

Universitat Politècnica de Catalunya
Dep. Teoria del Senyal i Comunicacions
E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació

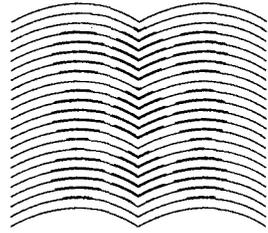
**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APLICACIONES BIOMÉDICAS:
PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO ELECTROMAGNÉTICOS**

Jordi J. Mallorquí Franquet
Director: Antoni Broquetas Ibars

Tesi Doctoral presentada a la
Universitat Politècnica de Catalunya
per a l'obtenció del títol de Doctor
Enginyer de Telecomunicació.

Barcelona, Febrer 1995.

UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE CATALUNYA



BIBLIOTECA
EX - LIBRIS

Universitat Politècnica de Catalunya
Dep. Teoria del Senyal i Comunicacions
E.T.S. d'Enginyeria de Telecomunicació

**MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APLICACIONES BIOMÉDICAS:
PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO ELECTROMAGNÉTICOS**

Jordi J. Mallorquí Franquet
Director: Antoni Broquetas Ibars

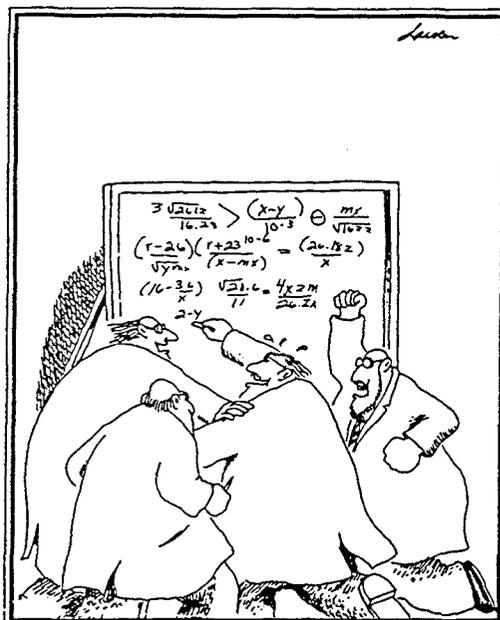
Tesi Doctoral presentada a la
Universitat Politècnica de Catalunya
per a l'obtenció del títol de Doctor
Enginyer de Telecomunicació.

Barcelona, Febrer 1995.

Als meus pares

*And now the end is near
and so I face the final curtain
My friend, I'll say it clear
I'll state my case of which I'm certain.
I've lived a life that's full
I've travelled each and every highway
but more, much more than this
I did it my way*

P. Anka, "My way"



"Go for it, Jordi! You've got it! You've got it!"

Good hands! Don't choke!"

A tots aquells que han ajudat, o al menys animat, a que aquesta tesi hagi arribat a bon terme, i molt especialment (per ordre d'aparició) al Vicenç, es Miquel, l'Albert, la Mariam i la π lar.

El trabajo realizado en esta tesis ha sido subvencionado por:

- El Ministerio de Educación y Ciencia mediante una beca del Plan Nacional de Formación de Personal Investigador durante los años 1992-1993.
- La Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT) en el marco del proyecto "Análisis numérico mediante ordenadores vectoriales y paralelos de sistemas radiantes en entornos reales", TIC 93-0518.

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN

2 INTERACCIÓN DE LA RADIACIÓN EM CON LOS CUERPOS BIOLÓGICOS

2.1 INTRODUCCIÓN	2.1
2.2 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA BÁSICA	2.2
2.3 CARACTERÍSTICAS DIELECTRICAS DE LOS CUERPOS BIOLÓGICOS	2.5
2.3.1 Permitividad eléctrica	2.5
2.3.2 Fenómenos de relajación y resonancia	2.6
2.3.2.1 Fenómenos de relajación	2.7
2.3.3 La medida de tejidos biológicos: medidas "in vivo" y medidas "in vitro"	2.8
2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS	2.11
2.5 EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS	2.13
2.5.1 Elección de las funciones peso	2.17
2.5.2 Funciones base y peso	2.18
2.5.3 Discretización de objetos	2.21
2.6 APLICACIONES: LA TOMOGRAFÍA DE MICROONDAS	2.22

3 EL PROBLEMA DIRECTO ELECTROMAGNÉTICO

3.1 INTRODUCCIÓN	3.1
3.2 SOLUCIONES ANALÍTICAS AL PROBLEMA DIRECTO BIDIMENSIONAL	3.2
3.2.1 Análisis modal	3.2
3.2.2 Transformaciones y teoremas de ondas cilíndricas	3.7
3.2.2.1 Onda plana como superposición de ondas cilíndricas	3.8
3.2.2.2 Dominios visible e invisible del espectro	3.8
3.2.2.3 Teorema de Graf de adición de las funciones de Bessel	3.10
3.2.2.4 Teorema de adición de las funciones de Hankel	3.12

3.2.2.5 Propagación de modos cilíndricos	3.13
3.2.3 Campos difractados por un cilindro multicapa	3.14
3.2.3.1 Caso TM	3.15
3.2.3.2 Caso TE	3.19
3.2.3.3 Matriz de dispersión (T) y matriz de transmisión (X)	3.19
3.3 MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO BIDIMENSIONAL PARA EL CASO TRANSVERSAL MAGNÉTICO (TM)	3.21
3.3.1 Formulación matemática	3.21
3.3.2 Discretización del algoritmo	3.23
3.3.2.1 Campo difractado en el objeto	3.24
3.3.2.2 Campo dispersado en la agrupación de medida	3.25
3.4 MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO PARA EL CASO TRANSVERSAL ELÉCTRICO (TE-2D) Y TRIDIMENSIONAL	3.26
3.4.1 Caso transversal eléctrico (TE)	3.26
3.4.1.1 Desarrollo del algoritmo	3.27
3.4.2 Caso tridimensional	3.30
3.5 EL MÉTODO RECURSIVO DE LAS MATRICES AGREGADAS (RATMA) ...	3.32
3.5.1 Planteamiento del algoritmo	3.33
3.5.2 Campos dispersados en el exterior del objeto	3.36
3.5.3 Campos difractados en el interior del objeto	3.42
3.5.4 Particularización para el caso TM	3.46
3.5.5 Particularización para el caso TE	3.47
3.6 RESULTADOS	3.48
3.7 OTRAS APLICACIONES DE LOS ALGORITMOS	3.59
4 MÉTODOS INVERSOS DE PRIMER ORDEN	
4.1 INTRODUCCIÓN	4.1
4.2 APROXIMACIONES BÁSICAS DE PRIMER ORDEN: BORN Y RYTOV	4.2
4.2.1 La aproximación de Born	4.3
4.2.2 La aproximación de Rytov	4.4
4.3 ALGORITMO DE RECUBRIMIENTO ESPECTRAL MONOFRECUENCIA BASADO EN LA APROXIMACIÓN DE BORN	4.5
4.3.1 Desarrollo del algoritmo	4.5
4.3.2 Discretización del algoritmo	4.12
4.3.2.1 Número de antenas	4.13
4.3.2.1.1 Limitación en el número de antenas receptoras	4.15
4.3.2.2 Interpolación bilineal. Mejora mediante "zero-padding"	4.15
4.3.3 Imágenes diferenciales	4.16

4.3.4 Resultados y aplicaciones	4.17
4.4 ALGORITMO DE PRIMER ORDEN MULTIFRECUENCIA BASADO EN LA	
 APROXIMACIÓN DE BORN	4.22
4.4.1 Combinación espacial de la información multifrecuencia	4.22
4.4.2 Combinación espectral de la información multifrecuencia	4.23
4.4.3 Resultados	4.24
5 MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN ITERATIVA	
5.1 INTRODUCCIÓN	5.1
5.2 MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN ITERATIVA	5.2
5.2.1 Formulación del algoritmo	5.3
5.2.2 Funcionales a minimizar: errores en los dominios	5.5
5.2.3 Discretización de los operadores	5.6
5.2.4 Planteamiento del proceso iterativo	5.7
5.3 DIRECCIONES DE ACTUALIZACIÓN	5.8
5.3.1 Método de sobrerrelajación	5.8
5.3.2 Método del gradiente	5.9
5.3.3 Método del gradiente conjugado	5.11
5.3.4 Aplicación de los métodos al algoritmo	5.13
5.4 MINIMIZACIÓN DE FUNCIONES MULTIDIMENSIONALES	5.16
5.4.1 Método símplex	5.16
5.4.2 Método del gradiente conjugado multidimensional	5.17
5.5 INCLUSIÓN DE INFORMACIÓN "A PRIORI"	5.17
5.6 RESULTADOS	5.19
5.6.1 Elección de las direcciones de optimización	5.20
5.6.2 Límites del algoritmo	5.25
6 EL MÉTODO DE LA PSEUDOINVERSA	
6.1 INTRODUCCIÓN	6.1
6.2 MÉTODO DE LA PSEUDOINVERSA	6.2
6.3 INVERSIÓN MONOVISTA DE UN INCREMENTO DE CONTRASTE	6.2
6.3.1 Cálculo del error en la aproximación	6.5
6.4 INVERSIÓN ITERATIVA MULTIVISTA	6.6
6.4.1 Planteamiento del proceso iterativo	6.6
6.4.2 Error en la aproximación	6.8
6.4.3 Problemática intrínseca al algoritmo	6.8
6.4.3.1 Medida de la inestabilidad numérica: número de	
condicionamiento de una matriz	6.9

6.4.3.2 Precondicionamiento y regularización de sistemas de ecuaciones	6.11
6.4.3.2.1 Precondicionamiento	6.12
6.4.3.2.2 Regularización	6.13
6.4.3.3 Estabilización del proceso iterativo	6.13
6.4.4 Reconstrucción con cambio de resolución entre el problema directo y el problema inverso	6.18
6.4.5 Número de antenas del sistema de medida	6.22
6.4.6 Reconstrucción de campos afectados por el ruido	6.25
6.4.7 Adaptación del medio externo al objeto	6.27
6.5 RESULTADOS	6.28
6.5.1 Simulaciones básicas	6.29
6.5.2 Reducción del número de antenas receptoras	6.36
6.5.3 Reducción del número de antenas	6.43
6.5.4 Adaptación del medio externo	6.50
6.5.5 Reconstrucción con reducción de la resolución en el problema inverso	6.55
6.5.6 Reconstrucción de medidas reales	6.60
6.6 CONCLUSIONES	6.63

7 CONCLUSIONES

APÉNDICES:

A MÉTODOS DE DIRECCIÓN CONJUGADA

A.1 MÉTODO DE LAS DIRECCIONES CONJUGADAS	A.1
A.2 MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO	A.6
A.2.1 Convergencia del método	A.9
A.3 MINIMIZACIÓN O MAXIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES	A.9
A.4 DEDUCCIÓN DE LAS DERIVADAS DEL FUNCIONAL DEL MÉTODO HÍBRIDO	A.13

B MODELOS NUMÉRICOS

B.1 INTRODUCCIÓN	B.1
B.2 CRÁNEO - I	B.2
B.3 CRÁNEO - II	B.3
B.4 ANTEBRAZO - I	B.4
B.5 ANTEBRAZO - II	B.5

B.6 CUELLO B.6
B.7 TÓRAX B.7

REFERENCIAS

1

INTRODUCCIÓN

Dentro del mundo de la diagnosis médica existen multitud de técnicas de exploración que permiten la obtención de imágenes, de mayor o menor calidad, del interior del cuerpo humano. La complejidad de algunas de las técnicas y de los equipos necesarios hace que su instalación sea posible únicamente en grandes centros sanitarios, siendo su mantenimiento muy costoso. En general, el parámetro coste/calidad se mantiene constante o creciente. Por ejemplo, los aparatos de ecografía son baratos y sencillos, pero las imágenes son a veces de difícil interpretación. Por contra, las imágenes mediante resonancia magnética nuclear tienen un nivel de calidad casi comparable a la inspección visual de un cirujano, pero el precio de los equipos es enorme.

En los años 80 se empezó a hablar de la tomografía de microondas. Esta técnica permitiría, en teoría, la obtención de equipos baratos (la tecnología necesaria ya se había desarrollado ampliamente para equipos de comunicaciones), de fácil mantenimiento, y seguros para el usuario (las ondas electromagnéticas a frecuencias de microondas a niveles bajos de potencia no son peligrosas). Las imágenes a obtener con esta técnica debían proporcionar mapas de permitividad de las distintas secciones del cuerpo. Se construyeron con éxito prototipos experimentales que mostraron su viabilidad desde el punto de vista instrumental. Lamentablemente, y dado que las frecuencias a utilizar tienen longitudes de onda del mismo

orden de magnitud que los cuerpos a medir, aparecen fenómenos de difracción en la interacción de la onda incidente y los tejidos bajo exploración. Los algoritmos desarrollados, al no poder abordar directamente la inversión de las ecuaciones electromagnéticas, necesitaban realizar aproximaciones de bajo contraste (dispersión débil), que en la mayoría de los casos introducían errores en las imágenes. Estos algoritmos, llamados de primer orden, únicamente habían conseguido buenos resultados en la obtención de imágenes diferenciales o reconstruyendo objetos sencillos de muy bajo contraste (de permitividad muy parecida a la del medio que rodea al cuerpo bajo exploración).

Las posibles aplicaciones de la tomografía de microondas son muchas, desde su utilización como herramienta de diagnóstico en la detección de tumores de mama, pasando por el seguimiento y monitorización de actividades fisiológicas que comporten alteraciones del riego sanguíneo, hasta llegar a la monitorización y planificación de tratamientos de hipertermia. Quizás esta última aplicación es la más prometedora.

En el tratamiento de cáncer mediante hipertermia, consistente en el calentamiento localizado del tumor para provocar la mortandad de sus células, es indispensable la monitorización de las distribuciones de temperatura en el interior de los pacientes. La permitividad de los tejidos es muy sensible a variaciones térmicas, y por ello, la tomografía de microondas es una técnica particularmente útil para esta aplicación. Al mismo tiempo, disponer de herramientas que permitan calcular la distribución de los campos en el interior del cuerpo, y determinar la disipación de potencia en los distintos tejidos, permitiría una adecuada planificación de los tratamientos y la mejora en el diseño de los aplicadores. Se observa que existen claramente dos problemas distintos, a los que llamaremos problema directo (cálculo de distribuciones de campo) y problema inverso (reconstrucción de imágenes), pero sin embargo complementarios.

La gran limitación en la aplicabilidad de la tomografía de microondas reside en los algoritmos de reconstrucción de imágenes que, a partir de los campos dispersados medidos en la vecindad del cuerpo para distintas direcciones de incidencia, permiten la obtención de las distribuciones de permitividad. El avance en la tecnología informática ha permitido la aparición de ordenadores con una capacidad de cálculo enorme, en comparación con los existentes diez años atrás. Con ellos, es posible el desarrollo de algoritmos más complejos que permitan superar las limitaciones de los de primer orden.

El objetivo básico de la tesis ha sido el desarrollo de algoritmos de reconstrucción que permitan obtener imágenes de cuerpos biológicos a partir de medidas de campo, tanto simuladas como obtenidas en prototipos experimentales, es decir, la resolución del llamado problema inverso. Para ello, ha sido necesario estudiar y modelar la interacción entre los cuerpos biológicos y las ondas electromagnéticas. Además, para poder probar los métodos

inversos y como paso intermedio de alguno de ellos, se han desarrollado algoritmos para el cálculo de los campos dispersados por modelos numéricos, o resolución del problema directo. La aplicabilidad de los algoritmos que lo resuelven es mucho más extensa, ya que también pueden usarse para calcular la disipación de potencia en los tejidos en función de la onda incidente, interacción de cuerpos biológicos con sistemas de telefonía celular, sección recta radar (RCS), etc.

La tesis se estructura en dos partes claramente diferenciadas: la resolución del problema directo electromagnético, que tiene un carácter general y cuyos algoritmos tienen un margen de aplicación muy amplio, y la resolución del problema inverso, orientada a la tomografía de microondas.

El segundo capítulo es introductorio y trata, de forma general, de la interacción entre la radiación electromagnética y los cuerpos biológicos. Primero se presentan las ecuaciones de Maxwell que caracterizan matemáticamente el comportamiento de los campos electromagnéticos. Esos campos interactúan con los tejidos biológicos, por lo tanto, será imprescindible conocer su comportamiento eléctrico en función de la frecuencia de la onda incidente. Se incluye también una breve presentación de los métodos numéricos más utilizados en la resolución de los problemas directo e inverso. Finalmente, el capítulo concluye con una presentación de posibles aplicaciones biomédicas de los campos electromagnéticos, destacando la tomografía de microondas.

El tercer capítulo está dedicado a la resolución del problema directo electromagnético. Se trata en primer lugar su resolución analítica. Las soluciones obtenidas únicamente podrán aplicarse a casos muy concretos, pero servirán para validar el correcto funcionamiento de los métodos numéricos. Se presentan dos filosofías distintas en la resolución numérica del problema directo. La primera, basada en el método de los momentos, permite discretizar al cuerpo y a las ecuaciones involucradas, y obtener un sistema de ecuaciones que, una vez resuelto mediante el método del gradiente conjugado, proporciona el campo dispersado buscado. La segunda y más novedosa, permite hallar una relación matricial entre el desarrollo modal del campo incidente y el del campo dispersado. La solución obtenida depende exclusivamente del cuerpo, y no del tipo de onda o su ángulo de incidencia. El método es muy útil cuando hay que resolver el problema directo para un mismo cuerpo pero múltiples direcciones de incidencia.

Los capítulos cuarto, quinto y sexto ya se centran en la resolución del problema inverso. Los algoritmos se presentan de menor a mayor carga numérica, yendo la calidad de las imágenes pareja con la complejidad.

En el capítulo cuarto se presentan las aproximaciones clásicas para la obtención de algoritmos de primer orden. Se incluye también la formulación de un algoritmo basado en la aproximación de Born para sistemas de tomografía cilíndricos que, dada su sencillez, permite obtener conclusiones aplicables al resto de métodos. En el marco de la tesis, se ha mejorado ese algoritmo de primer orden mediante su extensión a datos multifrecuencia. El coste computacional de estos algoritmos es muy bajo, pudiendo obtener imágenes en tiempo real. Sin embargo, su calidad está enormemente limitada por la validez de las aproximaciones de dispersión débil, y suele ser muy baja para aplicaciones biomédicas. La principal aplicación del algoritmo de primer orden es proporcionar el contorno de los cuerpos a incluir como información "a priori" de los restantes algoritmos.

En el capítulo quinto se presenta un algoritmo de orden superior que mediante un proceso de optimización iterativa permite reconstruir cuerpos biológicos de elevado contraste pero de tamaño moderado. El método de optimización iterativa permite ir refinando en cada iteración las aproximaciones iniciales del mapa de permitividad del cuerpo y su campo total, pero sin necesidad de resolver cada vez el problema directo. Su coste computacional es sensiblemente mayor al de los algoritmos de primer orden. La reconstrucción de medidas simuladas que se presentan permiten determinar sus limitaciones y su margen de utilización.

En el capítulo sexto se presenta el algoritmo iterativo que ha proporcionado mejores resultados, por contra, es también el que requiere un mayor coste computacional, ya que precisa solucionar el problema directo en cada iteración. El método utilizado permite al algoritmo plantear en cada iteración un sistema de ecuaciones, que relaciona directamente el error en los campos dispersados (dependiente de la distribución de permitividad hallada hasta el momento) y el incremento del mapa de permitividad necesario para reducir ese error. Se incluye, además, una extensa recopilación de resultados, tanto simulados como obtenidos a partir de medidas reales, que permiten conocer el comportamiento del algoritmo en función de los parámetros de diseño de un tomógrafo.

Finalmente, el capítulo séptimo está dedicado a las conclusiones que se derivan de la tesis y a las líneas futuras de investigación que pueden continuar los trabajos realizados.

Se han incluido dos apéndices. El primero amplía las bases teóricas de alguna de las herramientas matemáticas utilizadas en los desarrollos, y se ha dedicado a los métodos de dirección conjugada para la resolución de sistemas de ecuaciones (con el método del gradiente conjugado del capítulo tres), búsqueda de direcciones de optimización, y minimización de funciones de varias variables (utilizadas en los desarrollos del capítulo cinco). El segundo apéndice incluye los modelos numéricos y sus valores de permitividad, utilizados en las distintas simulaciones.

INTERACCIÓN DE LA RADIACIÓN EM CON LOS CUERPOS BIOLÓGICOS

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se tratan temas relacionados con la tesis que permiten aclarar una serie de conceptos que irán apareciendo a lo largo de los desarrollos de los distintos algoritmos y serán comentados en los apartados de resultados. En primer lugar, y como es habitual en este tipo de tesis, se presentan las conocidas ecuaciones de Maxwell, origen de toda la formulación a emplear. Dado que el presente trabajo se orienta al estudio de métodos numéricos para aplicaciones biomédicas, parece lógico dedicar algunas líneas al comportamiento dieléctrico de los tejidos biológicos. Este conocimiento es indispensable para la posterior definición de los modelos numéricos de las distintas secciones del cuerpo humano a simular. También se incluye una breve presentación de los métodos numéricos en electromagnetismo, haciendo especial hincapié en el conocido método de los momentos, que constituye la base de la

mayoría de los algoritmos desarrollados. Finalmente se presentan de forma breve algunas aplicaciones, remarcando la de tomografía de microondas y los trabajos previos realizados en el grupo, comentándose algunos aspectos del prototipo experimental desarrollado. El capítulo es meramente introductorio y en él abundan las referencias de la literatura para los que deseen ampliar algunos de los aspectos tratados.

2.2 TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA BÁSICA

Los campos electromagnéticos en problemas de contorno se obtienen como solución de las ecuaciones de Maxwell, formadas por ecuaciones en derivadas parciales de primer orden acopladas, es decir, cada una de ellas tiene términos tanto de campo eléctrico como magnético. Mediante formulación matemática, las ecuaciones pueden desacoplarse a costa de aumentar su orden, obteniéndose dos ecuaciones de onda, una para el campo eléctrico y otra para el campo magnético.

Las ecuaciones de Maxwell para variaciones temporales armónicas de la forma $e^{j\omega t}$ son

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} - \vec{M} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} + \vec{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \tau \quad (2.4)$$

donde se han supuesto, de forma genérica, la existencia de fuentes eléctricas, densidad de corriente \vec{J} y densidad de carga ρ , y magnéticas, densidad de corriente \vec{M} y densidad de carga τ . Si se considera una región libre de fuentes las ecuaciones anteriores pueden reducirse a

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

y operando matemáticamente con ellas para desacoplarlas puede encontrarse la ecuación de onda homogénea, o ecuación de Helmholtz, para el campo eléctrico

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = 0 \quad (2.9)$$

En el caso de cuerpos biológicos se considerará que no existen materiales magnéticos, con lo que la permeabilidad será constante. Definiendo el número de onda en el cuerpo como $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon}$, la ecuación de onda inhomogénea es

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} + \nabla(\vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon}) = 0 \quad (2.10)$$

donde el número de onda depende de la posición y aparece un término adicional que generará cambios en la polarización del campo. Expresando el campo total o difractado como suma del incidente, aquel que existiría sin objeto, y el dispersado

$$\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^s \quad (2.11)$$

y definiendo la función contraste

$$C(\vec{r}) \triangleq \frac{\epsilon_0 - \epsilon(\vec{r})}{\epsilon(\vec{r})} \quad (2.12)$$

la ecuación de onda inhomogénea se puede transformar en

$$(\nabla^2 + k_0^2) \vec{E}^s = k_0^2 C \vec{E} + \nabla(\vec{E} \cdot \frac{\nabla C}{1-C}) \quad (2.13)$$

Utilizando propiedades del cálculo vectorial, (2.13) puede reescribirse como

$$(\nabla^2 + k_0^2)\vec{E}^s = (k_0^2 + \nabla\nabla\cdot)C\vec{E} \quad (2.14)$$

Definiendo la función de Green como aquella que cumple

$$(\nabla^2 + k_0^2)G(k_0^2|\vec{r}-\vec{r}'|) = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \quad (2.15)$$

y expresando la excitación de (2.14) como un sumatorio de deltas desplazadas y ponderadas, puede obtenerse la siguiente ecuación integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{inc}(\vec{r}) - (k_0^2 + \nabla\nabla\cdot)\int_V C(\vec{r}')\vec{E}(\vec{r}')G(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|)d\vec{r}' \quad (2.16)$$

Esta ecuación es la base de la mayoría de los algoritmos que se irán presentando a lo largo de esta tesis, siendo válida tanto para casos bidimensionales como para el caso tridimensional. Las formulaciones que de ella se derivan permiten la solución de los problemas directo e inverso electromagnéticos. El problema directo consiste en la obtención de los campos dispersados a partir de un campo incidente y una distribución de contraste conocidos. En cambio, el problema inverso pretende obtener una distribución desconocida de contraste a partir de los campos incidente y dispersado.

Mediante el teorema de equivalencia [Cardama '92], puede modelarse la interacción entre cuerpo y onda electromagnética mediante unas corrientes equivalentes, volumétricas o superficiales. Sustituyendo las corrientes volumétricas equivalentes

$$\vec{J}_{eq} = -j\omega\mu_0\epsilon_0 C\vec{E} \quad (2.17)$$

en (2.16) puede obtenerse la integral de radiación, que considera el problema como radiación de unas fuentes equivalentes en el espacio libre

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{inc}(\vec{r}) - (j\omega\mu_0 + \frac{j}{\omega\epsilon_0}\nabla\nabla\cdot)\int\vec{J}_{eq}(\vec{r}')G(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|)d\vec{r}' \quad (2.18)$$

2.3 CARACTERÍSTICAS DIELECTRICAS DE LOS CUERPOS BIOLÓGICOS

La aplicación de los problemas directo e inverso electromagnéticos a los cuerpos biológicos requiere la caracterización de las constantes dieléctricas de los distintos tejidos que los forman. Conociendo los mapas de permitividad se pueden realizar los distintos modelos numéricos {A, B} para la obtención, mediante los algoritmos directos, de los campos dispersados que sirven de entrada a los algoritmos de cálculo del problema inverso. Se considera que en los tejidos biológicos no aparecen materiales ferromagnéticos ni metales.

En este apartado se intenta dar una visión básica e intuitiva de los mecanismos de interacción entre ondas y materia que se resumen mediante la constante dieléctrica. Un tratamiento más detallado puede encontrarse en [Hippel '54], [Albella '84] y [Balanis '89]. Primero se presentan las características generales de los dieléctricos para posteriormente particularizar al caso de materiales biológicos.

2.3.1 Permitividad eléctrica

Los dieléctricos son materiales en los que las cargas dominantes en átomos y moléculas se encuentran retenidas por las fuerzas atómicas y moleculares, de forma que no puedan viajar libremente. Un dieléctrico ideal no contiene cargas libres y es eléctricamente neutro a nivel macroscópico. Si se aplica un campo eléctrico constante a un dieléctrico, las cargas eléctricas positivas y negativas sufren un desplazamiento creando un dipolo eléctrico. La polarización eléctrica en dieléctricos puede ser producida, básicamente, por tres mecanismos distintos [Balanis '89]:

- a) Polarización dipolar u orientacional, se produce en aquellos materiales que en ausencia de campo eléctrico ya tienen en su estructura dipolos permanentes orientados aleatoriamente. Al aplicar un campo eléctrico los dipolos tienden a reorientarse en su dirección. Los materiales que presentan esta característica se llaman **materiales polares** y el agua es un buen ejemplo de ellos.
- b) Polarización iónica o molecular, aparece en materiales que tienen iones positivos y negativos, por ejemplo NaCl, y que en presencia de un campo eléctrico sufren un desplazamiento.

c) Polarización electrónica, existe en la mayoría de los dieléctricos, al aplicar un campo se desplaza el centro de la nube de electrones del átomo respecto del núcleo.

Cuando los campos aplicados son de polaridad variable en el tiempo, como por ejemplo ondas electromagnéticas armónicas, los momentos dipolares, y por lo tanto la permitividad, varían en general con la frecuencia.

Las propiedades electromagnéticas de cualquier material no ferromagnético pueden ser caracterizadas mediante su conductividad eléctrica, σ , y su constante dieléctrica, ϵ . La conductividad se define como la conductancia por una unidad de volumen de materia, mientras que la constante dieléctrica mide la capacidad por unidad de volumen. Normalmente, y así se hará a lo largo de este tesis, se habla de **constante dieléctrica compleja**.

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad \epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} \quad (2.19)$$

pero por comodidad se utiliza la **constante dieléctrica relativa**, referida a la del espacio libre, ϵ_0 , a la que también se llama **permitividad relativa**.

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon'}{\epsilon_0} - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (2.20)$$

A lo largo de esta memoria se hablará de constante dieléctrica o permitividad a secas, obviando el término relativa.

2.3.2 Fenómenos de relajación y resonancia

De los mecanismos anteriores puede deducirse que las propiedades dieléctricas de un tejido dependen de su composición. En los tejidos biológicos, un campo electromagnético actúa principalmente sobre aquellos componentes que tienen una carga eléctrica neta, como por ejemplo iones, o un momento dipolar, como por ejemplo moléculas polares, estructuras de proteínas, músculo, grasa, etc. Al depender un tejido de gran variedad de componentes, su permitividad se ve afectada por distintos parámetros como son la frecuencia del campo, la temperatura o la irrigación sanguínea.

El comportamiento de la constante dieléctrica es dispersivo con la frecuencia, los diferentes mecanismos de polarización contribuyen de forma aditiva al valor total de la parte real de la constante dieléctrica en la región de baja frecuencia. A medida que se aumenta la frecuencia

del campo eléctrico, los mecanismos de polarización orientacional, iónica y electrónica dejan de contribuir sucesivamente, produciendo una disminución progresiva de la permitividad. En la parte imaginaria los distintos mecanismos de polarización contribuyen de forma limitada en un cierto margen de frecuencias, siendo su contribución inapreciable en el resto.

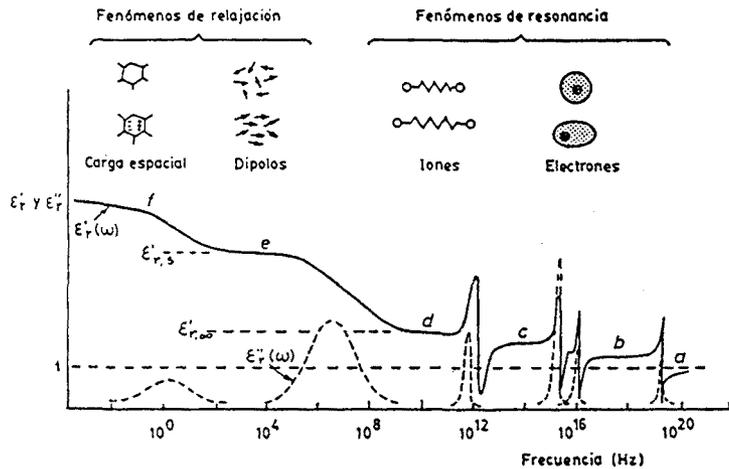


Fig. 2.1 Curva de dispersión de la constante dieléctrica.

La Fig. 2.1 muestra la curva de dispersión de la constante dieléctrica en la que pueden distinguirse las zonas donde influye el proceso de polarización orientacional y aquellas en las que influye la polarización electrónica o iónica en la permitividad. El comportamiento dinámico de la polarización orientacional responde a un proceso de reorientación llamado proceso de relajación, mientras que el comportamiento dinámico de la polarización inducida responde a procesos de resonancia en los que iones y electrones absorben energía cuando la excitación del campo entra en resonancia con la vibración de las cargas eléctricas a una frecuencia crítica. La mayoría de aplicaciones biológicas de las microondas utilizan frecuencias del orden del GHz en las que dominan los fenómenos de relajación, apareciendo los de resonancia a frecuencias más altas.

2.3.2.1 Fenómenos de relajación

Cuando el campo eléctrico aplicado a un material es armónico, se puede expresar el comportamiento de su constante dieléctrica relativa mediante la ecuación de Debye [Hippel '54] [Grant '57] [Schwan '57] [Schwan '77]

$$\epsilon_r = \epsilon'_\infty + \frac{\epsilon'_0 - \epsilon'_\infty}{1 + j\omega\tau} \rightarrow \begin{cases} \epsilon' = \epsilon'_\infty + \frac{\epsilon'_0 - \epsilon'_\infty}{1 + \omega^2\tau^2} \\ \epsilon'' = \frac{(\epsilon'_0 + \epsilon'_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \end{cases} \quad (2.21)$$

En el caso de que el material no sea un dieléctrico ideal, y por lo tanto presente conductividad en continua, en la parte imaginaria de la ecuación de Debye se introduce un término adicional, quedando

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} = \frac{\sigma_{DC}}{\omega\epsilon_0} + \frac{(\epsilon'_0 + \epsilon'_\infty)\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.22)$$

donde τ es la constante de tiempo de relajación, ϵ'_∞ la constante dieléctrica relativa a altas frecuencias y ϵ'_0 la constante dieléctrica relativa a bajas frecuencias. Las constantes dieléctricas límite, superior e inferior, se asocian a aquéllas de un determinado mecanismo de relajación. Si los materiales son complejos pueden presentar distintos mecanismos de relajación, entonces la permitividad puede hallarse aplicando superposición de los distintos mecanismos de polarización [Schwan '57]. Existen modificaciones de la fórmula básica de Debye para intentar aproximar mejor los resultados de medidas de permitividad a los modelos matemáticos. En [Hippel '54] y [Surowiec '87] pueden encontrarse buenas y extensas explicaciones de los distintos modelos. Para disoluciones salinas en agua existen fórmulas empíricas para el cálculo de la permitividad en función de la frecuencia, temperatura y salinidad [Stogryn '77].

2.3.3 La medida de tejidos biológicos: medidas "in vivo" y medidas "in vitro"

Para la construcción de los modelos numéricos de secciones del cuerpo humano en las simulaciones llevadas a cabo durante la realización de la presente tesis se han utilizado valores de permitividad obtenidos de la literatura. Como ya se ha indicado, existen muchos factores que contribuyen a la permitividad en los tejidos biológicos. Las medidas de tejidos biológicos en un amplio margen de frecuencias han permitido demostrar que existen tres zonas claramente diferenciadas de variación de las propiedades de la permitividad. Cada una de ellas se encuentra separada de las demás por áreas de cambios rápidos de la permitividad con la frecuencia. [Schwan '57] las describió como α , β y γ . Los cambios de comportamiento son importantes ya que cada uno está relacionado con distintos mecanismos de interacción de los

campos con la materia. La Fig. 2.2 muestra la variación del módulo de la permitividad del músculo en función de la frecuencia.

