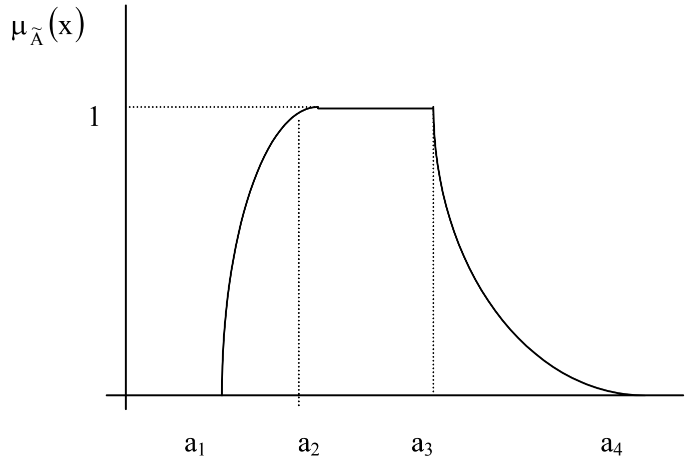
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha = \begin{cases} f(x) & a_1 < x \le a_2 \\ 1 & a_2 < x \le a_3 \\ g(x) & a_3 < x < a_4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El intervalo de confianza $[a_1, a_4]$ es el soporte del número borroso y $[a_2, a_3]$ es el núcleo del número borroso. Asimismo, f(x) es creciente en $[a_1, a_2]$ y g(x) es decreciente en $[a_3, a_4]$. Gráficamente podríamos representar, de forma general, un número borroso como:



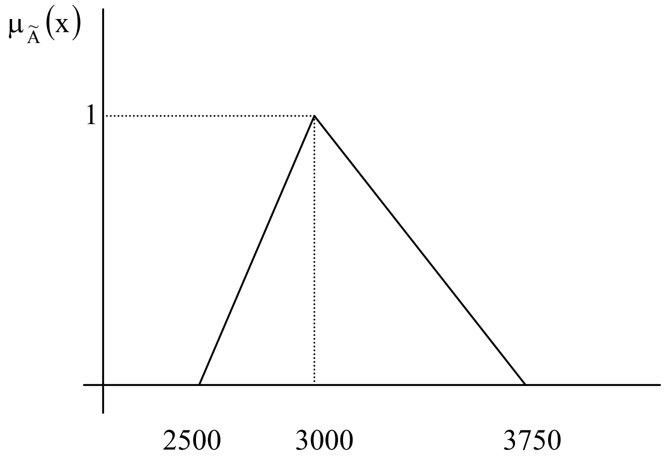
Sin embargo, en muchas ocasiones será más práctico operar con su representación a través de sus conjuntos de nivel o α-cortes, que notamos como A_α. Éstos son intervalos de confianza que podemos representar como:

$$A_\alpha = \{x \in R \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \alpha\} = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] = [f^{-1}(\alpha), g^{-1}(\alpha)]$$

Como ejemplo que permita mostrar la utilidad de los números borrosos en la modelización económica, supongamos que un individuo estima un determinado flujo de un proyecto de inversión real que desea iniciar. Seguramente no pueda modelizarlo como una variable aleatoria si dicho proyecto no es de reemplazo, ya que es casi seguro que no existe ningún antecedente de un proyecto de inversión igual. Sin embargo, por su experiencia en proyectos similares, sus conocimientos etc., sí que podría intuir, por ejemplo, que los ingresos correspondientes al primer año puede ser "aproximadamente 3.000 unidades monetarias". Una forma de representar razonablemente esta cuantía sería cuantificarla a través de un número borroso $\tilde{A}$ ="aproximadamente 3.000 unidades monetarias", cuya función de pertenencia podría ser:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha = \begin{cases} \dfrac{x - 2500}{500} & 2.500 < x \leq 3.000 \\ \dfrac{3750 - x}{750} & 3000 < x \leq 3750 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Siendo entonces la representación gráfica de "aproximadamente 3.000":



