DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA
APLICADA IV
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DESCOMPOSICIONS DE GRAFS EN ARBRES

Susana-Clara López Masip

Directora de la Tesi:

Anna Lladó

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA
APLICADA IV
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DESCOMPOSICIONS DE GRAFS EN ARBRES

Susana-Clara López Masip

Directora de la Tesi:

Anna Lladó

Als meus pares,
perquè existeixen i són únics.

Agraïments

Voldria manifestar el meu agraïment a tots els companys del Departament de Matemàtica Aplicada IV, que al llarg d'aquests darrers anys m'han ajudat d'una manera o altra a sentir-me un membre més del nostre Departament, especialment a aquelles persones que en algun moment m'han ofert els seus consells.

Vull agrair molt especialment a la meva directora de tesi la seva paciència, orientació i temps que m'ha dedicat, tant en l'inici, quan va ser el meu referent acadèmic com al final, per la seva inestimable ajuda.

Gràcies a la meva família i a la resta d'amics, per la seva comprensió des de la confiança. Finalment, gràcies a les petites persones per fer de les coses simples un estil de vida.

Susana-Clara López Masip   Barcelona, Desembre 2002

Índex

Introducció

El treball d'aquesta tesi ha estat dirigit des d'un principi a l'estudi del problema, ja clàssic, de descomposicions de grafs en arbres. En el marc general de la teoria de grafs, els problemes de descomposicions constitueixen una línia de recerca extensament tractada i abordada des d'òptiques molt diverses.

Per descomposició d'un graf hom entén una família de subgrafs branca-disjunts, les branques dels quals recobreixen totes les branques del graf. Els tipus de descomposicions varien en funció de l'exigència o no, de certes característiques en els subgrafs. En concret, en el cas de les descomposicions en arbres s'exigeix que els subgrafs siguin acíclics i connexos. Un altre tipus de descomposicions, d'obligada referència per la seva proximitat a les descomposicions en arbres, són les descomposicions en boscos, és a dir, en subgrafs acíclics no necessàriament connexos. Tradicionalment, els problemes de descomposició s'han classificat al voltant de tres eixos bàsics: l'estudi sobre la presència de determinats subgrafs com a elements d'una descomposició, l'estudi de les descomposicions minimals, centrades en trobar el nombre mínim de subgrafs, de característiques prèviament determinades, que constitueixen la descomposició, i finalment, l'estudi de descomposicions en subgrafs isomorfs a un graf donat. Des de sempre, una peça clau en el plantejament d'aquest tipus de problemes ha estat la relació entre diversos paràmetres, com ara els graus i la connectivitat, dels grafs i subgrafs implicats.

La presència de subgrafs de característiques fixades en un graf, s'emmarca dins d'un problema força ampli i clàssic com és l'empaquetament de grafs. Reduint-nos al cas de subgrafs acíclics, des del resultat que diu que tot graf de grau mínim n conté tot arbre de tamany n, han estat molts els resultats que s'han donat en aquest sentit. E. Dobson [23] conjectura que donat un graf G amb gir $g \geq 2t+1$, i un arbre T de tamany k, si el grau mínim del graf $\delta(G) \geq \max\{k/t, \Delta(T)\}$ aleshores G conté a T. Aquesta conjectura per a $t = 1$ representa una generalització del resultat anterior. S'ha provat per a $t \leq 3$, veure [9], [91], i es pot veure com un cas especial d'una altra conjectura més general plantejada per P. Erdös i V. Sós, veure [9], referent a grafs que contenen cada arbre d'un determinat tamany. Saclé i Woźniak proven la Conjectura d'Erdös-Sós que estableix que si G és un graf d'ordre n i tamany $e(G) > n(k-1)/2$, aleshores G conté qualsevol arbre de tamany k, per a grafs que no contenen cicles de longitud 4. Altres autors [103],[78], [13] i [105] utilitzant diferents paràmetres han obtingut condicions suficients per a que un graf contingui arbres generadors amb graus acotats. Caro i Roditty en [14], i Yuster en [104] estudien l'empaquetament d'una seqüència d'arbres de tamany creixent en els grafs bipartits complets, seguint conjectures anteriors de A.Gyárfás-Lehel [46] i Fishburn [33].

Tutte [98] i Nash-Williams [76], obtenen de manera independent i gairebé al mateix temps, un teorema que dóna condicions necessàries i suficients per a l'existència de k arbres generadors disjunts en branques en un graf (veure Teorema 3.2 del Capítol 3). Una generalització d'aquest resultat en el context de matroides el dóna Edmonds en [25]. Kundu en [62] estableix que tot graf n-branca connex té almenys $\lceil (n-1)/2 \rceil$ arbres generadors branca-disjunts. Per altra banda, Hedetniemi, Hedetniemi i Slater [52] proven que, excepte l'estrella, tota parella d'arbres d'ordre n pot ser empaquetada en el graf complet del mateix ordre. Wang i Sauer [101] demostren que, excepte per l'estrella d'ordre n i l'arbre obtingut a partir de l'estrella d'ordre $n-1$ afegint un nou vèrtex en una de les branques, tot arbre d'ordre $n \geq 7$ pot empaquetar-se tres vegades en el graf complet d'ordre n. L'empaquetament de tres arbres presenta més dificultats i ha estat completament resolt per Maheo, Saclé i Wózniak en [74]. García, Hernando, Hurtado, Noy i Tejel en [39] estudien el problema de dibuixar dos arbres de n vèrtexs en un polígon convex, sense encreuaments i fent servir el mínim nombre de branques del polígon.

Amb aquests precedents, aquest treball tracta problemes de descomposicions de grafs en arbres les línies generals dels quals descrivim a continuació.

En el Capítol 2 es tracta el problema de determinar en quines condicions un arbre arbitrari pot aparèixer en una descomposició minimal de certes classes de grafs. Per descomposicions minimals d'un graf en arbres entenem aquelles en les que el nombre d'arbres és el més petit possible. L'estudi que es presenta tracta les classes de grafs maximalment planaris, maximalment planaris i bipartits i la dels grafs regulars. L'elecció d'aquestes tres classes està motivada pel fet que en aquestes classes és coneix els nombres d'arbres d'una descomposició minimal i, fins a cert punt, també la seva estructura. En el cas dels grafs regulars aquest estudi està lligat amb el que tracta el Capítol 3 d'aquesta tesi.

Es prova que, donat un arbre qualsevol T, sempre existeix un graf maximalment planari i un graf maximalment planari i bipartit que admet T en una descomposició minimal en arbres. A més, excepte en un cas, es pot exigir que T sigui un arbre generador. S'obté el mateix resultat exigint les condicions necessàries en els graus, que es prova que també son suficients, quan es vol construir un graf regular d'ordre i grau mínims, que admeti T en una descomposició minimal en arbres. En particular, es veu com tot arbre d'ordre n forma part d'una descomposició minimal del graf complet de n vèrtexs.

Les demostracions en el cas planari són de tipus constructiu, mentre que en el cas dels grafs regulars, les demostracions es basen en dos teoremes sobre seqüències gràfiques, el primer degut a Erdös i Gallai [29] que en dóna una caracterització, i un segon degut a Kleitman i Wang [60] que dóna les condicions per tal que una seqüència gràfica pugui ser realitzada en un graf que admeti k arbres generadors disjunts. La demostració d'aquest darrer teorema es complementa en [60] amb un algorisme que permet construir el graf a partir de les seqüències.

Un aspecte important de les descomposicions minimals i que ha estat objecte de diversos articles, gira al voltant de l'estudi dels diferents tipus de descomposicions minimals que poden haver-hi i les relacions entre dues d'elles. Un cas especialment tractat són les descomposicions en arbres de grafs planaris. Kampen [57] prova que tot graf maximalment planari (mp) d'ordre n descomposa en tres arbres d'ordre $n-1$. Ringel [86] prova que tot graf maximalment planari i bipartit (mpb) d'ordre n descomposa en dos arbres d'ordre $n-1$, i conjectura que un dels dos arbres es pot triar generador. Més tard, Petrović [83] demostra també el resultat de Ringel i especifica que es pot triar qualsevol parella de vèrtexs no adjacents en el graf com a vèrtexs singulars (que només pertanyen a un arbre) d'aquesta descomposició. Ou Yang i Liu demostren la conjectura plantejada per Ringel en [81]. Finalment, Shi, Li i Tian [94] introdueixen classes generals de grafs, denotades $\mathcal{P}_k$, que en el cas $k=2$ inclouen els grafs maximalment planaris i bipartits, tot demostrant que aquests grafs admeten dos tipus de descomposicions i que a més cadascuna d'elles potser transformada en una descomposició de l'altre tipus via un intercanvi de branques. En el mateix article analitzen el cas $k=3$, que inclou els grafs maximalment planaris, demostrant que tot graf de $\mathcal{P}_3$ admet els tres tipus possibles de descomposicions i que a partir d'una d'elles es pot obtenir una descomposició de l'altre tipus.

En el Capítol 2 d'aquesta tesi s'inclouen demostracions alternatives de la Conjectura de Ringel i de l'existència dels tres tipus de descomposicions en el cas dels grafs maximalment planaris. La seva presència està justificada, ja que per una banda, al restringir-se a una família més reduïda de grafs, les demostracions són molt més senzilles que les que apareixen en [94], i per l'altra, suposen una introducció al problema invers d'obtenir a partir d'un arbre T un graf G maximalment planari o maximalment planari i bipartit, que admeti T en una descomposició minimal en arbres de G.

Un gruix important dels articles que s'han publicat sobre descomposicions es dediquen a calcular el nombre mínim de subgrafs que formen una descomposició amb condicions prefixades d'un graf, i esdevé d'aquesta manera un dels molts paràmetres que s'associen al graf. L'arboricitat $a(G)$ és el nombre mínim de boscos en una descomposició en boscos del graf. És l'únic paràmetre d'aquestes característiques pel que existeix una fórmula coneguda, donada per Nash-Williams en [77]. Harary en [50] introdueix el concepte d'arboricitat lineal, $la(G)$ com el nombre mínim de boscos on cada component connexa és un camí, i conjectura que per a tot graf d-regular G, $la(G) = \lceil (d+1)/2 \rceil$. Tot i que encara no s'ha provat, sí que s'han donat resultats a favor d'ella. Així, per a $d \leq 6$, $d = 8$ i $d = 10$ (veure [42]) la conjectura és certa. L'arboricitat lineal és un cas particular de $\Upsilon_r(G)$, el nombre mínim de boscos amb grau màxim r, introduïda per Truszczyńsky en [97], en el context de multigrafs. En el mateix article l'autor presenta una conjectura sobre el valor d'aquest paràmetre per grafs amb grau màxim $\Delta(G)$ i la prova per $r \geq \Delta(G) + 1 - a(G)$.

En els Capítols 3 i 4 d'aquesta tesi estudiem el nombre mínim d'arbres en una descomposició d'un graf G donat, que es denota per $\tau(G)$. Dit d'una altra manera, $\tau(G)$ es el nombre mínim d'elements d'una partició de $E(G)$ de manera que cada part indueix un arbre. El problema es suggerit inicialment per M. Foregger i T. Foregger [34] quan donen una cota superior pel nombre mínim d'elements d'una partició de $V(G)$, de manera que els subgrafs induïts per aquests són arbres. El concepte d'arbre, admet moltes definicions equivalents. En una d'elles s'estableix que un arbre és un graf connex amb mida igual a una unitat inferior al seu ordre. També es pot dir que un arbre és un bosc connex. D'aquests dos fets s'obtenen les primeres cotes, de caràcter trivial, sobre el nombre d'arbres,

$$\lceil |E(G)|/(|V(G)|-1) \rceil \leq a(G) \leq \tau(G).$$

A diferència de l'arboricitat, no existeix una fórmula pel càlcul del nombre d'arbres, i tots els treballs publicats fins al moment s'adrecen a donar cotes per aquest paràmetre o a calcular-lo per a determinades famílies de grafs. F.R.K Chung en [19] és la primera en donar una cota superior no trivial, en termes de l'ordre del graf. Prova que $\tau(G) \leq \lceil |V(G)|/2 \rceil$, tot mostrant que a més, aquesta cota s'assoleix en els grafs complets, al coincidir amb la cota inferior trivial que hem citat prèviament. Truszczyński [96] estableix per a grafs amb gir $g \geq 5$, $\tau(G) \leq \lfloor |V(G)|/g \rfloor + 1$, i calcula el nombre mínim d'arbres en què descomposen els grafs bipartits i complets, i els hipercubs. Pel que fa a resultats relatius al càlcul del nombre d'arbres d'algunes famílies d'arbres, recordem en primer lloc els ja comentats. Kampen en [57] demostra que si G és un graf maximalment planari aleshores $\tau(G) = 3$. El mateix resultat apareix com a conclusió en el treball sobre conjunts parcialment ordenats de Schnyder [93]. Ringel en [86] demostra que per a grafs maximalment planaris i bipartits $\tau(G) = 2$.

Els grafs regulars constitueixen una altra família on s'ha estudiat el valor de $\tau(G)$. Lladó, Ringel i Serra [68] demostren per a grafs d-regulars amb d parell i màxima branca-connectivitat, que $\tau(G) = d/2$, produint-se d'aquesta manera la igualtat entre l'arboricitat i el nombre d'arbres. Ara bé, en el mateix treball construeixen una família de grafs regulars amb grau senar que els permet demostrar que, tot i mantenir la condició de màxima branca-connectivitat, la diferència entre aquests dos paràmetres pot ser tant gran com es vulgui.

En el Capítol 3 d'aquesta tesi considerem l'extensió d'aquest resultat per grafs regulars amb grau senar. Provem que tot graf d-regular amb $d \geq n/2$ verifica $a(G) = \tau(G)$. La demostració en la situació crítica $d = n/2$ quan d és senar exigeix resultats més contundents sobre l'estructura dels conjunts amb reduït nombre de branques en la frontera. Aquests resultats, que provenen de l'estudi de les r-branca-connectivitats per $r \geq 2$ introduïdes per Hamidoune, Lladó, Serra i Tindell [49], van més enllà de la branca-connectivitat clàssica i tenen interès per si sols, per la informació que es pot obtenir relativa a les connectivitats dels grafs densos. L'exemple de dos grafs complets menys una branca, units per dues branques ens mostra com la cota inferior sobre el grau és òptima. En la part final del Capítol 3 estenem l'aplicació de les tècniques que s'han fet servir per grafs regulars amb grau $d < n/2$ que tenen bones propietats de connectivitat. Es prova que la igualtat $a(G) = \tau(G)$ es pot estendre per grafs regulars amb grau $d \geq 2\sqrt{n}$ i ordre n que satisfan certes condicions sobre les r-branca connectivitats, o per grafs que tenen un nombre isoperimètric prou gran, que d'acord amb un resultat de Bollobás [7], es donen en gairebé tots els grafs regulars.

La cota inferior sobre el grau mínim del graf $\delta(G) \geq |V(G)|/2$ ha suposat condició suficient per a la certesa de diversos resultats de Teoria de Grafs. Un cop més aquesta condició es revela com a suficient per a garantir la igualtat entre l'arboricitat i el nombre mínim d'arbres en el cas de grafs en general. Més precisament, en el Capítol 4 d'aquesta tesi provem que tot graf amb grau mínim $\delta(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$ i ordre n verifica $a(G) = \tau(G)$. Com en el cas regular, provem a partir d'una família de grafs, que aquesta cota inferior en el grau és òptima. En aquest cas les tècniques d'anàlisi són diferents de les que s'han fet servir al capítol anterior i no s'estenen a grafs amb grau mínim més petit que $n/2$.

La descomposició en grafs isomorfs, ja sigui a una família de grafs o a un graf en concret, constitueix el tercer eix fonamental al voltant del qual s'han estudiat una gran col·lecció de problemes. Com en els paràgrafs anteriors farem referència exclusivament a aquells que impliquen descomposició en arbres o en boscos. Caro en [12] introdueix tècniques d'àlgebra lineal per, a través del vector de branques, establir una condició necessària per a la descomposició d'un arbre en subarbres, cadascun isomorf a un arbre de la família. També dóna la caracterització dels arbres per als quals aquesta condició és suficient. Lonc en [70] presenta la conjectura en què afirma que a partir de dos arbres qualssevol, amb mides primers entre sí, existeix una constant, depenent dels arbres, de manera que tot graf amb grau mínim major o igual que la constant admet una descomposició en grafs isomorfs als arbres donats, tot provant la conjectura per a estrelles, camins i per a arbres que es diferencien en una fulla. Més tard, en [71], el mateix autor estudia la complexitat del problema de descomposició d'un graf en subgrafs isomorfs a una família d'estrelles, establint que si la família només conté estrelles de 3 branques com a mínim, decidir si un graf bipartit admet una descomposició d'aquest tipus és un problema NP. En el mateix article, dóna una caracterització dels grafs, no necessàriament bipartits, que admeten descomposicions d'aquests tipus quan la família conté estrelles de dues branques.

En aquest context, un dels problemes més tractats és la descomposició de grafs regulars. Les condicions de divisibilitat (és a dir, si H descomposa un graf d-regular G, aleshores $|E(H)|$ divideix $|E(G)|$ i el màxim comú divisor dels graus de H divideix d) es compleixen trivialment quan es consideren arbres de mida adequada. En [32] Fink demostra que si S és un conjunt minimal de generadors d'un grup G, aleshores el graf de Cayley $Cay(G, S)$ admet una branca-descomposició en $|G|$ arbres isomorfs a T on T és qualsevol arbre orientat amb mida igual al cardinal del conjunt. Un resultat similar per arbres i boscos que descomposen grafs i dígrafs de Cayley és obtingut per Gutiérrez i Lladó [44]. Però sens dubte, el problema per excel·lència és el que sorgeix arran de la conjectura plantejada per Ringel en 1963 relativa a la descomposició del graf K_{2n+1} en còpies isomorfes de qualsevol arbre de mida n. Rosa en [87] recull la suggerència de Kotzig, que exigeix que la descomposició sigui cíclica (aleshores la conjectura passa a anomenar-se la conjectura de Ringel-Kotzig), i estudia per primer cop els etiquetaments de vèrtexs, i els induïts a les branques. En un primer article, introdueix quatre tipus d'etiquetaments de vèrtexs, un dels quals és anomenat per Golomb en [41] com a *graceful*. A partir d'aleshores la conjectura hereta aquest nom.

Tenint en compte l'estructura bipartida dels arbres, en el Capítol 5 de la tesi estudiem el problema de descomposició del graf bipartit i complet $K_{n,n}$ en còpies isomorfes d'un arbre T de tamany n, tot recollint l'afirmació que en forma de conjectura planteja Häggkvist en [47]. El tractament que seguim per estudiar-la manté un estret paral·lelisme amb el seguit per tractar la conjectura de G.Ringel, on de la recerca de solucions cícliques es deriva la introducció dels etiquetaments de vèrtexs. En la primera part del capítol introduim un tipus d'etiquetament, que anomenem *bigraceful*, que s'adapta a l'estructura bipartida dels arbres. Donem eines per la construcció d'arbres bigraceful, és a dir, d'arbres pels que es coneixen aquests tipus d'etiquetaments, a partir d'altres que ja ho són. Fent servir aquestes construccions, provem el caràcter bigraceful de diverses famílies d'arbres. Aquestes famílies estenen en general aquelles en què el seu caràcter *graceful* ha estat provat. Malgrat tot, i tal com passa amb d'altres problemes similars d'etiquetaments, no trobem a una solució definitiva. L'objectiu aleshores, es modifica i s'adreça a trobar el menor n' que permeti assegurar que un arbre donat T descomposa $K_{n',n'}$. En aquest línia, i millorant resultats coneguts, provem que tot arbre T amb n branques i radi r descomposa $K_{2nn,2hn}$, on h és com a molt, $\lceil r/4 \rceil$. Fent ús de tècniques similars, provem que si existeix un vèrtexs x en T, amb $|V_i(x)| \geq \sqrt{2}|V_{i-1}(x)|$, per a tot $i \geq 1$ amb $|V_i(x)| \neq \emptyset$, on $V_i(x)$ és el conjunt de vèrtexs a distància i de x, aleshores T descomposa $K_{2n,2n}$. També s'obté aquest resultat quan l'arbre base de T (obtingut a partir de T eliminant les seves fulles) és bigraceful, o si el nombre de fulles és prou gran.

En la introducció de cada capítol s'exposen de manera precisa les contribucions d'aquesta tesi en relació a l'estat de l'art de cadascun dels problemes que s'han descrit aquí de forma genèrica. Cada capítol es tanca amb una secció de conclusions i problemes oberts.

Per acabar, aclarir que tot i que les aplicacions pràctiques de les descomposicions de grafs són molt àmplies, en quant que aquests representen els models naturals en xarxes de comunicació, aquesta vessant s'ha deixat de banda en la tesi, més centrada en l'obtenció de resultats teòrics que en la seva aplicació. Entre les múltiples aplicacions pràctiques en mencionem per exemple dues relatives a problemes de comunicacions i de fiabilitat de xarxes. El survey [36] ofereix una extensa relació dels mètodes que actualment existeixen en comunicació. En concret, l'apartat dedicat al *broadcasting* destaca l'ús de camins disjunts entre l'emissor i el receptor quant els missatges són prou llargs. En particular trobar arbres generadors amb arrel al mateix node i branca-disjunts permet definir un algorisme de broadcasting ràpid sota determinat model de comunicació ('half-duplex'). En aquest model, el missatge es talla en blocs de la mateixa longitud i cada bloc es enviat per broadcasting a través d'un arbre diferent. D'aquí la necessitat d'estudiar les descomposicions minimals en arbres. D'altra banda, en el survey de Colbourn [20] es fa una descripció de l'aplicació de problemes de descomposició a l'anàlisi de fiabilitat de xarxes, amb els que s'obtenen millors resultats en general que els que es deriven de tècniques d'enumeració de grafs.

Gran part de les contribucions d'aquest treball han estat presentades a diversos congressos de l'àrea i sotmesos a revistes especialitzades per a la seva publicació. Els resultats del Capítol 2 es troben a [66], els del Capítol 3 a [45], els del Capítol 4 a [65] i els de l'últim capítol a [67].

Al lector

En el primer capítol de la tesi s'introdueixen les definicions i notacions bàsiques que es faran servir al llarg d'aquesta tesi. Tots els capítols són autocontinguts i poden llegir-se sense necessitat de seguir un ordre concret. Si bé tots ells tenen com a nexe d'unió la descomposició en arbres, els tres primers estudien descomposicions minimals, mentre que en el darrer s'estudia descomposicions en arbres isomorfs a un arbre donat.

Capítol 1

Notacions i definicions bàsiques

Resum

En aquest capítol introduïm les definicions i i aspectes de notació bàsics que es faran servir al llarg d'aquesta tesi.

1.1 Definicions bàsiques

En aquesta secció definim els conceptes de Teoria de Grafs que utilitzarem al llarg d'aquesta tesi. El referent bàsic ha estat el llibre del Bollobás [6], i per la traducció en català de les paraules més utilitzades s'han seguit els llibres [21] i [40].

Graf. Subgraf

Un *graf* G és una parella ordenada de conjunts (V, E) de manera que els elements de E són parells d'elements distints de V.

Als elements de $V = V(G)$ els anomenem *vèrtexs* i als elements de $E = E(G)$ *branques*. Una branca $\{u, v\}$ direm que *uneix* els vèrtexs u i v, i la denotem per uv. Així, uv i vu representen la mateixa branca. Si $e = uv \in E(G)$ direm que u i v són vèrtexs *adjacents*, i també que la branca e és *incident* amb els vèrtexs u i v. Altrament, els vèrtexs s'anomenen *independents*. Dues branques són *adjacents*, si tenen exactament un vèrtex en comú. Altrament, s'anomenen *independents*.

Direm que $G' = (V', E')$ és un *subgraf* de $G = (V, E)$ si $V' \subset V$ i $E' \subset E$. En aquest cas, escriurem $G' \subset G$. Si G' conté totes les branques de G que uneixen dos vèrtexs de V', direm que G' és el *subgraf induït* o *generat* per V', i ho denotarem per $G' = G[V']$. Si $V' = V$, direm que G' és un subgraf *generador* de G.

Resta o suma de vèrtexs o branques

Donat un graf $G = (V, E)$, si $W \subset V$, aleshores $G - W = G[V \setminus W]$ és el subgraf de G obtingut eliminant els vèrtexs de W i totes les branques incidents amb ells. De manera semblant, si $E' \subset E$, aleshores $G - E' = (V, E \setminus E')$. Si $W = \{w\}$ i $E' = \{uv\}$, aleshores simplifiquem la notació escrivint $G - w$, $G - uv$ respectivament. Per altra banda, si u i v són vèrtexs no adjacents en G, aleshores $G + uv$ és el graf que s'obté a partir de G unint els vèrtexs u i v.

Ordre. Mida

El nombre de vèrtexs d'un graf, $n = |V(G)|$, és l'*ordre* del graf i el nombre de branques, $m = |E(G)|$, la seva *mida*. Denotem per $G(n, m)$ la família de tots els grafs d'ordre n i mida m.

Grafs isomorfs

Dos grafs són *isomorfs* si existeix una bijecció entre els conjunts de vèrtexs que preserva les adjacències. Així, $G = (V, E)$ és isomorf a $G' = (V', E')$ si existeix una bijecció $\Phi : V \longrightarrow V'$ tal que, $uv \in E$ si i només si, $\Phi(u)\Phi(v) \in E'$.

Dos grafs isomorfs només es diferencien per la retolació dels vèrtexs (i en general, per la seva representació gràfica). D'acord amb aquest fet, si G i H són grafs isomorfs, escriurem $G \simeq H$, o bé, simplement, $G = H$.

Graf Vèrtex transitiu

Un graf G és *vèrtex transitiu* o *vèrtex simètric*, si per a tota parella $u, v \in V(G)$ existeix un automorfisme Φ, és a dir, un isomorfisme del graf en ell mateix tal que $\Phi(u) = v$.

Graf complet. Graf nul

La *mida* m d'un graf d'ordre n és com a mínim 0 i com a màxim $\binom{n}{2}$, és a dir, es cumpleix la relació,

$$0 \leq m \leq \binom{n}{2}.$$

Si $m = \binom{n}{2}$ el graf s'anomena *graf complet d'ordre n*, i es denota per K_n, mentre que si $m = 0$, parlem del graf nul N_n.

Graf complementari

Donat un graf $G = (V, E)$, el graf *complementari* de G és $\bar{G} = (V, \bar{E})$, així, dos vèrtexs són adjacents en $\bar{G}$ si i només sí, no són adjacents en G.

Grau d'un vèrtex

Donat $u \in V(G)$, $\Gamma_G(u)$, denota el conjunt de vèrtexs adjacents amb u, i el seu nombre, $d_G(u)$, és el grau del vèrtex u. Si no hi ha possibilitat de confusió, escriurem simplement, $\Gamma(u)$ i $d(u)$, respectivament.

Aquest criteri sobre el subíndex, l'aplicarem sobre altres paràmetres del graf.

Grau màxim. Grau mínim

Els vèrtexs de grau 0 s'anomenen *vèrtexs aïllats* i els vèrtexs de grau 1, *vèrtexs terminals.* El grau més petit dels vèrtexs d'un graf G l'anomenem *grau mínim* i el denotem per $\delta(G)$. Similarment, denotem per $\Delta(G)$ el més gran dels graus dels vèrtexs de G i l'anomenem *grau màxim.*

Graf regular

Si $\delta(G) = \Delta(G) = d$, direm que el graf és *d-regular o regular de grau d.* Un graf és regular, si és regular per algun d.

Seqüència de graus

Si $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, aleshores $(d(v_1), \ldots, d(v_n))$ és la *seqüència de graus* de G. Normalment, ordenarem els vèrtexs de manera que la seqüència de graus sigui monòtona creixent o monòtona decreixent.

Com cada branca és incident a dos vèrtexs, la suma de graus és dos cops el nombre de branques:

$$\Sigma_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(G)|.$$

En particular, d'aquesta relació és dedueix que

- El nombre de vèrtexs de grau senar és parell.
- Les cotes trivials següents pel graus mínim i màxim, respectivament

$$\delta(G) \leq \lfloor \frac{2|E(G)|}{n} \rfloor \qquad \Delta(G) \geq \lceil \frac{2|E(G)|}{n} \rceil.$$

- I que si G és un graf d-regular, aleshores

$$|E(G)| = \frac{dn}{2}.$$

Camí. Cicle

Un *camí de longitud* l és un graf P de la forma

$$V(P) = \{x_0, x_1, \ldots, x_l, \ x_i \neq x_j, \ 1 \leq i < j \leq l\},$$

$$E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \ldots, x_{l-1}x_l\}.$$

Habitualment, diem que un camí $P = \{x_0, \ldots, x_l\}$ és un x_0x_l-camí.

El graf que s'obté a partir d'un camí de longitud l, unint els vèrtexs terminals, s'anomena *cicle de longitud* l. Habitualment, utilitzarem el símbol P_l per denotar un camí arbitrari de longitud l, i C_l per denotar un cicle arbitrari de longitud l.

El *gir* d'un graf G, $g(G)$ és la menor longitud d'un cicle contingut a G.

Camí o cicle hamiltonià. Graf hamiltonià

Un *camí hamiltonià* d'un graf G és un camí que conté tots els vèrtexs de G. Un *cicle hamiltonià* d'un graf G és un cicle que conté tots els vèrtexs de G. Un *graf hamiltonià* és aquell que conté un cicle hamiltonià.

Un resultat clàssic en la teoria de grafs és la condició suficient següent, donada per Dirac.

Teorema 1.1 (Dirac, 1952) *Un graf G de n vèrtexs tal que el seu grau mínim satisfà $\delta(G) \geq n/2$ és hamiltonià.*

Graf connex. Vèrtex de tall. Branca pont

Un graf G és *connex* si per a tota parella $\{u, v\}$ de vèrtexs diferents, existeix un camí de u cap a v. Si G no és connex, s'anomena *component connexa* de G a tot subgraf maximalment connex. Un *vèrtex de tall* és un vèrtex, l'eliminació del qual, provoca un increment del nombre de components connexes. Anàlogament, una *branca pont* és una branca l'eliminació de la qual, incrementa el nombre de components connexes.

k-connectivivitat. k-branca-connectivititat

Si G és un graf connex i, per algun conjunt W de vèrtexs o branques de G, $G - W$ no és connex, direm que W *separa* G. Si en $G - W$, s i t es troben en diferents components direm que W separa s de t. Per a $k \geq 1$, direm que un graf G és $k-$*connex* si o bé, G és el graf complet K_{k+1}, o bé, si té almenys $k+2$ vèrtexs i no existeix cap conjunt de $k - 1$ vèrtexs que el separi. Anàlogament, per a $k \geq 2$, direm que un graf G és k-*branca-connex* si té almenys dos vèrtexs i no existeix cap conjunt de $k - 1$ branques que el separi. El màxim valor de k per al qual, G és k-connex s'anomena la connectivitat del graf, i es denota per $\kappa(G)$. Si no és connex, posem $\kappa(G) = 0$. La *branca-connectivitat*, $\lambda(G)$, es defineix de manera anàloga.

Bosc. Arbre

Un graf sense cicles és un *bosc*, i un *arbre* és un bosc connex. És a dir, un bosc, és un graf on cada component connexa és un arbre.

En el teorema següent es dóna una caracterització dels arbres.

Teorema 1.2 *Per a un graf $G = (V, E)$ d'ordre n, les afirmacions següents són equivalents*

i) *G és un arbre.*

ii) *Entre cada parell de vèrtexs existeix un únic camí.*

iii) *G és un graf minimalment connex, és a dir, G és connex i si $e \in E$, aleshores $G - e$ no és connex.*

iv) *G és maximalment acíclic, és a dir, G és acíclic i per a tota $e \in \bar{E}$, aleshores $G + e$ conté un cicle.*

v) *G és connex i té com a màxim $n - 1$ branques.*

vi) *G és acíclic i té com a mínim $n - 1$ branques.*

Del teorema anterior s'obtenen els resultats que ara segueixen.

Corol·lari 1.3 *Un arbre d'ordre n té mida $n - 1$.*

Corol·lari 1.4 *Tot graf connex conté un arbre generador, és a dir, un arbre que conté tots els vèrtexs del graf.*

Corol·lari 1.5 *Un arbre d'ordre $n \geq 2$, conté almenys dos vèrtexs de grau 1.*

Els vèrtexs terminals d'un arbre també s'anomenen *fulles*.

Distància. Diàmetre. Excentricitat. Radi

Donats dos vèrtexs u, v d'un graf G, la seva distància, $d(u, v)$ es defineix com la mínima longitud de tots els uv camins. Si no existeix un uv camí, escriurem

$d(u, v) = \infty$. Aquesta distància, defineix una mètrica en el conjunt de $V(G)$, en el sentit propi, ja que és definida positiva, simètrica i satisfà la desigualtat triangular per a tot trio de vèrtexs del graf.

A partir de la noció de distància, es defineixen altres paràmetres del graf.

El *diàmetre* d'un graf $G = (V, E)$, $D(G)$ és la màxima de les distàncies entre els vèrtexs de G, és a dir,

$$D(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

L'*excentricitat* d'un vèrtex v de G, que denotem per $e(v)$, és la distància més gran entre v i els altres vèrtexs de G. En particular, el diàmetre és igual a màxima de les excentricitats. El *radi*, que denotem per $r(G)$, és la més petita de les excentricitats.

$$D(G) = \max\{e(v) \mid v \in V\} \quad i \quad r(G) = \min\{e(v) \mid v \in V\}.$$

El *centre* de G, que denotem per $Z(G)$, és el conjunt de vèrtexs amb excentricitat igual al radi. Als elements de $Z(G)$ els anomenem vèrtexs centrals.

Graf bipartit i r-partit

Un graf G és *bipartit amb classes de vèrtexs* (o bé, *conjunts estables*) V_1 i V_2, si $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i cada branca de G uneix un vèrtex de V_1 amb un vèrtex de V_2. També es diu que G té *bipartició* (V_1, V_2) i es denota per $G(V_1, V_2)$. Anàlogament, G és *r-partit amb vèrtexs classes* $V_1, V_2, \ldots, V_r$ (o bé, *r-partició* $(V_1, \ldots, V_r)$ si $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots V_r$, $V_i \cap V_j = \emptyset$, sempre que $1 \leq i < j \leq r$, i no hi ha branques que uneixin dos vèrtexs de la mateixa classe. El símbol $K_{n_1,\ldots,n_r}$ denota un *graf r-partit i complet* que conté n_i vèrtexs en la classe i i totes les branques que uneixen vèrtexs de classes diferents.

Multigraf

Per definició un graf no conté *autoenllaços*, és a dir, branques que uneixen un vèrtex amb si mateix. Tampoc conté *branques múltiples*, és a dir, més d'una branca unint una mateixa parella de vèrtexs. S'anomena *multigraf* l'estructura que s'obté a partir d'un graf admeten autoenllaços i branques múltiples. En aquells casos, on pugui donar-se la confusió, els grafs es denoten com *grafs simples*.

Dígraf o graf dirigit

Quan les branques són parelles *ordenades* de vèrtexs, obtenim la noció de *dígraf* o *graf dirigit* (en el context de multigraf *multigraf dirigit*). En aquest cas, les parelles ordenades de vèrtexs $a = (u, v)$ les anomenem *arcs*, i diem que *u és adjacent cap a v* o bé, que *v és adjacent des de u*. També diem que l'arc *a és incident des de u cap a v*. Els conceptes d'ordre i mida d'un dígraf es defineixen de manera anàloga als d'un graf.

Si v és un vèrtex d'un dígraf $G = (V, E)$, *el grau de sortida* de v, que denotarem per $d^+(v)$, és el nombre d'arcs incidents des de v, i *el grau d'entrada* de v, $d^-(v)$, és el nombre d'arcs incidents cap a v.

