Capítulo 9

Trabajos futuros

9.1. Trabajos futuros

A continuación figura una relación de problemas que quedan abiertos en mayor o menor medida y guardan relación con los estudiados en esta memoria. Todos ellos pueden ser objeto de futuros trabajos.

1. Completar el estudio de los árboles generadores de peso mínimo sin cortes entre las aristas, con el peso por capas convexas: se tiene una cota inferior para el número máximo, falta encontrar una cota superior para dicho orden.

2. En el peso definido por las capas convexas, nos hemos planteado el problema de encontrar, entre todas las poligonizaciones monótonas de una nube dada, las de peso mínimo igual a $2k-2$, con k el número de capas. También se puede estudiar el problema de la caracterización de tales poligonizaciones, fijada la dirección de monotonía. Para una nube de puntos dada, las poligonizaciones monótonas de peso $2k-2$ no tienen por qué existir, por lo que otro problema natural es el de encontrar, entre todas las poligonizaciones posibles, la que tenga el mínimo peso. Pueden caracterizarse también otros tipos de poligonizaciones como por ejemplo, las estrelladas.

3. Queda abierta la conjetura 2.5.1 para triangulaciones de peso mínimo, con el peso por capas convexas.

4. El cálculo de las capas de separabilidad lineal, cuya complejidad es $O(n)$, puede realizarse utilizando un algoritmo cuadrático, que utiliza la técnica del barrido topológico y resulta óptimo para el cálculo de todos los niveles de separabilidad. Sin embargo, sigue siendo un problema abierto construir dichas capas con un coste inferior, o probar una cota inferior para su obtención.

5. Obtener un conjunto de propiedades más completo en relación a las estructuras de peso mínimo, con el peso de la separabilidad.

6. En el estudio de los (α, k)-sets, cabe buscar mejoras combinatorias: ajustar las cotas para el número máximo de (α, k)-sets en los casos de k fijo y α tanto fijo como variable. También cabe buscar mejoras algorítmicas que rebajen los costes de construcción de los (α, k)-sets.

7. En el peso Delaunay, es un problema abierto encontrar la mediana Delaunay, sin calcular todos los niveles Delaunay.

8. Nos planteamos si bajo algunas restricciones, como por ejemplo la convexidad de las capas Delaunay, se puede afirmar que la $DT(S)$ es una triangulación de peso Delaunay mínimo (t-peso).

9. Estudiar la separabilidad de los puntos de un conjunto dado, mediante círculos. La estructura de capas Delaunay puede ser útil para determinar el radio o cotas del mismo.

10. Analizar otros pesos y ver si en ellos se extiende alguno de los resultados obtenidos para los pesos considerados en esta memoria. Asimismo, realizar un estudio de los pesos en dimensión superior: generalizar el concepto de peso y de las estructuras asociadas de capas y niveles; buscar analogías y herramientas de análisis.

11. Completar el estudio de la realización de polígonos convexos sobre rectas: se han caracterizado las permutaciones realizables en la zona infinita del arreglo, falta la caracterización de las realizables en la zona acotada y las realizables con puntos en ambas zonas.

12. Para conjuntos de segmentos que no admiten transversal, se han desarrollado algoritmos de construcción de todas las cuñas transversales separadoras. Para los conjuntos de segmentos que tampoco admitan cuña transversal separadora, nos planteamos encontrar el mínimo número k de semirrectas confluyentes en un punto, necesarias para cortar a todos los segmentos separando extremos. Si $k > 2$ es fijo, encontrar un algoritmo de existencia y construcción de dichos elementos transversales. Para este último problema, podemos conseguir un primer algoritmo en el primal de coste $O(n^5 \log n)$ ($O(n^4)$ posibilidades de situar el vértice de las semirrectas y $O(n \log n)$ para ordenar radialmente todas las semirrectas pasando por los extremos de los segmentos y determinar la existencia de las k transversales separadoras), se trata de analizar el problema en el dual para optimizar el coste.

13. Dado un conjunto de n segmentos, encontrar la mínima circunferencia que los atraviesa es equivalente al de encontrar un plano transversal a cierta colección de segmentos. En [GPW](93) se obtienen todos los posibles planos transversales a un conjunto de segmentos dado en tiempo $O(n^2)$. Se propone analizar el coste para la obtención de sólo uno de ellos.

14. El número de círculos TS, combinatoriamente diferentes para conjuntos de segmentos, tiene cota inferior lineal y superior cuadrática. Se han obtenido ejemplos para ambas cotas. También sería interesante encontrar una configuración de los segmentos para la cual el número de círculos TS fuera diferente al de las cotas, si ello es posible.

