

# Capítulo 5

## Peso Delaunay

En este capítulo estudiamos el peso Delaunay. En la sección 5.1 se dan algunas definiciones. En la sección 5.2 se obtienen propiedades geométricas y combinatorias del peso Delaunay. En las secciones 5.3 y 5.4 se definen las capas y los niveles Delaunay, respectivamente; se estudian algunas propiedades, su complejidad y el coste y forma de obtención, tanto de capas como de niveles. En la sección 5.5 se estudian cotas para el cálculo del peso Delaunay de un punto también se analiza su localización y la operación de inserción o borrado. En la sección 5.6 se estudian estructuras de peso Delaunay mínimo.

### 5.1. Introducción

Sea  $S = \{p_1, \dots, p_n\}$  una nube de puntos en el plano. A cada punto del plano se le asocia aquel de la nube dada que le es más próximo; de esta manera, se obtiene una partición del plano según las llamadas regiones de Voronoi:

$$V(p_i) = \{x : |p_i - x| \leq |p_j - x|, \forall j \neq i\}$$

**Definición 5.1.1.** *El Diagrama de Voronoi de  $S$ ,  $DV(S)$ , está formado por el conjunto de todos los puntos del plano que tienen más de un punto de la nube asociado, esto es, igual de próximos.*

El Diagrama de Voronoi es una herramienta fundamental en muchos problemas de Geometría Computacional y ha sido extensamente estudiado en [Au](91) y [OBS](92).

**Definición 5.1.2.** *La Triangulación de Delaunay de  $S$ ,  $DT(S)$  o grafo Delaunay, es la triangulación obtenida como el grafo dual del Diagrama de Voronoi de  $S$ .*

En la definición de la Triangulación de Delaunay se supone siempre que no hay cuatro puntos concíclicos. Si los hay, se trata de un caso degenerado y en el grafo dual del  $DV(S)$  aparece un cuadrilátero.

Para su cálculo se tienen diversos algoritmos (véase [LeSc](80)). Una de sus caracterizaciones es la siguiente: una triangulación de  $S$  es de Delaunay si y sólo si la circunferencia circunscribiendo a cualquiera de los triángulos, no contiene ningún otro punto de  $S$  en su interior. Equivalentemente, se dice que dos puntos de  $S$  forman arista de  $DT(S)$  si y sólo si existe un círculo cerrado  $C$  conteniéndolos en su frontera y no conteniendo a ningún otro punto de  $S$ . En la figura 5.1 se muestra el Diagrama de Voronoi y la Triangulación de Delaunay de una nube dada.

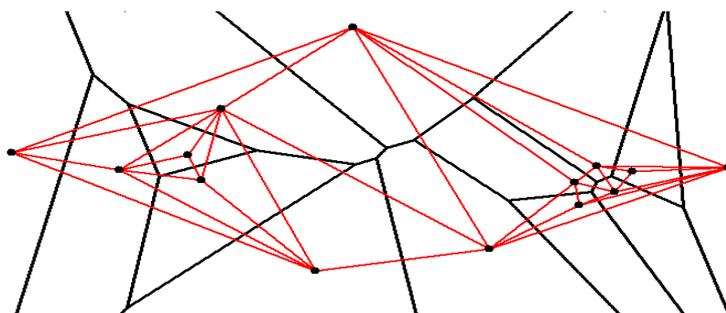


Figura 5.1: Diagrama de Voronoi y Triangulación de Delaunay.

La Triangulación de Delaunay de una nube de puntos  $S$  puede ser considerada como una ordenación espacial de los mismos. Las adyacencias obtenidas de este orden nos permite definir el peso Delaunay introducido por Green en 1981 [Gre](81):

**Definición 5.1.3.** *Los puntos de la envolvente convexa de una nube dada  $S$  son los de peso Delaunay 1, los demás puntos de  $S$  tienen peso igual a su distancia a la envolvente convexa en la triangulación de Delaunay, más uno (la distancia se entiende como distancia en el grafo, es decir, el número de aristas que hay que recorrer para llegar a la envolvente convexa). Notamos por  $W_D(p)$  el peso Delaunay de un punto  $p$ .*

Notamos por  $D_i(S)$  al subconjunto de  $S$  formado por los puntos de peso Delaunay igual a  $i$ , esto es,  $D_i(S) = \{p \in S / W_D(p) = i\}$ .

Las definiciones generales del peso asociado a una estructura geométrica, la profundidad de una nube y la sucesión de profundidades definidas por cualquier polígono con vértices en ella, (definiciones 1.3.1, 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.4), se aplican en este capítulo al peso Delaunay.

Para cuestiones relativas a poligonizaciones de peso mínimo trataremos una clase especial de sucesiones, como son las unimodales (definición 2.4.4).

A continuación se obtienen algunas propiedades del peso Delaunay. Algunas de estas propiedades las aplicaremos más adelante al estudio de estructuras de peso mínimo.

## 5.2. Propiedades geométricas y combinatorias

En esta sección se obtienen algunas propiedades geométricas del grafo Delaunay de nubes de puntos del plano, algunas de ellas relacionadas con el peso por capas convexas.

A partir de la definición del peso Delaunay, de un punto de  $S$ , se deduce que si  $p$  y  $q$  son dos puntos adyacentes en  $DT(S)$  entonces  $|W_D(p) - W_D(q)| \leq 1$ . Por tanto, si no pueden haber saltos mayores a 1, en cualquier camino que vaya desde un punto de peso  $i$  a otro de peso 1 en  $DT(S)$ , debe haber al menos un punto de todos los pesos comprendidos entre ambos. Además, ello es posible pues por la propia definición de peso, cualquier punto de peso  $i$  tiene al menos un adyacente de peso  $i - 1$  y este último uno de peso  $i - 2$  y así sucesivamente. Luego, también puede decirse que la longitud mínima más uno (pues hemos empezado con peso 1) de los caminos que en  $DT(S)$  van de un punto de  $S$  a la envolvente convexa,  $CH(S)$ , se corresponde con el peso Delaunay de dicho punto.

La siguiente propiedad compara el peso Delaunay con el peso definido por las capas convexas en puntos de  $S$ .

**Proposición 5.2.1.** *Sea  $S$  una nube de puntos dada y  $p$  un punto de la misma, entonces  $W_D(p) \leq W_C(p)$ . Como consecuencia, el número de capas convexas envolventes de los puntos del mismo peso Delaunay es menor o igual que el número de capas convexas de  $S$ .*

*Demostración.* Se demuestra por inducción sobre el número de la capa convexa en la que se sitúa el punto  $p$ .

Si  $p \in C-Lay_1(S) = CH(S)$ , dado que también es la primera capa Delaunay,  $D-Lay_1(S)$ , los pesos coinciden:  $W_C(p) = W_D(p) = 1$ .

Por hipótesis de inducción se tiene que: si  $p \in C-Lay_j(S)$  entonces  $W_D(p) \leq W_C(p) = j$ ,  $j = 1, \dots, i$ . Se quiere ver que si  $p \in C-Lay_{i+1}(S)$ ,  $i + 1 > 1$  entonces  $W_D(p) \leq W_C(p) = i + 1$ .

Sea  $s_p$  una recta que pasa por  $p$  y es soporte de la capa  $C-Lay_{i+1}(S)$ . Tómese una circunferencia pasando por  $p$  inicialmente con radio nulo. Aumentamos el radio de forma continua hasta alcanzar otro punto de  $S$ ,  $q$ , de modo que la circunferencia siga pasando por  $p$  y esté totalmente contenida en el semiplano de la recta  $s_p$ , que no contiene a  $C-Lay_{i+1}(S)$ , (figura 5.2). El punto  $q$  existe pues  $C-Lay_{i+1}(S) \subset C-Lay_1(S)$ . Además  $q \in C-Lay_j(S)$  con  $j < i + 1$  por lo que se puede aplicar la hipótesis de inducción estableciendo que  $W_D(q) \leq W_C(q) = j$ . Por otra parte, dado que existe un círculo vacío pasando por  $p$  y  $q$ , la arista  $pq$  es de la  $DT(S)$ .

Aplicando que la diferencia de pesos entre puntos adyacentes en  $DT(S)$  no puede ser mayor que la unidad, se tiene  $|W_D(p) - W_D(q)| \leq 1$ . Luego se da una de las siguientes posibilidades:

$$W_D(p) = W_D(q) - 1 \stackrel{HI}{\leq} j - 1 < i,$$

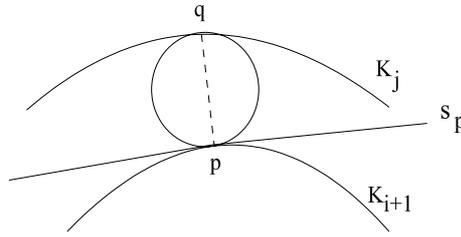


Figura 5.2: Un punto  $p \in C\text{-Lay}_{i+1}(S)$  tiene peso  $W_D(p) \leq i + 1$  pues existe  $q \in C\text{-Lay}_j(S)$ ,  $j < i + 1$  adyacente a  $p$  en  $DT(S)$ .

$$W_D(p) = W_D(q) \stackrel{HI}{\leq} j < i + 1,$$

$$W_D(p) = W_D(q) + 1 \stackrel{HI}{\leq} j + 1 < i + 2.$$

En todo caso, siempre  $W_D(p) \leq W_C(p) = i + 1$ . □

Los puntos de  $D_i(S)$  son los vecinos de los de  $D_{i-1}(S)$  en  $DT(S)$ . Obsérvese que, en algunos casos, puede ocurrir que un punto de  $D_i(S)$  sea interior a  $CH(D_i(S))$  (figura 5.3), imposible por definición en el peso por capas convexas. En la siguiente proposición se demuestra que los puntos de  $D_i(S)$  son siempre interiores a  $CH(D_{i-1}(S))$ .

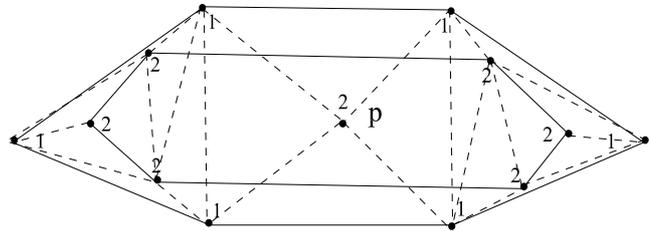


Figura 5.3: El punto  $p$  está en el interior de  $CH(D_2(S))$  y  $W_D(p) = 2 < W_C(p)$ .

**Lema 5.2.1.** *Sea  $DT(S)$  el grafo Delaunay de una nube de puntos dada  $S$ . Sea  $p_i \in D_i(S)$ ,  $i > 1$  y sea  $r_{p_i}$  una recta cualquiera pasando por  $p_i$ . En el grafo resultante de suprimir en  $DT(S)$  todos los vértices, y las aristas incidentes a ellos, contenidos en uno de los semiplanos de  $r_{p_i}$ , existe un punto  $p_1 \in D_1(S)$  y un camino de  $p_i$  a  $p_1$  en  $DT(S)$  con al menos un punto de cada  $D_j$ ,  $1 \leq j \leq i$ .*

*Demostración.* Se han suprimido en  $DT(S)$  todos los vértices y las aristas contenidos en uno de los semiplanos de  $r_{p_i}$ . Tómesese en el otro semiplano una circunferencia pasando por  $p_i$  inicialmente con radio nulo. El primer punto alcanzado si se aumenta

el radio de forma continua, siempre dentro del semiplano, es un punto adyacente a  $p_i$  en  $DT(S)$ . Se traza una paralela a  $r_{p_i}$  por el nuevo punto y se repite el proceso. En un número finito de pasos, (hay un número finito de puntos), se alcanza un punto de la  $CH(S)$  al que llamamos  $p_1$ , finalizando así el camino de  $p_i$  a  $p_1$  obtenido con todas las adyacencias (figura 5.4). También se observa que en el camino de  $p_i$  a  $p_1$  no puede haber saltos de peso Delaunay superiores a uno por lo que hay al menos un punto de cada  $D_j(S)$ ,  $1 < j < i$ .  $\square$

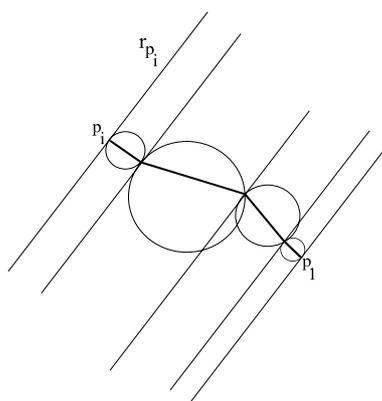


Figura 5.4: En cualquiera de los semiplanos de  $r_{p_i}$  existe un camino de  $p_i$  a  $p_1$ .

**Proposición 5.2.2.** *Sea  $S$  una nube de puntos dada y  $p \in S$ . Si  $W_D(p) > i$  entonces  $p$  está en el interior de  $CH(D_i(S))$ .*

*Demostración.* Por reducción al absurdo: si  $p \notin CH(D_i(S))$  existe una recta que pasa por  $p$  y deja a  $CH(D_i(S))$  en el interior de uno de los semiplanos que determina, lo cual contradice el lema 5.2.1.  $\square$

### 5.3. Capas Delaunay

Para cada peso, las capas de una nube de puntos están formadas por los puntos del mismo peso, esto es, puntos de los conjuntos  $D_i(S) = \{p \in S / W_D(p) = i\}$ . En esta sección estudiamos las capas Delaunay que definimos a continuación, a través de la Triangulación de Delaunay.

