

Capítulo 2

Peso según capas convexas

En este capítulo se estudian estructuras de peso mínimo para el peso definido por las capas convexas en las nubes de puntos.

En la sección 2.1 se dan algunas definiciones. En la sección 2.3 se caracterizan algunos tipos de árboles generadores y se hace un estudio general del orden. En la sección 2.4 se da una caracterización de las poligonizaciones monótonas de peso mínimo. El estudio de las triangulaciones de peso mínimo se realiza en la sección 2.5.

2.1. Introducción

En el análisis bivalente hay varias maneras de estratificar el conjunto de datos en modelos de capas (*peeling methods*), propuestos principalmente para la eliminación de puntos anómalos o *outliers*. Estos modelos consiguen una descripción de la forma del conjunto de puntos mediante polígonos con buenas propiedades computacionales.

El peso por capas convexas fue introducido por Hubert en [Hub](72). Puede definirse recursivamente del siguiente modo (figura 2.1).

Definición 2.1.1. *El peso por capas convexas de un punto p de una nube dada S es $W_C(p) = 1$ si p pertenece a la envolvente convexa de S , $p \in CH(S)$, si no $W_C(p)$ en S es igual a $W_C(p) + 1$ en $S \setminus CH(S)$.*

En este capítulo, cuando hablamos de peso nos referimos al peso por capas convexas. Las siguientes definiciones se aplican con independencia de cuál es el peso asociado a la nube de puntos, por lo que también haremos referencia a ellas cuando estudiemos otros pesos. Notamos $W(p)$, cualquier peso genérico de un punto p .

Definición 2.1.2. *Llamamos profundidad de una nube de puntos al máximo de los pesos de sus puntos.*

Definición 2.1.3. *El peso de una arista, cuyos extremos son puntos de la nube dada, es el valor absoluto de la diferencia de los pesos asociados a dichos puntos.*

Consideramos el peso de cualquier estructura geométrica, descrita mediante un conjunto de aristas, como la suma de los pesos de sus aristas (su t -peso, definición 1.3.1).

Abellanas et al., en [AGH1](93) fueron los primeros en asociar el peso por capas convexas a estructuras geométricas definiendo las sucesiones de profundidad asociadas y que damos a continuación (definición 2.1.4). En [O'R2](98) se cita a los anteriores autores y el problema aún abierto de la caracterización de las sucesiones realizables como polígonos. Entorno a este problema cabe mencionar los estudios de García y Tejel en [GT1](95), así como los de Bremner, Guévremont y Shermer en [BGS](94).

Definición 2.1.4. *La sucesión de profundidades de un polígono es la lista ordenada (circular) de los pesos de sus vértices.*

2.2. Capas y niveles convexas

La noción de peso de un punto respecto a una nube de puntos dada S , da lugar a una partición de S , en subconjuntos de puntos del mismo peso, y a una partición del plano en regiones o niveles, cuyos puntos son del mismo peso respecto a S . Las capas de un conjunto de puntos se definen en función del peso considerado, utilizamos la notación $Lay_i(S)$ para indicar la capa formada por los puntos de peso i de forma genérica, sin especificar el peso. En el peso definido por las capas convexas, notamos a las capas como $C-Lay_i(S)$.

Definición 2.2.1. *Las capas convexas de una nube de puntos S se definen como las envolventes convexas de los puntos de S del mismo peso, esto es, $C-Lay_i(S) = CH(S_i)$ donde $S_i = \{p \in S / W_C(p) = i\}$.*

Los niveles, se definen del mismo modo para cualquier peso, al que notamos de forma genérica por W .

Definición 2.2.2. *El nivel de un punto q con respecto a S es su peso en $S \cup \{q\}$, esto es, $W(q, S) = W(q)$ en $S \cup \{q\}$.*

Definición 2.2.3. *Para una nube de puntos S , los niveles se definen como las regiones del plano cuyos puntos son del mismo peso respecto a S , esto es, $Lev_i(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 / W(x, S) = i\}$.*

Con la notaciones $W_C(q, S)$ y $C-Lev_i(S)$ indicamos que el peso considerado es el definido por las capas convexas.

Dada una nube de puntos en el plano S , las capas convexas pueden construirse mediante el algoritmo óptimo de Chazelle de coste $O(n \log n)$, [Chaz](85). Las capas convexas forman una sucesión de polígonos convexas encajados que definen una partición del plano en regiones que coinciden con los niveles convexas (figura 2.1).

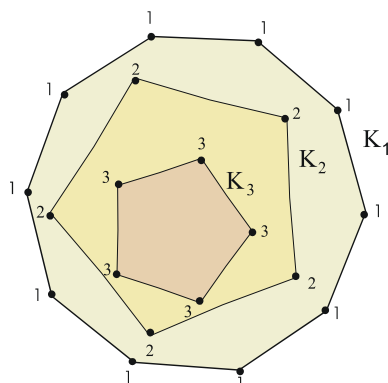


Figura 2.1: Capas y niveles convexos.

Por lo tanto, capas y niveles tienen complejidad lineal en el peso por capas convexas y se construyen en tiempo óptimo $O(n \log n)$.

El concepto de peso mínimo da información relativa a la nube de puntos correspondiente, como una medida de su complejidad. Las estructuras de peso mínimo, en el peso por capas convexas, preservan al máximo dicha estructura de capas. En este sentido, realizamos a continuación la búsqueda y estudio de tales estructuras.

2.3. Árboles generadores de peso mínimo

En esta sección se da una caracterización de los árboles generadores de peso mínimo, *AGPM*, que se obtienen de una nube de puntos dada.

Se tratan en particular algunos tipos de *AGPM*, concretamente los de máximo grado y los de longitud mínima. En referencia a estos últimos, será preciso el cálculo de árboles generadores de longitud mínima, *MST*, estructuras estudiadas por Shamos y Hoey en [SH](75) y [Sham](77); así como la utilización de grafos resultantes de triangulaciones de Delaunay (Lee y Schacter nos dan algoritmos para la construcción de dichas triangulaciones en [LaSt](80)).

Se realiza también el cálculo del orden del número de árboles generadores de peso mínimo y su estudio en función del número de capas.

El peso de un árbol es la suma de los pesos de sus aristas.

Notamos por:

n el número fijado de puntos,

k el número de capas convexas de la nube de puntos,

C_i el número de vértices de la capa $C-Lay_i$.

2.3.1. Caracterización de los árboles generadores de peso mínimo

El siguiente algoritmo caracteriza los árboles generadores de peso mínimo de una nube de puntos dada.

Algoritmo 2.3.1. CARACTERIZACIÓN DE LOS AGPM

Dado un conjunto S de n puntos y profundidad k :

1. *Construir las capas $C\text{-Lay}_i(S), i \in \{1, \dots, k\}$.*
2. *Con los puntos de cada $C\text{-Lay}_i(S)$, construir un árbol generador de la propia capa.*
3. *Conectar entre sí los respectivos árboles generadores de capas consecutivas mediante una única arista, de manera que si conectamos las capas consecutivas con $k - 1$ aristas, no se pueden formar ciclos.*

Teorema 2.3.1. *Todos los AGPM, y sólo ellos, se generan mediante el algoritmo 2.3.1. La complejidad algorítmica es $O(n \log n)$.*

Demostración. Dado un AGPM veamos cómo ha de conectar entre sí los vértices de una misma capa y cómo ha de hacer las conexiones entre capas. Un árbol generador establece un único camino entre dos puntos cualesquiera. Si nos situamos en una capa, entre todos los caminos que unen dos puntos cualesquiera de la misma, los de peso mínimo (en este caso nulo) son tales que sólo tienen vértices sobre dicha capa (figura 2.2); y cualquier otro camino diferente de éstos tiene peso superior.

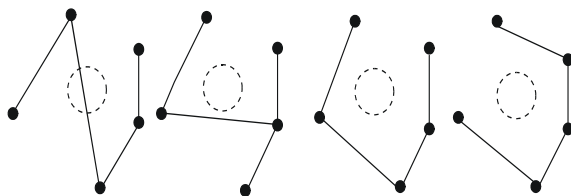


Figura 2.2: En la figura se da un ejemplo en el que se muestran diferentes árboles de peso cero uniendo los vértices de una capa.

