Capítulo 6

Transversalidad: realización de polígonos sobre rectas

Este capítulo se centra en el estudio de la realización de polígonos sobre rectas. En la sección 6.1 se dan definiciones. En la sección 6.2 se estudia el problema de la realización de polígonos con vértices sobre un conjunto de rectas.

6.1. Introducción

Se enmarcan como problemas de transversalidad aquellos que, a partir de una cierta configuración (ya sea una nube de puntos, arreglo de rectas, colección de segmentos, etc.), pretenden obtener una estructura geométrica que la atraviese.

La teoría de la transversalidad tiene su origen en el teorema de Helly. A partir de este primer resultado se hicieron generalizaciones encontrando condiciones locales de existencia de transversal para ciertos conjuntos de elementos. También se desarrollaron algoritmos para la construcción de transversal o espacios de transversales analizando asimismo la complejidad de éstos.

Es claro que en función de las diferentes colecciones de elementos considerados y el tipo de transversal estudiado, los problemas que surgen son muy diversos. En este capítulo nos centramos en el problema de la realización de polígonos sobre rectas. El problema de las poligonizaciones ha sido ya estudiado para nubes de puntos [DS](88). Se sabe que dados n puntos no todas las permutaciones posibles $(n-1)!$ dan poligonizaciones simples, éstas son del orden de 10^{13n}; y evidentemente si se quiere convexa, o no existe, o en caso de existir, es única.

Este problema puede generalizarse a la realización de polígonos sobre una colección de *objetos*. A continuación se hace un estudio para el caso de rectas.

Dado un arreglo de n rectas se estudia el conjunto de permutaciones de n puntos realizables, uno sobre cada recta, formando un polígono. Se aborda el problema tanto para polígonos simples como convexos.

Consideramos las rectas ordenadas según sus pendientes y, en el caso de ser paralelas, según las atraviesa una recta no paralela a ellas.

Definición 6.1.1. *Dada una permutación de los valores* $1, \cdots, n$, *esto es* $(\pi_1, \cdots, \pi_n)$, *diremos que es realizable como polígono sobre un arreglo de rectas cuando se puedan situar los* n *vértices, uno sobre cada recta, con la numeración de la misma y en el orden establecido por la permutación, formando así un polígono simple.*

Cualquier arreglo de rectas en posición general divide al plano en dos regiones complementarias, a las que llamamos zona acotada y zona infinita del arreglo, y que se definen a continuación.

Definición 6.1.2. *Dado un arreglo de rectas en posición general, llamamos zona acotada a la región acotada del plano delimitada por la envolvente convexa de los cortes entre las rectas.*

Definición 6.1.3. *Dado un arreglo de rectas en posición general, llamamos zona infinita a la región no acotada del plano delimitada por la envolvente convexa de los cortes entre las rectas.*

El objetivo del cálculo de las permutaciones realizables es el estudio de las posibles poligonizaciones de n rectas y por ello, para no contar todas las permutaciones distintas que representan una misma poligonización, se adopta el criterio descrito a continuación.

Una permutación realizable establece el orden en que deben aparecer los vértices del polígono. Debido al carácter circular de las permutaciones se puede establecer que todas ellas empiecen siempre con el mismo valor, sea por ejemplo $\pi_1 = 1$. O equivalentemente, la lectura de los vértices de un polígono se hará siempre empezando con el 1.

Por otra parte, permutaciones diferentes pueden dar lugar a polígonos iguales. Este es el caso de cualquier permutación realizable y su inversa donde sólo una de ellas debe ser considerada, pues se trata de la misma poligonización de las rectas. Basta que representemos siempre los polígonos en sentido antihorario para que no sea contabilizada dos veces.

6.2. Realización de polígonos sobre rectas

Para el estudio de la realización de polígonos sobre rectas distinguimos dos casos: en el primero imponemos que los polígonos sean simples y en el segundo que sean convexos.

6.2.1. Realización de polígonos simples

El siguiente resultado nos dice que toda permutación es realizable y además, formando polígonos monótonos.

