Tesis Doctoral

Problemas Geométricos en Morfología Computacional

Codirectores de Tesis:

Manuel Abellanas Oar (UPM)
Ferran Hurtado Díaz (UPC)

Mercè Claverol Aguas[1]

2004

[1]Dept. Matemàtica Aplicada IV, Universitat Politècnica de Catalunya merce@mat.upc.es

Mercè Claverol Aguas
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

A la Mireia i a l'Antonio

Resumen

Esta memoria se divide en dos partes. La primera parte contiene el estudio de tres pesos o profundidades, asociados a conjuntos finitos de puntos en el plano: el peso definido por las capas convexas (*convex depth* o *convex hull peeling depth* [Hub](72), [Ba](76)), la separabilidad lineal (*location depth*, también conocido por *halfspace o Tukey depth* [Tu](75)), y el peso Delaunay (*Delaunay depth* [Gre](81)).

Cada peso pone de relieve diferentes aspectos morfolóficos de la nube de puntos. De la noción de peso, se obtiene una estratificación de los conjuntos de puntos en el plano en *capas* y una partición del plano en regiones o *niveles*, cuyas fronteras son conocidas por *depth contours*. Se definen los conceptos de capa y nivel en los tres pesos señalados y se estudian sus propiedades y sus complejidades. Chazelle en [Chaz] obtuvo métodos para hallar en tiempo óptimo las capas convexas, que coinciden con las fronteras de los niveles convexos. En esta memoria se proporcionan algoritmos de obtención, tanto de capas como de niveles, en los pesos de separabilidad lineal y Delaunay. También, para ambos pesos, se presentan algoritmos de cálculo del peso de un punto nuevo que se incorpore a la nube. De forma independiente, han sido obtenidos para el peso de la separabilidad lineal los algoritmos de construcción de los niveles (*location depth contours*) y el de cálculo del peso de un punto nuevo, por Miller et al. en [MRR1](01) y [MRR2](03).

Para cada uno de los tres pesos mencionados, se analizan estructuras geométricas (árboles generadores, poligonizaciones o triangulaciones) con peso mínimo, donde el peso se ha considerado como la suma de los pesos de las aristas de dichas estructuras. Se obtienen propiedades generales entorno a la caracterización de tales estructuras y algoritmos de obtención para alguna de ellas.

Se definen dos pesos relacionados con la separabilidad mediante cuñas: el peso según dominación isotética y el peso de la separabilidad α (que generaliza el de la separabilidad lineal). En ambos, se dan algoritmos para el cálculo de los pesos de todos los puntos de un conjunto dado. La separabilidad α (en particular, la separabilidad lineal) está estrechamente relacionada con la enumeración eficiente de (α, k)-sets . Se realiza un estudio combinatorio del conjunto de (α, k)-sets para nubes de puntos en el plano. Se proporcionan cotas inferiores y superiores para el número máximo de (α, k)-sets en cada uno de los cuatro casos posibles, según sean, α o k, fijos o variables. En cada caso, se describen algoritmos de construcción de todos los

(α, k)-sets.

En la segunda parte, se tratan diversos problemas de transversalidad. En primer lugar, se estudia la realización de polígonos sobre arreglos de rectas. Se obtienen resultados acerca de la caracterización de las permutaciones realizables, tanto como polígonos simples, como convexos.

Se abordan también diversos problemas de transversalidad con cuñas y con círculos. Una recta transversal a un conjunto de segmentos divide al plano en dos regiones en las que cada segmento sitúa uno de sus extremos. Se ha querido mantener esta propiedad de separación de extremos y, para colecciones de segmentos en el plano, se define cuña transversal separadora, y círculo transversal separador de manera acorde. Se realiza un análisis del orden de estos elementos transversales, bajo ciertas restricciones (en el ángulo de la cuña o el radio del círculo). Asimismo, se obtienen diversos algoritmos de decisión de existencia de elemento transversal y construcción de todos ellos. Finalmente, para colecciones de círculos también se define el círculo transversal separador y se obtiene un algoritmo de existencia y construcción de dichos círculos para círculos con el mismo radio.

Abstract

This memoir can be divided into two parts. The first part contains the study of three weights or depths associated to finite point sets in the plane: the convex depth (*convex hull peeling depth* [Hub](72), [Ba](76)), the location depth (also known by *halfspace or Tukey depth* [Tu](75)), and the Delaunay depth ([Gre](81)).

Every notion of depth emphasizes different morphological aspects of the point sets. From any notion of depth, a stratification of the point sets of the plane into layers and a partition of the plane into regions or levels are obtained. The boundaries of the levels are known by *depth contours.* We define the concepts of layers and levels for all three depths and we study their properties and their complexities. Chazelle obtained methods to find the layers, which are the boundaries of the convex levels, with an optimal time algorithm, in [Chaz]. We present the algorithms for constructing the layers and levels, in location and Delaunay depths. Also, for both depths, we show algorithms to calculate the depth of a new point joining the cloud. In an independent way, the algorithms to obtain the levels (location depth contours) and to calculate the location depth of a new point, are obtained by Miller et al. in [MRR1](01) and [MRR2](03).

For each one of the three mentioned depths, we study the geometric structures (spanning trees, polygonizations and triangulations) with minimum weight, where this weight has been considered as t-weight (the addition of the weight of their edges). We obtain general properties about the characterization of such structures and some algorithms to obtain them.