**Definición 5.3.1.** *Las capas Delaunay se definen como cada uno de los subgrafos del grafo Delaunay,  $DT(S)$ , inducidos por los puntos del mismo peso, esto es,  $D\text{-Lay}_i(S) = \text{subgrafo de } DT(S) \text{ inducido por } D_i(S)$  (véase figura 5.5).*

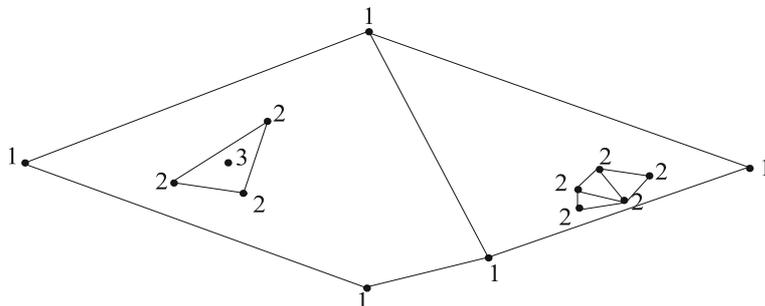


Figura 5.5: Capas Delaunay o grafo  $\bigcup D\text{-Lay}_i(S)$  (subgrafo del grafo  $DT(S)$ ), para el conjunto de puntos  $S$  de la figura 5.1.

Las capas Delaunay tienen complejidad lineal y pueden construirse en  $O(n \log n)$ : para obtenerlas, basta recorrer en tiempo lineal la Triangulación de Delaunay  $DT(S)$  una vez construida, lo cual requiere un coste  $O(n \log n)$ .

Estudiemos los grafos determinados por las capas. En primer lugar observamos que tales grafos no tienen por qué ser conexos, véase un ejemplo en la figura 5.6.

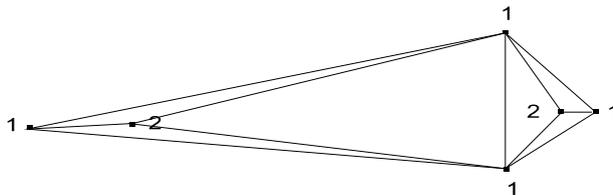


Figura 5.6: Las capas Delaunay pueden no ser grafos conexos. En la figura,  $D\text{-Lay}_2(S)$  tiene dos componentes conexas.

**Proposición 5.3.1.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos dada de profundidad 2. Sea  $T$  un triángulo de  $DT(S)$  con sus tres vértices  $x_1, y_1, z_1$  pertenecientes a  $D\text{-Lay}_1(S)$ . Si  $T$  contiene más de un punto de  $D_2(S)$  en su interior, tales puntos no son aislados en  $D\text{-Lay}_2(S)$ .*

*Demostración.* Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos existe un punto  $p_2$  del interior de  $T$  aislado en  $D\text{-Lay}_2(S)$ . Puesto que hay más de un punto en el interior de  $T$ , existe un punto de  $D_2(S)$ ,  $q_2$ , tal que el círculo que contiene a  $p_2$  y  $q_2$  en su diámetro,  $C_{p_2q_2}$ , no contiene a ningún otro punto de  $D_2(S)$ .

Ahora bien, dado que por hipótesis  $p_2$  es aislado en  $D\text{-Lay}_2(S)$ ,  $p_2$  no es adyacente a  $q_2$  por lo que el círculo no puede estar vacío. Sabemos que no contiene puntos de  $D_2(S)$ , luego tiene al menos un punto de  $D_1(S)$ . Razonamos que no puede ser ninguno de los vértices de  $T$ .

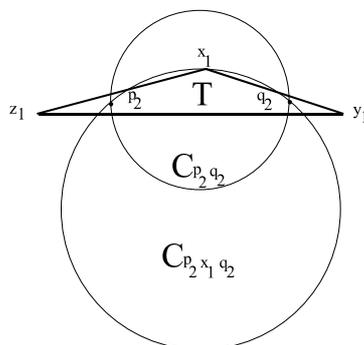


Figura 5.7: El triángulo  $T$  de vértices  $x_1$ ,  $y_1$  y  $z_1$  contiene a  $p_2$  y a  $q_2$ . Si  $x_1$  está en  $C_{p_2q_2}$  entonces los puntos  $y_1$  y  $z_1$  deben hallarse fuera del círculo.

Supongamos que  $C_{p_2q_2}$  contiene a  $x_1$  (análogamente si fuera  $y_1$  o  $z_1$ ) y distinguimos dos casos según esté en el interior o en la frontera.

Primer caso. Si  $x_1$  está en el interior, consideramos el círculo pasando por  $p_2$ ,  $x_1$  y  $q_2$ , esto es,  $C_{p_2x_1q_2}$  (figura 5.7). Este último círculo debe contener otro punto pues, de lo contrario, modificándolo ligeramente soltaríamos  $x_1$  y  $p_2$  sería adyacente a  $q_2$  en contra de la hipótesis.

Por otro lado, si hay más puntos en  $C_{p_2x_1q_2}$ , veamos que deben ser de  $D_2(S)$ . Este círculo,  $C_{p_2x_1q_2}$ , no está contenido en  $T$  (pues contiene a uno de sus vértices y a dos puntos interiores) y, por tanto, corta a alguna de sus aristas, sea  $x_1y_1$  (se razona igual con cualquier otra). En el interior de  $T$  no puede haber puntos de  $D_1(S)$  y veamos que en  $C_{p_2x_1q_2} \setminus T$  tampoco. Si hubiera algún  $d_1$  en este último conjunto, supongamos sin pérdida de generalidad, que está en la región de  $C_{p_2x_1q_2} \setminus T$  delimitada por la arista  $x_1y_1$ . Entonces  $d_1$  está en  $C_{p_2x_1q_2}$  y uno de los dos círculos,  $C_{d_1q_2}$  o  $C_{d_1p_2}$ , no contiene ni a  $x_1$  ni a  $y_1$ . Por una parte, sea  $C_{d_1q_2}$  el círculo que no contiene a  $x_1$  ni a  $y_1$  (figura 5.8) y, por otra, la arista  $x_1y_1$  separa  $d_1$  de  $q_2$ ; de ambos hechos, se demuestra que cualquier círculo circunscribiendo a  $x_1$  e  $y_1$  contiene a  $d_1$  o a  $q_2$ . Contradicción pues  $x_1$  e  $y_1$  son adyacentes en  $DT(S)$ . Así pues, si  $C_{p_2x_1q_2}$  contiene algún otro punto debe ser de  $D_2(S)$ .

Reduzcamos ahora el radio de  $C_{p_2x_1q_2}$  manteniendo fijo a  $p_2$  y soltando a  $q_2$  y a  $x_1$  hasta que el interior quede vacío. Sea  $q_2'$  el punto que nos ha quedado en la frontera junto a  $p_2$  (tal punto existe pues estábamos suponiendo que  $C_{p_2x_1q_2}$  contenía algún punto de  $D_2(S)$ ). Entonces  $p_2$  es adyacente a  $q_2'$ , lo cual es contradictorio.

Segundo caso. Si  $x_1$  está en la frontera de  $C_{p_2q_2}$ , ahora este círculo coincide con el  $C_{p_2x_1q_2}$ . Razonando igual que antes, no puede haber ningún punto de  $D_1(S)$  ni tampoco de  $D_2(S)$ . Modificando ligeramente el círculo soltaríamos  $x_1$  y  $p_2$  sería adyacente a  $q_2$ , contradicción.

Hemos demostrado que  $C_{p_2q_2}$  no puede contener a ninguno de los vértices de

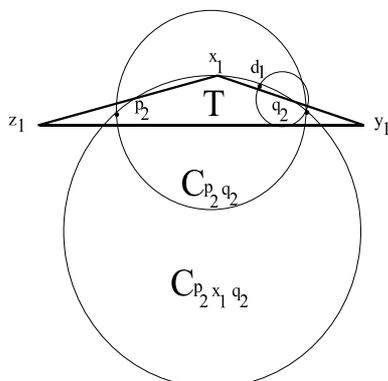


Figura 5.8: Un punto  $d_1$  en  $C_{p_2x_1q_2} \setminus T$  contradice la existencia de círculo vacío circunscribiendo a  $x_1$  e  $y_1$ .

$T$ . Nuevamente, como no puede estar vacío, sea  $d_1$  un punto del interior o en la frontera. Recuérdese que  $C_{p_2q_2}$  se tomó de modo que no contenía puntos de  $D_2(S)$  en su interior, por lo que  $d_1 \in D_1(S) \setminus \{x_1, y_1, z_1\}$ .

Así pues, no puede estar en el interior de  $T$  y, por tanto, existe una arista de  $T$ , sea  $x_1y_1$  (análogamente si fuera  $x_1z_1$  o  $y_1z_1$ ), que separa  $d_1$  de  $p_2$  y  $q_2$  (figura 5.9). Los extremos de esta arista están fuera de  $C_{p_2q_2}$  ( $C_{p_2q_2}$  no contiene vértices de  $T$ ) por lo que no puede existir un círculo vacío pasando por ellos en contradicción con la hipótesis de adyacencia en  $DT(S)$ , entre los vértices de  $T$ .

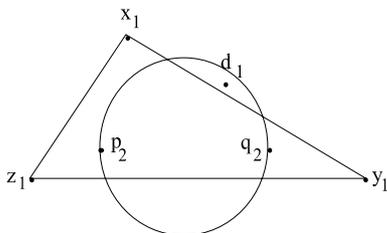


Figura 5.9: Si el círculo  $C_{p_2q_2}$  contiene a  $d_1 \in D_1(S) \setminus \{x_1, y_1, z_1\}$ , no puede existir ninguna circunferencia circunscribiendo a  $x_1$  y a  $y_1$  sin contener puntos en su interior.

En todos los casos se llega a contradicción y, por tanto, se concluye que los puntos de peso 2, interiores a  $T$  no son puntos aislados en  $D\text{-Lay}_2(S)$ .  $\square$

**Lema 5.3.1.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos dada, de profundidad  $m$ , con  $m \geq 2$ . Los puntos de  $S$  interiores a cualquier ciclo de  $C_i$  de  $D\text{-Lay}_i(S)$ , son de peso superior a  $i$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in S$  un punto interior de  $C_i$  veamos que no puede ser  $W_D(p) \leq i$ . Los adyacentes a  $p$ , salvo que sean de  $C_i$ , también deben estar en su interior y, entre ellos, existe al menos uno de peso  $W_D(p) - 1$  para no contradecir el propio peso de  $p$ . Si  $W_D(p) \leq i$  entonces existe  $q$  adyacente a  $p$  con  $W_D(q) = W_D(p) - 1$ , interior a  $C_i$ . Razonando recursivamente se llega a la existencia de al menos un punto de peso 1 en el interior de  $C_i$ , lo cual es imposible. Luego todos los puntos interiores a  $C_i$  son de peso mayor a  $i$ .  $\square$

El siguiente resultado, generaliza la proposición 5.3.1, para nubes de profundidad  $m \geq 2$ .

**Lema 5.3.2.** *Sea  $S$  una nube de puntos de profundidad  $m$ , con  $m \geq 2$ . Ningún ciclo de  $D\text{-Lay}_i(S)$  sin cuerdas, puede contener en su interior más de una componente conexa de  $D\text{-Lay}_{i+1}(S)$ .*

*Demostración.* Sea  $C_i$  un ciclo de  $D\text{-Lay}_i(S)$ , sin cuerdas.

Aplicando el lema 5.3.1 anterior se tiene la siguiente situación: los adyacentes de cualquier punto de  $C_i$ , situados en el interior de  $C_i$  son de peso superior a él y, por tanto sólo pueden ser de peso  $i + 1$ ; los puntos de peso  $i + 1$  situados en el interior de  $C_i$  deben tener al menos un vecino de peso  $i$  por lo que éste debe ser un punto de  $C_i$ .

Demostremos ahora, por reducción al absurdo, que en el interior de  $C_i$  no puede haber más de una componente conexa de peso  $i + 1$ . Supongamos lo contrario, esto es, que los puntos de peso  $i + 1$  interiores a  $C_i$  forman más de una componente conexa en  $\bigcup D\text{-Lay}_i(S)$ . Veamos que entonces existe  $v_i \in C_i$  adyacente a puntos de peso  $i + 1$  de diferente componente conexa (figura 5.11).