Teorema 6.2.1. *Dadas n rectas numeradas pueden encontrarse n puntos, uno sobre cada una de ellas, formando un polígono monótono para cada una de las posibles permutaciones de $\{1, \cdots n\}$.*

Demostración. Distinguimos dos casos.

1. Primer caso: las n rectas son paralelas.

   Dada una permutación, ésta nos dice el orden en que hemos de conectar los puntos (situados sobre la recta numerada correspondiente), para formar el polígono. Debido al carácter circular de las permutaciones las daremos siempre empezando con el 1. Supondremos también que las rectas están numeradas de 1 a n siguiendo el orden de aparición en alguna dirección y sentido. La demostración sería análoga en cualquier otro orden.

   Sea $(1, \pi_2, \cdots, \pi_n)$ una permutación cualquiera. Localizamos en ella el valor de n y se divide en dos cadenas:

   C_1 : De π_n a π_i, donde π_i es el anterior a n.

   C_2 : De π_i a π_n.

   Supongamos, sin pérdida de generalidad, que las rectas son verticales. Situamos los puntos sobre las rectas 1 y n a la misma altura, como en la figura 6.1. Ahora cada cadena puede realizarse como una poligonal monótona respecto a la dirección definida por las rectas, del siguiente modo:

   Cadena C_1 : Tenemos colocado un punto de esta cadena: el n (posterior a π_i en la permutación). Desde n hasta el anterior a π_n, esto es, la poligonal C_1 salvo los extremos, el orden en que la poligonal visita las correspondientes rectas está fijado por la permutación. Además, podemos colocar los vértices en orden creciente de ordenadas, incluso tan cerca unos de otros como se quiera (por ejemplo, $\epsilon/2$).

   Cadena C_2 : Tenemos colocado un punto de esta cadena: el 1 (anterior a π_n). Desde el posterior a π_i hasta el 1, esto es, la poligonal C_2 salvo los extremos, procedemos a colocar los vértices de forma análoga a la poligonal C_1.

   Falta colocar los puntos correspondientes a π_i y π_n. Queremos que π_i sea, de todos los vértices del polígono, el de menor ordenada y π_n el de mayor, para que el polígono resultante de la unión de las cadenas C_1 y C_2 sea monótono en la dirección de las rectas. Siempre es posible hacerlo, pero si se quiere que el polígono sea simple, la ubicación de π_i y π_n no es arbitraria (véase figura 6.1).

2. Segundo caso: las rectas están en posición general.

   Vamos a realizar la misma construcción que en el caso de las rectas paralelas, en la zona infinita del arreglo de rectas. El polígono estará formado por las

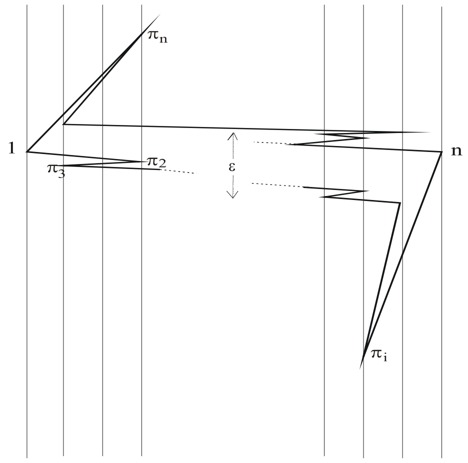

Figura 6.1: Construcción de un polígono monótono sobre un arreglo de rectas paralelo, con todos sus vértices dentro de una franja horizontal de grosor ϵ salvo como mucho dos de ellos.

poligonales C_1, de π_n a π_i, (π_i es el anterior a n) y C_2 de π_i a π_n. Tomamos una franja de grosor ϵ delimitada por dos rectas paralelas, cuya dirección no coincida con ninguna de las direcciones de las rectas dadas y, la ubicamos en la zona infinita del arreglo. Ahora podemos colocar todos los puntos, salvo π_i y π_n, en la anterior franja, de forma análoga a como hicimos en el caso de las rectas paralelas. Además, siempre es posible considerar la franja suficientemente alejada de la zona acotada, para que los puntos π_i y π_n puedan también situarse completando las cadenas monótonas, sin tener que atravesar la zona acotada. El polígono construido de este modo es monótono, respecto a la dirección perpendicular a la franja considerada (figura 6.2).