We define two depths related with the separability by wedges: the isothetic-domination and the α-separability which generalizes the location depth. We develop the algorithms in order to obtain the depths of all points of a given set in both cases. The α-separability (in particular the location depth) is closely related with the efficient enumeration of the (α, k)-sets. We make a combinatorial study of the (α, k)-sets for point sets in the plane. We give lower and upper bounds for the maximum number of the (α, k)-sets in each one of the four cases according to the case where α or k are fixed or variable. In every case, we give algorithms for constructing all the (α, k)-sets of a given point set.

In the second part, we consider some transversality problems. First, we study polygon realizations over arrangements of lines. We obtain results about the charac-

terization of the realizable permutations both as simple and as convex polygons.

We also study some transversality problems with wedges and circles. One transversal line to a set of segments divides the plane into two regions, where each segment has one of its extremes. We have wanted to keep this property of separation of the extremes and we have defined the separating transversal wedge and the separating transversal circle for sets of segments accordingly. We analyze the size of the set of the transversal elements, under certain restrictions (about the angle of the wedge or the radius of the circle). Furthermore, we obtain some decision algorithms on the existence and construction of all of them. Finally, we define also the separating transversal circle for sets of circles and we obtain an algorithm for sets of circles with the same radius.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores de tesis, Manuel Abellanas y Ferran Hurtado, la oportunidad que he tenido de trabajar y aprender con ellos. También les doy las gracias por no cejar en su labor de directores.

Algunos de los problemas que me han sugerido para la elaboración de esta memoria se han resistido, pero aprovecho para decir que todos ellos, (incluso el *envenenado*), me han parecido especialmente bonitos e interesantes.

Quiero dar las gracias a mis compañeros y amigos por su apoyo incondicional. Quiero mencionar especialmente a mis compañeros de trabajo en Vilanova i La Geltrú, así como a mis amigos de los diferentes grupos de investigación en Geometría Computacional. En especial, a Carlos Seara a quien nunca le ha faltado tiempo para sus amigos, entre los que me considero.

Les dedico este trabajo a mi familia que está siempre a mi lado compartiendo mis preocupaciones. Y también a la familia de Manuel Abellanas, a la que siento como mía.

Gracias a todos por hacer que no decaiga mi tesón en realizar este trabajo que guardo en *teson.tex.*

Índice general

.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Presentación

Esta memoria se inscribe en el Programa de Doctorado de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Cataluña y, temáticamente, corresponde a la Línea de Investigación de Geometría Computacional.

En esta área de investigación se pretende obtener algoritmos eficientes para resolver de forma automática problemas geométricos estudiando, a su vez, los aspectos combinatorios y estructurales que inciden en su resolución.

En este capítulo ubicaremos esta memoria y haremos una presentación de los problemas a tratar.

1.2. Contexto general

La Geometría Computacional es una disciplina que estudia la realización, implementación y análisis de algoritmos que resuelven problemas geométricos, [Mel](84), [PS](85),[Ed](87), [Tou4](92), [O'R2](94) y [Hur2](99). Tomamos varias definiciones de esta última referencia.

Los campos de aplicación más directamente relacionados con esta disciplina son el Diseño y Fabricación Asistidos por Ordenador, la Informática Gráfica y la Caracterización y Reconocimiento Automático de Formas, así como la Estadística entre otros.

En esta área se encuadran diversos problemas en los que se habla de *Morfología Computacional.* Citando a Toussaint, "*cuando al aplicar a un objeto una estructura de Geometría Computacional se pretende extraer información sobre la forma de dicho objeto, se dice que se trata un problema de Morfología Computacional*".

Un problema típico de Morfología Computacional es, dado un conjunto de puntos en el plano, preguntarse por la forma de dicho conjunto. La construcción de la envolvente convexa es una primera solución, el análisis subsiguiente de los puntos no alcanzados por la envolvente, nos daría una información más precisa de la forma.

Así, pues, el problema del Reconocimiento Automático de Formas, así como su posterior clasificación categórica, incide fuertemente en el núcleo de lo que se llama Morfología Computacional [Tou2](88). Puede verse un encuadre temático más explícito, dado por Hurtado, en [Hur1](92).

En este campo de investigación se tiene por objetivos la descripción de propiedades de conjuntos finitos de objetos geométricos (puntos, segmentos, ...), ya sea para su clasificación o comprensión. Las herramientas básicas en tales tareas son tanto la Teoría de Grafos como la Combinatoria y la Algorítmica.

En Geometría Computacional el estudio de los problemas geométricos se realiza desde el punto de vista de la Informática Teórica, en cuyo cuerpo central se encuentran el diseño y análisis de algoritmos eficientes. La eficiencia de un algoritmo hace referencia a la complejidad o tiempo total de ejecución del mismo, siempre en el peor de los casos. El modelo de computación más utilizado para el análisis del coste es el RAM real ([PS](85)), en el que se acepta que las siguientes operaciones, consideradas primitivas, pueden realizarse con coste unitario:

1. Acceso a la memoria.
2. Operaciones aritméticas básicas (+,-,x,/).
3. Comparación de dos números reales ($<, \leq, =, \neq, \geq, >$).
4. Raíces n-ésimas, funciones trigonométricas, la exponencial y el logaritmo (en general, funciones analíticas para las aplicaciones que las requieran).

