

## Capítulo 3

# Separabilidad

Tukey definió la profundidad de un punto relativa a una nube dada, como el menor número de puntos de la nube contenidos en un semiplano cerrado cuya frontera pasa por el punto [Tu](75). A este peso nosotros le hemos llamado separabilidad lineal. En la sección 3.1 se dan algunas definiciones. En la sección 3.2 se estudia la separabilidad lineal: las propiedades geométricas y combinatorias en el apartado 3.2.1, se definen las capas y los niveles en los apartados 3.2.2 y 3.2.3, se presentan algoritmos en 3.2.4 y, en el apartado 3.2.5 se tratan las estructuras de separabilidad lineal mínima. Por último, en la sección 3.3, se introducen otros pesos relativos a la separación con cuñas: la dominación isotética y la separabilidad  $\alpha$ .

### 3.1. Introducción

En el primer capítulo se define el peso de un punto en función de la estructura de capas convexas en la que se distribuye la nube a la que pertenece. En este caso el peso coincide con el número de capa en la que se sitúa y, por tanto, da idea de su *interioridad*. A continuación analizamos otra medida del peso de un punto, a la que llamamos separabilidad lineal, que nos da idea de su posición relativa en la nube o *centralidad*.

Esta noción de profundidad de un punto relativa a una nube dada, fue introducida por Tukey en [Tu](75), como el menor número de puntos de  $S$  contenidos en un semiplano cerrado cuya frontera pasa por el punto.

Recordemos las siguientes definiciones con las que este peso está relacionado.

**Definición 3.1.1.** *Dado un conjunto finito de puntos  $S \subset R^d$ , un  $k$ -set de  $S$  es la intersección de  $S$  y un semiespacio abierto  $H$ , con  $S \cap H$  de cardinal  $k$ .*

**Definición 3.1.2.** *Una  $k$ -recta de  $S$  es una recta orientada que deja en el semiplano abierto derecho exactamente  $k$  puntos de  $S$ .*

Así pues, un  $k$ -set de  $S$  es un subconjunto de  $S$  con cardinal  $k$ , separable del resto por una  $k$ -recta de  $S$ .

Con esta terminología, dada una nube de puntos  $S$  definimos la separabilidad lineal relativa a  $S$  de un punto del plano, en función de si es un punto de  $S$  o no.

**Definición 3.1.3.** Un punto  $p$  de  $S$  tiene separabilidad lineal  $k$  ( $W_S(p) = k$ ) si y sólo si pertenece a un  $k$ -set de  $S$  y no pertenece a un  $(k - 1)$ -set de  $S$ .

La separabilidad lineal de un punto del plano que no sea de  $S$ , la hemos definido como su nivel respecto de  $S$  (definición 2.2.2), esto es,  $W_S(p) = W_S(p, S)$ .

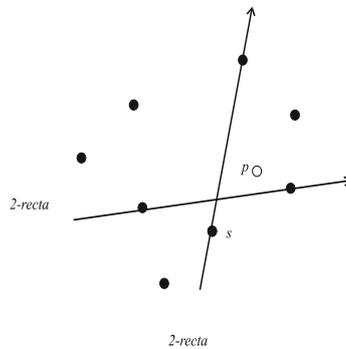


Figura 3.1: El punto  $s$  pertenece a  $S$ , el punto  $p$  no. Ambos puntos son separables del resto por una 2-recta de  $S$ , pero  $W_S(s) = 2$  y  $W_S(p) = 3$ .

**Definición 3.1.4.** Dada la nube de puntos del plano  $S$ , la región de separabilidad lineal mayor o igual a  $k$   $S_{\geq k}$  es el lugar geométrico de los puntos de separabilidad lineal  $k$  o más.

Sea  $S_k = S_{\geq k} \setminus S_{\geq k+1}$ , esto es, el lugar geométrico de los puntos de separabilidad lineal exactamente  $k$ .

La frontera de la región a la que hemos notado por  $S_{\geq k}$  es también conocida como  $k$ -envolvente,  $k$ -hull o  $k$ -th depth contour en la literatura de la Geometría Computacional. En [CSY](87) Cole, Sharir y Yap definen  $k$ -hull como el conjunto de puntos  $p$  tales que para cualquier hiperplano conteniendo a  $p$  hay al menos  $k$  puntos de  $S$  en cada uno de los semiespacios cerrados determinados por el hiperplano.

Al final del capítulo, en la sección 3.3, se definen otros pesos relacionados con la separabilidad de los puntos mediante cuñas: la dominación isotética y la separabilidad  $\alpha$ . Este último peso, la separabilidad  $\alpha$ , tiene a la separabilidad lineal como caso particular ( $\alpha = \pi$ ).

## 3.2. Separabilidad lineal

En esta sección estudiamos las propiedades de la separabilidad lineal asociada a conjuntos de puntos del plano,  $S$ . La separabilidad lineal de un punto con respecto a  $S$  está relacionada con el mínimo número de puntos de  $S$  que hay que eliminar para que el punto pase a estar en la envolvente convexa (es dicho valor más una unidad).

En esta sección usaremos el término más breve de *separabilidad* para referirnos a la separabilidad lineal.

### 3.2.1. Propiedades geométricas y combinatorias

Estudiamos la separabilidad que puede tener un punto analizando su posición frente a las capas convexas,  $C\text{-Lay}_i(S)$ . Buscamos la ubicación de los puntos de separabilidad  $i$ , en una nube de puntos dada.

**Proposición 3.2.1.** *En una nube de puntos  $S$ , los puntos de  $S$  de separabilidad igual a  $i$  están, a lo sumo, en la capa  $C\text{-Lay}_i(S)$ .*

*Demostración.* Cualquier semiplano abierto pasando por un punto de la nube contiene como mínimo un punto de cada capa más externa (puesto que son convexas y cada capa contiene a sus siguientes). Luego si el punto es de separabilidad  $i$ , no puede estar en una capa de orden mayor a  $i$ .  $\square$

**Proposición 3.2.2.** *En una nube de puntos  $S$ , los puntos de  $S$  de separabilidad  $i$ , están en posición convexa. Además, los puntos situados en su envolvente convexa o en su interior no pueden tener una separabilidad menor.*

*Demostración.* Supóngase que se tienen  $m$  puntos de la nube, en posición convexa, de separabilidad  $i$ . Supóngase que hay otro punto  $p$  de  $S$  situado en el interior del convexo formado por los anteriores, esto es, en posición no convexa. Si este nuevo punto fuera de separabilidad  $i$ , existiría una  $i - 1$ -recta pasando por  $p$ . Alguno de los puntos iniciales (sea  $v_i$ ) estaría en el semiplano abierto definido por la  $i - 1$ -recta. Hagamos pasar por  $v_i$  una recta orientada paralela a la anterior  $i - 1$ -recta. En su semiplano abierto derecho hay a lo sumo  $i - 2$  puntos. Por tanto,  $v_i$  no sería de separabilidad  $i$ , en contradicción con la hipótesis inicial.

Luego los puntos de separabilidad  $i$  han de estar en posición convexa.

Razonando de forma análoga, los puntos situados en la envolvente convexa o el interior del conjunto de puntos de  $S$  de separabilidad  $i$ , no pueden tener separabilidad menor.  $\square$

### 3.2.2. Capas de separabilidad

Las capas están formadas por los puntos de  $S$  del mismo peso y se definen de forma análoga al caso del peso por capas convexas.

**Definición 3.2.1.** Las capas de separabilidad de una nube de puntos  $S$  se definen como las envolventes convexas de los puntos de  $S$  del mismo peso, esto es,  $S\text{-Lay}_i(S) = CH(S_i)$  donde  $S_i = \{p \in S / W_S(p) = i\}$ .