□

6.2.2. Realización de polígonos convexos

A continuación hacemos el cálculo del número de permutaciones realizables como polígonos convexos en la zona infinita. Ello nos dará una cota inferior de todas las posibles, pues probaremos que hay permutaciones no realizables en la zona infinita que sí lo son en la acotada.

Como en el caso anterior, empezaremos con el estudio particular de la realización de los polígonos convexos sobre un arreglo de rectas paralelas. Ello nos ayudará al mismo estudio para un arreglo de rectas en posición general, además de proporcionar posibles poligonizaciones en la zona infinita del mismo.

- Estudio de las permutaciones en la zona infinita.

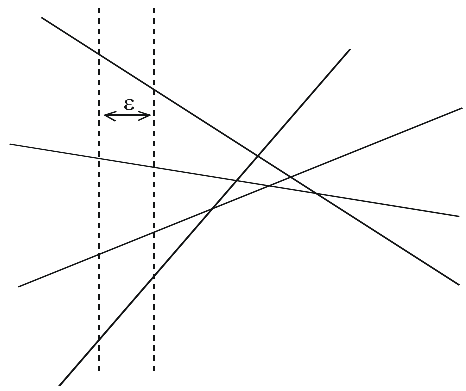

Figura 6.2: La misma construcción que en el caso paralelo se realiza en una franja vertical de grosor ϵ, convenientemente situada lejos de la zona de cortes.

Es fácil ver que todas las permutaciones realizables en un conjunto de rectas paralelas lo son también en la zona infinita de un arreglo general, sin embargo, éstas no son todas. Veremos que en un arreglo de rectas en posición general, hay permutaciones realizables como polígonos convexos sin contener a la zona acotada en su interior, no realizables en arreglos de rectas paralelas; y también hay otras, cuya representación como polígono convexo contendrá necesariamente a la zona acotada.

Proposición 6.2.1. *Dado un conjunto de rectas paralelas, las sucesiones definidas por las permutaciones realizables como polígonos convexos son unimodales. Además, el orden de dichas permutaciones es de* 2^{n-2}.

Demostración. Podemos suponer que todas las rectas son horizontales numeradas de abajo a arriba.

Los vértices de cualquier polígono convexo sobre ellas forman dos cadenas: una de 1 a n con valores siempre crecientes, y otra de n a 1 con valores decrecientes. Por tanto, la sucesión definida por los vértices ha de ser unimodal. Recíprocamente, toda unimodal de los n valores da lugar a un polígono convexo.

Para el estudio del orden, obsérvese que dado un conjunto de números distintos existe una única manera de ponerlos en forma creciente o bien decreciente. El número de maneras en que $n-2$ elementos pueden repartirse en dos subconjuntos: uno para la cadena que va de 1 a n y otro para la de n a 1 es

$$\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} + \cdots + \binom{n-2}{n-2} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} = 2^{n-2}. \qquad \square$$

Para el cálculo del orden de las permutaciones realizables en la zona infinita se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las rectas pasan por un punto (en el cual hacemos confluir la zona acotada como si mirásemos de lejos todo el conjunto), y que están ordenadas en sentido antihorario. Estamos también suponiendo ahora que no hay rectas paralelas.

Además, utilizaremos una representación esquemática de las permutaciones, a base de flechas. Un mismo esquema es válido para todo un conjunto de permutaciones. Para saber si una permutación se corresponde con un determinado esquema, debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

La representación esquemática sólo consta de flechas, salvo el primer valor que siempre es 1. Una flecha puede representar a una tira de términos consecutivos de la permutación, a un sólo término o a ninguno. En el primer caso, si la flecha es $\nearrow$, indica el orden creciente de los términos, si es $\searrow$, su orden decreciente; en los otros dos casos, la flecha no tiene ningún significado. Por ejemplo, el esquema $(1, \nearrow, \nearrow)$, puede representar a permutaciones como $(1,5,6,7,2,3,4)$ o $(1,2,3,4,5,7,6)$ o $(1,2,3,4,5,6,7)$; el esquema $(1, \nearrow, \searrow)$, puede representar a permutaciones como $(1,5,6,7,4,3,2)$ o $(1,7,6,5,4,3,2)$.