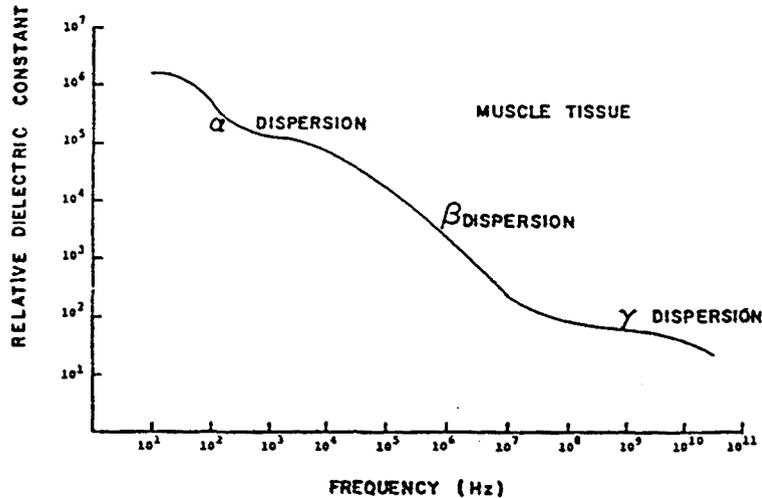


Fig. 2.2 Diagrama de dispersión del módulo de la permitividad del músculo [Schwan '57].

La dispersión α aparece a frecuencias bajas, alrededor de los 80 Hz y se debe a la interacción entre las cargas en la superficie de la membrana de las células y los iones en disolución. La dispersión β se produce sobre los 50 KHz y se debe al comportamiento aislante de las membranas celulares y del agua que contienen en su interior. A medida que sube la frecuencia su efecto aislante disminuye con la frecuencia, con lo que a frecuencias superiores a los 10 GHz las propiedades dieléctricas de los tejidos dependen de su contenido acuoso y de los electrólitos disueltos. La dispersión γ aparece alrededor de los 20 GHz donde las moléculas de agua interaccionan fuertemente con el campo electromagnético. A veces se habla de una cuarta dispersión, llamada δ y que aparece entre la β y la γ , de menor magnitud. Se presenta aproximadamente entre la zona del centenar de MHz y los 4 GHz y está probablemente ocasionada por la rotación parcial de las moléculas polares juntamente con el agua retenida por las proteínas.

Las características dieléctricas de los tejidos biológicos dependen fuertemente, en el margen de frecuencias de interés, de su contenido acuoso. Por ello es fácil dividir de entrada los tejidos en dos categorías: aquellos con gran contenido de agua (por ejemplo músculo, sangre, etc.) y los de menor contenido (huesos). En general los primeros tienen constantes dieléctricas, tanto en parte real como imaginaria, más elevadas que los segundos.

Las medidas "in-situ" en tiempo real de tejidos vivos pueden ser empleadas en la detección de patofisiologías en tejidos, para medir cambios en ciertos procesos fisiológicos, para diferenciar tejidos normales y enfermos o para descubrir efectos farmacológicos debidos a las drogas. Las diferencias entre las propiedades de un tejido vivo de uno muerto obligan a que, para una correcta caracterización y modelización de los cuerpos biológicos, las medidas de permitividad de los distintos tejidos se realicen "in-vivo". Además, únicamente con medidas "in-vivo" podrá determinarse la relación entre las variaciones de permitividad con los distintos procesos fisiológicos del cuerpo, por ejemplo variaciones en el riego sanguíneo, ritmo respiratorio o actividad cerebral, o sensibilidad a agentes externos, como drogas o calentamientos localizados en tratamientos por hipertermia, entre otros.

Los distintos investigadores que han estado trabajando en el tema han sido conscientes de estos problemas [Burdette '83], ya en 1922 Osterhout describió cambios significativos en las características dieléctricas de materiales biológicos después de muertos debido a la pérdida de función de la membrana y rotura de la estructura celular. Las medidas en baja frecuencia de Rajewsky mostraron el deterioro de las propiedades dieléctricas relacionadas con un significativo decrecimiento del metabolismo. Con todo, los cambios no comenzaban hasta aproximadamente un día después de la muerte del organismo. Burdette demostró que las variaciones de conductividad en un hígado comenzaban una hora después de la muerte del organismo, mientras que para la parte real de la permitividad era necesario dejar transcurrir un día para observar cambios. Las variaciones observadas en baja frecuencia son debidas a la relajación de los contornos y pérdida de su función por parte de la membrana celular, responsable de las dispersiones α y β . Schwan y Foster [Schwan '80] demostraron que a altas frecuencias las medidas de permitividad se veían poco afectadas por la muerte del tejido, ya que el mecanismo de relajación dominante depende en mayor parte del contenido acuoso y de las proteínas del tejido, lógicamente la pérdida de sangre o agua afectará a las medidas. En medidas realizadas sobre perros a frecuencias de microondas, se observaron variaciones en las características dieléctricas del cerebro poco después de la muerte del animal [Burdette '86]. Los cambios iniciales eran seguidos por otros de más suaves, con una gradual reducción de la permitividad y la conductividad en un período de tiempo de unas dos horas. Las variaciones iniciales eran atribuidas al flujo sanguíneo, mientras que los cambios suaves posteriores se atribuían a la pérdida de agua y autólisis (destrucción de un órgano o tejido por acción de enzimas protolíticos producidos por él mismo) del tejido cerebral.

Las múltiples referencias que aparecen en la literatura de tablas de permitividad de los tejidos a distintas frecuencias son, en algunas ocasiones, un poco dispares en función de como han sido medidas. A pesar de ello en el margen de frecuencias de interés las variaciones no son muy grandes y se han tomado valores de permitividad medios. En algunos casos se han interpolado los datos para conseguir cubrir todo el espectro de frecuencias. Entre otras pueden

destacarse las siguientes referencias para la obtención de las permitividades de los modelos numéricos: [Athey '82], [Burdette '83], [Conway '86], [Cook '52], [Iskander '78], [Martin], [Schwan '80], [Stuchly '80], [Brady '81], [Surowiec '88]. En el {Ap. B} aparecen todos los modelos numéricos utilizados a lo largo de la tesis y las permitividades utilizadas.

2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ELECTROMAGNÉTICOS

Hasta el momento se han presentado las relaciones matemáticas que definen los parámetros físicos de los problemas a resolver en el marco de esta tesis. Las herramientas que permiten encontrar las soluciones buscadas son los ordenadores y, por lo tanto, es imprescindible pasar del dominio físico a otro numérico, de forma que esos problemas sean abordables por las máquinas. En los apartados anteriores se han caracterizado matemáticamente los tejidos de los cuerpos biológicos a simular, y al mismo tiempo se han definido una serie de ecuaciones, basadas en las ecuaciones de Maxwell, que interrelacionan las ondas electromagnéticas con esos cuerpos. El primer intento de resolución de los problemas, tanto directo como inverso, consistiría en intentar encontrar soluciones analíticas a las ecuaciones planteadas. Desafortunadamente, esto sólo es posible en contadas ocasiones, para algunas geometrías muy particulares llamadas canónicas, mientras que para la inmensa mayoría de los casos es imposible hallar una solución analítica. Los métodos numéricos permiten encontrar soluciones, que aunque no son generales, si se ajustan, en mayor o menor medida, a las características de cada caso planteado. En general, esas soluciones numéricas son aproximadas, pero el grado de aproximación puede ser lo suficientemente bueno como para reconocerlas como válidas.

La solución numérica a un problema electromagnético, correctamente caracterizado matemáticamente, requiere en general una serie de pasos:

- 1) Discretización de la formulación matemática: el cálculo numérico mediante ordenadores no permite resolver directamente las ecuaciones de los problemas electromagnéticos, con lo que es necesario discretizar en vectores numéricos las funciones y los resultados de aplicar los operadores integro-diferenciales sobre las funciones. Como resultado final se obtiene un sistema de ecuaciones que el ordenador puede resolver.
- 2) Discretización del dominio de cálculo y de las condiciones de contorno: en general el método utilizado para discretizar el dominio se relaciona con la discretización de la formulación matemática.

3) Resolución del problema: si el método de solución es iterativo es necesario definir una determinada cota de error para decidir en que punto se considera que el resultado numérico obtenido es aceptable.

La solución obtenida es aproximada por diversas razones. Primero, al formular matemáticamente el problema y posteriormente discretizar las ecuaciones suelen realizarse, en la mayoría de los casos, aproximaciones. En segundo lugar, la discretización del objeto no suele ajustarse exactamente al objeto real y algunas veces las condiciones de contorno aplicadas son también aproximadas. Finalmente, en la resolución de los sistemas de ecuaciones discretizados pueden aparecer errores debidos a truncamiento, precisión de la propia máquina, mal condicionamiento de las matrices que acentúan esos errores, etc. Siempre se intentará encontrar una solución suficientemente buena a los problemas planteados.

La forma de aplicar los pasos anteriores caracterizan a los distintos métodos numéricos. En electromagnetismo, de momento, no existe un método general aplicable a cualquier tipo de problema. Por lo tanto, dentro del amplio abanico de posibilidades, es necesario escoger aquellos métodos que más se ajusten al problema a resolver. Los parámetros básicos que decidirán el método a elegir son el tipo de discretización y el dominio de trabajo.

A continuación se presentan algunos de los métodos más conocidos y se discuten los pros y contras de su utilización en el marco de la tesis. Ya de entrada se han descartado todos los métodos en el dominio del tiempo, que utilizan la formulación temporal del problema electromagnético, por la dificultad de integrarlos posteriormente a los algoritmos inversos. Si nos concentramos en el dominio de la frecuencia, que utilizan formulación en régimen permanente senoidal (habitual en la mayoría de aplicaciones), pueden encontrarse los siguientes métodos:

1) Método de los Elementos de Contorno (BEM), utiliza modelado por fronteras y descomposición mediante celdas de la frontera. Se basa en el método de los momentos {2.6} y consiste en la resolución de una ecuación integral obtenida a través del principio de equivalencia superficial [Cardama '92]. Como las integrales de la ecuación a resolver se extienden únicamente sobre la superficie de los objetos, y no sobre el volumen interior de los mismos, solamente es necesario discretizar esa superficie. Parte de la base de la formulación integral del método de los momentos, pero utiliza una discretización superficial en subdominios mediante funciones base polinómicas, iguales a las que utiliza el método de los elementos finitos. Aunque la discretización permite ajustar con bastante precisión el modelo al objeto real, el método únicamente es eficiente para objetos homogéneos o con pocos dieléctricos; en cambio, en el caso de cuerpos biológicos donde se modelan gran número de

permitividades de distinto valor el método crece en complejidad y las dimensiones de las matrices llegan a ser prohibitivas. Además, para el problema inverso, del que se desconoce la estructura interna del cuerpo a reconstruir, su utilización sería muy problemática.

2) Método de los Elementos Finitos (FEM), basado en la representación mediante partición del espacio y descomposición en celdas volumétricas. Su característica principal es la discretización simultánea de la función y de la geometría en subdominios o elementos utilizando funciones base polinómicas. Estos polinomios interpolan el valor de la función a partir de muestras en unos puntos fijos llamados nodos. El mallado no tiene que ser regular, aunque puede serlo, con lo que también puede adaptarse muy bien a contornos complejos.

3) Método del Gradientes Conjugado con FFT (CGM-FFT), que utiliza enumeración de ocupación del espacio. Su mallado regular permite optimizar mucho los cálculos de la integral de convolución de la ecuación de Helmholtz mediante paso al dominio transformado. Es uno de los métodos elegidos.

2.5 EL MÉTODO DE LOS MOMENTOS

Todas las ecuaciones integrales presentadas hasta el momento pueden representarse como operadores lineales del tipo

$$L(f) = g \quad (2.23)$$

donde L es un operador lineal, f será en general la función incógnita y g la función de datos del problema. Se considera que el problema es determinístico, es decir con solución única. Como se ha comentado anteriormente, la resolución del problema mediante un ordenador pasa por la discretización de las ecuaciones integrales y las funciones involucradas de forma que queden reducidas a sistemas de ecuaciones resolubles por las máquinas. La aparición en 1968 de la obra de Roger F. Harrington "Field Computation by Moment Methods" [Harrington '93] permitió sentar las bases de uno de los métodos más utilizados en análisis numérico en electromagnetismo y que sirvió de base a la mayoría de los métodos que han ido apareciendo con posterioridad: el método de los momentos.

Para la resolución del problema mediante el método de los momentos es necesario identificar, en primer lugar, el dominio del operador L , las funciones sobre las que opera y su rango, y

en segundo lugar las funciones resultantes de su operación y su rango. Además, para su utilización posterior, es imprescindible definir un producto escalar, que cumpla

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(\vec{r}) g^*(\vec{r}) d\vec{r} \quad \langle f, g^* \rangle = \langle g, f^* \rangle \quad (2.24)$$

según la definición de producto interno de Hilbert. También debe cumplirse

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \quad (2.25)$$

con α y β escalares. Finalmente otra propiedad a cumplir es

$$\langle f, f \rangle > 0 \quad \text{si } f \neq 0 \\ = 0 \quad \text{si } f = 0 \quad (2.26)$$

También puede definirse el operador autoadjunto y su dominio definido como

$$\langle L(f), g \rangle = \langle f, L^a(g) \rangle \quad (2.27)$$

Más información acerca de las distintas propiedades matemáticas involucradas en el desarrollo formal del método de los momentos pueden encontrarse en [Harrington '93].

Partiendo de la ecuación inhomogénea (2.23), primero se expande la función incógnita en términos de unas funciones base en el dominio del operador lineal L .

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (2.28)$$

para poder tratar el problema, el número de funciones base debe ser finito y su resolución implicará encontrar el valor de los coeficientes α_n . Sustituyendo esa expansión en (2.23) se obtiene

$$\sum_n^N \alpha_n L(f_n) = g_N \quad (2.29)$$

que constituye una ecuación funcional que aproxima a la ecuación original. El error en la aproximación viene dado por la calidad de las funciones base. Para ello es necesario que una combinación lineal de las funciones $L(f_n)$ aproxime adecuadamente la función g , es decir que

aproximen adecuadamente el rango de L . Una buena elección de funciones base es aquella en que cuando la discretización N tienda a infinito, el conjunto $\{L(f_n)\}$ es una base completa del rango de L . El error cometido viene dado por el residuo

$$R = g - g_N = g - \sum_n^N \alpha_n L(f_n) \tag{2.30}$$

Mediante la utilización del producto escalar definido para el problema y con la definición de una serie de M funciones peso puede transformarse la ecuación funcional (2.29) en un sistema lineal de M ecuaciones con N incógnitas donde se hace nulo el residuo ponderado utilizando el producto interno de Hilbert

$$\langle R, \omega_m \rangle = 0 \quad \sum_n^N \alpha_n \langle L(f_n), \omega_m \rangle = \langle g, \omega_m \rangle \tag{2.31}$$

que puede escribirse en forma matricial como

$$\bar{A} \cdot x = y \tag{2.32}$$

con

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \langle L(f_1), \omega_1 \rangle & \langle L(f_2), \omega_1 \rangle & \dots & \langle L(f_N), \omega_1 \rangle \\ \langle L(f_1), \omega_2 \rangle & \langle L(f_2), \omega_2 \rangle & \dots & \langle L(f_N), \omega_2 \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle L(f_1), \omega_M \rangle & \dots & \dots & \langle L(f_N), \omega_M \rangle \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

y

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} \langle g, \omega_1 \rangle \\ \langle g, \omega_2 \rangle \\ \dots \\ \langle g, \omega_M \rangle \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Si $M = N$ y la matriz \bar{A} es no singular existe solución única al problema, en el caso de que lo sea se producirán resonancias al obtenerse soluciones sin existir ninguna excitación. En cambio, si el sistema es sobredeterminado, donde no existe una solución que anule el residuo,

o subdeterminado, en el que existen infinitas soluciones, es preciso recurrir al método de los mínimos cuadrados, que minimiza el error del residuo mediante la siguiente transformación

$$\bar{A}^* \cdot \bar{A} \cdot x = \bar{A}^* \cdot y \quad x = (\bar{A}^* \cdot \bar{A})^{-1} \cdot \bar{A}^* \cdot y \quad (2.35)$$

Una vez conocidos los coeficientes del desarrollo puede obtenerse la solución numérica del problema.

Este método es llamado por algunos autores como método de las proyecciones, ya que

$$f_N = \sum_n^N \alpha_n f_n \quad g_N = \sum_n^N \alpha_n L(f_n) \quad (2.36)$$

son respectivamente las proyecciones de f en el subespacio generado por el conjunto de funciones base $\{f_n\}$ y de g en el subespacio generado por el conjunto $\{L(f_n)\}$. Al imponer que $\langle R, \omega_m \rangle = 0$ el residuo debe ser normal al subespacio generado por las funciones peso, $\{\omega_m\}$. Para que se cumpla es necesario igualar las proyecciones $\langle g_N, \omega_m \rangle = \langle g, \omega_m \rangle$, tal como muestra la Fig. 2.3.

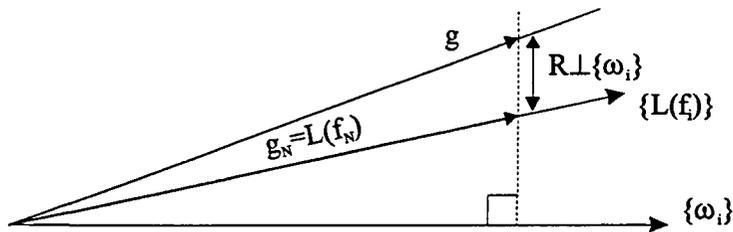


Fig. 2.3 Interpretación geométrica del método de los momentos.

Para unas funciones base dadas el error del residual será mínimo cuando sea perpendicular a la aproximación g_N

$$R \perp g_N \rightarrow R \perp L(f_N) \rightarrow \{\omega_m\} = \{L(f_n)\} \quad (2.37)$$

es decir, las funciones peso deben generar el mismo subespacio que la aplicación del operador sobre las funciones base. Esta elección permite obtener el error cuadrático medio mínimo en el residual y se conoce como método de los mínimos cuadrados.

2.5.1 Elección de las funciones peso

Existen diversas alternativas para la elección de las distintas funciones peso, cada una de ellas aporta una serie de ventajas y desventajas que es necesario estudiar.

a) Método de colocación (point-matching), se utiliza para simplificar las operaciones asociadas al producto escalar (2.31), que exigen la resolución numérica de una integral, para ello se eligen funciones peso iguales a funciones delta de Dirac

$$\omega_m(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.38)$$

Este método se suele utilizar en problemas que requieren soluciones donde hay que utilizar un gran número de funciones base para aproximar a la función incógnita; de esta manera el producto escalar asociado a las funciones peso es trivial. En la práctica supone forzar el cumplimiento de (2.29) en unos puntos determinados, en general donde deben cumplirse las condiciones de contorno. De esta forma el cálculo de los elementos de la matriz \bar{A} se simplifica. En cambio, una de sus principales desventajas es que para soluciones de bajo orden, con pocas funciones base, la exactitud de la solución depende enormemente de los puntos elegidos para hacer cumplir las condiciones de contorno.

b) Método de Galerkin, se utiliza en aquellos casos en que el dominio del operador L es idéntico al rango de L , entonces es recomendable la utilización de funciones peso iguales a las funciones base.

$$\omega_n = f_n \quad (2.39)$$

Para operadores autoadjuntos, la condición se cumple automáticamente y la matriz resultante es simétrica conjugada, lo que siempre introduce una ventaja adicional a la resolución del sistema algebraico de ecuaciones. Si la elección de las funciones base ha sido la correcta, es decir que sean una base completa del dominio del operador L , y las funciones peso son las mismas, si el operador L es autoadjunto las funciones peso son siempre una base completa del rango de L . El precio a pagar es un mayor coste computacional en los productos escalares necesarios para la obtención de la matriz.

c) Método de los mínimos cuadrados, se utiliza cuando el objetivo es obtener un residuo $\|R\|$ mínimo con una cierta discretización $\{f_n\}$ y orden N finito, en la Fig. 2.3 se observa que $\|R\|$ es mínimo cuando $R \perp g_N$, lo que implica $\{\omega_m\} = \{L(f_n)\}$. El método de los mínimos cuadrados consiste en tomar $\omega_n = L(f_n)$, lo cual garantiza que cuando $N \rightarrow \infty$ $g_\infty = g$ y

$f_\infty = f$, suponiendo que las funciones base cumplen las condiciones necesarias. Como con esta elección de las funciones peso

$$\langle L(f_N), \omega_n \rangle = \langle g, \omega_n \rangle \rightarrow \langle L(f_N), L(f_n) \rangle = \langle g, L(f_n) \rangle \rightarrow \langle L^*(L(f_N)), f_n \rangle = \langle L^*(g), f_n \rangle \quad (2.40)$$

resulta que este método equivale a resolver por el método de Galerkin la ecuación $L^*(L(f)) = L^*(g)$, que es la solución de residuo mínimo de $L(f) = g$ cuando no existe una solución exacta. En teoría está garantizada la convergencia monótona y uniforme, pero en la práctica es el método más sensible a los errores de redondeo o truncamiento cuando la matriz \bar{A} está mal condicionada y a la elección adecuada de las funciones base. Sin embargo, el inconveniente principal de este método es el coste computacional del cálculo de los elementos de la matriz \bar{A} cuando ninguna de las integraciones asociadas al producto escalar puede hacerse analíticamente. Por este motivo pocas veces se implementa directamente, y para obtener una solución de mínimos cuadrados suele emplearse el método del gradiente conjugado.

2.5.2 Funciones base y peso

Un paso importante en la resolución numérica de un problema electromagnético es la elección de las funciones base y peso. En general, se tenderá a elegir aquel conjunto de funciones base que pueda representar con el máximo de precisión a la función incógnita que se quiere resolver, al mismo tiempo que se procurará que su utilización implique el mínimo coste computacional. Aunque teóricamente existe un elevado número de funciones base, únicamente un reducido número de ellas son utilizadas en la práctica. Las funciones base pueden clasificarse como funciones de dominio completo, definidas en todo el dominio del operador L , o de subdominio, definidas únicamente en una parte del dominio del operador.

Las funciones de subdominio implican la subdivisión del problema en N segmentos, superficies o volúmenes. A continuación se presentan algunas de las funciones elementales más utilizadas.

a) Funciones delta de Dirac, se aproximan las corrientes equivalentes superficiales o volumétricas por una serie de fuentes puntuales, $f_n(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$.

b) Funciones pulso, las corrientes equivalentes se aproximan mediante una función constante a trozos en cada uno de los subdominios. Una vez determinados los coeficientes asociados a cada función, el resultado final es una representación en escalones de la función incógnita.

Matemáticamente su representación es la siguiente, considerando que el subdominio se encuentra representado por Δ

$$f_n(\bar{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\bar{r}| \in \Delta \\ 0 & \text{si } |\bar{r}| \notin \Delta \end{cases} \quad (2.41)$$

Estas funciones proporcionan integrales muy fáciles de calcular, aunque su mayor inconveniente es la introducción de discontinuidades en la distribución de la función discretizada, si en el operador L aparecen derivadas su comportamiento será malo.

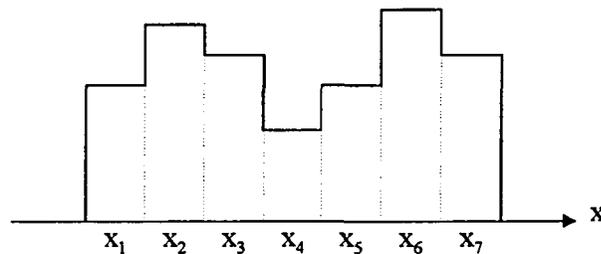


Fig. 2.4 Funciones base pulso

c) Funciones triángulo, permiten compensar las discontinuidades de los pulsos cuando aparecen derivadas en los operadores. El desarrollo de la función incógnita en estas funciones equivale a una interpolación lineal a trozos. Las funciones se definen de forma que exista una superposición de parte de los subdominios y únicamente se utilizan como tales en problemas unidimensionales, mientras que en problemas bidimensionales o tridimensionales se usan en combinación con funciones pulso. La solución que proporcionan es mucho más suave que la que proporcionaban los pulsos. Para el caso unidimensional, la expresión matemática de estas funciones es la siguiente

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{x_{n+1}-x}{x_{n+1}-x_n} & \text{si } x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad (2.42)$$

Estas funciones no son útiles si las funciones a representar presentan discontinuidades.

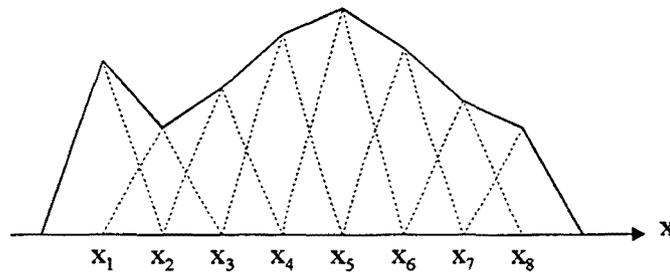


Fig. 2.5 Funciones base triángulo.

d) Funciones sinusoidales, presentan características análogas a las funciones triángulo, pero en ocasiones algunos operadores integrales pueden ser evaluados sin utilizar integración numérica cuando sus integrandos se multiplican por funciones tipo seno o coseno. Como por ejemplo la función sinusoidal a trozos

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin[\beta(x-x_{n-1})]}{\sin[\beta(x_n-x_{n-1})]} & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{\sin[\beta(x_{n+1}-x)]}{\sin[\beta(x_{n+1}-x_n)]} & \text{si } x_n \leq x \leq x_{n+1} \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad (2.43)$$

o la función coseno truncado

$$f_n(x) = \begin{cases} \cos\left[\beta\left(x - \frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right)\right] & \text{si } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0 & \text{fuera} \end{cases} \quad (2.44)$$

Por otro lado existen las funciones de dominio entero, que como indica su nombre presentan valores en todo el dominio del operador. Su principal ventaja reside en que su utilización en problemas donde a la función incógnita se le supone conocido su comportamiento aproximado, o sigue un determinado patrón, permite reducir mucho el número de términos de la expansión en funciones base en comparación con el número necesario usando funciones de subdominio. Para funciones incógnita muy complejas o impredecibles estas funciones base no son de utilidad.

a) Funciones trigonométricas de dominio entero cuando las funciones base son senos y cosenos definidos en todo el dominio del operador, el desarrollo en esas funciones equivale

al desarrollo en serie de Fourier de la función incógnita. Si al mismo tiempo se utilizan las funciones peso del método de los mínimos cuadrados, $\omega_n = L(f_n)$, se obtienen unos coeficientes iguales a los del desarrollo en serie de Fourier.

b) Conjuntos de polinomios ortogonales, otra forma de encontrar otros tipos de desarrollo con un comportamiento análogo al de las funciones trigonométricas de dominio entero es la utilización de series de polinomios ortogonales, como pueden ser los de Tschebyscheff, McLaurin, Legendre, Laguerre, Hermite, etc.

2.5.3 Discretización de objetos

El tema de modelado y discretización de objetos es suficientemente amplio como para necesitar una tesis para su estudio [Vall-llossera '94], de todas las formas posibles de realizar las discretizaciones de los cuerpos aquí únicamente se comentan aquellas que han sido utilizadas a lo largo de la presente tesis. Como se indicará en {Cap. 3} el tipo de mallado que se impondrá a los objetos es regular. Esta restricción no viene impuesta por la utilización del método de los momentos, sino que aparecerá por la utilización de transformadas rápidas de Fourier (FFT) en la evaluación del operador integral, que tiene estructura de convolución, sobre la función incógnita.

El objeto, por lo tanto, es discretizado utilizando un mallado regular, es decir, su superficie (en el caso bidimensional) o su volumen (en el caso tridimensional) se dividirá en subdominios cuadrados o cúbicos en los que se supone permitividad constante en su interior. Las funciones base a utilizar son fundamentalmente funciones pulso y funciones triángulo.

a) Funciones pulso, se supone que el campo es constante en cada una de las celdas del mallado, ello equivale a utilizar las funciones pulso definidas anteriormente. Este tipo de discretización es la más sencilla y combinada con el método de colocación permite resolver problemas sin demasiadas complicaciones matemáticas. Su único problema es la introducción de discontinuidades fuertes en el campo que serán generalmente incompatibles con operadores que contengan derivadas, como por ejemplo los casos TE bidimensional y tridimensional {3.4}.

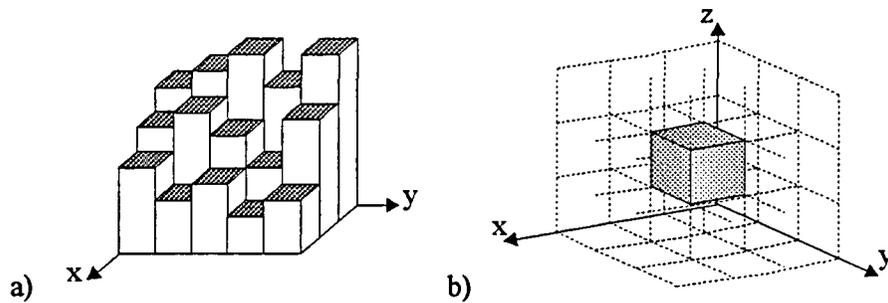


Fig. 2.6 Discretización mediante funciones pulso de un objeto a) bidimensional y b) tridimensional.

b) Funciones base tejado (roof-top), en el caso en que los operadores presenten derivadas se utilizará este tipo de discretización donde, en función de la componente, se procurará que la discretización sea continua en esa dirección. Las funciones tejado son una combinación de funciones triangular y pulso. La Fig. 2.7 muestra como es la discretización en el caso bidimensional. Para problemas tridimensionales las funciones son análogas, pero con una componente más.

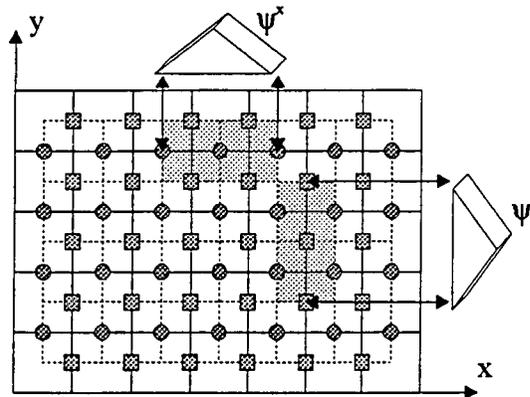


Fig. 2.7 Discretización mediante funciones tejado.

2.6 APLICACIONES: LA TOMOGRAFÍA DE MICROONDAS

Con el continuo avance de las técnicas para diagnosis médica se han desarrollado una gran cantidad de sistemas de formación de imágenes basados en distintos mecanismos físicos de interacción entre una radiación incidente y un cuerpo bajo observación. Mediante la utilización de distintas zonas del espectro, no únicamente electromagnético, pueden obtenerse diferentes

tipos de información en función del mecanismo de interacción. Las distintas técnicas son complementarias, por ejemplo, los rayos X permiten visualizar la opacidad de los tejidos a esta radiación, la tomografía axial computerizada (TAC) permite la obtención de imágenes de secciones del cuerpo a partir de los rayos X, la tomografía por emisión de positrones (PET) permite visualizar el metabolismo, la resonancia magnética nuclear (NMR) responde a las características del spin nuclear, la tomografía de impedancias reconstruye mapas de conductividad a baja frecuencia y las imágenes por ultrasonidos reflejan las características mecánicas de los tejidos. Cada técnica tiene una resolución espacial y temporal inherente, además de una serie de limitaciones en su aplicación en aquellos casos en que la radiación incidente pueda ser perjudicial para la salud en dosis excesivas, como es el caso de los rayos X. La Fig. 2.8 muestra la distribución de las distintas técnicas en el espectro de frecuencias electromagnético [Bolomey '90][Flack '94].

Entre las técnicas anteriores, en general ya consolidadas en el mundo de la diagnosis médica, no se ha hablado de la tomografía de microondas. En ella se utilizan ondas electromagnéticas a frecuencias de microondas como radiación incidente. A partir de la medida de su interacción con el cuerpo se intenta reconstruir sus características dieléctricas. A diferencia de los rayos X, en que la longitud de onda es muy pequeña, en el caso de la tomografía de microondas las longitudes de onda utilizadas son de un orden de magnitud parecido a las dimensiones del objeto, con lo que su propagación no puede ser modelada como rayos y hay que recurrir a los fenómenos de difracción que complican los algoritmos de reconstrucción.

La propagación de ondas electromagnéticas en tejidos biológicos tiene un comportamiento determinado por las características particulares de los mismos. La atenuación en algunos tejidos es elevada, debido al gran contenido en agua y sales disueltas, en cambio en otros, como los huesos, la atenuación es mucho más baja. Debido al contenido acuoso, que como se ha visto en {2.4} determina permitividades elevadas, las longitudes de onda se reducen con lo que a igual frecuencia de trabajo puede obtenerse una mejor resolución que en el vacío. Al mismo tiempo, la gran variedad de tejidos y sus distintas permitividades hacen que los cuerpos a reconstruir sean de elevado contraste, complicando los algoritmos inversos.

La experiencia con temas de tomografía de microondas en el Grupo de Antenas, Microondas y Radar del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones de la UPC se inició en el año 1984, en el que se comenzó a construir un prototipo de tomógrafo de microondas [Broquetas '89a]. Ese prototipo trabaja a una frecuencia de 2.45 GHz, que permite un buen compromiso entre atenuación y resolución, ambas crecientes con la frecuencia. La Fig. 2.9 muestra al prototipo desarrollado y la Fig. 2.10 su diagrama de bloques.

