



DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL
I COMUNICACIONS

ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE TELECOMUNICACIO

*FORMULACION ESPECTRAL DE LA RADIACION.
APLICACION AL CASO CILINDRICO*

JORDI ROMEU ROBERT

DIRECTOR: LUIS JOFRE ROCA

TESIS DOCTORAL PRESENTADA A LA
UNIVERSITAT POLITECNICA DE
CATALUNYA PARA LA OBTENCION DEL
TITULO DE DOCTOR INGENIERO DE
TELECOMUNICACION

BARCELONA, JUNIO 1991





**DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL
I COMUNICACIONS
ESCOLA TECNICA SUPERIOR D'ENGINYERS
DE TELECOMUNICACIO**

*FORMULACION ESPECTRAL DE LA RADIACION.
APLICACION AL CASO CILINDRICO*

JORDI ROMEU ROBERT

DIRECTOR: LUIS JOFRE ROCA

**TESIS DOCTORAL PRESENTADA A LA
UNIVERSITAT POLITECNICA DE
CATALUNYA PARA LA OBTENCION DEL
TITULO DE DOCTOR INGENIERO DE
TELECOMUNICACION**

BARCELONA, JUNIO 1991



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

He d'agrair a totes les persones que durant els anys de realització d'aquesta tesi m'han prestat la seva ajuda i col.laboració. Durant aquest temps el grup AMR ha sofert varies baixes. Entre la gent que ens ha deixat vull manifestar el meu agraïment especial en Miquel Ferrando, des que ens va deixar només tenim dues alternatives sobre les que discutir i a més una no funciona, i en Mariano Baquero amb qui durant varis anys varem lluitar aferrissadament per no sucumbir a la saturació.

Parlant de saturacions, he d'agrair també en Lluís Jofre la il.lustríssima tasca de direcció (de la tesi, evidentment). Entre reunions, juntes, comissions, claustres, consells, etc., sempre ha trobat el moment per orientar i discutir sobre el treball a realitzar, a més he d'agrair-li fer-me describir la bellesa de la sortida del sol.

Finalment vull fer el meu agraïment extensiu a tots el membres del grup, professors, becaris i auxiliars de recerca que en tot moment han col.laborat a que aquest treball pugués realitzar-se.

INDICE

CAPITULO 1 INTRODUCCION.	1
CAPITULO 2 FORMULACION ESPECTRAL DEL PROBLEMA DE LA RADIACION.....	5
2.1 Introducción.	5
2.2 Ecuacion vectorial de onda.	7
2.3 Construcción de las soluciones.	11
2.4 Solución de la ecuación de onda escalar homogénea.	13
2.5 Función de Green para la ecuación de onda.	15
2.6 Coordenadas cartesianas.	24
2.6.1 Expresión de los campos como superposición de ondas planas.	24
2.6.2 Campos en función de las corrientes.	26
2.6.3 Muestreo y dominio evanescente.	28
2.6.4 Expresiones asintóticas de los campos a grandes distancias.	29
2.7 Coordenadas cilíndricas.	30
2.7.1 Expansión de los campos en ondas cilíndricas.	30
2.7.2 Campos en función de las corrientes.	31
2.7.3 Muestreo y dominio evanescente.	33
2.7.4 Expresiones asintóticas de los campos a grandes distancias.	34
2.8 Coordenadas esféricas.	36
2.8.1 Campos como superposición de ondas esféricas.	36
2.8.2 Campos en función de las corrientes.	37
2.8.3 Muestreo y dominio evanescente.	40
2.8.4 Expresiones asintóticas de los campos a grandes distancias.	41
2.9 Transformaciones de onda.	42
2.10 Transformaciones de espectro.	42
2.10.1 Transformación plano cilíndrico.	42
2.10.2 Transformación plano esférico.	48
CAPITULO 3 APLICACION DE LA FORMULACION ESPECTRAL. ...	53
3.1 Introducción.	53
3.2 Transformación campo próximo campo lejano.	54
3.2.1 Sistema plano.	55
3.2.2 Sistema cilíndrico.	57
3.2.3 Sistema esférico.	60
3.3 Reconstrucción de las corrientes.	61
3.3.1 Reconstrucción de un hilo de corrientes.	62
3.3.2 Reconstrucción de una lámina de corrientes.	64
3.3.3 Reconstrucción de láminas inclinadas de corrientes.	69
3.3.4 Reconstrucción de la excitación de agrupaciones.	72

3.4 Estudio de radomos cilíndricos y esféricos.	78
3.4.1 Incidencia de modos cilíndricos en discontinuidades cilíndricas.	79
3.4.2 Incidencia de modos cilíndricos en láminas dieléctricas cilíndricas.	83
3.4.3 El caso esférico.	86
CAPITULO 4 TRANSFORMACION CON CORRECCION DE SONDA PARA EL CASO CILINDRICO.	89
4.1 Introducción.	89
4.2 Formulación matemática.	90
4.3 Transformación con sonda ideal.	100
4.4 Expresiones asintóticas.	103
4.5 Síntesis de onda plana.	111
CAPITULO 5 CAUSAS DE ERROR EN LA MEDIDA EN CAMPO PROXIMO Y SU EFECTO EN EL DIAGRAMA DE RADIACION.	133
5.1 Introducción.	133
5.2 Errores aleatorios.	134
5.2.1 Caracterización del ruido en campo lejano.	135
5.2.2 Intervalos de confianza y valor esperado del diagrama de radiación.	143
5.2.3 Obtención de la varianza del ruido en campo próximo.	151
5.2.4 Relación señal a ruido en campo lejano.	153
5.3 Errores en la distancia de medida.	160
5.4 Degradación de la onda plana sintetizada.	165
5.4.1 Longitud del cilindro de medida.	165
5.4.2 Errores aleatorios de posicionado.	173
5.5 Otras causas de error.	178
5.5.1 Errores debidos a la sonda.	178
5.5.2 Influencia del entorno de medida.	185
5.5.3 Errores debidos al sistema de RF.	187
CAPITULO 6 DISEÑO DE UN CAMPO PROXIMO DE MEDIDA DE ANTENAS.	191
6.1 Introducción.	191
6.2 Especificación de un CPA.	192
6.3 Consideraciones de diseño.	193
6.3.1 Sistema de exploración y posicionado.	193
6.3.2 Sonda de medida.	199
6.3.3 Sistema de RF.	205
6.3.4 Algoritmos y sistema de procesado de datos.	209

6.4 Validación del campo de medida.	211
6.5 Diseño práctico de un CPA.	213
6.5.1 Especificación.	213
6.5.2 Construcción.	220
6.5.2.1 Sistema de posicionado.	220
6.5.2.2 Sonda.	225
6.5.2.3 Sistema de RF y adquisición.	229
6.5.2.4 Sistema de procesado de datos.	232
6.5.3 Validación.	233
CAPITULO 7 CONCLUSION.	239
BIBLIOGRAFIA.....	241

CAPITULO 1

Introducción.

El problema de la radiación consiste de forma genérica en encontrar los campos electromagnéticos exteriores a unas fuentes que se encuentran contenidas en una cierta región del espacio. El empleo de la formulación espectral o modal, permite expresar los campos radiados como la superposición de ondas elementales planas, cilíndricas o esféricas. De este modo el problema de la radiación se reduce a obtener las amplitudes complejas de cada una de las ondas elementales que por superposición dan lugar a los campos radiados. Estas amplitudes complejas o coeficientes modales describen completamente los campos y con la ventaja que mediante un conjunto finito de valores escalares, es posible obtener los campos radiados en cualquier punto del espacio. La dependencia espacial de los campos viene dada por las funciones de onda, que son las soluciones de la ecuación de onda por separación de variables en el sistema de coordenadas deseado.

Las propiedades de las funciones de onda permiten que la formulación espectral esté especialmente bien adaptada al tratamiento de problemas electromagnéticos en que estén involucradas superficies que se definen por una o varias coordenadas constantes en el sistema de coordenadas empleado. Así, por ejemplo, los problemas de difracción por cilindros o esferas, se han tratado clásicamente de forma rigurosa mediante métodos modales.

La sencillez del empleo de expansiones modales tiene como contrapartida que su aplicación está limitada a casos que contengan formas geométricas canónicas. A pesar de esta limitación el ámbito de aplicación de la misma es suficientemente amplio como para que deba contemplarse como una posible alternativa en la solución de cualquier problema electromagnético.

En el grupo de Antenas, Microondas y Radar del Departamento de Teoría de Señal y Comunicaciones de la UPC y en relación con los proyectos de investigación "Sistema de imágenes por microondas en tiempo real. Aplicaciones biomédicas" y "Campo de pruebas de medida de antenas radar. Denominación CPA" se ha empleado la formulación espectral en dos problemas concretos como son la formación de imágenes por microondas y el diagnóstico y medida de antenas.

El origen de la presente tesis está estrechamente relacionado con el desarrollo de estos proyectos. A pesar que la formulación espectral es una herramienta clásica del electromagnetismo, se planteó la necesidad de deducir de forma general, homogénea y rigurosa la formulación para el caso plano, cilíndrico y esférico, estableciéndose la relaciones existentes entre ellas y que permiten obtener los coeficientes modales en una geometría a partir de los coeficientes en cualquiera de las otras dos, siendo el objetivo final presentar una formulación uniforme y consistente con otros trabajos previos realizados dentro del grupo.

A partir de esta base teórica se abordó el diseño de un campo próximo de medida de antenas en campo próximo cilíndrico. Entre las aplicaciones de la formulación espectral se encuentra la transformación campo próximo campo lejano que permite obtener el diagrama de radiación de antenas a partir del campo radiado en una zona próxima a la misma. La particularización en la geometría cilíndrica estaba impuesta por la características de la antena a medir, que en este caso era una antena de grandes dimensiones que forma parte de un radar tridimensional desarrollado por la empresa CESELSA. Los algoritmos de transformación campo próximo campo lejano fueron desarrollados durante los años setenta, sin embargo existía un escaso tratamiento de la influencia de los errores de medida sobre el diagrama de radiación. Este tema es especialmente importante al medir antenas con especificaciones muy estrictas en cuanto posicionado del haz principal y nivel de lóbulos secundarios, aunque su tratamiento es complejo ya que la magnitud que desea obtenerse no es la que se mide directamente, por lo que los errores de medida influirán sobre el diagrama de una forma indirecta y difícil de establecer en la mayoría de los casos.

Los estudios sobre errores que se encuentran en la bibliografía se limitan al caso plano o esférico no siendo extrapolables al caso cilíndrico por la distinta naturaleza de los algoritmos de transformación. Con esta situación los diseños de campos de medida en coordenadas cilíndricas se basan en un método de simulación numérica. En este proceso se perturba un campo próximo simulado sin error con el error que se desea estudiar. Se realiza la transformación campo próximo campo lejano y se cuantifica el error sobre el diagrama de radiación. Este método es sin duda una buena solución de ingeniería que permite de forma rápida la especificación de un campo de medida, sin embargo

presenta el inconveniente que los resultados obtenidos tan sólo son válidos para la antena y la geometría de medida simulados, sin ofrecer posibilidades de generalización ni cuantificar el efecto de cada uno de los parámetros de medida, a menos que el número de simulaciones sea exageradamente elevado. Es por este motivo que se creyó necesario abordar el estudio de errores de medida en campo próximo en coordenadas cilíndricas para sistematizar en lo posible la especificación de un campo de medida, proporcionando expresiones simples que relacionen el error en campo próximo y su efecto sobre el campo lejano.

Con esta doble motivación : deducir de forma homogénea y rigurosa la formulación espectral y su aplicación a sistematizar el diseño de una campo próximo de medida de antenas se ha realizado la presente tesis con la siguiente estructuración.

En el capítulo 2 se deduce la formulación espectral de la radiación para las tres geometrías de interés, obteniéndose los coeficientes modales en función de las fuentes, y estableciéndose las relaciones que permiten pasar de los coeficientes modales de una geometría a otra.

En el capítulo 3 se presenta la aplicación de la formulación espectral a dos casos de especial interés en la medida de antenas, como son la transformación campo próximo campo lejano y la reconstrucción de corrientes como aplicación al diagnóstico de antenas. Asimismo se muestra la potencialidad de la formulación espectral al estudio del efecto de ramos cilíndricos y esféricos sobre el diagrama de radiación de antenas. La transformación campo próximo campo lejano en coordenadas cilíndricas con corrección de sonda es el tema del capítulo 4. En este capítulo se deducen los distintos algoritmos de forma consistente con la formulación espectral realizada en el capítulo 2. Además se reformula la transformación como un proceso de síntesis por software de ondas planas. Este punto de vista es útil en el tratamiento de errores que se aborda en el capítulo 5. En este capítulo se estudia el efecto de los errores de medida más significativos, deduciéndose expresiones que permiten cuantificar su influencia sobre el diagrama de radiación.

El diseño de un campo de medida se realiza en el capítulo 6 y en el capítulo 7 se recogen la conclusiones.

Finalmente, un comentario sobre la redacción de la tesis. Dado que la formulación empleada implica la manipulación de funciones con propiedades muy específicas, se ha optado por clarificar al máximo los desarrollos matemáticos realizados. Esto conlleva que el texto se encuentre salpicado de fórmulas que forman parte de estos desarrollos, lo que sin duda hace farragosa la lectura a quien se aproxima a la tesis de una forma

más superficial. Sin embargo, pensando en el interés de la formulación realizada como base a futuros trabajos, se ha primado la claridad matemática frente a la facilidad de lectura del texto, desestimando otras opciones como la inclusión en apéndices de los desarrollos matemáticos. Por lo que pido comprensión y disculpas a quien estando interesado en esta tesis de forma más general, pueda sentir cierto desasosiego al enfrentarse a algunas retahílas de fórmulas quizás demasiado detallistas.

CAPITULO 2

Formulación espectral del problema de radiación.

2.1 Introducción.

La obtención de los campos electromagnéticos producidos por fuentes arbitrarias es un problema clásico del electromagnetismo. La solución puede abordarse directamente mediante la solución de las ecuaciones de Maxwell, si bien suele realizarse mediante un proceso indirecto pero más simple, de definición de unos potenciales a partir de los cuales se obtienen los campos, y calcular los potenciales a partir de las fuentes.

Tanto los campos como los potenciales cumplen la ecuación vectorial de onda. La formulación matemática es independiente del sistema de coordenadas empleado, sin embargo la resolución de la ecuación de onda presenta diferencias sustanciales para cada sistema de coordenadas, derivadas de las distintas propiedades geométricas de cada uno de los sistemas habitualmente empleados: cartesiano, cilíndrico y esférico. La diferencia fundamental estriba en que de los tres sistemas de coordenadas sólo en cartesianas los tres vectores ortogonales que forman la base son constantes para cualquier punto del espacio. Este hecho lleva a que al descomponer la ecuación vectorial de onda en las tres ecuaciones escalares asociadas a cada componente vectorial, se deriven sistemas de ecuaciones distintos para cada sistema de coordenadas. Por otra parte estos sistemas de ecuaciones son complejos con las distintas componentes acopladas, excepto para el caso cartesiano, lo que hace que su resolución directa sea difícil.

Un método general para la solución de la ecuación vectorial de onda es el expuesto por Stratton [Stratton,1941] en que las soluciones pueden expresarse en función de la solución a la ecuación escalar de onda.

La resolución de la ecuación escalar de onda lleva a expresar los campos en zonas libres de fuentes como una suma ponderada de funciones que cumplen ciertas relaciones de ortogonalidad. Por otra parte, dado que los campos son solenoidales y campos eléctricos y magnéticos no son independientes resulta que de las seis componentes de campos sólo dos son independientes, por tanto es posible expresar los campos a partir de dos conjuntos independientes de coeficientes que llamaremos coeficientes modales. Además, para fuentes finitas el número de coeficientes es finito. De este modo la formulación espectral permite reducir el problema de conocer los campos en cualquier punto del espacio, a obtener dos conjuntos finitos de coeficientes que permiten conocer cualquier componente de campo en cualquier punto del espacio exterior a las fuentes.

Este capítulo está dedicado a la obtención de los coeficientes modales para fuentes arbitrarias, y las relaciones entre los coeficientes modales obtenidos en los diferentes sistemas de coordenadas. La formulación modal es una herramienta habitualmente empleada en el estudio de problemas de difracción de objetos canónicos, estudio de cavidades y radiación. Sin embargo, la formulación encontrada en la bibliografía es bastante inhomogénea en notación o convenios, o bien muy particularizada para una geometría o problema determinado.

Así, por ejemplo, Stratton trata el desarrollo de los campos como ondas planas, cilíndricas y esféricas de forma magistral, pero sin tratar el problema de obtención de los coeficientes en función de las fuentes. Harrington [Harrington, 1961] realiza un desarrollo similar a Stratton pero con un énfasis mayor en las aplicaciones de la formulación a los problemas de cavidades, radiación y difracción. Sin embargo, existen diferencias de notación y convenios en la definición de los potenciales que llevan a que en las expresiones finales existan diferencias de constantes respecto a la formulación elegida por otros autores y empleada en esta tesis.

Todos estos autores definen y tratan la función de Green, pero son Tyras [Tyras, 1969] y Stinson [Stinson, 1976] quienes lo tratan de una forma más detallada y próxima al problema que se trata en este capítulo, si bien el empleo de criterios de variación temporal distintos lleva a resultados formalmente distintos.

Debido a esta dispersión bibliográfica se ha creído conveniente recoger toda esta formulación de forma homogénea, aunque no muy detallada, de manera que sirva de referencia a los desarrollos posteriores que se realizan a largo de este trabajo.

Finalmente es de destacar que en la tesis doctoral de L. Jofre [Jofre, 1982] se encuentra un desarrollo exhaustivo para el caso plano que se ha resumido en el apartado 2.6., y cuya notación y convenios han sido empleados en los desarrollos realizados en las otras geometrías.

2.2 Ecuación vectorial de onda.

Las ecuaciones de Maxwell para variaciones temporales armónicas de la forma $e^{j\omega t}$ son

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{M} \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} + \vec{J} \quad (2-2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon \quad (2-3)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \tau/\mu \quad (2-4)$$

donde se ha supuesto de forma genérica la existencia de fuentes eléctricas y magnéticas, representadas por las densidades de corriente \vec{J} y \vec{M} y las densidades de carga ρ y τ . En la formulación del problema de radiación interesa obtener los campos en función de las fuentes. Los campos producidos por las fuentes pueden expresarse como la superposición de los campos producidos por las fuentes eléctricas y magnéticas de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_F \quad (2-5)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_A + \vec{H}_F$$

Cada uno de los términos cumple el siguiente sistema de ecuaciones duales

$$\nabla \times \vec{E}_A = -j\omega\mu\vec{H}_A \quad (2-6.a) \quad \nabla \times \vec{E}_F = -j\omega\mu\vec{H}_F - \vec{M} \quad (2-6.b)$$

$$\nabla \times \vec{H}_A = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}_A \quad \nabla \times \vec{H}_F = j\omega\epsilon\vec{E}_F$$

$$\nabla \cdot \vec{E}_A = \rho/\epsilon \quad \nabla \cdot \vec{E}_F = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_A = 0 \quad \nabla \cdot \vec{H}_F = \tau/\mu$$

Los sistemas de ecuaciones 2-6 muestran que los campos \vec{H}_A y \vec{E}_F son solenoidales, y por tanto pueden expresarse a partir de sendos potenciales vectores, para una región homogénea del espacio, de la forma

$$\vec{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2-7)$$

$$\vec{E}_F = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F}$$

del conjunto de expresiones 2-6 y 2-7 se desprenden las siguientes relaciones de dualidad

$$\vec{E}_A \leftrightarrow \vec{H}_F \quad (2-8)$$

$$\vec{H}_A \leftrightarrow -\vec{E}_F$$

$$\vec{J} \leftrightarrow \vec{M}$$

$$\vec{A} \leftrightarrow \vec{F}$$

$$\epsilon \leftrightarrow \mu$$

por tanto resolviendo uno solo de los sistemas de ecuaciones se obtiene de forma inmediata por dualidad la solución del otro. Nótese que debido a la elección realizada de los potenciales, el potencial vector \vec{A} es producido por las fuentes eléctricas, mientras que el potencial vector \vec{F} lo es por las fuentes magnéticas.

Llevando la definición de los potenciales a los sistemas de ecuaciones 2-6 se puede escribir

$$\nabla \times \vec{E}_A = -j\omega \nabla \times \vec{A} \quad (2-9)$$

$$\nabla \times (\vec{E}_A + j\omega \vec{A}) = 0 \quad (2-10)$$

dado que un vector irrotacional puede expresarse como el gradiente de un campo escalar, se define

$$\nabla \Phi = -\vec{E}_A - j\omega \vec{A} \quad (2-11)$$

La expresión dual a la anterior es

$$\nabla \Psi = -\vec{H}_F - j\omega \vec{F} \quad (2-12)$$

donde Φ y Ψ son los potenciales escalares eléctrico y magnético respectivamente.

Si se toma el rotacional en la expresión 2-7 se obtiene

$$\nabla \times \vec{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (2-13)$$

al considerar la ecuación del rotacional del campo magnético en 2.6

$$\vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (2-14)$$

de donde

$$\vec{E}_A = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{A} - \frac{\vec{J}}{j\omega\epsilon} \quad (2-15)$$

por otra parte,

$$\vec{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2-16)$$

Aplicando dualidad se pueden obtener los campos producidos por las fuentes magnéticas como

$$\vec{H}_F = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{F} - \frac{\vec{M}}{j\omega\mu} \quad (2-17)$$

$$\vec{E}_F = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} \quad (2-18)$$

A partir de las expresiones anteriores se puede escribir la expresión de los campos totales para una región del espacio homogénea y libre de fuentes de la forma

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (2-19)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{F} \quad (2-20)$$

Las expresiones 2-19 y 2-20 relacionan los campos en función de los potenciales vectores, sin embargo queda todavía por determinar el valor de los potenciales en función de las fuentes.

De las expresiones 2-14 y 2-11 se puede formular

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = j\omega\epsilon(-\nabla\Phi - j\omega\vec{A}) + \vec{J} \quad (2-21)$$

recordando que

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (2-22)$$

se obtiene

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon\Phi) - j\mu\vec{J} \quad (2-23)$$

y análogamente para \vec{F}

$$\nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F} + j\omega\mu\epsilon\Psi) - j\epsilon\vec{M} \quad (2-24)$$

con $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$.

Las divergencias de los potenciales vectores pueden fijarse libremente. Si imponemos la condición de Lorentz dada por

$$\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon\Phi = 0 \quad (2-25)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} + j\omega\mu\epsilon\Psi = 0 \quad (2-26)$$

se obtiene para los potenciales vectores

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu\vec{J} \quad (2-27)$$

$$\nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = -\epsilon\vec{M} \quad (2-28)$$

Es decir, la relación entre los potenciales y las corrientes es la ecuación vectorial de onda. Bajo la condición de Lorentz se puede escribir

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + k^2 \vec{A} + \mu\vec{J} \quad (2-29)$$

y por tanto se puede reescribir 2-19 y 2-20 como

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} - j\omega \vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} (\nabla(\nabla \cdot) + k^2) \vec{A} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} \quad (2-30)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - j\omega \vec{F} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} (\nabla(\nabla \cdot) + k^2) \vec{F} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2-31)$$

Expresiones que son válidas si los potenciales cumplen la condición de Lorentz.

2.3 Construcción de las soluciones.

Para una región del espacio homogénea y libre de fuentes los campos se relacionan con los potenciales a partir de 2-19 y 2-20

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \quad (2-32)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \times \nabla \times \vec{F} \quad (2-33)$$

Es bien sabido que tanto el campo eléctrico como magnético cumplen la ecuación vectorial de onda, condición que se ha visto que también es cierta para los potenciales vectores. Por tanto en una región del espacio libre de fuentes deberemos resolver la ecuación diferencial

$$\nabla^2 \vec{C} + k^2 \vec{C} = 0 \quad (2-34)$$

donde el vector \vec{C} representa genéricamente los vectores \vec{E} , \vec{H} , \vec{A} , \vec{F} .

La ecuación vectorial diferencial 2-34 se puede escribir como un sistema de ecuaciones diferenciales escalares, pero sólo en el caso de resolverlo en componentes cartesianas se obtienen tres ecuaciones escalares de onda independientes para cada componente. En los demás sistemas de coordenadas aparecen sistemas de ecuaciones diferenciales complicados en que las distintas componentes aparecen ligadas.

La resolución de 2-34 puede plantearse de forma genérica del siguiente modo [Stratton, 1941, pp. 393]. Sea Ψ una función escalar solución de la ecuación de onda

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \quad (2-35)$$

y sea $\vec{\alpha}$ un vector unitario constante, entendiéndose por constante que su dirección no varía en función de la posición del espacio. Se construyen tres vectores de la forma:

$$\vec{L} = \nabla \Psi; \quad \vec{M} = \nabla \times \vec{\alpha} \Psi; \quad \vec{N} = \frac{1}{K} \nabla \times \vec{M} \quad (2-36)$$

Es fácil comprobar que los vectores \vec{L} , \vec{M} y \vec{N} cumplen la ecuación 2-34. Nótese que 2-35 puede resolverse en cualquier sistema de coordenadas, y la única restricción para la obtención de las soluciones a la ecuación vectorial es que el vector $\vec{\alpha}$ sea constante. Precisamente al cumplirse esta condición tenemos que

$$\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\alpha} = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{N} \quad (2-37)$$

Por tanto los vectores \vec{M} y \vec{N} son ortogonales. De la definición de \vec{L} se observa que es irrotacional y su divergencia es

$$\nabla \cdot \vec{L} = \nabla^2 \Psi = -k^2 \Psi \quad (2-38)$$

mientras que \vec{M} y \vec{N} son solenoidales.

En general la resolución de 2-35 dará lugar a un conjunto de funciones ortogonales, de tal modo que la solución podrá expresarse como una suma ponderada de funciones ortogonales. A cada función Ψ_n asociamos un vector \vec{L}_n , \vec{M}_n y \vec{N}_n , tal como se ha definido en 2-36. En una región libre de fuentes el campo eléctrico se podrá expresar como

$$\vec{E} = - \sum_n \alpha_n \vec{M}_n + b_n \vec{N}_n \quad (2-39)$$

De este modo el campo eléctrico obtenido cumple la ecuación vectorial de onda. Es de notar que dado que el campo eléctrico es solenoidal no debe ser función de \vec{L} . En cuanto al campo magnético

$$\vec{H} = - \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \vec{E} = \frac{-j}{\eta} \sum_n \alpha_n \vec{N}_n + b_n \vec{M}_n \quad (2-40)$$

A partir de 2-32 y 2-33 puede comprobarse que los potenciales pueden obtenerse a partir de

$$\vec{A} = -j\eta\epsilon \sum_n b_n \Psi_n \vec{a} \quad (2-41)$$

$$\vec{F} = \epsilon \sum_n a_n \Psi_n \vec{a} \quad (2-42)$$

Estas ecuaciones muestran la posibilidad de expresar los potenciales como superposición de funciones elementales de onda. Estos potenciales se han definido de forma independiente de las fuentes, y sencillamente están relacionados con los campos a través de 2-32 y 2-33. De hecho su definición es absolutamente arbitraria en tanto que las restricciones sobre el vector \vec{a} son muy genéricas. No debe confundirse esta definición con la realizada en 2-7, cuya solución viene dada por 2-27 y 2-28, en que se asociaba cada uno de los potenciales a las fuentes eléctricas y magnéticas respectivamente.

De las definiciones 2-36, se observa que el vector \vec{M} es ortogonal a \vec{a} y \vec{N} es ortogonal a \vec{M} . Por tanto si el potencial vector \vec{A} es cero el campo eléctrico es ortogonal a \vec{a} , es decir, el campo es TE respecto \vec{a} . Del mismo modo si \vec{F} es cero el campo es TM respecto \vec{a} . Por tanto la solución construida para los campos se expresa como una superposición de modos TE y TM según \vec{a} debidos a los potenciales \vec{F} y \vec{A} respectivamente.

2.4 Solución de la ecuación de onda escalar homogénea.

Tal como se ha puesto de manifiesto en el apartado anterior, los potenciales vectores pueden expresarse como una superposición de funciones de onda elementales obtenidas de la solución de la ecuación de onda escalar homogénea. La relación entre los potenciales y los campos es un proceso de diferenciación. Este planteamiento genérico lleva a soluciones matemáticas distintas para los diferentes sistemas de coordenadas.

La solución de la ecuación de onda homogénea se encuentra ampliamente tratada en la bibliografía, un estudio detallado se encuentra en [Balanis, 1989, cap. 3]. El método clásico de resolución es por separación de variables, refiriéndonos exclusivamente al problema de radiación en espacio libre, esto es, ondas propagándose en espacio libre desde el origen de coordenadas hacia el infinito, las soluciones vienen dadas por:

Coordenadas cartesianas

$$\Psi(x, y, z) = e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} \quad ; k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2-43)$$

Coordenadas cilíndricas

$$\Psi(\rho, \phi, z) = H_n^{(2)}(K_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} \quad ; k_\rho^2 + k_z^2 = k^2 \quad (2-44)$$

Coordenadas esféricas

$$\Psi(r, \theta, \phi) = h_n^{(2)}(Kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi} \quad (2-45)$$

En cada uno de los sistemas de coordenadas la solución vendrá dada por una superposición de funciones elementales.

En coordenadas cartesianas las constantes de separación k_x , k_y y k_z están ligadas, por lo que sólo dos de ellas se pueden fijar libremente. En problemas abiertos k_x , k_y y k_z forman un conjunto contínuo por lo que la solución general a la ecuación de onda vendrá dado por

$$\Psi(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} f(k_x, k_y) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} dk_x dk_y \quad (2-46)$$

$$k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

La elección de k_x y k_y independientes y k_z ligada, depende de las características geométricas del problema a resolver.

En coordenadas cilíndricas $H_n^{(2)}$ es la función de Hankel de segunda especie y orden n . Para problemas que abarquen todo el espacio n es entero, con lo que la solución general de la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas viene dada por

$$\Psi(\rho, \phi, z) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(k_z) H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{-jk_z z} dk_z \quad (2-47)$$

$$k_z^2 + k_\rho^2 = k^2$$

En coordenadas esféricas la solución a la ecuación de onda puede expresarse como

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \sum_n \sum_m c_{m,n} h_n^{(2)}(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi} \quad (2-48)$$

donde $h_n^{(2)}$ es la función esférica de Hankel de segunda especie y orden n , y $P_n^{1|m|}$ son los polinomios asociados de Legendre de primera especie. La elección de $|m|$ en el orden de los polinomios de Legendre se realiza para evitar posteriores confusiones, y no tiene mayor importancia ya que los polinomios de orden positivo y negativo se relacionan por una constante. En [Sommerfeld,1972,pp.129] se encuentra una interesante discusión sobre los distintos criterios que se pueden adoptar en la definición de los polinomios de Legendre. Una formulación alternativa de las soluciones de la ecuación de onda se realiza mediante los armónicos tesorales definidos como

$$T_{m,n}^e(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi \quad (2-49)$$

$$T_{m,n}^o(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$$

en donde se han separado las variaciones de orden par e impar según ϕ

Las funciones involucradas en la solución de la ecuación de onda homogénea presentan una serie de propiedades de ortogonalidad, valores asintóticos para grandes y pequeños argumentos, relaciones de recurrencia y propiedades de derivación, que son de gran utilidad en la manipulación de expresiones en que intervienen estas funciones. Estas propiedades se encuentran recogidas de forma general por Abramowitz, y Stratton, mientras que Hansen reúne las propiedades principales de las funciones que intervienen en coordenadas esféricas.

2.5 Función de Green para la ecuación de onda.

Las ecuaciones vectoriales de onda 2-27 y 2-28 pueden reducirse en el caso cartesiano a tres ecuaciones escalares de onda asociadas a cada una de las componentes vectoriales de forma que a partir del lema de Green pueden escribirse los potenciales como

$$\vec{A} = \mu \int_{v'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (2-50)$$

$$\vec{F} = \epsilon \int_{v'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{M}(\vec{r}') dv' \quad (2-51)$$

con la función de Green la solución a la ecuación diferencial inhomogénea

$$(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2-52)$$

La solución de la ecuación diferencial puede realizarse mediante el uso de métodos transformados [Tyras,1969] [Stinson,1976]. Definiendo los pares transformados

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{jx\alpha_1} e^{jy\alpha_2} e^{jz\alpha_3} dx dy dz \quad (2-53)$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) e^{-jx\alpha_1} e^{-jy\alpha_2} e^{-jz\alpha_3} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3$$

puede transformarse la ecuación 2-52 planteada en coordenadas cartesianas de forma que

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') e^{j\vec{r}'\vec{\alpha}} dx dy dz = - \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}') e^{j\vec{r}'\vec{\alpha}} dx dy dz \quad (2-54)$$

donde \vec{r} y $\vec{\alpha}$ son sendos radiovectores definidos en los espacios tridimensionales R y A respectivamente. El término de la derecha de la ecuación es directamente integrable. En cuanto al término de la izquierda puede integrarse por partes dos veces obteniéndose para la ecuación anterior

$$\tilde{G}(\vec{\alpha}) [k^2 - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)] = -e^{jx'\alpha_1} e^{jy'\alpha_2} e^{jz'\alpha_3} \quad (2-55)$$

siempre y cuando se cumpla la condición

$$\left[\frac{\partial G(\vec{r})}{\partial r_i} e^{j\alpha_i r_i} - G(\vec{r}) \frac{\partial e^{j\alpha_i r_i}}{\partial r_i} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (2-56)$$

La condición anterior es equivalente a

$$\left[\left(\frac{\partial G(\vec{r})}{\partial r_i} - j\alpha_i G(\vec{r}) \right) e^{j\alpha_i r_i} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (2-57)$$

que se cumplirá en el caso que

$$\lim_{|r_i| \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial G(\vec{r})}{\partial r_i} - j\alpha_i G(\vec{r}) \right) = 0 \quad (2-58)$$

Esta condición no es mas que la condición de radiación de Sommerfeld para ondas planas [Stinson,1976,pp.61].

Al invertir la ecuación 2-55 se obtiene la siguiente expresión para la función de Green

$$G(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\alpha_1(x-x')} e^{-j\alpha_2(y-y')} e^{-j\alpha_3(z-z')}}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) - k^2} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (2-59)$$

Debe de notarse que el espacio transformado A carece de un significado físico específico. La integral anterior puede realizarse en coordenadas esféricas realizando los cambios :

$$\alpha_1 = \alpha \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (2-60)$$

$$\alpha_2 = \alpha \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\alpha_3 = \alpha \cos \theta$$

$$dv = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 = \alpha^2 \operatorname{sen} \theta d\alpha d\theta d\phi$$

donde los ángulos θ y ϕ son los habituales en coordenadas esféricas. Si se define el vector $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ se puede escribir la función de Green a partir de 2-59 como

$$G(\vec{R}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\vec{R}\vec{\alpha}}}{\alpha^2 - k^2} \alpha^2 \operatorname{sen} \theta d\alpha d\theta d\phi \quad (2-61)$$

Dado que la orientación relativa de los sistemas de coordenadas del espacio real y el espacio transformado es irrelevante, se puede rotar los sistemas de coordenadas hasta hacer coincidir \vec{R} con α_3 con lo que

$$\begin{aligned} G(\vec{R}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-jR\alpha \cos \theta}}{\alpha^2 - k^2} \alpha^2 \operatorname{sen} \theta d\alpha d\theta = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{jR} \int_0^{\infty} \frac{e^{jR\alpha} - e^{-jR\alpha}}{\alpha^2 - k^2} \alpha d\alpha \end{aligned} \quad (2-62)$$

La integral puede extenderse entre $\pm \infty$ de forma que

$$G(\vec{R}) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{jR} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 - k^2} e^{-jR\alpha} d\alpha \quad (2-63)$$

esta integral puede evaluarse permitiendo que α sea complejo y realizando la integral sobre el contorno indicado en la figura 2-1, donde es fácilmente comprobable que el contorno C_1 no contribuye a la integral. Para el caso de medios sin pérdidas, esto es k real, el integrando presenta dos polos cuyos residuos son $1/2e^{*j/kR}$. Dado que el interés se centra en obtener soluciones en forma de ondas propagándose hacia el infinito debe excluirse el polo negativo de forma que

$$G(\vec{R}) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (2-64)$$

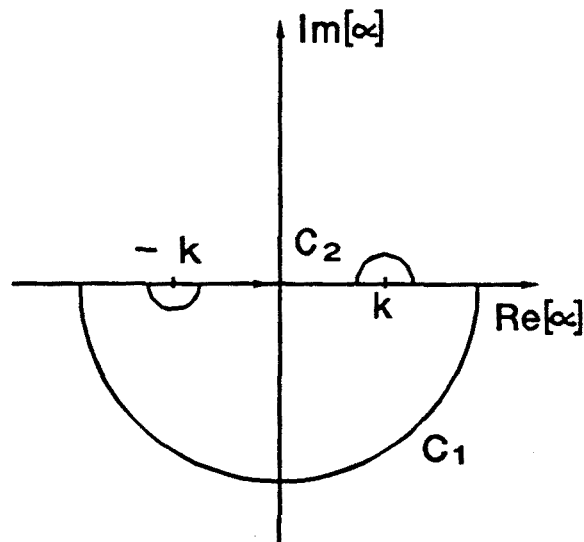


Figura 2-1 Camino de integración para la ecuación 2-63.

Es fácilmente comprobable que esta solución cumple con la condición expresada en 2-58

Una expresión alternativa de la función de Green puede hallarse definiendo

$$\tau^2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - k^2 \quad (2-65)$$

de forma que la ecuación 2-59 queda

$$G(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\alpha_1(x-x')} e^{-j\alpha_2(y-y')} \frac{e^{-j\alpha_3(z-z')}}{\alpha_3^2 + \tau^2} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \quad (2-66)$$

La integral respecto α_3 puede realizarse en el plano complejo. Según el valor de $(z - z')$ el contorno de integración se cierra por la parte superior o inferior del plano complejo de forma que el integrando se anule y no contribuya a la integral. Referido a la figura 2-2 los caminos de integración son

$$\begin{aligned} (z - z') > 0 & \quad C_3 \\ (z - z') < 0 & \quad C_2 \end{aligned} \quad (2-67)$$

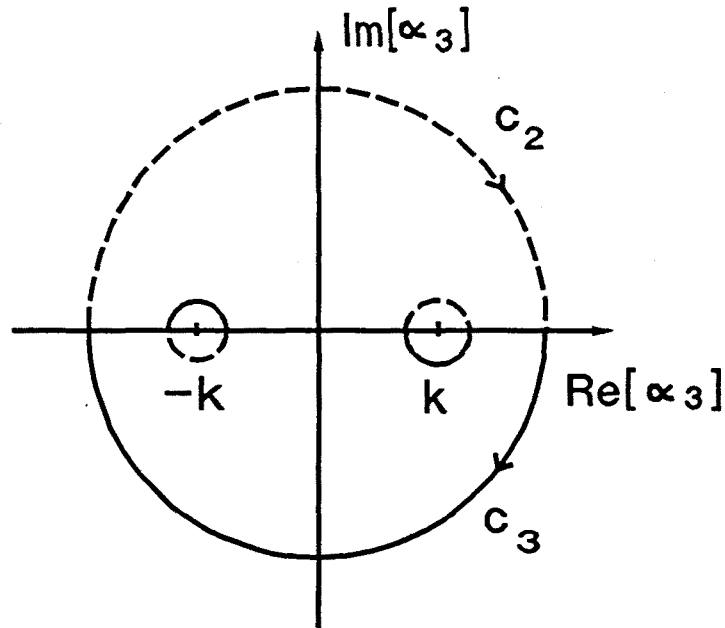


Figura 2-2 Camino de integración para la ecuación 2-66.

