

# Capítulo 4

## $(\alpha, k)$ -sets

En este capítulo se realiza un estudio combinatorio del conjunto de  $(\alpha, k)$ -sets para nubes de puntos en el plano. Tras una introducción en la sección 4.1, en cada una de las siguientes secciones se considera uno de los cuatro casos posibles, en función de los parámetros  $\alpha$  y  $k$ : estudio de los  $(\alpha, k)$ -sets con ambos parámetros fijos en la sección 4.2, con  $\alpha$  fija y  $k$  variable en la 4.3, con  $k$  fija y  $\alpha$  variable en la 4.4 y con ambos variables en la sección 4.5. En cada caso se proporcionan cotas inferiores y superiores para el número máximo de  $(\alpha, k)$ -sets y también se describe un algoritmo de construcción de todos los  $(\alpha, k)$ -sets.

### 4.1. Introducción

Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos en el plano y sea  $\mathcal{C}$  una familia de curvas no acotadas, topológicamente equivalentes a una recta en el plano.

**Definición 4.1.1.** *Dada una curva  $c \in \mathcal{C}$ , un  $c$ - $k$ -set es la intersección de  $S$  con una de las regiones abiertas definidas por  $c$  de cardinalidad  $k$ .*

Si  $c$  es una recta orientada, el  $c$ - $k$ -set se corresponde con la definición usual de  $k$ -set (definición 3.1.1), es decir, un  $k$ -set de  $S$  es un subconjunto de  $S$  con cardinal  $k$  separable del resto por una recta a la que se denomina  $k$ -recta (definición 3.1.2).

El problema de determinar el número máximo de  $k$ -sets para conjuntos de  $n$  puntos en el plano ha sido ampliamente abordado por diversos autores, en parte debido a su importancia en el análisis de algoritmos geométricos.

Inicialmente Lovász [Lo](71) obtuvo una cota superior de  $O(n\sqrt{n})$  para el número máximo de rectas bisectoras de un conjunto de  $n$  puntos dado. Este resultado fue generalizado por Erdős et al. [ELS](73) estableciendo una cota superior de  $O(n\sqrt{k})$  para el número máximo de  $k$ -sets. Posteriormente, Pach et al. [PSS](92) consiguen una cota superior de  $O(n\sqrt{k}/\log^* k)$ . Más recientemente, Dey [De2](98) la estableció en  $O(nk^{1/3})$ .

Para la cota inferior, Lovász [Lo](71) construyó familias de conjuntos con  $\Omega(n \log n)$  rectas bisectoras de una nube de  $n$  puntos, resultado generalizado por Erdős et al. en [ELS](73) obteniendo una cota inferior de  $\Omega(n \log k)$  para el número máximo de  $k$ -sets. Edelsbrunner y Welzl también probaron que cualquier cota inferior de la forma  $\Omega(nf(n))$  para rectas bisectoras implica  $\Omega(nf(k))$  como cota inferior para  $k$ -sets [EW](85). La cota inferior fue posteriormente mejorada por Tóth en [Tot](01) construyendo conjuntos de puntos en el plano con  $ne^{\Omega(\sqrt{\log k})}$   $k$ -sets para cualquier  $n, k$  con  $n \geq 2k > 0$ .

Se pueden considerar los  $k$ -sets definidos por una curva cualquiera  $c \in C$ , no siendo  $c$  una recta. El caso más simple que podemos considerar es el de los  $c$ - $k$ -sets siendo  $c$  una cuña, región abierta del plano definida por dos semirrectas con un origen común (definición 3.3.4).

Nótese que, según la definición de  $(\alpha, k)$ -set (definición 3.3.5), esto es, subconjunto de  $S$  con cardinal  $k$  separable del resto por una  $\alpha$ -cuña (cuña de ángulo  $\alpha$  no superior a  $\pi$ ), todo  $k$ -set es trivialmente un  $(\pi, k)$ -set. Sin embargo, también puede afirmarse que todo  $k$ -set es un  $(\alpha, k)$ -set cualquiera que sea el valor de  $\alpha$ , como se demuestra en el lema siguiente.

**Lema 4.1.1.** *Todo  $k$ -set es un  $(\alpha, k)$ -set.*

*Demostración.* Sea  $l$  la recta que define un  $k$ -set. Siempre es posible encontrar una recta  $l'$  que forme un ángulo  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \pi$ , con  $l$  tal que la  $\alpha$ -cuña definida por  $l$  y  $l'$  contenga al  $k$ -set (figura 4.1a).  $\square$

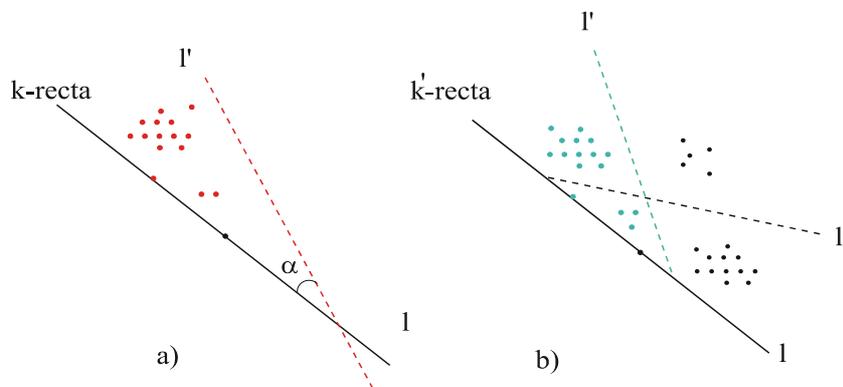


Figura 4.1: Todo  $k$ -set es un  $(\alpha, k)$ -set, b) todo  $(\alpha, k)$ -set puede obtenerse de un  $k'$ -set, con  $k' \geq k$ .

**Lema 4.1.2.** *Si  $k' \geq k$ , todo  $(\alpha, k)$ -set puede obtenerse de un  $k'$ -set y todo  $k'$ -set obtenido por una recta orientada  $l$  genera a lo más dos  $(\alpha, k)$ -sets tales que una de las semirrectas de la cuña está contenida en  $l$ .*

*Demostración.* Para demostrar la primera parte del lema basta con prolongar una de las semirrectas de la cuña y eliminar la otra semirrecta obteniéndose un  $k'$ -set con  $k' \geq k$ . Para demostrar la segunda parte del lema procedemos de la siguiente manera: dado el  $k'$ -set definido por una recta orientada  $l$ , considerar la recta  $l'$  que forma un ángulo  $\alpha$  con  $l$  (dos posibilidades) de forma que las rectas  $l$  y  $l'$  definan un  $(\alpha, k)$ -set (figura 4.1 b).  $\square$

**Observación.** Nótese que cada par de puntos de  $S$  da lugar como mucho a cuatro  $(\alpha, k)$ -sets distintos con una de las semirrectas de la cuña pasando por ellos: considérense las dos regiones que define la recta que une los puntos y los dos  $(\alpha, k)$ -sets posibles para cada una de las regiones (figura 4.2).

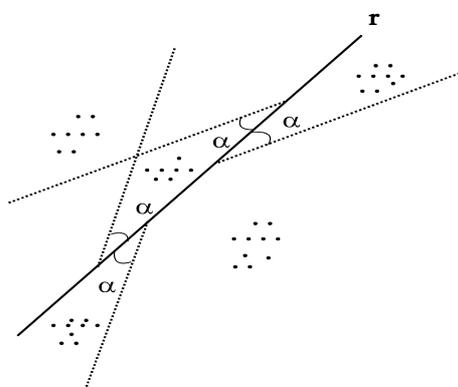


Figura 4.2: Tres  $(\alpha, k)$ -sets asociados a una recta.

En este capítulo realizaremos un estudio combinatorio de los  $(\alpha, k)$ -sets para nubes de puntos en el plano. Se proporcionan cotas inferiores y superiores para el número máximo de  $(\alpha, k)$ -sets en cada uno de los cuatro casos posibles: ambos parámetros  $\alpha$  y  $k$  fijos, uno de ellos fijo y el otro variable o ambos variables. También para cada caso, se describen algoritmos de construcción de todos los  $(\alpha, k)$ -sets.

## 4.2. $(\alpha, k)$ -sets con $\alpha$ fija y $k$ fija

En esta sección estudiamos los  $(\alpha, k)$ -sets en el caso en que los parámetros  $\alpha$  y  $k$  son fijos. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de  $(\alpha, k)$ -sets y mostramos un algoritmo que genera todos los  $(\alpha, k)$ -sets de una nube de puntos. También se estudian ciertas configuraciones de puntos en las que el número de  $(\alpha, k)$ -sets puede pasar de lineal a cuadrático según sean los ángulos tomados.