Graf orientat. Graf Subjacent

Un *graf orientat* $\vec{G}$ és un graf dirigit obtingut a partir d'un graf G orientant les seves branques, és a dir, assignant a la branca uv, l'orientació (u, v) o bé, (v, u). D'altra banda, a tot dígraf $G = (V, E)$ podem associar-li un graf $G' = (V, \{uv \mid (u, v) \in E \text{ o } (v, u) \in E\})$ que anomenem *graf subjacent*.

Graf de Cayley

Sigui $(\mathcal{G}, +)$ un grup i $\mathcal{S}$ un conjunt de generadors de $\mathcal{G}$, el *dígraf de Cayley* de $\mathcal{G}$ respecte de $\mathcal{S}$, $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}} = Cay(\mathcal{G}, \mathcal{S})$, és el dígraf que té per conjunt de vèrtexs els elements del grup i per conjunt d'arcs $\{(x, x+s),\ x \in \mathcal{G},\ s \in \mathcal{S}\}$. Si $\mathcal{S} = -\mathcal{S}$, i identifiquem cada dígon (parella d'arcs incidents als mateixos dos vèrtexs) del dígraf amb una branca, obtenim el *graf de Cayley* de $\mathcal{G}$ respecte de $\mathcal{S}$.

1.2 Operacions entre grafs

Producte cartesià

El *producte cartesià* de dos grafs G i H, que denotem per $G \times H$, és el graf amb conjunt de vèrtexs

$$V(G \times H) = V(G) \times V(H),$$

i adjacències $(g,h)(g',h')$, si o bé, $g = g'$ i $hh' \in E(H)$, o bé, $gg' \in E(G)$ i $h = h'$.

Producte tensorial o lexicogràfic

El *producte tensorial o lexicogràfic* de dos grafs G i H, $G \otimes H$, és el graf amb conjunt de vèrtexs

$$V(G \otimes H) = V(G) \times V(H),$$

i adjacències $(g,h)(g',h')$, si o bé, $g = g'$ i $hh' \in E(H)$, o bé, $gg' \in E(G)$.

Realització d'un graf en un altre

Una *realització* d'un graf H en un altre G, és un injecció de $V(H)$ en $V(G)$ que preserva les adjacències. És a dir, és un isomorfisme entre H i un subgraf H_1 de G.

Empaquetament d'un graf en un altre

Donat un conjunt de grafs $H_1', \ldots, H_m'$ diem que poden ser *empaquetats* en el graf G, si aquest conté subgrafs $H_i \simeq H_i'$, $1 \leq i \leq m$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{m} E(H_i) \subseteq E(G) \quad \text{i} \quad E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset, 1 \leq i \neq j \leq m.$$

Si $\bigcup_{i=1}^{m} E(H_i) = E(G)$, aleshores s'obté una *branca-descomposició* del graf G, i la denotem com

$$G = H_1 \oplus \ldots \oplus H_m.$$

Si a més, per a tot $1 \leq i \leq m$, $H_i \simeq H$, diem que G és H-descomposable, que G és branca-decomposable per H, o bé, simplement, que H descomposa G. En aquest cas, ho denotem per $H|G$.

El grafs que considerem en la tesi són grafs finits, és a dir, grafs $G = (V, E)$ amb V finit.

Capítol 2

Descomposicions minimals de grafs amb un arbre donat

Resum

En aquest capítol estem interessats en l'estudi de l'estructura dels arbres implicats en decomposicions en el mínim nombre d'arbres. Mostrem com donat un arbre qualsevol, aquest pot aparèixer en descomposicions minimals de grafs maximalment planaris, maximalment planaris i bipartits, i finalment de grafs regulars.

2.1 Introducció

Sigui $G = (V, E)$ un graf simple connex. Una *branca-descomposició* de G és una família de subgrafs $G_1, \ldots, G_k$ les branques dels quals constitueixen els elements d'una partició de E. Escriurem

$$G = G_1 \oplus \cdots \oplus G_k.$$

Quan cada subgraf G_i és acíclic, obtenim una *descomposició en boscos* de G. L'*arboricitat* de G és el nombre mínim de boscos en una descomposició en boscos de G, i es denota per $a(G)$. Quan cada bosc és connex, obtenim una *descomposició en arbres.* El nombre mínim d'arbres en una descomposició en arbres de G el denotem per $\tau(G)$.

Com cada bosc de n vèrtexs té com a màxim $n-1$ branques, $a_0(G) = \lceil |E|/(|V|-1) \rceil$ és una cota inferior trivial per a ambdós, l'arboricitat i el nombre mínim d'arbres.

Existeixen moltes classes de grafs per a les quals $\tau(G)$ assoleix el seu valor mínim $a_0(G)$. Kampen [57] prova que tot graf maximalment planari pot ser descomposat en 3 arbres branca-disjunts. Com tot graf maximalment planari G d'ordre n té $3n - 6$ branques, obtenim que $\tau(G) = a_0(G) = 3$. Ringel [86] prova que tot graf maximalment planari i bipartit té $\tau(G) = a_0(G) = 2$. Chung [19] obté una cota superior no trivial, $\tau(G) \leq \lceil |V|/2 \rceil$, per a grafs connexos sense branques múltiples. En particular, per als grafs complets es compleix $\tau(K_n) = a_0(K_n) = \lceil n/2 \rceil$. Truszczyński [96] mostra com la igualtat $a_0(G) = \tau(G)$ és dóna en els hipercubs i en els grafs complets i bipartits. Lladó, Ringel i Serra [68] mostren com també per a grafs regulars de grau parell i màxima branca-connectivitat $a_0(G) = \tau(G)$. Shi, Li i Tian [94] introdueixen una classe de grafs $\mathcal{P}_k$ amb branca densitat uniforme. Proven que per a tot graf $G \in \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$, una classe on estan continguts els grafs maximalment planaris i els maximalment planaris i bipartits, també es dóna la igualtat $a_0(G) = \tau(G)$.

En alguns casos, l'estructura de les descomposicions amb nombre mínim d'arbres també ha estat estudiada. Ringel ja assenyala que una descomposició minimal d'un graf maximalment planari i bipartit, admet dos tipus de descomposicions: un arbre generador i un arbre amb $n-2$ vèrtexs, o bé dos arbres amb $n-1$ vèrtexs. Conjectura que tot graf maximalment planari i bipartit admet descomposicions d'ambdós tipus. La conjectura es provada per Ouyang i Liu en [80].

En aquest capítol estem interessats en l'estructura dels arbres implicats en descomposicions en arbres. Direm que una descomposició $G = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$ és de tipus $(a_1, \ldots, a_k)$ si T_i té $n - a_i$ vèrtexs, per a $i = 1, \ldots, k$, on n és l'ordre de G. Una descomposició en arbres d'un graf maximalment planari pot ser de tipus $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ o bé, $(0,0,3)$. Shi, Li i Tian [94] proven que aquests tres tipus de descomposicions existeixen per a una classe general de grafs $\mathcal{P}_3$ que inclou els grafs maximalment planaris.

Com veurem en els capítols 3 i 4 d'aquesta tesi, les descomposicions en arbres de grafs regulars i grafs densos obtingudes en [68],[45],[65] són de tipus $(0, \ldots, 0, l)$.

Una de les aportacions d'aquest capítol consisteix en mostrar com donat un arbre, aquest pot aparèixer en una descomposició minimal en arbres de qualsevol tipus. De manera més precisa, en aquest capítol provem els resultats següents. En el primer d'aquests denotem per $S_2^{r,s}$, l'arbre obtingut a partir de l'estrella S_2, afegint $r \geq 1$ fulles a un dels vèrtexs terminals i $s \geq 1$ fulles a l'altre.

Teorema 2.1 *Sigui T un arbre. Aleshores, existeix un graf maximalment planari i bipartit G que admet T com a factor en una descomposició minimal del tipus (0,2) o (1,1). A més, T pot ser triar com l'arbre generador en la descomposició del tipus $(0,2)$, si i només si, T no és ni l'estrella S_n, per a $n \geq 3$, ni l'arbre $S_2^{r,s}$, $r, s \geq 1$.*

Teorema 2.2 *Sigui T un arbre. Aleshores, existeix un graf maximalment planari G que admet T com a factor en una descomposició del tipus (a,b,c) per a qualsevol elecció de $c \geq b \geq a \geq 0$ complint $a + b + c = 3$. A més, T es pot triar generador en una descomposició del tipus (0,0,3) si T no és l'estrella S_n, per a $n \geq 2$.*

A més dels Teoremes 2.1 i 2.2, s'inclouen demostracions de la Conjectura del Ringel i de l'existència dels tres tipus de descomposicions minimals en arbres dels grafs maximalment planaris. Aquestes demostracions són molt més simples que les que apareixen en [94], necessàries per a provar el resultat per la classe general $\mathcal{P}_k$, $k = 2, 3$.

El problema d'obtenir descomposicions minimals en arbres que continguin un arbre donat es considera també en grafs regulars. En aquest cas, obtenim el resultat que segueix. Denotem per S_2^m l'estrella doble formada per dues estrelles amb m vèrtexs terminals cada una, i amb els vèrtexs centrals units per una branca.

Teorema 2.3 *Sigui $d \geq 2$ un enter i sigui T un arbre d'ordre $n \geq d+1$ amb nd parell i grau màxim $\Delta(T) \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$. Aleshores, existeix un graf regular G d'ordre n i grau d tal que*

$$G = T \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k \oplus T_{k+1}$$

és una descomposició minimal del tipus $(0, \ldots, 0, l)$, on $k = \lfloor d/2 \rfloor$, $l = n-k-1$ si d és parell i $l = (n/2) - k - 1$ si d és senar, excepte si $d = n-3$ és senar i $T = S_2^{k+1}$, o bé $d = n-1$ és senar i $\Delta(T) = k+2$.

2.2 Grafs Planaris

Un graf G és planari quan es pot dibuixar en el pla sense que les seves branques es creuin. Més rigorosament, direm que un graf G és planari quan es pot representar per un dibuix en el pla on els vèrtexs són punts i les branques són corbes de Jordan simples. Cada extrem d'una corba és un punt, de manera que dos punts són extrems d'una mateixa corba quan representen vèrtexs adjacents del graf. En el dibuix, dues corbes o són disjuntes o es troben només en un punt extrem comú. Aquesta representació en el pla s'anomena realització plana.

Les components connexes que apareixen en suprimir els vèrtexs i les branques d'una realització plana d'un graf G s'anomenen regions. Tota realització plana d'un graf planari G té exactament una regió no acotada.

El nombre de regions $r(G)$ no depèn de la realització plana de G que es consideri, sinó que està fixat per la característica d'Euler, que en cas del pla és dos.

Teorema 2.4 (Fórmula d'Euler) . *Sigui r el nombre de regions d'una realització plana d'un graf connex d'ordre n i mida m. Aleshores,*

$$n - m + r = 2.$$

Un graf planari G és *maximalment planari* quan deixa d'ésser planari en afegir-li una branca; és *maximalment planari i bipartit* quan en afegir-li una branca, deixa d'ésser planari o bipartit.

G. Ringel [86] prova que tot graf maximalment planari bipartit por ser descomposat en dos arbres, i conjectura que un dels dos arbres es pot triar generador.

Aquesta conjectura és l'origen de la feina desenvolupada en la primera part d'aquesta secció, centrada inicialment en l'estudi dels diferents tipus de descomposicions minimals de grafs maximalment planaris o planaris bipartits en arbres, per després, estudiar el conseqüent problema de determinar quins arbres poden aparèixer com a elements en aquestes descomposicions.

2.2.1 Grafs maximalment planaris i bipartits

Les fronteres de totes les regions d'una realització plana d'un graf G maximalment planari i bipartit, *mpb*, són cicles de longitud quatre, i per tant és fàcil comprovar la següent relació entre la mida m i l'ordre n del graf G

$$m = 2n - 4.$$

Aquesta relació limita les possibles descomposicions minimals en arbres a dos tipus, o bé, (1,1) o bé, (0,2). En el primer els dos arbres tenen ordre igual a una unitat inferior a l'ordre del graf, mentre que en el segon un dels dos arbres és generador. A continuació presentem una demostració curta de la Conjectura del Ringel [86], sobre l'existència d'ambdós tipus de descomposicions en un graf maximalment planari i bipartit.

De fet, provem que tot graf maximalment planari i bipartit G admet descomposicions en arbres del tipus $(1,1)$ i descomposicions en arbres *bones* del tipus $(0,2)$. Diem que la descomposició (0,2) és *bona* si els dos vèrtexs de G que pertanyen només a un dels arbres estan en classes diferents de la bipartició de G.

Teorema 2.5 *Tot graf maximalment planari i bipartit admet descomposicions minimals del tipus* $(1,1)$ *i bones del tipus* $(0,2)$.

Demostració. La demostració és per inducció sobre l'ordre n del graf mpb. Aquestes descomposicions quan $n = 4$ es mostren en la Figura 2.1.

Figura 2.1: Els dos tipus de decomposicions minimals per a $n = 4$.

Sigui G un graf mpb d'ordre $n > 4$. Sigui C un 4-cicle contingut en una de les regions d'una realització plana de G. Siguin v_0, v_1, v_2, v_3 els vèrtexs de C on v_i és adjacent cap a $v_{i+1 \pmod 4}$ en el cicle. Com G és planari, una de les dues parelles de vèrtexs, $\{v_0, v_2\}$ o bé, $\{v_1, v_3\}$, no té altres veïns comuns en G, llevat $\{v_1, v_3\}$ o $\{v_0, v_2\}$ respectivament. Assumim doncs, que el únics veïns comuns de v_0 i v_2 en G són v_1 i v_3.

Sigui G' el graf obtingut a partir de G tot identificant els vèrtexs v_0 i v_2 cap a un únic vèrtex v i identificant les parelles de branques v_1v_0, v_1v_2 i v_0v_3, v_2v_3. Aleshores, G' és també un graf mpb. Per la hipòtesi d'inducció, G' admet descomposicions de tipus $(1,1)$ i *bones* de tipus $(0,2)$. Sigui $G' = T_1' \oplus T_2'$ una descomposició en arbres d'un d'aquests tipus. A partir d'ella, acolorim les branques de G' amb $i \in \{1,2\}$ d'acord amb l'arbre al que pertanyen. Acolorim també, les branques de $G - C$ tal com estan acolorides en G'. A fi d'acolorir les 4 branques restants de C, considerem dos casos (veure la Figura 2.2.)

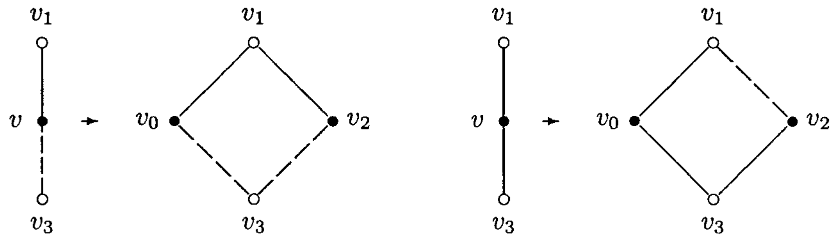


Figura 2.2: Il·lustració dels casos 1 i 2 de la demostració del Teorema 2.5.

Cas 1. Si les branques v_1v i vv_3 tenen color diferent, posem per cas 1 i 2 respectivament. Aleshores, acolorim les branques v_1v_0, v_1v_2 amb 1 i les branques v_0v_3, v_2v_3 amb 2.

Cas 2. Si les branques v_1v i vv_3 tenen el mateix color, posem per cas 1. Com els vèrtexs v_1, v_3 pertanyen a la mateixa classe de bipartició del graf G', i la descomposició estem suposant que és bona en el cas que sigui de tipus (0,2), ambdós vèrtexs no poden pertànyer simultàniament a $V(T_1') \setminus V(T_2')$. Suposem que v_1 pertany a $V(T_1') \cap V(T_2')$. Si $v \in V(T_1') \cap V(T_2')$, aleshores existeix un camí únic en T_2' que connecta v_1 amb v. Per tant, existeix un camí únic, o bé des de v_0 o des de v_2 cap a v_1 en G amb totes les branques acolorides amb 2. Assumim que aquest camí connecta v_0 amb v_1. Aleshores, acolorim amb el color 1 les branques v_1v_0, v_0v_3, v_2v_3 i assignem el color 2 a la branca v_1v_2. En cas que $v \notin V(T_1') \cap V(T_2')$, fem la mateixa assignació de colors.

Sigui T_i el subgraf de G generat per les branques acolorides amb i, $i = 1, 2$. D'aquesta manera, obtenim una branca-descomposició $G = T_1 \oplus T_2$. En ambdós casos, s'ha produït un increment en un vèrtex i una branca en T_1' i en T_2', a més els grafs resultants són clarament connexos. Per tant, ambdós grafs construïts són arbres i , $G = T_1 \oplus T_2$ és una descomposició minimal en arbres del mateix tipus que $G' = T_1' \oplus T_2'$. La demostració segueix per inducció sobre n. $\square$

Tot seguit considerem el problema de completar un arbre T fins obtenir un graf mpb que admeti T en una descomposició minimal en arbres. Notem que l'estrella S_n amb n branques no pot assumir el paper d'arbre generador en una descomposició minimal, cal un altre vèrtex en la mateixa classe de bipartició que el vèrtex central per tal de completar totes les regions. Per altra banda, sigui per $S_2^{r,s}$, $r, s \geq 1$, l'arbre obtingut a partir de l'estrella S_2 amb dues branques afegint r fulles a un dels vèrtexs terminals i s fulles a l'altre (veure Figura 2.3). El lema següent mostra com $S_2^{r,s}$ no pot ser simultàniament factor i arbre generador d'un mpb graf.

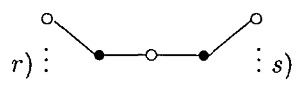


Figura 2.3: L'arbre $S_2^{r,s}$.

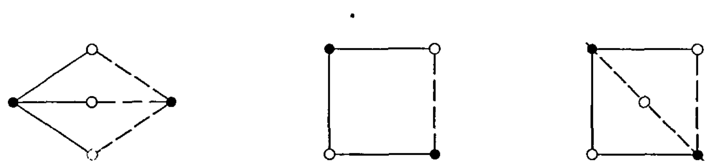
Lema 2.6 *Sigui G un graf mpb tal que $G = S_2^{r,s} \oplus T$ per algun arbre T. Aleshores, $S_2^{r,s}$ no és un arbre generador de G.*

Demostració. Suposem que $S_2^{r,s}$ sigui un arbre generador d'un graf G mpb. En aquest cas, en una de les classes de la bipartició de G hi ha exactament dos vèrtexs, u, v, de la mateixa manera que hi són en $S_2^{r,s}$, i a més, es troben a distància dos en l'arbre. Com G és un mpb, tots els vèrtexs en $S_2^{r,s}$ adjacents cap a u han de ser adjacents cap a v en G, i viceversa, però, per altra banda, u i v no poden ser adjacents en G, i per tant, T no potser connex. Una contradicció. □

Denotem per $\mathcal{F}$ la classe de les estrelles i els $S_2^{r,s}$-arbres, $r, s \geq 1$.

Teorema 2.7 (2.1) *Sigui T un arbre. Aleshores, existeix un graf maximalment planari i bipartit G que admet T com a factor en una descomposició minimal del tipus (0,2) o (1,1). A més, T pot ser triar com l'arbre generador en la descomposició del tipus $(0, 2)$, si i només si, T no és ni l'estrella S_n, per a $n \geq 3$, ni l'arbre $S_2^{r,s}$, $r, s \geq 1$.*

Demostració. La demostració és per inducció sobre l'ordre n de l'arbre T donat. Com en la demostració del Teorema 2.5, provem que les descomposicions del tipus $(0, 2)$ poden ser assumides com a bones. Per a $n = 4$, grafs mpb que admeten l'estrella S_3 o el camí P_3 com a factors en una descomposició minimal en arbres es mostren en la Figura 2.4.



(1,1) (0,2)-bona (1,1)

(a) (b)

Figura 2.4: Grafs mpb que admeten (a) S_3 i (b) P_3 en una descomposició minimal.

Sigui T un arbre donat d'ordre $n > 4$. Notem que, per a qualsevol arbre $T \notin \mathcal{F}$, amb l'excepció de P_5, existeix una fulla l en T tal que $T' = T - l \notin \mathcal{F}$. Sigui l una fulla en T tal que $T' = T - l \notin \mathcal{F}$, o un vèrtex terminal qualsevol si $T \in \mathcal{F}$, i sigui vl una branca en T.

Per la hipòtesi d'inducció, existeix un graf mpb G' que admet T' com a factor en una descomposició miniminal $G' = T' \oplus T'_2$ d'ambdós tipus, llevat que $T' \in \mathcal{F}$. A més, si la descomposició és del tipus (0,2), els vèrtexs que pertanyen només a un dels arbres es troben en diferents classes de la bipartició de G'.

Sigui R el conjunt de regions incidents amb v en una realització plana de G', i sigui U el conjunt de vèrtexs incidents a les regions de R que es troben en la mateixa classe que v en la bipartició de G'.

Suposem que existeix un vèrtex $u \in U \cap V(T'_2)$. Aleshores, afegint el vèrtex l i les branques vl, ul a G' produim un graf mpb G que admet una descomposició $G = T \oplus T_2$, on $T_2 = T'_2 + ul$. Ambdós, T, T_2 s'obtenen a partir de T', T'_2 tot afegint un vèrtex i una branca. D'aquí que, la descomposició de G obtinguda és del mateix tipus que la de G'. A més, si la descomposició és del tipus $(0, 2)$, els vèrtexs que pertanyen només a un dels arbres es troben en diferents classes de la bipartició de G.

Suposem ara que $U \cap V(T'_2) = \emptyset$. Per la hipòtesi d'inducció, podem assumir que si la descomposició és del tipus $(0, 2)$, aleshores és bona, i per tant, existeix un únic vèrtex $u \in U$. Això implica en particular, que u i v són els únics vèrtexs d'una de les classes de la bipartició de G' i que tenen els mateixos veïns $w_1, \ldots, w_t$, $t \geq 2$. Un d'aquest, posem per cas, w_1, ha d'estar necessàriament en el camí en T' que connecta v amb u. En particular, ambdós u i w_1 pertanyen a $V(T') \setminus V(T'_2)$ i la descomposició és del tipus $(0, 2)$. A més, en aquest cas, $T = S_2^{1,t-1}$.

Sigui v, w_1, w_2, u una regió en una realització plana de G'. Sigui G el graf obtingut a partir de G' afegint l, un nou vèrtex z i les branques vl, w_2z, zl, lu. Aleshores, G és un graf mpb i $G = T \oplus T_2$, on $T_2 = T'_2 + \{u, z, l\} + \{w_2z, zl, lu\}$, és una descomposició del tipus $(1, 1)$. La Figura 2.5 ens mostra l'extensió en aquesta darrera situació.

Si $T = P_5$, la Figura 2.6 mostra grafs mpb que admeten el camí de cinc branques com a factor en descomposicions minimals d'ambdós tipus. $\square$

Observació 2.8 En el Lema 2.6 hem vist que si $G = S_2^{r,s} \oplus T$ és un graf mpb, aleshores $S_2^{r,s}$ no potser un arbre generador. De fet, hem vist que donat un arbre de la família $\mathcal{F}$ sempre es pot completar a un graf mpb que admet

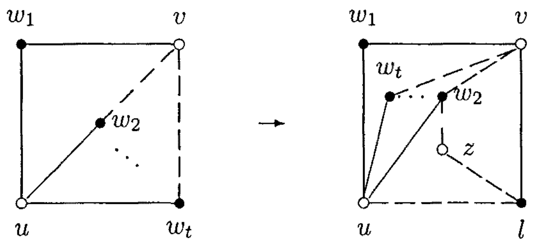
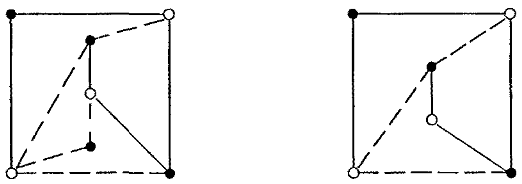


Figura 2.5: Extensió de G' a G quan $T = S_2^{1,t}$.



(1,1) (0,2)-bona

Figura 2.6: Grafs mpb amb P_5 en una descomposició minimal.

descomposicions minimals del tipus (1,1). En la Figura 2.7 es mostra una manera possible de completar un arbre de la família $\mathcal{F}$ a un graf mpb que admet descomposicions del tipus (0,2).

2.2.2 Grafs maximalment planaris

En [57] Kampen demostra que tot graf maximalment planari, *mp*, pot ser descomposat en tres arbres d'ordre una unitat inferior a l'ordre del graf. Aquest resultat es pot deduir també del treball que presenta Schnyder en [93].

Sigui G un graf mp que admet una descomposició minimal en arbres $G = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$, de manera que $|V(T_1)| \geq |V(T_2)| \geq |V(T_3)|$, com el nombre total de branques en un graf mp és $3n-6$, si escrivim $|V(T_k)| = n - i_k$, per $k = 1, 2, 3$, aleshores es verifica $i_1 + i_2 + i_3 = 3$. D'aquí que, una descomposició minimal en arbres d'un graf G maximalment planari mp ha de ser d'un aquests tres tipus (0,0,3), (0,1,2) o (1,1,1).

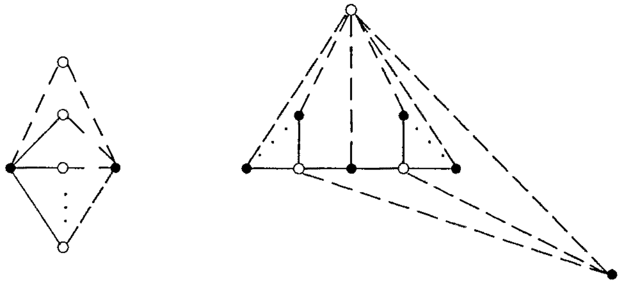


Figura 2.7: Construcció d'un graf mpb a partir de $T \in \mathcal{F}$.

Donada la descomposició en arbres $G = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$, direm que un vèrtex v és *no singular* per aquesta descomposició si pertany a tots tres arbres. En cas contrari, direm que v és *singular.*

Com en la secció anterior comencem demostrant que tot graf mp admet els tres tipus de descomposicions. La demostració que presentem és molt més senzilla que la donada per Shi, Li i Tian en [94].

Teorema 2.9 *Sigui G un graf maximalment planari d'ordre $n \geq 5$ i sigui x un vèrtex donat en G. Aleshores, existeix una descomposició minimal de G de tipus (a, b, c) per a cada elecció $c \geq b \geq a \geq 0$ amb $a + b + c = 3$, tal que x és un vèrtex no singular.*

Demostració. La demostració és per inducció sobre l'ordre n de G.

El resultat clarament és cert per a $n = 5$, tal com mostra la Figura 2.8, on en cada tipus apareix un vèrtex no singular de grau 3 i de grau 4.

Sigui G un graf mp d'ordre $n > 5$. Una branca xy de G es diu que és *contràctil* si x i y comparteixen exactament dos veïns comuns, posem per cas u, w. Sota aquesta condició, la contracció de xy, i la identificació de les parelles de branques ux, uy i xw, yw dóna lloc a un graf mp G' d'ordre $n - 1$. Kampen prova en [57] que tot vèrtex x d'un graf mp d'ordre $n > 3$ és incident amb una branca contràctil.

Sigui $0 \leq a \leq b \leq c$ tal que $a + b + c = 3$ i sigui x un vèrtex qualsevol en G. Sigui v_1v_2 una branca contràctil incident amb $x = v_1$. Denotem per u, w

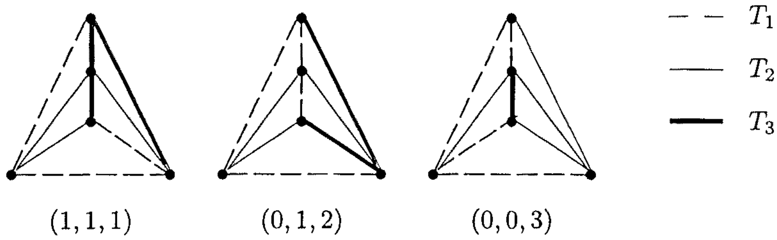


Figura 2.8: Descomposicions del graf mp d'ordre $n = 5$, $K_5 - e$.

els veïns comuns de v_1 i v_2 en G. Sigui ara, G' el graf mp obtingut a partir de G per la contracció de v_1v_2 cap v. Per la hipòtesi d'inducció, existeix una descomposició minimal $G' = T'_1 \oplus T'_2 \oplus T'_3$ de tipus (a, b, c) tal que v és un vèrtex no singular d'aquesta descomposició.

Sigui H el subgraf de G induït pels quatre vèrtexs u, v_1, v_2, w. Acolorim cada branca e de $G - H$ amb el color $c(e) = i \in \{1, 2, 3\}$ si la branca corresponent en G' pertany a l'arbre T'_i.

Per acolorir H considerem dos possibles casos.

Cas 1. Suposem que uv i vw pertanyen al mateix arbre, posem per cas T'_1. Podem assumir que $w \in V(T'_2)$, $b \leq 1$. L'únic camí que connecta v i w en T'_2 es correspon amb un camí de branques acolorides amb el color 2 en G, que uneix v_1 amb w. Aleshores, acolorim les sis branques de H seguint l'esquema

$$\begin{aligned} c(uv_1) = c(uv_2) = c(v_1w) = 1, \\ c(v_2w) = 2, \quad c(v_1v_2) = 3, \end{aligned}$$

tal com mostra la Figure 2.9 (i).

Cas 2. Suposem ara que uv i vw pertanyen a arbres diferents, posem per cas, $uv \in E(T'_1)$ i $vw \in E(T'_2)$. Aleshores, les sis branques de H les acolorim segons l'assignació

$$\begin{aligned} c(uv_1) = c(uv_2) = 1, \\ c(v_1w) = c(v_2w) = 2, \\ c(v_1v_2) = 3, \end{aligned}$$

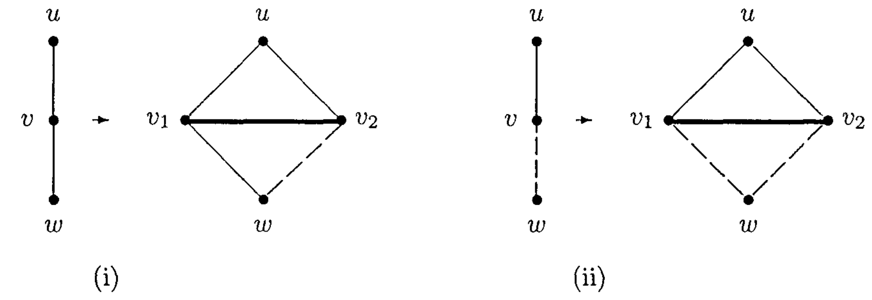


Figura 2.9: Coloració de H en (i) cas 1, i (ii) cas 2.

veure Figura 2.9 (ii).

Finalment, denotem per T_i l'arbre generat per les branques acolorides amb el color i en G, $i = 1, 2, 3$. Cada T_i s'obté a partir de T_i' tot afegint una vèrtex i una branca de manera connexa. Per tant, cadascun d'ells és un arbre i $G = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$ és una descomposició de G de tipus (a, b, c). A més, ambdós vèrtexs v_1, v_2 són no singulars per aquesta descomposició. La demostració segueix per inducció. □

Tot seguit plantegem el problema invers, que és un dels objectius principals d'aquest capítol. Provem que tot arbre es pot veure com a factor en una descomposició minimal d'un graf mp de qualsevol tipus.

Teorema 2.10 (2.2) *Sigui T un arbre qualsevol d'ordre $n \geq 5$. Aleshores, existeix un graf maximalment planari G que admet T com a factor en una descomposició minimal en arbres de tipus (a, b, c), per a qualsevol elecció $c \geq b \geq a \geq 0$ amb $a+b+c = 3$. A més, T pot ser escollit arbre generador en una descomposició del tipus (0,0,3) si i només si T no és l'estrella S_{n-1}.*

Demostració. La demostració és per inducció sobre l'ordre n de T. La Figura 2.10 mostra com el resultat és cert per a tots els arbres amb $n = 5$ vèrtexs. (En la descomposició (1,1,1) de la figura apareixen tots els arbres d'ordre 5).

Sigui T un arbre d'ordre $n > 5$ i $c \geq b \geq a \geq 0$ amb $a + b + c = 3$. Sigui l un vèrtex terminal de T, de manera que $T' = T - l$ no sigui una estrella, o un vèrtex terminal qualsevol si no n'hi ha cap que verifiqui aquesta condició.

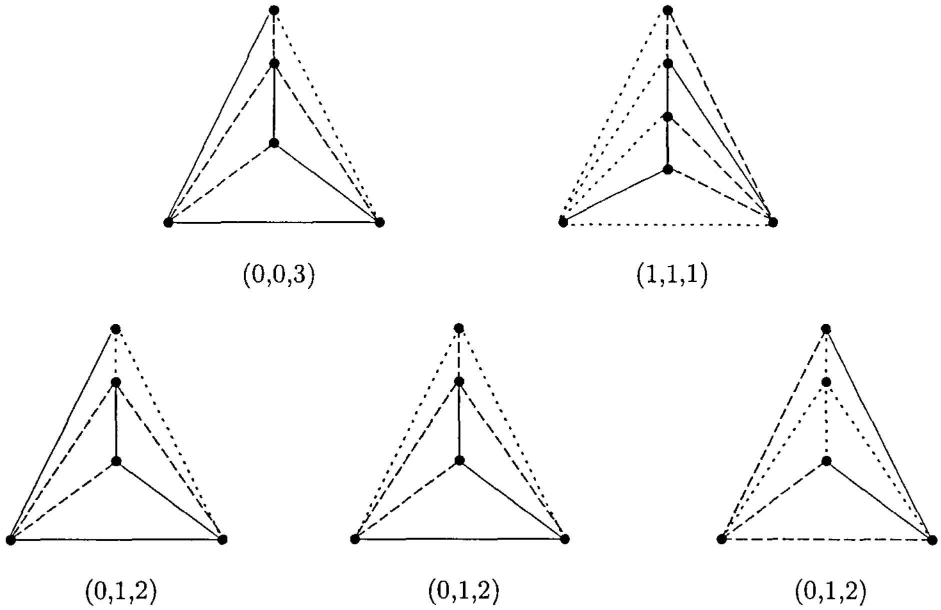


Figura 2.10: Construcció d'un graf mp a partir d'un arbre d'ordre 5.

Sigui vl la branca incident amb l.

Per la hipòtesi d'inducció, existeix un graf mp $G' = T' \oplus T'_2 \oplus T'_3$ i la descomposició és del tipus (a, b, c). Sigui $W = \{w_0, \dots, w_{k-1}\}$ el conjunt de veïns de v en una realització plana del graf en G' numerats en sentit horari.

A continuació provarem l'existència de i tal que $w_i \in V(T'_2)$ i $w_{i+1 \pmod{k}} \in V(T'_3)$ (o viceversa). Denotem per $C = V(G') \backslash V(T'_3)$. Per construcció $W \subset C$, no pot donar-se, ja que aleshores obtindríem $|W| = 3$ i, en particular $v \in C$, contradient $c \leq 3$. Podem assumir doncs que $w_1 \in W \backslash C$. Com $b \leq c$, obtenim $b \leq 1$. D'aquí, o bé, $w_0 \in V(T'_2)$, o bé, $w_2 \in V(T'_2)$. Suposem que $w_0 \in V(T'_2)$.