El integrando presenta dos polos en el eje real para $\pm \tau$, por lo que la integral puede evaluarse mediante el método de los residuos obteniéndose

$$G(x, y, z) = \frac{1}{j8\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\alpha_1(x-x')} e^{-j\alpha_2(y-y')} e^{-j\alpha_3|x-x'|}}{\alpha_3} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2-68)$$

con $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = k^2$. La ecuación anterior expresa la función de Green como una superposición de funciones de onda obtenidas de la solución de la ecuación de onda escalar homogénea en coordenadas cartesianas. De hecho esta expresión es formalmente análoga a la ecuación 2-46, y es útil en la formulación de la radiación en coordenadas cartesianas.

Se pueden encontrar expresiones integrales de la función de Green como superposición de ondas cilíndricas, para ello se define en primer lugar

$$\tilde{G}_{\alpha_3}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z) e^{j\alpha_3 z} dz \quad (2-69)$$

como la transformada de Fourier en una dimensión, según z , de la función de Green. Si se multiplica la ecuación de onda 2-52 por el término exponencial $e^{jz\alpha_3}$ y se integra entre $\pm\infty$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\nabla^2 + k^2) G(x, y, z) e^{jz\alpha_3} dz = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') \delta(y-y') \delta(z-z') e^{jz\alpha_3} dz \quad (2-70)$$

que al realizar la integral la ecuación resulta en

$$(\nabla^2 + k^2 - \alpha_3^2) \tilde{G}_{\alpha_3}(x, y) = -\delta(x-x') \delta(y-y') e^{jz'\alpha_3} \quad (2-71)$$

con la condición

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} G(x, y, z) e^{jz\alpha_3} - G(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z} e^{jz\alpha_3} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (2-72)$$

si se define

$$\gamma^2 = k^2 - \alpha_3^2 \quad (2-73)$$

$$G(x, y) = \tilde{G}_{\alpha_3}(x, y) e^{-jz'\alpha_3}$$

puede escribirse la ecuación 2-71 como

$$(\nabla^2 + \gamma^2) G(x, y) = -\delta(x-x') \delta(y-y') \quad (2-74)$$

problema bidimensional, de cuya solución puede obtenerse la solución al problema tridimensional mediante la transformación

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{\alpha_3}(x, y) e^{-j\alpha_3(z-z')} d\alpha_3 \quad (2-75)$$

La solución del problema bidimensional 2-74 puede realizarse de forma análoga a la planteada en 2-54 mediante la aplicación de la transformada de Fourier de forma que

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\alpha_1(x-x')} e^{-j\alpha_2(y-y')}}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - \gamma^2} d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2-76)$$

ecuación que puede integrarse en coordenadas cilíndricas mediante los siguientes cambios de coordenadas

$$\alpha_1 = \alpha \cos \phi \quad (2-77)$$

$$\alpha_2 = \alpha \operatorname{sen} \phi$$

$$d\alpha_1 d\alpha_2 = \alpha d\alpha d\phi$$

Si se orientan los eje de forma que $\hat{\alpha}_1$ concida con $\hat{\rho}$, tal como se indica en la figura 2-3, la integral queda en la forma

$$G(\rho, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-j\alpha|\rho-\rho'|\cos(\phi-\phi')}}{\alpha^2 - \gamma^2} \alpha d\phi d\alpha \quad (2-78)$$

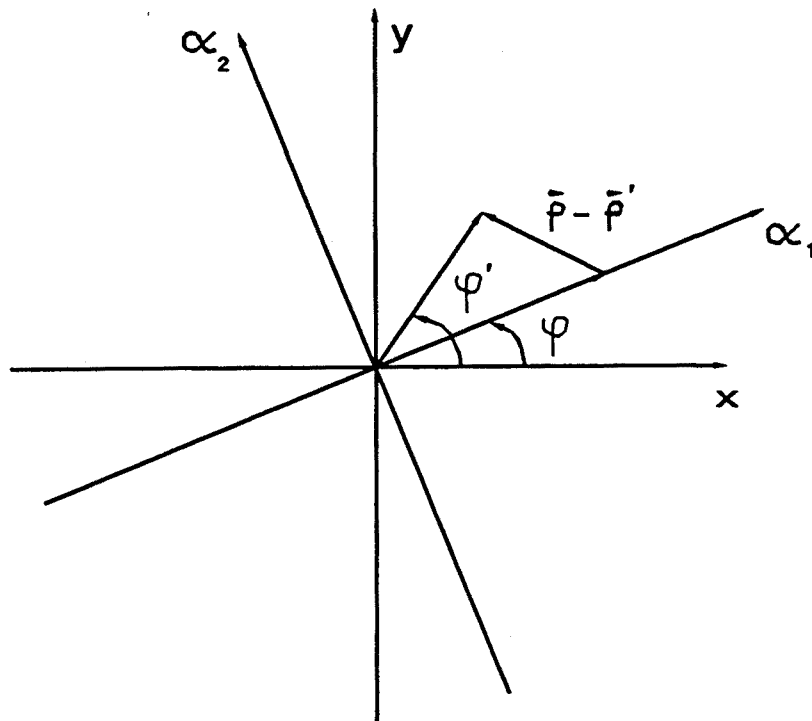


Figura 2-3 Orientación relativa de los sistemas de coordenadas para la integral 2-78.

Haciendo uso de la definición integral de las funciones de Bessel

$$J_n(x) = \frac{j^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{j(x \cos \phi + n\phi)} d\phi \quad (2-79)$$

se obtiene para la integral según ϕ

$$G(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(\alpha |\rho - \rho'|)}{\alpha^2 - \gamma^2} \alpha d\alpha \quad (2-80)$$

la integral resultante puede extenderse entre $\pm\infty$ haciendo uso de las siguientes propiedades

$$J_n(z) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(z) + H_n^{(2)}(z)] \quad (2-81)$$

$$H_n^{(1)}(ze^{-j\pi}) = (-1)^{n+1} H_n^{(2)}(z)$$

obteniéndose

$$G(\rho, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(2)}(\alpha |\rho - \rho'|)}{\alpha^2 - \gamma^2} \alpha d\alpha \quad (2-82)$$

Esta integral puede evaluarse en el plano complejo realizando la integral sobre el contorno indicado en la figura 2-4. El resultado de la integral mediante el método de los residuos es

$$G(\rho, \phi) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(\gamma |\rho - \rho'|) \quad (2-83)$$

Considerando las propiedades de traslación de las funciones de Hankel y la transformación 2-75 se obtiene para la función de Green del problema tridimensional en coordenadas cilíndricas

$$G(\rho, \phi, z) = \quad (2-84)$$

$$= \frac{1}{j8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n J_0(\gamma \rho') H_n^{(2)}(\gamma \rho) e^{jn(\phi - \phi')} e^{-j\alpha_3(z - z')} d\alpha_3$$

$$\text{para } |\rho| > |\rho' \cos(\phi - \phi')|$$

$$G(\rho, \phi, z) =$$

$$= \frac{1}{j8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n H_0^{(2)}(\gamma \rho') J_n(\gamma \rho) e^{jn(\phi - \phi')} e^{-j\alpha_3(z - z')} d\alpha_3$$

$$\text{para } |\rho| < |\rho' \cos(\phi - \phi')|$$

y

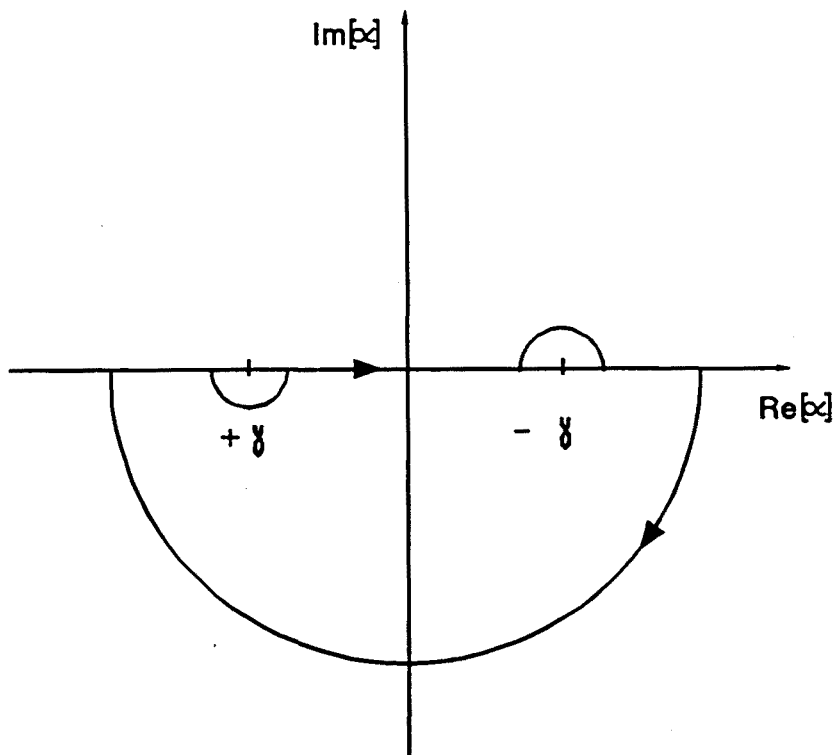


Figura 2-4 Camino de integración para la ecuación 2-82.

$$\gamma^2 + \alpha_3^2 = k^2 \tag{2-85}$$

Esta última expresión presenta la función de Green como una suma de ondas cilíndricas.

Finalmente se puede expresar la función de Green como una suma de ondas esféricas considerando las siguientes propiedades [Stratton, 1941, cap. 7]

$$h_0^{(2)}(z) = -\frac{e^{-jz}}{jz} \tag{2-86}$$

$$h_0^{(2)}(k|\vec{r}-\vec{r}'|) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)h_n^{(2)}(kr)j_n(kr')P_n(\cos\chi) \quad |\vec{r}| > |\vec{r}'| \tag{2-87}$$

$$P_n(\cos\chi) = \sum_{m=-n}^n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^{|m|}(\cos\theta)P_n^{|m|}(\cos\theta')e^{jm(\phi-\phi')} \tag{2-88}$$

Donde las coordenadas primadas se refieren a los puntos fuente, las coordenadas sin primar a los puntos campo, los ángulos θ y ϕ son los habituales en coordenadas esféricas y el ángulo χ es el ángulo que forman los vectores \vec{r} y \vec{r}' . De este modo la función de Green queda

$$G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (2-89)$$

$$\frac{k}{j4\pi} \sum_n \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} h_n^{(2)}(kr) j_n(kr') \cdot$$

$$\cdot P_n^{|m|}(\cos\theta) P_n^{|m|}(\cos\theta') e^{jm(\phi-\phi')}$$

para $|\vec{r}| > |\vec{r}'|$

2.6 Coordenadas cartesianas.

2.6.1 Expresión de los campos como superposición de ondas planas.

Una vez encontrada la solución de la ecuación vectorial, se particularizan las expresiones 2-41 y 2-42 para el caso de coordenadas cartesianas, con lo que se pueden escribir los potenciales como

$$\vec{A} = -j\eta\epsilon \int \int_{-\infty}^{\infty} f(k_x, k_y) e^{-\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \vec{a} \quad (2-90)$$

$$\vec{F} = \epsilon \int \int_{-\infty}^{\infty} g(k_x, k_y) e^{-\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \vec{a} \quad (2-91)$$

donde por conveniencia de notación se ha definido el vector \vec{k} con componentes k_x , k_y y k_z .

Los campos a partir de 2-32 y 2-33 vienen dados por

$$\vec{E}(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[g(k_x, k_y) j(\vec{k} \times \vec{a}) - f(k_x, k_y) \frac{1}{k} \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{k}) \right] e^{-\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-92)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{1}{\eta} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(k_x, k_y) j(\vec{k} \times \vec{a}) + g(k_x, k_y) \frac{1}{k} \vec{k} \times (\vec{a} \times \vec{k}) \right] e^{-\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-93)$$

De las expresiones anteriores se observa que si $f(k_x, k_y) = 0$, el campo eléctrico es normal al vector \vec{a} , es decir, el campo es TE respecto \vec{a} , por el contrario si $g(k_x, k_y) = 0$, el campo es TM respecto \vec{a} . Así pues, el campo queda expresado como la suma de una onda TE y una onda TM respecto \vec{a} . La elección del vector es arbitraria,

con la condición de que sea constante, pero nótese que si se tiene un conocimiento previo de los campos, la elección de $\vec{\alpha}$ puede simplificar el problema, en el sentido que podemos anular una de las funciones $f(k_x, k_y)$ o $g(k_x, k_y)$, siempre y cuando el campo sea TE o TM, respecto una dirección del espacio.

Si se define ahora

$$\vec{A}_E(k_x, k_y) = (2\pi)^2 \left[g(k_x, k_y) j(\vec{k} \times \vec{\alpha}) - f(k_x, k_y) \frac{1}{k} \vec{k} \times (\vec{\alpha} \times \vec{k}) \right] \quad (2-94)$$

$$\vec{A}_H(k_x, k_y) = (2\pi)^2 \left[f(k_x, k_y) j(\vec{k} \times \vec{\alpha}) + g(k_x, k_y) \frac{1}{k} \vec{k} \times (\vec{\alpha} \times \vec{k}) \right] \quad (2-95)$$

los campos se pueden escribir como

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \vec{A}_E(k_x, k_y) e^{-j\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-96)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \vec{A}_H(k_x, k_y) e^{-j\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-97)$$

Las expresiones anteriores muestran claramente como el campo puede espresarse como una superposición de ondas planas, cuya amplitud y fase viene dada por \vec{A}_E y \vec{A}_H . Es por este motivo que a estas funciones se les llama espectro angular de ondas planas. Es importante notar que la relación integral entre campos y espectros de ondas planas es una transformada de Fourier.

Teniendo en cuenta que en una zona libre de cargas el campo eléctrico debe ser solenoidal se obtiene que

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \nabla \cdot (\vec{A}_E(k_x, k_y) e^{-j\vec{k}\vec{r}}) dk_x dk_y = 0 \quad (2-98)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{A}_E = 0$$

Condición que implica que las tres componentes del espectro angular no son independientes, y que conociendo dos de ellas se puede determinar la tercera. Por otra parte la condición $\vec{k} \cdot \vec{A}_E = 0$ muestra claramente el carácter de ondas planas del espectro.

2.6.2 Campos en función de las corrientes

En el estudio de la radiación se está interesado en conocer la expresión de los campos en función de las corrientes. Se ha visto que los campos pueden expresarse en función de unos espectros angulares, a partir de los cuales se puede determinar el campo en cualquier punto del espacio libre de fuentes. La relación entre el espectro angular y los campos es una transformada de Fourier.

Para completar el problema queda por determinar la relación entre las corrientes y el espectro angular. Para ello reescribimos las ecuaciones 2-30 y 2-31

$$\vec{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} - j\omega \vec{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} (\nabla(\nabla \cdot) + k^2) \vec{A} - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} \quad (2-99)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} - j\omega \vec{F} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} (\nabla(\nabla \cdot) + k^2) \vec{F} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (2-100)$$

válidas para una zona libre de fuentes.

Si se desea expresar los campos en función de las fuentes sustituimos los potenciales por las expresiones 2-50 y 2-51

$$\vec{E} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla(\nabla \cdot) + k^2) \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' - \nabla \times \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (2-101)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu} (\nabla(\nabla \cdot) + k^2) \int_{V'} \vec{M}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' + \nabla \times \int_{V'} \vec{J}(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') dv' \quad (2-102)$$

Tomando para la función de Green la expresión integral obtenida en 2-68, en que la función de Green se expresa como una superposición de ondas planas

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-jkz}}{4\pi R} = \frac{1}{j8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jk_x(x-x')} e^{-jk_y(y-y')} e^{-jk_z|z-z'|}}{k_z} dk_x dk_y \quad (2-103)$$

substituyendo en la expresión 2-99 y teniendo en cuenta que los operadores vectoriales actúan sobre los puntos campo, se puede hallar la expresión de los campos para una región del espacio $z > z_1$ libre de fuentes como [Jofre, 1982, pp.31] como

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\eta \vec{X}_1 \vec{B}_J(k_x, k_y) - \vec{X}_2 \vec{B}_M(k_x, k_y)] e^{-\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-104)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\eta} \bar{X}_1 \bar{B}_M(k_x, k_y) - \bar{X}_2 \bar{B}_J(k_x, k_y) \right] e^{-j\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-105)$$

con

$$\bar{B}_J(k_x, k_y) = \int_{\nu'} \vec{J}(x', y', z') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' \quad (2-106)$$

$$\bar{B}_M(k_x, k_y) = \int_{\nu'} \vec{M}(x', y', z') e^{jk_x x'} e^{jk_y y'} e^{jk_z z'} dx' dy' dz' \quad (2-107)$$

y \bar{X}_1, \bar{X}_2 son los tensores

$$\bar{X}_1 = -\frac{k}{2k_z} \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_x^2}{k^2} & \frac{-k_x k_y}{k^2} & \frac{-k_x k_z}{k^2} \\ \frac{-k_x k_y}{k^2} & 1 - \frac{k_y^2}{k^2} & \frac{-k_y k_z}{k^2} \\ \frac{-k_x k_z}{k^2} & \frac{-k_y k_z}{k^2} & 1 - \frac{k_z^2}{k^2} \end{bmatrix} \quad (2-108)$$

$$\bar{X}_2 = -\frac{k}{2k_z} \begin{bmatrix} 0 & \frac{-k_z}{k} & \frac{k_y}{k} \\ \frac{k_z}{k} & 0 & \frac{-k_x}{k} \\ \frac{-k_y}{k} & \frac{k_x}{k} & 0 \end{bmatrix} \quad (2-109)$$

Definiéndose el espectro angular de ondas planas como

$$\vec{A}_E = \eta \bar{X}_1 \bar{B}_J(k_x, k_y) - \bar{X}_2 \bar{B}_M(k_x, k_y) \quad (2-110)$$

$$\vec{A}_H = \frac{1}{\eta} \bar{X}_1 \bar{B}_M(k_x, k_y) - \bar{X}_2 \bar{B}_J(k_x, k_y) \quad (2-111)$$

quedando

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \vec{A}_E(k_x, k_y) e^{-j\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-112)$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \vec{A}_H(k_x, k_y) e^{-j\vec{k}\vec{r}} dk_x dk_y \quad (2-113)$$

Expresiones formalmente análogas a las obtenidas en 2-96 y 2-97. Nótese que debido a la elección realizada de la función de Green, se obtienen expresiones de los campos válidas para un volumen libre de fuentes delimitado por el plano $z = z_1$ y la superficie del infinito, quedando en este caso el espectro en función de k_x y k_y . En función de la región del espacio de interés se puede tomar una expresión alternativa de la función de Green, obteniendo expresiones análogas válidas para otras regiones de espacio. Además si se observa la ecuación 2-112, se deduce que el campo eléctrico en un plano $z = z_0$ constante se puede hallar como

$$\vec{E}(x, y; z_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \vec{A}_E(k_x, k_y) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} e^{-jk_x z_0} dk_x dk_y \quad (2-114)$$

si se define

$$\vec{A}_E(k_x, k_y; z_0) = \vec{A}_E(k_x, k_y) e^{-jk_x z_0} \quad (2-115)$$

como el espectro angular de ondas planas en el plano $z = z_0$, se puede escribir

$$\vec{E}(x, y; z_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \vec{A}_E(k_x, k_y; z_0) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dk_x dk_y \quad (2-116)$$

procediéndose de forma análoga para el campo magnético.

De la expresión anterior se desprende que la formulación empleada permite de forma simple encontrar a partir del espectro angular el campo en planos definidos por un valor de z constante. Si para un problema dado interesara conocer los campos sobre planos de x ó y constantes debería realizarse un desarrollo análogo para la función de Green correspondiente.

2.6.3 Muestreo y dominio evanescente.

A partir de la expresión 2-115 se observa que el factor de propagación del espectro angular de ondas planas es

$$e^{-jk_x z_0} = e^{-j(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2} z_0} \quad (2-117)$$

de forma que para aquellos valores de k_x y k_y que cumplan que

$$k_x^2 + k_y^2 > k^2 \quad (2-118)$$

el factor de propagación introduce una fuerte atenuación, de modo que a unas pocas longitudes de onda de las fuentes el espectro angular se encuentra prácticamente limitado al dominio $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$, es decir, se encuentra limitado por una circunferencia de radio k . Esta región del espectro angular se la denomina dominio visible, mientras que el resto del espectro forma el dominio invisible o evanescente.

La ecuación 2-116 es fácilmente invertible, por tanto es posible obtener el espectro angular a partir del conocimiento del campo en un plano de $z = z_0$ constante mediante una transformada de Fourier de la forma

$$\vec{A}_E(k_x, k_y) = e^{jk_z z_0} \iint \vec{E}(x, y; z_0) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dx dy \quad (2-119)$$

Si la distancia del plano de medida es suficientemente grande para que el espectro evanescente esté atenuado, $\vec{E}(x, y; z_0)$ es una función de banda limitada y por tanto es posible aplicando el teorema de Nyquist muestrear el campo y evaluar la integral 2-119 de forma discreta sin pérdida de información. El paso de muestreo debe ser

$$\Delta x = \Delta y = \frac{\pi}{K} = \lambda/2 \quad (2-120)$$

2.6.4 Expresiones asintóticas de los campos a grandes distancias.

La expresión 2-114 permite calcular los campos en cualquier punto del espacio para un semiespacio $z > z_1$ que no contenga las fuentes. Si escribimos la misma ecuación en coordenadas esféricas se obtiene

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \vec{A}_E(k_x, k_y) \cdot e^{-jr(k_x \text{ sen } \theta \cos \phi + k_y \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi + k_x \cos \theta)} dk_x dk_y \quad (2-121)$$

si se desea encontrar el campo a grandes distancias, esto es $r \rightarrow \infty$, se puede evaluar la integral 2-121 mediante el método de la fase estacionaria [Balanis, 1989, apendice VI], obteniéndose

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = j \frac{1}{2\pi} k \frac{e^{-jkr}}{r} \vec{A}_E(k_{x_0}, k_{y_0}) \quad (2-122)$$

donde k_{x_0} y k_{y_0} son los puntos de fase estacionaria dados por

$$k_{x_0} = k \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (2-123)$$

$$k_{y_0} = k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

Si se define el espectro en función de k_y y k_z se obtiene

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = j \frac{1}{2\pi} k_{x_0} \frac{e^{-jk_r}}{r} \vec{A}_E(k_{y_0}, k_{z_0}) \quad (2-124)$$

con

$$k_{x_0} = k \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (2-125)$$

$$k_{y_0} = k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$k_{z_0} = k \cos \theta$$

Tanto la expresión 2-122 como 2-124, muestran que salvo factores multiplicativos, el diagrama de radiación es el espectro angular, y las direcciones del espacio están definidas por el vector \vec{k} . Este resultado es coherente con el desarrollo habitualmente realizado en el análisis de antenas, en que diagrama de radiación y corrientes están relacionados por una transformada de Fourier, de forma similar a como lo están los espectros angulares y corrientes 2-110 y 2-111.

2.7 Coordenadas cilíndricas.

2.7.1 Expansión de los campos en ondas cilíndricas.

Empleando la formulación desarrollada en el apartado 2.3, se pueden expresar los potenciales vectores en coordenadas cilíndricas como

$$\vec{A}(\rho, \phi, z) = -j\eta \epsilon \sum_n \int b_n(k_z) H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \vec{a} \quad (2-126)$$

$$\vec{F}(\rho, \phi, z) = \epsilon \sum_n \int \alpha_n(k_z) H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \vec{a} \quad (2-127)$$

con

$$k_z^2 + k_\rho^2 = k^2 \quad (2-128)$$

En cuanto a la elección del vector $\vec{\alpha}$, teniendo presente que debe ser un vector constante, resulta una elección razonable tomar $\vec{\alpha} = \hat{z}$. En este caso obtendremos a partir de \vec{F} una solución TE respecto \hat{z} , y de \vec{A} una solución TM.

A partir de 2-39 y 2-40 y con las definiciones realizadas en 2-36, los campos se expresan como

$$\vec{E} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_n(k_z) \vec{M}_n(k_z) + b_n(k_z) \vec{N}_n(k_z)] dk_z \quad (2-129)$$

$$\vec{H} = \frac{-j}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_n(k_z) \vec{N}_n(k_z) + b_n(k_z) \vec{M}_n(k_z)] dk_z \quad (2-130)$$

con los vectores de onda cilíndricos

$$\vec{M}_n(k_z) = \left[\hat{\rho} \frac{jn}{\rho} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cdot) \right] H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} \quad (2-131)$$

$$\vec{N}_n(k_z) = \left[\hat{\rho} \frac{-jk_z}{k} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cdot) + \hat{\phi} \frac{nk_z}{k\rho} + \hat{z} \frac{k_\rho^2}{k} \right] H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} \quad (2-132)$$

donde los coeficientes modales cilíndricos $\alpha_n(k_z)$ y $b_n(k_z)$ se obtienen de las condiciones del problema.

2.7.2 Campos en función de las corrientes.

Para expresar los campos directamente en función de las corrientes se procede de forma análoga al caso cartesiano. La función de Green en coordenadas cilíndricas válida para el volumen exterior al cilindro que contiene a las fuentes, que se supone centrado en el origen es (2-84)

$$G(\vec{r}, r') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_\rho \rho') \cdot H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn(\phi - \phi')} e^{-jk_z(z - z')} dk_z \quad (2-133)$$

A partir de 2-30 el campo eléctrico queda

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) = & \quad (2-134) \\
= & \frac{1}{j\omega\epsilon} [\nabla(\nabla(\cdot)) + k^2] \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_\rho \rho) \cdot \right. \\
& \cdot e^{jn\phi} e^{-jk_z z} \int_{v'} \vec{J} J_n(k_\rho \rho') e^{jn\phi'} e^{-jk_z z'} dv' \left. \right] dk_z - \\
& - \nabla \times \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} \cdot \right. \\
& \cdot \left. \int_{v'} \vec{M} J_n(k_\rho \rho') e^{jn\phi'} e^{-jk_z z'} dv' \right] dk_z
\end{aligned}$$

Los operadores vectoriales actúan sobre los puntos campo, además es necesario considerar que las direcciones de las corrientes son distintas a las direcciones de los vectores en los puntos campo, de modo que los vectores de las corrientes tienen una dependencia implícita con los puntos campo de la forma

$$\vec{J}(\rho', \phi', z') = (\vec{J}' \cdot \hat{\rho}) \hat{\rho} + (\vec{J}' \cdot \hat{\phi}) \hat{\phi} + (\vec{J}' \cdot \hat{z}) \hat{z} \quad (2-135)$$

resultando

$$\begin{aligned}
\vec{J}(\rho', \phi', z') = & [J'_{\rho} \cos(\phi - \phi') + J'_{\phi} \sin(\phi - \phi')] \hat{\rho} \\
& + [-J'_{\rho} \sin(\phi - \phi') + J'_{\phi} \cos(\phi - \phi')] \hat{\phi} + J'_{z} \hat{z}
\end{aligned} \quad (2-136)$$

Trás aplicar los operadores vectoriales y las propiedades de traslación de las funciones de Bessel se obtiene

$$a_n(k_z) = -\frac{k\eta}{8\pi k_\rho^2} \int_{v'} [\vec{M}'_n(k_z) \vec{J}(\vec{r}') - \frac{j}{\eta} \vec{N}'_n(k_z) \vec{M}(\vec{r}')] dv' \quad (2-137)$$

$$b_n(k_z) = -\frac{k\eta}{8\pi k_\rho^2} \int_{v'} [\vec{N}'_n(k_z) \vec{J}(\vec{r}') - \frac{j}{\eta} \vec{M}'_n(k_z) \vec{M}(\vec{r}')] dv' \quad (2-138)$$

donde

$$\vec{M}'_n(k_z) = \left[\hat{\rho}' \frac{-jn}{\rho'} - \hat{\phi}' \frac{\partial}{\partial \rho'} (\cdot) \right] J_n(k_\rho \rho') e^{-jn\phi'} e^{jk_z z'} \quad (2-139)$$

$$\vec{N}'_n(k_z) = \left[-\hat{\rho}' \frac{-jk_z}{k} \frac{\partial}{\partial \rho'} (\cdot) + \hat{\phi}' \frac{nk_z}{k\rho'} + \hat{z}' \frac{k_\rho^2}{k} \right] J_n(k_\rho \rho') e^{-jn\phi'} e^{jk_z z'} \quad (2-140)$$

A partir de las expresiones anteriores se puede escribir el campo eléctrico de una forma más compacta como

$$\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu \int_{V'} (\vec{G}_1 \cdot \vec{J} + \vec{G}_2 \cdot \vec{M}) dV' \quad (2-141)$$

donde

$$\vec{G}_1(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{j}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\vec{M}_n(k_z) \vec{M}_n^*(k_z) + \vec{N}_n(k_z) \vec{N}_n^*(k_z)] \frac{1}{k_z^2} dk_z \quad (2-142)$$

$$\vec{G}_2(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-j}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\vec{M}_n(k_z) \vec{N}_n^*(k_z) + \vec{N}_n(k_z) \vec{M}_n^*(k_z)] \frac{1}{k_z^2} dk_z \quad (2-143)$$

2.7.3 Muestreo y dominio evanescente.

Las expresiones 2-129 muestran como los campos pueden expresarse a partir de un doble sumatorio, discreto y contínuo, de funciones de onda cilíndricas ponderadas por los coeficientes modales $\alpha_n(k_z)$ y $b_n(k_z)$. Coeficientes que se obtienen a partir de las fuentes de 2-137, 2-138. Al igual que en el caso cartesiano se puede definir un dominio visible para los coeficientes modales. Para el eje z el proceso es análogo al caso plano, estando k_z limitado entre $\pm k$.

En cuanto al índice n, se observa que la dependencia de los coeficientes modales respecto a este índice viene dada por un desarrollo en serie de Fourier de las corrientes multiplicadas por funciones tipo $J_n(k_\rho \rho')$ o sus derivadas. Si ρ' está acotado por 'a', esto es, 'a' es el radio mínimo del cilindro que engloba las fuentes, y dado que las funciones $J_n(x)$ tienden a cero para $x > n$, se puede suponer que

$$\alpha_n, b_n = 0 \quad \text{para} \quad n > k_\rho a \quad (2-144)$$

Por otra parte de las expresiones 2-129 a 2-132 se deduce que la relación entre los campos medidos sobre un cilindro de radio constante y los coeficientes modales es básicamente una transformada de Fourier según z y un desarrollo en serie de Fourier en ϕ . Por tanto si se muestrean los campos sobre un cilindro a unas pocas longitudes de onda de las fuentes con un paso de muestreo

$$\Delta z = \lambda/2 \quad (2-145)$$

$$\Delta \phi = \frac{\pi}{n_{\max}} = \frac{\pi}{ka} = \frac{\lambda}{2a}$$

es posible obtener los coeficientes modales.

2.7.4 Expresiones asintóticas de los campos a grandes distancias.

La dependencia de los campos en función de los coeficientes modales y de la distancia viene dada por funciones de Hankel de segunda especie, o de sus derivadas que pueden formularse a su vez en el mismo tipo de funciones. Observando las ecuaciones 2-129 a 2-132 se observan relaciones integrales de la forma

$$I(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_z) H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{-jk_z z} dk_z \quad (2-146)$$

Para grandes distancias, esto es $k_\rho \rho \gg 1$, se puede substituir la función de Hankel por su expresión asintótica para grandes argumentos de forma que se obtiene

$$I(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_z) \sqrt{\frac{2}{\pi k_\rho \rho}} e^{-j(k_\rho \rho - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} e^{-jk_z z} dk_z \quad (2-147)$$

Dado que $k_\rho^2 + k_z^2 = k^2$ se pueden realizar los siguientes cambios de variable

$$k_\rho = k \sin \theta' \quad \rho = r \sin \theta \quad (2-148)$$

$$k_z = k \cos \theta' \quad z = r \cos \theta$$

obteniéndose

$$I(\rho) = -\sqrt{2} k e^{j(n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{C_n(k \sin \theta')}{\sqrt{\pi k r \sin \theta \sin \theta'}} e^{-jkr \cos(\theta - \theta')} \sin \theta' d\theta' \quad (2-149)$$

la integral anterior puede realizarse para $r \rightarrow \infty$ mediante el método de la fase estacionaria. El resultado final es

$$I(\rho) = -2j^{n+1} C_n(k \cos \theta) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2-150)$$

En cuanto a los términos

$$I'(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_z) \frac{\partial}{\partial \rho} H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{-jk_z z} dk_z \quad (2-151)$$

mediante las propiedades de la derivada de las funciones de Hankel pueden escribirse como

$$I'(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} C_n(k_z) \left[k_\rho H_{n-1}^{(2)}(k_\rho \rho) - \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(k_\rho \rho) \right] e^{-jk_z z} dk_z \quad (2-152)$$

al aplicar los resultados anteriores y despreciando los términos $1/r^2$ se obtiene

$$I'(\rho) = -2j^n C_n(k \cos \theta) k \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2-153)$$

con estos valores asintóticos los vectores de onda cilíndricos se aproximan, despreciando los términos $1/r^2$, por

$$\vec{M}_n = (-j\hat{\phi}) 2k \sin \theta j^{n+1} \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jn\phi} \quad (2-154)$$

$$\vec{N}_n = (\hat{\theta}) 2k \sin \theta j^{n+1} \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jn\phi} \quad (2-155)$$

Las expresiones asintóticas de los campos se obtienen de forma inmediata como

$$E_\theta = -2k \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \sum_{n=0}^{\lfloor n < k_p a \rfloor} b_n(k \cos \theta) j^{n+1} e^{jn\phi} \quad (2-156)$$

$$E_\phi = j2k \sin \theta \frac{e^{-jkr}}{r} \sum_{n=0}^{\lfloor n < k_p a \rfloor} \alpha_n(k \cos \theta) j^{n+1} e^{jn\phi} \quad (2-157)$$

En este caso el diagrama de radiación viene expresado por una serie de Fourier, cuyos coeficientes son, salvo factores, los coeficientes modales. Además cada una de las componentes de campo queda en función de un solo coeficiente, esto es debido a la definición de los potenciales 2-126 y 2-127. El coeficiente α_n sólo da lugar a campos TE según z , es decir $E_z = 0$, además dado que a grandes distancias las componentes radiales de los campos deben ser nulas $E_\rho = 0$, por tanto a grandes distancias α_n sólo da lugar a E_ϕ . Un razonamiento análogo puede realizarse respecto b_n y el campo magnético.

2.8 Coordenadas esféricas.

2.8.1 Campos como superposición de ondas esféricas.

Siguiendo un desarrollo parecido al realizado en coordenadas planas y cilíndricas se construyen los potenciales vectores

$$\vec{A} = -j\eta\epsilon \sum_n \sum_m b_{m,n} \Psi_{m,n} \vec{a} \quad (2-158)$$

$$\vec{F} = \epsilon \sum_n \sum_m \alpha_{m,n} \Psi_{m,n} \vec{a} \quad (2-159)$$

con

$$\Psi_{m,n} = h_n^{(2)}(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{jm\phi} \quad (2-160)$$

Una elección aparentemente interesante es tomar $\vec{a} = \hat{r}$, de forma que el campo se exprese como una combinación de modos TE y TM respecto \hat{r} . Ahora bien, esta elección no es posible ya que éste no es un vector constante, de hecho ninguno de los tres vectores unitarios que forman la base en coordenadas esféricas lo es. Esto no significa que no pueda aplicarse el método general tomando como vector cualquiera de los vectores unitarios de cartesianas, pero en este caso ninguno de los vectores \vec{M} ni \vec{N} sería ni tangente ni normal a la superficie de la esfera, y por tanto vendrían expresados como una combinación de los tres vectores unitarios. Sin embargo, es posible construir soluciones particulares para el caso esférico que simplifican el problema.

Es fácilmente comprobable que el vector

$$\vec{M} = \nabla \times (\hat{r} r \psi) \quad (2-161)$$

es una solución de la ecuación vectorial de onda con la condición que ψ sea una solución de la ecuación escalar de onda. Obteniéndose los campos de la forma habitual

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \alpha_{n,m} \vec{M}_{m,n} + b_{m,n} \vec{N}_{m,n} \quad (2-162)$$

$$\vec{H}(r, \theta, \phi) = -\frac{j}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} \vec{N}_{m,n} + b_{m,n} \vec{M}_{m,n} \quad (2-163)$$

con

$$\vec{M}_{m,n} = \left[\frac{jm}{\sin \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) \hat{\phi} \right] e^{jm\phi} h_n^{(2)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2-164)$$

$$\vec{N}_{m,n} = \frac{1}{kr} \left[n(n+1) \hat{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) \right] \hat{\theta} + \frac{jm}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot) \hat{\phi} \right] \cdot e^{jm\phi} h_n^{(2)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2-165)$$

Con los potenciales esféricos en este caso

$$\vec{A}^{esf} = -j\eta \epsilon r \sum_n \sum_m b_{m,n} \Psi_{m,n} \hat{r} \quad (2-166)$$

$$\vec{F}^{esf} = \epsilon r \sum_n \sum_m a_{m,n} \Psi_{m,n} \hat{r} \quad (2-167)$$

que en este caso no cumplen la condición de Lorentz.

2.8.2 Campos en función de las corrientes.

La función de Green expresada como superposición de ondas esféricas es

$$G(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (2-168)$$

$$\frac{k}{j4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} h_n^{(2)}(kr) j_n(kr') P_n^{|m|}(\cos \theta) P_n^{|m|}(\cos \theta') e^{jm(\phi-\phi')}$$

de forma parecida al desarrollo realizado para el caso plano y cilíndrico es posible a partir de 2-30, 2-31, 2-50 y 2-51 obtener los campos a partir de la función de Green anterior.

$$\vec{E} = \quad (2-169)$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon} [\nabla(\nabla(\cdot)) + k^2] \frac{k}{4\pi j} \sum_n \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \cdot$$

$$\cdot h_n^{(2)}(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) \int_{v'} \vec{J}'(\vec{r}') j_n(kr') P_n^{|m|}(\cos\theta') e^{jm(\phi-\phi')} dv' -$$

$$-\nabla \times \frac{k}{4\pi j} \sum_n \sum_{m=-n}^n (2n+1) \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} h_n^{(2)}(kr) P_n^{|m|}(\cos\theta) \cdot$$

$$\cdot \int_{v'} \vec{M}'(\vec{r}') j_n(kr') P_n^{|m|}(\cos\theta') e^{jm(\phi-\phi')} dv'$$

Asimismo es necesario tener presente la dependencia implícita de los vectores de los corrientes en función de los puntos campo de forma que

$$\vec{J}(r', \theta', \phi') = (\vec{J}' \cdot \vec{r}) \vec{r} + (\vec{J}' \cdot \hat{\theta}) \hat{\theta} + (\vec{J}' \cdot \hat{\phi}) \hat{\phi} \quad (2-170)$$

obteniéndose en este caso

$$\begin{bmatrix} J_r \\ J_\theta \\ J_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi-\phi') + \cos\theta \cos\theta' & \sin\theta \cos\theta' \cos(\phi-\phi') - \cos\theta \sin\theta' & \sin\theta \sin(\phi-\phi') \\ \cos\theta \sin\theta' \cos(\phi-\phi') - \sin\theta \cos\theta' & \cos\theta \cos\theta' \cos(\phi-\phi') + \sin\theta \sin\theta' & \cos\theta \sin(\phi-\phi') \\ -\sin\theta' \sin(\phi-\phi') & -\cos\theta' \sin(\phi-\phi') & \cos(\phi-\phi') \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J'_r \\ J'_\theta \\ J'_\phi \end{bmatrix} \quad (2-171)$$

En el caso esférico la expresión general de los coeficientes es extremadamente compleja.

