

## Capítulo 7

# Transversalidad de segmentos con cuñas

En este capítulo estudiamos la transversalidad de segmentos con cuñas. En la sección 7.2 se analizan cotas para el orden del número posible de cuñas transversales separadoras, cuñas  $TS$ , en función del tipo de la misma (ángulo fijo o variable). En la sección 7.3 se describen algoritmos de existencia y construcción de cuñas  $TS$ , para conjuntos de segmentos que no admiten recta transversal: para una colección de segmentos en posición general, para segmentos verticales y para segmentos verticales de la misma longitud.

### 7.1. Introducción

Este capítulo se enmarca dentro de los llamados problemas de transversalidad. Dada una colección finita de objetos geométricos en el plano se plantea el problema de encontrar otro objeto que los interseca a todos.

Para colecciones de segmentos se empezaron estudiando problemas de transversalidad con rectas. Cortar segmentos con rectas es un importante subproblema en la vectorización de imágenes escaneadas, en el campo de la visión computarizada mediante gráficos y la localización de los caminos más cortos para la planificación de movimientos.

Dado un conjunto de segmentos paralelos, O'Rourke [O'R1](81) proporciona un algoritmo para encontrar, si existe, una recta transversal. El caso de segmentos arbitrarios es analizado por Edelsbrunner en [EMP](82). Edelsbrunner y Guibas en [EG](86) encuentran, en  $O(n^2)$ , la recta que corta un número máximo de segmentos en el plano.

Una variante natural es la de considerar otro tipo de transversales diferentes a las rectas. Quizás los primeros en considerar otro tipo de transversal fueron Goodrich y Snoeyink resolviendo el problema de calcular un polígono convexo transversal a una

colección de segmentos paralelos, en  $O(n \log n)$ , [GS](90).

Dentro de una misma clase de transversal también se han planteado problemas de optimización. Bhattacharya et al. encuentran el segmento transversal más corto en [BCE] (91) para conjuntos de rectas, para conjuntos de segmentos y también para conjuntos de polígonos convexos. Lyon et al. estudiaron el problema de calcular un polígono convexo de perímetro mínimo que interseca a un conjunto de segmentos isotéticos [LMR](90). Para un conjunto de segmentos paralelos, se calcula el polígono convexo de área mínima que los interseca a todos en [BKM](93).

En esta sección nos centramos en el caso de conjuntos de segmentos y se consideran las cuñas como los elementos transversales.

Obsérvese que una recta transversal a un conjunto de segmentos divide al plano en dos regiones en las que cada segmento sitúa uno de sus extremos, permitiendo el caso en que éste se sitúe sobre la misma recta. Definiremos una cuña transversal a una colección de segmentos manteniendo esta misma propiedad, es decir, la cuña divide al plano en dos regiones (véase la definición 3.3.4) y cada segmento deberá tener un extremo en cada una de ellas (o sobre las semirrectas de la cuña) para que sea transversal.

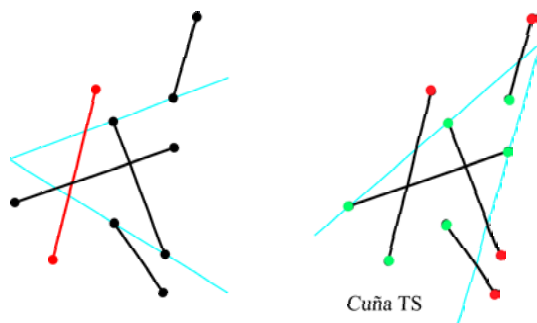


Figura 7.1: Cuñas transversales. La de la derecha es también cuña  $TS$ .

**Definición 7.1.1.** Se define *cuña transversal separadora* de un conjunto de segmentos  $S$  como una cuña que corta a todos los segmentos de  $S$ , sin que ambos extremos de un mismo segmento sean interiores a la región complementaria de la cuña. Se admite pues el caso en que ambos extremos estén uno sobre cada una de las semirrectas que definen la cuña. La notaremos abreviadamente por *cuña  $TS$*  (figura 7.1).

**Definición 7.1.2.** Diremos que dos cuñas  $TS$  son equivalentes para  $S$  si, y sólo si, proporcionan la misma partición de  $S$  en dos conjuntos de segmentos: los cortados por cada una de las semirrectas. La partición no es necesariamente disjunta, pues se admite el caso en que un segmento de  $S$  tenga un extremo en cada una de las semirrectas de la cuña.

En la sección 7.2, para conjuntos de segmentos en el plano, se analizan cotas para el orden del número posible de cuñas  $TS$ , en función del tipo de cuña (ángulo fijo o variable).

Se plantea el problema de estudiar la existencia y, en caso afirmativo, la construcción de cuñas  $TS$ . En la sección 7.3, se obtienen algoritmos en primer lugar para una colección de segmentos en posición general y después para algunos casos particulares.

## 7.2. Estudio del orden de magnitud

A continuación se estudia, para un conjunto de segmentos  $S$ , el número de clases de equivalencia de cuñas  $TS$  en función del ángulo de la cuña.

Llamamos  $\alpha$ -cuña a una cuña cuyas semirrectas forman un ángulo  $\alpha$ . Notamos por  $\alpha$ -cuña  $TS$ , las cuñas  $TS$  que sean  $\alpha$ -cuñas. Un subconjunto  $C$  de cardinal  $k$  de un conjunto  $E$  de  $n$  puntos del plano diremos que es un  $(\alpha, k)$ -set de  $E$  si  $C$  es la intersección de  $E$  con una  $\alpha$ -cuña (véase definición 3.3.5).

### 7.2.1. Ángulo fijo

En este apartado consideramos  $\alpha$ -cuñas con  $\alpha$  fija. Dado un conjunto  $E$  de  $2n$  puntos del plano, se demostró que para todo  $(\alpha, k)$ -set de  $E$  existe una  $\alpha$ -cuña que lo determina tal que una de las semirrectas de su frontera contiene dos puntos de  $E$  (teorema 4.2.1). De aquí la siguiente proposición.

**Proposición 7.2.1.** *El número máximo de  $(\alpha, n)$ -sets de  $E$ , con  $\alpha$  constante es  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Demostración análoga al teorema 4.2.1. □

En el siguiente ejemplo se muestra una familia de  $n$  segmentos, no paralelos y sin cortes, para los cuales es posible obtener un número óptimo, cuadrático, de  $\alpha$ -cuñas con  $\alpha$  constante.

**Proposición 7.2.2.** *Existen familias de segmentos que admiten un número  $\Theta(n^2)$  de  $\alpha$ -cuñas  $TS$  con  $\alpha$  constante.*

*Demostración.* Considérense dos medias circunferencias, no necesariamente iguales, tales que las rectas soporte de sus diámetros formen ángulo  $\alpha$ .

Situamos en orden antihorario un extremo  $p_i$  de cada segmento en una de las semicircunferencias y el otro  $p'_i$  en la otra del siguiente modo: la distribución de los puntos en ambas es la misma, los puntos  $p_1$  y  $p_n$  están a la misma distancia, no necesariamente nula, de la recta soporte del diámetro y, entre ellos, el resto de puntos se sitúan equiespaciados. La distancia de  $p_1$  (o  $p_n$ ) al diámetro puede escogerse de modo que, trazando las rectas por  $p_1, p_2$  y por  $p_{n-1}, p_n$ , los extremos

de los segmentos se sitúen en sectores opuestos y, al unir  $p_i$  con  $p'_i$  los segmentos resultantes no se corten (figura 7.2).