El coste del algoritmo es el número total de operaciones primitivas realizadas en su ejecución, en el caso más desfavorable. En general, interesa conocer el comportamiento asintótico de los algoritmos por lo que el coste se da en términos de orden de magnitud. Escribimos $T(n) \in O(f(n))$ para acotar superiormente la complejidad temporal de un algoritmo y $T(n) \in \Omega(f(n))$ para acotarlo inferiormente. Formalmente:

$T(n) \in O(f(n)) \Leftrightarrow \exists n_0 \in N$, $\exists \alpha \in R^+$, tales que $T(n) \leq \alpha \cdot f(n)$ $\forall n \geq n_o$.

De forma análoga se define $\Omega(f(n))$. Se dice que un algoritmo es óptimo cuando su complejidad coincide con la cota inferior de la complejidad del problema que resuelve.

Dado un problema geométrico, es necesario conocer su estructura combinatoria para desarrollar el algoritmo más eficaz que lo resuelva. El estudio de la complejidad y análisis de las soluciones están relacionados con el recuento de ciertos objetos geométricos y precisa nuevamente de la combinatoria.

En el desarrollo de un algoritmo se busca a menudo una estructura que facilite las localizaciones, insertados y borrados, etc. A continuación mencionamos algunos elementos básicos en Geometría Computacional que son utilizados como elementos de preproceso en multitud de algoritmos y que son fundamentales en esta memoria:

1. Las capas convexas de una nube de puntos [Chaz](85).
2. El Diagrama de Voronoi [Au](91) y [OBS](92).
3. La Triangulación de Delaunay [LeSc](80).
4. El Diagrama de Voronoi de orden n [Au](91).
5. Los arreglos de rectas [PS](85).

Todas estas estructuras están relacionadas entre sí. A veces el proceso de dualidad es el nexo de unión entre diferentes estructuras; por ejemplo, la Triangulación de Delaunay es el grafo dual del Diagrama de Voronoi. Algunos de los problemas abordados en esta memoria han sido tratados mediante su reformulación en el espacio dual, pues ello nos ha permitido encontrar una solución más sencilla de los mismos.

1.3. Información estratificada

Dada una nube de puntos, parte de la información que se obtiene de ellos puede estructurarse según un modelo de capas. De este modo se consigue una descripción de la forma del conjunto de puntos mediante polígonos con buenas propiedades computacionales. Este proceso de estratificación es útil en numerosos problemas de Estadística, como observó Tukey, puesto que los estimadores pueden ser extremadamente sensibles a los *outliers*. Así pues, es corriente suprimir la presencia de valores extremos anómalos en determinadas situaciones (ajuste, contraste, etc.) [Hub](72), [Ba](76). En dos dimensiones una posibilidad es suprimir una o más capas externas de una nube (proceso llamado *onion peeling*), siendo las capas convexas, que se definen iteradamente, las más frecuentemente utilizadas. En muchos algoritmos, el cálculo de las capas convexas es un elemento de preprocesamiento con coste $O(n \log n)$, (véase el algoritmo óptimo de Chazelle para la construcción de las mismas [Chaz](85)). Tanto las capas convexas como las k-envolventes (capas para el peso de separabilidad lineal, véase la tabla 1.3) forman polígonos convexos encajados y son medidas de la *interioridad de los puntos*. Un estudio de los autores Cole, Sharir y Yap, al respecto de las k-envolventes o *k-hulls*, puede verse en [CSY](87).

El concepto de peso es el que nos va a permitir estructurar la nube de puntos confiriendo a los mismos un orden espacial, del que vamos a obtener la información relativa a la propia nube. Además, en el concepto de peso no se presupone ninguna distribución de los puntos y extiende el análisis univariante al multivariante, de ahí su desarrollo creciente en el campo de la Estadística [Li](99).

Cada noción de peso de un punto con respecto a un conjunto S determina una partición de S en capas y una partición del plano en regiones a las que hemos llamado niveles. Hemos definido las capas sobre los subconjuntos de S formados por todos los puntos del mismo peso; el modo en que éstos se unen para formar la capa va a depender del peso considerado.

Hemos definido el nivel de un punto q, con respecto a S, como su peso en $S\cup\{q\}$. Cada nivel de S está formado por todos los puntos del plano con el mismo nivel respecto de S. Puede verse el resumen de estas definiciones, en tres pesos diferentes, en la tabla siguiente (tabla 1.3). En los capítulos correspondientes, se definen estos conceptos con amplitud.