Si además colocamos una cota inferior o superior debajo de la flecha, ello nos indica la correspondiente cota de todos los valores representados por la flecha (si hay alguno). Por ejemplo, $(1 \underset{\leq 5}{\searrow} \underset{\geq 5}{\searrow})$ puede representar a $(1,4,3,2,7,6,5)$.

Vamos a analizar el caso en que la realización de la permutación sea posible mediante un polígono convexo sin contener en su interior a la zona acotada. Análogamente después el caso en que sea posible, conteniéndola.

Proposición 6.2.2. *El número de permutaciones realizables en la zona infinita, cuya representación pueda hacerse sin contener a la zona acotada en su interior, es $n2^{n-1}$. Y están caracterizadas según el esquema siguiente, con h cualquiera de los valores del conjunto $\{1, \cdots, n\}$:*

$$(1 \quad \underset{\leq h}{\nearrow} \quad \underset{\leq h}{\searrow} \quad \underset{\geq h}{\searrow} \quad \underset{\geq h}{\nearrow})$$

Demostración. Los polígonos convexos han de ser tales que no contengan en su interior a la zona acotada. Esto equivale a decir que su representación se da en alguno de los semiplanos definidos por el conjunto de rectas (figura 6.3).

Una lectura antihoraria de los vértices de dichos polígonos no conlleva el mismo orden antihorario de representación sobre las rectas. En general, pueden distinguirse dos cadenas poligonales: una en que la lectura (antihoraria) de los vértices recorre a las rectas en sentido antihorario, y la otra en sentido horario. Las dos cadenas tienen en común los vértices extremos y, si una de ellas es vacía, se trata de la identidad. Véase en ejemplo en la figura 6.4.

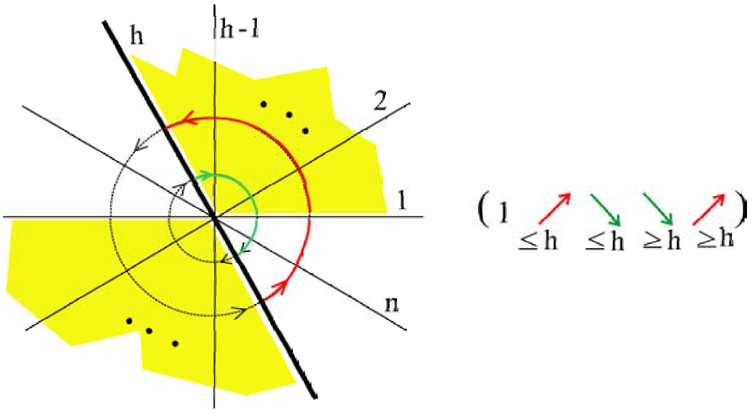

Figura 6.3: Si se sitúa un polígono convexo en cualquiera de los dos semiplanos definido por la recta h, las flechas indican el orden que siguen los vértices sobre las rectas. El valor de los vértices será $\leq h$ en las zonas sombreadas o $\geq h$ en las otras.

Cualquier permutación que responda al siguiente esquema es realizable como polígono convexo en cualquiera de los semiplanos definidos por la recta h (véase la figura 6.3):

$$\begin{array}{ccccc} (1 & \nearrow & \searrow & \searrow & \nearrow) \\ & \leq h & \leq h & \geq h & \geq h \end{array}$$

Las flechas sólo tienen sentido en caso de haber más de un valor (puede no haber ningún valor o haber sólo uno). En ese caso, indican su orden creciente o decreciente en la permutación. Debajo de las flechas se indica la condición $\leq h$ o $\geq h$ a la que deben estar sujetos dichos valores.

Y viceversa, si una permutación es realizable en un semiplano de los definidos por h, ha de seguir el anterior esquema.