En cuanto a la conexión entre capas se establece lo siguiente. Dado que los árboles son conexos, cada capa ha de estar conectada a alguna otra: si lo está a una consecutiva con una única arista, ello supone un incremento de peso en una unidad, en cualquier otro caso el incremento sería mayor.

Así, pues, cualquier AGPM sólo puede conectar las capas de este modo y, por tanto, da un peso total de $k - 1$, peso mínimo.

Por otra parte, en cada una de las capas habrá al menos una arista de la misma que no pertenecerá a un posible árbol generador, por su condición de acíclico.

Así pues, para obtener un *AGPM*, basta eliminar una arista de cada capa y, o bien conservar el resto de ella, o bien sustituirlo por cualquier árbol generador de dicha capa, uniendo finalmente sólo dos vértices arbitrarios en capas consecutivas (uno de cada capa). Cualquier árbol obtenido así conecta vértices y capas según la anterior descripción y es de peso mínimo.

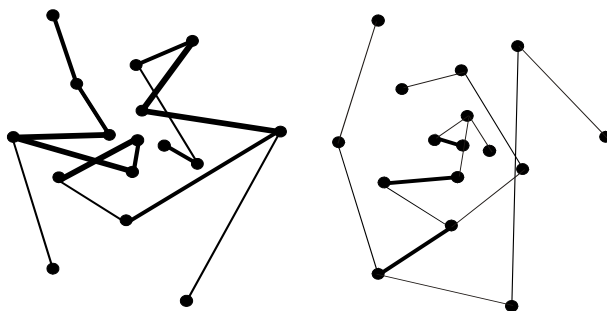


Figura 2.3: Árboles generadores de una misma nube de puntos: a la izquierda *AG* con peso 16, a la derecha *AGPM* de peso 3.

La complejidad algorítmica es $O(n \log n)$ pues es el coste de la construcción de las capas convexas y los árboles generadores. \square

2.3.2. Algunos tipos de árboles generadores de peso mínimo

El objetivo es caracterizar, de entre los *AGPM*, los dos tipos siguientes:

- aquellos que tienen mínimo su máximo grado,
- los de longitud mínima.

El mínimo máximo grado que puede tener un *AGPM* ha de ser mayor a uno pues se supone una nube con más de dos puntos. El siguiente algoritmo establece que es dos, pues nos da *AGPM* con dicho valor.

Algoritmo 2.3.2. *AGPM* DE MÍNIMO MÁXIMO GRADO

Dado un conjunto S de n puntos y profundidad k :

1. *Construir las capas $C\text{-Lay}_i(S)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.*
2. *En cada capa $C\text{-Lay}_i(S)$, eliminar una arista.*
3. *Unir las capas consecutivas entre sí añadiendo, en cada caso, una única arista que tenga por vértices algún extremo de las aristas eliminadas.*

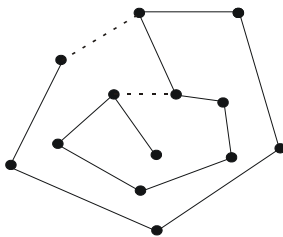


Figura 2.4: Ejemplo de *AGPM* de grado 2.

Teorema 2.3.2. *El algoritmo 2.3.2 proporciona y caracteriza a los *AGPM* de mínimo máximo grado. La complejidad algorítmica es $O(n \log n)$.*

Para la caracterización de los *AGPM* de longitud mínima se ha de tener en cuenta la estructura de los mismos que conlleva el hecho de ser *AGPM*. Por una parte se han de conectar los puntos de una misma capa de manera que la longitud sea mínima y, por otra parte, conectar las capas contiguas con una arista de modo que aumente lo menos posible la longitud del árbol (véase un ejemplo en la figura 2.5).

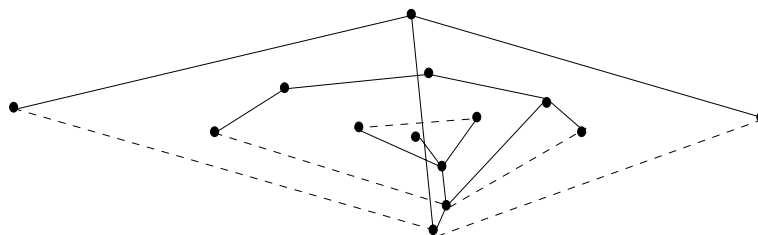


Figura 2.5: Ejemplo de *AGPM* de longitud mínima.

Algoritmo 2.3.3. *AGPM DE LONGITUD MÍNIMA*

Dado un conjunto S de n puntos de profundidad k :

1. *Construir las capas, $C\text{-Lay}_i(S)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.*
2. *Para cada $C\text{-Lay}_i(S)$, construir un árbol generador de longitud mínima (*MST*).*
3. *Unir las capas consecutivas escogiendo en cada caso, de todas las posibles, la arista de longitud mínima.*

Teorema 2.3.3. *El algoritmo 2.3.3 proporciona y caracteriza a los *AGPM* de longitud mínima. La complejidad algorítmica es $O(n \log n)$.*

Demostración. La arista de longitud mínima entre capas consecutivas ha de pertenecer necesariamente al grafo resultante de la triangulación de Delaunay (*DT*) de dichas capas.

Obsérvese que no bastaría con la construcción de la triangulación de Delaunay de toda la nube de puntos. El mínimo círculo pasando por los dos puntos más próximos entre capas consecutivas podría contener puntos de otras capas, dado que son conjuntos convexos (figura 2.6).

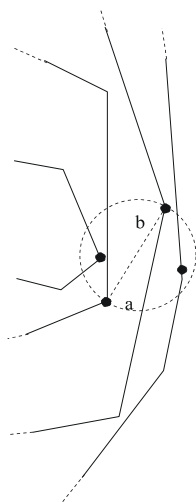


Figura 2.6: El mínimo círculo pasando por a y b puede no ser vacío.

Los costes del algoritmo 2.3.3 según sus pasos son:

1. Construcción de las capas convexas, complejidad: $O(n \log n)$.
2. Construcción de un *MST* para la capa i -ésima, complejidad: $O(C_i \log C_i)$.

Si consideramos el total de las capas, el orden es $O(n \log n)$, pues:

$$C_i \log C_i \leq C_i \log n \quad i = 1, \dots, k$$

$$\sum_{i=1}^k C_i \log C_i \leq \sum_{i=1}^k C_i \log n = n \log n$$

3. Conexión entre sí de todas las capas consecutivas, complejidad: $O(n \log n)$.

Esto es así pues basta examinar las triangulaciones de Delaunay que pueden construirse para cada dos capas consecutivas. El cálculo de la *DT* entre las capas $C\text{-Lay}_i(S)$ i $C\text{-Lay}_{i+1}(S)$ es $O((C_i + C_{i+1}) \log(C_i + C_{i+1}))$. El cálculo de

todas las triangulaciones no supera $O(n \log n)$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} (C_i + C_{i+1}) \log(C_i + C_{i+1}) &\leq \sum_{i=1}^{k-1} (C_i + C_{i+1}) \log n = (2n - (C_1 + C_k)) \log n \leq \\ &\leq O(n \log n) \end{aligned}$$

En total el coste del algoritmo es $O(n \log n)$. \square

Proposición 2.3.1. *Las aristas de un AGPM de longitud mínima pueden cortarse.*

Demostración. Los MST de capas contiguas pueden cortarse, como es el caso que se mostró en la figura 2.5, como ejemplo del algoritmo. \square

2.3.3. Estudio del orden

Estudiaremos el orden del conjunto de los AGPM, tanto en general como en el caso concreto de los de mínimo máximo grado. Se distinguirá también el caso en que no se admitan cortes entre las aristas.

Orden de los AGPM

Dada una nube de n puntos, el número de árboles generadores (AG) que pueden construirse es de n^{n-2} . Este valor nos da, por tanto, una cota superior del orden de los AGPM. En el caso trivial de que la nube de puntos de lugar a una sola capa, el número de AGPM es máximo y coincide con el valor anterior.