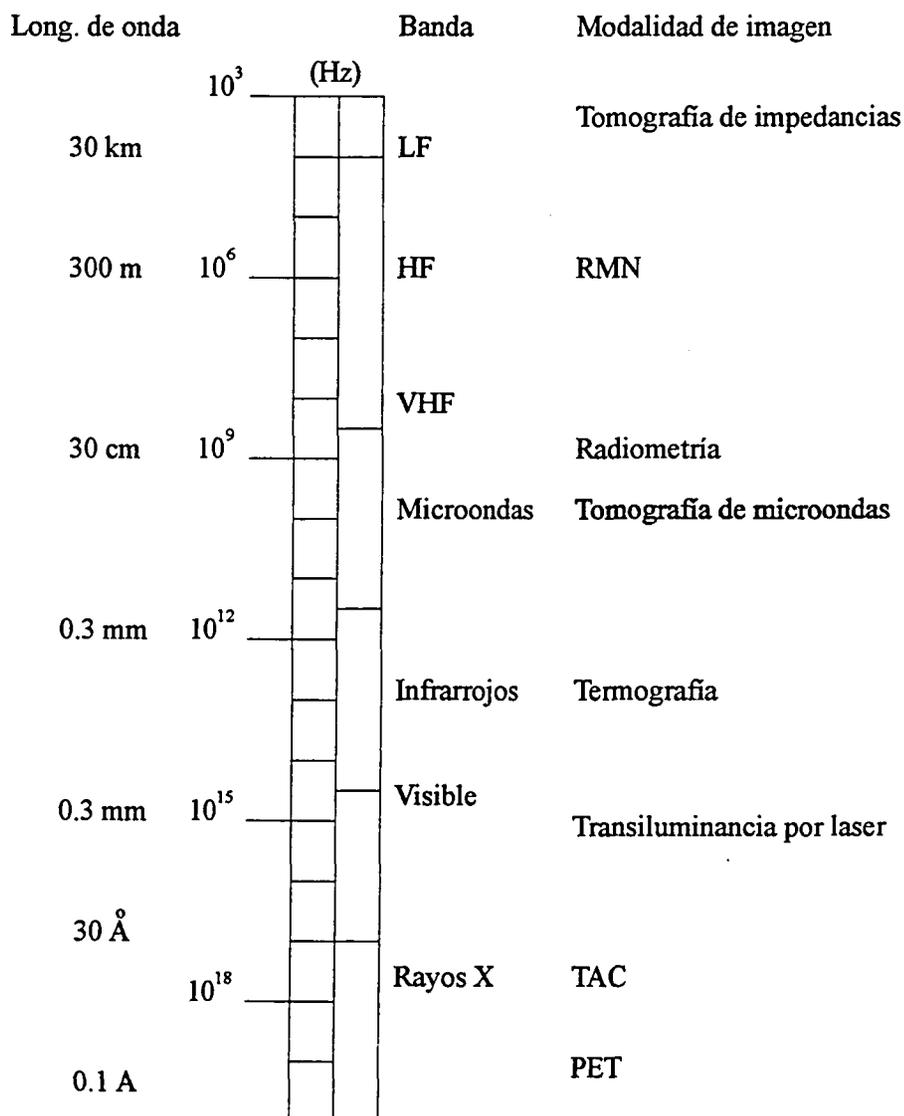


Fig. 2.8 Técnicas de formación de imágenes en el espectro electromagnético.

El prototipo está formado por una agrupación circular de 25 cm de diámetro que contiene 64 antenas, cada una de ellas es una guía de onda trabajando en el modo TE_{10} y radiando mediante una bocina exponencial en plano E. Para mejorar la adaptación entre el cuerpo biológico a medir y las antenas se utiliza agua desionizada como medio externo, por ello se diseñaron las antenas para que radiaran correctamente en agua. La polarización del campo incidente, y despreciando los efectos de despolarización en los campos dispersados gracias a la focalización de la energía y a la atenuación del agua, permite un modelado bidimensional en modo TM del problema. La longitud de onda en el medio externo es de 14 mm, y determina la resolución del sistema, aproximadamente 7 mm. Las 64 antenas de la agrupación pueden ser conmutadas electrónicamente de forma que actúen como emisoras o receptoras.

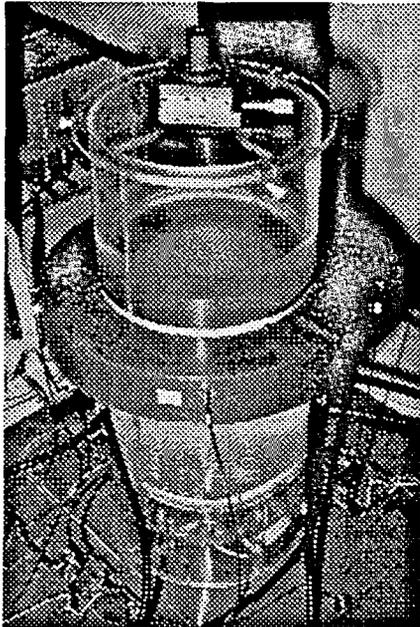


Fig. 2.9 Prototipo de tomógrafo de microondas (ROSCO).

A cada conjunto de datos formados por las medidas de todas las antenas receptoras para una determinada antena emisora se le denomina *vista*. Una vez completadas las 64 vistas, es decir, todas las posibles combinaciones de antenas emisoras-receptoras, se dispone de los datos de entrada para los algoritmos encargados de realizar la reconstrucción. En la práctica, y debido a limitaciones tecnológicas, únicamente se puede recibir para cada vista con la semiagrupación de antenas opuesta a la emisora, es decir 33 antenas receptoras.

Los algoritmos de reconstrucción procesan los campos dispersados por el cuerpo observado, por ello la adquisición de datos consiste en realizar primero una medida sin objeto, con lo que se mide el campo incidente en cada una de las antenas receptoras, a continuación se coloca el

cuerpo y se mide el campo total en las antenas receptoras para cada vista. Mediante sustracción de ambos campos se determina el campo dispersado para cada vista. La imagen obtenida con este tipo de medida se denomina *imagen absoluta*. En algunas aplicaciones, como por ejemplo monitorización de tratamientos de hipertermia [Mallorquí '92], puede intentarse qué ha variado en el interior del cuerpo entre dos instantes de tiempo; se llama *imagen diferencial* a la reconstrucción de la diferencia entre campos dispersados en dos medidas distintas. La Fig. 2.11 resume los dos tipos de imágenes que pueden obtenerse con un tomógrafo de microondas.

La potencia de emisión del sistema es de 1 W, de esta forma se asegura que la máxima densidad de potencia en la región de medida más cercana a la agrupación sea inferior a 0.1 mW/cm^2 , por debajo de la cota máxima recomendada por las normas ANSI de 5 mW/cm^2 a 2.45 GHz [ANSI '82].

Para evitar problemas de caminos interferentes, la señal se modula tanto en emisión como en recepción a dos frecuencias distintas, de esta forma en los detectores síncronos, que demodulan a la frecuencia suma, únicamente se detecta la señal que ha pasado por el camino correcto. Todo el sistema es controlado por un ordenador de 32 bits mediante un bus de entrada/salida. El tiempo de adquisición de una medida es de unos 3 s. Información más completa del prototipo puede encontrarse, entre otras referencias, en [Broquetas '89a],

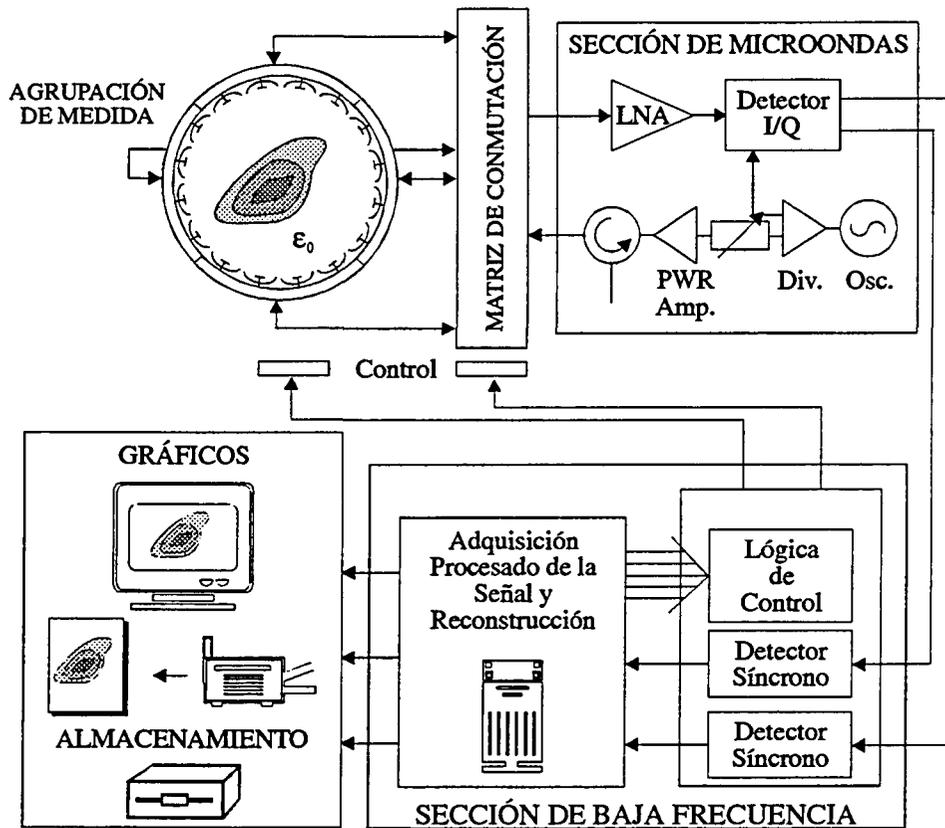


Fig. 2.10 Diagrama de bloques del prototipo de tomógrafo de microondas (ROSCO).

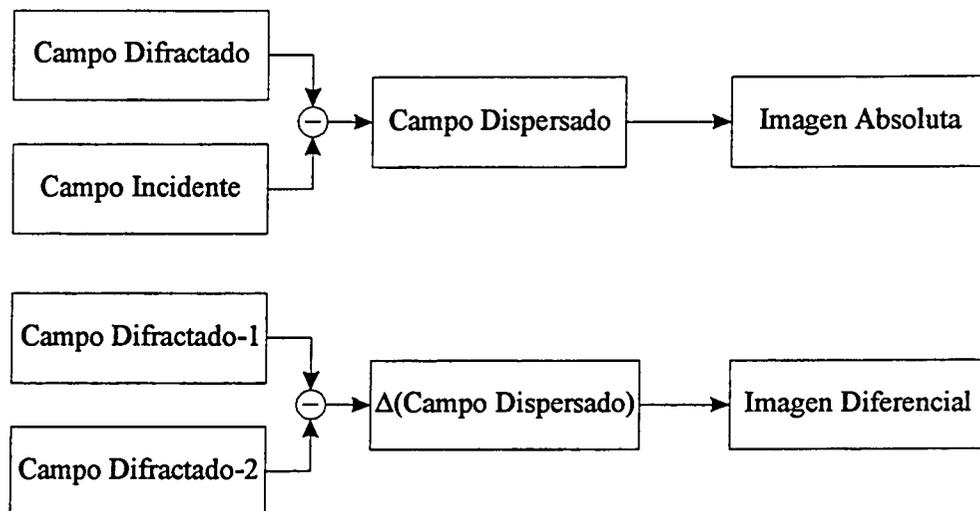


Fig. 2.11 Medidas absolutas y medidas diferenciales en tomografía de microondas.

La medida de extremidades de seres vivos y maquetas en el prototipo [Mallorquí '90], permitió obtener un gran conjunto de datos que mostraron que una de las grandes limitaciones del sistema residía en el algoritmo de reconstrucción de primer orden { Cap. 4}. Los resultados obtenidos en imágenes absolutas únicamente permitían distinguir con claridad el contorno del objeto y, en el mejor de los casos, obtener una imagen cualitativa de su interior. Los valores de permitividad reconstruidos eran erróneos, a excepción de algunos cilindros homogéneos poco difractantes, es decir de permitividad parecida a la del medio externo. Las imágenes diferenciales permitían detectar variaciones de permitividad en el interior de cuerpos que debido a su alto contraste eran inaccesibles a las imágenes absolutas. Esta detección de variaciones indicaba que la información del interior del cuerpo estaba presente en los campos dispersados y era el algoritmo de primer orden, debido a las aproximaciones realizadas en su desarrollo, el que era incapaz de utilizarla. Más información acerca de los experimentos realizados con el prototipo puede hallarse en [Martín '91] [Hawley '91] [Almirall '91], [Mallorquí '92] [Broquetas '93] [Mallorquí '94a].

Existen otras aplicaciones en las que es indispensable la modelización de la interacción de la radiación electromagnética y los cuerpos biológicos. En estudios de evaluación de niveles de exposición de seres vivos a ondas electromagnéticas es necesario conocer los niveles de potencia disipada en los distintos tejidos y determinar si se sobrepasan los niveles de seguridad. Por ejemplo, en la homologación de aparatos de telefonía móvil, radares de policía en coches, etc. las herramientas desarrolladas en esta tesis para la resolución del problema directo son de gran utilidad.

EL PROBLEMA DIRECTO ELECTROMAGNÉTICO

3.1 INTRODUCCIÓN

En la literatura se conoce como problema directo electromagnético al cálculo de los campos dispersados por un objeto conocido, dieléctrico o metálico, dado un determinado campo electromagnético incidente. El número de autores que han publicado sobre el tema es enorme y por lo tanto el número de métodos numéricos existentes es también considerable. Dado que el objetivo del estudio del problema directo se orienta como herramienta para la resolución del problema inverso, existen un gran número de condicionantes para la elección de los métodos a estudiar. Los métodos desarrollados se utilizarán para simular a través de modelos numéricos las medidas de un tomógrafo y, también, como paso intermedio de alguno de los algoritmos inversos de orden superior.

En primer lugar se presentarán las soluciones analíticas bidimensionales al problema de difracción, tanto para objetos dieléctricos como metálicos, que serán de gran utilidad para validar los métodos numéricos. A continuación se abordará el Método del Gradiente

Conjugado tanto para el caso bidimensional, con particularización para las polarizaciones TM y TE, como para el tridimensional. Estos métodos, basados en el método de los momentos, proporcionan una solución monovista, debiendo ser reejecutados si se cambia la dirección o tipo de onda incidente. Mediante la incorporación de técnicas FFT se optimiza el cálculo de la integral de convolución que aparece en la ecuación de Helmholtz {2.3}, mejorando tanto el tiempo de cálculo como la memoria requerida por los algoritmos. Finalmente, el Método RATMA (Recursive Aggregate T-Matrix Algorithm) en su versión generalizada y particularizada al caso bidimensional permitirá obtener una solución válida para cualquier dirección de incidencia o tipo de onda.

3.2 SOLUCIONES ANALÍTICAS AL PROBLEMA DIRECTO BIDIMENSIONAL

Sólo algunas geometrías muy concretas permiten obtener una solución analítica al problema directo electromagnético. En la literatura aparecen desarrollos matemáticos con la solución de la ecuación de Helmholtz para los llamados casos canónicos. Resulta interesante su estudio por dos importantes razones: la primera, como herramienta rápida y exacta para hallar el campo difractado tanto en el interior como en el exterior de los cuerpos, y la segunda, como prueba de validación de los distintos métodos numéricos que se irán presentando. Únicamente se abordarán las soluciones analíticas para cilindros dieléctricos o metálicos multicapa, para ello, primero se presentarán unas breves nociones de análisis modal para luego pasar al desarrollo del algoritmo que proporciona los campos analíticos, tanto para incidencia plana como cilíndrica. El caso tridimensional no ha sido tratado, pero la solución exacta del problema directo para ondas planas y esferas homogéneas se conoce como Teoría de Mie, en honor de Mie que la formuló por primera vez en 1908. La formulación es relativamente compleja y pueden destacarse entre otras las referencias [Stratton '41], [Ishimaru '91] para esferas dieléctricas y [Harrington '61] para esferas metálicas.

Se hace especial hincapié en algunos desarrollos matemáticos del análisis modal que constituyen la base de uno de los métodos de cálculo numérico presentados en este capítulo, el método RATMA {3.5}.

3.2.1 Análisis modal

Los problemas de contorno en los que intervienen cuerpos fácilmente definibles matemáticamente como superficies cilíndricas suelen resolverse, por comodidad, en coordenadas cilíndricas. Un desarrollo parecido al presentado en este apartado podría

realizarse en coordenadas cartesianas o esféricas [Stratton '41]. La Fig. 3.1 muestra la definición de coordenadas cilíndricas que se utilizarán a lo largo de la tesis.

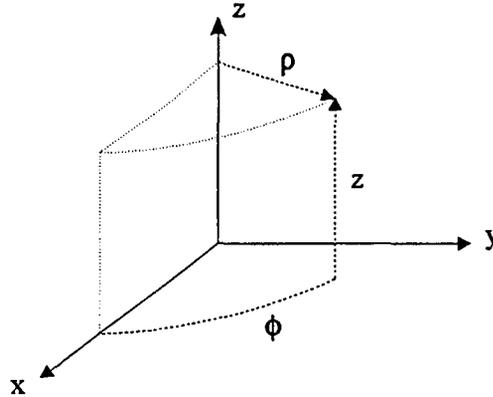


Fig. 3.1 Sistema de coordenadas cilíndrico.

Partiendo de la ecuación de Helmholtz en forma diferencial para una función escalar, ψ , en un espacio de tres dimensiones

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (3.1)$$

y expresando la laplaciana en coordenadas cilíndricas puede obtenerse

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (3.2)$$

Utilizando el método de separación de variables, puede solucionarse la ecuación diferencial mediante la búsqueda de soluciones que cumplan

$$\psi = R(\rho) \Phi(\phi) Z(z) \quad (3.3)$$

Sustituyendo (3.3) en (3.2) y dividiendo el resultado por ψ puede obtenerse

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0 \quad (3.4)$$

Al no depender el tercer término de la expresión de las variables ρ y ϕ , debe cumplirse

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k_z^2 \quad (3.5)$$

siendo k_z una constante. Si se sustituye (3.5) en (3.4) y se multiplica la expresión por ρ^2 , se obtiene

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (3.6)$$

donde el segundo término es independiente de ρ y de z , mientras el resto son independientes de ϕ . Por lo tanto

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2 \quad (3.7)$$

siendo n una constante. La ecuación (3.6) se transforma en

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - n^2 + (k^2 - k_z^2) \rho^2 = 0 \quad (3.8)$$

que únicamente depende de la variable ρ .

Resulta más práctico para la formulación del problema definir la variable k_ρ como

$$k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (3.9)$$

de modo que las ecuaciones anteriores pueden reescribirse de forma separada como

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) - n^2 + [(k_\rho \rho)^2 - n^2] R &= 0 \\ \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi &= 0 \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_z^2 Z &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Las ecuaciones en ϕ y z son armónicas, y sus soluciones pueden escribirse de forma general

como $h(n\phi)$ y $h(k_z z)$. En cambio la ecuación en R responde a la expresión de una ecuación de Bessel. Si se utiliza el método de Frobenius [Harrington '61] [Balanis '89] pueden escribirse sus soluciones en términos de funciones de Bessel [Abramowitz '72], que se expresan en forma general como $B_n(k_\rho \rho)$

$$B_n(k_\rho \rho) \rightarrow \begin{cases} J_n(k_\rho \rho) & \text{función de Bessel de primera especie} \\ Y_n(k_\rho \rho) & \text{función de Bessel de segunda especie} \\ H_n^{(1)}(k_\rho \rho) & \text{función de Hankel de primera especie} \\ H_n^{(2)}(k_\rho \rho) & \text{función de Hankel de segunda especie} \end{cases} \quad (3.11)$$

Como cualquier par de las anteriores funciones proporciona soluciones independientes, en general, la solución $B_n(k_\rho \rho)$ será una combinación lineal de cualquier par de ellas. Finalmente, la solución en cilíndricas de la ecuación de Helmholtz tiene la siguiente forma

$$\Psi_{k_\rho, n, k_z} = B_n(k_\rho \rho) h(n\phi) h(k_z z) \quad (3.12)$$

con k_ρ y k_z relacionadas según (3.9). Estas soluciones se llamarán **funciones de onda elementales**, ya que cualquier solución de la ecuación de Helmholtz puede escribirse como combinación lineal de ellas. Se pueden expresar sumatorios con todos los posibles valores, o autovalores, de n y k_ρ , o de n y k_z ; aunque nunca de k_ρ y k_z ya que son linealmente dependientes. Por ejemplo

$$\Psi = \sum_n \sum_{k_z} C_{n, k_z} \Psi_{k_\rho, n, k_z} = \sum_n \sum_{k_z} C_{n, k_z} B_n(k_\rho \rho) h(n\phi) h(k_z z) \quad (3.13)$$

donde C_{n, k_z} son constantes.

Como se verá a continuación, es normal que n tome valores discretos, por lo tanto pueden integrarse las soluciones sobre las variables de separación, k_ρ o k_z , y obtener nuevas soluciones para la ecuación de Helmholtz

$$\Psi = \sum_n \int_{k_z} f_n(k_z) B_n(k_\rho \rho) h(n\phi) h(k_z z) \quad (3.14)$$

$$\Psi = \sum_n \int_{k_p} g_n(k_p) B_n(k_p, \rho) h(n\phi) h(k_z z) \quad (3.15)$$

donde las integrales se realizan sobre cualquier contorno del plano complejo y las funciones $f_n(k_z)$ y $g_n(k_p)$ se determinan en función de las condiciones de contorno. La ecuación (3.14) proporciona integrales de Fourier, mientras que (3.15) proporciona integrales de Fourier-Bessel. En general, para problemas en regiones finitas, como por ejemplo cavidades o guías de onda, las soluciones se encuentran caracterizadas por un espectro discreto de autovalores, mientras que para el caso de regiones no limitadas, por ejemplo antenas, el espectro de autovalores suele ser continuo.

La solución de la ecuación armónica (3.5) proporciona las funciones armónicas que forman la solución de $h(k_z z)$, en general son funciones tipo $\sin(k_z z)$, $\cos(k_z z)$, $e^{jk_z z}$, $e^{-jk_z z}$ o combinaciones lineales de ellas.

Al ser la coordenada ϕ angular aparecen una serie de restricciones en la elección de las funciones $h(n\phi)$ y de la variable n , estas restricciones también dependen del tipo de problema a resolver. Por ejemplo, si se pretende encontrar el valor del campo en una región cilíndrica para cualquier valor angular, es necesario que $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$ para que la solución sea única. Por lo tanto $h(n\phi)$ debe ser periódica en ϕ , forzando que n sea entero. La elección de $h(n\phi)$ es $\sin(n\phi)$, $\cos(n\phi)$, $e^{jn\phi}$, $e^{-jn\phi}$ o cualquier combinación lineal de ellas. Por lo tanto los sumatorios en n de (3.15) son en general series de Fourier en ϕ .

Falta determinar cuál elegir de entre las soluciones de la ecuación de Bessel, el criterio depende de cada problema, pero siempre se pretenderá que las soluciones elegidas tengan sentido físico. Por ejemplo, si el problema impone que el campo debe ser finito en el origen, de todas las funciones de Bessel únicamente $J_n(k_p \rho)$ es no singular en $\rho = 0$. Para este caso las funciones de onda elementales son del tipo

$$\Psi_{k_p, n, k_z} = J_n(k_p \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} \quad (3.16)$$

Es recomendable utilizar las funciones armónicas en forma exponencial, ya que al ser la expresión más general los senos y cosenos pueden expresarse como como combinación lineal de exponenciales.

Recordando la expresión (3.9), existe una incertidumbre de signo en la elección de k_p

$$k_\rho = \pm \sqrt{k^2 - k_z^2} \quad (3.17)$$

El convenio a seguir es que la parte real de k_ρ sea positiva. De esta forma, si en un problema no existen fuentes en el infinito es lógico suponer que allí los campos deben ser cero. Estudiando las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel [Abramowitz '72], puede observarse que la única que se anula en el infinito para k_ρ complejo es $H_n^{(2)}(k_\rho \rho)$. En este caso las funciones de onda elementales tienen la forma

$$\Psi_{k_\rho, n, k_z} = H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{jk_z z} \quad (3.18)$$

Existen otras elecciones en función del problema a solucionar, se ha decidido presentar únicamente estas dos ya que son las que aparecerán en el desarrollo de los métodos analíticos para cilindros. En [Harrington '61] puede encontrarse un excelente resumen de la interpretación física de las soluciones en función de si k_ρ es real, complejo o imaginario puro.

La formulación presentada es general. La particularización al caso bidimensional fuerza $k_z = 0$, debido a la invarianza de los campos y de los cilindros a lo largo del eje z .

3.2.2 Transformaciones y teoremas de ondas cilíndricas

En general, al plantear la solución de problemas electromagnéticos puede ser necesario expresar funciones de onda de un determinado sistema de coordenadas en términos de funciones de onda de otro sistema de coordenadas. Para el caso que nos ocupa, estudio de la difracción de cilindros centrados multicapa, es aconsejable expresar una onda plana incidente en función de la superposición de ondas cilíndricas. De esta forma, la aplicación de las condiciones de contorno en las superficies de separación de los distintos materiales del cilindro es mucho más sencilla. Para el caso de que la fuente sea una onda cilíndrica no centrada en el origen, el teorema de adición de las funciones de Hankel y Bessel es imprescindible. Las demostraciones matemáticas están ampliamente referenciadas en la literatura y no se incluyen en esta memoria, entre otras cabe señalar [Harrington '61], [Balanis '89] y [Abramowitz '72].

3.2.2.1 Onda plana como superposición de ondas cilíndricas

Supóngase una onda plana viajando en la dirección positiva del eje x , y que el campo tiene únicamente componente eléctrica en el eje z

$$\mathbf{E} = \hat{z}E_z^+ = \hat{z}E_0 e^{-jkx} = \hat{z}e^{-jkx} \quad (3.19)$$

Si se expresa esa onda plana como suma de infinitas ondas cilíndricas

$$E_z^+ = e^{-jkx} = e^{-jk\rho \cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3.20)$$

multiplicando ambos extremos por $e^{-jm\phi}$, con m entero, e integrando en función de ϕ y aplicando condiciones de ortogonalidad [Balanis '89] puede obtenerse

$$a_m = j^{-m} \quad (3.21)$$

con lo que

$$E_z^+ = e^{-jkx} = e^{-jk\rho \cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} j^{-n} J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3.22)$$

De la misma manera puede obtenerse el desarrollo modal de una onda plana viajando en dirección contraria

$$E_z^- = e^{jkx} = e^{jk\rho \cos\phi} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} j^n J_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3.23)$$

3.2.2.2 Dominios visible e invisible del espectro

En la anterior síntesis de onda plana mediante modos cilíndricos puede plantearse, a efectos prácticos, truncar el sumatorio (3.22). Si se estudia el comportamiento de la función $J_n(x)$, se observa que a partir de $n > x$ sus valores empiezan a decaer, de forma que su contribución a la síntesis de la onda plana puede considerarse nula a partir de $n > 2x$. En general, el número de modos a utilizar depende del radio de la región donde se desea que esa síntesis sea válida y de la calidad final buscada. Un buen criterio consiste en escoger un número de modos

situado entre

$$k_0 \rho_{\max} \leq n_{\max} \leq 2k_0 \rho_{\max} \tag{3.24}$$

La Fig. 3.2 muestra la evolución, para distintos casos, de la función de Bessel de primera especie. Cuando n_{\max} es pequeño puede ser necesario añadir algún modo extra al criterio anterior.

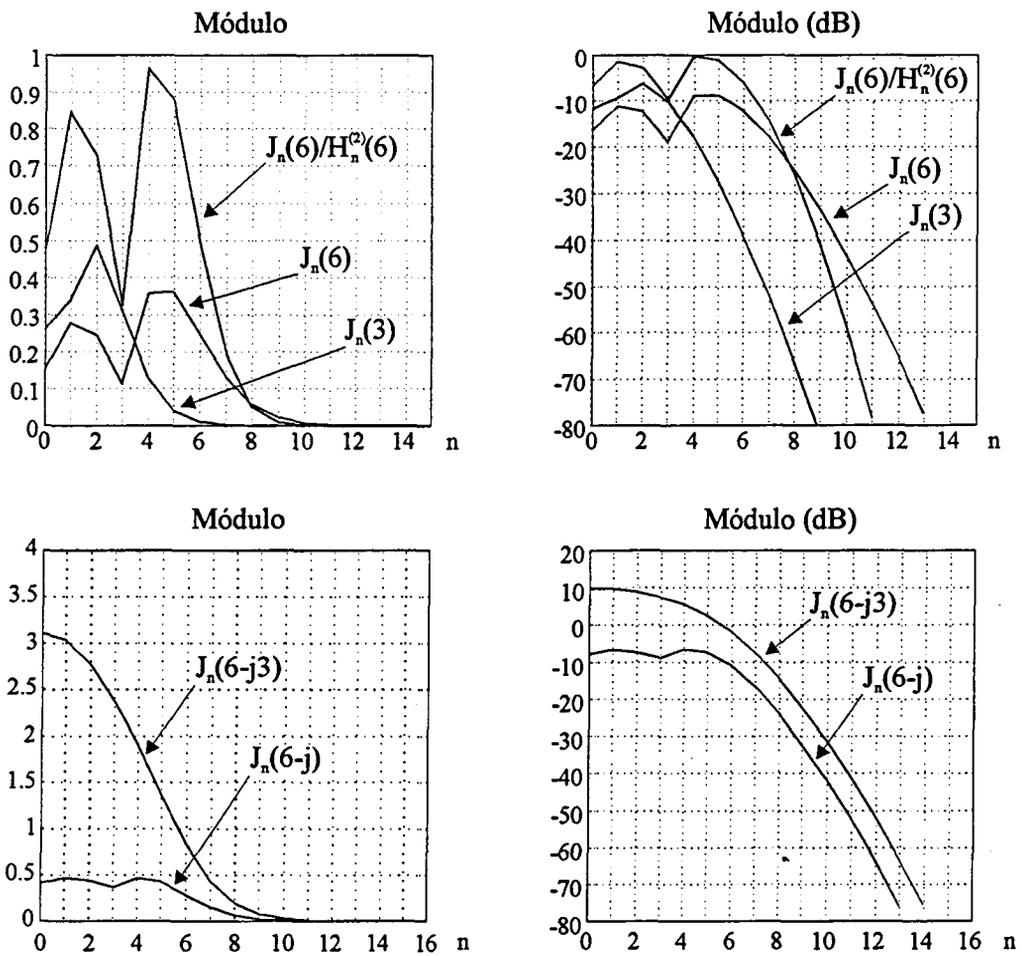


Fig. 3.2 Evolución del módulo de algunas funciones de Bessel en función del orden y su argumento.

3.2.2.3 Teorema de Graf de adición de las funciones de Bessel

Existen distintos teoremas de adición de las funciones de Bessel, en [Abramowitz '72] puede encontrarse una extensa recopilación de ellos, pero en este apartado únicamente se presenta el teorema de Graf, que permite expresar funciones de Bessel centradas en un determinado origen de coordenadas como combinación de funciones de Bessel centradas en otro distinto. Este teorema es una de las bases del método RATMA que se presentará en {3.5}

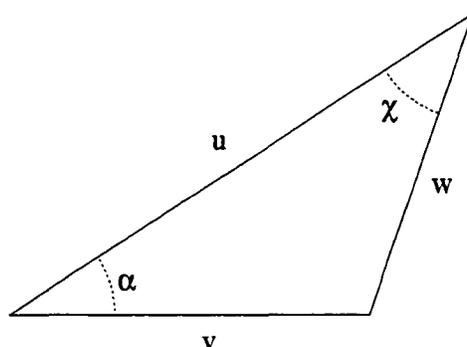


Fig. 3.3 Convenio para el teorema de Graf.

Si $B_n(x)$ es cualquiera de las funciones de Bessel, puede escribirse, según el triángulo de la Fig. 3.3, que

$$B_n(\omega)e^{jn\chi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{n+k}(u)J_k(v)e^{jk\alpha} \quad |ve^{j\alpha}| < |u| \quad (3.25)$$

Si $B_n(x)$ es una función de Bessel de primera especie la restricción en los módulos es innecesaria.

A continuación se presentan dos particularizaciones del teorema de Graf que, posteriormente, se utilizarán en el método RATMA.

La primera particularización consiste en trasladar las funciones de Bessel de un sistema de coordenadas a otro de modo que el desarrollo sea válido para puntos exteriores al radio de traslación. Según el convenio de la Fig. 3.4, el teorema Graf se reescribe

$$B_m(k_0 r_i) e^{jm\phi_i} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n(k_0 r_0) e^{jn\phi_0} J_{n-m}(k_0 d_{0i}) e^{-j(n-m)\phi_{0i}} \quad |d_{0i}| < |r_0| \quad (3.26)$$

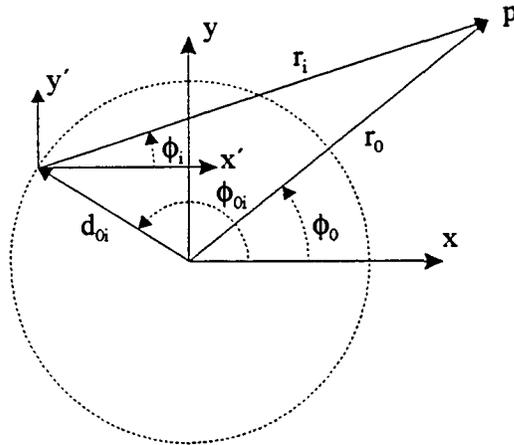


Fig. 3.4 Particularización del teorema de Graf a puntos exteriores.

