

CONCLUSIONES

A continuación sintetizamos los resultados obtenidos en esta tesis que consideramos más importantes. Este apartado de conclusiones ha sido dividido, asimismo, en dos secciones: en la primera de ellas señalamos aquellas conclusiones que se pueden desprender directamente del trabajo realizado y en la segunda, exponemos las vías de investigación que, a nuestro juicio, han quedado abiertas para posteriores desarrollos.

1. CONCLUSIONES PROPIAS DE LA TESIS

Presentamos en este epígrafe las conclusiones que propiamente se pueden extraer de la tesis presentada, diferenciándose cada una de las tres partes que la conforman.

Parte I: Instrumentos matemáticos de la teoría de los subconjuntos borrosos

1. En la primera parte de la tesis hemos expuesto el instrumental matemático que utilizaremos para el desarrollo de la segunda y tercera parte, las cuales conforman el cuerpo del trabajo. Algunos tópicos como la aproximación triangular de números borrosos, resolución de ecuaciones borrosas, etc. o el apartado de valoración financiera con incertidumbre en las magnitudes, son necesarios para el desarrollo de toda la tesis, y otros, como la regresión borrosa o el concepto de variable borroso aleatoria son específicos de alguna de las partes de la tesis. En cualquier caso, no hemos pretendido ser exhaustivos ya que nuestro interés se centraba, únicamente, en exponer los instrumentos matemáticos necesarios para llevar a cabo el desarrollo de las dos últimas partes del trabajo.
2. La única aportación de esta parte de la tesis es el estudio realizado sobre la viabilidad de la aproximación triangular del valor actual de capitales y de las rentas financieras cuando partimos de un interés o intereses de valoración triangulares, de forma que dicha aproximación mantenga el núcleo y el soporte del número borroso original. Para ello hemos utilizado la metodología propuesta por Jiménez y Rivas complementada con algunos resultados obtenidos por Terceño *et al.* (1994), (1995) y (1997) respecto a la aproximación triangular de determinadas magnitudes financieras cuando los datos de partida vienen dados por números borrosos triangulares.

Hemos observado que, aunque la aproximación triangular al valor actual de las rentas es buena, dicha aproximación para el valor actual de capitales con vencimientos alejados (a partir de 30 años, por ejemplo) y si tomamos como referencia una escala de verdad relativamente detallada, puede no ser válida, vencimientos por otra parte típicos, por ejemplo, en los seguros de vida. Sin embargo, este problema no es tan acusado para el valor actual de rentas financieras, ya que en este caso, los errores que se comenten al aproximar triangularmente el valor actual de los capitales con mayor diferimiento, que serán más elevados, son compensados con los cometidos al aproximar triangularmente el valor actual de los capitales con vencimiento más cercano en el tiempo, más pequeños.

Parte II: Estimación de la estructura temporal de los tipos de interés a través de subconjuntos borrosos y estimación de los tipos de interés futuros

1. Aunque ya hemos señalado que la valoración financiera y financiero-actuarial utilizando tipos de interés borrosos ya había sido tratada, creemos que el problema que implica la estimación de dichos intereses había sido objeto de poca atención. En la segunda parte de la tesis se ha pretendido, en la medida de lo posible, dar una solución a este problema ofreciéndose una serie de propuestas. Éstas se han basado en la estimación de una estructura temporal de los tipos de interés borrosa para los instrumentos de deuda pública –por tanto, libres de riesgo de insolvencia-, ya que ésta recoge implícitamente las expectativas de los agentes que actúan en los mercados de renta fija –asimilables a los “expertos”- sobre la evolución de los tipos de interés futuros. Los tipos de interés forward que define la ETTI serán los que asimilemos a los tipos de interés futuros, ya que éstos pueden ser interpretados como los anticipados por el mercado para el futuro.

Esta metodología de estimación de los tipos futuros implica asumir la teoría de las expectativas racionales como la teoría explicativa de la ETTI, con todas sus virtudes y debilidades. Bajo esta hipótesis, los tipos spot o al contado son la media geométrica –si utilizamos el régimen financiero de interés compuesto- de los tipos que regirán en el futuro, aceptándose, pues, que los tipos forward son un estimador perfecto de los tipos al contado futuro.