Sean  $v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^n$  los puntos de  $C_i$  ordenados por adyacencias. Si  $v_i^1$  es adyacente a puntos de peso  $i + 1$  de diferente componente conexa, ya tenemos la existencia de un punto en las condiciones requeridas. Si no, avanzando en el ciclo, o bien encontramos un  $v_i^j$  adyacente a puntos de peso  $i + 1$  de diferente componente conexa y hemos acabado, o bien las adyacencias de  $v_i^j$  y de  $v_i^{j+1}$ , para alguna  $j$ , son de diferente componente conexa. En este último caso, analicemos quién puede ser el tercer vértice para formar junto con  $v_i^j, v_i^{j+1}$  un triángulo de la  $DT(S)$ : no puede ser de ninguna de las anteriores componentes conexas de peso  $i + 1$  ya que entonces,  $v_i^j$  o  $v_i^{j+1}$  sería adyacente a puntos de diferente componente conexa y habríamos acabado; tampoco puede ser de  $C_i$  pues sería una cuerda y hemos supuesto que no hay. Luego el tercer vértice debe ser de otra componente conexa de peso  $i + 1$  diferente a las que tienen adyacencias con  $v_i^j$  y  $v_i^{j+1}$ , pero en tal caso ambos puntos  $v_i^j$  y  $v_i^{j+1}$  tendrían adyacencias en diferentes componentes conexas (figura 5.10).

Sea pues  $v_i \in C_i$  tal que es adyacente a puntos de peso  $i + 1$  de diferente componente conexa,  $p_{i+1}^1, p_{i+1}^2$  como en la figura 5.11. Puesto que tales aristas forman parte de la  $DT(S)$ , debe ser posible establecer un camino entre  $p_{i+1}^1$  y  $p_{i+1}^2$  formado por una sucesión de vértices de triángulos tales que todos ellos tienen en común a  $v_i$ .

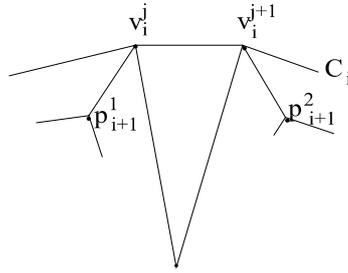


Figura 5.10: En la figura, puntos vecinos en  $C_i$  tienen adyacencia en diferentes componentes conexas de puntos de peso  $i + 1$ .

Esta sucesión sólo puede ser de puntos de peso  $i + 1$ : los de peso  $i + 2$  no pueden ser adyacentes a  $v_i$  que es de peso  $i$  y tampoco pueden haber de peso  $i$  pues entonces hay aristas entre puntos de  $C_i$  cortando el interior del ciclo en contradicción con las hipótesis iniciales.

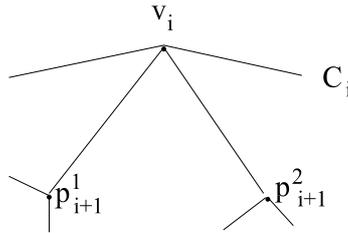


Figura 5.11: En la figura un punto de  $C_i$  es adyacente a puntos de diferente componente conexas de peso superior.

Si todos los adyacentes a  $v_i$  entre  $p_{i+1}^1$  y  $p_{i+1}^2$  son de peso  $i + 1$ , entonces ambos puntos son de la misma componente conexas, contradicción. Queda así demostrado que no puede haber más de una componente conexas de peso  $i + 1$  en  $C_i$ , ciclo sin aristas cortando su interior.  $\square$

Hemos visto que dentro de un ciclo de  $\bigcup D-Lay_i(S)$ , sin cuerdas, no puede haber más de una componente conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  del peso siguiente. Ahora veremos que, si tenemos una componente conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  de un cierto peso, existe un ciclo del peso anterior conteniéndola en su interior.

**Lema 5.3.3.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos dada. Sea  $C_i$  un ciclo de  $D-Lay_i(S)$ . Si existe un punto de  $D-Lay_{i+2}(S)$  en el interior de  $C_i$  entonces también existe un ciclo de  $D-Lay_{i+1}(S)$  conteniendo a dicho punto en su interior.*

*Demostración.* Sea  $p_{i+2} \in D-Lay_{i+2}(S)$  situado en el interior de  $C_i$ . Por el lema 5.3.2 sabemos que sólo hay una componente conexas de  $D-Lay_{i+1}(S)$  en  $C_i$ .

Cuando consideramos un grafo conexo en el plano y se trata de un grafo acíclico, hay una sola región no acotada complementaria del grafo. Si el grafo tiene ciclos, entonces distinguimos regiones acotadas delimitadas por aristas del grafo. Veremos que el grafo  $G$  formado por los puntos de peso  $i + 1$  dentro de  $C_i$  debe ser un grafo con ciclos. Su región no acotada contiene a  $C_i$ . Cada punto del grafo  $G$  es de peso  $i + 1$ , adyacente a uno de  $C_i$ . Consideremos los triángulos Delaunay con al menos un vértice en  $C_i$ . Ninguno de estos triángulos puede tener como vértice a  $p_{i+2}$  (los pesos no pueden diferir en más de una unidad). En la reunión de estos triángulos tampoco se encuentra  $p_{i+2}$ , pues los triángulos Delaunay no contienen otros puntos de  $S$  en su interior. Luego sólo si  $G$  tiene ciclos, pueden haber otros puntos situados en las regiones acotadas que delimitan. Luego si existe un punto de  $D-Lay_{i+2}(S)$ ,  $p_{i+2}$  en el interior de  $C_i$  entonces también existe un ciclo de  $D-Lay_{i+1}(S)$  conteniendo a dicho punto en su interior.  $\square$

**Proposición 5.3.2.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos dada. Si  $W_D(p) = j + 1$ , entonces existe un ciclo de  $D-Lay_j(S)$  conteniendo a  $p$  en su interior.*

*Demostración.* Para cualquier punto de peso Delaunay 2 se cumple la propiedad pues, tales puntos están contenidos en  $D-Lay_1(S) = CH(S)$ .

Supongamos que  $W_D(p) = 3$ . Entonces debemos probar que existe un ciclo de  $D-Lay_2(S)$  conteniéndolo en su interior. Para demostrarlo, basta aplicar el lema 5.3.3 a un ciclo de puntos de peso 1 que contenga a  $p$  y tal ciclo existe pues  $D-Lay_1(S) = CH(S)$ .

Sea ahora  $p$  tal que  $W_D(p) = 4$ . Sabemos que debe existir un punto de peso 3 adyacente a  $p$ . Aplicamos el lema 5.3.3 a dicho punto de peso 3. Entonces, existe un ciclo de  $D-Lay_2(S)$  que contiene a dicho punto de peso 3 y debe contener a sus adyacentes, como lo es el punto  $p$ . Aplicamos el lema 5.3.3 a este último ciclo y probamos que existe ciclo de  $D-Lay_3(S)$  que contiene a  $p$ .

Recursivamente, se demuestra la proposición para  $p$  de peso  $j + 1$  con  $j \leq m - 1$ , siendo  $m$  la profundidad de  $S$ .  $\square$

**Proposición 5.3.3.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos y profundidad 2. El número máximo de componentes conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  es  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .*

*Demostración.* Los puntos de  $D-Lay_1(S)$  forman una componente conexa de  $D-Lay_1(S) = CH(S)$ . La desconexión de los puntos de  $D-Lay_2(S)$  se produce por aristas de  $DT(S)$  que no son de  $CH(S)$ . Luego debe maximizarse el número de estas aristas y el número de componentes conexas de  $D-Lay_2(S)$  en cada una de las regiones a que dan lugar. El número de regiones no puede ser mayor a  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  (regiones triangulares) y, por la proposición 5.3.1, no puede haber más de una componente conexa en cada región. Luego el número de componentes conexas es siempre menor o igual a  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

El siguiente ejemplo demuestra que la cota es ajustada pues se alcanza el máximo. Sea  $n = 2k + 2$  el número de puntos. De estos  $2k + 2$  puntos,  $k + 2$  se sitúan en la envolvente convexa, uno en la cadena superior y el resto en la inferior. Los círculos pasando por el punto de la cadena superior y cualquiera de la inferior no deben contener ningún punto en su interior para que la arista uniéndolos esté en  $DT(S)$ . Los otros  $k$  puntos se sitúan uno entre cada dos círculos (figura 5.12). De este modo, cada uno de estos  $k$  puntos tienen peso Delaunay igual a 2 y está en una componente conexa distinta de  $\bigcup D-Lay_i(S)$ .  $\square$

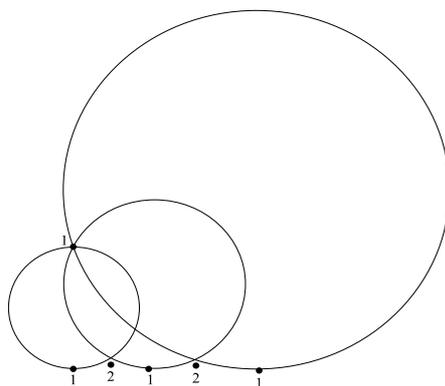


Figura 5.12: Ejemplo con  $n = 2k + 2$  puntos. El grafo  $\bigcup D-Lay_i(S)$ ,  $i = 1, 2$ , tiene  $k + 1$  componentes conexas.

En el siguiente teorema se demuestra que el número de componentes conexas para el grafo  $\bigcup D-Lay_i(S)$  disminuye si aumenta la profundidad de la nube y se determina el número máximo de componentes conexas que puede tener  $\bigcup D-Lay_i(S)$ , generalizando el resultado de la proposición 5.3.3.

**Teorema 5.3.4.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos dada, de profundidad  $m$ , con  $m \geq 2$ . El número máximo de componentes conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  es decreciente en  $m$ . Este máximo es  $\lfloor (n - m + 2)/2 \rfloor$ , con  $m$  la profundidad de  $S$ , y es ajustado.*

*Demostración.* Sea  $c$  el número de componentes conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$ . Queremos ver que  $c$  está acotado por  $(n - m + 2)/2$  o, equivalentemente,  $n \geq 2c + m - 2$ .

Si todas las componentes conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  tienen un mínimo de dos puntos, entonces  $n \geq 2c$ . Si hay puntos aislados en  $D-Lay_{i+1}(S)$ , cada uno de ellos está contenido en un ciclo sin cuerdas (proposición 5.3.2). Asociamos cada punto aislado con un punto del correspondiente ciclo de modo que no dos puntos aislados queden asociados al mismo punto del ciclo. Ello es posible pues el número máximo de puntos aislados de  $D-Lay_{i+1}(S)$ , contenidos en una componente conexa de  $D-Lay_i(S)$ , es a lo sumo el número de cuerdas más uno (lema 5.3.2). Además el número

de cuerdas en una componente de  $n_i$  puntos es a lo sumo  $n_i - 3$  ya que no puede haber puntos de peso  $i$  en el interior de un ciclo de  $D-Lay_i(S)$  (lema 5.3.1).

Por lo tanto, hay al menos dos puntos en cada componente que no están asociados a ninguno de los posibles puntos aislados de una capa. Así pues,  $n \geq 2c$ .

En general, si la profundidad de  $S$  es  $m \geq 2$ , existen al menos  $m - 1$  ciclos encajados, sin cuerdas, de los cuales  $m - 2$  no contienen ningún punto aislado. Por lo tanto, hay al menos  $m - 2$  componentes conexas con 3 o más puntos. De lo que deducimos  $n \geq 2c + m - 2$ .

El ejemplo de la proposición 5.3.3 prueba que la anterior cota es ajustada:  $S$  tiene  $m = 2$ ,  $n = 2k + 2$  y la reunión de las capas,  $\bigcup D-Lay_i(S)$ , tiene  $k + 1 = \lfloor n/2 \rfloor$  componentes conexas.

El siguiente ejemplo maximiza el número de componentes conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  para  $m \geq 2$ . Primero colocamos  $3(m - 1)$  puntos cuya triangulación de Delaunay forme una sucesión de triángulos encajados y un punto en el interior del triángulo más interno. Llamemos  $S'$  a este conjunto inicial. El resto de puntos de  $S$ ,  $n - 3m + 2$ , los distribuiremos de dos en dos entre las  $m$  capas de  $S'$ . Colocamos cada par de puntos en dos capas contiguas,  $D-Lay_i(S')$  y  $D-Lay_{i+1}(S')$ . Uno de los puntos (llamémosle  $p$ ) puede colocarse de modo que, en la triangulación de Delaunay incremental, aparezca un nuevo ciclo de  $D-Lay_i(S' \cup \{p\})$ , sin puntos interiores y sin aumentar el número de componentes conexas de esta capa. El otro punto se sitúa convenientemente en el interior de este nuevo ciclo, para que forme un punto aislado de  $D-Lay_{i+1}(S' \cup \{p\})$ . Obsérvese que esta construcción es posible pues basta que las capas de  $DT(S')$  estén suficientemente separadas. En la figura, todos los puntos de  $S \setminus S'$  (en total  $n - 3m + 2$ ) están situados en las capas  $D-Lay_1(S)$  y  $D-Lay_2(S)$ . □

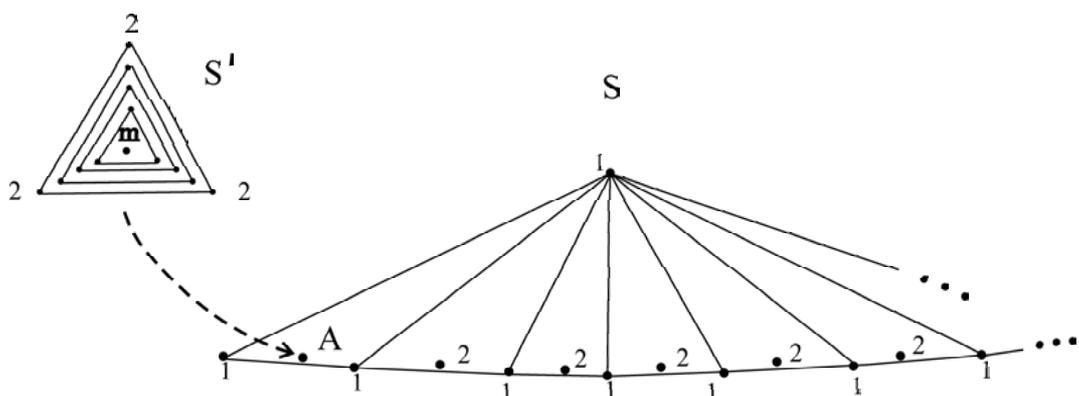


Figura 5.13: El punto  $A$  debe reemplazarse por la configuración  $S'$ . El conjunto de puntos  $S$  tiene profundidad  $m$ . El número de componentes conexas de  $\bigcup Lay_i^D(S)$  es  $\lfloor (n - m + 2)/2 \rfloor$ .

