

ANEXO A

BIPUERTOS RUIDOSOS

A.1. REPRESENTACIÓN DE BIPUERTOS RUIDOSOS

Un bipuerto ruidoso, según la teoría presentada en [1], se puede representar como un bipuerto libre de ruido con dos fuentes equivalentes de ruido, conectadas a la entrada y salida, o bien ambas a la entrada, según la configuración de éstas. Las dos fuentes equivalentes de ruido pueden ser de corriente o/y voltaje, dando lugar a tres configuraciones: π o corriente, T o voltaje y ABCD (corriente-voltaje).

En la configuración π se asocian dos fuentes de corriente de ruido al bipuerto libre de ruido, una a la entrada, i_1 , y otra a salida, i_2 , Figura A.1.

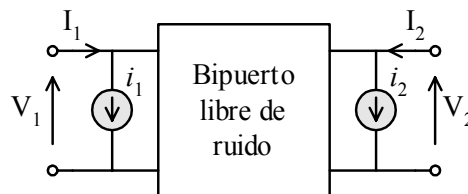


Figura A.1 Bipuerto libre de ruido con dos fuentes equivalentes de corriente de ruido, configuración π

Las corrientes I_1 e I_2 se escriben en función de los parámetros de admitancia, \mathbf{Y} , del bipuerto y de las fuentes de corriente de ruido, i_1 e i_2 :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Las conductancias equivalentes de ruido G_1 y G_2 asociadas a las corrientes de ruido, i_1 e i_2 , respectivamente, [2], se definen como:

$$G_1 = \frac{\overline{i_1^2}}{4kT_0B}; \quad G_2 = \frac{\overline{i_2^2}}{4kT_0B} \quad (\text{A.2})$$

y el coeficiente de correlación entre ambas fuentes es igual a:

$$\rho_c = \frac{\overline{i_1 i_2^*}}{\sqrt{\overline{i_1^2} \cdot \overline{i_2^2}}} \quad (\text{A.3})$$

donde k es la constante de Boltzmann (1.380×10^{-23} J·s), T_0 es la temperatura absoluta de referencia (290 K) y B es el ancho de banda. $\overline{i_1^2}$ e $\overline{i_2^2}$ son densidades espectrales de la autocorrelación de las fuentes de corriente de ruido, e $\overline{i_1 i_2^*}$ es la densidad espectral de correlación cruzada de las fuentes de ruido.

En la configuración T al bipuerto libre de ruido se le asocian dos fuentes equivalentes de voltaje de ruido, una a la entrada, e_1 , y otra a salida, e_2 , Figura A.2.

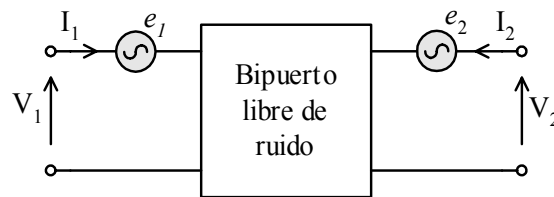


Figura A.2 Bipuerto libre de ruido con dos fuentes equivalentes de tensión de ruido, configuración T

Los voltajes V_1 y V_2 se escriben en función de los parámetros de impedancia, \mathbf{Z} , del bipuerto y de las fuentes de voltaje o tensión de ruido, e_1 y e_2 :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

La resistencia equivalente de ruido asociada a cada fuente de ruido, R_1 y R_2 , respectivamente, se expresan de la siguiente manera:

$$R_1 = \frac{\overline{e_1^2}}{4kT_0B}; \quad R_2 = \frac{\overline{e_2^2}}{4kT_0B} \quad (\text{A.5})$$

y el coeficiente de correlación de voltaje o tensión es:

$$\rho_v = \frac{\overline{e_1 e_2^*}}{\sqrt{\overline{e_1^2} \cdot \overline{e_2^2}}} \quad (\text{A.6})$$

En este caso, $\overline{e_1^2}$ y $\overline{e_2^2}$ son densidades espectrales de tensión de ruido, y $\overline{e_1 e_2^*}$ es la densidad espectral de correlación cruzada de las fuentes de ruido.