La segunda particularización consiste en una traslación válida para puntos en la vecindad del nuevo origen de coordenadas, según el convenio de la Fig. 3.5

$$B_m(k_0 r_0) e^{jm\phi_0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{n-m}(k_0 d_{i0}) e^{-j(n-m)\phi_{i0}} J_n(k_0 r_i) e^{jn\phi_i} \quad |r_i| < |d_{i0}| \quad (3.27)$$

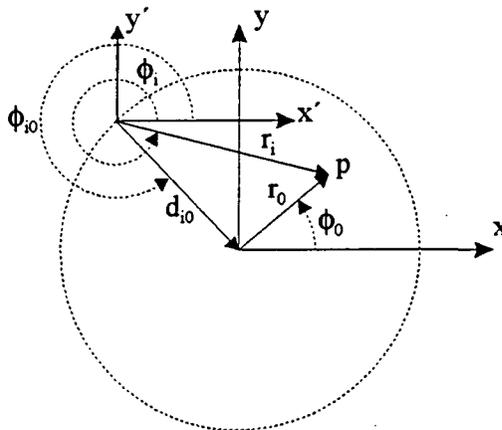


Fig. 3.5 Particularización del teorema de Graf a puntos interiores

Ambas expresiones pueden escribirse en forma matricial, de forma que (3.26) queda como

$$B'(k_0 r_i) = B'(k_0 r_0) \cdot \bar{\beta}_{0i} \begin{cases} [B(k_0 r_i)]_m = B_m(k_0 r_i) e^{jm\phi_i} \\ [B(k_0 r_0)]_m = B_m(k_0 r_0) e^{jm\phi_0} \\ [\beta_{0i}]_{n,m} = J_{n-m}(k_0 d_{0i}) e^{-j(n-m)\phi_{0i}} \end{cases} \quad (3.28)$$

y (3.27) tiene diferente notación según se trasladen funciones de Bessel de primera especie

$$J'(k_0 r_0) = J'(k_0 r_i) \cdot \bar{\beta}_{i0} \begin{cases} [J(k_0 r_0)]_m = J_m(k_0 r_0) e^{jm\phi_i} \\ [J(k_0 r_i)]_m = J_m(k_0 r_i) e^{jm\phi_i} \\ [\beta_{i0}]_{n,m} = J_{n-m}(k_0 d_{i0}) e^{-j(n-m)\phi_{i0}} \end{cases} \quad (3.29)$$

o de Hankel

$$H'(k_0 r_0) = J'(k_0 r_i) \cdot \bar{\alpha}_{i0} \begin{cases} [H(k_0 r_0)]_m = H_m^{(2)}(k_0 r_0) e^{jm\phi_i} \\ [J(k_0 r_i)]_m = J_m(k_0 r_i) e^{jm\phi_i} \\ [\alpha_{i0}]_{n,m} = H_{n-m}^{(2)}(k_0 d_{i0}) e^{-j(n-m)\phi_{i0}} \end{cases} \quad (3.30)$$

Es necesario recordar que el superíndice t indica traspuesta sin conjugar.

3.2.2.4 Teorema de adición de las funciones de Hankel

Esta transformación, particularización de las presentadas en el apartado anterior, permite expresar el campo generado por una línea infinita de corriente desplazada respecto el origen de coordenadas mediante una serie de funciones de onda cilíndricas generadas en el origen. En general, el campo generado por una línea de corriente, I_0 , desplazada ρ' viene dada por

$$E_z(\rho, \phi) = -\frac{\omega \mu I_0}{4} H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) \quad (3.31)$$

donde $|\rho - \rho'|$ es la distancia entre la línea de corriente y el punto de observación, tal como muestra la Fig. 3.6.

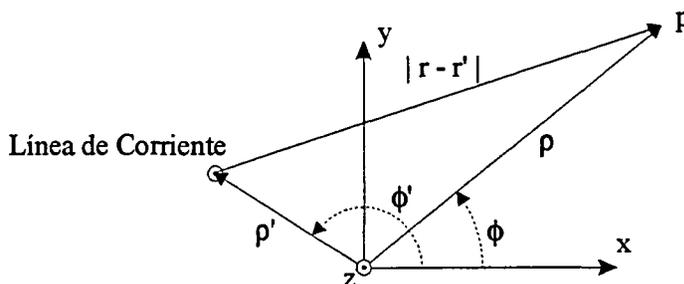


Fig. 3.6 Teorema de adición de las funciones de Hankel.

La expresión de la onda cilíndrica descentrada en función de una serie de funciones de onda cilíndricas centradas se escribe como

$$H_0^{(2)}(k|\rho - \rho'|) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(k\rho) H_n^{(2)}(k\rho') e^{jn(\phi - \phi')} & \text{para } \rho \leq \rho' \\ \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(k\rho') H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn(\phi - \phi')} & \text{para } \rho \geq \rho' \end{cases} \quad (3.32)$$

La demostración puede encontrarse en [Balanis '89].

3.2.2.5 Propagación de modos cilíndricos

Si se expresa un campo como desarrollo de modos cilíndricos

$$E_z(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n B_n(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3.33)$$

y se particulariza para dos radios distintos entre los que no existen fuentes, Fig. 3.7, puede obtenerse que los coeficientes de los desarrollos en serie de Fourier de $E_z(\rho_1, \phi)$ y $E_z(\rho_2, \phi)$ según ϕ tienen como coeficientes

$$\begin{aligned} C_n(\rho_1) &= a_n B_n(k_0 \rho_1) \\ C_n(\rho_2) &= a_n B_n(k_0 \rho_2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

y al ser los modos cilíndricos iguales se obtiene

$$C_n(\rho_1) = C_n(\rho_2) \frac{B_n(k_0 \rho_1)}{B_n(k_0 \rho_2)} \quad (3.35)$$

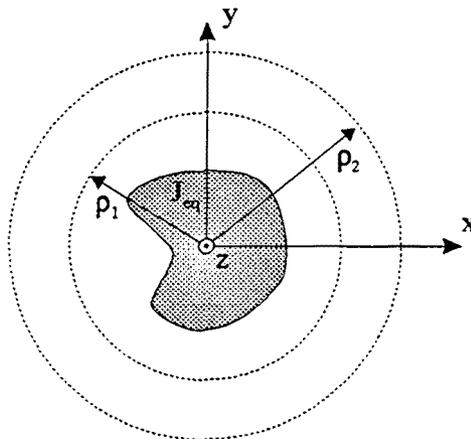


Fig. 3.7 Propagación de modos cilíndricos entre dos zonas libres de fuentes.

Esta expresión que relaciona las series de Fourier según ϕ de los campos en dos circunferencias permite, conociendo el campo en una circunferencia propagarlo a otra de distinto radio, siempre que el medio sea homogéneo y no se atravesase ninguna zona de fuentes. El mismo método puede aplicarse a desarrollos con otro tipo de modos cilíndricos.

3.2.3 Campos difractados por un cilindro multicapa

En este apartado se muestra un algoritmo para la resolución analítica del problema de difracción de un cilindro multicapa para el caso TM, Fig. 3.8. Como se verá a continuación, la adaptación del algoritmo al caso TE será muy sencilla. En el apartado {3.2.1} se presentaron todas las posibles soluciones de la ecuación de onda en cilíndricas, pero únicamente algunas podían asociarse a problemas físicos. Se quieren obtener los campos dispersados por un cilindro multicapa para el caso TM, definiendo campo dispersado, E^s como aquel que sumado al campo incidente, E^{inc} , da como resultado el campo total, E ,

$$E = E^{inc} + E^s \quad (3.36)$$

Los campos dispersados viajan alejándose del objeto y deben anularse en el infinito, por lo tanto la solución buscada puede desarrollarse como una combinación lineal de funciones de

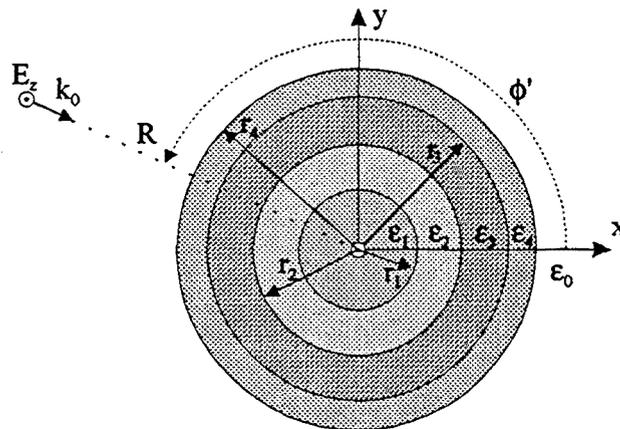


Fig. 3.8 Cilindro multicapa.

Hankel de segunda especie, las únicas que cumplen los anteriores requisitos. Parecido razonamiento podría aplicarse al campo magnético para el caso TE.

3.2.3.1 Caso TM

Para el caso TM se realiza el desarrollo en función del campo eléctrico, por lo tanto el campo dispersado tiene la siguiente expresión

$$E^s = \hat{z}E_z^s = \hat{z}E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) \tag{3.37}$$

Los coeficientes c_n se obtienen aplicando condiciones de contorno, continuidad del campo eléctrico tangencial, en las paredes del cilindro. La obtención de esos coeficientes para cilindros metálicos puede encontrarse en [Balanis '89] y para cilindros dieléctricos homogéneos en [Umashankar '93].

El procedimiento para hallar la solución al problema multicapa es muy parecida. Con lo indicado anteriormente, el campo difractado en el exterior del cilindro puede expresarse como

$$E_z(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n J_n(k_0 \rho) + c_n H_n^{(2)}(k_0 \rho)] e^{jn\phi} \tag{3.38}$$

donde el primer término representa el desarrollo modal del campo incidente y el segundo el del campo dispersado.

Los campos en el interior del cilindro pueden escribirse en términos de funciones de Bessel de primera y segunda especie, ya que los campos en el interior no se propagan. Las distintas capas del cilindro se indican como $m=1,2,\dots,M$, el medio exterior se corresponde con la capa $M+1$. Por lo tanto la expresión más general del campo total en la capa m viene dada por [Bussey '75]

$$E_{z,m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{m,n} J_n(k_m \rho) + B_{m,n} Y_n(k_m \rho)] e^{jn\phi} \quad (3.39)$$

y aplicando las ecuaciones de Maxwell puede obtenerse una expresión parecida para la componente tangencial de campo magnético

$$H_{\phi,m} = \frac{k_m}{j \omega \mu_m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [A_{m,n} J'_n(k_m \rho) + B_{m,n} Y'_n(k_m \rho)] e^{jn\phi} \quad (3.40)$$

Si se define una amplitud desnormalizada para la capa más interna, y suponiendo que ésta sea dieléctrica, puede forzarse

$$A'_{1,n} = 1 \quad B'_{1,n} = 0 \quad \text{para todo } n \quad (3.41)$$

Las amplitudes desnormalizadas de las sucesivas capas se van calculando de forma recursiva aplicando las condiciones de contorno para el campo eléctrico, E_z y magnético, H_ϕ , tangenciales a las superficies de separación de los distintos dieléctricos. Al llegar a la última capa se pueden normalizar esos coeficientes al valor de campo incidente mediante (3.39) y (3.38).

De la continuidad del campo eléctrico tangencial en la frontera i se obtiene

$$A'_{i,n} J_n(k_i r_i) + B'_{i,n} Y_n(k_i r_i) = A'_{i+1,n} J_n(K_{i+1} r_i) + B'_{i+1,n} Y_n(k_{i+1} r_i) \quad (3.42)$$

mientras que de la continuidad del campo magnético tangencial y con $\eta_m = \omega \mu_m / k_m$, puede obtenerse

$$\eta_{i+1} [A'_{i,n} J'_n(k_i r_i) + B'_{i,n} Y'_n(k_i r_i)] = \eta_i [A'_{i+1,n} J'_n(k_{i+1} r_i) + B'_{i+1,n} Y'_n(k_{i+1} r_i)] \quad (3.43)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones proporcionado por (3.42) y (3.43), puede obtenerse la siguiente relación de recurrencia

$$\begin{pmatrix} A'_{m+1,n} \\ B'_{m+1,n} \end{pmatrix} = \frac{1}{L_m} \begin{pmatrix} U_{m,n} & W_{m,n} \\ V_{m,n} & X_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_{m,n} \\ B'_{m,n} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

donde

$$U_{m,n} = \mu_m k_{m+1} J_n(k_m r_m) Y'_n(k_{m+1} r_m) - \mu_{m+1} k_m J'_n(k_m r_m) Y_n(k_{m+1} r_m) \quad (3.45)$$

$$V_{m,n} = \mu_{m+1} k_m J'_n(k_m r_m) J_n(k_{m+1} r_m) - \mu_m k_{m+1} J_n(k_m r_m) J'_n(k_{m+1} r_m) \quad (3.46)$$

$$W_{m,n} = \mu_m k_{m+1} Y_n(k_m r_m) Y'_n(k_{m+1} r_m) - \mu_{m+1} k_m Y'_n(k_m r_m) Y_n(k_{m+1} r_m) \quad (3.47)$$

$$X_{m,n} = \mu_{m+1} k_m Y'_n(k_m r_m) J_n(k_{m+1} r_m) - \mu_m k_{m+1} Y_n(k_m r_m) J'_n(k_{m+1} r_m) \quad (3.48)$$

$$L_m = \mu_m k_{m+1} \left[J_n(k_{m+1} r_m) Y'_n(k_{m+1} r_m) - J'_n(k_{m+1} r_m) Y_n(k_{m+1} r_m) \right] \quad (3.49)$$

La última ecuación puede simplificarse si se observa que el término encerrado entre corchetes es el wronskiano de la ecuación de Bessel [Abramowitz '72]

$$J_n(x) Y'_n(x) - J'_n(x) Y_n(x) = \frac{2}{\pi x} \quad \text{y} \quad L_m = \frac{2\mu_m}{\pi r_m} \quad (3.50)$$

Finalmente fuera del cilindro pueden igualarse las ecuaciones (3.38) y (3.39)

$$A_{M+1,n} J_n(k_0 r_M) + B_{M+1,n} Y_n(k_0 r_M) = a_n J_n(k_0 r_M) + c_n H_n^{(2)}(k_0 r_M) \quad (3.51)$$

Si se define una constante de normalización

$$A_{m,n} = S_n A'_{m,n} \quad B_{m,n} = S_n B'_{m,n} \quad (3.52)$$

puede obtenerse igualando términos en (3.51)

$$S_n(A'_{M+1,n} - jB'_{M+1,n}) = a_n \rightarrow S_n = \frac{a_n}{A'_{M+1,n} - jB'_{M+1,n}} \quad (3.53)$$

con lo que ya pueden normalizarse todos los coeficientes de las distintas capas.

De la misma manera puede determinarse el valor de los coeficientes del campo dispersado en el exterior del cilindro

$$c_n = a_n \frac{B'_{M+1,n}}{B'_{M+1,n} + jA'_{M+1,n}} \quad (3.54)$$

que dependen linealmente de los coeficientes del desarrollo modal del campo incidente.

Si la capa más interna es metálica, el campo total en su interior ha de ser cero, con lo que

$$\left. \begin{array}{ll} A'_{1,n} = 0 & B'_{1,n} = 0 \\ A'_{2,n} = 1 & B'_{2,n} = -\frac{J_n(k_2 r_1)}{Y_n(k_2 r_1)} \end{array} \right\} \text{ para todo } n \quad (3.55)$$

y el resto del desarrollo es exactamente el mismo.

Si la onda incidente es plana, los coeficientes de su desarrollo modal valen

$$a_n = E_0 j^n e^{-jn\phi} \quad (3.56)$$

siendo ϕ el ángulo de incidencia de la onda. De la misma forma, en el caso de onda incidente cilíndrica

$$a_n = -\frac{\mu \omega I}{4} H_n^{(2)}(k_0 R) e^{-jn\phi} \quad (3.57)$$

3.2.3.2 Caso TE

Puede realizarse un desarrollo parecido para el caso TE [Bussey '75], aprovechando la formulación del caso TM únicamente hay que cambiar μ por ϵ , E por H y H por $-E$. En el caso de que el centro del cilindro sea metálico, los coeficientes son

$$\left. \begin{array}{l} A'_{1,n} = 0 \\ A'_{2,n} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} B'_{1,n} = 0 \\ B'_{2,n} = -\frac{J'_n(k_2 r_1)}{Y'_n(k_2 r_1)} \end{array} \quad \text{para todo } n \quad (3.58)$$

ya que ahora los coeficientes son para el campo magnético.

$$a_n = \frac{E_0}{\eta_{M+1}} j^n e^{-jn\phi} \quad (3.59)$$

ya que ahora los coeficientes son para el campo magnético.

3.2.3.3 Matriz de dispersión (T) y matriz de transmisión (X)

Si se plantea un problema de difracción en el que únicamente se desea calcular los campos dispersados por el cilindro en el exterior del mismo, la expresión a utilizar es

$$E_z(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n J_n(k_0 \rho) + c_n H_n^{(2)}(k_0 \rho)] e^{jn\phi} \quad (3.60)$$

Visto el problema desde el exterior del cilindro, únicamente se deben conocer los coeficientes del desarrollo modal de los campos dispersados de forma que el cilindro multicapa puede ser tratado como un único dispersor homogéneo, aunque de permitividad desconocida, que modifica los coeficientes del desarrollo modal del campo incidente para obtener los del campo dispersado. De esta manera (3.60) puede reescribirse en forma matricial como

$$E_z(\rho; \phi) = Rg \psi'(k_0, r) \cdot a + \psi'(k_0, r) \cdot \bar{T} \cdot a \quad (3.61)$$

donde los vectores y matrices implicados tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} \text{Rg}[\Psi(k_0 r)]_m &= J_m(k_0 \rho) e^{jm\phi} & [\Psi(k_0 r)]_m &= H_m^{(2)}(k_0 \rho) e^{jm\phi} \\ [a]_m &= a_m \end{aligned} \quad (3.62)$$

El número de elementos de las matrices depende del número de términos del desarrollo modal. La matriz diagonal \bar{T} es la **matriz de dispersión**, y relaciona los coeficientes del campo incidente con los del campo dispersado, siendo válida para cualquier dirección de incidencia y tipo de onda. Si el cilindro es homogéneo, se obtiene para el caso TM

$$[T]_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{k_0 J_n(k_1 r_1) J_n'(k_0 r_1) - k_1 J_n(k_0 r_1) J_n'(k_1 r_1)}{k_1 H_n^{(2)}(k_0 r_1) J_n'(k_1 r_1) - k_0 H_n^{(2)'}(k_0 r_1) J_n(k_1 r_1)} & m = n \end{cases} \quad (3.63)$$

De la misma manera, puede definirse para el campo total en el interior del cilindro homogéneo una **matriz de transmisión**, \bar{X} , que relaciona los coeficientes modales del campo incidente con los del campo difractado en el interior.

$$E_z(\rho, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n(k_1 \rho) e^{jn\phi} = \text{Rg} \Psi^i(k_1, \rho) \cdot \bar{X} \cdot a \quad (3.64)$$

que para un cilindro homogéneo responde a la siguiente expresión

$$[X]_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{k_0 H_n^{(2)}(k_0 r_1) J_n'(k_0 r_1) - k_0 H_n^{(2)'}(k_0 r_1) J_n(k_0 r_1)}{k_1 H_n^{(2)}(k_0 r_1) J_n'(k_1 r_1) - k_0 H_n^{(2)'}(k_0 r_1) J_n(k_1 r_1)} & m = n \end{cases} \quad (3.65)$$

De la misma manera, puede obtenerse la matriz de dispersión para la componente magnética del caso TE

$$[T]_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{\frac{k_0}{\epsilon_0} J_n(k_1 r_1) J_n'(k_0 r_1) - \frac{k_1}{\epsilon_1} J_n(k_0 r_1) J_n'(k_1 r_1)}{\frac{k_1}{\epsilon_1} H_n^{(2)}(k_0 r_1) J_n'(k_1 r_1) - \frac{k_0}{\epsilon_0} H_n^{(2)'}(k_0 r_1) J_n(k_1 r_1)} & m = n \end{cases} \quad (3.66)$$

y la matriz de transmisión

$$[X]_{m,n} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{k_0 H_n^{(2)}(k_0 r_1) J_n'(k_0 r_1) - \frac{k_0}{\epsilon_0} H_n^{(2)'}(k_0 r_1) J_n(k_0 r_1)}{\frac{k_1}{\epsilon_1} H_n^{(2)}(k_0 r_1) J_n'(k_1 r_1) - \frac{k_0}{\epsilon_0} H_n^{(2)'}(k_0 r_1) J_n(k_1 r_1)} & m = n \end{cases} \quad (3.67)$$

Estas expresiones serán utilizadas en el desarrollo del algoritmo RATMA {3.5}.

3.3 MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO BIDIMENSIONAL PARA EL CASO TRANSVERSAL MAGNÉTICO (TM)

Los modos transversales magnéticos (TM) son aquellos en los que las componentes de campo magnético se encuentran en un plano transversal a una determinada dirección, que es la dirección de propagación de la onda electromagnética. El estudio del problema de difracción para este caso bidimensional es muy sencillo, ya que la ecuación integral puede expresarse como una ecuación escalar en términos del campo eléctrico y, al considerarse el cuerpo infinito y constante en la dirección de la componente de campo eléctrico, no existen fenómenos de despolarización del campo.

3.3.1 Formulación matemática

Partiendo de las ecuaciones deducidas en {2.3}, el campo eléctrico responde a la siguiente ecuación

$$E_z^{inc}(\vec{r}) = E_z(\vec{r}) - E_z^s(\vec{r}) = E_z(\vec{r}) + k_0^2 \int_{S'} \frac{e_0^{-\epsilon}(\vec{r}')}{\epsilon_0} E_z(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (3.68)$$

siendo $G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|)$ la función de Green bidimensional

$$G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (3.69)$$

Una de las formas más eficientes de resolver la ecuación (3.68) consiste en su discretización

mediante el método de los momentos utilizando pulsos rectangulares como funciones base y deltas de Dirac como funciones peso {2.6}. La Fig. 3.9 muestra la discretización utilizada. Con ello puede transformarse la ecuación integral a un sistema de ecuaciones del tipo

$$E_z^{inc} = \bar{A} \cdot E_z \quad (3.70)$$

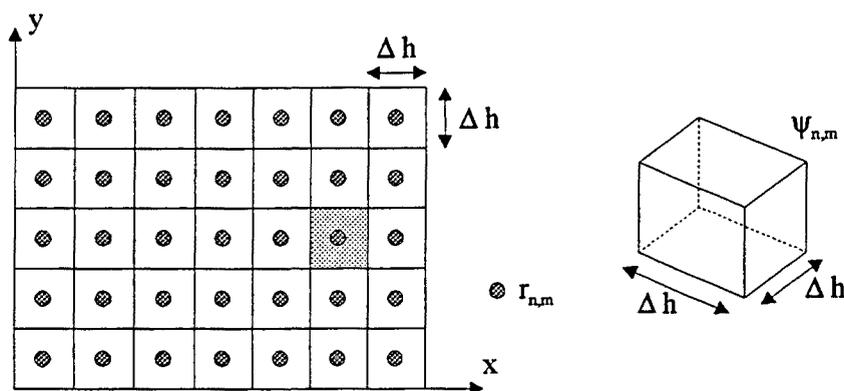


Fig. 3.9 Discretización en el caso TM bidimensional, el malla es regular y las funciones base son pulsos. Las funciones peso son deltas de Dirac.

Si se intentara solucionar el sistema de ecuaciones (3.70) mediante métodos tradicionales, sería indispensable conocer la matriz \bar{A} , pero utilizando el método del gradiente conjugado [PIER5 '90], únicamente es necesario conocer el vector resultado de la aplicación de \bar{A} y \bar{A}^* , traspuesto conjugado, sobre el vector campo. Con ello, el ahorro de memoria es considerable ya que la estructura de convolución del operador integral permite su implementación con transformadas rápidas de Fourier (FFT) optimizando a la vez el tiempo de cálculo.

El planteamiento presentado hasta el momento funciona perfectamente para materiales dieléctricos, pero presenta problemas si hay metales. En este caso, la ecuación (3.68) presenta una singularidad en el interior de la integral: la parte imaginaria de la permitividad en un metal ideal es infinita y el campo total ha de ser cero en su interior. En los metales, las corrientes inducidas por el campo eléctrico incidente son superficiales a sus paredes y, desgraciadamente, el tipo de discretización utilizada para analizar el problema no permite su modelización. Para ello se resuelve el problema en función de unas densidades de corriente volumétricas en el interior de los metales, carentes de sentido físico, pero cuya contribución al campo difractado fuera de ellos produce los mismos efectos que las corrientes superficiales. En el caso dieléctrico, esas densidades de corrientes son las realmente inducidas por el campo

incidente. Las corrientes se definen del siguiente modo

$$J_z(\vec{r}) = -j\omega \mu \epsilon_0 C(\vec{r}) E_z(\vec{r}) = E_z(\vec{r}) \Delta \epsilon(\vec{r}) = E_z(\vec{r}) [\epsilon_0 - \epsilon(\vec{r})] \quad (3.71)$$

Sustituyendo (3.71) en (3.68) puede obtenerse

$$E_z^{inc}(\vec{r}) = j \frac{J_z(\vec{r})}{\omega \mu_0 \epsilon_0 C(\vec{r})} + k_0^2 \int_{S'} j \frac{J_z(\vec{r}')}{\omega \mu_0 \epsilon_0} G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (3.72)$$

y si se definen unas corrientes equivalentes se simplifican las expresiones

$$E_z^{inc}(\vec{r}) = \frac{J_z'(\vec{r})}{C(\vec{r})} + k_0^2 \int_{S'} J_z'(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (3.73)$$

con

$$J_z'(\vec{r}) = j \frac{J_z(\vec{r})}{\omega \mu_0 \epsilon_0} \quad (3.74)$$

de esta forma el término de permitividad infinita aparece ahora en el denominador. Una vez discretizada la ecuación se puede resolver el sistema sin ningún problema. En los puntos exteriores al objeto aparecería una singularidad ya que allí la función contraste vale cero, pero también se conoce que la corriente también ha de ser cero, con lo que el problema es fácilmente evitable sustituyendo ese término por el campo difractado. La solución proporciona las corrientes equivalentes sobre el objeto y los campos difractados en el exterior.

3.3.2 Discretización del algoritmo

En el caso de que el problema a tratar implique a objetos únicamente dieléctricos se puede desarrollar el algoritmo en base a (3.68), pero en el caso de que aparezcan metales es necesario desarrollarlo en base a (3.73). A continuación se muestra el desarrollo para el caso más general, el metálico.

3.3.2.1 Campo difractado en el objeto

Utilizando el Método de los momentos se puede discretizar la ecuación integral de partida para transformarla en un sistema de ecuaciones. Como se ha dicho anteriormente, las funciones base son pulsos y las funciones peso deltas de Dirac. El objeto queda discretizado en una malla de $N_c = N_x * N_y$ celdas de lado Δh en las que se considera que el campo y la permitividad son constantes y de valor igual a los del centro de la celda, Fig. 3.9. El sistema de ecuaciones que se obtiene es el siguiente

$$E_z^{inc}(n,m) = \frac{J_z'(n,m)}{C(n,m)} - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} J_z'(i,j) G(n,m,i,j) \quad (n,m) \in \text{Objeto} \quad (3.75)$$

$$E_z^{inc}(n,m) = E_z(n,m) - \sum_{i=1}^{N_c} \sum_{j=1}^{N_c} J_z'(i,j) G(n,m,i,j) \quad (n,m) \notin \text{Objeto}$$

En los dobles sumatorios, los puntos exteriores al objeto tienen la densidad de corriente igual a cero. Los valores de $G(n,m,i,j)$ vienen dados por

$$G(n,m,i,j) = -k_0^2 \int_{S_{ij}} G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) dS' \quad (3.76)$$

donde $\vec{r} = (n\Delta h, m\Delta h)$ y $\vec{r}' = (i\Delta h, j\Delta h)$. La región de integración de (3.76) es cuadrada y no existe solución analítica para esa integral. Richmond [Richmond '65], aprovechando la sencillez de la integral de la función de Hankel de orden cero sobre regiones circulares, propuso transformar, a efectos prácticos, la región cuadrada en una región circular de área equivalente y radio a , con lo que la integral se simplifica según las siguientes expresiones

$$G(n,m,i,j) = \frac{j k_0^2}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^a H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) \rho' d\rho' d\phi' = \begin{cases} \frac{j}{2} [\pi k_0 a H_1^{(2)}(k_0 a) - 2j] & \text{si } n,m = i,j \\ \frac{j \pi k_0 a}{2} J_1(k_0 a) H_0^{(2)}(k_0 \rho_{n,m;i,j}) & \text{si } n,m \neq i,j \end{cases} \quad (3.77)$$

donde ρ' y ϕ' son las coordenadas polares centradas en la celda (i,j) y $\rho_{n,m;i,j}$ la distancia entre los centros de la celdas (n,m) y (i,j) .

Todas las celdas de la malla son cuadradas y dispuestas a intervalos regulares de forma que la función $G(n,m,i,j)$ depende únicamente de los desplazamientos relativos $(n-i)$ y $(m-j)$. De esta manera, el doble sumatorio de (3.75) es una convolución discreta bidimensional. La

mejor forma de calcularla es utilizando las propiedades de la convolución en el espacio transformado, donde se reduce a un simple un producto punto a punto de espectros. Los espectros pueden hallarse mediante FFT-2D. El sistema de ecuaciones se resuelve mediante el Método del Gradiente Conjugado {Ap. A.2}. Afortunadamente, el operador traspuesto conjugado también presenta estructura de convolución, pudiéndose aplicar en su cálculo la misma técnica.

$$\bar{A}^* \cdot J_z' = \frac{J_z'(n,m)}{C^*(n,m)} - \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} J_z'(i,j) G^*(n-i,m-j) \quad (3.78)$$

Una vez resuelto el sistema de ecuaciones, y a partir de las densidades de corriente obtenidas, es muy sencillo determinar el campo difractado sobre el objeto mediante

$$E_z(n,m) = E_z^{inc}(n,m) + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} J_z'(i,j) G(n-i,m-j) \quad (3.79)$$

3.3.2.2 Campo dispersado en la agrupación de medida

Todos los desarrollos de métodos directos se orientan a su utilización en el estudio de la tomografía de microondas, por lo tanto, es necesario calcular los campos dispersados que se medirían en una agrupación de antenas situada alrededor del objeto. Partiendo de la expresión (3.79) puede obtenerse

$$E_z^s(x_{ant}, y_{ant}) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} J_z'(i,j) K(x_{ant}-i, y_{ant}-j) \quad (3.80)$$

siendo (x_{ant}, y_{ant}) las coordenadas de las antenas receptoras donde se calculan los campos dispersados, y $K(x_{ant}-n, y_{ant}-m)$ tiene la misma expresión que (3.77). En este caso, y al estar en general los puntos de cálculo fuera de la malla, no se pueden utilizar FFT's en el cálculo del sumatorio.

3.4 MÉTODO DEL GRADIENTE CONJUGADO PARA EL CASO TRANSVERSAL ELÉCTRICO (TE-2D) Y TRIDIMENSIONAL

Se ha decidido incluir en un solo apartado a los casos TE bidimensional y tridimensional ya que la forma de abordarlos con el método del gradiente conjugado es muy parecida. Se realiza únicamente una somera presentación de los métodos sin entrar en la formulación completa, ya que a pesar de haberse desarrollado los códigos en el marco de esta tesis, al final únicamente se ha estudiado el problema inverso para el caso TM, dejándose para un futuro los otros dos casos. El desarrollo completo de la formulación puede hallarse en las referencias que se irán presentando.

3.4.1 Caso transversal eléctrico (TE)

Los modos transversales eléctricos (TE) son configuraciones de campo cuyas componentes de campo eléctrico se encuentran en un plano transversal a la dirección de propagación de la onda electromagnética. Del mismo modo que en el caso TM, la componente magnética del campo no sufre fenómenos de despolarización debido a la invarianza del objeto en esa dirección. En cambio, al tener el campo eléctrico componentes en la dirección donde existen discontinuidades dieléctricas aparecen esos fenómenos de despolarización que complican el desarrollo del algoritmo. Al mismo tiempo debido a que el caso bidimensional, en comparación con el tridimensional, presenta fenómenos de despolarización mucho más fuertes, el algoritmo TE es un buen test del método para el caso tridimensional.

La ecuación integral de partida obtenida en {2.3} puede ser reescrita en términos del potencial vector, \vec{A} , como

$$\begin{aligned} \vec{E}^{inc}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) - \vec{E}^s(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + (k_0^2 + \nabla \nabla \cdot) \vec{A}(\vec{r}) = \\ \vec{E}(\vec{r}) + (k_0^2 + \nabla \nabla \cdot) \int_S C(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \end{aligned} \quad (3.81)$$

La discretización y resolución de la ecuación utilizando el método del gradiente conjugado (CGM) no es tan sencilla como lo era en el caso TM. La expansión de las incógnitas en términos de funciones pulso, ampliamente utilizadas debido a la sencillez de las integrales que generan, introducen discontinuidades en su representación de los campos, o corrientes, presentando un mal comportamiento cuando los operadores del problema tienen derivadas. Debido a ello, los primeros algoritmos planteados utilizando como base el CGM producían resultados muy inexactos. [Borup '85] demostró mediante objetos cilíndricos los malos

resultados del método. Posteriormente [Joachimowicz '90] analizó la fuente de estos errores y presentó una serie de modificaciones en el algoritmo. Mediante una formulación integral, usando funciones generalizadas e introduciendo, como novedad, integrales de superficie relacionadas con las densidades superficiales de carga (ocasionadas por las componentes normales del campo eléctrico en las superficies de separación de los dieléctricos), se consiguieron mejorar los resultados. Sin embargo el grado de complejidad del algoritmo no compensaba la inexactitud de los resultados obtenidos.

Finalmente [Zwamborn '91a] [Zwamborn '91b] desarrolló la *Weak Form* del CGM utilizando funciones "roof-top" (funciones tejado) como funciones base y peso. Su utilización permite conseguir dos importantes logros. En primer lugar, el operador *grad-div* que actúa sobre el potencial vector se integra analíticamente únicamente sobre el dominio del objeto. En segundo lugar, se mantiene la estructura de convolución escalar para cada una de las dos componentes del potencial vector, con lo que su implementación mediante transformadas de Fourier permite optimizar tanto la velocidad como la memoria necesaria en la ejecución. Finalmente, es preciso indicar que todo el desarrollo del algoritmo se realiza sobre el vector densidad de flujo, ya que presenta la gran ventaja de asegurar el cumplimiento de las condiciones de contorno debido a la continuidad de su componente normal a través de las superficies de separación de los distintos dieléctricos.

