

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUÑA

Programa de Doctorado
AUTOMATIZACIÓN AVANZADA Y ROBÓTICA

Tesis Doctoral

SINTESIS DE CONTROLADORES PARA CONVERTIDORES DE
POTENCIA UTILIZANDO REALIMENTACIÓN DE LA SALIDA
PASIVA DE LA DINÁMICA EXACTA DEL ERROR DE
SEGUIMIENTO: TEORÍA Y PRÁCTICA

Mario Spinetti Rivera

Director: Hebertt Sira Ramírez

Director: Domingo Biel

Instituto de Organización y Control de Sistemas Industriales

Enero de 2010

*Este trabajo está dedicado a la Nona, a Mamá.
y orientado por el Ser.*

Índice general

Índice de Tablas	VIII
Índice de Figuras	X
Agradecimientos	XVII
Resumen	XXI
Esquema de la Tesis	XXIII
1. Introducción y Motivación	1
1.1. Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta del Error de Seguimiento	4
1.2. Regulación en un convertidor Boost utilizando ETEDPOF	8
1.3. Algunas apreciaciones	15
2. Modelo por Efecto Joule	19
2.1. Definiciones de Modelos	26
2.2. Modelado del Convertidor Boost	28
2.3. Síntesis del Controlador para el Convertidor Boost utilizando ETED-POF y el Modelo Equivalente Joule.	45
2.4. Parámetros de los Modelos	47
2.4.1. Obtención de los Fuentes de Tensión V_q^j y V_f^j	48
2.4.2. Cálculo de la Resistencia Joule	50
2.4.3. Efectos de la Resistencia Joule sobre el Error de la Salida	51

2.5.	Simulaciones	56
2.6.	Resultados de Incluir el Modelo Joule para la Implementación del Convertidor Boost	62
3.	Técnicas de Robustez para el Convertidor Boost	69
3.1.	Introducción	69
3.2.	Teoremas y Lemas	70
3.3.	Efectos de los Cambios de la Carga del Convertidor Boost Utilizando su Modelo Ideal	74
3.3.1.	Caso $\Delta_C > 0$	76
3.3.2.	Caso $\Delta_C < 0$	85
3.4.	Efectos de los Cambios de la Carga del Convertidor Boost Utilizando su Modelo Joule	87
3.4.1.	Caso de una raíz real $\Delta_c > 0$	90
3.4.2.	Caso de tres raíces reales $\Delta_c < 0$	91
3.5.	Simulaciones	92
3.6.	Identificación Paramétrica	100
3.7.	Robustez Extendiendo el Espacio Estado con un Integrador del Error de la Salida	103
3.8.	Implementación Experimental	108
4.	Seguimiento de Señal en Convertidores con Topología Boost	113
4.1.	Introducción	113
4.2.	Planificación de Trayectorias en un Convertidor Boost	114
4.2.1.	Simulaciones e Implementación Experimental	117
4.2.2.	Análisis de los Resultados	119
4.3.	Síntesis de un Controlador para el Seguimiento de Señales Senoidales en un Convertidor Boost-Boost	121
4.3.1.	Modelo Ideal	123
4.3.2.	Modelo Joule del Convertidor Boost-Boost	128
4.3.3.	Simulaciones	133
4.3.4.	Implementación Experimental	136

4.3.5. Análisis de los Resultados	152
5. Conclusiones y Futuras Investigaciones Derivadas de la Presente Tesis	159
A. Algoritmo para la síntesis del modelo Joule	163
A.1. Síntesis del Modelo Joule para el Convertidor Buck-Boost	166
A.2. Síntesis del Modelo Joule para el Convertidor Boost-Boost en Cascada.	168
A.3. Síntesis del Modelo Joule para el Convertidor Cuk	171
A.4. Ventajas y Desventajas del Modelo Joule.	173
B. Listado en Maple utilizando el Modelo Ideal para la transformación afín	175
B.1. Restart	175
B.2. Halla las ecuaciones de x_1s y x_2s	175
B.3. Dinámica del Error del Sistema	176
B.3.1. Equilibrios del Sistema	178
C. Listado en Maple utilizando el Modelo Joule para la transformación afín	181
C.1. Restart	181
C.2. Halla las ecuaciones de x_1s y x_2s	181
C.3. Dinámica del Error del Sistema	182
C.3.1. Equilibrios del Sistema	184
D. Listado en Maple utilizando el Modelo Ideal incluyendo el integrador	185
D.1. Restart	185
D.2. Las ecuaciones del convertidor	185
D.3. Dinámica del Error del Sistema	187
D.3.1. Se transforma en variables del error	187
Bibliografía	192

Índice de cuadros

1.1. Vectores y Matrices de la Forma General	6
1.2. Campos Constitutivos de la Forma General	7
1.3. Valores en estado estable de la tensión del condensador	13
2.1. Variables y Paramétros del Diodo	33
2.2. Variables y Paramétros del Transistor	39
2.3. Equilibrios del Boost con los Modelos Ideal Σ_i , Joule Σ_J	44
2.4. Modelo Real Σ_m realizado con las mediciones del prototipo experimental	57
4.1. Mediciones de corriente en la bobina y tensión en los condensadores . .	140
4.2. Mediciones de Distorsión Armonica (THD) para variaciones de $\gamma(\mu = 10^{-6})$	142
4.3. Datos Obtenidos del seguimiento de la salida senoidal ($\omega = 100rad/seg$)	150
4.4. Datos Obtenidos del seguimiento de la salida senoidal ($f = 50Hz$) . . .	152

Índice de figuras

1.1. Modelo del Convertidor Boost	9
1.2. Corriente en la Bobina Convertidor Boost Ideal	12
1.3. Tensión en el Condensador Convertidor Boost Ideal	12
1.4. Control Convertidor Boost Ideal	12
1.5. Simulaciones y Mediciones $V_d = 11$ voltios	14
1.6. Simulaciones y Mediciones $V_d = 15$ voltios	14
1.7. Simulaciones y Mediciones $V_d = 20$ voltios	14
1.8. Valores Deseados respecto a Valores Medidos en Estado Estacionario en el Rango de Funcionamiento del Convertidor $V_d \in [10, 25]$ voltios	15
2.1. Curvas de Equilibrios de la Corriente en la Bobina	22
2.2. Curvas de Equilibrios de la Tensión en el Condensador	24
2.3. Modelo Ideal Σ_i del Convertidor Boost	29
2.4. Modelo Circuitual del Convertidor Boost	30
2.5. Modelado del Diodo	32
2.6. Modelo Reducido del Diodo	34
2.7. Modelo del Transistor	35
2.8. Regiones de Operación del Transistor	36
2.9. Modelo del Transistor	37
2.10. Modelo para Corte y Saturación del Convertidor Boost	40
2.11. Convertidor Boost con Modelo Reducidos de los Semiconductores	41
2.12. Modelo de Referencia Real Σ_r del Convertidor Boost	41
2.13. Modelo Joule Σ_J del Convertidor Boost	44
2.14. Curva Característica del Transistor de Unión del IGBT	49

2.15. Curva Característica del Diodo de Unión del IGBT	49
2.16. Aproximación de los Semiconductores por medio de Exponenciales . . .	53
2.17. Aproximación de los Semiconductores por medio de Líneas Rectas . . .	54
2.18. Integral del Error de los Modelos Real Aproximado y Joule en el Rango de funcionamiento de la entrada u entre $[0,1]$	55
2.19. Convertidor Boost Lazo Abierto, Modelos Σ_i, Σ_J y Orcad-PSpice® , $\bar{u} =$ 0.5	58
2.20. Puntos de Equilibrio Lazo Abierto en el rango de funcionamiento de la entrada \bar{u} entre $[0, 1]$, Modelos $\Sigma_i, \Sigma_J, Orcad - PSpice® , \Sigma_m$	60
2.21. Puntos de Equilibrio Lazo en Abierto barriendo la resistencia Joule en el rango R_j definido entre $[0, 0.35] \Omega$, Modelos $\Sigma_i, Orcad - PSpice® , \Sigma_J, \Sigma_m$	61
2.22. Convertidor Boost Lazo Cerrado, Modelos Σ_r, u^i, w^j	65
2.23. Mediciones y Simulaciones $V_d = 10, V_d = 12, V_d = 15$ y $V_d = 17$ voltios .	66
2.24. Mediciones y Simulaciones $V_d = 22$ voltios	67
2.25. Rango de Operación del prototipo en Lazo Cerrado con Control Joule .	67
2.26. Rango de Operación del prototipo en Lazo Cerrado con Control Ideal .	67
3.1. Diagramas de Fases para un sistema cuadrático con un único equilibrio (BQS1)	72
3.2. Atlas con todos los Diagramas de Fase de un Sistema Cuadrático BQS3	73
3.3. Discriminante de Cardano	77
3.4. Comportamiento del Determinante $\tilde{\Delta}_Q$ con raíces imaginarias y concavi- dad positiva	79
3.5. Comportamiento del Determinante $\tilde{\Delta}_Q$ con dos raíces reales y concavi- dad positiva	79
3.6. Comportamiento del Discriminate de Cardano Δ_C	80
3.7. Comportamiento del Determinante $\tilde{\Delta}_Q$ con dos raíces reales y concavi- dad negativa	81
3.8. Comportamiento del Discriminate de Cardano Δ_C	82
3.9. Discriminante de Cardano para la Función Cúbica de los equilibrios del Convertidor	93

3.10. Determinante para el segundo menor de la matriz simetrica de la derivada de la función de Lyapunov	94
3.11. Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Ideal en Lazo Cerrado tres Raíces Reales	95
3.12. Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Joule en Lazo Cerrado una Raíz Real Tipo Nodo	98
3.13. Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Joule en Lazo Cerrado una Raíz Real Tipo Foco	99
3.14. Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Joule en Lazo Cerrado tres Raíces Reales Foco, Silla y Nodo	100
3.15. Comparación de Diagramas de Fases del Convertidor Boost Modelos Ideal y Joule con tres Raíces	101
3.16. Modelo Joule Identificación Paramétrica con Cambios de Carga	104
3.17. Rangos de Carga para el caso $\beta_2 < 0$ y $\alpha = -1$	108
3.18. Rangos de Carga para el caso $\beta_2 > 0$ y $\alpha = -30$	109
3.19. Mediciones en el Modelo Real Identificación Paramétrica con Cambios de Carga de 4 a 2 Ω	110
3.20. Mediciones en el Modelo Real Identificación Paramétrica con Cambios de Carga de 2 a 4 Ω	111
3.21. Regulación del Boost con integrador del error de la salida. Cambio de carga de 2 a 1 Ω	112
3.22. Regulación del Boost con integrador del error de la salida. Cambio de carga de 1 a 2 Ω	112
4.1. Simulaciones para el Seguimiento del polinomio $\psi(t, t_i, t_f)$ $V_{c_i} = 10$ V a $V_{c_f} = 20$ V	119
4.2. Comparación entre Simulaciones y Mediciones para el Seguimiento del Polinomio de $V_{c_i} = 14$ a $V_{c_f} = 16$ voltios	120
4.3. Comparación entre Simulaciones y Mediciones para el Seguimiento del Polinomio de $V_{c_i} = 13$ a $V_{c_f} = 17$ voltios	121
4.4. Comparación entre Simulaciones y Mediciones para el Seguimiento del Polinomio de $V_{c_i} = 10$ a $V_{c_f} = 20$ voltios	122

4.5. Modelo Ideal del Convertidor Boost-Boost DC-AC con Carga Flotante	123
4.6. Modelo Joule del Convertidor Boost-Boost DC-AC con Carga Flotante	129
4.7. Simulaciones Boost-Boost con Convertidor DC-AC con Modelos Ideal y Joule	135
4.8. Simulaciones Boost-Boost con Convertidor DC-AC con Modelos Ideal y Joule (acercamientos)	136
4.9. Prototipo del Convertidor Boost-Boost DC-AC con Carga Flotante . .	137
4.10. Fotografía del Prototipo del Convertidor Boost-Boost DC-AC	138
4.11. Estimación de la resistencia de pérdidas de cada convertidor Boost . . .	141
4.12. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	143
4.13. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	144
4.14. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	145
4.15. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	146
4.16. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	147
4.17. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	148
4.18. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	149
4.19. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC (B=20 voltios) . . .	150
4.20. Gráficas de los Datos Obtenidos del Seguimiento Senoidal para $\omega =$ $100rad/seg$	151
4.21. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	153
4.22. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	154
4.23. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	155
4.24. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC	156
4.25. Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC (B=20 voltios) . . .	157
4.26. Gráficas de los Datos Obtenidos del Seguimiento Senoidal para $f = 50Hz$	158
A.1. Modelo Ideal del Convertidor Buck-Boost	167
A.2. Circuito Esquemático del Convertidor Buck-Boost	167
A.3. Modelo Joule del Convertidor Buck-Boost	168
A.4. Modelo Ideal del Convertidor Boost-Boost	169
A.5. Circuito Esquemático del Convertidor Boost-Boost	170
A.6. Modelo Joule del Convertidor Boost-Boost	170

A.7. Modelo Ideal del Convertidor Cuk	171
A.8. Modelo Esquemático del Convertidor Cuk	172
A.9. Modelo Joule del Convertidor Cuk	172
A.10. Modelo Joule Modificado del Convertidor Cuk	173

Agradecimientos

Muchas son las personas a las se debe este trabajo y no es correcto que se me atribuya la autoría, a pesar de ello, la dinámica de los eventos me coloca en la posición de tener fungir como el protagonista.

Es necesario que agradezca al Dr. Hebertt Sira quien, probablemente sin darse cuenta, fue el precursor de diversos eventos que intentare resumir y establecer en forma cronológica; alrededor del año 84 hizo el planteamiento de trabajar en implementaciones experimentales de convertidores de potencia; esta directriz se constituyo en una serie de eventos entre los cuales están tesis de grado, trabajos de maestría y publicaciones de trabajos de investigación, estas dinámicas también fueron el motor que permitió la reconstrucción del espacio físico y la consecución de costosos equipos para los laboratorios del Departamento de Control.

Se debe agradecer al Dr. Richard Márquez, que alrededor del año 2000 y después de su regreso al Dpto. de Control, se dedico a incursionar en las implementaciones prácticas utilizando prototipos experimentales; siendo un gran apoyo al momento de motorizar los laboratorios. No se puede dejar por fuera al Dr. Addison Ríos y a la Dr. Flor Narciso, al momento de agradecer, quienes como jefe del Departamento de Control y Director de la Escuela de Sistema, apoyaron los cambios que como consecuencia llevaron a la obtención de los espacios físicos de los laboratorios de la Escuela de Sistemas (2002-2003), lo cuales hasta ese momento no habían sido considerados por la Universidad de los Andes.

Se debe agradecer a los Drs. Miguel Ríos y Pablo Lischinsky quienes con sus rubricas apoyaron los proyectos presentados ante el Conicit (2000), con estos se lograron cuantiosos recursos para el equipamiento de los laboratorios. Nuevamente, se debe agradecer a los Drs. Addison Ríos y Flor Narciso, quienes lograron los recursos faltantes para la

compra de equipos de laboratorio, además de la consecución de donaciones (2003-2004) de costosos equipos, obtenidos por su mediación.

Todo este trabajo, tiene como punto de partida el apoyo al trabajo de investigación en las aéreas de electrónica de potencia y sistemas de control no lineales, llevados a cabo por un gran grupo de estudiantes del departamento de control, en tal sentido debo agradecer que fueron la chispa y la razón del trabajo realizado, de los cuales cito algunos de ellos, pidiendo excusas a los que quedaran fuera porque la mente no me permita recordarlos, así tenemos a Yuri Sulbaran, Orlando Ostos, Osmary Ostos, Beatriz Uzcategui, Bernabe Reinoza, Jesús Godoy, Zhang Cheung, Dalila Romero, Ana Guzmán, Niliana Carrero, entre otros.

Debo agradecer, personalmente, al Dr. Miguel Ríos y al Dr. Márquez por su intermediación en algunos momentos desagradables que ocurrieron en el transcurso de los eventos citados anteriormente.

A partir del 2005, el trabajo de investigación se dirigió a los convertidores de potencia, centrándose en la fusión entre los conceptos teóricos y los resultados obtenidos de la experimentación. En tal sentido, mis más sinceras gracias al Dr. Domingo Biel; debo citar el hecho de que gracias a su apoyo y dirección la fuerte componente práctica de esta tesis no se perdió, puesto que las dudas sobre la importancia de esta componente se hicieron presentes, a mi parecer, algunos investigadores la menosprecian porque no toman en cuenta cuan poco trabajo se ha hecho para explicar, con la profundidad necesaria, hechos que para un técnico de laboratorio o para un ingeniero de campo son obvias. Gracias Domingo, más que un tutor fuiste un compañero y amigo en el desarrollo de la investigación.

Mientras intentábamos explicar comportamientos de los prototipos, nos encontramos con problemas muy abstractos y de difícil solución, en este punto tengo que agradecer al Dr. Enric Fossas, su formación como matemático fue una guía realmente apreciable que permitió enfrentar algunos de estos problemas; también debo agradecer su apoyo en momentos en los que las dudas sobre la importancia de este trabajo de tesis se hicieron presentes. Gracias Enric, sin tu apoyo probablemente no hubiera terminado.

Al Dr. Hebertt Sira, debo agradecer que estableciera la guía y directrices que orientaron esta tesis y que quiero resumir en las palabras que me hizo llegar, puesto que

son la base y razón del esfuerzo que hemos dedicado durante tantos años:

“El trabajo está magníficamente llevado a cabo. Muy bien, te felicito sinceramente y creo que es un aporte fundamental al área donde por tanto tiempo gente como yo hemos estado haciendo las cosas mal o demasiado teóricas sin tomar en cuenta limitaciones importantes en la práctica.”

Debo agradecer al grupo de laboratorio conformado por el Dr. Robert Griño, el Ing. Rafael Cardoner, el Dr. Shane Malo y el técnico Enric Miro, múltiples pláticas permitieron el apoyo emocional necesario para la realización de este trabajo, convirtiéndose en parte de mi familia mientras permanecí en Barcelona. Al Dr. Griño y a Shane debo agradecer las discusiones, que permitieron corregir errores que el cansancio no dejaba ver. Un especial agradecimiento debo hacer a Rafael, ya que su gran capacidad es la base fundamental en la construcción de los prototipos de los convertidores de potencia que realizamos en el laboratorio, debo dejar constancia que mucho fue el aprendizaje que obtuve del trabajo a su lado.

Al personal de administración conformado por Noemi, Carme, Marta y Elisabet debo agradecer su dedicación y eficiencia al servicio de los estudiantes de doctorado, esto siempre lo vi aparecer cuando fue requerido.

Por sus compañía en las noches de Barcelona y las pláticas poco científicas que compartíamos, debo agradecer a Emanuel, José Raúl (alias José Luis), Shane, Patrick, Fernando, Orlando, Leo y todos con los que pude compartir durante la estancia en España.

Fuera del grupo de trabajo, mi más grande agradecimiento a la Nona, Mamá y Nene mujeres que me enseñaron la manera de manejar de forma pragmática la vida, demostrando que para las cosas verdaderamente importantes las teorías aun no han sido formalizadas. A mis tíos Gustavo y Gioconda, que con su dirección me han dado la confianza necesaria para enfrentar de manera serena y racional un proceso que de otra manera hubiera sido muy traumático.

A Tina, Angel, Anna y Celia lo único que puedo decir es gracias por su compañía, esperando que logren todo por lo que han trabajado.

Finalmente al profesor Lino Valle, al Dr. Carvallo, los Maestros, el Jefe y todos los que con su trabajo han hecho que logre una comprensión más allá de lo que nunca

hubiera pensado, permitiendo mirar donde no se ve y ver lo que no está oculto, a través de la consciencia, muchas gracias.

A todos lo que la memoria no me permite ver, inclusive a los que decidieron que mi camino no era el correcto ... y que gracias a Dios no pudieron convencerme.

Con Cariño, Gracias

Resumen

En este trabajo se estudia el diseño, la implementación y el desempeño de controladores lineales de tipo pasivo para convertidores de potencia DC-DC en modo continuo. El diseño está basado en la técnica de diseño denominada Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta del Error de Seguimiento (ETEDPOF, por sus siglas en inglés). El diseño de estos controladores se estudia usando el clásico modelo ideal y un modelo mejorado basado en las pérdidas por disipación de energía (llamado modelo Joule). La evaluación del desempeño se realiza mediante la implementación práctica en un prototipo real de laboratorio. Para estudiar el desempeño del controlador diseñado ante variaciones de la carga, se realiza un análisis mediante la teoría de sistemas cuadráticos acotados. Este análisis se complementa con técnicas robustas como la identificación paramétrica y control integral (adicionando a la ley de control una integral del error de salida). Los diseños y análisis realizados se aplican e implementan finalmente al seguimiento de trayectorias punto a punto en un convertidor Boost y al seguimiento de trayectorias senoidales en un convertidor Boost-Boost con resultados prácticos que mejoran los resultados presentados en la literatura.

Esquema de la Tesis

En este trabajo estudiamos una técnica general para la síntesis de leyes de control basada en la propiedad de pasividad, técnica denominada *Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta del Error de Seguimiento*, a la cual nos referiremos como ETEDPOF, por sus siglas en inglés. La base fundamental consiste en explotar adecuadamente la dinámica exacta del error de seguimiento en la realimentación de la salida pasiva. Los controladores propuestos serán capaces de resolver el problema de seguimiento de trayectorias y, por ende, los relativos a la estabilización a valores constantes (regulación). La técnica será abordada desde el punto de vista teórico y práctico de manera que los resultados se complementen; esto permitirá demostrar su validez, confiabilidad y aplicabilidad en el campo de la electrónica de potencia y en el desarrollo de convertidores de potencia. Con esta finalidad presentamos diversos capítulos que versan sobre las aportaciones y resultados que fueron logrados con la utilización de la técnica y la implementación de circuitos convertidores de potencia. El primer capítulo plantea un modelo de representación general para los convertidores de potencia, el cual es utilizado para introducir la técnica ETEDPOF. Demostrando que la ley de control sintetizada hace al sistema asintóticamente globalmente estable, siempre que se cumpla cierta condición de acoplamiento. Consideramos el caso particular del convertidor Boost, para ello sintetizamos el controlador, realizamos el análisis de estabilidad y su implementación física. Al momento de implementar los resultados teóricos, en el laboratorio hallamos una diferencia significativa del comportamiento del sistema controlado con los resultados de simulación. Esto ameritó un estudio especial de modelado, el cual presentamos en el segundo capítulo.

En el segundo capítulo el objetivo es lograr una manera de reducir el error resultante en la implementación del prototipo de laboratorio del convertidor bajo la ley de control

propuesta en el primer capítulo. Para ello introducimos un modelo equivalente para convertidores, bajo las siguientes premisas: sencillez, eficiencia y aplicabilidad práctica. Esto se consiguió a través de la inclusión de las pérdidas en forma de calor por el efecto Joule, obteniendo un nuevo modelo que denominamos Modelo Equivalente Joule (MEJ). El controlador se sintetiza con el nuevo modelo, se implementa el convertidor y se analizan los resultados. Luego, se demuestra que la ley de control en combinación con el MEJ permiten reducir el error entre los resultados simulados y los medidos, tanto en el transitorio producido en los estados de sistema como en el valor estacionario. De esta manera, sin necesidad de introducir conceptos de robustez, se logran resultados suficientemente precisos.

En el tercer capítulo se aborda el problema de robustez. En primer lugar, se estudia el comportamiento del convertidor ante el supuesto de variaciones de la carga, logrando demostrar que el convertidor, en lazo cerrado, es globalmente estable y acotado en un intervalo acotado de valores de la carga. Además, se muestran los comportamientos, en forma cualitativa, de las trayectorias ante las variaciones de la carga; representándolas por medio de diagramas de fases (atlas). En segundo lugar, se introduce un integrador del error de la salida y se estudia la estabilidad a través de un sistema extendido; pudiendo demostrar que existe un rango de operación donde el sistema es localmente asintóticamente estable. Finalmente, se utiliza una técnica de identificación paramétrica, con la cual hacemos detección de cambios de la carga del sistema y reconfiguramos la ley de control. En el cuarto capítulo se resuelve el problema de seguimiento. Aprovechando que la técnica general fue estructurada con esta finalidad, se planifican trayectorias que logran transferencias de equilibrio a equilibrio para el convertidor Boost y se realiza seguimiento de trayectorias senoidales con un convertidor de topología Boost-Boost con la carga flotante. Se incluyen: la síntesis de los controladores, el análisis de estabilidad y las simulaciones e implementaciones en los prototipos de laboratorio.

Capítulo 1

Introducción y Motivación

Se puede buscar el origen de la idea de pasividad en los trabajos de Henri Bénard (1908), quien descubrió que en los materiales sometidos a prueba aparecían estructuras hexagonales para absorber la energía introducida en forma de calor y que desaparecían cuando ésta cesaba; estos resultados llevaron a Ilya Prigogine en 1967 a acuñar el término “Estructuras Disipativas” [Pri69, Fra99]. Después de 20 años de trabajo, entre 1947 y 1967, se dió nacimiento al criterio de evolución general según el cual existen dos tipos de comportamientos: uno cerca del equilibrio donde las estructuras disipativas tienden a desaparecer y otro lejos del equilibrio donde se crean estos procesos no lineales, demostrando que es posible crear orden a partir del caos.

Esto llevó a numerosos trabajos de investigación que le dieron relevancia a las características pasivas de los sistemas (esta lista no es exhaustiva): Willems [Wil72] presenta una teoría general de los sistemas dinámicos disipativos; Hill y Moylan [Hil76] se refieren a la estabilidad de estos sistemas y la existencia de una función que se interpreta como energía total almacenada; en [Hil80] se analizan en profundidad las propiedades de un sistema disipativo; Vidyasagar [Vid79] aborda, a través de la pasividad, sistemas de gran escala interconectados; Byrnes e Isidori [Byr89] establecen el principio de separación y el concepto de regulación en estado estable para sistemas no lineales; en el notable trabajo de Byrnes et al. [Byr91] se presentan las condiciones bajo las cuales un sistema es pasivo utilizando una realimentación de estado, así como una

serie de características referentes a la pasividad de los sistemas no lineales. Dos originales artículos de Sanders y Verghese, [San92] y [San91], tratan la síntesis de circuitos promedio, así como la construcción de controladores estables basados en funciones de Lyapunov. Los trabajos de van der Schaft [Sch96, Sch04] son referencias obligadas en cuanto a su aplicación a los sistemas del tipo Euler-Lagrange y Hamiltoniano, la interconexión de los mismos y las características pasivas que forman parte fundamental de su funcionamiento. Chellaboina y Haddad [Che00] extienden las nociones de sistemas dinámicos disipativos para formalizar los conceptos estrictamente positivo real y estrictamente acotado real. Algunos textos nos muestran hoy en día la madurez de esta área. Dos textos son de referencia obligada cuando se trata los sistemas no lineales y la pasividad: [Kha00] y [Sch96], éstos resumen años de investigación en ambas áreas. Kokotovic y Arcak, [Kok01, Arc03], hacen una revisión general, histórica y cronológica alrededor de los sistemas no lineales y controladores; tratan, en particular, sistemas hamiltonianos, disipatividad, pasividad y funciones de Lyapunov.

Existen dos grandes vertientes cuando se diseñan controladores para los convertidores de potencia: la primera versa alrededor de la linealización del modelo no lineal alrededor de un punto de operación nominal o de una trayectoria, estos modelos representan una aproximación, de pequeña señal (*small signal*); la segunda versa sobre la utilización de técnicas no lineales propiamente dichas y que se definen como de “señales grandes” (*large signal*). Con respecto al funcionamiento de los convertidores en pequeña señal resaltamos los trabajos de Mohan [Moh89], Erickson y Maksimovic [Eri92], Kassakian et al. [Kas92] y Levine [Lev95] como referencias representativas. Estos trabajos utilizan controladores lineales (PI, PID, adelanto, atraso, etc.) para convertidores linealizados, con la limitación de asegurar estabilidad local alrededor de un punto de operación nominal; Ortega et al. [Ort96] y Perez et al. [Per04] abordan los conceptos de pasividad en conjunto con controladores lineales del tipo PI para convertidores de potencia. En el caso del control de sistemas convertidores, desde el punto de vista de gran señal, nos centraremos en los trabajos que emplean técnicas de diseño basadas en pasividad utilizando funciones de Lyapunov: Erickson [Eri82], Sanders y Verghese [San91, San92], Alvarez-Ramírez y Espinosa-Pérez [Alv02], Leyva et al. [Ley01, Ley06], Sira-Ramírez et al. [Sir07], Sira-Ramírez y Ortigoza [Sir06],

Spinetti et al. [Spi07] y Spinetti et al. [Spi05]. En estos casos, el sistema es al menos semi-globalmente estable y es la razón de fondo para la utilización de pasividad junto a las funciones de Lyapunov en convertidores de potencia.

Durante el desarrollo de este trabajo utilizamos una representación general de la dinámica de los convertidores de potencia DC-DC [Sir05a, Sir05b] y [Sir06]. La representación general mencionada utiliza una estructura matricial para representar, a través de campos vectoriales, algunos de los fenómenos físicos que aparecen en estos circuitos eléctricos. A esta representación se ha llegado a través de las analogías existentes entre las dinámicas de los sistemas mecánicos y eléctricos. Estas relaciones se conocen desde hace muchos años y son muchos los trabajos que se han escrito alrededor de ellas. Otros investigadores han logrado llegar a una forma de representación sencilla y aplicable de los sistemas: Maiser y Steinber [Mai79], Arimoto y Nakayama [Ari96], Ortega et al. [Ort94], Ortega y Sira-Ramírez [Ort96], Sira-Ramírez [Sir98a] y Sira-Ramírez et al. [Sir98b]. Estos trabajos nos llevan a través del formalismo Lagrangiano y las representaciones de sistemas mecánicos a representaciones que pueden abarcar a los convertidores de potencia. Sin embargo, las analogías y el formalismo Lagrangiano no nos permite, al menos en forma directa, el análisis de los flujos de energía. Esta es la ventaja que los trabajos de Ortega y Sira-Ramírez [Ort94, Ort96, Sir98a, Sir98b] nos permite conseguir, en especial la separación de los campos conservativos, disipativos y de entrada que utilizamos en este trabajo.

Partiendo de la representación general utilizamos un *método generalizado basado en pasividad* para sintetizar un controlador lineal. En el procedimiento obtenemos una representación del convertidor de potencia, con la cual construimos la dinámica del error de seguimiento por medio de un modelo referencial o no perturbado. Utilizando como variable de realimentación la salida pasiva del sistema del error de seguimiento, podemos sintetizar un controlador para regulación y seguimiento del convertidor. Este lo denominamos *realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta del error de seguimiento* (ETEDPOF por sus siglas en inglés, *Exact Tracking Error Dynamics Passive Output Feedback*). Véanse [Sir05b] y [Sir06]. La esencia de esta técnica de control radica en que explota las características pasivas del sistema, separando los campos conservativos, disipativos, entradas y energía externa, permitiendo diseñar un

controlador lineal variante en el tiempo construido a partir de la planta no lineal. Para el análisis de estabilidad del sistema de error utilizamos los conceptos de Lyapunov. Finalmente, abordamos un ejemplo para estudiar la efectividad del método, centrándonos en el problema de regulación del convertidor Boost. Llevamos a cabo desde el diseño del controlador hasta su implementación práctica, pasando por las simulaciones correspondientes.

El objetivo de esta Tesis es el de tender un puente entre la teoría y la práctica en el diseño de controladores lineales para convertidores de potencia DC-DC en modo continuo. En consecuencia, iremos reuniendo diversos elementos que apuntan en esa dirección a lo largo de este trabajo. Para comenzar, en las siguientes secciones, presentaremos la técnica de diseño ETEDPOF y su aplicación al caso particular del convertidor de potencia DC-DC Boost. Este ejemplo nos servirá de **motivación** para apreciar que, en la práctica, *no siempre es posible obtener resultados de simulación que se aproximen con relativa precisión a los resultados experimentales*, en un punto de operación específico y, con mayor dificultad, en el rango de operación del ciclo de trabajo $[0, 1]$. Es por ello que resulta difícil que ésta o cualquier otra técnica de diseño sean satisfactoriamente aplicadas en la práctica, al menos en forma directa o con pocos o ningún ajuste, a partir de los modelos simples (ideales) usados en el control de convertidores, en especial si no se hace intento alguno en minimizar las pérdidas producidas por los elementos que constituyen el convertidor. El problema fundamental estriba en que generalmente al plantear la teoría de diseño el modelo habitualmente utilizado es *ideal*, por lo cual procederemos en el segundo capítulo a proponer un modelo más preciso para convertidores de potencia DC-DC en modo continuo, del cual se derivarán leyes de control mejor adaptadas a la realidad física.

1.1. Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta del Error de Seguimiento

Con la finalidad de representar el comportamiento de un subconjunto de topologías de convertidores de potencia de una manera generalizada, utilizamos la ecuación promediada del sistema y su salida, la cual denominaremos Σ , dada por:

$$\Sigma \equiv \begin{cases} \mathcal{A}\dot{x}(t) = \mathcal{J}(u)x(t) - \mathcal{R}x(t) + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathcal{E}(t) \\ y(t) = \mathcal{B}^T(t)x(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

La representación (1.1) incluye las dinámicas del sistema en términos del espacio de estados; la naturaleza de cada una de las respectivas variables se define en el cuadro 1.1. Los campos y vectores asociados a la representación y al fenómeno físico son resumidos en el cuadro 1.2. Estos responden al comportamiento existente en los convertidores de potencia y a los diferentes dispositivos que almacenan y/o consumen la energía durante el trasiego desde las fuentes a la carga.

Generalmente, las variables de estado utilizadas para representar los convertidores están asociadas a campos eléctricos y magnéticos, por lo que los campos y vectores resultantes quedan relacionados con tensiones y corrientes. Éstas no permiten expresar de manera directa la potencia y la energía del sistema pero pueden ser convertidas cuando se requiera. La energía proveniente de las fuentes de alimentación es representada por el vector $\mathcal{E}(t)$, la cual puede tomar forma de fuentes de tensión o corriente según su topología.

Debido a que el sistema es disipativo, toda la energía es consumida por el convertidor y la carga, convirtiendo energía eléctrica en energía térmica de acuerdo al efecto Joule¹. Esta energía no tiene una expresión directa en términos de potencia sino que se convierte en tensiones o corrientes, según corresponda, siendo posible obtener la potencia como el producto de los campos eléctricos y magnéticos. De esta manera, el campo disipativo $\mathcal{R}x(t)$ representa las pérdidas debidas a las resistencias o a las conductancias existentes. Durante la transferencia, parte de la energía de los campos eléctricos y magnéticos es acumulada en dispositivos pasivos en forma de tensión y corriente, la cual representamos por medio del campo conservativo $\mathcal{J}(u(t))x(t)$. Por último, la energía es modulada por medio del campo de las entradas $\mathcal{B}(t)u(t)$.

Utilizando la forma general para convertidores de potencia junto a la dinámica del error de seguimiento (o de estabilización) es posible resolver el problema de seguimiento de trayectorias y, por ende, el de regulación. El controlador lineal que resulta es variante

¹Si en un conductor circula corriente eléctrica, parte de la energía cinética de los electrones se transforma en calor debido a los choques que sufren con los átomos del material conductor por el que circulan, elevando la temperatura del mismo.

VARIABLES	DESCRIPCIÓN	DIMENSIÓN
Vectores		
$x(t)$	Estados del sistema	n
u	Entradas promedio definidas de tal manera que $u \in [0, 1]^m \subset \mathfrak{R}^m$	m
$y(t)$	Salidas del sistema	m
\mathcal{E}	Vector de coeficientes (constantes o variantes en el tiempo), que representa las señales de entrada externas al sistema, provenientes por lo general de fuentes externas o entradas de energía al sistema (fuentes de potencia)	n
Matrices		
\mathcal{A}	Matriz de coeficientes constantes, simétrica y definida positiva	$n \times n$
$\mathcal{J}(u(t))$	Matriz antisimétrica $\forall u$ que representa la característica conservativa del sistema y que puede tomar la forma: $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + \sum_{i=1}^m \mathcal{J}_i u_i$ donde las \mathcal{J}_i son matrices antisimétricas de coeficientes constantes	$n \times n$
\mathcal{R}	Matriz simétrica, semidefinida positiva y constante que representa la característica disipativa del sistema	$n \times n$
\mathcal{B}	Matriz de coeficientes variantes en el tiempo representando los canales de entrada de control al sistema. Nos referimos a la columna i -ésima como b_i	$n \times m$

Cuadro 1.1: Vectores y Matrices de la Forma General

en el tiempo, basado en la realimentación de la salida pasiva. Una aplicación de este controlador para convertidores de potencia se encuentra en los trabajos de Sanders [San89], Leyva et al. [Ley06], [Ley01] y, en forma más general, en los trabajos de Sira-Ramírez [Sir05b, Sir05a, Sir06]. En estos últimos trabajos hay un teorema fundamental que repetimos aquí:

Teorema 1 *Dado un sistema Σ representado mediante la ecuación*

$$\dot{A}x(t) = \mathcal{J}(u(t))x(t) - \mathcal{R}x(t) + \mathcal{B}(t)u(t) + \mathcal{E}(t) \quad (1.2)$$

$\mathcal{A} \dot{x}(t)$	$\mathcal{J}(u) x(t)$	$\mathcal{R} x(t)$	$\mathcal{B}(t) u(t)$	$\mathcal{E}(t)$
Energía	Campo	Campo	Campo	Energía
Total del Sistema	Conservativo	Disipativo	Entradas	Entrante

Cuadro 1.2: Campos Constitutivos de la Forma General

la salida $y(t) = \mathcal{B}^T(t) x(t)$ y las referencias para el vector de estado y el vector de entrada $(x^*(t), u^*(t))$. Definiendo $e(t) = x(t) - x^*(t)$; $e_u(t) = u(t) - u^*(t)$; $e_y(t) = \mathcal{B}^{*T}(t) e(t)$; $u(t) = u^*(t) - \Gamma e_y(t)$, siendo Γ una matriz a coeficientes constantes y $\mathcal{B}^*(t)$ es una matriz $n \times m$ cuya columna i -ésima está dada por la expresión $[\mathcal{J}_i x^*(t) + b_i]$, $i = 1, \dots, m$.

Si se verifica la **condición de acoplamiento**

$$\mathcal{R} + \mathcal{B}^*(t) \Gamma \mathcal{B}^{*T}(t) > 0,$$

entonces $e(t)$ converge semi-globalmente asintóticamente estable hacia el origen.

Demostración: De (1.2), la dinámica de referencia y las definiciones $e(t) = x(t) - x^*(t)$ y $e_u(t) = u(t) - u^*(t)$, se obtiene la siguiente dinámica del error de seguimiento,

$$\mathcal{A} \dot{e}(t) = \mathcal{J}(u(t)) x(t) - \mathcal{J}(u^*(t)) x^*(t) - \mathcal{R} e(t) + \mathcal{B}(t) e_u(t)$$

Sumando y restando $\mathcal{J}(u(t)) x^*(t)$ y agrupando términos se tiene

$$\mathcal{A} \dot{e}(t) = \mathcal{J}(u(t)) e(t) + (\mathcal{J}(u(t)) - \mathcal{J}(u^*(t))) x^*(t) - \mathcal{R} e(t) + \mathcal{B}(t) e_u(t)$$

Por otro lado

$$\mathcal{J}(u(t)) x^*(t) - \mathcal{J}(u^*(t)) x^*(t) = \left(\mathcal{J}_0 + \sum_{i=1}^m \mathcal{J}_i u_i \right) x^*(t) - \left(\mathcal{J}_0 + \sum_{i=1}^m \mathcal{J}_i u_i^* \right) x^*(t) = \left[\sum_{i=1}^m \mathcal{J}_i e_{u_i} \right] x^*(t), \text{ de donde}$$

$$\mathcal{A} \dot{e}(t) = \mathcal{J}(u(t)) e(t) - \mathcal{R} e(t) + \left[\sum_{i=1}^m \mathcal{J}_i e_{u_i} \right] x^*(t) + \mathcal{B}(t) e_u(t)$$

Utilizando \mathcal{B}^* , la ecuación anterior se reescribe

$$\mathcal{A} \dot{e}(t) = \mathcal{J}(u(t)) e(t) - \mathcal{R} e(t) + \mathcal{B}^*(t) e_u(t)$$

Sea $V(e(t)) = \frac{1}{2}e(t)^T \mathcal{A}e(t)$ una candidata a función de Lyapunov. Se tiene que $V(e(t)) > 0$ si $e(t) \neq 0$ y $V(0) = 0$. Además $\dot{V}(e(t)) < 0$ para $e(t) \neq 0$ debido a la condición de acoplamiento. Efectivamente,

$$\dot{V}(e(t)) = e^T(t) [\mathcal{J}(u(t))e(t) - \mathcal{R}e(t) + \mathcal{B}^*(t)e_u(t)]$$

Dado que $\mathcal{J}(u)$ es una matriz anti-simétrica entonces

$$e^T(t) \mathcal{J}(u(t))e(t) = 0 \Rightarrow \dot{V}(e(t)) = e^T(t) [-\mathcal{R}e(t) + \mathcal{B}^*(t)e_u(t)]$$

De las definiciones de e_u y u se tiene

$$e_u(t) = -\Gamma e_y(t) = -\Gamma [\mathcal{B}^*(t)]^T e(t) \quad (1.3)$$

Entonces $\dot{V}(e(t)) = e^T(t) [-\mathcal{R} - \mathcal{B}^*(t)\Gamma[\mathcal{B}^*(t)]^T]e(t) < 0$, sujeto a la condición de acoplamiento. La estabilidad obtenida es *semiglobal* puesto que, en la práctica, la acción de control se puede saturar. QED

De la expresión (1.3) surge la ley de control.

1.2. Regulación en un convertidor Boost utilizando ETEDPOF

Aunque el controlador permite realizar seguimiento de trayectorias, nuestra intención es realizar regulación de forma tal que se alcance un valor o referencia de la tensión de salida.

Como caso específico de estudio hemos recurrido al convertidor de potencia DC-DC tipo Boost que funciona como elevador de tensión, con salidas mayores que la tensión de alimentación. Supondremos que todos los parámetros del sistema son conocidos; en especial, la carga R necesaria para el control.

El esquema circuital del convertidor Boost se representa en la figura 1.1.

Las ecuaciones que describen la *dinámica promedio* Σ del convertidor Boost son:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -x_2(1-u) + E \\ C\dot{x}_2 &= x_1(1-u) - \frac{x_2}{R} \end{aligned} \quad (1.4)$$

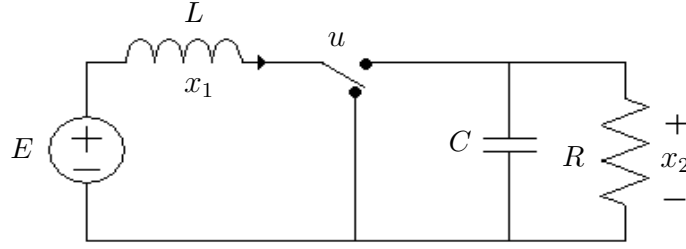


Figura 1.1: Modelo del Convertidor Boost

donde x_1 es la corriente en la bobina, x_2 es la tensión en el condensador, u es la señal de control (continua) que adquiere valores en el intervalo $[0, 1]$, R es la resistencia de carga, E es la fuente de alimentación, L es la inductancia de la bobina y C es la capacitancia del condensador. Reescrito en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u) \\ (1-u) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$$

Según la forma general descrita en la ecuación (1.1), las matrices serán:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}; \quad \mathcal{E} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{J}(u) = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u) \\ (1-u) & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix};$$

De acuerdo con la técnica general se utilizará un sistema referencial (o no perturbado), definido por:

$$L\dot{\bar{x}}_1 = -(1-\bar{u})\bar{x}_2 + E$$

$$C\dot{\bar{x}}_2 = (1-\bar{u})\bar{x}_1 - \frac{\bar{x}_2}{R}$$

El punto de equilibrio se obtiene de hacer cero las dinámicas:

$$\bar{x}_2 = V_d; \quad \bar{x}_1 = 1 - \frac{\bar{x}_2}{\bar{U}} = \frac{\bar{x}_2^2}{RE} = \frac{V_d^2}{RE}; \quad \bar{u} = 1 - \frac{E}{\bar{x}_2}$$

Los errores de los estados y de la entrada están definidos por:

$$e_1 = x_1 - \bar{x}_1; \quad e_2 = x_2 - \bar{x}_2; \quad e_u = u - \bar{u}$$

La dinámica exacta del error queda:

$$\begin{aligned}\dot{e}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{\bar{x}}_1 = -(1-u)e_2 + \bar{x}_2 e_u / L \\ \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\bar{x}}_2 = ((1-u)e_1 - \frac{e_2}{R} - \bar{x}_1 e_u) / C\end{aligned}$$

Reescrito en términos matriciales como:

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u) \\ (1-u) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \end{bmatrix} e_u \quad (1.5)$$

Utilizando la variable auxiliar:

$$\begin{aligned}e_y &= \bar{b}^T e = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \\ e_y &= \bar{x}_2 e_1 - \bar{x}_1 e_2\end{aligned}$$

Utilizando un controlador de la forma $e_u = -\gamma e_y$ es posible estabilizar el sistema. Entonces el control se sintetiza de la forma:

$$\begin{aligned}u &= \bar{u} - \gamma (\bar{x}_2 e_1 - \bar{x}_1 e_2) \\ u &= \bar{u} - \gamma (\bar{x}_2 (x_1 - \bar{x}_1) - \bar{x}_1 (x_2 - \bar{x}_2)) \\ u &= \bar{u} - \gamma (\bar{x}_2 x_1 - \bar{x}_1 x_2)\end{aligned}$$

Una vez substituidos los equilibrios, el control toma la forma:

$$u = 1 - \frac{E}{V_d} - \gamma \left(V_d x_1 - \frac{V_d^2}{RE} x_2 \right) \quad (1.6)$$

Para asegurar que el controlador propuesto haga converger los estados al punto de referencia deseado es necesario demostrar que el sistema controlado es estable. De acuerdo al Teorema 1, para que esto ocurra es necesario que se cumpla la *condición de acoplamiento* $\mathcal{R} + \mathcal{B}^*(t) \Gamma \mathcal{B}^{*T}(t) > 0$. Se observa que, de acuerdo a la forma general dada por (1.1) y utilizando la dinámica del error obtenida para el convertidor Boost en (1.5), las matrices \mathcal{R} y $\mathcal{B}^*(t)$ están dadas por:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^*(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \end{bmatrix}$$

Dado que tratamos el caso de regulación como caso particular del Teorema 1 y el convertidor Boost como un convertidor específico, hemos realizado los siguientes cambios de variables: $\mathcal{B}^*(t) = \mathcal{B}^* := \bar{b}$ y $\Gamma = \gamma$, donde γ es escalar y constante.

Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} + \bar{b}\bar{\gamma}\bar{b}^T &= \mathcal{R} + \gamma\bar{b}\bar{b}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \end{bmatrix} = \\ &= \gamma \begin{bmatrix} \bar{x}_2^2 & -\bar{x}_2\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2\bar{x}_1 & \bar{x}_1^2 + \frac{1}{R\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para demostrar que la matriz es definida positiva utilizamos el Criterio de Sylvester². El criterio de positividad se cumple, dado que el determinante del primer menor que se obtiene es $\gamma V_d^2 > 0$, para $\gamma > 0$. A su vez, el segundo determinante está dado por $\det \begin{bmatrix} \gamma\bar{x}_2^2 & -\gamma\bar{x}_2\bar{x}_1 \\ -\gamma\bar{x}_2\bar{x}_1 & \gamma\bar{x}_1^2 + \frac{1}{R} \end{bmatrix} = \gamma \frac{\bar{x}_2^2}{R} = \gamma \frac{V_d^2}{R} > 0$ y esta condición se cumple siempre que $R > 0$.

Entonces, dado que la matriz de la condición de acoplamiento es definida positiva, se puede asegurar que el sistema es asintóticamente estable.

Simulación Numérica con Matlab®. Con el objetivo de mostrar el comportamiento ideal del sistema con la ley de control obtenida, se procede a la simulación numérica en Matlab® del sistema controlado. Los parámetros utilizados en la simulación son: $E = 10$ voltios, $R = 2 \Omega$, $L = 33 \mu\text{H}$, $C = 1000 \mu\text{F}$, $\gamma = 0.0001$, $V_d = 15$ voltios.

En las simulaciones se considera que el controlador ha sido diseñado para el circuito promedio y, por tanto, su nivel de salida es una señal continua definida en el intervalo $[0, 1]$. Obsérvese que el controlador se obtuvo por medio de un modelo ideal, por esta razón no se han tomado en cuenta ninguno de los efectos existentes en un prototipo de laboratorio, tales como pérdidas, retrasos y perturbaciones debidas a los dispositivos pasivos y semiconductores.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos, la corriente en la bobina en la figura 1.2, tensión en el condensador en la figura 1.3 y el control en la figura 1.4. Como se puede apreciar en las figuras 1.2 y 1.3, las condiciones iniciales son cero y las coordenadas del equilibrio corresponden a $\bar{x}_1 = 11.25$ amperios y $V_d = \bar{x}_2 = 15$ voltios, respectivamente. En la figura 1.4 se aprecia que el control parte de $\bar{u} = 0.3333$ y estabiliza en el mismo valor.

²**Criterio de Sylvester:** dada A una matriz simétrica, $n \times n$ real. La forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T A x = \langle x, Ax \rangle \forall x \in \mathfrak{R}^n$ es definida positiva si y sólo si los determinantes de los menores principales son todos positivos.

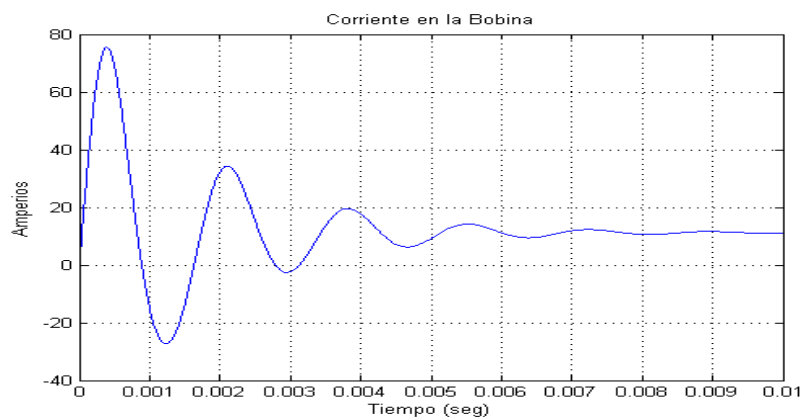


Figura 1.2: Corriente en la Bobina Convertidor Boost Ideal

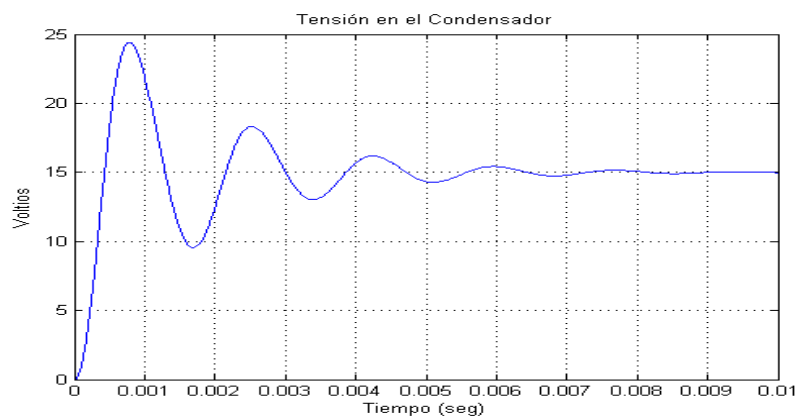


Figura 1.3: Tensión en el Condensador Convertidor Boost Ideal

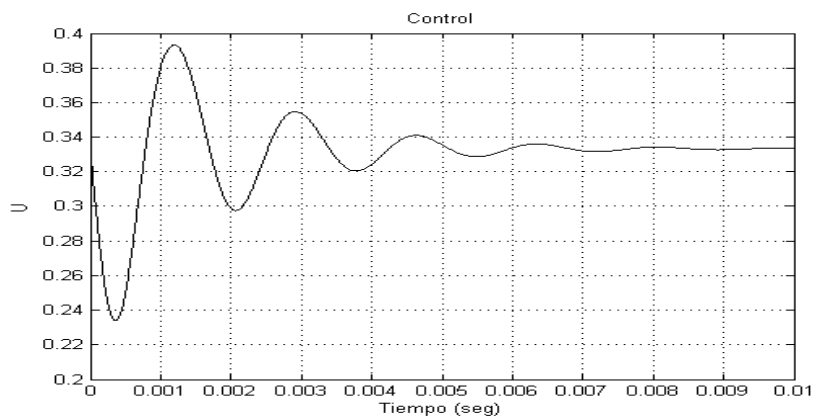


Figura 1.4: Control Convertidor Boost Ideal

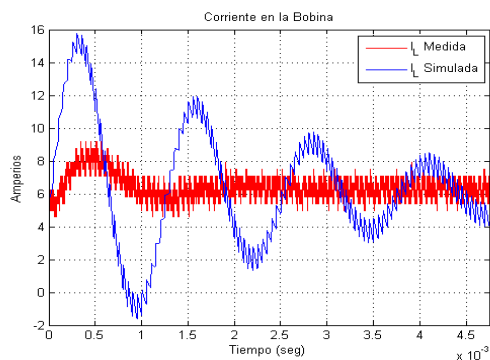
Implementación Práctica y Resultados Experimentales. Se procedió a implementar un prototipo de laboratorio de un convertidor DC-DC tipo Boost. Nuestro interés es comparar los resultados obtenidos en las simulaciones con los obtenidos sobre un sistema real (prototipo de laboratorio). Los detalles técnicos de la implementación los presentaremos en el Capítulo 2. Sin embargo, incluimos aquí algunos aspectos relevantes:

- Los parámetros utilizados para el convertidor y la ley de control son: $E = 10$ voltios, $R = 2 \Omega$, $L = 33 \mu\text{H}$, $C = 1000 \mu\text{F}$, $\gamma = 0.0001$.
- La ley de control 1.6 fue implementada por medio de un DSP modelo ADSP-21992 para cerrar el lazo del convertidor.
- Para el funcionamiento del prototipo es necesario incluir el modulador de ancho de pulso (PWM) para accionar la entrada. La frecuencia se fijó a 20 kHz.
- En las simulaciones se incluyó un algoritmo de acuerdo con la operación del PWM y la misma frecuencia para realizar la comparación.

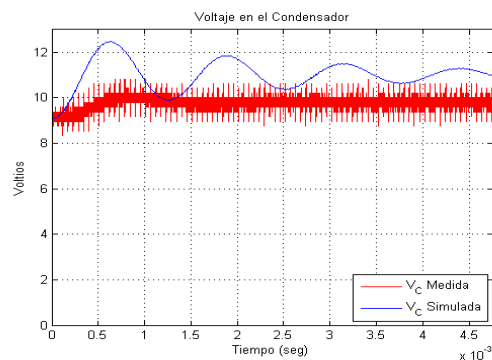
En las figuras 1.5a,b , 1.6a,b y 1.7a,b se pueden observar la corriente en la bobina y la tensión en el condensador. En el cuadro 1.3 se pueden ver los valores en estado estable de la tensión correspondientes a las figuras 1.5, 1.6 y 1.7. Se observa en todas las figuras que las mediciones convergen más rápidamente que las simulaciones y las respectivas dinámicas medidas presentan mayor amortiguamiento. Las simulaciones convergen a los valores deseados de tensión y de corriente; por el contrario, las mediciones en el prototipo muestran que estos valores no pueden ser alcanzados por el convertidor utilizando la ley de control propuesta.

Tensión del Condensador	voltios	voltios	voltios
Valores deseados	11	15	20
Simulación	11	15	20
Medición	9.5	12.5	15

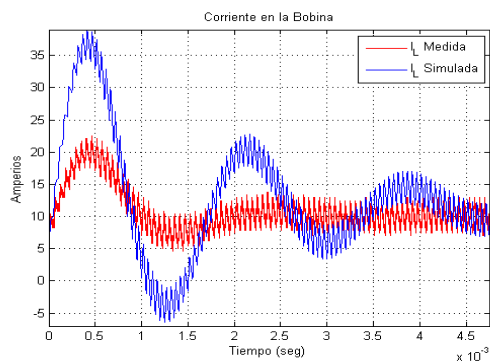
Cuadro 1.3: Valores en estado estable de la tensión del condensador



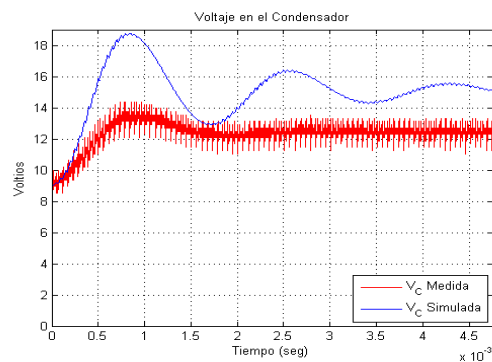
(a) Corriente en la Bobina



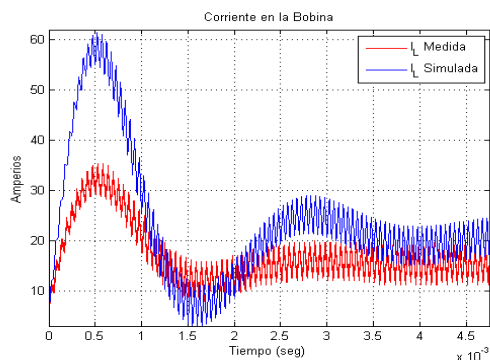
(b) Tensión en el Condensador

Figura 1.5: Simulaciones y Mediciones $V_d = 11$ voltios

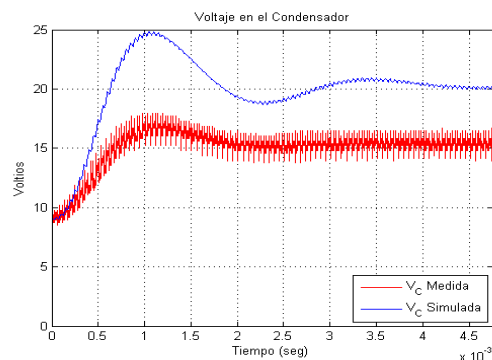
(a) Corriente en la Bobina



(b) Tensión en el Condensador

Figura 1.6: Simulaciones y Mediciones $V_d = 15$ voltios

(a) Corriente en la Bobina



(b) Tensión en el Condensador

Figura 1.7: Simulaciones y Mediciones $V_d = 20$ voltios

Para complementar estos resultados se realizó un barrido, sobre los valores de equilibrio de la tensión del condensador y de la corriente de la bobina, para el rango de funcionamiento del convertidor³. Por tanto, se hizo funcionar con valores de tensión de salida deseados entre 10 y 25 voltios. Con los valores medidos de la salida se construyó la figura 1.8a, es decir, tensión de salida deseada respecto a la tensión medida. Como referencia incluimos una gráfica donde los valores deseados son iguales a los medidos. En la figura 1.8b tenemos los valores de tensión medidos versus las corrientes medidas en la bobina y, como referencia, las corrientes que deberían alcanzarse para el valor deseado de tensión según la función de equilibrio $\bar{x}_1 = V_d^2/RE$.

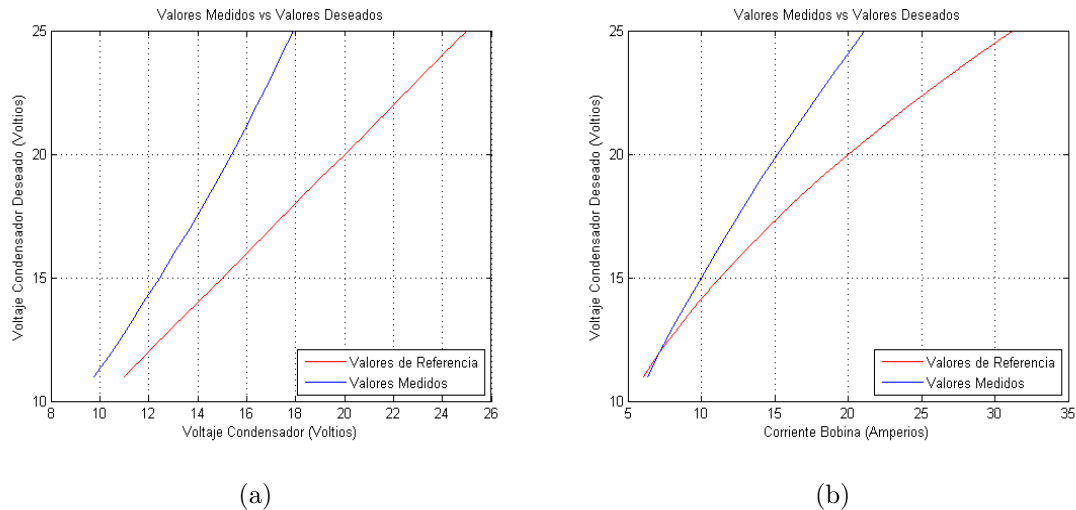


Figura 1.8: Valores Deseados respecto a Valores Medidos en Estado Estacionario en el Rango de Funcionamiento del Convertidor $V_d \in [10, 25]$ voltios

1.3. Algunas apreciaciones

Utilizando los resultados medidos en el laboratorio y las simulaciones numéricas procedemos a presentar las conclusiones y recomendaciones de este capítulo. Los resultados en el rango de funcionamiento muestran que:

1. El convertidor implementado, conjuntamente con el controlador diseñado mediante la técnica ETEDPOF, no alcanza los valores deseados de tensión.

³El rango de funcionamiento es $\bar{u} \in [0, 1]$.

2. Los transitorios de las señales de corriente en la bobina y de tensión del condensador de las simulaciones difieren en forma apreciable de las mediciones realizadas en el prototipo.
3. El error entre el valor deseado y las mediciones del prototipo en estado estacionario, tanto para la corriente en la bobina como para la tensión en el condensador, se incrementa conforme aumenta el valor del control en estado estacionario \bar{u} .

Esto nos lleva a las siguientes conclusiones:

- El controlador sintetizado para el convertidor Boost no logra regular el comportamiento del prototipo a los valores deseados.
- La diferencia obtenida es tal que no puede ser atribuida a efectos tales como variación de los parámetros con la temperatura (producidos por el medio circundante) o efectos de variación de la frecuencia de operación, cuya contribución ha sido minimizada en lo posible.
- El modelo utilizado es insuficiente para permitir que la ley sintetizada sea aplicable al prototipo de forma directa por múltiples razones, las cuales pueden resumirse en pérdidas de energía no modeladas.

Para solventar los inconvenientes suscitados al afrontar el problema práctico de implementación, en este trabajo se planteó realizar los siguientes pasos:

- Analizar la posibilidad de utilizar modelos matemáticos más precisos de los componentes del convertidor, de modo que las realidades existentes puedan ser tomadas en cuenta. En la medida de lo posible, estos modelos deben representar la realidad con la mayor precisión y, al mismo tiempo, con la mayor sencillez posible.
- Adecuar un nuevo modelo de manera tal que permitan que la técnica de control de realimentación de la salida pasiva de la dinámica del error sea aplicable, es decir, que no sea tan complejo que no permitan la obtención de la ley de control.

- Estudiar los efectos de adicionar al controlador términos de la integral del error de salida, con la finalidad de mejorar la robustez del convertidor.
- Estudiar los efectos, sobre el sistema real, de las mejoras que producen las recomendaciones anteriores cuando son utilizadas en conjunto.

Capítulo 2

Modelo por Efecto Joule

Como hemos mostrado en el Capítulo 1, ante los efectos de un controlador basado en un modelo ideal, el comportamiento experimental de un convertidor real presenta diferencias apreciables respecto a la respuesta dinámica prevista idealmente, tanto en estado estacionario como en el transitorio.

Como consecuencia de los resultados del Capítulo 1, el análisis del comportamiento del convertidor requiere de la búsqueda de modelos más precisos que permitan conocer de forma sencilla la dinámica y la estabilidad del convertidor y de nuevos diseños de controladores (robustos). El primer aspecto será abordado en este capítulo, mientras que el Capítulo 3 se centrará alrededor de la temática de robustez. En este punto, la elección es difícil porque existe una gran cantidad de modelos diferentes y aproximaciones.

El problema de modelado de convertidores ha sido ampliamente estudiado por Tymersky et al. [Tym89], Vorperian [Vor90a], Czarkowski y Kazimierzuck [Cza92a], Sanders [San89] y Cuk y Middelbrook [Cuk78]. Sin embargo, los modelos desarrollados son, en su mayoría, de pequeña señal y aportan poca información respecto al uso de prototipos experimentales, en especial cuando funcionan dentro de un amplio rango.

También se ha estudiado la utilización de modelos equivalentes simples de los semiconductores, tales como los citados en diversos textos de electrónica, como el clásico Millman [Mil79], e inclusive la utilización de modelos complejos de los semiconductores como el del diodo de Shockley [Sho49] y el modelo del transistor de Ebers-Moll [Ebe54]

entre otros.

La revisión bibliográfica realizada permite extraer las siguientes conclusiones:

1. En muchos casos las técnicas de diseño de controladores parten de un modelo que no incluye ningún tipo de pérdidas. Con el término “pérdidas” nos referimos a la fracción de energía o potencia que el sistema consume cuando ésta es transferida de la fuente de alimentación a la carga.
2. Algunos modelos intentan corregir los efectos de las pérdidas, que aparecen como producto de una implementación experimental, incluyendo elementos resistivos. De este modo se pueden aproximar parte de las pérdidas alrededor de un punto de operación definido. Desde el punto de vista teórico esta aproximación es suficiente pero desde el punto de vista práctico este hecho restringe las variaciones dinámicas existentes en los materiales que conforman los prototipos de laboratorio. Esta dinámica hace que la resistencia sea variable respecto al punto de operación, puesto que las pérdidas existentes en los materiales conductores y semiconductores varían, entre otros, con la corriente, la temperatura y la frecuencia.
3. Otra propuesta que se ha considerado es la utilización de modelos equivalentes simples de los semiconductores y de algunos dispositivos del convertidor. Este procedimiento se encuentra extensamente utilizado en la literatura y, como es previsible, arroja un modelo más preciso que el anterior, permitiendo un rango mayor de operación para los modelos resultantes. Sin embargo, cuando intentamos utilizarlos como herramientas para aplicaciones de laboratorios, encontramos que el rango de operación aumenta pero el procedimiento para obtener los parámetros del modelo suele ser difícil y complicado, dependiendo en muchos casos de información del fabricante que, normalmente, no puede ser utilizada directamente. Cuando comparamos las trayectorias del modelo teórico y las obtenidas a partir de los prototipos experimentales, observamos que los valores estacionarios de las respuestas mejoran pero persisten las diferencias en los transitorios.
4. Modelos precisos son, normalmente, complejos. Tal es el caso de representar los semiconductores por medio de los modelos Shockley [Sho49] y Ebers-Moll [Ebe54]

(que abordaremos más adelante). Estos casos se afrontan a través de programas computacionales capaces de resolver las dificultades de los circuitos equivalentes para cada uno de los componentes, por ejemplo, Orcad-PSpice®[®], Psim®[®], Workbench®[®] y otros. Por lo general, las simulaciones se asemejan fielmente a los resultados experimentales. La desventaja radica en que la complejidad de las ecuaciones no permite la obtención de controladores sencillos.