Sigui G el graf mp obtingut a partir de G' afegint un nou vèrtex l i les branques vl, w_0l, w_1l. Aleshores, $T_2 = T'_2 + w_0l$ i $T'_3 + w_1l$ són ambdós arbres, i $G = T \oplus T_2 \oplus T_3$ és una descomposició minimal de tipus (a, b, c). La demostració segueix per inducció. $\square$

2.3 Grafs regulars

Les descomposicions minimals en arbres de grafs regulars han estat estudiades en [68],[45], de fet el tercer capítol d'aquesta tesi es dedica a exposar els treballs de descomposicions minimals en arbres que s'han fet fins al moment, amb l'objectiu d'introduir l'estudi corresponent a grafs regulars de grau senar. Aquesta secció, pot interpretar-se, per una banda, com la continuació de les seccions anteriors, en tant que veurem, donat un arbre, com aquest es pot completar fins a obtenir un graf regular. Per altra banda, el tractament amb grafs regulars es pot veure també com una introducció al capítol següent.

A destacar, com ja veurà el lector al llarg de la secció que ara comença, que el problema de completar a un graf regular apareix tractat amb unes eines diferents a les presentades en la secció anterior, basades en un procés de construcció de tipus inductiu.

Ara bé, això no vol dir que inicialment el problema no fos abordat des d'aquest punt de vista. De fet, un dels problemes oberts que es presenten en aquesta tesi, dins la secció següent, exposa un resultat, que en cas que sigui cert, permetria fer una construcció alternativa del graf regular.

Donat un graf d-regular G d'ordre n, el nombre de branques verifica

$$|E(G)| = \frac{dn}{2} = \begin{cases} \frac{d}{2}(n-1) + \frac{d}{2} & \text{si } d \text{ parell} \\ \frac{d-1}{2}(n-1) + \frac{n+d-1}{2} & \text{si } d \text{ senar} \end{cases} \tag{2.1}$$

i per tant,

$$\tau(G) \geq a_0(G) = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1.$$

Cota que, com veurem en el Capítol 3, s'assoleix per a grafs regulars densos ($d \geq \lfloor n/2 \rfloor$) i per grafs amb bones connectivitats d'ordre superior que s'introduiran en aquell capítol.

El problema que considerem aquí planteja, donat un arbre T d'ordre n, l'existència d'un graf regular G d'ordre mínim que admeti T com a element d'una descomposició minimal en arbres, és a dir, amb $\lfloor d/2 \rfloor + 1$ arbres.

La condició d'ordre mínim en G queda garantida si imposem que T sigui un arbre generador. En particular, dn ha de ser parell per tal que es compleixi la regla de paritat.

La gran varietat de descomposicions minimals que es poden donar en el cas de grafs regulars, aconsella restringir la recerca a decomposicions del tipus $(0,\ldots,0,l)$, per a $l < n$. En aquest cas, tenint en compte (2.1) es veu que el nombre d'arbres generadors és $\lfloor d/2 \rfloor + 1$, només en el cas que $l = 0$. És a dir, si $d = n-1$ és senar, per tant, si es tracta del graf complet d'ordre parell. En els altres casos, $l > 0$ i el nombre d'arbres generadors és $\lfloor d/2 \rfloor$, d'on es dedueix que el grau del graf ha de complir, $d \geq \Delta(T) + \lfloor d/2 \rfloor - 1$, o equivalentment,

$$d \geq 2\Delta(T) - 3.$$

En aquesta secció veurem com la condició sobre el grau i la regla de paritat són condicions suficients en tots els casos llevat que l'arbre de partida sigui l'estrella doble S_2^m formada per dues estrelles amb m vèrtexs terminals cada una, i amb els vèrtexs centrals units per una branca, veure Figura 2.11. Suposem que G és un graf d-regular que admet S_2^m com a arbre generador en una descomposició del tipus $(0,\ldots,0,l)$. Com el grau màxim de S_2^m és $n/2$, G ha de tenir grau com a mínim $d \geq 2\Delta(T) - 3 = n - 3$. Ara bé, si $d = n-3$, per (2.1), $l = 1$, i un dels dos vèrtexs procedents dels vèrtexs centrals de l'estrella ha de tenir grau com a mínim $\Delta(T) + (\lfloor d/2 \rfloor - 1) + 1 \geq n-2$, una contradicció. Aquest fet justifica a més, que l'estrella doble S_2^k no pot aparèixer en una descomposició en arbres de cap tipus, ja que pel seu nombre de branques aquesta descomposició seria necessàriament del tipus $(0,0,\ldots,0,1)$ que hem provat que no existeix.

Teorema 2.11 (2.3) *Sigui $d \geq 2$ un enter i sigui T un arbre d'ordre $n \geq d+1$ amb nd parell i grau màxim $\Delta(T) \leq \lceil \frac{d}{2} \rceil + 1$. Aleshores, existeix un graf d-regular G d'ordre n tal que*

$$G = T \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k \oplus T_{k+1}$$

és una descomposició minimal en arbres del tipus $(0,\ldots,0,l)$, on $k = \lfloor d/2 \rfloor$, $n - l = k+1$ si d és parell i $n - l = n/2 + k + 1$ si d és senar, excepte si $d = n-3$ és senar i $T = S_2^{k+1}$, o bé $d = n-1$ és senar i $\Delta(T) = k+2$.

A continuació presentem dos resultats que s'usaran en la demostració del Teorema 2.11. Recordem que una seqüència $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$ es diu que

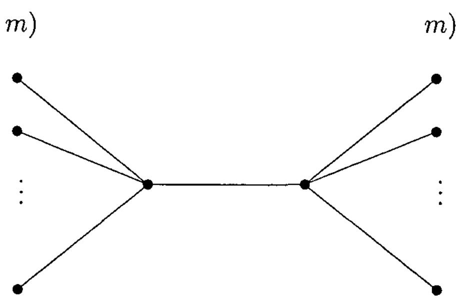


Figura 2.11: L'estrella doble S_2^m.

és *gràfica* si existeix un graf G d'ordre n que la té com a seqüència de graus. Les seqüències gràfiques estan caracteritzades pel Teorema d'Erdös-Gallai [29].

Teorema 2.12 (Erdős, Gallai [29]) *Sigui $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$ una seqüència d'enters tal que $\sum_{i=1}^{n} d_i$ és un nombre parell. Aleshores, existeix un graf G, amb conjunt de vèrtexs $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que $d(x_i) = d_i$ si i només si,*

$$\sum_{i=1}^{l} d_i \leq l(l-1) + \sum_{i=l+1}^{n} \min\{l, d_i\} \qquad \textit{per a cada} \quad l = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

L'altre resultat partint d'una seqüència $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$ que és gràfica, i tal que $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2k(n-1)$ explora la possibilitat que pugui ser realitzada en un graf contenint k-arbres generadors disjunts. Aquest problema fou resolt inicialment pels valors $k = 2$ i $k = 3$ (veure [63] i [64]). El teorema següent dóna la solució en el cas general.

Teorema 2.13 (Kleitman, Wang [60]) *Sigui $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq k$ una seqüència gràfica tal que, $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2k(n-1)$. Aleshores, la seqüència pot ser realitzada per un graf G que té k arbres generadors branca-disjunts.*

Els autors utilitzen un procés que alhora que demostra el Teorema 2.13 introdueix un algorisme que permet construir el graf.

L'estratègia que seguirem en la demostració del Teorema 2.11 consisteix en veure que l'arbre T juntament amb un T_{k+1} apropiat, pot ser realitzat amb un graf G_1, en un graf regular G, és a dir, $G = T \oplus T_{k+1} \oplus G_1$, i que G_1 admet per la seva banda, una descomposició $k-1$ arbres generadors disjunts.

Per comprovar l'existència de G, cal que es doni la concurrència de dos fets, que condicionarem a la caracterització de les seqüències gràfiques. Per una banda, l'existència de G_1 en el complementari de $T \oplus T_{k+1}$ i per altra banda, la descomposició de G_1 en $k-1$ arbres generadors. Cal però, en primer lloc, justificar l'existència de T_{k+1} a partir de T.

En el lema següent donem una condició suficient que garanteix l'existència d'un camí T_{k+1} com a primer pas cap a l'extensió a un graf d-regular.

Lema 2.14 *Sigui T un arbre d'ordre n i $k \geq 2$ un enter.*

(i) Si $n \geq 2k+1$ i $\Delta(T) \leq k+1$ aleshores existeix una realització de T amb un camí P d'ordre $k+1$ tal que $\Delta(T \oplus P) \leq k+1$.

(ii) Si $n \geq 2k+4$, n és parell, $\Delta(T) \leq k+2$ i $T \neq S_2^{k+1}$ aleshores, existeix una realització de T amb un camí P d'ordre $(n/2)+k+1$ tal que $\Delta(T \oplus P) \leq k+2$.

Demostració. Sigui $1 = d_1 = d_2 \leq \cdots \leq d_n$ la seqüència de graus de T.

(i) En aquest cas, $d_{k+2} \leq 2$, ja que en cas contrari $2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq k+1+3(n-k-1)$, que a la seva vegada implica $n \leq 2k$.

Si $k=2$, el subgraf T induït per x_1, x_2, x_3 té grau màxim 1. Per tant, podem trobar un camí P d'ordre 3 que pot ser realitzat amb $T[x_1, x_2, x_3]$, d'on $\Delta(T \oplus P) \leq 3$.

Si $k \geq 3$ aleshores el subgraf de T generat per $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ té grau màxim $2 \leq (k+1)/2$. D'aquí, deduïm que el seu complementari és hamiltonià. En particular, existeix un camí P d'ordre $k+1$ en el complementari de $T[x_1, \ldots, x_{k+1}]$. Per tant, $\Delta(T \oplus P) \leq k+1$.

(ii) Vegem ara que $d_j \leq k$ per a $j \leq \frac{n}{2}+k-1$ i $d_j \leq k+1$ per $j \leq \frac{n}{2}+k+1$. Suposem el contrari, ie $d_j \geq k+1$ per $j = \frac{n}{2}+k-1$. Aleshores, $2(n-1) \geq \frac{n}{2} + k-2+(k+1)(\frac{n}{2}-k+2)$ que implica $n \leq 2k$. De manera semblant, si $d_j \geq k+2$ per $j = (n/2)+k+1$. Aleshores, $2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i \geq \frac{n}{2} + k + (\frac{n}{2}-k)(k+2)$, que implica $(2k)(k+1) - 4 \geq n(k-1)$. D'aquí, $n = 2k+4$ i la seqüència de graus és $1, \ldots, 1, k+2, k+2$, és a dir, la seqüència de graus de l'estrella doble S_2^{k+1}.

D'aquí deduïm que el complementari del subgraf induït per $\{x_1, \ldots, x_{n/2+k+1}\}$ té un camí hamiltonià P amb vèrtexs terminals $x_{n/2+k}, x_{n/2+k+1}$ i $\Delta(T \oplus P) \leq k+2$. □

A continuació presentem un lema que permet assegurar l'existència de G_1 en el complementari de $T \oplus T_{k+1}$

Lema 2.15 *Sigui $2k \geq d_1 \geq \cdots \geq d_n \geq k-1$, $k \geq 2$, una seqüència d'enters tals que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(k-1)(n-1)$. Aleshores, la seqüència és gràfica per a $n \geq 2k+4$.*

A més, si $2k-1 \geq d_1$, la seqüència ès gràfica per a $n \geq 2k+2$.

Demostració. Si $k=2$ aleshores $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$ i existeix un arbre que admet la seqüència com a seqüència de graus.

Suposem que $k \geq 3$. Sigui

$$\varphi(l) = l(l-1) + \sum_{i=l+1}^{n} \min\{l, d_i\} - \sum_{i=1}^{l} d_i.$$

D'acord amb el Teorema 2.12, hem de demostrar que $\varphi(l) \geq 0$ per a $l = 1, \ldots, n$. Si $l \geq d_1 + 1$ aleshores $\varphi(l) \geq l(l - d_1 - 1) \geq 0$. Assignem els valors $d_0 = n$ i $d_{n+1} = 0$.

Per a cada $l = 1, \ldots, d_1$, sigui $s = s_l$ el més petit dels subíndexs complint la condició $d_{s+1} \leq l$.

Suposem que $s \leq l$. Aleshores

$$\varphi(l) = l(l-1) + \sum_{i=l+1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{l} d_i.$$

Si $l = d_1$ aleshores, obtenim $\varphi(l) \geq (n-d_1)d_n - d_1 \geq 3(k-1) - 2k \geq 0$. Suposem que $l < d_1$. Si $d_1 \leq 2k-1$ o $l \leq 2k-2$ quan $d_1 = 2k$, aleshores

$$\begin{aligned} \varphi(l) &= l(l-1) + 2(k-1)(n-1) - 2\sum_{i=1}^{l} d_i \geq \\ &\geq 2(k-1)(n-1) - l(2d_1 - l + 1) \\ &\geq 2(k-1)(n-4-2k-2d_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Finalment, si $l = 2k-1$, i per tant, $d_1 = 2k$, $n \geq 2k+4$, usem que $\sum_{i=l+1}^{n} d_i \geq (n-l)(k-1)$ per tal de provar que $\varphi(l) \geq 0$.

Suposem ara que $s > l$. Aleshores,

$$\varphi(l) = l(s-1) + \sum_{i=s+1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{l} d_i.$$

Si $s \geq d_1 + 1$ aleshores $\varphi(l) \geq l(s - d_1 - 1) \geq 0$. Si $s = d_1$ aleshores obtenim, $\varphi(l) \geq (n-d_1)d_n - l \geq 3(k-1)-(2k-1) \geq 0$. De manera semblant, si $s = d_1 - 1$. Finalment, si $s < d_1 - 1$, com $\varphi(l) = l(s-1)+2(k-1)(n-1)-\sum_{i=1}^{s} d_i - \sum_{i=1}^{l} d_i$, aleshores

$$\begin{aligned}
\varphi(l) &\geq l(s-1) + 2(k-1)(n-1) - (s+l)d_1 \\
&\geq (d_1 - 3)^2 + 2(k-1)(n-1) - (2d_1 - 5)d_1 \\
&\geq -d_1^2 - d_1 + 9 + 2(k-1)(n-1) \geq 0.
\end{aligned}$$

Hem demostrat per tant, que per a tot $l = 1, \ldots, n$, $\varphi(l) \geq 0$, i la seqüència és gràfica. □

A continuació, presentem la demostració del resultat principal d'aquesta secció.

Demostració del Teorema 2.11. Sigui $1 = d_1 = d_2 \leq \cdots \leq d_n$ la seqüència de graus de l'arbre T.

Suposem primer que d és parell. En aquest cas, $d_n \leq k + 1$ on $k = d/2$. Pel Lema 2.14, existeix un camí T_{k+1} d'ordre $k + 1$ tal que $\Delta(T \oplus T_{k+1}) \leq k + 1$. Sigui $1 \leq d_1'' \leq d_2'' \leq \cdots \leq d_n'' \leq k + 1$ la seqüència de graus de $T \oplus T_{k+1}$. La seqüència

$$2k - 1 \geq d_1' \geq d_2' \geq \cdots \geq d_n' \geq k - 1,$$

on $d_i' = d - d_i''$, satisfà $\sum_{i=1}^{n} d_i' = dn - 2(n-1) - 2k = 2(k-1)(n-1)$. Si $d = n - 1$ aleshores, la seqüència correspon al complementari de $T \oplus T_{k+1}$ i per tant, és gràfica. Si $d < n - 1$ aleshores, $n \geq 2k + 2$ i, pel Lema 2.15, la seqüència també és gràfica. Pel Teorema 2.13 és realitzable per un graf G_1 amb $(k-1)$ arbres branca-disjunts. Per construcció, el graf $G = G_1 \oplus T \oplus T_{k+1}$ és d-regular i admet una descomposició minimal del tipus $(0, \ldots, 0, n-k-1)$.

La demostració és similar quan d és senar. Aleshores, $\Delta(T) \leq k + 2$ on $d = 2k+1$ i n és parell. Pel Lema 2.14 existeix un camí T_{k+1} d'ordre $(n/2)+k+1$

tal que $\Delta(T \oplus T_{k+1}) \leq k+2$. Sigui $1 \leq d''_1 \leq d''_2 \leq \cdots \leq d''_n \leq k+1$ la seqüència de graus de $T \oplus T_{k+1}$. La seqüència

$$2k-1 \geq d'_1 \geq d'_2 \geq \cdots \geq d'_n \geq k-1,$$

on $d'_i = d - d''_i$, satisfà $\sum_{i=1}^{n} d'_i = dn - 2(n-1) - 2((n/2)+k) = 2(k-1)(n-1)$. Si $d = n-1$, aleshores la seqüència correspon al complementari de $T \oplus T_{k+1}$ i per tant, és gràfica. Si $d < n-1$ aleshores $n \geq 2k+4$ i, pel Lema 2.15, la seqüència també és gràfica. Pel Teorema 2.13 és realitzable per un graf G_1 amb $(k-1)$ arbres branca-disjunts. Per construcció, el graf $G = G_1 \oplus T \oplus T_{k+1}$ és d-regular i admet una descomposició minimal en arbres del tipus $(0, \ldots, 0, (n/2)-k-1)$. □

Com a conseqüència del Teorema 2.11, obtenim el corol·lari següent.

Corol·lari 2.16 *Tot arbre d'ordre n amb grau màxim $\Delta(T) \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ és factor d'una descomposició minimal en arbres de K_n.*

El treball presentat en aquest capítol apareix recollit en l'article [66].

2.4 Conclusions i problemes oberts

En les seccions anteriors hem estudiat quins arbres poden aparèixer en les descomposicions minimals en arbres dels grafs maximalment planaris, dels grafs maximalment planaris i bipartits i dels grafs regulars. El problema considerat en aquest capítol és l'inici d'una sèrie de qüestions que suggereix estudis posteriors.

Una primera qüestió oberta apareix quan enlloc de partir d'un arbre, es consideren dos arbres, posem per cas T_1, T_2 i es planteja la construcció d'un graf de característiques fixades que els contingui en una descomposició minimal. Una primera aproximació a aquesta qüestió passa per assegurar l'existència dels grafs de característiques fixades i el fet que continguin els arbres donats com a subgrafs. Precedents sobre aquest aspecte, en trobem tant en el cas planar com en el cas regular. García, Hernando, Hurtado, Noy y Tejel [39] donen mètodes per a dibuixar un arbre amb n vèrtexs en un polígon convex i els apliquen per a obtenir realitzacions planes de dos arbres, mentre que Hedetniemi, Hedetniemi i Slater estudien l'empaquetament de dos arbres en K_n. El problema en el cas planar sembla més complex que en el cas regular. Un resultat que permetria l'extensió a un graf regular, passaria per estudiar la qüestió següent.

Problema 2.17 *Donats dos arbres T_1, T_2 de n vèrtexs amb $\Delta(T_i) \leq k$, per a $i = 1, 2$. Poden ser empaquetats en K_n de manera que $\Delta(T_1 \oplus T_2) \leq k + 2$?*

La segona qüestió sorgeix arran d'un problema que es va plantejar quan estudiàvem la construcció d'un graf regular a partir d'un arbre, mitjançant un procediment de tipus inductiu similar al dels grafs planaris

Problema 2.18 *Sigui G un graf que descomposa en r arbres generadors, i sigui $M = \{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ un conjunt de r branques independents. Existeix una descomposició $G = T_1 \oplus \ldots \oplus T_r$ de G en r arbres generadors tal que $e_i \in T_i$ per $i = 1, \ldots, r$?*

Capítol 3

Descomposicions minimals de grafs regulars

Resum

L'arboricitat, $a(G)$, representa una cota inferior de $\tau(G)$, el nombre mínim d'arbres en una descomposició en arbres. En aquest capítol demostrem, fent ús de mesures de connectivitat d'ordre superior, que $a(G) = \tau(G)$ per a tot graf regular d'ordre n i grau $d \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. A partir d'un exemple, provem que aquesta cota és òptima. En la part final del capítol considerem l'estudi anterior per a grafs regulars no densos. Provem que tot graf regular d'ordre n amb grau $2\sqrt{n} \leq d < n/2$ i bona connectivitat manté la igualtat $a(G) = \tau(G)$.

3.1 Introducció

Entre totes les famílies de grafs, la dels grafs regulars sobresurt per la seva presència en els diferents estudis sobre descomposicions [56], destacant en particular els corresponents a descomposicions del graf complet.

Un resultat ben conegut és el que fa referència a la descomposició en camins del graf complet.

Teorema 3.1 *Per a $n \geq 2$ K_n descomposa en $n/2$ camins hamiltonians, si n és parell, i descomposa en $(n-1)/2$ camins hamiltonians i un camí de longitud $(n-1)/2$ si n és senar.*

Les bones propietats que té el graf complet fa que el resultat anterior, aparentment simple, el puguem veure com a cas particular d'un tipus de descomposició minimal que donarem en aquest capítol; les descomposicions en arbres de grafs regulars, lligats a l'elecció d'un camí de mida adequada.

Els estudis sobre descomposicions minimals en arbres s'inicien en els anys 70 i 80 amb l'estudi de les descomposicions dels grafs maximalment planaris [57], [93] i amb l'estudi de cotes sobre el nombre mínim d'arbres [19], [96]. L'aplicació d'aquestes descomposicions en grafs regulars comença en el treball [68] on es prova que tot graf d-regular amb d parell i branca-connectivitat màxima admet una descomposició en $d/2$ arbres.

Els estudis sobre descomposicions minimals en boscos són anteriors, com és natural, a les descomposicions en arbres. El nombre mínim de boscos en una descomposició en boscos, l'arboricitat $a(G)$, es pot calcular utilitzant la fórmula donada per Nash-Williams en [77], generalitzada més tard per Edmonds [25] en el context de matroides. En el cas de grafs d-regulars l'arboricitat és igual $\lceil d/2 \rceil$, (veure per exemple [55]).

Tutte [98] i Nash-Williams [76] obtenen de manera independent i gairebé al mateix temps el teorema següent

Teorema 3.2 (Tutte [98], Nash-Williams [76]) *Un multigraf G conté k-arbres generadors branca-disjunts, si i només si, per a tota partició P del conjunt de vèrtexs de G es compleix*

$$|E_P| \geq k(|P| - 1),$$

on E_P denota el conjunt de branques de G que no estan contingudes en cap de les parts de P.

En aquest capítol ens formulem la qüestió següent: Sota quines condicions cada bosc és un arbre. Anomenem $\tau(G)$ al nombre mínim d'arbres en una descomposició en arbres.

Gairebé tots els intents que s'han fet per obtenir una fórmula tancada per aquest paràmetre (nombre mínim) han estat frustrats. Els resultats sobre el tema s'adrecen a calcular el valor d'aquest paràmetre en el context d'una família determinada. Com exemple destaquem l'arboricitat lineal, és a dir, el nombre mínim de camins en què pot descomposar-se un graf, i una generalització d'ella, quan en la descomposició enlloc de camins s'admeten subgrafs de grau màxim acotat.

Harary en [50] introdueix el concepte d'arboricitat lineal $la(G)$ com el nombre mínim de boscos, on cada component connexa és un camí, i conjectura que per a tot graf d-regular G, es verifica

$$la(G) = \lceil (d+1)/2 \rceil .$$

Tot i que s'ha provat per a $d \leq 6$, $d = 8$ i $d = 10$ (veure [42]) la conjectura encara està oberta. L'arboricitat lineal es pot veure com una descomposició en boscos de grau màxim 2. Truszczyńsky en [97] proposa la generalització de la fórmula de l'arboricitat quan els boscos de la descomposició tenen grau màxim fixat r. El nombre mínim de boscos en aquesta descomposició el denota per $\Upsilon_r(G)$, i conjectura

Conjectura 3.3 (Truszczyńsky [97]) *Per a cada multigraf G i per a cada $r \geq 2$,*

$$\Upsilon_r(G) = \begin{cases} \frac{\Delta(G)}{r} \text{ o } \frac{\Delta(G)}{r} + 1 & \text{si } a(G) = \frac{\Delta(G)}{r} \\ \max\{a(G), \lceil \frac{\Delta(G)}{r} \rceil\} & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Aquesta conjectura, que en el cas de grafs regulars es simplifica dient $\Upsilon_r(G) = a(G)$, ha estat provada pel mateix autor per a $r \geq \Delta(G) + 1 - a(G)$.

Un altre resultat en aquesta línia és el degut a Kundu [62], en ell introdueix la branca-connectivitat per a garantir l'existència d'un cert nombre d'arbres generadors disjunts.

Teorema 3.4 (Kundu [62]) *Tot graf n-branca-connex admet $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ arbres generadors branca-disjunts.*

L'objectiu d'aquest capítol es demostrar que el nombre mínim d'arbres d'un graf d-regular d'ordre n, amb $d \geq \lfloor n/2 \rfloor$ iguala també la seva arboricitat, qüestió que vincularem a la presència d'un determinat nombre d'arbres generadors disjunts i a un camí de longitud adequada. Fent servir les mateixes idees donem condicions suficients en termes de les connectivitats d'ordre superior per obtenir la igualtat $a(G) = \tau(G)$ per grafs regulars G que no són densos.

3.2 Nombre d'arbres

Una adaptació del Teorema 3.2 de la fórmula per al càlcul de l'arboricitat d'un graf en termes de les branques dels subgrafs induïts per un conjunt de vèrtexs, és el següent:

$$a(G) = \max\left\{ \left\lceil \frac{|E_X|}{|X|-1} \right\rceil, \quad X \subset V(G), \quad |X| \geq 2 \right\}, \tag{3.1}$$

on E_X és el conjunt de branques del subgraf de G induït per X. En [27] es dóna una demostració senzilla de (3.1).

A diferència del que passa amb l'arboricitat, per al càlcul del nombre mínim d'arbres d'un graf, no es troba cap fórmula en la literatura Els resultats coneguts en aquesta línia consisteixen, o bé, en donar cotes per aquest paràmetre, o bé, en calcular el seu valor per a determinades famílies de grafs. El treball que presentem en aquest capítol s'emmarca en aquesta segona vessant, plantejada des de l'estudi de les propietats de connectivitat del graf.

Com tot bosc de n vèrtexs té com a màxim $n-1$ branques, $\lceil |E|/(n-1) \rceil$ representa un cota inferior trivial per ambdós, l'arboricitat i el nombre d'arbres, i per tant, es pot considerar la relació

$$\tau(G) \geq a(G) \geq \left\lceil \frac{|E(G)|}{|V(G)|-1} \right\rceil.$$

F.R.K Chung en [19] obté la següent cota superior

$$\tau(G) \leq \left\lceil \frac{|V(G)|}{2} \right\rceil.$$

No és difícil provar, veure per exemple [55], que un graf d regular G té arboricitat $a(G) = \lceil (d+1)/2 \rceil$. En particular, pel graf complet K_n, les dues cotés anteriors coincideixen, i per tant $a(K_n) = \tau(K_n) = \lceil n/2 \rceil$.

Truszczyńsky en [96] dóna una cota superior en termes del gir g del graf G, obtenint per a $g \geq 5$,

$$a(G) \leq \tau(G) \leq \left\lceil \frac{|V(G)|}{g} \right\rceil + 1.$$

En el mateix article demostra que el nombre d'arbres dels grafs bipartits i complets i dels hipercubs coincideix amb la seva arboricitat.

Per altra banda, en quant a resultats relatius al càlcul del nombre d'arbres per a algunes famílies de grafs, recordem els presentats en el primer capítol. Kampen en [57] demostra que el nombre d'arbres dels grafs maximalment planaris és 3. El mateix que apareix com a conclusió en el treball sobre conjunts parcialment ordenats de Schnyder en [93]. Ringel en [86] prova que el nombre d'arbres dels grafs maximalment planaris i bipartits és 2.

Lladó, Ringel i Serra [68], fent ús de la branca-connectivitat del graf, demostren que, per a grafs d-regulars, amb d parell i màxima branca-connectivitat existeix una descomposició minimal acíclica on tots els boscos són arbres.

Teorema 3.5 (Lladó, Ringel, Serra [68]) *Sigui G un graf d-regular, d parell i $\lambda(G) = d$. Aleshores,*

$$\tau(G) = a(G) = \frac{d}{2}.$$

En el mateix treball demostren que tot i mantenir la condició de màxima branca-connectivitat, la diferència entre el nombre d'arbres i l'arboricitat pot ser arbitràriament gran quan es consideren grafs regulars de grau senar. En concret, demostren el resultat següent.

Teorema 3.6 (Lladó, Ringel, Serra [68]) *Per a d senar, existeixen infinites famílies de grafs d-regulars G_n, amb $\lambda(G) = d$ verificant $\tau(G_n) = \frac{n}{2d}$.*

Un exemple de construcció d'aquestes famílies el dóna el procés següent. Sigui G un graf regular de grau d, denotem per $G[K_d]$ el graf que s'obté en substituir cada vèrtex de G per una còpia de K_d, de manera que el graf així obtingut és regular de grau d.

La família $\{H_n,\ n \geq 1\}$ definida a partir de la recurrència $G_1 = K_{d+1}$ i $G_i = G_{i-1}[K_d]$, per a $i \geq 2$, verifica $\tau(G_n) = \frac{n}{2d} \to \infty$ per $n \to \infty$ si d és senar. Mentre que la mateixa construcció per a d parell verifica $\tau(G_n) = \frac{n}{2} + 1$

En aquest capítol estudiem l'extensió del Teorema 3.5, per a grafs d-regulars amb d senar. En aquest sentit, provem que la igualtat $a(G) = \tau(G)$ s'assoleix per tots els grafs regulars densos, és a dir, amb grau $d \geq \lfloor n/2 \rfloor$; tot demostrant que G admet una descomposició en un camí i $a(G) - 1$ arbres generadors.

A més, justifiquem que la cota en el grau és del tot ajustada, ja que per a tot $d = n/2 - 1 > 3$ donem una família de grafs amb $\tau(G) \geq 2a(G) - 2$.

La demostració en la situació crítica $d = n/2$, quan d és senar, exigeix resultats més contundents en l'estructura dels conjunts amb reduït nombre de branques incidents dins i fora de cada conjunt. Aquests resultats provenen de l'estudi de mesures de connectivitat més precises que la branca-connectivitat clàssica, i tenen interès per si sols, per la informació que es pot obtenir relativa a les connectivitats dels grafs densos.

La secció que continua conté les definicions i els resultats bàsics sobre branca-connectivitats d'ordre superior a u. Aquests paràmetres són introduïts per Hamidoune, Lladó, Serra i Tindell en [49] i estan relacionats amb el concepte d'extraconnectivitat estudiat per Fàbrega i Fiol en [30].

3.2.1 Propietats de connectivitat

Com ja hem vist en la secció anterior, en el cas de grafs d-regulars amb d senar, que la branca-connectivitat sigui màxima, no garanteix la igualtat entre l'arboricitat i el nombre mínim d'arbres. Per aquest motiu, introduïm l'estudi de connectivitats d'ordre superior, que permeten obtenir informació valuosa sobre l'estructura interna dels subgrafs crítics.

Sigui $X \neq \emptyset$ un subconjunt de vèrtexs del graf G. La *branca-frontera* de

X, que denotem per ∂X, és el conjunt de branques que uneix X amb el seu complement $\bar{X}$.

Per $1 \leq r \leq n/2$ la *r-branca-connectivitat* de G, es defineix com

$$\lambda_r = \min\{|\partial X| : \; r \leq |X| \leq n - r\}.$$

Observem que, $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{\lfloor n/2 \rfloor}$, on $\lambda_1 = \lambda$ és la branca-connectivitat usual de G.

Un subconjunt $F \subset V$ es diu que és un *r-fragment* de G si $r \leq |F| \leq n - r$ i $|\partial F| = \lambda_r(G)$. Un fragment de cardinal mínim s'anomena *r-àtom.*

És ben conegut que tots els grafs regulars amb grau $d \geq \lfloor n/2 \rfloor$ tenen màxima branca-connectivitat $\lambda = d$ [16]. En aquesta secció donem resultats més forts relatius a les branca-connectivitats d'ordre dos i tres.

En un graf d-regular per a cada $X \subset V$, $1 \leq |X| \leq n/2$, obtenim de manera trivial

$$|\partial \bar{X}| = |\partial X| \geq |X|(d - |X| + 1), \tag{3.2}$$

la igualtat es dóna, si i només si, el subgraf G_X induït per X és un graf complet.

Lema 3.7 *Sigui G un graf d-regular amb $d > n/2$, aleshores $\lambda_2(G) = 2d - 2$.*

Demostració. Via la desigualtat (3.2), per a cada subconjunt $X \subset V$, tal que $2 \leq |X| \leq d - 1$, obtenim $|\partial X| \geq 2d - 2$. Com $d > n/2$, aquesta desigualtat es compleix per a tots els subconjunts X amb $2 \leq |X| \leq n/2$. □

Per a $d = n/2$, sigui G el graf obtingut per la unió de dues còpies de K_d amb un aparellament perfecte. En aquest cas, $d = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{\lfloor n/2 \rfloor}$, ja que el conjunt de vèrtexs d'una de les dues còpies, posem que sigui X, verifica $|X| = d$ i $|\partial X| = d$.

El resultat principal que presentem en aquesta secció, afirma que en els grafs regulars amb grau senar $d = n/2$, els conjunts amb branca-connectivitat petita són molt propers a un 3-àtom, el qual és a la seva vegada, essencialment únic. El teorema que segueix ens en parla.

Teorema 3.8 *Sigui G un graf regular de grau senar $d{=}n/2 > 5$ tal que $\lambda_3(G) \leq 2d-2$ i sigui A un 3-àtom de G. Aleshores, cada subconjunt $X \subset V$ amb $3 \leq |X| \leq n/2$ tal que $|\partial X| \leq 2d-2$ satisfà $d \geq |X| \geq d-1$. A més, o bé, $X \subset A$, o bé, $X \subset \bar{A}$.*

Demostració. Via la desigualtat (3.2), $|\partial A| \leq 2d-2$ implica $d \geq |A| \geq d-1$. El mateix argument, permet assegurar $d \geq |X| \geq d-1$. Suposem ara, que la conclusió del resultat és falsa, en particular, $|A \cap X| \geq 1$.

Com la funció $Y \mapsto |\partial Y|$, $Y \subset V$, és submodular,

$$|\partial X| + |\partial A| \geq |\partial(A \cap X)| + |\partial(A \cup X)| = |\partial(A \cap X)| + |\partial(\bar{A} \cap \bar{X})|. \quad (3.3)$$

Suposem primer que $|A| = d-1$. Aleshores per la desigualtat (3.2), obtenim $\lambda_3(G) = 2d-2$ i per tant, X és un 3-fragment. Com

$$|\partial X| = d|X| - 2|E_X| = 2(d-1),$$

i d és un nombre senar, deduïm $|X| = d-1$. En particular, $|\bar{A} \cap \bar{X}| = |A \cap X| + 2$. Si $3 \leq |A \cap X| \leq |A|-1$, com A és un 3-àtom, obtindríem $|\partial(A \cap X)| \geq |\partial A|+1$ i aleshores la desigualtat (3.3) implicaria

$$|\partial X| \geq |\partial(\bar{A} \cap \bar{X})| + 1,$$

contradient el fet que X és un 3-fragment. Per tant, $1 \leq |A \cap X| \leq 2$. Reemplaçant $\bar{X}$ per X que, al tenir la mateixa frontera que X, també és un 3-fragment, en la desigualtat (3.3), i seguint un argument semblant, deduïm $1 \leq |A \cap \bar{X}| \leq 2$. D'on $d-1 = |A| = |A \cap X| + |A \cap \bar{X}| \leq 4$, que implica $d \leq 5$.