	Convexo	*Separabilidad*	*Delaunay*
Peso $W(p)$	Si $p \in CH(S)$, $W(p)=1$ si no $W(p) = W(p)+1$ en S en $S \setminus CH(S)$	$W(p)=j$, $j \leq \lfloor \lvert S\rvert/2 \rfloor \Leftrightarrow$ existe recta pasando por p que deja exactamente $j-1$ puntos a un lado, y no existe que deje menos	Si $p \in CH(S)$, $W(p)=1$ si no $W(p) =$ distancia desde p a $CH(S)+1$, en $DT(S)$
Capa i $Lay_i(S)$	$S_i = \{p \in S / W(p) = i\}$		
	$Lay_i(S) = CH(S_i)$		$Lay_i(S)$ =subgrafo de $DT(S)$ inducido por S_i
Nivel i $Lev_i(S)$	Peso de un punto, relativo a S: $W(p,S) = W(p)$ en $S\cup\{p\}$		
	$Lev_i(S) = \{x \in \mathbb{R}^2 / W(x,S) = i\}$		

Tabla 1.3: Definiciones

En la tabla hemos utilizado las notaciones genéricas de peso (W), capa i (Lay_i) y nivel i (Lev_i), que en cada caso se identifican con las siguientes notaciones utilizadas en la memoria:

$$
\begin{array}{llllllll}
W = & W_C, & Lay_i = & \text{C-}Lay_i, & Lev_i = & \text{C-}Lev_i, & \text{peso por capas convexas} \\
= & W_S, & = & \text{S-}Lay_i, & = & \text{S-}Lev_i, & \text{separabilidad lineal} \\
= & W_D, & = & \text{D-}Lay_i, & = & \text{D-}Lev_i, & \text{peso Delaunay}
\end{array}
$$

Han sido introducidas diferentes nociones de peso. Los mencionados en la tabla 1.3 son el peso definido por las capas convexas (*convex depth* o *convex hull peeling* *depth* [Hub](72), [Ba](76)), la separabilidad lineal (*location depth*, también conocido como *halfspace or Tukey depth* [Tu](75))y el peso Delaunay, ([Gre](81)). También se han introducido otros pesos como por ejemplo, el peso de Oja ([Oj](83)), el simplicial ([Li](90)) y el de regresión ([RH](99)).

Un estudio de las aplicaciones estadísticas de los diferentes pesos puede encontrarse en [LPS](99). También puede verse una clasificación de las diferentes nociones de peso, basada en sus correspondientes propiedades estadísticas en [ZS](00).

Cada uno de los pesos pone de relieve diferentes aspectos morfológicos de la nube de puntos. En [OBS](92) se hace mención del interés de realizar un análisis comparativo entre diferentes pesos, entre ellos se menciona el peso Delaunay junto con otros pesos que podemos enmarcar en los llamados de *onion peeling*. En esta memoria hemos estudiado el peso Delaunay, algunos de los anteriores pesos e introducido otros. Enumeramos todos ellos a continuación:

1. *Peso según capas convexas*

   El concepto de profundidad de un punto fue introducido por primera vez por Hubert [Hub](72), como el orden de la capa convexa a la que pertenece, en relación con la definición de estimadores estadísticos robustos. Las capas de la nube de puntos S, se definen como las envolventes convexas de los subconjuntos de S formados por los puntos del mismo peso. Las capas y las fronteras de los niveles de S coinciden y forman una sucesión de polígonos convexos encajados.

2. *Separabilidad lineal*

   Tukey definió la profundidad de un punto relativa a una nube dada, como el menor número de puntos de la nube contenidos en un semiplano cerrado cuya frontera pasa por el punto [Tu](75). A este peso nosotros le hemos llamado separabilidad lineal pues, asociado a un punto, nos da el mínimo número de puntos de S que hay que separar con una recta para que, eliminándolos, dicho punto pase a estar en la envolvente convexa. La separabilidad lineal de un punto, respecto a un conjunto S, nos da idea de su posición relativa, o centralidad, en dicho conjunto. Las capas de la nube de puntos S, se definen como las envolventes convexas de los subconjuntos de S formados por los puntos del mismo peso. En general, las capas no están contenidas en los correspondientes niveles los cuales forman una sucesión de polígonos convexos encajados (véase el capítulo 3).

3. *Otros separadores*

   Los siguientes pesos están relacionados con la separación de puntos mediante cuñas.

   a) *Peso por dominación isotética*
   Se define la dominación isotética de un punto de una nube dada, como el mínimo de las dominaciones del punto calculadas respecto a cada uno de

los cuadrantes del sistema de coordenadas. Este peso nos da información respecto a la separabilidad de los puntos mediante cuñas en las que hemos fijado el ángulo ($\pi/2$) y la orientación (cada uno de los cuadrantes del sistema de coordenadas). Este peso presenta el problema de la invarianza respecto a la orientación de la nube.

b) *Separabilidad* α

La separabilidad α de un punto de S se define como el mínimo número de puntos de la nube, para los cuales existe una cuña de ángulo α, con vértice en dicho punto, que los contiene. La separabilidad lineal es un caso particular de este peso para $\alpha = \pi$.

4. *Peso Delaunay*

Las adyacencias obtenidas por la triangulación de Delaunay de una nube de puntos S permiten definir el llamado peso Delaunay introducido por Green en 1981 [Gre]. La triangulación de Delaunay es un ejemplo de grafo sobre relaciones de vecindad o proximidad. El peso obtenido según la triangulación de Delaunay tiene un carácter más local y nos da información sobre la proximidad de los puntos de la nube. Las capas se definen como los subgrafos de la Triangulación de Delaunay inducidos por los puntos de S del mismo peso. Los puntos de nivel mayor o igual a k, forman una sucesión de conjuntos encajados, como ocurre en el peso según capas convexas y en de la separabilidad lineal. En este caso, cada capa está contenida en el nivel de S correspondiente al mismo peso; pero a diferencia de los otros pesos, las capas pueden no ser conexas (véase el capítulo 5).