De la propia definición del peso en el caso de la separabilidad, se observa que la profundidad de un punto relativa a  $S$  puede tomar valores entre 1 y  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ , donde  $n$  es el cardinal de  $S$ . Como consecuencia del teorema de Helly, puede verse que el valor máximo de la separabilidad de un punto respecto a  $S$ , no puede ser inferior a  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ . Por tanto, el valor máximo de la separabilidad puede estar comprendido entre los valores  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  y  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ . El valor  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  se alcanza para un punto no perteneciente a  $S$ , respecto del cual  $S$  es simétrico (véase un ejemplo en la figura 3.2); si dicho punto pertenece a  $S$  y tenemos en  $S$  puntos de todos los pesos, podemos obtener ejemplos con  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  número de capas. El valor  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  se alcanza en un punto situado en el interior de la última capa convexa, para el caso de una nube de puntos dispuestos en capas triangulares; si el punto es de  $S$  entonces tenemos un ejemplo con  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  capas de separabilidad.

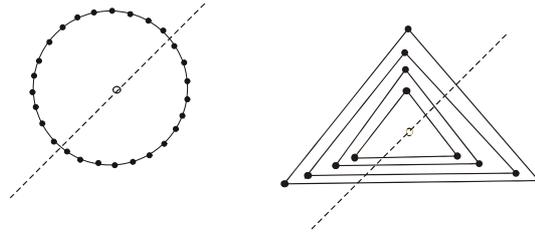


Figura 3.2: A la izquierda, punto de separabilidad máxima igual a  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ . A la derecha punto de separabilidad máxima igual a  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ .

El número de capas en el peso de la separabilidad puede variar entre  $\lceil \frac{n}{3} \rceil$  y  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  pero su complejidad es lineal.

Hemos visto, en la proposición 3.2.2, que los puntos de la capa  $i$ ,  $S\text{-Lay}_i(S)$ , están en posición convexa (figura 3.3). Puede ocurrir que una capa de separabilidad tenga menos de tres puntos. En el caso de que no haya puntos de separabilidad  $i$  con  $i < k$ , donde  $k$  es la profundidad de la nube, decimos entonces que no existe la capa  $S\text{-Lay}_i(S)$ , o que es vacía (por ejemplo en la figura 3.3 no hay puntos de  $S$  de separabilidad 6). Algunas capas pueden cortarse entre sí (en la figura 3.3  $S\text{-Lay}_3(S)$  corta a  $S\text{-Lay}_5(S)$ ).

### 3.2.3. Niveles de separabilidad

En esta sección estudiamos los niveles de separabilidad para conjuntos de puntos en el plano. Recordemos que el nivel de un punto  $q$  con respecto a  $S$  se define como su peso en  $S \cup \{q\}$  (definición 2.2.2), esto es,  $W_S(q, S) = W_S(q)$  en  $S \cup \{q\}$ . El peso

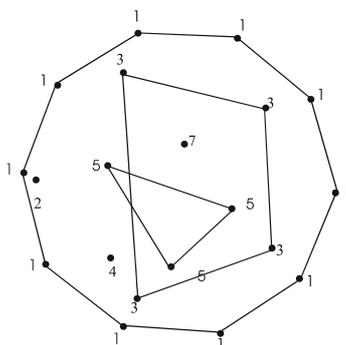


Figura 3.3: Capas de separabilidad (las capas convexas pueden verse en la figura 2.1).

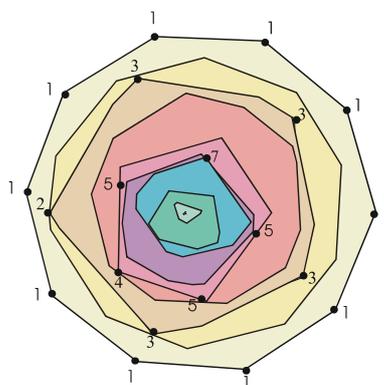


Figura 3.4: Niveles de separabilidad (los niveles convexas pueden verse en la figura 2.1).

divide al plano en regiones en función del nivel de sus puntos, con respecto a una nube dada  $S$ . Notamos por  $S\text{-Lev}_i(S)$  el nivel  $i$ . La región  $S_{\geq k}$  es la unión  $\bigcup_{i \geq k} S\text{-Lev}_i(S)$ .

La mediana, conocida como *Tukey median* en el peso de la separabilidad lineal, se define del siguiente modo:

**Definición 3.2.2.** Dada la nube de puntos del plano  $S$ , la mediana es el punto de nivel máximo con respecto a  $S$ . Cuando el punto no está unívocamente definido, la mediana se toma como el centroide del nivel más profundo.

**Proposición 3.2.3.** El lugar geométrico de los puntos del plano que tienen separabilidad  $k$  o más respecto de una nube de puntos dada  $S$ , esto es  $S_{\geq k}$  con  $k \in \{0, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil\}$ , es un polígono convexo.

*Demostración.* Sean  $x$  e  $y$  dos puntos del plano de separabilidad  $k$  o más, respecto de  $S$ . Sea  $i$  el mínimo de los valores de las separabilidades de  $x$  e  $y$ . Probando que cualquier punto del segmento  $xy$  no puede tener separabilidad menor que  $i$ , se demuestra la convexidad de los puntos que tienen separabilidad  $k$  o más respecto de una nube de puntos dada  $S$ ,  $S_{\geq k}$ .

Supongamos que  $p$ , un punto cualquiera del segmento  $xy$ , tuviera separabilidad  $j$  con  $j < i$ . Existe un semiplano abierto,  $\pi$ , conteniendo exactamente a  $j$  puntos:  $j - 1$  de  $S$  (sin contar  $p$ ) y  $p$  que puede ser o no de  $S$ . O bien  $y$  o bien  $x$  pertenece a dicho  $j$ -set, supongamos sin pérdida de generalidad que se trata de  $y$ . Entonces  $y$  pertenece también a un  $j - 1$ -set con  $j < i$ . Contradicción pues  $y$  era  $k$ -separable con  $k \geq i$ .  $\square$

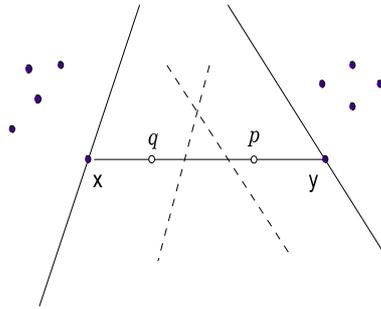


Figura 3.5: Los puntos del interior del segmento  $xy$  no pueden tener una separabilidad inferior al mínimo de las separabilidades de  $x$  e  $y$ .

Nótese que cualquiera de los puntos de la frontera de la región acotada delimitada por todas las  $k$ -rectas de  $S$ , pasando por dos puntos de  $S$ , son puntos de separabilidad  $k + 1$  respecto de  $S$ , ya sean o no pertenecientes a  $S$ . Luego si la profundidad de  $S$  es  $m$ , hay puntos en el plano para todos los valores de separabilidad entre 1 y  $m$ . Además, las correspondientes regiones  $S_{\geq k}$ , forman una sucesión de polígonos convexos encajados  $S_{\geq 1} \supseteq S_{\geq 2} \cdots \supseteq S_{\geq m}$ .

La frontera de los niveles está formada por segmentos de rectas pasando por los puntos de  $S$  de modo que los puntos de  $S\text{-Lay}_i(S)$  están sobre la frontera de  $S\text{-Lev}_i(S)$ . La frontera de  $S\text{-Lev}_i(S)$  puede tener otros vértices que no sean puntos de  $S$ , en cuyo caso, la capa  $S\text{-Lay}_i(S)$  no estaría contenida en la frontera de  $S\text{-Lev}_i(S)$  (véase como ejemplo la figura 3.3 para las capas y 3.4 para los niveles).