Esta última condición nos permite también afirmar que cualquier recta pasando por  $p_i, p_j$  junto con la recta por  $p'_{i+1}, p'_{j-1}$  forman una cuña  $TS$ . Esto es así pues la recta por  $p_i, p_j$  corta a los segmentos anteriores al  $p_j p'_j$  y los posteriores al  $p_i p'_i$  (deja a todos los  $p'_k, k = 1, \dots, n$  a un lado de la misma); análogamente las rectas pasando por  $p'_{i+1}, p'_{j-1}$  cortan a los segmentos comprendidos entre  $p_i p'_i$  y  $p_j p'_j$  (figura 7.3).

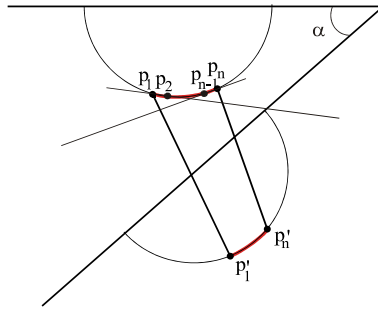


Figura 7.2: Los extremos de los segmentos se sitúan en sectores opuestos definidos por las rectas pasando por  $p_1, p_2$  y  $p_{n-1}, p_n$ .

Descripción de las  $\alpha$ -cuñas: cualquier recta pasando por un par de puntos  $p_i, p_j$  situados sobre una de las semicircunferencias puede ser una recta soporte de una  $\alpha$ -cuña, la otra recta debe pasar por los puntos de la forma  $p'_{i+1}, p'_{j-1}$ . De este modo, se construyen  $O(n^2)$   $\alpha$ -cuñas.

Hemos visto que estas cuñas son  $TS$ , veamos que el ángulo es constante igual a  $\alpha$ . La distribución de los puntos sobre las semicircunferencias es idéntica o la misma a diferente escala. Obsérvese que la recta que pasa por los puntos  $p'_{i+1}, p'_{j-1}$  es paralela a la que pasa por  $p'_i, p'_j$ . Por otra parte, la recta por  $p_i, p_j$  forma con la recta soporte de la correspondiente semicircunferencia el mismo ángulo que la recta por  $p'_i, p'_j$  con la otra recta soporte. Así pues, el ángulo entre ellas coincide con el que forman las rectas soporte, que es precisamente  $\alpha$  (figura 7.3).  $\square$

A continuación se describen familias de segmentos, todas ellas con un número cuadrático de cuñas  $TS$ , con ángulo variable.

### 7.2.2. Ángulo variable

En este apartado demostramos que  $O(n^2)$  sigue siendo cota del número de clases de cuñas  $TS$  cuando  $\alpha$  es variable, siendo ajustada incluso en el caso de segmentos paralelos.

**Proposición 7.2.3.** *El número máximo de  $(\alpha, n)$ -sets de  $E$ , con  $\alpha$  variable es  $O(n^2)$ .*

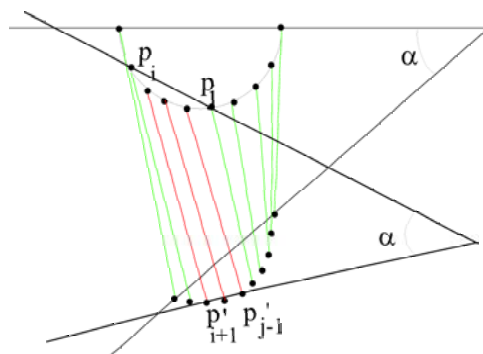


Figura 7.3: Fijado el ángulo pueden colocarse los puntos de modo que se consigue un número cuadrático de  $\alpha$ -cuñas siguiendo el modelo de la figura.

*Demostración.* Se ha visto que el número máximo de cuñas  $TS$  con ángulo fijo es  $O(n^2)$  lo que nos da una cota inferior para el caso de ángulo variable. Sin embargo, también se trata de una cota superior pues el arreglo dual del conjunto de segmentos tiene a lo sumo  $O(n^2)$  caras (véase la formulación dual de cuñas  $TS$  a un conjunto de segmentos, en el apartado 7.3.1).  $\square$

**Proposición 7.2.4.** *Existen familias de segmentos que admiten un número  $\Theta(n^2)$  de  $\alpha$ -cuñas  $TS$ , con  $\alpha$  variable: los conjuntos de segmentos pueden ser no paralelos, tanto si admiten recta transversal como si no la admiten, o conjuntos de segmentos paralelos con o sin recta transversal.*

*Demostración.* Se tienen ejemplos para cada uno de los casos.

1. Los segmentos no son paralelos:
  - Si el conjunto de segmentos admite recta transversal:
 

Considérense dos circunferencias disjuntas. Cada una de ellas conteniendo la mitad del conjunto de los segmentos, situados con los extremos diametralmente opuestos. Cualquier par de rectas no paralelas que sean soporte de dos diámetros, uno de cada circunferencia y que no coincidan con ningún segmento, forman una cuña  $TS$  (figura 7.4). Cada una de estas rectas tiene  $\lfloor n/2 \rfloor$  posiciones combinatoriamente diferentes y, por tanto, se obtienen  $O(n^2)$   $\alpha$ -cuñas  $TS$  con  $\alpha$  variable.
  - Si el conjunto de segmentos no admite recta transversal:
 

Considérense dos circunferencias disjuntas con centro en el eje de ordenadas. Colocamos la mitad de los segmentos, con los extremos diametralmente opuestos, en cada circunferencia salvo uno de ellos,  $s_n$ , que se sitúa vertical fuera de ambas (figura 7.5). Para que ahora no exista recta

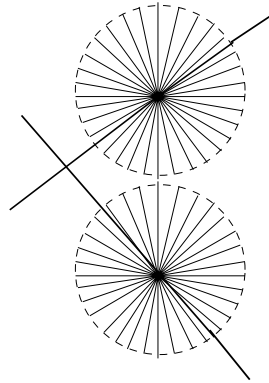


Figura 7.4: Cuña  $TS$  de ángulo  $\alpha$  variable.

transversal al conjunto de segmentos, éstos se reparten en un sector de la correspondiente circunferencia de modo que la recta que une el extremo superior de la recta de mayor pendiente en una con el inferior de la de mayor pendiente en la otra, no corte a  $s_n$ . Como en el ejemplo anterior, se tienen  $O(n^2)$   $\alpha$ -cuñas con  $\alpha$  variable.

2. Los segmentos son paralelos:

- Si el conjunto de segmentos admite recta transversal:

Se sitúa un extremo de cada segmento en orden antihorario sobre una semicircunferencia de modo que el segmento  $p_1p_n$  sea el diámetro. Considerando las rectas por los puntos  $p_1, p_2$  y  $p_{n-1}, p_n$ , se colocan en el interior del sector opuesto al de los puntos  $p_1, \dots, p_n$  los extremos  $p'_1$  y  $p'_n$  formando un segmento paralelo al  $p_1p_n$ . El resto de puntos  $p'_2, \dots, p'_{n-1}$  se disponen también ordenadamente sobre una circunferencia que tenga al segmento  $p'_1p'_n$  como cuerda no diametral.