Parte del reciente estudio de los diferentes pesos se ha centrado en el cálculo del peso de un solo punto, la obtención de las fronteras de los niveles, *depth contours* y la determinación de las regiones más profundas. Problemas todos ellos abordados en esta memoria, para los pesos de separabilidad lineal y Delaunay. Además, en el peso Delaunay, el cálculo previo de las capas Delaunay ha sido esencial para la obtención de los niveles (véase la sección 5.4).

La profundidad o nivel de un punto p con respecto a un conjunto de puntos dado S es la profundidad de p en $S \cup \{p\}$. Su cálculo ha sido estudiado para la separabilidad lineal y para otros pesos como el simplicial, o el de Oja que corresponden al número de triángulos recubridores con vértices en S y a la suma de las áreas de los triángulos con uno de los vértices en el punto y los otros en puntos de S, respectivamente. Con S y p como datos de entrada el nivel de p con respecto a S puede calcularse en $O(n \log n)$ en los pesos de separabilidad lineal, simplicial y de Oja [RR](96). En [LaSt](00) se demostró que este valor es una cota ajustada para la separabilidad lineal. En [ACG](02) se da una prueba diferente de este resultado para la separabilidad lineal y para el peso simplicial. Recientemente en [AMcL](04), ha sido probado para el peso de Oja. Nosotros hemos obtenido idénticos resultados para el peso de Delaunay: el peso de un punto, con respecto a una nube dada, puede calcularse en $O(n \log n)$ y este valor es óptimo [ACH6](04) (véase el capítulo 5, sección 5.5).

En geometría discreta clásica, el centro es cualquier punto con el peso de separabilidad lineal mayor o igual a $n/(d+1)$ en $\mathbb{R}^d$. Un punto con separabilidad lineal máxima es un máximo global de dicho peso, lo mismo ocurre si consideramos el peso definido por las capas convexas. Sin embargo, en distribuciones donde aparecen diferentes agrupamientos o *clusters*, es mejor considerar máximos locales para describir las características de la nube de puntos. En este sentido, el peso Delaunay es mejor que otros pesos ya que mantiene las relaciones de vecindad entre los puntos. En [OBS](92) se sugiere que en determinadas aplicaciones, como la interpolación o la autocorrelación, podría ser conveniente usar pesos en cuya definición interviniera la proximidad de los puntos, como ocurre en el peso Delaunay. Algunos métodos de interpolación están basados en diagramas de Voronoi y triangulaciones de Delaunay como, por ejemplo, *natural neighbor interpolation* ([Si](81)). Determinados métodos de clusterización buscan los pares de puntos más próximos [NTM](01). Se han desarrollado diferentes esquemas de representación de clusters ([Ep](98)). Una selección acerca de los métodos de clusterización puede verse en [SHR](97).

En cualquier peso, la mediana es un punto con peso máximo. Cuando este punto no es único, la mediana suele tomarse como el centroide de la región más profunda (puede haber más de una de estas regiones). Han sido estudiadas las medianas en diferentes pesos como el definido por las capas convexas, o el simplicial. En la separabilidad lineal la mediana, (*Tukey median*), tiene buenas propiedades estadísticas [BH](99) (estimador robusto, invariante bajo transformaciones afines...).

En la memoria, para la separabilidad lineal (trabajo independiente al realizado por Miller et al. en [MRR1](01) y [MRR2](03)) y para el peso Delaunay, no hemos buscado algoritmos de cálculo de la mediana, sino que hemos determinado todos los niveles (en particular, las regiones de mayor profundidad), mediante la obtención de sus fonteras.

Un resumen de las medianas de diferentes pesos y sus propiedades puede encontrarse en [Sm](90). Rousseeuw y Struyf presentan un completo survey acerca de los diferentes pesos, sus medianas y otros conceptos relacionados en [RS](04).

Los árboles generadores, las triangulaciones o las poligonizaciones son estructuras geométricas combinatorio-computacional potentes, que permiten la obtención de otras de un modo más eficiente. Una manera de relacionar dichas estructuras con la profundidad de los puntos en la nube es mediante la noción de peso. Además, el concepto de peso mínimo es una medida de complejidad de la nube que, sobre las estructuras a las que se aplica, no sólo da información relativa a la nube de puntos correspondiente, sino que preserva al máximo dicha estructura de capas formadas por puntos de un mismo peso.

Abellanas y Hurtado entre otros autores, relacionaron el concepto de profundidad con el de peso asociado a una estructura geométrica formada por segmentos (aristas) con extremos en una nube de puntos S en [AGH1](93).

El peso de una estructura geométrica admite dos definiciones naturales:

Definición 1.3.1. *El peso total* t-peso, *de una estructura geométrica, es la suma de los pesos de sus aristas.*

Definición 1.3.2. *El peor peso* w-peso, *de una estructura geométrica, es el peso de sus aristas más pesadas.*

En esta memoria nos centraremos en el estudio de las estructuras de peso mínimo según la definición 1.3.2 del *w-peso*, siguiendo el estudio realizado en [AGH1](93), para el caso del peso definido por las capas convexas y extendiéndolo a otros pesos. En dicha referencia, se obtienen unos polígonos de peso mínimo (*w-peso* en el peso por capas convexas), especialmente diseñados para actualizarse en tiempo constante cuando se eliminan una o varias capas.