La complejidad de los niveles puede ser  $O(n^2)$ . En la siguiente sección veremos un algoritmo óptimo de coste  $O(n^2)$ , para el cálculo de todos los niveles. Las capas de separabilidad pueden obtenerse usando el mismo algoritmo.

### 3.2.4. Algoritmos

En esta sección presentamos algunos algoritmos para el cálculo de la separabilidad y la obtención de todos los niveles para conjuntos de puntos en el plano. Asimismo para el cálculo de la separabilidad de un nuevo punto.

#### Cálculo de la separabilidad

Para el cálculo de la separabilidad de un punto basta un recuento de coste lineal, si es conocido el orden radial de los demás puntos de la nube respecto de él. A priori, este método supone un coste  $O(n \log n)$  para la ordenación radial de cada punto, luego un coste total de  $O(n^2 \log n)$  para  $S$ . Este coste disminuye trabajando en el dual.

Analicemos el concepto de separabilidad en el dual. Para ello, recordemos alguna definición.

Se considera la siguiente dualidad. Una recta  $r : y = ax + b$  se corresponde con el punto  $r^* : (a, b)$  y un punto  $p : (a, b)$  con una recta  $p^* : y = -ax + b$  (véase [Ed](87)).

Una propiedad importante de este paso al dual es que las relaciones verticales entre rectas y puntos se invierten pero se preservan.

La relación entre la pendiente de la recta dual y la coordenada de abscisas del correspondiente punto en el primal (iguales de signo contrario) hace que el orden de las rectas de abajo a arriba en el dual se corresponda a un recorrido de izquierda a derecha de la nube de puntos en el primal.

El orden de las intersecciones de una recta, dual de un punto  $p$  de  $S$ , con las otras  $n - 1$  rectas duales corresponde al orden radial de los  $n - 1$  puntos en el primal alrededor de  $p$ . Es por esta razón que después de construir el arreglo de las  $n$  rectas en el dual [EOS](86), el cálculo de la separabilidad de un punto es  $O(n)$ . En consecuencia, la obtención de la profundidad de  $n$  puntos se consigue en  $O(n^2)$ .

A continuación presentamos un algoritmo para el cálculo de la separabilidad de los puntos de  $S$ , que utiliza la técnica del barrido topológico [EG](89).

Sea  $S$  el conjunto de  $n$  puntos en el plano y  $\mathcal{L}$  el conjunto de sus rectas duales. Denotamos por  $\mathcal{A}(\mathcal{L})$  el arreglo en el dual.

**Definición 3.2.3.** *Un arreglo de rectas es una colección de rectas que inducen una partición en el plano en regiones convexas o caras (conjuntos abiertos), segmentos (abiertos, definidos por los puntos de corte de las rectas) y vértices (dichos puntos de corte).*

Los arreglos de rectas se llaman simples si cada par de rectas interseca exactamente en un punto, esto es, no hay tres rectas pasando por un punto ni dos de ellas son paralelas. Cuando el arreglo no es simple se llama degenerado.

**Definición 3.2.4.** Dado un arreglo de  $n$  rectas,  $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ , el nivel de un punto en el arreglo es igual a  $k$  ( $k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ) si en el recorrido de arriba a abajo (análogamente en sentido contrario) el número de rectas que hay estrictamente por encima (por debajo) de él es  $k$ .

**Definición 3.2.5.** Se define el nivel de una arista del arreglo de rectas, como el nivel común de todos sus puntos internos.

**Definición 3.2.6.** Para un entero no negativo  $k < n$ , el  $k$ -nivel del arreglo de  $n$  rectas es el conjunto de todas las aristas cuyo nivel es  $k$ .

**Proposición 3.2.4.** Sea  $S$  una nube de puntos dada. La separabilidad de un punto de  $S$  es el nivel más pequeño que aparece en la correspondiente recta del arreglo dual, más uno. O exactamente dicho nivel si el punto no es de la nube.

*Demostración.* Se define la separabilidad de un punto de  $S$  como el tamaño del menor  $k$ -set en el que está contenido. Si  $k$  es la separabilidad de un punto de  $S$ , el punto pertenece a un  $k$ -set y no pertenece a un  $k - 1$ -set de  $S$ .

Al pasar al dual, las relaciones verticales entre rectas y puntos se invierten pero se preservan. El punto de separabilidad  $k$  se corresponde, en el dual, con una recta tal que tiene puntos de nivel  $k - 1$  y no puede tener puntos de nivel inferior.

Luego el orden de la separabilidad de un punto de la nube es superior en una unidad al nivel más pequeño asociado a los puntos de la recta dual.  $\square$

Para la detección del mínimo nivel alcanzado por una recta utilizamos, en los siguientes algoritmos, la técnica del barrido topológico, [EG](89). Esta técnica, en la que se reemplaza la línea del barrido por una curva simple o línea topológica, permite visitar los elementos del arreglo en un orden consistente y de un modo más eficiente pues dichos elementos sólo necesitan ser examinados mientras se construyen y pueden eliminarse inmediatamente después. El barrido topológico tiene un coste cuadrático en tiempo y lineal en espacio.

Dada una nube de puntos en el plano, el siguiente algoritmo proporciona la separabilidad de sus puntos. Cabe notar que será preciso hacerlo en los dos sentidos (de arriba a abajo y viceversa), tomando siempre el mínimo de ambos.

**Algoritmo 3.2.1.** CÁLCULO DE LA SEPARABILIDAD DE LOS PUNTOS DE  $S$

Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$ :

1. Obtener un arreglo de rectas pasando al dual la nube de puntos.
2. Hacer un barrido topológico en el que se almacenará, en cada actualización durante el barrido, el mínimo nivel alcanzado por la recta.
3. La separabilidad de un punto de la nube es el valor obtenido al final del paso anterior por su recta dual más uno.

El coste del algoritmo 3.2.1 es  $O(n^2)$  pues tanto la obtención del arreglo de rectas [EOS](86) como la del barrido topológico [EG](89) son cuadráticos.

### Cálculo de los niveles de separabilidad y de la separabilidad de un punto nuevo

Dada una nube de puntos queremos ahora preprocesarla de modo que, al añadir un punto, se sepa calcular su separabilidad respecto a la nube, eficientemente.

Si ordenamos los puntos de la nube radialmente respecto del nuevo punto, basta tirar líneas desde él y contar para obtener su separabilidad con coste  $O(n \log n)$ .

Aumentando el coste en el preproceso, la respuesta a la separabilidad de un nuevo punto puede ser más rápida.

En el dual, obtener la separabilidad de un punto del primal equivale a encontrar el mínimo nivel del arreglo al que corta su recta dual. Con el objetivo de reducir el coste de saber si una recta corta o no a un nivel, se define el siguiente conjunto de poligonales.

**Definición 3.2.7.** *Para cada  $k$ -nivel, se definen las poligonales  $u_k$  como la envolvente convexa inferior del nivel  $k$  en el recorrido de arriba a abajo y la envolvente superior, en el sentido contrario (figura 3.6).*

El objetivo ahora es conocer el mínimo nivel no cortado por una recta.

**Lema 3.2.1.** *Una recta corta a  $u_k$  si y sólo si corta al nivel  $k$  de  $\mathcal{A}(\mathcal{L})$*

*Demostración.* Si  $u_k$  coincide con el nivel  $k$ , el caso es trivial. Supongamos que no coinciden. De la propia definición de la cadena  $u_k$ , toda recta que corte al nivel  $k$  corta a  $u_k$ . Recíprocamente, si corta a  $u_k$  veamos que corta al nivel  $k$ .