**Teorema 4.2.1.** (Cota superior) *El número de  $(\alpha, k)$ -sets para valores fijos de  $\alpha$  y  $k$  es a lo sumo  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Dado un  $(\alpha, k)$ -set, trasladamos paralelamente una de las semirrectas de la cuña hasta que toque al menos un punto del  $(\alpha, k)$ -set. En caso de haber alcanzado dos puntos del  $(\alpha, k)$ -set giramos ligeramente la cuña, manteniendo la semirrecta sobre uno de los dos puntos, para dejar al otro punto en su interior. Se procede análogamente con la otra semirrecta. Sean pues  $a$  y  $b$  los puntos de contacto de las semirrectas (figura 4.3 a). Consideramos el segmento  $ab$  y el arco capaz definido por el segmento  $ab$  y el ángulo  $\alpha$ . El vértice de la cuña está en este arco capaz y lo desplazamos sobre él hasta que una de las semirrectas toque un nuevo punto de  $S$  (en el caso en que  $a = b$  este punto sería el vértice de la cuña sobre el que giraríamos hasta que una de las semirrectas tocase un nuevo punto). Pueden darse los siguientes casos:

1. sólo una de las rectas soporte de la cuña alcanza un nuevo punto y éste es del  $(\alpha, k)$ -set (figura 4.3 b), la recta pasando por el punto  $a$  alcanza el punto  $r$ . Cambiamos por el nuevo punto el extremo del segmento situado en la misma recta, sobre el cual definimos el arco capaz de ángulo  $\alpha$ . Giramos ligeramente el vértice de la cuña sobre el nuevo arco capaz para que el punto inicial pase al interior de la cuña y nuevamente cada una de las semirrectas pase sólo por un punto del  $(\alpha, k)$ -set.
2. simultáneamente cada una de las rectas soporte de la cuña alcanza un punto perteneciente al  $(\alpha, k)$ -set. Escogemos la recta de menor pendiente y nos remitimos al caso anterior.
3. simultáneamente cada una de las rectas soporte de la cuña alcanza un punto no perteneciente al  $(\alpha, k)$ -set. Se toma como recta asociada al  $(\alpha, k)$ -set la de menor pendiente (figura 4.3 b) la recta pasando por el punto  $a$  alcanza el punto  $p$  y la recta pasando por el punto  $b$  alcanza el punto  $q$ .)
4. sólo una de las rectas soporte de la cuña alcanza un nuevo punto y éste no es del  $(\alpha, k)$ -set. Asociamos dicha recta al  $(\alpha, k)$ -set.

Es claro que procediendo de este modo, una de las rectas soporte de la cuña pasando por un punto del  $(\alpha, k)$ -set alcanzará un punto fuera del mismo. Esto es así pues dichas rectas van girando entorno a puntos de la envolvente convexa del  $(\alpha, k)$ -set, haciendo un barrido del plano. Luego a cada  $(\alpha, k)$ -set le podemos asociar una recta pasando por dos puntos tales que uno sea del  $(\alpha, k)$ -set y el otro no.

Por otra parte, dada una recta pasando por dos puntos de los cuales sabemos que uno de ellos es del  $(\alpha, k)$ -set y el otro no, puede ser la recta asociada a lo sumo a ocho  $(\alpha, k)$ -sets (cuatro por punto). Por tanto, el número de  $(\alpha, k)$ -sets es menor o igual que ocho veces el número de rectas que pasan por dos puntos de  $S$ , es decir a lo más  $O(n^2)$ .  $\square$

Una cota inferior del número de  $(\alpha, k)$ -sets para valores fijos de  $\alpha$  y  $k$  nos la proporciona la cota inferior del número de  $k$ -sets. Erdős et al. en [ELS](73) la

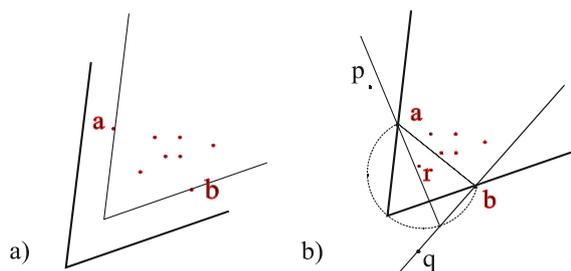


Figura 4.3: Obtención de la recta asociada al  $(\alpha, k)$ -set.

estableció en  $\Omega(n \log k)$ . Recientemente, Tóth [Tot](01) construye un conjunto de  $n$  puntos en el plano con  $ne^{\Omega(\sqrt{\log k})}$   $k$ -sets para cualquier  $n, k$  con  $n \geq 2k > 0$ , mejorando la anterior cota inferior.

A continuación veremos que para cualquier ángulo  $\alpha$  fijo, existen familias de  $n$  puntos en las que el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $O(n)$ . Aunque podría pensarse que cada dos puntos de  $S$  se tiene un  $(\alpha, 2)$ -set para valores pequeños de  $\alpha$ , vamos a ver que existen conjuntos tales que esto no sucede por pequeño que sea el ángulo  $\alpha$  fijado.

**Lema 4.2.2.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos equiespaciados sobre una circunferencia. El supremo de los  $\alpha$  para el que es posible formar un  $(\alpha, 2)$ -set con dos puntos no consecutivos es  $\frac{2\pi}{n}$ .*

*Demostración.* Se tienen  $n$  puntos equiespaciados sobre una circunferencia. Sean  $x$  e  $y$  dos de estos puntos, no consecutivos. Buscamos una cuña con ángulo máximo  $\alpha$  que les contenga sólo a ellos. Es claro que el vértice de la cuña ha de ser exterior a la circunferencia. Con esta restricción se sitúan inicialmente las dos semirrectas de la cuña sobre  $x$  e  $y$  ( $\alpha = 0$ ). El ángulo puede aumentarse hasta que cada una de las semirrectas alcance un punto de  $S$  ( $\alpha = \alpha_0$ ) (figura 4.4 a).

Sea, por ejemplo,  $x$  el punto más próximo al vértice de la  $\alpha_0$ -cuña. Si se trazan paralelas a las semirrectas de la cuña desde  $x$ , se observa que podemos aumentar el  $\alpha_0$  (figura 4.4 b). El ángulo depende también del par de puntos escogidos. La elección que da el mayor  $\alpha$  posible es aquella en la que el ángulo de la cuña forma un ángulo inscrito en la circunferencia, esto es,  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$  (figura 4.5). De hecho, el vértice no puede ser  $x$  (pues  $x$  ha de pertenecer a la cuña) y, como ya se observó, ha de ser exterior a la circunferencia. Luego  $\alpha$  será menor que  $\frac{2\pi}{n}$  pero tan próximo a dicho valor como se quiera.  $\square$

**Proposición 4.2.1.** *Para cualquier ángulo  $\alpha$  fijo, existen familias de  $n$  puntos en las que el número de  $(\alpha, 2)$ -sets es  $O(n)$ .*

*Demostración.* Fijado  $\alpha$ , basta tomar  $n \geq \frac{2\pi}{\alpha}$  y los  $n$  puntos equiespaciados en una circunferencia como en el lema 4.2.2. Con cualquiera de estos valores de  $n$  es imposible

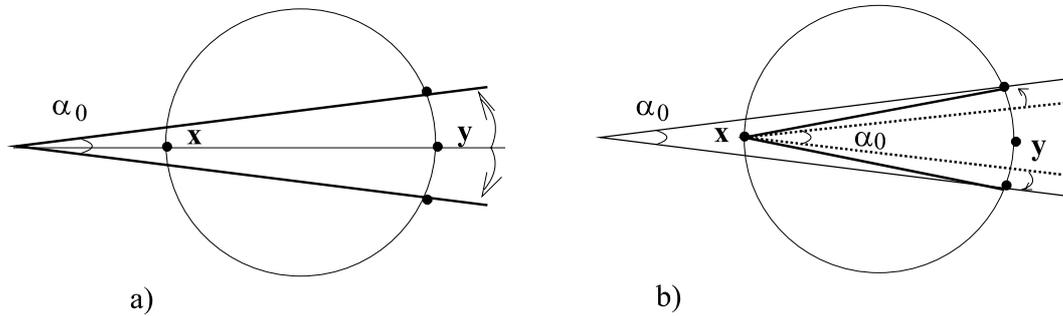


Figura 4.4: a) Cuña con vértice exterior a la circunferencia que sólo contiene a  $x$  e  $y$ ; b) si el vértice se acerca a  $x$ , el ángulo aumenta.