Con esta construcción, las rectas pasando por los puntos  $p_i, p_j$  y  $p'_{i+1}, p'_{j-1}$  no son paralelas y forman una  $\alpha$ -cuña  $TS$ , con  $\alpha$  variable dependiendo de los puntos (figura 7.6). Hay  $O(n^2)$   $\alpha$ -cuña  $TS$ .

- Si el conjunto de segmentos no admite recta transversal:

Al conjunto del caso anterior le añadimos un segmento con el extremo inferior en el interior de la región limitada por la circunferencia que contiene  $p_1, \dots, p_n$  y la recta que une  $p_{\lfloor n/2 \rfloor}$  con  $p_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$  (figura 7.7).

Con este nuevo segmento no todas las cuñas  $TS$  construidas en el caso anterior lo seguirán siendo en este. Sea  $r_1$  la semirrecta por  $p_i p_j$ , entonces deberá ser  $p_i \leq p_{\lfloor n/2 \rfloor}$  y  $p_j \geq p_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$  para cortar al nuevo segmento. A pesar de esta restricción sigue habiendo un número cuadrático de cuñas  $TS$ .

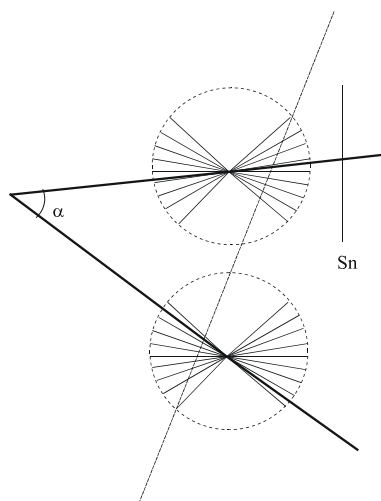


Figura 7.5: Cuña  $TS$ , de ángulo  $\alpha$  variable, para un conjunto de segmentos que no admite recta transversal.

□

### 7.3. Algoritmos

A continuación se describen algoritmos para determinar la existencia y, en su caso, obtener todas las cuñas  $TS$  combinatoriamente diferentes. Se estudia el caso en que el conjunto de segmentos es arbitrario y luego algunos casos particulares.

Dado un conjunto de  $n$  segmentos no siempre existe una cuña que los atraviese a todos. En el caso de que exista recta transversal es inmediata la existencia de cuña  $TS$ . En los siguientes algoritmos se parte de la hipótesis de que el conjunto de segmentos no admite recta transversal.

#### 7.3.1. Existencia y construcción de cuñas $TS$ . Caso general

Analicemos la traducción del problema en el espacio dual.

Los segmentos  $p_i p'_i$  en el primal son dobles cuñas  $W_i$  en el dual, consistiendo en los puntos situados entre  $p_i^*$  y  $p_i'^*$  rectas duales de  $p_i p'_i$ . En el caso particular de segmento vertical, su dual es la intersección de dos semiplanos.

Una recta no vertical  $r$  corta al segmento  $p_i p'_i$  en el primal si y sólo si  $r^*$  está dentro de  $W_i$  en el dual. Luego una recta  $t$  atraviesa todos los segmentos de  $S$  en el primal si y sólo si  $t^*$  en el dual está en la intersección de todas las dobles cuñas (figura 7.8).

Así pues, el problema de determinar la existencia de cuña  $TS$  al conjunto de segmentos  $S$  es equivalente a: encontrar en el arreglo dual inducido por los segmentos

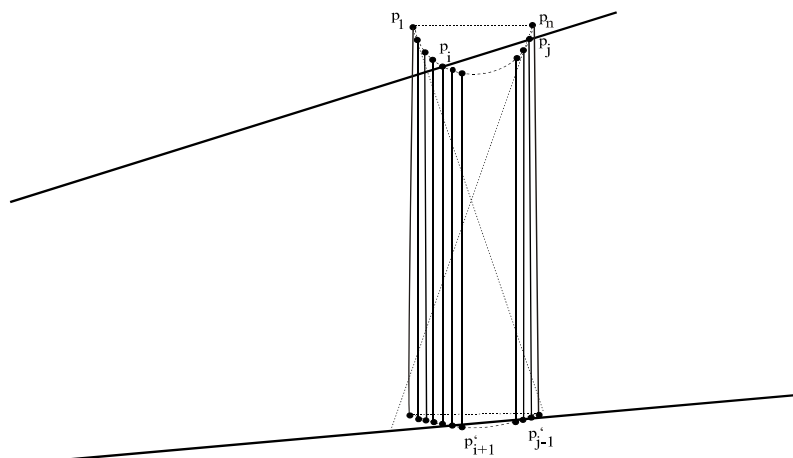


Figura 7.6: Segmentos paralelos con  $O(n^2)$   $\alpha$ -cuñas  $TS, \alpha$  variable.

(esto es, la unión de las dobles cuñas), dos caras cuyos conjuntos de cuñas con intersección no vacía sean complementarios.

El número de caras en el arreglo dual inducido por los segmentos es  $O(n^2)$ . Cualquier punto de una misma cara representa, en el primal, una recta transversal al mismo subconjunto de  $S$ . A la lista de los segmentos de este subconjunto le llamamos la lista asociada a la correspondiente cara del arreglo dual.

Las parejas de rectas transversales son posibles cuñas  $TS$  y, por tanto, hay un máximo de  $O(n^4)$ . La comprobación de si cada pareja de rectas transversales forman o no cuña  $TS$  cuesta  $O(n)$  por lo que un primer algoritmo *fuerza bruta* nos sugiere un coste  $O(n^5)$ . Sin embargo, no toda pareja de rectas transversales es admisible, los conjuntos de segmentos cortados por cada una de las rectas transversales (o listas asociadas a un par de caras en arreglo dual) deben ser complementarios.

**Algoritmo 7.3.1.** EXISTENCIA Y CÁLCULO DE CUÑA  $TS$  PARA UN CONJUNTO DADO  $S$  DE  $n$  SEGMENTOS EN EL PLANO QUE NO ADMITE RECTA TRANSVERSAL.

1. Obtener en el dual, el arreglo inducido por los  $n$  segmentos.
2. Obtener un árbol generador del grafo dual.
3. Mediante un recorrido del árbol, para cada cara del arreglo dual,
  - 3.1 obtener la lista de las dobles cuñas con intersección no vacía y su complementaria.
  - 3.2 examinar la existencia de recta transversal para la lista complementaria.
  - 3.3 si 3.2 es afirmativo, comprobar si es cuña  $TS$ :



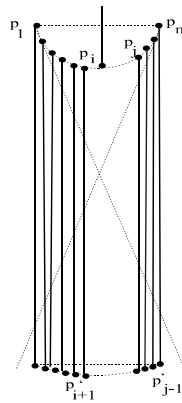


Figura 7.7: Segmentos paralelos que no admiten recta transversal con  $O(n^2)$   $\alpha$ -cuñas  $TS$ ,  $\alpha$  variable.