15. En la transversalidad de círculos con círculos, se ha obtenido un algoritmo de existencia y construción de círculos TS para colecciones de círculos del mismo radio. Se propone encontrar un algoritmo general, para cualquier conjunto de círculos.

Bibliografía

[ACH1] M. Abellanas, M. Claverol, F. Hurtado. Estructuras de peso mínimo. *Actas del VII Encuentro Español de Geometría Computacional*, Madrid, 97–105, 1997.

[ACH2] M. Abellanas, M. Claverol, F. Hurtado. Transversalidad de segmentos con cuñas. *Actas del IX Encuentro Español de Geometría Computacional*, Girona, 75–84, 2001.

[ACH3] M. Abellanas, M. Claverol, F. Hurtado, C. Seara. (α, k)-sets en el plano. *III Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica.*, Sevilla, 47–54, 2002.

[ACH4] M. Abellanas, M. Claverol, F. Hurtado. Propiedades del peso Delaunay. *Actas del X Encuentro Español de Geometría Computacional*, Sevilla, 57–62, 2003.

[ACH5] M. Abellanas, M. Claverol, F. Hurtado. Point set stratification and minimum weight structures. *Pro. 20th European Workshop on Computational Geometry.*, Sevilla, 101–105, 2004.

[ACH6] M. Abellanas, M. Claverol, F. Hurtado. Point set stratification and Delaunay depth. *Technical report*, MAII-IR-04-00010. En preparación para inmediato envío para revista, 2004.

[AGH1] M. Abellanas, J. García, G. Hernández, F. Hurtado, O. Serra, J. Urrutia. Updating Polygonizations. *Computer Graphics Forum,* 12(3):143–152, 1993.

[AGH2] M. Abellanas, J. García, G. Hernández, F. Hurtado, O. Serra, J. Urrutia. Onion Polygonizations. *Information Processing Letters,* 57:165–173, 1996.

[AMB] P.K. Agarwal, J. Matousek, M. de Berg, O. Schwarzkopf. Constructing levels in arrangements and higher order Voronoi Diagrams. *Proc. 10th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom. (SoCG'94)*, 67–75, 1994.

[AS] P.K. Agarwal, M. Sharir. Arrangements and its applications. *Handbook of Comput. Geom.*, J.R. Sack and J. Urrutia eds., North-Holland, p. 97, 2000.

[ACN] A.M. Ajtai, V. Chvátal, M. Newborn, E. Szeremedi. Crossing-free subgraphs. *Annals of Discr. Math.*, 12:9–12, 1981.

[ACG] G. Aloupis, C. Cortés, F. Gómez, M. Soss, G. Toussaint. Lower bounds for computing statistical depth. *Computational Statistics and Data Analysis*, 40:223–229, 2002.

[AMcL] G. Aloupis, E. McLeish. A lower bound for computing Oja depth. *Personal comunication*, 2004.

[AF] A. Andrzejak, K. Fukuda. Optimization over k-set polytopes and efficient k-set enumeration. *Proc. 6th Intern. Workshop on Algorithms And Data Struct. (WADS'99)*, LNCS 1663, Springer-Verlag, 1999.

[Au] F. Aurenhammer. Voronoi Diagrams - A Survey of a Fundamental Geometric Data Structure. *ACM Computing Surveys*, 23(3):345–405, 1991.

[BH] Z.D. Bai, X. He. Asymptotic distributions of the maximal depth estimators for regression and multivariate location. *Ann. Statist.* 27:1616–1637, 1999.

[Ba] V. Barnett. The ordering of multivariate data (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society Series* A 139, 318–352, 1976.

[BO] M. Ben-Or. Lower bounds for algebraic computaton trees. *Proc. 15th. Ann. ACM Sympos. Theory Comput.*, 80–86, 1983.

[BCE] B.K. Bhattacharya, J. Czyzowicz, P. Egyed, G. Toussaint, I. Stojmenovic y J. Urrutia. Computing shortest transversals of sets. *Proc. 7th. Ann. ACM Sympos. Comput. Geom.*, 71–80, 1991.

[BJM] B.K. Bhattacharya, S. Jadhav, A. Mukhopadhyay. An Optimal Algorithm for the Intersection Radius of a Set of Convex Poligons. *J. of Algorithms*, 20(2):244–267, 1996.