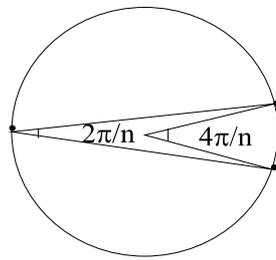


Figura 4.5: En la figura se indican los ángulos destacados.

obtener un  $(\alpha, 2)$ -set de dos puntos que no sean consecutivos. Luego el número de  $(\alpha, 2)$ -sets es  $O(n)$ .  $\square$

Este resultado se generaliza a cualquier  $k$  constante en la forma siguiente.

**Lema 4.2.3.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos equiespaciados sobre una circunferencia. El supremo de los  $\alpha$  para el que es posible formar un  $(\alpha, k)$ -set con puntos no consecutivos es  $\frac{\pi k}{n}$ .*

*Demostración.* Se considera  $S$  un conjunto de  $n$  puntos equiespaciados sobre una circunferencia. Se quiere ahora formar  $(\alpha, k)$ -sets con puntos de  $S$  no todos consecutivos y, además, con el mayor ángulo posible. Nótese que si los  $k$  puntos no son consecutivos, el vértice de la cuña ha de ser exterior a la circunferencia. Entonces necesariamente los  $k$  puntos forman dos grupos diferentes (y no más) de puntos consecutivos que notamos por  $A$  y  $B$ . Sea  $A$  el grupo de puntos más próximo al vértice de la cuña y  $t$  su cardinal;  $B$  es el otro conjunto de puntos con cardinal  $k - t$ . Sea  $x_0$  el punto de  $S$  anterior al primero de  $A$ ,  $a_1$ , en orden horario, y sea  $x_{t+1}$  el siguiente al último,  $a_t$ ; análogamente  $x_m$  y  $x_{m+(k-t)+1}$  los adyacentes a  $b_1$  y  $b_{k-t}$  de  $B$  (figura 4.6).

Considérese una cuña conteniendo los  $k$  puntos de  $A \cup B$ . Si sus semirrectas no pasan por ningún punto de  $S$ , se puede aumentar el ángulo entre ambas. Veamos que el supremo de los ángulos posibles se consigue cuando una de las semirrectas es la recta que une  $a_1$  con  $x_{m+(k-t)+1}$  y la otra  $a_t$  con  $x_m$ .

En primer lugar, giramos cada una de las semirrectas sobre los puntos de corte con la circunferencia adyacentes a  $b_1$  y  $b_{k-t}$  hasta alcanzar  $a_t$  y  $a_1$ , respectivamente. De este modo se acerca el vértice de la cuña a la circunferencia y se aumenta el ángulo. En segundo lugar, fijando las semirrectas en  $a_1$  y  $a_t$  respectivamente, se puede aumentar el ángulo entre ellas mientras no se incorporen nuevos puntos en el interior de la cuña, esto es, hasta alcanzar  $x_m$  y  $x_{m+(k-t)+1}$ .

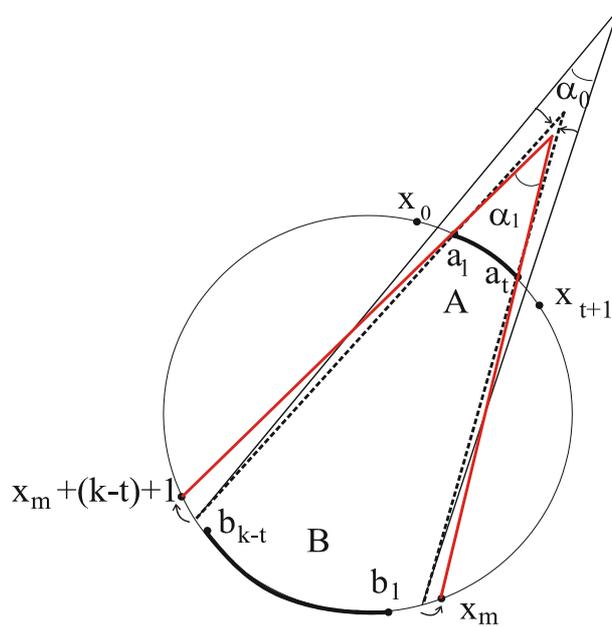


Figura 4.6:  $\alpha_1$  es el supremo de los ángulos conteniendo los  $k$  puntos de  $A \cup B$ .

El mayor ángulo posible para una  $(\alpha, k)$ -cuña va a depender del número de puntos de los conjuntos  $A$  y  $B$  y la situación de los mismos, (estamos suponiendo  $A$  y  $B$  no vacíos). En este sentido, el supremo se alcanza cuando  $A$  tiene un sólo punto y forma un ángulo inscrito en la circunferencia, esto es,  $\alpha = \frac{\pi k}{n}$  (figura 4.7).  $\square$

**Proposición 4.2.2.** *Para cualquier ángulo  $\alpha$  fijo, existen familias de  $n$  puntos en las que el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $O(n)$ .*

*Demostración.* Fijado  $\alpha$ , basta tomar  $n \geq \frac{k\pi}{\alpha}$  como en el lema 4.2.3. Con cualquiera de estos valores de  $n$  es imposible separar  $k$  puntos que no sean consecutivos. Luego el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $O(n)$ .  $\square$

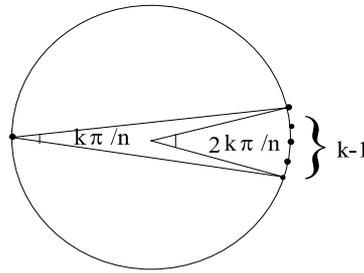


Figura 4.7: En la figura se indican los ángulos inscritos tomando  $A$  de cardinal 1 y  $B$  de cardinal  $k - 1$ .

Nótese que para cualquier conjunto de  $n$  puntos, dos cualesquiera de ellos pueden separarse con una cuña si el ángulo es suficientemente pequeño, y entonces, la cota sí es cuadrática. Para nubes de puntos equiespaciados sobre la circunferencia encontramos a continuación cotas inferiores cuadráticas, sensibles a  $k$ , para ángulos menores a  $\frac{k\pi}{\alpha}$ .

**Lema 4.2.4.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos equiespaciados sobre una circunferencia. Dos subconjuntos disjuntos cualesquiera, de puntos consecutivos de  $S$  y de cardinales  $k_1$  y  $k_2$  con  $k_1 + k_2 = k$ , pueden siempre formar un  $(\alpha, k)$ -set para cierta  $\alpha$ , donde  $\alpha$  depende de los cardinales  $k_1, k_2$ , pero no de la posición de los subconjuntos.*

*Demostración.* Se tienen  $n$  puntos, el conjunto  $S$ , equiespaciados sobre una circunferencia  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  (el orden horario de los puntos se corresponde con el subíndice de los mismos).

En primer lugar demostraremos el lema para  $k_1 = 1$  y  $k_2 = k - 1$ .

Sea por ejemplo  $2\theta$  el valor del ángulo con vértice sobre  $c$ , el centro de la circunferencia, y pasando por los puntos  $s_i, s_j \in S$  (figura 4.8). Es conocido que el ángulo inscrito a un ángulo es siempre la mitad de éste (para  $2\theta$  el inscrito es  $\theta$ ). Manteniendo el vértice del inscrito (llamémosle  $x$ ), aumentamos este ángulo girando la semirrecta que pasa por  $s_i$  hasta alcanzar  $s_{i-1}$  y la que pasa por  $s_j$  hasta alcanzar  $s_{j+1}$ . Este nuevo ángulo es el inscrito del que con vértice en  $c$  pasa por los mismos puntos  $s_{i-1}$  y  $s_{j+1}$  y vale  $2\theta + 4\frac{\pi}{n}$ . Por tanto, el inscrito vale  $\theta + 2\frac{\pi}{n}$  de lo que se deduce que el ángulo con vértice en  $x$  que pasa por  $s_j$  y  $s_{j+1}$  es  $\frac{\pi}{n}$  y, además, no depende de la posición de los puntos  $s_j$  y  $s_{j+1}$  puesto que el razonamiento ha sido independiente de la elección de  $s_j$  (figura 4.8).

Hemos demostrado que el ángulo con vértice en un punto de  $S$  y cuyas semirrectas pasan respectivamente cada una de ellas por un punto y su contiguo en  $S$  es siempre el mismo. Es inmediata la siguiente generalización: el ángulo con vértice en un punto de  $S$  y cuyas semirrectas pasan respectivamente cada una de ellas por sendos extremos de cualquier subconjunto de puntos contiguos de  $S$ , del mismo cardinal, es constante.