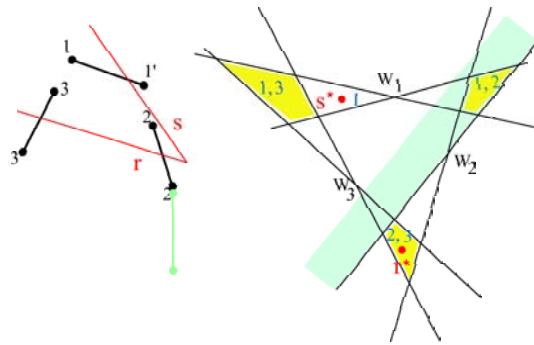


Figura 7.8: Si los segmentos no admiten recta transversal, las correspondientes dobles cuñas en el dual no tienen intersección común no vacía.

*estudiar las soluciones del sistema de ecuaciones que resultan de imponer la posición relativa de los extremos y las semirrectas.*

**Proposición 7.3.1.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  segmentos en el plano que no admite recta transversal. El algoritmo 7.3.1 determina la existencia y calcula todas las posibles cuñas  $TS$  en tiempo  $O(n^3 \log n)$ .*

*Demostración.* En el arreglo dual inducido por los segmentos, la existencia de dos caras, cuyas listas asociadas sean complementarias, se corresponde con la existencia de cuña transversal, aunque no necesariamente  $TS$ .

El coste del algoritmo 7.3.1 es  $O(n^3 \log n)$ :

Paso 1. Aplicando un algoritmo incremental obtenemos el arreglo dual de los extremos de los segmentos en  $O(n^2)$ . En esta construcción las rectas se introducen

ordenadamente de modo que a cada paso se actualiza, para cada cara del arreglo, la lista ordenada de las rectas que la delimitan.

Paso 2. Obtención de un árbol generador del grafo dual es  $O(n^2)$ .

Paso 3. En el arreglo dual, unión de las dobles cuñas, hay  $O(n^2)$  caras. Cada cara tiene asociada la lista ordenada de las rectas que la delimitan; en  $O(n)$  se obtiene su complementaria. Cualquier punto de una cara representa en el primal una recta transversal de los segmentos de su lista asociada. Comprobar si también existe recta transversal para la correspondiente lista complementaria es  $O(n \log n)$ , mediante la construcción de la *stabbing region* en el dual [Ed](87). Esto nos lleva a un coste  $O(n^3 \log n)$ .

Finalmente, para cada búsqueda satisfactoria (como mucho  $O(n^2)$ ) se tiene una bipartición del conjunto de segmentos pero, además, debe comprobarse si las rectas transversales forman cuña *TS*. Mediante programación lineal puede hacerse en  $O(n)$ , luego la comprobación es a lo sumo  $O(n^3)$ .  $\square$

### 7.3.2. Existencia y construcción de cuñas *TS*. Casos particulares

A continuación, para conjuntos de segmentos que no admiten recta transversal, se analiza el caso particular de segmentos verticales: en primer lugar, arbitrarios y luego de longitud fija.

En este primer caso, se puede adaptar el algoritmo del caso general obteniendo una complejidad  $O(n^3)$ .

**Algoritmo 7.3.2.** EXISTENCIA Y CÁLCULO DE CUÑA *TS* PARA UN CONJUNTO DADO *S* DE *n* SEGMENTOS VERTICALES EN EL PLANO QUE NO ADMITE RECTA TRANSVERSAL.

1. *Obtener en el dual, el arreglo inducido por los segmentos.*
2. *Obtener un árbol generador del grafo dual.*
3. *Mediante un recorrido del árbol, para cada cara del arreglo dual,*
  - 3.1 *actualizar la lista de los segmentos cortados en el primal y la lista complementaria.*
  - 3.2 *hacer el mantenimiento dinámico en el dual de la intersección de los semiplanos correspondientes a los segmentos de la lista complementaria.*

*Si la intersección es no vacía, comprobar si se es cuña TS.*

**Proposición 7.3.2.** *Sea S un conjunto de n segmentos verticales en el plano que no admite recta transversal. El algoritmo 7.3.1 determina la existencia y calcula todas las posibles cuñas TS en tiempo  $O(n^3)$ .*

*Demostración.* En el espacio dual, los extremos de un segmento vertical son dos rectas paralelas. Así pues, la existencia de recta transversal a un subconjunto de  $S$  equivale, en este caso, a la existencia de un polígono intersección de los correspondientes semiplanos. Como en el caso general (algoritmo 7.3.1), si existe cuña, debe verificarse si es  $TS$ .

El coste del algoritmo 7.3.2 es  $O(n^3)$ :

Paso 1. Aplicando un algoritmo incremental obtenemos el arreglo dual de los extremos de los segmentos en  $O(n^2)$ . En esta construcción las rectas se introducen ordenadamente de modo que a cada paso se actualiza, para cada cara del arreglo, la lista ordenada de las rectas que la delimitan.

Paso 2. Obtención de un árbol generador del grafo dual es  $O(n^2)$ .

Paso 3. En el arreglo dual, hay a lo sumo  $O(n^2)$  caras. Cada cara tiene asociada la lista ordenada de las rectas que la delimitan; en  $O(n)$  se obtiene su complementaria.

Un segmento vertical se dualiza en la intersección de dos semiplanos. El mantenimiento dinámico de la intersección de semiplanos es  $O(\log n)$ . Para que haya cuña la intersección debe ser no vacía y, en ese caso, se comprueba en  $O(n)$  si se trata de una cuña  $TS$ . Este proceso se realiza a lo sumo un número cuadrático de veces luego en total  $O(n^2) \cdot O(\log n + n) = O(n^3)$ .  $\square$

Estudiamos ahora los conjuntos de segmentos verticales en el plano, de la misma longitud, que no admiten recta transversal.

Las cuñas pueden clasificarse en alguno de los tres tipos siguientes y el algoritmo difiere en función de ellos.

Tipo 1: la cuña tiene una semirrecta  $r_1$  de pendiente positiva y otra  $r_2$  de pendiente negativa, tipo 2: las pendientes de las semirrectas de la cuña  $TS$  tienen el mismo signo, tipo 3: la cuña  $TS$  contiene a la dirección vertical.

**Tipo 1.** La cuña tiene una semirrecta  $r_1$  de pendiente positiva y otra  $r_2$  de pendiente negativa.

Para este tipo de cuña, el algoritmo empieza discriminando los segmentos que forzosamente deben ser cortados por cada una de las semirrectas y estudia el resto de los segmentos para obtener, si hay, todas las posibles cuñas  $TS$  al conjunto total.

Cualquier polígono convexo se descompone en dos cadenas verticalmente monótonas a las que llamamos envolvente convexa superior e inferior respectivamente.

Dado un conjunto de segmentos  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  donde  $s_i = a_i b_i$ , con  $y(a_i) \geq y(b_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  notamos por  $A(S) = \{a_1, \dots, a_n\}$  el conjunto de extremos superiores y por  $B(S) = \{b_1, \dots, b_n\}$  los inferiores.

Asimismo notamos  $U_1$  a la envolvente convexa superior de  $B$ . Sea  $L_1$  la envolvente convexa inferior de  $A$ .

Notamos por  $S_{U_1}$  los segmentos de  $S$  cortados por  $U_1$  y no por  $L_1$ ; por  $S_{L_1}$ , los cortados por  $L_1$  y no por  $U_1$ .