Sustituyendo la densidad de flujo eléctrico

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (3.82)$$

en la ecuación (3.81) puede obtenerse

$$\vec{E}^i(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon(\vec{r})} + (k_0^2 + \nabla \cdot \nabla) \int_{s'} C(\vec{r}') \frac{\vec{D}(\vec{r}')}{\epsilon(\vec{r}')} G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' \quad (3.83)$$

3.4.1.1 Desarrollo del algoritmo

Como paso previo al desarrollo del algoritmo es necesaria la discretización del objeto. A diferencia del caso TM la discretización es ahora entrelazada y diferente en función de la componente de campo eléctrico sobre la que se estén realizando los cálculos [Zwamborn '91b]. Una vez más, el tamaño de las celdas es regular y en ellas la permitividad constante. Sus centros se encuentran en los puntos $(n\Delta h, m\Delta h)$, siendo Δh el lado de cada celda. Debido a la discretización entrelazada, los puntos donde se encuentran centradas las

funciones base y peso vienen dados por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\bar{r}_{n,m}^x &= \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta h, m \Delta h \right) \\ \bar{r}_{n,m}^y &= \left(n \Delta h, \left(m - \frac{1}{2} \right) \Delta h \right)\end{aligned}\quad (3.84)$$

según la dirección de la componente de campo eléctrico. Los saltos de permitividad únicamente se producen en los puntos $x = (n - 1/2)\Delta h$ e $y = (m - 1/2)\Delta h$ según la componente de campo. La Fig. 3.10 muestra la discretización entrelazada y las funciones, dependientes de la dirección, utilizadas.

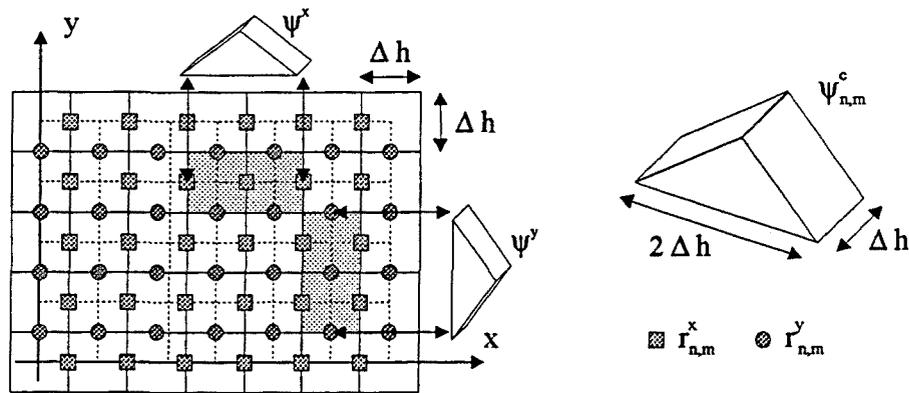


Fig. 3.10 Discretización entrelazada para el caso TE. Las funciones base son "roof-top".

Para poder abordar de forma eficiente el operador *grad-div* se definen las funciones peso vectoriales llamadas "roof-top" (tejado) que pueden expresarse como

$$\begin{aligned}\Psi^x(\vec{r}) &= \psi^x(\vec{r}) \hat{x} = \Lambda(x; 2\Delta h) \Pi(y; \Delta h) \hat{x} \\ \Psi^y(\vec{r}) &= \psi^y(\vec{r}) \hat{y} = \Pi(x; \Delta h) \Lambda(y; 2\Delta h) \hat{y}\end{aligned}\quad (3.85)$$

Multiplicando las dos ecuaciones escalares que se derivan de (3.83), una para cada componente de campo, por las funciones "roof-top" e integrándolas sobre el dominio del objeto, S , puede obtenerse

$$\begin{aligned} \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) E_c^{inc}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \frac{D_c(\vec{r})}{\epsilon(\vec{r})} d\vec{r} \\ &+ k_0^2 \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) A_c(\vec{r}) d\vec{r} + \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \nabla(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})) d\vec{r} \end{aligned} \quad (3.86)$$

donde c toma como valor la coordenada x o y .

Mediante la utilización del teorema de Gauss en cada subdominio donde la función "roof-top" por la divergencia del potencial vector es continua y diferenciable, y mediante la continuidad de la componente normal de esa función a través de las separaciones entre los subdominios [Zwamborn '91], el último término de (3.86) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \nabla(\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})) d\vec{r} &= - \int_{S'} \nabla \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} = \\ &- \int_{S'} \partial_c \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} \end{aligned} \quad (3.87)$$

donde la transformación del operador *grad-div* permite que pueda integrarse sobre el dominio del objeto.

Utilizando las funciones vectoriales "roof-top" como funciones base, se expresa la densidad de flujo eléctrico y el potencial vector para cada componente como

$$\begin{aligned} D_c(\vec{r}) &= \sum_{k,l} d_{k,l}^c \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{k,l}^c) \\ A_c(\vec{r}) &= \sum_{k,l} a_{k,l}^c \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{k,l}^c) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.87) puede obtenerse

$$\begin{aligned} e_c^{inc}(\vec{r}_{n,m}^c) &= \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) E_c^{inc}(\vec{r}) d\vec{r} = \sum_{k,l} \left[d_{k,l}^c \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \frac{1}{\epsilon(\vec{r})} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{k,l}^c) d\vec{r} \right. \\ &+ a_{k,l}^c k_0^2 \int_{S'} \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{k,l}^c) d\vec{r} - a_{k,l}^x \int_{S'} \partial_c \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \partial_x \Psi^x(\vec{r} - \vec{r}_{k,l}^x) d\vec{r} \\ &\left. - a_{k,l}^y \int_{S'} \partial_c \Psi^c(\vec{r} - \vec{r}_{n,m}^c) \partial_y \Psi^y(\vec{r} - \vec{r}_{k,l}^y) d\vec{r} \right] \end{aligned} \quad (3.89)$$

Particularizando (3.89) para cada una de las dos componentes con las que se expresa el campo

y calculando todas las integrales involucradas, puede obtenerse un sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^{inc} \\ \vec{e}_y^{inc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{d}_x \\ \vec{d}_y \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Mediante el método del gradiente conjugado se resuelve el valor de las incógnitas. Una vez conocidos los pesos del desarrollo del vector desplazamiento eléctrico para cada componente y utilizando las funciones base y los valores de permitividad en cada celda puede determinarse finalmente el campo eléctrico sobre la malla. Para los detalles completos de la implementación del algoritmo puede recurrirse a las siguientes referencias [Zwamborn '91a], [Zwamborn '91b] y [Vaquer '93b].

3.4.2 Caso tridimensional

El desarrollo del algoritmo para el caso tridimensional es exactamente el mismo que en el caso TE bidimensional conservando todas las propiedades presentadas, únicamente hay que añadir una componente más. De nuevo el operador *grad-div* es integrado analíticamente únicamente sobre el dominio del objeto, manteniéndose la formulación escalar con estructura de convolución del potencial vector, de hecho son tres convoluciones escalares implementables de forma muy eficiente mediante FFT. De nuevo el algoritmo se desarrolla en términos del vector densidad de flujo eléctrico.

La función de Green para el caso tridimensional viene dada por

$$G(k_0 | \vec{r} |) = \frac{e^{-jk_0 |\vec{r}|}}{4\pi \|\vec{r}\|} \quad (3.91)$$

Al tratar un problema tridimensional, el mallado es tridimensional y con celdas regulares cúbicas. La discretización entrelazada obliga de nuevo a definir los vectores posición en función de la componente con lo que funciones base y peso "roof-top" tienen las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Psi^x(\vec{r}) &= \psi^x(\vec{r}) \hat{x} = \Lambda\left(x + \frac{1}{2}\Delta h; 2\Delta h\right) \cdot \Pi(y; \Delta h) \cdot \Pi(z; \Delta h) \hat{x} \\ \Psi^y(\vec{r}) &= \psi^y(\vec{r}) \hat{y} = \Pi(x; \Delta h) \cdot \Lambda\left(y + \frac{1}{2}\Delta h; 2\Delta h\right) \cdot \Pi(z; \Delta h) \hat{y} \\ \Psi^z(\vec{r}) &= \psi^z(\vec{r}) \hat{z} = \Pi(x; \Delta h) \cdot \Pi(y; \Delta h) \cdot \Lambda\left(z + \frac{1}{2}\Delta h; 2\Delta h\right) \hat{z} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Por lo tanto únicamente se producen saltos de permitividad en las posiciones

$$\vec{r}_{m,n,p} = \left(\left(m - \frac{1}{2} \right) \Delta h, \left(n - \frac{1}{2} \right) \Delta h, \left(p - \frac{1}{2} \right) \Delta h \right) \quad (3.93)$$

La Fig. 3.11 muestra la discretización volumétrica entrelazada con los vectores posición utilizados en función de la componente.

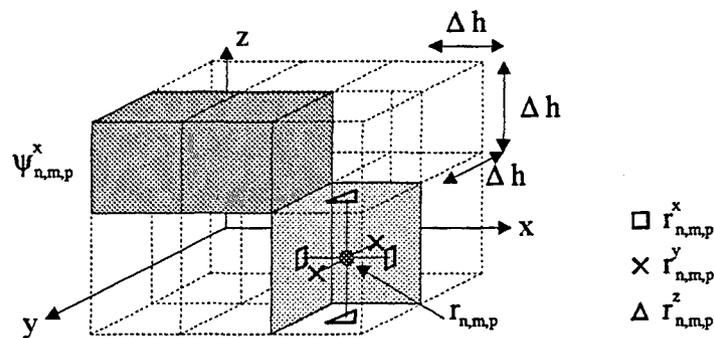


Fig. 3.11 Discretización entrelazada para el caso tridimensional. Las funciones base y peso son "roof-top".

La obtención del algoritmo sigue los mismos pasos que el caso TE. Primero se multiplica ambos lados de (3.83) en su formulación tridimensional por las funciones peso (3.92) según cada una de las tres componentes del espacio e integrando en todo el dominio del objeto. A continuación se aplica el teorema de Gauss para reducir la complejidad del operador *grad-div* y dejar unas expresiones fácilmente integrables al sustituir el potencial vector y el vector desplazamiento eléctrico por sus desarrollos en términos de las funciones base en cada una de sus componentes. Tras estas operaciones se llega a un sistema de ecuaciones fácilmente resoluble mediante el gradiente conjugado. Hay que recordar una vez más que gracias a la estructura de convolución del potencial vector y al método del gradiente conjugado no es necesario disponer físicamente del sistema de ecuaciones, optimizándose la memoria requerida.

El desarrollo detallado del método puede encontrarse en [Zwamborn '91a] [Zwamborn '92] y [Vaquer '93b].

3.5 EL MÉTODO RECURSIVO DE LAS MATRICES AGREGADAS (RATMA)

Cuando se desarrollaron las soluciones analíticas para el cálculo de los campos dispersados de un cilindro multicapa bidimensional se encontraron unas relaciones entre los coeficientes del desarrollo modal del campo incidente con los coeficientes de la solución modal del campo dispersado. La relación entre esos coeficientes dependía únicamente de la geometría del cilindro, de esta forma, la solución obtenida era independiente del ángulo de incidencia y tipo de onda. Simplemente cambiando los coeficientes del desarrollo modal de la onda incidente se podían encontrar los nuevos del campo dispersado.

Como se verá posteriormente, tanto para la simulación de un sistema de tomografía por microondas, problema directo, como en alguno de los algoritmos de reconstrucción, es necesario hallar los campos dispersados medidos en una agrupación y los difractados en el interior del objeto para múltiples direcciones de incidencia. Los métodos basados en el método del gradiente conjugado para objetos de sección arbitraria exigen una reejecución completa para cada una de las vistas. El desarrollo de un algoritmo que permita obtener la solución multivista para el problema directo sería de gran utilidad para ahorrar tiempo de computación en esas aplicaciones.

En este apartado se presenta un algoritmo que permite obtener los coeficientes del desarrollo modal de los campos dispersados y difractados, dependientes únicamente de la geometría y permitividades del objeto, proporcionando una solución multivista del problema directo. El algoritmo presentado es completamente general en su filosofía, salvo algunas particularizaciones, sirviendo tanto para los casos bidimensionales TM y TE como para el tridimensional. En esta tesis únicamente se presentan resultados del caso bidimensional, aunque se iniciará en breve la programación del caso tridimensional.

El método fue planteado por W. C. Chew y prácticamente todas las referencias sobre el tema son suyas o de alguno de sus colaboradores. El algoritmo consiste, básicamente, en encontrar todas las interacciones mutuas entre los distintos subdispersores en que se divide el objeto. En [Chew '90a] y [Ishimaru '91] pueden encontrarse explicaciones sencillas acerca de la filosofía del algoritmo. Las primeras versiones del mismo presentaban algunos problemas debido a la violación del teorema de adición {3.2.2.3} [Chew '89], [Chew '90b], [Wang '90], [Wang '91], un enventanado de las fórmulas de traslación permitía mejorar algunos de los problemas [Chew '92b], aunque finalmente la versión generalizada del algoritmo, y la que se ha adoptado, permite obtener buenos resultados [Chew '92a]. Los ejemplos de aplicación, al menos de los que se tenga conocimiento, eran con medio externo aire y materiales sin

pérdidas de baja permitividad. Al mismo tiempo, el cálculo del campo difractado en el interior únicamente se encontraba desarrollado, al menos en la bibliografía consultada, para versiones antiguas del algoritmo [Chew '90b] y no para su versión generalizada. El desarrollo del método en esta tesis incorpora, además de los campos en el interior, la presencia de cuerpos metálicos.

3.5.1 Planteamiento del algoritmo

Las bases teóricas para el desarrollo del algoritmo ya han sido presentadas anteriormente en los apartados que hablan de desarrollos modales {3.2}. Como la nomenclatura del desarrollo puede hacerse un poco compleja, es necesario destinar estas primeras líneas a describirla. El objeto del que se quiere encontrar la solución general del problema directo es dividido en subdispersores. En principio, no existe ninguna restricción en cuanto a su tamaño, siempre y cuando sean homogéneos, pero por comodidad, y para obtener un código más general, se supone que la discretización es regular e igual a la presentada en los métodos anteriores. Los subdispersores se agrupan en capas de elementos equidistantes del centro del objeto, coincidente con el origen de coordenadas utilizado en el desarrollo. La Fig. 3.12 muestra la discretización y agrupamiento por capas de los subdispersores en un caso bidimensional.

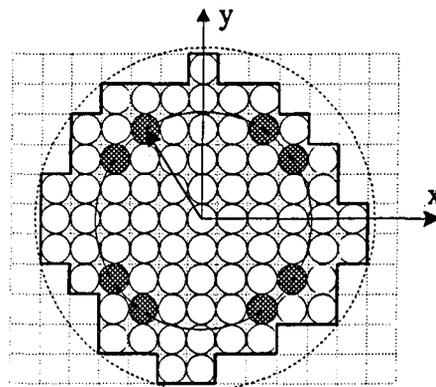


Fig. 3.12 Discretización de un objeto en subdispersores regulares agrupados por capas concéntricas.

En el caso bidimensional los subdispersores de sección cuadrada son sustituidos por otros de igual área pero de sección circular. De forma parecida, en el caso tridimensional los elementos serían esferas de igual volumen a los cubos de la discretización. Para poder representar correctamente al objeto, las dimensiones de los subdispersores deben ser pequeñas en términos

de la longitud de onda, por ello el criterio de discretización es el mismo al utilizado para el caso TM {3.3}, en general $0.1 \lambda_{\min}$ (la longitud de onda mínima determinada por la permitividad más elevada).

Antes de presentar el desarrollo formal del algoritmo, y dada su complejidad, se presenta una descripción más intuitiva del mismo mediante un ejemplo de cinco subdispersores cilíndricos (dieléctricos o metálicos) aislados: uno central y los cuatro restantes equidistantes del origen de coordenadas. Algunos de los pasos que se indican carecerán de sentido hasta que no sean complementados con la formulación matemática, pero permiten dar una idea global del método seguido en el desarrollo analítico. Considerando en primer lugar únicamente al subdispersor central, Fig. 3.13, el desarrollo modal del campo dispersado puede obtenerse mediante la matriz de dispersión del subdispersor aislado, $\bar{T}_{1(1)}$, y los coeficientes del desarrollo modal del campo incidentes, a , {3.2.3.3}. Aplicando la formulación vista es muy sencillo determinar el campo en un punto p .

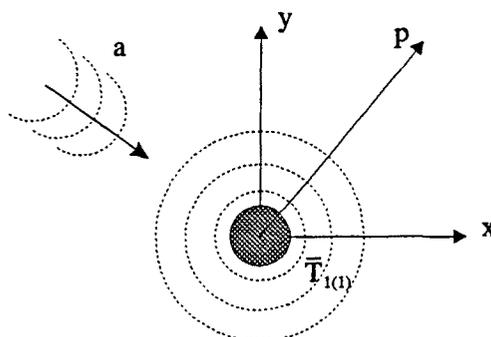


Fig. 3.13 Subdispersor aislado: el desarrollo modal de sus campos dispersados está relacionado con el del campo incidente mediante la matriz de dispersión (T).

Si se añaden cuatro nuevos subdispersores, de los que se conoce su matriz de dispersión $\bar{T}_{j(1)}$ considerando a cada uno aisladamente, el campo dispersado en un punto p es la contribución de los campos dispersados por cada dispersor, pero considerando la presencia de los restantes que afectan al campo que le incide. Por ello, aparece una nueva matriz de dispersión para cada subdispersor que ya considera la presencia del resto: $\bar{T}_{j(s)}$. En la formulación matemática, dado que los subdispersores están descentrados, es necesario emplear las fórmulas de traslación presentadas en {3.2.2.3}. La Fig. 3.14a muestra la contribución de los subdispersores al campo dispersado. El objetivo final es encontrar una matriz de dispersión agregada, $\bar{T}_{(s)}$, que permita modelar el problema como un solo dispersor centrado caracterizado por esa nueva matriz de dispersión. Esa matriz únicamente puede aplicarse para puntos exteriores al círculo que engloba a todos los subdispersores, Fig. 3.14b.

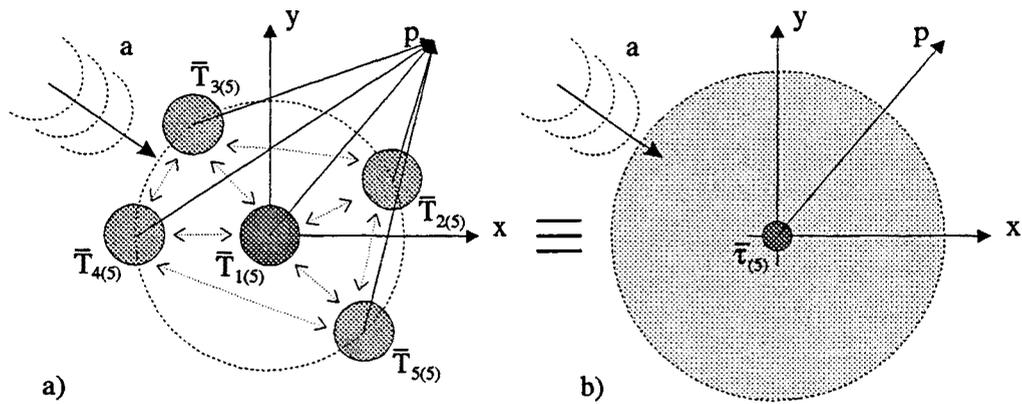


Fig. 3.14 a) Interacciones entre subdispersores. b) Mediante la matriz de dispersión agregada se simplifica el problema original.

El procedimiento para hallar las matrices de transmisión para cada subdispersor y la matriz agregada se basa en aplicar las fórmulas de traslación de forma que se pueda plantear un sistema de ecuaciones que permita resolver todas las incógnitas. En primer lugar se expresa el campo dispersado por los subdispersores exteriores como campo incidente del central, lo que permite relacionar la matriz de transmisión del subdispersor central aislado con la matriz agregada y las matrices de los subdispersores exteriores, $\bar{T}_{j(5)}$. La Fig. 3.15 muestra la zona de validez de la expresión que se obtiene, la limitación es debida a las fórmulas de traslación a emplear. En {3.5.2} se presenta el desarrollo matemático.

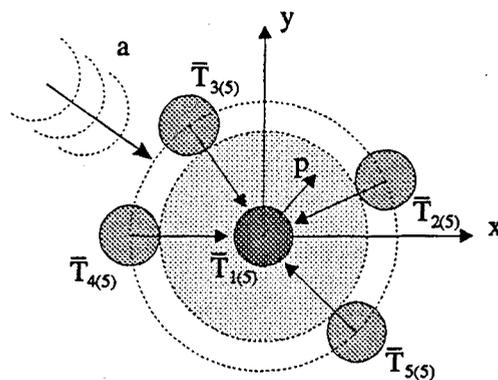


Fig. 3.15 Los campos dispersados por los subdispersores añadidos se expresan como campo incidente del central.

Para obtener el sistema de ecuaciones que permite encontrar las $\bar{T}_{j(5)}$, se expresan de forma sucesiva y mediante las fórmulas de traslación los campos dispersados del subdispersor central

y de los añadidos como campo incidente de uno de ellos, tal como muestra la Fig. 3.16a. El campo en el punto de medida puede obtenerse mediante un problema equivalente del subdispersor aislado al que le incide un campo incidente de valor, a' , distinto al original, tal como muestra la Fig. 3.16b. La comparación de las expresiones matemáticas para ambos casos permiten completar el sistema de ecuaciones. Tras su resolución puede obtenerse $\bar{\tau}_{(5)}$. Si se añadieran nuevas capas de subdispersores se iría repitiendo el proceso de forma recursiva.

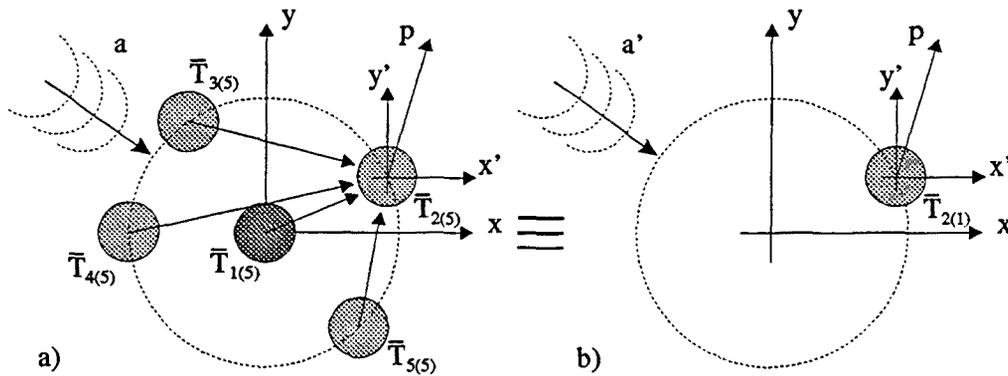


Fig. 3.16 a) Campos dispersados como campo incidente del subdispersor 2. b) Problema equivalente con campo incidente distinto.

Finalmente, en la Fig. 3.17 se incluye un cuadro-resumen del convenio de signos, vectores y ángulos que se utilizan en las distintas fórmulas de traslación que aparecen a lo largo del desarrollo matemático.

3.5.2 Campos dispersados en el exterior del objeto

Si se supone conocida la solución del campo difractado por una agrupación de n subdispersores, ésta tendrá la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \phi(r) &= Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot a + \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{(n)} \cdot a \\ Rg[\psi'(k_0 r_0)]_m &= J_m(k_0 \rho_0) e^{jm\phi_0} \quad [\psi'(k_0 r_0)]_m = H_m^{(2)}(k_0 \rho_0) e^{jm\phi_0} \quad (3.94) \\ &\quad -nterm \leq m \leq nterm \end{aligned}$$

Donde el primer término de la expresión representa el desarrollo modal del campo incidente, desarrollado mediante serie de funciones de Bessel de primera especie ponderadas por los

Convenio para las fórmulas de traslación

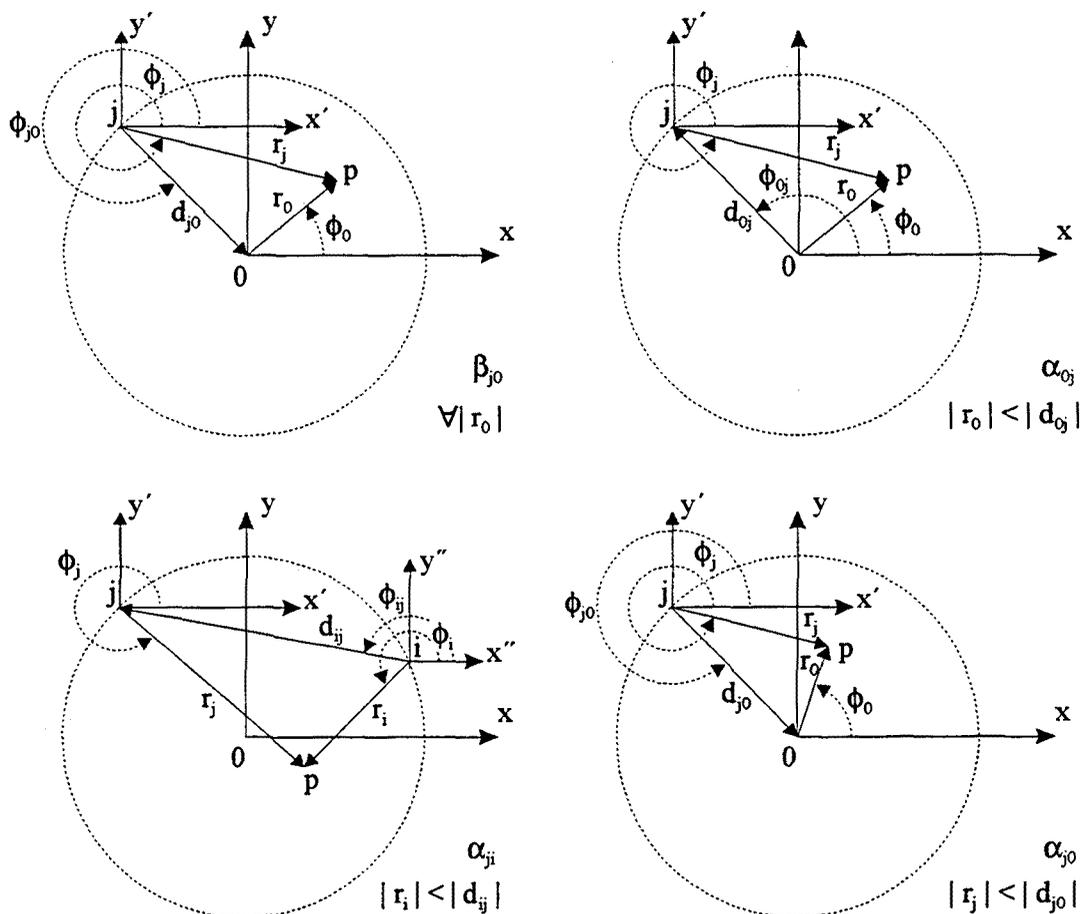


Fig. 3.17 Convenio para las fórmulas de traslación utilizadas en la deducción del RATMA.

coeficientes del vector a , mientras que el segundo es el desarrollo modal del campo dispersado por la agrupación de subdispersores, representados por su **matriz de dispersión agregada**, $\bar{\tau}_{(n)}$, que junto con los coeficientes del desarrollo del campo incidente constituyen los coeficientes de la serie de funciones de Hankel de segunda especie. El número de modos necesario para una correcta representación de los campos depende de la dimensión máxima del objeto, siendo válido el criterio presentado en {3.2.2.2}. El grupo de subdispersores es tratado, fuera del radio máximo que los engloba, como un solo dispersor puntual centrado en los ejes de coordenadas, tal como muestra la Fig. 3.18.

Si se añade un nuevo grupo de n' subdispersores equidistantes del centro a los n anteriores, se obtienen $n' + 1$ centros de dispersión distintos, Fig. 3.19. Por lo tanto el campo total debe representarse como

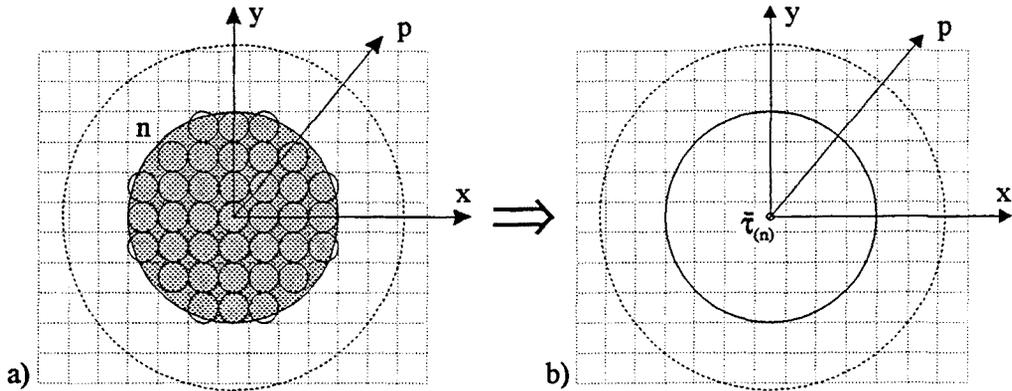


Fig. 3.18 Fuera del radio que los engloba los n subdispersores son tratados como uno central caracterizado por su matriz de dispersión agregada.

$$\phi(r) = Rg \psi^i(k_0, r_0) \cdot a + \psi^i(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{n(n+n)} \cdot a + \sum_{i=n+1}^{n+n'} \psi^i(k_0, r_i) \cdot \bar{T}_{i(n+n)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \quad (3.95)$$

donde el primer término de (3.95) es el campo incidente, el segundo la contribución al campo dispersado por los n subdispersores agregados, pero considerando la presencia de los n' nuevos, y el último término representa la contribución al campo dispersado de los nuevos n' subdispersores considerando la presencia de los n subdispersores agregados. La ecuación contiene $n'+1$ matrices incógnita, $\bar{T}_{i(n+n)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ y $\bar{\tau}_{n(n+n)}$, que deberán ser resueltas.

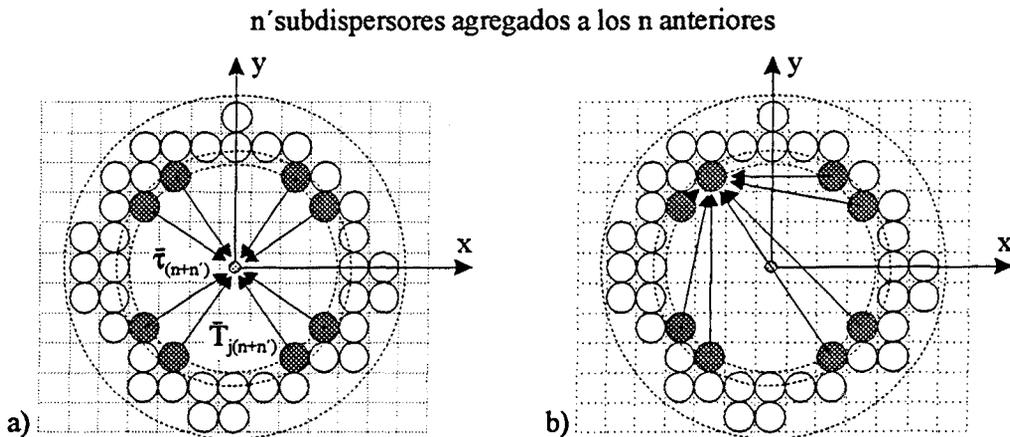


Fig. 3.19 n' subdispersores equidistantes del centro son añadidos a los n agregados.

Si se expresa el campo dispersado por los n' subdispersores añadidos como campo incidente de la agrupación de n subdispersores, Fig. 3.19a, mediante las fórmulas de traslación vistas en {3.2.2.3} se obtiene

$$\begin{aligned} \phi(r) = & Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot a + Rg \psi'(k_0, r_0) \sum_{i=n+1}^{n+n'} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a + \\ & + \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{n(n+n')} \cdot a \end{aligned} \quad (3.96)$$

El margen de validez de esta expresión está restringido a aquellos puntos que cumplen la condición $|r_0| < d_{0i}$, ya que en caso contrario las fórmulas de traslación no son válidas. Los dos primeros términos de (3.96) pueden interpretarse, al ser un desarrollo en funciones de Bessel de primera especie, como una onda incidente sobre los n subdispersores agregados, mientras que el tercer término correspondería a su campo dispersado. Si se compara la expresión con (3.94), se observa que son idénticas y únicamente ha cambiado el valor de los coeficientes modales del campo incidente, por lo tanto, el campo dispersado ha de ser el producido por $\bar{\tau}_{(n)}$, pero con el nuevo campo incidente. Asociando términos

$$\bar{\tau}_{n(n+n')} = \bar{\tau}_{(n)} \cdot (\bar{I} + \sum_{i=n+1}^{n+n'} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0}) \quad (3.97)$$

Con lo que se ha reducido en una el número de matrices incógnita. Es necesario encontrar más ecuaciones que permitan resolver los valores de las restantes matrices $\bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0}$. Para ello se expresan los campos dispersados por todos los subdispersores como campo incidente del j -ésimo subdispersor de los n' añadidos, Fig. 3.19b. Utilizando de nuevo las fórmulas de traslación puede obtenerse

$$\begin{aligned} \phi(r) = & Rg \psi'(k_0, r_j) \cdot \bar{\beta}_{j0} \cdot a + Rg \psi'(k_0, r_j) \cdot \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{n(n+n')} \cdot a + \\ & + Rg \psi'(k_0, r_j) \sum_{i=n+1}^{n+n'} \bar{\alpha}_{ji} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a + \\ & + \psi'(k_0, r_j) \cdot \bar{T}_{j(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{j0} \cdot a \end{aligned} \quad (3.98)$$

Con un razonamiento parecido al aplicado a (3.96), los tres primeros términos de (3.98) pueden interpretarse como una onda incidente al j -ésimo subdispersor, mientras que el último término es su campo dispersado. Mediante la expresión que relaciona el campo dispersado de un subdispersor aislado con los coeficientes modales del incidente

$$\phi(r) = Rg \psi^i(k_0, r_j) \cdot a' + \psi^i(k_0, r_j) \cdot \bar{T}_{j(1)} \cdot a' \quad (3.99)$$

puede obtenerse, por comparación entre (3.98) y (3.99)

$$\bar{T}_{j(n+n')} \beta_{j0} = \bar{T}_{j(1)} \cdot \left(\bar{\beta}_{j0} + \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{n(n+n')} + \sum_{\substack{i=n+1 \\ i \neq j}}^{n+n'} \bar{\alpha}_{ji} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right) \quad j = n+1, \dots, n+n' \quad (3.100)$$

a la que puede incluirse la expresión (3.97). Si se repite el proceso para cada uno de los subdispersores añadidos puede obtenerse finalmente

$$\bar{T}_{j(n+n')} \beta_{j0} = \bar{T}_{j(1)} \cdot \left(\bar{\beta}_{j0} + \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{(n)} \cdot \left(\bar{I} + \sum_{i=n+1}^{n+n'} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right) + \sum_{\substack{i=n+1 \\ i \neq j}}^{n+n'} \bar{\alpha}_{ji} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right) \quad (3.101)$$

$$j = n+1, \dots, n+n'$$

La expresión (3.101) es un sistema matricial con n' ecuaciones matriciales y n' matrices incógnitas. Reagrupando términos puede obtenerse

$$\bar{D}_j \cdot \bar{T}_{j(n+n')} \beta_{j0} = \bar{T}_{j(1)} \cdot \left(\bar{\beta}_{j0} + \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{(n)} + \sum_{\substack{i=n+1 \\ i \neq j}}^{n+n'} (\bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{(n)} \cdot \bar{\alpha}_{0i} + \bar{\alpha}_{ji}) \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right) \quad (3.102)$$

$$j = n+1, \dots, n+n'$$

donde

$$D_j = \left(\bar{I} - \bar{T}_{j(1)} \cdot \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{(n)} \cdot \bar{\alpha}_{0j} \right) \quad (3.103)$$

El sistema de ecuaciones puede escribirse de forma más sucinta como

$$\sum_{i=n+1}^{n+n'} \bar{A}_{ji} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \beta_{i0} = -\bar{T}_{j(1)} \cdot (\beta_{j0} + \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{(n)}) \quad (3.104)$$

$$j = n+1, \dots, n+n'$$

con

$$\bar{A}_{ji} = \begin{cases} -\bar{D}_j & i=j \\ \bar{T}_{j(1)} \cdot (\bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{(n)} \cdot \bar{\alpha}_{0i} + \bar{\alpha}_{ji}) & i \neq j \end{cases} \quad (3.105)$$

Una vez resuelto el sistema y obtenidas las n' matrices $\bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0}$, puede hallarse $\bar{\tau}_{n(n+n')}$ utilizando (3.97).