Fijado el número de puntos n , el número de AGPM puede tratarse como una función de k variables, C_1, \dots, C_k (el número de puntos por capa) para estudiar cuándo se hace máxima en función del número de capas y el de vértices que contienen.

Proposición 2.3.2. *La función que determina el número de AGPM es convexa y se define como:*

$$f(C_1, \dots, C_k) = \frac{C_1^{C_1} \cdot C_2^{C_2} \dots C_{k-1}^{C_{k-1}} \cdot C_k^{C_k}}{C_1 \cdot C_k}.$$

Demostración. Dado que el número de AG de la capa $C\text{-Lay}_i(S)$ es $C_i^{C_i-2}$ y que el número de conexiones posibles entre dos capas consecutivas, digamos $C\text{-Lay}_i(S)$ y $C\text{-Lay}_{i+1}(S)$ es $C_i C_{i+1}$, se tiene:

$$\begin{aligned} \# \text{AGPM} &= C_1^{C_1-2} \cdot C_2^{C_2-2} \dots C_k^{C_k-2} \cdot C_1 C_2 \cdot C_2 C_3 \dots C_{k-1} C_k = \\ &= \frac{C_1^{C_1} \cdot C_2^{C_2} \dots C_{k-1}^{C_{k-1}} \cdot C_k^{C_k}}{C_1 \cdot C_k} = \\ &= f(C_1, \dots, C_k) \end{aligned}$$

Para probar la convexidad de la función f , demostramos que la función $g = \log f$ es convexa. Se tiene,

$$g = \log f = (C_1 - 1)\log C_1 + \sum_{i=2}^{k-1} C_i \log C_i + (C_k - 1)\log C_k,$$

las funciones $x \log x$ y $(x - 1)\log x$ son convexas y la suma de funciones convexas también es convexa, por lo que g es convexa. Luego la función f que determina el número de $AGPM$ es convexa. \square

Teorema 2.3.4. *El número de $AGPM$ es estrictamente decreciente con el número de capas. El número de $AGPM$ varía entre n^{n-2} , que se alcanza en el caso de una capa, y 3^{n-2} que se alcanza cuando el número de capas es $k = (n + 2)/3$. Para un número fijo de capas, el número máximo de $AGPM$ se alcanza cuando la última capa tiene un punto y todas las demás tienen 3 puntos excepto quizás una (esta capa no puede ser la primera salvo para el caso de dos capas).*

Demostración. El número de $AGPM$ viene dado por la función de la proposición 2.3.2. Las variables son los cardinales de las correspondientes capas por lo que se tienen las siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^n C_i = n, \quad C_i \geq 3 \quad i = 1, \dots, k-1, \quad C_k \geq 1.$$

Es conocido el hecho de que toda función continua y convexa sobre un compacto convexo alcanza los máximos en algún punto extremo del compacto. Trasladado a nuestro caso, nos dice que la función f , que determina el número de $AGPM$, alcanza un máximo en algún vértice del simplex formado por las restricciones. Bastará, pues, determinar dichos vértices y evaluar f en ellos para decidir cuál es el valor máximo.

Para determinar los vértices y el valor de la función en ellos distinguimos dos casos:

1. El número de capas es $k \geq 3$, ($n \geq 7$).

Los vértices son:

$$\begin{aligned} P &= (3, \dots, 3, n - (3(k-1))) \\ Q &= (n - 3(k-2) - 1, 3, \dots, 3, 1) \\ R_1 &= (3, n - 3(k-2) - 1, 3, \dots, 3, 1) \\ &\dots\dots\dots \\ R_{k-2} &= (3, \dots, 3, n - 3(k-2) - 1, 1) \end{aligned}$$

Las imágenes de f para tales puntos son:

$$\begin{aligned} f(P) &= 3^2 3^{3(k-2)} (n - 3(k-1))^{n-3(k-1)-1} \\ f(Q) &= 3^{3(k-2)} (n - 3(k-2) - 1)^{n-3(k-2)-2} \\ f(R_i) &= 3^2 3^{3(k-3)} (n - 3(k-2) - 1)^{n-3(k-2)-1} \end{aligned}$$

Se observa que los denotados por R_i $i = 1, \dots, k-2$ tienen la misma imagen por f . Además, $f(R_i) \geq f(P) > f(Q)$ por lo que el máximo valor de f se alcanza en todos los R_i . Estudiamos ahora este máximo en función del número de capas k .

Tomamos el valor obtenido $f(R_i)$ como una función de la variable k , entonces se observa que se trata de una función estrictamente decreciente haciendo un estudio de la derivada.

$$f(R_i)'(k) = 3^{3k-6} \left((n - 3k + 5)^{n-3k+5} \right) (\log 3 - \log(n - 3k + 5) - 1)$$

Por comodidad se distinguen los siguientes casos. En ellos se observa que los dos primeros factores de la derivada son siempre positivos y el tercero y último negativo.

- a) Si $n = 3m$, $3 \leq k \leq m$
 $\log 3 - \log[3m - 3k + 5] - 1 \leq \log 3 - \log 5 - 1 < 0$.
- b) Si $n = 3m + 1$, $3 \leq k \leq m + 1$
 $\log 3 - \log[3m + 1 - 3k + 5] - 1 \leq -1 < 0$.
- c) Si $n = 3m + 2$, $3 \leq k \leq m + 1$
 $\log 3 - \log[3m + 2 - 3k + 5] - 1 \leq \log 3 - \log 4 - 1 < 0$.

Así pues, en el caso en que como mínimo hay tres capas, al ser la función dada por $f(R_i)$ continua y estrictamente decreciente en k , alcanza el máximo para $k = 3$ (hemos supuesto $k \geq 3$). Dicho máximo es

$$f(R_i) = f(3, n - 4, 1) = 3^2 (n - 4)^{n-4}$$

Para un número fijo de capas, el número máximo de $AGPM$ se alcanza cuando la última capa tiene un punto y todas las demás tienen 3 puntos excepto quizás una.

2. El número de capas es $k < 3$.

Recordemos que el caso de una capa era el óptimo, pues trivialmente se alcanza el mayor número posible de $AGPM$ n^{n-2} . Se trata ahora de estudiar el caso de dos capas, esto es $k = 2$, $n \geq 4$. Los vértices y sus valores por f son:

$$(n - 1, 1) \text{ y } (3, n - 3)$$

$$\begin{aligned} f(n-1, 1) &= (n-1)^{n-2} \\ f(3, n-3) &= 9(n-3)^{n-4} \end{aligned}$$

Para $n = 4$ los vértices coinciden pues sólo hay una distribución posible: tres puntos en la primera capa y uno en la segunda y última $(3,1)$. Si $n > 4$, comparando el valor de f en ambos vértices,

$$\begin{aligned} f(n-1, 1) &= (n-1)^{n-2} = (n-1)^2(n-1)^{n-4} > \\ &> (n-1)^2(n-3)^{n-4} > 9(n-3)^{n-4} = f(3, n-3) \end{aligned}$$

se prueba que el máximo número de *AGPM* se obtiene con la distribución $(n-1, 1)$.

Dada una nube de puntos, es obvio que el mayor número de *AGPM* posibles se alcanza cuando dichos puntos se distribuyen en una sola capa. A partir de tres capas hemos visto que el máximo se obtiene con tres en la distribución $(3, n-4, 1)$. Falta comparar este máximo con el que se obtiene con dos capas según el orden $(n-1, 1)$. Considerando $n \geq 7$, para que puedan haber tres capas,

$$\begin{aligned} f(n-1, 1) &= (n-1)^{n-2} = (n-1)^2(n-1)^{n-4} > \\ &> (n-1)^2(n-4)^{n-4} > 3^2(n-4)^{n-4} = f(3, n-4, 1) \end{aligned}$$

Por tanto, es mayor el número de *AGPM* con dos capas que con tres y la distribución óptima tiene un solo punto en la capa más interna.