Sea  $U_2$  la envolvente convexa superior de los extremos inferiores de  $S_{L_1}$ . Sea  $L_2$  la envolvente convexa inferior de los extremos superiores de  $S_{U_1}$ .

Notamos por  $S_{U_2}$  los segmentos de  $S$  cortados por  $U_2$  y no por  $L_2$ ; por  $S_{L_2}$ , cortados por  $L_2$  y no por  $U_2$ .

Sea  $U_3$  la envolvente convexa superior de los extremos superiores de  $S_{U_2}$ . Y sea  $L_3$  la envolvente inferior de los extremos inferiores de  $S_{L_2}$ .

Sea  $W = U_1 \cup L_1$ . La intersección  $U_1 \cap L_1$  está formada por dos puntos (es no degenerada), esto es así pues el conjunto  $S$  no admite recta transversal.

En el siguiente lema no se explicita la condición de verticalidad e igualdad de longitud entre los segmentos pues es válido en general.

**Lema 7.3.1.** *Sea  $S$  un conjunto de segmentos que no admiten recta transversal. Si existe cuña  $TS$  de semirrectas  $r_1$  de pendiente positiva y  $r_2$  de pendiente negativa, entonces:  $r_1$  está por encima de  $U_1$  y  $U_3$  y por debajo de  $L_2$ ;  $r_2$  está por debajo de  $L_1$  y  $L_3$  y por encima de  $U_2$ .*

*Demostración.* El hecho de que  $S$  no admita recta transversal nos permite asegurar que la intersección  $U_1 \cap L_1$  está formada por dos puntos (es no degenerada).

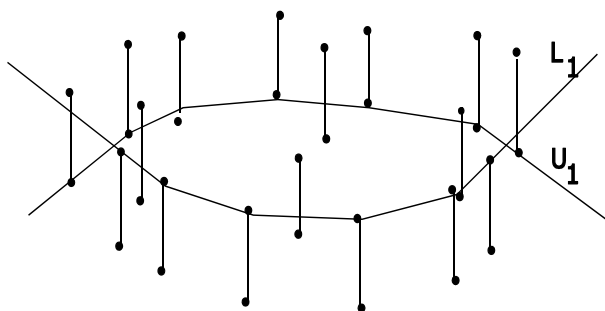


Figura 7.9: Hay segmentos que sólo cortan a  $U_1$ , otros sólo a  $L_1$  y puede haberlos que corten a ambas envolventes.

Hay pues segmentos con un extremo sobre  $U_1$  y, por tanto, por encima de ella a los que hemos notado por  $S_{U_1}$  y los hay que tienen un extremo sobre  $L_1$ , por debajo de la misma  $S_{L_1}$ . Tenemos una primera partición disjunta de los segmentos de  $S$ :

$$S = S_{U_1} \cup S_{L_1} \cup S_{U_1 L_1}$$

El conjunto  $S_{U_1 L_1}$  está formado por los segmentos que atraviesan tanto  $U_1$  como  $L_1$ .

Así pues, si existe cuña  $TS$ ,  $r_1$  debe situarse por encima de  $U_1$  y ser recta transversal de  $U_1$ . Análogamente  $r_2$  por debajo de  $L_2$  y ser transversal de  $U_2$ .

Dado que  $r_1$  debe ser transversal de  $S_{U_1}$ , debe situarse por debajo de  $L_2$ . Análogamente  $r_2$  por encima de  $U_2$ .

Los segmentos de  $S_{U_1 L_1}$  cortados por  $L_2$  también lo son por  $r_1$  de modo que  $r_2$  debe situarse por debajo de  $L_3$ . Análogamente  $r_1$  por encima de  $U_3$ .  $\square$

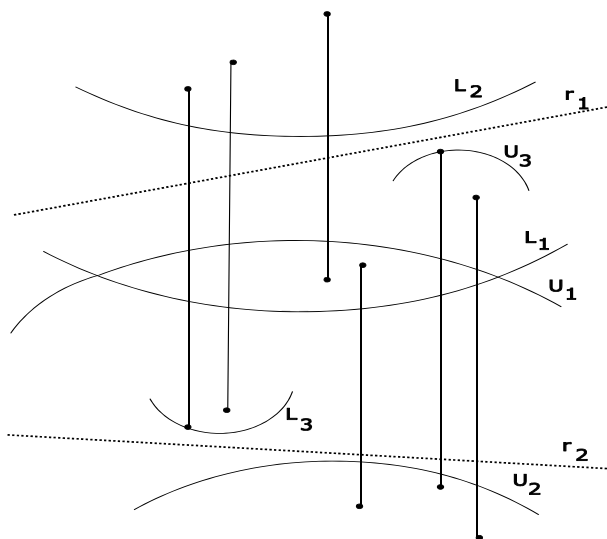


Figura 7.10: La semirrecta  $r_1$  debe estar por encima de  $U_1$  y  $U_3$  y por debajo de  $L_2$ . Análogamente  $r_2$  por debajo de  $L_1$  y  $L_3$  y por encima de  $U_2$ .

**Lema 7.3.2.** *Sea  $S$  un conjunto de segmentos que no admiten recta transversal. Si uno de los segmentos de  $S$  está contenido en el interior de  $W$  o bien corta a  $L_2$  y a  $U_2$  entonces no es posible la existencia de cuña  $TS$ .*

*Demostración.* Es consecuencia inmediata del lema anterior.  $\square$

Como consecuencia de los anteriores lemas, se tiene la siguiente partición disjunta de  $S$  (en caso contrario, no habría cuña  $TS$ ):  $S = S_{U_1} \cup S_{L_1} \cup S_{U_1 L_1}$ .

En  $S_{U_1 L_1}$  puede haber elementos cortados por  $U_2$ , que deben tener a  $r_1$  como transversal, o por  $L_2$  y entonces es  $r_2$ , o bien no es cortado por ninguna de las anteriores envolventes y todavía queda por decidir cuál va a ser su semirrecta transversal. A este último conjunto de segmentos le llamaremos  $D$ .

Siguiendo la misma notación,  $S_{U_1 L_1} = S_{U_2} \cup S_{L_2} \cup D$ . Obsérvese que  $D$  admite recta transversal pues la recta que pasa por los dos puntos de  $U_1 \cap L_1$  es transversal.

En la siguiente proposición se demuestra que para obtener las cuñas  $TS$  del tipo 1 para  $D$ , basta analizar un número lineal de posibilidades pues se prueba que una de las semirrectas puede tomarse horizontal.

Notamos por  $h_{p_i}$  la recta horizontal pasando por  $p_i$ . Sea  $H_{p_i}$  el conjunto de segmentos cortados por  $h_{p_i}$ .

**Proposición 7.3.3.** *Sea  $D$  un conjunto de segmentos verticales de la misma longitud, que admite recta transversal  $t_D$ . Si además  $D$  admite cuña  $TS$  del tipo 1, entonces existe cuña  $TS$  equivalente con una de las semirrectas horizontal.*

*Demostración.* Por reducción al absurdo.

Supongamos que  $D$  admite cuña  $TS$  del tipo 1 de semirrectas  $r_1$  (de pendiente positiva) y  $r_2$  (de pendiente negativa), pero no admite cuña  $TS$  equivalente con una de las semirrectas horizontal.