2. También hemos mostrado que la estimación de la ETTI con instrumentos de regresión borrosa, ofrece diversas ventajas metodológicas respecto a la utilización de los métodos econométricos convencionales:
 - a) Los precios de los instrumentos de deuda (de los activos financieros en general) no suelen manifestarse, en una sesión, como valores únicos, sino como una horquilla de valores. Al contrario de lo que ocurre utilizando métodos econométricos, con los instrumentos de

regresión borrosa podemos trabajar con toda la horquilla de precios, no incurriéndose en este caso en ninguna pérdida de información.

- b) En segundo lugar, la teoría de los subconjuntos borrosos es un instrumento más adecuado que la econometría para tratar información con un componente subjetivo elevado. En este sentido, si aceptamos que los precios de los activos financieros son un reflejo de las expectativas de los agentes económicos que los negocian, debemos aceptar el fuerte contenido subjetivo que implica su formación y fijación y la mayor adecuación de los instrumentos borrosos respecto a los econométricos para su tratamiento.
 - c) Asimismo, desde el punto de vista de la operatividad de los resultados que se obtengan para posteriores utilidades, los instrumentos borrosos permiten manejar con mayor facilidad toda la información de que se dispone. Es por ello que los métodos estadísticos en muchas ocasiones reducen, por razones de operatividad, las variables aleatorias a su esperanza matemática, con la consiguiente pérdida de información que ello comporta, cuestión que no es necesaria si dicha información viene cuantificada por números borrosos
3. Los métodos propuestos para la estimación de la ETTI se han inspirado en algunos modelos econométricos ya existentes, y se ha utilizado para su implementación el modelo de regresión borrosa de Tanaka e Ishibuchi. Los métodos propuestos permiten obtener los tipos al contado a través de cualquier número borroso L-L de Dubois y Prade –con la misma función forma a la derecha y a la izquierda-. Por su mayor operatividad e interpretación intuitiva hacemos un análisis particular en que la ETTI sea cuantificada a través de números borrosos triangulares.
4. Dentro de los métodos propuestos, podemos encontrar dos tipologías:
- a) Los basados en la estimación de la curva de rentabilidades, que consiste en determinar una relación funcional, en nuestro caso de tipo borroso, que relacione la TIR de los bonos y obligaciones del estado con sus vencimientos.
 - b) Los basados en la estimación directa de la función de descuento que describe la ETTI.

Si se pretende llegar a la obtención final de la ETTI, el grupo de metodologías mencionadas en a) debe ser complementada para eliminar el sesgo de cupón con la técnica del bono par, la cual ha sido adaptada al supuesto de incertidumbre. En nuestro caso, los teóricos bonos que cotizan a la par y cuyo vencimiento es el de los tipos al contado que debemos obtener, no se negociarán exactamente a la par, sino "aproximadamente a la par" ya que la TIR de éstos se manifiesta a través de números borrosos y no de valores ciertos, y por tanto, sus precios también lo serán. En cualquier caso, creemos que ello es más realista si observamos el funcionamiento de los mercados, ya que normalmente el precio de los bonos –y por tanto, su TIR-, suele manifestarse como una horquilla de valores.

Al utilizar la metodología del bono par, la obtención de los tipos spot es, desde el punto de vista matemático, un problema de resolución de sistemas de ecuaciones con coeficientes borrosos, que puede ser resuelto recursivamente solucionando ecuaciones borrosas del tipo $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$. Para la determinación de su solución se ha propuesto aplicar el concepto clásico de solución de ecuaciones borrosas, ya que de esta forma no se incrementa innecesariamente la incertidumbre, y se ha expuesto las condiciones para que dicha solución exista. Si no existe solución en sentido clásico, utilizaremos la solución de ecuaciones borrosas de Buckley y Qu, que siempre pueden hallarse. Asimismo, este grupo de metodologías sólo permite obtener una ETTI de tipo discreto, de forma que únicamente conoceremos el tipo al contado para vencimientos discretos, siendo dichos vencimientos los de los bonos par que hayan sido tomados en la estimación de la ETTI.

Respecto al segundo tipo de metodologías, se han inspirado en las pertenecientes a la familia de los splines. En concreto, hemos adaptado el método de McCulloch –basado en la utilización de splines polinómicos- y el de Vasicek y Fong –basado en la utilización de splines exponenciales- al supuesto en que utilizamos en la estimación de la ETTI métodos de regresión borrosos. En este caso, los coeficientes de la función de descuento que definen los tipos al contado son números borrosos. Con estos métodos podemos definir una ETTI borrosa de tipo continuo, y adicionalmente no debemos enfrentarnos al problema que implicaría la resolución de ecuaciones borrosas.