[BJMR] B.K. Bhattacharya, S. Jadhav, A. Mukhopadhyay, J.M. Robert. Optimal Algorithms for some smallest Intersection Radius problems. *Proc. 7th Ann. ACM Sympos. on Comput. Geom.*, 81–88, 1991.

[BKM] B. Bhattacharya, C. Kumar, A. Mukhopadhyay. Computing an area-optimal convex polygonal stabber of a set of parallel line segments. *Proc. 5th. Canad. Conf. Comput. Geometry*, 169–174, 1993.

[BGH] G. Blanco, J. García, F. Hurtado, P. Ramos, V. Sacristán. Quality pictures. *5th MSI Stony Brook Workshop on Comput. Geom.*, 1995.

[BB] G. Brassard, P. Bratley. *Algorítmica. Concepción y análisis.* Masson, 1990.

[BGS] D. Bremner, E. Guévremont, T.C. Shermer. A Note on the Characterization of Depth Sequences of Simple Polygons. *Snapshots of Computational and Discrete Geometry.* David Avis and Prosenjit Bose Editors, Mc Gill University, Montreal, 3, 1994. 92–99.

[Chaz] B. Chazelle. On the Convex Layers of a Planar Set. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-31(4):509–517, 1985.

[Chan] T.M. Chan. Output-Sensitive Results on Convex Hulls, Extreme Points, and Related Problems. *11th Comput. Geom., Vancouver, B.C. Canada*, 509–517, 1995.

[CSY] R. Cole, M. Sharir, C.K. Yap. On K-hulls and related problems. *SIAM J. of Computing*, 16:61–77, 1987.

[DL] D. Dobkin, R. Lipton. Multidimensional searcging problems. *SIAM J. Comput.*, 5(2):181–186, 1976.

[Dy] M.E. Dyer. On a multidimensional search technique and its application to the Euclidean 1-center problem. *SIAM J. Comput.*, 15:725–738, 1986.

[DS] L. Deneen, G. Shute. Polygonizations of point Sets in the Plane. *Discr. and Comp. Geom.*, 3:77–87, 1988.

[De1] Tamal K. Dey. Improved Bounds for k-sets and k-th Levels. *Proc. 38th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci.*, 156–161, 1997.

[De2] Tamal K. Dey. Improved Bounds for k-sets and Related Problems. *Discr. and Comp. Geom.*, 19:373–382, 1998.

[Ed] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry.* Springer-Verlag, 1987.

[EG] H. Edelsbrunner, L.J. Guibas. Topologically Sweeping an Arrangement. *J. of Computer and System Sci.*, 38:165–194, 1989.

[EGS] H. Edelsbrunner, L.J. Guibas, M. Sharir. The Upper Envelope of Piecewise Linear Functions: Algorithms and Applications. *Discr. Comput. Geom.*, 4:311–336, 1989.

[EMP] H. Edelsbrunner, H.A. Maurer, F.P. Preparata, A.L. Rosenberg, E. Welzl y D. Wood Stabbing line segments. *B*IT, 22:274–281, 1982.

[EOS] H. Edelsbrunner, J. O'Rourke, R. Seidel. Constructing Arrangements of Lines and Hiperplanes with Applications. *SIAM J. Comput.*, 15:341–363, 1986.

[ES] H. Edelsbrunner, M. Sharir. The Maximum Number of Ways To Stab n Convex Nonintersecting Sets in the Plane Is $2n-2$. *Discr. Comput. Geom.*, 5:35–42, 1990.

[EW] H. Edelsbrunner, E. Welzl, On the number of line separators of a finite set in the plane. *J. Combin. Theory Ser.*, A 38:15–29, 1985.

[Ep] D. Eppstein. Fast hierarchical clustering and other applications of dynamic closest pairs. *Proc. 9th Annu. ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms* 131–138, New Orleans, 1997.

[ELS] P. Erdös, L. Lovász, A. Simmons, E. G. Straus. *Dissection Graphs of Planar Point Sets in: A Survey of Combinatorial Theory.* North Holland, pp.139–149, 1973.

[EKR] H. Everet, Marc van Krevel, J.M. Robert. An Optimal Algorithm for Computing ($\leq k$)-Levels, with Applications to Separation and Transversal Problems. *9th Ann. Comput. Geom.*, 5:38–46, 1993.

[GT1] A. García, J. Tejel. The Order of Points on the Second Convex Hull of a Simple Poligon. *Discr. and Comput. Geom.*, 14(2):185–205, 1995.

[GT2] A. García, J. Tejel. Dividiendo una nube de puntos en regiones convexas. *Actas del VI Encuentro Español de Geometría Computacional*, Barcelona, 169–174, 1995.

