CAPÍTULO 1:

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

1.1. SUBCONJUNTO BORROSO

1.1.1. Definición y concepto

La matemática de conjuntos que podríamos denominar como clásica, se basa en la lógica aristotélica fundamentada en el principio del tercio excluso, principio que indica que una proposición únicamente puede ser verdadera o falsa, no existiendo ningún grado de verdad intermedio. Como consecuencia de dicho principio, en la teoría de conjuntos, paea un subconjunto A definido sobre un conjunto universo o referencial X, un elemento del referencial pertenece o no pertenece a dicho conjunto A, es decir, no existe ningún tipo de ambigüedad sobre su pertenencia.

Matemáticamente la pertenencia a un conjunto se expresa a través de una función característica $\mu_A(x)$ que asigna valores a todos los elementos de A en el conjunto discreto $\{0, 1\}$. Dicho valor es 0 cuando su pertenencia es falsa y 1 cuando esta es cierta. Es decir, matemáticamente la función característica viene dada por:

$$\mu_A: X \rightarrow \{0,1\}$$

$$x \in X \rightarrow \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Del principio del tercio excluso deriva el principio de exclusión. Éste indica que si un elemento x del referencial X pertenece a un conjunto A, no pertenece a su complementario, A^C, y viceversa. Matemáticamente podemos expresar el principio de exclusión como:

$$\forall x \in X, \text{ si } \mu_A(x)=1 \Leftrightarrow \mu_{A^C}(x) = 0$$

En muchas circunstancias estos principios sobre los que se sustenta la lógica clásica, y por tanto, los modelos matemáticos que de ellos se derivan pueden ser válidos para reflejar el fenómeno estudiado. Por ejemplo, un asegurador de vida puede definir sobre el conjunto referencial “colectivo asegurado” el conjunto “individuos jubilados”. La pertenencia a este conjunto no admite ningún tipo de matiz. Sin embargo, en muchas circunstancias la lógica clásica no es suficiente para reflejar o modelizar fenómenos sobre los que las personas deben tomar decisiones, que frecuentemente son vagos. Supongamos que sobre el conjunto referencial “colectivo asegurado” definimos el conjunto “individuos con bajo nivel de colesterol”. La pertenencia a este conjunto no admite sólo el “sí” o el “no”, el “blanco” o el “negro”, salvo que arbitrariamente se fije una medida por debajo de la cual se determine que un individuo tiene un bajo nivel de colesterol o no; pero aún así, en este supuesto siempre habrá personas con un nivel de colesterol cercano a la frontera a las que se habrá encuadrado sin ningún tipo de ambigüedad dentro de las que tienen un bajo nivel de colesterol, o dentro de las que no lo tienen, perdiéndose por tanto mucha información. Si queremos representar con veracidad éste fenómeno deberemos admitir que entre el “sí” y el “no” existe una amplia gama de matices. Un determinado individuo podrá tener un nivel de colesterol “bajo”, “bastante bajo”, “poco bajo”, “muy elevado”, etc. Estos problemas no pueden ser analizados con los limitados principios del tercio excluso y el de exclusión, sino que debe partirse de uno más flexible, el de simultaneidad gradual, enunciado formalmente en Gil Aluja (1995), según el principio de simultaneidad gradual, un elemento puede pertenecer a un determinado conjunto y a la vez al conjunto complementario, siempre que se asigne a ambas pertenencias un grado o bien, una proposición puede ser verdadera y falsa a la vez siempre que se asigne un grado de verdad y de falsedad.

El instrumento por excelencia para modelizar fenómenos en los que rige el principio de simultaneidad gradual es la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, cuya base son las lógicas multivalentes desarrolladas en el primer tercio del siglo XX por autores como Lukasiewicz o Goguen. Sin embargo, si debiéramos dar una fecha en la cual esta teoría toma carta de naturaleza es en 1965, con el trabajo de Zadeh (1965) "Fuzzy sets", en el cual se asientan los fundamentos lógicos que han permitido una rápida evolución en la creación de instrumentos de matemática aplicada –que son los que nos interesan en esta tesis- para modelizar realidades en las que rige el principio de simultaneidad gradual, o lo que es lo mismo, la vaguedad en la información.