A manera de ejemplo, para observar las diferencias que se producen entre los modelos, realizaremos simulaciones que muestran el comportamiento de la corriente del inductor y la tensión del capacitor de un convertidor Boost en régimen estacionario (sin incluir las especificaciones paramétricas que abordaremos más adelante). Los tres casos comparados son:

1. Modelo Ideal que no incluye ningún tipo de pérdidas; en otras palabras, las resistencias de pérdidas son cero.
2. Una variante del Modelo Ideal en la que se le incluyen las pérdidas existentes en el inductor por medio de una resistencia en serie, R_{in} .
3. El circuito es simulado por medio del programa Orcad-PSpice®[®] con mejoras de los modelos de Shockley [Sho49] y Ebers-Moll [Ebe54], incluyendo variaciones de temperatura y las dinámicas existentes en los materiales.

En los dos primeros casos la entrada del sistema u es continua y definida en el rango $[0, 1]$. En el tercer caso su entrada presenta dos estados discretos $\{0, 1\}$ ya que el programa utiliza modelos de los componentes, por lo que se incluyó un modulador (PWM) operando a 200 kHz. A pesar de que existe diferencia entre ambas entradas, el hecho de operar a 200 kHz permite que la entrada modulada se aproxime, en promedio, a la entrada continua.

En la figura 2.1 puede observarse el comportamiento de la corriente en la bobina, donde se presentan los valores de equilibrio para cada caso y a los que nos referimos a continuación:

- La tasa de crecimiento mayor de la corriente ocurre en el Modelo Ideal sin R_{in} , tanto que para $u = 1$ se hace infinita por lo que se restringió el rango de u a $[0, 0.95]$.
- El Modelo Ideal con R_{in} tiene una tasa de crecimiento intermedia y la corriente máxima es de 1000 amperios para $u = 1$.
- El modelo complejo de Orcad-PSpice® tiene la menor tasa de crecimiento siendo su valor máximo 375 amperios para $u = 1$.

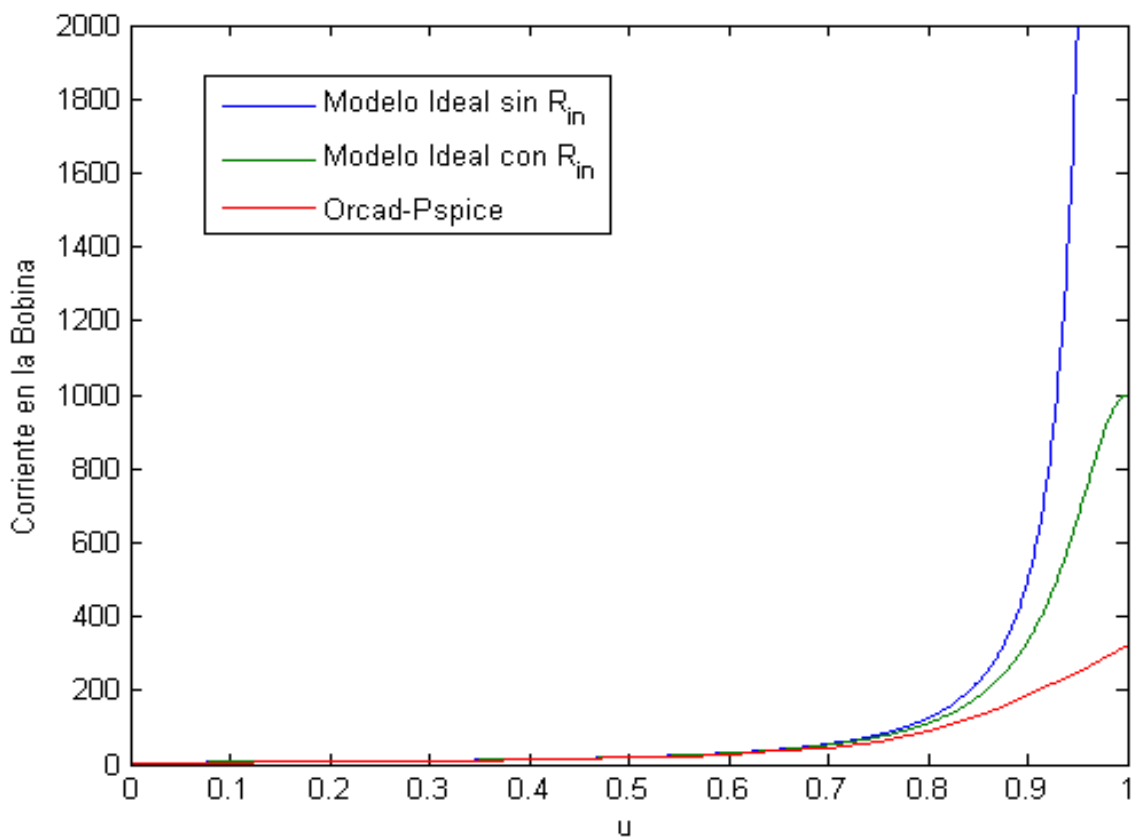


Figura 2.1: Curvas de Equilibrios de la Corriente en la Bobina

En la figura 2.2 presentamos la tensión en el capacitor, pudiendo resaltar:

- La tasa de crecimiento de la tensión sigue siendo la mayor cuando la resistencia

R_{in} es cero, tomando un valor infinito cuando $u = 1$; motivo por el cual se restringió el rango de u a $[0, 0.95]$.

- La tasa de crecimiento disminuye con la inclusión de R_{in} y la tensión toma el valor de cero voltios cuando $u = 1$.
- El modelo Orcad-PSpice® mantiene la menor tasa de crecimiento, la tensión es menor respecto a los otros modelos en casi todo el rango de la entrada u y toma un valor de 6 voltios cuando $u = 1$.
- El comportamiento en estado estacionario es similar por debajo de $u = 0.7$.
- Los valores máximos del Modelo Ideal con R_{in} y del Orcad-PSpice® son cualitativamente similares.

El ejemplo es bastante ilustrativo, así que lo utilizaremos para intentar elegir el modelo más adecuado de los tres presentados. Antes de intentar decidir, debemos presentar las razones que dirigen la selección del modelo y que se originan en sus aplicaciones:

1. Se sintetizará un controlador.
2. Se simulará el comportamiento en lazo cerrado.
3. El control sintetizado se aplicará a un prototipo experimental.
4. El control sintetizado será empleado para regular el comportamiento del prototipo experimental.

De acuerdo a estas necesidades la decisión es sencilla: debe utilizarse el Modelo Ideal con R_{in} ; debido a que:

- La R_{in} aumenta la precisión del Modelo Ideal, pero esta precisión aún está relativamente lejos de la obtenida con Orcad-PSpice®.
- Los modelos del Orcad-PSpice® son complejos y no permiten aplicar la técnica de control que hemos introducido en el Capítulo 1.

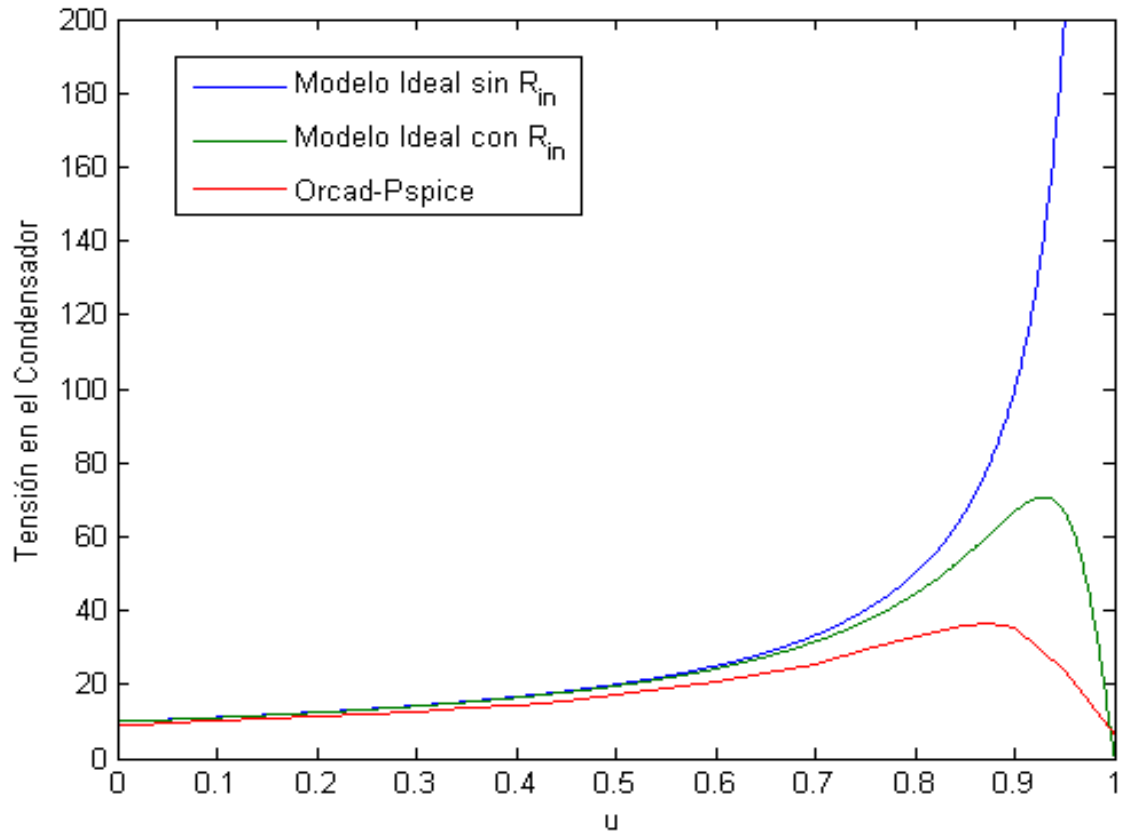


Figura 2.2: Curvas de Equilibrios de la Tensión en el Condensador

En otras palabras, la decisión se circunscribe a un *balance entre la precisión y la complejidad del modelo*, siendo este el marco conceptual en torno al cual se desarrollará este capítulo. Debemos agregar que la precisión se obtendrá de comparar los modelos matemáticos utilizados con las mediciones realizadas en el prototipo experimental.

De este modo nos planteamos la posibilidad de desarrollar un nuevo modelo que nos ofrezca una precisión adecuada, manteniendo una complejidad que nos permita sintetizar una ley de control para implementarla utilizando un prototipo; es decir, este nuevo modelo deber ser tal que tenga la mejor precisión y la menor complejidad posibles, permitiendo la síntesis de controladores.

Esto plantea un nicho de estudio con la posibilidad de encontrar un modelo que

tenga algunas características de las técnicas anteriores y que permita obtener mejores resultados (precisión) con modelos sencillos (complejidad).

Siguiendo estas premisas, presentamos en este capítulo una técnica de modelado complementaria de las existentes que incluye las siguientes características:

1. Incluye resistencias internas.
2. Incluye elementos simples y lineales con la finalidad de mejorar la precisión de la respuesta del modelo.
3. Permite la obtención de los parámetros del modelo de manera sencilla mediante dos métodos:
 - Utilizando las curvas características que ofrece el fabricante, cuando se disponga de ellas.
 - Utilizando mediciones directas sobre el prototipo experimental.
4. La sencillez de la propuesta permite la síntesis de controladores.
5. Puede obtenerse en lazo abierto y en lazo cerrado, siendo capaz de incluir las pérdidas del lazo de realimentación.
6. Es capaz de obtener, con una precisión adecuada, tanto los estados estacionarios como los transitorios.
7. Los modelos resultantes no tienen requerimientos computacionales excesivos.

El modelo obtenido logra copiar de una manera sencilla los comportamientos del prototipo de laboratorio, consiguiendo semejanzas en las trayectorias del convertidor, durante los transitorios y así como en los estados estacionarios. Esta doble función es el aporte que nos ha llevado a incluirlo en este trabajo.

La idea que orienta la técnica es complementar la energía del modelo básico con las pérdidas de energía existente en el prototipo, hasta conseguir una aproximación adecuada, sin caer en modelos tan complejos que únicamente pueden ser resueltos a través de programas especializados.

A continuación abordaremos diversos apartados para mostrar cómo llegar a esta aproximación; se presentarán:

- Definiciones de los diferentes modelos.
- Aplicación al caso específico del convertidor Boost.
- Análisis de estabilidad del convertidor en lazo cerrado.
- Simulaciones en lazo abierto y lazo cerrado.
- Síntesis de un controlador para un prototipo de laboratorio.
- Resultados de la implementación del prototipo.

En los anexos, además, incluiremos un algoritmo que generaliza la técnica, ejemplos para algunos convertidores y detalles de la implementación para casos mono y multivariables.

2.1. Definiciones de Modelos

Cuando se utilizan modelos que no incluyen pérdidas se omiten muchos efectos existentes en los prototipos. Aquí hacemos especial énfasis en dos de ellos:

1. Una cantidad de energía considerable es despreciada.
2. La energía (potencia) pueden ser transferida en grandes cantidades y de forma casi instantánea.

En el ejemplo de las figuras 2.1 y 2.2 se observa la primera de estas características, la corriente puede crecer indefinidamente con el aumento del ciclo de trabajo cuando se omiten las resistencias internas. Esto nos lleva a nuestro primer concepto.

Modelo Ideal (Σ_i)¹: es una representación que intenta reproducir el comportamiento de un fenómeno físico bajo el supuesto que toda la energía puede ser transferida desde la fuente a la carga, sin restricciones de cantidad, tiempo y sin pérdidas óhmicas. Además, por conveniencia, incluiremos el término Modelo Ideal con R_{in} al modelo en el cual algunas pérdidas óhmicas son incluidas.

Cuando nos estemos refiriendo a las mediciones realizadas en el prototipo experimental lo conceptualizaremos como modelo real. Éste se asocia directamente a las características de los materiales, y por tanto es único y su comportamiento es no lineal.

Modelo Real (Σ_m)²: es una representación abstracta de un sistema físico, que reproduce fielmente todos y cada uno de los comportamientos, fenómenos y restricciones que ocurren en un prototipo experimental. Este modelo es único ya que no es posible obtener dos materiales con exactamente las mismas características. El subíndice m hace referencia a las mediciones de las respuestas o señales del prototipo experimental.

Incluir la complejidad de los modelos que representan el comportamiento de los materiales, en especial de los semiconductores, es posible por medio de los programas computacionales que pueden resolver los sistemas de ecuaciones diferenciales que determinan el comportamiento del convertidor. Dado que nuestra intención no es utilizar estos programas, introducimos un modelo de referencia para efectos de comparación que está basado en los modelos de Shockley [Sho49] y de Ebers-Moll [Ebe54]. Especificaremos estos modelos en el transcurso de este capítulo, denominado modelo de referencia real.

¹El subíndice i se utiliza para representar la característica ideal.

²El subíndice m se utiliza para representar la característica física propia del prototipo experimental.

Modelo de Referencia Real (Σ_r)³: dado que el modelo real Σ_m es en esencia una abstracción, se requiere de alguna medida referencial que aproxime el prototipo experimental, así que incluiremos este modelo como la representación más precisa de la física de los materiales. En la medida que el modelo se hace preciso también se hace complejo, pero pierde aplicabilidad cuando se intenta obtener un controlador.

Partiendo de estos conceptos introducimos el *Modelo Equivalente Joule* o *Modelo Joule*. Su base argumental es la inclusión de pérdidas debidas al *efecto Joule* establecido por la *Ley de Joule* [Jou38]. Según éste, los dispositivos conductores y semiconductores generan energía térmica cuando son atravesados por una corriente eléctrica. Recurrirémos a la idea de concentrar las pérdidas debidas al calentamiento en equivalentes lineales tales como fuentes de tensión y resistencias y omitiendo dinámicas que aumenten el orden del sistema o efectos de alta frecuencia.

Modelo Equivalente Joule (Σ_J)⁴: esta representación incluye, en la medida de lo posible, pérdidas debidas al efecto Joule existentes en el modelo real Σ_m , utilizando dispositivos lineales tales como fuentes de tensión constantes y resistencias equivalentes.

A continuación, cada uno de estos conceptos los aplicamos al caso específico del convertidor Boost.

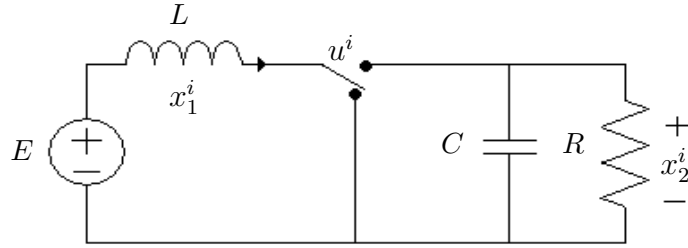
2.2. Modelado del Convertidor Boost

El modelo más utilizado del convertidor Boost tiene como característica la ausencia de pérdidas y, por ende, la ausencia de resistencias internas y una respuesta instantánea. El esquema circuital del *modelo ideal* Σ_i del convertidor Boost se representa en la figura 2.3.

Las características ideales permiten que toda la energía sea transferida de la fuente a la carga. Con el diagrama circuital de la figura 2.3 puede determinarse la dinámica

³El subíndice r se utiliza para representar el hecho de que es una referencia.

⁴El subíndice J se utiliza para representar la inclusión del efecto Joule.

Figura 2.3: Modelo Ideal Σ_i del Convertidor Boost

asociada al convertidor que viene dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u^i) \\ (1-u^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

donde i es el superíndice que refiere al modelo ideal Σ_i , x_1^i es la corriente en la bobina, x_2^i es la tensión en el condensador, u^i es la señal de control que adquiere valores en el rango $[0, 1]$, R es la resistencia de carga, E es la fuente de alimentación, L es la inductancia de la bobina y C es la capacitancia del condensador.

Con la finalidad de tener un modelo más adecuado incluimos la pérdida de potencia en el inductor por medio de una resistencia en serie con la bobina R_{in} .

En este caso la ecuación de estado que caracteriza la dinámica viene dada por la ecuación (2.2).

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u^i) \\ (1-u^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

El **modelo real** Σ_m es aquel que representa exactamente el comportamiento del prototipo experimental. Para nuestros efectos lo restringimos a las mediciones que pueden obtenerse del montaje de laboratorio que permiten estudiar y observar el comportamiento “real” del convertidor. A este respecto existe un sinnúmero de modelos

que intentan caracterizar cada uno de los componentes del convertidor, en nuestro caso, la bobina, el condensador, la resistencia de carga, el diodo y el transistor, así como el comportamiento de los conductores y conectores que permiten ensamblar el prototipo.

Es evidente que modelar esta estructura no es simple y que cada uno de estos elementos tiene la suficiente dificultad para el desarrollo de innumerables trabajos de investigación, algunos ya lo hemos referenciado y los repetimos [Tym89], [Vor90a], [Cza92a], [San89] y [Cuk78]. En este sentido, empresas y universidades se han dedicado al desarrollo de programas computacionales sofisticados que incluyen modelos especializados de cada uno de los componentes, así como las relaciones que se crean de su interconexión. En especial, citamos, entre otros, Orcad-PSpice®. PSpice fue desarrollado por la Universidad de California, Berkeley en 1975 por Donald Pederson y hoy día pertenece a la empresa Cadence, éste incluye modelos de gran precisión para cada uno de los elementos. Sin embargo, estos modelos por si mismos son de poca ayuda, debido a su complejidad, cuando se diseñan controladores, pero son una herramienta insustituible cuando se procede a la simulación.

Para obtener un modelo más adecuado que permita hacer comparaciones con el *modelo real* Σ_m , procederemos a refinar un modelo con restricciones acordes con el comportamiento real del convertidor, siguiendo siempre nuestro argumento principal que es tratar de incluir la mayor cantidad de pérdidas por efecto Joule. Partiremos del esquema circuital representado en la figura 2.4,

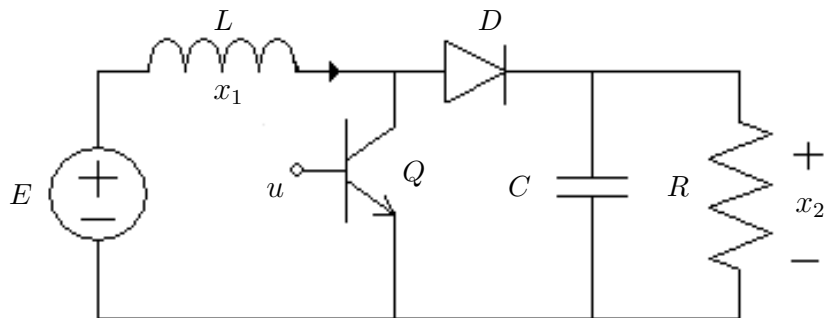


Figura 2.4: Modelo Circuital del Convertidor Boost

donde R es la resistencia de carga, E es la fuente de alimentación, L es la inductancia de

la bobina y C es la capacitancia del condensador, u es la señal de control que adquiere valores entre $\{0, 1\}$, D es el diodo y Q es el transistor.

Se consideran ciertas restricciones necesarias para reducir la complejidad presente en el modelo, a saber:

1. Los elementos que almacenan energía tales como bobinas y condensadores serán considerados como elementos lineales que no se ven afectados por variables como la temperatura o la frecuencia de operación.
2. Los conductores y conexiones no incluyen pérdidas parásitas de ningún tipo.
3. Se hará especial énfasis en las *pérdidas por efecto Joule* de los dispositivos semiconductores que se producen durante el trasiego de energía.
4. El transistor opera pasando de abierto a cerrado y viceversa. Para que el funcionamiento sea eficiente el tiempo de transición debe ser mínimo, puesto que durante la transición también se producen pérdidas.

Con estas restricciones nos estamos circunscribiendo al hecho de que gran parte de las pérdidas de potencia son generadas por los dispositivos semiconductores. Por esta razón requerimos de modelos matemáticos que caractericen los dispositivos e incluyan las pérdidas. En este trabajo utilizaremos el modelo Shockley [Sho49] y el de Ebers-Moll [Ebe54] con algunas variantes introducidas para el PSpice que pueden conseguirse recopiladas en el texto de Massobrio y Antognetti [Mas93].

Shockley [Sho49] modela el comportamiento de la unión tipo P-N del diodo mientras que Ebers-Moll [Ebe54] lo hace para el transistor, representando el comportamiento de la unión de 3 cristales tipo N-P-N o P-N-P. Para ambos dispositivos existen modelos de baja y alta frecuencia, sin embargo, nos centraremos en los de baja frecuencia, o modelos estáticos. A continuación introduciremos los modelos de ambos dispositivos semiconductores, así como las consideraciones que realizamos al respecto.

Modelo del Diodo. La investigación de los materiales semiconductores comienza en 1938 con los desarrollos teóricos de Davydov [Dav38], seguida por los resultados prácticos obtenidos por Ohl en 1940 cuando observó el efecto fotovoltaico de un cristal de silicio, el cual patentó en 1941 [Olh41]. Posteriormente, la teoría de funcionamiento

fue desarrollada por Schokley [Sho49]. Con esta base muchos modelos se han planteado y gran parte de ellos se han convertido en herramientas de predicción como los utilizados por Orcad-PSpice®.

Como introducción al modelo estudiado presentamos, en la figura 2.5a, un diagrama representativo de la unión P-N, con un diagrama circuital y el modelo equivalente. En la figura 2.5b tenemos el comportamiento estático del diodo y las zonas o regiones que lo caracterizan.

El modelo equivalente incluye una resistencia serie r_s , una fuente de corriente dependiente, una conductancia en paralelo G_{min} y una característica constituida por regiones que se muestran en la figura 2.5b y formuladas matemáticamente a través de las ecuaciones (2.3); en las cuales se muestra el comportamiento de la corriente que atraviesa el diodo I_d en función de la tensión en sus extremos V_D , donde $V_D \cong r_s I_d + V_d$

$$I_d = \begin{cases} I_{sf} (e^{qV_D/nkT} - 1) + V_D G_{mín} & \forall -5 \frac{nkT}{q} \leq V_D \\ -I_{sf} + V_D G_{mín} & \forall -BV \leq V_D \leq -5 \frac{nkT}{q} \\ -IBV & \forall V_D = -BV \\ I_{sf} (e^{-q(BV+V_D)/kT} - 1 + \frac{qBV}{kT}) & \forall V_D < -BV \end{cases} \quad (2.3)$$

Las variables, los parámetros, los valores típicos, la descripción y las unidades contenidas en las ecuaciones (2.3) se han resumido en el cuadro 2.1.

Como se observa en la figura 2.5b y en las ecuaciones (2.3) existen tres regiones,

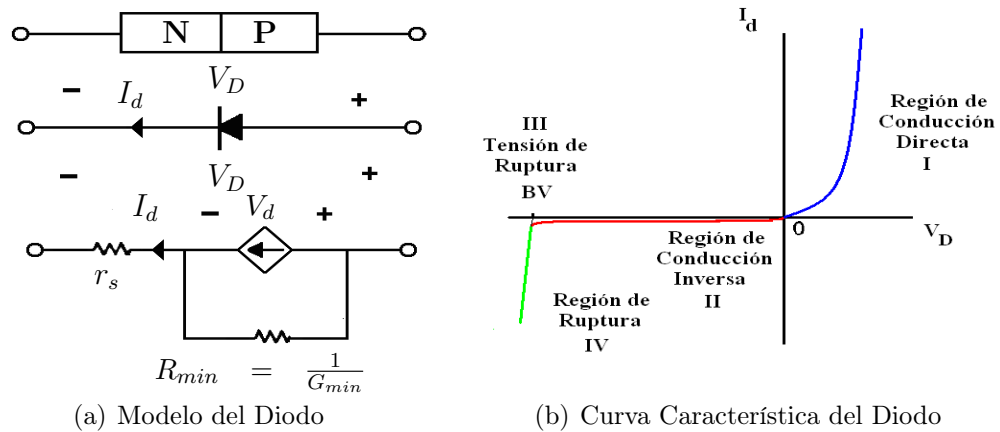


Figura 2.5: Modelado del Diodo

Símbolo	Descripción	Valor Típico	Unidad
I_d	Corriente del diodo		A
V_D	Tensión en los extremos del diodo		V
V_d	Tensión de la fuente dependiente de corriente		V
I_{sf}	Corriente de saturación	10^{-12}	A
T	Temperatura nominal para simulaciones	25	$^{\circ}C$
k	Constante de Boltzman	1.38×10^{-23}	Joule/Kelvin
q	Carga del electrón	1.6×10^{-19}	Coulombios
r_s	Resistencia interna del diodo	$< 1^*$	Ω
G_{min}	Conductancia mínima	10^{-12}	Ω^{-1}
BV	Tensión de ruptura inversa	200*	V
IBV	Corriente de ruptura inversa	10^{-3}	A
n	Coefficiente de emisión	1-2	

*Estos son valores típicos y están sujetos a las características de fabricación

Cuadro 2.1: Variables y Parámetros del Diodo

así como un punto de operación importante, definidos por:

- I. Región de conducción en directo, se caracteriza porque la corriente I_d crece en forma exponencial respecto a la tensión en sus extremos, haciendo que la unión P-N funcione como un conductor.
- II. Región de conducción en inverso, cuya corriente tiende a un valor constante definido por la corriente de saturación con valor típico muy pequeño, funcionando de forma similar a un circuito abierto.
- III. La tensión de ruptura es el máximo voltaje entre los extremos del diodo antes de que el diodo entre en la región de ruptura (avalancha).
- IV. Región de ruptura, aparece cuando la corriente en inverso crece de manera exponencial (avalancha) pero en sentido contrario, siendo de especial cuidado porque puede dañar el diodo rompiendo la unión P-N.

Siguiendo la metodología de incluir la máxima potencia consumida debemos analizar las regiones de operación para reducir el modelo presentado, así tenemos que:

- La región de conducción en directo es la que consume mayor potencia.
- La región de conducción en inverso consume muy poca potencia puesto que la corriente I_{s_f} es muy pequeña, con valor típico de 10^{-12} A.
- La región de ruptura no es funcional porque daña la unión.

De acuerdo con estos comportamientos, la única región importante es la de conducción en directo ya que presenta la mayor parte de las pérdidas por efecto Joule. Tal afirmación está sustentada en el conocimiento de la Ley de Joule; según ésta, la potencia consumida es función del cuadrado de la corriente que lo atraviesa y es en la región de conducción en directo donde existe mayor corriente. El término G_{min} de la ecuación (2.3) puede ser despreciado porque su valor típico implica que el consumo de potencia de la conductancia es muy pequeño. De este modo, el modelo del diodo de la figura 2.5a puede reducirse al modelo de la figura 2.6. Además, podemos definirlo para $V_d \geq 0$ por el poco consumo en inverso.

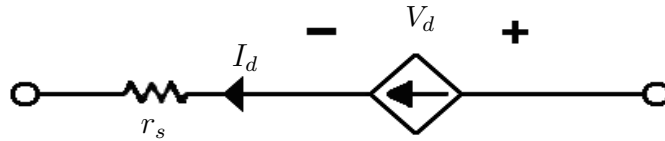


Figura 2.6: Modelo Reducido del Diodo

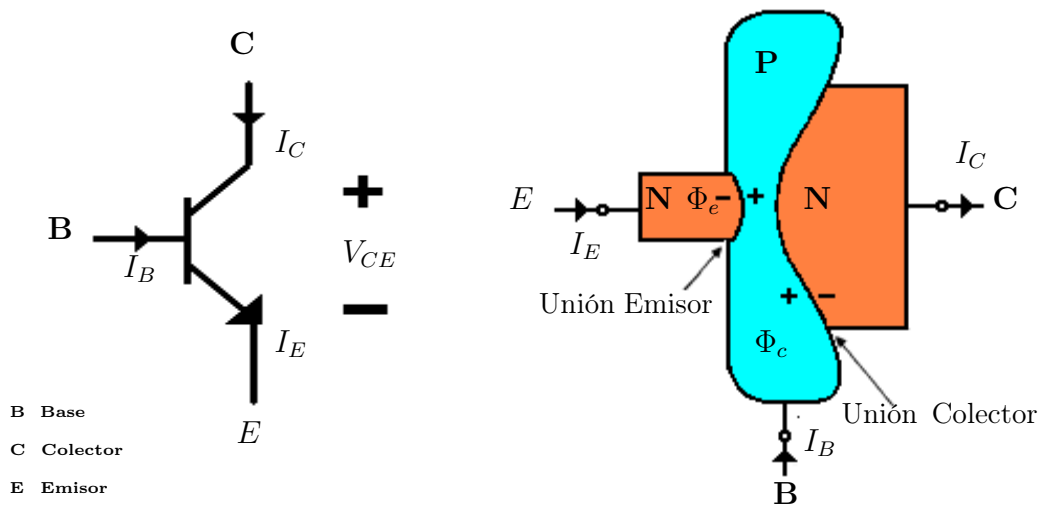
La característica del diodo queda representada por la fuente de corriente dependiente $I_d = I_{s_f} (e^{qV_d/nkT} - 1)$, $\forall V_d \geq 0$ en serie con la resistencia r_s . Puede ser escrita en términos de una fuente dependiente de tensión expresada por $V_d = \frac{nkT}{q} \ln \left(\frac{I_d + I_{s_f}}{I_{s_f}} \right)$, de manera que pueda ser utilizada en las mallas de voltaje del convertidor.

En base a lo anterior, el modelo reducido del diodo queda de la siguiente forma:

$$V_D = \begin{cases} I_d r_s + \frac{nkT}{q} \ln \left(\frac{I_d + I_{s_f}}{I_{s_f}} \right) & V_d \geq 0 \quad (\text{para Conducción o Saturación}) \\ 0 & V_d < 0 \quad (\text{para Abierto o Corte}) \end{cases} \quad (2.4)$$

Modelo del Transistor. Las investigaciones con los semiconductores llevaron a la invención del transistor en 1947, atribuido a John Bardeen, Walter H. Brattain y Willian Shockley. Los primeros resultados publicados al respecto son los de Bardeen y Brattain [Bar48] y Shockley [Sho49]. Seguido por la teoría de funcionamiento y el correspondiente modelado del transistor presentados por Hebers-Moll [Ebe54] y Moll [Mol58]. Hoy en día estos modelos son mucho más precisos pero su complejidad ha aumentado al incluir los efectos de la temperatura, del almacenamiento de energía en los materiales y del ruido. Partiendo del trabajo de Hebers-Moll [Ebe54] realizaremos ciertas simplificaciones que nos permitirán establecer las condiciones de alto consumo de energía en el transistor.

Presentamos el transistor a través de la figura 2.7, constituido por dos uniones de tipo NPN o PNP de materiales semiconductores. La figura 2.7a es la representación simbólica del dispositivo y la figura 2.7b, la distribución física de los materiales.



(a) Representación Simbólica del Transistor (b) Representación de la Geometría del Transistor

Figura 2.7: Modelo del Transistor

De acuerdo al modelo de señal grande del transistor desarrollado por Ebers-Moll [Ebe54], existen tres regiones de operación a las que actualmente se han añadido dos. A continuación hacemos referencia a las regiones y que, a su vez, se muestran en la figura 2.8.

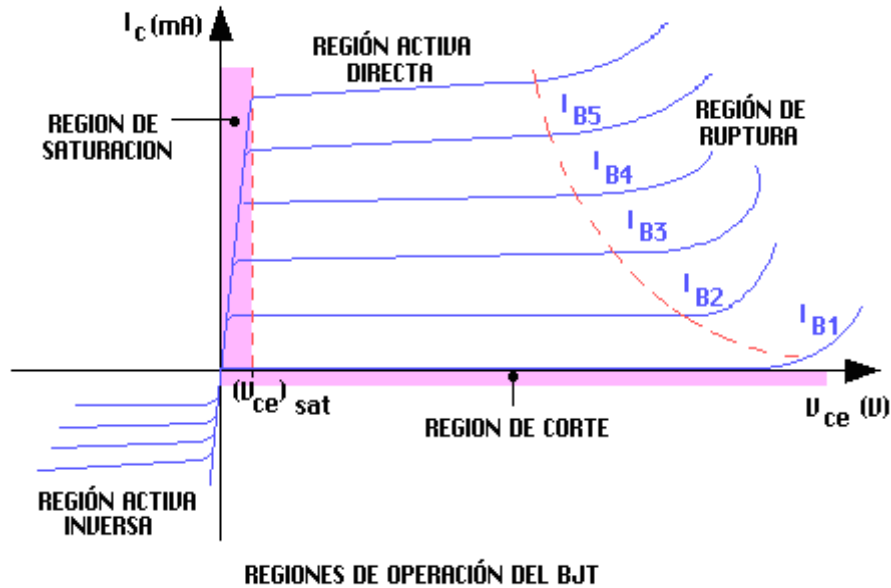


Figura 2.8: Regiones de Operación del Transistor

Las regiones dependen de la polarización de las uniones base-emisor y base-colector, produciendo comportamientos típicos de la característica corriente de colector (I_c) en función de la tensión colector-emisor (V_{ce}).

Pueden destacarse las siguientes regiones de operación del transistor:

- Región de saturación. Corresponde a una polarización directa de ambas uniones, haciendo que la tensión colector-emisor tienda a cero ($V_{ce} \rightarrow 0$). En esta zona el transistor actúa como un interruptor cerrado.
- Región de corte. Corresponde a una polarización inversa en ambas uniones, haciendo que la corriente de colector tienda a cero ($I_c \rightarrow 0$). En esta zona el transistor actúa como un interruptor abierto.
- Región activa directa. Corresponde a una polarización directa de la unión base-emisor e inversa de la unión base-colector. En esta zona el transistor actúa como un amplificador lineal. A esta zona se le conoce como región de amplificación.
- Región activa inversa. Corresponde a una polarización inversa de la unión base-emisor y directa de la unión base-colector. Esta zona se usa raramente.

- Región de ruptura. Corresponde a un aumento brusco de la corriente de colector denominado avalancha. Este aumento es capaz de generar aumentos de temperatura capaces de dañar las uniones. Esta es una zona no-lineal con crecimiento exponencial. Esta zona es acotada por la potencia máxima del transistor, donde la potencia está definida por el producto de la corriente de colector y la tensión colector-emisor.

En los convertidores de potencia los transistores funcionan como interruptores por tanto su operación oscila entre corte y saturación. El transistor debe estar acondicionado adecuadamente de modo tal que el paso por la región activa directa debe ser lo más breve posible. En la figura 2.9a tenemos una representación del transistor en corte o abierto y la figura 2.9b está en saturación o corto circuito, Φ_e y Φ_c son las tensiones equivalentes en el emisor y en el colector

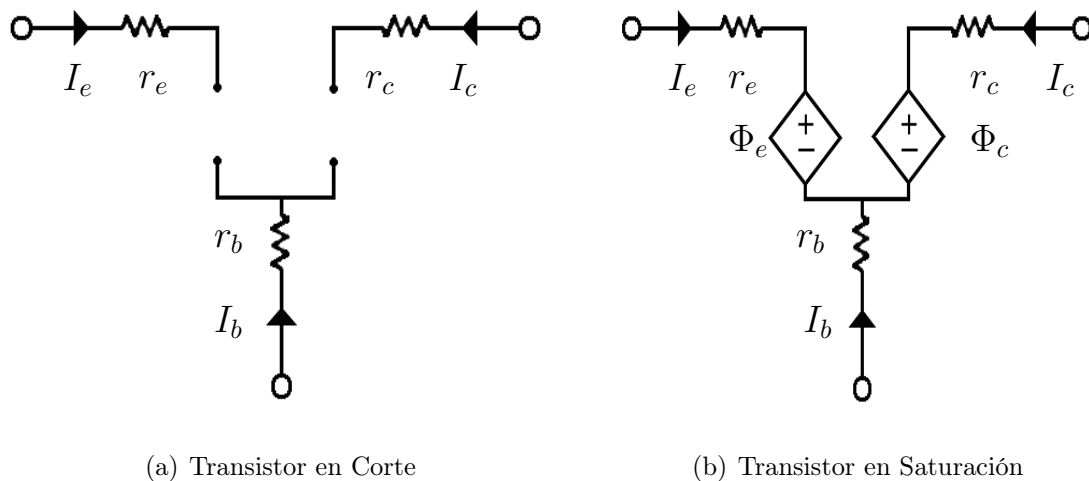


Figura 2.9: Modelo del Transistor

Las ecuaciones del modelo que utilizaremos se encuentran en el artículo de Ebers-Moll [Ebe54] y corresponden a los estados de corte y saturación:

1. En corte: la corriente de colector es $I_c = 0$, y la tensión colector-emisor V_{ce} viene dada por las mallas que rodean al transistor.
2. En saturación: el modelo está dado por:

$$\begin{aligned}
V_{ce} &= \Phi_c - \Phi_e = -\frac{kT}{q} \ln \left(\frac{\alpha_I \left(1 - \frac{I_c}{I_b} \frac{(1-\alpha_N)}{\alpha_N} \right)}{1 + \frac{I_e}{I_b} (1-\alpha_I)} \right) \\
I_c &= \frac{\alpha_N}{1-\alpha_N} I_b - \frac{I_{c0}}{1-\alpha_N} \left(e^{q\Phi_c/kT} - 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

donde $\Phi_e = \frac{kT}{q} \ln \left(1 - \frac{I_e + \alpha_I I_c}{I_{e0}} \right)$, $\Phi_c = \frac{kT}{q} \ln \left(1 - \frac{I_c + \alpha_N I_e}{I_{c0}} \right)$, $I_{C0} = I_C \frac{(1-\alpha_I)}{1-\alpha_N \alpha_I}$, $\alpha_N = \frac{I_C}{I_E} \Big|_{V_{CB}=0}$ y $\alpha_I = \frac{I_E}{I_C} \Big|_{V_{EB}=0}$.

La tensión V_{ce} corresponde al comportamiento de las uniones mientras las resistencias r_e, r_c, r_b corresponden a los resistores asociados a las pérdidas y contactos óhmicos de cada sección de material semiconductor. De esta manera, los estados presentados en la figura 2.9 pueden expresarse en términos de tensión en los extremos del dispositivo electrónico y vendrán dados por:

$$V_{ce} \approx \begin{cases} I_c (r_e + r_c) - \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{\alpha_I \left(1 - \frac{I_c}{I_b} \frac{(1-\alpha_N)}{\alpha_N} \right)}{1 + \frac{I_e}{I_b} (1-\alpha_I)} \right) & \text{(para Conducción o Saturación)} \\ 0 & \text{(para Abierto o Corte)} \end{cases} \tag{2.6}$$

Cada una de las variables del modelo está descrita en el cuadro 2.2, incluyendo valores típicos y unidades.

Las ecuaciones planteadas responden a una serie de restricciones utilizadas en la implementación de convertidores accionados por transistores. La inclusión de pérdidas por efecto Joule es coherente con las restricciones. Enumeramos estas restricciones a continuación:

1. El transistor nunca funcionará como amplificador en estado estacionario, atravesando la región de conducción activa directa durante los transitorios.
2. El circuito que maneja la base del transistor está diseñado de forma tal que el paso por la región de activa directa ocurra en el *menor tiempo posible*.
3. Nunca se alcanzará la región de ruptura pues supondría daños al dispositivo.
4. El transistor siempre operará como interruptor, por tanto, se mantendrá en la región de saturación o en la región de corte.

5. En la región de corte la corriente que atraviesa el transistor es muy pequeña y, por tanto, la potencia consumida en este estado es despreciable.
6. El valor máximo de las pérdidas de potencia ocurrirá en la región de saturación.

Símbolo	Descripción	Valor Típico	Unidad
I_c	Corriente del colector		A
I_e	Corriente del emisor		A
I_b	Corriente de la base		A
Φ_e	Tensión emisor-base		V
Φ_c	Tensión colector-base		V
V_{CE}	Tensión colector-emisor		V
V_{ce}	Tensión en la unión colector-emisor		V
I_{e0}	Corriente de saturación de la unión emisor-base con $I_c = 0$	10^{-14}	A
I_{c0}	Corriente de saturación de la unión colector-base con $I_e = 0$	10^{-14}	A
T	Temperatura Nominal para simulaciones	25	$^{\circ}C$
k	Constante de Boltzman	1.38×10^{-23}	Joule/Kelvin
q	Carga del electrón	1.6×10^{-19}	Coulombios
r_e	Resistencia interna del emisor	$< 1^*$	Ω
r_c	Resistencia interna del colector	$< 1^*$	Ω
r_b	Resistencia interna de la base	$< 2000^*$	Ω
α_N	Ganancia del transistor en directo	< 1	
α_R	Ganancia del transistor en inverso	< 1	
G_{min}	Conductancia mínima	10^{-12}	Ω^{-1}
BV	Tensión de ruptura inversa	200*	V
IBV	Corriente de ruptura inversa	10^{-3}	A
n_F	Coefficiente de emisión en directo	1	
n_R	Coefficiente de emisión en inverso	1	

*Estos son valores típicos y están sujetos a las características de fabricación

Cuadro 2.2: Variables y Parámetros del Transistor

7. Los transistores utilizados como interruptores normalmente tienen ganancias menores que uno.

Estas restricciones son el resultado de las normativas tácitas utilizadas en el diseño de los convertidores de potencia, ya que reducen las pérdidas de energía.

Modelo General. Siguiendo el esquema circuital de la figura 2.4, la cual representa al *modelo real* Σ_m , y considerando los dos estados de funcionamiento (uno con el diodo en saturación y el transistor en corte y viceversa), se obtienen dos modelos de la figura 2.10. Se incluyen cada uno de los modelos de los dispositivos simplificados, éstos han sido elegidos porque son los que involucran la mayor disipación de energía de cada dispositivo y, por tanto, la mayor pérdida para el convertidor. Véanse las figuras 2.10a y 2.10b,

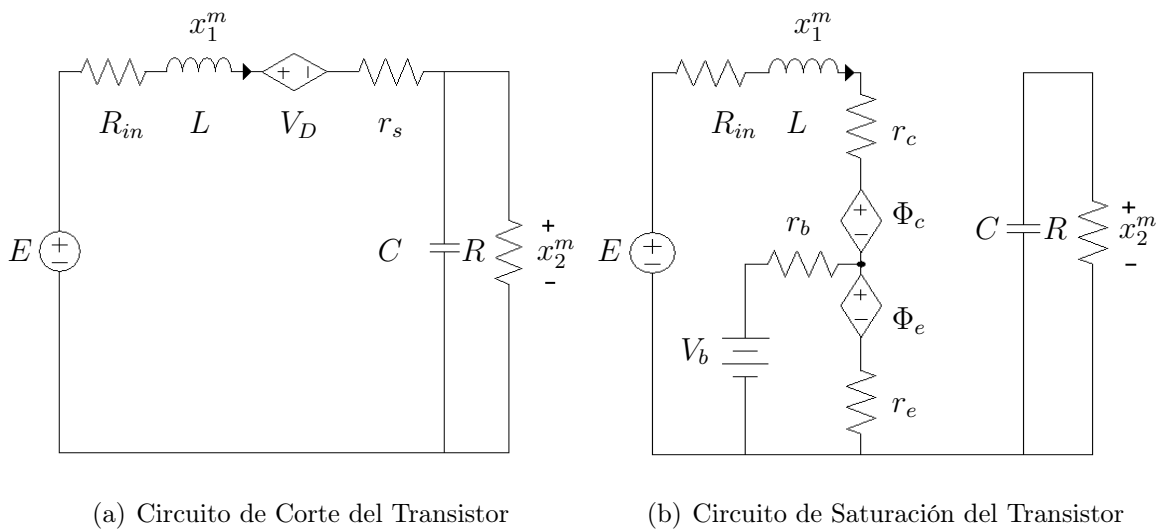


Figura 2.10: Modelo para Corte y Saturación del Convertidor Boost

donde x_1^m es la corriente en la bobina, x_2^m es la tensión en el condensador, R es la resistencia de carga, R_{in} es la resistencia interna de la bobina y E la fuente de alimentación. Las demás variables y parámetros pueden verse en los cuadros 2.1 y 2.2.

Los modelos anteriores pueden ser reagrupados permitiendo obtener el circuito de la figura 2.11, donde se añade μ que es la entrada en el conjunto $\{0, 1\}$.

A diferencia del circuito ideal, este circuito tiene el interruptor en la base del transistor y la señal de entrada μ es discreta, definida en el conjunto $\{0, 1\}$. Además se considera que la $I_c \approx I_e$, por lo que $I_b \approx 0$.

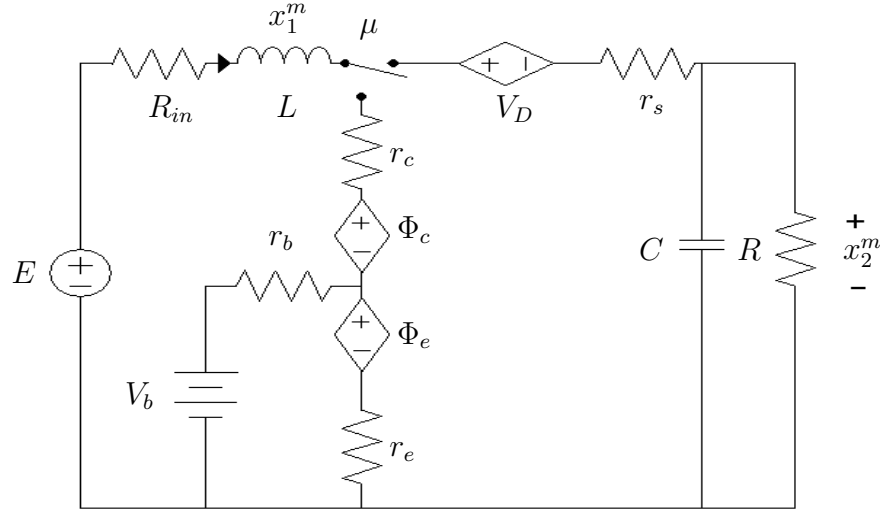
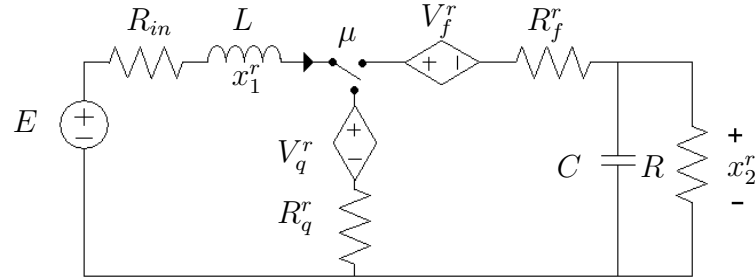


Figura 2.11: Convertidor Boost con Modelo Reducidos de los Semiconductores

Figura 2.12: Modelo de Referencia Real Σ_r del Convertidor Boost

Esto nos permite describir la dinámica asociada:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^r \\ \dot{x}_2^r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1-\mu) \\ (1-\mu) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} (r_e + r_c) x_1^r + \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{\alpha_I \left(1 - \frac{x_1^r (1 - \alpha_N)}{I_{bs} \alpha_N} \right)}{1 + \frac{x_1^r}{I_{bs}} (1 - \alpha_I)} \right) \\ 0 \end{bmatrix} \mu \\
 &- \begin{bmatrix} r_s x_1^r + \frac{nKT}{q} \ln \left(\frac{x_1^r + I_{sf}}{I_{sf}} \right) \\ 0 \end{bmatrix} (1 - \mu) + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Agrupamos términos y conseguimos el modelo de **referencia real** Σ_r que apreciamos en la figura 2.12. En este modelo la fuente de tensión dependiente de la corriente

del transistor vendrá dada por $V_q^r = \Phi_c - \Phi_e = V_{ce} = -\frac{kT}{q} \ln \left(\frac{\alpha_I \left(1 - \frac{x_1^r}{I_b} \frac{(1-\alpha_N)}{\alpha_N} \right)}{1 + \frac{x_1^r}{I_b} (1-\alpha_I)} \right)$ y la resistencia es $R_q^r \approx r_c + r_e$. En el diodo la fuente de tensión es $V_D = V_f^r = \frac{nkT}{q} \ln \left(\frac{x_1^r + I_{sf}}{I_{sf}} \right)$ y la resistencia $R_f^r = r_s$.

De lo anterior, es posible conseguir una dinámica que muestre el comportamiento del convertidor incluyendo los modelos reducidos de los semiconductores. La ecuación de estados viene dada por:

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^r \\ \dot{x}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-\mu^r) \\ (1-\mu^r) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^r \\ x_2^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_q^r x_1^r + V_q^r \\ 0 \end{bmatrix} \mu^r - \begin{bmatrix} R_f^r x_1^r + V_f^r \\ 0 \end{bmatrix} (1-\mu^r)$$

donde x_1^r es la corriente en la bobina, x_2^r es la tensión en el condensador, μ^r es la entrada, R es la resistencia de carga, R_{in} es la resistencia interna de la bobina, E es la fuente de alimentación, R_f^r, R_q^r son las resistencias internas de los semiconductores, V_q^r es la fuente de tensión dependiente del transistor en conducción y V_f^r es la fuente de tensión dependiente del diodo en conducción.

Esta nueva dinámica se parece en su forma a la del modelo ideal con R_{in} , pero la existencia de funciones logarítmicas dependientes de x_1^r en los términos V_{ce} y V_d hace que el cálculo del controlador sea complejo. Por esta razón, decidimos utilizar una aproximación del término logarítmico. Dicha aproximación puede ser acometida por medio de diferentes funciones tales como rectas, exponenciales o funciones polinómicas (haremos recomendaciones específicas a este respecto para futuras investigaciones). Por simplicidad, utilizamos términos constantes.

Es importante notar que el modelo reducido requiere que los parámetros V_f^r, V_q^r y R_{in} sean escogidos de tal manera que la aproximación tenga validez.

El desarrollo anterior nos lleva a un nuevo modelo que denominamos *modelo equivalente Joule* Σ_J . Con este modelo se intenta concentrar las pérdidas existentes en el prototipo, utilizando elementos lineales, en los estados de mayor consumo de energía. Una fracción de las pérdidas está asociada a los semiconductores en conducción, siendo representada por medio de fuentes de tensión, otra fracción es obtenida de concentrar las pérdidas restantes. Estas pérdidas se generan de los diferentes términos en las ecuaciones de los modelos realísticos y de pérdidas no modeladas, tal como ocurre en los conductores, condensadores y fuentes de alimentación.

En general las pérdidas son de dos tipos:

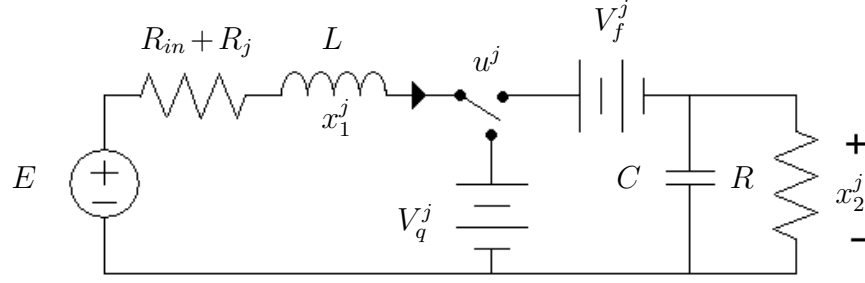
- Por efecto del campo eléctrico, asociada a las caídas de tensión, de allí la razón para la utilización de fuentes de tensión.
- Por efecto del campo magnético, asociada a la corriente que atraviesa los conductores y semiconductores, que representamos por medio de resistores.

Esta idea no es nueva, los transformadores eléctricos en su modelado incluyen dos tipos de pérdidas básicas unas asociadas al campo eléctrico y al cuadrado de la corriente que atraviesa los devanados; y otra asociada al campo magnético y al cuadrado de las caídas de tensión inducidas por el núcleo. Estas ideas pueden apreciarse en [Har04] y [Mit49].

Planteamos, entonces, el *modelo equivalente Joule* Σ_J para aproximar el convertidor Boost basado en la inclusión de las pérdidas por calor (efecto Joule) y que representamos por medio de la figura 2.13.

La dinámica asociada al comportamiento del circuito, que incluye las pérdidas producidas por los semiconductores y por la resistencia interna de la bobina, viene dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^j \\ \dot{x}_2^j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1-u^j) \\ (1-u^j) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} + R_j & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_q^j \\ 0 \end{bmatrix} u^j - \begin{bmatrix} V_f^j \\ 0 \end{bmatrix} (1-u^j) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Figura 2.13: Modelo Joule Σ_J del Convertidor Boost

donde x_1^j es la corriente en la bobina, x_2^j es la tensión en el condensador, R es la resistencia de carga, R_{in} es la resistencia interna de la bobina, R_j es la resistencia equivalente que representa parte de la contribución de las pérdidas de los semiconductores, E es la fuente de alimentación, V_q^j es la caída de tensión en el transistor, V_f^j es la caída de tensión del diodo.

Este modelo por su sencillez permite la síntesis de controladores y aproxima con relativa precisión el comportamiento real del convertidor. Para la síntesis requerimos los equilibrios del convertidor, así que en el cuadro 2.3 los incluimos para los modelos Ideal sin y con R_{in} y el modelo Joule.

Tensión(voltios)	Corriente en la bobina (Amperios)	Control
Modelo Ideal Σ_i sin R_{in}		
$\bar{x}_2^i = V_d$	$\bar{x}_1^i = \frac{\bar{x}_2^{i2}}{RE}$	$\bar{u}^i = 1 - \frac{E}{\bar{x}_2^i}$
Modelo Ideal Σ_i con R_{in}		
$\bar{x}_2^i = V_d$	$\bar{x}_1^i = \frac{E}{2R_{in}} - \sqrt{\left(\frac{E}{2R_{in}}\right)^2 - \frac{\bar{x}_2^{i2}}{RR_{in}}}$	$\bar{u}^i = 1 - \frac{\bar{x}_2^i}{\bar{x}_1^i R}$
Modelo Joule Σ_J		
$\bar{x}_2^j = V_d$	$\bar{x}_1^j = \frac{(E-V_q^j)}{2(R_{in}+R_j)} - \sqrt{\frac{(E-V_q^j)^2}{4(R_{in}+R_j)^2} - \frac{(V_f^j-V_q^j+\bar{x}_2^j)\bar{x}_2^j}{R(R_{in}+R_j)}}$	$\bar{u}^j = 1 - \frac{\bar{x}_2^j}{\bar{x}_1^j R}$

Cuadro 2.3: Equilibrios del Boost con los Modelos Ideal Σ_i , Joule Σ_J

2.3. Síntesis del Controlador para el Convertidor Boost utilizando ETEDPOF y el Modelo Equivalente Joule.

A continuación, procedemos a aplicar la técnica ETEDPOF para obtener una ley de control utilizando el modelo equivalente Joule Σ_J . La dinámica del modelo Joule Σ_J para el convertidor Boost viene dada en la ecuación (2.8).

Incluimos el sistema nominal o no perturbado del modelo Joule Σ_J :

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1^j \\ \dot{\bar{x}}_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1 - \bar{u}^j) \\ (1 - \bar{u}^j) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^j \\ \bar{x}_2^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} + R_j & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1^j \\ \bar{x}_2^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_q^j \\ 0 \end{bmatrix} \bar{u}^j - \begin{bmatrix} V_f^j \\ 0 \end{bmatrix} (1 - \bar{u}^j)$$

donde \bar{x}_1^j es valor de equilibrio de la corriente en la bobina, \bar{x}_2^j es el valor de equilibrio de la tensión en el condensador, \bar{u}^j es el valor de equilibrio del control.

Considerando el error de la forma $\tilde{e}_1 = x_1^j - \bar{x}_1^j$, $\tilde{e}_2 = x_2^j - \bar{x}_2^j$ y $\tilde{e}_u = u^j - \bar{u}^j$, obtenemos la dinámica exacta del error:

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{e}}_1^j \\ \dot{\tilde{e}}_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1 - u^j) \\ (1 - u^j) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} + R_j & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j \\ -\bar{x}_1^j \end{bmatrix} \tilde{e}_u$$

Utilizando la variable auxiliar $\tilde{e}_u = -\gamma \tilde{e}_y$, donde γ es una constante positiva, con la salida pasiva definida por:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_y &= \bar{b}^{jT} \tilde{e} = \begin{bmatrix} V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j & -\bar{x}_1^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{bmatrix} \\ \tilde{e}_y &= (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j) \tilde{e}_1 - \bar{x}_1^j \tilde{e}_2 \end{aligned}$$

Sintetizamos el controlador

$$u^j = \bar{u}^j - \gamma ((V_f^j - V_q^j) (x_1^j - \bar{x}_1^j) + \bar{x}_2^j x_1^j - \bar{x}_1^j x_2^j) \quad (2.9)$$

Sustituyendo los equilibrios (ver cuadro 2.3) queda:

$$u^j = 1 - \frac{V_d}{R\mathcal{M}} - \gamma \left((V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j) x_1^j - \mathcal{M} (V_f^j - V_q^j + x_2^j) \right) \quad (2.10)$$

donde $V_d, E, V_q^j, V_f^j, R, R_{in}, R_j, \gamma$ son constantes que pueden ser sustituidas para simulaciones e implementación; y, la constante \mathcal{M} está dada por:

$$\mathcal{M} = \frac{(E - V_q^j)}{2(R_{in} + R_j)} - \sqrt{\frac{(E - V_q^j)^2}{4(R_{in} + R_j)^2} - \frac{(V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j) \bar{x}_2^j}{R(R_{in} + R_j)}}.$$

Esta expresión se puede verificar. A partir del controlador obtenido mediante el modelo Joule Σ_J puede encontrarse el controlador del modelo ideal con R_{in} , haciendo $R_j = 0, V_f^j = 0$ y $V_q^j = 0$,

$$u^i = 1 - \frac{V_d}{R \left(\frac{E}{2R_{in}} - \sqrt{\frac{E^2}{4R_{in}^2} - \frac{\bar{x}_2^{i2}}{RR_{in}}} \right)} - \gamma \left(\bar{x}_2^i x_1^i - \left(\frac{E}{2R_{in}} - \sqrt{\frac{E^2}{4R_{in}^2} - \frac{\bar{x}_2^{i2}}{RR_{in}}} \right) x_2^i \right)$$

Es necesario indicar que los modelos de otros convertidores, a excepción del Buck, hacen que el procedimiento propuesto presente mayor complejidad:

1. El cálculo de los equilibrios no podrá resolverse de manera analítica sino numérica (generalmente, a partir de la solución de una ecuación trascendente).
2. El tiempo de cómputo para la implementación de tales ecuaciones (en términos de algoritmos computacionales) aumenta significativamente.

Análisis de Estabilidad. Para efectos de estabilidad, verificamos la condición de acoplamiento:

$$\mathcal{R}_J + \gamma \bar{b}^j \bar{b}^{jT} > 0$$

donde las matrices toman la siguiente forma:

$$\mathcal{R}_J = \begin{bmatrix} R_{in} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}; \quad \bar{b}^j = \begin{bmatrix} V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j \\ -\bar{x}_1^j \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_J + \gamma \bar{b}^j \bar{b}^{jT} &= \begin{bmatrix} R_{in} + R_j & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j \\ -\bar{x}_1^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j & -\bar{x}_1^j \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j)^2 + R_{in} + R_j & -\gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j) \bar{x}_1^j \\ -\gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j) \bar{x}_1^j & \gamma \bar{x}_1^{j2} + \frac{1}{R} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para que la matriz sea definida positiva, los determinantes de los menores principales deben ser positivos. El primero cumple $\gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j)^2 + R_{in} + R_j > 0$ puesto que $\gamma > 0, R_{in} > 0$ y $R_j > 0$. El segundo determinante está dado por:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j)^2 + R_{in} + R_j & -\gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j) \bar{x}_1^j \\ -\gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j) \bar{x}_1^j & \gamma \bar{x}_1^{j2} + \frac{1}{R} \end{bmatrix} &= \\ = \frac{\gamma (V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j)^2}{R} + \left(\gamma \bar{x}_1^{j2} + \frac{1}{R} \right) (R_{in} + R_j) &> 0 \end{aligned}$$

De este modo puede afirmarse que es posible encontrar un controlador u^j definido por la ecuación (2.10) para el cual el sistema es semiglobal y asintóticamente estable al origen. El procedimiento utilizado, en este caso para el modelo Joule Σ_J , es planteado en el Teorema 1 del Capítulo 1.

2.4. Parámetros de los Modelos

La determinación de los diferentes parámetros es parte importante del trabajo de intentar copiar el comportamiento producido por el prototipo. Como hemos planteado previamente, los elementos tales como bobinas, condensadores, fuentes de alimentación y resistencia de carga serán considerados lineales y se hará caso omiso a sus variaciones respecto a la temperatura y la frecuencia.

Modelo Ideal Σ_i

Los parámetros del modelo Ideal Σ_i son comunes a todos los modelos que utilizamos. Estos vienen dados por $E = 10$ voltios, $C = 1000 \mu\text{F}$, $L = 33 \mu\text{H}$, $R = 2 \Omega$. En el caso de la variante que incluye la resistencia interna de la bobina, ésta será de $R_{in} = 0.01 \Omega$.

Modelo de Referencia Real Σ_r

La parte más compleja del análisis es la obtención de los parámetros para el modelo de referencia real puesto que se originan de información procedente del fabricante o de

pruebas de laboratorio que deben ser realizadas sobre el semiconductor que se utilice. En vista de la dificultad de obtención de los parámetros, del ajuste del modelo y del hecho de que el proceso se debe resolver numéricamente, recurrimos al programa Orcad-PSpice® para la realización de las simulaciones con este modelo. Este programa calcula directamente los parámetros al elegir un dispositivo.

Modelo Joule Σ_J

Se consideran necesarios tres parámetros adicionales para modelar el convertidor Joule, dos *fuentes de tensión constantes* V_q^j, V_f^j y la resistencia que denominamos *Resistencia Joule* R_j , ver figura 2.13.

El procedimiento para la obtención de parámetros puede ser realizado en lazo abierto o lazo cerrado. En el caso del lazo cerrado existe un retraso entre la entrada y la salida afectando la cantidad de energía que se transfiere.

A continuación presentamos un resumen del procedimiento para la obtención de los parámetros del modelo Joule:

1. Se hace funcionar el convertidor en lazo abierto con un valor arbitrario del ciclo de trabajo. Por conveniencia, se elige el valor medio del rango, $\bar{u} = 0.5$, y se mide la tensión de conducción de cada uno de los semiconductores.
2. Se hace variar R_j en la ley de control (ETEDPOF en nuestro caso) sintetizada para el modelo hasta que la salida en estado estacionario del prototipo sea igual al valor deseado.

2.4.1. Obtención de los Fuentes de Tensión V_q^j y V_f^j

La metodología utilizada para el desarrollo el modelo Joule Σ_J partió de las mediciones de las tensiones de los semiconductores operando en lazo abierto; para lo cual se utiliza un valor de $\bar{u} = 0.5$ y se miden con un osciloscopio las tensiones en conducción del transistor y del diodo. En el caso de nuestro experimento se midieron $V_q^j = 1.05$ y $V_f^j = 0.94$ voltios, respectivamente.

También es posible obtener, de las curvas características del dispositivo electrónico, una aproximación que puede ser utilizada para efectos de simulaciones y de síntesis del modelo, en el caso de que no se cuente con el prototipo. Para ello es necesario expresar

la corriente de equilibrio como una función del control. Esta viene de los equilibrios del modelo ideal y está dada por $\bar{x}_1^i = \frac{E}{(1-\bar{u}^i)^2 R}$. Para el caso que hemos tratado $E = 10$ voltios, $R = 2 \Omega$ y $\bar{u} = 0.5$, la corriente es $\bar{x}_1^i = 20$ amperios. El dispositivo electrónico utilizado es un IGBT marca Siemens BSM200GB170DLC cuyas curvas características podemos ver en las figuras 2.14 y 2.15 para el transistor y el diodo que proporciona el fabricante.

