



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Anàlisi didàctica del disseny i implementació de tasques de dibuix geomètric des de la perspectiva de l'EOS

Elvira Garcia Mora

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tdx.cat) i a través del Dipòsit Digital de la UB (diposit.ub.edu) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX ni al Dipòsit Digital de la UB. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX o al Dipòsit Digital de la UB (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tdx.cat) y a través del Repositorio Digital de la UB (diposit.ub.edu) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR o al Repositorio Digital de la UB. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR o al Repositorio Digital de la UB (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tdx.cat) service and by the UB Digital Repository (diposit.ub.edu) has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized nor its spreading and availability from a site foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service or to the UB Digital Repository is not authorized (framing). Those rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

Anàlisi didàctica del disseny i implementació de tasques de dibuix geomètric des de la perspectiva de l'EOS

Memòria presentada per optar al grau de doctor per la Universitat de Barcelona

Programa de doctorat en Didàctica de les Matemàtiques

Autora: Elvira Garcia Mora

Director: Francisco Javier Díez Palomar

Tutor: Joaquín Giménez Rodríguez

Facultat d'Educació



**UNIVERSITAT DE
BARCELONA**

A Iban i Mercè.

Resum

Les tasques relacionades amb l'aprenentatge de la geometria permeten aplicar els constructes teòrics de l'*enfocament ontosemiòtic* a les fases de disseny d'una tasca i per l'anàlisi de la implementació a l'aula. Els indicadors de les components de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* són un corpus robust en l'orientació sobre els aspectes que fan que la sessió sigui considerada *bona*. Tots els indicadors considerats en el disseny de la tasca s'espera es presentin al moment de la seva implementació a l'aula. A partir d'aquesta premissa, el treball de recerca es va realitzar en tres etapes: (1) disseny de dues tasques de dibuix geomètric pel primer curs d'ESO del currículum català, (2) implementació de les tasques amb alumnes d'un centre educatiu en Catalunya i (3) anàlisi didàctica de la tasca dissenyada i de la sessió d'implementació amb alumnes. La caracterització del disseny i de la seva implementació mitjançant les *configuracions epistèmiques* i les *trajectòries didàctiques* permet contrastar dos estats: hipotètic i real. En contrastar aquests dos estats s'identifiquen les variacions del disseny per adaptar-lo a les condicions de l'aula durant la seva implementació. El constructe *idoneïtat didàctica* permet contrastar tres estats: màxim, hipotètic i real. Per tant, el nivell de reflexió que permet la *idoneïtat didàctica* va més enllà de la comparació entre el que s'espera observa a l'aula i allò que succeeix en temps real. L'assignació de valors per quantificar l'assoliment dels indicadors de les components de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* permet identificar els punts forts i febles d'una proposta didàctica i en són una pauta pel re-disseny de la mateixa tasca o el disseny d'altres. En sistematitzar el procés de reflexió sobre la pròpia pràctica es contribueix en el desenvolupament de competències didàctic-Matemàtiques del professor de matemàtiques que donen una mirada crítica de l'activitat docent.

Abstract

The tasks related to the learning of geometry allow applying the theoretical constructs of the ontosemiotic approach to the design phases of a task and for the analysis of its implementation in the classroom. The indicators of the components of the six dimensions of didactic suitability are a robust corpus in guiding the aspects that make a session considered good. All the indicators considered in the design of the task are expected to be presented at the time of its implementation in the classroom. Based on this premise, the research work was carried out in three stages: (1) design of two geometric drawing tasks for the first year of secondary school of the Catalan curriculum, (2) implementation of the tasks with students at an educational center in Catalonia and (3) didactic analysis of the designed task and the classroom session. The characterization of the design and its classroom implementation through epistemic configurations

and didactic trajectories allows two states to be contrasted: hypothetical and real. By contrasting these two states, the variations of the design are identified to adapt it to the conditions of the classroom during its implementation. The didactic suitability construct allows three states to be contrasted: maximum, hypothetical and real. Therefore, the level of reflection that allows for didactic suitability goes beyond the comparison between what is expected to be observed in the classroom and what happens in real time. The assignment of values to quantify the achievement of the indicators of the components of the six dimensions of didactic suitability allows to identify the strong and weak points of a didactic proposal and are a guideline, of good practices for the teacher, for the re- design of the same task or the design of others. By systematizing the process of reflection on one's own practice, one contributes to the development of didactic-Mathematics skills of the mathematics teacher that give a critical look at the teaching activity.

SUMARI

Índex de figures	5
Índex de taules	34
 Primera Part: Presentació General	
Capítol 1. Introducció	48
1.1 El llenguatge geomètric	48
1.2 Estudi preliminar	50
 Capítol 2. Objectius de la tesi doctoral	55
2.1 Objectius generals	56
2.2 Objectius particulars	56
2.3 Pregunta de recerca	57
 Segona Part: Fonamentació Teòrica	
Capítol 3. El pensament geomètric	59
3.1 El raonament geomètric	59
3.2 El model de raonament geomètric de van Hiele	63
3.3 La teoria dels conceptes figuratius de Fischbein	72
3.4 El model cognitiu del raonament geomètric de Duval	75
3.5 La imatgeria visual de Presmeg	80

3.6 El raonament espacial segons Clements i Battista	82
3.7 La teoria cognitiva ACT-R	84
Capítol 4. Didàctica de la geometria	87
4.1 La geometria a l'escola	88
4.1.1 El currículum	93
4.1.2 El currículum de geometria	101
4.2 L'ensenyament de la geometria a l'ESO	102
4.3 La competència matemàtica i la geometria	105
4.4 L'assoliment dels continguts de geometria del sestudiants d'ESO	108
Capítol 5. Formació del professorat per a l'ensenyament de la geometria	117
5.1. Objectes matemàtics	117
5.1.1. Figures i cossos geomètrics	118
5.1.2. Eines i instruments	118
5.1.3. Simetria, proporcionalitat i semblança en figures 2D	119
5.1.4. Transformacions geomètriques	119
5.1.5. Mesures directes i indirectes	119
5.2 Processos matemàtics	120
5.2.1. Resolució de problemes	122
5.2.2. Connexions	122

5.2.3. Raonament i prova	123
5.2.4. Comunicació i representació	123
5.3 Pràctiques matemàtiques	123
5.4 Orientacions didàctiques	126
5.4.1. Figures geomètriques	128
5.4.2. Construcció de cossos geomètrics	129
5.4.3. Mapes (2D) i construcció d'objectes tridimensionals	130
5.5 La pràctica docent per a l'ensenyament de la geometria	131
Capítol 6. La pràctica del professorat	133
6.1 Enfocaments en l'estudi de la pràctica del professorat	134
6.1.1 Taxonomia de l'estructura d'aprenentatges assolits observats (SOLO)	135
6.1.2 El model PCK	137
6.1.3 L'estudi de lliçons (<i>lesson study</i>)	140
6.1.4 L'enfocament onto-semiòtic	142
6.1.5 El <i>teacher noticing</i>	144
6.1.6 Les trajectòries d'aprenentatge	144
Capítol 7. Enfocament Onto-Semiòtic	147
7.1 Els objectes matemàtics i la noció del seu significat	148
7.2 Conceptes rellevants de l'EOS	149

7.2.1 Conceptes semiòtics	149
7.2.1.1 Teories del significat	149
7.2.1.2 Semiòtica i estudi del llenguatge	151
7.2.1.3 Categories ontològiques	151
7.2.2 Conceptes antropològics	152
7.2.3 Conceptes cognitius	153
7.2.4 Configuracions semiòtiques	156
7.3 La noció <i>idoneïtat didàctica</i>	160
7.3.1 Idoneïtat epistèmica	163
7.3.2 Idoneïtat cognitiva	167
7.3.3 Idoneïtat interaccional	171
7.3.4 Idoneïtat mediacional	172
7.3.5 Idoneïtat afectiva	174
7.3.6 Idoneïtat ecològica	174
7.4 Aplicacions del constructe en l'anàlisi didàctica	176
7.4.1. Configuracions epistèmiques i <i>idoneïtat didàctica</i>	178
7.4.2. Indicadors d' <i>idoneïtat didàctica</i> específics	179
7.5 Aplicacions en l'anàlisi de l'ensenyament de la geometria	181

Tercera Part: Desenvolupament de la Recerca

Capítol 8. Fonaments Metodològics	183
--	------------

8.1 El coneixement científic	184
8.2 La investigació educativa	184
8.3 La metodologia qualitativa	187
8.3.1 L'enfocament interpretatiu	190
8.3.1.1. La tradició humanista d'investigació	192
8.3.1.1.1. La perspectiva fenomenològica	194
8.3.1.1.2. La perspectiva hermenèutica	194
8.3.1.1.3. La perspectiva naturalista	195
8.3.1.1.4. La perspectiva constructivista	196
8.4. Mètodes de recollida de dades de la metodologia qualitativa	199
8.4.1. L'estudi de cas	200
8.4.1.1. Tècniques d'obtenció de dades	205
8.4.1.2. L'anàlisi de les dades (grounded theory)	207
8.4.1.3. La interpretació de les dades (triangulació)	210
Capítol 9. Disseny de la recerca	212
9.1 El nostre estudi de cas	212
9.1.1. El centre formador	213
9.1.1.1. Característiques del centre educatiu	213
9.1.2. Trets d'identitat del centre educatiu	214
9.2 Participants i aula	214

9.3 Instruments per recollir les dades	215
9.3.1. El disseny: selecció del contingut curricular	216
9.3.2. La Tasca 1	224
9.3.2.1. El contingut curricular de la Tasca 1	224
9.3.2.1.1. Justificació de la selecció dels continguts curriculars de la Tasca 1	224
9.3.2.2. El disseny didàctic de la Tasca 1	227
9.3.3. La Tasca 2	231
9.3.3.1. El contingut curricular de la Tasca 2	231
9.3.3.1.1. Justificació de la selecció dels continguts curriculars de la Tasca 2	231
9.3.3.2. El disseny didàctic de la Tasca 2	232
9.3.4. Els qüestionaris	235
9.3.5. Les notes de camp	235
Capítol 10. Procediment i instruments d'anàlisi	237
10.1. Configuració epistèmica hipotètica de les tasques	238
10.1.1. Configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1	239
10.1.1.1. La unitat d'anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1	240
10.1.1.2. L'esquema de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1	242
10.1.2. Configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2	242
10.1.2.1. La unitat d'anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2	243
10.1.2.2. L'esquema de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2	245

10.2. Trajectòria didàctica hipotètica de les tasques	246
10.2.1. Trajectòria didàctica hipotètica de la Tasca 1	249
10.2.1.1. La subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi	250
10.2.1.2. La subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi	251
10.2.1.3. La subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi	252
10.2.2. Trajectòria didàctica hipotètica de la Tasca 2	253
10.2.2.1. La subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi	254
10.2.2.2. La subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi	255
10.2.2.3. La subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi	256
10.3. Indicadors d' <i>idoneïtat didàctica</i> de les tasques	257
10.3.1 La unitat d'anàlisi pels indicadors d' <i>idoneïtat didàctica</i>	262
10.3.2 Codis d'anàlisi pels indicadors d' <i>idoneïtat didàctica</i>	262
10.3.2.1. Codis numèrics dels indicadors d' <i>idoneïtat didàctica</i>	264
10.3.2.2. Codis de color dels indicadors i les components d' <i>idoneïtat didàctica</i>	264
10.3.3 <i>Idoneïtat didàctica</i> hipotètica	265
10.3.3.1. La idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 1	266
10.3.3.1.1. La idoneïtat epistèmica hipotètica de la Tasca 1	267
10.3.3.1.2. La idoneïtat cognitiva hipotètica de la Tasca 1	269
10.3.3.1.3. La idoneïtat interaccional hipotètica de la Tasca 1	271
10.3.3.1.4. La idoneïtat mediacional hipotètica de la Tasca 1	273
10.3.3.1.5. La idoneïtat afectiva hipotètica de la Tasca 1	276

10.3.3.1.6. La idoneïtat ecològica hipotètica de la Tasca 1	277
10.3.3.1.7. Les dimensions de la <i>idoneïtat didàctica</i> hipotètica de la Tasca 1	280
10.3.3.2. La idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 2	282
10.3.3.2.1. La idoneïtat epistèmica hipotètica de la Tasca 2	282
10.3.3.2.2. La idoneïtat cognitiva hipotètica de la Tasca 2	285
10.3.3.2.3. La idoneïtat interaccional hipotètica de la Tasca 2	287
10.3.3.2.4. La idoneïtat mediacional hipotètica de la Tasca 2	289
10.3.3.2.5. La idoneïtat afectiva hipotètica de la Tasca 2	292
10.3.3.2.6. La idoneïtat ecològica hipotètica de la Tasca 2	293
10.3.3.2.7. Les dimensions de la <i>idoneïtat didàctica</i> hipotètica de la Tasca 2	295
Capítol 11. Consideracions ètiques i de qualitat de la recerca	298
11.1. Criteris ètics	299
11.1.1. Honestedat	299
11.1.2. Responsabilitat i rendició de comptes	300
11.2. Criteris de qualitat	300
11.2.1. Fiabilitat	300
11.2.2. Rigor	300
11.2.2.1. Generalització i limitacions	301
11.2.3. Independència	301
11.2.3.1. Validació dels instruments d'anàlisi	301

11.2.3.2. Replicabilitat	302
11.3. Criteris de respecte	303
11.3.1. Igualtat de gènere	303
 Quarta Part. Resultats	
Capítol 12. Configuracions epistèmiques	304
12.1. Configuració epistèmica de la Tasca 1	305
12.1.1. Les unitats d'anàlisi per la configuració epistèmica de la Tasca 1	305
12.1.2. L'esquema de la configuració epistèmica de la Tasca 1	308
12.2. Configuració epistèmica de la Tasca 2	309
12.2.1. La unitat d'anàlisi per la configuració epistèmica de la Tasca 2	310
12.2.2. L'esquema de la configuració epistèmica de la Tasca 2	313
 Capítol 13. Trajectòries didàctiques	314
13.1. Trajectòria didàctica de la Tasca 1	315
13.1.1. La subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi	315
13.1.2. La subtrajectòria docent de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi	317
13.1.3. La subtrajectòria discent de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi	318
13.2. Trajectòria didàctica de la Tasca 2	320
13.2.1. La subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi	321
13.2.2. La subtrajectòria docent de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi	322

13.2.3. La subtrajectòria discent de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi	323
Capítol 14. Idoneïtat didàctica	324
14.1. Les dimensions de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 1	324
14.1.1. La idoneïtat epistèmica de la Tasca 1	325
14.1.2. La idoneïtat cognitiva de la Tasca 1	328
14.1.3. La idoneïtat interaccional de la Tasca 1	330
14.1.4. La idoneïtat mediacional de la Tasca 1	333
14.1.5. La idoneïtat afectiva de la Tasca 1	335
14.1.6. La idoneïtat ecològica de la Tasca 1	336
14.1.7. La <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 1	338
14.2. Les dimensions de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 2	340
14.2.1. La idoneïtat epistèmica de la Tasca 2	341
14.2.2. La idoneïtat cognitiva de la Tasca 2	344
14.2.3. La idoneïtat interaccional de la Tasca 2	345
14.2.4. La idoneïtat mediacional de la Tasca 2	347
14.2.5. La idoneïtat afectiva de la Tasca 2	349
14.2.6. La idoneïtat ecològica de la Tasca 2	351
14.2.7. La <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 2	352

Cinquena Part: Discussió dels resultats

Capítol 15. Discussió de les configuracions epistèmiques	355
15.1. Discussió de les configuracions epistèmiques de la Tasca 1	356
15.2. Discussió de la configuració epistèmica de la Tasca 2	359
Capítol 16. Discussió de les trajectòries didàctiques	364
16.1. Discussió de la trajectòria didàctica de la Tasca 1	365
16.1.1 Discussió de la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1	365
16.1.2. Discussió de la subtrajectòria docent de la Tasca 1	367
16.1.3. Discussió de la subtrajectòria discent de la Tasca 1	367
16.2. Discussió de la trajectòria didàctica de la Tasca 2	370
16.2.1. Discussió de la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2	370
16.2.2. Discussió de la subtrajectòria docent de la Tasca 2	372
16.2.3. Discussió de la subtrajectòria discent de la Tasca 2	373
Capítol 17. Discussió de la idoneïtat didàctica	375
17.1. Discussió de les dimensions de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 1	376
17.1.1. Discussió de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 1	376
17.1.2. Discussió de la idoneïtat cognitiva de la Tasca 1	381
17.1.3. Discussió de la idoneïtat interaccional de la Tasca 1	384
17.1.4. Discussió de la idoneïtat mediacional de la Tasca 1	388

17.1.5. Discussió de la idoneïtat afectiva de la Tasca 1	392
17.1.6. Discussió de la idoneïtat ecològica de la Tasca 1	395
17.1.7. Discussió de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 1	398
17.2. Discussió de les dimensions de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 2	400
17.2.1. Discussió de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 2	400
17.2.2. Discussió de la idoneïtat cognitiva de la Tasca 2	405
17.2.3. Discussió de la idoneïtat interaccional de la Tasca 2	408
17.2.4. Discussió de la idoneïtat mediacional de la Tasca 2	412
17.2.5. Discussió de la idoneïtat afectiva de la Tasca 2	416
17.2.6. Discussió de la idoneïtat ecològica de la Tasca 2	419
17.2.7. Discussió de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la Tasca 2	422

Sisena Part: Conclusions, impacte i limitacions

Capítol 18. Conclusions	425
18.1. Conclusions sobre els objectius particulars	430
18.1.1. Conclusions sobre l'anàlisi de la seqüència didàctica i la pràctica docent	437
18.2. Conclusions generals	440
Capítol 19. Impacte i limitacions de l'estudi	443
19.1 Impacte de l'estudi	443
19.1 Limitacions d'aquest estudi i prospectiva	446

Referències	448
Annexos	469
Annex 1. Justificació de la tria dels continguts curricular de la Tasca 1	470
Annex 2. Full d'instruccions pels alumnes (Tasca 1, Tipus 1)	471
Annex 3. Full d'instruccions pels alumnes (Tasca 1, Tipus 2)	472
Annex 4. Full d'instruccions pels alumnes (Tasca 1, Tipus 3)	473
Annex 5. Full de respostes pel registre de les activitats de la Tasca 1	474
Annex 6. Full d'instruccions per orientar en la implementació de la Tasca 1	476
Annex 7. Disseny didàctic de la Tasca 1	477
Annex 8. Full d'instruccions pels alumnes pel desenvolupament de la Tasca 2	479
Annex 9. Mapamundi lliurat als alumnes pel desenvolupament de la Tasca 2	481
Annex 10. Full d'instruccions per orientar en la implementació de la Tasca 2	482
Annex 11. Disseny didàctic de la Tasca 2	485
Annex 12. Qüestionari per valorar alguns indicadors de la idoneïtat didàctica per part dels alumnes basat en Godino (2013) i Breda, Font i Pino-Fan (2018)	487
Annex 13. Qüestionari per valorar alguns indicadors de la idoneïtat didàctica per part dels professors basat en Godino (2013) i Breda, Font i Pino-Fan (2018)	489
Annex 14. Notes de camp de la Tasca 1	491
Annex 15. Notes de camp de la Tasca 2	495

Annex 16. Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels objectes primaris per l'establiment de la seva configuració epistèmica	500
Annex 17. Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels objectes primaris per l'establiment de la seva configuració epistèmica	504
Annex 18. Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels estats per l'establiment de la seva subtrajectòria epistèmica	509
Annex 19. Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació de les funcions per l'establiment de la seva subtrajectòria docent	513
Annex 20. Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria discent	517
Annex 21. Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria epistèmica	521
Annex 22. Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria docent	526
Annex 23. Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria discent	531
Annex 24. Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels indicadors d'idoneïtat didàctica	536
Annex 25. Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels indicadors d'idoneïtat didàctica	540

Índex de figures

Figura 1.1.1. Llenguatge relacionat amb els nivells de van Hiele basat en Crowley	49
Figura 1.2.1. Producció de dibuix geomètric esperada	51
Figura 1.2.2. Full d'instruccions de la tasca de dibuix geomètric	52
Figura 1.2.3. Producció de dibuix geomètric obtingut	53
Figura 1.2.4. Esquema d'idoneïtat didàctica per la tasca de dibuix geomètric basat en els indicadors proposats per Godino	54
Figura 3.1.1. Etapes d'aprenentatge i ensenyament de la geometria de l'Associació Matemàtica del Regne Unit	60
Figura 3.1.2. Activitats que permeten l'assoliment dels conceptes geomètrics segons Gonseth	61
Figura 3.2.1. Etapes o formes del raonament racional segons van Hiele	63
Figura 3.2.2. Model de raonament geomètric de van Hiele	64
Figura 3.2.3. Fases per avançar dins els nivells del model de raonament geomètric de van Hiele	67
Figura 3.2.4. Propietats del model de raonament geomètric de van Hiele segons Crowley ..	68
Figura 3.3.1. Aspectes del raonament geomètric de Fischbein	73
Figura 3.3.2. Propietats intrínseques de les figures geomètriques segons Fischbein	74
Figura 3.3.3. Categories d'entitats mentals relacionades amb figures geomètriques	75
Figura 3.4.1. Tipus d'aprehensió cognitiva pel dibuix geomètric segons Duval	76
Figura 3.4.2. Processos cognitius del raonament geomètric segons Duval	77
Figura 3.4.3. Interaccions entre els processos de raonament geomètric característiques de l'activitat geomètrica segons Duval	78

Figura 3.5.1. Tipus de imatge visual segons Presmeg	81
Figura 3.6.1. Les tres habilitats per assolir el sentit espacial	83
Figura 3.7.1. Els dos tipus bàsics de coneixement segons la teoria ACT-R	84
Figura 3.7.2. Discretització d'una tasca segons l'ACT-R	86
Figura 5.1. Enfocaments de la didàctica de les matemàtiques	87
Figura 5.1.1. Models d'aprenentatge segons Piaget i Vigotsky	88
Figura 5.1.2. Les quatre dimensions de la geometria segons Usiskin	91
Figura 5.1.3. Geometria com font de models veritables inspirada en Herbst i col·laboradors	92
Figura 5.1.1.1. Principis de l'ensenyament de les matemàtiques	94
Figura 5.1.1.2. Recomanació de la distribució dels continguts matemàtics per grups i per curs del NCTM	99
Figura 5.1.1.3. Orientacions per a la implementació dels continguts curriculars	100
Figura 5.3.1. Elements de la competència matemàtica segons Shoenfeld	105
Figura 5.3.2. Components de la competència matemàtica	106
Figura 5.3.3. Les Pràctiques Matemàtiques (NCTM, 2001) i la competència matemàtica ..	108
Figura 5.4.1. Aspectes de l'alfabetització matemàtica en alumnes de 15 anys	109
Figura 5.4.2. L'avaluació de la competència matemàtica, per alumnes de quart curs	110
Figura 5.4.3. Aspectes per avaluar la competència matemàtica	111
Figura 5.4.3. Resultats de Matemàtiques de la prova PISA	112
Figura 5.4.4. Percentatge d'alumnes per nivell d'assoliment de competència matemàtica	113
Figura 5.3.1. Pràctiques matemàtiques	124

Figura 5.4.1.1. Caracterització dels nivells de raonament geomètric de van Hiele basat en Godino i Ruiz	129
Figura 5.4.3.1. Exemples d'hexòminos que generen el cub, basat en Vecino	131
Figura 6.1. Desenvolupament de la competència vocacional segons Rauner	134
Figura 6.1.2.1. Característiques del model PCK de Shulman	137
Figura 6.1.2.2. Àrees del “coneixement del procés de treball” segons Rauner	138
Figura 6.1.2.3. Característiques del model de Ball, Thames i Phelps	138
Figura 6.1.2.4. Característiques del model TPACK de Mishra i Koehler	139
Figura 6.1.3.1. Diagrama simplificat de la metodologia de l'estudi de lliçons basat en Fernández i Yoshida	141
Figura 6.1.4.1. Components del constructe de la idoneïtat didàctica	143
Figura 6.1.6.1. Característiques del constructivisme	145
Figura 6.1.6.2. Aspectes d'una trajectòria hipotètica d'aprenentatge basat en Simon i Clements	146
Figura 7.2.1.1.1. El “triangle bàsic” d'Ogden i Richards i les representacions com objectes mentals de Font	150
Figura 7.2.1.1.2. Exemples de <i>semàntica realista</i>	151
Figura 7.2.4.1. Entitats primàries de l'ontosemiòtica	157
Figura 7.2.4.2. Rerefons ecològic de les pràctiques didàctiques i matemàtiques	158
Figura 7.2.4.3. Configuració ontosemiòtica i significats pragmàtics	158
Figura 7.2.4.4. Configuració ontosemiòtica de pràctiques, objectes i processos basat en Godino	159
Figura 7.3.1. Components de la idoneïtat didàctica basat en Godino	161

Figura 7.3.2. Facetes, components i indicadors de la idoneïtat didàctica segons Godino	163
Figura 7.3.1.1. Components i indicadors de la idoneïtat epistèmica segons Godino	165
Figura 7.3.1.2. Components i característiques de la idoneïtat epistèmica segons Breda, Font i Pino-Fan	166
Figura 7.3.2.1. Components i indicadors de la idoneïtat cognitiva segons Godino	169
Figura 7.3.2.2. Components i característiques de la idoneïtat epistèmica segons Breda, Pino-Fan i Font	170
Figura 7.3.2.3. Components i indicadors de la idoneïtat cognitiva segons Godino considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font	170
Figura 7.3.3.1. Components i indicadors de la idoneïtat interaccional segons Godino	171
Figura 7.3.3.2. Components i indicadors de la idoneïtat interaccional segons Godino considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font	172
Figura 7.3.4.1. Components i indicadors de la idoneïtat mediacional segons Godino	173
Figura 7.3.5.2. Components i indicadors de la idoneïtat mediacional segons Godino considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font	173
Figura 7.3.5.1. Components i indicadors de la idoneïtat interaccional segons Godino	174
Figura 7.3.6.1. Components i indicadors de la idoneïtat ecològica segons Godino	175
Figura 7.3.6.2. Components i indicadors de la idoneïtat ecològica segons Breda, Pino-Fan i Font	175
Figura 7.3.6.3. Components i indicadors de la idoneïtat ecològica segons Godino considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font	176
Figura 7.4.1.1. Configuració epistèmica de la sessió de classe	178
Figura 7.4.2.1. Indicadors de la idoneïtat epistèmica específics de probabilitat segons Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone	180

Figura 7.4.2. Indicadors de la idoneïtat cognitiva específics de probabilitat segons Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone	181
Figura 8.1. Relació entre fets, fenòmens i dades segons Arnal, del Rincón i Latorre	183
Figura 8.1.1. Característiques principals del coneixement científic segons Sabariego i Bisquerra	184
Figura 8.2.1. Característiques d'una investigació científica segons Sabariego i Bisquerra	185
Figura 8.2.2. Característiques de la investigació educativa segons Arnal, del Rincón i Latorre	186
Figura 8.3.1. Característiques principals d'un Estudi Qualitatiu segons Stake	188
Figura 8.3.2. Principis-guia d'un estudi qualitatiu	189
Figura 8.3.3. Tipus d'Estudis Qualitatius segons Stake (2010)	190
Figura 8.3.1.1.3.1. Aspectes de la perspectiva naturalista d'una recerca qualitativa	196
Figura 8.3.1.1.4.1. Construcció i interpretació com significats provinents de les experiències d'interacció amb el món	197
Figura 8.3.1.1.4.2. Aspectes de la reclamació de coneixement d'una recerca qualitativa segons Creswell	197
Figura 8.3.1.1.4.3. Característiques de la posició constructivista per l'establiment de la reclamació de coneixement en una recerca qualitativa	198
Figura 8.4.1.1.1. Tipus d'estudis de cas	202
Figura 8.4.1.1.2. Famílies d'estudis de cas	203
Figura 8.4.1.1.1. Mètodes de recollida de dades en un estudi qualitatiu basat en Stake	205
Figura 8.4.1.1.2. Mètodes de recollida de dades en un estudi qualitatiu basat en Stake (2010) i algunes de les seves possibles combinacions	206
Figura 8.4.1.2.1. Cànons i procediments de la <i>grounded theory</i>	208

Figura 9.1.1. Esquema dels elements de l'estudi de cas d'aquesta recerca	212
Figura 9.2.1. Esbós aproximant de l'organització del grup dins l'aula	215
Figura 9.3.1. Esquema dels instruments de recollida de dades de l'estudi de cas d'aquesta recerca	216
Figura 9.3.1.1. Esquema de la relació entre la selecció dels continguts curriculars i els instruments de recollida de dades de l'estudi de cas d'aquesta recerca	233
Figura 9.3.2.1.1. Esquema dels continguts curriculars de les tasques de l'estudi de cas d'aquesta recerca	226
Figura 9.3.2.2.1. Esquema dels continguts curriculars de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	227
Figura 9.3.2.2.1. Context de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	228
Figura 9.3.2.2.2. Instruccions Tipus 1 de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	229
Figura 9.3.2.2.3. Instruccions Tipus 2 de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	229
Figura 9.3.2.2.4. Instruccions Tipus 3 de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	230
Figura 9.3.2.2.5. Orientació per implementar la tasca 1 a l'aula per l'estudi de cas d'aquesta recerca	231
Figura 9.3.3.1.1.1. Esquema dels continguts curriculars de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	232
Figura 9.3.3.2.1. Context de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	233
Figura 9.3.2.2.2. Instruccions de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	234
Figura 9.3.4.1. Esquema específic dels instruments d'obtenció d'informació relacionada amb els indicadors d'idoneïtat didàctica de l'estudi de cas d'aquesta recerca	235
Figura 9.3.5.1. Esquema específic dels instruments d'obtenció d'informació de l'estudi de cas d'aquesta recerca	236

Figura 10.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i els constructes d'anàlisi didàctica de l'EOS per l'estudi de cas d'aquesta recerca	237
Figura 10.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració hipotètica d'objectes primaris de l'estudi de cas d'aquesta recerca	238
Figura 10.1.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.	239
Figura 10.1.1.2.1. Configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	242
Figura 10.1.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.	243
Figura 10.1.2.2.1. Configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	246
Figura 10.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les configuracions didàctiques a partir de les interaccions didàctiques identificades amb les trajectòries didàctiques (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca	247
Figura 10.2.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica hipotètica corresponent a la Tasca 1 (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca	250
Figura 10.2.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica hipotètica corresponent a la Tasca 2 (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca	254
Figura 10.3.1. Exemple de la separació dels aspectes d'un indicador d'idoneïtat didàctica d'aquest treball de recerca	258
Figura 10.3.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, les etapes d'anàlisi didàctica i els codis d'anàlisi de l'estudi de cas d'aquesta recerca	263

Figura 10.3.2.1. Codi de colors dels components de les dimensions d'adoneïtat didàctica d'aquest treball de recerca	265
Figura 10.3.3.1. Esquema de la relació entre els instruments de disseny didàctic i la adoneïtat didàctica hipotètica de les tasques de l'estudi de cas d'aquesta recerca	266
Figura 10.3.3.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de disseny didàctic de la Tasca 1, de l'estudi de cas d'aquesta recerca, i la seva adoneïtat didàctica hipotètica	267
Figura 10.3.3.1.1.1. Comparació de la adoneïtat epistèmica hipotètica i la adoneïtat epistèmica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca	269
Figura 10.3.3.1.2.1. Comparació de la adoneïtat cognitiva hipotètica i la adoneïtat cognitiva màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca	271
Figura 10.3.3.1.3.1. Comparació de la adoneïtat interaccional hipotètica i la adoneïtat interaccional màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca	273
Figura 10.3.3.1.4.1. Comparació de la adoneïtat mediacional hipotètica i la adoneïtat mediacional màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca	275
Figura 10.3.3.1.5.1. Comparació de la adoneïtat afectiva hipotètica i la adoneïtat afectiva màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca	277
Figura 10.3.3.1.6.1. Comparació de la adoneïtat ecològica hipotètica i la adoneïtat ecològica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca	279
Figura 10.3.3.1.7.1. Comparació dels components de la adoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 1 i de la adoneïtat didàctica màxima o ideal	280
Figura 10.3.3.1.7.2. Comparació de les dimensions de la adoneïtat didàctica hipotètica i de la adoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca	281
Figura 10.3.3.1.7.3. Comparació de la adoneïtat didàctica hipotètica i de la adoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	281

Figura 10.3.3.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de disseny didàctic de la Tasca 2, de l'estudi de cas d'aquesta recerca, i la seva idoneïtat didàctica hipotètica	282
Figura 10.3.3.2.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica hipotètica i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	284
Figura 10.3.3.2.2.1. Comparació de la idoneïtat cognitiva hipotètica i la idoneïtat cognitiva màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	286
Figura 10.3.3.2.3.1. Comparació de la idoneïtat interaccional hipotètica i la idoneïtat interaccional màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	289
Figura 10.3.3.2.4.1. Comparació de la idoneïtat mediacional hipotètica i la idoneïtat mediacional màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	291
Figura 10.3.3.2.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva hipotètica i la idoneïtat afectiva màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	293
Figura 10.3.3.2.6.1. Comparació de la idoneïtat ecològica hipotètica i la idoneïtat ecològica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	295
Figura 10.3.3.2.7.1. Comparació de les components de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	296
Figura 10.3.3.2.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca	297
Figura 10.3.3.2.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	297
Figura 11.2.2.1.1. Elements i etapes de validació de l'estudi de cas d'aquesta recerca	302
Figura 12.1. Relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració epistèmica d'aquest estudi de cas	304

Figura 12.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració d'objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	305
Figura 12.1.2.1. Configuració epistèmica dels objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	309
Figura 12.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració epistèmica d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	310
Figura 12.2.2.1. Configuració d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	313
Figura 13.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les configuracions didàctiques a partir de les interaccions didàctiques identificades amb les trajectòries didàctiques (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca	314
Figura 13.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica (Godino, Batanero i Font, 2009) de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	315
Figura 13.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica de la Tasca 2 (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca	320
Figura 14.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la idoneïtat didàctica de les tasques de dibuix geomètric de l'estudi de cas d'aquesta recerca	324
Figura 14.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la idoneïtat didàctica de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	325
Figura 14.1.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 1 i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal	328

Figura 14.1.2.1. Comparació de la idoneïtat cognitiva de la Tasca 1 i la idoneïtat cognitiva màxima o ideal	330
Figura 14.1.3.1. Comparació de la idoneïtat interaccional de la Tasca 1 i la idoneïtat interaccional màxima o ideal	332
Figura 14.1.4.1. Comparació de la idoneïtat mediacional de la Tasca 1 i la idoneïtat mediacional màxima o ideal	334
Figura 14.1.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva de la Tasca 1 i la idoneïtat afectiva màxima o ideal	336
Figura 14.1.6.1. Comparació de la idoneïtat ecològica de la Tasca 1 i la idoneïtat ecològica màxima o idea	338
Figura 14.1.7.1. Comparació dels components de la idoneïtat didàctica de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima	339
Figura 14.1.7.2. Comparació de les dimensions d'idoneïtat didàctica de la Tasca 1 i d'idoneïtat didàctica màxima	339
Figura 14.1.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	340
Figura 14.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca	341
Figura 14.2.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 2 i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal	343
Figura 14.2.2.1. Comparació de la idoneïtat cognitiva de la Tasca 2 i la idoneïtat cognitiva màxima o ideal	345
Figura 14.2.3.1. Comparació de la idoneïtat interaccional de la Tasca 2 i la idoneïtat interaccional màxima o ideal	347

Figura 14.2.4.1. Comparació de la idoneïtat mediacional de la Tasca 2 i la idoneïtat mediacional màxima o ideal	349
Figura 14.2.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva de la Tasca 2 i la idoneïtat afectiva màxima o ideal	350
Figura 14.2.6.1. Comparació de la idoneïtat ecològica de la Tasca 2 i la idoneïtat ecològica màxima o ideal	352
Figura 14.2.7.1. Comparació de les components de les dimensions de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal	353
Figura 14.2.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal	353
Figura 14.2.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	354
Figura 15.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, la configuració epistèmica hipotètica i la configuració epistèmica dels objectes primaris de l'estudi de cas d'aquesta recerca	355
Figura 16.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, les trajectòries didàctiques hipotètiques i les trajectòries didàctiques donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca	364
Figura 17.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la idoneïtat didàctica hipotètica i la idoneïtat didàctica de les tasques de dibuix geomètric de l'estudi de cas d'aquesta recerca	375
Figura 17.1.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica hipotètica, la idoneïtat epistèmica de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal	381
Figura 17.1.2.1. Comparació de la idoneïtat cognitiva hipotètica, la idoneïtat cognitiva de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la idoneïtat cognitiva màxima o ideal	384

Figura 17.1.3.1. Comparació de la idoneïtat interaccional hipotètica, la idoneïtat interaccional de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la idoneïtat interaccional màxima o ideal	388
Figura 17.1.4.1. Comparació de la idoneïtat mediacional hipotètica, la idoneïtat mediacional de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la idoneïtat mediacional màxima o ideal	392
Figura 17.1.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva hipotètica, la idoneïtat afectiva de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la idoneïtat afectiva màxima o ideal	394
Figura 17.1.6.1. Comparació de la idoneïtat ecològica hipotètica, la idoneïtat ecològica de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la idoneïtat ecològica màxima o ideal	398
Figura 17.1.7.1. Comparació dels components de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima	399
Figura 17.1.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima	399
Figura 17.1.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica hipotètica, la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	400
Figura 17.2.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica hipotètica, la idoneïtat epistèmica de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal	405
Figura 17.2.2.1. Comparació de la idoneïtat cognitiva hipotètica, la idoneïtat cognitiva de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la idoneïtat cognitiva màxima o ideal	408
Figura 17.2.3.1. Comparació de la idoneïtat interaccional hipotètica, la idoneïtat interaccional de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la idoneïtat interaccional màxima o ideal	412
Figura 17.2.4.1. Comparació de la idoneïtat mediacional hipotètica, la idoneïtat mediacional de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la idoneïtat mediacional màxima o ideal	416

Figura 17.2.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva hipotètica, la idoneïtat afectiva de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la idoneïtat afectiva màxima o ideal	419
Figura 17.2.6.1. Comparació de la idoneïtat ecològica hipotètica, la idoneïtat ecològica de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la idoneïtat ecològica màxima o ideal	422
Figura 17.2.7.1. Comparació dels components de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima	423
Figura 17.2.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima	424
Figura 17.2.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica hipotètica, la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	424
Figura 18.1. Esquema del model del Coneixement Didàctic-Matemàtic basat en Pino-Fan, Castro i Font	426
Figura 18.2. Comparació dels objectes primaris de les configuracions epistèmiques hipotètica i de la implementació de la Tasca 1	428
Figura 18.3. Comparació dels objectes primaris de les configuracions epistèmiques hipotètica i de la implementació de la Tasca 2	429
Figura 18.1.1. Tendència dels components de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima	431
Figura 18.1.2. Tendència de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima	432
Figura 18.1.3. Tendència de la idoneïtat didàctica hipotètica, la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	432
Figura 18.1.4. Tendència dels components de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima	433

Figura 18.1.5. Tendència de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima	434
Figura 18.1.6. Tendència de la idoneïtat didàctica hipotètica, la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino	435
Figura 18.2.1. Esquematització de la influència dels constructes de l'EOS en el model CCDM (Font, 2011; Breda, Pino-Fan i Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero i Font, 2017; Pino-Fan, Font i Breda, 2017) com a eina de sistematització de l'observació (Fuentes, 2011) de la “mirada crítica propositiva” del professor (Ávila, 2008)	441

Índex de taules

Taula 1.1. Expressions orals i nivells de van Hiele bassat en Clements i Sarama	50
Taula 3.1.1. Models de la comprovació de Villiers	62
Taula 3.2.1. Aspectes que contribueixen a la fonamentació concreta de la geometria segons P.M. van Hiele	64
Taula 3.2.2. Indicadors del Nivell 0 de raonament geomètric de van Hiele	70
Taula 3.2.3. Indicadors del Nivell 1 de raonament geomètric de van Hiele	70
Taula 3.2.4. Indicadors del Nivell 2 de raonament geomètric de van Hiele	71
Taula 3.2.5. Indicadors del Nivell 3 de raonament geomètric de van Hiele	72
Taula 4.1.1. Aspectes que contribueixen a la fonamentació concreta de la geometria segons van Hiele	90
Taula 4.1.2. Consells per l'aprenentatge profund de la geometria	93
Taula 4.1.1.1. Models d'organització curricular	94
Taula 4.1.2.1. Objectius de l'aprenentatge de la geometria	102
Taula 4.2.1. Comparació de programes d'estudi de la geometria per a alumnes de 12-13 anys a Catalunya i els Estats Units	103
Taula 4.2.2. Comparació de programes d'estudi de la geometria per a alumnes de 13-14 anys a Catalunya i els Estats Units	103
Taula 4.2.3. Comparació de programes d'estudi de la geometria per a alumnes de 14-15 anys a Catalunya i els Estats Units	103
Taula 4.2.4. Comparació de continguts del bloc "Espai i Forma" per alumnes catalans d'ESO (Decret 187/2015)	104

Taula 4.4.1. Indicadors de la competència matemàtica per a estudiants d'ESO a l'àmbit de geometria segons la NAEP	112
Taula 4.4.2. Conceptes que representen problemes pels estudiants de l'ESO segons la NAEP	114
Taula 4.4.3. Nocions que obstaculitzen l'aprenentatge de la geometria segons Clements i Battista	115
Taula 5.1.1. Continguts curriculars dels continguts clau de geometria a l'ESO	118
Taula 5.2.1. Continguts clau representatius de les competències matemàtiques d'ESO referides a la geometria	120
Taula 5.2.2. Dimensions de les competències matemàtiques d'ESO relacionades amb els continguts clau representatius de la geometria	121
Taula 5.4.1. Orientacions per a la didàctica de la geometria	127
Taula 5.4.2.1. Errors associats al dibuix de transformacions geomètriques	130
Taula 6.1.1.1. Etapes del desenvolupament cognitiu del model SOLO	136
Taula 6.1.1.2. Relacions dades - resposta (estructura de la resposta) per a les fases del model SOLO	136
Taula 6.1.2.1. Elements del TPACK	140
Taula 6.1.5.1. Processos principals del “teacher noticing” segons Sherin, Jacobs i Philipps .	144
Taula 7.1. Etapes de recerca pel desenvolupament de l'EOS	147
Taula 7.1.1. Idees fonamentals sobre la noció de significat dels objectes matemàtics de l'EOS	148
Taula 7.2.1.1.1. Recull de teories del significat classificades segons el criteri de Kutschera ...	151
Taula 7.2.1.3.1. Categories ontològiques del pragmaticisme de Peirce	152
Taula 7.2.2.1. Perspectives antropològiques de les matemàtiques considerades per l'EOS ...	153

Taula 7.2.3.1. Interpretacions de “representació” i “sistema de representació” considerades per l’EOS a partir de les propostes de Goldin i Janvier	154
Taula 7.2.3.2. Trets de les “representacions” i “sistemes de representacions” considerades per l’EOS	155
Taula 7.2.3.3. Arguments de Duval per recolzar la necessitat d’utilitzar sistemes semiòtics de representació i expressió diferents per l’aprenentatge de les matemàtiques considerats per l’EOS	156
Taula 7.3.1. Facetes d’idoneïtat didàctica	161
Taula 7.3.2. Criteris d’idoneïtat generals de les facetes d’idoneïtat didàctica	162
Taula 7.3.1.1. Criteris d’idoneïtat epistèmica segons els seus components	163
Taula 7.3.1.2. Comparació de la idoneïtat epistèmica segons Godino (2013) i Breda, Font i Pino-Fan (2018)	167
Taula 7.3.2.1. Criteris d’idoneïtat cognitiva segons els seus components	168
Taula 7.4.1. Selecció d’articles sobre la idoneïtat didàctica a la pàgina web de l’EOS	177
Taula 7.4.1.1. Valoració de la idoneïtat didàctica del procés d’instrucció matemàtica analitzat	179
Taula 7.5.1. Articles sobre aplicacions del constructe idoneïtat didàctica a continguts de geometria a la pàgina web de l’EOS	182
Taula 8.2.1. Suposats i funcions que validen la contribució de la investigació educativa en la millora de l’educació	187
Taula 8.3.1.1. Dimensions de la perspectiva interpretativa segons Koetting	190
Taula 8.3.1.2. El plantejament interpretatiu	192
Taula 8.3.1.3. Aspectes bàsics de la perspectiva qualitativa, interpretativa i naturalista	193
Taula 8.3.1.1.1. La perspectiva humanista segons Plummer	193

Taula 8.3.1.1.2.1. La perspectiva hermenèutica segons Gummesson	195
Taula 8.3.1.1.4.1. La perspectiva constructivista de la recerca qualitativa segons Crotty	199
Taula 8.4.1. Mètodes de la metodologia qualitativa aplicats a la investigació educativa	199
Taula 8.4.1.1.1. Característiques de l'estudi de cas segons Merriam	200
Taula 8.4.1.1.2. Possibles objectius de l'estudi de cas segons Ary i col·laboradors	201
Taula 8.4.1.1.3. Comparatiu de les classificacions de l'estudi de cas segons diferents fonts de referència	204
Taula 8.4.1.1.4. Avantatges i limitacions d'un estudi de cas	205
Taula 8.4.1.2.1. Codificació de les dades de la "grounded theory"	208
Taula 8.4.1.2.2. Criteris d'avaluació del procés de recerca de la "grounded theory"	209
Taula 8.4.1.2.3. Criteris dels fonaments empírics de la "grounded theory"	209
Taula 8.4.1.2.4. Avantatges de la utilització dels procediments de la "grounded theory"	210
Taula 8.4.1.3.1. Preguntes que ajuden a la triangulació de les dades qualitatives	211
Taula 9.3.1.1. Dimensió de Resolució de problemes	217
Taula 9.3.1.2. Dimensió de Raonament i prova	218
Taula 9.3.1.3. Dimensió de Connexions	219
Taula 9.3.1.4. Dimensió de Comunicació i representació	220
Taula 9.3.1.5. Orientacions per l'avaluació de l'assoliment de les competències matemàtiques relacionades amb el dibuix geomètric	220
Taula 9.3.1.6. Continguts curriculars associats als continguts clau de la dimensió de Resolució de problemes i Connexions	221
Taula 9.3.1.7. Continguts curriculars associats als continguts clau de la dimensió de Raonament i prova	222

Taula 9.3.1.8. Continguts curriculars associats als continguts clau de la dimensió de Comunicació i representació	223
Taula 9.3.2.1.1. Continguts curriculars del bloc “Espai i forma” associats als continguts clau	224
Taula 9.3.2.1.2. Processos i continguts del bloc “Espai i forma” associats als continguts clau	226
Taula 9.3.2.2.1. Objectius d’aprenentatge de la Tasca 1	228
Taula 9.3.2.2.2. Preguntes del Full de Respostes de la Tasca 1	230
Taula 9.3.3.2.1. Objectius d’aprenentatge de la Tasca 2	233
Taula 10.1.1.1.1. Unitats d’anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1	240
Taula 10.1.2.1.1. Unitats d’anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2	244
Taula 10.2.1. Estats possibles dins una subtrajectòria epistèmica segons Godino, Contreras i Font	248
Taula 10.2.2. Funcions possibles dins una subtrajectòria docent segons Godino, Contreras i Font	248
Taula 10.2.3. Funcions o estats possibles dins una subtrajectòria discent segons Godino, Contreras i Font	249
Taula 10.2.1.1.1. Subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font	251
Taula 10.2.1.2.1. Subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 1 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font	252
Taula 10.2.1.3.1. Subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font	253
Taula 10.2.2.1.1. Subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 2 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font	255

Taula 10.2.2.2.1. Subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font	256
Taula 10.2.1.3.1. Subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 2 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font	257
Taula 10.3.1. Numeració dels indicadors d'idoneïtat epistèmica	258
Taula 10.3.2. Numeració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva	259
Taula 10.3.3. Numeració dels indicadors d'idoneïtat interaccional	260
Taula 10.3.4. Numeració dels indicadors d'idoneïtat mediacional	261
Taula 10.3.5. Numeració dels indicadors d'idoneïtat afectiva	262
Taula 10.3.6. Numeració dels indicadors d'idoneïtat ecològica	262
Taula 10.3.2.1.1. Valors per especificar el nivell d'assoliment d'un indicador	264
Taula 10.3.2.1. Codis de color per les dimensions d'idoneïtat didàctica d'aquest treball de recerca	265
Taula 10.3.3.1.1.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat epistèmica per a la implementació de la Tasca 1	268
Taula 10.3.3.1.2.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat cognitiva per a la implementació de la Tasca 1	270
Taula 10.3.3.1.3.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat interaccional per a la implementació de la Tasca 1	272
Taula 10.3.3.1.4.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat mediacional per a la implementació de la Tasca 1	274
Taula 10.3.3.1.5.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat afectiva per a la implementació de la Tasca 1	276
Taula 10.3.3.1.6.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat ecològica per a la implementació de la Tasca 1	278

Taula 10.3.3.2.1.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat epistèmica per a la implementació de la Tasca 2	283
Taula 10.3.3.2.2.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat cognitiva per a la implementació de la Tasca 2	285
Taula 10.3.3.2.3.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat interaccional per a la implementació de la Tasca 2	288
Taula 10.3.3.2.4.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat mediacional per a la implementació de la Tasca 2	290
Taula 10.3.3.2.5.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat afectiva per a la implementació de la Tasca 2	292
Taula 10.3.3.2.6.1. Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat ecològica per a la implementació de la Tasca 2	294
Taula 11.1. Objectius del Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona	298
Taula 11.2. Principis de la integritat en la recerca de la Universitat de Barcelona	299
Taula 12.1.1.1. Unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica de la Tasca 1	308
Taula 12.2.1.1. Unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica de la Tasca 2	312
Taula 13.1.1.1. Subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font	316
Taula 13.1.2.1. Subtrajectòria docent de la Tasca 1 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font	318
Taula 13.1.3.1. Subtrajectòria discent de la Tasca 1 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font	319
Taula 13.2.1.1. Subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font	321

Taula 13.2.2.1. Subtrajectòria docent de la Tasca 2 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font	322
Taula 13.2.3.1. Subtrajectòria discent de la Tasca 2 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font	323
Taula 14.1.1.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat epistèmica de la Tasca 1	326
Taula 14.1.2.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva de la Tasca 1	329
Taula 14.1.3.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional de la Tasca 1	331
Taula 14.1.4.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional de la Tasca 1	333
Taula 14.1.5.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat afectiva de la Tasca 1	335
Taula 14.1.6.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat ecològica de la Tasca 1	337
Taula 14.2.1.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat epistèmica de la Tasca 2	342
Taula 14.2.2.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva de la Tasca 2	344
Taula 14.2.3.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional de la Tasca 2	346
Taula 14.2.4.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional de la Tasca 2	348
Taula 14.2.5.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat afectiva de la Tasca 2	350
Taula 14.2.6.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat ecològica de la Tasca 2	351
Taula 15.1.1. Comparació de les situacions-problema de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1	356
Taula 15.1.2. Comparació de les definicions (conceptes) de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1	357
Taula 15.1.3. Comparació de les llenguatge matemàtic verbal/escrit de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1	357
Taula 15.1.4. Comparació de les llenguatge matemàtic gràfic de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1	358

Taula 15.1.5. Comparació de les propietats/proposicions de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1	358
Taula 15.1.6. Comparació de les procediments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1	358
Taula 15.1.7. Comparació dels arguments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1	359
Taula 15.2.1. Comparació de les situacions-problemes de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2	360
Taula 15.2.2. Comparació de les definicions (conceptes) de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2	360
Taula 15.2.3. Comparació del llenguatge matemàtic verbal/escrit de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2	361
Taula 15.2.4. Comparació del llenguatge matemàtic gràfic de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2	361
Taula 15.2.5. Comparació de les propietats/proposicions de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2	362
Taula 15.2.6. Comparació dels procediments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2	362
Taula 15.2.7. Comparació dels arguments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2	363
Taula 16.1.1.1. Comparació de la subtrajectòria epistèmica hipotètica i la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1	366
Taula 16.1.2.1. Comparació de la subtrajectòria docent hipotètica i la subtrajectòria docent de la Tasca 1	368
Taula 16.1.3.1. Comparació de la subtrajectòria discent hipotètica i la subtrajectòria discent de la Tasca 1	369

Taula 16.2.1.1. Comparació de la subtrajectòria epistèmica hipotètica i la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2	371
Taula 16.2.2.1. Comparació de la subtrajectòria docent hipotètica i la subtrajectòria docent de la Tasca 2	372
Taula 16.2.3.1. Comparació de la subtrajectòria discent hipotètica i la subtrajectòria discent de la Tasca 2	374
Taula 17.1.1.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica i de la implementació de la Tasca 1	377
Taula 17.1.1.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1	378
Taula 17.1.1.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1	379
Taula 17.1.1.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1	379
Taula 17.1.1.5. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van millorar la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1	380
Taula 17.1.2.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 1	382
Taula 17.1.2.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 1	383
Taula 17.1.2.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 1	383
Taula 17.1.2.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 1	383
Taula 17.1.3.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica i de la implementació de la Tasca 1	385

Taula 17.1.3.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 1	386
Taula 17.1.3.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 1	387
Taula 17.1.3.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 1 ...	387
Taula 17.1.4.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica i de la implementació de la Tasca 1	389
Taula 17.1.4.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 1	390
Taula 17.1.4.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 1	390
Taula 17.1.4.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 1	391
Taula 17.1.5.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 1	393
Taula 17.1.5.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 1	393
Taula 17.1.5.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 1	394
Taula 17.1.5.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 1	394
Taula 17.1.6.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica i de la implementació de la Tasca 1	396
Taula 17.1.6.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 1	397

Taula 17.1.6.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 1	397
Taula 17.2.1.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica i de la implementació de la Tasca 2	401
Taula 17.2.1.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2	402
Taula 17.2.1.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2	403
Taula 17.2.1.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2	403
Taula 17.2.1.5. Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van millorar la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2	404
Taula 17.2.2.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 2	406
Taula 17.2.2.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 2	406
Taula 17.2.2.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 2	407
Taula 17.2.3.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica i de la implementació de la Tasca 2	409
Taula 17.2.3.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 2	410
Taula 17.2.3.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 2	410
Taula 17.2.3.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 2	411

Taula 17.2.4.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica i de la implementació de la Tasca 2	413
Taula 17.2.4.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 2	414
Taula 17.2.4.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 2	415
Taula 17.2.4.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 2	415
Taula 17.2.5.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 2	417
Taula 17.2.5.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 2	417
Taula 17.2.5.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 2	418
Taula 17.2.6.1. Valoració dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica i de la implementació de la Tasca 2	420
Taula 17.2.6.2. Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 2	421
Taula 17.2.6.3. Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 2	421
Taula 17.2.6.4. Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van millorar la seva valoració a la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 2	421
Taula 18.1.1.1. Comparació de les subtrajectòries epistèmica, docent i discents hipotètiques i de la implementació de la Tasca 1	438
Taula 18.1.1.2. Comparació de les subtrajectòries epistèmica, docent i discents hipotètiques i de la implementació de la Tasca 2	439

Taula 9.1.1. Publicacions en revistes Q2	443
Taula 9.1.2. Publicació de capítols de llibres	444
Taula 9.1.3. Comunicacions i participacions en congressos	445
Taula 9.1.4. Comunicacions i participacions en congressos sobre formació de professorat ..	446

Primera Part: Presentació General

Capítol 1. Introducció

1.1. El llenguatge geomètric

La naturalesa inherent de l'ésser humà en construir expressions orals per descriure l'espai i les formes i com aquestes són un reflex de la seva realitat cultural, social i econòmica. És l'àmbit sociocultural i econòmic dels infants el que determina la seva disposició per orientar-se dins un entorn, llavors, fins que no ens situem en aquest context no tindrem mai informació suficient per conèixer el seu marc de referència i així mateix si tindrà una visió egocèntrica, antromòrfica o fins i tot que defineix un espai a partir d'un cos considerat com el seu centre (Levinson, 1996). Però, el punt de major rellevància és el fet de que una bona habilitat per orientar-se a l'espai és un bon antecedent per l'aprenentatge de la geometria a nivells molt més especialitzats, com ho és a l'ESO (Berthelot i Salin, 1998).

A banda de la importància de la llengua d'ensenyament, el llenguatge no formal té una funció destacada en l'aprenentatge de les matemàtiques i en específic de la geometria per la seva actuació com instrument d'instrucció i de discussió (ja sigui per part del professor o dels alumnes) per aconseguir expressar idees i conceptes, per tant, el llenguatge formal (Chronaki i Jones, 1999). Doncs, la creació de moments quan els alumnes estiguin en contacte amb continguts geomètrics i hagin de proposar descripcions verbalitzades d'ells és l'encàrrec del docent que més pot ajudar als alumnes pel seu desenvolupament de conceptes geomètrics (Pytlak, 2015).

Els recents treballs d'investigació de Calero, Shalom, Spelke i Sigman (2019) exploren la relació entre el que els alumnes trien com el que és correcte, els seus gestos i el llenguatge oral que utilitzen. Per aquest grup de recerca és important oferir evidències sobre quin dels tres mecanismes fan servir els nens, entre els tres i els vuit anys, per expressar els seus coneixements sobre la geometria: elecció, gesticulació o verbalització. Es va trobar que malgrat la impossibilitat d'expressar amb paraules les seves idees geomètriques, els nens van fer ús d'estratègies com triar la imatge adequada o produir gestos per explicar-les. Així com també es va descobrir que el sorgiment de conceptes geomètrics en nens és aliè al llenguatge oral o escrit, però en canvi sí que es relaciona amb les gesticulacions (Calero et al., 2019).

Els punts i les línies són els elements bàsics de les imatges que representen la realitat (Clements i Battista, 1992; Herbst, 2017) i a la qual donen major significat en combinació amb el llenguatge (González, 2003). Segons Duval (1999), el llenguatge i la imatge formen un mateix sistema sensorial per construir el significat de les entitats matemàtiques. Al igual que qualsevol idioma, el llenguatge geomètric es constitueix amb regles d'utilització. Una tasca primordial del professor és explicitar aquestes normes que regeixen els símbols geomètrics de manera que els alumnes puguin trobar la seva lògica (Fuys et al., 1984; van Hiele, 1986).

Per P.M. van Hiele, els símbols que fa servir el professor perden el seu significat inicial després d'un període i es converteixen en l'enllaç entre les relacions que hi ha entre els conceptes geomètrics. Conseqüentment, el treball amb materials concrets és la clau per la formació d'una xarxa de relacions entre entitats geomètriques basada en el llenguatge. De manera recurrent, van Hiele emfatitza l'ús de símbols i el coneixement de termes amb els seus significats com processos característics de diferents nivells de raonament geomètric (Fuys, et al., 1984; van Hiele, 1959).

Tenint en compte la descripció que Crowley (1987) fa del model de desenvolupament del raonament geomètric de van Hiele (explicat a l'apartat 3.1.1.), és possible identificar els tipus de representacions i de llenguatge característics de cadascuna de les etapes d'aquest model (**Figura 1.1.**). Es pot apreciar la complexitat creixent de les representacions segons el nivell de raonament i l'augment de vocabulari que això requereix.

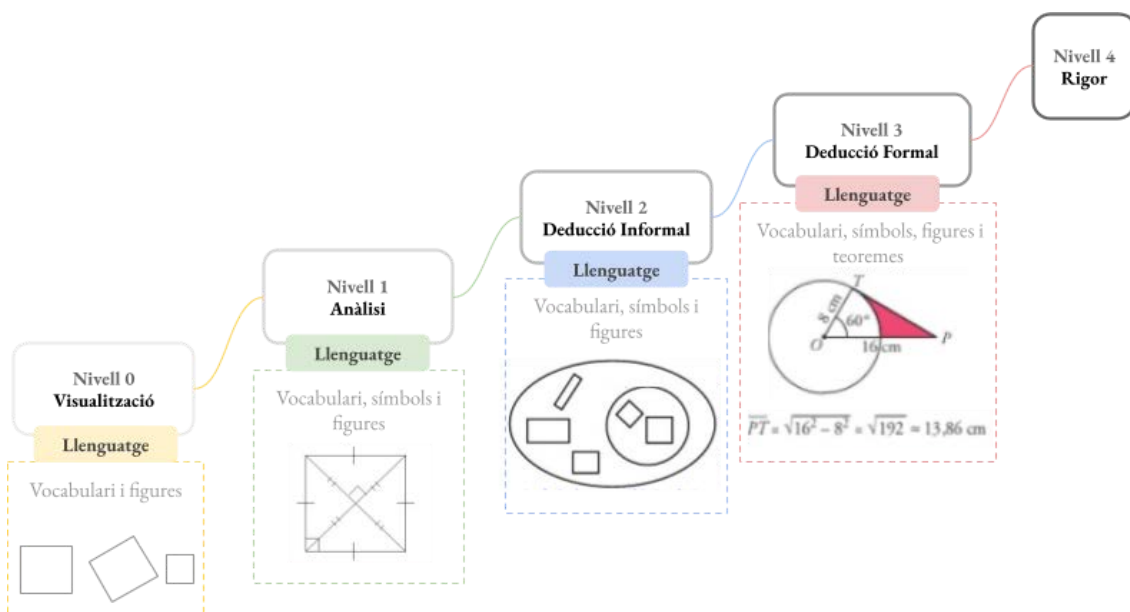


Figura 1.1.1. Llenguatge relacionat amb els nivells de van Hiele basat en Crowley (1987).