En el caso que solo existan corrientes eléctricas de la forma $\vec{J}' = J_\phi \hat{\phi}'$ y $\frac{\partial J_\phi}{\partial \phi'} = 0$ se

pueden obtener los coeficientes modales de forma sencilla. En este caso las corrientes son teniendo en cuenta 2-170

$$J_r = \sin\theta \sin(\phi-\phi') J_\phi \quad (2-172)$$

$$J_\theta = \cos\theta \sin(\phi-\phi') J_\phi$$

$$J_\phi = \cos(\phi-\phi') J_\phi$$

dado que sólo existen corrientes eléctricas los campos se expresan en función de las corrientes a partir de la integral

$$\begin{aligned} & \int_V \vec{J}'(r') j_n(kr') P_n^{lm}(\cos\theta') e^{jm(\phi-\phi')} dV' = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\pi [j_n(kr') P_n^{lm}(\cos\theta') J_\phi(r', \theta') \cdot \\ & \cdot \int_0^{2\pi} [\sin\theta \sin(\phi-\phi') \hat{r} + \cos\theta \sin(\phi-\phi') \hat{\theta} + \cos\theta \cos(\phi-\phi') \hat{\phi}] \cdot \\ & \cdot e^{jm(\phi-\phi')} d\phi'] r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' \end{aligned} \quad (2-173)$$

las integrales respecto ϕ' se anulan para valores $|m| \neq 1$. Además las integrales de las componentes \hat{r} y $\hat{\theta}$ son impares respecto al índice m , por lo que al realizar el sumatorio respecto m se cancelaran. Por tanto el campo eléctrico es

$$\begin{aligned} \vec{E} = & \frac{1}{j\omega\epsilon} [\nabla(\nabla(\cdot)) + k^2] \frac{k}{4\pi j} \sum_n (2n+1) \frac{(n-1)!}{(n+1)!} h_n^{(2)}(kr) P_n^1(\cos\theta) \cdot \\ & \cdot \int_0^\infty \int_0^\pi 2\pi J_\phi(r', \theta') j_n(kr') P_n^1(\cos\theta') r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' \hat{\phi} \end{aligned} \quad (2-174)$$

en este caso la divergencia es cero por lo que el campo eléctrico es

$$\vec{E} = \frac{k^3}{2\omega\epsilon} \sum_n h_n^{(2)}(kr) \frac{\partial P_n^0(\cos\theta)}{\partial\theta} \frac{2n+1}{n(n+1)} B_n \hat{\phi} \quad (2-175)$$

con

$$B_n = \int_0^\infty \int_0^\pi J_\phi \cdot j_n(kr') P_n^1(\cos\theta') r'^2 \sin\theta' dr' d\theta' \quad (2-176)$$

A partir de las expresiones 2-162 a 2-163 es fácilmente comprobable que para este caso concreto los coeficientes modales esféricos son

$$\alpha_{0,n} = -\frac{k^3}{2\omega\epsilon n(n+1)} B_n \quad (2-177)$$

$$\alpha_{m,n} = 0 \quad \text{para} \quad m \neq 0$$

$$b_{m,n} = 0$$

2.8.3 Muestreo y dominio evanescente.

De forma similar al caso plano y cilíndrico es posible definir un dominio visible en el dominio espectral discreto en este caso según los dos ejes m y n . Mediante consideraciones equivalentes a las realizadas en el caso cilíndrico es fácilmente definible el dominio visible en el eje n . Los coeficientes modales se obtienen a través de integrales de las corrientes con funciones tipo $j_n(kr')$. Si 'a' es el radio de la mínima esfera centrada en el origen que encierra a las fuentes se tiene que $r' < a$. La función $j_n(x)$, de forma similar a $J_n(x)$, tiende a cero cuando $x > n$. La definición de un dominio invisible según m es inmediata en tanto que $P_n^m(x) = 0$ para $m > n$. Por lo visto anteriormente el dominio visible viene dado por

$$n < k a \quad (2-178)$$

$$m < n$$

En cuanto a los pasos de muestreo de los campos para recuperar correctamente los coeficientes modales, se observa que la relación entre los campos medidos sobre una esfera y los coeficientes modales es una serie de Fourier según m y un desarrollo en polinomios de Legendre según n . Para obtener los coeficientes modales es necesario invertir las expresiones 2-164 y 2-163. Esto es posible a partir de las propiedades de ortogonalidad que presentan las funciones $e^{jm\phi}$ y $P_n^{(m)}(\cos\theta)$. El proceso de inversión hace aparecer integrales de la forma

$$I_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-jm\phi} d\phi \quad (2-179)$$

$$I_\theta = \int_0^\pi f(\theta) P_n^{(m)}(\cos\theta) \sin\theta d\theta$$

El muestreo de los campos debe garantizar que estas integrales puedan evaluarse de forma discreta obteniéndose resultados correctos. La integral según ϕ es una transformada de Fourier, y dado que los campos están limitados al dominio visible se puede aplicar el teorema de muestreo y definir un paso de muestreo. En cuanto a la integral según θ Ricardi [Ricardi, 1972] ha propuesto un método de expresar la integral como una transformada de Fourier de forma que

$$\Delta_{\phi} = \frac{\pi}{m_{\max}} = \frac{\pi}{ka} = \frac{\lambda}{2a} \quad (2-180)$$

$$\Delta_{\theta} = \frac{\pi}{n_{\max}} = \frac{\pi}{ka} = \frac{\lambda}{2a}$$

2.8.4 Expresiones asintóticas de los campos a grandes distancias.

Para evaluar las expresiones de los campos a grandes distancias se toman los valores asintóticos para $kr \rightarrow \infty$ de las funciones esféricas de Bessel

$$h_n^{(2)}(kr) = j^{(n+1)} \frac{e^{-jkr}}{kr} \quad (2-181)$$

$$\frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r h_n^{(2)}(kr)) = j^n \frac{e^{-jkr}}{kr}$$

de donde se obtienen las expresiones aproximadas de los vectores de onda esféricos a grandes distancias, despreciando también los términos $1/r^2$

$$\vec{M}_{m,n} = \left[\frac{jm}{\sin \theta} \hat{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} (\cdot) \hat{\phi} \right] e^{jm\phi} j^{n+1} \frac{e^{-jkr}}{kr} P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2-182)$$

$$\vec{N}_{m,n} = \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\cdot) \hat{\theta} + \frac{jm}{\sin \theta} \hat{\phi} \right] e^{jm\phi} j^n \frac{e^{-jkr}}{kr} P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2-183)$$

Con las expresiones anteriores se obtienen los campos de la forma

$$E_{\phi} = -\frac{e^{-jkr}}{kr} \sum_{n=0}^{ka} \sum_{m=-n}^n j^n \left[-\alpha_{m,n} \frac{m}{\sin \theta} + b_{m,n} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cdot) \right] e^{jm\phi} P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2-184)$$

$$E_{\theta} = -\frac{e^{-jkr}}{kr} \sum_{n=0}^{ka} \sum_{m=-n}^n j^{n+1} \left[-\alpha_{m,n} \frac{\partial}{\partial \theta} (\cdot) + b_{m,n} \frac{m}{\sin \theta} \right] e^{jm\phi} P_n^{|m|}(\cos \theta) \quad (2-185)$$

En este caso las componentes de campo son función de los dos coeficientes modales, y las relaciones que ligán los campos lejanos con los coeficientes son más complejas.

2.9 Transformaciones de onda.

En el tratamiento de problemas electromagnéticos es de interés expresar una función de onda referida a un sistema de coordenadas en función de ondas referidas a otro sistema de coordenadas. Por ejemplo, expresar ondas planas en función de ondas cilíndricas, u ondas cilíndricas en función de ondas cilíndricas referidas a un sistema de coordenadas desplazado. Además del interés intrínseco de las transformaciones en la resolución de problemas electromagnéticos, estas permiten establecer relaciones útiles entre las distintas funciones involucradas en la solución de la ecuación de onda. Estas transformaciones se encuentran particularmente bien desarrolladas por Stratton, por lo que no se reproducirán aquí, e introduciremos cuando sea necesario.

2.10 Transformaciones de espectro.

Cada uno de los desarrollos realizados en los diferentes sistemas de coordenadas están adaptados a un tipo de geometría determinado. Puede ser de interés en ciertos casos transformar los espectros de un sistema de coordenadas a otro. Por ejemplo si conocidos los campos sobre un cilindro se desean obtener los campos sobre un plano una posible alternativa es obtener el espectro angular de onda planas a partir de los coeficientes modales cilíndricos y reconstruir el campo en el plano deseado.

La transformación entre espectros se puede plantear genéricamente a partir de las relaciones de transformación de onda, pero es más simple realizarlo a partir de las expresiones asintóticas para grandes distancias. Para los tres sistemas de coordenadas la relación entre espectros y los campos lejanos es notoriamente más simple que las expresiones generales para cualquier distancia. Por tanto igualando las expresiones de campo a grandes distancias se podrán encontrar las relaciones entre espectros.

2.10.1 Transformación plano cilíndrico.

Para una situación como la de la figura 2-5 se pueden obtener los campos a grandes distancias en el semiespacio $x > x_1$ según las expresiones 2-124 como

$$E_{\theta}(r, \theta, \phi) = j \frac{1}{2\pi} k_x \frac{e^{-jkr}}{r} A_{\theta}(k_y, k_z) \quad (2-186)$$

$$E_{\phi}(r, \theta, \phi) = j \frac{1}{2\pi} k_x \frac{e^{-jkr}}{r} A_{\phi}(k_y, k_z)$$

con

$$k_x = k \operatorname{sen} \theta \cos \phi \quad (2-187)$$

$$k_y = k \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$k_z = k \cos \theta$$

Mientras que para el caso cilíndrico se ha obtenido 2-154 y 2-155

$$E_\theta(r, \theta, \phi) = -2k \operatorname{sen} \theta \frac{e^{-jkr} |n < k_r a|}{r} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(k \cos \theta) j^{n+1} e^{jn\phi} \quad (2-188)$$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = j2k \operatorname{sen} \theta \frac{e^{-jkr} |n < k_r a|}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(k \cos \theta) j^{n+1} e^{jn\phi} \quad (2-189)$$

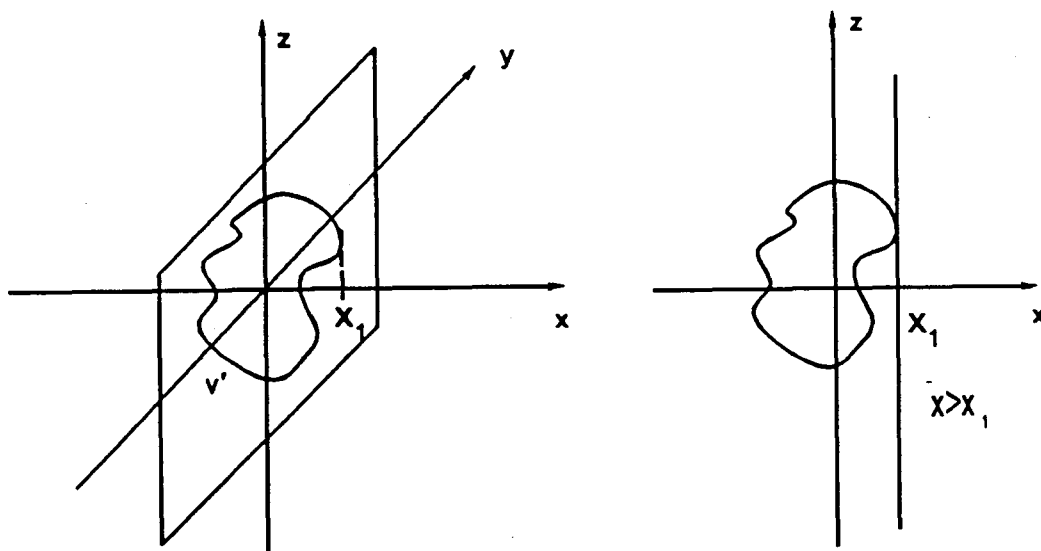


Figura 2-5 Geometría para la transformación plano cilíndrico.

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$\sum j^{n+1} e^{jn\phi} b_n(k_z) = -\frac{j}{4\pi} \cos \phi A_\theta(k_y, k_z) \quad (2-190)$$

$$\sum j^{n+1} e^{jn\phi} \alpha_n(k_z) = \frac{1}{4\pi} \cos \phi A_\phi(k_y, k_z) \quad (2-191)$$

Los coeficientes modales cilíndricos y el espectro angular quedan relacionados por una serie de Fourier. Al invertir las expresiones anteriores se encuentra la relación

$$b_n(k_z) = -\frac{1}{8\pi^2} j^{-n} \int_0^{2\pi} \cos \phi A_\theta(k_y, k_z) e^{-jn\phi} d\phi \quad (2-192)$$

$$a_n(k_z) = \frac{1}{8\pi^2} j^{-(n+1)} \int_0^{2\pi} \cos \phi A_\phi(k_y, k_z) e^{-jn\phi} d\phi \quad (2-193)$$

Mediante un par de ejemplos canónicos se ilustra a continuación la obtención de los espectros y el paso del espectro plano al cilíndrico. Considerese en primer lugar un hilo de corriente infinito, figura 2-6, con una corriente en coordenadas cartesianas

$$\vec{J}(x, y, z) = I(z) \delta(y) \delta(x) \hat{z} \quad (2-194)$$

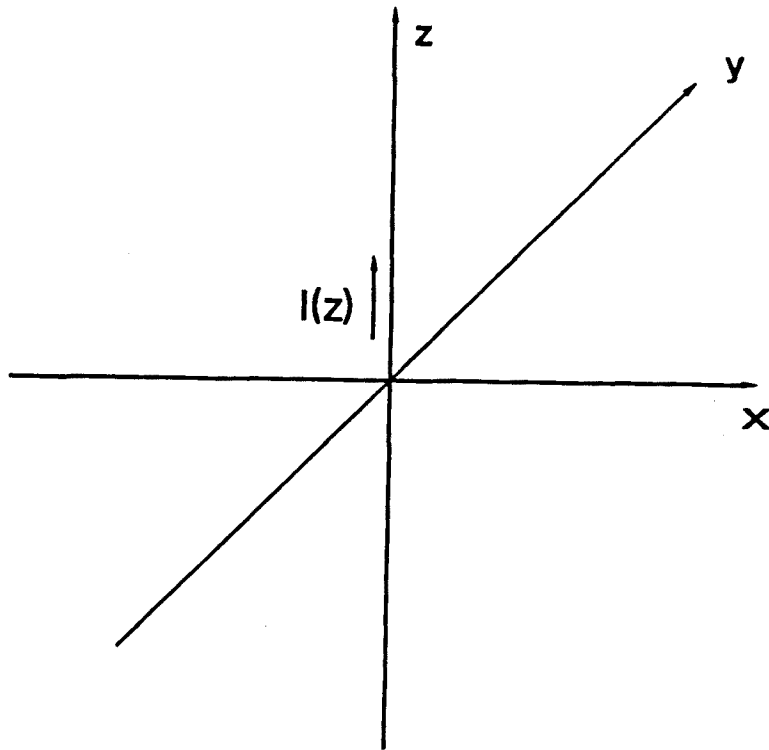


Figura 2-6 Hilo de corriente.

Para hallar el espectro angular de ondas planas se encuentra en primer lugar

$$\vec{B}_J(k_y, k_z) = \int_{v'} \vec{J} e^{j\vec{k}\vec{r}'} d v' = \vec{I}(k_z) \vec{z} \quad (2-195)$$

con

$$\tilde{I}(k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z) e^{ik_z z} dz \quad (2-196)$$

en ausencia de corrientes magnéticas el espectro angular de ondas planas viene dado por 2-110

$$\vec{A}_E = \eta \vec{X}_1 \vec{B}_J = -\frac{\eta}{2kk_x} [-k_x k_z \hat{x} - k_y k_z \hat{y} + (k^2 - k_z^2) \hat{z}] \tilde{I}(k_z) \quad (2-197)$$

donde \vec{X}_1 es el tensor adecuado a la disposición de ejes adoptada. Si se expresa el espectro en coordenadas esféricas se obtiene

$$A_\theta = \frac{\eta}{2 \cos \phi} \tilde{I}(k_z) \quad (2-198)$$

$$A_\phi = 0$$

A partir de las expresiones 2-191 y 2-192 se pueden hallar los coeficientes modales cilíndricos:

$$b_n(k_z) = -\frac{1}{8\pi^2} j^{-n} \frac{\eta}{2} \tilde{I}(k_z) \int_0^{2\pi} e^{-jn\phi} d\phi \quad (2-199)$$

$$a_n(k_z) = 0$$

resultando que todos los coeficientes son nulos excepto

$$b_0(k_z) = -\frac{\eta}{8\pi} \tilde{I}(k_z) \quad (2-200)$$

Para hallar directamente los coeficientes cilíndricos emplearemos 2-135 y 2-136, que para el caso en que sólo existan fuentes eléctricas se convierten en

$$a_n(k_z) = -\frac{k\eta}{8\pi k_p^2} \int_{v'} \vec{M}'_n(k_z) \vec{J}(\vec{r}') dv' \quad (2-201)$$

$$b_n(k_z) = -\frac{k\eta}{8\pi k_p^2} \int_{v'} \vec{N}'_n(k_z) \vec{J}(\vec{r}') dv'$$

con la corriente definida en coordenadas cilíndricas como

$$\vec{J}(\rho', \phi', z') = \frac{1}{2\pi\rho'} I(z') \delta(\rho') \hat{z} \quad (2-202)$$

obteniéndose para este caso

$$b_n(k_z) = -\frac{\eta}{(16\pi^2)} J_n(0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} I(z') e^{-jn\phi'} e^{jk_z z'} dz' d\phi' \quad (2-203)$$

$$a_n(k_z) = 0$$

siendo el resultado final el mismo que en 2-199. A partir de los espectros y las expresiones asintóticas de los campos se pueden calcular los campos lejanos producidos por las fuentes. El resultado obviamente coincide con el que se obtiene del análisis habitual de antenas, que para este caso es

$$E_\theta = j\omega\mu \sin\theta \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} I(k_z) \quad (2-204)$$

$$E_\phi = 0$$

Otro caso fácilmente analizable e ilustrativo del empleo de los desarrollos realizados en este capítulo es el análisis de una espira circular de corriente uniforme, figura 2-7, cuya corriente viene dada por

$$\vec{J}(\rho', \phi', z') = I_0 \frac{1}{2\pi\rho'} \delta(\rho' - \rho_0) \delta(z' - z_0) \hat{\phi}' \quad (2-205)$$

Para el cálculo del espectro angular de ondas planas es necesario realizar en primer lugar la integral 2-111. Esta integral se puede realizar en coordenadas cilíndricas, a su vez es necesario considerar la dependencia de $\hat{\phi}'$ según se ha explicado en el apartado 2.7.2. Con estas precauciones y con el empleo de la definición integral de las funciones de Bessel se obtiene

$$\vec{B}_J = \frac{I_0}{2\pi} e^{jk_z z_0} \int_0^{2\pi} e^{jk\rho_0 \sin\theta \cos(\phi - \phi')} \cos(\phi - \phi') d\phi' \hat{\phi} = \quad (2-206)$$

$$= jI_0 J_1(k\rho_0 \sin\theta) e^{jk_z z_0} \hat{\phi}$$

el espectro angular es

$$\vec{A}_E = -\frac{\eta \vec{B}_J}{2 \sin\theta \cos\phi} \quad (2-207)$$

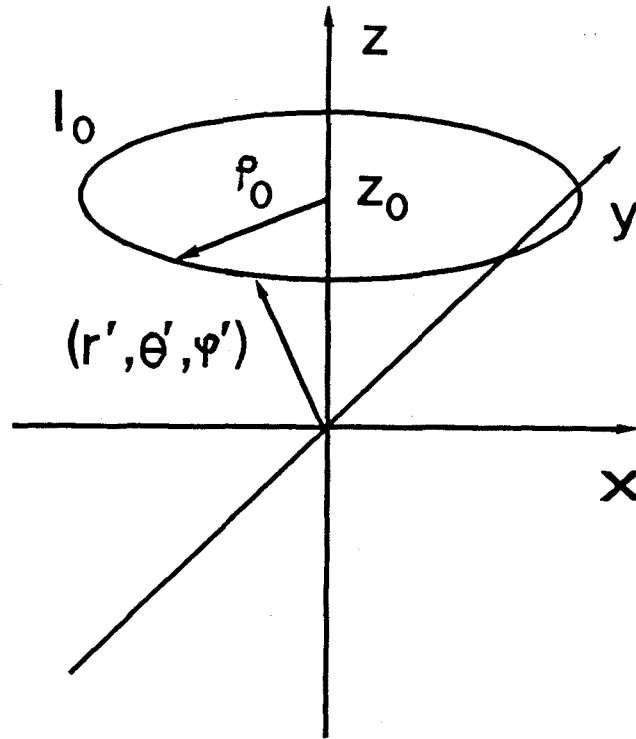


Figura 2-7 Espira circular de corriente uniforme.

A partir del espectro angular de ondas planas se pueden calcular los coeficientes modales cilíndricos empleando directamente las expresiones de transformación. En este caso todos los coeficientes son cero excepto:

$$\alpha_0 = -\frac{\eta}{8\pi \sin \theta} \frac{I_0}{\rho_0} J_1(k\rho_0 \sin \theta) e^{jk_z z_0} \quad (2-208)$$

El cálculo directo de los coeficientes conduce a las siguientes expresiones

$$\alpha_n(k_z) = \frac{k\eta}{16\pi^2 k_p^2} I_0 e^{jk_z z_0} \frac{\partial}{\partial \rho} [J_n(k\rho)]_{\rho=\rho_0} \int_0^{2\pi} e^{-jn\phi'} d\phi' \quad (2-209)$$

$$b_n(k_z) = -\frac{k\eta}{16\pi^2 k_p^2} I_0 e^{jk_z z_0} \frac{nk_z}{k\rho_0} J_n(k\rho_0) \int_0^{2\pi} e^{-jn\phi'} d\phi'$$

la integral según ϕ' es cero para todo n excepto para n=0 que vale 2π , por otra parte haciendo uso de la propiedad

$$\frac{d}{d\rho} J_0(\alpha\rho) = -\alpha J_1(\alpha\rho) \quad (2-210)$$

se concluye que todos los coeficientes son nulos excepto α_0 cuyo valor es el indicado en 2-207. El campo lejano vale en este caso

$$E_{\phi} = \omega \mu I_0 \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} J_1(k\rho_0 \sin \theta) \quad (2-211)$$

$$E_{\theta} = 0$$

2.10.2 Transformación plano esférico.

El paso entre el espectro de ondas planas y los coeficientes modales esféricos se puede plantear de forma análoga a como se ha realizado en el caso cilíndrico. En este caso existe una dificultad adicional por el hecho de que las expresiones asintóticas de los campos en esféricas son función de ambos coeficientes 2-183 y 2-184. Por tanto para expresar los coeficientes esféricos en función del espectro angular es necesario, en primer lugar, obtener las expresiones de los coeficientes en función de las componentes de campo lejano. El siguiente paso es inmediato, ya que cada componente de campo lejano se relaciona con una sola componente del espectro angular de ondas planas.

El proceso de obtención de los coeficientes modales en función de las componentes de campo lejano es bastante tedioso por lo que no se reproduce completamente, tan solo se indican los pasos seguidos. Multiplicando las expresiones de $E_{\theta} \cdot (kre^{jkr})$ y $E_{\phi} \cdot (kre^{jkr})$ obtenidas en 2-183 y 2-184 por funciones tipo

$$j \left(\frac{m}{\sin \theta} P_k^{|m|}(\cos \theta) \pm \frac{d}{d\theta} P_k^{|m|}(\cos \theta) \right) \quad (2-212)$$

y

$$\frac{m}{\sin \theta} P_k^{|m|}(\cos \theta) \pm \frac{d}{d\theta} P_k^{|m|}(\cos \theta) \quad (2-213)$$

respectivamente, e integrando y haciendo uso de las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre se obtienen cuatro ecuaciones que sumadas y restadas dan lugar a

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left(jE_\theta \frac{m}{\sin\theta} - E_\phi \frac{d}{d\theta} \right) P_n^{(|m|)}(\cos\theta) [kre^{jkr}] e^{-jm\phi} d\cos\theta d\phi = \quad (2-214)$$

$$\frac{1}{2\pi} j^{n-1} \frac{2(n+|m|)! n(n+1)}{(2n+1)(n-|m|)!} a_{m,n};$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left(jE_\phi \frac{d}{d\theta} - E_\theta \frac{m}{\sin\theta} \right) P_n^{(|m|)}(\cos\theta) [kre^{jkr}] e^{-jm\phi} d\cos\theta d\phi =$$

$$-\frac{1}{2\pi} j^{n-1} \frac{2(n+|m|)! n(n+1)}{(2n+1)(n-|m|)!} b_{m,n}$$

Para el caso plano se tiene de una forma mucho más simple que

$$E_\theta(kre^{jkr}) = j \frac{1}{2\pi} k^2 A_\theta \sin\theta \cos\phi \quad (2-215)$$

$$E_\phi(kre^{jkr}) = j \frac{1}{2\pi} k^2 A_\phi \sin\theta \cos\phi$$

con lo que la relación entre espectros es

$$a_{m,n} = j^{-n} k^2 f_{m,n} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sin\theta \cos\phi \left[jA_\theta \frac{m}{\sin\theta} - A_\phi \frac{d}{d\theta} \right] \cdot \quad (2-216)$$

$$\cdot P_n^{(|m|)}(\cos\theta) e^{-jm\phi} d\phi d(\cos\theta)$$

$$b_{m,n} = -j^{-n} k^2 f_{m,n} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sin\theta \cos\phi \left[jA_\phi \frac{d}{d\theta} - A_\theta \frac{m}{\sin\theta} \right] \cdot$$

$$\cdot P_n^{(|m|)}(\cos\theta) e^{-jm\phi} d\phi d(\cos\theta)$$

con

$$f_{m,n} = \frac{2n+1}{2} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \frac{1}{n(n+1)} \quad (2-217)$$

A modo de ejemplo los coeficientes esféricos a partir del espectro angular de ondas planas para una espira circular se pueden calcular a partir de 2-207 y las expresiones anteriores como

$$\begin{aligned}
 a_{m,n} &= j^{-n} k^2 f_{m,n} j I_0 \frac{\eta}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 J_1(k\rho_0 \sin \theta) \cdot \\
 &\cdot \frac{d}{d\theta} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{-jm\phi} d\phi d(\cos \theta) \\
 b_{m,n} &= -j^{-n} k^2 f_{m,n} j I_0 \frac{\eta}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 J_1(k\rho_0 \sin \theta) \cdot \\
 &\cdot \frac{m}{\sin \theta} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{-jm\phi} d\phi d(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{2-218}$$

La integral respecto ϕ es cero para todo m distinto de cero, por tanto se tiene

$$\begin{aligned}
 a_{0,n} &= -\frac{1}{2\pi} j^{-n+1} \frac{k^2 \eta}{2} f_{0,n} I_0 \int_{-1}^1 J_1(k\rho_0 \sin \theta) e^{jk_z z_0} P_n^1(\cos \theta) d(\cos \theta) \\
 a_{m,n} &= 0; \quad m \neq 0 \\
 b_{m,n} &= 0
 \end{aligned} \tag{2-219}$$

donde se ha hecho uso de la propiedad

$$\frac{d}{d\theta} P_n^0(\cos \theta) = -P_n^1(\cos \theta) \tag{2-220}$$

La evaluación de la integral según θ puede hacerse aplicando el desarrollo de funciones de onda cilíndricas en ondas esféricas de modo que

$$J_1(k\rho_0 \sin \theta) e^{jk_z z_0} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{j^l (2l+3)}{l} \frac{l!}{(l+2)!} P_{l+1}^1(\cos \theta_0) P_{l+1}^1(\cos \theta) j_{l+1}(kr_0) \tag{2-221}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= r_0 \sin \theta_0 \\
 z_0 &= r_0 \cos \theta_0
 \end{aligned} \tag{2-222}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 a_{0,n} &= -\frac{j^{-n+1} k^2 \eta}{2\pi} \frac{k^2 \eta}{2} f_{0,n} I_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{j^l (2l+3) l!}{(l+2)!} P_{l+1}^1(\cos \theta_0) j_{l+1}(kr_0) \cdot \\
 &\cdot \int_{-1}^1 P_{l+1}^1(\cos \theta) P_n^1(\cos \theta) d(\cos \theta)
 \end{aligned} \tag{2-223}$$

debido a las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre la integral es cero excepto cuando $l=n-1$ en cuyo caso

$$\int_{-1}^1 P_{l-1}^1(\cos\theta)P_n^1(\cos\theta)d(\cos\theta) = \frac{2(n+1)!}{(2n+1)(n-1)!}; \quad l = n-1 \quad (2-224)$$

con lo que finalmente se obtiene

$$\alpha_{0,n} = -k^2 \eta \frac{I_0}{2\pi} \frac{2n+1}{2n(n+1)} P_n^1(\cos\theta_0) j_n(kr_0) \quad (2-225)$$

El cálculo directo de los coeficientes modales puede realizarse considerando una corriente de la forma

$$\vec{J}(r', \theta', \phi') = I_0 \frac{1}{2\pi r'^2 \sin\theta'} \delta(r' - r_0) \delta(\theta' - \theta_0) \hat{\phi}' \quad (2-226)$$

En este caso las corrientes cumplen las restricciones impuestas para la obtención de las expresiones de los coeficientes modales esféricos obtenidos en el apartado 2.8.2, por lo que si aplicamos directamente las estas expresiones se obtiene un resultado que coincide con el obtenido mediante la transformación del espectro de ondas planas.

CAPITULO 3

Aplicación de la formulación espectral.

3.1 Introducción.

La formulación espectral encuentra aplicaciones en el tratamiento de problemas de radiación, difracción, estudios de cavidades y en general para todo problema de electromagnetismo en que las condiciones de contorno se impongan sobre superficies que se definan con una o varias coordenadas constantes en el sistema de referencia. Estas superficies pueden ser planos, cilindros, sectores angulares, esferas, conos, etc., según el sistema de coordenadas sea el cartesiano, cilíndrico o esférico. Aplicaciones genéricas de esta formulación pueden encontrarse en [Harrington,1961] y [Balanis,1989].

En este capítulo se aplica la formulación espectral a varias situaciones de especial interés en los problemas de radiación, como son la transformación campo próximo campo lejano, la reconstrucción de las corrientes a partir de los campos y el estudio del efecto de radomas sobre antenas.

En el primer caso el objetivo es determinar los campos radiados en la zona de Fraunhofer o campos lejanos a partir de los campos próximos de la antena, en el segundo caso se trata de determinar las corrientes sobre la antena a partir de los campos producidos por las mismas. Ambos procesos forman parte de una situación genérica de análisis y diagnóstico del comportamiento de las fuentes de radiación a partir de los campos próximos. Finalmente se presenta el empleo de formulación espectral al estudio de la influencia de radomas en el diagrama de radiación de las antenas.

3.2 Transformación campo próximo campo lejano.

La transformación campo próximo campo lejano es un caso particular de la transformación campo campo, en que se plantea el problema de obtener el diagrama de radiación de una antena en función de los campos en una zona próxima a ella.

La primera consideración a realizar es bajo que condiciones el problema de transformación campo próximo campo lejano se encuentra correctamente especificado. El teorema de unicidad establece que los campos en un volumen están determinados de forma única por las componentes tangenciales del campo eléctrico, o magnético sobre la superficie que delimita al volumen. Por tanto los campos en un volumen V definido por la superficie S que engloba las fuentes y la superficie del infinito S_{∞} están definidos por los campos eléctricos o magnéticos tangenciales sobre S , ya que para S_{∞} los campos son nulos.

El teorema de equivalencia permite encontrar los campos en V mediante la definición de corrientes equivalentes eléctricas y magnéticas, que permiten substituir el problema original, por uno equivalente en que se reemplazan las fuentes reales por unas equivalentes determinadas a partir de los campos tangenciales sobre S .

Así pues, la transformación campo campo es posible conociendo las componentes tangenciales del campo eléctrico o magnético sobre una superficie que encierre las fuentes. Esta afirmación general es formulable de forma matemáticamente cerrada en el caso en que las superficies que contienen a las fuentes sean planos, cilindros o esferas. Nótese que excepto en el último caso las superficies no determinan propiamente un volumen, ahora bien si se considera un plano infinito podemos cerrar el volumen de forma arbitraria en la región del infinito donde los campos son nulos. Análogamente si consideramos un cilindro de longitud infinita se puede considerar que los campos sobre las tapas del cilindro son nulos, por tanto desde un punto de vista teórico el empleo de geometrías planas y cilíndricas requiere el conocimiento de los campos sobre superficies ilimitadas.

Para el caso de estas tres superficies el problema es formulable en términos de obtener los coeficientes modales del campo eléctrico o magnético tangencial a la superficie de medida. Una vez conocidos los coeficientes modales es posible determinar los campos en cualquier punto y mediante el uso de las expresiones asintóticas se pueden evaluar fácilmente los campos lejanos. Una primera formulación de este tipo para el caso cilíndrico bidimensional es debida a Brown y Jull [Brown,1961].

En la práctica los sistemas planos y cilíndricos adolecen de un error intrínseco de truncamiento de la superficie de medida, error que no es muy importante para el caso de antenas directivas, mientras que tal como se pondrá de manifiesto a continuación la formulación es mucho más sencilla. La elección de una geometría en una situación de medida real, está en gran parte determinada por la posibilidad de generar la superficie de medida deseada.

3.2.1 Sistema plano.

Supongase un plano de medida situado en la posición $x=x_0$ tal como se muestra en la figura 3-1. Si se suponen conocidos los campos tangenciales E_z y E_y sobre el plano de medida, la transformación puede plantearse con la aplicación del teorema de equivalencia. Para la región exterior al plano de medida es posible generar una situación equivalente en que el problema original se reemplaza por cualquiera de las tres situaciones representadas en la figura 3-2. Las corrientes equivalentes se determinan por las condiciones de contorno y vienen dadas por

$$\vec{J} = \hat{n} \times \vec{H}(x = x_0, y, z) \quad (3-1)$$

$$\vec{M} = -\hat{n} \times \vec{E}(x = x_0, y, z)$$

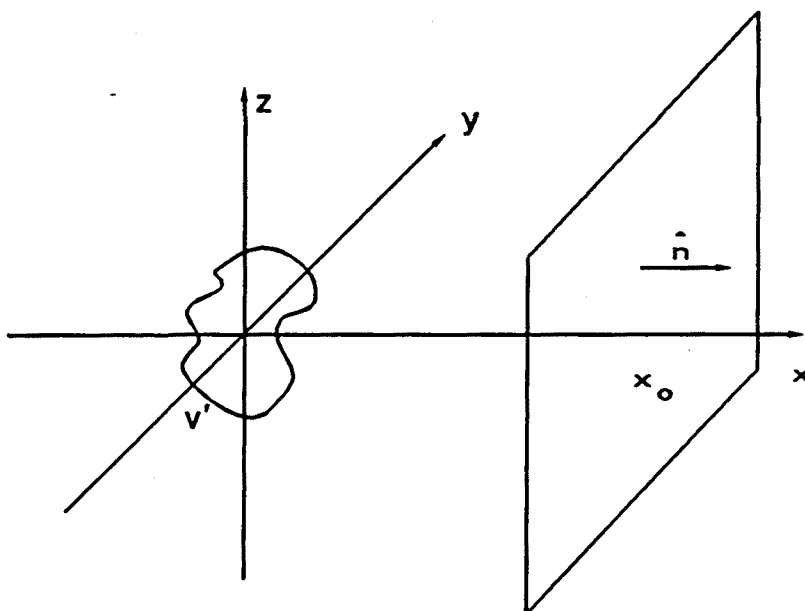


Figura 3-1 Superficie de medida en campo próximo plano.

Estas corrientes equivalentes producen los mismos campos para el semiespacio $x > x_0$ que las fuentes contenidas en el volumen v' , y campos nulos para $x < x_0$. Por tanto se puede colocar un conductor magnético o eléctrico en la zona de campos nulos sin perturbar la situación. En este caso aplicando la teoría de imágenes se llega a las situaciones mostradas en las figuras 3-2-b y 3-2-c.

Si se desea obtener la transformación a partir de los campos eléctricos tangenciales, se debe tomar como situación equivalente la indicada en la figura 3-2-c. En este caso el problema se reduce a encontrar los campos producidos por unas distribuciones de corrientes equivalentes dadas por

$$\vec{J}_{eq} = 0 \quad (3-2)$$

$$\vec{M}_{eq} = 2\vec{M}\delta(x - x_0) = -2\hat{n} \times \vec{E}(x = x_0, y, z)\delta(x - x_0)$$

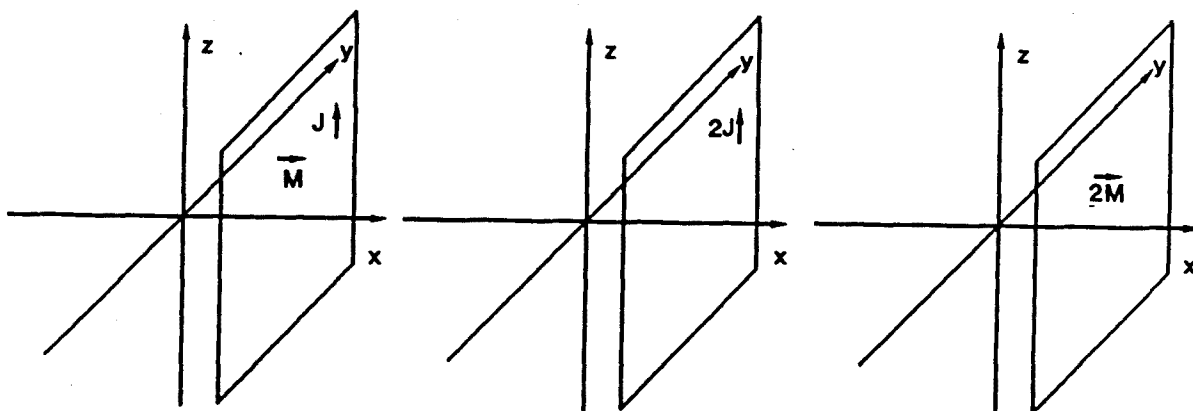


Figura 3-2 Situaciones equivalentes.