Sea  $a_i$  el extremo más bajo de los superiores de  $r_1$  y sea  $a_j$  el extremo más alto de los superiores de  $r_2$ . Supongamos que  $y(a_i) \leq y(a_j)$ , entonces (véase la figura 7.11):

-Si  $x(a_i) \leq x(a_j)$ , o bien  $r_2$  no puede ser transversal de  $s_j$  sin serlo de  $s_i$ , o  $r_1$  y  $r_2$  no forman cuña  $TS$ .

-Si  $x(a_i) \geq x(a_j)$ , o bien  $r_1$  no puede ser transversal de  $s_i$  sin serlo de  $s_j$ , o  $r_1$  y  $r_2$  no forman cuña  $TS$ .

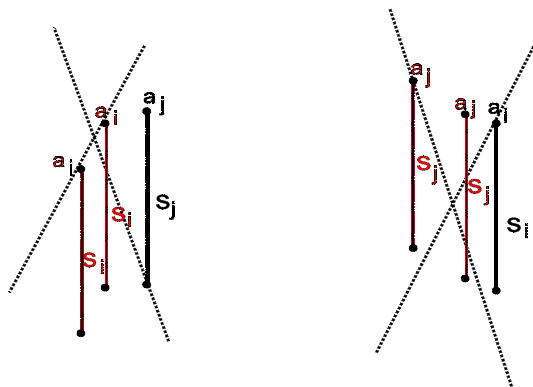


Figura 7.11: Si  $y(a_i) \leq y(a_j)$  no es posible colocar los segmentos de manera que  $r_1$  (pendiente positiva) corte sólo a  $s_i$  y  $r_2$  (pendiente negativa) sólo a  $s_j$ . En las figuras se muestra los diferentes casos según la posición relativa de  $s_i$  y  $s_j$ .

Como consecuencia  $y(a_i) > y(a_j)$ . Luego la recta horizontal pasando por  $a_i$ ,  $h_{a_i}$ , no corta a ninguno de los segmentos cortados por  $r_2$ . Así pues, si  $h_{a_i}$  cortara a los mismos segmentos que  $r_1$  tendríamos una cuña  $TS$  equivalente a la cuña inicial, lo cual es imposible por hipótesis.

Por tanto, existe un extremo inferior  $b_k$  con  $y(b_k) > y(a_i)$ . Además, dado que  $r_1$  es transversal a  $s_i$  y a  $s_k$ , con pendiente positiva,  $s_k$  está situado a la derecha de  $s_i$ .

Análogamente  $h_{b_j}$  no puede cortar a los mismos segmentos que  $r_2$  por lo que existe un extremo superior  $a_l$  con  $y(a_l) < y(b_j)$ . Como  $r_2$  es transversal a  $s_j$  y a  $s_l$ , con pendiente negativa,  $s_l$  se sitúa a la derecha de  $s_j$ .

Ahora bien, la posición relativa de  $s_i$  y  $s_k$  fuerza a que cualquier recta transversal a ellos deba ser de pendiente estrictamente positiva. La posición relativa de  $s_j$  y  $s_l$  fuerza a que cualquier recta transversal a ellos deba ser de pendiente estrictamente negativa.

Por tanto, no existe recta transversal al conjunto  $D$  lo cual es contradictorio.

Luego no es posible que haya ningún extremo inferior por encima de  $h_{a_i}$  ni

superior por debajo de  $h_{b_j}$ . En consecuencia,  $r_1$  es equivalente a  $h_{a_i}$  (cortan a los mismos segmentos); análogamente  $r_2$  es equivalente a  $h_{b_j}$ .

La cuña inicial es equivalente a una cuña  $TS$  con una de las semirrectas horizontal.  $\square$

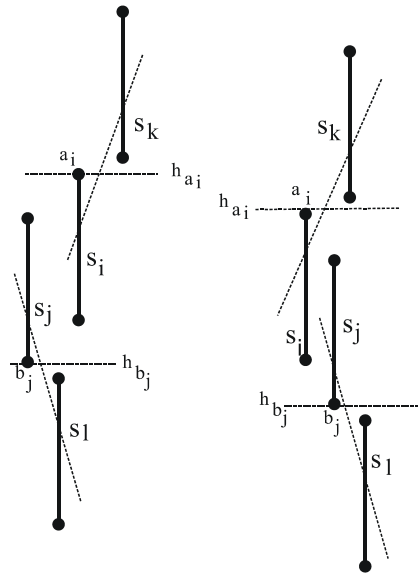


Figura 7.12: El segmento  $s_k$  debe estar por encima de  $h_{a_i}$  a la derecha de  $s_i$  y  $s_l$  por debajo de  $h_{b_j}$  y a la derecha de  $s_j$ . En la figura se muestran las dos posibles situaciones en función de la posición relativa de  $s_i$  y  $s_j$ . En ningún caso hay recta transversal a  $s_i$ ,  $s_j$ ,  $s_k$  y  $s_l$ .

**Algoritmo 7.3.3.** EXISTENCIA Y CÁLCULO DE TODAS LAS CUÑAS  $TS$  DEL **tipo 1**, PARA UN CONJUNTO DADO  $S$  DE  $n$  SEGMENTOS EN EL PLANO, VERTICALES, DE LA MISMA LONGITUD, QUE NO ADMITE RECTA TRANSVERSAL.

1. Para  $S$  construir las envolventes  $U_1$  y  $L_1$ .
  - 1.1 si existe  $s \in S$  tal que pertenece al interior de  $W$ , entonces no hay solución.
  - 1.2 en caso contrario, obtener la partición  $S = S_{U_1} \cup S_{L_1} \cup S_{U_1 L_1}$ .
2. Para  $S_{U_1}$  construir  $L_2$  y para  $S_{L_1}$  construir  $U_2$ .
  - 2.1 Si existe  $s \in S$  tal que es cortado simultáneamente por  $L_2$  y  $U_2$ , entonces no hay solución.
  - En caso contrario, obtener la partición  $S_{U_1 L_1} = S_{U_2} \cup S_{L_2} \cup D$ .

3. Ordenar por ordenadas los extremos de los segmentos de  $D$ , sean  $d_1, \dots, d_n$ , de menor a mayor.

4. Considerar  $h_{d_i}$  y el conjunto de segmentos cortados  $H_{d_i}$  en orden creciente desde  $d_1$  hasta llegar al extremo opuesto de  $d_1$ :

para cada  $d_i$  calcular las envolventes convexas  $CH_{i1}^S, CH_{i2}^S, CH_{i3}^S$ :

$$CH_{i1}^S = CH(B(S_{L_1}) \cup B(S_{U_2}) \cup B(H_{d_i}))$$

$$CH_{i2}^S = CH(A(S_{U_1}) \cup A(S_{L_2}) \cup A(D \setminus H_{d_i}))$$

$$CH_{i3}^S = CH(S \setminus \{B(S_{L_1}) \cup B(S_{U_2}) \cup B(H_{d_i}) \cup A(S_{U_1}) \cup A(S_{L_2}) \cup A(D \setminus H_{d_i})\})$$

- si  $CH_{i1}^S \cap CH_{i3}^S \neq \emptyset$  o  $CH_{i2}^S \cap CH_{i3}^S \neq \emptyset$ , pasar a la siguiente horizontal.

- en caso contrario, calcular tangentes internas para obtener  $r_1$  y  $r_2$ .