5. Sea cual sea el método utilizado en la estimación de la ETTI, una elección importante es el nivel α al que implementamos la regresión. Dicho grado de presunción puede ser interpretado como el grado de incertidumbre que el decisor detecta en los mercados. Si la regresión se realiza para un nivel $\alpha=0$, éste considera que el espectro de precios negociados está acorde con la incertidumbre existente. Si incrementa dicho nivel de presunción, lo cual implica percibir mayor incertidumbre, la borrosidad de la ETTI aumenta, y por tanto la incertidumbre de las magnitudes y variables que sean obtenidas a partir de ella también deberá aumentar.
6. Asimismo, todos los métodos propuestos han sido utilizados para la estimación de la ETTI correspondiente a una sesión concreta – el 21/1/1999- con el fin de comprobar, en primer lugar, si son realmente aplicables, y en segundo lugar, si los resultados que se obtiene son razonables. Esta segunda característica se ha analizado midiendo el nivel de presunción de las estimaciones obtenidas econométricamente en las correspondientes borrosas. De forma general, consideramos que los resultados obtenidos son satisfactorios sea cual sea la metodología utilizada a la vez que

los resultados obtenidos aportan mayor información que los obtenidos con las herramientas clásicas.

7. Se ha hecho un estudio particular para la estimación de la ETTI a través de números borrosos triangulares. Si bien, sea cual sea el método utilizado en la estimación de la ETTI, no podemos obtener directamente los tipos al contado como números borrosos triangulares, en la aplicación empírica efectuada hemos comprobado que su aproximación triangular es más que satisfactoria.
8. Finalmente hemos analizado como determinar los tipos forward, asimilables a los que se anticipan en el mercado para el futuro, a partir de una ETTI borrosa. Dichos tipos serán también números borrosos, y su estimación puede reducirse desde el punto de vista matemático, a un problema de desconvolución del producto de dos números borrosos. Si partimos de una ETTI estimada a través de la curva de rentabilidades, proponemos como método de obtención de los tipos forward, el concepto clásico de resolución de ecuaciones borrosas, y asimismo, se indica bajo que condiciones existe dicha solución. En caso de no existir solución en sentido clásico, proponemos utilizar la solución de ecuaciones borrosas propuesta por Buckley y Qu, que si bien, siempre existe, aportará mayor incertidumbre a los tipos obtenidos para el futuro e incluso puede provocar que su valor no tenga sentido financiero –se obtengan tipos de interés negativos con un nivel de presunción superior a cero-. Sin embargo, si partimos de una ETTI estimada a través del factor de descuento que definen los tipos implícitos, y las funciones del tiempo utilizadas para construir dicho factor de descuento son no decrecientes y no negativas, podemos observar que en este caso la solución en sentido clásico siempre existe.
9. Hemos hecho un análisis particular en la estimación de los tipos futuros partiendo de una estimación de los tipos spot a través de números borrosos triangulares. Si bien, los tipos implícitos no serán triangulares, en la aplicación empírica analizada hemos comprobado que sea cual sea la metodología de estimación de la ETTI de la que partamos, la aproximación triangular de los tipos esperados por el mercado es muy satisfactoria.
10. Los desarrollos expuestos para estimar los tipos forward han sido aplicados a la determinación de los tipos de interés a un año estimados en el mercado de deuda pública con la ETTI obtenida el 21/1/1999. En este caso también hemos medido la congruencia de la estimación realizada en certeza con la efectuada con nuestros métodos, siendo los resultados obtenidos, en general, satisfactorios.
11. Si nos tenemos que decantar por una de las dos líneas metodológicas propuestas para la estimación de los tipos futuros, nosotros nos decantaríamos por la basada en la estimación directa

de la función de descuento que define la ETTI. En primer lugar, porque permite obtener una ETTI continua y además de forma directa, no siendo necesario recurrir a la técnica del bono par, que hace más tortuosa la estimación final de los tipos al contado. Por otra parte, al estimar la ETTI a través de la curva de rentabilidades, si bien el sesgo que incorpora el cobro de cupones en la rentabilidad interna de un título con un determinado vencimiento respecto al tipo al contado asociado a dicho vencimiento queda parcialmente eliminado al utilizar la técnica del bono par, éste no queda eliminado del todo. Dicho problema no existe si estimamos directamente la función de descuento que define la ETTI. Asimismo, la estimación de la ETTI como una función borrosa continua del tiempo permite obtener los tipos forward como funciones continuas del tiempo, lo cual no es posible partiendo de las estimaciones borrosas de la curva de rentabilidades. Al mismo tiempo, con la línea metodológica de los splines, si especificamos de forma adecuada éstos, podemos asegurar que no obtendremos tipos forward negativos, lo cual podría ocurrir si partimos de la estimación de la curva de rentabilidades.