En la configuración ABCD o de cascada se asocian dos fuentes equivalentes de ruido: una de tensión, e_n , a la entrada y otra de corriente, i_n , a la salida del bipuerto libre de ruido, Figura A.3.

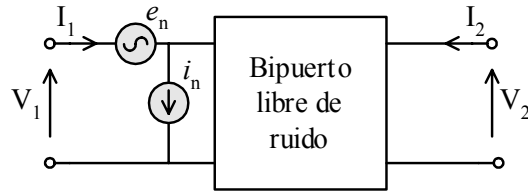


Figura A.3 Bipuerto libre de ruido con una fuente equivalente de tensión y una de corriente de ruido, configuración en cascada ó ABCD

En este caso se escriben las expresiones de V_1 e I_1 en función de los parámetros ABCD o de cascada del bipuerto y de las fuentes de ruido, e_n e i_n :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_n \\ i_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Las resistencias equivalentes, R_n y g_n , asociadas a las fuentes de ruido, se escriben como:

$$R_n = \frac{\overline{e_n^2}}{4kT_0B}; \quad g_n = \frac{\overline{i_n^2}}{4kT_0B} \quad (\text{A.8})$$

y el coeficiente de correlación entre las fuentes de ruido es:

$$\rho_v = \frac{\overline{e_n i_n^*}}{\sqrt{\overline{e_n^2} \cdot \overline{i_n^2}}} \quad (\text{A.9})$$

$\overline{e_n^2}$ y $\overline{i_n^2}$ son densidades espectrales de tensión de ruido y corriente de ruido, y $\overline{e_n i_n^*}$ es la densidad espectral de correlación cruzada de las fuentes de ruido.

Las fuentes equivalentes de ruido, e_n e i_n , pueden ser expresadas en función de i_1 e i_2 :

$$e_n = -\frac{i_2}{Y_{21}}; \quad i_n = i_1 - \frac{Y_{11}}{Y_{21}} i_2 \quad (\text{A.10})$$

o bien de e_1 y e_2 :

$$i_n = -\frac{u_2}{Z_{21}}; \quad e_n = u_1 - \frac{Z_{11}}{Z_{21}} u_2 \quad (\text{A.11})$$

donde Y_{ij} y Z_{ij} , con $i=1,2$ y $j=1,2$, son los elementos de la matriz de admitancia e impedancia del bipuerto. Las expresiones (A.10) y (A.11) definen los elementos de una matriz, conocida como matriz de paso que se describe a continuación con mayor detalle.

A.2. MATRICES DE CORRELACIÓN DE BIPUERTOS RUIDOSOS

Como se ha indicado, las fuentes de ruido asociadas a un bipuerto se describen mediante sus densidades espectrales de autocorrelación y correlación cruzada. Estas expresiones se pueden ordenar en forma matricial dando como lugar a lo que se conoce como matriz de correlación, [3]. Entonces, para la configuración π se tiene la representación de la matriz de correlación de admitancia:

$$\mathbf{C}_Y = \begin{bmatrix} \overline{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{i_1} \\ i_2 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{i_1^2} & \overline{i_1 i_2^*} \\ \overline{i_2 i_1^*} & \overline{i_2^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

en donde el superíndice ‘ \dagger ’ indica la transpuesta conjugada. Para la configuración T la representación de la matriz de correlación de impedancia es:

$$\mathbf{C}_Z = \begin{bmatrix} \overline{e_1} \\ e_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e_1} \\ e_2 \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{e_1^2} & \overline{e_1 e_2^*} \\ \overline{e_2 e_1^*} & \overline{e_2^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

y finalmente para la ABCD se tiene:

$$\mathbf{C}_A = \begin{bmatrix} \overline{e_n} \\ i_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{e_n} \\ i_n \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{e_n^2} & \overline{e_n i_n^*} \\ \overline{i_n e_n^*} & \overline{i_n^2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Las matrices de correlación deben ser simétricas conjugadas, los términos de la diagonal positivos y el determinante mayor o igual que cero.