Si se reescribe la ecuación (3.95) de forma que todos los desarrollos modales se encuentren referidos al origen de coordenadas, mediante $\psi^i(k_0, r_i) = \psi^i(k_0, r_0) \cdot \bar{\beta}_{0i}$, de forma que la expresión únicamente sea válida para puntos fuera de la agrupación de $n+n'$ subdispersores, se obtiene

$$\phi(r) = Rg \psi^i(k_0, r_0) \cdot a + \psi^i(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{n(n+n')} \cdot a + \psi^i(k_0, r_0) \cdot \sum_{i=n+1}^{n+n'} \bar{\beta}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \quad (3.106)$$

que si se compara con la solución general al problema de una agrupación de $n+n'$ subdispersores

$$\phi(r) = Rg \psi^i(k_0, r_0) \cdot a' + \psi^i(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{(n+n')} \cdot a' \quad (3.107)$$

permite obtener finalmente la matriz agregada buscada

$$\bar{\tau}_{(n+n')} = \bar{\tau}_{(n)} + \sum_{i=n+1}^{n+n'} (\bar{\beta}_{0i} + \bar{\tau}_{(n)} \cdot \bar{\alpha}_{0i}) \cdot \bar{T}_{i(n+n')} \cdot \bar{\beta}_{i0} \quad (3.108)$$

El método recursivo se va repitiendo añadiendo las sucesivas capas de subdispersores que forman el objeto hasta encontrar la matriz agregada total, $\bar{\tau}_{(N)}$, que considera al objeto completo.

$$\phi(r) = Rg \psi^i(k_0, r_0) \cdot a + \psi^i(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{(N)} \cdot a \quad (3.109)$$

Esta solución únicamente permite encontrar los campos fuera del círculo centrado en el origen de coordenadas que engloba al objeto, no siendo válida en su interior.

El método es recursivo y no iterativo, a diferencia de los métodos basados en el gradiente conjugado el tiempo necesario para encontrar la solución depende exclusivamente del tamaño del objeto y el medio externo, que determina el número de modos necesario, y del número

y tamaño de los subdispersores en que se divide. En el apartado de resultados se comentan sus ventajas en comparación con los métodos presentados anteriormente.

Al sustituir las celdas por cilindros equivalentes de igual área se produce una superposición de los mismos. En sí esto no constituye ningún problema, ya que matemáticamente el campo generado por cada uno de ellos proviene del centro del subdispersor, con lo que el problema de la superposición no tiene importancia.

3.5.3 Campos difractados en el interior del objeto

De la misma forma que se desarrolló un método para encontrar el desarrollo modal de los campos en el exterior del objeto, también puede realizarse un desarrollo a la inversa para encontrar los campos difractados en su interior. Para ello habrá que calcular la matriz $\bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ de cada uno de los subdispersores, es decir encontrar su contribución al campo dispersado considerando la presencia de todo el objeto, para luego poder determinar los campos en el interior de cada uno de ellos mediante la matriz de transmisión, $\bar{X}_{i(N)}$, presentada en {3.2.3.3}. Una vez más, la solución obtenida es válida para cualquier tipo y ángulo de incidencia. En este apartado se mantiene la notación anterior, pero se introducen nuevas notaciones que ya serán comentadas a medida que aparezcan.

Partiendo de la solución de todos los N subdispersores agregados

$$\phi(r) = Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot a + \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{(N)} \cdot a \quad (3.110)$$

y recordando que los subdispersores equidistantes del origen de coordenadas se hallan agrupados en N_c capas concéntricas, numeradas de dentro a fuera, puede sacarse la capa más externa, de forma que considerando a todos sus subdispersores de forma individual, la ecuación (3.110) puede reescribirse como

$$\phi(r) = Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot a + \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{N_c-1(N)} \cdot a + \sum_{i=1}^{n_{N_c}} \psi'(k_0, r_i) \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \quad (3.111)$$

donde $\bar{\tau}_{N_c-1(N)}$ es la matriz agregada de las $N_c - 1$ capas restantes considerando la presencia de todos los subdispersores, N , y n_{N_c} el número de dispersores de la capa N_c . De forma parecida a la obtención del campo fuera del objeto, puede expresarse el campo dispersado por los subdispersores de la última capa como campo incidente del resto, de forma que, mediante el uso de las fórmulas de traslación, (3.111) se transforma en

$$\begin{aligned} \phi(r) = Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot a + Rg \psi'(k_0, r_0) \sum_{i=1}^{n_{N_c}} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a + \\ + \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{N_c-1(N)} \cdot a \end{aligned} \quad (3.112)$$

Comparando con la expresión de los campos con los de un objeto con únicamente $N_c - 1$ capas, puede obtenerse

$$\bar{\tau}_{N_c-1(N)} = \bar{\tau}_{(N_c-1)} \cdot (\bar{I} + \sum_{i=1}^{n_{N_c}} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}) \quad (3.113)$$

Como $\bar{\tau}_{(N_c-1)}$ se había obtenido en la penúltima iteración del cálculo de los campos en el exterior, no es necesario recalcularla. Nótese que ahora, por comodidad en la notación del desarrollo, las matrices agregadas se definen en función de las capas que las forman y de las capas que las influyen, a diferencia del caso anterior que la notación era por número de subdispersores. También se habían obtenido las matrices $\bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ para la última capa, de forma que este caso ya está solucionado.

En {3.2.3.3} se había definido la **matriz de transmisión**, \bar{X} , que relaciona los coeficientes del desarrollo modal del campo incidente con el desarrollo modal de los campos difractados en el interior de un cilindro homogéneo. Como en (3.112) se relacionan los campos dispersados por los subdispersores de la última capa como campo incidente de los dispersores interiores, por analogía, puede considerarse como una matriz de transmisión a un cilindro homogéneo de dieléctrico el del medio externo. De esa forma se define la **matriz de transmisión de una capa** como

$$\bar{\chi}_{N_c} = \bar{I} + \sum_{i=1}^{n_{N_c}} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \quad (3.114)$$

Si se saca una capa más, es decir la $N_c - 1$, puede realizarse un desarrollo idéntico

$$\phi(r) = Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\chi}_{N_c} \cdot a + \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{N_c-2(N)} \cdot a + \sum_{i=1}^{n_{N_c-1}} \psi'(k_0, r_i) \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \quad (3.115)$$

y mediante las fórmulas de traslación pueden expresarse los campos dispersados por las capas N_c y $N_c - 1$ como campo incidente de las $N_c - 2$ capas restantes

$$\begin{aligned} \phi(r) = Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\chi}_{N_c} \cdot a + Rg \psi'(k_0, r_0) \cdot \sum_{i=1}^{n_{N_c-1}} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a + \\ + \psi'(k_0, r_0) \cdot \bar{\tau}_{N_c-2(N)} \cdot a \end{aligned} \quad (3.116)$$

Comparando con la expresión de los campos para una agrupación de $N_c - 2$ capas y tomando los dos primeros términos como campo incidente, puede obtenerse que

$$\bar{\tau}_{N_c-2(N)} = \bar{\tau}_{(N_c-2)} \cdot (\bar{\chi}_{N_c} + \sum_{i=1}^{n_{N_c-1}} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}) \quad (3.117)$$

donde $\bar{\tau}_{(N_c-2)}$ fue determinado al calcular los campos en el exterior del objeto y faltará resolver las n_{N_c-2} matrices incógnita $\bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$. Expresando todos los campos dispersados como campos incidentes al j -ésimo subdispersor de la capa $N_c - 1$, puede plantearse un sistema de ecuaciones que permita resolver las matrices incógnita, de forma muy parecida a como se mostró en {3.5.2}. También puede definirse una nueva matriz de transmisión que englobe las dos capas exteriores, de forma que

$$\bar{\chi}_{N_c-1} = \bar{\chi}_{N_c} + \sum_{i=1}^{n_{N_c-1}} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \quad (3.118)$$

donde el subíndice indica hasta que capa, partiendo de la más externa, incluye esta nueva matriz de transmisión agregada.

De forma recursiva se van quitando capas hasta obtener las matrices $\bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ de todos los subdispersores y sucesivamente ampliando la matriz $\bar{\chi}_{N_c-i}$. En la capa $N_c - n$ se modelan los subdispersores exteriores mediante su matriz de transmisión agregada, $\bar{\chi}_{N_c-n+1}$, y los de las capas inferiores mediante su matriz de dispersión agregada, $\bar{\tau}_{N_c-n-1(N)}$, tal como muestra la Fig. 3.20.

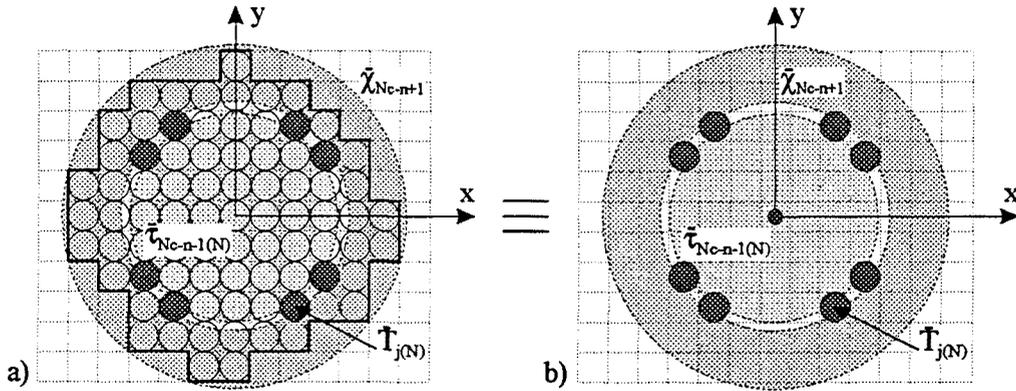


Fig. 3.20 Campo difractado en la capa N_c-n . a) modelo original y b) modelo equivalente.

La formulación más general para la obtención del sistema de ecuaciones para resolver las $\bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ incógnitas de la capa N_c-n consiste en expresar los campos dispersados por todos los subdispersores como campo incidente del j -ésimo

$$\begin{aligned} \phi(r) = & Rg \psi'(k_0, r_j) \cdot \bar{\beta}_{j0} \cdot \bar{\chi}_{N_c-n+1} \cdot a + Rg \psi'(k_0, r_j) \cdot \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{N_c-n-1(N)} \cdot a + \\ & + Rg \psi'(k_0, r_j) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_{N_c-n}} \bar{\alpha}_{ji} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a + \\ & + \psi'(k_0, r_j) \cdot \bar{T}_{j(N)} \cdot \beta_{j0} \cdot a \end{aligned} \quad (3.119)$$

Los tres primeros términos de (3.119) pueden interpretarse como una onda incidente en el j -ésimo subdispersor, mientras que el último término es su campo dispersado. Mediante la expresión que relaciona el campo dispersado de un subdispersor aislado con los coeficientes del campo incidente

$$\phi(r) = Rg \psi'(k_0, r_j) \cdot a' + \psi'(k_0, r_j) \cdot \bar{T}_{j(1)} \cdot a' \quad (3.120)$$

puede obtenerse por comparación entre (3.119) y (3.120) y repitiendo el proceso para todos los subdispersores de la capa

$$\bar{T}_{j(N)} \beta_{j0} = \bar{T}_{j(1)} \cdot \left(\bar{\beta}_{j0} \cdot \bar{\chi}_{N_c-n+1} + \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{\tau}_{N_c-n-1(N)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_{N_c-n}} \bar{\alpha}_{ji} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right) \quad j=1, \dots, n_{N_c-n} \quad (3.121)$$

a la que puede incluirse la expresión generalizada de (3.117) para cualquier capa, y obtener finalmente

$$\bar{T}_{j(N)} \bar{\beta}_{j0} = \bar{T}_{j(1)} \cdot \left(\bar{\beta}_{j0} \cdot \bar{\chi}_{N_c-n+1} + \bar{\alpha}_{j0} \cdot \bar{T}_{(N_c-n-1)} \cdot \left(\bar{\chi}_{N_c-n+1} + \sum_{i=1}^{n_{N_c-n}} \bar{\alpha}_{0i} \cdot \bar{T}_{i(n+n)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_{N_c-n}} \bar{\alpha}_{ji} \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right) \quad (3.122)$$

$j = 1, \dots, n_{N_c-n}$

Reagrupando términos puede obtenerse un sistema de ecuaciones, que de forma muy parecida a {3.5.2}, permite obtener las $\bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ de la capa $N_c - n$. Una vez determinadas las incógnitas, mediante (3.120) y (3.121) puede obtenerse de forma muy sencilla la amplitud equivalente sobre el j-ésimo dispersor aislado

$$a_j = \bar{T}_{j(1)}^{-1} \cdot \bar{T}_{j(N)} \cdot \bar{\beta}_{j0} \cdot a \quad (3.123)$$

Finalmente, puede calcularse el campo difractado en el interior del subdispersor mediante la matriz de transmisión del subdispersor aislado. En este caso el vector de funciones de Bessel, al encontrarnos en el interior del subdispersor, debe definirse respecto al número de onda dado por la permitividad del subdispersor

$$\phi(r_j) = Rg \Psi'(k_j, r_j) \cdot \bar{X}_{j(1)} \cdot \bar{T}_{j(1)}^{-1} \cdot \bar{T}_{j(N)} \cdot \bar{\beta}_{j0} \cdot a \quad (3.124)$$

Si el subdispersor es metálico este cálculo es innecesario ya que el campo difractado en su interior es cero.

Como en general el tamaño de los subdispersores es pequeño en términos de longitud de onda, el campo en su interior puede considerarse constante, de forma que únicamente se calcula en el centro del mismo.

3.5.4 Particularización para el caso TM

La particularización de las anteriores expresiones al caso TM es muy sencilla. Como en general la solución buscada viene dada en términos de campo eléctrico, únicamente es

necesario sustituir en las anteriores expresiones los desarrollos modales del campo eléctrico incidente presentados en {3.2.3.1} y las matrices de dispersión y transmisión de {3.2.2.3}. El campo difractado en el interior de cada subdispersor, al ser un desarrollo de funciones de Bessel de primera especie, depende únicamente del modo cero en el centro del subdispersor.

3.5.5 Particularización para el caso TE

Si el desarrollo se realiza en términos de campo magnético, la particularización del métodos para el caso TE es análoga al caso TM eléctrico. Pero para muchas aplicaciones puede interesar conocer el campo eléctrico, para ello habrá que realizar algunas modificaciones.

Mediante el término de las ecuaciones de Maxwell {2.3} que relaciona campo magnético con campo eléctrico

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad (3.125)$$

particularizado para coordenadas cilíndricas y caso TE, puede obtenerse que las componentes de campo eléctrico están relacionadas con las de campo magnético mediante

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\delta H_z}{\delta \phi} \right) - \hat{\phi} \left(\frac{\delta H_z}{\delta \rho} \right) = j\omega \epsilon \vec{E} \quad (3.126)$$

Los campos en el exterior del objeto, partiendo del desarrollo modal de los campos difractados y mediante (3.126), son

$$E_\rho(\vec{r}) = \frac{1}{r\omega\epsilon_0} \left(Rg\psi'(k_0 r_0) \cdot a' + \psi'(k_0 r_0) \cdot \vec{\tau}_{(N)} \cdot a' \right) \quad (3.127)$$

$$[a']_m = [ma]_m$$

para la componente radial de campo eléctrico y

$$E_\phi(\vec{r}) = -\frac{k_0}{j\omega\epsilon_0} \left(Rg\psi'(k_0 r_0) \cdot a + \psi'(k_0 r_0) \cdot \vec{\tau}_{(N)} \cdot a \right) \quad (3.128)$$

$$Rg[\psi'(k_0 r)]_m = J'_m(k_0 \rho) e^{jm\phi} \quad [\psi'(k_0 r)]_m = H_m^{(2)}(k_0 \rho) e^{jm\phi}$$

para la componente tangencial. Mediante un sencillo cambio de coordenadas pueden

encontrarse las componentes cartesianas del campo

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= E_\rho(\vec{r}) \cos \phi - E_\phi(\vec{r}) \sin \phi \\ E_y(\vec{r}) &= E_\rho(\vec{r}) \sin \phi + E_\phi(\vec{r}) \cos \phi \end{aligned} \quad (3.129)$$

Para calcular el campo en el interior de los subdispersores a partir de la matriz de transmisión, es necesario realizar un cambio de coordenadas a cartesianas, ya que en el origen los campos no están definidos en cilíndricas, y utilizar las expresiones asintóticas de las funciones de Bessel. Si el campo magnético en el interior responde al siguiente desarrollo modal en un sistema de coordenadas centrado en el j -ésimo subdispersor

$$H_z(r_j) = Rg \Psi'(k_j, r_j) \cdot \bar{X}_{j(1)} \cdot \bar{T}_{j(1)}^{-1} \cdot \bar{T}_{j(N)} \cdot \bar{\beta}_{j0} \cdot a = Rg \Psi'(k_j, r_j) \cdot b \quad (3.130)$$

puede demostrarse que las componentes cartesianas del campo eléctrico en el origen valen

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= \frac{k_j}{2\omega \epsilon_j} (b_1 + b_{-1}) \\ E_y(\vec{r}) &= -\frac{k_j}{j2\omega \epsilon_j} (b_1 - b_{-1}) \end{aligned} \quad (3.131)$$

siendo k_j el número de onda del subdispersor y ϵ_j su permitividad compleja.

3.6 RESULTADOS

A continuación se presentan los resultados obtenidos con los métodos anteriores aplicados a distintos casos. Se ha optado por presentarlos conjuntamente ya que las conclusiones que se obtienen son comunes a todos ellos.

En primer lugar se presenta un cilindro multicapa con permitividades parecidas a las de algunos de los tejidos del cuerpo humano. Las dimensiones y permitividades del cilindro son las siguientes.

Capa	Permitividad
$R_1 = 3.2 \text{ cm}$	$6.4 - j1.1$
$R_2 = 6.4 \text{ cm}$	$50.5 - j12.4$
$R_3 = 9.6 \text{ cm}$	$6.4 - j1.1$
$R_4 = 12.8 \text{ cm}$	$44.5 - j9.6$
Medio Externo = $1.0 - j0.0$	
$R_{\text{antenas}} = 20.0 \text{ cm}$	$f = 1.0 \text{ GHz}$

Alrededor del mismo se han colocado 64 antenas receptoras. Se incide con una onda plana TM desde la posición de la antenna cero y con origen de fases en el centro del cilindro. Se han comparado los resultados de los campos dispersados medidos en la agrupación receptora para la solución analítica y el método RATMA con dos discretizaciones distintas referidas a la menor longitud de onda presente: $0.1 \lambda_{\text{min}}$, con una malla de 61x61 celdas, y $0.05 \lambda_{\text{min}}$, con una malla de 121x121 celdas. En ambos casos el método necesita 9 modos (de -8 a 8) para caracterizar el campo dispersado del cilindro y 1 modo (el 0) para el de los subdispersores aislados. Se observa en la Fig. 3.21 que no existe apenas diferencia en los campos dispersados según la discretización utilizada, únicamente en aquellas antenas más cercanas a la emisora, antenna 0, se nota la mejora debido al incremento de resolución.

Campo Dispersado en las Antenas

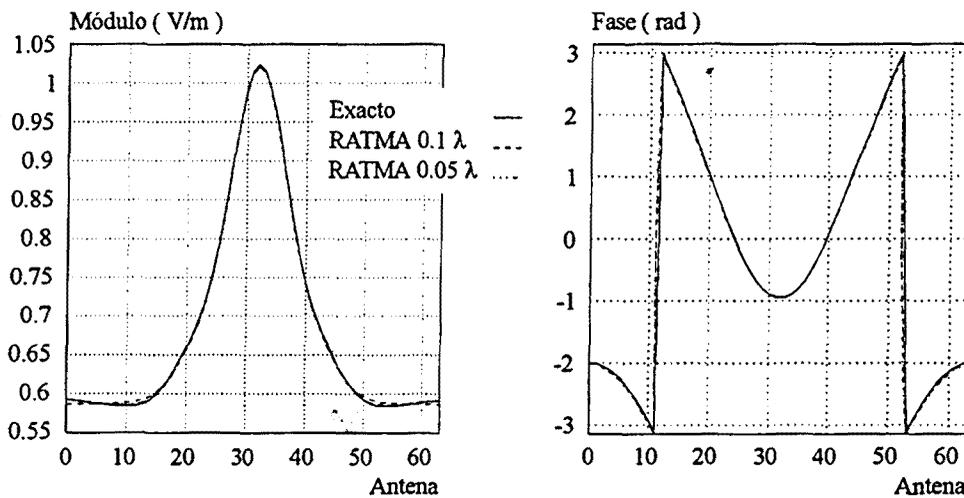


Fig. 3.21 Campos dispersados por el cilindro multicapa. La antenna 0 está situada en la dirección de incidencia.

Si se observan los campos difractados en el interior del cilindro multicapa, la mejora de la discretización acerca los valores de campo a los proporcionados por el método analítico. A pesar de ello, a nivel práctico con cuerpos biológicos es suficiente trabajar con una resolución alrededor de $0.1 \lambda_{\min}$. La Fig. 3.22 muestra los campos difractados en un corte a lo largo del eje x del cilindro y la Fig. 3.23 a lo largo del eje y. Los resultados son extrapolables al método CGM.

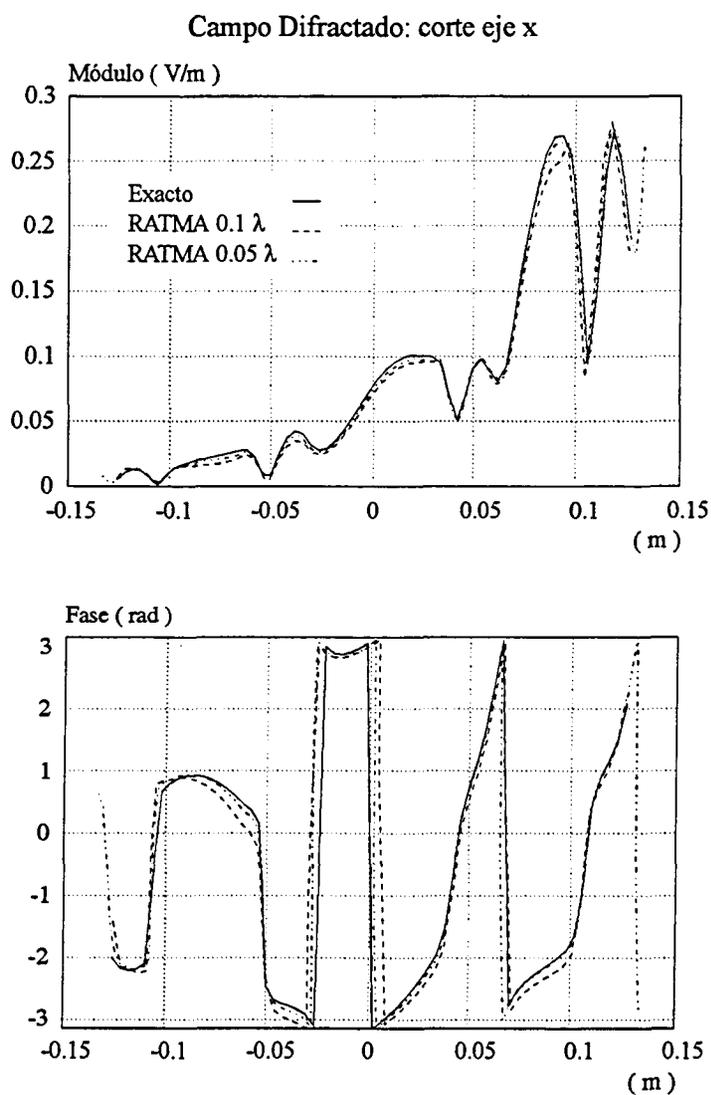


Fig. 3.22 Cortes a lo largo del eje x del cilindro multicapa en módulo y fase del campo difractado.

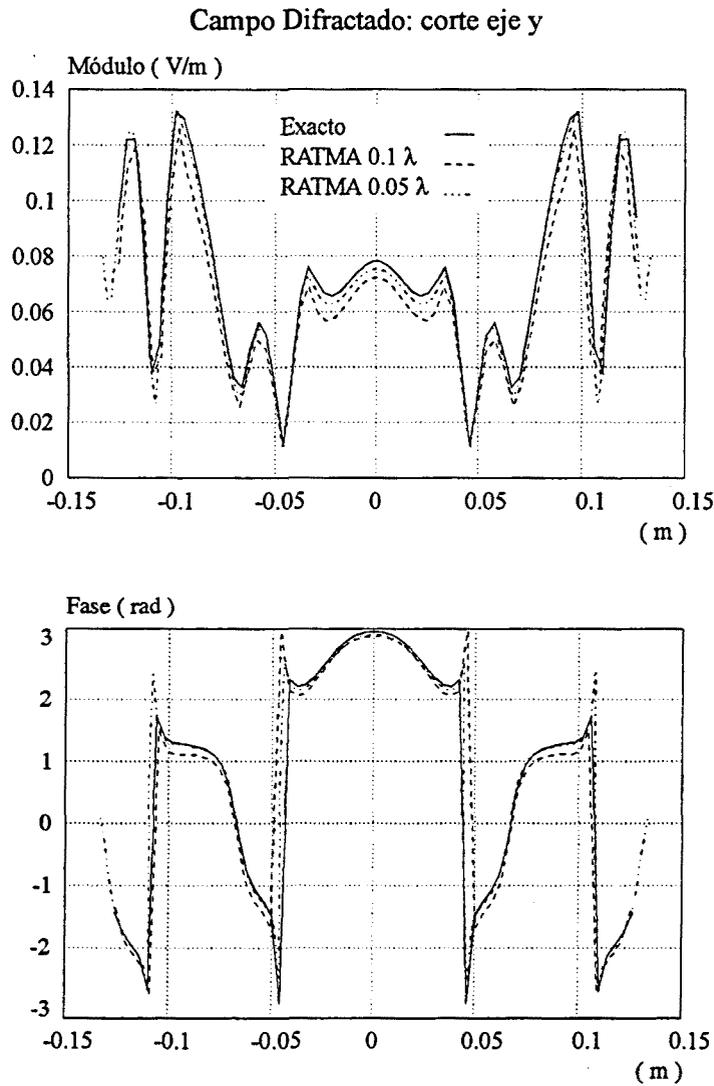


Fig. 3.23 Cortes a lo largo del eje y del cilindro multicapa en módulo y fase del campo difractado.

Los métodos presentados también permiten incluir objetos metálicos en los modelos. Aunque no es usual encontrar objetos biológicos con partes metálicas, se ha considerado interesante incluir estos resultados que permiten demostrar el buen comportamiento de los algoritmos. Para ello en primer lugar se ha utilizado un cilindro dieléctrico multicapa con núcleo metálico para poder comparar los resultados con la solución analítica. El cilindro tiene las siguientes características.

Capa	Permitividad
$R_1 = 2.16 \text{ cm}$	Metal
$R_2 = 3.24 \text{ cm}$	$20.5 - j20.0$
$R_3 = 4.32 \text{ cm}$	$10.0 - j5.0$
Medio Externo = $1.0 - j0.0$	
$R_{\text{antenas}} = 10.0 \text{ cm}$	$f = 1.89 \text{ GHz}$

Como en el caso anterior, la onda incidente es TM y plana proveniente de la dirección de la antena cero. Alrededor del cilindro se ha situado una agrupación de 64 antenas receptoras. La discretización utilizada en ambos métodos es de $0.1 \lambda_{\text{min}}$, con una malla de 57×57 celdas. La Fig. 3.24 muestra los campos dispersados en las antenas receptoras, no apreciándose diferencias entre el método RATMA, el CGM y la solución analítica. En este caso el RATMA necesita 6 modos (de -5 a 5) para el campo dispersado por el cilindro y 1 (el 0) para los subdispersores.

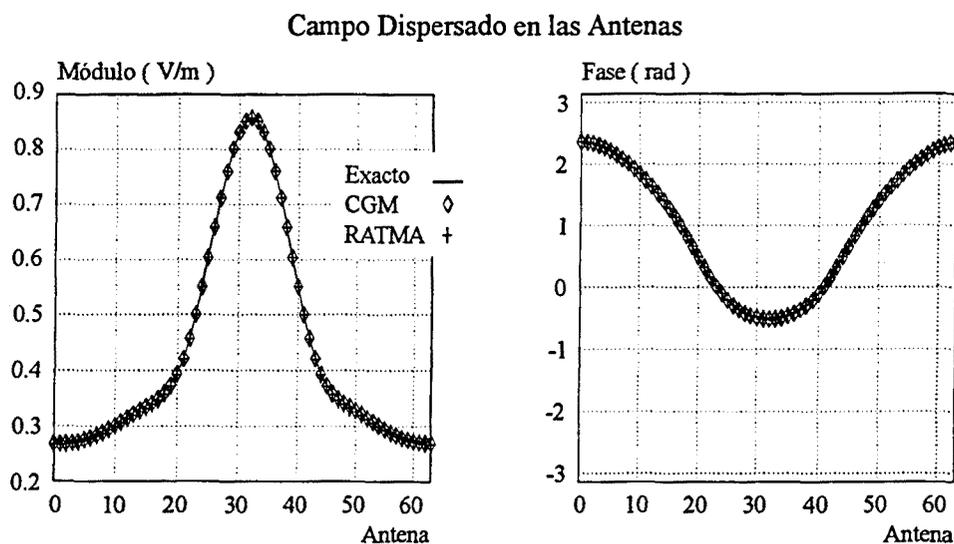


Fig. 3.24 Campos dispersados por el cilindro con núcleo metálico. La antena 0 está situada en la dirección de incidencia de la onda plana.

Los cortes de campo difractado en el interior del cilindro muestran el mismo comportamiento en ambos métodos numéricos, coincidiendo sus resultados con los analíticos. La Fig. 3.25

muestra gráficas en módulo y fase de dichos cortes.

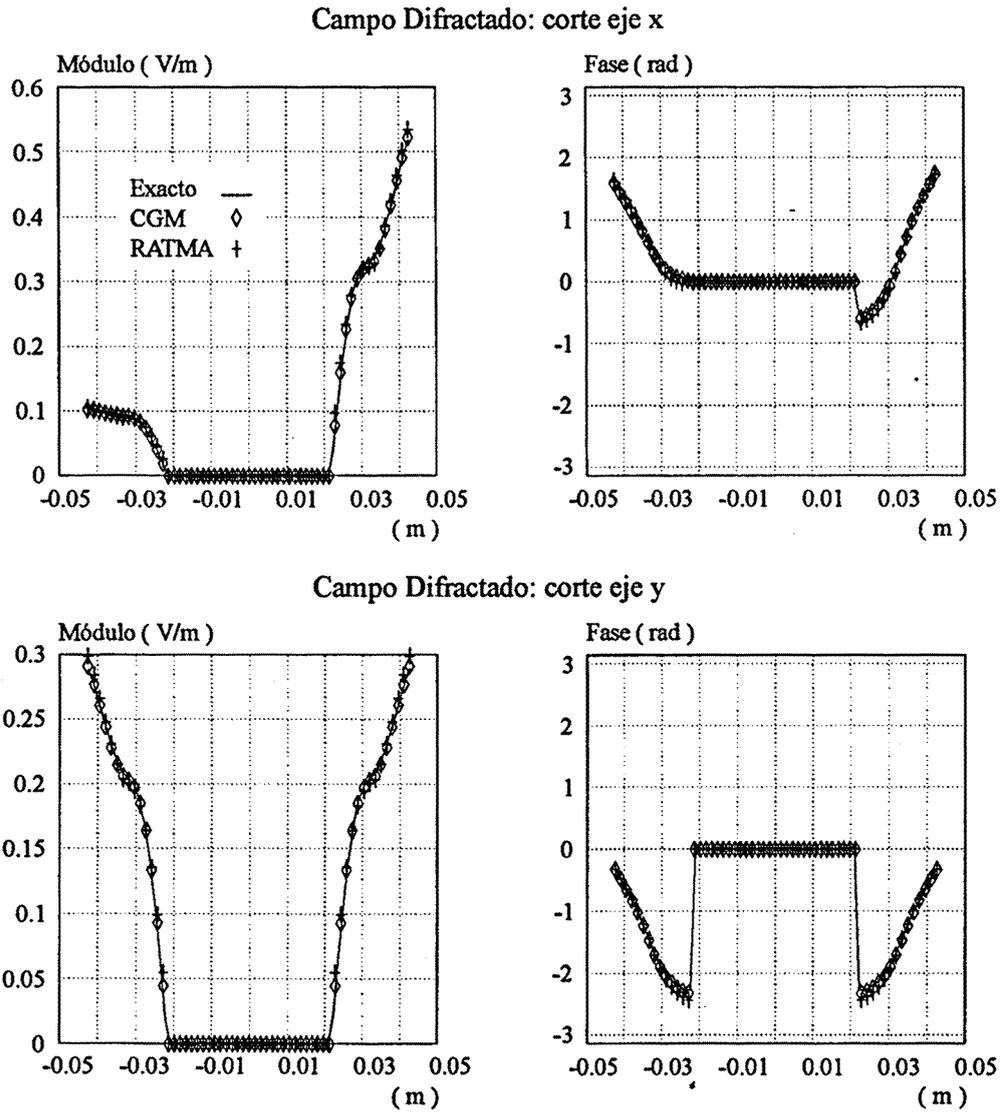


Fig. 3.25 Cortes a lo largo de los ejes x e y del cilindro con núcleo metálico.