En [AGH1](93), se introduce por primera vez el concepto de sucesión de profundidad asociada a un polígono, como la lista ordenada de los pesos de sus vértices. Asimismo, se plantea el problema de la caracterización de las sucesiones de profundidad de polígonos simples y se demuestra que cada sucesión unimodal de enteros es la sucesión de algún polígono. Bremner, Guévremont y Shermer, en [BGS](94), añadieron otro resultado al problema de la caracterización: dada una sucesión A de los primeros k enteros positivos tales que 1) elementos consecutivos en A difieren, como mucho, en uno y 2) cada entero entre 1 y $k-1$ aparece al menos tres veces en A, describen un algoritmo para generar un polígono P cuya sucesión de profundidad es A. En [GT1](95) García y Tejel caracterizaron el orden en el que los vértices de peso 2 son visitados en un polígono simple.

En esta memoria, hemos centrado nuestro estudio en árboles generadores, poligonizaciones y triangulaciones, en los pesos convexo, separabilidad lineal y Delaunay. Se obtienen algunas propiedades generales, resultados en torno a la caracterización de tales estructuras, y algoritmos de construcción para alguna de ellas.

1.4. Transversalidad

En todos los problemas a los que hemos hecho referencia en la sección anterior, se parte de una nube de puntos sobre la cual se trabaja. Cuando en vez de puntos se considera una colección de objetos aparecen nuevos problemas. Si, por otra parte, se pretende que las estructuras obtenidas sobre puntos se mantengan dinámicamente al desplazarse éstos sobre ciertos objetos, surgen problemas relacionados con la transversalidad.

Puede decirse que el resto de problemas abordados en esta memoria tienen en común que son problemas de transversalidad. Una referencia básica en Geometría Transversal es la de los autores Goodman, Pollack y Wenger en [GPW](93).

Se enmarcan como problemas de transversalidad aquellos que a partir de una cierta configuración, (ya sea una nube de puntos, arreglo de rectas, colección de segmentos, etc.), pretenden obtener una estructura geométrica que la atraviese, en ciertas condiciones. La llamada teoría de la transversalidad trata de obtener condiciones para la existencia de transversal y tiene su origen en el teorema de Helly (1923) que afirma que si cada $d+1$ convexos de una familia en E^d admite 0-transversal (0-variedad que los corta), entonces existe 0-transversal de toda la familia.

En esta memoria, se abordan diversos problemas de transversalidad partiendo de diferentes conjuntos de elementos y tipos de transversal. El capítulo 6 se centra en el estudio de la realización de polígonos sobre rectas. En el capítulo 7 se estudia la transversalidad de segmentos con cuñas y en el capítulo 8 la transversalidad de segmentos con círculos y también la de círculos con círculos.

Para colecciones de segmentos se empezaron estudiando problemas de transversalidad con rectas. Cortar segmentos con rectas es un importante subproblema en la vectorización de imágenes escaneadas, en el campo de la visión computerizada mediante gráficos y la localización de los caminos más cortos para la planificación de movimientos. Dado un conjunto de segmentos paralelos, O'Rourke [O'R1](81) proporciona un algoritmo para encontrar, si existe, una recta transversal. El caso de segmentos arbitrarios es analizado por Edelsbrunner et al. en [EMP](82). Edelsbrunner y Guibas en [EG](86) encuentran, en $O(n^2)$, la recta que corta un número máximo de segmentos en el plano.

Una variante natural es la de considerar otro tipo de transversales diferentes a las rectas. Quizás los primeros en considerar otro tipo de transversal fueron Goodrich y Snoeyink resolviendo el problema de calcular un polígono convexo transversal a una colección de segmentos paralelos, en $O(n \log n)$, [GS](90).

Dentro de una misma clase de transversal también se han planteado problemas de optimización. Bhattacharya et al. encuentran el segmento transversal más corto en [BCE](91). Lyon et al. estudiaron el problema de calcular un polígono convexo de perímetro mínimo que interseca a un conjunto de segmentos isotéticos [LMR](90). Para un conjunto de segmentos paralelos, se calcula el polígono convexo de área mínima que los interseca a todos en [BKM](93).

En esta memoria, en el caso de conjuntos de segmentos, se ha realizado el estudio tanto con cuñas como con círculos como elementos transversales. Obsérvese que una recta transversal a un conjunto de segmentos divide al plano en dos regiones en las que cada segmento sitúa uno de sus extremos, permitiendo el caso en que éste se sitúe sobre la misma recta. Hemos querido mantener esta propiedad al considerar como elemento transversal la cuña y también en el caso del círculo. La cuña transversal a una colección de segmentos, que definimos en el capítulo 7, divide al plano en dos regiones y cada segmento debe tener un extremo en cada una de ellas, o sobre las semirrectas de la cuña, para que sea transversal. De ahí que la llamamos cuña transversal separadora (cuña TS). Análogamente, en el capítulo 8, se considera el círculo transversal a una colección de segmentos que divide al plano en dos regiones y atraviesa a cada segmento separando sus extremos, admitiendo el caso en que ambos estén sobre la circunferencia que define al círculo (pero no el de tangencia). A dicho elemento le denominamos círculo transversal separador (círculo TS).