Font: Elaboració pròpia.

Per la seva part, Clements i Sarama (2000) fan un recull força interessant i explicatiu d'algunes de les expressions que els alumnes més joves utilitzen per expressar les seves idees sobre les entitats geomètriques que corresponen als seus nivells educatius, totes elles plenes d'analogies i comparatius amb el món real i les seves experiències (**Taula 1.1.**). Els autors només identifiquen els dos primer nivells de raonament geomètric de van Hiele a la seva comunicació atès a que l'assoliment del següent nivell pot trigar massa en arribar, potser fins l'ESO. Cal fer una especial referència al nom que els autors (Clements i Sarama, 2000) donen al nivell 1, "descriptiu", ja que en cites prèvies hi ha una altre denominació: "anàlisi" (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987).

Taula 1.1.1.

Expressions orals i nivells de van Hiele bassat en Clements i Sarama (2000).

Nivell	Exemple d'expressió oral
Nivell 0: Visualització	"És un rectangle perquè s'assembla a una porta."
Nivell 1: Descriptiu	Els rectangles són "punxeguts".

Font: Elaboració pròpia.

Tot i que Clements i Sarama (2000) troben expressions característiques del nivell 1 de van Hiele amb les quals s'aplica un llenguatge més formal, "un triangle és un figura que té tres costats i tres angles", en qüestionar a l'alumne sobre els conceptes utilitzats a la seva descripció, no van saber respondre'l. Llavors, sembla que ha sigut la repetició d'una frase apresada de memòria però sense cap significat per l'alumne.

Aleshores, el llenguatge pot ser un impediment per desenvolupar tasques geomètriques perquè és un indicador del nivell de raonament que es posseeix. Com a professor, s'ha de tenir en compte que la notació utilitzada en una classe ha de ser del mateix nivell que domina la major part del grup. Així mateix, la inclusió de nomenclatura ha de ser gradual mitjançant la realització seqüenciada d'activitats que vagin pujant el seu nivell de complexitat (Fuys et al., 1984; van Hiele, 1959).

1.2. Estudi preliminar

A la seva etapa com a professora, l'autora d'aquesta tesi va dissenyar activitats de dibuix geomètric per ajudar als seus alumnes d'ESO en el desenvolupament del llenguatge geomètric. Amb aquesta tasca, l'autora esperava que el grup d'alumnes arribessin a una producció gràfica composta per un

seguit de figures geomètriques senzilles amb les quals formessin una figura complexa amb sectors preferents diferenciats mitjançant colors (**Figura 1.2.1.**) (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019a, 2019b).

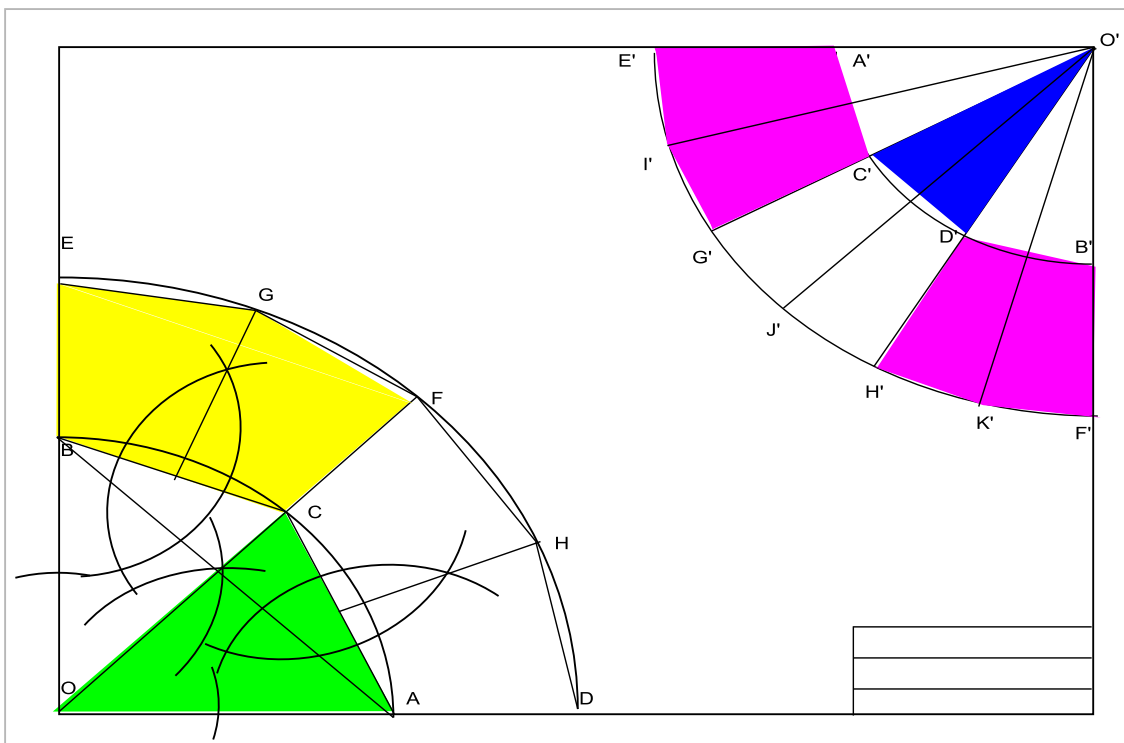


Figura 1.2.1. Producció de dibuix geomètric esperada (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019b, 2020).

Font: Elaboració pròpia.

Les instruccions a partir de les quals s'esperava que els alumnes generessin el dibuix geomètric complex de la **Figura 1.2.2.** consisteix en una seqüència escrita de 35 passes individuals de traç d'angles, rectes, polígons, punts i rectes notables com ara mediatris o bisectrius, per exemple (**Figura 1.2.2.**) (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019b).

Per tal de valorar la *idoneïtat didàctica* d'aquest procés d'instrucció de matemàtiques, en específic de geometria, els autors van considerar tots els components de les sis facetes de la *idoneïtat didàctica* proposat per Godino (2013). Aleshores, en va ser rellevant tenir en compte el currículum mexicà del primer curs d'ESO, el protocol d'implementació de la tasca, les condicions del grup i de l'aula, l'horari, les instruccions escrites donades per la professora (**Figura 1.2.2.**), les eines de dibuix geomètric de les quals disposaven els alumnes, el temps assignat a l'activitat, la producció esperada (**Figura 1.2.1.**) i les produccions més exitoses dels alumnes (**Figura 1.2.3.**) (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019a, 2019b).

Grado: Primero

1. Identifica la esquina inferior izquierda de los márgenes como el punto O .
2. Identifica el punto A sobre el segmento horizontal inferior de los márgenes, de manera que el segmento OA tenga una longitud de nueve centímetros.
3. Traza un sector de una cuarta parte de circunferencia con radio OA y limitado por los márgenes horizontal inferior y vertical izquierdo.
4. Identifica el punto B en la intersección del segmento de circunferencia con el segmento de recta vertical izquierdo de los márgenes.
5. Traza el segmento de recta AB con tinta.
6. Identifica la esquina superior derecha de los márgenes como el punto O' .
7. Identifica el punto A' sobre el segmento horizontal superior de los márgenes, de manera que el segmento $O'A'$ tenga una longitud de siete centímetros.
8. Traza un sector de una cuarta parte de circunferencia con radio $O'A'$ y limitado por los márgenes horizontal superior y vertical derecho.
9. Identifica el punto B' en la intersección del segmento de circunferencia con centro en O' y el segmento vertical derecho de los márgenes.
10. Obtén la bisectriz de ángulo AOB .
11. Identifica con la letra C la intersección de la bisectriz con el sector circular con centro O .
12. Traza los segmentos de recta AC y BC con tinta.
13. Divide el ángulo $A'O'B'$ en tres ángulos de igual abertura y que compartan el vértice O' .
14. Identifica las intersecciones de los nuevos ángulos con el sector circular con las letras C' y D' , de manera que C' sea vecino de A' y D' vecino a B' .
15. Traza los segmentos $A'C'$, $C'D'$ y $D'B'$.
16. Traza un sector de circunferencia concéntrico al sector circular con radio OA que sea cinco centímetros mayor en radio.
17. Identifica la intersección del sector circular anterior con el segmento horizontal inferior de los márgenes con la letra D .
18. Identifica con la letra E el punto donde se intersecan el sector circular anterior con el segmento vertical izquierdo de los márgenes.
19. Obtén las mediatrices de los segmentos BC y CA .
20. Prolonga el segmento OC cinco centímetros.
21. Identifica con la letra F la intersección del segmento OC prolongado con el sector circular.
22. Identifica con la letra G la intersección entre los puntos E y F .
23. Identifica con la letra H la intersección entre los puntos F y D .
24. Traza los segmentos EG , GF , FH y HD .
25. Traza un sector de circunferencia concéntrico al sector circular con radio $O'A'$ que sea cinco centímetros mayor en radio.
26. Identifica la intersección del sector circular anterior con el segmento horizontal superior de los márgenes con la letra E' .
27. Identifica con la letra F' el punto donde se intersecan el sector circular anterior con el segmento vertical derecho de los márgenes.
28. Prolonga los segmentos $O'C'$ y $O'D'$ cinco centímetros.
29. Identifica con la letra G' y H' las intersecciones de las prolongaciones anteriores con el sector circular con radio $O'E'$.
30. Divide por la mitad los ángulos $E'O'G'$, $G'O'H'$ y $H'O'F'$, de manera que se formen los ángulos $E'O'I'$, $I'O'G'$, $G'O'J'$, $J'O'H'$, $H'O'K'$ y $K'O'F'$.
31. Traza los segmentos $E'I'$, $I'G'$, $G'J'$, $J'H'$, $H'K'$ y $K'F'$.
32. Colorea el área del pentágono irregular $BCFGE$.
33. Colorea el área del triángulo OAC .
34. Colorea el área de los pentágonos irregulares $B'D'H'K'F'$ y $A'C'G'I'E'$.
35. Colorea el área del triángulo $C'D'O'$.

Figura 1.2.2. Full d'instruccions de la tasca de dibuix geomètric (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019b).

Font: Elaboració propia.

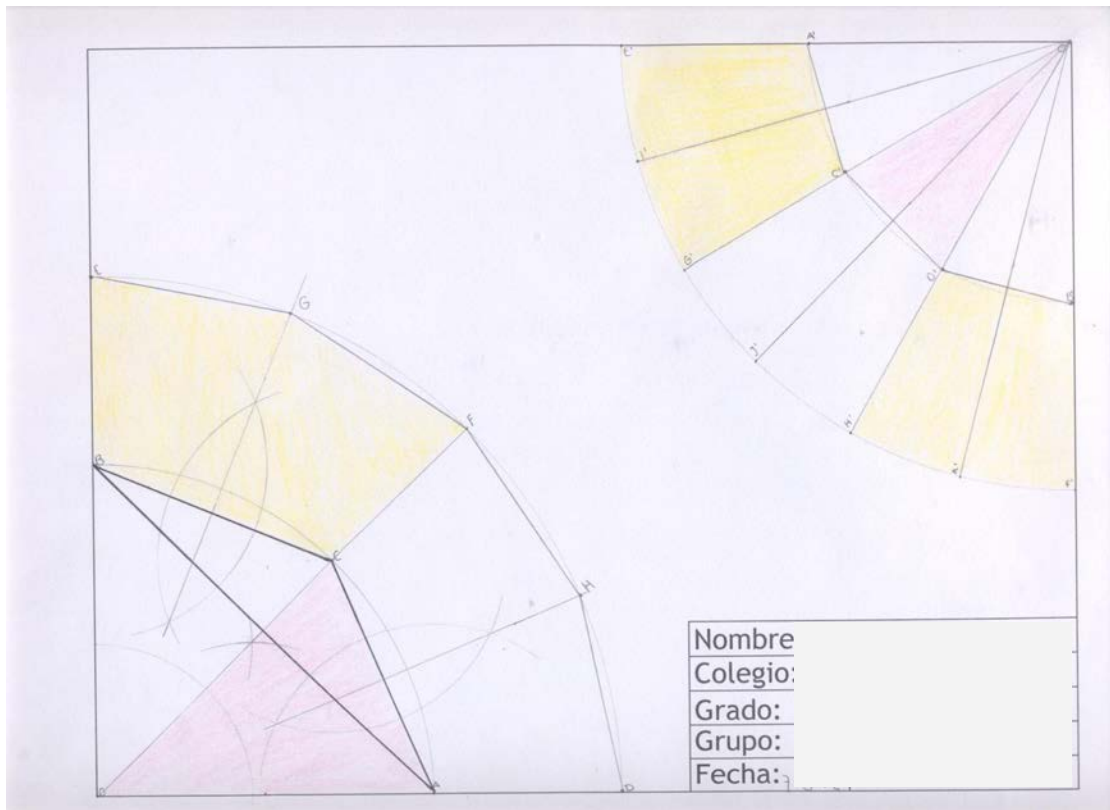


Figura 1.2.3. Producció de dibuix geomètric obtingut (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019b, 2020).

Font: Elaboració pròpia.

La tasca de dibuix geomètric per alumnes mexicans del primer curs d'ESO basat en instruccions escrites no va assolir el màxim nivell a cap de les sis facetes d'idoneïtat. Mentre que la *idoneïtat ecològica* va ser la dimensió amb una valoració d'assoliment més alta, la més baixa va ser la *idoneïtat interaccional*. Seguint la metàfora de l'hexàgon (Godino, 2013), el gràfic amb els resultats de les valoracions de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* (**Figura 1.2.4.**) mostra la manca de balanç que existeix al procés d'instrucció matemàtica hi analitzat (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019a, 2019b).

Aquest estudi preliminar ha permet fixar l'atenció en les facetes: epistèmica, cognitiva i interaccional. Llavors, per millorar la tasca i dissenyar una nova proposta s'ha de reflexionar al voltant de les components absents de cadascuna de les tres facetes esmentades. Pel que fa a la *idoneïtat epistèmica*, s'ha de tenir en compte els errors. La facetes cognitiva requereix d'adaptacions curriculars diferenciades. Finalment, la dimensió interaccional puntualitza la necessitat d'interacció entre els alumnes (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019, 2021). Anant més enllà, es pot veure que a les tres facetes restants encara van quedar components absents amb les quals també es poden fer propostes de millora, com ara: les connexions intra e interdisciplinars, de la *idoneïtat ecològica*.

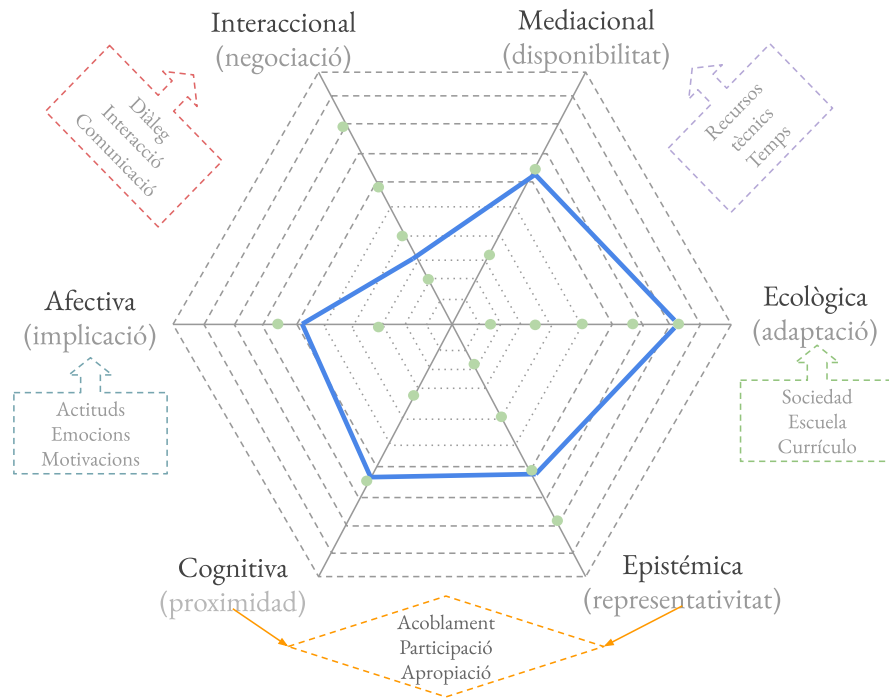


Figura 1.2.4. Esquema d'adoneïtat didàctica per la tasca de dibuix geomètric basat en els indicadors proposats per Godino (2013) (Garcia-Mora i Díez-Palomar, 2019a, 2019b).

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 2. Objectius de la tesi doctoral

L'objectiu principal que volem assolir mitjançant aquesta tesi doctoral és examinar com els estudiants de secundària aprenen a fer servir el llenguatge geomètric per desenvolupar el seu raonament i la seva comprensió d'aquesta àmbit de les matemàtiques. Sabem que la geometria, i en concret el vocabulari geomètric, s'acostuma a connectar amb l'ús d'objectes (definicions, teoremes, proposicions, etc.) i les seves relacions, que són molt concretes i exigeixen un alt grau de comprensió, donades les connexions que podem trobar, des del punt de vista epistèmic entre tots aquests objectes. La geometria ha estat durant mil·lenis un àmbit de la matemàtica amb nom propi, amb el seu propi corpus de coneixement (com podem veure, per exemple, als *Elements* d'Euclides, una obra que es va escriure al 300 a.C. i que va ser una recopilació del coneixement matemàtic que hi havia a l'època, i que venia de molts segles abans). Existeixen paraules molt concretes que es van servir per descriure els objectes geomètrics i les seves relacions, a través de proposicions, definicions, i teoremes, que esdevenen en sí mateixes eines de demostració matemàtica (que és una de les competències bàsiques que apareixen a la majoria dels currículums de matemàtiques de secundària al món). Iniciar-se, estudiar i arribar a entendre i a fer servir aquests objectes geomètrics, i les seves relacions, comprenent la seva exposició formal sobre el paper, i la seva construcció, visualització i manipulació en el "món real" (definit com l'espai que delimitat per les tres dimensions d'alçada, amplada i longitud), no és pas fàcil. La recerca en la didàctica de la geometria ens ha ensenyat que els nens i les nenes, ja des de primària, però també a la secundària, tenen dificultat a fer el procés cognitiu d'abstracció per passar de la descripció formal de l'objecte geomètric (com la que trobem a *Els Elements*) i la seva representació en el món real. Moltes vegades el mateix llenguatge introdueix imprecisions (per exemple, fer servir la paraula "rodona" per "cercle", o "cos geomètric de revolució"). Alguns estudis ja han mostrat que aquestes imprecisions del llenguatge esdevenen barreres al desenvolupament del raonament i de la comprensió geomètrica. No entrarem en aquest aspecte en aquesta tesi, perquè ja està molt estudiat.

L'objectiu que tenim és estudiar què passa quan fem servir eines d'anàlisi didàctica, desenvolupades en el marc de la recerca en didàctica de les matemàtiques (i, per tant, fent servir eines que van sortir de l'ensenyament de les matemàtiques, que han estat validades per la recerca en aquest àmbit, i que han estat dissenyades específicament per a la didàctica de les matemàtiques). Volem ajudar als futurs professors i professores de matemàtiques a fer front millor a aquestes dificultats que la recerca en didàctica de la geometria ja ha trobat que es produeixen quan els joves estan aprenent geometria. I per això plantejem aquesta tesi, on el centre és examinar l'impacte d'un seguit d'eines d'anàlisi didàctica

aplicades a l'ensenyament d'objectes geomètrics en educació secundària, amb el focus posat en la formació del professorat de matemàtiques.

2.1. Objectius generals

S'enumeren els objectius en sentit descendent, és a dir, partint des de la perspectiva més general fins la més particular i començant amb allò que busquem assolir en acabar aquesta recerca.

- i. Reconèixer la idoneïtat didàctica com una eina de reflexió aplicable en etapes prèvies i posteriors al desenvolupament d'una seqüència didàctica a l'aula, pel seu disseny, avaluació i re-disseny per millorar-ne.
- ii. Proposar estratègies pel millorament d'una seqüència didàctica de dibuix geomètric des de la perspectiva del enfocament onto-semiòtic.
- iii. Aplicar els criteris de la idoneïtat didàctica per reflexionar sistematitzadament sobre la pràctica docent de l'ensenyament de la geometria al primer grau de l'ESO.

2.2. Objectius particulars

Tenint en compte el desenvolupament cronològic, seguint un ordre ascendent, de les qüestions més puntuals d'aquest treball de recerca són:

Per tal d'arribar al disseny més adequat d'una seqüència didàctica:

- Aplicar la idoneïtat didàctica com eina de disseny de seqüències didàctiques de dibuix geomètric pel primer grau d'ESO dins el currículum català.

Amb la finalitat d'analitzar la seqüència didàctica i la pràctica docent:

- Plantejar una metodologia sistematitzada per l'ús de la idoneïtat didàctica com eina d'anàlisi de seqüències didàctiques.
- Identificar els aspectes epistèmics assolits amb l'aplicació de la seqüència didàctica de dibuix geomètric.
- Puntualitzar els aspectes cognitius coberts amb la seqüència didàctica de dibuix geomètric.
- Reconèixer les interaccions que es duen a terme durant la seqüència didàctica de dibuix geomètric.
- Resaltar els trets mediacionals involucrats a la seqüència didàctica de dibuix geomètric.
- Detectar les emocions desenvolupades quan s'aplica la seqüència didàctica de dibuix geomètric.
- Definir els trets ecològics de la seqüència didàctica de dibuix geomètric.

- Utilitzar la idoneïtat didàctica a mena d'avaluació generalitzada de una seqüència didàctica.

Per re-dissenyar la seqüència didàctica:

- Identificar els punts forts i febles de la seqüència didàctica de dibuix geomètric davant la seva aplicació a l'aula i des de la perspectiva de la idoneïtat didàctica.
- Proposar estratègies per millorar i re-dissenyar la seqüència didàctica de dibuix geomètric sota la mirada de l'enfocament onto-semiòtic que proporciona la idoneïtat didàctica.

2.3. Pregunta de recerca

Al Pla de Recerca presentat tot començar aquest estudi doctoral es van proposar objectius generals i específics lligats a una pregunta d'investigació que es van anar adaptant segons ho van indicar les fonts bibliogràfiques i articles de nova publicació. També va ser de molta influència en aquesta adequació el treball experimental i els descobriments hi trobats. Així que és fonamental tenir com punt de partida les consideracions inicials per avaluar el redireccionament d'aquesta recerca.

D'acord amb la investigació prèvia en l'àmbit de la didàctica de la geometria, sabem que els estudiants, en un primer moment (educació infantil), desenvolupen la percepció espacial en tres dimensions. Abans de reconèixer (i ser capaços de construir representacions figurades –en dues dimensions– dels objectes del món real), els nens i les nenes han de desenvolupar la capacitat d'abstracció. Tal com van mostrar el matrimoni van Hiele (van Hiele, 1959) en les seves investigacions, les persones transitem per un seguit de nivells (d'abstracció) en el nostre aprenentatge de la geometria:

- Nivell 0: Visualització o reconeixement
- Nivell 1: Anàlisi
- Nivell 2: Ordenació o classificació
- Nivell 3: Deducció formal
- Nivell 4: Rigor

Aquest procés de trànsit dels objectes concrets a la seva representació (abstracta) ha estat confirmat per desenes de recerques en l'àmbit de l'aprenentatge de la geometria (Fuys, Geddes, Lovett i Tischler, 1984; Crowley, 1987; Clements i Battista, 1992; Biggs, 1993; Fischbein, 1993; Anderson, Matessa i Lebiere, 1997; Clements, 1998; Jones, 1998 a; Jones, 1998 b; Clements, 2003; Presmeg, 2006). Tanmateix, l'experiència acumulada en la pràctica amb estudiants de 12 a 13 anys d'edats en contradicció amb aquest procés de desenvolupament del raonament i pensament geomètrics. Com a docent, he pogut observar que aquests estudiants acostumen a seguir un procés invers d'aquell assenyalat pels van Hiele i la recerca posterior, quan el context és passar d'un seguit d'instruccions

formals (que podem ubicar entre el nivell 3 de deducció formal, i el nivell 2 d'ordenació i classificació) a la producció de representacions visuals (mitjançant el dibuix geomètric), que són produccions molt més concretes. Per tant, partint dels objectius que ja s'han esmentat més amunt, la pregunta que es planteja en aquesta tesi doctoral és la següent: *Una tasca col·laborativa que requereix l'aplicació del dibuix geomètric promou que els alumnes transitin els nivells de van Hiele sobre les entitats geomètriques involucrades?*

Segona Part: Fonamentació Teòrica

Capítol 3. El pensament geomètric

3.1. El raonament geomètric

El reconeixement de l'espai és, igual que el sentit numèric, el sentit algebraic, o l'estocàstic, una de les habilitats que es consideren pròpies del raonament matemàtic de l'ésser humà (Piaget i Inhelder, 1967) i que segons quines circumstàncies es pot atribuir a comportaments d'altres éssers vius (Dehaene, 1997). Més enllà d'una predisposició cap al raonament matemàtic, l'ésser humà també presenta trets pel desenvolupament de la idea de número i la identificació d'entitats geomètriques (Piaget i Inhelder, 1971).

La recerca sobre les representacions gràfiques són de rellevant importància a l'àmbit de l'ensenyament de la geometria per la informació que proporcionen sobre l'activitat desenvolupada a l'aula (Bishop, 1988). D'acord, amb Clements (1998), les representacions gràfiques serveixen per desenvolupar el sentit espacial. Segons Presmeg (2006), l'ús de representacions gràfiques contribueix a la resolució de problemes matemàtics. Actualment, l'estudi sobre la naturalesa del **raonament geomètric** ha guanyat protagonisme pel ràpid desenvolupament de la computació. Els avenços en la generació d'imatges presenten reptes com la interpretació d'aquestes figures i com es creen a la ment dels usuaris (Clements, 1998; Jones, 1998 a).

L'ensenyament de la geometria es remunta a les primeres civilitzacions de les que tenim notícia. Ja trobem motius geomètrics, i representacions geomètriques, a representacions pictòriques (suposadament rituals) pre-històriques (Bell, 1999; Collette, 2006). Civilitzacions com la babilònica, ja tenen sistemes geomètrics relacionats amb les mesures pràctiques. Tracten, sobretot, de mesura de figures planes, tret d'alguns problemes que fan referència a sòlids (Bell, 1999). Tenim tauletes o es pot llegir que a Babilònia havien trobat el valor de $3 \frac{1}{8}$ per nombre π . També van determinar el volum del tronc de conus, com a $V = \frac{1}{12}h(b^2 + a^2)$ on $\frac{1}{12} = \frac{1}{4\pi}$ (Collette, 2006). Els babilonis no varen ser els únics a fer aportacions a la geometria. És ben conegut l'immens llegat de la matemàtica grega clàssica a la geometria (Bell, 1999; Collette, 2006). No entrarem aquí a fet una descripció detallada d'aquestes contribucions, perquè no és l'objecte d'aquesta recerca, i en tot cas, ens volem centrar en

l'ensenyament de la geometria a un període recent a partir del qual continuar la recerca que s'ha fet en la didàctica de la geometria per explorar un fenomen que les investigacions prèvies sembla que d'alguna manera contradiuen. Per aquest motiu ens centrarem en l'ensenyament de la geometria a partir del segle XX.

A començaments del segle XX, l'Associació Matemàtica del Regne Unit va modelar l'ensenyament i aprenentatge de la geometria en tres etapes (**Figura 3.1.1.**). Una primera etapa, anomenada fase A, que es distingeix per ser intuïtiva i perquè en ella es realitza treball experimental. La segona, la fase B, és una etapa on la intuïció és el punt de partida per a la introducció de la simbologia formal i el desenvolupament del raonament deductiu. Finalment, la fase C o de treball globalment rigorós que al igual que la segona etapa es caracteritza per l'ús de símbols (Jones, 1998 a i b).

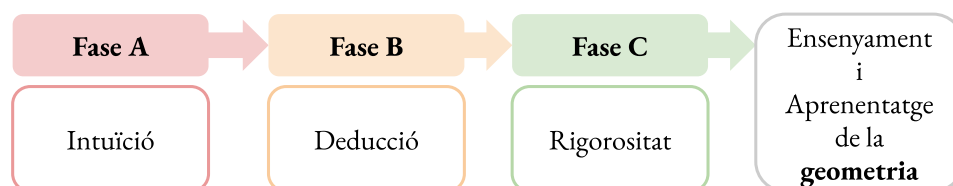


Figura 3.1.1. Etapes d'aprenentatge i ensenyament de la geometria de l'Associació Matemàtica del Regne Unit (Jones, 1998).

Font: Elaboració pròpia.

Posteriorment, Gonseth (1945-1955) va proposar tres activitats coordinades i seqüencials per arribar al coneixement d'un **concepte geomètric**: la intuïció, l'experiència i la deducció (**Figura 3.1.1.**). Com a intuïció, l'autor va reconèixer les idees derivades d'una experiència manipulativa, sensorial i directa que s'analitzen des de la lògica o la psicologia. Houdement i Kuzniak (1999) van destacar la diferència que hi ha entre un matemàtic i un altre investigador sobre la intuïció. Pel primer es tracta d'una part del raonament propi que potser una guia per la resolució d'un problema. Però com etapa inicial per l'assoliment d'un concepte geomètric, hem de centrar-nos en la interpretació de la intuïció com un conjunt de memòries. Seguint la proposta de Gonseth (1945-1955), experiència es defineix com una acció repetida que permet la identificació de característiques o resultats específics. En últim lloc tenim la deducció, que es pot explicar com tot aquell coneixement nou que es construeix a partir d'uns altres més senzills o antics. Dit d'una altra manera, a la deducció es fa una organització nova d'idees prèvies que permet arribar a unes altres de noves.

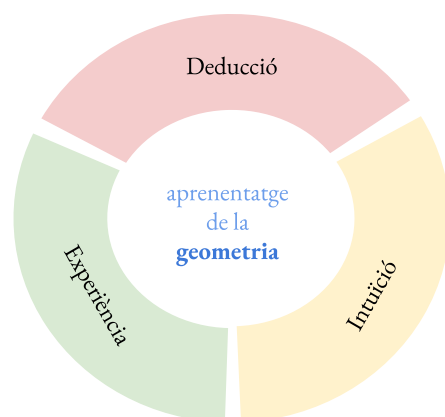


Figura 3.1.2. Activitats que permeten l'assoliment dels conceptes geomètrics segons Gonseth (1945-1955).

Font: Elaboració pròpia.

Després de la recerca d'en Gonseth van arribar els treballs sobre l'estudi del desenvolupament del sentit geomètric d'en Piaget i la Inhelder (1967). Aquesta parella d'investigadors va establir idees originals sobre el desenvolupament del **raonament geomètric** (Jones, 1995). Els experiments dels quals els dos investigadors van treure la informació prové de tasques de l'exploració directa d'objectes i de la reproducció de figures geomètriques mitjançant el traç. Posteriorment, Clements i Battista (1992) van organitzar aquestes idees en dues àrees: (i) la construcció de les representacions espacials com un procés progressiu de l'organització de la pròpia mobilitat, i (ii) la seqüència d'identificació de propietats físiques que condueix a la organització de les idees geomètriques.

Clements i Battista (1992) defineixen el **raonament espacial** com un mecanisme necessari per la identificació de les propietats dels objectes geomètrics. Bishop (1988), per la seva part, introdueix el concepte **visualització**, el qual defineix com una activitat d'interpretació de la informació que es presenta en forma gràfica. Per tant, és una acció que ajuda a entendre allò que es realitza dins l'àmbit de l'estudi de les matemàtiques. En altres paraules, podem explicar la **visualització** com la capacitat d'identificar característiques o propietats on intervé el raonament espacial. En aquest sentit, podem adaptar les paraules d'Ávila (2008) per dir que, la **visualització**, pot interpretar-se com un procés d'observació, el qual és producte d'un aprenentatge (Duval, 1999) en el que es mira amb intenció i determinació des de la pròpia perspectiva cultural. En paraules de Zimmermann i Cunningham: un procediment de comprensió basat en la formació de imatges, ja sigui mentalment o de manera concreta sobre paper o dins una plataforma digital (Jones, 1998 b). Un punt important per entendre la **visualització** és el reconeixement del procés de desenvolupament del pensament i del sentit geomètric.

D'acord amb Jones (1995), l'educació matemàtica és un camp en el qual al menys es poden treballar quatre aspectes: (i) els nombres i les seves operacions, (ii) l'educació verbal, (iii) l'educació visual i (iv) l'educació simbòlica. El punt més destacable d'aquesta proposta és l'argument que marca la diferència entre el raonament relacionat amb la **visualització** i el **raonament geomètric**. Segons ell, existeix una relació entre ambdós termes: el raonament visual és un àrea de pensament on s'inclou el raonament geomètric (Jones, 1995).

El **raonament geomètric** està molt relacionat amb la capacitat de **visualització**. Però hi ha altres processos en les quals també s'involucra, com ara la **comprovació**. Segons de Villiers, aquesta etapa, la comprovació té sis funcions principals que la defineixen: (i) la verificació d'un enunciat, (ii) l'explicació d'un procediment, (iii) el descobriment de nous resultats, (iv) la sistematització de la deducció d'idees, (v) la creació d'un repte intel·lectual i (vi) la comunicació (Jones, 1995).

Taula 3.1.1.

Models de la comprovació de Villiers (Jones, 1995).

Funció	Descripció de la funció de la comprovació
Verificació	Confirmar que els postulats són certs o exactes.
Explicació	Plantejar arguments, procediments o representacions gràfiques per exposar en paraules clares un concepte o un cas.
Descobriments	Trobar resultats nous amb l'ús d'altres coneguts o amb l'anàlisi de les seves propietats o relacions entre altres conceptes.
Sistematització	Crear seqüències ordenades o procediments lògics.
Repte intel·lectual	Provocar la cerca de procediments i argumentacions més complexos que aquells que hi pertoquen al nivell educatiu.
Comunicació	Donar a conèixer un concepte, un procediment o una resposta fent servir el tipus d'expressions que calgui per fer-ho de manera clara.

Font: Elaboració pròpia.

Encara que la comprovació és una tasca necessària en la identificació d'allò que és veritat, Jones (1995) destaca la manca de formalitat que es té a les matemàtiques. Sovint ens trobem que els professors fan servir imatges o exemples per fer explicacions (Jones, 1995). De manera que la **visualització**, torna a ser un mecanisme present.

Convé fer ressaltar que malgrat l'existència de diversos models per explicar el raonament geomètric, en aquest estudi de recerca, s'acota l'estudi a les quatre perspectives per analitzar el raonament geomètric desenvolupades més recentment: el model de van Hiele, la teoria dels conceptes figuratius de Fischbein, el model cognitiu de Duval i la imatgeria visual de Presmeg.

3.2. El model de raonament geomètric de van Hiele

Les aules van ser el camp de pràctica del professors Dina i Pierre M. van Hiele al llarg de varies dècades. Segons la traducció de Fuys i col·laboradors (1984) dels treballs de recerca del matrimoni van Hiele, en Pierre M. van Hiele va començar la discussió del seu model amb el reconeixement de tres etapes o formes del raonament racional que cada alumne desenvolupa de manera individual i activa: (i) la formació d'estructures, (ii) la formació d'associacions i (iii) l'anàlisi (**Figura 3.2.1.**).



Figura 3.2.1. Etapes o formes del raonament racional segons van Hiele (Fuys et al., 1984).

Font: Elaboració pròpia.

Com a punt de partida, per van Hiele els fonaments concrets de la geometria es troben en els aspectes que donen significat al treball pràctic d'aquesta assignatura. És a dir, de tots els temes i objectius d'estudi de la geometria hi ha una selecció de quinze aspectes que de manera especial col·laboren en la construcció de la fonamentació concreta (**Taula 3.2.1.**). A més a més, va proposar dos objectius per a la tasca docent: (i) el coneixement de les característiques de l'espai per al seu enteniment i (ii) la creació d'un sistema lògic i coherent per a que l'alumne pugui desenvolupar, a partir d'un seguit d'experiències adequades, la seva capacitat d'aprenentatge mitjançant el raonament. L'assoliment d'aquest parell d'objectius va ser el punt de partida per a la presentació del model de raonament de van Hiele (Fuys et al., 1984).

En l'àmbit de la geometria, van Hiele (1986) postulà un model dins el qual es categoritza el raonament dels alumnes sobre els éssers geomètrics en cinc nivells de comprensió que es basen en el mecanisme que el mateix alumne fa servir per identificar relacions. Els nivells es comptabilitzen des del número

zero (nivell 0), que s'assigna a l'etapa inicial, i van augmentant segons la complexitat dels conceptes i processos implicats cap a la descripció (nivell 1), l'abstracció (nivell 2), l'educació formal (nivell 3) fins assolir la formalització (nivell 4) característica de l'activitat professional al voltant de les matemàtiques (Figura 3.2.2) (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987, Clements i Battista, 1992).

Taula 3.2.1.

Aspectes que contribueixen a la fonamentació concreta de la geometria segons P.M. van Hiele (Fuys et al., 1984).

Aspectes geomètrics	
1.	Identificació i reconeixement de patrons geomètrics
2.	Divisió de l'espai amb dues i tres dimensions
3.	Aplicació i disposició de patrons congruents
4.	Similitud de patrons
5.	Combinació de patrons
6.	Transformació de patrons
7.	Simetria respecte a un pla
8.	Simetria axial
9.	Simetria central
10.	Superfícies
11.	Moviments a l'espai de tres dimensions (translació, rotació i combinacions)
12.	Corbes
13.	Reconèixer les condicions del perquè un mirall no produeix figures congruents
14.	Projecció plana de patrons espaials
15.	Intersecció de patrons

Font: Elaboració pròpia.

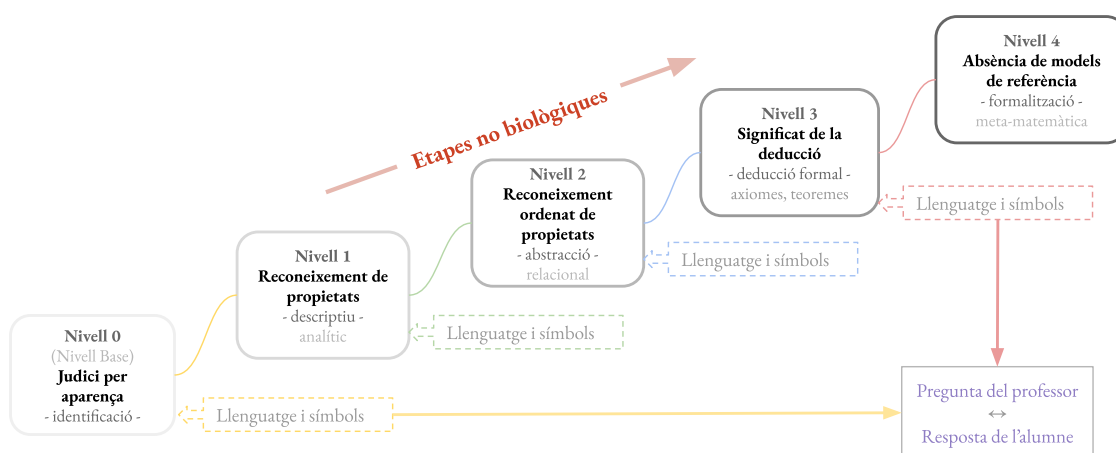


Figura 3.2.2. Model de raonament geomètric de van Hiele (van Hiele, 1959).

Font: Elaboració pròpia.

El **Nivell 0** és la etapa base del model de raonament geomètric de van Hiele que es caracteritza pel judici de l'aparença dels objectes geomètrics en estudi. Els alumnes en aquest nivell desenvolupen sense cap problema processos d'identificació de formes, reconeixement dels noms de les figures i els seus elements, les comparacions entre entitats geomètriques i la realització d'operacions sobre elles. Des de la perspectiva del professor, s'assoleix aquest nivell bàsic de raonament quan només es treballa el primer dels objectius de l'ensenyament de la geometria: el domini de l'espai. Un exemple d'assoliment d'aquest primer nivell és relacionar correctament el nom d'una figura amb la imatge que la representa (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987; Clements, 2003).

La segona etapa del model de raonament geomètric de van Hiele, és a dir el **Nivell 1**, pot considerar-se com la fase d'assignació de propietats dels objectes geomètrics en estudi. S'identifica quan els estudiants fan servir les propietats dels elements de les figures geomètriques i les relacions que hi ha entre elles. Aquest anàlisi és possible perquè els alumnes identifiquen que hi ha relacions entre les figures i els seus components. Això permet la identificació de patrons amb els quals es poden descobrir de manera empírica lleis i/o propietats. Un cas concret d'aquest nivell és l'aplicació de característiques d'una figura, per exemple el nombre de costats per anomenar a una figura com a un tipus de polígon concret (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987, Clements, 2003).

Es pot dir que el **Nivell 2** de raonament geomètric segons van Hiele és una etapa d'ordenament de propietats. Els alumnes es troben en aquesta fase quan poden donar arguments informals per expressar de manera lògica la relació entre diferents lleis o propietats descobertes amb anterioritat. El cas per exemplificar aquesta etapa és quan els alumnes són capaços de diferenciar que els criteris de congruència de triangles indiquen una relació entre els elements dels triangles i el cas contrari, que seria com donades les mides d'alguns elements de dos triangles congruents entre si mateixos permet identificar un dels criteris de congruència (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987; Clements, 2003).

El gest característic del **Nivell 3** del model de raonament geomètric de van Hiele és la deducció. Es pot il·lustrar aquesta etapa amb els estudiants que mostren la seva capacitat de comprovació de teoremes mitjançant la identificació de les condicions necessàries per establir una xarxa de relacions entre diferents teoremes i axiomes (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987; Clements, 2003).

Tot i que el treball de recerca de P.M. van Hiele va establir quatre nivells de raonament geomètric que són significatius per l'estudi de l'aprenentatge de la geometria, es pot considerar una cinquena etapa.

La fase de raonament superior, o darrera etapa del model de van Hiele, es troba al **Nivell 4**. En aquesta etapa, l'individu és capaç de postular teoremes per sí mateix i a més fer-ho en diferents sistemes a la vegada on pot fer l'anàlisi i comparació entre els diferents sistemes utilitzats (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987; Clements, 2003).

Els nivells de raonament proposats per van Hiele s'atribueixen als processos de maduració que assolixen amb la identificació de relacions, i són aliens a l'edat dels nens. O sigui, a diferència de les propostes d'en Piaget i Inhelder, no tenen relació directa amb l'edat dels individus sota observació. Tal característica no biològica elimina el límit cronològic per a la implementació d'estratègies que puguin ajudar a un alumne a fer un avanç des d'un nivell de raonament geomètric fins un altre de millor grau de comprensió (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987).

Convé fer ressaltar les observacions que Fuys i Hershkowitz, citats per Jones (1998a), fan al model de van Hiele. Dins els seus arguments es pot trobar el qüestionament sobre el nombre de nivells de raonament i el fet de que siguin etapes a part totes elles respecte de les altres.

Per una altra banda, van Hiele fa la caracterització del procés d'ensenyament necessari per a que un alumne pugui fer el pas d'un nivell de raonament geomètric a un altre de major complexitat. L'anomenat procediment d'aprenentatge - ensenyament per l'avanç en els nivells de van Hiele és una seqüència de cinc fases: (i) adquisició, (ii) orientació dirigida, (iii) explicitació, (iv) orientació lliure i (v) integració (**Figura 3.2.3.**). S'espera que després de fer les activitats corresponents a aquestes cinc fases, l'alumne arribi al següent nivell de raonament geomètric (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987). Convé esmenar de manera específica la funció destacable i permanent que té el llenguatge dins el procés d'assoliment de nivells superiors de raonament geomètric ja que són la base per a l'establiment de la xarxa de relacions entre les propietats dels objectes geomètrics.

Segons Fuys i col·laboradors (1984), la **primera fase** per avançar en els nivells de raonament geomètric en termes de van Hiele és l'adquisició. Amb aquest nom els autors es refereixen a on els alumnes fan la seva adquisició de significats. Les activitats dins aquesta fase tenen com objectiu la identificació de conceptes i el descobriment d'allò que representen però sense la construcció de relacions entre ells. Per això es diu que es tracta d'una fase on els significats no tenen un ordre entre si perquè la jerarquització i organització entre les idees és irrellevant (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987).

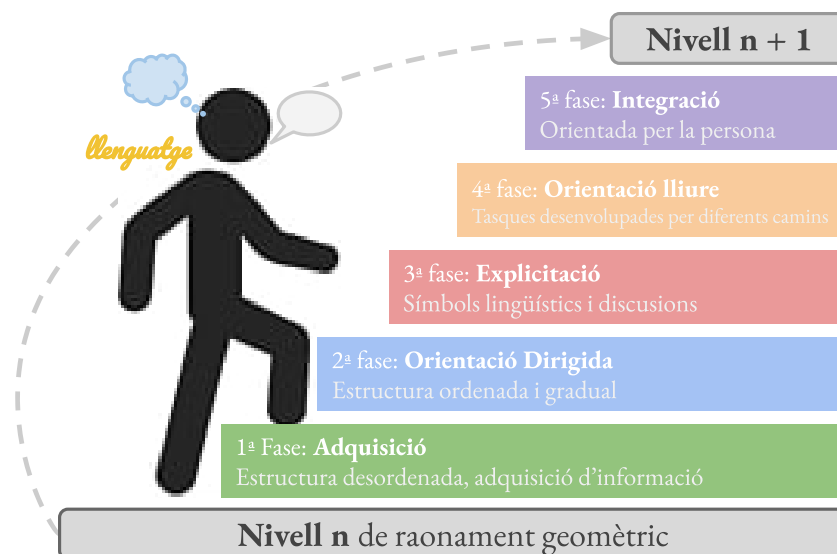


Figura 3.2.3. Fases per avançar dins els nivells del model de raonament geomètric de van Hiele (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987).

Font: Elaboració pròpia.

En la **segona fase**, anomenada d'orientació dirigida, el professor proposa activitats amb les quals els alumnes puguin organitzar de manera gradual aquells conceptes assolits a la fase prèvia. D'acord amb Van Hiele, s'ha de fer l'adequada selecció de material per aquest fi (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987).

En tercer lloc, els alumnes fan ús del llenguatge per explicar els conceptes que han identificat i ordenat prèviament. En aquesta **tercera fase**, el llenguatge (escrit i oral) és l'eina principal que permet la construcció d'explicacions per comunicar les idees al voltant dels objectes geomètrics sota anàlisi (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987). Es pot dir que és el moment en el que el professor pot identificar de manera oberta i clara si els seus alumnes fan una assignació correcta dels símbols i termes geomètrics en estudi.

En següent lloc es troba la **quarta fase** o fase d'orientació lliure. Es descriu aquesta etapa amb l'assignació de tasques que permeten als alumnes aplicar tot allò que han après de diferents maneres. És a dir, s'han de fer servir exercicis pels quals hi hagi més d'un procediment per arribar al resultat (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987).

Finalment, la **cinquena fase** per assolir un nivell superior de raonament geomètric, s'anomena d'integració, perquè en ella els alumnes assoleixen una visió general del tema d'estudi. P.M. van Hiele

suggereix avaluar als alumnes per comprovar que han arribat a aquesta etapa. La proposta de l'investigador consisteix en fer qüestionaments sobre els continguts del tema i puntualitza que s'ha d'ometre qualsevol pregunta sobre conceptes nous (van Hiele, 1959; Fuys et al., 1984; Crowley, 1987). Com s'ha vist en les fases prèvies, el llenguatge torna a ser un factor rellevant en l'aprenentatge i assoliment de processos de raonament cada vegada més complexos.

Un altre punt important d'aquest model de raonament són les seves propietats. Crowley (1987) resalta cinc aspectes característics al model de van Hiele: la seva seqüencialitat, progressivitat, naturalesa intrínseca i extrínseca, lingüística i discreta (**Figura 3.2.4**).

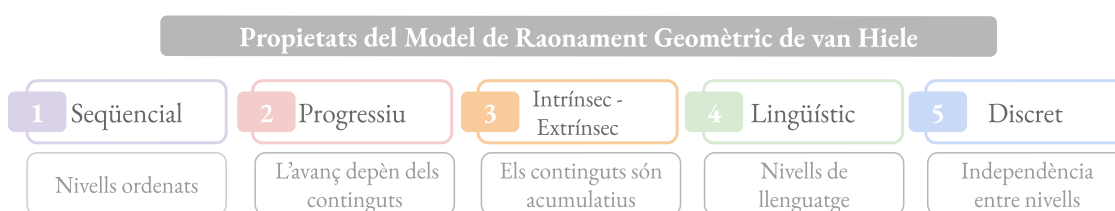


Figura 3.2.4. Propietats del model de raonament geomètric de van Hiele segons Crowley (1987).

Font: Elaboració pròpia.

D'entrada, s'esmenta com a primera propietat que el model de van Hiele és "seqüencial" perquè els nivells que hi descriuen s'han ordenat de manera creixent segons el seu nivell de complexitat. De manera que tot nivell que sigui superior a un altre tindrà un grau de dificultat major (Crowley, 1987).

Respecte a la segona de les propietats del model en discussió, és a dir la seva "progressivitat", fa referència a la relació estreta que existeix entre dos nivells consecutius i la obligatorietat de transitar-los un per un en sentit ascendent i de manera ordenada. És a dir, que el nivell previ és el requisit necessari per passar cap al següent nivell. En aquest punt s'ha de remarcar la manca de relació que existeix entre el pas entre un nivell cap al següent amb l'edat de l'estudiant. Així mateix, s'ha de puntualitzar que de cap manera es pot eludir un nivell, no obstant que el fet de que un alumne faci l'avanç cap a un nivell superior té dependència directa amb la metodologia d'ensenyament. Llavors, el mètode d'instrucció pot endarrerir o accelerar la transició d'un alumne des d'un nivell cap un altre (Crowley, 1987).

En relació a la tercera propietat, Crowley (1987) explica que "els objectes inherents en un nivell es tornen els objectes d'estudi del nivell següent". O sigui, que tots els atributs que pertanyen a la naturalesa essencial d'una entitat geomètrica (intrínsecs) es tornen evidents en un altre nivell de raonament (extrínsecs).

Respecte la quarta propietat, la lingüística, es parla de la distinció del vocabulari, la simbologia i les formes de representació que són característiques de cada nivell de raonament. En conseqüència de la resta de les propietats del model, la complexitat del llenguatge és creixent i depèn del nivell on es trobi l'alumne. Es pot expressar en termes de riquesa lingüística que a mesura que es va avançant en els nivells de raonament geomètric, el lèxic i el coneixement dels símbols i les representacions van també augmentant en complexitat (Crowley, 1987).

En darrer terme, però amb relació a la quarta propietat, tenim la cinquena propietat és la “discreció”. Vist que el llenguatge d'un nivell té diferències respecte d'un altre, això és antecedent d'aquesta última característica del model que subratlla que cada nivell representa una etapa sola i independent. És per això que la comunicació entre dues persones que es troben en nivells de raonament diferent pot ser complexa. La raó d'aquesta possible manca d'acord o d'enteniment es pot atribuir a la separació entre els nivells, però es fa més evident en termes del llenguatge perquè les expressions pertanyents a un nivell superior tindran conceptes que no existeixen (o són explícits) a un nivell inferior (Crowley, 1987).

Val la pena dir que el model de van Hiele és una eina adreçada als professors i que s'assembla al marc proposat per l'Associació Matemàtica del Regne Unit per l'ensenyament i l'aprenentatge de la geometria. Per l'autor, els nivells de raonament geomètric van ser la pauta per organitzar la seqüència dels continguts dels cursos de geometria (Jones, 1998 a). Burger i Shaughnessy (1986) proposen un seguit d'indicadors per cada un dels nivells de van Hiele. Amb ells serà possible conèixer on es troba un alumne i així donar seguiment individual i grupal.

Els sis indicadors que caracteritzen el nivell inicial o zero es troben a la **Taula 3.1.1.2.** Amb ells es pot identificar la mena de raonament geomètric que ha desenvolupat un alumne segons l'escala proposada per van Hiele. Es pot dir que un estudiant ha fet una tasca des d'un pensament de nivell inicial quan: (1) en comparar dibuixos, identificar, caracteritzar i ordenar formes fa ús de propietats o característiques poc precises, (2) es basa en prototips visuals per caracteritzar formes, (3) inclou atributs no gaire rellevants, com és l'orientació d'una figura dins l'espai o respecte d'altres figures, per identificar i descriure formes, (4) no és capaç de concebre que hi ha una infinitat de varietats de tipus de formes geomètriques, (5) posa en ordre figures fent servir propietats que no són comunes a totes elles i/o (6) donades un parell de propietats molt representatives com a pistes, és incapaç de deduir la forma a la qual es fa referència (Burger i Shaughnessy, 1986).

Taula 3.2.2.

Indicadors del Nivell 0 de raonament geomètric de van Hiele (Burger i Shaughnessy, 1987).

Indicadors del Nivell 0	
1.	Ús de propietats o característiques poc precises per comparar o identificar.
2.	Caracterització basada en prototips.
3.	Inclusió d'atributs poc rellevants per identificar i descriure formes.
4.	Impossibilitat de concebre una infinitat de varietats de formes.
5.	Ordenaments inconsistents.
6.	Impossibilitat de deduir formes a partir de les seves propietats.

Font: Elaboració pròpia.

A la **Taula 3.2.3.** s'inclouen els vuit indicadors pel nivell 1 de raonament geomètric de van Hiele. Un alumne en aquest nivell: (1) utilitza les propietats dels components de les formes geomètriques per establir comparacions entre elles, (2) es nega a incloure classes particulars de figures entre diferents tipus de formes generals, (3) considera propietats senzilles de les formes per fer ordenaments, per exemple, en comptes d'utilitzar els tipus d'angles o de simetria fa servir el número de costats, (4) aplica un seguit de propietats necessàries però insuficients per identificar o deduir una forma i explicar-ho, (5) ús de les propietats d'una figura per anomenar-la o descriure-la malgrat que se sàpiga el seu nom, (6) predilecció per caracteritzacions personals sobre definicions formals als llibres de text, (7) realització d'experiments com eines de comprovació, és a dir, fer diferents dibuixos fins arribar a la conclusió i/o (8) la manca de comprensió de la informació donada en comprovacions de caràcter matemàtic. Els dos darrers indicadors sembla que deriven del que els autors expressen com "el tractament de la geometria com si fos l'assignatura de física" (Burger i Shaughnessy, 1986).

Taula 3.2.3.

Indicadors del Nivell 1 de raonament geomètric de van Hiele (Burger i Shaughnessy, 1987).

Indicadors del Nivell 1	
1.	Comparacions basades en propietats.
2.	No permet la inclusió de classes entre tipus de formes generals.
3.	Ordenament basat en atributs senzills.
4.	Impossibilitat d'identificar els atributs necessaris d'una forma.
5.	Descripcions basades en les propietats d'una forma.
6.	Ús de caracteritzacions personals de les formes.
7.	Validació de proposicions mitjançant dibuixos.
8.	Manca de comprensió de les comprovacions matemàtiques.

Font: Elaboració pròpia.

El nivell dos de raonament geomètric de van Hiele es caracteritza mitjançant nou indicadors (**Taula 3.2.4.**). Un alumne que es troba en aquest nivell és capaç de: (1) proposar definicions de tipus de formes de manera correcta i completa, (2) modificar les definicions donades i acceptar immediatament les definicions de conceptes nous que se li introdueixen, (3) fer referències explícites a definicions, (4) acceptar formes equivalents de definicions, (5) acceptar ordenaments parcials lògics sobre diferents tipus de formes, incloses les classes de formes, (6) ordenar formes a partir d'atributs matemàtics ben específics i variats, (7) utilitzar frases de la forma “si, llavors” per expressar els seus arguments, (8) donar arguments amb els quals dedueix informalment segons quina informació, per exemple aplica la propietat transitiva (és a dir, si un argument A implica un fet B i el fet B implica el fet C, llavors l'argument A ens porta cap al fet C) i/o finalment (9) confondre la funció de l'axioma amb la del teorema (Burger i Shaughnessy, 1986).

Taula 3.2.4.

Indicadors del Nivell 2 de raonament geomètric de van Hiele (Burger i Shaughnessy, 1987).

Indicadors del Nivell 2	
1.	Definicions completes sobre els tipus de formes.
2.	Modificació de definicions i acceptació de nous conceptes.
3.	Referències explícites a definicions.
4.	Acceptació de formes equivalents de definicions.
5.	Ordenament parcial lògic entre tipus de formes.
6.	Ordenament de formes tenint en compte un atribut matemàtic precís.
7.	Ús de l'expressió “si, llavors...” per establir arguments.
8.	Creació d'arguments deductius informals.
9.	Confusió entre axioma i teorema.

Font: Elaboració pròpia.

Al següent nivell de raonament geomètric de van Hiele, el tres, es caracteritza mitjançant cinc indicadors (**Taula 3.2.5.**). Segons els autors, les evidències que un estudiant és al tercer nivell són: (1) la capacitat d'aclarir preguntes que puguin ser considerades ambigües i la modificació de la redacció de les instruccions d'una tasca o de l'enunciat d'un problema fent servir un llenguatge més específic o posant èmfasi en les dades útils, (2) la freqüent creació de conjectures i la verificació de les proposades per altres mitjançant la deducció, (3) l'ús i la confiança en la prova amb eines analítiques per validar una proposició, (4) la correcta identificació de les funcions dels axiomes, definicions, teoremes, corol·laris, i altres recursos del discurs matemàtic i/o (5) l'acceptació dels postulats que estableixen la

geometria euclidiana. Cal remarcar que els autors només presenten indicadors fins aquest tercer nivell (Burger i Shaughnessy, 1986).

Taula 3.2.5.

Indicadors del Nivell 3 de raonament geomètric de van Hiele (Burger i Shaughnessy, 1987).

Indicadors del Nivell 3	
1.	Aclariment de preguntes i modificació d'enunciats de problemes.
2.	Proposició i verificació freqüent de conjectures.
3.	Confiança en la comprovació matemàtica.
4.	Identificació i distinció dels axiomes, les definicions, els teoremes i altres.
5.	Acceptació dels postulats de la geometria euclidiana.

Font: Elaboració pròpia.

3.3. La teoria dels conceptes figuratius de Fischbein

Després de la publicació de la recerca de van Hiele sobre el raonament geomètric, Fischbein (1993) va aprofundir en el tema amb una proposta que relaciona les representacions visuals dels objectes geomètrics amb conceptes també de tret geomètric. La importància de l'estudi de les imatges; és la possibilitat que donen per organitzar de manera útil les dades i la relació que té aquesta nova representació en la cerca d'una solució (Jones, 1998 b).

Com a punt de partida, Fischbein (1993) ressalta el que és un concepte: l'expressió d'una idea mitjançant la representació idealitzada d'una classe d'objectes i per tant, en ella es pot trobar un recull de les propietats comunes dins una classificació determinada. Per una altra banda, l'investigador estableix el terme "imatges mentals", amb el qual es refereix a les representacions concretes d'objectes o fenòmens. Les figures geomètriques posseeixen propietats conceptuals. Però les propietats conceptuals d'un element geomètric li pertanyen per naturalesa essencial i van més enllà de la seva aparença. És a dir, són propietats intrínseques de les figures geomètriques que es relacionen amb la seva representació espacial; per tant no es presenten en altra mena d'objectes matemàtics. Com a conseqüència de la naturalesa de les propietats conceptuals de les figures, el raonament geomètric es mou tant en l'aspecte conceptual com en el figural (**Figura 3.3.1**) (Biggs, 1993; Jones, 1998 a).

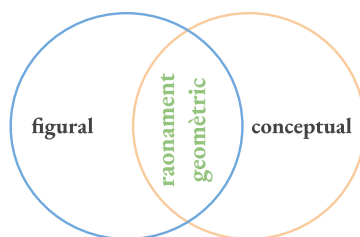


Figura 3.3.1. Aspectes del raonament geomètric de Fischbein (Fischbein, 1993; Jones, 1998 a).

Font: Elaboració pròpia.

Fischbein (1993) presenta la conceptualització com una manera d'expressar un coneixement determinat. Per exemple, quan es comparen dues figures geomètriques per establir una relació de congruència es pot fer menció a diferents característiques i operacions. És a dir, si el criteri per concloure que hi ha congruència és mitjançant la comparació dels angles interiors, cal utilitzar els conceptes: vèrtex, amplitud i igualtat. En canvi, si es comparen els costats dels triangles, els conceptes per analitzar són: costat, longitud i igualtat. Però, ambdós casos representen al mateix temps l'operació de transformació geomètrica de les figures (desplaçament i/o rotació) en estudi.