Finalmente, la Fig. 3.26 muestra el campo difractado en una cavidad metálica en aire de $4\lambda_0$ de largo por $1\lambda_0$ de ancho calculado con el RATMA. La onda plana incide ortogonalmente a la boca de la cavidad. Se han necesitado 29 modos (del -28 al 28) para el campo dispersado y 1 (el 0) para el de los subdispérsos.

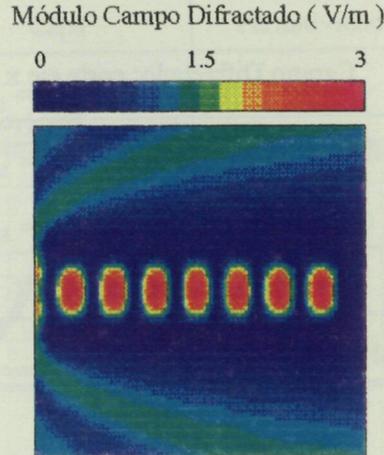


Fig. 3.26 Campos en una cavidad metálica con onda incidente plana.

Una de las grandes ventajas del método RATMA frente al CGM es la posibilidad de encontrar una solución multivista al problema directo electromagnético. Es necesario calcular cual de los dos métodos es más eficiente en un caso multivista. En primer lugar se estudia un caso multivista con un modelo de cráneo humano, {Ap. B.2}, en aire discretizado en una malla rectangular de 85×113 celdas. Tal como indica la Fig. 3.27 a su alrededor se ha situado una agrupación de 64 antenas situadas a 40 cm del centro. La incidencia es una onda cilíndrica a una frecuencia de 1.89 GHz generada por una línea de corriente de 1 A/m.

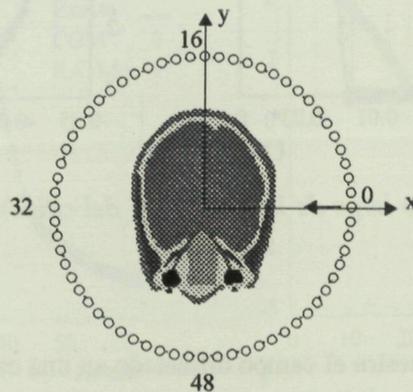


Fig. 3.27 Modelo de cráneo con las antenas a su alrededor. La incidencia es con onda cilíndrica.

La Fig. 3.28 muestra los campos dispersados en la agrupación cuando la antena emisora es la cero utilizando el método CGM y el RATMA. Los resultados proporcionados por ambos

son casi los mismos. En este caso el RATMA ha necesitado 11 modos (del -10 al 10) para el campo dispersado por el cráneo y 1 (el 0) para el de los subdispersores.

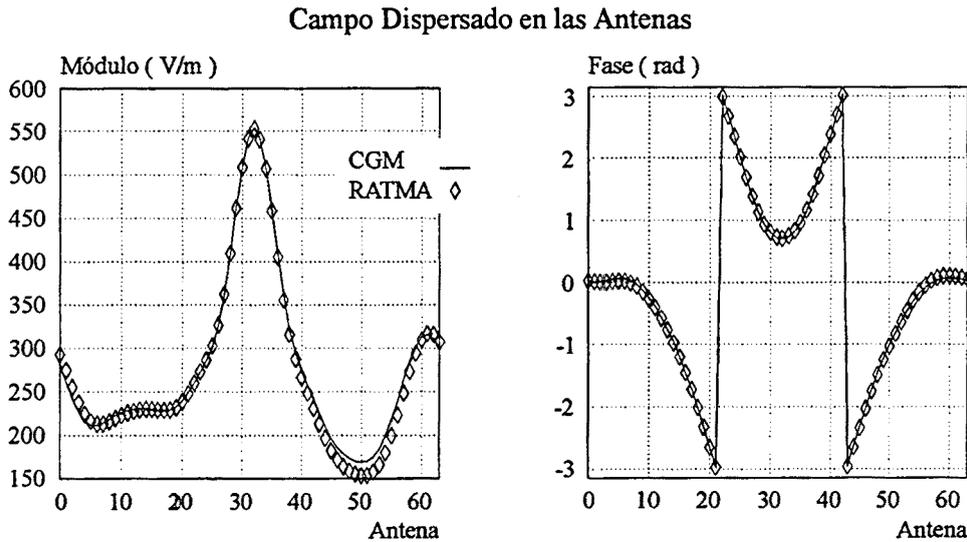


Fig. 3.28 Campos dispersados por el modelo de cráneo en la agrupación de antenas con la antena cero como emisora.

La siguiente tabla muestra los tiempos aproximados de CPU, en un HP-720, para la solución monovista y la multivista del problema. Con el método RATMA se han distinguido dos posibles opciones: que calcule o no el campo total en el interior del modelo. El CGM ya realiza ambos cálculos siempre.

Método	Monovista	Multivista (64 antenas)
CGM	41' 02''	15h 17' 36''
RATMA (solo dispersado)	13' 30''	15' 41''
RATMA (+ difractado)	29' 50''	33' 21''

Puede verse que el RATMA es más rápido incluso en un problema monovista; comparando los tiempos multivista la diferencia es abismal. El coste computacional del RATMA reside en encontrar la solución modal para los campos dispersados en las antenas y los difractados en el interior, una vez hallada calcular las distintas vistas se limita a sencillas multiplicaciones

matriciales. En cambio, el CGM necesita reejecutar el algoritmo para cada vista, y únicamente puede aprovechar de la anterior la inicialización de la función de Green.

Si se plantea un caso más cercano a la tomografía de microondas colocando al cuerpo sumergido en agua para mejorar la adaptación, las cosas cambian. Se ha probado un modelo de tórax en agua, {Ap. B.7}, discretizado con una malla de 65×65 celdas y resolución $0.08 \lambda_{\text{agua}}$. Se utiliza una agrupación de 64 antenas situadas a 35 cm, tal como muestra la Fig. 3.29. Las ondas son cilíndricas y generadas por un hilo de corriente de 1 A/m a una frecuencia de 434 MHz. En este caso el RATMA necesita 34 modos (del -33 al 33) para el campo dispersado por el tórax y 2 (del -1 al 1) para el de los subdispersores.

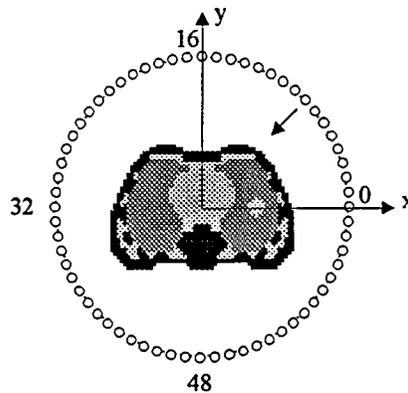


Fig. 3.29 Modelo de tórax con las antenas a su alrededor. La incidencia es con onda cilíndrica.

La Fig. 3.30 muestra una vez más el parecido comportamiento de ambos algoritmos. Los campos dispersados medidos en la agrupación con la antena 9 como emisora son prácticamente idénticos, tanto en módulo como en fase.

Campo Dispersado en las Antenas

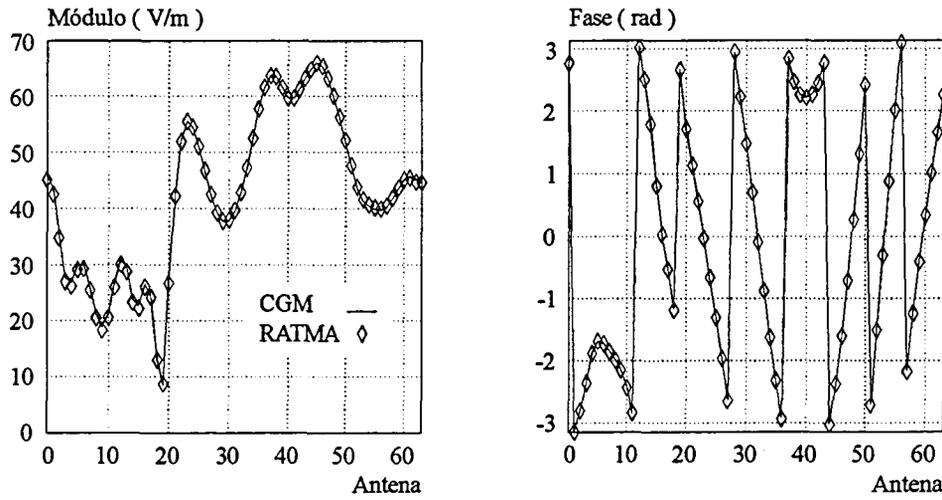


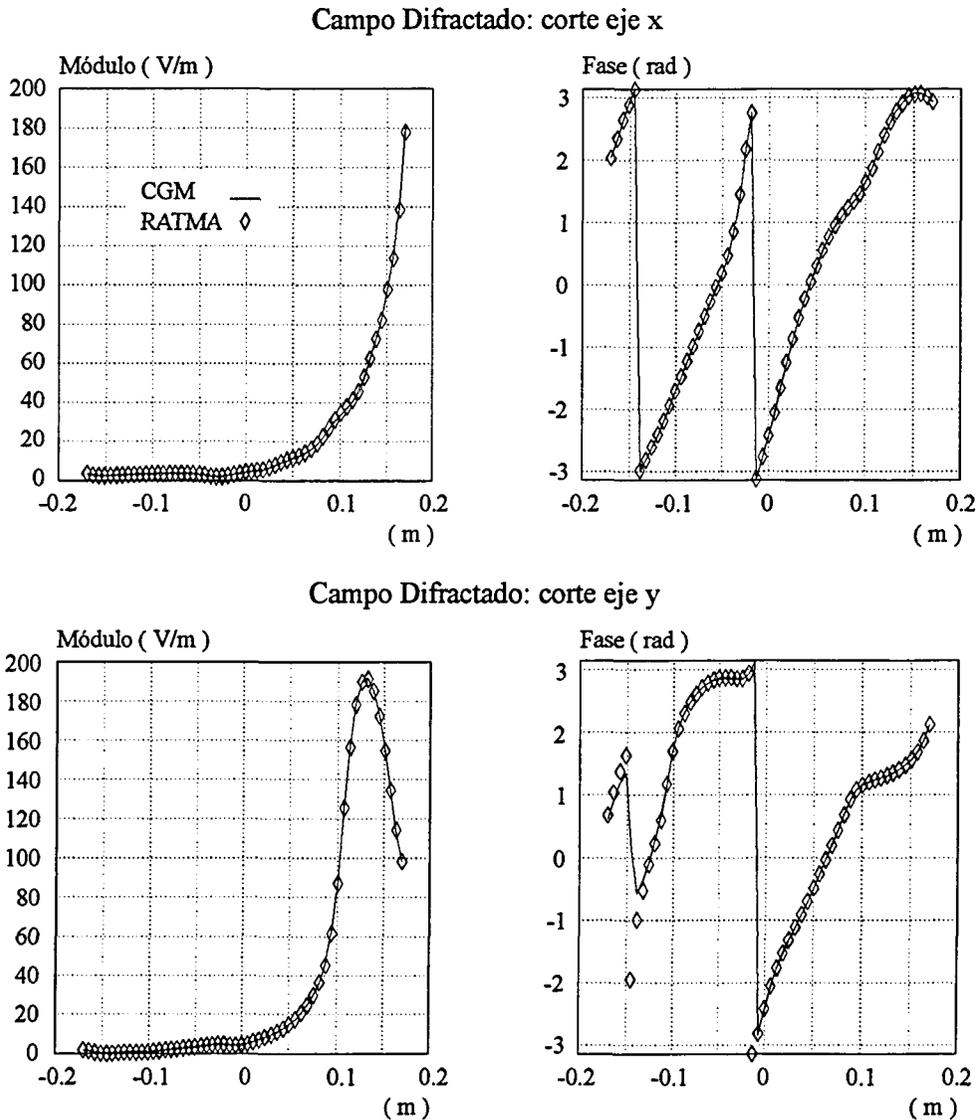
Fig. 3.30 Campos dispersados por el modelo de tórax en la agrupación de antenas con la antena nueve como emisora.

Los cortes según los ejes x e y de la Fig. 3.31 muestran de nuevo el parecido comportamiento de ambos métodos. Puede observarse la rapidez con la que se atenúan los campos debido a la atenuación y desadaptación de los tejidos.

Al comparar los tiempos del problema multivista se observa que el RATMA ya no es tan eficiente como en el caso del cráneo.

Método	Multivista (64 antenas)
CGM	30' 20''
RATMA (solo dispersado)	47' 21''
RATMA (+ difractado)	1h 44' 39''

El incremento de tiempo de computación en el RATMA frente al CGM tiene una sencilla justificación. En el CGM el número de iteraciones para alcanzar una cota de error determinada depende de la dimensión de la malla en la que se ha discretizado el objeto y del número de condicionamiento de la matriz a invertir, aunque ésta no exista físicamente. Por ejemplo el cráneo, al tener medio externo aire, está más desadaptado y el número de condicionamiento



es superior. En el caso del tórax, la adaptación mejora el número de condicionamiento y la convergencia es más rápida. Con todo, el parámetro crítico en el tiempo de computación es el tamaño de la malla, 113×113 en el cráneo y 65×65 en el tórax. En cambio en el RATMA además del tamaño influye cual sea el medio externo. Hay que recordar que la discretización del cuerpo se realiza en función del medio de permitividad más elevada presente en el modelo, eso determina la dimensión de la malla. En cambio el número de modos necesario para resolver el problema depende exclusivamente de la dimensión eléctrica del cuerpo respecto el medio externo. Si el medio externo es aire, como en el cráneo, el número de modos necesario es pequeño aunque la malla sea grande; en cambio en el tórax el agua del medio externo, la permitividad más elevada del modelo, obliga a calcular un gran número de

modos aumentando el número de operaciones necesarias.

En problemas de tomografía de microonda en biomedicina el RATMA no será de utilidad, aunque para otro tipo de aplicaciones no biomédicas podría ser una pieza clave para aumentar la velocidad de los algoritmos inversos. Hay que indicar que el código con el que se han hecho los cálculos es una primera versión poco depurada, los tiempos pueden mejorarse, aunque no lo suficiente como para ser más rápido en agua que el CGM.

3.7 OTRAS APLICACIONES DE LOS ALGORITMOS

Los algoritmos presentados son una potente herramienta para otro tipo de aplicaciones diferentes a la tomografía de microondas. Por ejemplo, se ha comprobado la utilidad del método del gradiente conjugado en el estudio de la interacción de cuerpos biológicos con sistemas de comunicaciones móviles, y cálculos de SAR (Specific Absorption Rate) en problemas bidimensionales [Vaquer '93a] [Pous '94] y tridimensionales [Vaquer '93c]. Otra aplicación interesante, es el estudio de aplicadores para tratamientos de hipertermia, para optimizarlos, es necesario disponer de la distribución de campos en el interior de modelos de las distintas zonas del cuerpo humano. En esta última aplicación, el método RATMA puede ser una herramienta muy eficiente, máxime si se desea estudiar el mismo modelo para gran variedad de incidencias. Incluso, podría plantearse un sistema automático que determine las alimentaciones de un conjunto de aplicadores para focalizar la energía en una zona determinada del modelo. El RATMA también puede extenderse a mallados no regulares que permitan una mejor discretización del objeto, mejorando los resultados finales. La formulación tridimensional del RATMA también sería de gran utilidad, aunque la dificultad en los teoremas de traslación en esféricas es superior a los cilíndricos.

Aunque no se han presentado, también se han realizado algunas pruebas de cálculo de RCS (Radar Cross Section) con resultados bastante buenos. Para esta aplicación, una de las mayores limitaciones es la discretización regular utilizada, que no permite modelar correctamente aristas o vértices metálicos con ángulos muy cerrados.

MÉTODOS INVERSOS DE PRIMER ORDEN

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presentarán los algoritmos de primer orden, que resuelven el problema inverso electromagnético mediante aproximaciones. En general, los algoritmos desarrollados de esta manera tienen un coste computacional bajo, lo que permite la obtención de imágenes tomográficas en tiempo real o casi-real sin necesidad de utilizar ordenadores de elevadas prestaciones. El precio a pagar por esta rapidez viene dado por el margen de validez de las aproximaciones realizadas, lo que limita su aplicabilidad. La tolerancia en su cumplimiento será mayor o menor en función de la calidad buscada en las imágenes finales.

Los algoritmos de reconstrucción parten de las ecuaciones matemáticas presentadas en {2.2}, que relacionan, para una caso TM bidimensional, el campo dispersado por un objeto, con su contraste, el campo difractado en su interior, y la función de Green del problema. Esta ecuación, también llamada ecuación de Helmholtz, tiene la siguiente expresión

$$E_z^s(\vec{r}) = -k_0^2 \int_S C(\vec{r}') E_z(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.1)$$

que puede reescribirse como

$$E_z^s(\vec{r}) = -k_0^2 \int_S C(\vec{r}') (E_z^{inc}(\vec{r}') + E_z^s(\vec{r}')) G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.2)$$

donde la función contraste relaciona la permitividad del objeto con la del medio que lo rodea

$$C(\vec{r}) \triangleq \frac{\epsilon_0 - \epsilon(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (4.3)$$

Una de las dificultades intrínsecas del problema inverso es la limitación en los datos de entrada de los algoritmos. En primer lugar, únicamente se pueden conocer los campos alrededor del objeto, no en su interior. En segundo lugar, el número de incógnitas, correspondiente al mapa de contraste discretizado, suele ser mayor que el de datos. Particularizando ya al caso concreto de cuerpos biológicos, su elevada atenuación y contraste aumentan las dificultades de la reconstrucción al ser la contribución de sus tejidos internos a los campos dispersados mucho menor que la de los externos. Todos estos aspectos serán tratados más ampliamente en los sucesivos capítulos, {Cap. 5} y {Cap. 6}, y comentados en los distintos apartados de resultados.

Aunque los algoritmos de primer orden se han utilizado principalmente como herramienta para la obtención de información "a priori" destinada a los algoritmos de orden superior, todo su desarrollo teórico es de gran importancia ya que muchas de las conclusiones que pueden derivarse de la simplicidad de su estudio son extrapolables a los algoritmos de orden superior. Con todo, en el marco de esta tesis se ha mejorado el algoritmo basado en la hipótesis de Born mediante su extensión a datos de entrada multifrecuencia. Como se verá, para cuerpos biológicos se consigue mejorar, aunque no de forma muy acentuada, las prestaciones del algoritmo monofrecuencia.

4.2 APROXIMACIONES BÁSICAS DE PRIMER ORDEN: BORN Y RYTOV

En este apartado se describen las dos aproximaciones básicas de primer orden, base de la mayoría de los algoritmos de tomografía de microondas. Las dos aproximaciones más utilizadas son las llamadas de Born y Rytov, aunque sólo la primera es tratada en profundidad al ser la única que permite buenos resultados en objetos de elevado contraste.

4.2.1 La aproximación de Born

Es la más simple de las dos aproximaciones y la utilizada en el desarrollo del algoritmo de primer orden. Partiendo de la descomposición del campo difractado como suma del campo incidente y del campo dispersado

$$\vec{E} = \vec{E}^{inc} + \vec{E}^s \quad (4.4)$$

y considerando que la interacción del objeto con el campo eléctrico es débil, el campo dispersado es despreciable frente al incidente, con lo que la aproximación

$$\vec{E}^s < \vec{E}^{inc} \quad \rightarrow \quad \vec{E} \approx \vec{E}^{inc} \quad (4.5)$$

puede ser aceptable.

Aproximando el campo difractado por el incidente, la ecuación integral (4.2) puede simplificarse y reescribirse como

$$E_z^s \approx -k_0^2 \int_S C(\vec{r}') E_z^{inc}(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.6)$$

La aproximación de Born supone que cada punto del objeto contribuye de forma independiente al campo dispersado, sin considerar las interacciones múltiples debidas a los restantes puntos del objeto. Esta linealización del problema permite simplificar su resolución, reduciendo el cálculo de los campos dispersados a una integral de convolución entre la función de Green y el producto del campo incidente por el contraste.

La aplicabilidad del método depende de la bondad de la aproximación realizada en (4.5). En [Slaney '85] se establece un margen de validez para cilindros homogéneos en función de su permitividad y dimensiones: la aproximación de Born es suficientemente válida cuando la diferencia de fases entre un rayo circulando por el medio externo y otro que atravesase el objeto sea inferior a 180° . Cuando la onda incidente es plana, la diferencia de fases puede expresarse como

$$k_0 d (\sqrt{\epsilon/\epsilon_0} - 1) < \pi \quad \rightarrow \quad d (\sqrt{1-C} - 1) < \lambda_0/2 \quad (4.7)$$

siendo d la dimensión máxima del objeto. La validez de la aproximación depende únicamente del contraste del objeto y su tamaño.

4.2.2 La aproximación de Rytov

La aproximación de Rytov es otro tipo de aproximación de primer orden válida para condiciones ligeramente diferentes a las de Born. En este caso se considera que el campo eléctrico puede expresarse como una fase compleja [Slaney '85]

$$E_z(\vec{r}) = e^{j\phi(\vec{r})} \quad (4.8)$$

De forma parecida al caso de Born, se expresa esta fase total como suma de la fase incidente, $\phi_0(\vec{r})$, y la fase dispersada, $\phi_s(\vec{r})$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de onda

$$(\nabla^2 + k_0^2)E_z^s = k_0^2 C E_z \quad (4.9)$$

se obtiene

$$\nabla^2 \phi_s + (\nabla \phi_s)^2 + 2 \nabla \phi_0 \cdot \nabla \phi_s = k_0^2 C \quad (4.10)$$

Suponiendo una onda plana incidente, $E_0^{inc} = e^{-j\vec{k}_0 \vec{r}}$, y tras algunas manipulaciones algebraicas se llega a la expresión

$$(\nabla^2 + k_0^2)(E_0^{inc} \phi_s) = E_0^{inc} (k_0^2 C - (\nabla \phi_s)^2) \quad (4.11)$$

que presenta la misma estructura que la ecuación de onda. Mediante la utilización de la función de Green, puede ser transformarse a una ecuación integral, obteniéndose

$$\phi_s(\vec{r}) = -\frac{1}{E_0^{inc}(\vec{r})} \int_{Obj} [k_0^2 C(\vec{r}') - (\nabla \phi_s(\vec{r}'))^2] E_0^{inc}(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.12)$$

La aproximación de Rytov supone un cambio de fase, ϕ_s , pequeño por longitud de onda, por lo que $(\nabla \phi_s)^2 \ll k_0^2 C$, pudiéndose entonces encontrar ϕ_s de forma explícita

$$\phi_s(\vec{r}) = -\frac{k_0^2}{E_0^{inc}(\vec{r})} \iint C(\vec{r}') E_0^{inc}(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.13)$$

A diferencia de la aproximación de Born, el parámetro que decide la validez de la aproximación de Rytov es el cambio de fase compleja en el campo dispersado por unidad de longitud, $\nabla\phi_s$, es decir, la pendiente de la fase por longitud de onda. La aproximación de Rytov es válida para objetos de bajo contraste con independencia de su tamaño. En el caso biológico los contrastes son elevados no proporcionando su utilización buenos resultados [Broquetas '89].

4.3 ALGORITMO DE RECUBRIMIENTO ESPECTRAL MONOFRECUENCIA BASADO EN LA APROXIMACIÓN DE BORN

En el apartado anterior se ha visto que la hipótesis de Born permite simplificar el cálculo del problema directo electromagnético. La inversión para obtener el contraste de la ecuación de Helmholtz no es sencilla. La aproximación de Born permite desarrollar un algoritmo para la obtención de imágenes tomográficas que reduce el problema original a una transformada de Fourier de los campos multivista medidos en las antenas y ponderados por unos coeficientes. En principio, el algoritmo se puede plantear para geometría plana o cilíndrica, pero la geometría cilíndrica es la que presenta mayores prestaciones tanto desde el punto de vista puramente algorítmico [Rius '92] como práctico en la construcción de un equipo de medida para aplicaciones biomédicas [Broquetas '91]. Demostraciones del algoritmo pueden encontrarse, entre otras referencias, en [Rius '87a], [Rius '87b] y [Broquetas '89], pero se ha decidido incluirla porque puede clarificar algunas de las ideas que se presentarán en el algoritmo multifrecuencia y a la vez algunas de las conclusiones derivadas del desarrollo son extrapolables a otros métodos.

4.3.1 Desarrollo del algoritmo

La geometría del problema es la que aparece en la Fig. 4.1, donde ya se considera que la agrupación de medida es cilíndrica, y se definen todos los vectores y ángulos de posición de las antenas a utilizar durante el desarrollo matemático.

Si se define la siguiente ecuación

$$f(\hat{s}) = k_0^2 \int_S C(\vec{r}') E(\vec{r}') e^{-jk_0 \hat{s} \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' ; \hat{s} \text{ vector unitario} \quad (4.14)$$

y considerando el campo incidente como una onda plana

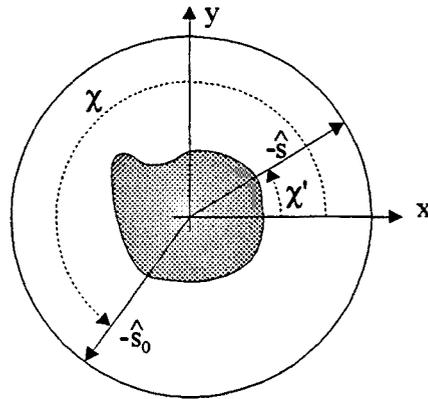


Fig. 4.1 Geometría cilíndrica: el vector $-\hat{s}$ indica la posición de recepción y $-\hat{s}_0$ la de emisión.

$$E_0^{inc}(\vec{r}) = e^{-jk_0\hat{s}_0 \cdot \vec{r}} \quad ; \quad \hat{s}_0 \text{ dirección de propagación} \quad (4.15)$$

puede obtenerse la llamada función de amplitud de onda difractada [Rius '87a]

$$f(\hat{s}; \hat{s}_0) = k_0^2 \int_S C(\vec{r}') E(\vec{r}'; \hat{s}_0) e^{-jk_0\hat{s} \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' \quad (4.16)$$

Donde $E(\vec{r}'; \hat{s}_0)$ sería el campo difractado generado por una onda plana que incidiera en el objeto viajando en la dirección del vector unitario \hat{s}_0 .

Mediante la aproximación de Born {4.2.2}, el campo difractado puede ser aproximado por el incidente, con lo que la ecuación (4.16) se transforma en

$$E(\vec{r}'; \hat{s}_0) \approx E_0^{inc}(\vec{r}'; \hat{s}_0) \rightarrow f(\hat{s}; \hat{s}_0) = k_0^2 \int C(\vec{r}') e^{-jk_0(\hat{s} + \hat{s}_0) \cdot \vec{r}'} d\vec{r}' = k_0^2 C(k_0(\hat{s} + \hat{s}_0)) \quad (4.17)$$

donde C es, en el caso más general, una transformada bidimensional de Laplace de la función contraste. Si el número de onda en el medio externo es real, es decir no tiene pérdidas, la transformada se simplifica y es de Fourier. La expresión de $f(\hat{s}; \hat{s}_0)$ puede interpretarse como un corte circular en el espacio transformado de la función contraste de radio k_0 centrado en \hat{s}_0 .

El teorema de reciprocidad o lema de Lorentz [Cardama '93] para un medio lineal, isotrópico y no magnético puede escribirse para el caso TM bidimensional como

$$\int_{S_b} E_a J_b ds = \int_{S_a} E_b J_a ds \quad (4.18)$$

siendo J_a las corrientes existentes en S_a que inducen los campos E_a en S_b , y J_b las corrientes situadas en S_b que generan los campos E_b en S_a , tal como se indica en la Fig. 4.2.

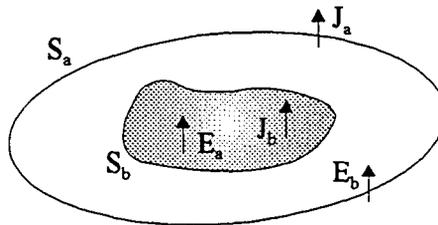


Fig. 4.2 Teorema de reciprocidad.

Si a la expresión (4.18) se asocia S_a con el dominio de las antenas receptoras, y S_b con el dominio del objeto, para los campos y corrientes en la formulación del problema inverso pueden plantearse las siguientes asociaciones

- J_b , son las corrientes equivalentes sobre el objeto inducidas por el campo incidente $E_0^{inc}(\vec{r}; \hat{s}_0)$, que producirían en la antena receptora un campo dispersado $E_b = E^s(\vec{r}; \hat{s}_0)$. Aplicando la formulación presentada en {2.2}, esas corrientes tienen la siguiente expresión

$$J_b = -j\omega \epsilon_0 C(\vec{r}) E(\vec{r}; \hat{s}_0) \quad (4.19)$$

- J_a , es la distribución de corriente que debería existir sobre la antena receptora para que, actuando como emisora, produjera sobre el objeto una onda plana en la dirección \hat{s}

$$E_a = e^{-jk_0 \hat{s} \cdot \vec{r}} \quad (4.20)$$

Si a las anteriores asociaciones se añade que la antena es un hilo circular situado alrededor del objeto, las distribuciones de corriente en el dominio de las antenas, S_a , se transforman en distribuciones lineales de corriente, y la ecuación (4.18) puede reescribirse como

$$\int_{\text{antena}} I_a(\vec{r}; \hat{s}) E^s(\vec{r}; \hat{s}_0) dl = \int_{\text{objeto}} -j\omega C(\vec{r}) E(\vec{r}; \hat{s}_0) e^{-jk_0 \hat{s} \cdot \vec{r}} d\vec{r} =$$

$$\frac{k_0^2}{j\omega \mu_0} \int_{\text{objeto}} C(\vec{r}) E(\vec{r}; \hat{s}_0) e^{-jk_0 \hat{s} \cdot \vec{r}} d\vec{r}$$
(4.21)

Comparando el último término de (4.21) con (4.16), y mediante un sencillo cambio de coordenadas para aprovechar la geometría circular de la antena, se obtiene

$$f(\hat{s}; \hat{s}_0) = j\omega \mu_0 \int_0^{2\pi} E^s(\sigma; \hat{s}_0) I_a(\sigma; \hat{s}) R d\sigma$$
(4.22)

donde la distribución lineal de corriente, $I_a(\sigma; \hat{s})$, es la necesaria para que la antena receptora, actuando como emisora, genere una onda plana en la dirección \hat{s}

$$I_a(\sigma; \hat{s}) \rightarrow \text{Onda plana } \hat{s} = -\cos\chi \hat{x} - \sin\chi \hat{y}$$
(4.23)

Si se expresa esa onda plana mediante su familia de sus modos cilíndricos {3.2.2.1}, se obtiene

$$E_a(\vec{r}; \hat{s}) = e^{-jk_0 \hat{s} \cdot \vec{r}} = e^{jk_0 \rho \cos(\chi - \phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(k_0 \rho) e^{jn(\chi - \phi)}$$
(4.24)

Mediante la utilización de la función de Green, puede determinarse el campo generado por esa distribución de corrientes de la que, de momento, se desconoce su valor. Adaptando la formulación de radiación de fuentes, {2.2}, a la geometría del problema se llega a

$$E_a(\vec{r}; \hat{s}) = -\frac{\omega \mu_0}{4} \int_0^{2\pi} I_a(\sigma) H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r} - R|) R d\sigma$$
(4.25)

siendo R el radio de la agrupación. Mediante el teorema de adición de las funciones de Hankel, {3.2.2.4}, adaptado a la notación utilizada

$$H_0^{(2)}(k_0 |\vec{r} - R|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(k_0 R) J_n(k_0 \rho) e^{jn(\sigma - \phi)} \quad \text{con } R \geq \rho$$
(4.26)

puede sustituirse la función de Hankel de (4.25) por (4.26) obteniendo

$$E_a(\vec{r}; \hat{s}) = \frac{-\omega \mu_0}{4} \int_0^{2\pi} I_a(\sigma) \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 R) J_n(k_0 \rho) e^{jn(\sigma-\phi)} R d\sigma \quad (4.27)$$

Intercambiando el orden de la integral y el sumatorio y comparando el resultado con (4.24) se llega a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(k_0 \rho) e^{jn(\chi-\phi)} = \frac{-\omega \mu_0}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 R) J_n(k_0 \rho) e^{-jn\phi} R \int_0^{2\pi} I_a(\sigma) e^{jn\sigma} R d\sigma \quad (4.28)$$

donde el término integral corresponde a los coeficientes de la serie de Fourier de la distribución de corrientes que generan la onda plana multiplicados por un factor 2π .

$$\tilde{I}_a(-n; \hat{s}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_a(\sigma) e^{jn\sigma} d\sigma \quad (4.29)$$

Asociando términos en (4.28) se obtiene

$$\tilde{I}_a(-n; \hat{s}) = \frac{-4}{\omega \mu_0} \frac{j^n e^{jn\chi}}{2\pi R} \frac{1}{H_n^{(2)}(k_0 R)} \quad (4.30)$$

y mediante la serie de Fourier puede hallarse la expresión de las corrientes

$$I_a(\sigma; \hat{s}) = \frac{-2}{\omega \mu_0 \pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j^n e^{jn(\chi-\sigma)}}{H_n^{(2)}(k_0 R)} \quad (4.31)$$

La distribución de corrientes depende únicamente de la diferencia de ángulos $\sigma - \chi$ y además es simétrica. Por comodidad a partir de ahora se hablará de $I_a(\sigma - \chi)$, que serán las corrientes que en las antenas receptoras actuando como emisoras sintetizan una onda plana en la dirección $\hat{s} = \cos(\chi - \pi)\hat{x} + \sin(\chi - \pi)\hat{y}$.