En cualquier caso, el número de *AGPM* decrece estrictamente al aumentar el número de capas. El número de *AGPM* varía, por tanto, entre n^{n-2} y 3^{n-2} que se alcanzan cuando el número de capas es 1 y $(n+2)/3$, respectivamente. Y si el número de capas es fijo, la distribución óptima de los puntos para que el número de *AGPM* sea máximo es la determinada por los R_i , esto es, un sólo punto en la última capa y tres puntos en cada una de las restantes, salvo quizás una que no sea la primera. \square

Orden de los *AGPM* sin cortes entre las aristas, *AGPMS*

El orden de los *AGPMS* depende directamente de la posición geométrica en que se sitúan los puntos de la nube dada. A continuación estudiamos cotas para dicho orden.

Teorema 2.3.5. *Para el número de *AGPMS* se tienen las siguientes cotas inferiores:*

- si $C_k \geq 1$, $\# \text{AGPMS} \geq (\prod_{i=1}^{k-1} C_i) 2^{k-2}$,
- si $C_k = 1$, $\# \text{AGPMS} \geq (\prod_{i=1}^{k-1} C_i) 2^{k-1}$.

Demostración. En el peor de los casos, las capas convexas de la nube pueden estar tan juntas que no haya más caminos entre los vértices de una capa, sin que se produzcan cortes, que las aristas de la propia capa (salvo una arista para que sea árbol generador de la capa).

En cuanto a las conexiones sabemos que, dados dos vértices contiguos de una capa, existen al menos dos vértices de la siguiente más profunda (si ésta tiene más de un punto), formando un polígono simple disjunto del interior del polígono formado por la capa más profunda. Entonces con estos cuatro vértices hay dos posibles conexiones sin cortes entre ambas capas; luego el número de conexiones entre dos capas contiguas, $C\text{-Lay}_i$ y $C\text{-Lay}_{i+1}$ será mayor o igual al doble de vértices de la más externa, C_i . Por tanto, si $C_k \geq 1$, $\#AGPMS \geq (\prod_{i=1}^{k-1} C_i) 2^{k-2}$ y si $C_k = 1$, $\#AGPMS \geq (\prod_{i=1}^{k-1} C_i) 2^{k-1}$. \square

Orden de los AGPM de grado 2

El orden de los AGPM de grado 2 puede calcularse como vemos a continuación.

Teorema 2.3.6. *El número de árboles generadores de peso mínimo de grado 2 es:*

$$\#AGPM(2) = \prod_{i=1}^k C_i!$$

Demostración. En una misma capa hay tantas posibilidades de unir los vértices con grado menor o igual a 2 formando un árbol generador, como el número de permutaciones de los vértices salvo que representen el mismo camino.

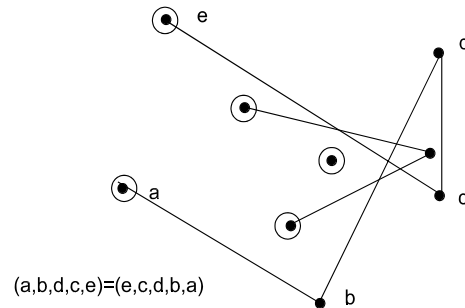


Figura 2.7: En el ejemplo de la figura, para obtener AGPM de grado 2, las capas deben conectarse con aristas cuyos extremos estén en el conjunto de vértices marcados.

Si el camino en la capa i -ésima que recorre los vértices a, b, c, \dots, y, e en este orden lo expresamos como (a, b, c, \dots, e) , hay sólo una posible permutación que representa al mismo camino y es (e, \dots, c, b, a) (figura 2.7). Por tanto, el número de caminos posibles es precisamente la mitad del número de permutaciones de los vértices de la capa, esto es, $\frac{C_i!}{2}$.

Entre dos capas consecutivas, el número posible de conexiones diferentes con una sola arista, manteniendo el grado menor o igual a 2, es: 4 de C_1 a C_2 y 2 de C_i a C_{i+1} para $i \neq 1$.

Luego el número de árboles generadores de peso mínimo de grado 2 es:

$$\begin{aligned} \# AGPM(2) &= \frac{C_1!}{2} 4 \frac{C_2!}{2} 2 \dots \frac{C_{k-1}!}{2} 2 \frac{C_k!}{2} = \\ &= \prod_{i=1}^k C_i! \end{aligned}$$

□

2.4. Poligonizaciones de peso mínimo

Dada una nube de puntos, una poligonización es un camino que conecta a todos ellos formando un polígono simple.

El peso del polígono nos da información respecto a la complejidad del mismo. En el peso por capas convexas cuanto mayor es el peso del polígono más se aleja de la convexidad.

Ya han sido realizados diversos estudios sobre las poligonizaciones de peso mínimo. Resultados obtenidos en este sentido pueden encontrarse en trabajos realizados por Abellanas et al. en [AGH1](93) y [AGH2](96), en [GT1](95) de García y Tejel, así como por Bremner, Guévremont y Shermer en [BGS](94).

Cualquier poligonización tiene peso mayor o igual a $2k - 2$, siendo k el número de capas convexas. Abellanas et al. demostraron que para cualquier nube de puntos siempre pueden obtenerse poligonizaciones de peso $2k - 2$ (*onion polygonization* [AGH1](93) y [AGH2](96)). En esta sección nos centraremos en la caracterización y obtención, en caso de ser posibles, de las poligonizaciones de peso mínimo igual a $2k - 2$, monótonas.

2.4.1. Poligonizaciones monótonas de peso mínimo

En primer lugar damos algunas definiciones y notaciones que se utilizan en esta sección.

Definición 2.4.1. *Se dice que una cadena poligonal es estrictamente monótona respecto a una recta L , si cualquier recta ortogonal a ella corta a la cadena en no más de un punto.*

Definición 2.4.2. *Una cadena poligonal es monótona respecto a una recta L si para cualquier recta ortogonal a L , su intersección con la cadena es conexa. Es decir, las proyecciones ortogonales de la cadena sobre L producen una sucesión monótona sin inversiones.*

Definición 2.4.3. *Se dice que P es un polígono (estrictamente) monótono respecto a una recta L si su frontera puede separarse en dos cadenas poligonales, cada una de ellas, (estrictamente) monótona respecto a L .*

Recordemos que la sucesión de profundidades de un polígono es la lista ordenada, circular, de los pesos de sus vértices (definición 2.1.4).

Definición 2.4.4. *Se dice que una sucesión es unimodal si existe algún entero t tal que $a_1 \leq \dots \leq a_t$ y $a_t \geq \dots \geq a_n$, de números reales $\{a_1, \dots, a_n\}$.*

Sea $\{a_1, \dots, a_n\}$ una sucesión unimodal formada con los pesos de los puntos de una nube dada S . Entonces todos los puntos de una misma capa convexa $C-Lay_i(S)$ quedan repartidos en la sucesión en dos subconjuntos (uno de ellos puede ser vacío): llamamos $C-Lay_i^+$ al conjunto de puntos que quedan a la derecha de a_t y $C-Lay_i^-$ al conjunto que queda en la izquierda. Asimismo notamos por C_i^+ y C_i^- a sus respectivos cardinales.

Definición 2.4.5. *Dado un convexo K y un segmento exterior a él s , llamamos aristas tangentes a la aristas de la envolvente convexa de K y s que no pertenecen a ninguno de ellos.*

Para la descripción del algoritmo que genera las poligonizaciones de peso mínimo, se utiliza el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1. [AGH2] *Sea S un conjunto de n puntos y profundidad k . Una poligonización de S tiene peso mínimo igual a $2k - 2$ si y sólo si la sucesión de las profundidades es unimodal realizable.*

Previamente al algoritmo realicemos un estudio de las condiciones en que es posible la proyección de un convexo K sobre un segmento s exterior a él.