A la vegada, l'autor (Fischbein, 1993) posa èmfasi en la idealització de punts, segments de línia, costats, angles, entre altres figures i cossos geomètrics. Aquests objectes reals idealitzats es doten d'una existència també idealitzada que permet l'aplicació d'operacions matemàtiques formals pròpies de proves lògiques no assumibles sobre objectes reals o purament conceptuals.

Dit d'una altra manera, les figures geomètriques i les transformacions geomètriques són objectes de naturalesa conceptual amb les quals és possible arribar a conclusions dins l'àmbit de les matemàtiques. Però totes dues, les figures i les operacions, són entitats mentals per treballar aspectes matemàtics que posseeixen cinc propietats conceptuals intrínseques de les figures geomètriques (Fischbein, 1993): (i) són models materialitzats, (ii) conceptualment perfectes, (iii) sense cap relació amb la realitat, (iv) que corresponen a generalitzacions i (v) dins un sistema axiomàtic determinat (**Figura 3.3.2**).

Segons l'investigador, malgrat que les propietats intrínseques dels objectes geomètrics tenen una forta relació amb elles, la majoria de les vegades es centra l'atenció en un determinat número de propietats o tan sols en una d'elles i per tant, hi ha molts moments en que bona part de les propietats (o la resta d'elles) es deixen a un costat. Un exemple d'això pot ser la producció del dibuix geomètric perquè mentre es realitza aquesta tasca s'han d'ometre aspectes com la perfecció i la impossibilitat de representar veritablement les característiques físiques dels elements que formen una figura geomètrica,

com són els punts dimensionals o les línies bidimensionals. Llavors, l'activitat desenvolupada donarà peu al tipus de raonament que es dugui a terme davant l'activitat geomètrica. Però mai no s'ha d'oblidar la dualitat concepte-propietat, la qual és característica de tota figura geomètrica i fa possible donar als conceptes el moviment que només les imatges posseeixen i ficar la perfecció, generalització, abstracció i puresa propis dels càlculs a les imatges (Fischbein, 1993).

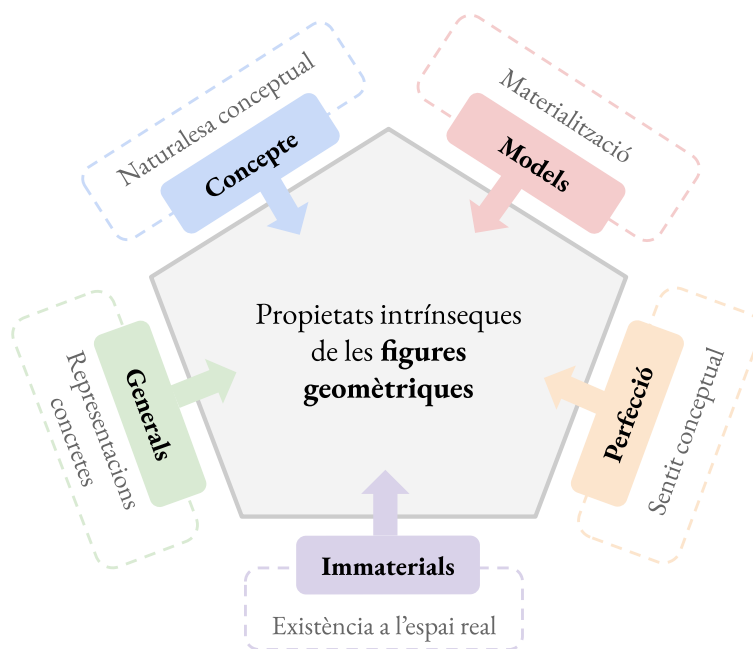


Figura 3.3.2. Propietats intrínseques de les figures geomètriques segons Fischbein (Fischbein, 1993).

Font: Elaboració pròpia.

Una altra qüestió en la que reflexiona Fischbein (1993) és la forta interacció que hi ha entre les imatges i els conceptes quan es du a terme en un procés de raonament. L'investigador planteja com a hipòtesi pel desenvolupament del procés de raonament la interacció entre xarxes actives de conceptes amb fonts d'imaginació. Amb una mirada més profunda, s'ha d'admetre dins aquest procés com els significats canvien sovint de categoria, les imatges aixequen el nivell de generalització del seu significat i l'enorme enriquiment de les connotacions i la potència dels conceptes.

Partint del fet que les imatges i els conceptes són entitats mentals que pertanyen a categories mentals clarament diferenciades, dins el raonament geomètric intervé un tercer objecte mental que és a la vegada conceptual i figural. És a dir, a l'àmbit de la geometria, els processos de raonament requereixen la interacció d'imatges, conceptes i objectes mentals figuratiu-conceptuals. En paraules de l'autor (Fischbein, 1993): *La raó per aquesta profunda simbiosi entre el que és simbòlic, les limitacions*

analítiques i les propietats figuratives del raonament geomètric és que de fet debatem sistemes axiomàtics. Com a conseqüència, cal remarcar i fer distinció entre tot això que és formal i vàlid des del sentit purament matemàtic i allò que posseeix validesa empírica. D'aquesta manera, quan es fa l'anàlisi de les figures geomètriques des de la perspectiva d'una estructura axiomàtica, les seves definicions condueixen cap els seus atributs i els teoremes que els recolzen i per tant, es treballa amb una mena de validesa formal. Pel contrari, per donar validesa de tret empíric a un argument, el nucli de la discussió han de ser fets del mateix tipus: empírics (Fischbein, 1993).

Aquest fenomen idealitzat del raonament geomètric amb el qual s'arriba a l'absoluta conceptualització de les imatges espaials troba impediments com ho són les fal·làcies lògiques, però l'escolarització i l'experiència que es guanya amb els anys contribueixen a la seva millora.

Per concretar les idees, Fischbein (1993) fa la distinció de tres categories d'entitats mentals relacionades amb figures geomètriques: (i) les definicions, (ii) les imatges i (iii) *els conceptes figurals* (**Figura 3.3.3.**).



Figura 3.3.3. Categories d'entitats mentals relacionades amb figures geomètriques (Fischbein, 1993).

Font: Elaboració pròpia.

Per a Fischbein (1993), els *conceptes figurals* són les entitats mentals que s'estudien i manipulen quan es du a terme un procés de raonament geomètric. Per tant, els *conceptes figurals* reflecteixen propietats espaials com la forma, la posició i la magnitud; i a la vegada posseeixen propietats conceptuals com la idealització, abstracció, generalització i perfecció.

3.4. El model cognitiu del raonament geomètric de Duval

En una proposta més recent, Duval (1999) presenta el concepte **aprehensió cognitiva** per donar un marc analític al dibuix geomètric. Jones (1998 a) fa un resumen de la proposta analítica de Duval, en quatre tipus d'aprehensions: (i) la perceptual, (ii) la seqüencial, (iii) la discursiva i (iv) la operativa (**Figura 3.4.1.**).

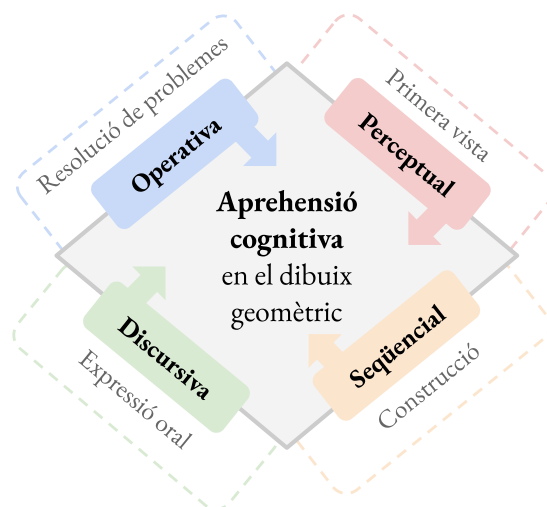


Figura 3.4.1. Tipus d'aprehensió cognitiva pel dibuix geomètric segons Duval (Jones, 1998 a).

Font: Elaboració pròpia.

A continuació es destaquen les característiques dels tipus de aprehensions cognitives proposades per Duval. Fa referència a l'**aprehensió perceptual** quan es parla dels detalls que poden ser apreciats amb el sentit de la vista. Es tracta d'una experiència directa entre l'observant i l'objecte sota observació. Durant el temps que es produeix aquesta interacció, és possible que l'observador se n'adoni de l'existència dels elements que conformen la figura geomètrica en anàlisi (Jones, 1998 a).

Per un altre costat, l'**aprehensió seqüencial** fa referència al moment que es fa la descripció del procediment de traç d'un dibuix geomètric o bé quan es realitza el dibuix pròpiament. Es pot afirmar que és un tipus d'aprehensió que va més enllà de la percepció perquè també involucra limitacions tant de tret pràctic com matemàtic (Jones, 1998 a). Una mostra del terme que es discuteix aquí es presenta en el moment que l'alumne es disposa a fer la reproducció d'una figura geomètrica amb poques eines de geometria i cal que faci algunes variacions al procediment de traç que coneix per assolir el dibuix assignat. En aquest cas, l'alumne a més de dissenyar un procediment nou, pot trobar-se davant la necessitat de fer càlculs relacionats amb l'objecte geomètric en procés de construcció per poder fer adaptacions segons les eines de dibuix de les quals disposa.

L'**aprehensió discursiva** és un procés de comunicació on intervé el diàleg i l'expressió adequada de les idees que es volen transmetre. El reconeixement de propietats que correspon a aquest tipus d'aprehensió depèn en igual mesura tant de la percepció i dels postulats relacionats amb l'objecte geomètric del qual es fa la descripció. Cal fer una especial referència a l'expressió verbal per tractar-se d'un recurs d'ampli ús a l'aula o dins els processos d'ensenyament i aprenentatge (Jones, 1998 a).

Per acabar, l'**aprehensió operativa** es duu a terme quan una figura geomètrica es transforma mitjançant l'aplicació de simetries, translacions, rotacions o bé homotècies. L'esforç per identificar la figura que s'ha d'obtenir és similar tan si es demana imaginar-lo com fer-lo de manera gràfica. Convé destacar que aquest tipus d'aprehensió intervé en la reflexió que es fa quan es busquen possibles solucions per problemes geomètrics, però que donada la complexitat d'un problema la resta de les aprehensions es poden presentar a la vegada, de manera combinada (Jones, 1998 a).

Més endavant en Duval va caracteritzar el raonament geomètric en tres conjunts de **processos cognitius** independents, però a la vegada coordinats, que es presenten en el moment en que es desenvolupa l'activitat geomètrica (**Figura 3.4.2.**): (i) visualització, (ii) construcció i (iii) raonament (Jones 1998 a i b).

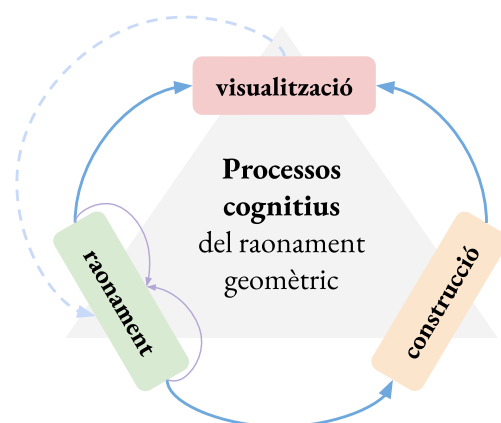


Figura 3.4.2. Processos cognitius del raonament geomètric segons Duval (Jones, 1998 a i b).

Font: Elaboració pròpia.

El primer dels tres grups de processos cognitius proposats per Duval és els **processos de visualització**. Es tracta del conjunt d'accions mentals progressives amb les quals s'arriba a donar una representació visual a un postulat geomètric. Un altre cas on es troben processos de visualització succeeix durant el desenvolupament d'un mètode exploratori per analitzar, descobrir, plantejar i resoldre una situació complexa de l'àmbit de la geometria. Un exemple clar són les situacions merament gràfiques que demanen la identificació d'elements geomètrics d'una figura (Jones, 1998 a).

El grup de **processos de construcció** constitueix el segon conjunt de processos cognitius del raonament geomètric d'en Duval. Dins aquesta classificació s'ajunta tot allò que cal tenir per poder

realitzar un dibuix geomètric (Jones, 1998 a). Des del punt de vista del significat del mot “construir” adaptat al dibuix geomètric, es pot parlar concretament de l’acció de formar un objecte geomètric a partir dels seus elements; per tant, és un procediment que depèn del seguiment d’un ordre i del domini de l’ús d’eines com el regle, l’escaire, el cartabó, el compàs i el transportador, entre d’altres. Però també s’ha de considerar que l’utilització de les eines de dibuix geomètric tindrà les limitacions que imposen les dades amb les quals es disposa per la realització de l’objecte geomètric demanat. Per il·lustrar-lo es tenen les tasques on es demana la construcció d’una figura geomètrica però els alumnes disposen d’una limitada quantitat d’eines de dibuix que en conseqüència els obliga a fer nous plantejaments del procediment de traç geomètric. Cal mencionar que també es presenten aquests processos de raonament en fer servir software per la realització de dibuix geomètric. Dins el tercer, i darrer conjunt dels processos cognitius d’en Duval, es troben els **processos de raonament**. L’element que destaca d’aquesta categoria és l’ús del llenguatge, ja sigui per donar una explicació o per fer comprovacions (Jones, 1998 a). El concepte central dels processos de raonament és la capacitat d’expressar allò que se sap sobre un objecte geomètric. Per posar un exemple es poden citar les activitats retòriques o purament numèriques on es sol·licita el càlcul de mesures, com l’àrea o el perímetre, a partir d’unes figures donades, per exemple. Com s’ha vist en cada cas, els tres grups de **processos cognitius** del raonament geomètric es poden presentar durant l’activitat geomètrica de manera individual però també hi ha situacions en les quals intervenen simultàniament perquè hi ha un ampli nombre de relacions entre ells (**Figura 3.4.2.**) (Jones, 1998 a i b). Jones (1998 a i b) il·lustra les anomenades interrelacions entre els processos cognitius d’en Duval com trajectòries que indiquen les diferents seqüències progressives que poden dur-se a terme durant la realització d’una tasca de traç geomètric (**Figura 3.4.3.**).

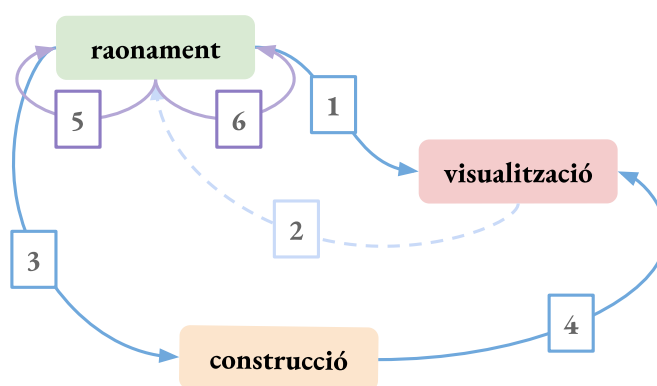


Figura 3.4.3. Interaccions entre els processos de raonament geomètric característiques de l’activitat geomètrica segons Duval (Jones, 1998 a i b).

Font: Elaboració pròpia.

D'acord amb en Jones (1988 a i b), podem trobar les següents seqüències progressives:

1. Seqüència de processos de raonament - visualització: partint d'un procés de raonament s'estableix la relació entre un objecte geomètric i la seva transformació (Jones, 1998 a), llavors és possible reconèixer configuracions planes o tridimensionals que corresponen a la reflexió, la rotació, la translació o la combinació d'aquestes operacions sobre una figura geomètrica.
2. Seqüència de processos de visualització - raonament: després de l'observació d'una figura geomètrica, els processos de raonament permeten identificar criteris i principis aplicables per arribar a conclusions sobre les característiques de l'objecte geomètric o establir relacions entre varis d'ells (Jones, 1998 a). Per exemple, per afirmar que un parell de figures són congruents o similars.
3. Seqüència de processos de raonament - construcció: aquí, els processos de raonament permeten establir el conjunt de passos a seguir per arribar a la representació gràfica o física d'una figura geomètrica (Jones, 1998 a). Hi hauran importants variacions si és el cas de l'ús de software de dibuix geomètric perquè mentre alguns procediments de traç es simplifiquen, uns altres es tornen més complexos o no existeixen tal i com es farien sobre el paper.
4. Seqüència de processos de construcció - visualització: és el cas de les situacions on l'ús d'eines de dibuix físiques o virtuals permeten la identificació gràfica d'objectes geomètrics (Jones, 1998 a). S'han de puntualitzar les diferències que es trobaran segons el tipus d'àmbit de dibuix, amb paper o virtual. Els elements que cal traçar són diferents o més nombrosos si es tracta d'una figura feta sobre un full que quan es treballa sobre una superfície digital. Per una altra banda, les possibilitats d'interpretació i d'anàlisi d'una imatge en paper es poden fer des de l'enfocament cap a les propietats fixes pròpies d'una sola figura mentre que una imatge digitalitzada pot manipular-se. Aquesta capacitat de moviment permet l'observació de característiques globals.
5. Seqüència de processos dialògics de raonament: els processos de raonament proposats per en Duval, poden tenir relació entre ells mateixos quan involucren el llenguatge. Els mecanismes lingüístics necessaris per anomenar entitats geomètriques, fer-ne descripcions, donar-ne explicacions o exposar-ne arguments (Jones, 1998 a). Tot i que aquest diàleg pot ser mental, és un procés recurrent de raonament sobre l'activitat geomètrica.
6. Seqüència de processos formals de raonament: quan la comunicació de les idees geomètriques es fa amb l'aplicació de marc teòrics com axiomes i teoremes, els processos de raonament eleven el seu estatus a un àmbit formal. Gràcies a l'ús de nomenclatures i simbologies pròpies de la geometria els processos de raonament dialògics poden organitzar-se per deduir idees i a la vegada formalitzar-se (Jones, 1998 a).

Seguint en la seva recerca, en Duval (1999) va treballar sobre les representacions cognitives. Aquestes representacions van ser classificades en dos tipus: intencionades i naturals. Les representacions intencionades fan servir un sistema semiòtic per produir taules, gràfiques o altres esquemes. En canvi, les representacions naturals són aquelles que tenen rellevància per l'estudi del raonament geomètric. Les representacions naturals són produïdes sense cap intenció mitjançant una acció del nostre cos, per exemple quan es recorda un objecte. Duval (1999) estableix la **visualització** com un mecanisme mental en el qual s'estableix una relació entre propietats i objectes que comença en les primeres edats de les persones. Llavors, es pot dir que la **geometria** és el resultat de la unió de la visualització i la matematització de les idees (Jones, 1995).

3.5. La imatgeria visual de Presmeg

L'especialització sobre l'estudi de la **visualització** portà a la introducció d'un terme per fer referència al procés de transformació d'imatges o de construcció d'aquestes a partir d'unes altres o de dades no gràfiques, és a dir, la **imatgeria mental** (Jones, 1998b). La **visualització** és un procés que inclou "*la construcció i transformació de la imatgeria mental i de totes les inscripcions de naturalesa espacial que s'hi impliquen quan es fan matemàtiques*" (Presmeg, 2006).

Dues definicions fonamentals per l'estudi dels treballs de Presmeg són: imatge visual i visualitzador. El primer terme, **imatge visual**, s'utilitza per identificar tot constructe mental amb el qual es reflexa informació visual o espacial. El segon concepte, **visualitzador**, és tota aquella persona que té tendència a triar mètodes visuals (Presmeg, 2006).

Presmeg va establir la relació entre la formació d'imatges a la ment i la **visualització** amb els **visualitzadors** i la **imatgeria visual**, que són els mètodes visuals mitjançant els quals es tracta d'arribar a la solució de problemes matemàtics. Com que els problemes matemàtics poden o no ser visuals i a la vegada també es pot o no demanar una solució gràfica, els mètodes visuals de resolució poden ser variats. Les pràctiques amb les quals s'arriba a conèixer una imatge poden ser de molts tipus, no només basades en una representació gràfica. És més, cal estudiar els aspectes visuals perquè existeix una relació entre els conceptes i les seves representacions gràfiques (Jones, 1998 b).

El mètodes de resolució que caracteritzen la **imatgeria visual** es classifiquen en cinc tipus: (i) els pictòrics, (iis) els relacionats amb patrons, (iii) els memorístics, (iv) els cinestèsics i (v) els dinàmics (**Figura 3.5.1.**) (Jones, 1988 b).

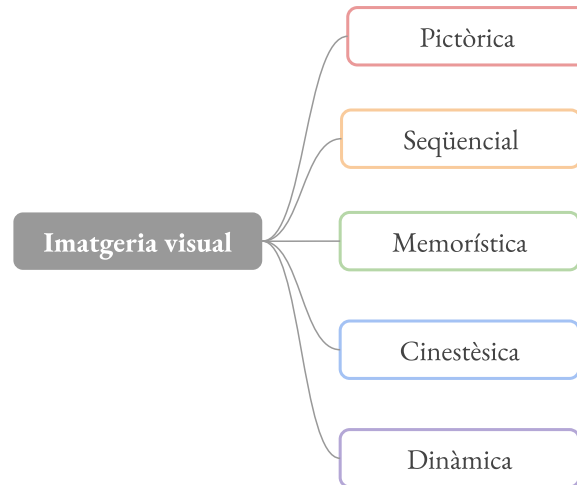


Figura 3.5.1. Tipus de imatgeria visual segons Presmeg (Jones, 1998 b).

Font: Elaboració pròpia.

Els trets que diferencien els cinc tipus d'**imatgeria visual** són els següents (Jones, 1998 b):

- La **imatgeria visual pictòrica** s'associa a les imatges mentals, és a dir, aquelles que existeixen només a la ment.
- En el cas de la **imatgeria visual seqüencial** o de patrons es tracta d'aquelles figures per les quals hi ha una relació fixa i determinada que indica posicions o orientacions a l'espai.
- La **imatgeria visual memorística** fa referència a l'ús de records d'un conjunt de percepcions, produïdes per la interacció directa o indirecta, per reproduir una imatge.
- Per **imatgeria visual cinestèsica** és reconeix tot allò on s'involveu qualsevol tipus d'activitat física: seguiment de trajectòries, realització de moviments de manera intencionada, producció de dibuixos, etcètera.
- En darrer terme, s'identifica com **imatgeria visual dinàmica** a tota aquella relacionada amb el moviment.

Per finalitzar aquest apartat convé ressaltar les propietats cognitives i afectives de la visualització com a components essencials dels sistemes de representació dins els processos de resolució de problemes matemàtics, com queda explicat en el model psicològic de l'aprenentatge matemàtic. La interacció entre la didàctica de les matemàtiques i la visualització és una qüestió que cada vegada atreu més interès dins la comunitat científica amb la intenció de trobar evidències sobre com ajudar als alumnes a assolir, la visualització, a l'aula (Presmeg, 2006).

3.6. El raonament espacial segons Clements i Battista

La geometria i el raonament espacial són fonamentals per l'aprenentatge de moltes assignatures, a més de les matemàtiques. Per aquesta raó convé establir les diferències entre aquests dos conceptes (geometria i raonament) a partir de les seves descripcions.

La geometria s'encarrega de l'estudi de la forma i l'espai, i és de la seva competència l'estudi dels objectes espacials, les relacions que hi ha entre ells i les seves transformacions. La tasca del raonament espacial és la construcció i la manipulació de les representacions mentals dels objectes espacials, les seves relacions i les seves transformacions (Clements, 1998). Per tant, *“el raonament espacial és essencial pel pensament científic; perquè s'utilitza per representar i manipular informació dins els processos d'aprenentatge i resolució de problemes”* (Clements i Battista, 1992).

El punt de partida per Clements (1998) és com s'originen els conceptes de forma i els seus prototips dins una cultura determinada. A la col·laboració d'aquest investigador amb Battista (1992) es subratllen els treballs que Gardner i Krutetskii van presentar per a classificar els estils de raonament dels estudiants segons les “intel·ligències humanes” i les formes de pensament. Gardner identifica amb la **intel·ligència espacial** amb l'habilitat d'assabentar-se de les similituds que hi ha en diferents àmbits o dominis. Krutetskii analitza el pensament **visual-pictòric** que tot plegat amb el pensament **verbal-lògic** fan possibles les idees matemàtiques.

Krutetskii designa tres subcategories que deriven de la combinació d'aquesta parella de formes de pensament: (i) l'analítica, (ii) la geomètrica i (iii) l'harmònica. L'explicació d'aquestes tres varietats s'il·lustra amb les metodologies aplicades. Un alumne que esbrina la resolució d'un problema fent servir arguments verbal-lògics, pot dir-se que és analític. Per una altra banda, un estudiant és geomètric quan mostra predilecció pels esquemes visual-pictòrics en resoldre problemes. I finalment, es pot dir que els alumnes que es categoritzen com a harmònics són aquells amb els quals no es troba cap tendència clara sobre les seves eleccions quan resolen problemes perquè de vegades ho fan mitjançant arguments verbal-lògics i en altres utilitzen diagrames visual-pictòrics (Clements i Battista, 1992).

Clements i Battista (1992), citant a Johnson, afirmen que, per aprofundir els processos mentals dels estudiants, afirmen que s'ha d'explorar el mecanisme mitjançant el qual les experiències amb els cossos ajuden a l'estructuració del raonament: la **imatgeria**. Aquest mecanisme pot caracteritzar-se de dues maneres: (i) com a una imatge esquematitzada o (ii) com a una metàfora. S'entén com una imatge esquematitzada quan en percebre un patró que es relaciona amb una acció motriu proveeix de

coherència i estructura a una experiència. En canvi, es tracta d'una metàfora quan s'assoleix donar coherència i estructura a una experiència adaptant un patró d'un altre àmbit (Clements i Battista, 1992)

En un àmbit més generalitzat es troba el **sentit espacial**, el qual s'assoleix quan es tenen tres habilitats: (i) l'**orientació espacial**, (ii) la **visualització espacial** i (iii) la **imatgeria** (**Figura 3.6.1**). Per orientació espacial s'entén l'habilitat de construir mentalment mapes amb els quals és possible localitzar llocs i proposar trajectòries mitjançant processos d'abstracció, generalització i simbolització. Pel que fa a la **visualització espacial**, Clements (1998) estableix com a definició “*la comprensió i la realització imaginària de moviments d'objectes en dues o tres dimensions*”. En aquest sentit, es fa imprescindible afegir l'habilitat de crear imatges mentals que siguin, per un cantó, abstractes i a la vegada mal·leables com ara per manipular-les.

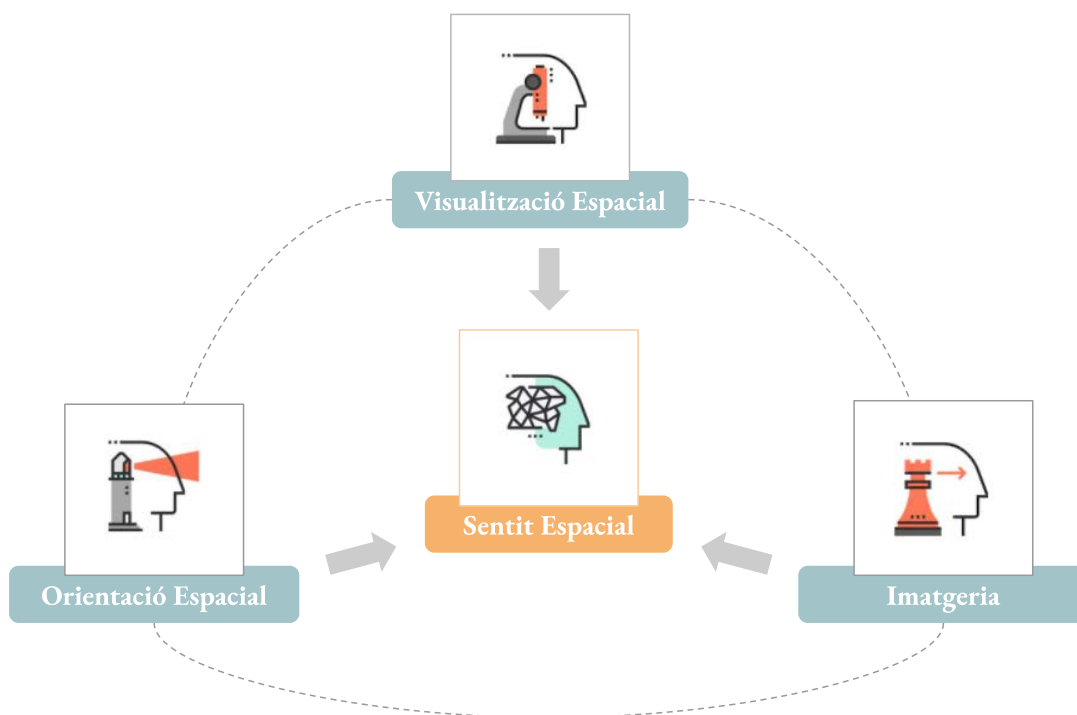


Figura 3.6.1. Les tres habilitats per assolir el sentit espacial (Clements, 1998).

Font: Elaboració pròpia.

Per concloure, seguint Clements i Battista (1992), s'ha de dir que l'aprenentatge de la geometria manté una forta relació amb l'acció mental i per tant, la manipulació i els esquemes mentals són decisius.

3.7. La teoria cognitiva ACT-R

L'ACT-R es defineix com a un sistema general per modelar processos d'alt nivell de cognició (Anderson, Matessa i Lebiere, 1997). Amb aquesta teoria es fan simulacions per entendre la cognició de l'ésser humà a partir de la identificació dels components del coneixement humà i de quina manera s'aconsegueixen (Anderson i Lebiere, 1998).

Des del punt de vista de l'ACT-R, l'anàlisi comença amb la categorització del coneixement en dos tipus: (i) el procedimental i (ii) el declaratiu (**Figura 3.7.1.**). Per Anderson i Lebiere (1998), el procés d'aprenentatge comença pels fets, les imatges i fins i tot els sons, que en conjunt formen el coneixement declaratiu.

Una vegada obtingut un coneixement declaratiu, les experiències i la pràctica fan que s'hi incloguin procediments i és aleshores quan s'entén com es fan les coses, que és el coneixement procedimental. Quan es realitza una tasca hi ha una mena d'amalgama de fets i procediments; és un aglomerat de coneixement declaratiu i procedimental (Ritter, Anderson, Koedinger i Corbett, 2007). Dins l'àmbit matemàtic, es pot remarcar que, el coneixement procedimental és el que permet fer ús del coneixement declaratiu quan es vol resoldre un problema (Anderson, 1997).

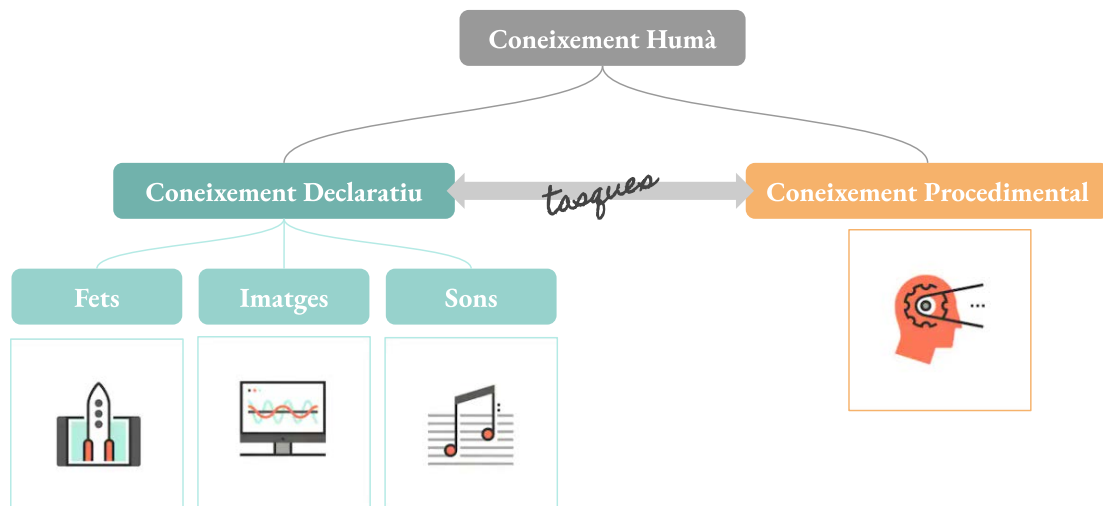


Figura 3.7.1. Els dos tipus bàsics de coneixement segons la teoria ACT-R (Anderson i Lebiere, 1998).

Font: Elaboració pròpia.

Una vegada descrit el que és el coneixement segons la teoria ACT-R, s'han de plantejar el seus principis fonamentals, en són tres:

1. Les dues formes bàsiques del coneixement són la declarativa i la procedimental (Anderson i Lebiere, 1998).
2. “El coneixement necessari per aconseguir tasques complexes pot descriure’s com a un conjunt de components de coneixement declaratiu i procedimental que són rellevants per aquesta tasca” (Ritter, Anderson, Koedinger i Corbett, 2007; p. 250).
3. “Ambdós, el coneixement declaratiu i procedimental s’enforteixen amb el seu ús” (Ritter, Anderson, Koedinger i Corbett, 2007; p. 250).

A conseqüència d’aquests tres principis es manifesta que l’aprenentatge és un procés gradual i seqüenciat on intervé la codificació, l’enfortiment i la procedimentació del que es coneix (Ritter, Anderson, Koedinger i Corbett, 2007). Aquesta interpretació tan àmplia ha permès a l’ensenyament de la geometria esdevenir una àrea de recerca de l’ACT-R. Com que els desenvolupadors de l’ACT-R consideren que una competència és un conjunt de “regles de producció”, van desenvolupar aplicacions d’ordinador per conduir als alumnes a desenvolupar una seqüència de “regles de producció” per resoldre problemes de caire geomètric, com ara la comprovació d’atributs de figures. Per aquests investigadors, el raonament que du a terme un alumne quan es troba davant una tasca de geometria pot ser descrit com a un seguit de passos (regles de producció) amb les quals s’assoleixen petits objectius que permeten arribar a l’objectiu general del problema (Anderson, Boyle, Corbett i Lewis, 1990).

Un exemple de la discretització del procés de resolució de problemes geomètrics en la proposta que fan els autors (Anderson, Boyle, Corbett i Lewis, 1990) per comprovar que dos triangles són congruents. El primer sub-objectiu és provar que dos costats corresponents són congruents. Com a segon sub-objectiu és té la comprovació de la congruència de l’altre parella de costats corresponents. Es continua amb un tercer sub-objectiu que consisteix en la comprovació de la relació de congruència entre dos angles corresponents. Finalment, s’aplica el criteri de congruència per a triangles Costat-Angle-Costat per arribar a l’objectiu principal que és provar que les dues figures són congruents (**Figura 3.7.2.**).

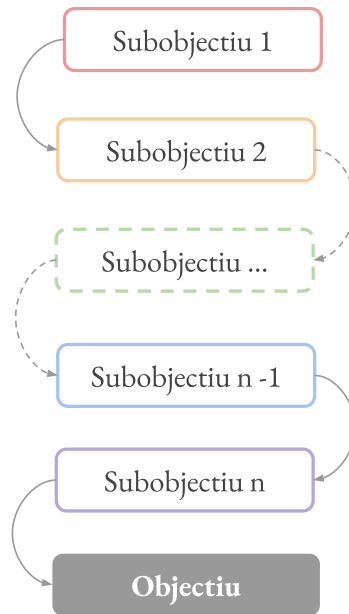


Figura 3.7.2. Discretització d'una tasca segons l'ACT-R (Anderson, Boyle, Corbett i Lewis, 1990).

Font: Elaboració pròpia.

En analitzar l'ordre dels sub-objectius que van conduir a la resolució del problema és evident que l'objectiu principal, l'aplicació d'un dels criteris de congruència de triangles, va ser el plantejament inicial que va dictar quins haurien de ser els subobjectius. Per tant, en aquest exemple s'ha mostrat una inferència en sentit invers que té com a punt de partida el que es vol provar. Les petites tasques en les que es divideix una altra major poden plantejar-se mirant endavant o cap enrere (Anderson, Boyle, Corbett i Lewis, 1990).

Capítol 4. Didàctica de la geometria

Els treballs arqueològics ajuden a situar evidències de l'ús de relacions espacials per a la construcció i eines cap a l'any 40.000 a.C. Existeixen referents escrits que mostren la visió del que es considerava que era aquesta branca de les matemàtiques, ja sigui per a la civilització sumèria, els egipcis o els grecs (Collette, 2006). *Els Elements* d'Euclides mostren un recull de les idees antigues sobre geometria. Totes aquestes evidències també es relacionen amb la funció de traspàs del coneixement sobre aquesta àrea: la didàctica de la geometria.

Al llarg del segle XX s'ha vist una revolució de l'ensenyament de les matemàtiques: s'han realitzat canvis dels continguts matemàtics a les escoles, tant als programes com a les seves metodologies. Sembla que les accions al voltant de les aules fa ressò a Blum (2017), qui va puntualitzar la responsabilitat que té l'ensenyament de les matemàtiques per cobrir les necessitats de la societat des de les aules.

Des de la perspectiva antropològica, alguns dels professionals que van contribuir al canvi en l'ensenyament de la geometria al segle passat van ser: Piaget i Inhelder, el matrimoni van Hiele, Emma Castelnuovo i Maria Montessori. Llavors, els enfocaments de la didàctica van passar de models centrats en el professor (didàctica pre-científica), a aquells on també es va incorporar l'alumne (didàctica clàssica) i posteriorment, es va considerar l'influència del contingut acadèmic (didàctica fonamental) (Contreras, 2012) (**Figura 4.1.**).

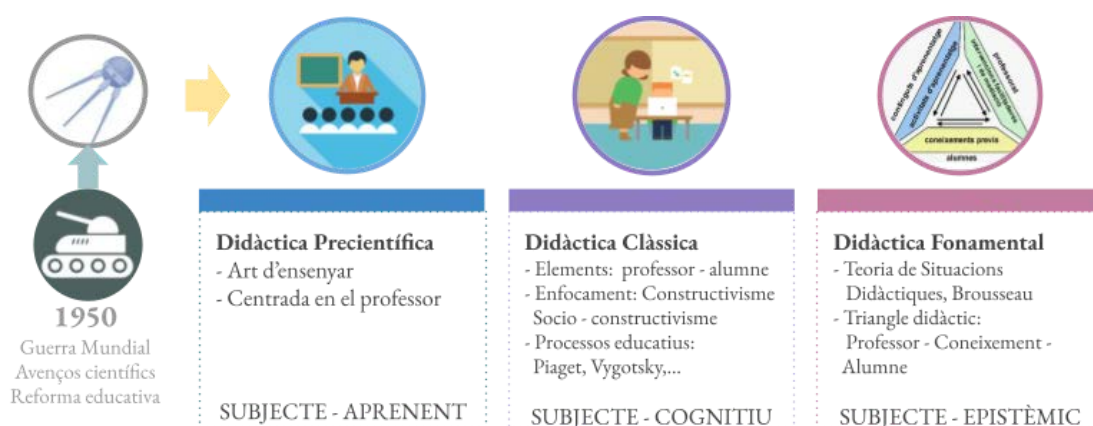


Figura 4.1. Enfocaments de la didàctica de les matemàtiques

Font: Elaboració pròpia.

4.1. La geometria a l'escola

Segons en Piaget i Inhelder (1971), el sentit numèric i el reconeixement de l'espai permeten, abans dels estudis escolaritzats, desenvolupar raonaments relacionats amb l'espai. La geometria, escolar i no escolaritzada, té les seves arrels tan en el raonament espacial com en el concepte de forma que es construeix a la infantesa (Clements, Sarama, Swaminathan, Weber i Trawick-Smith, 2018).

El dibuix, recurs que utilitzem des de ben petits, té connexió amb àmbits com el llenguatge abans de començar la nostra etapa escolar (González, 2003). Posteriorment, a l'escola, es descobreixen les relacions que hi han entre els punts i les línies que formen una imatge mitjançant la solució de problemes (Schoenfeld, 1982).

En terme general, es va sostenir que el coneixement de l'entorn s'aconsegueix a través de construccions fetes per els éssers humans (Lourenço, 2012). Per Piaget es va tractar d'un procés de l'individu (1973) mentre que Vigotsky va accentuar la influència de la interacció social i l'ús del llenguatge tant així com de la manipulació (1987). En molts casos, la interpretació de la construcció del coneixement es va caracteritzar pels seus trets subjectiu i realista (Bueno, 2007), que considera que la intervenció del professor no és necessària i substitueix tota acció intel·lectual per experiències sensorials (Berrocal, 2013) (**Figura 4.1.1.**).

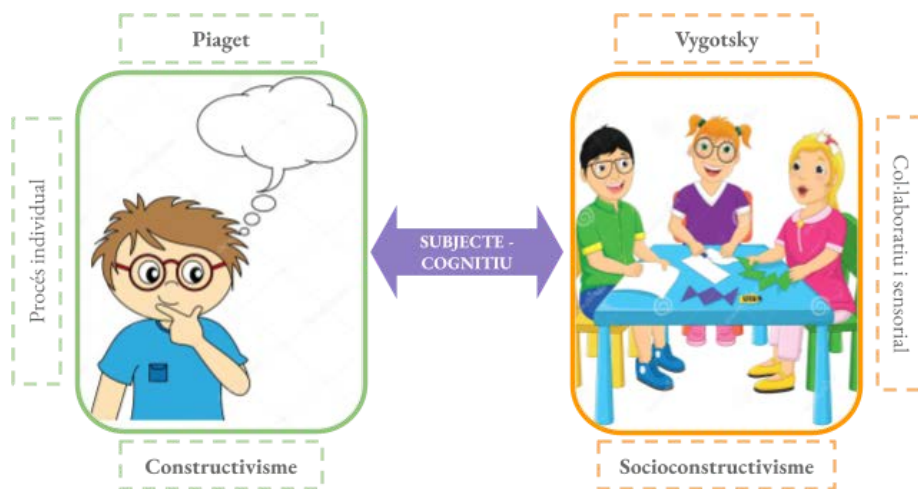


Figura 4.1.1. Models d'aprenentatge segons Piaget i Vigotsky.

Font: Elaboració pròpia.

Si els treballs de Piaget i Inhelder (1971) van donar rellevància al pensament espacial, una altra figura protagonista dels avenços en l'ensenyament als anys 1900's és la Maria Montessori. Aquesta dona va

relacionar la seva formació professional, la medicina, en la tasca educativa per orientar als professors sobre metodologies d'ensenyament a l'aula i seqüències d'exercicis (Gutek, 2004). A Catalunya, la petjada de la metgessa Montessori va tenir influència en la carrera de la mestra Maria Antònia Canals, qui va esdevenir-se com a referent de l'ensenyament de les matemàtiques al país (Sotos i López, 2015). Però, va ser Emma Castelnuovo qui va fer una veritable innovació en la didàctica de la geometria cercant l'experimentació i investigació per part dels alumnes (Ramellini, Veltroni, Martín i Esposti, 2004). Ferrán (2004) descriu una de les propostes d'ensenyament de la geometria de Castelnuovo com a un text fàcil de llegir on s'introdueixen els objectes geomètrics a partir d'exemples trobats al món (la natura, l'art, les construccions, etcètera) per obtenir les propietats d'aquests objectes seguint qüestionaments lògics i evidències basades en la intuïció i la imaginació. Aquesta descripció fa un bon resum de la revolució didàctica de Castelnuovo al voltant de l'ensenyament de la geometria que coincideix amb altres autors (Martín, 2002; Maffia i Pelillo, 2015). Un altre canvi en la perspectiva de l'ensenyament de la geometria prové de la Universitat Joseph Fourier de Grenoble a França: l'eina informàtica per explorar els objectes geomètrics mitjançant funcions de construcció, creació i edició. (Mosquera, 1996).

Per una altra banda, Houdement i Kuzniak (1999) van presentar tres tipus de geometries: (i) la geometria natural, (ii) la geometria natural axiomàtica i (iii) la geometria axiomàtica formalista. Per descriure millor aquestes tres formes de la geometria, explorem breument les idees dels autors. Per començar, s'entén com geometria natural a aquella que pot ser percebuda amb els sentits i que es comprova amb els fenòmens del món, per tant és una mena de geometria experimental on es posen en pràctica la intuïció, l'experiència i la deducció (Gonseth, 1945-1955). En segon lloc, la geometria natural axiomàtica, que també es pot anomenar geometria esquemàtica per representar la realitat, tracta de donar una representació formal d'allò que es troba al món. Llavors, es pot dir que la geometria natural axiomàtica és una formalització de la geometria natural que s'assembla a la geometria euclidiana. Finalment, la geometria axiomàtica formalista que més sovint omet l'ús de representacions gràfiques i per la qual és més freqüent l'aplicació de procediments analítics per la arribar a conclusions o per fer comprovacions.

Aleshores, ens trobem davant dos tipus de geometria: aquella intuïtiva que ens ajuda al descobriment del món (la de Castelnuovo), i una altra de continguts organitzats i planejats que s'aprenen a l'escola. Els temes d'estudi de la geometria escolar són, segons Clements i Battista (1992), els objectes geomètrics i la matematització de les seves relacions i transformacions, així com els sistemes axiomàtics matemàtics desenvolupats per la seva representació. Per Clements i Battista (1992), la geometria

euclidiana és l'única que s'estudia a les escoles. Els mateixos autors caracteritzen l'ensenyament de la geometria a les aules com axiomàtic. Tanmateix, per aquests autors l'aprenentatge dels continguts curriculars de la geometria escolaritzada també requereixen de l'ús del raonament espacial, més enllà (o incloent també) aspectes "intuïtius" relacionats amb la representació de les formes i dels cossos geomètrics, les seves transformacions, propietats, característiques, etcètera (Clements i Battista, 1992).

Per a Fuys i col·laboradors (1984), en Pierre M. van Hiele va diferenciar dos objectius de l'ensenyament de la geometria: (i) donar als alumnes eines per assolir un domini de l'espai a partir de la comprensió de les seves característiques i (ii) permetre als alumnes la creació d'un sistema lògic i científic i proporcionar-los d'experiències d'aprenentatge on posin en pràctica el seu raonament. Com punt de partida, van Hiele va establir quinze idees fonamentals de l'estudi de la geometria (**Taula 4.1.1.**) els temes que són objecte d'estudi i la tasca docent s'enfoca en que els alumnes estableixin relacions entre allò que han d'aprendre (Fuys et al., 1984).

Taula 4.1.1.

Aspectes que contribueixen a la fonamentació concreta de la geometria segons van Hiele (Fuys et al., 1984).

Aspectes geomètrics	
1.	Identificació i reconeixement de patrons geomètrics
2.	Divisió de l'espai amb dues i tres dimensions
3.	Aplicació i disposició de patrons congruents
4.	Similitud de patrons
5.	Combinació de patrons
6.	Transformació de patrons
7.	Simetria respecte a un pla
8.	Simetria axial
9.	Simetria central
10.	Superfícies
11.	Moviments a l'espai de tres dimensions (translació, rotació i combinacions)
12.	Corbes
13.	Reconèixer les condicions perquè un mirall no produeix figures congruents
14.	Projecció plana de patrons espacials
15.	Intersecció de patrons

Font: Elaboració pròpia.

Clements i Battista (1992) citen a Usiskin, qui proposa l'existència de quatre dimensions de la geometria: (i) la representació i construcció de figures, (ii) el món físic, (iii) relacions i conceptes geomètrics des de la perspectiva abstracte i (iv) sistema matemàtic formal de representació. Segons

Clements i Battista (1992), les dimensions de la geometria de Usiskin (**Figura 4.1.2.**) relacionades amb el raonament geomètric són les tres primeres.

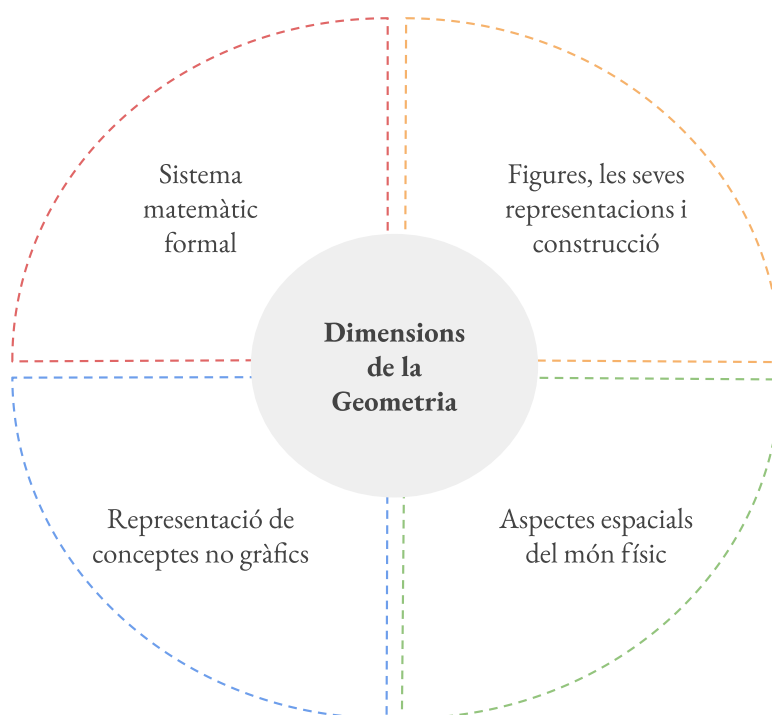


Figura 4.1.2. Les quatre dimensions de la geometria segons Usiskin (Clements i Battista, 1992).

Font: Elaboració pròpia.

Els trets de raonament geomètric presents a aquestes tres dimensions proposades per Usiskin (Clements i Battista 1992) estan centrats en la visualització, que dona peu a la representació gràfica i a la construcció de les figures, però que també intervé en la identificació de la ubicació i les relacions espacials dels objectes reals i permet fer representacions gràfiques de situacions que no ho són. És així que s'estableix com un eix de desenvolupament de l'aprenentatge de les matemàtiques als processos de representació i de visualització (Duval, 1999).

Si bé, l'aprenentatge de la geometria s'enfronta a les dificultats que comporta el traç dels alumnes (Driscoll, 1983; Schoenfeld, 1986), també es fa present la difícil tasca d'interpretació de les imatges i les explicacions orals i escrites donades pel professor i que es troben als textos. D'acord amb la teoria de van Hiele hi ha diferències entre el llenguatge de l'alumne i del seu professor, perquè ambdós posseeixen nivells de comprensió que són heterogenis, per la qual cosa, tots dos fan servir preguntes i respostes de diferent nivell, o sigui el nivell propi a cadascun. Tal impediment de comunicació i interpretació també es presenta entre els mateixos estudiants quan ells es troben en nivells de

raonament diferent (Fuys, 1988). En el cas de la diferència amb el professor, els alumnes accepten el seu discurs sense cap mena de necessitat d'un procés d'argumentació que calgui verificar-lo. Això s'explica des de la posició de poder que representa la figura del professor dins l'aula (Battista, 1990).

A mesura que els alumnes avancen les seves etapes escolars, es desenvolupa la necessitat d'argumentació i justificació de les explicacions del professor. Quan es tracta de continguts relacionats amb la geometria, l'alumne de secundària es basa principalment en dos criteris per acceptar o considerar una resposta com correcta: (i) que la imatge associada a la imatge tingui un aspecte estètic i (ii) que pugui fer-se la comprovació mitjançant el traç o la construcció física (Schoenfeld, 1982). Llavors, una representació de la realitat que sigui veritable deu ser un traç o dibuix geomètric que sigui visualment agradable (**Figura 4.1.3.**).

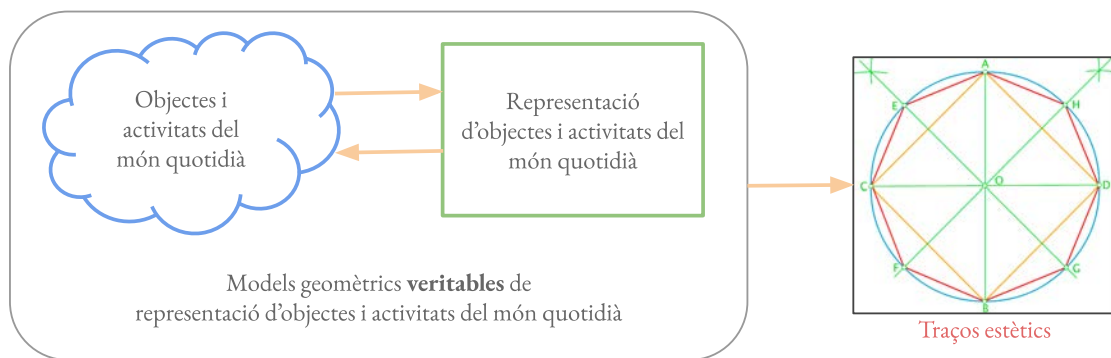


Figura 4.1.3. Geometria com font de models veritables inspirada en Herbst i col·laboradors (2017).

Font: Elaboració pròpia.

Per la seva part, P.M. van Hiele aconsella que l'ensenyament de la geometria sigui un procés amb el qual els alumnes puguin arribar a construir la seva xarxa de relacions a partir d'experiències concretes. Però, el mateix investigador subratlla la diferència que existeix entre aquesta proposta i la pràctica real a les aules. Les seves observacions el van portar a resumir la metodologia d'ensenyament de la geometria com un intent d'aprenentatge de relacions entre conceptes geomètrics. No obstant això, l'assoliment dels estudiants va ser contrari al desitjat (Fuys et al., 1984).

Des de la perspectiva de Fischbein (1993), un dels objectius de l'ensenyament de la geometria hauria de ser el desenvolupament de objectes mentals únics per a tots els alumnes. Com a producte de les seves recerques, Clements i col·laboradors (2018) donen sis consells per l'aprenentatge més profund

d'aquesta assignatura (**Taula 4.1.2.**): (1) presentar prouss exemples de figures d'un tipus (que siguin prototips o no ho siguin) i comparar-les amb figures que no compleixin amb totes les característiques necessàries perquè puguin centrar la seva atenció en els atributs, (2) anar més enllà de les classes tradicionals de formes presentades al currículum de geometria per enriquir les varietats que puguin conèixer i experimentar els alumnes, (3) les tasques proposades pels professors han de ser interessants i a la mateixa vegada reptes desafians on puguin desenvolupar activitats de construcció de models mitjançant la creació de dibuix, l'ús de materials manipulatius, l'aplicació de la tecnologia, la reflexió, discussió i argumentació, (4) promoure el desenvolupament del raonament integrat-concret (és a dir l'abstracció generada mitjançant la interiorització de la imatgeria mental i el seu enllaç amb esquemes verbals) a partir de l'assoliment progressiu dels nivells sensori-concrets implícits (que consisteix en la construcció d'imatges conceptuals robustes), (5) oferir espais per la conversa per estimular als alumnes per a que facin servir el seu lèxic geomètric en el plantejament de descripcions basades en els atributs dels objectes en qüestió amb els quals es poden classificar i (6) dissenyar les sessions d'una unitat didàctica de manera que hi hagi una connexió entre els objectius de l'assignatura, els nivells de raonament geomètric dels alumnes i la metodologia d'instrucció del professor.

Taula 4.1.2.

Consells per l'aprenentatge profund de la geometria (Clements et al., 2018).

Per què els alumnes assoleixin un aprenentatge profund de la geometria cal:

1. Comparar exemples característics amb formes d'altra categoria.
 2. Presentar una varietat de classes de formes més àmplia que la curricular.
 3. Lliurar una àmplia gamma de tasques amb recursos variats.
 4. Passar de les activitats cognitives “sensorial-concretas” cap a les “integrades-concretas”.
 5. Promoure el diàleg i la discussió sobre formes i figures.
 6. Dissenyar les unitats didàctiques utilitzant les “trajectòries d'aprenentatge”.
-

Font: Elaboració pròpia.

4.1.1 El currículum

En termes generals es poden diferenciar dues tendències: els programes que segueixen models orientats en (1) el producte (Tyler, 1950) o (2) en el procés (Stehous, 1975; O'Neill, 2010) (**Taula 4.1.1.1.**).

El primer cas, és a dir els currículums enfocats en el producte, es caracteritzen per centrar-se en el objectius d'aprenentatge, tenir un ordre i una seqüència entre els continguts, cosa que fa que el currículum sigui un document tècnic d'estructura vertical que proposa un seguiment lineal dels aprenentatges (Tyler, 1950). El segon i darrer mode presentat correspon al model curricular orientat

cap als processos, aquesta proposta es basa en la organització dels continguts en categories que són integrades per un seguit de metes pedagògiques en les quals es relacionen amb els continguts per aprendre i el principis d'ensenyament dins un projecte d'investigació o d'actuació (Stenhouse, 1975; O'Neill, 2010), com és el cas del currículum del NCTM (2000).

Taula 4.1.1.1.

Models d'organització curricular.

Orientació	Característiques	Autor
En el producte	<ul style="list-style-type: none"> → Centrat en els objectius → Ordenat i seqüenciat → Tècnic i lineal → D'estructura vertical 	Tyler, 1950
En el procés	<ul style="list-style-type: none"> Projecte d'investigació i d'acció → Organitzat en categories → Dividides en metes pedagògiques → Relacionades amb continguts i principis 	Stenhouse, 1975 O'Neill, 2010

Font: Elaboració pròpia.

Per tal d'aconseguir una normativa d'aplicació global es poden considerar els sis principis per l'ensenyament de les matemàtiques establerts pel Consell Nacional de Professors de Matemàtiques dels Estats Units, conegut per les seves sigles en anglès: NCTM (2000). Aquest principis, que es presenten de forma condensada a la **Figura 4.1.1.1.**, són els següents: l'equitat, la coherència dels continguts curriculars, el coneixement dels estudiants de allò que han de saber, la construcció de l'aprenentatge sobre la base de coneixements previs, que les avaluacions siguin d'utilitat pels alumnes i el professorat i l'estimulació de l'aprenentatge amb l'ús de recursos tecnològics.

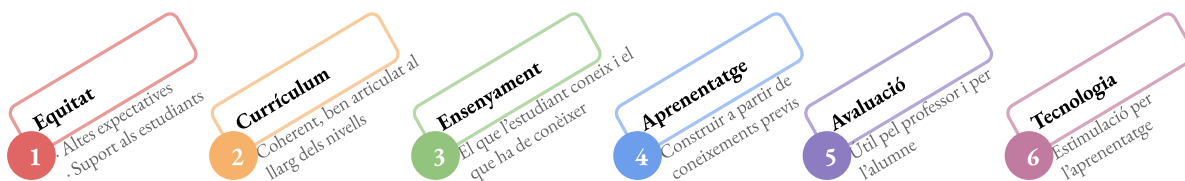


Figura 4.1.1.1. Principis de l'ensenyament de les matemàtiques (NCTM, 2000).

Font: Elaboració pròpia.

De manera més clara, el NCTM (2000) estableix que per assolir una educació matemàtica de qualitat excepcional s'han de seguir els preceptes plantejats com a els "principis" per a les matemàtiques

escolaritzades. Tots aquests principis generals de l'ensenyament de les matemàtiques són fonamentals en l'ensenyament de la geometria, per aquesta raó es fa un breu repàs d'ells a continuació:

1. “L'excel·lència en l'educació matemàtica requereix d'equitat, altes expectatives i ampli suport a tots els estudiants.”

Aquest principi fa referència a la naturalesa de l'aprenentatge de les matemàtiques, el qual és aliè a la procedència social, econòmica i cultural dels alumnes. També indica que aquesta mena d'aprenentatge és independent dels seus atributs personals i físics. Llavors, tothom pot aprendre matemàtiques si es fan les adaptacions de continguts i tasques que calgui per atendre la diversitat dels estudiants (NCTM, 2000). Per exemple, en el cas de la geometria aquest principi es pot relacionar amb l'ús de les unitats de mesura locals per establir tasques a l'aula.

2. “Un currículum és més que una col·lecció d'activitats; hi ha de ser coherent, centrat en continguts matemàtics importants i ben articulat entre els graus.”

Al segon principi es parla del conjunt d'idees matemàtiques que els alumnes han d'assolir al llarg de la seva vida escolar han d'organitzar-se de manera lògica, progressiva i amb lligament entre ells per a què els alumnes puguin construir relacions que els permetin aplicar les matemàtiques i anar augmentant aquesta habilitat. Per tant, la seva coherència i bona articulació són fonamentals per a que els alumnes puguin transitar amb fluïdesa des de continguts senzills cap a uns altres cada vegades més complexos (NCTM, 2000). El currículum d'àmbit de les matemàtiques de la Generalitat de Catalunya (Decret 187 de 2015) presenta una seqüenciació de continguts de geometria que mantenen aquest principi d'augment de complexitat progressiva.

3. “L'ensenyament efectiu de les matemàtiques requereix la comprensió del que els estudiants saben i del que han d'aprendre per desafiar-los i donar-los suport perquè n'aprenuin bé.”