Los campos producidos por esta distribución de corrientes pueden hallarse empleando la formulación del apartado 2.6.2, con eje de propagación según x . Para conocer el campo lejano se aplican directamente las expresiones asintóticas 2-124 con lo que

$$\vec{E} = \frac{j}{2\pi} k_x \frac{e^{jkr}}{r} \vec{A}_E(k_y, k_z) \quad (3-3)$$

y

$$\vec{A}_E = -\bar{X}_2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \vec{M} e^{jk_x x} e^{jk_y y} e^{jk_z z} dx dy dz \quad (3-4)$$

con

$$k_x = k \text{ sen } \theta \cos \phi \quad (3-5)$$

$$k_y = k \text{ sen } \theta \text{ sen } \phi$$

$$k_z = k \cos \theta$$

Si se expresan los campos lejanos en las componentes esféricas habituales se obtiene

$$E_\theta = \frac{-jk}{2\pi r} e^{-jkr} e^{-jk_x x_0} \vec{E}_z(x = x_0; k_y, k_z) \cos \phi \quad (3-6)$$

$$E_\phi = \frac{jk}{2\pi r} e^{-jkr} e^{-jk_x x_0} [\vec{E}_z(x = x_0; k_y, k_z) \cos \theta \text{ sen } \phi + \\ + \vec{E}_y(x = x_0; k_y, k_z) \text{ sen } \theta]$$

donde

$$\vec{E}_{z,y}(x = x_0; k_y, k_z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} E_{z,y}(x = x_0, y, z) e^{jk_y y} e^{jk_z z} dy dz \quad (3-7)$$

Las expresiones 3-6 y 3-7 relacionan de una forma simple el campo radiado en la zona de Fraunhofer con las componentes tangenciales de los campos sobre el plano de medida. Nótese que el operador básico que permite relacionar el campo próximo con el campo lejano es una relación integral que no es más que una transformada de Fourier. Por tanto esta relación integral es implementable eficiente y rigurosamente de forma discreta con el empleo de la transformada de rápida de Fourier, siempre y cuando se mantengan las condiciones de muestreo enunciadas en 2.6.3

3.2.2 Sistema cilíndrico.

Para la transformación campo próximo campo lejano en coordenadas cilíndricas se parte de una situación de medida como la mostrada en la figura 3-3, en que se suponen conocidos los campos eléctricos tangenciales en un cilindro de radio 'a' que encierra las fuentes. Una posible formulación de la transformación es realizarla de forma análoga al caso plano, esto es, formular un problema con corrientes equivalentes y obtener los

campos radiados. Sin embargo se adoptará en este caso una formulación alternativa consistente en obtener los coeficientes modales a partir del campo próximo y mediante las aproximaciones asintóticas de los campos a grandes distancias evaluar los campos lejanos.

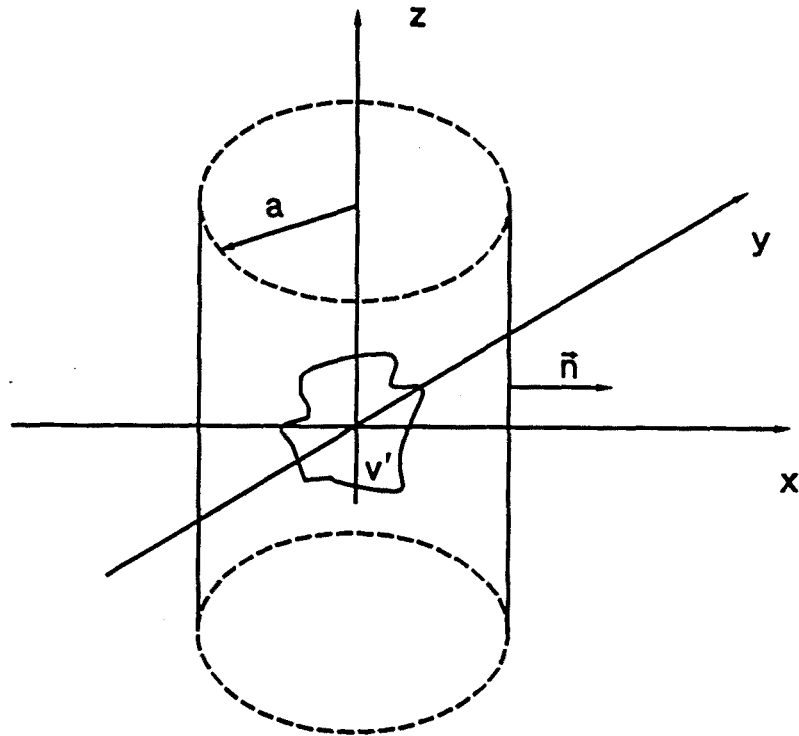


Figura 3-3 Geometría de medida para la transformación campo próximo campo lejano en coordenadas cilíndricas.

De las expresiones 2-129 a 2-132, las componentes tangenciales de los campos eléctricos sobre un cilindro de radio 'a' son

$$E_z(\rho = a, \phi, z) = - \sum_{n=0}^{|\infty| < k_p a} \int_{-\infty}^{\infty} b_n(k_z) \frac{k_p^2}{k} H_n^{(2)}(k_p a) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z \quad (3-8)$$

$$E_\phi(\rho = a, \phi, z) = - \sum_{n=0}^{|\infty| < k_p a} \int_{-\infty}^{\infty} [a_n(k_z) \left[-\frac{\partial}{\partial \rho}(\cdot) \right]_{\rho=a} +$$

$$+ b_n(k_z) \frac{nk_z}{k\alpha}] H_n^{(2)}(k_p a) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} dk_z$$

Las propiedades de ortogonalidad de las funciones exponenciales permiten obtener los coeficientes modales a partir de los campos invirtiendo la ecuación integral 3-8. Se define

$$\tilde{E}_{z,\phi}(n, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{z,\phi}(\rho = \alpha, \phi, z) e^{-j n \phi} e^{j k_z z} d\phi dk_z \quad (3-9)$$

y se adopta como criterio de notación

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} H_n^{(2)}(k_\rho \rho) \right]_{\rho=\alpha} = k_\rho H_n^{(2)'}(k_\rho \alpha) \quad (3-10)$$

con estos criterios la expresión 3-8 puede reescribirse como

$$\tilde{E}_z(n, k_z) = -2\pi b_n(k_z) \frac{k_\rho^2}{k} H_n^{(2)}(k_\rho \alpha) \quad (3-11)$$

$$\tilde{E}_\phi(n, k_z) = 2\pi \left[\alpha_n(k_z) k_\rho H_n^{(2)'}(k_\rho \alpha) - b_n(k_z) \frac{n k_z}{k \alpha} H_n^{(2)}(k_\rho \alpha) \right]$$

de donde se obtienen facilmente los coeficientes modales como

$$\alpha_n(k_z) = \frac{1}{2\pi k_\rho H_n^{(2)'}(k_\rho \alpha)} \left[\tilde{E}_\phi(n, k_z) - \frac{n k_z}{\alpha k_\rho^2} \tilde{E}_z(n, k_z) \right] \quad (3-12)$$

$$b_n(k_z) = -\frac{1}{2\pi k_\rho^2} \frac{k \tilde{E}_z(n, k_z)}{H_n^{(2)}(k_\rho \alpha)}$$

$$\text{con } k_z^2 + k_\rho^2 = k^2.$$

Una vez conocidos los coeficientes modales y con el empleo de las expresiones asintóticas 2-156 y 2-157 se obtiene para el campo lejano en componentes esféricas, y recordando que $k_\rho = k \sin \theta$ y $k_z = k \cos \theta$

$$E_\phi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{e^{-j k r | \sin \theta |}}{\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} j^{n+1} \frac{\tilde{E}_\phi(n, k_z)}{H_n^{(2)'}(k_\rho \alpha)} e^{j n \phi} \quad (3-13)$$

$$E_z(r, \theta, \phi) = j \frac{e^{-j k r | \sin \theta |}}{\pi r} \sum_{n=0}^{\infty} j^{n+1} \frac{1}{H_n^{(2)'}(k_\rho \alpha)} \left[\tilde{E}_\phi(n, k_z) - \frac{n k_z}{\alpha k_\rho^2} \tilde{E}_z(n, k_z) \right] e^{j n \phi}$$

De forma análoga puede realizarse la transformación a partir de las componentes tangenciales del campo magnético. En este caso los coeficientes modales son

$$\alpha_n(k_z) = \frac{j \omega \mu}{2\pi} \frac{1}{k_\rho^2} \frac{\tilde{H}_z(n, k_z)}{H_n^{(2)}(k_\rho \alpha)} \quad (3-14)$$

$$b_n(k_z) = \frac{-j \eta}{2\pi} \frac{1}{k_\rho H_n^{(2)'}(k_\rho \alpha)} \left[\tilde{H}_\phi(n, k_z) - \frac{n k_z}{\alpha k_\rho^2} \tilde{H}_z(n, k_z) \right]$$

y los campos

$$E_{\theta}(r, \theta, \phi) = j\eta \frac{e^{-jkr}}{\pi r} \sum \frac{j^{n+1}}{H_n^{(2)}(k_p a)} \left[H_n(n, k_z) - \frac{nk_z}{\alpha k_p^2} H_n(n, k_z) \right] e^{jn\phi} \quad (3-15)$$

$$E_{\phi}(r, \theta, \phi) = \frac{-\eta}{\sin\theta} \frac{e^{-jkr}}{\pi r} \sum j^{n+1} \frac{H_n(n, k_z)}{H_n^{(2)}(k_p a)} e^{jn\phi}$$

En este caso, de forma similar al caso plano, la relación entre los campos próximos (eléctricos o magnéticos) y campos lejanos es de la forma de transformadas y series de Fourier, por lo que la implementación de los algoritmos de transformación es extraordinariamente eficiente.

3.2.3 Sistema esférico.

La transformación en coordenadas esféricas se plantea de forma análoga al caso cilíndrico. La principal dificultad en este caso estriba en que las relaciones de ortogonalidad de las funciones de onda esféricas no son tan evidentes como en el caso plano y cilíndrico en que las funciones involucradas son exponenciales. La formulación original puede encontrarse en [Ludwig, 1971]

Las funciones de onda esféricas $\vec{M}_{m,n}$ y $\vec{N}_{m,n}$ definidas en 2-164 y 2-165 presentan las siguientes relaciones de ortogonalidad [Stratton, 1941, pp.418]

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{M}_{m,n} \vec{M}_{k,l} \sin\theta d\theta d\phi = \quad (3-16)$$

$$= \epsilon \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) [h_n^{(2)}(kr)]^2 \delta_{(m,k),(n,l)}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{N}_{m,n} \vec{N}_{k,l} \sin\theta d\theta d\phi =$$

$$= \epsilon \frac{2\pi}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) \left[\frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r h_n^{(2)}(kr)) \right]^2 \delta_{(m,k),(n,l)}$$

con

$$\epsilon = 1 \quad m \neq 0 \quad (3-17)$$

$$\epsilon = 2 \quad m = 0$$

mientras que

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \vec{M}_{m,n} \vec{N}_{k,l} \sin\theta d\theta d\phi = 0 \quad (3-18)$$

Estas relaciones permiten obtener a partir de 2-162 los coeficientes modales a partir de las componentes tangenciales de los campos sobre una esfera de radio 'a'

$$a_{m,n} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{(2n+1)}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!n(n+1)[h_n^{(2)}(k\alpha)]^2} \quad (3-19)$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{M}_{m,n} \bar{E}_{tan} \sin\theta d\theta d\phi$$

$$b_{m,n} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{(2n+1)^2}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!n(n+1) \left[\frac{1}{ka} \frac{d}{dr} (r h_n^{(2)}(kr)) \right]_{r=a}^2}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{N}_{m,n} \bar{E}_{tan} \sin\theta d\theta d\phi$$

de los coeficientes modales y las expresiones asintóticas 2-184 y 2-185 se evalúa el campo lejano.

El caso esférico es formalmente idéntico al plano o cilíndrico, sin embargo la implementación numérica presenta dificultades por el hecho de que las relaciones integrales son más complejas. Mientras que las integrales según ϕ son transformadas de Fourier, las integrales según θ son desarrollos en polinomios de Legendre que no son fácilmente evaluables de forma eficiente y precisa. Ricardi [Ricardi, 1972] propone un método de expresar estas integrales como transformadas de Fourier basándose en la expansión de los polinomios de Legendre en series de senos y cosenos, y en la extensión de los límites de integración entre 0 y 2π y en las propiedades de simetría par e impar de estas funciones.

3.3 Reconstrucción de las corrientes.

Otra de las aplicaciones de interés de la formulación espectral es el problema inverso, es decir, reconstrucción de las fuentes a partir de cierto conocimiento de los campos. La utilidad inmediata de esta técnica se centra en el diagnóstico de antenas. Con el aumento de las prestaciones requeridas a las antenas es extremadamente útil disponer de una herramienta que permita conocer las distribuciones de corrientes sobre una antena, y este modo diagnosticar posibles errores en la alimentación.

Las primeras formulaciones del problema inverso aplicado a antenas son debidas a Hamada [Hamada, 1977] que propone el empleo de la formulación espectral para la reconstrucción de los campos próximos a la antena a partir de los campos lejanos, y a Ramson [Ramson, 1971] que estudia la posibilidad de realizar el diagnóstico de

agrupaciones planas a partir de medidas en campo próximo plano. Posteriormente Cook [Cook,1989] y Rahmat-Sami [Rahmat-Sami,1985] han mostrado la utilidad de estas técnicas al diagnóstico de reflectores.

El problema inverso planteado tridimensionalmente, es decir, con distribuciones arbitrarias volumétricas de corriente, no tiene solución única. Este hecho es fácilmente comprobable en el caso plano en que la obtención de las corrientes en función de los campos pasa por invertir la ecuación 2-104 y por tanto es necesario invertir los tensores \bar{X}_1 y \bar{X}_2 , cuyo determinante es nulo. De todas formas es posible formular el problema inverso para una serie de casos que cubren una gran parte de situaciones reales.

La reconstrucción de las corrientes empleando la formulación espectral se realiza en dos pasos. Un primer proceso de obtención de los coeficientes modales de los campos, y cálculo de las corrientes a partir de los coeficientes modales. El primer paso es idéntico al realizado en la transformación campo campo, y es realizable una vez conocidas las componentes tangenciales de los campos eléctricos o magnéticos sobre la superficie de medida.

Es evidente que de los campos sólo es posible recuperar el dominio visible del espectro, de forma que el proceso inverso conduce a reconstrucciones aproximadas de las corrientes. Una discusión detallada de este efecto y del truncamiento de la zona de medida para el caso plano se encuentra en [Jofre, 1982].

A continuación se presenta la reconstrucción de corrientes para una serie de casos particulares de especial interés. La formulación se presenta suponiendo exclusivamente corrientes eléctricas, la generalización a corrientes magnéticas es inmediata.

3.3.1 Reconstrucción de un hilo de corrientes.

Considere una situación como la de la figura 3-4, en que se tiene una corriente de la forma

$$\vec{J} = I(z) \frac{1}{2\pi\rho} \delta(\rho) \hat{z} \quad (3-20)$$

El interés de este problema reside en que las grandes agrupaciones de antenas planas se construyen generalmente a partir de agrupaciones lineales de antenas, por tanto la situación descrita anteriormente se correspondería al proceso de diagnóstico de una columna de una agrupación plana.

En el apartado 2.10.1 se ha visto que para este tipo de corrientes todos los coeficientes modales cilíndricos son nulos, excepto

$$b_0(k_z) = -\frac{\eta}{8\pi} \tilde{I}(k_z) \quad (3-21)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{I}(k_z) &= \int_{-\infty}^{\infty} I(z) e^{jk_z z} dz \\ I(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{I}(k_z) e^{-jk_z z} dk_z \end{aligned} \quad (3-22)$$

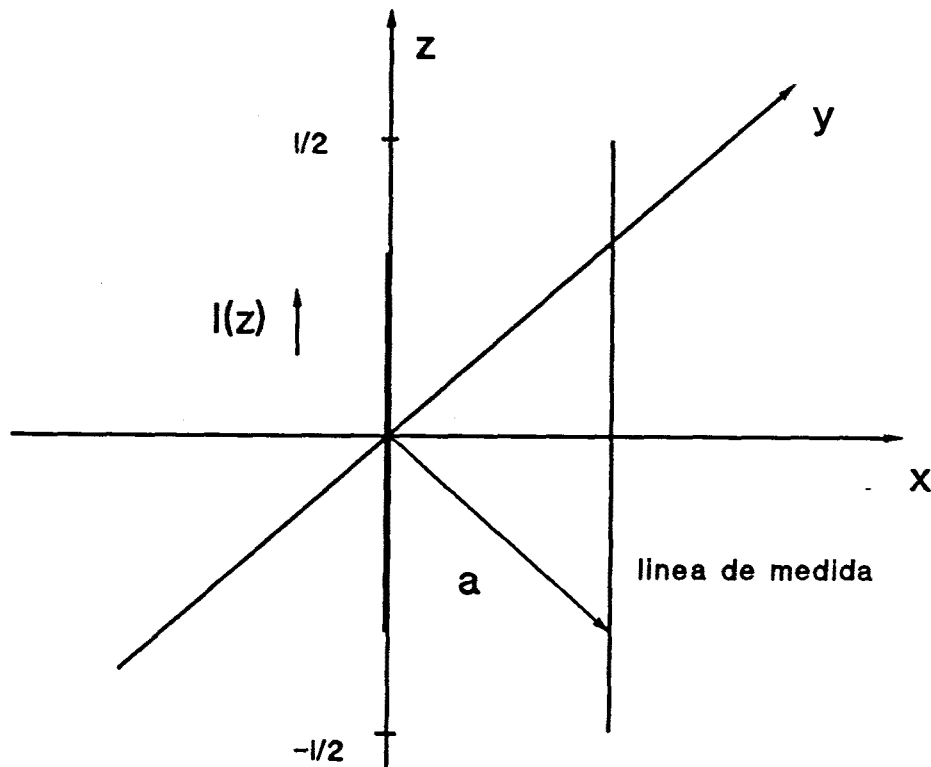


Figura 3-4 Reconstrucción de un hilo de corriente.

de las expresiones 3-12 y 3-9 se encuentra el coeficiente $b_0(k_z)$ en función del campo medido sobre una superficie cilíndrica como

$$b_0(k_z) = -\frac{1}{2\pi} \frac{k}{k_\rho^2 H_0^{(2)}(k_\rho a)} \int_{-\infty}^{\infty} E_z(\rho = a, z) e^{jk_z z} dz \quad (3-23)$$

Una vez conocido el coeficiente cilíndrico se obtiene la distribución de corriente a partir de 3-21

$$I(z) = \frac{2k}{\pi \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{E}_z(\rho = a, k_z)}{k^2 H_0^{(2)}(k, a)} e^{-jk_z z} dk_z \quad (3-24)$$

con

$$\tilde{E}_z(\rho = a, k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} E_z(\rho = a, z) e^{jk_z z} dz \quad (3-25)$$

En este caso es posible reconstruir las corrientes a partir de la medida del campo eléctrico según z sobre una línea de medida vertical. Nótese que la integral 3-24 extendida entre $\pm \infty$, sólo puede realizarse entre $\pm k$, que se corresponde con el dominio visible del espectro, de forma que se reconstruirá una versión aproximada de la corriente dada por

$$I'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-k}^k \tilde{I}(k_z) e^{-jk_z z} dk_z \quad (3-26)$$

donde $I'(z)$ es una versión 'paso bajo' de la corriente real. Otro aspecto importante en la realización práctica de un sistema de diagnóstico es que la longitud de la línea de medida es en realidad finita, por lo que la integral 3-25 se evaluará de forma aproximada como

$$\tilde{E}'_z(\rho = a, k_z) = \int_{-L/2}^{L/2} E_z(\rho = a, z) e^{jk_z z} dz \quad (3-27)$$

donde L es la longitud de la línea de medida. Estos dos efectos pueden contemplarse como un doble efecto de enventanado en el dominio espacial y el dominio espectral de forma que la corriente realmente reconstruida es

$$I''(z) = \frac{2k}{\pi \eta} \int_{-k}^k \frac{1}{k^2 H_0^{(2)}(k, a)} E_z(\rho = a, z') \Pi\left(\frac{k_z}{2k}\right) \Pi\left(\frac{z'}{L}\right) e^{jk_z(z-z')} dz' dk_z \quad (3-28)$$

3.3.2 Reconstrucción de una lámina de corrientes.

Se analiza a continuación la situación de la figura 3-5 en la que se tiene una distribución de corrientes de la forma

$$\vec{J} = J_y(y, z) \delta(x) \hat{y} + J_z(y, z) \delta(x) \hat{z} \quad (3-29)$$

Dado que la distribución de corrientes es plana, es lógico suponer que la formulación más adaptada a este problema es realizar una medida en campo próximo sobre un plano, obtener el espectro de ondas planas y de ahí las corrientes. En cualquier caso, tal como se ha indicado en la sección 2.10, es posible obtener el espectro angular de ondas planas a partir de los coeficientes modales cilíndricos o esféricos, por tanto si bien se desarrolla la reconstrucción para el caso plano es fácilmente extensible al caso cilíndrico y esférico.

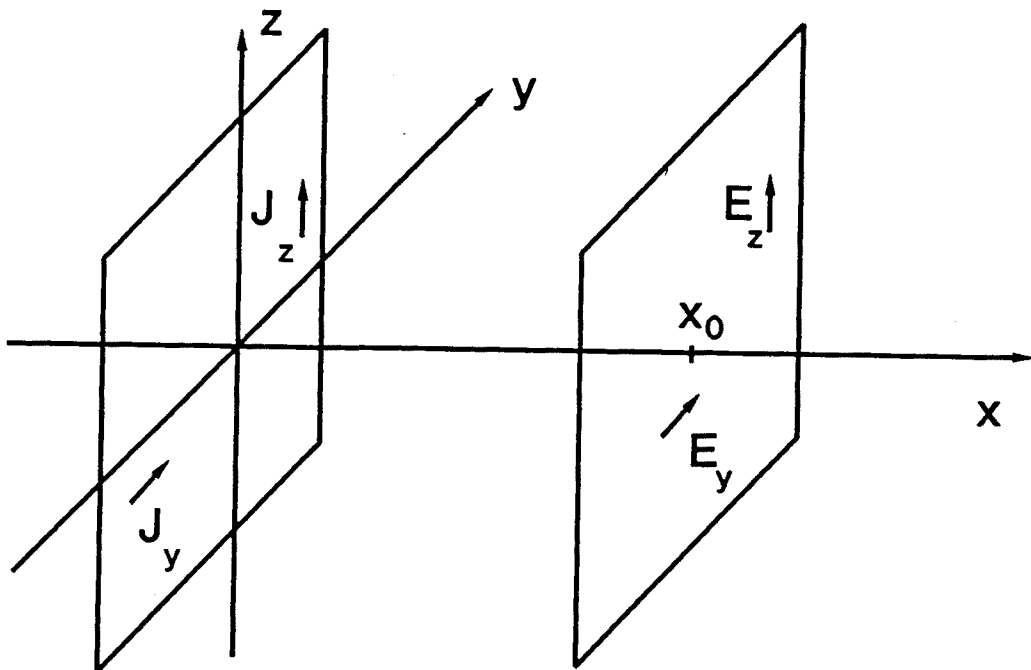


Figura 3-5 Reconstrucción de una lámina de corrientes.

Para la situación de la figura 3-5, los campos producidos en un plano yz situado en $x = x_0$ son (apartado 2.6.2)

$$\bar{E}(x = x_0, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \eta \bar{X}_1 \bar{B}_j e^{-ik_x x_0} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} dk_y dk_z \quad (3-30)$$

con el tensor \bar{X}_1 para propagación según x

$$\bar{X}_1 = -\frac{k}{2k_x} \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_x^2}{k^2} & \frac{-k_x k_y}{k^2} & \frac{-k_x k_z}{k^2} \\ \frac{-k_x k_y}{k^2} & 1 - \frac{k_y^2}{k^2} & \frac{-k_y k_z}{k^2} \\ \frac{-k_x k_z}{k^2} & \frac{-k_y k_z}{k^2} & 1 - \frac{k_z^2}{k^2} \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

Para corrientes superficiales del tipo 3-29, y para las componentes tangenciales de los campos, la ecuación 3-30 se reduce a

$$\bar{E}_{1t}(x = x_0, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \eta \bar{X}_{1t} \bar{B}_j e^{-jk_x x_0} e^{-jk_y y} e^{-jk_z z} dk_y dk_z \quad (3-32)$$

con \bar{X}_{1t}

$$\bar{X}_{1t} = -\frac{k}{2k_x} \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_y^2}{k^2} & \frac{-k_y k_z}{k^2} \\ \frac{-k_y k_z}{k^2} & 1 - \frac{k_z^2}{k^2} \end{bmatrix} \quad (3-33)$$

la ecuación 3-32 puede invertirse fácilmente. Se define

$$\bar{A}_t(x = x_0; k_y, k_z) = \int \int \bar{E}_t(x = x_0, y, z) e^{jk_y y} e^{jk_z z} dk_y dk_z \quad (3-34)$$

y \bar{X}_{1t}^{-1} como la inversa del tensor 3-33 dado por

$$\bar{X}_{1t}^{-1} = -\frac{2k_x}{k} \begin{bmatrix} 1 - \frac{k_z^2}{k^2} & \frac{k_y k_z}{k^2} \\ \frac{k_y k_z}{k^2} & 1 - \frac{k_y^2}{k^2} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

obteniéndose para las corrientes

$$\bar{J}(y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \frac{1}{\eta} \bar{X}_{1t}^{-1} \bar{A}_t e^{jk_x x_0} e^{jk_y y} e^{jk_z z} dk_y dk_z \quad (3-36)$$

De forma parecida al caso de la línea de corriente, las integrales 3-34 y 3-36 que se extienden entre $\pm\infty$, están limitadas en la realidad por las dimensiones del plano de medida y el dominio visible del espectro respectivamente.

Antenna Imaging
 Vivaldi 12 GHz; Copolar Polarization

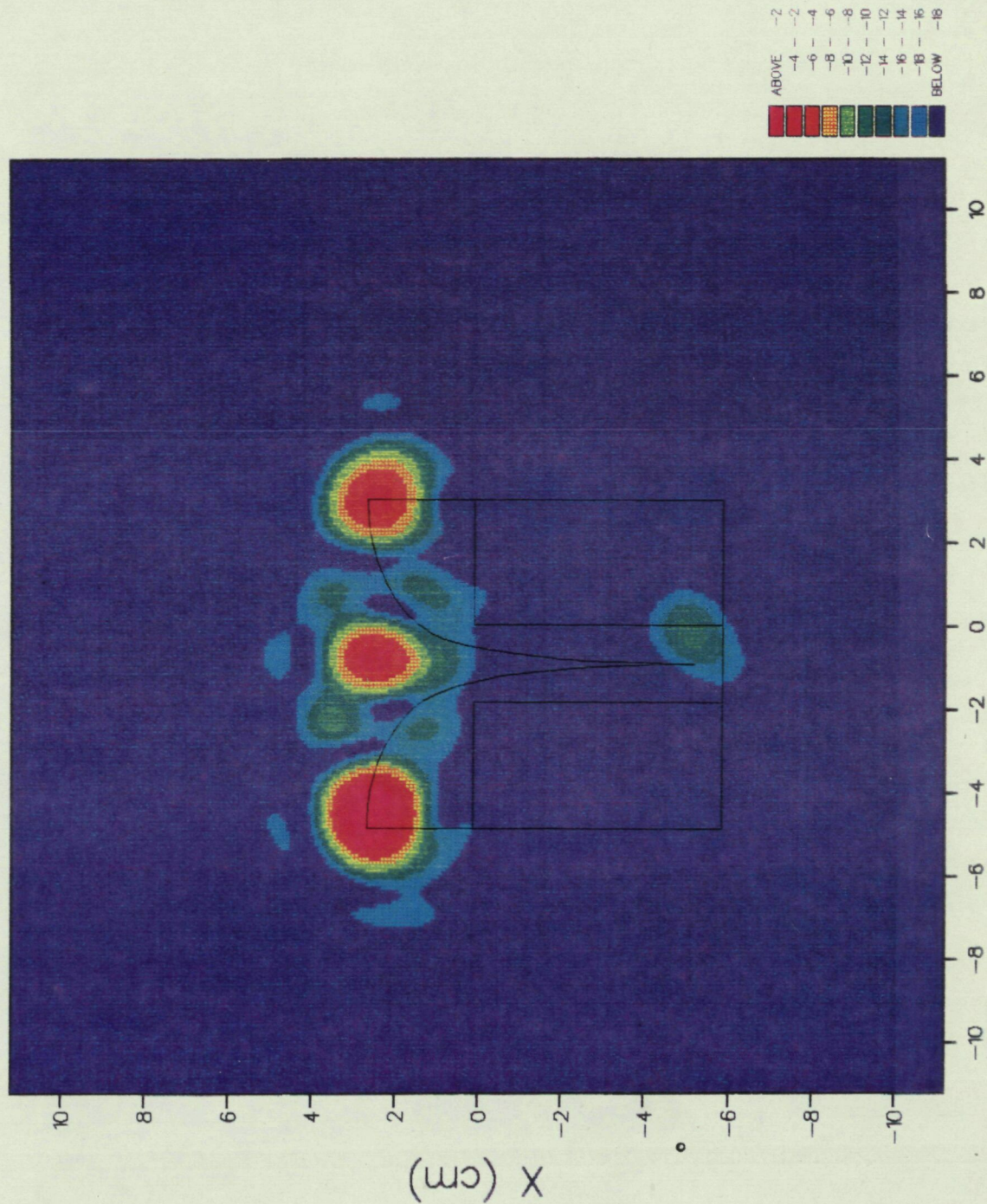


Figura 3-6 Reconstrucción de corrientes en una antena Vivaldi.

En la figura 3-6 se presenta un ejemplo del empleo de esta técnica en el diagnóstico de una antena. En este caso se trata de una antena impresa, conocida como antena Vivaldi, que se forma a partir de una línea slot-line que se abre progresivamente. El diagrama de radiación de esta antena presentaba un fuerte rizado, realizada la reconstrucción de las corrientes a partir de una medida en campo próximo en coordenadas cartesianas, se observa como la antena presenta tres puntos con corrientes importantes que se corresponden con la transición y los extremos de la antena.

3.3.3 Reconstrucción de láminas inclinadas de corrientes.

Considérese a continuación una situación como la de la figura 3-7 en que una distribución laminar de corriente se encuentra sobre el plano $y'z'$ de un sistema de coordenadas que se encuentra girado un cierto ángulo α sobre el eje y respecto el sistema de ejes del plano de medida. Se plantea en este caso la reconstrucción de las corrientes a partir de las componentes tangenciales del campo eléctrico en un plano yz situado en $x=x_0$.

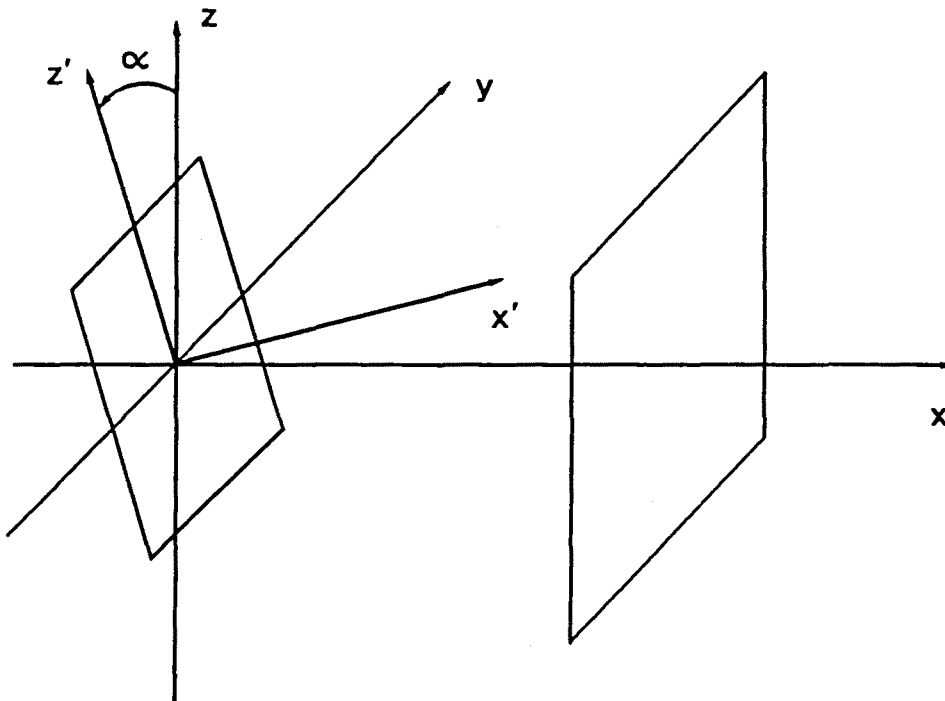


Figura 3-7 Reconstrucción de una lámina inclinada de corriente.

La formulación plana está bien adaptada para realizar la transformación campo campo en la dirección perpendicular al plano de medida, o a la reconstrucción de corrientes laminares paralelas al plano de medida. Una posible solución del problema es obtener

el espectro angular de ondas planas a partir de las componentes tangenciales del campo en el plano de medida tal como se ha hecho en el caso anterior. A continuación obtener el espectro angular respecto los ejes girados y realizar la reconstrucción de las corrientes.

La diferencia entre este caso y el resuelto en el apartado anterior es obtener el espectro de ondas planas respecto una rotación de ejes. El espectro de ondas planas $\vec{A}_E(k_y, k_z)$ permite expresar los campos como una superposición de ondas planas con dirección de propagación \vec{k} y $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$. Una rotación arbitraria de los ejes coordenadas viene dada por los tres ángulos de Euler. La rotación de ejes mostrada en la figura 3-7 supone la rotación respecto uno solo de los ángulos. El vector \vec{k} tiene las siguientes componentes vectoriales respecto el sistema de coordenadas girado

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

Por tanto una onda plana con dirección de propagación determinada por k'_y y k'_z se propaga según k_y y k_z referido al sistema de ejes sin girar, de forma que

$$\begin{aligned} k_y &= k'_y \\ k_z &= k'_z \cos \alpha + k'_x \sin \alpha \end{aligned} \quad (3-38)$$

$$\text{con } k'_x = \sqrt{k^2 - k'_y - k'_z}$$

De este modo las componentes tangenciales del espectro angular de ondas planas referidas al sistema de ejes girado, se relacionan con el espectro angular referido al sistema sin girar mediante

$$A'_y(k'_y, k'_z) = A_y(k'_y, k'_z \cos \alpha + k'_x \sin \alpha) \quad (3-39)$$

$$\begin{aligned} A'_z(k'_y, k'_z) &= A_z(k'_y, k'_z \cos \alpha + k'_x \sin \alpha) \cos \alpha - \\ &- A_x(k'_y, k'_z \cos \alpha + k'_x \sin \alpha) \sin \alpha \end{aligned}$$

Nótese que a partir de 2-98

$$A_x = -\frac{k_y A_y + k_z A_z}{k_x} \quad (3-40)$$

Con lo que queda determinado el espectro angular de ondas planas respecto el sistema de ejes rotado, obteniéndose las corrientes a partir del espectro tal como se indica en 3-36. Sin embargo es necesario notar que la zona del espectro visible, esto es $k_y^2 + k_z^2 < k^2$ se corresponde en el espectro referido al sistema de ejes sin girar a

$$\frac{k_z^2}{k^2 \cos^2 \alpha} + \frac{k_y^2}{k^2} < 1 \quad (3-41)$$

Esto es una elipse de ejes k y $k \cos \alpha$ (figura 3-8), de forma que no es posible recuperar todo el espectro, y cuanto mayor sea el ángulo de rotación menor es la zona del espectro recuperada. En el caso límite que el ángulo sea 90° , tan solo se recupera el eje k_y . Es fácilmente demostrable considerando el teorema de la proyección de la transformada de Fourier, que en este caso el proceso de reconstrucción proporcionará la proyección de las corrientes sobre un plano perpendicular a la distribución, esto es sobre el plano de medida.

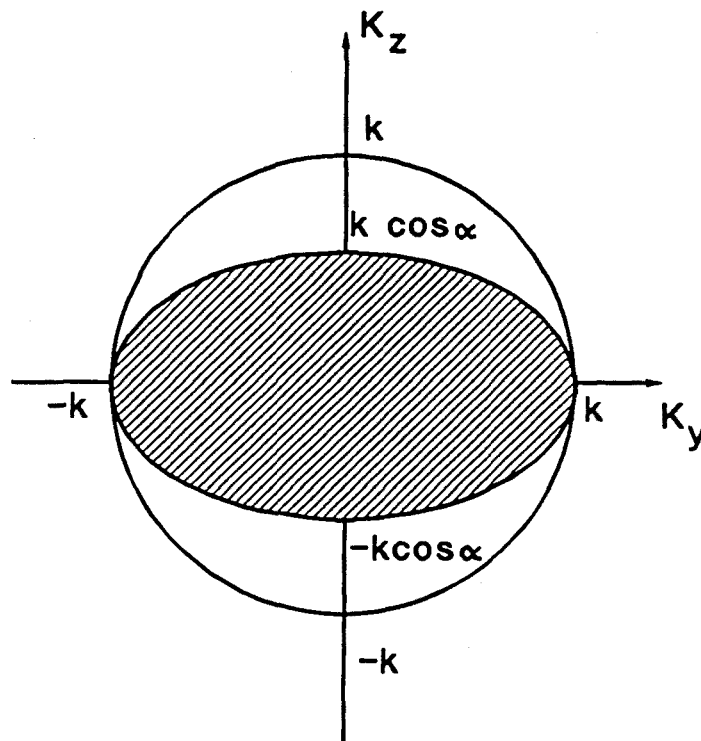


Figura 3-8 La zona sombreada indica la parte del dominio visible recuperado para una distribución laminar inclinada.

3.3.4 Reconstrucción de la excitación de agrupaciones.

Un caso de particular interés en la reconstrucción de corrientes es la obtención de la excitación de una agrupación de antenas, de forma que sea posible diagnosticar fallos en la alimentación de los elementos, o desviaciones respecto la distribución deseada.

Una agrupación de antenas presenta una distribución discreta de corrientes de la forma

$$\vec{J} = \sum A_n \vec{J}_0(\vec{r} - \vec{r}_n) \quad (3-42)$$

donde \vec{J}_0 es la distribución de corriente de un elemento solo, A_n es la excitación compleja del elemento n-simo, y \vec{r}_n su posición.

Para una agrupación lineal vertical como la de la figura 3-9 la distribución de corrientes es

$$\vec{J} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum A_n J_0(z - nd) \delta(\rho) \hat{z} \quad (3-43)$$

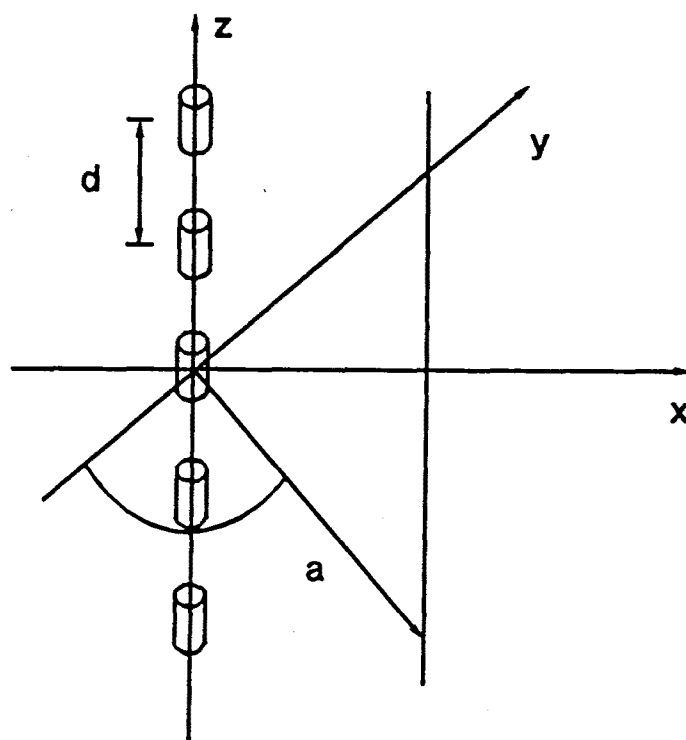


Figura 3-9 Agrupación lineal vertical de corrientes.

y los coeficientes modales cilíndricos son todos nulos excepto

$$b_0(k_z) = -\frac{\eta}{8\pi} \tilde{I}(k_z) \quad (3-44)$$

con

$$\tilde{I}(k_z) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z) e^{jk_z z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \sum A_n J_0(z - nd) e^{jk_z z} dz \quad (3-45)$$

al intercambiar el orden de sumación e integración es posible escribir

$$\tilde{I}(k_z) = \sum A_n \int_{-\infty}^{\infty} J_0(z - nd) e^{jk_z z} dz = \sum A_n J_0(k_z) e^{jk_z n d} = J_0(k_z) \alpha_k \quad (3-46)$$

donde α_k es la transformada discreta de Fourier de A_n dada por

$$\alpha_k = \sum A_n e^{j \frac{2\pi}{N} n k} \quad (3-47)$$

$$k = \frac{N k_z d}{2\pi}$$

y N es el número de elementos de la agrupación. α_k es periódica en k_z con un periodo T dado por

$$T = \frac{2\pi}{d} \quad (3-48)$$

Si se supone conocida la distribución de corrientes para un elemento de la agrupación se puede calcular

$$\tilde{I}'(k_z) = \frac{\tilde{I}(k_z)}{J_0(k_z)} \quad (3-49)$$

y

$$b_0'(k_z) = \frac{b_0(k_z)}{J_0(k_z)} = -\frac{\eta}{8\pi} \tilde{I}'(k_z) \quad (3-50)$$

El coeficiente $b_0'(k_z)$ es periódico con periodo $\frac{2\pi}{d}$. Por otra parte de una medida en campo próximo tan sólo se obtendrá el dominio visible de $b_0'(k_z)$ dado por $|k_z| < \frac{2\pi}{\lambda}$. Si el periodo de $b_0'(k_z)$ es menor que el margen visible, esto es

$$d > \frac{\lambda}{2} \quad (3-51)$$

se recupera un periodo completo de $b_0'(k_z)$ y por tanto es posible obtener la excitación de la agrupación a partir de α_x , ya que en este caso toda la información queda contenida en el dominio visible.