Suposem ara que $|A| = d$. Intercanviant A i $\bar{A}$, si és necessari, podem assumir que $|A \cap X| \geq |\bar{A} \cap X|$. Observem que $|A \cap X| \geq |X|/2 \geq (d-1)/2 > 2$, i $d > |A \cap X|$, ja que en cas d'igualtat $X = A$. Per altra banda, $|\bar{A} \cap \bar{X}| = |A \cap X| + \epsilon$, on $\epsilon = d - |X|$. Per tant, $|\bar{A} \cap \bar{X}| > 2$, també $d > |\bar{A} \cap \bar{X}|$, ja que la igualtat implicaria, $X \subset A$. Per la desigualtat (3.2), $|\partial(A \cap X)| \geq 2d-2$, com A és un 3-àtom, $|\bar{A} \cap \bar{X}| \geq |\partial A| + 1$. Combinant aquesta desigualtat amb (3.3) obtenim $|\partial X| \geq 2d-1$, una contradicció. □

Observació 3.9 Quan $d = n/2 = 5$ existeixen poques excepcions del Teorema 3.8. La demostració anterior funciona de manera semblant si el 3-àtom té cardinal $|A| = 5$. Ja que, mantenint el supòsit $d-1 \geq |A \cap X| \geq |\bar{A} \cap X|$, es dedueix $|A \cap X| \geq 2$ i $|\bar{A} \cap \bar{X}| \geq 3$, i per tant, s'arriba a un contradicció.

Per altra banda, si $|A| = 4$ tal i com figura en la demostració del teorema anterior, via un argument de paritat, X també és un 3-àtom i $G_A \simeq G_X \simeq K_4$. Per tant, un vèrtex no pot estar en tres àtoms diferents i $|A \cap X|$ o bé és zero, o bé és 2. Ja que si $X \not\subset \bar{A}$, sabem per la demostració anterior que $1 \leq |A \cap X| \leq 2$. Ara bé, si $A \cap X = \{x\}$, aleshores $d_G(x) = 6$, una contradicció. D'aquí es dedueix que G, o bé, té dos 3-àtoms disjunts, o bé, cinc 3-àtoms. La Figura 3.1 mostra un graf 5-regular amb dos 3-àtoms, un d'ells és el format pels vèrtexs encerclats.

□

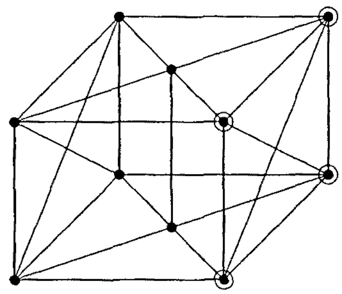


Figura 3.1: Exemple de graf 5-regular amb dos 3-àtoms.

El lema següent serà utilitzat en la secció que segueix.

Lema 3.10 *Sigui G un graf d-regular de grau senar $d=n/2$ i sigui A un 3-àtom de G. Si $|A| > 3$, aleshores G_A i $G_{\bar{A}}$ són tots dos hamiltonians.*

Demostració. Sigui $x \in A$. Del fet que $|A| > 3$, obtenim

$$|\partial A| < |\partial(A \setminus \{x\})| = |\partial A| + |\partial x \cap E_A| - |\partial x \cap \partial A|.$$

De $|\partial x \cap E_A| + |\partial x \cap \partial A| = d$, i de l'anterior desigualtat, deduïm $|\partial x \cap E_A| > d/2$. Per altra banda, com $|A| \leq |\bar{A}|$ i $|\partial \bar{A}| = |\partial A| \leq |\partial(\bar{A} \setminus \{x\}|$, un argument similar quan $x \in \bar{A}$ ens condueix a $|\partial x \cap E_{\bar{A}}| \geq d/2$. Per tant, G_A i $G_{\bar{A}}$ tenen grau mínim $\delta \geq \lceil d/2 \rceil \geq \max\{|A|/2, |\bar{A}|/2\}$, aquest fet és clar perquè, $|A| > 3$, implica per (3.2) que $d-1 \leq |A| \leq d$. Aleshores, pel teorema de Dirac (Capítol 1, Teorema 1.1) ambdós, G_A i $G_{\bar{A}}$, són hamiltonians. □

3.2.2 Descomposicions en arbres de grafs regulars densos

En aquesta secció demostrem que els grafs regulars densos poden ser descomposats en el nombre mínim d'arbres.

Provem que, donat un graf d-regular dens G existeix un camí T, de manera que G és la unió branca-disjunta de T i $\lfloor d/2 \rfloor$ arbres generadors. En particular, deduïm que tot graf regular dens és la unió branca-disjunta d'un nombre d'arbres igual a l'arboricitat.

Les propietats de connectivitat estudiades en la secció anterior són claus en els casos crítics. Per altra banda, per demostrar el resultat fonamental d'aquesta secció, usem el lema que segueix, adaptació de la fórmula sobre l'arboricitat (3.1) obtinguda per Nash-Williams en [77].

Lema 3.11 *Sigui G un graf d-regular. Donat T un camí de G de longitud $|E(T)| = |E| - \lfloor d/2 \rfloor (n-1)$, $G-T$ descomposa en $\lfloor d/2 \rfloor$ arbres generadors, si i només si,*

$$|E_X| \leq \lfloor d/2 \rfloor (|X|-1) + |E(T) \cap E_X|, \quad \forall X \subset V, \quad |X| \geq 1. \tag{3.4}$$

Demostració. És trivial, ja que per una banda, el nombre de branques de $G-T$ és $\lfloor d/2 \rfloor (|V|-1)$ i per altra banda, la condició (3.4), garanteix $a(G-T) \leq \lfloor d/2 \rfloor$. Una descomposició en $\lfloor d/2 \rfloor$ boscos de $E(G-T)$, és una descomposició en arbres generadors. □

El teorema que continua és el resultat principal d'aquesta secció.

Teorema 3.12 *Sigui G un graf regular d'ordre n i grau $d \geq \lfloor n/2 \rfloor$. Aleshores,*

$$a(G) = \tau(G).$$

Demostració. Sigui T un camí de longitud $|E(T)| = |E| - \lfloor d/2 \rfloor (n-1)$. Aquest camí existeix perquè, pel teorema de Dirac, G és hamiltonià. El graf $G-T$ té $\lfloor d/2 \rfloor (|E|-1)$ branques.

Fent ús del Lema 3.11, per tal de provar que $G-T$ admet una descomposició en $\lfloor d/2 \rfloor$ arbres generadors disjunts, comprovem que per a qualsevol subconjunt $X \neq \emptyset$ de V, es verifica la desigualtat

$$2|E_X| \leq (d-\epsilon)(|X|-1) + 2|E(T) \cap E_X|, \tag{3.5}$$

on $\epsilon = d(\text{mod } 2)$.

Usant $2|E_X| = d|X| - |\partial X|$ en (3.5), per qualsevol subconjunt $X \neq \emptyset$ de V, l'expressió anterior és equivalent a

$$|\partial X| \geq d + \epsilon(|X|-1) - 2|E(T) \cap E_X|. \tag{3.6}$$

En particular, quan d és parell, l'anterior desigualtat és una conseqüència del fet que $\lambda(G) = d$.

A partir d'aquest punt, assumim que d és senar, i per tant, que n és parell. Notem que aleshores, $|E(T)| = (d-1+n)/2$.

En la Figura 3.2 mostrem una descomposició en forma d'un camí i un arbre generador dels grafs cúbics d'ordre com a molt sis, és a dir, $K_4, K_{3,3}$ i $K_3 \times K_2$. Per tant, assumim que $d \geq 5$.

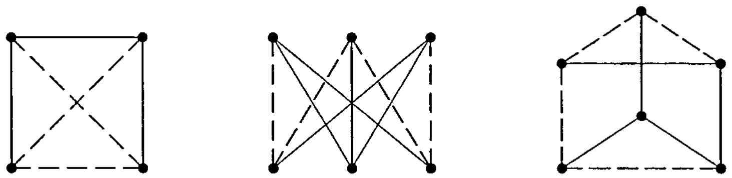


Figura 3.2: Descomposicions dels grafs $K_4, K_{3,3}$ i $K_3 \times K_2$.

La desigualtat (3.6) es satisfà de forma trivial quan $1 \leq |X| \leq d-1$. Per altra banda, com cada vèrtex és incident com a màxim a dues branques de T, obtenim $|E(T) \cap E_X| \geq |E(T)| - 2|\bar{X}|$. D'on, usant (3.2), la desigualtat (3.6) es satisfà sempre que,

$$|\bar{X}|(d - |\bar{X}| + 1) \geq (d + |X| - 1) - 2(|E(T)| - 2|\bar{X}|),$$

però, introduint l'expressió $|E(T)| = (d-1+n)/2$, la desigualtat anterior és certa, si i només si, $|\bar{X}|(d-|\bar{X}|-2) \geq 0$, és a dir, quan $0 \leq |\bar{X}| \leq d-2$. Aquest interval de valors, acaba la demostració per $d > n/2$. A més pel valor $d = n/2$, hem de considerar només subconjunts amb $d \leq |X| \leq d+1$.

Suposem que $|\partial X| \geq 2d-1$. Aleshores, la desigualtat (3.6) es satisfà trivialment quan $|X| = d$. Si $|X| = d+1$, com d és senar, $|\partial X| = d|X| - 2|E_X|$ és parell, en particular $|\partial X| \geq 2d$, i (3.6) també es verifica.

Suposem ara que $|\partial X| \leq 2d-2$. En aquest cas, el camí T l'escollim d'una manera particular. Sigui A un 3-àtom de G. Com $\lambda_3 \leq |\partial X| \leq 2d-2$, necessàriament $|A| > 3$. Pel Lema 3.10, els grafs G_A i $G_{\bar{A}}$ són hamiltonians, i podem considerar per tant, un camí T en G amb $\lfloor(|E(T)|-1)/2\rfloor$ branques en G_A i $\lceil(|E(T)|-1)/2\rceil$ en $G_{\bar{A}}$.

Quan $d > 5$, el Teorema 3.8 aplicat a $\bar{X}$ implica, o bé, $\bar{X} \subset A$, o bé $\bar{X} \subset \bar{A}$, és a dir, o bé, $\bar{A} \subset X$, o bé $A \subset X$. Per tant,

$$2|E(T) \cap E_X| \geq 2\lfloor(|E(T)|-1)/2\rfloor \geq (n+d-5)/2$$

i, com $|\partial X| \geq d$, la desigualtat (3.6) es compleix.

Finalment, quan $d = 5$, l'argumentació anterior també funciona quan G té exactament dos àtoms disjunts. De no ser aquest el cas, per l'Observació 3.9, G té cinc 3-àtoms de tamany quatre. Aleshores, T pot ser escollit de manera que tingui, com a mínim, una branca en cada 3-àtom, d'on, també en aquest cas, la desigualtat (3.6) es satisfà. Això completa la demostració. □

En la Figura 3.3 apareix un graf 5-regular amb cinc 3-àtoms de tamany quatre i un camí que permet la descomposició, ja que conté una branca en cadascun d'ells.

Observació 3.13 Notem que, quan $d > n/2$, el camí T de la demostració de l'anterior teorema, pot ser arbitràriament escollit entre tots els camins de longitud $|E| - \lfloor d/2\rfloor(n-1)$. Aquesta llibertat es pot perdre en el cas crític $d = n/2$ quan d és senar i les connectivitats són pobres. Un exemple d'aquesta restricció el trobem en el graf següent: sigui G el graf regular obtingut per la unió de dues còpies de K_d per un aparellament perfecte. Sigui T un camí de

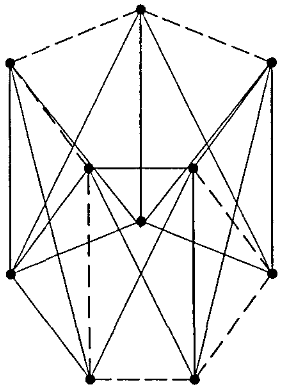


Figura 3.3: Elecció de T en un graf 5-regular amb cinc 3-àtoms.

longitud $(3d-1)/2$ que utilitza com a mínim $(d+3)/2$ branques de l'aparellament. És obvi, que el graf $G-T$ no potser descomposat en $\lfloor d/2 \rfloor$ arbres generadors. La Figura 3.4 mostra aquesta construcció quan $d=5$.

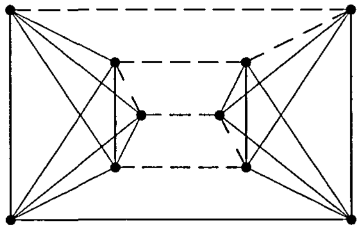


Figura 3.4: Elecció de T que no permet una descomposició minimal.

En l'exemple següent es mostra com la cota $d \geq n/2$ del Teorema 3.12 no pot ser millorada, sense introduir altres limitacions.

Exemple Sigui $d = n/2 - 1$, considerem el graf $d-$regular G obtingut per la unió de dues còpies del graf complet K_{d+1} menys una branca. Cadascun dels dos subgrafs induïts utilitza $\lfloor (d+1)/2 \rfloor$ arbres en una descomposició mínima.

Com només hi ha dues branques unint les dues còpies, una descomposició mínima en arbres de G té almenys $d-1$ arbres. Per tant, $\tau(G) \geq 2a(G) - 2$.
□

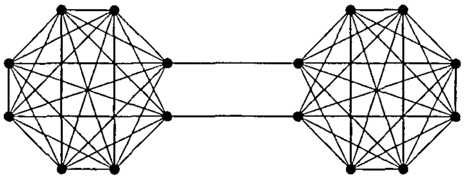


Figura 3.5: Graf $(n/2-1)$-regular amb $a(G)=4$, $\tau(G)=6$.

3.3 Extensió a grafs regulars no densos

Les tècniques que s'han fet servir fins ara per obtenir la igualtat $a(G) = \tau(G)$ per a grafs regulars densos tenen l'interès de poder ser esteses a grafs regulars de grau més petit sempre i quan es garanteixin bones propietats de connectivitat. En aquesta secció presentem dos resultats en aquesta direcció que il·lustren aquest punt de vista.

Un graf regular de grau d es diu que és maximalment branca-connex si $\lambda(G) = d$. De forma similar, G és maximalment r-branca-connex si $\lambda_i(G) = d_i(G)$ per a $i = 1, \ldots, r$, on $d_i(G)$ és el grau i-èssim que es defineix com

$$d_i(G) = \min\{|\partial X|, X \subset V(G), |X| = i\}.$$

De manera equivalent, un graf és maximalment r-branca-connex si els i-àtoms de G tenen cardinal i per a $i = 1, \ldots, r$. A [68] es demostra que si G és d-regular amb d parell i $\lambda(G) = d$ aleshores $\tau(G) = a(G)$. Quan $d = 4$, la condició de branca-connectivitat màxima és també necessària. A més, pel cas de grau imparell es veu que la condició de branca-connectivitat màxima no és suficient. Aquí provem el següent.

Teorema 3.14 *Sigui G un graf regular d'ordre n i grau $d \geq n/(r-1)+r-1$, per algun enter $3 \leq r \leq \lceil d/2 \rceil$. Si G és maximalment r-branca-connex i té un camí de llargada almenys $(n+d-1)/2$, aleshores $\tau(G) = a(G)$.*

Demostració. La demostració segueix les mateixes línies que la del Teorema 3.12. Sigui T un camí de longitud $|E(T)| = |E| - \lfloor d/2 \rfloor (n-1)$ i sigui $G' = G - T$. El resultat serà cert si provem que G' és la unió disjunta de $\lfloor d/2 \rfloor$ arbres generadors. Aquesta serà la conclusió si es compleix la desigualtat (3.6). Seguint la demostració del Teorema 3.12, sabem que la desigualtat (3.6) es compleix per a tots els subconjunts X amb o bé, $1 \leq |X| \leq d-1$, o bé, $0 \leq |\bar{X}| \leq d-2$. Per altra banda, el fet que els r-àtoms tinguin cardinal r, implica que $\lambda_r(G) \geq r(d-r+1)$. Per tant, de donar-se $r \leq |X| \leq n-r$, aleshores,

$$|\partial X| - d \geq r(d-r+1) - d \geq (d-r)(r-1) \geq n-r+1 \geq |X| - 1.$$

D'on la desigualtat (3.6) es verifica per a tots els subconjunts $X \subset V$. □

En particular, quan $r = \lceil d/2 \rceil$, el teorema anterior dóna condicions suficients per estendre el Teorema 3.12 a tot graf regular d'ordre n, amb grau $d > 2\sqrt{n}$. Aquestes condicions es poden verificar, per exemple, en els grafs vèrtexs transitius, com proven Hamidoune, Lladó, Serra i Tindell en [49]. En aquest treball es veu que si un graf vèrtex transitiu no és r-maximalment connex, aleshores té una certa estructura rígida que en fa l'anàlisi simple. A més, a [99] es prova que en aquest darrer cas, els grafs són hamiltonians.

Una mesura global de la branca-connectivitat és el *nombre isoperimètric.* El nombre isoperimètric d'un graf G es defineix com

$$i(G) = \min\{\frac{|\partial X|}{|X|}, 1 \leq |X| \leq \frac{n}{2}\}.$$

De la definició tenim clarament que $\lambda_r(G) \geq i(G)r$ per a cada $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$.

El següent teorema dóna cotes inferiors per $i(G)$ suficients per a garantir que $\tau(G) = a(G)$.

Teorema 3.15 *Sigui G un graf regular de grau d.*

1. *Si d és senar, $i(G) \geq 2$ i G conté un camí de llargada almenys $(n+d-1)/2$, aleshores $\tau(G) = a(G)$.*

2. Si d és parell i $\imath(G) \geq 1$, aleshores $\tau(G) = a(G)$.

Demostració. Com en demostracions anteriors provem que la desigualtat (3.6) es compleix per a tots els subconjunts $X \subset V$, on T un camí de longitud $|E(T)| = |E| - \lfloor d/2 \rfloor (n-1)$. Si X és un subconjunt amb o bé, $1 \leq |X| \leq d-1$, o bé, $0 \leq |\bar{X}| \leq d-2$, la desigualtat es verifica de manera trivial. Per altra banda, si $d \leq |X| \leq n-d+2$, aleshores

$$|\partial X| \geq \imath(G)|X| \geq (1+\epsilon)|X| \geq d + \epsilon(|X|-1),$$

per $\epsilon = d(\text{mod } 2)$. □

Bollobás estudia en [7] el nombre isoperimetric de grafs regulars aleatoris. Del seu estudi es dedueix que les condicions sobre el nombre isoperimètric del teorema anterior es satisfan gairebé per tots els grafs regulars amb grau $d \geq 9$ quan d és senar i amb grau $d \geq 6$ quan d és parell. Això suggereix que aquestes condicions són relativament febles. D'altra banda, les cotes inferiors per $\imath(G)$ no poden ser gaire millorades. Els exemples següents donen famílies de grafs d-regulars amb $\imath(G) = (2 - \frac{4}{d+1})$ quan d és senar i $\imath(G) = (1 - \frac{3}{d+1})$ quan és parell, per les quals el resultat del teorema anterior no és cert, en el sentit que hi ha camins que no poden pertànyer a una descomposició minimal.

Pel cas d senar, construïm un graf G_d de la manera següent. Considerem dues còpies del graf K obtingut a partir de K_{d+1} en suprimir les branques d'un cicle hamiltonià. El graf G_d s'obté en unir les dues còpies de K amb un cicle hamiltonià C construïït com segueix. Si $x_1, \ldots, x_{d+1}$ i $y_1, \ldots, y_{d+1}$ són els vèrtexs de cada còpia numerats en sentit horari seguint els cicles hamiltonians que s'han suprimit, aleshores

$$C = \{x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, y_3, \ldots, x_i, y_i, \ldots, x_{d-1}, y_{d-1}, x_d, x_{d+1}, y_d, y_{d+1}, x_1\}$$

El graf G_d és d-regular. La Figura 3.6 il·lustra la construcció per a $d = 9$ (només hi ha dibuixades les branques del cicle i d'un dels conjunts de la partició).

Anomenem X i Y els conjunts de vèrtex de cadascuna de les còpies de K a G_d. Tots els vèrtexs de X són incidents amb dues branques de ∂X llevat de 4, que són incidents amb una. Així doncs, $\imath(G_d) \leq \frac{|\partial X|}{|X|} = \frac{2d-2}{d+1} = (2 - \frac{4}{d+1})$. Es pot comprovar que de fet es satisfà la igualtat. Si T és un camí de longitud $(3d+1)/2$ que prèn les branques del cicle de llargada $2d+2$ començant en y_1, aleshores $|E(T) \cap E_X| = 0$ i X no satisfà la desigualtat (3.6), de manera que T no pot pertànyer a una descomposició minimal de G_d.

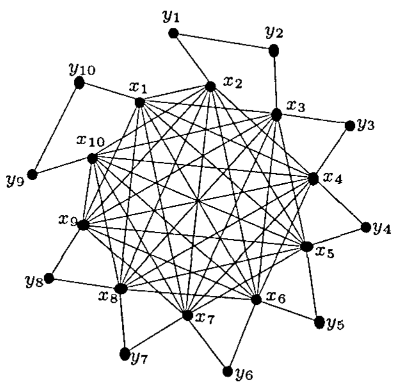


Figura 3.6: Exemple amb $d = 9$.

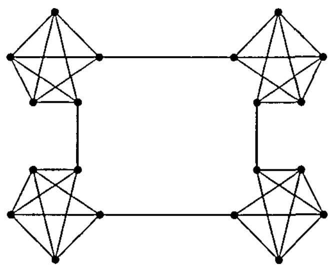


Figura 3.7: Exemple amb $d = 4$ i $H = C_4$

Per a d parell, sigui H un graf $(d-2)$ regular i K el graf obtingut a partir d'un graf complet K_{d+1} en suprimir les branques d'un aparellament de mida $(d/2)-1$. Considerem el graf G_d obtingut a partir de H insertant una còpia de K en cada vèrtex de H de manera que s'obtingui un graf d-regular. La Figura 3.7 mostra un exemple amb $H = C_4$. Si X és el conjunt de vèrtexs d'un dels grafs insertats, aleshores $i(G_d) \leq \frac{|\partial X|}{|X|} = \frac{d-2}{d+1}$ i, per a $d > 4$, es pot escollir H perquè hi hagi igualtat. En aquest cas, qualsevol subarbre de mida $d/2$ deixa intacta alguna de les còpies de K. Per tant, sempre hi ha algun conjunt X amb $|\partial X| < d$ i la equació (3.6) no es satisfà. El graf G_d no admet per tant una descomposició minimal que contingui $d/2$ arbres generadors.

El treball presentat en aquest capítol apareix recollit en l'article [45].

3.4 Conclusions i problemes oberts

En aquest capítol hem provat que tot graf regular G amb grau $d \geq \lceil |V(G)|/2 \rceil$, admet una descomposició en $a(G) - 1$ arbres generadors i un camí, assegurant d'aquesta manera la igualtat entre l'arboricitat i el nombre d'arbres per a tot graf regular dens. A més, hem justificat a partir d'un contraexemple que la cota sobre el grau és òptima.

Un fet clau en l'estudi seguit ha estat l'existència d'un camí de longitud adequada, fet que en el cas general, no sempre es dóna. Sota aquest plantejament, l'existència de descomposicions minimals queda condicionada a l'existència d'aquest camí. A partir d'un resultat de Zhenhong i Baoguang [105], es dedueix que tot graf vèrtex transitiu, admet un arbre generador amb grau màxim acotat per 3. Dirigir el problema cap a una família concreta de grafs regulars és una manera de seguir aquest treball. En aquesta línia, una opció que no sembla fàcil, és la de plantejar el problema en els grafs vèrtexs transitius, ja que en aquest cas, a més de l'existència d'aquest arbre generador de grau com a molt tres, es té un bon coneixement de l'estructura interna.

Conjectura 3.16 *Si G és un graf vèrtex transitiu, aleshores*

$$a(G) = \tau(G).$$

En aquest capítol hem provat la rellevància de les connectivitats d'ordre superior per a resoldre el problema de les descomposicions minimals. Queda pendent, però, el donar una solució contundent als grafs regulars poc densos. En aquesta línea proposem el problema següent.

Problema 3.17 *Donar condicions necessàries i suficients per assegurar $a(G) = \tau(G)$ quan G és un graf cúbic.*

Capítol 4

Descomposició en arbres de grafs densos

Resum

En aquest capítol estudiem les descomposicions minimals per grafs densos en general. Provem que $a(G) = \tau(G)$ per a tots els grafs amb grau mínim $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$ i ordre n. La cota és òptima.

4.1 Introducció

Donat un graf G, la cota inferior sobre el seu grau mínim $\delta(G) \geq |V(G)|/2$ ha suposat condició suficient per a la certesa de diversos resultats en Teoria de Grafs. El fet de tractar amb grafs amb grau mínim elevat fa que a més de considerar grafs amb gran nombre de branques, es pugui comptar amb bones condicions de connectivitat i amb l'existència de camins o cicles hamiltonians. Dirac en 1952, estableix que tot graf G amb grau mínim $\delta(G) \geq |V(G)|/2$ és hamiltonià. Més tard, Pósa en 1962 dóna una generalització (veure Teorema 4.6 de la Secció 4.2), que assegura l'existència d'un camí de longitud com a mínim igual a la suma de graus de tota parella de vèrtexs independents (quant aquesta és menor que l'ordre del graf). De manera semblant, Berman [4] prova que si G és un graf tal que la suma dels graus de tota parella de vèrtexs independents és com a mínim l'ordre del graf augmentat en una unitat, aleshores tot conjunt de branques independents es pot incloure en un cicle. És clar que tot graf hamiltonià conté un camí de longitud una unitat inferior a l'ordre del graf i que tot graf no hamiltonià conté camins de longitud com a mínim la circumferència del graf. Recentment Enomoto, Van den Heuvel, Kaneko i Saito [28] i Saito [92] han estudiat la relació entre l'ordre del camí més llarg $p(G)$ i la circumferència del graf $c(G)$ en termes del nombre mínim que s'obté en sumar els graus de tres vèrtexs independents. Així, els primers proven que si aquest nombre és com a mínim l'ordre del graf, aleshores, o el graf conté un camí hamiltonià o es verifica $c(G) > p(G) - 1$.

L'estudi de camins de longitud elevada ve motivat per la forma com plantegem la descomposició de grafs densos en arbres, a través de l'elecció d'un camí de longitud adequada que permeti descomposar la resta de branques en arbres generadors branca-disjunts. Recordem que la família de grafs on es dóna la igualtat $a_0(G) = \tau(G)$ inclou entre d'altres, els grafs maximalment planaris [57], els maximalment planaris i bipartits [86], els grafs regulars amb màxima branca-connectivitat i grau parell [68], els grafs regulars amb grau $d \geq \lfloor |V(G)|/2 \rfloor$ i els hamiltonians amb $d \geq 2\sqrt{n}$. L'objectiu d'aquest capítol és provar que aquest darrer resultat es pot estendre als grafs en general, amb una única condició sobre el grau mínim, tal com diu el teorema que segueix

Teorema 4.1 *Sigui G un graf d'ordre $n \geq 157$ i grau mínim $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$. Aleshores,*

$$a_0(G) = \tau(G).$$

La mateixa família presentada en el capítol anterior, amb $\delta(G) = (n/2) - 1$ ens permet assegurar que aquesta cota sobre el grau mínim és òptima.

Per tal de provar el Teorema 4.1, en la secció que continua introduïm una funció entera Δ (veure (4.1)) definida sobre els subconjunts de vèrtexs del graf. Utilitzant aquesta funció Δ i una versió adaptada de la fórmula de l'arboricitat (3.1) caracteritzem l'existència d'una branca-descomposició d'un graf G del tipus

$$G = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_k \oplus T_{k+1},$$

on T_i per a $i = 1, \ldots, k$ són arbres generadors i T_{k+1} és un subgraf amb $\Delta V \leq n-2$ branques, a la verificació d'una condició necessària i suficient

$$\Delta X \leq |E_X \cap E(T_{k+1})|,$$

per a tot conjunt $X \subset V$.

Comprovem que la descomposició existeix per a tot graf d'ordre n amb grau mínim $\delta(G) > \lceil n/2 \rceil$, quant T_{k+1} és un camí de ΔV branques.

En la Secció 4.3 estudiem els grafs amb grau mínim $\lfloor n/2 \rfloor \leq \delta(G) \leq \lceil n/2 \rceil$ i els conjunts pels que la desigualtat anterior pot fallar quan T_{k+1} és un camí, aquest conjunts els anomenem conjunts crítics. Seguint un raonament paral·lel al considerat en el cas regular, definim els conjunts extremals com els conjunts crítics de cardinalitat mínima que assoleixen el màxim per a la funció Δ. En base a ells, comprovem l'existència d'un camí que permet assegurar que la condició anterior és compleix per a tots els subconjunts de vèrtexs, i que demostra que la igualtat $a_0(G) = \tau(G)$ es dóna en tot graf dens.

4.2 Grafs densos

Sigui $G = (V, E)$ un graf simple d'ordre n i amb grau mínim $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$. Donat $X \subset V$, denotem amb G_X el subgraf induït per X i per E_X, el conjunt de branques de G_X. El complement en V de X el denotem amb $\bar{X}$. Utilitzarem la notació següent

$$\Delta X = |E_X| - k(|X| - 1), \tag{4.1}$$

on $k = \lfloor |E|/(n-1) \rfloor$, que és $a_0(G)$ si $|E|$ és múltiple de $n-1$, o $a_0(G)-1$ en altre cas.

Fent us d'aquesta notació, l'arboricitat $a(G) = k$ si i només si $\Delta X \leq 0$ per a tots $X \subseteq V$.

En el lema següent recollim algunes propietats elementals que es dedueixen de la definició de la funció Δ.

Lema 4.2 *1. Si $X = V$, obtenim $\Delta V = |E| - k(n-1) \leq n-2$.*

2. Si $X = \emptyset$, $\Delta X = k$; i si $X = \{v\}$, $\Delta X = 0$.

3. A més, per a qualsevol parella de subconjunts $X, Y \subseteq V$, es verifica

$$\Delta(X \cup Y) = \Delta X + \Delta Y - \Delta(X \cap Y) + e(X \setminus Y, Y \setminus X), \tag{4.2}$$

on, per a dos subconjunts disjunts $U, W \subseteq V$, $e(U, W)$ denota el nombre de branques amb exactament un extrem en U i l'altre en W. □

En particular, de la darrera propietat del Lema 4.2, deduïm que la funció Δ és supermodular, ie, $\forall X, Y \in V$,

$$\Delta(X \cup Y) \geq \Delta X + \Delta Y - \Delta(X \cap Y). \tag{4.3}$$

Al llarg d'aquest capítol, denotarem amb $\epsilon = n - 2\delta$ i per a tot subconjunt $X \subset V$, escriurem $x = |X|$, $\bar{x} = |\bar{X}|$, i $\alpha_x = x - 2k$.

El lema que segueix proporciona cotes superiors de ΔX en termes d'una parella de funcions simples que seran utilitzades més endavant.

Lema 4.3 *Per a cada subconjunt $X \subset V$,*

$$\Delta X \leq \min\{f_1(|X|),\ \Delta V - f_2(|X|)\}$$

on

$$f_1(x) = \frac{\alpha_x}{2}(x-1) \quad \text{i} \quad f_2(x) = \frac{\bar{x}}{2}(\alpha_x - \epsilon + 1).$$

Demostració. Obtenim clarament,

$$\Delta X = |E_X| - k(x-1) \leq \binom{x}{2} - k(x-1) = \frac{\alpha_x}{2}(x-1).$$

Per altra banda,

$$\Delta V = |E| - k(n-1) = |E_X| + |E \backslash E_X| - k(n-1) \geq \Delta X - k(n-x) + \delta(n-x) - \binom{n-x}{2} =$$

$$= \Delta X + \bar{x}(\delta - k) - \binom{\bar{x}}{2} = \Delta X + \frac{\bar{x}}{2}(\alpha_x - \epsilon + 1).$$

□

En el lema següent presentem una versió adaptada de la fórmula (3.1).

Lema 4.4 *Sigui S un subgraf de G, amb ΔV branques. Aleshores, el conjunt de branques $E \backslash E(S)$ descomposa en k arbres generadors disjunts, si i només si, per a cada subconjunt $X \subset V$,*

$$\Delta X \leq |E_X \cap E(S)|.$$

Demostració. Sigui $G' = (V, E \backslash E(S))$. Com $|E(G')| = k(n-1)$, G' descomposa en k arbres generadors si i només si, $a(G') = k$. Per la fórmula de l'arboricitat (3.1), això és equivalent a provar que, $|E_X \backslash E(S)| \leq k(|X|-1)$ per a cada subconjunt $X \subset V$. Ara bé, usant que $|E_X| = |E_X \backslash E(S)| + |E_X \cap E(S)|$ i la definició de ΔX, la desigualtat anterior queda garantida, si i només si, $\Delta X \leq |E_X \cap E(S)|$. □

Observació 4.5 En particular, si la condició anterior es satisfà per al tots els subconjunts de V, quan S és un arbre, la descomposició en arbres que es dedueix del Lema 4.4 garanteix que el graf té $a(G) = \tau(G) = k+1$ (o bé, $a(G) = \tau(G) = k$ quan $\Delta V = 0$).

Notem que, quan S és un camí,

$$\Delta V - 2|\bar{X}| \leq |E_X \cap E(S)|, \tag{4.4}$$

ja que el nombre mínim de branques de S en E_X, es dóna en el cas extrem que cada vèrtex de $\bar{X}$ és incident a dues branques del camí.

Amb l'objectiu de trobar un arbre S, que permeti la descomposició minimal en arbres d'un graf, utilitzarem el resultat següent, degut a Posa (veure per exemple [6]),

Teorema 4.6 (Posa) *Sigui G un graf connex d'ordre $n \geq 3$ tal que per a tota parella de vèrtexs independents u i v es té*

$$d(u) + d(v) \geq c.$$

Si $c = n$ aleshores G és hamiltonià i si $c < n$ aleshores G conté un camí de longitud c i un cicle de longitud com a mínim $(c+2)/2$.

Pel teorema anterior, tot graf amb grau mínim $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$ té un camí hamiltonià que ens permet considerar un subgraf S amb ΔV branques.

En el lema següent es caracteritzen els conjunts pels quals la desigualtat del Lema 4.4 pot fallar quan S és un camí.

Lema 4.7 *Sigui P un camí en G de longitud ΔV i $X \subset V$ tal que $\Delta X > |E_X \cap E(P)|$. Aleshores, $2k+1 \leq |X| \leq 2k+2+(n-2\delta)$ i $\delta \leq \lceil n/2 \rceil$.*

Demostració. Si $\alpha_x = x - 2k \leq 0$ aleshores $f_1(|X|) = \frac{\alpha_x}{2}(|X|-1) \leq 0$ i el Lema 4.3 implica $\Delta X \leq 0$.

Per altra banda, si $\alpha_x \geq 3+\epsilon$ aleshores $f_2(|X|) = \frac{\bar{x}}{2}(\alpha_x - \epsilon + 1) \geq 2|\bar{X}|$. Novament pel Lema 4.3 i la desigualtat (4.4), obtenim

$$\Delta X \leq \Delta V - f_2(|X|) \leq \Delta V - 2|\bar{X}| \leq |E_X \cap E(P)|.$$

Deduïm que, donat $X \subset V$ amb $\Delta X > |E_X \cap E(P)|$, necessàriament,

$$1 \leq \alpha_x \leq 2+\epsilon.$$

En particular, $\alpha_x \geq 1$, implica $\epsilon = n - 2\delta \geq -1$. Això prova el Lema.

□

La cota inferior sobre el grau mínim δ permet deduir els resultats següents.