[GT3] A. García, J. Tejel. Sobre órdenes prohibidos de los puntos de la k-ésima capa convexa de una nube de puntos. *Actas del VI Encuentro Español de Geometría Computacional*, Barcelona, 175–182, 1995.

[GPW] J. Goodman, R. Pollack, R. Wenger. *Geometric Transversal Theory in: New Trends in Discrete and Computational Geometry.* Spriger-Verlag, János Pach, Ed., 163–198, 1993.

[GS] M.T. Goodrich, J.S. Snoeyink. Stabbing parallel segments whit a convex polygon. *Proc. 1st Workshop Algorithms Data Struct. Lecture notes Comput. Sci.*, 382:231–242, Springer-Verlag, 1989.

[Gra] R. Graham. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. *Information Processing Letters*, 1:132–133, 1972.

[Gre] P.J. Green. *Peeling Bivariate Data in: Interpreting multivariate data.* John Wiley y Sons Ltd., 163–198, 1981.

[Ha] R.B. Hayward. A lower bound for the optimal crossing free Hamiltonian cycle problem. *Discr. and Comp. Geom.*, 2:327–343, 1987.

[Hub] P.J. Hubert. Robust statistics: a review. *Ann. Math. Statistics*, 43(3):1041–1067, 1972.

[Hur1] F. Hurtado. Poligonizaciones simples. *Actas del III Encuentro Español de Geometría Computacional*, Zaragoza, 67–75, 1992.

[Hur2] F. Hurtado. Geometría computacional: una instantßnea. Ferran Hurtado. La Gaceta de la RSME, 14, 11–20, 1999.

[HST] F. Hurtado, V. Sacristán, G. Toussaint. Some Constrained Minimax and Maximin Location Problems. *In Studies in Locational Analysis*, 15:17–35, 2000.

[KLP] K. Kedem, R. Livne, J. Pach, M. Sharir. On the union of Jordan regions and collision-free translational motion amidst polygonal obstacles. *Discr. Comput. Geom.*, 1:59–71, 1986.

[Ki] D.G. Kirkpatrick. Optimal search in planar subdivisions. *SIAM J. of Computing*, 12:28–35, 1983.

[LaSt] S. Langerman, W. Steiger. An optimal algorithm for hyperplane depth in the plane. In *Proc. 11th Ann. ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithms*, 54–59, San Francisco, 2000.

[LeSc] D.T. Lee, B.J. Schacter. Two algorithms for constructing the Delaunay triangulation. *Intern. J. Comput. Inform. Sci.*, 9:219–242, 1980.

[Li] R. Liu. Multivariate analysis by data depth: descriptive statistics, graphics and inference. *The Annals of Statistics*, 27:783–858, 1999.

[LPS] R.Y. Liu, J. Paralelius, K. Singh. Multivariate analysis by data depth: descriptive statistics, graphics and inference. *Ann. Statist.*, 27:783–840, 1999.

[Lo] L. Lovász. On the Number of Halving Lines. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sect. Math., 14*, 1971. pp. 107–108.

[LMR] K.A. Lyons, Henk Meijer, David Rappaport. Minimum polygon stabbers of isothetic line segments. *Department of Computing and Information Science, Queen's University*, Ontario, Canada, 1990.

[Meg1] N. Megiddo. Linear time algorithms for linear programming in R^3 and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12(4):759–776, 1983.

[Meg2] N. Megiddo. Linear programming in linear time when the dimension is fixed. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 31(1):114–127, 1984.

[Meg3] N. Megiddo. On the Ball Spanned by Balls. *Discr. Comput. Geom.*, 4:605–610, 1989.

[MR] H. Meijer, D. Rappaport. Upper and lower bounds for the number of monotone crossing free Hamiltonian cycles from a set of points. *Ars Combinatoria*, 30:203–208, 1990.

[Mel] K. Melhorn. *Data Structures and Algorithms.* Springer-Verlag, 1984.

[MRR1] H. K. Miller, S. Ramaswami, P. Rousseeuw, T. Sellares, D. Souvaine, I. Streinu, A. Struyf. Fast implementation of depth contours using topological sweep. *Proc. of the 12th ACM-SIAM Sympos. on Discr. Algorithms*, Washington, 2001.

[MRR2] H.K. Miller, S. Ramaswami, P. Rousseeuw, T. Sellares, D. Souvaine, I. Streinu, A. Struyf. Efficient computation of location depth contours by methods of Computational Geometry. *Statistics and Computing*, 2003.