Este hecho es necesario tenerlo presente en el caso en que $d > \frac{\lambda}{2}$ y el paso de muestreo del campo próximo sea mayor que d , ya que si se realiza directamente la reconstrucción sin eliminar la parte del espectro visible contenida entre $k_0 < |k_z| < \frac{\pi}{d}$, la transformada discreta de Fourier impone unas condiciones de periodicidad en el espectro que conduce a reconstrucciones incorrectas. En la figura 3-10-a se muestra el espectro para una línea de corriente para la situación descrita anteriormente. En la figura 3-10-b se representa el espectro de la excitación que se reconstruye si no se realiza el filtrado paso bajo que se muestra en la figura 3-10-c.

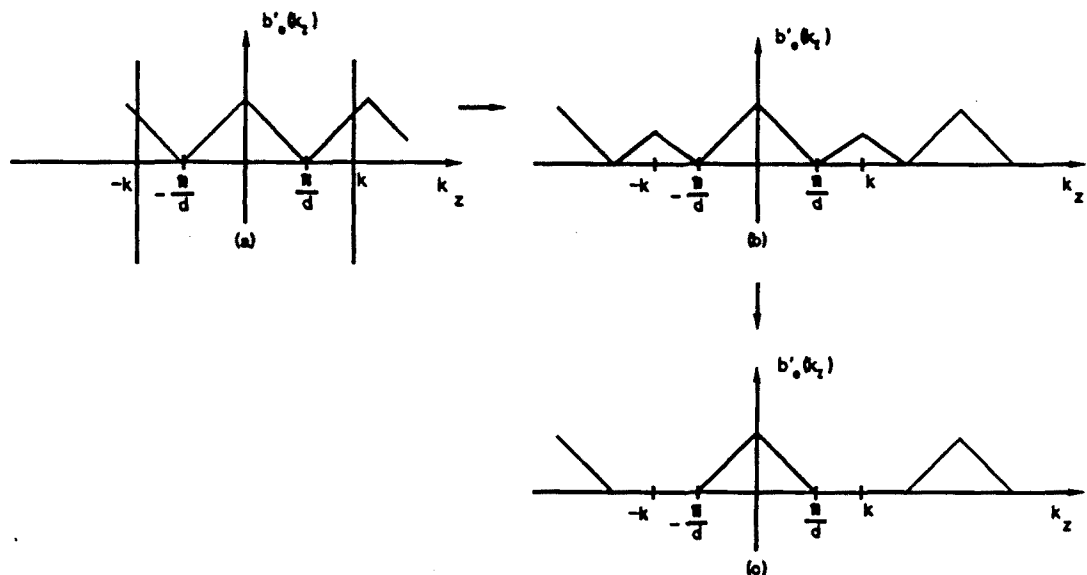


Figura 3-10 Espectro para una línea de corrientes (a), espectro reconstruido (b) y espectro filtrado paso bajo (c).

En la figura 3-11 se presenta la reconstrucción de una agrupación vertical de 50 dipolos verticales de media onda espaciados 0.75λ . La distancia de medida es de 5λ y la frecuencia de 10 GHz. La excitación de la agrupación es una Taylor de un parámetro

RECONSTRUCCION CORRIENTES

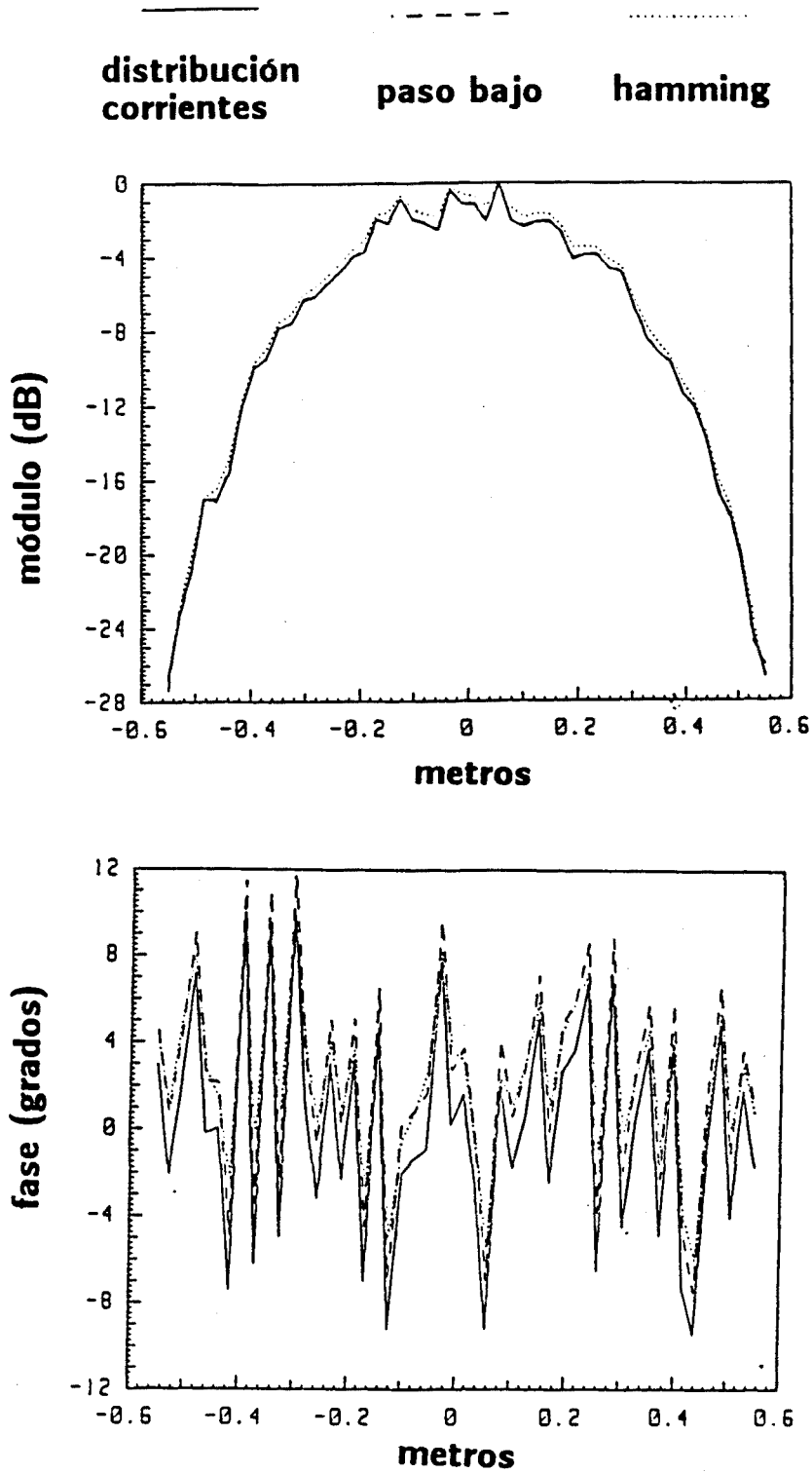


Figura 3-11 Reconstrucción del módulo y la fase de una agrupación vertical de 50 elementos, distribución Taylor de un parámetro y error aleatorio de 1 dB y 10 grados.

de 35 dB de relación de lóbulo principal a secundario, a la que se le ha añadido un error aleatorio de 1 dB en amplitud y 10 grados en fase. En la figura se presenta la distribución inicial, la reconstruida con un filtrado paso bajo con una frecuencia de corte de $\pm \frac{\pi}{d}$, y en el caso de aplicar una ventana de Hamming en todo el dominio espectral. El error cuadrático medio de la reconstrucción se muestra en la tabla 3-1.

Error rms	Módulo (dB)	Fase (grados)
Ventana Hamming	0.49	2.59
Filtro paso bajo	0.17	2.26

Tabla 3-1 Error rms en la reconstrucción de la excitación de una agrupación vertical.

La reconstrucción es mejor en el caso en que se realiza el filtrado paso bajo. Este hecho se pone de manifiesto en la figura 3-12 en que se representa la respuesta impulsional de la reconstrucción para el caso anterior en el caso en que no se realiza ningún filtrado, filtrado paso bajo, y ventana de Hamming. El filtrado paso bajo es el caso que presenta una mejor respuesta impulsional.

Un razonamiento parecido es válido para agrupaciones bidimensionales. En la figura 3-13 se muestra la reconstrucción para una agrupación de 40x40 dipolos elementales horizontales con espaciados de 0.778λ en horizontal y 0.875λ en vertical, la agrupación se encuentra inclinada 10 grados respecto el eje vertical. La reconstrucción se ha realizado a partir del campo próximo en coordenadas cilíndricas con un radio de medida de 45λ y longitud de 70λ . La excitación es una Taylor de un parámetro de 25 dB en horizontal y 40 dB en vertical. La figura muestra el error de la reconstrucción para la fila y la columna central. El error es menor de 0.5 dB en módulo y 2.5 grados en fase. Se comprueba como el error es superior en las columnas debido al truncamiento de la superficie de medida.

RESPUESTA IMPULSIONAL

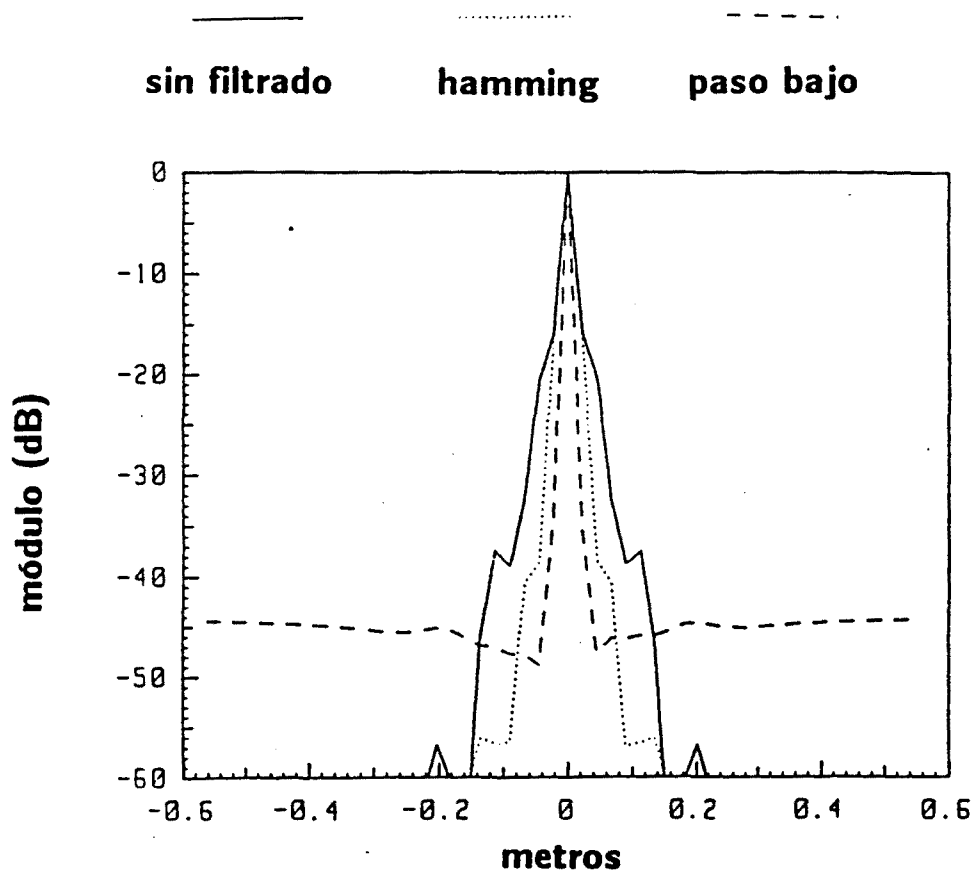


Figura 3-12 Respuesta impulsional para la reconstrucción de una agrupación vertical.

ERROR EN LA RECONSTRUCCION

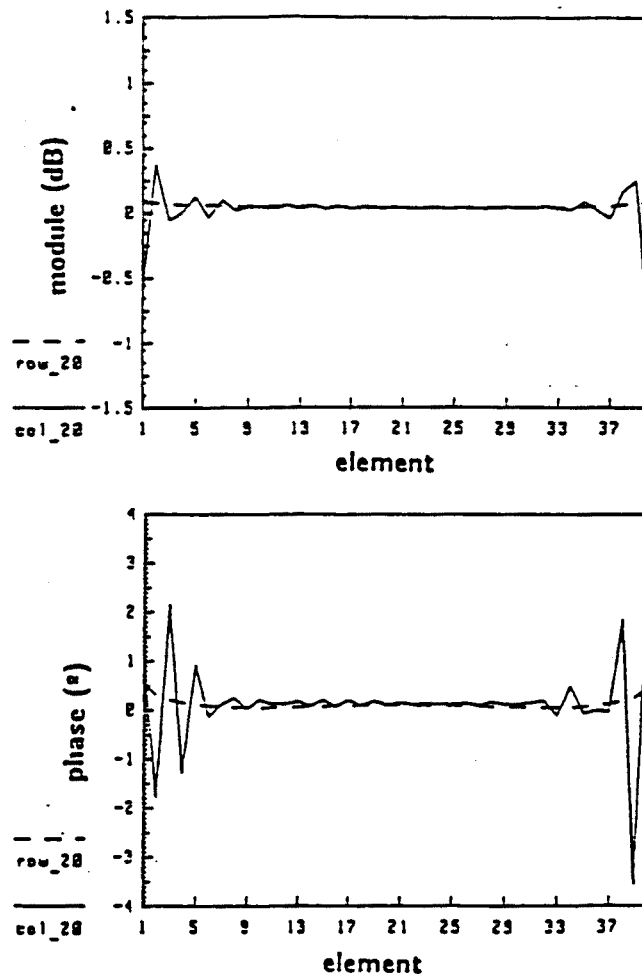


Figura 3-13 Reconstrucción en módulo y fase de una agrupación plana inclinada a partir del campo próximo en coordenadas cilíndricas.

3.4 Estudio de radomos cilíndricos y esféricos.

Los radomos son cubiertas dieléctricas cuya función es proteger la ABP de la intemperie. La formulación espectral tanto plana [Wu,1974], como cilíndrica [Chang,1990] se ha empleado para estudiar el efecto de los radomos sobre el diagrama de radiación de antenas. En el estudio que se presenta a continuación se considera el efecto de los radomos sobre cada uno de los modos en que se expresan los campos radiados por la antena, encontrándose los coeficientes de transmisión y reflexión de cada modo al incidir sobre el radomo. El análisis del efecto del radomo consiste en descomponer los campos radiados por la ABP en modos cilíndricos o esféricos, según el tipo de radomo, a cada modo se le afecta por su coeficiente de transmisión y se obtiene el campo lejano con los nuevos coeficientes modales.

3.4.1 Incidencia de modos cilíndricos en discontinuidades cilíndricas.

Supóngase una estructura dieléctrica como la de la figura 3-14, que se supone invariante según z , formada por un cilindro interior de radio ρ_0 y permitividad eléctrica ϵ_0 y un medio exterior de permitividad eléctrica ϵ_1 . En el interior del cilindro de radio ρ_0 existen unas fuentes que también se suponen invariantes según z . Estas fuentes producen unos campos que pueden expresarse como una superposición de modos TE y TM respecto \hat{z} . Esto es posible expresando los campos como una superposición de ondas cilíndricas correspondiendo el caso TE a tomar el vector potencial $\vec{A} = 0$, y el caso TM a tomar $\vec{F} = 0$. A partir de las expansión de los campos como ondas cilíndricas realizada en la sección 2.7.1 se tiene que

$$\vec{E}^{TE} = - \sum_n \alpha_n \vec{M}_n \quad (3-52)$$

$$\vec{H}^{TE} = - \frac{j}{\eta} \sum_n \alpha_n \vec{N}_n$$

$$\vec{E}^{TM} = - \sum_n b_n \vec{N}_n$$

$$\vec{H}^{TM} = - \frac{j}{\eta} \sum_n b_n \vec{M}_n$$

debido a la uniformidad según z , los vectores de onda cilíndricos son

$$\vec{M}_n = \left[\hat{\rho} \frac{jn}{\rho} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cdot) \right] H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3-53)$$

$$\vec{N}_n = \hat{z} k H_n^{(2)}(k\rho) e^{jn\phi} \quad (3-54)$$

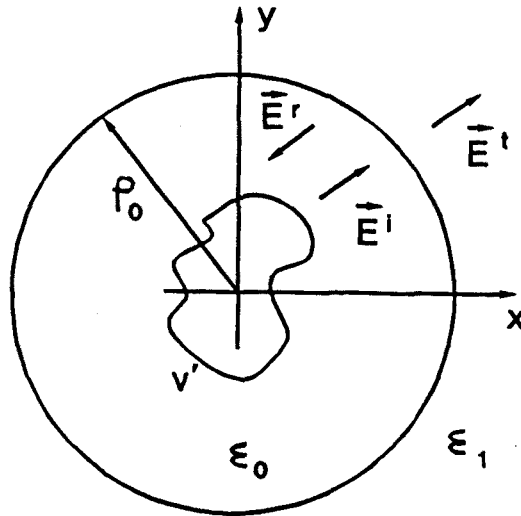


Figura 3-14 Incidencia de modos cilíndricos sobre una discontinuidad.

A partir de las componentes tangenciales de los campos pueden definirse las impedancias de los modos como

$$Z_{+\rho}^{TE} = \frac{E_{\phi}^+}{H_z^+} = j\eta_0 \frac{H_n^{(2)'}(k_0\rho)}{H_n^{(2)}(k_0\rho)} \quad (3-55)$$

$$Z_{+\rho}^{TM} = -\frac{E_z^+}{H_{\phi}^+} = -j\eta_0 \frac{H_n^{(2)}(k_0\rho)}{H_n^{(2)'}(k_0\rho)}$$

donde se ha empleado el índice + para indicar que se corresponde a modos propagándose en el sentido creciente de ρ . Para modos propagándose en el sentido negativo se procede de forma similar y substituyendo la función de Hankel de segunda especie por la de primera especie.

$$Z_{-\rho}^{TE} = -\frac{E_{\phi}^-}{H_z^-} = -j\eta_0 \frac{H_n^{(1)'}(k_0\rho)}{H_n^{(1)}(k_0\rho)} = (Z_{+\rho}^{TE})^* \quad (3-56)$$

$$Z_{-\rho}^{TM} = \frac{E_z^-}{H_{\phi}^-} = j\eta_0 \frac{H_n^{(1)}(k_0\rho)}{H_n^{(1)'}(k_0\rho)} = (Z_{+\rho}^{TM})^*$$

En el caso en que $k_0\rho \gg 1$ se puede aproximar la función de Hankel por

$$H_n^{(1)(2)}(k_0\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho \cos \psi_n}} \cdot e^{*j(k_0\rho \cos \psi_n + n\psi_n - n\pi/2 - \pi/4)} \quad (3-57)$$

con

$$\psi_n = \text{sen}^{-1}\left(\frac{n}{k_0\rho}\right) \quad (3-58)$$

en el caso que se cumpla que $k_0\rho \gg n$ se puede aproximar

$$\psi_n \cong \frac{n}{k_0\rho} \quad (3-59)$$

$$\cos \psi_n \cong 1$$

Nótese que el significado de esta última aproximación es que el radio del cilindro mínimo que encierra las fuentes 'a', sea mucho menor que ρ ya que $n \leq k_0 a$. En este caso se puede aproximar la función de Hankel de orden n por

$$H_n^{(1)(2)}(k_0\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho}} \cdot e^{*j\left(k_0\rho n + \frac{n^2}{k_0\rho} - n\pi/2 - \pi/4\right)} \quad (3-60)$$

La derivada de la función de Hankel puede aproximarse con las mismas hipótesis que se han realizado anteriormente empleando la siguientes relaciones

$$\begin{aligned} H_n^{(1)(2)'}(k_0\rho) &= H_{n-1}^{(1)(2)}(k_0\rho) + \frac{n}{k_0\rho} H_n^{(1)(2)}(k_0\rho) \cong \\ &\cong H_{n-1}^{(1)(2)}(k_0\rho) \cong \\ &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho \cos \psi_n}} \cdot e^{*j\left(k_0\rho + \frac{(n-1)^2}{k_0\rho} - (n-1)\pi/2 - \pi/4\right)} \cong \\ &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi k_0\rho \cos \psi_n}} \cdot e^{*j\left(k_0\rho + \frac{n^2}{k_0\rho} - (n-1)\pi/2 - \pi/4\right)} \cong \\ &\cong (-j)H_n^{(1)(2)'}(k_0\rho) \end{aligned} \quad (3-61)$$

Por lo tanto la impedancia de los modos para puntos alejados de las fuentes son

$$Z_{+\rho}^{TE} = Z_{-\rho}^{TE} = Z_{+\rho}^{TM} = Z_{-\rho}^{TM} = \eta_0 \quad (3-62)$$

Resultado que no expresa otra cosa que las ondas cilíndricas se aproximan localmente a ondas planas para puntos alejados de las fuentes, y por tanto su impedancia, que no es mas que una relación local entre componentes de campos, tiende a la impedancia de una onda plana.

Al incidir los campos sobre la superficie de separación entre los dos medios se producirá una onda reflejada y una onda transmitida, manteniéndose la continuidad de las componentes tangenciales de los campos. De forma que

$$\vec{E}^i(\rho = \rho_0) \times \hat{\rho} + \vec{E}^r(\rho = \rho_0) \times \hat{\rho} = \vec{E}^t(\rho = \rho_0) \times \hat{\rho} \quad (3-63)$$

$$\vec{H}^i(\rho = \rho_0) \times \hat{\rho} + \vec{H}^r(\rho = \rho_0) \times \hat{\rho} = \vec{H}^t(\rho = \rho_0) \times \hat{\rho}$$

Los campos pueden expresarse como una superposición de ondas cilíndricas, el problema se analiza de forma más sencilla descomponiéndolo en el caso TE y TM. Si particularizamos para el caso TM y se expresan los campos magnéticos en función de los eléctricos tenemos que para $\rho = \rho_0$ debe cumplirse que

$$\sum b_n^i \bar{N}_n^{+(0)} + \sum b_n^r \bar{N}_n^{-(0)} = \sum b_n^t \bar{N}_n^{+(1)} \quad (3-64)$$

$$\sum \frac{b_n^i \bar{N}_n^{+(0)}}{Z_{TM}^{+(0)}} - \sum \frac{b_n^r \bar{N}_n^{-(0)}}{Z_{TM}^{-(0)}} = \sum \frac{b_n^t \bar{N}_n^{+(1)}}{Z_{TM}^{+(1)}}$$

donde los superíndices i,r,t indican incidente, reflejado y transmitido, (0) y (1) se refiere al medio y +,- al sentido de propagación. Las igualdades anteriores pueden escribirse modo a modo de la siguiente forma

$$b_n^i \left[\bar{N}_n^{+(0)} + \Gamma_n^{TM} \bar{N}_n^{-(0)} \right] = b_n^t \tau_n^{TM} \bar{N}_n^{+(1)} \quad (3-65)$$

$$b_n^i \left[\frac{\bar{N}_n^{+(0)}}{Z_{TM}^{+(0)}} - \Gamma_n^{TM} \frac{\bar{N}_n^{-(0)}}{Z_{TM}^{-(0)}} \right] = b_n^t \tau_n^{TM} \frac{\bar{N}_n^{+(1)}}{Z_{TM}^{+(1)}}$$

donde se han definido los coeficientes de reflexión y transmisión de cada modo como

$$\Gamma_n^{TM} = \frac{b_n^r}{b_n^i} \quad (3-66)$$

$$\tau_n^{TM} = \frac{b_n^t}{b_n^i}$$

La obtención de los coeficientes de transmisión y reflexión es inmediata

$$\Gamma_n^{TM}(\rho = \rho_0) = \frac{H_n^{(2)}(k_0 \rho_0)}{H_n^{(1)}(k_0 \rho_0)} \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 \frac{Z_{TM}^{+(0)}}{Z_{TM}^{-(0)}} + \eta_0} \quad (3-67)$$

$$\tau_n^{TM}(\rho = \rho_0) = \frac{H_n^{(2)}(k_0 \rho_0)}{H_n^{(2)}(k_1 \rho_0)} \frac{\eta_1 \left[1 + \frac{Z_{TM}^{+(0)}}{Z_{TM}^{-(0)}} \right]}{\eta_1 \frac{Z_{TM}^{+(0)}}{Z_{TM}^{-(0)}} + \eta_0}$$

Para el caso en que $k_{0,1} \rho_0 \gg 1$ las expresiones anteriores pueden aproximarse por

$$\Gamma_n^{TM}(\rho = \rho_0) = j(-1)^{-n} e^{-j2k_0 \rho_0} e^{-j2 \frac{n^2}{k_0 \rho_0}} \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} \quad (3-68)$$

$$\tau_n^{TM}(\rho = \rho_0) = \sqrt{\frac{k_0}{k_1}} e^{-j(k_0 - k_1) \rho_0} e^{-jn^2 \left[\frac{1}{k_0 \rho_0} - \frac{1}{k_1 \rho_0} \right]} \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_0}$$

La extensión de la formulación al caso TE es inmediata.

$$\Gamma_n^{TE}(\rho = \rho_0) = \frac{H_n^{(2)'}(k_0 \rho_0)}{H_n^{(1)'}(k_0 \rho_0)} \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 \frac{Z_{TE}^{+(0)}}{Z_{TE}^{-(0)}} + \eta_0} \quad (3-69)$$

$$\tau_n^{TE}(\rho = \rho_0) = \frac{k_0 H_n^{(2)'}(k_0 \rho_0)}{k_1 H_n^{(2)'}(k_1 \rho_0)} \frac{\eta_1 \left[1 + \frac{Z_{TE}^{+(0)}}{Z_{TE}^{-(0)}} \right]}{\eta_1 \frac{Z_{TE}^{+(0)}}{Z_{TE}^{-(0)}} + \eta_0}$$

3.4.2 Incidencia de modos cilíndricos en láminas dieléctricas cilíndricas.

Considérese a continuación la situación de la figura 3-15 en que se tiene un cilindro dieléctrico de grosor $\rho_1 - \rho_0$ centrado en el origen de coordenadas. En el interior del cilindro se encuentran unas fuentes y el problema que se plantea es encontrar los campos

radiados por la fuentes en el exterior del cilindro dieléctrico conocidos los campos en ausencia de este. Para resolver este problema se emplearán los coeficientes de reflexión y transmisión para cada una de las interfases y que se han formulado en la sección anterior. Para ello se tomará el siguiente convenio de nomenclatura:

$\tau_{01}(\rho_0)$ coeficiente transmisión medio 0 \rightarrow medio 1 ; $\rho = \rho_0$

$\tau_{10}(\rho_0)$ coeficiente transmisión medio 1 \rightarrow medio 0 ; $\rho = \rho_0$

$\tau_{10}(\rho_1)$ coeficiente transmisión medio 1 \rightarrow medio 0 ; $\rho = \rho_1$

$\Gamma_{01}(\rho_0)$ coeficiente reflexión medio 0 \rightarrow medio 1 ; $\rho = \rho_0$

$\Gamma_{10}(\rho_0)$ coeficiente reflexión medio 1 \rightarrow medio 0 ; $\rho = \rho_0$

$\Gamma_{10}(\rho_1)$ coeficiente reflexión medio 1 \rightarrow medio 0 ; $\rho = \rho_1$

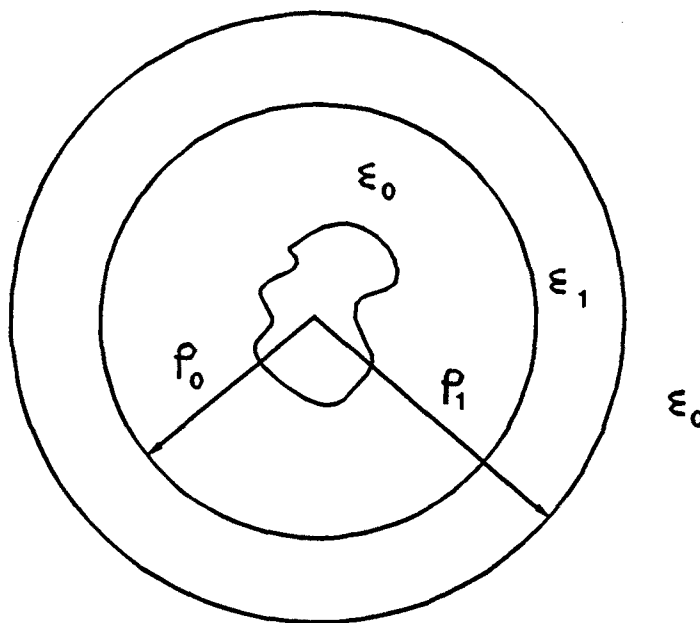


Figura 3-15 Incidencia sobre una lámina dieléctrica cilíndrica.

La interacción del campo incidente con la lámina dieléctrica puede analizarse como un proceso de múltiples reflexiones, tal como se ilustra en la figura 3-16. Al incidir el campo \vec{E}^i sobre el dieléctrico se producirá un campo reflejado y un campo transmitido. El campo transmitido se propagará hasta $\rho = \rho_1$ dando lugar a un campo transmitido ($\vec{E}_1^t(\rho_1)$) y un campo reflejado ($\vec{E}_1^r(\rho_1)$). Este campo reflejado se propagará hasta $\rho = \rho_0$ repitiéndose el proceso de forma sucesiva. Por tanto el campo total reflejado y transmitido es

$$\vec{E}^r(\rho_0) = \vec{E}_0^r(\rho_0) + \sum_{j=1}^{\infty} \vec{E}_{2j}^t(\rho_0) \tag{3-70}$$

$$\vec{E}^t(\rho_1) = \sum_{j=0}^{\infty} \vec{E}_{2j+1}^t(\rho_1)$$

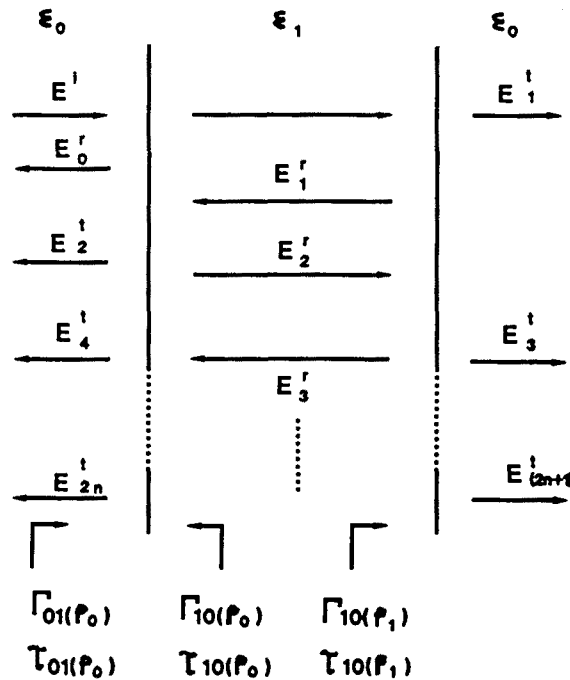


Figura 3-16 *Proceso de múltiples reflexiones en la lámina.*

Empleando los coeficientes de reflexión en las interfases, expresando los campos como superposición de modos cilíndricos, y particularizando para el caso TM se pueden escribir los campos de la siguiente forma

$$\vec{E}^t(\rho_0) = \sum_n b_n^t \vec{N}_n^{-(0)}(\rho_0); \tag{3-71}$$

$$\vec{E}_0^r(\rho_0) = \sum_n b_n^r \Gamma_{01}(\rho_0) \vec{N}_n^{-(0)}(\rho_0);$$

$$\vec{E}_{2j}^t(\rho_0) = \sum_n b_n^t \tau_{01}(\rho_0) \tau_{10}(\rho_0) \Gamma_{10}(\rho_1) \cdot$$

$$\cdot [\Gamma_{10}(\rho_1) \Gamma_{10}(\rho_0)]^{j-1} \vec{N}_n^{-(0)}(\rho_0);$$

$$\vec{E}_{2j+1}^t(\rho_1) = \sum_n b_n^t \tau_{01}(\rho_0) \tau_{10}(\rho_1) [\Gamma_{10}(\rho_1) \Gamma_{10}(\rho_0)]^j \vec{N}_n^{-(0)}(\rho_1);$$

Para el caso TE se obtienen unas expresiones análogas. Igualando las expresiones 3-70 modo a modo se obtienen los coeficientes de transmisión y reflexión totales en función de los coeficientes en cada una de las interfaces como

$$\Gamma_n = \Gamma_{01}(\rho_0) + \frac{\tau_{01}(\rho_0)\tau_{10}(\rho_0)\Gamma_{10}(\rho_1)}{1 - \Gamma_{10}(\rho_1)\Gamma_{10}(\rho_0)} \quad (3-72)$$

$$T_n = \frac{\tau_{01}(\rho_0)\tau_{10}(\rho_1)}{1 - \Gamma_{10}(\rho_1)\Gamma_{10}(\rho_0)}$$

Si se toman las aproximaciones de los coeficientes dados por las ecuaciones 3-68 y se desprecian la múltiples reflexiones en el dieléctrico se puede escribir el coeficiente de transmisión para el caso TM como

$$T_n \cong \frac{4\eta_0\eta_1}{(\eta_1 + \eta_0)^2} e^{-jk_0[\rho_0 - \rho_1]} e^{-jk_1[\rho_1 - \rho_0]} \cdot e^{-j\frac{n^2}{k_0}\left[\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1}\right]} e^{-j\frac{n^2}{k_1}\left[\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0}\right]} \quad (3-73)$$

El módulo del coeficiente de transmisión es el mismo que se obtiene del análisis de una onda plana incidiendo normalmete sobre una lámina dieléctrica plana, el resultado es coherente con la hipótesis de gran distancia. Los términos más significativos son los términos de fase cuadrática (proporcionales a n^2) que afectan a los coeficientes modales. Estos términos de fase cuadrática distorsionarán el diagrama de radiación de las fuentes introduciendo errores principalmente en el nivel de lóbulo principal a secundario.

3.4.3 El caso esférico.

El análisis del caso esférico es formalmente análogo al caso cilíndrico. La descomposición de los campos en modos esféricos permite expresar los campos como superposición de una solución TE y TM según r . En este caso

$$\vec{E}^{TE} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} \vec{M}_{n,m} \quad (3-74)$$

$$\vec{H}^{TE} = - \frac{j}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n,m} \vec{N}_{n,m}$$

$$\vec{E}^{TM} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n,m} \vec{N}_{n,m}$$

$$\vec{H}^{TM} = - \frac{j}{\eta} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n,m} \vec{M}_{n,m}$$

con las funciones de onda esférica

$$\vec{M}_{n,m} = \left[\frac{jm}{\sin \theta} \theta - \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) \right] \phi e^{jm\phi} h_n^{(2)}(kr) P_n^{m1}(\cos \theta) \quad (3-75)$$

$$\vec{N}_{n,m} = \frac{1}{kr} \left[n(n+1)r + \frac{\partial}{\partial r} \left[r \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}(\cdot) \right] \right] \phi + \frac{jm}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \phi) e^{jm\phi} h_n^{(2)}(kr) P_n^{m1}(\cos \theta) \quad (3-76)$$

A partir de las componentes tangenciales de los campos se definen las impedancias de los modos. Para el caso TE se tiene que

$$Z_{+r}^{TE} = \frac{E_{\theta}^+}{H_{\phi}^+} = - \frac{E_{\phi}^+}{H_{\theta}^+} = -j\eta_0 \frac{k_0 r h_n^{(2)}(k_0 r)}{\frac{\partial}{\partial r}(r h_n^{(2)}(k_0 r))} \quad (3-77)$$

$$Z_{-r}^{TE} = - \frac{E_{\theta}^-}{H_{\phi}^-} = \frac{E_{\phi}^-}{H_{\theta}^-} = j\eta_0 \frac{k_0 r h_n^{(1)}(k_0 r)}{\frac{\partial}{\partial r}(r h_n^{(1)}(k_0 r))}$$

Nótese que también en este caso si η_0 es real se cumple que

$$Z_{+r}^{TE} = (Z_{-r}^{TE})^* \quad (3-78)$$

Las funciones esféricas de Hankel admiten para $kr \gg n$ y $kr \gg 1$ la siguiente aproximación asintótica:

$$h_n^{(1)(2)}(kr) \cong (\mp j)^{n+1} \frac{e^{\pm jkr}}{kr} \quad (3-79)$$

$$\frac{1}{kr} \frac{\partial}{\partial r} (r h_n^{(1)(2)}(kr)) \cong (\mp j)^n \frac{e^{\pm jkr}}{kr} \cong \pm j h_n^{(1)(2)}(kr)$$

Por lo que a grandes distancias se cumple que

$$Z_{+r}^{TE} = Z_{-r}^{TE} = \eta_0 \quad (3-80)$$

Los coeficientes de transmisión y reflexión para los modos al incidir un campo sobre una discontinuidad esférica se calcula de forma análoga al caso cilíndrico. Para el caso TE se obtiene:

$$\Gamma_n^{TE}(r=r_0) = \frac{h_n^{(2)}(k_0 r_0)}{h_n^{(1)}(k_0 r_0)} \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 \frac{z_{TE}^{(0)+}}{z_{TE}^{(0)-}} + \eta_0} \quad (3-81)$$

$$\tau_n^{TE}(r=r_0) = \frac{h_n^{(2)}(k_0 r_0)}{h_n^{(2)}(k_1 r_0)} \frac{\eta_1 \left[1 + \frac{z_{TE}^{(0)+}}{z_{TE}^{(0)-}} \right]}{\eta_1 \frac{z_{TE}^{(0)+}}{z_{TE}^{(0)-}} + \eta_0}$$

En el caso de tener una lámina esférica dieléctrica los coeficientes de transmisión y reflexión totales en función de los coeficientes en cada una de las interfaces, son los mismos que se han calculado para el caso cilíndrico (ecuaciones 3-72).