Para contabilizar las permutaciones realizables obsérvese que si son i los valores correspondientes a las dos primeras flechas, habrá 2^i maneras de repartirlos en ellas. Quedan $n-i-1$ valores a repartir en las otras posiciones (esquematizadas en las dos últimas flechas) y esto supone 2^{n-i-1} posibilidades. Luego en total hay: $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i 2^{n-i-1} = n2^{n-1}$ □

Estudiaremos a continuación el número de permutaciones realizables como polígonos convexos conteniendo a la zona acotada.

Podemos ahora suponer que los polígonos convexos que se obtengan con un punto en cada recta, están sobre una circunferencia.

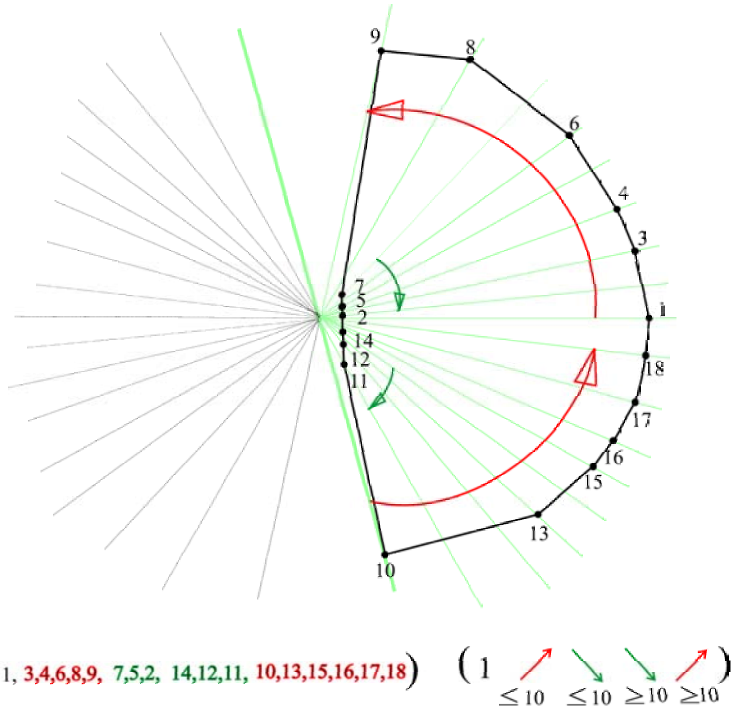

Figura 6.4: Ejemplo de permutación realizable como polígono convexo junto con su esquema asociado.

Así, pues, se parte de n pares de puntos antipodales sobre una circunferencia, donde cada uno de estos pares pertenecen a la misma recta y, por tanto, se representan con el mismo valor numérico. De este modo, el problema que nos planteamos puede enunciarse como sigue:

Proposición 6.2.3. *Dados n pares de puntos antipodales sobre una circunferencia, el número de permutaciones de los n índices que representan, realizables como polígono convexo de n vértices encerrando el centro de la misma y representando poligonizaciones distintas es: $2^{n-1} - n$. Y se caracterizan por el esquema:* $(1 \quad \nearrow \quad \nearrow)$.

Demostración. Para cada permutación de los n valores se tienen 2^n maneras posibles de escoger los puntos sobre la circunferencia. Si alguna de ellas forma al menos un polígono convexo diremos que la permutación es realizable, o que no lo es en caso contrario.

Obsérvese que, debido al carácter circular de las permutaciones y a que los puntos antipodales representan al mismo valor, una misma permutación realizable podría dar lugar, a lo sumo, a $2n$ polígonos distintos (este es el caso de la identidad) pero no por ello se contabiliza más de una vez.

Para evitar repeticiones seguiremos tomando las permutaciones empezando por el 1 pero además, de los dos puntos posibles con este valor, escogeremos uno de ellos. Si es preciso distinguir entre sí los puntos antipodales los notaremos por i y i' sin dejar de representar al mismo valor (figura 6.5). Hacemos servir también esta notación en las permutaciones para indicar los puntos con los que se representa; por ejemplo, sea el 1 el valor de π_1 en cualquier permutación.