Parte III: Análisis de la determinación de las primas en los seguros de vida y de la solvencia dinámica cuando los tipos de interés de valoración vienen estimados a través de números borrosos

1. En este apartado de la tesis y sobre la base del concepto de variable borroso aleatoria, hemos propuesto una metodología para el análisis de los seguros de vida, que si bien ha sido aplicada a la fijación de las primas puras únicas y de recargos sobre éstas, creemos que también puede ser aplicada sin excesivas modificaciones a la determinación de provisiones matemáticas y reservas de estabilidad para contratos ya iniciados. Esta metodología permite, asimismo, mantener toda la información inherente al comportamiento de la mortalidad –estocástico- y al del tipo de interés –borroso- en todos los análisis que se van desarrollando.
2. Hemos expuesto el tratamiento que damos al fenómeno de la mortalidad –el tratamiento clásico- y hemos propuesto diversos métodos que permiten estimar los intereses a utilizar en el proceso de valoración financiero actuarial a través de números borrosos. Dichos métodos pueden ser divididos en dos grandes grupos:
 - a) En primer lugar, hemos sugerido diversas alternativas orientadas a obtener un único tipo de interés técnico para todo el horizonte de valoración. Ello puede realizarse de dos maneras. La primera de ellas es suponer que el interés real a lo largo del plazo es siempre un intervalo. Así pues, la cuantificación de este parámetro como un número borroso es inmediata. Para obtener el interés técnico deberemos adicionar a dicho tipo la inflación media durante la duración del contrato, que deberá ser estimada subjetivamente por el actuario. Otra alternativa es ofrecer un interés ligado al que se espera obtener de la cartera

activa, que suele componerse en un porcentaje muy elevado de bonos y obligaciones del estado. Si se opta por este camino, el instrumento de referencia del que partimos es la estructura temporal de los tipos de interés borrosa. La hipótesis que sea realizada respecto a la reinversión de los flujos de la cartera activa nos acabará determinando un valor u otro para la rentabilidad que finalmente deba tomarse como referencia.

b) La segunda propuesta es valorar los flujos monetarios contemplados en el contrato con un tipo de interés diferente en función de su vencimiento. Para ello también es indispensable partir de una ETTI de referencia. Los tipos de interés pueden ser los tipos al contado, de forma que cada flujo es descontado con el tipo de interés spot correspondiente a su vencimiento; o bien los tipos estimados para el futuro (tipos implícitos), de forma que cada cuantía contemplada en el contrato es descontada con los tipos forward que rijan hasta su vencimiento.

3. Somos conscientes que existían trabajos anteriores a la redacción de esta tesis sobre valoración financiero-actuarial que modelizaba la incertidumbre de los tipos de interés mediante números borrosos. Éstos se basaban en la utilización de la teoría estática de los seguros de vida, que consiste en reducir la aleatoriedad de los capitales asegurados a su esperanza matemática. Dicho enfoque no nos ha satisfecho del todo, ya que se perdía gran parte de la información relativa al fenómeno de la mortalidad, de forma que con dicho enfoque es difícil realizar un análisis de la solvencia del asegurador o determinar de forma rigurosa desviaciones para la siniestralidad.

Sobre la base de estas consideraciones, hemos partido del denominado enfoque estocástico. Éste se basa, suponiéndose certeza en el tipo de interés valoratorio, en la variable aleatoria valor actual de las pérdidas para el asegurador tras cobrar una determinada prima. En esta tesis se adapta esta metodología de análisis al supuesto en que el interés o los intereses de valoración sean borrosos, por lo que las realizaciones del valor actual de las pérdidas serán borrosas, siendo entonces el valor actual de las pérdidas del asegurador, una variable borroso aleatoria.