Un conjunto borroso es un conjunto para el cual la pertenencia de un elemento está definida de forma difusa o borrosa. Así, si denominamos como X al universo o conjunto referencial, un subconjunto borroso, que denotaremos con una tilde, $\tilde{A}$, es aquel en el que la pertenencia de un elemento $x \in X$ tiene asignado un nivel de verdad que puede tomar valores en el conjunto continuo [0,1]. El nivel de pertenencia de un elemento x vendrá dado por su función de pertenencia o función característica, $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Así, podemos notar a un subconjunto borroso como $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$, siendo la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0,1]$$

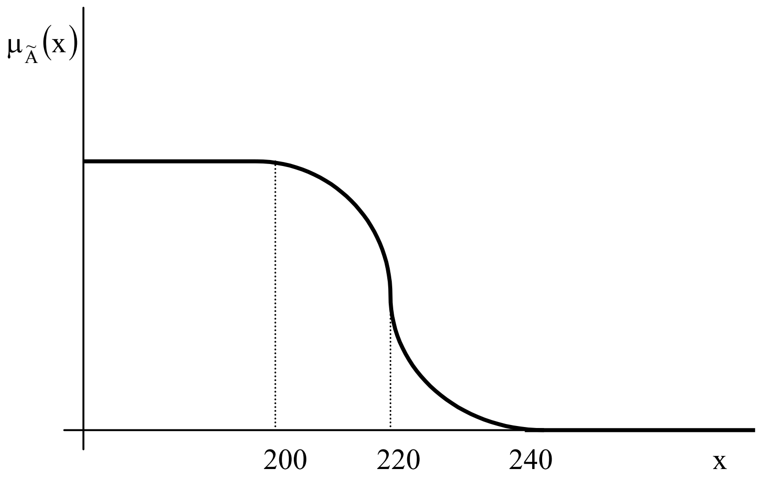
$$x \in X \rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$$

donde 0 indica la no pertenencia al conjunto $\widetilde{A}$ y 1 la pertenencia absoluta. Evidentemente, existe una gradación del nivel de pertenencia, de forma que si $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0'9$, el nivel de pertenencia del elemento x es muy elevado, y si $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0'1$ el nivel de pertenencia de x es muy bajo.

Así, el conjunto "bajo nivel de colesterol", puesto como ejemplo en párrafos anteriores, puede ser modelizado a través de un subconjunto borroso que notamos como $\widetilde{A}$. Lemaire (1990), partiendo de que el Instituto Nacional de la Salud de los Estados Unidos aconseja que dicho nivel no debe exceder de 200 mg por decilitro de sangre, que niveles entre 200 y 240 mg/dl aumentan progresivamente el riesgo para la salud de una persona, y que a partir de 240 mg/dl el nivel de colesterol se considera de alto riesgo, propone la siguiente función de pertenencia para $\widetilde{A}$, $\mu_{\widetilde{A}}(x)$, que informará sobre el grado de verdad con que un individuo pertenece al grupo de personas con "bajo nivel de colesterol":

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 1 & x \le 200 \\ 1 - 2\left(\dfrac{x-200}{40}\right)^2 & 200 < x \le 220 \\ 2\left(\dfrac{240-x}{40}\right)^2 & 220 < x \le 240 \\ 0 & 240 < x \end{cases}$$

Siendo su representación:



Por otra parte, si bien es cierto que en muchos fenómenos cabe distinguir más matices de verdad que simplemente verdadero o falso, también es cierto que el ser humano no es capaz de distinguir entre infinitos niveles de verdad. Por ejemplo, si disponemos de dos elementos de un conjunto referencial x_1 y x_2, y en un determinado subconjunto borroso $\widetilde{A}$ definido en el conjunto X su grado de pertenencia es $\mu_{\widetilde{A}}(x_1) = 0'9$ y $\mu_{\widetilde{A}}(x_2) = 0'1$, es fácil distinguir que x_1 pertenece a $\widetilde{A}$ en un grado mucho más elevado que x_2. Sin embargo, si $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = 0'6$ y $\mu_{\tilde{A}}(x_2) = 0'61$, podemos decir que x_1 pertenece con igual grado de verdad que x_2 a $\tilde{A}$, ya que el 0'01 que diferencia a ambos niveles de pertenencia es difícil de discernir. Por ello, en muchas ocasiones se reducen los niveles de pertenencia de un elemento a una escala semántica. A esta escala se le da una interpretación lingüística. A continuación presentamos las escalas semánticas mas usuales que pueden ser ordenadas de mayor a menor matización de los niveles de verdad siguiendo etiquetas lingüísticas:

Escala binaria

0: falso

1: verdadero

Escala ternaria

0: falso

0'5: ni verdadero ni falso

1: verdadero

Escala pentaria

0: falso

0'25: más falso que verdadero

0'5: ni verdadero ni falso

0'75: más verdadero que falso

1: verdadero

Escala hexaria

0: falso

0'2: casi falso

0'4: más falso que verdadero

0'6: más verdadero que falso

0'8: casi verdadero

1: verdadero

Escala endecadaria

0: falso

0'1: prácticamente falso

0'2: casi falso

0'3: bastante falso

0'4: más falso que verdadero

0'5: ni verdadero ni falso

0'6: más verdadero que falso

0'7: bastante verdadero

0'8: casi verdadero

0'9: prácticamente verdadero

1: verdadero

Así, podemos observar que un conjunto ordinario o crisp es un caso particular de un conjunto borroso, para el cual únicamente se diferencian dos niveles de pertenencia: la pertenencia absoluta y la no pertenencia. Las relaciones numéricas y semánticas establecidas son únicamente alternativas, si bien ampliamente utilizadas, aunque sin duda podrían proponerse otras relaciones.

1.1.2. Definiciones sobre conjuntos borrosos

Este apartado tiene como objetivo definir ciertos conceptos relacionados con los conjuntos borrosos a las cuales nos referiremos a lo largo de la tesis.

Definición 1: El subconjunto borroso $\widetilde{A}$ es vacío si $\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0 \ \forall x \in X$.

Definición 2: El subconjunto borroso $\widetilde{A}$ es normal si $\sup\limits_{\forall x \in X} \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1$. En este caso, muchos autores consideran que $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ es una "medida" de posibilidad y $\widetilde{A}$ es una distribución de posibilidad.

Definición 3: El conjunto de nivel α o α-corte es el conjunto crisp o nítido que contiene aquellos elementos que poseen al menos un nivel de pertenencia α. Para un subconjunto borroso $\widetilde{A}$, notamos a éste conjunto como A_α, que es:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Definición 4: El soporte de un subconjunto borroso son aquellos elementos $x \in X$ tales que:

$$\mathrm{sop}(\widetilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$$

Definición 5: Definimos como núcleo de un subconjunto borroso al α-corte que presenta un grado de verdad 1. En concreto:

$$\mathrm{nucl}(\widetilde{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1\}$$

Definición 6: El subconjunto borroso $\widetilde{A}$ es convexo si.

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0, 1], \ \mu_{\widetilde{A}}[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \geq \mu_{\widetilde{A}}(x_1) \wedge \mu_{\widetilde{A}}(x_2) \ \forall x \in X$$

o bien el subconjunto borroso $\widetilde{A}$ es convexo si sus α-cortes, A_α, son conjuntos convexos: $\forall \alpha$, $\alpha' \in [0,1]$, $\alpha \leq \alpha' \Leftrightarrow A_{\alpha'} \subseteq A_\alpha$

1.1.3. Operaciones conjuntistas básicas con subconjuntos borrosos

Complementación: Dado un subconjunto borroso $\widetilde{A}$, cuya función característica es $\mu_{\widetilde{A}}(x)$, el subconjunto complementario $\widetilde{A}^C$ queda caracterizado por la función de pertenencia:

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \forall x \in X$$

Inclusión: Diremos que un subconjunto borroso $\tilde{A}$ está incluido en otro $\tilde{B}$:

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \mu_{\tilde{A}}(x) \;\forall x \in X$$

Unión: La unión de dos conjuntos borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, cuyas funciones de pertenencia son respectivamente $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$ es el subconjunto borroso $\tilde{C}$, $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, cuya función característica es:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \;\forall x \in X$$

Intersección: La intersección de dos conjuntos borrosos $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$, cuyas funciones de pertenencia son $\mu_{\tilde{A}}(x)$ y $\mu_{\tilde{B}}(x)$, es el subconjunto borroso $\tilde{C}$, $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$, cuya función de pertenencia es:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$$

Una descripción de las propiedades básicas de estas operaciones puede encontrarse en Kaufmann *et al.* (1994, p. 163-170).

Producto cartesiano de conjuntos borrosos: Sean los subconjuntos borrosos $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ contenidos respectivamente en los conjuntos referenciales $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Definimos el producto cartesiano de los n conjuntos borrosos $\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \ldots \times \tilde{A}_n \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ como:

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n,\; \mu_{\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times \ldots \times \tilde{A}_n}(x) = \mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)$$

1.1.4. Principio de extensión de Zadeh

Se trata del principio fundamental en que se sustentan aquéllas aplicaciones de los subconjuntos borrosos basadas en la extensión de conceptos matemáticos no borrosos cuando los datos de partida son borrosos.