El tercer principi es tracta de l'ensenyament i l'àmbit on hi succeeix: l'escola. Els centres educatius són els indrets on els estudiants troben les reptes i realitzen activitats d'aplicació, com ho són la resolució de problemes, que els permeten entendre el que són les matemàtiques i desenrotllar confiança en les coneixements propis. Per la seva part, els professors, a més de ser experts de l'assignatura, han de ser competents per adequar els continguts de manera pertinent segons les necessitats dels seus alumnes. Es pot garantir que la tasca d'ensenyament sigui efectiva si es dóna suport als professors i se'ls hi proveeix d'una àmplia varietat de recursos per enriquir els seus coneixements i, en el millor dels casos, incrementar-los (NCTM, 2000). Per afavorir la comprensió dels continguts de geometria, el

currículum de la Generalitat de Catalunya (Decret 187 de 2015) recomana tenir com a centre del procés d'aprenentatge competencial centrat en la resolució de problemes.

4. “Cal que els estudiants aprenguin les matemàtiques amb comprensió, la construcció activa de nous coneixements a partir de la seva experiència i els seus coneixements previs.”

L'aprenentatge és la clau del quart principi, el qual es basa en el que la recerca sobre l'educació matemàtica ha rebel·lat sobre aquest tema. En aquí s'esmenta que un alumne pot esdevenir en un aprenent eficaç si es treballa en entendre els conceptes matemàtics. Per això s'aconsella que hi hagi concordança entre els coneixements (que tenen els alumnes) sobre els fets i els procediments per establir-ne relació amb el coneixement conceptual. Així també s'anima a promoure espais on els alumnes puguin reflexionar sobre la seva pròpia pràctica, reconeixin els seus errors i n'aprenguin d'ells. (NCTM, 2000). L'aprenentatge competencial torna a ser l'exemple sobre com es té cura d'aquest altre principi en la educació a Catalunya (Decret 187 de 2015).

5. “L'avaluació ha de donar suport a l'aprenentatge dels continguts matemàtics importants i proveir d'informació que sigui útil tan pel professor com per l'alumne.”

L'objecte de discussió del cinquè principi és l'avaluació. Hi posa èmfasi en la contribució que fa una avaluació integral en l'aprenentatge de les matemàtiques. Es suggereix que el mètode d'avaluació es triï de manera que en permet identificar dades amb les quals els professors tinguin prou detalls per a orientar-se i prendre decisions sobre el que ha de ser la seva tasca docent. Al mateix temps, les avaluacions ajuden a que els alumnes reconeixin allò que és més rellevant respecte tot el que han après. Per tant, és també molt importat que el professor doni retroalimentació als alumnes. D'aquesta manera serà possible fer una orientació sobre el que són els objectius del curs, quin és el nivell d'assoliment de l'alumne i quines estratègies i responsabilitats n'ha d'adoptar per arribar-hi (NCTM, 2000). L'enfocament de l'aprenentatge des de la visió competencial també impacta l'avaluació de l'aprenentatge de la geometria. El fet d'avaluar es converteix en una tasca docent de descripció qualitativa de l'alumne. Aleshores, a més de competències relacionades amb continguts de la geometria es determinen nivells d'assoliment per part dels alumnes (Decret 187 de 2015).

6. “La tecnologia és essencial per l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques; hi té influència en el que s'ha d'ensenyar i millora l'aprenentatge dels alumnes.”

En darrer lloc al text, però no així en ordre d'importància, s'introdueix l'ús apropiat de la tecnologia com un element decisiu per a que els alumnes puguin desenvolupar un aprenentatge profund de les

matemàtiques. Dins qualsevol dels eixos d'ensenyament de les matemàtiques és possible eixamplar la reflexió, el raonament i la resolució de problemes si es fan servir les eines digitals que ho permeten (NCTM, 2000). El Decret 187 (2015) recolza aquest principi en considerar dins els continguts curriculars de geometria l'ús d'eines informàtiques per explorar figures i cossos geomètrics.

Per l'organització dels aspectes que intervenen per establir els conceptes que els alumnes han d'assolir a les seves diferents etapes a l'escola cal verificar el currículum. Un punt de partida a nivell internacional és l'esquema presentat pel NCTM (2000), el qual fa una separació dels continguts matemàtics que han d'aprendre els alumnes fins arribar als 16 anys en cinc grups: (1) nombres i operacions, (2) àlgebra, (3) geometria, (4) mesura i (5) anàlisi de dades i probabilitat. Segons aquest organisme, la seqüència de continguts de la branca de la Geometria comencen amb l'anàlisi de formes i figures a partir de la identificació de les propietats per a, amb aquesta informació, trobar relacions i expressar-les mitjançant la construcció d'arguments lògics i coherents. Pertanyen també a la geometria: el raonament espacial, la visualització i la resolució de problemes a partir de la construcció de models geomètrics. Per una altra banda, l'àmbit de la Mesura és conseqüència de l'anàlisi de les propietats dels objectes. Segons els sistemes d'unitats de mesura s'estableixen les referències per prendre mides i els procediments per fer-ho. A més, es tracta d'un àrea d'ensenyament molt versàtil amb la qual es poden ajuntar la resta en crear situacions d'aprenentatge numèriques, geomètriques, de funcions i fins i tot d'estadística (NCTM, 2000).

El NCTM (2000) també proposa cinc processos per assolir i aplicar els abans esmentats cinc grups de coneixements matemàtics, que són: (1) resolució de problemes, (2) raonament i prova, (3) comunicació, (4) connexions i (5) representació. Pot ser útil fer una breu exploració a cadascun dels processos recomanats per apropar als alumnes cap als diferents continguts matemàtics. Llavors, aquest Consell puntualitza que els alumnes, segons el procediment amb el qual enfoquin el seu treball escolar, han de ser capaços del que se'n llista a continuació:

1. A partir de la Resolució de Problemes, els alumnes han de poder: construir nou coneixement matemàtic; portar els continguts matemàtics cap altres contextos; utilitzar estratègies apropiades i fer-ne adaptacions segons els casos als quals s'enfronta; així com observar i reflexionar sobre un procediment emprat per resoldre un problema (NCTM, 2000; Midgett i Eddins, 2001). En el cas de la geometria, es pot presentar una situació en la qual s'ha de determinar la quantitat de herba de la qual disposa per menjar una cabra segons les mides del prat on s'hi troba. Com s'hi veu, cal fer càlculs

relacionats amb la forma i les mides del prat per tal donar resposta a aquest plantejament (GenCat, 2017 a).

2. Quan es treballa des de la perspectiva de Raonament i Prova, els estudiants són capaços de: identificar que tan el raonament com la prova són aspectes essencials de les matemàtiques; estudiar i proposar conjectures de tret matemàtic; avaluar i desenvolupar arguments i comprovacions dins l'àmbit de les matemàtiques i finalment, emprar una àmplia varietat de raonaments i proves o bé triar-ne (NCTM, 2000; Midgett i Eddins, 2001). Seguint l'exemple de l'apartat anterior, es pot treballar aquesta competència fent una ampliació de la situació demanat altres formes del prat que tinguin la mateixa quantitat d'herba. En aquest cas, els alumnes treballen el que la Generalitat de Catalunya (2017a) estableix com a competència cinc de l'àmbit de raonament i prova: “construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques” (p. 26). Per tal d'assolir aquesta competència, a banda de demanar als alumnes el desenvolupament de l'activitat, s'ha de promoure el diàleg o la participació dels alumnes compartint les seves propostes davant altres companys.

3. La Comunicació dins l'ensenyament de les matemàtiques permet que els alumnes: puguin organitzar i consolidar totes les seves idees i els seus raonaments al voltant de les matemàtiques; comparteixin informació i raonaments de manera clara i coherent amb els seus companys, els seus professors i altres persones; analitzin i avaluin els procediments i raonaments d'altres persones; i també expressin les seves idees amb precisió utilitzant el llenguatge matemàtic adient (NCTM, 2000; Midgett i Eddins, 2001). Dins la proposta curricular de la Generalitat de Catalunya (2017 a), aquest àmbit es combina amb la Representació. Deixarem l'exemple d'aquest procés, combinat amb la Representació, a l'apartat 5 d'aquest llistat.

4. El fet de centrar l'aprenentatge de les matemàtiques mitjançant les Connexions fa possible en els alumnes: el reconeixement i ús de les connexions entre idees de l'àmbit de les matemàtiques; l'enteniment de que les idees matemàtiques tenen la seva base en unes altres, que entre elles es recolzen i formen un conjunt coherent; el reconeixement i l'aplicació de les matemàtiques en contextos fora de l'assignatura (NCTM, 2000; Midgett i Eddins, 2001). Una mostra d'aquest àmbit és la competència set del currículum de la Generalitat de Catalunya (2017 a): “usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar” (p. 33). Aquesta competència implica que els alumnes treballin alhora àlgebra i geometria; nombres i geometria; nombres, estadística i geometria o fins i tot, relacions i canvi i geometria (Generalitat de Catalunya, 2017 a), per exemple.

5. El procediment de Representació dins la instrucció de les matemàtiques dóna als alumnes accés a: l'organització, la gravació i la comunicació d'idees; la traducció, selecció i aplicació de representacions per a la resolució de problemes; i la modelització i interpretació de fenòmens físics, social i matemàtics (NCTM, 2000; Midgett i Eddins, 2001). Una de les competències de la proposta curricular de la Generalitat de Catalunya (2017 a) per mostrar la combinació dels àmbits de la comunicació i la representació és la competència 11: “emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques” (p. 46).

Un altre aspecte destacable del currículum de matemàtiques és el volum de continguts de cada grup que hi haurà als diferents cursos. D'acord amb el NCTM (2000), el volum de continguts de cada un de les cinc grups (nombres i operacions, àlgebra, geometria, mesura i anàlisi de dades i probabilitat) depèn del desenvolupament cognitiu dels alumnes i per tant canvia segons el curs (**Figura 4.1.1.2.**). És així que s'identifica la disminució dels continguts sobre nombres i operacions, l'augment gradual del temes sobre àlgebra i la reducció d'activitats relacionades amb la mesura, en canvi, no hi ha gaire variació en la quantitat de continguts que corresponen a geometria i anàlisi de dades i probabilitat (NCTM, 2000).

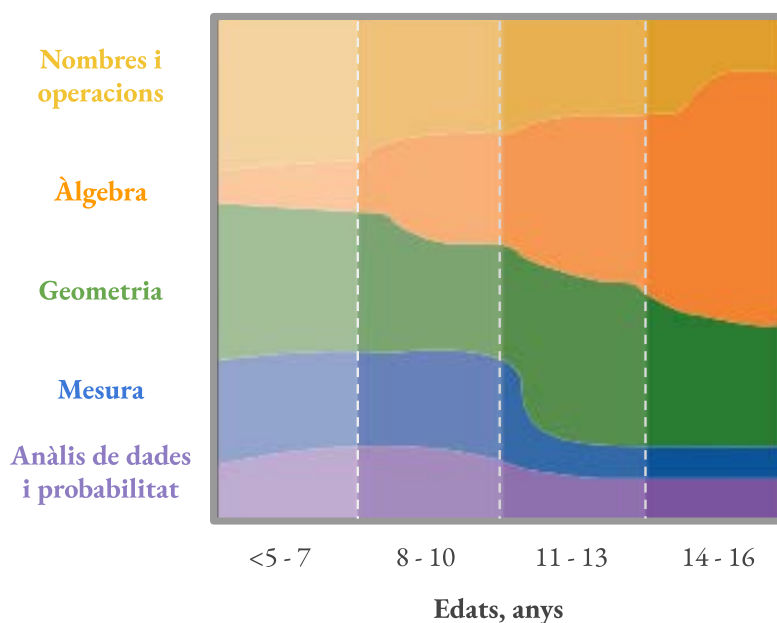


Figura 4.1.1.2. Recomanació de la distribució dels continguts matemàtics per grups i per curs del NCTM (2000).

Si bé el NCTM fa les seves propostes sobre la caracterització dels elements del currículum, una altra de les seves tasques és l'organització dels continguts matemàtics per a l'escolarització d'aquesta assignatura. Però, a banda de que hi hagi un plantejament als Estats Units, cada país disposa d'una dosificació de continguts acadèmics que atengui els propòsits institucionals, culturals i socials.

Per una altra banda, el currículum a Mèxic es caracteritza per tractar-se d'una instrucció reiterada de continguts acadèmics dels cinc eixos temàtics al llarg de cadascun dels cinc bimestres de l'any escolar (SEP, 2011). Aquesta proposta d'organització curricular difereix dels dos casos presentats, currículum centrat en el producte i centrat en el procés (**Taula 4.1.1.1.**). Es tracta doncs d'una variant anomenada de tipus espiral, on els aprenentatges esperats s'assoleixen al final d'una seqüència de complexitat gradual fins arribar cap als raonaments més exigits per un curs escolar (Bruner, 1960).

L'organització dels continguts del currículum estableix a la mateixa vegada l'ordenament de les activitats que el professor ha de seguir a la seva classe. Però, s'ha identificat que la metodologia didàctica del professor fa més o menys efectiva i significativa qualsevol proposta curricular.

Rikvkin, Hanushek i Kain (2005) han identificat que les característiques de la instrucció i del professorat exerceixen una influència positiva en l'assoliment acadèmic dels estudiants. Resultats similars s'han obtingut en diverses recerques (Darling-Hammond, 2000; Kane i Staiger, 2008), algunes de les quals també han considerat la capacitació del professorat (Harris, 2007).

En el cas de la geometria, tal com ho afirma Senk (1989), el nivell assolit pels alumnes depèn tant del currículum com del professor. Per això, Conley (2014) ofereix tres orientacions pels professors per apropar-los a la bona implementació del continguts curriculars (**Figura 4.1.1.3.**):

- Treballar un número reduït de continguts o temes per tal de donar **èmfasi** al que és important, com ho són tots aquells tòpics amb els quals els alumnes podran construir bases sòlides per continuar amb el seu aprenentatge. Un exemple d'aquesta mena de tòpics són aquells que involucren la comprensió de conceptes i un alt nivell d'habilitat procedimentals en la resolució de problemes (Conley, 2014).
- Tenir en compte que per disseny, els continguts que són objecte d'estudi en un curs potser que ja es van veure en cursos passats. Llavors, s'ha de considerar quins són els coneixements

previs que tenen els alumnes per connectar-los amb temes de major complexitat (Conley, 2014).

- Considerar d'igual rellevància la comprensió de conceptes, l'habilitat i fluïdesa procedimental i la capacitat d'aplicació. És a dir, l'aprenentatge de les matemàtiques no és exclusiu de la rapidesa amb la qual es realitzen operacions, els alumnes matemàticament competents han de conèixer els conceptes clau de l'assignatura, tenir un repertori prou ampli i variat de tècniques i algorismes i ser capaç d'adaptar tot això que sap per resoldre problemes (Conley, 2014).

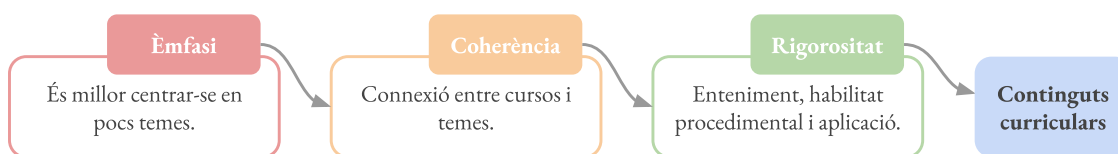


Figura 4.1.1.3. Orientacions per a la implementació dels continguts curriculars (Conley, 2014).

Font: Elaboració pròpia.

4.1.2 El currículum de geometria

L'estudi de la geometria té una importància substancial per les aplicacions quotidianes d'aquesta branca de les matemàtiques (NCTM, 2000; Jones, Fujita i Ding, 2006). Com s'ha dit abans, els continguts curriculars que el NCTM (2000) considera de l'àmbit de la geometria van des del raonament espacial, la identificació de les propietats de les formes i figures, fins la resolució de problemes utilitzant models geomètrics.

De manera concreta, el NCTM (2000) proposa com a objectius per l'aprenentatge de la geometria: (i) la identificació, descripció, comparació, modelació, dibuix i classificació de figures i formes geomètriques de dues i tres dimensions, (ii) el desenvolupament del sentit espacial, (iii) l'exploració del efectes que tenen les transformacions geomètriques, i les combinacions d'elles, en les figures i els canvis geomètrics de les formes deguts a processos com la subdivisió, (iv) la comprensió, l'aplicació i la deducció de les propietats de les figures i les formes per establir relacions entre elles, com ara la congruència i la similitud, (v) el desenvolupament de l'apreciació de la geometria per descriure i modelar el món físic, (vi) l'exploració dels aspectes sintètic, transformacional i coordinat de la geometria per desenvolupar la comprensió d'un sistema axiomàtic per fer recerca i comparar diferents sistemes geomètrics i (vii) l'exploració d'un plantejament vectorial per varis aspectes de la geometria (**Taula 4.1.2.1.**).

Taula 4.1.2.1.

Objectius de l'aprenentatge de la geometria (NCTM, 2000).

Objectius de l'aprenentatge de la geometria

Els estudiants han de ser capaços de:

- Identificar, descriure, comparar, modelar, dibuixar i classificar figures i formes geomètriques.
- Desenvolupar el seu sentit d'espai.
- Explorar els efectes de les transformacions, la subdivisió i els canvis geomètrics.
- Comprendre, aplicar i deduir les propietats i les relacions entre figures i formes.
- Desenvolupar l'apreciació de la geometria per descriure i modelar el món físic.
- Explorar els aspectes sintètic, transformacional i coordinat de la geometria per comprendre un sistema axiomàtic per investigar i comparar diferents sistemes geomètrics.
- Explorar un plantejament vectorial des de varis aspectes geomètrics.

Font: Elaboració pròpia.

4.2. L'ensenyament de la geometria a l'ESO

El currículum estableix els temes que són objecte d'estudi i la tasca docent s'enfoca en que els alumnes estableixin relacions entre allò que han d'aprendre (van Hiele, 1986). La geometria, des de l'enfocament educatiu es pot entendre com l'estudi de les varietats de formes de representació dels objectes amb referència a l'espai on es troben (Clements, 1992). Per tal fi, s'estableixen objectius basats en principis, que s'organitzen en programes d'estudi. Els models curriculars per a Catalunya i els Estats Units presenten similituds i, a la vegada, diferències però la seva naturalesa axiomàtica, indicada per Clements (1992), es manifesta en tots dos (**Taula 4.2.1**). En aquesta taula s'han registrat els objectius de la formació dels alumnes amb 12 anys d'edat segons el currículum operatiu al país en referència, sigui a Catalunya o els Estats Units. En aquí es troben coincidències com ho són: el treball amb figures en dues dimensions i la construcció de figures geomètriques. En canvi, la resta dels continguts són exclusius d'un currículum o un altre: simetria, per a Catalunya, mentre que pels Estats Units: congruència i transformacions geomètriques. Pel que fa als alumnes entre els 13 i 14 anys, que fan el curs de segon d'ESO, els currículums de Catalunya i dels Estats Units coincideixen en temes sobre semblança de figures planes i teoremes sobre aquesta característica. Es pot pensar que a Catalunya i als Estats Units hi ha un enfocament més analític dels atributs de les figures de dues dimensions (**Taula 4.2.2**). Al tercer curs d'ESO, que s'adreça a estudiants amb 14 i 15 anys d'edat, les semblances entre els continguts curriculars no hi existeixen. Mentre que el currículum català fa un recolzament dels temes de semblança i transformacions geomètriques, el currículum americà fa un pas endavant per donar peu a l'estudi de la trigonometria (**Taula 4.2.3**).

Taula 4.2.1.*Comparació de programes d'estudi de la geometria per a alumnes de 12-13 anys a Catalunya i els Estats Units.*

País	Catalunya	Estats Units
Grau	1r d'ESO	7è de "Middle School"
Organitzador curricular	Espai i forma	Geometria
Temes	- Figures geomètriques de dues dimensions - Simetria - Eines i instruments (Decret 187/2015)	- Experimentació amb transformacions en el pla - Comprensió de la congruència en termes de moviments rígids - Realització de construccions geomètriques (CCSS, 2011)

Font: Elaboració pròpia.

Taula 4.2.2.*Comparació de programes d'estudi de la geometria per a alumnes de 13-14 anys a Catalunya i els Estats Units.*

Catalunya	Estats Units
2n ESO	8è (Middle School)
- Figures i cossos geomètriques - Proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions - Teoremes de Tales i de Pitàgores (Decret 187/2015)	- Comprensió de la semblança en termes de transformacions - Comprovació de teoremes geomètrics - Comprovació de teoremes que involucren semblança (CCSS, 2011)

Font: Elaboració pròpia.

Taula 4.2.3.*Comparació de programes d'estudi de la geometria per a alumnes de 14-15 anys a Catalunya i els Estats Units.*

Catalunya	Estats Units
3r ESO	9è (Middle School)
- Proporcionalitat i semblança - Transformacions geomètriques (Decret 187/2015)	- Trigonometria (CCSS, 2011)

Font: Elaboració pròpia.

Donat el context de la recerca amb la qual s'ha produït aquesta tesi, alumnes de secundària catalans, es fa un anàlisi més profund dels continguts curriculars de geometria per a Catalunya. A la **Taula 4.2.4.** es mostren els continguts corresponents al bloc “Espai i Forma” del currículum d'ESO per a Catalunya. Si bé, l'Escola Secundària Obligatòria es divideix en quatre cursos, en aquesta taula només s'han registrat els tres primers d'ells perquè al quart any l'objecte d'estudi ja no és la geometria sinó la trigonometria. Una altra diferència entre el currículum de geometria català i el mexicà és la proporció de continguts sobre cossos geomètrics i l'èmfasi de l'aplicació de les relacions geomètriques i atributs de les figures per a la resolució de problemes (Decret 187/2015).

Taula 4.2.4.

Comparació de continguts del bloc “Espai i Forma” per alumnes catalans d'ESO (Decret 187/2015).

Primer Curs	Segon Curs	Tercer Curs
Figures geomètriques - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models. - Classificació i propietats. - Posició i orientació de les figures. - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat). Simetria - Identificació en entorns propers (natura, construccions, fotografies, ...). - Representació i construcció. Eines i instruments - Materials manipulables (retallables, geoplans, papers pautats). - Instruments de dibuix (regle, escaire, compàs i transportador). - Eines digitals (<i>applets</i> i programari lliure de geometria dinàmica).	Figures i cossos geomètrics - Identificació en objectes de dues i tres dimensions (descripció i propietats que les defineixen). - Construcció, composició i descomposició d'objectes de dues i tres dimensions (materials manipulables, instruments de dibuix i eines digitals). - Grandària, posició i orientació de figures planes en mosaics i elements de l'entorn real. - Representació plana d'objectes de tres dimensions. - Desenvolupament pla de cossos geomètrics. Proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions - Angles, longituds i àrees. - Escales. - proporcions geomètriques rellevants (full DIN A4 i proporció àuria). - Ús de la proporcionalitat per a la resolució de problemes. Teoremes de Tales i de Pitàgores - Raonament i prova. - Demostracions dels teoremes en diferents contextos històrics. - Ús dels teoremes per a la resolució de problemes sobre triangles rectangles.	Proporcionalitat i semblança - Figures semblants de tres dimensions. - Ampliacions i reduccions; factor d'escala. Transformacions geomètriques - Translacions, girs i simetries. - Programes de geometria dinàmica. - Ús de les transformacions geomètriques per a la resolució de problemes en contextos diversos.

Font: Elaboració pròpia.

4.3 La competència matemàtica i la geometria

Segons ho especifica la Generalitat de Catalunya (2017 a), la competència matemàtica “explicita quins són els processos que es desenvolupen al llarg de tot treball matemàtic” (p. 6). Per tant, cal analitzar el que és la competència matemàtica perquè es relaciona amb tots els blocs de continguts i en nostre cas ajuda a aprofundir en l'estudi de la geometria a les aules.

Si es pregunta què significa ser competent en matemàtiques, probablement la resposta serà errada i anirà cap al sentit de les actituds dels alumnes al moment de la classe i que són visibles per tothom: escoltar el professor, copiar-ho tot textualment, memoritzar procediments, romandre en silenci i no interactuar amb els seus companys (Pipkorn, 2015). Per altra banda, per Milgram (2005) la descripció dels elements de la competència matemàtica s'han d'establir una vegada es tingui clar el que són les matemàtiques a l'escola i com s'hi avaluen. En aquest sentit, el treball de Schoenfeld (2007) permet aprofundir aquest tòpic en remarcar que l'assoliment de la competència matemàtica es pot resumir en dos aspectes: coneixements i estratègies. És a dir, les seves bases de la competència matemàtica són els coneixements de definicions, procediments i conceptes. Les estratègies són tots aquells procediments i/o metodologies amb les quals es fa possible dur a terme treball matemàtic, com ara: eixamplar els resultats que s'han obtingut o que es coneixen i aplicar tot allò que se sap a nous o diferents contextos. L'autor va més enllà i té en consideració les orientacions del Consell Nacional de Recerca dels Estats Units (NRC, 2001) al afegir a la seva descripció del que és la competència matemàtica (**Figura 4.3.1.**) la capacitat de fer un ús efectiu dels coneixements propis (metacognició), així com les seves creences i disposició a treballar-ne (Shoenfeld, 2007).

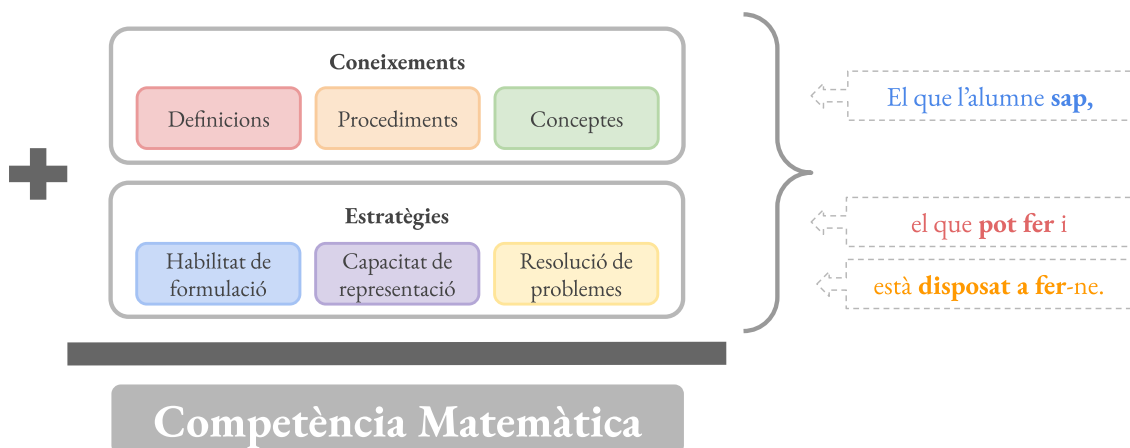


Figura 4.3.1. Elements de la competència matemàtica segons Schoenfeld (2007).

Font: Elaboració pròpia.

Des de la perspectiva del NRC (2001), els cinc components de la competència matemàtica són: la comprensió dels conceptes, la fluència en els procediments, la competència estratègica, el raonament adaptatiu i la disposició productiva. Però, només es pot dir que un alumne ha desenvolupat la competència matemàtica quan aplica en conjunt aquests cinc components individuals (**Figura 4.3.2.**).

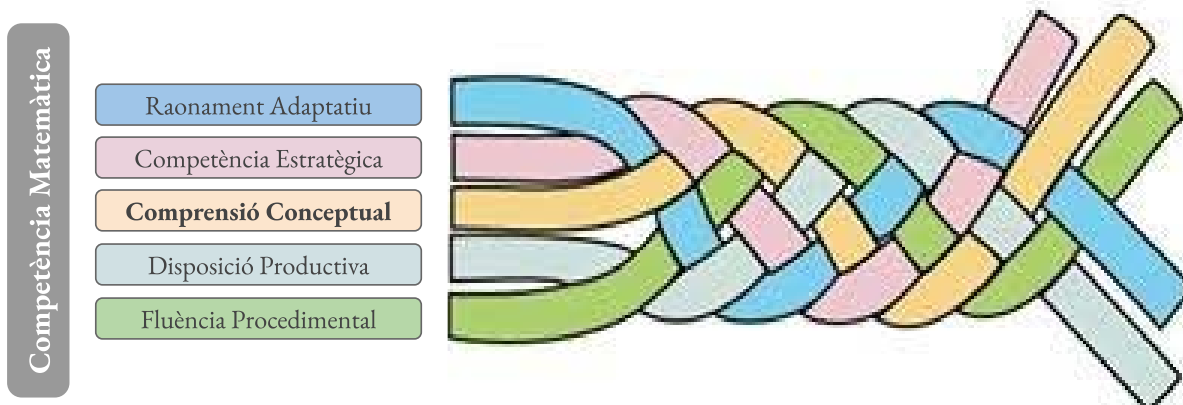


Figura 4.3.2. Components de la competència matemàtica (NRC, 2001).

Font: Elaboració pròpia.

Una vegada establerts els criteris a tenir en compte per identificar la competència matemàtica, sigui des de la visió de Schoenfeld (2007) o del NRC (2001), hi haurà una base per avaluar el treball matemàtic. Per la seva part, el NCTM (2001) posa com punt de partida els components de la competència matemàtica del NRC (2007) per donar peu a les Pràctiques Matemàtiques que tot professor ha de cercar que els seus alumnes desenvolupin a partir dels continguts curriculars (NCTM, 2001). Aquestes Pràctiques Matemàtiques són vuit: (1) identificar els problemes i perseverar fins a resoldre'ls, (2) raonar de forma abstracta i quantitativa, (3) crear arguments viables i criticar el raonament dels altres, (4) modelatge matemàtic, (5) fer servir les eines adequades de forma estratègica, (6) cercar precisió, (7) cercar una estructura i utilitzar-la i (8) cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit (NCTM, 2001).

Una a una, aquestes pràctiques matemàtiques s'expliquen en funció del que l'alumne és capaç de fer a partir de la tasca proposada pel professor. Però, també el professor pot presentar davant el seu grup una activitat amb la intenció d'observar en els seus estudiants una o dues de les vuit pràctiques matemàtiques. Per exemple, quan els alumnes proposen una estratègia per la resolució d'un problema

basada en conjectures fetes o adaptacions de problemes semblants a partir d'un anàlisi de la informació donada, es pot identificar que han treballat d'acord amb la primera de les pràctiques matemàtiques del NCTM, és a dir, la identificació de problemes i la perseverança en la seva resolució (PM.1, segons la **Figura 4.3.3**). Per altra banda, la capacitat de treure una situació del seu context i el seu recíproc, que seria l'habilitat de posicionar una operació dins un context són indicadors de la segona pràctica matemàtica: raonar de forma abstracta i quantitativa (PM.2, **Figura 4.3.3**). També, si s'observa la divisió d'una situació en casos més senzill; fa servir informació prèvia, definicions i altres tipus de dades; organitza les seves idees amb una seqüència lògica i ordenada per construir arguments, es tracta de la tercera de les pràctiques matemàtiques (PM.3, **Figura 4.3.3**). D'una altra manera, la possibilitat de descriure una situació donada mitjançant operacions, percentatges, figures geomètriques, taules o gràfics és indicatiu del modelatge matemàtic (PM.4, **Figura 4.3.3**). Més a més, quan els estudiants apliquen les eines més adients de totes les que hi corresponen al seu nivell formatiu per resoldre problemes, fan explícita la pràctica matemàtica cinquena (PM.5, **Figura 4.3.3**). La sisena pràctica matemàtica, anomenada “cercar precisió” (PM.6, **Figura 4.3.3**), es caracteritza per l'establiment d'una comunicació clara d'un alumne qui tria correctament les paraules, símbols, quantitats i unitats de mesura per explicar un conceptes o per expressar les respostes d'un problema. El discerniment de patrons o estructures i la capacitat de simplificar situacions complexes correspon a la sisena de les pràctiques matemàtiques (PM.7, **Figura 4.3.3**). Finalment, quan un alumne pot fer generalitzacions i revisar resultats parcials per trobar comportaments que siguin fora del que s'espera, llavors es presenta la darrera de les pràctiques matemàtiques del NCTM (2001), identificada com PM.8 a la **Figura 4.3.3**. En resum, per Pipkorn (2015), un alumne matemàticament competent és aquell que pot desenvolupar les vuit pràctiques matemàtiques, ja sigui una a una o combinades segons la tasca o un moment determinat d'ella (**Figura 4.3.3**). Per tant, l'encàrrec del professor està centrat en proposar seqüències didàctiques pels continguts curriculars adreçades al desenvolupament de les pràctiques matemàtiques per part dels alumnes (Pipkorn, 2015).

Una darrera referència per la caracterització de la competència matemàtica és l'*alfabetització matemàtica*. Aquest terme que prové de l'anglès: *Mathematical Literacy*, es defineix com “una capacitat de l'individu per raonar matemàticament i formular, aplicar i interpretar les matemàtiques per resoldre problemes en una varietat de contextos del món real” (OCDE, 2020).

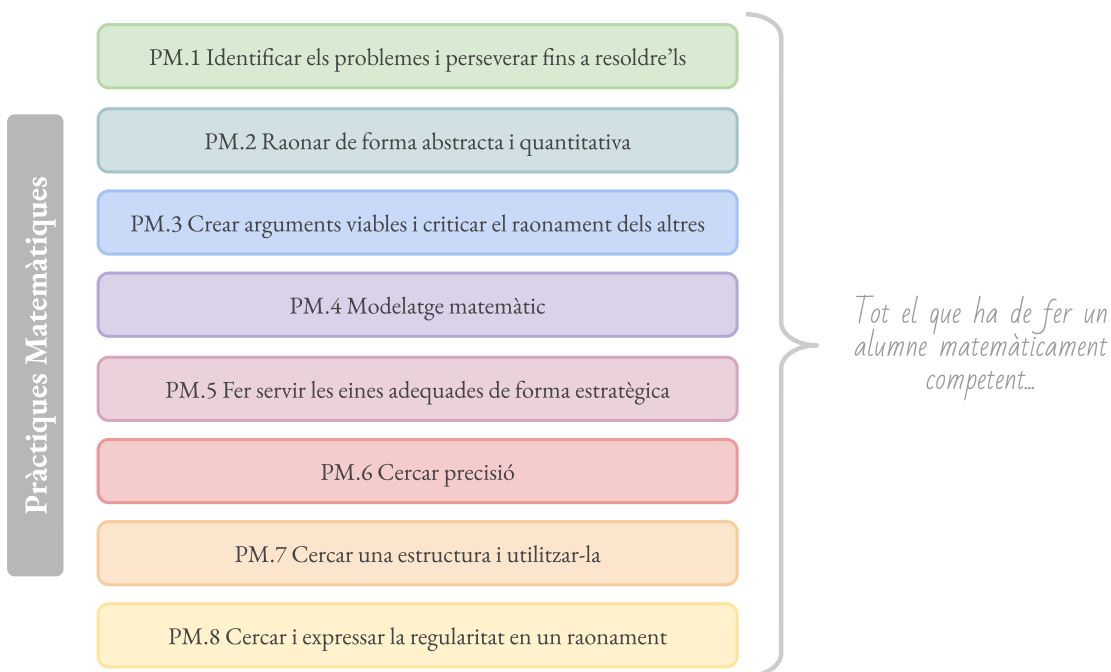


Figura 4.3.3. Les Pràctiques Matemàtiques (NCTM, 2001) i la competència matemàtica (Pipkorn, 2015).

Font: Elaboració pròpia.

4.4 L'assoliment dels continguts de geometria dels estudiants d'ESO

Com s'ha dit en començar l'apartat anterior, la Generalitat de Catalunya (2017 a) especifica que la competència matemàtica posa en evidència com desenvolupa l'alumne una tasca de caire matemàtic, és a dir, els processos seguits per l'alumne. Aleshores, és possible avaluar-los i d'aquesta manera arribar a analitzar de quina manera es duu a terme una activitat relacionada amb continguts matemàtics de qualsevol bloc curricular. En nostra cas, ens interessa l'avaluació de la competència matemàtica quan l'activitat es relaciona amb la geometria. Ara que s'ha determinat el que ha fer un alumne que és solvent a l'àmbit de les matemàtiques, quan correspon identificar el seu nivell d'assoliment de la competència matemàtica. Certament que són les escoles, a partir de la labor del professor, qui donen constància del progrés de l'aprenentatge dels alumnes en funció de la seva capacitat d'actuació davant una tasca fixada. Però, en el marc institucional, els ministeris i altres organismes públics són els responsables del seguiment de la vida acadèmica dels seus ciutadans. Així mateix, per escenaris globalitzats, al voltant del món també hi existeixen proves amb les quals es mostren els resultats de l'aprenentatge de les matemàtiques i en concret de les branques d'ensenyament segons el currículum de referència. Una comparació per països del nivell de la competència matemàtica és proporcionat pel Programa per l'Avaluació Internacional dels Estudiants de l'Organització per la Cooperació i el

Desenvolupament Econòmic, reconeguts com a PISA i OCDE pels seus noms en anglès. Aquesta prova, PISA, destinada a alumnes al voltant dels 15 anys, posa la seva atenció en la caracterització de l'*alfabetització matemàtica*. La metodologia que segueix aquest organisme és el plantejament de problemes del món real, per exemple: l'ús del mòbil, la presa de decisions al moment de fer compres, la simulació d'estalvis o els desplaçaments amb l'ajuda de mapes. Els quatre contextos en els quals es proposen les situacions són: (1) personal, (2) professional, (3) social i (4) científic. Amb aquests reptes es busca que els alumnes activin de manera cíclica tres processos: (1) interpretació i avaluació, (2) formulació i (3) aplicació de coneixements sobre continguts de quatre àrees: (1) quantitat, (2) probabilitat i dades, (3) canvi i relacions i (4) espai i forma. Com es pot veure a la **Figura 4.4.1.**, l'organització afirma que l'aprenentatge de les matemàtiques es pot assolir amb èxit si es centra la formació dels estudiants segons el que s'anomena "habilitats del segle XXI": (1) pensament crític, (2) creativitat, (3) recerca i adquisició, (4) d'autonomia, iniciativa i persistència, (5) ús de la informació, (6) pensament sistemàtic, (7) comunicació i (8) reflexió. (OCDE, 2020). Una altre cop aspectes generals de l'activitat matemàtica que es poden relacionar amb els continguts curriculars de geometria.

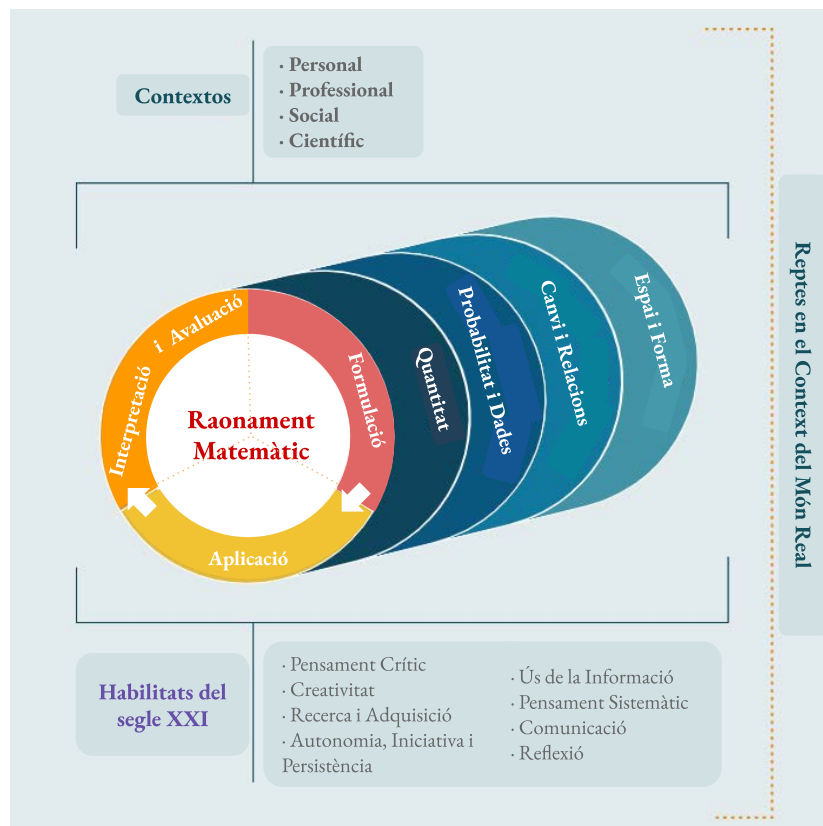


Figura 4.4.1. Aspectes de l'*alfabetització matemàtica* en alumnes de 15 anys (OCDE, 2020).

Font: Elaboració pròpia.

Als Estats Units, l'organisme qui té el quefer del monitoratge de les competències s'anomena *National Center for Education Statistics* (NCES), traduint-lo: Centre Nacional per a l'Estadística Educativa. Ara, la prova amb la qual es duu a terme el seguiment és diu *National Assessment of Educational Progress* (NAEP), és a dir: Avaluació Nacional del Progrés Educatiu. Aquest examen està conformat d'un seguit de preguntes de tres nivells de complexitat (baix, mig i alt), les quals s'inclouen els continguts matemàtics del curs al que s'adrecen. Són cinc les àrees en les quals s'organitzen els continguts matemàtics del test: (1) propietats numèriques i operacions, (2) mesura, (3) geometria, (4) anàlisi de dades, estadística i probabilitat, i (5) àlgebra. Quant als nivells d'assoliments considerats, en són tres (bàsic, competent i avançat) i s'estableixen d'acord al curs que s'adrecen. Pel NCES (2020) la competència matemàtica d'un alumne s'avalua a partir de la seva actuació davant ítems de diferent nivell de complexitat sobre els continguts curriculars, i hi pot ser inferior a l'esperada o anar més enllà (**Figura 4.4.2.**). Per la seva descripció, podem aplicar aquesta orientació del NCES als continguts sobre geometria. Llavors, és important tenir en compte el que aquesta institució puntualitza.

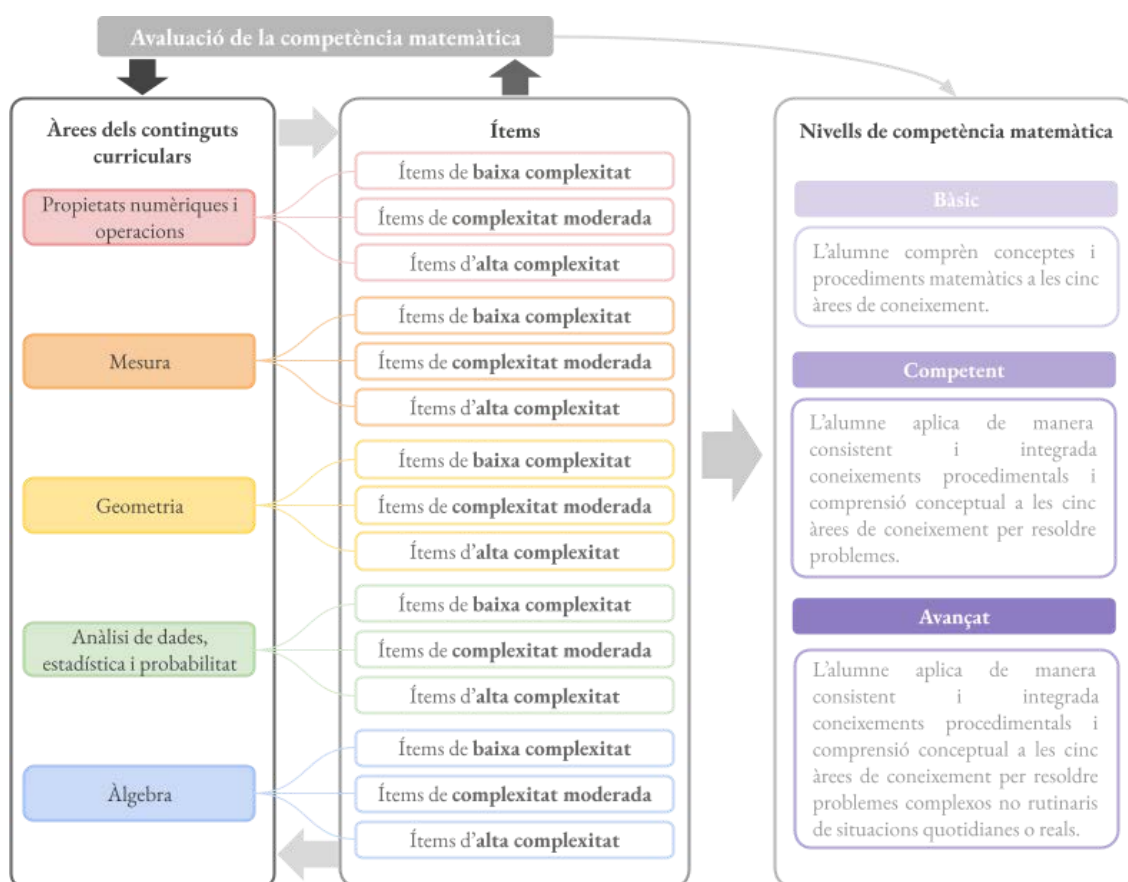


Figura 4.4.2. L'avaluació de la competència matemàtica, per alumnes de quart curs (NCES, 2020).

Font: Elaboració pròpia.

Així doncs, el Consell Superior d'Avaluació del Sistema Educatiu de Catalunya proposa la seva descripció del que para el currículum català és la competència matemàtica i con avaluar-la. Segons aquest organisme, la competència matemàtica dels alumnes d'ESO es valora en funció processos cognitius de reproducció, connexió i reflexió desenvolupats a partir de preguntes sobre els quatre blocs: numeració i càlcul; espai, forma i mesura; canvi i relacions; i estadística. Aleshores, un alumne competent és aquell que pot fer representacions gaire complexes; realitzar càlculs rutinaris i resoldre problemes senzills (procés cognitiu de reproducció); comprendre models simples i construir-los; interpretar i resoldre problemes representatius i aplicar mètodes ben definits (procés cognitiu de connexió); formular i resoldre problemes amb els quals s'ha de reflexionar, fer conjectures, generalitzacions i relacionar diferents coneixements rellevants i aplicar mètodes més elaborats o complexos (procés cognitiu de reflexió); tot allò sobre continguts dels quatre blocs curriculars (GenCat, 2020). Doncs, la **Figura 4.4.3.** mostra les dues famílies d'aspectes en les quals es fonamenta l'avaluació de la competència matemàtica dels alumnes sota el sistema educatiu català: el blocs de continguts curriculars i els processos cognitius.

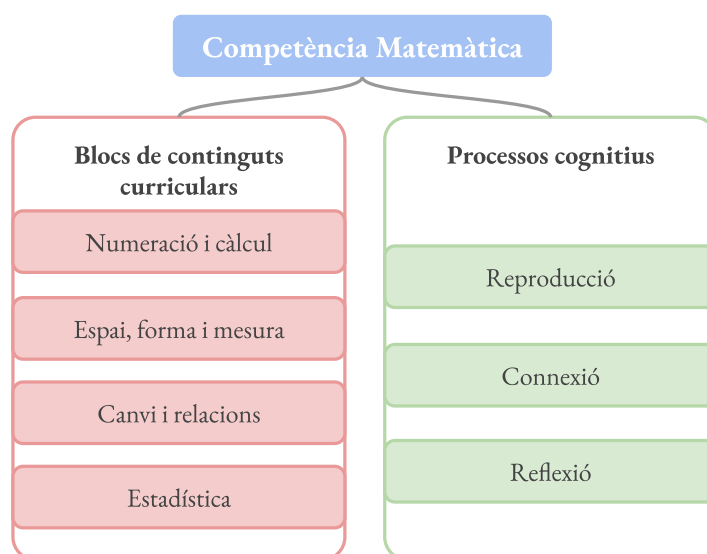


Figura 4.4.3. Aspectes per avaluar la competència matemàtica (GenCat, 2020).

Font: Elaboració pròpia.

A partir de les dades que ofereix la prova PISA, enguany l'assoliment dels estudiants dels Estats Units i dels d'Espanya és molt semblant (**Figura 4.4.3.**).

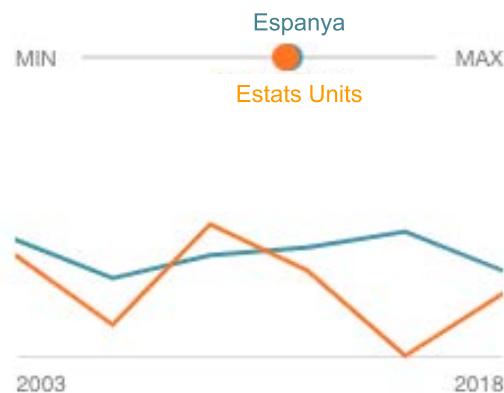


Figura 4.4.3. Resultats de Matemàtiques de la prova PISA (OCDE, 2020).

Font: Elaboració pròpia.

En el cas específic de la geometria, s'espera que els alumnes d'ESO comencin aquesta etapa familiaritzats amb processos d'establiment de relacions quantitatives i espacials en la resolució de problemes; comparacions i contrast d'idees matemàtiques i proposar-ne exemples; així com l'aplicació de propietats geomètriques informals. Pel darrer any d'ESO, els alumnes han de ser capaços d'aplicar el raonament proporcional per resoldre problemes no rutinaris i entendre els efectes d'un canvi d'escala; utilitzar la visualització tridimensional; aplicar successivament una o varies transformacions geomètriques a una figura plana; i entendre els efectes d'aquestes transformacions, incloent el canvi d'escala de les mesures que hi corresponen (NCES, 2020). Com s'observa a la **Taula 4.4.1.**, on es concentren els coneixements i les habilitats dels alumnes de primer i de l'últim curs d'ESO segons el NCES (2020), hi ha una forta influència del dibuix geomètric en el desenvolupament de la competència matemàtica de l'àrea de geometria a l'ESO.

Taula 4.4.1.

Indicadors de la competència matemàtica per a estudiants d'ESO a l'àmbit de geometria segons la NAEP (NCES, 2020).

A l'inici del cicle	Al final del cicle
1. Familiaritat amb els processos per establir relacions quantitatives i espacials en la resolució de problemes. 2. Aplicació de les propietats geomètriques informals.	1. Utilitzar la visualització d'objectes en tres dimensions. 2. Aplicar transformacions geomètriques de manera successiva a una figura plana. 3. Entendre els efectes de les transformacions geomètriques, incloent el canvi d'escala.

Font: Elaboració pròpia.

Els resultats esperats de la prova NAEP (NCES, 2020) mostren les semblances i diferències que hi existeixen entre el currículum dels Estats Units (CCSS, 2011) i Catalunya (Decret 187/2015). En acabar l'ESO, els estudiants catalans han de conèixer continguts sobre proporcionalitat i semblança, i transformacions geomètriques (Decret 187/2015).

Per emfatitzar les competències específiques sobre geometria esperades en alumnes que acaben l'ESO a Catalunya cal analitzar els resultats de l'avaluació del bloc "Espai, forma i mesura". Per 2020, aquest bloc ha obtingut les menors puntuacions mitjanes. Mentre el bloc "Numeració i càlcul" ha arribat als 79 punts, només n'ha aconseguit 64,5 el bloc que inclou la geometria, és a dir "Espai, forma i mesura" (Figura 4.4.4.). Llavors, hi ha problemes per la identificació de relacions mètriques i característiques de figures i espais quotidians, així com les seves representacions que són els aspectes geomètric d'aquesta fracció de la competència matemàtica (GenCat, 2020).

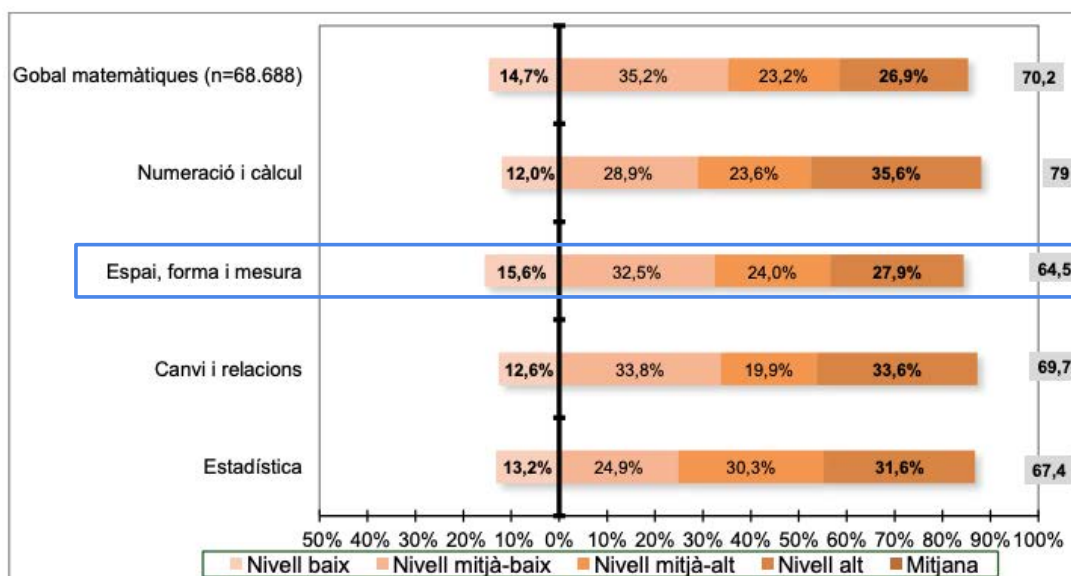


Figura 4.4.4. Percentatge d'alumnes per nivell d'assoliment de competència matemàtica (GenCat, 2020).

Font: Elaboració pròpia.

Les puntuacions aconseguïdes es poden justificar en els conceptes que han mostrat ser de difícil comprensió pels alumnes. A la **Taula 4.4.2.** se n'han recollit aquest aspectes categoritzant-los en el curs inicial i el final. Al primer curs de l'ESO, els alumnes manifesten inconvenients per calcular l'angle d'un triangle, l'àrea d'un quadrat i la longitud d'una hipotenusa, però també tenen dificultat per identificar línies perpendiculars i el radi d'un cercle, així com les mides dels costats amb els quals pot

construir-se un triangle. Aleshores, es veu que malgrat que s'hagi donat com a dada del problema les mides de dos dels tres angles d'un triangle, els alumnes no reconeixen que la suma dels angles interiors de qualsevol triangle és 180° . Tampoc han establert la relació entre les mides dels costats d'un quadrat i la seva àrea. Per altra part, sembla que fins aquest nivell educatiu no han tingut suficients oportunitats per reflexionar sobre les característiques dels costats que formen un triangle com a per reconèixer que no totes les ternes de costats permeten obtenir un triangle i quines són les característiques que hi han de tenir per assolir-ho. Per altra banda, es detecta la manca d'aprenentatge del teorema pitagòric i dels problemes de visualització que impedeixen la identificació del que és una línia perpendicular i quins són els atributs que ha de complir un segment de línia recta com per ser considerat el radi d'un cercle. La problemàtica al final de l'ESO, com també es mostra a la mateixa **Taula 4.4.2.**, es centra en el càlcul d'àrees, ja sigui d'aquella que es forma entre dos triangles o de la que correspon a la superfície d'un triangle rectangle, així com la resolució de problemes que impliquin l'obtenció d'àrea però al plantejament no s'ha inclòs cap representació gràfica de la regió en qüestió i l'alumne ha de proposar-la o esbrinar-la a partir de les dades de l'enunciat (NCES, 1978, 1982, 1986).

Taula 4.4.2.

Conceptes que representen problemes pels estudiants de l'ESO segons la NAEP (NCES, 1978, 1982, 1986).

A l'inici del cicle	Al final del cicle
<ul style="list-style-type: none"> - Calcular la mida del tercer angle d'un triangle donats els altres dos. - Calcular l'àrea d'un quadrat donada la longitud d'un dels seus costats. - Identificar les mides d'un conjunt de costats que han de formar un triangle. - Calcular la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle donats els seus catets. - Identificar línies perpendiculars i el radi d'un cercle. 	<ul style="list-style-type: none"> - Calcular l'àrea d'una regió entre dos triangles. - Resoldre problemes de càlcul d'àrees pels quals no es dona cap representació gràfica. - Calcular l'àrea d'un triangle rectangle.

Font: Elaboració pròpia.

Una altra dificultat a l'estudi de la geometria són algunes idees prèvies dels alumnes, ja que interfereixen en el seu aprenentatge per tractar-se de conclusions deduïdes a partir d'elements insuficients o raonaments parcials. Segons Bishop (1986), els obstacles per l'aprenentatge de la geometria pertanyen a tres categories: (i) l'espai, (ii) la matematització de l'espai i (iii) la geometria en si mateixa.

Per la seva part, Clements i Battista (1992) presenten casos concrets sobre les nocions associades als angles, les figures planes i el teorema pitagòric (**Taula 4.4.3.**). Als treballs de recerca d'aquests investigadors s'han identificat creences dels alumnes sobre la naturalesa dels angles, tots són positius. Pel que fa a les semirectes, els estudiants consideren que totes elles tenen una orientació definida a l'espai i per tant, són horitzontals. Les figures geomètriques porten al darrera un seguit d'idees preconcebudes. Els alumnes pensen que els costats de qualsevol triangle són congruents entre ells mateixos, aleshores, els alumnes consideren que els triangles són tots equilàters. En aquell mateix sentit, s'observa que aquesta idea es perllonga al quadrilàters i per tant hi ha la percepció de que tots ells són quadrats. Al igual que amb les semirectes, s'ha observat que els alumnes assignen orientacions fixes i determinades a la resta de figures geomètriques. Així que, totes les bases de les figures han de ser una semirecta, és a dir, horitzontals. En conseqüència, només es consideren com a costats de les figures a les semirectes verticals. Pel que fa a la identificació de les diagonals d'un figura geomètrica, aquesta ha de tenir cert grau d'inclinació. També hi existeix la concepció de que les altures tenen un punt de creuament amb un dels costats de la figura, així que són adjacents als costats. A l'àmbit del tractament analític de les dades mètriques de les figures geomètriques es troba que els estudiants d'ESO relacionen el teorema pitagòric amb el càlcul d'àrees. A més, hi ha evidències de que alguns alumnes afirmen que la suma dels angles interns d'un quadrilàter és igual a la seva àrea. També s'ha trobat la següent conclusió per part dels alumnes: consideren que quan un quadrilàter i un rectangle tenen el mateix perímetre, doncs, les seves àrees són iguals.

Taula 4.4.3.

Nocions que obstaculitzen l'aprenentatge de la geometria segons Clements i Battista (1992).

Angles	Figures
▲ Els angles són positius.	△ Els triangles són tots equilàters.
▲ Una semirecta és horitzontal.	□ El costat d'una figura ha de ser vertical.
▲ Un dels costats d'un angle ha de ser horitzontal.	□ Les figures amb quatre costats són quadrats.
▲ Els angles rectes estan orientats cap a la dreta.	□ La base d'un quadrat ha de ser horitzontal.
	□ Les diagonals no poden ser horitzontals o verticals.
	□ La base d'un quadrat ha de ser horitzontal.
	□ L'altura d'un paral·lelogram és adjacent a la seva base.

Font: Elaboració pròpia.

El desenvolupament de idees errònies al voltant de conceptes geomètrics s'atribueix als continguts curriculars i a la pràctica del professorat. L'ensenyament de la geometria sovint es caracteritza per realitzar-se de manera breu i expositiva. En el cas de la ESO, la manca d'estudis previs en geometria produeix que els alumnes tinguin poca preparació per assolir continguts analítics que es basen en conceptes previs més senzills (Clements i Battista, 1992).

Capítol 5. Formació del professorat per a l'ensenyament de la geometria

Segons Capraro (2001), per parlar del *coneixement del contingut geomètric* hem de mirar cap enrere a les idees de Piaget, els van Hiele, Clements i Battista. Però també, aquest autor puntualitza la necessitat d'apropar-nos al currículum vigent al nostre país o estat, per tal de tenir en ment tot el que el professor ha de saber sobre geometria perquè ho pugui transmetre als seus alumnes. Per donar precisió al terme, l'autor recomana anomenar-lo: *coneixement del contingut geomètric* (GCK, Geometry Content Knowledge).

Com a resultat de la recerca amb professors en formació, Aslan-Tutak i Adams (2015) proposen sis principis del desenvolupament professional del professorat a l'àmbit de la geometria: (1) cal implementar metodologies d'instrucció amb les quals relacionar el contingut amb les pràctiques pedagògiques adequades, (2) els professors en formació mostren deficiències en el coneixement de les figures bidimensionals, (3) des de la perspectiva del professor en formació, en primer lloc s'ha de discutir el contingut i en segon terme s'ha de passar a la discussió de les pràctiques pedagògiques d'ensenyament d'aquell contingut, (4) els professors en formació reafirmen que s'ha de seguir una seqüència d'ensenyament que comenci amb els continguts més senzills per avançar a poc a poc cap als de més complexitat, (5) hi ha un acord entre els alumnes de magisteri sobre la pertinència de proporcionar al alumnes representacions visuals per a l'ensenyament de la geometria, i finalment, (6) el professors en formació reconeixen les avantatges de treballar dos tipus de metodologies per afavorir l'aprenentatge dels seus alumnes: activitats individuals i col·lectives.