4. Hemos realizado un análisis del valor actual de determinadas estructuras actuariales aplicando el enfoque estocástico y suponiéndose certeza en el tipo o los tipos de interés de valoración. Aunque hemos supuesto que las estructuras son unitarias, los resultados obtenidos pueden hacerse extensibles, siempre, si las cuantías son constantes, y casi siempre, si éstas varían en progresión geométrica. Asimismo, analizamos el comportamiento de la media, la varianza y la desviación estándar de dichos valores actuales respecto al interés o intereses de actualización. Ello nos facilitará la posterior aplicación de números borrosos en la determinación de estas magnitudes, especialmente cuando determinemos sus α -cortes. En concreto hemos comprobado:

- a) Para cualquier estructura actuarial, la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones es siempre una función decreciente respecto al tipo de interés.
 - b) La varianza y la desviación estándar del valor actual de capitales de supervivencia o fallecimiento y de las rentas de supervivencia son también funciones decrecientes del tipo o los tipos de interés de valoración.
 - c) La varianza y la desviación estándar del valor actual de las estructuras tipo seguro vida entera y temporal y de los seguros mixtos no son monótonas respecto al tipo de interés. Sin embargo, si calculamos los valores actuales con tipo de interés constante, las diversas simulaciones efectuadas indican que para tipos de interés no negativos existe únicamente un máximo global.
5. El mismo análisis se ha realizado suponiendo que la valoración de las prestaciones se realizaba con un interés o intereses estimados mediante números borrosos. En este caso, el valor actual de las estructuras actuariales es una variable borroso aleatoria. Ésta puede ser descrita a través de su función de pertenencia, que indica el nivel de presunción de cada variable aleatoria valor actual de las prestaciones, la cual vendrá dada por una trayectoria concreta dentro de las posibles que puede tomar el tipo de interés a lo largo de la duración del seguro. Sin embargo, será más operativo realizar el análisis del valor actual de las prestaciones a través de conjuntos de nivel. Así, para un nivel de presunción dado, podremos definir una variable aleatoria inferior, que vendrá determinada por la trayectoria superior de los tipos de interés que posea al menos dicho nivel de presunción, y por una variable aleatoria superior, que vendrá dada por la trayectoria inferior que puedan tomar los tipos de interés que posean dicho grado de pertenencia.
6. Para el valor actual de los capitales de supervivencia, de fallecimiento y de las rentas actuariales, la determinación de los α -cortes de la esperanza matemática, de la varianza y de la desviación estándar borrosas es inmediata, ya que la relación existente entre dichos parámetros y el interés de actualización es decreciente. Así el extremo inferior de los α -cortes se halla a través de las trayectorias superiores de los tipos de interés con dicho nivel de presunción y viceversa. Sin embargo, en el seguro vida entera, en el seguro temporal y en el seguro mixto, aunque la afirmación anterior puede hacerse extensible a la determinación de la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones, no puede afirmarse para la varianza y desviación estándar borrosas, ya que no existe un comportamiento monótono de la dispersión respecto al tipo de interés. Así pues, en la determinación de los α -cortes de dichos parámetros deberá plantearse un programa de maximización con restricciones de desigualdad para obtener el extremo superior, y uno de minimización para obtener el extremo inferior, siendo por tanto la determinación de estos parámetros un problema farragoso desde el punto de vista computacional. Sin embargo, y bajo el supuesto de un tipo de interés borroso único para todo el proceso valoratorio, hemos diseñado una

metodología que, partiendo del conocimiento del tipo de interés en el que la varianza o la desviación estándar toman su máximo valor, permite simplificar enormemente el proceso de obtención de los α -cortes.

Por otra parte, para la variable borroso aleatoria valor actual de las contraprestaciones también hemos determinado la expresión de la varianza y desviación estándar ciertas, conceptos propuestos por Feng, y que se basan en el concepto de distancia cierta entre números borrosos.