Consideremos una arista (podría ser semirrecta) en la que  $u_k$  no coincide con el nivel  $k$ . Si no es semirrecta, de la misma definición de  $u_k$  se tiene que los puntos extremos de dicha arista pertenecen al  $k$ -nivel y, el correspondiente tramo del nivel  $k$  comprendido entre estos puntos forma un polígono simple con la arista considerada de  $u_k$ . Si es una semirrecta, añadiendo el punto del infinito se obtiene también un polígono simple.

En cualquier caso, se tiene un polígono simple con una única arista de  $u_k$  y las restantes del nivel  $k$ . Por tanto, cualquier recta que corte a dicha arista de  $u_k$  también corta al nivel  $k$ .  $\square$

**Lema 3.2.2.** *En un arreglo  $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ , las poligonales  $u_{i-1}$  y  $u_i$  no tienen puntos en común.*

*Demostración.* Si recorremos el arreglo de rectas de arriba a abajo (análogamente en sentido contrario), los vértices de  $u_{i-1}$  se obtienen de la envolvente convexa inferior del nivel  $i-1$ . Esto quiere decir que son puntos de la intersección entre los niveles  $i-1$  e  $i$ . En dichos vértices inciden siempre cuatro aristas: dos del nivel  $i-1$ , formando ángulo convexo, y dos del nivel  $i$  formando ángulo cóncavo (figura 3.8).

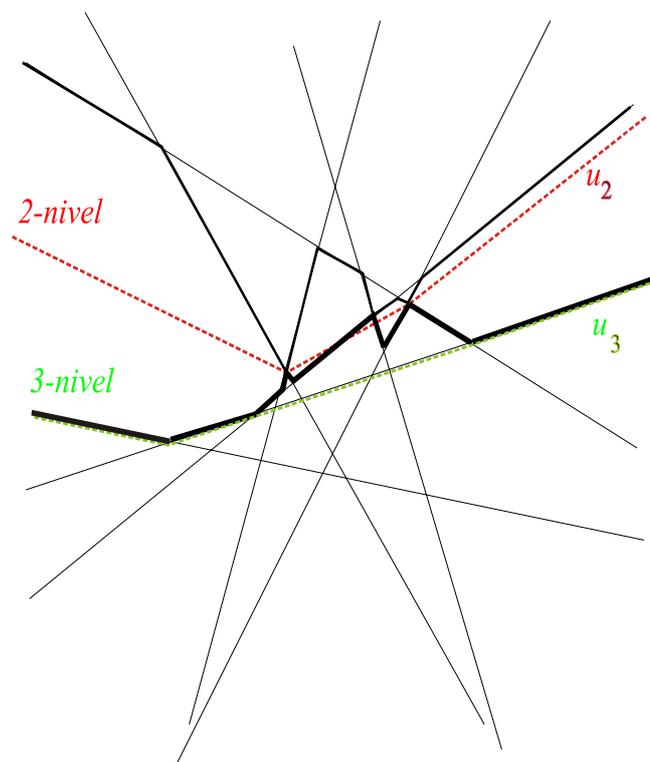


Figura 3.6: En la figura se han señalado el 2-nivel y el 3-nivel, en el sentido de arriba a abajo, junto con sus respectivas envolventes  $u_2$  y  $u_3$ .

Cualquier arista de  $u_{i-1}$  está uniendo dos de los anteriores vértices y, por tanto, nunca podrá cortar ni ser tangente con  $u_i$  que necesariamente irá estrictamente por debajo.  $\square$

El siguiente algoritmo nos da la separabilidad de un punto nuevo en  $O(\log^2 n)$ , con preproceso cuadrático.

**Algoritmo 3.2.2.** CÁLCULO DE LA SEPARABILIDAD DE UN PUNTO NUEVO

*Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$  y un punto nuevo  $p \notin S$ .*

1. *Obtener un arreglo de rectas pasando al dual la nube de puntos.*
2. *Hacer un barrido topológico en el que se almacenará, en cada actualización durante el barrido, el mínimo nivel alcanzado por la recta.*
3. *Para cada  $k$  nivel,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , construir la poligonal  $u_k$ .*

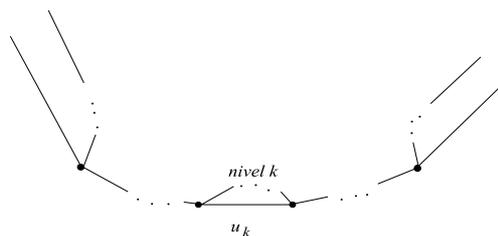


Figura 3.7: Una recta corta a  $u_k$  si y sólo si corta al nivel  $k$ .

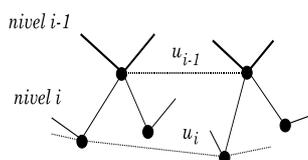


Figura 3.8: En la figura se muestra una situación hipotética en la que se observa que una arista de  $u_{i-1}$  no puede cortar a ninguna de  $u_i$ .

4. Sea  $r_p$  la recta dual de  $p$ .

Buscar el mínimo  $k$  tal que  $r_p$  corta a  $u_k$  y no a  $u_{k-1}$ . La separabilidad de  $p$  respecto de  $S$  es dicha  $k$ .

**Proposición 3.2.5.** *El algoritmo 3.2.2 calcula la separabilidad de un punto nuevo en  $O(\log^2 n)$ , con preproceso  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Para calcular la separabilidad de un nuevo punto basta conocer cuál es el mínimo nivel del arreglo dual cortado por la recta que dualiza al punto (proposición 3.2.4). Cortar al nivel  $k$  es equivalente a cortar a la poligonal  $u_k$  (lemas 3.2.1 y 3.2.2).

Analicemos el coste. Los pasos 1., 2. y 3. tienen un coste  $O(n^2)$ , pues es el coste del barrido topológico. La obtención de  $u_k$  es lineal,  $O(n_k)$ , respecto del orden de los segmentos del nivel  $k$ , pues se tienen ordenados tras el barrido topológico del paso anterior. La complejidad de un  $k$ -nivel es  $O(n\sqrt[3]{k})$ , luego  $n_k \leq n\sqrt[3]{k}$ . Sin embargo, globalmente la complejidad del arreglo es  $O(n^2)$  y, por tanto, el coste no es superior.

Para encontrar el mínimo  $k$  tal que  $r_p$  corta a  $u_k$  y no a  $u_{k-1}$ , se hace una búsqueda binaria,  $O(\log n)$ . Si  $r_p$  no corta a  $u_i$  tampoco corta a  $u_j$  con  $j < i$ . El coste de saber si  $r_p$  corta o no a una poligonal  $u_k$  es  $O(\log n_k) \leq O(\log n)$ . Multiplicando ambos costes se tiene el total  $O(\log^2 n)$ .  $\square$

El algoritmo 3.2.2 puede mejorarse mediante la obtención previa de las regiones de separabilidad  $k$  o más,  $S_{\geq k}$ . Analicemos la obtención de dichas regiones.

En primer lugar, antes de mostrar un algoritmo general válido para cualquier nube de puntos, estudiaremos los distintos niveles de separabilidad en un caso particular.

- **Caso particular:** los  $n$  puntos de  $S$  forman un polígono convexo  $K$ ,  $K = CH(S)$ .

**Definición 3.2.8.** Se define el  $k$ -núcleo,  $N_k$ , de un polígono convexo  $K$  como el lugar geométrico de los puntos de separabilidad mayor o igual a  $k+1$ , respecto de  $K$ .