Dado que el segmento s se toma exterior al convexo K , la recta que contiene a s divide al plano en dos semiplanos, notamos por H_K al que contiene a K . Las aristas tangentes de un convexo K y un segmento exterior s , pertenecen a dos de las rectas tangentes entre ambos conjuntos. Sea p el punto de corte de las rectas que contienen dichas aristas. Cuando el convexo puede proyectarse sobre el segmento desde p , cualquier punto del segmento s con p nos da una posible dirección de proyección. Notamos por D_s al conjunto de las direcciones de proyección de un convexo dado, asociadas al segmento s (figura 2.8),

$$D_s = \{d/d = px \forall x \in s\}$$

Lema 2.4.2. *Sea K un convexo y s un segmento exterior a él. Si las rectas conteniendo a las aristas tangentes a ambos se cortan en el semiplano H_K , o bien, son paralelas, entonces K puede proyectarse sobre s en cualquiera de las direcciones de D_s .*

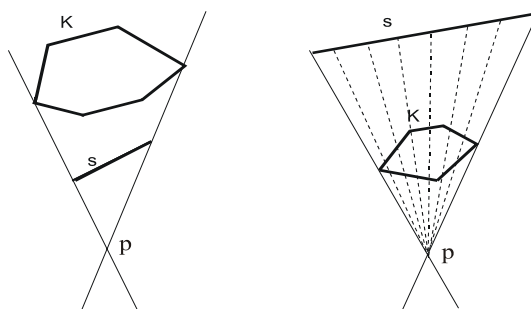


Figura 2.8: En el primer caso el convexo no puede proyectarse sobre el segmento. En el segundo hay un haz de direcciones posibles, D_s , para hacer la proyección ortogonal del convexo sobre el segmento.

Demostración. Si las tangentes entre el convexo y el segmento son paralelas, basta hacer la proyección ortogonal sobre el segmento.

En caso de que las tangentes se corten en el semiplano determinado por la recta que contiene al segmento y no al convexo no hay proyección posible. Si se cortan en el otro semiplano hay toda una haz de direcciones posibles para hacer la proyección, D_s (figura 2.8). \square

El siguiente algoritmo resuelve el problema de caracterizar y obtener, si es posible, las poligonizaciones monótonas de peso mínimo $2k - 2$ de una nube de puntos dada.

Algoritmo 2.4.1. POLIGONIZACIONES MONÓTONAS DE PESO MÍNIMO $2k - 2$

Dado un conjunto S de n puntos, de profundidad k :

1. Construir las capas $C\text{-Lay}_i(S)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.
2. Para cada capa $C\text{-Lay}_i(S)$, buscar sus aristas tales que, para cada una de ellas, se pueda hacer proyección paralela de los puntos de la capa $C\text{-Lay}_{i+1}(S)$ en alguna dirección. A cada una de dichas aristas asociarle el haz de direcciones posibles.
Si para alguna capa no existe arista que admita proyección, se concluye que no existe poligonización monótona de peso mínimo. En caso contrario seguir.
3. Calcular la intersección entre todas las capas de la unión de los haces de direcciones posibles de cada una de ellas.
4. Para cualquiera de las direcciones obtenidas en 4, construir una poligonización monótona de peso mínimo. Elegir una secuencia de aristas que tengan asociada dicha dirección y la poligonización queda determinada pues el orden que deben seguir los vértices ha de ser el que establece su proyección.

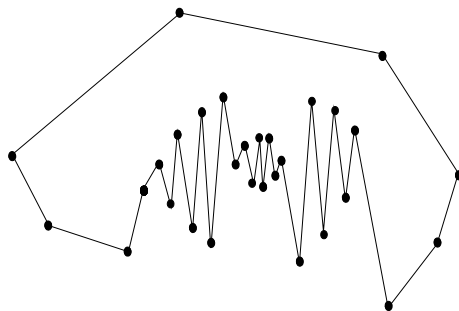


Figura 2.9: Ejemplo de poligonización monótona de peso mínimo.

Teorema 2.4.3. *El algoritmo 2.4.1 caracteriza las poligonizaciones monótonas de peso mínimo igual a $2k - 2$. El algoritmo es óptimo con coste $O(n \log n)$.*

Demostración. Las poligonizaciones producidas por el algoritmo 2.4.1 son monótonas, por construcción.

Por otra parte, si se atraviesan todas las capas convexas de la nube de puntos en una dirección cualquiera, empezando por la más externa, se irá de la primera capa hasta la última y luego de nuevo hacia la primera, ordenadamente (pues las capas son convexas y cada una contiene a la siguiente). Las sucesiones de profundidades que se generan son tales que no pueden producir inversiones de los vértices, en la dirección seleccionada por el algoritmo. Así pues, en dichas direcciones son unimodales y, por tanto, de peso mínimo.

Recíprocamente, vemos que cualquier poligonización monótona de peso mínimo ha de ser producida por el algoritmo 2.4.1.

Por ser monótona, lo será respecto de alguna dirección. En dicha dirección, por la caracterización de las poligonizaciones de peso mínimo, la sucesión de las profundidades obtenida al proyectar ha de ser unimodal.

Así pues, una vez aparece un vértice de $C-Lay_{i+1}(S)$ en la sucesión de profundidades, no puede haber ninguno de $C-Lay_i(S)$ si aún quedan de $C-Lay_{i+1}(S)$. Esto quiere decir que es posible la proyección de $C-Lay_{i+1}(S)$ sobre alguna de las aristas de $C-Lay_i(S)$ de modo que la dirección de proyección será generada por el algoritmo 2.4.1.

Los costes del algoritmo 2.4.1 según sus pasos son:

1. Construcción de las capas convexas, complejidad: $O(n \log n)$.
2. Cálculo de todas las aristas tangentes que se obtienen para cada capa $C-Lay_{i+1}(S)$ con cada una de las aristas de $C-Lay_i(S)$: $O(n \log n)$.
3. Cálculo de las posibles direcciones de proyección, esto es, $\bigcap_{i=1}^k \bigcup_{s \in C-Lay_i(S)} D_s$, complejidad: $O(n)$.

4. Obtención de las cadenas poligonales según el orden de proyección en cualquiera de las direcciones posibles: $O(n)$.

Luego el algoritmo 2.4.1 se implementa en $O(n \log n)$, lo cual es óptimo, pues no se puede poligonizar una nube de n puntos con un coste inferior. \square

Lema 2.4.4. *El número de sucesiones de profundidades posibles, representando poligonizaciones monótonas de peso mínimo igual a $2k - 2$, es a lo sumo $O(n)$.*

Demostración. El número de sucesiones de profundidades que pueda generarse va a depender del número de direcciones posibles de proyección, de las cuales se contabilizarán sólo las que den lugar a sucesiones diferentes.

Las direcciones posibles de proyección serán tales que la capa $C-Lay_k(S)$ se proyectará sobre alguna de las aristas de $C-Lay_{k-1}(S)$.

Para cada arista de $C-Lay_{k-1}(S)$ que permita la proyección de $C-Lay_k(S)$, se trazan las semirrectas que contienen a las aristas tangentes formando así un sector (figura 2.10).

Dichos sectores pueden contener otros puntos de la nube inicial. En ese caso, el sector se subdivide en otros nuevos sectores del siguiente modo: para cada punto, se traza la semirrecta que, partiendo del punto de corte de las rectas que definen al sector inicial, alcanza dicho punto.

De este modo, para cada dirección de proyección que pertenezca a un mismo sector, de los anteriormente obtenidos, sólo es posible una secuencia de aristas. Por tanto, habrá un número máximo de posibles sucesiones de profundidades diferentes igual al número máximo de sectores posibles. Y, ninguna otra secuencia de aristas puede dar lugar a poligonizaciones monótonas de peso mínimo igual a $2k - 2$.

Cada punto de la nube inicial puede generar un sector. Luego el orden máximo de sucesiones dando lugar a poligonizaciones monótonas de peso mínimo $2k - 2$ es lineal.

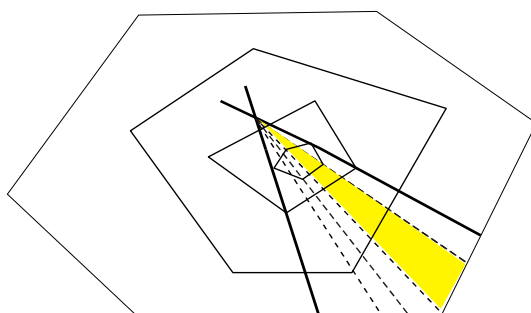


Figura 2.10: En cualquiera de las direcciones de un mismo sector, la secuencia de las aristas es la misma y, por tanto, en caso de ser posible la proyección, se generaría la misma sucesión de profundidades.