1.2.2. Operaciones con números borrosos

Como comprobaremos a continuación, el Principio de Extensión de Zadeh, y su facilidad de aplicación a través de los α-cortes permite extender las operaciones algebraicas más habituales realizadas con números reales a los números borrosos. Los conjuntos de nivel del número borroso imagen, pueden ser hallados a través de la aritmética de intervalos de confianza, pues los α-cortes de los del conjunto antiimagen lo son. Señalamos que una descripción detallada de la aritmética de intervalos de confianza, puede ser consultado Kaufmann *et al.* (1994, p. 57-78).

1.2.2.1. Operaciones monarias

En este caso, bastará aplicar el principio de extensión de Zadeh expuesto en 1.1.4.2. teniendo en cuenta que la aplicación f a evaluar es f: $R \rightarrow R$. Asimismo, el número borroso sobre el que se realiza la operación, $\tilde{A}$, será:

$$\tilde{A} = \{x, \mu_{\tilde{A}}(x)\} = \{A_\alpha = [A^1(\alpha), A^2(\alpha)] \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

Opuesto: Sea un número borroso $\tilde{A}$. Su opuesto $\tilde{B} = -\tilde{A}$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(-x)$$

y α-cortes:

$$B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha)\right] = \left[-A^2(\alpha), -A^1(\alpha)\right]$$

Producto por un escalar: Sea un número borroso $\tilde{A}$ y un escalar k∈R. Su producto $\tilde{B} = k\tilde{A}$ tendrá como función de pertenencia, si k≠0:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{k}\right)$$

y α-cortes:

$$B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha)\right] = \begin{cases} \left[kA^1(\alpha), kA^2(\alpha)\right] & k > 0 \\ \left[kA^2(\alpha), kA^1(\alpha)\right] & k < 0 \end{cases}$$

Si k=0:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

y

$$B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha)\right] = [0,0]$$

Inverso: Sea un número borroso $\tilde{A}$, tal que[1] $\mathrm{sop}(\tilde{A}) \in R^+$. Su inverso $\tilde{B} = \tilde{A}^{-1}$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{1}{x}\right)$$

y sus α-cortes, serán:

$$B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha)\right] = \left[\frac{1}{A^2(\alpha)}, \frac{1}{A^1(\alpha)}\right]$$

Logaritmo: Para un número borroso $\tilde{A}$ tal que $\mathrm{sop}(\tilde{A}) \in R^+$, su logaritmo neperiano $\tilde{B} = \ln(\tilde{A})$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(e^x\right)$$

[1] Entendemos por R^+ a aquéllos números reales estrictamente mayores que 0.

y α-cortes:

$$B_{\alpha} = \left[B^{1}(\alpha), B^{2}(\alpha)\right] = \left[\ln\left[A^{1}(\alpha)\right], \ln\left[A^{2}(\alpha)\right]\right]$$

Exponencial: Para un número borroso $\widetilde{A}$, el número borroso $\widetilde{B} = e^{\widetilde{A}}$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(\ln(x))$$

y α-cortes:

$$B_{\alpha} = \left[B^{1}(\alpha), B^{2}(\alpha)\right] = \left[e^{A^{1}(\alpha)}, e^{A^{2}(\alpha)}\right]$$

Potencia: Sea un número borroso $\widetilde{A}$ tal que $\text{sop}\left(\widetilde{A}\right) \in R^{+}$, y un escalar $k \in R - \{0\}$. Su potencia $\widetilde{B} = \widetilde{A}^{k}$ tendrá como función de pertenencia:

$$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}\left(x^{\frac{1}{k}}\right)$$

y α-cortes:

$$B_{\alpha} = \left[B^{1}(\alpha), B^{2}(\alpha)\right] = \begin{cases} \left[\left[A^{1}(\alpha)\right]^{k}, \left[A^{2}(\alpha)\right]^{k}\right] & k > 0 \\ \left[\left[A^{2}(\alpha)\right]^{k}, \left[A^{1}(\alpha)\right]^{k}\right] & k < 0 \end{cases}$$