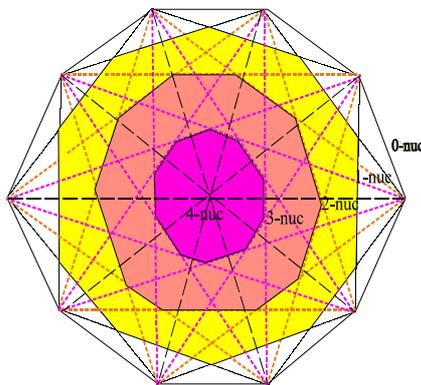


Figura 3.9: Una nube de puntos en posición convexa y sus  $k$ -núcleos.

La partición del plano en regiones con la misma separabilidad respecto de la nube dada equivale, en este caso, a la construcción de los  $k$ -núcleos. La región de los puntos del plano obtenida como  $N_i \setminus N_{i+1}$  es  $S_{i+1}$ , esto es, la región de separabilidad  $i + 1$ , con respecto a  $K$ .

En un polígono convexo  $K$  de  $n$  vértices pueden construirse  $m$  núcleos, con  $m = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ .

Sean  $v_i$  los vértices de  $K$ , donde el subíndice indica su orden en sentido horario. Los vértices del polígono que define a  $N_k$  se obtienen como intersección de las aristas con extremos  $v_i, v_{i+k+1}$ . Obsérvese que dichas aristas dejan  $k$  vértices de  $K$  a un lado y  $n - k - 2$  al otro. Por tanto, si  $k = \lfloor n/2 \rfloor - 1 = m$ , pueden construirse  $i$ -núcleos con  $i = 1, \dots, m$ :

- si  $n$  par, a partir de  $m$  se repiten:  $N_{m+1} = N_{m-1}, \dots$
- si  $n$  impar, a partir de  $m$ , se repiten:  $N_{m+1} = N_m, \dots$

En cualquiera de los casos se justifica que los núcleos son coincidentes pues tienen las mismas aristas. Si  $v_i v_j$  es una arista, en uno de los núcleos se construye para el vértice  $v_i$  y en el otro para el  $v_j$ .

El coste de la construcción de los  $k$ -núcleos es cuadrático.

Volvemos al caso general.

En el caso en que los puntos de la nube se distribuyan en más de una capa, no basta con la información que proporcionan los  $k$ -núcleos de todas y cada una de las capas, para distinguir las zonas de separabilidad respecto de la nube. Dicha separabilidad depende de la posición relativa de las capas entre sí y esto no queda reflejado obteniendo sólo todos los  $k$ -núcleos.

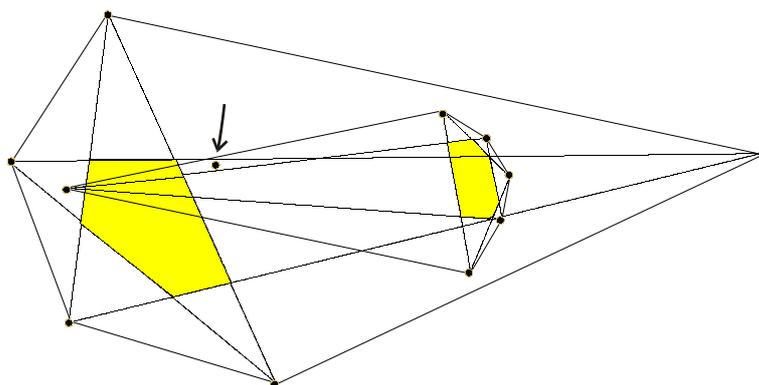


Figura 3.10: El punto señalado en la figura tiene una separabilidad 3 con respecto al resto de la nube dada y, sin embargo, está fuera del 1-núcleo tanto de  $CH(S)$  como de  $C-Lay_2(S)$ .

La siguiente propiedad nos hace observar en qué modo se ven afectados los  $k$ -núcleos de una capa cuando se tienen en cuenta los puntos de las siguientes.

**Proposición 3.2.6.** *Dada una nube de puntos  $S$ , en cada triángulo de vértices adyacentes  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  de  $C-Lay_1(S)$ , los puntos interiores que se hallan sobre la envolvente convexa de los puntos contenidos en dicho triángulo junto con  $v_{i-1}$  y  $v_{i+1}$ , son de separabilidad 2. O bien de separabilidad 1, si la separabilidad es respecto a  $C-Lay_1(S)$ .*

*Demostración.* Consideremos los puntos contenidos en el triángulo  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  junto con  $v_{i-1}$  y  $v_{i+1}$  y calculamos la envolvente convexa. Cualquier punto interior al triángulo  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ , que se halle sobre la anterior envolvente convexa tiene separabilidad 2 respecto de  $S$ , (1 respecto a  $C-Lay_1(S)$ ), pues cualquier recta pasando por él que sea soporte de la envolvente convexa, deja sólo a  $v_i$  a un lado y al menos a  $v_{i-1}$  o a  $v_{i+1}$  al otro (figura 3.11).  $\square$

Dada la nube de puntos  $S$ , está claro que su envolvente convexa,  $CH(S)$ , es la frontera de la región  $S_{\geq 1}$ .

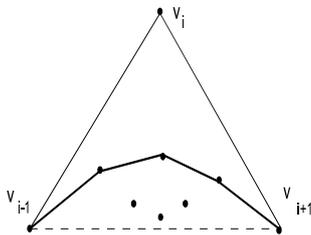


Figura 3.11: Los puntos de la envolvente convexa en negrita, interiores al triángulo, son de separabilidad 2 en  $S$ , o de separabilidad 1 con respecto a  $C\text{-Lay}_1(S)$ .

Con la anterior proposición es fácil obtener la de  $S_{\geq 2}$ . El 1-núcleo de  $CH(S)$  se modifica con los puntos de  $C\text{-Lay}_2(S)$  que son interiores a algún triángulo  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ . Esto es, la arista  $v_{i-1}, v_{i+1}$  se sustituye por la poligonal que, con extremos en dichos vértices, se halla sobre la envolvente convexa de los puntos interiores al triángulo  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ . Esta nueva región mayor o igual al 1-núcleo es  $S_{\geq 2}$ .

Sin embargo, esta construcción no es fácilmente generalizable.

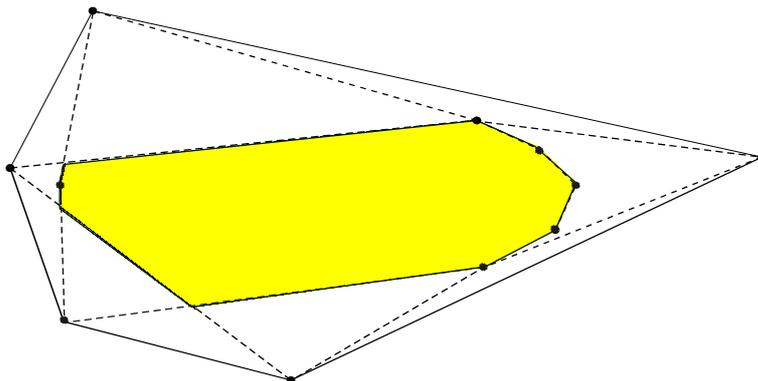


Figura 3.12: La zona sombreada es  $S_{\geq 2}$ . Mismo conjunto de puntos de la figura 3.10.

Pasando al dual pueden obtenerse todas las diferentes regiones de separabilidad del plano con respecto a una nube de puntos dada  $S$  en tiempo  $O(n^2)$ , lo cual es óptimo pues la complejidad de las mismas es cuadrático.