7. De forma particular analizamos el supuesto en que se tome un único tipo de interés borroso para todo el horizonte evaluatorio y que éste sea triangular. En este caso, estudiaremos la bondad de la aproximación triangular de la esperanza, la varianza y la desviación estándar mediante números borrosos triangulares que mantengan el mismo núcleo y soporte del número borroso original. Respecto a la aproximación de la esperanza matemática, si bien es buena si la duración del seguro no es muy elevada, ésta empeora a medida que se incrementa la duración del mismo. Asimismo, la aproximación triangular de la esperanza matemática del valor actual de los capitales de supervivencia o de fallecimiento es peor que para seguros o rentas con el mismo vencimiento, ya que en este segundo caso los pequeños errores de los capitales más cercanos en el tiempo compensan los errores cometidos por aproximar triangularmente el valor actual de los más alejados. En los capitales de fallecimiento y supervivencia y en las rentas hemos comprobado que la aproximación triangular de la varianza es peor que la de la esperanza matemática, de forma que para pólizas con vencimientos medianamente alejados, la aproximación triangular si tomamos como referencia la escala endecadaria puede ser rechazada en muchas ocasiones. Asimismo, en este tipo de estructuras, la bondad de la aproximación triangular de la desviación estándar es similar al de la esperanza matemática. Por otra parte, en los seguros de vida, y por la forma que toman la varianza y la desviación estándar borrosas, podemos afirmar que no suele ser razonable aproximarlas mediante un número borroso triangular con el mismo soporte y núcleo.
8. Hemos analizado para cada estructura actuarial considerada la determinación de la prima pura única asociada a ésta, que será aquella que haga que la variable borroso aleatoria pérdida para el asegurador tenga una esperanza matemática nula, y debiendo ser entendido como nulo a un número borroso para el cual cero toma el máximo nivel de presunción. Como dicha prima pura única es la esperanza matemática del valor actual de las prestaciones, ésta es borrosa. Para acabar determinando la prima pura, deberemos desfuzzyficar la esperanza matemática. Para ello, proponemos utilizar el concepto de valor esperado de un número borroso, ya que se trata de un procedimiento que permite utilizar toda la información del número borroso e introducir la aversión al riesgo de interés para el asegurador de forma sencilla.

9. Partiendo de la variable borroso aleatoria valor actual de las pérdidas para el asegurador, podemos analizar la solvencia del asegurador, que se mide como la probabilidad de que existan pérdidas cobrando una determinada prima, y a través de la cual se podrán fijar recargos para desviaciones de la siniestralidad. Para determinar dichos recargos será necesario fijar en primer lugar, el nivel de solvencia que desea el asegurador, o, equivalentemente, determinar la probabilidad de pérdida que está dispuesto a soportar. El cuantil del valor actual de las pérdidas asociado a dicho nivel de solvencia, que será un número borroso, será en principio el recargo a aplicar. Para obtener el recargo final, es necesario reducir dicho número borroso a un valor cierto representativo, lo cual se realizará, por las razones ya comentadas, utilizando el concepto de valor esperado.

Un instrumento clave en la medición de la solvencia del asegurador será el análisis de la función de distribución del valor actual de las pérdidas. Ésta será un subconjunto borroso que asignará a las posibles posiciones de solvencia (la cual se mide como probabilidad de pérdida), que se obtienen aplicando un recargo determinado, un nivel de presunción, que vendrá dado por la trayectoria de los tipos de interés que determine dicha probabilidad de incurrir en pérdidas.

Para llevar a cabo el análisis descrito, hemos supuesto, en primer lugar, que la cartera de asegurados se compone de una única póliza. Si bien, no es un supuesto realista, creemos que permite exponer de forma clara, la metodología de análisis en posteriores supuestos. Asimismo este estudio motiva una descripción exhaustiva de la variable borroso aleatoria pérdida asociada a una póliza.

10. Posteriormente hemos considerado el supuesto de una cartera de pólizas homogéneas (iguales prestaciones aseguradas, edades y fecha de suscripción de las pólizas). Ello nos debe llevar, por el hecho de incrementarse el número de asegurados, a reducir el riesgo de mortalidad, ya que ésta debe tender a su valor esperado. Sin embargo, un incremento del colectivo asegurado implica aumentar en términos absolutos las pérdidas que el asegurador puede sufrir por el hecho de que la rentabilidad obtenida invirtiendo las primas sea inferior al interés que garantiza a los asegurados.

Para determinar los recargos a aplicar para desviaciones de la mortalidad y en el análisis de la solvencia, será necesario partir del valor actual de las pérdidas asociada a todo el colectivo, que se halla como agregación del valor actual de las pérdidas individuales, teniendo en cuenta que la posible trayectoria que puede tomar el tipo de interés a lo largo de toda la duración del seguro debe ser común a todo el colectivo asegurado y que la mortalidad es independiente para cada cabeza.