Si k=0:

$$\mu_{\widetilde{B}}(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

y

$$B_{\alpha} = \left[B^{1}(\alpha), B^{2}(\alpha)\right] = [1,1]$$

1.2.2.2. Operaciones binarias

A continuación analizamos las operaciones binarias entre dos números borrosos $\widetilde{A}$ y $\widetilde{B}$, operaciones que notaremos como “*” y cuya resultante será un nuevo número borroso $\widetilde{C}$. Es decir, podemos escribir $\widetilde{C} = \widetilde{A} * \widetilde{B}$. Dentro de las operaciones binarias analizaremos las más usuales: suma, resta, multiplicación y división. Si los α-cortes y la función de pertenencia de los números borrosos sobre las que se realizan, $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ vienen dados por:

$$\tilde{A}=\{x/\mu_{\tilde{A}}(x)\}=\{A_\alpha=[A^1(\alpha),A^2(\alpha)]/0\le\alpha\le1\}$$

$$\tilde{B}=\{x/\mu_{\tilde{B}}(x)\}=\{B_\alpha=[B^1(\alpha),B^2(\alpha)]/0\le\alpha\le1\}$$

para hallar la función de pertenencia de $\tilde{C}$ deberemos utilizar el principio de extensión generalizado, enunciado en 1.1.4.1., y aplicarlo teniendo en cuenta que estamos evaluando una aplicación f: $R\times R\rightarrow R$. De forma general, y si suponemos que $0\notin \text{sop}(\tilde{A})$ y $0\notin \text{sop}(\tilde{B})$:

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\bigvee_{x=x_1*x_2}(\mu_{\tilde{A}}(x_1)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x_2))$$

Siendo los α-cortes de $\tilde{C}$, C_α:

$$\begin{aligned}C_\alpha=[C^1(\alpha),C^2(\alpha)]=[&\min\{A^1(\alpha)*B^1(\alpha),A^1(\alpha)*B^2(\alpha),A^2(\alpha)*B^1(\alpha),A^2(\alpha)*B^2(\alpha)\},\\&\max\{A^1(\alpha)*B^1(\alpha),A^1(\alpha)*B^2(\alpha),A^2(\alpha)*B^1(\alpha),A^2(\alpha)*B^2(\alpha)\}]\end{aligned}$$

a) Suma de números borrosos

Sea $\tilde{C}=\tilde{A}+\tilde{B}$, la función de pertenencia de $\tilde{C}$, $\mu_{\tilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\bigvee_{x=x_1+x_2}(\mu_{\tilde{A}}(x_1)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x_2))$$

y sus α-cortes:

$$C_\alpha=[C^1(\alpha),C^2(\alpha)]=[A^1(\alpha)+B^1(\alpha),A^2(\alpha)+B^2(\alpha)]$$

Propiedades:

1. $-(\tilde{A}+\tilde{B})=(-\tilde{A})+(-\tilde{B})$
2. Conmutativa: $\tilde{A}+\tilde{B}=\tilde{B}+\tilde{A}$
3. Asociativa: $(\tilde{A}+\tilde{B})+\tilde{C}=\tilde{A}+(\tilde{B}+\tilde{C})$
4. Existe elemento neutro, $\tilde{0}$, cuya función de pertenencia es $\mu(x)=\begin{cases}1 & x=0\\0 & x\neq0\end{cases}$ tal que:

$$\tilde{A}+\tilde{0}=\tilde{A}$$

5. No existe elemento opuesto ya que: $\tilde{A}+(-\tilde{A})\neq\tilde{0}$, donde $-\tilde{A}$ ya ha sido anteriormente definido. Por esta razón a $-\tilde{A}$ se le denomina pseudo-opuesto.