A continuación veremos que, a partir de  $\bigcup D-Lay_i(S)$ , podemos establecer una estructura basada en sucesiones de ciclos que nos será útil para las poligonizaciones. Nos basamos en el hecho de que no puede haber un punto de peso  $i+1$  sin que haya un ciclo de  $D-Lay_i(S)$  que le contenga (proposición 5.3.2).

Analizamos en primer lugar qué ocurre cuando una capa Delaunay tiene más de una componente conexa, (véase un ejemplo en la figura 5.14).

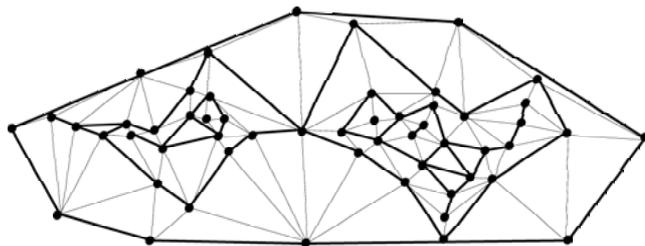


Figura 5.14: Dos ciclos minimales de  $D-Lay_i(S)$ , que contienen componentes conexas diferentes de  $D-Lay_{i+1}(S)$ , o bien son disjuntos o comparten un solo punto o comparten una sola arista.

**Lema 5.3.5.** *Dos ciclos minimales de  $D-Lay_i(S)$ , que contienen componentes conexas diferentes de  $D-Lay_{i+1}(S)$ , o bien son disjuntos o comparten un solo punto o comparten una sola arista.*

*Demostración.* Por el lema 5.3.1, un ciclo formado por puntos de peso  $i$  no puede contener ningún punto de peso menor o igual a  $i$ . Y, por la proposición 5.3.2, no puede haber más de una componente conexa de  $D-Lay_{i+1}(S)$  en un ciclo de  $D-Lay_i(S)$  sin cuerdas. Por tanto, no es posible que dos ciclos minimales de una capa, que contienen componentes conexas diferentes de la siguiente capa, compartan más de un punto o una arista.  $\square$

**Proposición 5.3.4.** *Toda nube de puntos  $S$  tiene una estructura subyacente en sucesiones de ciclos encajados formados por aristas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$ . Todos los puntos del mismo peso están en alguno de estos ciclos o en algún árbol conectado a uno de ellos, o en un árbol en el interior del último ciclo de una de las sucesiones.*

*Demostración.* Por cada componente conexa de  $D-Lay_{i+1}(S)$ , existe un ciclo de  $D-Lay_i(S)$  que la contiene (proposición 5.3.2). Y en el lema 5.3.5 hemos visto que los ciclos minimales conteniendo componentes diferentes de la capa siguiente son disjuntos, o comparten un punto o una arista. En este último caso, prescindiremos de la arista común entre dos ciclos, considerando un solo ciclo pasando por todos los puntos; por tanto, podemos obtener ciclos disjuntos o con un punto en común.

El primer ciclo es  $CH(S)$ . Si existen puntos de peso  $i+1$  habrán ciclos de peso  $i$ . Localizamos en  $\bigcup D-Lay_i(S)$  una sucesión de ciclos (o polígonos, no necesariamente

convexos) encajados formados por puntos del mismo peso, cada vez una unidad mayor hasta llegar a la profundidad de la nube, o bien en algún momento dicha sucesión puede deslindarse en otras sucesiones como se muestra en la figura 5.15. Cuando dentro de uno de estos ciclos, por ejemplo de peso  $i$ , hay más de una componente conexa de otra capa y, en cada una de ellas hay puntos de peso  $i + 2$ , es cuando la sucesión se deslinda en otras sucesiones, tantas como el número de componentes conexas tiene  $D-Lay_{i+1}(S)$ .

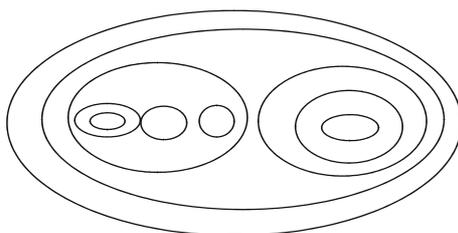


Figura 5.15: La sucesión de ciclos encajados de puntos del mismo peso, empezando por la  $CH(S)$ , puede deslindarse en otras sucesiones.

Consideremos una componente conexa de  $D-Lay_i(S)$ . Pueden darse los siguientes casos:

1. Todos los puntos de la componente conexa están en algún ciclo.

En este caso tendremos un ciclo o reunión de ellos conectados dos a dos por un punto pues se trata de una componente conexa y si dos de ellos compartieran una arista, la eliminaríamos quedando un solo ciclo.

2. No hay ciclos, es decir la componente conexa es un árbol.

Esta componente conexa está contenida en un ciclo de peso  $i - 1$ , que va a ser el último o más profundo, de una de las sucesiones de ciclos encajados de la nube.

3. La componente conexa contiene ciclos pero no es ciclo ni reunión de ellos.

En este caso tenemos algún ciclo tal que conectado a él hay algún árbol. El árbol es exterior al ciclo pues por el lema 5.3.1, dentro de un ciclo de puntos de peso  $i$  no puede haber puntos de peso menor o igual a  $i$ . Véase como ejemplo cada una de las componentes conexas de peso 3 de la figura 5.16.

Hemos visto que en la nube  $S$  podemos describir una estructura basada en ciclos de puntos del mismo peso pero que quizás no contenga a todos los puntos sino que en alguno de los ciclos haya algún árbol conectado a él, o haya algún árbol en el interior del último ciclo de una de las sucesiones.  $\square$

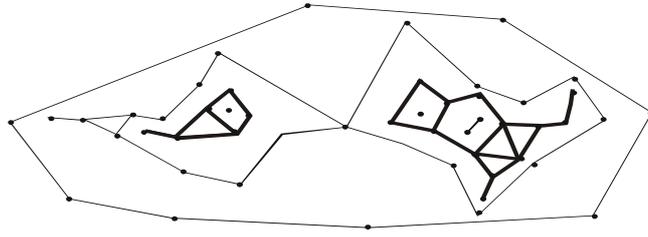


Figura 5.16: Están señaladas las componentes conexas de peso  $D-Lay_3(S)$ .

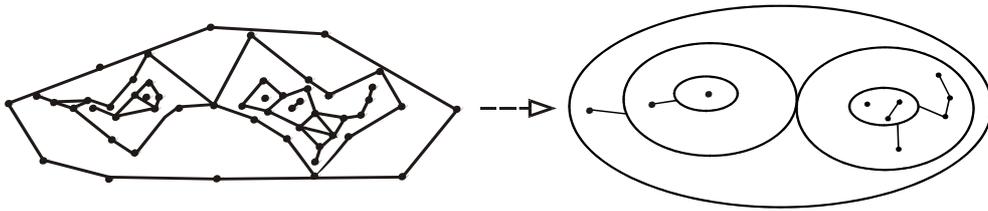


Figura 5.17: A la izquierda el grafo  $\bigcup D-Lay_i(S)$  y a la derecha el esquema de la estructura en ciclos que proporciona.

## 5.4. Niveles Delaunay

El nivel de un punto  $q$  en  $S$ , que notamos  $W_D(q, S)$  para el peso Delaunay, se define como su peso en  $S \cup \{q\}$ , (definición 2.2.2). Los puntos del plano del mismo nivel en  $S$  forman los niveles Delaunay (definición 2.2.3), esto es,

$$D-Lev_j(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 / W_D(x) = W_D(x, S)\}.$$

La mediana Delaunay es la mediana (definición 3.2.2), considerando el peso Delaunay. Obsérvese que en el peso Delaunay, puede haber más de una región correspondiente al nivel más profundo; en ese caso, la mediana Delaunay está formada por los centroides de cada una de estas regiones.

El peso de un punto respecto de un conjunto  $S$  depende de los círculos Delaunay (circunscritos a los triángulos Delaunay) que le contienen, por ello el arreglo de los círculos Delaunay contiene toda la información acerca de los niveles Delaunay. El tamaño del arreglo de círculos Delaunay es  $O(n^2)$  por lo que pueden ser construidos en tiempo  $O(n^2 \log n)$ . Sin embargo, en el siguiente teorema demostramos que se pueden obtener todos los niveles sin necesidad de construir todo el arreglo de círculos.

**Observación.** Sea  $C$  un círculo conteniendo exactamente dos puntos  $u$  y  $v$  de  $S$  en su frontera y sin contener otros puntos de  $S$  en su interior. Entonces cualquier círculo que corte los dos arcos determinados por  $u$  y  $v$  en la frontera de  $C$  contiene puntos de  $S$  en su interior (no puede ser círculo Delaunay).

**Teorema 5.4.1.** *Sea  $S$  un conjunto de puntos en el plano con profundidad  $f$ . Los siguientes conjuntos  $\bigcup_{j \geq k} D\text{-Lev}_j(S)$ ,  $k = 1, \dots, f$  forman una sucesión de conjuntos encajados. Las fronteras entre  $D\text{-Lev}_j(S)$  y  $D\text{-Lev}_{j+1}(S)$ , con  $2 \leq j \leq f$ , son curvas compuestas por arcos de los círculos Delaunay,  $C_j$ , determinados por dos puntos de  $D\text{-Lay}_j(S)$  y un punto de  $D\text{-Lay}_{j-1}(S)$ .*

*Demostración.* Queremos determinar la frontera entre los niveles consecutivos de  $S$ ,  $D\text{-Lev}_j(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 / W(x, S) = j\}$ , y  $D\text{-Lev}_{j+1}(S)$ , for  $2 \leq j \leq f$ . Cada punto  $x$  de peso  $j$  con respecto a  $S$ , tiene al menos una adyacencia en  $S \cup \{x\}$  de peso  $j-1$  y no menor de  $j-1$  (por definición del peso Delaunay), debe existir un círculo vacío circunscrito a ambos (forman arista en  $DT(S \cup \{x\})$ ), y no puede haber círculo vacío circunscrito a  $x$  y a un punto de  $S$  de peso menor que  $j-1$ . Por lo tanto, el nivel  $D\text{-Lev}_j(S)$  puede describirse como la unión de todos los círculos Delaunay que circunscriben a un punto de peso  $j-1$  (que notamos por  $\bigcup C_{j-1,-,-}$ ), menos la unión de todos los círculos Delaunay que circunscriben a algún punto de peso menor que  $j-1$  (que notamos por  $\bigcup C_{<j-1,-,-}$ ).

$$D\text{-Lev}_j(S) = \bigcup C_{j-1,-,-} \setminus \bigcup C_{<j-1,-,-}$$

Aplicando la proposición 5.3.2, que demuestra que todo punto de peso  $j$  está contenido en el interior de un ciclo de  $D\text{-Lay}_{j-1}(S)$ , podemos afirmar que  $D\text{-Lev}_j(S)$  está en el interior de los ciclos de  $D\text{-Lay}_{j-1}(S)$ . Los conjuntos  $\bigcup_{j \geq k} D\text{-Lev}_j(S)$ ,  $k = 1, \dots, f$  forman una sucesión de conjuntos encajados. Además, también se deduce que si alguna capa Delaunay no tiene ciclos, no pueden haber puntos de ese nivel y sus siguientes.

Nótese que la unión  $\bigcup C_{j-1,-,-}$  cubre toda la región entre cualquier ciclo de  $D\text{-Lay}_{j-1}(S)$  y un ciclo de  $D\text{-Lay}_j(S)$  contenido en su interior, si éste último existe.