Corol·lari 4.8 *Sigui G un graf d'ordre n i grau mínim $\delta > \lceil n/2 \rceil$. Aleshores, G és la unió branca disjunta d'un camí i $a_0(G)-1$ arbres generadors.* □

Corol·lari 4.9 *Sigui G un graf d'ordre n i grau mínim $\delta > \lceil n/2 \rceil$. Aleshores,*

$$a_0(G) = \tau(G).$$

□

4.3 Grafs crítics

D'acord amb el Corol·lari 4.9 i el contraexemple presentat en el capítol anterior per a $\delta = \frac{n}{2} - 1$, només resta provar el Teorema 4.1 per grafs d'ordre n amb grau mínim

$$\lfloor n/2 \rfloor \leq \delta \leq \lceil n/2 \rceil,$$

és a dir, per valors $\epsilon = n - 2\delta \in \{-1, 0, 1\}$.

El nombre de branques d'un graf $G = (V, E)$ d'ordre n amb grau mínim δ, verifica les desigualtats: $\delta n/2 \leq |E| \leq \binom{n-1}{2} + \delta$, d'on es dedueix que $k = \lfloor |E|/(n-1) \rfloor$, està acotada entre els valors

$$\left\lfloor \frac{\delta n}{2(n-1)} \right\rfloor \leq k \leq \left\lfloor \frac{\binom{n-1}{2} + \delta}{n-1} \right\rfloor.$$

De la cota inferior sobre k, i tenint en compte $\delta \geq (n-1)/2$, obtenim que $n \leq 4k + 3$. Anàlogament, fent ús de la cota superior sobre k, obtenim que $2k + 1 \leq n$, és a dir,

$$2k + 1 \leq n \leq 4k + 3.$$

Els conjunts del Lema 4.7, estan inclosos en la família $\mathcal{F}$ definida com

$$\mathcal{F} = \{X \subset V : \Delta X > \max\{0, \Delta V - 2|\bar{X}|\}\}.$$

Als elements de $\mathcal{F}$ els anomenen conjunts *crítics*. Un conjunt crític $A \in \mathcal{F}$ és *extremal* si satisfà,

(i) $\Delta A = \max\{\Delta X, \ X \in \mathcal{F}\} = m$,

(ii) $|A| \leq |B|$ per a tot $B \in \mathcal{F}$ tal que $\Delta B = m$.

Notem que, si $\mathcal{F} = \emptyset$, per la desigualtat (4.4) i pel Lema 4.4, $E(G)$ descomposa en qualsevol camí P de longitud ΔV i en k arbres generadors, i per tant, el Teorema 4.1 es compleix. Aquesta situació es dóna clarament, quan $n = 2k+1$ i per tant, podem restringir-nos als valors

$$2k+2 \leq n \leq 4k+3.$$

Quan $\mathcal{F} \neq \emptyset$, caldrà fer una elecció particular de P condicionada per un conjunt extremal.

La condició de conjunt extremal, permet deduir cotes inferiors sobre el grau mínim dels subgrafs induïts tant per $A \in \mathcal{F}$, com pel seu complementari.

Lema 4.10 *Sigui $A \in \mathcal{F}$ un conjunt extremal. Aleshores,*

$$\delta(G_A) \geq k+1 \text{ i } \delta(G_{\bar{A}}) \geq \delta - k - 1.$$

Demostració. Donat qualsevol $v \in A$, quan apliquem la igualtat (4.2), als conjunts $X = A \setminus \{v\}$, $Y = \{v\}$, obtenim $\Delta A = \Delta(A \setminus \{v\}) - k + e(\{v\}, A \setminus \{v\})$. Ara bé, $\Delta(A \setminus \{v\}) \geq \Delta A$ implicaria, en particular, $A \setminus \{v\} \in \mathcal{F}$, tot plegat, una contradicció amb l'extremalitat de A. D'aquí, $e(\{v\}, A \setminus \{v\}) \geq k+1$.

De manera semblant, per a qualsevol $v \in \bar{A}$, quan apliquem (4.2) als conjunts $X = A$, $Y = \{v\}$ obtenim, $\Delta(A \cup \{v\}) = \Delta A - k + e(\{v\}, A)$. Si $e(\{v\}, A) > k+1$, aleshores $\Delta(A \cup \{v\}) \geq \Delta A + 2 > \max\{0, \Delta V - 2(|\bar{A}|-1)\}$ i en particular, $A \cup \{v\} \in \mathcal{F}$, contradient l'extremalitat de A. D'aquí, $e(\{v\}, A) \leq k+1$ i $\delta(G_{\bar{A}}) \geq \delta - k - 1$. □

Aquestes fites sobre els graus mínims dels subgrafs induïts, tant per un conjunt extremal $A \in \mathcal{F}$ com pel seu complementari, són claus en la construcció d'un camí P, amb un nombre de branques suficientment gran en G_A i en $G_{\bar{A}}$.

Corol·lari 4.11 *Sigui A un conjunt extremal. Existeix un camí P_A en G amb $|A|-1$ branques en G_A i com a mínim $|\bar{A}|-2$ branques en $G_{\bar{A}}$.*

Demostració. Com G és connex, el resultat és clar si G_A i $G_{\bar{A}}$ són tots dos hamiltonians. Assumim doncs, que aquest no és el cas.

Pel Lema 4.10, sabem que $\delta(G_A) \geq k+1$ i $\delta(G_{\bar{A}}) \geq \delta - k - 1 = \frac{1}{2}(|\bar{A}| + \alpha - \epsilon) - 1 \geq \frac{|\bar{A}|}{2} - 1$, on $\alpha = |A| - 2k$. Utilitzant el Teorema 4.6, si $\alpha \leq 2$, G_A té un cicle hamiltonià C_1 i existeix un camí P_2 de longitud com a mínim $|\bar{A}| - 2$ en $G_{\bar{A}}$.

Siguin v_1 i v_2 els vèrtexs terminals de P_2 i suposem que $e(\{v_i\}, A) = 0$ per a cada valor $i \in \{1,2\}$. Com $G_{\bar{A}}$ no és hamiltonià, $e(\{v_i\}, \bar{A}) \leq |\bar{A}| - 2$, per $i \in \{1,2\}$. Ara bé, de les desigualtats $\frac{|\bar{A}|}{2} + k \leq \delta \leq e(\{v_i\}, \bar{A})| \leq \bar{A}| - 2$ deduïm, $|\bar{A}| \geq 2k+4$, una contradicció amb $n \leq 4k+3$. D'aquí, $e(\{v_i\}, A) > 0$ per algun $i \in \{1,2\}$ i per tant, podem connectar P_2 amb C_1 per tal d'obtenir P_A.

Suposem ara que G_A no és hamiltonià. Necessàriament, $\alpha = 3$ i, pel Teorema 4.6 existeix un camí hamiltonià P_1 in G_A amb vèrtexs terminals u_1 i u_2. A més, $G_{\bar{A}}$ té un cicle hamiltonià C_2. Aquesta situació, com $\alpha = 3$, pot donar-se només quan $n \geq 2k+4$, en particular $\delta \geq k+2$. Si $e(\{u_i\}, \bar{A}) = 0$ per a cada $i \in \{1,2\}$ aleshores, com en la demostració del Teorema de Dirac, podrem construir un cicle hamiltonià en G_A, ja que si P_1 és el camí $u_1 w_0 w_1 \dots w_{2k} u_2$, com $\delta \geq k+2$, necessàriament, existirà j, amb $0 \leq j \leq 2k-1$, tal que $u_1 w_{j+1}$, $w_j u_2 \in E$. Per tant, $e(\{u_i\}, \bar{A}) > 0$ per algun $i \in \{1,2\}$ i podem utilitzar una de les branques incidents en u_i i en C_2, per connectar P_1 amb C_2 i obtenir P_A. La demostració queda així completada. □

Recordem, pel Lema 4.7, que si $X \in \mathcal{F}$ aleshores $2k+1 \leq |X| \leq 2k+2+\epsilon$. Més encara, pel Lema 4.3, obtenim

$$\Delta X \leq \begin{cases} k & \text{si } \alpha_x = 1 \\ \Delta V - |\bar{X}| & \text{si } \alpha_x = 2 \\ \Delta V - \frac{3}{2}|\bar{X}| & \text{si } \alpha_x = 3 \end{cases} \tag{4.5}$$

Lema 4.12 *Sigui $X \in \mathcal{F}$. El grau mig $\hat{d}_{\bar{X}}$ dels vèrtexs en $\bar{X}$ satisfà*

$$\hat{d}_{\bar{X}} \leq \delta + 2 - \frac{\alpha_x}{2} - \frac{1}{|\bar{X}|}.$$

Demostració. Aplicant la igualtat (4.2) als conjunts X i $\bar{X}$, obtenim $\Delta V = \Delta X + \Delta \bar{X} - k + e(X, \bar{X}) = \Delta X - k|\bar{X}| + |E \setminus E_X|$.
Si $X \in \mathcal{F}$, $\Delta X \geq \Delta V - 2|\bar{X}| + 1$ que, amb la igualtat anterior, determina, $|E \setminus E_X| \leq (k+2)|\bar{X}| - 1$. Per altra banda, utilitzant el grau mig dels vèrtexs

de $\bar{X}$, obtenim, $|E \setminus E_X| \geq |\bar{X}|\hat{d}_{\bar{X}} - \binom{|\bar{X}|}{2}$. Combinant les dues desigualtats anteriors,

$$\hat{d}_{\bar{X}} \leq \frac{1}{2}(n+3-\alpha_x) - \frac{1}{|\bar{X}|} = \frac{1}{2}(2\delta+\epsilon+3-\alpha_x) - \frac{1}{|\bar{X}|}.$$

D'aquí, com $\epsilon + 3 \leq 4$, deduïm el resultat desitjat. □

Lema 4.13 *Sigui A un conjunt extremal i sigui $X \in \mathcal{F}$ amb $\beta = |X \setminus A|$. Aleshores, per a $k > 11$, o bé $\beta \leq \alpha_x$ o bé $\beta \geq k-1$. A més, si $\beta = \alpha_x$ o $\beta = k-1$, aleshores $\Delta X \leq \alpha_x(\alpha_x+1)/2$.*

Demostració. En la demostració del Lema 4.10 es dedueix que, per a tot $v \in \bar{A}$, $e(\{v\}, A) \leq k+1$. Utilitzant aquest fet, $e(X \setminus A,\ X \cap A) \leq e(X \setminus A,\ A) \leq \beta(k+1)$. Aleshores,

$$\Delta X + k(|X|-1) = |E_X| = |E_{X \setminus A}| + |E_{X \cap A}| + e(X \setminus A,\ X \cap A) \leq$$

$$\leq \binom{\beta}{2} + \binom{|X|-\beta}{2} + \beta(k+1),$$

i per tant,

$$2\Delta X \leq \beta(\beta-1) + (|X|-\beta)(|X|-\beta-1) + 2\beta(k+1) - 2k(|X|-1) =$$

$$= \beta(\beta+1) + (|X|-\beta)(|X|-\beta-1) - 2k(|X|-\beta-1),$$

és a dir,

$$2\Delta X \leq (|X|-\beta-1)(|X|-\beta-2k) + \beta(\beta+1) = (|X|-\beta-1)(\alpha_x-\beta) + \beta(\beta+1).$$

D'aquí, per a tot $\alpha_x+1 \leq \beta \leq k-2$, ($k > 11$), es té $\Delta X \leq 0$. A més, si o bé, $\beta = \alpha_x$ o bé, $\beta = k-1$, es verifica,

$$\Delta X \leq \alpha_x(\alpha_x+1)/2.$$

□

Per tal de demostrar el resultat principal d'aquesta secció ens cal introduir una nova funció.

Donats dos subconjunts $X, Y \subset V$ denotem $r = |X \cap Y|$, $s = |X \cup Y|$ i definim

$$f(r,s) = f_2(s) - f_1(r).$$

Pel Lema 4.3, $\Delta(X \cap Y) \leq f_1(r)$ i $\Delta(X \cup Y) \leq \Delta V - f_2(s)$. Utilitzant aquests fets i la supermodularitat de Δ (4.3), es té,

$$\Delta X + \Delta Y + f(r,s) \leq \Delta X + \Delta Y - \Delta(X \cap Y) + f_2(s) \leq$$
$$\leq \Delta(X \cup Y) + f_2(s) \leq \Delta V.$$

D'aquesta manera, $\Delta X + \Delta Y + f(r,s) \leq \Delta V$. En particular, si A és un conjunt extremal,

$$2\Delta X \leq \Delta X + \Delta A \leq \Delta V - f(r,s). \tag{4.6}$$

Finalment, presentem el teorema que ens permet concloure la demostració del resultat que presentàvem en la introducció d'aquest capítol.

Teorema 4.14 *Sigui G un graf d'ordre $n \geq 157$ i grau mínim $\lfloor n/2 \rfloor \leq \delta \leq \lceil n/2 \rceil$. Aleshores, G és la unió branca disjunta d'un camí i $a_0(G)-1$ arbres generadors.*

Demostració. Pel Teorema 4.6, la condició sobre el grau mínim garanteix l'existència d'un camí en G de longitud com a mínim $n-2$. Sigui P be un camí de longitud ΔV. Denotem per

$$\mathcal{F}_P = \{X \subset V : \Delta X > |E_X \cap E(P)|\}.$$

Pel Lema 4.4, si existeix un camí P tal que $\mathcal{F}_P = \emptyset$ aleshores, G descomposa en P i k arbres generadors. Notem que, per la desigualtat (4.4), $\mathcal{F}_P \subseteq \mathcal{F}$ per a cada camí P de longitud ΔV. Demostrarem que sempre existeix un camí P tal que $\mathcal{F}_P = \emptyset$.

Assumim que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Sigui A un conjunt extremal, notem per $\alpha = |A| - 2k$. Sigui P_1 un camí de longitud ΔV amb $\min\{|A|-1, \Delta V\}$ branques en G_A. Tal camí existeix pel Corol·lari 4.11.

Pel Lema 4.3 i (4.5) si $\alpha = 1$ aleshores, $\Delta A \leq \min\,\{k,\ \Delta V - f_2(|A|)\} \leq \min\,\{|A|-1,\ \Delta V\}$. Si $2 \leq \alpha \leq 3$ aleshores, $\Delta A \leq \min\,\{|A|-1,\ \Delta V - |A|\} \leq \min\,\{|A|-1,\ \Delta V\}$. En tots aquests casos, $\Delta A \leq |E_A \cap E(P_1)|$. D'aquí que, si $|\mathcal{F}| = 1$ aleshores $\mathcal{F}_{P_1} = \emptyset$, i el teorema queda demostrat.

Assumim que $|\mathcal{F}| \geq 2$ i sigui $X \in \mathcal{F} \setminus \{A\}$. De l'elecció de P_1, es té

$$|E_X \cap E(P_1)| \geq |E_A \cap E(P_1)| - 2\beta' \geq \min\{|A| - 2\beta' - 1,\ \Delta V - 2\beta'\}, \tag{4.7}$$

on $\beta' = |A \setminus X|$. Notem que si $\beta' = 0$ aleshores, pel fet de ser A un conjunt extremal, es verifica $\Delta X \leq \Delta A \leq |E_A \cap E(P_1)| \leq |E_X \cap E(P_1)|$, i $X \notin \mathcal{F}_{P_1}$. Per tant, cal considerar només, conjunts $X \in \mathcal{F}$, amb $|A \setminus X| > 0$.

Considerem dos casos.

Cas 1. $\mathbf{2k + 2 \leq n \leq 2k + 12}$.

Escrivim $n = 2k + l$, $2 \leq l \leq 12$. Definim $L = \{x \in V : d(x) < \delta + l + 4\}$.

Demostrarem que tot conjunt de $\mathcal{F}$ conté $\bar{L}$ i, a més, que L té pocs elements.

Suposem que $X \in \mathcal{F}$ i $\bar{X} \cap \bar{L} \neq \emptyset$. En aquest cas, un dels vèrtexs de $\bar{X}$ té grau com a mínim $\delta + l + 4$ i el grau mig del $\bar{X}$ verifica,

$$\hat{d}_{\bar{X}} \geq \frac{1}{|\bar{X}|}(\delta(|\bar{X}| - 1) + (\delta + l + 4)) = \delta + \frac{l+4}{|\bar{X}|}.$$

Ara bé, com $|\bar{X}| = n - |X| = l - \alpha_x \leq 11$,

$$\delta + \frac{l+4}{|\bar{X}|} = \delta + 2 - \frac{\alpha_x}{2} - \frac{1}{|\bar{X}|} - 2 + \frac{\alpha_x}{2} + \frac{l+5}{|\bar{X}|} =$$

$$\delta + 2 - \frac{\alpha_x}{2} - \frac{1}{|\bar{X}|} - 1 + \frac{\alpha_x}{2} + \frac{\alpha_x + 5}{|\bar{X}|} > \delta + 2 - \frac{\alpha_x}{2} - \frac{1}{|\bar{X}|},$$

contradient el Lema 4.12. D'aquí, $\bar{X} \cap \bar{L} = \emptyset$, $\bar{L} \subset X$, i per tant,

$$\bar{L} \subset \cap_{X \in \mathcal{F}} X. \tag{4.8}$$

Per altra banda, si $|L| \geq 2(l+3)$, com $n \geq 157$ i $\delta \leq k + l$,

$$2|E| = \sum_{x \in V} d(x) \leq (n - |L|)(n-1) + |L|(\delta + l + 3) \leq$$

$$\leq 2k(n-1) - (l+6)(n-1) + 2(l+3)(\delta + l + 3) < 2k(n-1),$$

contradient $\Delta V \geq 0$.

Cas 1.1. $\mathbf{\Delta V < n - |L|}$.

Com el grau de tots els vèrtexs en $G_{\bar{L}}$ és com a mínim $\delta + l + 4 - |L| > (n-1)/2 + l + 4 - 2l - 6 \geq (n - 2l - 5)/2 \geq |\bar{L}|/2$, el graf $G_{\bar{L}}$ és hamiltonià. Per tant, existeix un camí P_2 de longitud ΔV amb totes les seves branques en $G_{\bar{L}}$. Utilitzant (4.8), per a tot $X \in \mathcal{F}$, obtenim $|E_X \cap E(P_2)| = |E_{\bar{L}} \cap E(P_2)| = \Delta V \geq \Delta X$. D'aquí, $\mathcal{F}_{P_2} = \emptyset$.

Cas 1.2. $\Delta V \geq n - |L|$.

Vegem com en aquest cas, $\mathcal{F}_{P_1} = \emptyset$. Suposem el contrari i sigui $X \in \mathcal{F}_{P_1}$, és a dir, $\Delta X > |E_X \cap E(P_1)|$. Com $\beta = |X \setminus A| \leq n - |A| \leq 2k + 12 - |A| < k - 1$ (per a $k > 12$), el Lema 4.13 implica $\beta \leq \alpha_x$. Per tant, $1 \leq \beta' = |A \setminus X| = \alpha - \alpha_x + \beta \leq \alpha$. Utilitzant ara, la desigualtat (4.7),

$$\Delta X \geq \min\{2k - \alpha, \Delta V - 2\alpha + 1\} \geq 2k - l - 2\alpha - 4.$$

Per la desigualtat (4.6), obtenim $2\Delta X \leq \Delta V - f(r, s)$, on $r = |X \cap A|$ i $s = |X \cup A|$. Si $r \leq 2k + 1$, aleshores $f(r, s) \geq -f_1(r) \geq -k$. D'on deduïm, $\Delta V \geq 2\Delta X - k \geq 3k - 2l - 4\alpha - 8$, contradient, $\Delta V \leq n - 2 \leq 2k + 10$ (quan $k > 54$). Necessàriament, $r = 2k + 2$, fet que implica $|A| = 2k + 3$, $\beta' = 1$, i que n sigui un enter senar. Usant ara (4.5) i la condició de conjunt extremal de A, obtenim

$$\Delta X \leq \Delta A \leq \Delta V - \frac{3}{2}|\bar{A}| \leq \min\{|A| - 3, \Delta V - 2\},$$

quan $|\bar{A}| \geq 2$, una contradicció amb (4.7), i per tant, $X \notin \mathcal{F}_{P_1}$. És a dir, $X \in \mathcal{F}_{P_1}$, només pot donar-se, quan $|\bar{A}| = 0$, $|X| = 2k + 2$. Ara bé, pel Lema 4.3, $\Delta X \leq \min\{2k+1, \Delta V - 1\} = \Delta V - 1$, i d'acord amb (4.7), $\Delta X = \Delta V - 1$, però de la definició de Δ, això implicaria $e(X, A \setminus X) = \delta$, i que el camí és adjacent amb dues branques a $A \setminus X$. Ara bé, tot seguit provem que en aquestes circumstàncies, $n = 2k + 3$ ($l = 3$), $\Delta V \geq n - |L| \geq 2k + 3 - (2l + 5) = 2k - 8$, només pot haver un vèrtex amb grau mínim $\delta = (n-1)/2$.

Aquest fet és clar, ja que si suposem que hi ha més de dos vèrtexs amb grau mínim, aleshores

$$2k - 8 + k(2k + 2) \leq \Delta V + k(|E| - 1) = |E| \leq \binom{2k+1}{2} + 2(k+1),$$

una contradicció pels valors de $k \geq 11$. En cas que, $n = 2k + 3$, i $\Delta V \geq 2k - 8$, n'hi haurà prou, en triar el camí de manera que sigui adjacent al vèrtex de grau mínim com a màxim en una branca.

Cas 2. $2k + 13 \leq n \leq 4k + 3$.

Sigui $X \in \mathcal{F}$ i $r = |A \cap X|$. De la desigualtat (4.6), per a $6 \leq r \leq 2k - 5$, obtenim

$$\Delta V \geq \Delta A + \Delta X + f(r,s) \geq 2 - f_1(r) \geq 5k - 13 > n - 2,$$

una contradicció. D'aquí que, necessàriament, o bé, $r \leq 5$ o bé, $r \geq 2k - 4$. A partir d'aquests valors, classifiquem els conjunts crítics. Introduïm

$$\mathcal{F}_1 = \{X \in \mathcal{F} : |A \cap X| \leq 5\} \quad \text{i} \quad \mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_1.$$

Pel Lema 4.13, si $X \in \mathcal{F}_2 \setminus \{A\}$, aleshores

$$\beta' = |A \setminus X| = |A| - |X| + |X \setminus A| = \alpha - \alpha_x + \beta \leq \alpha. \tag{4.9}$$

Cas 2.1. $\mathcal{F}_1 = \emptyset$.

Vegem com $\mathcal{F}_{P_1} = \emptyset$, i per tant, el camí construït a partir de A també serveix en aquest cas. D'acord amb (4.9), per a cada $X \in \mathcal{F}$,

$$|E_X \cap E(P_1)| \geq \min\{|A| - 1, \Delta V\} - 2\alpha.$$

Pel Lema 4.3, com $|\bar{A}| = n - |A| \geq 2k + 13 - (2k + 3) = 10 \geq 4$, aleshores

$$\Delta X \leq \Delta A \leq \Delta V - f_2(|A|) \leq \Delta V - \frac{|\bar{A}|}{2}\alpha \leq \Delta V - 2\alpha.$$

Per altra banda, de (4.5), si $\alpha_x = 1$ (o bé, $\alpha = 1$),

$$\Delta X \leq k \leq |A| - 7 \leq |A| - 2\alpha - 1,$$

mentre que, per $\alpha_x = 3$, usant $|\bar{X}| = n - |\bar{X}| \geq 10$

$$\begin{aligned}\Delta X \leq \Delta V - \frac{3}{2}|\bar{X}| \leq n - 2 - \frac{3}{2}|\bar{X}| = |X| - 2 - \frac{1}{2}|\bar{X}| \leq \\ \leq |X| - 7 = |A| - \alpha + \alpha_x - 7 \leq |A| - 2\alpha - 1.\end{aligned}$$

De forma semblant, si $\alpha = 3$, es té, $\Delta X \leq \Delta A \leq \Delta V - \frac{3}{2}|\bar{A}| \leq |A| - 7$. D'aquí que, necessàriament, $\Delta A \geq \Delta X > |A| - 2\alpha - 1$, implica $\alpha_x = \alpha = 2$ i, com estem considerant, només $X \in \mathcal{F}$ amb $|A \setminus X| \geq 1$, $r = |A \cap X| \leq 2k + 1$, i $s = |A \cup X| \geq 2k + 3$. Ara bé, la desigualtat (4.6), ens porta

$$4k - 4 = 2|A| - 4\alpha \leq \Delta A + \Delta X \leq \Delta V - f(r,s) \leq n - 2 + k - \frac{3}{2}(n - 2k - 3),$$

és a dir, $n \leq 13$, una contradicció. $X \notin \mathcal{F}_{P_1}$ es compleix en tots els casos.

Cas 2.2. $\mathcal{F}_1 \neq \emptyset$.

Sigui $B \in \mathcal{F}_1$, amb $\Delta B = \max_{X \in \mathcal{F}_1} \Delta X$. Aleshores,

$$n \geq |A| + |B| - |A \cap B| \geq 4k - 3.$$

Afirmem que

$$\text{si} \quad X \in \mathcal{F}_2 \setminus \{A\} \quad \text{aleshores} \quad \Delta X \leq k + 4. \tag{4.10}$$

En efecte, ja que per la desigualtat (4.5), si $\alpha_x = 1$ o bé, si $\alpha = 1$, aleshores $\Delta X \leq k$, i si $\alpha_x = 3$, com $|\bar{X}| = n - |\bar{X}| \geq 2k - 6$, implica

$$\Delta X \leq \Delta V - \frac{3}{2}|\bar{X}| \leq n - 2 - \frac{3}{2}|\bar{X}| = |X| - 2 - \frac{1}{2}|\bar{X}| \leq k + 4.$$

De forma semblant, si $\alpha = 3$, es té, $\Delta X \leq \Delta A \leq \Delta V - \frac{3}{2}|\bar{A}| \leq k + 4$.

D'aquí que, necessàriament, $\Delta A \geq \Delta X > k + 4$, implica $\alpha_x = \alpha = 2$. Pel Lema 4.13, $|X \setminus A| = |A \setminus X| \leq \alpha_x = 2$. Més encara, si $|A \setminus X| = 2$, aleshores $\Delta X \leq 3 \leq k + 4$. Per tant, $|A \setminus X| = 1$. Aleshores, usant (4.6),

$$n - 2 \geq \Delta V \geq \Delta A + \Delta X + f(|X \cap A|, |X \cup A|) \geq 2k + 10 + \frac{3}{2}(n - (2k+3)) - k,$$

que implica $n \leq 4k - 15$, una contradicció. Això prova (4.10).

Cas 2.2.1 $\mathbf{\Delta V \geq \Delta A + \Delta B + 34}$.

Obtenim $\Delta B \leq |\bar{A}| - 14$, ja que en cas contrari,

$$n - 2 \geq \Delta V \geq 2\Delta B + 34 \geq 2(|\bar{A}| - 13) + 34 = 2n - 2|A| + 8,$$

i aleshores $n \leq 4k-4$, una contradicció. Per tant, existeix un enter h, satisfent les desigualtats

$$\begin{array}{rcl} \min\{\Delta A+6, |A|-1\} \leq & h & \leq |A|-1 \\ \Delta B+12 \leq & \Delta V-h-1 & \leq |\bar{A}|-2. \end{array}$$

Pel Corol·lari 4.11 existeix un camí P_3 amb h branques en G_A i $\Delta V-h-1$ branques en $G_{\bar{A}}$. A continuació provem que $\mathcal{F}_{P_3}=\emptyset$. Clarament, $A \notin \mathcal{F}_{P_3}$.

Pel Lema 4.13 i (4.10), si $X \in \mathcal{F}_2 \setminus \{A\}$,

$$|E_X \cap E(P_3)| \geq |E_A \cap E(P_3)| - 2|A \setminus X| \geq \min\{\Delta A+6, |A|-1\} - 6 \geq \Delta X.$$

Per altra banda, si $X \in \mathcal{F}_1$, aleshores $|\bar{A} \setminus X| = n - |A| - |X| + |A \cap X| \leq 6$. Per tant,

$$|E_X \cap E(P_3)| \geq |E_{\bar{A}} \cap E(P_3)| - 2|\bar{A} \setminus X| \geq \Delta B \geq \Delta X.$$

En tots dos casos deduïm $X \notin \mathcal{F}_{P_3}$.

Cas 2.2.2 $\Delta \mathbf{V} < \Delta \mathbf{A} + \Delta \mathbf{B} + 34$.

Vegem en primer lloc, que la condició que caracteritza aquest cas, es presenta només en un parell de situacions. Així, per una banda, per (4.6), si $2 \leq |A \cap B| \leq 5$, aleshores $\Delta V \geq \Delta A + \Delta B - f_1(2) = \Delta A + \Delta B + k - 1$. Per una altra banda, si $|A \cap B| = 1$ i $|A \cup B| < n$, novament per (4.6), $\Delta V \geq \Delta A + \Delta B + f_2(n-1) \geq \Delta A + \Delta B + k - 2$.

Finalment, suposem que $|A \cap B| = 0$. Com $\delta \geq (n-1)/2 \geq (|A|+|B|-1)/2 \geq (2\min\{|A|,|B|\}-1)/2$, i δ és un enter, aleshores $\delta \geq \min\{|A|,|B|\}$. Fet que implica que, o bé $e(A,\bar{A}) \geq |A|$, o bé, $e(B,\bar{B}) \geq |B|$. A més, $0 \leq n - |A \cup B| \leq 4k+3-(4k+2) = 1$. Per (4.2), introduint $X=A$ i $Y=B$, si $|A \cup B| = n$, és a dir, $B=\bar{A}$, obtenim

$$\Delta V = \Delta A + \Delta B - \Delta(A \cap B) + e(A,B) \geq \Delta A + \Delta B + k + 1,$$

mentre que si $|A \cup B| = n-1$, en particular , $|A|=|B|=2k+1 \leq \delta$, i usant (4.2) dues vegades, obtenim

$$\Delta V = \Delta(A \cup B) + \Delta(\bar{A} \cap \bar{B}) - k + e(A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B}) =$$

$$= \Delta A + \Delta B - 2k + e(A,B) + e(A \cup B, \bar{A} \cap \bar{B}) \geq$$

$$\geq \Delta A + \Delta B - 2k + \frac{3}{2}\delta \geq \Delta A + \Delta B + k.$$

D'aquí, com $k \geq 36$, l'única alternativa compatible amb $\Delta V < \Delta A + \Delta B + 34$ es dóna quan $A \cap B = \{x_0\}$ i $|A \cup B| = n$. En particular, $n \geq 4k+1$. A més, per (4.2), $\Delta V = \Delta A + \Delta B + e(A \setminus B, B \setminus A)$, on $e(A \setminus B, B \setminus A) \leq 33$. D'aquí, necessàriament, $\delta < \min\{|A|, |B|\}$. Ara bé, tenint en compte, $|A \cap B| = 1$, $|A \cup B| = n$ ens surten sis combinacions per als cardinals de A i B, i una o dues opcions en cadascuna d'elles per a δ,

A	B	n	δ
$2k+1$	$2k+1$	$4k+1$	$2k$ o $2k+1$
$2k+1$	$2k+2$	$4k+2$	$2k+1$
$2k+1$	$2k+3$	$4k+3$	$2k+1$ o $2k+2$
$2k+2$	$2k+1$	$4k+2$	$2k+1$
$2k+2$	$2k+2$	$4k+3$	$2k+1$ o $2k+2$
$2k+3$	$2k+1$	$4k+3$	$2k+1$ o $2k+2$.

D'aquestes, només dues respecten la condició $\delta < \min\{|A|, |B|\}$, o bé, $\delta + 1 = |A| = |B| = 2k+1$, o bé, $\delta + 1 = |A| = |B| = 2k+2$.

Per altra banda, si denotem per $c = e(A \setminus B, B \setminus A)$, com a mínim $|A| - c$ vèrtexs en A, tenen totes les seves adjacències en A, i en particular, $d(x_0) \geq |A| - c$. D'on el grau mínim en G_A és més gran que $|A| - c \geq 2k - 32 \geq |A|/2$. Per tant, G_A és un graf hamiltonià. El mateix, pot aplicar-se a B, per veure que també G_B és hamiltonià.

Sigui ara un camí P_4 amb com a mínim ΔA branques en G_A i com a mínim ΔB branques en G_B, contenint x_0. De la construcció de P_4, clarament $A \notin \mathcal{F}_{P_4}$ i $B \notin \mathcal{F}_{P_4}$.
Tot seguit, veiem con donat $X \in \mathcal{F}$, $X \notin \mathcal{F}_{P_4}$. A tal fi denotem per $X_1 = X \cap A$ i per $X_2 = X \cap B$, aleshores,

$$\Delta X \leq \binom{|X_1|}{2} + \binom{|X_2|}{2} + c - k(|X| - 1) =$$

$$\frac{1}{2}|X_1|(|X_1| - 2k - 1) + \frac{1}{2}|X_2|(|X_2| - 2k - 1) + c + k(1 + |X_1 \cap X_2|), \quad (4.11)$$

on $|X_1 \cap X_2|$ és, o bé, 1 si $x_0 \in X$, o bé, 0, en cas contrari.

Suposem que $|X_2| \leq |X_1|$, l'altre cas es fa de manera similar. Per (4.11), si $2 \leq |X_2| \leq |X_1| \leq 2k-1$, aleshores $\Delta X \leq -(4k-2)+c+2k \leq c+2-2k < 0$. En particular, $|X_2| < |X_1|$.

Vegem ara, com $|A \setminus X| < \alpha \leq 2$. Suposem el contrari, $|A \setminus X| \geq \alpha$. Si $x_0 \in X$, aleshores $2 \leq |X_2| < |X_1| \leq 2k$. Per (4.11), obtenim $\Delta X \leq -3k+1+c+2k \leq c+1-k < 0$. De manera semblant, si $x_0 \notin X$, aleshores, $1 \leq |X_2| < |X_1| \leq 2k$, i (4.11) dóna $\Delta X \leq -2k+1+c+k = c-k < 0$.

Si $|A \setminus X| = 0$, aleshores $|E_X \cap E(P_4)| \geq |E_A \cap E(P_4)| \geq \Delta A \geq \Delta X$. Finalment, sigui $\{u\} = A \setminus X$, en particular $\alpha = 2$. Com el grau mínim en G_A és com a mínim $\delta - c$, $e(u, X_1) \geq \delta - c$. Aplicant (4.2) als conjunts X_1 i $\{u\}$, obtenim

$$\Delta A = \Delta X_1 - k + e(u, X_1) \geq \Delta X_1 - k + \delta - c \geq \Delta X_1 + 2.$$

Ara bé, si $X \neq X_1$, aleshores $|X_2| \leq 2$ i, usant novament (4.2), amb conjunts X_1 i $X_2 \setminus X_1$, obtenim $\Delta X = \Delta X_1 + \Delta(X_2 \setminus X_1) - k + e(X_1, X_2 \setminus X_1) \leq \Delta X_1 + \Delta(X_2 \setminus X_1) - k + c \leq \Delta X_1 - k + c < \Delta X_1$, ja que $\Delta(X_2 \setminus X_1) \leq 0$. Per tant, $|E_X \cap E(P_4)| \geq |E_A \cap E(P_4)| - 2 \geq \Delta A - 2 \geq \Delta X_1 \geq \Delta X$.

És a dir, en aquest cas, $\mathcal{F}_{P_4} = \emptyset$. Això completa la demostració. □

El treball presentat en aquest capítol apareix recollit en l'article [65].

4.4 Conclusions i problemes oberts

En aquest capítol hem provat que la igualtat $a_0(G) = \tau(G)$ es dóna en tots els grafs amb grau mínim $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$, estenent d'aquesta manera el resultat obtingut en el capítol anterior per a grafs regulars. També com passava en el cas regular, la demostració en els casos límits, $\lfloor n/2 \rfloor \leq \delta \leq \lceil n/2 \rceil$, ens ha portat a estudiar l'estructura interna dels conjunts que hem anomenat crítics, i entre ells, els extremals ens han permès construir un camí de mida adequada. En pro de la claredat hem deixat per resoldre els casos límit dels grafs amb ordre $n \leq 156$. La sospita en aquests casos, és que el resultat també és cert, ja que en les demostracions inicials, quan consideràvem grau mínim parell, ens sortien valors propers a 25. El trobar una demostració que inclogui aquests casos, és una de les qüestions pendents.