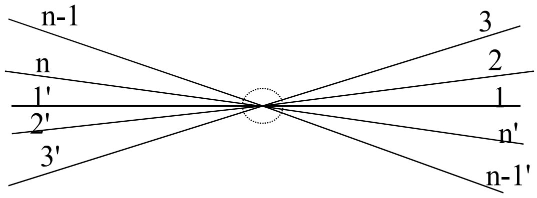

Figura 6.5: Un punto se nota por i o i' según esté a un lado u otro del punto de corte de las rectas.

Los n pares de puntos antipodales leídos en sentido antihorario generan la sucesión $1, 2, \cdots, n, 1', 2', \cdots, n'$. Para el cálculo del número de permutaciones realizables se debe tener en cuenta que $\pi_1 = 1$, y que los n elementos de la permutación serán tales que se corresponderán con n elementos de la anterior sucesión tomados de izquierda a derecha, (si no tiene el punto i tiene i' y viceversa).

Puede decirse que responden al esquema $(1 \quad \nearrow \quad \nearrow)$ donde nuevamente las flechas sólo tienen sentido si hay más de un valor.

De este modo se observa la relación entre el cálculo de las permutaciones realizables como polígonos convexos y el del número posible de maneras en que $n-1$ elementos pueden repartirse en dos subconjuntos, esto es, 2^{n-1}. Dos elecciones distintas para dichos subconjuntos representarán permutaciones diferentes salvo el caso de la identidad. Una vez aparece el valor de i' en la permutación, no puede haber ninguna otra elección de los subconjuntos con i en vez de i' que represente la misma poligonización salvo precisamente en los siguientes casos:

$(1,2,\cdots,n) \equiv (1,2,\cdots,n-1,n') \equiv (1,2,\cdots,n-2,(n-1)',n') \equiv \cdots \equiv (1,2',\cdots,n')$.

Luego el número de permutaciones sería $2^{n-1}-(n-1)$. Sin embargo, hemos de descartar también aquellas permutaciones tales que el polígono que las realice, forzosamente no encierre a la zona acotada; en este caso sólo hay una y es la identidad. Por tanto, $2^{n-1}-n$. $\square$

Teorema 6.2.2. *El número de permutaciones diferentes realizables como polígonos convexos en la zona infinita de un arreglo de rectas en posición general (sin paralelas) es:* $(n+1)2^{n-1}-3n+3$. *Además quedan caracterizadas por los siguientes esquemas:*

1. $(1 \quad \underset{\leq h}{\nearrow} \quad \underset{\leq h}{\searrow} \quad \underset{\geq h}{\searrow} \quad \underset{\geq h}{\nearrow})$ *no contienen la zona acotada.*

2. $(1 \quad \nearrow \quad \nearrow)$ *contienen la zona acotada.*

Demostración. En la proposición 6.2.2, se caracterizan y se calcula el orden de las permutaciones realizables, cuya representación no contiene la zona acotada. Análogamente para las que sí contienen la zona acotada, en la proposición 6.2.3.

Las permutaciones realizables en la zona infinita están contabilizadas en uno u otro caso. Luego el total es la suma, salvo repeticiones.

1. $(1 \quad \underset{\leq h}{\nearrow} \quad \underset{\leq h}{\searrow} \quad \underset{\geq h}{\searrow} \quad \underset{\geq h}{\nearrow})$ no contienen la zona acotada. Orden: $n2^{n-1}$.
2. $(1 \quad \nearrow \quad \nearrow)$ contienen la zona acotada. Orden: $2^{n-1}-n$.

Veamos si hay alguna permutación que responda simultáneamente a los dos esquemas. Las permutaciones que se corresponden con el primer esquema, con más de un elemento en cada cadena creciente, pueden seguir el segundo esquema así:

$(1 \quad \nearrow \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \nearrow)$

Obsérvese que entonces los valores de la permutación quedan ordenados y sólo puede ser la identidad, también en el caso de que alguna de las cadenas crecientes fuera vacía.

Las que responden al primer esquema con un sólo elemento en alguna de las cadenas pueden ser del segundo esquema y viceversa en los siguientes casos:

$(1 \quad i \quad \nearrow)$ se identifica con $(1 \quad \emptyset \quad \emptyset \quad i \quad \nearrow)$ tomando $h=2$.