Encontramos círculos  $C_{j-1,j-1,j-2} \in \bigcup C_{<j-1,-,-}$  cortando a los ciclos de  $D\text{-Lay}_{j-1}(S)$ . Dichos círculos  $C_{j-1,j-1,j-2}$  circunscriben pares de puntos tales que son extremos de las aristas de los ciclos de  $D\text{-Lay}_{j-1}(S)$ , que no son cuerdas (véase el ciclo de  $D\text{-Lay}_3(S)$  señalado en la figura 5.18). Tales pares de puntos dividen al círculo  $C_{j-1,j-1,j-2}$  en dos arcos: uno exterior al ciclo y el otro interior. Pueden haber otros círculos de  $\bigcup C_{<j-1,-,-}$  que también corten al círculo  $C_{j-1,j-1,j-2}$ . Pero cualquier círculo de  $\bigcup C_{<j-1,-,-}$  tiene en su frontera un punto exterior al ciclo y, aplicando la observación 5.4, no puede cortar a ambos arcos de cualquiera de los círculos  $C_{j-1,j-1,j-2}$ . Por lo tanto, la frontera entre  $D\text{-Lev}_{j-1}(S)$  y  $D\text{-Lev}_j(S)$  sólo está formada por arcos de círculos  $C_{j-1,j-1,j-2}$ , que hemos llamado abreviadamente,  $C_{j-1}$ .

Análogamente, el interior de la unión de los círculos que circunscriben dos puntos de peso  $j$  y un punto de peso  $j-1$ , (que hemos notado por  $C_j$ ) determina la frontera entre  $D\text{-Lev}_j(S)$  y  $D\text{-Lev}_{j+1}(S)$ .  $\square$

El teorema 5.4.1 prueba que el tamaño total de los niveles Delaunay es lineal y

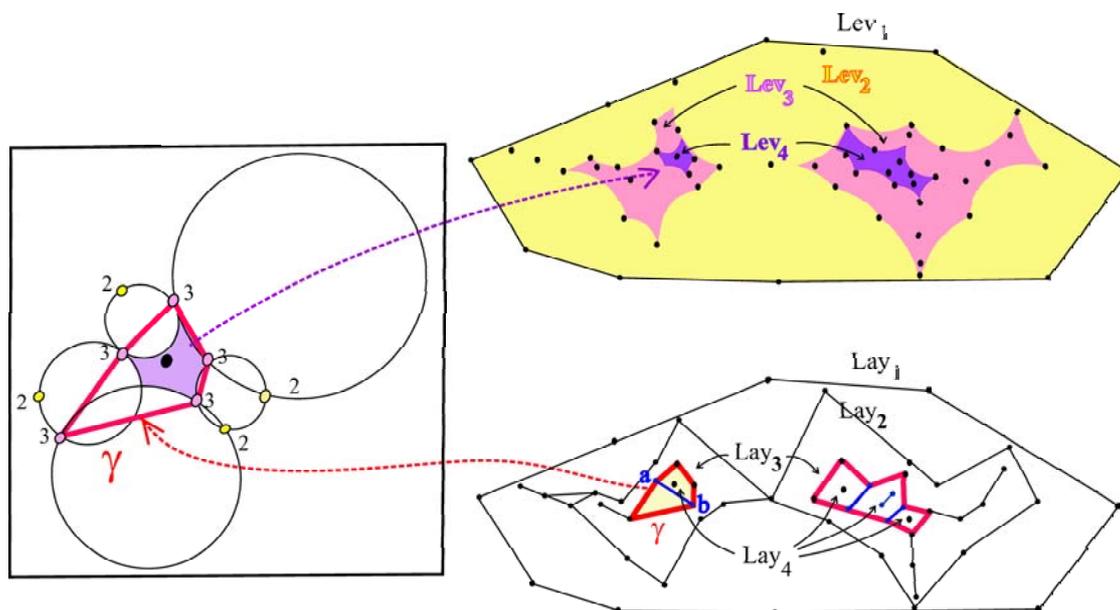


Figura 5.18: Los círculos Delaunay que intervienen en la frontera del nivel 4 están circunscritos a dos puntos de peso 3 y uno de peso 2.

justifica los pasos del algoritmo 5.4.1 de construcción de niveles. En lo sucesivo, para indicar a cualquiera de los círculos Delaunay definidos por dos puntos de peso  $i$  y uno de peso  $i-1$ , utilizamos la notación introducida en la demostración del teorema 5.4.1 y escribimos  $C_i$ .

**Algoritmo 5.4.1.** CÁLCULO DE LOS NIVELES DELAUNAY DE  $S$ .

Dada un conjunto de  $n$  puntos  $S$ :

1. Calcular  $DT(S)$ .
2. Calcular los pesos Delaunay de todos los puntos de  $S$ .
3. Calcular las fronteras de los niveles del siguiente modo:  $D\text{-Lev}_1(S)$  es la envolvente convexa de  $S$ ; para cada  $j \geq 2$ , los círculos Delaunay  $C_j$ , definidos por dos puntos  $u, v$  de  $D\text{-Lay}_j(S)$  y un punto  $w$  de  $D\text{-Lay}_{j-1}(S)$ , determina la frontera entre  $D\text{-Lev}_j(S)$  y  $D\text{-Lev}_{j+1}(S)$  que consiste en la frontera interior de la unión de los círculos Delaunay  $C_j$  (figura 5.19).

El coste del algoritmo es  $O(n \log^2 n)$ :  $DT(S)$  puede construirse en  $O(n \log n)$ . El paso 2 sólo precisa  $O(n)$ . En el paso 3 tenemos la unión de regiones cuyas fronteras intersecan en, a lo más, 2 puntos ya que se trata de círculos. Entonces Kedem et al. en [KLP] demuestran que este tipo de regiones tiene a lo más  $6n_i - 12$  vértices en

la frontera, donde  $n_i$  es el número de regiones. Por tanto, cada frontera en el paso 3 puede obtenerse mediante la técnica de divide y vencerás en  $O(n_i \log^2 n_i)$ , donde  $n_i$  es el número de círculos Delaunay considerados en la correspondiente capa, (véase [AS] pg. 97). Teniendo en cuenta que el número total de círculos Delaunay es  $O(n)$ , el paso 3 cuesta  $O(n \log^2 n)$ . Nótese que el tiempo esperado para el paso 3 es  $O(n \log n)$  [AS], y por tanto, el tiempo esperado para el coste total del algoritmo es  $O(n \log n)$ .

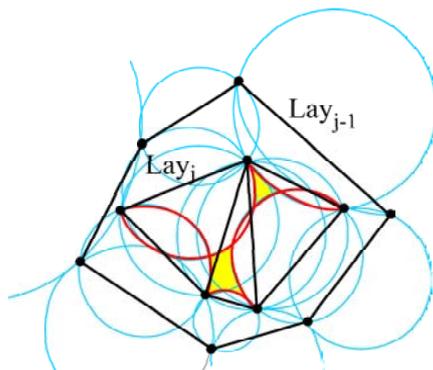


Figura 5.19: La region sombreada es  $D\text{-Lev}_{j+1}(S)$ .

Hemos obtenido los niveles Delaunay de  $S$  mediante las capas Delaunay. Obsérvese que el número de niveles es igual al número de capas o dicho número más uno (se tiene un ejemplo de cada caso en la figura 5.20).

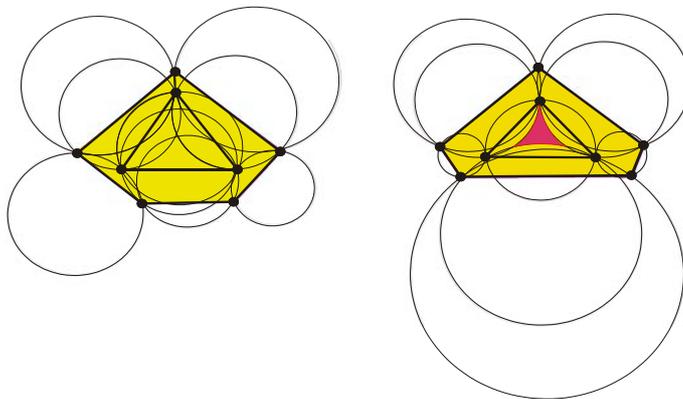


Figura 5.20: A la izquierda hay 2 capas y 2 niveles. A la derecha hay 2 capas y 3 niveles.

Del nivel más profundo, obtenemos la mediana Delaunay como los centroides de las regiones de dicho nivel (en la figura 5.22, el nivel más profundo es  $D\text{-Lev}_6(S)$ ,



Figura 5.21: Conjunto de puntos  $S$ .

que tiene dos regiones). El algoritmo 5.4.1 calcula todos los niveles en  $O(n \log^2 n)$ , por lo que podemos obtener la mediana Delaunay con dicho coste.

## 5.5. Cálculo del peso Delaunay

La profundidad de un punto  $p$  con respecto a un conjunto de datos  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  o equivalentemente su nivel, es la profundidad de  $p$  en  $S \cup \{p\}$ , y su cálculo es un problema al que se le ha dedicado mucha atención. Cuando  $S$  y  $p$  constituyen los datos de entrada la separabilidad lineal, la profundidad simplicial y de Oja pueden calcularse en  $O(n \log n)$  [RR](96). En [ACG](02) se demostró que este valor es también una cota ajustada para los primeros casos y recientemente [AMcL](04) se ha probado idéntico resultado para la profundidad de Oja.

La profundidad convexa de  $p$  puede calcularse fácilmente en  $O(n \log n)$ , pues basta hallar las capas de  $S \cup \{p\}$ , y es fácil ver que este valor es ajustado. También la profundidad Delaunay puede hallarse en  $O(n \log n)$ , pues basta construir  $DT(S \cup \{p\})$  y después hallar la profundidad de  $p$  en tiempo  $O(n)$  adicional. Vamos a demostrar a continuación que este tiempo es ajustado.

Reduciremos el problema de unicidad de números al problema de hallar la profundidad Delaunay. Se sabe que el problema de decidir si, dados  $n$  números reales, son todos distintos, tiene complejidad  $\Omega(n \log n)$  cuando el modelo de comutación es el árbol algebraico de decisión [DL](76) y [BO](83). Veremos que si se hacen ciertos cálculos en  $O(n)$  y después se halla la profundidad Delaunay de un punto adecuado, se puede decidir la unicidad de  $n$  números reales dados, lo que implica que el cálculo de la profundidad Delaunay requiere tiempo  $\Omega(n \log n)$ . Consideremos un conjunto de números reales  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  (que podemos suponer positivos). Para cada valor  $x_i \in A$  construimos los puntos  $(x_i, 0)$ ,  $(-x_i, 0)$ ,  $(0, x_i)$  y  $(0, -x_i)$ . Designamos

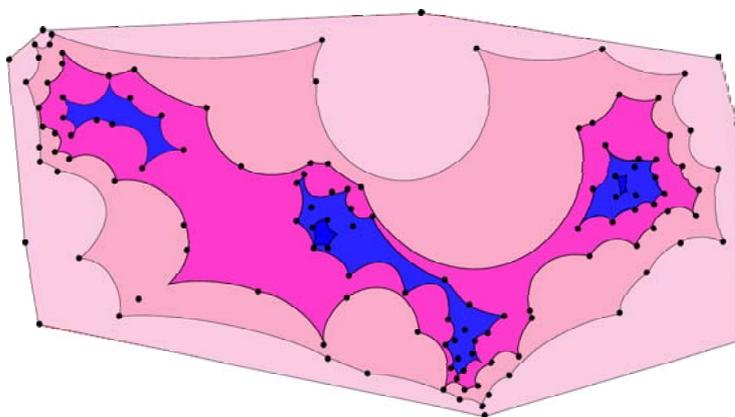


Figura 5.22: Niveles de  $S$ , conjunto de puntos de la figura 5.21.

por  $S$  la reunión de dichos puntos y sea  $p = (0,0)$  el origen. La triangulación de Delaunay  $DT(S \cup p)$  es tal como se muestra en la Figura 5.23 de la que hemos omitido las diagonales de los trapecios (cualquiera de las dos sirve y no se alteran las profundidades de los puntos). La presencia de las aristas de pendiente  $\pm 1$  es inmediata: por ejemplo  $(x_i, 0)$  es adyacente a  $(0, x_i)$  porque el círculo de centro  $(x_i, x_i)$  y radio  $x_i$  sólo cubre a estos dos puntos de  $S \cup \{p\}$ .

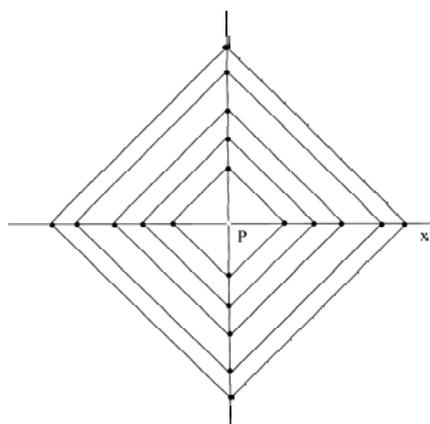


Figura 5.23: Conjunto A y sus capas Delaunay.

Evidentemente la profundidad de  $p$  en  $S \cup \{p\}$  es igual a  $n + 1$  si y sólo si todos los elementos de  $A$  son distintos, lo que concluye la demostración. Queda pues

establecido el resultado siguiente:

**Teorema 5.5.1.** *La profundidad de un punto  $p$  con respecto a un conjunto de datos  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  puede hallarse en tiempo  $O(n \log n)$ , y este valor es óptimo.*

Un problema más estándar, es cuando en vez de partir del conjunto  $S$  y de un punto  $p$  cuya profundidad con respecto a  $S$  se quiere calcular, se preprocesa previamente  $S$ , por ejemplo calculando  $DT(S)$  y las profundidades de los puntos de  $S$ , o el arreglo de círculos de los triángulos de  $DT(S)$ , o incluso las fronteras de los niveles. En este caso, pueden emplearse los métodos estándar de *point location* [Sn](04) para hallar rápidamente la profundidad de  $p$ . Como es sabido, el tiempo de respuesta de los diversos métodos, que puede llegar a  $O(\log n)$ , depende de un compromiso entre el que se emplea en el preproceso y la cantidad de memoria usada.