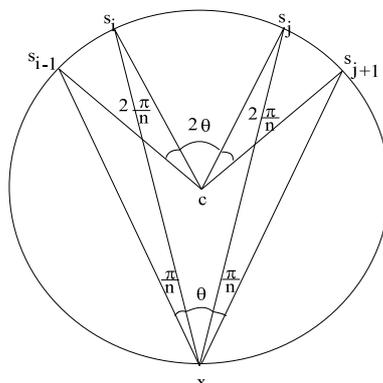


Figura 4.8: El sector barrido con un ángulo de centro la circunferencia siempre es el doble del barrido por el inscrito.

El lema queda pues demostrado para el caso  $k_1 = 1$  y  $k_2 = k - 1$ .

Consideremos ahora dos subconjuntos de puntos contiguos de  $S$ ,  $A = \{a_1, \dots, a_{k_1}\}$  y  $B = \{b_1, \dots, b_{k_2}\}$  (el orden horario de los puntos se corresponde con el subíndice de los mismos), con  $A \cap B = \emptyset$  y  $k_1 + k_2 = k$  (figura 4.6). El ángulo formado por la semirrecta que pasa por los primeros puntos de  $A$  y de  $B$   $a_1, b_1$  y la que pasa por los últimos  $a_{k_1}, b_{k_2}$ , llamémosle  $\alpha$ , depende del cardinal de ambos conjuntos. Se quiere demostrar que  $\alpha$  no depende de la posición de los conjuntos  $A$  y  $B$  para formar el  $(\alpha, k)$ -set (recuérdese que ya está probado para el caso  $k_1 = 1$  y  $k_2 = k - 1$ ). Basta pues tomar otro subconjunto de  $S$ ,  $B' = \{b'_1, \dots, b'_{k_2}\}$ , del mismo cardinal que  $B$  y demostrar que el ángulo formado por la semirrecta que pasa por  $a_1$  y  $b'_1$  y la que pasa por  $a_{k_1}$  y  $b'_{k_2}$  es también  $\alpha$ .

Sea  $y$  el punto  $a_1 b_1 \cap a_{k_1} b'_{k_2}$ ; llamemos  $p$  al punto  $a_1 b'_1 \cap y a_{k_1}$  y  $q$  al punto  $a_{k_1} b_{k_2} \cap y b_1$ . Se quiere demostrar que con vértice en  $p$  el ángulo que pasa por los extremos de  $B'$  es el mismo que el de vértice  $q$  pasando por los extremos de  $B$ . El primer ángulo es uno de los del triángulo de vértices  $a_1, p, y$  y el segundo es uno de los del triángulo  $a_{k_1}, q, y$ , de hecho, vamos a ver que los ángulos de ambos triángulos son iguales dos a dos.

El ángulo correspondiente al vértice  $y$  en ambos triángulos es el mismo ya que están formados por las mismas rectas. Veamos ahora que el ángulo con vértice  $a_1$  en un triángulo es el mismo que el de vértice  $a_{k_1}$  en el otro. Si tomamos las rectas soporte del primero, con vértice en  $a_1$  tenemos un ángulo equivalente que pasa por los primeros puntos (sentido horario) de  $B$  y  $B'$  respectivamente. Si tomamos las rectas soporte del segundo, con vértice en  $a_{k_1}$  tenemos un ángulo equivalente que pasa por los últimos puntos (sentido horario) de  $B$  y  $B'$  respectivamente. Ambos ángulos tienen su vértice en  $S$  y pasan por los extremos de subconjuntos disjuntos de  $S$  del mismo cardinal, luego son iguales. Hemos visto que dos ángulos de uno de

los triángulos son iguales a los del otro triángulo, así pues, también lo son los terceros como se quería demostrar.

Luego se concluye que  $\alpha$  es independiente de la posición de los conjuntos, esto es, es posible formar un  $(\alpha, k)$ -set con dos subconjuntos cualesquiera disjuntos de  $S$ , de cardinales  $k_1$  y  $k_2$  con  $k_1 + k_2 = k$ , donde los cardinales son dependientes de  $\alpha$ .

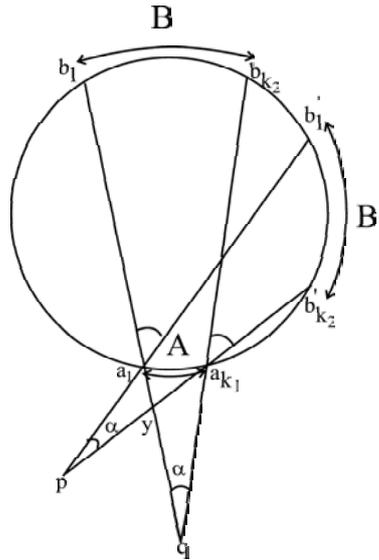


Figura 4.9: La posición de los  $k$  puntos es distinta pero el ángulo es el mismo.

□

**Teorema 4.2.5.** (Cota inferior) Para  $\alpha$  y  $k$  fijos, con  $\frac{\pi}{n} < \alpha < \frac{k\pi}{n}$  si  $k$  es impar y  $\alpha < \frac{k\pi}{n}$  si  $k$  es par, el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $\Omega(n(n - k + 1))$ .

*Demostración.* Tómesese el ejemplo dado en la proposición 4.2.2, esto es  $n$  puntos equiespaciados sobre una circunferencia, con  $\epsilon = \frac{k\pi}{n}$ . Si  $\alpha < \epsilon$  es posible formar un  $(\alpha, k)$ -set, no siendo necesario que los puntos sean consecutivos.

Los  $(\alpha, k)$ -sets pueden pues construirse repartiendo los  $k$  puntos en dos conjuntos de cardinales no nulos,  $k_1$  y  $k_2$ , con  $k_1 + k_2 = k$ . Dichos cardinales no son cualesquiera sino que vienen determinados en función del ángulo  $\alpha$ , ( $\alpha < \frac{k\pi}{n}$ ).

En el conjunto de puntos equiespaciados sobre la circunferencia, podemos formar  $n$  subconjuntos diferentes de puntos contiguos, de cardinal  $k_1$ ; cada uno de ellos puede completarse con otro subconjunto de cardinal  $k_2$ , disjunto con él, de  $n - k + 1$  maneras distintas: basta tomar subconjuntos de puntos contiguos, el lema 4.2.4 nos asegura que cada uno de los conjuntos de cardinal  $k$  que estamos construyendo pueden separarse del resto con una cuña del mismo ángulo para todos. Por tanto, para cada valor posible de  $\alpha$  se consigue  $\Omega(n(n - k + 1))$   $(\alpha, k)$ -sets siempre que los

cardinales  $k_1$  y  $k_2$  sean distintos. Si  $k_1 = k_2$  entonces cada  $(\alpha, k)$ -set ha sido contado dos veces pero asintóticamente la cota sigue siendo  $\Omega(n(n - k + 1))$ .

Buscamos los valores más próximos entre  $k_1$  y  $k_2$  pero con  $k_1 \neq k_2$ , y  $k_1 + k_2 = k$ . Estos valores son:  $k_1 = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$  y  $k_2 = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1$  (o viceversa).

Obsérvese que esta repartición de los  $k$  puntos es válida para cualquier  $\alpha$  con  $\frac{\pi}{n} < \alpha \leq \frac{3\pi}{n}$ , con  $k$  impar (figura 4.10 a) y para cualquier  $\alpha$  con  $\frac{2\pi}{n} < \alpha \leq \frac{4\pi}{n}$  en el caso de  $k$  par (figura 4.10 b)).

En el caso de  $k$  impar no es posible que  $k_1 = k_2$  con lo cual, si  $\alpha \leq \frac{\pi}{n}$  no se puede formar ningún  $(\alpha, k)$ -set, salvo que sean todos sus puntos consecutivos, y si  $\frac{\pi}{n} < \alpha < \frac{k\pi}{n}$  hemos visto que es  $\Omega(n(n - k + 1))$ .

Si  $\alpha \leq \frac{2\pi}{n}$  con  $k$  par, entonces el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $\Omega(n(n - k + 1))$ .