Sustituyendo (4.31) en (4.22) ya puede obtenerse $f(\hat{s}; \hat{s}_0)$, que según (4.17) es proporcional a un círculo completo desplazado de la transformada del objeto. Puede observarse en la Fig. 4.3 que variando la dirección de incidencia y la de medida puede cubrirse todo el espectro.

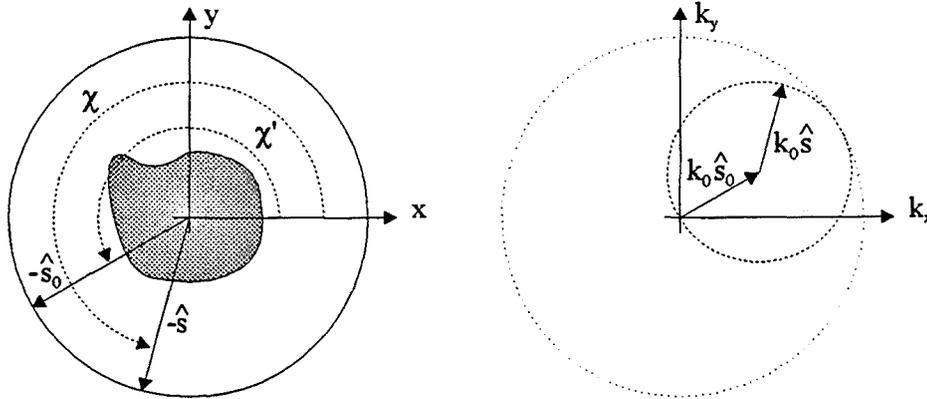


Fig. 4.3 Con onda plana y dirección de incidencia fija, las distintas antenas receptoras proporcionan información de un círculo desplazado del espectro del objeto.

Hasta el momento se ha considerado que la onda incidente sobre el objeto es una onda plana. En un sistema real esto sería muy difícil, ya que la síntesis de ondas planas en campo cercano es compleja. En teoría, esta onda plana se podría sintetizar mediante la superposición de las ondas cilíndricas generadas por cada una de las antenas de la agrupación ponderadas con unos pesos en sus alimentaciones. A nivel práctico esta solución es tecnológicamente muy difícil, primero porque obligaría a tener una agrupación de antenas para emisión y otra para recepción, y en segundo lugar, el diseño de las alimentaciones complicaría enormemente la circuitería de alta frecuencia. Por consiguiente, la iluminación del objeto se realiza mediante un solo elemento de la agrupación. Las propiedades de linealidad del proceso de difracción bajo la hipótesis de Born permiten solventar el problema.

Puede demostrarse que una onda plana en la dirección \hat{s}_0 , $E_0^{inc}(\sigma; \hat{s}_0)$, puede expresarse en función de una combinación de ondas cilíndricas generadas en la posición σ_0 , $E_0(\sigma; \sigma_0)$

$$E_0^{inc}(\sigma; \hat{s}_0) = \int_0^{2\pi} E^{inc}(\sigma; \sigma') I_a(\chi' - \sigma') R d\sigma' \quad (4.32)$$

donde la distribución de corrientes que actúan como pesos son las mismas que las obtenidas en (4.31) [Rius '87a]. La hipótesis de Born hace que la difracción sea un proceso lineal, por lo tanto los campos dispersados dependen linealmente de los incidentes, pudiéndose aplicar superposición y relacionar el campo dispersado por la onda plana con los campos dispersados por las ondas cilíndricas ponderadas.

$$E^s(\sigma; \hat{s}_0) = \int_0^{2\pi} E^s(\sigma; \sigma') I_a(\chi' - \sigma') R d\sigma' \quad (4.33)$$

Finalmente combinando (4.22), (4.32) y (4.33) puede encontrarse la expresión final que relaciona los campos dispersados medidos, las corrientes que sintetizan las ondas planas en emisión y recepción y la transformada bidimensional de Laplace de la función contraste.

$$k_0^2 C(k_0(\hat{s} + \hat{s}_0)) = f(\hat{s}; \hat{s}_0) = j\omega \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} E_s(\sigma; \sigma') I_a(\chi' - \sigma') I_a(\chi - \sigma) R d\sigma' R d\sigma \quad (4.34)$$

Para obtener la función contraste se debería realizar una transformada inversa de Laplace de la información espectral obtenida. Pasando a un sistema cartesiano

$$C(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 k_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\pi - \chi; \pi - \chi_0) e^{jk'_x x} e^{jk'_y y} e^{k'_x \frac{k_0''}{k_0} x} e^{k'_y \frac{k_0''}{k_0} y} dk'_x dk'_y \quad (4.35)$$

$$k_0'' = k_0' - jk_0''$$

Si el medio no tiene pérdidas, $k_0'' = 0$, la transformada inversa de Laplace se convierte en una de Fourier. Cuando no se cumple, pero se obtiene el contraste mediante transformada de Fourier se comete un error debido a las pérdidas representado por las exponenciales de argumento real de (4.35). Este error aumenta con las pérdidas del medio, con el tamaño del objeto y cuanto mayor sea el contenido espectral de alta frecuencia del objeto. El algoritmo se implementó mediante transformada de Fourier gracias a su mayor sencillez y mediante un filtro paso bajo se reducían los errores introducidos por las pérdidas.

Cuando se iluminaba con ondas planas, una dirección de iluminación proporcionaba información de uno de los círculos del espacio transformado de la función contraste, en cambio, iluminando con ondas cilíndricas, asociadas a una serie de ondas planas, cada dirección de iluminación proporciona información de un grupo de círculos del espectro tal como muestra la Fig. 4.4. Del mismo modo, la información final en cada uno de los círculos del espectro proviene de la contribución de todas las vistas.

Los algoritmos de imágenes pueden considerarse como sistemas cuya entrada es la matriz de campos dispersados multivista y su salida la imagen de la función contraste. Como en todo sistema, es posible encontrar la respuesta impulsional que proporciona información sobre la resolución máxima que puede obtenerse. La respuesta impulsional viene dada por la salida del algoritmo cuando se intenta reconstruir una delta de contraste, que proporciona un espectro uniforme de radio $2k_0$ y fase lineal proporcional a su posición respecto del centro de la agrupación de antenas [Broquetas '89a]. Puede demostrarse que para este algoritmo es

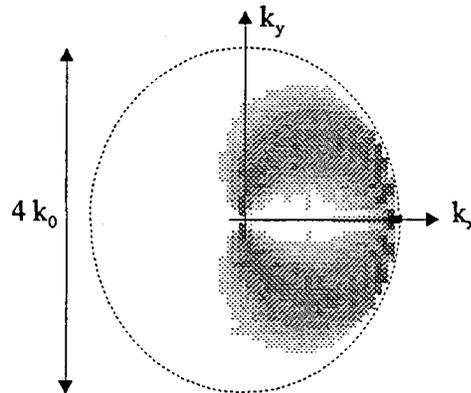


Fig. 4.4 Contribución de una vista midiendo un campo dispersado constante a varios círculos del espectro.

$$h(\vec{r}) = \frac{k_0}{\pi} \frac{J_1(2k_0|\vec{r}|)}{|\vec{r}|} \quad (4.36)$$

que implica una resolución de, aproximadamente, $\Delta r \approx 0.3\lambda_0$. Si se filtra paso bajo el espectro para compensar las pérdidas, y en función del filtro utilizado, la resolución empeora.

4.3.2 Discretización del algoritmo

En los sistemas de medida reales, las antenas emisoras y receptoras no son continuas, sino que están formadas por una agrupación discreta. Si se supone que la agrupación está formada por NAE antenas que pueden actuar como emisoras o receptoras de forma independiente, se pueden realizar las siguientes transformaciones a las ecuaciones anteriores.

En primer lugar, la distribución lineal de corrientes de las antenas para sintetizar una onda plana, tanto en emisión como en recepción, debe ser discretizada. Por ello (4.31) se transforma en

$$I_a(q) = \frac{-2}{\omega \mu_0 \pi R} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{j^n}{H_n^{(2)}(k_0 R)} e^{jn \frac{2\pi}{NAE} q} \quad (4.37)$$

y de la misma manera (4.34) también pasa a ser discreta

$$f(m; m_0) = j\omega \mu_0 \frac{2\pi^2}{NAE^2} \sum_{n=0}^{NAE-1} \sum_{n_0=0}^{NAE-1} E_s(n; n_0) I_a(m-n) I_a(m_0-n_0) \quad (4.38)$$

con m , m_0 y q índices que indican la posición de las antenas. La computación de (4.38) puede implementarse de forma muy eficiente, debido a su estructura de convolución, mediante FFT.

4.3.2.1 Número de antenas

El número de antenas emisoras disponibles en la agrupación limita la dimensión máxima de los objetos a reconstruir, o lo que es lo mismo, el radio útil del tomógrafo. Su separación limita la variación máxima de campo que puede muestrearse angularmente. Primero se presenta una deducción empírica de la condición de muestreo angular, para posteriormente presentar una más matemática.

Puede suponerse que el campo dispersado por el objeto presenta un período angular constante, $\Delta\phi$, tal que como muestra la Fig. 4.5, sobre el borde del círculo que contiene al objeto la longitud del arco es λ_0 . Aplicando el criterio de Nyquist son necesarias dos muestras por período, con lo que a partir del número de muestras a tomar en función de la dimensión máxima del objeto puede obtenerse el número de antenas emisoras, NAE , necesario

$$\frac{2\pi}{NAE} = \frac{\Delta\phi}{2} \rightarrow NAE = \frac{4\pi R_{util}}{\lambda_0} \quad (4.39)$$

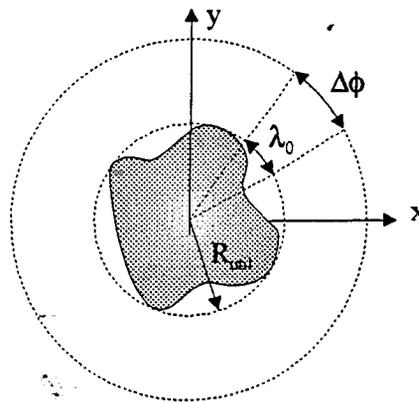


Fig. 4.5 Aplicación del criterio de Nyquist para determinar el número de antenas.

Mediante simulaciones se comprobó que este criterio era suficiente para una buena reconstrucción de los objetos [Rius '87a] [Broquetas '89a], siendo el adoptado en el diseño y construcción del prototipo experimental.

Otra forma de determinar el número de antenas necesario es suponer, para simplificar, que el objeto a reconstruir es un cilindro dieléctrico centrado. Como se vio en {3.2.3} el campo dispersado en el exterior puede expresarse como una serie de modos cilíndricos según

$$E_z^s(\rho, \phi) = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(k_0 \rho) e^{jn\phi} \quad (4.40)$$

como los coeficientes del desarrollo, c_n , están relacionados con los del campo incidente, únicamente se excitan aquellos modos que pertenezcan a su espectro visible. Como se vio en {3.2.2.4} no existe un límite preciso entre espectro visible e invisible. Los modos que cumplen

$$n > k_0 R_{util} \quad (4.41)$$

se atenúan fuertemente. Si se toma como criterio para la síntesis de ondas planas que en la zona del objeto el número de modos necesario sea

$$n_{\max} = k_0 R_{util} \quad (4.42)$$

se obtiene la misma condición de muestreo que con la demostración intuitiva. Cuando se utiliza el criterio más restrictivo de considerar el doble de modos, la condición de muestreo que se obtiene es

$$NAE = \frac{8\pi R}{\lambda_0} \quad (4.43)$$

A nivel práctico, los modos superiores están muy atenuados ya que corresponden a las zonas de más alta frecuencia espacial y por ello el error cometido al despreciarlos es pequeño. El criterio final de diseño es el menos restrictivo de la ecuación (4.39).

4.3.2.1.1 Limitación en el número de antenas receptoras

Es obvio que, en un sistema real de tomografía, resulta imposible emitir y medir simultáneamente con la misma antena. A la vez, las antenas más cercanas a la emisora, que radia una onda cilíndrica, reciben un nivel de señal muy elevado. En la práctica, en el prototipo experimental únicamente puede recibirse con la semiagrupación opuesta a la antena emisora {2.6}. La pérdida de información debido a la limitación en el número de antenas receptoras, NAR , equivale a un filtrado paso bajo de la imagen, ya que las antenas más cercanas a la emisora proporcionan información de las frecuencias más altas del espectro. La Fig. 4.6 muestra el efecto paso bajo en el espectro de la reducción del número de antenas receptoras.

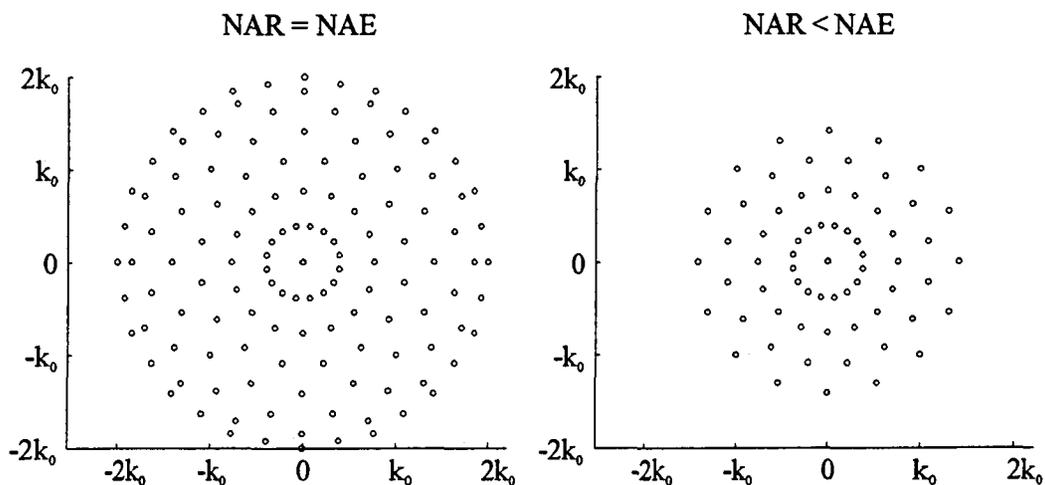


Fig. 4.6 Efecto paso bajo de la limitación en el número de antenas receptoras.

4.3.2.2 Interpolación bilineal. Mejora mediante "zero-padding"

Las medidas procesadas mediante (4.38) proporcionan información del espectro del contraste del objeto sobre círculos descentrados equiespaciados. Las técnicas clásicas de FFT requieren que los puntos se encuentren sobre una malla rectangular, para ello, es necesario realizar una interpolación bilineal que permita obtener la información del espectro sobre esa malla, tal como muestra la Fig. 4.7.

La formulación matemática de la interpolación puede hallarse en [Rius '87a]. Pude verse en la Fig. 4.7 que a altas frecuencias, en las zonas más alejadas del centro, la distancia entre

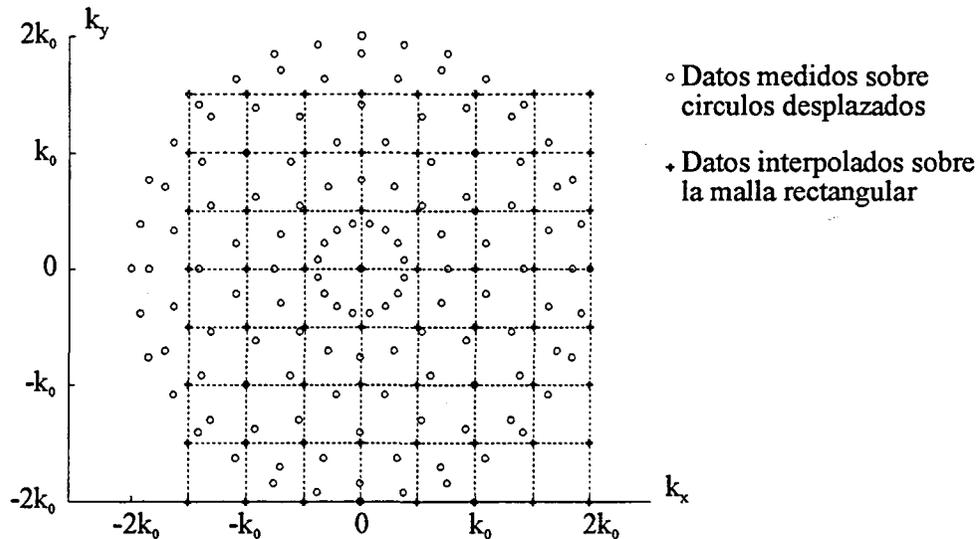


Fig. 4.7 Interpolación de la información espectral multivista sobre una rejilla rectangular.

muestras es mayor y por lo tanto el error cometido en la interpolación aumenta. Para mejorar la calidad de la interpolación interesaría disponer del máximo número de antenas emisoras-receptoras, como en general este parámetro es fijo habrá que aumentar la densidad de puntos mediante el uso de la técnica de "zero-padding". Si a la FFT-2D de $f(m; m_0)$ se le aumenta su tamaño en un factor A añadiendo ceros en las zonas de alta frecuencia, al realizar la FFT-2D inversa se habrá aumentado la densidad de puntos, con lo que la interpolación se realizará entre puntos más cercanos. Lógicamente, mediante la interpolación no puede recuperarse la información asociada a variaciones rápidas de campo que se perdía al tener limitado el número de antenas, y que se encontraban asociadas a variaciones rápidas del objeto.

4.3.3 Imágenes diferenciales

Una aplicación del algoritmo de Born que proporciona buenos resultados, [Hawley '91] [Mallorquí '92], consiste en las llamadas imágenes diferenciales. En ellas se reconstruye la diferencia de campos dispersados por un cuerpo entre dos instantes de tiempo distintos para ver que ha variado en su interior. En un principio se podría pensar que para una imagen diferencial no es necesario que se cumpla la aproximación de Born, sino que únicamente debería cumplirla su variación. Esta afirmación no es cierta.

El campo dispersado por el cuerpo en la primera medida vale

$$E_1^s(\vec{r}) = -k_0^2 \int_S C(\vec{r}') E_1(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.44)$$

mientras que en la segunda debido a la variación de la función contraste

$$E_2^s(\vec{r}) = -k_0^2 \int_S [C(\vec{r}') + \Delta C(\vec{r}')] E_2(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.45)$$

con lo que la diferencia de campos dispersados a reconstruir es

$$E_2^s(\vec{r}) - E_1^s(\vec{r}) = -k_0^2 \int_S [C(\vec{r}') (E_2^s(\vec{r}') - E_1^s(\vec{r}')) + \Delta C(\vec{r}') E_2(\vec{r}')] G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.46)$$

La reconstrucción mediante aproximación de Born equivale a obtener

$$E_2^s(\vec{r}) - E_1^s(\vec{r}) = -k_0^2 \int_S \Delta C_B(\vec{r}') E^{inc}(\vec{r}') G(k_0 |\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \quad (4.47)$$

Comparando (4.46) y (4.47) puede hallarse el error cometido en la reconstrucción diferencial

$$\Delta C_B(\vec{r}) = \frac{E^2(\vec{r})}{E^1(\vec{r})} \Delta C(\vec{r}) + \frac{E_s^2(\vec{r}) - E_s^1(\vec{r})}{E^{inc}(\vec{r})} C(\vec{r}) \quad (4.48)$$

En la expresión aparecen dos términos de error claramente diferenciados. El primero multiplica al contraste y deteriora el nivel de la imagen diferencial pero no la posición de las variaciones; el error se reduce en cuanto más parecidos sean los campos difractados en las dos medidas. Este término de error se relaciona con el cumplimiento de la aproximación de Born en el objeto absoluto. El segundo término de error que distorsiona la imagen depende del contraste absoluto y disminuye si los campos dispersados en las dos medidas son muy parecidos y cuanto más bajo sea el contraste absoluto del objeto. Este segundo término se relaciona tanto con el cumplimiento de la aproximación de Born en el objeto absoluto como en el diferencial. La filosofía de imagen diferencial será utilizada posteriormente en la deducción del método de la pseudoinversa { Cap. 6}.

4.3.4 Resultados y aplicaciones

Los resultados obtenidos con el algoritmo de Born mediante simulaciones y medidas reales de cuerpos biológicos muestran la capacidad del mismo para reconstruir los contornos con gran nitidez, aunque la información de la distribución interior de tejidos queda oculta en la

mayor parte de los casos debido al incumplimiento de la aproximación utilizada. La información de contorno será de gran utilidad para mejorar las prestaciones de los algoritmos iterativos que se presentarán en {Cap. 5} y {Cap. 6}.

En primer lugar se presentan resultados de las simulaciones de un modelo de cuello, {Ap. B.6}, con una agrupación de antenas situadas a 11.2 cm radiando a 1 GHz, y un modelo de tórax, {Ap. B.7}, con las antenas situadas a 32.4 cm radiando a 434 MHz. En ambos casos la agrupación es de 64 antenas, las ondas son cilíndricas y el medio externo agua. Las Fig. 4.8 y Fig. 4.9 muestran en su parte superior los contrastes reconstruidos y filtrados paso bajo para compensar los errores de alta frecuencia debidos a las pérdidas. En las imágenes es imposible distinguir la distribución interna de los distintos tejidos. En la parte central de las figuras están los mapas de permitividad obtenidos a partir del contraste sin filtrar. Aprovechando uno de los errores que la aproximación de Born introduce en las imágenes pueden obtenerse de forma muy sencilla los contornos de los cuerpos. En la parte real de permitividad se observa una depresión que se corresponde con el contorno buscado, simplemente detectándola puede obtenerse una buena aproximación de la forma del objeto. Un posterior refinamiento de esa información permite hallar el contorno final. Al no filtrar la imagen de permitividad se mantienen todas las componentes espectrales de alta frecuencia, lo que permite acentuar esa depresión aunque se deteriore la calidad del resto.

Finalmente la Fig. 4.10 muestra una reconstrucción de un antebrazo humano medido en el prototipo de tomógrafo. Al ser un cuerpo más sencillo puede intuirse la posición de los huesos, aunque una vez más los valores de contraste/permitividad son erróneos. También se observa el contorno obtenido a partir de la imagen reconstruida.

Cuello

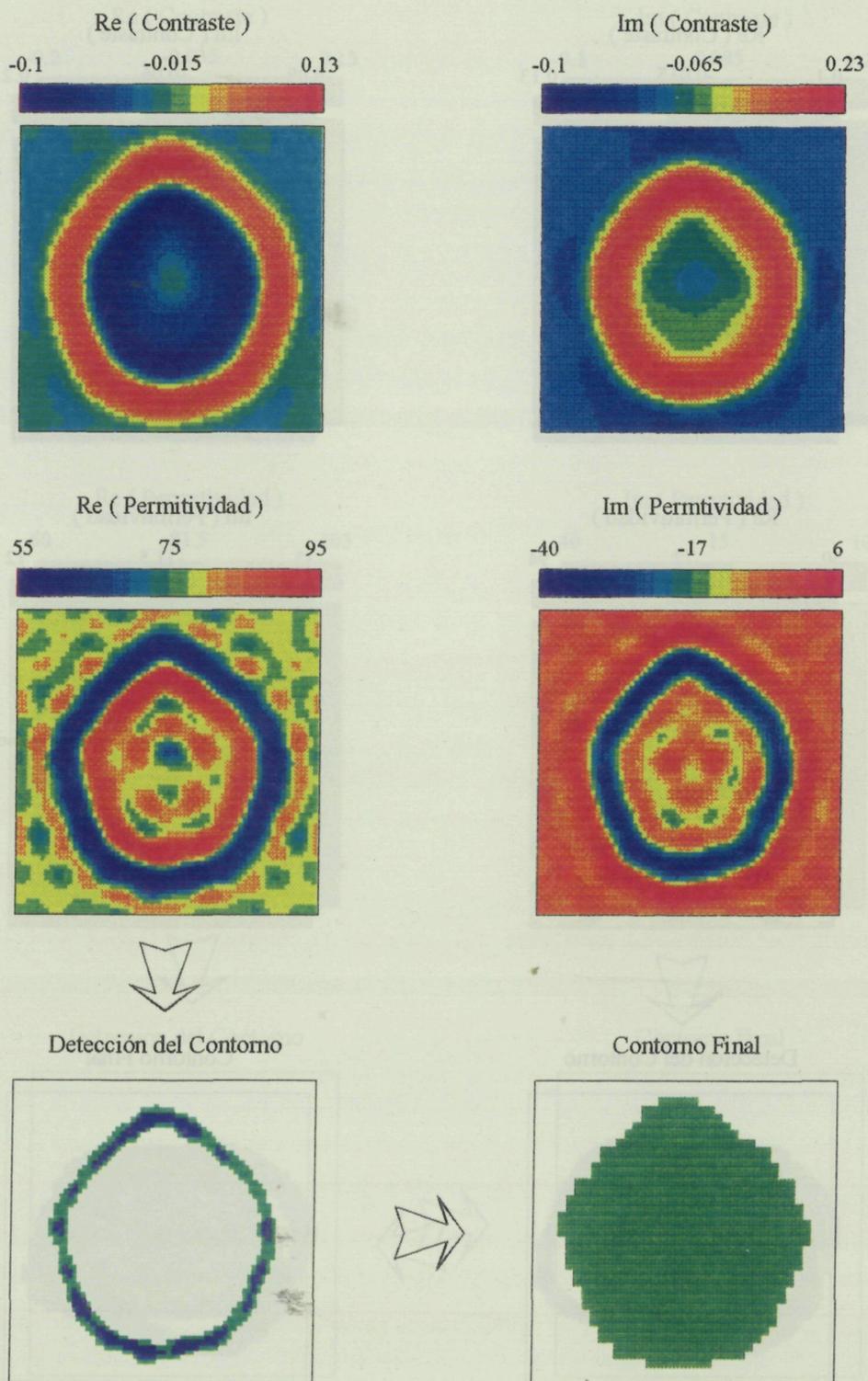


Fig. 4.8 Simulación de cuello {Ap. B.6} reconstruida mediante aproximación de Born.

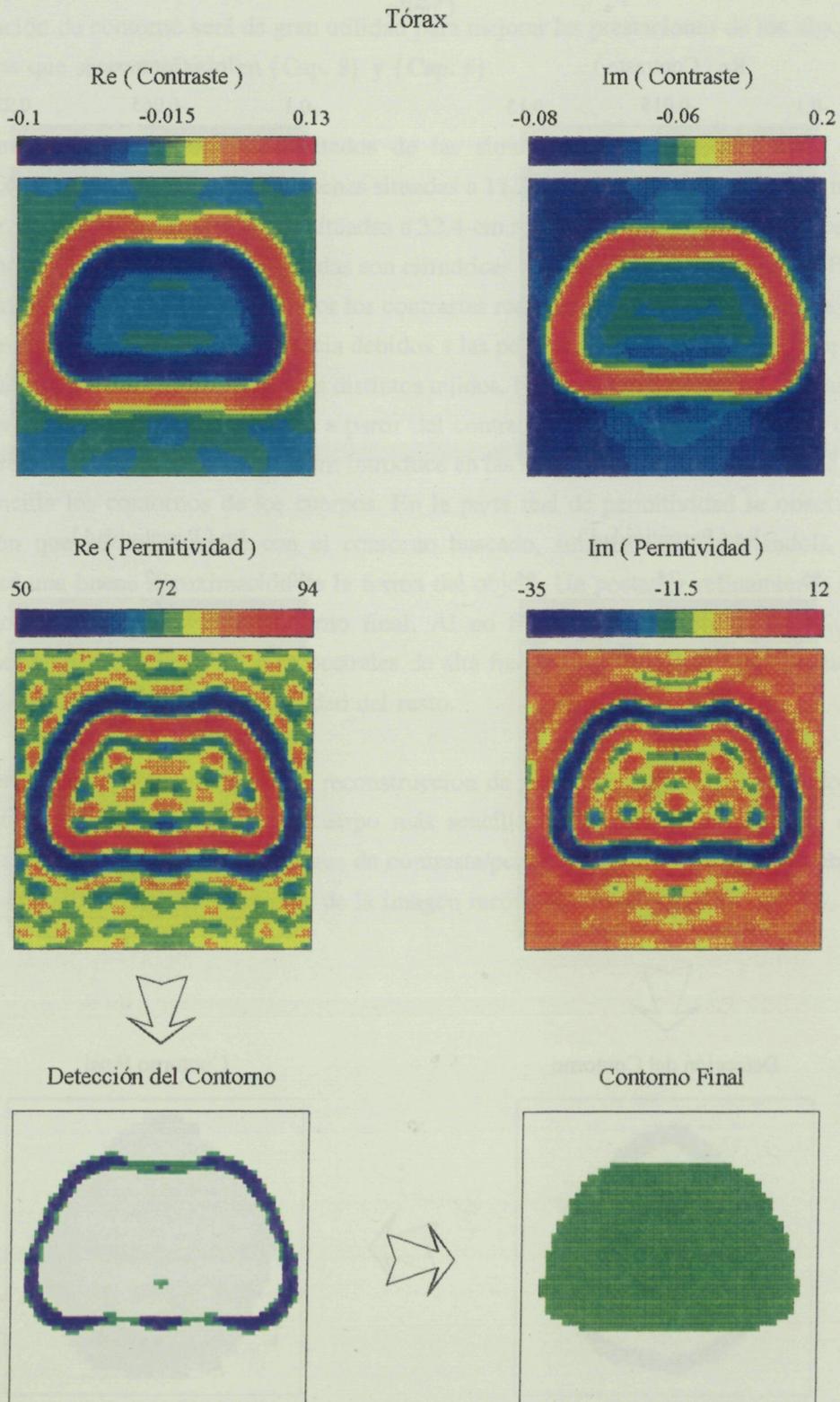


Fig. 4.9 Simulación de tórax {Ap. B.7} reconstruida mediante aproximación de Born.

Antebrazo humano (bragreg)

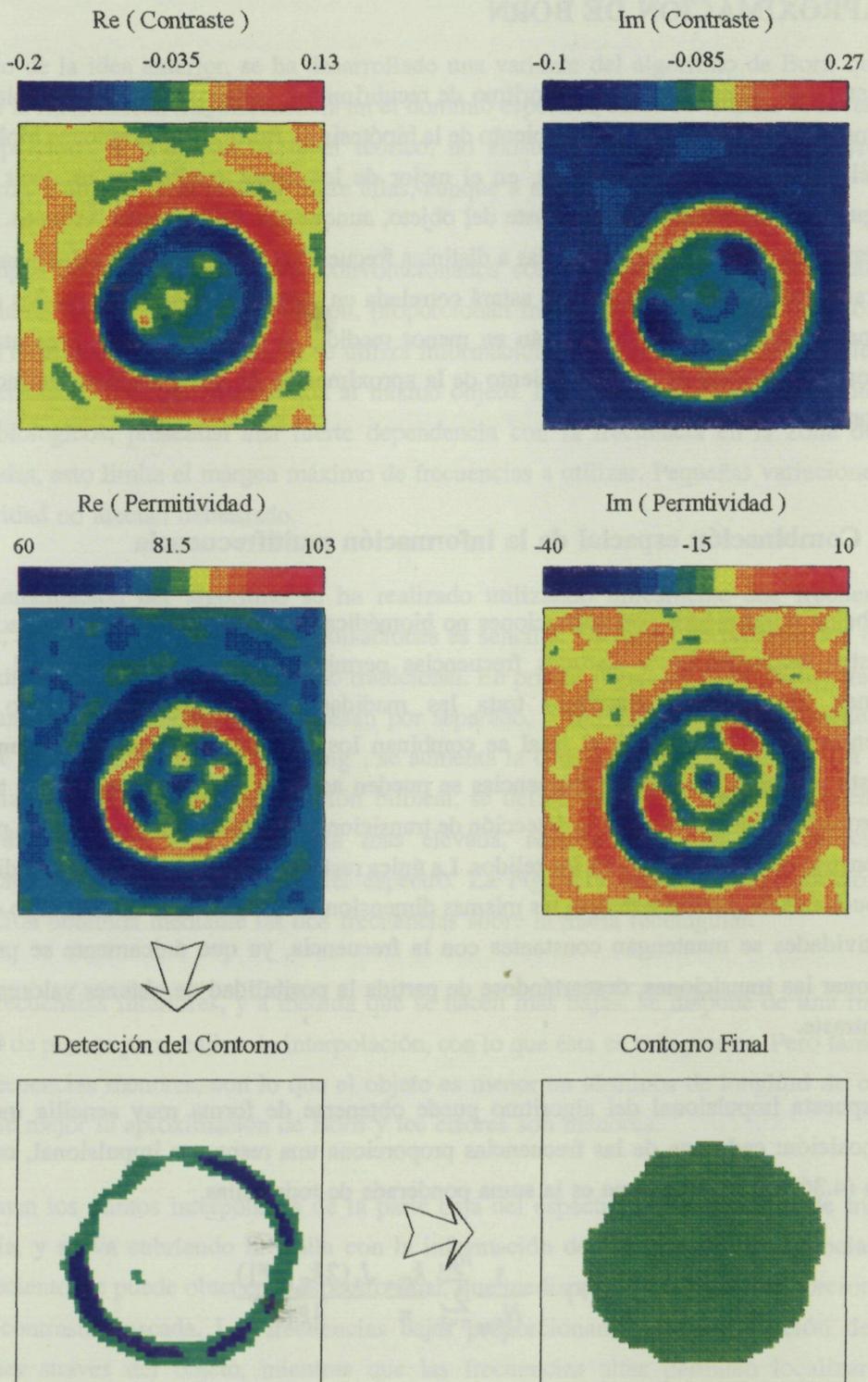


Fig. 4.10 Reconstrucción a partir de medidas reales de un antebrazo humano.