En este supuesto, una vez determinada la prima pura única, y cuando se haya determinado la probabilidad de pérdidas que el asegurador está dispuesto a aceptar, deberemos hallar el cuantil asociado a dicha probabilidad del valor actual de las pérdidas de todo el colectivo y desfuzzyficarlo. Ello nos permitirá hallar el recargo a repercutir a todo el colectivo. El recargo a repercutir a cada asegurado, obviamente, se hallará dividiendo dicho recargo colectivo por el número de integrantes del colectivo. Hemos comprobado, como cabría esperar, que el recargo final a repercutir para desviaciones de siniestralidad disminuye a medida que aumenta el colectivo asegurado, ya que al aumentar el colectivo, la mortalidad debe tender a comportarse según lo esperado.

Asimismo, tras la determinación de la prima finalmente repercutida a cada uno de los integrantes del colectivo (y por tanto, su suma), y una vez descrita la función de distribución de la variable borroso aleatoria valor actual de las pérdidas para todo el colectivo, puede realizarse un análisis ex-post de la posición de solvencia del asegurador tras cobrar la prima recargada. A través de la función de distribución de dicha variable borroso aleatoria podremos asignar a cada nivel de solvencia un grado de presunción, el cual vendrá dado por el de la trayectoria de los tipos de interés que determina dicha posición, y analizar hasta que punto, desviaciones negativas de la mortalidad pueden ser compensadas con las primas cobradas por comportamientos benignos del tipo de interés y viceversa.

11. En el análisis de valoración actuarial para todo el colectivo hemos considerado asimismo, dos supuestos. El primero de ellos es que el número de asegurados sea lo suficientemente elevado como para poder suponer que el valor actual de las pérdidas asociadas al colectivo y para cada trayectoria posible del tipo de interés puede aproximarse mediante una variable aleatoria normal; lo que permite utilizar los resultados de la teoría clásica del riesgo. En este caso, el valor actual de las pérdidas es una variable borroso aleatoria que puede describirse como un subconjunto borroso cuyo referencial es el conjunto de variables aleatorias normales. El nivel de presunción de cada variable aleatoria normal vendrá dado por el de la trayectoria del tipo de interés que genere dicho valor actual de las pérdidas.

Finalmente hemos supuesto que la cartera se compone de un número de pólizas idénticas que no es lo suficientemente elevado para adaptar los postulados de la teoría clásica del riesgo. En este caso, simulando estocásticamente el comportamiento de la mortalidad del colectivo para el que se estén fijando los recargos o se esté analizando la solvencia del asegurador, se propone generar la variable borroso aleatoria que cuantifica al valor actual de las pérdidas asociadas a todo el colectivo de forma empírica.

2. CONCLUSIONES PROYECTIVAS DE LA TESIS

A continuación exponemos someramente qué temas de los analizados creemos que deben ser motivo de posterior análisis y reflexión, y qué vías de investigación en temas relacionados con la tesis realizada o en temas afines pueden ser desarrollados.

1. Respecto a las metodologías propuestas para la estimación de los tipos de interés futuros, creemos que es necesario realizar un exhaustivo análisis empírico que permita obtener elementos de juicio sobre cual de los métodos expuestos es más adecuado. Dicho método debe permitir, por una parte, obtener unos tipos spot y tipos forward con comportamiento asintótico, es decir, que permita formas suaves para la ETTI, ya que a medida que aumenta el vencimiento, es lógico pensar que el decisor es menos capaz de discernir entre el interés correspondiente a un año y el siguiente. Otra característica del método elegido es que debe permitir obtener un buen ajuste de la ETTI, el cual se mide en el caso de utilizar una técnica de regresión borrosa a través de la incertidumbre de los valores que se obtienen de la variable dependiente tras ajustar los parámetros del hiperplano. Asimismo, y en un contexto de borrosidad, creemos que el método que sea elegido para estimar la ETTI debe proporcionar unos tipos al contado con mayor borrosidad – mayor radio- a medida que aumente su vencimiento, ya que éstos incorporan información sobre cada vez más tipos forward y asimismo presentan vencimientos más alejados. Asimismo, los tipos que se estiman para el futuro –tipos implícitos- también deben ser números borrosos más amplios a medida que el vencimiento al que correspondan sea posterior, ya que es de suponer que los agentes deben ser capaces de predecirlos peor y deben percibir en ellos más incertidumbre.
2. Una cuestión tangencial a la presente tesis, pero que creemos que debería ser abordada es analizar cual de las teorías explicativas de la ETTI (teoría de las expectativas racionales, teoría de las primas de liquidez, etc.) explica mejor su comportamiento. Dada las características de la información que deberá manejarse –subjetiva, observaciones cuantificadas como intervalos de confianza, etc.– creemos que la utilización de instrumentos borrosos, en lugar de los utilizados habitualmente para estas tareas como la econometría, podría proporcionar una nueva perspectiva a un tema que, aunque clásico, dista mucho de estar resuelto actualmente.
3. Respecto al tipo de seguros de vida tratados en la tercera parte de la tesis, una vía natural de investigación es la extensión de la metodología propuesta a una mayor variedad de tipos de contratos. Por una parte, implicaría introducir el supuesto de primas periódicas; por otra, debería incorporarse la borrosidad en las cuantías aseguradas –por ejemplo, si las prestaciones aseguradas se revalorizan en base algún índice relacionado con la inflación, o se trata de una operación de