$(1 \quad \nearrow \quad i)$ se identifica con $(1 \quad \nearrow \quad i \quad \emptyset \quad \emptyset)$ tomando $h=n$.

En total hay $n-2$ permutaciones en cada caso sin contar la identidad. Luego repetidas hay: $1+2(n-2)=2n-3$. Por tanto, el número de permutaciones diferentes realizables como polígonos convexos en la zona infinita de un arreglo de rectas en posición general (sin paralelas) es $2^{n-1}-n+n2^{n-1}-(2n-3)$, esto es

$$(n+1)2^{n-1}-3n+3.$$

□

- Estudio de las permutaciones en la zona acotada.

Proposición 6.2.4. *Existen permutaciones no realizables como polígonos convexos en la zona infinita de un arreglo de rectas, que sí lo son en la zona acotada.*

Demostración. En la figura 6.6 se tiene un ejemplo con 6 rectas y sobre ellas, se tiene un polígono convexo que corresponde a la permutación $(1, 6, 3, 5, 2, 4)$ que no se corresponde con ninguno de los esquemas que caracterizan a las realizables en la zona infinita.

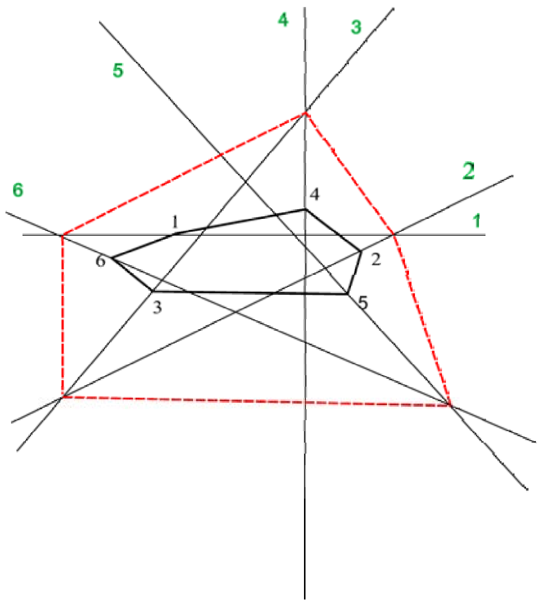

Figura 6.6: Polígono cuya permutación no es realizable como convexo en la zona infinita.

□

Existen permutaciones no realizables como polígono convexo en la zona acotada: tómese por ejemplo la permutación $(1, 3, 2, 4, 5, 6)$, en el ejemplo de la figura 6.6. Sin embargo, la anterior permutación sí es realizable si permitimos que el polígono convexo tenga sus vértices tanto dentro como fuera de la zona acotada, como se muestra en la figura 6.7. La complejidad de la zona acotada dificulta el análisis de todas las posibles configuraciones. Una opción para seguir avanzando en este estudio, todavía en curso, es la de imponer restricciones sobre la posición relativa de los puntos de corte, del conjunto de rectas.

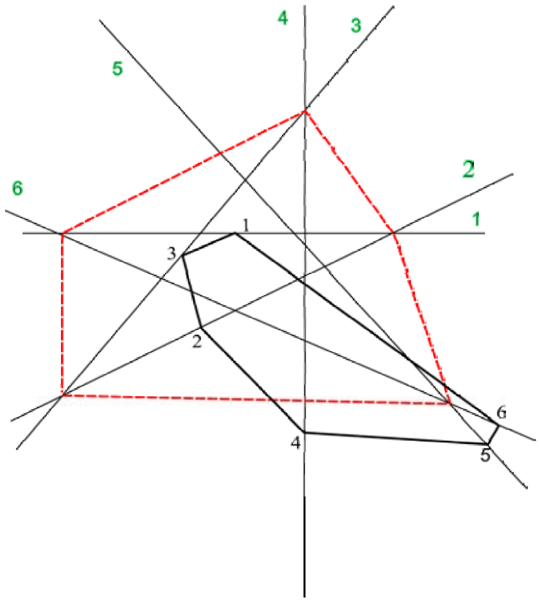

Figura 6.7: Permutación realizable como polígono convexo con vértices en la zona acotada y en la infinita.