b) Resta de números borrosos

Sea $\widetilde{C} = \widetilde{A} - \widetilde{B}$, la función de pertenencia de $\widetilde{C}$, $\mu_{\widetilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \bigvee_{x = x_1 - x_2} \left(\mu_{\widetilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(x_2)\right)$$

y sus α-cortes:

$$C_\alpha = \left[C^1(\alpha), C^2(\alpha)\right] = \left[A^1(\alpha) - B^2(\alpha), A^2(\alpha) - B^1(\alpha)\right]$$

ya que $\widetilde{C} = \widetilde{A} + \left(-\widetilde{B}\right)$.

c) Producto de números borrosos

Sea $\widetilde{C} = \widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$, la función de pertenencia de $\widetilde{C}$, $\mu_{\widetilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\widetilde{C}}(x) = \bigvee_{x = x_1 \cdot x_2} \left(\mu_{\widetilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(x_2)\right)$$

y sus α-cortes:

$$\begin{aligned} C_\alpha = \left[C^1(\alpha), C^2(\alpha)\right] = \Big[&\min\left\{A^1(\alpha)\cdot B^1(\alpha), A^1(\alpha)\cdot B^2(\alpha), A^2(\alpha)\cdot B^1(\alpha), A^2(\alpha)\cdot B^2(\alpha)\right\}, \\ &\max\left\{A^1(\alpha)\cdot B^1(\alpha), A^1(\alpha)\cdot B^2(\alpha), A^2(\alpha)\cdot B^1(\alpha), A^2(\alpha)\cdot B^2(\alpha)\right\}\Big] \end{aligned}$$

y si $\mathrm{sop}(\widetilde{A})$, $\mathrm{sop}(\widetilde{B}) \in R^+$, se obtiene:

$$C_\alpha = \left[C^1(\alpha), C^2(\alpha)\right] = \left[A^1(\alpha)\cdot B^1(\alpha), A^2(\alpha)\cdot B^2(\alpha)\right]$$

Propiedades:

1. $\left(-\widetilde{A}\right) \otimes \widetilde{B} = -\left(\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}\right)$
2. Conmutativa: $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B} = \widetilde{B} \otimes \widetilde{A}$
3. Asociativa: $\left(\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}\right) \otimes \widetilde{C} = \widetilde{A} \otimes \left(\widetilde{B} \otimes \widetilde{C}\right)$
4. Existe el elemento neutro $\widetilde{1}$: $\widetilde{A} \otimes \widetilde{1} = \widetilde{A}$, cuya su función característica es $\mu(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$.
5. No existe elemento inverso: $\widetilde{A} \otimes \widetilde{A}^{-1} \neq \widetilde{1}$, donde $\widetilde{A}^{-1}$ ya ha sido definido. Por esa razón, a $\widetilde{A}^{-1}$ muchos autores le denominan pseudo-inverso.

6. Distributividad del producto respecto a la suma: $\tilde{C} \otimes (\tilde{A} + \tilde{B}) = (\tilde{A} \otimes \tilde{C}) + (\tilde{B} \otimes \tilde{C})$, que únicamente se cumple si $\mathrm{sop}(\tilde{A})$ y $\mathrm{sop}(\tilde{B})$ son positivos o negativos simultáneamente.

d) División de números borrosos

Sea $\tilde{C} = \tilde{A} \div \tilde{B}$, en los cuales $0 \notin \mathrm{sop}(\tilde{A})$ y $0 \notin \mathrm{sop}(\tilde{B})$: La función de pertenencia de $\tilde{C}$, $\mu_{\tilde{C}}(x)$ se halla como:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \bigvee_{x=\frac{x_1}{x_2}} \left(\mu_{\tilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x_2)\right)$$

y sus α-cortes:

$$C_\alpha = \left[C^1(\alpha), C^2(\alpha)\right] = \left[\min\left\{\frac{A^1(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^1(\alpha)}{B^2(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^2(\alpha)}\right\}, \max\left\{\frac{A^1(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^1(\alpha)}, \frac{A^1(\alpha)}{B^2(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^2(\alpha)}\right\}\right]$$