En los correspondientes capítulos se hace un análisis del orden de estos elementos transversales y se obtienen diversos algoritmos de decisión y construcción.

Un problema clásico en el área de transversalidad con círculos es el llamado 1-*center problem* donde la colección de objetos es un conjunto de puntos. Este problema fue resuelto en tiempo lineal por Meggido [Meg1](83) y posteriormente por Dyer [Dy](86). Una generalización de este problema es el 1-*center problem* con pesos. Para una colección de polígonos convexos, Bhattacharya, Jadhav y Mukhopadhyay describen un algoritmo óptimo para encontrar el mínimo círculo que los interseca a todos [BJM](92).

Dado un conjunto de segmentos, nos planteamos la existencia de un círculo que los atraviesa separando los extremos y, en caso afirmativo, encontrar el de radio mínimo. Sin imponer la restricción de la separación efectiva de los extremos, Bhattacharya et al. en [BJMR](96) proporcionaron un algoritmo óptimo (lineal) para resolver este problema, cuya técnica se basa en una combinación de *prune and search* y la de reemplazar segmentos por rectas o puntos.

De forma análoga a los casos mencionados, estudiamos también la transversalidad de círculos con círculos separadores, en el capítulo 8. Para imponer la separabilidad de los elementos (en este caso círculos), consideramos que el círculo transversal no debe contener a ninguno de ellos en su interior.

1.5. Problemas tratados

1. Peso según capas convexas:

   Se definen las capas y los niveles para este peso. Se estudian algunas estructuras de peso mínimo:

   a) Árboles generadores de peso mínimo.

   Se han caracterizado los árboles generadores de peso mínimo, $AGPM$, y algún tipo particular de los mismos: los árboles generadores de peso mínimo que hacen mínimo el máximo grado así como los de longitud mínima. En relación al estudio del orden de los $AGPM$, éste se ha calculado y se ha maximizado en función del número de capas convexas. También se calcula explícitamente el orden de los $AGPM$ de grado máximo 2. Se da una cota inferior del orden de $AGPM$ en el caso en que no se admiten cortes entre las aristas.

   b) Poligonizaciones de peso mínimo.

   Se ha tratado el problema de la caracterización y obtención, en caso de ser posibles, las poligonizaciones monótonas de peso mínimo igual a $2k-2$. Para ello se describe un algoritmo óptimo de coste $O(n \log n)$.

c) Triangulaciones de peso mínimo.

Se estudia el problema de la caracterización de las triangulaciones de peso mínimo. Se proporciona un algoritmo, de complejidad $O(n \log n)$, que genera triangulaciones conteniendo a las capas convexas de la nube de puntos. Se demuestra que genera triangulaciones de peso mínimo en el caso de dos capas y en el caso de capas triangulares. Se conjetura que genera triangulaciones de peso mínimo en cualquier caso. En dicho algoritmo se utiliza un resultado similar al obtenido por Blanco et al. en [BGH](95), para la construcción de un subconjunto minimal de una capa convexa cuyo polígono determinado circunscribe la capa inmediatamente interior.

2. Separabilidad lineal.

   a) Se obtienen algunas propiedades geométricas y combinatorias de este peso.

   b) Se definen las capas y los niveles de separabilidad lineal. Se describe un algoritmo de coste $O(n^2)$ para el cálculo de la separabilidad de los puntos de una nube. Los niveles de separabilidad lineal se calculan en $O(n^2)$ determinando sus fronteras (*location depth contours*). El cálculo del peso de un punto nuevo se obtiene en $O(\log n)$ tras un preproceso cuadrático, en el que se construyen los niveles de separabilidad lineal de la nube dada. Estos algoritmos han sido obtenidos de forma independiente por Miller et al. y publicado en [MRR1](01) y [MRR2](03).

   Se analiza el peso de los puntos de una recta: con coste $O(n)$ se obtienen los puntos de separabilidad lineal no nula de la recta dada y, con coste $O(n\sqrt[3]{k-1}\log^2 n)$, los puntos de separabilidad k.

   c) Se estudian las poligonizaciones de peso mínimo: se extiende un resultado probado en [AGH2](96) para el peso por capas convexas, en relación a la caracterización de las de peso igual a $2f-2$, con f la profundidad de la nube de puntos.

3. Otros separadores:

   Se definen los siguientes pesos, en relación a la separabilidad mediante cuñas: el peso por dominación isotética y la separabilidad α. Se proporciona un algoritmo $O(n \log n)$ para el cálculo del peso según la dominación isotética de los puntos de la nube y otro $O(n^2)$ para el cálculo de la separabilidad α.

4. (α, k)-sets para nubes de puntos en el plano.

   La separabilidad α (en particular, la separabilidad lineal) está estrechamente relacionada con la enumeración eficiente de (α, k)-sets. El capítulo 4 está dedicado al estudio de los (α, k)-sets.

   a) Se realiza un estudio combinatorio del conjunto de (α, k)-sets para nubes de puntos en el plano. Se proporcionan cotas inferiores y superiores para el número máximo de (α, k)-sets en cada uno de los cuatro casos posibles: ambos parámetros α y k fijos, uno de ellos fijo y el otro variable o ambos variables (véase el resumen de los resultados obtenidos en la tabla 4.6, al final del capítulo 4).
   b) Se describen algoritmos de construcción de todos los (α, k)-sets también para cada uno de los casos posibles (véase el resumen de los resultados obtenidos en la tabla 4.6).