5. Considerar  $h_{d_i}$  y el conjunto de segmentos cortados  $H_{d_i}$

en orden decreciente desde  $d_m$  hasta llegar al extremo opuesto de  $d_m$ :

para cada  $d_i$  calcular las envolventes convexas  $CH_{i1}^S, CH_{i2}^S, CH_{i3}^S$ :

$$CH_{i1}^S = CH(A(S_{U_1}) \cup A(S_{L_2}) \cup A(H_{d_i}))$$

$$CH_{i2}^S = CH(B(S_{L_1}) \cup B(S_{U_2}) \cup B(D \setminus H_{d_i}))$$

$$CH_{i3}^S = CH(S \setminus \{A(S_{U_1}) \cup A(S_{L_2}) \cup A(H_{d_i}) \cup B(S_{L_1}) \cup B(S_{U_2}) \cup B(D \setminus H_{d_i})\})$$

- si  $CH_{i1}^S \cap CH_{i3}^S \neq \emptyset$  o  $CH_{i2}^S \cap CH_{i3}^S \neq \emptyset$ , pasar a la siguiente horizontal.

- en caso contrario, calcular tangentes internas para obtener  $r_1$  y  $r_2$ .

**Proposición 7.3.4.** Sea  $S$  un conjunto de  $n$  segmentos en el plano, verticales, de la misma longitud, que no admite recta transversal. El algoritmo 7.3.3 determina la existencia y calcula todas las posibles cuñas  $TS$  del tipo 1, en tiempo  $O(n \log^2 n)$ .

*Demostración.* Veamos que el algoritmo determina la existencia de cuña  $TS$  de tipo 1 y, en caso de haberla, construye todas las posibles.

En primer lugar, por el lema 2.1, debe ser posible (en caso contrario no existe cuña  $TS$ ) una partición de  $S$  en la cual el conjunto de segmentos para los que no se sabe por cuál de las semirrectas van a ser cortados, es un conjunto ( $D$ ) que admite recta transversal.

$$S = S_{U_1} \cup S_{L_2} \cup S_{L_1} \cup S_{U_2} \cup D$$

donde  $S_{U_1} \cup S_{L_2}$  deben ser cortados por  $r_1$  y  $S_{L_1} \cup S_{U_2}$  por  $r_2$ .

Si existe cuña  $TS$  del tipo 1 para  $S$ , también existe para el conjunto a  $D$ . Ahora bien, por la proposición 2.2, para dicha cuña hay otra combinatoriamente equivalente para el conjunto  $D$ , con una de las semirrectas horizontales. Basta pues examinar todas las biparticiones que generan las rectas horizontales en  $D$  para encontrar todas las posibles soluciones para  $S$ .



Para cada horizontal  $h_{d_i}$  los segmentos de  $D$  se clasifican en dos conjuntos: los cortados por  $h_{d_i}$  esto es,  $H_{d_i}$ , y el resto ( $D \setminus H_{d_i}$ ).

Suponiendo que existe cuña  $TS$  del tipo 1 para  $D$  con la anterior bipartición, ésta podría corresponderse o no a una cuña  $TS$  de  $S$ . En todo caso, la bipartición en  $S$  estaría unívocamente determinada:

-si  $h_{d_i} \equiv r_1$  a  $H_{d_i}$  le añadimos  $S_{U_1} \cup S_{L_2}$  y a  $(D \setminus H_{d_i})$  le añadimos  $S_{L_1} \cup S_{U_2}$ .

-si  $h_{d_i} \equiv r_2$  a  $H_{d_i}$  le añadimos  $S_{L_1} \cup S_{U_2}$  y a  $(D \setminus H_{d_i})$  le añadimos  $S_{U_1} \cup S_{L_2}$ .

Entonces, si  $h_{d_i} \equiv r_1$ , por encima o sobre  $r_1$  deben estar los extremos superiores:  $\{A(S_{U_1}) \cup A(S_{L_2}) \cup A(H_{d_i})\}$ .

Y si  $h_{d_i} \equiv r_2$ , por debajo o sobre  $r_2$  deben estar los extremos inferiores:  $\{B(S_{L_1}) \cup B(S_{U_2}) \cup B(H_{d_i})\}$ .

Luego si existe cuña  $TS$  del tipo 1 para  $S$  se tienen tres conjuntos de extremos según se sitúen por encima o sobre  $r_1$ , por debajo o sobre  $r_2$  y el resto. Por tanto, si existe solución, las envolventes convexas de estos conjuntos deben ser disjuntas, salvo el caso extremo en que sean tangentes.

El algoritmo estudia la intersección entre las correspondientes envolventes. Si es no vacía no hay solución para la bipartición de  $S$  considerada. Si es vacía, queda probada la existencia de solución.

Finalmente, en caso de haber solución, las semirrectas  $r_1$  y  $r_2$  pueden obtenerse calculando las tangentes internas a las anteriores envolventes: tómese  $r_1$  como la tangente interna de pendiente positiva y  $r_2$  la de pendiente negativa.

El coste del algoritmo es  $O(n \log^2 n)$ :

En los pasos 1. y 2., el coste de construir las envolventes convexas  $U_i, L_i, i = 1, 2$  es  $O(n \log n)$ .

El cardinal del conjunto  $D$  puede ser lineal por lo que el coste de ordenarlos en el paso 3. es  $O(n \log n)$ .

En los pasos 4. y 5. se analizan a lo sumo  $2O(n)$  biparticiones de  $S$ . El cálculo de las envolventes  $CH_{1j}^S, j = 1, 2, 3$  es  $O(n \log n)$ . Estas envolventes se van actualizando con un mantenimiento dinámico en  $O(\log^2 n)$ , dando lugar a las  $CH_{ij}^S$  para  $i > 1$ . Coste total para la construcción de todas las envolventes:  $O(n \log^2 n)$ .

El estudio de cada una de las intersecciones entre las correspondientes envolventes convexas es  $O(\log n)$ . Esto es así pues basta ver si la envolvente inferior de una corta con la superior de la otra y, al tratarse de cadenas de diferente convexidad, el estudio puede realizarse mediante una búsqueda binaria. En los casos que corresponda, la obtención de las tangentes internas es también  $O(\log n)$ . Todo ello, puede hacerse un número lineal de veces.

Finalmente el coste total del algoritmo 7.3.3 es  $O(n \log^2 n)$ .  $\square$

**Tipo 2.** Las pendientes de las semirrectas de la cuña  $TS$  tienen el mismo signo.

En este caso puede haber un número cuadrático de cuñas  $TS$  del tipo 2 para  $D$ , véase la figura 7.13.

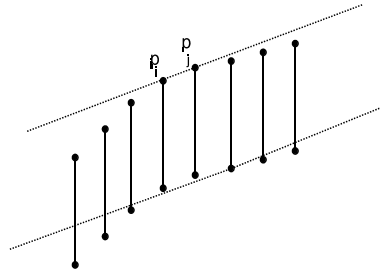


Figura 7.13: Hay familias de segmentos verticales de la misma longitud que admiten un número cuadrático de cuñas  $TS$ .