Entre les eines d'instrucció recomanades per a l'ensenyament de la geometria es troben: (1) els diagrames, (2) els materials manipulatius, (4) les imatges, (5) les aplicacions digitals, (6) els jocs digitals, (7) el software educatiu com ara LOGO (Clements, 2003), Cabri o GeoGebra, entre d'altres. Per donar seguiment al capítol anterior, sobre la formació de professorat, i centrar l'atenció en la qüestió particular d'aquest capítol al voltant de l'ensenyament de la geometria però des de la perspectiva de la formació de professorat, es farà un recull d'idees sobre aquesta àrea de les matemàtiques: la geometria.

5.1 Objectes matemàtics

Els continguts amb els quals es pot assolir de la millor manera una competència específica es reconeixen com continguts clau. En el cas de la geometria en tenim: (1) sentit espacial i representació de figures tridimensionals, (2) figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció, i (3) relacions i transformacions geomètriques. Per la seva relació amb els continguts curriculars, també és importat considerar un dels continguts clau del bloc de mesura: relacions mètriques i càlcul de mesures en figures. Els continguts curriculars que formen part dels continguts curriculars ara esmentat es poden visualitzar a la **Taula 5.1.1**. (GenCat, 2017a).

Taula 5.1.1.

Continguts curriculars dels continguts clau de geometria a l'ESO (GenCat, 2017a).

Contingut Clau relacionats amb la geometria	Continguts curriculars
8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	→ Figures geomètriques de dues dimensions. → Figures i cossos geomètrics. → Proporcionalitat i semblança. → Trigonometria
9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.	→ Figures geomètriques de dues dimensions. → Eines i instruments. → Figures i cossos geomètrics. → Proporcionalitat i semblança. → Teoremes de Tales i de Pitàgores. → Trigonometria
10. Relacions i transformacions geomètriques.	→ Simetria. → Proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions. → Teoremes de Tales i de Pitàgores. → Transformacions geomètriques. → Trigonometria.
12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.	→ Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions. → Unitats de mesures d'àrees i volums. → Superfícies i volums de cossos de l'espai. → Mesures directes. → Mesures indirectes.

Font: Elaboració pròpia.

5.1.1. Figures i cossos geomètrics

Les habilitats per analitzar les propietats de les figures i els cossos geomètrics són indispensables per determinar els seus atributs, ja que la correcta descripció dels atributs d'un objecte geomètric és fonamental en la construcció de definicions. Aquestes definicions, per la seva part ajuden a establir relacions objectes geomètrics amb les quals es fa possible la seva classificació i en conseqüència, entendre les relacions que hi ha entre diferents figures geomètriques (NCTM, 2000).

5.1.2. Eines i instruments

Quan un estudiant pot dibuixar i construir representacions d'objectes geomètrics en dues o tres dimensions està manipulant una varietat d'eines per mesurar i de dibuix geomètric. Aquestes imatges poden ésser auxiliars en la visualització d'atributs no visibles de cossos geomètrics, però també poden ajudar a identificar diferents perspectives d'una figura o a fer-ne talls i identificar-ne seccions (NCTM, 2000).

5.1.3. Simetria, proporcionalitat i semblança en figures de dues dimensions

La descripció de les mides dels components dels objectes geomètrics, a més de ser una activitat inicial en el reconeixement del concepte de congruència, pot esdevenir-se en un coneixement previ i necessari per identificar relacions de proporcionalitat entre figures. Per tant, es pot considerar que la mesura és el punt de partida o l'antecedent de l'estudi d'idees geomètriques com ara la simetria. A tall d'exemple, en explorar els costats d'una figura geomètrica es pot saber que aquests atributs mesurables permeten establir relacions amb conceptes geomètrics com ho és la simetria o semblança. A l'ESO, els conceptes de semblança i congruència exigeixen als alumnes la utilització del raonament deductiu i l'establiment de procediments de prova per tal d'argumentar les seves proves sobre conjectures i les solucions de problemes trobades. Cal que els alumnes hagin comprès el que són les definicions, les axiomes i els teoremes geomètrics per tal d'utilitzar-los, ja sigui per resoldre problemes o construir proves. Considerant que els alumnes han de ser capaços de descriure, representar i investigar les relacions que hi ha en un mateix sistema geomètric, però que a la vegada han de poder expressar i justificar aquestes relacions fent ús de cadenes lògiques de raonament (NCTM, 2000).

5.1.4. Transformacions geomètriques

De la mateixa manera que la simetria pot exercir de coneixement previ al concepte de semblança entre figures, també es pot utilitzar per introduir les transformacions geomètriques. En l'àmbit de l'exploració dels moviments requereix que els alumnes tinguin l'habilitat de fer les seves descripcions però des de la perspectiva matemàtica. Els desplaçaments i girs (és a dir, els moviments) han de ser entesos pels alumnes en termes dels atributs que els defineixen. En aquest sentit, una rotació es defineix a partir de: (1) el centre, (2) la direcció, i (3) l'angle de rotació. Per una altra banda, el fet de reconèixer que una transformació geomètrica permet, des de la seva naturalesa, conservar distàncies ajuda a la comprensió dels seus efectes sobre una figura geomètrica (NCTM, 2000). Tot i que al currículum català, la mesura és un bloc temàtic en sí mateix, cal tenir-lo en compte perquè permet l'aprenentatge d'idees geomètriques ja sigui mitjançant la comparació quantitativa dels atributs de les formes geomètriques o la representació gràfica de les figures a partir del dibuix geomètric (NCTM, 2000). En el mateix sentit s'especifica al currículum català que hi relació entre els continguts relacionats amb la mesura geomètrica i els continguts que corresponen a les transformacions geomètriques (GenCat, 2017a).

5.1.5. Mesures directes i indirectes

La comprensió del que són els atributs mesurables d'un objecte geomètric és el punt de partida en la identificació i selecció de les unitats de mesura més apropiades per a un atribut en concret. Per una altra banda, en prendre mesures directament els alumnes arriben a reconèixer les afectacions que representa la manca de precisió mentre es dibuixa un objecte geomètric. El dibuix geomètric també és un escenari on la selecció i ús d'eines adequades per mesurar i traçar són rellevants (NCTM, 2000).

5.2 Processos Matemàtics

Els criteris amb els quals es defineix el perfil de les competències matemàtiques dels alumnes que es diplomem d'ESO van més enllà dels continguts curriculars. Establint com referència els continguts clau representatius de la geometria, a la **Taula 5.2.1.** es pot veure que l'estudi dels continguts curriculars d'aquest bloc temàtic (geometria) fa possible el desenvolupament de totes les dotze competències de l'àmbit matemàtic d'ESO (GenCat, 2017a). A la **Taula 5.2.1.** es pot apreciar que no solament hi ha continguts clau amb els quals es treballa un nombre reduït de competències. El millor exemple és el contingut clau *sentit espacial i representació de figures geomètriques*, amb el qual es té el major nivell d'implicació de competències.

Taula 5.2.1.

Continguts clau representatius de les competències matemàtiques d'ESO referides a la geometria (GenCat, 2017a).

Contingut Clau	Competències de l'àmbit matemàtic d'ESO											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	✓		✓	✓		✓		✓	✓			✓
9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.					✓				✓	✓		
10. Relacions i transformacions geomètriques.			✓	✓	✓		✓			✓	✓	
12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.		✓				✓	✓					

Font: Elaboració pròpia.

Si el seguit de continguts curriculars integren les competències, la concreció d'elles li correspon a les dimensions. En aquest sentit, cal parlar de les quatre dimensions en les quals es relacionen les competències matemàtiques: (1) resolució de problemes, (2) raonament i prova, (3) connexions i (4) comunicació i representació (NCTM, 2000; GenCat, 2017a). Tal i com s'ha dit abans, els quatre continguts clau representatius de la geometria permeten el desenvolupament de totes les competències de l'àmbit matemàtic d'ESO. Però, encara queda per especificar quin és l'impacte de les competències matemàtiques respecte aquest quatre processos o dimensions. A la **Taula 5.2.2.** es presenta la relació que hi ha entre cadascuna d'aquestes competències de l'àmbit matemàtic i les quatre dimensions. És evident que cap de les competències es compagina només amb una dimensió o procés. Però la competència relacionada amb la representació simbòlica i l'ús del llenguatge matemàtic n'és la que s'associa amb el major nombre de dimensions (GenCat, 2017a).

Taula 5.2.2.

Dimensions de les competències matemàtiques d'ESO relacionades amb els continguts clau representatius de la geometria (GenCat, 2017a).

Competències matemàtiques relacionades amb els continguts de geometria	Dimensions			
	Resolució de problemes	Raonament i prova	Connexions	Comunicació i representació
1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats.	✓		✓	✓
2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes.	✓	✓		
3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses.	✓	✓		
4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes.	✓		✓	
5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques.		✓		✓
6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics.		✓	✓	
7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar.		✓	✓	
8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions quotidianes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes.			✓	✓
9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.	✓			✓
10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres.		✓		✓
11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques.		✓		✓
12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics.			✓	✓

Font: Elaboració pròpia.

Les quatre dimensions que caracteritzen el treball matemàtic es relacionen amb els processos matemàtics d'igual denominació. Bona part dels lligams entre les dimensions del currículum català es poden descriure centrant l'atenció a la dimensió de *resolució de problemes*. Per començar, se'n presenten trets característics de la dimensió de *comunicació i representació*. Aquesta primera declaració es basa en la impossibilitat de presentar cap procés de resolució i la seva solució sense fer, abans, la traducció correcta de l'enunciat del problema al llenguatge matemàtic que li correspon. Així mateix, cal comunicar tanmateix l'esmentat procés com la solució a ell relacionada. En segon lloc, la dimensió de *connexions* es fa evident per l'existència de factors que fan possible referir aspectes de la realitat mitjançant objectes o idees matemàtiques. Finalment, el *raonament i prova* és una dimensió emprada en comprovar els procediments desenvolupats per arribar a una solució i per consegüent, validar la solució (GenCat, 2017a).

En fixar l'atenció a la dimensió de *raonament i prova* es pot distingir que, a més de les relacions que aquest procés manté amb la dimensió de *resolució de problemes*, hi ha elements de *comunicació i representació*. Aquest relació es justifica en la necessitat d'expressar les idees matemàtiques, ja sigui de manera oral o escrita, per presentar arguments. Però el fet principal és que la competència comunicativa és imperativa en la construcció del coneixement (GenCat, 2013; GenCat, 2017a).

Tot partint de la dimensió de *connexions* és possible reconèixer la seva relació amb el procés de *comunicació i representació*. Aquesta manifestació és presenta en la identificació d'objectes i fets matemàtics a la vida quotidiana. També n'és indicador l'ús de les tecnologies com a eines per desenvolupar activitats de caire matemàtic (GenCat, 2017a).

5.2.1 Resolució de problemes

El currículum català estableix la dimensió de *resolució de problemes* com la peça clau de l'aprenentatge de les matemàtiques (GenCat, 2017a). Per a el NCTM (2000), aquesta dimensió té quatre característiques: (1) afavoreix la construcció de coneixements matemàtics nous, (2) permet portar les matemàtics a un àmbit fora de l'escola: a la realitat, (3) insta en l'aplicació i adaptació d'estratègies de resolució, i (4) fa possible la monitorització dels processos matemàtics emprats.

5.2.2. Connexions

La caracterització de la dimensió de connexions es pot fer a partir de tres aspectes: (1) el reconeixement i ús de les relacions que hi ha entre les idees matemàtiques, (2) la comprensió de la manera en la qual les idees matemàtiques es relacionen entre elles mateixes per a la construcció coherent d'una altra idea, i (3) la capacitat d'identificar i aplicar les matemàtiques en contextos no matemàtics. A mena d'exemple, l'estudi de

transformacions geomètriques permet als alumnes identificar elements de les figures geomètriques i relacionar-los amb la seva disposició a l'espai i extensió, per tant, hi ha trets del procés de *connexions*.

5.2.3. Raonament i prova

L'estudi de la geometria permet identificar l'estructura axiomàtica de les matemàtiques mitjançant el raonament. Convé destacar que els continguts curriculars que pertanyen a la geometria es concentren en l'aplicació de definicions i fets establerts, per tant, el procés que s'hi desenvolupa és: *raonament i prova*. En treballar aquesta dimensió, els alumnes han de ser capaços de: (1) reconèixer, de manera justificada i coherent els aspectes fonamentals de les matemàtiques, (2) fer i cercar conjectures matemàtiques, (3) desenvolupar i avaluar arguments i comprovacions des de les seves perspectives matemàtiques, i (4) seleccionar i fer ús d'una varietat de raonaments i mètodes de prova (NCTM, 2000).

5.2.4. Comunicació i representació

S'ha de tenir en compte que els alumnes han d'aprendre diferents maneres d'expressar les transformacions geomètriques. En particular, els estudiants han de ser capaços d'explicar (verbal i orament) i de fer dibuixos per mostrar la transformació d'una figura dins i fora el pla cartesià. Per tant, també podem identificar el desenvolupament del procés de *comunicació i representació* a partir del següents aspectes: (1) organització i consolidació del pensament matemàtic per a comunicar idees, (2) expressió d'idees al voltant d'objectes matemàtics de manera coherent i clara, (3) anàlisi i avaluació del pensament matemàtic i de les estratègies d'altres, (4) utilització de llenguatge matemàtic per expressar idees matemàtiques amb precisió, (5) creació i ús d'imatges, diagrames, dibuixos i altres recursos gràfics, simbòlics o verbals per organitzar, enregistrar i comunicar idees de caire matemàtic, (6) selecció, aplicació i traducció de representacions matemàtiques en la resolució de problemes, i (7) utilització de representacions per modelitzar fenòmens físics, socials i matemàtics (NCTM, 2000).

5.3 Pràctiques matemàtiques

Es defineix com *pràctiques matemàtiques* als criteris que permeten fer una descripció del nivell d'expertesa dels alumnes quan desenvolupen una tasca que requereix l'ús de continguts matemàtics. En termes de la competències matemàtiques, aquests criteris consideren en els estudiants: (1) el raonament adaptatiu, (2) la competència estratègica, (3) la comprensió de conceptes, operacions i relacions matemàtiques (és a dir, la competència conceptual), (4) l'habilitat de dur a terme procediments amb flexibilitat, precisió, eficàcia i adequació (fluïdesa de procediments) i (5) la diligència i eficàcia personal juntament amb la tendència habitual de veure les matemàtiques com una cosa sensible, susceptible d'utilització i mereixedora. Pel que fa als processos o dimensions, les *pràctiques matemàtiques* es relacionen amb totes elles, és a dir: (1) la resolució de problemes, (2) el raonament i prova, (3) la comunicació i la representació, i (4) les connexions entre les

objectes matemàtics que es presenten en una mateixa tasca. El llistat de les *pràctiques matemàtiques* ajuda a caracteritzar els alumnes com a “matemàticament competents” a partir de vuit aspectes: (1) resolució de problemes, (2) raonament abstracte i quantitatiu, (3) arguments, (4) modelatge, (5) eines estratègiques, (6) precisió, (7) estructures i (8) regularitats en arguments (**Figura 5.3.1.**) (NCTM, 2000).

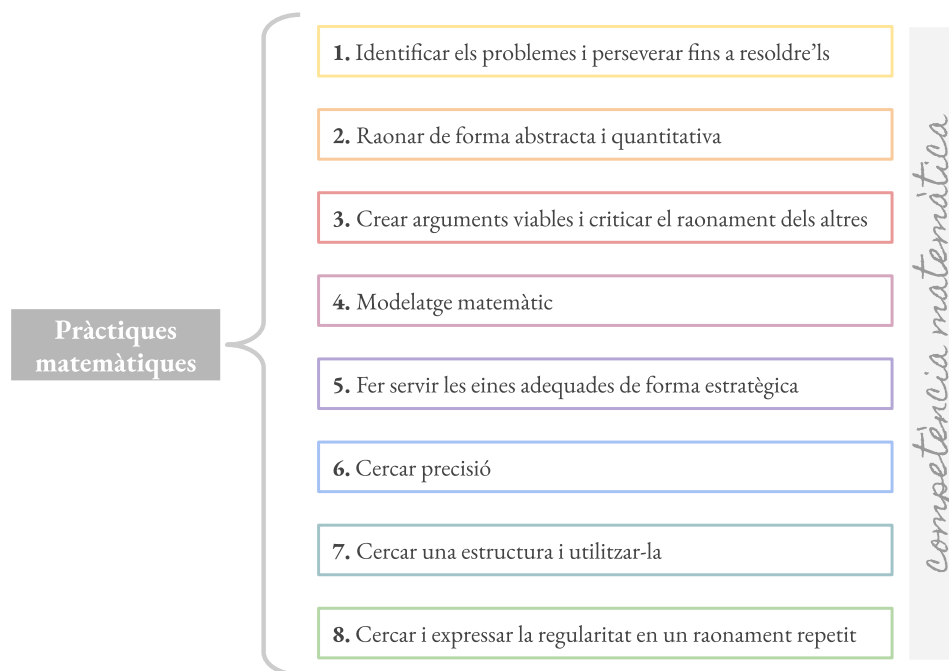


Figura 5.3.1. Pràctiques matemàtiques (NCTM, 2000).

Font: Elaboració pròpia.

La primera de les *pràctiques matemàtiques*, segons el NCTM (2000), és: ***identificar el problema i perseverar fins a resoldre'ls***. Dins aquest aspecte de la competència matemàtica, els estudiants han de trobar el significat d'un problema per tal d'obtenir-ne una explicació per a si mateixos i, a partir d'ella, han de proposar una varietat d'estratègies de resolució. Els alumnes competents, en comptes de llençar-se de manera directa cap a una resposta, fan servir els següents mitjans: l'anàlisi dels fets, la identificació de les limitacions de la situació, les relacions hi trobades, els objectius de la tasca, l'elaboració de conjetures relacionades amb la forma i el significat de la solució. Altres trets característics d'aquesta *pràctica matemàtica* són la simplificació del problema original en considerar problemes semblants o casos especials amb el propòsit de trobar sentit a la solució. També s'ha de puntualitzar que, quan l'alumne desenvolupa l'estratègia de resolució del problema en qüestió, té la capacitat d'autoavaluació del progrés del seu procediment i a partir d'aquesta valoració pot considerar el continua o modifica. Un altre indicador d'aquesta *pràctica* de la competència matemàtica és la utilització un mètode diferent a aquell emprat en la resolució per comprovar la resposta. Com a conseqüència, els alumnes també son capaços de comprendre els enfocaments utilitzats pels

seus companys o professors en la resolució de problemes i establir correspondències entre enfocaments (NCTM, 2000).

La capacitat de *raonar de forma abstracta i quantitativa* és la segona de les *pràctiques matemàtiques*. En considera la habilitat per entendre les quantitats i com elles intervenen en un problema. La resolució de problemes que presenten relacions entre quantitats requereix: (1) la capacitat de descontextualització i, el seu contrari, (2) la capacitat de contextualització. Per un cantó, la capacitat de descontextualització fa referència a l'habilitat d'extreure les dades quantitatives per pensar una situació de manera abstracta utilitzant representacions simbòliques com els numerals i els operadors. Per l'altre cantó, l'habilitat de contextualització permet desenvolupar el camí oposat a la descontextualització: emportar dades numèriques a una situació concreta. Les implicacions d'aquest raonament quantitatiu en la resolució de problemes són: la creació d'una representació coherent, la correcta consideració de les unitats involucrades, la reflexió al voltant del significat de les quantitats calculades i utilitzades per fer els càlculs i la flexibilitat en l'ús d'objectes matemàtics i les propietats de les operacions (NCTM, 2000).

Crear arguments viables i criticar el raonament dels altres és el descriptor de la tercera *pràctica matemàtica*. A la creació d'arguments intervenen l'aplicació d'idees matemàtiques, definicions i resultats determinats amb antelació per part dels alumnes. La creació de conjectures prové d'una seqüència lògica d'afirmacions amb les quals se n'exploren. Una altra mostra d'aquesta tercera *pràctica* és habilitat de dividir una situació en casos més senzills per tal d'analitzar-la, reconèixer exemples i contraexemples que permetin la seva comprensió. També s'ha de considerar la capacitat de justificació i comunicació de conclusions i de donar resposta o debatre els arguments d'altres. El raonament característic de la competència matemàtica és del tipus inductiu, per tant, els arguments que justifiquen la viabilitat de les dades es creen a partir de les mateixes dades però tenint en compte el seu context. A banda de la creació d'arguments, la competència matemàtica es mostra en la destresa per comparar arguments considerats vàlids per determinar el més efectiu d'ells, fer preguntes per aclarir-los o millorar-los. La identificació d'errors en els arguments és una altra característica d'aquesta *pràctica matemàtica*. (NCTM, 2000).

En quart lloc es troba el *modelatge matemàtic* que explica la competència matemàtica en termes de l'aplicabilitat de les matemàtiques a qüestions de la vida quotidiana. Això és possible perquè els alumnes són capaços de prendre consciència per si mateixos dels objectes matemàtics que poden ser aplicats en l'aproximació o simplificació d'una situació real. Els alumnes també poden classificar la informació per trobar les dades rellevants i representar les relacions que hi ha entre aquestes "quantitats importants" i alguns aspectes de la situació en estudi mitjançant la creació de taules, diagrames i altres recursos gràfics. En identificar les relacions dades-situació matemàticament es facilita arribar a conclusions basades en el context i

la subseqüent validació dels resultats que en porta a la revisió del model, creant-se un cicle de millora. Un exemple en el cas de la geometria és la utilització del dibuix geomètric per fer un disseny per resoldre una problema de distribució d'espai. (NCTM, 2000).

La cinquena *pràctica matemàtica* es descriu com ***fer servir les eines adequades de forma estratègica***. Quan els alumnes conèixer les eines de les quals disposa per resoldre un problema i a la vegada n'estan familiaritzats, poden identificar les seves avantatges i desavantatges de la seva aplicació. La valoració de les eines disponibles es fa a partir de l'aplicació de coneixements matemàtics que permeten estimar els resultats que se'n poden extreure i així prendre una decisió sobre quina és l'eina més adequada per resoldre una situació concreta, analitzar un concepte o aprofundir-ne (NCTM, 2000).

La capacitat de ***cercar precisió*** denota alumnes competents en l'àmbit de les matemàtiques. A l'expressió oral, aquests alumnes fan ús del conceptes de forma adequada, utilitzen definicions clares i especifiquen les unitats de mesura, si cal. A l'expressió escrita, els alumnes escriuen el símbols correctes i els registren amb coherència. A la geometria, els alumnes registren tots els elements dels objectes geomètrics als quals fan referència. En resum, els alumnes competents busquen establir una comunicació que sigui clara (NCTM, 2000).

En setè lloc es troba la *pràctica matemàtica* denominada: ***cercar una estructura i utilitzar-la***. En aquest sentit, la competència matemàtica es refereix a la competència dels alumnes per descobrir patrons o estructures amb el quals pot assolir-se una idea generalitzada, o simplificada, d'una situació (NCTM, 2000).

Finalment, ***cercar i expressar la regularitat en un raonament repetit*** és la vuitena i última de les *pràctiques matemàtiques* que s'utilitzen per definir la competència matemàtica dels alumnes que mostren perícia en la cerca de mètodes generals i directrius mitjançant la identificació dels càlculs que es repeteixen. Tot això avaluant amb detall totes les passes del procés desenvolupat, però sense perdre la visió de l'objectiu: el resultat al qual es vol arribar (NCTM, 2000).

5.4 Orientacions Didàctiques

A banda dels coneixements matemàtics, els professors de matemàtiques determinen el camí que han de seguir a partir de les orientacions rebudes al currículum i de les propostes teòriques sobre la didàctica del contingut que es han d'ensenyar a l'aula (Godino i Ruíz, 2002). Vecino (2003) recull en cinc orientacions les bases fonamentals de la didàctica de la geometria: es requereix una geometria que sigui (1) dinàmica, (2) inter i intrafigural, (3) amb un caràcter deductiu i inductiu, (4) amb reconeixement dels grups d'invariants i (5)

fonamentada en els processos de percepció, representació, construcció, reproducció i designació (**Taula 5.4.1.**).

Taula 5.4.1.

Orientacions per a la didàctica de la geometria (Vecino, 2003).

Descriptor	Orientació
1. Geometria dinàmica	→ alternativa a la geometria estàtica
2. Geometria inter i intrafigural	→ en comptes de la geometria extrafigural
3. Geometria deductiva-inductiva	→ per tal de generar diferents processos i utilitzar varietats de material
4. Geometria de grups d'invariants	→ establiment de relacions topològiques, projectives i mètriques
5. Geometria fonamentada en processos	→ percepció, representació, construcció, reproducció i designació

Font: Elaboració pròpia.

La primera orientació d'ensenyament de la geometria convida a afavorir el desenvolupament de tasques de geometria dinàmica en comptes de fer un tractament estàtic de les formes, com es fa de manera tradicional (Vecino, 2003). És a dir, que els alumnes no centrin la seva experiència en l'ús d'estereotips de les figures amb un costat horitzontal anomenat base (Duval, 1999). Altrament, que els estudiants treballin amb una àmplia varietat de representacions i orientacions d'una mateixa forma, que a la vegada permet la identificació dels seus atributs: costats, diagonals, etc. (Rodríguez, 2015). Per tant, es recomana que els alumnes tinguin la possibilitat de manipular els elements d'una mateixa figura com ho són els vèrtexs o els costats (Duval, 1999; Godino i Ruiz, 2002).

En segon lloc es suggereix que amb la geometria que es porti a l'aula es canviï l'enfocament extrafigural per adoptar un tractament intrafigural i interfigural. Els termes "intrafigural" i "interfigural" provenen dels estadis històrics i psicogenètics de raonament i desenvolupament proposats per Piaget i Garcia (1982). D'un costat, el tret característic de l'etapa intrafigural és l'estudi dels atributs de les figures sense tenir en compte l'espai, establint relacions internes entre els seus elements. D'altre costat, el període interfigural es caracteritza per la cerca de relacions entre les figures i les seves transformacions geomètriques (Rodríguez, 2015).

El tercer aspecte a tenir en compte és la naturalesa deductiva del raonament geomètric en nivells que van més enllà de l'anàlisi, en la caracterització de van Hiele (Godino i Ruiz, 2002). Però enriquir aquests raonaments deductius amb altres d'inductius mitjançant la utilització de diferents recursos, com ho són els materials manipulatius, amb els quals sigui possible fer la recerca i descobriment dels atributs de les figures (Vecino, 2003; Alsina, 2004).

Respecte al quart terme, s'aconsella que els alumnes estudiïn les característiques topològiques, projectives i mètriques dels objectes geomètrics i que, a més, compreguin que aquestes no canvien (Vecino, 2002). La vessant topològica correspon a les transformacions tan profundes d'una figura que modifiquen els seus angles, costats i dimensions però mantenint certes característiques. Amb les propietats projectives es tracten diverses representacions amb les quals esmenten atributs com els angles i les línies però les seves dimensions canvien proporcionalment (Castro, 2004) La qüestió mètrica està lligada a les unitats de mesura i les dimensions de les figures.

Finalment, el cinquè aspecte a considerar per l'ensenyament de la geometria subratlla cinc processos rellevants en l'estudi d'entitats geomètriques: la percepció, la representació, la construcció, la reproducció i la designació (Vecino, 2002).

5.4.1. Figures geomètriques

L'exploració d'objectes és una activitat de caire matemàtic que permet el reconeixement de les propietats de propietats com ara: color, forma, mida, etc. (GenCat, 2012). Tot i que al **capítol 3** d'aquest document es fa un recull d'estudis al voltant del raonament geomètric, cal subratllar que l'ensenyament de les figures geomètriques i els seus elements requereix de la comprensió del desenvolupament cognitiu i de la progressió del seu aprenentatge. Per tant, s'han de tenir en compte les investigacions de Piaget i els van Hiele (Godino i Ruiz, 2002).

Fent un repàs a les aportacions de Piaget al camp de la didàctica de la geometria, es pot considerar que hi ha dues hipòtesis centrals sobre el desenvolupament de la concepció de l'espai en els nens: la hipòtesi constructivista i la hipòtesi de la preeminència topològica. La primera d'elles, la hipòtesi constructivista, relaciona la capacitat de representació de l'espai amb el desenvolupament del sistema operacionals (per tant, amb l'ordenament de les accions motrius i mentals que fa l'individu). La segona hipòtesi, de la preeminència topològica, explica l'ordenament lògic que cal dur a terme per organitzar de manera progressiva les idees geomètriques. En aquest sentit, el nom de la segona hipòtesi fa referència al tipus d'idees que sosté es desenvolupen en primer lloc: les topològiques. Aquestes precedeixen les idees de caire euclidià (Camargo, 2011). Cal puntualitzar que la hipòtesi de la preeminència topològica va ser qüestionada amb el treball de Lovell (1959), qui digué: *Es suggereix que es necessita molta més experimentació abans que s'accepti la tesi de Piaget i Inhelder.*

Un gir a les propostes de Piaget i Inhelder el proposa la teoria dels nivells de raonament geomètric dels van Hiele. Com també s'explica a l'**apartat 3.2** d'aquest document, on es discuteix de manera més àmplia el

treball de recerca dels van Hiele, en poques paraules: els cinc estadis de raonament geomètric s'associen amb cinc categories conceptuais. (1) el nivell de visualització amb les formes, (2) el nivell d'anàlisi amb les classes de formes, (3) el nivell de deducció informal amb les propietats de les formes, (4) el nivell de deducció amb el sistema deductiu de propietats i, finalment, (5) el nivell de rigorositat amb l'anàlisi de sistemes deductius (Figura 5.4.1.1.) (Godino i Ruiz, 2002).

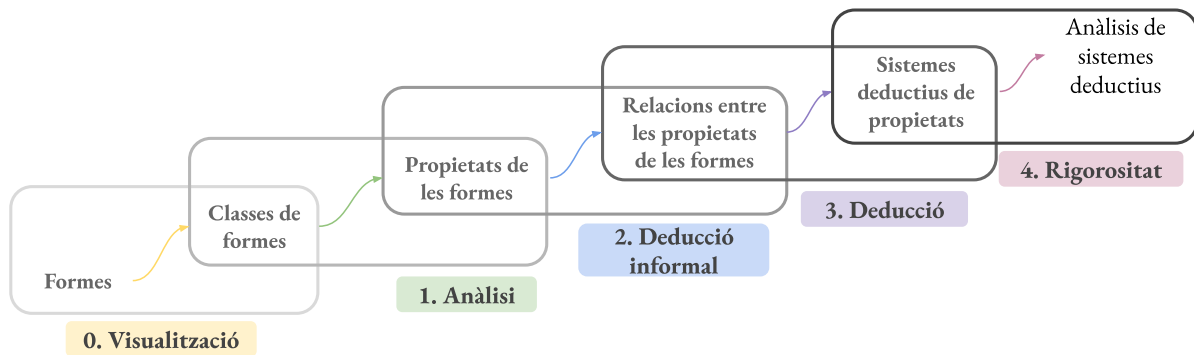


Figura 5.4.1.1. Caracterització dels nivells de raonament geomètric de van Hiele basat en Godino i Ruiz (2002).

Font: Elaboració pròpia.

Una altra orientació didàctica per a l'ensenyament de les figures geomètriques són les situacions i els recursos didàctics amb els quals és possible potenciar l'aprenentatge de les figures geomètriques. Respecte a les situacions didàctiques d'ensenyament de la geometria es troben els jocs de psicomotricitat, com ho són les activitats en les quals es demana seguir trajectòries definides per un tipus concret de línies (Godino i Ruiz, 2002). En relació amb els recursos didàctics, n'és una bona opció l'ús del geoplà, el tangram (Alsina, 2004), els polimins, les tires "mecano", els policubs (Vecino, 2002), la construcció de figures amb eines de dibuix geomètric (Godino i Ruiz, 2002) i eines digitals (Godino i Ruiz, 2002; Clements, 2003; Vecino, 2003).

Per a Godino i Ruiz (2002), les activitats on es demana fer plec amb paper i la realització manual de girs sobre objectes geomètrics són útils en la introducció de les transformacions geomètriques perquè els hi ajuden a descobrir les relacions que hi ha entre la figura inicial i la transformada. Cosa que també permet que els estudiants puguin anticipar quina serà la figura obtinguda en aplicar una transformació determinada, o bé, reconèixer la figura a la qual es va aplicar una transformació en concret.

5.4.2. Construcció de cossos geomètrics

Els continguts adreçats a l'anàlisi i estudi dels moviments rígids, com ho són les translacions i els girs permeten l'exploració de les idees de simetria, congruència i semblança, que s'han d'orientar a partir de les fases del desenvolupament cognitiu dels alumnes i de la seva progressió d'aprenentatge (Godino i Ruiz, 2002). Aquestes transformacions geomètriques estan força relacionades amb els processos de percepció,

representació, construcció i reproducció, que són fonamentals en la geometria mètrica segons ho indica Emma Castelnuovo (Vecino, 2002).

S'ha de tenir en compte que la construcció de figures tridimensionals manté una estreta relació amb el concepte de semblança perquè es tindrà una figura, potser concreta, i la seva reproducció amb dimensions diferents. Segons el nivell de raonament geomètric, de van Hiele, la discussió de la semblança serà en termes diferents. És a dir, si es diu que dues figures geomètriques són semblants a partir de l'observació, es tracta d'un argument del nivell de raonament inicial. En canvi, si per tal d'establir la relació de semblança entre dues figures, l'alumne pren mides de diferents elements dels cossos en estudi, el nivell de raonament és el següent: anàlisi. En cas d'arribar a un raonament geomètric del nivell u, d'anàlisi, l'alumne és capaç de dibuixar una figura. Això passa perquè l'estudiant pren mides a la figura d'interès i les aplica al dibuix que en farà (Godino i Ruiz, 2002).

Per garantir que hi hagi una construcció adequada d'un objecte geomètric s'han de considerar els aspectes que poden generar conflictes en els alumnes. Els problemes es poden agrupar segons les transformacions geomètriques que hi intervenen: simetria i rotació (**Taula 5.4.2.1**). En relació amb la simetria, hi ha dues categories d'errors: els conceptuals i els interpretatius. Es consideren errades de caire conceptual els casos en els quals els alumnes no conserven les mateixes distàncies que hi ha entre la figura original i l'eix de simetria per a la figura simètrica. També és un error conceptual la manca de perpendicularitat entre l'eix de simetria i les línies que indiquen les distàncies. De la mateixa manera, la combinació entre la manca de conservació de distàncies iguals i de perpendicularitat és un indicatiu d'errors sobre el concepte de simetria. Respecte dels errors d'interpretació de la simetria, se'n reporta que en estan relacionats amb la percepció visual: confusió amb el paral·lelisme i el desplaçament en sentit vertical i/o horitzontal respecte l'eix de simetria (Jaime i Gutiérrez, 1996, com es cita en Godino i Ruiz, 2002).

Taula 5.4.2.1.

Errors associats al dibuix de transformacions geomètriques (Godino i Ruiz, 2002).

Transformació	Errors
Simetria	→ conceptuals i interpretatius
Rotació	→ orientació, mètrica, direcció, congruència

Font: Elaboració pròpia.

5.4.3. Mapes (2D) i construcció d'objectes tridimensionals

En comparar els atributs de diferents objectes és possible identificar que existeixen objectes que es poden omplir i que n'hi ha altres que poden posar-se dintre. L'experiència directa deixa oberta l'oportunitat pel

descobrirment de les relacions que hi ha entre diferents objectes i experimentar moviments (GenCat, 2012). La modelització de l'espai per representar situacions des de la perspectiva de la forma i la mesura són útils en l'establiment de relacions espacials. Més enllà dels mapes, les escales i els diferents sistemes de coordenades, l'aprenentatge de la representació de l'espai s'ha de basar en el desenvolupament natural dels sistemes de referència dels infants (Godino i Ruíz, 2002; Camargo, 2011). La direcció i el sentit de la mirada, vertical i horitzontal, són factors que condicionen el desenvolupament de les nocions d'orientació espacial (Godino i Ruíz, 2002). Més encara, quan els alumnes fan representacions de l'espai tenen una predilecció per les direccions vertical i horitzontal (Godino i Ruíz, 2002; Clements i Battista, 1992) i una tendència a col·locar els objectes d'interès al centre (Fischbein, 1987, citat per Clements i Battista, 1992).

El concepte “extensió de l'espai” es pot interpretar com una mostra de l'adquisició de la capacitat de relacionar la mesura amb la ubicació espacial. Un bon exemple de tasques són les activitats on es demana trobar objectes a partir d'una descripció, l'ús de mapes i la creació de rutes són tasques de major nivell de complexitat (Godino i Ruíz, 2002).

L'ús de materials específics constitueix una *cerca inductiva* per construir conceptes geomètrics. Per tant, la construcció de figures planes, ja sigui amb llapis, eines de dibuix geomètric i paper o amb materials com ho són peces de plàstic o tires de paper, son propostes didàctiques fonamentals en l'ensenyament de la geometria mètrica. L'estudi elemental dels cossos geomètrics pot plantejar-se a partir de la identificació del desenvolupament pla amb el qual es poden generar (**Figura 5.4.3.1.**) (Vecino, 2003).

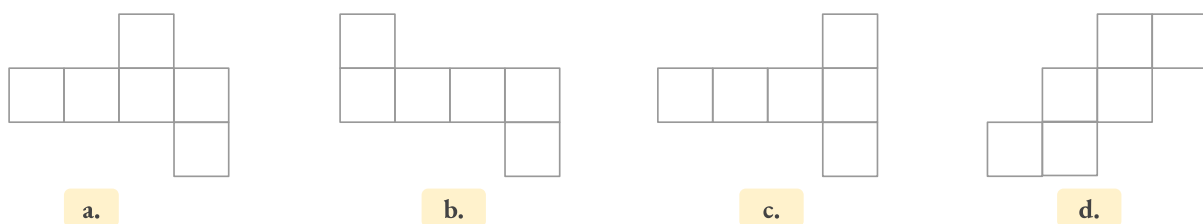


Figura 5.4.3.1. Exemples d'hexòminos que generen el cub, basat en Vecino (2003).

Font: Elaboració pròpia.

5.5. La pràctica docent per a l'ensenyament de la geometria

Partint de la premissa d'Alsina i Nelsen (2006): “és possible crear dibuixos matemàtics que ajudin als alumnes a entendre idees matemàtiques” (p. ix). Però, el nivell d'ensenyament i l'objecte en estudi són factors que ajuden a determinar la representació visual més adient.

A tall de resum, es pot considerar el seguit de criteris metodològics per a l'ensenyament de la geometria que Alsina (2004) proposa. Aquesta seqüència de tasques es pot sintetitzar amb les següents paraules clau:

vivenciació, manipulació, construcció i reconeixement-construcció. A la primera fase s'han d'experimentar dels atributs de l'espai de manera vivencial. La segona fase consisteix en l'exploració de les formes amb materials manipulatius. Dins la tercera de les fases, l'autor recolza la necessitat de treballar algunes nocions geomètriques a partir del dibuix. Finalment, s'aconsella alternar les activitats de construcció amb tasques de reconeixement.

Capítol 6. La pràctica del professorat

La recerca directa amb estudiants de grau d'educació orienta sobre els aspectes que en consideren fonamentals per desenvolupar-se de manera efectiva a l'aula. Aquests aspectes es poden agrupar en quatre categories: (1) el control del grup-classe, (2) l'adequació dels continguts, (3) les situacions amb les quals s'ha de desenvolupar una sessió i (4) l'avaluació. L'ordre d'importància d'aquests quatre conjunt d'aspectes no és fixe. Segons l'etapa a la carrera professional del professor es donarà més rellevància, o menys, a un aspecte en comparació amb un altre. Com ara, pel nou professor la seva major preocupació és la percepció que tenen d'ell els seus superiors, els pares de família i els seus alumnes. Però, pel professor amb experiència és essencial identificar les necessitats dels seus alumnes per tal de donar-los el que calgui per assolir els continguts (Fuller, 1969).

Lambert (1985) contrasta dos dilemes davant els quals es troba el professor a l'aula i que en són produïts per les seves actuacions: els de caire pedagògic i aquells relacionats amb el coneixement. Per a Fennema i Franke (1992), l'aprenentatge dels alumnes depèn, principalment, del coneixement del professor. El coneixement professional del professor li permet, per una banda entendre el principis científics del que vol ensenyar i per l'altre costat, saber com fer arribar els continguts als seus alumnes (Fennema i Franke, 1992; Grimmert i MacKinnon, 1992). Pel que fa a les matemàtiques, sembla que no hi ha cap consens sobre quins són els coneixements bàsics, i de quin tipus, que necessita un professor de matemàtiques (Fennema i Franke, 1992; da Ponte, 1994). En aquest sentit també es qüestiona l'estructura i el desenvolupament del coneixement professional del professor de matemàtiques (da Ponte, 1994). Rauner (2007) ajunta els termes “competència ocupacional” i “identitat ocupacional” per assenyalar dos grups d'aspectes que modelen el camí que segueix un professor novell per esdevenir-se en un professional experimentat a l'àmbit de la docència (**Figura 6.1.**). És a dir, quan un professor en formació comença el seu encàrrec docent identificarà normes senzilles mitjançant l'experiència que l'ajudaran a ser un professor novell avançat. Seguint la seva trajectòria professional, quan el professor novell avançat aconsegueix aprendre un cop analitza i avalua les situacions dutes a terme dins l'aula i el centre educatiu tenint en compte la situació socioeconòmica i cultural de l'entorn, se'n converteix en un professor competent. A la següent fase del desenvolupament de la competència vocacional, les experiències obtingudes de la resolució de problemes complexos i especialitzats fan que un professor competent sigui ara un professor avançat. Finalment, es pot dir que un professor es troba a la fase d'expert quan posseeix experiència professional àmplia i coneixements teòrics especialitzats (Rauner, 2007).

Tot i que s'ha identificat que el professor en formació és conscient de la contribució de la pràctica docent al seu desenvolupament professional (Poulou, 2007), el professor ha d'incrementar els seus coneixements

perquè sigui més efectiu (Rhine, 1998). Anant més enllà, la millora de l'educació depèn de la formació del professorat (Gairín i Rodríguez-Gómez, 2012).

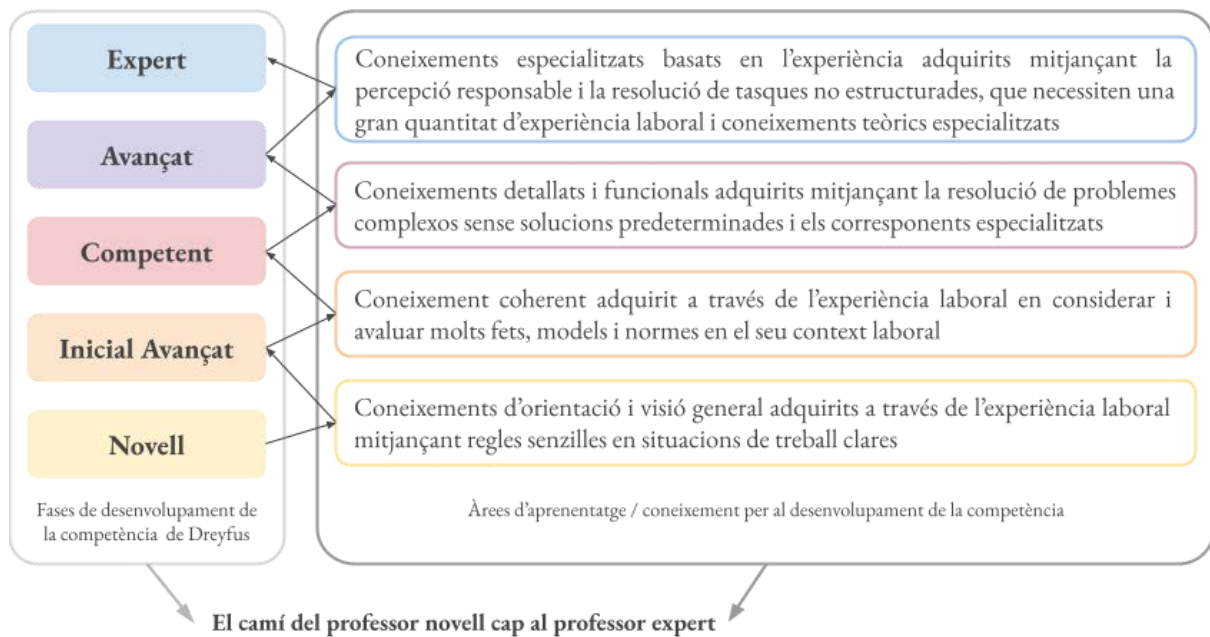


Figura 6.1. Desenvolupament de la competència vocacional segons Rauner (2007).

Font: Elaboració pròpia.

6.1 Enfocaments en l'estudi de la pràctica del professorat

La tasca docent és difícil (Veenman, 1984; Godino, 1993; Grossman, Hammerness y McDonald, 2009). Veient amb detall la història particular del professor ens adonem dels trets que van forjar-lo (Tripp, 1994). Per a Veenman (1984), Sykes, Bird i Kennedy (2010), els primers anys de docència són fonamentals en la modelització del que Rauner (2007) caracteritza com a "professor expert". Però a més de l'experiència, el professor requereix una formació professional per construir rutines d'ensenyament (Grossman, Hammerness i McDonald, 2009). Godino (1993) planteja l'existència del "dilema teoria-aplicació en les concepcions de la didàctica" per fer esmentar la discussió que hi ha entre dues tendències: la producció de coneixements teòrics i pràctics. En aquest sentit, Rauner (2007) diferencia el coneixement pràctic de la competència ocupacional, però reconeix que un professor pot desenvolupar la seva tasca docent amb efectivitat quan aconsegueix combinar el coneixement teòric amb el coneixement pràctic per assolir un coneixement contextualitzat que orienta les seves actuacions, és a dir: "el coneixement del procés de treball". Camargo (2019) situa com a punt de partida de l'estudi del coneixement professional del professorat a la relació que hi ha entre ells i els nivells d'assoliment dels alumnes. Segons indica l'autora, quan els resultats dels alumnes a les seves avaluacions són precaris es genera una "crisi de confiança" al voltant el coneixement del professor i fa que la recerca sobre la pràctica del professorat sigui un camp "vigent i dinàmic". Amb l'estudi d'aquest àmbit d'investigació és

possible: (1) contextualitzar les circumstàncies amb les quals el professor construeix i interpreta els seus coneixements matemàtics, (2) identificar el coneixement pràctic que empra a la seva tasca docent de les matemàtiques i (3) “caracteritzar el paper del professor en la constitució de pràctiques matemàtiques a l’aula” (Camargo, 2019).

A continuació es descriuen els principals enfocaments referents a la formació del professorat, fent èmfasi especial en els casos dels referits al professorat de matemàtiques. El treball desenvolupat en aquesta tesi doctoral s'emmarca en el model onto-semiòtic.

6.1.1. Taxonomia de l'estructura d'aprenentatges assolits observats (SOLO)

La taxonomia de l'estructura d'aprenentatges assolits observats, anomenada SOLO per les seves sigles en anglès (Structure of Observed Learning Outcomes) es un esforç per donar orientació als professor sobre els patrons de raonament i enteniment dels seus alumnes. Aquesta proposta és el resultat del treball de recerca desenvolupat per fer un enllaç entre els processos d'estudi i la qualitat d'allò que s'ha après (Biggs, 1979).

La premissa del model SOLO és que la qualitat de l'aprenentatge depèn de factors que pertanyen a l'alumne (intrínsecs) i d'altres que li són aliens (externs). Per explicar-ho, la qualitat d'allò que és objecte d'instrucció és un factor extern. Mentre que, els coneixements previs, el nivell de desenvolupament cognitiu i la motivació, són exemples de factors intrínsecs. Tal i com ho feia Piaget (1973), el model SOLO fa una caracterització cronològica del desenvolupament cognitiu dels alumnes tot tenint en compte cinc nivells explicats en termes de: (1) la capacitat, (2) les relacions entre operadors, (3) la consistència i la conclusió i (4) l'estructura (**Taula 6.1.1.1.**) (Biggs i Collis, 1982).

En primer lloc, la **capacitat** es refereix a la quantitat de treball mental que s'ha de fer per tal d'arribar a una conclusió. El segon aspecte és la **relació entre operadors**, que es refereix a la interrelació que hi ha entre les pistes i la resposta. Dins aquest aspecte es consideren tres tipus d'errors preestructurals: la incorrecció, la tautologia i la transducció. Per una altra banda, els fenòmens relacionats amb l'obtenció de conclusió adequades són: la inducció i la deducció (Biggs i Collis, 1982).

En tercera posició hi ha la **consistència** i la **conclusió**, que es defineixen com a dues percepcions necessàries per a l'alumne. És a dir, l'alumne necessita trobar certa lògica i a la vegada adonar-se de que ha arribat a un argument amb el qual tancar un qüestionament (Biggs i Collis, 1982).

Tot i que a la **Taula 6.1.1.1.** no s'ha registrat el quart aspecte considerat per Biggs i Collis (1982): l'**estructura**, en té àmplia influència en la resta d'ells però de manera principal amb el primer: la **capacitat**

(**Taula 6.1.1.2.**) Com es pot veure, es tracta d'una representació esquemàtica de les dades (irrellevants, rellevants donades i rellevants implícites) utilitzades per arribar a la resposta.

Taula 6.1.1.1.

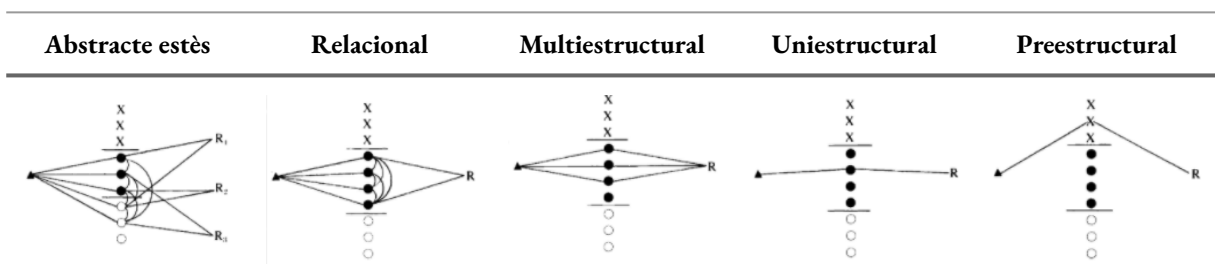
Etapas del desenvolupament cognitiu del model SOLO (Biggs i Collis, 1982).

Descripció de l'etapa de desenvolupament	1 Capacitat	2 Operació	3 Consistència o conclusió
Abstracte estès (Operacions formals, 16+ anys)	Màxima (identifica i relaciona dades, formula hipòtesis)	Deducció i inducció (generalitza a situacions no viscudes)	Inconsistències resoltes (oberta a alternatives lògiques)
Relacional (Generalització concreta, 13-15 anys)	Alta (identifica dades i les relaciona)	Inducció (generalitza situacions viscudes)	Sense cap inconsistència entre sistemes donats (tancada a una solució)
Multiestructural (Semiconcreta, 10-12 anys)	Mitjana (identifica algunes dades)	Generalització (limitada a alguns aspectes independents)	Inconsistent (diferents conclusions per a unes mateixes dades)
Uniestructural (Concreta prompte, 7-9 anys)	Baixa (identifica només una de les dades rellevants)	Generalització limitada (només en termes d'un sol aspecte)	Molt inconsistent (estableix conclusions a partir d'una sola dada)
Preestructural (preoperacional, 4-6 anys)	Mínima (dades inapropiades i/o irrellevants)	Incorrecció, tautologia, transducció	Absolutament inconsistent (estableix conclusions sense mirar el problema)

Font: Elaboració pròpia.

Taula 6.1.1.2.

Relacions dades - resposta (estructura de la resposta) per a les fases del model SOLO (Biggs i Collis, 1982).



X = dades irrellevants o incorrectes, ● = dades rellevants explícites, ○ = dades rellevants implícites.

Font: Elaboració pròpia.

Clements i Battista (1992) van presentar evidències de diferents grups d'investigació que qüestionen la relació entre l'edat i els estadis de desenvolupament del raonament tipus Piaget, semblants a la informació a la Taula 6.1.1.1. Per aquesta raó s'ha exposat en una taula la descripció cronològiques dels estadis (**Taula**

6.1.1.1.) i en una altra la representació esquematitzada de les relacions dades-respostes (5.1.1.2.) considerats a la taxonomia SOLO.

Per a Jones (1995), la unió entre les idees de van Hiele i la taxonomia SOLO podria aportar més llum sobre l'estructura del raonament geomètric. Per aquest motiu incloem en aquest treball aquest model, i la seva descripció, tot i que el discutirem des del punt de vista del nostre enfocament teòric, que es el model onto-semiòtic.

6.1.2. El model PCK

Els estudis sobre la pràctica docent de Veenman van documentar les dificultats dels professors en actiu mentre exerceixen la seva tasca dins l'aula (1984) i les alternatives per donar-los suport en la pràctica docent mitjançant la capacitat i formació (1998). Un dels primers models per descriure la funció del professor va ser proposat per Shulman (1987): el PCK (*Pedagogical Content Knowledge*, és a dir: “coneixement pedagògic del contingut”). Aquest model fa referència a la relació que existeix entre el domini dels continguts de l'assignatura i els coneixements sobre pedagogia (Grimmett i MacKinnon, 1992) (**Figura 6.1.2.1.**). El “coneixement pedagògic del contingut” s'assoleix quan el professor pot combinar, a la seva pràctica, tots dos coneixements: pedagògic (PK, per *Pedagogical Knowledge*) i de contingut (CK, per *Content Knowledge*). Per a Cochran (1997), el PCK també és el tret distintiu entre els professors i els professionals de la matèria (Cochran, 1997).

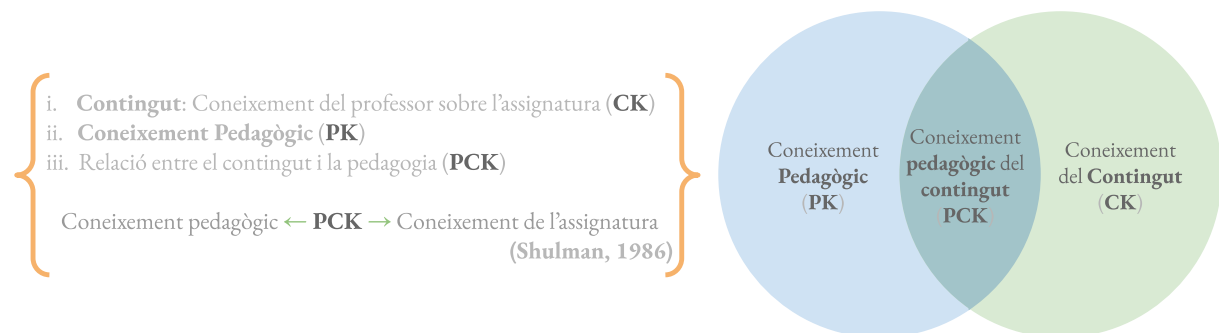


Figura 6.1.2.1. Característiques del model PCK de Shulman.

Font: Elaboració pròpia.

En paraules de Rauner (2007), un terme semblant al PCK és el “coneixement del procés de treball” (**Figura 6.1.2.2.**). La recerca sobre aquest concepte indica que es tracta d'un coneixement necessari per desenvolupar el procés de treball, que se'n adquireix dins la pràctica del mateix procés de treball i que ajuda al disseny, planificació, implementació i assoliment de la pràctica del professor dins el seu context de treball.

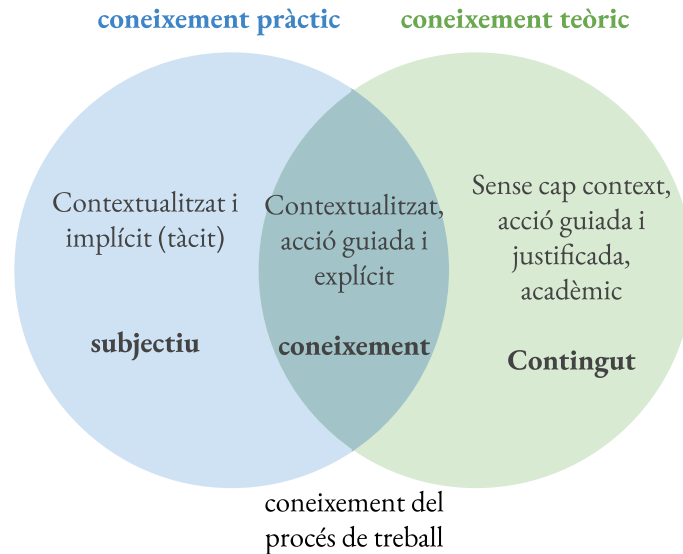


Figura 6.1.2.2. Àrees del “coneixement del procés de treball” segons Rauner (2007).

Font: Elaboració pròpia.

Més endavant, el model PCK va guanyar més detall a la descripció dels tipus de coneixements que corresponen als aspectes del coneixement pedagògic (PK) i coneixement del contingut (CK) (Ball, Lubienski, i Mewborn, 2001; Ball, Thames i Phelps, 2008): els coneixements del contingut i els coneixements pedagògics del contingut que a la vegada engloben el coneixement d’altres aspectes (**Figura 6.1.2.3.**). Segons aquesta nova descripció, el coneixement del contingut (CK) es divideix en tres àmbits: el coneixement comú del contingut (CCC), el coneixement en el horitzó de les matemàtiques (CH) i el coneixement especialitzat del contingut (CEC). Pel que fa al coneixement pedagògic del contingut, també es reconeixen tres àmbits. el coneixement del contingut i dels estudiants (CCEs), el coneixement del contingut i de l’ensenyament (CCEn) i el coneixement del currículum (CC).

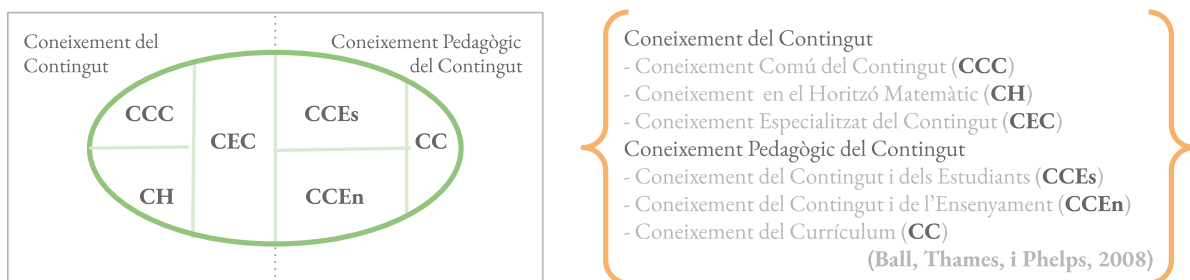


Figura 6.1.2.3. Característiques del model de Ball, Thames i Phelps (2008).

Font: Elaboració pròpia.

Mishra i Koehler (2006) van estendre el treball de Shulman tot incorporant el tret tecnològic per formar el model TPACK (*Technological Pedagogical And Content Knowledge*, és a dir: “coneixement tecnològic, pedagògic i del contingut”) (**Figura 6.1.2.4.**).

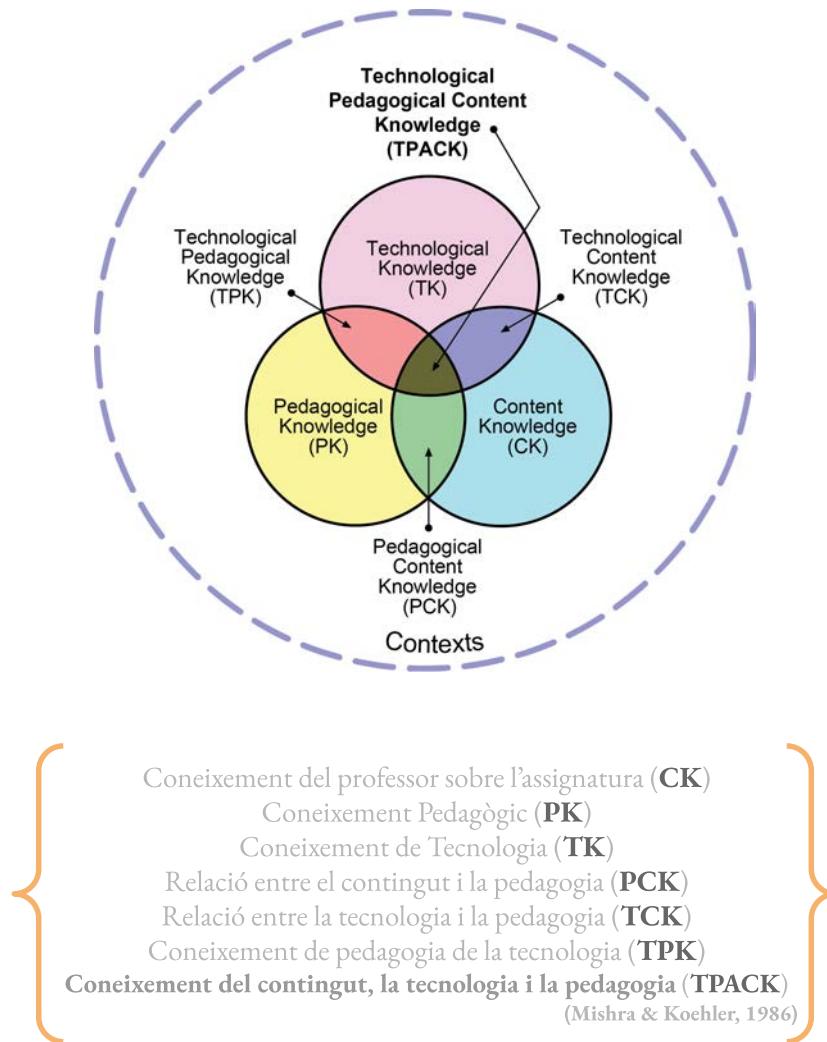


Figura 6.1.2.4. Característiques del model TPACK de Mishra i Koehler (Koehler, 2012).