□

Las diferentes poligonizaciones monótonas de peso mínimo se obtienen al ir cambiando, entre las posibles, la dirección de proyección. Obsérvese ahora que diferentes poligonizaciones monótonas de peso mínimo pueden generar la misma sucesión de profundidades (figura 2.11).

En la construcción de una poligonización monótona de peso mínimo recordemos que la sucesión de profundidades debe ser unimodal por lo que en cada capa, $C-Lay_i(S)$, distinguimos los conjuntos $C-Lay_i^+$ y $C-Lay_i^-$ siguiendo la notación indicada al principio de esta sección.

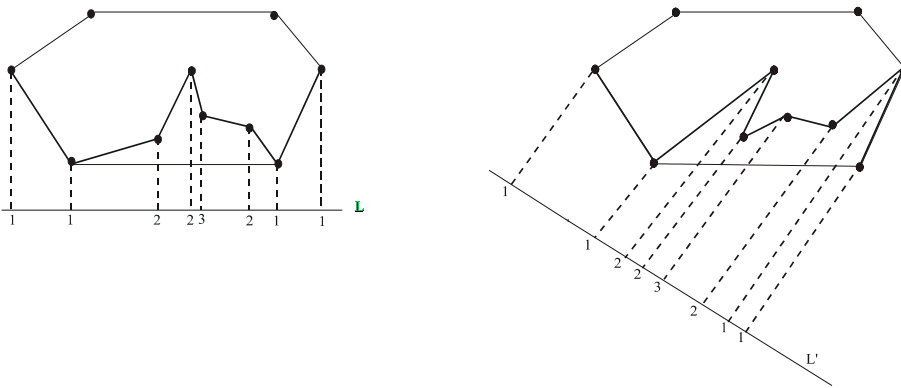


Figura 2.11: Distintas poligonizaciones con la misma sucesión de profundidades.

Sea por ejemplo L una de las posibles direcciones de monotonía. Si L no es perpendicular a ninguna de las líneas conectando parejas de puntos de $C-Lay_i^-(S)$ o $C-Lay_i^+(S)$, entonces la proyección ortogonal de estos puntos sobre L da lugar a una permutación, la determinada por el orden de aparición.

Ahora bien, si L y L' son dos posibles direcciones de monotonía, y al pasar de una a otra se corta perpendicularmente a alguna de las anteriores líneas se produce un cambio en el orden de la permutación.

Dichos cambios de orden se producirán entre los puntos de $C-Lay_i^-(S)$ o bien $C-Lay_i^+(S)$, pero no con $C-Lay_{i+1}(S)$, si y sólo si ninguna de las direcciones de monotonía es ortogonal a alguna de las líneas uniendo parejas de puntos de $C-Lay_i(S)$ y $C-Lay_{i+1}(S)$.

Siempre podemos conseguir ejemplos en los que ninguna de las direcciones de monotonía en las que $C-Lay_{i+1}(S)$ puede proyectarse sobre una arista de $C-Lay_i(S)$ es perpendicular a alguna de las líneas uniendo puntos de $C-Lay_i(S)$ con $C-Lay_{i+1}(S)$ (figura 2.12). Además, fijar una sucesión de profundidades es equivalente a determinar cuántos vértices de una misma capa quedan a la izquierda C_i^- y cuántos a la derecha C_i^+ . Por tanto, en las anteriores condiciones la sucesión de profundidades

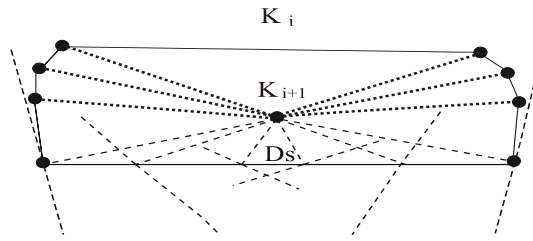


Figura 2.12: En el ejemplo de la figura, ninguna de las direcciones de monotonía es perpendicular a alguna de las líneas uniendo puntos de $C-Lay_i$ con $C-Lay_{i+1}$.

será la misma.

Proposición 2.4.1. *Fijada una sucesión de profundidades de longitud n , el máximo número de poligonizaciones monótonas de peso mínimo $2k - 2$, que pueden representarse con la anterior sucesión es $O(n^2)$.*

Demostración. Al fijar la sucesión de profundidades queda establecido también los valores de C_i^- y de C_i^+ , $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Con dicha sucesión las diferentes poligonizaciones se obtienen con cambios en el orden de los vértices de $C-Lay_i^-(S)$ entre sí, (análogamente los de $C-Lay_i^+(S)$). Estos se producen cuando al cambiar la dirección de monotonía, en el paso de una a otra, hay una dirección perpendicular a alguna de las $(C_i^-)^2$ líneas uniendo parejas de puntos de $C-Lay_i^-(S)$ (o $(C_i^+)^2$ de $C-Lay_i^+(S)$).

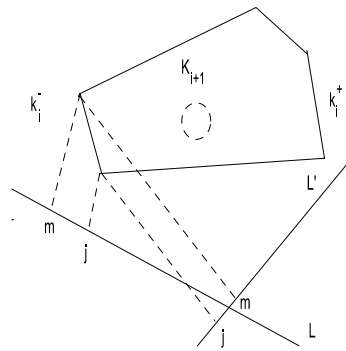


Figura 2.13: El orden de proyección de los vértices m, j sobre L , se invierte en L' .

Por tanto, en la capa $C-Lay_i(S)$ el número máximo de cambios posibles es $(C_i^-)^2 + (C_i^+)^2$. Considerando esta situación en cada capa, el número máximo de poligonizaciones monótonas de peso mínimo con la misma sucesión de profundidades

es $\sum_{i=1}^k C_i^2$, es decir de orden $O(n^2)$. □

Teorema 2.4.5. *El máximo número de poligonizaciones monótonas de peso mínimo igual a $2k - 2$ es $O(n^2)$.*

Demostración. Basta observar que hay $O(n^2)$ direcciones de segmentos uniendo entre sí parejas de puntos de la nube inicial. Luego el número de poligonizaciones no va a poder superar dicho orden. \square

En los siguientes ejemplos se alcanzan las cotas previstas.

Ejemplo 1: Considérese un conjunto de puntos formando dos capas, de modo que la más interna tiene un único punto.

Se tienen n sucesiones de profundidad:

$$\{2, 1, \dots, 1\}, \{1, 1, 2, 1, \dots, 1\}, \dots, \{1, \dots, 1, 2\}$$

y n^2 diferentes poligonizaciones.

Ejemplo 2: Siempre pueden conseguirse n sucesiones de profundidades distintas: basta que las capas estén suficientemente lejos de manera que cada capa $C\text{-Lay}_{i+i}(S)$ pueda considerarse como un punto respecto de $C\text{-Lay}_i(S)$.

2.5. Triangulaciones de peso mínimo

En esta sección se estudian las triangulaciones de peso mínimo. Se da un algoritmo que genera triangulaciones que contienen a las capas convexas y que se demuestra son de peso mínimo en determinadas nubes de puntos.

Definición 2.5.1. *Una arista separadora es aquella que atraviesa a una de las capas convexas, y, por tanto, deja vértices de dicha capa en ambos semiplanos de los determinados por la recta que contiene a la arista. Los puntos de estos semiplanos no pueden ser todos del mismo peso.*

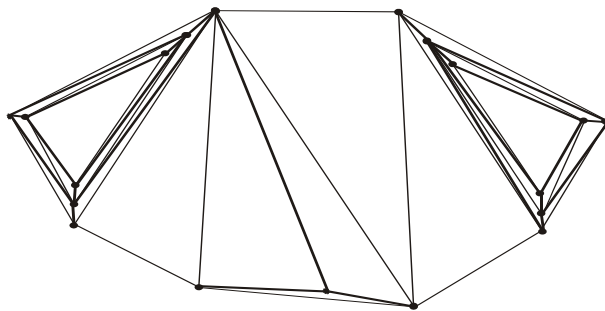


Figura 2.14: Triangulación con separadoras de peso 0 y 1 .