Si $\mathrm{sop}(\tilde{A})$, $\mathrm{sop}(\tilde{B}) \in R^+$, se obtiene:

$$C_\alpha = \left[C^1(\alpha), C^2(\alpha)\right] = \left[\frac{A^1(\alpha)}{B^2(\alpha)}, \frac{A^2(\alpha)}{B^1(\alpha)}\right]$$

1.2.2.3. Evaluación de funciones reales de números borrosos.

Sea una función de varias variables:

$$f: R^n \rightarrow R.$$

$$x=(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde el vector $x \in R^n$ pertenence al conjunto resultante del producto cartesiano de n conjuntos de números reales $R \times R \times \ldots \times R$. Si definimos en cada uno de los conjuntos R que forman R^n los números borrosos $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$, de forma que el i-ésimo viene dado por:

$$\tilde{A}_i = \left\{x_i, \mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\right\} = \left\{A_{i_\alpha} = \left[A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)\right] \mid 0 \le \alpha \le 1\right\} \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

podemos definir en R^n un subconjunto borroso $\tilde{A}$, para el cual los elementos de dicho conjunto son vectores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Su función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)$$

En este caso, $\widetilde{A}$ también es un subconjunto borroso normal y convexo, donde sus α-cortes son rectángulos de dimensión n, y por tanto, son cerrados y acotados.

Asimismo, la función f induce a un subconjunto borroso $\widetilde{B} = f\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n\right)$, que será un número borroso, si f es continua en R^n. La función característica de $\widetilde{B}$, $\mu_{\widetilde{B}}(y)$, se hallará aplicando el principio de extensión de Zadeh:

$$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \bigvee_{y=f(x)} \mu_{\widetilde{A}}(x) = \bigvee_{y=f(x_1,x_2,...,x_n)} \left(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{A}_2}(x_2) \wedge ... \wedge \mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)\right)$$

Ya hemos comentado que en muchas ocasiones no es operativo utilizar el principio de extensión de Zadeh a través de la función de pertenencia, ya que no podemos hallar la expresión analítica de $\mu_{\widetilde{B}}(y)$. Sin embargo, partiendo de los α-cortes de $\widetilde{A}_1$, $\widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n$ podemos hallar los conjuntos de nivel de $\widetilde{B}$, B_α, de forma que:

$$B_\alpha = \left\{y \in R \mid y = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right), x_i \in A_{i_\alpha}, i = 1,2,...,n\right\}$$

Si la función f es continua en R^n, B_α será un conjunto convexo en R, es decir, un intervalo de confianza de R, $B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha)\right]$=[min y, max y], que se obtendrá como:

Minimizar (Maximizar) $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$x_i \in \left[A_i^1(\alpha), A_i^2(\alpha)\right], \ i=1,2,...,n.$$

Los programas matemáticos (el de maximización y el de minimización) que deberemos resolver para hallar el extremo inferior o el extremo superior de B_α son de fácil implementación, dadas las características del conjunto factible. Sus soluciones, o bien se encuentra en los vértices de A_α, o bien son un mínimo (máximo) local de $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, debiéndose cumplir la condición necesaria $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ –ver Dong y Wong (1989)-, y la suficiente: $Hf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ debe ser semidefinida positiva para mínimos y semidefinida negativa para máximos.

Por otra parte, debemos indicar que si notamos como C_α a los α-cortes de un número borroso $\widetilde{C}$ que se obtienen aplicando la aritmética de intervalos de confianza al evaluar f, $B_\alpha \subseteq C_\alpha$. Así, $\widetilde{C}$ es una solución que aproxima a $\widetilde{B}$ -lo incluye-, pero que también presenta mayor incertidumbre.