Problema 4.15 *Donat un graf G amb ordre $n \leq 156$ i grau mínim $\delta \geq \lfloor n/2 \rfloor$, és cert que $a_0(G) = \tau(G)$?*

El graf d'arbres d'un graf és connex, és a dir, es pot passar d'un arbre generador a un altre via una seqüència d'intercanvis de branques. Farber, Ritchter i Shank proven en [31] que tota parella d'arbres generadors disjunts pot obtenir-se a partir de tota altra parella d'arbres generadors, a través d'una seqüència de canvis, que en cada cas, afecten a dues branques. Els mateixos autors en [31] proposen estendre el problema augmentant el nombre d'arbres generadors implicats. En aquesta línia plantegem la qüestió següent.

Problema 4.16 *Donades dues descomposicions minimals d'un graf, determinar quines condicions ha de complir el graf, per tal que existeixi una seqüència de descomposicions minimals que ens permeti passar d'una descomposició a l'altra?*

Capítol 5

Descomposicions de grafs bipartits i complets

Resum

En aquest capítol estudiem un tipus de descomposicions diferents a les estudiades en els capítols anteriors, concretament, ens centrem en la descomposició del graf bipartit i complet $K_{n,n}$ en n còpies d'un arbre donat, qüestió que abordem des del concepte d'etiquetaments bigraceful, ja que si un arbre admet un etiquetament d'aquest tipus, aleshores descomposa $K_{n,n}$. Presentem eines per a la construcció d'etiquetaments bigraceful, que ens permeten provar el caràcter bigraceful d'algunes famílies d'arbres. En aquells casos on aquesta tasca no ha estat encara factible, provem que tot arbre T amb n branques i radi r, descomposa $K_{2hn,2hn}$, on h és com a molt $\lceil r/4 \rceil$. Més encara, si l'arbre base de T és bigraceful o existeix un vèrtex x en T, tal que $|V_i(x)| \geq \sqrt{2}|V_{i-1}(x)|$, per a tot $i \geq 1$ amb $|V_i(x)| \neq \emptyset$, on $|V_i(x)|$ és el conjunt de vèrtexs a distància i de x, aleshores T descomposa $K_{2n,2n}$.

5.1 Introducció

En els capítols anteriors d'aquesta tesi hem exposat resultats sobre descomposicions minimals en arbres, que estudiaven per una banda, la presència de determinats arbres en descomposicions minimals, i per altra, el nombre d'arbres, és a dir, el nombre mínim de subgrafs acíclics i connexos que constitueïen la descomposició.

Quan en una descomposició d'un graf en subgrafs, el graf induït per cada part de la descomposició és isomorf a un graf H, diem que H *descomposa* G i escrivim $H|G$. En aquest capítol, pretenem estudiar les branca-descomposicions del graf bipartit i complet en grafs isomorfs a un arbre donat. En particular, estem interessats en la conjectura que segueix, plantejada per Häggkvist en [47].

Conjectura 5.1 (Häggkvist [47]) *El graf bipartit i complet $K_{n,n}$ descomposa en n còpies de qualsevol arbre amb n branques.*

El tractament que seguim per estudiar aquest tipus de descomposició segueix un paral·lelisme amb el rebut per una famosa conjectura, plantejada en 1963 per G. Ringel.

Conjectura 5.2 (Ringel [85]) *Si T és un arbre amb n branques, aleshores el graf complet K_{2n+1} és branca-descomposable en $2n+1$ còpies de T.*

La manera natural d'enfocar ambdós problemes radica en cercar una solució simètrica i cíclica, tal com suggereix Kotzig en 1966, plantejant una aproximació a la conjectura de Ringel com un problema d'etiquetament.

Rosa [87] en 1966 introdueix diversos models d'etiquetaments dirigits a trobar descomposicions cícliques dels grafs complets. Un d'aquests etiquetaments és popularitzat com *graceful* per Golomb [41] i des d'aleshores la conjectura Ringel-Kotzig, es coneix amb el nom de conjectura dels *arbres graceful*.

Conjectura 5.3 ([87]) *Tot arbre és graceful.*

Si H és un graf amb n branques, un etiquetament *graceful* de H és una injecció $f : V(H) \longrightarrow [0, n]$, tal que els valors $|f(x) - f(y)|$ per a totes les parelles de vèrtexs adjacents són, dos a dos, diferents. Si H admet un etiquetament graceful aleshores, H descomposa K_{2n+1} [87].

Malgrat el gran nombre d'articles que s'han publicat al respecte, la conjectura és encara oberta, si bé, s'ha demostrat el caràcter graceful de moltes famílies d'arbres. Recentment, Gallian [38] ha publicat un ampli i complert survey sobre grafs graceful i problemes d'etiquetaments similars.

A continuació presentem una versió bipartida del problema, introduint un tipus d'etiquetament que s'adapta a l'estructura bipartida dels arbres.

Sigui $H = H(A, B)$ un graf bipartit amb n branques i conjunts estables A i B. Direm que una parella d'aplicacions injectives $f_A : A \longrightarrow [0, n-1]$ i $f_B : B \longrightarrow [0, n-1]$ és un *etiquetament bigraceful* de H (respecte la partició ordenada (A, B)), si l'etiquetament induït en les branques $xy \in E(H)$, $f_E(xy) := f_B(y) - f_A(x)$, on $x \in A$, $y \in B$ és bijectiu en $[0, n-1]$. En aquest cas, diem que H és un *graf bigraceful.* La Figura 5.1 mostra un etiquetament bigraceful d'un arbre.

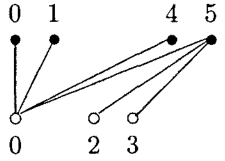


Figura 5.1: Etiquetament bigraceful.

La connexió entre els etiquetaments i les branca-descomposicions queda recollida en el lema següent.

Sigui $(\mathcal{G}, +)$ un grup d'ordre n i sigui $\mathcal{S}$ un conjunt de generadors de $\mathcal{G}$. Notem per $G = \mathcal{G}_\mathcal{S}(2)$ el graf bipartit amb conjunt de vèrtexs $V(G) = \mathcal{G} \times \{0, 1\}$ i conjunt de branques $E(G) = \{(g, 0)(g + s, 1),\ g \in \mathcal{G},\ s \in \mathcal{S}\}$. El graf G està equipat amb una branca-coloració en el sentit propi que assigna el color $s \in \mathcal{S}$ a la branca $(g, 0)(g + s, 1)$, per a $g \in \mathcal{G}$.

Lema 5.4 *Sigui H un subgraf de $\mathcal{G}_\mathcal{S}(2)$. Si no hi ha dues branques de H amb el mateix color, aleshores $|\mathcal{G}|$ còpies de H poden ser empaquetades en $\mathcal{G}_\mathcal{S}(2)$. En particular, si H té $|\mathcal{S}|$ branques, aleshores $H|G$.*

Demostració. Donat $g \in \mathcal{G}$, considerem $\phi_g(x, i) = (x + g, i)$, per a cada

$x \in \mathcal{G}$ i $i \in \{0,1\}$. Clarament, ϕ_g representa un automorfisme de $\mathcal{G}_S(2)$, que preserva els colors de les branques i, a més, si $g \neq 0$, no té punts fixos. D'aquí deduïm que els $|\mathcal{G}|$ subgrafs $\phi_g(H)$, per a $g \in \mathcal{G}$, són isomorfs i disjunts en branques. □

En cas que, $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_n$ i $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, el graf $\mathcal{G}_S(2)$ que s'obté és el graf bipartit i complet $K_{n,n}$ amb una branca-coloració. Si $f = (f_A, f_B)$ és un etiquetament bigraceful de $H(A, B)$, aleshores H pot injectar-se en $\mathcal{G}_S(2)$, de manera que no hi hagi dues branques amb el mateix color. D'aquí pel Lema 5.4, H descomposa $K_{n,n}$.

A manera d'exemple, considerem l'arbre T de la Figura 5.2. Si el traslladem cíclicament tres cops, obtenim una branca descomposició de $K_{4,4}$.

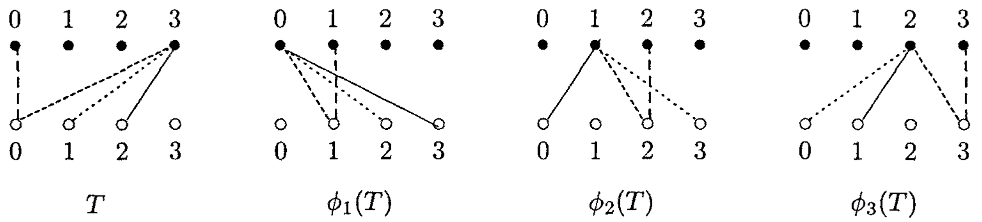


Figura 5.2: Descomposició cíclica de $K_{4,4}$ en còpies de T.

Observació 5.5 L'arbre de la Figura 5.2 es mostra amb un etiquetament bigraceful. El fet que l'etiqueta zero aparegui en una de les branques implica que els dos conjunts estables comparteixen almenys una etiqueta. Anàlogament, l'etiqueta $n-1$ en una branca obliga que en un dels conjunts estables aparegui l'etiqueta zero, alhora que en l'altre aparegui l'etiqueta $n-1$.

Diem que un etiquetament bigraceful f de $H(A, B)$ és *consecutiu* si $f_A(A) = [0, |A|-1]$ i $f_B(B) = [|A|-1, n-1]$. En aquest cas, redefinint f_B per $f_B + 1$, f esdevé un α-etiquetament, és a dir, un dels tipus d'etiquetaments graceful introduït per Rosa [87]. En particular, si un graf H admet un etiquetament bigraceful consecutiu, aleshores descomposa K_{2n+1} i $K_{n,n}$. Snevily [95] suggereix que qualsevol arbre T amb n branques descomposa tot graf graceful G amb n^2 branques. Com $K_{n,n}$ admet α-etiquetaments [87], aquesta afirmació implicaria la conjectura de Häggkvist [47].

En la secció següent, descrivim unes operacions que ens permetran assignar etiquetaments bigraceful a algunes famílies d'arbres. La supressió de les fulles d'un arbre dóna lloc al seu arbre *base* de T.

Un arbre amb arbre base un camí s'anomena *caterpillar*, i s'anomena *lobster*, si la seva base és un caterpillar. Malgrat alguns resultats parcials obtinguts per H.K.Ng en [79] i Wang, Jin, Lu and Zhang [100], encara no ha estat provat que els lobsters siguin graceful. Per altra banda, és conegut que els arbres de diàmetre com a màxim 4 són graceful, veure per exemple [38]. En [87] Rosa mostra que les estrelles amb almenys tres potes de longitud 2, no admeten α-etiquetaments. Els mètodes presentats per Bloom en [8] permeten trobar etiquetaments graceful per aquests arbres, i també pels arbres d-aris i complets, però no poden ser utilitzats per construir etiquetaments bigraceful.

En aquesta línia, provem el teorema següent.

Teorema 5.6 *Les famílies d'arbres següents són bigraceful.*

1. *Els lobsters.*
2. *Les estrelles amb potes de longitud $k \geq 1$.*
3. *Els arbres d-aris i complets, amb d senar.*

Com a conseqüència del teorema anterior obtenim el resultat següent.

Corol·lari 5.7 *Els arbres de diàmetre com a molt 5 són bigraceful.*

En la línia de reforçar conjectures similars, plantejades en l'àrea des de fa temps, conjecturem el següent.

Conjectura 5.8 *Tots els arbres són bigraceful.*

Amb els mètodes coneguts actualment, sembla difícil que es pugui arribar a provar la conjectura (o la seva negació), tal com passa amb altres conjectures similars d'etiquetaments. En qualsevol cas, un arbre qualsevol, no està gaire lluny de ser un arbre bigraceful. Kotzig [61] prova que si una branca d'un arbre qualsevol és substituïda per una camí suficientment llarg, l'arbre que resulta admet un $\alpha-$etiquetament, i per tant, és alhora un arbre graceful i bigraceful. Per reforçar la Conjectura 5.8 provem que al afegir certa quantitat de vèrtexs terminals a un arbre qualsevol, l'arbre esdevé bigraceful.

Teorema 5.9 *Donat T un arbre qualsevol. Existeix un vèrtex v de T i un enter $k \geq 0$ tal, que afegint k fulles a v l'arbre esdevé bigraceful.*

En la darrera secció d'aquest capítol plantegem resultats més generals. La qüestió que s'estudia és, donat un arbre T, del que es desconeix el seu caràcter bigraceful, quin és el valor més petit de n tal que $T|K_{n,n}$. En la literatura trobem diversos resultats que van en aquesta direcció. Häggkvist prova en [47] que tot arbre amb n branques i almeys $(n+1)/2$ fulles descomposa $K_{2n,2n}$. Estenent aquest resultat aquí provem el següent.

Teorema 5.10 *Sigui T un arbre amb n branques i k fulles. Si $k \geq b-2$, on b és el cardinal del conjunt estable més gran de l'arbre base, aleshores T descomposa $K_{2n,2n}$.*

Si enlloc de la condició $k \geq b-2$, s'exigeix que l'arbre base sigui bigraceful, s'arriba al mateix resultat. En particular, podem afirmar que tot arbre amb arbre base igual a un lobster descomposa $K_{2n,2n}$.

Corol·lari 5.11 *Sigui T un arbre amb n branques tal que el seu arbre base és un lobster. Aleshores, $T|K_{2n,2n}$. En particular, un arbre amb n branques i diàmetre com a molt 7 descomposa $K_{2n,2n}$.*

Kézdy i Snevily proven en [59] que tot arbre amb n branques i radi r descomposa K_{2h+1}, amb $h \leq (r+4)n^2$. En el teorema següent presentem una versió bipartida d'aquest resultat.

Teorema 5.12 *Sigui T un arbre amb n branques i radi r. Aleshores, T descomposa $K_{2hn,2hn}$, per algun $h \leq \lceil r/4 \rceil$.*

Les idees utilitzades en els teoremes anteriors permeten obtenir resultats addicionals. Un exemple d'aquests és el que es presenta a continuació.

La *raó de creixement* d'un graf G respecte un vèrtex $x \in V(G)$ es defineix com,

$$\rho_x(G) = \min\left\{\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|}, 1 \leq i \leq e(x)\right\},$$

on $V_i(x)$ denota el conjunt de vèrtexs a distància i de x, i $e(x)$ l'excentricitat de x.

Teorema 5.13 *Sigui T un arbre amb n branques i raó de creixement $\rho_x(G) \geq \sqrt{2}$ per algun vèrtex x. Aleshores, $T|K_{2n,2n}$.*

5.2 Arbres bigraceful

En aquesta secció presentem algunes construccions senzilles que permetem obtenir arbres bigraceful a partir d'altres arbres que ja ho són. Aquestes construccions són semblants a les presentades en el context de grafs graceful, i també a les considerades per Rosa i Širáň [88] pels α-etiquetaments.

A partir d'aquest punt, assumim que

$$f(x) = \begin{cases} f_A(x) & \text{si } x \in A \\ f_B(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Sigui f un etiquetament bigraceful d'un arbre $T(A,B)$ amb n branques, aleshores

$$f_c(x) = n - f(x) - 1, \quad x \in A \cup B,$$

és també un etiquetament bigraceful de T, que intercanvia els papers dels conjunts estables. Direm que f_c és el *complementari* de f. Un etiquetament bigraceful i el seu complementari, indueixen el mateix etiquetament en les branques. Ja que,

$$(f_c)_E(xy) = f_c(x) - f_c(y) = f(y) - f(x),$$

per a cada $x \in A$, $y \in B$ tal que $xy \in E(T)$.

De manera semblant, donat f un etiquetament consecutiu d'un arbre $T(A,B)$ amb n branques, aleshores

$$f_r(x) = \begin{cases} |A| - f(x) - 1 & x \in A \\ n + |A| - f(x) - 2 & x \in B \end{cases}$$

defineix també un etiquetament bigraceful (consecutiu), que anomenarem *revers* de f. En aquest cas, el revers de f preserva el paper dels conjunts estables, però canvia les etiquetes de les branques: $(f_r)_E(xy) = f_r(y) - f_r(x) = n - 1 - (f(y) - f(x))$, per a cada $x \in A$ i $y \in B$. En la Figura 5.3 es mostra un exemple d'aquests etiquetaments, construïts a partir d'un etiquetament ja existent de l'arbre T.

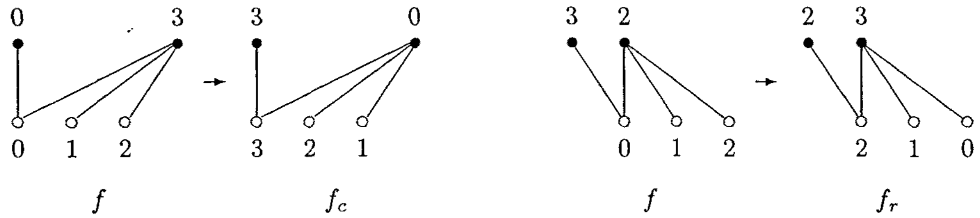


Figura 5.3: Etiquetaments f_c i f_r a partir d'un etiquetament f de T.

Siguin T, T' dos arbres. Denotem per $T(uv)T'$ l'arbre obtingut identificant el vèrtex u de T i el vèrtex v de T'. El lema següent ens mostra com, sota certes condicions, aquest nou arbre hereta el caràcter bigraceful de T i T'.

A partir d'aquest punt, denotem per $T(A,B,f)$ un arbre T amb n branques i conjunts estables A i B, dotat d'un etiquetament bigraceful f.

Lema 5.14 *Sigui $T(A,B,f)$ i $T'(A',B',f')$ dos arbres bigraceful. Suposem que f' és consecutiu i sigui $u \in A$ el vèrtex amb $f(u) = 0$ i $v \in A'$ el vèrtex en T' amb $f'(v) = |A'| - 1$. Aleshores, $T(uv)T'$ és bigraceful.*

Demostració. Sigui n el nombre de branques de T. Vegem com l'etiquetament que figura a continuació, constitueix un etiquetament bigraceful de $T(uv)T'$, amb conjunts estables $\tilde{A} = A \cup A'$ i $\tilde{B} = B \cup B'$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in A' \\ f(x) + |A'| - 1 & x \in A \cup B \\ f'(x) + n & x \in B' \end{cases}$$

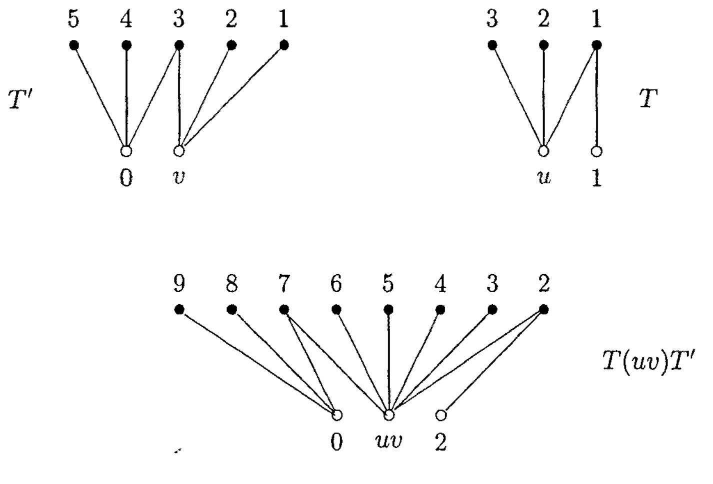


Figura 5.4: Etiquetament bigraceful de $T(uv)T'$.

$\tilde{f}$ és injectiva en $\tilde{A}$, ja que, pel fet de ser f' un etiquetament consecutiu, $f'(x') \leq |A'| - 1$ per a tot $x' \in A'$, i l'única possibilitat que concideixi amb algun $f(x) + |A'| - 1$, per $x \in A$, es dóna quan $f'(x') = |A'| - 1$ i $f(x) = 0$, és a dir, justament els dos vèrtexs que estem identificant. També, és injectiva en $\tilde{B}$, ja que en aquest cas,

$$\max\{f(x) + |A'| - 1 \mid \forall x \in B\} = n - 2 + |A'| < \min\{f'(x) + n \mid x \in B'\}.$$

Per altra banda, pel que fa als etiquetaments de les branques, $\tilde{f}_E(xy) = \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = (f(y) + |A'| - 1) - (f(x) + |A'| - 1) = f(y) - f(x)$ per a tot $x \in A$, $y \in B$, mentre que si $x \in A'$, $y \in B'$, $\tilde{f}_E(xy) = \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = (f'(y) + n) - f'(x) = f(y) - f(x) + n$. És a dir, $\tilde{f}_E(E) = \{0, \ldots, n-1, n, \ldots, n+n'-1\}$, on n' és el nombre de branques de T'. □

Notem que, quan f és un etiquetament consecutiu, l'etiquetament resultant també és consecutiu, ja que aleshores, es donen les desigualtats següents:

$$\begin{aligned} \max\{f'(x) \mid x \in A'\} \leq |A'| - 1 \leq \min\{f(x) + |A'| - 1 \mid x \in A\} \leq \\ \leq \max\{f(x) + |A'| - 1 \mid x \in A\} = \min\{f(x) + |A'| - 1 \mid x \in B\} \end{aligned}$$

per tant, $\max\{\tilde{f}(x) \mid x \in \tilde{A}\} = \min\{\tilde{f}(x) \mid x \in \tilde{B}\}$. Un exemple d'aquest tipus de juxtaposició es mostra en la Figura 5.4.

Una lleugera modificació de l'anterior procediment, aporta un etiquetament bigraceful en el cas que l'arbre resulti de la unió de dos arbres per una nova branca En aquest cas, l'arbre resultant el denotarem per $T\{uv\}T'$. Aquest fet, és el que apareix enunciat en el lema que segueix.

Lema 5.15 *Sigui $T(A,B,f)$ i $T'(A',B',f')$ dos arbres bigraceful Suposem que f' és consecutiu i sigui $u \in A$ el vèrtex amb $f(u)=0$ i $v \in A'$ el vèrtex en T' amb $f'(v)=|A'|-1$. Aleshores, $T\{uv\}T'$ és bigraceful*

Demostració. Sigui n el nombre de branques de T. Com en el cas anterior, comprovem que l'etiquetament que ve a continuació és un etiquetament bigraceful de l'arbre $T\{uv\}T'$, amb conjunts estables $\tilde{A}=A'\cup B$ i $\tilde{B}=A\cup B'$. Aquest etiquetament utilitza l'etiquetament f_c sobre T, que recordem, intercanviava els papers dels conjunts estables.

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f'(x) & x\in A' \\ f_c(x)+|A'| & x\in A\cup B \\ f'(x)+n+1 & x\in B' \end{cases}$$

Com en la demostració del Lema 5.14 cal veure que l'etiquetament està ben definit, que és injectiu sobre els conjunts estables de $T\{uv\}T'$ i que l'etiquetament $\tilde{f}_E$ que indueix sobre les branques representa una bijecció del conjunt $E(T\{uv\}T')$ en el conjunt $[0,n+n']$, on n' és el nombre de branques de T'. La injectivitat sobre $\tilde{A}$ queda garantida pel fet que, per una banda, $f'(x')\leq |A'|-1$, per a tot $x'\in A'$, ja que f' és un etiquetament consecutiu, i per l'altra $|A'|-1<|A'|\leq f_c(x)+|A'|$, per a tot $x\in B$. De la mateixa manera, les desigualtats

$$\max\{f_c(x)+|A'| \mid x\in A\}\leq n-1+|A'|<n+1+\min\{f'(x)\mid x\in B'\},$$

garanteixen la injectivitat sobre $\tilde{B}$. Pel que fa als etiquetaments de les branques, $\tilde{f}_E(xy)=\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)=(n-1-f(x)+|A'|)-(n-1-f(y)+|A'|)=f(y)-f(x)$ per a tot $x\in A$, $y\in B$, mentre que si $x\in A'$, $y\in B'$, $\tilde{f}_E(xy)=\tilde{f}(y)-\tilde{f}(x)=(f'(y)+n+1)-f'(x)=f(y)-f(x)+n+1$. Finalment, la nova branca, té etiqueta $\tilde{f}_E(uv)=\tilde{f}(u)-\tilde{f}(v)=(n-1+|A'|)-(|A'|-1)=n$. D'on es dedueix, $\tilde{f}_E(E)=[0,n+n']$. □

Notem que, quan f és un etiquetament consecutiu, l'etiquetament de $T\{uv\}T'$ que apareix en la demostració del lema anterior és també consecutiu.

Un exemple de la construcció anterior el donem en la Figura 5.5.

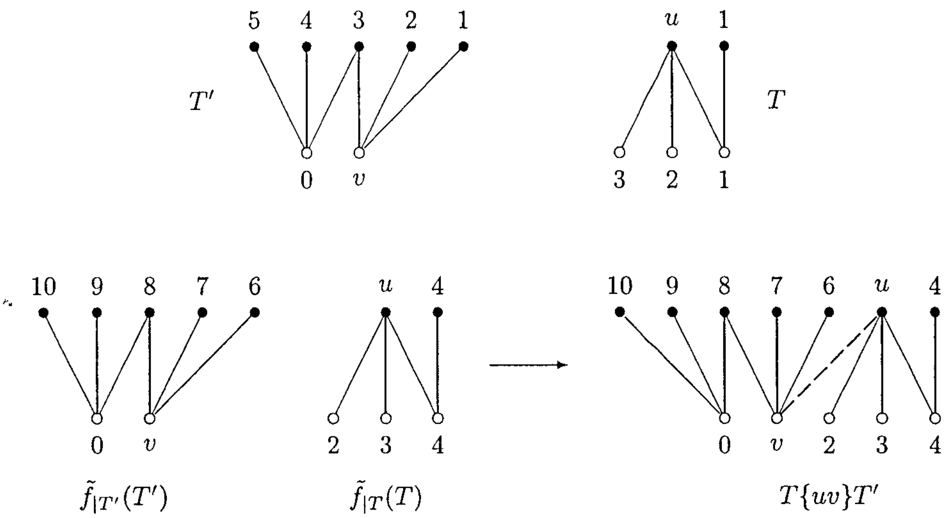


Figura 5.5 Etiquetament bigraceful de $T\{uv\}T'$

El procediment que considerem tot seguit ens permet reemplaçar vèrtexs d'un arbre T' per còpies d'un arbre bigraceful T. Més concretament, sigui $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ un conjunt de vèrtexs de T' i sigui u un vèrtex distingit de T. Denotem per $T(u, X)T'$ l'arbre obtingut afegint una còpia de l'arbre T en cada vèrtex x_i de X, tot identificant x_i amb el vèrtex u. El lema següent garanteix que, sota certes condicions, l'arbre $T(u, X)T'$ admet un etiquetament bigraceful.

Lema 5.16 *Sigui $T(A, B, f)$ i $T'(A', B', f')$ dos arbres bigraceful i sigui $u \in A$ el vèrtex amb $f(u) = 0$. Si f' és consecutiu i $k = |A'|$ és un enter senar, aleshores $T(u, A')T'$ és bigraceful.*

Demostració. Sigui n la mida de T i $T_i(A_i, B_i)$, per $1 \leq i \leq k$, k còpies idèntiques de l'arbre T. Vegem com l'etiquetament $\tilde{f}$ que definim a continuació, representa un etiquetament bigraceful de l'arbre $T(u, A')T'$, amb conjunts estables $\tilde{A} = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ i $\tilde{B} = B' \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in A' \\ kf(x) + (i-1) & x \in A_i \\ kf(x) + 2(i-1) & x \in B_i \\ f'(x) + kn & x \in B' \end{cases}$$

Com en demostracions anteriors, cal comprovar que $\tilde{f}$ està ben definida, que en cada conjunt estable és injectiva i que tenim una bijecció entre el conjunt de branques de l'arbre i el conjunt $[0, kn + n' - 1]$, on n' és el tamany de T'.

Si $x \in \tilde{A}$, $0 \leq \tilde{f}(x) \leq k(n-1) + k - 1 = kn - 1$, mentre que si $x \in \tilde{B} \setminus B'$, $0 \leq \tilde{f}(x) \leq k(n-1) + 2(k-1) = kn + k - 2$. Finalment, si $x \in B'$, es té $k - 1 + kn \leq f'(x) \leq n' - 1 + kn$, i l'etiquetament està ben definit. En particular, les etiquetes de B' són més grans que les de la resta d'elements de $\tilde{B}$. Per altra banda, $\tilde{f}$ és clarament injectiva en cada A_i, i en cada B_i, per a $i = 1, \ldots, k$, injectivitat que es conserva en estendre $\tilde{f}$ a cada conjunt estable, ja que, les etiquetes de A_i són congruents amb $(i-1)$ mòdul k i les de B_i són congruents amb $2(i-1)$, ara bé, com k és un enter senar, es té

$$2(i-1) \sim 2(j-1) \quad (mod\ k) \quad \text{si i nomes si} \quad i-1 \sim j-1 \quad (mod\ k).$$

Finalment, pel que fa a l'etiquetament induït a les branques, es té, per a tota $xy \in E_i = E(T_i)$, $\tilde{f}_E(xy) = \tilde{f}(y) - \tilde{f}(x) = kf_E(xy) + i - 1$, i per tant, es té una bijecció del conjunt de branques $E = E_1 \cup \ldots \cup E_k$ en el conjunt $\{0, \ldots, k(n-1) + k - 1 = kn - 1\}$, mentre que en les branques de T', $\tilde{f}_E$ agafa tots els valors del conjunt $[kn, kn + n' - 1]$. Això prova que l'etiquetament és bigraceful. □

Un exemple de l'etiquetament que apareix en l'anterior demostració, el donem en la Figura 5.6.

Observació 5.17 Notem que, en l'anterior procediment, no cal que els arbres $T_1, \ldots, T_k$ siguin idèntics. De fet, el mateix procés funciona quan s'utilitzen arbres diferents però, amb el mateix nombre de branques. Un exemple d'aquesta situació es dóna en la Figura 5.7.

Per altra banda, es pot fer servir un procediment semblant, per obtenir etiquetaments bigraceful de $T(u, A'_0)T'$, quan $A'_0 \subset A'$, és de cardinal senar i els seus vèrtexs tenen les etiquetes més grans, tal com indica el lema següent.

Lema 5.18 *Sigui $T(A, B, f)$ i $T(A', B', f')$ dos arbres bigraceful i sigui $u \in A$ el vèrtex amb $f(u) = 0$. Si f' és consecutiu i assigna les etiquetes més grans a $A'_0 \subset A'$, amb $k = |A'_0|$ un enter senar, aleshores $T(u, A'_0)T'$ és bigraceful.*

Demostració. Sigui n la mida de T i $T_i(A_i, B_i)$, per $1 \leq i \leq k$, k còpies idèntiques de l'arbre T. Notem $s = |A' \setminus A'_0|$. L'etiquetament $\tilde{f}$ que definim a continuació, representa un etiquetament bigraceful de l'arbre $T(u, A'_0)T'$, amb

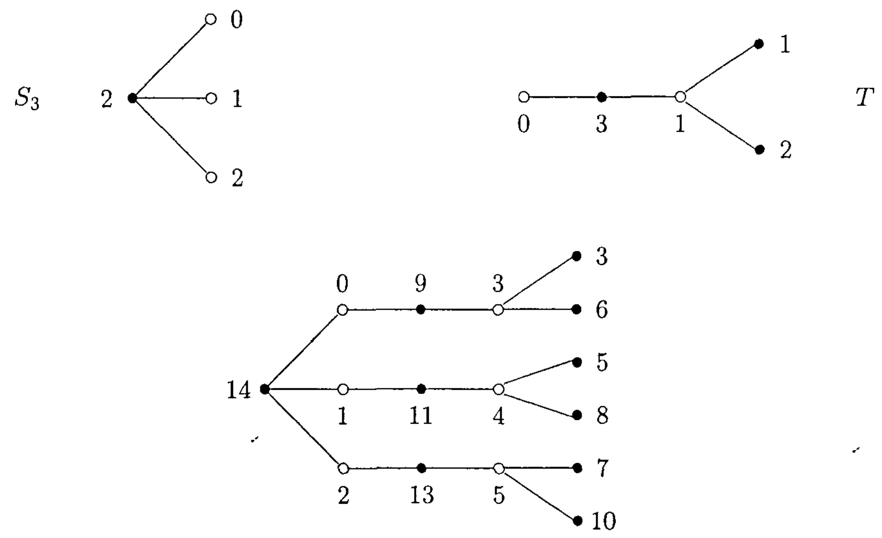


Figura 5.6: Juxtaposició de l'estrella S_3 amb l'arbre T.

conjunts estables $\tilde{A} = (A' \backslash A'_0) \cup A_1 \cup \ldots \cup A_k$ i $\tilde{B} = B' \cup B_1 \cup \ldots \cup B_k$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in A' \\ kf(x) + (i-1) + s & x \in A_i \\ kf(x) + 2(i-1) + s & x \in B_i \\ f'(x) + kn & x \in B' \end{cases}$$

□

Un exemple d'aquest etiquetament, el donem en la Figura 5.8.

Els procediments presentats fins ara permeten construir etiquetaments bigraceful de diferents famílies d'arbres. Recordem que la base T_0 d'un arbre T fa referència a l'arbre que s'obté quan s'eliminen els vèrtexs terminals de T.

El camí P_m és bigraceful, un etiquetament bigraceful és per exemple, el que assigna als vèrtexs les etiquetes: $0, m-1, 1, m-2, \ldots$ al llarg del camí.

L'estrella S_k amb k fulles, admet un únic etiquetament, mòdul complementari, que és també consecutiu. Aquest etiquetament, assigna a les fulles les etiquetes, $0, \ldots, k-1$ i al vèrtex central l'etiqueta 0 o $k-1$.

Un caterpillar és un arbre que té per base un camí. Els caterpillars poden obtenir-se com una successió de juxtaposicions d'estrelles com les descrites en

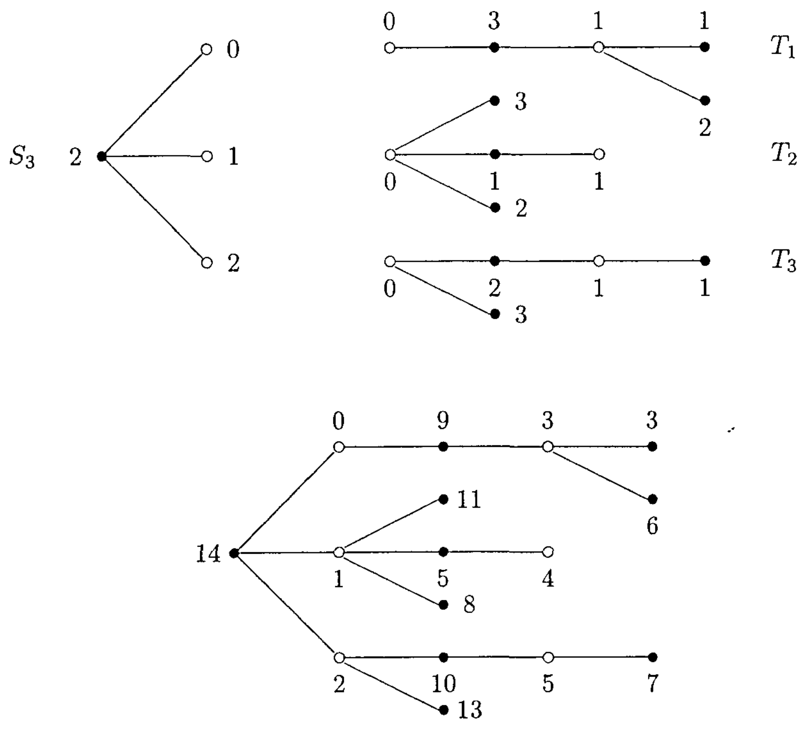


Figura 5.7: Juxtaposició de l'estrella S_3 amb els arbres T_1, T_2 i T_3.

el Lema 5.14, i per tant, són bigraceful. Un exemple d'aquesta construcció apareix en la Figura 5.9.