Proposición 2.5.1. *Cualquier triangulación de una nube de puntos dada tiene el mismo número de caras, igual a $2n - C_1 - 1$, y aristas, igual a $3(n - 1) - C_1$.*

El peso de una triangulación es la suma de los pesos de las aristas que la forman (definición 2.1.3). A continuación estudiamos las triangulaciones de peso mínimo. En primer lugar, se describe un algoritmo que genera triangulaciones que contienen a las capas convexas de la nube. Para la descripción del algoritmo (paso 3) y posterior análisis de la complejidad se utiliza un resultado similar a uno descrito en [BGH](95) y [Sa](97) pp. 28–34.

Teorema 2.5.1. [BGH] *Dado un polígono convexo P de n lados y un valor angular $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, en tiempo $O(n)$ es posible determinar el mínimo número de puntos de vista que permiten ver a P desde su exterior con calidad α , así como localizar posibles ubicaciones para ellos.*

Se trata de la construcción en tiempo lineal de polígonos que minimizan, fijada la capa, el número de vértices sobre ella de modo que contengan a la siguiente capa.

Dado un conjunto de puntos S , notamos por d_i al número de vértices de la capa $C\text{-Lay}_i(S)$ que dan lugar a un polígono con el menor número de aristas posible conteniendo a la capa $C\text{-Lay}_{i+1}(S)$.

Algoritmo 2.5.1. TRIANGULACIONES DE PESO MÍNIMO QUE CONTIENEN LAS CAPAS CONVEXAS.

Dado un conjunto S de n puntos y profundidad k :

1. *Construir las capas, $C\text{-Lay}_i(S)$, $i \in \{1, \dots, k\}$.*
2. *Triangular la zona delimitada por la capa más profunda, $C\text{-Lay}_k(S)$*
3. *Una vez triangulada $C\text{-Lay}_i(S)$ con $i \neq 1$, añadir los vértices y aristas de la capa anterior, $C\text{-Lay}_{i-1}(S)$. Del conjunto de vértices añadidos buscar un subconjunto minimal (que podría ser el total), de manera que formen un polígono, con el menor número de lados posible, que contenga a $C\text{-Lay}_i(S)$. Dicho subconjunto no tiene por qué ser único y su elección altera la triangulación pero no su peso (figura 2.15).*
4. *Triangular tanto la zona comprendida entre el polígono minimal con vértices en $C\text{-Lay}_{i-1}(S)$ y $C\text{-Lay}_i(S)$, (zona de peso no nulo), como la(s) zona(s) entre dicho polígono y $C\text{-Lay}_{i-1}(S)$ (zona(s) de peso nulo).*
5. *Si $i \neq 1$ volver al paso 3., en caso contrario acabar.*

El algoritmo 2.5.1 se implementa en $O(n \log n)$ dado que este es el coste tanto del cálculo de las capas convexas como de las triangulaciones. El coste del algoritmo que calcula, en cada caso, los polígonos minimales con vértices en una capa conteniendo a la siguiente es $O(n)$.

En lo sucesivo, notamos por T_Δ a cualquier triangulación producida por el algoritmo.

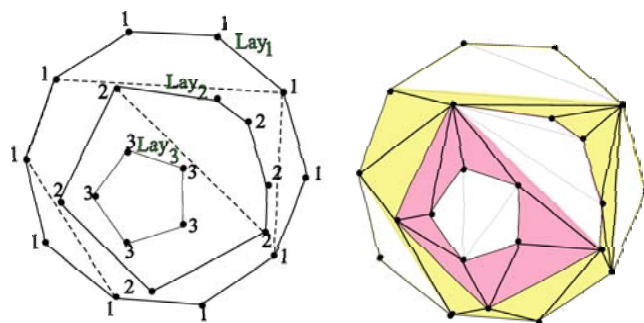


Figura 2.15: A la izquierda se observan polígonos minimales de $C-Lay_i(S)$ conteniendo a $C-Lay_{i+1}(S)$. A la derecha, una triangulación generada por el algoritmo 2.5.1. Las aristas con peso 1 están en las regiones sombreadas.

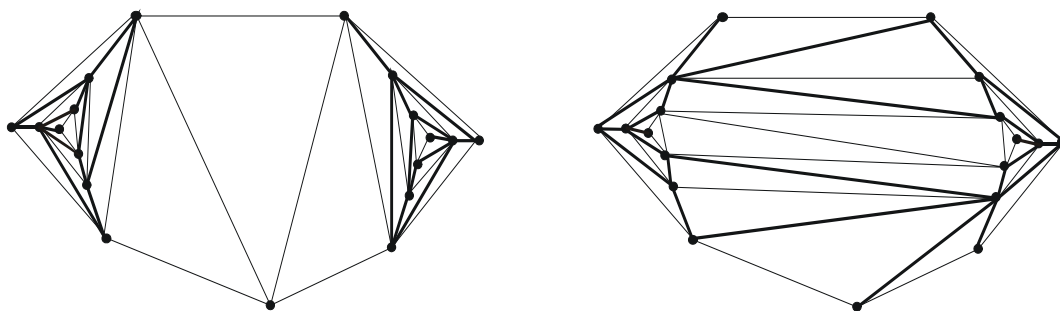


Figura 2.16: Triangulaciones del mismo peso, para la misma nube. La de la derecha es generada por el algoritmo 2.5.1 (contiene las capas convexas), la otra no lo es (contiene aristas separadoras).

A continuación se demuestra que todas las triangulaciones de una misma nube obtenidas mediante el algoritmo 2.5.1, T_Δ , tienen el mismo peso y es igual a la suma de los pesos de las zonas comprendidas entre cada capa y el polígono minimal utilizado conteniéndola.

Proposición 2.5.2. *Una triangulación cualquiera de la zona comprendida entre dos polígonos convexas, uno inscrito en el otro, tiene un número fijo de aristas internas igual a la suma de los vértices de ambos.*

Demostración. Sean m y n el número de vértices de los polígonos.

Si llamamos t al número de triángulos, el total de las aristas es $a = \frac{3t + m + n}{2}$. Aplicando ahora la fórmula de Euler obtenemos que el número de triángulos es igual a la suma de vértices, $t = m + n$.

Por tanto, el número total de aristas internas (aristas de la triangulación que no pertenecen a los polígonos dados) que notamos por a_i es: $a_i = \frac{2m + 2n}{2} = m + n$. \square

Proposición 2.5.3. *El peso de una triangulación T_Δ obtenida mediante el algoritmo 2.5.1 es fijo igual a:*

$$W_C(T_\Delta) = n - C_1 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la anterior proposición. \square

Veamos algunos casos particulares, en cuanto a la distribución de los puntos de la nube, en los que se demuestra que el algoritmo 2.5.1 da triangulaciones de peso mínimo.

Proposición 2.5.4. *Para cualquier nube de puntos S con sólo dos capas, el algoritmo 2.5.1 proporciona triangulaciones de peso mínimo.*

Demostración. La nube de puntos S tiene profundidad 2, por lo que todas las aristas de cualquier triangulación tienen peso 0 o 1. Supongamos que una triangulación T , que no puede obtenerse mediante el algoritmo 2.5.1, tuviera menor peso que cualquier T_Δ . Entonces T debe tener más aristas de peso 0 que T_Δ y, por tanto, T tiene al menos una arista separadora uv de peso 0. Entonces $C\text{-Lay}_1 = K'_1 \cup K''_1$, $K'_1 \cap K''_1 = \{uv\}$, $C\text{-Lay}_2 = K'_2 \cup K''_2$, $K'_2 \cap K''_2 = \emptyset$ (figura 2.17).

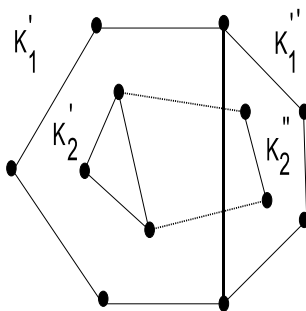


Figura 2.17: Si la triangulación tiene aristas separadoras el peso nunca es inferior al dado por el algoritmo 2.5.1.