Font: Elaboració pròpia amb imatge reproduïda amb permís de l'autor, © 2012 tpack.org

Amb aquesta versió ampliada del model PCK, el TPACK, es consideren set aspectes: (1) el coneixement del contingut (CK), (2) el coneixement pedagògic (PK), (3) el coneixement de la tecnologia o tecnològic (TK), (4) el coneixement pedagògic del contingut (PCK), (5) el coneixement tecnològic del contingut (TCK), (6) el coneixement tecnològic-pedagògic (TPK) i (7) el coneixement tecnològic i pedagògic del contingut. Cadascun dels esmentats components del model TPACK descriuen de manera específiques diferents tipus de coneixements que ha tenir el professor i no només són de tret acadèmic o matemàtic (**Taula 6.1.2.1.**) (Koehler, 2012).

Taula 6.1.2.1.

Elements del TPACK (Koebler, 2012).

Element	Descripció
CK	Coneixement del contingut: conceptes, teories, procediments, etc. que el professor sap del contingut que porta a l'aula.
PK	Coneixement pedagògic: procediments, pràctiques i/o mètodes d'ensenyament i aprenentatge.
TK	Coneixement tecnològic: metodologies i estratègies de raonament relacionades amb l'ús de la tecnologia a l'aula.
PCK	Coneixement pedagògic del contingut: estratègies i recursos pedagògics aplicables a l'ensenyament d'un contingut específic.
TCK	Coneixement tecnològic del contingut: identificació de la relació entre l'ús de la tecnologia per l'ensenyament i l'aprenentatge d'un contingut específic.
TPK	Coneixement tecnològic-pedagògic: reconeixement de la influència de l'ús d'eines tecnològiques específiques per a l'ensenyament i aprenentatge de continguts específics.
TPACK	Coneixement tecnològic-pedagògic i del contingut: Aplicació conscient i intencionada de la tecnologia amb propòsits pedagògics enfocada a un contingut específic.

Font: Elaboració pròpia.

6.1.3. L'estudi de lliçons (*lesson study*)

Al Japó, una reconeguda eina de desenvolupament professional del professorat és la proposada per Yoshida i Fernández (2004): el *lesson study* o *estudi de lliçons*. Els autors defineixen aquesta pràctica docent com a una activitat per millorar la qualitat d'allò que s'ensenyava mitjançant el disseny i la implementació d'experiències enriquidores pels alumnes. El model de l'estudi de lliçons consisteix en un seguit de lineaments que li permeten al professor dissenyar la seva classe, observar-la i analitzar-la.

El procés establert per desenrotllar l'estudi de lliçons consisteix de tres fases bàsiques inicials seguides de dues fases opcionals i una darrera fase de tancament. En concret, en són: (1) planificació col·laborativa de la lliçó, (2) observació de la implementació de la lliçó a l'aula, (3) discussió de la lliçó, (4) revisió de la lliçó -opcional-, (5) (**Figura 6.1.3.1.**)

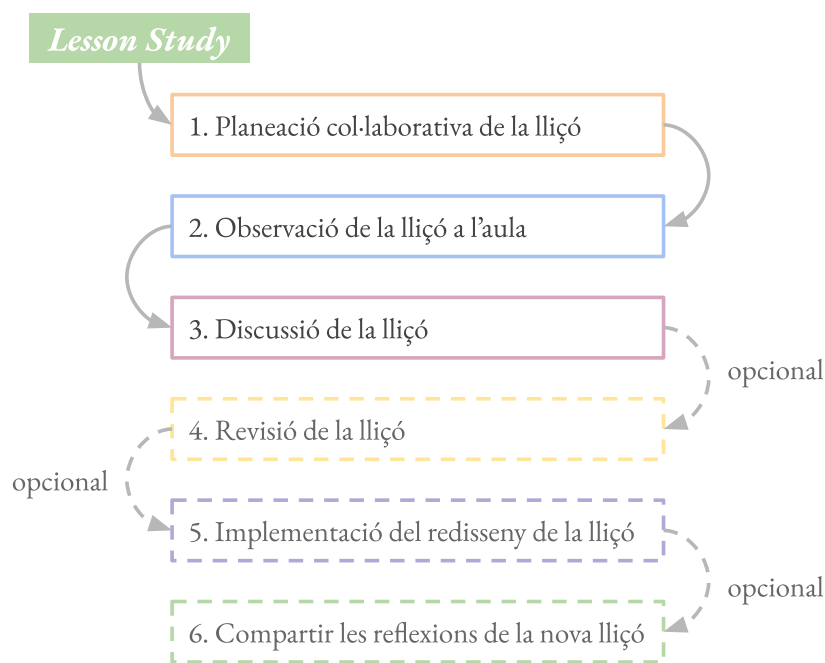


Figura 6.1.3.1. Diagrama simplificat de la metodologia de l'estudi de lliçons basat en Fernández i Yoshida (2004).

Font: Elaboració pròpia.

Seguint les descripcions dels autors, les fases de l'estudi de lliçons s'expliquen de la següent forma (Fernández i Yoshida, 2004):

A la fase inicial, de planificació col·laborativa de la lliçó, un grup de professors es reuneixen per compartir experiències i fer propostes amb les quals tots plegats arribin al disseny detallat d'una lliçó. La lliçó obtinguda a la primera fase s'estableix com a la "lliçó comú" que tots els professors implementaran a les seves aules.

La segona fase, d'observació de la implementació de la lliçó a l'aula, un dels professors porta la lliçó comú als seus alumnes mitjançant una sessió oberta a la resta dels professors que van col·laborar en el seu disseny. El grup de docents fa la tasca d'observació passiva.

Un cop observada la lliçó, es desenvolupa la tercera fase de l'estudi de classes: la discussió. El grup de professors es torna a reunir per compartir les seves observacions i, tots plegats, arribar a un nou disseny de lliçó on es tinguin en compte els aspectes amb els quals se'n pot millorar.

De manera addicional es pot donar peu a la implementació de la cinquena fase: l'ensenyament de la nova versió de la lliçó. Aquesta etapa inclou, una altra vegada, la intervenció passiva de la resta del grup de professors en observar com es du a terme aquest disseny millorat a l'aula. S'ha d'aclarir que, quan el grup de professors trien afegir aquesta fase addicional és freqüent que també es faci una selecció de la sessió que serà

objecte d'observació i que molt sovint els professors es decanten per ser a l'aula en aquesta segona implementació.

La darrera fase de l'estudi de classes consisteix en compartir les reflexions derivades d'aquesta experiència. Aleshores, requereix d'una nova cita per discutir i arribar a noves propostes.

Fernández i Yoshida (2004) especifiquen les dues situacions més habituals en les quals s'utilitza l'*estudi de lliçons*: (1) com a eina de formació de professorat i (2) com a eina de desenvolupament professional docent. En el primer cas, el alumnes de magisteri i els seus tutors treballen de manera col·laborativa per dissenyar una lliçó. La segona circumstància es du a terme per diferents raons que demanen la recerca de la pràctica del professorat, per exemple: quan un centre educatiu presenta noves línies pedagògiques per a l'escola i n'estudia les seves estratègies d'implementació. Però, els autors reconeixen que és més freqüent, i efectiu, l'ús d'aquest model per a la formació del professorat, és a dir, amb grups d'alumnes de magisteri i professors en actiu.

6.1.4. L'enfocament onto-semiòtic

L'Enfocament Onto-Semiòtic (EOS) és un model basat en la Teoria de les Funcions Semiòtiques que es descriu com a un sistema teòric inclusiu que tracta d'articular diverses aproximacions i teories aplicables a la recerca de l'Educació Matemàtica a partir de premisses antropològiques i semiòtiques sobre les matemàtiques i el seu ensenyament (Godino, 2006). Es pot aplicar l'anàlisi proposat pel EOS en la verificació de les trajectòries d'aprenentatge idònies per orientar en el disseny instruccional dels processos d'ensenyament i aprenentatge. Dins aquest marc teòric, l'EOS, hi ha cabuda a totes les àrees curriculars perquè es consideren totes les dimensions implicades en el procés d'ensenyament-aprenentatge i les interaccions que hi intervenen. És així que es pot entendre la *idoneïtat didàctica* com a l'articulació coherent i sistematitzada de sis components: (i) epistèmica, (ii) cognitiva, (iii) interaccional, (iv) mediacional, (v) afectiva i (vi) ecològica (Godino, 2013) (**Figura 6.1.4.1.**). Els sis criteris ara esmentats es poden descriure en paraules de Godino, Bencomo, Font i Wilhelmi (2006) com a:

1. La idoneïtat epistèmica indica, a partir d'un significat de referència, quin ha sigut el nivell de representativitat del significats que es volen ensenyar.
2. La idoneïtat cognitiva permet identificar en nivell en el qual els significats que es pretenen implantar poden ser assolits pels alumnes i què tan propers són els significats assolits per cada alumne respecte els significats que es pretén implementar.
3. La idoneïtat interaccional fa referència al nivell en que les configuracions i trajectòries didàctiques permeten la identificació i resolució de possibles conflictes semiòtics mitjançant la negociació de significats.
4. La idoneïtat mediacional valora el nivell de disponibilitat i adequació de recursos materials i de temps per tal de desenvolupar el procés d'ensenyament-aprenentatge.

5. La idoneïtat emocional, o afectiva en versions posteriors de discussió del constructe (Godino, 2013), indica el nivell d'implicació en el procés d'estudi per part dels alumnes.
6. La idoneïtat ecològica mostra el nivell d'adaptació del procés d'estudi als lineaments del centre educatiu, el currículum i el context de l'entorn.

El constructe *idoneïtat didàctica* orienta la reflexió del professorat per identificar els elements que intervenen en un procés d'estudi i un cop ho ha fet, valorar-ne els nivells d'assoliment de cada tipus d'idoneïtat per tal justificar que l'episodi analitzat ha sigut "idoni". Com es veu a la **Figura 5.1.4.1.**, el desenvolupament de totes les idoneïtats requereix d'un esforç important per equilibrar-les i tenir-les presents a un mateix procés d'ensenyament-aprenentatge (Font, Planas i Godino, 2010).

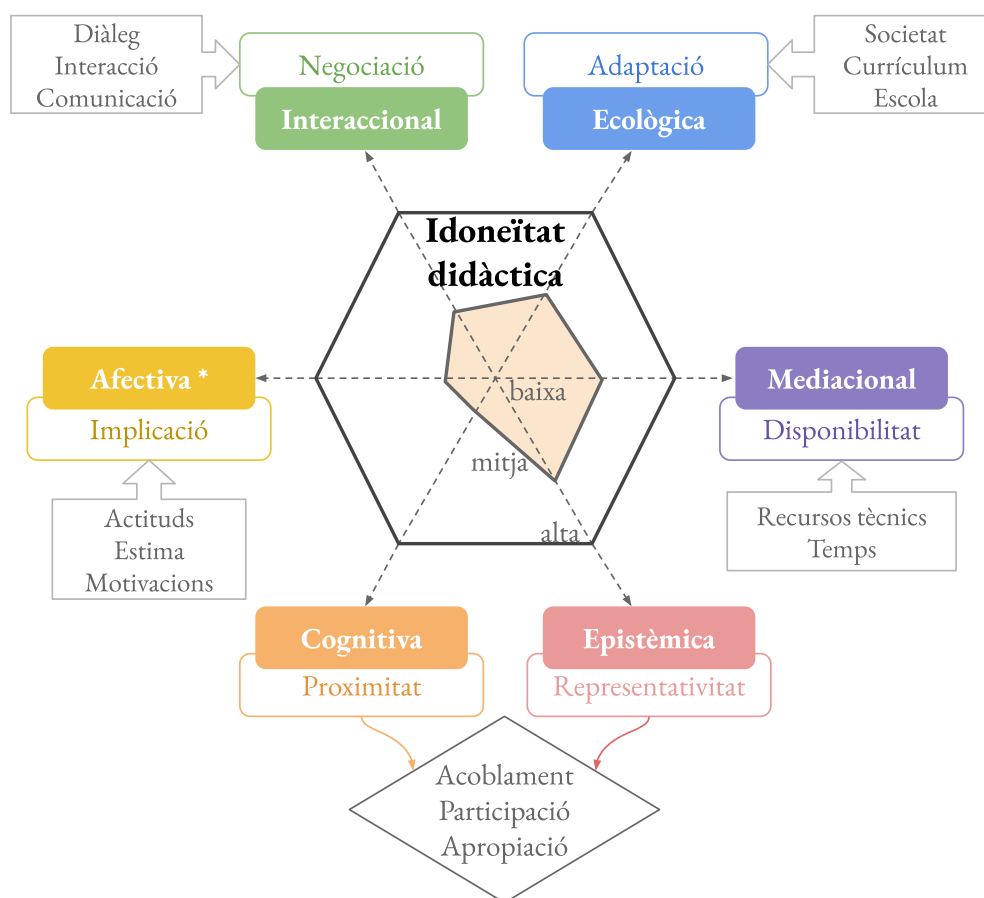


Figura 6.1.4.1. Components del constructe de la *idoneïtat didàctica* (Godino, Bencomo, Font i Wilhelmi, 2006; Godino, 2013).

Font: Elaboració pròpia.

Seguint la línia del treball de recerca doctoral s'ha de donar protagonisme a l'**enfocament ontosemiòtic**. Més endavant es dedica tot un capítol per explicar-lo amb profunditat.

6.1.5. El *teacher noticing*

El constructe teòric *teachers' noticing* pot explicar-se com a un instrument amb el qual es pretén entendre el procés d'ensenyament (Sherin, Jacobs i Philipp, 2011). En primer lloc, aquest model caracteritza l'aula de matemàtiques com a un espai complex on hi ha diversitat de fenòmens que succeeixen de manera simultània. Aquesta visió de la classe de matemàtiques posa de manifest la necessitat de prioritzar fenòmens per donar una atenció proporcionada a una situació (Sherin, Russ, i Colestock, 2011). Es tracta d'un procés actiu on el professor identifica les dades sensorials que ocorren a un episodi d'instrucció. L'ús de l'observació per part del professor també és de caire retroactiva, és a dir, a més de “mirar” a l'alumne, es mira a sí mateix. Un cop triat un episodi o procés d'instrucció, es reconeixen dos processos interrelacionats i cíclics com a part del *teacher noticing*: (1) l'atenció dels esdeveniments particulars del procés d'instrucció triat i (2) donar sentit als esdeveniments identificats (**Taula 6.1.5.1.**) (Sherin, Jacobs i Philipp, 2011).

Taula 6.1.5.1.

Processos principals del “teacher noticing” segons Sherin, Jacobs i Philipps (2011).

Procés	Descripció
Atenció dels esdeveniments particulars d'un procés d'instrucció	Identificació dels trets rellevants d'un procés d'instrucció per tal d'observar-los amb detall i durant el temps suficient.
Donar sentit als esdeveniments d'un procés d'instrucció	Interpretació de les observacions fetes mitjançant la seva relació amb “categories abstractes”.

Font: Elaboració pròpia.

Per ampliar la discussió sobre els dos processos del *teacher noticing* tenim les següents precisions. En un inici, el professor reconeix i pren consciència de tots els aspectes “pedagògicament rellevants” (Sherin, Russ i Colestock, 2011) que ha de tenir en compte al moment de la sessió o del procés d'instrucció. Per tant, fa una mena de prediccions sobre el que es trobarà a l'aula i el nivell o temps d'atenció que li demana cada situació. Un cop feta aquesta fase inicial, es dona peu al següent procés que consisteix en la justificació o caracterització dels esdeveniments que s'hagin presentat. De manera addicional, aquest procés també pot incloure propostes de resposta del professor (Sherin, Jacobs i Philipp, 2011).

6.1.6. L'enfocament constructivista i les trajectòries d'aprenentatge

Les investigacions de Vygotsky, Piaget, Bruner i altres autors sostingueren que mitjançant l'ús de construccions humanes s'assoleix el coneixement de l'entorn (Berrocal, 2013). Aquesta interpretació de l'aprenentatge que abans fou caracteritzada com subjectiva i realista (Bueno, 2007) també va ser qüestionada per considerar innecessària la intervenció del professor i substituir-la per experiències sensorials (Berrocal,

2013). D'altra banda, la OCDE (Organització per la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic) ha reportat dades del seguiment del constructivisme en la pràctica docent en un ampli número de països llatinoamericans on aquesta línia ha permès una millor adaptació per la construcció de les competències clau que es requereixen aleshores en aquelles societats (Flotts, 2016). Aquest enfocament, és la base de les propostes d'organització tant curricular com de seqüències didàctiques que indiquen progressions de raonament per les quals transiten els alumnes per desenvolupar un aprenentatge de tret matemàtic, és a dir, la seva trajectòria d'aprenentatge (Simon, 1995; Clements, 1990, 2004).

El constructivisme ha estat un enfocament que ha rebut diferents crítiques durant els últims anys. Alguns dels seus principals referents d'idees constructivistes, com Ausubel, van destacar pels seus comentaris racistes i excloents respecte determinats grups de la població. El constructivisme s'arrela en idees sobre l'assoliment de l'aprenentatge per part dels estudiants mitjançant un procés de descobriment personal amb el qual es van connectant els nous coneixements amb el propi bagatge d'aprenentatges (coneixements previs), que se'n consolida de manera significativa. Piaget, per exemple, parla d'estructures cognitives d'aprenentatge i fa servir la seva teoria de l'acomodació per explicar com funciona aquest procés de construcció de l'aprenentatge. Per la seva banda, Vygotsky, va situar el focus de l'aprenentatge en les relacions socials entre els subjectes que es recolzen els uns als altres pel seu aprenentatge. Moltes d'aquestes idees han estat confirmades per recerques posteriors, que ara formen part del coneixement científic de que disposem sobre l'aprenentatge (Bueno, 2007; Díez-Palomar, 2017) (**Figura 6.1.6.1.**).

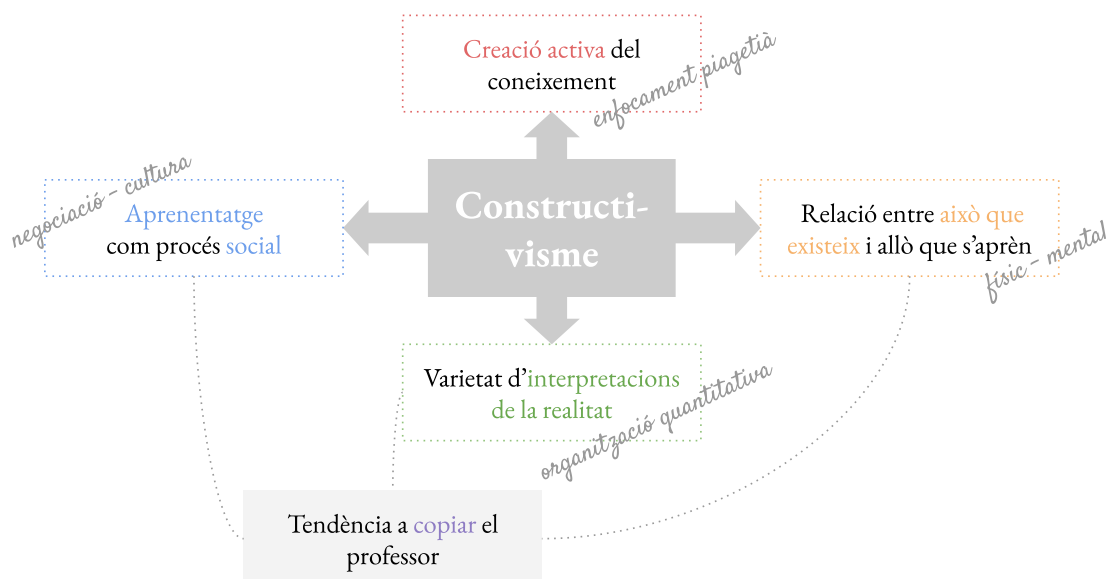


Figura 6.1.6.1. Característiques del constructivisme (Bueno, 2007; Díez-Palomar, 2017).

Font: Elaboració pròpia.

El concepte *trajectòria didàctica* (**Figura 6.1.6.2.**) prové d'una mirada constructivista cap l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques. Simon (1995) estableix tres aspectes clau que qualsevol trajectòria d'aprenentatge ha de contemplar: (i) un objectiu d'aprenentatge, (ii) la progressió de desenvolupament de l'aprenentatge i de l'ensenyament, i (iii) la seqüència didàctica (Clements, 2004). Altres autors, com Hershkowitz i Dreyfus, van partir de les idees de Piaget, per parlar de *trajectòria d'aprenentatge* en el sentit cognitiu, com el “camí” o la “progressió” que segueix la persona cap al desenvolupament mental de les seves idees o dels conceptes matemàtics estudiats (Díez-Palomar, 2004). Aquestes *trajectòries d'aprenentatge* s'estableixen de manera hipotètica i es modifiquen de manera constant fins que se'n trobi aquella que sigui la més apropiada (Simon, 1995; Clements, 2004).

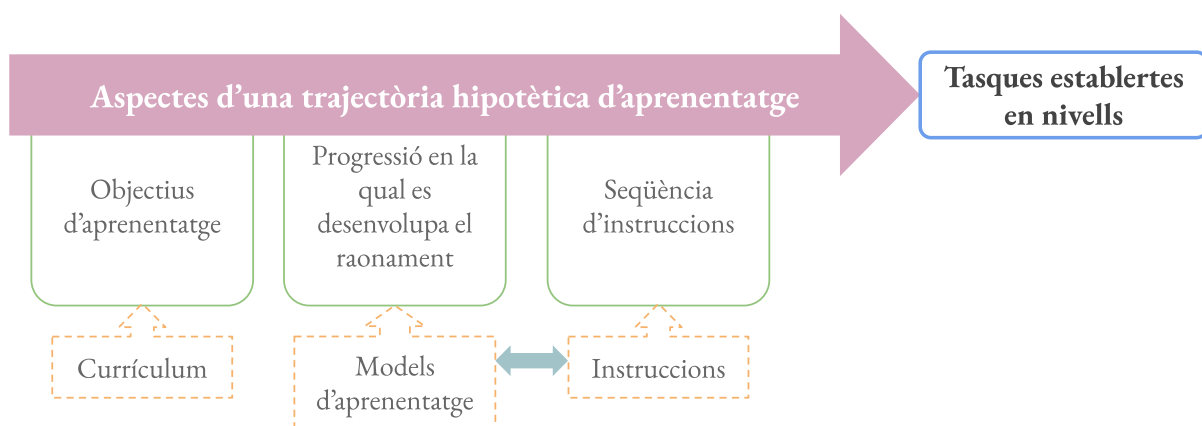


Figura 6.1.6.2. Aspectes d'una trajectòria hipotètica d'aprenentatge basat en Simon (1995) i Clements (2004).

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 7. Enfocament Ontosemiòtic

L'Enfocament Ontosemiòtic (EOS), desenvolupat per Godino, Batanero i Font (2007), és un “sistema teòric modular e inclusiu per a l'educació matemàtica” (Godino, 2018) conformat d'un conjunt de constructes amb els quals és possible “analitzar conjuntament el pensament matemàtic, els ostensius que li acompanyen, les situacions i els factors que condicionen el seu desenvolupament” (Godino, Batanero i Font, 2008).

Aquest marc teòric de principis i eines del coneixement i la instrucció matemàtiques, l'EOS, és el producte d'una successió de treballs de recerca que van començar al 1993 (**Taula 7.1.**). Les aportacions científiques d'aquest grup d'investigadors es divideix en tres períodes, definits pels productes de recerca: (1) dimensió institucional i personal del coneixement matemàtic, (2) models ontològics i semiòtics per descriure l'activitat matemàtica i la comunicació de les produccions matemàtiques i (3) la instrucció matemàtica com un procés amb sis dimensions (Godino, Batanero i Font, 2008).

Taula 7.1.

Etales de recerca pel desenvolupament de l'EOS (Godino, Batanero i Font, 2008).

Etales	Producte de la recerca
Primera (1993 - 1998)	→ Nocions: <i>significat institucional</i> i <i>significat personal</i> d'un objecte matemàtic
Segona (1998 - 2005)	→ Models ontològics i semiòtics de l'activitat i comunicació matemàtiques
Tercera (2005 - actualitat)	→ Distinció de sis dimensions del procés d'instrucció matemàtica

Font: Elaboració pròpia.

Per sintetitzar les idees de l'EOS, les paraules de Godino, Batanero i Font són les més adequades (2020; p. 5):

En el marc de l'EOS, es considera el coneixement que es pretén construir té un tret científic i, a més, tecnològic. Això vol dir que, per una banda, s'aborden problemes teòrics de clarificació ontològica, epistemològica i semiòtica al voltant del coneixement matemàtic, pel que fa als esmentats problemes tenen relació amb els processos d'ensenyament i aprenentatge (component científic, descriptiu, explicatiu, predictiu). Per una altra banda, es tracta d'intervenir en aquests processos per fer-los el més idoni possible (component tecnològic-prescriptiu).

Per donar seguiment a l'evolució cronològica de l'EOS (**Taula 7.1.**), aquest capítol segueix la línia del temps dels estudis del grup de recerca: (1) nocions de significat dels objectes matemàtics, (2) fonaments ontològics i semiòtics i (3) idoneïtat didàctica, com constructe per a la distinció de les sis dimensions del procés d'instrucció matemàtica.

7.1. Els objectes matemàtics i la noció del seu significat

Els orígens de la creació de l'EOS són els estudis relacionats amb els significats dels objectes matemàtics (Godino, Batanero i Font, 2008). El conglomerat d'investigacions que van motivar el treball de recerca que va esdevenir en l'EOS es mostra de manera resumida a la **Taula 7.1.1.**, on les idees i els qüestionaments proposats per sis autors són presentats breument segons ho sintetitza Godino (2018).

Taula 7.1.1.

Idees fonamentals sobre la noció de significat dels objectes matemàtics de l'EOS (Godino, 2018).

Autor(a)	Idees o qüestions
Balacheff (1990)	→ “La idea de significat” com clau de la recerca en Didàctica de la Matemàtica
Brousseau (1980) (1986)	→ Components del significat deduïbles d'una conducta matemàtica? → Com es pot reproduir una conducta matemàtica per tal de sostenir un significat? → “Varietat didàctica” del concepte de sentit
Sierpinska (1990)	→ Comprendre un significat com un acte de captació i construcció
Dummett (1991)	→ Teoria del significat
Bruner (1990)	→ Regles de creació de significats en contextos culturals
Pimm (1995)	→ Difusivitat dels termes “comprensió” i “significat”

Font: Elaboració pròpia.

Seguint la seqüència d'idees i qüestionaments presentats per Godino (2018) (**Taula 7.1.1.**), es pot considerar com punt de partida: el reconeixement de la importància de la “idea de significat” en la recerca a l'àmbit de la Didàctica de la Matemàtica. D'acord a Balacheff (citada per Godino, 2018) el que és un problema d'investigació en l'ensenyament de les matemàtiques: tot allò que tingui relació amb “el significat matemàtic de les conductes dels alumnes”. En aquest sentit, és pertinent qüestionar: (1) el significat matemàtic de les concepcions dels alumnes que es poden inferir a partir de les seves conductes, (2) la classe de significats susceptibles de construcció per part dels alumnes dins una sessió de matemàtiques, (3) la relació entre el

significat del contingut que es pretén ensenyar i el contingut matemàtic de referència i (4) la forma de caracteritzar el significat d'un concepte matemàtic. Són complementaris als qüestionaments ara esmentats les interrogants de Brousseau (citats per Godino, 2018): (1) les components del significat que es poden deduir a partir de l'observació del comportament matemàtic d'un alumne, i (2) la possibilitat de l'existència de varietats didàctiques del concepte de sentit que siguin encara desconegudes per les disciplines de la llengua, la psicologia i les matemàtiques (Godino, 2018).

L'estudi s'amplia amb les contribucions de Sierpiska (citada per Godino, 2018), qui estableix la relació entre significat i comprensió en definir el terme "comprendre un concepte" com l'acció de captació del significat que li pertoca a aquell concepte. Per tant, el procés de construcció de significats és part de "la metodologia dels actes de comprensió". Així mateix, Godino (2018) cita a Dummett per afegir-ne una concepció més generalitzada: la interpretació de la teoria del significat com a una teoria de la comprensió. Dummett suggereix que la teoria del significat tingui com objecte d'estudi tot allò que una persona coneix a partir del significat de les expressions que pertanyen a un llenguatge. Afegeix la vessant psicocultural de Bruner (citats per Godino, 2018) per tal de tenir cura de les regles que segueix el procés de construcció de significats dins un context cultural específic. En conseqüència, el grup de recerca va considerar necessari incloure l'observació de Pimm (citats per Godino, 2018): els termes "comprensió" i "significat", a la disciplina de la didàctica de les matemàtiques, són de tret ampli i no gaire clars.

7.2. Conceptes rellevants de l'EOS

Godino (2018) exposa a l'estudi dels significats dels termes i conceptes matemàtics com l'antecedent que porta cap a "la reflexió ontològica i epistemològica sobre la gènesi personal i cultural del coneixement matemàtic i la seva mútua interdependència".

7.2.1. Conceptes semiòtics

A l'activitat matemàtica s'utilitzen diferents tipus d'expressions (orals i escrites) que poden ser de caire formal o col·loquial, però a aquesta varietat de llenguatge s'ha de sumar la diversitat d'objectes matemàtics que hi intervenen (conceptes, problemes, algorismes, arguments, etc.) i les tendències lingüístiques de la creació de significats (analítica/referencial i operacional). Per tant, l'estudi de la cognició matemàtica requereix endinsar-se en aquests enfocaments semiòtics (Godino, 2018).

7.2.1.1. Teories del significat

La interpretació que Ogden i Richards (citats per Godino, 2018) proposen per analitzar el significat s'expressa com una relació entre tres entitats: signe, concepte i *significatum*. Per aquests autors, el concepte és la referència i el *significatum*, el referent. Per a Font (citats per Godino, 2018), el signe és considerat un

significant. A més, Font enriqueix la relació entre les entitats proposades per Ogden i Richards amb les representacions mentals del significant (signe) i el referent (significatum) (**Figura 7.2.1.1.**). Aleshores, es pot considerar el postulat d'Ogden i Richards com un objecte real, mentre que Font el planteja com un objecte mental.

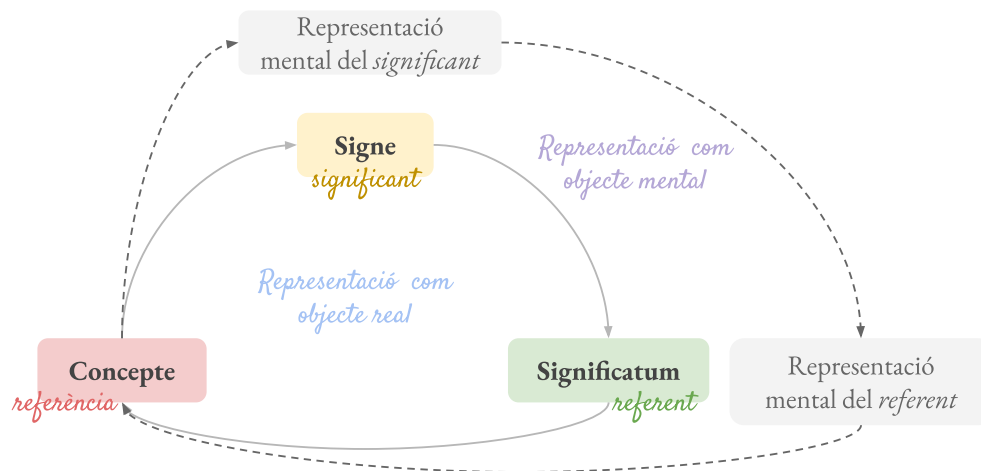


Figura 7.2.1.1.1. El “triangle bàsic” d'Ogden i Richards i les representacions com objectes mentals de Font (citats per Godino, 2018).

Font: Elaboració pròpia.

Es poden distingir dues classificacions de les teories del significat: (1) realistes i (2) pragmàtiques (Kutschera, citat per Godino, 2018) (**Taula 7.2.1.1.1.**). Per descriure la primera categoria, teories realistes del significat, es pot enunciar el fet de donar significat a una paraula en assignar-li un objecte, una proposició o un concepte. En aquest sentit, Godino explica “la forma més simple de la semàntica realista es presenta en els autors que atribueixen a les expressions lingüístiques només una funció semàntica, consistent en designar (en virtut d’unes convencions) certes entitats” (Godino, 2018; p. 5). Són exemples d’aquesta “semàntica realista”: l’ús d’un nom propi, la designació d’atributs al predicat i el reconeixement de fets utilitzant frases simples (**Figura 7.2.1.1.2.**). La segona categoria de les teories del significat, les pragmàtiques, es caracteritzen per tenir un “enfocament operacional”. Per establir un significat cal disposar d’un context. Per tant, hi haurà un significat per un context determinat que no en permet cap interpolació. Consegüentment, els significats de caire operacional no són aplicables a observacions científiques, empíriques i intersubjectives d’entitats abstractes (Godino, 2018).

Seguint les reflexions d’Ullman (citat per Godino, 2018), les creadors de l’EOS consideren que les teories realistes i pragmàtiques del significat es necessiten l’una de l’altra: “Per nosaltres el significat comença seient pragmàtic, relatiu al context, però existeixen tipus d’ús que en permeten orientar els processos

d'ensenyament i aprenentatge matemàtics. Aquests tipus d'ús són objectivats mitjançant el llenguatge i constitueixen els referents del lèxic institucional” (Godino, 2018; p. 7).

Taula 7.2.1.1.1.

Recull de teories del significat classificades segons el criteri de Kutschera (Godino, 2018).

Classificació	Descripció
Teories realistes (figuratives)	→ Realisme conceptual: significat com una relació entre símbols i entitats
Teories pragmàtiques (operacionals)	→ Tret instrumental: significat com un conjunt d'operacions

Font: Elaboració pròpia.

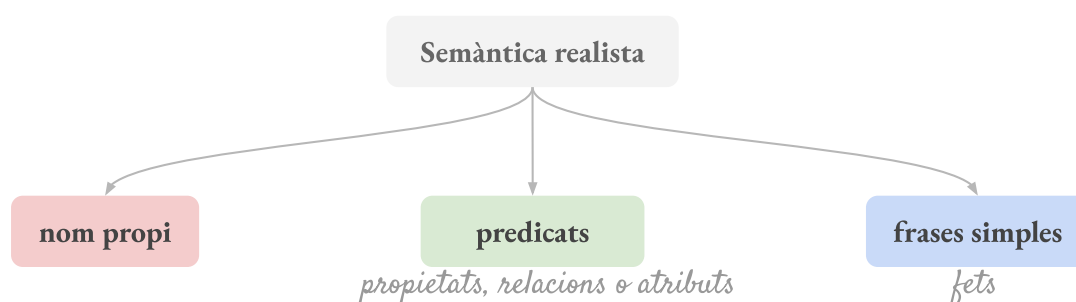


Figura 7.2.1.1.2. Exemples de *semàntica realista* (Godino, 2018).

Font: Elaboració pròpia.

7.2.1.2. Semiòtica i estudi del llenguatge

Tot partint de la definició de la semiòtica com l'estudi dels signes (de la seva naturalesa i les seves propietats) i reconeixent la necessitat de l'ús de signes per comunicar els objectes matemàtics, els desenvolupadors de l'EOS es van endinsar en la recerca de la relació entre la semiòtica i l'educació matemàtica. De manera més concreta, “la descripció i anàlisi dels processos d'estudi” de les matemàtiques a partir de “les manifestacions lingüístiques dels subjectes participants” i del context en el qual esdevé l'episodi on interactuen els participants (Godino, 2018). La teoria del llenguatge de Hjelmslev aporta una noció clau per a l'EOS: funció de signe o funció semiòtica (Eco, citat per Godino, 2018). Amb aquest terme, funció de signe, es fa referència a “la unitat que consta de forma de contingut i forma d'expressió” (Godino, 2018; 9).

7.2.1.3. Categories ontològiques

El *pragmaticisme* de Peirce (citat per Godino, 2018), s'orienta a l'estudi de la forma en la qual una persona cerca la veritat mitjançant la utilització de signes amb l'objectiu d'arribar a nous conceptes i idees. En aquest sentit, Peirce postula la seva “màxima pragmàtica” per aconsellar en l'assoliment de claredat per aprehendre.

El punt a considerar del *pragmatisme* és el teorema de Peirce on es postulen tres categories ontològiques: (1) *primeritat*, (2) *segonditat* i (3) *terceritat* (**Figura 7.2.1.3.1.**). En “un primer nivell de significat derivat de processos corporis i sensorials” (Godino, 2018; p. 10) es troba la primera categoria ontològica de Peirce: la *primeritat*. Són exemple d’entitats primeres: els símbols icònics d’una operació, o sigui, els signes que es tenen en ment en primera instància davant una instrucció de caire matemàtic: +, -, ×, ÷, =. En conseqüència, són símbols als quals s’accedeix sense cap mediació ni reflexió.

Taula 7.2.1.3.1.

Categories ontològiques del pragmatisme de Peirce (Godino, 2018).

Categoria	Elements	Expressió associada	Fenomen d’accés
<i>primeritat</i>	símbols	+	no mediat ni reflexiu
<i>segonditat</i>	acte operatiu	2+3=5	mediat no reflexiu
<i>terceritat</i>	generalització	a+b=c	mediat reflexiu

Font: Elaboració pròpia.

Al segon nivell de significat es troba la *segonditat*. Les entitats dins d’aquesta categoria ontològica de Peirce són experiències de causa i efecte. Un exemple d’ella són les representacions simbòliques de les operacions que inclouen les quantitats involucrades, com ara: 2+3=5. Per tant, en són condicions a les quals s’accedeix de manera mediada però encara sense afegir cap acte reflexiu.

El tercer nivell de significat de les categories ontològiques de Peirce, la *terceritat*, es conforma de la unió de les entitats primeres i segones. Una bona mostra d’ella són la generalització d’operacions i els seus resultats, com les expressions algebraiques: a+b=c. Així, les condicions en les quals s’arriba a aquesta tercera categoria son mediats i reflexius (Godino, 2018).

7.2.2 Conceptes antropològics

A la síntesi, feta per Godino (2018), de les bases del marc teòric que conforma l’EOS es mostren les diferents idees sobre la filosofia de les matemàtiques que el fonamenten. En concret, l’EOS centra el seu interès en perspectives d’aspecte antropològic que van des de la visió de les proposicions matemàtiques com regles de transformació de Wittgenstein, fins la creació intradiscursiva dels objectes matemàtics de Sfard (**Taula 7.2.2.1.**).

Taula 7.2.2.1.

Perspectives antropològiques de les matemàtiques considerades per l'EOS (Godino, 2018).

Autor	Perspectiva
Wittgenstein (1953)	→ Proposicions matemàtiques com eines de transformació
Bloor (1983)	→ Les matemàtiques com fenomen antropològic
Chevallard (1992)	→ Teoria Antropològica de tot allò que és didàctic (TDA)
Sfard (2000)	→ Creació intra-discursiva dels objectes matemàtics

Font: Elaboració pròpia.

A la llum de la perspectiva Wittgensteniana es fa evident la necessitat de distingir les proposicions matemàtiques de les descripcions. Per tant, les proposicions matemàtiques s'han de veure com instruments amb els quals es fa possible la indagació del paper que en representen quan se'n utilitzen. N'és un bon exemple els teoremes de la geometria, ja que en funcionen com regles amb les quals s'enquaden descripcions d'objectes en termes de les seves formes i grandàries tenint en compte les seves relacions espacials i fer inferències sobre tots aquests aspectes. En resum, es pot dir que per Wittgenstein, les matemàtiques es basen en el descobriment i la creació (Godino, 2018).

Sfard (citada per Godino, 2018) s'adhereix a la perspectiva de Vigotsky i Peirce al voltant de la construcció d'objectes de pensament a partir de símbols. Això porta a Sfard a reconèixer els significats i els símbols com entitats dependents i es proposa analitzar les relacions que hi ha entre els objectes matemàtics i el símbols (Godino, 2018).

7.2.3 Conceptes cognitius

Per tal d'analitzar la cognició matemàtica a l'àmbit institucional i de l'individu, la fonamentació de l'EOS estableix dues branques: (1) designació dels coneixements del subjecte, (2) les relacions que hi ha entre els coneixements del subjecte i les representacions externes d'aquests coneixements (objectes ostensius, com ara: símbols, notacions, gràfics, materials manipulatius, etc.). Per a l'EOS resulta indispensable l'estudi de la noció de representació des de la perspectiva de la psicologia de l'educació matemàtica (**Taula 7.2.3.1.**). Les quatre propostes per interpretar les nocions "representació" i "sistema de representació" s'inspira en les idees

de Goldin i Janvier (citats per Godino, 2018). Primerament, se'n consideren com descripcions matemàtiques d'esdeveniments de caire físic, que a la vegada són externs a l'individu i tenen una estructura definida. S'utilitzen idees matemàtiques per concretar aquestes situacions de l'entorn físic. La segona interpretació consisteix en l'estudi de les expressions lingüístiques fetes per plantejar contingut matemàtic, o problemes, però centrant l'atenció en els aspectes sintàctics i semàntics. En tercer lloc es troba la interpretació relacionada amb els constructes matemàtics formals (símbols, axiomes, definicions). Finalment, trobem l'anàlisi de les conductes i les introspeccions característiques dels processos del pensament matemàtic i de la resolució de problemes, per tal d'arribar a establir un sistema de configuracions cognitives de l'individu (Godino, 2018).

Taula 7.2.3.1.

Interpretacions de “representació” i “sistema de representació” considerades per l'EOS a partir de les propostes de Goldin i Janvier (citats per Godino, 2018).

no.	Interpretació
1	Concretització d'idees matemàtiques d'una situació física, externa i estructurada
2	Plantejament d'un problema mitjançant un sistema lingüístic
3	Ús d'un sistema de símbols per representar situacions
4	Descripció de trets del procés del pensament matemàtic que s'infereix d'una conducta

Font: Elaboració pròpia.

Els atributs de les representacions i dels sistemes de representacions són també una qüestió rellevant per a l'EOS. Els punts destacats per Godino (2018) són: (1) el tret sistèmic de les representacions, (2) el reconeixement de les representacions externes, (3) la naturalesa convencional i ambigua de les representacions, (4) la bidireccionalitat entre dues representacions o sistemes de representacions, (5) la caracterització de les representacions internes, (6) la interacció duta a terme entre les representacions internes i externes i (7) les representacions com objectius d'aprenentatge (**Taula 7.2.3.2.**).

Començant amb el primer d'aquests set aspectes, es pot dir que el tret sistèmic es refereix a l'entorn al qual pertanyen un grup de representacions, les convencions que segueix l'esmentat grup de representacions i la relació que hi ha entre aquesta varietat de representacions a l'àmbit de les matemàtiques i el seu aprenentatge.

El segon aspecte, les representacions externes, tracta de les notacions convencional i formal per comunicar de manera oral, escrita o visual un objecte matemàtic.

A la tercera posició es troba, més que un tret, un aclariment de la interpretació d'una representació: s'ha de tenir en compte el context en el qual se'n utilitza per tal de donar un significat adequat al que es vol comunicar.

En quart lloc es parla de la reciprocitat que hi ha entre dues representacions. És a dir, la possibilitat d'arribar a una representació a partir d'una altra i a la vegada de tornar cap a la primera representació des de la segona.

El cinquè aspecte, les representacions internes, fa explícita l'apropiació que fa l'individu de les representacions. Aquest procés es pot inferir de gestos, respostes orals, estratègies de resolució, desenvolupament d'algorismes no convencionals, etc.

El sisè aspecte sembla una derivació de la descripció dels trets extern i intern de les representacions. Per tant, s'ha de deduir que l'aprenentatge de les matemàtiques requereix de la interacció entre les representacions internes i externes. En concret, l'indicador de l'assoliment d'un concepte matemàtic depèn de la capacitat de l'alumne de desenvolupar diferents representacions, establir relacions entre elles i aplicar-les.

Finalment, el setè aspecte fa referència a les representacions i sistemes de representació convencionals com objectius de l'ensenyament de les matemàtiques (Godino, 2018).

Taula 7.2.3.2.

Trets de les “representacions” i “sistemes de representacions” considerades per l'EOS (Godino, 2018).

Tret	Descripció
Sistèmic	→ Relacions entre les representacions
Extern	→ Sistemes simbòlics convencionals
Convencional i ambigu	→ Relació amb el context
Bidireccional	→ En un context, hi ha reversibilitat entre representacions
Intern	→ Representacions personals
Interaccional	→ Relació entre representacions internes i externes
Instruccional	→ Objectiu acadèmic

Font: Elaboració pròpia.

En altre ordre d'idees, Godino cita a Duval (2018) per recuperar els arguments que recolzen la necessitat d'utilitzar sistemes semiòtics de representació i expressió diferents per tal d'aprendre matemàtiques: (1) per tal de comprendre, (2) per visualitzar objectes absents, (3) per exterioritzar representacions mentals, (4) per

augmentar la capacitat cognitiva d'un subjecte en construir una varietat de representacions, (5) per aprendre conceptes mitjançant la conversió de representacions de diferents dominis i (6) per produir les tres activitats cognitives pròpies de la semiosi: creació de representacions d'un objecte, tractament o transformació de les representacions creades i la conversió de les transformacions a un registre diferent al inicial (**Taula 7.2.3.3.**).

Taula 7.2.3.3.

Arguments de Duval per recolzar la necessitat d'utilitzar sistemes semiòtics de representació i expressió diferents per l'aprenentatge de les matemàtiques considerats per l'EOS (Godino, 2018).

Argument	Descripció
Comprensió	→ Distinció entre “objecte” i la representació d'un objecte
Mentals	→ Representacions per “mirar” un objecte absent
Exteriorització	→ Representacions semiòtiques com mitjans de comunicació
Interdependència	→ Relació entre representacions diferents per aprehendre
Coordinació	→ Conversió entre representacions
Semiosi	→ Creació, tractament/transformació i conversió de representacions

Font: Elaboració pròpia.

7.2.4 Configuracions ontosemiòtiques

Seguint la “fonamentació axiomàtica de les matemàtiques”, Godino i Batanero (citats per Godino, 2018) van construir les bases de l'EOS, les nocions o “elements clau de la modelització semiòtica i antropològica del coneixement matemàtic”: pràctiques, objectes i processos. Anys després, amb l'addició d'altres investigadors, es van definir altres “entitats primàries” ontosemiòtiques [**Figura 7.2.4.1.**] com ara: funció semiòtica. Totes aquestes nocions són necessàries per analitzar els objectes, les pràctiques i els processos.

Dins el marc teòric de l'EOS, s'entén per *objecte matemàtic* a qualsevol entitat relacionada amb l'activitat o pràctica matemàtica; per exemple: conceptes, proposicions, arguments, procediments, llenguatges simbòlics, llenguatges verbals, llenguatges gràfics, situacions-problemes, etc. Es defineix a la *pràctica matemàtica* com una actuació o expressió, sigui verbal o escrita, amb la qual un individu resol problemes de caire matemàtic, comunica el seu resultat, li dóna validesa i el generalitza per tal d'aplicar-lo en contextos i problemes diferents (Godino, 2018).

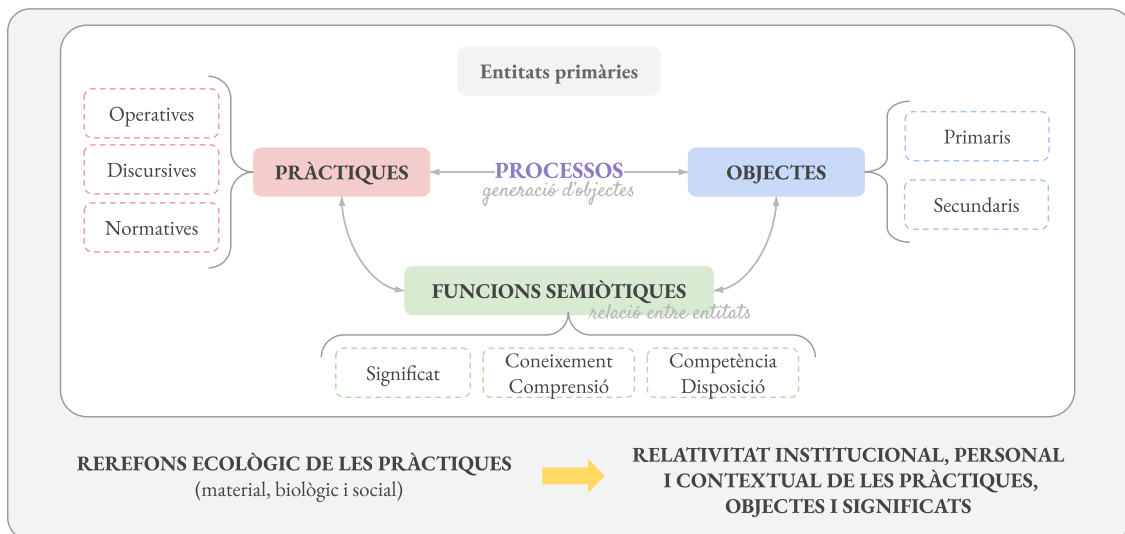


Figura 7.2.4.1. Entitats primàries de l'ontosemiòtica (Godino, 2014).

Font: Elaboració pròpia.

Per una banda, l'EOS reconeix la noció *procés* com una seqüència de pràctiques matemàtiques de les quals emergeix un objecte matemàtic. Particularment, els atributs afegits per Font i Rubio (citats per Godino, 2018) a aquesta noció indiquen que es tracta d'acció temporal que té un objectiu determinat, el qual ha de ser la resposta a una tasca proposada (Godino, 2018).

Per una altra banda, la *funció semiòtica* fa referència a la noció amb la qual és possible establir relacions entre entitats primàries; més aviat es pot interpretar com la correspondència que hi ha entre un antecedent i el seu conseqüent. Són exemples de funcions semiòtiques, les correspondències expressió - contingut o significat - significat (Godino, 2018).

Finalment, l'EOS considera que tota configuració didàctica està composta per altres tres configuracions: epistèmica, institucional i cognitiva-afectiva (**Figura 7.4.2.2.**). A la component epistèmica corresponen totes les entitats primàries que es requereixen per desenvolupar una tasca de caire matemàtic. La segona component, la configuració institucional, considera les interaccions. Per últim, la configuració cognitiva-afectiva es relaciona amb l'aprenentatge, per tant és de tipus afectiu i personal (Godino, Batanero i Font, 2020).

Com s'ha vist, la noció *objecte matemàtic* és molt àmplia i general, per tant cal definir “un sistema detallat de categories d'objectes” que consideri la naturalesa de l'objecte en anàlisi i la seva funció. Aquest sistema és la *configuració ontosemiòtica* dels objectes, les pràctiques i els processos (**Figura 7.2.4.3.**).

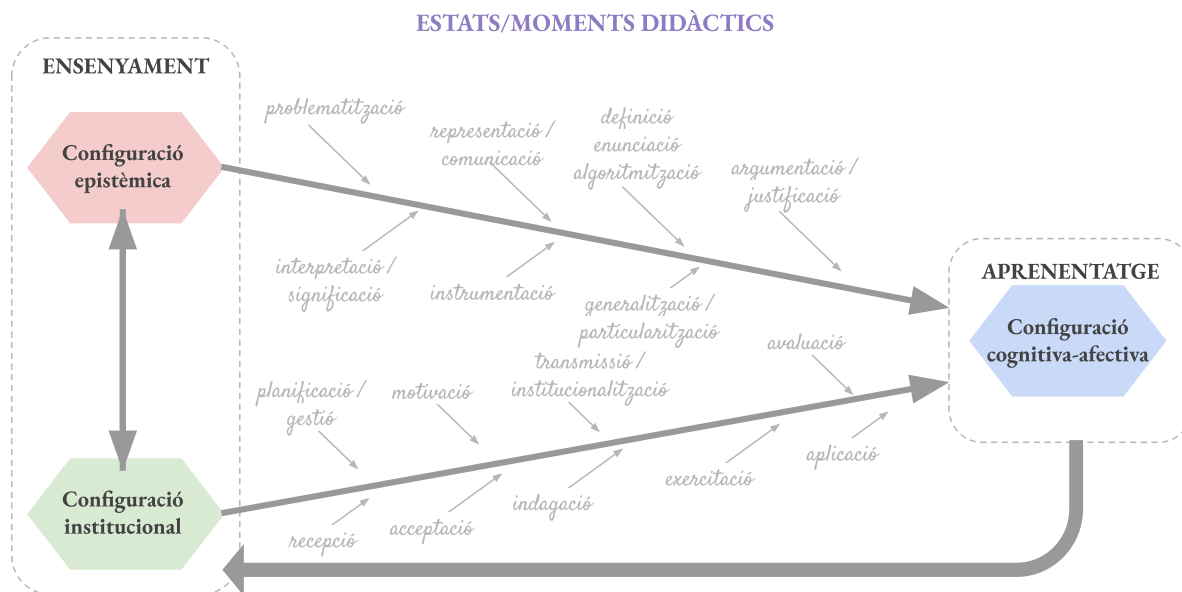


Figura 7.2.4.2. Rerefons ecològic de les pràctiques didàctiques i matemàtiques (Godino, 2014).

Font: Elaboració pròpia.

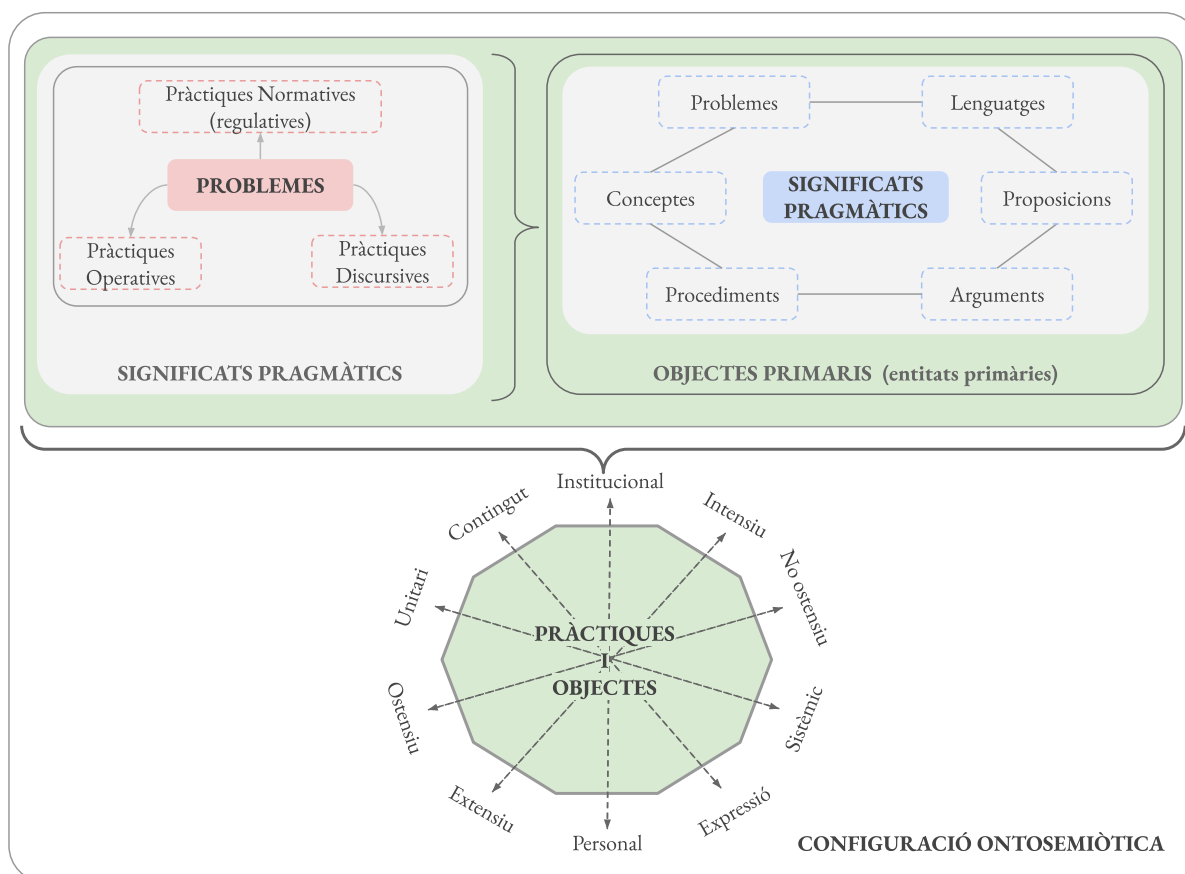


Figura 7.2.4.3. Configuració ontosemiòtica i significats pragmàtics (Godino, 2018).

Font: Elaboració pròpia.

A partir de la **Figura 7.2.4.3.** és possible reconèixer sis entitats primàries: (1) concepte, (2) proposició, (3) argument, (4) problema, (5) llenguatge, i (6) procediment. Convé aclarir el significat d'alguns d'aquests objectes primaris. Per a l'EOS, un *concepte* es pot utilitzar un cop es fixi una definició. Per tant, no s'ha de confondre amb el que és una *proposició*, ja que a diferència d'un *concepte*, l'enunciat d'una *proposició* pot no ser veritable i aleshores en requereix d'un *argument* que li doni validesa (Godino, 2018).

En resum, dins el marc teòric de l'EOS, “la noció de configuració ontosemiòtica de pràctiques, objectes i processos” (**Figura 7.2.4.4.**) és una guia per desenvolupar l'anàlisi didàctica de continguts matemàtics (Godino, 2018) que articula aquestes nocions (pràctica, objecte i procés) tenint en compte les dualitats institucional i personal des de les quals s'hi analitzen (Godino, Batanero i Font, 2020).

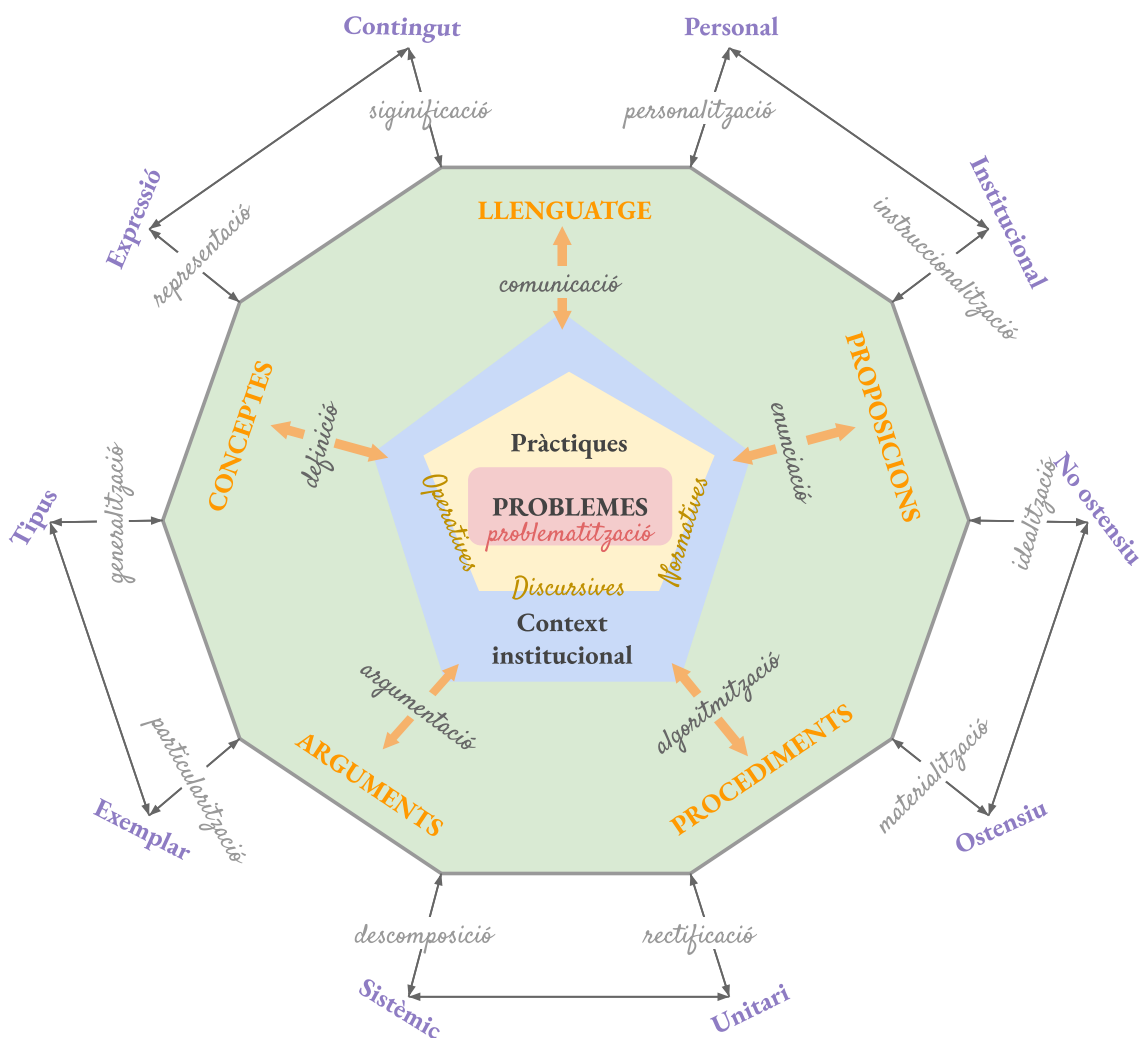


Figura 7.2.4.4. Configuració ontosemiòtica de pràctiques, objectes i processos basat en Godino (2014).