5. Peso Delaunay.
   a) Se obtienen algunas propiedades geométricas y combinatorias de este peso.
   b) Se definen las capas y los niveles Delaunay relativos a una nube de puntos. A partir de las capas, se ha desarrollado un algoritmo $O(n \log^2 n)$ para el cálculo de todos los niveles, determinando sus fronteras o *Delaunay contours*.
   c) Se demuestra que la profundidad o nivel de un punto p con respecto a un conjunto de puntos dado S puede calcularse en tiempo $O(n \log n)$, y que dicho valor es óptimo.
   d) Se muestra un ejemplo que maximiza el cambio de peso que puede generar en los demás puntos (de $n/3$ a 2) y también en la profundidad de la nube (de $n/3$ a 3), la inserción de un punto nuevo.
   e) Estructuras de peso Delaunay mínimo:
      1) Se demuestra que los resultados obtenidos sobre árboles generadores de peso mínimo en el peso por capas convexas pueden enunciarse de forma análoga al peso Delaunay.
      2) Se demuestra que cualquier poligonización de una nube dada S tiene peso mayor o igual a $2f - 2$, siendo f la profundidad de la nube. Se demuestra que una poligonización de una nube de puntos dada S es de peso mínimo $2f - 2$ si y sólo si la sucesión de profundidades de la poligonización es unimodal. Las poligonizaciones de peso $2f - 2$, a las que notamos por PPM, no siempre existen, demostramos que el peso mínimo para las poligonizaciones de una nube dada, puede tener un valor entre $2f - 2$ y n. Se presenta un ejemplo en el que cualquier poligonización de la nube de puntos tiene peso $\Omega(n)$.
      3) Se observa que la Triangulación de Delaunay de una nube de puntos, no es una triangulación de $t - peso$ mínimo y sí lo es de $w - peso$ mínimo (según las definiciones 1.3.1 y 1.3.2).

6. Transversalidad: realización de polígonos sobre rectas.

Dado un arreglo de n rectas se estudia el conjunto de permutaciones de n puntos realizables, uno sobre cada recta, formando un polígono. Se aborda el problema tanto para polígonos simples como convexos. Se ha demostrado que toda permutación es realizable como polígono simple y además monótono.

Se obtiene una cota inferior del orden de las permutaciones realizables como polígonos convexos en conjuntos de n puntos: $(n+1)2^{n-1} - 3n + 3$.

Se ha caracterizado también el tipo de permutaciones realizables como cierre convexo de los n puntos en la zona infinita del arreglo (esto es, la zona sin cortes). Se demuestra que las sucesiones definidas por dichas permutaciones son unimodales. Finalmente, se prueba con un ejemplo que pueden haber permutaciones no realizables en la zona infinita que sí lo son en la complementaria.

7. Transversalidad de segmentos en el plano con cuñas.

    a) Se realiza un estudio del orden del número posible de cuñas transversales separadoras, cuñas TS: dado un conjunto de segmentos en el plano se analizan cotas para el orden del número posible cuñas TS, en función del tipo de la misma (ángulo fijo o variable) y se dan ejemplos.

    b) Respecto a la caracterización de las cuñas transversales separadoras: se describen algoritmos de decisión de existencia y construcción de cuñas TS, para conjuntos de segmentos que no admiten recta transversal: para una colección de segmentos en posición general con coste $O(n^3 \log n)$, para segmentos verticales $O(n^3)$ y para segmentos verticales de la misma longitud $O(n^2 \log^2 n)$.

8. Transversalidad con círculos.

    a) Dado un conjunto de n segmentos se plantea el problema de saber si existe un círculo que los atraviesa separando los extremos (igual que en el caso de las cuñas transversales) y, en caso afirmativo, encontrar el de radio mínimo. Se presenta un algoritmo $O(n^2\sqrt{2n}\log 2n)$ de decisión y construcción del círculo transversal de radio mínimo. Se demuestra que una solución del problema (si existe) es un vértice del diagrama de Voronoi $DV_{n-1}(S)$ o está sobre una arista. Una vez construido el diagrama, la solución se consigue en tiempo $O(n^2)$.

    Se hace un estudio del lugar geométrico de los centros de círculos transversales, se prueba que dicho lugar geométrico es unión de convexos. Se hace un estudio del orden de los círculos transversales donde se obtienen cotas óptimas: se demuestra que el máximo número de círculos transversales separadores para conjuntos de segmentos, combinatoriamente diferentes, es $\Theta(n^2)$ para conjuntos arbitrarios y $\Theta(n)$ para conjuntos de segmentos paralelos.

b) Se estudia la transversalidad de círculos con círculos. Se presenta un algoritmo de existencia y construcción de círculos TS para colecciones de círculos del mismo radio, el coste es $O(n \log n)$.

Varios de los resultados de esta tesis han sido presentados en diversos congresos y han sido enviados a revista [ACH1](97), [ACH2](01), [ACH3](02), [ACH4](03), [ACH5](04) y [ACH6](04).