A continuación analizamos la repercusión de las operaciones de inserción o borrado de un solo punto, en los pesos de los restantes puntos de la nube dada y en la profundidad de la nube.

**Proposición 5.5.1.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos. La inserción o borrado de un punto en  $S$  puede modificar el peso de  $n - 2$  puntos. La diferencia de peso producido en un punto es menor o igual a  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 2$  y la profundidad de la nube puede variar  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 3$  unidades. Las cotas son ajustadas.*

*Demostración.* Tómesese el siguiente ejemplo: todos los puntos de la nube están en posición convexa y situados en el interior de un triángulo salvo dos que están sobre dos de sus vértices. Si añadimos un punto en el tercer vértice, esta inserción ha cambiado el peso de  $n - 2$  puntos de la nube pues, inicialmente todos son de peso Delaunay 1 y ahora todos salvo dos pasan a tener peso 2 (figura 5.24). Análogamente se razona con la operación de borrado.

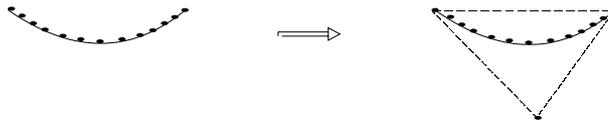


Figura 5.24: Con la inserción de un punto, todos los puntos de peso 1 (izquierda) salvo dos, pasan a peso 2 (derecha).

El peso de un punto cambia cuando cambia el conjunto de sus vecinos o alguno de los pesos de éstos. La inserción de un punto puede producir un cambio máximo de  $f - 2$  si se consigue que uno de los puntos más pesados sea vecino de uno de los de menos peso. Para ajustar la cota, presentamos un ejemplo con profundidad máxima, esto es igual a  $n/3$ , en el que la inserción de un punto modifica de  $n/3$  a 2 el peso de otro.

Para construir la nube de puntos  $S$ , consideramos dos triángulos concéntricos de modo que el interior del círculo que circunscribe al menor de ellos corta al mayor (véase figura 5.25). Llamamos  $C$  al anterior círculo. Todos los puntos se sitúan equiespaciados fuera de  $C$ , sobre los segmentos  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$ , que unen los correspondientes vértices de ambos triángulos. Nótese que el interior de  $C$  es vacío y que parte de él está fuera de  $CH(S)$ .

Obsérvese que si en esta configuración, se toma una pareja de puntos adyacentes en uno de los segmentos y la pareja análoga en otro de los segmentos, los cuatro puntos son concíclicos y en la triangulación de Delaunay se trata de un caso degenerado, pues aparecen las dos diagonales del cuadrilátero. Puede evitarse si se desea, haciendo una pequeña traslación  $\epsilon$  de todos los puntos en uno de los segmentos, salvo el situado en  $C$ ; análogamente  $2\epsilon$  en otro de los segmentos y los puntos del tercero permanecen igual. Cada punto de uno de los segmentos forma un único triángulo con los puntos de otro y la profundidad no ha variado.

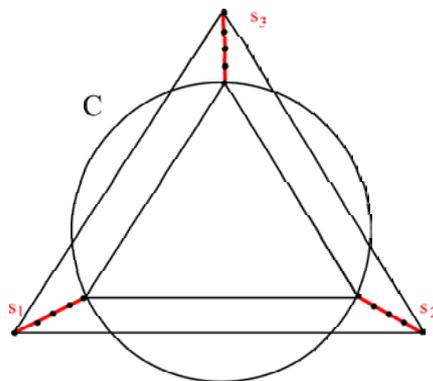


Figura 5.25: Los puntos de  $S$  están sobre los segmentos  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$ .

En la nube construida,  $S$ , las capas Delaunay son triángulos y la profundidad de la nube es  $n/3$ .

Insertamos ahora un punto  $p$  en  $S$  (figura 5.26). Se coloca  $p$  fuera de  $CH(S)$  y en el interior del círculo  $C$ . De este modo, en  $DT(S \cup \{p\})$   $p$  es adyacente a los tres puntos circunscritos por  $C$  y a todos los puntos situados sobre dos de los segmentos (sean por ejemplo,  $s_1$  y  $s_2$ ). Por tanto,  $p$  es adyacente tanto a puntos de peso  $n/3$  en  $S$  (los circunscritos por  $C$ ), como de peso 1 (los de la  $CH(S)$ ). Calculamos los pesos de la nube actual, esto es,  $S \cup \{p\}$ . El punto  $p$  tiene peso 1 (es exterior a  $CH(S)$ ) y cualquier vecino suyo, que no sea de la envolvente, pasa a ser de peso 2. Luego hemos conseguido que al menos un punto de profundidad  $f = n/3$  en  $S$  pase a tener profundidad 2 en la nube actual, como queríamos ver.

Los puntos de peso 1 y 2 respecto a  $S$  siguen teniendo el mismo peso respecto a  $S \cup \{p\}$ . Las aristas de  $DT(S \cup \{p\})$  con un extremo sobre alguno de los puntos

situados sobre  $s_3$ , son las mismas que en  $DT(S)$  (sólo han cambiado las aristas entre los puntos de  $s_1$  y  $s_2$ ). Como consecuencia de ello, las aristas de  $D-Lay_2(S)$  con extremo en  $s_3$  son aristas de  $D-Lay_2(S \cup \{p\})$  y junto con los vecinos de  $p$  forman un ciclo de  $D-Lay_2(S \cup \{p\})$  (figura 5.26). Los puntos que no son vecinos de  $p$  están todos sobre  $s_3$  sin posibilidad de formar ciclos por lo que no hay puntos de peso superior a 3. Los puntos interiores al ciclo de  $D-Lay_2(S \cup \{p\})$  son de peso 3. Luego tras la inserción de  $p$  la profundidad de  $S$  cambia de  $n/3$  a 3.

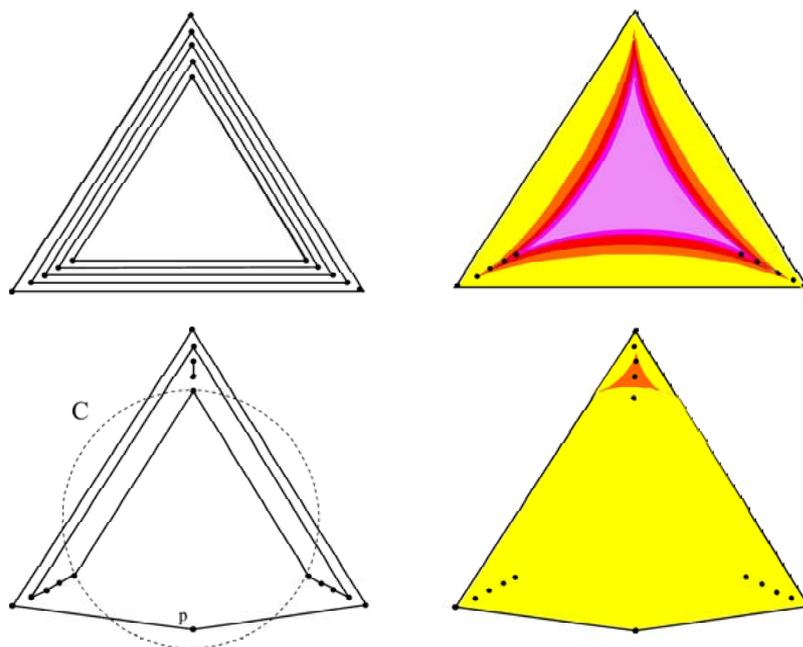


Figura 5.26: Capas y niveles Delaunay de los conjuntos de puntos  $S$  (arriba) y  $S \cup \{p\}$  (abajo).

□

## 5.6. Estructuras de peso Delaunay mínimo

Esta sección la dedicamos al estudio de algunas estructuras de peso Delaunay mínimo. El estudio de estas estructuras nos da información relativa a la morfología de la nube de puntos. Además, cuando tales estructuras son posibles, tienen en general la particularidad de preservar al máximo las adyacencias entre puntos del mismo peso en el grafo de Delaunay. Estudiaremos árboles generadores de peso Delaunay mínimo,  $AGPM$ , poligonizaciones de peso Delaunay mínimo,  $PPM$  y triangulaciones de peso Delaunay mínimo,  $TPM$ .

### 5.6.1. Árboles generadores de peso Delaunay mínimo

Los resultados que se obtienen para *AGPM* con el peso Delaunay, son análogos a los *AGPM* del peso por capas convexas. Los conjuntos  $D_i(S) = \{p \in S/W_D(p) = i\}$ , en el peso Delaunay, juegan el mismo papel que los  $S_i(S) = \{p \in S/W_C(p) = i\}$  en el peso por capas convexas.

El siguiente algoritmo caracteriza los árboles generadores de peso mínimo de una nube  $S$  de  $n$  puntos dada.

**Algoritmo 5.6.1.** CARACTERIZACIÓN DE LOS *AGPM*

*Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$ , de profundidad  $f$ :*

1. *Construir la  $DT(S)$  y asociar a cada punto su peso Delaunay.*
2. *En cada  $D_i(S)$ ,  $i \in \{1, \dots, f\}$ , construir un árbol generador.*
3. *Conectar entre sí los respectivos árboles generadores de puntos cuya diferencia de pesos es uno, mediante una única arista y sin formar ciclos.*

**Teorema 5.6.1.** *Todos los *AGPM*, y sólo ellos, se generan mediante el algoritmo 5.6.1. La complejidad algorítmica es  $O(n \log n)$ .*

*Demostración.* Demostración análoga a la caracterización de los *AGPM* para el peso de las capas convexas cambiando los conjuntos  $S_i(S)$  por los conjuntos  $D_i(S)$ . La complejidad algorítmica es  $O(n \log n)$  pues es el coste de la construcción de  $DT(S)$  y de los árboles generadores.  $\square$

Al igual que en la separabilidad, la función que calcula el número máximo de *AGPM* es la obtenida en la proposición 2.3.2 en el peso convexo, donde las variables son ahora los cardinales de las capas Delaunay. A diferencia de la separabilidad, en el peso Delaunay podemos asegurar que todas las capas (salvo quizás la última) tienen 3 puntos por lo que podemos extender a este peso los resultados obtenidos en el teorema 2.3.4 con el peso convexo.

**Teorema 5.6.2.** *El número de *AGPM* es estrictamente decreciente con el número de capas. El número de *AGPM* varía entre  $n^{n-2}$ , que se alcanza en el caso de una capa, y  $3^{n-2}$  que se alcanza cuando el número de capas es  $k = (n+2)/3$ . Para un número fijo de capas, el número máximo de *AGPM* se alcanza cuando la última capa tiene un punto y todas las demás tienen 3 puntos excepto quizás una (esta capa no puede ser la primera salvo para el caso de dos capas).*

*Demostración.* Análoga a la demostración del teorema 2.3.4.  $\square$

### 5.6.2. Poligonizaciones de peso Delaunay mínimo

Una poligonización de un conjunto de puntos es todo polígono simple cuyos vértices son precisamente dichos puntos. En esta sección estudiamos las poligonizaciones de peso mínimo.

Veremos que cualquier poligonización de una nube dada  $S$  tiene peso mayor o igual a  $2f - 2$ , siendo  $f$  la profundidad de la nube. Estudiaremos cómo debe ser la sucesión de profundidades para que la poligonización sea de peso mínimo  $2f - 2$ . Las poligonizaciones de este peso ( $2f - 2$ ), a las que notamos por *PPM*, no siempre existen. Analizaremos cotas para el peso mínimo de las poligonizaciones de una nube dada.

Para poligonizar con peso mínimo por capas convexas se utiliza, en lo posible, aristas de peso cero, esto es, aristas entre puntos de una misma capa (véase [AGH1](93) y [AGH2](96)). Ahora podemos establecer cierta analogía entre las capas convexas y los ciclos de  $\bigcup D-Lay_i(S)$ .

A diferencia de las capas convexas de la nube, los puntos del mismo peso Delaunay no tienen por qué formar polígonos convexos encajados en  $\bigcup D-Lay_i(S)$ . Tampoco tienen por qué estar todos los puntos en alguno de los ciclos de  $\bigcup D-Lay_i(S)$ , aunque a veces sea posible insertarlos a alguno de ellos sin producir cortes. Véase un ejemplo en la figura 5.27 en la que los puntos de peso  $i + 1$  no pueden formar un ciclo sin cortar al de puntos de peso  $i$  pero, en este caso, podemos poligonizar ambas capas con peso mínimo 2. Otro ejemplo en la figura 5.28 no admite *PPM*.

