

UNIVERSITAT POLITECNICA DE CATALUNYA

DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I COMUNICACIONS

TESI DOCTORAL

TITOL: ANALISI DE DISCONTINUITATS FINLINE

DIRECTORS:

ADOLF COMERON TEJERO

LLUIS PRADELL I CARA

AUTOR:

ANTONI BARLABE I DALMAU

Barcelona, Setembre de 1995

3.3. Anàlisi d'una línia finline en curt-circuit.

Amb el procediment esmentat a l'apartat 3.1 i el mètode de la ressonància transversal generalitzat presentat al capítol 2.5 (tenint en compte en les expressions dels productes escalars g^i que ara la superfície d'integració és un rectangle de dimensions $\ell_2 \times w$) s'ha analitzat un finline en curt-circuit en guia WR-28.

Ara, però, hem de considerar modes TE_{mn} i TM_{mn} en lloc de TE_{1n} i TM_{1n} que feiem servir per analitzar línies uniformes finline. Això comporta el problema de quans i quins modes hem d'agafar en cada zona (guia i obertura o "slot").

En el capítol dedicat al mètode de la ressonància transversal generalitzat s'havia presentat una relació òptima per al nombre de modes en cada zona de l'estructura: $R=N/Q = 1,5 b/w$, essent N el nombre de modes a la zona de la guia i Q el nombre de modes al "slot". En aquest cas l'índex n màxim dels modes TE i TM a la guia és $(N-1)/2$ i l'índex q màxim dels modes TE i TM al "slot" és $(Q-1)/2$ (N i Q són nombres senars). Així també es compleix la relació R anterior si considerem l'índex màxim dels modes a les diferents zones de l'estructura. Tenint en compte això i considerant l'estudi de Shih i Gray [127] apliquem la regla anterior al nostre cas:

$$R1 = NN/QQ = 1,5 b/w \quad ; \quad R2 = MM/PP = 1,5 \ell/\ell_2 \quad (3.3.1.)$$

en què MM i NN són, respectivament, els índex m i n màxims dels modes TE i TM a la guia; PP i QQ són, respectivament, els índex p i q màxims dels modes al slot.

Els resultats obtinguts no eren precisament satisfactoris.

A continuació, i tenint en compte les dimensions de l'estructura, es va introduir un procediment que ordenava els modes TE i TM a les diferents zones atenent a les seves freqüències de tall. D'aquesta manera s'esperava que al truncar les sèries modals (que, en definitiva són sèries de Fourier bidimensionals), els modes no considerats serien "els més superiors" i, previsiblement les seves amplituds relatives serien força menys significatives que els modes amb freqüències de tall menors.

S'ha de tenir en compte que és difícil fer complir la condició $R2$ anterior donat que el mètode el que vol calcular és, precisament, ℓ_2 . A l'ordenar els modes es podrà considerar la relació atenent al nombre de modes i no a l'índex.

Com s'aprecia a les gràfiques següents, els resultats obtinguts posen de manifest el problema de la convergència relativa:

FINLINE EN CURT $b/w=10$

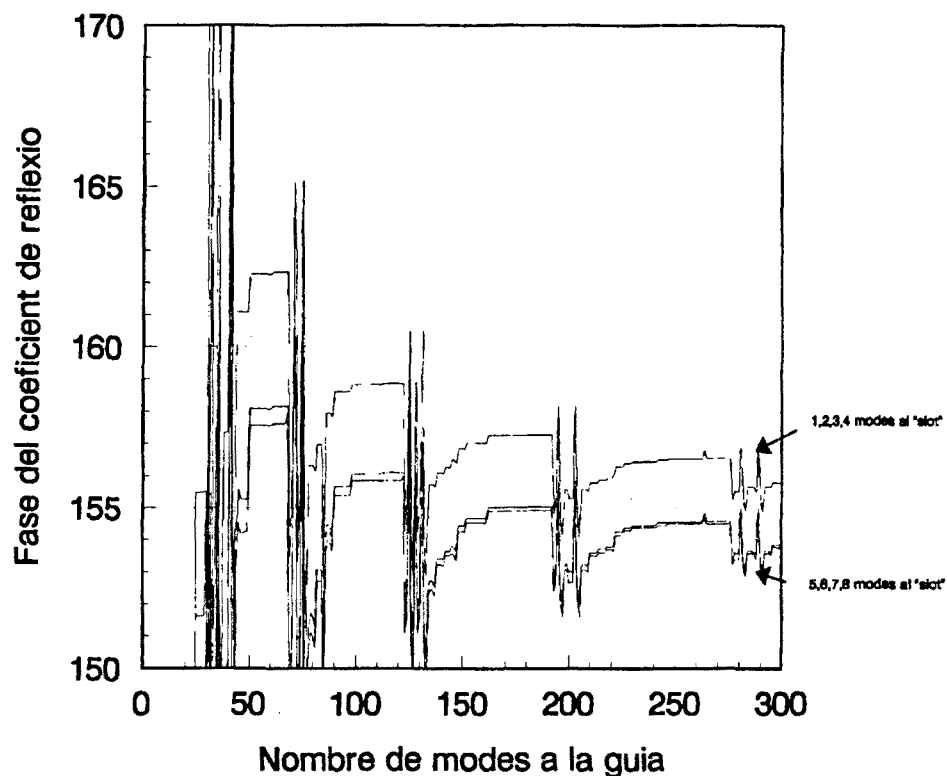


Fig 3.3.1

FINLINE EN CURT-CIRCUIT

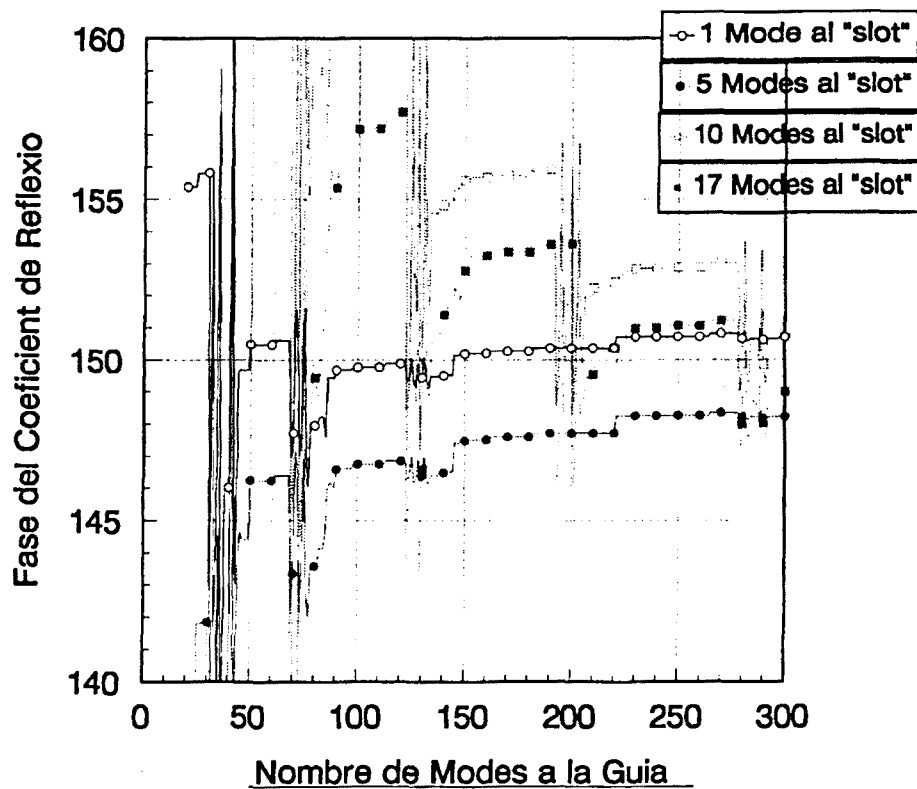


Fig 3.3.2

Per a relacions b/w grans calen pocs modes al "slot" i, si bé s'aprecia la convergència relativa, les diferències són de l'ordre de 2° . Per relacions b/w menors la convergència relativa és més acusada.

Error de l'ordre de 3° poden ser acceptables en molts casos. Però si comparem els resultats obtinguts amb els presentats a la bibliografia les coses són molt pitjors. Així, per una finline en curt en guia WR-28 amb $b/w=5$, metal·lització i slot centrats, dielèctric de permitivitat 2,2 i gruix 0,356 mm, a 31,6367 GHz, Knorr [162] dona una reactància equivalent normalitzada de 0,35 que equival a una fase de coeficient de reflexió de 140° . El mètode de la ressonància transversal generalitzat, amb una relació entre el nombre de nodes a la guia i al "slot" de 1,5 b/w , proporciona un resultat de 157° . Tenim una diferència de 17° que pot molt ben ser no acceptable.

El fenomen de la convergència relativa en el mètode de l'adaptació modal ha sigut tractat per alguns autors, posant-se de manifest que pot ser degut a la violació de la condició de cantell o a que les matrius a tractar estan mal condicionades. Les solucions adoptades ha estat utilitzar relacions òptimes en el nombre de modes a considerar per a un problema determinat. També s'han presentat procediments de validació dels resultats obtinguts, com ara considerar el número de condició de les matrius, dibuixar els camps a ambdós costats d'una discontinuïtat i comprovar les condicions de continuïtat o calcular la potència complexa a ambdós costats de la discontinuïtat i veure la possible discrepància.

En el nostre cas, la matriu $[H]$ a manipular no és d'un tamany excessiu, és real i simètrica i acostuma a estar ben condicionada. El dibuix dels camps a la guia en el pla del finline i al "slot" manifesten una bona coincidència. Es fa necessari, per tant, un estudi de l'arrel del problema: la condició de cantell.

3.4. La condició de cantell.

Les equacions de Maxwell ens modelen qualsevol sistema electromagnètic i ens proporcionen una solució única sempre i quan les funcions que descriuen els comportaments dels camps siguin contínues i "suaus" (derivables). Si en alguns punts o zones de l'estructura sota anàlisi els camps agafen valors singulars (tendeixen a infinit) i per tant no són derivables en aquest punts, les equacions de Maxwell no tindran una solució única.

Camps singulars apareixen al cantell d'una estructura metàl·lica perfecta com la de la figura:

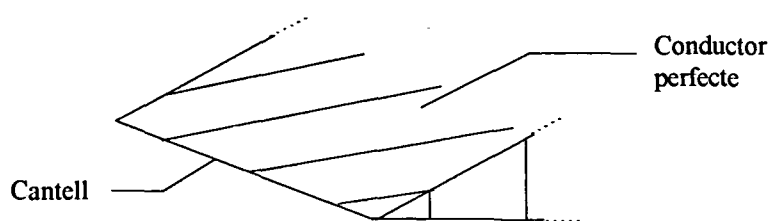


Fig 3.4.1

Per analitzar problemes electromagnètics en els que apareixen estructures com la de la figura, a part de les equacions de Maxwell ens fa falta una altra condició física que s'anomena la condició de cantell i es basa en un principi energètic. La condició de cantell especifica que l'energia elèctrica i l'energia magnètica emmagatzemada en un entorn finit del cantell ha de ser finita:

$$\int_V \left(\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right) dv = \kappa \quad \kappa \rightarrow 0 \text{ quan } V \text{ es contrau a l'entorn del cantell} \quad (3.4.1)$$

El problema del cantell va ser estudiat per Meixner, Mittra i Lee i Leroy. Segons aquests autors la condició de cantell imposa que cap component de camp elèctric ni de cap magnètic pot créixer més ràpidament que $\rho^{-1+\tau}$ amb $\tau > 0$ quan $\rho \rightarrow 0$. ρ és la component radial de les coordenades cilíndriques locals del cantell:

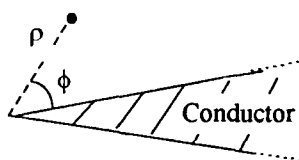


Fig 3.4.2

Expressant els camps en coordenades cilíndriques, desenvolupant aquestes components en sèries de potències de ρ , igualant els coeficients amb la mateixa potència de ρ s'obté un conjunt d'equacions diferencials. Resolvent-les tenint en compte les condicions de continuïtat dels camps i considerant tres regions diferents a l'entorn del cantell, s'obté un sistema de trenta equacions amb trenta incògnites. Després d'un laboriós procés d'eliminació s'obtenen dues equacions en τ . Resolvent-les per a una geometria determinada i agafant dels valors de τ obtinguts el que proporcionari una condició més restrictiva, s'obté el comportament asimptòtic de les components de camp a l'entorn del cantell (). Així, per exemple en un cantell com el de la figura:

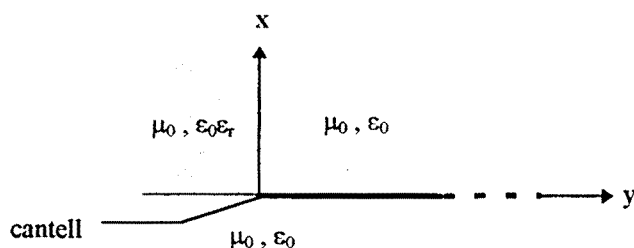


Fig 3.4.3

és:

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_t &= O(\rho^{-1+\tau}) \\ \vec{H}_t &= O(\rho^{-1/2}) \\ E_z, H_z &= O(\rho^{\min(1/2, \tau)}) \end{aligned} \right\} \rho \rightarrow 0 \quad (3.4.2)$$

amb:

$$\tau = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left[\frac{3\varepsilon_r + 1}{2(\varepsilon_r + 1)^2} \right]^{1/2} \quad (3.4.3)$$

La notació $f(x) = O(g(x))$ quan $x \rightarrow x_0$ significa que $f(x)$ no creix més de pressa que $g(x)$ quan $x \rightarrow x_0$. $\vec{E}_t = E_\rho \hat{\rho} + E_\phi \hat{\phi}$; $\vec{H}_t = H_\rho \hat{\rho} + H_\phi \hat{\phi}$ (coordenades cilíndriques).

Si $\varepsilon_r = 1$ (tot el medi que rodeja al cantell homogeni) llavors és $\tau = 1/2$ i dona lloc al cas en que el camp és més singular.

Per al cas d'una bifurcació en guia de plaques paral·leles analitzada amb el mètode de l'adaptació modal, Mittra i Lee, aplicant la condició de cantell, varen obtenir el següent comportament asimptòtic per als coeficients de totes les sèries modals involucrades: $A_n = O(n^{-3/2})$, $n \rightarrow \infty$. El mateix comportament han de tenir els coeficients de l'expansió modal en la zona de la guia corresponents a modes TE_{1n} en l'anàlisi per ressonància transversal generalitzat d'una línia finline uniforme amb un dielèctric de $\varepsilon_r = 1$. En la figura següent es representen les amplituds d'aquests coeficients modals:

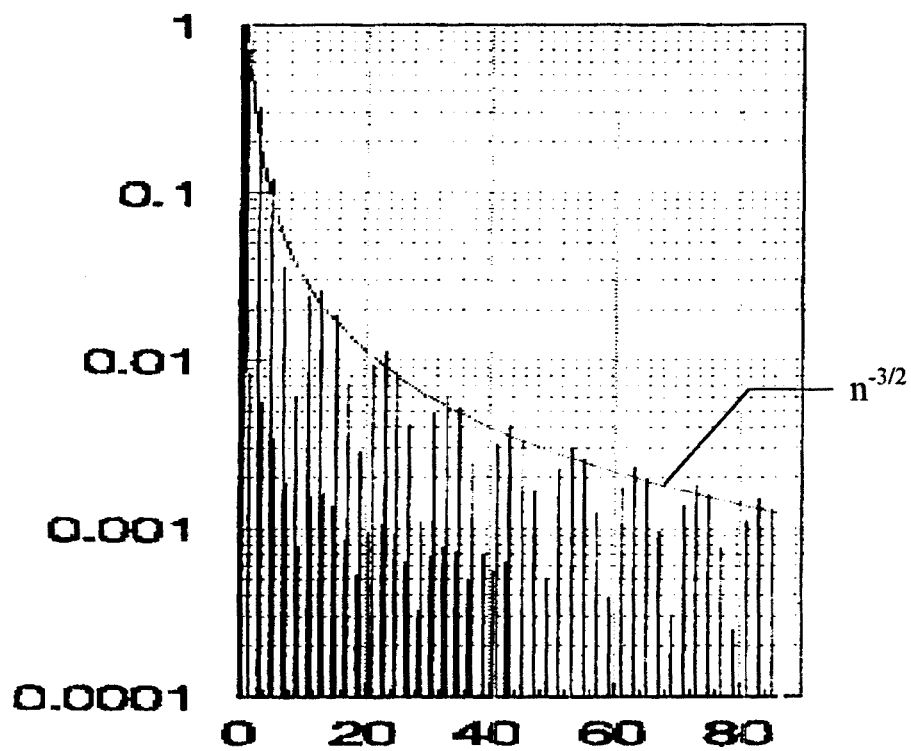


Fig 3.4.4

Es pot observar clarament que tenen el comportament asimptòtic esperat, si bé hi ha alguns modes que sobrepassen lleugerament la cota de $n^{-3/2}$.

Fins aquí, però, només disposem d'eines de validació dels resultats obtinguts. Seria força convenient disposar d'alguna tècnica que permetès assegurar a priori la validesa dels resultats que s'obtinguin.

3.5. Inclusió de les condicions de cantell en les expansions modals.

En el mètode de la ressonància transversal generalitzat (així com en el de l'adaptació modal), s'han de realitzar una sèrie de productes escalars entre les funcions modals que representen els camps a la guia \vec{e}^i i les funcions modals del "slot" \vec{e}_0^i :

$$g = \langle \vec{e}^i, \vec{e}_0^i \rangle = \iint_{S_a} \vec{e}^i \vec{e}_0^i ds \quad i = e(\text{TE}) \quad \text{ó} \quad m(\text{TM}) \quad (3.5.1)$$

S_a és la superfície de l'obertura o "slot".

No hi ha cap inconvenient en que generalitzem aquest producte escalar introduint-hi una funció de pes que tingui en compte l'efecte de cantell, és a dir, el comportament singular dels camps a la seva proximitat:

$$g_w = \iint_{S_a} \vec{e}^i \vec{e}_0^i W ds \quad (3.5.2)$$

Per a una finline uniforme:

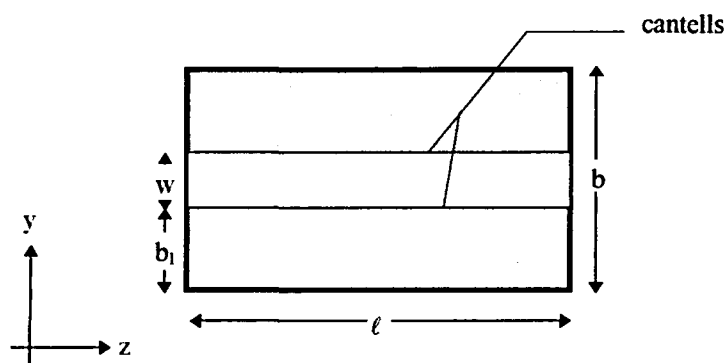


Fig 3.5.1

podem fer servir la següent funció de pes per incloure l'efecte dels cantells (de forma semblant a les utilitzades en el mètode del domini espectral):

$$W = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y - b_1 - w/2}{w/2} \right)^2}} \quad (3.5.2)$$

Així el s productes escalars calculats en el capítol 2.5 (equacions 2.5.20) queden modificats canviant les funcions Q i T per Q_1 i T_1 respectivament, essent:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_{b_1}^{b_1+w} \frac{\sin Cy \sin[A(y-b_1)]}{\sqrt{1-\left(\frac{y-b_1-w/2}{w/2}\right)^2}} dy = \\
&= \frac{w\pi}{4} \left\{ \cos\left[(C-A)\frac{w}{2} + Cb_1\right] J_0\left[(C-A)\frac{w}{2}\right] - \cos\left[(C+A)\frac{w}{2} + Cb_1\right] J_0\left[(C+A)\frac{w}{2}\right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_{b_1}^{b_1+w} \frac{\cos Cy \cos[A(y-b_1)]}{\sqrt{1-\left(\frac{y-b_1-w/2}{w/2}\right)^2}} dy = \\
&= \frac{w\pi}{4} \left\{ \cos\left[(C-A)\frac{w}{2} + Cb_1\right] J_0\left[(C-A)\frac{w}{2}\right] + \cos\left[(C+A)\frac{w}{2} + Cb_1\right] J_0\left[(C+A)\frac{w}{2}\right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.5.4}$$

en què $J_0(x)$ és la funció de Bessel de primera espècie i ordre 0.

Fixem-nos que, de fet, el considerar la funció de pes equival a tenir unes funcions base al "slot" que inclouen la condició de cantell:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_0 &= \sum U^e \left[-P_{pq} (-A \cos Bz \sin Ay' \hat{z} + W B \sin Bz \cos Ay' \hat{y}) \right] + \\
&\quad + \sum U^m \left[-P'_{pq} (B \cos Bz \sin Ay' \hat{z} + W A \sin Bz \cos Ay' \hat{y}) \right]
\end{aligned} \tag{3.5.5}$$

3.6. Anàlisi d'una finline uniforme tenint en compte l'efecte de cantell.

L'implementació de la condició anterior dóna excel·lents resultats com es pot apreciar a les gràfiques que es presenten a continuació:

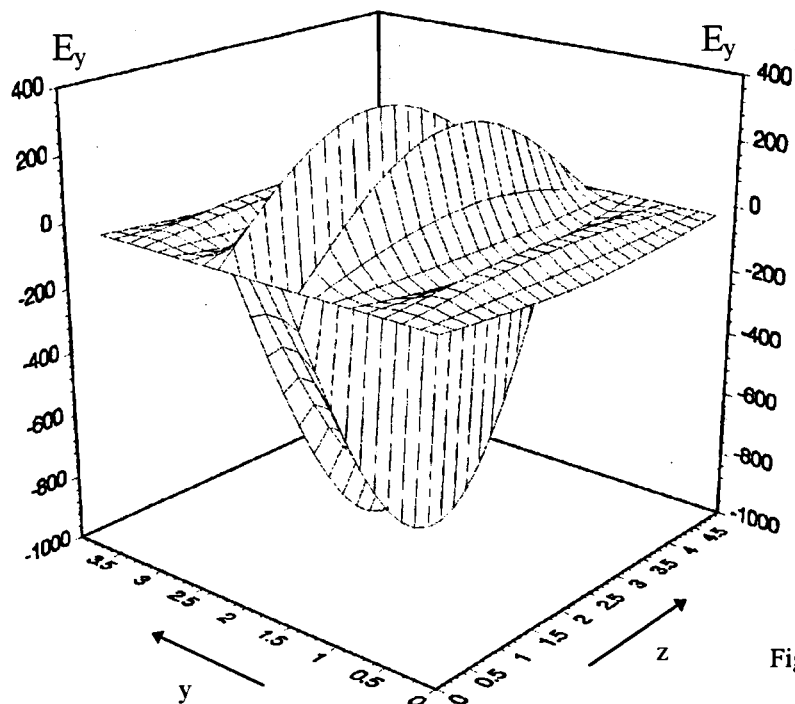


Fig 3.6.1

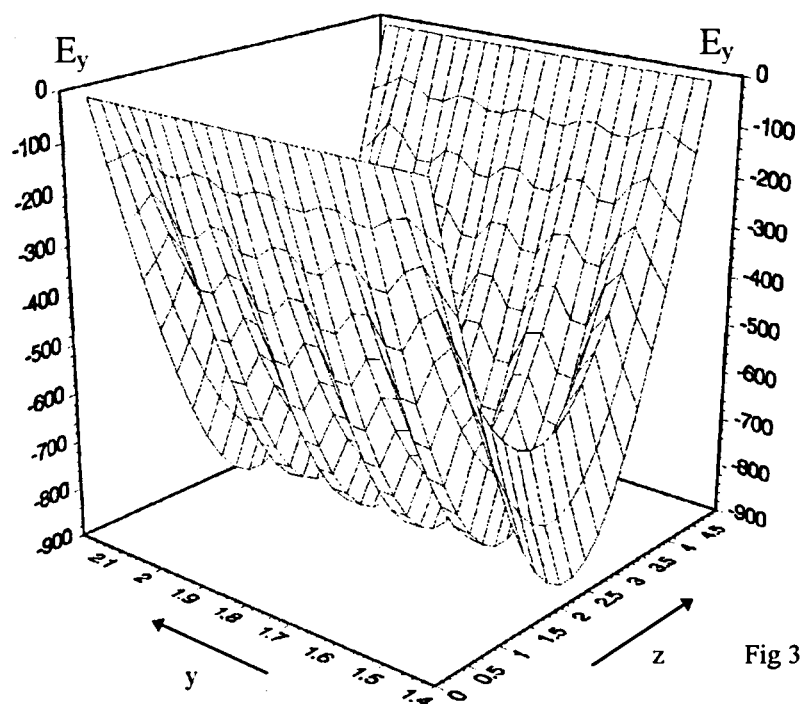


Fig 3.6.2

En aquestes gràfiques es pot apreciar la molt bona correspondència entre els valors de la component E_y en el pla del finline avaluat amb les expansions modals a la guia i al slot (en el dibuix a partir de les expressions al slot no s'ha inclòs la funció de pes per claredat).

En la gràfica següent s'aprecia el comportament singular de la component E_y en els cantells metàl·lics dels "fins" (es dibuixa E_y en un pla transversal a la finline)

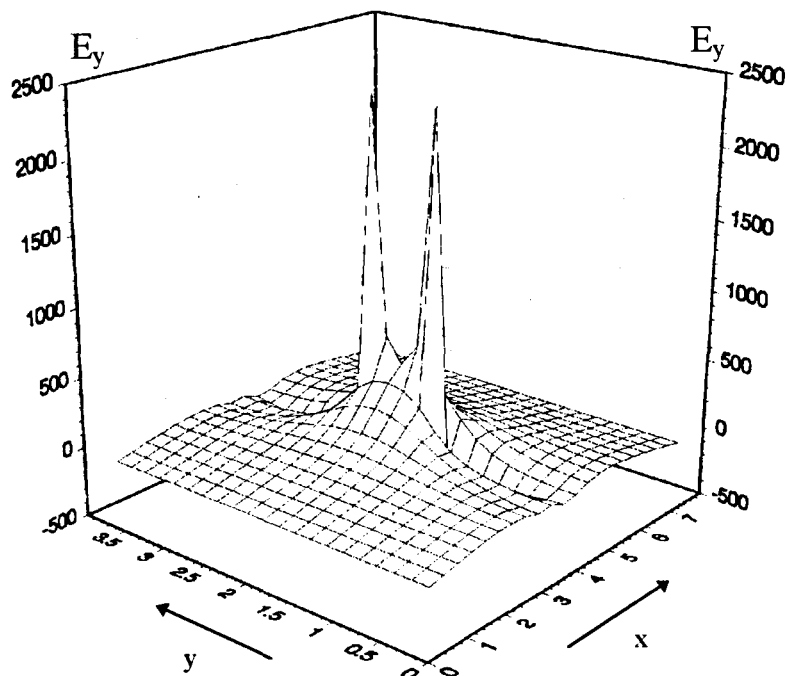


Fig 3.6.3

Les gràfiques següents mostren un tall de l'anterior ($E_y(y)$ per z fixe i $x=x_0$ -pla del finline-) comparant-ho amb el que s'obté a partir de les funcions base del slot sense incloure-hi en elles la funció de pes.

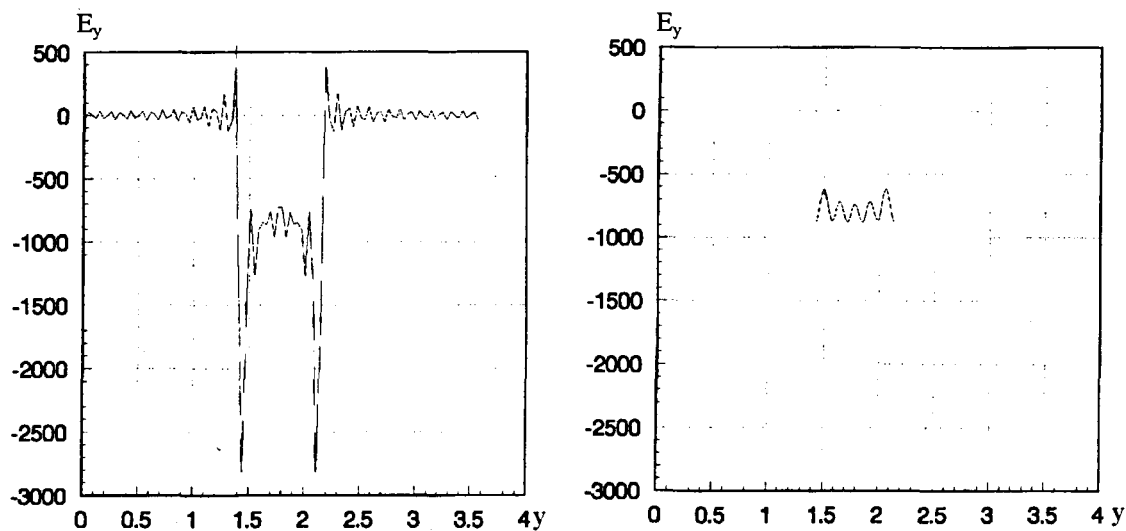


Fig 3.6.4

Les gràfiques següents són la repetició de les anteriors per a la component E_z

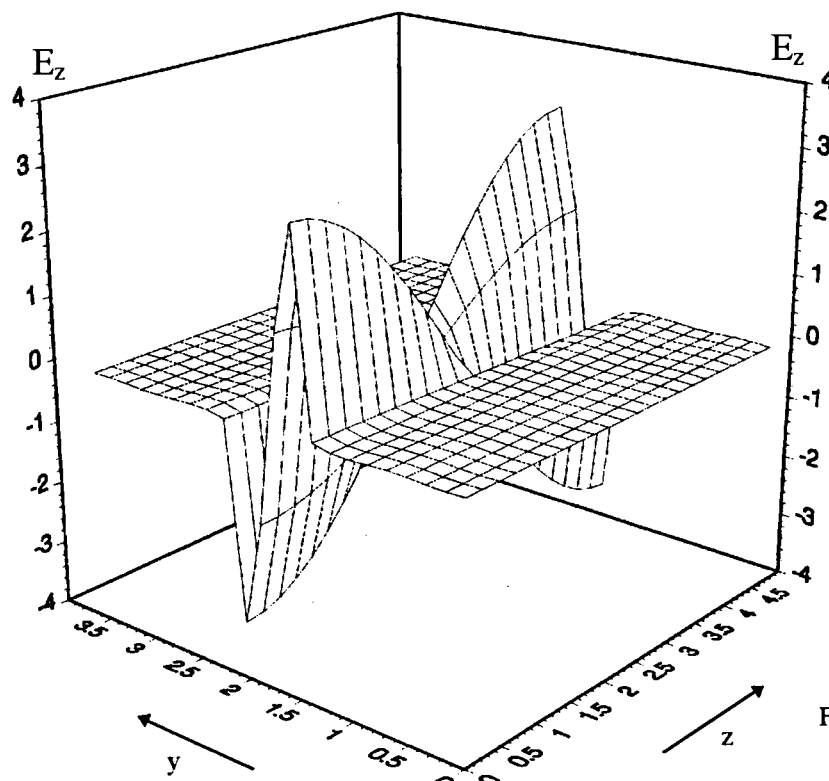


Fig 3.6.5

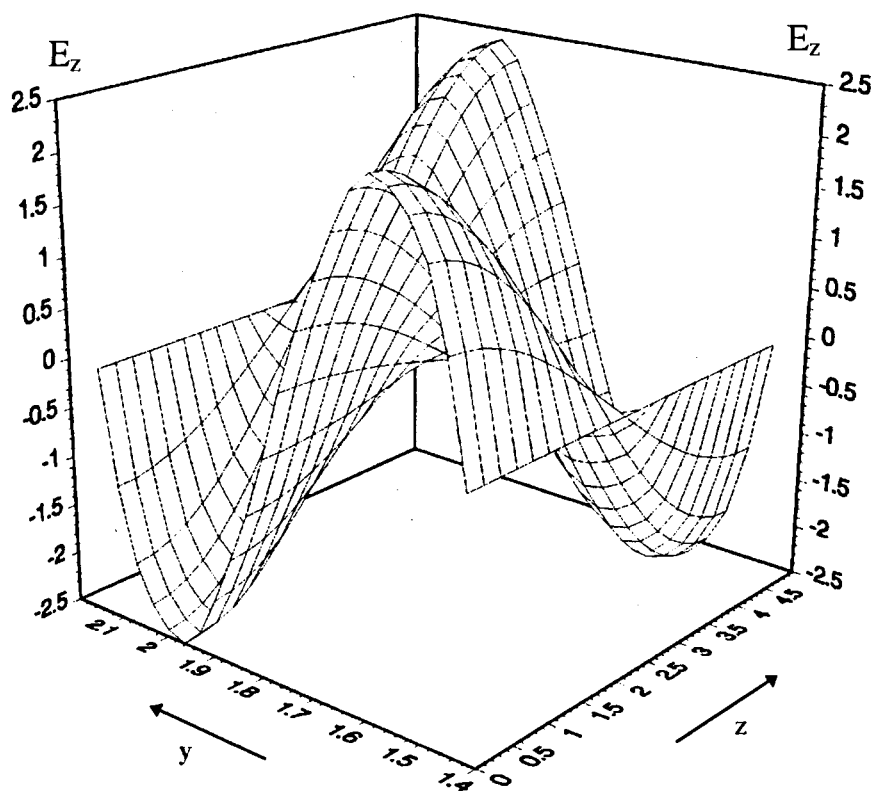


Fig 3.6.6

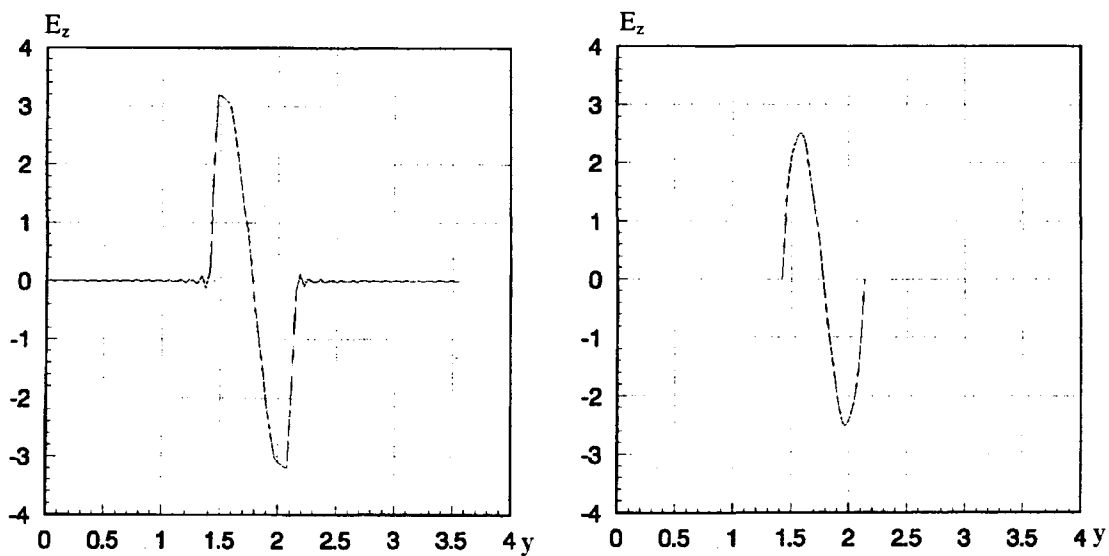


Fig 3.6.7

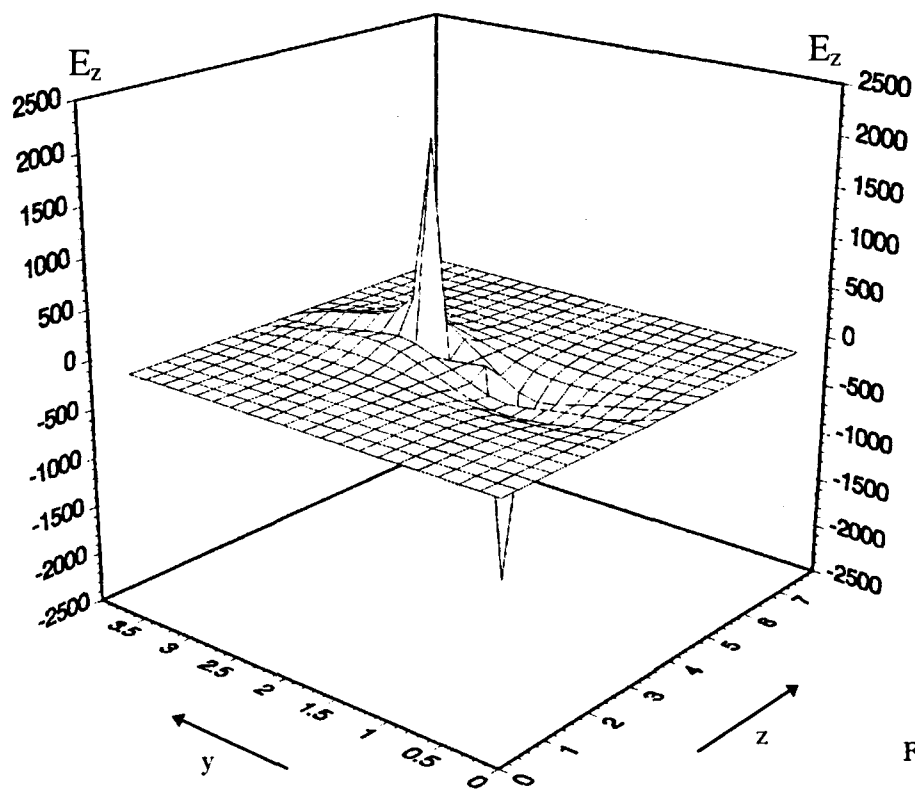
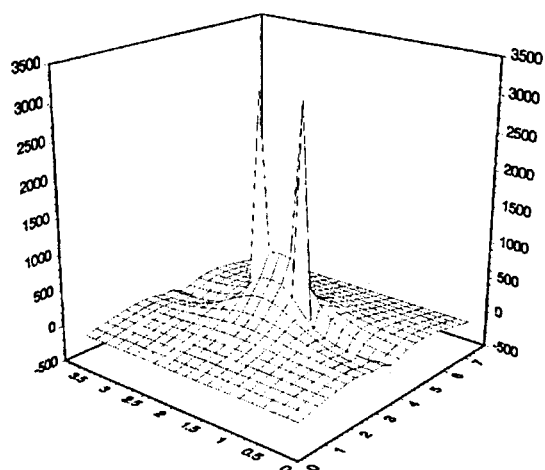
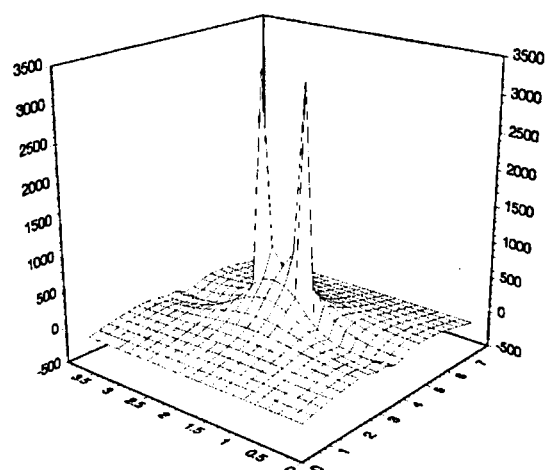


Fig 3.6.8

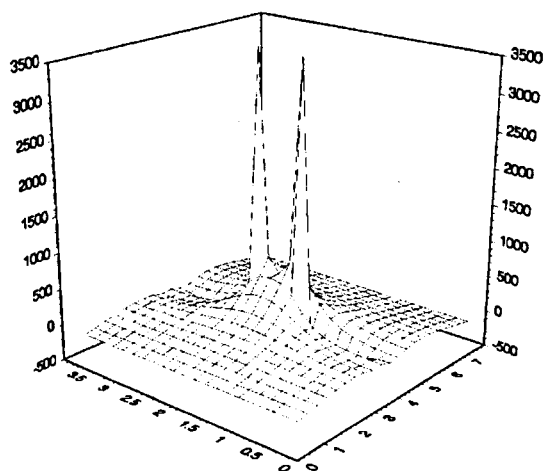
Les figures següents mostren com varia la component E_y en un pla perpendicular al finline al variar la relació entre el nombre de modes fet servir per representar el camp a la guia i al slot



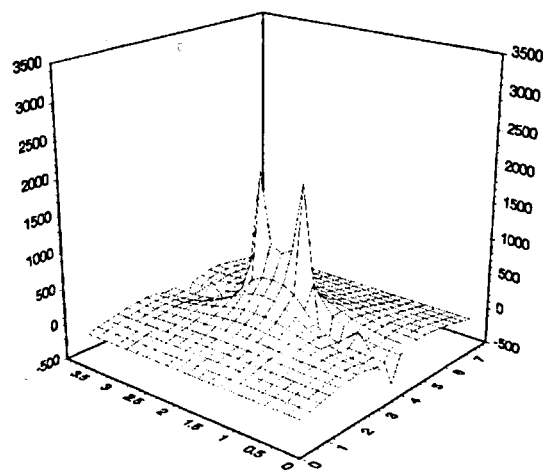
151 modes a la guia. 11 modes al slot



151 modes a la guia. 21 modes al slot



151 modes a la guia. 31 modes al slot



151 modes a la guia. 41 modes al slot

Fig 3.6.9

Es pot apreciar que si bé les diferències són petites, com més petita és la relació entre el nombre de modes a la guia i al slot, pitjors resultats s'obtenen. Això es veu molt més clar en les gràfiques següents, en les quals es presenta la constant de fase obtinguda per a la mateixa línia finline analitzada al capítol 2.5

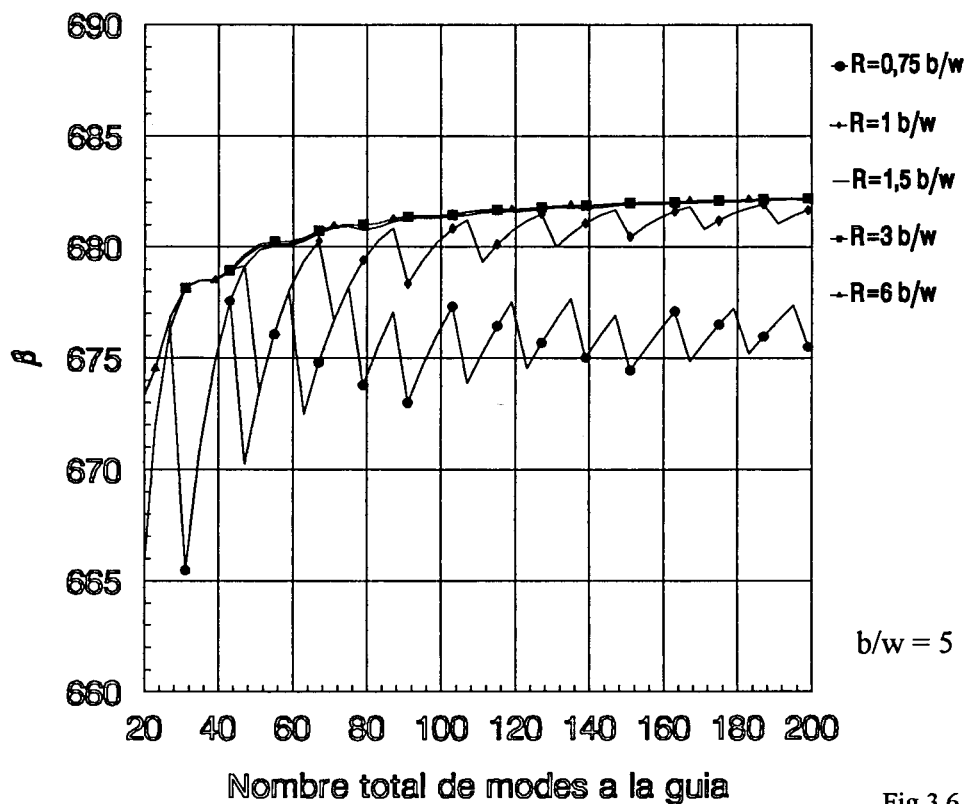


Fig 3.6.10

Com es pot apreciar a la gràfica, per relacions R entre el nombre de modes a la guia i el nombre de modes al "slot" que compleixin la condició $R \geq b/w$ no existeix el fenomen de la convergència relativa i les corbes per aquesta relació coincideixen i tendeixen al valor correcte (comparant els resultats amb els que proporciona el mètode del domini espectral i de la bibliografia). La gràfica anterior s'ha obtingut per a una relació $b/w = 5$. El mateix comportament s'aprecia per a altres relacions b/w com ara $b/w = 2$ i $b/w = 10$:

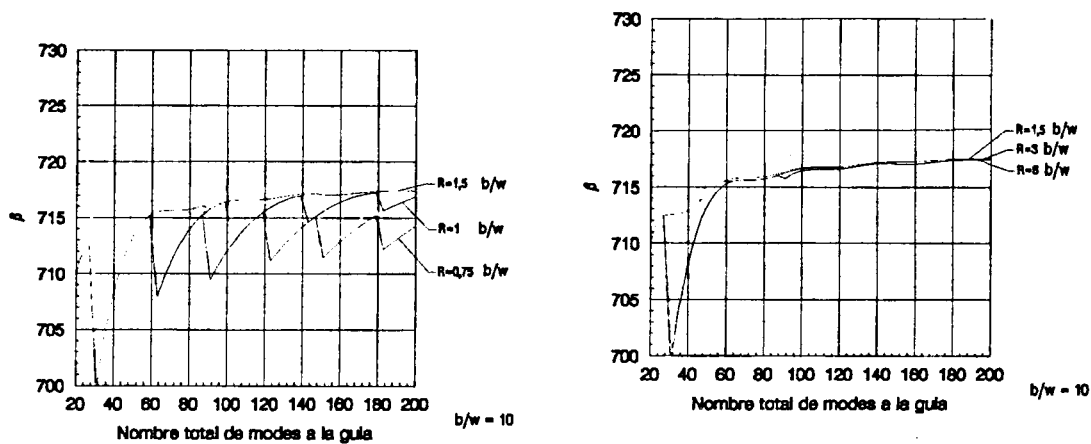


Fig 3.6.11

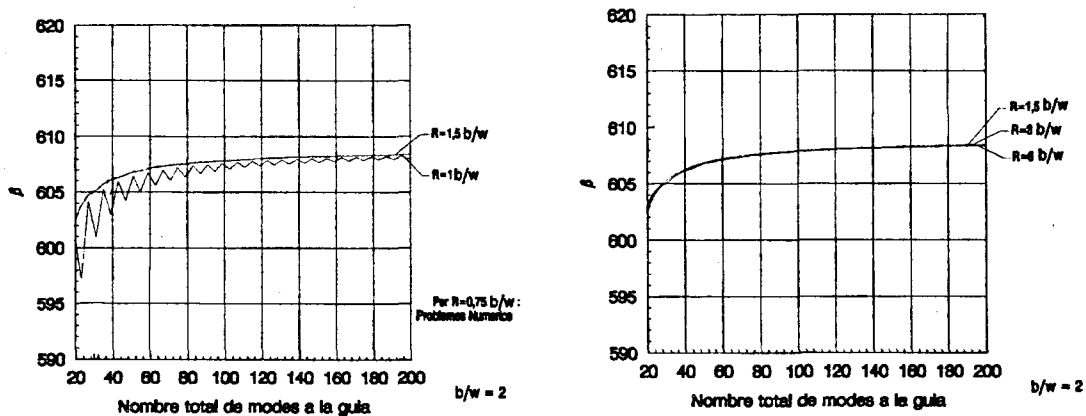


Fig 3.6.12

Podem així afirmar que a l'incloure una funció pes que representa el comportament singular dels camps en els cantells o, el que és equivalent, el considerar funcions base al "slot" que inclouen l'efecte de la condició de cantell, desapareixen els problemes de la convergència relativa al calcular la constant de fase d'una línia finline uniforme si es compleix la següent condició:

$$R = \frac{NN}{QQ} \geq 1,5 \frac{b}{w} \quad (3.6.1)$$

en què NN és el nombre de modes utilitzat per representar els camps a la guia i QQ el nombre de modes per a representar el camp al "slot". b és l'alçada de la guia i w l'alçada del "slot" o obertura.

3.7. Anàlisi d'una finline en curt tenint en compte l'efecte de cantell.

Aplicuem la mateixa tècnica anterior a l'anàlisi d'una discontinuïtat finline, concretament un línia finline en curt. Ara però tenim un nou cantell:

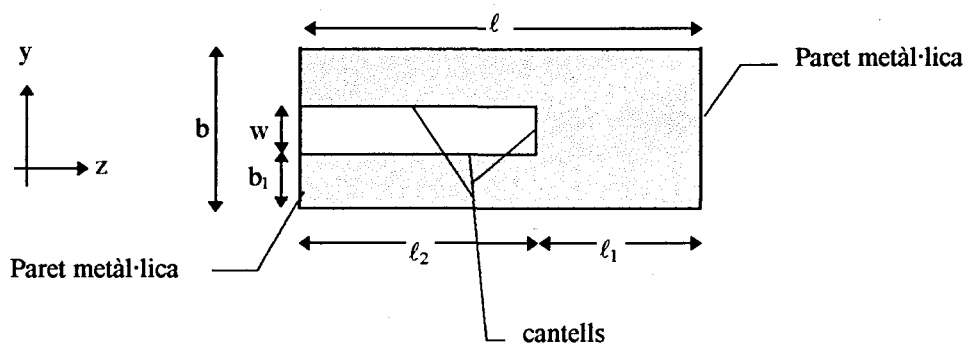


Fig 3.7.1

Fem servir dues funcions de pes: W_y i W_z . (W_y és la mateixa funció de pes que per al cas uniforme).

$$W_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y - b_1 - w/2}{w/2} \right)^2}} \quad (3.7.1)$$

$$W_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{\ell_2} \right)^2}} \quad (3.7.2)$$

Llavors els productes escalars g^i vindran donats per:

$$\begin{aligned} g^I &= P_{mn} P_{pq} \{CA \alpha_1 Q_1 + DB \delta_1 T_1\} \\ g^{II} &= P_{mn} P'_{pq} \{-CB \alpha_1 Q_1 + DA \delta_1 T_1\} \\ g^{III} &= P'_{mn} P_{pq} \{-AD \alpha_1 Q_1 + CB \delta_1 T_1\} \\ g^{IV} &= P'_{mn} P'_{pq} \{DB \alpha_1 Q_1 + CA \delta_1 T_1\} \end{aligned} \quad (3.7.3)$$

Q_1 i T_1 venen donats per les expressions 3.5.3 i 3.5.4. Les funcions α_1 i δ_1 són:

$$\alpha_1 = \int_0^{\ell_2} \frac{\cos Dz \cos Bz}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{\ell_2}\right)^2}} dz = \frac{\pi \ell_2}{4} \left\{ J_0[(D+B)\ell_2] + J_0[(D-B)\ell_2] \right\} \quad (3.7.4)$$

$$\delta_1 = \int_0^{\ell_2} \frac{\sin Dz \sin Bz}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{\ell_2}\right)^2}} dz = \frac{\pi \ell_2}{4} \left\{ -J_0[(D+B)\ell_2] + J_0[(D-B)\ell_2] \right\} \quad (3.7.5)$$

(recordem que és : $A = \frac{q\pi}{w}$; $B = \frac{p\pi}{\ell_2}$; $C = \frac{n\pi}{b}$; $D = \frac{m\pi}{\ell}$; $y' = y - b_1$)

$J_0(x)$ és la funció de Bessel de primera espècie i ordre zero () .

En la taula següent es comparen els resultats de l'anàlisi tenint en compte o no l'efecte de cantell (les dimensions de l'estructura són les mateixes de l'apartat 3.6)

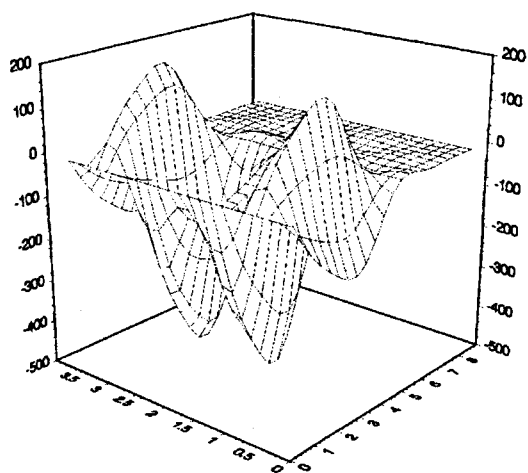
Realització	ℓ_2 (mm)	Reactància equivalent normalitzada	Fase del coeficient de reflexió (°)
Sense considerar W_y i W_z	4,30644	0,20301	157,05
Considerant només W_y	4,30599	0,20333	157,01
Considerant només W_z	4,10402	0,35211	141,21
Considerant W_y i W_z	4,10913	0,34819	141,61

Taula 3.7.1

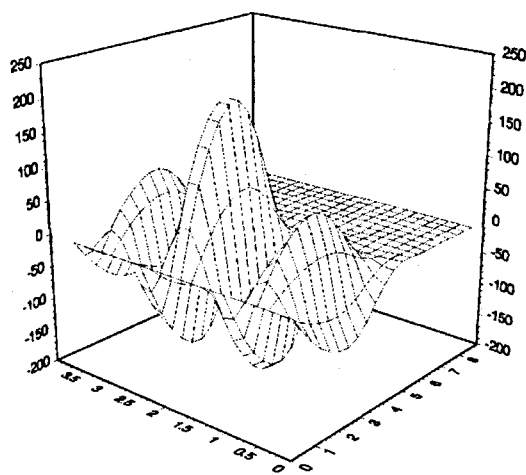
S'han considerat 13 modes al slot i 97 modes a la guia. $b/w = 5$. $R = 1,5 b/w$. $\ell_1 = 4$ mm. Segons Knorr [162] per aquesta estructura i freqüència, la reactància equivalent normalitzada és 0,35 aproximadament.

Es pot observar que si no es té en compte l'efecte de cantell, els resultats proporcionats pel mètode (ℓ_2) difereixen en un 5 % dels obtinguts a l'incloure les funcions de pes. Aquesta diferència es tradueix en un error del 43 % a l'evaluar la reactància equivalent normalitzada i de un 11 % al calcular la fase del coeficient de reflexió.

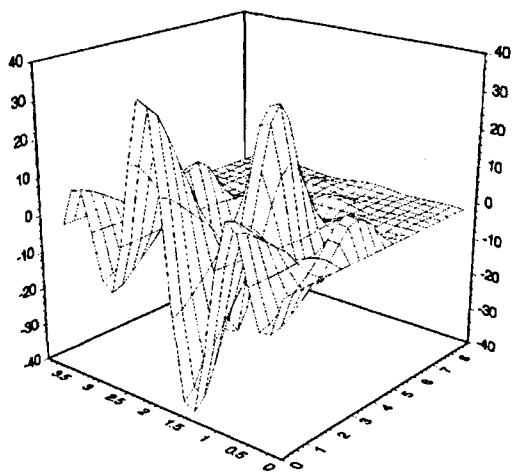
Fixem-nos també que en aquest cas l'efecte de cantell predominant es dona en el curt-circuit finline. Així, si només es considera W_y (efecte de cantell només als "fins"), els resultats obtinguts amb prou feines es diferencien dels corresponents al cas de no considerar cap efecte de cantell. Si només es considera W_z (efecte de cantell només al curt-circuit finline) els resultats obtinguts són pràcticament iguals als que proporciona la consideració dels efectes de cantell en els "fins" i en el curt-circuit. Això s'aprecia en les figures següents, a on es posa de manifest que la singularitat més acusada de camp elèctric és al curt-circuit finline, i es compara amb el cas de no considerar l'efecte de cantell.



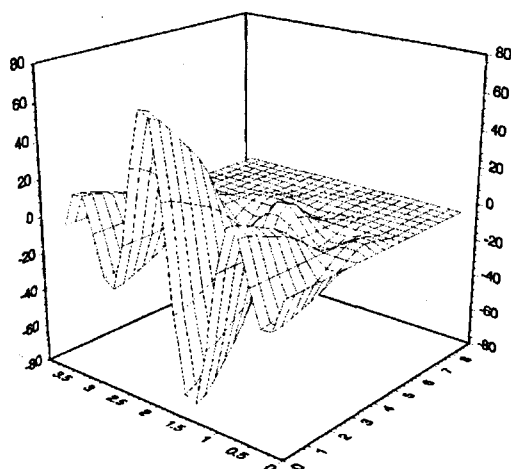
Amb efecte de cantell



Sense efecte de cantell



Amb efecte de cantell



Sense efecte de cantell

Fig 3.7.2

El temps de càlcul necessari per a l'anàlisi de discontinuïtats és petit i permet implementar l'algorisme en un ordinador PC. En la gràfica següent es presenta el temps de càlcul necessari per a l'anàlisi d'una finline en curt amb $b/w = 5$ en un ordinador PC-486 (66 MHz de freqüència de rellotge, 8 MB RAM; amb el compilador "Microsoft FORTRAN Power Station for Windows" -32 bits-).

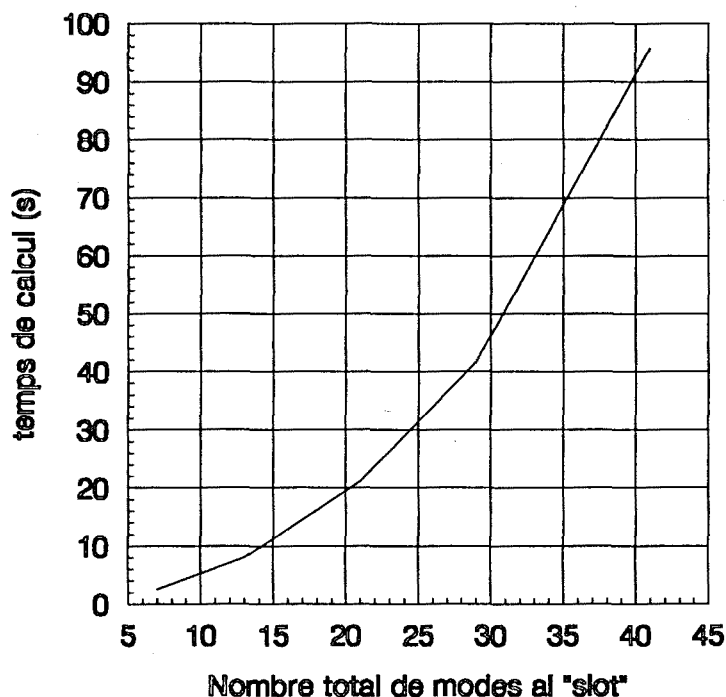


Fig 3.7.3

El nombre de modes a la guia en aquest cas és 7,5 vegades el nombre de modes al "slot".

Per a obtenir resultats acurats n'hi ha prou en considerar 13 modes al "slot", el qual suposa 8 segons de temps de CPU.

La relació $R \geq 1,5$ b/w es continua complint en el cas de discontinuïtats. Però és aconsellable fer servir una relació $R = 1,5$ b/w o lleugerament superior per evitar que el nombre de modes a considerar en la zona de la guia sigui molt elevat, cosa que si bé no augmenta considerablement el temps de càlcul, sí pot donar problemes d'arrodoniment i de memòria necessària.

En resum, la incorporació de funcions que inclouen el caràcter singular dels camps als cantells de l'estructura juntament amb la condició $R \geq 1,5$ b/w minimitza (i fins i tot elimina) el fenomen de la convergència relativa observat en les estructures estudiades, permetent anàlisis acurats i ràpids utilitzant un mínim de recursos informàtics (ordinador PC).

Capítol 4. Conclusions

El desenvolupament de set mètodes numèrics (mètode de les línies, dels elements finits, de la matriu de línies de transmissió, de la matriu S generalitzada, de la ressonància transversal generalitzat, del domini espectral i del circuit planar) ha permès apreciar molts detalls característics dels mateixos difícilment obtenibles de les dades bibliogràfiques, cosa que ha permès apreciar el següent:

Que no hi ha cap "mètode universal" apte per a la majoria de problemes electromagnètics. Tots tenen avantatges i inconvenients que els fan més o menys aptes per a determinats problemes.

Pot ser millor saber quin mètode s'ha d'aplicar per a analitzar determinat problema, que, a partir d'una profunda especialització en un mètode determinat, intentar aplicar-lo a problemes per als que hi ha mètodes millors.

També ha permès posar a disposició dels membres de la comunitat universitària una sèrie d'eines software potents que ja s'estan utilitzant per al desenvolupament de sistemes d'ones mil·limètriques.

L'assoliment dels objectius fixats (analitzar discontinuïtats finline i estructures planars de forma acurada i amb un mínim de recursos informàtics) ha comportat el desenvolupament del mètode de la ressonància transversal generalitzat. Aquest és un mètode ràpid i que necessita poca memòria d'ordinador per a obtenir resultats acurats (de fet s'ha implementat sobre un ordinador PC). La quantitat de preprocessament necessari (manipulacions matemàtiques per a obtenir un algorisme programable) no és excessiu -de fet l'única part del codi que s'ha de modificar per a estudiar una estructura diferent és la que fa referència a un seguit de productes escalars de funcions que es calculen analíticament-. No és un mètode general (no pot analitzar de forma sistemàtica un gran nombre d'estructures diferents), però sí apropiat per a analitzar les estructures que ens havíem proposat. L'inconvenient principal que presenta és una herència de la tècnica de l'adaptació modal que utilitza: el fenomen de la convergència relativa (convergència cap a solucions diferents segons quina sigui la relació entre el nombre de modes que es fan servir per a representar els camps a les diferents parts de l'estructura sota anàlisi).

El fenomen de la convergència relativa s'ha analitzat en detall i s'ha presentat una solució consistent en l'adopció de funcions pes que incorporen el caràcter singular dels camps als cantells en els productes escalars de funcions que s'han de calcular, (que equival a incorporar el caràcter singular dels camps en les funcions modals que representen els camps en una obertura), juntament amb una relació òptima en el nombre de modes que s'han de fer servir per a les expansions modals a les diferents zones de

l'estructura. D'aquesta manera s'ha minimitzat (i en molts casos s'ha eliminat) el fenomen de la convergència relativa, proporcionant el mètode resultats força acurats i fiables com s'ha comprovat al comparar-los amb les mesures sobre guies coplanars efectuades.

El mètode té en compte el gruix de les metal·litzacions però pot ser objecte de desenvolupaments futurs la consideració de pèrdues al dielèctric i a les metal·litzacions. El primer no es probable que doni problemes, el segon però pot ser molt més problemàtic al tenir que calcular els autovalors corresponents a les expansions modals dels camps (ja no seran de la forma $n\pi/a$). Es pot plantejar l'estudi aproximat a partir de la consideració de pèrdues només en les zones de l'estructura en les que el camp és més intens (parets de l'obertura). En aquest cas forçosament s'ha de considerar el gruix de la metal·lització, i la guia rectangular equivalent que resulta des del punt de vista transversal es pot tractar com una guia amb pèrdues i aplicar les expressions aproximades provinents d'anàlisis perturbacionals. Ens evitariem així els problemes de càlcul numèric inherents al càlcul d'autovalors i autovectors necessari per a l'obtenció de les expressions de les funcions del desenvolupament modal.

Una altra possible línia d'estudi seria la consideració d'altres tipus de funcions per al desenvolupament dels camps a l'obertura, intentant adoptar funcions que s'adaptin de forma "automàtica" a contorns complicats, com sèries de "wavelets" bidimensionals.

BIBLIOGRAFIA

- 116 : Seymour B. Cohn: "Properties of Ridge Wave Guide". Proc. I.R.E. vol 35, pp 783-788, Aug. 1947.
- 118 : N. Marcuvitz: "Waveguide Handbook". pp 309-402. Ed.: Peter Peregrinus - I.E.E. 1986. (McGraw-Hill 1951)
- 8 : Yoshihiro Konishi and Katsuaki Uenakada: "The Design of a Band-pass filter with Inductive Strip-Planar Circuit Mounted in Waveguide". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-22 n° 10, October 1974, pp 869-873.
- 9 : Kai Chang and Peter J. Khan: "Equivalent Circuit of a Narrow Axial Strip in Waveguide". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-24 n° 9, September 1976, pp. 611-615.
- 10 : Yoshihiro Konishi: "Planar Circuit Mounted in Waveguide used as a Down-Converter". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-26 n° 10, October 1978, pp. 716-719.
- 11 : Abdel Megid Kamal Saad and Klaus Schünemann: "Design and Performance of Fin-Line Bandpass Filter". 9th European Microwave Conference Proceedings. Brighton, England, September 1979, pp. 397-401
- 12 : Rüdiger Vahldieck, Jens Bornemann, Fritz Arndt and Dietrich Grauerholz: "Optimized Waveguide E-Plane Metal Insert Filters for Millimeter-Wave Applications". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-31 n° 1, January 1983, pp. 65-68
- 13 : Yi-Chi-Shih, Tatsuo Itoh and L.Q. Bui: "Computer Aided Design of Millimeter-Wave E-Plane Filters". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-31 n° 2, February 1983, pp. 135-141
- 14 : Yi-Chi-Shih and Tatsuo Itoh: "E-plane filters with Finite-Thickness Septa". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-31 n° 12, December 1983, pp. 1009-1012.
- 15 : Yi-Chi-Shih: "Design of Waveguide E-Plane Filters with All-Metal-Inserts". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-32 n° 7, July 1984, pp. 695-704.
- 16 : L.Q. Bui, D. Ball and T. Itoh: "Broad-Band Millimeter-Wave E-Plane Bandpass Filters". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-32 n° 12, December 1984, pp. 1655-1658.

- 17 : Enric Cardoner Folgueras: "Diseño de Circuitos Activos Mediante Estructura Planar en Guía de Ondas en la Banda de 11,7 a 12,5 GHz". Proyecto Final de Carrera, E.T.S.I.T.B. 1984
- 18 : Rüdiger Vahldieck, Jens Bornemann, Fritz Arndt and Dietrich Grauerholz: "E-Plane Integrated Circuit Filters with Improved Stopband Attenuation". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-32 n° 10, October 1984, pp 1391-1394. (Véase también la corrección a este artículo en I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-33 n° 5, May 1985, pp. 437)
- 19 : Fritz Arndt, Bernd Koch, Hans-Joachim Orlok and Norbert Schröder: "Field Theory Design of Rectangular Waveguide Brad-Wall Metal-Insert Slot Couplers for Millimeter-Wave Applications". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-33 n° 2, February 1985, pp. 95-104.
- 20 : Antoni Barlabé i Dalmau: "Filtres Pas-Banda en Guia d'Ones amb Tires Metàl·liques Inductives en Pla E. Desenvolupament d'un Amplificador de Baix Soroll amb Tecnologia Planar en Guia d'Ones a 12 GHz". Proyecto Fin de Carrera. E.T.S.I.T.B. 1986
- 21 : P.J. Meier: "Two New Integrated Circuit Media with Special Advantages at Millimeter Wavelengths". I.E.E.E. M.T.T.-S International Microwave Symposium Digest, 1972, pp. 221-223.
- 22 : P.J. Meier: "Integrated Fin-Line Millimeter Components". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-22 n° 12, December 1974, pp. 1209-1216.
- 23 : K. Solbach: "The Status of Printed Millimeter Wave E-Plane Circuits". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-31 n° 2, February 1983, pp. 107-121.
- 24 : P. Bhartia and P.Pramanick: "E-Plane Integrated Circuits". Artech House 1987.
- 25 : Bharathi Bhat and Shiban K. Koul: "Analysis, Design and Applications of Fin-Lines". Caps. 1, 7 y 9. Artech House 1987.
- 26 : Tatsuo Itoh: "Overview of Quasi-Planar Transmission Lines". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-37 n° 2, February 1989, pp. 275-280.
- 27 : D. Delagebeauf and N.T. Linh: "Metal-(n) AlGaAs-GaAs two dimensional electron GaAs FET". I.E.E.E. Transactions on Electron Devices, vol. ED-29 n° 6, June 1982.
- 28 : M. Abe, T. Mimura, N. Yokoyama and H. Ishikawa: "New Technology towards GaAs LSI/VLSI for Computer Applications". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-30 n° 7, July 1982, pp. 992-998.
- 29 : M. Scholley and A. Nichols: "60 GHz and 70 GHz (HEMT) Amplifiers". 1986 I.E.E.E. M.T.T.-S Digest, S-5, pp. 463-465
- 30 : J. L'Ecuyer, G.B. Gajda and W.J.R. Hoefer: "A FET Amplifier in Fin-Line Technique". 1986 I.E.E.E. M.T.T.-S Digest, J-22, pp. 287-290.

31 : P.M. Smith and A.W. Swanson: "HEMTs - Low Noise and Power Transistors for 1 to 100 GHz". Applied Microwave. May 1989, pp. 63-72.

32 : Lluís Pradell i Cara: "Diseño de Amplificadores de Bajo Ruido en Banda Milimétrica". Tesis Doctoral. E.T.S.I.T.B. 1989.

33 : Harlan Howe Jr.: "MMIC's are Practical and Affordable... Now!". Applied Microwave, May 1989, pp. 74-78.

34 : H. Callsen, H.H. Meinel and W.J.R. Hoefer: "p-i-n Diode Control Devices in E-Plane Technique". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-37 n° 2, February 1989, pp. 307-316.

35 : R. Vahldieck: "Quasi-Planar Filters for Millimeter-Wave Applications". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-37 n° 2, February 1989, pp. 324-334.

36 : W.J.R. Hoefer: "Oscillators and Amplifiers in Integrated E-Plane Technique". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-37 n° 2, February 1989, pp. 351-364.

37 : Yasuyuki Tokumitsu, Masayuki Ishizaki, Mikio Iwakuni and Toshiyuki Saito: "50 GHz IC components using Alumina Substrates". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-31 n°2, February 1983, pp.121-128.

38 : Shiban Kishen Koul and Bharathi Bhat: "Generalized Analysis of Microstrip-Like Transmission Lines and Coplanar Strips With Anisotropic Substrates for MIC, Electrooptic Modulator, and SAW Application". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-31 n° 12, December 1983, pp. 1051-1059

40 : H.J. Eul, B. Schiek: "A Generalized Theory and New Calibration Procedures for Network Analyzer Self-Calibration". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-39 n°4, April 1991, pp. 724-731

: Christian Hafner: "Parallel Computation of Electromagnetic Fields on Transputers". I.E.E.E. Antennas & Propagation Society Newsletter, vol.31 n°5, October 1989.

: David B. Davidson: "A Parallel Processing Tutorial". I.E.E.E. Antennas & Propagation Society Magazine, vol. 32 n° 2, April 1990.

: John W. Bandler and Aly e. Salama: "Functional Approach to Microwave Postproduction Tuning". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-33 n° 4, April 1985, pp. 302-310.

45 : Franz J. Schmückle and Reinhold Pregla: "The Method of Lines for the Analysis of Lossy Planar Waveguides". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-38 n° 10, October 1990, pp. 1473-1479

: Ching-Kuang C. Tzuang, Chu-Dong Chen and Song-Tsuen Peng: "Full-Wave Analysis of Lossy Quasi-Planar Transmission Line Incorporating the Metal Modes". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-38 n° 12, December 1990, pp. 1792-1799.

1 : Alvin Wexler: "Computation of Electromagnetic Fields". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-17 n° 8, August 1969, pp. 416-439

2 : S.M. Saad: "Review of Numerical Methods for the Analysis of Arbitrarily-Shaped Microwave and Optical Dielectric Waveguides". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-33 n° 10, October 1985, pp. 894-899.

3 : Tatsuo Itoh: "An Overview on numerical techniques for modeling miniaturized passive components". Annales des Télécommunications, vol. 41, Sept.-Oct. 1986, pp. 449-462.

4 : Tatsuo Itoh: "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 1. Wiley. 1989.

5 : Eikichi Yamashita (Editor): "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Artech House. 1990.

7 : Maryline Helard, Jacques Citerne, Odile Picon, Victor Fouad Hanna: "Theoretical and Experimental Investigation of Finline Discontinuities". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-33 n° 10, October 1985, pp. 994-1003

: J.R. Mosig: "Arbitrarily shaped microstrip structures and their analysis with a mixed potential integral equation". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-36 pp.314-323, 1988

: Jack Dongarra: "Argonne National Laboratory Report". Contract 00537000, 3 de Marzo de 1989. Argonne National Laboratory. Mathematics and Computer Science Division. Argonne, Illinois.

: Hewlett-Packard: "Applying the 8510 B TRL Calibration for Non-Coaxial Measurements". Product Note 8510-8. 1987

: Vincent F. Fusco: "Microwave Circuits, Analysis and Computer Aided Design". Cap. 3. Prentice-Hall. 1987.

: Matthew N.O. Sadiku: "Numerical Techniques in Electromagnetics". Cap. 3. CRC Press 1992

: K.S. Kunz and K.M. Lee: "A three-dimensional finite-difference solution of the external response of an aircraft to a complex transient EM: Part 1 -The method and its implementation". I.E.E.E. Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. EMC-20 n° 5, May 1978, pp. 328-333.

: W.K. Gwarek: "Analysis of an arbitrarily-shaped planar circuit -A time domain approach". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-33 n° 10, October 1985, pp. 1067-1072.

: W.K. Gwarek: "Analysis of Arbitrarily Shaped Two-Dimensional Microwave Circuits by Finite-Difference Time-Domain Method". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-36 n° 4, April 1988, pp. 738-744.

: Dok Hee Choi and Wolfgang J.R. Hoefer: "The Finite-Difference Time-Domain Method and its Application to Eigenvalue Problems". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-34 n° 12, December 1986, pp.1464-1470.

: M.J. Beaubien and A. Wexler: "An Accurate Finite-Difference Method for Higher Order Waveguide Modes". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-16 n° 12, December 1968, pp. 1007-1017.

: M.J. Beaubien and A. Wexler: "Unequal-arm finite-difference operators in the positive-definite successive overrelaxation (PDSOR)". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-18 n° 12, December 1970, pp. 1132-1149.

: K.S. Yee: "Numerical Solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media". I.E.E.E. Transactions on Antennas & Propagation, vol. AP-14 n° 5, May 1966, pp. 302-307.

90 : P.B. Johns: "On the relationship between TLM and finite-difference methods for Maxwell's equations". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-35 n° 1, January 1987, pp. 60-61.

91 : W.K. Gwarek and P.B. Johns: "Comments on 'On the relationship between TLM and finite-difference methods for Maxwell's equations'". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-35 n° 9, September 1987, pp. 872-873.

: Norinobu Yoshida: "The Spatial Network Method". En el libro de E. Yamashita: "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap. 5. Artech House 1990.

85 : Wolfgang J.R. Hoefer: "The Transmission-Line Matrix Method -Theory and Applications". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-33 n° 10, October 1985, pp. 882-893.

86 : Wolfgang J.R. Hoefer: "The Transmission Line Matrix (TLM) Method." En el libro de T. Itoh "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures", cap. 8. Wiley 1989.

: Matthew N.O. Sadiku: "Numerical Techniques in Electromagnetics". Cap. 7. CRC Press, 1992

: James H. Thompson and Thomas R. Apel: "Simplified Microstrip Discontinuity Modelling Using the Transmission Line Matrix Method Interfaced to Microwave CAD". Microwave Journal, vol. 33 n° 7, July 1990, pp. 79-88.

76 : P.B. Johns and R.L. Beurie: "Numerical solution of 2-dimensional scattering problems using a transmission-line matrix". Proceedings of the I.E.E. vol. 118 n° 9, September 1971, pp. 1203-1208.

95 : Pierre Saguet and Wolfgang J.R. Hoefer: "The Modelling of Multiaxial Discontinuities in Quasi-Planar Structures with the Modified TLM Method". International Journal of Numerical Modelling, vol. 1 n° 1, March 1988, pp. 7-17. (Editado por Wiley).

77 : S. Akhtarzad and P.B. Johns: "Three-dimensional transmission-line matrix computer analysis of microstrip resonators". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-23 n° 12, December 1975, pp. 990-997.

89 : Wolfgang J.R. Hoefer and A. Ros: "Fin Line Parameters Calculated with the TLM Method". IEEE-MTT International Microwave Symposium Digest, April-May 1979, pp. 341-343.

: Norinobu Yoshida and Ichiro Fukai: "Transient Analysis of a Stripline Having a Corner in Three-Dimensional Space". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-32 n° 5, May 1984, pp. 491-498.

: S. Koike, N. Yoshida and I. Fukai: "Transient Analysis of a Directional Coupler Using a Coupled Microstrip Slot Line in Three-Dimensional Space". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-34 n° 3, March 1986, pp. 353-357.

: Yi Chi Shih and Wolfgang J.R. Hoefer: "Dominant and Second-Order Mode Cutoff Frequencies in Fin Lines Calculated with a Two-Dimensional TLM Program". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-28 n° 12, December 1980, pp. 1443-1448.

: D.A. Al-Mukhtar: "A transmission line matrix with irregularly graded space". Tesis Doctoral. Universidad de Sheffield, Inglaterra. Agosto 1980.

: D.A. Al-Mukhtar and J.E. Sitch: "Transmission-line matrix method with irregularly graded space". Proceedings of the I.E.E. part H, vol. 128 n° 6, December 1981, pp. 299-305.

42 : Uwe Schulz and Reinhold Pregla: "A New Technique for the Analysis of the Dispersion Characteristics of Planar Waveguides". Arch. Elektron. Uebertragungstechn. vol. 34, April 1980. pp. 169-173.

43 : Reinhold Pregla and Wilfrid Pascher: "The Method of Lines". En el libro de T. Itoh "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 6. Wiley 1989.

44 : Yun Yi Wang, Guan Ling Wong and Yong Hui Shu: "Analysis and Synthesis Equations for Edge-Coupled Suspended Substrate Microstrip Line". 1989 I.E.E.E. M.T.T.-S International Symposium Digest, vol. 1, pp. 491-494.

- 46 : H. Diestel: "A method for calculating the guided modes of strip-loaded optical waveguides with arbitrary index profile". I.E.E.E. Journal of Quantum Electronics, vol. QE-20 n° 12, December 1984, pp. 1288-1293.
- 47 : Reinhold Pregla: "Analysis of Planar Microwave Structures on Magnetized Ferrite Substrate". Arch. Elektron. Uebertragungstech, vol. 40, 1986, pp. 270-274.
- 48 : Franz J. Schmückle and Reinhold Pregla: "The Method of Lines for the Analysis of Lossy Planar Waveguides". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-38 n° 10, October 1990, pp.1473-1479
- 49 : Stephan B. Worm and Reinhold Pregla: "Hybrid-Mode Analysis of Arbitrarily Shaped Planar Microwave Structures by the Method of Lines". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-32 n° 2, February 1984, pp. 191-196.
- 50 : Wilfrid Pascher and Reinhold Pregla: "Full wave analysis of complex planar microwave structures". Radio Science, vol. 22 n° 6, November 1987, pp. 999-1002. (Editado por American Geophysical Union).
- 51 : Stephan B. Worm: "Full-Wave Analysis of Discontinuities in Planar Waveguides by the Method of Lines Using a Source Approach". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-38 n° 10, October 1990, pp. 1510-1514
- 52 : Reinhold Pregla: "About the nature of the method of lines". Arch. Elektron. Uebertragungstech., vol. 41, 1987, pp. 368-370.
- 53 : U. Schulz: "On the edge condition with the method of lines in planar waveguides". Arch. Elektron. Uebertragungstech., vol. 34, 1980, pp. 176-178.
- 54 : Heinrich Diestel and Stephan B. Worm: "Analysis of Hybrid Field Problems by the Method of Lines with Nonequidistant Discretization". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol MTT-32 n° 6, June 1984, pp. 633-638.
- 55 : Ke Wu and Ruediger Vahldieck: "On the analysis of quasi-planar transmission lines in circular/elliptical waveguides using the method of lines". 1989 I.E.E.E. M.T.T.-S International Microwave Symposium Digest, vol. 1, pp. 503-506.
- 56 : A. Dreher, R. Pregla: "Analysis of Planar Waveguides with the Method of Lines and Absorbing Boundary Condition". I.E.E.E. Microwave and Guided Wave Letters, vol. 1, n° 6, June 1991, pp. 138-140
- 57 : R. Pregla, D. Kremer: "Method of Lines with Special Absorbing Boundary Conditions. - Analysis of Weakly Guiding Optical Structures". I.E.E.E. Microwave and Guided Wave Letters, vol. 2, n°6, June 1992, pp. 239-241
- 58 : S. Nam, H. Ling and T. Itoh: "Time-Domain Method of Lines Applied to the Uniform Microstrip-line and its Step Discontinuity". 1989 I.E.E.E. M.T.T.-S International Microwave Symposium Digest, vol. 1, pp. 997-1000.
- 63 : O.C. Zienkiewicz: "El método de los elementos finitos". Reverté. 1982.

- 67 : Masanori Koshiba: "The Finite-Element Method". En el libro de E. Yamashita: "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap. 1. Artech House 1990.
- 68 : Matthew N.O. Sadiku: "Numerical Techniques in Electromagnetics". Cap. 6. CRC Press 1992
- 71 : Robert E. Collin: "Field Theory of Guided Waves. Second Edition". pp. 419-430. I.E.E.E. Press. 1991
- 64 : P.L. Ariett, A.K. Bahrani and O.C. Zienckiewicz: "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation". Proceedings of the I.E.E., vol.115 n° 12, December 1968, pp. 1762-1766.
- 65 : J.P. Webb, G.L. Maile and R.L. Ferrari: "Finite-element solution of three-dimensional electromagnetic problems". Proceedings of the I.E.E., vol. 130 part H n° 2, March 1983, pp. 153-159.
- 66 : J.B. Davies: "The Finite Element Method". En el libro de T. Itoh: "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Wiley 1989.
- 73 : B.M.A. Rahman and J.B. Davies: "Penalty Function Improvement of Waveguide Solution by Finite Elements". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-32 n° 8, August 1984, pp. 922-928.
- 74 : K. Hayata, M. Koshiba, M. Eguchi and M. Suzuki: "Vectorial Finite-Element Method Without Any Spurious Solutions for Dielectric Waveguiding Problems Using Transverse Magnetic-Field Component". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-34 n° 11, November 1986, pp. 1120-1124.
- : C.A. Brebbia: "The Boundary Element Method for Engineers". Pentech Press. London 1978.
- : Shin Kagami and Ichiro Fukai: "Application of Boundary-Element Method to Electromagnetic-Field Problems". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-32 n° 4, April 1984, pp. 455-461.
- : Nagayoshi Morita: "The Boundary-Element Method". En el libro de E. Yamashita: "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap. 2. Artech House 1990.
- : Masanori Koshiba and Michio Suzuki: "Application of the Boundary-Element Method To Waveguide Discontinuities". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-34 n° 2, February 1986, pp. 301-307.
- : Naoto Kishi and Takanori Okoshi: "Proposal for a Boundary-Integral Method without Using Green's Function". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-35 n° 10, October 1987, pp. 887-892.

: H.A. El-Mikati and J.B. Davies: "Improved Boundary-Element Techniques for Two-Dimensional Scattering Problems with Circular Boundaries". I.E.E.E. Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-35 n° 5, May 1987, pp. 539-544.

: E. Tonye and H. Baudrand: "Multimode S-Parameters of Planar Multiport Junctions by Boundary Element Method". Electronics Letters, vol.20 n° 19, 13th September 1984.

: Roger F. Harrington: "Matrix Methods for Field Problems". Proceedings of the I.E.E.E., vol.55 n° 2, February 1967, pp. 136-149.

: Roger F. Harrington: "Field Computation by Moment Methods". McMillan. 1968.

: Michel M. Ney: "Method of Moments as Applied to Electromagnetic Problems". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-33 n° 10, October 1985, pp. 972-980.

: Eikichi Yamashita and Kazuhio Atsuki: "The Point-Matching Method". En el libro de E. Yamashita: "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap 3. Artech House 1990.

: Matthew N.O. Sadiku: "Numerical Techniques in Electromagnetics". Cap. 5 CRC Press 1992

: Constantine A. Balanis: "Antenna Theory. Analysis and Design". Cap. 7. Harper & Row. 1982.

: Constantine A. Balanis: "Advanced Engineering Electromagnetics". Cap. 12. Wiley 1989.

: Peter Anders and Fritz Arndt: "Microstrip Discontinuity Capacitances and Inductances for Double Steps, Mitered Bends with Arbitrary Angle, and Asymmetric Right-Angle Bends". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-28 n° 11, November 1980, pp. 1213-1217.

: Robert W. Jackson and David M. Pozar: "Full-Wave Analysis of Microstrip Open-End and Gap Discontinuities". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-33 n° 10, October 1985, pp. 1036-1042.

: Hung-Yu Yuang and Nicolás Alexópoulos: "A Dynamic Model for Microstrip-Slotline Transition and Related Structures". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-36 n° 2, February 1988, pp. 286-293.

: Hiroshi Shigesawa: "The Equivalent Source Method". En el libro de E. Yamashita: "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap. &. Artech House 1990.

: Christian Hafner: "The Generalized Multipole Technique for Computational Electromagnetics". Artech House. 1990.

: I.N Vekua: "New Methods for Solving Elliptic Equations". North-Holland. 1967.

- : S.K. Godunov: "Ecuaciones de la Física Matemática". Mir 1978
- : V.P. Mijáilov: "Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales". Mir 1978.
- : Christian Hafner: "On the Relationship Between the MoM and the GMT". I.E.E.E. Antennas and Propagation Magazine, vol. 32 n° 6, December 1990. pp. 12-19.
- 106 : Alvin Wexler: "Solution of Waveguide Discontinuities by Modal Analysis". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-15 n° 9, September 1967, pp. 508-517.
- 107 : Yi Chi Shih: "The Mode Matching Method". En el libro de T. Itoh "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 9. Wiley 1989.
- 108 : Yoichi Okuno: "The Mode-Matching Method". En el libro de E. Yamashita: "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap. 4. Artech House 1990.
- 109 : Shung Wu Lee, William R. Jones and James J. Campbell: "Convergence of Numerical Solutions of Iris-Type Discontinuity Problems". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-19 n° 6, June 1971, pp. 528-536.
- 110 : M. Leroy: "On the Convergence of Numerical Results in Modal Analysis". I.E.E.E. Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-31 n° 7, July 1983, pp. 655-659.
- : Weyl-Kuo Wang, Ching-Kuang C. Tzuang, Chun-Yi Shih and Te-Hui Wang: "Investigations of Complex modes in a Generalized Bilateral Finline with Mounting Grooves and Finite Conductor Thickness". 1989 I.E.E.E. M.T.T.-S International Microwave Symposium Digest, vol. 1, pp. 491-494.
- : P.H. Masterman and P.J.B. Clarricoats: "Computer field-matching solution of waveguide transverse discontinuities". Proceedings of the I.E.E., vol. 118 n° 1, January 1971, pp. 51-63.
- : Hadia el Hennawy and Klaus Schünemann: "Impedance transformation in fin lines". Proceedings of the I.E.E., vol. 129 n° 6, December 1982, pp. 342-350.
- 161 : Abbas Sayed Omar and Klaus F. Schünemann: "The Effect of Complex Modes at Finline discontinuities". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-34 n° 12, December 1986, pp. 1508-1514.
- 98 : James R. Pace: "The Generalized Scattering Matrix Analysis of Waveguide Discontinuity Problems". Antenna Laboratory, Technical Report No. 1. Department of Electrical Engineering, Engineering Experiment Station, University of Illinois. Contract No. AF19(628)-3819. April 1964.
- 99 : T. Sum Chu and T. Itoh: "Generalized Scattering Matrix Method for Analysis of Cascaded and Offset Microstrip Discontinuities". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-34 n° 2, February 1986, pp. 280-284.

100 : Juana Daphne Baños Polglase: "Contribución al estudio de estructuras multiescalonadas en sistemas de transmisión con simetría de revolución". Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid. Mayo 1987.

102 : Tatsuo Itoh: "Generalized Scattering Matrix Technique". En el libro de T. Itoh "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 10. Wiley. 1989.

101 : Jesús M. Rebollar Machain: "La Matriz de Dispersión Generalizada. Aplicación al Diseño de Circuitos Pasivos de Radiofrecuencia". Seminario realizado en la E.T.S.I.T.B. el 1 de Julio de 1988.

123 : Roberto Sorrentino: "Transverse Resonance Technique". En el libro de T. Itoh: "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 11. Wiley 1989.

114 : Robert E. Collin: "Field Theory of Guided Waves. Second Edition". pp. 373-377. I.E.E.E. Press. 1991.

115 : N. Marcuvitz: "Waveguide Handbook". pp. 130-138. I.E.E. - Peter Peregrinus. 1986. (McGraw-Hill 1951).

117 : Bharathi Bhat and Shibani K. Koul: "Analysis, Design and Applications of Fin Lines". pp. 63-83. Artech House 1987

120 : Roberto Sorrentino and Tatsuo Itoh: "Transverse Resonance Analysis of Finline Discontinuities". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-32 nº 12, December 1984, pp. 1633-1638.

121

: R. Vahldieck and J. Bornemann: "A modified mode-matching technique and its application to a class of quasi-planar transmission lines". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-33 nº 10, October 1985, pp. 916-926.

122 : T. Umano, R. Sorrentino and T. Itoh: "Characterization of stripline crossing by transverse resonance analysis". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. MTT-35 nº 12, December 1987, pp. 1369-1376.

129 : Tatsuo Itoh and Raj Mittra: "Spectral-Domain Approach for Calculating the Dispersion Characteristics of Microstrip Lines". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques. vol. MTT-21, nº 7, July 1973, pp. 496-499.

130 : Rolf H. Jansen: "The Spectral-Domain Approach for Microwave Integrated Circuits". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques. vol. MTT-33 nº 10, October 1985, pp. 1043-1056.

131 : Tomoki Umano and Tatsuo Itoh: "Spectral Domain Approach". En el libro de T. Itoh: "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 5. Wiley 1989.

132 : Tatsuo Itoh: "The Spectral Domain Method". En el libro de E. Yamashita: "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap. 11. Artech House 1990.

133 : D. Mirshekar-Syahkal: "Spectral Domain Method for Microwave Integrated Circuits". Research Studies Press - John Wiley. 1990

134 : Tatsuo Itoh: "Spectral Domain Immitance Approach for Dispersion Characteristics of Generalized Printed Transmission Lines". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques. vol. MTT-28 n° 7, July 1980, pp. 733-736.

: J.C. Liou and K.M. Lau: "A solution to characteristics of planar transmission lines made of finite-thickness metal on multi-layered media". 1990 I.E.E.E. M.T.T.-S International Microwave Symposium Digest, vol. 1, pp. 179-182.

: Toshihide Kitazawa and Tatsuo Itoh: "Assymmetrical Coplanar Waveguide with Finite Metallization Thickness Containing Anisotropic Media". 1990 I.E.E.E. M.T.T.-S International Microwave Symposium Digest, vol. 2, pp. 673-676.

: Craig Scott: "The Spectral Domain Method in Electromagnetics". Artech House 1989.

: Humberto César Chaves Fernandes and Attilio José Giarola: "Dispersion Characteristics in Fin Lines with One and Two Dielectric Layers Arbitrarily Located in the Waveguide". Proceedings of 13th European Microwave Conference, 1983. pp. 272-277.

: Quiu Zhang and Tatsuo Itoh: "Spectral-Domain Analysis of Scattering from E-Plane Circuit Elements". I.E.E.E. Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol. M.T.T.-35 n° 2, February 1987, pp. 138-150.

105 : Kazuya Kobayashi: "Wiener-Hopf and Modified Residue Calculus Technique". En el libro de E. Yamashita "Analysis Methods for Electromagnetic Wave Problems". Cap. 8. Artech House 1990.

: Kevin J. Webb and Raj Mittra: "A Variational Solution of the Fin-Line Discontinuity Problem". Proceedings of the 15th European Microwave Conference, 1985. pp. 311-316.

: Robert E. Collin: "Field Theory of Guided Waves. Second edition". Cap. 8. IEEE Press. 1991.

: Richard Griffith and Michel Nakhla: "A New Method for the Time-Domain Analyssis of Lossy Coupled Transmission Lines". 1990 I.E.E.E. M.T.T.-S International Microwave Symposium Digest. Vol. 2 pp. 645-648.

: Juan R. Mosig: "Integral Equation Technique". En el libro de T. Itoh "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 3. Wiley 1989.

: K.C. Gupta and M.D. Abouzahra: "Planar Circuit Analysis". En el libro de T. Itoh "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 4. Wiley 1989.

: Roberto Sorrentino (editor): "Numerical Methods for Passive Microwave and Millimeter Wave Structures". Part 11. IEEE Press 1989

: Ingo Wolff: "The Waveguide Model for the Analysis of Microstrip Discontinuities". En el libro de T. Itoh: "Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures". Cap. 7. Wiley 1989.

: M. Hestenes: "Conjugate Direction Methods in Optimization". Springer-Verlag. 1980.

: W.K. Pratt and F. Davarian: "Fast Computational Techniques for Pseudoinverse and Wiener Image Restoration". I.E.E.E. Transactions on Computers, vol. C-26 n° 6, June 1977, pp. 571-580.

Exercice A. Développement du méthode des lignes

Sigui una estructura multicapa com l'assenyalada a la figura

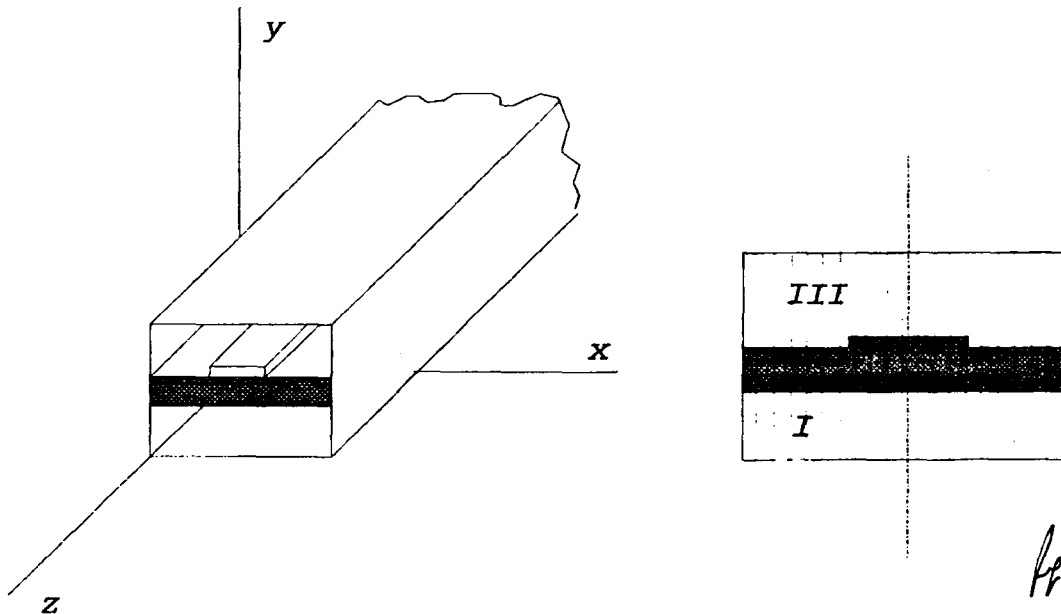


Fig. A1

En cada capa dielèctrica o substracte s'ha de verificar l'equació de Helmholtz:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = L\psi = 0 \quad (A1)$$

En què:

$$k^2 = \epsilon_r k_0^2 \quad k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\psi = \begin{cases} e_z \\ h_z \end{cases} : \text{Components axials dels camps (escalars).} \quad (A2)$$

amb les condicions de contorn adjacents:

- Paret elèctrica: $e_z = 0$ (D) ; $\frac{\partial h_z}{\partial n} = 0$ (N)

- Paret magnètica: $\frac{\partial e_z}{\partial n} = 0$ (N) ; $h_z = 0$ (D)

La lletra n representa la component normal a la paret elèctrica o magnètica, la D correspon a la condició de Dirichlet i la N a la de Neumann.

Les components transversals dels camps (e_x , e_y , h_x , h_y) s'obtenen a partir de les axials amb les expressions següents:

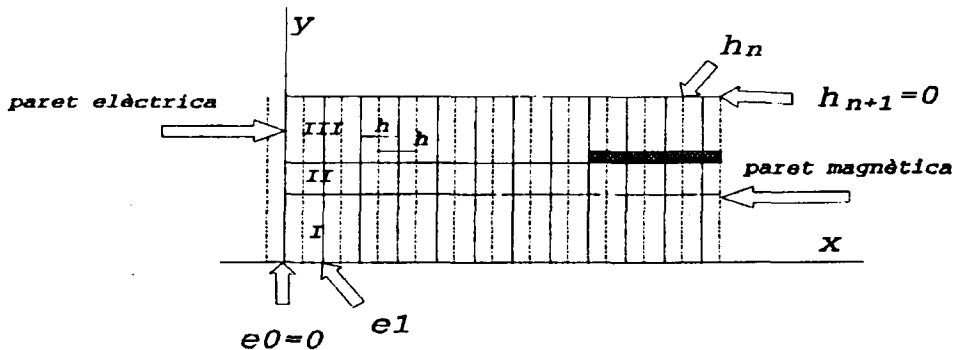
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & -jk\eta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & jk\eta \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix} \quad (A3)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \frac{k}{\eta} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ -j \frac{k}{\eta} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_z \\ h_z \end{pmatrix} \quad (A4)$$

en què:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} ; \quad \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (A5)$$

En referència a la figura A1 discretitzem e_z i h_z en la direcció x. (Les capes són homogènies en la direcció y).



cf A2

Obtenim un vector \vec{E}_z les components del qual representen el valor de e_z en cada punt de discretització:

$$e_z \rightarrow \begin{bmatrix} e_{z_0} \\ e_{z_1} \\ e_{z_2} \\ \vdots \\ e_{z_{N-1}} \end{bmatrix} = \vec{E}_z ; \quad e_{z_i} = f(y) \quad (A6)$$

Analogament per h_z :

$$h_z \rightarrow \begin{bmatrix} h_{z_0} \\ h_{z_1} \\ h_{z_2} \\ \vdots \\ h_{z_{N-1}} \end{bmatrix} = \vec{H}_z \quad ; \quad h_{z_i} = f(y) \quad (A7)$$

Amb el decalatge entre les línies de discretització de e_z i h_z s'aconsegueix fer complir les condicions de contorn. En el cas que ens ocupa és:

$$\begin{aligned} e_{z_0} &= 0 & (D) \\ e_{z_N} &= e_{z_{N+1}} & (N) \\ h_{z_0} &= h_{z_1} & (N) \\ h_{z_{N+1}} &= 0 & (D) \end{aligned} \quad (A8)$$

Fixem-nos que l'estructura exemple de la figura representa la "meitat" d'un microstrip suspès. És molt convenient en aquest mètode utilitzar simetries per reduir a la meitat el nombre de línies de discretització.

Aproximem les derivades per diferències finites:

$$\frac{\partial e_z}{\partial x} \rightarrow \frac{e_{z_i} - e_{z_{i-1}}}{h} \quad ; \quad h \frac{\partial e_z}{\partial x} \rightarrow e_{z_i} - e_{z_{i-1}} \quad \forall i \in [1, N-1] \quad (A9)$$

h és el pas de discretització. Tenint en compte \vec{E}_z ho podem posar de la forma següent:

$$h \frac{\partial e_z}{\partial x} \rightarrow [D] \vec{E}_z \quad (A10)$$

amb:

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -1 & .. & & & & \\ & .. & .. & & & \\ & & .. & .. & & \\ & & & .. & .. & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (A11)$$

Analogament:

$$h \frac{\partial h_z}{\partial x} \rightarrow -[D]^T \vec{H}_z \quad (A12)$$

Discretitzant la segona derivada:

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} (E_{z-1} - 2E_z + E_{z+1}) \quad (A13)$$

També la podem posar en funció de la matriu [D]:

$$h^2 \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial e_z}{\partial x} \right) \rightarrow -[D]'[D]\vec{E}_z = -[P]_{DN}\vec{E}_z \quad (A14)$$

$$h^2 \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h_z}{\partial x} \right) \rightarrow -[D][D]'\vec{H}_z = -[P]_{ND}\vec{H}_z$$

S'ha introduït una nova matriu [P]. El subíndex DN significa que, en aquest cas, satisfà la condició de Dirichlet a la paret de l'esquerra i la de Neumann a la paret de la dreta (e_z). El subíndex ND significa que satisfà la condició de Neumann a la paret de l'esquerra i la de Dirichlet a la de la dreta (h_z). En forma genèrica, aquesta matriu [P] té la forma següent:

$$[P] = \begin{bmatrix} p_l & -1 & & & \\ -1 & 2 & \dots & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & \dots & \dots & \\ & & & \dots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & p_r \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} p_l: \text{paret esquerra} \\ p_r: \text{paret dreta} \\ p_{l,r}=2 \text{ per condició de Dirichlet} \\ p_{l,r}=1 \text{ per condició de Neumann} \end{array} \quad (A15)$$

Assumint una variació amb z de les components axials dels camps de la forma $e^{-jk_z z}$ (la variació temporal és del tipus $e^{j\omega t}$), tenint en compte que e_z i h_z són funcions només de y i la relació entre [D] i [P], aplicant les discretitzacions anteriors a l'equació de Helmholtz, obtenim:

$$\frac{d^2}{dy^2} \vec{\psi} + [(k^2 - k_z^2)[I] - h^{-2} [P]] \vec{\psi} = \vec{0} \quad (A16)$$

$$\text{en què: } \vec{\psi} = \begin{cases} \vec{E}_z \\ \vec{H}_z \end{cases} ; \quad [I] \text{ és la matriu identitat}$$

Degut a la natura tridiagonal de [P] tindrem tres components de \vec{E}_z o de \vec{H}_z acoblades. Per tant no podem trobar directament una solució. Ara bé, [P] és real i simètrica, i per tant sempre es pot diagonalitzar: podem obtenir una matriu [T] tal que: $[T]^{-1}[P][T] = [\lambda^2]$ en què $[\lambda^2]$ és una matriu diagonal. A més a més podem escollir [T] de manera que sigui una matriu ortogonal: $[T]^{-1} = [T]^t$. El problema de diagonalització de matrius és equivalent al de canvi de base o d'eixos, i ens trobarem davant d'un problema

d'autovalors i autovectors: La k-èsima columna de la matriu de la transformació [T] serà el k-èsim autovector; la matriu diagonal $[\lambda^2]$ estarà formada pels autovalors. S'obtenen de resoldre l'equació característica $\text{Det}\{([P]-\lambda^2[W])\bar{T}\}=0$, en què [W] és una matriu pes (normalment la matriu identitat), λ^2 un autovalor associat a l'autovector \bar{T} i [P] és la matriu original. La relació entre els vectors referits a la base primitiva $\bar{\psi}$ i els referits a la nova base transformada $\bar{\psi}$ és: $\bar{\psi} = [T]\bar{\psi}$; $\bar{\psi} = [T]^{-1}\bar{\psi}$. Amb tot això podem establir la relació:

$$\left\{ \left(\frac{d^2}{dy^2} + k^2 - k_z^2 \right) [I] - h^{-2} [\lambda^2] \right\} \bar{\psi} = \bar{0} \quad (A17)$$

La i-èsima equació d'aquest sistema matricial és:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + k^2 - k_z^2 \right) \bar{\psi}_i - h^{-2} \lambda_i^2 \bar{\psi}_i = 0 \quad (A18)$$

La solució d'aquesta equació diferencial és:

$$\bar{\psi}_i = A_i e^{-j\sqrt{k^2 - k_z^2 - h^{-2}\lambda_i^2} y} + B_i e^{j\sqrt{k^2 - k_z^2 - h^{-2}\lambda_i^2} y} \quad (A19)$$

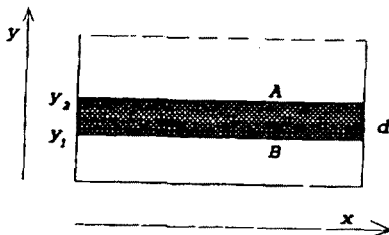
que podem posar com:

$$\bar{\psi}_i = A_i \cosh(k_y y) + B_i \sinh(k_y y) \quad (A20)$$

amb:

$$k_y^2 = k_0^2 (\bar{\lambda}_i^2 - \varepsilon_r + \varepsilon_{re}) ; \quad \varepsilon_{re} = \frac{k_z^2}{k_0^2} ; \quad \bar{\lambda}_i^2 = \frac{\lambda_i^2}{(k_0^2 h^2)} \quad (A21)$$

En la majoria dels casos, les components dels camps i les seves derivades es necessiten només en les superfícies de separació de les capes de l'estructura. La relació entre els camps i les seves derivades en les superfícies de separació ens servirà per calcular les constants d'integració A_i i B_i . Fixant-nos en una capa arbitrària de gruix d (figura), a partir de l'expressió de $\bar{\psi}_i$, derivant-la respecte a y , particularitzant per $y=y_1$ i per $y=y_2$, obtenim:



H A3

$$\begin{aligned} A_i &= -(\sinh(k_y d))^{-1} [\bar{\psi}_i(y_2) \sinh(k_y y_1) - \bar{\psi}_i(y_1) \sinh(k_y y_2)] \\ B_i &= (\sinh(k_y d))^{-1} [\bar{\psi}_i(y_2) \cosh(k_y y_1) - \bar{\psi}_i(y_1) \cosh(k_y y_2)] \end{aligned} \quad (A22)$$

$$\frac{1}{k_0} \frac{d}{dy} \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1(y_1) \\ \bar{\psi}_2(y_1) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_N(y_1) \\ \bar{\psi}_1(y_2) \\ \bar{\psi}_2(y_2) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_N(y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}\gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 & k_{11}\alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{22}\gamma_{22} & \cdots & 0 & 0 & k_{22}\alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{NN}\gamma_{NN} & 0 & 0 & \cdots & k_{NN}\alpha_{NN} \\ k_{11}\alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 & k_{11}\gamma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{22}\alpha_{22} & \cdots & 0 & 0 & k_{22}\gamma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{NN}\alpha_{NN} & 0 & 0 & \cdots & k_{NN}\gamma_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{\psi}_1(y_1) \\ -\bar{\psi}_2(y_1) \\ \vdots \\ -\bar{\psi}_N(y_1) \\ \bar{\psi}_1(y_2) \\ \bar{\psi}_2(y_2) \\ \vdots \\ \bar{\psi}_N(y_2) \end{bmatrix}$$

Amb:

$$k_{ii} = \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \right)^2 ; \quad \alpha_{ii} = \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \right)^{-1} (\sinh k_{y_i} d)^{-1} ; \quad \gamma_{ii} = \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \right)^{-1} (\operatorname{tgh} k_{y_i} d)^{-1} \quad (A25)$$

D'una forma més compacta:

$$\begin{bmatrix} \bar{\psi}'(y_1) \\ \bar{\psi}'(y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_y^2] & [0] \\ [0] & [k_y^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\gamma] & [\alpha] \\ [\alpha] & [\gamma] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\bar{\psi}(y_1) \\ \bar{\psi}(y_2) \end{bmatrix} \quad (A25)$$

Amb:

$$\bar{\psi}' = \frac{1}{k_0} \frac{d}{dy} \bar{\psi} ; \quad [\alpha] = \operatorname{diag} \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \sinh k_{y_i} d \right)^{-1} ; \quad [\gamma] = \operatorname{diag} \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \operatorname{tgh} k_{y_i} d \right)^{-1} \quad (A26)$$

$$[k_y^2] = \operatorname{diag} \left(\frac{k_{y_i}}{k_0} \right)^2$$

Els autovalors λ_k^2 i els autovectors associats \bar{T}_k de la matriu $[P]$ s'obtenen resolvent l'equació $([P] - \lambda_k^2 [I]) \bar{T}_k = \vec{0}$ analíticament (ref.), obtenint-se: ($[P]$ és una matriu diagonal que depèn de les condicions de contorn laterals)

Per condicions Dirichlet-Neumann:

$$\varphi_k = \frac{k-1/2}{N+1/2} \pi \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (A27)$$

$$\lambda_k^2 = 4 \sin^2(\varphi_k / 2)$$

$$\bar{T}_{DNk} = \sqrt{\frac{2}{N+1/2}} \sin \frac{i(k-1/2)\pi}{N+1/2} \quad i, k = 1, 2, \dots, N$$

Per condicions Neumann-Dirichlet:

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \frac{k-1/2}{N+1/2} \pi & k=1,2,\dots,N \\ \lambda_k^2 &= 4\sin^2(\varphi_k/2) \\ \bar{T}_{NDk} &= \sqrt{\frac{2}{N+1/2}} \cos \frac{(i-1/2)(k-1/2)\pi}{N+1/2} & i,k=1,2,\dots,N\end{aligned}\quad (A28)$$

Per condicions Dirichlet-Dirichlet:

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \frac{k\pi}{N+1} & k=1,2,\dots,N \\ \lambda_k^2 &= 4\sin^2(\varphi_k/2) \\ \bar{T}_{DDk} &= \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{ik\pi}{N+1} & i,k=1,2,\dots,N\end{aligned}\quad (A29)$$

Per condicions Neumann-Neumann:

$$\begin{aligned}\varphi_k &= \frac{k\pi}{N+1} & k=0,1,2,\dots,N \\ \lambda_k^2 &= 4\sin^2(\varphi_k/2) \\ \bar{T}_{NNi} &= \sqrt{\frac{1}{N+1}} \\ \bar{T}_{NNi,k+1} &= \sqrt{\frac{2}{N+1}} \cos \frac{(i-1/2)k\pi}{N+1} & i=1,2,\dots,N+1 ; k=1,2,\dots,N\end{aligned}\quad (A30)$$

A continuació donem una sèrie d'expressions que interrelacionen les diferents components dels camps.

A partir de les equacions $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$, assumint variacions de totes les components dels camps en z de la forma $e^{-jk_z z}$, discretitzant segons x (les components dels camps seran funció només de y) i operant obtenim:

$$k_0 \epsilon_d \begin{bmatrix} \bar{E}_x \\ \eta_0 \bar{H}_x \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -\sqrt{\epsilon_{re}} h^{-1} [D] & -[L] \frac{\partial}{\partial y} \\ \epsilon_r [L] \frac{\partial}{\partial y} & \sqrt{\epsilon_{re}} h^{-1} [D]' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_z \\ \eta_0 \bar{H}_z \end{bmatrix}\quad (A31)$$

$$k_0 \epsilon_d \begin{bmatrix} \bar{E}_y \\ \eta_0 \bar{H}_y \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon_{re}} [L] \frac{\partial}{\partial y} & h^{-1} [D]' \\ \epsilon_r h^{-1} [D] & \sqrt{\epsilon_{re}} [L] \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_z \\ \eta_0 \bar{H}_z \end{bmatrix}\quad (A32)$$

essent $\epsilon_d = \epsilon_r - \epsilon_{re}$

A partir d'aquestes expressions, considerant $[T_e]$ la matriu de transformació per a \bar{E}_z i $[T_h]$ la matriu de transformació per a \bar{H}_z , tenint en compte el caràcter ortogonal de les matrius $[T]$ i operant obtenim la següent relació entre les components dels camps transformades:

$$\epsilon_d \begin{bmatrix} \bar{E}_x \\ \eta_0 \bar{H}_x \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -\sqrt{\epsilon_{re}} [\bar{\delta}] & -[I] \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial y} \\ [I] \frac{\epsilon_r}{k_0} \frac{\partial}{\partial y} & \sqrt{\epsilon_{re}} [\bar{\delta}]' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_z \\ \eta_0 \bar{H}_z \end{bmatrix} \quad A33$$

$$\epsilon_d \begin{bmatrix} \bar{E}_y \\ \eta_0 \bar{H}_y \end{bmatrix} = -j \begin{bmatrix} [I] \frac{\sqrt{\epsilon_{re}}}{k_0} \frac{\partial}{\partial y} & [\bar{\delta}]' \\ \epsilon_r [\bar{\delta}] & [I] \frac{\sqrt{\epsilon_{re}}}{k_0} \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_z \\ \eta_0 \bar{H}_z \end{bmatrix} \quad A34$$

en què:

$$\begin{aligned} [\bar{\delta}] &= [T_h]' [D] [T_e] \quad ; \quad [\bar{\delta}]' = [T_e]' [D]' [T_h] \\ [\bar{\delta}] &= \frac{1}{k_0 h} [\delta] \end{aligned} \quad A35$$

$[\bar{\delta}]$ és una matriu diagonal o quasi-diagonal (diagonal amb la primera fila de zeros) dependent de les condicions de contorn laterals. En el cas de la figura és $[T_e]=[T_{DN}]$ Dirichlet-Neumann i $[T_h]$ és el dual: $[T_h]=[T_{ND}]$. En aquest cas $[\bar{\delta}]$ és diagonal. Per als casos DD i NN, $[\bar{\delta}]$ és quasi-diagonal.

A partir de l'equació , tenint en compte l'equació , recordant els valors de les matrius $[k_y]$, $[\alpha]$ i $[\gamma]$ i que al ser diagonals el seu producte és conmutatiu, després de nombroses manipulacions algebraiques podem obtenir la següent relació entre les components tangencials dels camps transformats en els interfaces A i B (figura A3) :

$$\begin{bmatrix} -j\bar{H}_{zA} \\ \bar{H}_{xA} \\ -j\bar{H}_{zB} \\ \bar{H}_{xB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\epsilon_d [\gamma_h] & [\gamma_h] [\bar{\delta}] & -\epsilon_d [\alpha_h] & [\alpha_h] [\bar{\delta}] \\ [\bar{\delta}]' [\gamma_h] & [\gamma_E] & [\bar{\delta}]' [\alpha_h] & [\alpha_E] \\ -\epsilon_d [\alpha_h] & [\alpha_h] [\bar{\delta}] & -\epsilon_d [\gamma_h] & [\gamma_h] [\bar{\delta}] \\ [\bar{\delta}]' [\alpha_h] & [\alpha_E] & [\bar{\delta}]' [\gamma_h] & [\gamma_E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_{xA} \\ -j\bar{E}_{zA} \\ -\bar{E}_{xB} \\ j\bar{E}_{zB} \end{bmatrix} \quad A36$$

en què:

$$[\bar{\delta}] = \sqrt{\epsilon_{re}} [\delta] \quad ; \quad [\alpha_E] = [\bar{\lambda}_c^2] - \epsilon_r [I] [\alpha_c] \quad ; \quad [\gamma_E] = [\bar{\lambda}_c^2] - \epsilon_r [I] [\gamma_c] \quad A37$$

(Els subíndex e ó h fan referència a si, en l'equació $\bar{\psi}$ juga el paper de \bar{E}_z o de \bar{H}_z)

L'expressió anterior es pot escriure d'una forma més compacta:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_A \\ \bar{H}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_2 & \bar{y}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_A \\ -\bar{E}_B \end{bmatrix} \quad A38$$

en què:

$$\bar{H}_{A,B} = \eta_0 \begin{bmatrix} -j\bar{H}_{zA,B} \\ \bar{H}_{xA,B} \end{bmatrix} \quad \bar{E}_{A,B} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{xA,B} \\ -j\bar{E}_{zA,B} \end{bmatrix} \quad A39$$

$$\bar{y}_1 = \begin{bmatrix} -\epsilon_d[\gamma_h] & [\gamma_h][\bar{\delta}] \\ [\bar{\delta}]'[\gamma_h] & [\gamma_e] \end{bmatrix} \quad \bar{y}_2 = \begin{bmatrix} -\epsilon_d[\alpha_h] & [\alpha_h][\bar{\delta}] \\ [\bar{\delta}]'[\alpha_h] & [\alpha_e] \end{bmatrix} \quad A40$$

D'aquesta expressió podem derivar les següents, les quals ens relacionen els camps als diferents interfaces:

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_B \\ \bar{H}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V} & \bar{Z} \\ \bar{Y} & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_A \\ \bar{H}_A \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \bar{E}_A \\ \bar{H}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V} & -\bar{Z} \\ -\bar{Y} & \bar{V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_B \\ \bar{H}_B \end{bmatrix} \quad A41$$

A partir de l'equació , tenint en compte que, com es pot comprovar a partir de la definició de $[\delta]$, es verifica: $[\delta][\delta]' = [\lambda_{DD}^2]$; $[\delta]'[\delta] = [\lambda_{NN}^2]$; $[\delta] = [\lambda_{DN}] = [\lambda_{ND}]$ s'obté:

$$[\bar{V}] = [\bar{y}_1][\bar{y}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} [\tau_h] & [0] \\ [0] & [\tau_e] \end{bmatrix} \quad ; \quad [\tau_h] = \text{diag}(\cosh k_{yh}, d) \quad ; \quad [\tau_e] = \text{diag}(\cosh k_{ye}, d) \quad A42$$

$$[\bar{Y}] = [\bar{y}_2] - [\bar{y}_1][\bar{y}_2]^{-1}[\bar{y}_1] = - \begin{bmatrix} [k_{yh}]^{-2}[\alpha_h]^{-1} & 0 \\ 0 & [k_{ye}]^{-2}[\alpha_e]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\epsilon_d[\eta] & [\bar{\delta}] \\ [\bar{\delta}]' & ([\bar{\lambda}_e]^2 - \epsilon_r[\eta]) \end{bmatrix} \quad A43$$

$$[\bar{Z}] = -[\bar{y}_2]^{-1} = -\frac{1}{\epsilon_r} \begin{bmatrix} [k_{yh}]^{-2}[\alpha_h]^{-1} & 0 \\ 0 & [k_{ye}]^{-2}[\alpha_e]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -([\bar{\lambda}_h]^2 - \epsilon_r[\eta]) & [\bar{\delta}] \\ [\bar{\delta}]' & \epsilon_d[\eta] \end{bmatrix} \quad A44$$

Ara només ens resta aplicar les condicions de continuïtat en el domini transformat i a l'espacial original.

Considerem l'interface número 0 una paret metàl·lica (la cara inferior de la guia rectangular que conté l'estructura). Aquí les components tangencials de camp elèctric han

de ser nul·les, i per tant, les components transversals del camp elèctric en el domini transformat també ho seran: $\vec{E}_0 = \vec{0}$. Aplicant l'equació (amb A l'interface número 0 i B l'interface número 1):

$$\begin{bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{H}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\vec{V}_1] & [\vec{Z}_1] \\ [\vec{Y}_1] & [\vec{V}_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{H}_0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \vec{E}_A \\ \vec{H}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\vec{V}] & -[\vec{Z}] \\ -[\vec{Y}] & [\vec{V}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{E}_B \\ \vec{H}_B \end{bmatrix} \quad A45$$

D'on obtenim:

$$\vec{H}_1 = [\vec{Y}_1^{(0)}] \vec{E}_1 \quad ; \quad [\vec{Y}_1^{(0)}] = [\vec{V}_1][\vec{Z}_1]^{-1} = -[\vec{y}_1] \quad A46$$

Substituint aquest resultat de nou en l'equació aplicada als interfaces 1 i 2 obtenim \vec{H}_2 en funció de \vec{E}_2 i repetint el procés s'obté la següent relació de recurrència per a l'interface k-èsim:

$$[\vec{Y}_i^{(k)}] = \{[\vec{Y}_k] + [\vec{V}_k][\vec{Y}_i^{(k-1)}]\} \{[\vec{V}_k] + [\vec{Z}_k][\vec{Y}_i^{(k-1)}]\}^{-1} \quad A47$$

$$\vec{H}_k = [\vec{Y}_i^{(k)}] \vec{E}_k$$

$[\vec{Y}_i^{(k)}]$ ve de manipulacions algebraiques de matrius de submatrius diagonals, per tant també serà una matriu de submatrius diagonals. Procedirem de forma anàloga pel cas de que la paret inferior fós magnètica.

Podem també començar per la paret superior i anar considerant els interfaces de dalt a baix. A partir de l'expressió i seguint el mateix procediment utilitzat per calcular obtenim:

$$[\vec{Y}_i^{(0)}] = \{[\vec{Y}_1] + [\vec{V}_1][\vec{Y}_i^{(1)}]\} \{[\vec{V}_1] + [\vec{Z}_1][\vec{Y}_i^{(1)}]\}^{-1} \quad A48$$

$$\vec{H}_1 = -[\vec{Y}_i^{(0)}] \vec{E}_1$$

I fa referència al l-èsim interface comptat des de dalt.

Si a l'interface m comptat des d'abaix hi ha una metal·lització (de gruix nul), les condicions de contorn en el domini transformat seran:

$$\vec{H}_{m^+} - \vec{H}_{m^-} = -\vec{J}_m \quad A49$$

La densitat de corrent superficial en la metal·lització de l'interface m en el domini transformat \vec{J}_m és:

$$\vec{J}_m = \eta_0 \begin{bmatrix} j(\vec{J}_x)^t \\ (\vec{J}_z)^t \end{bmatrix} \quad A50$$

(el terme η_0 apareix degut a les abreviatures utilitzades a les expressions)

Substituint en obtenim les components dels camps transformats a l'interface $m+1$ (comptat des d'abaix):

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_{m+1} \\ \bar{\bar{H}}_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{m+1} \\ \bar{Y}_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Z}_{m+1} \\ \bar{V}_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_m \\ [\bar{Y}_t^{(m)}] \bar{\bar{E}}_m - \bar{\bar{J}}_m \end{bmatrix} \quad A51$$

Operant obtenim:

$$\bar{\bar{H}}_{m+1} = [\bar{Y}_t^{(m+1)}] \bar{\bar{E}}_{m+1} + \{[\bar{Y}_t^{(m+1)}][\bar{Z}_{m+1}] - [\bar{V}_{m+1}]\} \bar{\bar{J}}_m \quad A52$$

Les expressions trobades ens serveixen per a fer complir les condicions de continuïtat a tots els interfaces de l'estructura en el domini transformat.

Considerem primerament que només tenim metal·lització a l'interface k comptat des d'abaix, que és el mateix que l'interface l comptat des de dalt, llavors podem establir les següents relacions de les components tangencials dels camps transformats:

$$\bar{\bar{E}}_k = \bar{\bar{E}}_l = \bar{\bar{E}}_M \quad ; \quad \bar{\bar{H}}_k - \bar{\bar{H}}_l = \bar{\bar{J}}_M \quad A53$$

A partir de les expressions que relacionen els camps elèctrics i magnètics discretitzats en el domini transformat a l'interface k comptat des d'abaix i a l'interface l comptat des de dalt, obtenim:

$$\begin{aligned} \{[\bar{Y}_t^{(k)}] + [\bar{Y}_t^{(l)}]\} \bar{\bar{E}}_M &= \bar{\bar{J}}_M \\ \{[\bar{Y}_t^{(k)}] + [\bar{Y}_t^{(l)}]\}^{-1} \bar{\bar{J}}_M &= \bar{\bar{E}}_M \end{aligned} \quad A54$$

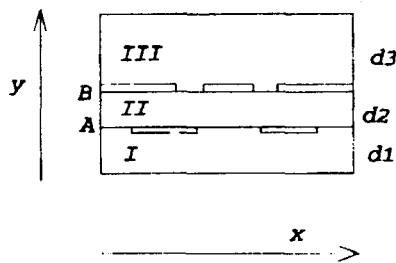
Segons quina una d'aquestes dues equacions es faci servir, es pot aconseguir un sistema d'equacions més petit. Això depèn de l'amplada relativa de les metal·litzacions respecte a la dels slots. Ara bé, com es presenta al capítol aquesta reducció del tamany de les matrius pot provocar resultats poc acurats o totalment erronis. En la majoria dels casos provats l'equació dona millors resultats. (L'inversió de la matriu de l'equació no és problemàtica, doncs estem tractant amb matrius de submatrius diagonals i s'ha desenvolupat un algorisme especial que inverteix aquest tipus de matrius d'una forma molt ràpida i acurada (ref.)).

Ens interessa reescriure l'equació de la forma següent:

$$\{[\bar{Y}_t^{(k)}] + [\bar{Y}_t^{(l)}]\}^{-1} \bar{\bar{J}}_M = \bar{\bar{E}}_M \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} [\bar{Z}_{11}] & [\bar{Z}_{12}] \\ [\bar{Z}_{12}]^t & [\bar{Z}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\bar{\bar{J}}_{zM} \\ \bar{\bar{J}}_{zM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_{zM} \\ -j\bar{\bar{E}}_{zM} \end{bmatrix} \quad A55$$

$[\bar{Z}_{ij}]$ són submatrius diagonals

Si tenim dos interfaces amb metal·lització (fig A5)



h A4

Aplicant l'equació , combinant-la amb les expressions i les condicions de continuïtat:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{E}}_A^I &= \bar{\bar{E}}_A^{II} = \bar{\bar{E}}_A & ; & & \bar{\bar{E}}_B^{II} &= \bar{\bar{E}}_B^{III} = \bar{\bar{E}}_B \\ \bar{\bar{H}}_A^I - \bar{\bar{H}}_A^{II} &= \bar{\bar{J}}_A & ; & & \bar{\bar{H}}_B^{II} - \bar{\bar{H}}_B^{III} &= \bar{\bar{J}}_B \end{aligned}$$

A55

obtenim:

$$\begin{bmatrix} [\bar{y}_1^{II}] - [\bar{Y}_t^{(I)}] & [\bar{y}_2^{II}] \\ [\bar{y}_2^{II}] & [\bar{y}_1^{II}] - [\bar{Y}_t^{(III)}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_A \\ -\bar{\bar{E}}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\bar{J}}_A \\ \bar{\bar{J}}_B \end{bmatrix}$$

A56

$$\begin{bmatrix} [\bar{y}_1^{II}] - [\bar{Y}_t^{(I)}] & [\bar{y}_2^{II}] \\ [\bar{y}_2^{II}] & [\bar{y}_1^{II}] - [\bar{Y}_t^{(III)}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{\bar{J}}_A \\ \bar{\bar{J}}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_A \\ -\bar{\bar{E}}_B \end{bmatrix}$$

A57

Ens interessa també reescriure l'equació de la forma següent:

$$\begin{bmatrix} [\bar{y}_1^{II}] - [\bar{Y}_t^{(I)}] & [\bar{y}_2^{II}] \\ [\bar{y}_2^{II}] & [\bar{y}_1^{II}] - [\bar{Y}_t^{(III)}] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\bar{\bar{J}}_A \\ \bar{\bar{J}}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_A \\ -\bar{\bar{E}}_B \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} [\bar{Z}_{11}] & [\bar{Z}_{12}] & [\bar{Z}_{13}] & [\bar{Z}_{14}] \\ [\bar{Z}_{21}] & [\bar{Z}_{22}] & [\bar{Z}_{23}] & [\bar{Z}_{24}] \\ [\bar{Z}_{31}] & [\bar{Z}_{32}] & [\bar{Z}_{33}] & [\bar{Z}_{34}] \\ [\bar{Z}_{41}] & [\bar{Z}_{42}] & [\bar{Z}_{43}] & [\bar{Z}_{44}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\bar{\bar{J}}_{xA} \\ -\bar{\bar{J}}_{xA} \\ j\bar{\bar{J}}_{xB} \\ \bar{\bar{J}}_{xB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_{xA} \\ -j\bar{\bar{E}}_{xA} \\ -\bar{\bar{E}}_{xB} \\ j\bar{\bar{E}}_{xB} \end{bmatrix}$$

A58

$[\bar{Z}_{ij}]$ són submatrius diagonals

Per poder resoldre els sistemes o hem de considerar les condicions de contorn en el domini espacial: les components tangencials de camp elèctric en les tires metàl·liques i les densitats de corrent elèctric als slots han de ser zero:

$$E_{x_i}, E_{z_i} = 0 \quad ; \quad J_{x_k}, J_{z_k} = 0$$

A59

i agafa els valors dels números de les línies de discretització que contenen les metal·litzacions i k són els números de les línies que cauen fora de les metal·litzacions.

Considerant un únic interface M amb metal·lització (figura), tindrem:

$$\bar{\bar{E}}_{x_M} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_{x_i} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ; \quad \bar{\bar{E}}_{z_M} = \begin{bmatrix} \bar{\bar{E}}_{z_k} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ; \quad \bar{\bar{J}}_{x_M} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{\bar{J}}_{x_m} \end{bmatrix} ; \quad \bar{\bar{J}}_{z_M} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{\bar{J}}_{z_m} \end{bmatrix}$$

A60

(El subíndex s fa referència al slot i el m a la metal·lització)
 Essent, en el cas que ens ocupa (fig):

$$\begin{aligned}\bar{E}_z &= [T_{DN}] \bar{E}_z = [T_c] \bar{E}_z \\ \bar{H}_z &= [T_{ND}] \bar{H}_z = [T_b] \bar{H}_z \\ \bar{E}_x &= [T_h] \bar{E}_x \\ \bar{H}_x &= [T_c] \bar{H}_x \\ \bar{J}_x &= [T_h] \bar{J}_x \\ \bar{J}_z &= [T_c] \bar{J}_z\end{aligned}$$

AG 1

Fent una transformació inversa sobre el sistema per passar del domini transformat a l'espacial:

$$\begin{bmatrix} [T_h] & [0] \\ [0] & [T_c] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{Z}_{11}] & [\bar{Z}_{12}] \\ [\bar{Z}_{12}]' & [\bar{Z}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_h]' & [0] \\ [0] & [T_c]' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\bar{J}_{xM} \\ \bar{J}_{zM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{xM} \\ -j\bar{E}_{zM} \end{bmatrix}$$

AG 2

que podem reescriure de la forma següent:

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] \\ [Z_{12}]' & [Z_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\bar{J}_{xM} \\ \bar{J}_{zM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{xM} \\ -j\bar{E}_{zM} \end{bmatrix}$$

AG 3

(Les submatrius $[Z_{ij}]$ no són diagonals!)

Introduint en aquesta expressió les condicions de continuïtat :

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] \\ [Z_{12}]' & [Z_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ j\bar{J}_{xm} \\ \vec{0} \\ \bar{J}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{xs} \\ \vec{0} \\ -j\bar{E}_{zs} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

AG 4

En aquest sistema d'equacions, les columnes de les submatrius $[Z_{ij}]$ que es multipliquen amb el subvector $\vec{0}$ donen una contribució nula, per tant no és necessari calcular-les. Omitint aquestes columnes obtindrem submatrius reduïdes $[Z_{ij}]'$ rectangulars, a les quals es pot aplicar una descomposició L-U d'acord amb la partició del vector camp elèctric:

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}^{ru}] & [Z_{12}^{ru}] \\ [Z_{11}^{rl}] & [Z_{12}^{rl}] \\ [Z_{21}^{ru}] & [Z_{22}^{ru}] \\ [Z_{21}^{rl}] & [Z_{22}^{rl}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\vec{J}_{xm} \\ \vec{J}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}_{xs} \\ \vec{0} \\ -j\vec{E}_{zs} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad A65$$

Per al cas d'un microstrip, la matriu amb 4 submatrius $[Z_{ij}]$ de l'equació es divideix en 16 submatrius, atès que s'ha de multiplicar pel vector de densitats de corrent i s'ha d'igualar al vector de camps elèctrics tangencials en l'interface. Aquests dos vectors tenen quatre elements, els dos superiors fan referència a les components x i els dos inferiors a les components z. En cadascun d'aquests elements el primer fa referència al slot i el segon a la metal·lització. Les submatrius reduïdes seran les que ocupen les posicions següents:

	$[Z_{11}^{ru}]$		$[Z_{12}^{ru}]$
	$[Z_{11}^{rl}]$		$[Z_{12}^{rl}]$
	$[Z_{21}^{ru}]$		$[Z_{22}^{ru}]$
	$[Z_{21}^{rl}]$		$[Z_{22}^{rl}]$

A66

r fa referència a "la dreta", u a "a dalt" i l a "a baix".

Si tenim una slotline, al fer l'anàlisi de la meitat de l'estructura, obtenim un interface amb tres parts: slot, metal·lització i slot una altra vegada. Llavors els vectors de camp elèctric i densitats de corrent esmentats al paràgraf anterior tenen sis components. La matriu de submatrius $[Z_{ij}]$ de l'equació s'ha de dividir en aquest cas en 36 submatrius.

El sistema d'equacions el dividim en dos sistemes:

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}^{rl}] & [Z_{12}^{rl}] \\ [Z_{12}^{rl}]^t & [Z_{22}^{rl}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\vec{J}_{xm} \\ \vec{J}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

A67

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}^{ru}] & [Z_{12}^{ru}] \\ [Z_{21}^{ru}] & [Z_{22}^{ru}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j\vec{J}_{xm} \\ \vec{J}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{E}_{xs} \\ -j\vec{E}_{zs} \end{bmatrix}$$

El sistema homogeni és un problema indirecte d'autovalors. Les submatrius $[Z_{ij}^m]$ són funció de la constant de propagació (concretament de la constant de propagació normalitzada ϵ_{re}). Variant ϵ_{re} fins que el determinant del sistema homogeni sigui nul, obtindrem la constant de propagació normalitzada de l'estructura. Això ho realitza una subrutina de càlcul de zeros basada en el mètode de Müller, doncs és necessari tractar amb nombres complexos.

Les densitats de corrent s'obtenen trobant l'autovector associat a l'autovalor nul del sistema. A partir d'aquestes, amb el sistema es pot obtenir el camp elèctric als slots.

Amb les densitats de corrent podem trobar el corrent total que circula per una tira metàl·lica i amb el camp elèctric als slots podem obtenir el voltatge entre dues tires metàl·liques. Això ens servirà per calcular la impedància característica de les diferents estructures, definides per relacions potència-tensió o potència-corrent segons el cas.

De forma semblant, per a una estructura amb tres capes i dos interfaces A i B amb metal·litzacions tipus microstrip, a partir de l'expressió , fent una transformació inversa per passar al domini espacial:

$$\begin{bmatrix} [T_h] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [T_e] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_h] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [T_e] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\bar{Z}_{11}] & [\bar{Z}_{12}] & [\bar{Z}_{13}] & [\bar{Z}_{14}] \\ [\bar{Z}_{21}] & [\bar{Z}_{22}] & [\bar{Z}_{23}] & [\bar{Z}_{24}] \\ [\bar{Z}_{31}] & [\bar{Z}_{32}] & [\bar{Z}_{33}] & [\bar{Z}_{34}] \\ [\bar{Z}_{41}] & [\bar{Z}_{42}] & [\bar{Z}_{43}] & [\bar{Z}_{44}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [T_h]' & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [T_e]' & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [T_h]' & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [T_e]' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j\bar{J}_{xA} \\ \bar{J}_{zA} \\ j\bar{J}_{xB} \\ \bar{J}_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{xA} \\ -j\bar{E}_{zA} \\ -\bar{E}_{xB} \\ j\bar{E}_{zB} \end{bmatrix} \quad A68$$

que podem reescriure de la forma següent:

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}] & [Z_{12}] & [Z_{13}] & [Z_{14}] \\ [Z_{21}] & [Z_{22}] & [Z_{23}] & [Z_{24}] \\ [Z_{31}] & [Z_{32}] & [Z_{33}] & [Z_{34}] \\ [Z_{41}] & [Z_{42}] & [Z_{43}] & [Z_{44}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j\bar{J}_{xA} \\ -\bar{J}_{zA} \\ j\bar{J}_{xB} \\ \bar{J}_{zB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{xA} \\ -j\bar{E}_{zA} \\ -\bar{E}_{xB} \\ j\bar{E}_{zB} \end{bmatrix} \quad A69$$

Introduint-hi les condicions de contorn:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{x_A} &= \begin{bmatrix} \bar{E}_{x_A} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ; \quad \bar{E}_{z_A} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{z_A} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ; \quad \bar{J}_{x_A} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{J}_{x_m} \end{bmatrix} ; \quad \bar{J}_{z_A} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{J}_{z_m} \end{bmatrix} \\ \bar{E}_{x_B} &= \begin{bmatrix} \bar{E}_{x_B} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ; \quad \bar{E}_{z_B} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{z_B} \\ \bar{0} \end{bmatrix} ; \quad \bar{J}_{x_B} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{J}_{x_m} \end{bmatrix} ; \quad \bar{J}_{z_B} = \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{J}_{z_m} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad A70$$

s'obté:

$$\begin{bmatrix}
 [Z_{11}] & [Z_{12}] & [Z_{13}] & [Z_{14}] \\
 [Z_{21}] & [Z_{22}] & [Z_{23}] & [Z_{24}] \\
 [Z_{31}] & [Z_{32}] & [Z_{33}] & [Z_{34}] \\
 [Z_{41}] & [Z_{42}] & [Z_{43}] & [Z_{44}]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bar{0} \\
 -j\bar{J}_{xm}^A \\
 \bar{0} \\
 -\bar{J}_{zm}^A \\
 \bar{0} \\
 j\bar{J}_{xm}^B \\
 \bar{0} \\
 \bar{J}_{zm}^B
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \bar{E}_{xs}^A \\
 \bar{0} \\
 -j\bar{E}_{zs}^A \\
 \bar{0} \\
 -\bar{E}_{xs}^B \\
 \bar{0} \\
 j\bar{E}_{zs}^B \\
 \bar{0}
 \end{bmatrix}$$

A71

La matriu de submatrius $[Z_{ij}]$ es divideix en 64 submatrius de les quals considerem només les que tenen una contribució no nula al multiplicar-se pel vector de densitats de corrent, obtenint:

$$\begin{bmatrix}
 [Z_{11}^{ru}] & [Z_{12}^{ru}] & [Z_{13}^{ru}] & [Z_{14}^{ru}] \\
 [Z_{11}^{rl}] & [Z_{12}^{rl}] & [Z_{13}^{rl}] & [Z_{14}^{rl}] \\
 [Z_{21}^{ru}] & [Z_{22}^{ru}] & [Z_{23}^{ru}] & [Z_{24}^{ru}] \\
 [Z_{21}^{rl}] & [Z_{22}^{rl}] & [Z_{23}^{rl}] & [Z_{24}^{rl}] \\
 [Z_{31}^{ru}] & [Z_{32}^{ru}] & [Z_{33}^{ru}] & [Z_{34}^{ru}] \\
 [Z_{31}^{rl}] & [Z_{32}^{rl}] & [Z_{33}^{rl}] & [Z_{34}^{rl}] \\
 [Z_{41}^{ru}] & [Z_{42}^{ru}] & [Z_{43}^{ru}] & [Z_{44}^{ru}] \\
 [Z_{41}^{rl}] & [Z_{42}^{rl}] & [Z_{43}^{rl}] & [Z_{44}^{rl}]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 -j\bar{J}_{xm}^A \\
 -\bar{J}_{zm}^A \\
 j\bar{J}_{xm}^B \\
 \bar{J}_{zm}^B
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \bar{E}_{xs}^A \\
 \bar{0} \\
 -j\bar{E}_{zs}^A \\
 \bar{0} \\
 -\bar{E}_{xs}^B \\
 \bar{0} \\
 j\bar{E}_{zs}^B \\
 \bar{0}
 \end{bmatrix}$$

A72

Aquest sistema el podem dividir en dos:

$$\begin{bmatrix}
 [Z_{11}^{rl}] & [Z_{12}^{rl}] & [Z_{13}^{rl}] & [Z_{14}^{rl}] \\
 [Z_{21}^{rl}] & [Z_{22}^{rl}] & [Z_{23}^{rl}] & [Z_{24}^{rl}] \\
 [Z_{31}^{rl}] & [Z_{32}^{rl}] & [Z_{33}^{rl}] & [Z_{34}^{rl}] \\
 [Z_{41}^{rl}] & [Z_{42}^{rl}] & [Z_{43}^{rl}] & [Z_{44}^{rl}]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 -j\bar{J}_{xm}^A \\
 -\bar{J}_{zm}^A \\
 j\bar{J}_{xm}^B \\
 \bar{J}_{zm}^B
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \bar{0} \\
 \bar{0} \\
 \bar{0} \\
 \bar{0}
 \end{bmatrix}$$

A73

$$\begin{bmatrix} [Z_{11}^{ru}] & [Z_{12}^{ru}] & [Z_{13}^{ru}] & [Z_{14}^{ru}] \\ [Z_{21}^{ru}] & [Z_{22}^{ru}] & [Z_{23}^{ru}] & [Z_{24}^{ru}] \\ [Z_{31}^{ru}] & [Z_{32}^{ru}] & [Z_{33}^{ru}] & [Z_{34}^{ru}] \\ [Z_{41}^{ru}] & [Z_{42}^{ru}] & [Z_{43}^{ru}] & [Z_{44}^{ru}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j\bar{J}_{xm}^A \\ -\bar{J}_{zm}^A \\ j\bar{J}_{xm}^B \\ \bar{J}_{zm}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{xs}^A \\ -j\bar{E}_{zs}^A \\ -\bar{E}_{xs}^B \\ j\bar{E}_{zs}^B \end{bmatrix}$$

A74

que resoldrem igual que el