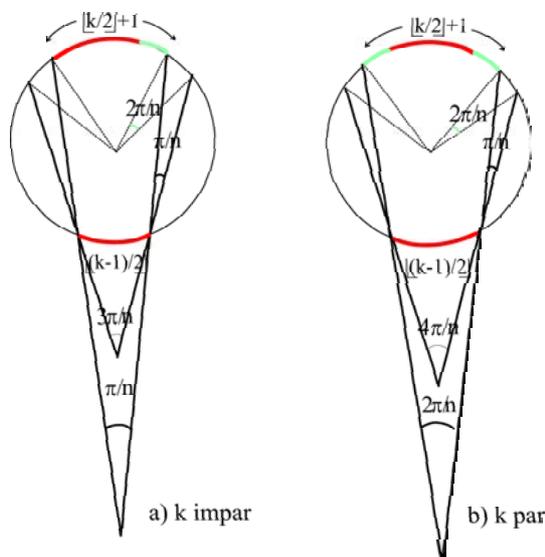


Figura 4.10: a) Si  $\alpha \leq \frac{\pi}{n}$  y  $k$  impar, no hay ningún  $(\alpha, k)$ -set. b) Si  $\alpha \leq \frac{2\pi}{n}$  y  $k$  par, todo  $(\alpha, k)$ -set tiene  $k = k_1 + k_2$  con  $k_1 = k_2$ .

□

En el siguiente teorema establecemos otras cotas inferiores en función del ángulo fijado  $\alpha$ , con  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . Si bien las cotas obtenidas a continuación quedan por debajo de las establecidas en el teorema 4.2.5 donde  $\alpha$  era menor a  $\frac{k\pi}{n}$ , cubre nuevos valores de  $\alpha$ , concretamente  $\frac{k\pi}{n} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

**Teorema 4.2.6.** (Cota inferior) Para  $\alpha$  y  $k$  fijos, con  $\alpha \leq \frac{2k\pi}{n+k} < \frac{\pi}{2}$ , el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $\Omega((n - k)^2)$ . Si  $\frac{2k\pi}{n+k} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $\Omega(k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)(n - \frac{k\pi}{\alpha}))$ .

*Demostración.* Se realiza la siguiente construcción. Se colocan los  $n$  puntos sobre dos rectas paralelas  $r$  y  $s$  ( $r$  sobre  $s$ ) de la siguiente manera: trazamos una vertical y en su intersección con  $r$  ponemos el primer punto  $p$  y el resto de puntos situados sobre  $r$  muy juntos, a la derecha de  $p$ , formando el conjunto  $A$  (figura 4.11). Al conjunto de puntos situados sobre  $s$  le llamamos  $B$ . Para obtener  $B$ , ponemos en la intersección de  $s$  con la vertical un punto  $q$  y el resto a su izquierda del siguiente modo: inicialmente se distribuyen equiespaciados con ángulo  $\frac{2\alpha}{k}$  sobre la semicircunferencia de diámetro  $pq$  a partir de  $q$ , después se proyectan sobre  $s$  desde  $p$ . Se observa que en esta construcción,  $|B| \leq \frac{k\pi}{\alpha}$ .

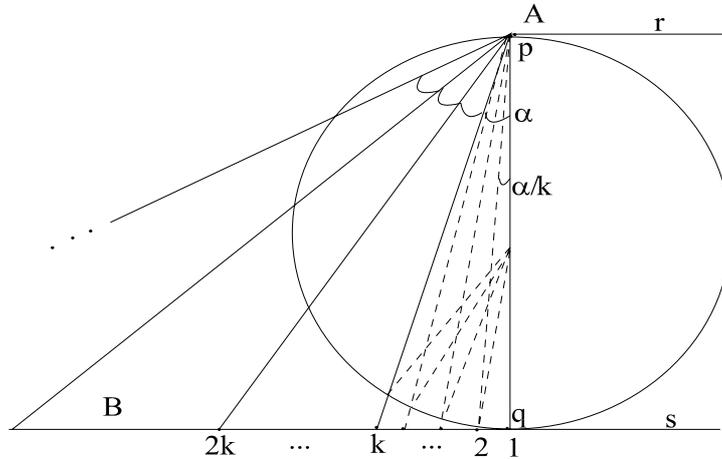


Figura 4.11: Los puntos de  $A$  están concentrados a la derecha de  $p$  y los de  $B$  distribuidos como en la figura.

El número de puntos es  $n$ , luego para cierta  $t$ ,  $|A| = n - k - t$  y  $|B| = k + t$ . El número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $(n - k - t)t$  pues para cada punto de  $A$  se pueden construir  $t(k - 1)$ -sets de puntos contiguos en  $B$  (si contamos a los puntos extremos de  $B$  formando parte de algún  $(\alpha, k)$ -set, entonces son  $t + 2$  sin que ello modifique los resultados establecidos a continuación). Debemos buscar el valor de  $t$  para maximizar el número de  $(\alpha, k)$ -sets, teniendo en cuenta la restricción:  $|B| = k + t \leq \frac{k\pi}{\alpha}$ , esto es,  $t \leq k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)$ . El número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $(n - k - t)t$ , una función parabólica en  $t$  ( $0 \leq t \leq n - k$ ) que tiene su máximo en  $t = \frac{n - k}{2}$ .

Si la cota superior de  $t$ ,  $k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)$ , es mayor o igual al máximo de la función parabólica,  $\frac{n - k}{2}$ , esto es si  $\alpha \leq \frac{2k\pi}{n + k}$ , entonces podemos tomar  $t = \frac{n - k}{2}$  alcanzando el número máximo de  $(\alpha, k)$ -sets  $\Omega((n - k)^2)$ . Obsérvese que en este caso, como  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  resulta  $k < \frac{n}{3}$ .

Si  $k(\frac{\pi}{\alpha} - 1) < \frac{n - k}{2}$ , esto es si  $\alpha > \frac{2k\pi}{n + k}$ , no podemos alcanzar el máximo de la función parabólica pero el máximo número de  $(\alpha, k)$ -sets lo obtendremos tomando la mayor  $t$  posible en este caso, es decir  $t = k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)$ , por lo que el número de  $(\alpha, k)$ -sets

es  $\Omega(k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)(n - \frac{k\pi}{\alpha}))$ . □

### 4.2.1. Algoritmo de construcción

Nos ocupamos ahora del problema de la enumeración de todos los  $(\alpha, k)$ -sets, con  $\alpha$  y  $k$  fijos.

Por el lema 4.1.2 y el teorema 4.2.1, se tiene que todo  $(\alpha, k)$ -set es separable por una  $\alpha$ -cuña en la que una de las rectas que la define pasa por dos puntos de la nube. Tales rectas se toman como  $k'$ -rectas, ( $k' \geq k$ ).

Dada una nube  $S$  de  $n$  puntos, la obtención de todos los  $(\alpha, k)$ -sets, con  $\alpha$  y  $k$  fijos puede realizarse según el siguiente algoritmo:

#### Algoritmo 4.2.1. $(\alpha, k)$ -SETS CON $\alpha$ FIJA Y $k$ FIJA ( $\alpha k F$ )

*Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos:*

1. *Obtener las  $O(n^2)$  rectas orientadas  $r_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , pasando por los pares de puntos de  $S$ .*
2. *Para cada  $r_{ij}$ , identificar qué puntos de  $S$  quedan en el semiplano derecho, definiendo el conjunto  $S_{ij}^+$ .*

*Seleccionar  $k$  puntos arbitrarios de  $S_{ij}^+$  y ordenarlos según a un barrido con una de las dos rectas que forma ángulo  $\alpha$  con  $r_{ij}$  (análogamente con la otra recta). Sean  $p_1, \dots, p_k$  el conjunto de los  $k$  puntos ordenados según el criterio anterior.*

*Para cada punto  $p$  de  $S_{ij}^+$ , analizar su posición relativa con el conjunto de  $k$  puntos ordenados que se tiene y que inicialmente es  $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_k$ , siendo  $\leq$  el orden de barrido anterior. Los pasos a seguir son:*

- 2.1. *Si  $p \leq p_k$ , eliminar  $p_k$  y realizar una búsqueda binaria para la inserción de  $p$  en el conjunto. El nuevo conjunto tiene  $k$  puntos ordenados a los que volvemos a notar por  $p_1, \dots, p_k$ .*
- 2.2. *Si  $p \geq p_k$ , proceder al análisis de otro punto de  $S_{ij}^+$ . Si no quedan más puntos, el conjunto resultante de puntos ordenados son los  $k$  primeros puntos de  $S_{ij}^+$ , según a un barrido con una recta que forma ángulo  $\alpha$  con  $r_{ij}$ .*

*De este modo se obtienen los  $(\alpha, k)$ -sets asociados a  $r_{ij}$ .*

3. *Eliminar los  $(\alpha, k)$ -sets repetidos.*

*Coste del algoritmo 4.2.1:* En el paso 2, la identificación del conjunto  $S_{ij}^+$  es  $O(n)$ . Para cada recta orientada  $r_{ij}$ , se seleccionan  $k$  puntos arbitrarios de  $S_{ij}^+$  y se ordenan en  $O(k \log k)$ . Recorriendo la lista de puntos de  $S_{ij}^+$ ,  $O(n)$ , mediante la correspondiente inserción y borrado si éstos son precisos,  $O(\log k)$ , se obtiene el conjunto de

los  $k$  primeros de  $S_{ij}^+$  según el barrido de una de las dos rectas que forma ángulo  $\alpha$  con  $r_{ij}$  en  $O(n \log k)$ . Análogamente se procede con la otra recta. Esta tarea de coste  $O(k \log k + n \log k)$  se realiza para cada recta  $r_{ij}$  luego supone un coste total de  $O(n^3 \log k)$ .