1.1.4.1. Principio de extensión generalizado

Sea una aplicación $f: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \rightarrow Y$. Si definimos sobre $X_1, X_2, \ldots, X_n$ los conjuntos borrosos $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$ respectivamente, la aplicación f permite definir un conjunto borroso $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n) \subseteq Y$ para el cual su función característica $\mu_{\tilde{B}}(y)$, es:

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y)=\varnothing \\ \bigvee\limits_{y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \left(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1)\wedge\mu_{\tilde{A}_2}(x_2)\wedge\ldots\wedge\mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\right) & \text{si } f^{-1}(y)\neq\varnothing \end{cases}$$

1.1.4.2. Principio de extensión

A partir del principio de extensión generalizado –definido para una función de un producto cartesiano de conjuntos- podemos definir el principio de extensión cuando el conjunto antiimagen consta únicamente de un solo conjunto, de forma que evaluamos una aplicación $f:X\rightarrow Y$. Si definimos sobre X un subconjunto borroso $\tilde{A}$, $f(\tilde{A})$ es un subconjunto borroso $\tilde{B}$ cuya función de pertenencia $\mu_{\tilde{B}}(y)$, es:

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(y)=\varnothing \\ \bigvee\limits_{y=f(x)} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } f^{-1}(y)\neq\varnothing \end{cases}$$

1.1.4.3. Aplicación del principio de extensión Zadeh a través de conjuntos de nivel

En muchas ocasiones, al evaluar una relación funcional entre conjuntos borrosos no será posible operar con sus funciones de pertenencia, pero si hacerlo con los α-cortes o conjuntos de nivel. Nguyen (1978) demuestra que el principio de extensión puede ser aplicado a través de los α-cortes de los subconjuntos borrosos que forman parte de la antiimagen. En concreto, dicho autor demuestra que si partimos de la aplicación f: $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\rightarrow Y$, y definimos sobre el conjunto antiimagen los subconjuntos borrosos $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2,\ldots,\tilde{A}_n$ respectivamente, f induce un subconjunto borroso $\tilde{B}=f(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\ldots,\tilde{A}_n)\subset Y$, cuyos α-cortes, B_α pueden ser hallados como:

$$B_\alpha=f(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2,\ldots,\tilde{A}_n)_\alpha=f(A_{1_\alpha},A_{2_\alpha},\ldots,A_{n_\alpha})$$

1.1.5. Relaciones borrosas binarias

Para dos conjuntos X eY, una relación borrosa en $X\times Y$ será una relación entre los elementos de dos conjuntos cuyo acaecimiento lleva asociado un determinado nivel de verdad. Dicha relación vendrá dada por:

$$\tilde{R}=\{(x,y),\mu_{\tilde{R}}(x,y)\mid(x,y)\in X\times Y\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{R}}: X\times Y\rightarrow[0,1]$$

$$(x,y) \in X \times Y \rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,y) \in [0,1]$$

Zimmermann (1991) propone como ejemplo de una relación borrosa, $\tilde{R} =$"bastante más grande que". Esta relación está definida en R×R y propone como expresión de su función característica:

$$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq y \\ \dfrac{x-y}{10y} & y < x \leq 11y \\ 1 & x > 11y \end{cases}$$

A partir de dos relaciones borrosas $\tilde{R}_1(x,y),(x,y) \in X \times Y$ y $\tilde{R}_2(y,z),(x,y) \in Y \times Z$, podemos inferir la relación borrosa de los elementos de X y Z a través de la composición max-min realizando:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \left\{ \left((x,z), \mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x,z) = \bigvee_y \left(\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(x,y) \right) \right) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z \right\}$$

1.2. NÚMEROS BORROSOS

1.2.1. Definición y concepto

Un número borroso es un subconjunto borroso, $\tilde{A}$, normal, convexo y cuyo conjunto referencial son los números reales. Se trata del instrumento por excelencia del que dispone la lógica borrosa para representar cuantías estimadas u observadas de forma difusa.

Debemos reseñar que muchos autores, dentro del concepto de número borroso diferencian a los números borrosos propiamente dichos, para los cuales el núcleo es un valor real, de los intervalos borrosos, para los cuales el núcleo es un intervalo de confianza. Nosotros entenderemos como número borroso indistintamente a ambas formas de representar cuantías difusas.

Por otra parte, el valor que toma un elemento $x \in R$ en la función de pertenencia de $\tilde{A}$, $\mu_{\tilde{A}}(x)$, es interpretado por muchos autores como una "medida" de la posibilidad de ocurrencia de x, por lo que el número borroso $\tilde{A}$ es interpretado como una distribución de posibilidad.

De forma general, la función de pertenencia de un número borroso $\tilde{A}$ puede escribirse como: