



UNIVERSITAT DE BARCELONA



Departament d'Astronomia i Meteorologia

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO  
DE LA DINÁMICA GALÁCTICA:  
SUPERPOSICIÓN DE SISTEMAS  
ESTELARES.

Santiago Alcobé López



CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA DINÁMICA GALÁCTICA: SUPERPOSICIÓN  
DE SISTEMAS ESTELARES.

Programa de doctorado: Física de la Atmósfera, Astronomía y Astrofísica. Bienio 1986-88.

Memoria presentada por Santiago Alcobé para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Directores: Dra. M<sup>a</sup> Asunción Catalá Poch

Dr. Rafael Cubarsi i Morera

Tutor: Dr. Blai Sanahuja Parera

Dra. M. A. Catalá

Dr. R. Cubarsi

Dr. B. Sanahuja

Barcelona, Enero de 2001



A mi esposa y a  
mi madre.

“Sabía que tendría que aprender muchas cosas de ese nuevo mundo  
... pero nunca había imaginado hasta qué punto.”

Arthur C. Clarke. *3001: Odisea Final*.

# Índice

Índice.....	5
Introducción.....	9
1. Sistemas estelares.....	15
1.1 Introducción.....	16
1.2 Dinámica Galáctica.....	17
1.2.1 Conceptos generales.....	17
1.2.2 Solución de la ecuación fundamental.....	21
1.2.3 Momentos de una distribución de velocidades residuales.....	22
1.2.4 Aproximación de Oort.....	24
1.3 Aplicación de las integrales del movimiento.....	26
1.4 Sistemas estelares de Chandrasekhar.....	28
1.4.1 Función de distribución cuadrática en las velocidades residuales.....	28
1.5 Algunas cuestiones relacionadas.....	38
1.5.1 Poblaciones estelares. Componentes estructurales de la Galaxia.....	38
1.5.2 Correlaciones no nulas. Desviación del vértex.....	39
1.5.3 Consideraciones acerca de la desviación del vértex.....	41
2. El modelo estadístico.....	44
2.1 Superposición de sistemas estelares.....	44
2.2 Superposición de n distribuciones de Schwarzschild.....	44
2.3 Momentos centrados.....	46
2.4 Casos particulares de 2 y 3 poblaciones.....	48
2.4.1 Caso de 2 poblaciones.....	48
2.4.2 Caso de 3 poblaciones.....	51
2.5 Cumulantes de una superposición.....	51
3. El método numérico.....	55
3.1 Aproximación numérica del modelo.....	55
3.1.1 Descripción del método. Algoritmo de cálculo.....	55
3.1.2 Proyección de la velocidad peculiar.....	56
3.1.3 Cálculo de los parámetros de la mezcla.....	58
3.2 Método de cálculo.....	60

3.2.1	Aplicación numérica de las expresiones algebraicas.....	60
3.3	Estimación de errores y de la fiabilidad del método .....	64
3.4	Superposición de muestras ideales.....	66
3.4.1	Poblaciones ideales .....	66
3.4.2	Superposición de poblaciones ideales.....	67
3.4.3	Resultados .....	67
3.4.4	Ejemplos de resultados.....	68
3.4.5	Representación gráfica de los resultados.....	71
3.5	Superposición de muestras sintéticas .....	73
3.5.1	Generación de una muestra sintética .....	73
3.5.2	Aplicación del método a muestras sintéticas.....	75
3.5.3	Aplicación recurrente del método .....	81
4.	Filtrado de la muestra.....	87
4.1	Entropía.....	87
4.1.1	Parámetro de máximo discernimiento .....	88
4.1.2	Aplicación del concepto de Entropía .....	89
4.2	Selección de las estrellas de la muestra.....	90
4.2.1	Propiedades que ha de cumplir el parámetro de selección ideal .....	90
4.2.2	Filtro con dos componentes.....	90
4.2.3	Criterio de máximo discernimiento.....	91
4.2.4	Interpretación del criterio de máximo discernimiento. Criterio de máxima entropía.....	92
4.2.5	Aplicación del criterio de máximo discernimiento .....	95
5.	Aplicación a muestras del entorno solar: CNS3.....	96
5.1	Catálogo de Estrellas Cercanas .....	96
5.1.1	Descripción del catálogo .....	96
5.1.2	La muestra estelar.....	99
5.1.3	Filtrado de la muestra. Aplicación del criterio de máximo discernimiento.....	99
5.2	Resultados de la aplicación del método .....	101
5.2.1	Muestra heliocéntrica .....	101
5.2.2	Muestra referida el subcentroide de la población de menor $ v $ .....	108

5.3	Discusión de los resultados .....	114
5.3.1	Poblaciones estelares en el entorno solar .....	114
5.3.2	La desviación del vértex.....	115
5.3.3	Componentes de la velocidad.....	116
6.	Aplicación a muestras del entorno solar: Catálogo HIPPARCOS .....	118
6.1	Catálogo HIPPARCOS .....	118
6.1.1	Descripción del catálogo .....	118
6.1.2	La muestra estelar.....	118
6.2	Resultados de la aplicación del método .....	119
6.2.1	Muestra heliocéntrica .....	119
6.2.2	Muestra referida el subcentroide de la población más extrema.....	127
6.2.3	Poblaciones estelares en el entorno solar .....	134
6.3	Discusión de los resultados .....	138
6.3.1	La desviación del vértex.....	138
6.3.2	Componentes de la velocidad.....	139
7.	Análisis adicionales y conclusiones .....	140
7.1	Otras discusiones acerca de los parámetros cinemáticos.....	140
7.1.1	Momentos impares en z.....	140
7.2	Comparación con otros métodos .....	141
7.2.1	Características particulares de este método numérico .....	141
7.2.2	Otros métodos con aplicaciones similares.....	142
7.3	Conclusiones .....	145
	Epílogo .....	150
	Bibliografía .....	152
	Anexo I. <i>Consideraciones sobre el concepto de poblaciones estelares</i> .....	156
	Anexo II. <i>Aspectos históricos sobre la desviación del vértex</i> .....	159
	Anexo III. <i>Descripción de los programas que se han utilizado</i> .....	164



## Introducción

El objetivo del presente trabajo es analizar diversos aspectos del comportamiento cinemático de las poblaciones estelares en el entorno solar. Con ese fin se ha desarrollado y puesto a punto un método numérico de superposición de sistemas estelares que permite aproximar una muestra global de estrellas por dos o más componentes con distribución normal de velocidades.

Ya desde 1905, cuando Kapteyn observó la asimetría presentada por la velocidad residual de algunos grupos estelares, se comenzó a estudiar la necesidad de utilizar más de una función de distribución de velocidades para representar los movimientos estelares en el entorno solar. El primer método de superposición de funciones de distribución de velocidad fue desarrollado por Kapteyn (1922) y más tarde por Charlier que utilizó el método de los momentos (Pearson 1894). También Lindblad (1922) supuso un sistema galáctico global dividido en dos subsistemas, cada uno de los cuales era simétrico respecto del eje de simetría del sistema global y estaba en equilibrio estadístico. Así mismo, Strömberg (1924, 1925) representó la asimetría encontrada en la distribución de velocidades mediante el producto de dos funciones de distribución simétricas en torno a dos centros diferentes, conectando una con el sistema local y la otra con un sistema mayor que no podía identificar.

Por otro lado, los diferentes estudios realizados sobre el comportamiento de grupos de estrellas en el entorno solar utilizan, en general, funciones cuadráticas en las velocidades residuales. Esto conlleva la anulación de todos los momentos centrados de orden impar para cada grupo de estrellas estudiado en la vecindad del Sol. Si bien en el pasado llegó a pensarse en la posibilidad de que los valores estuvieran enmascarados por los errores, desde hace ya bastantes años (Erickson 1975) se han publicado trabajos indicando que no es posible seguir suponiendo que determinados momentos sean nulos. A partir de trabajos como el citado se encuentra que varios momentos, que deberían ser nulos según los modelos que hasta entonces trataban de representar grupos de estrellas del entorno solar, eran claramente superiores al error, de modo que eran determinados, indicando que debían ser asumidos como diferentes de cero. Si se supone un único sistema estelar, la no nulidad de tales momentos no queda explicada.

Con el objeto de explicar estos valores observacionales se han desarrollado diferentes vías de acercamiento al problema. En el presente trabajo se busca la solución mediante superposición de sistemas estelares. Ya han sido citados trabajos de diferentes autores que toman como modelo la superposición de varias funciones de distribución. Como otros ejemplos, Chandrasekhar (1942) hizo una generalización de las funciones de distribución de Schwarzschild y propuso una superposición de dos sistemas en dos direcciones, identificando ambos sistemas con las posteriormente denominadas poblaciones I y II. Einasto (1954) trabajó sobre la base de describir la distribución de velocidades mediante dos elipsoides de velocidades superpuestos utilizando solamente los momentos de orden dos. Iwanowska (1966) utilizaba una función de distribución suma de dos distribuciones de Schwarzschild y realizaba un ajuste numérico de los parámetros.

Podemos citar también dos trabajos que están en la misma línea de enfoque que el presente. Ros (1985) desarrolló su trabajo utilizando dos funciones de distribución de Schwarzschild incluyendo momentos hasta el cuarto orden. Suponía rotación únicamente diferencial en un modelo univariante. Cubarsi (1988) extiende el trabajo a funciones trivariantes y particulariza la aplicación del modelo a funciones de Chandrasekhar con simetría axial.

Desde una perspectiva diferente al estudio de los momentos de las velocidades, se ha desarrollado el concepto de poblaciones estelares. No obstante, como se ha dicho, mucho antes de la introducción de esta idea por Baade en 1944, ya había sido discutida la superposición de sistemas estelares. Sobre este aspecto, Ojha et al. (1996) consideran que, en un volumen particular de la Galaxia, existe una mezcla finita de poblaciones estelares discretas. De forma similar a como se hará en este trabajo, estos autores hacen una aproximación estadística utilizando mezclas de gaussianas para modelizar las poblaciones estelares.

Siguiendo esta última cita, es decir, relacionando cinemática y poblaciones estelares, es como en el presente trabajo se ha desarrollado un método numérico estable y bien condicionado de aproximación de una muestra de estrellas por la superposición de dos componentes parciales cada una de ellas con distribución gaussiana trivariante. Este método lo aplicamos al estudio cinemático de las poblaciones estelares del entorno solar.

Se ha partido de los principios y métodos de la Dinámica Galáctica. Se plantea el desarrollo teórico de la superposición de  $n$  funciones de distribución de Schwarzschild generalizadas. A continuación, se desarrolla un método de cálculo numérico para el caso particular de dos poblaciones que finalmente se aplica a muestras estelares locales. Los resultados que se obtienen de la aplicación del método se encajan dentro de los modelos dinámicos que se presentan al principio.

Es conocido que existen otros métodos de separación de poblaciones (por ejemplo Chen et al. 1997). Tales métodos permiten separar a partir de una muestra, no ya dos como en nuestro caso, sino  $n$  grupos sin características establecidas a priori. No obstante, el interés del presente método estriba en que la aproximación que se lleva a cabo está hecha en base a que se trabaja con grupos suficientemente numerosos de estrellas que pueden quedar representados por distribuciones normales. Esto permite que tenga sentido hablar de propiedades genéricas (se tiene un número suficiente de estrellas) y también tiene sentido hablar de varianzas (desviación respecto de los parámetros patrón de cada población).

Puede apreciarse esta idea al analizar el histograma de velocidades de una muestra de estrellas local (p.e. figura 5-2). Allí se observan claramente dos componentes principales de estrellas muy probablemente constituidos por subgrupos menores. En definitiva, los resultados de la presente aproximación pueden ser aplicados en términos de una descripción más general que los métodos que permiten separar grupos de características muy concretas.

Adicionalmente, el método presenta interés en el aspecto metodológico. Como se verá, la aplicación del desarrollo analítico que aquí se utiliza consigue optimizar resultados a partir de un modelo existente. Esto es posible mediante un tratamiento numérico y estadístico adecuado que conduce a buenas determinaciones de los parámetros y los errores. De este modo, se redefine la estrategia para resolver un problema no bien condicionado dando lugar a resultados mucho más precisos.

Una característica del modelo de partida es la de ser muy general y no suponer ni simetrías ni simplificaciones físicas o astronómicas de ningún tipo. Otro aspecto importante es que se trabaja sólo con velocidades, es decir, con una única propiedad aunque sea en tres dimensiones. De hecho, podrá observarse que en realidad es suficiente con utilizar las componentes radial y rotacional de la velocidad, de modo que el modelo tiene la ventaja de trabajar con el mínimo número de propiedades que permiten separar bien.

El método numérico que se ha desarrollado en este trabajo está basado en un modelo analítico previo de superposición de dos sistemas estelares publicado por Cubarsi (1992). A partir de dicho trabajo, se optimiza la aplicación del mismo de forma general, evitando en su aplicación restricciones de simetría o similares. Se proponen una serie de algoritmos de cálculo con un nuevo enfoque estadístico y de cálculo de errores y se ha buscado la estabilidad de los resultados a partir de diversas técnicas estadístico-numéricas. De forma somera sintetizamos a continuación las mejoras que se han introducido al desarrollo analítico mencionado.

En aquel trabajo se utilizaba el método de los momentos en distribuciones trivariantes por la relación directa que tienen con el modelo dinámico. En consecuencia, aquí también se trabajará con momentos. Como es sabido, en general este método está mal condicionado, especialmente en una variable porque es necesario resolver raíces de polinomios de grado nueve (Everitt & Hand 1981). No obstante, al trabajar con tres variables, el problema deviene mucho más fácil de tratar, pues las ecuaciones a resolver pasan a ser como máximo de tercer grado. La clave está en estudiar la propagación de errores y en ver cómo éstos se pueden reducir. En el trabajo que nos sirve de base, se llega a resultados poco definidos y con errores muy grandes al estimarse éstos mediante aritmética interválica. Por este motivo, aquí se ha desarrollado un método compuesto.

De entrada, se ha hecho una preselección de la muestra a fin de reducir su ruido y minimizar los errores de los momentos. Esto se ha conseguido mediante un filtrado de las estrellas según el módulo de la velocidad referido a una población extrema, en nuestro caso la de menor  $|v|$ . El punto de corte no es arbitrario sino que se determina aplicando un *criterio* que hemos denominado *de máximo discernimiento*. El valor deducido se corresponde con la máxima entropía para la probabilidad de mezcla.

En cuanto al tratamiento numérico, se ha aplicado a los algoritmos de cálculo propagación estadística de errores. Esto ha permitido ponderar las ecuaciones que aparecen utilizando la matriz de covarianzas de los errores. A partir de aquí se han resuelto mediante mínimos cuadrados ponderados los sistemas de ecuaciones que implican las condiciones de ligadura. Esto asegura que las soluciones obtenidas sean de mínima varianza. Finalmente, se ha buscado la estabilidad de los resultados. Al proceder de este modo, es posible cuantificar la bondad del ajuste que se realiza mediante el cálculo de la cantidad  $\chi^2$ . Una consecuencia de la mayor fiabilidad de los resultados es que permite aplicar el método de forma recurrente.

El método de los momentos sigue siendo una herramienta muy eficiente en diversas áreas de la Astronomía (ver por ejemplo Balona et al. 1996 o Cadwell et al. 1994). En el caso que nos ocupa, el uso de los momentos dará información inmediata sobre el problema de la desviación del vértex de las componentes y sobre simetrías de la distribución de velocidades en general. Al trabajar con momentos, también será posible generar poblaciones sintéticas directamente comparables con muestras reales. Un resultado intermedio de este trabajo, permite relacionarlo con valores de los momentos publicados por otros autores para muestras estelares seleccionadas de forma diferente a la que aquí se presenta. Además, con los valores de los momentos, la reconstrucción de una muestra global a partir de las parciales que se obtienen permite dar una estimación de la fiabilidad de la aproximación. Por último, la mejora de resultados con respecto a los que otros autores han obtenido utilizando métodos diferentes justifica plenamente la utilización del método aquí desarrollado.

En el capítulo 1 se exponen los principios generales de la Dinámica Galáctica. Para poder interpretar los resultados numéricos que se darán más adelante en el marco de un modelo dinámico de la Galaxia, se recuerdan las conclusiones a las que llegan diferentes modelos desarrollados por varios autores. Esto no significa que la aplicación del método numérico desarrollado sólo sea posible dentro de estos modelos, sino que se ha querido proponer al menos un ejemplo de comportamiento dinámico de la Galaxia para relacionar resultados y teoría.

Se han resumido varios modelos dinámicos de sistemas estelares de Chandrasekhar que utilizan diferentes hipótesis de simetrías de la distribución de velocidades. Simetría cilíndrica en estado estacionario, en estado no estacionario con y sin simetría respecto del plano galáctico y simetría axial no cilíndrica. Tales modelos llegan a conclusiones sobre los valores de los momentos y las velocidades medias de la distribución de velocidades de una muestra de estrellas. Al utilizar el principio de superposición de poblaciones es posible obtener grupos de estrellas que se ajustan a modelos dinámicos sencillos aun cuando el conjunto global de estrellas no pueda interpretarse de acuerdo con las mismas simplificaciones que se aplican para las componentes.

Por tratarse de una cuestión en la que nos detendremos en particular, en esta introducción teórica se ha reservado un apartado describiendo las diferentes interpretaciones del fenómeno de la desviación del vértex y se ha añadido un anexo de resumen histórico de trabajos que han tratado el problema buscando las posibles causas del mismo.

También en este capítulo, se ha introducido el concepto de poblaciones estelares añadiendo un anexo que sintetiza la evolución de esta idea desde el origen del término hasta como se entienden actualmente. Así, se habla hoy en día de componentes cuando los criterios de estudio son cinemática y distribución espacial y se habla de poblaciones dentro de una componente cuando tales criterios son la edad y la metalicidad. Puesto que en este trabajo únicamente se utilizan parámetros cinemáticos, los grupos estelares resultantes deben ser asociados a componentes morfológicos de la Galaxia.

En el capítulo 2 se presenta el desarrollo estadístico que da lugar al algoritmo de cálculo. De este modo se deducen las expresiones de los momentos de orden  $n$  de una superposición arbitraria de poblaciones. Estas expresiones de cálculo de los momentos son las que posteriormente se aplicarán para componer el método numérico de separación de poblaciones. Las expresiones generales se presentan de forma explícita en el caso particular de dos poblaciones y se reducen a otras ya deducidas previamente por otros autores. Se analiza el caso de superposición de tres poblaciones por ser el máximo número de poblaciones resoluble conociendo los momentos hasta cuarto orden y sin introducir simplificaciones.

De entre los posibles casos de superposición, en este trabajo hemos materializado en un método numérico el caso de superposición de dos poblaciones. Esta solución resulta la más interesante por diversos motivos. En primer lugar, la necesidad de optimizar la aplicación del desarrollo analítico tal y como ha sido descrita más arriba. También, al trabajar con grupos numerosos de estrellas y buscar propiedades generales, la idea es utilizar el mínimo número de grupos estelares que expliquen los parámetros característicos de la muestra. Por ejemplo, sucede que uno de los catálogos a los que se ha aplicado el método (CNS3) debería presentar, según diversos estudios (Fuchs & Jahreiß 1998), una fracción de población de estrellas no pertenecientes al disco - es decir, pertenecientes a una tercera población - del orden de menos del 1%, lo cual estaría por debajo del orden de magnitud del error de separación del método, con lo que su aplicación para detectar tal población no sería eficaz. Y finalmente, se ha demostrado que, en caso de que se considere necesario, esta forma de proceder permite buscar más de dos poblaciones aplicando el método de manera sucesiva.

En el capítulo 3 se presenta el método de cálculo para la obtención de resultados óptimos. Esto se consigue mediante la propagación estadística de errores, cosa que permite dar una estimación de la bondad del método. A partir de las expresiones estadísticas presentadas en el capítulo anterior, se concretan los algoritmos numéricos que llevan a aproximar una muestra global de estrellas por dos componentes que presenten función de distribución de Schwarzschild. Como forma de entrenamiento del método numérico se generan muestras sintéticas a las que se les aplica el mismo. Así, se pueden seleccionar las ecuaciones implicadas dependiendo de que intervengan los momentos de tercer o cuarto orden, y ver su comportamiento de cara a obtener soluciones de mínima varianza y máxima verosimilitud.

Así mismo, las muestras sintéticas, al permitir la introducción de estrellas cuyo comportamiento se aleje de forma extrema del resto de la muestra, corroboran el criterio de selección de la muestra que se presentará en el capítulo siguiente. Además, la utilización de muestras sintéticas permite la aplicación de forma recurrente del método numérico desarrollado, previa extracción de la población más dispersa, con el objetivo de obtener más de dos poblaciones gaussianas a partir de una muestra global.

Veremos en el capítulo 4 que el propio método de aproximación nos conduce a un criterio de selección de estrellas de la muestra (el mencionado *criterio de máximo discernimiento*) para excluir las que presentan características cinemáticas más extremas. Este criterio puede asociarse con la idea de máxima entropía para obtener la aproximación general (supuestas dos poblaciones) más representativa (esto es, con menos información a priori).

A continuación se aplica todo lo planteado en los capítulos precedentes a muestras del entorno solar.

En el capítulo 5, por tratarse de la muestra de estrellas estadísticamente más completa, se utiliza el Tercer Catálogo de Estrellas Cercanas CNS3 (Gliese & Jahreiß 1991) para seleccionar una muestra de estrellas a la que sea factible aplicar el método desarrollado en los capítulos precedentes. Aun cuando ya existe el Cuarto Catálogo de Estrellas Cercanas (CNS4) que utiliza datos de la misión astrométrica HIPPARCOS, se ha utilizado su predecesor por ser el único disponible en el momento de desarrollar el trabajo. Por esta misma razón, este catálogo sigue siendo utilizado en el momento actual (p.e. Marino et al. 2000). En cualquier caso, como se verá, la aplicación del método es independiente del catálogo utilizado por lo que podrá ser aplicado al CNS4 en el momento en que esté disponible. Los resultados de los parámetros cinemáticos que se obtienen permiten asociar los grupos de estrellas con poblaciones estelares en el sentido clásico del término.

En el capítulo 6, se ha aplicado el mismo tratamiento anterior a una muestra de estrellas extraída del catálogo Hipparcos (ESA 1997). De este modo, se han aprovechado los datos de mayor precisión disponibles en la actualidad. Esta muestra se ha obtenido cruzando el catálogo Hipparcos con las velocidades radiales del HINCA (Hipparcos Input Catalogue, Turon et al. 1992) para obtener el espacio de velocidades.

Finalmente, en el capítulo 7 se plantean discusiones adicionales sobre los resultados obtenidos que son comunes a las dos muestras de estrellas utilizadas. Se comparan los resultados obtenidos con los publicados por otros autores y se presentan las conclusiones.

Como epílogo, se ha incluido una singular reflexión sobre características particulares que han acompañado el desarrollo de este trabajo. Para terminar, se han añadido tres anexos. El primero presenta consideraciones sobre la idea de poblaciones estelares. El segundo incluye el resumen histórico en referencia a la desviación del vértex. El tercero describe los programas que se han codificado para poner en práctica el método numérico objeto de este trabajo.

*Agradecimientos.* Por último, quisiera agradecer a mis codirectores Dra. M<sup>a</sup> Asunción Catalá y Dr. Rafael Cubarsi por haberme propuesto y dirigido este trabajo; al Dr. Blai Sanahuja por su labor como tutor; a los miembros del Grupo de Astronomía y Geodesia Espacial de la Universidad Politécnica de Catalunya por sus interesantes comentarios; al departamento de Astronomía y Meteorología de la Universidad de Barcelona por la muestra de estrellas suministrada basada en el catálogo Hipparcos; a todos los anteriores por su infinita paciencia en el lento desarrollo de este trabajo; a la compañía BULL(España), S.A. por su apoyo logístico y de medios informáticos; a mis colegas de la misma compañía por sus ánimos y actitud positiva hacia este trabajo en un tema que les resulta tan ajeno; a la Dra. Carmen Santos por la supervisión del escrito y, en definitiva, a todos aquellos que de una forma u otra han colaborado en que este trabajo llegara a buen término.

# 1. Sistemas estelares

## 1.1 Introducción

Entendemos por sistema estelar, un conjunto de estrellas unidas por fuerzas gravitacionales. Un ejemplo de sistema estelar son las galaxias. Un subconjunto de un sistema estelar también puede ser un sistema estelar, como es el caso de los cúmulos globulares que forman parte de las galaxias. La observación de galaxias demuestra la existencia de distintas características morfológicas de las mismas lo cual no implica una anisotropía en la distribución de masa pues pueden ser debidas a una concentración de estrellas brillantes en determinadas zonas.

En primera aproximación, en nuestra galaxia podemos distinguir dos estructuras: Un disco y una componente esferoidal. Ambas componentes están constituidas por estrellas con características físicas distintas. En el apartado 1.5.1 y el Anexo I presentamos una discusión referente a las poblaciones estelares que forman estas componentes estructurales.

Con el objetivo de estudiar el comportamiento cinemático y dinámico de los diferentes integrantes morfológicos de la Galaxia, se han introducido variadas aproximaciones. Históricamente y hasta el presente (por ejemplo el ya citado Ojha et al. 1996), en muchas de ellas se ha supuesto que las velocidades de las estrellas presentaban distribución gaussiana. Esto ha permitido utilizar los momentos de la distribución del sistema estelar, cuya interpretación permite relacionarlos directamente con los modelos de comportamiento dinámico de la Galaxia.

Desde un punto de vista estadístico también es lógico el uso de gaussianas puesto que tales funciones son las que implican mínima información a priori, de modo que conducen a las soluciones que son menos influenciadas por las suposiciones de partida. Es decir, dado que las funciones con distribución normal quedan determinadas únicamente por su media y su varianza, si se conoce el valor esperado y la varianza de una variable aleatoria, de entre todas las distribuciones posibles, las gaussianas son las que presentan mayor incertidumbre compatible con ambos valores. De acuerdo con la teoría de la información, eso significa que son las que presentan máxima entropía por lo que conducen a las soluciones más probables (Koch 1990).

Estos conceptos que se acaban de mencionar representan el hilo conductor de este trabajo. Se parte de modelos dinámicos que suponen distribución gaussiana de velocidades. Estos modelos extraen conclusiones sobre los valores de los momentos. Así que se desarrolla un método numérico que utiliza los momentos con el fin de poder analizar las componentes estructurales citadas. Cada componente representará un subsistema estelar que podrá ser estudiado de forma separada de acuerdo con un modelo dinámico concreto.

## 1.2 *Dinámica Galáctica*

### 1.2.1 **Conceptos generales**

Se sintetizan a continuación algunos de los conceptos básicos de la Dinámica Galáctica tomando fundamentalmente como fuentes Orús (1977) y King (1989). Podemos afirmar que la aproximación de la dinámica estelar presenta dos cualidades para el estudio global de la estructura de la Vía Láctea. En primer lugar permite deducir en algunas situaciones la forma del campo gravitacional en el cual se mueven las estrellas a partir de sus posiciones y velocidades. En la medida en que podamos conocer la distribución radial de masa en la Vía Láctea a partir de su curva de rotación, también podremos deducir la distribución de masa en la dirección  $z$  a partir de la estadística de los movimientos de las estrellas a través del plano galáctico. En segundo lugar, a partir de las propiedades de las funciones de distribución estelar, puede transformarse el conocimiento local de tales distribuciones en el conocimiento de las densidades y velocidades en otros puntos de la Vía Láctea.

En el tratamiento de la dinámica de la Vía Láctea suelen asumirse tres simplificaciones:

- Cada estrella se mueve en un potencial promedio resultante de la gravitación colectiva de todas las otras estrellas y también el producido por otro material (materia oscura) que pueda estar presente.
- Dentro de cada sistema estelar, se ignora la relajación causada por los encuentros entre estrellas.
- Todas las estrellas tienen igual masa.

La primera simplificación se puede justificar por el elevado número de estrellas. La segunda está soportada por cálculos que apuntan a que el tiempo de relajación para encuentros estelares en la Vía Láctea es de órdenes de magnitud mayor que su edad.

#### 1.2.1.1 *Ecuación fundamental de la Dinámica Estelar*

La función de distribución de la dinámica estelar se expresa considerando la distribución de estrellas en un espacio de las fases de seis dimensiones. Está compuesto por las tres componentes de la posición y las tres de la velocidad de cada estrella. Por lo tanto, una función de distribución estelar  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})$  proporciona en cada unidad de tiempo el número de estrellas con posición comprendida entre  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$  y velocidad entre  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V}+d\mathbf{V}$ .

Por otro lado, de acuerdo con las simplificaciones expresadas más arriba, el movimiento de una estrella podremos expresarlo a partir del gradiente de un potencial  $U(t, \mathbf{r})$  y su velocidad como función de la posición. Otra aproximación que tomamos es que todas las estrellas son puntuales y de masa unidad.

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{V} \\ \dot{\mathbf{V}} &= -\nabla U(t, \mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad 1-1$$

Además, la función de distribución está sujeta a una condición de continuidad. Tal condición de continuidad lleva a demostrar que debe cumplirse la *Ecuación de Boltzmann sin colisiones*. De dicha ecuación se deduce que a lo largo del camino de cualquier estrella a través del espacio de las fases, la derivada total de la función de distribución es cero. Esto es equivalente al *Teorema de Liouville* de la Mecánica Estadística:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \dot{\mathbf{V}} \cdot \nabla_{\mathbf{V}} f = 0 \quad 1-2$$

Expresión que de acuerdo con 1-1 podremos escribirla como,

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \nabla U \cdot \nabla_{\mathbf{V}} f = 0 \quad 1-3$$

Expresión que se conoce como *ecuación fundamental de la dinámica estelar*.

Esta ecuación nos dice que a medida que un punto -que representa a una estrella- se desplaza a través del espacio de las fases, la densidad a su alrededor permanece constante. Es decir, el flujo de estrellas a través del espacio de las fases es incompresible. Como consecuencia de que las estrellas en cualquier posición y velocidad llevan información en su densidad de fase, esta propiedad es la que permite hacer la aproximación sobre la densidad de fase en otras velocidades y otros puntos del espacio.

(Nota: Por abuso del lenguaje utilizaremos indistintamente el término función de distribución de velocidades aun cuando nos estemos refiriendo en realidad a la función de densidad de probabilidad).

Puede demostrarse que la solución de 1-3 exige que la función de distribución  $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V})$  se pueda expresar como función  $F$  de seis integrales independientes de las ecuaciones del movimiento de la estrella. Es decir, si  $I_1, I_2, \dots, I_6$  son las seis integrales primeras independientes del sistema 1-3, deberá cumplirse:

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) = F(I_1, I_2, \dots, I_6) \quad 1-4$$

No obstante, en general el sistema 1-3 no es integrable analíticamente por lo que deberán hacerse suposiciones sobre la forma del potencial para obtener, en casos particulares, algunas de las integrales del movimiento. Asimismo, recuérdese que las integrales del movimiento se refieren a estrellas individuales mientras que la conservación de densidad sucede en el espacio de las fases de seis dimensiones y no en el espacio de las posiciones.

Para resolver el problema nos situamos en un sistema galactocéntrico de coordenadas cilíndricas para posición y velocidad.

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \varpi \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Theta \\ Z \end{bmatrix} \quad 1-5$$

Lógicamente,  $\Pi = \frac{d\varpi}{dt}$ ;  $\Theta = \varpi \frac{d\theta}{dt}$ ;  $Z = \frac{dz}{dt}$

En donde se toma la orientación de los ejes de forma que  $\varpi$  está dirigido en el sentido del anticentro de la Galaxia,  $\theta$  en el sentido de rotación y  $z$  está dirigido hacia el polo galáctico Norte. Se utiliza también para la velocidad el sistema  $U, V, W$ , siendo  $U = -\Pi$  (sentido del centro galáctico).

### 1.2.1.2 Integrales del movimiento

La primera aproximación que podemos hacer sobre el potencial es que se encuentra en estado estacionario de modo que no depende del tiempo. Esta hipótesis quedaría justificada por el hecho de que en cortos intervalos de tiempo la forma de la Galaxia no cambia. Esto se traduce en:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0 \quad 1-6$$

En tal caso, como es sabido, la energía se conserva, con lo cual ya tenemos una primera integral del movimiento, integral que siempre existe cualquiera que sea la forma del potencial:

$$I_1 = \mathbf{V}^2 + 2U(\mathbf{r}) = cte. \quad 1-7$$

Es decir que tenemos para la integral de la energía, escribiéndola en coordenadas cilíndricas:

$$I_1 = \frac{1}{2}(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2) + U(\varpi, \theta, z) \quad 1-8$$

La siguiente aproximación que podemos hacer es suponer que el potencial tiene simetría cilíndrica. Esta hipótesis está justificada para galaxias regulares en las que se observa este tipo de simetría. En el caso de la Vía Láctea, persiste actualmente la discusión de si esta simplificación es válida por la presencia de algún elemento perturbador del potencial en la proximidad del Sol. Debe tenerse presente que esta discusión hace referencia a la distribución de masa y no de luminosidad. Al respecto podemos encontrar literatura tanto en un sentido (por ejemplo, Bienaymé & Séchaud 1997) como en el otro (por ejemplo, Dehnen 1998) sobre aceptar esta hipótesis. Si incluimos esta aproximación, tenemos la conservación del momento angular lo cual da lugar a la integral de las áreas.

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \quad 1-9$$

Quedando la segunda integral, integral del momento, de la forma:

$$I_2 = \varpi \Theta = cte. \quad 1-10$$

De estas expresiones deducimos que, mientras que la dependencia según  $\Theta$  puede ser arbitraria puesto que aparece de forma independiente en  $I_2$ ,  $\Pi$  y  $Z$  deberían tener el mismo tipo de dependencia y, con el fin de generalizar esta situación, se puede introducir una tercera integral.

Para ello se hace la suposición de potencial separable, es decir, que las fuerzas en las direcciones  $z$  y  $\varpi$  están desacopladas. Esta suposición significa desglosar el potencial en un término debido al disco galáctico y otro debido a la altura sobre este disco. Esta hipótesis cobra validez al trabajar lejos del centro pero cerca del plano galáctico, tal y como sucede con el Sol y su entorno. Esto se expresa:

$$\frac{\partial U}{\partial \varpi \partial z} = 0 \quad \text{ó} \quad U(t, \mathbf{r}) = U_1(t, \varpi, \theta) + U_2(t, z) \quad 1-11$$

Y la tercera integral queda de la forma

$$I_3 = Z^2 + 2 U_2(z) = cte. \quad 1-12$$

Integral de la energía del movimiento perpendicular al plano galáctico.

En el caso de aceptar las tres hipótesis a la vez podemos escribir:

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) = F(I_1, I_2, I_3) \quad 1-13$$

En particular, el caso de una simple combinación lineal de las integrales primeras  $F(\alpha I_1 + \beta I_2 + \gamma I_3)$  con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  dará lugar a una función de densidad cuadrática en las velocidades (Sala 1990).

### *1.2.1.3 Discusión*

En los apartados sucesivos, se van a presentar modelos de sistema estelar (con unas u otras hipótesis) basados en los principios de la Dinámica Galáctica y desarrollados por diferentes autores. El motivo por el que recordamos las conclusiones a que llegan es que, una vez aplicado el método numérico que se desarrollará más adelante, podamos enmarcar dentro de un modelo galáctico los grupos estelares de la vecindad del Sol. Al trabajar con momentos, se pueden hacer comparaciones inmediatas entre los datos reales y las conclusiones predichas por los modelos.

El objetivo de la aplicación de un método de superposición de sistemas estelares es que nos permitirá, al menos en parte, explicar los resultados observacionales en base a modelos que utilicen las hipótesis más sencillas.

## **1.2.2 Solución de la ecuación fundamental**

### *1.2.2.1 Aproximaciones de la solución general*

A partir de aquí, pueden hacerse suposiciones sobre la función de distribución, al menos, en cuanto a las velocidades (Cortés 1990). En particular si se supone que puede expresarse como una forma cuadrática se puede llegar a diferentes restricciones sobre la naturaleza del potencial.

Para el caso de la dinámica galáctica local, tenemos hechos observacionales y limitaciones. Por un lado, disponemos de información abundante sobre la distribución de velocidades de varios tipos de estrellas en el entorno solar aunque la información es más limitada en cuanto a cómo difieren tales propiedades en otros puntos del espacio. Por otro lado, también conocemos de forma razonablemente buena la velocidad rotacional media a varias distancias del centro galáctico. Además, existen bastantes datos disponibles sobre los gradientes de densidad en la dirección  $z$  pero muy pocos sobre los gradientes de densidad radial (King 1989).

Una de las aportaciones de la Dinámica Galáctica es la aplicación del teorema de Liouville: Toda estrella que pasa por la vecindad del Sol aporta información de un punto en la densidad del espacio de las fases para cualquier punto del espacio de las posiciones por el que haya pasado. Por tanto, asumiendo algunas regularidades razonables en la densidad del espacio de las fases, si podemos poner junta toda esa información, se podrá deducir a partir de observaciones locales algunas de las propiedades de lugares remotos que son inobservables de forma directa. Para llevar esto a cabo pueden hacerse tres aproximaciones: Suposición de la forma funcional de la distribución de velocidades y las características que ello implica, considerar los momentos de la distribución de velocidades y sus relaciones con tales propiedades, cosa que normalmente es lo único que puede calcularse a partir de las observaciones, y tercero, mirar órbitas estelares individuales y ver qué dice su estadística sobre las propiedades extendidas de nuestra área local. En el presente trabajo se utilizarán las dos primeras aproximaciones mencionadas para estudiar algunas características del comportamiento de diferentes grupos de estrellas en el entorno solar.

### 1.2.3 Momentos de una distribución de velocidades residuales.

Puede llevarse a cabo un estudio estadístico de las velocidades estelares utilizando los diversos momentos de la función de distribución. Por este motivo, introducimos aquí conceptos generales que aplicaremos posteriormente cuando necesitemos caracterizar la función de distribución.

La densidad estelar o número de estrellas por unidad de volumen para un tiempo  $t$  y una posición  $\mathbf{r}$  viene dada por:

$$N(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathbf{v}} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad 1-14$$

En cada punto es posible definir un centroide o centro de distancias medias del conjunto de estrellas. De este modo, se define la velocidad media o **velocidad del centroide** como la velocidad media de todas las estrellas que se encuentran en un entorno del punto en cuestión.

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \equiv \bar{\mathbf{V}} = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{V} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad 1-15$$

Definimos ahora la **velocidad residual o peculiar** de una estrella como la diferencia de su velocidad respecto de la del centroide.

$$\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{v} \quad 1-16$$

Según esto, el tensor simétrico de orden n que define los momentos centrados de orden n vendrá dado por:

$$\mathbf{M}_n(t, \mathbf{r}) \equiv \langle (\mathbf{u})^n \rangle = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{V} - \mathbf{v})^n f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad 1-17$$

En donde  $(-)^n$  representa la n-ésima potencia tensorial.

Se verifica que  $\begin{cases} \mathbf{M}_0(t, \mathbf{r}) = 1 \\ \mathbf{M}_1(t, \mathbf{r}) = 0 \end{cases}$  y, en general, el momento centrado de orden n es un tensor de

$\binom{n+2}{n}$  componentes a cada una de las cuales, por abuso del lenguaje, también denominaremos momento.

Estas componentes del tensor de momentos centrados  $\mathbf{M}_n$ , vendrán definidas entonces como,

$$\mu_{ijk\dots l} = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{V}} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j \mathbf{u}_k \dots \mathbf{u}_l f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad 1-18$$

con  $i, j, k, \dots, l \in \{1, 2, 3\}$

En particular, nos interesará el caso  $n=2$  en el que a su tensor inverso  $\mathbf{M}_2^{-1}$  se le asocia un elipsoide, denominado **elipsoide de velocidades residuales**,

$$\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{M}_2^{-1} \cdot \mathbf{u} = 1 \quad 1-19$$

elipsoide cuyos semiejes constituyen las velocidades residuales típicas.

### 1.2.3.1 Algunas propiedades de los momentos

Enumeramos aquí algunas de las propiedades de los momentos que utilizaremos más adelante (Stuart & Ord 1987).

- Los momentos son estimadores consistentes pero sesgados.
- Su varianza es inversamente proporcional a N, lo cual da una idea del error de la estimación.
- En particular, dan información de la geometría de la distribución. Es decir, informan de si los momentos presentan simetrías que indiquen la posible independencia respecto de alguna de las variables aleatorias.
- Existe correspondencia unívoca entre momentos y distribución, por lo que sirven para comparar con distribuciones conocidas (en general, con la distribución normal).

Para esto pueden definirse los siguientes coeficientes:

- Asimetría u oblicuidad (*skewness*): Para el caso de una sola variable aleatoria,  $\gamma_i = \frac{\mu_{iii}}{\mu_{ii}^{3/2}}$ ; da idea de la simetría de la distribución alrededor de la media.
- Exceso o coeficiente de apuntamiento (*kurtosis*): Para una sola variable aleatoria se define,  $\kappa_i = \frac{\mu_{iiii}}{\mu_{ii}^2} - 3$ ; da idea de la anchura de las alas de la distribución y la concentración de la misma en torno a la media.

### 1.2.3.2 Función de distribución de Schwarzschild

Un ejemplo de función de distribución utilizado habitualmente es la de Schwarzschild o función de distribución normal en tres variables (trivariante, en general las tres variables estarán correlacionadas). Para el caso de variables aleatorias independientes esto es:

$$f(\mathbf{V}) = \frac{N}{(2\pi)^{3/2} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{V_1 - v_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{V_2 - v_2}{\sigma_2} \right)^2 + \left( \frac{V_3 - v_3}{\sigma_3} \right)^2 \right]} \quad 1-20$$

En donde N es el número total de estrellas,  $v_i$  las tres componentes de la velocidad media, y  $\sigma_i^2$  las varianzas de las velocidades de las estrellas de la muestra.  $V_i$  son las tres componentes de la velocidad de cada estrella.

### 1.2.4 Aproximación de Oort

Aun cuando los modelos con los que compararemos los resultados que se obtienen en este trabajo están basados en la generalización de Chandrasekhar (1942) que se verá más adelante, vamos a recordar las líneas generales del trabajo de Oort (1932) puesto que ya conducen a la mayoría de conclusiones en las que luego se profundizará. En su discusión original sobre la dinámica de una galaxia en rotación, Oort siguió las consecuencias de la asunción clásica de Schwarzschild de que la distribución de velocidad local de las estrellas se puede representar por una gaussiana trivariada. Aun cuando entra en contradicción con algunos hechos observables, esta aproximación sigue siendo válida hoy en día por llevar a una solución que predice muchos de los detalles de la cinemática y estructura estelar y es posible construir un modelo realista como superposición de dichas soluciones (King 1989).

Oort asumió una función de distribución cuadrática en las velocidades residuales de la forma:

$$f = f_0 e^{-Q} \quad 1-21$$

En donde  $Q = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$  con  $\mathbf{A}$  tensor simétrico de segundo orden. De manera que  $f$  es una gaussiana trivariante en todas partes aunque su forma, orientación y tamaño pueda cambiar de un lugar a otro. En el entorno solar, esta aproximación es razonable y también lo es que la distribución de velocidades tiene forma similar en otros lugares de la Vía Láctea.

La aproximación de Oort consistió en sustituir la expresión de  $f$  en la ecuación fundamental de la dinámica estelar suponiendo estado estacionario y simetría axial. A partir de ahí obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales que da lugar a cinco constantes absolutas proporcionando información sobre el elipsoide de velocidades (ver por ejemplo en King 1989). Se deduce que uno de los ejes del elipsoide de velocidades apunta siempre hacia el eje de rotación de la Galaxia y otro eje en la dirección de rotación. Más aún, sobre el plano galáctico ( $z=0$ ) el primer eje está orientado según la línea centro-anticentro y el tercer eje es perpendicular al plano. Fuera del plano galáctico los ejes pueden estar desviados. Este modelo no permite, pues, que exista desviación del vértex, es decir que el semieje mayor del elipsoide de velocidades no apunte al centro galáctico. Esta desviación presumiblemente es debida a no darse el estado estacionario, variaciones fuera de la simetría axial o ambas cosas a la vez.

En esta aproximación, Oort dedujo una diferencia entre la velocidad media de las estrellas y la velocidad circular de rotación de una estrella a una distancia dada del centro galáctico. Esta diferencia es tanto más importante cuanto mayor sea la dispersión de velocidad, resultando menor la velocidad media que la circular. Es decir que la velocidad media de un grupo de estrellas se retrasa con respecto de la velocidad circular. Puesto que está asociado a la tendencia general de la distribución de velocidades de ser diferentes en una dirección y en la opuesta, este retraso se denomina corriente asimétrica (*asymmetric drift*).

Debe tenerse presente que esta representación de los movimientos estelares es bastante ajustada para estrellas con bajas velocidades. Por contra, las estrellas de alta velocidad no presentan una simetría clara y sus características no se ajustan a gaussianas. De ahí que el modelo sea más fiable en las proximidades del entorno solar (King 1989).

Finalmente, otra ventaja de asumir la distribución de velocidades cuadrática en las velocidades residuales es que permite llegar de forma natural a la tercera integral del movimiento que, como se ha dicho y se volverá a insistir, es necesaria para explicar los hechos observacionales.

### 1.3 Aplicación de las integrales del movimiento

De acuerdo con lo establecido en 1.2.1.2 sobre las integrales del movimiento, vamos a deducir aquí algunas relaciones entre los momentos de la función de distribución de velocidades en base a dichas integrales.

#### 1.3.1.1 Dependencia temporal

En este caso tenemos la integral de la energía. Si sólo aceptamos esta integral sucede que el centroide no tiene movimiento.

$$f \equiv f(I_1) = f(\mathbf{V}^2 + 2U(\mathbf{r})) \Rightarrow \mathbf{v} = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{V} f(\mathbf{V}^2 + 2U) d\mathbf{V} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{V};$$

y de acuerdo con la definición de momentos 1-18, entonces  $\mu_{ij} = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{v}} V_i V_j f(\mathbf{V}^2 + 2U) d\mathbf{V}$ ,

de modo que el elipsoide de velocidades residuales queda de la forma,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} \\ \mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{M}_2 = \mu_{11} \mathbf{I} \quad 1-22$$

#### 1.3.1.2 Simetría cilíndrica

Si además de aceptar la integral de la energía, aceptamos la de las áreas, es decir potencial estacionario y con simetría cilíndrica, podemos hacer otras deducciones sobre las velocidades y momentos. La función de distribución será de la forma  $f \equiv f(I_1, I_2)$ . Entonces, si pasamos a analizar las velocidades,

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_0 \\ Z_0 \end{array} \right\} = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{v}} \left\{ \begin{array}{l} \Pi \\ Z \end{array} \right\} f(\mathbf{V}^2 + 2U, \varpi \Theta) d\mathbf{V} = 0$$

Luego las componentes primera y tercera de la velocidad son nulas. En cambio, la segunda componente será en general no nula.

$$\Theta_0 = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{v}} \Theta f(\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 + 2U, \varpi \Theta) d\mathbf{V} \neq 0$$

Por lo tanto, hay rotación diferencial. Los centroides tienen velocidad tangencial no nula. En cuanto a los momentos, podemos ver algunas relaciones (Orús 1977).

Los momentos de orden n pueden venir dados según:

$$\mu_{pqr} = \frac{1}{N} \int_{\mathbf{v}} \Pi^p \Theta^q Z^r f(I_1, I_2) d\mathbf{V}, \text{ con } p + q + r = n. \quad 1-23$$

De modo que, siguiendo la notación que acabamos de definir,

- $n = 2 \Rightarrow \mu_{200} = \mu_{002} \neq \mu_{020}$ , que son los únicos diferentes de cero
- $n = 3 \Rightarrow \mu_{210} = \mu_{012} \neq \mu_{030}$ , pues los únicos diferentes de cero son los impares en  $\Theta$ .
- $n = 4 \Rightarrow \begin{cases} \mu_{400} = \mu_{004} \neq \mu_{040} \\ \mu_{220} = \mu_{022} \neq \mu_{202} \end{cases} \quad 1-24$

En primera aproximación, esos doce son los momentos no nulos. Ahora bien, estas igualdades entre momentos no se producen. Por lo tanto debe buscarse una tercera integral.

### 1.3.1.3 Potencial separable

Si aceptamos ahora la tercera integral, entonces  $f \equiv f(I_1, I_2, I_3)$  es decir que la función de distribución queda del tipo,

$$f = f[\Pi^2 + \Theta^2 + Z^2 + 2U_x, \varpi\Theta, Z^2 + 2U_z]$$

Al contrario que en el caso anterior, ya no se pueden permutar las variables  $\Pi$  y  $Z$  sin cambiar los resultados. Los doce momentos anteriores, además de ser diferentes de cero, son diferentes entre sí. Esto ya es coincidente con los datos observacionales.

La función de distribución también puede escribirse como combinación de estas integrales del movimiento y se deducen las siguientes relaciones (Orús 1977):

$$f = f[I_1 + (\lambda - 1)I_3, I_2] \quad 1-25$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\mu_{200}}{\mu_{002}} = \frac{\mu_{210}}{\mu_{012}} = \frac{\mu_{220}}{\mu_{022}} = \frac{\mu_{400}}{3\mu_{202}} = \frac{3\mu_{202}}{\mu_{004}} \\ \lambda^2 = \frac{\mu_{400}}{\mu_{004}} \end{cases}$$

Se observa que esta última forma de la función de distribución generaliza la utilizada por Oort 1-21. Obtenemos esta serie de relaciones entre los valores de los momentos de la distribución de velocidades para el caso en que las integrales primeras del movimiento sean las mencionadas. Nótese asimismo cómo los valores de los momentos van quedando más independientes a medida que introducimos más condiciones sobre la función de distribución de velocidades.

## 1.4 Sistemas estelares de Chandrasekhar

### 1.4.1 Función de distribución cuadrática en las velocidades residuales

Según lo que acabamos de ver, con el objetivo de estudiar la distribución de velocidades de las estrellas próximas al Sol utilizaremos su función de distribución y sus momentos centrados. Chandrasekhar (1942) extendió la aproximación anterior de Oort introduciendo explícitamente dependencia espacial y temporal en la función de distribución de velocidades. Además adoptó la hipótesis de que la función de distribución era de tipo Schwarzschild generalizado. Esto es:

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{V}) = \Psi(Q + \sigma) \quad 1-26$$

siendo  $Q$  una forma cuadrática definida positiva,

$$Q \equiv \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u} \quad 1-27$$

donde  $\mathbf{u}$  es la velocidad residual de la estrella,  $\mathbf{A}$  un tensor simétrico de segundo orden función del tiempo y de la posición  $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t, \mathbf{r})$  y  $\sigma$  un escalar también función del tiempo y la posición  $\sigma \equiv \sigma(t, \mathbf{r})$ . Nótese que esta forma de la función de distribución es un caso particular de 1-25.

Si introducimos 1-26 en la ecuación fundamental de la dinámica estelar, tenemos:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{d\Psi}{d(Q + \sigma)} \frac{D(Q + \sigma)}{Dt} = 0$$

y al ser  $\frac{d\Psi}{d(Q + \sigma)} \neq 0$ , queda

$$\frac{D(Q + \sigma)}{Dt} = 0 \quad 1-28$$

Definiendo ahora,

$$\begin{cases} \bar{\Delta} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \\ -\chi = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} + \sigma \end{cases} \quad 1-29$$

Será  $-\chi = \Delta \cdot \mathbf{v} + \sigma$  siendo lógicamente,  $\begin{cases} \bar{\Delta} = \bar{\Delta}(t, \mathbf{r}) \\ \chi = \chi(t, \mathbf{r}) \end{cases}$  y  $Q + \sigma = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - 2\Delta \cdot \mathbf{v} - \chi$

A partir de aquí se deducen, siguiendo la formulación más general de Orús (1952), las llamadas *ecuaciones de Chandrasekhar*:

$$\left. \begin{aligned} \text{def} \mathbf{A} &= 0 \\ \text{def} \bar{\Delta} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{A} \cdot \nabla U + \frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \nabla \chi \\ \bar{\Delta} \cdot \nabla U &= \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad 1-30$$

Estas constituyen un sistema de veinte ecuaciones escalares: Diez de la primera ecuación tensorial, seis de la segunda, la tercera, que es ecuación vectorial, proporciona tres escalares y la última ya es ecuación escalar. Vemos que las dos primeras ecuaciones no dependen del potencial por lo que podrán resolverse independientemente de la forma que se adopte para el mismo.

Chandrasekhar demuestra que si el sistema estelar es estacionario el potencial debe tener simetría cilíndrica (*Teorema de Chandrasekhar*). Posteriormente, se han resuelto otros casos suponiendo simetría cilíndrica (Catalá 1972, Sala 1990) o simetría axial no cilíndrica (Sanz 1987, Juan-Zornoza 1994). Vamos a resumir las características del modelo de Chandrasekhar en función de las hipótesis adoptadas para poder después interpretar nuestros resultados (ver 5.3, 6.3 y 7.1).

#### 1.4.1.1 Relación con los momentos

Podemos ver la relación que las componentes del tensor  $\mathbf{A}$  guardan con los momentos. A través de un cambio de base en el que la forma cuadrática 1-27 se convierte en una esfera, (Orús 1977),

$$Q = s^2 \quad 1-31$$

y llamando

$$\Phi_n(\sigma) = 2 \int_0^\infty s^{n+2} \Psi(s^2 + \sigma) \quad 1-32$$

tendremos las siguientes expresiones de los momentos de segundo y cuarto orden:

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\Phi_2(\sigma)}{\Phi_0(\sigma)} \mathbf{A}_{ij}^{-1} \\ \mu_{ijkl} = \frac{1}{15} \frac{\Phi_4(\sigma)}{\Phi_0(\sigma)} (\mathbf{A}_{ij}^{-1} \mathbf{A}_{kl}^{-1} + \mathbf{A}_{ik}^{-1} \mathbf{A}_{jl}^{-1} + \mathbf{A}_{il}^{-1} \mathbf{A}_{jk}^{-1}) \end{cases} \quad 1-33$$

De donde se deduce inmediatamente, y de acuerdo con la notación dada para los momentos según 1-18,

$$\mu_{ijkl} = \frac{3}{5} \frac{\Phi_0(\sigma) \Phi_4(\sigma)}{(\Phi_2(\sigma))^2} (\mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}) \quad 1-34$$

y se cumple también  $\mu_n = (\mathbf{0})^n$ ,  $\forall n$  impar.

En particular, si  $\psi$  es de Schwarzschild  $\mu_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{A}_{ij}^{-1}$  y  $\mu_{ijkl} = \mu_{ij} \mu_{kl} + \mu_{ik} \mu_{jl} + \mu_{il} \mu_{jk}$ .

#### 1.4.1.2 Simetría cilíndrica

Como ya se vio en 1-9, esta aproximación se traduce en que  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \theta} = 0$

Escribiremos en coordenadas cilíndricas el tensor  $\mathbf{A}$  y el vector  $\Delta$  y recordemos la velocidad.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Theta \\ Z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\varpi\varpi} & \mathbf{A}_{\varpi\theta} & \mathbf{A}_{\varpi z} \\ \mathbf{A}_{\varpi\theta} & \mathbf{A}_{\theta\theta} & \mathbf{A}_{\theta z} \\ \mathbf{A}_{\varpi z} & \mathbf{A}_{\theta z} & \mathbf{A}_{zz} \end{bmatrix}; \quad \vec{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_\varpi \\ \Delta_\theta \\ \Delta_z \end{bmatrix} \quad 1-35$$

La primera expresión de 1-30 da lugar a 10 ecuaciones escalares de modo que al resolverlo obtenemos las componentes del tensor  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k_1 + k_4 z^2 & 0 & -k_4 \varpi z \\ 0 & k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2 & k_6 \varpi \\ -k_4 \varpi z & k_6 \varpi & k_3 + k_4 \varpi^2 \end{pmatrix} \quad 1-36$$

En donde  $k_1, \dots, k_6$  son tales que  $k_1, \dots, k_4 > 0$ ,  $k_1, k_3, k_5, k_6$  son funciones del tiempo y  $k_2, k_4$  son constantes arbitrarias (Catalá 1972). Para llegar a 1-36, se ha realizado la denominada *traslación de Camm* (1941), consistente en definir  $z = z' - \frac{k_5}{k_4}$ , con lo que desaparecen los términos lineales en  $k_5$  y

además hemos escrito  $k'_1 = k_1 - \frac{k_5^2}{k_4}$  y a continuación hemos eliminado las prima.

#### 1.4.1.3 Caso estacionario con simetría cilíndrica

Como se ha dicho, en el caso de sistema estacionario sólo cabe suponer potencial con simetría cilíndrica. Por lo tanto, se tiene:  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ .

La cuarta ecuación de Chandrasekhar 1-30 se convierte en un caso trivial  $0=0$ , con lo que no aporta información.

Con respecto a la segunda ecuación de dicho sistema, puede demostrarse (Catalá 1972) que las componentes de  $\vec{\Delta}$  quedan:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{\varpi} = 0 \\ \Delta_{\theta} = -\beta\varpi \\ \Delta_z = 0 \end{array} \right\} \quad 1-37$$

Finalmente, deducimos a partir de la tercera ecuación del sistema 1-30 las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} (k_1 + k_4 z^2) \frac{\partial U}{\partial \varpi} - k_4 \varpi z \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \varpi} \\ k_6 \varpi \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \\ -k_4 \varpi z \frac{\partial U}{\partial \varpi} + (k_3 + k_4 \varpi^2) \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial z} \end{array} \right\} \quad 1-38$$

De aquí se deduce que, puesto que lo lógico es que  $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$ , entonces  $k_6=0$ . De modo que queda un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales que relacionan las dos funciones  $U$  y  $\chi$ . Su resolución lleva a dos casos, según sea  $k_1=k_3$  ó  $k_1 \neq k_3$ . No entraremos en el caso  $k_4=0$  (Cortés 1990).

En ambos casos se llega a una forma de la función de distribución en el que las dos primeras integrales del movimiento vienen dadas por 1-7 y 1-10 difiriendo en la tercera integral (Cortés 1990).

Para el caso  $k_1=k_3$ :  $I_3 \equiv (z\Pi - \varpi Z)^2 + (z\Theta)^2 - \frac{2}{k_4} \left( k_1 U + \frac{1}{2} \chi \right) = cte.$

Y para  $k_1 \neq k_3$ :  $I_3 \equiv (z\Pi - \varpi Z)^2 + (z\Theta)^2 - \frac{k_1 - k_3}{k_4} Z^2 - \frac{2}{k_4} \left( k_1 U + \frac{1}{2} \chi \right) = cte.$

Recordando la definición de  $\vec{\Delta}$  (1-29) se deduce también que, para ambos casos, la única componente de la velocidad que es diferente de cero es la rotacional, no habiendo componentes radial ni perpendicular al plano galáctico.

$$\left. \begin{array}{l} \Pi_0 = 0 \\ \Theta_0 = -\frac{\beta\varpi}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4z^2} \\ Z_0 = 0 \end{array} \right\} \quad 1-39$$

#### 1.4.1.4 Caso no estacionario con simetría cilíndrica

Al resolver la segunda ecuación del sistema 1-30 obtenemos las componentes de  $\vec{\Delta}$  (Catalá 1972).

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_\varpi = \frac{1}{2} k_1 \varpi + k_5 \varpi z \\ \Delta_\theta = -\beta \varpi + k_6 \varpi z \\ \Delta_z = \frac{1}{2} k_3 z + k_5 \varpi^2 + \delta \end{array} \right\} \quad 1-40$$

En donde  $\beta$  y  $\delta$  son funciones del tiempo.

En este punto se tienen dos opciones: Puede tomarse o no el plano  $z = 0$  como plano galáctico de simetría.

#### 1.4.1.5 No estacionario, simetría cilíndrica y plano de simetría $z=0$

El primer caso, totalmente desarrollado por Sala (1986), se deduce que  $k_5=0$ . Además, como que en  $\varpi=z=0$  se ha de cumplir  $\mathbf{v}=0$ , tenemos  $\delta = 0$ . Por otro lado, si además se impone que el plano  $z = 0$  también sea de simetría respecto de la velocidad del centroide  $\mathbf{v}$ ,  $\Pi_0$  deberá ser par en  $z$  y  $Z_0$  impar. Esto lleva a que  $k_4 k_6 \beta = 0$ . Dado que  $k_4$  no puede ser nula, porque en tal caso  $\mathbf{A}$  no dependería de  $z$ , ni tampoco  $\beta$  puede ser cero porque desaparecería la rotación en el plano galáctico, entonces deducimos que  $k_6=0$ .

De este modo, 1-36 y 1-40 quedan transformados en:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{\varpi\varpi} &= k_1 + k_4 z^2 \\ \mathbf{A}_{\theta\theta} &= k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2 \\ \mathbf{A}_{zz} &= k_3 + k_4 \varpi^2 \\ \mathbf{A}_{\varpi\theta} &= 0 \\ \mathbf{A}_{\varpi z} &= -k_4 \varpi z \\ \mathbf{A}_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 1-41$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\varpi} &= \frac{1}{2} k_1 \varpi \\ \Delta_{\theta} &= -\beta \varpi \\ \Delta_z &= \frac{1}{2} k_3 z \end{aligned} \right\} \quad 1-42$$

No debe perderse de vista que cuando hablamos de plano de simetría, nos estamos refiriendo a simetría de la distribución de velocidades.

#### 1.4.1.6 Parámetros cinemáticos

De esto y la definición de  $\vec{\Delta}$  (1-29) puede deducirse la velocidad del centroide

$$\left. \begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{\varpi}{2} \frac{\dot{k}_1 k_3 + \dot{k}_1 k_4 \varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2} \\ \Theta_0 &= -\frac{\beta \varpi}{k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2} \\ Z_0 &= \frac{z}{2} \frac{k_1 \dot{k}_3 + \dot{k}_1 k_4 \varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2} \end{aligned} \right\} \quad 1-43$$

Nótese que si  $k_1$  y  $k_3$  no fueran funciones del tiempo (como sucede en el caso estacionario) sólo existiría componente rotacional y el sistema anterior se reduciría al 1-39. Así mismo, se observa que  $\Pi_0$  es par en  $z$  y  $Z_0$  impar.

Puesto que en 1-36 teníamos las componentes del tensor  $\mathbf{A}$ , se puede calcular  $\mathbf{A}^{-1}$  de acuerdo con 1-33 y se obtiene la siguiente relación entre los momentos de segundo orden.

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\varpi\varpi}}{(k_3 + k_4\varpi^2)(k_1 + k_2\varpi^2 + k_4z^2)} &= \frac{\mu_{\varpi z}}{k_4\varpi z(k_1 + k_2\varpi^2 + k_4z^2)} = \\ &= \frac{\mu_{\theta\theta}}{(k_1k_3 + k_1k_4\varpi^2 + k_3k_4z^2)} = \frac{\mu_{zz}}{(k_1 + k_4z^2)(k_1 + k_2\varpi^2 + k_4z^2)} \end{aligned} \quad 1-44$$

$$\mu_{\varpi\theta} = \mu_{\theta z} = 0$$

Tenemos aquí un resultado que se aplicará más adelante. Esto es que  $\mu_{\varpi\theta} = \mu_{\theta z} = 0$  pero  $\mu_{\varpi z}$  no tiene por qué ser cero. Sí sucederá  $\mu_{\varpi z} = 0$  en el plano galáctico  $z=0$ .

De esto último y según 1-34 se deduce,

$$\mu_{\varpi\varpi\theta\theta} = \mu_{\varpi\theta\theta z} = \mu_{\varpi\theta\theta\theta} = \mu_{\varpi\theta z z} = \mu_{\theta\theta\theta z} = \mu_{\theta z z z} = 0$$

A partir de la definición de la curtosis (1.2.3.1) o coeficiente de apuntamiento, obtenemos una relación entre los momentos que no son nulos.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{3\Phi_0(\sigma)\Phi_4(\sigma)}{5[\Phi_2(\sigma)]^2} = \\ &= \frac{\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}}{3\mu_{\varpi\varpi}^2} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\varpi z}}{3\mu_{\varpi\varpi}\mu_{\varpi z}} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}}{\mu_{\varpi\varpi}\mu_{\theta\theta}} = \frac{\mu_{\varpi\varpi z z}}{\mu_{\varpi\varpi}\mu_{z z} + 2\mu_{\varpi z}^2} = \\ &= \frac{\mu_{\varpi\theta\theta z}}{\mu_{\varpi z}\mu_{\theta\theta}} = \frac{\mu_{\varpi z z z}}{3\mu_{\varpi z}\mu_{z z}} = \frac{\mu_{\theta\theta\theta\theta}}{3\mu_{\theta\theta}^2} = \frac{\mu_{\theta\theta\theta\theta}}{\mu_{\theta\theta}\mu_{z z}} = \frac{\mu_{z z z z}}{3\mu_{z z}^2} \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición de la curtosis que hemos visto en 1.2.3.1,  $\gamma$  vale exactamente 1 si la función de distribución es de Schwarzschild por lo que no depende de  $\sigma$ . En cualquier otro caso dependerá de  $\sigma$  y, por tanto, de  $t$  y de  $\mathbf{r}$ .

#### 1.4.1.7 No estacionario, simetría cilíndrica y sin plano de simetría

En el caso de no tomar el plano  $z=0$  como de simetría respecto del plano galáctico (Catalá 1972), algunas de las conclusiones a las que se llega son diferentes de las del caso anterior. En particular,  $k_6$  puede ser diferente de cero y se deduce una explicación para la desviación del vértex (ver 1.5.2.1) que puede ser no nula para  $z \neq 0$ .

#### 1.4.1.8 Simetría axial puntual

A continuación presentamos el caso de suposición de simetría axial no cilíndrica. Este caso es una generalización de los anteriores (1.4.1.3, 1.4.1.5, 1.4.1.7) y puede reducirse a los mismos. Ahora, en lugar de aceptar simetría cilíndrica, limitamos dicha simetría a que sólo sea axial respecto de un punto.

De este modo, para puntos simétricos dos a dos ya no podemos afirmar  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ , sino que esta simplificación queda reducida a  $f(\theta)=f(\theta+\pi)$ , condición que lleva a anular los coeficientes que contienen potencias impares en  $\sin\theta$  y  $\cos\theta$ . El desarrollo completo de las expresiones que siguen a continuación está en el trabajo de Sanz (1988).

De cara a evitar complicaciones innecesarias del modelo, se toma plano de simetría  $z=0$  al igual que en el caso de simetría cilíndrica 1.4.1.5. De forma análoga a los casos anteriores, esto lleva a que  $k_6=0$  por lo que el tensor  $\mathbf{A}$  queda como sigue:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{\varpi\varpi} &= k_1 + Q \sin(2\theta + l) + (k_4 + n \sin(2\theta + \tau))z^2 \\ \mathbf{A}_{\theta\theta} &= k_1 + k_2 \varpi^2 + (k_4 - n \sin(2\theta + \tau))z^2 \\ \mathbf{A}_{zz} &= k_3 + (k_4 + n \sin(2\theta + \tau))\varpi^2 \\ \mathbf{A}_{\varpi\theta} &= Q \cos(2\theta + \tau) + n \cos(2\theta + \tau)z^2 \\ \mathbf{A}_{\varpi z} &= -(k_4 + n \sin(2\theta + \tau))\varpi z \\ \mathbf{A}_{\theta z} &= -n \cos(2\theta + \tau)\varpi \end{aligned} \right\} \quad 1-45$$

En donde  $n$ ,  $k_4$  y  $\tau$  son constantes y los demás coeficientes  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $l$  y  $Q$  funciones arbitrarias del tiempo.

Para obtener las componentes de la velocidad media se vuelve a recurrir al vector  $\vec{\Delta}$  que en este caso queda de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\varpi} &= \frac{\varpi}{2} \left( \dot{a} + 2b \frac{\dot{k}_5}{k_4} z \right) \\ \Delta_{\theta} &= -\frac{\varpi}{2} \left( -2\beta + \dot{c} + 2d \frac{\dot{k}_5}{k_4} z \right) \\ \Delta_z &= \frac{1}{2} \dot{k}_3 \left( z - \frac{\dot{k}_5}{k_4} \right) + b \varpi^2 \frac{\dot{k}_5}{k_4} + \delta_3 \end{aligned} \right\} \quad 1-46$$

En donde  $\beta$  y  $k_5$  son funciones arbitrarias del tiempo y  $\delta_3$  queda determinada al imponer la velocidad del centroide. Estas expresiones generalizan las obtenidas en el caso cilíndrico (1-40) con  $k_6=0$ .

De aquí se deducen las componentes de la velocidad del centroide.

$$\left. \begin{aligned} \Pi_0 &= \Pi_0(\varpi, \theta, z) \\ \Theta_0 &= \Theta_0(\varpi, \theta, z) \\ Z_0 &= Z_0(\varpi, \theta, z) \end{aligned} \right\} \quad 1-47$$

La dependencia que presenta cada componente de la velocidad respecto de las coordenadas espaciales es tal que  $\Pi_0$  y  $\Theta_0$  son pares en  $z$  y  $Z_0$  impar. En consecuencia, la velocidad de los centroides locales presenta simetría respecto del plano galáctico. Además, al contrario que en los modelos con simetría cilíndrica, la componentes radial  $\Pi_0$  y perpendicular  $Z_0$  son no nulas incluso en el caso estacionario (Juan-Zornoza 1994).

Para llegar a las expresiones de los momentos de segundo orden, se lleva a cabo el razonamiento realizado en 1.4.1.1 mediante el cambio de base 1-31 y 1-32. Se siguen cumpliendo las expresiones 1-33 y 1-34 que relacionan los momentos con las componentes del tensor  $\mathbf{A}$  y los momentos de segundo y cuarto orden entre sí. Se obtiene que todos los momentos son función de  $\Phi_0(\sigma)$ , del determinante de  $\mathbf{A}$  y de las constantes de integración, no siendo ninguno idénticamente nulo (Sanz 1988).

Como se ve, este modelo permite que incluso los momentos  $\mu_{\varpi\theta}$  y  $\mu_{\theta z}$  sean no nulos, posibilidad que no se presentaba en el caso de simetría cilíndrica. Aún más, el momento  $\mu_{\varpi\theta}$  tampoco es idénticamente nulo sobre el plano  $z=0$ . Esto no es posible adoptando simetría cilíndrica aun considerando  $k_6 \neq 0$ . No obstante, al igual que en el caso de simetría cilíndrica, para este modelo se cumple que  $\mu_{\theta z} = \mu_{\varpi z} = 0$  sobre el plano galáctico  $z=0$ .

Así mismo, para este caso se deduce que la desviación del vértex es función de la coordenada angular  $\theta$  y es consecuencia de la axialidad del sistema. Es decir  $\varepsilon = \varepsilon(\theta)$ .

Este es pues el único tipo de simetría que daría cuenta de los valores observados para los momentos de segundo orden y velocidades de las estrellas del entorno solar. No obstante, el modelo con simetría axial puntual no explica la no nulidad de algunos momentos de tercer orden que aparecen como claramente diferentes de cero.

#### 1.4.1.9 Recapitulación

A lo largo de este capítulo, hemos visto cómo a medida que se va concretando la forma de la función de distribución, los valores de los momentos van quedando menos determinados. Desde el caso en el que sólo depende de la integral de la energía, en donde los momentos de segundo orden diagonales son iguales entre sí y los no diagonales nulos (1.3.1.1), hasta el modelo con simetría axial puntual en donde todos los valores de dichos momentos quedan libres (1.4.1.8). Aun así, ningún modelo de forma individual da cuenta de todos los valores de los parámetros que se observan.

La aplicación de superposición de sistemas estelares nos permitirá explicar los valores de los parámetros estadísticos en base a modelos más sencillos que este último, al menos para algún grupo local de estrellas. Al aplicar superposición veremos que puede tomarse el tipo de simetría más adecuado, comenzando por el más simple. Además, todos los momentos de segundo orden podrán ser diferentes de cero siempre que las velocidades de los subcentroides sean diferentes. Y finalmente, los momentos de orden impar también serán, en general, no nulos.

#### 1.4.1.10 Tabla resumen

De acuerdo con el modelo de Chandrasekhar, podemos resumir los casos que se acaban de exponer estableciendo la siguiente tabla.

simetría	depend. tempor.	plano simet.	velocidad media			momentos	desv. vértex
$\frac{\partial}{\partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$z=0$	$\Pi_0$	$\Theta_0$	$Z_0$	$\mu_{ij}$	$\varepsilon$
<b>Simetría cilíndrica</b>							
$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$	Sí	0	$\Theta_0$	0	$\mu_{\varpi\varpi}; \mu_{\theta\theta}; \mu_{zz}; \mu_{\varpi z} \neq 0$ $\mu_{\varpi\theta} = \mu_{\theta z} = 0$	$\varepsilon=0$
$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$	Sí	$\Pi_0$	$\Theta_0$	$Z_0$	$\mu_{\varpi\varpi}; \mu_{\theta\theta}; \mu_{zz}; \mu_{\varpi z} \neq 0$ $\mu_{\varpi\theta} = \mu_{\theta z} = 0$	$\varepsilon=0$
$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$	$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$	No	$\Pi_0$	$\Theta_0$	$Z_0$	$\mu_{\varpi\varpi}; \mu_{\theta\theta}; \mu_{zz}; \mu_{\varpi\theta}; \mu_{\varpi z} \neq 0$ $\mu_{\theta z} = 0$	$\varepsilon \neq 0$
<b>Simetría axial puntual</b>							
$f(\theta)=f(\theta+\pi)$	$\frac{\partial}{\partial t} = 0$	Sí	$\Pi_0$	$\Theta_0$	$Z_0$	$\mu_{\varpi\varpi}; \mu_{\theta\theta}; \mu_{zz};$ $\mu_{\varpi z}; \mu_{\varpi\theta}; \mu_{\theta z} \neq 0$	$\varepsilon=\varepsilon(\theta)$
$f(\theta)=f(\theta+\pi)$	$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$	Sí	$\Pi_0$	$\Theta_0$	$Z_0$	$\mu_{\varpi\varpi}; \mu_{\theta\theta}; \mu_{zz};$ $\mu_{\varpi z}; \mu_{\varpi\theta}; \mu_{\theta z} \neq 0$	$\varepsilon=\varepsilon(\theta)$

Tabla 1-1

En resumen, para disponer de un marco teórico en el que interpretar los resultados, se han presentado las conclusiones a las que llegan diversos estudios de Dinámica Galáctica. De entre los modelos con simetría cilíndrica y plano galáctico de simetría, todos deducen que los momentos de segundo orden  $\mu_{\varpi\theta}$  y  $\mu_{\theta z}$  son nulos. El momento  $\mu_{\varpi z}$  no es idéntico a cero pero sí se anula sobre el plano  $z=0$ . El caso estacionario concluye que los centroides locales sólo tienen velocidad rotacional pero no radial ni perpendicular al plano galáctico mientras que en los no estacionarios las tres componentes de la velocidad pueden ser no nulas. Sólo es posible la desviación del vértex si no se considera plano galáctico de simetría. En el modelo con simetría axial puntual todas los momentos de segundo orden y las componentes de las velocidades pueden ser diferentes de cero. La desviación del vértex es, en ese caso, función de la coordenada angular  $\theta$ .

## ***1.5 Algunas cuestiones relacionadas***

### **1.5.1 Poblaciones estelares. Componentes estructurales de la Galaxia**

Podemos definir una población estelar (King 1995) como un grupo de estrellas que tienen un conjunto de propiedades predefinidas dentro de un subconjunto de un espacio de parámetros multidimensional. Sin embargo, hasta llegar a esta definición más actual, la idea de poblaciones estelares ha sufrido un proceso evolutivo.

Originalmente, el concepto de Poblaciones Estelares fue introducido por Baade en 1944 al resolver en estrellas la galaxia de Andrómeda y sus compañeras y comprobar que había dos diagramas H-R fundamentalmente distintos en aquellas galaxias. A la Población I corresponderían estrellas jóvenes y a la II viejas (Osterbrock 1995). Como se ha dicho, esta idea, aunque con otro nombre y para nuestra galaxia, ya la desarrolla Kapteyn en 1905 al introducir su teoría de las dos corrientes estelares para explicar la asimetría detectada en la distribución de velocidades.

Según diferentes modelos, la mayor parte de la masa visible de la Vía Láctea llegó en forma de gas mientras que una parte significativa del halo lo hizo, o más tarde, o en forma de estrellas. Así, las poblaciones estelares proporcionan los registros fósiles de la evolución galáctica. Estos modelos consideran la actual clasificación de poblaciones estelares comprendida por disco viejo, disco grueso, halo, bulbo central y disco fino joven. Las poblaciones estelares deberían considerarse desde la óptica de una secuencia evolutiva. Van der Kruit (King 1995) reconoce la falta de relación uno a uno entre edad, metalicidad y cinemática. Considera que, si bien ya no se deberían usar los términos Población I y II, sí tiene sentido hablar de halo y disco puesto que se distinguen por su cinemática y el aplanamiento de su distribución espacial aun cuando su edad y metalicidad pueden superponerse.

King considera que, mientras el objetivo debería ser entender las componentes estructurales atendiendo a criterios cinemáticos y espaciales, se deberían describir sus poblaciones en términos de edad y metalicidad de acuerdo con criterios astrofísicos. La cinemática por otro lado, permite determinar a qué componente pertenece una estrella. Es decir, cinemática y distribución espacial determinan componente. Edad y metalicidad determinan población dentro de esa componente.

Al objeto de profundizar en cómo ha evolucionado el concepto, en el Anexo I se presenta un resumen de consideraciones sobre la idea de poblaciones estelares.

En el presente trabajo se utiliza únicamente información cinemática para separar muestras estelares locales que luego serán asociadas con alguna de estas poblaciones a través de los valores de las dispersiones de las velocidades. Como se acaba de ver, la información cinemática se considera apropiada para hacer este tipo de clasificación por lo que el mencionado criterio está completamente justificado. Y de acuerdo con lo dicho, los grupos estelares obtenidos deberán asociarse con componentes estructurales aun cuando por abuso del lenguaje, utilicemos indistintamente el término poblaciones estelares.

En las proximidades del Sol, que es en donde se aplicará el estudio de este trabajo, se han dado diferentes valores acerca de la composición de las poblaciones estelares presentes. Uno de los valores clásicos de esta composición es el publicado por Sandage & Fouts (1987) que asocia los siguientes valores de las dispersiones de velocidad y proporciones de cada componente para el entorno solar.

- Disco fino viejo (old thin disk):  $\sigma_{\Pi}:\sigma_{\Theta}:\sigma_z = 28:17:17$
- Disco viejo:  $\sigma_{\Pi}:\sigma_{\Theta}:\sigma_z = 50:40:30$
- Proporciones de población: disco fino : disco grueso : halo = 200:22:1

## 1.5.2 Correlaciones no nulas. Desviación del vértex

### 1.5.2.1 Definición

Se define la desviación del vértex como el ángulo  $\varepsilon$  formado por la dirección del semieje mayor del elipsoide de momentos (se le supone sobre el plano galáctico) con el eje que tiene la dirección del centro galáctico. Para distribuciones de Schwarzschild tal ángulo debería ser nulo por lo que uno de los problemas que se presenta es la presencia de esta desviación del vértex. Como ya se ha apuntado más arriba, esta correlación no nula es incompatible con una suposición de simetría cilíndrica de la función de distribución de velocidades en la que también se suponga simetría respecto del plano galáctico.

Por abuso del lenguaje, a lo largo de este trabajo nos referiremos no sólo a la desviación del vértex de las componentes estelares parciales de las muestras del entorno solar sino que también hablaremos de desviación del vértex de la muestra global. En este segundo caso, deberá entenderse por desviación del vértex la no nulidad del momento  $\mu_{12}$  de la muestra considerada. En propiedad, no tendría sentido en ese caso hablar de desviación del vértex de un elipsoide que es suma de elipsoides parciales con lo que tampoco tiene una orientación definida.

Al calcular el valor de dicho momento para una muestra estelar local, se obtiene que es diferente de cero. Ejemplos de valores de este momento claramente no nulos para varias muestras los tenemos en las tablas 5-2, 5-3 y 6-8. Otros autores (p. e. Figueras 1986), también obtienen valores no nulos de este momento para otras muestras de estrellas distintas.

Recordemos que la desviación del vértex viene dada por:

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{2\mu_{12}}{\mu_{11} - \mu_{22}}$$

1-48

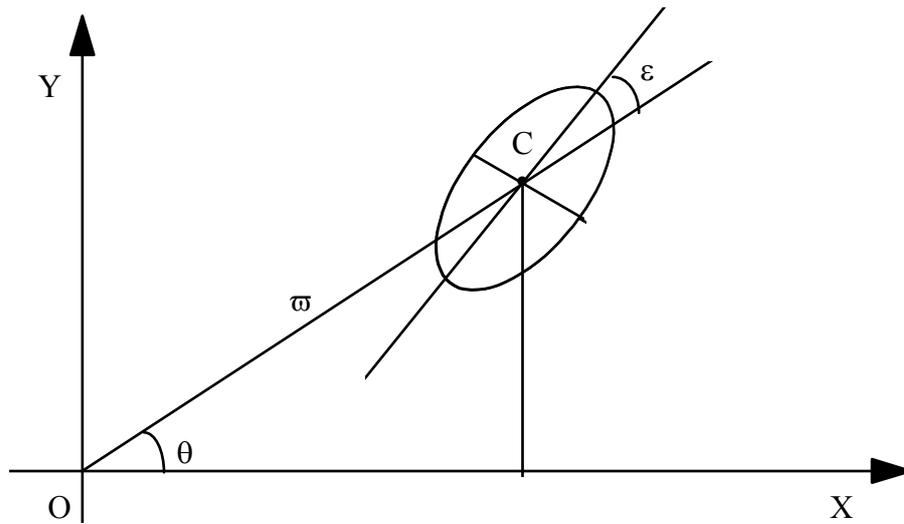


Figura 1-1

En Figura 1-1 X, Y representa un sistema de coordenadas galactocéntrico, O es el centro galáctico y C el centroide local. El centroide local se considera en la posición de coordenadas polares  $\varpi$ ,  $\theta$ . Se supone que el semieje mayor del elipsoide se encuentra sobre el plano galáctico.  $\varepsilon$  representa la desviación del vértex en la dirección  $\Theta$ .

Si tomamos un ejemplo (Hernández-Pajares et al. 1993) en el que la muestra se ha obtenido a partir del Hipparcos Input Catalog (HINCA) eliminando de él las estrellas con características físicas más extremas se deducen los siguientes parámetros cinemáticos.

- $U_0 = -10,87 \pm 0,34 \text{ Kms}^{-1}$
- $V_0 = -18,09 \pm 0,26 \text{ Kms}^{-1}$
- $W_0 = -7,65 \pm 0,20 \text{ Kms}^{-1}$
- Y se obtiene un valor para el momento  $\mu_{12} = 115 \pm 18 \text{ Km}^2\text{s}^{-2}$

Se ve en este ejemplo que el momento  $\mu_{12}$  es claramente no nulo puesto que es mucho mayor que el error con el que se ha calculado.

### 1.5.3 Consideraciones acerca de la desviación del vértex

Ya se ha dicho, que si imaginamos nuestro sistema estelar como un sistema ideal con simetría axial en estado estacionario en el cual las estrellas están distribuidas al azar en sus órbitas, entonces, a partir de consideraciones de simetría solamente, deberíamos esperar encontrar un eje del elipsoide de velocidades de las estrellas en el plano galáctico apuntando exactamente al centro galáctico. En otras palabras, de acuerdo con la aproximación de Oort y otros modelos dinámicos, la distribución de estrellas en el entorno solar no debería presentar desviación del vértex.

Sin embargo, eso no sucede así y se observa desviación del vértex, que es mayor para estrellas del tipo espectral F0 y más tempranas, es decir, para estrellas jóvenes. También se ve que, estrellas gK jóvenes del disco, que se mueven en órbitas con baja inclinación respecto del plano galáctico y con velocidades peculiares relativamente bajas, muestran una clara desviación del vértex. En cambio, estrellas gK pertenecientes a una población más vieja del disco, con órbitas altamente inclinadas y velocidad peculiar relativamente alta presentan poca o nada desviación del vértex. Es decir, parece que la desviación del vértex está asociada fundamentalmente a estrellas muy jóvenes y de baja velocidad (Mihalas & Binney 1981).

Las explicaciones que se aportan sobre el fenómeno, se enmarcan en tres mayores categorías. Las dos primeras son las teorías de estado estacionario y las de condiciones iniciales. Existe una tercera categoría que introduce elementos de las dos anteriores. Esta tercera categoría es la que hace referencia a que la desviación del vértex observada es consecuencia de la presencia en las muestras estudiadas de estrellas pertenecientes a grupos en movimiento. Dependiendo del autor, toma aspectos de las teorías de estado estacionario, de las condiciones iniciales o de ambas a la vez.

Los grupos en movimiento pueden considerarse como corrientes estelares que se mueven en el espacio con pequeña dispersión de velocidad interna. La existencia de estos grupos fue descubierta el siglo pasado por Proctor en 1869 y confirmada por Kapteyn, Eddington y otros a principios de este siglo. Los grupos en movimiento contienen estrellas que pueden estar separadas en el espacio pero que se mueven paralelamente hacia un punto común de convergencia. Se extienden por lo menos del orden de 100 pc. El entorno solar está atravesado por estos cúmulos y el mismo Sol está rodeado por algunos de sus miembros, de modo que se encuentran dispersos por toda la esfera celeste.

En las explicaciones basadas en el estado estacionario se presenta una perturbación asociada con la estructura espiral y pueden ofrecer una explicación para la desviación del vértex de los grupos de estrellas de tipos espectrales tardíos. No obstante, no explican por qué las estrellas O y B presentan esta asimetría de forma tan diferente a las anteriores. Las teorías de condiciones iniciales consideran que la desviación del semieje mayor del elipsoide de velocidades está causada por las velocidades iniciales que las estrellas tenían en el momento de su nacimiento.

El hecho de que las mayores desviaciones se produzcan para las estrellas más jóvenes sugiere que este fenómeno está producido por dinámica local del medio interestelar en el momento de la formación de las estrellas. Y tal vez sea una manifestación del campo de velocidades del gas en un brazo espiral cerca del Sol o de la distribución espacial de las estrellas formadas recientemente en la vecindad solar. De hecho, hay una considerable evidencia de la existencia de importantes campos de velocidad locales asociados a ondas de densidad de un brazo espiral.

En cuanto a la hipótesis de que la causa de la desviación del vértex es la existencia de grupos en movimiento, podemos decir que la relevancia de estos grupos en el problema es que las estrellas jóvenes en el diagrama de velocidades ( $U$ ,  $V$ ) podrían ser miembros de unos pocos grupos en movimiento diferentes. Si ese fuera el caso, entonces el número de puntos verdaderamente independientes a partir de los cuales han de ser deducidas las características de la distribución de velocidades resulta muy pequeño y puede llevar a una falsa estimación de la orientación de los ejes del elipsoide y de la dispersión a lo largo de estos ejes.

Si los grupos en movimiento son realmente responsables de la desviación del vértex, entonces estimaciones dinámicamente significativas de los parámetros del elipsoide de velocidades pueden ser obtenidas sólo para estrellas de tipos más tardíos. Si no es ése el caso, querrá decir que las estrellas jóvenes realmente tienen una dirección preferencial para su movimiento que es inconsistente con lo que se esperaría de una galaxia con simetría cilíndrica (por ejemplo como resultado de imponer un potencial no axisimétrico).

Podemos poner dos ejemplos de trabajos recientes que ilustren las mencionadas teorías acerca de la desviación del vértex. En el primero se atribuye la desviación del vértex a dos de las causas citadas: La presencia de grupos en movimiento y la de un elemento perturbador de la simetría del potencial. En el segundo trabajo, se considera que la desviación del vértex es consecuencia de las condiciones iniciales de formación de las estrellas y desaparece con el tiempo.

Dehnen & Binney (1998), afirman que la desviación del vértex de los diferentes grupos de estrellas persiste incluso para los de tipo tardío. Esto implica que el potencial galáctico es significativamente no axisimétrico en el entorno solar debido a la presencia de una barra o una estructura espiral. Atribuye la desviación a esta no simetría y a la probable pertenencia a grupos en movimiento de una fracción considerable de estrellas jóvenes. Razonan que, aunque una componente a gran escala no axisimétrica de la Galaxia afectaría a todos los grupos estelares, su contribución sería mayor para aquellos que tuvieran menores dispersiones de velocidad.

Contrariamente a estos últimos autores, Bienaymé (1999) considera que no todos los grupos de estrellas presentan desviación del vértex y la que aparece en las estrellas rojas es consecuencia de que se trata de una mezcla de estrellas nuevas y viejas con lo que acepta la hipótesis de simetría axial. Por otro lado, sugiere que un modelo no axisimétrico puede llevar en determinados casos a que todos los grupos estelares tengan la misma desviación del vértex.

Vemos que el problema presenta gran interés en la actualidad por las implicaciones que esta asimetría tiene sobre el potencial local y que induce a pensar sobre la presencia en las proximidades del Sol de componentes morfológicos de la Galaxia, como brazos espirales o barra, que creen la perturbación que da lugar a la desviación del vértex. En el Anexo II se incluye un sumario de referencias históricas sobre el estudio de la desviación del vértex.

La explicación que se deducirá en el presente trabajo para la desviación del vértex es que, parcialmente es consecuencia de la diferencia de velocidades de los subcentroides de cada una de las dos poblaciones estelares por las que puede aproximarse la muestra global de estrellas del entorno solar. Se obtiene desviación nula para una de las componentes que podremos identificar con estrellas viejas del disco, presentando cierta desviación las demás componentes deducidas. Podría interpretarse que en las jóvenes están mezcladas estrellas con orígenes suficientemente diferenciados, mientras que en la segunda componente van a parar grupos suficientemente mezclados como para ser considerados homogéneos.

## 2. El modelo estadístico

### 2.1 Superposición de sistemas estelares

De cara a poder aproximar los grupos de poblaciones estelares del entorno solar por distribuciones gaussianas, se introduce la hipótesis de superposición de tales funciones. De este modo, se construirá un modelo que contribuya a explicar las cuestiones planteadas en el capítulo anterior relativas a los valores de algunos momentos como debidas a la presencia de poblaciones estelares, cada una considerada separadamente con distribución normal pero no siéndolo el conjunto de ellas. Según esta idea, dados los momentos de segundo, tercer y cuarto orden así como la velocidad media de la muestra global, lo que se busca es determinar los momentos de segundo orden, las fracciones de población y la velocidad del subcentroide de cada una de las poblaciones parciales.

### 2.2 Superposición de $n$ distribuciones de Schwarzschild

Para resolver el problema que se acaba de plantear, lo primero que haremos será escribir los momentos totales en función de los parciales. Según el principio de superposición, la función de distribución global puede aproximarse por una suma de funciones de distribución parciales. (Para no confundir el índice de los momentos  $n$  con el número de poblaciones, denominaremos a este último  $p$ ).

De acuerdo con la definición clásica en Teoría de Probabilidades, la **función de distribución global**  $f(\mathbf{x})$  de una variable aleatoria  $\mathbf{x}$ , suma discreta de  $p$  funciones de distribución parciales  $f_i(\mathbf{x}|\mathbf{o}_i)$  asociadas a sendas poblaciones parciales caracterizadas por un vector de parámetros  $\mathbf{o}_i$ , vendrá dada por (p. e. McLachlan & Basford 1988):

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p f_i(\mathbf{x}|\mathbf{o}_i) p_i(\mathbf{o}_i) \quad 2-1$$

En donde  $p_i(\mathbf{o}_i)$  es la densidad de probabilidad de mezcla. Es decir que  $p_i(\mathbf{o}_i)$  nos dará las proporciones de la mezcla.

En nuestro caso, en el que superponemos  $p$  funciones de distribución de velocidad  $\mathbf{V}$ , podemos asociar el siguiente significado a los términos de la expresión 2-1:

- $p_i(\mathbf{o}_i) = n^{(i)}$ : Probabilidad de pertenecer a la población  $i$  condicionado a  $\mathbf{o}$ .
- $\mathbf{o}_i \equiv \mathbf{o}^{(i)} = \{ \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{M}_2^{(i)} \}$  siendo,
- $\mathbf{v}^{(i)}$ : Velocidad del subcentroide  $i$ , (media de la población  $i$ )
- $\mathbf{M}_2^{(i)}$ : Momento parcial centrado de segundo orden de la población  $i$

Es decir, que tenemos unos parámetros totales  $n^i, \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{M}_2^{(i)}$  que cumplen la condición:

$$\sum_{i=1}^p n_i = 1 \quad 2-2$$

De modo que, para valores fijos del tiempo y la posición, esta definición se expresará:

$$f(\mathbf{V}) = \sum_{i=1}^p n^{(i)} f^{(i)}(\mathbf{V}|\mathbf{o}^{(i)}) \quad 2-3$$

En donde  $f^{(i)}(\mathbf{V})$  indica la **función de distribución normalizada** de cada una de las  $p$  poblaciones que se superponen.

Definiendo  $N^{(i)}$  como el número de estrellas de la componente  $i$ -ésima, la fracción de población  $n^{(i)}$  podrá expresarse, de acuerdo con 1-14, como:

$$n^{(i)} = \frac{N^{(i)}}{N} \quad 2-4$$

Y entonces podremos escribir la densidad estelar  $N$  como la suma de la de cada componente:

$$N = \sum_{i=1}^p N^{(i)} \quad 2-5$$

Si ahora calculamos, (recordando 1-15)

$$N \cdot \mathbf{v} = \int \mathbf{V} f(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \sum_{i=1}^p \int N^{(i)} \mathbf{V} f^{(i)}(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \sum_{i=1}^p \mathbf{v}^{(i)} \cdot N^{(i)} \quad 2-6$$

y tendremos para la velocidad del centroide o media del conjunto de estrellas

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} \quad 2-7$$

Por otro lado, se había definido la velocidad residual para la muestra total como  $\mathbf{u} = \mathbf{V} - \mathbf{v}$ , de modo que podemos definir ahora las velocidades residuales de cada población parcial de forma análoga:

$$\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{V} - \mathbf{v}^{(i)} \quad 2-8$$

Sumando y restando  $\mathbf{v}$ , podemos escribir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{w}^{(i)} \quad 2-9$$

en donde

$$\mathbf{w}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v} \quad 2-10$$

Estas nuevas variables presentan la relación:

$$\sum_{i=1}^p n^{(i)} \mathbf{w}^{(i)} = \sum_{i=1}^p n^{(i)} (\mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \mathbf{v}^{(i)} - \mathbf{v} \sum_{i=1}^p n^{(i)}$$

y por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^p n^{(i)} \mathbf{w}^{(i)} = 0 \quad 2-11$$

Adicionalmente se cumple,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M}_0^{(i)} = 1 \\ \mathbf{M}_1^{(i)} = 0 \end{array} \right\} \quad 2-12$$

Otra característica de las funciones de distribución parciales que compondrán la función total es que, por tratarse de funciones de distribución que se suponen de tipo cuadrático en las velocidades residuales (ver 1-26), todos los momentos centrados de orden impar son nulos. Es decir, para todas las componentes parciales, se cumple que:

$$\forall n \text{ impar } \mathbf{M}_n^{(i)} = 0 \quad 2-13$$

## 2.3 Momentos centrados

### 2.3.1.1 Momentos de orden $n$

Según lo visto para momentos centrados de orden  $n$  (1-17) y de acuerdo con la función de distribución, tenemos:

$$\mathbf{M}_n = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \int_{\mathbf{v}} (\mathbf{u})^n f^{(i)}(\mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad 2-14$$

Con las nuevas variables definidas podemos escribir ahora:

$$\mathbf{M}_n = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{w}^{(i)})^n f^{(i)}(\mathbf{V}) d\mathbf{V} \quad 2-15$$

Podemos definir ahora el producto tensorial simetrizado (Cubarsi 1992) que representaremos por \* de la siguiente forma. Si  $\mathbf{A}_m$  y  $\mathbf{B}_n$  son dos tensores de órdenes  $m$  y  $n$  respectivamente, el producto tensorial simetrizado se define como la simetrización del tensor producto  $\mathbf{A}_m \otimes \mathbf{B}_n$  normalizado respecto del número de sumandos.

$$\mathbf{A}_m * \mathbf{B}_n = \frac{n!m!}{(m+n)!} \text{Sim}(\mathbf{A}_m \otimes \mathbf{B}_n)$$

En particular, si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son dos vectores, se cumple,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\mathbf{a})^{n-k} * (\mathbf{b})^k \quad 2-16$$

Aplicándolo, podemos escribir lo anterior como:

$$\mathbf{M}_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=1}^p n^{(i)} \int_{\mathbf{V}} (\mathbf{u}^{(i)})^{n-k} * (\mathbf{w}^{(i)})^k f^{(i)}(\mathbf{V}) d\mathbf{V}$$

Es decir,

$$\mathbf{M}_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i=1}^p n^{(i)} (\mathbf{w}^{(i)})^k * \mathbf{M}_{n-k}^{(i)} \quad 2-17$$

### 2.3.1.2 Momentos de orden 2

De acuerdo con la última expresión, los momentos de segundo orden de una superposición de  $p$  poblaciones parciales quedan de la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_2 = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \mathbf{M}_2^{(i)} + 2n^{(i)} \mathbf{w}^{(i)} * \mathbf{M}_1^{(i)} + n^{(i)} (\mathbf{w}^{(i)})^2 * \mathbf{M}_0^{(i)} \quad 2-18$$

y por lo tanto, de acuerdo con 2-12 y 2-13 y recordando que se suponen funciones normales,

$$\mathbf{M}_2 = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \left( \mathbf{M}_2^{(i)} + (\mathbf{w}^{(i)})^2 \right) \quad 2-19$$

Nótese que esto representa seis ecuaciones escalares.

### 2.3.1.3 Momentos de orden 3

Análogamente podemos expresar los momentos de orden 3 para una superposición de  $p$  poblaciones parciales,

$$\mathbf{M}_3 = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \mathbf{M}_3^{(i)} + 3n^{(i)} \mathbf{w}^{(i)} * \mathbf{M}_2^{(i)} + 3n^{(i)} (\mathbf{w}^{(i)})^2 * \mathbf{M}_1^{(i)} + n^{(i)} (\mathbf{w}^{(i)})^3 * \mathbf{M}_0^{(i)} \quad 2-20$$

luego por lo mismo que los momentos de orden 2, particularizando a gaussianas,

$$\mathbf{M}_3 = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \left( 3\mathbf{w}^{(i)} * \mathbf{M}_2^{(i)} + (\mathbf{w}^{(i)})^3 \right) \quad 2-21$$

Nótese que con esto se tienen diez ecuaciones escalares.

### 2.3.1.4 Momentos de orden 4

Finalmente, para los momentos de cuarto orden que serán los últimos de los que nos ocuparemos en este trabajo:

$$\mathbf{M}_4 = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \mathbf{M}_4^{(i)} + 4n^{(i)} \mathbf{w}^{(i)} * \mathbf{M}_3^{(i)} + 6n^{(i)} (\mathbf{w}^{(i)})^2 * \mathbf{M}_2^{(i)} + 4n^{(i)} (\mathbf{w}^{(i)})^3 * \mathbf{M}_1^{(i)} + n^{(i)} (\mathbf{w}^{(i)})^4 * \mathbf{M}_0^{(i)} \quad 2-22$$

Por el hecho de imponer la hipótesis de que las poblaciones parciales se consideran de Schwarzschild, los momentos de cuarto orden pueden escribirse como,

$$\mathbf{M}_4^{(i)} = 3\mathbf{M}_2^{(i)} * \mathbf{M}_2^{(i)} \quad 2-23$$

Con esto y siguiendo el razonamiento de los momentos de orden 2 y 3, nos queda,

$$\mathbf{M}_4 = \sum_{i=1}^p n^{(i)} \left( 3\mathbf{M}_2^{(i)} * \mathbf{M}_2^{(i)} + 6(\mathbf{w}^{(i)})^2 * \mathbf{M}_2^{(i)} + (\mathbf{w}^{(i)})^4 \right) \quad 2-24$$

Nótese que esto proporciona quince ecuaciones escalares.

## 2.4 Casos particulares de 2 y 3 poblaciones

### 2.4.1 Caso de 2 poblaciones

Aplicando las ecuaciones 2-2 y 2-11 al caso de dos poblaciones, reduciremos las expresiones generales deducidas anteriormente 2-19, 2-21 y 2-24 a otras ya publicadas (Cubarsi 1992), dependientes de la diferencia de velocidades entre los centroides parciales en lugar de respecto al centroide global. Introducimos la notación de superíndices ‘ y “ en lugar de <sup>(i)</sup>.

### 2.4.1.1 Momentos de orden 2

En el caso particular de dos poblaciones  $p=2$ , la expresión 2-19 que nos proporciona los momentos de segundo orden quedará:

$$\mathbf{M}_2 = n' \mathbf{M}'_2 + n'' \mathbf{M}''_2 + n' (\mathbf{w}')^2 + n'' (\mathbf{w}'')^2 \quad 2-25$$

Si nos fijamos en los dos últimos sumandos, y teniendo en cuenta 2-2 y 2-11, se deduce fácilmente la igualdad:

$$n' (\mathbf{w}')^2 + n'' (\mathbf{w}'')^2 = n' n'' (\mathbf{w}' - \mathbf{w}'')^2 \quad 2-26$$

Si ahora definimos el vector diferencia de las velocidades medias de los dos subcentroides

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'' \quad 2-27$$

Por su definición sucederá también que

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' - \mathbf{w}'' \quad 2-28$$

y puede verse fácilmente que

$$\begin{cases} -n' \mathbf{w} = \mathbf{w}'' \\ n'' \mathbf{w} = \mathbf{w}' \end{cases} \quad 2-29$$

Con lo cual queda

$$\mathbf{M}_2 = n' \mathbf{M}'_2 + n'' \mathbf{M}''_2 + n' n'' (\mathbf{w})^2 \quad 2-30$$

### 2.4.1.2 Momentos de orden 3

Al restringirnos a dos poblaciones, los momentos de tercer orden quedan:

$$\mathbf{M}_3 = 3(n'\mathbf{w}' * \mathbf{M}'_2 + n''\mathbf{w}'' * \mathbf{M}''_2) + n'(\mathbf{w}')^3 + n''(\mathbf{w}'')^3 \quad 2-31$$

En donde de forma análoga que para los momentos de segundo orden, puede deducirse

$$n'(\mathbf{w}')^3 + n''(\mathbf{w}'')^3 = n'n''(n''-n')(\mathbf{w}'-\mathbf{w}'')^3 \quad 2-32$$

con lo que obtenemos:

$$\mathbf{M}_3 = 3n'n''(\mathbf{M}'_2 - \mathbf{M}''_2) * \mathbf{w} + n'n''(n''-n')(\mathbf{w})^3 \quad 2-33$$

### 2.4.1.3 Momentos de orden 4

Finalmente, al hacer lo propio con los momentos de cuarto orden y utilizando los mismos razonamientos, tenemos:

$$\mathbf{M}_4 = 3n'\mathbf{M}'_2 * \mathbf{M}'_2 + 3n''\mathbf{M}''_2 * \mathbf{M}''_2 + 6(n'(\mathbf{w}')^2 * \mathbf{M}'_2 + n''(\mathbf{w}'')^2 * \mathbf{M}''_2) + n'(\mathbf{w}')^4 + n''(\mathbf{w}'')^4 \quad 2-34$$

De forma análoga a los casos anteriores puede verse fácilmente que los términos sin momentos parciales,

$$n'(\mathbf{w}')^4 + n''(\mathbf{w}'')^4 = n'n''(1 - 3n'n'')(\mathbf{w})^4 \quad 2-35$$

Con lo que queda finalmente otra expresión ya conocida:

$$\mathbf{M}_4 = 3n'\mathbf{M}'_2 * \mathbf{M}'_2 + 3n''\mathbf{M}''_2 * \mathbf{M}''_2 + 6n'n''(n''\mathbf{M}'_2 + n'\mathbf{M}''_2) * (\mathbf{w})^2 + n'n''(1 - 3n'n'')(\mathbf{w})^4 \quad 2-36$$

Si a esto añadimos la restricción a dos poblaciones de las expresiones 2-2 y 2-11,

$$\begin{aligned} n' + n'' &= 1 \\ n'\mathbf{w}' + n''\mathbf{w}'' &= 0 \end{aligned} \quad 2-37$$

El conjunto de expresiones 2-25, 2-31, 2-34 y 2-37 constituyen un sistema de 35 ecuaciones escalares con 20 incógnitas: Las seis componentes de  $\mathbf{M}'_2$  y de  $\mathbf{M}''_2$ , las seis componentes de las diferencias de velocidades de los subcentroides  $\mathbf{w}'$ ,  $\mathbf{w}''$  con respecto de la media y las fracciones de población  $n'$ ,  $n''$ . Los datos conocidos son los momentos totales de segundo, tercer y cuarto orden así como la velocidad del centroide global que relaciona las velocidades de los subcentroides parciales. Es necesario que se cumplan quince condiciones de ligadura para que se pueda resolver este sistema de ecuaciones. En el capítulo siguiente, estas expresiones pasarán a constituir el algoritmo de cálculo que posteriormente se materializará en el método numérico objeto de este estudio.

## 2.4.2 Caso de 3 poblaciones

Resulta interesante detenerse a reflexionar sobre el caso de tres poblaciones. Las ecuaciones 2-19, 2-21, 2-24, 2-2 y 2-11 restringidas a  $p=3$ , constituyen un sistema de 35 ecuaciones escalares con 30 incógnitas: Las seis componentes de  $\mathbf{M}_2^i$ , las tres de  $\mathbf{w}^i$  y  $n^i$  para cada una de las tres poblaciones. De ahí se obtendrán cinco condiciones de ligadura que deberán cumplirse para resolver el sistema. Nótese que el caso  $p=3$  es el último que puede resolverse por este camino utilizando momentos de hasta cuarto orden. Para  $p>3$  sería necesario utilizar momentos de orden superior o, en todo caso, introducir simplificaciones sobre los valores que toman a causa de posibles simetrías.

Se constata en este caso de tres poblaciones la dificultad de invertir el sistema, así como que la complejidad de dicha inversión conduce a grandes errores en la propagación de los errores de los datos de partida.

## 2.5 Cumulantes de una superposición

### 2.5.1.1 Cumulantes

Pueden utilizarse también los cumulantes para describir la distribución de velocidades en lugar de los momentos. La ventaja de su uso radica en que presentan propiedades de simetría y, en especial, que tienen como estimadores no sesgados los correspondientes k-estadísticos de la muestra (ver por ejemplo, Stuart & Ord 1987).

Si se toma entonces la relación entre los momentos centrales y los correspondientes cumulantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \mathbf{M}_2 \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{M}_3 \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{M}_4 - 3\mathbf{M}_2 * \mathbf{M}_2 \end{aligned} \tag{2-38}$$

Sucedee en particular para una función de distribución normal multivariada

$$\mathbf{K}_n = 0; \forall n \geq 3 \quad 2-39$$

Es decir que, en tal caso, los únicos cumulantes no nulos son los de segundo orden, por lo que sus valores caracterizan completamente la distribución. De este modo, en el presente trabajo vamos a desarrollar un método numérico que utiliza los cumulantes de una distribución de velocidades estelares que supondremos compuesta por dos poblaciones normales trivariadas.

Obsérvese que las ecuaciones 2-38 y 2-39 constituyen lo que nos ha permitido escribir 2-23  $\mathbf{M}_4^{(i)} = 3\mathbf{M}_2^{(i)} * \mathbf{M}_2^{(i)}$  para las componentes parciales de nuestro modelo puesto que las suponemos de tipo normal.

Para la muestra global, puesto que los cumulantes de segundo y tercer orden coinciden con los correspondientes momentos, es indistinto a cuáles de ellos se haga referencia. Por contra, dado que no coinciden, para el caso de cuarto orden se trabajará con los cumulantes. No obstante, se presentarán los momentos de cuarto orden para hacer comparaciones de muestras. En la generación de muestras sintéticas (ver 3.5.2), se producirá la condición 2-39 para las componentes parciales.

#### 2.5.1.2 Propiedades de los cumulantes

De forma análoga a las propiedades de los momentos que vimos en 1.2.3.1 citamos aquí una serie de propiedades de los cumulantes.

- Como se ha dicho, los cumulantes tienen como estimadores no sesgados los k-estadísticos.
- Son también tensores simétricos y, más adelante, en 3-15 podremos ver su relación con los momentos.

Como en el caso de los momentos, tenemos unas relaciones que dan información de la geometría de la distribución de probabilidades. Se definen pues, los mismos coeficientes que ya vimos en aquel caso y que coinciden con ellos. En el caso particular de una variable aleatoria escalar,

- Asimetría u oblicuidad (*skewness*): Para la i-ésima componente  $\gamma_i = \frac{\mathbf{K}_{iii}}{\mathbf{K}_{ii}^{3/2}}$ ; da idea de la simetría de la distribución.
- Exceso o coeficiente de apuntamiento (*kurtosis*):  $\kappa_i = \frac{\mathbf{K}_{iiii}}{\mathbf{K}_{ii}^2}$ ; da idea de la anchura de las alas de la distribución y la concentración de la misma en torno a la media. Cuanto mayor sea el exceso, mayor será la dispersión de la distribución.

En general, en cuanto a la simetría estos coeficientes indican para la distribución:

- $\gamma_i > 0 \Rightarrow$  valor medio  $>$  mediana  $>$  moda
- $\gamma_i < 0 \Rightarrow$  valor medio  $<$  mediana  $<$  moda
- $\gamma_i = 0 \Rightarrow \mu_{iii} = 0$  generalmente indicará que la distribución es simétrica
- $\kappa_i = 0 \Rightarrow$  distribución normal
- $\kappa_i > 0 \Rightarrow$  curva más aplanada que la distribución normal, alas más abiertas
- $\kappa_i < 0 \Rightarrow$  curva más puntiaguda que la distribución normal, alas más cerradas

### 2.5.1.3 *Cumulantes de una superposición de 2 poblaciones*

Si aplicamos las relaciones 2-38 entre los cumulantes y los momentos, podemos expresar de otra forma los momentos de una superposición de 2 funciones de distribución normales. Para ello definimos previamente unas variables auxiliares:

$$\mathbf{D} = \sqrt{n'n''}\mathbf{w}; \quad q = \sqrt{\frac{n'}{n''}} - \sqrt{\frac{n''}{n'}} \quad 2-40$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $n' \geq n''$  de modo que  $q$  será no negativa. Definimos también los siguientes tensores simétricos de segundo orden:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_2 &= n'\mathbf{K}'_2 + n''\mathbf{K}''_2 \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{1}{\sqrt{q^2 + 4}}(\mathbf{K}'_2 - \mathbf{K}''_2) - q(\mathbf{D})^2 \end{aligned} \quad 2-41$$

#### 2.5.1.4 Planteamiento del problema

Utilizando estas últimas expresiones, las ecuaciones 2-38 pueden escribirse de la forma que sigue, lo cual constituye el problema que se pretende resolver (Cubarsi & Alcobé 1995).

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_2 &= \mathbf{a}_2 + (\mathbf{D})^2 \\ \mathbf{K}_3 &= 3\mathbf{C}_2 * \mathbf{D} + 2q(\mathbf{D})^3 \\ \mathbf{K}_4 &= 3\mathbf{C}_2 * \mathbf{C}_2 - 2(q^2 + 1)(\mathbf{D})^4\end{aligned}\tag{2-42}$$

De este modo el conjunto de ecuaciones descrito en el apartado 2.4.1, compuesto por las tres expresiones 2-30, 2-33 y 2-36, se ha transformado en el sistema 2-42.

**En definitiva, el problema que se plantea es:** Conocemos los cumulantes y la media de una distribución normal multivariada con dos componentes y queremos determinar los parámetros incógnitas de las distribuciones parciales. Estas incógnitas son: Los cumulantes parciales (seis de  $\mathbf{K}'_2$  y seis de  $\mathbf{K}''_2$ ) o los equivalentes de  $\mathbf{a}_2$  y de  $\mathbf{C}_2$ , la fracción de población (por ejemplo  $n'$  o  $q$ ) y las tres componentes del vector diferencia de velocidades medias de los centroides parciales  $\mathbf{w}$ , o las componentes de  $\mathbf{D}$ . Eso representa dieciséis incógnitas. Puesto que tenemos un conjunto de treinta y una ecuaciones escalares no lineales, deberemos determinar quince condiciones de ligadura.

### 3. El método numérico

#### 3.1 Aproximación numérica del modelo

##### 3.1.1 Descripción del método. Algoritmo de cálculo

Para poder resolver el sistema de ecuaciones 2-42 planteado en el apartado anterior se aprovecha una particularidad de simetría que permitirá invertir el sistema para obtener las incógnitas. El proceso es el siguiente.

1º) Dados los subcentroides  $C_1$  y  $C_2$  y el vector que los une  $\mathbf{w}$ , en un punto intermedio entre ambos se encuentra el centroide global  $C_t$ . Nos situamos sobre un plano  $\Phi$  ortogonal a  $\mathbf{w}$  que pasa por  $C_t$ . Sobre este plano se presenta, en cualquier dirección, simetría en la distribución.

2º) Se define una nueva base (en general no ortogonal) en la cual se expresan las velocidades peculiares  $\mathbf{u}$ , es decir, se hace una proyección de la velocidad peculiar sobre este plano. Sobre esta base, las velocidades peculiares  $\mathbf{u}$  las expresamos según un nuevo vector  $\mathbf{W}$  del siguiente modo:

- 2 componentes ( $W_1, W_3$ ) están sobre el plano  $\Phi$  mediante dos proyecciones independientes de la velocidad residual  $\mathbf{u}$ .
- 1 componente ( $W_2$ ) sigue siendo la misma de rotación  $V$  sin modificar.

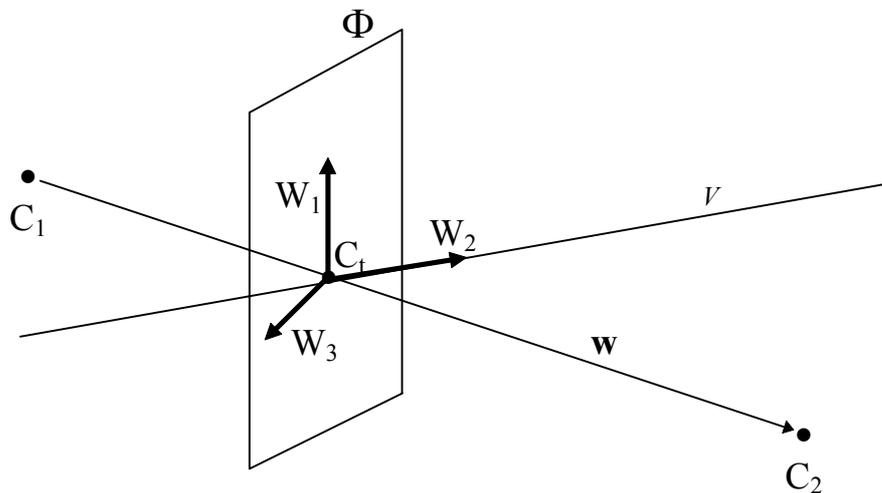


Figura 3-1

3º) Los momentos del vector  $\mathbf{W}$ , en lugar de calcularse en esta nueva base, lo que se hace es expresarlos en función de los de  $\mathbf{u}$ . Es decir, expresamos los momentos de las proyecciones en la base canónica. No se hace un cambio de base.

4°) Se procede a la resolución por paquetes de ecuaciones, utilizando mínimos cuadrados ponderados (*weighted least squares*). Los pesos de las ecuaciones vienen determinados por sus errores absolutos. Pueden excluirse las ecuaciones con errores relativos superiores a un valor dado en función de la estabilidad de los resultados.

### 3.1.2 Proyección de la velocidad peculiar

Pasemos a sistematizar la idea que se acaba de expresar. El caso más general será el que la diferencia de velocidades de los centroides  $\mathbf{w}$  (y por tanto el vector  $\mathbf{D}$  definido en 2-40) no sea nula. (Introducimos la notación de identificar los subíndices  $\{\varpi, \theta, z\} \equiv \{1, 2, 3\}$ ). Supongamos entonces, sin perder generalidad, la componente de rotación  $D_2 \neq 0$  (consideraremos que esta componente se corresponde al máximo de  $|D_i|$ ) y definamos el vector normalizado  $\mathbf{d} = \mathbf{D}/D_2$  en una dirección que contiene los dos subcentroides (nótese que en el caso de que fuera otra la componente correspondiente al máximo, todo sería igual con una permutación de índices). Puesto que toda distribución normal es simétrica respecto de su centroide en el sentido de que los momentos impares son nulos (2-13), la distribución de velocidades total será simétrica respecto de cualquier dirección en un plano perpendicular a  $\mathbf{w}$  y por tanto a  $\mathbf{d}$ , de acuerdo con 2-40 y la definición de  $\mathbf{d}$  (ver Figura 3-1). Así pues, de cara a simplificar el problema, trabajaremos con un vector transformado  $\mathbf{W}$  de la velocidad peculiar  $\mathbf{u}$ . Este vector contendrá dos componentes en el plano mencionado.

Por este motivo tomaremos estas direcciones como  $(d_2, -d_1, 0)^t$  y  $(0, -d_3, d_2)^t$ , que serán ortogonales al vector  $\mathbf{d}$ . Dos de las componentes del nuevo vector serán las proyecciones de  $\mathbf{u}$  en esas direcciones y la tercera no será modificada. Además, si  $d_1$  o  $d_3$  son nulas, estas direcciones son ortogonales.

El nuevo vector  $\mathbf{W}$  se obtendrá a partir de la siguiente transformación isomórfica del vector  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{W} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{u}; \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} d_2 & -d_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_2 \end{pmatrix} \quad 3-1$$

Obsérvese que realmente  $d_2=1$  y  $\det(\mathbf{H}_2)=1$ . No obstante, mantenemos esta notación porque permitiría fácilmente hacer un cambio de índices. Obsérvese así mismo que las medias de  $\mathbf{W}$  y de  $\mathbf{u}$  son cero. Nótese también que, al aplicar este algoritmo al caso que nos ocupa de poblaciones estelares, el máximo de  $|D_i|$  se da para la segunda componente  $\theta$ , lo cual se corresponde con el subíndice 2.

Calculamos ahora los momentos de tercer y cuarto orden de  $\mathbf{W}$  en función de los correspondientes de  $\mathbf{u}$ . Utilizando la notación vista en la ecuación 1-17 sobre los momentos de una distribución:

$$\begin{aligned}\langle W_\alpha W_\beta W_\gamma \rangle &= H_{\alpha i} H_{\beta i} H_{\gamma i} \mu_{ijk} \\ \langle W_\alpha W_\beta W_\gamma W_\delta \rangle &= H_{\alpha i} H_{\beta i} H_{\gamma i} H_{\delta i} \mu_{ijkl}\end{aligned} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta, i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \quad 3-2$$

Esto nos permite establecer algunas relaciones entre los cumulantes. Para ello utilizamos las veinticinco componentes de los siguientes vectores y tensores bidimensionales  $\mathbf{o}_3$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{X}_4$ ,  $\mathbf{Y}_3$ ,  $\mathbf{Z}_2$ ,  $\mathbf{T}$  con los índices  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 3\}$  y los índices  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ . Serán expresiones en donde intervienen los cumulantes de tercer y cuarto orden de la muestra total:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_4|_{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv X_{\alpha\beta\gamma\delta} = H_{\alpha i} H_{\beta i} H_{\gamma i} H_{\delta i} k_{ijkl} \\ \mathbf{Y}_3|_{\alpha\beta\gamma} &\equiv Y_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha i} H_{\beta i} H_{\gamma i} k_{ijk} \\ \mathbf{Z}_2|_{\alpha\beta} &\equiv Z_{\alpha\beta} = H_{\alpha i} H_{\beta i} k_{ij2} \\ \mathbf{T}|_{\alpha} &\equiv T_{\alpha} = H_{\alpha i} k_{i22}\end{aligned} \quad \begin{aligned}\mathbf{o}_3|_{\alpha\beta\gamma} &\equiv o_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha i} H_{\beta i} H_{\gamma i} k_{ijk} \\ \mathbf{p}_2|_{\alpha\beta} &\equiv p_{\alpha\beta} = H_{\alpha i} H_{\beta i} k_{ij2} \\ \mathbf{s}|_{\alpha} &\equiv s_{\alpha} = \frac{1}{2} H_{\alpha i} k_{i22}\end{aligned} \quad 3-3$$

A continuación, podemos escribir estas expresiones de forma explícita.

$$\begin{aligned}o_{111} &= -k_{222}d_1^3 + 3k_{122}d_1^2d_2 - 3k_{112}d_1d_2^2 + k_{111}d_2^3 \\ o_{333} &= -k_{222}d_3^3 + 3k_{223}d_3^2d_2 - 3k_{233}d_3d_2^2 + k_{333}d_2^3 \\ o_{113} &= -k_{222}d_1^2d_3 + k_{223}d_1^2d_2 + 2k_{122}d_1d_2d_3 - 2k_{123}d_1d_2^2 - k_{112}d_2^2d_3 + k_{113}d_2^3 \\ o_{133} &= -k_{222}d_3^2d_1 + k_{122}d_3^2d_2 + 2k_{223}d_1d_2d_3 - 2k_{123}d_3d_2^2 - k_{233}d_2^2d_1 + k_{133}d_2^3\end{aligned} \quad 3-4$$

$$\begin{aligned}p_{33} &= k_{222}d_3^2 - 2k_{223}d_2d_3 + k_{233}d_2^2 \\ p_{13} &= k_{222}d_1d_2d_3 - k_{223}d_2d_1 - k_{122}d_2d_3 + k_{123}d_2^2 \\ p_{11} &= k_{222}d_1^2 - 2k_{122}d_2d_1 + k_{112}d_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_3 &= \frac{1}{2}(-k_{222}d_3 + k_{223}d_2) \\ s_1 &= \frac{1}{2}(-k_{222}d_1 + k_{122}d_2)\end{aligned} \quad 3-5$$

$$\begin{aligned}
X_{3333} &= k_{2222}d_3^4 - 4k_{2223}d_2d_3^3 + 6k_{2233}d_2^2d_3^2 - 4k_{2333}d_2^3d_3 + k_{3333}d_3^4 \\
X_{1333} &= k_{2222}d_1d_3^3 - k_{1222}d_2d_3^3 - 3k_{2223}d_1d_2d_3^2 + 3k_{1223}d_2^2d_3^2 + k_{2233}d_1d_2^2d_3 - 3k_{1233}d_2^3d_3 - \\
&- k_{233}d_1d_2^3 + k_{1333}d_2^4 \\
X_{1133} &= k_{2222}d_1^2d_3^2 - 2k_{2223}d_2d_1^2d_3 - 2k_{1222}d_1d_2d_3^2 + k_{2233}d_2^2d_1^2 + 4k_{1223}d_1d_2^2d_3 + k_{1122}d_2^2d_3^2 - \\
&- 2k_{1233}d_1d_2^3 - 2k_{1123}d_2^2d_3 + k_{1133}d_2^4 \\
X_{1113} &= k_{2222}d_3d_1^3 - k_{2223}d_2d_1^3 - 3k_{1222}d_3d_2d_1^2 + 3k_{1223}d_2^2d_1^2 + 3k_{1122}d_1d_2^2d_3 - 3k_{1123}d_2^3d_1 - \\
&- k_{1112}d_3d_2^3 + k_{1113}d_2^4 \\
X_{1111} &= k_{2222}d_1^4 - 4k_{1222}d_2d_1^3 + 6k_{1122}d_2^2d_1^2 - 4k_{1112}d_2^3d_1 + k_{1111}d_2^4 \\
Y_{333} &= -k_{222}d_3^3 + 3k_{2223}d_2d_3^2 - 3k_{2233}d_2^2d_3 + k_{2333}d_2^3 \\
Y_{133} &= -k_{222}d_1d_3^2 + 2k_{2223}d_1d_2d_3 + k_{1222}d_3^2d_2 - k_{2233}d_2^2d_1 - 2k_{1223}d_2^2d_3 + k_{1233}d_2^3 \\
Y_{113} &= -k_{222}d_3d_1^2 + 2k_{1222}d_1d_2d_3 + k_{2223}d_1^2d_2 - 2k_{1223}d_2^2d_1 - 2k_{1122}d_2^2d_3 + k_{1123}d_2^3 \\
Y_{111} &= -k_{222}d_1^3 + 3k_{1222}d_2d_1^2 - 3k_{1122}d_2^2d_1 + k_{1112}d_2^3 \\
Z_{33} &= k_{2222}d_3^2 - 2k_{2223}d_2d_3 - k_{2233}d_2^2 \\
Z_{13} &= k_{2222}d_1d_3 - k_{2223}d_2d_1 - k_{1222}d_2d_3 + k_{1223}d_2^2 \\
Z_{11} &= k_{2222}d_1^2 - 2k_{1222}d_1d_2 - k_{1122}d_2^2 \\
T_3 &= -k_{2222}d_3 + k_{2223}d_2 \\
T_1 &= -k_{2222}d_1 + k_{1222}d_2
\end{aligned} \tag{3-6}$$

### 3.1.3 Cálculo de los parámetros de la mezcla

Sustituyendo las expresiones 2-41 en 3-3 obtendremos una serie de relaciones entre estas variables.

- Como consecuencia de la simetría existente en la dirección que hemos definido, puede demostrarse (Cubarsi 1992) que los cumulantes de orden 3 del vector  $\mathbf{W}$  en cuanto a sus componentes  $W_1$  y  $W_3$  son nulos, de modo que podemos escribir:

$$o_{\alpha\beta\gamma} = 0; \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 3\} \tag{3-7}$$

Lo cual proporciona cuatro combinaciones lineales idénticamente nulas que permiten calcular las componentes  $d_1$  y  $d_3$  del vector normalizado  $\mathbf{d}$ , aportando además, dos condiciones de ligadura. Conociendo estas componentes, ya es posible calcular todas las componentes tensoriales definidas en 3-3.

- A partir 3-3 también pueden escribirse las siguientes relaciones referentes a las componentes del tensor  $\mathbf{p}_2$  y el vector  $\mathbf{s}$ .

$$\begin{aligned}
p_{\alpha\beta} &= D_2 H_{\alpha i} H_{\beta i} C_{ij} \\
s_{\alpha} &= D_2 H_{\alpha i} C_{i2}
\end{aligned} \tag{3-8}$$

Estas expresiones permiten escribir el tensor  $\mathbf{K}_4$  como función de los cumulantes de orden tres:

- Los cumulantes de segundo, tercer y cuarto orden quedan ligados por una serie de catorce relaciones con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 3\}$  :

$$\begin{aligned}
X_{\alpha\beta\gamma\delta} &= A(p_{\alpha\beta}p_{\gamma\delta} + p_{\alpha\gamma}p_{\beta\delta} + p_{\alpha\delta}p_{\beta\gamma}) \\
Y_{\alpha\beta\gamma} &= A(p_{\alpha\beta}s_\gamma + p_{\alpha\gamma}s_\beta + p_{\beta\gamma}s_\alpha) \\
Z_{\alpha\beta} &= 2As_\alpha s_\beta + Bp_{\alpha\beta} \\
T_\alpha &= 3Bs_\alpha
\end{aligned} \tag{3-9}$$

En donde se han definido las variables

$$A = D_2^{-2} \text{ y } B = C_{22}D_2^{-1} \tag{3-10}$$

Este sistema 3-9 puede escribirse explícitamente como:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{X_{1111}}{3p_{11}^2} = \frac{X_{1113}}{3p_{11}p_{13}} = \frac{X_{1133}}{p_{11}p_{33} + 2p_{13}^2} = \frac{X_{1333}}{3p_{13}p_{33}} = \frac{X_{3333}}{3p_{33}^2} = \\
&= \frac{Y_{111}}{3p_{11}s_1} = \frac{Y_{113}}{p_{11}s_3 + 2p_{13}s_1} = \frac{Y_{133}}{p_{33}s_1 + 2p_{13}s_3} = \frac{Y_{3333}}{3p_{33}s_3} \\
B &= \frac{1}{p_{11}}(Z_{11} - 2s_1^2 A) = \frac{1}{p_{13}}(Z_{13} - 2s_1s_3 A) = \frac{1}{p_{33}}(Z_{33} - 2s_3^2 A) = \frac{T_1}{3s_1} = \frac{T_3}{3s_3}
\end{aligned} \tag{3-11}$$

Este es un sistema lineal en A y B de catorce ecuaciones sobredeterminado que si lo resolvemos nos proporcionará las dos incógnitas A y B y, a partir de ahí.  $D_2$  y  $C_{22}$  de donde se obtendrán también  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}_2$ .

La fracción de población podrá obtenerse de la variable  $q$  que aparece en las dos siguientes relaciones. Obsérvese que esto nos proporciona una nueva condición de ligadura.

$$\begin{aligned}
k_{222} &= 3C_{22}D_2 + 2qD_2^3 \\
k_{2222} &= 3C_{22}^2 - 2(q^2 + 1)D_2^4
\end{aligned} \tag{3-12}$$

Además, de la primera de las dos ecuaciones anteriores puede determinarse el signo de  $D_2$  y  $C_{22}$ . Así mismo, esto nos proporcionará dos valores diferentes para  $q$ . Al igual que el resto de parámetros del modelo, éste también será ajustado de forma que de lugar al menor error posible.

Las restante cinco componentes del tensor  $\mathbf{C}_2$  pueden determinarse a partir de las ecuaciones 3-8 que implican a los cumulantes totales de tercer orden. Así mismo, pueden obtenerse a partir de la última expresión de 2-42, a partir de los cumulantes de cuarto orden.

En el primer caso tendremos para  $i, j = 1, 3$ :

$$C_{i2} = \frac{1}{d_2} \left( \frac{s_i}{D_2} + d_i C_{22} \right)$$

$$C_{ij} = \frac{1}{d_2^2} \left( \frac{p_{ij}}{D_2} + d_j d_2 C_{i2} + d_i d_2 C_{j2} + d_i d_j C_{22} \right)$$
3-13

Y en el segundo,

$$\frac{k_{1111} - 3C_{11}^2}{D_1^4} = \frac{k_{2222} - 3C_{22}^2}{D_2^4} = \frac{k_{3333} - 3C_{33}^2}{D_3^4} =$$

$$= \frac{k_{1122} - C_{11}C_{22} - 2C_{12}^2}{D_1^2 D_2^2} = \frac{k_{1133} - C_{11}C_{33} - 2C_{13}^2}{D_1^2 D_3^2} = \frac{k_{3322} - C_{22}C_{33} - 2C_{32}^2}{D_2^2 D_3^2}$$
3-14

Una vez más, se utilizará una u otra forma de estimar los valores de las variables dependiendo de los valores de los errores a que conduzcan. La utilización de muestras sintéticas (ver 3.5) permite llevar a cabo un entrenamiento del método y recomiendan utilizar 3-13 mejor que 3-14. Esto es consecuencia de que los cumulantes de tercer orden presentan menores errores que los de cuarto y, si son diferentes de cero (como es el caso), aportan mejor información. Así mismo, se observa que en el caso de que  $D_1$  y  $D_3$  sean pequeñas (esto es, baja diferencia de velocidad de los subcentroides en las direcciones radial y perpendicular), tampoco será conveniente utilizar 3-14.

## 3.2 Método de cálculo

### 3.2.1 Aplicación numérica de las expresiones algebraicas

Los pasos seguidos en el método de cálculo han sido los que se describen a continuación:

#### 3.2.1.1 Lectura de datos y cálculo de cumulantes

Lectura de los momentos de orden 2, 3 y 4, junto con sus correspondientes errores, de la muestra global que va a ser separada en dos poblaciones parciales. Cálculo de los cumulantes y errores de orden cuarto de acuerdo con 2-38.

Como se ha dicho, los k-estadísticos son estimadores no sesgados de los cumulantes de la población, cosa que no sucede con los momentos de la muestra. Las relaciones entre los momentos centrados de una muestra y los correspondientes k-estadísticos son las que figuran a continuación. Los cumulantes y momentos centrados de primer orden coinciden mientras que para los de órdenes superiores,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_2 &= \frac{N}{N-1} \mathbf{M}_2 \\
\mathbf{K}_3 &= \frac{N^2}{(N-1)(N-2)} \mathbf{M}_3 \\
\mathbf{K}_4 &= \frac{N^2}{(N-1)(N-2)(N-3)} [(N+1)\mathbf{M}_4 - 3(N-1)\mathbf{M}_2 * \mathbf{M}_2]
\end{aligned}
\tag{3-15}$$

### 3.2.1.2 Determinación del vector normalizado $\mathbf{d}$

Al considerarse sólo dos poblaciones parciales, el centroide común se encontrará sobre la dirección que une los dos centroides parciales. Esto significa que existen direcciones de distribución simétrica según se ha explicado en 3.1.3 con lo que sucede la condición 3-7. Con esta condición y a partir de los cumulantes de orden 3, mediante las expresiones 3-4 se calculan las variables auxiliares  $d_i$ , componentes del vector normalizado  $\mathbf{d}$ . Así mismo, se calculan los errores de estas variables. Se ha comprobado que el error de estimación de  $d_1$  y  $d_3$  se reduce trabajando con el conjunto completo de ecuaciones 3-4. Se procede de la siguiente manera.

En primer lugar, las dos primeras expresiones de 3-4 constituyen sendas ecuaciones cúbicas que darán directamente como resultado los valores de las componentes  $d_i$ . La resolución de estas ecuaciones cúbicas conducen a una única solución real que cumpla  $|d_i| \leq 1$  que se tomará como el valor de partida de la componente del vector.

A continuación, recordando que  $d_2=1$ , las dos siguientes expresiones de 3-4, pueden expresarse como:

$$d_1 = \frac{k_{122}d_3^2 - 2k_{123}d_3 + k_{133}}{k_{222}d_3^2 - 2k_{223}d_3 + k_{233}}, \quad d_3 = \frac{k_{223}d_1^2 - 2k_{123}d_1 + k_{113}}{k_{222}d_1^2 - 2k_{122}d_1 + k_{112}}
\tag{3-16}$$

Los valores de  $d_1$  y  $d_3$  obtenidos mediante las dos primeras ecuaciones cúbicas, pueden introducirse como valores iniciales en estas dos ecuaciones y recalcularse de forma iterativa. Se observa que, para valores de las  $d_i$  de entrada como las que tenemos, el proceso iterativo es convergente después de muy pocos pasos. De este modo se obtienen unos segundos valores para las  $d_i$ .

Finalmente, las dos parejas de  $d_1, d_3$  se promedian mediante un sistema de mínimos cuadrados. El proceso para llevar a cabo este promedio es el siguiente:

- Linealización de las ecuaciones 3-4 sustituyendo la función por el plano tangente a la misma en el punto  $d_i$  encontrado previamente. Si estas expresiones las tratamos como funciones implícitas de  $d_1$  y  $d_2$  tendremos:

$$F_i(d_1, d_3) = F_i(\tilde{d}_1, \tilde{d}_3) + \frac{\partial F_i}{\partial d_1}(d_1 - \tilde{d}_1) + \frac{\partial F_i}{\partial d_3}(d_3 - \tilde{d}_3); i=1, \dots, 4 \quad 3-17$$

En donde  $F_i(d_1, d_3)$  es la función linealizada y, en nuestro caso,  $F_i(\tilde{d}_1, \tilde{d}_3) = 0$ ;  $\tilde{d}_1, \tilde{d}_3$  son las soluciones aproximadas obtenidas en los pasos anteriores.

- Esto da lugar a un sistema de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas que resolvemos por mínimos cuadrados.

De hecho esto es un método de Newton-Raphson sobredeterminado combinado con resolución por mínimos cuadrados, por lo que un proceso iterativo de este ajuste de las soluciones se muestra convergente. Las soluciones resultantes de este sistema de mínimos cuadrados son los valores estimados para las  $d_i$ .

Pueden existir ocasiones en las que un valor cercano a cero en alguno de los cumulantes en los datos de partida no permite usar todas las ecuaciones descritas anteriormente. En tal caso, el algoritmo de cálculo también permite que las componentes del vector  $\mathbf{d}$  se puedan aproximar mediante modelos más simplificados tales como aquellos que presenten suposición de simetría cilíndrica, plano galáctico de simetría, distribución situada en el plano de simetría o rotación diferencial pura (Ros 1985, Cubarsi 1988). El criterio que define cuál de los caminos es el que proporciona las  $d_i$  vendrá determinado, como en el resto de parámetros del modelo, por los errores a los que conduce y la exactitud de la aproximación.

### 3.2.1.3 Cálculo de las incógnitas A y B

Con las componentes del vector  $\mathbf{d}$  y los cumulantes de tercer y cuarto orden, de acuerdo con 3-5 y 3-6 se calculan los vectores y tensores bidimensionales  $\mathbf{p}_2, \mathbf{s}, \mathbf{X}_4, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Z}_2, \mathbf{T}$ . Puesto que las variables A y B están relacionadas con estos según 3-11, esto da lugar a un sistema sobredimensionado de catorce ecuaciones con dos incógnitas: A y B.

Se procede al cálculo de los errores de los elementos anteriores. El cálculo de los errores de cada una de las igualdades 3-11 se hace según el método estadístico de la propagación de errores (p.e. Barlow 1989) calculando la matriz de covarianzas de los errores de los resultados  $\bar{y}(\bar{x})$  a partir de la matriz de covarianzas de los datos de las variables  $\bar{x}$ .

$$\mathbf{V}_{\bar{y}} = \mathbf{G} \mathbf{V}_{\bar{x}} \mathbf{G}^t; \quad G_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \quad 3-18$$

De esta forma, y a diferencia del cálculo de propagación de intervalos de error (Cubarsi 1988) los errores quedan mejor acotados y representados. Esta forma de proceder con los errores se volverá a aplicar para calcular la propagación de los mismos a través del algoritmo de cálculo (3.3.1.1).

Además, a la hora de estimar los parámetros por el método de mínimos cuadrados, si se quieren obtener estimadores no sesgados de varianza mínima, será necesario ponderar el sistema de mínimos cuadrados (o ecuaciones normales) mediante una matriz de pesos  $\mathbf{W}$  que sea la inversa de la matriz de covarianzas  $\mathbf{V}$  de los errores del sistema de ecuaciones (p.e. Stuart & Ord 1987). En la mayoría de los casos se desconoce el tipo de distribución de los errores de los datos. No obstante, puede suponerse que son aproximadamente gaussianos si nos basamos en el Teorema Central del Límite y tenemos en cuenta que se utiliza un conjunto muy numeroso de datos. En tal caso, como es sabido, el resultado obtenido por mínimos cuadrados ponderados también proporciona estimadores de máxima verosimilitud. En resumen, al aplicar este método estamos buscando estimadores de mínima varianza y máxima verosimilitud del sistema de ecuaciones de ligadura.

#### 3.2.1.4 Determinación de resultados

Las incógnitas de este sistema de mínimos cuadrados están ya relacionadas de forma directa con el valor de los momentos de orden 2 de cada una de las muestras parciales supuestas gaussianas. Mediante las expresiones 3-13 ó 3-14 (ya se ha dicho que se comporta mejor la primera) se evalúan el resto de componentes del tensor  $\mathbf{C}_2$ . Las expresiones 3-12 proporcionan el valor de  $q$  y 2-40 el valor de  $n'$  y, consecuentemente, de  $n''$ . La primera expresión de 2-42 proporciona el tensor  $\mathbf{a}_2$ .

De ahí ya pueden obtenerse los valores de los momentos de orden 2 de cada población parcial. Así mismo se da la velocidad de cada subcentroide en las tres direcciones  $\mathbf{\Pi}$ ,  $\mathbf{\Theta}$ ,  $\mathbf{Z}$  y el tanto por ciento de abundancia de cada una de las dos poblaciones determinadas o fracción de población. En el apartado 3.3 están descritos los criterios según los cuales se ha hecho el cálculo de errores.

De acuerdo con las propiedades de los cumulantes que hemos visto (2.5.1.2), cabe esperar que si el sistema presenta mucha simetría, las expresiones que conducirán a las soluciones de menor error quedarán mejor representadas a través de los cumulantes de orden cuatro. Por contra, si sucediera que el sistema presentara únicamente rotación diferencial, tales soluciones serán aquellas en las que intervengan de forma más decisiva los cumulantes de tercer orden.

**Observación:** Nótese en este punto que los parámetros que condicionan el modelo son los resultados del sistema de ecuaciones 3-11. Es decir, los parámetros cinemáticos  $n^i$ ,  $\mathbf{v}^{(i)}$ ,  $\mathbf{M}_2^{(i)}$  que se pretenden calcular, se deducen a partir de tales incógnitas que dan como resultado las componentes del vector  $\mathbf{D}$  y el tensor  $\mathbf{C}_2$ . Por lo tanto, el vector de parámetros  $\mathbf{o}_i$  introducido en 2.2 resulta ser en realidad  $\mathbf{o}_i = \{\mathbf{D}, \mathbf{C}_2\}$ .

### ***3.3 Estimación de errores y de la fiabilidad del método***

Se han utilizado dos vías para estimar el error que se comete con este modelo en el que la muestra total se aproxima por dos poblaciones parciales a las que se impone distribución normal. Por un lado se ha evaluado el error de cálculo cometido simplemente como propagación del error de los datos de origen a través de las diferentes expresiones aritméticas. En segundo lugar se calcula la cantidad  $\chi^2$  asociada a cómo se distribuyen los errores entre valores reales y aproximados, en nuestro caso los momentos. De este modo  $\chi^2$  nos permite dar una idea de la fiabilidad de la aproximación.

#### *3.3.1.1 Cálculo del error cometido*

Por la propia concepción del modelo numérico, los errores que intervienen en el cálculo son, además de los errores de los datos de partida, los errores de cálculo que se generan en el sistema de mínimos cuadrados. Estos errores se calculan de acuerdo con la expresión 3-18 tal y como se explica en 3.2.1.3. Se utiliza propagación cuadrática de errores a través de las diferentes expresiones aritméticas. En esta propagación, se realiza la simplificación de tomar la matriz de errores diagonal sin correlaciones, es decir, se considera que las variables son independientes. Por otro lado, como consecuencia del criterio de selección de la muestra (ver 4.2), para la fracción de población no se ha llevado a cabo la propagación estadística de errores sino que se ha asignado el error correspondiente a la mínima cantidad detectable de población minoritaria (<2%).

### 3.3.1.2 Test $\chi^2$

Una vez obtenidos los valores de los momentos de segundo orden y de las velocidades de los subcentroides de cada una de las poblaciones parciales obtenidas, se calcula la función  $\chi^2$  que permite establecer un orden de magnitud de la fiabilidad de la aproximación (p.e. Barlow 1989). Es decir, se utiliza la cantidad  $\chi^2$  en el sentido de proporcionar un error cuadrático medio ponderado de acuerdo con la expresión:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^E \frac{[y_i - f(y_i)]^2}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^E \left( \frac{y_i^{real} - y_i^{aprox.}}{error\_esperado} \right)^2 \quad 3-19$$

En donde  $E$  es el número de ecuaciones que intervienen en el sistema. De la definición de esta función se deduce que un valor de  $\frac{\chi^2}{E}$  del entorno de 1 significa que el error del ajuste es del orden de los errores de los datos, por lo que éste es el valor que cabe esperar. Sucede además que esta cantidad presenta una distribución de probabilidad  $\chi^2$  (Barlow 1989).

No obstante, puede darse el caso de que una sobrestimación de los errores de cálculo provoque que éstos sean muy grandes falseándose el valor de  $\chi^2$  y llevándolo a ser muy pequeño. Un resultado de este tipo debe ser entonces descartado a la luz de los errores que se obtengan para los parámetros que se deduzcan. También puede suceder lo contrario, es decir, que una infraestimación de los errores genere una  $\chi^2$  más alta de lo que cabría esperar. Como se ve, trabajar con esta cantidad puede llevar implícita una cierta subjetividad.

Por este motivo, para formalizar estas ideas podemos introducir la **probabilidad de  $\chi^2$** ,

$$p(\chi^2; E) = \int_{\chi^2}^{\infty} p(\chi'^2; E) d\chi'^2 \quad 3-20$$

que nos da la probabilidad de que una función que describe un grupo de  $E$  datos proporcione un valor de  $\chi^2$  mayor o igual que el realmente obtenido. Es decir, que esta integral indica la probabilidad de equivocarnos. Se considera aceptable una probabilidad  $\chi^2$  del orden de  $p \approx 10\%$ . Por ejemplo, para el caso de un grupo de 15 datos, un valor de  $\chi^2 = 22,31$  da lugar a ese valor de probabilidad  $\chi^2$ .

El cálculo de la cantidad  $\chi^2$  se realiza para diferentes valores de los parámetros que definen el modelo de cara a buscar la más ajustada de las aproximaciones. El proceso de cálculo de  $\chi^2$  es como sigue:

- Utilización de los momentos de segundo orden y las velocidades de los subcentroides calculadas así como de la fracción de población obtenida para cada componente parcial.

- Recálculo de los cumulantes de segundo, tercer y cuarto orden de acuerdo con las expresiones 2-30, 2-33, 2-36 y 2-38. Estos valores constituyen las variables denominadas  $y_i^{aprox.}$ . Los valores reales así como los errores esperados son los datos de partida para la muestra considerada.
- Cálculo de la cantidad  $\chi^2$  según la expresión anterior 3-19.
- Ajuste de los parámetros del modelo recalculando la función  $\chi^2$ . Es decir, elección de los algoritmos de cálculo más apropiados para llegar a la solución óptima. Esta necesidad de elección se produce en diversas ocasiones. Una es la descrita en el criterio de solución 3.2.1.2. También se ha visto el caso explicado en 3.1.3. De este modo es posible decidir cuáles son los parámetros que hacen que las dos gaussianas parciales se ajusten mejor a la muestra global.
- Posible reajuste de la selección de la muestra recalculando  $\chi^2$  con el fin de verificar la fiabilidad del criterio por el cual es seleccionada (ver apartado 4.2.5).

Se ha dicho más arriba que un valor de  $\chi^2$  normalizado del orden de 1 o menor indica que la aproximación es válida. No obstante, la forma correcta de trabajar con esta cantidad  $\chi^2$  es utilizando el cociente,

$$P = \frac{\chi^2}{E - \nu} \quad 3-21$$

en donde  $\nu$  es el número de parámetros que se ajustan por lo que la diferencia es el *número de grados de libertad*. De acuerdo con esto, la probabilidad  $\chi^2$  se convierte entonces en  $p(\chi^2; E - \nu)$ .

En nuestro caso (ver 2.5.1.4)  $E=31$  (las del sistema 2-42 en las que aparecen los cumulantes de segundo, tercer y cuarto orden) y  $\nu=16$  por lo que hay 15 grados de libertad que coinciden con las quince condiciones de ligadura. Por lo tanto, podremos considerar como un buen ajuste el que da lugar a un valor de  $P \leq 1,49$ .

### 3.4 Superposición de muestras ideales

#### 3.4.1 Poblaciones ideales

El presente modelo se ha aplicado a diferentes muestras. En primer lugar, se ha comprobado su validez utilizando poblaciones ideales. Hablaremos de poblaciones ideales y no de muestras ideales puesto que los valores de sus momentos no provienen de una muestra estadística sino de parámetros poblacionales que representan poblaciones estelares típicas. Así pues, entenderemos por poblaciones ideales aquellas que están compuestas por la superposición de  $n$  gaussianas puras sin errores y cuyos valores de los momentos de orden 2 se extraen de los valores habituales publicados por diferentes autores.

Esta parte de aplicación numérica sirve para extraer conclusiones sobre el comportamiento del método que luego volverán a encontrarse cuando se usen muestras sintéticas. Permite estudiar el comportamiento del modelo de clasificación en dos poblaciones cuando se tiene en realidad una superposición de tres o más distribuciones gaussianas.

### 3.4.2 Superposición de poblaciones ideales

El procedimiento que se ha llevado a cabo es el compuesto por los pasos siguientes:

- Adopción de valores dados por diferentes autores para varias componentes típicas de la estructura de la Galaxia.
- Cálculo de los cumulantes totales de una hipotética distribución global compuesta de esas poblaciones parciales.
- Aplicación del método numérico a la distribución global calculada para aproximarla por dos poblaciones gaussianas.
- Comparación de los valores de los momentos de segundo orden parciales calculados con los originales, así como de las proporciones de la mezcla.
- Representación gráfica de la componente angular de la velocidad  $V$  para valores representativos de poblaciones del entorno solar puesto que esta componente es la que presenta mayores diferencias para reflejar los resultados.

### 3.4.3 Resultados

Al superponer poblaciones ideales y aplicarles el método numérico de aproximación por dos gaussianas se han obtenido los siguientes resultados:

- Obviamente, al superponer dos poblaciones ideales y separarlas posteriormente se recuperan de forma exacta las poblaciones de partida.
- Al superponerse más de dos poblaciones, y clasificarse sólo en dos, una de las dos poblaciones obtenidas es muy similar a la más dispersa de las compuestas y la otra es una composición de las restantes.
- Lógicamente, cuanto mayor es la diferencia entre los centroides de las componentes parciales, más fácil es la separación.
- Se observa también que el método separa tanto mejor cuanto más dispersa es una de las poblaciones respecto del conjunto de las demás. Esto último era de esperar debido a que el error relativo de los valores de los momentos calculados para las componentes parciales es tanto menor cuanto más alto sean los valores de los momentos. Veamos que es así:

### 3.4.3.1 Comprobación

En primer lugar, definimos el tensor de segundo orden:

$$\mathbf{b}_2 = \mathbf{K}'_2 - \mathbf{K}''_2 \quad 3-22$$

Si tomamos la segunda (“) como población más dispersa significa que  $\mathbf{b}_2$  toma valores negativos en las diagonales. Por otro lado, a partir de 2-40 2-41 puede deducirse que:

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{n'n''}}(\mathbf{C}_2 + q\mathbf{D}^2) \quad 3-23$$

En el procedimiento de cálculo,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}_2$  son constantes para una superposición dada y se obtienen independientemente de  $n^i$  o  $q$ , directamente a partir de los momentos o cumulantes totales y con errores relativamente bajos. En cambio  $q$ , y en consecuencia  $n'$  y  $n''$ , son valores peor determinados y representan la principal fuente de propagación de errores. Por tanto, en primera aproximación podremos suponer que  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}_2$  y  $\mathbf{a}_2$  son parámetros característicos de la mezcla y el error proviene de la estimación de  $n'$  y  $\mathbf{b}_2$ . (En cualquier caso, la contribución al error por parte de  $\mathbf{a}_2$  es la misma para  $\mathbf{M}'_2$  que para  $\mathbf{M}''_2$ ). De acuerdo con esto, podemos escribir,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M}'_2 = \mathbf{a}_2 + n''\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{M}''_2 = \mathbf{a}_2 - n'\mathbf{b}_2 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{M}'_2}{\partial n'} = 1 - (\mathbf{b}_2 + n'\Omega) = -\frac{\partial \mathbf{M}'_2}{\partial n''} \\ \frac{\partial \mathbf{M}''_2}{\partial n'} = -(\mathbf{b}_2 + n'\Omega) = -\frac{\partial \mathbf{M}''_2}{\partial n''} \end{array} \right\} \text{llamando } \Omega = \frac{\partial \mathbf{b}_2}{\partial n'}$$

De modo que  $d\mathbf{M}'^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial n'}\right)^2 \sigma_{n'}^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{M}'}{\partial n''}\right)^2 \sigma_{n''}^2 = 2(1 - \Psi)^2 \sigma_n^2$ , y  $d\mathbf{M}''^2 = 2\Psi^2 \sigma_n^2$ , en donde

$\Psi = \mathbf{b} + n'\Omega$ . Se deduce que:

$$\frac{\Omega}{\mathbf{b}} = \frac{n' - n''}{2n'n''} \geq 0 \text{ luego } \Omega \text{ y } \mathbf{b} \text{ tienen el mismo signo.}$$

Con lo cual  $|\Psi| = |\mathbf{b} + n'\Omega| \geq |\mathbf{b}|$ .

Puesto que  $\mathbf{b}$  toma valores del orden de los momentos de segundo orden,  $\Psi^2 \approx (1 - \Psi)^2$  lo cual es equivalente a decir  $d\mathbf{M}'^2 \approx d\mathbf{M}''^2$ . Y por lo tanto, los errores relativos son menores cuanto mayor sea la dispersión de la población.

### 3.4.4 Ejemplos de resultados

#### Ejemplo 1

Poblaciones Ideales de entrada

M2 (1, 1)   M2 (2, 2)   M2 (3, 3)   V (1)   V (2)   V (3)   F

1600.0	900.0	400.0	.0	15.0	.0	.60
4900.0	2500.0	2025.0	.0	30.0	.0	.25
16900.0	11025.0	5625.0	.0	50.0	.0	.15

(F indica fracción de población o proporción en la mezcla)

Poblaciones calculadas

2516.9	1416.3	812.2	.0	18.9	.0	.85
17461.2	10998.9	6088.5	.0	53.3	.0	.15

## Ejemplo 2

Poblaciones Ideales de entrada

M2 (1,1)	M2 (2,2)	M2 (3,3)	V(1)	V(2)	V(3)	F
1600.0	900.0	400.0	.0	.0	.0	.60
4900.0	2500.0	2025.0	.0	50.0	.0	.25
16900.0	11025.0	7225.0	.0	200.0	.0	.15

Poblaciones calculadas

2227.0	1212.9	716.0	.0	9.9	.0	.82
15991.4	10125.8	6866.7	.0	190.0	.0	.18

Estas Poblaciones se corresponden a (Gilmore & Wyse 1987):

POBLACIÓN I = DISCO FINO (THIN DISK) 40:30:20

POBLACIÓN II INTERMEDIA = DISCO GRUESO (THICK DISK) 70:50:45

POBLACIÓN II EXTREMA = HALO 130:105:85

### Ejemplo 3

Poblaciones Ideales de entrada

M2(1,1)	M2(2,2)	M2(3,3)	V(1)	V(2)	V(3)	F
900.0	484.0	225.0	.0	1.0	.0	.40
5625.0	3600.0	2025.0	.0	-50.0	.0	.40
16900.0	12100.0	6400.0	.0	-200.0	.0	.20

Poblaciones calculadas

2524.3	1475.8	841.7	.0	-15.9	.0	.74
15864.2	11462.1	5992.9	.0	-184.0	.0	.26

Estas Poblaciones se corresponden a (Nemec & Nemec 1992):

Disco fino 30:22:15

Disco grueso 75:60:45

Halo 130:110:80

### Ejemplo 4

Poblaciones Ideales de entrada

M2(1,1)	M2(2,2)	M2(3,3)	V(1)	V(2)	V(3)	F
900.0	484.0	225.0	.0	1.0	.0	.40
1600.0	900.0	625.0	.0	-30.0	.0	.25
2500.0	1600.0	900.0	.0	-60.0	.0	.10
6400.0	3600.0	2500.0	.0	-130.0	.0	.05
16900.0	12100.0	6400.0	.0	-200.0	.0	.20

Poblaciones calculadas

1288.4	1142.8	423.8	.0	-18.5	.0	.77
15981.2	11203.5	6081.0	.0	-195.1	.0	.23

Estas Poblaciones se corresponden a (Nemec & Nemec 1992):

Disco joven 30:22:15

Disco intermedio 40:30:25

Disco viejo 50:40:30

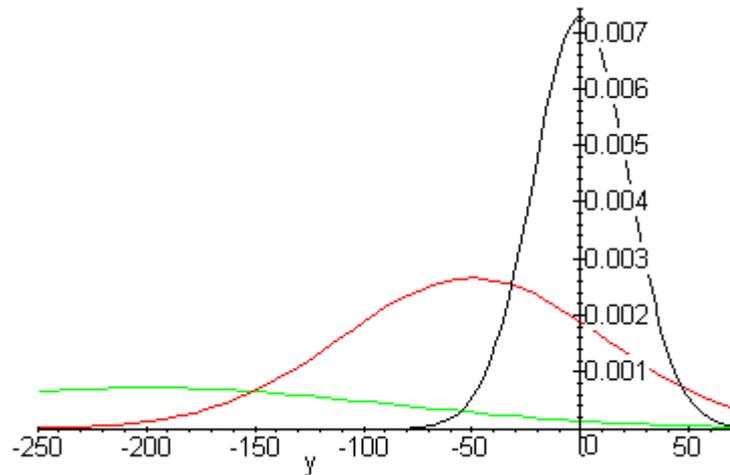
Halo intermedio 80:60:50

Halo extremo 130:110:80

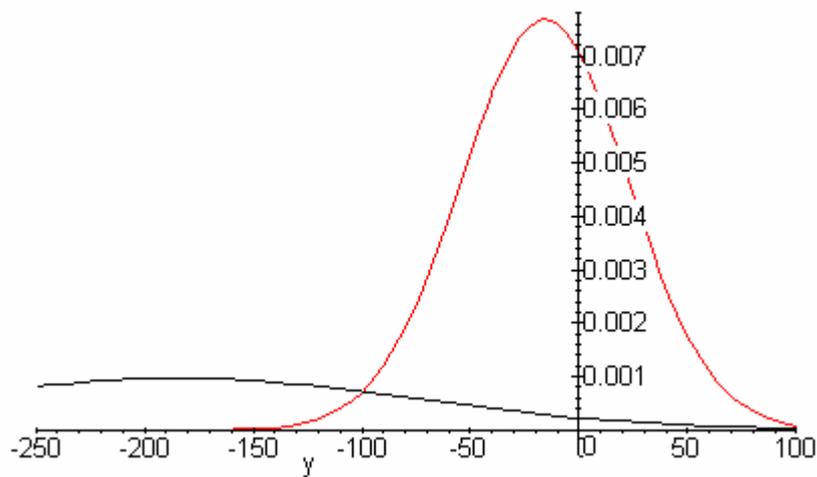
### 3.4.5 Representación gráfica de los resultados

(Estas representaciones gráficas han sido realizadas con Maple-V<sup>®</sup>)

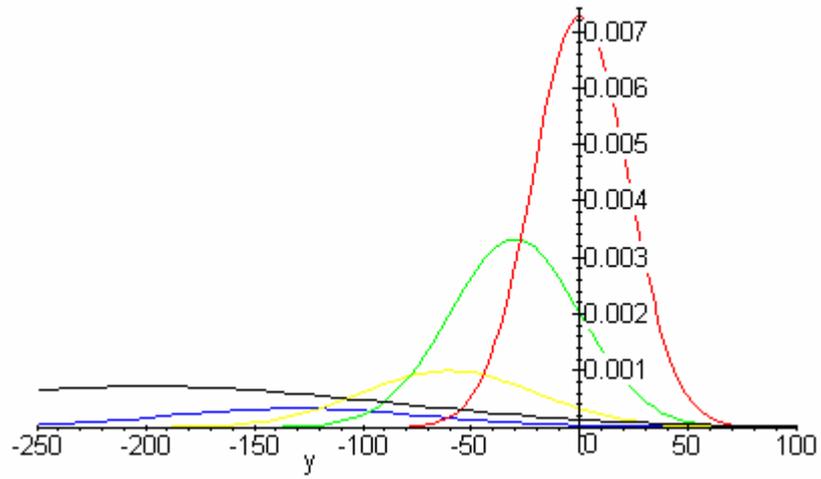
- Componente  $V$  del ejemplo 3. Poblaciones que se superponen.



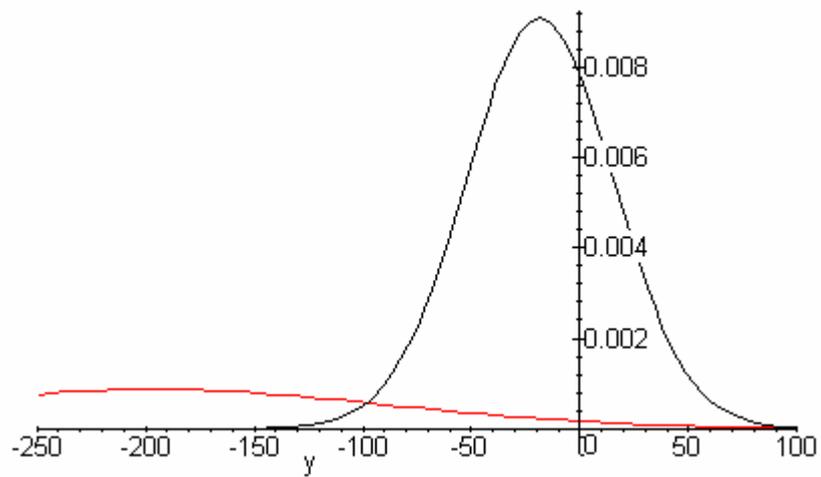
- Componente  $V$  del ejemplo 3. Poblaciones que se separan.



- Componente  $V$  del ejemplo 4. Poblaciones que se superponen.



- Componente  $V$  del ejemplo 4. Poblaciones que se separan.



### 3.5 Superposición de muestras sintéticas

Una vez que se ha trabajado con poblaciones ideales, se ha procedido a evaluar la validez del método utilizando muestras sintéticas. Llamaremos muestras sintéticas a las que son generadas a partir de poblaciones gaussianas trivariantes. La creación de estas poblaciones gaussianas se realiza mediante algoritmos de generación de las mismas (Press et al. 1992). La generación de las muestras sintéticas proporciona los valores de los cumulantes muestrales de órdenes 2, 3 y 4 y sus errores calculados a partir de los cumulantes hasta octavo orden (p. e., Kendall & Stuart 1979). Estas poblaciones pueden ser mezcladas en las proporciones que nos convengan y, puesto que conocemos los valores de los cumulantes de las poblaciones parciales de partida, podemos deducir cómo se comportará el algoritmo de cálculo al aplicarlo a muestras de estrellas reales, cosa que permite llevar a cabo un entrenamiento del método numérico.

Tanto los cumulantes de la muestra sintética global como los de las componentes cuya superposición da lugar a la muestra global, se calculan utilizando las fórmulas de cumulantes muestrales y sus errores. Los mismos programas serán utilizados posteriormente para calcular los momentos de una muestra real.

Una vez se han generado las muestras parciales gaussianas, son sometidas a factores de escala o desplazamientos o rotaciones para simular una población parcial con sentido físico. Los valores de la dispersión, media de velocidades residuales o desviación del vértex que se aplican a las componentes gaussianas generadas son los típicos publicados por diferentes autores respecto de las poblaciones que constituyen el entorno solar.

Es decir, el algoritmo de creación de muestras sintéticas genera números aleatorios asegurando que presentan distribución normal  $N(0,1)$ . De este modo, si se toman  $3n$  números se dispondrá de 3 grupos de  $n$  valores univariantes e independientes. No obstante, el método que aquí se presenta utiliza funciones trivariantes. Para convertir los grupos anteriores en una muestra de  $n$  valores correspondientes a 3 variables a la que podamos aplicar el método, sometemos tales números a modificaciones que convertirán la distribución en trivariante y generará dependencia entre las diferentes variables.

#### 3.5.1 Generación de una muestra sintética

De acuerdo con lo que se acaba de decir, los diferentes pasos que se siguen para generar una muestra sintética son los siguientes:

- Generación de  $3n$  números aleatorios. El algoritmo mediante el cual son generados asegura que su distribución es la de una función normal de media cero y dispersión 1:  $x \sim N(0,1)$  (Press et al. 1992; funciones *gasdev* y *ran1*).

- Asociación de cada grupo de  $n$  números a los valores de cada una de las tres coordenadas de la velocidad de la población que se está generando. Cada grupo de tres números constituye cada una de las tres componentes de la velocidad de una estrella. De este modo se genera una población sintética con  $n$  estrellas. Si se realiza la generación para  $3np$  números, se dispone de  $p$  poblaciones  $N(0,1)$  con  $n$  estrellas cada una.
- Adopción de valores con sentido físico para la dispersión, media y orientación del elipsoide de velocidades generado.
- La nueva dispersión se obtiene mediante un cambio de escala, es decir multiplicando el valor de cada velocidad por la dispersión que se desea imponer. La nueva media de las velocidades se consigue mediante un desplazamiento, es decir sumando a cada valor de la velocidad la media buscada. En resumen, se hace un cambio de variable:

$$\tilde{x} = \mu + \sigma x \sim N(\mu, \sigma)$$

En donde  $\mu$  es el valor de la media que se impone a la componente y  $\sigma$  es la dispersión que se quiere obtener.

- De cara a proporcionar muestras con desviación del vértex no nula, se realiza un cambio de base mediante sendas rotaciones:
  - a) Según la componente vertical de la velocidad,
  - b) Según la componente rotacional de la velocidad

Esto significa multiplicar por las matrices de rotación. Y así la orientación del elipsoide de velocidades puede ser arbitraria.

- De este modo ya se tienen generadas las poblaciones sintéticas parciales con valores de las velocidades residuales similares a los publicados por diferentes autores y se procede a generar la muestra global.
- Como paso intermedio pueden calcularse los cumulantes de orden 2, 3 y 4 junto con sus errores de las poblaciones parciales generadas.
- En este punto ya puede generarse la muestra sintética definitiva sobre la que se va a aplicar el método numérico de aproximación de dos gaussianas. Tal generación se lleva a cabo simplemente tomando de cada población parcial la cantidad de estrellas que son necesarias para obtener la total con una composición conocida.
- Una vez creada la muestra sintética, se calculan los valores de sus cumulantes muestrales de orden 2, 3 y 4 junto con sus errores.

- Con estos cumulantes muestrales y sus errores calculados, ya puede aplicarse el método numérico para tratar de aproximar la muestra sintética suma de  $p$  componentes gaussianas como superposición de dos. El conocimiento previo de los valores de partida permite estudiar la estabilidad del método. De este modo, las muestras sintéticas sirven como método para entrenar el algoritmo de superposición de cara a aplicarlo a muestras reales.
- Al aplicar el algoritmo de generación de distribuciones normales, puede interesarnos el caso de que aparezcan en la muestra estrellas con valores de las velocidades muy extremos. En estos casos es necesario proceder a una selección de estrellas para excluir aquellas que presenten un comportamiento muy diferente del resto, procediendo de forma igual a como luego se hará con las muestras reales.

#### 3.5.1.1 Selección de una muestra sintética

Como acabamos de decir, los algoritmos de generación de muestras sintéticas permiten introducir estrellas de características muy diferentes del resto de los componentes de la muestra. Si no se introducen tales elementos, puede aplicarse directamente el método numérico de superposición. No obstante, la introducción de un grupo de estrellas con valores extremos de los parámetros cinemáticos nos ha permitido desarrollar un criterio de selección. Este criterio está descrito en el siguiente capítulo y lo denominaremos de *máximo discernimiento*.

#### 3.5.2 Aplicación del método a muestras sintéticas

Al aplicarse el método numérico desarrollado en este capítulo, se pretende recuperar las poblaciones parciales de partida. Se llega a las siguientes conclusiones, algunas de las cuales eran lógicamente esperables.

- El método funciona tanto mejor cuantas más estrellas incluya la muestra. Se comporta bien a partir de que la población minoritaria contiene del orden de 150-200 estrellas y que su porcentaje de mezcla supere el 2% para superar el error de cálculo de este parámetro.
- Si se superponen dos poblaciones para formar la muestra global, la recuperación de las dos poblaciones originales es tanto más exacta cuanto más separadas se encuentran entre sí las poblaciones. Esta separación es suficiente que sea del orden del valor de  $\sigma$  de la población parcial menos dispersa en al menos una de las componentes de la velocidad. Sin embargo, se han probado casos de separaciones del orden de  $\frac{1}{2}\sigma$ .
- Si se superponen más de dos poblaciones se vuelve a recuperar un resultado ya obtenido en el caso de poblaciones ideales y es que se separa la más dispersa. La población que queda sin separar es muy similar a la mezcla de las otras dos. Ver ejemplo en 3.5.3.1.

- Para poblaciones parciales con valores de las dispersiones y velocidades similares a las publicadas para poblaciones reales del entorno solar, el modelo numérico presenta un excelente comportamiento.

### 3.5.2.1 Ejemplo de mezcla de muestras sintéticas

Se han tomado como ejemplo de las dispersiones de velocidad, velocidades medias y desviación del vértex valores similares a los que posteriormente se encontrarán para una muestra real de nuestra Galaxia. De este modo, se han generado dos poblaciones sintéticas con los valores indicados a continuación, obteniéndose para ellas los momentos que siguen.

Puesto que la mayoría de catálogos utilizan las coordenadas  $U, V, W$  para las velocidades estelares (ver 1.2.1.1), utilizamos ahora la notación  $\mathbf{V} \equiv (U, V, W) \equiv (V_1, V_2, V_3)$  con lo que  $\sigma_U : \sigma_V : \sigma_W = \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ .

### 3.5.2.1.1 Población I. Momentos y cumulantes.

- Proporción de mezcla 89%
- $\sigma_U:\sigma_V:\sigma_W = 34:20:18$       $U:V:W = -1,5:-1,6:-0,4$       $\varepsilon = 8,5^\circ$

ORDEN1		
100	-1.14	.83
010	-1.39	.50
001	.44	.43
ORDEN2		
200	1177.81	41.33
110	100.09	17.01
020	424.42	14.41
101	10.60	14.94
011	9.88	8.77
002	314.66	10.19
ORDEN3		
300	-2962.89	2404.40
210	209.86	869.10
120	269.22	506.36
030	702.31	520.10
201	-349.12	555.17
111	-73.07	316.94
021	-57.90	221.51
102	-650.52	361.91
012	-225.69	207.84
003	261.32	272.68
ORDEN4		
400	4336568.13	327765.87
310	371343.49	86536.62
220	509718.82	38576.66
130	133567.48	29231.43
040	538648.06	42761.43
301	13707.22	68536.75
211	10277.82	20667.08
121	-3100.18	11408.07
031	8229.20	12442.06
202	385496.64	26480.37
112	45328.61	10185.55
022	132777.89	7649.75
103	-3975.48	16597.61
013	14300.27	9661.15
004	278414.89	17803.73
CUMULANTES ORDEN4		
1111	174861.99	368591.30
1112	17696.56	96131.56
1113	-23749.22	75318.01
1122	-10203.14	51983.09
1123	-3481.60	23407.63
1133	14658.57	36425.41
1222	6131.51	32856.40
1223	-9577.12	13209.35
1233	13625.74	12019.61
1333	-13982.33	18570.08
2222	-1752.39	47720.80
2223	-4351.43	14126.59
2233	-967.14	11707.65
2333	4973.07	10856.12
3333	-18623.89	20985.69

### 3.5.2.1.2 Población II. Momentos y cumulantes.

- Proporción de mezcla 11%

- $\sigma_U:\sigma_V:\sigma_W = 58:40:38$       $U:V:W = -23,3:-39,6:-0,2$       $\varepsilon = -0,9^\circ$

ORDEN1		
100	-23.65	4.24
010	-40.27	2.77
001	-4.09	2.72
ORDEN2		
200	3830.75	378.88
110	15.00	169.23
020	1639.85	158.08
101	-92.60	188.76
011	91.54	117.62
002	1579.62	131.87
ORDEN3		
300	14193.56	46133.14
210	-1737.54	13943.87
120	6059.38	8845.12
030	13656.13	9729.73
201	-47513.61	19761.51
111	4650.63	7989.78
021	-3286.09	3114.34
102	10848.02	10179.56
012	6856.83	5983.46
003	-2601.50	6913.07
ORDEN4		
400	45250704.86	11593237.05
310	-773662.62	2314212.61
220	6100578.98	992226.30
130	239809.58	858984.62
040	8011510.96	1513580.73
301	-2956424.43	4398892.81
211	-246802.34	947644.43
121	334163.41	534028.55
031	247782.89	666789.10
202	7597445.14	1897391.90
112	522955.54	584260.09
022	2955210.28	544168.18
103	-1095969.63	1028587.42
013	39773.95	587710.87
004	6199269.86	901933.84
CUMULANTES ORDEN4		
1111	1226841.37	12636518.22
1112	-946073.55	2576555.29
1113	-1892218.90	4590715.55
1122	-181708.60	1577887.55
1123	-594701.93	1064985.87
1133	1529167.26	2195583.14
1222	166004.79	986341.11
1223	483269.92	625193.34
1233	516211.62	644570.97
1333	-657141.04	1160597.44
2222	-55780.43	1759904.54
2223	-202566.61	757359.06
2233	348114.01	717045.19
2333	-394035.79	680339.12
3333	-1286336.34	1155068.44

Estas muestras sintéticas se han constituido generando 1.727 estrellas ficticias para la mayoritaria y 213 para la minoritaria, representando una muestra global de 1.940 estrellas. Se observa que ambas muestras presentan distribución normal puesto que sus cumulantes de tercer y cuarto orden son nulos dentro del margen de error. Los valores de los momentos muestrales coinciden con los teóricos en algunos casos con un margen igual a  $\sigma$  y en otros a  $2\sigma$ . Obviamente, se aprecian errores superiores en la componente minoritaria.

De este modo, se forma la mezcla tomando fracciones de población para las componentes parciales mayoritaria y minoritaria del 89 y 11% respectivamente. En el presente ejemplo no se han introducido casos de estrellas extremas por lo que no ha sido necesario llevar a cabo ningún tipo de filtrado de las estrellas que componen la muestra global. Los momentos de esta muestra compuesta de las dos parciales son los que siguen:

### 3.5.2.1.3 Muestra total. Momentos y cumulantes.

ORDEN1		
100	-3.61	.88
010	-5.66	.60
001	-.06	.48
ORDEN2		
200	1518.62	61.93
110	176.30	29.95
020	705.63	33.35
101	9.23	25.33
011	36.06	17.79
002	455.55	19.58
ORDEN3		
300	-19461.71	6909.45
210	-11214.74	2315.66
120	-3718.86	1967.42
030	-16216.48	2664.90
201	-6422.67	2624.37
111	393.37	1108.16
021	-2093.26	908.81
102	-2115.27	1398.11
012	-4388.47	891.47
003	-1739.82	1131.43
ORDEN4		
400	9747406.67	1398124.15
310	1136010.04	315333.94
220	1771782.24	197718.78
130	539569.71	212039.35
040	2655683.83	339920.61
301	88649.01	471245.21
211	199119.00	128218.74
121	31183.56	80853.98
031	198377.45	125026.98
202	1244416.72	211990.51
112	157704.88	73911.14
022	615429.51	72668.70
103	-90113.78	121539.68
013	93706.36	70373.71
004	950914.19	113519.57
CUMULANTES ORDEN4		
1111	2828776.01	1435584.00
1112	332812.25	330122.92
1113	46578.52	476070.02
1122	638026.98	219584.78
1123	141105.51	131684.21
1133	552434.83	219767.08
1222	166359.87	217141.36
1223	11953.66	83086.71
1233	76725.17	75878.08
1333	-102733.98	123222.71
2222	1161922.14	349559.38
2223	122047.48	127277.40
2233	291375.66	78264.73
2333	44428.33	72009.49
3333	328330.53	117647.62

### 3.5.2.1.4 Aplicación del método

Al aplicar el método tomando como valores de entrada la tabla anterior de momentos se obtienen dos poblaciones parciales cuyos valores de los diferentes parámetros cinemáticos son ( $FP \equiv n^{(i)}$  fracción de población):

<b>Pob. a</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	1154,2	444,0	312,5	109,8	3,9	-1,7	-1,1	-1,5	1,4	0,89
error	141,5	154,3	49,5	103,2	68,9	60,6	0,9	0,8	0,5	0,02

<b>Pob. b</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	3953,8	1531,1	1427,5	-43,0	-215,0	-109,9	-23,5	-38,9	-11,9	0,11
error	1006,9	1183,5	359,5	776,3	506,6	455,1	2,7	4,3	1,6	0,02

Estos valores se corresponden con:

Población a:  $\sigma_U : \sigma_V : \sigma_W = 34 \pm 2 : 21 \pm 4 : 18 \pm 1$

Población b:  $\sigma_U : \sigma_V : \sigma_W = 63 \pm 8 : 39 \pm 15 : 38 \pm 5$

Luego podemos asociar las poblaciones denominadas a y b con las de partida I y II.

Obsérvese que todos los valores de los momentos y velocidades que se obtienen coinciden con los valores impuestos a las poblaciones parciales dentro del intervalo de error  $\sigma$ . En particular, el valor del momento  $\mu_{12}$  de la población minoritaria que da idea de la desviación del vértex puede considerarse nulo dado que el error de cálculo  $\Delta\mu_{12} = 776,3$  es muy superior al valor del momento. La desviación del vértex que resulta para la población mayoritaria es  $\varepsilon = 8,6^\circ$ , valor que está de acuerdo con el que se ha impuesto. Al resto de momentos no diagonales, sobre los que no se impuso ningún valor y que por tanto deben ser teóricamente nulos, también se les puede aplicar el mismo tipo de razonamiento. Con esa consideración, al comparar estos valores con los que se han impuesto a las muestras de partida podemos hacernos una idea de la fiabilidad de la aproximación. El valor de P (3-21) que se obtiene al hacer esta aproximación es de 0,83. Este valor es indicativo de que la aproximación es válida. Por otro lado, si se hubieran introducido estrellas con valores de las velocidades muy extremos, para ajustar los resultados finales se hubiera realizado un filtrado de estrellas excluyendo las que presenten características más extremas. No obstante, se ha evitado entrar en este ejercicio de selección con el objetivo de que el ejemplo fuese lo más general posible.

### 3.5.3 Aplicación recurrente del método

La expresión 1-26 para funciones de distribución de Schwarzschild generalizadas da la probabilidad de que una estrella de la muestra tenga una velocidad comprendida entre  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{V} + d\mathbf{V}$ . De este modo, dada una estrella podemos calcular dicha probabilidad de acuerdo con los parámetros cinemáticos de cada una de las dos poblaciones parciales por cuya composición se ha aproximado la muestra global.

Para cada estrella tendremos dos funciones de densidad de probabilidad puesto que tenemos dos conjuntos de parámetros cinemáticos. Podemos utilizar dos criterios para asociar una estrella a una población o la otra. El primer criterio es asignar cada estrella a la población a la que tiene mayor probabilidad de pertenecer. No obstante, existe el problema de la superposición de colas de las funciones de densidad. Eso nos conduce a un criterio de igualdad de áreas. Y ese es el criterio que hemos aplicado para asociar cada estrella a su población. Esto es, que la probabilidad discriminante provoque que las áreas superpuestas de las dos funciones de densidad sean iguales (Barlow 1989). De acuerdo con esta forma de proceder, una vez aproximada la muestra global por dos poblaciones parciales, se puede suponer a qué población pertenece cada estrella.

Aplicando esta idea de forma recurrente, se pueden separar más de dos poblaciones de una muestra global. Puesto que el modelo numérico sólo es capaz de aproximar una muestra global por dos funciones de distribución gaussianas, después de la primera separación pueden seleccionarse las estrellas que pertenecen a cada una de las poblaciones parciales y repetirse el proceso de separación. Dado que, como se ha dicho, el modelo aproxima mejor la componente más dispersa, pueden excluirse las estrellas que pertenezcan a dicha componente y volver a aplicar el modelo sobre la muestra formada por las estrellas restantes.

Nótese que al aproximarse la componente global por dos gaussianas, las alas de éstas quedarán superpuestas. Por tanto, algunas estrellas de la población buscada quedarán excluidas como consecuencia de esta superposición de probabilidades. Por este motivo, para determinar a qué población pertenece cada una de las estrellas y poder extraer la componente más dispersa se ha comprobado que resulta más eficaz combinar este criterio de selección con el de máximo discernimiento descrito en 4.2.

### 3.5.3.1 Ejemplo de aplicación recurrente con 3 poblaciones

Como ejemplo de aplicación recurrente del método se han tomado las mismas muestras sintéticas que hemos denominado población I y población II en los apartados 3.5.2.1.1 y 3.5.2.1.2. Se ha añadido una tercera población con parámetros cinemáticos típicos de estrellas del Halo. Al mantener el mismo número de estrellas de las poblaciones I y II, las proporciones de mezcla se han cambiado. A continuación se indican las estrellas ficticias que se han generado para componer las muestras sintéticas.

- Población I: Estrellas 1727: Proporción 80,2% (ver 3.5.2.1.1)
- Población II: Estrellas 213: Proporción 9,9% (ver 3.5.2.1.2)
- Población III: Estrellas 213: Proporción 9,9%
  - $\sigma_U : \sigma_V : \sigma_W = 130:100:85$
  - $U:V:W = -50:-70:-20$

No se ha incluido desviación del vértex para la población III. (Nótese que las poblaciones I y II por separado tienen las mismas proporciones 89 y 11% respectivamente del apartado 3.5.2.1).

Para la población III se obtienen los siguientes valores de los momentos y cumulantes:

ORDEN1		
100	-44.75	9.88
010	-74.50	6.79
001	-9.36	6.04
ORDEN2		
200	20773.88	1950.66
110	404.75	923.39
020	9811.40	836.59
101	356.91	853.69
011	-788.41	588.38
002	7767.14	648.97
ORDEN3		
300	202346.46	434381.24
210	-78843.84	164825.55
120	-133927.51	100093.59
030	-139956.39	121479.35
201	169785.30	70685.14
111	26917.75	79005.76
021	21764.86	167873.34
102	-208343.36	99106.51
012	-53531.89	58869.31
003	57853.20	83654.36
ORDEN4		
400	1242034821.00	234981396.45
310	52441344.62	56416352.02
220	181777051.69	24376886.06
130	5271532.84	21911206.42
040	245337629.13	40868654.09
301	48758202.14	51662647.72
211	-5636912.18	15625313.81
121	5728528.94	11635607.90
031	-37673425.10	18687974.27
202	155358634.26	23579949.05
112	12242155.48	10644198.18
022	74361405.69	11261193.48
103	5772842.58	21528282.07
013	-13669670.84	12351945.26
004	150036295.04	24558606.02
CUMULANTES ORDEN4		
1111	-52627449.47	273717700.49
1112	27216688.28	66177267.28
1113	26515117.18	60729683.41
1122	-22371446.95	43919291.28
1123	10452562.36	20842881.30
1133	-6249774.38	37102394.59
1222	-6641952.77	27296281.89
1223	2864980.79	14577406.43
1233	9661189.05	13043545.41
1333	-2543622.39	24591510.67
2222	-43453240.25	49786748.72
2223	-14467115.41	21757061.89
2233	-3088344.35	17147873.78
2333	4701474.77	15167144.72
3333	-30949199.68	30133419.49

Para la mezcla de poblaciones I, II y III de acuerdo con lo especificado, se obtienen los siguientes valores de los momentos y cumulantes:

ORDEN1		
100	-7.68	1.29
010	-12.47	.97
001	-.98	.74
ORDEN2		
200	3574.44	248.45
110	451.36	120.74
020	2028.94	151.84
101	77.75	93.86
011	11.59	72.72
002	1186.62	81.84
ORDEN3		
300	-214339.74	68884.22
210	-146076.04	25646.68
120	-66738.47	21307.61
030	-219424.83	32292.77
201	-8635.94	20022.66
111	1833.93	11193.21
021	-318.70	11884.34
102	-50162.78	13226.74
012	-53178.04	9155.01
003	-14093.98	12481.25
ORDEN4		
400	145673215.36	25936539.60
310	20371353.42	7654432.34
220	31590322.95	4891149.23
130	11968031.89	4879878.27
040	53754510.10	8967808.32
301	4900704.96	6132211.21
211	-367664.72	2502792.92
121	535245.77	2162909.55
031	-3056333.90	3118366.23
202	18973370.97	3237740.62
112	4540839.10	1641216.77
022	11384632.10	1713225.19
103	1515120.37	2577873.69
013	-317611.00	1577939.52
004	15829090.63	2649976.20
CUMULANTES ORDEN4		
1111	107343263.21	26118344.88
1112	15531290.71	7712147.33
1113	4066967.06	6162929.03
1122	23930545.51	5004292.81
1123	-479263.64	2517616.56
1133	14719785.36	3290649.24
1222	9220697.79	4909997.23
1223	367037.29	2172883.23
1233	4003448.41	1651108.62
1333	1238342.39	2585927.36
2222	41404729.23	9031084.90
2223	-3126854.61	3129069.66
2233	8976790.44	1747861.51
2333	-358854.76	1585157.11
3333	11604912.17	2671245.01

Al aplicar el método y aproximar por dos poblaciones gaussianas la muestra global compuesta por esas tres poblaciones, los resultados han sido:

<b>Pb. ab</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	1753,3	706,6	496,1	72,2	73,2	16,7	-3,6	-5,4	-0,4	0,92
error	590,9	588,1	159,3	397,8	204,4	117,9	1,3	1,2	0,7	0,02

<b>Pob. c</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	21392,4	9951,3	8746,0	763,7	-202,9	-613,0	-53,1	-90,5	-7,7	,08
error	5908,7	6233,6	1507,8	4163,0	2002,0	1022,9	4,5	7,5	1,0	,02

La población que figura como **c** se corresponde a  $\sigma_U:\sigma_V:\sigma_W = 146:100:94$ . De acuerdo con los valores de los momentos de la población III, dentro de los márgenes de error esta última población **c** puede identificarse con dicha población coincidiendo con la más dispersa de las de partida. El valor de la cantidad P (3-21) que se obtiene al hacer esta aproximación es de 0,61.

En 3.5.2.1.3 aparecen los valores de los momentos calculados directamente de las estrellas que forman la muestra compuesta por las poblaciones denominadas I y II. Vemos que tales valores de los momentos coinciden dentro del margen de error con los de la población parcial que hemos denominado **Pb. ab** obtenida al aplicar el método a la muestra mezcla de tres.

A continuación se extraen las estrellas pertenecientes a la población **c** de entre las de la muestra global de acuerdo con 1-26. Se vuelve a aplicar el método numérico a la muestra de estrellas restante y se obtienen los siguientes resultados de la separación.

<b>Pob. a</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	1188,9	477,2	330,6	103,6	22,2	14,9	-1,6	-2,7	0,6	0,94
error	219,0	71,4	31,4	97,6	62,9	26,2	0,9	0,6	0,5	0,02

<b>Pob. b</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	3589,2	1408,0	1271,9	-143,7	-320,6	89,1	-21,9	-19,6	-3,9	0,06
error	3107,9	992,8	408,8	1380,9	875,1	340,8	2,9	2,4	,8	0,02

Esto se corresponde a  $\sigma_U:\sigma_V:\sigma_W = 34:22:18$ , para la población **a** y  $\sigma_U:\sigma_V:\sigma_W = 60:38:36$  para la población **b**. Así mismo, el valor que se deduce para la desviación del vértex de la población **a** es  $\varepsilon = 8^\circ$ .

Por lo tanto, vemos que los resultados de aplicar el método y que hemos llamado poblaciones **a**, **b** y **c** pueden identificarse con las poblaciones sintéticas de partida denominadas I, II, y III. El valor de la cantidad P (3-21) que se obtiene al hacer esta aproximación es de 1,24.

De este modo pueden separarse más de dos poblaciones de una muestra aun cuando la superposición del método numérico sea únicamente por una aproximación de dos.

## 4. Filtrado de la muestra

Si bien para las muestras ideales y sintéticas que se acaban a ver, no es necesario realizar un proceso de selección, en el caso de que las muestras sean reales (capítulos 5 y 6) este proceso será imperativo.

### 4.1 Entropía

Para comprender lo que se va a hacer en el proceso de filtrado de la muestra, vamos a recordar algunas nociones sobre el concepto de entropía. Desde un punto de vista estadístico, la entropía de un sistema formado por un gran número de partículas puede considerarse como una medida del desorden del sistema. De acuerdo con el segundo principio de la Termodinámica, las transformaciones posibles de un sistema físico que puede encontrarse en diferentes estados se producen en el sentido de que la entropía aumenta o permanece constante. Por este motivo, las soluciones más probables a la hora de estudiar el estado en el que se encuentra un sistema, serán aquellas que supongan máxima entropía (Sears & Salinger 1980).

Formalicemos esta idea. Dado un conjunto de estados en el que puede encontrarse un sistema físico, estos dan lugar a una partición puesto que los eventos de encontrarse en tales estados son mutuamente excluyentes y su unión son todos los estados posibles. En nuestro caso, cada estado representa pertenecer a una de las  $c$  poblaciones. Por lo tanto, dicha partición será  $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_c\}$  en donde  $A_k$  representa ser de la población  $k$ -ésima. Se define entonces la entropía de la partición (p.e. Papoulis 1989) de la siguiente forma:

Sea la función  $z(t) = \begin{cases} -t \ln t, & 0 < t \leq 1 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}$ . Se trata de una función no negativa, continua y

estrictamente cóncava. La entropía  $H(A)$  de la partición  $A$  será:

$$H(A) = \sum_{i=1}^c z(p(A_i)) \quad 4-1$$

En donde  $p_i$  es la probabilidad de que una variable aleatoria  $\mathbf{x}$  tome valores pertenecientes a  $A_i$ . Es decir,  $p_i = p(A_i)$ .

En realidad, los parámetros de los cuales dependen o que caracterizan las poblaciones son tales que  $p_i = p_i(\mathbf{s})$ , siendo  $\mathbf{s}$  un vector de parámetros.

En este sentido podemos pensar que esta probabilidad está condicionada y por tanto la entropía será:

$$H(A|s) = -\sum_{i=1}^c p(A_i|s) \ln p(A_i|s) \quad 4-2$$

En donde los parámetros a los que están condicionadas tales probabilidades son los propios del modelo.

#### 4.1.1 Parámetro de máximo discernimiento

El propósito del presente trabajo es obtener una segregación para una submuestra tal que los parámetros que describan cada población sean representativos del máximo número de estrellas. En consecuencia, se filtra la muestra global para excluir las estrellas con información demasiado específica y diferente de los valores característicos de las poblaciones que se van a clasificar. Es decir, los datos demasiado informativos son considerados ruido. Así pues, a partir de las velocidades estelares de la muestra global se busca obtener una submuestra  $S(P)$  dependiente de un parámetro  $P$  el cual describe una propiedad específica (p.e. módulo de la velocidad o de alguna componente, etc.). El número de estrellas de la submuestra lo representaremos como  $\#S(P)$  y supondremos que en dicha submuestra están presentes un número finito  $c$  de poblaciones. Nuestro propósito será conseguido en dos pasos:

- 1º) Maximización de la entropía  $H(A)$  de la partición  $A$  como función del parámetro  $P$ . Por tanto escribiremos la entropía como  $H_c(P)$  para  $c$  componentes.
- 2º) Elección de la propiedad más próxima al parámetro ideal  $P$  de modo que sea posible la maximización de  $H_c(P)$ .

Para la partición  $A=\{A_1, A_2, \dots, A_c\}$  que, según hemos dicho, representa las  $c$  componentes poblacionales, la función de densidad de mezcla para la velocidad estelar  $\mathbf{v}$  vendrá dada por (ver apartado 2.2):

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^c p(A_i|n^{(i)}) f_i(\mathbf{v}|\mathbf{o}_i) \quad 4-3$$

en donde  $p(A_i|n^{(i)})$  es la proporción de mezcla de la población  $A_i$ , tal que  $\sum_{i=1}^c p(A_i) = 1$  y  $f_i(\mathbf{v}|\mathbf{o}_i)$  es la función de densidad parcial de la  $i$ -ésima población dependiente de un vector de parámetros característico, por ejemplo,  $\mathbf{o}_i = \{\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{M}_2^{(i)}\}$ , esto es, medias y momentos centrales de orden 2.

Las densidades parciales se suponen en nuestro caso funciones normales trivariantes para todas las poblaciones. Por tanto,  $f_1 = f_2 = \dots = f_c \equiv f$ .

Para cada S(P) el algoritmo descrito en los capítulos precedentes y que se utilizará para calcular los vectores de parámetros que aparecen en 4-3 junto con la proporción de mezcla proporcionan una función de densidad que es un caso particular de 4-3 de la forma:

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^c n^{(i)}(\mathbf{a}_p) f(\mathbf{v} | h_i(\mathbf{a}_p)) \quad 4-4$$

en donde  $\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_p(o_1, o_2, \dots, o_c)$  es un vector auxiliar de parámetros y las funciones  $h_i(\mathbf{a}_p)$  son diferentes para cada componente. En nuestro caso  $\mathbf{a}_p = (\mathbf{D}, \mathbf{C}_2)$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(P)$  y  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2(P)$ . Ponemos el subíndice p para enfatizar que el nuevo vector de parámetros  $\mathbf{a}_p$  depende del parámetro P de la submuestra seleccionada S(P).

#### 4.1.2 Aplicación del concepto de Entropía

De acuerdo con 4-2 y 4-4, podemos escribir

$$H_c(P) = \sum_{i=1}^c -n^{(i)}(\mathbf{a}_p) \ln(n^{(i)}(\mathbf{a}_p)) \quad 4-5$$

Esto puede ser interpretado como el valor esperado de la incertidumbre  $I(A_i) = -\ln(p(A_i))$  (Koch 1990) y las variaciones de entropía se interpretan como variaciones de incertidumbre de los parámetros de mezcla. Cuanto mayor es la entropía, menor es la información de los parámetros poblacionales. Recordemos que las poblaciones de tipo gaussianas son también las funciones de densidad menos informativas que dependen de los parámetros media y momentos centrales de segundo orden.

Queremos determinar los valores  $\mathbf{a}_p$  y  $n^{(i)}(\mathbf{a}_p)$  que proporcionen el máximo valor para  $H_c(P)$ , sujeto al parámetro P. Dado que utilizamos un modelo de superposición de dos componentes ( $c=2$ ), estudiaremos este caso particular aunque puede ser generalizado. Por lo tanto,

$$H_2(P) = -n'(\mathbf{a}_p) \ln(n'(\mathbf{a}_p)) - (1-n'(\mathbf{a}_p)) \ln(1-n'(\mathbf{a}_p)) \quad 4-6$$

Suponemos que la primera población es la predominante, es decir  $n' \geq \frac{1}{2}$

La función  $H_2(P)$  de 4-6 es positiva, decreciente y diferenciable satisfaciendo

$$0 < H_2(n') < 1, \quad \frac{dH_2}{dn'} < 0 \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} < n' < 1 \quad 4-7$$

## 4.2 Selección de las estrellas de la muestra

### 4.2.1 Propiedades que ha de cumplir el parámetro de selección ideal

El parámetro  $P$  utilizado para seleccionar una submuestra  $S(P)$  de dos componentes deberá satisfacer las siguientes condiciones:

- El número de estrellas de  $S(P)$  crece con  $P$ , sin pérdida de ninguna estrella. Es decir:

$$P_1 < P_2 \Rightarrow S(P_1) \subseteq S(P_2) \Rightarrow \#S(P_1) \leq \#S(P_2)$$

- $P$  introduce una incorporación ordenada de estrellas a la submuestra  $S(P)$  tal que las estrellas de la población  $A_1$  se incluyen primero y, cuando dicha población está completa, se incluyen las estrellas de la población  $A_2$ .

$$\text{Por tanto, } P_1 < P_2 \Rightarrow n'(P_1) \geq n'(P_2) \quad 4-8$$

Y además,

$$\left. \begin{array}{l} n'(P_1) = n'(P_2) \Rightarrow n' = 1 \quad (\text{a}) \\ n'(P_1) > n'(P_2) \Rightarrow n' < 1 \quad (\text{b}) \end{array} \right\} \quad 4-9$$

Suponemos que  $n'(P)$  es una función de  $P$  no creciente, continua y diferenciable de modo que la segunda condición es equivalente a  $\frac{dn'}{dP} \leq 0$

De acuerdo con las hipótesis anteriores y 4-7, la entropía  $H_2(P)$  es no decreciente.

$$\frac{dH_2}{dP} = \frac{dH_2}{dn'} \frac{dn'}{dP} \geq 0, \quad \frac{1}{2} < n' < 1; \quad \text{por tanto } P_1 < P_2 \Rightarrow H_2(P_1) \leq H_2(P_2)$$

### 4.2.2 Filtro con dos componentes

Podemos preguntarnos cuál es el comportamiento de  $H_2(P)$  ante una muestra de tres componentes. Asumiremos una incorporación continua de estrellas a la submuestra  $S(P)$  al incrementar  $P$ . Al agregar un pequeño número de estrellas a la submuestra  $S(P)$  se producirá una de las dos situaciones siguientes:

- Las nuevas estrellas pertenecen a la población  $A_1$ . Esto será posible si  $S(P)$  no contiene estrellas de  $A_2$  (ecuación 4-9a).
- Las nuevas estrellas pertenecen a la población  $A_2$ , caso que corresponde a la ecuación 4-9b.
- Las nuevas estrellas son tan diferentes de las poblaciones  $A_1$  y  $A_2$  que el modelo de segregación de dos componentes mezcla las poblaciones previas en  $B_1 = A_1 \cup A_2$  y aparece una nueva población  $B_2$ .

En este último caso la relación 4-9b falla y se inicializan los valores  $n' \approx 1$  y  $H(P) \approx 0$ . De este modo, para una muestra de tres componentes existe una pareja de valores  $P_1$  y  $P_2$  tal que al seleccionar una submuestra  $S(P)$  se cumple:

- Si  $P < P_1$ ,  $H_2(P) = 0$  (incorporación de estrellas de  $A_1$ )
- Si  $P_1 < P < P_2$ ,  $H_2(P) > 0$  y  $dH/dP > 0$  (mezcla de estrellas de  $A_1$  y  $A_2$ )
- Si  $P_2 < P$  y  $\left. \begin{array}{l} H_2(P) \rightarrow 0 \\ n'(P) \rightarrow 1 \end{array} \right\} P \rightarrow P_2^-$  (ha aparecido una nueva población  $A_3$  muy diferente)

Dado que el parámetro que aquí se utilizará  $P = |v|$  no es del todo ideal, lo que sucede es que  $H_2(P)$  no tiende a cero sino que únicamente se produce una fuerte bajada. Por tanto, es necesario buscar máximos relativos de entropía seguidos por descensos bruscos.

- Puede producirse una situación intermedia  $H \approx cte$ . Se manifiesta como una *meseta* de entropía y significa que se están introduciendo estrellas de las poblaciones ya existentes sin cambiar de forma importante las características que ya se tienen. Dentro de este caso pueden producirse tendencias en las pequeñas variaciones de  $H$  que indican la introducción de una serie de estrellas con características similares entre ellas aunque diferentes de la media de la población que las contiene.

#### 4.2.3 Criterio de máximo discernimiento

De acuerdo con las características del parámetro de selección ideal que acabamos de describir, definamos cuál será dicho parámetro habida cuenta de que los datos de que disponemos son las velocidades de una muestra de estrellas. Es habitual utilizar como criterio de selección de una muestra de este tipo el módulo de la velocidad (p.e. Juan-Zornoza 1994) o su componente perpendicular (p.e. Carney et al. 1989). En nuestro caso vamos a utilizar el primer criterio porque es el que se comporta de forma más homogénea para las tres componentes de la velocidad.

Al representar gráficamente el módulo de la velocidad heliocéntrica respecto del número de estrellas que quedan al cortar a dicha velocidad (ver Figuras 5-1 y 6-1), se observa una gráfica con apariencia de sigmoidea. Comienza siendo aproximadamente recta ( $f' \approx cte$ ), posteriormente presenta una convexidad ( $f'' > 0$ ) para terminar siendo asintótica ( $f' \approx 0$ ). Esto sucede para los dos catálogos reales a los cuales se aplicará el método numérico desarrollado y que veremos más adelante, esto es, tanto el CNS3 como la muestra procedente del catálogo Hipparcos. Partiendo de esta distribución y los conceptos que se acaban de describir, se ha definido un criterio de selección de las estrellas de la muestra. A este método de selección lo denominaremos *Criterio de Máximo Discernimiento*.

#### 4.2.4 Interpretación del criterio de máximo discernimiento. Criterio de máxima entropía

Como ya se ha indicado en 3.2.1.4, al analizar el modelo numérico expuesto en el presente trabajo, observamos que todas las variables se deducen a partir de las soluciones del sistema de mínimos cuadrados 3-11 y estas son el vector  $\mathbf{D}$  y el tensor  $\mathbf{C}_2$ . De modo que en la expresión 2-1 sucede que  $\mathbf{o}=(\mathbf{D}, \mathbf{C}_2)=\mathbf{a}_p$ .

Es decir, los momentos y componentes de la velocidad de cada población, que se calculan a partir del sistema 2-42, se deducen del vector  $\mathbf{D}$  y el tensor  $\mathbf{C}_2$ . Luego el vector de parámetros definido en 4.1.1  $\{\mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{M}_2^{(i)}\}$  es en realidad para nuestro modelo  $\{\mathbf{D}, \mathbf{C}_2\}$ . Por lo tanto, se buscarán distribuciones que tengan máxima incertidumbre condicionadas a esa serie de restricciones que constituyen estos parámetros del modelo.

Visto de otro modo, como ya se ha apuntado en 1.1, desde el punto de vista de la teoría de la información la entropía es una medida de la incertidumbre. Es lógico suponer que el grado de conocimiento que puede adquirirse de un sistema tendrá tanta mayor importancia cuanto mayor sea la incertidumbre existente antes de tener lugar ese conocimiento. En ese sentido, en la expresión 4-1 estamos definiendo la entropía de un sistema como el valor probable de la información del mismo (López-Cachero 1990).

Desde esa misma perspectiva, 4-2, al igual que 4-5, representa el valor esperado de la información o incertidumbre de una partición compatible con unas determinadas condiciones de ligadura (Koch 1990). Y  $p(x_i|\mathbf{o})$  es la densidad de probabilidad de la variable aleatoria  $\mathbf{x}$  que toma valores  $x_i$  y condicionada al parámetro  $\mathbf{o}$ .

Dado que la probabilidad  $p_i(\mathbf{o})$  representa las proporciones de la mezcla y restringiéndonos a nuestro caso de dos poblaciones es como nos ha sido posible escribir 4-6.

En suma, el criterio que hemos denominado de máximo discernimiento consiste en seleccionar la muestra de modo que el resultado de aplicar el método a dicha muestra es el que presenta máxima entropía de la probabilidad de mezcla condicionada a los valores  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}_2$ . Lo que se hace es, pues, determinar las proporciones de mezcla que maximizan la entropía de la partición condicionadas a los mencionados parámetros. No se ha aplicado en sentido estricto el denominado *criterio de máxima entropía* puesto que éste supondría buscar las distribuciones de velocidad total o parciales que proporcionan la máxima entropía. Aquí, en cambio, se ha buscado la mínima información en el sentido de que participan el máximo número de estrellas en cada componente.

#### 4.2.4.1 *Discusión*

Hagamos un razonamiento inverso a lo que se acaba de decir. Como ya se ha apuntado en 4.1.1, se dispone de una muestra y unas pocas estrellas se escapan del comportamiento global. Tales estrellas serán las que tengan, por ejemplo, muy altas velocidades, luego se encontrarán más allá de las alas de las gaussianas. Por lo tanto serán estrellas muy distintas que la mayoría de la muestra del entorno solar (i.e. aportan demasiada información) y que, además, dan como consecuencia valores más altos para los errores de los momentos pues estos resultan todos desfigurados. En resumen, podemos decir que tales estrellas son una excepción. Si nuestro modelo no quiere explicar excepciones, entonces deberá proporcionar dos patrones (al menos en nuestro caso) tales que el máximo número de estrellas queden explicadas según cada uno de los patrones. Esta idea es precisamente lo que denominamos *máximo discernimiento*.

En términos astronómicos este razonamiento estadístico se traduce en que, puesto que nuestro modelo separa en sólo dos poblaciones, estamos provocando una restricción que excluye estrellas pertenecientes a componentes estructurales de la Galaxia que sean minoritarias en el entorno solar. Es decir, al aplicar este criterio estamos eliminando las estrellas del halo cuyos parámetros cinemáticos difieren de los de las otras poblaciones que serán identificadas al aplicar el método numérico y que se presentan con más frecuencia en la vecindad del Sol, como son las poblaciones correspondientes a las estrellas jóvenes y viejas del disco fino o el disco grueso. Téngase en cuenta que, como se ha visto más arriba, diferentes estudios concluyen que la proporción de estrellas del halo en el entorno solar es inferior al 1% (Sandage & Fouts, 1987). En el otro extremo, si se eliminaran demasiadas estrellas, es decir, si nos restringimos a estrellas que pertenezcan a una única población, su proximidad en el espacio de velocidades hace que el método resulte ineficaz al no poder diferenciar dos grupos distintos con suficientes estrellas como para que sean aproximables por gaussianas.

Desde un punto de vista metodológico, este modo de proceder es similar al que aplican otros autores (p. e. Dehnen & Binney 1998), en el sentido de que la selección de estrellas para definir la muestra se hace de forma iterativa en función de cómo el conjunto de estrellas que quedan incluidas se ajustan a una serie de parámetros del modelo. De forma similar a ese trabajo, veremos que las estrellas que se excluyen de las muestras utilizadas pertenecen probablemente a una tercera población (halo) cuya presencia en el entorno solar se supone mínima.

Desde un punto de vista puramente estadístico, como se verá, la aplicación del criterio de máximo discernimiento permite afinar restricciones usadas por otros autores como son eliminar los elementos de la muestra que estén separados de la media  $x$  veces la desviación típica. Es decir que este criterio se traduce en que un incremento muy elevado del valor del parámetro de corte para entrar en la muestra implica un incremento mínimo del número de estrellas. Puede verse en las tablas de percentiles (Tablas 5-1, 5-5 y 6-1) que sólo se están excluyendo fracciones del orden de menos de un 4% del total de estrellas. Por ejemplo, en el primer caso, para incrementar el número de estrellas en un 3% es necesario incrementar la velocidad de corte en un 40%. Además, con los algoritmos de creación de muestras sintéticas se han generado casos que contienen elementos con características extremas y la aplicación de este criterio también se ha demostrado efectivo para muestras sintéticas, sirviendo de entrenamiento al método.

También se observa que los valores obtenidos para los momentos de las dos componentes parciales no varían significativamente (menos de un 10%) si se incluyen o excluyen estrellas en el entorno de la muestra que conduce al máximo discernimiento.

Nótese que el parámetro de selección cumple de forma bastante aproximada con los requisitos que se han definido en 4.2.1. El número de estrellas de la muestra  $N$  es función creciente del módulo de la velocidad residual  $|\mathbf{u}|$ . Esto provoca que la *partición* en poblaciones se vaya refinando, de forma que, al crecer  $|\mathbf{u}|$  se mantengan las estrellas existentes y se vayan añadiendo nuevas (ver expresiones 4-8 y 4-9). La muestra se separa en dos clases identificando la más dispersa respecto de las anteriores. Cada inclusión de una nueva población se detecta por una variación de entropía.

Por lo tanto, vemos que la aplicación del criterio de máximo discernimiento requiere que las poblaciones se encuentran ordenadas según  $|\mathbf{u}|$ . Al aplicar dicho criterio se eliminan las estrellas pertenecientes a las posibles poblaciones más cercanas al ruido. Por esto mismo, es necesario que la población mayoritaria se encuentre en el extremo opuesto al ruido.

#### 4.2.5 Aplicación del criterio de máximo discernimiento

Siguiendo las ideas anteriormente expuestas, la muestra se ha seleccionado de la siguiente forma.

- Se selecciona la muestra limitando las estrellas cuyo módulo de la velocidad residual heliocéntrica es menor o igual que uno dado.
- Se aplica el modelo desarrollado para aproximar la muestra por la superposición de dos gaussianas. Esto es independiente del criterio de selección, es decir, podría aplicarse otro método de segregación.
- Se obtienen unos valores para los parámetros del modelo  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}_2$  (los cuales permiten calcular los momentos de orden 2 y las velocidades de cada población) y también, en especial,  $n'$  y  $n''$ .
- Se repite esta operación para diferentes valores del módulo de la velocidad de corte. En las proximidades de un punto extremo de entropía, el cálculo se realiza estrella por estrella.
- El proceso iterativo termina en el momento que se encuentra la muestra que presenta mayor entropía de acuerdo con 4-6 y queda fijada por tanto la proporción de mezcla.

Como se ha dicho, cuando se están superponiendo realmente gaussianas, en el punto de máximo discernimiento sucede que el valor de la cantidad  $\chi^2$  también tiende a tomar los menores valores. Y lo mismo le sucede a los errores de los momentos de las componentes parciales. Por otra parte, si las distribuciones parciales no fueran gaussianas y se desconociera el tipo de distribución que presentan, la hipótesis de gaussianidad sería la que menos distorsión podría producir (por el hecho de que es la menos informativa) en los resultados del criterio de máximo discernimiento.

En resumen, el procedimiento de aplicación del criterio de máximo discernimiento ha sido el siguiente:

Selección según  $|v| \rightarrow$  muestra  $\rightarrow$  entropía de mezcla máxima ?  $\rightarrow$  selección según  $|v| \rightarrow$  etc....

En paralelo, veremos más adelante que el criterio de máximo discernimiento también puede contrastarse con la bondad de la estimación proporcionada por el valor de la cantidad  $\chi^2$ . Esta cantidad da idea de la gaussianidad de las poblaciones parciales por las que se aproxima una muestra global y presenta mínimos relativos en el punto de máximo discernimiento. En las figuras 5-3, 5-5, 6-2 y 6-4 se puede observar cómo evolucionan entropía y  $\chi^2$  al variar el contenido de la muestra según el módulo de la velocidad de las estrellas.

## 5. Aplicación a muestras del entorno solar: CNS3.

### 5.1 Catálogo de Estrellas Cercanas

#### 5.1.1 Descripción del catálogo

Una vez comprobado el modelo, utilizando poblaciones ideales y muestras sintéticas, en donde los resultados a obtener son previamente conocidos, puede pasar a aplicarse el método numérico a muestras reales de estrellas. En primer lugar, dado que el conjunto de estrellas vecinas del Sol constituye estadísticamente la muestra más completa y representativa de estrellas de nuestra Galaxia (Jahreiß & Gliese 1992), siguiendo otros trabajos similares (p.e. Müllari et al. 1998), se ha tomado como muestra de referencia el Tercer Catálogo de Estrellas Cercanas CNS3 (Third Catalogue of Nearby Stars, Gliese & Jahreiß, 1991). Este catálogo ha sido difundido en versión digital y distribuido a través del CD-ROM *Selected Astronomical Catalogs Volume 1* publicado por el *Astronomical Data Center* (NASA). También está contenido en la página de la red <http://www.ari.uni-heidelberg.de/aricns/files/cns3type.htm> de la que puede ser obtenido. Así mismo, está al alcance de todo el público en el servidor de ficheros del Centro de Datos Estelares (CDS) en la dirección [cdsarc.u-strasbg.fr](http://cdsarc.u-strasbg.fr) en el directorio `pub/cats/V/70A`. De todas esas opciones, no obstante, el CNS3 se ha incorporado al presente trabajo mediante la adquisición del mencionado CD-ROM *Selected Astronomical Catalogs Volume 1* por ser el primer medio en el que este catálogo estuvo a disposición del público.

La cronología de los catálogos de estrellas cercanas es:

- CNS1: W. Gliese. [Primer] Catalogue of Nearby Stars, 1957
- CNS2: W. Gliese. [Segundo] Catalogue of Nearby Stars, 1969
- CNS3: W. Gliese y H. Jahreiß. [Tercer] Catalogue of Nearby Stars, 1991
- CNS3R: W. Gliese y H. Jahreiß. Tercer Catalogue of Nearby Stars revisado, 1998. Al igual que el CNS3, utiliza únicamente datos derivados de medidas realizadas desde tierra, es decir, no incluye datos de la misión HIPPARCOS.
- CNS4: Está prevista su publicación de forma inmediata.

En este trabajo se ha tomado la tercera versión del Catálogo de Estrellas Cercanas (CNS3) por ser la versión más moderna disponible en el momento de la realización del trabajo. De cualquier modo, resulta evidente que el método numérico desarrollado es independiente del catálogo que se utilice.

### 5.1.1.1 Tercer catálogo de estrellas cercanas

El CNS3 contiene todas las estrellas conocidas en un radio de 25 parsecs del Sol. Está basado fundamentalmente en la versión preliminar (primavera de 1989) del New General Catalogue of Trigonometric Parallaxes (YPC). Al contrario que el CNS2, las paralajes fotométrica y espectroscópica no se han combinado. De este modo, la paralaje resultante en esta versión del catálogo es siempre la paralaje trigonométrica si el error relativo de dicha paralaje es menor del 14%. La paralaje resultante es fotométrica o espectroscópica sólo si no está disponible la trigonométrica o si su error estándar es considerablemente mayor.

A pesar de su definición, el CNS3 contiene estrellas que pueden no ser realmente próximas. Una de las razones es, lógicamente, la posibilidad de errores no reconocidos en la paralaje adoptada. No obstante, hay muchas estrellas en el CNS3 de las que se tiene constancia de que no se encuentran realmente próximas. Las principales razones para incluir tales estrellas en el CNS3 son que estas estrellas o bien estaban contenidas en versiones precedentes del catálogo de estrellas cercanas o alguna vez fueron candidatas a ser estrellas cercanas. Para evitar confusiones con estas estrellas los catálogos llevan información que indica este hecho.

El catálogo CNS3 contiene 3803 estrellas. De ellas 2637 tienen paralaje trigonométrica conocida y 1165 únicamente paralaje fotométrica. Para 734 estrellas se ha cambiado la paralaje trigonométrica por una fotométrica/espectroscópica con mayor precisión. El CNS3 contiene todas las estrellas con paralaje trigonométrica mayor o igual que 0,0390 arcsec aun cuando sea evidente por fotometría u otras razones que la estrella se encuentra a una mayor distancia. Esto sucede para 505 estrellas. Contrariamente, se han incluido 224 estrellas con paralaje trigonométrica menor que 0,0390 pero de las que la fotometría o espectrometría indican una menor distancia. En resumen, casi el 20% de las estrellas del catálogo tienen una distancia cuestionable. Contiene 552 sistemas múltiples con un total de 1091 componentes sin contar 195 binarias espectroscópicas (63 de las cuales tienen órbitas conocidas), 45 presuntas binarias espectroscópicas y 43 estrellas con velocidad radial variable.

La magnitud de la estrella más débil que aparece en el catálogo es  $M_v=19^m,63$ . Dado que el límite 25 pc corresponde a un módulo de distancia de  $M-m=-1^m,99$  cabe esperar encontrar estrellas del orden de  $22^m$  dentro de ese intervalo. Por este motivo se puede afirmar que el catálogo de estrellas cercanas todavía es bastante incompleto. En el catálogo se aprecia una disminución de la densidad de estrellas al aumentar la distancia. Desde 1982 no se ha descubierto ninguna estrella individual dentro de la esfera de 5 pc (la misión HIPPARCOS ha descubierto un objeto a 5,4 pc) pero incluso en ese caso no podemos afirmar que el catálogo esté completo. También se presenta una disminución importante de la frecuencia relativa de estrellas binarias al aumentar la distancia. Así mismo, la distancia media entre las estrellas dentro de la esfera de 5 pc es de 2,2 pc valor muy superior a los 1,3 pc de distancia entre el sol y Próxima Centauri. No obstante, el CNS3 es estadísticamente completo para  $M_v < 9^m$ .

Así pues, según los creadores del catálogo (Jahreiß & Gliese 1992), el CNS3 no sólo es incompleto de acuerdo con la función de luminosidad ampliamente aceptada de Wielen, que predice más de 7700 estrellas para la esfera de 25 pc, sino que tampoco es homogéneo respecto de la información individual de las estrellas que contiene. A pesar del hecho de que esta muestra no sea del todo representativa del entorno solar, podemos afirmar que los momentos, y en consecuencia, la distribución de velocidades sí que lo son (Erickson 1975).

Finalmente, un dato básico para el presente trabajo es que el CNS3 dispone de las velocidades radiales para 1946 estrellas (incluyendo el Sol), las mismas para las que se ha determinado el espacio de velocidades  $U$ ,  $V$ ,  $W$ . Con estas 1946 estrellas es con las que se ha desarrollado la muestra de estudio pues, al disponer del espacio de velocidades, son las únicas que permiten calcular los momentos de las velocidades.

#### *5.1.1.2 Cuarto catálogo de estrellas cercanas*

No pueden ignorarse en el momento presente los datos aportados por la misión del satélite astrométrico HIPPARCOS. Tales datos han tenido un fuerte impacto en nuestro conocimiento de las estrellas cercanas (Jahreiß et al. 1998). Este satélite observó casi el 90% de las estrellas cercanas conocidas en el rango de magnitudes accesibles por él. Ha detectado cerca de 200 nuevos objetos cercanos, el más cercano a 5,4 pc, y 39 nuevas componentes de estrellas múltiples. Como consecuencia, el cuarto catálogo de estrellas cercanas (CNS4) que utiliza las medidas aportadas por esta misión, presenta una calidad muy superior a sus predecesores.

Comparando con el CNS3, aun cuando el número de estrellas contenidas en la esfera de 25 pc es similar al que había en aquél catálogo, muchos de sus componentes han resultado encontrarse a mayores distancias, de modo que podemos afirmar ahora que no pertenecen a dicha esfera. Para estrellas brillantes (magnitud absoluta menor que 9), se ha extendido el catálogo hasta 50 pc sin pérdida de completitud en el sentido estadístico (Jahreiß & Wielen 1997). Así mismo, se ha detectado un decrecimiento de un 15% en la densidad estelar. En resumen, se ha llevado a cabo una depuración sin precedentes del catálogo de estrellas cercanas.

Sin embargo, en el momento de desarrollarse el presente trabajo este catálogo sólo está disponible de forma restringida. Por este motivo, se aplicará el algoritmo numérico desarrollado a la versión anterior CNS3. Este mismo motivo es el que hace que otros autores sigan utilizando el CNS3 en trabajos actuales (p.e., Delfosse et al. 1999). No obstante, dado que el objetivo es poner a punto el método, consideramos que es suficiente utilizar dicho catálogo y, a lo sumo, deberá tenerse en cuenta esta precisión a la hora de interpretar los resultados. Por otro lado, es evidente que será inmediata la aplicación del método al CNS4 una vez sea difundido de forma generalizada.

En cualquier caso, para no desaprovechar los datos de la misión HIPPARCOS que sí están accesibles de forma general, en el capítulo siguiente se ha aplicado el método a una muestra de estrellas procedente del catálogo Hipparcos. Esta muestra, si bien no presenta la misma completitud estadística que el catálogo de estrellas cercanas, mejora extraordinariamente la precisión y fiabilidad de los datos e incrementa el tamaño de nuestra muestra en un factor 7, reduciendo de forma notable los errores.

## 5.1.2 La muestra estelar

### 5.1.2.1 Catálogo restringido

Al igual que en otros trabajos que utilizan el CNS3 (p.e. Müllari & Orlov, 1996), se han tomado las 1946 estrellas de este catálogo de las que se dispone de velocidades radiales y, en consecuencia, para las que se ha calculado el espacio de velocidades U, V, W. La muestra se ha constituido seleccionando estrellas de ese conjunto basándonos exclusivamente en criterios cinemáticos.

Por similitud con otros autores (Erickson, 1975), se han excluido de dicho grupo las estrellas calificadas en el catálogo como subenanas. El motivo de excluirlas es que dichas estrellas no son representativas de las comunes del disco. En nuestro caso eso afecta a 6 estrellas con lo que quedan 1940 estrellas en la muestra. Denominaremos a este *catálogo CNS3 restringido*. Los análisis llevados a cabo para la muestra completa no difieren substancialmente respecto de esta exclusión. No obstante, las ligeras variaciones se producen en el sentido de dar lugar a menores errores, motivo por el cual se ha mantenido el criterio.

### 5.1.3 Filtrado de la muestra. Aplicación del criterio de máximo discernimiento.

Para el filtrado de la muestra aplicamos lo definido en el capítulo anterior. Se observa que para el valor del módulo de la velocidad donde se produce el máximo discernimiento, debido a que es máxima la entropía H, también se obtiene que las diferencias de velocidades medias de las dos poblaciones es mínima y la desviación del vértex de la población minoritaria también es mínima.

No es casualidad que se produzcan a la vez tales sucesos pues son consecuencia del primero. Para la desviación del vértex de la componente minoritaria es de esperar que suceda un mínimo de acuerdo con la expresión del momento  $\mu_{12}$  (5-1). En cuanto a la diferencia de velocidades de los subcentroides  $\mathbf{w}$ , por la ecuación 2-40 vemos que para un valor dado de  $\mathbf{D}$ , cuanto mayor es H (y también es máximo el producto  $n'n''$ ) menor es  $\mathbf{w}$ . Esto es válido si permanece constante el valor de  $\mathbf{D}$ . Y eso es lo que se observa: Para la fracción de muestra estudiada, los valores de las componentes del vector  $\mathbf{D}$  permanecen aproximadamente constantes.

### 5.1.3.1 *Velocidades heliocéntricas y subcentroidecéntricas*

Puesto que las velocidades que aparecen en el catálogo CNS3 son referidas al Sol y que el criterio de selección de la muestra es el módulo de la velocidad, se hace un paso intermedio en el que las velocidades de las estrellas son referidas al subcentroide de la población mayoritaria. Esta población coincide con la que presenta menor media del módulo de la velocidad residual. Se consigue así incluir en la muestra más estrellas pertenecientes a la población mayoritaria que antes eran excluidas por tener un módulo de la velocidad heliocéntrica mayor que el considerado como límite aun cuando su módulo de la velocidad respecto al subcentroide de la población a la que pertenece no supere el límite establecido. Se evitan así los sesgos derivados de referir las velocidades a la de una estrella de la muestra, el Sol, que tiene una velocidad diferente de la media de la población a la que pertenece. Si el desplazamiento se hace hacia el subcentroide de la otra población se consigue el efecto contrario excluyéndose de la muestra muchas más estrellas de las que son necesarias. Un efecto inmediato de la inclusión de más estrellas en la muestra global, es que los valores de los momentos son mayores porque las nuevas estrellas que se incluyen tienen, lógicamente, mayor dispersión.

De este modo prosigue el proceso de selección de la muestra.

- Aplicando el criterio de máximo discernimiento a las estrellas en coordenadas heliocéntricas, se obtienen dos poblaciones parciales.
- Se toma como nuevo origen de velocidades el subcentroide de la población mayoritaria determinada de acuerdo con la mayor entropía.
- Se vuelve a aplicar el criterio de máximo discernimiento para separar la muestra en dos nuevas poblaciones.

De este modo, se asegura que la población mayoritaria contenida en el catálogo esté más completa en la muestra seleccionada. En contra de lo que podría parecer, no se pierden estrellas de la población minoritaria de forma significativa pues el módulo de la velocidad de corte también aumenta compensando el desplazamiento. Iteraciones del proceso para precisar los valores obtenidos no aportan valores nuevos dentro del margen de error cometido.

## 5.2 Resultados de la aplicación del método

### 5.2.1 Muestra heliocéntrica

Como consecuencia de la aplicación del criterio de máximo discernimiento se ha seleccionado una muestra heliocéntrica. Como se ha dicho, esta muestra no es más que la formada por las estrellas del Catálogo de Gliese-Jahreiß con espacio de velocidades conocido y eliminando subenanas. A continuación figuran los parámetros estadísticos de esta muestra. La variable analizada es  $|v|$ , módulo de la velocidad. Los datos se han obtenido utilizando SPSS<sup>®</sup>. Los percentiles indican cuántas estrellas se añaden al incrementar el valor de corte y muestran que, al aplicar este criterio, se están excluyendo muy pocas estrellas.

Media	51,991	Mediana	2,510	Desv. típica	40,877
Varianza	1670,902	Mínimo	3,320	Máximo	555,030
Percentil	Valor	Percentil	Valor	Percentil	Valor
10,00	16,910	20,00	24,270	30,00	30,051
40,00	35,820	50,00	42,510	60,00	49,988
70,00	59,037	80,00	72,950	90,00	96,555
91,00	99,566	92,00	103,309	93,00	107,654
94,00	115,047	95,00	119,061	96,00	127,553
97,00	140,497	98,00	153,272	99,00	188,726
Casos válidos	1940	Casos excluidos	0		

Tabla 5-1

A continuación, la Figura 5-1 nos muestra esta relación entre el número de estrellas que permanecen al limitar la muestra según el módulo de la velocidad. Obtenemos la gráfica descrita en 4.2.3.

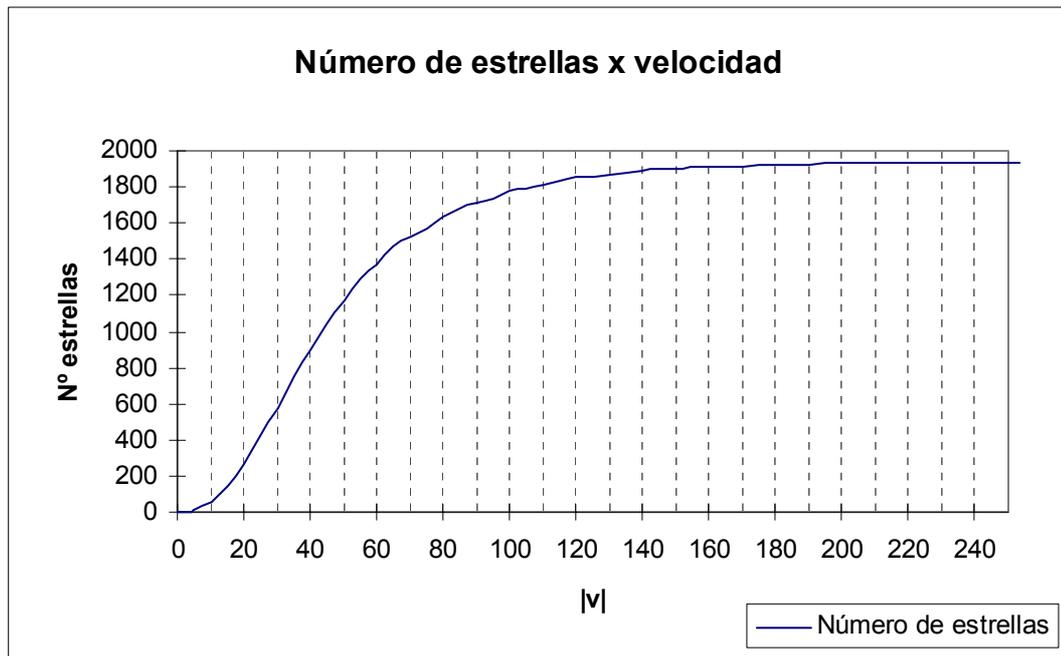


Figura 5-1

A partir de las 1940 estrellas de partida, el punto de máximo discernimiento se produce entre 130 y 140 Kms<sup>-1</sup>. Lo consideraremos en:  $|v|=135$  Kms<sup>-1</sup>. Este punto de corte resulta coincidir con  $|v|$  media+2 $\sigma$ . Como resultado de la selección, quedan 1874 estrellas lo cual representa el 96,60% de la muestra de acuerdo con los valores de los percentiles (Tabla 5-1).

Al realizar el histograma de la componente  $V$  de la velocidad se observa que las estrellas parecen distribuidas según dos funciones aproximadamente gaussianas y superpuestas. El eje de abcisas indica velocidad  $V$  y el de ordenadas el número de estrellas.

### Velocidades respecto del Sol Todas las estrellas incluidas de -150 a +60

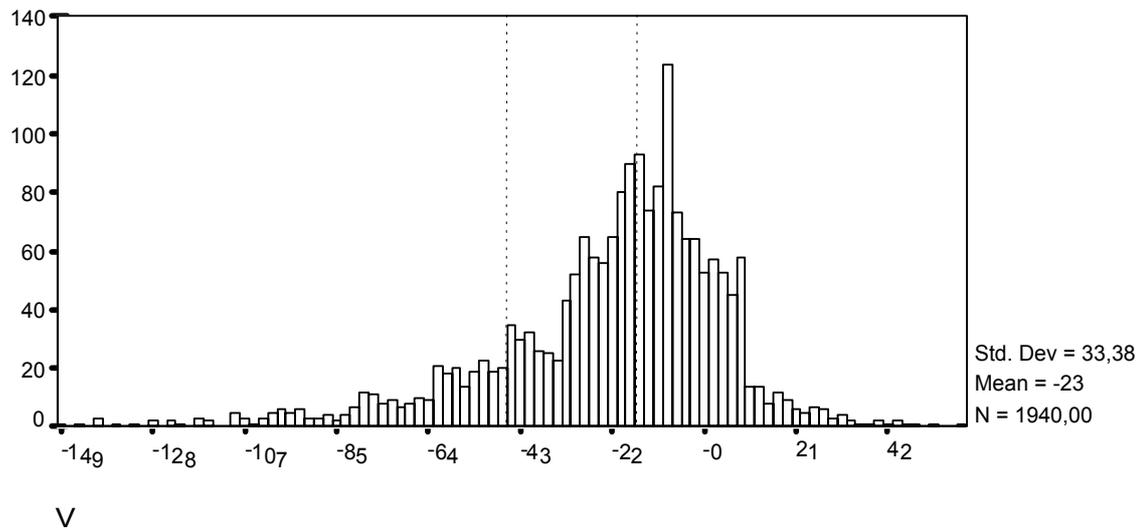


Figura 5-2

Si se aplica el método numérico de separación de poblaciones descrito, se obtienen las medias de las gaussianas en  $V=-15,6$  y  $V=-47,0$   $\text{Km.s}^{-1}$  (líneas de puntos). Se observa gráficamente que dichas medias se corresponden de forma bastante aproximada a las de las dos gaussianas parciales que aparecen en el histograma. Con la velocidad del Sol respecto del centroide de la Tabla 5-2 ( $V_0=-20,64$   $\text{Km.s}^{-1}$ ), se deduce gráficamente la alta probabilidad del Sol de pertenencia a la población mayoritaria.

A continuación se representa gráficamente cómo evolucionan la entropía y la cantidad  $\chi^2$  al ir variando el módulo de velocidad de corte que selecciona la muestra. En el eje de abscisas figura el módulo de la velocidad de corte. Para obtener un mayor contraste, se ha realizado un cambio de escala de modo que  $\chi^2$  se ha dividido por un factor 3. Por este motivo, la comparación de estos parámetros debe ser cualitativa y no cuantitativa.

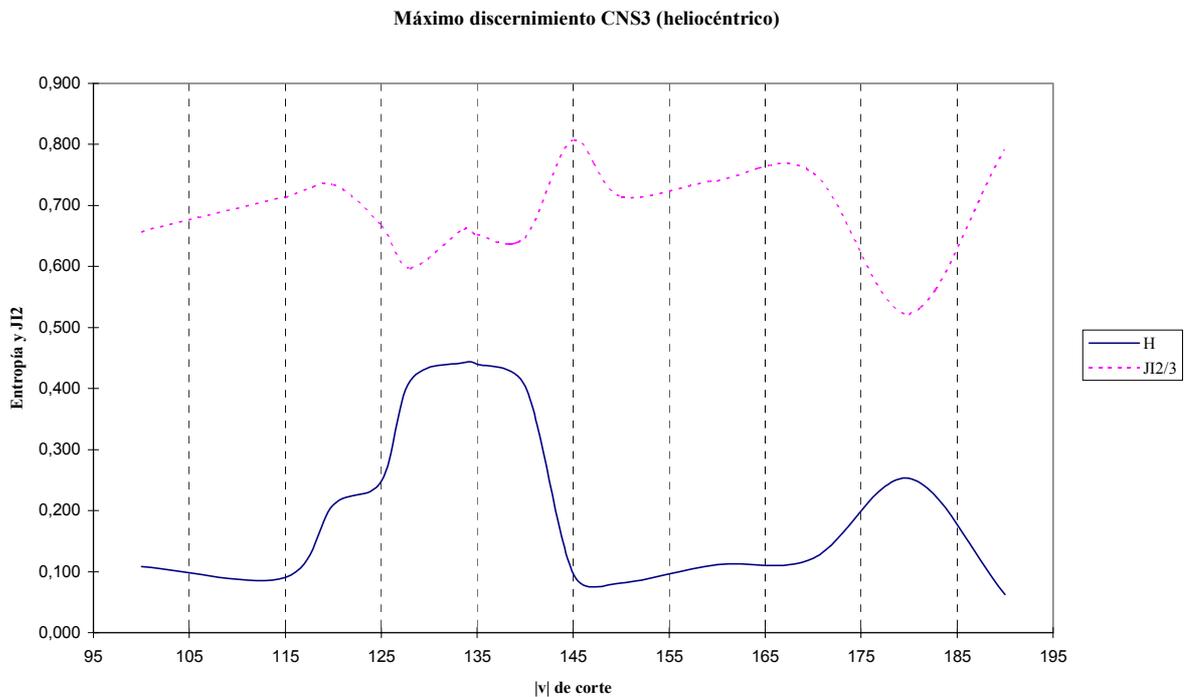


Figura 5-3

Se observa que alrededor de  $|v|=180 \text{ kms}^{-1}$  se produce otro máximo de entropía. Esto es indicador de la probable presencia de una tercera población segregable si la muestra se limitara a ese punto de corte. No obstante, no se ha querido extraer conclusiones al respecto por el bajo número de estrellas que constituirían la muestra extraída (incremento de  $\sim 2\%$  de estrellas de acuerdo con la Tabla 5-1).

### 5.2.1.1 Momentos de la muestra heliocéntrica

Seleccionando la muestra heliocéntrica según se acaba de indicar, y con las 1874 estrellas mencionadas, se obtienen los siguientes valores de los momentos.

Velocidad del Sol respecto el centroide (LSR)

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-10.52	0.85
010 ( $V_0$ )	-20.64	0.57
001 ( $W_0$ )	-7.86	0.46
ORDEN2		
200	1351.75	49.52
110	144.68	23.40
020	609.54	26.22
101	-11.31	20.32
011	-3.02	15.21
002	396.37	19.97
ORDEN3		
300	8876.25	3406.31
210	-5408.54	1348.51
120	-2003.15	1007.97
030	-12751.01	1518.78
201	-182.91	1059.98
111	-872.04	651.81
021	245.21	720.99
102	-67.10	820.45
012	-2228.39	773.33
003	-32.55	1342.73
ORDEN4		
400	6423533.21	514972.64
310	585108.65	148337.71
220	1047434.96	75808.21
130	225710.01	76839.98
040	1659618.08	163083.29
301	-54903.61	138022.29
211	-42884.09	44089.91
121	26413.31	36545.39
031	-32602.98	62668.70
202	773938.37	62729.44
112	24774.37	31593.87
022	433553.75	53532.41
103	-24339.55	63496.37
013	-59220.13	63066.55
004	904761.36	151700.94

CUMULANTES ORDEN4

1111	941856.18	564779.46
1112	-1593.17	162852.12
1113	-9054.92	146310.84
1122	181621.52	100724.51
1123	-35525.23	48922.00
1133	237886.31	78164.93
1222	-38851.31	82962.41
1223	34179.78	38816.65
1233	-32640.10	33857.17
1333	-10895.36	65095.92
2222	544986.71	172222.76
2223	-27073.56	64727.60
2233	191928.92	58094.71
2333	-55624.48	63942.37
3333	433427.48	154160.14

Tabla 5-2

Se observa presencia de desviación del vértex para la muestra total de acuerdo con el criterio expresado en 1.5.2.1, según el cual, cuando hablamos de esta correlación para una muestra mezcla de varias componentes, nos referimos al valor del momento  $\mu_{12}=144,68\pm 23,40$  pues geoméricamente no tendría sentido hablar de orientación de una superposición de elipsoides de velocidades residuales.

Estos valores de los momentos son del mismo orden que los obtenidos por otros autores en el entorno solar. Para el caso de la muestra de Erickson (Erickson, 1975) los valores de los momentos encontrados por este autor eran:

Velocidad del Sol respecto el centroide (LSR)

	Valor	Error
$U_0$	-10.3	1.4
$V_0$	-20.5	0.9
$W_0$	-7.6	0.7
ORDEN2		
200	1300.0	80.0
110	110.0	40.0
020	600.0	40.0
101	-20.0	30.0
011	20.0	20.0
002	350.0	30.0
ORDEN3		
300	-5000.0	6100.0
210	-13400.0	3100.0
120	-200.0	2700.0
030	-13700.0	2900.0
201	2000.0	2600.0
111	-800.0	1400.0
021	-100.0	1400.0
102	-1100.0	1400.0
012	-2100.0	900.0
003	600.0	1300.0
ORDEN4		
400	6560000.0	940000.0
310	430000.0	360000.0
220	1430000.0	270000.0
130	20000.0	270000.0
040	1680000.0	320000.0
301	-290000.0	330000.0
211	-10000.0	130000.0
121	20000.0	120000.0
031	70000.0	140000.0
202	890000.0	150000.0
112	-10000.0	70000.0
022	370000.0	80000.0
103	-90000.0	100000.0
013	50000.0	70000.0
004	610000.0	110000.0

Tabla 5-3

Como puede observarse, los momentos calculados por Erickson y los obtenidos para nuestra muestra en general coinciden bastante bien dentro del margen de error, si se acepta el criterio de considerar nulos los valores inferiores al doble de su error. Esta coincidencia en los valores de los momentos sucede a pesar de que la muestra de Erickson se había extraído del CNS2 y que los criterios de selección de estrellas de dicho catálogo eran de tipo astrofísico, por lo que nada tenían que ver con el criterio de máximo discernimiento. Los errores de los momentos son lógicamente menores en el presente caso debido a que se utilizan 1874 estrellas en lugar de las 869 utilizadas por Erickson.

### 5.2.1.2 Determinación de poblaciones de la muestra heliocéntrica

Se ha aplicado el método a la muestra antes descrita como heliocéntrica de 1874 estrellas. De aquí se obtiene el subcentroide de la mayoritaria al que se refiere la muestra definitiva.

Los resultados han sido:

Pob. a	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	1089,5	351,6	309,1	96,5	-58,2	0,28	-7,3	-15,6	-7,4	0,84
error	118,2	135,7	37,7	93,6	39,9	23,8	1,0	0,9	0,5	0,02

Pob. b	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	2389,2	1136,4	848,1	-131,1	189,7	-90,6	-27,4	-47,0	-10,1	0,16
error	563,8	692,0	169,2	471,9	181,0	96,6	2,4	3,6	0,6	0,02

Tabla 5-4

Reducidas a desviaciones típicas los resultados obtenidos son:

Población a:  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 33\pm 2 : 19\pm 4 : 18\pm 1$

Población b:  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 49\pm 6 : 34\pm 10 : 29\pm 3$

$w_1:w_2:w_3 = 20\pm 3 : 31\pm 5 : 3\pm 1 \text{ Kms}^{-1}$

### 5.2.2 Muestra referida el subcentroide de la población de menor |v|

Vamos ahora a referir la muestra al subcentroide de la población parcial mayoritaria para no perder estrellas de esta componente. El punto al que se deberá desplazar la muestra será:

$$U'_0 = -7,3 \text{ Km.s}^{-1} \quad V'_0 = -15,6 \text{ Km.s}^{-1} \quad W'_0 = -7,4 \text{ Km.s}^{-1}$$

Obsérvese que la mayoría de conclusiones que se constatarán posteriormente pueden ser deducidas ya de los resultados anteriores. Esto hace referencia fundamentalmente a los valores de las dispersiones de velocidad y diferencias de velocidades entre las dos poblaciones obtenidas. No obstante, como ya se ha dicho y puede deducirse gráficamente de la Figura 5-2, la fracción de población correspondiente a cada grupo no quedaría ajustada según este criterio debido a que se están excluyendo estrellas que perfectamente podrían entrar en la muestra.

Así pues, se vuelve a tomar el catálogo CNS3 restringido y se efectúa una traslación de todas las velocidades al nuevo origen. Esto genera el catálogo que denominaremos CNS3 desplazado. Se aplica ahora a la nueva muestra desplazada el criterio de máximo discernimiento. La variable de exclusión de estrellas en la muestra vuelve a ser el módulo de la velocidad  $|v|$ .

Este catálogo presenta las siguientes características descriptivas. La variable analizada es  $|v|$ , (datos obtenidos de SPSS®). Nuevamente los percentiles nos indican el escaso número de estrellas que se excluyen en el entorno del punto de corte.

Media	46,611	Mediana	36,800	Desv. típica	39,236
Varianza	1539,459	Mínimo	3,050	Máximo	551,370
Percentil	Valor	Percentil	Valor	Percentil	Valor
10,00	14,831	20,00	21,044	30,00	25,884
40,00	30,728	50,00	36,800	60,00	43,558
70,00	52,284	80,00	65,458	90,00	87,647
91,00	90,193	92,00	93,581	93,00	99,209
94,00	105,545	95,00	113,211	96,00	120,542
97,00	129,675	98,00	143,989	99,00	177,912
Casos válidos	1940	Casos excluidos	0		

Tabla 5-5

Ahora el punto de máximo discernimiento se produce para  $|v|=144,5 \text{ Kms}^{-1}$ . Este punto de corte se corresponde con el valor  $|v| \text{ media} + 2,5\sigma$ . Este criterio coincide con el que otros autores aplican con el fin de homogeneizar la muestra (p. e. Figueras 1986). De este modo, quedan 1904 estrellas lo cual representa el 98,14% del total de estrellas del catálogo CNS3 desplazado.

Realizamos para la nueva muestra el histograma de la componente  $V$  de la velocidad. El eje de abcisas indica velocidad  $V$  y el de ordenadas el número de estrellas.

### Velocidades respecto del subcentroide de la mayoría Todas las estrellas incluidas de -145 a +85

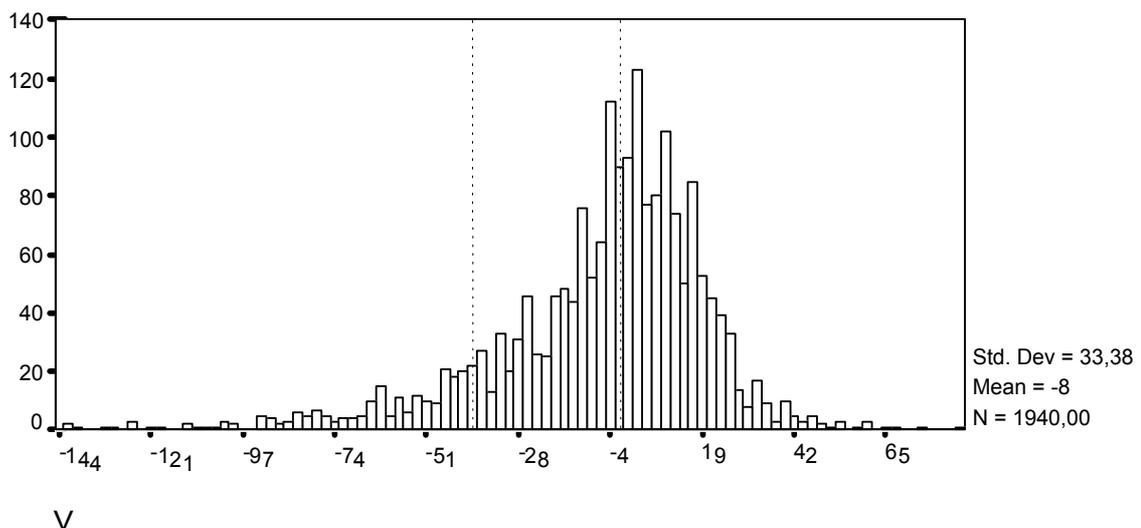


Figura 5-4

Al aplicar el método numérico de separación de poblaciones objeto del presente trabajo, tal y como se verá a continuación, se obtienen las medias de las gaussianas en  $V = -1,6$  y  $V = -39,6 \text{ Kms}^{-1}$  (líneas de puntos). Se observa gráficamente que dichas medias se corresponden de forma bastante aproximada a las de las dos gaussianas parciales superpuestas que aparecen en el histograma.

Del mismo modo que se ha hecho para la muestra heliocéntrica, se representa aquí gráficamente cómo evolucionan la entropía y la cantidad  $\chi^2$  al variar el módulo de velocidad de corte que selecciona la muestra. En el eje de abscisas figura el módulo de la velocidad de corte. También en este caso, para obtener un mayor contraste, se ha dividido  $\chi^2$  por un factor 3. Otra vez, la comparación de los parámetros debe ser cualitativa y no cuantitativa.

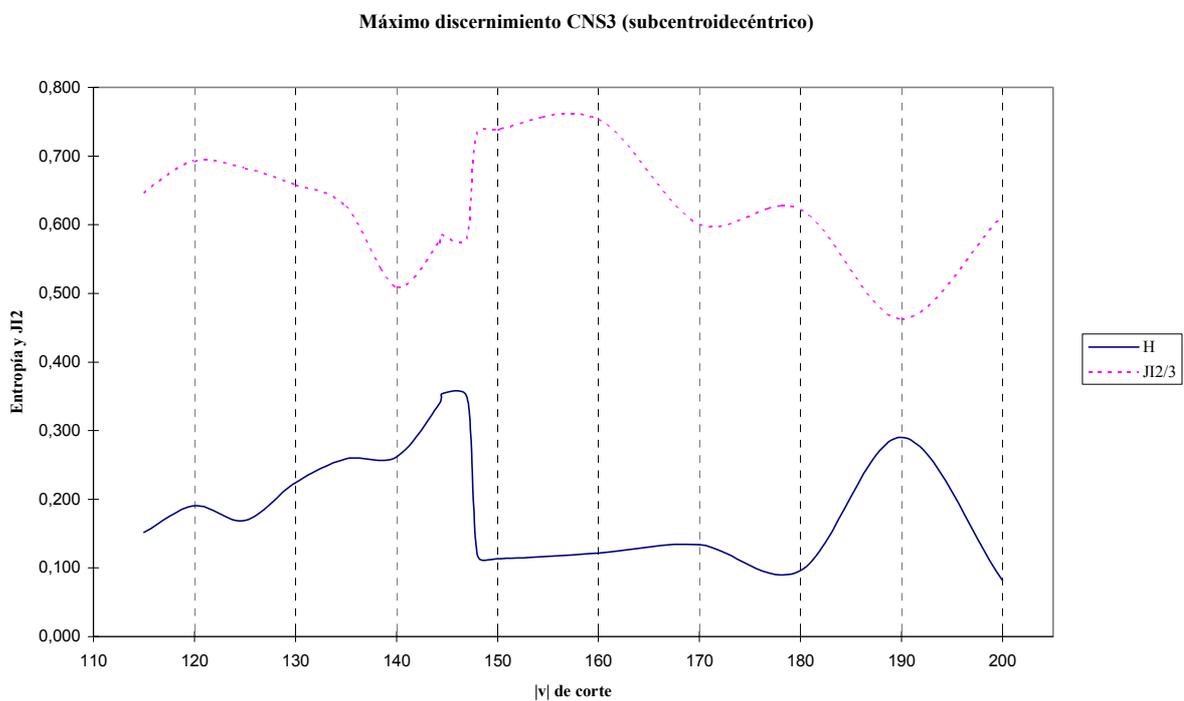


Figura 5-5

Al igual que para la muestra heliocéntrica se aprecia un segundo máximo de H (y mínimo de  $\chi^2$ ) esta vez en el entorno de  $|v| = 190 \text{ Kms}^{-1}$ . En 5.3.1.2 se discute este resultado.

5.2.2.1 *Momentos de la muestra referida al subcentroide de la mayoritaria*

Seleccionando la muestra del catálogo CNS3 desplazado según se acaba de indicar, y con las 1904 estrellas mencionadas, se obtienen los siguientes valores de los momentos.

Velocidad respecto del nuevo centroide		
	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-4.00	.88
010 ( $V_0$ )	-5.91	.60
001 ( $W_0$ )	-.34	.48
ORDEN2		
200	1474.09	55.73
110	175.50	27.15
020	678.51	30.84
101	-15.72	24.01
011	-7.02	18.04
002	435.22	22.60
ORDEN3		
300	4201.64	4142.88
210	-8942.09	1728.77
120	-3978.56	1366.54
030	-17794.64	2158.46
201	5.28	1516.68
111	-1690.31	971.32
021	839.96	1082.87
102	-705.55	1161.75
012	-4262.28	1034.12
003	763.13	1604.08
ORDEN4		
400	8086279.95	665028.82
310	816244.76	197640.75
220	1433917.27	117502.49
130	392075.48	116421.42
040	2271296.91	264165.40
301	-259441.75	202043.42
211	-27205.28	77334.34
121	37966.05	63135.31
031	-85140.14	93828.90
202	1097556.69	106038.20
112	56580.83	59121.97
022	619805.71	76147.53
103	33898.73	97793.00
013	-108907.71	91660.30
004	1162027.18	185345.82

CUMULANTES ORDEN4		
1111	1567452.53	723357.86
1112	40119.29	215641.13
1113	-189934.52	211581.54
1122	372135.84	144647.67
1123	-11336.33	82170.10
1133	455507.46	120663.44
1222	34834.62	123522.39
1223	51095.48	65497.73
1233	-20022.88	61195.32
1333	54420.54	99567.13
2222	890188.28	273930.18
2223	-70845.48	96278.06
2233	324407.26	81397.59
2333	-99738.53	92704.54
3333	593775.12	188452.07

Tabla 5-6

Con estos valores de los momentos se vuelve a aplicar el método numérico de determinación de poblaciones estelares. Se observa para la muestra total la existencia de desviación del vértex no nula pues  $\mu_{12}=175,50\pm 27,15$ . Nótese que al habernos desplazado al subcentroide de la mayoritaria los valores obtenidos para los momentos resultan mayores. Esto era de esperar pues, ese desplazamiento exige que el valor de corte del módulo de la velocidad sea más alto para seguir incluyendo las estrellas correspondientes a la población minoritaria. De este modo se provoca que se incluyan más estrellas y consecuentemente, estrellas de más alta velocidad y dispersión. Eso era lo que se buscaba con este desplazamiento: incluir el máximo de estrellas de las poblaciones, cosa que era impedida por tomar velocidades heliocéntricas y el criterio de selección por el módulo de la velocidad. Así pues, es lógico que los valores de los momentos sean mayores para esta nueva muestra y lo serán también los momentos parciales de las componentes una vez apliquemos el método numérico y sean aproximadas cada una de ellas por una distribución normal.

### 5.2.2.2 Resultados de la separación

Se ha aplicado el método a la muestra antes descrita como referida al subcentroide de la mayoritaria. Los resultados han sido:

Pob. a	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	1184,9	399,4	308,7	107,9	-72,7	5,5	-1,5	-1,6	-0,4	0,89
error	111,1	139,2	41,3	87,4	43,5	24,2	0,9	0,8	0,5	0,02

Pob. b	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	3314,7	1579,2	1423,0	-27,8	431,8	-100,5	-23,3	-39,6	-0,2	0,11
error	750,9	1050,2	271,0	643,9	284,7	127,4	2,6	4,3	0,5	0,02

Tabla 5-7

Reducidas a desviaciones típicas los resultados obtenidos son:

$$\text{Población a: } \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 34 \pm 2 : 20 \pm 3 : 18 \pm 1$$

$$\text{Población b: } \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 58 \pm 7 : 40 \pm 13 : 38 \pm 4$$

$$w_1 : w_2 : w_3 = 22 \pm 4 : 38 \pm 5 : 0 \pm 1 \text{ Kms}^{-1}$$

La desviación del vértex que presenta cada una de las poblaciones parciales que componen esta muestra es:

$$\text{Población mayoritaria (Población a): } \varepsilon \approx 8,5^\circ$$

$$\text{Población minoritaria (Población b): } \varepsilon = -0,9^\circ \pm 21^\circ \approx 0$$

De estos valores se deduce que sólo la componente mayoritaria presenta desviación del vértex. Este resultado es más preciso que otros de superposición (p.e. Cubarsi 1992).

De acuerdo con la expresión anterior 2-34, en el caso particular del momento (1,2) da como resultado:

$$\mu_{12} = n' \mu'_{12} + n'' \mu''_{12} + n' n'' (v'_1 - v''_1) (v'_2 - v''_2) \quad 5-1$$

Hay una contribución al momento  $\mu_{12}$  total, o lo que es lo mismo (según se ha aclarado en 1.5.2.1) a la desviación del vértex de la muestra global, por parte de la de cada componente y otra debido a la diferencia de velocidades de los centroides de cada una de las componentes.

En este caso los valores resultan ser 96 y -3 las contribuciones a  $\mu_{12}$  de la primera y segunda componentes respectivamente, mientras que la contribución a  $\mu_{12}$  de la diferencia de velocidades resulta ser 81.

Observamos que la contribución a la desviación del vértex es debida en un ~54% a la de cada componente (prácticamente todo la primera) y un ~46 % a la diferencia de velocidades de los centroides de cada componente.

La curva de entropía (Figura 5-5) nos indica que ya no tiene sentido seguir continuando la segregación de las poblaciones obtenidas en más subpoblaciones gaussianas.

### **5.3 *Discusión de los resultados***

#### **5.3.1 Poblaciones estelares en el entorno solar**

##### *5.3.1.1 Asociación de cada población parcial con poblaciones estelares clásicas*

De forma análoga a lo realizado en otros trabajos, (Cubarsi 1992, Alcobé et al. 1995, Ratnatunga & Upgren 1997) se pueden asociar aquí los valores de las dispersiones de velocidad de cada una de las dos poblaciones obtenidas con poblaciones estelares clásicas. Estos resultados están de acuerdo con los que hemos dado de Sandage & Fouts en el capítulo 1.5.1.

Valores similares obtienen entre otros muchos autores, por ejemplo, Ratnatunga & Upgren (1997) que identifican, mediante las dispersiones de velocidad obtenidas, las dos componentes discretas ajustadas en su muestra con estrellas nuevas y viejas de la Población I.

Disco joven (young disk):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 31:18:12$

Disco viejo (old disk):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 54:36:31$

De acuerdo con estos valores, parece lícito asociar la población que hemos denominado *a* con el disco joven y la *b* con el disco viejo.

### 5.3.1.2 *Discusión sobre el segundo máximo de entropía*

Aun cuando, por causa del escaso número de estrellas que representa (~1%), no queremos extraer conclusiones de la presencia del segundo máximo de entropía que aparece en la Figura 5-5, se sugiere la probable pertenencia de las estrellas afectadas a una tercera componente. Los valores de los parámetros cinemáticos que se calculan para ese tercer grupo de estrellas son los siguientes:

- Número de estrellas: 20
- $\sigma_U : \sigma_V : \sigma_W = 69:46:43$
- $U : V : W = -30,4:-51,7:-1,0$
- $\varepsilon = -10,0^\circ$

Debido a la incertidumbre, no se ha pretendido identificar este grupo de estrellas con ninguna población estelar en concreto.

### 5.3.2 **La desviación del vértex**

En lo referente a la cuestión de la desviación del *vértex* podemos hacer las siguientes observaciones:

- La desviación de la muestra global es debida en un ~54% a la propia de cada componente parcial, en concreto a la mayoritaria y menos dispersa, y en un ~46 % a la diferencia de velocidades entre las poblaciones parciales.
- De acuerdo con Orús (1977), al menos una de las poblaciones parciales presenta desviación del vértex nula ( $\varepsilon \approx 0$ ), lo cual es compatible con modelos dinámicos que consideren la suposición de simetría cilíndrica que además presenta simetría respecto al plano galáctico. Por lo tanto, la otra población habría que estudiarla excluyendo esta hipótesis de simetría.
- Los resultados están de acuerdo con la idea de que la desviación del vértex es propia de estrellas con menor dispersión de velocidades residuales.
- Así mismo, también resulta ser mayor para las estrellas de menor módulo de la velocidad residual.
- En línea con esto último, en particular, se observa que es mayor para estrellas de menor módulo de la velocidad perpendicular al plano galáctico.
- Hecha la asociación con poblaciones estelares, se cumple también que las estrellas de la población joven del disco presentan mayor desviación del *vértex*.
- Su no presencia en la población de estrellas asociada con la del disco viejo es compatible con la idea de que la desviación del vértex disminuye con la edad llegando a ser nula pasado un determinado tiempo (Gómez et al., 1997).

- Este resultado es compatible con la idea de que los grupos en movimiento son los responsables de la desviación del vértex (Dehnen & Binney 1998).

### 5.3.3 Componentes de la velocidad

Puesto que las velocidades se han referido al subcentroide de la población mayoritaria, lo correcto es hacer referencia a la diferencia de velocidades de ambos subcentroides, el vector  $\mathbf{w}$  definido en la expresión 2-27. De acuerdo con la Tabla 5-6, tenemos los valores que siguen referentes a la velocidad.

Además, 2-7 y 2-27 dan lugar a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que nos permite calcular las velocidades de los subcentroides respecto del centro galáctico a partir de la del centroide global. Se deduce:

$$\left. \begin{aligned} v' &= v + n'' w \\ v'' &= v - n' w \end{aligned} \right\} \quad 5-2$$

Podemos aplicar estas expresiones utilizando donde corresponda valores típicos que se suelen tomar para las velocidades radial y circular así como para la distancia al centro galáctico en el entorno solar (p.e. Ojha et al. 1996), (Clube 1985):

- $V_{\varpi} \approx 40 \text{ Kms}^{-1}$ ;  $V_{\theta} \approx 220 \text{ Kms}^{-1}$ ;  $\varpi_0 \approx 8,5 \text{ Kpc}$

#### 5.3.3.1 Velocidad radial

De los resultados obtenidos podemos hacer las siguientes deducciones en referencia a las velocidades radiales  $\Pi'_0$  y  $\Pi''_0$ . En primer lugar, analicemos la diferencia de velocidades medias.

Hemos visto que dicha diferencia de velocidades de los subcentroides es:

$$\Pi'_0 - \Pi''_0 \equiv w_{\varpi} = 21,8 \text{ Kms}^{-1}.$$

De acuerdo con 5-2, obtenemos las siguientes velocidades radiales de los subcentroides:

$$\Pi' = 42,4 \text{ Kms}^{-1}$$

$$\Pi'' = 20,6 \text{ Kms}^{-1}$$

### 5.3.3.2 Velocidad de rotación

Análogamente, podemos discutir los resultados obtenidos para las velocidades angulares  $\Theta^{\prime}_0$  y  $\Theta^{\prime\prime}_0$ . Los valores correspondientes a la diferencia de velocidades medias que hemos obtenido son:

$$\Theta^{\prime}_0 - \Theta^{\prime\prime}_0 \equiv w_{\theta} = 38,0 \text{ Kms}^{-1}.$$

Y de acuerdo con 5-2, deducimos las siguientes velocidades de rotación de los subcentroides:

$$\Theta^{\prime} = 224,2 \text{ Kms}^{-1}$$

$$\Theta^{\prime\prime} = 186,2 \text{ Kms}^{-1}$$

### 5.3.3.3 Velocidad perpendicular al plano galáctico

Del mismo modo que hemos analizado las velocidades radiales y angulares podemos discutir los resultados obtenidos en referencia a las velocidades verticales  $Z^{\prime}_0$  y  $Z^{\prime\prime}_0$ . El valor obtenido para la diferencia de velocidades de los subcentroides es:

$$Z^{\prime}_0 - Z^{\prime\prime}_0 \equiv w_z = -0,2 \pm 0,7 \text{ Kms}^{-1}$$

Con estos valores y errores podemos afirmar que esta diferencia es cero. De donde deducimos que  $Z^{\prime}_0 = Z^{\prime\prime}_0 = 0$ .

Este resultado implica que la idea de plano galáctico está de acuerdo con lo modelos dinámicos descritos.

## **6. Aplicación a muestras del entorno solar: Catálogo HIPPARCOS.**

### **6.1 Catálogo HIPPARCOS**

#### **6.1.1 Descripción del catálogo**

El catálogo Hipparcos ha sido creado a partir de la misión del satélite astrométrico del mismo nombre y ha representado una mejora extraordinaria respecto a los datos observados desde tierra (Perryman 1999). Contiene 118.218 estrellas para 22.396 de las cuales se conoce la distancia con error menor de un 10%. Esto ha significado extender del orden de un factor 10 el rango de paralajes conocidos con dicha precisión. De este modo, la distancia límite a la que se consigue la precisión de un 10% en la paralaje se ha llevado hasta 200 o 300 pc. Tal precisión depende de la magnitud y la distancia a la eclíptica.

Las paralajes se han acompañado con los datos correspondientes a movimientos propios y medidas fotométricas. No así con datos espectroscópicos. En consecuencia, se puede construir el espacio de velocidades para las estrellas pertenecientes a este catálogo si se acompañan de las correspondientes velocidades radiales proporcionadas por otros catálogos con medidas espectroscópicas.

#### **6.1.2 La muestra estelar**

La muestra estelar procedente del catálogo Hipparcos que se ha confeccionado para aplicar el método numérico desarrollado en este trabajo, se ha obtenido de la siguiente manera (Figueras 2000).

Se han tomado las estrellas del Hipparcos Input Catalogue (Turon et al. 1992) con velocidad radial conocida. Esto representa 19.467 estrellas en total. A continuación, se ha cruzado con la información de tipo espectral y astrométrica procedente de Hipparcos quedando 19.466 estrellas. Finalmente, se ha restringido el catálogo a estrellas con distancia trigonométrica inferior a 300 pc. De este modo el catálogo resultante - al que nos referiremos como Hipparcos - contiene 13.678 estrellas.

Por su propia concepción, el catálogo Hipparcos es menos completo estadísticamente que el CNS3. Dada la máxima magnitud que contempla y que lo aplicaremos para una distancia de hasta 300 pc en lugar de los 25 pc del CNS3, se produce un mayor sesgo hacia estrellas más brillantes (y tipos espectrales más tempranos) a medida que nos alejamos del Sol. En consecuencia, la relación entre el número de estrellas y la distancia al Sol decrece más rápidamente en este nuevo catálogo.

##### *6.1.2.1 Selección de la muestra*

Tal y como se indicado en 4.2.3, al igual que para el CNS3 la distribución del número de estrellas respecto el módulo de la velocidad de corte presenta una apariencia de sigmoidea.

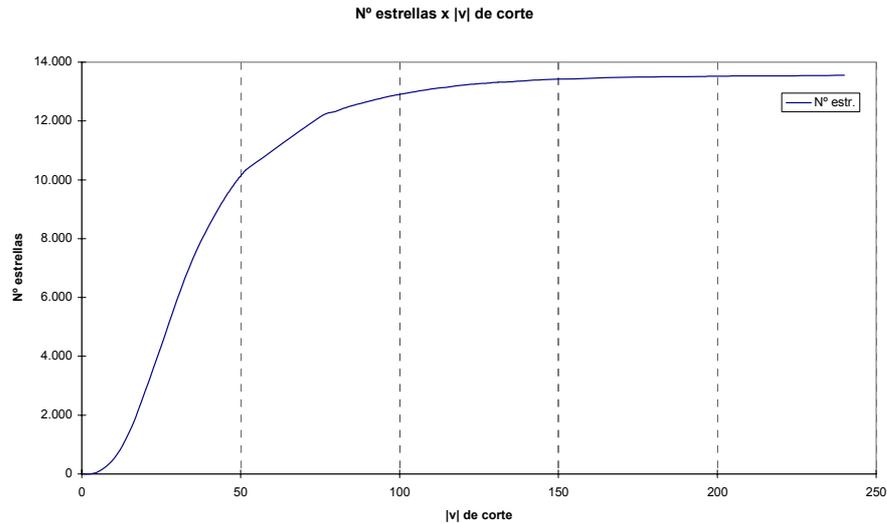


Figura 6-1

Por lo tanto se ha procedido con esta muestra de la misma manera que se hizo con el CNS3. Es decir, se ha aplicado el criterio de máximo discernimiento buscando los diferentes máximos de entropía para la probabilidad de mezcla que se producen a medida que limitamos la muestra por diferentes valores del módulo de la velocidad.

A continuación, se ha realizado un desplazamiento de la muestra al subcentroide de la población de menor módulo medio de la velocidad para evitar el efecto de selección producido por referir las velocidades a una estrella concreta (el Sol). Este desplazamiento produce un aumento de contraste de los resultados que permite decidir cuáles son los valores correctos.

## 6.2 Resultados de la aplicación del método

### 6.2.1 Muestra heliocéntrica

#### 6.2.1.1 Consideraciones iniciales

Al aplicarse el criterio de máximo discernimiento se ha comenzado seleccionando una muestra heliocéntrica dado que las velocidades de partida están referidas al Sol. Una vez más presentamos los parámetros estadísticos de esta muestra. La variable analizada es  $|v|$ , módulo de la velocidad. Los datos se han obtenido utilizando SPSS<sup>®</sup>. Los percentiles indican cuántas estrellas se añaden al incrementar el valor de corte y muestran que, al aplicar este criterio, se están excluyendo muy pocas estrellas.

Media	43,474	Mediana	32,970	Desv. típica	41,064
Varianza	1686,224	Mínimo	1,290	Máximo	602,810
Percentil	Valor	Percentil	Valor	Percentil	Valor
10,00	14,650	20,00	19,680	30,00	24,287

40,00	28,450	50,00	32,970	60,00	38,820
70,00	46,270	80,00	57,594	90,00	79,441
91,00	82,809	92,00	87,074	93,00	92,183
94,00	97,880	95,00	104,420	96,00	113,258
97,00	125,029	98,00	145,069	99,00	221,529

Casos válidos 13678 Casos excluidos 0

Tabla 6-1

Obtenemos una importante diferencia con respecto a los resultados obtenidos utilizando el CNS3. Si allí teníamos un máximo de entropía y sospechábamos un segundo del que no era posible extraer conclusiones, ahora se obtienen varios máximos relativos de entropía que necesitarán ser interpretados. Dichos máximos de entropía se encuentran en los siguientes puntos:

<b> v  de corte (Km.s<sup>-1</sup>)</b>	<b>Cantidad de estrellas</b>	<b>% de la muestra</b>	<b> v  media + x <math>\sigma</math></b>
50,5	10.195	74,54	0,17
131	13.315	97,35	2,13
150	13.420	98,11	2,59
165	13.469	98,47	2,96
190	13.506	98,74	3,57
210	13.531	98,93	4,06

Tabla 6-2

Como se verá en la Tabla 6-9, el máximo de entropía que coincide con mínima  $\chi^2$  es el de  $|v|=210$  Kms<sup>-1</sup>. Esto indica que el modelo de superposición se ajusta mejor por gaussianas si se trabaja con casi toda la muestra (sólo se excluyen el 1,07% de las estrellas).

Presentamos a continuación el gráfico que nos indica los diferentes máximos de entropía. Tal como se hizo para el CNS3 representamos cómo evolucionan la entropía y la cantidad  $\chi^2$  al ir variando el módulo de velocidad de corte que selecciona la muestra. En el eje de abcisas figura el módulo de la velocidad de corte. Para obtener un mayor contraste, se ha realizado un cambio de escala de modo que  $\chi^2$  se ha dividido por un factor 10.

### Maximo discernimiento Hipparcos (heliocéntrico)

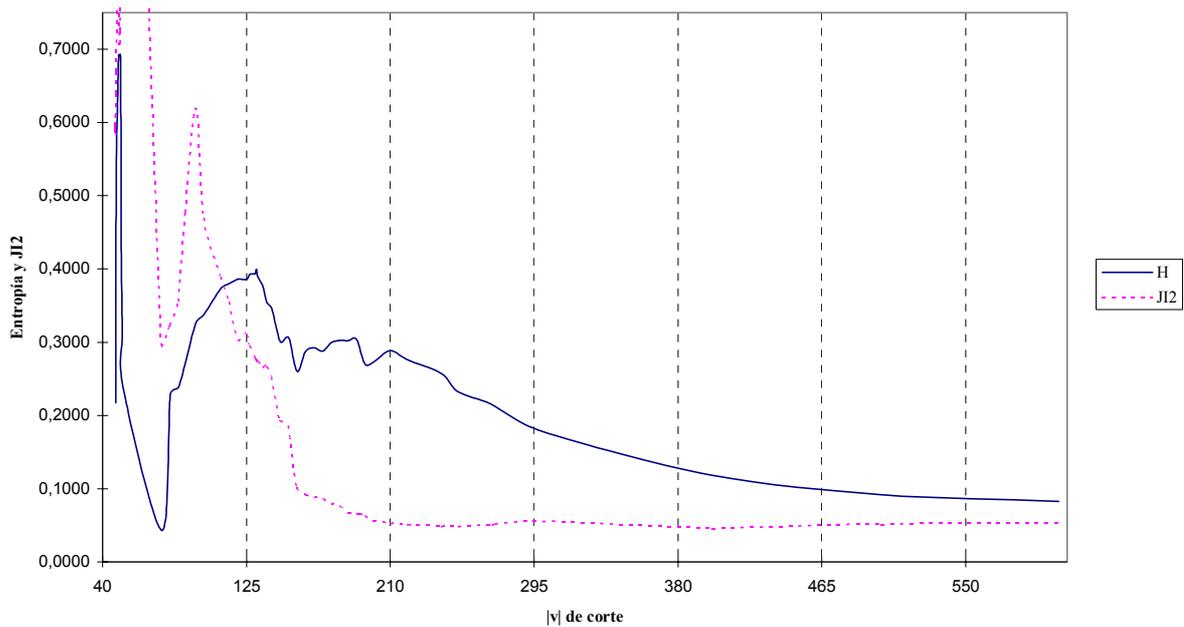


Figura 6-2

En primera aproximación supondremos a partir del gráfico anterior que los diferentes máximos relativos de entropía que se producen pueden dividirse en tres grupos a los que nos referiremos como máximos principales: Un pico para  $|v|=50,5 \text{ Kms}^{-1}$  y luego dos *mesetas* (zonas de entropía aproximadamente constante) cada una con varios máximos relativos a los que llamaremos secundarios. Una de las mesetas supondremos que presenta el máximo en  $|v|=131 \text{ Kms}^{-1}$  y la otra en  $|v|=210 \text{ Kms}^{-1}$ . Cuando desplazemos la muestra al subcentroide de la población más extrema, veremos que estas suposiciones están justificadas. La idea de máximo principal y secundario se refiere a que, para estos últimos, existe poca variación en los parámetros cinemáticos resultantes después de la segregación en dos poblaciones.

Al igual que para el CNS3 los máximos relativos de entropía se corresponden con mínimos relativos de  $\chi^2$ . Existe siempre un ligero desplazamiento debido a que, cuando se produce el máximo de entropía, se está comenzando a incluir estrellas de la siguiente población.

Al contrario que para el CNS3, en todos los casos actuales, el número de estrellas que quedan para cada población extraída es suficientemente grande como para que los resultados puedan ser objeto de algún tipo de interpretación. Por tanto, al ser mayores la cantidad de estrellas y la precisión de los datos de Hipparcos, se puede separar la muestra de forma inmediata es decir, sin necesidad de aplicar el método de forma recurrente. Además, como hay tres máximos, tendremos cuatro poblaciones en lugar de las dos que obteníamos para el CNS3. Al realizar el histograma de la componente  $V$  de la velocidad, se aprecian varias funciones que pueden ser aproximadas por gaussianas.

## Hipparcos todas las estrellas. Escala entre -135 y +65

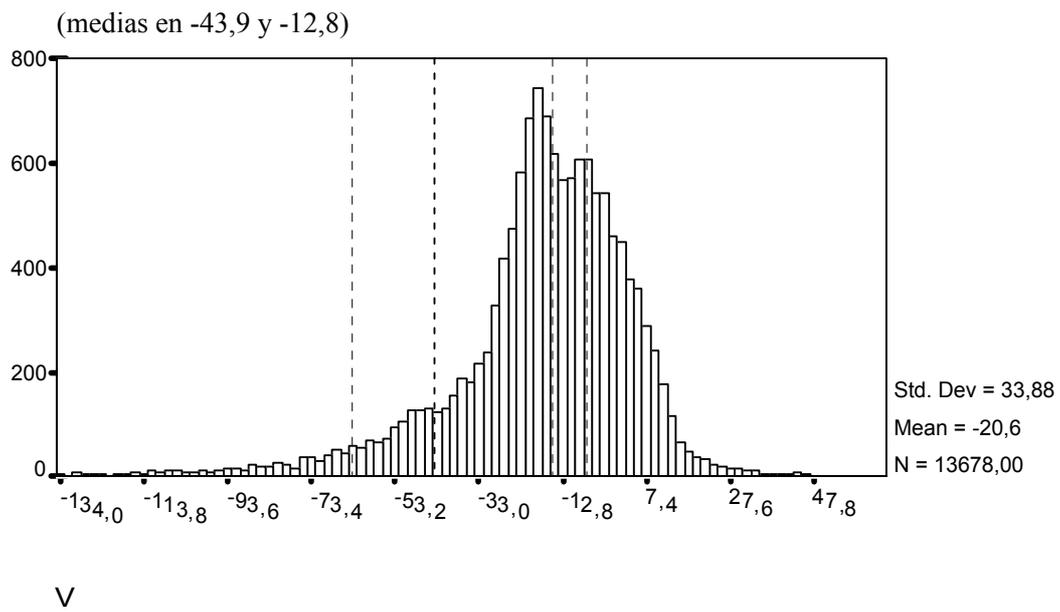


Figura 6-3

Las medias indicadas en la figura anterior (-43,9 y -12,8) son las que se obtienen al aplicar el método numérico de separación si se toma el máximo de entropía  $|v| \leq 131 \text{ Kms}^{-1}$ . Gráficamente observamos que dichas medias se corresponden con bastante buena aproximación a las de dos gaussianas, la menos dispersa de las cuales sería claramente suma de otras dos funciones parciales.

Al aplicar el método de separación según los mencionados tres máximos principales de entropía detectados, se obtienen cuatro grupos de estrellas cuyas medias se encuentran sobre las líneas de puntos. Sus valores son los siguientes:

- $V_1 = -7,7 \text{ Km.s}^{-1}$
- $V_2 = -14,7 \text{ Km.s}^{-1}$
- $V_3 = -43,9 \text{ Km.s}^{-1}$
- $V_4 = -63,7 \text{ Km.s}^{-1}$

Gráficamente vemos que no es aventurado suponer en primera aproximación que tales medias se corresponden con las de distribuciones normales centradas en dichos puntos.

### 6.2.1.2 Momentos de la muestra heliocéntrica

Presentamos los momentos de las muestras heliocéntricas seleccionadas según los máximos de entropía de la Tabla 6-2. Dado el alto número de máximos de entropía encontrados, escribimos explícitamente sólo las velocidades medias y los momentos de segundo orden junto con sus errores excepto en el caso de máxima entropía con mínima  $\chi^2$  que escribimos todos los momentos y cumulantes de cuarto orden. Puede apreciarse cómo evolucionan dichos parámetros al aumentar el módulo de la velocidad de corte.

- Máximo correspondiente a  $|v| = 50,5 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-7.43	.19
010 ( $V_0$ )	-11.18	.13
001 ( $W_0$ )	-6.42	.11
ORDEN2		
200	384.48	4.87
110	48.59	2.37
020	174.57	2.49
101	-3.07	2.15
011	-2.25	1.57
002	117.18	2.18

Tabla 6-3

- Máximo correspondiente a  $|v| = 131 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-10.35	.27
010 ( $V_0$ )	-17.05	.18
001 ( $W_0$ )	-7.24	.13
ORDEN2		
200	944.63	14.77
110	99.71	6.83
020	424.50	7.62
101	-13.43	5.63
011	10.83	4.03
002	240.36	5.28

Tabla 6-4

- Máximo correspondiente a  $|v|=150 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-10.60	.27
010 ( $V_0$ )	-17.53	.19
001 ( $W_0$ )	-7.23	.14
ORDEN2		
200	1005.12	16.45
110	107.68	7.73
020	462.15	8.92
101	-13.85	6.25
011	8.69	4.84
002	257.86	5.97

Tabla 6-5

- Máximo correspondiente a  $|v|=165 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-10.67	.28
010 ( $V_0$ )	-17.80	.19
001 ( $W_0$ )	-7.23	.14
ORDEN2		
200	1039.19	17.53
110	107.62	8.40
020	487.95	9.99
101	-15.63	6.70
011	8.51	5.46
002	269.01	6.44

Tabla 6-6

- Máximo correspondiente a  $|v|=190 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-10.84	.28
010 ( $V_0$ )	-18.04	.20
001 ( $W_0$ )	-7.26	.14
ORDEN2		
200	1067.36	18.50
110	118.50	9.11
020	513.78	11.21
101	-13.89	7.10
011	9.90	6.11
002	279.57	6.97

Tabla 6-7

- Máximo correspondiente a  $|v|=210 \text{ Kms}^{-1}$

En este caso la muestra resultante es la que presenta menor  $\chi^2$ . Por este motivo se explicitan todos sus momentos y cumulantes de cuarto orden.

Velocidad del Sol respecto el centroide

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-10.86	.28
010 ( $V_0$ )	-18.26	.20
001 ( $W_0$ )	-7.27	.15
ORDEN2		
200	1092.11	19.55
110	120.95	10.02
020	542.16	13.04
101	-15.74	7.63
011	11.42	6.62
002	286.83	7.31
ORDEN3		
300	-1802.12	1883.77
210	-13470.04	865.70
120	-2250.54	765.66
030	-20688.21	1436.68
201	-186.20	666.42
111	410.17	394.65
021	-338.04	577.69
102	-627.99	454.94
012	-5734.24	478.84
003	-264.08	586.56
ORDEN4		
400	6365592.02	318072.33
310	393778.09	116788.62
220	1372999.52	79503.93
130	222036.81	91806.61
040	2595750.06	224245.73
301	-149298.17	96877.13
211	27423.66	38324.77
121	-38653.64	36609.61
031	14936.17	71576.74
202	787054.47	52120.37
112	67220.37	28240.38
022	592265.05	51267.97
103	-16179.90	42903.07
013	-7426.72	47998.66
004	805015.19	66534.71

CUMULANTES ORDEN4

1111	2787456.21	326560.36
1112	-2480.39	119041.27
1113	-97731.01	98025.01
1122	751645.34	83365.96
1123	18763.83	39071.61
1133	473310.36	53864.03
1222	25322.02	92605.93
1223	-32881.77	36888.58
1233	32889.18	28490.58
1333	-2636.53	43087.98
2222	1713942.70	225579.65
2223	-3630.84	71868.55
2233	436498.24	51843.92
2333	-17249.57	48121.13
3333	558204.40	66929.82

Tabla 6-8

6.2.1.3 Determinación de poblaciones de la muestra heliocéntrica

Al aplicar el método a la muestra heliocéntrica se han obtenido los resultados que siguen. Se presenta un cuadro resumen de los parámetros poblacionales de cada componente por la que se aproxima cada muestra global seleccionada de acuerdo con el criterio de máximo discernimiento.

Comp.	$\chi^2$	M11	M22	M33	M12	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	V1	V2	V3	FP
50,5-a	14,11	250,7	208,3	188,5	-1,6	16	14	14	6,3	-7,7	-6,9	0,50
50,5-b		135,3	116,4	44,4	3,3	12	11	7	-21,3	-14,7	-5,9	0,50
131-a	5,54	640,4	234,5	156,1	57,2	25	15	12	-7,2	-12,8	-7,2	0,86
131-b		2410,5	783,5	770,6	-245,5	49	28	28	-30,0	-43,9	-7,3	0,14
150-a	3,72	740,6	264,0	167,2	71,16	27	16	13	-8,9	-13,9	-7,3	0,91
150-b		3303,0	1038,4	1156,5	-201,6	57	32	34	-27,8	-53,0	-6,9	0,09
165-a	1,76	790,3	267,0	165,7	90,1	28	16	13	-10,7	-14,1	-7,2	0,91
165-b		3695,2	1112,6	1371,8	-296,6	61	33	37	-10,6	-57,6	-6,8	0,09
190-a	1,31	785,1	262,1	153,6	91,5	28	16	12	-10,6	-14,0	-7,2	0,91
190-b		3891,6	1273,6	1542,4	282,8	62	36	39	-13,3	-58,1	-7,5	0,09
210-a	1,04	797,5	258,4	160,7	93,6	28	16	13	-10,7	-14,1	-7,2	0,92
210-b		4300,9	1381,7	1661,6	315,0	66	37	41	-13,0	-63,7	-8,0	0,08

Tabla 6-9

Se observa que, con excepción de las muestras limitadas a 165, 190 y 210 Kms<sup>-1</sup>, los elevados valores de  $\chi^2$  indican que la aproximación por distribuciones gaussianas se ajusta poco a las componentes estelares que se determinan. Esto es indicativo de que los máximos de entropía que se encuentran no están revelando la presencia de componentes macroscópicas de la Galaxia sino estructuras menores. Probablemente se trata de grupos en movimiento cuyos parámetros cinemáticos difieren del comportamiento medio de la población estelar a la que pertenecen.

### 6.2.1.3.1 Máximo de entropía $|v|=210 \text{ Kms}^{-1}$

Por tratarse de la muestra que permite la mejor aproximación como superposición de funciones de distribución normales, presentamos a continuación los resultados de aplicar el método numérico a la muestra filtrada de acuerdo con  $|v| \leq 210 \text{ Kms}^{-1}$ . Como ya se ha dicho, el número de elementos de dicha muestra es 13.531 estrellas o el 98,93% del total de estrellas.

Pob. a	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	797,5	258,4	160,7	93,6	-6,4	6,9	-10,7	-14,1	-7,2	0,92
error	31,8	59,5	14,6	13,4	11,6	9,2	0,3	0,3	0,2	0,01

Pob. b	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	4300,9	1381,7	1661,6	315,0	-119,6	27,0	-13,0	-63,7	-8,0	0,08
error	273,9	621,9	138,1	97,5	95,5	70,3	0,3	2,5	0,2	0,01

Tabla 6-10

Reducidas a desviaciones típicas los resultados obtenidos son:

$$\text{Población a: } \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 28 \pm 1 : 16 \pm 2 : 13 \pm 1$$

$$\text{Población b: } \sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3 = 66 \pm 2 : 37 \pm 8 : 41 \pm 2$$

$$w_1 : w_2 : w_3 = 2 \pm 1 : 50 \pm 3 : 1 \pm 0,4 \text{ Kms}^{-1}$$

### 6.2.2 Muestra referida el subcentroide de la población más extrema

Como ya se vio para el CNS3, la separación de la muestra heliocéntrica da lugar a una nueva muestra cuyo origen será el subcentroide de la población de menor  $|v|$  medio. Evitaremos una vez más los posibles sesgos en la selección de estrellas debidos a tomar como parámetro de selección el módulo de la velocidad referida al Sol.

El punto al que se deberá desplazar la muestra, de acuerdo con la Tabla 6-9, es:

$$U'_0 = 6,3 \text{ Km.s}^{-1} \quad V'_0 = -7,7 \text{ Km.s}^{-1} \quad W'_0 = -6,9 \text{ Km.s}^{-1}$$

Así pues, se tomará el catálogo Hipparcos y se efectuará una traslación de todas las velocidades al nuevo origen. Esto generará el catálogo que denominaremos *Hipparcos desplazado*. A este nuevo catálogo se le aplicará el criterio de máximo discernimiento.

Una vez más presentamos la tabla de percentiles del nuevo catálogo que contiene los parámetros estadísticos de esta muestra. La variable analizada es  $|v|$ , módulo de la velocidad. Los datos se han obtenido utilizando SPSS®. Los percentiles indican cuántas estrellas se añaden al incrementar el valor de corte y muestran que, como era de esperar, a mismo módulo de velocidad de corte se incluyen más estrellas que en el catálogo heliocéntrico.

Media	42,466	Mediana	32,320	Desv. típica	40,437
Varianza	1635,136	Mínimo	1,330	Máximo	592,190
Percentil	Valor	Percentil	Valor	Percentil	Valor
10,00	14,359	20,00	18,900	30,00	22,957
40,00	27,170	50,00	32,320	60,00	38,120
70,00	45,480	80,00	56,212	90,00	77,512
91,00	81,468	92,00	85,627	93,00	90,525
94,00	96,363	95,00	103,080	96,00	111,082
97,00	124,623	98,00	144,817	99,00	213,762
Casos válidos	13678	Casos excluidos	0		

Tabla 6-11

Tal y como ya sucediera con el CNS3, al referir las velocidades al nuevo origen se aumenta el contraste en la gráfica de la entropía con respecto a  $|v|$  de corte. Los máximos de entropía de la muestra heliocéntrica aparecen desplazados en la nueva muestra.