contraseguro-, y asimismo, también supondría analizar seguros sobre más de una cabeza –por ejemplo, pensiones de viudedad-, o que cubran más sucesos que el fallecimiento y la supervivencia, como la invalidez, la morbilidad, etc. En cualquier caso, tenemos confianza en que la metodología propuesta puede ser extendible a estos supuestos.

4. Al realizar el análisis de los seguros de vida para colectivos homogéneos, se ha supuesto que cada uno de estos colectivos es un negocio absolutamente independiente. Una extensión lógica de esta tesis debe ser el análisis de la fijación de primas y el análisis de la solvencia del asegurador considerando todo el negocio en su conjunto, que está integrado por un conjunto de carteras con pólizas homogéneas entre sí, pero diferentes al del resto de colectivos. Contemplada la actividad aseguradora de esta forma, el riesgo de mortalidad del asegurador debe ser todavía menor, lo cual debe permitir fijar recargos menores que los que deben aplicarse si los calculamos para cada cartera por separado. Ello, por supuesto, llevaría a unos beneficios para el asegurado, ya que se le acabaría repercutiendo un recargo menor. El problema reside en como repartir dicha disminución del recargo, y por tanto, de la prima recargada. Esta cuestión no admite una resolución trivial, ya que unas clases de seguros incorporan mayor riesgo de siniestralidad o de interés que otros, y por tanto, dicho beneficio no debe repartirse a partes iguales entre todas las pólizas, sino que deberá realizarse en función de sus características. Asimismo, dicho análisis se complica si el recargo es, a priori, borroso.

6. Otra posible aplicación de la teoría de los subconjuntos borrosos al ámbito, no tan sólo de los seguros de vida, sino a la matemática actuarial en general, sería la aplicación de algún criterio de decisión borroso –por ejemplo, el de Bellman y Zadeh- en problemas de decisión que deben ser tomados sobre la base de objetivos múltiples. Esta problemática es típica, por ejemplo, en la determinación de la cuantía de negocio que el asegurador debe reasegurar, decisión en la cual intervienen variables como el grado de solvencia mínimo que se desea obtener, la cantidad de negocio que se considera que debería cederse como máximo –por supuesto, si se reasegura menos negocio, existirán unos mayores beneficios potenciales pero una mayor facilidad para llegar a la quiebra-, etc.

7. Otro aspecto que creemos que debe ser abordado, en la línea apuntada por G.W. de Witt en su trabajo “Underwriting and uncertainty” publicado en *Insurance: Mathematics and Economics* en 1982, es la incorporación en la tarificación y en la política de aceptación o no de riesgos de variables cualitativas como el tipo de profesión del asegurado –por ejemplo, las profesiones más arriesgadas implican probabilidades más elevadas de mortalidad-, el grado de adecuación de las cuantías aseguradas al nivel de ingresos del asegurado, etc. Dichos aspectos no pueden ser tratados con los instrumentos matemáticos propuestos, sino que serán más adecuadas las

matemáticas no numéricas de la incertidumbre, basadas en el concepto de relación borrosa. Así, creemos que la complementación de la metodología propuesta en esta tesis –esencialmente numérica-, con la modelización de variables cualitativas como las mencionadas con instrumentos de matemática no numérica, permitirá abordar de forma más realista y eficiente el problema de la valoración y análisis de la solvencia en los seguros de vida, y por extensión, en el resto de seguros.