[NTM] A. Nanopoulos, Y. Theodoridis, Y. Manolopoulos. C^2P: Clustering based on Closest Pairs. *Proc. of the 27th VLDB Conference.*, Roma, 2001.

[NM] M. Newborn, W.O.J. Moser. Optimal crossing-free Hamiltonian circuit drawings of K_n. *J. of Combin. Theory*, B 29:13–26, 1980.

[Oj] H. Oja. Descriptive statistics for multivariate distributions. *Statist. Probab. Lett.*, 1:327–332, 1983.

[OBS] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara. *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams.* John Wiley and Sons Ltd. Chichester, 1992.

[OBW] J. O'Rourke, H. Booth, R. Washington. Connect the Dots: A New Heuristic. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 39: 258–266, 1987.

[O'R1] J. O'Rourke. An on-line algorithm for fitting straig lines between data ranges. *CACM*, 24:574–578, 1981.

[O'R2] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C.* Cambridge University Press. Cambridge, 1998.

[OL] M.H. Overmars, J. van Leeuwen. Maintenance of configurations in the plane. *J. Comp. Sys. Sci.*, 23:166–204, 1981.

[PSS] J. Pach, W. Steiger, E. Szemerédi, An Upper Bound on the Number of Planar k-sets. *Discr. and Comput. Geom.*, 7:109–123, 1992.

[PS] F.P. Preparata, M.I. Shamos. *Computational Geometry: an Introduction.* Springer-Verlag, Texts and Monographs in Computer Science. New York, 1985.

[RH] P.J. Rousseeuw, M. Hubert. Regression depth. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 94:388-402, 1999.

[RR] P.J. Rousseeuw, I. Ruts. Algorithm AS 307: bivariate location depth. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. C*, 45:516-526, 1996.

[RS] P.J. Rousseeuw, A. Struyf. Computation of robust statistics: depth, median, and related measures, in *Handbook of Discrete and Comput. Geom.*, J.E. Goodman and J. O'Rourke eds., Discrete Mathematics and Its Applications, 2004.

[Sa] V. Sacristán. *Optimización geométrica y aplicaciones en visibilidad.* Tesis Doctoral, 1997.

[Sham] M.I. Shamos. Computational Geometry. *Ph.D. Dissertation, Yale University*, 1977.

[SH] M.I. Shamos, D. Hoey. Closest point problems. *Proc. 16th Ann. Conf. Foundations of Comput. Sci.*, 151–162, 1975.

[Shar] M. Sharir. Intersection and closest-pair problems for a set of planar disc. *SIAM J. Comput.*, 14(2):448–468, 1985.

[SA] M. Sharir, P.K. Agarwal. Davenport-Schinzel Sequences and Their Geometric Applications. *Cambridge University Press.* New York, 1995.

[Si] R. Sibson. A brief description of natural neighbour interpolation, in: *Interpolating multivariate data.* John Wiley y Sons Ltd., 21–36, 1981.

[Sm] C.G. Small. A survey of multidimensional medians. *Internat. Statistical Review*, 58:263–277, 1990.

[Sn] J. Snoeyink. Point location. in *Handbook of Discrete and Comput. Geom.*, J.E. Goodman and J. O'Rourke eds., Discrete Mathematics and Its Applications, 2004.

[SHR] A. Struyf, M. Hubert, P.J. Rousseeuw. Integratint robust clustering techniques in S-PLUS. *Comput Statist. Data Anal.*, 26:17–37, 1997.

[Tot] G. Tóth Points sets with many k-sets. *Discr. Comput. Geom.*, 26:187–194, 2001.

[Tou1] G.T. Toussaint. *Computational Geometry and Morphology.* Science on form, 395–403, 1987.

[Tou2] G.T. Toussaint. Ed. Computational Morphology. A computational geometric approach to the analysis of form. *Mach. Intelligence Pattern Recogn.,* 6. North Holland, 1988.

[Tou3] G.T. Toussaint. Pattern Recognition and Geometrical Complexity. *Proc. 5th Intern. Conf. on Pattern Recognition*, 1980.

[Tou4] G.T. Toussaint. What is Computational Geometry? *Proceedings of the IEEE*, 1992.

[Tu] J.W. Tukey, Mathematics and the picturing of data. *Proc. of the Intern. Congres of Mathematicians*, 2:523–531, 1975.

[ZS] Y. Zuo, R. Serfling. General notions of statistical depth functions, *Ann. Statist.*, 28:461–482, 2000.

Índice alfabético