Al representar la entropía y  $\chi^2$  en función del módulo de velocidad de corte, se obtiene:

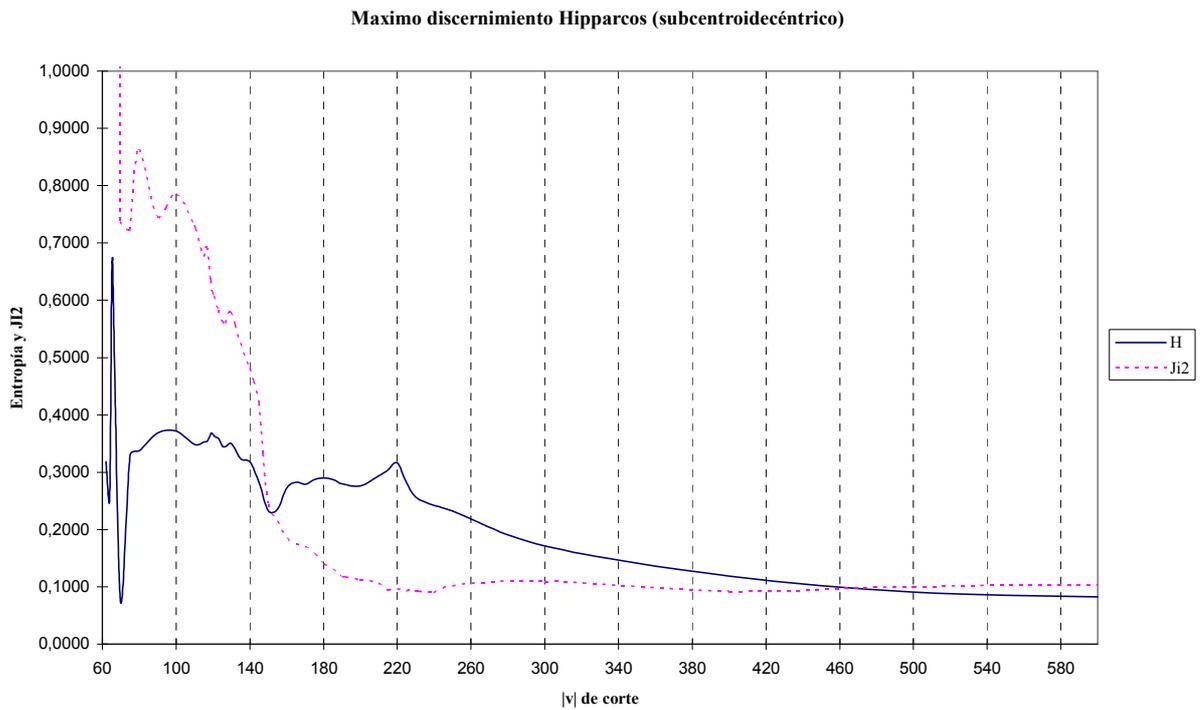


Figura 6-4

Las características del parámetro ideal de selección que se había descrito en 4.2.2, consistente en que se produce una brusca caída de entropía inmediatamente después de los máximos de ídem, queda ahora mucho más evidenciada que en la muestra heliocéntrica (Figura 6-2).

Los nuevos máximos relativos de entropía se encuentran en los siguientes puntos:

$ v $ de corte (Km.s <sup>-1</sup> )	Cantidad de estrellas	% de la muestra	$ v $ media + x $\sigma$
--------------------------------------	-----------------------	-----------------	--------------------------

65,5	11.733	85,78	0,57
100	12.937	94,58	1,42
120	13.218	96,64	1,92
130	13.315	97,35	2,16
165	13.474	98,51	3,03
180	13.500	98,70	3,40
220	13.548	99,05	4,39

Tabla 6-12

Las caídas bruscas de entropía nos confirman los máximos principales que supusimos para la muestra heliocéntrica. Estos eran un pico (situado ahora en  $|v|=65,5 \text{ Kms}^{-1}$ ) y dos *mesetas* con varios máximos relativos. Los máximos de tales mesetas podemos ahora suponer que se encuentran en 120 y 220  $\text{Kms}^{-1}$  respectivamente (son los equivalentes a 131 y 210 de la muestra heliocéntrica). Esta última suposición nos viene indicada por ser después de estos máximos relativos cuando se produce la caída más fuerte de entropía.

Nuevamente encontramos el mínimo valor de  $\chi^2$  -y por tanto mejor ajuste por gaussianas- cuando se utiliza casi toda la muestra. Al desplazar el origen de velocidades se ha conseguido aumentar el número de estrellas para el máximo de menor valor de  $|v|$  (que era el que podía perder más estrellas con referencia heliocéntrica) y para el de mayor valor. No ocurre así con todos los demás (sólo con  $|v|=165 \text{ Kms}^{-1}$ ). Lo que sí es inevitable (aunque resulte irrelevante) es que hayan más estrellas a misma velocidad de corte.

### 6.2.2.1 Momentos de la muestra referida al subcentroide de la población más extrema

Se resumen a continuación los parámetros poblacionales de las muestras globales formadas de acuerdo con el módulo de la velocidad de corte. Se detalla el máximo de mínima  $\chi^2$ .

- Máximo correspondiente a  $|v|=65,5 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-13.36	.21
010 ( $V_0$ )	-5.97	.15
001 ( $W_0$ )	-.15	.12
ORDEN2		
200	541.02	7.17
110	47.02	3.35
020	252.88	3.88
101	-5.78	2.99
011	3.65	2.16
002	157.25	2.93

Tabla 6-13

- Máximo correspondiente a  $|v|=100 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-15.29	.25
010 ( $V_0$ )	-8.25	.17
001 ( $W_0$ )	-.36	.13
ORDEN2		
200	786.11	11.36
110	69.39	5.33
020	360.11	6.01
101	-8.60	4.43
011	12.50	3.16
002	207.70	4.19

Tabla 6-14

- Máximo correspondiente a  $|v|=120 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-16.05	.26
010 ( $V_0$ )	-9.07	.18
001 ( $W_0$ )	-.39	.13
ORDEN2		
200	887.79	13.43
110	83.99	6.39
020	411.14	7.35
101	-9.77	5.26
011	14.40	3.89
002	232.83	5.02

Tabla 6-15

- Máximo correspondiente a  $|v|=130 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-16.48	.27
010 ( $V_0$ )	-9.38	.18
001 ( $W_0$ )	-.35	.13
ORDEN2		
200	937.93	14.56
110	93.74	6.95
020	431.20	7.89
101	-14.02	5.63
011	14.94	4.18
002	242.65	5.41

Tabla 6-16

- Máximo correspondiente a  $|v|=165 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-16.95	.28
010 ( $V_0$ )	-10.12	.19
001 ( $W_0$ )	-.34	.14
ORDEN2		
200	1036.43	17.39
110	106.46	8.50
020	497.16	10.52
101	-13.79	6.66
011	13.00	5.63
002	270.58	6.54

Tabla 6-17

- Máximo correspondiente a  $|v|=180 \text{ Kms}^{-1}$

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-17.10	.28
010 ( $V_0$ )	-10.26	.19
001 ( $W_0$ )	-.32	.14
ORDEN2		
200	1060.82	18.24
110	115.91	9.01
020	510.39	11.03
101	-14.41	7.02
011	11.10	5.99
002	277.89	6.88

Tabla 6-18

- Máximo correspondiente a  $|v|=220 \text{ Kms}^{-1}$

Velocidad del Sol respecto el centroide

	Valor	Error
100 ( $U_0$ )	-17.15	.29
010 ( $V_0$ )	-10.70	.21
001 ( $W_0$ )	-.36	.15
ORDEN2		
200	1105.35	20.03
110	117.91	10.85
020	573.51	15.48
101	-18.12	7.96
011	14.83	7.08
002	292.38	7.74
ORDEN3		
300	-1705.45	1979.70
210	-14970.22	988.13
120	-1553.57	1005.28
030	-25922.62	2057.38
201	-466.93	739.21
111	544.28	438.25
021	-841.25	681.78
102	-502.83	538.24
012	-6317.85	548.49
003	-741.28	683.51
ORDEN4		
400	6655829.81	338432.31
310	361609.93	136295.85
220	1608825.32	107938.86
130	84284.19	145516.44
040	3575896.42	363966.32
301	-202694.44	109874.15
211	31687.99	45720.25
121	-48286.16	44198.70
031	104411.00	96280.44
202	859274.75	67994.30
112	74752.89	32736.02
022	678680.47	64538.52
103	-63750.20	60716.23
013	36956.05	59959.90
004	896340.48	85799.08
CUMULANTES ORDEN4		
1111	2990427.15	347011.70
1112	-29383.41	138545.00
1113	-142621.32	111014.73
1122	947089.26	111721.68
1123	19565.55	46463.32
1133	535435.16	69505.04
1222	-118582.54	146182.58
1223	-41394.17	44485.95
1233	40815.90	32991.69
1333	-47860.03	60866.55
2222	2589152.11	365263.51
2223	78892.18	96566.49
2233	510557.02	65158.64
2333	23946.35	60079.09
3333	639881.19	86156.13

Tabla 6-19

### 6.2.2.2 Resultados de la separación

Aplicamos el criterio de máximo discernimiento a la nueva muestra constituida por el catálogo Hipparcos desplazado. Las parejas de poblaciones que se obtienen al aplicar el método de segregación en dos poblaciones son las que se presentan en la siguiente tabla. Una vez más, la cantidad  $\chi^2$  nos da idea del error que se comete al hacer la aproximación.

Comp.	$\chi^2$	M11	M22	M33	M12	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	V1	V2	V3	FP
65,5-a	299	-	-	155	-	-	-	12	-312	109	-1,2	0,60
65,5-b		-	-	157	-	-	-	13	427	-176	1,4	0,40
100-a	7,84	594,0	227,2	164,2	48,3	24	15	13	-12,7	-4,6	0,1	0,88
100-b		1775,0	518,4	509,4	-333,9	42	23	23	-33,7	-34,6	-3,3	0,12
120-a	6,13	651,1	239,6	161,6	58,7	26	15	13	-13,7	-5,2	-0,1	0,88
120-b		2304,6	745,8	753,7	-284,8	48	27	27	-33,1	-37,7	-2,5	0,12
130-a	5,79	670,4	243,6	167,1	54,7	26	16	13	-13,9	-5,3	-0,2	0,89
130-b		2586,4	765,8	842,6	-341,2	51	28	29	-37,1	-41,5	-1,3	0,11
165-a	1,74	798,7	267,9	167,9	91,8	28	16	13	-17,0	-6,4	-0,3	0,92
165-b		3711,6	1152,6	1426,4	308,5	61	34	38	-16,1	-52,2	-0,8	0,08
180-a	1,40	796,2	267,2	160,9	93,0	28	16	13	-17,0	-6,4	-0,3	0,92
180-b		3920,7	1239,4	1543,0	294,8	63	35	39	-18,6	-52,0	-0,7	0,08
220-a	0,96	777,7	228,8	154,0	98,5	28	15	12	-17,0	-5,9	-0,2	0,90
220-b		4183,2	1516,7	1590,9	210,6	65	39	40	-18,9	-56,3	-2,0	0,10

Tabla 6-20

### 6.2.2.3 Segregación según $|v|=220 \text{ Kms}^{-1}$

Detallamos a continuación los resultados de separación de la muestra limitada según  $|v|=220 \text{ Kms}^{-1}$  puesto que vuelve a ser la que mejor puede ser aproximada por componentes con distribución normal. Para los otros máximos de entropía (con excepción de 180 y 165 que hemos asumido como secundarios) el valor de  $\chi^2$  nos indica un comportamiento claramente no gaussiano de las componentes por las que se aproxima la muestra global.

Pob. e	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	777,7	228,8	154,0	98,5	-5,7	3,39	-17,0	-5,9	-0,2	0,90
error	36,0	80,7	16,8	15,8	12,6	10,8	0,3	0,4	0,2	0,01

Pob. f	M11	M22	M33	M12	M13	M23	V1	V2	V3	FP
valor	4183,2	1516,7	1590,9	210,6	-138,4	38,0	-18,9	-56,3	-2,0	0,10
error	282,5	732,7	140,2	108,5	91,7	76,1	0,3	2,9	0,2	0,01

Tabla 6-21

Reducidas a desviaciones típicas los resultados obtenidos son:

Población e:  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 28\pm1 : 15\pm3 : 12\pm1$

Población f:  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 65\pm2 : 39\pm9 : 40\pm2$

$w_1:w_2:w_3 = 2\pm1 : 50\pm3 : 1,8\pm0,4 \text{ Kms}^{-1}$

Con estos valores de las dispersiones de velocidad, la asociación de poblaciones que corresponde son los discos fino y grueso.

La desviación del vértex que presenta cada una de estas poblaciones parciales es:

Población mayoritaria (*Población e*):  $\varepsilon \approx 10^\circ$

Población minoritaria (*Población f*):  $\varepsilon \approx 4^\circ$

Al contrario que para el CNS3, para el catálogo Hipparcos ya no podemos afirmar que la segunda componente no presenta desviación del vértex. El error del momento  $\mu_{12}$  no permite afirmar que dicho momento sea nulo.

### 6.2.3 Poblaciones estelares en el entorno solar

Acabamos de ver los resultados de la segregación de la muestra procedente de Hipparcos seleccionada según el módulo de la velocidad  $|v|=220 \text{ Kms}^{-1}$  y que podemos asociar con estrellas del disco fino y del disco grueso. Como se ha dicho, existen otros dos máximos principales de entropía que dan lugar a otras dos posibles aproximaciones de la muestra global por superposiciones de gaussianas. También se ha visto que tales aproximaciones adolecen de importantes errores de acuerdo con el valor de la cantidad  $\chi^2$ . No obstante este poco ajuste de la aproximación, vamos a dar los resultados de estas segregaciones adicionales.

De acuerdo con las características del método descritas en 4.2.2, al separar la muestra limitada por el máximo de entropía  $|v|=65,5 \text{ Kms}^{-1}$  obtendremos dos componentes **a** y **b**. Al separar la muestra limitada según el siguiente máximo de entropía ( $|v|=120 \text{ Kms}^{-1}$ ) tendremos dos componentes **c** y **d**. La componente **c** será la superposición de las dos obtenidas anteriormente **a** y **b**, y **d** será una nueva población. Y así sucesivamente. Al segregar la muestra seleccionada según el siguiente máximo relativo de entropía ( $|v|=220 \text{ Kms}^{-1}$ ) se obtendrá por un lado una superposición **e** de las dos componentes **c** y **d** y por otro una nueva componente **f**.

### 6.2.3.1 Segregación según $|v|=120 \text{ Kms}^{-1}$

Presentamos pues el resultado de la separación de la muestra limitándola según el máximo de entropía  $|v|=120 \text{ Kms}^{-1}$  (según acabamos de decir, el resultado serán las poblaciones **c** y **d**). Esta muestra es la que lleva a unos resultados más comparables con los obtenidos para el CNS3. Comparables en el sentido de que las poblaciones estelares a las que pueden ser asociadas las componentes parciales son las mismas, en concreto, las estrellas viejas y jóvenes del disco (ver 6.2.3.3).

<b>Pob. c</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	651,1	239,7	161,6	58,7	-10,8	3,4	-13,7	-5,2	-0,1	0,88
error	28,0	31,5	8,5	20,7	8,7	5,4	0,3	0,3	0,1	0,01

<b>Pob. d</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	2304,6	745,8	753,7	-284,8	-42,5	27,9	-33,1	-37,7	-2,5	0,12
error	181,6	223,0	51,0	143,7	51,8	28,0	0,8	1,3	0,2	0,01

Tabla 6-22

Reducidas a desviaciones típicas los resultados obtenidos son:

Población c:  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 26\pm1 : 15\pm1 : 13\pm1$

Población d:  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 48\pm2 : 27\pm4 : 27\pm1$

$w_1:w_2:w_3 = 19\pm1 : 33\pm2 : 2,4\pm0,3 \text{ Kms}^{-1}$

Y la desviación del vértex:

Población mayoritaria (*Población c*):  $\varepsilon \approx 8^\circ$

Población minoritaria (*Población d*):  $\varepsilon \approx -9^\circ$

Aun cuando la asociación con poblaciones estelares pueda ser la misma que se hizo para las componentes detectadas a partir del CNS3 (estrellas jóvenes y viejas del disco), obtenemos ahora una clara diferencia en lo que respecta a la desviación del vértex: Ya no podemos afirmar que las estrellas viejas del disco no presentan esta asimetría.

### 6.2.3.2 Poblaciones adicionales

Para la muestra heliocéntrica teníamos tres máximos principales ( $|v|=50,5$ ;  $|v|=131$  y  $|v|=210$  Kms<sup>-1</sup>) de acuerdo con los cuales obtenemos cuatro poblaciones parciales que podríamos llamar independientes (en el sentido de que ninguna es combinación de las anteriores). Continuamos con la notación anterior para los diferentes grupos.

<b>Pob. a</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	250,7	208,3	188,5	-1,6	-45,6	16,2	6,3	-7,7	-6,9	0,50
error	710,0	29,6	11,4	125,2	56,6	7,5	1,0	0,3	0,1	0,01

<b>Pob. b</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	135,3	116,4	44,4	3,3	54,6	-17,3	-21,3	-14,7	-5,9	0,50
error	718,8	30,0	11,5	126,7	57,3	7,6	1,0	0,3	0,1	0,01

<b>Pob. d</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	2410,5	783,5	770,6	-245,5	-66,8	43,7	-30,0	-43,9	-7,3	0,14
error	223,1	211,6	49,7	165,7	55,1	23,2	0,9	1,2	0,1	0,01

<b>Pob. f</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	4300,9	1381,7	1661,6	315,0	-119,6	27,0	-13,0	-63,7	-8,0	0,08
error	273,9	621,9	138,1	97,5	95,5	70,3	0,3	2,5	0,2	0,01

Tabla 6-23

(Nótese que la población d es la población b de la Tabla 6-10).

El criterio de máximo discernimiento nos revela claramente la presencia de cuatro grupos principales de estrellas si bien, como ya se ha visto por el valor de  $\chi^2$ , sólo en el último caso vemos como muy bien ajustada la aproximación por gaussianas. En los otros tres, al hacer este tipo de aproximación se comete un error que nos indica que tales grupos no siguen una distribución normal. Sin embargo, nótese que la unión de esos tres grupos sí que puede ser correctamente aproximado por una gaussiana.

Para la muestra desplazada seguimos teniendo tres máximos principales ( $|v|=65,5$ ;  $|v|=120$  y  $|v|=220$  Kms<sup>-1</sup>) que dan lugar también a cuatro grupos independientes de estrellas. Las poblaciones denominadas **a** y **b**, obtenidas al limitar la muestra según el máximo de entropía situado en  $|v|=65,5$  Kms<sup>-1</sup>, no aportan prácticamente ningún tipo de información como consecuencia de los enormes errores con que se calculan sus parámetros cinemáticos. Vemos en este caso que el mayor contraste que produce trabajar con la muestra desplazada no aporta sino unos mayores errores. Por este motivo, para estas poblaciones parciales aceptaremos como resultados los obtenidos para la muestra heliocéntrica.

Las dos poblaciones sí calculables son:

<b>Pob. d</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	2304,6	745,8	753,7	-284,8	-42,5	27,9	-33,1	-37,7	-2,5	0,12
error	181,6	223,0	51,0	143,7	51,8	28,0	0,8	1,3	0,2	0,01

<b>Pob. f</b>	<b>M11</b>	<b>M22</b>	<b>M33</b>	<b>M12</b>	<b>M13</b>	<b>M23</b>	<b>V1</b>	<b>V2</b>	<b>V3</b>	<b>FP</b>
valor	4183,2	1516,7	1590,9	210,6	-138,4	38,0	-18,9	-56,3	-2,0	0,10
error	282,5	732,7	140,2	108,5	91,7	76,1	0,3	2,9	0,2	0,01

Tabla 6-24

(Nótese que la población f es la de la Tabla 6-21 y la población d es la de la Tabla 6-22).

### 6.2.3.3 Asociación de cada población parcial con grupos estelares típicos

En resumen, a partir del catálogo Hipparcos deducimos las siguientes poblaciones estelares en el entorno solar:

- Componente I (población a):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 12\pm 31 : 11\pm 1 : 7\pm 1$
- Componente II (población b):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 16\pm 22 : 14\pm 1 : 14\pm 1$
- Componente III (población c):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 26\pm 1 : 15\pm 1 : 13\pm 1$
- Componente IV (población d):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 48\pm 2 : 27\pm 4 : 27\pm 1$
- Componente V (población f):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 65\pm 2 : 39\pm 9 : 40\pm 2$

Las componentes I y II no se corresponden con ninguna población estelar o componente estructural de la Galaxia en el sentido clásico. Mas bien deben corresponderse con estructuras cinemáticas complejas del entorno solar como puede ser el cinturón de Gould (Comerón 1995). Por otro lado, dados los errores con los que se calculan, tampoco tendría sentido proponer conclusiones precisas.

La combinación de las estrellas de las componentes I, II más las 1.485 estrellas que faltan hasta completar la muestra obtenida al limitar el catálogo Hipparcos desplazado según  $|v|=120 \text{ Kms}^{-1}$  y según la fracción de población indicada, constituyen la componente que hemos denominado III (población c Tabla 6-22) cuyas dispersiones se corresponden con las **estrellas jóvenes del disco**.

Las dispersiones de la componente IV se corresponden bastante bien con las ya mencionadas para **estrellas viejas del disco** por lo que, de forma similar a como hicimos para el CNS3, podemos asociar este grupo con dicha población.

Las dispersiones de la componente V se corresponden con las propias del **disco grueso**. Nótese que son bastante similares a las calculadas para la tercera población segregada a partir del segundo máximo de entropía del CNS3 (ver 5.3.1.2) y de donde no quisimos extraer conclusiones. Es lógico que obtengamos ahora un número considerable de estrellas del disco grueso puesto que la muestra llega a 300 pc y el límite del módulo de la velocidad es mayor que el máximo establecido para el CNS3.

En suma, la aplicación al catálogo Hipparcos del método numérico de superposición desarrollado nos permite identificar claramente los denominados disco fino y grueso y aproximarlos con bastante precisión mediante funciones gaussianas. Asimismo, podemos aproximar el disco fino por la superposición de estrellas jóvenes y viejas. Adicionalmente obtenemos, como parte de las estrellas jóvenes del disco fino, dos grupos de estrellas que no podemos aproximar con precisión por gaussianas.

### **6.3 *Discusión de los resultados***

#### **6.3.1 La desviación del vértex**

Procedemos nuevamente a analizar la cuestión de la desviación del vértex. Ahora para esta muestra procedente del catálogo Hipparcos.

Recordando la expresión 5-1,  $\mu_{12} = n_1 \mu'_{12} + n_2 \mu''_{12} + n_3 n'' (v'_1 - v''_1)(v'_2 - v''_2)$  podemos calcular las contribuciones parciales al momento  $\mu_{12}$ . De acuerdo con la asociación de poblaciones estelares que hemos hecho, si aplicamos los valores expuestos en la Tabla 6-21, podemos observar tales contribuciones para los discos fino y grueso. En concreto la contribución a esta asimetría de la primera componente (disco fino) es del 75%, la segunda (disco grueso) del 18% y únicamente el 7% restante es debida a la diferencia de velocidades de las dos componentes.

Para poder comparar con la situación obtenida para el CNS3 deberemos utilizar los datos de la Tabla 6-22. Con esos valores observamos que la primera componente (estrellas jóvenes) contribuyen al momento  $\mu_{12}$  en un 29%, la segunda (estrellas viejas) en un 22% y queda un 49% de ese momento consecuencia de la diferencia de velocidades de los centroides parciales. Por tanto, si bien al contrario que para el CNS3 con los datos de Hipparcos vemos que las dos componentes presentan desviación del vértex por separado, volvemos a encontrar el resultado ya visto para el CNS3 de que alrededor del 50% del momento  $\mu_{12}$  es debido a la diferencia de velocidades de los subcentroides.

Algunas de las conclusiones mencionadas en 5.3.2 siguen siendo válidas:

- Una fracción de la desviación del vértex es debida a la diferencia de velocidades entre las poblaciones parciales. Esta fracción es del orden del 50% para el conjunto formado por las estrellas jóvenes y viejas del disco aunque mucho menor para la pareja de poblaciones formada por los discos fino y grueso.
- Los resultados están de acuerdo con la idea de que la desviación del vértex es propia de estrellas con menor dispersión de velocidades residuales.
- También resulta ser mayor para las estrellas de menor módulo de la velocidad residual.
- Por lo mismo, se observa que es mayor para estrellas de menor módulo de la velocidad perpendicular al plano galáctico.
- Este resultado es compatible con la idea de que los grupos en movimiento son los responsables de la desviación del vértex.

En cambio, ya no sucede que alguna de las poblaciones parciales presenta desviación del vértex nula ( $\varepsilon \approx 0$ ). Por tanto, modelos dinámicos que consideren simetría cilíndrica con simetría respecto al plano galáctico no son suficientes para explicar este comportamiento.

### 6.3.2 Componentes de la velocidad

Volvemos a utilizar la expresión 5-2 que ya utilizamos para el CNS3 y los valores típicos de velocidades radial y rotacional en el entorno solar escritos en 5.3.3. Deducimos de ahí los valores para las componentes de la velocidad de acuerdo con las dos separaciones en poblaciones parciales que se han detallado. Es decir, para las muestras limitadas según  $|v|=220 \text{ Kms}^{-1}$  y  $|v|=120 \text{ Kms}^{-1}$ . Recordemos que la primera segregación da lugar a los discos fino y grueso y la segunda a las estrellas jóvenes y viejas del disco.

Todas las velocidades se expresan en  $\text{Kms}^{-1}$ .

poblac.	$\Pi'_0 - \Pi''_0 \equiv w_{\sigma}$	$\Pi'$	$\Pi''$	$\Theta'_0 - \Theta''_0 \equiv w_{\theta}$	$\Theta'$	$\Theta''$	$Z'_0 - Z''_0 \equiv w_z$
<b>e y f</b>	1,1	40,1	39,0	50,4	225,0	174,6	1,8
<b>c y d</b>	19,4	42,3	22,9	32,5	223,9	191,4	2,4

Tabla 6-25

Vemos que los resultados obtenidos a partir del CNS3 para las estrellas jóvenes y viejas del disco se reproducen aquí (ver 5.3.3). Tenemos una diferencia de velocidades en la componente radial que no es nada despreciable. No sucede lo mismo con respecto a los discos fino y grueso. En este caso no existe esa diferencia. Sí sucede en ambos casos que la diferencia de velocidades en la dirección perpendicular al plano galáctico es pequeña.

## 7. Análisis adicionales y conclusiones

### 7.1 Otras discusiones acerca de los parámetros cinemáticos

#### 7.1.1 Momentos impares en z

Ya se ha hablado de la desviación del vértex para las diferentes componentes deducidas a partir de cada muestra estelar. Ahora, partiendo de los valores de los momentos y sus errores que aparecen en las tablas 5-7 y 6-21 podemos realizar un análisis de los momentos impares en la tercera coordenada **z**. Estos razonamientos también pueden extenderse para la separación adicional en las poblaciones denominadas estrellas jóvenes y viejas del disco que aparece en la Tabla 6-22.

Por comparación de dichos valores con sus errores podemos concluir que el momento  $\mu_{23}$  ( $\mu_{0z}$ ) es nulo para ambas componentes de las muestras globales procedentes del CNS3 y del catálogo Hipparcos (la menos evidente es la segunda del CNS3). En el caso del momento  $\mu_{13}$  ( $\mu_{\varpi z}$ ) sólo está claro para la primera componente de la muestra Hipparcos pues, si bien en los demás casos el momento es menor que dos veces el error, es mayor que una vez error. Dado que pueden existir errores inducidos por el método, preferimos no afirmar la nulidad de este último momento de forma general. Por lo tanto, podemos adoptar para cada componente (aun cuando sea muy arriesgada la suposición en cuanto a  $\mu_{\varpi z}$  y exceptuando la primera componente de Hipparcos):

$$\mu_{0z} = 0 \text{ y } \mu_{\varpi z} \neq 0 \quad 7-1$$

Esta débil no nulidad de  $\mu_{\varpi z}$  podría indicarnos que la componente en cuestión se encuentra ligeramente separada del plano galáctico. Recordemos que, por lo visto en el primer capítulo, sobre el plano galáctico  $z=0$  se cumple  $\mu_{0z} = \mu_{\varpi z} = 0$  aun cuando no se adopte hipótesis de simetría cilíndrica. Por lo mismo, la clara nulidad de ambos momentos para el conjunto del disco fino (población e, Tabla 6-21) estaría indicando su situación sobre el plano galáctico.

Aun aceptando  $\mu_{\varpi z} \neq 0$ , de acuerdo con lo visto en el apartado 1.4.1.10, concluimos que la población minoritaria del CNS3 es compatible con un modelo que suponga un sistema no estacionario, simetría cilíndrica y simetría respecto del plano galáctico  $z=0$ , sin necesidad de hipótesis más complicadas. De acuerdo con 1-39, la no nulidad de al menos una componente no rotacional de la velocidad exige un modelo que no suponga estado estacionario.

Si nos ceñimos al CNS3, traducido al modelo dinámico esto significa que la hipótesis de un sistema estelar de Chandrasekhar con las características que se acaban de mencionar es suficiente para explicar el comportamiento estadístico del grupo de estrellas del entorno solar asociable a estrellas viejas del disco. Luego no es necesario acudir a hipótesis más complicadas de no axialidad del potencial por la presencia de una barra, brazo espiral o cualquier otro elemento perturbador del potencial general de la Galaxia en la vecindad del Sol, al menos, en cuanto estrellas viejas se refiere.

Esto entra en contradicción con el mismo resultado pero obtenido a partir del catálogo Hipparcos. Para todas las componentes calculadas a partir de este último se produce el fenómeno de la desviación del vértex. Tenemos dos posibles explicaciones para esta contradicción: O bien el CNS3 no muestra la desviación del vértex de la componente correspondiente a las estrellas viejas del disco como consecuencia de los errores de los datos, o bien Hipparcos sí la muestra como consecuencia de su menor completitud estadística y sesgo hacia estrellas más brillantes.

Para el resto de grupos de estrellas (sean del CNS3 o de Hipparcos) la presencia del momento  $\mu_{m\theta}$  que indica que la desviación del vértex no es nula se requiere otro modelo compatible con esta asimetría. Podemos aceptar la hipótesis de simetría axial puntual (1.4.1.8) que sí permite la no nulidad de este momento y podemos utilizar la hipótesis de no simetría respecto del plano galáctico (1.4.1.7) en la cual también es posible una desviación del vértex no nula. Recordemos que, de acuerdo con 7-1, los otros dos momentos no diagonales sí son compatibles con la hipótesis de simetría cilíndrica.

Puesto que para un sistema no axisimétrico cabe esperar que exista desviación del vértex cualquiera que sea el grupo de estrellas (Bienaymé 1999), para la muestra procedente del CNS3 la hipótesis más adecuada resulta la de simetría cilíndrica sin simetría respecto del plano galáctico. En cambio, para la muestra de Hipparcos, un modelo axial puntual resulta más ajustado.

## **7.2 Comparación con otros métodos**

### **7.2.1 Características particulares de este método numérico**

Por comparación con otros métodos de separación de poblaciones estelares, los rasgos que caracterizan al presente método pueden describirse como sigue:

- 1) No se ha introducido ningún tipo de suposición *a priori* sobre ninguno de los parámetros que intervienen en el modelo estadístico ni sobre las características de las poblaciones (a excepción de que sean gaussianas).
- 2) No se ha hecho ningún tipo de hipótesis adicional sobre el modelo dinámico de la Galaxia, como de simetría, dependencia temporal, etc., sino que se ha tomado a partir de la resolución más general del caso.

- 3) Se ha hecho un aproximación local con distribuciones cuadráticas que permite comprobar algunas propiedades generales y cualitativas de las poblaciones estelares en el sentido estadístico de este término. Esto es, se toma una muestra global de estrellas y se aproxima por dos componentes suficientemente numerosas de modo que sea aceptable la hipótesis de que presentan distribución de Schwarzschild.
- 4) Se ha realizado un filtrado de la muestra para obtener gaussianidad mediante la cantidad  $\chi^2$  si se da el caso de tener poblaciones realmente gaussianas.
- 5) El filtrado permite igualmente detectar las poblaciones, aun en el caso de que no sean gaussianas, por máxima entropía asociada al parámetro de máximo discernimiento.
- 6) Se ha trabajado con momentos centrados trivariados (en tres dimensiones) de las muestras de hasta cuarto orden. Desde un punto de vista teórico, los momentos dan información sobre la dinámica de un sistema estelar tal como simetrías, dependencia temporal, etc. Esto significa que se trabaja sólo con un conjunto reducido de datos, lo cual tiene la ventaja de hacer innecesarios grandes sistemas informáticos.
- 7) La aproximación de la muestra por más de dos componentes se consigue por aplicación recurrente del método mediante extracción de la población más dispersa. Tiene sentido si las poblaciones restantes también pueden aproximarse por gaussianas.

### 7.2.2 Otros métodos con aplicaciones similares

El presente método numérico se ha comparado con otros métodos de estudio de la cinemática local. Si bien el fin que persiguen los autores de estos métodos no siempre coincide con lo que se ha planteado en este trabajo, sí nos sirven para hacernos una idea de que el modelo aquí seguido conduce a resultados concordantes con los obtenidos por otros caminos. En primer lugar, citamos algunos ejemplos de trabajos que hacen referencia a la asociación hecha entre los dos grupos de estrellas separadas y poblaciones estelares.

Ojha et al. (1994b) mediante datos de fotometría fotográfica y movimientos propios para 2.000 estrellas obtienen estimaciones de los parámetros del elipsoide de velocidades para disco fino, grueso y halo. Utilizan el método SEM (Stochastic Estimation Maximization) en un análisis de distribuciones gaussianas multivariadas para resolver el problema de estimación de densidad de mezcla finita bajo una aproximación de máxima verosimilitud. Según los mismos autores, al aplicar a estrellas del entorno solar el modelo de Besançon (Ojha et al. 1994a) se predicen los siguientes valores para los parámetros poblacionales de las estrellas del disco y del disco grueso.

- Dispersiones de velocidad

Disco:  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 30:20:19$

Disco grueso (Thick disk):  $\sigma_1:\sigma_2:\sigma_3 = 51:38:35$

- Fracción de población

Disco: 89%

Disco grueso (Thick disk): 11%

Tales valores son similares a los calculados en este trabajo.

Los valores publicados de fracción de población para una distancia al Sol de  $0 \leq r \leq 500$  pc de acuerdo con el método SEM son 79,8% para el disco, 19,8% para el disco grueso (*Thick disk*) y el resto halo, si bien se detecta un crecimiento de la proporción de estrellas del disco fino a medida que nos acercamos al Sol. Este sería el caso de las muestras utilizadas en este trabajo. En particular, la basada en el CNS3 que toma las estrellas más cercanas al Sol.

Ratnatunga & Uppgren (1997) utilizan el método denominado como NAMaLiE (numerical algorithm for maximum likelihood estimation) basado al igual que el anterior, y como su nombre indica, el en método de máxima verosimilitud. Lo aplican a una muestra de estrellas enanas K y M del entorno solar seleccionada previamente por Vyssotsky. Deducen los resultados expresados más arriba en el apartado 5.3 y que nos ha permitido asociar nuestras poblaciones mayoritaria y minoritaria obtenidas del CNS3 con la vieja y joven del disco.

Si se hace referencia a la asociación de las poblaciones determinadas con grupos en movimiento, tenemos el trabajo de Dehnen (1998) y Dehnen & Binney (1998) y sus conclusiones sobre la desviación del vértex. Estos autores consideran que los grupos en movimiento son los responsables de la desviación del vértex y que, si se excluyen de la muestra las estrellas pertenecientes a estos grupos desaparece esta correlación no nula. El algoritmo de cálculo de este trabajo también está basado en el uso del método de máxima verosimilitud y es aplicado a una muestra de estrellas del catálogo Hipparcos utilizando posiciones y velocidades tangenciales. Como se ha dicho, estos autores encuentran desviación del vértex cualquiera que sea el grupo de estrellas tal y como aquí encontramos para la muestra procedente de Hipparcos. Con respecto a la muestra procedente del CNS3, a diferencia de dicho trabajo, nuestro método determina desviación del vértex nula para el grupo de estrellas que asociamos con las viejas del disco, resultado más de acuerdo con la hipótesis axisimétrica de Bienaymé (1999).

También Chen et al. (1997) desarrollan un algoritmo que utiliza un estimador de Kernel no paramétrico para describir la distribución estelar en un espacio de 4 dimensiones (velocidad, edad). Se destina a la detección de grupos en movimiento en el entorno solar y lo aplican a estrellas B, A y F de la secuencia principal extraída del Hipparcos Input Catalogue. También lo aplican posteriormente a estrellas del catálogo Hipparcos (Asiaín et al. 1999).

Un trabajo de detección de grupos en movimiento, que coincide con el aquí desarrollado en que también trabaja con el Tercer Catálogo de Estrellas Cercanas CNS3, es el de Müllari et al. (1998). En ese trabajo, si bien los autores no identifican claramente subsistemas susceptibles de ser asociados con poblaciones estelares como aquí se ha hecho, sí detectan grupos en movimiento utilizando análisis de cúmulos y eliminando las estrellas de alta velocidad (velocidades  $> 70 \text{ Kms}^{-1}$ ).

No obstante, la comparación entre los trabajos de estos autores y el presente no es evidente dado que esos algoritmos están pensados con el fin de obtener grupos reducidos con características muy marcadas, por lo que permite separar grupos de estrellas que contengan pocas componentes. Nuestro método, en cambio, pretende deducir propiedades generales por lo que se hace una aproximación que asegure que la distribución de los grupos separados sea de tipo normal. Esto trae como consecuencia que sólo se separen poblaciones relativamente numerosas. Si se pretende obtener nuevos grupos de estrellas con nuestro método, el camino a seguir es aplicarlo de forma recurrente descartando de la muestra las estrellas que tengan baja probabilidad de pertenecer a la población que se quiere seguir analizando.

Comparando con un método totalmente distinto para separar poblaciones a partir de una muestra global podemos citar el trabajo de Hernández-Pajares et al. (1993). En este trabajo se aplica el SOM (Self-Organizing Map), un algoritmo de red neuronal. Estudian una muestra de 12.824 estrellas extraídas del catálogo SAO con información suficiente para estimar la velocidad espacial. Construyen un espacio de 14 dimensiones con las características de velocidad residual espacial, velocidad, longitud y latitud galáctica, distancia heliocéntrica, tipo espectral, clase de luminosidad, magnitud fotométrica e índices  $m_v$ , B-V, U-B. Suponen simetría respecto del plano galáctico para la latitud galáctica y para la velocidad residual perpendicular al plano galáctico. Utilizan los valores de los momentos para analizar el comportamiento cinemático de la muestra estelar. Detectan en la muestra tres grupos estelares con características comunes. Estos grupos los asocian en base a parámetros cinemáticos con el disco fino, disco grueso y halo. Para las dos poblaciones detectadas en este trabajo, deducen una proporción de mezcla del 90 y 10% respectivamente.

Se ve por tanto, que los valores encontrados con el método numérico aquí descrito, basado en el filtrado de la muestra por máxima entropía de mezcla en función del módulo de la velocidad referida al subcentroide de la población menos dispersa y con aplicación del método de separación por momentos, mejoran en algunos aspectos los resultados de otros autores. Adicionalmente, utiliza un algoritmo más simple y con menor tiempo de cálculo, además de filtrar la muestra estelar de forma automática.

### 7.3 Conclusiones

Los resultados a los que conduce el presente trabajo permiten deducir interesantes conclusiones. Estas son clasificables en conclusiones de tipo metodológico y conclusiones astronómicas. Las primeras pueden resumirse en el nuevo enfoque que se ha hecho de un desarrollo teórico previo desde un punto de vista estadístico; la optimización del método que posibilita una aplicación recurrente del mismo para extenderlo a la búsqueda de más de dos poblaciones y el criterio de selección de la muestra de estrellas basado en utilizar el conjunto de estrellas que conducen a la máxima entropía para la probabilidad de mezcla. En cuanto a las segundas, destacamos la presencia en el entorno solar de tres poblaciones principales que podemos asociar con los discos joven, viejo y disco grueso, y la atribución parcial de la desviación del vértex a la diferencia de velocidades de los subcentroides de cada población.

El planteamiento de los diferentes aspectos teóricos del modelo de superposición nos ha conducido a los elementos estadísticos en los cuales se basa el método de cálculo. Partiendo de los conceptos básicos de momentos de una distribución, se han deducido las expresiones correspondientes a los momentos de una superposición de  $n$  poblaciones. A continuación se ha particularizado el caso  $n=2$  que luego se ha materializado en el algoritmo de cálculo. Así mismo, se ha reflexionado sobre el caso  $n=3$  haciéndose notar que es el último caso resoluble utilizando momentos hasta cuarto orden sin introducir simplificaciones sobre los valores de los momentos.

A partir de ahí, aprovechando desarrollos algebraicos anteriores, se ha transformado en bien condicionado un problema que no lo estaba. Aunque propiamente no ha cambiado la condición del problema, se han mejorado los resultados mediante el nuevo cálculo de errores y filtrado de la muestra. De este modo, utilizando errores estadísticos y ponderación de ecuaciones en sistemas de mínimos cuadrados, se han optimizado las soluciones. Se ha aplicado el método en primer lugar a muestras ideales y sintéticas. Las muestras ideales han aportado algunas conclusiones que luego se han confirmado en las sintéticas. Una es el hecho de que, si se superponen más de dos poblaciones, el método tiende a separar la más dispersa por un lado y la superposición de las otras por otro.

La utilización de muestras sintéticas se ha revelado muy útil para llevar a cabo un entrenamiento del método y definir la mejor manera de utilizarlo para conseguir las soluciones óptimas. Además, el introducir en la muestra estrellas con características cinemáticas extremas ha conducido a desarrollar el método de selección que luego se aplicará en las muestras reales. Las sintéticas permiten también generar ejemplos producto de la superposición de más de dos poblaciones. Con eso hemos demostrado la viabilidad de la aplicación recurrente del método de superposición cuando existan indicios de que la muestra global está compuesta por más de dos poblaciones aproximables por gaussianas.

Se ha introducido el uso del test  $\chi^2$  para evaluar la bondad de la aproximación que se está realizando. Posteriormente se ha comprobado que la muestra seleccionada de acuerdo con la máxima entropía de la probabilidad de mezcla presenta, en términos relativos, el valor óptimo de la cantidad  $\chi^2$  lo que refuerza aún más el criterio de selección de la muestra. Se han evaluado los errores de los resultados a partir de los errores de los datos de partida y aplicando su propagación estadística. De este modo se han conseguido unos errores del orden de los de los datos de partida para momentos y velocidades y con un error de la fracción de población del 2 ó 1%, correspondiente a la mínima cantidad detectable de población minoritaria.

El criterio de selección de la muestra de estrellas ha sido proporcionado por el propio método de aproximación. Se excluyen las estrellas que no son posibles de encajar en la solución que presenta máxima entropía. Esta forma de proceder se traduce en la exclusión de muy pocas estrellas (< 4%). Se consigue con eso que las dos componentes que constituyen la muestra sean lo más representativas posibles de grupos estelares locales. Por otro lado, se observa que el criterio de selección es independiente del método de aproximación que se aplique posteriormente.

Hemos comprobado que la forma óptima de aplicar el proceso de filtrado consiste en iteraciones del ciclo siguiente:

- Selección de la muestra por parámetro de máximo discernimiento, en nuestro caso módulo de la velocidad.
- Cálculo de los momentos de las velocidades y sus errores.
- Aplicación del método de superposición (en nuestro caso de gaussianas pero podría ser otro).
- Cálculo de la entropía para las proporciones de mezcla.
- Cálculo de la cantidad  $\chi^2$  para estimar la bondad del ajuste.
- Repetición del ciclo hasta detectar los máximos relativos de entropía significativos. Simultáneamente detección de mínimos relativos de la cantidad  $\chi^2$ . Se obtiene así una mejor estimación de los errores de los momentos.

Este método se ha mostrado particularmente eficaz aplicado a los catálogos seleccionados CNS3 e Hipparcos, consiguiendo aproximar muestras obtenidas de los mismos por una superposición de dos funciones de distribución de tipo normal cuyos valores de las dispersiones de velocidad son perfectamente asociables a poblaciones estelares típicas. A diferencia de otros autores (p.e. Wyse & Gilmore 1995), gracias al *criterio de máximo discernimiento*, ha sido posible obtener valores precisos para la proporción de tales poblaciones en la mezcla. El ajuste que se hace al aplicar el método para aproximar dicha muestra global de estrellas por la superposición de dos con distribución gaussiana demuestra una fiabilidad totalmente satisfactoria como se deduce del valor de la función  $\chi^2$ .

El método desarrollado nos revela claramente la presencia en el entorno solar de tres componentes morfológicas principales de la Galaxia. Por los valores obtenidos para las dispersiones de velocidad, dichas componentes las podemos asociar con las poblaciones estelares denominadas estrellas jóvenes y viejas del disco fino y disco grueso. Otras conclusiones sobre la cinemática de estas componentes son:

- Los valores obtenidos para las velocidades son tales que la estructura de la función de distribución se presenta en el sentido de los movimientos radial y azimutal ( $\Pi_0$ ,  $\Theta_0$ ) pero no en el vertical ( $Z_0$ ). Esto es lógico de acuerdo con los modelos vistos y sobre el plano  $z=0$ .
- Estas componentes son casi indistinguibles según la componente de la velocidad  $Z_0$ .
- Las componentes compuestas por estrellas más viejas presentan mayor  $|\Pi_0|$  y retroceden en  $\Theta_0$  respecto del centroide.

Una de las cuestiones en las que nos hemos detenido en particular ha sido la desviación del vértex. La conclusión a la que se ha llegado después de aplicar el método de superposición es que, al menos parcialmente, la desviación del vértex es consecuencia de la diferencia de velocidades de los subcentroides de las dos componentes parciales por las que puede aproximarse una muestra de estrellas del entorno solar. Esta fracción del momento  $\mu_{12}$  es del orden de un 50% para las poblaciones identificadas como estrellas jóvenes y viejas del disco bajando a menos de un 10% cuando la separación de poblaciones es entre discos fino y grueso.

También podemos mencionar la posible asociación de uno de los grupos estelares resultantes, identificable con la población vieja del disco, con los modelos dinámicos más sencillos. No obstante, este resultado, al derivar del CNS3 y estar en contradicción con el mismo resultado pero procedente del catálogo Hipparcos, necesitaría ser corroborado mediante datos más precisos. Tal conclusión se deduce de que dicha población no presenta desviación del vértex y presenta un conjunto de valores de los momentos y velocidades compatible con la hipótesis de sistema estelar de Chandrasekhar con simetría cilíndrica, plano galáctico de simetría y estado no estacionario (ver 1.4.1.5). Esta idea es compatible con la sostenida por diferentes autores de que no es necesario introducir hipótesis de simetría no cilíndrica para explicar el comportamiento cinemático de las estrellas del entorno solar.

Con excepción de este resultado, las diferentes poblaciones obtenidas, que sí presentan contribución parcial al momento  $\mu_{12}$ , necesitan de un modelo con simetría axial puntual o que no exista plano galáctico de simetría. Además, la existencia de una diferencia de velocidades radiales  $\Delta\Pi_0 \neq 0$  sugiere que, caso de aceptar un modelo cilíndrico, el sistema no se encuentre en estado estacionario.

Al aplicar el método a dos catálogos diferentes hemos conseguido una comparación de ambos catálogos con respecto a diferentes aspectos cinemáticos. Una diferencia importante que se ha encontrado es que, como se ha dicho, para el CNS3 las estrellas viejas del disco no presentan desviación del vértex. En el análisis de la variación de entropía de la probabilidad de mezcla se observan comportamientos similares para los dos catálogos. Para Hipparcos, no obstante, a los máximos relativos de entropía se superponen otros indicando la presencia de grupos de estrellas cuyo comportamiento cinemático se separa de la media de la población que los contiene. Tales conjuntos menores de estrellas se han asociado con grupos en movimiento.

Se ha visto que al aplicar el criterio de selección a la muestra procedente del CNS3 se llega a unos valores de los momentos iguales a los obtenidos en otros trabajos para el CNS2 utilizando criterios de selección astrofísicos. El criterio de máximo discernimiento se convierte así en una manera mucho más sencilla de seleccionar una muestra de estrellas que la aplicación de criterios astrofísicos y que, cuando menos, conduce a los mismos resultados.

Por lo tanto, podemos afirmar que la aplicación del método de cálculo a una muestra del entorno solar, mejora resultados publicados por otros autores y permite deducir interesantes conclusiones sobre la cinemática local. Se han aportado nuevos valores para las velocidades radiales, desviación del vértex y proporciones de mezcla de poblaciones en el entorno solar. Estos valores permiten dar idea de las simetrías existentes así como de los tipos de componentes estructurales en la vecindad del Sol.