En el paso 3, el número de  $k$ -sets obtenidos es  $O(n^2)$ . Con objeto de eliminar los  $(\alpha, k)$ -sets repetidos, ordenamos cada  $(\alpha, k)$ -set lexicográficamente en tiempo  $O(n^2 k \log k)$  y después los ordenamos entre sí eliminando los repetidos en  $O(n^2 k \log n)$ . Luego el coste del algoritmo es  $O(n^3 \log k) + O(n^2 k \log n) = O(n^3 \log k)$ .

**Proposición 4.2.3.** *Sea  $S$  una nube de  $n$  puntos. El coste de obtención de un  $(\alpha, k)$ -set de  $S$  es  $O(n \log k)$ .*

*Demostración.* Considérese una recta cualquiera pasando por dos puntos de la nube. En  $O(n)$  se establece qué semiplano, definido por la anterior recta, contiene al menos  $k$  puntos. Se procede a la aplicación del algoritmo  $\alpha FkF$ , para dicha recta y semiplano (paso 2) con coste  $O(n \log k)$ .

Se ha obtenido un  $(\alpha, k)$ -set de  $S$  en  $O(n \log k)$ .

□

### 4.3. $(\alpha, k)$ -sets con $\alpha$ fija y $k$ variable

En esta sección estudiamos los  $(\alpha, k)$ -sets en el caso en que el parámetro  $\alpha$  es fijo y el  $k$  variable. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de  $(\alpha, k)$ -sets y mostramos un algoritmo que genera todos los  $(\alpha, k)$ -sets de una nube de puntos.

**Teorema 4.3.1.** (Cota superior) *El número de  $(\alpha, k)$ -sets, con  $\alpha$  fija y  $k$  variable, es a lo sumo  $O(n^3)$ .*

*Demostración.* Por el lema 4.1.2 sabemos que todo  $(\alpha, k)$ -set puede obtenerse de un  $k'$ -set con  $k' \geq k$ . El número de  $k'$ -sets con  $k'$  variable es a lo más  $O(n^2)$ , ya que cada  $k'$ -set viene definido por una recta que pasa por dos puntos de la nube. Basta ahora observar que para cada  $k'$ -set a lo sumo pueden obtenerse  $O(n)$   $(\alpha, k)$ -sets con  $\alpha$  fijo y  $k$  variable. Por tanto, la cota superior obtenida es  $O(n^3)$ . □

**Observación.** Nótese que utilizando el resultado de Dey sobre la cota superior del número de  $k'$ -sets, esto es,  $nk'^{1/3}$  y haciendo  $k'$  variable, el número total de  $k'$ -sets sería a lo más  $n^{7/3}$ . Además, si de cada  $k'$ -set se obtienen  $k'$   $(\alpha, k)$ -sets, entonces el número total de  $(\alpha, k)$ -sets con  $k$  variable sería a lo más  $n^{10/3}$ .

**Teorema 4.3.2.** (Cota inferior) *El número de  $(\alpha, k)$ -sets, con  $\alpha$  fija y  $k$  variable, es al menos  $\Omega(n^3)$ .*

*Demostración.* A continuación se construye un ejemplo en el que se alcanza la cota. Se consideran dos rectas paralelas horizontales cortadas por una tercera recta formando un ángulo igual al mínimo entre  $\alpha$  y  $\pi - \alpha$  (figura 4.12). Se situúan  $\frac{n}{2}$  puntos en la recta superior a la derecha de la recta secante (conjunto  $A$ ), y otros tantos en la recta inferior a la izquierda de la recta secante (conjunto  $B$ ) (figura 4.12). Para cada intervalo  $A'$  de  $t$  puntos de  $A$ ,  $0 \leq t \leq k$ , sea  $p_i$  el punto anterior al primero de  $A'$  y  $p_j$  el posterior al último. Considérese el arco capaz de ángulo  $\alpha$  y extremos  $p_i$  y  $p_j$ .

El ángulo tomado para la recta secante nos asegura que con vértice próximo a  $p_i$  se tiene una cuña conteniendo todos los puntos de  $A'$  y ninguno de  $B$  y, con vértice en  $p_j$  se tiene otra cuña con todos los de  $A'$  y todos los de  $B$ . De este modo, por continuidad, se asegura la existencia de una cuña de ángulo  $\alpha$ , con vértice en el arco capaz, tal que contiene  $t$  puntos de  $A$ , los de  $A'$ , y  $k-t$  de  $B$ . El número de  $(\alpha, k)$ -sets obtenidos es:

$$\sum_{t=0}^k \left( \frac{n}{2} - (t-1) \right) = k \frac{n+1}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{n+2}{2}$$

Dado que  $k$  no era fija, la suma para todos sus posibles valores es:

$$\sum_{k=0}^{n/2} k \frac{n+1}{2} - \frac{k^2}{2} + \frac{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+3)^2}{24}$$

Es decir, el número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $\Omega(n^3)$ . □

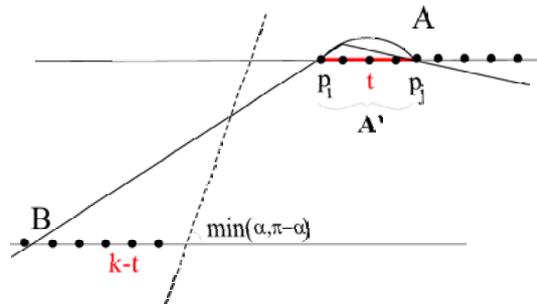


Figura 4.12: La  $\alpha$ -cuña con vértice en el arco capaz de ángulo  $\alpha$  y extremos  $p_i, p_j$ , contiene  $t$  puntos de  $A$  y  $k-t$  de  $B$ .

A partir de los teoremas 4.3.1 y 4.3.2, se deduce el siguiente resultado.

**Corolario 4.3.3.** *El número máximo de  $(\alpha, k)$ -sets con  $\alpha$  fija y  $k$  variable es  $\Theta(n^3)$ .*

### 4.3.1. Algoritmo de construcción

Dada una nube  $S$  de  $n$  puntos, la obtención de todos los  $(\alpha, k)$ -sets, con  $\alpha$  fija y  $k$  variable puede realizarse según el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 4.3.1.**  $(\alpha, k)$ -SETS CON  $\alpha$  FIJA Y  $k$  VARIABLE ( $\alpha FkV$ )

*Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos:*

1. *Obtener las  $O(n^2)$  rectas orientadas  $r_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , pasando por los pares de puntos de  $S$ .*

2. *Para cada  $r_{ij}$ , identificar qué puntos de  $S$  quedan en el semiplano derecho, definiendo el conjunto  $S_{ij}^+$ .*

*Se consideran las dos rectas que forman ángulo  $\alpha$  con  $r_{ij}$ ,  $l'_{ij}, l''_{ij}$ . Los puntos de  $S_{ij}^+$  se ordenan mediante un barrido de la recta  $l'_{ij}$  (análogamente con  $l''_{ij}$ ). Obtener los  $(\alpha, k)$ -sets asociados a  $r_{ij}$ , donde  $k$  irá variando desde uno hasta el cardinal del conjunto  $S_{ij}^+$ .*

3. *Eliminar los  $(\alpha, k)$ -sets repetidos.*

*Coste del algoritmo 4.2.1:* En el paso 2, la identificación del conjunto  $S_{ij}^+$  es  $O(n)$ . Para cada conjunto  $S_{ij}^+$ , la ordenación de sus puntos según a un barrido con una de las dos rectas ( $l'_{ij}$  o  $l''_{ij}$ ) es  $O(n \log n)$ . Dado que  $k$  es variable, cada conjunto  $S_{ij}^+$  genera a lo más  $O(n)$   $(\alpha, k)$ -sets. El paso 2 se realiza para cada una de las rectas  $r_{ij}$  y el número total de  $(\alpha, k)$ -sets obtenidos es  $O(n^2)O(n) = O(n^3)$ . Podemos generar los  $(\alpha, k)$ -sets correspondientes a una misma recta en una lista ordenada que contenga los puntos de  $S_{ij}^+$  ordenados según un barrido de la recta  $l'_{ij}$  (o  $l''_{ij}$ ). De esta manera, el  $(\alpha, k)$ -set de tamaño  $m$  estaría formado por los primeros  $m$  puntos. Bastaría una estructura de tamaño  $O(n^3)$  para almacenar todos los  $(\alpha, k)$ -sets (aunque no elimina las posibles repeticiones) y que requiere tiempo  $O(n^3 \log n)$ .