Observació 5.19 Notem que, l'etiquetament bigraceful que s'obté, admet un algorisme bonic que consisteix en resseguir les branques de l'arbre de la mateixa manera que es fa quan s'aplica l'algorisme DFS *-depth first search* o cerca en fondària prioritària-, i etiquetar de forma consecutiva les branques encara no etiquetades. L'etiquetament que resulta és consecutiu i es correspon al tipus d'etiquetament α introduït per Rosa [87] per aquest tipus d'arbres.

Un arbre és un lobster si el seu arbre base és un caterpilar. Malgrat alguns resultats generals, obtinguts per H.K.Ng en [79], encara es desconeix si els lobsters són arbres que admeten un etiquetament graceful. A continuació presentem una sèrie de resultats que ens permetran mostrar com els lobters

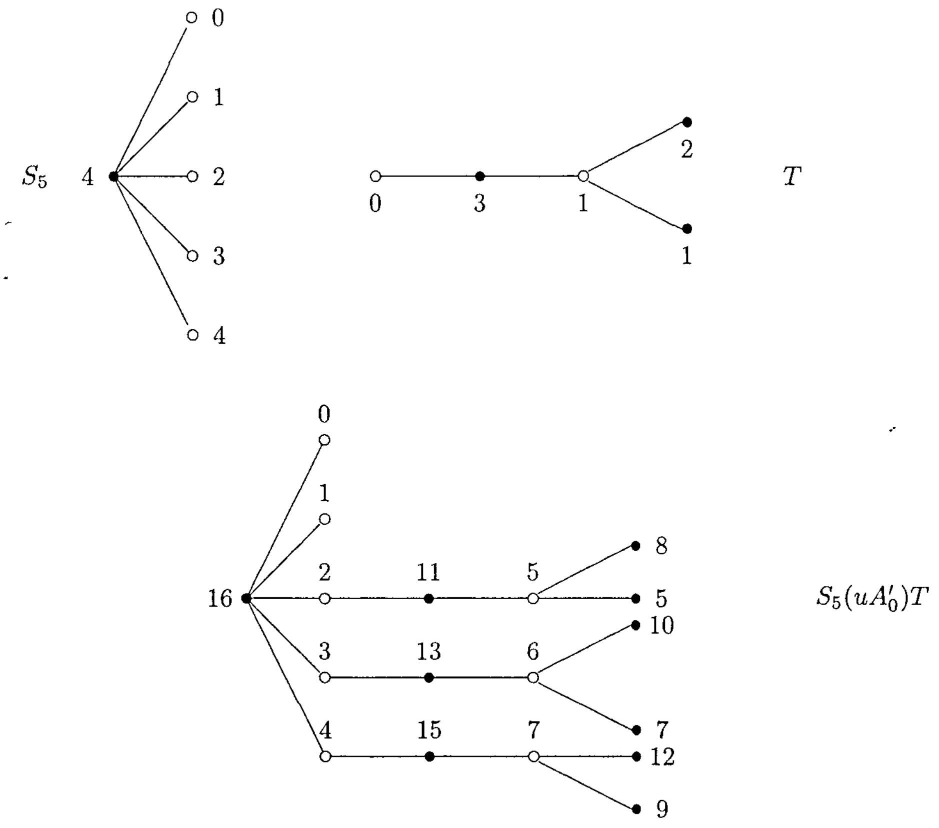


Figura 5.8: Juxtaposició de l'estrella S_5 amb tres còpies d'un arbre T.

també pertanyen a la família d'arbres bigraceful.

Lema 5.20 *Sigui $T(A, B; f)$ un arbre bigraceful, i sigui T' l'arbre obtingut a partir de T afegint un conjunt L de fulles als vèrtexs d'un subconjunt $A_0 \subset A$. Si*

$$\max\{f(x) \mid x \in A_0\} \leq \min\{f(x) \mid x \in B\},$$

aleshores T' és bigraceful.

Demostració. Sigui n el nombre de branques de T. Establim $x_1, \ldots, x_r$ una ordenació dels vèrtexs de A_0, de manera que $f(x_1) < f(x_2) < \ldots < f(x_r)$. Sigui L_i el subconjunt de vèrtexs en L adjacents a x_i, per $1 \leq i \leq r$, i sigui

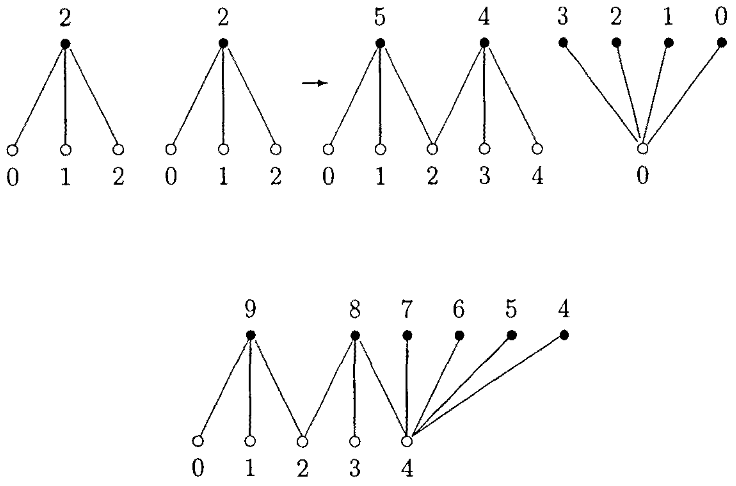


Figura 5.9: Etiquetament d'un caterpillar.

$l_1, \ldots, l_k$ una ordenació dels vèrtexs de L de manera que, $l_i \in L_\alpha$, $l_j \in L_\beta$, amb $i < j$, implica $1 \leq \alpha \leq \beta \leq r$, per a tota parella i, j de valors $1 \leq i, j \leq r$. Considerem l'etiquetament $\tilde{f}$ següent amb conjunts estables $A' = A$ i $B' = B \cup L$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ f(x) + k & x \in B \\ f(x_\alpha) + i - 1 & x = l_i \text{ i } l_i \in L_\alpha \end{cases}$$

Provem que $\tilde{f}$ defineix un etiquetament bigraceful de T'. $\tilde{f}$ està ben definit, ja que $\tilde{f}(A') \subset [0, n-1]$ i $\tilde{f}(B') \subset [0, n+k-1]$. Per altra banda, $\tilde{f}$ és clarament injectiu en A', en L i en B. A més,

$$\tilde{f}(l_i) \leq \max\{f(x) \mid x \in A_0\} + k - 1 \leq \min\{f(x) \mid x \in B\} + k - 1 < \min\{\tilde{f}(x) \mid x \in B\},$$

d'on deduïm que $\tilde{f}$ també és injectiva en B'. Pel que fa a l'etiquetament induït en les branques, si denotem per E_L el conjunt de branques de T' incidents amb L i per E el conjunt de branques de T, es té una bijecció entre el conjunt $\tilde{f}_E(E)$ i el conjunt $[k, k+n-1]$ per una banda, i una bijecció entre $\tilde{f}_E(E_L)$ i el conjunt $[0, k-1]$, per l'altra. □

En el lema que segueix afirmem com, en el cas de partir d'un etiquetament consecutiu, el resultat anterior pot generalitzar-se a qualsevol conjunt de fulles.

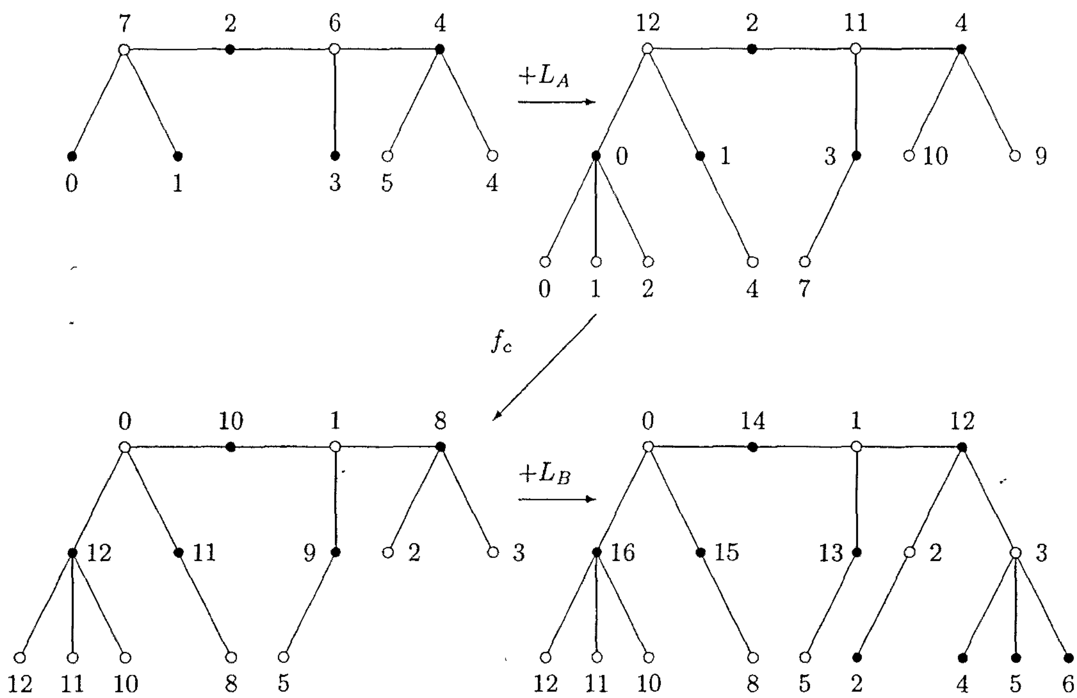


Figura 5.10: Etiquetament d'un lobster.

Lema 5.21 *Sigui T un arbre que admet un etiquetament bigraceful consecutiu. Aleshores, l'arbre obtingut a partir de T afegint qualsevol conjunt L de fulles és bigraceful.*

Demostració. Sigui f un etiquetament consecutiu de l'arbre $T = T(A, B)$ amb n branques. Denotem per L_A i L_B els subconjunts de vèrtexs de L adjacents a vèrtexs de A i B respectivament. Com f és un etiquetament consecutiu, el Lema 5.20 garanteix l'existència d'un etiquetament bigraceful f_a de l'arbre T_a obtingut a partir de T afegint fulles de L_A. Considerem ara sobre T_a, l'etiquetament complementari de f_a, que intercanvia els papers dels conjunts estables de T_a. Les etiquetes de B per $(f_a)_c$ verifiquen la condició del Lema 5.20, ja que,

$$\max\{(f_a)_c(x) \mid x \in B\} \leq n + |L_A| - 1 - (|A| - 1 + |L_A|) = n - |A| \leq$$
$$\leq n + |L_A| - |A| \leq \min\{(f_a)_c(x) \mid x \in A\}.$$

D'aquí, fent servir de nou el Lema 5.20, les fulles de L_B poden afegir-se a T_a, donant lloc a un arbre bigraceful. □

La Figura 5.10 mostra un exemple dels passos que es segueixen en la demostració anterior per a donar un etiquetament bigraceful del nou arbre.

Utilitzant els resultats anteriors provem el teorema següent.

Teorema 5.22 (5.6) *Les següents famílies d'arbres són bigraceful.*

1. *Els lobsters.*
2. *Les estrelles amb potes de longitud $k \geq 1$.*
3. *Els arbres d-aris i complets, amb d senar.*

Demostració

1. És una conseqüència directa del Lema 5.21 i del fet que els caterpilars admeten etiquetaments consecutius.

2. L'estrella S_k i el camí P_m admeten etiquetaments bigraceful consecutius. Considerem l'etiquetament consecutiu que assigna a un dels vèrtexs terminals del camí, anomenem-lo u, l'etiqueta 0 (per exemple, l'etiquetament que utilitza les etiquetes $0, m-1, 1, m-2, \ldots$ al llarg del camí). Sigui A' el conjunt de fulles de l'estrella S_k. En cas que k sigui un enter senar, el Lema 5.16 garanteix que l'arbre $P_{m-1}(u, A')S_k = S_{k,m}$ és bigraceful. De manera semblant, quant k és parell, $P_{m-1}(u, A')S_{k-1} = S_{k-1,m}$ és bigraceful, amb un etiquetament $\tilde{f}$ que assigna l'etiqueta més gran al vèrtex central v de l'estrella. Vegem ara com, a partir d'aquest i del camí P_m, $S_{k,m}$ és bigraceful. A tal fi, considerem l'etiquetament complementari $\tilde{f}_c$ sobre $S_{k-1,m}$, i per tant, que assigna l'etiqueta zero al vèrtex central. Per altra banda, considerem l'etiquetament revers del camí, i per tant, que assigna a u l'etiqueta més gran entre tots els vèrtexs del conjunt estable A on es troba u. Pel Lema 5.14, l'arbre $S_{k-1,m}(vu)P_m$ és bigraceful.

   En la Figura 5.11 mostrem l'etiquetament de les estrelles $S_{k,m}$ que resulta de seguir els passos de la demostració.

3. L'arbre d-ari i complet de profunditat h, $T_{d,h}$ pot ser definit recursivament com $T_{d,h} = T_{d,h-1}(u, A')S_d$, on u és l'arrel de $T_{d,h-1}$ i A' el conjunt de fulles de l'estrella. En $T_{d,1} = S_h$ considerem l'etiquetament consecutiu que assigna al vèrtex central, en A, l'etiqueta zero. Via la demostració del Lema 5.16, $T_{d,2}$ admet un etiquetament en què l'arrel, en B, agafa

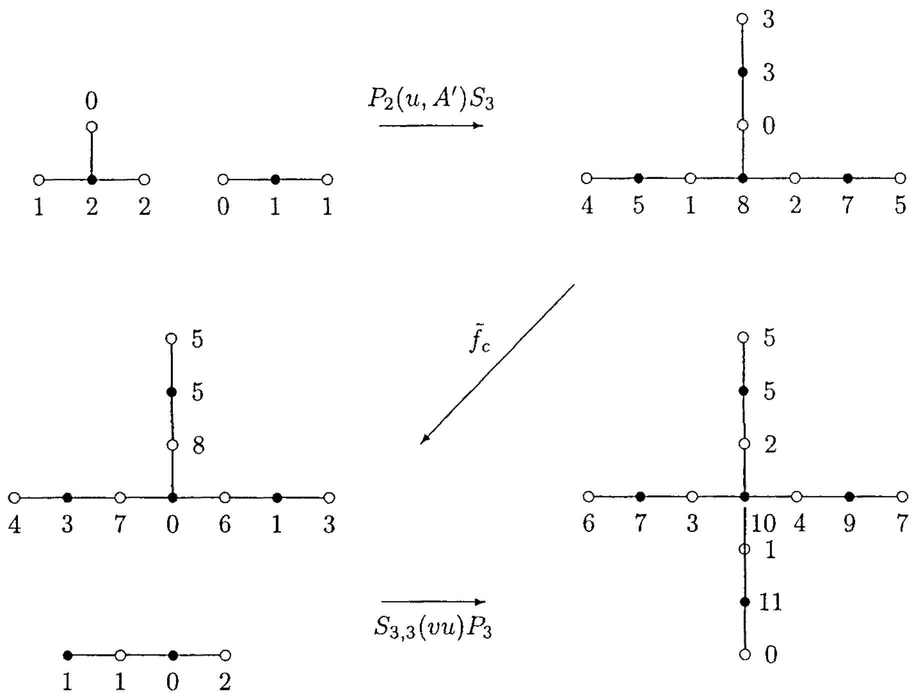


Figura 5.11: Etiquetament bigraceful de $S_{3,3}$ i $S_{4,3}$.

l'etiqueta més gran, i per tant, l'etiquetament complementari, li assigna l'etiqueta zero. Aquest procés iterat, ens mostra el caràcter bigraceful de $T_{d,h}$, per a qualsevol valor de h, amb d senar. □

El resultat d'aquest procés en $T_{3,1}$, $T_{3,2}$ i $T_{3,3}$, pot veure's en les Figures 5.12 i 5.13.

Per a d parell, els arbres d-aris i complets de profunditat 2 són lobsters, i per tants, són bigraceful. Tot i que no és difícil obtenir etiquetaments *ad hoc* amb d parell i una h moderada, no hem trobat un mètode general per a etiquetar-los. En la Figura 5.14 presentem un d'aquests etiquetaments per a $T_{2,6}$.

Conjecturem que tots els arbres admeten etiquetaments bigracefuls, però tal com passa amb conjectures similars sobre el tema, la demostració sembla inaccessible amb els mètodes actuals. Ara bé, podem afirmar que almenys en cert sentit, tot arbre és molt proper a ser un arbre bigraceful. Kotzig [61] prova

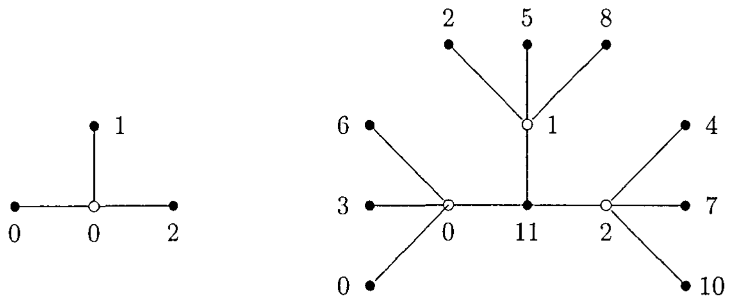


Figura 5.12: Etiquetament bigraceful de $T_{3,1}$ i $T_{3,2}$.

que si un branca d'un arbre qualsevol, es remplaça per un camí suficientment llarg, l'arbre resultant, admet α-etiquetaments, i per tant, esdevé d'aquesta manera una arbre que és alhora graceful i bigraceful. A continuació mostrem com, afegint un cert nombre de vèrtexs terminals a un arbre qualsevol, aquest esdevé bigraceful.

Teorema 5.23 (5.9) *Sigui T un arbre qualsevol. Aleshores, existeix un vèrtex $v \in T$ i un enter $k \geq 0$ tal que l'addició de k fulles a v dóna lloc a un arbre bigraceful.*

Provem primer el lema següent.

Lema 5.24 *Sigui $T(A, B, f)$ un arbre bigraceful amb $n > 1$ branques tal que $f(A) \subset [0, n-2]$ i sigui $v \in B$ amb $f(v) = n - 1$. Sigui $T_1 = T + l$, on l és un vèrtex terminal de T_1. Aleshores, existeix un enter k, amb $0 \leq k \leq n-1$, tal que l'arbre $T' = T_1(vc)S_k$, on S_k és l'estrella de centre c, admet un etiquetament bigraceful f' amb $f'(A') \subset [0, n'-2]$ i $f'(v) = n' - 1$, on $n' = |E(T')| = n + k + 1$.*

Demostració. Sigui w el vèrtex de T adjacent a la nova fulla l, i sigui $m = f(w)$. Denotem per $L = \{l_1, \ldots, l_k\}$ el conjunt de fulles de S_k.(Si $L = \emptyset$, considerem $k = 0$).

Assumim en primer lloc $w \in B \setminus \{v\}$. En aquest cas, posem $k = n - m - 2$. Aleshores, l'etiquetament

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ f(x) + k + 1 & x \in B \\ n + i - 1 & x = l_i \\ n - 1 & x = l \end{cases}$$

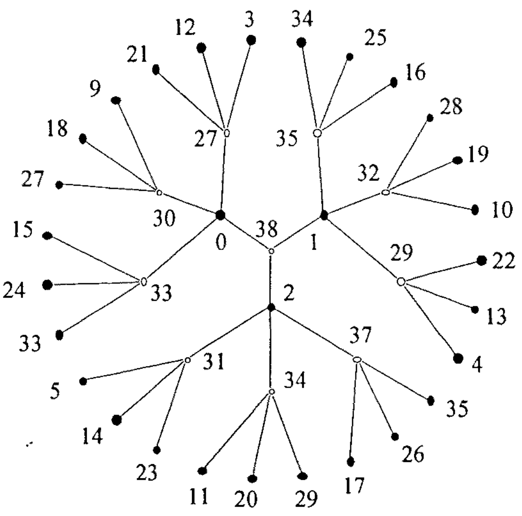


Figura 5.13: Etiquetament bigraceful de $T_{3,3}$.

és un etiquetament bigraceful de T', amb $f'_E(wl) = 0$ i on l'etiqueta més gran en $A' = A \cup L \cup \{l\}$, és com a molt $n' - 2$, per $n' = |V(T')| = n + k + 1$.

Suposem ara que $w \in A$. En aquest cas, posem $k = m$. Aleshores,

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ f(x) + k + 1 & x \in B \\ n + i - 1 & x = l_i \\ k & x = l \end{cases}$$

defineix clarament, un etiquetament bigraceful de T', amb $f'_E(wl) = 0$ i $f'(A') \subset [0, n' - 2]$.

Finalment, si $w = v$, posem $k = 0$ i definim

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) + 1 & x \in A \cup B \\ 0 & x = l \end{cases}$$

En aquest cas, totes les branques conserven les etiquetes i la nova branca lv reb la nova etiqueta n.

Notem, que en tots els casos, l'etiquetament resultant, verifica $f'(v) = n' - 1$. $\square$

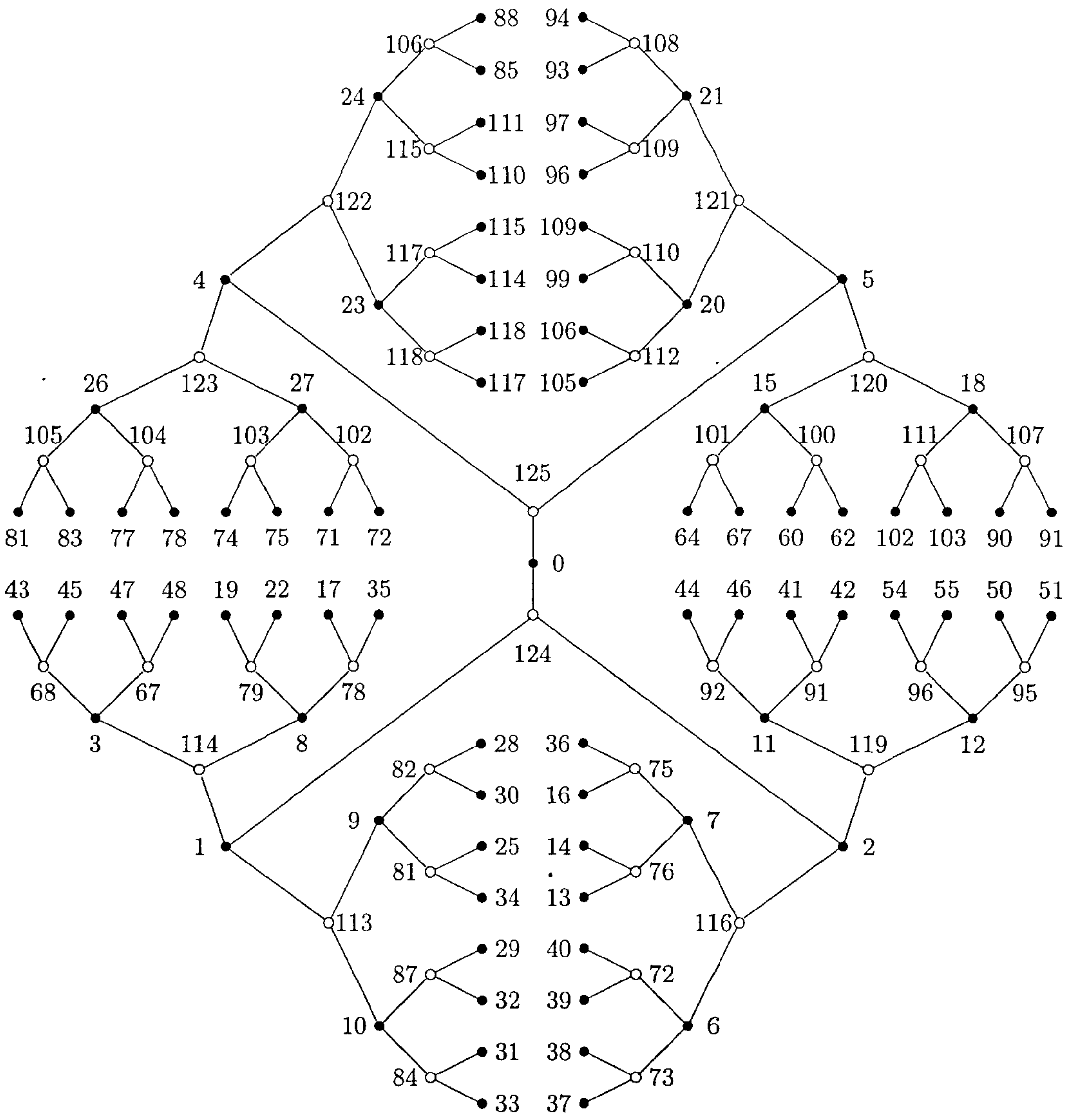


Figura 5.14: Etiquetament bigraceful de $T_{2,6}$.

Demostració del Teorema 5.23. El resultat es compleix clarament per l'arbre amb dues branques posant $k = 0$. Com aquest arbre admet un etiquetament bigraceful amb $f(A) = 0$, el teorema es prova utilitzant el Lema 5.24 i fent inducció sobre $n = |E(T)|$. □

5.3 Alguns resultats generals sobre descomposicions

En la secció anterior donem eines per construir etiquetaments bigraceful d'arbres amb n branques, que asseguren la descomposició cíclica de $K_{n,n}$ en arbres isomorfs. El problema queda obert quan es desconeixen etiquetaments d'aquest tipus de l'arbre de partida, i s'adreça aleshores a trobar quin és el mínim $n' \geq n$ pel qual l'arbre descomposa $K_{n',n'}$. Precedents d'aquest nou plantejament els trobem a la literatura. Roland Häggkvist demostra que tot arbre amb n branques i almenys $(n+1)/2$ vèrtexs terminals descomposa $K_{2n,2n}$. Aquí, provem el resultat següent.

Teorema 5.25 (5.10) *Sigui T un arbre amb n branques i k vèrtexs terminals. Si $k \geq b - 2$, on b és el cardinal del conjunt estable més gran de l'arbre base, aleshores T descomposa $K_{2n,2n}$.*

En la demostració d'aquest teorema farem servir el lema següent.

Lema 5.26 *Sigui G un graf bipartit i d-regular amb una branca-coloració, en el sentit propi. Sigui $T(A, B)$ un arbre amb n branques i $|A| \leq |B| = b$. Si $d \geq n + b - 2$, aleshores T pot ser realitzat en G, de manera que totes les branques de T són de colors, dos a dos, diferents.*

Demostració. La demostració és per inducció sobre el nombre n de branques de T. El resultat és clar per $n = 2$. Sigui T un arbre amb $n > 2$ branques i l un vèrtex terminal de T. Sigui $T' \simeq T - l$ un subgraf de G, amb totes les branques de diferents colors i sigui v el vèrtex adjacent a l en T. El nombre de colors ja usats per T' és $n - 1$, i de la resta com a molt $b - 2$ poden ser branques de $G - T'$, unint v amb algun altre vèrtex en T'. Com $d > n + b - 3$, existeix un vèrtex $x \in G - T'$ adjacent a v en G per una branca d'un color no utilitzat. Assignant l a x obtenim l'empaquetament desitjat. □

Farem servir també, una versió més simple d'un resultat de Häggkvist [47].

Teorema 5.27 (Häggvist,[47], Corol·lari 2.8) *Sigui G un graf bipartit i d-regular amb conjunts estables A, B.*

Sigui $c : A \to [0,d]^n$, $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$ tal que $\sum_{i=1}^{n} c_i(x) = d$, per cada $x \in A$. Si $\sum_{x\in A} c_i(x) \leq d$ per a cada $i = 1, \ldots, n$, aleshores G admet una coloració de les branques amb n colors, de manera que cada color-classe és un bosc d'estrelles i cada vèrtex $x \in A$ és incident amb precisament $c_i(x)$ branques acolorides amb i per a cada $i = 1, \ldots, n$. □

Demostració del Teorema 5.25. Considerem el dígraf de Cayley $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}}$ on $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_4$ i $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_n \times \{1\}$. En aquest cas, $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}}$ és un dígraf regular de grau n, que té per graf subjacent (isomorf) $K_{2n,2n}$.

Sigui H el subgraf induït per $(\mathbb{Z}_n \times \{1\}) \cup (\mathbb{Z}_n \times \{2\})$, obtingut en suprimir l'orientació dels arcs, tot i mantenir la coloració heretada en les branques, on la branca $(i,1)(i+s,2)$ està acolorida amb s.

L'arbre base T_0 de T té $n - k \leq n - b + 2$ branques, i per tant, d'acord amb la hipòtesi del Teorema, es dóna la condició del Lema 5.26, que permet realitzar T_0 en H de manera que no hi ha dues branques amb el mateix color. El mateix principi que s'aplicava en el Lema 5.4, garanteix que n còpies disjuntes de $T_0, T_1, \ldots, T_n$, poden ser empaquetades en H, via translacions de $(x, 0)$, per a $x \in \mathbb{Z}_n$. L'empaquetament és uniforme, en el sentit que cada vèrtex del conjunt estable A_0 de T_0, (i respectivament de B_0), apareix exactament un cop, en una còpia empaquetada de T_0, en cada vèrtex del conjunt estable $\mathbb{Z}_n \times \{2\}$ (respectivament $\mathbb{Z}_n \times \{1\}$) de H.

Sigui $S' \subset \mathbb{Z}_n$ el conjunt de $n - E(\dot{T_0})$ colors no utilitzats en la realització de T_0. Siguin $A_1 \subset A$, i $B_1 \subset B$, els conjunts de vèrtexs terminals de T. Sigui $S' = S'_a \cup S'_b$ una partició dels colors de S', amb la condició $|S'_a| = |A_1|$ i $|S'_b| = |B_1|$.

Considerem el subgraf subjacent H_0 de $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}}$ amb conjunt de vèrtexs $(\mathbb{Z}_n \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z}_n \times \{1\})$, i les branques amb colors en S'_a. El graf H_0 és regular de grau $|A_1|$.

Assignem a cada vèrtex $x \in \mathbb{Z}_n \times \{1\}$ la n-tupla $\{c_1(x), \ldots, c_n(x)\}$, on cada $c_i(x)$ representa el nombre de vèrtexs terminals de T adjacents a x en la còpia T_i. Com l'empaquetament és uniforme, $\sum_i c_i(x) = |A_1|$, ja que cada vèrtex $x \in \mathbb{Z}_n \times \{1\}$, s'identifica amb cada vèrtex de T en una de les còpies, i per tant, la suma anterior, ens dóna el total de vèrtexs terminals. Per altra banda, com $|S'_a| = \sum_x c_\imath(x)$, i $|A_1| = |S'_a|$, pel Teorema 5.27, existeix una coloració de les branques, (no relacionada amb la de H_0), associada a c, en el sentit que cada color genera un bosc d'estrelles i cada vèrtex $x \in \mathbb{Z}_n \times \{1\}$ és incident a precisament, $c_\imath(x)$ branques de color $\imath$.

De manera similar, sigui H_2 el subgraf subjacent de $\vec{\mathcal{G}}_S$ amb conjunt de vèrtexs $(\mathbb{Z}_n \times \{2\}) \cup (\mathbb{Z}_n \times \{3\})$, i les branques amb colors en S'_b. El graf H_2 és regular de grau $|B_1|$. Assignem ara a cada vèrtex $y \in \mathbb{Z}_n \times \{2\}$ la n-tupla $\{c'_1(y), \ldots, c'_n(y)\}$, on cada $c'_\imath(y)$ representa el nombre de vèrtexs terminals de T adjacents a y en la còpia $T_\imath$. Com l'empaquetament és uniforme, aleshores $\sum_\imath c'_\imath(y) = |B_1| = |S'_b| = \sum_x c'_\imath(y)$. Novament, pel Teorema 5.27, existeix una coloració de les branques, amb colors en S'_b associada a c'.

Ara, considerant per a cada $1 \leq i \leq n$ el conjunt de branques de $T_\imath$ i les acolorides amb c i c' de color i, obtenim un arbre $T'_\imath$ isomorf a T, de manera que els arbres $T'_1, \ldots, T'_n$ són dos a dos disjunts.

Finalment, la translació ϕ definida per

$$\begin{aligned} \phi : \vec{\mathcal{G}}_S &\rightarrow \vec{\mathcal{G}}_S \\ (x,j) &\mapsto (x, j+1), \end{aligned}$$

és un isomorfisme que preserva els colors. A partir d'ella el conjunt

$$\{\phi^r(T'_\imath), |r \in \mathbb{Z}_4, \ \imath = 1, \ldots, n\},$$

defineix una branca-descomposició del graf subjacent de $\vec{\mathcal{G}}_S$, és a dir, de $K_{2n,2n}$.
□

Notem que la condició del Teorema 5.25 es dóna clarament quan el nombre de vèrtexs terminals és més gran que $(n+1)/2$, ja que aleshores, $b \leq n + 1 - k \leq (n+1)/2 \leq k$. En particular, com ja s'assenyalava en [47], un arbre sense vèrtexs de grau 2, descomposa $K_{2n,2n}$. En aquest cas, si denotem per $n_\imath = |\{v \in T : deg_T(v) = i\}|$ es verifica: a nivell de vèrtexs, $\sum_{\imath=1}^n n_i = n+1$ i a nivell de branques, $\sum_{\imath=1}^n i n_\imath = 2n$. Restant les dues expressions anteriors s'obté $\sum_{\imath=3}^n (i-1)n_\imath = n-1$, i per tant,

$$2k = 2n_1 = 2(n+1) - 2\sum_{\imath=3}^{n} n_\imath \geq 2(n+1) - \sum_{\imath=3}^{n}(i-1)n_\imath = n+3.$$

Com una aplicació del Teorema 5.25, obtenim el resultat següent.

Corol·lari 5.28 *Sigui $T = T(A, B)$ un arbre amb n branques.*

1. *Si $2|A| \leq |B|$ aleshores, T descomposa $K_{2n,2n}$.*
2. *Si un dels conjunts estables de T no té vèrtexs de grau 2, aleshores $T|K_{2n,2n}$.*

Demostració. Sigui $T_0(A_0, B_0)$ l'arbre base de T i k el seu nombre de vèrtexs terminals.