Font: Elaboració pròpia.

Amb l'esquema de la **Figura 7.2.4.4.** es simplifica el treball previ de Godino, Planas i Font (2010). Per una banda, la nova versió de 2020 afegeix les pràctiques discursives. A més, s'hi puntualitzen els processos amb els quals s'estableixen relacions entre binomis com: expressió-contingut, personal-institucional, tipus-exemplar, ostensiu-no ostensiu, sistèmic-unitari (Godino, Planas i Font, 2010).

7.3. La noció d'*idoneïtat didàctica*

Godino, Batanero i Font (2020), desenvolupadors de l'EOS presenten el “problema d'optimització del procés d'instrucció”, al qual s'adrecen els criteris d'idoneïtat didàctica. Aquest problema, i per tant aquests criteris, s'introdueixen a partir de la pregunta: “Quin tipus d'accions i recursos s'haurien d'implementar en els processos d'instrucció per optimitzar l'aprenentatge de les matemàtiques?”. En resposta a aquesta qüestió els tres investigadors, presenten dos principis (p. 11):

- Els principis i els recursos instruccionals no es consideren com regles o lleis generals, inferides de manera positivista, sinó com criteris d'idoneïtat o actuació preferent sobre els quals s'ha generat un cert consens en la comunitat d'educació matemàtica.

- Aquests criteris han de ser aplicats localment, per tant s'han d'adaptar e interpretar per part del professor, i se'n refereixen a cadascuna de les facetes implicades en els processos d'instrucció matemàtics: epistèmica, ecològica, afectiva, interaccional i mediacional.

Per tant, la *idoneïtat didàctica* és un constructe amb el qual es pretén orientar al professor per tal que faci una “intervenció efectiva” a la seva aula (Godino, 2021). Així com també és un sistema “d'optimització d'un procés d'instrucció matemàtica”. Per tant, un procés d'instrucció matemàtica pot definir-se com òptim quan n'aconsegueix articular, de manera coherent i sistèmica, certs criteris corresponents a les sis facetes de la *idoneïtat didàctica* (**Figura 7.3.1.**) (Godino, Batanero i Font, 2020).

Un episodi d'aula és òptim quan amb ell s'aconsegueix “adaptar els significats personals assolits pels estudiants (aprenentatge) i els significats institucionals pretesos o implementats (ensenyament), tenint en compte les circumstàncies i recursos disponibles (entorn)”. Per tal d'aconseguir un nivell alt d'idoneïtat didàctica cal fer arribar a l'aula propostes que facin possible l'assoliment de diferents components de les facetes de la *idoneïtat didàctica* (Godino, Batanero i Font, 2020). El nivell d'*idoneïtat didàctica* assolit amb un procés d'instrucció depèn del grau de desenvolupament de les sis facetes o tipus d'idoneïtats (**Taula 7.3.1.**) (Godino, Batanero i Font, 2007; Godino, Batanero, Burgos, i Gea, 2021).

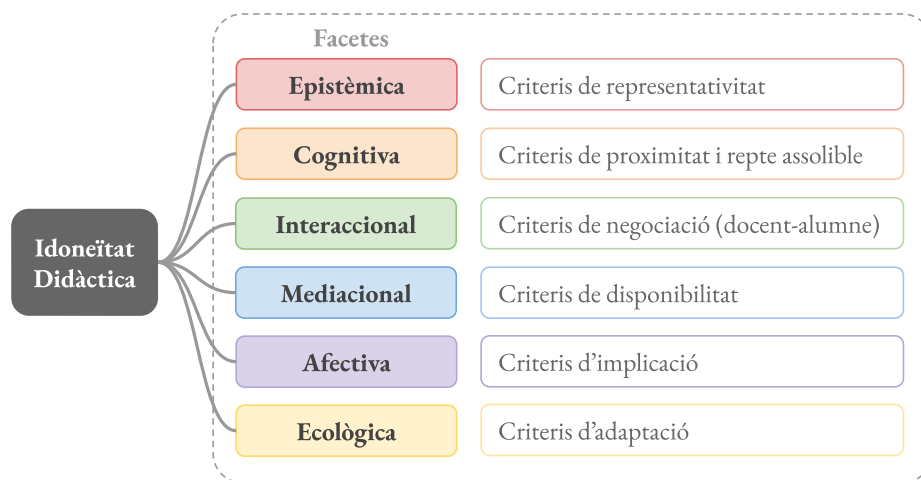


Figura 7.3.1. Components de la *idoneïtat didàctica* basat en Godino (2021).

Font: Elaboració pròpia.

Taula 7.3.1.

Facetes d'idoneïtat didàctica (Godino, Batanero, Font, 2007).

Faceta	Descripció
Idoneïtat Epistèmica	→ Grau de representativitat dels significats institucionals implementats (o que es pretén implementar), respecte d'un significat de referència.
Idoneïtat Cognitiva	→ Grau en el qual els significats implementats estan en la zona de desenvolupament potencial dels estudiants, així com la proximitat entre els significats personals assolits i els significats implementats.
Idoneïtat Afectiva	→ Grau d'implicació (interés, motivació, etc.) dels alumnes en el procés d'instrucció.
Idoneïtat Interaccional	→ Grau en que les configuracions i trajectòries didàctiques permeten identificar conflictes semiòtics potencials (que se'n poden detectar a priori), i resoldre els conflictes que es produeixen durant el procés d'instrucció.
Idoneïtat Mediacional	→ Grau de disponibilitat i adequació dels recursos materials i temporals necessaris pel desenvolupament del procés d'ensenyament i aprenentatge.
Idoneïtat Ecològica	→ Grau en el qual el procés d'instrucció s'ajusta al projecte educatiu del centre i la societat, així com als condicionants de l'entorn en el qual es desenvolupa.

Font: Elaboració pròpia.

Posteriorment, Godino, Batanero, Burgos i Gea (2021) descriuen les sis facetes d'*idoneïtat didàctica* de manera més àmplia puntualitzant que se'n tracten de criteris. Segons s'observa a la **Taula 7.3.2.** cada faceta es relaciona amb un criteri general que la caracteritza. Per tant, si un "component" d'una faceta d'*idoneïtat didàctica* és un criteri parcial d'ella, aleshores, es reconeix que un procés d'instrucció assoleix una faceta

d'*idoneïtat didàctica* quan els criteris (parcials) que correspon als seus components es compleixen (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021).

Aquesta nova perspectiva prové de les propostes fetes per Godino, Batanero i Font (2007), cosa que es pot identificar en comparar els enunciats descriptius de les facetes d'*idoneïtat* a la **Taula 7.3.1.** amb les redaccions dels criteris registrats en la **Taula 7.3.2.** que se'n troben dins aquest apartat.

Taula 7.3.2.

Criteris d'idoneïtat generals de les facetes d'idoneïtat didàctica (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021).

Faceta	Criteri General
Epistèmica	→ Criteri general de representativitat. Els significats institucional del contingut i les configuracions d'objectes i processos implementats haurien de ser representatius del significat global de referència, tenint en compte les circumstàncies contextuais i personals del subjectes implicats.
Cognitiva	→ Criteri general de proximitat i repte assolible. Els objectius d'aprenentatge haurien de suposar un repte assolible per a els estudiants, tenint en compte les circumstàncies contextuais i personals del subjectes implicats.
Afectiva	→ Criteri general d'implicació. El procés d'instrucció hauria d'assolir el major grau possible d'implicació de l'alumnat (interès, motivació, autoestima, disposició, etc.).
Interaccional	→ Criteri general de negociació. Les configuracions i trajectòries didàctiques que s'implantin haurien de permetre identificar els conflictes semiòtics potencials i posar el mitjans adequats per la seva resolució.
Mediacional	→ Criteri general de disponibilitat. S'hauria de disposar dels recursos materials i temporals adequats pel desenvolupament òptim del procés d'ensenyament i aprenentatge.
Ecològica	→ Criteri general d'adaptació. El procés d'instrucció hauria d'estar en concordança amb el projecte educatiu del centre i la societat, tenint en compte els condicionants de l'entorn en el qual es desenvolupa i les innovacions basades en la innovació educativa.

Font: Elaboració pròpia.

Com s'ha vist, en termes de l'EOS, un "component" és un dels criteris parcials relatius a una de les sis facetes d'*idoneïtat didàctica* (Godino, Batanero i Font, 2020). Aleshores, cadascuna de les facetes és un conjunt de "components", els quals es concreten en un seguit d'"indicadors" (**Figura 7.3.2.**) (Godino, 2013; Breda, Pino-Fan i Font, 2016; Breda, Font i Pino-Fan, 2018).

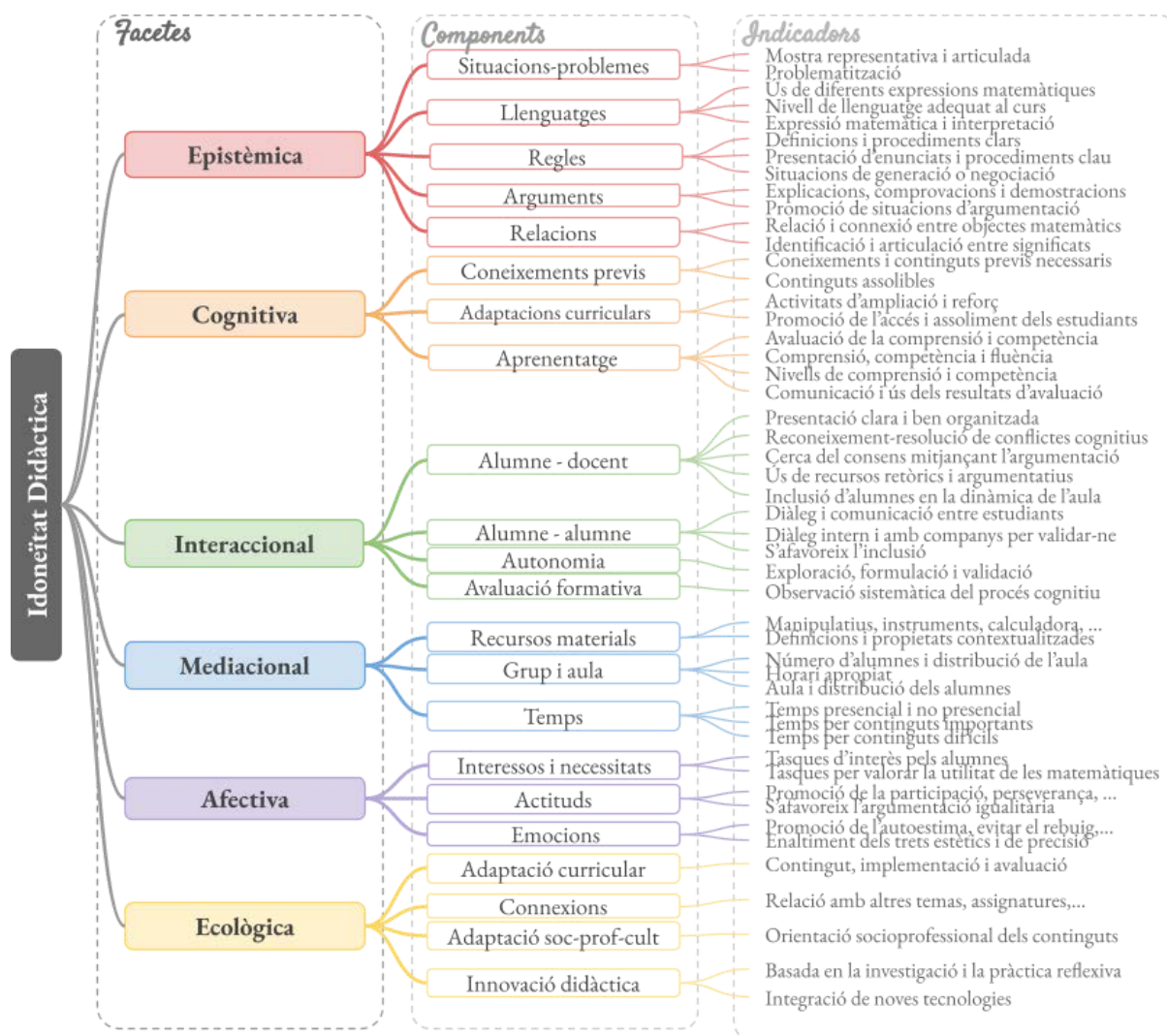


Figura 7.3.2. Facetes, components i indicadors de la *idoneïtat didàctica* segons Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

7.3.1. Idoneïtat epistèmica

Des de la perspectiva epistèmica, la investigació d'un episodi de classe pot centrar-se en “el propi contingut matemàtic i les diferents formes en que se'n pot presentar” dins una activitat de caire matemàtic. En un procés d'instrucció de l'àrea de les matemàtiques els significats són un aspecte essencial. Per tal d'assolir un nivell alt d'*idoneïtat epistèmica*, aquest procés d'instrucció ha de partir de la “reconstrucció d'un significat global de referència del contingut” que es portarà a l'aula. L'establiment d'un significat global que articula alguns dels seus significats parcials s'ha de fer sense perdre de vista el context i els subjectes hi involucrats. A més, cal considerar els processos matemàtics que hi intervenen, com ara: la problematització, la representació, la generalització, la modelització, etc. En resum, es pot dir que el criteri epistèmic es refereix al tipus de matemàtiques que es porten a l'aula, tot cercant la implementació de unes “bones matemàtiques” (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021).

El criteri epistèmic de la *idoneïtat didàctica*, relacionada amb la representativitat, es concreta en quatre components: (1) significats, (2) relacions, (3) processos, i (4) conflictes epistèmics. Els criteris relacionats amb cadascun d'aquests quatre components es mostren a la **Taula 7.3.1.1.** (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021).

Taula 7.3.1.1.

Criteris d'idoneïtat epistèmica segons els seus components (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021).

Faceta Epistèmica	
Component	Criteri segons el component
Faceta Epistèmica	→ Criteri general de representativitat. Els significats institucional del contingut i les configuracions d'objectes i processos implementats haurien de ser representatius del significat global de referència, tenint en compte les circumstàncies contextuais i personals del subjectes implicats.
Significats	→ S'haurien de tenir en compte els diferents objectes primaris implicats en l'activitat matemàtica (situacions, llenguatges, conceptes i propietats, procediments i arguments) que conformen els significats parcials del contingut, seleccionant aquell o aquells que el seu estudi s'adapti a les circumstàncies contextuais i personals dels subjectes implicats. Tot això ha d'estar contextualitzat en situacions comprensibles per l'estudiant.
Relacions (connexions)	→ S'haurien de relacionar entre sí mateixos tots els significats parcials estudiats i els objectes que intervenen en les pràctiques corresponents, així com amb el contingut d'altres temes que l'estudiant ja coneix.
Processos	→ S'haurien de tenir en compte la diversitat de processos (seqüències de pràctiques) dels quals emergeixen els objectes que intervenen en les pràctiques matemàtiques (problematització, representació, definició, generalització, modelització, etc.).
Conflictes epistèmics	→ S'haurien d'evitar les discordances entre els significats dels objectes i els processos implementats i els corresponents a la institució de referència (absència, a més d'errors i ambigüitats).

Font: Elaboració pròpia.

Per tal “de fer operativa la noció d'*idoneïtat epistèmica*” cal considerar els seus components i els indicadors que deriven de cadascun d'ells tot partint de la proposta de Godino (2013) (**Figura 7.3.1.1.**). Segons aquesta perspectiva la faceta epistèmica de la *idoneïtat didàctica* es descriu en cinc components: (1) situacions-problemes, (2) llenguatges, (3) regles, (4) arguments, i (5) relacions. El nombre d'indicadors amb els quals es concreta cadascun dels cinc components és variable. Per tant, mentre que els components “situacions-problemes”, “arguments” i “relacions” es detalla en dos indicadors, els indicadors “llenguatges” i “regles” n'utilitzen tres.

Godino, Batanero, Burgos i Gea (2021) puntualitzen la diferència entre els conceptes: (1) faceta d'un procés d'instrucció, (2) component d'un procés d'instrucció, (3) criteri d'idoneïtat i (4) indicador d'idoneïtat i (p. 14):

El criteri és una norma (en uns casos com principi, en altres com regla) que s'hauria de seguir per tal d'assolir que un procés d'instrucció tingui una alta idoneïtat; l'indicador és la manifestació observable que es té com resultat de l'aplicació del criteri; les facetes i els seus components són categories o agrupacions dels criteris.

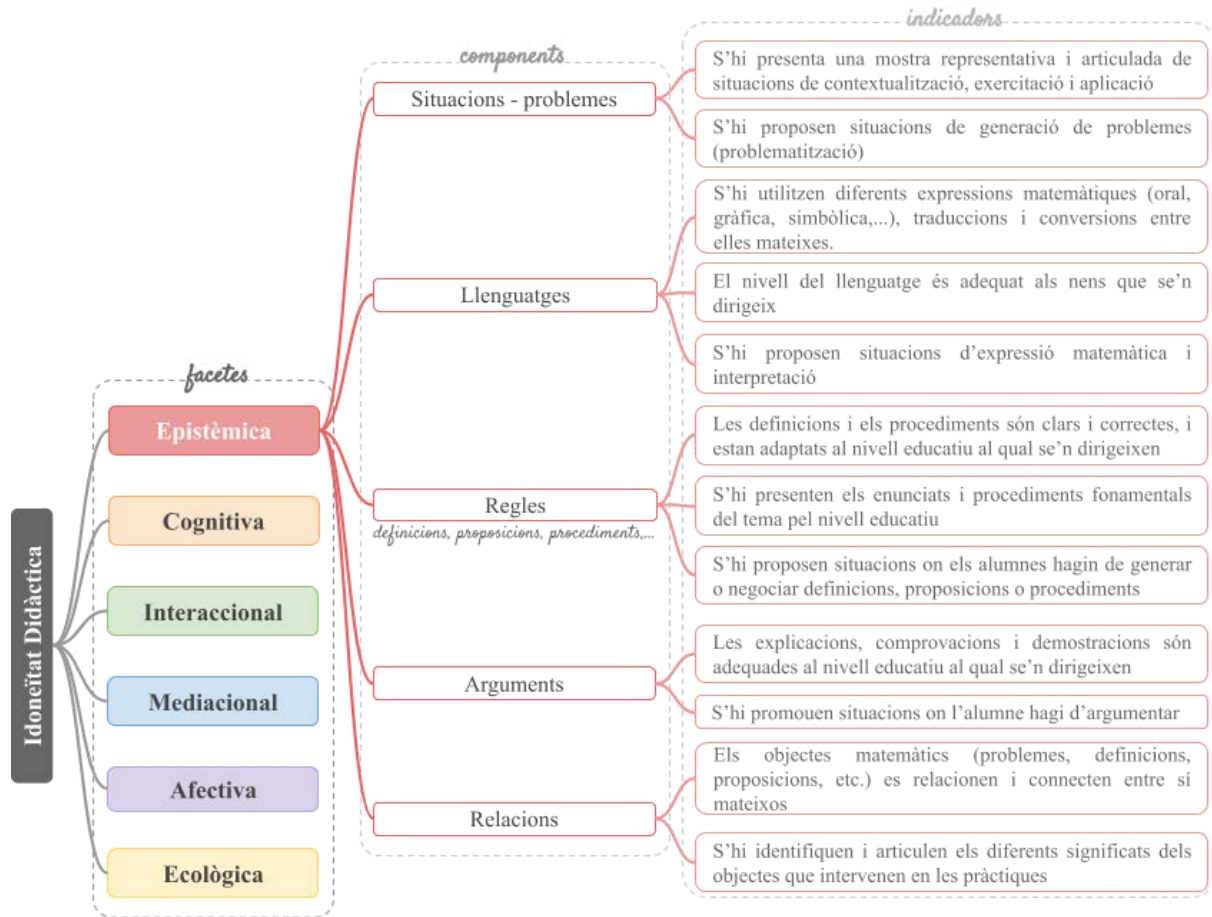


Figura 7.3.1.1. Components i indicadors de la idoneïtat epistèmica segons Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

Per la seva part, Breda, Font i Pino-Fan (2018) van proposar una nova distribució dels components amb la qual els indicadors o característiques associades a cadascun d'ells s'ha presentat amb noves redaccions (**Figura 7.3.1.2.**). Aquest grup d'investigadors desenvolupa la faceta epistèmica de la idoneïtat didàctica en quatre components: (1) errors, (2) ambigüitats, (3) riquesa de processos, i (4) representativitat de la complexitat. Malgrat que tots quatre components són diferents, des del punt de vista de la redacció, als components presentats per Godino (2013), en són coincidents a nivell de contingut. A la **Taula 7.3.1.2.** s'observa el compartiu entre les propostes de Godino (2013) i Breda, Font i Pino-Fan (2018), que mostra la seva concordança ja identificada per Godino, Batanero, Burgos i Gea (2021). Tenint en compte les

coincidències entre les propostes de Godino (2013) i el grup de Breda, Font i Pino-Fan (2018) observades a la **Taula 7.3.1.2.**, es pot considerar la descripció de la *idoneïtat epistèmica* plantejada per Breda, Font i Pino-Fan (2018) com un plantejament unificador que dona més detall a la faceta epistèmica de la *idoneïtat didàctica*.

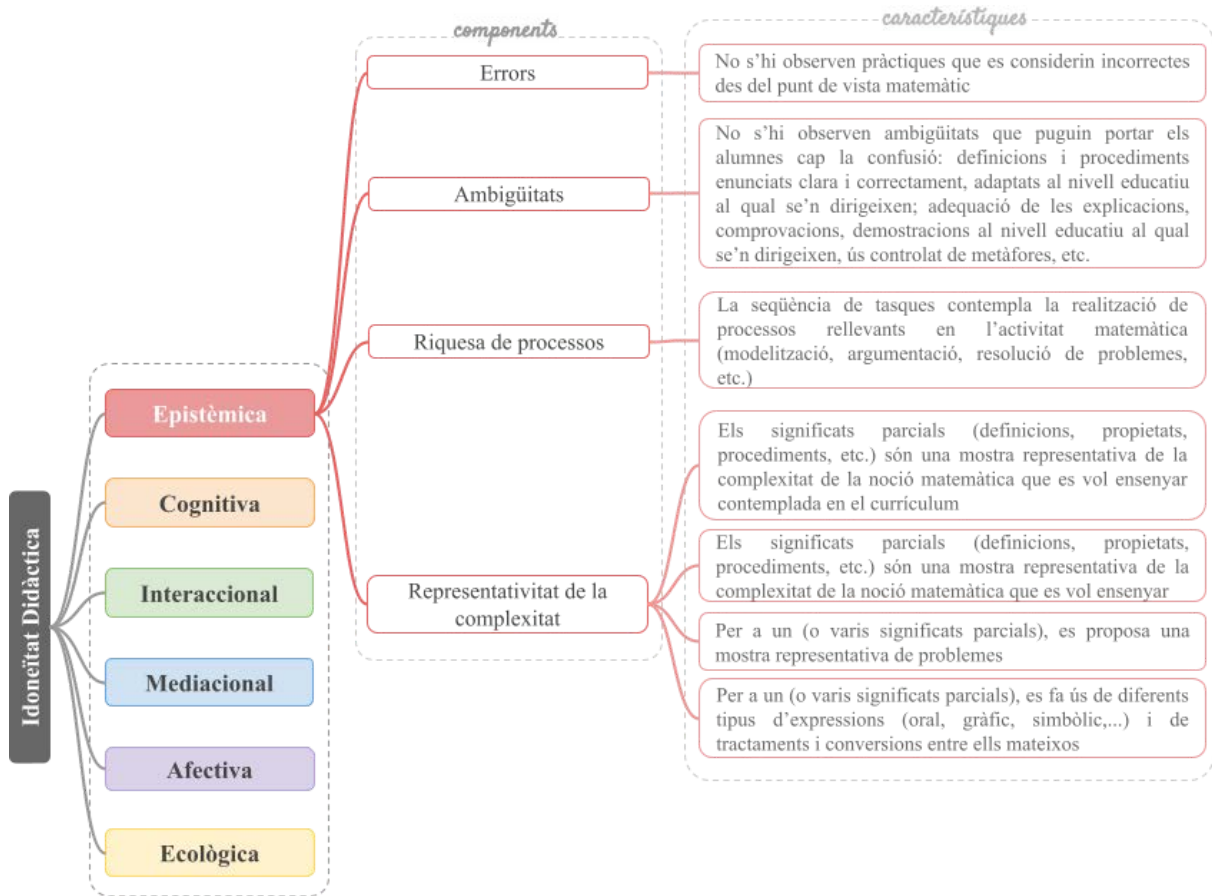


Figura 7.3.1.2. Components i característiques de la *idoneïtat epistèmica* segons Breda, Font i Pino-Fan (2018).

Font: Elaboració pròpia.

Taula 7.3.1.2.

Comparació de la idoneïtat epistèmica segons Godino^[1] (2013) i Breda, Font i Pino-Fan^[2] (2018).

Component ^[2]	Característiques ^[2]	Component ^[1]
Errors	→ No s'hi observen pràctiques que es considerin incorrectes des del punt de vista matemàtic ^[2]	
Ambigüïtats	→ No s'hi observen ambigüïtats que puguin portar als alumnes cap la confusió: definicions i procediments enunciats clara i correctament, adaptats al nivell educatiu al que se'n dirigeixen → adequació de les explicacions, comprovacions, demostracions als nivell educatiu al que se'n dirigeixen → ús controlat de metàfores, etc. ^[2]	Regles Llenguatge Arguments Llenguatge
Riquesa de processos	→ La seqüència de tasques contempla la realització de processos rellevants en l'activitat matemàtica (modelització, argumentació, resolució de problemes, connexions, problematització ^[1])	Argumentació Relacions Regles Situacions-problema
Representativitat de la complexitat	→ Els significats parcials (definicions, propietats, procediments, etc.) són una mostra representativa de la complexitat de la noció matemàtica que es vol ensenyar contemplada en el currículum → Els significats parcials (definicions, propietats, procediments, etc.) són una mostra representativa de la complexitat de la noció matemàtica que es vol ensenyar → Per a un (o varis significats parcials), es proposa una mostra representativa de problemes → Per a un (o varis significats parcials), es fa ús de diferents tipus d'expressions (oral, gràfica, simbòlica,...), i de tractaments i conversions entre ells mateixos	Regles Regles Situacions-problema Llenguatge

Font: Elaboració pròpia.

7.3.2. Idoneïtat cognitiva

Centrant l'atenció en els aspectes cognitius, l'anàlisi correspon a l'estudi de les maneres en les quals els estudiants arriben a aprendre, com és el seu raonament i de quina manera entenen les matemàtiques. Així mateix, s'han de considerar les estratègies emprades pels alumnes en la resolució de problemes, reflexionar sobre els conflictes semiòtics o dificultats relacionats amb un procés d'instrucció i la manera en la qual el procés d'aprenentatge dels alumnes va progressant. Considerant la rellevància de les facetes epistèmica i cognitiva en els processos d'instrucció matemàtica, els investigadors van considerar necessari l'establiment de criteris d'idoneïtat per totes dues facetes: epistèmica i cognitiva. A la **Taula 7.3.2.1.** es visibilitzen els sis criteris que concreten la dimensió cognitiva de la *idoneïtat didàctica*. Com s'hi veu, s'indiquen sis components de la dimensió cognitiva: (1) significats personals, relacionats amb l'aprenentatge, (2) relacions (connexions), (3) processos, (4) coneixements previs, (5) diferències individuals, i (6) conflictes cognitius. Pel que fa a les components: (2) relacions (connexions) i (3) processos, hi ha una coincidència amb les

components de la dimensió epistèmica mostrades a la **Taula 7.3.1.1.** dins l'apartat anterior. Per una altra banda, és possible identificar que només el component “significats personals (aprenentatges)” es relaciona amb dos criteris, a diferència de la resta dels components que són associat a només un criteri (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021). Els indicadors amb els quals s’identifica el nivell en el qual s’ha aconseguit apropar a la “zona de desenvolupament potencial dels alumnes” els continguts portats es poden consultar de la proposta feta per Godino (2013). El treball de recerca ara citat reconeix tres components de la faceta cognitiva: (1) coneixements previs, (2) adaptacions curriculars i (3) aprenentatge (**Figura 7.3.2.1.**). Aleshores, l’assoliment de la *idoneïtat cognitiva* es manifesta en els indicadors associats a aquestes tres components. Tot i que no s’ha registrat a la **Figura 7.3.2.1.**, Godino (2013) afegeix un mateix aclariment relacionat amb els components “coneixements previs” i “aprenentatge”: “es tenen en compte els mateixos elements de la *idoneïtat epistèmica*: situacions, llenguatges, conceptes, procediments, proposicions, arguments i les relacions entre ells mateixos”.

Taula 7.3.2.1.

Criteris d’idoneïtat cognitiva segons els seus components (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021).

Faceta Cognitiva	
Component	Criteri segons el component
Significats personals (Aprentatges)	→ Criteri general de proximitat i repte assolible. Els objectius d’aprenentatge haurien de suposar un repte assolible per a els estudiants, tenint en compte les circumstàncies contextuals i personals del subjectes implicats.
Relacions (connexions)	→ L’aprenentatge hauria de ser de tipus relacional, de manera que els estudiants siguin capaços de comprendre i relacionar els diferents significats inclosos en el procés d’ensenyament i objectes implicats.
Processos	→ S’ha de tenir en compte la competència de l’estudiant per implementar processos matemàtics específics del contingut (modelització, generalització, resolució o plantejament de problemes, prova, representació,...) i metacognitius (reflexió sobre els propis processos de pensament matemàtic).
Coneixements previs	→ El procés d’instrucció hauria de considerar els coneixements previs que tenen els estudiants als quals se’n dirigeix per tal d’abordar l’estudi del contingut pretès.
Diferències individuals	→ El procés d’instrucció hauria d’ajudar els estudiants segons les seves diferències individuals en coneixements previs i estils d’aprenentatge en el procés d’estudi del contingut pretès o implementat.
Conflictes cognitius	→ El procés d’instrucció hauria de poder identificar en els estudiants els conflictes cognitius que la investigació didàctica ha revelat com propis i característics del contingut pretès o implementat i ajudar-los a superar-ne.

Font: Elaboració pròpia.

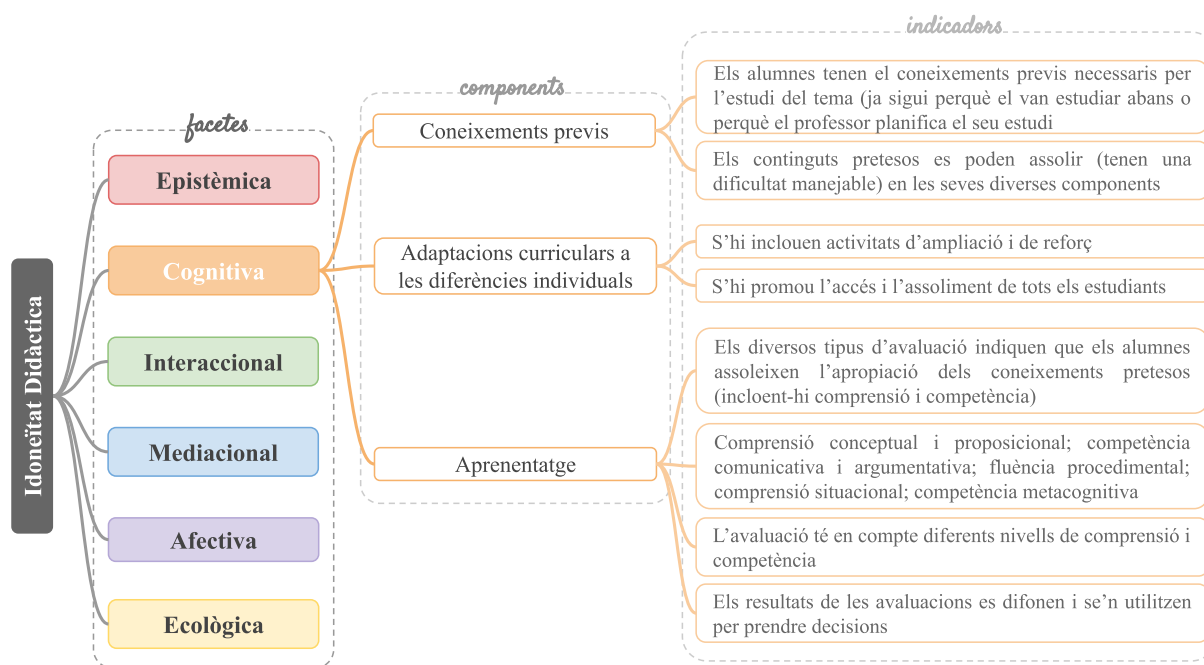


Figura 7.3.2.1. Components i indicadors de la *idoneïtat cognitiva* segons Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

Recuperant el recull fet per Breda, Pino-Fan i Font (2016), la dimensió cognitiva guanyen detall amb l'addició del component "alta demanda cognitiva" (**Figura 7.3.2.2.**). A la vegada, la component "adaptacions curriculars a les diferències individuals" proposada per Godino (2013) es generalitza de la següent manera "adaptacions curriculars diferenciades". Pel que fa als indicadors, en presenten petits canvis com és el cas de la nova característica associada a la component "alta demanda cognitiva": "S'hi activen processos cognitius rellevants (generalització, connexions intramatemàtiques, canvis de representació, especulacions, etc.)". A la **Figura 7.3.2.3.** es mostra que és possible integrar les propostes de Godino (2013) i Breda, Pino-Fan i Font (2016) de la següent manera:

- (a) Utilitzant les nomenclatures de les components de Breda, Pino-Fan i Font (2016) amb els indicadors de Godino (2013) com a base.
- (b) Afegint la component "alta demanda cognitiva" senyalada per Breda, Pino-Fan i Font (2016) però considerant les característiques indicades pels investigadors com indicadors per mantenir la nomenclatura de Godino (2013).

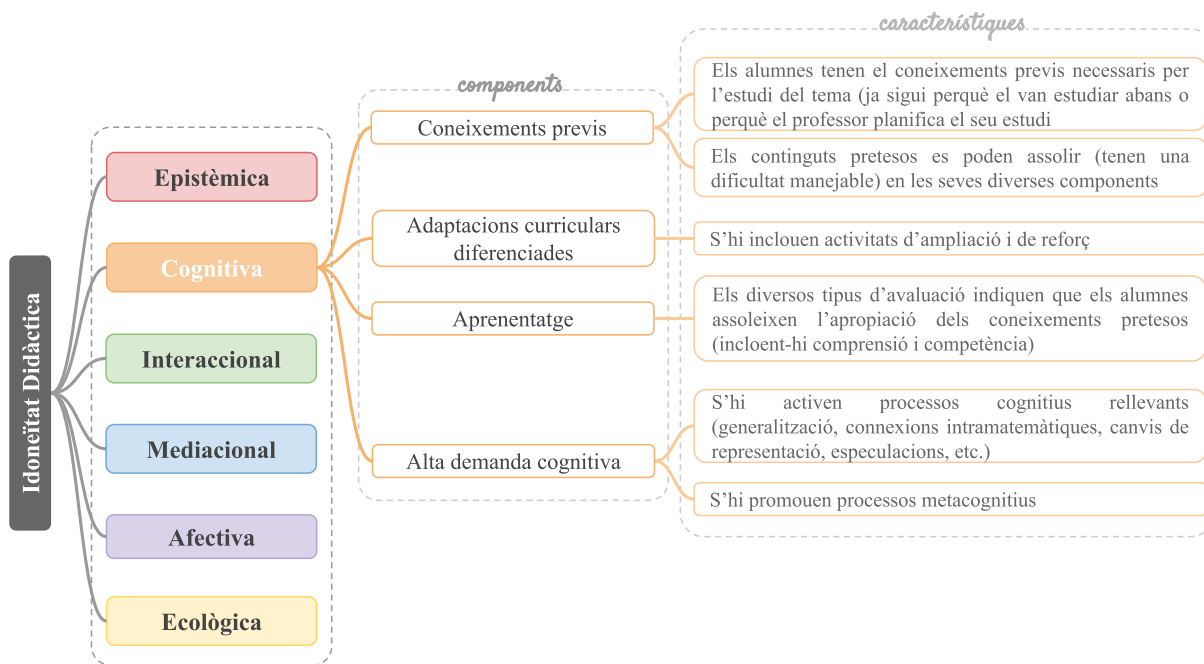


Figura 7.3.2.2. Components i característiques de la idoneïtat epistèmica segons Breda, Pino-Fan i Font (2016).

Font: Elaboració pròpia.

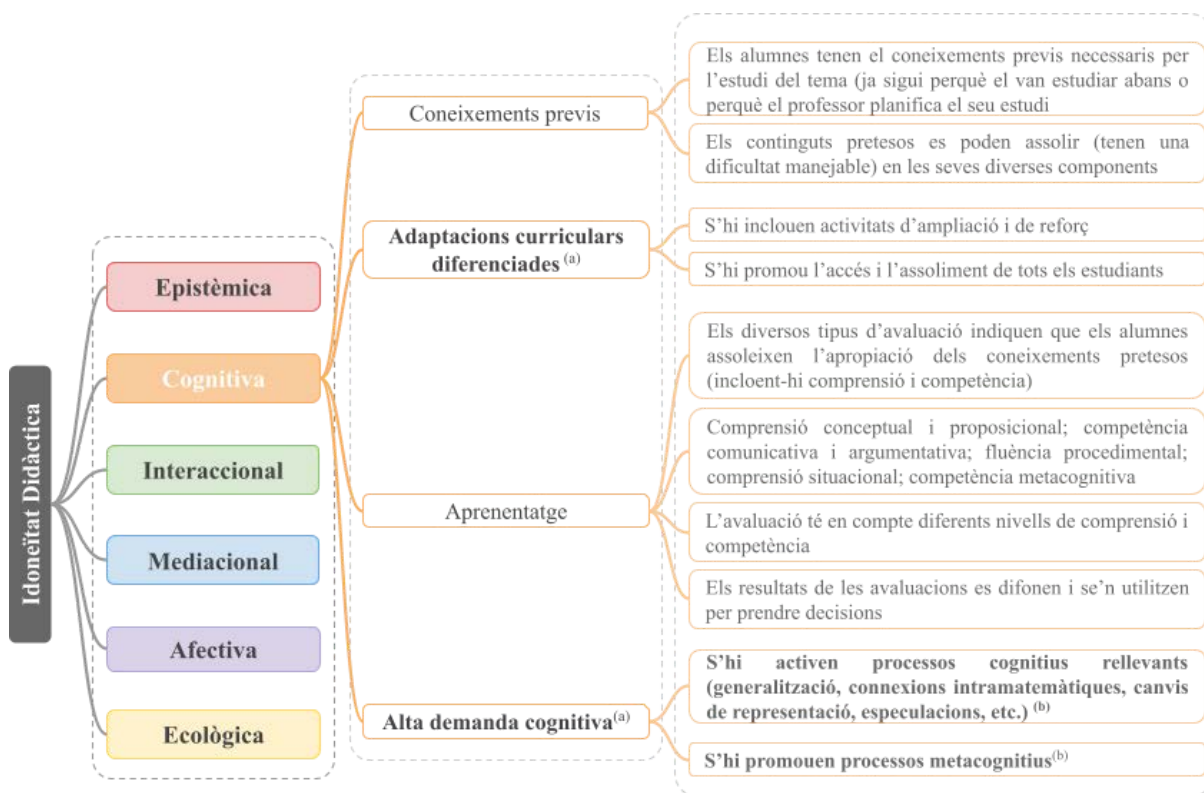


Figura 7.3.2.3. Components i indicadors de la idoneïtat cognitiva segons Godino (2013) considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font (2016).

Font: Elaboració pròpia.

7.3.3. Idoneïtat interaccional

L'assoliment del criteri general de negociació que correspon a la dimensió interaccional de la *idoneïtat didàctica* es pot verificar a partir dels indicadors de les components proposades per Godino (2013). Segons es mostra a la **Figura 7.3.3.1.**, hi ha quatre components de la *idoneïtat interaccional*: (1) interacció docent-discent, (2) interacció entre alumnes, (3) autonomia i (4) avaluació formativa.

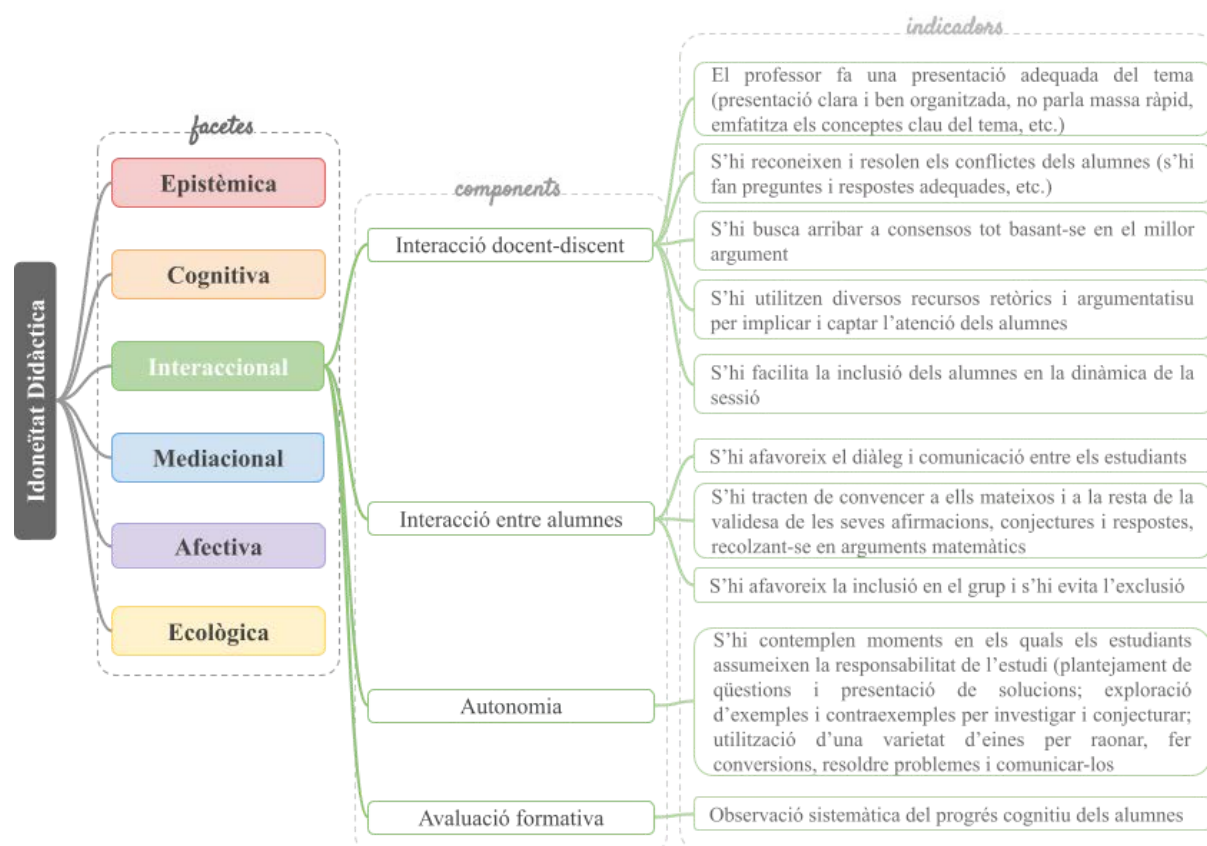


Figura 7.3.3.1. Components i indicadors de la *idoneïtat interaccional* segons Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

La proposta feta per Breda, Pino-Fan i Font (2016) presenta dos detalls que complementen el treball de Godino (2013) pel que fa a la component "interacció docent-discent": (a) el reconeixement dels conflictes dels alumnes mitjançant la identificació del silenci fet pels mateixos alumnes o fins i tot les seves expressions facials, i (b) el control per part del professor per evitar que hi hagi episodis d'exclusió a l'aula. Integrant aquestes dues característiques a la proposta de Godino (2013), com es presenta a la **Figura 7.3.3.2.**, s'arriba a la integració dels indicadors de la *idoneïtat interaccional* tenint en compte les contribucions de Breda Pino-Fan i Font (2016).

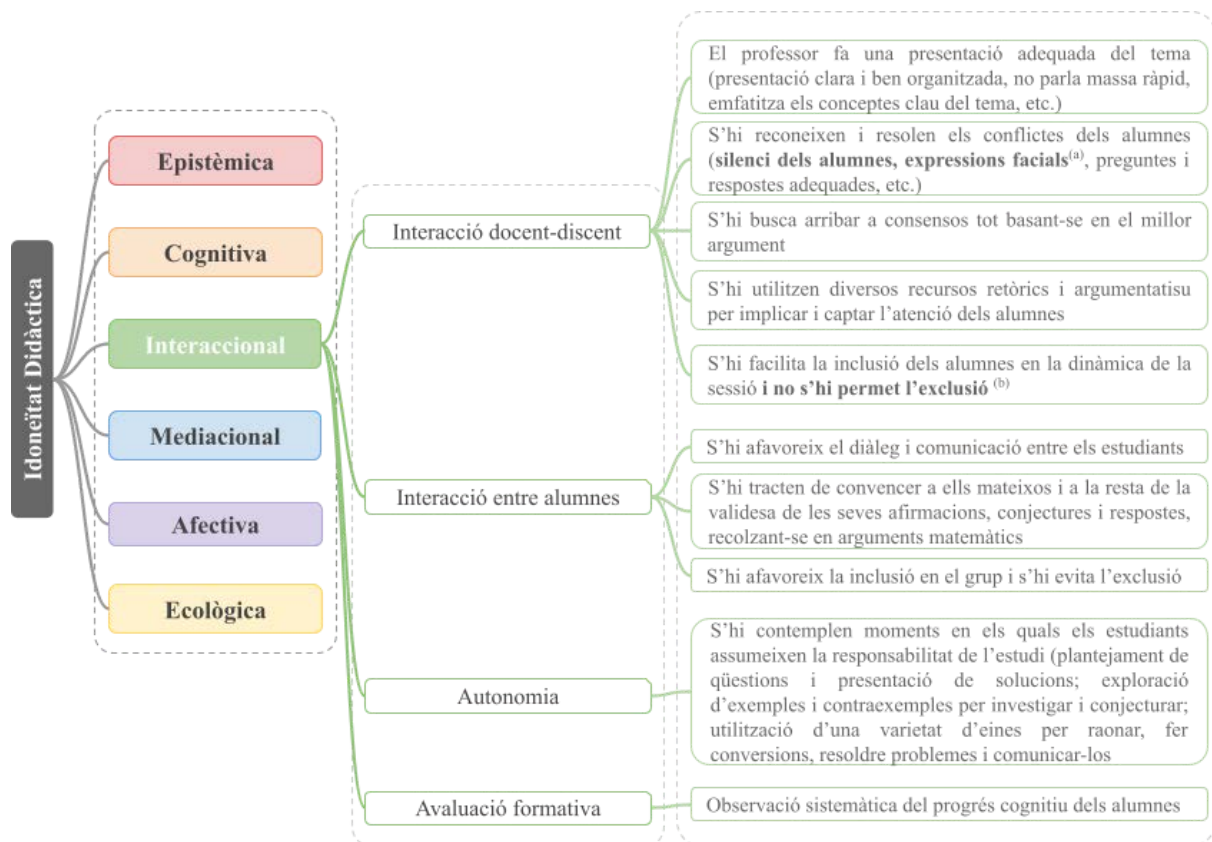


Figura 7.3.3.2. Components i indicadors de la *idoneïtat interaccional* segons Godino (2013) considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font (2016).

Font: Elaboració pròpia.

7.3.4. Idoneïtat mediacional

Un procés d'ensenyament assolirà òptimament la dimensió mediacional quan els alumnes tenen al seu abast els recursos materials i temporals que en necessiten (Godino, Batanero, Burgos i Gea, 2021). Per tant, els tres components presentats per Godino (2013) ajuden a reconèixer aquests aspectes en una proposta didàctica: (1) recursos materials, (2) nombre d'alumnes, horari i condicions de l'aula, i (3) temps (**Figura 7.3.4.1.**). Posteriorment, Breda, Pino-Fan i Font (2016) adapten el noms dels dos últims components presentats per Godino: (2) condicions del grup i de l'aula i (3) temps (per l'ensenyament en grup). Per tant, en afegir aquestes puntualitzacions s'arriba a un model integrat per descriure la faceta *mediacional* de la *idoneïtat didàctica* (**Figura 7.3.4.2.**).

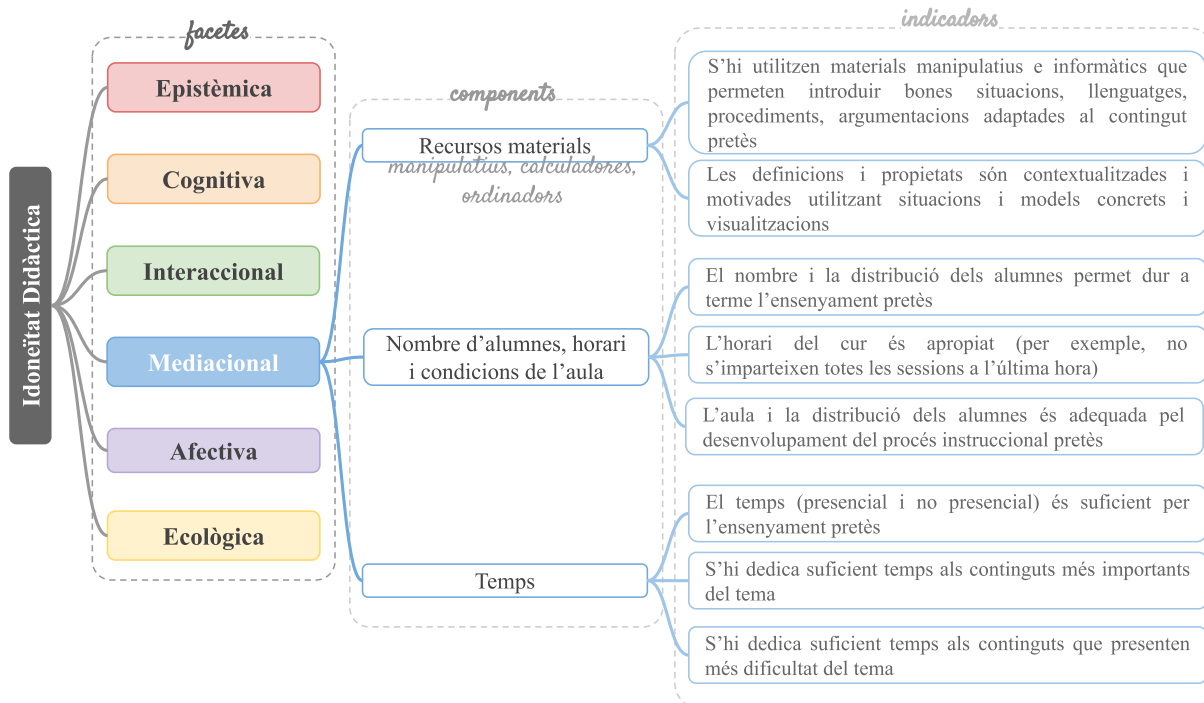


Figura 7.3.4.1. Components i indicadors de la idoneïtat mediacional segons Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

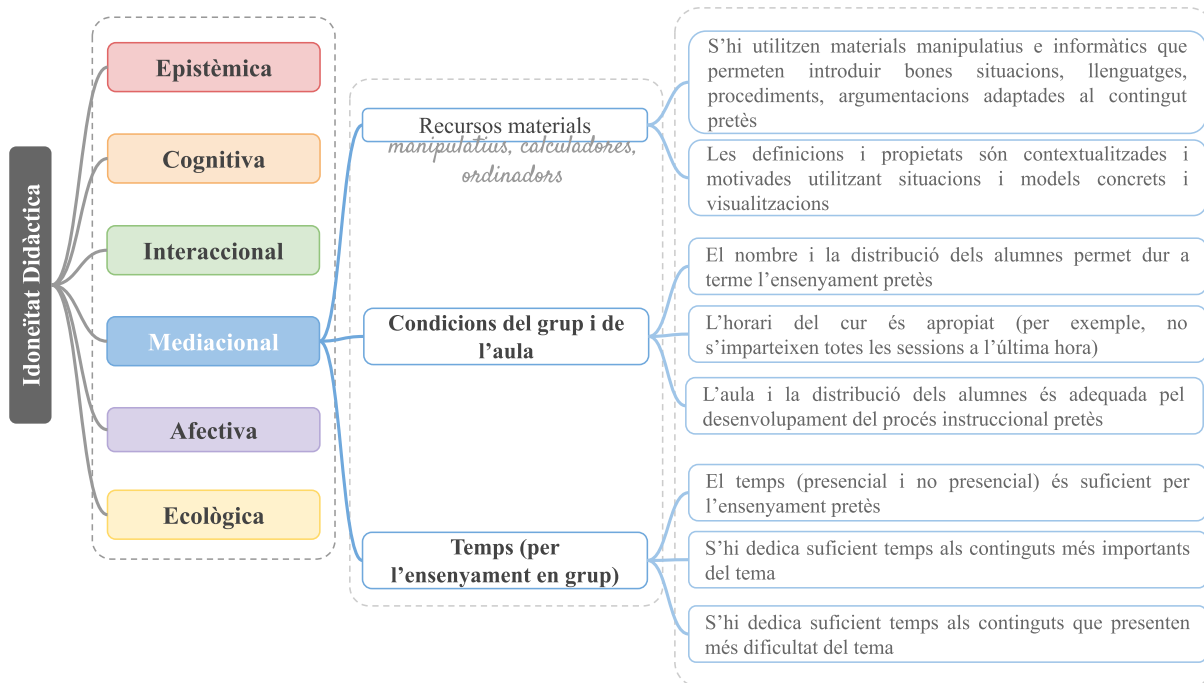


Figura 7.3.5.2. Components i indicadors de la idoneïtat mediacional segons Godino (2013) considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font (2016).

Font: Elaboració pròpia.

7.3.5. Idoneïtat afectiva

Godino, Batanero, Burgos i Gea (2021) marquen el criteri general d'implicació, associat a la *idoneïtat afectiva*, en termes d'assolir per part dels alumnes un alt grau d'implicació en les activitats portades a l'aula. Partint de la proposta de Godino (2013), es presenten a la **Figura 7.3.5.1.** els components de la dimensió afectiva acompanyats dels seus indicadors. Considerant que hi ha plena coincidència en la comunicació feta per part del grup de recerca de Breda, Pino-Fan i Font (2016), no es té cap addició a la proposta de Godino (2013). Aleshores, la *idoneïtat afectiva* s'integra de tres components: (1) interessos i necessitats, (2) actituds, i (3) emocions. A més, totes aquestes components es defineixen amb dos indicadors.

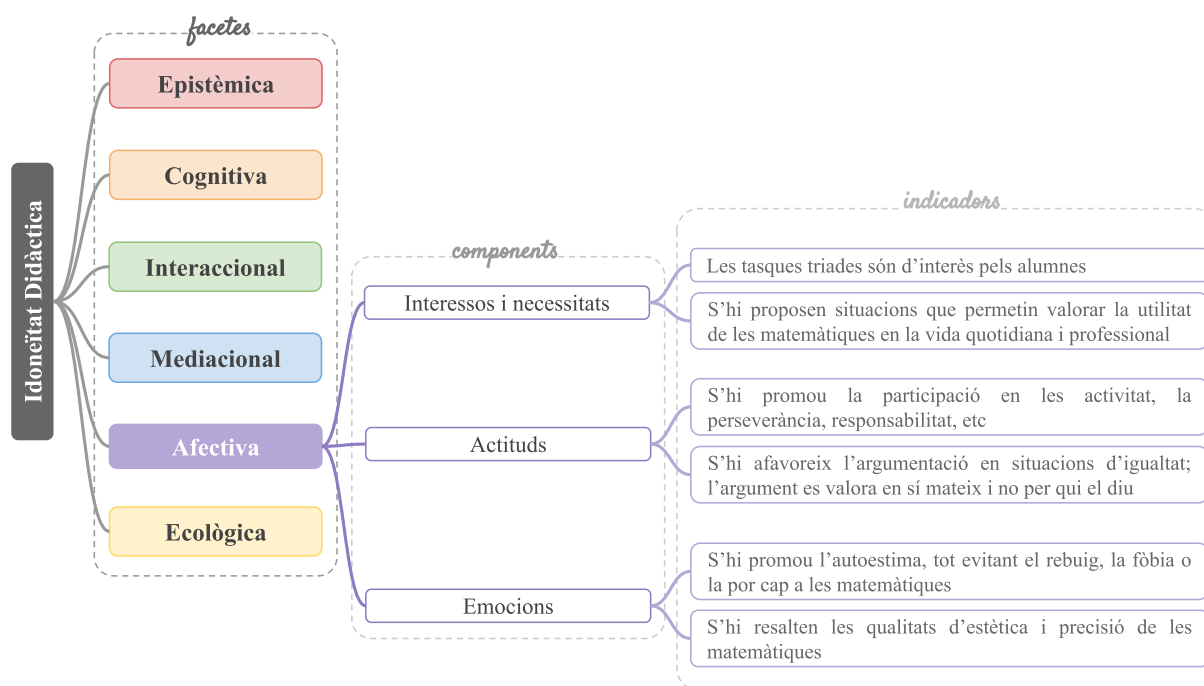


Figura 7.3.5.1. Components i indicadors de la *idoneïtat interaccional* segons Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

7.3.6 Idoneïtat ecològica

La sisena dimensió de la *idoneïtat didàctica* és l'ecològica. El criteri general que pertany a aquesta faceta fa referència l'adaptació, en el sentit de la necessitat de concordança projecte educatiu de centre - societat però vetllant per la incorporació de propostes didàctiques innovadores (Godino, Batanero, Burgos i, Gea, 2021).

Godino (2013) planteja cinc components de la *idoneïtat ecològica*: (1) adaptació al currículum, (2) connexions intra e interdisciplinars, (3) aplicació socio-professional i cultural, (4) apertura a la innovació didàctica, i (6) educació en valors (**Figura 6.3.6.1.**). La proposta de Breda, Pino-Fan i Font (2016) redueix aquest cinc indicadors a quatre: (1) adaptació al currículum, (2) connexions intra e interdisciplinars, (3) aplicació socio-professional i cultural i (4) innovació didàctica (**Figura 6.3.6.2.**).