**Teorema 3.2.3.** *Sea  $S$  una nube de puntos en el plano. Las regiones convexas  $S_{\geq k}$  están completamente determinadas en el arreglo dual  $\mathcal{A}(\mathcal{L})$  por las poligonales  $u_k$ .*

*Demostración.* Por definición,  $S_{\geq k}$  es el lugar geométrico de los puntos del plano de separabilidad  $k$  o más, respecto de una nube dada  $S$ . Dualizando, se trata del lugar geométrico de las rectas que no cortan ningún nivel inferior a  $k$ , tanto si son

recorridas de abajo a arriba como en el sentido contrario. Ahora bien, una recta corta al nivel  $k$  si y sólo si corta a la cadena  $u_k$ . Por tanto, pasando las poligonales  $u_{k-1}$  al primal tenemos la frontera de  $S_{\geq k}$ .  $\square$

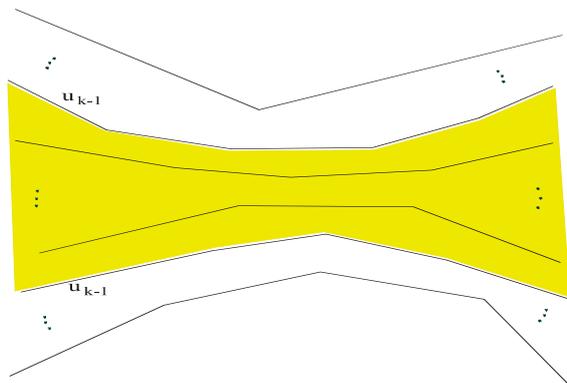


Figura 3.13: La región convexa  $S_{\geq k}$ , en el dual está determinada por las poligonales  $u_{k-1}$ .

**Algoritmo 3.2.3.** CÁLCULO DE LOS NIVELES DE SEPARABILIDAD Y DE LA SEPARABILIDAD DE UN PUNTO NUEVO

*Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$  y un punto nuevo  $p \notin S$ .*

1. *Obtener un arreglo de rectas pasando al dual la nube de puntos.*
2. *Hacer un barrido topológico en el que se almacena, en cada actualización durante el barrido, el mínimo nivel alcanzado por la recta.*
3. *Para cada  $k$  nivel,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , construir la poligonal  $u_k$ .*
4. *Obtener en el primal las regiones  $S_{\geq k}$ . Triangular las regiones comprendidas entre  $S_{\geq k}$  y  $S_{\geq k+1}$ .*
5. *Sea  $p$  el nuevo punto de la nube. Localizar a  $p$  en alguno de los triángulos obtenidos en el paso anterior, obteniendo así su separabilidad.*

**Proposición 3.2.7.** *El algoritmo 3.2.3 calcula niveles de separabilidad, con respecto a un conjunto de puntos  $S$ , en tiempo óptimo  $O(n^2)$  y la separabilidad de un punto nuevo en  $O(\log n)$ .*

*Demostración.* Por el teorema 3.2.3, las fronteras de los niveles están determinados por las poligonales  $u_k$ .

Los pasos del 1. al 3., son de coste  $O(n^2)$  (analizados en el algoritmo 3.2.2). El paso 4. tiene un coste cuadrático pues la complejidad total de las regiones a triangular es  $O(n^2)$ . Finalmente, el paso 5. es un problema de *point location* que se resuelve en  $O(\log n)$  [Ki](83).  $\square$

El algoritmo 5.4.1 calcula todos los niveles de separabilidad, por lo que en  $O(n^2)$  obtenemos también la mediana (centroide del nivel más profundo), para este peso.

### Cálculo de la separabilidad de los puntos de una recta

Se parte de una nube de puntos  $S$  en el plano, respecto de la cual se va a analizar la separabilidad. El objetivo ahora es conocer la separabilidad sólo de aquellos puntos situados sobre una recta dada  $r$ .

El primer algoritmo encuentra el segmento de la recta con separabilidad mayor que 1.

**Algoritmo 3.2.4.** CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA CON SEPARABILIDAD MAYOR QUE 1, RESPECTO A  $S$

*Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$  y una recta  $r$  en el plano,*

1. *Comprobar si la recta atraviesa a  $S$ . En caso afirmativo, seguir. En caso contrario, todos los puntos de  $r$  son 1-separables.*
2. *Obtener el 0-nivel del arreglo dual de  $S$ .*
3. *Desde el punto  $r^*$ , dual de  $r$ , calcular las tangentes al 0-nivel.*
4. *Pasar al primal la cuña definida por las tangentes obtenidas en el paso 3. el resultado es el segmento buscado.*

**Proposición 3.2.8.** *Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$  y una recta  $r$  en el plano, el anterior algoritmo calcula, si existe, el segmento con separabilidad mayor que 1. El coste es  $\Theta(n)$ .*

*Demostración.* El conjunto de puntos de  $r$  con separabilidad mayor que 1, si existe, es el segmento que atraviesa la nube. Los extremos de dicho segmento son puntos que pertenecen a la envolvente convexa de  $S$ , que en el dual es el 0-nivel. De modo que los puntos de  $r$ , no interiores a la envolvente convexa de  $S$ , son en el dual rectas que, pasando por  $r^*$ , cortan al 0-nivel. Los interiores, son en el dual todas las rectas por  $r^*$  que no cortan al 0-nivel. Así pues, la cuña con vértice en  $r^*$  definida por las tangentes al 0-nivel, es en el primal el segmento buscado.

Analicemos el coste. La comprobación de si un punto pertenece o no a un polígono convexo, definido por la intersección de  $n$  semiplanos, puede llevarse a cabo en tiempo  $\Theta(n)$  véase [Sa](97) (pág. 145). Podemos aplicar este resultado para comprobar si  $r$  atraviesa la nube  $S$ , pasando al dual. Por otra parte, las dos rectas soporte desde

un punto a un polígono convexo, definido por la intersección de  $n$  semiplanos, puede calcularse en tiempo  $\Theta(n)$  véase [Sa](97) (pp. 151–155). Aplicando este resultado, podemos obtener las tangentes desde  $r^*$  al 0-nivel en  $\Theta(n)$ .

Luego el coste total del algoritmo es  $\Theta(n)$ .  $\square$

Si se conocen los diferentes niveles de separabilidad respecto de  $S$  (preproceso cuadrático), basta estudiar la intersección con ellos de una recta  $r$  dada, para establecer la separabilidad de sus puntos. Directamente podemos encontrar los puntos de una recta de un determinado nivel, mediante el siguiente algoritmo.

**Algoritmo 3.2.5.** CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE SEPARABILIDAD  $k$  CON RESPECTO A  $S$ , DE UNA RECTA  $r$

*Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$  y una recta  $r$  en el plano,*

1. *Comprobar si  $k - 1 \leq \min\{n_i, n_j\}$  donde  $n_i$  y  $n_j$  son el número de puntos de  $S$  que quedan a uno y otro lado de  $r$ , respectivamente.*

*Si se cumple, seguir. En caso contrario,  $r$  no tiene puntos de separabilidad  $k$ .*

2. *Buscar recta vertical  $v$  que deje a un lado  $k - 1$  puntos.*

3. *Construir la envolvente convexa de los puntos de  $S$  para cada uno de los semiplanos definidos por  $v$ .*

4. *Buscar una recta soporte,  $s$ , de los convexos obtenidos en 3. Intersecar con  $r$ , marcando en dicho punto la dirección opuesta al semiplano que contiene exactamente  $k$  puntos.*

5. *Intercambiar entre sí los puntos de tangencia de  $s$  con los convexos y reconstruirlos.*

*Si los nuevos convexos son diferentes de los del paso 3., volver al paso 4. En caso contrario, seguir.*

6. *El segmento más pequeño de  $r$  cubierto en ambos sentidos por las direcciones del paso 4. es el formado por los puntos de  $r$  de separabilidad  $k$ .*

**Proposición 3.2.9.** *El algoritmo 3.2.5 calcula los puntos de separabilidad  $k$  con respecto a  $S$ , de una recta dada  $r$  con coste  $O(n\sqrt[3]{k-1}\log^2 n)$ .*

*Demostración.* El nivel de separabilidad  $k$  está formado por la intersección de todos los semiplanos que definen  $k - 1$ -sets. El algoritmo calcula las direcciones en las que los puntos de  $r$  tienen separabilidad mayor o igual a  $k$ . Los puntos de  $r$ , del segmento más pequeño cubierto en ambos sentidos por dichas direcciones, son sus puntos de separabilidad  $k$ .

