o triangular, que permite el mismo valor representativo y la misma incertidumbre del número borroso $\widetilde{A}$.

Si el número borroso a aproximar viene dado por:

$$\widetilde{A} = \left\{x, \mu_{\widetilde{A}}(x)\right\} = \left\{A_i = \left[A^1(\alpha), A^2(\alpha)\right] \mid 0 \le \alpha \le 1\right\},\ i = 1,2,...,n.$$

estos autores definen como valor de $\widetilde{A}$, V[$\widetilde{A}$] al valor cierto:

$$V\left[\widetilde{A}\right] = \int_0^1 s(\alpha)\left[A^1(\alpha) + A^2(\alpha)\right]d\alpha$$

Por otra parte, definen como ambigüedad del número borroso $\widetilde{A}$, A[$\widetilde{A}$], a un valor que cuantificará la amplitud de los α-cortes de $\widetilde{A}$. Dicha ambigüedad vendrá dada por:

$$A\left[\tilde{A}\right]=\int_0^1 s(\alpha)\left[A^2(\alpha)-A^1(\alpha)\right]d\alpha$$

Asimismo a la función $s(\alpha)$ que interviene en el cálculo del valor y la ambigüedad de un número borroso la definen como $s:[0,1]\to[0,1]$ a la que se exige:

a) $s(0)=0$ y $s(1)=1$,

b) La función $s(\alpha)$ es creciente respecto $\alpha\in[0,1]$, de forma que se da mayor peso en la determinación de $V[\tilde{A}]$ y $A[\tilde{A}]$ a aquellos α-cortes que presenten un mayor nivel de presunción.

c) $\int_0^1 s(\alpha)d\alpha=\frac{1}{2}$

Por otra parte, dichos autores proponen tomar $s(\alpha)=\alpha$. De esta forma, para el número borroso $\tilde{A}'$, que pretendemos que aproxime a $\tilde{A}$, y que por tanto es trapezoidal o triangular, es decir, que queda representado por: $\tilde{A}' = (a^1, a^2, a^3, a^4)$, las medidas de valor y ambigüedad son:

$$V\left[\tilde{A}'\right]=\int_0^1 \alpha\left[a^1+(a^2-a^1)\alpha+a^4-(a^4-a^3)\alpha\right]d\alpha=\frac{a^1+2a^2+2a^3+a^4}{6}$$

$$A\left[\tilde{A}'\right]=\int_0^1 \alpha\left[a^4-(a^4-a^3)\alpha-a^1-(a^2-a^1)\alpha\right]d\alpha=\frac{a^4+2a^3-2a^2-a^1}{6}$$

Por supuesto, si se trata de un número borroso triangular, como el centro es un único número, si notamos al número borroso que aproxima a $\tilde{A}$ como $\tilde{A}' = (a^1, a^2, a^3)$:

$$V\left[\tilde{A}'\right]=\frac{a^1+4a^2+a^3}{6},\ A\left[\tilde{A}'\right]=\frac{a^4-a^1}{6}$$

Así, para aproximar a un número borroso $\tilde{A}$ su equivalente trapezoidal, $\tilde{A}'$, este último debe mantener el mismo valor que $\tilde{A}$ y mantener su ambigüedad. Es decir, se debe cumplir si $\tilde{A}'$ es trapezoidal que:

$$V\left[\tilde{A}\right]=\frac{a^1+2a^2+2a^3+a^4}{6},\ A\left[\tilde{A}\right]=\frac{a^4+2a^3-2a^2-a^1}{6}$$

y si el que pretendemos aproximar a $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$, es triangular, las condiciones son:

$$V\left[\tilde{A}\right]=\frac{a^1+4a^2+a^3}{6},\ A\left[\tilde{A}\right]=\frac{a^4-a^1}{6}$$

Podemos hacer las siguientes apreciaciones respecto a este planteamiento:

a) De forma general, si el número borroso que pretendemos aproximar es trapezoidal, quedan dos grados de libertad después de plantear la igualdad entre valores y ambigüedades. Así pues, existen infinitos números borrosos trapezoidales que puedan aproximar a $\tilde{A}$. Ocurre lo mismo si el número borroso que pretendemos aproximar es triangular o trapezoidal simétrico, pero en este caso queda únicamente un grado de libertad.

b) Únicamente el número borroso aproximado a $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$, está perfectamente determinado si pretendemos que $\tilde{A}'$ sea triangular y simétrico.

Así pues, excepto en el caso en que $\tilde{A}'$ sea triangular y simétrico, el decisor puede seguir varias vías para determinar el número borroso aproximado.

La primera consistiría en añadir nuevas restricciones para acabar planteando un sistema de ecuaciones determinado. Éstas dependerán del problema que esté tratando el decisor, quedando pues, a su arbitrio. Por ejemplo, se puede forzar que el trapezoidal aproximado a $\tilde{A}$ tenga su mismo soporte o su mismo núcleo, hacer uso de algún coeficiente de asimetría o de entropía[3], etc.

El segundo de ellos consistiría en minimizar la distancia entre $\tilde{A}$ y $\tilde{A}'$. Para ello será necesario plantear un programa matemático con restricciones de igualdad, que si suponemos que el número borroso aproximado $\tilde{A}'$ es trapezoidal será:

$$\text{Min } y = f(a_1, a_2, ..., a_n)$$

sujeto a:

$$V[\tilde{A}] = \frac{a^1 + 2a^2 + 2a^3 + a^4}{6}, \quad A[\tilde{A}] = \frac{a^4 + 2a^3 - 2a^2 - a^1}{6}$$

Donde $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ vendría dado por una distancia (euclídea, de Hamming, etc.) entre $\tilde{A}$ y $\tilde{A}'$, o bien la suma de distancias de unos determinados α-cortes que toma en consideración, cuyo número vendrá dado por la escala semántica que el decisor adopte sobre los grados de verdad, que por supuesto, puede ser más o menos detallada. Asimismo, hacemos notar que en este programa, el conjunto factible es convexo –se trata de la intersección de dos hiperplanos-, por lo que posiblemente su resolución sea relativamente sencilla. El concepto clave sobre el que se asienta esta segunda alternativa es la noción de distancia entre números borrosos o entre intervalos de confianza, el cual viene desarollado con detalle en Kaufmann *et al.* (1994, p.221-253).

[3] Para consultar sobre el concepto de entropía, ver por ejemplo Kaufmann *et al.* (1994, p. 253-266).