A.3. MATRICES DE PASO E INTERCONEXIÓN DE BIPUERTOS

La representación de una matriz de correlación puede ser transformada a otra mediante matrices de paso, empleando la siguiente formula de transformación general:

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{P} \cdot \mathbf{C}_O \cdot \mathbf{P}^\dagger \quad (\text{A.15})$$

donde \mathbf{C}_O es la matriz de correlación original, \mathbf{C}_R es la matriz resultante y \mathbf{P} es la matriz de transformación o de paso que relaciona una configuración con la otra, [2],[3]. En la Tabla A.1 se presenta la matriz \mathbf{P} correspondiente a la configuración que se quiera transformar en función de la configuración original.

Cuando se tienen matrices de correlación conectadas en serie, paralelo o cascada, se puede calcular la matriz total utilizando las siguientes relaciones:

- Conexión serie, Figura A.4(a):

$$\mathbf{C}_Z = \mathbf{C}_Z^{(1)} + \mathbf{C}_Z^{(2)} \quad (\text{A.16})$$

- Conexión paralelo, Figura A.4(b):

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{C}_Y^{(1)} + \mathbf{C}_Y^{(2)} \quad (\text{A.17})$$

- Conexión en cascada, Figura A.4(c):

$$\mathbf{C}_A = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{C}_A^{(2)}(\mathbf{A}^{(1)})^\dagger + \mathbf{C}_A^{(1)} \quad (\text{A.18})$$

Los superíndices ‘(1)’ y ‘(2)’ indican el primer y el segundo de los bipuertos conectados, Figura A.4.

Tabla A.1 Matrices de paso, \mathbf{P} , para transformar la representación de una matriz de correlación a otra

Representación resultante	Representación original		
	\mathbf{Y}	\mathbf{Z}	\mathbf{ABCD}
\mathbf{Y}	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Y_{11} & 1 \\ -Y_{21} & 0 \end{bmatrix}$
\mathbf{Z}	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -Z_{12} \\ 0 & -Z_{21} \end{bmatrix}$
\mathbf{ABCD}	$\begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 1 & A_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -A_{11} \\ 0 & -A_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