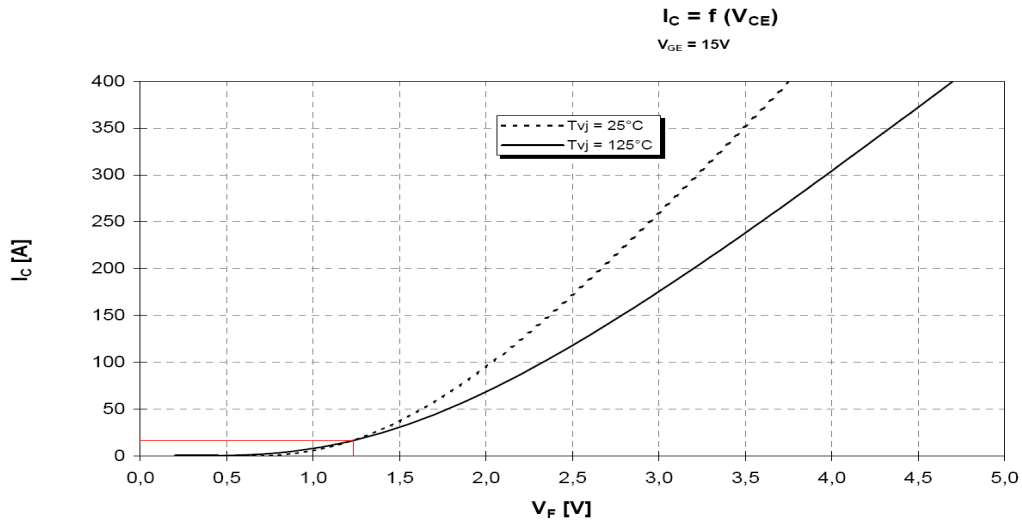


Figura 2.14: Curva Característica del Transistor de Unión del IGBT

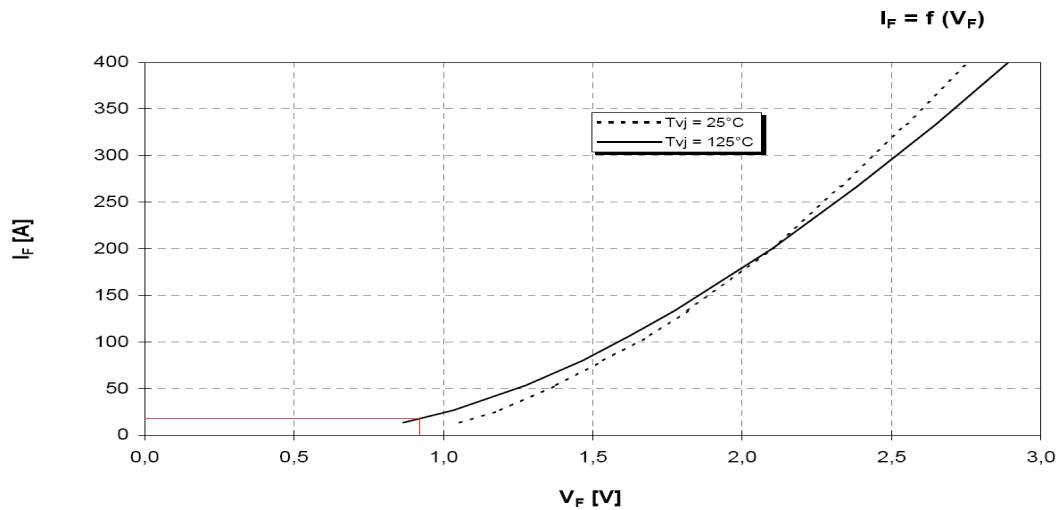


Figura 2.15: Curva Característica del Diodo de Unión del IGBT

Con el valor de corriente $\bar{x}_1^i = 20$ amperios intersectamos ambas curvas y obtenemos las tensiones de conducción. Para el caso bajo estudio, la tensión de conducción del transistor es $V_q^j|_{cc} \approx 1.25$ voltios y la tensión de conducción del diodo es $V_f^j|_{cc} \approx 0.9$ voltios. Lo que nos permite obtener un modelo Joule Σ_J que puede ser utilizado en cálculos y simulaciones y su ulterior ajuste al prototipo.

2.4.2. Cálculo de la Resistencia Joule

Para la obtención de la resistencia Joule, R_j , se requiere un procedimiento iterativo, en el cual se varía la salida del prototipo experimental, x_2^m , hasta que coincida con el valor deseado, V_d , asignado al controlador, es decir, $x_2^m = V_d$. Para dar una idea del procedimiento desde el punto de vista matemático, se le recreará utilizando el modelo de Referencia Real Σ_r como una aproximación del modelo Real Σ_m , con Σ_r se iterará hasta que la salida alcance el valor deseado, es decir, $x_2^r = V_d$.

Dado que la idea es ajustar R_j , necesitamos que $\bar{x}_2^j = \bar{x}_2^r = V_d$, como ejemplo asignaremos $V_d = 15$ voltios; después asignamos un valor inicial de $R_j = 0$, y resolvemos en línea las ecuaciones (2.11), (2.12) y (2.13), donde las dos primeras corresponden a los equilibrios del modelo Joule Σ_J mientras que la tercera corresponde al controlador obtenido para el modelo Joule Σ_J .

$$\bar{x}_1^j = \frac{(E - V_q^j)}{2(R_{in} + R_j)} - \sqrt{\frac{(E - V_q^j)^2}{4(R_{in} + R_j)^2} - \frac{(V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j)\bar{x}_2^j}{R(R_{in} + R_j)}} \quad (2.11)$$

$$\bar{u}^j = 1 - \frac{\bar{x}_2^j}{\bar{x}_1^j R} \quad (2.12)$$

$$u^r = \bar{u}^j - \gamma ((V_f^j - V_q^j)(x_1^r - \bar{x}_1^j) + \bar{x}_2^j x_1^r - \bar{x}_1^j x_2^r) \quad (2.13)$$

Se varía R_j de manera iterativa hasta que se cumpla que $\bar{x}_2^r = 15$ voltios. Por último, este valor es asignado como constante al controlador.

Este procedimiento es directo y sencillo, tanto desde el punto de vista experimental como por medio de simulaciones. Sin embargo, si intentamos encontrar un resultado matemático explícito que nos permita obtener R_j , el procedimiento se hace complicado

(en especial porque no existe un sistema de ecuaciones que represente la dinámica del modelo real Σ_m y el modelo de referencia real Σ_r tiene la complicación añadida de la obtención de los parámetros).

Para que se tenga una idea de la complejidad del proceso presentamos los pasos necesarios para resolver el cálculo de R_j , el cual puede ser resuelto utilizando métodos numéricos (que no presentamos) si se tiene acceso a los parámetros del par diodo-transistor.

El procedimiento comienza con los equilibrios del modelo de referencia real Σ_r :

$$\begin{aligned} 0 &= -(1 - u^r) x_2^r - R_{in} x_1^r - \left((r_e + r_c) x_1^r + \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{\alpha_I \left(1 - \frac{x_1^r (1 - \alpha_N)}{I_{bs} \alpha_N} \right)}{1 + \frac{x_1^r (1 - \alpha_I)}{I_{bs}}} \right) \right) u^r \\ &\quad - \left(r_s x_1^r + \frac{nKT}{q} \ln \left(\frac{x_1^r + I_{sf}}{I_{sf}} \right) \right) (1 - u^r) + E \\ 0 &= (1 - u^r) x_1^r - \frac{x_2^r}{R} \end{aligned}$$

Nos interesa que el modelo de referencia tenga como salida el valor deseado $\bar{x}_2^r = V_d$. Por ello, hacemos que la primera ecuación quede como una función de \bar{x}_2^r y se resuelve numéricamente para hallar \bar{x}_1^r ,

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{x_2^r}{x_1^r R} - R_{in} x_1^r - \left((r_e + r_c) x_1^r + \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{\alpha_I \left(1 - \frac{x_1^r (1 - \alpha_N)}{I_{bs} \alpha_N} \right)}{1 + \frac{x_1^r (1 - \alpha_I)}{I_{bs}}} \right) \right) \left(1 - \frac{x_2^r}{x_1^r R} \right) \\ &\quad - \left(r_s x_1^r + \frac{nKT}{q} \ln \left(\frac{x_1^r + I_{sf}}{I_{sf}} \right) \right) \left(\frac{x_2^r}{x_1^r R} \right) + E \end{aligned}$$

Con \bar{x}_1^r hallamos el valor del control $u^r = 1 - \frac{x_2^r}{x_1^r R}$. El valor del control lo sustituimos en $u^r = 1 - \frac{\bar{x}_2^j}{\bar{x}_1^j R} - \gamma \left((V_f^j - V_q^j) (x_1^r - \bar{x}_1^j) + \bar{x}_2^j x_1^r - \bar{x}_1^j x_2^r \right)$, de donde despejamos \bar{x}_1^j y de aquí se obtiene R_j .

A pesar de que el cálculo es complicado, desde el punto de vista práctico se hace una aproximación muy sencilla ya que se ajusta R_j hasta que la tensión de salida del convertidor sea igual a la tensión deseada. Este procedimiento de ajuste puede realizarse por medio de simulaciones o utilizando el prototipo de laboratorio. Este procedimiento fue realizado en lazo cerrado en el prototipo y obtuvimos un valor $R_j = 0.021 \Omega$.

2.4.3. Efectos de la Resistencia Joule sobre el Error de la Salida

Para explicar cómo afecta la resistencia Joule R_j al Modelo Real Σ_m utilizamos el error en estado estacionario entre el Modelo Real Σ_m y el Modelo Joule Σ_J . Además,

utilizaremos como medio de comparación el error entre el Modelo Real Σ_m y el Ideal Σ_i . Partimos de los equilibrios mostrados en el cuadro 2.3, de modelo Ideal Σ_i y Joule Σ_J que reescribimos en función de las entradas u^i y u^j , así que:

$$\begin{aligned}\bar{x}_2^i &= \frac{ER(1-u^i)}{R(1-u^i)^2 + R_{in}} \\ \bar{x}_2^j &= \frac{E - V_q u^j - (1-u^j)V_f}{R(1-u^j)^2 + R_{in} + R_j}\end{aligned}\quad (2.14)$$

Para los equilibrios del modelo Real Σ_m existen mediciones, pero no tenemos ecuaciones que correspondan a la realidad del montaje. Tenemos una aproximación procedente de la utilización de los modelos de Shockley y Ebers-Moll, la cual es compleja. La obtención de parámetros requiere de procedimientos prácticos y ecuaciones que representen el comportamiento de los semiconductores, en vista de lo cual haremos uso de las gráficas de los materiales del par diodo-transistor (2.14 y 2.15); éstas provienen del fabricante, la cual es información más fidedigna y semejante al modelo Real Σ_m que se tiene. En vista de las dificultades, decidimos utilizar las curvas del comportamiento de los semiconductores (IGBT marca Siemens BSM200GB170DLC) y realizamos aproximaciones por métodos numéricos, considerando dos posibilidades:

1. Utilizar una ecuación exponencial, con ella la resultante se asemeja a los resultados obtenidos de los modelos de Schokley y Ebers-Moll y está dada por:

$$\begin{aligned}x_1^r &= I_D = a_{f_1} e^{(b_{f_1} V_f^r)} + c_{f_1} \\ x_1^r &= I_{ce} = a_{q_1} e^{(b_{q_1} V_q^r)} + c_{q_1}\end{aligned}$$

donde $a_{f_1} = 163.1$, $b_{f_1} = 0.4769$, $c_{f_1} = -245.4$, $a_{q_1} = 236.9$, $b_{q_1} = 0.2333$, $c_{q_1} = -301.6$.

Esto implica que las tensiones en los semiconductores serán:

$$\begin{aligned}V_f^r &= V_D = \frac{1}{b_{f_1}} \ln \left(\frac{x_1^r}{a_{f_1}} - c_{f_1} \right) \\ V_q^r &= V_{ce} = \frac{1}{b_{q_1}} \ln \left(\frac{x_1^r}{a_{q_1}} - c_{q_1} \right)\end{aligned}$$

En la figura 2.16 se pueden ver, en forma de puntos, las características del fabricante y de manera continua las aproximaciones exponenciales para el par diodo-transistor.

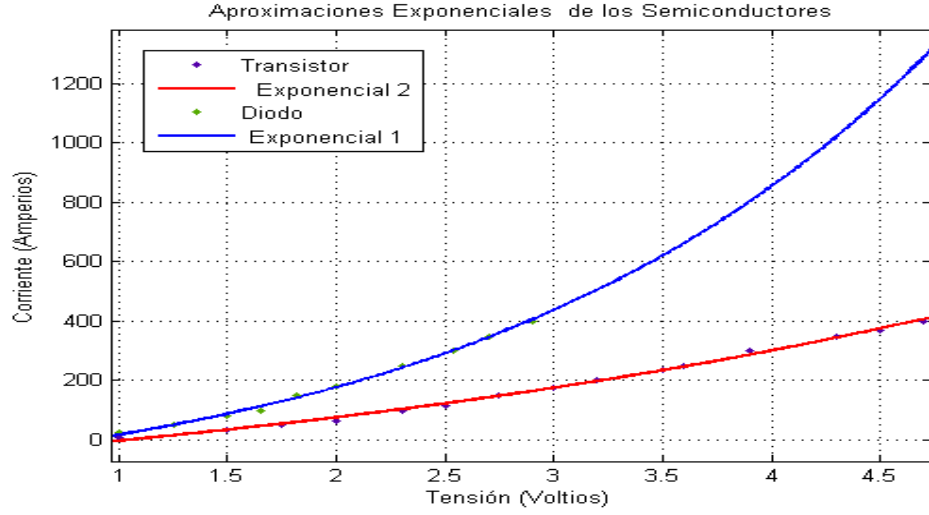


Figura 2.16: Aproximación de los Semiconductores por medio de Exponenciales

- Utilizar una ecuación lineal para aproximar las características de los semiconductores, dadas por:

$$x_1^r = I_D = p_{f_1} V_f^r + p_{f_2}$$

$$x_1^r = I_{ce} = p_{q_1} V_q^r + p_{q_2}$$

donde $p_{f_1} = 203.9$, $p_{f_2} = -212.3$, $p_{q_1} = 111.7$, $p_{q_2} = -144.1$.

Esto implica que las tensiones en los semiconductores serán:

$$V_f^r(x_1^r) = V_D = \frac{x_1^r - p_{f_2}}{p_{f_1}}$$

$$V_q^r(x_1^r) = V_{ce} = \frac{x_1^r - p_{q_2}}{p_{q_1}}$$

En la figura 2.17 se pueden ver en forma de puntos las características del fabricante y de manera continua las aproximaciones lineales para el par diodo-transistor.

La necesidad de introducir esta aproximación lineal estriba en que con la forma exponencial los equilibrios del sistema son demasiado complejos, siendo complicado despejar las ecuaciones como función de la entrada u . Utilizando la aproximación lineal de los semiconductores y aplicándola al modelo Real, podemos obtener los equilibrios. Estos resultan ser:

$$\bar{x}_2^r = \frac{\left(E p_1^q p_1^f + u^r p_1^f p_2^q + (1 - u^r) p_1^q p_2^f \right) (1 - u^r) R}{(1 - u^r)^2 p_1^q p_1^f R + R_{in} p_1^q p_1^f + u^r p_1^f + p_1^q (1 - u^r)} \quad (2.15)$$

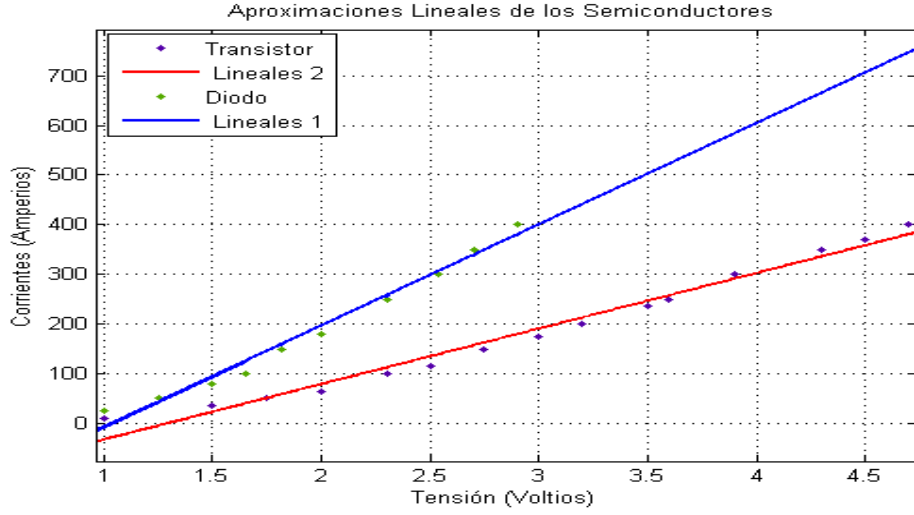


Figura 2.17: Aproximación de los Semiconductores por medio de Líneas Rectas

Con la aproximación anterior, tenemos funciones de equilibrio de la tensión de salida de los modelos Ideal Σ_i (2.14), Joule Σ_J (2.14) y Real Σ_r (2.15) y todas las funciones dependen de la entrada y los parámetros de sistema. Para realizar una comparación entre los modelos asumiremos que las entradas son iguales, $u = u_r = u_j = u_i$, continuas y definidas en un rango de funcionamiento definido en $[0, 1]$. El procedimiento que utilizaremos es hallar la integral del error de la salida entre los modelos Real e Ideal $\Sigma_r - \Sigma_i$ y Real y Joule $\Sigma_r - \Sigma_J$, utilizamos dichas expresiones porque son los términos utilizados para hacer robusto el sistema cuando se incluye en el controlador (lo que abordaremos en el Capítulo 3). Así tenemos que:

$$\int_0^1 (\bar{x}_2^r - \bar{x}_2^i) du = \int_0^1 \left(\frac{(Ep_1^q p_1^f + up_1^f p_2^q + (1-u)p_1^q p_2^f)(1-u)R}{(1-u)^2 p_1^q p_1^f R + R_{in} p_1^q p_1^f + up_1^f + p_1^q (1-u)} - \frac{ER(1-u)}{R(1-u)^2 + R_{in}} \right) du$$

$$\int_0^1 (\bar{x}_2^r - \bar{x}_2^j) du = \int_0^1 \left(\frac{(Ep_1^q p_1^f + up_1^f p_2^q + (1-u)p_1^q p_2^f)(1-u)R}{(1-u)^2 p_1^q p_1^f R + R_{in} p_1^q p_1^f + up_1^f + p_1^q (1-u)} - \frac{E - V_q u^j - (1-u^j) V_f}{R(1-u^j)^2 + R_{in} + R_j} \right) du$$

Con los parámetros de la aproximación y los valores del convertidor $R = 2 \Omega$, $E = 10$ voltios, $R_{in} = 0.01 \Omega$ podemos resolver obteniendo que $\int_0^1 (\bar{x}_2^r - \bar{x}_2^i) du = 5.846$.

Con los parámetros de la aproximación, los valores del convertidor $R = 2 \Omega$, $E = 10$ voltios, $R_{in} = 0.01 \Omega$ y utilizando los valores de las fuentes de tensión $V_f^j = 1.05$,

$V_q^j = 0.94$ voltios, podemos resolver obteniendo:

$$\int_0^1 (\bar{x}_2^r - \bar{x}_2^j) du = -0.5883271862^{-28} \left((0.3494732433^{30} \right. \\ \left. + 0.7606311769^{29} (\ln(1 + 100R_j) - \ln(201 + 100R_j))) \right. \\ \left. + \frac{(0.1869707921^{27} + 0.1869707921^{29}R_j)}{\sqrt{2 + 200R_j}} \arctan\left(\frac{20}{\sqrt{2 + 200R_j}}\right) \right)$$

La expresión que se muestra en el resultado anterior se obtuvo por medio del programa Maple® resolviendo la integral definida; se observa, además, que queda un grado de libertad introducido por R_j .

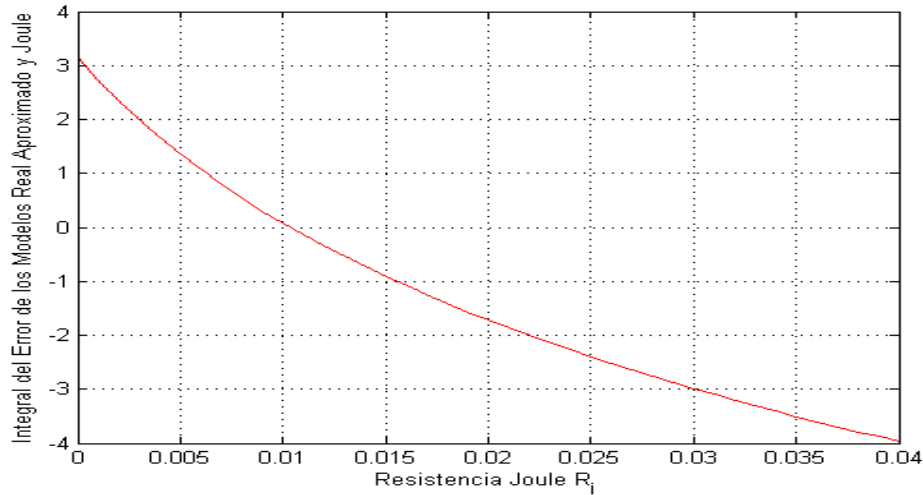


Figura 2.18: Integral del Error de los Modelos Real Aproximado y Joule en el Rango de funcionamiento de la entrada u entre $[0,1]$

En la figura 2.18 podemos observar que para un valor de R_j el promedio de área del error entre ambos modelos Real Aproximado y Joule Σ_J , en el rango de funcionamiento de la entrada u entre $[0, 1]$, es cero. El valor de $R_j \approx 0.0104$.

Esto nos permite explicar como el modelo Joule Σ_J se aproxima al modelo Real Σ_m cuando se realiza el ajuste en el prototipo experimental.

2.5. Simulaciones

Para efectos de comparación utilizaremos el programa Orcad-PSpice®. Este programa incluye mejoras de los modelos de Shockley y de Hebers-Moll que hemos presentado anteriormente. En estos modelos aparecen, adicionalmente, las variaciones de temperatura, variaciones frecuenciales y las dinámicas que generan los materiales semiconductores.

Con el Orcad-PSpice® y los modelos Ideal Σ_i y Joule Σ_J procederemos a realizar algunas simulaciones, a saber:

- Modelo Ideal Σ_i , Joule Σ_J y Orcad-PSpice® con entrada constante en lazo abierto.
- Modelo Ideal Σ_i y Modelo Joule Σ_J con sus respectivos controladores u^i y u^j en lazo cerrado.

Comparación en Lazo Abierto. En este caso nuestro interés es comparar los resultados de los diferentes modelos y las mediciones en estado estacionario del convertidor Boost.

Los parámetros se obtuvieron del prototipo y serán utilizados en las simulaciones:

- Valores del prototipo: $C = 1000 \mu\text{F}$ (nominal), $E = 10$ voltios (medido), $R = 2 \Omega$ (nominal), $L = 33 \mu\text{H}$ (medido), $R_{in} = 0.01 \Omega$ (medido a una frecuencia de 10kHz).
- Modelo Ideal Σ_i : $C = 1000 \mu\text{F}$, $E = 10$ voltios, $R = 2 \Omega$, $L = 33 \mu\text{H}$, $R_{in} = 0.01 \Omega$ (10 kHz).
- Modelo Joule Σ_J : $C = 1000 \mu\text{F}$, $E = 10$ voltios, $R = 2 \Omega$, $L = 33 \mu\text{H}$, $R_{in} = 0.01 \Omega$ (10 kHz). Se utilizan $V_q^j = 1.05$ voltios y $V_f^j = 0.94$ voltios, medidos con ciclo de trabajo de $\bar{u} = 0.5$ en lazo abierto, y $R_j = 0.021 \Omega$ obtenido por tanteo para que las tensiones de salidas $\bar{u} = 0.5$ del modelo Joule Σ_J y real Σ_m sean iguales (realizado en el prototipo).

- Orcad-PSPice®: los parámetros de los elementos del circuito son los mismos del prototipo y los parámetros del par diodo-transistor los calcula directamente el programa de acuerdo con las especificaciones del fabricante.

Presentaremos dos tipos de simulaciones:

- Trayectoria con condiciones iniciales cero y con una entrada constante.
- Régimen estacionario de los estados del sistema en todo el rango de la entrada u $[0, 1]$.

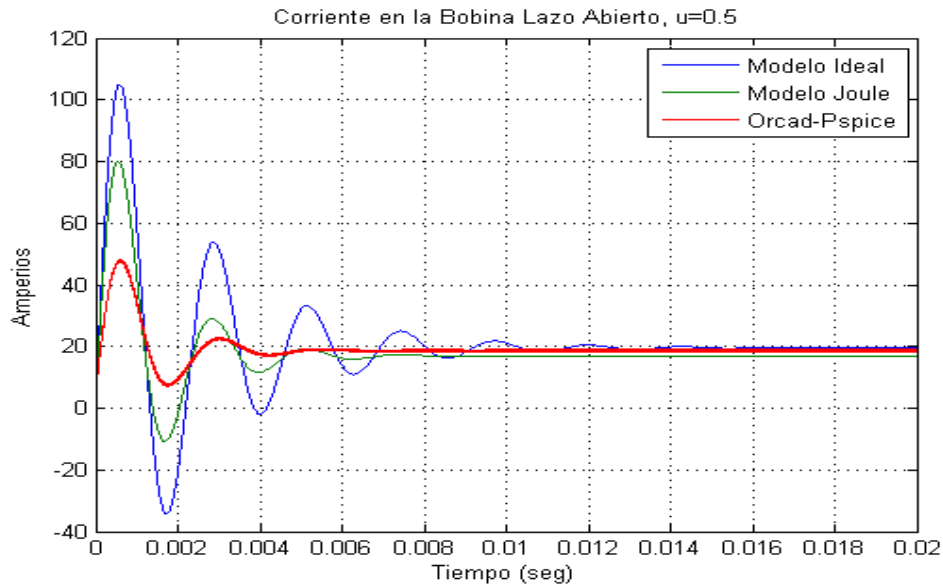
Para el caso de la trayectoria utilizamos como entrada un valor constante del control a la mitad del rango de operación $\bar{u} = 0.5$. Es importante recordar que los modelos Ideal y Joule tienen entradas constantes mientras que el Orcad-PSPice® utiliza una entrada discreta modulada a 200kHz, por ello se requiere un modulador por ancho de pulso que genere los pulsos que excitan el transistor. En la figura 2.19a se presenta la corriente en la bobina, mientras que en la figura 2.19b tenemos la tensión en el condensador para los diferentes modelos. En ambas figuras se observa que el amortiguamiento del Orcad-PSPice® se aproxima mejor por medio del modelo Joule que con el modelo Ideal. De la misma manera, el régimen estacionario del Orcad-PSPice® se aproxima mejor por medio del modelo Joule que con el Ideal; cuya diferencia relativa es menor para el modelo Joule respecto al Orcad-PSPice®.

Para el régimen estacionario utilizamos el modelo real Σ_m en las comparaciones. En este caso incluimos resultados procedentes de la implementación del prototipo experimental, pueden verse en el cuadro 2.4. Estas mediciones de los estados estacionarios se realizaron en lazo abierto para diferentes valores del control definidas en el rango de $[0, 0.73]$ limitado por la corriente máxima de la fuente de alimentación de 51.5 amperios.

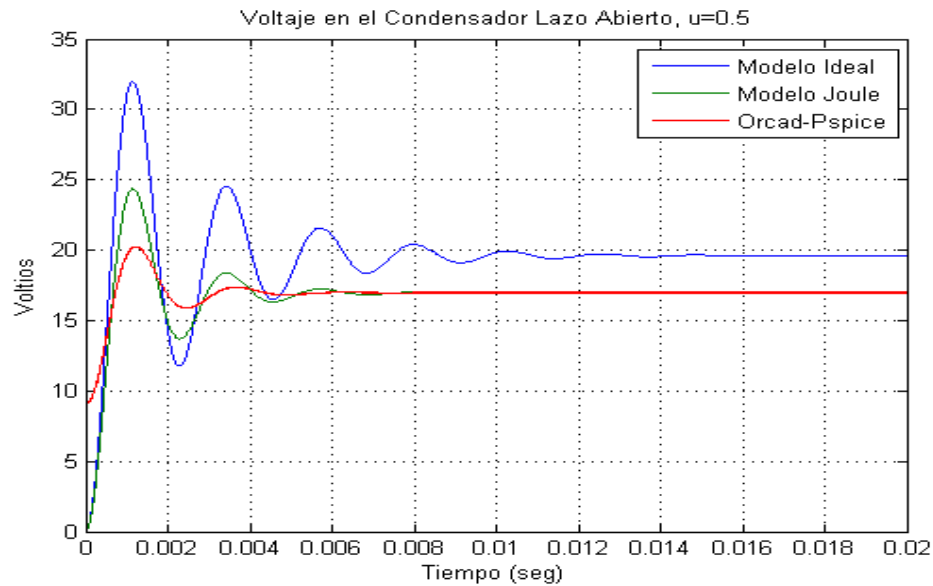
Entrada (\bar{u})	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.73
V_C (V)	9.16	9.93	11.08	12.45	14.26	16.55	19.82	24.34	26.12
I_L (A)	4.1	5.15	6.58	8.7	11.86	17.22	25.53	41.9	50.09

Cuadro 2.4: Modelo Real Σ_m realizado con las mediciones del prototipo experimental

En el comienzo del capítulo se expuso un ejemplo en el cual comparamos un modelo idealizado, un modelo idealizado con resistencia interna y el Orcad-PSPice®, a



(a) Corriente en la Bobina



(b) Tensión en el Condensador

Figura 2.19: Convertidor Boost Lazo Abierto, Modelos Σ_i , Σ_J y Orcad-PSpice®, $\bar{u} = 0.5$

continuación procedemos a realizar el experimento utilizando las expresiones de los equilibrios de los modelos Ideal Σ y Joule Σ_J , las simulaciones obtenidas por medio del Orcad-PSpice® y los resultados medidos en el prototipo experimental, modelo Real

Σ_m , los cuales se muestran en el cuadro 2.3 (con la restricción de corriente impuesta por la fuente de alimentación), todos en el rango de funcionamiento de la entrada \bar{u} entre $[0, 1]$. Se utilizaron los parámetros presentados en este inciso y se obtuvieron las figuras 2.20a y 2.20b, donde se muestran los valores estacionarios de la corriente en la bobina y la tensión en el condensador, respectivamente.

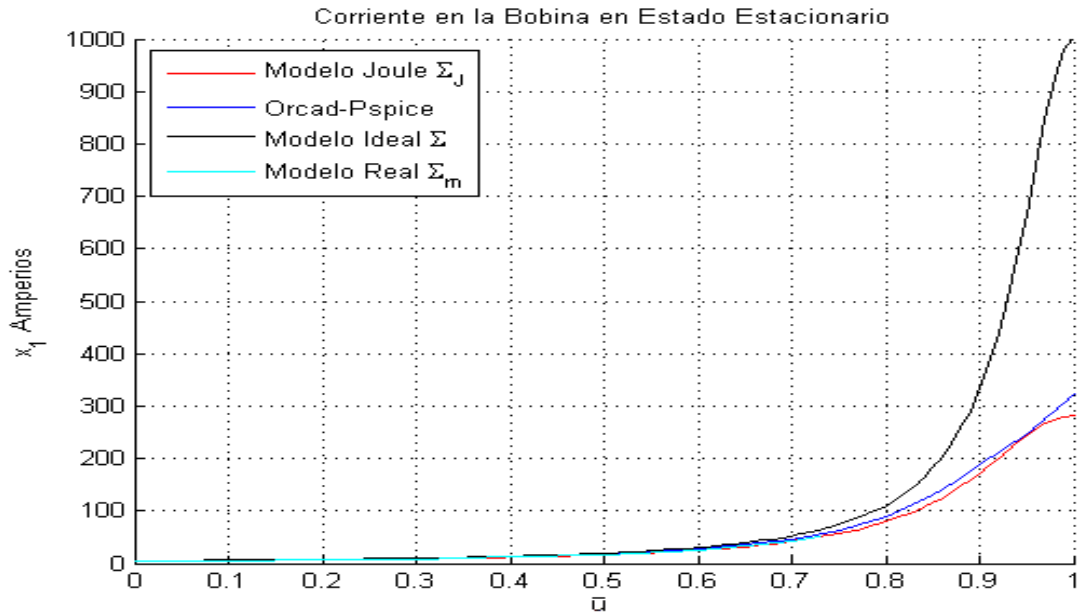
En la figura 2.20a la corriente máxima del modelo Ideal Σ_i es de 1000A y no puede ser alcanzada por ninguno de los otros modelos, existiendo un mínimo de 675A de diferencia respecto al modelo Joule Σ_J y el Orcad-PSpice®. Los modelos Joule Σ_J y el Orcad-PSpice® tienen una diferencia máxima de 35A, aproximadamente, para $\bar{u} = 1$. La corriente mínima se produce para $\bar{u} = 0$, es aproximadamente de 4A para todos los modelos.

En la figura 2.20b, el modelo Ideal Σ_i la tensión del condensador comienza ($\bar{u} = 0$) por encima de alimentación ($E = 10$ voltios) pero todos los demás lo hacen ligeramente por debajo, por efecto de las pérdidas. La tensión máxima obtenida del modelo Ideal es 70 voltios, aproximadamente, mientras que en el Joule Σ_J y el Orcad-PSpice® están cerca de los 36 voltios. Para $\bar{u} = 1$ los modelos Joule Σ_J y Orcad-PSpice® tienen una diferencia máxima de 6 voltios aproximadamente que se deben a la tensión colector emisor del transistor que utiliza Orcad-PSpice®, mientras que en el Joule Σ_J se hace nula.

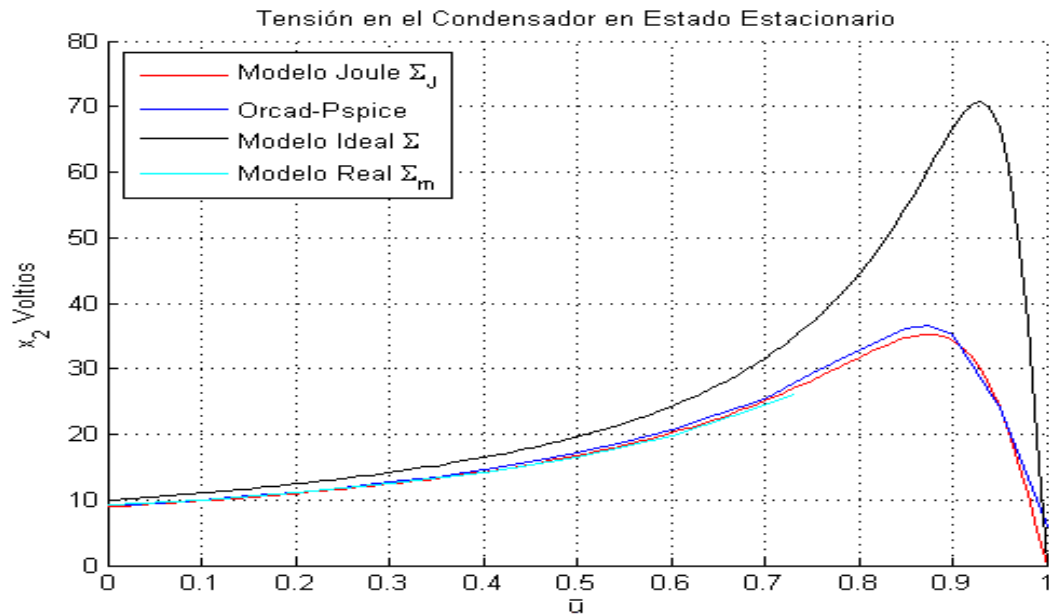
En relación al régimen estacionario, se realizó una simulación para mostrar el funcionamiento del modelo Joule Σ_J . Se realizó un barrido con variaciones del R_j en el rango $[0, 0.35]$. Las figuras 2.21a y 2.21b muestran los resultados para la corriente en la bobina y la tensión en el condensador. De acuerdo con estos resultados, es posible obtener un R_j adecuado para aproximar el comportamiento del modelo Real Σ_m .

Comparación en Lazo Cerrado. Con los controladores sintetizados para los modelos Ideal Σ_i y Joule Σ_J , \bar{u}^i y \bar{u}^j respectivamente, procedemos a simular su respuesta en lazo cerrado para un valor deseado $V_d = 15$ voltios. En las figuras 2.22a, 2.22b y 2.22c puede observarse la corriente en la bobina, la tensión en el condensador y el control. Como se observa, pueden comprobarse los valores en estado estacionario y tiempos de estabilización presentan algunas diferencias, tal y como mostramos a continuación:

- Σ_i , $\bar{x}_1^i = 11.25$ amperios, $\bar{x}_2^i = 15$ voltios, $\bar{u}_1^i = 0.333$ y $t_{ss}^i = 14$ mseg.

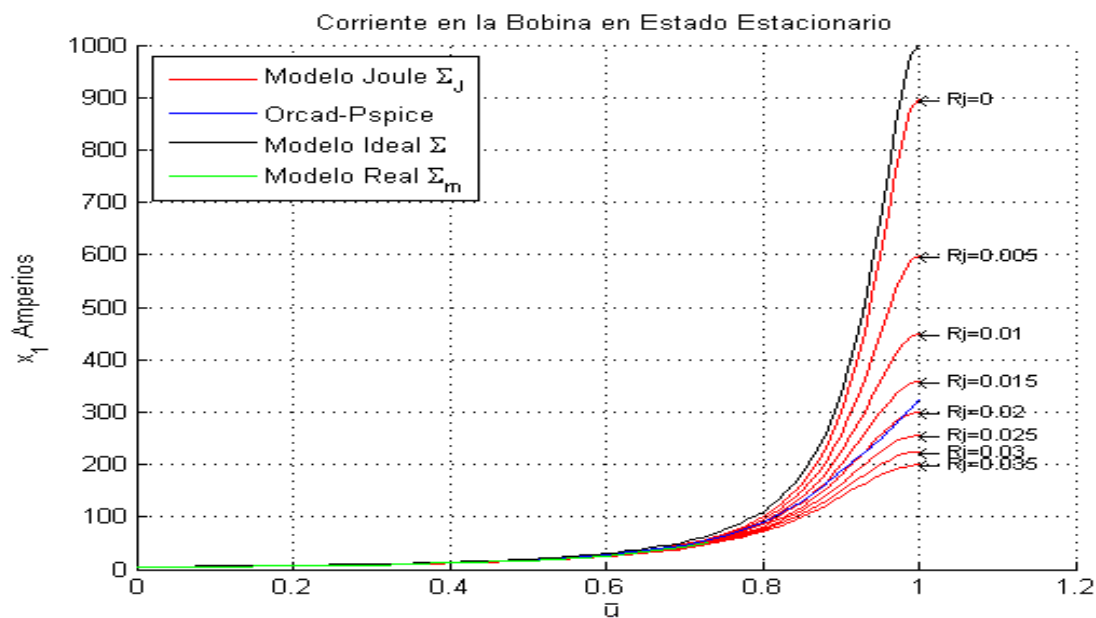


(a) Corriente en la Bobina

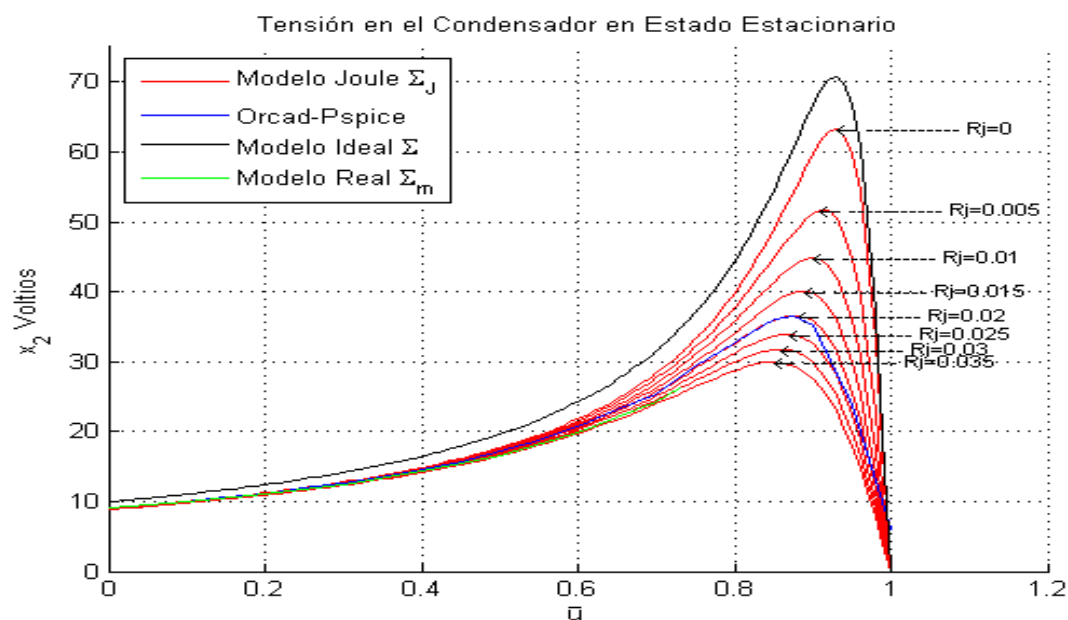


(b) Tensión en el Condensador

Figura 2.20: Puntos de Equilibrio Lazo Abierto en el rango de funcionamiento de la entrada \bar{u} entre $[0, 1]$, Modelos $\Sigma_i, \Sigma_J, Orcad - PSpice®, \Sigma_m$



(a) Corriente en la Bobina



(b) Tensión en el Condensador

Figura 2.21: Puntos de Equilibrio Lazo en Abierto barriendo la resistencia Joule en el rango R_j definido entre $[0, 0.35] \Omega$, Modelos Σ_i , *Orcad - PSpice*®, Σ_J , Σ_m

- Σ_J , $\bar{x}_1^j = 14.17$ amperios, $\bar{x}_2^j = 16.25$ voltios, $\bar{u}_1^j = 0.4709$ y $t_{ss}^i = 10$ mseg.

Como indican las simulaciones el modelo Joule Σ_J se estabiliza más rápidamente. Además requiere de un aumento del esfuerzo de control para alcanzar el estado estacionario. En este sentido, el modelo Joule Σ_J aproxima mejor el comportamiento del modelo Real Σ_m o, en otras palabras, al prototipo de laboratorio.

2.6. Resultados de Incluir el Modelo Joule para la Implementación del Convertidor Boost

Finalmente, se sintetizó la ecuación del controlador para el modelo Joule Σ_J , w^j , se realizó el procedimiento de sintonización de la resistencia Joule R_j y de las tensiones de los semiconductores V_f^j, V_q^j y se incluyó el modulador de ancho de pulso (PWM). Estos procedimientos permiten que se realicen simulaciones y mediciones (osciloscopio) en el prototipo o modelo Real Σ_m , en el rango de valores deseados V_d entre 10 y 22 voltios. El resultado de superponer las simulaciones y las mediciones se muestran en las figuras 2.23a-h y 2.24a,b.

Como puede observarse en la figuras 2.23b, 2.23d, 2.23f y 2.23h, la tensión en el condensador se aproxima con una “alta precisión”⁵ para el transitorio y el valor estacionario. En el caso de $V_d = 22$ V, figura 2.24b, no se mantienen las expectativas de las otras mediciones, respecto al transitorio, que se desplaza significativamente. Esto se debe a que la fuente de alimentación con la que opera el convertidor está entrando en el rango de saturación.

De la misma manera, para las figuras 2.23a, 2.23c, 2.23e y 2.23g las simulaciones son capaces de aproximar, con una “alta precisión”, tanto los transitorios como los regímenes estacionarios para la corriente en la bobina. En el caso de $V_d = 22$ V, figura 2.24a, no se mantienen las expectativas de las otras mediciones, respecto al transitorio,

⁵Es claro que para dar un resultado respecto a la precisión, es necesario realizar un estudio estadístico que compare los resultados de las simulaciones y las mediciones, este procedimiento no se realizó. Sin embargo, cuando se comparan visualmente estos resultados con los obtenidos en el Capítulo 1, la diferencia es significativa y es por ello que nos atrevemos a utilizar el concepto “alta precisión” como una medida subjetiva de comparación de los resultados, la cual es lo suficientemente válida para expresar las mejoras obtenidas con el método utilizado para obtener dichos resultados.

se observa que cerca del valor máximo de la simulación la corriente medida cambia la dirección de la pendiente, estos son efectos de la saturación de la fuente ya que la máxima corriente es de 51.4 amperios.

En forma general, puede observarse que en la mayoría de las gráficas, las respuestas medidas en estado estacionario corresponden con las simulaciones, de la misma manera los transitorios de los estados se aproximan de una manera muy precisa.

En los resultados obtenidos debemos notar lo siguiente:

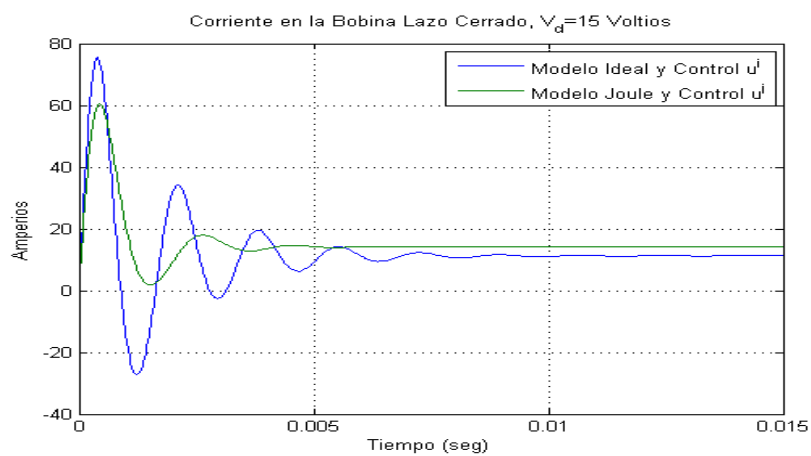
1. Se supone que el controlador no puede generar una salida igual a la fuente de alimentación E , sin embargo tenemos que para $V_d = 10$ voltios el convertidor opera adecuadamente. De hecho, cuando realizamos mediciones obtuvimos que para $\bar{u} = 0$ tenemos $V_d = 9.16$ voltios.
2. El convertidor puede operar a tensiones mayores al doble de la tensión de alimentación E . Realizamos mediciones por debajo de los 24 voltios, siendo restringido por la saturación de la corriente de la fuente de alimentación.
3. El modelo incluye las dinámicas de baja frecuencia. Sin embargo, las de alta frecuencia son omitidas. Para que el modelo Joule Σ_J las tome en cuenta es necesario incrementar el orden del sistema y el procedimiento no lo realizamos en este trabajo.

Utilizando los valores estacionarios obtenidos del barrido del rango del convertidor construimos las figuras 2.25a y 2.25b, la cual comparamos con una gráfica referencial tal que el valor de salida es igual al valor deseado. La figura 2.25a corresponde a la tensión del condensador y la figura 2.25b a la corriente de la bobina.

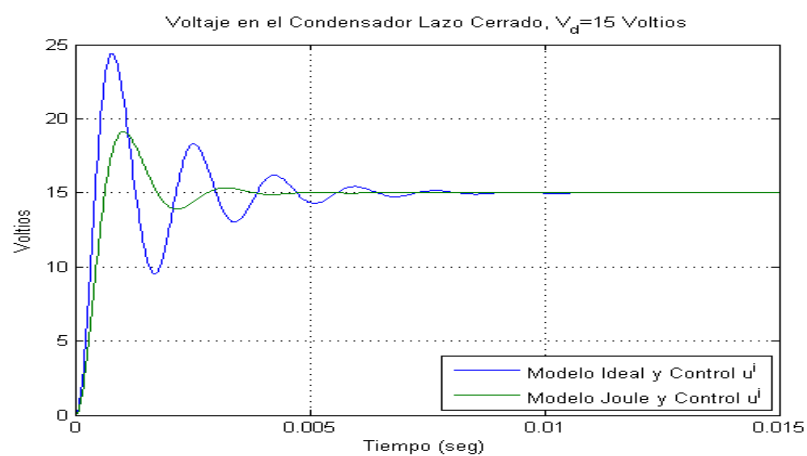
Las figuras 2.26a y 2.26b son los resultados obtenidos en el Capítulo 1, de las cuales se observa claramente las mejoras introducidas por el modelo Joule Σ_J respecto a la obtención de los equilibrios del convertidor.

De la comparación se puede observar el efecto producido por la inclusión del Modelo

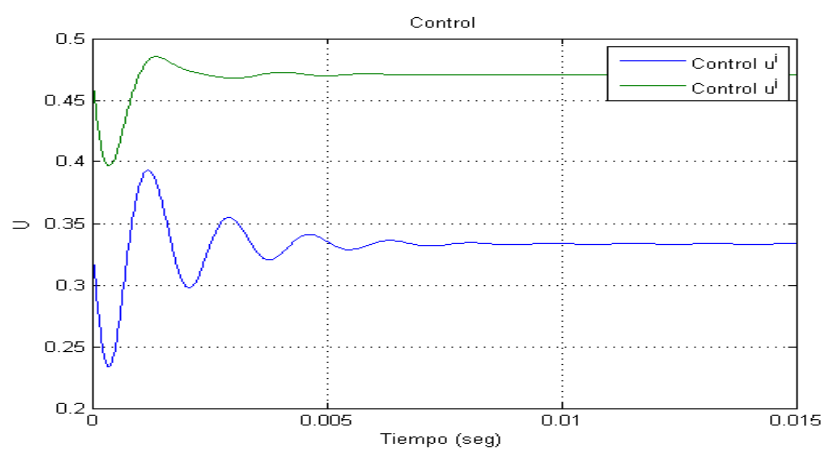
Joule Σ_J en la predicción de los equilibrios, dicha predicción mejora considerablemente respecto al Modelo Ideal Σ_i .



(a) Corriente en la Bobina

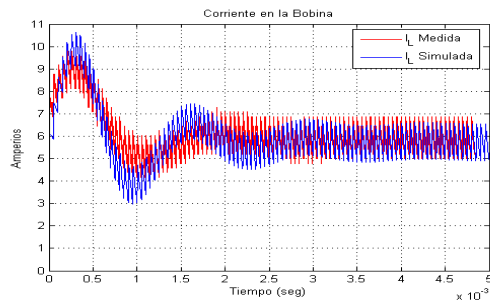
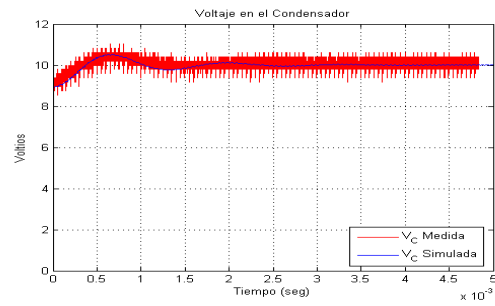
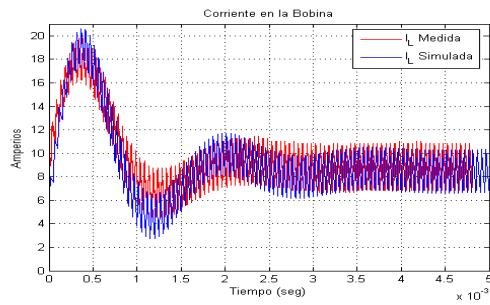
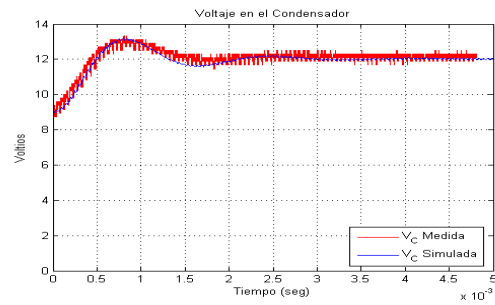
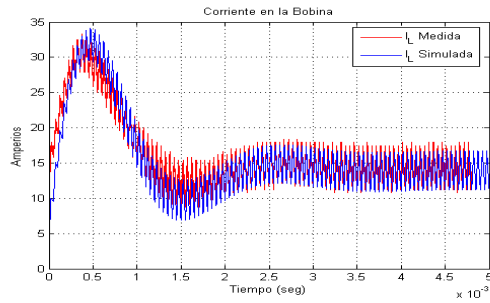
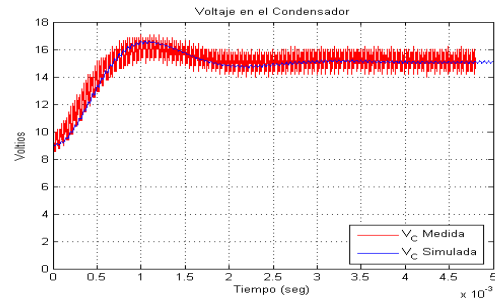
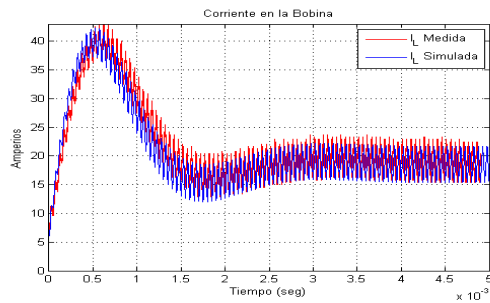
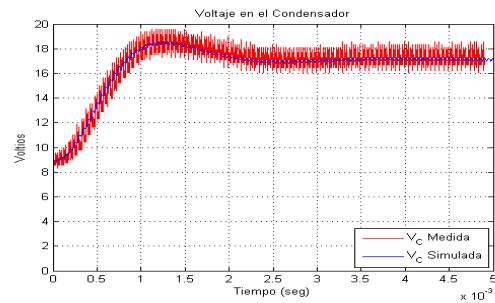


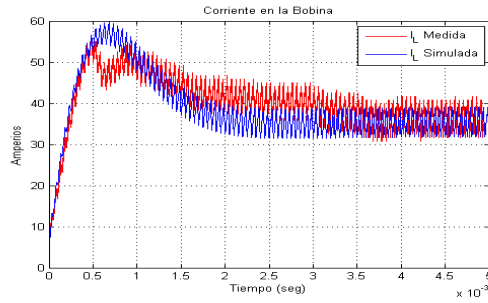
(b) Tensión en el Condensador



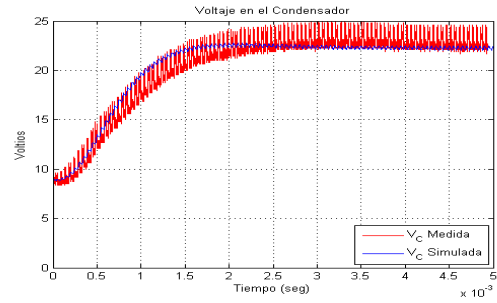
(c) Control

Figura 2.22: Convertidor Boost Lazo Cerrado, Modelos Σ_r, u^i, u^j

(a) Corriente en la Bobina $V_d = 10$ V(b) Tensión en el Condensador $V_d = 10$ V(c) Corriente en la Bobina $V_d = 12$ V(d) Tensión en el Condensador $V_d = 12$ V(e) Corriente en la Bobina $V_d = 15$ V(f) Tensión en el Condensador $V_d = 15$ V(g) Corriente en la Bobina $V_d = 17$ V(h) Tensión en el Condensador $V_d = 17$ VFigura 2.23: Mediciones y Simulaciones $V_d = 10$, $V_d = 12$, $V_d = 15$ y $V_d = 17$ voltios

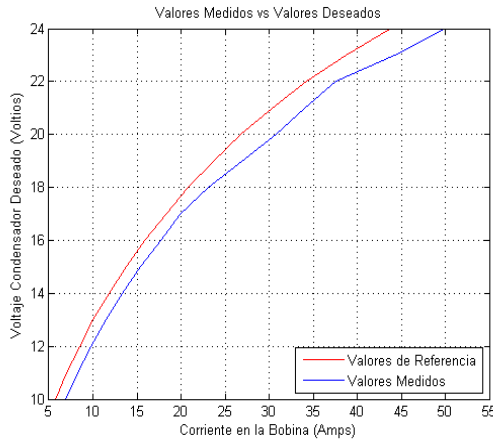


(a) Corriente en la Bobina $V_d = 22$ V

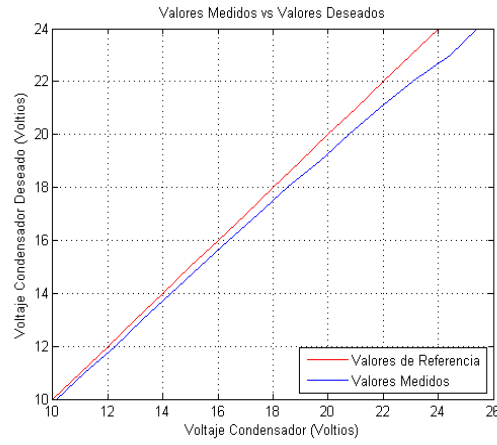


(b) Tensión en el Condensador $V_d = 22$ V

Figura 2.24: Mediciones y Simulaciones $V_d = 22$ voltios

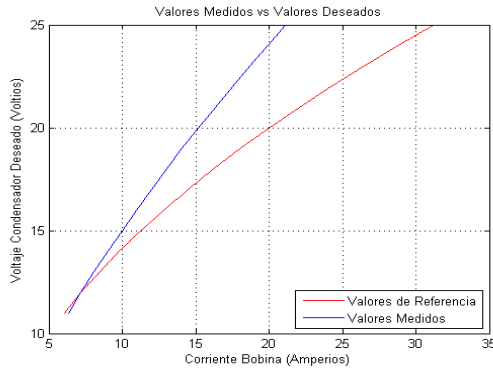


(a) Corriente en la Bobina

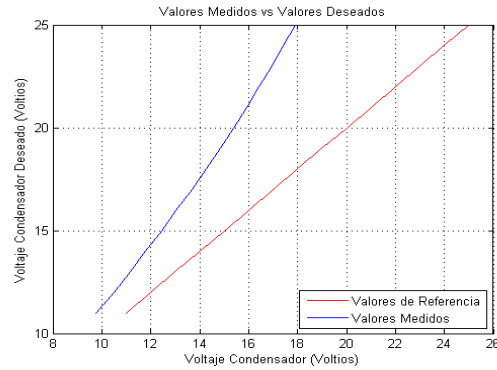


(b) Tensión en el Condensador

Figura 2.25: Rango de Operación del prototipo en Lazo Cerrado con Control Joule



(a) Corriente en la Bobina



(b) Tensión en el Condensador

Figura 2.26: Rango de Operación del prototipo en Lazo Cerrado con Control Ideal

Capítulo 3

Técnicas de Robustez para el Convertidor Boost

3.1. Introducción

Como resultado de aplicar la técnica de realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta del error de seguimiento, se obtiene la ley de control dada por, véase (1.6),

$$u = \bar{u} - \gamma [x_1 \bar{x}_2 - x_2 \bar{x}_1] = 1 - (E/\bar{x}_2) - \gamma [x_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_2^2 x_2 / (RE)] ,$$

donde la corriente en el sistema original está dada por $\bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 / (RE)$ y $\bar{x}_2 = V_d$, siendo V_d el valor deseado de la salida. El punto débil de este controlador es la dependencia de los parámetros E , γ y R . La constante γ es una constante de diseño positiva, E es el valor de la fuente de tensión y \bar{x}_2 el valor deseado de la tensión de salida. Es natural que la carga, representada por la resistencia R , del convertidor cambie según las necesidades de funcionamiento, en consecuencia, el estado estacionario del sistema no tomará el valor deseado con esta acción de control. De aquí en adelante, consideraremos que esta resistencia presenta un valor nominal R_0 . Esto es, estudiaremos los efectos de la ley de control nominal dada por:

$$u = \bar{u} - \gamma [x_1 \bar{x}_2 - x_2 \bar{x}_1] = 1 - (E/\bar{x}_2) - \gamma [x_1 \bar{x}_2 - \bar{x}_2^2 x_2 / (R_0 E)] ,$$

Continuaremos denotando mediante R a la resistencia verdadera, la cual supondremos positiva.

En este capítulo se analizarán los dos modelos del convertidor Boost controlados mediante la realimentación de la salida pasiva y presentados anteriormente (el modelo Ideal y el modelo Joule) en el supuesto de que la carga real y la nominal no coincidan. Observaremos que en función de la diferencia entre la carga nominal y la real se pueden tener uno o tres puntos de equilibrio y que, en todos los casos, las trayectorias del sistema están acotadas. Como herramientas para el análisis utilizaremos los resultados estándar de Lyapunov y resultados específicos de Perko y sus colaboradores sobre sistemas planares de tipo cuadrático que se enunciarán en la sección siguiente.

3.2. Teoremas y Lemas

Los resultados que se enuncian a continuación se han extraído de los trabajos de Coppel [Cop66], Dickson y Perko [Dic70], Dumortier y Perko [Dum00] y Perko [Per01] para sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuadráticas. El trabajo de Coppel [Cop66] proporciona los posibles diagramas de fase de los sistemas cuadráticos planares y los caracteriza en términos de desigualdades algebraicas entre sus coeficientes. Dickson y Perko [Dic70] estudian los sistemas cuadráticos planares con trayectorias acotadas (BQS, de las iniciales en inglés de *Bounded Quadratic Systems*), según presenten uno (BQS1) dos (BQS2) o tres (BQS3) puntos de equilibrio

Sistemas Afínmente Equivalentes (Definición): dos sistemas dinámicos son *afínmente equivalentes* si, y sólo si, se puede obtener uno del otro mediante una transformación afín.

El siguiente Teorema establece las condiciones de los diferentes tipos de sistemas BQS y se encuentra en [Per01, pp. 489-490]:

Teorema 1 *Cualquier BQS es afínmente equivalente a*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y + xy\end{aligned}\tag{3.1}$$

con $a_{11} < 0$ y $a_{22} \leq 0$, o

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + y^2 \\ \dot{y} &= a_{22}y\end{aligned}\tag{3.2}$$

con $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ y $a_{11} + a_{22} < 0$, o

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y + y^2 \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y - xy + cy^2\end{aligned}\tag{3.3}$$

con $|c| < 2$ y también (i) $a_{11} < 0$; (ii) $a_{11} = 0$ y $a_{21} = 0$; o (iii) $a_{11} = 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{12} + a_{21} = 0$ y $ca_{21} + a_{22} \leq 0$.

Del artículo de Dickson y Perko [Dic70, p. 259] tomamos el siguiente Lema, el cual establece la relación con los tipos de sistemas en el Teorema 1.

Lema 1 Si $a_{11} \neq 0$ y se definen $b = a_{12} - a_{21} + ca_{11}$ y $d = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ entonces el sistema (3.3) tiene:

- tres puntos de equilibrio (finitos) si y sólo si $d \neq 0$ y $b^2 > 4d$;
- dos puntos de equilibrio (finitos) si y sólo si $b \neq 0$ y se verifica una de las condiciones $b^2 = 4d$ o $d = 0$;
- un punto de equilibrio si y sólo si se cumple una de las condiciones $b^2 < 4d$ o $b = d = 0$.

En el caso de tres puntos de equilibrio (finitos), $Q_i(x_1^i, x_2^i)$ para $i = 1, 2, 3$, se deduce que (con indexado apropiado): $x_2^1 < x_2^2 < x_2^3$; Q_2 es un punto de silla, y Q_1 y Q_3 son cualquiera de los dos nodos o focos; Q_3 está a la derecha (izquierda) de la línea $\overline{Q_1Q_2}$ si $a_{11} < 0$ ($a_{11} > 0$).

El Teorema que sigue describe los diagramas de fase de los sistemas cuadráticos planares con trayectorias acotadas y un único equilibrio BQS1 [Per01, p. 490]:

Teorema 2 El diagrama de fases de cualquier BQS1 está determinado por una de las configuraciones de la figura 3.1.

Además,

- se tiene la configuración (a) si, y sólo si, el sistema cuadrático es afínmente equivalente al sistema (3.1) con $a_{11} < 0$ y $a_{22} < 0$;

- se tiene la configuración (b) si, y sólo si, el sistema cuadrático es afínmente equivalente al sistema (3.2) con $a_{11} < 2a_{22} < 0$;
- se tiene la configuración (c) si, y sólo si, el sistema cuadrático es afínmente equivalente al sistema (3.2) con $2a_{22} < a_{11} < 0$ ó al sistema (3.3) con $|c| < 2$ y una de las siguientes condiciones;

(i) $a_{11} = a_{22} + a_{21} = 0, a_{21} \neq 0$ y $a_{22} < \min(0, -ca_{21})$ o $a_{22} = 0 < -ca_{21}$

(ii) $a_{11} < 0, (a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$, y $a_{11} + a_{22} \leq 0$, o

(iii) $a_{11} < 0$ y $(a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0$;

- se tiene la configuración (d) si, y sólo si, el sistema cuadrático es afínmente equivalente al sistema (3.3) con $|c| < 2$ y además

(i) $a_{11} = a_{22} + a_{21} = 0$ y $a_{22} < \min(0, -ca_{21})$ y $0 < a_{22} < -ca_{11}$,

(ii) $a_{11} < 0, a_{11} + a_{22} > 0$, y $(a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$

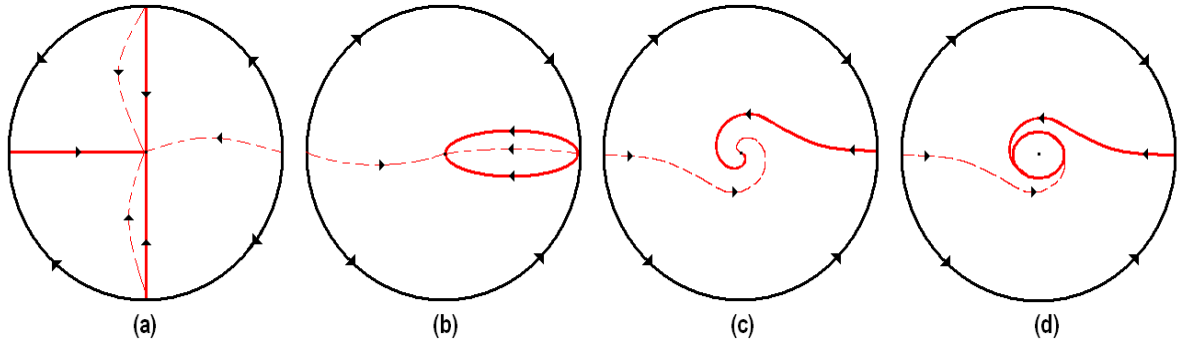


Figura 3.1: Diagramas de Fases para un sistema cuadrático con un único equilibrio (BQS1)

La configuración (c) de la figura 3.1 esquematiza el caso de un nodo y el caso de un foco estable como lo refiere el artículo de Dickson y Perko [Dic70, p. 267].

Con estas herramientas abordamos el estudio del comportamiento del convertidor Boost ante las variaciones de carga. Además, existe otro Teorema [Per01, p. 503, Teorema 5], el cual incluye un atlas con todos los posibles diagramas de fases para un sistema BQS3, el cual puede observarse en la figura 3.2.

Los esquemas presentados en las figuras 3.1 y 3.2 contienen los puntos de equilibrio del sistema planar, incluidos los del infinito, y las trayectorias relevantes.

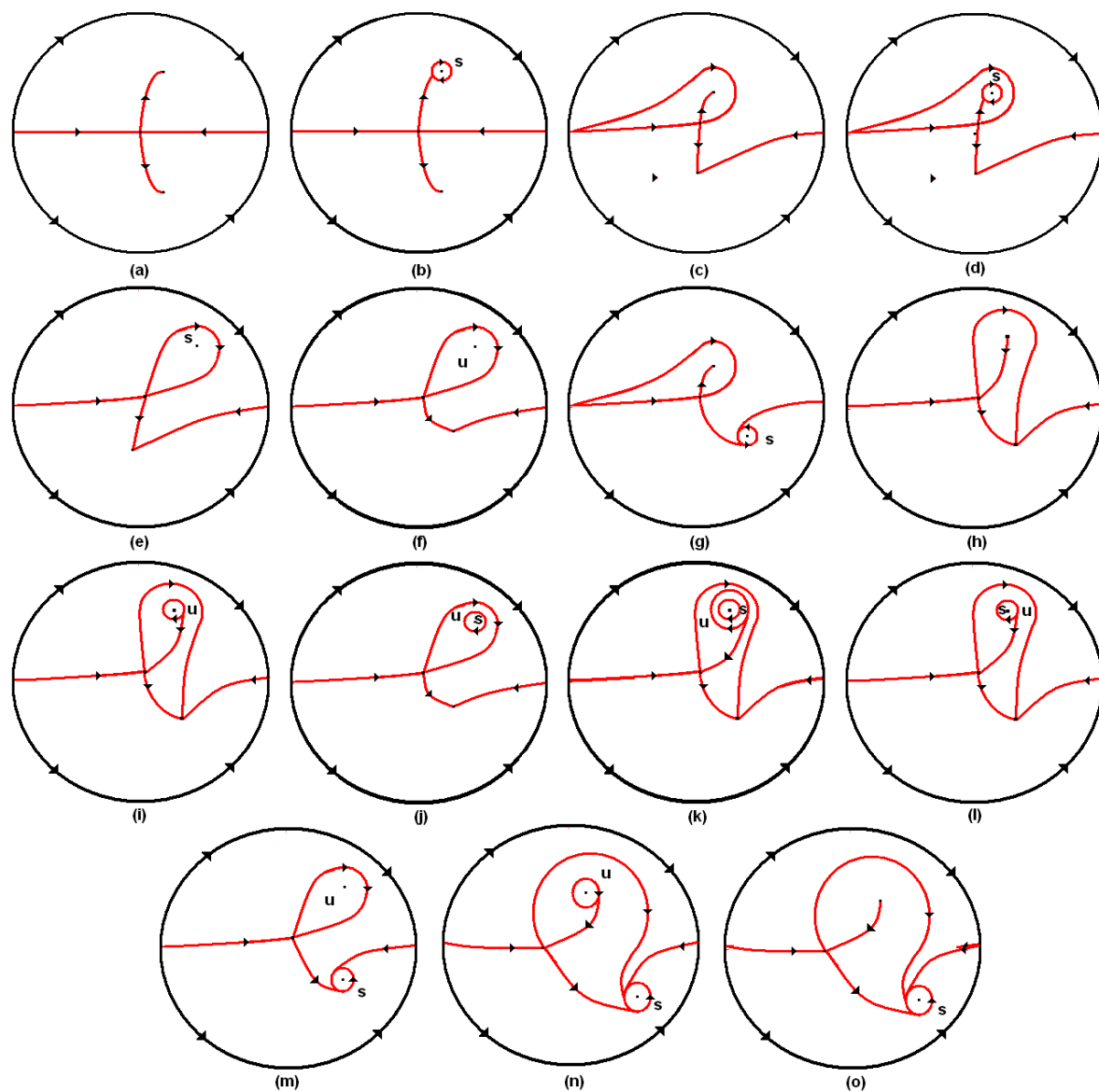


Figura 3.2: Atlas con todos los Diagramas de Fase de un Sistema Cuadrático BQS3

3.3. Efectos de los Cambios de la Carga del Convertidor Boost Utilizando su Modelo Ideal

Partiendo de las ecuaciones originales del convertidor Boost y sustituyendo la expresión del controlador u se obtiene la dinámica del sistema en lazo cerrado. Ésta resulta ser:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1-\bar{u}) \\ (1-\bar{u}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 & \gamma\bar{x}_1x_2 \\ -\gamma\bar{x}_1x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} 0 & -\gamma x_1\bar{x}_2 \\ \gamma x_1\bar{x}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Los puntos de equilibrio del sistema vienen dados por la solución de:

$$\begin{aligned} 0 &= -(1-\bar{u})x_2^* + E + \gamma\bar{x}_1x_2^{*2} - \gamma x_1^*\bar{x}_2x_2^* \\ 0 &= (1-\bar{u})x_1^* - \frac{x_2^*}{R} - \gamma\bar{x}_1x_2^*x_1^* + \gamma x_1^{*2}\bar{x}_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Sustituyendo en (3.5) los valores de los parámetros del convertidor original dados por $\bar{x}_1 = \frac{\bar{x}_2^2}{ER_0}$; $\bar{u} = 1 - \frac{E}{\bar{x}_2}$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= -E\frac{x_2^*}{\bar{x}_2} + E + \gamma\frac{\bar{x}_2^2}{ER_0}x_2^{*2} - \gamma x_1^*\bar{x}_2x_2^* \\ 0 &= E\frac{x_1^*}{\bar{x}_2} - \frac{x_2^*}{R} - \gamma\frac{\bar{x}_2^2}{ER_0}x_2^*x_1^* + \gamma x_1^{*2}\bar{x}_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Despejando x_1^* de la primera ecuación $x_1^* = \frac{-R_0E^2x_2^* + \gamma\bar{x}_2^3x_2^{*2} + \bar{x}_2R_0E^2}{\gamma\bar{x}_2^2x_2^*R_0E}$ y sustituyendo en la segunda obtenemos la ecuación de la tensión de salida en equilibrio, la cual está dada por:

$$-\frac{E^2}{x_2^*\gamma\bar{x}_2^2} + \frac{\bar{x}_2}{R_0} + \frac{E^2}{\gamma\bar{x}_2x_2^{*2}} - \frac{x_2^*}{R} = 0 \quad (3.7)$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$-\frac{E^2x_2^*R_0R - \bar{x}_2^3x_2^{*2}\gamma R - R\bar{x}_2R_0E^2 + x_2^{*3}\gamma\bar{x}_2^2R_0}{x_2^{*2}\gamma\bar{x}_2^2R_0R} = 0 \quad (3.8)$$

Como puede observarse, el numerador de la ecuación (3.8) es un polinomio de tercer grado en x_2^* . En consecuencia, dependiendo de los valores de los coeficientes, podrán existir una o tres raíces reales.

Por otra parte, despejando R en la ecuación (3.7) se obtiene

$$R = \frac{\bar{x}_2^2 x_2^{*3} R_0 \gamma}{(\bar{x}_2 - x_2^*) R_0 E^2 + \gamma \bar{x}_2^3 x_2^{*2}} = \frac{R_0}{1 + \frac{(\bar{x}_2 - x_2^*) R_0 E^2}{\bar{x}_2^2 x_2^{*3} \gamma}} \quad (3.9)$$

Nótese que (3.9) proporciona una relación entre la carga real R y el valor de equilibrio de la tensión de salida, x_2^* .

Observación. Dado que la resistencia de carga se supone positiva, de (3.9) se tiene:

$$\bar{x}_2 > x_2^* \quad \text{ó} \quad \bar{x}_2 < x_2^* \quad \text{y} \quad \gamma > \frac{(x_2^* - \bar{x}_2) R_0 E^2}{\bar{x}_2^2 x_2^{*3}}$$

Valores de equilibrio para la tensión. El número de raíces reales de una ecuación cúbica se determina a partir de su discriminante, dicho discriminante se consigue de aplicar el método de Tartaglia-Cardano para hallar las soluciones de la ecuación cubica. Por lo cual se describe, a continuación, el procedimiento de Tartaglia-Cardano para obtener el discriminante y la relación entre éste y el número de raíces reales de la ecuación.

Sea la ecuación

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0 \quad (3.10)$$

a la que se aplica la substitución $x = y - r/3$ mediante la cual se obtiene el polinomio cúbico reducido $y^3 + py + q = 0$, donde $p = s - r^2/3$ y $q = \frac{2r^3}{27} - \frac{sr}{3} + t$. Se define entonces el discriminante de Tartaglia-Cardano dado por:

$$\Delta_C = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad (3.11)$$

Proposición 1 Si $\Delta_C > 0$, la ecuación (3.10) tiene una única raíz real y si $\Delta_C < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales.

Aplicando esta proposición al numerador de (3.8) se tienen

$$x_2^{*3} - \frac{\bar{x}_2 R}{R_0} x_2^{*2} + \frac{E^2 R}{\gamma \bar{x}_2^2} x_2^* - \frac{R E^2}{\gamma \bar{x}_2} = 0,$$

$$p = \frac{E^2 R}{\gamma \bar{x}_2^2} - \frac{\bar{x}_2^2 R^2}{3 R_0^2}$$

y

$$q = -\frac{2}{27} \frac{\bar{x}_2^3 R^3}{R_0^3} + \frac{1}{3} \frac{R^2 E^2}{R_0 \gamma \bar{x}_2} - \frac{R E^2}{\gamma \bar{x}_2}$$

de lo que resulta que el discriminante Tartaglia-Cardano está dado por:

$$\Delta_C = \frac{1}{27} \frac{\bar{x}_2^2 R^4 E^2}{R_0^3 \gamma} - \frac{1}{108} \frac{E^4 R^4}{\gamma^2 \bar{x}_2^2 R_0^2} - \frac{1}{6} \frac{E^4 R^3}{\gamma^2 \bar{x}_2^2 R_0} + \frac{1}{4} \frac{R^2 E^4}{\gamma^2 \bar{x}_2^2} + \frac{1}{27} \frac{E^6 R^3}{\gamma^3 \bar{x}_2^6} \quad (3.12)$$

Si $\Delta_C > 0$ tenemos una raíz real y si $\Delta_C < 0$ tenemos 3 raíces reales.

De $\Delta_C = 0$ se pueden calcular los valores de R que separan los dos casos, además cuando $\Delta_C = 0$ las solución pueden ser tres raíces diferentes, una raíz doble y una sencilla o una raíz triple.

Nota. En el siguiente procedimiento no deben confundirse las soluciones o raíces de $\Delta_C(R) = 0$ con la raíces de la ecuación de equilibrio del convertidor.

Despejando R de $\Delta_C = 0$ se obtiene $R_{1,2} = 0$ y

$$R_{3,4} = \frac{\left(2E^3 R_0^2 - 9\gamma \bar{x}_2^4 E R_0 \pm 2\sqrt{E^6 R_0^4 - 9E^4 R_0^3 \gamma \bar{x}_2^4 + 27\gamma^2 \bar{x}_2^8 E^2 R_0^2 - 27R_0 \gamma^3 \bar{x}_2^{12}}\right) R_0 E}{\gamma \bar{x}_2^4 (-4\gamma \bar{x}_2^4 + E^2 R_0)},$$

de estos valores nos interesan únicamente los positivos.

Factorizando el término de la raíz cuadrada

$$E^6 R_0^4 - 9E^4 R_0^3 \gamma \bar{x}_2^4 + 27\gamma^2 \bar{x}_2^8 E^2 R_0^2 - 27R_0 \gamma^3 \bar{x}_2^{12} = R_0 (E^2 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)^3$$

tenemos:

$$R_{3,4} = \frac{\left(2E^2 R_0 - 9\gamma \bar{x}_2^4 \pm 2(E^2 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)^2 \sqrt{R_0 (E^2 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)}\right) R_0^2 E^2}{\gamma \bar{x}_2^4 (E^2 R_0 - 4\gamma \bar{x}_2^4)}$$

En la figura 3.3 se esquematiza el comportamiento del discriminante Tartaglia-Cardano Δ_C para valores positivos de la carga.

3.3.1. Caso $\Delta_C > 0$

En este caso el sistema en lazo cerrado tiene un único punto de equilibrio (x_1^*, x_2^*) . Para analizar su estabilidad, se considera la dinámica del error a partir de las ecuaciones (3.4) y (3.5), donde se definen los errores como $e_1 = x_1 - x_1^*$ y $e_2 = x_2 - x_2^*$. Dicha dinámica viene dada por:

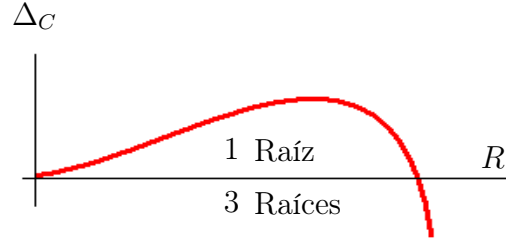


Figura 3.3: Discriminante de Cardano

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1-\bar{u}) \\ (1-\bar{u}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \\
 -\gamma \begin{bmatrix} \bar{x}_2 x_2^* & \bar{x}_2 x_1^* - 2\bar{x}_1 x_2^* \\ -2\bar{x}_2 x_1^* + \bar{x}_1 x_2^* & \bar{x}_1 x_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} & \\
 -\gamma \begin{bmatrix} 0 & \bar{x}_2 e_1 - \bar{x}_1 e_2 \\ -(\bar{x}_2 e_1 - \bar{x}_1 e_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} &
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

El punto de equilibrio del nuevo sistema es $(0, 0)$.

Tómese $V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} > 0$ como candidata a función de Lyapunov.

Dado que $L > 0$ y $C > 0$, se tiene $V(e_1, e_2) \geq 0$ y $V(e_1, e_2) = 0$ si y sólo si $e_1 = e_2 = 0$. Queda por analizar la derivada:

$$\frac{dV}{dt} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Sustituyendo \dot{e}_1, \dot{e}_2 de la ecuación (3.13) se tiene

$$\dot{V} = - \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} - \gamma \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{x}_2 x_2^* & \bar{x}_2 x_1^* - 2\bar{x}_1 x_2^* \\ -2\bar{x}_2 x_1^* + \bar{x}_1 x_2^* & \bar{x}_1 x_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

En vista de que resulta una forma cuadrática, ésta puede ser reducida separando en forma simétrica y anti-simétrica, quedando:

$$\dot{V} = -\gamma \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{x}_2 x_2^* & -\frac{\bar{x}_1 x_2^* + \bar{x}_2 x_1^*}{2} \\ -\frac{\bar{x}_1 x_2^* + \bar{x}_2 x_1^*}{2} & \bar{x}_1 x_1^* + \frac{1}{\gamma R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = -e^T Q e$$

Para analizar el signo de \dot{V} aplicamos el criterio de Sylvester. Se tiene:

- Primer menor de Q : viene dado por $\gamma\bar{x}_2x_2^*$, el cual es positivo puesto que $\gamma > 0$, $\bar{x}_2 > 0$ y $x_2^* > 0$
- Sustituyendo x_1^* y \bar{x}_1 por sus expresiones en función de x_2^* , \bar{x}_2 y los parámetros del control, el determinante de la matriz Q toma la forma

$$\Delta_Q = \frac{\gamma x_2^* \bar{x}_2}{R} + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2 x_2^{*3} \bar{x}_2^3}{E^2 R_0 R} - \frac{1}{4} \frac{\gamma^2 x_2^{*2} \bar{x}_2^4}{E^2 R_0^2} - \frac{1}{4} \frac{\gamma^2 x_2^{*4} \bar{x}_2^2}{E^2 R^2}$$

A la vista del signo del primer menor, para garantizar que $\dot{V} < 0$ es condición necesaria y suficiente $\Delta_Q > 0$.

Sustituyendo R de la ecuación (3.9) en la expresión del determinante Δ_Q resulta $\Delta_Q = -\frac{1}{2} \frac{E^2}{x_2^* \bar{x}_2} + \frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} + \frac{3}{4} \frac{E^2}{x_2^{*2}} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2}$. Multiplicando ambos lados de la igualdad por x_2^{*2} , Δ_Q se convierte en $\tilde{\Delta}_Q = \Delta_Q x_2^{*2} = \left(\frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} \right) x_2^{*2} - \frac{1}{2} \frac{E^2}{\bar{x}_2} x_2^* + \frac{3}{4} E^2$.

Se procede a continuación a analizar $\tilde{\Delta}_Q$ como función de x_2^* , dependiendo de la polaridad de las funciones del determinante del segundo menor $\tilde{\Delta}_Q$ y del discriminante de Cardano $\tilde{\Delta}_Q$. Se producen cuatro casos, de los cuales se analizan tres, puesto que si ambas son negativas no aplica para nuestro análisis, tenemos:

- a) Si el coeficiente de grado máximo $\frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} > 0$ y el discriminante de $\tilde{\Delta}_Q < 0$, $E^2 \frac{(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)}{\bar{x}_2^2 R_0} < 0$, entonces el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable, puesto que $\tilde{\Delta}_Q(x_2^*) > 0$ (ver figura 3.4).

La desigualdad sobre el coeficiente de grado máximo se puede reescribir en función de γ . Se tiene $\gamma > \frac{E^2 R_0}{4\bar{x}_2^4}$.

Las dos condiciones que aparecen en a) se pueden reducir a $E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma < 0$ puesto que esto implica $\frac{\bar{x}_2^2 \gamma}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} > 0$ y a su vez se tiene $\frac{\bar{x}_2^2 \gamma}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} > \frac{\bar{x}_2^2 \gamma}{R_0} - \frac{1}{3} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2}$.

Estas desigualdades son coherentes con la hipótesis de tener un único valor de equilibrio, de la tensión de salida, en todo el rango de R . Efectivamente, las soluciones de $\Delta_C = 0$ son $R_{1,2} = 0$ y $R_{3,4} = \frac{(2ER_0 - 9\gamma\bar{x}_2^4 \pm 2(E^2 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)^2 \sqrt{R_0(E^2 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)}) R_0 E}{\gamma \bar{x}_2^4 (E^2 R_0 - 4\gamma \bar{x}_2^4)}$

Por lo tanto, de la condición $E^2 \frac{(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)}{\bar{x}_2^2 R_0} < 0$, se tiene $E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma < 0$. En consecuencia, las raíces $R_{3,4}$ de $\Delta_C = 0$ no son reales y $\Delta_C > 0$ para $R \in (0, +\infty)$ puesto que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta_C(R) = +\infty$.

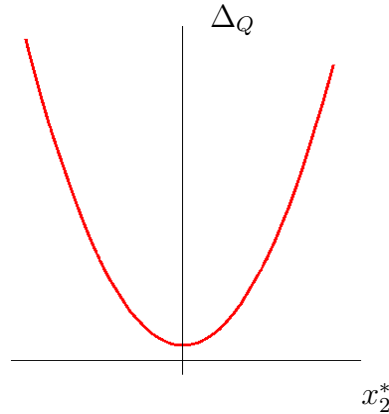


Figura 3.4: Comportamiento del Determinante $\tilde{\Delta}_Q$ con raíces imaginarias y concavidad positiva

- b) Si el coeficiente de grado máximo $\frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} > 0$ y el discriminante $\tilde{\Delta}_Q > 0$, $E^2 \frac{(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)}{\bar{x}_2^2 R_0} > 0$, entonces la función $\tilde{\Delta}_Q(x_2^*)$ se anula en dos puntos s_1, s_2 y la concavidad es positiva, por tanto $\Delta_Q > 0$, asimismo, el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable, para $x_2^* \in (0, s_1] \cup [s_2, +\infty)$.

Dado que el punto de corte de $\tilde{\Delta}_Q(x_2^*)$ con $x_2^* = 0$ está dado por $\tilde{\Delta}_Q(0) = \frac{3}{4} E^2$ y este valor es positivo, las raíces s_1, s_2 tendrán el mismo signo (ver figura 3.5); la raíz negativa no aplica para el convertidor Boost, así que la obviamos.

La desigualdad sobre el coeficiente de grado máximo se puede reescribir como $\gamma > \frac{E^2 R_0}{4\bar{x}_2^4}$ y la desigualdad del discriminante $\tilde{\Delta}_Q$ se puede reescribir $\gamma < \frac{E^2 R_0}{3\bar{x}_2^4}$, esto define el rango $\gamma \in \left(\frac{E^2 R_0}{4\bar{x}_2^4}, \frac{E^2 R_0}{3\bar{x}_2^4} \right)$

En la figura 3.5 se puede observar el comportamiento en forma general.

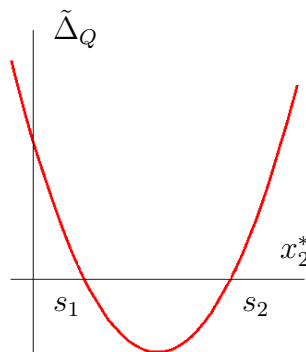


Figura 3.5: Comportamiento del Determinante $\tilde{\Delta}_Q$ con dos raíces reales y concavidad positiva

Para definir el rango de estabilidad respecto a la carga es necesario calcular los respectivos valores de las resistencias definidas para $R \in [0, R_{s_1}] \cup [R_{s_2}, +\infty]$, para ello tomamos las soluciones de la función $\Delta_Q = 0$ dadas por las funciones $s_1 = -\frac{(R_0 E + 2\sqrt{R_0^2 E^2 - 3R_0 \bar{x}_2^4 \gamma}) E \bar{x}_2}{E^2 R_0 - 4\bar{x}_2^4 \gamma}$ y $s_2 = -\frac{(R_0 E - 2\sqrt{R_0^2 E^2 - 3R_0 \bar{x}_2^4 \gamma}) E \bar{x}_2}{E^2 R_0 - 4\bar{x}_2^4 \gamma}$, conocidos los parámetros y utilizando la ecuación (3.9) obtenemos los valores de las resistencias correspondientes a las raíces, R_{s_1}, R_{s_2} .

El discriminante de Tartaglia-Cardano $\Delta_C = 0$ tiene las siguientes soluciones $R_{1,2} = 0$ y $R_{3,4} = \frac{(2ER_0 - 9\gamma\bar{x}_2^4 \pm 2(E^2 - 3\bar{x}_2^4\gamma)^2 \sqrt{R_0(E^2 - 3\bar{x}_2^4\gamma)}) R_0 E}{\gamma\bar{x}_2^4(E^2 R_0 - 4\gamma\bar{x}_2^4)}$ cuya forma puede verse en la figura 3.6, dado que existe una única raíz cuando $\Delta_C > 0$, para el análisis de estabilidad se necesita demostrar que la función $\tilde{\Delta}_Q > 0$ en rango definido entre $(-\infty, R_3] \cup [R_4, +\infty)$ pero, como $\tilde{\Delta}_Q$ es función de x_2^* , la hipótesis que nos permitiría establecer que mientras exista un único equilibrio este será globalmente asintóticamente estable, pasa por el hecho de que $R_3 = R_{s_1}$ y $R_4 = R_{s_2}$. Este resultado lo mostraremos en el apartado c).

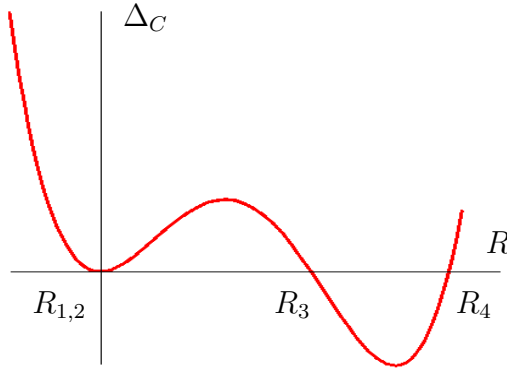


Figura 3.6: Comportamiento del Discriminate de Cardano Δ_C

- c) Si el coeficiente de grado máximo $\frac{\gamma\bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} < 0$ y el discriminante de $\tilde{\Delta}_Q > 0$, $E^2 \frac{(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)}{\bar{x}_2^2 R_0} > 0$, entonces la función $\tilde{\Delta}_Q(x_2^*)$ se anula en dos puntos s_1, s_2 y la concavidad es negativa, por tanto $\Delta_Q > 0$ para $x_2^* \in [s_1, s_2]$. Asimismo, el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable.

Las dos hipótesis del apartado se pueden reducir a $\frac{\gamma\bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} < 0$ puesto que:

$$\frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} < 0 \Leftrightarrow E^2 R_0 - 4\bar{x}_2^4 \gamma > 0 \Rightarrow E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma > 0$$

Dado que el punto de corte de $\tilde{\Delta}_Q(x_2^*)$ con $x_2^* = 0$ resulta en $\tilde{\Delta}_Q(0) = \frac{3}{4}E^2$ y este valor es positivo, las raíces s_1, s_2 tendrán diferentes signos (ver figura 3.7); la raíz negativa no aplica para el convertidor Boost.

La desigualdad sobre el coeficiente de grado máximo se puede reescribir como $\gamma < \frac{E^2 R_0}{4\bar{x}_2^4}$ y la desigualdad del discriminante $\tilde{\Delta}_Q$ se puede reescribir como $\gamma < \frac{E^2 R_0}{3\bar{x}_2^4}$, así que tomamos la condición más restrictiva, por tanto, $\gamma \in \left(0, \frac{E^2 R_0}{4\bar{x}_2^4}\right)$ por estar en la hipótesis del caso **c**.

En la figura 3.7 se puede observar el comportamiento en forma general.

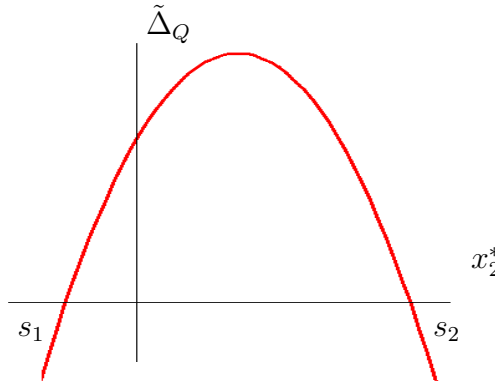


Figura 3.7: Comportamiento del Determinante $\tilde{\Delta}_Q$ con dos raíces reales y concavidad negativa

Se analiza a continuación la compatibilidad de esta condición con la existencia de una única raíz real.

El discriminante de Tartaglia-Cardano $\Delta_C = 0$, que tiene las siguientes soluciones $R_{1,2} = 0$ y $R_{3,4} = \frac{(2ER_0 - 9\gamma\bar{x}_2^4 \pm 2(E^2 - 3\bar{x}_2^4\gamma)^2 \sqrt{R_0(E^2 - 3\bar{x}_2^4\gamma)}) R_0 E}{\gamma\bar{x}_2^4(E^2 R_0 - 4\gamma\bar{x}_2^4)}$.

En este caso $R_{3,4}$ son raíces reales. En la figura 3.8 se muestra la gráfica de $\Delta_C(R)$.

De acuerdo con esto y bajo la hipótesis de tener una única raíz en el rango $R \in (R_4, R_3)$, siendo de interés $R \in (R_1, R_3)$.

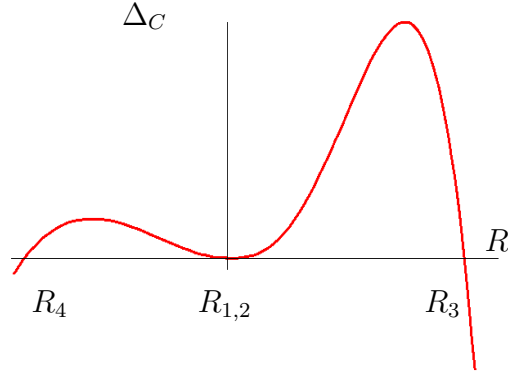


Figura 3.8: Comportamiento del Discriminate de Cardano Δ_C

Así pues para $R > 0$ se tiene un único valor de equilibrio real para la tensión de salida cuando $R \in (0, R_3)$.

Lema 1 Sea $R(s_2)$ el valor de la resistencia que se obtiene de sustituir s_2 en la ecuación (3.9), entonces se tiene $R(s_2) = R_3$.

Demostración: Partimos de la ecuación del determinante del segundo menor

$$\Delta_Q = -\frac{1}{2} \frac{E^2}{x_2^* \bar{x}_2} + \frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} + \frac{3}{4} \frac{E^2}{x_2^{*2}} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2}$$

dividiendo entre x_2^{*2} obtenemos

$$\tilde{\Delta}_Q = \Delta_Q x_2^{*2} = \left(\frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} \right) x_2^{*2} - \frac{1}{2} \frac{E^2}{\bar{x}_2} x_2^* + \frac{3}{4} E^2$$

la función cuadrática tiene dos soluciones posibles dadas por $s_1 = -\frac{(R_0 E + 2\sqrt{R_0^2 E^2 - 3R_0 \bar{x}_2^4 \gamma}) E \bar{x}_2}{E^2 R_0 - 4\bar{x}_2^4 \gamma}$ y $s_2 = -\frac{(R_0 E - 2\sqrt{R_0^2 E^2 - 3R_0 \bar{x}_2^4 \gamma}) E \bar{x}_2}{E^2 R_0 - 4\bar{x}_2^4 \gamma}$.

Con $x_2^* = s_2$ podemos hallar la resistencia utilizando la función

$$R = \frac{\bar{x}_2^2 x_2^{*3} R_0 \gamma}{(\bar{x}_2 - x_2^*) R_0 E^2 + \gamma \bar{x}_2^3 x_2^{*2}} = \frac{R_0}{1 + \frac{(\bar{x}_2 - x_2^*) R_0 E^2}{\bar{x}_2^2 x_2^{*3} \gamma}}$$

de la cual obtenemos

$$R(s_2) = -\frac{\gamma \bar{x}_2^4 E \left(R_0 E - 2\sqrt{R_0 (E^2 R_0 - 3\gamma \bar{x}_2^4)} \right)^3}{(-4\gamma \bar{x}_2^4 + E^2 R_0) \rho}$$

donde $\rho = 2E^4 R_0^2 - 7E^2 R_0 \gamma \bar{x}_2^4 + 2E \sqrt{R_0^2 E^2 - 3R_0 \gamma \bar{x}_2^4} (E^2 R_0 - 2\gamma \bar{x}_2^4) + 4\bar{x}_2^8 \gamma^2$.

La función Δ_Q es un polinomio de tercer grado, por lo que utilizamos Tartaglia-Cardano para obtener el discriminante Δ_C que separa el número de raíces reales dadas por

$$\Delta_C = \frac{1}{27} \frac{\bar{x}_2^2 R^4 E^2}{R_0^3 \gamma} - \frac{1}{108} \frac{E^4 R^4}{\gamma^2 \bar{x}_2^2 R_0^2} - \frac{1}{6} \frac{E^4 R^3}{\gamma^2 \bar{x}_2^2 R_0} + \frac{1}{4} \frac{R^2 E^4}{\gamma^2 \bar{x}_2^2} + \frac{1}{27} \frac{E^6 R^3}{\gamma^3 \bar{x}_2^6}$$

Para $\Delta_C = 0$ los valores de R que son soluciones están dadas por $R_{1,2} = 0$ y $R_{3,4} = \frac{(2ER_0 - 9\gamma\bar{x}_2^4 \pm 2(E^2 - 3\bar{x}_2^4\gamma)^2 \sqrt{R_0(E^2 - 3\bar{x}_2^4\gamma)}) R_0 E}{\gamma\bar{x}_2^4 (E^2 R_0 - 4\gamma\bar{x}_2^4)}$.

Igualamos $R(s_2) = R_3$, reducimos las fracciones eliminando los denominadores y agrupamos términos en el lado izquierdo de la ecuación de lo que resulta:

$$\begin{aligned} & - (E^2 R_0 - 4\gamma \bar{x}_2^4) \gamma^2 \bar{x}_2^8 E \left(ER_0 - 2\sqrt{R_0(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)} \right)^3 - (E^2 R_0 - 4\gamma \bar{x}_2^4) \\ & \left(2E^4 R_0^2 - 7E^2 R_0 \bar{x}_2^4 \gamma + (4\gamma \bar{x}_2^4 E - 2R_0 E^3) \sqrt{R_0(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)} + 4\gamma^2 \bar{x}_2^8 \right) \\ & \left(2E^3 R_0^2 - 9\bar{x}_2^4 \gamma ER_0 + (2R_0 E^2 - 6\bar{x}_2^4 \gamma) \sqrt{R_0(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)} \right) R_0 E = 0 \end{aligned}$$

Finalmente, expandiendo cada uno de los términos la parte de la derecha, de la ecuación anterior, se hace igual a cero, lo que permite probar el Lema. QED.

Proposición 2 *Para valores de R en el intervalo $(0, R_3)$ el sistema en lazo cerrado tiene un único punto de equilibrio que es globalmente asintóticamente estable.*

Demostración: Del Lema, $R(s_2) = R_3$. En consecuencia, $\tilde{\Delta}_Q(x_2^*) > 0$ para cualquiera $R \in (0, R_3)$. La misma función Δ_Q del apartado **a**) califica como función de Lyapunov. QED.

Se han tratado tres casos y existe uno más, en el cual $\frac{\gamma \bar{x}_2^2}{R_0} - \frac{1}{4} \frac{E^2}{\bar{x}_2^2} < 0$ y el discriminante $E^2 \frac{(E^2 R_0 - 3\bar{x}_2^4 \gamma)}{\bar{x}_2^2 R_0} < 0$, implicando que $\gamma < \frac{E^2 R_0}{4\bar{x}_2^4}$ y $\gamma > \frac{E^2 R_0}{3\bar{x}_2^4}$, esto hace que el rango de valores de γ sea vacío. Por tanto, las dos soluciones s_1, s_2 son imaginarias y la matriz simétrica del sistema es definida negativa, ésta condición no tiene aplicabilidad para nuestro estudio puesto que debe cumplirse que todos los menores de la matriz sean definidos positivos (Sylvester).

Directivas de Diseño. Una vez obtenidas las zonas de operación estable, debemos elegir cual de estas opciones es la más adecuada para el funcionamiento del convertidor en lazo cerrado. Estableceremos entonces algunas directivas para el diseño del convertidor.

Del análisis realizado hasta el momento, existen 3 zonas de operación en el rango de la carga $R \in (0, +\infty)$, a saber:

1. Zona de concavidad positiva con raíces imaginarias.
2. Zona de concavidad positiva con raíces reales.
3. Zona de concavidad negativa con raíces reales.

Se tiene, entonces,

1. En esta zona de operación existe un hecho importante, el sistema en lazo cerrado tiene un único punto de equilibrio real globalmente asintóticamente estable en todo el rango de la carga $R \in (0, +\infty)$. Desde el punto de vista matemático es la mejor opción ya que la estabilidad está asegurada independientemente del valor que tome la carga. Sin embargo, existe una condición que debe ser satisfecha, cual es $\gamma > \frac{E^2 R_0}{4\bar{x}_2^4}$. Esta condición podemos reescribirla sabiendo que la tensión de salida del convertidor nunca será menor que la de alimentación ($x_2^* = kE$, donde $k \geq 1$), entonces $\gamma > \frac{R_0}{4k^4 E^2}$, esto implica valores de $x_2^* \in (0, +\infty)$. Sin embargo no siempre es posible utilizar parámetros que permitan establecer estas condiciones.
2. En esta zona la función de equilibrio tiene dos regiones, a saber
 - Definida en el rango $R \in [0, R_{s1}] \cup [R_{s2}, +\infty]$ globalmente asintóticamente estable con una única raíz.
 - Definida en el rango $R \in (R_{s1}, R_{s2})$ sin definición de la estabilidad con tres raíces reales.

La zona opera con las restricciones $\frac{E^2 R_0}{3\bar{x}_2^4} > \gamma > \frac{1}{4} \frac{E^2 R_0}{\bar{x}_2^4}$, esto limita el rango de γ para establecer una zona de estabilidad y las restricciones dificultan el establecimiento de la ganancia adecuada.

3. En esta zona la función de equilibrio se separa en dos regiones, a saber:

- Definida en el rango $R \in (R_{s_1}, R_{s_2})$ globalmente asintóticamente estable con una única raíz.
- Definida en el rango $R \in (-\infty, R_{s_1}) \cup (R_{s_2}, +\infty)$ sin definición de la estabilidad con tres raíces reales.

Para esta zona la restricción se invierte por efecto del cambio de concavidad, entonces se transforma en $\gamma < \frac{E^2 R_0}{3\bar{x}_2^4} = \frac{R_0}{3k^4 E^2}$. Dado que R_0 es pequeño en convertidores de mediana y alta potencia, este rango es más adecuado para el funcionamiento puesto que permite ajustar la ganancia de lazo para minimizar el máximo valor de los transitorios y evitar que la saturación pueda dañar el equipo u obligarlo a entrar en zonas inestables.

Como puede verse, existe una gama de posibilidades para el diseño del convertidor; cada una con sus ventajas y desventajas, dependiendo de los parámetros. Uniendo estos conceptos de diseño, la mejor de las opciones ha sido la última; puesto que permite valores de γ lo suficientemente pequeños para que los transitorios en las implementaciones de laboratorio lo saturen.

3.3.2. Caso $\Delta_C < 0$

Consideremos ahora el caso en el que el sistema presenta tres puntos de equilibrio que representaremos mediante (x_{1a}^*, x_{2a}^*) , (x_{1b}^*, x_{2b}^*) , (x_{1c}^*, x_{2c}^*) .

Como en el caso anterior, analizamos la dinámica del error respecto a uno de estos puntos de equilibrio. Sean $(e_1, e_2) = (x_1, x_2) - (x_1^*, x_2^*)$ las nuevas variables de error. La dinámica del error dada en (3.13) sigue siendo válida. Dicha dinámica se puede representar mediante el siguiente sistema bidimensional

$$\begin{aligned} C\dot{e}_1 &= -\frac{E}{\bar{x}_2}e_2 - \gamma\bar{x}_2 e_1 e_2 - \gamma\bar{x}_2 e_2 x_{1b}^* - \gamma\bar{x}_2 x_{2b}^* e_1 + \frac{\gamma\bar{x}_2^2 e_2^2}{R_o E} + 2\gamma\frac{\bar{x}_2^2 e_2 x_{2b}^*}{R_o E} \\ L\dot{e}_2 &= \frac{E}{\bar{x}_2}e_1 + \gamma\bar{x}_2 e_1^2 + 2\gamma\bar{x}_2 x_{1b}^* e_1 - \frac{\gamma\bar{x}_2^2 e_2 e_1}{R_o E} - \frac{\gamma\bar{x}_2^2 e_2 x_{1b}^*}{R_o E} - \frac{\gamma\bar{x}_2^2 x_{2b}^* e_1}{R_o E} - \frac{e_2}{R} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nótese que se trata de un sistema cuadrático. Para su análisis se recurre a los resultados de Perko [Per01], Dickson y Perko [Dic70] y Coppel [Cop66] para sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden cuadráticos.

Proposición 3 *Bajo la suposición de que $\Delta_C < 0$, el sistema cuadrático (3.15) tiene todas las soluciones acotadas y presenta tres puntos de equilibrio, de los cuales uno es un punto de silla y los demás bien focos o bien nodos.*

Demostración: Un cálculo bastante laborioso, cuyos detalles se trasladan al apéndice B, muestra que el sistema definido en (3.15) es afinmente equivalente (en realidad la transformación es un automorfismo del plano) al sistema tipo (3.3) del Teorema 1.

El automorfismo que permite justificar el resultado es:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

con dos soluciones posibles:

$$q_{11} = \sqrt{\frac{C}{L}} q_{22}, \quad q_{12} = -\frac{q_{22} C R_o E}{L \bar{x}_2}, \quad q_{21} = \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{q_{22} R_o E}{\bar{x}_2}$$

y

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{C}{L}} q_{22}, \quad q_{12} = -\frac{q_{22} R_o E}{\bar{x}_2}, \quad q_{21} = -\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{q_{22} R_o E}{\bar{x}_2}$$

El sistema transformado es:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_{11} z_1 + a_{12} z_2 + z_2^2 \\ \dot{z}_2 &= a_{21} z_1 + a_{22} z_2 - z_1 z_2 + c z_2^2 \end{aligned}$$

De acuerdo con el Lema 1, se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} c &= 0, \quad a_{11} = -\frac{R_0^2 E^2}{R(\bar{x}_2^2 L + R_0^2 E^2 C)}, \\ a_{12} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{(2x_{2_b}^* \gamma \bar{x}_2^3 (L\bar{x}_2 (R\bar{x}_2 - x_{2_b}^* R_0) + RR_0^2 E^2 C) - (2\gamma x_{2_b}^{*2} C R_0^2 + L(R_0 + R)) R_0 E^2 \bar{x}_2^2 - E^4 R_0^3 R C)}{L\bar{x}_2 R R_0 E (\bar{x}_2^2 L + R_0^2 E^2 C)}, \\ a_{21} &= \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{(\gamma \bar{x}_2^3 x_{2_b}^* (L\bar{x}_2 (x_{2_b}^* R_0 - R\bar{x}_2) - C R R_0^2 E^2) + E^2 R_0 (\gamma x_{2_b}^{*2} C R_0^2 + L(R - R_0)) \bar{x}_2^2 + E^4 R_0^3 C R)}{\bar{x}_2 R R_0 E (\bar{x}_2^2 L + R_0^2 E^2 C)}, \\ a_{22} &= -\frac{\bar{x}_2 (\gamma \bar{x}_2^3 x_{2_b}^* L^2 + \gamma \bar{x}_2^2 x_{2_b}^* C R R_0 E^2 L + E^2 L R_0 \bar{x}_2 (\gamma x_{2_b}^{*2} C R_0 + L) + \gamma x_{2_b}^* R_0^3 E^4 C^2 R)}{E^2 L C R R_0 (\bar{x}_2^2 L + R_0^2 E^2 C)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el carácter acotado de las soluciones es consecuencia directa del Teorema 1 de Perko. La existencia de tres puntos de equilibrio es consecuencia de $\Delta_C < 0$.

Finalmente, dado que el determinante $d = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ y $b^2 - 4d = \frac{\bar{x}_2 \gamma (R\bar{x}_2 (E R_0 x_1^* - \bar{x}_2 x_2^*)^2 \gamma^{-4} E^2 R_0^2 x_2^*)}{C R L R_0^2 E^2} > 0$; del Lema 1 se tiene el punto de equilibrio “intermedio” es un punto de silla y los demás son focos o nodos. QED.

En la sección 3.5 comprobaremos para los parámetros del convertidor que utilizados, que los puntos de equilibrio son: un foco estable, un punto de silla y un nodo estable. Además, una de las componentes de la variedad inestable del punto de silla converge hacia el foco y la otra es una de las variedades estables del nodo. Por lo que respecta a la variedad estable del punto de silla y a la otra variedad estable del nodo, ambas tienen su origen en algún punto del infinito. El esquema c, correspondiente, es el de la figura 3.2.

3.4. Efectos de los Cambios de la Carga del Convertidor Boost Utilizando su Modelo Joule

En esta sección aplicamos el procedimiento anterior al modelo Joule descrito en el segundo capítulo. Se supone se ha diseñado una ley de control obtenida en base a la dinámica exacta del error de seguimiento, dada por:

$$u = \bar{u} - \gamma [(V_f - V_q) (x_1 - \bar{x}_1) + x_1 \bar{x}_2 - x_2 \bar{x}_1],$$

sobre la base de una carga nominal R_0 . La carga real se supone toma valores en el intervalo $(0, \infty)$.

Para la componente de prealimentación (*feedforward*), \bar{u} , del controlador, requerimos de las ecuaciones originales del sistema (Capítulo 2, Sección 2.3) a objeto de determinar los puntos de equilibrio. Se obtienen los siguientes equilibrios:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &= V_d \\ \bar{x}_1 &= \frac{R_0 (E - V_q) \pm \sqrt{((E - V_q)^2 R_0 - 4\bar{x}_2 (\bar{x}_2 + V_f - V_q) (R_{in} + R_j)) R_0}}{2R_0 (R_{in} + R_j)}, \\ \bar{u} &= \frac{(2V_f + 2\bar{x}_2 - V_q - E) R_0 \pm \sqrt{((E - V_q)^2 R_0 - 4\bar{x}_2 (\bar{x}_2 + V_f - V_q) (R_{in} + R_j)) R_0}}{2R_0 (\bar{x}_2 + V_f - V_q)} \end{aligned}$$

de los que se eligen el de menor corriente,

$$\bar{u} = \frac{(2V_f + 2\bar{x}_2 - V_q - E) R_0 - \sqrt{((E - V_q)^2 R_0 - 4\bar{x}_2 (\bar{x}_2 + V_f - V_q) (R_{in} + R_j)) R_0}}{2R_0 (\bar{x}_2 + V_f - V_q)}$$

Las ecuaciones del sistema en lazo cerrado están dadas por:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1-\bar{u}) \\ (1-\bar{u}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} + R_j & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} E + \gamma\bar{x}_1(V_f - V_q)^2 - V_q\bar{u} - (1-\bar{u})V_f \\ -\gamma\bar{x}_1(V_f - V_q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \gamma\bar{x}_1x_2 \\ -\gamma\bar{x}_1x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & -\gamma x_1(\bar{x}_2 + V_f - V_q) \\ \gamma x_1(\bar{x}_2 + V_f - V_q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&+ \gamma(V_f - V_q) \begin{bmatrix} -(\bar{x}_2 + V_f - V_q) & 2\bar{x}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Los puntos de equilibrio del sistema en lazo cerrado vienen dados por la solución de

$$\begin{aligned}
0 &= -(1-\bar{u})x_2^* + E + \gamma\bar{x}_1x_2^{*2} - \gamma(\bar{x}_2 + V_f - V_q)x_1^*x_2^* + 2\gamma\bar{x}_1x_2^*(V_f - V_q) \\
&- \gamma x_1^*(V_f - V_q)(\bar{x}_2 + V_f - V_q) + \gamma\bar{x}_1(V_f - V_q)^2 - x_1^*(R_{in} + R_j) - V_f(1-\bar{u}) - V_q\bar{u} \\
0 &= x_1^*(1-\bar{u}) - \frac{x_2^2}{R} + \gamma x_1^{*2}(\bar{x}_2 + V_f - V_q) - x_1^*\gamma\bar{x}_1x_2^* - x_1^*\gamma\bar{x}_1(V_f - V_q)
\end{aligned}$$

Despejando x_1^* de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene una ecuación cúbica en la tensión de salida en equilibrio:

$$x_2^{*3} + s_1x_2^{*2} + s_2x_2^* + s_3 = 0$$

donde los coeficientes s_1, s_2, s_3 son funciones racionales en $\bar{x}_1, \bar{x}_2, R_0, R_{in}, R_j, V_f, V_q$ y γ . En función de los valores de los parámetros, el discriminante de la ecuación cúbica tendrá signo positivo o negativo. En el primer caso el sistema en lazo cerrado presenta un único punto de equilibrio, mientras que en el segundo caso se tienen tres puntos de equilibrio.

Con el objeto de analizar ambos casos, recurriremos a los Lemas y Teoremas que

hemos presentado anteriormente. Fijando uno de los equilibrios y escribiendo, en detalle, la dinamica del error se tiene:

$$\begin{aligned}
 L\dot{e}_1 &= -(1 - \bar{u})e_2 - e_1(R_{in} + R_j) - (\bar{x}_2 + V_f - V_q)e_1x_2^* - \gamma(V_f - V_q)\bar{x}_2e_1 + \gamma\bar{x}_1e_2^2 \\
 &- \gamma(V_f - V_q)^2e_1 + 2(\bar{x}_1 + V_f - V_q)\bar{x}_1e_2 - \gamma(\bar{x}_2 + V_f - V_q)x_1^*e_2 - (\bar{x}_2 + V_f - V_q)e_1e_2 \\
 C\dot{e}_2 &= (1 - \bar{u})e_1 - \frac{e_2}{R} - \gamma\bar{x}_1e_2e_1 + \gamma(\bar{x}_2 + V_f - V_q)e_1^2 \\
 &+ 2\gamma e_1x_1^*(\bar{x}_2 + V_f - V_q) - \gamma\bar{x}_1e_2x_1^* - \gamma\bar{x}_1(V_f - V_q) - \gamma\bar{x}_1\bar{x}_2x_2^*
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Proposición 4 *La dinámica del error descrita en (3.17) es afínmente equivalente a un sistema del tipo (3.3) del Teorema 1.*

Demostración: Un cálculo, que se muestra en el Apéndice C, muestra que el sistema definido en (3.16) es afínmente equivalente al sistema tipo (3.3) del Teorema 1.

Derivando el cambio de variables

$$\begin{aligned}
 e_1 &= q_{11}z_1 + q_{12}z_2 \\
 e_2 &= q_{21}z_1 + q_{22}z_2
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

resulta en

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_1 &= q_{11}\dot{z}_1 + q_{12}\dot{z}_2 \\
 \dot{e}_2 &= q_{21}\dot{z}_1 + q_{22}\dot{z}_2
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

e igualando con (3.17) se obtiene un sistema de ecuaciones para $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ cuya solución es:

$$q_{11} = q_{22}, q_{12} = -\frac{q_{22}\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, q_{21} = \frac{q_{22}\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$$

o

$$q_{11} = -q_{22}, q_{12} = -\frac{q_{22}\bar{x}_2}{\bar{x}_1}, q_{21} = -\frac{q_{22}\bar{x}_2}{\bar{x}_1}$$

En el caso de ser necesario para completar el sistema afín el tiempo puede ser escalado haciendo $t = q_0\tau$.

Revirtiendo la transformación podemos obtener los términos del sistema (3.17) que

están dados por:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -\frac{(R_j + R_{in})\bar{x}_1^2 R + \bar{x}_{2fq}^2}{R(\bar{x}_1^2 L + C\bar{x}_{2fq}^2)} \\
a_{12} &= \frac{(-2C\bar{x}_{2fq}^3 x_{1b}^* \gamma + C\bar{x}_{2fq}^2 (2x_{2fq}^* \gamma \bar{x}_1 - (1-\bar{u})) + (1-\bar{u})\bar{x}_1^2 L + 2\bar{x}_1 \bar{x}_{2fq} (C(R_j + R_{in}) - (1+x_{1b}^* \gamma \bar{x}_1)) + 2\gamma x_{2fq}^* \bar{x}_1^3 L)}{L(\bar{x}_1^2 L + C\bar{x}_{2fq}^2) \sqrt{\frac{C}{L}}} \\
a_{21} &= \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{(x_{1b}^* \gamma \bar{x}_{2fq}^3 C + \bar{x}_{2fq}^2 C((1-\bar{u}) - x_{2fq}^* \gamma \bar{x}_1) + \bar{x}_{2fq} \bar{x}_1 (x_{1b}^* \gamma \bar{x}_1 L + (R_j + R_{in})C) + \bar{x}_1^2 L((1-\bar{u}) - \gamma x_{2fq}^* \bar{x}_1))}{(\bar{x}_1^2 L + C\bar{x}_{2fq}^2)} \\
a_{22} &= -\frac{(\bar{x}_{2fq}^2 R(\bar{x}_{2fq} x_{2fq}^* \gamma + R_j + R_{in})C^2 + \bar{x}_{2fq} \bar{x}_1 (x_{2fq}^* \bar{x}_1 + \bar{x}_{2fq}^2 x_{1b}^*) \gamma RLC + L^2 \bar{x}_1^2 (R\gamma x_{1b}^* \bar{x}_1 + 1))}{RL(\bar{x}_1^2 L + C\bar{x}_{2fq}^2) C}
\end{aligned}$$

donde $\bar{x}_{2fq}^2 = \bar{x}_2 + V_f - V_q$ y $x_{2fq}^* = x_{2b}^* + V_f - V_q$. QED.

Corolario 5 *Todas las trayectorias del sistema (3.17) están acotadas.*

Analizamos a continuación dos casos en función del número de puntos de equilibrio reales del sistema.

3.4.1. Caso de una raíz real $\Delta_c > 0$

De acuerdo con el Teorema 2, el sistema (3.17) tiene la configuración (c) de la figura 3.2 si se cumple:

$$a_{11} < 0 \quad (3.20)$$

$$|c| < 2 \quad (3.21)$$

$$(a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \quad (3.22)$$

$$a_{11} + a_{22} < 0 \quad (3.23)$$

Sustituyendo los parámetros del modelo por efecto Joule donde R_{in}, R_j, R, γ y $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_{2fq}, \bar{x}_{2fq}^*$ son positivos, podemos revisar las condiciones:

- Tenemos que $a_{11} = -\frac{(R_j + R_{in})\bar{x}_1^2 R + \bar{x}_{2fq}^2}{R(\bar{x}_1^2 L + C\bar{x}_{2fq}^2)} < 0$ luego la condición (3.20) se cumple.
- $|c| < 2$ se cumple puesto que $c = 0$.
- Sustituyendo en $(a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$ obtenemos como restricción:

$$R < -\frac{\bar{x}_{2fq} x_{2fq}^* \gamma + R_j + R_{in}}{\left(x_{1b}^* \bar{x}_1 (R_j + R_{in}) - \frac{1}{4} \left(x_{2fq}^* \bar{x}_1 + x_{1b}^* \bar{x}_{2fq}\right)^2 \gamma\right) \gamma}, \quad (3.24)$$

dado que $R > 0$ es necesario que $x_{1_b}^* \bar{x}_1 (R_j + R_{in}) - \frac{1}{4} (x_{2_{fq}}^* \bar{x}_1 + x_{1_b}^* \bar{x}_{2_{fq}})^2 \gamma < 0$ esto implica que

$$R_j < \frac{(x_{2_{fq}}^* \bar{x}_1 + x_{1_b}^* \bar{x}_{2_{fq}})^2 \gamma - 4x_{1_b}^* \bar{x}_1 R_{in}}{4x_{1_b}^* \bar{x}_1},$$

por lo cual se requiere que

$$R_{in} < \frac{(x_{2_{fq}}^* \bar{x}_1 + x_{1_b}^* \bar{x}_{2_{fq}})^2 \gamma}{4x_{1_b}^* \bar{x}_1}$$

La verificación de estas dos desigualdades sobre R_j y R_{in} indican que modelo responde a sistema físico real.

- Dado que $a_{11} < 0$, para que $a_{11} + a_{22} < 0$ se cumpla basta que $a_{22} < 0$, entonces

$$a_{22} = -\frac{(\bar{x}_{2_{fq}}^2 R (\bar{x}_{2_{fq}} x_{2_{fq}}^* \gamma + R_j + R_{in}) C^2 + \bar{x}_{2_{fq}} \bar{x}_1 (x_{2_{fq}}^* \bar{x}_1 + \bar{x}_{2_{fq}}^2 x_{1_b}^*) \gamma RLC + L^2 \bar{x}_1^2 (R \gamma x_{1_b}^* \bar{x}_1 + 1))}{RL(\bar{x}_1^2 L + C \bar{x}_{2_{fq}}^2) C} < 0.$$

Así pues, para valores de resistencia que satisfagan (3.24), el convertidor en lazo cerrado esencialmente es un sistema acotado y se corresponde a la figura (c) del atlas BQS1 (figura 3.1) con un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable.

3.4.2. Caso de tres raíces reales $\Delta_c < 0$

Ya hemos comprobado que la dinámica del error respecto a uno de los puntos de equilibrio es afinmente equivalente al sistema (3.3) con

$$a_{11} = -\frac{(R_j + R_{in}) \bar{x}_1^2 R + (\bar{x}_2 + V_f - V_q)^2}{R (\bar{x}_1^2 L + C (\bar{x}_2 + V_f - V_q)^2)} \neq 0$$

Por lo tanto, también en este caso la dinámica del error tiene todas sus trayectorias acotadas.

La hipótesis añadida de tener tres puntos de equilibrio, junto con el Lema 1 implicará $d \neq 0$ y $b^2 < 4d$ donde $b = a_{12} - a_{21} + ca_{11}$ y $d = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Además, según el mismo Lema 1, con indexado apropiado $x_2^1 < x_2^2 < x_2^3$ se tiene que $Q_2 = (x_1^2, x_2^2)$ es un punto de silla y que $Q_1 = (x_1^1, x_2^1)$ y $Q_3 = (x_1^3, x_2^3)$ son nodos o focos.

Resultados numéricos, que detallamos en la sección 3.5 (simulaciones) muestran que para los valores considerados de los parámetros, los equilibrios Q1 y Q3 son un foco y un nodo estables respectivamente. Este tipo de comportamiento corresponde al diagrama (c) del atlas mostrado en la figura 3.2.

Nótese que, tal como ocurre en el caso ideal, la variedad inestable del punto de silla converge hacia el foco y la otra es una de las variedades estables del nodo. Por lo que respecta a la variedad estable del punto de silla y a la otra variedad estable del nodo, ambas tienen su origen en algún punto del infinito.

3.5. Simulaciones

Modelo Ideal. Las simulaciones que se presentan en esta sección se corresponden con un prototipo experimental cuyos parámetros son $E = 10$ voltios, $L = 33 \mu\text{H}$, $C = 1000 \mu\text{F}$, $R_0 = 2 \Omega$. El lazo de control se ha cerrado mediante la ley $u = \frac{1}{2} - 0.002x_1 + 0.002x_2$ que proviene de tomar los parámetros $\bar{x}_2 = 20$ voltios, $\bar{x}_1 = 20$ amperios, $\bar{u} = 0.5$ y $\gamma = 0.0001$.

La dinámica del sistema en lazo abierto en equilibrio está dada por:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= 10 - (1 - u) \\ C\dot{x}_2 &= (1 - u)x_1 - \frac{x_2}{R} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Mientras que la dinámica en lazo cerrado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 303030.303 - 15151.515x_2 - 60.606x_2x_1 + 60.606x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 5000x_1 + 20x_1^2 - 20x_2x_1 - 10000\frac{x_2}{R} \end{aligned} \quad (3.26)$$

La ecuación cúbica que debe satisfacer la tensión de salida es

$$y = -\frac{2500}{x_2^*} + 10 + \frac{50000}{x_2^{*2}} - \frac{x_2^*}{R} \quad (3.27)$$

Dicha ecuación es equivalente a

$$y_1 = 2500x_2^*R - 10x_2^{*2}R - 50000R + x_2^{*3} \quad (3.28)$$

El discriminante de (3.28) vale

$$\Delta_c = -3.935185185 \times 10^6 R^4 + 3.7037037 \times 10^8 R^3 + 6.25 \times 10^8 R^2 \quad (3.29)$$

y se anula para $R_{1,2} = 0$, $R_3 = 95.77592938$ y $R_4 = -1.65828231$. La figura 3.9 muestra el discriminante como función de $R \in (0, \infty)$. Para valores de la carga R en el intervalo $(0, R_3)$ el sistema en lazo cerrado presenta un único punto de equilibrio mientras que, para $R > R_3$ el sistema presenta tres puntos de equilibrio.

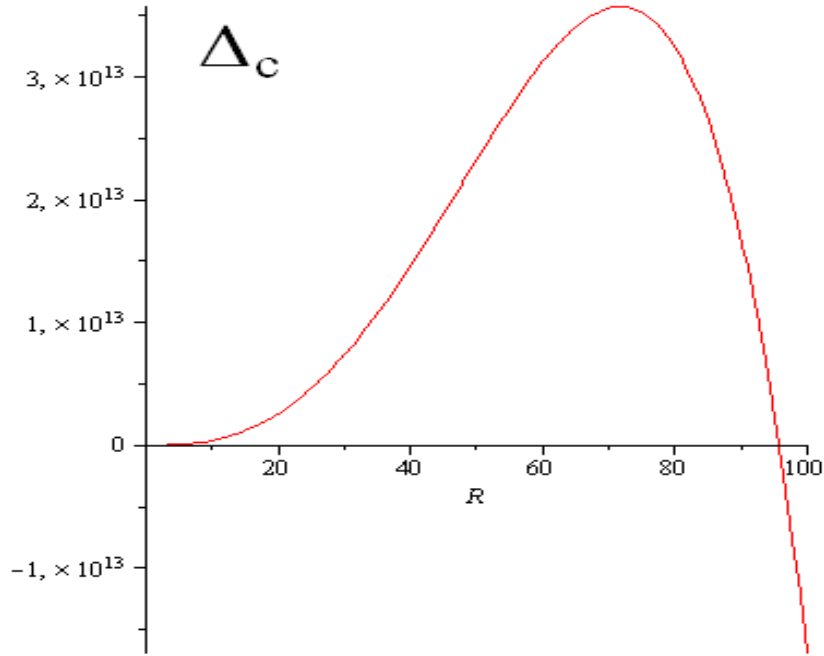


Figura 3.9: Discriminante de Cardano para la Función Cúbica de los equilibrios del Convertidor

La estabilidad del punto de equilibrio para el caso de una única raíz se ha justificado en base a la función de Lyapunov $V(e_1, e_2) = Le_1^2 + Ce_2^2$. Vimos que derivando se puede escribir como una función cuadrática a la cual aplicamos el criterio de Sylvester. El determinante de dicha forma cuadrática resulta en:

$$\Delta = 0.0020 \frac{x_2^*}{R} + 2 \times 10^{-7} \frac{x_2^{*3}}{R} - 0.000001 x_2^{*2} - 10^{-8} \frac{x_2^{*4}}{R^2}$$

Despejando R de la ecuación (3.28) y sustituyendo en Δ se obtiene

$$y_2 = -\frac{5}{2}x_2^* - 0.0425x_2^{*2} + 75$$

cuya gráfica se presenta en la figura 3.10.

Se tiene $\Delta > 0$ para $x_2^* \in (-80.692, 21.86939)$ que equivale, utilizando de nuevo (3.28), a $R(x_2^*) \in (-6.065732, 95.775929)$.

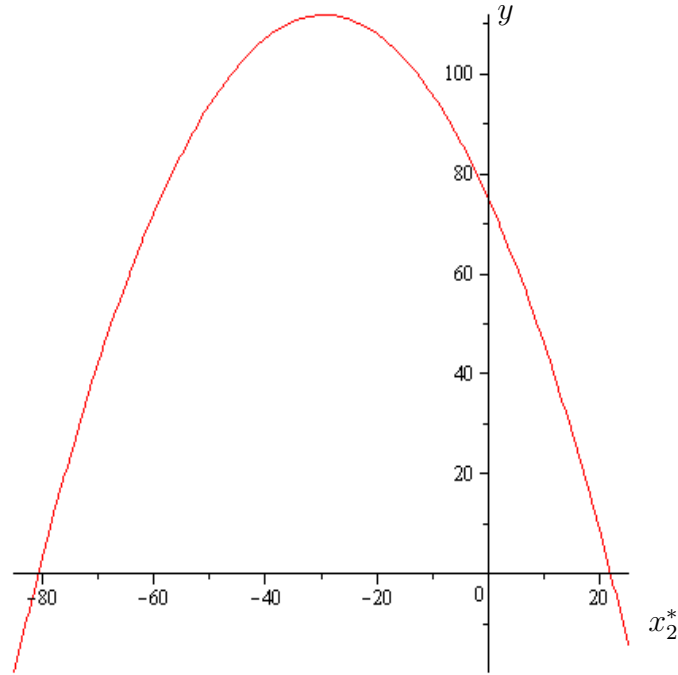


Figura 3.10: Determinante para el segundo menor de la matriz simétrica de la derivada de la función de Lyapunov

Caso de tres equilibrios reales

Tomando $R = 100 \Omega$ se obtienen tres soluciones de la ecuación (3.26), a saber:

$$\begin{aligned} x_{1_a}^* &= 0.4783677790 & x_{2_a}^* &= 21.87162040 \\ x_{1_b}^* &= 149.1654866 & x_{2_b}^* &= 386.2194798 \\ x_{1_c}^* &= 350.3561456 & x_{2_c}^* &= 591.9088998 \end{aligned}$$

El análisis de los autovalores de la matriz jacobiana del campo vectorial, evaluado en el equilibrio muestra que:

1. $(x_{1_a}^*, x_{2_a}^*)$ es un foco estable, y los autovalores son $\lambda_{1_a} = -668.25474 + 2304.0309j$ y $\lambda_{2_a} = -668.25474 - 2304.0309j$
2. $(x_{1_b}^*, x_{2_b}^*)$ es un punto de silla, y los autovalores son $\lambda_{1_b} = -23720.5301$ y $\lambda_{2_b} = 4.9578$

3. (x_{1c}^*, x_{2c}^*) es un nodo estable, y los autovalores son $\lambda_{1c} = -36580.6989$ y $\lambda_{2c} = -3.2818$

Un barrido del parámetro R entre $R_3 = 95.7759 \Omega$ y $R = 10M \Omega$ muestra que esta situación de estabilidad se mantiene.

En la figura 3.11 se muestra el plano de fase del modelo Ideal del convertidor en lazo cerrado.

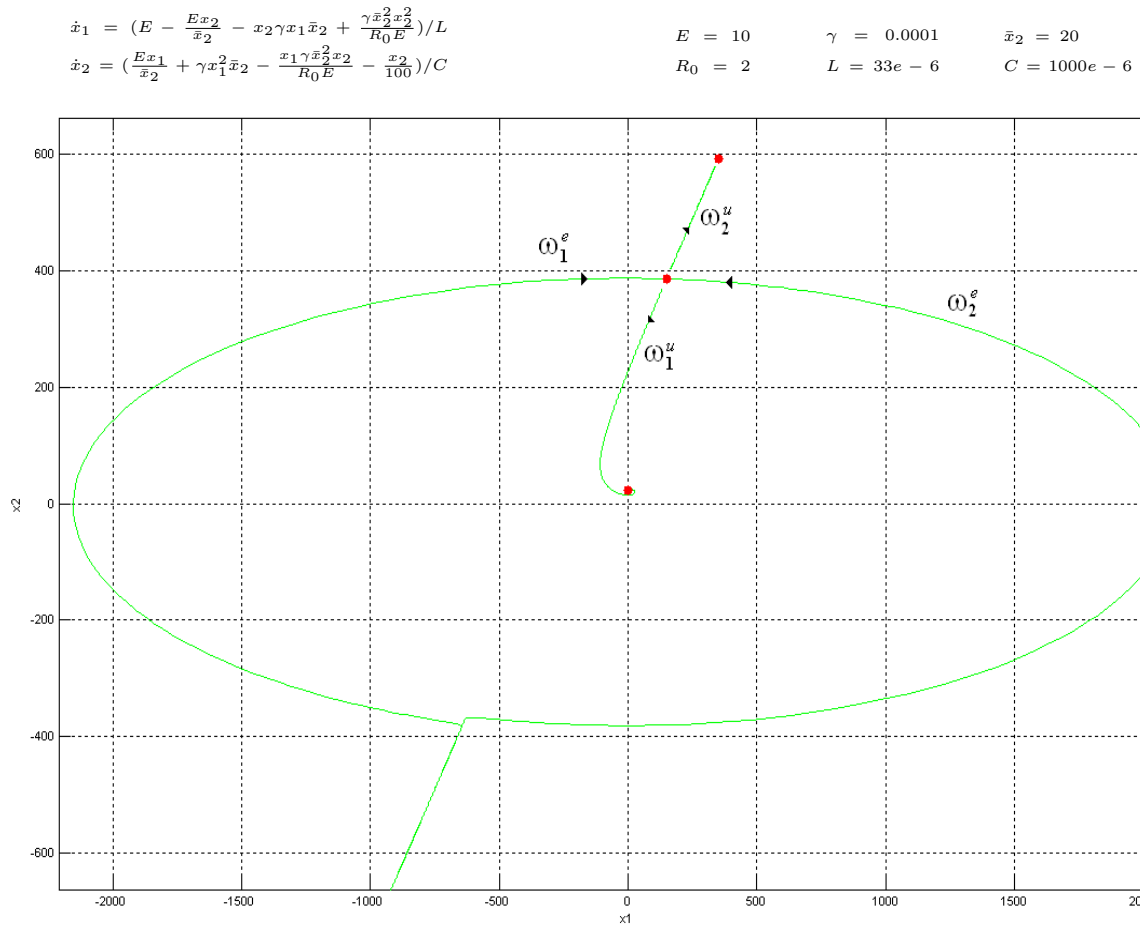


Figura 3.11: Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Ideal en Lazo Cerrado tres Raíces Reales

Obsérvese como las ramas de la variedad inestable del punto de silla, ω_1^u y ω_2^u , convergen hacia el foco y el nodo respectivamente mientras que la variedad estable del punto de silla tiene su origen en el infinito. Todo lo anterior confirma los resultados detallados en la sección 3.4.2.

Modelo Joule. Para el modelo Joule del convertidor se utilizan los mismos valores

de los parámetros comunes con el modelo ideal. Los parámetros específicos del modelo Joule tienen los valores $R_{in} = 0.01 \Omega$, $R_j = 0.021 \Omega$, $V_q = 1.05$ voltios, $V_f = 0.94$ voltios.

De la dinámica en lazo abierto se obtienen los equilibrios del sistema original que vienen dados por $\bar{x}_2 = 20$ voltios, $\bar{x}_1 = 23.5423$ amperios, $\bar{u} = 0.575$.

La dinámica del sistema en lazo cerrado, utilizando la ley de control del modelo Joule $u = 0.5752 - 0.002011x_1 + 0.00035423x_2$, está dada por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -673.369x_1 + 273130.426 + 71.34x_2^2 - 12856.039x_2 - 60.939x_2x_1 \\ \dot{x}_2 &= 424.508x_1 + 2.011x_1^2 - 2.354x_2x_1 - 1000\frac{x_2}{R} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Tal como se probó en la sección 3.4, este sistema presenta uno o tres puntos de equilibrio en función del valor de R .

Con objeto de distinguir cada uno de los dos casos, se sustituyen a continuación los valores de los coeficientes a_{11} , a_{12} , a_{21} y a_{22} que se obtienen de transformar, mediante una transformación afín, el sistema (3.30) en el sistema tipo (3.3) descrito en el Teorema 1,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{(2.4701(0.27605R+404.4121))}{R} \\ a_{12} &= \frac{13597.98125((-0.17035+0.0002868x_2^*-0.0016282x_1^*)R-0.0023507)}{R} \\ a_{21} &= -\frac{1.1632 \times 10^8((-0.00002028+1.6763 \times 10^{-8}x_2^*-9.5165 \times 10^{-8}x_1^*)R+2.7479 \times 10^{-7})}{R} \\ a_{22} &= \frac{1.0228+(-672.688-60.9393x_2^*-0.35423x_1^*)R}{R} \end{aligned}$$

donde (x_1^*, x_2^*) son funciones que dependen de R .

Tal como se deriva del Lema 1, si se sustituyen los parámetros en cada una de las restricciones, éstas toman la forma:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{(2.3657(12.1932R+404.4121))}{R} < 0 \\ 0 &= |c| < 2 \\ a_{11} + a_{22} &= -\frac{(2.3657(12.1932R+404.4121))}{R} - \frac{43.269+(644.5239+60.9393x_2^*+2.35423x_1^*)R}{R} < 0 \end{aligned}$$

Estas condiciones se cumplen para cualquier $R > 0$ y para $x_1^*, x_2^* > 0$.

La condición restante establece que para el caso de una única raíz real se debe cumplir:

$$(a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 < 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

y en el caso de tres raíces reales se tiene que

$$(a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 > 4(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

Para el caso de tres raíces reales debe cumplirse además que

$$d = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 2.4242(-23.5423 x_2^* - 2.5896 + 20.11x_1^*)^2 + 3.1689 \times 10^5 x_1^* - 3.6363 \times 10^5 x_2^* + 2.1829 \times 10^7 + \frac{2.4375 \times 10^5 x_2^* + 2.6934 \times 10^6}{R} \neq 0$$

Caso de un equilibrio real. Haciendo un barrido en el rango $R \in (0, 94.12873978)$ donde existe un único equilibrio, encontramos que el mismo puede ser nodo o foco estable. Utilizando simulaciones hemos observado que para valores de $R > 0.106046261 \Omega$ el equilibrio es un foco y es un nodo para valores menores.

De lo anterior, se toma $R = 0.1 \Omega$. Por lo tanto las ecuaciones del sistema el lazo cerrado tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 273130.426 - 673.369x_1 + 71.34x_2^2 - 12856.039x_2 - 60.939x_2x_1 \\ \dot{x}_2 &= 424.508x_1 + 2.011x_1^2 - 2.354x_2x_1 - 10000x_2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Se tiene un único equilibrio real dado por: $x_1^* = 133.7303$, $x_2^* = 8.9903$.

Los autovalores de la dinámica en pequeña señal encontrados del equilibrio real son $\lambda_1 = -4315.3784$, $\lambda_2 = -7220.69$. Por lo tanto, de la clasificación de Perko, figura 3.1, para sistemas cuadráticos planares, acotados con un único equilibrio, se deduce que este equilibrio es un nodo globalmente asintóticamente estable.

En la figura 3.12 se muestra el diagrama de fases del sistema (3.31).

Si hacemos $R = 1 \Omega$ la dinámica toma la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 273130.426 - 673.369x_1 + 71.34x_2^2 - 12856.039x_2 - 60.939x_2x_1 \\ \dot{x}_2 &= 424.508x_1 + 2.011x_1^2 - 2.354x_2x_1 - 1000x_2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

El equilibrio del sistema viene dado por: $x_1^* = 38.5304$ $x_2^* = 17.7334$.

Los autovalores de la dinámica en pequeña señal encontrados del equilibrio real son $\lambda_{1,2} = -1422.3715 \pm 2589.42j$. Por lo tanto, de la clasificación de Perko, figura 3.1, para sistemas cuadráticos planares, acotados con un único equilibrio se deduce que este equilibrio es un foco globalmente asintóticamente estable.

En la figura 3.13 se muestra el diagrama de fases del sistema (3.32).

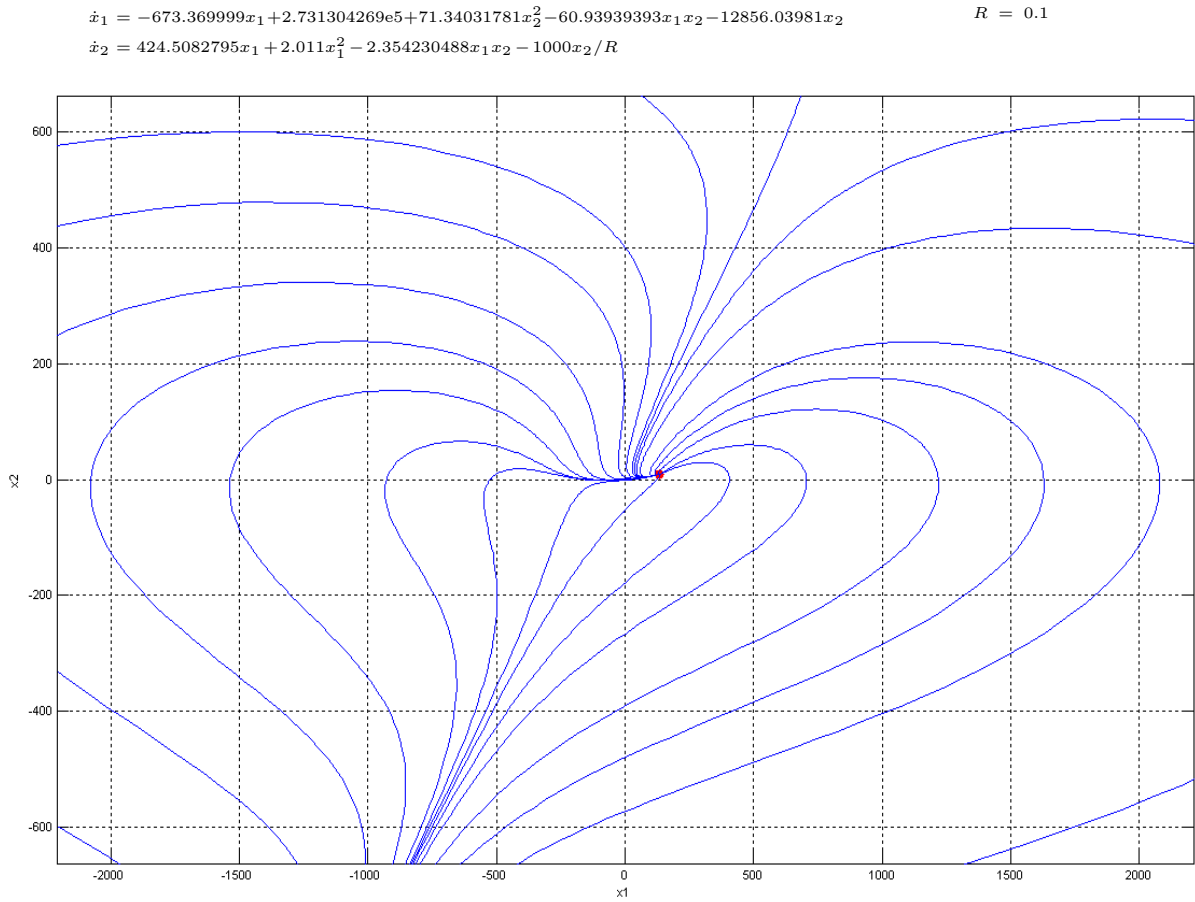


Figura 3.12: Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Joule en Lazo Cerrado una Raíz Real Tipo Nudo

Caso de tres equilibrios reales. Para este caso se toma $R = 95 \Omega$. Se obtienen los equilibrios siguientes:

$$\begin{aligned} x_{1a}^* &= 0.6984 & x_{2a}^* &= 24.4432 \\ x_{1b}^* &= 80.0333 & x_{2b}^* &= 235.5242 \\ x_{1c}^* &= 108.6023 & x_{2c}^* &= 262.2875 \end{aligned}$$

Los autovalores de la dinámica de pequeña señal de cada uno de los equilibrios son, respectivamente:

$$\begin{aligned} \lambda_{1a} &= -1087.5492 + 1524.3027j & \lambda_{2a} &= -1087.5492 - 1524.3027j \\ \lambda_{1b} &= -15228.7465 & \lambda_{1b} &= 3.7293 \\ \lambda_{1c} &= -16919.8024 & \lambda_{1c} &= -3.4118 \end{aligned}$$

Por lo tanto, (x_{1a}^*, x_{2a}^*) es un foco estable, (x_{1b}^*, x_{2b}^*) es punto de silla y (x_{1c}^*, x_{2c}^*) es

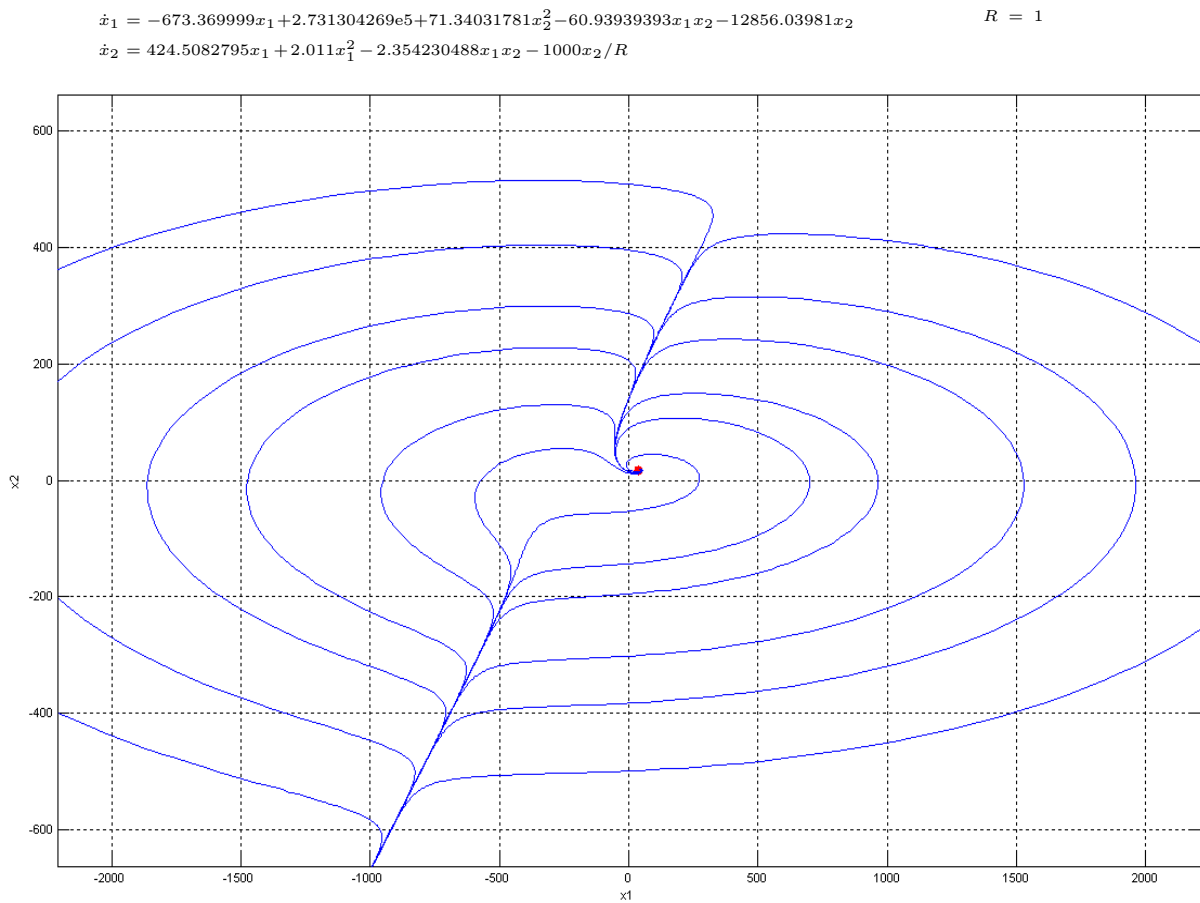


Figura 3.13: Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Joule en Lazo Cerrado una Raíz Real Tipo Foco

un nodo estable.

El plano de fases se muestra en la figura 3.14 en la cual se destaca, como en el caso ideal, las variedades estable e inestable del punto de silla y se observa cómo estas últimas convergen hacia el foco y el nodo estables.

Un barrido de parámetro R entre 95Ω y $10 M\Omega$ muestra que los tipos de equilibrio (foco, silla, nodo) son los mismos para todos los valores del parámetro.

Comparación entre los modelos Ideal y Joule para el caso de tres raíces reales. En ambos modelos, el modelo Ideal y el modelo Joule, tomamos $R = 100 \Omega$ y siguiendo exactamente el procedimiento establecido en este inciso, realizamos las simulaciones para cada modelo y las superpusimos. La gráfica 3.15 muestra los resultados obtenidos. No especificamos los equilibrios ni los autovalores ya que este es sólo un

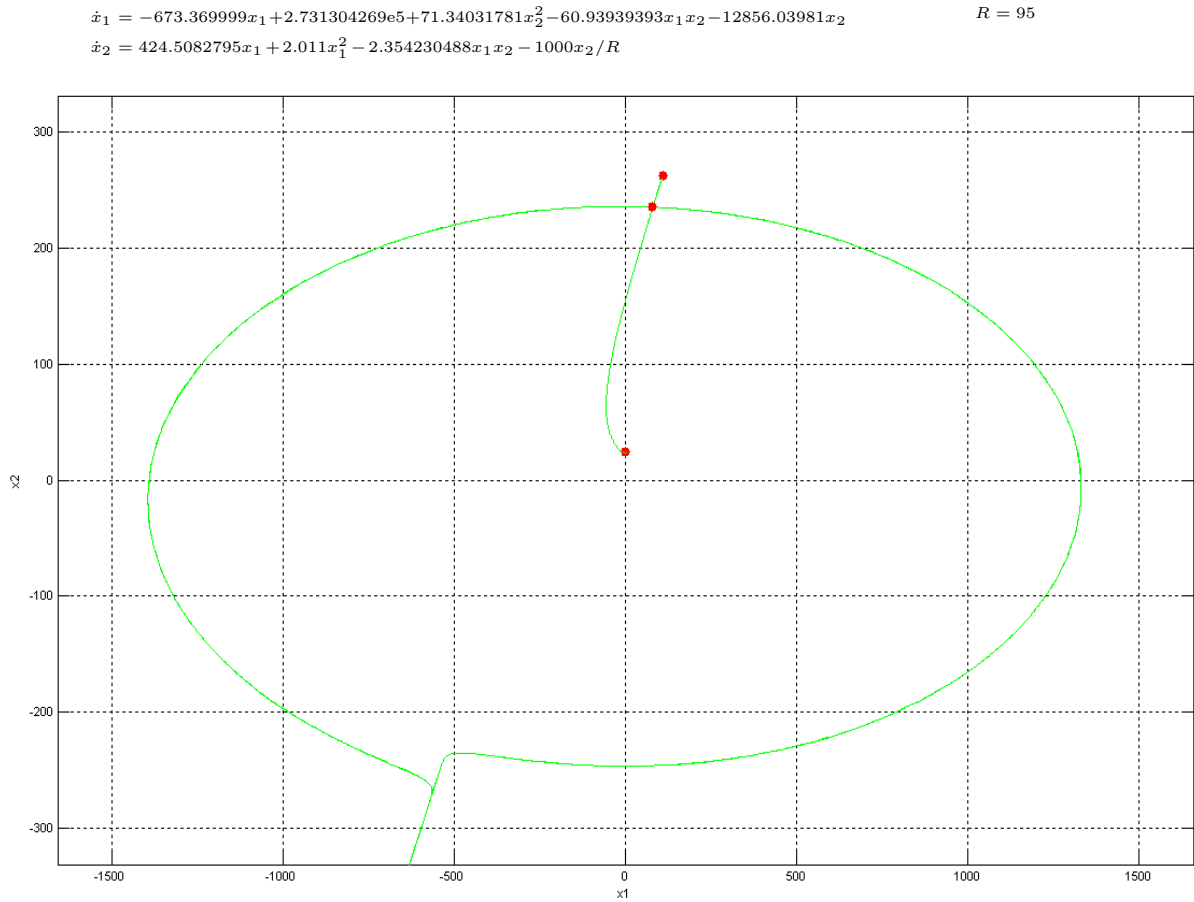


Figura 3.14: Diagrama de Fases del Convertidor Boost Modelo Joule en Lazo Cerrado tres Raíces Reales Foco, Silla y Nudo

ejemplo ilustrativo que nos sirve para comparar el comportamiento de ambos sistemas.

3.6. Identificación Paramétrica

Una manera de enfrentar el problema de robustez ante variaciones de la carga, es la identificación en línea. Para ello utilizaremos una técnica desarrollada por Fliess y Sira-Ramírez [Fli03]. Consideremos el modelo Ideal del convertidor Boost, dado por:

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u^i) \\ (1-u^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}$$

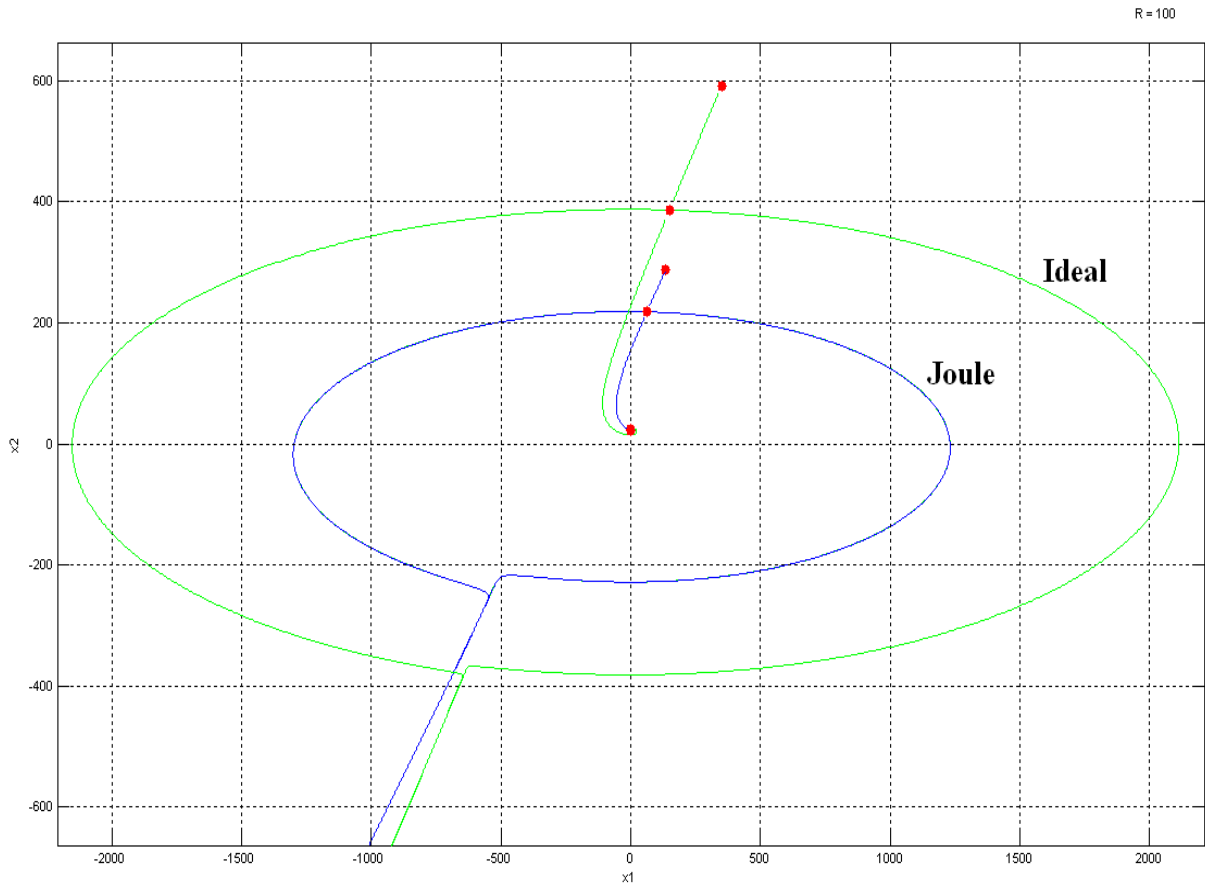


Figura 3.15: Comparación de Diagramas de Fases del Convertidor Boost Modelos Ideal y Joule con tres Raíces

Multiplicando por t la ecuación del condensador, se obtiene:

$$t\dot{x}_2^i(t) = \frac{t(1-u^i)x_1^i(t)}{C} - t\frac{x_2^i(t)}{CR}$$

Integrando ambos miembros de esta ecuación y utilizando la fórmula de integración por partes, el término izquierdo resulta:

$$\int_0^t t\dot{x}_2^i(t) dt = tx_2^i(t)|_0^t - \int_0^t tx_2^i(t) dt = tx_2^i(t) - \int_0^t tx_2^i(t) dt$$

Integrando el miembro derecho y sustituyendo tenemos:

$$tx_2^i(t) - \int_0^t \tau x_2^i(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t \tau x_1^i(\tau) (1-u^i) d\tau - \frac{1}{CR} \int_0^t \tau x_2^i(\tau) d\tau$$

Integrando una vez más queda:

$$\int_0^\sigma \tau x_2^i(\tau) d\tau - \int_0^\sigma \int_0^t \lambda x_2^i(\lambda) d\lambda dt = \frac{1}{C} \int_0^\sigma \int_0^t \lambda x_1^i(\lambda) u^i(\lambda) d\lambda dt - \frac{1}{RC} \int_0^\sigma \int_0^t \lambda x_2^i(\lambda) d\lambda dt$$

Despejando el parámetro $\frac{1}{R}$ queda:

$$\frac{1}{R} = \frac{\int_0^\sigma \int_0^t \lambda x_1^i(\lambda) (1 - u^i(\lambda)) d\lambda dt - C \int_0^\sigma t x_2^i(t) dt + C \int_0^\sigma \int_0^t x_2^i(\lambda) d\lambda dt}{\int_0^\sigma \int_0^t t x_2^i(\lambda) d\lambda dt} \quad (3.33)$$

Para la implementación utilizamos (3.33) y lo reescribimos por medio del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= t x_2^i(t) \\ \dot{x}_5(t) &= -C t x_2^i(t) + x_6(t) \\ \dot{x}_6(t) &= C x_2^i(t) + (1 - u) t x_1^i(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

el cual aproximaremos utilizando el método de Euler.

El estimador de la carga finalmente quedará definido por:

$$\frac{1}{R} = \frac{x_5(t)}{x_3(t)}$$

La utilización del método de Euler para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, produce un rápido crecimiento de las funciones por lo cual se saturan las variables utilizadas cuando se procede digitalmente y en los amplificadores cuando se procede en forma analógica. El identificador hay que apagarlo o reinicializarlo cuando se logra la convergencia del cociente. Esta característica conlleva a definir un período de tiempo Δt , en el algoritmo utilizado como controlador, para reinicializar a condiciones iniciales las ecuaciones diferenciales impidiendo que se saturen. También existe la posibilidad de que los primeros valores presenten indefiniciones debidas a una división por cero. Aún con estas restricciones la técnica detecta cambios paramétricos muy rápidamente y eso permite que sea aplicable.

Rehaciendo los cálculos para el modelo Joule Σ_j se obtiene exactamente la misma estructura del identificador. Nótese, sin embargo, que la acción de control ha cambiado.

En el modelo Joule se tiene $u = \bar{u}^j - \gamma ((V_f - V_q)(x_1^j - \bar{x}_1^j) + \bar{x}_2^j x_1^j - \bar{x}_1^j x_2^j)$, donde los equilibrios son $\bar{x}_2^j = V_d$, $\bar{x}_1^j = \frac{(E - V_q^j)}{2(R_{in} + R_j)} - \sqrt{\frac{(E - V_q^j)^2}{4(R_{in} + R_j)^2} - \frac{(V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j)\bar{x}_2^j}{R(R_{in} + R_j)}}$ y $\bar{u}^j = 1 - \bar{x}_2^j / R\bar{x}_1^j$.

Resultados de la Simulación. Esta técnica de identificación paramétrica se ha analizado en el modelo Joule Σ_j mediante simulaciones. La carga real varía entre 2 y 4 Ω mientras que el controlador presupone, para el cálculo del estado estacionario (componente feedforward) valores de $R = 4 \Omega$ y $R = 2 \Omega$ respectivamente. Asimismo se considera un controlador realimentado con la salida del estimador.

Los parámetros utilizados son $E = 10$ voltios, $V_d = 16$ voltios, $\gamma = 0.00001$, $L = 33 \mu\text{H}$, $C = 1000 \mu\text{F}$, $V_f^j = 0.94$ voltios y $V_q^j = 1.42$ voltios.

En la figura 3.16 se muestran respectivamente la corriente en el inductor, la tensión en el condensador y la acción de control. La frecuencia del PWM fue de 20 kHz. Los resultados corresponden a tres simulaciones, a saber:

- a.- En azul; la resistencia en forma de escalón toma los valores $R = 2 \Omega$, $R = 4 \Omega$ y $R = 2 \Omega$ mientras que la acción de control utiliza $R = 2 \Omega$.
- b.- En verde; la resistencia en forma de escalón toma los valores $R = 4 \Omega$, $R = 2 \Omega$ y $R = 4 \Omega$ mientras que la acción de control utiliza $R = 4 \Omega$.
- c.- En rojo; los resultados obtenidos cuando el identificador realimenta la acción de control.

3.7. Robustez Extendiendo el Espacio Estado con un Integrador del Error de la Salida

En esta sección se considera la inclusión de un término integral para rechazar el efecto de las perturbaciones en forma de escalón en la carga.

Al incluir esta variante en el controlador, la estabilidad no está asegurada, por lo cual se hace necesario un análisis que permita establecer un rango de los parámetros que pueda, al menos, asegurar estabilidad local. Durante el trabajo no fue posible establecer estabilidad global, por ello se recurrió al análisis en pequeña señal para establecer el comportamiento alrededor del punto de operación.

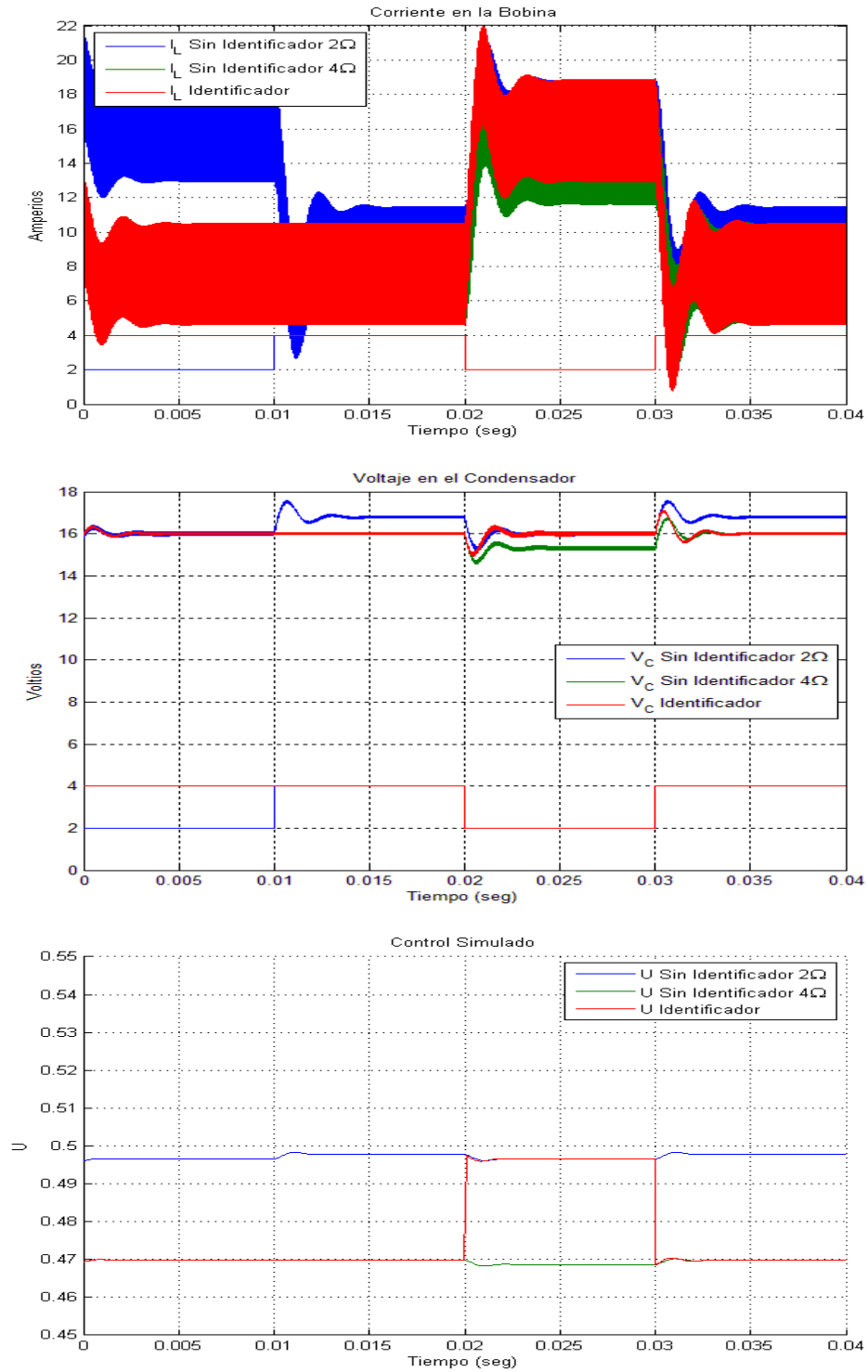


Figura 3.16: Modelo Joule Identificación Paramétrica con Cambios de Carga

Ley de Control y Análisis de Estabilidad Local del Sistema. Utilizando el modelo ideal del convertidor Boost e incluyendo una extensión del espacio de estado para introducir la variable del error, obtenemos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1-u) & 0 \\ (1-u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_0} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ -V_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde x_1 es la corriente en la bobina, x_2 es la tensión en el condensador, x_3 es la integral de error, u es la entrada, R_0 es la carga nominal, E es la fuente de alimentación, L es la inductancia de la bobina y C es la capacitancia del condensador, V_d es la tensión deseada de la salida del condensador.

La ley de control del modelo ideal que hemos utilizado en el transcurso de este trabajo es $u = \bar{u} - \gamma(\bar{x}_2 x_1 - \bar{x}_1 x_2)$, donde $\bar{x}_2 = V_d$; $\bar{u} = 1 - \frac{E}{\bar{x}_2}$; $\bar{x}_1 = \frac{\bar{x}_2^2}{R_0 E}$ y γ es una constante positiva. Nótese que el control se ha definido a partir de la carga nominal R_0 y es dependiente de la carga R , así que es suficiente que R varíe para que no se pueda alcanzar la condición deseada. Por esta razón incluimos dentro del lazo de control un integrador en el intento de corregir el valor deseado de la tensión de salida, por lo cual hacemos $u = \bar{u} - \gamma(\bar{x}_2 x_1 - \bar{x}_1 x_2) + \alpha x_3$ donde α es la ganancia del integrador.

Como se utiliza la dinámica del error, incluimos un sistema de referencia dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u^*) & 0 \\ (1-u^*) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ -V_d \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

de donde

$$x_2^* = V_d; \quad x_1^* = \frac{x_2^{*2}}{RE}; \quad x_3^* = -\frac{x_2^{*3} \gamma (R - R_0)}{RR_0 E \alpha}$$

La dinámica del error se obtiene de (3.35) y (3.36), así nos queda:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(1-\bar{u}) & 0 \\ (1-\bar{u}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} -\bar{x}_2 x_2^* & -\gamma \left(-2\bar{x}_1 x_2^* + \bar{x}_2 x_1^* - \alpha \frac{x_3^*}{\gamma} \right) & \alpha x_2^* \\ -\gamma \left(\bar{x}_1 x_2^* - 2\bar{x}_2 x_1^* + \alpha \frac{x_3^*}{\gamma} \right) & -\gamma \bar{x}_1 x_1^* & -\alpha x_1^* \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \\
+ \begin{bmatrix} 0 & -\gamma \left(\bar{x}_2 e_1 - \bar{x}_1 e_2 - \alpha \frac{e_3}{\gamma} \right) & 0 \\ -\gamma \left(-\bar{x}_2 e_1 + \bar{x}_1 e_2 + \alpha \frac{e_3}{\gamma} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

La dinámica en pequeña señal en torno al punto de equilibrio queda caracterizado por la matriz jacobiana del campo vectorial evaluado en el origen $(0, 0, 0)$,

$$J = \begin{bmatrix} -\gamma \frac{\bar{x}_2^2}{L} & -\frac{E^2 R_0 - \gamma \bar{x}_2^4}{L \bar{x}_2 E R_0} & \frac{\alpha \bar{x}_2}{L} \\ \frac{\gamma \bar{x}_2^4 + E^2 R}{C \bar{x}_2 E R} & -\frac{\gamma \bar{x}_2^4 + E^2 R_0}{E^2 C R_0 R} & -\frac{\alpha \bar{x}_2^2}{E R C} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

cuyo polinomio característico (3.37) viene dado por:

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= \lambda^3 + \frac{(\bar{x}_2^4 \gamma E^2 C R_0 R + \bar{x}_2^6 L \gamma + \bar{x}_2^2 L E^2 R_0)}{C \bar{x}_2^2 E^2 R L R_0} \lambda^2 \\
&\quad + \frac{(2\bar{x}_2^4 \gamma E^2 R_0 - E^2 R \bar{x}_2^4 \gamma + \bar{x}_2^4 L \alpha E R_0 + E^4 R R_0)}{C \bar{x}_2^2 E^2 R L R_0} \lambda - \frac{E \alpha}{C L}
\end{aligned}$$

Aplicando el criterio de Routh-Hurwitz se obtienen las siguientes condiciones:

$$\frac{E^2 (\bar{x}_2^2 \gamma C R + L) R_0 + \bar{x}_2^4 L \gamma}{C E^2 R L R_0} > 0 \quad (3.38)$$

$$m_2 = \beta_2 R^2 + \beta_1 R + \beta_0 > 0 \quad (3.39)$$

$$m_3 = -\frac{E \alpha}{L C} (\beta_2 R^2 + \beta_1 R + \beta_0) > 0 \quad (3.40)$$

donde

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \bar{x}_2^2 E^3 C R_0 (-\bar{x}_2^4 \gamma^2 + \gamma E^2 R_0 + E \alpha L R_0) \\ \beta_1 &= -\bar{x}_2^8 L \gamma^2 E + \bar{x}_2^6 \gamma E^2 C R_0^2 L \alpha + 2 \bar{x}_2^6 \gamma^2 E^3 C R_0^2 + L E^5 R_0^2 \\ \beta_0 &= L R_0 \bar{x}_2^4 (\gamma \bar{x}_2^4 + E^2 R_0) (2 E \gamma + L \alpha)\end{aligned}$$

Estas condiciones permiten establecer el rango de α que proporciona una operación localmente estable del convertidor.

La desigualdad (3.38) se verifica siempre; de (3.39) y (3.40) se deduce que α debe ser negativa. Finalmente, $0 > \alpha > -\frac{E}{L} \gamma$ garantiza $m_2 > 0$. Sin embargo esta última condición sobre α es una condición suficiente y, en consecuencia, bastante conservadora. El análisis detallado de la parábola $m_2(R) = 0$ permite elegir α que satisfaga $m_2 > 0$ y mantener un compromiso entre la rapidez de respuesta ante las perturbaciones de la carga y el rango de la carga R para las cuales se pueda garantizar estabilidad local.

Simulaciones. Para ilustrar el procedimiento que hemos planteado utilizamos un convertidor con los siguientes parámetros: $E = 10$ voltios, $\gamma = 0.00001$, $V_d = 20$ voltios, $L = 33 \mu\text{H}$ y $C = 1000 \mu\text{F}$.

Por tanto, el sistema vendrá dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 303030.303 - 15151.515x_2 - 60.606x_2x_1 + 60.606x_2^2 + 30303.03x_2\alpha x_3 \\ \dot{x}_2 &= 500x_1 + 2x_1^2 - 2x_2x_1 - 1000x_1\alpha x_3 - 1000\frac{x_2}{R} \\ \dot{x}_3 &= x_2 - 20\end{aligned}$$

El jacobiano resultante queda de la forma:

$$Ja = \begin{bmatrix} -1212.12 & 13939.39 & 606060.606\alpha \\ 5\frac{(16+100R)}{R} & -\frac{1080}{R} & -\frac{40000}{R}\alpha \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de la matriz se obtiene del jacobiano (Ja) es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \left(\frac{1080}{R} + 1212.12\right)\lambda^2 + \left(\frac{2424242.424}{R} + 6969696.97 + \frac{40000}{R}\alpha\right)\lambda - 303030303\alpha$$

Sustituimos los parámetros y obtenemos el polinomio m_2 :

$$m_2 = (14.72 + 0.52\alpha) R^2 + (0.084\alpha + 18.23) R + 0.0752\alpha + 4.56$$

Así que $\beta_2 = 14.72 + 0.52\alpha$ por lo que $\alpha|_{\beta_2=0} = -27.879$. Por tanto, $\beta_2 > 0$ para $0 > \alpha > -27.879$ y $\beta_2 < 0$ para $\alpha < -27.879$. Para obtener el α_{\min} hallamos el

discriminante de m_2 dado por $\Delta_m = -0.1518\alpha^2 - 10.985\alpha + 63.928$ del cual tomamos el valor mínimo $\alpha_{\text{mín}} = -77.766$.

De aquí conseguimos el rango de $0 > \alpha > -77.766$ donde el sistema es localmente estable.

Mostramos a continuación el caso de que $\alpha = -1$, según esto $\beta_2 = 14.192$ y los cruces por cero de m_2 son $R_1 = -0.335$, $R_2 = -0.944$, por lo tanto $m_2 > 0$ para $R > 0$, como se puede observar en la figura 3.17.

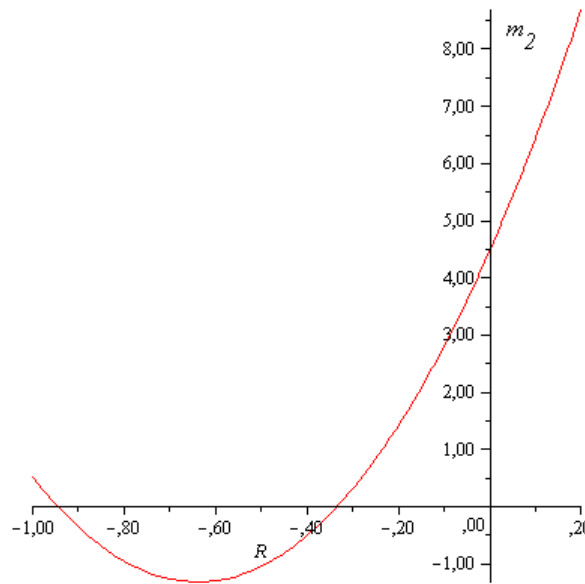


Figura 3.17: Rangos de Carga para el caso $\beta_2 < 0$ y $\alpha = -1$

En el caso de utilizar un $\alpha = -30$ tenemos que $\beta_2 = -1.12$ y los cruces por cero de m_2 están en $R_1 = -0.145$, $R_2 = 14.164$, como se puede observar en la figura 3.18, por lo que el rango de estabilidad local queda restringido a $0 < R < 14.164$.

Como muestran estos ejemplos, existe un compromiso entre el rango de la carga R y la ganancia α que se utiliza en el integrador.

3.8. Implementación Experimental

Identificador Paramétrico. Utilizando el prototipo desarrollado y referido en diferentes capítulos de este trabajo, se procedió a realizar implementaciones del convertidor

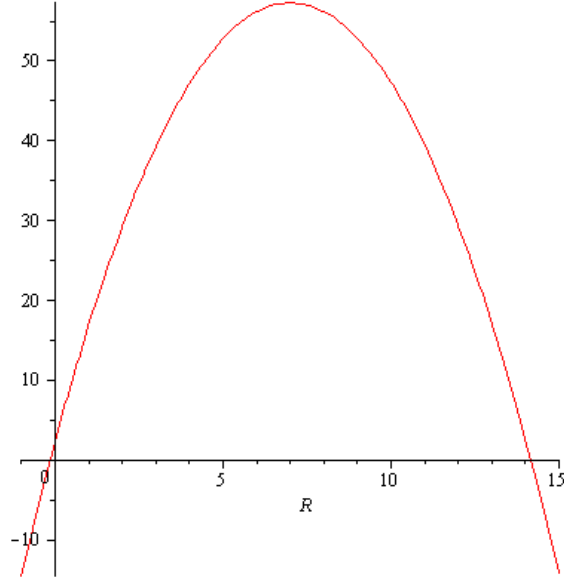


Figura 3.18: Rangos de Carga para el caso $\beta_2 > 0$ y $\alpha = -30$

Boost incluyendo el identificador paramétrico. Los parámetros utilizados son $E = 10$ voltios, $V_d = 16$ voltios, $\gamma = 0.00001$, $L = 33 \mu\text{H}$, $C = 1000 \mu\text{F}$, $V_f^j = 0.94$ voltios y $V_q^j = 1.42$ voltios. Se utilizó un modulador PWM operando a 20 kHz.

El cierre del lazo se hizo por medio del controlador obtenido del modelo Joule dado por $u = \bar{u} - \gamma [(V_f - V_q)(x_1 - \bar{x}_1) + x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1]$, cuyos equilibrios están dados por:

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^j &= V_d \\ \bar{x}_1^j &= \frac{(E - V_q^j)}{2(R_{in} + R_j)} - \sqrt{\frac{(E - V_q^j)^2}{4(R_{in} + R_j)^2} - \frac{(V_f^j - V_q^j + \bar{x}_2^j)\bar{x}_2^j}{R(R_{in} + R_j)}} \\ \bar{u} &= \frac{(2V_f^j + 2\bar{x}_2^j - V_q^j - E) - \sqrt{(E - V_q^j)^2 - 4(R_{in} + R_j)\bar{x}_2^j(\bar{x}_2^j - V_q^j + V_f^j)}}{2(\bar{x}_2^j - V_q^j + V_f^j)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

El lazo de control incluye el sistema de ecuaciones diferenciales dadas por (3.34), las cuales se aproximaron por medio de un algoritmo que utiliza el método de Euler para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Con el fin de analizar el comportamiento, se realizaron cambios de carga en escalón variando de 4 a 2 Ω y de 2 a 4 Ω , de manera manual a través de un interruptor.

En las figuras 3.19 y 3.20, puede observarse como el controlador sin el identificador no consigue la regulación del valor deseado de tensión mientras que la salida se mantiene más cerca del valor deseado, cuando se incluye el identificador. Se muestran

las corrientes en la bobina y la tensión en el condensador para ambos casos.

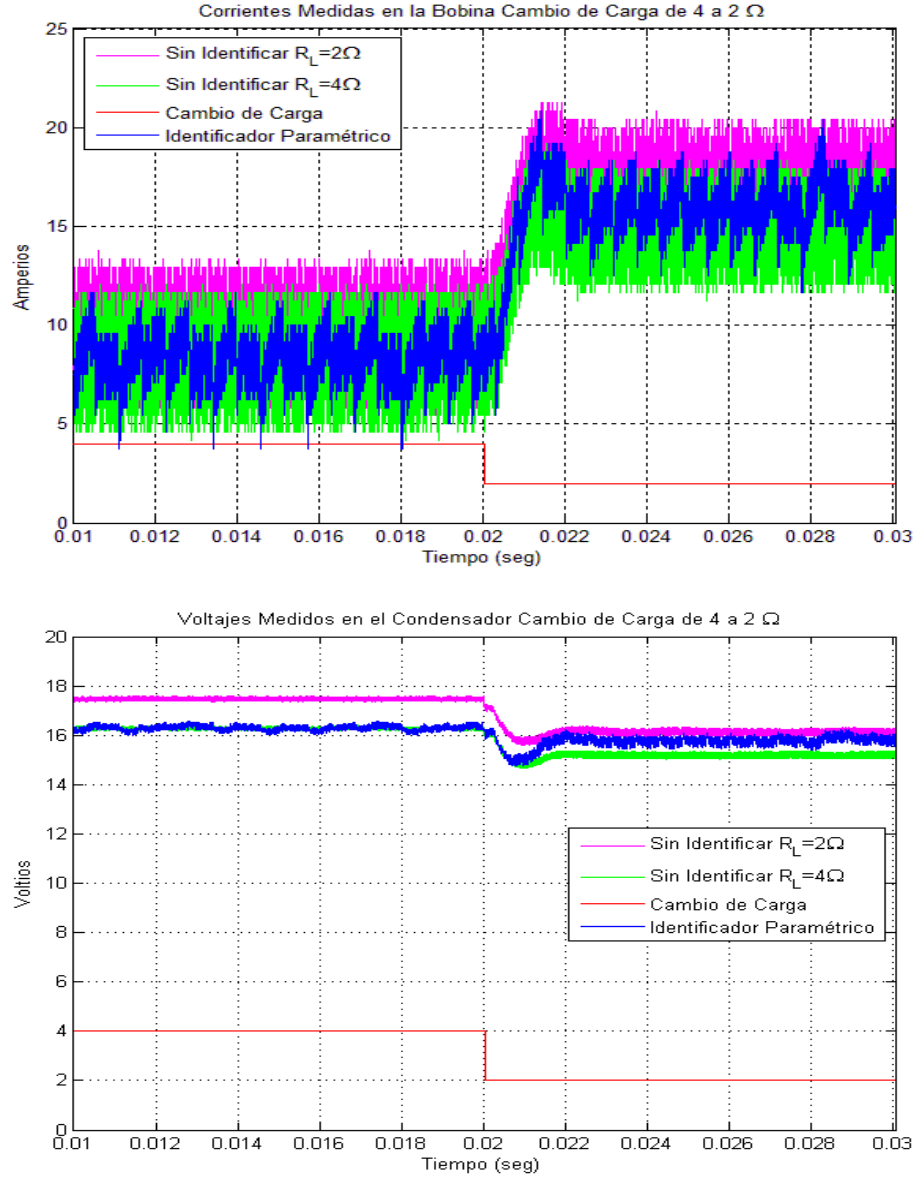


Figura 3.19: Mediciones en el Modelo Real Identificación Paramétrica con Cambios de Carga de 4 a 2 Ω

Término Integral. Con el convertidor ya citado, procedimos a introducir el término de la integral del error en el lazo de realimentación, este toma la forma

$$u = \bar{u} - \gamma [(V_f - V_q) (x_1 - \bar{x}_1) + x_1 \bar{x}_2 - x_2 \bar{x}_1] + \alpha x_3$$

y donde los equilibrios están dados por (3.41).

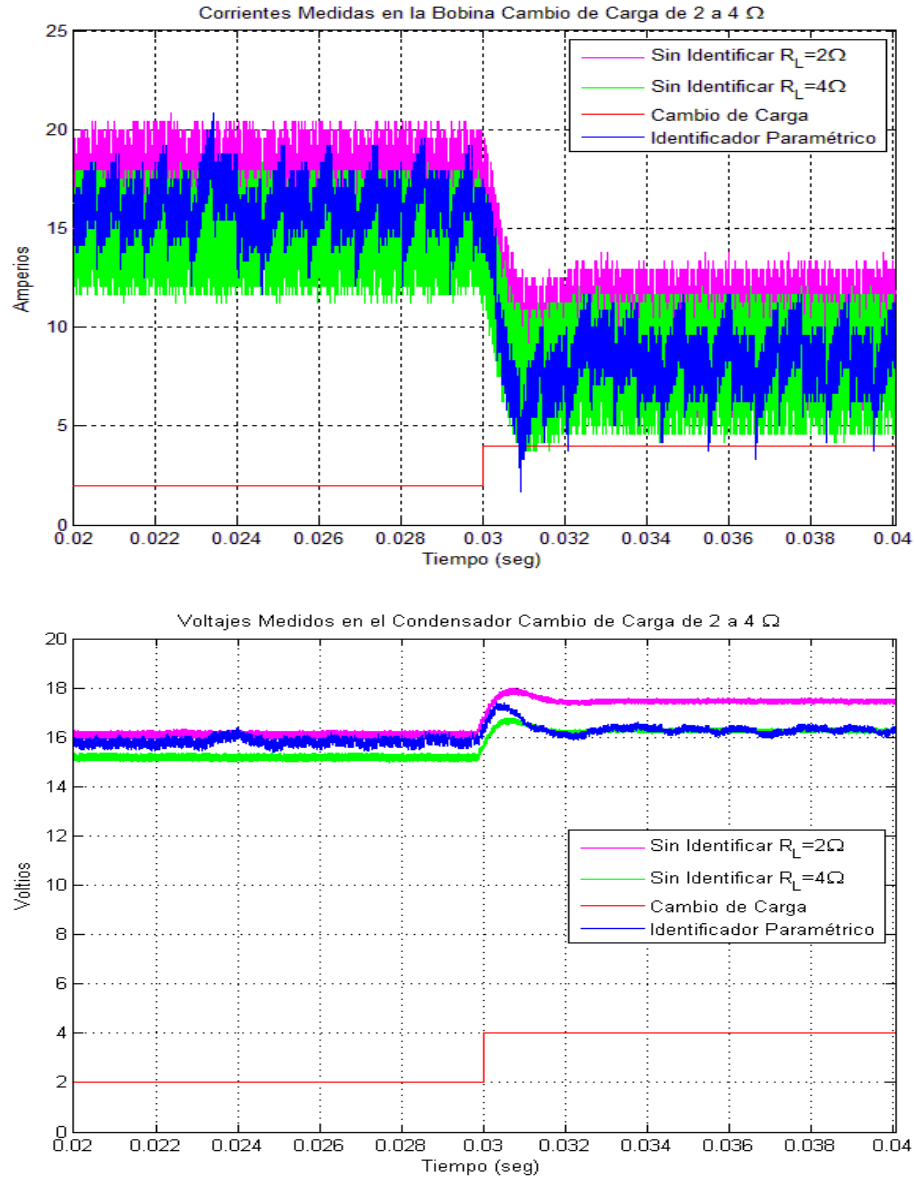


Figura 3.20: Mediciones en el Modelo Real Identificación Paramétrica con Cambios de Carga de 2 a 4 Ω

Los parámetros con los que se realizó el prototipo fueron $V_d = 15$ voltios, $V_f^j = 1.05$ voltios, $V_q^j = 0.95$ voltios, $R_{in} + R_j = 0.045 \Omega$, $\gamma = 0.00001$, $\alpha = -30$, $E = 10$ voltios. Una vez que el convertidor funcionaba como regulador, se realizaron cambios de carga en forma de escalón entre 2 y 1 Ω . Procediendo a realizar mediciones de la corriente en la bobina (fucsia) y tensión en el condensador (amarillo) que se muestran en las figuras 3.21 y 3.22.

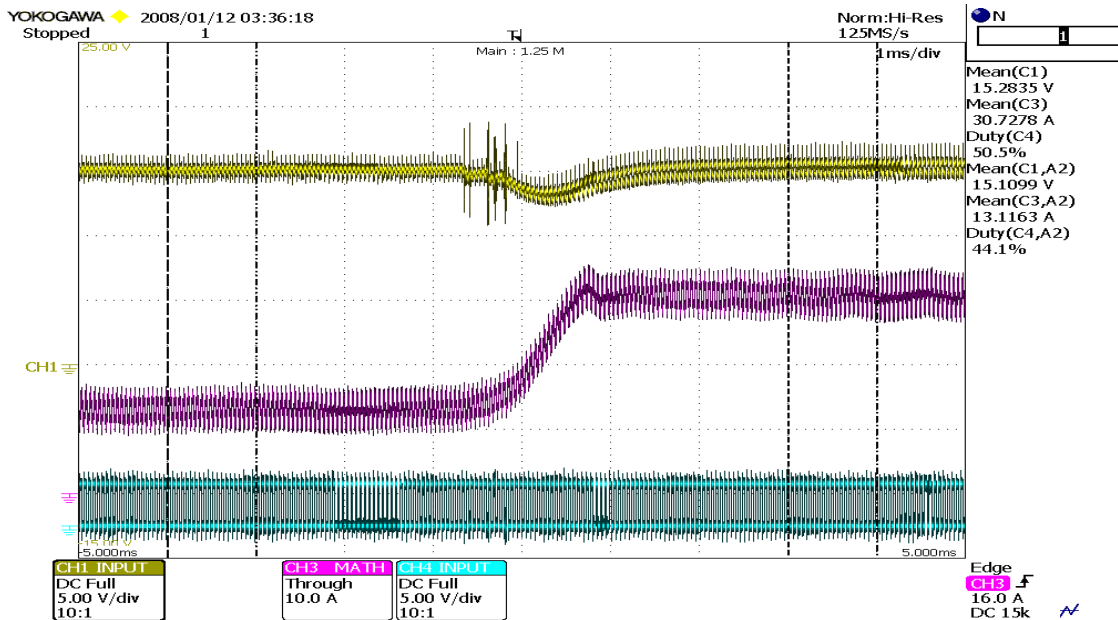


Figura 3.21: Regulación del Boost con integrador del error de la salida. Cambio de carga de 2 a 1 Ω

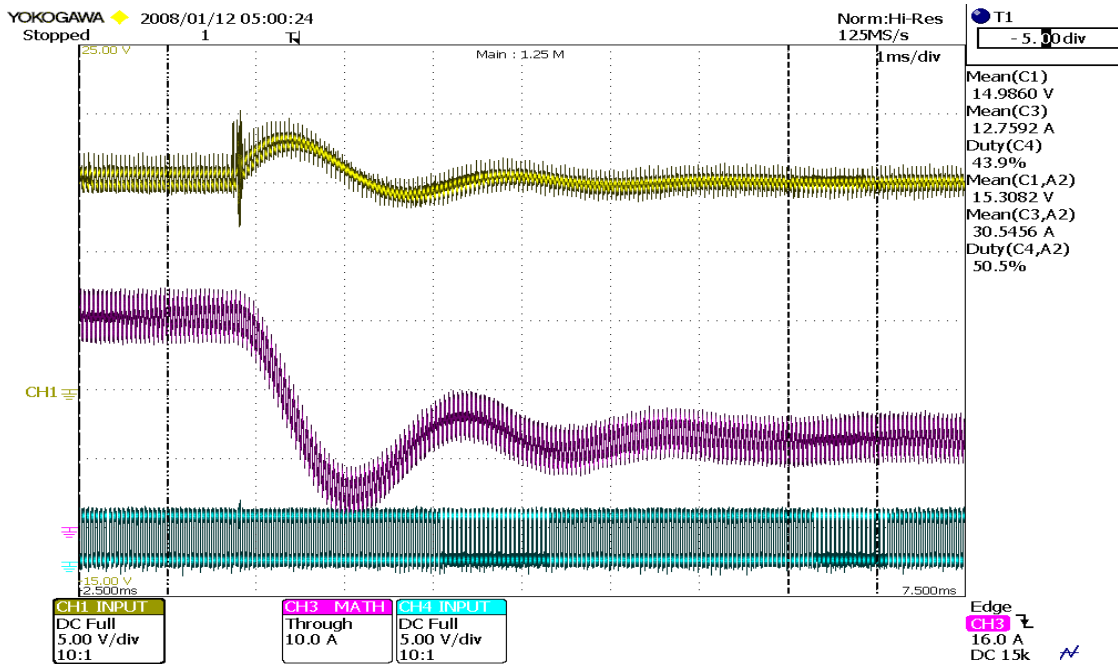


Figura 3.22: Regulación del Boost con integrador del error de la salida. Cambio de carga de 1 a 2 Ω

Capítulo 4

Seguimiento de Señal en Convertidores con Topología Boost

4.1. Introducción

En el primer capítulo de la presente tesis se describe la técnica de realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta del error de seguimiento, así como el procedimiento a seguir para su aplicación en convertidores de potencia. Asimismo, en el segundo capítulo se realizan cambios en el modelado del convertidor con la finalidad de obtener una respuesta más fidedigna; esto es que las simulaciones se asemejen a las mediciones procedentes de la implementación experimental del prototipo. El tercer capítulo se ha enfocado en el estudio de los efectos de los parámetros sobre el controlador y el sistema en lazo cerrado, con la finalidad de establecer la estabilidad utilizando Lyapunov y estimación paramétrica.

Con las diversas técnicas planteadas en los tres capítulos anteriores procedemos a realizar diseño y experimentos enfocando el trabajo en las siguientes aplicaciones:

1. Planificación de Trayectorias en un convertidor Boost.
2. Seguimiento de señales Senoidales en un Convertidor Boost-Boost.

4.2. Planificación de Trayectorias en un Convertidor Boost

Como su nombre indica, la técnica de control de realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta del error de seguimiento incluye la posibilidad de realizar seguimiento de trayectorias. Sin embargo, hasta este punto solamente se ha tratado el problema de regulación. A continuación se procede a realizar la planificación de trayectorias con una referencia polinómica a partir de condiciones iniciales y finales dadas.

En el segundo capítulo de esta tesis se sintetizó una ley de control para el convertidor Boost basada en la realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta del error de seguimiento utilizando el modelo Joule. La ley de control obtenida viene definida por la ecuación (2.9) que repetimos a continuación:

$$u^j = \bar{u}^j - \gamma ((V_f^j - V_q^j) (x_1^j - \bar{x}_1^j) + \bar{x}_2^j x_1^j - \bar{x}_1^j x_2^j)$$

donde V_f^j, V_q^j son las constantes del modelo Joule y $\bar{x}_1^j, \bar{x}_2^j, \bar{u}^j$ las coordenadas de equilibrio del modelo Joule.

Para referirnos al seguimiento utilizaremos, en este caso, la notación supra asterisco, es decir, la barra se circunscribe al problema de regulación y el asterisco al del seguimiento de trayectoria. De este modo, el controlador estará dado por:

$$u^j = u^{j*} - \gamma ((V_f^j - V_q^j) (x_1^j - x_1^{j*}) + x_2^{j*} x_1^j - x_1^{j*} x_2^j) \quad (4.1)$$

Obsérvese que, a partir de la ecuación anterior, se precisa de $u^{j*}, x_1^{j*}, x_2^{j*}$ para sintetizar la ley de control. Esto es, queda por definir la manera de obtener la trayectoria que nos permita sintetizar el controlador en la aplicación de seguimiento. Para resolver este problema utilizaremos el hecho de que el convertidor Boost es plano; es decir, existe una *salida plana*, véase [Fli99], que puede ser usada para expresar todos los estados y entradas explícitamente en términos de dicha salida plana y un número finito de sus derivadas. Este problema ha sido previamente presentado desde un punto de vista teórico en Sira-Ramírez [Sir02] y en Sira-Ramírez y Agrawal [Sir04].

Consideremos nuevamente el modelo Joule del convertidor Boost:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1^{j*} &= -(1 - u^{j*})x_2^{j*} + E - (R_{in} + R_j)x_1^{j*} - V_f(1 - u^{j*}) - V_q u^{j*} \\ C\dot{x}_2^{j*} &= (1 - u^{j*})x_1^{j*} - \frac{x_2^{j*}}{R} \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde x_1^{j*} es la corriente nominal de la bobina, x_2^{j*} es la tensión nominal del condensador, E es la fuente de alimentación, V_f es la fuente de tensión equivalente del diodo, V_q es la fuente de tensión equivalente del transistor, R_{in} es la resistencia interna de la bobina, R_j es la resistencia equivalente Joule, L es la inductancia de la bobina, C es la capacitancia del condensador, R es la resistencia de carga y u^{j*} es el control.

Utilizando la función de energía (F^{j*}) de (4.2) como candidata a salida plana [Fli99]:

$$F^{j*} = \frac{1}{2}Cx_2^{j*2} + \frac{1}{2}Lx_1^{j*2} \quad (4.3)$$

De este modo, puede encontrar la variable x_2^{j*} en función de la energía (F^{j*}) aplicando:

$$x_2^{j*} = \sqrt{\frac{2F^{j*} - Lx_1^{j*2}}{C}} \quad (4.4)$$

Derivando la función de energía y sustituyendo en (4.2) se obtiene::

$$\dot{F}^{j*} = x_1^{j*}E - (R_{in} + R_j)x_1^{j*2} - x_1^{j*}V_f - x_1^{j*}u^{j*}(V_q^j - V_f^j) - \frac{x_2^{j*2}}{R} \quad (4.5)$$

Simplificación. Ya que la función de energía no es, en este caso, una salida plana y en vista de que este trabajo se orienta a un acercamiento entre la teoría y la práctica, en lugar de buscar una solución diferente hacemos una aproximación para eliminar la dependencia del control¹. Se considera $V_q^j \approx V_f^j$. En particular, en nuestro caso esta aseveración es precisa puesto que los dos semiconductores son del mismo material. Obsérvese que esta dependencia respecto de la entrada no existe cuando se utiliza el modelo Ideal. Empleando la aproximación anterior se obtiene:

$$\dot{F}^{j*} \approx (E - V_f)x_1^{j*} - (R_{in} + R_j)x_1^{j*2} - \frac{x_2^{j*2}}{R}$$

¹Este tipo de aproximaciones de un sistema no plano por un sistema plano son habituales en la práctica, y ha sido empleada por diversos autores entre quienes destaca C. Martin y M. Zeitz, entre otros.

Esto nos permite obtener la salida como función de la derivada de la energía:

$$x_2^{j*2} = \left((E - V_f) x_1^{j*} - (R_{in} + R_j) x_1^{j*2} - \dot{F}^{j*} \right) R \quad (4.6)$$

Comparando las ecuaciones (4.3) y (4.6), se obtiene:

$$\frac{2F^{j*} - Lx_1^{j*2}}{C} = R \left((E - V_f) x_1^{j*} - (R_{in} + R_j) x_1^{j*2} - \dot{F}^{j*} \right)$$

De aquí se puede obtener la corriente como una función cuadrática de la forma:

$$x_1^{j*2} + x_1^{j*} \frac{(E - V_f)}{\left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)} - \frac{\dot{F}^{j*} + \frac{2F^{j*}}{CR}}{\left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)} = 0$$

Que tiene como solución:

$$x_1^{j*} = -\frac{(E - V_f)}{2 \left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{(E - V_f)}{\left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)} \right)^2 + \frac{\dot{F}^{j*} + \frac{2F^{j*}}{CR}}{\left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)}}$$

En nuestro caso, de acuerdo con los parámetros utilizados, las soluciones son reales y tomamos el signo negativo de la raíz cuadrada para tener la solución correspondiente a menor corriente. Su derivada vendrá dada por:

$$\dot{x}_1^{j*} = -\frac{\frac{\dot{F}^{j*} + \frac{2F^{j*}}{CR}}{\left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)}}{2\sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{(E - V_f)}{\left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)} \right)^2 + \frac{\dot{F}^{j*} + \frac{2F^{j*}}{CR}}{\left(\frac{L}{CR} - (R_{in} + R_j) \right)}}$$

Para completar el sistema referencial despejamos el control de la ecuación diferencial de la corriente de (4.2), dada por:

$$u^{j*} = \frac{L\dot{x}_1^{j*} - E + (R_{in} + R_j) x_1^{j*} + V_f + x_2^{j*}}{x_2^{j*}}$$

En conclusión, para definir la trayectoria de referencia necesitamos de u^{j*} , \dot{x}_1^{j*} , x_1^{j*} , x_2^{j*} , las cuales, a su vez, se obtienen a partir de la trayectoria de referencia para la función de energía y un número finito de sus derivadas.

Observación

Para el sistema de referencia se requieren tanto la función de energía (F^{j*}) como sus derivadas ($\dot{F}^{j*}, \ddot{F}^{j*}$), por lo cual es necesario que la señal de referencia que utilicemos sea al menos continua y diferenciable hasta el segundo orden. Para ello, La trayectoria de referencia de la función energía se selecciona de la forma:

$$F^{j*} = \begin{cases} F_i^{j*} & t < t_i \\ F_i^{j*} + (F_f^{j*} - F_i^{j*}) \psi(t, t_i, t_f) & t_i < t < t_f \\ F_f^{j*} & t > t_f \end{cases}$$

donde F_i^{j*} es la energía inicial, F_f^{j*} es la energía final y $\psi(t, t_i, t_f)$ es, en este caso, un polinomio en $t \in [t_i, t_f]$ que satisface

$$\begin{aligned} \psi(t_i) &= 0, & \psi(t_f) &= 1 \\ \dot{\psi}(t_i) &= \ddot{\psi}(t_i) = \dot{\psi}(t_f) = \ddot{\psi}(t_f) = 0 \end{aligned}$$

Las derivadas de ψ deben anularse en t_i y en t_f a fin de obtener trayectorias suaves entre puntos de equilibrio.

4.2.1. Simulaciones e Implementación Experimental

Tanto las simulaciones como el prototipo experimental utilizan un grupo de parámetros que definimos a continuación:

- Parámetros del convertidor
 - Parámetros del prototipo experimental: $E = 10$ voltios, $L = 33 \mu\text{H}$, $C = 1000 \mu\text{F}$, $R = 2 \Omega$.
 - Parámetros del modelo Joule: $R_{in} = 0.05 \Omega$, $R_j = 0.006 \Omega$, $V_q^j = 1.05$ voltios, $V_f^j = 1.14$ voltios.
- Ganancia del controlador: $\gamma = 0.00001$
- El polinomio utilizado es $\psi(\tau) = \tau^5 (r_1 - r_2\tau + r_3\tau^2)$ con $r_1 = 21, r_2 = 35, r_3 = 15$, donde $\tau = \frac{t-t_i}{t_f-t_i}$.

A continuación presentamos los resultados de la simulación correspondientes a la planificación de trayectorias desde la condición inicial de $(5A, 10V)$ hasta una condición final de $(20A, 20V)$ que corresponden a los puntos de equilibrio para una resistencia $R = 2 \Omega$.

Las trayectorias simuladas corresponden a una secuencia de tiempo que pasa por:

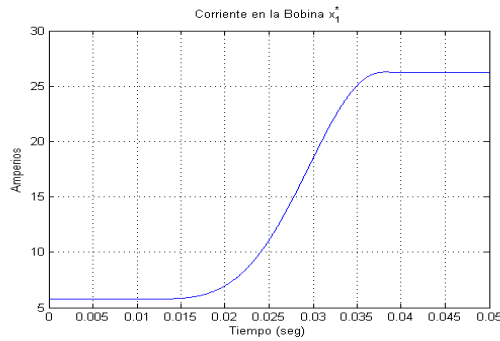
- Permanecer $\Delta_{t_1} = 10$ mseg en la condición inicial.
- Seguir la trayectoria planificada durante $\Delta_{t_2} = 30$ mseg.
- Permanecer $\Delta_{t_3} = 10$ mseg en la condición final

En la figura del voltaje 4.1b de la salida pueden observarse las tres regiones de tiempo a las que hacemos referencia. Las figuras 4.1a, 4.1b, 4.1c muestran el comportamiento de la corriente en la bobina, el voltaje en el condensador y el control. Debe notarse que estos resultados corresponden al modelo Joule y no incluyen el modulador de ancho de pulso.

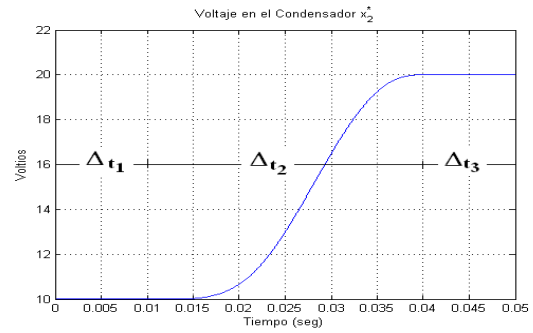
Además, la figura 4.1d es la función de energía que utilizamos como trayectoria e incluimos la primera y segunda derivada en las figuras 4.1e y 4.1f. Estas son utilizadas por el sistema de referencia para completar el seguimiento.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos del prototipo cuando se implementó el controlador en el laboratorio, con tal fin incluimos simulaciones y mediciones de campo superpuestas en cada una de las figuras. Así presentamos tres ejemplos:

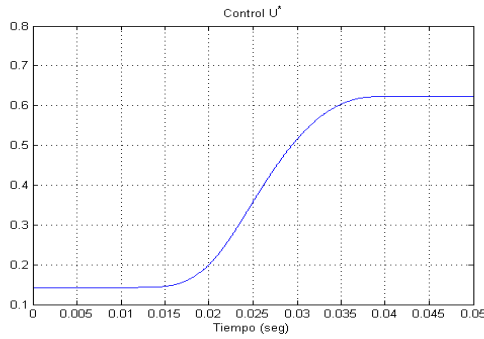
- Seguimiento de trayectoria iniciando en 14 voltios y finalizando en 16 voltios. Las figuras 4.2a y 4.2b corresponden a la corriente en la bobina y la tensión en el condensador, respectivamente.
- Rango de 13 a 17 voltios. Figuras 4.3a y 4.3b para la corriente y la tensión, respectivamente.
- Rango 10 a 20 voltios. Figuras 4.4a y 4.4b para la corriente y la tensión, respectivamente.



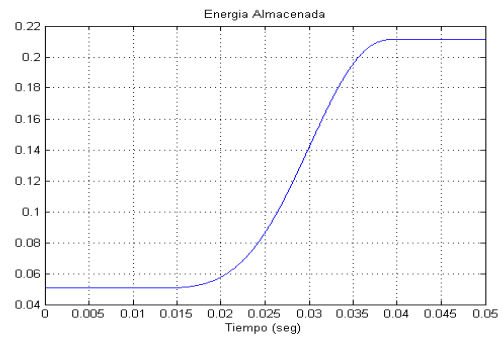
(a) Corriente en la Bobina



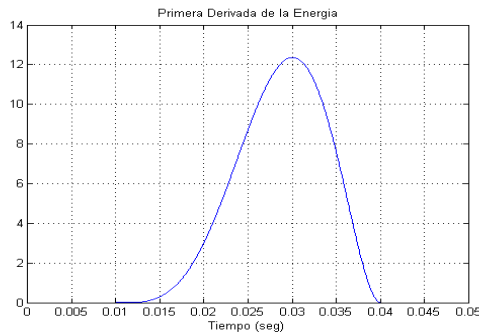
(b) Voltaje en el Condensador



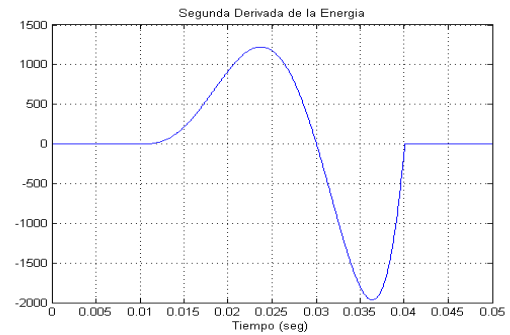
(c) Control



(d) Energía Almacenada



(e) Derivada de la Energía Almacenada

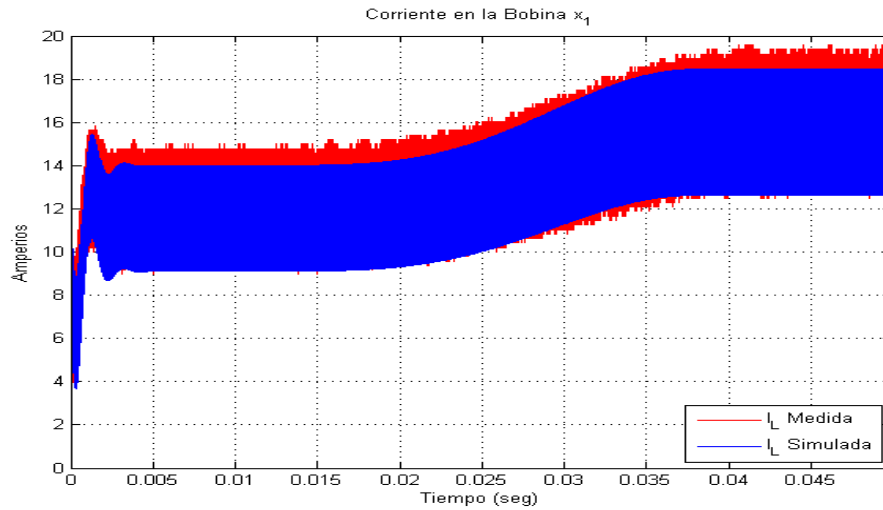


(f) Segunda Derivada

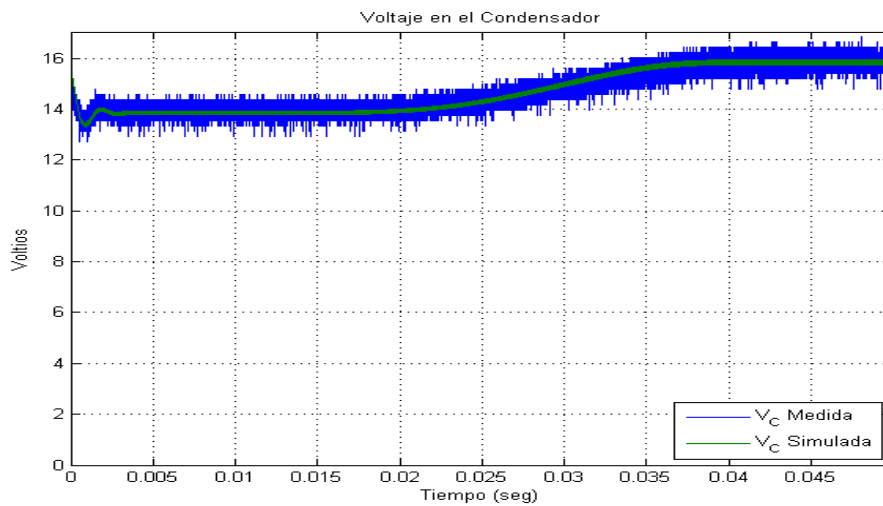
Figura 4.1: Simulaciones para el Seguimiento del polinomio $\psi(t, t_i, t_f)$ $V_{c_i} = 10$ V a $V_{c_f} = 20$ V

4.2.2. Análisis de los Resultados

Las simulaciones y los resultados experimentales muestran gran concordancia y el error cometido en el seguimiento es despreciable, lo que corrobora la bonanza del control propuesto.



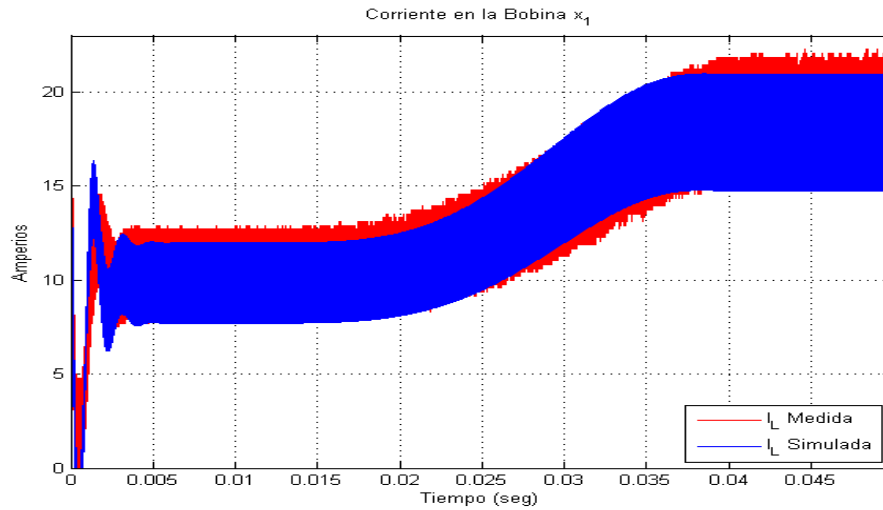
(a) Corriente en la Bobina



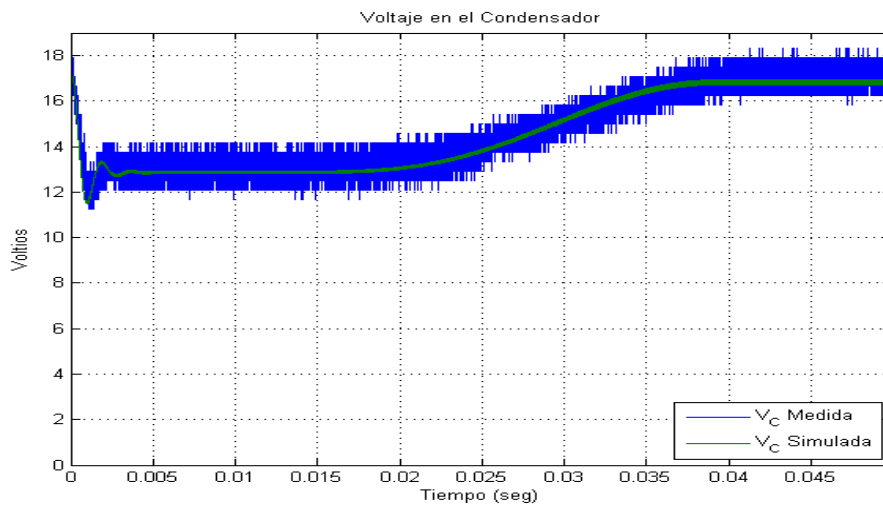
(b) Voltaje en el Condensador

Figura 4.2: Comparación entre Simulaciones y Mediciones para el Seguimiento del Polinomio de $V_{C_i} = 14$ a $V_{C_f} = 16$ voltios

Como se aprecia en las figuras obtenidas, la operación en conjunto del modelo Joule muestra como el convertidor puede barrer gran parte del rango de operación, a saber $(E, 2E)$.



(a) Corriente en la Bobina

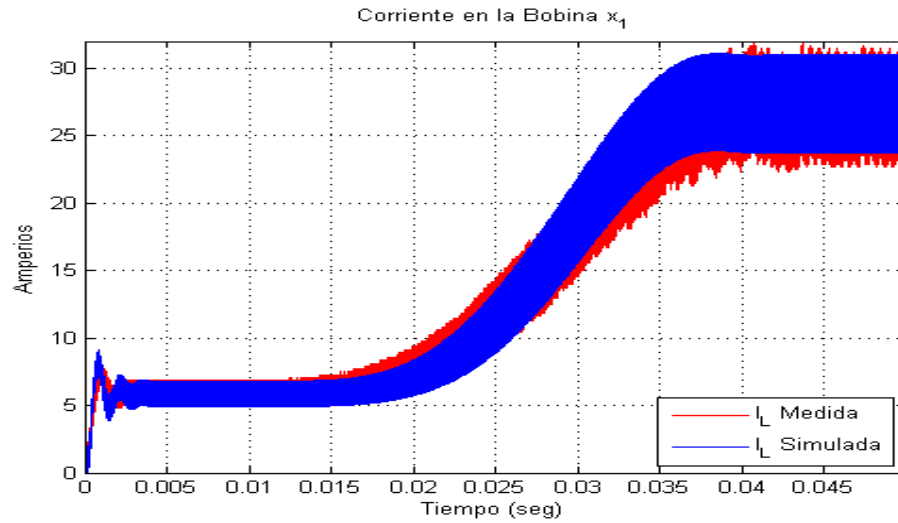


(b) Voltaje en el Condensador

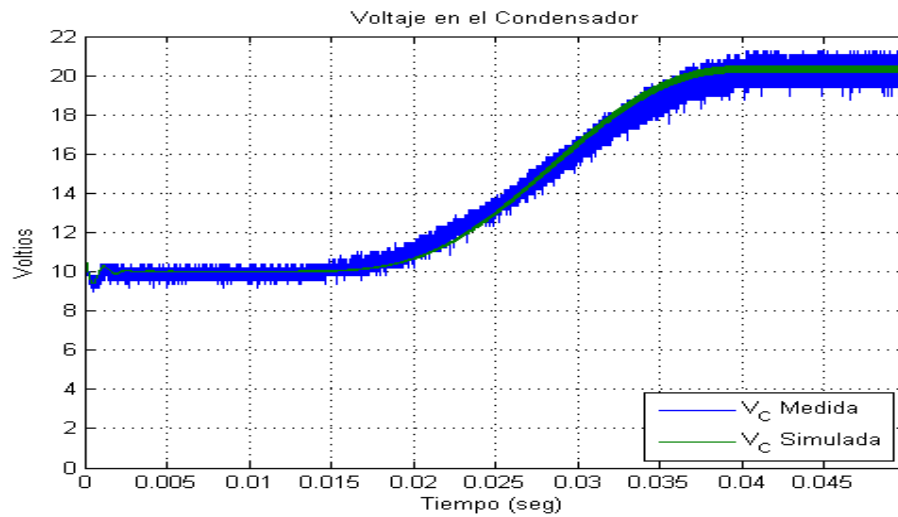
Figura 4.3: Comparación entre Simulaciones y Mediciones para el Seguimiento del Polinomio de $V_{c_i} = 13$ a $V_{c_f} = 17$ voltios

4.3. Síntesis de un Controlador para el Seguimiento de Señales Senoidales en un Convertidor Boost-Boost

Procedemos, a continuación, a aplicar las técnicas planteadas en la presente tesis a un caso particular: el convertidor Boost-Boost.



(a) Corriente en la Bobina



(b) Voltaje en el Condensador

Figura 4.4: Comparación entre Simulaciones y Mediciones para el Seguimiento del Polinomio de $V_{C_i} = 10$ a $V_{C_f} = 20$ voltios

El convertidor Boost funciona como elevador, es decir, la tensión de salida es mayor que la tensión de entrada. Para obtener en la salida una señal que tenga cruce por cero es necesario utilizar una topología diferente que se puede obtener mediante el uso de dos convertidores Boost interconectados por el extremo de la carga como lo plantean

Caceres y Barbi [Cac04]. De esta manera se establece una configuración tipo Boost-Boost. Esta topología, como lo mostraremos adelante, tiene la ventaja de que puede funcionar como elevador y reductor permitiendo una extensión del rango de operación.

4.3.1. Modelo Ideal

La configuración básica utilizando del convertidor Boost-Boost se muestra en la figura 4.5. Cada etapa puede entregar a su salida, sobre su correspondiente condensador, una tensión positiva mayor que la tensión de entrada. Si las colocamos en contrafase es posible obtener una señal senoidal sin nivel de continua en la carga, pudiendo funcionar como elevador o reductor de acuerdo con la funciones de seguimiento de cada etapa.

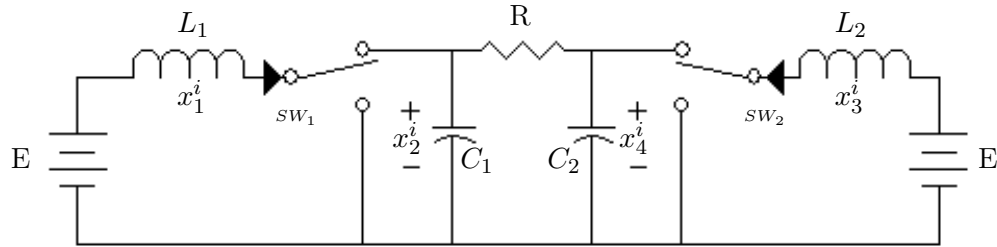


Figura 4.5: Modelo Ideal del Convertidor Boost-Boost DC-AC con Carga Flotante

Aplicando leyes de Kirchoff obtenemos las ecuaciones que caracterizan el comportamiento dinámico del convertidor:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \\ \dot{x}_3^i \\ \dot{x}_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1^i) & 0 & 0 \\ (1-u_1^i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-u_2^i) \\ 0 & 0 & (1-u_2^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde x_1^i, x_3^i son las corrientes en las bobinas, x_2^i, x_4^i son las tensiones en los condensadores, u_1^i, u_2^i son las entradas al sistema, R es la carga, E es la fuente de alimentación, L_1, L_2 son las inductancias de las bobinas y C_1, C_2 son las capacitancias de los condensadores.

Si hacemos cero las derivadas correspondientes a la dinámica se obtienen los puntos de equilibrio, representados con la notación barra superior, que vendrán dados por la solución de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 (1 - \bar{u}_1) \bar{x}_2 &= E \\
 (1 - \bar{u}_1) \bar{x}_1 &= \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_4)}{R} \\
 (1 - \bar{u}_2) \bar{x}_4 &= E \\
 (1 - \bar{u}_2) \bar{x}_3 &= \frac{(\bar{x}_4 - \bar{x}_2)}{R}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Síntesis del Controlador. Utilizando la metodología planteada en el Capítulo 1, seguimos los pasos que permiten la obtención del control, por lo cual procedemos a:

- Hallar la dinámica exacta del error
- Obtener la salida pasiva
- Realizar la síntesis del controlador

Comenzamos por hallar la dinámica exacta del error de seguimiento. Las definiciones de error se obtienen de utilizar dos modelos, uno perturbado y otro referencial, para posteriormente restar ambos sistemas. Este procedimiento se detalla en el capítulo uno.

Así definimos como variables del error las siguientes:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= x_1^i - x_1^{i*} & e_2 &= x_2^i - x_2^{i*} \\
 e_3 &= x_3^i - x_3^{i*} & e_4 &= x_4^i - x_4^{i*} \\
 e_{u_1} &= u_1^i - u_1^{i*} & e_{u_2} &= u_2^i - u_2^{i*}
 \end{aligned}$$

donde la notación supra asterisco representa las variables del sistema de referencia.

La dinámica del error viene dada por:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1^i \\ \dot{e}_2^i \\ \dot{e}_3^i \\ \dot{e}_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1^i) & 0 & 0 \\ (1-u_1^i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-u_2^i) \\ 0 & 0 & (1-u_2^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \\ e_4^i \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \\ e_4^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2^{i*} & 0 \\ -x_1^{i*} & 0 \\ 0 & x_4^{i*} \\ 0 & -x_3^{i*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{u_1} \\ e_{u_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

La salida pasiva vendrá dada por:

$$e_y = \mathcal{B}^{*T} e = \begin{bmatrix} x_2^{i*} & 0 \\ -x_1^{i*} & 0 \\ 0 & x_4^{i*} \\ 0 & -x_3^{i*} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \\ e_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^{i*} e_1^i - x_1^{i*} e_2^i \\ x_4^{i*} e_3^i - x_3^{i*} e_4^i \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

donde \mathcal{B}^* es la matriz de seguimiento de los estados del sistema referencial.

Por tanto, el control toma la forma siguiente $u = u^* - \Gamma e_y$, donde $\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$

y γ_1, γ_2 constantes positivas.

Que podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^{i*} \\ u_2^{i*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^{i*} e_1^i - x_1^{i*} e_2^i \\ x_4^{i*} e_3^i - x_3^{i*} e_4^i \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^{i*} \\ u_2^{i*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^{i*} x_1 - x_1^{i*} x_2 \\ x_4^{i*} x_3 - x_3^{i*} x_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Análisis de Estabilidad. Para demostrar que el sistema en lazo cerrado es estable utilizamos la candidata a función de Lyapunov

$$V = e^T \mathcal{A} e = \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \\ e_4^i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1^i \\ e_2^i \\ e_3^i \\ e_4^i \end{bmatrix}$$

Siguiendo la estructura matricial planteada en el primer capítulo es posible identificar las matrices del sistema, específicamente las matrices \mathcal{R} y \mathcal{B}^* que vienen dadas por:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix}; \quad \mathcal{B}^* = \begin{bmatrix} x_2^{i*} & 0 \\ -x_1^{i*} & 0 \\ 0 & x_4^{i*} \\ 0 & -x_3^{i*} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Tal como se mostró en el primer capítulo, $\dot{V} = -e^T \mathcal{Q} e$ donde $\mathcal{Q} = \mathcal{R} + \mathcal{B}^* \Gamma \mathcal{B}^{*T}$.

Sustituyendo queda:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2^{i*} & 0 \\ -x_1^{i*} & 0 \\ 0 & x_4^{i*} \\ 0 & -x_3^{i*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^{i*} & 0 \\ -x_1^{i*} & 0 \\ 0 & x_4^{i*} \\ 0 & -x_3^{i*} \end{bmatrix}^T \quad (4.13)$$

y, finalmente, se obtiene:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} x_2^{i*2} \gamma_1 & -x_1^{i*} \gamma_1 x_2^{i*} & 0 & 0 \\ -x_1^{i*} \gamma_1 x_2^{i*} & 1/R + x_1^{i*2} \gamma_1 & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & x_4^{i*2} \gamma_2 & -x_3^{i*} \gamma_2 x_4^{i*} \\ 0 & -1/R & -x_3^{i*} \gamma_2 x_4^{i*} & 1/R + x_3^{i*2} \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

De acuerdo con el criterio de Sylvester, una condición suficiente para que la matriz \mathcal{Q} sea definida positiva es que los determinantes de todos los menores principales (Δ_n , $n = 1..4$) sean positivos.

Los determinantes de los menores están dados por:

1. $\Delta_1 = x_2^{i*2} \gamma_1$
2. $\Delta_2 = \frac{x_2^{i*2} \gamma_1}{R}$
3. $\Delta_3 = \frac{x_2^{i*2} \gamma_1 x_4^{i*2} \gamma_2}{R}$
4. $\Delta_4 = 0$

Dado que los parámetros γ_1, γ_2, R son positivos, los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ también lo son, con la excepción de Δ_4 que es igual a cero; por tanto la matriz \mathcal{Q} es semidefinida positiva y para garantizar la estabilidad del origen hay que recurrir al Teorema de La Salle [LaS60].

Se puede probar que el único punto del subespacio definido mediante $\dot{V} = 0$, que es invariante por el sistema (4.9), (4.10) y (4.11) es el origen $(0, 0, 0, 0)$. Por lo tanto, del Teorema de la Salle se tiene que el origen es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable.

Seguimiento de Señales Senoidales. Dado que la técnica permite realizar seguimiento de trayectorias, se desea una tensión de salida de forma senoidal entre los extremos de la carga

$$x_2^{i*} - x_4^{i*} = B \sin(\omega t)$$

Para lograrlo necesitamos que las salidas de cada convertidor Boost estén en contrafase:

$$\begin{aligned} x_2^{i*} &= A + \frac{B}{2} \sin(\omega t) \\ x_4^{i*} &= A - \frac{B}{2} \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{4.15}$$

A pesar de que el convertidor Boost es plano, en el convertidor Boost-Boost no hemos podido obtener, a partir de (4.7), un sistema de seguimiento referencial que guíe las trayectorias.

En este trabajo supondremos que la frecuencia de la señal que se pretende seguir es lo suficientemente pequeña como para aproximar el sistema referencial por el sistema de equilibrios:

$$\begin{aligned} x_1^{i*} &\simeq \bar{x}_1 \\ x_3^{i*} &\simeq \bar{x}_3 \end{aligned}$$

Observación

Se hace funcionar el convertidor en los equilibrios del sistema, utilizando una senoide de baja frecuencia de modo que la dinámica de señal sea mucho más lenta que la del convertidor, las ecuaciones obtenidas son las siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &\simeq x_1^{i*} = x_2^{i*} \frac{(x_2^{i*} - x_4^{i*})}{ER} \\ \bar{x}_3 &\simeq x_3^{i*} = x_4^{i*} \frac{(x_4^{i*} - x_2^{i*})}{ER}\end{aligned}\quad (4.16)$$

Sus derivadas quedarán como:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^{i*} &= \dot{x}_2^{i*} \frac{(x_2^{i*} - x_4^{i*})}{ER} + x_2^{i*} \frac{(\dot{x}_2^{i*} - \dot{x}_4^{i*})}{ER} \\ \dot{x}_3^{i*} &= \dot{x}_4^{i*} \frac{(x_4^{i*} - x_2^{i*})}{ER} + x_4^{i*} \frac{(\dot{x}_4^{i*} - \dot{x}_2^{i*})}{ER} \\ \dot{x}_2^{i*} &= \frac{B}{2}\omega \cos(\omega t) \\ \dot{x}_4^{i*} &= -\frac{B}{2}\omega \cos(\omega t)\end{aligned}\quad (4.17)$$

Con las ecuaciones dinámicas del sistema (4.7) se pueden obtener los controles referenciales:

$$\begin{aligned}u_1^{i*} &= 1 - \frac{E - L_1 \dot{x}_1^{i*}}{x_2^{i*}} \\ u_2^{i*} &= 1 - \frac{E - L_2 \dot{x}_3^{i*}}{x_4^{i*}}\end{aligned}\quad (4.18)$$

4.3.2. Modelo Joule del Convertidor Boost-Boost

En esta sección se utiliza el modelo Joule del convertidor Boost-Boost DC-AC. Se añaden resistencias en serie con las bobinas y fuentes de tensión constantes e interruptores para sustituir los dispositivos semiconductores. Así, la topología resultante estará dada por el circuito de la figura 4.6.

Aplicando leyes de Kirchoff es posible obtener las ecuaciones que describen la

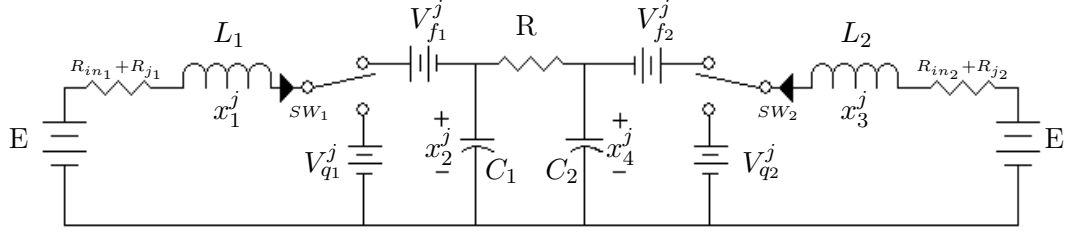


Figura 4.6: Modelo Joule del Convertidor Boost-Boost DC-AC con Carga Flotante

dinámica del comportamiento del convertidor:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^j \\ \dot{x}_2^j \\ \dot{x}_3^j \\ \dot{x}_4^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1^j) & 0 & 0 \\ (1-u_1^j) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-u_2^j) \\ 0 & 0 & (1-u_2^j) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ x_3^j \\ x_4^j \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} R_{in1} + R_{j1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & R_{in2} + R_{j2} & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ x_3^j \\ x_4^j \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} V_{f1}^j & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{f2}^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-u_1^j) \\ (1-u_2^j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{q1}^j & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{q2}^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^j \\ u_2^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & \hspace{20em} (4.19)
 \end{aligned}$$

donde x_1^j, x_3^j son las corrientes en la bobinas, x_2^j, x_4^j son las tensiones en los condensadores, u_1^j, u_2^j son las entradas al sistema, R es la carga, E es la fuente de alimentación, R_{in1}, R_{in2} son las resistencias de pérdidas de las bobinas, R_{j1}, R_{j2} son las resistencias Joule, $V_{f1}^j, V_{f2}^j, V_{q1}^j, V_{q2}^j$ son las fuentes de tensión que representan los semiconductores, L_1, L_2 son las inductancias de las bobinas y C_1, C_2 son las capacitancias de los condensadores.

El modelo referencial está dado por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^{j*} \\ \dot{x}_2^{j*} \\ \dot{x}_3^{j*} \\ \dot{x}_4^{j*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{q1}^j & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{q2}^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{j*} \\ u_2^{j*} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1^{j*}) & 0 & 0 \\ (1-u_1^{j*}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-u_2^{j*}) \\ 0 & 0 & (1-u_2^{j*}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{j*} \\ x_2^{j*} \\ x_3^{j*} \\ x_4^{j*} \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} (R_{in1} + R_{j1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & (R_{in2} + R_{j2}) & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{j*} \\ x_2^{j*} \\ x_3^{j*} \\ x_4^{j*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{f1}^j & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & V_{f2}^j \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-u_1^{j*}) \\ (1-u_2^{j*}) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Utilizando las definiciones del error dadas por:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= x_1^j - x_1^{j*} & e_2 &= x_2^j - x_2^{j*} \\
 e_3 &= x_3^j - x_3^{j*} & e_4 &= x_4^j - x_4^{j*} \\
 e_{u_1} &= u_1^j - u_1^{j*} & e_{u_2} &= u_2^j - u_2^{j*}
 \end{aligned}$$

es posible obtener la dinámica exacta del error:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_{in1} + R_{j1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & R_{in2} + R_{j2} & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1^{j*}) & 0 & 0 \\ (1-u_1^{j*}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-u_2^{j*}) \\ 0 & 0 & (1-u_2^{j*}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} x_2^{j*} + V_{f1}^j - V_{q1}^j & 0 \\ -x_1^{j*} & 0 \\ 0 & x_4^{j*} + V_{f2}^j - V_{q2}^j \\ 0 & -x_3^{j*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{u_1} \\ e_{u_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

De acuerdo con la técnica planteada en los capítulos 1 y 2, podemos sintetizar los controladores que toman la forma:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^{j*} \\ u_2^{j*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_2^{j*} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j) e_1^j - x_1^{j*} e_2^j \\ (x_4^{j*} + V_{f_2}^j - V_{q_2}^j) e_3^j - x_3^{j*} e_4^j \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^{j*} \\ u_2^{j*} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (V_{f_1}^j - V_{q_1}^j) (x_1 - x_1^{j*}) + x_2^{j*} x_1 - x_1^{j*} x_2 \\ (V_{f_2}^j - V_{q_2}^j) (x_3 - x_3^{j*}) + x_4^{j*} x_3 - x_3^{j*} x_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Análisis de Estabilidad. De acuerdo con los resultados presentados en el primer capítulo, es posible demostrar estabilidad de acuerdo a Lyapunov si se cumple la condición de acoplamiento dada por:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{R} + \mathcal{B}^* \Gamma \mathcal{B}^{*T} \geq 0$$

donde:

$$\mathcal{B}^* = \begin{bmatrix} x_2^{j*} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j & 0 \\ -x_1^{j*} & 0 \\ 0 & x_4^{j*} + V_{f_2}^j - V_{q_2}^j \\ 0 & -x_3^{j*} \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R_{in_1} + R_{j_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & R_{in_2} + R_{j_2} & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} & 0 & 0 \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} & 0 & -\frac{1}{R} \\ 0 & 0 & Q_{3,3} & Q_{3,4} \\ 0 & -\frac{1}{R} & Q_{4,3} & Q_{4,4} \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes de la matriz son:

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= R_{in_1} + R_{j_1} + (x_2^{j*} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j)^2 \gamma_1; & Q_{1,2} &= Q_{2,1} \\ Q_{2,1} &= -(x_2^{j*} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j) \gamma_1 x_1^{j*}; & Q_{2,2} &= 1/R + x_1^{j*2} \gamma_1 \\ Q_{3,3} &= R_{in_2} + R_{j_2} + (x_4^{j*} + V_{f_2}^j - V_{q_2}^j)^2 \gamma_2; & Q_{3,4} &= Q_{4,3} \\ Q_{4,3} &= -x_3^{j*} \gamma_2 (x_4^{j*} + V_{f_2}^j - V_{q_2}^j); & Q_{4,4} &= 1/R + x_3^{j*2} \gamma_2 \end{aligned}$$

Para aplicar el criterio de Sylvester requerimos que los determinantes de cada uno de los menores principales (Δ_n , $n = 1..4$) sean positivos. Resolviendo cada uno obtenemos:

1. $\Delta_1 = R_{in_1} + R_{j_1} + (x_2^{j*} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j)^2 \gamma_1$
2. $\Delta_2 = \frac{(R_{in_1} + R_{j_1})(1 + x_1^{j*2} \gamma_1 R) + (x_2^{j*} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j)^2 \gamma_1}{R}$
3. $\Delta_3 = \frac{\left(R_{in_2} + R_{j_2} + \gamma_2 (x_4^{j*2} + V_{f_2}^j - V_{q_2}^j)^2 \right) \left((R_{in_1} + R_{j_1})(1 + x_1^{j*2} \gamma_1 R) + \gamma_1 (x_2^{j*2} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j)^2 \right)}{R}$
4. $\Delta_4 = \frac{(R_{in_2} + R_{j_2}) x_3^{j*2} \gamma_1 \gamma_2 (x_2^{j*} + V_{f_1}^j - V_{q_1}^j)^2}{R} + \frac{(R_{in_1} + R_{j_1}) x_1^{j*2} \gamma_1 \gamma_2 (x_4^{j*} + V_{f_2}^j - V_{q_2}^j)^2}{R}$
 $+ \frac{(R_{in_1} + R_{j_1})(R_{in_2} + R_{j_2}) (x_3^{j*2} \gamma_2 + x_1^{j*2} \gamma_1 + R x_1^{j*2} x_3^{j*2} \gamma_2 \gamma_1)}{R}$

Dado que $R_{in_1}, R_{in_2}, R_{j_1}, R_{j_2}, \gamma_1, \gamma_2, R > 0$, los determinantes son todos positivos.

En este caso la inserción de los elementos del modelo Joule nos permite aplicar directamente el criterio de Lyapunov, puesto que la matriz con que estudiamos la estabilidad es definida positiva. En consecuencia el origen es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable.

Seguimiento de Señales Senoidales. En este capítulo hemos presentado el seguimiento de trayectorias para el convertidor Boost. Lo hicimos utilizando su característica plana y, con ello, obtuvimos un sistema de ecuaciones para el seguimiento. En el convertidor Boost-Boost no tenemos una salida plana que nos permita realizar este procedimiento, sin embargo, utilizando las ecuaciones de equilibrios del sistemas hemos realizado simulaciones y un prototipo experimental que han dado resultados satisfactorios; para lograrlo utilizamos las ecuaciones del equilibrio \bar{x}^j como el sistema de ecuaciones de seguimiento, es decir, $x^{j*} = \bar{x}^j$.

En el seguimiento de trayectoria se desea que la salida sea senoidal $x_2^{i*} - x_4^{i*} = B \sin(\omega t)$, así que es necesario que las salidas de cada convertidor se encuentren en contrafase. Las salidas vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} x_2^{j*} &= A + \frac{B}{2} \sin(\omega t) \\ x_4^{j*} &= A - \frac{B}{2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Requerimos de ecuaciones que permitan el seguimiento de las corrientes x_1^{j*}, x_3^{j*} , en este caso calculamos los equilibrios (barras) haciendo cero las derivadas del sistema y

obtenemos:

$$\bar{x}_1^j = \frac{(E-V_{q1}^j)}{2(R_{in1}+R_{j1})} \pm \sqrt{\left(\frac{(E-V_{q1}^j)}{2(R_{in1}+R_{j1})}\right)^2 + \frac{(\bar{x}_2^j - V_{q1}^j + V_{f1}^j)(\bar{x}_4^j - \bar{x}_2^j)}{(R_{in1}+R_{j1})R}}$$

$$\bar{x}_3^j = \frac{(E-V_{q2}^j)}{2(R_{in2}+R_{j2})} \pm \sqrt{\left(\frac{(E-V_{q2}^j)}{2(R_{in2}+R_{j2})}\right)^2 + \frac{(\bar{x}_4^j - V_{q2}^j + V_{f2}^j)(\bar{x}_2^j - \bar{x}_4^j)}{(R_{in2}+R_{j2})R}}$$

De estas dos soluciones utilizamos la menor corriente que se obtiene con el signo negativo.

Las derivadas de las corrientes están dadas por:

$$\dot{\bar{x}}_1^j = -\frac{(\dot{\bar{x}}_2^j \bar{x}_4^j + \bar{x}_2^j \dot{\bar{x}}_4^j - 2\dot{\bar{x}}_2^j \bar{x}_2^j + (\dot{\bar{x}}_4^j - \dot{\bar{x}}_2^j)(V_{f1}^j - V_{q1}^j))}{\sqrt{R(E-V_{q1}^j)^2 + 4R(R_{in1}+R_{j1})(\bar{x}_2^j - V_{q1}^j + V_{f1}^j)(\bar{x}_4^j - \bar{x}_2^j)}}$$

$$\dot{\bar{x}}_3^j = -\frac{(\dot{\bar{x}}_4^j \bar{x}_2^j + \bar{x}_4^j \dot{\bar{x}}_2^j - 2\dot{\bar{x}}_4^j \bar{x}_4^j + (\dot{\bar{x}}_2^j - \dot{\bar{x}}_4^j)(V_{f2}^j - V_{q2}^j))}{\sqrt{R(E-V_{q2}^j)^2 + 4R(R_{in2}+R_{j2})(\bar{x}_2^j - V_{q2}^j + V_{f2}^j)(\bar{x}_2^j - \bar{x}_4^j)}}$$

Como estamos utilizando las ecuaciones de equilibrio para el seguimiento de las trayectorias se cumple: $\dot{x}_1^{j*} = \dot{\bar{x}}_1^j$, $\dot{x}_3^{j*} = \dot{\bar{x}}_3^j$.

Las derivadas de las tensiones de salidas están dadas por:

$$\dot{x}_2^{j*} = \frac{B}{2}\omega \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}_4^{j*} = -\frac{B}{2}\omega \cos(\omega t)$$

De esta manera tenemos el sistema de ecuaciones necesario para realizar el seguimiento de trayectorias. Finalmente, las ecuaciones de la dinámica del convertidor DC-AC dadas por (4.19) permiten obtener los controles referenciales:

$$u_1^{j*} = \frac{L_1 \dot{x}_1^{j*} + x_2^{j*} - E + (R_{in1} + R_{j1})x_1^{j*} + V_{f1}^j}{x_2^{j*} + V_{f1}^j - V_{q1}^j}$$

$$u_2^{j*} = \frac{L_2 \dot{x}_3^{j*} + x_4^{j*} - E + (R_{in2} + R_{j2})x_3^{j*} + V_{f2}^j}{x_4^{j*} + V_{f2}^j - V_{q2}^j}$$

4.3.3. Simulaciones

Como hemos planteado en el segundo capítulo existen varios modelos, que caracterizan con mayor o menor precisión el comportamiento del convertidor. Uno de ellos es el modelo Ideal que no incluye pérdidas, otro es el modelo Joule que incluye algunas de las pérdidas existentes en prototipo y el modelo real que corresponde al montaje experimental del cual no tenemos las ecuaciones.

Las simulaciones se realizan en lazo cerrado, por lo cual debe sintetizarse un controlador para utilizarlo con el modelo. Ya que tenemos ecuaciones para el modelo Ideal y el modelo Joule podemos sintetizar controladores para ambos casos. Por lo cual simularemos tres posibles casos que son:

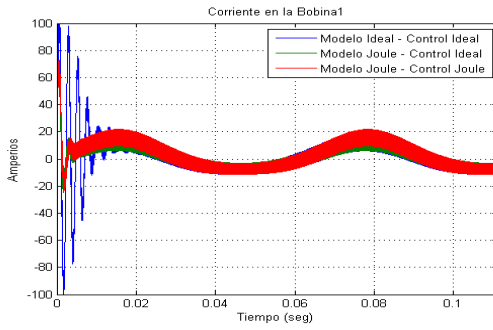
1. Modelo Ideal y controlador obtenido con el modelo Ideal
2. Modelo Joule y controlador obtenido con el modelo Ideal
3. Modelo Joule y controlador obtenido con el modelo Joule

En vista de que el modelo Joule incluye pérdidas, lo utilizaremos para aproximar el prototipo, será con éste con el que obtendremos una ley de control que aplicaremos al prototipo.

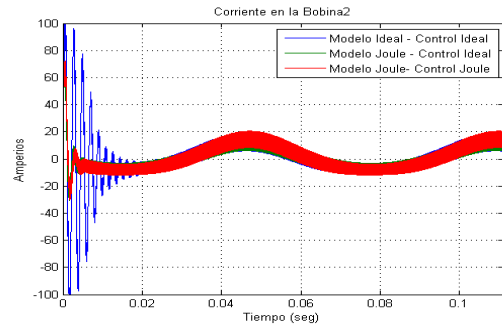
En todos los casos se aplicó la realimentación de la salida pasiva de la dinámica exacta del error de seguimiento, el convertidor Boost-Boost y el seguimiento de la señal $B \sin(\omega t)$ en la carga del convertidor, obtenido a partir del seguimiento de las señales $A + (B/2) \sin(\omega t)$ y $A - (B/2) \sin(\omega t)$ en cada una de las salidas del convertidor. Se incluyó la operación del modulador de ancho de pulso en las entradas de cada convertidor Boost. En estos casos, los parámetros son los siguientes: $E = 10$ voltios, $\gamma = 0.00001$, $L_1 = L_2 = 33\mu\text{H}$, $C_1 = C_2 = 1000\mu\text{F}$, $R = 2 \Omega$, $A = 20$, $B = 10$ voltios y $\omega = 100$ rad/seg. Para los modelos Joule se incluyen también $R_{in_1} = R_{in_2} = 0.05 \Omega$, $R_{j_1} = R_{j_2} = 0.225 \Omega$. En las figuras 4.7a, 4.7b, 4.7c, 4.7d, 4.7e y 4.7f pueden observarse la corriente en cada uno de los inductores, las tensiones en cada condensador, la tensión en la carga, y los controles (antes del PWM) para cada uno de los tres casos analizados.

Como se observa, en el bloque de figuras 4.7 el modelo Ideal presenta transitorios con un amplio sobrepico y para estabilizarlos requiere de cerca de medio ciclo de operación, mientras que para el modelo Joule se reducen considerablemente. En las figuras 4.7c,d y 4.8b,d se observa que el modelo Ideal tiene un seguimiento más preciso que el modelo Joule. Sin embargo, éste no incluye ningún efecto de las pérdidas existente en el prototipo.

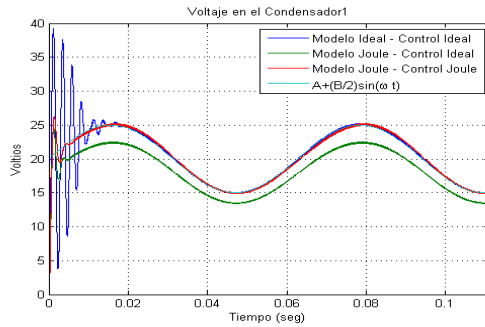
Hacemos un acercamiento de algunas de las gráficas sin incluir el transitorio. Así tenemos las figuras 4.8a,b,c y d, la figura 4.8a es el acercamiento de la corriente en una de las bobinas, las figuras 4.8b y d corresponde a las tensiones en contrafase en cada



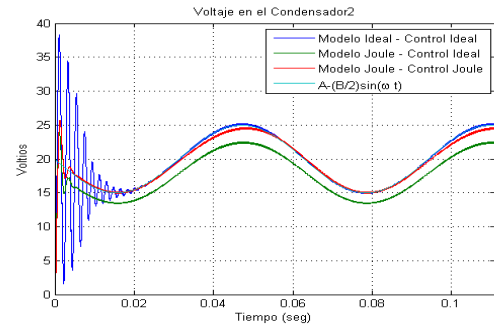
(a) Corriente en la Bobina 1



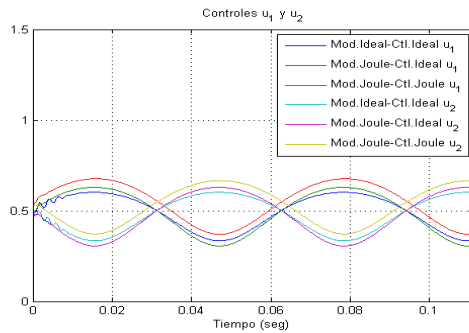
(b) Corriente en la Bobina 2



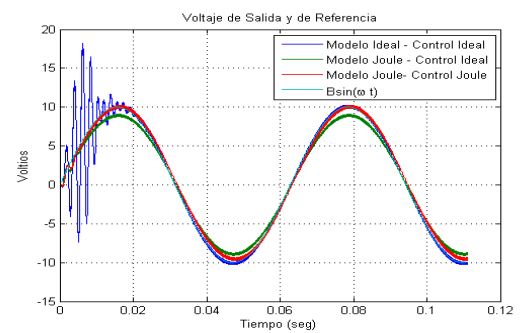
(c) Voltaje en el Condensador 1



(d) Voltaje en el Condensador 2



(e) Control 1 y 2



(f) Voltaje de Salida y de Referencia

Figura 4.7: Simulaciones Boost-Boost con Convertidor DC-AC con Modelos Ideal y Joule

uno de los condensadores y la figura 4.8c corresponden a la salida en los extremos de la carga y la referencia para el seguimiento.

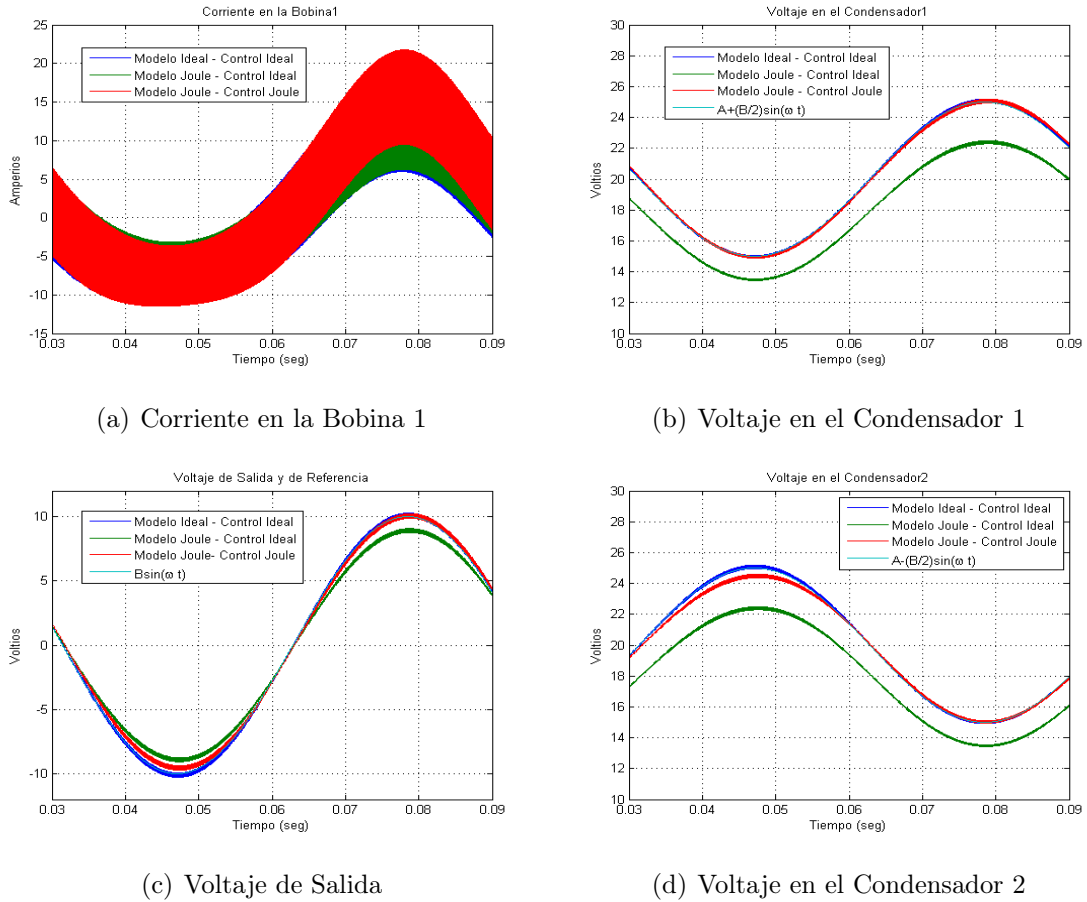


Figura 4.8: Simulaciones Boost-Boost con Convertidor DC-AC con Modelos Ideal y Joule (acercamientos)

4.3.4. Implementación Experimental

La implementación se realizó utilizando dos circuitos Boost interconectados y colocando la carga flotante. Dado que la carga no tiene conexión a la masa del circuito las mediciones se realizarán en forma diferencial en sus extremos. Para la realización del prototipo se utilizaron como interruptores IGBT BSM 200 GB 170 DLC marca Eupec, y en vista de que se generan corrientes en los dos sentidos fue necesario habilitar los dos transistores del dispositivo en forma complementaria de modo que nunca se encuentren ambos funcionando en el mismo instante de tiempo. Además, se introdujeron sensores de corriente para cada bobina y sensores de tensión en cada uno de los condensadores del circuito, de esta manera se tiene acceso a los cuatro estados del convertidor.

El controlador por realimentación de la salida pasiva se encuentra implementado, en

el prototipo experimental, por medio de un algoritmo en el procesador digital de señales (DSP) AD21991, éste algoritmo incluye las ecuaciones necesarias para el seguimiento de la trayectoria senoidal y además se encarga de generar la modulación por ancho de pulso (PWM) para ambos IGBT.

En el circuito mostrado en la figura 4.9 podemos observar el convertidor Boost, donde Q1, Q2, Q3 y Q4 representan cada uno de los transistores IGBT, los bloques sensores de corriente (transductor de corriente LA 55-P) y tensión (amplificadores operacionales TL074) y el procesador AD21991 que ejecuta la ley de control.

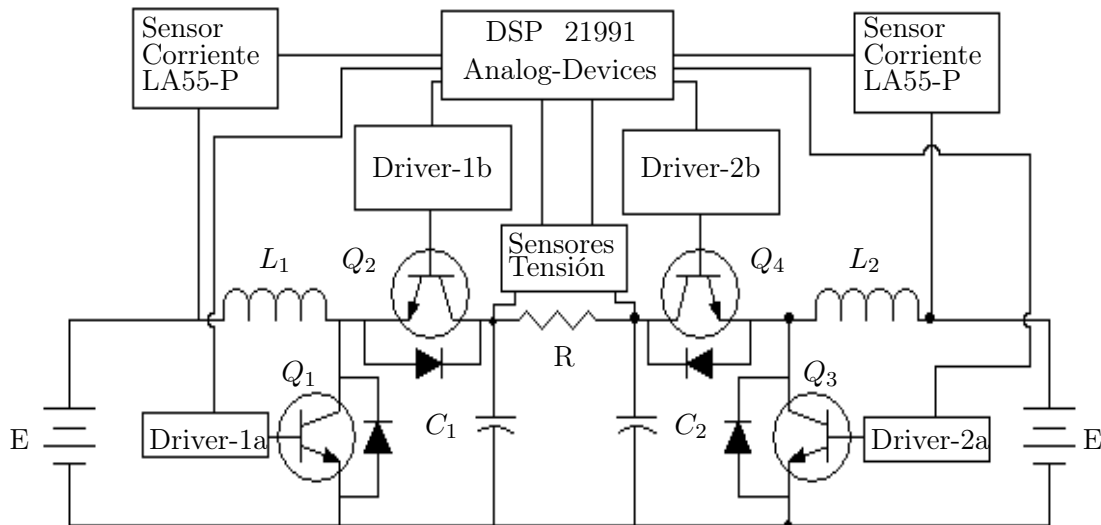


Figura 4.9: Prototipo del Convertidor Boost-Boost DC-AC con Carga Flotante

El montaje del prototipo del convertidor DC-AC fue realizado con dispositivos electrónicos cuyos parámetros: son $E = 10$ voltios, $L_1 = L_2 = 33 \mu\text{H}$, $C_1 = C_2 = 1000 \mu\text{F}$, y la frecuencia de conmutación se fija a 13.5 kHz. Se pueden apreciar en la figura 4.10 detalles del prototipo realizado en el laboratorio.

Para la implementación se utilizó el modelo Ideal con resistencia de pérdidas en el inductor (que recogerá, como veremos más adelante, la mayoría de pérdidas por conducción del convertidor). El principal motivo para utilizar este modelo y no el modelo Joule viene dado porque la velocidad y capacidad de procesamiento del procesador digital de señales (DSP) no permitió que los algoritmos de control obtenidos a partir

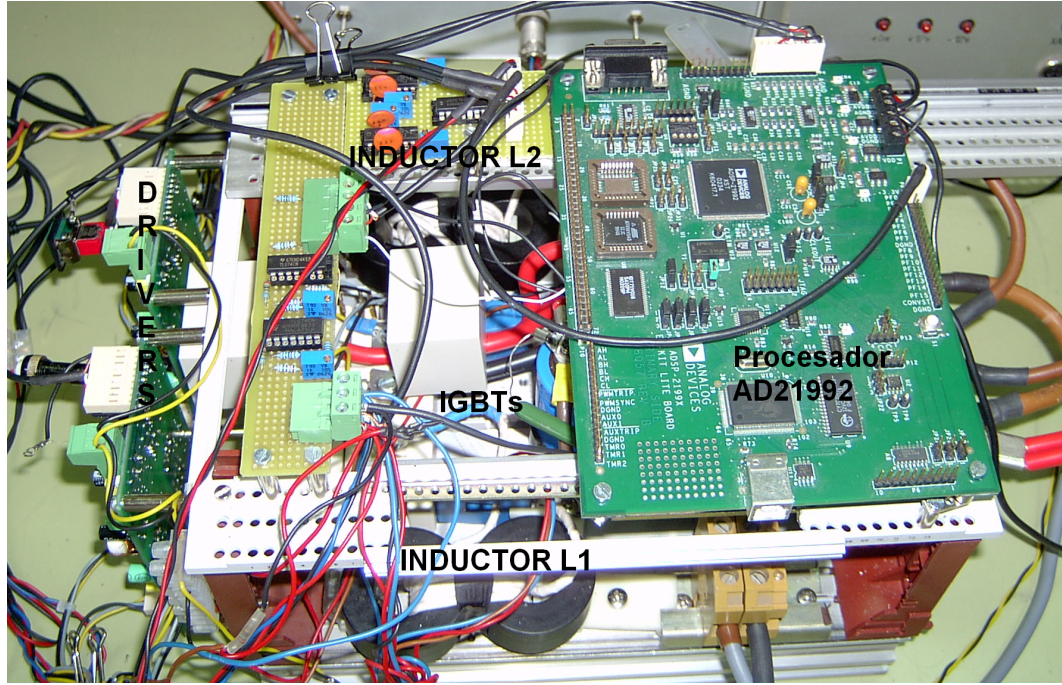


Figura 4.10: Fotografía del Prototipo del Convertidor Boost-Boost DC-AC

el modelo Joule pudieran ser ejecutados, en especial, por efecto del retardo introducido por las funciones senoidales que requiere el sistema referencial. De esta manera el modelo queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1) & 0 & 0 \\ (1-u_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(1-u_2) \\ 0 & 0 & (1-u_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} R_{in1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R & 0 & -1/R \\ 0 & 0 & R_{in2} & 0 \\ 0 & -1/R & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

donde x_1, x_3 son las corrientes en las bobinas, x_2, x_4 son las tensiones en los condensadores, u_1, u_2 son las entradas al sistema, R es la carga, E es la fuente de alimentación, R_{in1}, R_{in2} son las resistencias de pérdidas de las bobinas, L_1, L_2 son las inductancias

de las bobinas y C_1, C_2 son las capacitancias de los condensadores.

Cuyo equilibrio viene dado por:

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= \frac{E}{2R_{in1}} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2R_{in1}}\right)^2 + \frac{\bar{x}_2(\bar{x}_4 - \bar{x}_2)}{R_{in1}R}} \\
 \bar{x}_3 &= \frac{E}{2R_{in2}} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2R_{in2}}\right)^2 + \frac{\bar{x}_4(\bar{x}_2 - \bar{x}_4)}{R_{in2}R}} \\
 \bar{u}_1 &= 1 - \frac{E}{2\bar{x}_2} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2\bar{x}_2}\right)^2 - 2R_{in1}(\bar{x}_2 - \bar{x}_4)} \\
 \bar{u}_2 &= 1 - \frac{E}{2\bar{x}_4} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2\bar{x}_4}\right)^2 - 2R_{in2}(\bar{x}_4 - \bar{x}_2)}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Como se quiere realizar seguimiento de la tensión de salida, y bajo la hipótesis de localidad constante (se refiere al hecho de funcionar con las ecuaciones de los equilibrios), tenemos que las señales de referencia son: $x_2^* = A + \frac{B}{2} \sin(\omega t)$, $x_4^* = A - \frac{B}{2} \sin(\omega t)$ y la señal deseada será: $V_o = x_2^* - x_4^* = B \sin(\omega t)$.

El algoritmo que ejecuta el microprocesador viene determinado por el sistema referencial y el controlador utilizado para el convertidor, las ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 x_2^* &= A + \frac{B}{2} \sin(\omega t), \dot{x}_2^* = \omega \frac{B}{2} \cos(\omega t) \\
 x_4^* &= A - \frac{B}{2} \sin(\omega t), \dot{x}_4^* = -\omega \frac{B}{2} \cos(\omega t) \\
 x_1^* &= \frac{x_2^*(x_2^* - x_4^*)}{RE}, \dot{x}_1^* = \frac{\dot{x}_2^*(x_2^* - x_4^*) + x_2^*(\dot{x}_2^* - \dot{x}_4^*)}{RE} \\
 x_3^* &= \frac{x_4^*(x_4^* - x_2^*)}{RE}, \dot{x}_3^* = -\frac{\dot{x}_4^*(x_2^* - x_4^*) + x_4^*(\dot{x}_2^* - \dot{x}_4^*)}{RE} \\
 u_1^* &= \frac{E - L_1 \dot{x}_1^* - x_1^* R_{in1}}{x_2^*} \\
 u_2^* &= \frac{E - L_2 \dot{x}_3^* - x_3^* R_{in2}}{x_4^*} \\
 u_1 &= u_1^* - \gamma(x_2 x_1^* - x_1 x_2^*) \\
 u_2 &= u_2^* - \gamma(x_4 x_3^* - x_3 x_4^*)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

donde x_1^*, x_3^* son las corrientes referenciales en la bobinas, x_2^*, x_4^* son las tensiones referenciales en los condensadores, u_1^*, u_2^* son las entradas referenciales del sistema, R es la carga, E es la fuente de alimentación, R_{in1}, R_{in2} son las resistencias de pérdidas, L_1, L_2 son las inductancias de las bobinas y C_1, C_2 son las capacitancias de los condensadores, x_1, x_3 son las corrientes medidas en la bobinas, x_2, x_4 son las tensiones medidas en los condensadores, u_1, u_2 son las entradas que controlan el sistema y accionan los moduladores de ancho de pulso, A el nivel de continua de la salida y B la amplitud de señal a seguir.

Con la finalidad de sintonizar el valor de la resistencia de pérdidas y el valor de la ganancia del controlador y analizar el comportamiento del convertidor DC-AC, se realizaron cuatro experimentos que enumeramos a continuación:

1. Determinación de la resistencia de pérdidas de cada convertidor Boost.
2. Sintonización del parámetro γ del control.
3. Funcionamiento del convertidor DC-AC a $\omega = 100\text{rad/seg}$.
4. Funcionamiento del convertidor DC-AC a $f = 50\text{ Hz}$.

Determinación de la resistencia de pérdidas. La determinación de la resistencia de pérdidas se obtuvo a partir de la ecuación de potencias, para cada uno de los convertidores Boost, dada por $P_E = P_{R_{in_1}} + P_{\bar{x}_2}$, donde P_E es la potencia en la fuente de alimentación ($P_E = E\bar{x}_1$), $P_{R_{in_1}}$ es la potencia consumida por la resistencia R_{in_1} ($P_{R_{in_1}} = R_{in_1}\bar{x}_1^2$) y $P_{\bar{x}_2}$ es la potencia entregada en la salida en \bar{x}_2 ($P_{\bar{x}_2} = \frac{\bar{x}_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_4)}{R}$). Los parámetros son $R = 2\ \Omega$ y $E = 10$ voltios.

Para realizar las medidas se regula la tensión a las salidas de los dos convertidores Boost, de modo que se provoca cierta diferencia de tensión con el objetivo de lograr una corriente neta circulante en la resistencia de carga. A partir de los datos obtenidos puede calcularse la ecuación de potencias ($E\bar{x}_1 = R_{in_1}\bar{x}_1^2 + \frac{\bar{x}_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_4)}{R}$) y obtener un valor estimado de la resistencia de pérdidas. Por último, puede representarse gráficamente la resistencia de pérdidas respecto a la corriente circulante por la bobina e identificar aproximadamente el valor más correcto de dicha resistencia.

A continuación se proporcionan los resultados obtenidos en el prototipo de laboratorio. Se midieron tensiones continuas (DC) en los extremos de la carga indicadas como x_{2DC} y x_{4DC} , así como la corriente que atravesaba la bobina x_{1DC} . Estos valores están dados por el cuadro 4.1 y con ellos se realiza la gráfica de la figura 4.11.

x_{2DC} (V)	15.90	16.75	17.6	18.44	19.29	20.11	21.09	22.12	23.18	24.27
x_{4DC} (V)	15.18	15.29	15.39	15.49	15.58	15.65	15.76	15.72	15.66	15.64
x_{1DC} (A)	0.75	1.45	2.21	3.03	4.04	5.04	6.30	8.04	10.06	12.21

Cuadro 4.1: Mediciones de corriente en la bobina y tensión en los condensadores

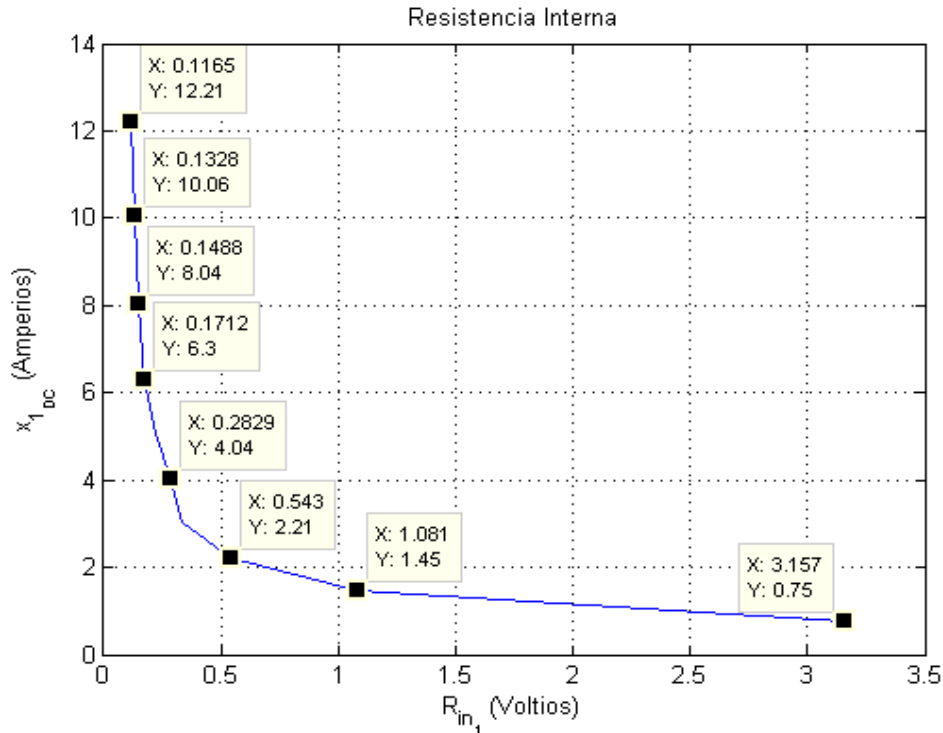


Figura 4.11: Estimación de la resistencia de pérdidas de cada convertidor Boost

Como era previsible los valores de la resistencia de pérdidas a baja potencia (también se refiere a las pérdidas a corrientes pequeñas menores de 2 Amps.) se alejan de aquellos obtenidos a mayor potencia. Ello es debido a que a medida que aumenta la potencia de trabajo las pérdidas de conducción comienzan a ser substancialmente más importantes que las pérdidas de conmutación (que dominan en el intervalo de baja potencia). Tal y como puede observarse en la figura 4.11, y bajo el supuesto de que el convertidor DC-AC trabajará entregando una potencia relevante a la carga, el valor de la resistencia de pérdidas por conducción puede estimarse en aproximadamente $R_{in_1} = R_{in_2} = 0.125 \Omega$, éste valor se obtuvo haciendo pruebas de ensayo y error en el prototipo y se valida con los valores de la gráfica de la figura 4.11, es decir, $0.1328 < R_{in} \Omega < 0.1165$.

Sintonización del parámetro γ del control. Este segundo experimento está dedicado a observar el efecto que las variaciones del parámetro γ tiene sobre la señal de salida, cuando el convertidor se encuentra realizando una conversión DC-AC en lazo cerrado.

Los resultados obtenidos permitirán deducir un valor adecuado de dicho parámetro. Con tal fin se fijan los siguientes parámetros: $E = 10$ voltios, $A = 24$ voltios, $B = 20$ voltios, $R = 2 \Omega$, $R_{in_1} = R_{in_2} = 0.125 \Omega$ y $f = 50Hz$, la frecuencia de conmutación es de 13.5 kHz. Se hace funcionar el convertidor para diferentes valores de γ y se mide la distorsión armónica (TDH) de la salida senoidal. De aquí obtenemos el cuadro 4.2 que resume el procedimiento.

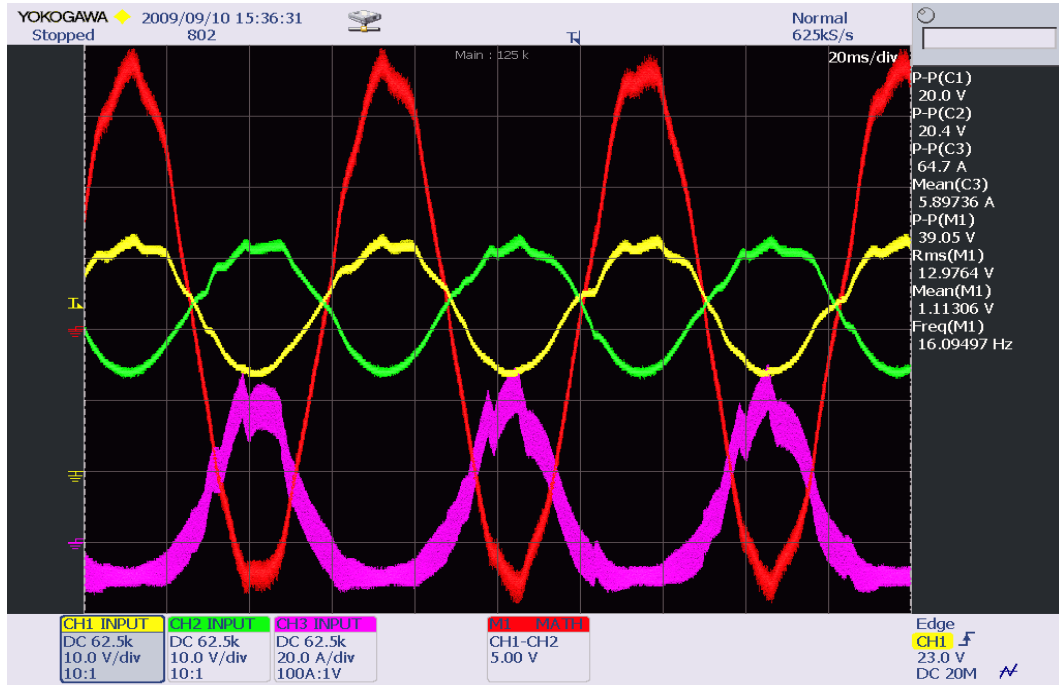
$\gamma (\mu)$	150	100	50	25	10	5
THD (%)	1.8	2.3	3.3	4.4	5.5	5.9

Cuadro 4.2: Mediciones de Distorsión Armonica (THD) para variaciones de $\gamma(\mu = 10^{-6})$

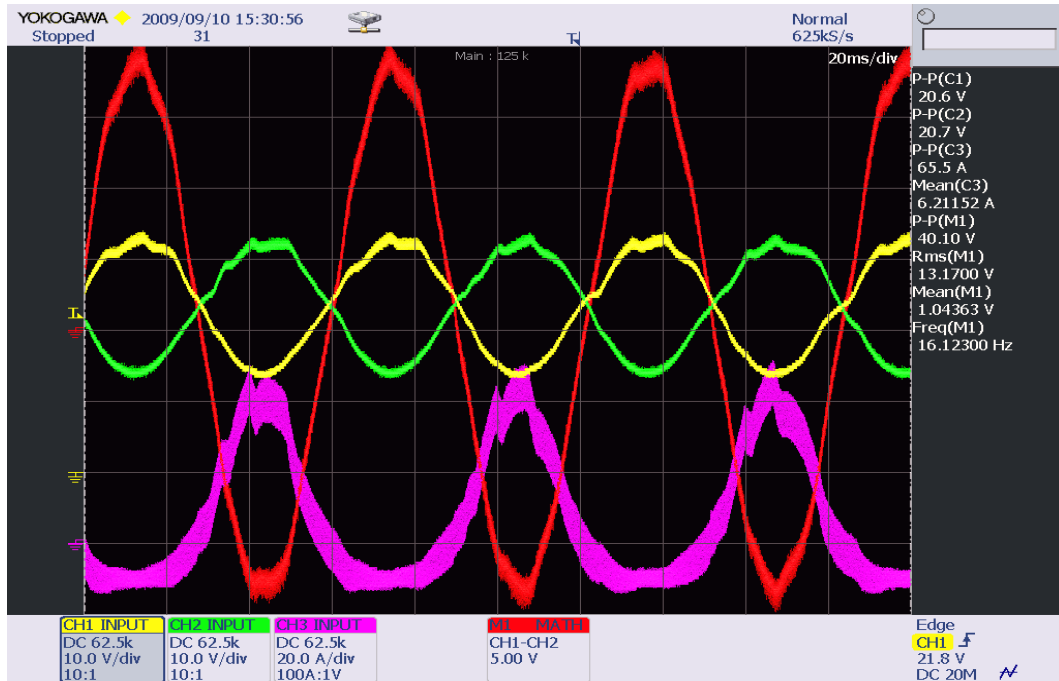
Las gráficas de las figuras 4.12, 4.13 y 4.14 muestran las capturas de osciloscopio de las tensiones en cada uno de los condensadores (canales 1 y 2), la tensión de salida (canal 1 - canal 2) y la corriente en una de las bobinas (canal 3). Como se observa en las gráficas 4.12, 4.13 y 4.14 en el osciloscopio se incluyeron los filtros de 62.5 kHz para eliminar los armónicos de alta frecuencia.

Como se aprecia en el cuadro 4.2 la distorsión armónica (THD) aumenta conforme el valor de la ganancia del controlador γ disminuye, por el contrario el aumento de γ conlleva un mayor número de componentes armónicas de la señales del convertidor, apareciendo oscilaciones subarmónicas. Por tanto, aparece un compromiso a la hora de seleccionar el valor más adecuado de γ . En tal sentido elegimos como parámetro para el funcionamiento del convertidor un valor de $\gamma = 40\mu$ a utilizar en las próximas medidas de operación del convertidor DC-AC.

Funcionamiento del convertidor DC-AC a $\omega = 100rad/seg$. Procedemos a realizar seguimiento de una señal senoidal. Para ello haremos un barrido de la amplitud de la señal a través del parámetro B , entre 4 y 20 voltios, midiendo la distorsión armónica (THD) de la tensión en bornes de la carga. Los parámetros utilizados en la experimentación son: $\gamma = 40\mu$, $R_{in_1} = R_{in_2} = 0.125 \Omega$, $E = 10$ voltios, $A = 24$ voltios y $\omega = 100rad/seg$. La frecuencia de conmutación se fijó en 13.5 kHz. Las mediciones obtenidas pueden verse en las figuras 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19 en las cuales se observan las tensiones en condensador (canales 1 y 2), la tensión de salida (canal 1 - canal 2) y la corriente en una de las bobinas (canal 3).

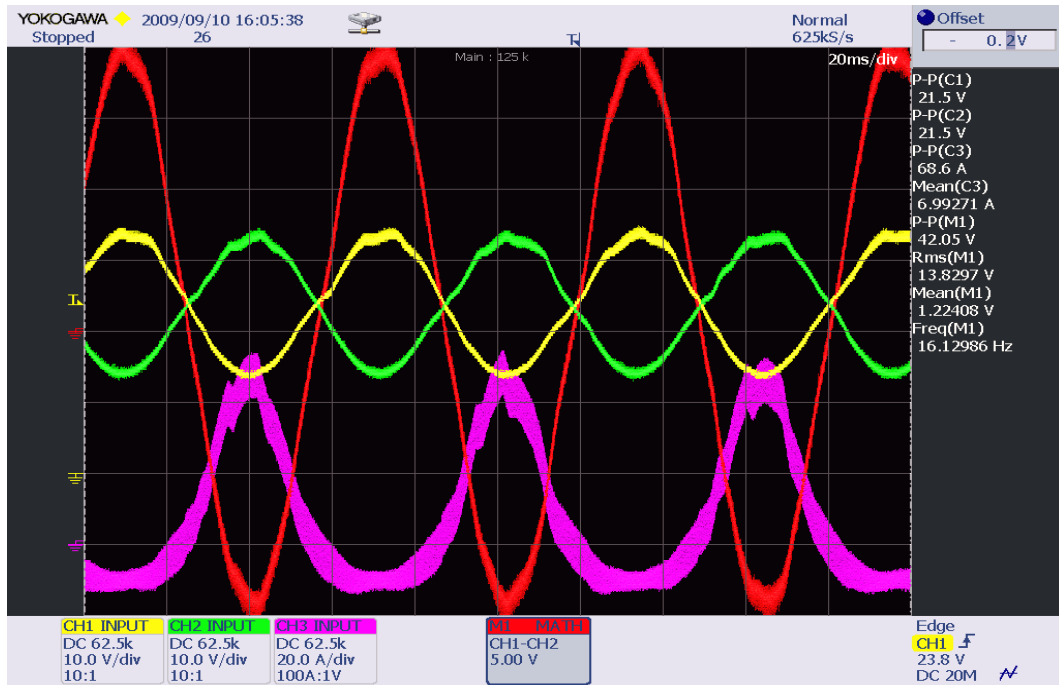


(a) Parámetro del controlador $\gamma = 150\mu$

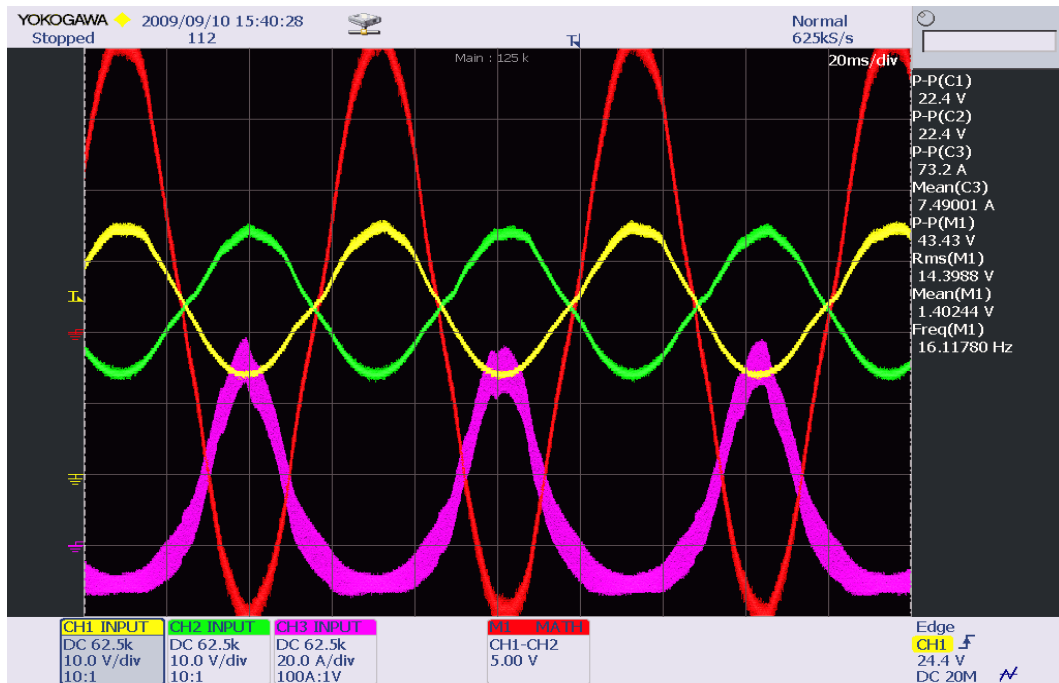


(b) Parámetro del controlador $\gamma = 100\mu$

Figura 4.12: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

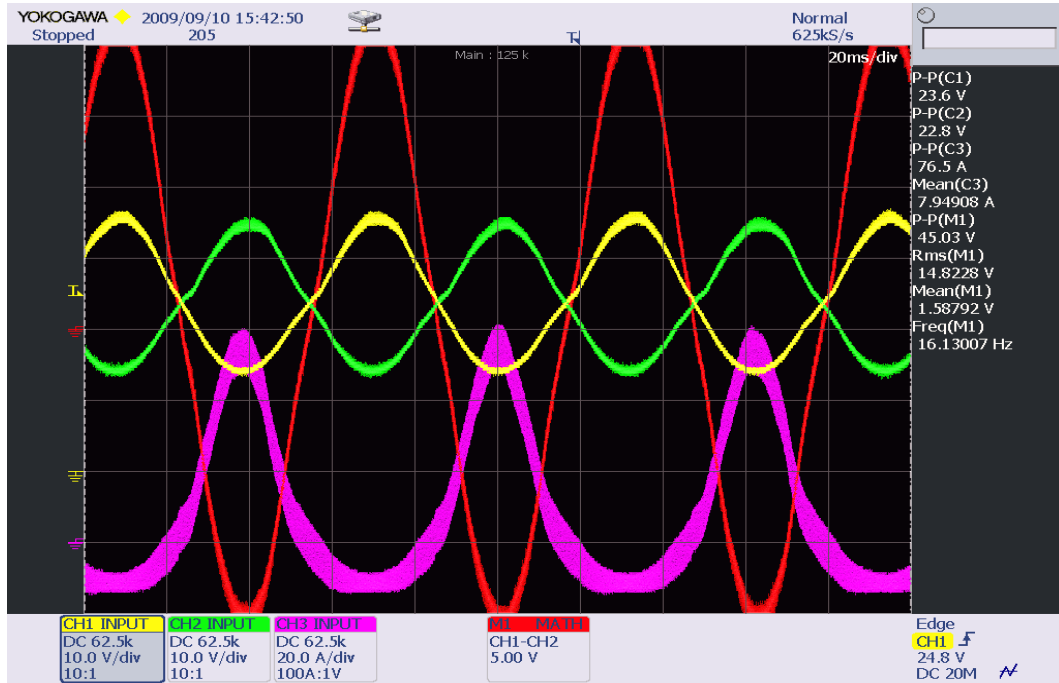


(a) Parámetro del controlador $\gamma = 50\mu$

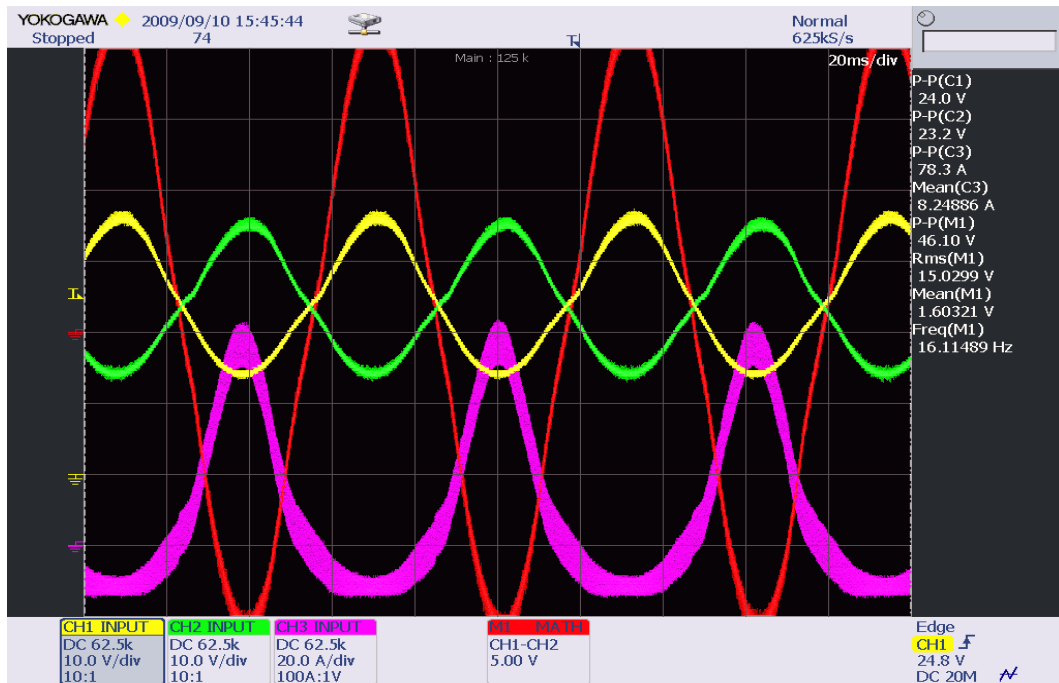


(b) Parámetro del controlador $\gamma = 25\mu$

Figura 4.13: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

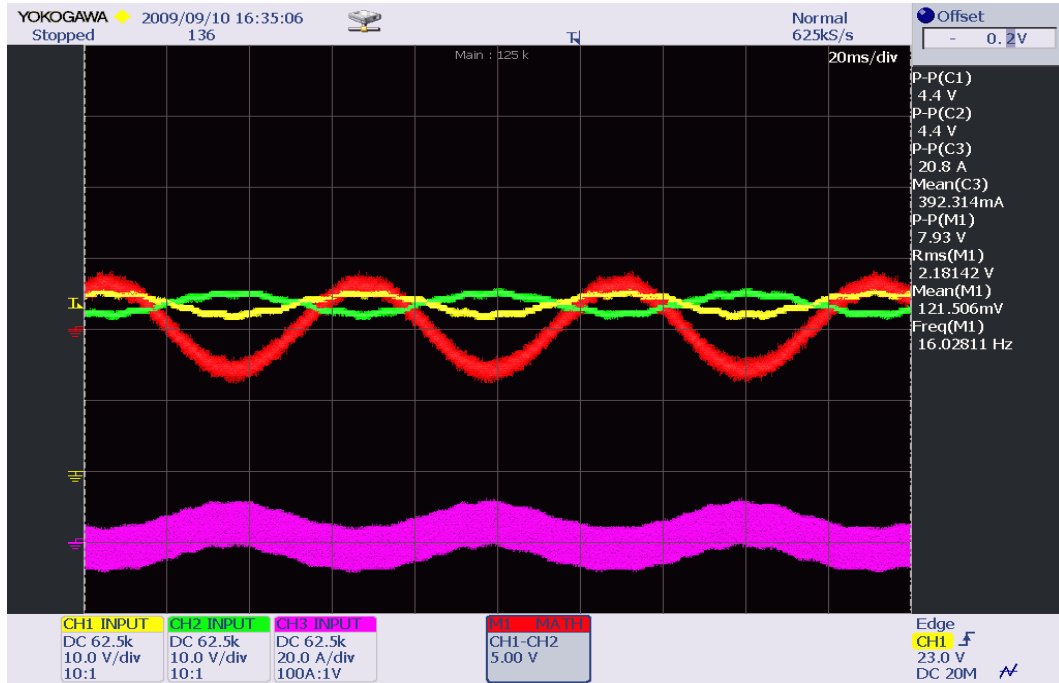


(a) Parámetro del controlador $\gamma = 10\mu$

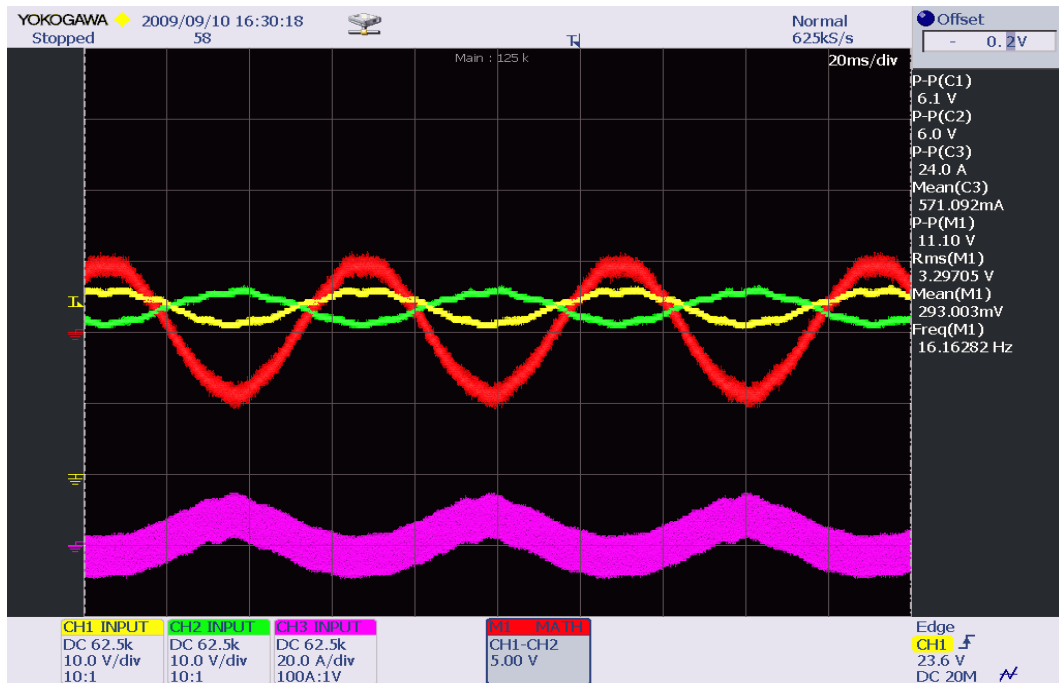


(b) Parámetro del controlador $\gamma = 5\mu$

Figura 4.14: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

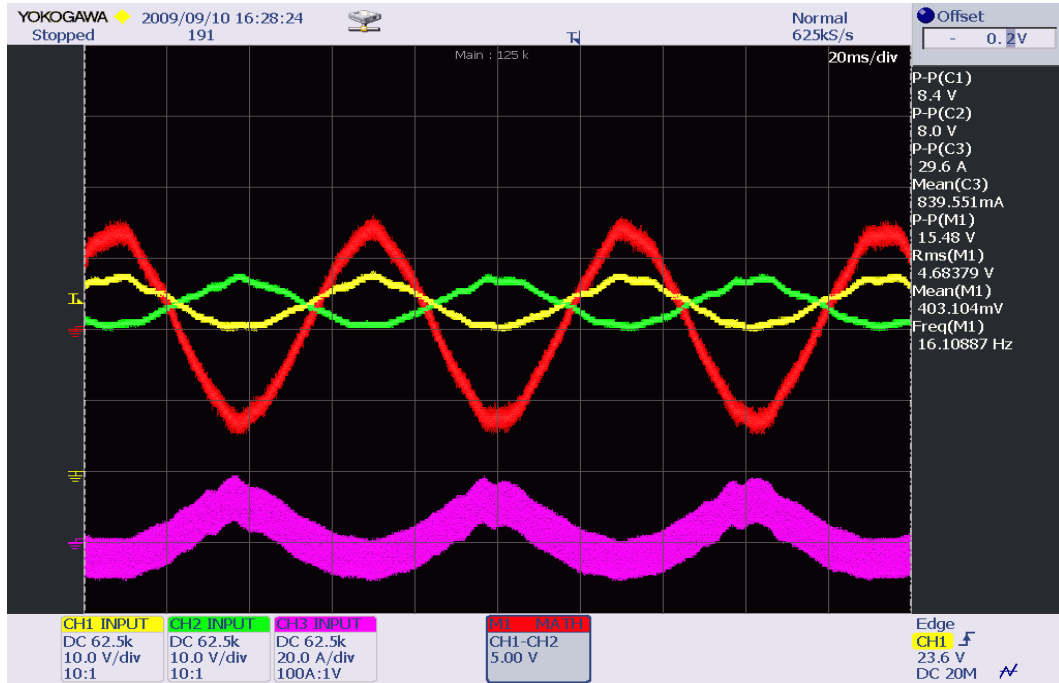


(a) B=4 voltios

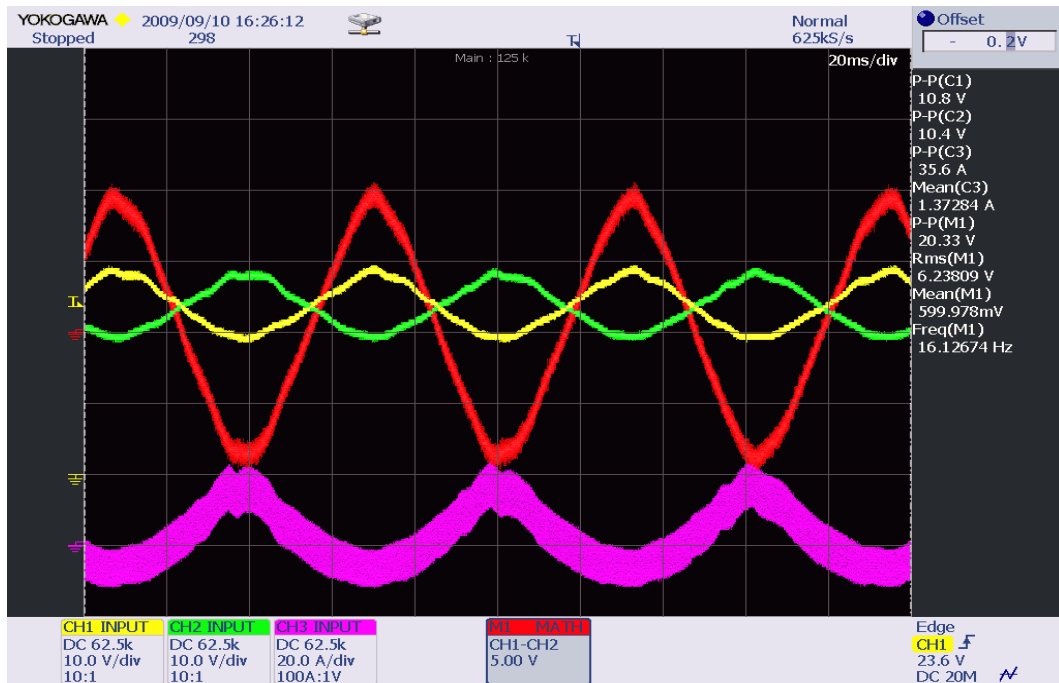


(b) B=6 voltios

Figura 4.15: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

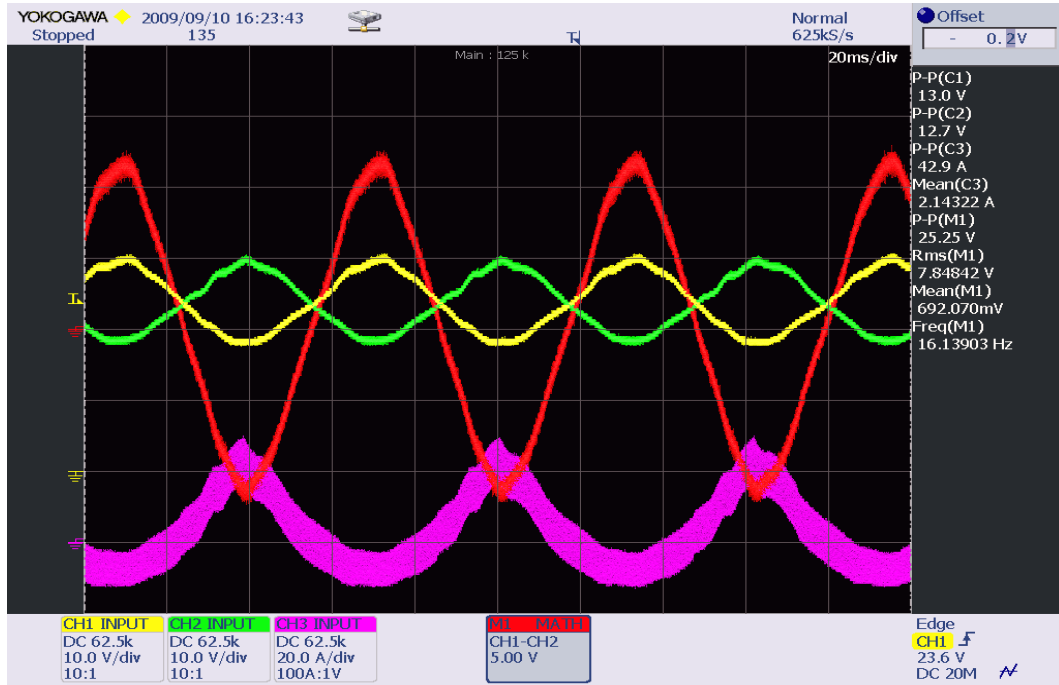


(a) B=8 voltios

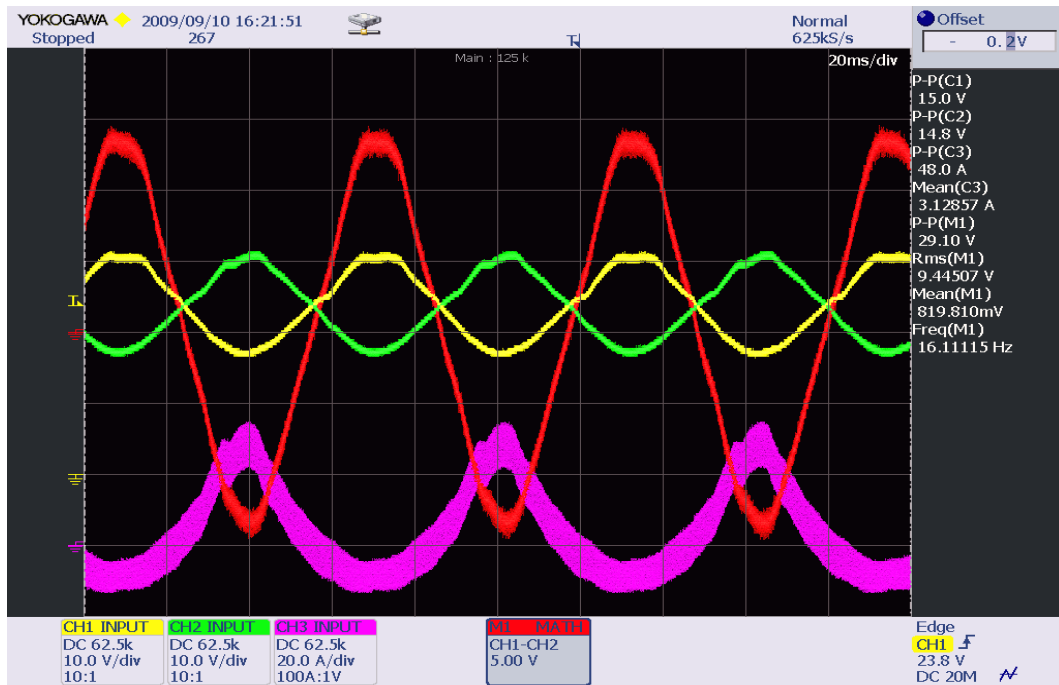


(b) B=10 voltios

Figura 4.16: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

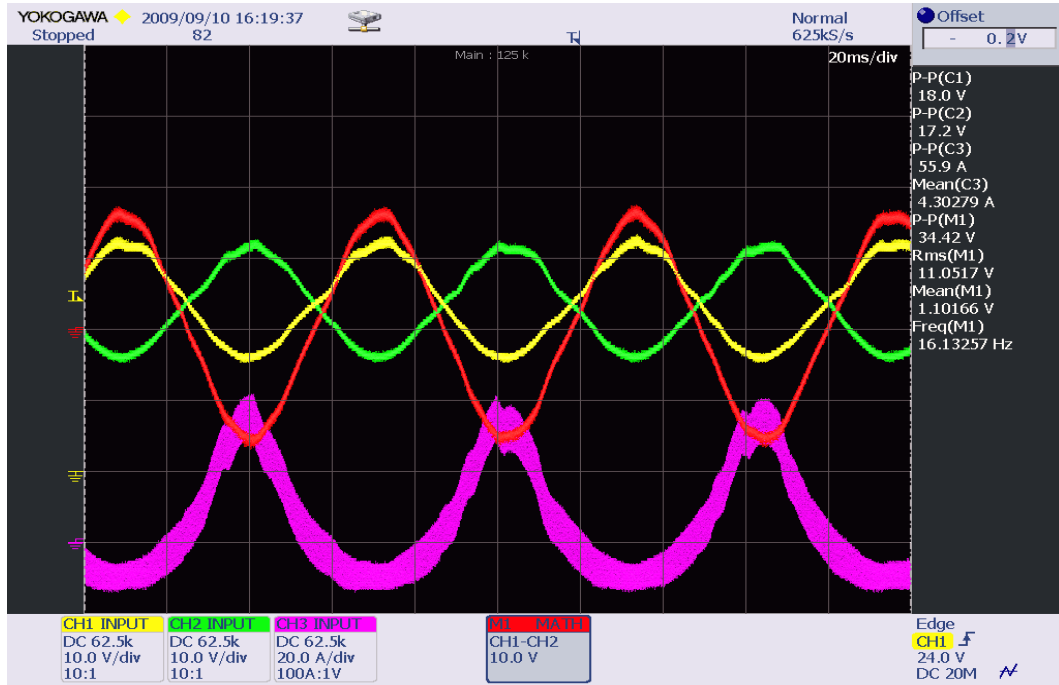


(a) B=12 voltios

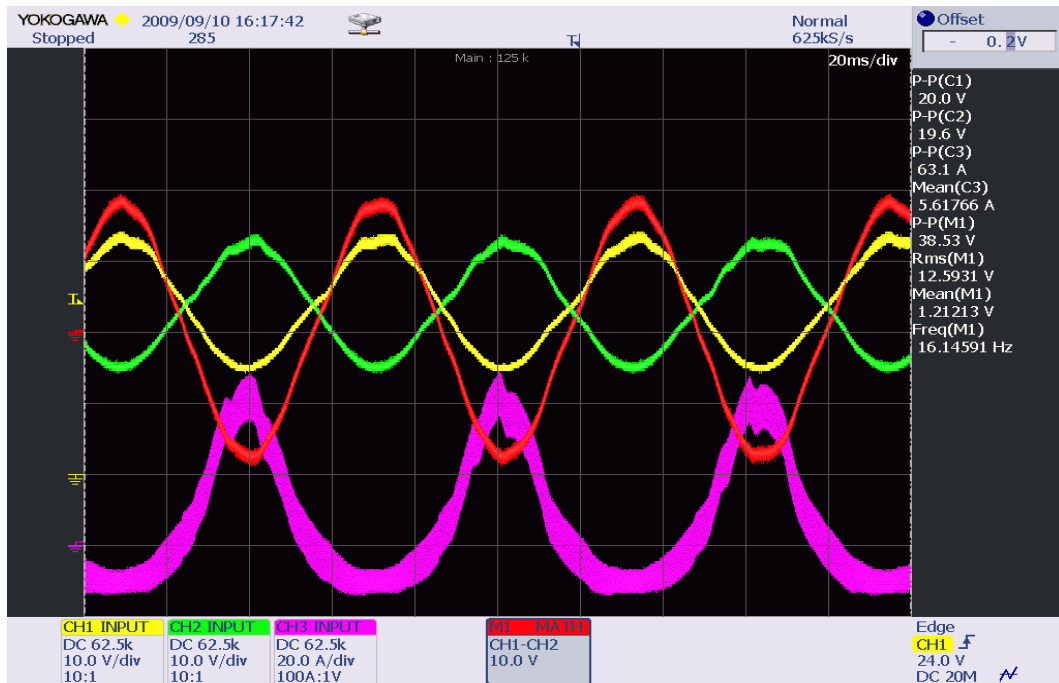


(b) B=14 voltios

Figura 4.17: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC



(a) B=16 voltios



(b) B=18 voltios

Figura 4.18: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC



Figura 4.19: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC ($B=20$ voltios)

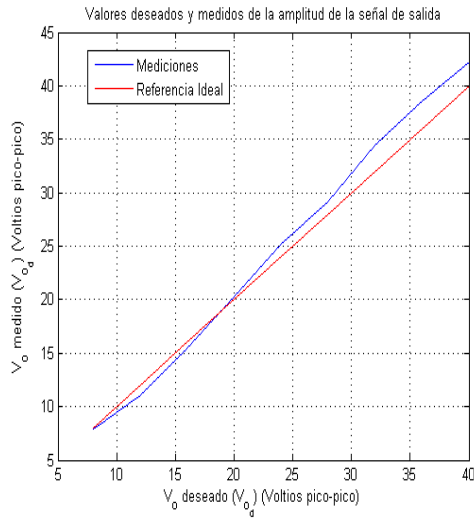
La distorsión armónica total (THD) medida con un analizador de potencia marca Voltech, modelo PM1000+, se presenta en el cuadro 4.3. También se incluye el valor deseado de la amplitud pico a pico, así como el valor medido durante el experimento, el error y error porcentual obtenido entre ambas.

B_d (V)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V_{o_d} (Vpp)	8	12	16	20	24	28	32	36	40
V_{o_m} (Vpp)	7.93	11.1	15.48	20.33	25.25	29.1	34.42	38.53	42.28
$e = V_{o_d} - V_{o_m}$ (A)	0.07	0.9	0.52	-0.33	-1.25	-1.1	-2.42	-2.53	-2.28
$e = \frac{(V_{o_d} - V_{o_m})}{V_{o_m}} 100$ (%)	0.882	8.108	3.359	-1.623	-4.95	-3.78	-7.03	-6.566	-5.392
THD (%)	1.7	2.3	3	5.2	5.7	5.4	4.8	4.2	3.5

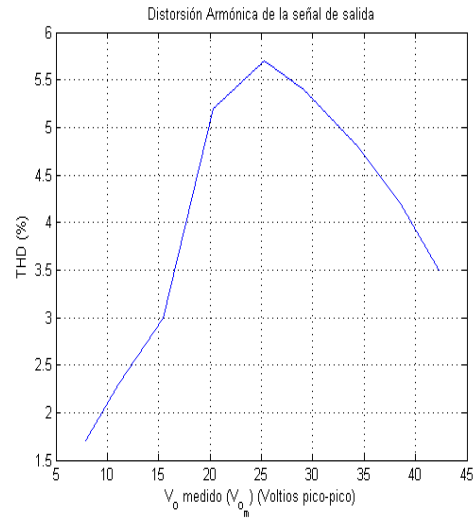
Cuadro 4.3: Datos Obtenidos del seguimiento de la salida senoidal ($\omega = 100\text{rad/seg}$)

En las figuras 4.20a, b y c podemos observar en forma gráfica los valores presentados en el cuadro 4.3.

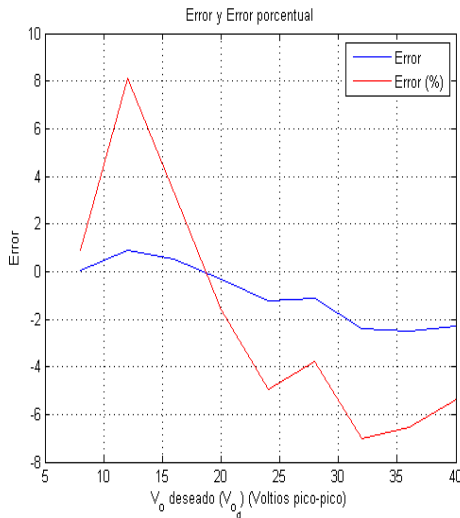
Funcionamiento del convertidor DC-AC a $f = 50\text{Hz}$. El siguiente experimento



(a) Valores Deseados y Medidos de la amplitud de la señal de salida



(b) Distorsión Armónica de la salida



(c) Error y Error Pocental

Figura 4.20: Gráficas de los Datos Obtenidos del Seguimiento Senoidal para $\omega = 100rad/seg$

considera el seguimiento de una señal senoidal de $50Hz$. Para ello, haremos un barrido de la amplitud de la señal a través del parámetro B , entre 4 y 20 voltios, midiendo la distorsión armónica (THD) de la tensión en bornes de la carga. Los parámetros utilizados en la experimentación son: $\gamma = 40\mu$, $R_{in_1} = R_{in_2} = 0.125 \Omega$, $E = 10$ voltios, $A = 24$ voltios y $f = 50$ Hz. La frecuencia de conmutación se fijó en 13.5 kHz. Las

mediciones obtenidas pueden verse en las figuras 4.21, 4.22 y 4.23 en las cuales se observan las tensiones en condensador (canales 1 y 2), la tensión de salida (canal 1 - canal 2) y la corriente en una de las bobinas (canal 3).

La distorsión armónica total (THD) medida con un analizador de potencia marca Voltech, modelo PM1000+, se presenta en la tabla 4.4. También se incluye el valor deseado de la amplitud pico a pico, así como el valor medido durante el experimento, el error y error porcentual obtenido entre ambas.

B_d (V)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
V_{od} (Vpp)	8	12	16	20	24	28	32	36	40
V_{om} (Vpp)	7.85	11.15	15.58	20.13	24.78	29.48	33.53	37.8	41.45
$e = V_{od} - V_{om}$	0.15	0.85	0.42	-0.13	-0.78	-1.48	-1.53	-1.8	-1.45
$e = \frac{(V_{od}-V_{om})}{V_{om}}100$ (%)	1.91	7.623	2.695	-0.645	-3.147	-5.02	-4.563	-4.761	-3.498
THD (%)	1.3	1.5	3	4.6	5.0	4.2	3.8	3.6	3.8

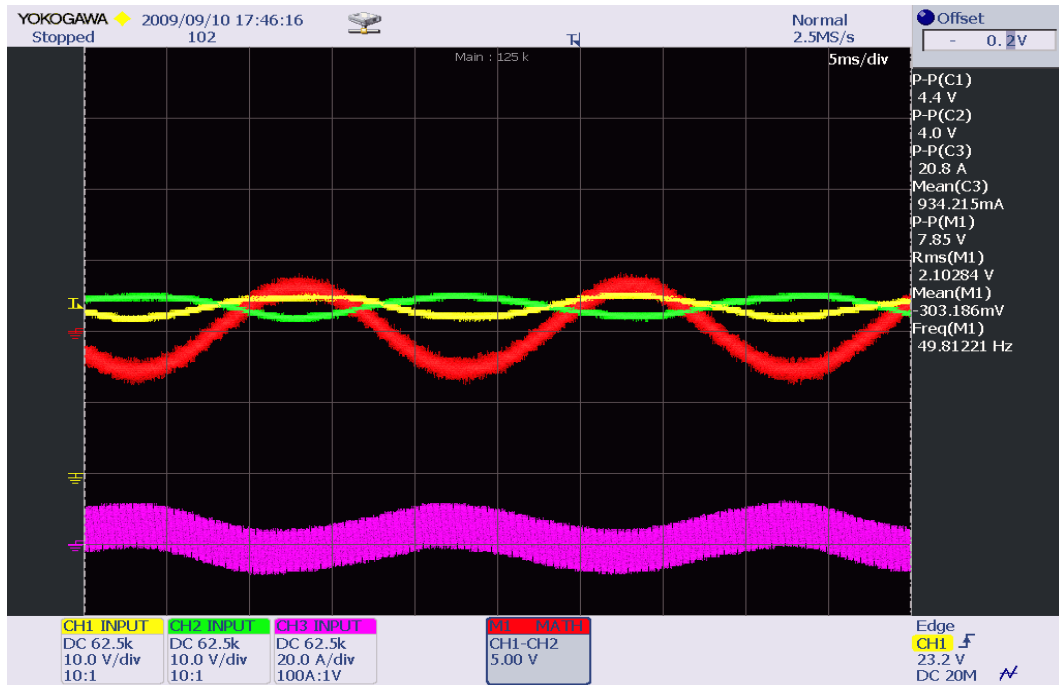
Cuadro 4.4: Datos Obtenidos del seguimiento de la salida senoidal ($f = 50Hz$)

En las figuras 4.26a, b y c podemos observar en forma gráfica los valores presentados en el cuadro 4.4.

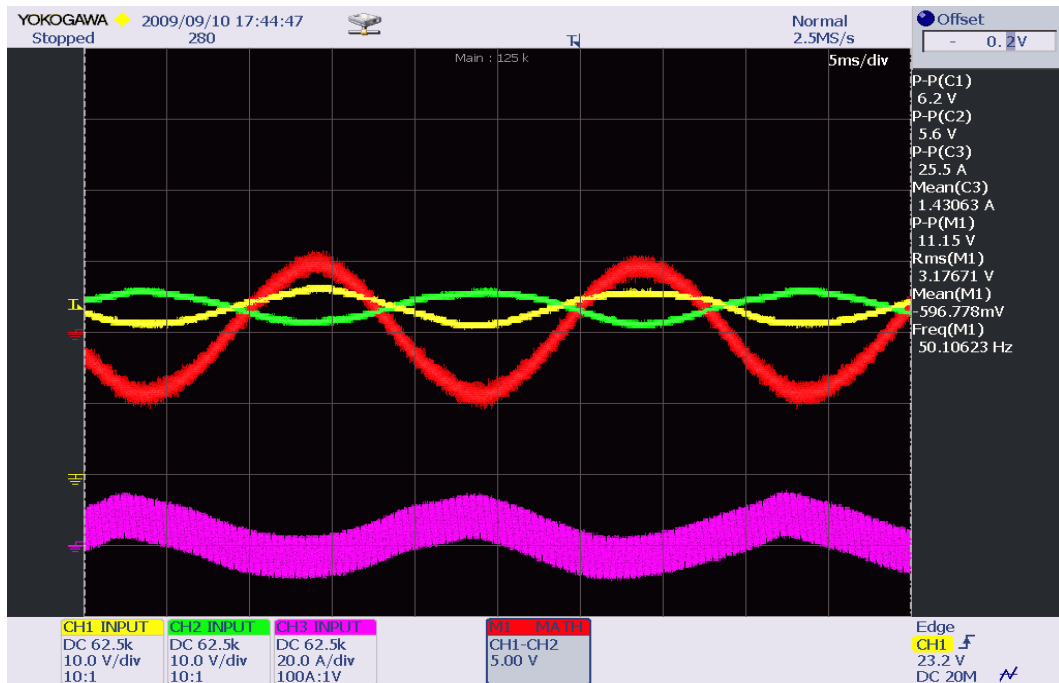
4.3.5. Análisis de los Resultados

Cuando se revisan los resultados de los diferentes experimentos realizados pueden observarse ciertas características:

1. El convertidor Boost-Boost DC-AC presenta un comportamiento reductor y elevador de tensión (hasta un 100% respecto a la tensión de entrada), por lo que puede utilizarse en un amplio abanico de aplicaciones sin necesidad de utilizar transformadores (que aumentan el peso y tamaño y reducen la eficiencia del sistema de conversión de potencia).
2. La distorsión armónica total (THD) obtenida en la medida de tensión de salida es aceptable para la mayoría de aplicaciones aunque puede ser claramente mejorada. Es previsible que el uso del control obtenido para el modelo Joule pueda reducir la distorsión armónica total.

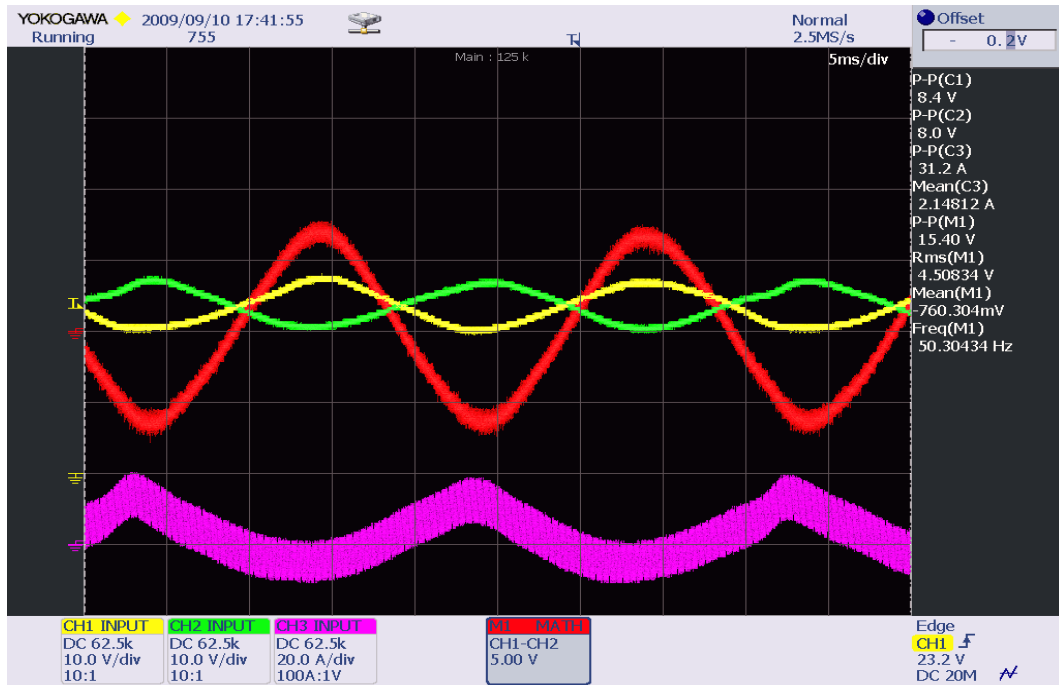


(a) B=4 voltios

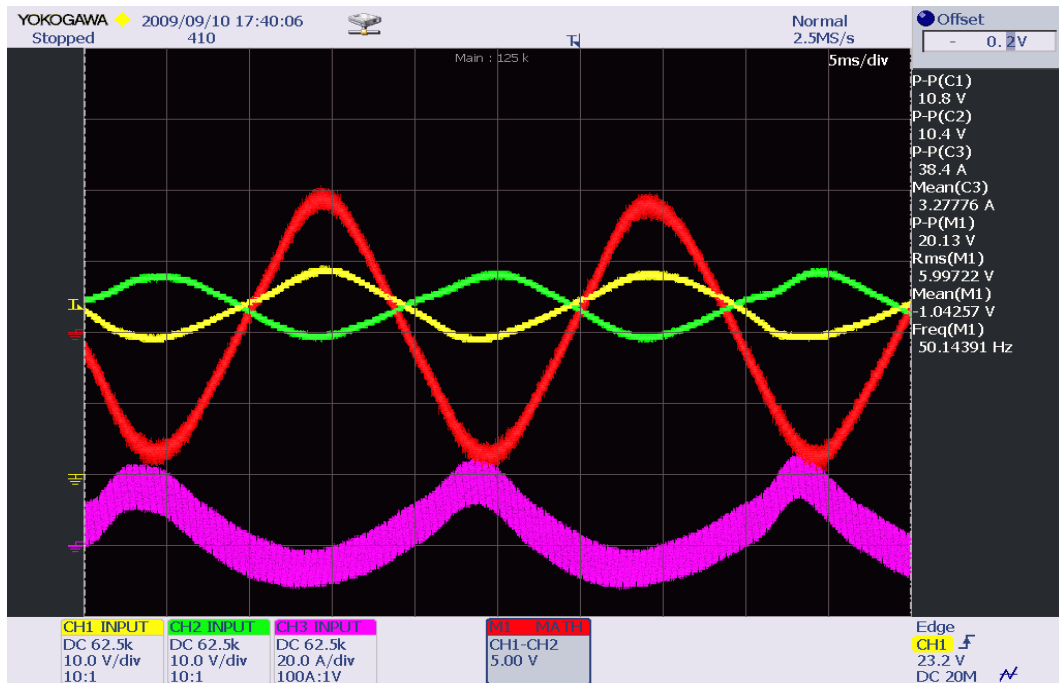


(b) B=6 voltios

Figura 4.21: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

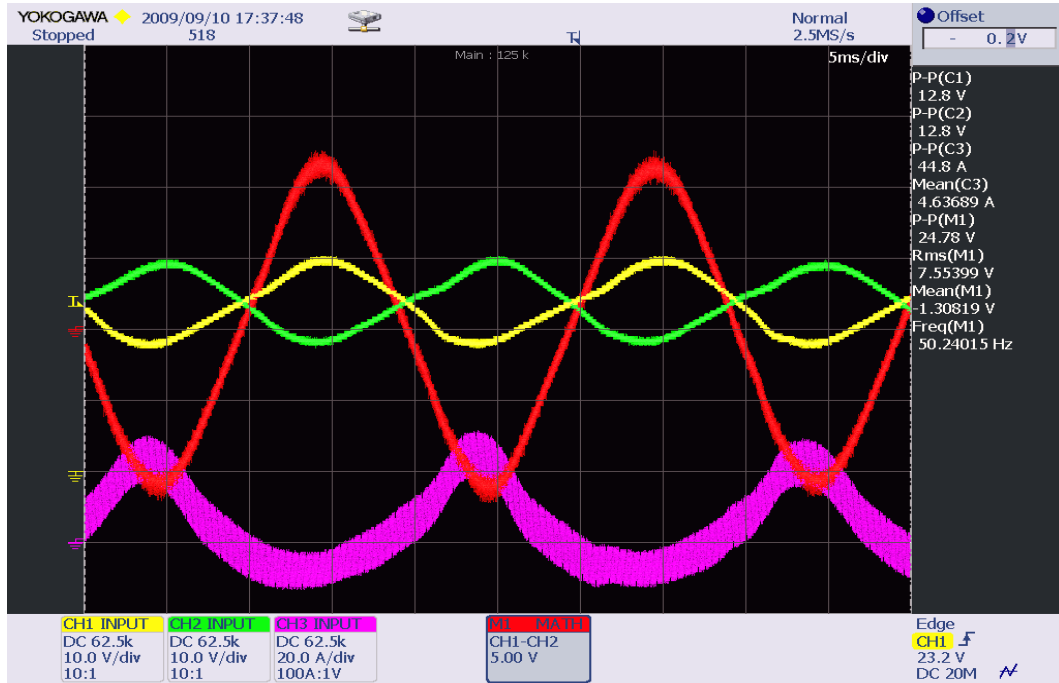


(a) B=8 voltios

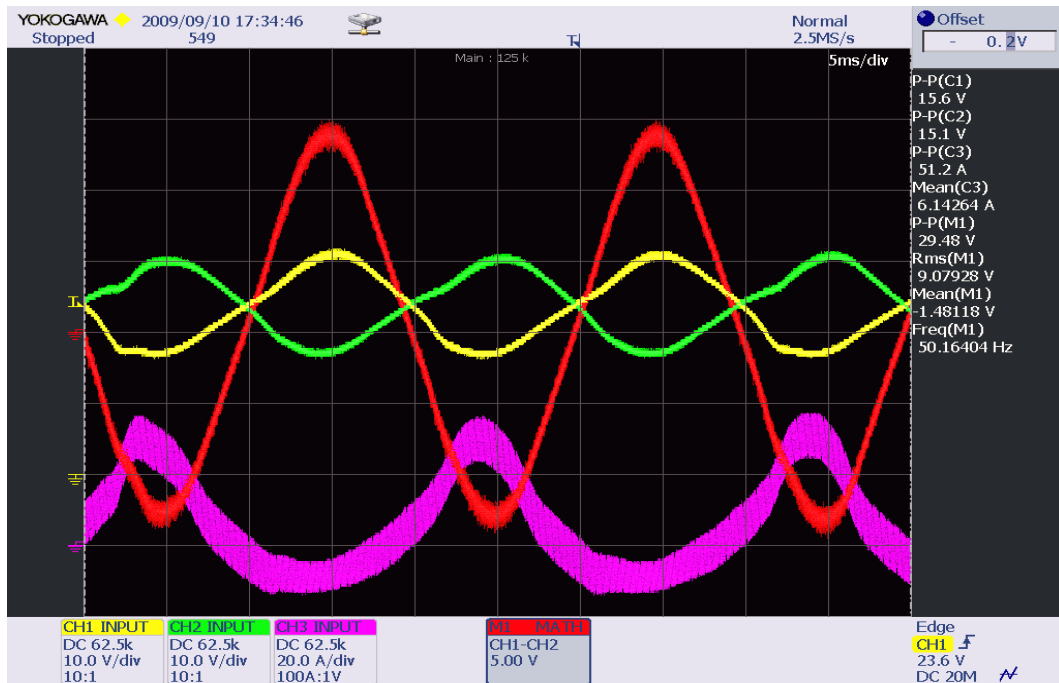


(b) B=10 voltios

Figura 4.22: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

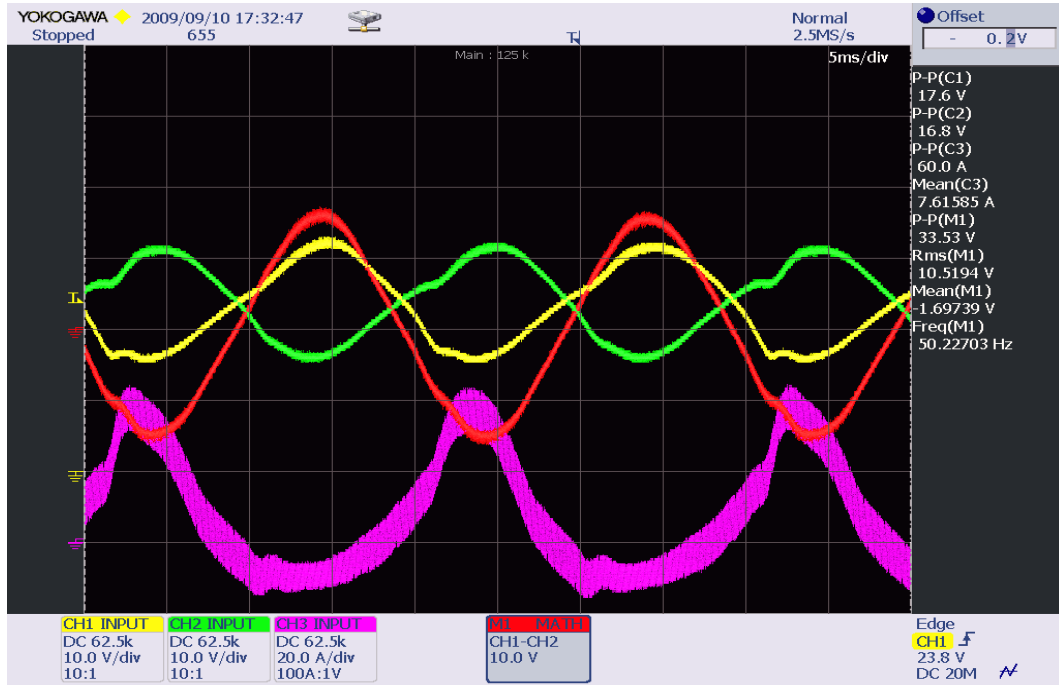


(a) B=12 voltios

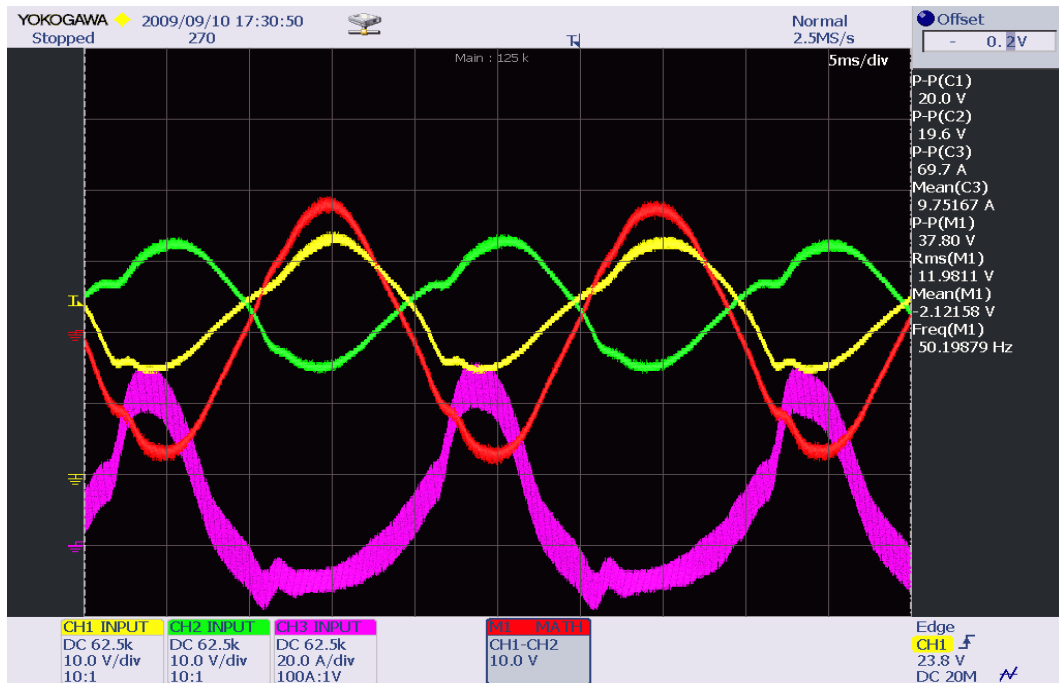


(b) B=14 voltios

Figura 4.23: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC



(a) B=16 voltios

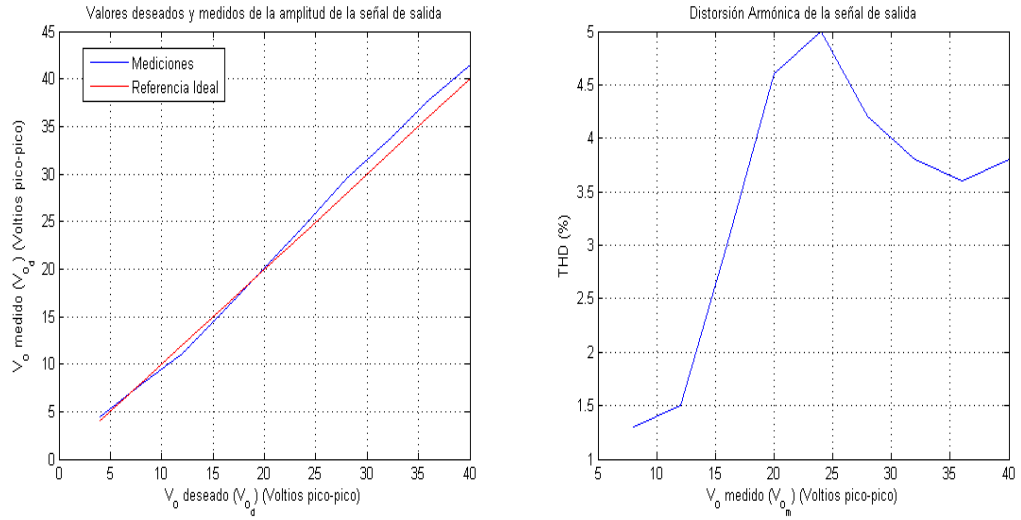


(b) B=18 voltios

Figura 4.24: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC

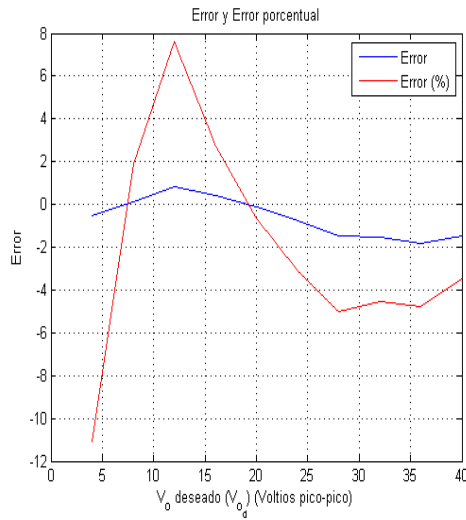


Figura 4.25: Seguimiento Senoidal para el Convertidor DC-AC (B=20 voltios)



(a) Valores Deseados y Medidos de la amplitud de la señal de salida

(b) Distorsión Armónica de la salida



(c) Error y Error Pocental

Figura 4.26: Gráficas de los Datos Obtenidos del Seguimiento Senoidal para $f = 50Hz$

Capítulo 5

Conclusiones y Futuras Investigaciones Derivadas de la Presente Tesis

Los objetivos alcanzados en la presente tesis pueden resumirse en:

1. El estudio, análisis y diseño de controladores basados en la técnica de control denominada *Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta del Error de Seguimiento* (siglas en inglés ETEDPOF)
2. Aplicación de ETEDPOF en estructuras de potencia del tipo elevador de tensión.
3. Utilización de la técnica de modelado mediante el uso de una metodología que considera las pérdidas de potencia debidas al efecto Joule y que denominamos *Modelo Equivalente Joule* (MEJ).
4. Estudio de los efectos de las variaciones de los parámetros de sistema y su implicación en la estabilidad del sistema. El análisis se complementa, con una nueva técnica basada en el estudio del comportamiento de sistemas dinámicos de segundo orden cuadráticos y permite obtener los diferentes comportamientos en función de los parámetros del controlador.
5. Aplicación de diversas técnicas de control para lograr una respuesta robusta frente a variaciones de la carga en estructuras de conversión de potencia.

6. Aplicación, de las técnicas presentadas, a estructuras de conversión de potencia tipo Boost en modo de regulación de tensión y a convertidores del tipo Boost-Boost en modo de seguimiento de señal senoidal.
7. Los resultados teóricos alcanzados en la tesis, se corroboran mediante simulaciones realizadas en un entorno de resolución numérica e implementaciones electrónicas de laboratorio.