Para mostrar esta aseveración, proponemos un sencillo ejemplo que puede encontrarse en Buckley y Qu (1990b). Supongamos que $y = \frac{x_1 + x_2}{x_1}$, y las variables x_1 y x_2 son estimadas a través de unos números borrosos $\widetilde{A}_1$ y $\widetilde{A}_2$ cuyos 0'5-cortes son $A_{1_{0'5}} = A_{2_{0'5}} = [0'5, 1'5]$. Así, el 0'5 corte de $\widetilde{B}$, $B_{0'5} = \left[\frac{4}{3}, 4\right]$. Sin embargo, el 0'5-corte de $\widetilde{C}$ se obtiene como:

$$C_{0'5} = \frac{[0'5, 1'5] + [0'5, 1'5]}{[0'5, 1'5]} = \left[\frac{2}{3}, 6\right]$$

de forma que $B_{0'5} \subset C_{0'5}$

Podemos comprobar que $\widetilde{C}$ es una aproximación de $\widetilde{B}$, para la cual, en muchas ocasiones sus α-cortes pueden ser hallados más fácilmente que los de $\widetilde{B}$ pero a costa de incrementar su incertidumbre.

Por otra parte, en el análisis económico muchas relaciones funcionales entre variables suelen ser continuas y derivables, siendo además monótonas crecientes o decrecientes respecto a dichas variables –es decir, el signo de las derivadas parciales es conocido-. En este caso es fácil evaluar los α-cortes de $\widetilde{B} = f\left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, ..., \widetilde{A}_n\right)$. Supongamos que la relación funcional que induce a $\widetilde{B}$, $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es monótona creciente respecto a las m primeras variables, donde $m \leq n$, y monótona decreciente respecto al resto, es decir:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} \geq 0,\ i=1,2,...,m;\ \frac{\partial y}{\partial x_i} \leq 0,\ i=m+1,m+2,...,n$$

En este caso, hallamos B_α como:

$$B_\alpha = \left[B^1(\alpha), B^2(\alpha)\right] = \left[f\left[A_1^1(\alpha),..., A_m^1(\alpha), A_{m+1}^2(\alpha),..., A_n^2(\alpha)\right], f\left[A_1^2(\alpha),..., A_m^2(\alpha), A_{m+1}^1(\alpha),..., A_n^1(\alpha)\right]\right]$$

1.2.3. Algunos tipos especiales de número borrosos

A continuación repasamos las formas más usuales de modelización de números borrosos que se utilizan. Estas representaciones vienen motivadas porque los números borrosos son la resultante de estimaciones subjetivas sobre magnitudes. Así, al número borroso que las cuantifica se le debe poder dar una interpretación fácilmente intuitiva, a la vez que debe permitir una fácil manipulación. De forma más precisa, Kaufmann y Gil Aluja (1986, p. 229) apuntan "*Con la utilización de números borrosos triangulares (y si es necesario los números borrosos L-R de*

Dubois y Prade que los generalizan) el experto puede establecer las correspondientes operaciones en lo incierto, en el supuesto de realizaciones que deben encadenarse en el tiempo (especialmente convoluciones maxmin para la suma de números borrosos). Se recomienda la utilización de números borrosos triangulares por su simplicidad y buena percepción por parte de los que no son matemáticos (...). Este instrumento es simple y se adaptan bien a los medios de tratamiento de la información".

Como comprobaremos, los números borrosos que analizaremos a continuación, los L-R de Dubois y Prade, los trapezoidales y los triangulares, permiten conseguir ambos objetivos.