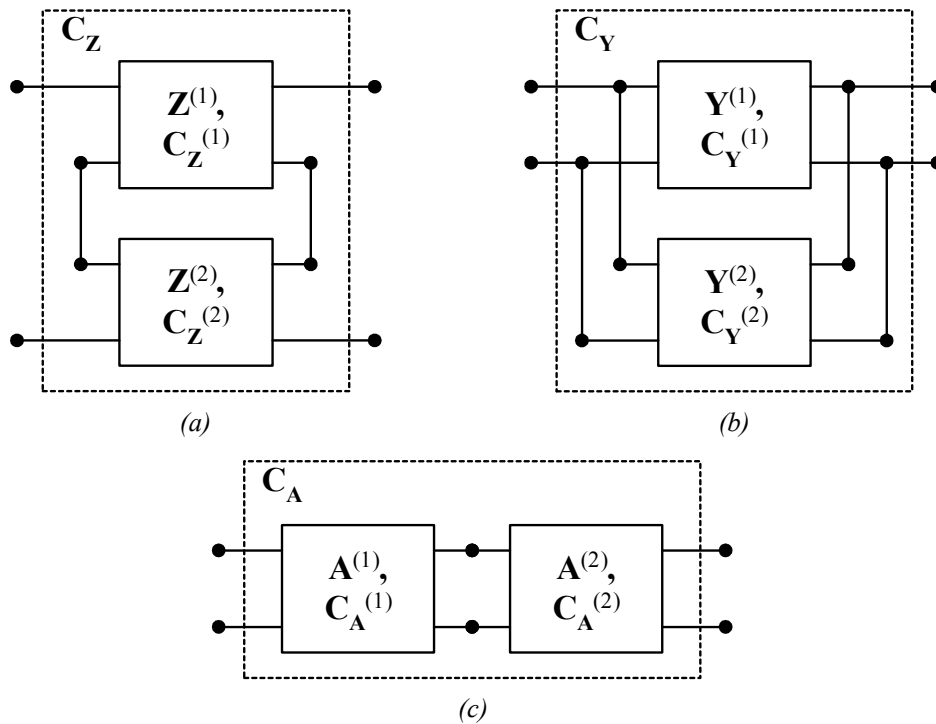


Figura A.4 Interconexión entre Bipuertos: (a) en serie, (b) en paralelo y (c) en cascada

A.4. MATRICES DE CORRELACIÓN DE BIPUERTOS PASIVOS Y ACTIVOS

Los elementos de circuitos de microondas pueden ser divididos en dos grupos: pasivos y activos. Los elementos pasivos generan únicamente ruido térmico, cuyas matrices de correlación se definen como:

$$C_Z = 4kT_0B \cdot \text{Re}(Z) \quad (\text{A.19})$$

$$C_Y = 4kT_0B \cdot \text{Re}(Y) \quad (\text{A.20})$$

donde, Z e Y son las matrices de impedancia y admitancia del bipuerto, respectivamente.

En cuanto a los bipuertos activos las matrices de correlación pueden ser calculadas a partir de sus parámetros de ruido. Para cada representación de las matrices de correlación se tiene un equivalente en función de los parámetros de ruido. Considerando que en esta memoria de Tesis se utiliza básicamente la configuración en cascada como matriz de correlación total de los dispositivos presentados, sólo se muestra este tipo de representación en función de los parámetros de ruido:

$$C_A = 4kT_0B \begin{bmatrix} R_n & \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_n Y_{opt}^* \\ \frac{F_{\min} - 1}{2} - R_n Y_{opt} & R_n |Y_{opt}|^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

De forma similar se pueden calcular los parámetros de ruido en función de los elementos de la matriz de correlación, como:

$$R_n = \frac{C_{A11}}{4kT_0B} \quad (\text{A.22})$$

$$F_{\min} = 1 + \frac{1}{2kT_0B} [C_{A12} + C_{A11} \cdot Y_{opt}] \quad (\text{A.23})$$

$$G_{opt} = \sqrt{\frac{C_{A22}}{C_{A11}} - \left(\text{Im} \left(\frac{C_{A12}}{C_{A11}} \right) \right)^2} \quad (\text{A.24})$$

$$B_{opt} = \left(\text{Im} \left(\frac{C_{A12}}{C_{A11}} \right) \right) \quad (\text{A.25})$$

El factor de ruido del bipuerto para una admitancia de fuente Z_s puede expresarse en función de la matriz de correlación en cascada, [3], como:

$$F(Z_s) = 1 + \frac{Z \cdot C_A \cdot Z^\dagger}{4kT_0B \cdot \text{Re}(Z_s)}; \quad Z = \left[1 \quad (Z_s)^* \right] \quad (\text{A.26})$$

En [2] se pueden encontrar expresiones de los parámetros de ruido para otras configuraciones de la matriz de correlación de las fuentes de ruido, así mismo, en dicha referencia se presentan las expresiones de la matriz de correlación para la representación en parámetros S y parámetros T, así como las matrices de paso entre ellas.

REFERENCIAS

- [1] H. Rothe, and W. Dahlke, "Theory of noisy fourpoles," *Proceedings of the IRE*, Vol. 44, 811-818, June 1956.
- [2] J.A. Dobrowolski, "Introduction to computer methods for microwave circuit analysis and design," Artech House, 1991.
- [3] H. Hillbrand, and P. Russer, "An efficient method for computer aided noise analysis of linear amplifier networks," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, Vol. 23, No. 4, pp. 235-238, April 1976.