El coste del algoritmo 3.2.5 es  $O(n\sqrt[3]{k-1}\log^2 n)$ : Los pasos 1, 2, 3 y 4 tienen un coste  $O(n\log n)$ . En el paso 5, el mantenimiento dinámico de las envolventes es

$O(\log^2 n)$  y esta tarea se realiza a lo sumo tantas veces como  $k - 1$ -sets. Luego el coste es  $O(n\sqrt[k-1]{k-1} \log^2 n)$ .  $\square$

### 3.2.5. Estructuras de separabilidad mínima

En primer lugar, estudiamos los árboles generadores de peso mínimo, para una nube de  $n$  puntos dada  $S$ .

#### Algoritmo 3.2.6. CARACTERIZACIÓN DE LOS AGPM

Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$ , de profundidad  $f$ :

1. Construir las  $S$ -Lay $_i(S)$ ,  $i \in \{1, \dots, f\}$ .
2. Con los puntos de cada  $S$ -Lay $_i(S)$ , construir un árbol generador.
3. Conectar entre sí los respectivos árboles generadores de puntos cuya diferencia de pesos es uno, mediante una única arista y sin formar ciclos.

**Teorema 3.2.4.** *Todos los AGPM, y sólo ellos, se generan mediante el algoritmo 3.2.6. La complejidad algorítmica es  $O(n^2)$ .*

*Demostración.* Demostración análoga a la caracterización de los AGPM para el peso de las capas convexas. La complejidad algorítmica es  $O(n^2)$ , pues es el coste de construir las capas de separabilidad.  $\square$

Las estructuras que conservan en gran medida las capas de  $S$ , definidas mediante el correspondiente peso, son estructuras poco pesadas, para dicho peso. En la separabilidad, mantener las capas cuando éstas se cortan (hemos visto que esto puede ocurrir) resulta imposible en las estructuras en las que las aristas no pueden cortarse. Por otra parte, no podemos asegurar un número mínimo de puntos de una determinada capa, ya que ésta puede ser vacía.

Tomando como variables los cardinales de las capas de separabilidad, la función que calcula el número máximo de AGPM es la obtenida en la proposición 2.3.2 en el peso convexo. El problema del corte entre capas no afecta a los árboles geométricos generadores (en los que se admiten cortes), sin embargo, el hecho de no poder asegurar un número mínimo de puntos para cualquiera de los pesos no nos permite extender a la separabilidad los resultados obtenidos en esta memoria para los AGPM en el peso por capas convexas.

El siguiente resultado sobre poligonizaciones, probado para el peso por capas convexas por Abellanas et al. en [AGH2](96), también es válido para el peso por separabilidad, con una demostración análoga.

**Teorema 3.2.5.** *Una poligonización de una nube de puntos  $S$ , de profundidad  $f$ , es de separabilidad mínima  $2f - 2$  si y sólo si la sucesión de profundidades de la poligonización es unimodal.*

*Demostración.* Cualquier poligonización cuya sucesión de profundidades sea unimodal tiene peso  $2f - 2$ . Veamos la implicación contraria.

Sea  $F$  una sucesión no unimodal y supongamos que tiene peso  $2f - 2$ . Entonces, si suprimimos los vértices entre dos máximos locales en  $F$  (en cuanto al peso) de la poligonal, se obtiene una sucesión de menor peso y que corresponde a una poligonización de una nube de igual profundidad que la inicial. Contradicción pues el peso mínimo sería menor a  $2f - 2$ , lo cual es imposible. Luego  $F$  ha de ser unimodal.  $\square$

### 3.3. Otros separadores

Hemos estudiado la separabilidad lineal y nos planteamos ahora la separación de puntos mediante cuñas. Fijado el ángulo a  $\pi/2$  y la orientación, introducimos el peso por *dominación isotética* en la sección 3.3.1. Sin las anteriores restricciones, definimos la separabilidad  $\alpha$  en la sección 3.3.2.

#### 3.3.1. Peso según dominación isotética

Dada una nube de puntos, el concepto de peso por dominación isotética asociado a cada uno de ellos, va a dar idea de la profundidad de éstos desde el punto de vista de los cuadrantes del sistema de coordenadas.

La dominación entre puntos proporciona un orden parcial de los mismos.

**Definición 3.3.1.** Sean  $p_1, p_2$  puntos de  $S \subset R^d$ . Se dice que el punto  $p_1$  domina al  $p_2$  si  $x_i(p_1) \geq x_i(p_2)$ ,  $i = 1, 0 \dots, d$  y se nota  $p_1 \prec p_2$ .

**Definición 3.3.2.** Se define el peso por dominación en el primer cuadrante de un punto de una nube dada, como el número de puntos contenidos en la región abierta del primer cuadrante, para el sistema de coordenadas con origen en dicho punto, más uno.

En cuanto a la información que este peso aporta respecto a la morfología de la nube de puntos, cabe destacar dos aspectos:

1) Tiene ventajas. En cuanto a la distinción entre puntos internos y frontera, los puntos de dominación en el primer cuadrante nula nos dan una mejor descripción que la de los puntos situados en la primera capa convexa.

2) Tiene inconvenientes. La formulación de este peso no es invariante frente a rotaciones, mientras que sí lo es la morfología de la nube.

Geoméricamente parece natural considerar la dominación respecto de cualquiera de los cuadrantes, aunque ello no resuelve el problema de la invarianza frente a la orientación.

**Definición 3.3.3.** Se define la dominación isotética de un punto de una nube dada, como el mínimo de las dominaciones del punto calculadas respecto a cada uno de los cuadrantes del sistema de coordenadas.

El siguiente algoritmo calcula el peso según dominación isotética de los puntos de una nube dada.

**Algoritmo 3.3.1.** CÁLCULO DEL PESO SEGÚN DOMINACIÓN ISOTÉTICA DE UN PUNTO DE  $S$

*Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$ :*

1. Ordenar los puntos por abscisas. Sean  $x_1, \dots, x_n$  en orden decreciente.
2. Recorrer la anterior lista de mayor a menor, generando una nueva lista ordenada por ordenadas, del siguiente modo:

*El primer punto,  $x_1$ , inicia la lista.*

*Supongamos que ya han sido leídos  $x_1, \dots, x_i$  generando la lista  $x_{j_1}, \dots, x_{j_i}$ .*

*El siguiente punto,  $x_{i+1}$ , se inserta en la nueva lista según su orden de ordenadas. En el momento de su inserción se contabiliza, además, cuántos puntos le han quedado por encima, esto es, con ordenada mayor. Este valor es el peso por dominación en el primer cuadrante de  $x_{i+1}$ , menos uno.*

3. Repetir los anteriores pasos cambiando el sistema de referencia (giro de ángulo  $\frac{\pi}{2}$ ), para cada uno de los cuadrantes.