1.2.3.1. Números borrosos L-R de Dubois y Prade

Dubois y Prade (1980), proponen la parametrización de números borrosos, lo cual facilitará en muchos casos las operaciones realizadas con éstos, así como su interpretación. Para la construcción de un número L-R de Dubois y Prade debemos partir, en primer lugar, de dos funciones L(x) y R(x), las cuales se denominan funciones forma a la izquierda y a la derecha respectivamente, que están definidas como $R\to[0,1]$ y que cumplen las siguientes propiedades:

1. Son simétricas, es decir $L(x) = L(-x)$ y $R(x) = R(-x)$ $\forall x\in R$.
2. $L(0)=R(0)=1$ y $L(1)=R(1) = 0$
3. L(x) y R(x) son monótonas crecientes en $(-\infty, 0]$ y monótonas decrecientes en $[0, \infty)$.

En segundo lugar, para construir un número borroso $\tilde{A}$ deberemos establecer su núcleo $[a_{1C}, a_{2C}]$, que también llamaremos centro y las desviaciones que estimamos razonables sobre dicho núcleo a la izquierda, es decir, su radio izquierdo l_A y a la derecha, su radio derecho, r_A, de forma que:

$$\mathrm{sop}(\tilde{A}) = [a_{1C} - l_A, a_{2C} + r_A]$$

De esta forma, si $\tilde{A}$ es L-R de Dubois y Prade, su función de pertenencia, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, viene dada por:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a_{1C} - x}{l_A}\right) & a_{1C} - l_A < x \leq a_{1C} \\ 1 & a_{1C} < x \leq a_{2C} \\ R\left(\dfrac{x - a_{2C}}{r_A}\right) & a_{2C} < x < a_{2C} + r_A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α-cortes:

$$A_\alpha = \left[a_{1C} - l_A L^{-1}(\alpha), a_{2C} + r_A R^{-1}(\alpha)\right]$$

notándose a este número como $\widetilde{A}$=(a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)$_{LR}$. Por convención, si l_A=r_A =0, $\widetilde{A}$ es el intervalo crisp [a_{1C}, a_{2C}], y si a_{1C} = a_{2C}=a_C $\widetilde{A}$ es el número cierto a_C.

En el caso en que $\mathrm{nucl}(\widetilde{A})$ sea un único número cierto, a_C, notaremos al número borroso $\widetilde{A}$ como $\widetilde{A}$=(a_C, l_A, r_A)$_{LR}$, siendo su función de pertenencia y de sus α-cortes, respectivamente:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a_C - x}{l_A}\right) & a_C - l_A < x \le a_C \\ R\left(\dfrac{x - a_C}{r_A}\right) & a_C < x \le a_C + r_A \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y:

$$A_\alpha = \left[a_C - l_A L^{-1}(\alpha), a_C + r_A R^{-1}(\alpha)\right]$$

Asimismo, si las funciones formas izquierda y derecha son iguales, L(x)=R(x), diremos que $\widetilde{A}$ es un número borroso L-L de Dubois y Prade, notándose este como $\widetilde{A}$ =(a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)$_L$. En el caso en que el núcleo sea un único número borroso, a_C, notaremos a éste como $\widetilde{A}$=(a_C, l_A, r_A)$_L$. Por otra parte, si L(x)=R(x) y l_A= r_A =a_R y el núcleo es un único valor a_C decimos que $\widetilde{A}$ es un número borroso simétrico L-L de Dubois y Prade. A dicho número borroso lo notaremos como $\widetilde{A}$ = (a_C, a_R)$_L$. La función de pertenencia de $\widetilde{A}$ será entonces:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{|a_C - x|}{a_R}\right) & a_C - a_R \le x \le a_C + a_R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y sus α-cortes:

$$A_\alpha = \left[a_C - a_R L^{-1}(\alpha), a_C + a_R L^{-1}(\alpha)\right]$$

1.2.3.2. Operaciones con números L-R de Dubois y Prade

A continuación expresamos los resultados de algunas operaciones aritméticas con números –o intervalos- L-R de Dubois y Prade. Si la operación es monaria, utilizaremos un número L-R de

Dubois y Prade $\widetilde{A}$ =(a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)$_{LR}$ y si es binaria, notaremos a los dos números borrosos L-R de Dubois y Prade que intervienen como $\widetilde{A}$ =(a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)$_{LR}$ y $\widetilde{B}$ =(b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)$_{LR}$

1. *Opuesto*: $\widetilde{B} = -\widetilde{A} =$ ($-a_{2C}$, $-a_{1C}$, r_A, l_A)$_{LR}$

2. *Multiplicación por un escalar*: $\widetilde{B} = k\widetilde{A}$, con $k\in R$.

   2.1. Si k>0, $\widetilde{B} =$ (ka_{1C}, ka_{2C}, kl_A, kr_A)$_{LR}$

   2.2. Si k<0, $\widetilde{B} =$ (ka_{2C}, ka_{1C}, $|k|r_A$, $|k|l_A$)$_{LR}$

   2.3. Si k=0, $\widetilde{B} =$ (0, 0, 0, 0)$_{LR}$, es decir, el número cierto 0.

3. *Pseudo-nverso*: $\widetilde{B} = \widetilde{A}^{-1}$. En este caso $\widetilde{B}$ no conserva su condición de L-R de Dubois y Prade. Sin embargo podemos aproximar a $\widetilde{B} \approx \left(\frac{1}{a_{2C}}, \frac{1}{a_{1C}}, \frac{r_A}{(a_{2C})^2}, \frac{l_A}{(a_{1C})^2}\right)_{LR}$. En cualquier caso suponemos que $0 \notin \text{sop}(\widetilde{A})$.

4. *Suma*: Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$ se obtiene:

$$\widetilde{C} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR} + (b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)_{LR} = (a_{1C} + b_{1C}, a_{2C} + b_{2C}, l_A + l_B, r_A + r_B)_{LR}$$

5. *Resta*: Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} - \widetilde{B}$ se obtiene:

$$\widetilde{C} = (a_{1C}, a_{2C}, l_A, r_A)_{LR} - (b_{1C}, b_{2C}, l_B, r_B)_{LR} = (a_{1C} - b_{2C}, a_{2C} - b_{1C}, l_A + r_B, r_A + l_B)_{LR}$$

6. *Multiplicación*. Para $\widetilde{C} = \widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$, el resultado que obtenemos no es un número borroso L-R de Dubois y Prade. Sin embargo, Dubois y Prade proponen la siguiente aproximación, suponiéndose que $\text{sop}(\widetilde{B})\,\text{y}\,\text{sop}(\widetilde{A}) \subset R^+$:

$$\widetilde{C} = (a_{1C},a_{2C},l_A,r_A)_{LR} \otimes (b_{1C},b_{2C},l_B,r_B)_{LR} \approx \big(a_{1C} \cdot b_{1C}, a_{2C} \cdot b_{2C},$$
$$, a_{1C} \cdot l_B + b_{1C} \cdot l_A, a_{2C} \cdot r_B + b_{2C} \cdot r_A \big)_{LR}$$

Puede comprobarse que la aproximación propuesta, aunque mantiene la naturaleza de los números borrosos de partida, no conserva, lo que a nuestro entender, es una importante información de $\widetilde{C}$: su soporte. Sin embargo, si los radios toman un valor relativamente pequeño respecto a los que contiene el núcleo, y si $\text{sop}(\widetilde{B})\,\text{y}\,\text{sop}(\widetilde{A}) \subset R^+$, Dubois y Prade proponen como aproximación:

$$\widetilde{C} \approx \big(a_{1C} \cdot b_{1C}, a_{2C} \cdot b_{2C}, a_{1C} \cdot l_B + b_{1C} \cdot l_A - l_A \cdot l_B, a_{2C} \cdot r_B + b_{2C} \cdot r_A - r_A \cdot r_B \big)_{LR}$$