Adicionalmente, desde el punto de vista metodológico se han conseguido dos cosas. Por un lado, optimizar los resultados a partir de un problema que no está bien condicionado y por el otro, desarrollar un trabajo de investigación desde un lugar conceptualmente distante del centro docente al que estaba adscrito gracias al uso de las nuevas tecnologías.

Suponer un tipo concreto de función de densidad de probabilidad para las velocidades residuales de las estrellas (de Schwarzschild generalizado) ha permitido que, una vez determinados los parámetros cinemáticos de las componentes parciales mediante el método numérico, pueda asociarse cada estrella a una de las poblaciones obtenidas. A partir de aquí, pueden extraerse de la muestra global las estrellas pertenecientes a la población más dispersa cosa que permite aplicar el método de forma recurrente para aproximar la muestra por más de dos poblaciones. Pensando ya en desarrollos futuros, esto también permite utilizar el método para identificar las estrellas de un catálogo determinado como miembros de una población concreta. De este modo se abre la posibilidad de estudiar las poblaciones una vez separadas, ya no sólo desde el punto de vista cinemático, sino desde cualquier otro parámetro astrofísico del que exista información en el catálogo que se utilice.

En resumen, en el presente trabajo, al objeto de estudiar el comportamiento cinemático de las estrellas del entorno solar hemos desarrollado un método numérico eficaz a la vez que sencillo de cálculo para superposición de sistemas estelares en el que se supone distribución de velocidades gaussianas. Este método ha sido aplicado a muestras de estrellas extraídas de catálogos concretos: CNS3 e Hipparcos. Además, se han abierto las puertas a su aplicación a otros catálogos, previéndose su inmediata aplicación al CNS4 en cuanto sea de libre acceso. Ya se ha visto su comportamiento al aplicarse a muestras en las que están presentes más de dos poblaciones y también se podrán realizar estudios estadísticos de poblaciones en base a parámetros diferentes de los cinemáticos.

## Epílogo

### *Sistemas estelares y sistemas de impresión*

A pesar de que no es costumbre acompañar una tesis doctoral de un apartado como éste, en el presente caso concurren circunstancias singulares que justifican la reflexión que sigue. Después de todo, un trabajo original de investigación, no sólo debe aportar conocimiento de la rama en la que se circunscribe, sino que también puede aportar innovaciones desde el punto de vista formal.

Aun cuando en otras ramas del conocimiento como el Derecho o la Medicina sucede lo contrario, a este doctorando le consta que no es habitual que personas alejadas profesionalmente de los centros de investigación o docentes realicen trabajos de investigación en una ciencia de base como es el caso de la Astronomía. Para poner en antecedentes, comentaré que mi actividad profesional la realizo, ya desde los tiempos en que comencé el presente trabajo, en el sector de la Informática. Durante varios años, en el terreno de la Ingeniería de Sistemas y desde hace algunos otros años en el Marketing de Sistemas de Impresión.

A primera vista, podría parecer que la relación entre las actividades mencionadas debería ser mínima o nula. No obstante, si bien parece lógico que el estudio de los sistemas estelares no tiene ninguna aplicación inmediata al marketing de sistemas de impresión, sí existe una fuerte relación desde un punto de vista metodológico. Y pienso que ambas actividades salen mutuamente beneficiadas.

Por un lado, es evidente que los conceptos de estadística son aplicables a cualquier estudio en el que se lleve a cabo un análisis de datos, ya sean estos referidos a velocidades de estrellas o a costes de producción en bienes de equipo. De este modo, así como la magnitud *velocidad* nos permite aproximar una muestra de estrellas por la superposición de dos sistemas estelares, la magnitud *costes de producción* permite, por ejemplo, definir (y se ha hecho de forma cualitativa) poblaciones de usuarios de sistemas de impresión.

Otro punto de coincidencia es la utilización en ambas actividades de tecnologías de la información de muy reciente desarrollo. El uso de microordenadores con paquetes de software del mercado como hojas de cálculo, procesadores de texto, aplicaciones de análisis estadístico, etc. y, lo más importante, el acceso a internet que da la posibilidad de disponer de información de todo tipo: Desde catálogos de estrellas, hasta las características de los productos de la competencia. Todo ello utilizando recursos que actualmente han pasado a ser de consumo. Estas herramientas, que se están utilizando de forma habitual en todos los ámbitos de la sociedad, permiten el desarrollo de determinados trabajos científicos desde lugares no necesariamente próximos a los centros de investigación. Y eso es algo que ha sido puesto en práctica en el desarrollo de este trabajo.

Además, en mi opinión, a semejanza del Arte, la Ciencia no puede ser desligada de la sociedad en la que se crea. Y en la sociedad española de finales del segundo milenio se constata una gran distancia entre el sector, digamos, productivo y el sector creador de conocimiento (Wagensberg 1999). Sin duda, para acercar ambos sectores son necesarias determinadas condiciones sociales, políticas y económicas. No voy a entrar a discutir si estas circunstancias se dan o no, ni por qué están en la situación en la que se encuentran. Sin embargo, tanto el sector productivo como el sector que crea conocimiento, no son entes abstractos sino que están constituidos por personas. Y por este motivo, lo que sí pienso al respecto es que, cualesquiera que sean las condiciones que puedan permitir una colaboración activa entre estos dos sectores, de todas ellas, la más importante es que las personas que componemos ambos colectivos tengamos la voluntad de hacerlo.

Y eso es algo más que podemos aportar en este trabajo. Personas del sector productivo y del sector creador de conocimiento hemos colaborado juntos para desarrollar una tarea común. No ha sido necesario que los centros a los que estamos adscritos hayan definido un marco de intercambio de experiencias para que pudiéramos realizar nuestra labor. Ni tampoco se ha esperado a que existiera un *campus virtual* para poner en práctica el hecho de que determinadas labores investigadoras son independientes del lugar de ubicación de sus actores. En definitiva, así como en el sector productivo se habla de teletrabajo, podemos decir que aquí se ha llevado a cabo un ejemplo de *teleciencia*.

## Bibliografía

- Alcobé, S., Cubarsi R., Catalá-Poch, M. A., 1997, *Structure and Evolution of Stellar Systems*, T.A. Agekian, A.A. Müllari & V.V. Orlov, St. Petersburg State University, Petrozavodsk State University, St. Petersburg, 189
- Alcobé, S., Catalá-Poch, M. A., Cubarsi R., 2000, *3ecm - 3rd European Congress of Mathematics*, Barcelona, 134
- Alfaro, E.J., Moreno, E., Franco, J., 2000, *A&SS*, 272, 53
- Arfken, G., 1981, *Métodos matemáticos para físicos*, Editorial Diana, México
- Asiaín, R., Figueras, F., Torra, J., Chen, B., 1999, *A&A*, 341, 427
- Balona, L.A., Bohm, T., Foing, B.H. et al., 1996, *MNRAS*, 281, 1351B
- Bassino, L.P., Dessauget, V.H., Muzzio, J.C., 1986, *Rev. Mex. Astron. Astrof.*, 13, 9
- Blaaw, A., 1995, *IAU Symposium*, 164, *Stellar Populations*, 39
- Barlow, R., 1989, *Statistics, a Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences*. Chichester: Wiley.
- Bienaymé, O., 1999, *A&A*, 341, 86
- Bienaymé, O., Séchaud, N., 1997, *A&A*, 323, 781
- Binney, J., Merrifield, M., 1998, *Galactic Astronomy*, Princeton University Press
- Bronshtein, I., Semendiaev, K., 1982, *Manual de Matemáticas para ingenieros y estudiantes*, Editorial Mir, Moscú.
- Cadwell, B., Wang, H., Feigelson, E., Frenklach, M., 1994, *ApJ*, 429, 285C
- Camm, G.L., 1941, *MNRAS*, 101, 195
- Carney, B.W., Latham, D.W., Laird, J.B., 1989, *AJ*, 97, 423
- Catalá-Poch, M. A., 1972, *Urania* N° 275, Tarragona, 3
- Catalá-Poch, M. A., 1975, *I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica*, Tenerife, 113
- Catalá-Poch, M. A., 1977, *II Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica*, Cádiz, 81
- Chandrasekhar, S., 1942, *Principles of Stellar Dynamics*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Chang, R., Hou, J.L., Shu, C.G., Fu, C.Q., 1999, *A&A*, 350, 38
- Chen, B., Asiaín, R., Figueras, F., Torra, J., 1997, *A&A*, 318, 29
- Clube, S. V. M., 1978, *Vistas Astron*, 22, 77
- Clube, S. V. M., Pan, R., 1985, *MNRAS*, 216, 511C
- Comerón, F., 1997, *Structure and Evolution of Stellar Systems*, T.A. Agekian, A.A. Müllari & V.V. Orlov, St. Petersburg State University, Petrozavodsk State University, St. Petersburg, 161
- Cortés, P., 1990, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona
- Cramér, H., 1977, *Elementos de la Teoría de Probabilidades*, Aguilar, Madrid
- Cubarsi, R. 1990, *AJ*, 99, 1558
- Cubarsi, R. 1992, *AJ*, 103, 1608

- Cubarsi, R., Alcobé S., 1997, *Structure and Evolution of Stellar Systems*, T.A. Agekian, A.A. Müllari & V.V. Orlov, St. Petersburg State University, Petrozavodsk State University, St. Petersburg, 154
- Cubarsi, R., Alcobé S., 2000, *3ecm - 3rd European Congress of Mathematics*, Barcelona, 134
- Cubarsi, R., Alcobé S., Catalá-Poch, M.A., 2000, IAUJD 13E, 14C
- Dehnen, W., 1998, AJ, 115, 2384
- Dehnen, W., Binney, J.J., 1998, MNRAS, 298, 387
- Delfosse, X., Forveille, T., Beuzit, J.L., Udry, S., Mayor, M., Perrier, C., 1999, A&A, 344, 897D
- Delhaye, J., 1957, *Astronomía Estelar*, Vergara
- Delhaye, J., 1965, *Galactic Structure*, The Univ. of Chicago Press, Chicago, 61
- Eddington, A.S., 1915, MNRAS, 76, 37
- Edvarson, B., Andersen, J., Lambert, D.L., Nissen, P.E., Tomkin, J., 1993, A&A, 275, 101
- Erickson, R.R. 1975, ApJ, 195, 343.
- ESA, 1997, *The Hipparcos Catalogue*. ESA SP-1200 (vol. I-XVII)
- Everitt, B.S., Hand, D.J., 1981, *Finite Mixture Distributions*, Chapman and Hall, London
- Figueras, F., 1986, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona
- Figueras, F., 2000, Comunicación privada
- Fuchs, B., Jahreiß, H., 1998, A&A, 329, 81
- Gilmore, G., 1984, MNRAS, 207, 223
- Gilmore, G., 1995, IAU Symposium, 164, *Stellar Populations*, 99
- Gilmore, G., Wyse, R.F.G., 1987, *The Galaxy*, D.Reidel Publishing Company. Dordrecht, 247
- Gliese, W., Jahreiß, H., 1991, *Third Catalogue of Nearby Stars*, Astronomisches Rechen-Institut, Heidelberg
- Gómez, A.E., Grenier, S., Udry, S., Haywood, M., Meillon, L., Sabas, V., Sellier, A., Morin, D., 1997, Hipparcos-Venice'97, ESA SP, 402, 621
- Hernández-Pajares, M., Cubarsi, R., Monte, E., 1993, Neural Network World, 3/93, 311
- Hernández-Pajares, M., Floris, J., 1994, MNRAS, 268, 444
- House, F.C., Innanen, K.A., 1975, A&SS, 32, 139
- Jahreiß, H., Gliese, W., 1992, *The Third Catalogue of Nearby Stars - Results and Conclusions*, IAU Symposium 156, 107
- Jahreiß, H., Wielen, R., 1997, ESASP, 402, 675J
- Jahreiß, H., Wielen, R., Fuchs, B., 1998, *The Message of the Angles - Astrometry from 1798 to 1998*, Proc. AG. Spring Meeting, 171
- Hilton, J.L., Bash, F., 1981, ApJ, 255, 217
- Juan-Zornoza, J.M., 1994, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona
- Kendall, M., Stuart, A., 1979, *The Advanced Theory of Statistics*, Ch. Griffin & Co., London
- King, I.R., 1989, *The Milky Way as a Galaxy*, Nineteenth Advanced Course of the Swiss Society of Astrophysics and Astronomy, R. Buser & I. King, Geneva Observatory, 117
- King, I.R., 1995, IAU Symposium, 164, *Stellar Populations*, 337
- Koch, K.R., 1990, *Bayesian Inference with Geodetic Applications*, Springer-Verlag, Berlin

- Kovalevsky, J., 1998, ARA&A, 36, 99
- Lin, C.C., Shu, F.H., Yuan, C., 1969, ApJ, 155, 721
- Lindblad, B., 1935, MNRAS, 96, 69
- López Cachero, M., 1990, *Fundamentos y Métodos de Estadística*, Ed. Pirámide, Madrid
- Majewski, S.R., 1993, ARA&A, 31, 575
- Marino, A., Micela, G., Peres, G., 2000, A&A, 353, 177M
- Martinet, L., Mayor, M., 1969, A&A, 1, 19
- Mayor, M., 1970, A&A, 6, 60
- Mayor, M., 1972, A&A, 18, 97
- McLachlan, G. J., Basford, K. E., *Mixture Models. Inference and application to clustering*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988
- Mihalas, D., 1968, *Galactic Astronomy*, W.H. Freeman and Company. San Francisco
- Mihalas, D., Binney, J., 1981, *Galactic Astronomy*, W.H. Freeman and Company. San Francisco
- Moreno, E., Alfaro, E.J., Franco, J., 1999, ApJ, 522, 276M
- Müllari, A.A., Orlov, V.V., 1996, EM&P, 72, 19
- Müllari, A.A., Müllari, T.B., Orlov, V.V., Petrova, A.V., *Astron. Astrophys. Trans.*, 1998, 15, 19
- Narayan, R., Nitayananda, R., 1986, ARA&A, 24, 127
- Nemeč J., Nemeč A.F.L., 1991, PASP, 103, 95
- Ojha, D.K., Bienaymé, O., Robin, A.C., Mohan, V., 1994a, A&A, 284, 810
- Ojha, D.K., Bienaymé, O., Robin, A.C., Mohan, V., 1994b, A&A, 290, 771
- Ojha, D.K., Bienaymé, O., Robin, A.C., Crézé, M., Mohan, V., 1996, A&A, 311, 456
- Oort, J.H., 1927, *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 3, 275, 120 (n° 120)
- Oort, J.H., 1932, *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 6, 249 (n° 494)
- Oort, J.H., 1940, ApJ, 91, 273
- Orús, J.J. de. 1952, *Collectanea Mathematica*, Vol. V, Barcelona
- Orús, J.J. de. 1975, *I Asamblea Nacional de Astronomía y Astrofísica*, Tenerife, 121
- Orús, J.J. de. 1977. *Apuntes de Dinámica Galáctica*, Universidad de Barcelona
- Osterbrock, D.E., 1995, IAU Symposium, 164, *Stellar Populations*, 21
- Palouš, J., 1986, *The Galaxy and the Solar System*, The Univ. of Arizona Press. Tucson, 47
- Palouš, J., Hauck, B., 1986, A&A, 162, 54
- Papoulis, A., 1989, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw Hill Co., Singapore
- Perryman, M., 1999, S&T, 97-6, 40
- Press, W.H.; Teukolsky, S.A.; Vetterling, W.T.; Flannery, B.P., 1992, *In Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, UK
- Preston, G.W., Beers, T.C., Shectman, S.A., 1994, AJ, 108, 538
- Ratnatunga, K.U., Uppgren, A.R., 1997, ApJ, 476, 811
- Ros, R.M., 1985, *Rev. Mex. Astron. Astrof.*, 11, 23

- Ros, R.M., 1987, *Rev. Mex. Astron. Astrof.*, 15, 65
- Sala, F., 1986, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona
- Sala, F., 1990, *A&A*, 235, 85
- Sandage, A., 1987, *The Galaxy*, D.Reidel Publishing Company. Dordrecht, 321
- Sandage, A., Fouts, G., 1987, *AJ*, 92, 74
- Sanz, J., 1987, Tesis Doctoral, Universitat de Barcelona
- Sanz, J., Catalá-Poch, M. A., 1987, 10th eram IAU, Proceedings, 4, 267
- Sears, F.W., Salinger, G.L., 1980, *Termodinámica, teoría cinética y termodinámica estadística*, Editorial Reverté, Barcelona
- Shiveshwarkar, S.W., 1935, *MNRAS*, 95, 655
- Strömberg, G., 1924, *ApJ*, 59, 228
- Strömberg, G., 1925, *ApJ*, 61, 363
- Strömberg, G., 1946, *ApJ*, 104, 12
- Stuart, A., Ord, J.K., 1987, *Kendall's Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1 *Distribution Theory*, Ch. Griffin & Co., London
- Turon, et al., 1992, *The Hipparcos Input Catalogue*, ESA SP-1136
- Vyssotsky, A.N., Janssen, E.N., 1951, *AJ*, 56, 58
- Wagensberg, J., 1999, La Universitat, Universitat de Barcelona, 8, 20
- Wolley, R., 1970, *The Spiral Structure of Our Galaxy*, IAU, 423
- Wyse, R.F.G., 1995, *PASP*, 107, 785
- Wyse, R.F.G., Gilmore, G., 1995, *AJ*, 110, 2271
- Yuan, G., 1971, *AJ*, 76, 664

## **Anexo I. Consideraciones sobre el concepto de poblaciones estelares**

Ya se ha comentado en (1.5.1) que la idea de poblaciones estelares ha ido evolucionando notablemente a lo largo de la segunda mitad de este siglo. Desde que Baade introdujo este término hasta hoy en día, no se ha podido mantener aquella simple clasificación inicial de poblaciones I y II compuestas de estrellas jóvenes y viejas. También se ha citado el estudio de Kapteyn que estaba basado en parámetros cinemáticos, al contrario que el de Baade, quien trabajaba exclusivamente con observaciones fotométricas. Así Kapteyn propuso que la Galaxia estaba compuesta por subsistemas que giraban con velocidades diferentes alrededor de un centro común. Baade en cambio, definió dos poblaciones según dos parámetros físicos: magnitud absoluta y tipo espectral. De este modo, la Población I era la de los brazos espirales de las galaxias y el prototipo de estrellas de la población II eran las estrellas de los cúmulos globulares.

En la Conferencia Vaticana de 1957 se adoptó un esquema de clasificación de las Poblaciones Estelares. Se introdujeron diferencias respecto a la clasificación de Baade incorporando la Población del disco entre las Poblaciones I y II. Además estas dos últimas se subdividieron en dos. El resultado era: población II del Halo, población II intermedia, población del disco, población I vieja y población I extrema.

El punto de reflexión más completo de los últimos años ha sido el simposium N° 164 de la IAU de 1995 bajo el tema monográfico de Poblaciones Estelares. En este evento, Blaaw (1995) y King (1995) (este último recopilando el debate con otros colegas) recogen las ideas fundamentales que sobre poblaciones estelares se han desarrollado en la segunda mitad de este siglo.

Para King la división de Baade venía a significar que la población I era joven y rica en metales y la población II vieja y pobre en metales. Al descubrirse en el bulbo de M31 población II rica en metales y en las galaxias enanas población joven pero pobre en metales, esta clasificación deja de tener sentido pues lo que se tiene es un plano edad-metalicidad. Por este motivo, la información cinemática y la distribución espacial son muy útiles para delimitar lo que pueden ser distintas componentes. No obstante, es la edad y la abundancia en metales lo que realmente describe las características de una población.

El modelo simple de dos poblaciones no podía dar cuenta de la diversidad de poblaciones estelares de la Galaxia. King cita que Oort en 1958 destacaba la presencia fuerte de una Población II intermedia que estaba entre el halo y el disco viejo. Esta Población II intermedia la recuperaron posteriormente como disco grueso galáctico, (p. e., Gilmore 1984). Edvardson et al. (1993), observan que la población del disco viejo parece como si haya sido construida a lo largo de la vida del disco. Preston et al. (1994) identifican acreciones y fusiones en la formación de algunas componentes de la Galaxia como eventos que probablemente contribuyen a la formación del disco grueso viejo, el halo viejo de baja metalicidad y el halo nuevo de metalicidad intermedia. Los procesos de acreción siguen sucediendo hoy en día.

Bulbo y disco parecen ser los dos componentes principales de las galaxias con disco pero los bulbos pueden formarse a partir de las regiones más internas de los discos. En el caso de nuestra galaxia se ven varias componentes estelares estructurales: Disco (joven y viejo), disco grueso, bulbo y halo pobre en metales. No obstante, otras galaxias espirales no muestran todas esas componentes.

Según Gilmore (1995), los modelos actuales de formación de galaxias suponen que las grandes galaxias se forman por acreción de pequeñas unidades. Algunas de estas unidades pueden haber comenzado el proceso de evolución química y formación estelar antes de la fusión. Plantea que cuestiones esenciales de estos modelos que conducen a consecuencias observables son la época en que sucedió la última fusión de fragmentos de masa comparables y la fracción de gas de tales fragmentos. Así supone que fusiones recientes de igual masa generan galaxias elípticas. Se cree que los discos espirales finos son frágiles para fusionarse por lo que, si existe disco grueso, significa que se ha producido un evento de fusión de una espiral muy recientemente.

Por lo tanto, vemos que hoy en día, además de los criterios de clasificación utilizados por Baade pueden utilizarse otros: Fotometría interpretada a través de la evolución estelar, información cinemática (velocidad con respecto al centroide), distribución espacial y estas dos últimas relacionadas mediante la Dinámica Galáctica. Para la clasificación de la población I vieja, la información cinemática y la distribución espacial fueron básicas. Para la población del disco fue trascendental la información referente a las estrellas de líneas espectrales débiles. También resultó básica la información cinemática para la población II intermedia. Otros grupos de estrellas como las RR Lyrae basan su clasificación en información cinemática y la referente a cúmulos globulares. Para las subnanas lo básico fue cinemática y propiedades espectrales. Etc.

Para concluir, podemos presentar dos citas relacionadas con aspectos desarrollados en este trabajo. Wyse (1995) lleva a cabo una discusión sobre los datos obtenidos que pueden aportar información sobre la historia de la Galaxia. Considera que las galaxias se forman por acumulación y fusión de objetos menores. Las galaxias satélites acretadas pueden manifestarse luego como grupos en movimiento diferenciado (ver 1.5.3). El disco grueso tiene una cinemática difícil de determinar debido a su superposición con otras poblaciones, en particular con el disco fino. El disco grueso sería una mezcla del disco fino preexistente y una galaxia satélite acretada.

Del mismo modo que se ha hecho en este trabajo, Wyse & Gilmore (1995) utilizan también el CNS3 (ver 5.1) para determinar poblaciones estelares, combinándolo con fotometría de Strömgren. Si bien observan una evidencia clara de que existe una superposición de discos fino y grueso, al no obtener con la muestra local una proporción relativa de cada población, amplían la muestra hasta 1.500 pc del Sol. En esta muestra extendida ponen en evidencia también la presencia de una tercera componente que asocian al halo.

A continuación presentamos una tabla resumen clásica de las componentes estructurales. Está basada en la de Mihalas & Binney (1981) actualizando valores de acuerdo con publicaciones más recientes (Nemec & Nemec 1991). La indefinición a la hora de ubicar en el esquema las diferentes poblaciones se ha hecho por la imprecisión de la que, como se ha dicho, adolece la clasificación.

$z_c$ (Kpc)	[Fe/H]	Población estelar		$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ (km s <sup>-1</sup> )	$V_0 - V$ (km s <sup>-1</sup> )
0.3	> -0.4	disco fino	Población I	brazos espir.	10:5:10
				Pob. joven disco	20:10:10
				Población Intermedia	30:15:15
1.5	de -0.4 a -1.0	disco viejo	Población II	Pob. vieja disco	40:25:20      15
				comp.	75:50:45      45
30	< -1.0	comp. esfer.	Población II	halo	130:100:90      100
					150:120:120      200

## **Anexo II. Aspectos históricos sobre la desviación del vértex**

En 1.5.3 se han mencionado ejemplos de trabajos recientes acerca de la desviación del vértex. No obstante, las teorías sobre este fenómeno se han ido desarrollando ya desde hace tiempo. Como veremos a continuación, a lo largo de este siglo se han realizado multitud de estudios que han ido dando cuerpo a estas ideas. Por ejemplo, un trabajo clásico sobre la desviación del vértex es el de Mayor (1970 y 1972) quien la interpreta como una propiedad local de la distribución de velocidades, perturbada por una onda de densidad espiral. Concluye que es insuficiente considerarla únicamente como consecuencia de las condiciones iniciales de formación de las estrellas afectadas. Ambas hipótesis están de acuerdo con el hecho de que son las estrellas de menor velocidad residual las que tienen mayor desviación. Pues por un lado, las estrellas más jóvenes presentan menores valores de velocidad y, por otro, cualquier perturbación espiral del potencial afectará en mayor medida a las estrellas de menor energía cinética.

Pero podemos irnos mucho más atrás en el tiempo para encontrar estudios sobre este fenómeno. Ya Eddington (1915) trabajando en el estudio de cómo varía el elipsoide de velocidades del sistema estelar en tamaño, forma y orientación, deduce que el semieje mayor del elipsoide debe tener dirección aproximadamente radial.

Strömberg (1924 y 1925) observa que las asimetrías encontradas en la distribución de velocidades dependen del grupo de estrellas con el que se trabaja. Estos grupos están seleccionados en base a criterios físicos observando que las estrellas de tipo B son las que presentan una desviación mayor que la explicada por causa de los errores. Interpreta que tales asimetrías en la distribución de velocidades pueden explicarse como el efecto combinado de dos restricciones de velocidad que actúan simultáneamente. Tales efectos los representa como el producto de dos funciones de distribución de velocidad simétricas con sus centros muy separados.

En un trabajo posterior, (1946) intenta correlacionar los movimientos de las estrellas con sus masas. Interpreta los resultados como que cuanto más masiva es una estrella, mayor es la probabilidad de que se mueva en una órbita totalmente circular alrededor del centro de la galaxia y que su órbita se encuentre sobre el plano galáctico. Observa así mismo, que las dispersiones de velocidad aumentan a medida que nos movemos a lo largo de la secuencia principal hacia tipos espectrales más tardíos. En los diagramas que publica en este estudio puede verse claramente la desviación del vértex para estrellas de tipo A. Para estrellas de otros tipos espectrales no se observa esta asimetría.

Oort (1927) utiliza resultados anteriores de Strömberg y constata que no están de acuerdo con las hipótesis del modelo dinámico de la Galaxia que presenta, si bien considera que la asimetría presentada por las velocidades peculiares se debe a la influencia de estrellas de alta velocidad. Para explicar esta asimetría considera necesario introducir una tercera integral de la energía además de las de energía y momento angular.

Shiveshwarkar (1935) intenta establecer una conexión entre la deflexión de la dirección del vértex de la corriente estelar y los coeficientes característicos de la rotación y expansión diferencial de la Galaxia. Considera la desviación del vértex  $\varepsilon$  positiva en la dirección opuesta a la rotación, hacia las longitudes decrecientes. Demuestra que un valor negativo de  $\varepsilon$ , esto es desviación hacia longitud creciente, se traduce en una velocidad media  $\Pi_0$  en la dirección radial también negativa. Puesto que un valor positivo de  $\Pi_0$  significa en general una expansión diferencial de la Galaxia, concluye que una expansión se corresponde a desviación del vértex en la dirección de longitudes decrecientes y en caso contrario significará una contracción.

Lindblad (1935) desarrolla un extenso trabajo sobre la desviación del vértex. Analiza la publicación del autor anterior y menciona que Pilowski considera la expansión y la desviación del vértex como consecuencia del decrecimiento de una fuerza central. Por su parte, considera que el hecho de que el vértex se desvíe del centro galáctico quiere decir necesariamente, o bien que las diferentes órbitas de mismo tamaño que pasan por un punto son sistemáticamente diferentes con respecto de la masa o que la distribución de materia a lo largo de las órbitas relativas no es uniforme, o distribuida al azar, sino que es en cierto momento sistemáticamente diferente para distintas partes de esa órbita. Utilizando la teoría de las dos corrientes estelares (*two star stream*) en la que una segunda corriente forma una desviación con la primera, obtiene que la desviación del vértex en la dirección de las longitudes crecientes conduce a una ligera contracción.

Oort (1940) lleva a cabo un estudio de la relación entre la distribución de velocidades y la distribución de densidades. Concluye que la desviación del vértex es consecuencia de un exceso o falta de simetría rotacional de la distribución de densidad. Menciona que Lindblad (1936), sugiere la posibilidad de que las órbitas de las estrellas responsables de la desviación del vértex transcurran por regiones donde los movimientos circulares sean inestables.

Camm (1941) desarrolla gran parte del modelo teórico visto en 1.2 en estado estacionario y simetría cilíndrica. Deduce que dos de los semiejes del elipsoide de velocidades se encuentran sobre el plano galáctico por lo que la desviación del vértex se debería producir sólo en latitud pero no en longitud.

Vyssotsky & Janssen (1951) encuentran que los grupos de estrellas con baja inclinación (es decir, menor componente de la velocidad perpendicular al plano galáctico) en su órbita presentan una marcada desviación del vértex mientras que sucede lo contrario en las de elevada inclinación. Esta observación es coincidente con la interpretación de que la desviación del vértex es menor para estrellas con mayor velocidad residual, pues son estas estrellas las que presentan una mayor inclinación en su órbita.

Delhaye (1965) aprecia que, en particular para las estrellas de tipo A, se encuentra una importante desviación del vértex hacia más altas longitudes. Considera que la dirección calculada depende de si el método está basado en el uso de movimientos propios o de momentos. Interpreta las diferencias de resultados entre ambos métodos debida a que la desviación del vértex es propia de las estrellas de baja velocidad, pues según el método, tales son las estrellas que dan mayor peso al resultado.

De acuerdo con Mihalas (1968) la existencia de desviación del vértex indica que algunos grupos de estrellas no han alcanzado todavía un estado de equilibrio. Este hecho lo considera conectado con la presencia de una estructura espiral en los lugares donde se han formado tales estrellas.

Martinet & Mayor (1969), partiendo de la distribución de velocidades observada para estrellas cercanas, en que para ciertos tipos espectrales no se corresponde con lo previsto por la teoría en estado estacionario, buscan si anomalías como la desviación del vértex se producen también para estrellas de otros tipos espectrales. Observan que las propiedades cinemáticas en el entorno solar varían sensiblemente según la posición en el diagrama de Hertzsprung-Russell de las estrellas que se consideren. Deducen que las anomalías cinemáticas con respecto a lo predicho por la teoría se corresponden con estrellas más jóvenes que  $5 \cdot 10^8$  años.

Wolley (1970) considera que la desviación del vértex puede tener alguna conexión con la presunta estructura espiral de la Vía Láctea y pueden haber dos posibilidades. O bien que sólo afecte a estrellas jóvenes y que tenga que ver con las condiciones iniciales y formación de tales estrellas. O bien que esta asimetría sea una manifestación de la naturaleza del campo gravitatorio del entorno solar, el cual no es central debido a la acción de los brazos espirales. Concluye que la hipótesis correcta es la primera.

Yuan (1971) parte de adoptar el modelo espiral para la Galaxia de Lin et al. (1969) y predice el movimiento de las estrellas vecinas, en lugar de deducir la información de la estructura galáctica a partir de la cinemática de las estrellas del entorno solar. Estudia estrellas de tipos espectrales no más tardíos que el A. Para estrellas O y B no puede establecer la desviación del vértex por falta de datos. Concluye que la desviación del vértex y el resto de parámetros cinemáticos de las estrellas cercanas son simplemente un reflejo de las condiciones iniciales en el momento de su formación. Estas condiciones vienen dadas por la presencia de brazos espirales. Las estrellas se forman en tales brazos y luego emigran a otros lugares de la Galaxia. En segunda aproximación, atribuye la asimetría a una distribución estacionaria en presencia de un campo gravitatorio espiral.

House & Innanen (1975) analizan numéricamente las órbitas de miles de estrellas y deducen la desviación del vértex como consecuencia de las oscilaciones de los parámetros cinemáticos que consideran intrínsecas al estado estacionario. Es decir, que está causada por movimientos aleatorios de estrellas. Excluyen de este modo la necesidad de hipótesis que requieran influencias externas como ondas espirales de densidad.

Hilton & Bash (1981) utilizan el modelo de partícula balística para formación de estrellas en brazos espirales al objeto de analizar la conexión entre la desviación del vértex y los movimientos iniciales en el momento del nacimiento de las estrellas O y B. Este modelo supone que las estrellas de los brazos espirales se forman en densas nubes lanzadas desde los brazos y que las órbitas de ambos, nubes y estrellas, son conocidas. Las nubes tienen una componente radial dirigida hacia el centro galáctico. Con la componente radial de las velocidades iniciales hacia otra dirección, el vértex se desvía en la dirección de longitud galáctica creciente.

Palouš (1986) estudia la presencia de grupos en movimiento en el entorno solar y concluye que éstos son los responsables de la deformación del elipsoide de velocidades. Al excluir de la muestra estelar las estrellas pertenecientes a estos grupos, la desviación del vértex queda anulada.

Bassino et al. (1986) utilizan la aproximación epicíclica y consideran que la desviación del vértex es consecuencia natural del carácter epicíclico de los movimientos estelares en la Galaxia. El estudio es válido para estrellas de edades del orden de hasta  $6,5 \cdot 10^7$  años. Ni los movimientos sistemáticos de las estrellas en el momento de su nacimiento, ni su formación en las proximidades de un brazo espiral afectan de forma notable a la desviación del vértex para estas estrellas.

Figueras (1986) analiza la desviación del vértex de diferentes muestras de estrellas en función de las propiedades cinemáticas, poblaciones estelares y distribución espacial de las estrellas. Encuentra que para todas las muestras se presenta alguna desviación por lo que las condiciones iniciales de la formación estelar no pueden ser la única causa.

Sanz & Catalá-Poch (1987) utilizan un modelo con simetría axial puntual para estudiar la desviación del vértex en el plano galáctico y la deducen como consecuencia de la axialidad no cilíndrica del potencial, con lo que resulta ser una función del ángulo de posición  $\theta$ .

Cubarsi (1992) utiliza un modelo de superposición de sistemas estelares y obtiene la desviación del vértex como consecuencia de la diferencia de velocidades de los subcentroides de las componentes parciales. Para dichas componentes deduce una desviación nula.

También podemos citar en la línea de los que consideran la desviación del vértex como consecuencia de las condiciones iniciales, a Gómez et al. (1997) para quienes esta asimetría disminuye con la edad llegando a ser nula pasado un determinado tiempo.

Podemos acabar esta sinopsis con el reciente trabajo de Moreno et al. (1999) quienes realizan un estudio del elipsoide de velocidades para una muestra de estrellas O-B5.5 pertenecientes al Cinturón de Gould. Obtienen un valor de la desviación del vértex de  $64 \pm 20^\circ$  que se convierte en  $22 \pm 8^\circ$  si se excluyen de la muestra las estrellas pertenecientes al grupo en movimiento de las Pléyades. Este valor resulta concordante con el deducido promediando lo predicho por diferentes modelos.

Observamos que estas explicaciones se pueden enmarcar dentro de las tres categorías de teorías mencionadas en 1.5.3. Además, las diferentes conclusiones a las que llegan los trabajos anteriores sobre la desviación del vértex dependen de cómo los modelos que se utilizan para explicarla introducen conceptos de tipo dependencias temporales, tipo de distribución, planos y tipos de simetrías, etc.

### **Anexo III. Descripción de los programas que se han utilizado**

A continuación se describen los programas principales y rutinas utilizadas en el desarrollo del modelo numérico de separación de poblaciones así como otros auxiliares. Estos programas han sido codificados en lenguaje FORTRAN.

El conjunto de programas y rutinas está constituido por un total de 28 archivos. Entre ellos hay 2 programas principales que consisten en las diferentes formas de atacar el problema a poblaciones ideales y muestras sintéticas y reales. Además hay 7 programas auxiliares que realizan tareas intermedias como generación de muestras sintéticas o selección de estrellas. Los 19 restantes constituyen las diferentes rutinas que son llamadas por los programas principales o auxiliares. Así mismo, se utilizan hasta 40 ficheros de datos. Procedamos a la descripción de cada uno de los elementos de cálculo.

#### ***Programa principal de tratamiento de muestras sintéticas y reales***

En primer lugar describimos el programa principal y rutinas que materializan el modelo numérico de aproximación por superposición de gaussianas. Se utiliza para muestras reales y sintéticas.

#### **SSE10**

Los pasos que realiza son:

- Lectura de los valores de los momentos de la muestra: SINMO2.
- Lectura de los valores de los errores correspondientes a esos momentos: SINRO2.
- Cálculo de los cumulantes: CALNU.
- Cálculo de las  $d_i$ : CALDES.
- Cálculo de las variables auxiliares P,S,X,Y,Z,T: PSXYZT.
- Cálculo de la matriz de pesos a partir de los errores de las variables anteriores y los errores de las  $d_i$ . Se evalúan también los errores de las incógnitas: PESOER
- Aplicación de los pesos al sistema de ecuaciones: EAEB.
- Resolución del sistema de mínimos cuadrados: MINCUA.
- Cálculo del vector  $\mathbf{D}$  y sus errores: CALDDE.
- Definición de los signos de los elementos del tensor  $\mathbf{C}_2$  y sus errores según 3-13: CALCCE.
- Cálculo del parámetro  $q$  y errores: CALQUE.
- Definición de los elementos del tensor  $\mathbf{C}_2$  y sus errores según 3-14: CESDES.
- Elección de la mejor de las soluciones anteriores
- Cálculo de los momentos y velocidades de las componentes parciales y errores: MOMPAAE.
- Apertura y escritura del fichero RESSIN.TXT con los resultados.
- Cálculo de la cantidad  $\chi^2$  para estimar la bondad de la aproximación: RECALE

## *Programa principal de tratamiento de poblaciones ideales*

### **SSE3**

Mezcla y posterior separación de **poblaciones ideales**. Puesto que las poblaciones ideales se definen sin errores no tiene sentido en este caso hablar de cálculo de errores ni ponderación de ecuaciones. Los pasos que realiza son:

- Lectura de los valores de los momentos de las n poblaciones ideales que se mezclan: LECTU.
- Cálculo de los momentos de la muestra global a partir de las parciales leídas: CALDEL + CALMOM + CALNU.
- Cálculo de las  $d_i$ : CALDES.
- Cálculo de las variables auxiliares P,S,X,Y,Z,T: PSXYZT.
- Resolución del sistema de mínimos cuadrados: MINCUA.
- Cálculo de **D**: CALDD.
- Definición de los signos de los elementos y cálculo del tensor  $C_2$ : CALCC.
- Cálculo del parámetro  $q$ : CALQU.
- Cálculo de los elementos del tensor  $C_2$ : CESDES.
- Elección de la mejor de las soluciones anteriores.
- Cálculo de los momentos y velocidades de las componentes parciales: MOMPARG.
- Apertura y escritura del fichero RESU.TXT con los resultados.

### *Rutinas llamadas por los programas principales de separación*

#### **CALCC**

Cálculo de los elementos del tensor  $C_2$ . Permite Conocer el signo de cada elemento. Además, si no se reasignan valores a estos elementos, los valores calculados aquí son los que permanecen. Se utilizan las expresiones 3-13.

#### **CALCCE**

Igual que la anterior pero se evalúan también los errores de las variables que intervienen.

#### **CALDD**

A partir del vector obtenido en la resolución del sistema de mínimos cuadrados, se calculan tanto  $C_{22}$  como las tres componentes del vector **D**. La primera incógnita del sistema proporciona el valor de  $\frac{1}{D_2^2}$  y la segunda  $\frac{C_{22}}{D_2}$ .

## CALDDE

Igual que la anterior pero se evalúan también los errores de las variables que intervienen.

## CALDEL

Calcula el valor de los vectores  $\mathbf{w}^{(i)}$  según su definición 2-10 y el valor de la velocidad del centroide de la muestra total según 2-7. Se utiliza para generar muestras ideales a partir de poblaciones ídem.

## CALDES

De acuerdo con las ecuaciones 3-4:

- Resuelve las ecuaciones cúbicas que proporcionan los valores de las variables auxiliares  $d_i$  (componentes del vector normalizado  $\mathbf{d}$ ) a partir de las dos primeras expresiones de 3-4.
- Utiliza las dos siguientes para tener dos nuevas soluciones.
- Se calculan las tangentes a las cuatro funciones en el punto hallado, con lo que se puede construir un sistema de mínimos cuadrados. De esta forma se promedian las dos soluciones obtenidas para cada  $d_i$ .
- La rutina permite escoger entre diferentes valores de las  $d_i$  para ajustarse a la mínima  $\chi^2$ .
- Se ha establecido que, si al resolver las ecuaciones cúbicas, una de las  $d_i$  es cero la rutina se detiene ahí y considera que esas  $d_i$  son las válidas.

## CALMOM

A partir de los momentos de las poblaciones parciales calcula los momentos de la muestra global utilizando las expresiones 2-19, 2-21 y 2-24.

Previamente se obtienen los momentos de orden 4 parciales de cada población ideal a partir de los de orden dos de las mismas según:

$$\mu_{ijkl} = \mu_{ij}\mu_{kl} + \mu_{ik}\mu_{jl} + \mu_{il}\mu_{jk}; i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

## CALNU

Calcula los cumulantes de orden cuatro según  $\mathbf{N}_4 = \mathbf{M}_4 - 3\mathbf{M}_2 * \mathbf{M}_2$

## CALQU

A partir de los momentos de tercer orden, los cumulantes,  $C_{22}$  y  $D_2$  se obtiene la variable  $q$  la cual está directamente relacionada con la fracción de cada población. de acuerdo con su definición 2-40, puesto que  $n' = 1 - n''$ , esto se traduce en:

$$n' = \frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4}{(q^2 + 4)}} \right)$$

## CALQUE

Igual que la anterior pero se evalúan también los errores de las variables que intervienen.

## CESDES

Se calcula  $C_{ij}$  utilizando las relaciones 3-14.

Las cuales se traducen en:

$$C_{ij} = \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left( v_{ijij} - D_i^2 D_j^2 \left( \frac{v_{2222} - 3C_{22}^2}{D_{22}^4} \right) \right)}$$

El signo de la raíz cuadrada viene dado por la rutina CALCC. Si el radicando es negativo, se conserva el valor originalmente calculado por CALCC para dicho elemento del tensor. La diferencia conceptual entre esta rutina y CALCC es que la presente calcula los elementos del tensor  $C$  según los momentos de cuarto orden y la otra según los de tercero.

## EAEB

Realiza el producto de la matriz con los coeficientes de las ecuaciones por la de pesos. Así mismo, multiplica el vector de los términos independientes por la matriz de pesos. En definitiva, aplica los pesos a las ecuaciones.

## EDSG

Se le dan los tres coeficientes de una ecuación de segundo grado y devuelve las raíces en un vector y un escalar indicando el número de soluciones. Es llamada desde la rutina CALDES.

## EDTG

Resuelve una ecuación de tercer grado utilizando el algoritmo correspondiente (p.e. Bronshtein & Semendiaev 1982). Los casos triviales se resuelven aparte. Devuelve las raíces en un vector y un escalar indicando el número de soluciones. Es llamada desde la rutina CALDES.

## LECTU

Rutina de lectura de momentos parciales de poblaciones ideales. Se aplica únicamente en el caso de poblaciones ideales. Permite definir con cuantas poblaciones se va a trabajar.

## MINCUA

Resuelve un sistema de mínimos cuadrados que tenga 2 incógnitas y un máximo de 14 ecuaciones. Utiliza el clásico algoritmo:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{WA})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Wb}$  donde  $\mathbf{W}$  es la matriz de pesos.

## MOMPAE

Tras haber calculado  $q$  y las fracciones de población de cada componente en la rutina CALQUE se calculan los momentos de orden dos de las poblaciones parciales y la propagación cuadrática de sus errores de cálculo. Se utiliza:

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{a}_2 + (\mathbf{D})^2 \Rightarrow \mathbf{a}_2 = \mathbf{M}_2 - (\mathbf{D})^2$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{n' n''}} (\mathbf{C}_2 - q(\mathbf{D})^2)$$

$$\mathbf{M}_2' = \mathbf{a}_2 - n'' \mathbf{b}_2; \mathbf{M}_2'' = \mathbf{a}_2 - n' \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + n'' \mathbf{w}; \mathbf{v}'' = \mathbf{v} - n' \mathbf{w}$$

## MOMPAR

Tras haber calculado  $q$  y las fracciones de población de cada componente en la rutina CALQU se realizan las mismas operaciones que en la rutina anterior MOMPAE pero sin calcular la propagación de errores.

## PESOER

De acuerdo con 3-18, calcula los errores de P, S, X, Y, Z, T y de las ecuaciones que entran en el sistema de mínimos cuadrados 3-11. La matriz de pesos es la inversa de la matriz de covarianza de los errores del sistema de ecuaciones. Las variables  $d$  se consideran sin error. Se utilizan errores absolutos.

## PSXYZT

Calcula las variables auxiliares P, S, X, Y, Z, T definidas en 3-5 y 3-6. Estas variables entran en los cocientes que constituyen las ecuaciones el sistema de mínimos cuadrados.

## **RECALE**

Cálculo de los residuos de los momentos de una población suponiendo que la muestra global está compuesta por dos poblaciones gaussianas. Recompone los momentos globales según 2-30, 2-33 y 2-36. A partir de ahí evalúa la cantidad  $\chi^2$  según 3-21.

## **SINMO2**

Lectura de los momentos globales de una muestra real o sintética.

## **SINRO2**

Lectura de los errores correspondientes a los momentos globales leídos en la rutina SINMO2. Incluye un factor de eliminación de momentos. Si el error leído es mayor que el momento según un factor definido, el momento se considera nulo y el error igual al momento. Informa de cada momento que es anulado. Calcula también los errores de los cumulantes. Realiza este cálculo utilizando suma cuadrática de errores.

### ***Programas adicionales de creación de muestras sintéticas y otros***

## **GENMUE**

Generación de  $3n$  números aleatorios con distribución  $N(0,1)$ . Utiliza las rutinas estándar (Press et al. 1992) *gasdev* de generación de números aleatorios y *ran1*, fuente de desviaciones uniformes que devuelve desviación normalmente distribuida con media cero y varianza unidad.

## **SSEGIR**

Programa que aplica los correspondientes cambios de escala a las  $N(0,1)$  generadas con el programa anterior para obtener una distribución con media, dispersión y orientación determinada. Utiliza la rutina GIRMUE.

## **SSEMOM**

Cálculo de los momentos y cumulantes de una muestra real o sintética mediante algoritmos estándar a partir de los valores de las velocidades de las estrellas de la muestra. Utiliza la rutina CALCMO. La versión M14000 de este programa es igual pero dimensionada a 14.000 estrellas.

## **MEZMUE**

Mezcla de  $n$  muestras sintéticas en las proporciones que se indiquen para obtener una superposición de poblaciones sintéticas.

## **GLIEJAH**

Selección de estrellas del catálogo según el valor del módulo de la velocidad. La versión G14000 de este programa es igual pero dimensionada a 14.000 estrellas.

## **DECIDE**

Selección de estrellas de una población determinada en función de su probabilidad de pertenencia a la misma.

## **LESCRIBE**

Programa de cambio de formato de lectura-escritura.

Todos los paquetes software citados son marca registrada de sus respectivos productores

“Luego esperó, poniendo en orden sus pensamientos y cavilando sobre sus poderes aún no probados. Pues aunque era el amo de mundo, no estaba muy seguro de qué hacer a continuación. Mas ya pensaría algo.”

Arthur C. Clarke. *2001: Una Odisea Espacial*.