En el paso 3, con el objeto de eliminar los  $(\alpha, k)$ -sets repetidos y generarlos separadamente según su tamaño, procedemos de la siguiente manera. Almacenamos los  $(\alpha, k)$ -sets en listas separadas según el tamaño del  $(\alpha, k)$ -set. Dado que los  $(\alpha, k)$ -sets pueden ser de cualquier tamaño (entre 1 y  $n$ ), tendremos  $n$  listas. Cada uno de los  $(\alpha, k)$ -sets generados se ordena lexicográficamente. Mantendremos también cada lista ordenada lexicográficamente de forma que la inserción de un nuevo  $(\alpha, k)$ -set dentro de una lista pueda efectuarse eficientemente.

Los a lo más  $n$   $(\alpha, k)$ -sets generados por una recta orientada se ordenan cada uno de ellos lexicográficamente en tiempo total  $O(n^2 \log n)$ . Estos se insertan en las listas correspondientes a cada tamaño (si no aparecen en ellas) en tiempo total  $O(n^2 \log n)$ . Este proceso se realiza para cada recta orientada, por tanto, el coste total en tiempo es  $O(n^2(n + n \log n + 2n^2 \log n)) = O(n^4 \log n)$ . Nótese que el espacio usado es  $O(n^4)$ .

#### 4.4. $(\alpha, k)$ -sets con $\alpha$ variable y $k$ fija

En esta sección estudiamos los  $(\alpha, k)$ -sets en el caso en que el parámetro  $\alpha$  es variable y el  $k$  fijo. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de  $(\alpha, k)$ -sets y mostramos un algoritmo que genera todos los  $(\alpha, k)$ -sets de una nube de puntos.

Una primera cota superior para este caso se obtiene de la siguiente manera. Recordemos que cualquier  $(\alpha, k)$ -set puede obtenerse de un  $k'$ -set de  $S$  con  $k' \geq k$ . Aplicando esta observación y la cota superior conocida para el número de  $k$ -sets de un conjunto  $S$  de  $n$  puntos, se obtiene una cota superior de  $(\alpha, k)$ -sets. Esto es, para cada subconjunto de cardinal  $t$ ,  $k \leq t \leq n$  de  $S$  se tienen, como mucho,  $nt^{1/3}$   $t$ -sets; sumando sus posibles  $k$ -sets resulta

$$\sum_{t=k}^n nt^{1/3}(tk^{1/3}) = O(n^{10/3}k^{1/3}).$$

En el caso de ser  $k = \theta(n)$ , el anterior cálculo da una cota superior de  $(\alpha, k)$ -sets  $O(n^{11/3})$ . Sin embargo, la cota superior puede ajustarse más como demuestra el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.1.** (Cota superior) *El número de  $(\alpha, k)$ -sets, para  $\alpha$  variable y  $k$  fijo es como mucho  $O(n^3k^{1/3})$ .*

*Demostración.* Cualquier  $(\alpha, k)$ -set puede obtenerse de un  $k'$ -set de  $S$  con  $k' \geq k$ . El orden de éstos es  $O(n^2)$  y, cada uno de ellos tiene, a lo sumo,  $n$  elementos. Luego  $O(n^2nk^{1/3}) = O(n^3k^{1/3})$  es la cota superior de  $(\alpha, k)$ -sets obtenida.  $\square$

**Teorema 4.4.2.** (Cota inferior) *El número de  $(\alpha, k)$ -sets, para  $\alpha$  variable y  $k$  fijo es al menos de  $\Omega(n^2k)$ .*

*Demostración.* Construimos un conjunto de  $n$  puntos alcanzando dicha cota. Se consideran dos rectas paralelas situando  $\frac{n}{2}$  puntos sobre cada una de ellas (figura 4.13). Los  $(\alpha, k)$ -sets se obtienen separando  $i$  puntos consecutivos de la primera recta y  $(k - i)$  de la segunda con una  $\alpha$ -cuña,  $\alpha$  variable.

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^{k-1} \left( \binom{\frac{n}{2} - t + 1}{t} \binom{\frac{n}{2} - k + t + 1}{k - t} \right) + 2 \binom{\frac{n}{2} - k + 1}{k} &= \\ &= n^2k - nk^2 + k^3 = \Omega(n^2k). \end{aligned}$$

De este modo resultan  $\Omega(n^2k)$   $(\alpha, k)$ -sets diferentes.

**Observación.** Una disposición circular de los puntos no modifica el orden asintótico del número de  $(\alpha, k)$ -sets. Recuérdese que en el caso de  $\alpha$  y  $k$  fijos, (teorema 4.2.5) se obtenían  $\Omega(n(n - k + 1))$   $(\alpha, k)$ -sets para un conjunto de puntos situados sobre

una circunferencia, repartiéndose los  $k$  puntos en dos conjuntos de cardinal fijo, función de  $\alpha$ ; ahora bien, si  $\alpha$  es variable, los dos conjuntos de puntos pueden ser de cualquier cardinal con suma igual a  $k$ , de modo que el número de  $(\alpha, k)$ -sets es ahora  $\Omega(kn(n - k + 1))$ .

□

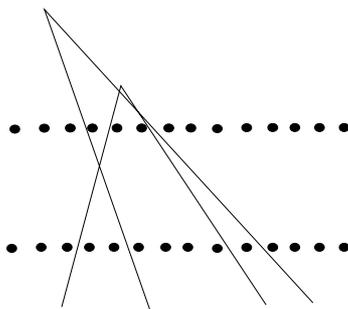


Figura 4.13: En la figura, para  $k = 8$  se muestran dos  $(\alpha, 8)$ -sets con ángulos distintos ( $\alpha$  variable).

#### 4.4.1. Algoritmo de construcción

Por el teorema 4.2.1, todo  $(\alpha, k)$ -set está asociado a una recta  $r$  pasando por dos puntos de  $S$ . Si se considera una de estas rectas, al ser  $\alpha$  variable, cualquier  $k$ -set de los puntos que quedan a un lado de la misma es un  $(\alpha, k)$ -set y recíprocamente, cualquier  $(\alpha, k)$ -set tal que una de sus semirrectas está contenida en  $r$  es un  $k$ -set de una de las dos nubes que define  $r$ .

Así pues, en primer lugar se describe un algoritmo general para la obtención de los  $k$ -sets de una nube de puntos  $M$ . La enumeración de  $k$ -sets es equivalente a la obtención del  $k$ -nivel en el arreglo dual. Un primer algoritmo para su obtención, sensible a la salida, fue dado por Edelsbrunner y Welz en [EW](86) con coste en tiempo  $O(n \log n + b \log^2 n)$ , donde  $b$  es el tamaño de la salida (luego  $b \leq n \sqrt[k]{k}$  máxima complejidad del  $k$ -nivel) y coste en espacio  $O(n + b)$ . Cole, Sharir y Yap en [CSY](87) calculan una  $k$ -hull, o región de separabilidad  $k$ , en  $O(n \log n + b \log^2(k + 1))$ , mejorando el anterior algoritmo para  $k$  pequeña. Agarwal et al. en [AMB](94) obtienen un algoritmo de tiempo esperado  $O(n \sqrt{(k + 1) \log n} + n \log^2 n)$ . Andrzejak y Fukuda en [AF](99) presentan un algoritmo más fácil de implementar que los anteriores, de memoria eficiente pero de mayor coste en tiempo:  $O(n^2 k^{1/3} \log n)$ .

El siguiente algoritmo construye los  $(\alpha, k)$ -sets, con  $k$  fija y  $\alpha$  variable de una nube de puntos. Dada una nube de  $n$  puntos  $S$ :

**Algoritmo 4.4.1.**  $(\alpha, k)$ -SETS CON  $\alpha$  VARIABLE Y  $k$  FIJA ( $\alpha v k F$ )

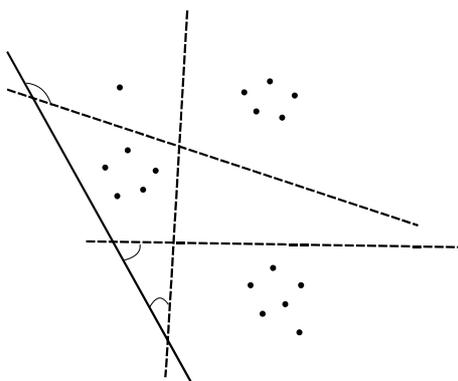


Figura 4.14: Considerando la nube de puntos situados a un lado de una recta, cualquier  $k$ -set es un  $(\alpha, k)$ -set ( $\alpha$  variable) contenido en una cuña con un lado sobre dicha recta, y viceversa.

Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos:

1. Obtener las  $O(n^2)$  rectas orientadas  $r_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ , pasando por los pares de puntos de  $S$ .
2. Para cada  $r_{ij}$ , identificar qué puntos de  $S$  quedan en el semiplano derecho, definiendo el conjunto  $S_{ij}^+$ .  
Para cada uno de los conjuntos  $S_{ij}^+$ , aplicar un algoritmo de obtención de  $k$ -sets. Éstos son todos los posibles  $(\alpha, k)$ -sets con  $\alpha$  variable y  $k$  fija.
3. Eliminar los  $(\alpha, k)$ -sets repetidos.

*Coste del algoritmo 4.4.1:* En el paso 2, para cada recta  $r_{ij}$ , la identificación del conjunto  $S_{ij}^+$  es  $O(n)$  y para cada conjunto  $S_{ij}^+$ , la construcción de los  $k$ -sets  $O(n \log n + b \log^2(k+1))$ , (donde  $b \leq n \sqrt[3]{k}$ ), aplicando el algoritmo de Cole et al. [CSY](87). El paso 2 se realiza para cada recta  $r_{ij}$ , por tanto, supone un coste  $O(n^2)O(n \log n + b \log^2(k+1))$ . El algoritmo genera un número máximo de  $O(nk^{1/3})$   $k$ -sets por recta, en total  $O(n^3k^{1/3})$ . En el paso 3, la eliminación de los  $k$ -sets repetidos, previa ordenación de los mismos, cuesta  $O(n^3k^{4/3} \log n)$ . Luego el coste total del algoritmo es:

$$O(n^2)O(n \log n + b \log^2(k+1)) + O(n^3k^{4/3} \log n) = O(n^3k^{4/3} \log n).$$

## 4.5. $(\alpha, k)$ -sets con $\alpha$ variable y $k$ variable

En esta sección estudiamos los  $(\alpha, k)$ -sets en el caso en que los parámetros  $\alpha$  y  $k$  son variables. Determinamos cotas superiores e inferiores del número máximo de

$(\alpha, k)$ -sets y mostramos un algoritmo que genera todos los  $(\alpha, k)$ -sets de una nube de puntos.

**Teorema 4.5.1.** (Cota superior) *El número de  $(\alpha, k)$ -sets es a lo sumo  $O(n^4)$ .*

*Demostración.* En el lema 4.1.2 vimos que todo  $(\alpha, k)$ -set puede obtenerse de un  $k'$ -set,  $k' \geq k$ . Sin fijar  $k$  se tienen  $O(n^2)$   $k$ -sets. Los conjuntos que estamos calculando son  $(\alpha, k)$ -sets con  $\alpha$  y  $k$  variables. Toda recta pasando por dos puntos determina un  $k$ -set del cual, como mucho, se pueden obtener  $O(n^2)$   $(\alpha, k)$ -sets diferentes. Luego la cota superior obtenida es  $O(n^4)$ .  $\square$

**Teorema 4.5.2.** (Cota inferior) *El número de  $(\alpha, k)$ -sets es al menos  $\Omega(n^4)$ .*

*Demostración.* A continuación construimos un ejemplo en el que se alcanza la cota. Se consideran dos rectas paralelas sobre cada una de las cuales se sitúan  $\frac{n}{2}$  puntos (figura 4.15). Para cada pareja de puntos sobre una misma recta, además de ellos se toma el conjunto de puntos comprendidos entre ambos. Juntando las parejas de conjuntos así formados, uno sobre cada recta, obtenemos un  $(\alpha, k)$ -set diferente ( $\alpha$  y  $k$  variables). En cada recta hay tantos subconjuntos posibles como parejas de puntos,  $O((n/2)^2)$ . Luego considerando ambas rectas,  $O(n^4)$ .  $\square$

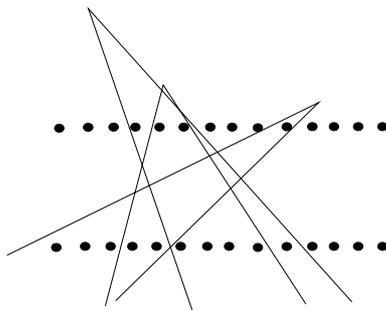


Figura 4.15: Los  $(\alpha, k)$ -sets se construyen tomando puntos consecutivos sobre ambas rectas, siendo  $\alpha$  y  $k$  variables.

A partir de los teoremas 4.5.1 y 4.5.2, se concluye el siguiente resultado.

**Corolario 4.5.3.** *El número de  $(\alpha, k)$ -sets es  $\Theta(n^4)$ .*

#### 4.5.1. Algoritmo de construcción

Dada una nube  $S$  de  $n$  puntos, la obtención de todos los  $(\alpha, k)$ -sets, con  $\alpha$  y  $k$  variables puede realizarse según se muestra en el siguiente algoritmo:

**Algoritmo 4.5.1.**  $(\alpha, k)$ -SETS CON  $\alpha$  VARIABLE Y  $k$  VARIABLE ( $\alpha v k v$ )

Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos:

1. Obtener las  $O(n^2)$  rectas orientadas  $r_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$   $i \neq j$ , pasando por los pares de puntos de  $S$ .
2. Para cada par de rectas, obtener los cuatro  $(\alpha, k)$ -sets que determinan (véase figura 4.16).
3. Eliminar los  $(\alpha, k)$ -sets repetidos.

*Coste del algoritmo 4.5.1:* Se tienen  $O(n^4)$  pares de rectas. En  $O(n)$  se obtienen los cuatro  $(\alpha, k)$ -sets que determina cada par de rectas. Por tanto se generan los  $O(n^4)$   $(\alpha, k)$ -sets en tiempo  $O(n^5)$ . Para eliminar los repetidos, se ordena cada  $(\alpha, k)$ -set lexicográficamente en tiempo  $O(n \log n)$  y a continuación se ordenan lexicográficamente entre sí, eliminando repeticiones, en tiempo  $O(n^5 \log n)$ . Luego el coste total es  $O(n^5 \log n)$ .

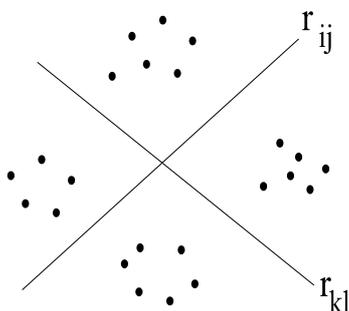


Figura 4.16: Cada par de rectas determina 4  $(\alpha, k)$ -sets con  $\alpha$  y  $k$  variables.

## 4.6. Conclusiones

En la siguiente tabla se resumen las cotas obtenidas en cada uno de los casos, según los valores de  $\alpha$  y  $k$ . Asimismo se muestran los costes de los diferentes algoritmos generadores de los  $(\alpha, k)$ -sets.

		Cota sup.	Cota inf.	Algoritmo
$\alpha$ F $k$ F $k$ impar	$\frac{\pi}{n} < \alpha \leq \frac{k\pi}{n}$	$O(n^2)$	$\Omega(n(n - k + 1))$	$O(n^3 \log k)$
$\alpha$ F $k$ F $k$ par	$\alpha \leq \frac{k\pi}{n}$	"	"	"
$\alpha$ F $k$ F	$\frac{k\pi}{n} \leq \alpha \leq \frac{2k\pi}{n+k} < \frac{\pi}{2}$	"	$\Omega((n - k)^2)$	"
$\alpha$ F $k$ F	$\frac{2k\pi}{n+k} < \alpha < \frac{\pi}{2}$	"	$\Omega(k(\frac{\pi}{\alpha} - 1)(n - \frac{k\pi}{\alpha}))$	"
$\alpha$ F $k$ V		$O(n^3)$	$\Omega(n^3)$	$O(n^4 \log n)$
$\alpha$ V $k$ F		$O(n^3 k^{1/3})$	$\Omega(n^2 k)$	$O(n^3 k^{4/3} \log n)$
$\alpha$ V $k$ V		$O(n^4)$	$\Omega(n^4)$	$O(n^5 \log n)$

Nótese que en los casos en que la  $k$  es variable las cotas superior e inferior son ajustadas y el coste de obtención de los correspondientes  $(\alpha, k)$ -sets tiene un factor logarítmico con respecto al espacio utilizado para generarlos debido a la eliminación de los repetidos.