CAPITULO 4

Transformación con corrección de sonda para el caso cilíndrico.

4.1 Introducción.

En los desarrollos presentados en capítulo 3, la transformación campo próximo campo lejano se realiza a partir de las componentes tangenciales del campo eléctrico o magnético presentes en la superficie de medida. En la realización práctica de un sistema de medida de antenas en campo próximo no se disponen de sondas ideales de campo eléctrico o magnético. Por sonda ideal se entiende aquella antena de medida que en bornes presenta una tensión proporcional a la intensidad de campo en un punto y para una sola polarización. En la realidad el comportamiento de una sonda real de medida difiere de forma apreciable del de la sonda ideal en los siguientes aspectos:

- a) La tensión en bornes de la sonda es el resultado de una integral de los campos incidentes sobre el volumen de la sonda, y no la respuesta a una intensidad de campo puntual.
- b) Las características de polarización de la sonda real son tales que siempre presentan una cierta respuesta a la polarización cruzada.

Otro efecto añadido del empleo de sondas de medida reales en los sistemas de medida en campo próximo es la perturbación de las distribuciones de campo producidas por la sonda y en especial del sistema de desplazamiento de la misma.

Por estos motivos se hizo evidente la necesidad de desarrollar formulaciones más generales que permitieran corregir los efectos de sondas de medida reales, pero de características conocidas. La primera formulación de la transformación campo próximo campo lejano con corrección de sonda fue debida a investigadores del 'National Bureau of Standards' (NBS) [Kerns,1970], presentando la transformación para el caso plano.

Posteriormente [Leach,1973] se realizó la formulación para el caso cilíndrico. Yaghjian [Yaghjian,1986] presenta una interesante exposición histórica del desarrollo teórico y práctico de los sistemas de medida en campo próximo en las diferentes geometrías. Por otra parte Joy y Paris [Joy,1978] [Paris,1978] resumen brevemente el desarrollo teórico y las aplicaciones de la transformación en las tres geometrías.

El objetivo de este capítulo es presentar la transformación campo próximo campo lejano con corrección de sonda en coordenadas cilíndricas con una formulación matemática homogénea con los desarrollos de capítulos anteriores. Además de la formulación original de Leach [Leach,1973], basada en la resolución de la integral de Lorentz expresando los campos como ondas cilíndricas, existen formulaciones basadas en la matriz de dispersión [Yaghjian,1977], y en el desarrollo de los campos como ondas planas [Borgiotti,1978]. La formulación de Yaghjian es equivalente a la de Leach [Appel-Hansen,1980], mientras que la de Borgiotti es directamente derivable de la de Leach bajo ciertas restricciones [Leach,1979]. Esta última es de gran utilidad ya que muestra de una forma con sentido físico el efecto de la corrección de sonda, es por ello que se deriva su expresión y se analizarán los márgenes de validez de la misma. Finalmente se presenta la transformación como un proceso de síntesis de ondas planas. Este punto de vista es útil en el análisis de los errores en el proceso de transformación.

4.2 Formulación matemática.

Para la obtención de la transformación se seguirá básicamente el desarrollo de Leach, basado en la obtención de los coeficientes modales cilíndricos de la Antena Bajo Prueba (ABP), y en la posterior aplicación de los valores asintóticos de los campos para obtener el diagrama de radiación. Considérese la situación de la figura 4-1. El sistema de coordenadas de referencia es el sistema sin primar y su eje 'z' es el eje del cilindro de medida. Las dimensiones de la ABP son tales que queda contenida en un cilindro de radio 'a'. Nótese que para la medida no es necesario que la ABP se encuentre centrada, ni eléctrica ni mecánicamente, en el sistema de coordenadas de medida, es decir, no es necesario que el centro de fase de la antena o su centro geométrico coincida con en origen de coordenadas.

En la posición ρ_0, ϕ_0, z_0 se encuentra la sonda de medida contenida en el volumen v' . Al aplicar una tensión en bornas de la sonda aparece en la superficie que define v' una distribución de corriente eléctrica \vec{J}_{eq} . El hecho de caracterizar la sonda exclusivamente en términos de corrientes eléctricas no supone una restricción en tanto

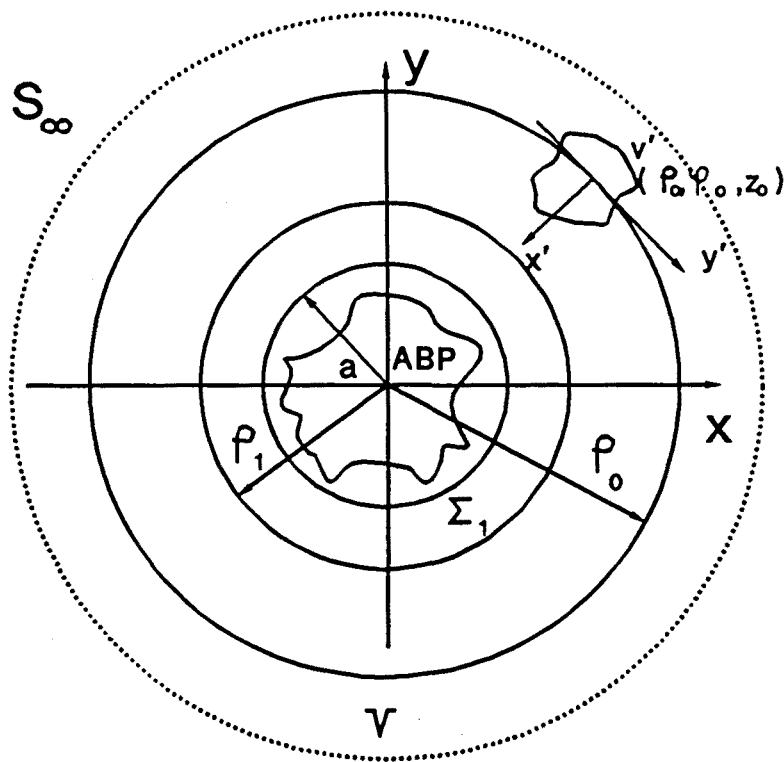


Figura 4-1 Geometría de medida para la transformación campo próximo campo lejano en coordenadas cilíndricas con corrección de sonda.

que las corrientes magnéticas sólo tienen sentido como fuentes equivalentes, y toda situación derivada de la aplicación del teorema de equivalencia puede expresarse en términos de corrientes eléctricas solamente.

El volumen V se encuentra definido por el cilindro Σ_1 de radio ρ_1 y la superficie del infinito S_∞ . Este volumen contiene en su interior la sonda de medida. Para formular la transformación se aplica al volumen V el teorema de Lorentz. Este planteamiento difiere ligeramente del realizado por Leach en que el teorema de Lorentz se aplica sobre un volumen libre de fuentes, mientras que en este caso V contiene la sonda de medida. Obviamente ambos planteamientos son equivalentes y conducen a los mismos resultados, sin embargo la formulación de Leach responde a un planteamiento más particular, aunque realista del problema en que la sonda de medida es una antena de apertura, en particular una boca de guía.

Al aplicar un generador a la sonda de medida se producirán en el volumen V los campos \vec{E}_s y \vec{H}_s radiados por la sonda y \vec{E}_{ad} y \vec{H}_{ad} difractados por la ABP. Al aplicar un generador en la ABP aparecen en el volumen V los campos radiados por la antena \vec{E}_a y \vec{H}_a y los campos difractados por la sonda \vec{E}_{sd} y \vec{H}_{sd} . Nótese que se está suponiendo

que no existen interacciones de segundo orden entre la sonda y la APB. Se aplica a continuación el teorema de reciprocidad de Lorentz en su forma integral en el volumen V [Balanis, 1989; pp. 325] obteniéndose

$$\begin{aligned}
 & - \int \int_{\Sigma_1, \Sigma_2} [(\vec{E}_s + \vec{E}_{as}) \times (\vec{H}_a + \vec{H}_{as}) - (\vec{E}_a + \vec{E}_{as}) \times (\vec{H}_s + \vec{H}_{as})] d\vec{S} = \quad (4-1) \\
 & - \int \int \int_V [\vec{E}_a + \vec{E}_{as}] \vec{J}_{sq} dv
 \end{aligned}$$

El término de la derecha de la integral es el término de reacción entre la ABP y la sonda suponiendo que $\vec{E}_{as} \ll \vec{E}_a$ puede escribirse

$$- \int \int \int_V [\vec{E}_a + \vec{E}_{as}] \vec{J}_{sq} dv = - \int \int \int_V \vec{E}_a \vec{J}_{sq} dv = -v_{ca}(\rho_0, \phi_0, z_0) \quad (4-2)$$

Donde v_{ca} es la tensión en circuito abierto en la sonda, y se ha supuesto que la corriente a la entrada de la sonda es 1.

En cuanto al término de la izquierda de la ecuación 4-1, la contribución a la integral de la superficie del infinito es nula ya que en este caso se trata de una integral de campos radiados. Por lo que puede escribirse la ecuación 4-1 como

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{\Sigma_1} [(\vec{E}_a \times \vec{H}_s - \vec{E}_s \times \vec{H}_a) + (\vec{E}_a \times \vec{H}_{as} - \vec{E}_{as} \times \vec{H}_a) + \quad (4-3) \\
 & + (\vec{E}_{as} \times \vec{H}_s - \vec{E}_s \times \vec{H}_{as}) + (\vec{E}_{as} \times \vec{H}_{as} - \vec{E}_{as} \times \vec{H}_{as})] d\vec{S} = -v_{ca}(\rho_0, \phi_0, z_0)
 \end{aligned}$$

Aparece en este caso una integral con cuatro términos claramente diferenciados. El último término se desprecia en tanto que contiene exclusivamente las componentes difractadas de los campos, por lo que es una aproximación razonable suponer que su contribución a la integral es de segundo orden respecto a los demás términos. La realización de esta hipótesis es necesaria para la resolución del problema. En cuanto al segundo y tercer término de la integral debe notarse que relacionan exclusivamente los campos producidos por la ABP y la sonda respectivamente, por lo que pueden evaluarse equivalentemente en la situación indicada en la figura 4-2-a y 4-2-b respectivamente. Esta situación equivalente resulta de omitir respecto a la situación de la figura 4-1 las fuentes que no intervienen en la integral. La integral del segundo término es nula ya que el volumen V está libre de fuentes (figura 4-2-a), conclusión que resulta de aplicar el teorema de Lorentz. Análogamente la integral del tercer término es nula ya que en el interior del volumen definido por Σ_1 no existen fuentes. Por tanto la ecuación 4-1 puede escribirse como

$$\iint_{\Sigma_1} [(\vec{E}_a \times \vec{H}_s - \vec{E}_s \times \vec{H}_a)] d\vec{s} = -v_{ca}(\rho_0, \phi_0, z_0) \quad (4-4)$$

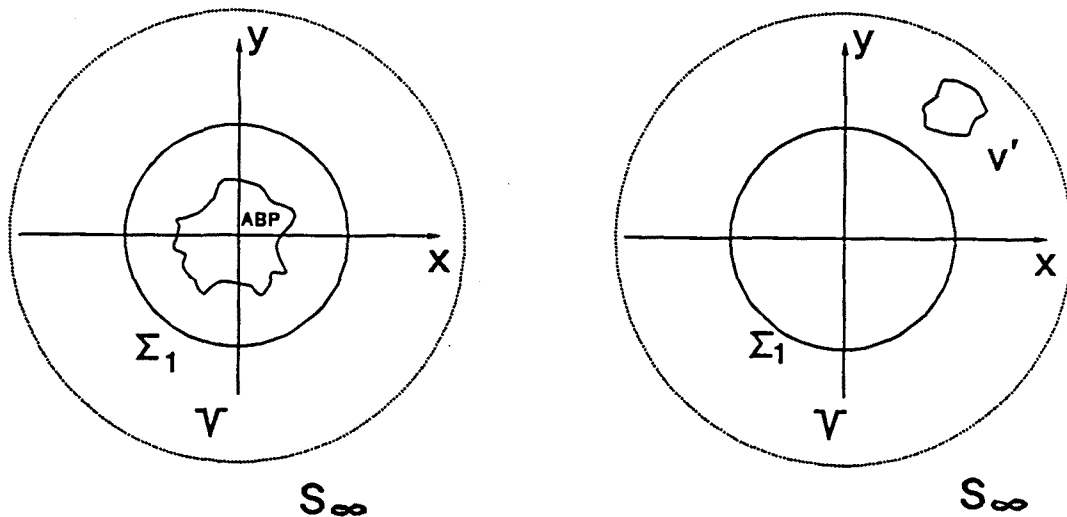


Figura 4-2 Situaciones equivalentes para la evaluación de la integral 4-3.

Es importante destacar la naturaleza de las aproximaciones realizadas para llegar a la expresión 4-4. La perturbación de los campos producidos por el sistema de medida (campos difractados) no se han omitido completamente, sino que tan solo se han realizado las siguientes hipótesis:

- a) No existen dobles interacciones entre la sonda y la antena.
- b) Los campos difractados por la sonda son despreciables frente los campos producidos por la antena sobre el volumen de la sonda.
- c) Se desprecian los productos entre campos difractados frente a otros términos.

Por tanto la formulación reproduce una situación bastante genérica de medida, en que la interacción entre la sonda y ABP se mantenga a niveles reducidos.

La ecuación 4-4 supone que la sonda está en recepción, para el caso de antenas recíprocas, evidentemente la formulación es independiente de cuál es la antena receptora y transmisora. El objetivo de la transformación es resolver la integral 4-4 de forma que

los coeficientes cilíndricos de la ABP queden expresados en función de la tensión a la salida de la sonda. Para ello se expresan los campos producidos por la antena y la sonda como suma de ondas cilíndricas (2-129 a 2-132)

$$\vec{E}_a(\rho, \phi, z) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_n(k_z) \vec{M}_n(k_z) + b_n(k_z) \vec{N}_n(k_z)] dk_z \quad (4-5)$$

$$\vec{H}_a(\rho, \phi, z) = \frac{-j}{\eta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_n(k_z) \vec{N}_n(k_z) + b_n(k_z) \vec{M}_n(k_z)] dk_z$$

$$\vec{E}_s(\rho', \phi', z') = - \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} [c_m(k_z') \vec{M}'_m(k_z') + d_m(k_z') \vec{N}'_m(k_z')] dk_z'$$

$$\vec{H}_s(\rho', \phi', z') = \frac{-j}{\eta} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} [c_m(k_z') \vec{N}'_m(k_z') + d_m(k_z') \vec{M}'_m(k_z')] dk_z'$$

donde las primas se refieren al sistema de coordenadas de la sonda. Los vectores de onda cilíndricos \vec{M}_n y \vec{N}_n son

$$\begin{aligned} \vec{M}_n(k_z) &= \left[\hat{\rho} \frac{jn}{\rho} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cdot) \right] H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} \\ \vec{N}_n(k_z) &= \left[\hat{\rho} \frac{-jk_z}{k} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cdot) + \hat{\phi} \frac{nk_z}{k\rho} + \hat{z} \frac{k_\rho^2}{k} \right] H_n^{(2)}(k_\rho \rho) e^{jn\phi} e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (4-6)$$

Para evaluar la integral 4-4 es necesario referir todos los campos a mismo sistema de coordenadas, para ello es necesario que los vectores de onda \vec{M}'_m y \vec{N}'_m que forman los campos de la sonda se expresen respecto al sistema de coordenadas de referencia. Para ello emplearemos el teorema de Graf de adición de las funciones de Hankel [Abramowitz, 1972].

La figura 4-3 representa esquemáticamente la situación de medida. La solución de la ecuación escalar de onda para el sistema de ejes primado es

$$\Psi_{m, k_z'}(\rho', \phi', z') = H_m^{(2)}(k_\rho' \rho') e^{jm\phi'} e^{-jk_z' z'} \quad (4-7)$$

considerando que $z' = z - z_0$ y el teorema de Graf

$$H_m^{(2)}(k_\rho' \rho') e^{jm\phi'} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{m-l}^{(2)}(k_\rho' \rho_0) J_l(k_\rho' \rho) e^{jl(\phi_0 - \phi)} \quad (4-8)$$

se puede escribir la solución a la ecuación escalar de onda 4-7 referida al sistema de coordenadas sin primar como

$$\Psi_{m, k_z'}(\rho, \phi, z) = e^{jk_z'(z_0-z)} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H_{m+l}^{(2)}(k_\rho, \rho_0) J_l(k_\rho, \rho) e^{jl(\phi_0-\phi)} \quad (4-9)$$

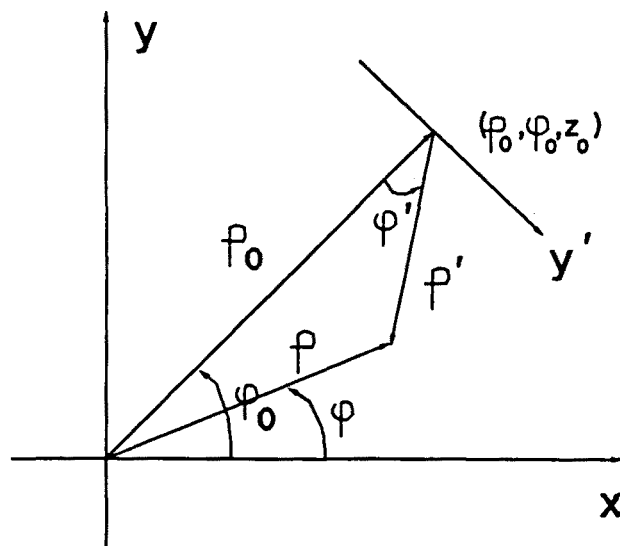


Figura 4-3 Sistemas de coordenadas en la medida.

Hallar los vectores de onda \vec{M}'_m y \vec{N}'_m es inmediato empleando la definición 2-36

$$\vec{M}'_m(k_z') = \nabla \times \hat{z} \Psi_{m, k_z'}(r, \phi, z) \quad (4-10)$$

$$\vec{N}'_m(k_z') = \frac{1}{k} \nabla \times \vec{M}'_m(k_z')$$

con lo que

$$\begin{aligned} \vec{M}'_m(k_z') &= e^{jk_z'(z_0-z)} \sum_l \left[-\hat{\rho} \frac{jl}{\rho} - \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cdot) \right] \cdot \\ &\cdot H_{m+l}^{(2)}(k_\rho, \rho_0) e^{jl(\phi_0-\phi)} J_l(k_\rho, \rho) \\ \vec{N}'_m(k_z') &= e^{jk_z'(z_0-z)} \sum_l \left[\hat{\rho} \frac{-jk_z'}{k} \frac{\partial}{\partial \rho} (\cdot) - \hat{\phi} \frac{lk_z'}{k\rho} + \hat{z} \frac{k_\rho'^2}{k} \right] \cdot \\ &\cdot H_{m+l}^{(2)}(k_\rho, \rho_0) e^{jl(\phi_0-\phi)} J_l(k_\rho, \rho) \end{aligned} \quad (4-11)$$

Una vez se han expresado los campos producidos por la sonda y la ABP en función de sus coeficientes modales cilíndricos se puede expresar la integral 4-4 substituyendo los campos por las expresiones 4-5 con los vectores de onda cilíndricos dados por 4-6 y 4-11.

$$\begin{aligned}
 & -v_{ca}(\rho_0, \phi_0, z_0) = \quad (4-12) \\
 & = \frac{j}{\eta} \sum_m \sum_n \int \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{\Sigma_1} (\alpha_n c_m + b_n d_m) [\bar{M}_n \times \bar{N}'_m + \bar{N}_n \times \bar{M}'_m] + \right. \\
 & \left. + (\alpha_n d_m + b_n c_m) [\bar{M}_n \times \bar{M}'_m + \bar{N}_n \times \bar{N}'_m] d\bar{S} \right] dk_z dk_z'
 \end{aligned}$$

Expresión donde aparecen integrales de superficie de los productos vectoriales de los distintos vectores de onda. El valor de cada integral es

$$\int \int_{\Sigma_1} (\bar{M}_n \times \bar{M}'_m) d\bar{S} = - \int \int_{\Sigma_1} (\bar{M}_n \times \bar{M}'_m) \cdot \hat{\rho} dS = 0 \quad (4-13)$$

ya que ni \bar{M}_n ni \bar{M}'_m tienen componente \hat{z} por lo que su producto vectorial es ortogonal a $d\bar{S}$. En cuanto a la integral de las funciones de onda \bar{N}_n y \bar{N}'_m se tiene

$$\begin{aligned}
 & \int \int_{\Sigma_1} (\bar{N}_n \times \bar{N}'_m) d\bar{S} = \int \int_{\Sigma_1} \bar{N}_n \cdot (\hat{\rho} \times \bar{N}'_m) dS = \quad (4-14) \\
 & = \sum_l \left[-\frac{lk_z' k_\rho^2}{k^2 \rho_1} - \frac{nk_z k_\rho'^2}{k^2 \rho_1} \right] H_{m-l}^{(2)}(k_\rho' \rho_0) J_l(k_\rho' \rho_1) e^{il\phi_0} e^{ik_z' z_0} \rho_1 \cdot \\
 & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-j(l-n)\phi} e^{-j(k_z + k_z')z} d\phi dz = 0
 \end{aligned}$$

ya que las integrales respecto ϕ y z son cero excepto en el caso en que $l=n$ y $k_z = -k_z'$, pero en este caso

$$\left[-\frac{lk_z' k_\rho^2}{k^2 \rho_1} - \frac{nk_z k_\rho'^2}{k^2 \rho_1} \right]_{l=n, k_z = -k_z'} = 0 \quad (4-15)$$

Para el resto de términos en la integral se tiene que

$$\begin{aligned}
\int \int_{\Sigma_1} (\overline{M}_n \times \overline{N}'_m) d\overline{S} &= - \int \int_{\Sigma_1} \overline{N}'_m \cdot (\hat{\rho} \times \overline{M}'_m) dS = \\
&= \rho_1 \frac{k_p'^2}{k} \sum_l H_{m-l}^{(2)}(k_p', \rho_0) e^{jl\phi_0} e^{jk_z'z_0} J_l(k_p', \rho_1) \cdot \\
&\cdot \left[\frac{\partial}{\partial \rho} H_n^{(2)}(k_p, \rho) \right]_{\rho=\rho_1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-j(l-n)\phi} e^{-j(k_z+k_z')z} d\phi dz
\end{aligned} \tag{4-16}$$

de forma parecida al caso anterior se tiene que las integrales respecto a ϕ y z toman los valores $2\pi\delta_{n,l}$ y $2\pi\delta(k_z+k_z')$ con lo que finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \int_{\Sigma_1} (\overline{M}_n \times \overline{N}'_m) d\overline{S} &= \\
&= 4\pi^2 \rho_1 \frac{k_p'^2 k_p}{k} H_{m+n}^{(2)}(k_p', \rho_0) e^{jn\phi_0} e^{jk_z'z_0} \cdot \\
&\cdot J_n(k_p', \rho_1) H_n^{(2)'}(k_p, \rho_1) \delta(k_z+k_z')
\end{aligned} \tag{4-17}$$

con

$$k_p H_n^{(2)'}(k_p, \rho_1) = \left[\frac{\partial}{\partial \rho} H_n^{(2)}(k_p, \rho) \right]_{\rho=\rho_1} \tag{4-18}$$

De forma análoga se obtiene para el término de la integral que queda por evaluar

$$\begin{aligned}
\int \int_{\Sigma_1} (\overline{N}_n \times \overline{M}'_m) d\overline{S} &= \\
&= -4\pi^2 \rho_1 \frac{k_p^2 k_p'}{k} H_{m+n}^{(2)}(k_p', \rho_0) e^{jn\phi_0} e^{jk_z'z_0} \cdot \\
&\cdot J_n'(k_p', \rho_1) H_n^{(2)}(k_p, \rho_1) \delta(k_z+k_z')
\end{aligned} \tag{4-19}$$

Una vez conocido el valor de la integral de superficie de todos los términos incluidos en la integral 4-12, podemos substituir y realizar la integral respecto k_z' obteniéndose para la tensión en circuito abierto en bornes de la sonda

$$\begin{aligned}
v_{ca}(\rho_0, \phi_0, z_0) &= \\
&= -\frac{j}{\eta} 4\pi^2 \rho_1 \sum_m \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_n(k_z) c_m(-k_z) + b_n(k_z) d_m(-k_z)) k_p^3 H_{m+n}^{(2)}(k_p, \rho_0) \cdot \\
&\cdot e^{jn\phi_0} e^{-jk_z'z_0} [J_n(k_p, \rho_1) H_n^{(2)'}(k_p, \rho_1) - J_n'(k_p, \rho_1) H_n^{(2)}(k_p, \rho_1)] dk_z
\end{aligned} \tag{4-20}$$

expresión que puede simplificarse empleando el wronskiano de las funciones de Bessel

$$J_n(k_p \rho_1) H_n^{(2)'}(k_p \rho_1) - J_n'(k_p \rho_1) H_n^{(2)}(k_p \rho_1) = \frac{2}{j\pi k_p \rho_1} \quad (4-21)$$

obteniéndose una expresión independiente de ρ_1

$$v_{ca}(\rho_0, \phi_0, z_0) = -\frac{8\pi}{k\eta} \sum_n e^{jn\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} k_p^2 (\alpha_n(k_z) \alpha_n^p(-k_z) + b_n(k_z) b_n^p(-k_z)) e^{-jk_z z_0} dk_z \quad (4-22)$$

donde se ha definido

$$\alpha_n^p(-k_z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_p \rho_0) \quad (4-23)$$

$$b_n^p(-k_z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_p \rho_0)$$

La expresión 4-22 proporciona la tensión en bornes de la sonda en la posición ρ_0, ϕ_0, z_0 en función exclusivamente de los coeficientes cilíndricos de la antena y de la sonda, si bien los coeficientes de la sonda intervienen a través de las expresiones 4-23. Si definimos a continuación

$$\bar{v}_{ca}(\rho = \rho_0; n, k_z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v_{ca}(\rho = \rho_0, \phi, z) e^{-jn\phi} e^{jk_z z} d\phi dk_z \quad (4-24)$$

esto es, la transformada de Fourier de la medida a lo largo del cilindro, es posible transformar la ecuación 4-22, de forma que

$$\bar{v}_{ca}(n, k_z) = -\frac{16\pi^2}{k\eta} k_p^2 (\alpha_n(k_z) \alpha_n^p(-k_z) + b_n(k_z) b_n^p(-k_z)) \quad (4-25)$$

Expresión que relaciona de forma simple la transformada de Fourier de la medida con los coeficientes modales cilíndricos de la antena. Conocidos los coeficientes de la sonda, esta ecuación presenta dos incógnitas que son precisamente los coeficientes de la ABP. Para determinarlos es necesario realizar otra medida con una sonda diferente de modo que se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1(n, k_z) \\ \bar{v}_2(n, k_z) \end{bmatrix} = -\frac{16\pi^2 k_p^2}{k\eta} \begin{bmatrix} \alpha_n^{(1)}(-k_z) & b_n^{(1)}(-k_z) \\ \alpha_n^{(2)}(-k_z) & b_n^{(2)}(-k_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n(k_z) \\ b_n(k_z) \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

de forma que

$$\alpha_n(k_z) = -\frac{k\eta}{16\pi^2 k_p^2} \frac{[\bar{v}_1(n, k_z)b_n^{(2)}(-k_z) - \bar{v}_2(n, k_z)b_n^{(1)}(-k_z)]}{\Delta(n, k_z)} \quad (4-27)$$

$$b_n(k_z) = -\frac{k\eta}{16\pi^2 k_p^2} \frac{[\bar{v}_2(n, k_z)\alpha_n^{(1)}(-k_z) - \bar{v}_1(n, k_z)\alpha_n^{(2)}(-k_z)]}{\Delta(n, k_z)}$$

con

$$\Delta(n, k_z) = \alpha_n^{(1)}(-k_z)b_n^{(2)}(-k_z) - \alpha_n^{(2)}(-k_z)b_n^{(1)}(-k_z) \quad (4-28)$$

y

$$\alpha_n^{(1),(2)}(-k_z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^{(1),(2)}(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_p \rho_0) \quad (4-29)$$

$$b_n^{(1),(2)}(-k_z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m^{(1),(2)}(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_p \rho_0)$$

donde \bar{v}_1 y \bar{v}_2 son las transformadas definidas según 4-24 de las tensiones en bornes de sendas sondas con coeficientes $c_m^{(1)}$, $d_m^{(1)}$ y $c_m^{(2)}$, $d_m^{(2)}$ respectivamente. Una vez determinados los coeficientes modales de la ABP por 4-27 se obtiene el campo lejano empleando las expresiones asintóticas dadas por 2-156 y 2-157.

Nótese que desde un punto de vista teórico las restricciones sobre las sondas de medida son muy genéricas. De hecho sólo es necesario que el determinante $\Delta(n, k_z)$ sea distinto de cero para todo n y k_z para que el sistema de ecuaciones 4-26 tenga solución. Esta condición se cumplirá siempre y cuando las dos sondas sean distintas. Nótese que las sondas pueden presentar nulos en elevación, esto es, los coeficientes puede ser nulos para ciertos k_z , siempre y cuando la posición de estos no coincida para las dos sondas. En la práctica es interesante que cada una de las sondas responda principalmente a una polarización distinta, ya que si bien idealmente el proceso de corrección del algoritmo es capaz de obtener los coeficientes de la ABP como si se hubiesen medido con una sonda ideal, en la realidad cualquier error en la caracterización de la sonda, el ruido en la medida, o los errores de posicionamiento limitarán esta capacidad. Es por este motivo que en la práctica se desea tener unos datos de medida que respondan principalmente a cada una de las polarizaciones. Esto es fácilmente conseguible empleando como sonda de medida una boca de guía que es rotada 90° alrededor de su eje para realizar cada una de las medidas.

4.3 Transformación con sonda ideal.

Las expresiones generales obtenidas en el apartado anterior tienen que coincidir con la encontradas en el apartado 3.2.2 en el caso que la sonda de medida sea una sonda ideal. Este hecho se comprueba empleando en las expresiones 4-27 los coeficientes de la sonda de campo eléctrico ideal.

Las características de una sonda ideal se han mencionado anteriormente. Una sonda ideal para medir E_z debe tener una distribución de corrientes en transmisión dada por

$$\vec{J} = -\hat{z}\delta(x')\delta(y')\delta(z') = -\frac{1}{2\pi\rho'}\delta(z')\delta(\rho')\hat{z} \quad (4-30)$$

en este caso la tensión en bornas de la misma es E_z . Empleando las expresiones 2-200 es inmediato que para este caso los coeficientes modales cilíndricos son

$$c_n^{(1)} = 0 \quad (4-31)$$

$$a_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{\eta}{8\pi} & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases}$$

Para obtener el campo según ϕ se emplea una sonda con distribución de corriente dada por

$$\vec{J} = \hat{y}\delta(x')\delta(y')\delta(z') \quad (4-32)$$

para evitar los problemas de indefinición del vector $\hat{\phi}$ en el origen de coordenadas, la obtención de los coeficientes se realiza en coordenadas cartesianas empleando la formulación para el caso plano y mediante las relaciones de paso se obtienen los coeficientes modales cilíndricos. El espectro angular de ondas planas es en este caso

$$\vec{A}_E = \eta\vec{X}_1\vec{B}_J \quad (4-33)$$

con

$$\vec{B}_J = \hat{y} \quad (4-34)$$

y el tensor \bar{X}_1 dado en (3-32). El espectro angular de ondas planas en componentes esféricas es

$$A_\theta = -\frac{\eta \cos \theta \sin \phi}{2 \sin \theta \cos \phi} \quad (4-35)$$

$$A_\phi = -\frac{\eta}{2 \sin \theta}$$

empleando las fórmulas de transformación (2-192 y 2-193) se obtienen las expresiones de los coeficientes cilíndricos

$$c_n^{(2)} = -\frac{\eta}{16\pi^2} \frac{j^{-(n+1)}}{\sin \theta} \int_0^{2\pi} \cos \phi e^{-jn\phi} d\phi \quad (4-36)$$

$$d_n^{(2)} = \frac{\eta}{16\pi^2} j^{-n} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \int_0^{2\pi} \sin \phi e^{-jn\phi} d\phi$$

Finalmente los coeficientes cilíndricos para la sonda de E_ϕ son

$$c_n^{(2)} = \begin{cases} n \frac{\eta}{16\pi} \frac{1}{\sin \theta} = n \frac{\eta}{16\pi} \frac{k}{k_\rho} & ; |n| = 1 \\ 0 & ; |n| \neq 1 \end{cases} \quad (4-37)$$

$$d_n^{(2)} = \begin{cases} -\frac{\eta \cos \theta}{16\pi \sin \theta} = -\frac{\eta}{16\pi} \frac{k_z}{k_\rho} & ; |n| = 1 \\ 0 & ; |n| \neq 1 \end{cases}$$

Una vez conocidos los coeficientes modales de las sondas ideales es necesario obtener los coeficientes definidos en 4-27

$$\alpha_n^{(1)}(-k_z) = \sum_m c_m^{(1)}(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_\rho \rho_0) = 0 \quad (4-38)$$

$$b_n^{(1)}(-k_z) = \sum_m d_m^{(1)}(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_\rho \rho_0) = \frac{\eta}{8\pi} H_n^{(2)}(k_\rho \rho_0) \quad (4-39)$$

$$\alpha_n^{(2)}(-k_z) = \sum_m c_m^{(2)}(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_\rho \rho_0) = \quad (4-40)$$

$$= \frac{\eta}{16\pi} \frac{k}{k_\rho} [-H_{n-1}^{(2)}(k_\rho \rho_0) + H_{n+1}^{(2)}(k_\rho \rho_0)]$$

$$\begin{aligned}
 b_n^{(2)}(-k_z) &= \sum_m d_m^{(2)}(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_\rho \rho_0) = \\
 &= \frac{\eta}{16\pi} \frac{k_z}{k_\rho} [H_{n-1}^{(2)}(k_\rho \rho_0) + H_{n+1}^{(2)}(k_\rho \rho_0)]
 \end{aligned} \tag{4-41}$$

Las expresiones 4-40 y 4-41 pueden escribirse en forma más compacta haciendo uso de las siguientes propiedades de derivación de las funciones de Hankel

$$k_\rho H_n^{(2)\prime}(k_\rho \rho) = k_\rho H_{n-1}^{(2)}(k_\rho \rho) - \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(k_\rho \rho) \tag{4-42}$$

$$k_\rho H_n^{(2)\prime}(k_\rho \rho) = -k_\rho H_{n+1}^{(2)}(k_\rho \rho) + \frac{n}{\rho} H_n^{(2)}(k_\rho \rho)$$

sumando y restando ambas expresiones se obtiene

$$2H_n^{(2)\prime}(k_\rho \rho) = H_{n-1}^{(2)}(k_\rho \rho) - H_{n+1}^{(2)}(k_\rho \rho) \tag{4-43}$$

$$\frac{2n}{k_\rho \rho} H_n^{(2)}(k_\rho \rho) = H_{n-1}^{(2)}(k_\rho \rho) + H_{n+1}^{(2)}(k_\rho \rho)$$

Aplicando estas igualdades se simplifican las expresiones 4-40 y 4-41 con el resultado final de

$$\alpha_n^{(2)}(-k_z) = -\frac{\eta}{8\pi} \frac{k}{k_\rho} H_n^{(2)\prime}(k_\rho \rho_0) \tag{4-44}$$

$$b_n^{(2)}(-k_z) = \frac{\eta}{8\pi} \frac{k_z}{k_\rho^2 \rho_0} H_n^{(2)}(k_\rho \rho_0) \tag{4-45}$$

Dado que la sonda 1 es la sonda para la componente z y la sonda 2 es la sonda para la componente ϕ del campo se tiene que

$$\tilde{v}_1(n, k_z) = \tilde{E}_z(\rho = \rho_0; n, k_z) \tag{4-46}$$

$$\tilde{v}_2(n, k_z) = \tilde{E}_\phi(\rho = \rho_0; n, k_z)$$

Una vez determinados todos los coeficientes se obtienen los coeficientes cilíndricos de la antena bajo prueba al aplicar la expresión 4-27, de modo que

$$\alpha_n(k_z) = -\frac{k\eta}{16\pi^2 k_\rho^2 \alpha_n^{(2)}} \left[\tilde{E}_\phi - \tilde{E}_z \frac{b_n^{(2)}}{b_n^{(1)}} \right] = \quad (4-47)$$

$$= \frac{1}{2\pi k_\rho H_n^{(2)'}(k_\rho \rho_0)} \left[\tilde{E}_\phi - \frac{k_z \rho}{k_\rho^2 \rho_0} \tilde{E}_z \right]$$

$$b_n(k_z) = -\frac{k\eta}{16\pi^2 k_\rho^2 b_n^{(1)}} \tilde{E}_z = -\frac{k}{2\pi k_\rho^2 H_n^{(2)}(k_\rho \rho_0)} \tilde{E}_z \quad (4-48)$$

expresiones idénticas a 3-12.

4.4 Expresiones asintóticas.

En las expresiones derivadas en la sección 4.3 para la transformación con corrección de sonda, los coeficientes modales de la sonda de medida intervienen en la transformación en expresiones de la forma:

$$\alpha_n(-k_z) = \sum_m \gamma_m(-k_z) H_{m+n}^{(2)}(k_\rho \rho_0) \quad (4-49)$$

donde $\gamma_m(-k_z)$ representa cualquiera de los coeficientes de la sonda. El significado de la corrección de la sonda sobre la medida aparece enmascarado por la dificultad de otorgar un significado físico a la expresión 4-49. Además la intervención de las funciones de Hankel añade dificultades en la implementación práctica del algoritmo.

El empleo de formulaciones asintóticas en la evaluación de 4-49 permite llegar a expresiones simples con claro significado físico. Estas expresiones son las mismas que las encontradas por Borgiotti [Borgiotti, 1978] a partir de la formulación de los campos de la ABP y la sonda como un espectro de ondas planas, y la realización de aproximaciones asintóticas.