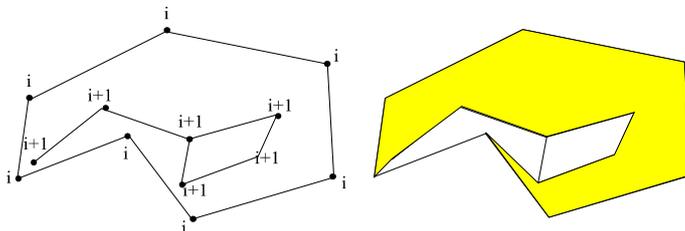


Figura 5.27: Los puntos de peso  $i + 1$  no pueden formar un ciclo sin cortar alguna arista entre puntos de peso  $i$  pero admite poligonización de peso 2.

Sin embargo, para obtener cotas inferiores del peso de cualquier poligonización podemos suponer que todo punto está en alguno de los ciclos de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  y, si es preciso, que estos ciclos son convexos.

En general, en  $\bigcup D-Lay_i(S)$  hay un primer ciclo,  $D-Lay_1(S) = CH(S)$ , que va conteniendo a otros. Esta sucesión inicial de ciclos puede deslindarse en otras, generando nuevas sucesiones (figura 5.15). Vamos a distinguir dos casos:

1. Las capas,  $\bigcup D-Lay_i(S)$ , forman una única sucesión de ciclos encajados.

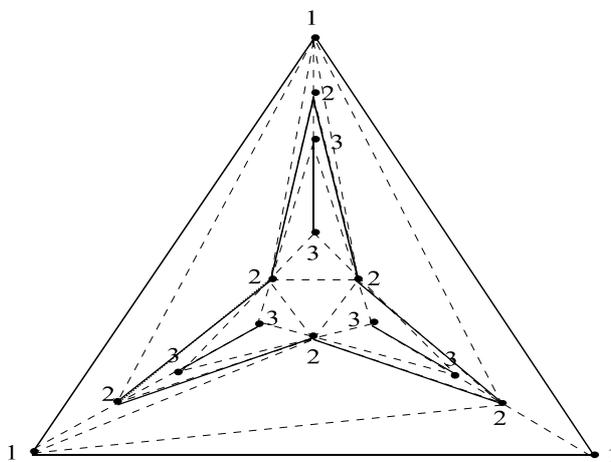


Figura 5.28: Los puntos de peso 3 no pueden formar un ciclo sin cortar al ciclo de puntos de peso 2. No admite *PPM*.

En algunas nubes, las capas Delaunay forman una única sucesión de ciclos encajados al igual que ocurre con las capas convexas. Entonces las poligonizaciones de peso mínimo, en el peso por capas, si son realizables en  $\bigcup D\text{-}Lay_i(S)$  son también de peso mínimo Delaunay (véase *onion polygonization* en [AGH1](93) y [AGH2](96), se tiene un ejemplo en la figura 5.29 a)). En el supuesto de la convexidad de los ciclos, las *onion polygonization* son siempre realizables.

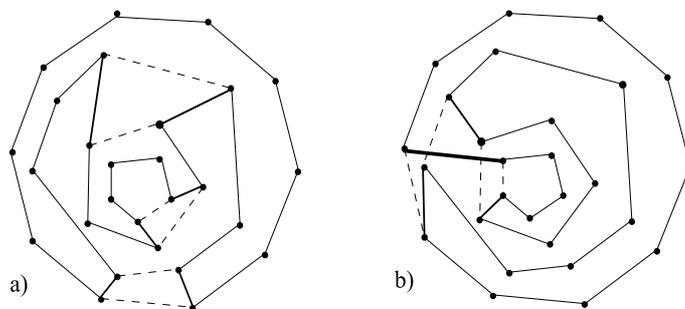


Figura 5.29: En a) *onion polygonization*, en b) otra poligonización de la misma nube de puntos. Ambas tienen el mismo peso por capas convexas.

**Lema 5.6.3.** *Se tiene una sucesión de  $i$  ciclos encajados, de modo que los puntos de cada ciclo tienen el mismo peso Delaunay y el peso de un ciclo a su siguiente más interno aumenta en uno. El peso de cualquier poligonización del anterior conjunto de puntos es mayor o igual a  $2i - 2$ . Si los ciclos son*

*convexos, la cota siempre se alcanza.*

*Demostración.* En primer lugar obsérvese que para realizar la poligonización de una sucesión de  $i$  ciclos encajados es preciso visitar cada ciclo, de modo que una cota inferior del peso en este caso es  $2i - 2$ . No siempre existe *PPM*; en el caso particular en que los ciclos son convexos, sí existe *PPM* pues, en este caso, las *onion polygonization* son realizables.  $\square$

**Observación** No siempre existe *PPM* para una sucesión de ciclos encajados. A continuación damos una construcción de la poligonal (diferente a las *onion polygonization*), que es *PPM* en caso de ser realizable. Consideremos sólo dos ciclos, el más interno y el más externo de cada sucesión, y elegimos un par de puntos visibles entre sí para formar la primera arista del polígono a la que llamamos  $a$  (figura 5.29 b)). Se determina en cada uno de los restantes ciclos cuáles son los extremos de las aristas cortadas por  $a$ : en el supuesto de ciclos convexos, marcamos dos puntos por ciclo. A partir de un extremo de la arista  $a$  construimos una poligonal recorriendo los ciclos en el orden de la sucesión. Un ciclo no debe ser abandonado hasta que todos sus puntos hayan sido incorporados a la poligonal y, en ese caso, el último punto debe unirse con uno de los dos puntos marcados del ciclo siguiente, concretamente el que queda al mismo lado de  $a$  que el extremo de la poligonal que estamos construyendo. La poligonal cierra formando el polígono cuando llega al otro extremo de la arista  $a$ . El ciclo más externo de la sucesión está conectado con el más interno con una arista de peso  $i - 1$ . Además cada uno de los ciclos está conectado al siguiente (en el orden de la sucesión) mediante una arista de peso 1, luego las aristas de peso 1 suman  $i - 1$ . El resto de las aristas de la poligonal son de peso cero por lo que el peso total del polígono construido es  $2i - 2$ . La convexidad de los ciclos no asegura que esta construcción sea realizable como puede verse en la figura (figura 5.30).

2. Las capas Delaunay forman una sucesión que se deslinda en otras.

Para analizar este caso, estudiamos primero el problema de poligonizar sucesiones disjuntas de ciclos encajados:

- a) Poligonización de dos sucesiones disjuntas de ciclos encajados.

**Lema 5.6.4.** *Se tienen dos sucesiones disjuntas, de  $i$  y  $j$  ciclos encajados respectivamente, de modo que los puntos de cada ciclo tienen el mismo peso Delaunay y el peso de un ciclo a su siguiente más interno aumenta en uno y empiezan o acaban con los mismos pesos. Si  $i \leq j$ , el peso de cualquier poligonización es mayor o igual a  $2j - 2$ .*

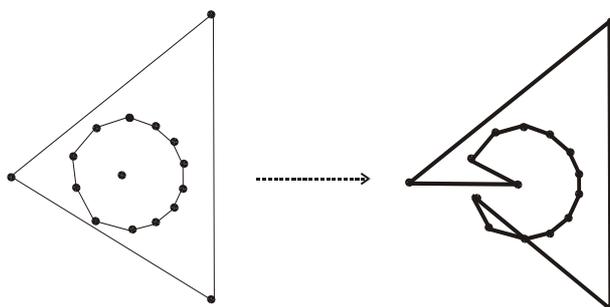


Figura 5.30: No es posible *PPM* uniendo el punto más profundo con uno de la envolvente convexa.

*Demostración.* Los ciclos formados por puntos del mismo peso, uno de cada sucesión, pueden conectarse entre sí con peso cero, pero al menos uno de los ciclos debe conectarse al resto lo cual supone, como mínimo, una contribución al peso en dos unidades (o sólo una unidad si se trata de los dos primeros ciclos o los dos últimos de ambas sucesiones); si en cada sucesión hay  $i$  ciclos el peso es como mínimo  $2i - 2$  (figura 5.31). Si  $i < j$ ,

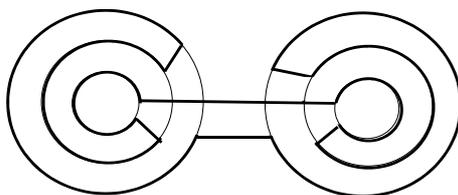


Figura 5.31: Esquema de *PPM* entre dos sucesiones con el mismo número de ciclos.

entonces los  $j - i$  ciclos restantes de una de las sucesiones son de pesos diferentes entre sí y deben conectarse al resto por lo que el peso total no puede ser inferior a  $(2i - 2) + 2(j - i) = 2j - 2$  (véase la figura 5.32).  $\square$

**Observación** No siempre existe *PPM* para dos sucesiones disjuntas de ciclos. A continuación vemos una forma de obtenerla (no es única) que no siempre es realizable. Consideremos sólo los dos ciclos más internos de cada sucesión y elegimos un par de puntos visibles entre sí para formar la primera arista del polígono a la que llamamos  $a$  (figura 5.32). Se determina en cada uno de los restantes ciclos cuáles son los extremos de las aristas cortadas por  $a$ . A partir de un extremo de la arista  $a$  construimos una poligonal recorriendo los ciclos en el siguiente orden: en la primera sucesión recorrida, los ciclos se ordenan de dentro hacia fuera seguidos de

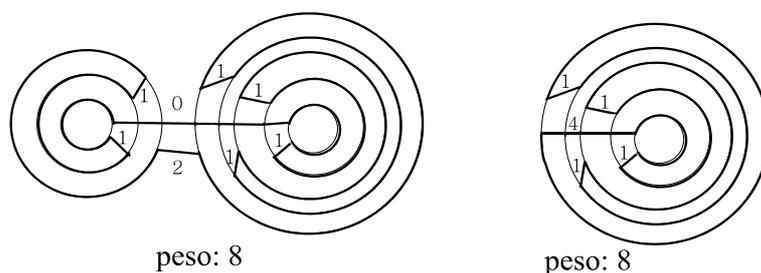


Figura 5.32: Esquema de *PPM* entre dos sucesiones con diferente número de ciclos; su peso coincide con el peso de una *PPM* de la mayor.

los ciclos de la otra sucesión, ordenados en sentido inverso. Un ciclo no debe ser abandonado hasta que todos sus puntos hayan sido incorporados a la poligonal y, en ese caso, el último punto debe unirse con uno de los dos puntos marcados del ciclo siguiente (en el orden antes establecido), concretamente el que queda al mismo lado de  $a$  que el extremo de la poligonal que estamos construyendo. La poligonal cierra formando el polígono cuando llega al otro extremo de la arista  $a$ .

Cuando esta poligonización es realizable se trata efectivamente de una *PPM*, veámoslo. Si el peso de la primera arista es  $p$ , el de la última es  $|p - (j - i)|$ ; si ambas sucesiones empiezan o acaban con el mismo peso (una de ellas vale 0), la suma de los pesos de ambas es  $j - i$ . Las aristas conectando los  $i - 1$  y los  $j$  ciclos de la otra  $j - 1$ . Luego el peso de la poligonización es:  $(j - i) + (i - 1) + (j - 1) = 2j - 2$  el peso mínimo de la sucesión con más ciclos.

Esta construcción no es generalizable a más de dos sucesiones.

- b) Poligonización de un número arbitrario de sucesiones disjuntas de ciclos encajados.

**Lema 5.6.5.** *Sea un conjunto de un número arbitrario de sucesiones disjuntas, donde cada ciclo está formado por puntos del mismo peso. El peso de cualquier poligonización de dicho conjunto es mayor o igual a  $(2j - 2)$ , donde  $j$  es el número de ciclos de la sucesión que tiene el mayor número de ellos.*

*Demostración.* Si  $j$  es el máximo número de ciclos que tienen las sucesiones,  $j$  es también el número de pesos diferentes de los puntos en cada sucesión. Luego el mínimo para el peso de cualquier poligonización es  $2j - 2$  pues la poligonal debe unir a todos los puntos: mientras los puntos sean del mismo peso, las aristas son de peso cero, pero como mínimo,

se deben conectar  $j$  tramos con puntos de diferente peso por lo que se necesita un mínimo de  $2j - 2$  aristas de peso diferente de cero.

Además se tienen ejemplos en los que dicho valor se alcanza, esto es, la nube admite *PPM*. A continuación describimos una construcción que no siempre es realizable ni aún en el caso en que los ciclos fueran convexos. Básicamente la poligonal une entre sí puntos de un mismo peso de todas las sucesiones posibles y luego se unen entre sí las poligonales que éstos han formado.

Con más detalle, la construcción es la siguiente. Los puntos de un mismo ciclo se unen para formar una poligonal de peso cero (por ejemplo utilizando las aristas del propio ciclo). Para conectar a los ciclos entre sí maximizamos el número de conexiones de peso cero, esto es, conectamos entre sí a todos los ciclos con el mismo peso (no siempre es posible) de modo que para cada peso, hay una poligonal uniendo a todos los puntos de dicho peso. Y, por último, conectamos entre sí las poligonales de diferentes pesos. Cuando esto sea posible, el peso de la poligonización es el mínimo establecido, esto es,  $2j - 2$  (véase la figura 5.33 como ejemplo de *PPM* para un conjunto de sucesiones disjuntas con el mismo número de ciclos, y la figura 5.34 en el caso de un número diferente de ciclos).