**Algoritmo 7.3.4.** EXISTENCIA Y CÁLCULO DE CUÑA  $TS$  DEL **tipo 2**, PARA UN CONJUNTO DADO  $S$  DE  $n$  SEGMENTOS EN EL PLANO, VERTICALES, DE LA MISMA LONGITUD, QUE NO ADMITE RECTA TRANSVERSAL

1. Para  $S$  construir las envolventes  $U_1$  y  $L_1$ .

- si existe  $s \in S$  tal que pertenece al interior de  $W$ , entonces no hay solución.
- en caso contrario, obtener la partición  $S = S_{U_1} \cup S_{L_1} \cup S_{U_1 L_1}$ .

2. Para  $S_{U_1}$  construir  $L_2$  y para  $S_{L_1}$  construir  $U_2$ .

- si existe  $s \in S$  tal que es cortado simultáneamente por  $L_2$  y  $U_2$ , entonces no hay solución.
- en caso contrario, obtener la partición  $S_{U_1 L_1} = S_{U_2} \cup S_{L_2} \cup D$ .

3. Sean  $\{d_1, \dots, d_m\}$  los extremos de los segmentos de  $D$ ,

para cada par  $d_i d_j$  considerar la recta por ellos  $r_{d_i d_j}$  y el conjunto de segmentos cortados  $R_{d_i d_j}$ ,

calcular las envolventes convexas  $CH_{ij1}^S, CH_{ij2}^S, CH_{ij3}^S$ :

$$CH_{ij1}^S = CH(B(S_{L_1}) \cup B(S_{U_2}) \cup B(R_{d_i d_j}))$$

$$CH_{ij2}^S = CH(A(S_{U_1}) \cup A(S_{L_2}) \cup A(D \setminus R_{d_i d_j}))$$

$$CH_{ij3}^S = CH(S \setminus \{B(S_{L_1}) \cup B(S_{U_2}) \cup B(R_{d_i d_j}) \cup A(S_{U_1}) \cup A(S_{L_2}) \cup A(D \setminus R_{d_i d_j})\})$$

- si  $CH_{ij1}^S \cap CH_{ij2}^S \neq \emptyset$  o  $CH_{ij1}^S \cap CH_{ij3}^S \neq \emptyset$ , pasar al siguiente par.
- en caso contrario, calcular tangentes internas para obtener  $r_1$  y  $r_2$ .

**Proposición 7.3.5.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  segmentos en el plano, verticales, de la misma longitud, que no admite recta transversal. El algoritmo 7.3.4 determina la existencia y calcula todas las posibles cuñas  $TS$  del tipo 2, en tiempo  $O(n^2 \log^2 n)$ .*

*Demostración.* Demostración análoga a la del algoritmo 7.3.3, con la diferencia que ahora el cardinal del conjunto  $D$  es  $O(n^2)$ .  $\square$

**Tipo 3.** La cuña  $TS$  contiene a la vertical.

**Algoritmo 7.3.5.** EXISTENCIA Y CÁLCULO DE CUÑAS  $TS$  DEL **tipo 3**, PARA UN CONJUNTO DADO  $S$  DE  $n$  SEGMENTOS EN EL PLANO, VERTICALES, DE LA MISMA LONGITUD, QUE NO ADMITE RECTA TRANSVERSAL

1. Ordenar los segmentos por abscisa.
2. Hacer la construcción incremental en el dual:
 

mientras queden segmentos por dualizar y la intersección en el dual sea no vacía,

  - 2.1 actualizar la intersección de los semiplanos inducidos por los segmentos en orden creciente.
  - 2.2 simultáneamente en orden decreciente.
    - si se han dualizado todos los segmentos, seguir.
    - en caso contrario, no existe cuña  $TS$  del tipo 3.
3. Obtener el segmento inducido en el primal, por las tangentes internas a los polígonos de 2.
  - 3.1 -si el segmento se sitúa entre el último segmento de 2.1 y el de 2.2, se tiene cuña  $TS$  del tipo 3.
  - 3.2 -en caso contrario, mientras queden segmentos,
    - añadir un segmento en 2.1 y eliminar en 2.2
    - paralelamente, eliminar uno en 2.1 y añadirlo en 2.2,
    - hacer un mantenimiento dinámico de las tangentes en cada caso y volver a 3.

**Proposición 7.3.6.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  segmentos en el plano, verticales, de la misma longitud, que no admite recta transversal. El algoritmo 7.3.5 determina la existencia y calcula todas las posibles cuñas  $TS$  del tipo 3, en tiempo  $O(n \log n)$ .*

*Demostración.* Para que la cuña sea del tipo 3, las semirrectas son tales que si el vértice es un punto de abscisa  $x_0$ , los segmentos cortados por una de ellas tienen puntos de abscisa menor a  $x_0$  y todos los otros son de abscisa mayor. Supongamos

que existe cuña  $TS$  de  $S$ . Cada semirrecta de la cuña corta a un subconjunto de  $S$ , sea  $r_1$  la semirrecta que corta a  $S_1$  y  $r_2$  la transversal a  $S_2$ , con  $S = S_1 \cup S_2$  (figura 7.14). En el dual, cada segmento es la intersección de dos semiplanos y el conjunto de rectas transversales a  $S_1$  forman un polígono convexo intersección de los correspondientes semiplanos (análogamente con  $S_2$ ). Pero el corte de las rectas transversales a  $S_1$  y a  $S_2$  debe tener su abscisa entre las de  $S_1$  y las de  $S_2$  para que sea el vértice de una cuña  $TS$ . Cualquier recta que une dos puntos de estos polígonos tiene una pendiente comprendida entre las pendientes de las tangentes internas (figura 7.15). Luego si calculamos las rectas tangentes a los polígonos convexos en el dual, el segmento que representa en el primal,  $t_1 t_2$ , contiene al punto de corte de las transversales y debe estar entre el último segmento de  $S_1$  y el primero de  $S_2$  (figura 7.14).

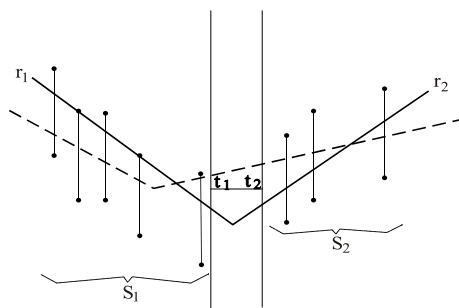


Figura 7.14: Las semirrectas en trazo discontinuo lo son de rectas transversales a los conjuntos  $S_1$  y  $S_2$  pero no forman cuña  $TS$  para esta partición de  $S$ . Las de trazo continuo forman cuña  $TS$  para la partición  $S_1, S_2$ .

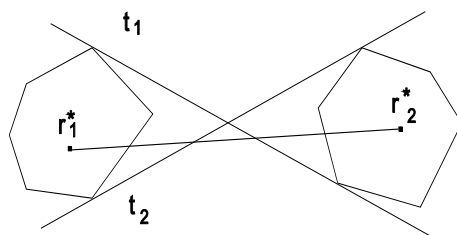


Figura 7.15: En el dual, cualquier recta uniendo dos puntos de los correspondientes polígonos tiene una pendiente comprendida entre la de las tangentes internas.

El coste del algoritmo 7.3.5 es  $O(n \log n)$ . □

Aplicando los algoritmos 7.3.3, 7.3.4 y 7.3.5 se determina la existencia y construcción de todas las posibles cuñas  $TS$  para un conjunto de segmentos verticales de longitud fija en  $O(n^2 \log^2 n)$ .