1. Sigui T' l'arbre obtingut a partir de T en suprimir els vèrtexs de $B_1 = B \setminus B_0$. Com cada vèrtex de B_0 té grau com a mínim 2 en T', aleshores,

$$|A| + |B_0| - 1 = |E(T')| \geq 2|B_0|,$$

   i deduïm $|A| \geq |B_0| + 1$. D'aquí, $2|A| \leq |B| = |B_0| + |B_1| \leq |A| + |B_1| - 1$, i per tant $|B_1| \geq |A| + 1$. Desigualtats que garanteixen la condició del Teorema 5.25, ja que aleshores,

$$k \geq |B_1| > |A| \geq \max\{|A_0|, |B_0|\}$$

2. Per altra banda, si A no té vèrtexs de grau 2, aleshores, o bé, T és una estrella i, com és bigraceful, descomposa $K_{n,n}$, o bé, $A_0 = A \setminus A_1 \neq \emptyset$, on A_1 denota el conjunt de vèrtexs terminals de T en A. Aleshores, $|A_0| + |B| - 1 \geq 3|A_0|$, implica $|B| \geq 2|A_0|$. Utilitzant ara la darrera desigualtat del primer punt, l'arbre T' induït per $A_0 \cup B$ té un nombre k' de vèrtexs terminals satisfent $k' \geq |A_0| \geq |B_0|$. Com $k \geq k'$, la condició del Teorema 5.25 es satisfà. □

Observació 5.29 Notem que el fet clau en la demostració del Teorema 5.25, és la realització de l'arbre base de T, $T_0 = T_0(A_0, B_0)$, en $\mathcal{G}_\mathcal{S}(2)$, on $\mathcal{G} = \mathcal{S} = \mathbb{Z}_n$, de manera que no hi ha dues branques amb el mateix color. Fet que sempre es dóna quan T_0 és un arbre bigraceful, ja que aleshores, si f és un etiquetament bigraceful de T_0, assignant $(f(x), 2)$ a $x \in A_0$, i $(f(y), 1))$ a $y \in B_0$, obtenim una realització de l'arbre en $\mathcal{G}_\mathcal{S}(2)$ que no repeteix colors. D'aquí que, la condició sobre el nombre de vèrtexs terminals, pugui substituir-se per la condició que T_0 sigui un arbre bigraceful. En particular, obtenim el corol·lari següent.

Corol·lari 5.30 (5.11) *Sigui T un arbre de n branques amb arbre base un lobster. Aleshores, T descomposa $K_{2n,2n}$. En particular, un arbre amb n branques i diàmetre com a molt 7, descomposa $K_{2n,2n}$.* □

Tot seguit presentem un resultat en la mateixa direcció. Häggkvist [47], prova que tot arbre amb n branques i diàmetre com a molt $2k$, descomposa tot graf n-regular i bipartit, de gir com a molt k. Kézdy i Snevily [59] estudien el problema de descomposició de K_{2h+1}. Proven que tot arbre amb n branques i radi r descomposa K_{2h+1}, amb $h \leq (r+4)n^2$. Fent servir la mateixa tècnica, donem una demostració del resultat següent.

Teorema 5.31 (5.12) *Sigui T un arbre amb n branques i radi r. Aleshores, T descomposa $K_{2hn,2hn}$, per algun $h \leq \lceil r/4 \rceil$.*

En la demostració d'aquest teorema utilitzem una altra versió del Lema 5.4.

Recordem que, en el graf de Cayley dirigit $\vec{\mathcal{G}}_S$ podem assumir que existeix una arc-coloració, que assigna a l'arc $(x, x+s)$ el color s, per a cada $x \in \mathcal{G}$ i cada $s \in S$.

Lema 5.32 *Sigui $\vec{H}$ un subdígraf del dígraf de Cayley $\vec{\mathcal{G}}_S$. Siguin G i H els grafs subjacents de $\vec{\mathcal{G}}_S$ i $\vec{H}$, respectivament. Si no hi dos arcs de $\vec{H}$ amb el mateix color, aleshores existeix un empaquetament de $|\mathcal{G}|$ còpies de H en G.*

Demostració. Per cada element $a \in \mathcal{G}$, la translació $\phi_a(x) = a+x$ defineix un automorfisme del dígraf de Cayley $\vec{\mathcal{G}}_S$, que preserva els colors dels arcs, clarament ja que $\phi_a(x, x+s) = (x+a, x+s+a)$. A més, si $a \neq 0$, l'automorfisme, no té punts fixos. Per tant, per a cada parella d'elements $a, b \in \mathcal{G}$ diferents, els subdígrafs $\phi_a(\vec{H})$ i $\phi_b(\vec{H})$ són arc disjunts. En particular, $|\mathcal{G}|$ còpies del graf subjacent H de $\vec{H}$ poden ser empaquetades en $\mathcal{G}$. □

L'empaquetament donat en el Lema 5.32 és *uniforme*, en el sentit que, cada vèrtex de H apareix exactament una vegada en cada vèrtex de G en una de les còpies de l'empaquetament. En particular, quan H té mida $|S|$, obtenim una branca-descomposició de G per H.

En la demostració del Teorema 5.31 farem servir el teorema següent, degut a Kézdy i Snevily [59].

Teorema 5.33 (Kézdy, Snevily ,[59], Teorema 2) *Donada $a_1, \ldots, a_k$ una seqüència d'elements (no necessàriament diferents) de $\mathbb{Z}_n$, amb $2k < n$. Aleshores, existeix una permutació π de $\{1, \ldots, k\}$ tal que les sumes $a_{\pi(i)} + i$ són, dues a dues, diferents.* □

Recordem que el producte tensorial $G \otimes H$ de dos grafs G i H, també conegut com producte lexicogràfic, denota el graf amb conjunt de vèrtexs $V(G) \times V(H)$ i adjacències $(g, h)(g', h')$, si o bé, $g = g'$ i $hh' \in E(H)$, o bé, $gg' \in E(G)$. A continuació, farem servir només productes del tipus $G \otimes N_m$, on N_m és el graf nul, format per m vèrtexs i sense cap branca.

Demostració del Teorema 5.31. Sigui x un vèrtex de T d'excentricitat mínima. Per a $i = 1, \ldots, r$, denotem per V_i el conjunt de vèrtexs de T a distància i de x. Si l'arbre té almenys $(n+1)/2$ vèrtexs terminals, aleshores el resultat és cert pel Teorema 5.25. D'aquí que, podem assumir que l'arbre té $m < (n+1)/2$ vèrtexs terminals. En particular, per a cada $i = 1, \ldots, r$, obtenim $|V_i| \leq m$.

Sigui $h = \lceil (r-1)/4 \rceil$, en particular $r \leq 4h + 1$. Considerem el dígraf de Cayley $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}}$ amb $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{4h}$, i $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_n \times \{1\}$. El graf subjacent és isomorf a $C_{4h} \otimes N_n$. Com C_{4h} descomposa $K_{2h,2h}$, aleshores $C_{4h} \otimes N_n$ descomposa $K_{2hn,2hn} = K_{2h,2h} \otimes N_n$. D'aquí deduïm que per provar el teorema, és suficient comprovar que T descomposa $C_{4h} \otimes N_n$. A tal fí, considerarem una orientació en T, $\vec{T}$, i una realització $f : \vec{T} \to \vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}}$, de manera que els arcs de $\vec{T}$ tinguin colors diferents, aleshores pel Lema 5.32, haurem provat el resultat. Resta veure com, a partir de l'orientació de T, definim la realització en $\vec{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}}$, que compleix la condició sobre els colors dels arcs.

Sigui T' el subarbre de T generat pels vèrtexs en $\cup_{i=0}^{2} V_i$. Pel Teorema 5.22 $T'(A', B')$ és bigraceful. Podem assumir que $V_2 \subset B'$. Assignem una direcció a les branques de T', de manera que els arcs resultants són incidents des de A' cap a B'. Aleshores, T' pot ser realitzat en el subdígraf generat per $(\mathbb{Z}_n \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z}_n \times \{1\})$, de manera que els arcs tenen colors $[0, |E(T')| - 1]$ i $V_2 \subset \mathbb{Z}_n \times \{1\}$. És a dir, hem definit f per a tots els vèrtexs en $\cup_{i=0}^{2} V_i$.

Suposem que $r > 2$. Assignem a la resta de branques una orientació de manera que els arcs resultants estan dirigits des de l'arrel cap a les capes inferiors. Considerem ara, una partició $L_2, \ldots, L_{r-1}$ del conjunt $[|E(T')|, |E(T)| - 1]$ en conjunts d'enters consecutius de cardinal $|L_i| = |V_{i+1}|$, per a $i = 2, \ldots, r-1$. Notem que, $r - 3 \leq 4h - 2$.

Suposem que ja hem definit la realització f de V_i en $\mathbb{Z}_n \times \{i-1\}$ per $2 \leq i < r$, de manera que tots els arcs de $\vec{T}$ incidents cap a $V_0 \cup \ldots \cup V_i$ tenen colors, dos a dos, diferents. Estudiem l'ampliació de f als elements de V_{i+1}.

Sigui $(x_1, y_1), \ldots, (x_u, y_u)$ el conjunt d'arcs en $\vec{T}$ incidents des de V_i cap a V_{i+1}, on els elements $x_1, \ldots, x_u$ no són necessàriament diferents, i $u = |V_{i+1}| < (n+1)/2$. Sigui $f(x_j) = (\alpha_j, i-1)$, per a $1 \leq j \leq u$. Pel Teorema 5.33, existeix una permutació π de $\{1, \ldots, u\}$ tal que les sumes $\alpha_{\pi(i)} + i$ són, dues a dues, diferents. D'aquí, si la seqüència L_i és $\{s, s+1, \ldots, s+u-1\}$, podem considerar un desplaçament de les sumes anteriors de $(s-1)$ unitats

$$\alpha_{\pi(1)} + s, \ldots, \alpha_{\pi(u)} + s + u - 1$$

i reorganitzant per α, obtenim una permutació $\beta_1, \ldots, \beta_u$ dels elements de L_i, de manera que les sumes $\alpha_i + \beta_i$, $1 \leq j \leq u$ són, dos a dos, disjuntes. Aquest fet, permet l'extensió de f a V_{i+1}. La realització dels vèrtexs d'aquest conjunt ve definida aleshores per $f(y_j) = (\alpha_j + \beta_j, i)$. Novament, la definició de f, permet mantenir la condició sobre els colors dels arcs. □

Les idees utilitzades en els teoremes anteriors, poden ser usades per obtenir altres resultats. Un exemple d'aquests es presenta a continuació.

La *raó de creixement* d'un graf G en el vèrtex $x \in V(G)$ es defineix com,

$$\rho_x(G) = \min\left\{\frac{|V_i|}{|V_{i-1}|}, 1 \leq i \leq e(x)\right\},$$

on $V_i(x)$ denota el conjunt de vèrtexs a distància i de x, i $e(x)$ l'excentricitat de x.

Teorema 5.34 (5.13) *Sigui T un arbre amb n branques i raó de creixement $\rho_x(G) \geq \sqrt{2}$ per algun vèrtex x. Aleshores, $T | K_{2n,2n}$.*

En la demostració d'aquest resultat farem servir el lema següent.

Lema 5.35 *Sigui $x_1, \ldots, x_k$ una seqüència d'elements, no necessàriament diferents de $\mathbb{Z}_n$, amb $2k \leq n$. Sigui $U \subset \mathbb{Z}_n$ amb $|U| = 2k$. Aleshores, existeix un subconjunt $U' \subset U$ de cardinal k i una ordenació dels vèrtexs $u_1, \ldots, u_k$ dels elements de U' tal que les sumes $x_1 + u_1, \ldots, x_k + u_k$ són, dues a dues, disjuntes.*

Demostració. Suposem que i elements de U han estat ordenats, $1 \leq i < k$, de manera que les sumes $x_1 + u_1, \ldots, x_i + u_i$ són, dues a dues, disjuntes. Aleshores, u_{i+1} por ser triat entre $2k - i$ possibilitats, i almenys una d'elles compleix $x_{i+1} + u_{i+1} \notin \{x_1 + u_1, \ldots, x_i + u_i\}$. Aquest fet és clar, perquè

$$|\{x_{i+1} + u | u \in U \setminus \{u_1, \ldots, u_i\}\}| = 2k - i > i.$$

□

Demostració del Teorema 5.34. Podem assumir que $r > 2$, ja que en cas contrari, l'arbre seria bigraceful, i per tant, $T|K_{n,n}|K_{2n,2n}$. També podem assumir que, $2|V_r| \leq n$, ja que en cas contrari, el nombre de vèrtexs terminals m verificaria $m \geq |V_r| \geq (n+1)/2$ i pel Teorema 5.25, $T|K_{2n,2n}$.

Com en la demostració del Teorema 5.25, denotem per $\vec{\mathcal{G}_S}$ el dígraf de Cayley amb $\mathcal{G} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_4$ i conjunt de generadors $\mathcal{S} = \{(x, 1) | x \in \mathbb{Z}_n\}$. El subgraf subjacent, $\mathcal{G}_S$ és isomorf a $K_{2n,2n}$.

La idea de la demostració és empaquetar n còpies del subarbre T_1 de T, induït pels vèrtexs de $V(T) \setminus V_r$, de manera uniforme en $\mathcal{G}_S - (\mathbb{Z}_n \times \{3\})$ i utilitzar el Teorema 5.27, com en la demostració del Teorema 5.25. La primera part de la demostració, la farem seguint dos passos.

Sigui $T_0 = T_0(A_0, B_0)$ el subarbre de mida n_0 de T induït pels vèrtexs en $\cup_{i=0}^{r-2} V_i$, assumim que $x_0 \in A_0$, amb $\rho_{x_0}(G) \geq \sqrt{2}$.
Suposem que $r = 2k$ és un enter parell. Aleshores,

$$|B_0| = \sum_{i=1}^{k-1} |V_{2i-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{k-1} |V_{2i}| < |A_0|.$$

A més,

$$|A_0| = \sum_{i=0}^{k-1} |V_{2i}| \leq \sum_{i=1}^{k} (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2i} |V_r| < \frac{1/2}{1-(1/2)} |V_r| = |V_r|.$$

D'aquí deduïm,

$$n_0 + |A_0| < \sum_{i=0}^{2k-2} |V_i| + |V_r| < n.$$

Si $r = 2k - 1$ és un enter senar. Aleshores,

$$|A_0| = \sum_{i=0}^{k-2} |V_{2i}| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^{k-1} |V_{2i-1}| < |B_0|.$$

I anàlogament, $|B_0| = \sum_{i=1}^{k-1} |V_{2i-1}| \leq \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{1}{\sqrt{2}})^{2i} |V_r| < \frac{1/2}{1-(1/2)} |V_r| = |V_r|$. En aquest cas,

$$n_0 + |B_0| < \sum_{i=0}^{2k-2} |V_i| + |V_r| < n.$$

Com a conseqüència del Lema 5.26, existeix una realització f_0 d'una versió orientada $\vec{T_0}$ de T_0, en el subdígraf $\vec{\mathcal{G}_S}$, induït pels vèrtexs en $(\mathbb{Z}_n \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z}_n \times \{1\})$, de manera que no hi ha dos arcs amb el mateix color. Assumim que els vèrtexs de V_{r-2} són injectats en $\mathbb{Z}_n \times \{1\}$, per aquesta realització.

Assignem ara, a les branques de T incidents simultàniament als vèrtexs de V_{r-2} i V_{r-1} una direcció, de manera que l'arc resultant, sigui incident des de V_{r-2} cap a V_{r-1}. Sigui $\{(x_i, y_i),\ i = 1, \ldots, |V_{r-1}|\}$, els arcs obtinguts per aquesta orientació, on els $x_1, \ldots, x_{|V_{r-1}|}$ no són necessàriament disjunts. Denotem per $\vec{T_1}$ l'arbre orientat obtingut a partir de $\vec{T_0}$ en afegir el nou conjunt d'arcs i els vèrtexs terminals incidents a ells.

Sigui $U \subset S$ el conjunt de colors que no ha estat utilitzat en la realització de $\vec{T_0}$. En particular, $|U| = |V_r| + |V_{r-1}| \geq 2|V_{r-1}|$. Aleshores, pel Lema 5.35, existeix una ordenació $u_1, \ldots, u_l$ de l elements de U, tal que les sumes

$$f_0(x_1) + (u_1, 1), \ldots, f_0(x_l) + (u_l, 1)$$

són, dues a dues, disjuntes, on $l = |V_{r-1}|$.

Sigui f_1 la realització de $\vec{T_1}$ que estén f_0, tot assignant als vèrtexs de V_{r-1}: $f(y_i) = f_0(x_i) + (u_i, 1)$. Com no hi ha dos arcs que tinguin el mateix color en $\vec{\mathcal{G}_S}$, per aquesta realització de $\vec{T_1}$, via el Lema 5.32, podem empaquetar n

còpies de T_1, les denotem per $T_1^1, \ldots, T_1^n$, en el graf subjacent $\mathcal{G}_S$. Aquest empaquetament, de tipus uniforme, s'obté per translacions generades per $(a, 0)$, amb $a \in \mathbb{Z}_n$.

A continuació, procedim a afegir les branques de T que connecten vèrtexs en V_{r-1} amb vèrtexs en V_r, en cada còpia T_1^i, per $i = 1, \ldots, n$. A tal fi, usem el Teorema 5.27. Sigui G_3 el graf subjacent de $\vec{\mathcal{G}}_S$ induït pels vèrtexs en $(\mathbb{Z}_n \times \{2\}) \cup (\mathbb{Z}_n \times \{3\})$, i el conjunt U_1 de colors, no usats per f_1. Assignem a cada vèrtex $x \in \mathbb{Z}_n \times \{2\}$ la n-tupla $\{c_1(x), \ldots, c_n(x)\}$, on cada $c_i(x)$ és el nombre de vèrtexs en T adjacents a x en la còpia T_1^i. Com l'empaquetament és uniforme, $\sum_i c_i(x) = |U_1| = \sum_x c_i(x)$.. Pel Teorema 5.27, existeix una coloració de les branques en G_3 (no necessàriament relacionada amb la de $\vec{\mathcal{G}}_S$) tal que cada color-classe genera un bosc d'estrelles i cada $x \in \mathbb{Z}_n \times \{2\}$ és incident a exactament $c_i(x)$ branques de color i.

Finalment, per a cada $i = 1, \ldots, n$ el conjunt de branques de T_1^i, juntament amb les branques de color i de G_3, genera un arbre T^i, isomorf a T, de manera que per a cada parella $i \neq j$, T^i i T^j són branca-disjunts. La descomposició és completa en considerar el conjunt $\{\phi^r(T^i),\ r \in \mathbb{Z}_4,\ i = 1, \ldots, n\}$, on ϕ denota la traslació generada per $(0, 1)$. □

5.4 Conclusions i problemes oberts

En aquest capítol hem estudiat les descomposicions de $K_{n,n}$ en còpies isomorfes d'un arbre qualsevol amb n branques. La recerca d'una descomposició cíclica l'hem plantejat a partir de la introducció dels etiquetaments bigraceful sobre els vèrtexs de l'arbre. Hem provat el caràcter bigraceful de diferents famílies d'arbres, i hem donat eines per a la construcció d'arbres bigraceful, a partir d'arbres que ja ho eren. En la línia de reforçar conjectures similars en el contexte d'etiquetaments, conjecturem el següent.

Conjectura 5.36 *Tots els arbres són bigraceful*

Amb el mateix grau de creença que conjecturem que tots els arbres admeten etiquetaments bigraceful, sospitem que la demostració és inaccessible amb els mètodes actuals. En la part final del capítol, hem treballat amb aproximacions d'aquesta conjectura dirigint els esforços cap a dues direccions. Per una banda, en el Teorema 5.9, hem provat que tot arbre no està gaire lluny de ser bigraceful, ja que al afegir-li un determinat nombre de branques a un dels vèrtexs, aquest esdevé bigraceful. Per altra banda, hem donat resultats en els que, sota certes condicions, es prova la descomposició de $K_{n',n'}$ en còpies isomorfes d'un arbre T amb n branques, per a cert $n' \geq n$, que en alguns casos és $2n$ i en els d'altres, sempre es pot acotar en termes del radi de l'arbre, (veure Teorema 5.12). La qüestió que plantegem a continuació sorgeix arran d'aquests darrers resultats.

Problema 5.37 *Trobar cotes el més ajustades possibles pels paràmetres següents.*

a) $bg = \min\{k \mid \forall T, \exists T' \supseteq T,$ *amb* $|E(T')| \leq |E(T)| + k$ *i* T' *bigraceful*$\}$.

b) $Bg(n)$ *definit com el màxim de les mides entre tots els arbres empaquetables* n *vegades en* $K_{n,n}$.

De ser certa la Conjectura bigraceful, necessàriament $bg = 0$ i $Bg(n) = n$.

Bibliografia

[1] S.B. Akers and B. Krishnamurthy, A group-theoric model for symmetric interconnection networks, *IEEE Transactions on computers* **38** (1989) 555-565.

[2] M. Aung, A. Kyaw, Maximal trees with bounded maximum degree in a graph, *Graphs and Combinatorics* **14** (1998) 209-221.

[3] L. Babai, Long cycles in vertex transitive graphs, *Journal of Graph Theory* **3** (1979) 301-304.

[4] K.A. Berman, Proof of a conjecture of Häggkvist on cycles and independent edges, *Discrete Mathematics* **46** (1983) 9-13.

[5] B. Bollobás, Graph Theory. An introductory course, Graduate Texts in Mathematics 63, Springer-Verlag, New York Berlin 1979. ISBN 0387-90399-2.

[6] B. Bollobás, Modern Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics 184, Springer-Verlag, New York Berlin 1991. ISBN 0387-98488-7.

[7] B. Bollobás, The isoperimetric number of random regular graphs, *European Journal of Combinatorics* **9** (1988) 241-244.

[8] G.S. Bloom, A chronology of the Ringel-Kotzig conjecture, *Ann. NY Acad. Sci.* **328** (1979) 32-51.

[9] S. Brandt and E. Dobson, The Erdös-Sós conjecture for graphs of girth 5, *Discrete Mathematics* **150** (1996) 411-414.

[10] I. Cahit, Status of the graceful tree conjecture in 1989, Topics in Combinatorics and Graph Theory, *Physica - Verlag, Heildeberg* (1990) 175-184.

[11] L. Cai, Path decompositions of multigraphs, *Journal of Graph Theory* **19** (1995) 297-307.

[12] Y. Caro, The decomposition of trees into subtrees, *Journal of Graph Theory* **8** (1984) 471-479.

[13] Y. Caro, I. Krasikov and Y. Roditty, On the largest tree of given maximum degree in a connected graph, *Journal of Graph Theory* **15** (1991) 7-13.

[14] Y. Caro and Y. Roditty, A note on packing trees into complete bipartite graphs and on Fishburn's conjecture, *Discrete Mathematics* **82** (1990) 323-326.

[15] Y. Caro and R. Yuster, Packing graphs: The packing problem solved, *The Electronic Journal of Combinatorics* 4# R1.

[16] G. Chartrand, A graph-theoretical approach to a communicatiom problem, *SIAM J. Applied. Math.* **14** (1966) 778-781.

[17] G. Chartrand, J. McCanna, N. Sherwani, M. Hossain and J. Hashmi, The induced path number of bipartite graphs, *Ars Combinatoria* **37** (1994) 191-208.

[18] V. Chvátal and P. Erdös, A note on hamiltonian circuits, *Discrete Mathematics* **2** (1972) 111-113.

[19] F.R.K. Chung, On partition of graphs into trees, *Discrete Mathematics* **23** (1978) 23-30.

[20] C.J. Colburn, Edge-packings of gràphs and network reliability, Proceedings of the First Japan Conference on Graph Theory and Applications (Hakone, 1986). *Discrete Mathematics* **72** (1988) 49-61.

[21] F. Comelles, J. Fábrega, A. Lladó and O. Serra, Matemàtica Discreta, Edicions UPC, 1992. ISBN 84-7653-413-2.

[22] A. Czygrinow, G. Fan, G. Hurlbert, H.A. Kierstead, W.T. Trotter, Spanning trees of bounded degree, *The Electronic Journal of Combinatorics* **8** (2001)

[23] E. Dobson, Trees in graphs with large girth, *Manuscript* 1994,

[24] A. Donald, An upper bound for the path number of a graph, *Journal of Graph Theory* **4** (1980) 189-201.

[25] J. Edmonds, Minimum partition of a matroid into independent subsets, *J. Res. Nat.Bur. Stand.* **69B** (1965) 67-72.

[26] E.S. El Mallah and C.J. Colbourn, Partioning the edges of a planar graph into two partial k-trees, Nineteenth Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Baton Rouge, LA, 1988), *Congr.Numer.* **66** (1988) 69-80.

[27] H. Enomoto, A simple proof of Nash-Williams' formula on the arboricity of a graph, *SUT Journal of Mathematics* **28-2** (1992) 121-127.

[28] H. Enomoto, J. Van den Heuvel, A.Kaneko and A.Saito, Relative length of long paths and cycles in graphs with large degree sums, *Journal of Graph Theory* **20** (1995) 213-225.

[29] P. Erdös and T. Gallai, Graphs with prescribed degrees of vertices, *Math. Lapok* **11** (1960)264-274.

[30] J. Fábrega and M.A. Fiol, On the extraconnectivity of graphs, *Discrete Mathematics* **155** (1996) 49-57.

[31] M. Farber, B. Richter and H. Shank, Edge-Disjoin Spanning Trees: A connectedness Theorem, *Journal of Graph Theory* **8** (1985) 319-324.

[32] F. Fink, On the decomposition of Cayley color graphs into isomorphic oriented trees. *Journal Combin. Theory Ser. B* **61** (1994) 71-82.

[33] P.C. Fishburn, Packing Graphs with Odd and Even Trees. *Journal of Graph Theory* **7** (1983) 369-383.

[34] M.F. Foreger and T.H. Foreger, The tree-covering number of a graph, *Czechoslovak Math. J.* **30** (1980) 633-639.

[35] H. Fraissée, Sur le treillis des décompositions de graphs planaires maximals en arbres. PhD Thesis. Université Paris VII.

[36] Fraigniaud-Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, *Discrete Applied Mathematics* **53** (1994) 79-133.

[37] J.A. Gallian, A survey: recent results, conjectures, and open problems in labeling graphs, *Journal of Graph Theory* **13** (1989) 491-504.

[38] J.A. Gallian, A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics* 5# DS6.

[39] A García, C. Hernando, F Hurtado, M. Noy and J. Tejel, Packing trees into planar graphs, *Graph Drawing (Rome,1997), 383-390*, Lecture Notes in Comput. Sci., **1353** *Springer, Berlin,1997.*

[40] J. Gimbert, R. Moreno, J.M. Ribó, M. Valls, Apropament a la teoria de grafs i als seus algorismes, Edicions de la UdL, 1998. ISBN 84-89727-65-1.

[41] S.W. Golomb, How to number a graph, *Graph Theory and Computing*, Academic Press, New York (1972) 23-37.

[42] F. Guldan, Some results on linear arboricity, *Journal of Graph Theory* **10** (1986) 505-509.

[43] A. Gutiérrez, A. Lladó, Regular packings of regular graphs, *Discrete Mathematics* **244** (2002) 83-94.

[44] A. Gutiérrez, A. Lladó, On forest isomorphic decomposition of Cayley digraphs, *J. Combin. Math. Comb. Compu* **41** (2002) 117-121.

[45] A. Gutiérrez, A. Lladó, S.C. López, Higher edge connectivities and tree decompositions in regular graphs, *Discrete Mathematics* **214** (2000) 245-250.

[46] A. Gyárfás and J. Lehel, Packing trees of different order into K_n, in *Combinatorics, (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976))*, Vol **1** 463-469. Colloq. Math.Soc. Janos Bolyai 18, North-Holland, New York (1978).

[47] R. Häggkvist, Decompositions of complete bipartite graphs, in *Surveys in Combinatorics*, Johannes Siemons Ed. Cambridge University Press (1989) 115-146.

[48] R. Häggkvist and Jin, Graphs with odd girth at least seven and high minimum degree, *Graphs Combin.* **14** (1998) 351-362.

[49] Y.O. Hamidoune, A. Lladó, O. Serra, R. Tindell, On isoperimetric connectivity in vertex-transitive graphs, *SIAM J.Discrete Mathematics* **13** (2000) 139-144.

[50] F. Harary, Covering and packing in graphs I, *Ann.New York Acad. Sci* **175** (1970) 198-205.

[51] L.S. Heath and J.P.C. Vergara, Edge-packing in planar graphs, *Theory Comp.Syst.* **31** (1998) 629-662.

[52] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, A note on packing two trees into K_n, *Ars Combinatoria* **11** (1981) 149-153.

[53] L.O. James, R.G. Stanton; D.D. Cowan, Some results on the tree numbers, *Proceedings of the Second Lousiana Conference of Combinatorics Graph Theory and Computing* (Lousiana State Univ., Baton Rouge, La, 1971) 317-330.

[54] M. Jacobson,M. Truszczyńsky and Z. Tuza, Decompositions of regular bipartite graphs, *Discrete Mathematics* **89** (1991) 17-27.

[55] X. Jolivet, Sur la connexité des graphs orientes, C.R.Acad. Sci.Paris **274A** (1972) 148-150.

[56] *J. Graph Theory* **9** (1985). Special issue on factorisations.

[57] G.R. Kampen, Orienting planar graphs, *Discrete Mathematics* **14** (1976) 337-341.

[58] A. Kaneko, Spanning trees with constrains on the leaf degree, *Discrete Mathematics* **115** (2001) 73-76.

[59] A.E. Kézdy, H.S. Snevily, Distinct Sums Modulo n and Tree Embeddings, *Combinatorics, Probability and Computing* **11** (2002) 35-42.

[60] D.J. Kleitman, D.L. Wang, Decomposition of a graph realizing a degree sequence into disjoint spanning trees, *Siam, J. Appl. Mathematics* **30** (1976) 206-221.

[61] A. Kotzig, On certain valuations of finite graphs, *Utilitas Mathematica* **4** (1973) 261-290.

[62] S. Kundu, Bounds on the number of disjoint spanning trees, *J. Comb. Theory, Series B,* **17** (1974) 199-203.

[63] S. Kundu, Disjoint representation of tree realizable sequences, *SIAM J.Appl. Math.* **26** (1974) 103-107.

[64] S. Kundu, Existence of graphs with three spanning trees and given degree sequence, *SIAM J.Appl. Math.* **3** (1974) 296-298.

[65] A. Lladó, S.C. López, The minimum degree and the minimum number of edge disjoint trees, to appear *Discrete Mathematics*.

[66] A. Lladó, S.C. López, Minimal decompositions of graphs with a given tree as a factor, submitted to *J. Australian Asian*.

[67] A. Lladó, S.C. López, Edge decompositions of $K_{n,n}$ into isomorphic copies of a given tree, submitted to *Journal of Graph Theory*.

[68] A. Lladó, G. Ringel, O. Serra, On the tree number of regular graphs, *Discrete Mathematics* **165/166** (1997) 587-595.

[69] J. Lin, Hamiltonian Decomposition of Cayley Graphs on Abelian Groups of odd order, *Journal of Comb. Theory* **66** (1996) 75-87.

[70] Z. Lonc, Decompositions of Graphs into Trees, *Journal of Graph Theory* **13** (1989) 393-403.

[71] Z. Lonc, On the complexity of some edge-partition problems for graphs, *Discrete Applied Mathematics* **70** (1996) 177-183.

[72] L. Lovász, On covering of graphs, *Theory of graphs (Proceedings of Colloquium held at Tihany, Hungary, September,1966)*. Edited by P. Erdös and G.Katoma. Academic, New York (1968) 231-236.

[73] L.Lovász, Matching Theory, Annals of Discrete Mathematics, North-Holland, 1986. ISBN 0 444 87916 1.

[74] M. Maheo, J.F. Saclé and M. Wózniak, Edge-disjoint placement of three trees, *European Journal of Combinatorics* **17** (1996) 543-563.

[75] J. Meng and Y. Ji, On a kind of restricted edge connectivity of graphs, *Discrete Applied Mathematics* **117** (2002) 183-193.

[76] C.St.J.A. Nash-Williams, Edge-disjoint spanning trees in finite graphs, *J. London Math. Soc.* **36** (1961) 445-450.

[77] C.St.J.A. Nash-Williams, Decomposition of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.* **39** (1964) 12.

[78] V. Newmann-Lara and E. Rivera-Campo, Spanning trees with bounded degrees, *Combinatorica* **11** (1991) 55-61.

[79] H.K. Ng, Gracefulness of a class of lobsters, *Notices Ams* **7** (1986) 825-294.

[80] K. Ou Yang and L. Gao, On a conjecture of Ringel, *Combinatorics and Graph Theory'95,* **1** (Hefei) 308-312, World Sci. Publishing, River Edge, NY,1995.

[81] K.Ou Yang, Y. Liu, Proof of Ringel's conjecture, *Chinese Sci.Bull. 40* (19) (1995) 1819.

[82] A.J. Petrenjuk, Enumeration of minimal tree decompositions of complete graphs, *J. Comb. Math. Comb. Comp.* **12** (1992) 197-199.

[83] V. Petrović, Decomposition of some planar graphs into trees, *Discrete Mathematics* **150** (1996) 449-451.

[84] R. Ravi, R. Sundaram, M.V. arathe, D.J. Rosenkrantz and S.S.Ravi, Spanning trees-short o small. *Siam J. Discrete Math* **9** (May 1996) 178-200.

[85] G. Ringel, Problem 25. *Theory of Graphs and its Applications. Proceedings of the Symposium Smolenice 1963.* Prague Publ. House of Czechoslovak Academy of Science (1964) 162. **17** (1993) 755-758.

[86] G. Ringel, Two trees in maximal planar bipartite graphs, *J. Graph Theory* **17** (1993) 755-758.

[87] A. Rosa, On certain valuations of the vertices of a graph, *International Symposium, Rome, July 1966* New York and Dunod Paris, (1967) 349-355.

[88] A. Rosa, J. Širáň, Bipartite Labelings of Trees and the Gracesize, *Journal of Graph Theory* **19** (1995) 201-215.

[89] M. Rosenfeld, On spanning trees of planar graphs, Boca Raton 1990, *Congr. Numer.* **78** (1990) 175-178.

[90] J.F. Saclé and Mariusz Woźniak, The Erdös-Sós conjecture for graphs without C_4. *J. Combin. Theory Ser. B* **70** (1997) 367-372.

[91] J.F. Saclé and M. Woźniak, A note on graphs which contain each tree of given size. *Discrete Mathematics* **165/166** (1997) 599-605.

[92] A. Saito, Long paths, long cycles, and their relative length, *Journal of Graph Theory* **30** (1999) 91-99.

[93] W. Schnyder, Planar graphs and poset dimension, *Order* **5** (1989) 323-343.

[94] M. Shi, Y. Li, F. Tian, Tree decompositions for a class of graphs, *Discrete Mathematics* **189** (1998) 221-232.

[95] H.S. Snevily, New families of graphs that have α-labelings, *Discrete Mathematics* **170** (1997) 185-194.

[96] M. Truszczyńsky, The tree number of a graph with a given girth, *Per. Math. Hungarica* **19** (1988) 273-286.

[97] M. Truszczyńsky, Decompositions of graphs into forests with bounded maximum degree, *Discrete Mathematics* **98** (1991) 207-222.

[98] W.T. Tutte, On the problem of decomposition a graph into n connected factors, *J. London Math. Soc.* **36** (1961) 221-230.

[99] J. Van den Heuvel and B. Jackson, On the Edge Connectivity, Hamiltonicity and Toughness of Vertex-Transitive Graphs, *Journal Combin. Theory Ser. B* **77** (1999) 138-149.

[100] J.G. Wang, D.J. Jin, X.G. Lu and D. Zhang, The gracefulness of a class of lobster trees, *Math. Comp. Modelling* **20** (1994) 105-110.

[101] H. Wang and N. Sauer, Packing Three Copies of a Tree into Completes Graph, *Europ. J. Combinatorics*, **14** (1993) 137-142.

[102] S. Win, Existenz von Gerüsten mit vorgeschreibenem Maximalgrad in Graphen, *Abh Math. Sem. Univ. Hamburg* **43** (1975) 263-267.

[103] S. Win, On a connection between the existence of k-trees and the tougness of a graph, *Graphs and Combinatorics* **5** (1989) 201-205.

[104] R. Yuster, Note: On packing trees into complete bipartite graphs, *Discrete Mathematics* **163** (1997) 325-327.

[105] L. Zhenhong, X. Baoguang, On low bound of degree sequences of spanning trees in k-edge connected graphs, *Journal of Graph Theory* **28** (1998) 87-97.

Índex de figures