La representación integral de las funciones de Hankel es [Stratton, 1941, pp.367]

$$H_n^{(2)}(x) = \frac{e^{-jn\frac{\pi}{2}}}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-j\infty}^{\frac{3\pi}{2}+j\infty} e^{jx \cos \phi + jn\phi} d\phi \quad (4-50)$$

La integración se realiza en el plano complejo sobre un camino que tienda a los límites de integración, de forma que la convergencia de la integral queda garantizada en el

infinito. El punto de cruce del camino de integración con el eje real es irrelevante [Sommerfeld, 1964]. Con el fin de tener límites de integración simétricos respecto al origen se realiza el siguiente cambio de coordenadas $\phi' = \phi - \pi$, con lo que se obtiene

$$H_n^{(2)}(x) = \frac{e^{jn\frac{\pi}{2}}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}-j\infty}^{\frac{\pi}{2}+j\infty} e^{-jx \cos \phi' + jn\phi'} d\phi' \quad (4-51)$$

de esta forma los coeficientes de corrección de sonda pueden escribirse como

$$\alpha_n(-k_z) = \sum_m \gamma_m(-k_z) \frac{j^{n+m}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}-j\infty}^{\frac{\pi}{2}+j\infty} e^{-jk_z \rho_0 \cos \phi + j(n+m)\phi} d\phi \quad (4-52)$$

donde por comodidad de notación se han suprimido las primas en la variable de integración. Intercambiando el orden de integración y sumación se obtiene

$$\alpha_n(-k_z) = \frac{1}{\pi} j^n \int_{-\frac{\pi}{2}-j\infty}^{\frac{\pi}{2}+j\infty} e^{-jk_z \rho_0 \cos \phi + jn\phi} \sum_m j^m \gamma_m(-k_z) e^{jm\phi} d\phi \quad (4-53)$$

De la observación de la expresión anterior y recordando las expresiones de los campos radiados a grandes distancias dadas por 2-156 y 2-157, se reconoce inmediatamente que el sumatorio no es más, salvo factores, que el diagrama de radiación de las sonda. De forma que

$$\gamma_m = c_m \quad (4-54)$$

$$\sum_m j^m \gamma_m(-k_z) e^{jm\phi} = -\frac{E_\phi^{(p)}(-k_z, \phi)}{2k \operatorname{sen} \theta}$$

y

$$\gamma_m = d_m \quad (4-55)$$

$$\sum_m j^m \gamma_m(-k_z) e^{jm\phi} = j \frac{E_\theta^{(p)}(-k_z, \phi)}{2k \operatorname{sen} \theta}$$

donde $E_\phi^{(p)}$ y $E_\theta^{(p)}$ son los diagramas de radiación de la sonda. La expresión de los coeficientes de corrección de la sonda se pueden escribir como

$$\alpha_n^{(\rho)}(-k_z) = -\frac{j^n}{\pi} \frac{1}{2k \operatorname{sen} \theta} \int_{-\frac{\pi}{2}-j^n}^{\frac{\pi}{2}+j^n} E_\phi^{(\rho)}(-k_z, \phi) e^{-jk_p \rho_0 \left[\cos \phi - \frac{n\phi}{k_p \rho_0} \right]} d\phi \quad (4-56)$$

$$b_n^{(\rho)}(-k_z) = j \frac{j^n}{\pi} \frac{1}{2k \operatorname{sen} \theta} \int_{-\frac{\pi}{2}-j^n}^{\frac{\pi}{2}+j^n} E_\theta^{(\rho)}(-k_z, \phi) e^{-jk_p \rho_0 \left[\cos \phi - \frac{n\phi}{k_p \rho_0} \right]} d\phi$$

Las integrales anteriores relacionan los coeficientes de corrección con los diagramas de radiación de la sonda de medida de forma exacta. Para valores $k_p \rho_0 \gg 1$ es posible evaluar la integrales de forma asintótica mediante el método del punto silla [Felsen, 1973, cap. 4]. Para ello escribimos las integrales como

$$I(k_p \rho_0) = \int_C f(\phi) e^{k_p \rho_0 q(\phi)} d\phi \quad (4-57)$$

con

$$q(\phi) = -j \left[\cos \phi - \frac{n\phi}{k_p \rho_0} \right] \quad (4-58)$$

El camino de integración C sólo está restringido en sus valores en el infinito, pudiéndose por tanto modificar a voluntad. Se define un punto estacionario de $q(\phi)$ como

$$\left. \frac{\partial q(\phi)}{\partial \phi} \right|_{\phi=\psi} = 0 \quad (4-59)$$

que para este caso son función de n

$$\psi_n = -\operatorname{arcsen} \left(\frac{n}{k_p \rho_0} \right) \quad (4-60)$$

dado que n está limitado por $|n| \leq k_p a$, con 'a' el radio del cilindro mínimo que contiene la ABP, se tiene que en cualquier caso $|n| < k_p \rho_0$, y por tanto ψ_n es real y comprendido entre $\pm \frac{\pi}{2}$. Dado que

$$q(\phi) = q(\gamma + j\eta) = \left[-\operatorname{sen} \gamma \sinh \eta + \frac{n\eta}{k_p \rho_0} \right] - j \left[\cos \gamma \cosh \eta + \frac{n\gamma}{k_p \rho_0} \right] \quad (4-61)$$

para un punto estacionario se tiene que

$$|e^{k_p \rho_0 q(\psi_n)}| = 1 \quad (4-62)$$

ya que la parte imaginaria de ψ_n es nula. Un punto estacionario no es ni un máximo ni un mínimo de la parte real o imaginaria de $q(\phi)$, sino que es un punto silla. Por tanto es posible definir un camino de integración que pase por ψ_n de forma que $Re[q(\psi_n)]$ sea máxima, mínima o constante a lo largo del camino. Si se elige un camino de integración en que $Re[q(\psi_n)]$ sea máximo y además la variación de $Re[q(\psi)]$ sea lo más rápida posible a lo largo del camino de integración, la contribución a la integral estará determinada por el valor de las funciones $f(\phi)$ y $q(\phi)$ en un entorno alrededor del punto silla, ya que fuera de este entorno el integrando tiende a cero. En este caso se puede substituir las funciones $f(\phi)$ y $q(\phi)$ por los primeros términos de su desarrollo en serie alrededor del punto silla. Nótese que cuanto mayor sea k, ρ_0 el integrando tenderá a cero más rápidamente y la aproximación será mejor. A través del teorema de Cauchy-Riemann es fácilmente demostrable que el camino de máxima pendiente (CMP) para la parte real de $q(\phi)$ se corresponde al camino de la parte imaginaria de $q(\phi)$ constante, y por tanto la fase de $e^{q(\phi)}$ será constante a lo largo del CMP. En este caso el CMP corta al eje real con un ángulo de 45° .

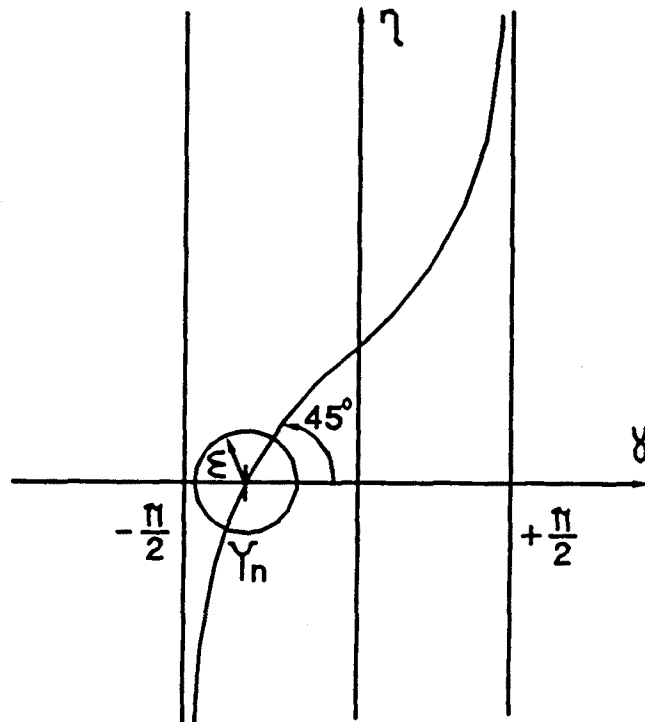


Figura 4-4 Camino de Máxima pendiente (CMP) para la evaluación asintótica de la integral 4-56.

Alrededor del punto silla se puede aproximar

$$q(\phi) = q(\psi_n) + \frac{1}{2}q''(\psi_n)(\phi - \psi_n)^2 \quad (4-63)$$

expresión que se corresponde a los tres primeros términos del desarrollo en serie ya que $q'(\psi_n) = 0$.

De esta forma

$$I(k_p, \rho_o) = e^{k_p \rho_o q(\psi_n)} \int_{\psi_n - \epsilon}^{\psi_n + \epsilon} f(\phi) e^{k_p \rho_o \frac{1}{2} q''(\psi_n) (\phi - \psi_n)^2} d\phi \quad (4-64)$$

donde $\pm \epsilon$ define una parte del CMP entorno al punto silla en que el integrando aporta su contribución principal a la integral. Si en este intervalo se cumple que

$$f'(\psi_n)(\phi - \psi_n) \ll f(\psi_n) \quad (4-65)$$

se aproxima

$$f(\phi) = f(\psi_n) \quad (4-66)$$

con lo que

$$I(k_p, \rho_o) = f(\psi_n) e^{k_p \rho_o q(\psi_n)} \int_{\psi_n - \epsilon}^{\psi_n + \epsilon} e^{k_p \rho_o \frac{1}{2} q''(\psi_n) (\phi - \psi_n)^2} d\phi \quad (4-67)$$

realizando los cambios de variable

$$-\frac{1}{2} k_p \rho_o q''(\psi_n) (\phi - \psi_n)^2 = \chi^2 \quad (4-68)$$

$$d\phi = \frac{1}{\sqrt{-k_p \rho_o q''(\psi_n)}} d\chi$$

$$\delta = \epsilon \sqrt{-k_p \rho_o q''(\psi_n)}$$

y dado que $q''(\psi_n) < 0$ y que por tanto si $k_p \rho_o \rightarrow \infty$ entonces $\delta \rightarrow \infty$ se tiene que

$$I(k_p, \rho_o) = \frac{f(\psi_n)}{\sqrt{-k_p \rho_o q''(\psi_n)}} e^{k_p \rho_o q(\psi_n)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \chi^2} d\chi \quad (4-69)$$

apareciendo una integral definida de valor conocido con lo que

$$I(k_p, \rho_o) = \sqrt{\frac{2\pi}{-k_p \rho_o q''(\psi_n)}} f(\psi_n) e^{k_p \rho_o q(\psi_n)} \quad (4-70)$$

finalmente se obtiene para el valor de la integral

$$I(k_p, \rho_o) = \sqrt{\frac{2\pi}{-k_p \rho_o q''(\psi_n)}} E_{\theta, \phi}^{(p)}(-k_z, \psi_n) e^{-k_p \rho_o \left[\cos \psi_n - \frac{n \psi_n}{k_p \rho_o} \right]} \quad (4-71)$$

con

$$\psi_n = -\arcsen\left(\frac{n}{k_p \rho_o}\right) \quad (4-72)$$

Las aproximaciones realizadas pueden representarse de forma gráfica (figura 4-5). El integrando es el producto de las dos funciones en el caso en que $k_p \rho_o \rightarrow \infty$ se tiene que $|\epsilon| \rightarrow 0$ con lo que $E_{\theta, \phi}^{(p)}$ puede aproximarse en el margen de integración por su valor en el punto silla. Para que esta aproximación pueda realizarse es necesario que se cumpla la condición expresada en la ecuación 4-72 y que puede reescribirse como

$$\frac{|E_{\theta, \phi}^{(p)'}(-k_z, \psi_n)|}{|E_{\theta, \phi}^{(p)}(-k_z, \psi_n)|} \ll \frac{1}{|\epsilon|} \quad (4-73)$$

donde el símbolo prima indica derivación respecto ϕ . El valor de ϵ debe ser tal que

$$|e^{k_p \rho_o \frac{1}{2} q''(\psi_n) (\epsilon)^2}| \rightarrow 0 \quad (4-74)$$

es decir

$$\frac{1}{2} k_p \rho_o \cos(\psi_n) \text{Im}(\epsilon^2) \gg 0 \quad (4-75)$$

Dado que en el punto silla el CMP forma un ángulo de 45° con el eje real se puede aproximar

$$\text{Im}(\epsilon^2) = |\epsilon|^2 \quad (4-76)$$

con lo que

$$\frac{1}{|\epsilon|} \ll \sqrt{\frac{1}{2} k_p \rho_o \cos \psi_n} \quad (4-77)$$

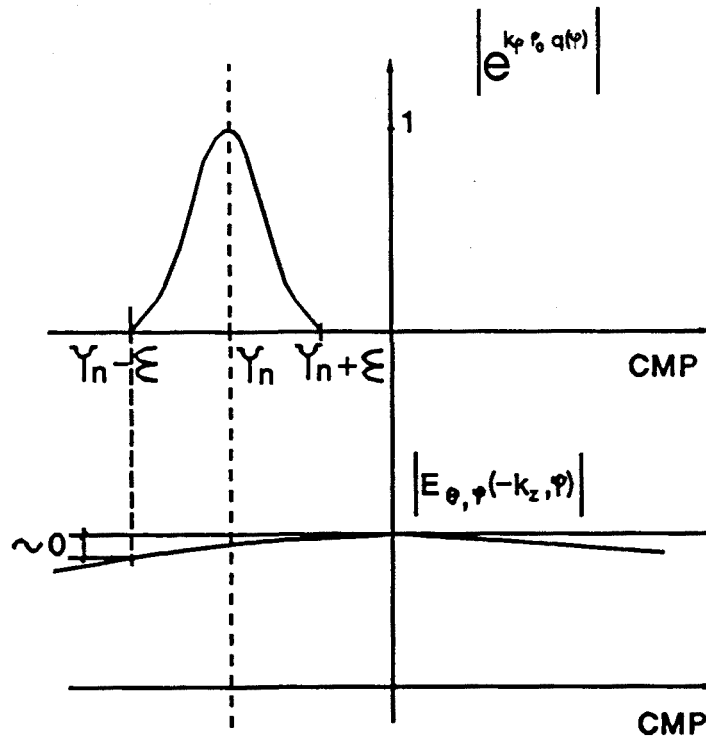


Figura 4-5 Aproximaciones realizadas en la integral del método del punto silla.

De este modo es posible reescribir la condición 4-73

$$\frac{|E_{\theta, \phi}^{(p)'}(-k_z, \psi_n)|}{|E_{\theta, \phi}^{(p)}(-k_z, \psi_n)|} \ll \sqrt{\frac{1}{2} k_p \rho_0 \cos \psi_n} \tag{4-78}$$

A partir de 4-72

$$\cos \psi_n = \sqrt{1 - \left[\frac{n}{k_p \rho_0} \right]^2} \tag{4-79}$$

dado que el valor máximo de n es ' $k_p a$ ', se obtiene que la condición que debe cumplir la medida es

$$\frac{|E_{\theta, \phi}^{(p)'}(-k_z, \psi_n)|}{|E_{\theta, \phi}^{(p)}(-k_z, \psi_n)|} \ll \sqrt{\frac{k_p}{2} [\rho_0^2 - a^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{4-80}$$

Esta condición impone condiciones más restrictivas que las halladas en la formulación general. Para que se cumpla es necesario que ninguna de las sondas presente nullos para ψ_n y k_z , esto es $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Es de destacar que para ángulos θ extremos $k_p \rightarrow 0$ por lo que la condición dejará de cumplirse. Así mismo aparecen

condiciones sobre el radio de medida en el sentido que cuanto mayor sea la variación del diagrama de la sonda respecto al ángulo, mayor debe ser el radio de medida. Es de destacar que esta condición es menos restrictiva que la encontrada en [Leach, 1979]. En el caso de medida de antenas directivas con sondas poco directivas la condición anterior se cumple generalmente por los siguientes motivos: los ángulos de interés son reducidos por tratarse de una antena directiva, además en este caso se tratará de una antena de dimensiones grandes en términos de la longitud de onda, y por tanto la distancia de medida también es grande por lo que la diferencia de distancias es en general un número apreciable de longitudes de onda. De este modo los coeficientes de corrección de la sonda pueden escribirse como

$$\alpha_n^{(p)}(-k_z) = -F(\psi_n) E_\phi^{(p)}(-k_z, \psi_n) \quad (4-81)$$

$$b_n^{(p)}(-k_z) = jF(\psi_n) E_\theta^{(p)}(-k_z, \psi_n)$$

con

$$F(\psi_n) = \frac{1}{2k \sin \theta} \sqrt{\frac{2\pi}{k_\rho \rho_0 \cos \psi_n}} e^{-j[k_\rho \rho_0 \cos \psi_n - n(\psi_n + \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{4}]} \quad (4-82)$$

Los coeficientes modales cilíndricos de la ABP quedan a partir de 4-27 como

$$\alpha_n(k_z) = \frac{k\eta}{16\pi^2 k_\rho^2 F(\psi_n)} \frac{1}{E_\phi^1 E_\theta^2 - E_\phi^2 E_\theta^1} \tilde{v}_1 E_\theta^2 - \tilde{v}_2 E_\theta^1 \quad (4-83)$$

$$b_n(k_z) = j \frac{k\eta}{16\pi^2 k_\rho^2 F(\psi_n)} \frac{1}{E_\phi^1 E_\theta^2 - E_\phi^2 E_\theta^1} \tilde{v}_2 E_\phi^1 - \tilde{v}_1 E_\phi^2$$

Expresiones en las que aparece de forma simple el diagrama de radiación de la sonda. Si suponemos que la sonda 1 está polarizada según ϕ y la sonda 2 según θ se pueden aproximar las expresiones anteriores por

$$\alpha_n(k_z) = \frac{k\eta}{16\pi^2 k_\rho^2 F(\psi_n)} \frac{1}{E_\phi^1} \tilde{v}_1 \quad (4-84)$$

$$b_n(k_z) = j \frac{k\eta}{16\pi^2 k_\rho^2 F(\psi_n)} \frac{1}{E_\theta^2} \tilde{v}_2$$

De este modo queda claramente mostrado el efecto de la corrección de sonda. En primer lugar existe una corrección de polarización para corregir la respuesta a la

polarización cruzada de la sonda. En segundo lugar se realiza un proceso de deconvolución para corregir el efecto del diagrama de la sonda. Esta deconvolución se realiza en el dominio espectral como una división.

4.5 Síntesis de onda plana.

Todo proceso de medida de diagramas de radiación de antenas en recepción se reduce a encontrar la respuesta de la antena al incidir sobre ésta una onda plana con una cierta dirección de propagación y polarización. Evidentemente para una antena recíproca el diagrama en transmisión y recepción son idénticos. Los distintos métodos de medida de antenas difieren en la forma de generar la onda plana incidente. En las medidas en campo lejano se aleja la sonda de medida para que la onda esférica radiada por ésta se asemeje localmente sobre la ABP a una onda plana. En un sistema compacto se hace uso de las propiedades geométricas de los reflectores para generar la onda plana. También es posible pensar en la obtención de la onda plana mediante un conjunto de sondas excitadas con pesos adecuados. Supóngase una agrupación de sondas distribuidas en un cilindro que rodea la antena a medir (figura 4-6), y $W(\phi', z'; k_{z0}, \phi_0)$ son los pesos que hay que dar a la sonda situada en ϕ' y z' para generar sobre la ABP una onda incidente de la forma

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 e^{j\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \quad (4-85)$$

$$\vec{k}_0 = -k \sin \theta_0 \cos \phi_0 \hat{x} - k \sin \theta_0 \sin \phi_0 \hat{y} - k \cos \theta_0 \hat{z}$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k}_0 = 0$$

$$k_{z0} = k \cos \theta_0$$

esto es, una onda plana con polarización \vec{E}_0 y propagándose hacia la ABP con una dirección dada por $k_{z0} = k \cos \theta_0$ y ϕ_0 . Variando los pesos es posible modificar la dirección de incidencia de la onda. La tensión en circuito abierto en la ABP es

$$v_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \int_{v'} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{E}_i dv' \quad (4-86)$$

donde $\vec{J}(\vec{r}')$ es la distribución de corrientes en la ABP al actuar como transmisora y con una corriente de entrada $I(0)$. Si el campo incidente es

$$\vec{E}_i = \frac{j\omega\mu}{4\pi} e^{j\vec{k}_0 \vec{r}} \hat{\theta}_0 \quad (4-87)$$

$$\hat{\theta}_0 = \cos\theta_0 \cos\phi_0 \hat{x} + \cos\theta_0 \sin\phi_0 \hat{y} - \sin\theta_0 \hat{z}$$

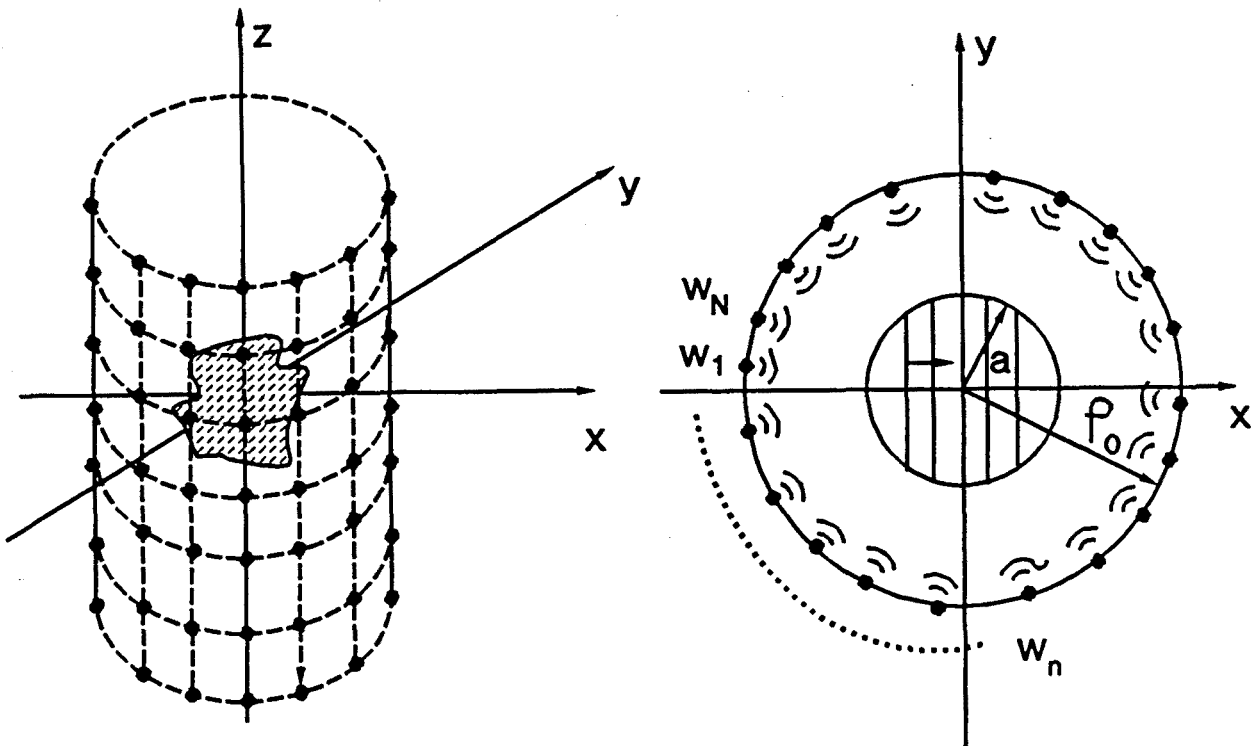


Figura 4-6 Síntesis de ondas planas mediante agrupaciones cilíndricas.

El vector $\hat{\theta}_0$ es un vector constante cuya dirección coincide con el vector unitario θ en la dirección \vec{k}_0 . En este caso la tensión en circuito abierto en la ABP es

$$v_{ca} = -\frac{1}{I(0)} \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{v'} J_{\theta_0}(\vec{r}') e^{j\vec{k}_0 \vec{r}'} dv' \quad (4-88)$$

si se compara esta expresión con la de los campos radiados por la ABP a grandes distancias dada por

$$\vec{E}^{rad}(r, \theta, \phi) = -\frac{j\omega\mu e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{v'} (J_{\theta} \hat{\theta} + J_{\phi} \hat{\phi}) e^{j\vec{k} \vec{r}'} dv' \quad (4-89)$$

se observa que la tensión en circuito abierto en la ABP dada por la ecuación 4-88 cuando incide una onda como 4-87 está directamente relacionada con la intensidad de campo que produce la ABP como transmisora en la dirección de incidencia de la onda plana, por

$$E_{\theta_0}^{rad}(\theta_0, \phi_0) = v_{ca} I(0) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (4-90)$$

de forma análoga si el campo incidente es

$$\vec{E}_i = \frac{j\omega\mu}{4\pi} e^{j\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \hat{\phi}_0 \quad (4-91)$$

$$\hat{\phi}_0 = -\sin\phi_0 \hat{x} + \cos\phi_0 \hat{y}$$

se obtiene que

$$E_{\phi_0}^{rad}(\theta_0, \phi_0) = v_{ca} I(0) \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (4-92)$$

De este modo los campos dados por 4-87 y 4-91 deben ser los campos generados por una agrupación de antenas para que la tensión en circuito abierto en bornas de la ABP sea la intensidad de campo que produciría esta antena con una intensidad de corriente a la entrada unitaria, en la dirección y con la polarización de la onda incidente.

La agrupación de antenas puede realizarse físicamente situando las sondas en el lugar adecuado y excitándolas con sus pesos correspondientes, o bien empleado una única sonda que se desplaza a cada una de las posiciones. En este caso la agrupación no existe físicamente y la respuesta de la ABP se obtiene de forma numérica. Se tiene la ventaja que se reduce el número de sondas, por otra parte la síntesis física de la onda plana permite, por ejemplo la medida de sección recta radar en campo próximo de forma directa. Hansen [Hansen, 1988, cap. 7] presenta la teoría general de síntesis de onda plana y su aplicación al caso esférico.

En el caso de emplear una sola sonda, que es el caso habitual en medida de antenas, $v_p(z', \phi')$ es la tensión en la ABP para una posición de la sonda z', ϕ' , y se supone que la sonda se excita con un peso unitario, la respuesta de la ABP al conjunto de la agrupación puede obtenerse como

$$v_{ca}(k_{z0}, \phi_0) = \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} w(z', \phi'; k_{z0}, \phi_0) v_p(z', \phi') d\phi' dz' \quad (4-93)$$

Evidentemente la transformación campo próximo campo lejano debe poder expresarse como un proceso de síntesis de onda plana. De hecho las expresiones derivadas en el apartado 4-2 pueden escribirse como

$$\begin{bmatrix} E_{\theta} (k_{z0}, \phi_0) \\ E_{\phi} (k_{z0}, \phi_0) \end{bmatrix} = \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(k_{z0}, \phi_0; \phi, z) \begin{bmatrix} v_1 (\phi, z) \\ v_2 (\phi, z) \end{bmatrix} d\phi dz \quad (4-94)$$

con

$$\overline{W} = \frac{\eta}{16\pi^3 \sin \theta_0} e^{jk_{z0}z} \sum_n^{k_{\rho_0} \rho_0} j^{n+1} \frac{1}{\Delta(n, k_{z0})} e^{jn(\phi_0 - \phi)} \begin{bmatrix} -\alpha_n^{(2)} & \alpha_n^{(1)} \\ -jb_n^{(2)} & jb_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad (4-95)$$

En este caso \overline{W} es una matriz que expresa el peso que debe darse a la sonda 1 y 2 para producir la onda polarizada según θ o ϕ . Al extender el sumatorio de la expresión 4-95 para todo n que cumpla que $|n| < k_{\rho_0} \rho_0$, implica que se está sintetizando la onda plana en todo el volumen interior al cilindro de medida. Si tan sólo interesa sintetizar la onda plana en un cilindro de radio 'a' menor que ρ_0 , el sumatorio debe realizarse para $|n| < k_{\rho_0} a$. Estos pesos son función del diagrama de radiación de la sonda. Para una sonda eléctrica ideal, se obtiene a partir de los coeficientes derivados en la sección 4.3

$$\overline{W} = \frac{1}{2\pi^2} e^{jk_{z0}z} \sum_{|n| > 0}^{k_{\rho_0} \rho_0} j^{n+1} e^{jn(\phi_0 - \phi)} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin \theta_0 H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho_0)} & 0 \\ -j \frac{k_{z0} n}{k_{\rho_0}^2 \rho_0 H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} \rho_0)} & j \frac{1}{H_n^{(2)'}(k_{\rho_0} \rho_0)} \end{bmatrix} \quad (4-96)$$

$$\text{con } k_{\rho_0}^2 + k_{z0}^2 = 1$$

En la expresión anterior se ha tomado como sonda 1 la vertical y la 2 como la horizontal. Se observa que para producir la onda polarizada verticalmente basta con corrientes verticales dadas por

$$\overline{J}(z, \phi) = -\frac{1}{2\pi^2} e^{jk_{z0}z} \sum_n j^{n+1} e^{jn(\phi_0 - \phi)} \frac{1}{\sin \theta_0 H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho_0)} \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} \hat{z} \quad (4-97)$$

mientras que para producir la onda polarizada según ϕ es necesario emplear corrientes horizontales y verticales dadas por

$$\vec{J}(z, \phi) = -\frac{1}{2\pi^2} e^{jk_{z0}z} \sum_n j^{n+1} e^{jn(\phi_0 - \phi)} \left[-j \frac{k_{z0}n}{k_{\rho_0}^2 \rho_0 H_n^{(2)*}(k_{\rho_0} \rho_0)} \hat{z} + \right. \\ \left. + j \frac{1}{H_n^{(2)*}(k_{\rho_0} \rho_0)} \hat{\phi} \right] \frac{\delta(\rho - \rho_0)}{\rho} \quad (4-98)$$

La aparición de los signos menos en las corrientes reflejan el hecho que en la definición de sondas ideales realizada en 4-30 y 4-32 las sondas tienen corrientes dirigidas en el sentido negativo de los ejes para que la tensión en circuito abierto en ellas sea la intensidad de campo.

Para comprobar que estas distribuciones de corrientes producen los campos deseados basta con aplicar las expresiones desarrolladas en la sección 2.7.2 que permiten obtener los campos en función de las corrientes en geometría cilíndrica. En este caso la formulación varía ligeramente ya que la zona de interés es interior a las fuentes. En esta situación la función de Green en coordenadas cilíndricas es

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{8\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_{\rho} \rho') J_n(k_{\rho} \rho) e^{jn(\phi - \phi')} e^{-jk_z(z - z')} dk_z \quad (4-99)$$

respecto a la empleada en la sección 2.7.2 (ecuación 2-133), tan solo es necesario realizar los cambios

$$J_n(k_{\rho} \rho') \rightarrow H_n^{(2)}(k_{\rho} \rho') \quad (4-100)$$

$$H_n^{(2)}(k_{\rho} \rho) \rightarrow J_n(k_{\rho} \rho)$$

para que la formulación pueda emplearse en este caso. Para la corriente dada en 4-97 los coeficientes modales cilíndricos son

$$a_n(k_z) = 0 \quad (4-101)$$

$$b_n(k_z) = \frac{\eta}{4\pi \sin \theta_0} (-1)^n j^{-n+1} \frac{H_n^{(2)}(k_{\rho} \rho_0)}{H_n^{(2)}(k_{\rho_0} \rho_0)} e^{-jn\phi_0} \delta(k_z + k_{z0})$$

Una vez determinados los coeficientes cilíndricos los campos se obtienen empleando las expresiones 2-129 a 2-133 con las modificaciones indicadas anteriormente. Considerando las siguientes propiedades de las funciones de Bessel

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x) \quad (4-102)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(x) e^{jn\phi} = e^{-jx \cos \phi}$$

y que $k_{\rho_0} = k \sin \theta_0$ se obtiene para cada componente de campo

$$E_z = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \sin \theta_0 e^{j\bar{k}_0 \cdot \vec{r}} \quad (4-103)$$

$$E_\phi = -\frac{j\omega\mu}{4\pi} \cos \theta_0 \sin(\phi - \phi_0) e^{j\bar{k}_0 \cdot \vec{r}}$$

$$E_\rho = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \cos \theta_0 \cos(\phi - \phi_0) e^{j\bar{k}_0 \cdot \vec{r}}$$

con

$$\bar{k}_0 = k \sin \theta_0 \sin \phi_0 \hat{x} + k \sin \theta_0 \cos \phi_0 \hat{y} + k \cos \theta_0 \hat{z} \quad (4-104)$$

Finalmente el campo puede expresarse como

$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} e^{j\bar{k}_0 \cdot \vec{r}} \hat{\theta}_0 \quad (4-105)$$

$$\hat{\theta}_0 = \cos \theta_0 \cos \phi_0 \hat{x} + \cos \theta_0 \sin \phi_0 \hat{y} - \sin \theta_0 \hat{z}$$

En cuanto a la síntesis de la onda polarizada según ϕ es más compleja de verificar ya que implica la existencia de corrientes según ϕ y z . Los coeficientes cilíndricos son en este caso

$$a_n(k_z) = \frac{1}{4\pi} \frac{k\eta}{k_\rho} j^{-n} \frac{H_n^{(2)*}(k_\rho \rho_0)}{H_n^{(2)}(k_\rho \rho_0)} e^{-j\eta \rho_0} \delta(k_z + k_{z0}) \quad (4-106)$$

$$b_n(k_z) = \frac{1}{4\pi} \frac{\eta}{k_\rho^2 \rho_0} j^{-n} \left[k_z + k_{z0} \frac{k_\rho^2}{k_{\rho_0}^2} \right] \frac{H_n^{(2)*}(k_\rho \rho_0)}{H_n^{(2)}(k_\rho \rho_0)} e^{-j\eta \rho_0} \delta(k_z + k_{z0})$$

En este caso el coeficiente $b_n(k_z)$ es cero ya que el factor $\left[k_z + k_{z0} \frac{k_\rho^2}{k_{\rho_0}^2} \right]$ se anula

para $k_z = -k_{z0}$. En este caso se obtiene para los campos

$$\vec{E} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} e^{j\bar{k}_0 \cdot \vec{r}} \hat{\phi}_0 \quad (4-107)$$

$$\hat{\phi}_0 = -\sin \phi_0 \hat{x} + \cos \phi_0 \hat{y}$$

Finalmente es de destacar que en la formulación empleada se supone que la longitud de la agrupación es infinita y se genera una onda plana en todo el volumen del cilindro de medida. En una situación práctica la longitud del cilindro esta limitada y tan solo interesa generar la onda plana sobre el volumen que ocupa la ABP. Esta situación lleva a plantearse el problema de generar un conjunto de pesos sobre una agrupación de longitud limitada que optimicen la calidad de la onda plana sobre la ABP. Bennet y Schoessow [Bennet,1978] proponen un método para la geometría esférica para la obtención de los pesos para agrupaciones sobre un casquete esférico, mientras que en [Solé,1987] se propone un método iterativo para la obtención de pesos en agrupaciones cilíndricas, que conduce a ondas planas sobre la ABP de mayor calidad que la obtenida de truncar el cilindro de medida. El principal inconveniente de este método es que los pesos deben calcularse para cada dirección de incidencia y la integral 4-94 no puede expresarse como una transformada de Fourier por lo que el cálculo del campo lejano es numéricamente menos eficiente.

En la figura 4-7 se muestran los pesos, obtenidos de las expresiones 4-97 y 4-98, necesarios en una agrupación cilíndrica de dipolos elementales para sintetizar una onda plana. En la gráfica se muestran los pesos necesarios en los dipolos verticales y horizontales para sintetizar una onda vertical y horizontalmente polarizada propagándose en la dirección normal al eje del cilindro. Nótese que la variación de los pesos según z tan sólo depende de un término de fase progresiva que depende de la dirección de propagación de la onda en elevación, por lo que sólo se representa la variación de los pesos en acimut. Los pesos se han calculado para distintos radios de la agrupación, pero en todos los casos la zona donde se sintetiza la onda plana es un cilindro de radio 5λ . Nótese como al aumentar el radio la distribución de pesos tiende a una delta, de forma que para una distancia infinita tan sólo es necesario un elemento para sintetizar la onda plana.

En las figuras 4-8 y 4-9 se muestra el campo eléctrico y magnético en módulo y fase, producido por una agrupación cilíndrica de dipolos elementales de longitud 20λ , con los pesos adecuados para producir una onda plana verticalmente polarizada, propagándose en la dirección normal al cilindro. En las figuras 4-10 y 4-11 se representa el resultado obtenido al sintetizar una onda horizontalmente polarizada. En ambos casos el campo eléctrico y magnético se encuentra normalizado. Las desviaciones respecto a la onda plana ideal se deben a la longitud finita del cilindro, aspecto este que se tratará con más detalle en el siguiente capítulo. Se puede observar como en la zona central del cilindro la aproximación es mejor, mientras que hacia los extremos el error aumenta.

En las figuras 4-12 y 4-13 se muestra el módulo y la fase del campo E_{θ} en el plano xy , para una onda polarizada verticalmente y con incidencia $\theta = 90^{\circ}$ y $\phi = 45^{\circ}$. Nótese que debido al truncamiento del cilindro de medida la onda sintetizada es una onda transversal magnética para el caso vertical y transversal magnética para el caso horizontal. La presencia de las componentes longitudinales de los campos a un nivel no despreciable (del orden de -25 dB respecto la componente transversal) queda en parte paliado por el hecho de que la fase de esta componente tiene variaciones muy rápidas. En las figuras 4-14 y 4-15 se muestra el módulo y la fase en el plano zy para una incidencia de $\theta = 90^{\circ}$ y $\phi = 0^{\circ}$. Los niveles de rizado en la onda plana son del orden de 1 dB en el módulo y 1° en la fase. Nótese que el error de truncamiento afecta principalmente en la dirección del eje z , mientras la distribución de campos en el plano horizontal es más uniforme.

Efectivamente se comprueba que la transformación campo próximo campo lejano puede expresarse como un proceso de síntesis de onda plana, en que los pesos que deben otorgarse a la agrupación se derivan directamente del algoritmo de transformación. Este punto de vista es útil en la evaluación de la influencia de los errores de posicionado y el efecto del truncamiento de la longitud del cilindro de medida, ya que estos podrán cuantificarse en términos de degradación de la onda plana incidente sobre la antena. Este parámetro es independiente de la ABP y permite comparar la calidad de un campo próximo de medida con un campo lejano o un sistema compacto, que acostubran a caracterizarse en función de la calidad de la onda plana que generan.

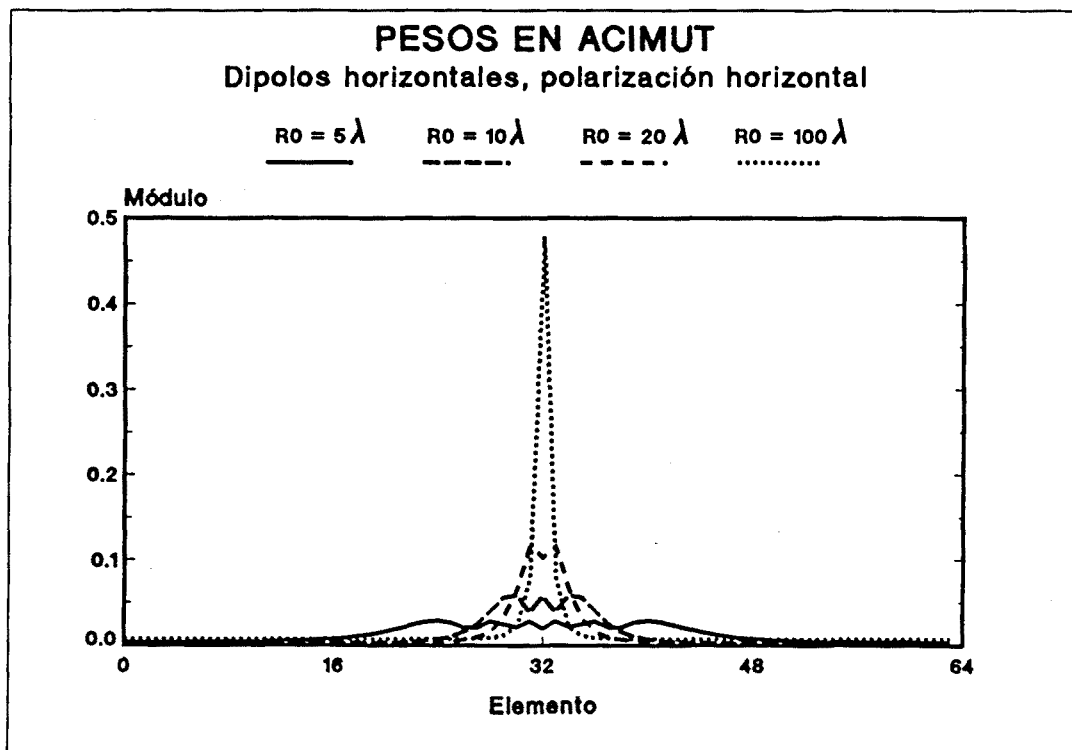
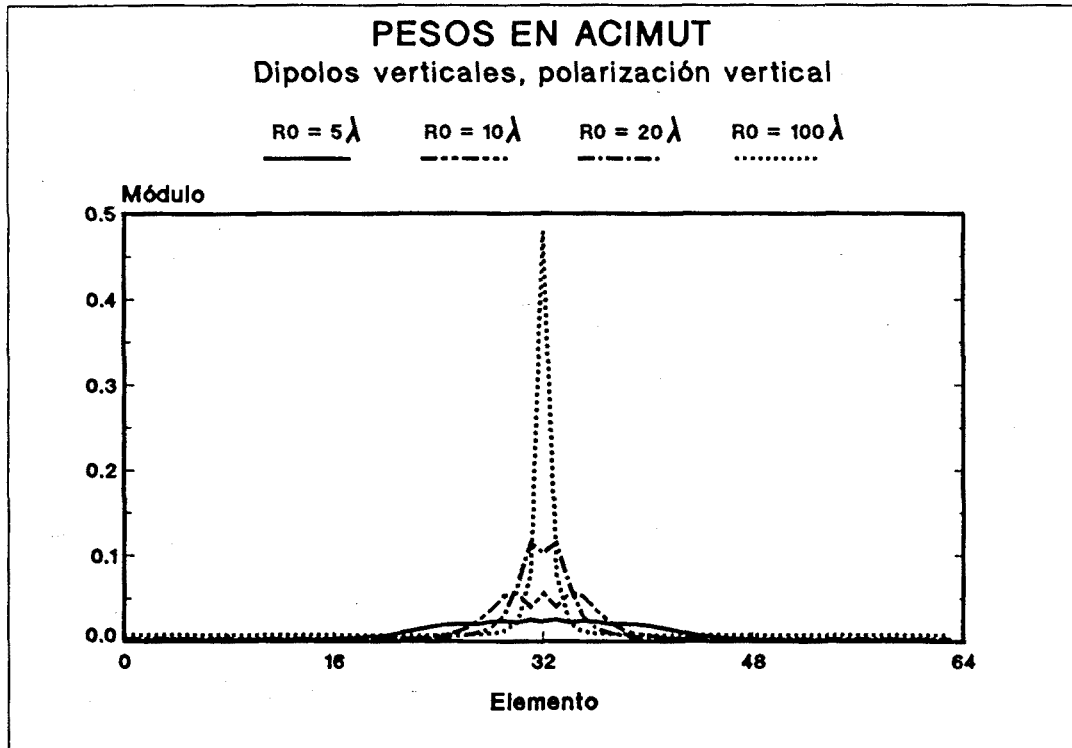


Figura 4-7 Pesos en acimut para sintetizar una onda plana vertical y horizontalmente polarizada.