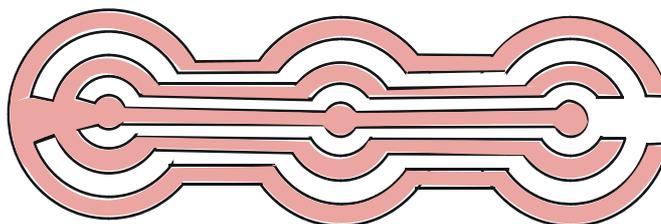


Figura 5.33: Esquema de poligonización de peso Delaunay mínimo para un conjunto de sucesiones disjuntas con el mismo número de ciclos.

□

Esta construcción también puede aplicarse a sucesiones no disjuntas que, salvo el caso en que haya una única sucesión, es la situación de  $\bigcup D\text{-Lay}_i(S)$ .

Podemos resumir todos los casos en el siguiente teorema.

**Teorema 5.6.6.** *Sea  $S$  una nube de puntos de profundidad  $f$ . El peso de cualquier poligonización es mayor o igual a  $2f - 2$ ; no depende del número de componentes conexas de  $\bigcup D\text{-Lay}_i(S)$  y la sucesión de pesos de las aristas asociada a una *PPM* no es única.*

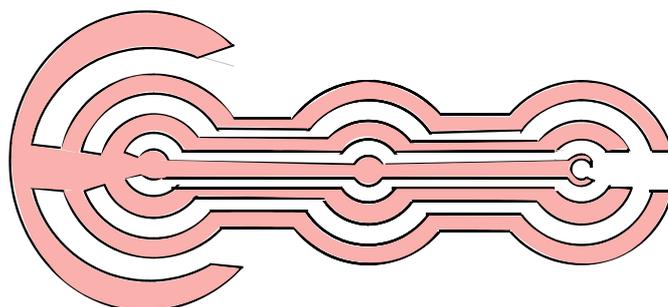


Figura 5.34: Esquema de poligonización de peso Delaunay mínimo para un conjunto de sucesiones disjuntas con diferente número de ciclos. De izquierda a derecha, el número de ciclos es 7, 5 y 6.

*Demostración.* Se tiene  $S$  de profundidad  $f$ . Cualquier poligonización de  $S$  debe pasar por todos sus puntos y al menos hay un punto de cada uno de los pesos del conjunto  $\{1, \dots, f\}$ . Luego cualquier poligonal que los una tiene peso mayor o igual a  $2f - 2$ .

En el lema 5.6.5 se proporciona un criterio para formar la poligonal. En las nubes de profundidad  $f$ , en las que pueda aplicarse, obtenemos ejemplos de poligonización de peso mínimo  $2f - 2$  y en las que el número de componentes conexas de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  puede ser tan grande como se quiera (figura 5.28).

La sucesión de pesos de las aristas asociada a una poligonización de peso mínimo no es única. De hecho, tampoco puede asegurarse que esté formada únicamente por ceros y unos. Cuando  $\bigcup D-Lay_i(S)$  describe una única sucesión de ciclos encajados (como, por ejemplo, cuando los pesos Delaunay coinciden con los pesos por capas convexas), las *onion polygonization* ([AGH1](93) y [AGH2](96)) son poligonizaciones cuyas sucesiones de pesos están formadas por ceros y unos (figura 5.30 a)). En el caso de una sola sucesión de ciclos encajados vimos una forma de poligonizar la cual proporciona una sucesión de pesos formada por ceros, unos y un valor igual a  $f - 1$  (figura 5.30 b)). Aplicado a dos sucesiones de  $i$  y  $j$  ciclos cada una, da lugar a una sucesión de ceros, unos y un valor igual a  $|j - i|$  (figura 5.30 a)).

Cuando  $\bigcup D-Lay_i(S)$  describe más de una sucesión, el criterio de recorrer todos los puntos de un ciclo antes de pasar a otro no puede generalizarse a más de dos sucesiones. Hemos visto otra forma de poligonizar en la que básicamente se conectan puntos de igual peso de las diferentes sucesiones de  $\bigcup D-Lay_i(S)$  (figuras 5.33 y 5.34) de modo que las sucesiones de pesos de las aristas forman sucesiones de ceros y unos. En este caso, la distribución de los ceros y unos no tiene por qué ser única.

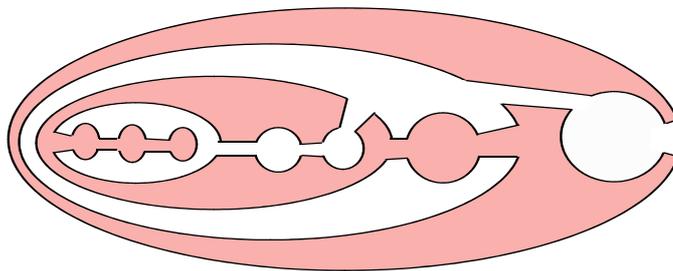


Figura 5.35: Esquema de poligonización de peso Delaunay mínimo 8 para una nube de puntos de profundidad 5 y tal que el número de componentes conexas de  $\bigcup D\text{-Lay}_i(S)$  es mayor a 5.

□

Hemos visto que la sucesión de pesos de las aristas asociada a la poligonal no es única y pueden aparecer valores diferentes a cero y uno. A continuación se demuestra que la sucesión de profundidades de una *PPM* debe ser unimodal, esto es,  $\{a_1, \dots, a_n\}$  es unimodal si para algún entero  $t$ ,  $a_1 \leq \dots \leq a_t$  y  $a_t \geq \dots \geq a_n$  (definición 2.4.4).

**Teorema 5.6.7.** *Una poligonización de una nube de puntos dada  $S$  es de peso mínimo  $2f - 2$  si y sólo si la sucesión de profundidades de la poligonización es unimodal.*

*Demostración.* Demostración análoga a la del teorema 3.2.5 en el capítulo 3. □

Las poligonizaciones de peso  $2f - 2$ , a las que notamos por *PPM*, no siempre existen. En el siguiente teorema se establece una cota superior al peso mínimo posible.

**Teorema 5.6.8.** *El peso mínimo de cualquier poligonización de una nube de puntos dada es, a lo sumo,  $n$ . Se tiene un ejemplo de nube  $S$  en la que peso de la poligonización de peso mínimo es  $\Omega(n)$ .*

*Demostración.* Se tiene  $S$  de profundidad  $f$ . Hemos visto que cualquier poligonización tiene peso mayor o igual a  $2f - 2$ . Sin embargo, no siempre ocurre que alguna poligonización de las realizables en la nube dada, alcance el mínimo. A continuación establecemos un máximo para el mínimo de los pesos realizables. Siempre es posible construir una poligonal en la que todo punto es adyacente a otro de su mismo peso o del peso anterior. Recordemos que, para cualquier punto de peso  $i$  existe un ciclo de puntos de peso  $i - 1$  que lo contiene (proposición 5.3.2); luego, en el peor de los casos, si un punto no puede ser adyacente a los de su peso, se incorpora en la poligonal con dos aristas de peso 1. Por tanto, el peso total de cualquier poligonización de peso mínimo para una nube dada, va a ser siempre menor que  $n$ , que equivale a considerar que en la poligonización todas las aristas fueran de peso 1.

A continuación se da un ejemplo en el que el peso mínimo de cualquier poligonización es  $\Omega(n)$ . Construcción recursiva de la nube  $S$ :

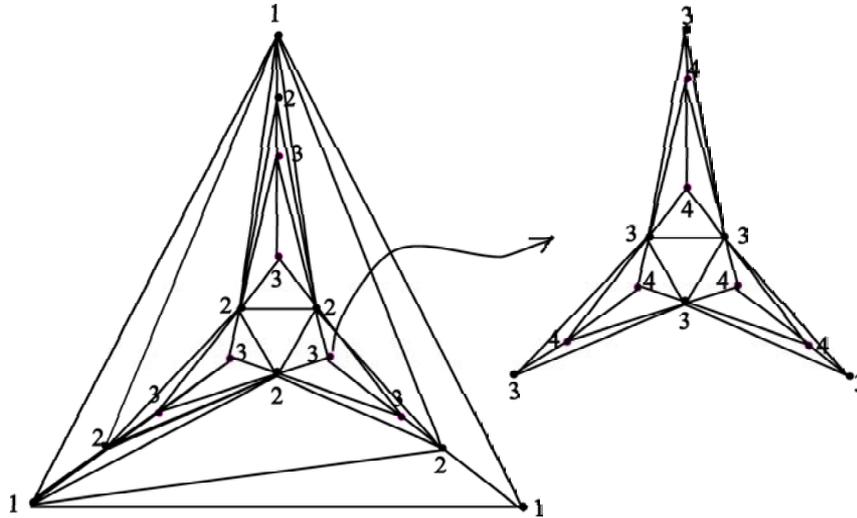


Figura 5.36: Construcción recursiva de una nube de puntos: los puntos de mayor peso son reemplazados por otros 12 puntos como se indica en la figura.

Inicialmente colocamos 15 puntos, tres en la envoltura convexa, seis de peso 2 y otros seis de peso 3, como en la figura 5.36. En el siguiente paso, cada uno de los puntos de peso 3 se sustituye por otros 12 puntos dispuestos como los iniciales de pesos 2 y 3. Recurrentemente cada nuevo paso de la construcción consiste en la sustitución de cada uno de los puntos de mayor peso por los 12 puntos de la configuración inicial de pesos 2 y 3.

Si  $f$  es la profundidad de  $S$ , el número de puntos es

$$n = 15 + 12 \sum_{i=1}^{f-3} 6^i = 15 + 12 \frac{6^{f-2} - 6}{5}$$

Calculamos el peso de cualquier poligonización  $P$  de  $S$ . Para ello, observamos que en la configuración inicial de 15 puntos, los 12 de pesos 2 y 3 no pueden poligonizarse con peso menor a 4: para conseguir un peso menor los puntos del mismo peso deberían estar juntos en la poligonal lo cual es imposible en este ejemplo (véase la figura 5.37).

$$W_D(P) \leq 6 + 4 \sum_{i=1}^{f-3} 6^i = 6 + 4 \frac{6^{f-2} - 6}{5}$$

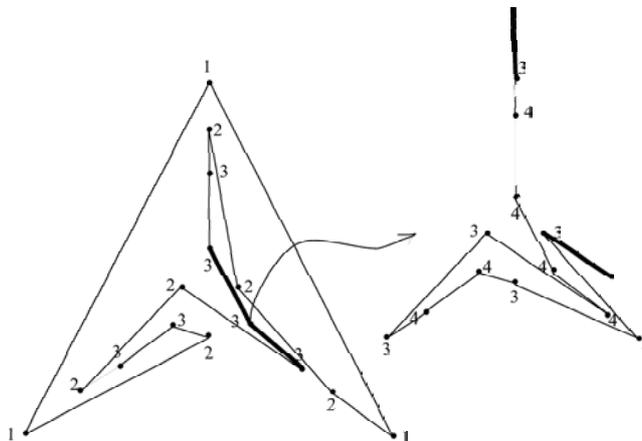


Figura 5.37: Cualquier poligonización de este conjunto de puntos tiene peso  $\Omega(n)$ .

utilizando la relación entre la profundidad y el número de puntos, tenemos:

$$W_D(P) \leq 6 + \frac{n-15}{3} = O(n)$$

□

### 5.6.3. Triangulaciones de peso Delaunay mínimo

En esta memoria nos hemos centrado en el estudio del *t-peso* (definición 1.3.1), cuando hablamos del peso de una estructura geométrica nos referimos a su *t-peso*. Sin embargo, para las triangulaciones en el peso Delaunay resulta más natural considerar el *w-peso* (definición 1.3.2) como se observa en la siguiente propiedad.

**Proposición 5.6.1.** *La Triangulación de Delaunay no es en general una triangulación de t-peso Delaunay mínimo, sí es una triangulación de w-peso Delaunay mínimo.*

*Demostración.* El ejemplo de las figuras 5.38 y 5.39, prueba que la triangulación de Delaunay no tiene por qué ser una triangulación de peso mínimo en el peso Delaunay, considerando el peso total o *t-peso*. El *w-peso* de la triangulación de Delaunay sí es mínimo pues es 0, si todos los puntos están en posición convexa, o 1 en cualquier otro caso.

□

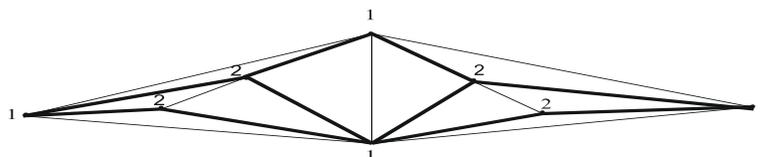


Figura 5.38: Triangulación de Delaunay de peso 10.

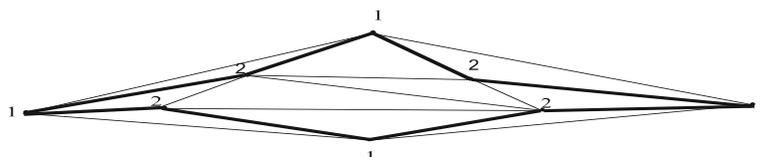


Figura 5.39: Triangulación de peso Delaunay mínimo igual a 8 de la misma nube de la figura 5.38.