Notamos d'_1 el número de vértices del polígono minimal de K'_1 que contiene a K'_2 , análogamente d''_1 para K''_1 y K''_2 . El número de vértices de los anteriores conjuntos cumplen $C_2 = C'_2 + C''_2$ entonces,

$$W_C(T) \geq C'_2 + d'_1 + C''_2 + d''_1 = C_2 + d'_1 + d''_1 \geq C_2 + d_1 = W_C(T_\Delta)$$

lo que contradice el hecho de que el peso de T fuera menor al de cualquier T_Δ . Luego para profundidad 2, el peso de las T_Δ es mínimo. \square

Proposición 2.5.5. *En el caso en que todas las capas son triángulos salvo quizás la última (esto es, $C_i = 3, i = 1 \dots, k-1, C_k \leq 3$), el algoritmo 2.5.1 proporciona triangulaciones de peso mínimo.*

Demostración. Cualquier triangulación del algoritmo 2.5.1 genera únicamente aristas de peso igual a 0 y 1, además en la misma cantidad (proposición 2.5.3). Sea A_0 el número de aristas de peso 0 que tiene cualquier T_Δ y sea A_1 el número de aristas de peso 1. En el caso de que todas las capas fueran triángulos, esto sería: $A_0 = 3k, A_1 = 6(k-1)$.

Sean A'_0, \dots, A'_p las cantidades de aristas generadas por otra triangulación T ; el subíndice indica el peso de modo que A'_i es el número de aristas de peso i en T . Del hecho de que el número de aristas es invariante y de que $A'_0 \leq A_0$ (pues las capas son triángulos) se deduce:

$$A_0 + A_1 = A'_0 + \dots + A'_p$$

$$A_1 - A'_1 \leq A_0 - A'_0 + A_1 - A'_1 = \sum_{j=2}^p A'_j$$

$$W_C(T_\Delta) = A_1 = A_1 - A'_1 + A'_1 \leq \sum_{j=1}^p A'_j \leq \sum_{j=1}^p jA'_j = W_C(T)$$

\square

Proposición 2.5.6. *En cualquier triangulación cuyas aristas pesan 0 o 1, sólo hay triángulos de peso 0 o 2 y el peso de la triangulación coincide con el número de triángulos de peso 2.*

Demostración. Los triángulos con todos sus vértices en la misma capa convexa tienen peso 0. Si un triángulo tiene una arista de peso 1 (entre las capas i y $i+1$) entonces el peso de la segunda arista determina el peso de la tercera: si la segunda pesa 1 debe ser también entre las capas i y $i+1$ (puesto que la tercera no puede pesar 2) y entonces, la tercera pesa 0; si la segunda pesa 0, la tercera pesa 1 (como la primera). Luego todos los triángulos pesan 0 o 2. Cada arista de peso 1 es compartida por dos triángulos, por tanto, si sumamos el peso de todos los triángulos obtenemos el doble del peso de la triangulación. Hemos visto que los triángulos pesan 0 o 2, luego el peso de la triangulación coincide con el número de triángulos de peso 2. \square

Proposición 2.5.7. *Sea T una triangulación cualquiera de una nube de puntos y sea uv la arista de mayor peso y sea $W_C(u) < W_C(v)$. Entonces la arista ab formada por los dos vértices que en T forman triángulo con u y v tiene peso menor o igual al de uv , esto es $W_C(ab) \leq W_C(uv)$.*

Demostración. Consideremos ahora los dos triángulos que en T comparten la arista uv y llamemos a y b a los nuevos vértices. Entonces $W_C(ab) \leq W_C(uv)$ pues:

$W_C(a) \leq W_C(v)$, de lo contrario $W_C(av) > W_C(uv)$ lo cual es imposible,

$W_C(a) \geq W_C(u)$, de lo contrario $W_C(au) > W_C(uv)$ lo cual es imposible,

análogamente $W_C(b) \leq W_C(v)$ y $W_C(b) \geq W_C(u)$. \square

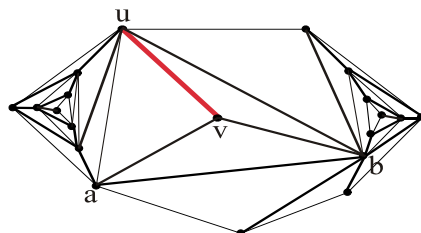


Figura 2.18: La arista uv es la más pesada y $W_C(ab) \leq W_C(uv)$. En este caso, u, v, a y b no están en posición convexa.

Con la propiedad que acabamos de ver, si los puntos definidos en la proposición, u, v, a y b están en posición convexa, un flip cambiando la arista uv por la arista ab rebaja o iguala peso pues $W_C(ab) \leq W_C(uv)$. Sin embargo, los puntos u, v, a y b pueden no estar en posición convexa como en la figura 2.18.

Proposición 2.5.8. *Sea S una nube de puntos. Sea T una triangulación de S , sólo con aristas de peso 0 y 1 y con una arista separadora uv , u y v puntos $C\text{-Lay}_1(S)$. Sean S_1 y S_2 los correspondientes puntos de S a cada uno de los lados de uv , con $S = S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{u, v\}$. Entonces, si $p \in S_1$ (análogamente en S_2), el peso de p en S_1 (S_2) coincide con su peso en S .*

Demostración. Se tiene T triangulación de peso mínimo de S , con una arista separadora uv , de modo que S_1 y S_2 son los correspondientes puntos de S a cada uno de los lados de uv , con $S = S_1 \cup S_2$ y $S_1 \cap S_2 = \{u, v\}$. Obsérvese que para cualquier punto, su peso en S_i , $i \in \{1, 2\}$ es menor o igual que su peso en S (eliminado puntos los pesos no pueden aumentar).

En cualquier triangulación de una nube todo punto debe recibir una arista del exterior de la capa en la que se sitúa. Supongamos que el punto p tiene un peso diferente en S_i que en S , ello quiere decir forzosamente que su peso en S_i es menor. Dicho punto p tiene al menos una arista exterior a su capa convexa en S_i . De hecho, podríamos construir un camino en T desde p (donde los pesos son distintos) hasta la $CH(S)$ (donde los pesos coinciden) con aristas de peso no nulo en S_i ; además, en dicho camino debe haber una arista tal que su extremo más pesado en S_i no coincida con su peso en S y sí coincidan los correspondientes pesos de su otro extremo. Esta arista en S_i tiene peso mayor o igual a 1. Si el extremo más profundo es de peso

diferente en S y en S_i , entonces en S es mayor que en S_i y, por tanto, el peso de la arista en S es mayor o igual a 2. Hemos llegado a una contradicción ya que suponíamos que todas las aristas de T son de peso 0 o 1.

Luego en una triangulación con sólo aristas de peso 0 o 1 una arista separadora de peso 0 entre puntos de la $CH(S)$ no altera los pesos de los puntos, es decir, el peso de cualquier punto p_i en S_i , $i \in \{1, 2\}$ coincide con su peso en S . \square

Conjetura 2.5.1. *Las triangulaciones obtenidas mediante el algoritmo 2.5.1, son de peso mínimo.*

A partir de una nube dada, S , cualquier triangulación obtenida mediante el algoritmo 2.5.1, T_Δ , sólo tiene aristas de peso 0 y 1. Además, el número de aristas de peso cero es siempre el mismo y dado que hemos probado que el número de aristas de cualquier triangulación es fijo, el número de aristas de peso no nulo también es constante.

Por otra parte, las triangulaciones T_Δ maximizan el número de aristas de peso 0 no separadoras por lo que este número, fijo en T_Δ para cada nube, no puede ser superado sin que aparezca alguna arista separadora.

Conjeturamos que dada una nube, S , cualquier triangulación de peso mínimo para la misma, debe tener sólo aristas de peso 0 o 1. En ese caso, el número de aristas de peso 0 en todas las triangulaciones de peso mínimo de S es fijo, al igual que el número de las de peso 1. Además, podríamos afirmar que para cualquier S existe triangulación de peso mínimo que contiene las capas convexas de S (y, por tanto, es una T_Δ), aunque hemos visto que puede haber triangulaciones que no son T_Δ , esto es que tienen aristas separadoras, del mismo peso que las T_Δ (véase las figuras 2.16 y 2.17).