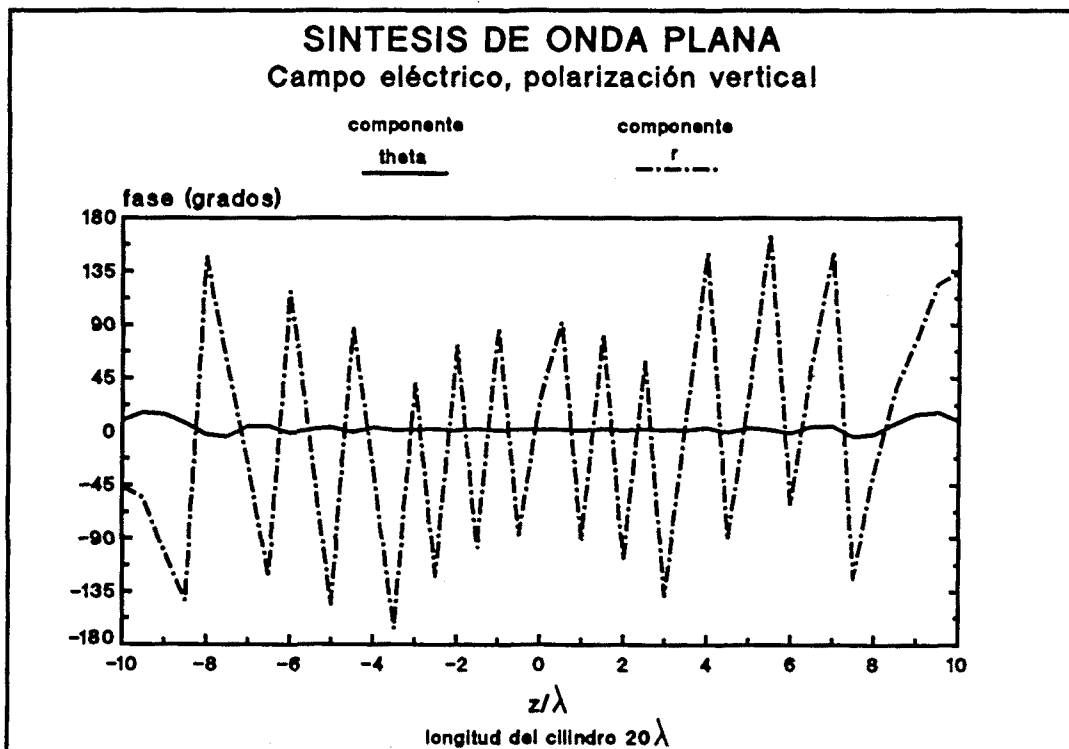
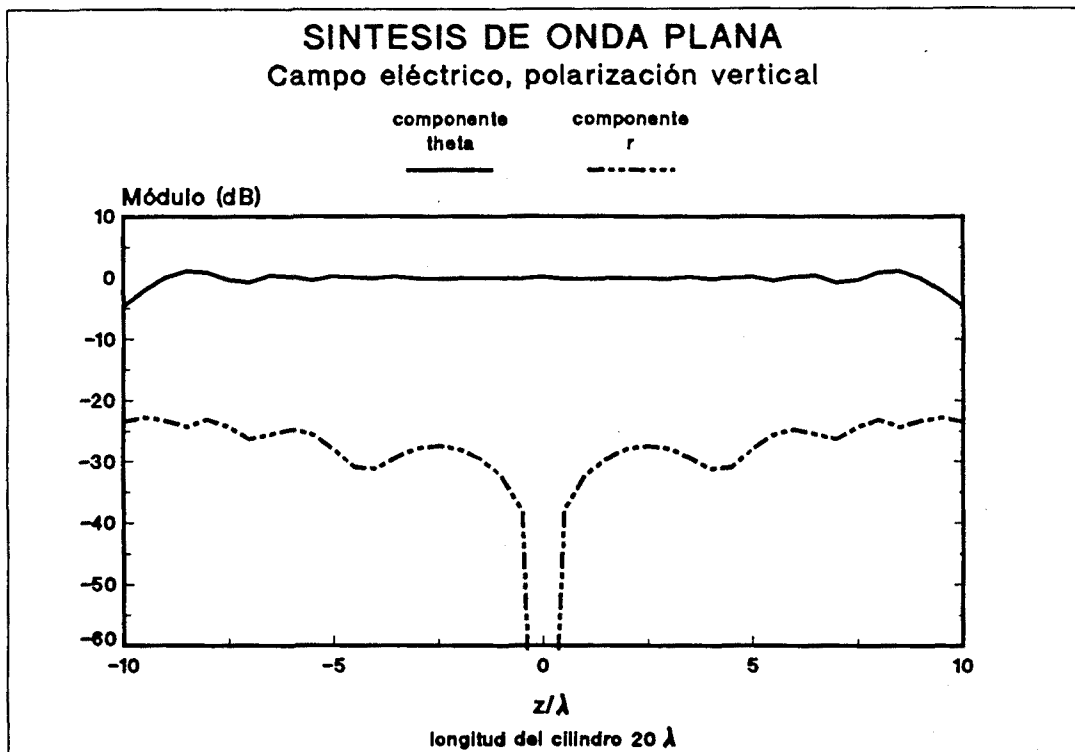


Figura 4-8 Módulo y fase del campo eléctrico sintetizado sobre el eje z por una agrupación de 20λ de longitud, polarización vertical.

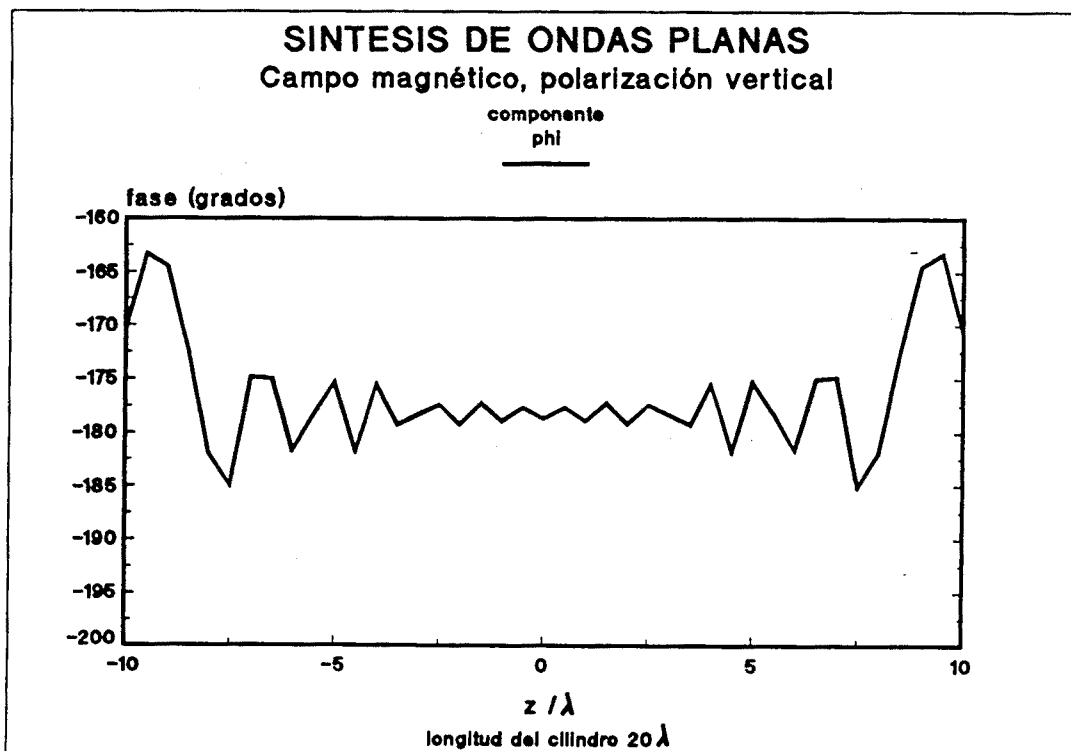
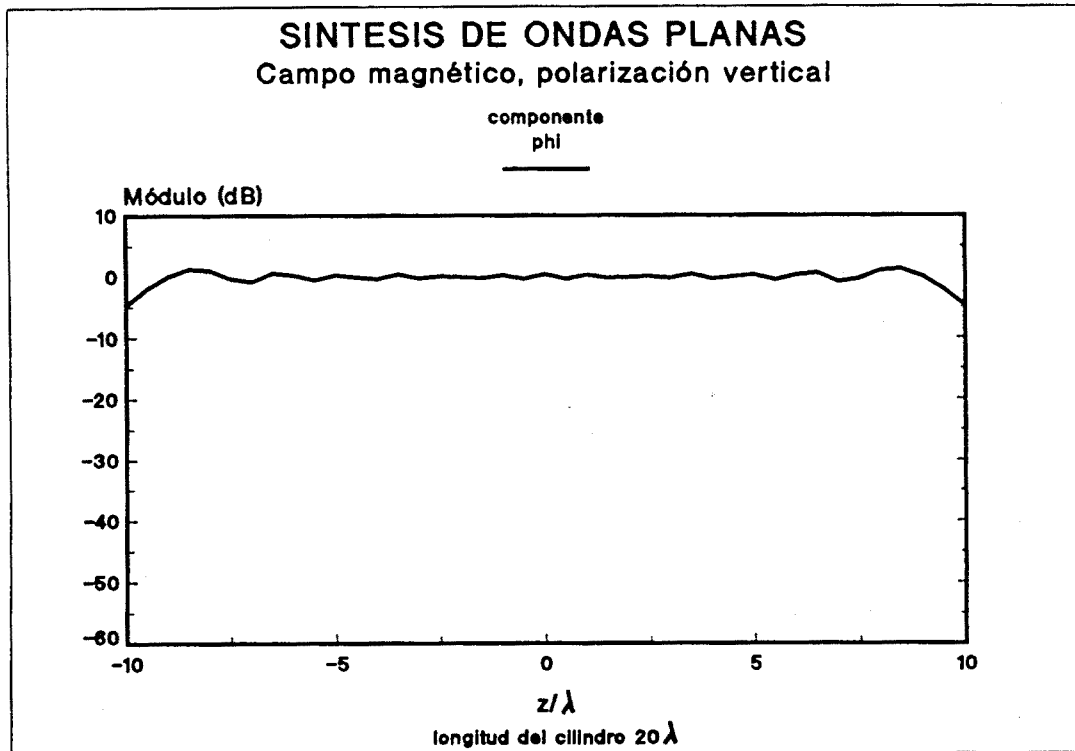


Figura 4-9 Módulo y fase del campo magnético sintetizado sobre el eje z por una agrupación de 20λ de longitud, polarización vertical.

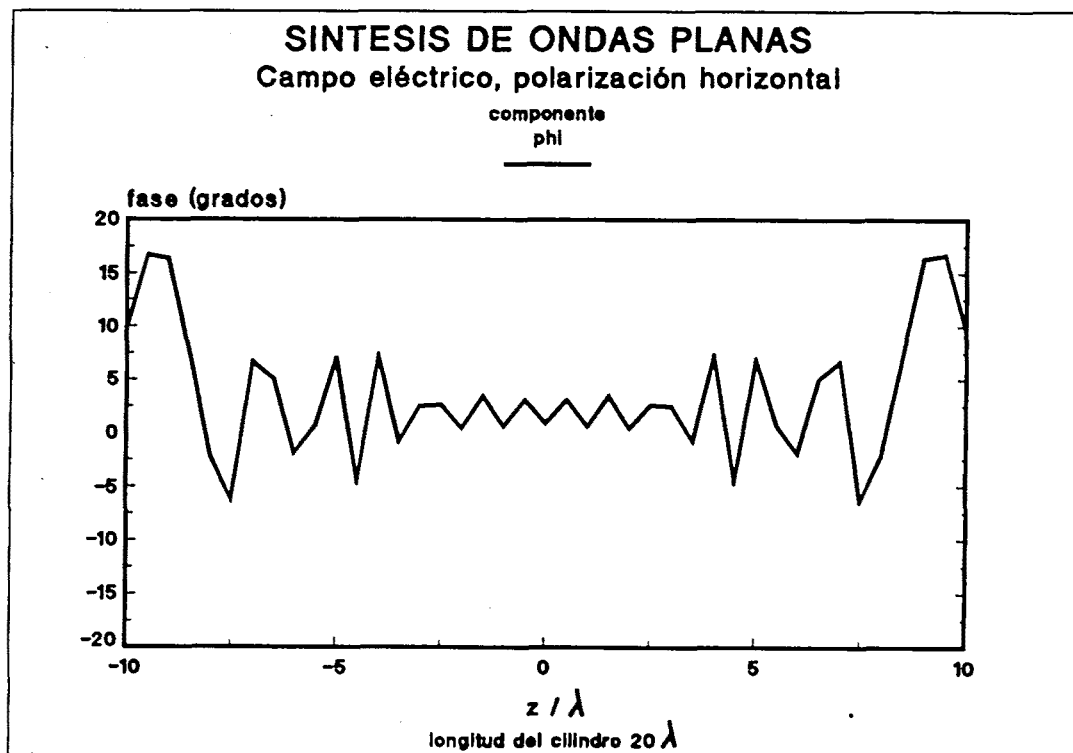
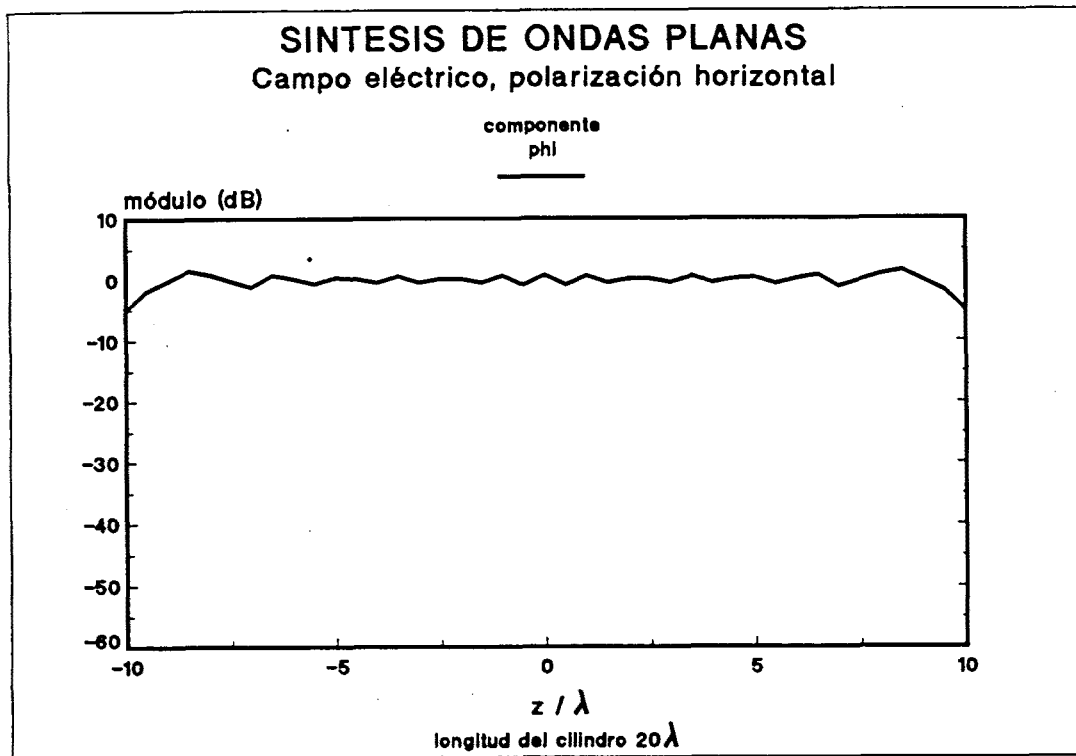


Figura 4-10 Módulo y fase del campo eléctrico sintetizado sobre el eje z por una agrupación de 20λ de longitud, polarización horizontal.

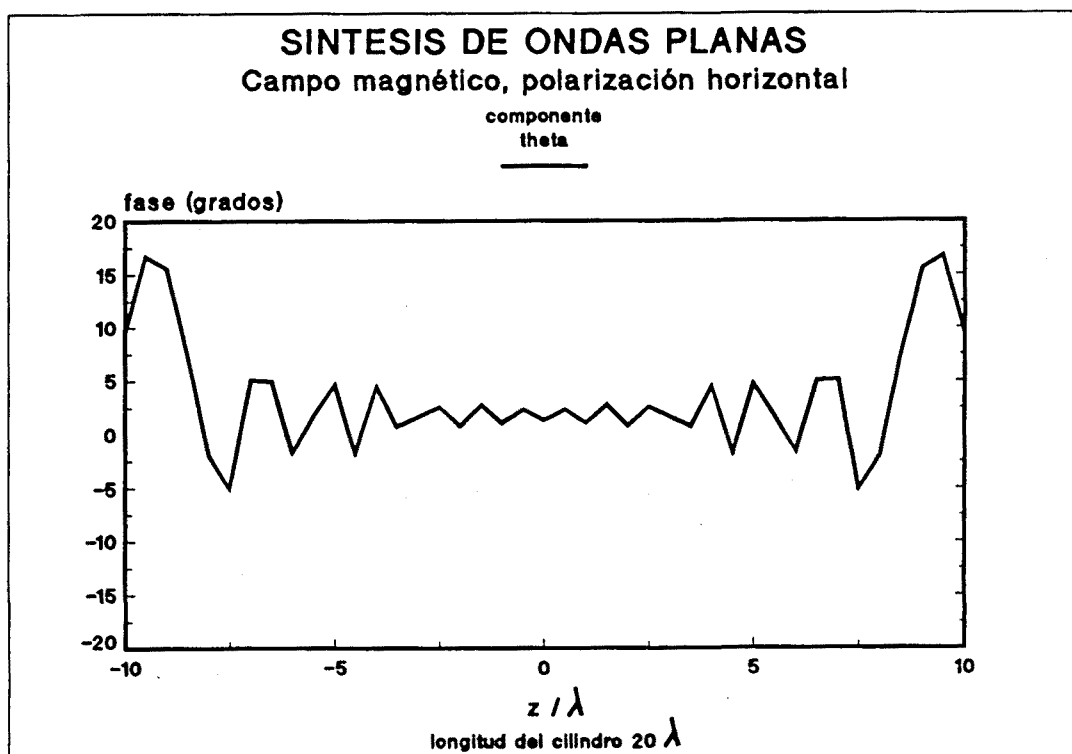
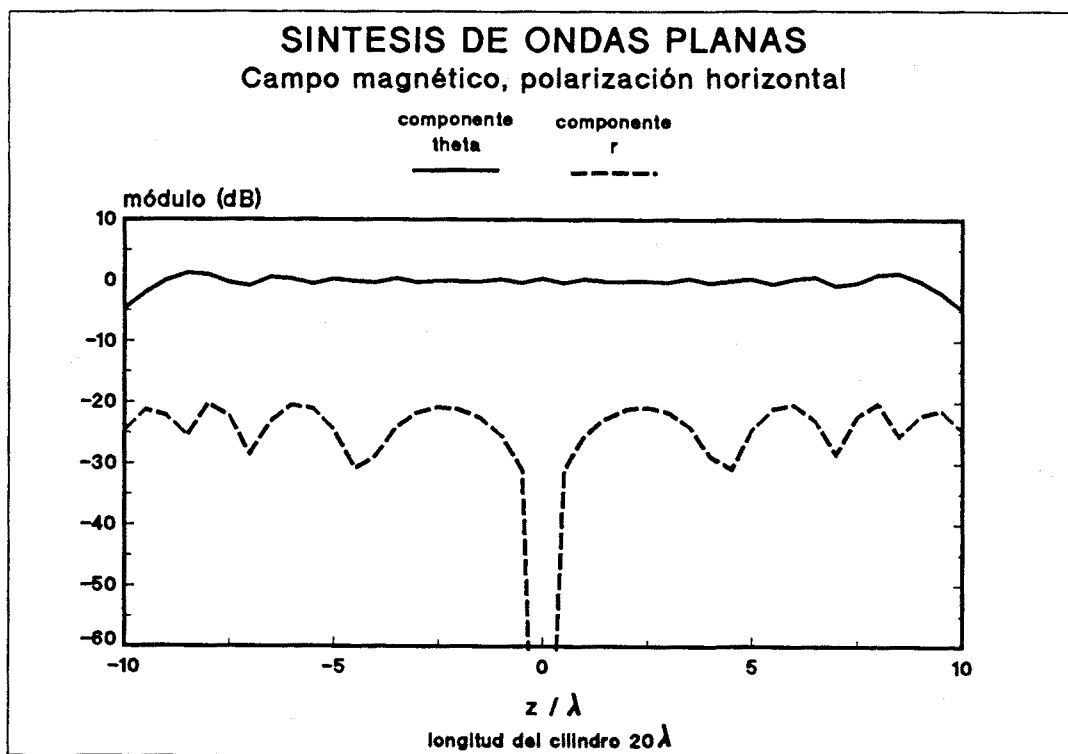


Figura 4-11 Módulo y fase del campo magnético sintetizado sobre el eje z por una agrupación de 20λ de longitud, polarización horizontal.

SINTESIS DE ONDAS PLANAS
 Polarización vertical, incidencia $\phi=45$ $\theta=90$

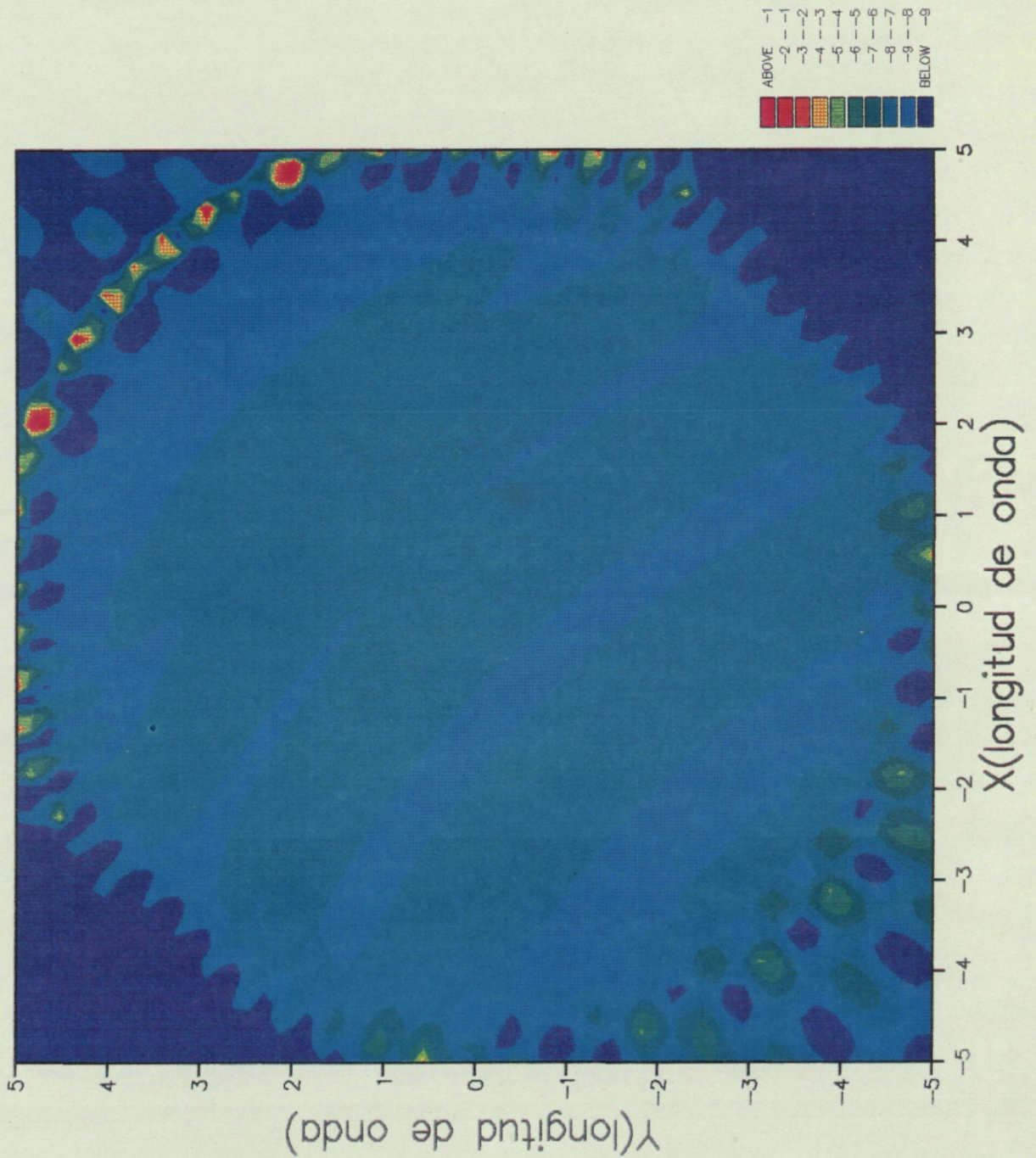


Figura 4-12 Módulo del campo eléctrico E_0 sintetizado en el plano xy por una agrupación de 20λ de longitud, polarización vertical.

SINTESIS DE ONDAS PLANAS
 Polarización vertical, incidencia $\phi=45$ $\theta=90$

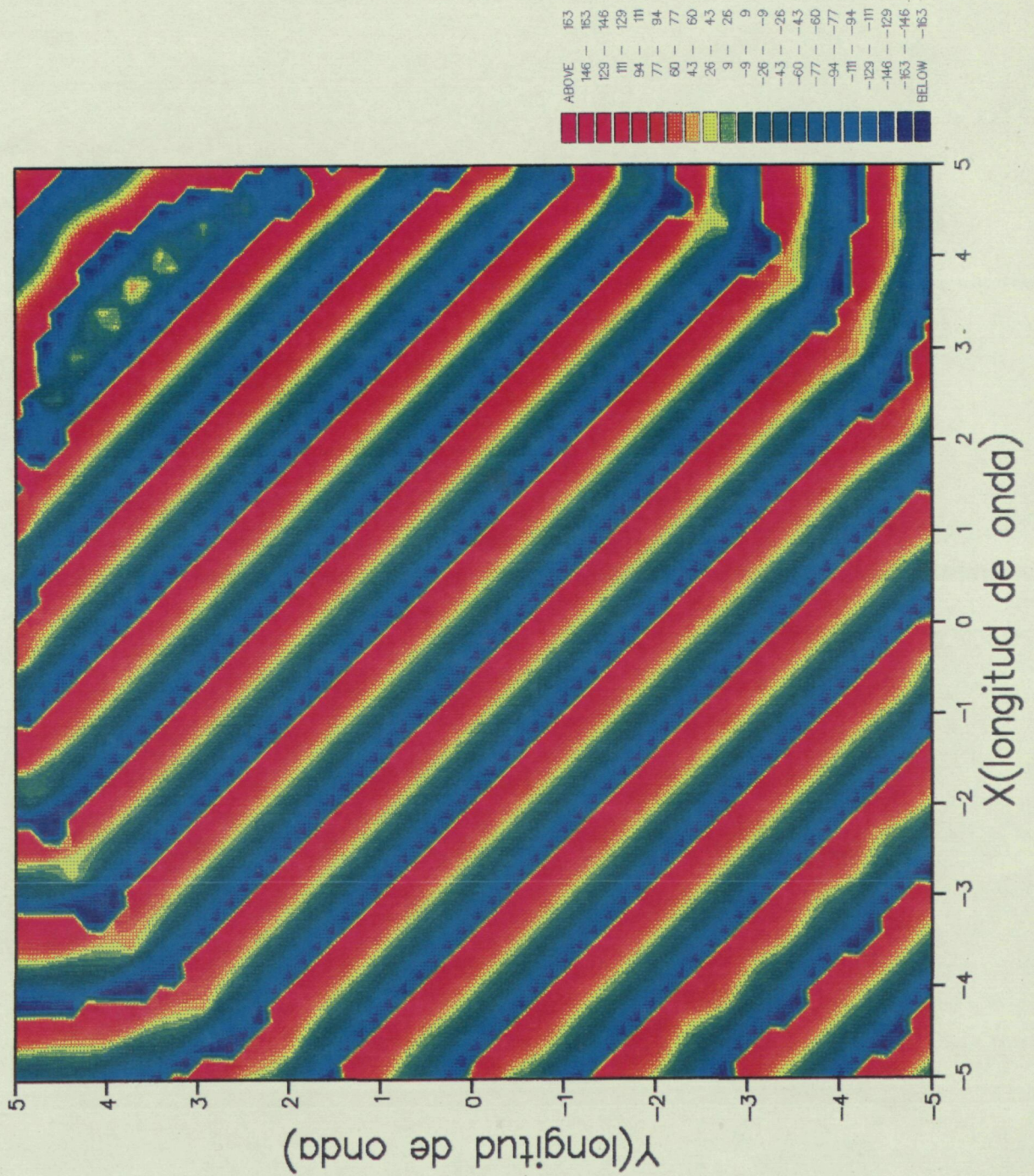


Figura 4-13 Fase del campo eléctrico E_0 sintetizado en el plano xy por una agrupación de 20λ de longitud, polarización vertical.

SINTESIS DE ONDAS PLANAS
 Polarización vertical, incidencia $\phi=0$ $\theta=90$

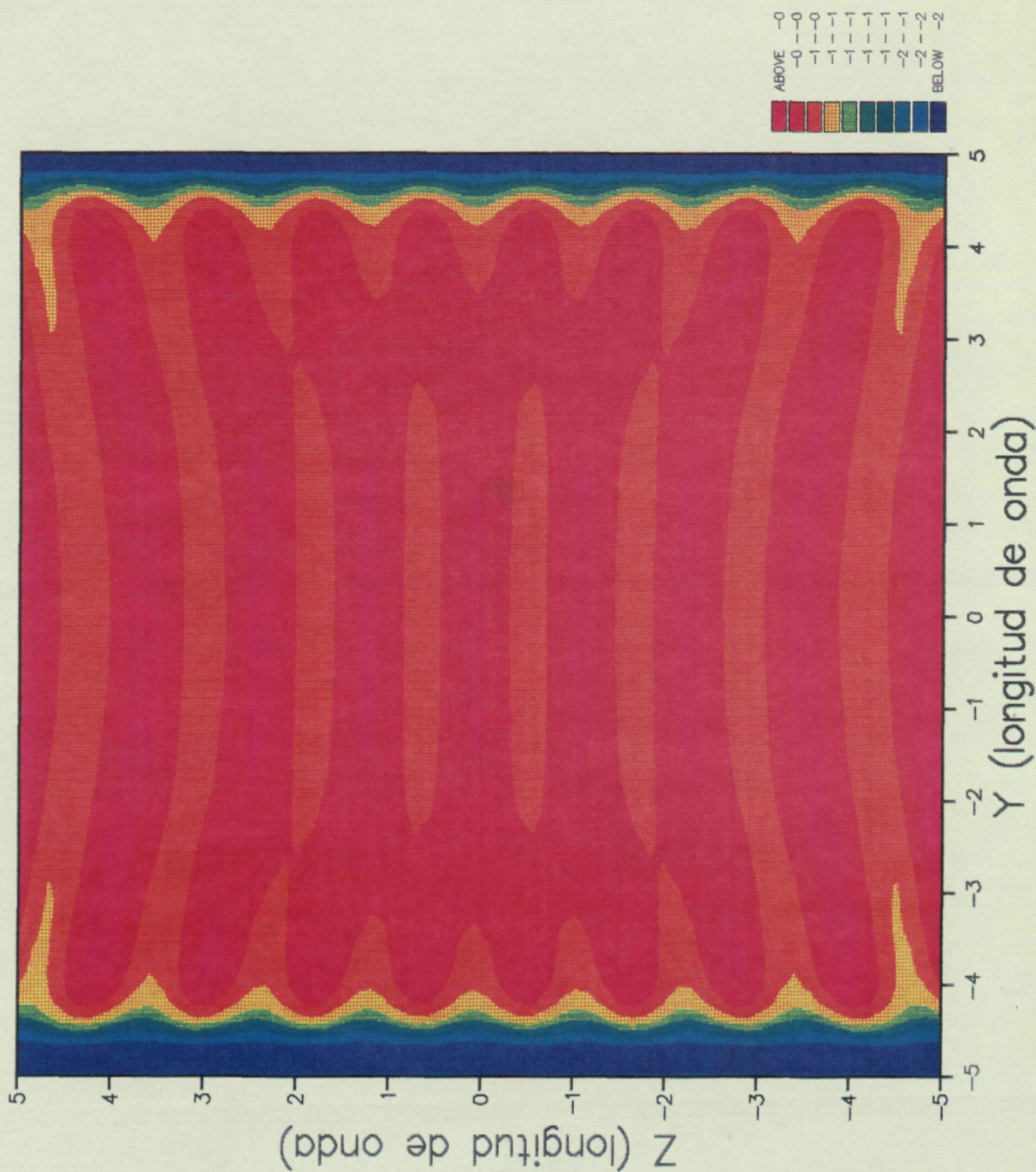


Figura 4-14 Módulo del campo eléctrico E_0 sintetizado en el plano yz por una agrupación de 20λ de longitud, polarización vertical.

SINTESIS DE ONDAS PLANAS
 Polarización vertical, incidencia $\phi=0$ $\theta=90$

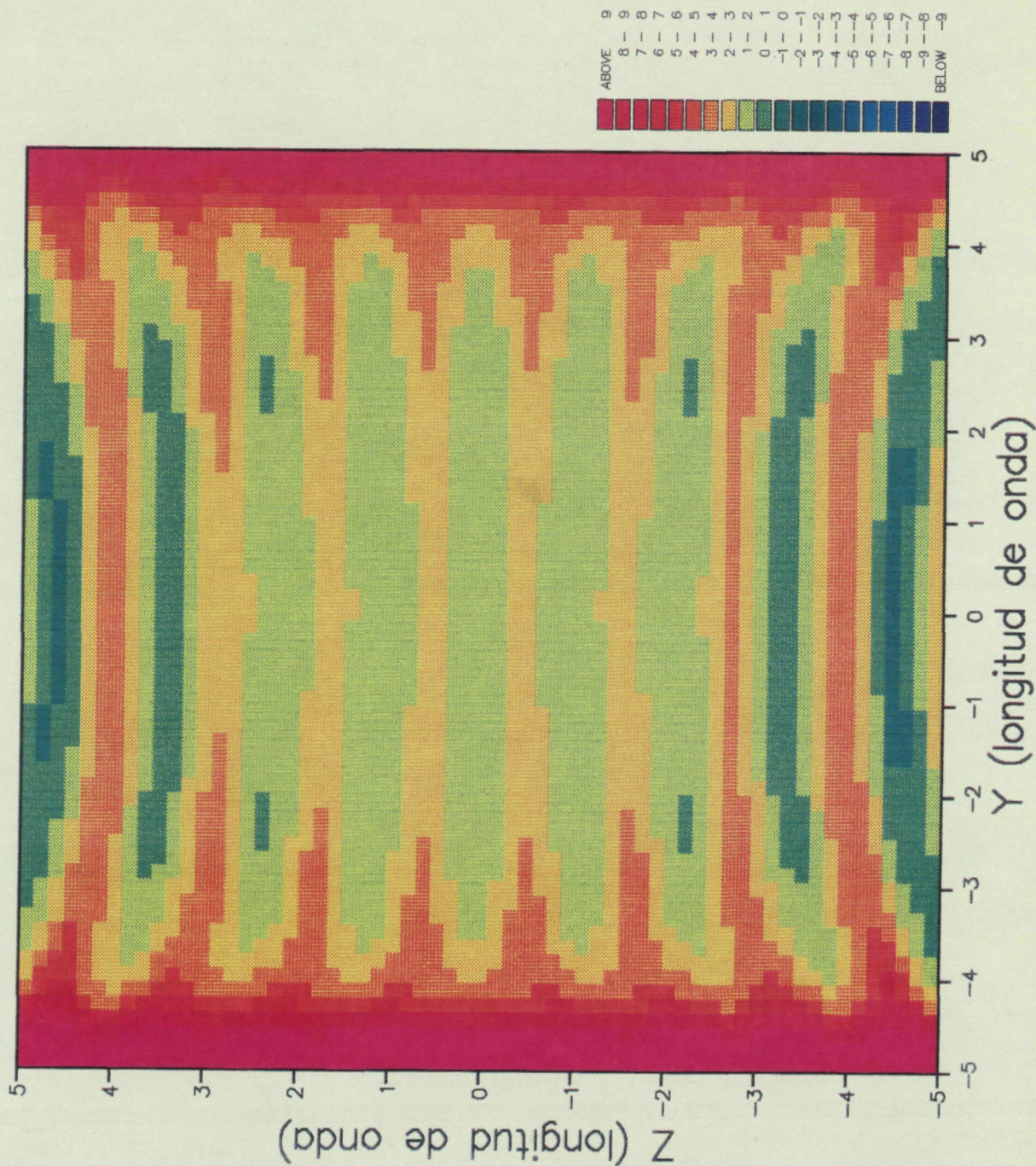


Figura 4-15 Fase del campo eléctrico E_0 sintetizado en el plano yz por una agrupación de 20λ de longitud, polarización vertical.