A partir de los estudios presentados en esta tesis pueden detallarse las siguientes propuestas de trabajos a desarrollar en una futura investigación. En concreto:

1. La búsqueda de una justificación matemática que avale la técnica de modelado por efecto Joule es uno de los aspectos relevantes que podrían profundizarse en una posterior investigación. Ello permitiría avalar de una forma rigurosa la técnica presentada en la tesis de forma cualitativa y experimental.
2. De acuerdo con los resultados obtenidos en esta tesis, el convertidor Boost controlado mediante la técnica denominada *Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta del Error de Seguimiento* tiene dos puntos de equilibrios estables y uno inestable. Una continuación de este trabajo se puede dirigir a la búsqueda de pruebas de laboratorio que avalen estos comportamientos, e incluir en el controlador una corrección de manera que el sistema sea forzado a ir al punto de equilibrio de menor tensión.
3. El trabajo presentado permite garantizar estabilidad en el convertidor Boost controlado mediante la técnica denominada *Realimentación de la Salida Pasiva de la Dinámica Exacta del Error de Seguimiento* al añadir una acción integral en el controlador, utilizando una aproximación en pequeña señal que conlleva estabilidad local. La obtención de una demostración que garantice estabilidad en gran señal abriría las puertas al uso del método de control en éste y otros convertidores de potencia garantizando robustez y estabilidad.
4. Respecto al seguimiento de señales en el convertidor Boost y sus derivados se indica que, con el objetivo de robustecer el sistema frente a variaciones de tensión de

entrada y de carga, debe investigarse el uso de adición de elementos integradores en lazo de control, la posibilidad de utilizar la identificación paramétrica, mediante el uso de procesadores más rápidos que permitan su implementación a nivel experimental, y profundizar en las posibilidades que la técnica de modelado Joule ofrece en este tipo de problemas.

Apéndice A

Algoritmo para la síntesis del modelo Joule

A continuación presentamos un algoritmo que permite sintetizar modelos equivalentes para los convertidores de potencia. El algoritmo está sujeto a las restricciones impuestas por la topología del circuito y de los semiconductores que lo hacen funcionar.

El procedimiento está orientado al modelado de prototipos utilizando mediciones de laboratorio. Sin embargo, este procedimiento no es limitativo y puede ser realizado utilizando curvas de los semiconductores o aproximaciones de los puntos de operación de los convertidores.

La metodología para la obtención del modelo Joule puede ser resumida a través del procedimiento de medición de los parámetros. En este procedimiento se realizan mediciones de las tensiones de conducción (V_f) de cada uno de los semiconductores, esto se realiza haciendo funcionar el convertidor con valor de u específico ($\bar{u} = 0.5$, mitad del rango por conveniencia). Luego se cierra el lazo y se varía la resistencia Joule hasta que se alcance la salida deseada.

Se debe tener la precaución de que las mediciones sean realizadas en el semiconductor (diodos o transistores) utilizando el osciloscopio, la razón es que la señal es pulsante y nos interesa únicamente la tensión en el dispositivo en conducción por medio de la cual se consiguen los parámetros (V_f). Esta observación se hace ya que la utilización de un instrumento que mida valores promedio disminuye la precisión de la medición.

Este algoritmo puede ser utilizado para convertidores con múltiples entradas y múltiples salida, aunque es posible que existan algunas limitaciones. Las variables que utilizamos en el algoritmos son las siguientes:

- $V_{f_p}^j$: las tensiones de conducción semiconductores del convertidor $p = 1 \dots k$.
- R_{in_q} : las resistencias internas de los elementos pasivos del convertidor $p = 1 \dots q$.
- R_{j_s} : las posibles resistencias Joule $p = 1 \dots n$.
- u_t : las s entradas del sistema $t = 1 \dots s$.
- V_{d_w} : las d salidas del sistema $w = 1 \dots e$.

La secuencia utilizada en la aplicación del algoritmo es la siguiente:

1. Partimos del diagrama del modelo ideal Σ_i con interruptores ideales
2. Se construye el diagrama esquemático¹ con los dispositivos semiconductores de acuerdo a Σ_i .
3. Se sustituyen los k semiconductores por fuentes de tensión constantes $V_{f_p}^j$
4. Se incluye las h resistencias internas en serie²
5. Se incluyen a discreción las n posibles resistencias Joule R_{j_s} ³
6. El modelo resultante es el equivalente Joule Σ_J .
7. Se sintetiza un controlador u_t para las s entradas utilizando Σ_J .
8. Se obtienen las fuentes de tensión aplicando entradas constantes a las de preferencia 0.5 puesto que es la mitad del rango de operación $[0, 1]$. Estas tensiones pueden ser obtenidas de dos maneras:

¹Se entiende por diagrama esquemático el circuito que incluye los dispositivos eléctricos y electrónicos que se utilizan en los prototipos, donde los circuitos tales como los drivers son normalmente despreciados porque tiene un consumo pequeño.

²Las resistencias internas que se tomen en cuenta son aquellas que incluyan la mayor cantidad de pérdidas, en tal sentido (generalmente) se utilizan las resistencias de los inductores porque son las que tienen mayor valor, en cambio condensadores, fuentes o cables suelen ser despreciables.

³Las resistencias Joule son resistencias que físicamente están distribuidas en todo el circuito y que se utilizan para concentrar las pérdidas, por esta razón deben ser ubicadas convenientemente.

- a) Realizando mediciones de laboratorio en lazo abierto.
 - b) Utilizando la curva característica del semiconductor que proporcionen la tensión de conducción de acuerdo a la corriente que atraviesa el semiconductor, las cuales se obtienen de la evaluación equilibrio del modelo ideal.
9. Se cierra el lazo con u_t constante, este se obtiene por medio de un valor deseado \bar{V}_{d_w} asignado en las ecuaciones de los equilibrios del sistema, procediendo a ajustar las R_{j_s} hasta que la diferencia entre el valor deseado V_{d_w} y el valor medido sea mínimo V_{d_m} .

Debido a que la metodología del modelo Joule Σ_j intenta concentrar las pérdidas por efecto Joule no modeladas, los parámetros son elegidos de acuerdo a ciertas premisas:

- Las mediciones correspondientes a las fuentes de tensión $V_{f_p}^j$ se realizan en conducción, ya que es el estado de mayor consumo del dispositivo.
- Para las resistencias internas de las bobinas se utiliza el equivalente serie porque este es el que representa la mayor cantidad de energía consumida.
- Los equivalentes que consumen poca energía son despreciados.
- Las resistencias internas de las fuentes son generalmente pequeñas por tanto pueden ser despreciadas. En caso contrario simplemente se añade al modelo Joule Σ_J .
- Para concentrar las pérdidas no modeladas y despreciadas, se utilizaran una o varias resistencias Joule, en la medida que sean necesarias. Aunque la complejidad aumenta con el número de resistencias también aumenta la precisión.

La utilización de una entrada 0.5, para la medición de las tensiones de conducción, está basada en el supuesto de que las pérdidas se distribuyen linealmente, por tanto la elección de esta condición es acorde con el comportamiento del convertidor. Para obtener el valor más adecuado es necesario hacer un análisis del error entre el modelo Joule Σ_J y el modelo de referencia real Σ_r , o más complicado aún entre el modelo Joule

Σ_J y el modelo real Σ_r , para ubicar el punto de mínimo error, este procedimiento no lo abordaremos en este trabajo.

Nota: dado que el desarrollo del modelo Joule Σ_J parte de la necesidad de copiar la realidad funcional de un prototipo experimental, existen algunas restricciones que impone esta realidad, las cuales deben ser respetadas de manera que el modelo no pierda su aplicabilidad. Así tenemos:

- Se supone que la mayor parte de la energía es entregada a la carga.
- Se supone que las resistencias internas de los inductores son medidas de una manera precisa.

Estas restricciones son condiciones suficientes para el diseño adecuado del modelo. La primera se debe a que el convertidor deben ser eficiente, en consecuencia la energía consumida por los dispositivos debe ser menor que la energía entregada a la carga.

La segunda restricción se debe a ley de Conservación de la Energía, ya que si esta es mayor que el consumo general del sistema no podrá obtenerse la salida deseada. En este caso es preferible hacer la resistencia interna cero y ajustar la R_j que incluirá las pérdidas de la bobinas.

Utilizando el algoritmo procedemos a realizar ejemplos con varios convertidores de potencia en los cuales seguimos la secuencia que hemos planteado.

A.1. Síntesis del Modelo Joule para el Convertidor Buck-Boost

Como ejemplo de la aplicación del modelo Joule utilizamos la configuración del convertidor Buck-Boost, cuya configuración del modelo ideal Σ^i se encuentra en la figura A.1.

Donde x_1^i es la corriente en la bobina, x_2^i es la tensión en el condensador, u^i es la entrada, R es resistencia de la carga, C es la capacitancia, L es la inductancia y E es la fuente de alimentación, representado a través de la siguiente ecuación:

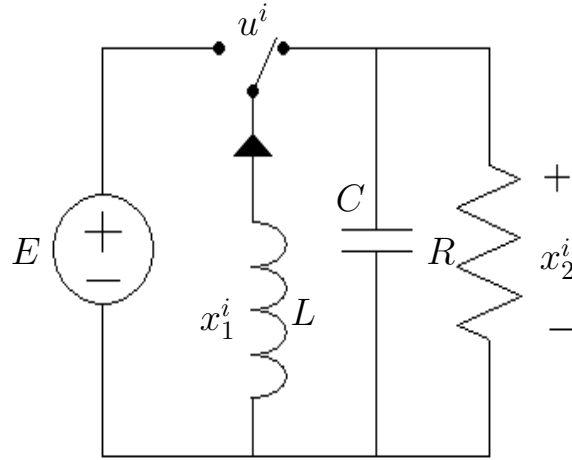


Figura A.1: Modelo Ideal del Convertidor Buck-Boost

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (1-u^i) \\ -(1-u^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix} u^i \quad (\text{A.1})$$

El diagrama esquemático del prototipo del laboratorio Σ_m que incluye los dispositivos electrónicos de conmutación está dado en el circuito de la figura A.2.

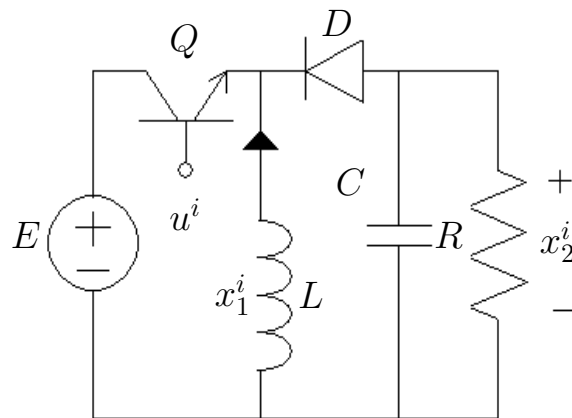


Figura A.2: Circuito Esquemático del Convertidor Buck-Boost

Modelo Joule

Sustituimos en el diagrama esquemático los semiconductores por las fuentes de tensión V_f^j , V_q^j y una resistencia serie con la bobina R_{in} y la resistencia Joule R_j . De

lo que nos queda el circuito de la figura A.3.

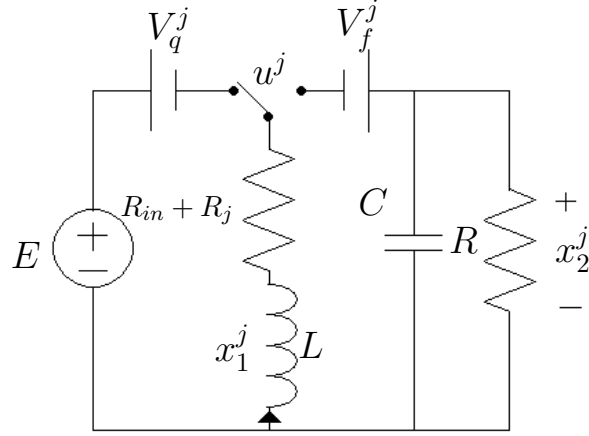


Figura A.3: Modelo Joule del Convertidor Buck-Boost

Donde x_1^j es la corriente en la bobina, x_2^j la tensión en el condensador y la dinámica es:

$$\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^j \\ \dot{x}_2^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (1 - u^j) \\ -(1 - u^j) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{in} + R_j & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E - V_q^j \\ 0 \end{bmatrix} u^j - \begin{bmatrix} V_f^j \\ 0 \end{bmatrix} (1 - u^j) \quad (\text{A.2})$$

Se procede a medir $V_f^j = V_f^m$ y $V_q^j = V_q^m$ el lazo abierto con $\bar{u} = 0.5$, se cierra el lazo con una ley de control u^j y se ajusta R_j hasta que la tensión de salida sea igual al valor deseado.

A.2. Síntesis del Modelo Joule para el Convertidor Boost-Boost en Cascada.

Partimos del modelo ideal Σ^i del convertidor Boost-Boost, la configuración del circuito está dada por la figura A.4.

Donde x_1^i, x_3^i son las corrientes en las bobinas, x_2^i, x_4^i son las tensiones de los condensadores y u_1^i, u_2^i son las entradas, R, R_1 son las resistencias de carga, C_1, C_2 son las

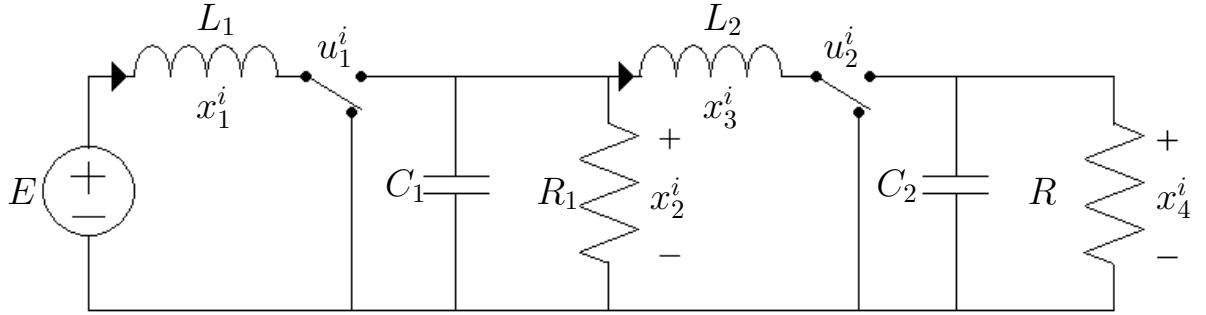


Figura A.4: Modelo Ideal del Convertidor Boost-Boost

capacitancias, L_1, L_2 son las inductancias, E es la fuente de alimentación, representado a través de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \\ \dot{x}_3^i \\ \dot{x}_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1^i) & 0 & 0 \\ (1-u_1^i) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(1-u_2^i) \\ 0 & 0 & (1-u_2^i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

El diagrama esquemático del montaje necesario para realizar el prototipo del laboratorio Σ_m está dado en el circuito de la figura A.5.

Modelo Equivalente Joule

Sustituimos en el diagrama esquemático los semiconductores por las fuentes de tensión $V_{f_1}^j, V_{f_2}^j, V_{q_1}^j$ y $V_{q_2}^j$. Se insertan dos resistencias internas serie con la bobinas R_{in_1} y R_{in_2} y dos resistencias Joule R_{j_1} y R_{j_2} . La figura A.6 muestra el modelo resultante.

La dinámica correspondiente al convertidor está dada por:

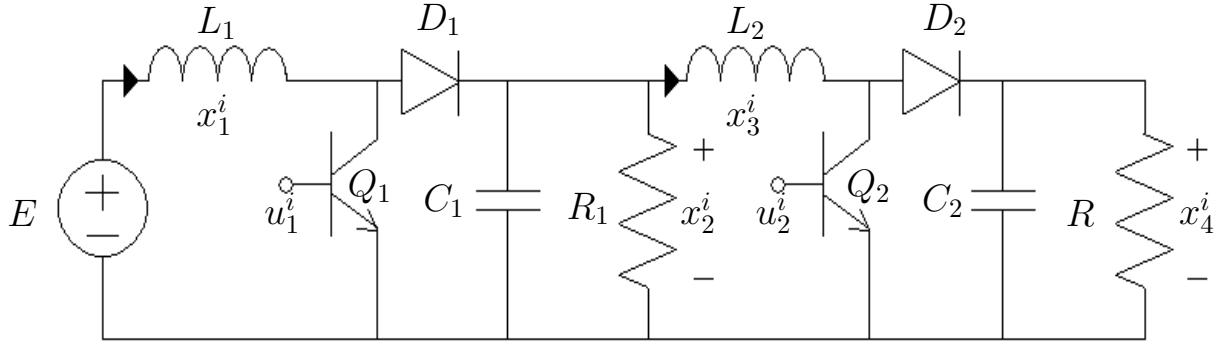


Figura A.5: Circuito Esquemático del Convertidor Boost-Boost

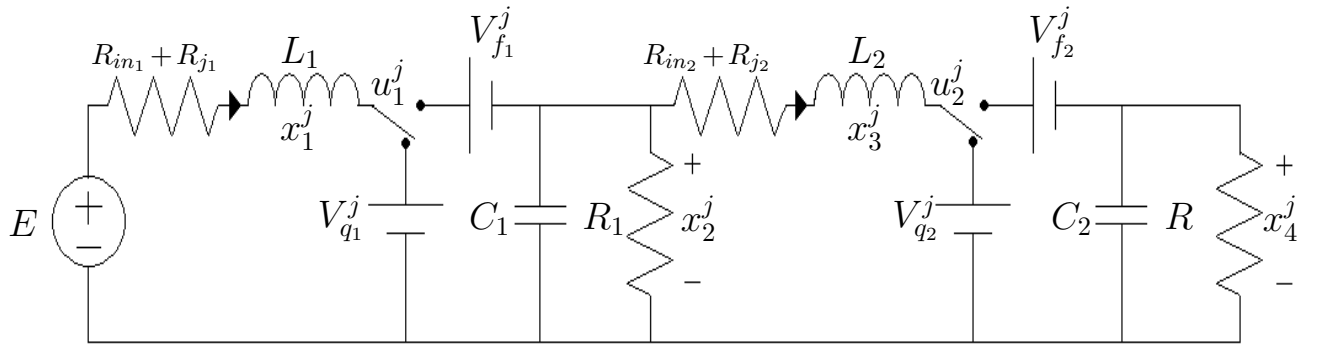


Figura A.6: Modelo Joule del Convertidor Boost-Boost

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^j \\ \dot{x}_2^j \\ \dot{x}_3^j \\ \dot{x}_4^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u_1^j) & 0 & 0 \\ (1-u_1^j) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(1-u_1^j) \\ 0 & 0 & (1-u_1^j) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ x_3^j \\ x_4^j \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} R_{in1} + R_{j1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{in2} + R_{j2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ x_3^j \\ x_4^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_{q1}^j \\ 0 \\ V_{q2}^j \\ 0 \end{bmatrix} u_1^j - \begin{bmatrix} V_{f1}^j \\ 0 \\ V_{f2}^j \\ 0 \end{bmatrix} (1-u_1^j) \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

Se procede a medir V_{f1}^j , V_{f2}^j , V_{q1}^j y V_{q2}^j en lazo abierto con $\bar{u} = 0.5$, se cierra el lazo con una ley de control u_1^j y u_2^j y se ajustan R_{j1} y R_{j2} hasta que la tensiones de salida

V_{d_1} y V_{d_2} sean iguales a los valores deseados en cada etapa.

A.3. Síntesis del Modelo Joule para el Convertidor Cuk

Partimos del modelo ideal Σ^i del convertidor Cuk, la configuración del circuito está dado por la figura A.7.

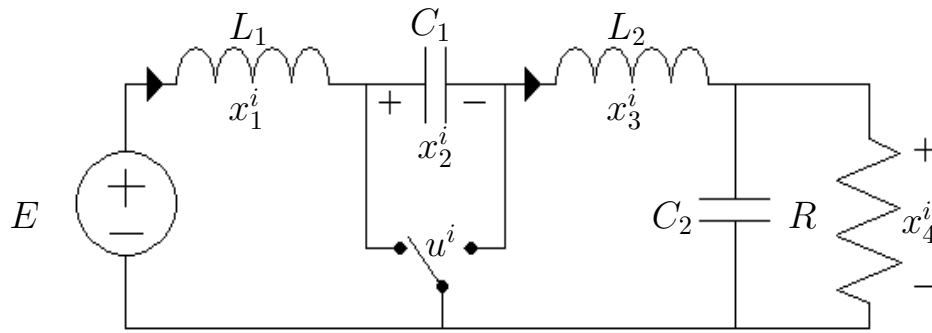


Figura A.7: Modelo Ideal del Convertidor Cuk

Donde x_1^i, x_3^i son las corrientes en las bobinas, x_2^i, x_4^i son las tensiones de los condensadores, u^i es la entrada, R es la resistencia de carga, C_1, C_2 son las capacitancias, L_1, L_2 son las inductancias, E es la fuente de alimentación, representado a través de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \\ \dot{x}_3^i \\ \dot{x}_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u^i) & 0 & 0 \\ (1-u^i) & 0 & u^i & 0 \\ 0 & -u^i & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})
 \end{aligned}$$

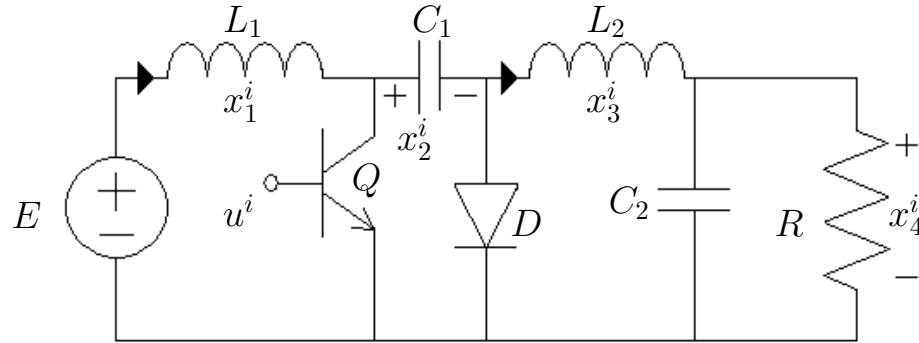


Figura A.8: Modelo Esquemático del Convertidor Cuk

El diagrama esquemático Σ_m está dado en el circuito de la figura A.8

Modelo Equivalente Joule

Sustituimos en el diagrama esquemático los semiconductores por las fuentes de tensión $V_{f_1}^j$, $V_{f_2}^j$, $V_{q_1}^j$ y $V_{q_2}^j$. Se insertan dos resistencias internas serie con la bobinas R_{in_1} , R_{in_2} y dos resistencias Joule R_{j_1} , R_{j_2} . De lo que nos queda el circuito de la figura A.9.

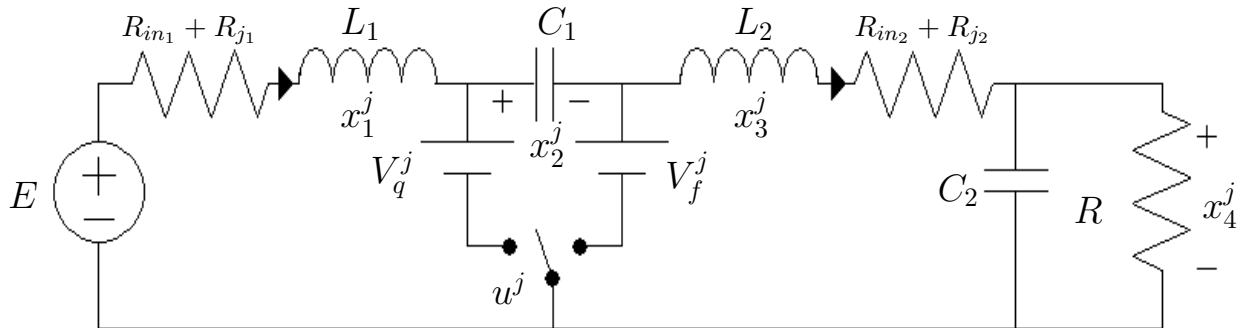


Figura A.9: Modelo Joule del Convertidor Cuk

En esta configuración, cuando las resistencias R_{j_1} y R_{j_2} se colocan en serie con las bobinas, se genera un acoplamiento entre las corriente de ambas bobinas, el cual podemos solucionar introduciendo una única R_j en el interruptor como se ve en la figura A.10.

La dinámica correspondiente al convertidor está dada por:

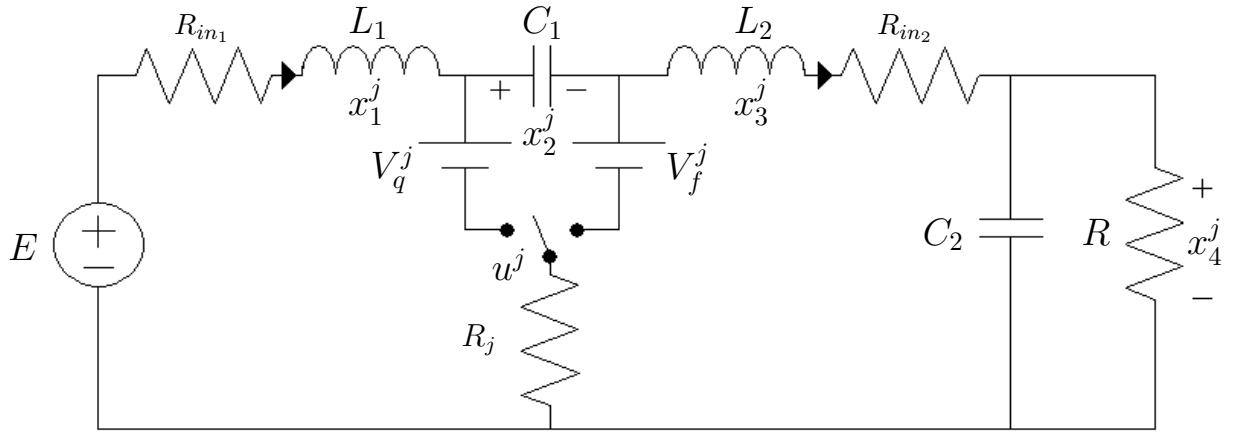


Figura A.10: Modelo Joule Modificado del Convertidor Cuk

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1^i \\ \dot{x}_2^i \\ \dot{x}_3^i \\ \dot{x}_4^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-u^j) & 0 & 0 \\ (1-u^j) & 0 & -u^j & 0 \\ 0 & u^j & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} R_{in1} + R_j & 0 & -R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_j & 0 & R_{in2} + R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \\ x_4^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_f^j \\ 0 \\ -V_f^j \\ 0 \end{bmatrix} (1-u^j) - \begin{bmatrix} V_q^j \\ 0 \\ -V_q^j \\ 0 \end{bmatrix} u^j \quad (A.6)
 \end{aligned}$$

Se procede a medir V_f^j y V_q^j en lazo abierto con $\bar{u} = 0.5$, se cierra el lazo con una ley de control u^j y se ajusta R_j hasta que la tensiones de salida $V_{d1} = \bar{x}_4$.

A.4. Ventajas y Desventajas del Modelo Joule.

Este modelo tiene como ventajas más apreciables las siguientes:

- La aproximación de los semiconductores se realiza con elementos lineales.
- Es sencillo y aplicable en forma práctica.
- Permite desarrollar controladores relativamente sencillos.

- Los resultados prácticos y teóricos se aproximan con una alta precisión, en especial en estado estacionario.
- El transitorio de los estados son aproximadamente iguales.
- Es aplicable a sistemas de múltiples entradas y salidas.
- No requiere curva características o alguna técnica especial de identificación; simplemente requiere algunas mediciones sencillas.

Entre las desventajas tenemos:

- Para obtener un modelo preciso es necesaria una medición previa del montaje y la sintonización de los parámetros.
- Constituye una aproximación del modelo real.

Apéndice B

Listado en Maple utilizando el Modelo Ideal para la transformación afín

B.1. Restart

```
> restart;  
> with(LinearAlgebra):  
> with(linalg):
```

B.2. Halla las ecuaciones de $x1s$ y $x2s$

$x1bar$, $x2bar$, $ubar$ son los valores nominales de equilibrio para los estados y la acción de control. $x1s$, $x2s$ son las coordenadas de un punto de equilibrio real.

```
> equx1:=E-(1-u)*x2;  
> equx2:=((1-u)*x1-x2/R);  
> ubar:=1-E/x2bar;x1bar:=x2bar^2/(Ro*E);  
> ua:=ubar-gamma1*(x1*x2bar-x1bar*x2);  
  
> a:=eval(equx1,u(t)=ua);  
> b:=eval(equx2,u(t)=ua);  
  
> equx1a := expand(subs(u = ua, equx1));  
> equx2a := expand(subs(u = ua, equx2));  
  
> equx1s := expand(subs(x1 = x1s, x2 = x2s, equx1a));  
> equx2s := expand(subs(x1 = x1s, x2 = x2s, equx2a));
```


B.3. Dinámica del Error del Sistema

```
> eque1 := expand(eval((equx1a-equx1s)/L, [x1 = e1+x1s, x2 = e2+x2s]));
> eque2 := expand(eval((equx2a-equx2s)/C, [x1 = e1+x1s, x2 = e2+x2s]));
```

Perko caracteriza los sistemas dinámicos cuadráticos planares cuyas trayectorias están acotadas (BQS). El sistema que nos ocupa tiene uno o tres puntos de equilibrio. Según Perko, las trayectorias solución de ese sistema están acotadas si y sólo si el sistema es afinmente equivalente al sistema:

```
> pk1 := diff(z1(t), t) = a11*z1+a12*z2+z2^2;
> pk2 := diff(z2(t), t) = a21*z1+a22*z2-z1*z2+c*z2^2
```

Nótese que la particularidad de este sistema se reduce a los términos de segundo grado puesto que los coeficientes de los términos de primer grado son arbitrarios. (Existen algunas condiciones dadas mediante desigualdades que se verificarán a posteriori). La falta de términos independientes proviene de tomar el origen en uno de los puntos de equilibrio.

Vamos a considerar un cambio de variables lineal (endomorfismo) e intentar transformar el sistema (3.1) en el sistema (3.2).

```
> Fe1 := q11*z1(t)+q12*z2(t);
> Fe2 := q21*z1(t)+q22*z2(t);
> dFe1 := diff(Fe1, t);
> dFe2 := diff(Fe2, t);
> J1 := dFe1 = eque1;
> J2 := dFe2 = eque2;
> zetas := solve([J1, J2], [diff(z1(t), t), diff(z2(t), t)]);
> dz1aux := zetas[1][1];
> dz2aux := zetas[1][2];
> dz1 := subs(e1 = q11*z1+q12*z2, e2 = q21*z1+q22*z2, rhs(dz1aux));
> dz2 := subs(e1 = q11*z1+q12*z2, e2 = q21*z1+q22*z2, rhs(dz2aux));
> pk1;
> pk2;
```

Primera ecuación.

```
> eq1 := coeff(dz1, z1, 2)
> eq2 := coeff(coeff(dz1, z1, 1), z2, 1);
> eq3 := coeff(dz1, z2, 2);
```

Segunda ecuación.

```
> eq4 := coeff(dz2, z1, 2);
> eq5 := -coeff(coeff(dz2, z1, 1), z2, 1);
```

Solución

```
> qs := solve({eq1 = 0, eq2 = 0, eq3 = eq5, eq4 = 0}, {q11, q12, q21,
q22});

> L1aux := sqrt(C/L);
> q11a:=L1aux*q22;
> q12a:=- (q22*C*Ro*E)/(L*x2bar);
> q21a:=(L1aux*q22*Ro*E)/x2bar;
> q22a:=q22;
> ndz1 := simplify(subs(q11 = q11a, q12 = q12a, q21 = q21a, q22 = q22a,
dz1));
> ndz2 := simplify(subs(q11 = q11a, q12 = q12a, q21 = q21a, q22 = q22a,
dz2));
> na11 := coeff(ndz1, z1, 1);
> na12 := coeff(ndz1, z2, 1);
> na111 := simplify(coeff(ndz1, z1, 2));
> na112 := simplify(coeff(coeff(ndz1, z1, 1), z2, 1));
> na122 := collect(coeff(ndz1, z2, 2), q22);
> na21 := coeff(coeff(ndz2, z1, 1), z2, 0);
> na22 := simplify(coeff(coeff(ndz2, z2, 1), z1, 0), size);
> na211 := collect(coeff(ndz2, z1, 2), q22);
> na212 := collect(coeff(coeff(ndz2, z1, 1), z2, 1), q22);
> na222 := collect(coeff(ndz2, z2, 2), q22);
```

Eligiendo adecuadamente $q22$ se tiene $na122=na212=1$. Por otro lado, dado que $na11 < 0$ ($nb11 < 0$) se cumple la primera de las condiciones.

Además, en ambos casos (a) y (b), se tiene $c=0$; con lo cual $abs(c) < 2$. (ver Perko)

```
> simplify(simplify(0 < -(na12-na21)^2+4*na11*na22-4*na21*na12, size),
size);
> numer(lhs%)/(x2bar*gamma1) < numer(rhs%)/(x2bar*gamma1));
> simplify(%, size);
> solve(%, R);
```

Dado que las tres condiciones $na11 < 0$, $na22 < 0$, $(a12 - a21 + ca11)^2 < 4a11a22 - 4a21a12$ para la restricción de R entonces el sistema es BQS1 (ver Perko) y pertenece

al tipo c de la clasificación de Perko

```
> simplify(simplify(0 > -(na12-na21)^2+4*na11*na22-4*na21*na12, size),
size);
> numer(lhs%)/(x2bar*gamma1) < numer(rhs%)/(x2bar*gamma1));
> simplify(%, size);
> solve(%, R);
```

Las condiciones $a_{11} < 0$, $a_{11}+a_{22} < 0$ y $(a_{12} - a_{21} + c*a_{11})^2 > 4a_{11}a_{22} - 4a_{21}a_{12}$ (ver Perko) por lo tanto podemos establecer un R tal que el sistema es BQS3

faltando establecer cual de las configuraciones se genera en el convertidor. Dado que la condición pasa de BQS1 a BQS3 entonces el punto de quiebre esta dado por $(a_{12} - a_{21} + ca_{11})^2 = 4 a_{11} a_{22} - 4 a_{21} a_{12}$

```
> (na12-na21)^2-4*na11*na22+4*na21*na12;
> simplify(%, size);
> %*C*R*L*Ro^2*E^2/(gamma1*x2bar);
> eval(%, x1s = x2s^2/(R*E));
> normal(%);
> %*R/x2s;
> solve(%, R);
> RBSQ13 := %[1];
```

De la misma manera si la resistencia coincide con el cambio de 1 a 3 raíces deben ser la misma que se obtiene con la formula de Cardano cuando cambia de 1 a 3 raíces. Para hallar esta resistencia se requiere la función de equilibrios así que:

B.3.1. Equilibrios del Sistema

Ecuación de Equilibrio de la tensión x2

```
> w1:=eval(equx1a, [x1bar=x2bar^2/(Ro*E), ubar=1-E/x2bar]):w1:=expand(%);
> w2:=eval(equx2a, [x1bar=x2bar^2/(Ro*E), ubar=1-E/x2bar]):w2:=expand(%);
> isolate(w1,x1):expand(%):simplify(%,size);
> eval(w2,x1=rhs(%)):
> normal(%):
> numer(%):
> x2eq:=collect(%,x2);
```

Resistencia de Cardano

```
> x2eq; k1 := %/coeff(%, x2^3);
> subs(x2 = y2-(1/3)*coeff(k1, x2^2), %);
> expand(%);
> k2 := collect(%, y2);
> p := coeff(k2, y2);
> q := coeff(k2, y2, 0);
> DDisC := (1/4)*q^2+(1/27)*p^3;
> solve(%, R);
> RC := simplify(%[3], size);
```


Apéndice C

Listado en Maple utilizando el Modelo Joule para la transformación afín

C.1. Restart

```
> restart;  
> with(LinearAlgebra):  
> with(linalg):
```

C.2. Halla las ecuaciones de $x1s$ y $x2s$

$x1bar$, $x2bar$, $ubar$ son los valores nominales de equilibrio para los estados y la acción de control. $x1s$, $x2s$ son las coordenadas de un punto de equilibrio real.

```
> equx1:=E-(1-u)*x2-((Rin+Rj)*x1+u*Vq+(1-u)*Vf);;  
> equx2:=((1-u)*x1-x2/R);  
> ubar:=1-E/x2bar;x1bar:=x2bar^2/(Ro*E);  
> ua:=ubar-gamma1*(x1*x2bar-x1bar*x2);  
  
> a:=eval(equx1,u(t)=ua);  
> b:=eval(equx2,u(t)=ua);  
  
> equx1a := expand(subs(u = ua, equx1));  
> equx2a := expand(subs(u = ua, equx2));  
  
> equx1s := expand(subs(x1 = x1s, x2 = x2s, equx1a));  
> equx2s := expand(subs(x1 = x1s, x2 = x2s, equx2a));
```

C.3. Dinámica del Error del Sistema

```
> eque1 := expand(eval((equx1a-equx1s)/L, [x1 = e1+x1s, x2 = e2+x2s]));
> eque2 := expand(eval((equx2a-equx2s)/C, [x1 = e1+x1s, x2 = e2+x2s]));
```

Perko caracteriza los sistemas dinámicos cuadráticos planares cuyas trayectorias están acotadas (BQS).

El sistema que nos ocupa tiene uno o tres puntos de equilibrio. Según **Perko**, las trayectorias solución de ese sistema están acotadas si y sólo si

es afinmente equivalente al sistema:

```
> pk1 := diff(z1(t), t) = a11*z1+a12*z2+z2^2;
> pk2 := diff(z2(t), t) = a21*z1+a22*z2-z1*z2+c*z2^2;
```

Nótese que la particularidad de este sistema se reduce a los términos de segundo grado puesto que los coeficientes de los términos de primer grado son arbitrarios.

(Existen algunas condiciones dadas mediante desigualdades que se verificarán a posteriori)

La falta de términos independientes proviene de tomar el origen en uno de los puntos de equilibrio.

Vamos a considerar un cambio de variables lineal (endomorfismo) e intentar transformar el sistema (3.1) en el sistema (3.2).

```
> Fe1 := q11*z1(t)+q12*z2(t);
> Fe2 := q21*z1(t)+q22*z2(t);
> dFe1 := diff(Fe1, t);
> dFe2 := diff(Fe2, t);
> zetas := solve([J1, J2], [diff(z1(t), t), diff(z2(t), t)]);
> dz1aux := zetas[1][1];
> dz2aux := zetas[1][2];
> dz1 := subs(e1 = q11*z1+q12*z2, e2 = q21*z1+q22*z2, rhs(dz1aux));
> dz2 := subs(e1 = q11*z1+q12*z2, e2 = q21*z1+q22*z2, rhs(dz2aux));
> pk1;
> pk2;
```

Primera ecuación.

```
> eq1 := coeff(dz1, z1, 2);
> eq2 := coeff(coeff(dz1, z1, 1), z2, 1);
> eq3 := coeff(dz1, z2, 2);
```

Segunda ecuación.

```
> eq4 := coeff(dz2, z1, 2);
> eq5 := -coeff(coeff(dz2, z1, 1), z2, 1);
```

Solución

```
> qs := solve({eq1 = 0, eq2 = 0, eq3 = eq5, eq4 = 0}, {q11, q12, q21,
q22});
> L1aux := sqrt(C/L);
> q11a:=L1aux*q22;
> q12a:=- (q22*C*Ro*E)/(L*x2bar);
> q21a:=(L1aux*q22*Ro*E)/x2bar;
> q22a:=q22;
> ndz1 := simplify(subs(q11 = q11a, q12 = q12a, q21 = q21a, q22 = q22a,
dz1));
> ndz2 := simplify(subs(q11 = q11a, q12 = q12a, q21 = q21a, q22 = q22a,
dz2));
> na11 := coeff(ndz1, z1, 1);
> na12 := coeff(ndz1, z2, 1);
> na111 := simplify(coeff(ndz1, z1, 2));
> na112 := simplify(coeff(coeff(ndz1, z1, 1), z2, 1));
> na122 := collect(coeff(ndz1, z2, 2), q22);
> na21 := coeff(coeff(ndz2, z1, 1), z2, 0);
> na22 := simplify(coeff(coeff(ndz2, z2, 1), z1, 0), size);
> na211 := collect(coeff(ndz2, z1, 2), q22);
> na212 := collect(coeff(coeff(ndz2, z1, 1), z2, 1), q22);
> na222 := collect(coeff(ndz2, z2, 2), q22);
```

Eligiendo adecuadamente $q22$ se tiene $na122=na212=1$. Por otro lado, dado que $na11<0$ ($nb11<0$) se cumple la primera de las condiciones.

Finalmente las cuatro condiciones que definen el comportamiento del sistema estandaradas por $na11<0$, $abs(c)<2$ ($c=0$), $na11+na22<0$; $(a12 - a21 + ca11)^2 < 4a11a22 - 4a12a21$ para el caso BQS1 y $(a12 - a21 + ca11)^2 > 4a11a22 - 4a12a21$ para el caso BQS3


```

> simplify(simplify(0 < -(na12-na21)^2+4*na11*na22-4*na21*na12, size),
size);
> numer(lhs%)/(x2bar*gamma1) < numer(rhs%)/(x2bar*gamma1));
> simplify(%, size);
> k1 := solve(%, R);
> op(1, k1);
> solve(%, Rj);

```

En el caso del Joule para que se establezca los dos casos, existen dos condiciones que se originan de la última condición, que son las restricciones de la R y de Rj

C.3.1. Equilibrios del Sistema

Ecuación de Equilibrio de la tensión x_2

```

> w1:=eval(equx1a, [x1bar=x2bar^2/(Ro*E), ubar=1-E/x2bar]):w1:=expand(%);
> w2:=eval(equx2a, [x1bar=x2bar^2/(Ro*E), ubar=1-E/x2bar]):w2:=expand(%);
> isolate(w1,x1):expand(%) :simplify(%,size);
> eval(w2,x1=rhs(%)):
> normal(%):
> numer(%):
> simplify(%,size);
> x2eq:=collect(%,x2);

```

Los parámetros de $x_2^3+s_1*x_2^2+s_2*x_2+s_3=0$ son:

Apéndice D

Listado en Maple utilizando el Modelo Ideal incluyendo el integrador

D.1. Restart

```
> restart;  
> with(LinearFunctionalSystems):  
> with(linalg):  
> with(plots):with(student):  
> #with(VectorCalculus):  
> with(DEtools):
```

D.2. Las ecuaciones del convertidor

```
> equx1:=(E-(1-u(t))*x2(t))/L;  
> equx2:=(((1-u(t))*x1(t)-x2(t)/R))/C;  
> equx3:=x2(t)-x2bar-0*x03;
```

Los equilibrios del convertidor en lazo abierto

```
> ubara := 1-E/x2bar; x1bara := x2bar^2/(Ro*E);
```

Introduciendo el lazo de realimentación por medio del controlador

$u(t)=ubar-\gamma*(x1(t)*x2bar-x1bar*x2(t))+\alpha*x3(t)$ y colocando como una función del valor deseado $x2bar$

```

> equx1a:=eval(equx1,[u(t)=ubar-gamma*(x1(t)*x2bar-x1bar*x2(t))
> +alpha*x3(t)]):
> equx1a:=expand(%);
> equx2a:=eval(equx2,[u(t)=ubar-gamma*(x1(t)*x2bar-x1bar*x2(t))
> +alpha*x3(t)]):
> equx2a:=expand(%);
> equx3a:=eval(equx3,[u(t)=ubar-gamma*(x1(t)*x2bar-x1bar*x2(t))
> +alpha*x3(t)]):
> equx3a:=expand(%);
> equx1a := expand(eval(equx1a, [ubar =ubara, x1bar = x1bara]));
> equx2a := expand(eval(equx2a, [ubar =ubara, x1bar = x1bara]));

```

Las ecuaciones para el equilibrio en lazo cerrado

```

> equx1s:=eval(equx1a,[x1(t)=x1s,x2(t)=x2s,x3(t)=x3s]):
> equx1s:=expand(%);
> equx2s:=eval(equx2a,[x1(t)=x1s,x2(t)=x2s,x3(t)=x3s]):
> equx2s:=expand(%);
> equx3s:=eval(equx3a,[x1(t)=x1s,x2(t)=x2s,x3(t)=x3s]):
> equx3s:=expand(%);

```

Se elimina la variable t

```

> equx1b:=eval(equx1a,[x1(t)=x1,x2(t)=x2,x3(t)=x3]):equx1b:=expand(%);
> equx2b:=eval(equx2a,[x1(t)=x1,x2(t)=x2,x3(t)=x3]):equx2b:=expand(%);
> equx3b:=eval(equx3a,[x1(t)=x1,x2(t)=x2,x3(t)=x3]):equx3b:=expand(%);

```

Se hallan los equilibrios en lazo cerrado del sistema

```

> sols:=solve([equx1b,equx2b,equx3b],[x1,x2,x3]);
> simplify(expand(%[1][3])):
> x3q:=rhs(collect(%, [x2bar,E,gamma,alpha]));
> x1q:=rhs(sols[1][1]);
> x2q:=rhs(sols[1][2]);

```

D.3. Dinámica del Error del Sistema

D.3.1. Se transforma en variables del error

```
> eque1:=eval(equx1b-equx1s,[x1=e1+x1s,x2=e2+x2s,x3=e3+x3s]):
> eque1:=expand(%);
> eque2:=eval(equx2b-equx2s,[x1=e1+x1s,x2=e2+x2s,x3=e3+x3s]):
> eque2:=expand(%);
> eque3:=eval(equx3b-equx3s,[x1=e1+x1s,x2=e2+x2s,x3=e3+x3s]):
> eque3:=expand(%);
```

Se calcula el jacobiano del sistema del error y se sustituyen las coordenadas del equilibrio

```
> jacobian([eque1, eque2, eque3], [e1, e2, e3]):
> evalm(simplify(%), size):
> eval(%,[e1 = 0, e2 = 0, e3 = 0, x1s = x1q, x2s = x2q, x3s = x3q]);
> ja:=evalm(simplify(%));
```

Se transforma el jacobiano en un función de lambda y se toman los coeficientes del polinomio

```
> charpoly(ja,lambda):
> k1 := collect(% , lambda);
> d0 := coeff(k1,lambda,0);
> d1:=simplify(coeff(k1,lambda,1),size);
> d2:=coeff(k1, lambda, 2);
> d3 := coeff(k1, lambda, 3);
```

Se aplica el criterio de Hurwitz así que se requiere la matriz de los coeficientes del polinomio

```
> dda := Matrix(3,3,{(1,1)=d2,(1,2)=d3,(1,3)=0,(2,1)=d0,(2,2)=d1,
> (2,3)=d2,(3,1)=0,(3,2)=0,(3,3)=d0});
```

De manera que los todos los determinante de los menores principales deben positivos definidosel primero es $d2 > 0$ lo que se cumple ya todos los parametros son positivos.

```
> m1 := simplify(d2, size);
```

El segundo menor debe ser positivo así que:

Segundo Menor

```
> det(minor(dda, 3, 3)):
> m2 := (simplify(%, size)):
> m2a:=numer(%):
> m2a:=collect(%,R)>0;
```

Primer coeficiente de la ecuación de segundo grado

```
> ter1:=simplify(coeff(rhs(m2a),R,2),size);
```

Raíces de la ecuación de segundo grado

```
> cortes:=(solve(rhs(m2a),R)):
> RC1:=simplify(cortes[1], size);
> RC2:=simplify(cortes[2], size);
```

En el caso de que el primer coeficiente sea positivo y dado que la parábola va a infinito, $-\frac{\gamma(-\gamma x2bar^4 + E^2 Ro)}{ELRo} < \alpha$ el segundo menor será positivo en el rango $(RC2, RC1)$.

```
> ter1/(x2bar^2*E^3*C*Ro)>0;
> solve(%,alpha);
```

En el caso de que el primer coeficiente sea negativo y dado que la parábola va a $-\infty$, $\alpha < -\frac{\gamma(-\gamma x2bar^4 + E^2 Ro)}{ELRo}$ el segundo menor será positivo en el rango $(RC2, RC1)$.

```
> ter1/(x2bar^2*E^3*C*Ro)<0;
> solve(%,alpha);
```

Únicamente falta el discriminante que está dado por:

```
> ter1 := simplify(coeff(rhs(m2a), R, 2), size);
> ter2 := simplify(coeff(rhs(m2a), R, 1), size);
> ter3 := simplify(coeff(rhs(m2a), R, 0), size);
> disc:=ter2^2-4*ter1*ter3;
```

Para que existan cortes en la parábola basta que el término

$$0 < -\gamma^2 x2bar^4 + E\alpha LRo + E^2 Ro \gamma$$

que es la misma condición impuesta por el primer término $ter1$, por lo tanto cuando se define la dirección de la parábola también se define la existencia de las raíces.

Tercer Menor

La relación entre el segundo menor y el tercero es $-\frac{E\alpha}{CL}$

```
> m3:=det(dda);
> m3/m2:
> simplify(%,size);
```

Dado que existe una región donde el segundo menor es positivo, entonces existirá un α en un rango negativo tal que satisfaga el criterio de Hurwitz, es decir, $v_1 < 0$.

sin embargo este v_1 está acotado por la condición de existencia de las raíces del polinomio que ocurre cuando el discriminante es positivo $\text{disc} > 0$. Para hallar el rango de v_1 necesitamos resolver respecto de ella misma.

```
> collect(disc,alpha);
> alphas:=solve(%,alpha):
> alpha1:=simplify(alphas[1],size);
> alpha2:=simplify(alphas[2],size);
```

De ambas únicamente nos interesa la solución más negativa puesto que la condición entre los discriminantes establece $\alpha < 0$. Y este será el rango dentro del cual la función es localmente estable.

Condición JMO

```
> m2;
```

Para asegurar que el determinante de $m_2 > 0$ basta con asegurar que

$$(-L\alpha - 2E\gamma)Ro + ER\gamma < 0$$

```
> aux1:=(-L*alpha-2*E*gamma)*Ro+E*R*gamma < 0;
> solve(%,alpha);
> aux0:=op(4,%) [1] [1];
```

La relación entre el segundo menor y el tercero es $-\frac{E\alpha}{CL}$

```
> m3:=det(dda);
> m3/m2:
> aux1:=simplify(%,size);
```

Si $m_2 > 0$ entonces $M_2 = -\frac{M_3 CL}{E\alpha}$, esto implica que

```
> aux2:=M3/M2=aux1;
> solve(%,M3)>0;
> solve(%, alpha);
```

De lo anterior $v_1 < 0$

```
> lhs(aux0)<alpha<0;
```

Para que se cumpla debe ocurrir

```
> -2*Ro+R<0;
> solve(%,R) [1];
```

Ejemplo

ALPHAS

```
> Roa:=2; x2bara:=20; gammaa:=0.1e-3; La:=33e-6; Ca:=1000e-6; Ea:=10;
> eval(ja, [Ro=Roa, x2bar=x2bara, gamma=gammaa, L=La, C=Ca, E=Ea]);
> eval(charpoly(ja, lambda),
> [Ro=Roa, x2bar=x2bara, gamma=gammaa, L=La, C=Ca, E=Ea]);
> collect(%, lambda);
> eval(m1, [Ro=Roa, x2bar=x2bara, gamma=gammaa, L=La, C=Ca, E=Ea])>0;
> solve(%, R);
> m2;
> numer(%);
> k1:=eval(numer(%), [Ro=Roa, x2bar=x2bara, gamma=gammaa, L=La, C=Ca, E=Ea]);
> M2a:=collect(%,R);
> disc2:=coeff(M2a,R,1)^2-4*coeff(M2a, R, 2)*coeff(M2a, R, 0);
> solve(%,alpha);
> plot(disc2,alpha=-80..6);
> m3;
> numer(%);
> k1:=eval(numer(%), [Ro=Roa, x2bar=x2bara, gamma=gammaa, L=La, C=Ca, E=Ea]);
> M3a:=collect(%,R);
> disc3:=coeff(M3a,R,1)^2-4*coeff(M3a,R,2)*coeff(M3a,R,0);
> solve(%, alpha);
> plot(disc3,alpha=-80..6);
```

Resistencia para un alpha dado

Alpha=-1 localmente estable en $R(0,\infty)$

```
> alphabeta:=-2;
> ka:=eval(numer(m2),
> [Ro=Roa, x2bar=x2bara, gamma=gammaa, L=La, C=Ca, E=Ea, alpha=alphabeta]);
> kb:=eval(numer(m3),
> [Ro=Roa, x2bar=x2bara, gamma=gammaa, L=La, C=Ca, E=Ea, alpha=alphabeta]);
> plot([ka,kb],R =-10..10);
```

Rango de estabilidad entre R (0,14.2 aprox)

```
> alphabeta:=-30;
> ka:=eval( numer(m2) ,
> [Ro=Roa,x2bar=x2bara,gamma=gammaaa,L=La,C=Ca,E=Ea,alpha=alphabeta]);
> kb:=eval( numer(m3) ,
> [Ro=Roa,x2bar=x2bara,gamma=gammaaa,L=La,C=Ca,E=Ea,alpha=alphabeta]);
> plot([ka,kb],R =-1..14.2);
```

Alpha=1 Inestable

```
> alphabeta:=1;
> ka:=eval( numer(m2) ,
> [Ro=Roa,x2bar=x2bara,gamma=gammaaa,L=La,C=Ca,E=Ea,alpha=alphabeta]);
> kb:=eval( numer(m3) ,
> [Ro=Roa,x2bar=x2bara,gamma=gammaaa,L=La,C=Ca,E=Ea,alpha=alphabeta]);
> plot([ka,kb],R =-1..14.2);
> alphabeta:=-80;
> ka:=eval( numer(m2) ,
> [Ro=Roa,x2bar=x2bara,gamma=gammaaa,L=La,C=Ca,E=Ea,alpha=alphabeta]);
> kb:=eval( numer(m3) ,
> [Ro=Roa,x2bar=x2bara,gamma=gammaaa,L=La,C=Ca,E=Ea,alpha=alphabeta]);
> plot([ka,kb],R =0..1);
```


Bibliografía

- [Alv02] Alvarez-Ramírez J.; Espinosa-Pérez G. “Stability of current-mode control for DC-DC power converters”. *Systems and Control Letters*, Volume 45, Number 2, 15 February 2002, pp. 113-119(7). Elsevier
- [Arc03] Murat Arcak. “L2-gain and passivity techniques in nonlinear control: Arjan van der Schaft”: Springer, London, 2000, ISBN 1-85233-073 Book reviews *Automatica*, Volume 39, Issue 6, June 2003, Pages 1118-1119
- [Ari96] S. Arimoto T. Nakayama. “Another language for describing motions of mechatronics systems: a nonlinear position-dependent circuit theory”. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, June 1996, Volume 1, Issue 2, pp 168-180
- [Bar48] J. Bardeen and W. H. Brattain. “The transistor, A semiconductor Triode”. *Phys. Rev.* 74, 230. June 1948.
- [Byr91] Byrnes, C. I., Isidori, A., and Willems, J. C. (1991). “Passivity, feedback equivalence, and global stabilization of minimum phase systems”. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36, 1228-1240.
- [Byr89] Byrnes, C.I. Isidori, A. “Steady state response, separation principle and the output regulation of nonlinear systems” *Decision and Control*, 1989., Proceedings of the 28th IEEE Conference on.13-15 Dec 1989. 2247-2251 vol.3 Tampa, FL, USA
- [Cac04] Caceres. R.O., Barbi. I. “A boost DC-AC converter: analysis, design, and experimentation”. *Power Electronics, IEEE Transactions on*. 1999, V14. Issue 1. P 134-141

- [Che00] Chellaboina, V. Haddad, W.M. “Exponentially dissipative nonlinear dynamical systems: a non linear extension of strict positive realness”. American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000. Volume: 5, 3123-3127. Chicago, IL, USA
- [Cop66] Coppel, W.A., “A survey of quadratic systems”. J Diff. Eq. 2, 293-304 (1966).
- [Cuk78] Cuk, S. M.; Middlebrook, R. D. “Modelling, analyses and design of switching converters”. JAN 1, 1978. Report Number: NASA-CR-135174; TRW-A72042-RHBE; TRW-D04803-CFCM. Prepared for TRW Defense and Space Systems Group, Redondo Beach, Calif.
- [Cza92a] Czarkowski, D. Kazimierczuk, M.K. “Circuit models of PWM DC-DC converters”. Aerospace and Electronics Conference, 1992. NAECON 1992, Proceedings of the IEEE 1992 National. 22 May 1992, 407-413 vol.1
- [Dav38] B. Davydon. ”The rectifying action of semiconductor” Tech. Phys. (USRR), vol 5, pp 87-95, february 1938
- [Dic70] R. J. Dickson and L. M. Perko “Bounded quadratic systems in the plane”. Journal of Differential Equations. Vol 7, Issue 2, March 1970, Pages 251-273
- [Dum00] Dumortier F. and Perko L. “Local Bifurcations and a Survey of Bounded Quadratic Systems”. Journal of Differential Equations. Vol 165, 430-467 (2000)
- [Eri92] Robert W. Erickson, Dragan Maksimovic “Fundamentals of Power Electronics” Springer; 2nd ed. edition (January 2001)
- [Ebe54] Ebers, J.J. Moll, J.L. “Large-Signal Behavior of Junction Transistors”. Proceedings of the IRE. Dec. 1954. Volume: 42, Issue: 12. On page(s): 1761 - 1772
- [Eri82] R.W. Erickson, S. Cuk, and R.D. Middlebrook. “Large-Signal Modelling and Analysis of Switching Regulators”. IEEE PESC Record, 1982 pp 240-250.
- [Fli99] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, “A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems”. IEEE Trans. Automat. Control, 44 (1999), pp 922-937.

- [Fli03] Fliess, Michel; Sira-Ramírez, Hébert. “An algebraic framework for linear identification”. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 9 (2003), p. 151-168.
- [Fra99] Charles François. “Systemics and Cybernetics in a Historical Perspective”. *Systems Research and Behavioral. Syst. Res.* 16, 203-219 (1999). John Wiley & Sons, Ltd.
- [Hil80] David J. Hill and Peter J. Moylan. “Dissipative Dynamical Systems: Basic Input-Output and State Properties”. *Journal of Franklin Institute*. Vol. 309, No. 5, May 1980 Printed in Northern Ireland 327-357.
- [Har04] Harlow H., James. “Electric Power Transformer Engineering”. CRC Press ISBN 0-8493-1704-5. 2004
- [Hil76] Hill, D. and P. Moylan. “The stability of nonlinear dissipative systems”. *IEEE Trans. Auto. Con.* 21 708-711. 1976.
- [Jou38] J.P. Joule, “On the heat evolved by metallic conductors of electricity”. *Philosophical Magazine*, 19, 260: 65. 1838
- [Kas92] John G. Kassakian, Martin F. Schlecht, George C. Verghese. “Principles of Power Electronics”. Addison Wesley Publishing Company 1992
- [Kha00] Khalil Hassan. “Nonlinear Systems”. Third Edition. Prentice Hall Inc., 2000
- [Kok01] Petar Kokotovich, Murat Arcak. “Constructive nonlinear control: a historical perspective”. *Automatica* Volume 37, Issue 5, May 2001, Pages 637-662
- [LaS60] J.P. La Salle. “Some extensions of Lyapunov's second method”. *IRE Trans. Circuit Theory*, CT-7(4): 520-527, December 1960.
- [LaS61] La Salle, Joseph and Lefschetz, Solomon. “Stability by Liapunov's Direct Method with Applications”. Editorial Academic Press, Inc. 1961
- [Lev95] William Levine. *The Control Handbook*. George Verghese. “Dynamics Modelling and Control in Power Electronics”. Section 17. CRC Press 1995.

- [Ley06] Leyva, R.; Cid-Pastor, A.; Alonso, C., Tarbouriech, S., Martinez-Salamero, L. “Passivity-based integral control of a boost converter for large-signal stability”. IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 153, No. 2, March 2006 11.
- [Ley01] Leyva, R.; Martinez-Salamero, L.; Valderrama-Blavi, H.; Maixe, J.; Giral, R.; Guinjoan, F. “Linear State-Feedback Control of a Boost Converter for Large-Signal”. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory And Applications, Vol. 48, NO. 4, April 2001.
- [Mai79] P. Maisser and J. Steinberger, “Lagrange-Fomalismus fur diskrete electromechanische system,” Z Angew. Math. Mech., vol. 59, pp. 717-730, 1979.
- [Mas93] Giuseppe Massobrio y Paolo Antognetto. “Semiconductor Device Modeling with Spice”, 2nd edition. McGraw-Hill, Inc. 1993
- [Mil79] Jacob Millman. “Microelectronics: Digital and Analog Circuits and Systems”, McGraw-Hill, 1979.
- [Mit49] MIT electrical engineering staff, “Magnetic Circuits and Transformers”, John Wiley & Sons, New York, 1949
- [Moh89] Ned Mohan, Tore M. Undeland and Williams Robbins. Power Electronics. Converters, Applications and Design. John Wiley & Sons, INC.
- [Mol58] Moll, J.L. “The Evolution of the Theory for the Voltage-Current Characteristic of P-N Junctions”. Proceedings of the IRE. Jun. 1958. Volume: 46 , Issue: 6. On page(s): 1076-1082.
- [Olh41] R. S. Ohl, “Light-sensitive electric device,” U.S. Patent 2,402,662. Filed May 27, 1941. Granted June 25, 1946.
- [Ort98] R. Ortega, A. Loria, P. J. Nicklasson, and H. Sira-Ramirez, “Passivity-based control of Euler-Lagrange systems,” Communications and Control Engineering Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1998.
- [Ort96] R. Ortega and H. Sira-Ramírez, “Lagrangian Modeling and Control of Switch Regulated DC-to-DC Power Converters,” Control Using Logic-Based Switchings,

- S. Morse (Ed.), *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 222, pp. 151-161, Springer-Verlag 1996, ISBN 3540-26097-0.
- [Ort94] Ortega R, Loria A, Kelly R, Praly L. "On Passivity-Based Output Feedback Global Stabilization of Euler-Lagrange Systems". *Int J of Robust and Nonl Contr* 1995; 5: 313-324,
- [Per04] Perez, M.; Ortega, R.; Espinoza, J.R., "Passivity-based PI control of switched power converters," *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* , vol.12, no.6, pp. 881-890, Nov. 2004
- [Per01] Perko L. "Differential Equations and Dynamical Systems" (3rd edition). January 2001. Springer Verlag. ISBN-10: 0387951164. ISBN-13: 9780387951164
- [Pri69] Prigogine, Ilye. 1969. "Structure, Dissipation and Life." In *Theoretical Physics and Biology*, ed. M. Marois, pp. 23-52. New York: American Elsevier.
- [San92] Sanders, S.R.; Verghese, G.C. "Lyapunov-based control for switched power converters", in *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol.7, (no.1), Jan. 1992. p.17-24. 16.
- [San91] Sanders, S.R. and Verghese, G.C. "Synthesis of Averaged Circuit Models for Switched Power Converters". *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*. Aug 1991. Volume: 38, Issue: 8
- [San89] Sanders, S.R. "Nonlinear control of switching power converters". Advisor George C. Verghese. Ph. D. Thesis Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 1989.
- [Sch04] A.J. van der Schaft, "Port-Hamiltonian systems: network modeling and control of nonlinear physical systems", pp. 127-168 in *Advanced Dynamics and Control of Structures and Machines*, CISM Courses and lectures No. 444, CISM International Centre for Mechanical Sciences, Udine, Italy, April 15-19, 2002 (Eds. H. Irshik, K. Schlacher), Springer, Wien, New York, 2004.

- [Sch96] A.J. van der Schaft, "L2-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control". Springer Verlag. Reprinted 2000 ISBN1852330732
- [Sho49] W. Shockley, "The theory of p-n junctions in semiconductors and p-n junction transistors," Bell Syst. Tech.J., 28,435 (1949).
- [Sir07] H. Sira-Ramírez, M. Spinetti-Rivera and E. Fossas-Colect. "An algebraic parameter estimation approach to the adaptive observer-controller based regulation of the boost converter" IEEE International Symposium on Industrial Electronics. June 4-7, 2007. Vigo, España.
- [Sir06] H. Sira-Ramírez and R. Silva-Ortigoza. "Control Design Techniques in Power Electronics Devices" 2006, XVIII, 423 p., 202 illus., Hardcover. Springer Verlag. ISBN: 978-1-84628-458-8
- [Sir05a] H. Sira-Ramírez. "Are non-linear controllers really necessary in power electronics devices?" European Power Electronics Conference EPE-2005. Dresden, Germany, September 2005.
- [Sir05b] H. Sira-Ramírez. "Linear Feedback Control of Switched Power Converters". Lecture Universidad de Castilla La Mancha E.T.S.I. Industriales, Ciudad Real, España, Junio de 2005
- [Sir04] Herbertt Sira-Ramírez, Sunil K. Agrawal, "Differentially Flat Systems". 2004. Marcel Dekker Inc
- [Sir02] H. Sira-Ramírez, "Sliding Modes, Passivity and Flatness in Sliding Mode Control in Engineering", Wilfrid Perruquetti, Jean Pierre Barbot (Eds.), Control Engineering Series, Marcel Dekker, ISBN: 0-8247-0671-4. pp 161-188
- [Sir98a] H. Sira-Ramírez. "A General Canonical Form for Feedback Passivity of Non-linear Systems" International Journal of Control, Número Especial intitulado Recent Advances in the Control of Nonlinear Systems. Vol 71, No. 5, pp. 891-905. Noviembre 1998.

- [Sir98b] H. Sira-Ramírez, R. Ortega and M. García-Esteban, “Adaptive Passivity Based Control of Average DC-to-DC Power Converter Models” *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* Vol. 12, pp. 63-80, 1998.
- [Sir95] H. Sira-Ramírez, R. Ortega, R. Pérez-Moreno y M. García-Esteban, “A Sliding Mode Controller-Observer for DC-to-DC Power Converters: A Passivity Approach”, 34th IEEE Conference on Decision and Control. New Orleans, Louisiana, U.S.A., Diciembre 13-15 1995, Vol. 4, pp. 3379-3384.
- [Spi07] M. Spinetti-Rivera, H. Sira-Ramírez, D. Biel-Solé, R. Cardoner-Parpal. “Control de un Convertidor Boost mediante realimentación lineal de la dinámica del error de estabilización: resultados experimentales”. SAAEI Sept. 2007. Puebla México.
- [Spi05] Mario Spinetti Rivera, Hebertt Sira Ramírez, Enric Fossas Colet. “Regulación de un Convertidor Boost por Realimentación de Salida Pasiva”. V Congreso de Automatización y Control. Caracas-Venezuela. Nov, 2005
- [Tym89] Tymerski, R. Vorperian, V. Lee, F.C.Y. Baumann, W.T. “Nonlinear modeling of the PWM switch”. *Power Electronics, IEEE Transactions on*. April 1989. Volume: 4, Issue: 2 pp 225 - 233.
- [Vid79] Vidyasagar M., (1979). “New passivity-type criteria for large-scale interconnected systems”, *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol.24, pp.575-579
- [Vor90a] Vorperian, V “Simplified analysis of PWM converters using model of PWM switch. Continuous conduction mode”. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on* May 1990 Volume: 26, Issue: 3, 490-497
- [Wil02] J.C. Willems and H.L. Trentelman “Synthesis of dissipative systems using quadratic differential forms, Part I”. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Volume 47, pages 53-69, 2002.
- [Wil72] Jan C.Willems. Communicated by C. Truesdell. “Dissipative Dynamical Systems Part I: General Theory”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Volume 45, Number 5 / January, 1972. Springer Berlin / Heidelberg