*Para cada punto, la dominación isotética es el mínimo de las dominaciones calculadas respecto a cada uno de los cuadrantes del sistema de coordenadas, más uno.*

**Proposición 3.3.1.** *Dada una nube de  $n$  puntos en el plano, el algoritmo 3.3.1 calcula el peso según dominación isotética de cada punto. El coste es  $O(n \log n)$ .*

*Demostración.* El primer paso del algoritmo es la ordenación por abscisas, cuyo coste es  $O(n \log n)$ . En el segundo paso se genera otra lista. La inserción de cada punto en la nueva lista tiene un coste logarítmico, al ser  $n$  puntos, nuevamente,  $O(n \log n)$ . El mismo proceso de búsqueda binaria para insertar un nuevo punto, proporciona la contabilidad de los que le van a quedar por encima, esto es, con mayor ordenada. En la siguiente figura se muestra un posible ejemplo.

Sea  $x_{j_1}, \dots, x_{j_i}$  la lista formada por los puntos  $x_1, \dots, x_i$ , ordenados por ordenadas de menor a mayor. Construimos un árbol binario equilibrado donde los puntos son precisamente las hojas, salvo quizás uno, el de mayor ordenada, si el número de puntos fuera impar.

Para cada nodo, la búsqueda binaria para la inserción de  $x_{i+1}$  en la lista  $x_{j_1}, \dots, x_{j_i}$ , decide la rama a seguir del anterior árbol. Si para el nodo situado en el nivel  $k$  la elección ha sido la izquierda, se contabilizan los  $i/2^k$  (o  $i/2^k + 1$  si  $i$  es impar) puntos que quedan a la derecha y que, por tanto, van a tener ordenada mayor. Al final de la búsqueda binaria se ha insertado  $x_{i+1}$  en la lista según su orden de ordenadas y se ha contabilizado cuántos puntos de dicha lista tienen ordenada mayor. De este

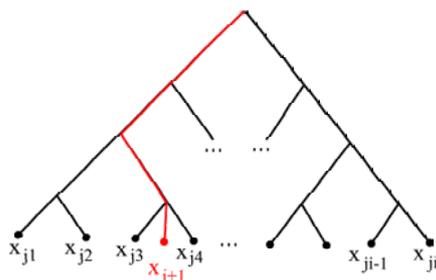


Figura 3.14: En este ejemplo  $x_{i+1}$  se inserta entre  $x_{j3}$  y  $x_{j4}$ . Se contabilizan  $i/2 + i/4 + i/16$  puntos con ordenada mayor, con  $i = 16$ .

modo tenemos el peso por dominación en el primer cuadrante. Repitiendo el proceso en los otros cuadrantes y tomando el mínimo de todos más una unidad, tenemos el peso isotético de cada punto.  $\square$

Para salvar el inconveniente de no ser un peso invariante frente a rotaciones se define a continuación el que denominaremos como separabilidad  $\alpha$ .

### 3.3.2. Separabilidad $\alpha$

Para una nube de puntos dada, la siguiente definición de peso asociada a cada uno de ellos, va a generalizar tanto el concepto de dominación como el de separabilidad.

**Definición 3.3.4.** Una *cuña* es la región abierta del plano definida por dos semirrectas con un origen común y que forman un ángulo no superior a  $\pi$ . Una  $\alpha$ -cuña es una cuña de ángulo  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq \pi$ .

**Definición 3.3.5.** Un  $(\alpha, k)$ -set es la intersección de  $S$  con una  $\alpha$ -cuña tal que el cardinal de la intersección es igual a  $k$ , es decir, un  $(\alpha, k)$ -set es un subconjunto de  $S$  con cardinal  $k$  separable del resto por una  $\alpha$ -cuña.

**Definición 3.3.6.** Se define la separabilidad  $\alpha$  de un punto de  $S$ , como el mínimo número de puntos de la nube, para los cuales existe una cuña de ángulo  $\alpha$  con vértice en dicho punto que los contiene, más uno.

La dominación entre puntos depende de la posición de los ejes, no es pues, un caso particular de la separabilidad con ángulo fijo, cuya información es más general por ser invariante frente a rotaciones. Obsérvese que si  $\alpha = \pi/2$ , con una rotación de los ejes obtenemos un conjunto de valores, que son los correspondientes pesos por dominación en el primer cuadrante. La separabilidad  $\pi/2$ , del punto situado en el origen de coordenadas, coincide con el mínimo de los anteriores valores.

Por otra parte, la separabilidad de un punto de la nube sí es un caso particular, pues se trata de la separabilidad  $\alpha$ , con  $\alpha = \pi$ .

**Algoritmo 3.3.2.** CÁLCULO DE LA SEPARABILIDAD  $\alpha$  DE LOS PUNTOS DE  $S$ 

Dado un conjunto de  $n$  puntos  $S$ :

1. Asociar a cada punto  $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$  la ordenación radial de los demás puntos respecto de él.

2. Para cada punto  $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ ,  
elegir un punto inicial diferente de  $p_i$ , sea  $p_j$ .

A partir de la semirrecta  $p_i p_j$  colocar en sentido antihorario la cuña de ángulo  $\alpha$ . Contar a partir de  $p_j$  y según la ordenación asociada a  $p_i$ , los puntos cubiertos por la cuña. Sea  $n_j$  dicho valor.

Repetir el proceso iniciando la cuña en la semirrecta  $p_i p_{(j+k(\bmod n-1))}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Sean  $n_{j+1}, \dots, n_{j-1}$  los valores obtenidos.

3. Para cada punto  $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ ,  
separabilidad  $\alpha$  de  $p_i = \text{mínimo} \{n_1, \dots, n_n\} + 1$ .

**Proposición 3.3.2.** Dada una nube de  $n$  puntos en el plano, el algoritmo 3.3.2 calcula la separabilidad  $\alpha$  de cada punto. El coste es  $O(n^2)$ .

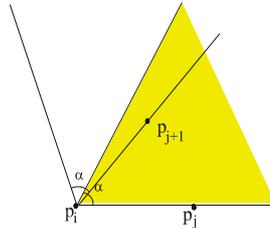


Figura 3.15: El número de puntos contenidos en la cuña varía cada vez que, al girar sobre su vértice, una de las semirrectas alcanza un nuevo punto.

*Demostración.* Supongamos queremos obtener la separabilidad  $\alpha$  del punto  $p_i$ , teniendo la ordenación de los demás puntos radialmente respecto de él. Basta examinar todas las cuñas con semirrecta inicial definida por  $p_i$  y otro punto.

Consideremos la cuña definida por  $p_i p_j$ , con vértice en  $p_i$ . Esta cuña contiene  $n_j$  puntos. La podemos girar sin alterar el número de puntos contenidos hasta que una de las semirrectas que define la cuña encuentra un nuevo punto. Si es alcanzado por la semirrecta inicial, la cuña aumentará el número de puntos que contiene y, si es alcanzado por la otra semirrecta, disminuye (figura 3.15).

Para cada punto  $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ ,

$$\text{separabilidad } \alpha \text{ de } p_i = \text{mínimo} \{n_1, \dots, n_n\} + 1.$$

Analicemos el coste. Fijado un punto de la nube, la ordenación radial de todos los demás con respecto a él es  $O(n \log n)$ . Si se hace para cada punto sería  $O(n^2 \log n)$ , sin embargo, basta construir el arreglo dual,  $O(n^2)$ , para obtener la misma información.

Finalmente se examinan en tiempo constante un número cuadrático de cuñas. El coste total del algoritmo 3.3.2 es  $O(n^2)$ .  $\square$