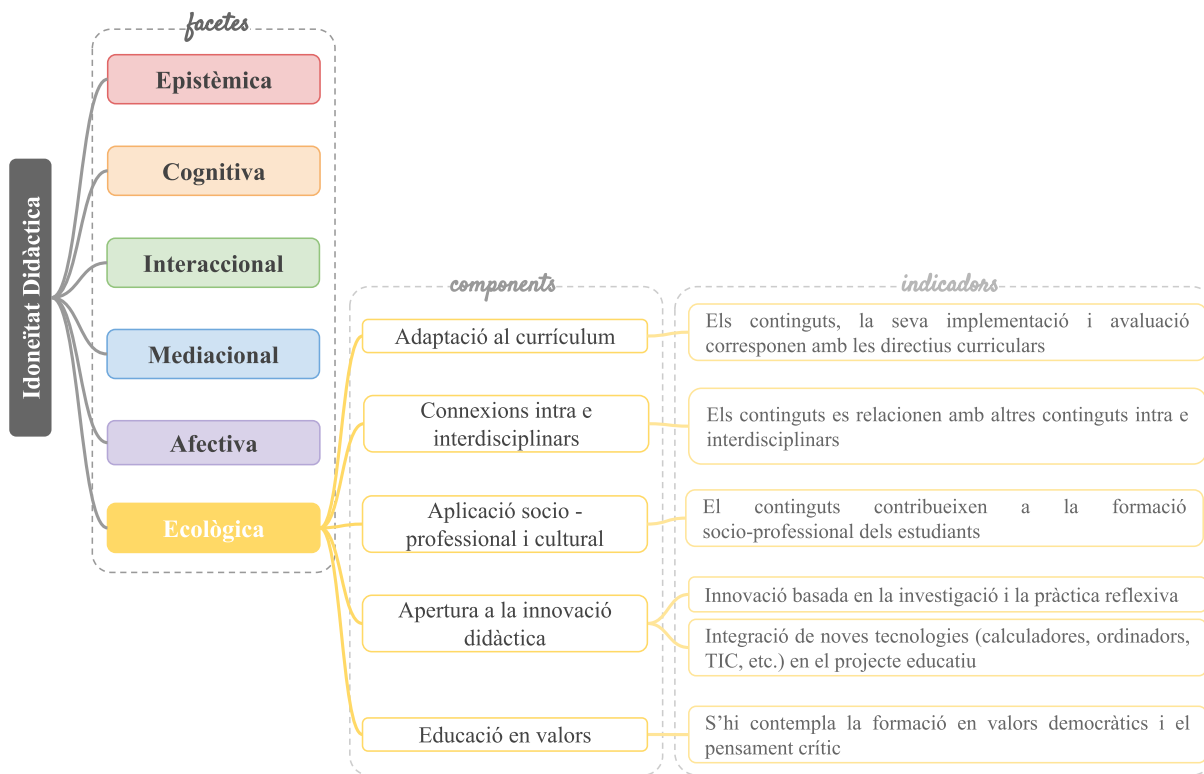


Figura 7.3.6.1. Components i indicadors de la *idoneïtat ecològica* segons Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

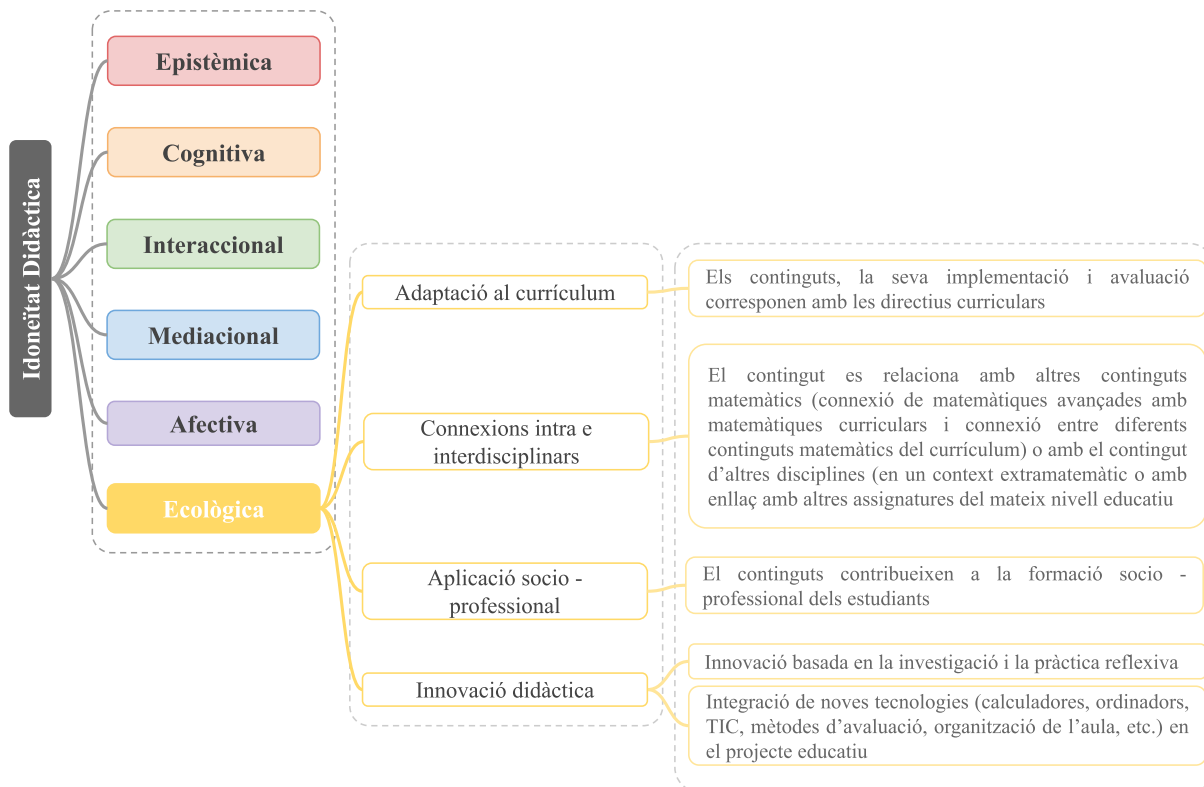


Figura 7.3.6.2. Components i indicadors de la *idoneïtat ecològica* segons Breda, Pino-Fan i Font (2016).

Font: Elaboració pròpia.

Com es pot apreciar a la **Figura 7.3.6.2.**, Breda, Pino-Fan i Font fan una modificació a la redacció del seu quart (i últim) component d'*idoneïtat ecològica*. A més, ells amplien la descripció de l'indicador de les components “connexions intra e interdisciplinars” i “innovació didàctica”. Per tant, una proposta integradora de les recerques de Godino (2013) i Breda, Pino-Fan i Font (2016) pot construir-se en afegir, al plantejament de Godino, la nomenclatura de la quarta component i els detalls dels indicadors de les components “connexions intra e interdisciplinars” i “innovació didàctica” (**Figura 7.3.6.3.**).

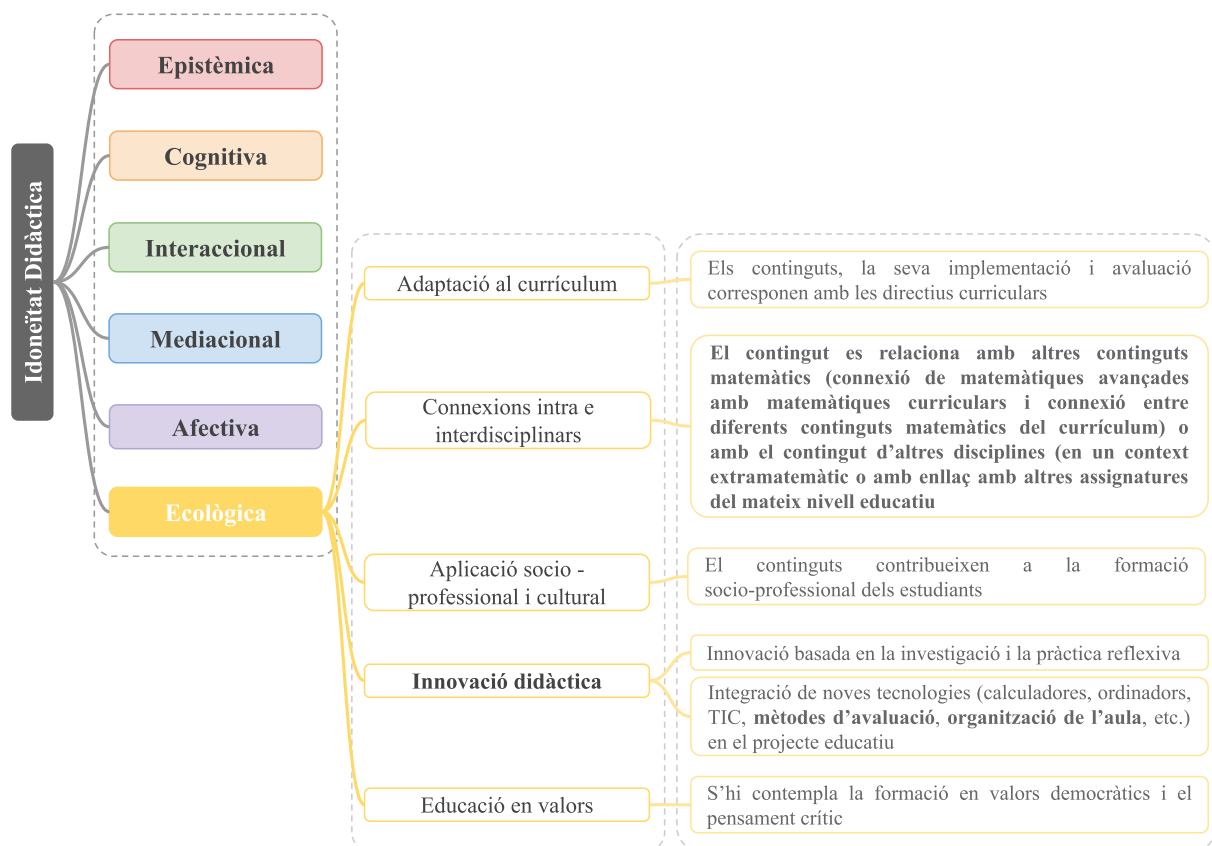


Figura 7.3.6.3. Components i indicadors de la *idoneïtat ecològica* segons Godino (2013) considerant les contribucions de Breda, Pino-Fan i Font (2016).

Font: Elaboració pròpia.

7.4. Aplicacions del constructe en l'anàlisi didàctica

El volum de treballs de recerca que han utilitzat la *idoneïtat didàctica* com eina d'anàlisi, valoració o discussió és molt ampli. Segons s'indica a la pàgina web “Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos” de la Universidad de Granada (<http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html>), el registre de comunicacions comença al 2005. A la taula 7.4.1. es mostra una selecció dels articles hi trobats. Com s'hi pot apreciar, el constructe de la *idoneïtat didàctica* ha sigut aplicada en diferents àmbits de la didàctica de les matemàtiques i de la formació de professorat.

Taula 7.4.1.

Selecció d'articles sobre la idoneïtat didàctica a la pàgina web de l'EOS

(<http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html>).

Any	Autors	Títol
2021	Malet, Giacomone i Repetto	La idoneïtat didàctica com eina metodològica: desenvolupament i contextos d'ús
2020	Castillo, Burgos i Godino	Elaboració d'una guia d'anàlisi de llibres de text de matemàtiques basada en la teoria de la idoneïtat didàctica
2019	Hummes, Font i Breda	Ús combinat de l'estudi de classes i la idoneïtat didàctica pel desenvolupament de la reflexió sobre la pròpia pràctica en la formació de professors de matemàtiques
2018	Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone	Elaboració d'indicadors específics d'idoneïtat didàctica en probabilitat: aplicació per la reflexió sobre la pràctica docent
2018	Beltrán-Pellicer, Giacomone i Burgos	Els vídeos educatius en línia des de les didàctiques específiques: el cas de les matemàtiques
2016	Godino	La idoneïtat didàctica com eina d'anàlisi i reflexió sobre la pràctica del professor de matemàtiques
2016	Aroza, Godino i Beltrán-Pellicer	Iniciació a la innovació i investigació educativa mitjançant l'anàlisi de la idoneïtat didàctica d'una experiència d'ensenyament sobre proporcionalitat
2015	Breda, Font i Lima	La noció d'idoneïtat didàctica i la seva aplicació en la formació de professors de matemàtiques
2015	Parra i Ávila	Cap a una idoneïtat didàctica en una classe de física
2013	Godino, Batanero, Rivas i Arteaga	Components i indicadors d'idoneïtat didàctica de programes de formació de professor en didàctica de les matemàtiques
2012	Godino, Rivas i Arteaga	Inferència d'indicadors d'idoneïtat didàctica a partir d'orientacions curriculars
2011	Pochulu i Font	Anàlisi del funcionament d'una classe de matemàtiques no significativa
2010	Alsina i Domingo	Idoneïtat didàctica d'un protocol sociocultural d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques
2008	Ramos i Font	Criteris d'idoneïtat i valoració de canvis en el procés d'instrucció matemàtica
2006	Godino, Becono, Font i Wilhelmi	Anàlisi i valoració de la idoneïtat didàctica de processos d'estudi de les matemàtiques

Font: Elaboració pròpia.

De tots aquests treballs, ens centrarem en les comunicacions de Pochulu i Font (2011) i de Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone (2018) perquè són els que tenen una relació més directa amb el treball desenvolupat en aquesta tesi doctoral.

7.4.1. Configuracions epistèmiques i idoneïtat didàctica

El punt de partida de l'anàlisi didàctica d'un procés d'instrucció matemàtica és la identificació dels objectes matemàtics que hi intervenen. Pochulu i Font (2011) fan ús de la noció *configuració epistèmica* (Font i Godino, 2006) per reconèixer els termes verbals, simbòlics i gràfic-simbòlics (llenguatge matemàtic), exercicis i exemples (situacions-problemes), les definicions, els procediments, les proposicions i els arguments utilitzats en l'episodi de classe estudiat (**Figura 7.4.1.1.**). La reflexió que porta cap a la representació de les relacions entre els objectes matemàtics mobilitzats en la tasca analitzada, també permet als investigadors la identificació de conflictes cognitius i semiòtics (Pochulu i Font, 2011).

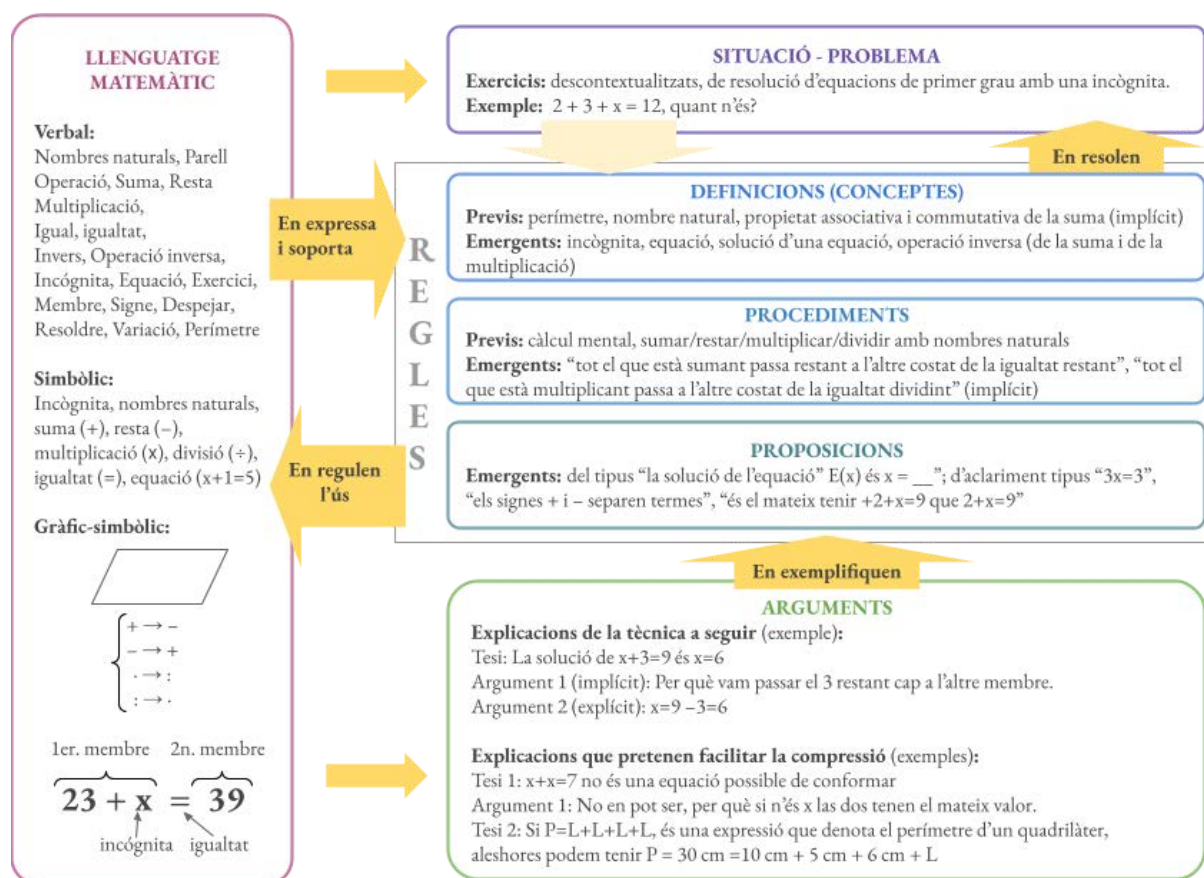


Figura 7.4.1.1. Configuració epistèmica de la sessió de classe (Pochulu i Font, 2011).

Font: Elaboració pròpia.

Amb l'aplicació de la noció *idoneïtat didàctica*, Pochulu i Font (2011) fan una valoració del procés d'instrucció matemàtica estudiat (**Taula 7.4.1.1.**). En ella donen arguments detallats per qualificar les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* (**Taula 7.4.1.1.**). L'argumentació amb la qual es valoren les sis facetes de la *idoneïtat didàctica* segueixen les orientacions donades per Font, Planes i Godino (2010), per tant, es tracten de narratives descriptives d'aspectes concrets de l'episodi d'aula analitzat. Com es pot apreciar a la **Taula 7.4.1.1.**, cap de les dimensions d'*idoneïtat didàctica* va assolir la valoració "alta": les idoneïtats

epistèmica, cognitiva i ecològica van ser les més baixes i les tres idoneïtats restants (afectiva, interaccional i mediacional) només van assolir la valoració “mitja”.

Taula 7.4.1.1.

Valoració de la idoneïtat didàctica del procés d'instrucció matemàtica analitzat (Pochulu i Font, 2011).

Idoneïtat	Valoració		
	Baixa	Mitja	Alta
Epistèmica	✓		
Cognitiva	✓		
Afectiva		✓	
Interaccional		✓	
Mediacional		✓	
Ecològica	✓		

Font: Elaboració pròpia.

7.4.2. Indicadors d'*idoneïtat didàctica* específics

Si bé, els indicadors de les components de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* són una “guia general” per analitzar un procés d'instrucció matemàtic, amb el treball de recerca de Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone (2018) es mostra l'aplicabilitat i capacitat d'adaptació de la teoria de la *idoneïtat didàctica* a una branca específica de les matemàtiques: la probabilitat. Els investigadors proposen una “guia de valoració de la *idoneïtat didàctica*” (GVID) per orientar la pràctica del professor de matemàtiques del nivell d'ESO centrant l'atenció en un contingut ben determinat. Les directrius, seguides per aquest grup d'investigadors, per establir els indicadors es basen en els criteris proposats amb anterioritat per Godino (2013) per les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica*.

Pel que fa a la primera dimensió de la *idoneïtat didàctica*, la *idoneïtat epistèmica*, l'anàlisi comença amb la consideració de quatre enfocaments: informal, subjectiu, freqüencial i clàssic (**Figura 7.4.2.1.**). Però, el desenvolupament d'aquests quatre significats requereix de la intervenció d'alguns aspectes de la *idoneïtat ecològica* per aconseguir el postulament dels indicadors relacionats amb els continguts de probabilitat del nivell d'ESO (Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone, 2018).

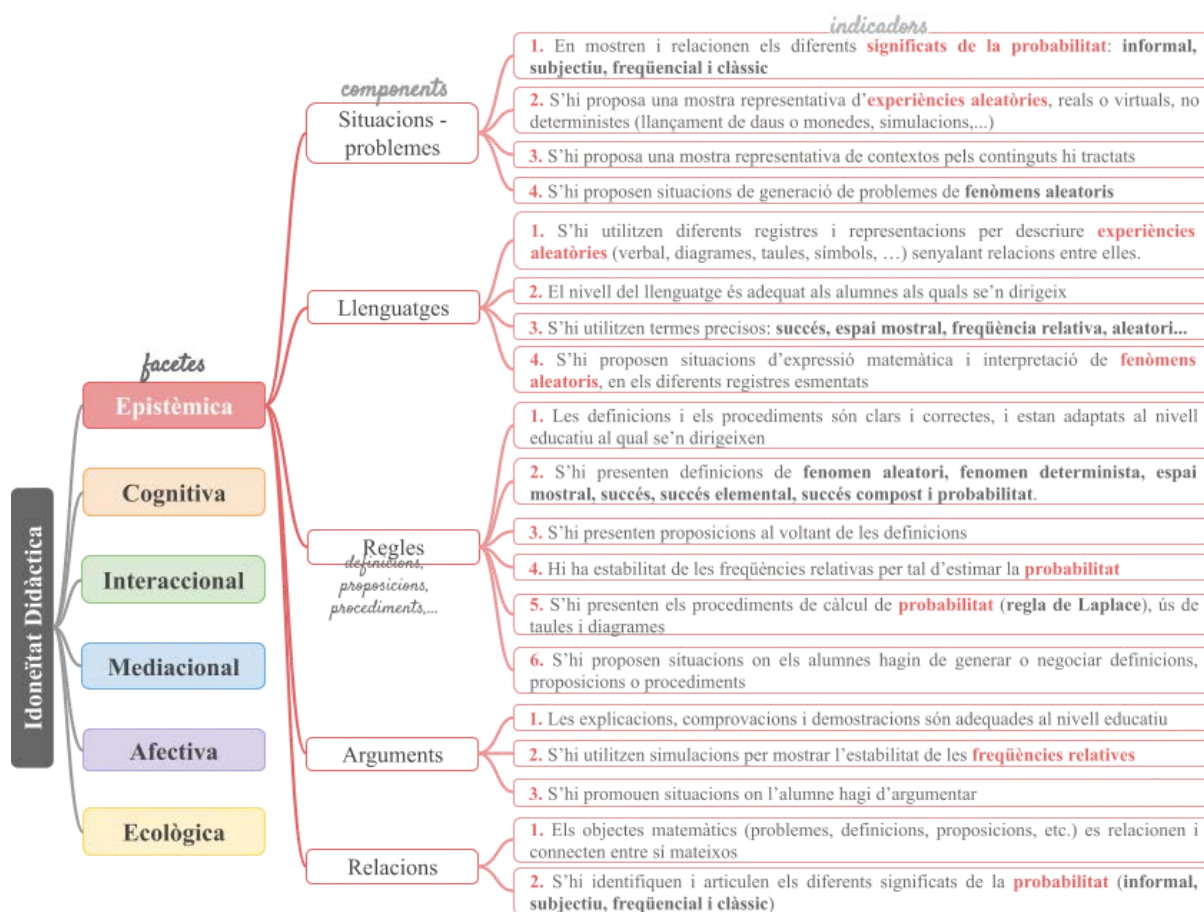


Figura 7.4.2.1. Indicadors de la idoneïtat epistèmica específics de probabilitat segons Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone (2018).

Font: Elaboració pròpia.

Els indicadors de la dimensió cognitiva, segona faceta de la *idoneïtat didàctica*, amb els quals es poden valorar processos d'instrucció matemàtica proposats per Godino (2013) són aplicables al cas de l'ensenyament de tòpics de probabilitat. Però, l'anàlisi de propostes didàctiques per portar a l'aula continguts de probabilitat requereix algunes addicions a la primera component, coneixements previs, per tal d'atendre els aspectes específics d'aquesta branca de l'ensenyament de les matemàtiques (**Figura 7.4.2.2.**).

Com ho mostra aquesta recerca, les facetes epistèmica i cognitiva de la *idoneïtat didàctica* són les més susceptibles d'adaptació a un procés d'instrucció matemàtica específic de probabilitat. En major mesura, amb els indicadors de la *idoneïtat epistèmica* es pot reflexionar amb precisió sobre els objectes matemàtics propis d'una tasca amb contingut de probabilitat. La resta de les facetes de la *idoneïtat didàctica* (interaccional, mediacional, afectiva i ecològica) són més de caire genèric (Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone, 2018).

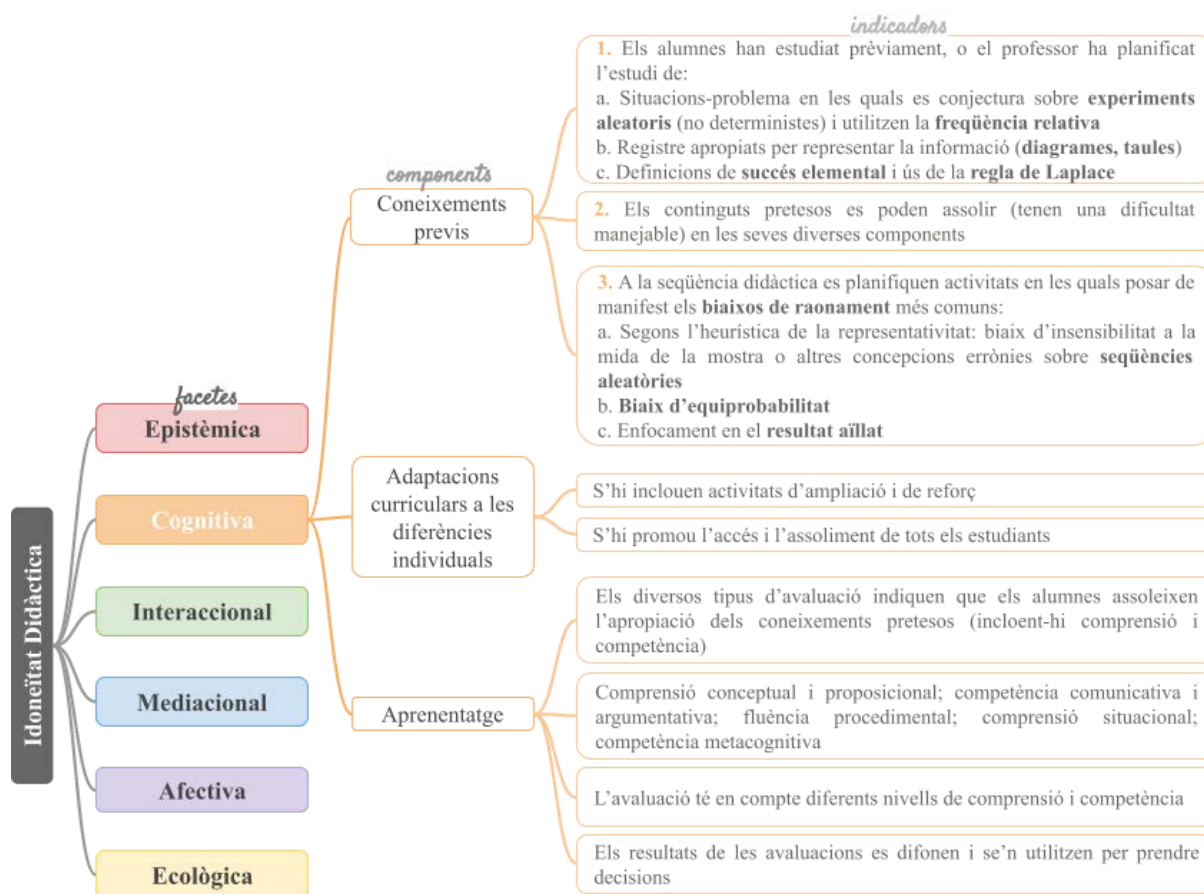


Figura 7.4.2. Indicadors de la *idoneïtat cognitiva* específics de probabilitat segons Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone (2018).

Font: Elaboració pròpia.

Per tant, el sistema general d'indicadors, components i dimensions d'anàlisi de l'activitat matemàtica que proposa l'EOS amb el constructe *idoneïtat didàctica* és aplicable a qualsevol contingut matemàtic, però amb el propòsit de puntualitzar els objectes matemàtics i les pràctiques matemàtiques d'un àrea particular de les matemàtiques és possible incorporar o modificar els indicadors de les components de les facetes d'adequació (Beltrán-Pellicer, Godino i Giacomone, 2018).

7.5. Aplicacions en l'anàlisi didàctica de l'ensenyament de la geometria

La comunitat d'investigadors que col·laboren amb l'EOS sumen avui dia un nombre important de publicacions (<http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/geometria.html>) (**Taula 7.5.1.**). Per qüestions de correspondència amb aquest treball de recerca es farà una breu referència a dos subtemes: (1) configuracions cognitives en geometria i (2) *idoneïtat didàctica* de tasques de geometria.

Taula 7.5.1.

Articles sobre aplicacions del constructe idoneïtat didàctica a continguts de geometria a la pàgina web de l'EOS
(<http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/pages/idoneidad.html>).

Any	Autors	Títol
2019	Molina, Font i Pino-Fan	Estructura dinàmica d'arguments analògics, abductius i deductius. un cur de geometria de l'espai com context de reflexió
2014	Castro, Santana, Neto i Órfão	Iniciació a l'investigació en l'educació matemàtica: exemple de dues tasques com recurso de Geogebra
2014	Sbitneva, Moreno i Valdez	Visualització d'objectes matemàtics no ostensius com interpretacions de registres semiòtics en àlgebra
2014	Moreno, Sbitneva i Cervantes	Un estudi sobre la comprensió de geometries: el cas del baricentre
2014	Sbitneva, Moreno i Valdez	De l'àlgebra lineal cap a la geometria: proposta didàctica basada en l'enfocament ontosemiòtic
2012	Godino, Cajaraville, Fernández i Gonzato	Una aproximació ontosemiòtica a la visualització en educació matemàtica
2012	Fernández, Godino i Cajaraville	Raonament geomètric i visualització espacial des del punt de vista ontosemiòtic
2011	Gonzato, Godino i Neto	Avaluació de coneixements didàctic - matemàtics sobre la visualització d'objectes tridimensionals
2010	Gonzato, Godino i Contreras	Anàlisi dels coneixements posat en joc en la resolució de tasques de visualització i orientació de cossos tridimensionals
2010	Pochulu	Significats atribuïts a la resolució de problemes amb software de geometria dinàmica durante un desenvolupament professional docent

Font: Elaboració pròpia.

Tercera Part. Desenvolupament de la Recerca

Capítol 8. Fonaments Metodològics

Al llarg de tota la història, l'ésser humà ha tingut inquietud per explicar i comprendre el sentit de la realitat i el món que l'envolta (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Creswell, 2003; Sabariego i Bisquerra, 2003). Aquesta activitat humana d'interpretació de la realitat (**Figura 8.1.**) ha anat generant coneixement relacionat amb els contextos històrics i socials del moment i lloc en els quals se'n va desenvolupar (Creswell, 2003). Tenint en compte la quotidianitat amb la qual es realitzen investigacions amb l'objectiu de donar resposta a les problemàtiques que es presenten cada dia (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego i Bisquerra, 2003), cal endinsar-se en l'estudi de la *metodologia*. Amb aquest terme, *metodologia*, es fa referència a la manera en la qual es condueix un treball de recerca, és a dir, com s'aborda el problema (o els problemes) de recerca, per tal de proposar-ne alternatives de solució (Taylor, Bogdan i DeVault, 2016).

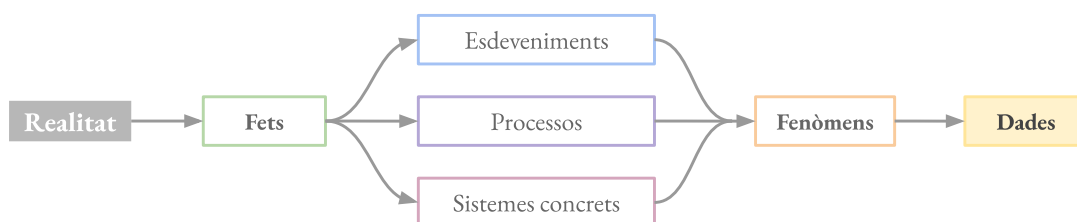


Figura 8.1. Relació entre fets, fenòmens i dades segons Arnal, del Rincón i Latorre (1992).

Font: Elaboració pròpia.

Si bé les ciències socials i la psicologia són àrees del pensament amb àmplia aplicació de la metodologia qualitativa (Flick, 2010), avui dia, aquesta metodologia es treballa a molt àmbits (Stake, 2010; Ruíz, 2012) i s'ha de reconèixer que així com hi ha aspectes quantitius a les recerques qualitatives de les Ciències Socials també n'hi ha de qualitius a les recerques quantitatives a les ciències exactes (Flick, 2010; Stake, 2010). Un bon exemple són les descripcions de les interpretacions dels investigadors fetes en llenguatge no científic o natural (Stake, 2010). La recerca qualitativa és un requeriment per tal comprendre un fenomen (Merriam, 1995), la qual cosa fa que hi hagi una necessitat de “sensibilitzar” els conceptes a partir de la creació de noves narratives que reflecteixen les particularitats de lloc, temps i context dels fenòmens social en estudi (Flick, 2010).

8.1 El coneixement científic

La descripció del *coneixement científic* es pot fer a partir dels seus atributs, com ara: empíric, d'aplicació del *mètode científic*, objectiu, analític, especialitzat, autocorrectiu, hipotètic, precís i comunicable i pràctic/útil (**Figura 8.1.1.**). Des de la perspectiva interpretativa, el *coneixement científic* de l'àmbit educatiu prioritza els coneixements relacionats amb les situacions i els problemes reals que permetin donar-los solució i transformar-los. Per tant, la producció del *coneixement científic* en les ciències de l'educació requereix la consideració de les qüestions històriques, socials, culturals i polítiques de la situació i dels individus involucrats (Sabariego i Bisquerra, 2003). El *coneixement* té el seu origen en la interpretació i el diàleg, per tant n'és una construcció social i subjectiva feta pels membres del sistema educatiu (professor i altres persones hi involucrades) mitjançant el diàleg entre col·legues i altres membres del sistema educatiu (Bisquerra, 2004).

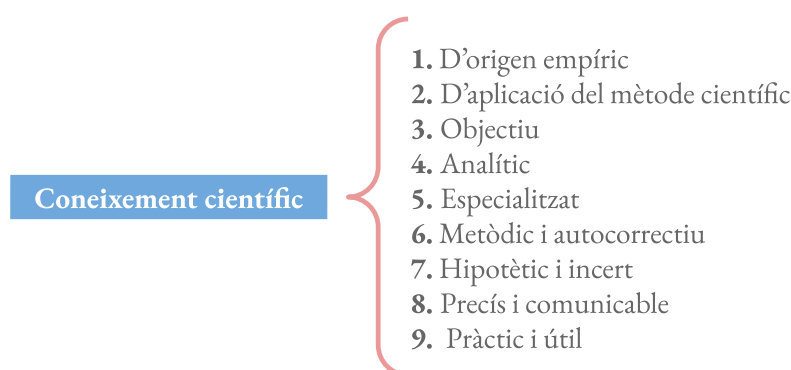


Figura 8.1.1. Característiques principals del *coneixement científic* segons Sabariego i Bisquerra (2003).

Font: Elaboració pròpia.

8.2. La investigació educativa

La investigació, com base de la construcció del coneixement, es pot anomenar *investigació científica* quan es caracteritza per ser empírica, controlada, crítica, sistemàtica, orientada cap al descobriment de nous coneixements (**Figura 8.2.1.**) (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego i Bisquerra, 2003) i intencional (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992). És a dir, n'és un procés cíclic en el qual es segueix el *mètode científic* (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego i Bisquerra, 2003).

En la pràctica docent, la *investigació científica* (com activitat empírica, controlada, crítica i sistemàtica) és una via per assolir el *coneixement científic* de la naturalesa dels fenòmens a l'aula (Sabariego i Bisquerra, 2003). La introducció de la *investigació científica* és un esdeveniment recent del segle XX amb el qual es va generar la *investigació educativa*. En aquest àmbit, a l'Estat Espanyol es van produir recerques per sistematitzar el

coneixement pedagògic i la traducció de produccions d'autors internacionals. A Catalunya, destaca el treball de recerca d'Alexandre Galí (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego, 2003).

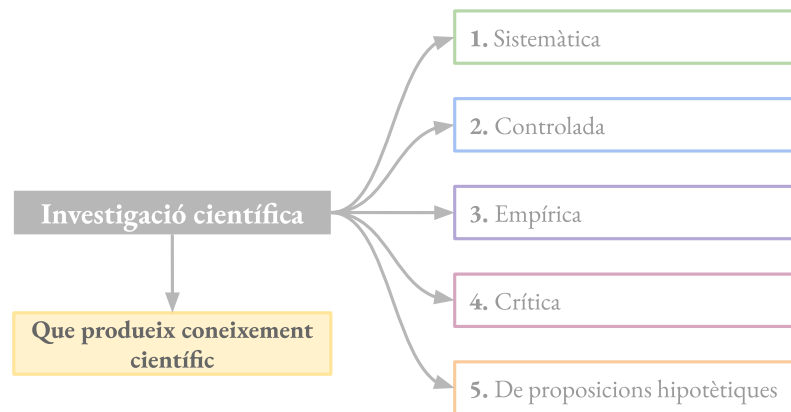


Figura 8.2.1. Característiques d'una investigació científica segons Sabariego i Bisquerra (2003).

Font: Elaboració pròpia.

Per *investigació educativa* s'entén: l'aplicació del mètode científic mitjançant un procés sistemàtic, organitzat i empíric amb el propòsit de conèixer, comprendre i explicar la realitat educativa (Sabariego i Bisquerra, 2003). També es pot descriure la *investigació educativa* en termes dels seus atributs (**Figura 8.2.2.**): relacionada amb fenòmens complexos i de major dificultat epistemològica, pluri-paradigmàtica, pluri-metodològica, multidisciplinària, de relacions peculiars entre l'investigador i l'objecte investigat, de major dificultat en aconseguir els objectius científics i delimitada. Tots aquests aspectes també reflecteixen els reptes de la *investigació educativa*. Primerament, la complexitat dels fenòmens educatius es relaciona amb la naturalesa dels problemes que hi ha a la realitat educativa (qualitativa, complexa, dinàmica, interactiva, interpretativa, subjectiva i de dimensions ètiques, morals i polítiques), per tant en són difícils de resoldre. En segon lloc, la dificultat epistemològica dels fenòmens educatius puntualitza la interacció de múltiples variables i en conseqüència la seva manca de precisió i impossibilitat de replicació i generalització. Els tercer, quart i cinquè trets, pluriparadigmàtic, plurimetodològic i multidisciplinari, fan referència a la diversitat de perspectives, mètodes, models, metodologies i disciplines que s'han de treballar de manera coordinada. En sisè terme es considera la relació entre l'investigador i l'objecte investigat, ja que la interpretació de l'investigador el converteix en una part del fenomen en estudi. La dificultat en aconseguir els objectius de la ciència, setè atribut, resideix en la variabilitat dels fenòmens educatius per la seva dependència amb el context, el període històric i social. En darrer lloc, hi ha una manca de claredat en la delimitació del fenomen educatiu que força a l'investigador "a mantenir una actitud oberta" (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Investigació educativa

- a. Alt nivell de **complexitat** dels fenòmens educatius
- b. Major **dificultat epistemològica** dels fenòmens educatius
- c. Pluriparadigmàtica
- d. Plurimetodològica
- e. Multidisciplinària
- f. Relació entre l'investigador i l'objecte investigat
- g. Major **dificultat en aconseguir els objectius** que la ciència
- h. Delimitació

Figura 8.2.2. Característiques de la *investigació educativa* segons Arnal, del Rincón i Latorre (1992).

Font: Elaboració pròpia.

La millora de l'educació depèn de la comprensió dels processos educatius i que tant la comprensió com la millora són conseqüència de la cerca i descobriment de nous coneixements a l'àmbit educatiu (Sabariego i Bisquerra, 2003). Per tant, l'objectiu de la *investigació educativa* és, no solament la construcció de ciència i el desenvolupament del *coneixement científic* de l'educació, sinó també la millora de l'educació (Ballester, 2004; Sabariego i Bisquerra, 2003). De fet, la investigació és un requisit per assolir una educació, o la intervenció educativa, de qualitat. Per tant, el professor esdevé investigador vinculant la seva actuació docent amb la tasca de recerca.

Els aspectes que validen aquest darrer plantejament es resumeixen en vuit punts (**Taula 8.2.1.**): (1) el desenvolupament de conceptes que milloren la percepció dels fenòmens educatius, (2) l'actitud crítica al voltant dels processos educatius en estudi i del sistema educatiu, (3) el reconeixement de les limitacions i deficiències del sistema educatiu, (4) el foment del desenvolupament dels models d'activitat educativa, dels materials didàctics, dels enfocaments curricular i dels procediments d'avaluació, (5) l'obtenció de dades amb les quals és possible planificar de manera racional el sistema educatiu a partir de l'aplicació de processos de toma de decisió òptims que ajudin a la transformació del sistema educatiu, (6) la valoració dels programes i centres, l'avaluació dels efectes de l'aplicació de processos de reordenació i innovació del sistema educatiu per superar el desconeixement de les estructures i interaccions dels fenòmens educatius, (7) l'assoliment d'un coneixement més ampli de les variables dels fenòmens educatius, i (8) la millora de la qualitat de l'activitat educativa dels mateixos investigadors (Ballester, 2004).

Concretament, l'objectiu de comprendre els fenòmens que són objecte d'estudi de la *investigació educativa* fa que aquest tipus d'investigació es desenvolupi de manera preferent amb una *metodologia qualitativa* feta des d'un enfocament *humanístic* i *interpretatiu* amb bases *naturalistes* i *fenomenològiques*. Les tècniques habituals de recollida de dades qualitatives són les observacions participants, les entrevistes, el diari i l'anàlisi de documents (Sabariego, 2004).

Taula 8.2.1.

Suposats i funcions que validen la contribució de la investigació educativa en la millora de l'educació (Ballester, 2004)

La investigació educativa millora l'educació perquè...
1. Desenvolupa conceptes, enfocaments i esquemes que milloren la percepció del fenòmens educatius
2. Té una actitud crítica sobre els processos educatius, així com sobre l'estructura i eficàcia del sistema educatiu
3. Fonamenta els anàlisis en les limitacions i deficiències contrastades del sistema educatiu
4. Fonamenta el desenvolupament de models d'activitat educativa, materials didàctics, currículum i avaluació
5. Permet l'obtenció de dades per planificar racionalment el sistema educatiu, optimitzant processos
6. Permet avaluar els efectes dels processos de reordenació i innovació del sistema educatiu
7. Permet arribar a un coneixement més profund de les variables que condicionen els fenòmens educatius
8. Contribueix a la millora de la qualitat de l'activitat educativa dels investigadors

Font: Elaboració pròpia.

8.3. La metodologia qualitativa

La perspectiva qualitativa serveix per la identificació dels aspectes particulars d'una situació. Les investigacions qualitatives es poden definir com “mètodes per estudiar com funciona les situacions on intervenen els éssers humans en situacions particulars” (Stake, 2010). Investigadors com Corbin i Strauss (2015) defineixen la recerca qualitativa com “una forma d'investigació en la qual un investigador o investigadors designats recullen les dades i les interpreten, fent de l'investigador part del procés de recerca i participant de les dades que hi proveeix”.

La metodologia qualitativa és una aproximació al món empíric mitjançant un tipus de recerca amb a la qual s'hi produeixen dades descriptives (Stake, 2010; Taylor, Bogdan i DeVault, 2016; Sabariego, 2004). Ruíz (2012) reconeix la complexitat per definir el que és un estudi qualitatiu, però per una altra banda, explica els mètodes qualitatius com una manera d'investigar els fenòmens socials en els quals es tenen uns objectius ben determinats per respondre adequadament a problemes concrets als que s'enfronta una recerca.

L'investigador, dins un estudi qualitatiu, tracta d'explicar des de la seva perspectiva personal una situació donada en un context determinat. A més, el mateix investigador és una part rellevant de la recerca perquè la seva experiència és una peça clau en l'observació i interpretació de les dades. Per tant, es converteix en un instrument de recollida de dades amb un valor únic i inigualable que li dona la seva pròpia formació i

història personal. Però la tasca d'explicar com es dona una situació no és senzilla i potser tampoc ajuda a trobar-ne les seves causes. Més encara tenint en compte la dificultat que comporta tenir sota control totes les condicions d'un estudi de camp de la branca social: el comportament dels participants, la utilització adequada dels materials emprats, l'obtenció correcta de les dades, etc. Per tant, per comunicar el funcionament d'un esdeveniment social particular cal fer èmfasi en les seves característiques individuals: lloc i temps, per exemple. (Stake, 2010).

L'activitat professional del professor és susceptible d'anàlisi qualitatiu quan es fan servir instruments de recollida de dades, com ara: fitxes, notes en el quadern, quaderns de treball, etc., que contenen informació de caire qualitatiu. Els fenòmens educatius es caracteritzen per ser: (1) experimentals, (2) situacionals, (3) personalistes i (4) interpretatius. D'acord a Stake (2010) i Creswell (2003), la metodologia qualitativa inclou sis característiques principals (**Figura 8.3.1.**), que serveixen per discutir aquests quatre trets dels fenòmens educatius. Primerament, el tret experimental fa referència a la seva orientació al treball de camp on els instruments de recollida de dades provenen de l'observació dels participants des de la perspectiva de l'observador. El segon aspecte, el situacional, correspon al context, la particularitat de la situació, els elements susceptibles de comparació, els detalls dels objectes i les activitats, èmfasi en la condició d'unicitat de la situació i la concepció holística de tots els elements que hi intervenen. Seguint amb la tercera característica, la personalista, en subratlla la voluntat d'entendre les percepcions individuals des d'una postura d'empatia que cerqui les particularitats i valori la diversitat; però sense contaminar l'experiència amb intervencions intrusives que modifiquin el flux natural de la situació. Com a quart atribut, interpretatiu, remarca el punt clau d'un estudi qualitatiu: el significat, des de diferents punts de vista i respectant la intuïció, de les accions i interaccions entre els éssers humans (Stake, 2010).

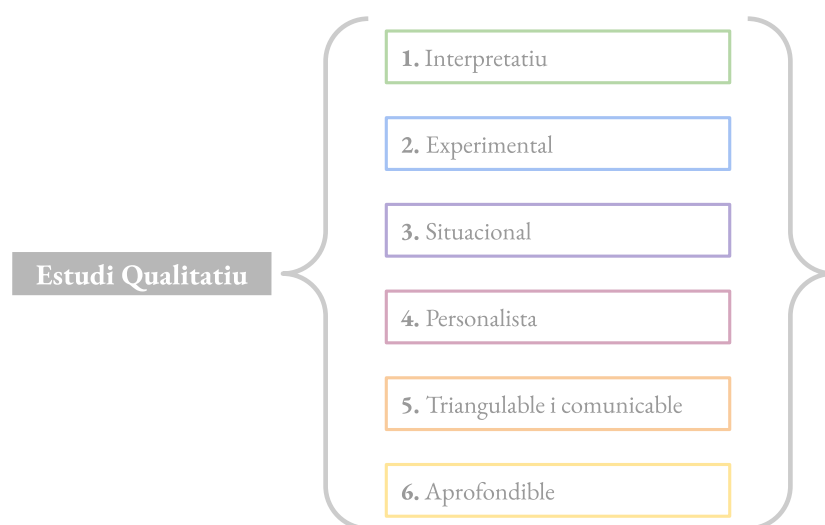


Figura 8.3.1. Característiques principals d'un Estudi Qualitatiu segons Stake (2010).

Font: Elaboració pròpia.

A més a més de les característiques d'un estudi qualitatiu que s'han esmentat més a dalt, els autors de referència en metodologies qualitatives destaquen cinc principis o guies que condueixen aquest tipus de recerca: (1) introducció analítica, (2) proximitat, (3) comportament ordinari, (4) estructura i (5) focus descriptiu (**Figura 8.3.2.**). D'entrada, el principi-guia d'introducció analítica indica que un estudi qualitatiu s'ha de començar per observar amb detall i des de la proximitat dels fets amb l'objectiu de descobrir els trets locals i específics del fenomen. Per tant, dins aquest primer principi-guia es recomana a l'investigador que en les seves interpretacions eviti les generalitzacions i les consideracions massa teòriques i idealitzades. El segon principi-guia pels estudis qualitius suggereix la proximitat entre l'investigador i l'objecte d'estudi. És a dir, que l'observació se centri en les situacions i els individus que hi participen. El tercer principi-guia fa referència al context on es troben les situacions-problema rellevants: la vida quotidiana. En especial en remarca que es doni major importància a tots aquells problemes amb els quals s'alteri la rutina social. El quart principi-guia de l'estudi qualitatiu correspon al descobriment de l'estructura com a punt clau de la recerca. Així, l'investigador ha de tenir cura en la interpretació dels significats i els contextos rellevants de la situació observada per tal d'identificar l'ordre natural que es produeix de la interacció social, les circumstàncies o els costums. En últim lloc, el cinquè principi-guia de l'estudi qualitatiu es centra en el reconeixement dels nuclis d'interès. O sigui, la identificació dels fenòmens que es repeteixen en períodes i espais determinats. En altres termes, s'ha d'emfatitzar la importància de l'explicar i predir els fenòmens a més d'identificar-los i exposar-los (Ruíz, 2012).

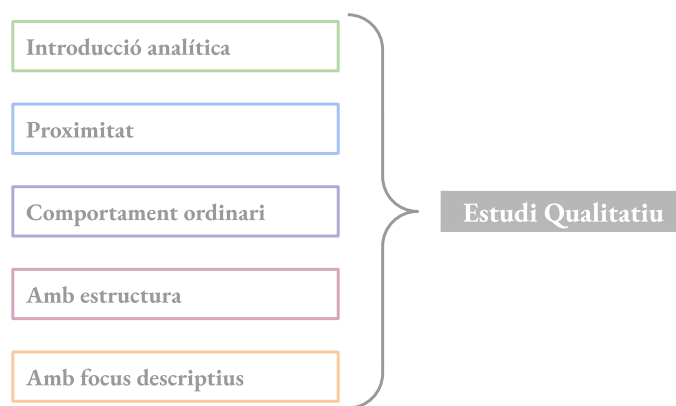


Figura 8.3.2. Principis-guia d'un estudi qualitatiu (Ruíz, 2012).

Font: Elaboració pròpia.

Entre les varietats en les quals es pot desenvolupar un estudi qualitatiu se'n troben els estudis: (1) etnogràfics, (2) naturalístics, (3) fenomenològics, (4) hermenèutics i (5) holístics (**Figura 8.3.3.**) (Stake, 2010).

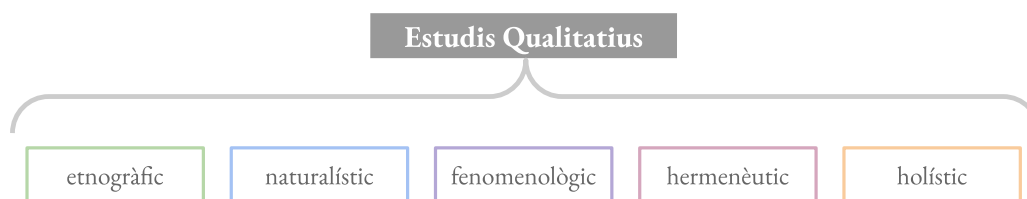


Figura 8.3.3. Tipus d'Estudis Qualitius segons Stake (2010).

Font: Elaboració pròpia.

8.3.1. L'enfocament interpretatiu

La *investigació educativa* es pot desenvolupar des de diferents perspectives que ajuden a representar la realitat a l'àmbit de l'educació. Des de la perspectiva interpretativa presentada per Koetting (citada per Arnal, del Rincón i Latorre, 1992), la tasca interpretativa té cinc dimensions: interessos, ontologia, relació subjecte/objecte, propòsit, explicació i axiologia (**Taula 8.3.1.1.**).

Taula 8.3.1.1.

Dimensions de la perspectiva interpretativa segons Koetting (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Dimensió	Perspectiva interpretativa
Interessos	Comprensió, interpretació (comprensió mútua compartida)
Ontologia	Naturalesa de la realitat: construïda, holística, divergent i múltiple
Relació subjecte-objecte	Interrelació, relació amb influència de factors subjectius
Propòsit	Generalització: hipòtesi de treball en un context i temps fixes amb explicacions ideogràfiques, inductives, qualitatives, centrades en les diferències
Explicació	Causalitat associada a la interacció entre els factors
Axiologia	Paper dels valors: valors donats que influeixen en la selecció de la teoria, el mètode i l'anàlisi

Font: Elaboració pròpia.

Tenint en compte la perspectiva interpretativa de Koetting (citada per Arnal, del Rincón i Latorre, 1992), una *investigació educativa* pot caracteritzar-se per deu trets: (1) la naturalesa de la realitat, (2) la finalitat de la recerca, (3) la relació entre el subjecte i l'objecte d'estudi, (4) el coneixement, (5) la metodologia, (6) els criteris de qualitat, (7) les tècniques, (8) l'anàlisi de les dades, (9) les seves aportacions i (10) les seves limitacions (**Taula 8.3.1.2.**). Per explicar la naturalesa de la realitat, primer tret del plantejament interpretatiu, s'ha de tenir una visió del món com una realitat que depèn de qui observa (subjectiva), que canvia (dinàmica), que es produeix de l'activitat humana (construïda) i que es pot interpretar de formes

atípiques (divergent). La finalitat de la *investigació educativa*, segon tret del plantejament interpretatiu, es focalitza en la comprensió i interpretació d'una realitat molt particular: la realitat educativa (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego, 2004). L'activitat de l'investigador radica en la cerca de significats dels individus involucrats, percepcions, intencions i accions (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Ballester, 2004; Sabariego, 2004). El tercer tret del plantejament interpretatiu és la relació d'afectació que hi ha entre el subjecte i l'objecte. Això es fa evident amb la intervenció de l'investigador, qui s'involucra en la recerca de tal manera que es produeix una interrelació entre la realitat i l'objecte d'investigació. El coneixement de tipus idiogràfic, quart aspecte del plantejament interpretatiu, s'explica en termes de la seva naturalesa qualitativa i inductiva. Però també es reconeix per la seva particularitat i temporalitat: el coneixement produït correspon a un context i període de temps molt determinats. A l'aspecte metodològic, cinquè atribut del plantejament interpretatiu, la *investigació educativa* es relaciona amb les metodologies qualitatives com l'hermenèutica, o la dialèctica, entre d'altres (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego, 2004). Els criteris de qualitat del fonament teòric interpretatiu, sisè tret identificatiu, demanen la credibilitat, la transferibilitat i la confirmació de la *investigació educativa* en qüestió (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego, 2004). Al setè aspecte del plantejament interpretatiu, tècniques per recollir dades, es presenten les estratègies més adients per obtenir informació: per exemple, l'observació participativa, les entrevistes, l'anàlisi d'evidències documentals (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego, 2004) i/o els grups de discussió (Ballester, 2004). El plantejament interpretatiu, especifica un vuitè aspecte sobre l'anàlisi de dades que coincideix amb la naturalesa qualitativa: l'anàlisi del contingut, la utilització de la inducció analítica i la triangulació. Pel que fa a les aportacions a l'àmbit educatiu, considerades com el novè tret del plantejament interpretatiu de la *investigació educativa*, s'emfatitza l'objectiu de la tasca de recerca: la comprensió i la interpretació dels fenòmens que pertanyen a la realitat educativa. Tot i això, dins aquest novè tret s'adverteix sobre les dificultats per establir "generalitzacions de la realitat suficientment objectives per ser considerades científiques" (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Sabariego, 2004; p. 72). Finalment, al desè tret del plantejament interpretatiu es reconeixen les limitacions de la seva aplicació dins l'àmbit educatiu: la pròpia subjectivitat de la recerca (Sabariego, 2004).

L'enfocament interpretatiu s'acostuma dur a terme a recerques d'enfocament metodològics diferents, com ara: qualitatiu, fenomenològic, naturalista, humanista o etnogràfic (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

A la metodologia qualitativa es remarquen els aspectes bàsics que comporta una recerca desenvolupada des dels plantejaments interpretatiu i naturalista (**Taula 8.3.1.3.**). Per una banda en suposa que els processos socials investigats són de naturalesa interpretativa, holística, dinàmica i simbòlica. Un altre suposat bàsic és el factor de constitució dels significats socials: el context. En tercer lloc se'n suposa a l'acció humana com objecte d'estudi i d'origen de la constitució dels significats que les persones involucrades els hi donen. Per

limitar aquest darrer i quart supòsit, el cinquè supòsit estableix la supremacia de la comprensió teleològica (com objecte de la construcció teòrica) sobre l'explicació de les causes que provoquen l'acció humana en estudi. El darrer supòsit indica les pautes per assolir l'objectivitat: adreçar-se als protagonistes de l'acció humana en estudi per accedir als seu significat (Sabariego, 2004)

Taula 8.3.1.2.

El plantejament interpretatiu (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Fonament teòric	Interpretatiu
Naturalesa de la realitat	subjectiva dinàmica construïda divergent
Finalitat	comprensió e interpretació significats
Relació subjecte-objecte	afectació implicació de l'investigador interrelació investigador-investigat
Coneixement	idiogràfic qualitatiu inductiu
Metodologia	hermenèutica dialèctica
Criteris de qualitat	credibilitat transferibilitat confirmació
Tècniques	observació participant entrevistes anàlisi documental
Anàlisi de dades	qualitatiu
Aportacions	comprensió i interpretació
Limitacions	subjectivitat

Font: Elaboració pròpia.

8.3.1.1. La tradició humanista d'investigació

Plummer (citada per Ruíz, 2012) presenta dos plantejaments oposats per desenvolupar la recerca social: el humanista i el positivista (**Taula 8.3.1.1.1.**). En termes generals, el positivisme assumeix que s'arriba a la veritat a partir del coneixement que prové de mesures. Per aquesta raó, el centre de l'anàlisi del plantejament positivista acostumen a ser les dades estadístiques que provenen dels experiments i estudis descriptius i

comparatius. Contràriament, el plantejament humanista (**Taula 8.3.1.1.1.**) centra l'atenció en l'individu participant (focus d'estudi); en el fenomen i la perspectiva (epistemologia); en l'observació, interpretació, comprensió i descripció (tasca); relata històries (teoria) i manté un compromís ètic i polític alhora que és igualitari (valors) (Ruíz, 2012).

Taula 8.3.1.3.

Aspectes bàsics de la perspectiva qualitativa, interpretativa i naturalista (Sabariego, 2004).

Perspectiva qualitativa, interpretativa i naturalista
1. Naturalesa dels processos socials i d'investigació
2. Context i constitució de significats
3. Acció humana com objecte d'investigació
4. Comprensió teleològica com objecte de la construcció teòrica
5. Objectivitat com producte de l'accés als significats

Font: Elaboració pròpia.

Taula 8.3.1.1.1.

La perspectiva humanista segons Plummer (Ruíz, 2012).

Perspectiva Humanista	
Focus d'estudi	Únics, idiogràfics Centrats en l'humà Allò que és interior, subjectiu Significat, sentiment
Epistemologia	Fenomenologia Realista Perspectivista
Tasca	Interpretació, comprensió Descripció Observació
Estil	Suau, càlid Imaginatiu Vàlid, real, substancial
Teoria	Inductiva, concreta Relata històries
Valors	Compromís ètic i polític Igualitaris

Font: Elaboració pròpia.

8.3.1.1.1. La perspectiva fenomenològica

A l'inici del segle XX, Husserl va crear l'escola del pensament anomenada fenomenologia. El principi de la filosofia fenomenològica més rellevants per a la perspectiva interpretativa de la metodologia qualitativa són: la primacia de l'experiència subjectiva, la importància del context en l'estudi de les perspectives personals d'un fenomen i l'interès en el coneixement de les experiències i interpretacions de les persones quan interaccionen (citats per Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Tot i que hi ha poques referències sobre estudis de caire fenomenològic a l'àmbit educatiu (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992), la *investigació educativa* des d'un enfocament fenomenològic (Sabariego, 2004) es pot desenvolupar des de moltes perspectives: interaccionisme simbòlic, etnometodologia, recerca feminista, etnometodologia institucional, anàlisi de narratives o recerca global.

8.3.1.1.2. La perspectiva hermenèutica

La investigació social feta mitjançant un estudi qualitatiu també pot explicar-se des de l'enfocament hermenèutic de Gummesson (citats per Ruíz, 2012). Sota aquest enfocament es reconeixen onze aspectes (**Taula 8.3.1.1.2.1.**) de l'activitat de recerca: (1) la comprensió i la interpretació com a centre de la investigació, (2) la visió estreta i total dels estudis, (3) l'atenció més dispersa de l'investigador que li permet fluctuar amb facilitat, (4) la focalització de l'investigador en el desenvolupament de teories específiques i concretes d'un context definit i la realització d'assajos i proves, (5) el reconeixement de la utilitat de la subjectivitat que deixa menys distància entre els fets i els judicis de valor, (6) la consideració de la importància del coneixement tàcit com una mena de coneixement previ no conscient ni articulat amb paraules, (7) l'obtenció de dades quantitatives però també de tipus qualitatiu, (8) actitud de compromís i proximitat de l'investigador qui és part de l'estudi que és el seu objecte de recerca, (9) acceptació de la influència de la ciència i de l'experiència personal de l'investigador en l'estudi, (10) ús de la raó i dels sentiments per governar les accions de l'investigador, i (11) la creació parcial de l'objecte d'estudi per part de l'investigador com a conseqüència de la seva tasca d'interpretació dels processos i evidències de l'estudi (Ruíz, 2012).

Taula 8.3.1.1.2.1.

La perspectiva hermenèutica segons Gummesson (Ruiz, 2012).

Perspectiva hermenèutica
1. Investigació centrada en la comprensió i la interpretació
2. Perspectiva holística dels estudis
3. Atenció fluctuant dels investigadors
4. Desenvolupament de teories locals , assajos i proves
5. Cerca de la subjectivitat (menys distinció entre fets i judicis de valor)
6. Importància del coneixement tàcit
7. Dades qualitatives o quantitatives i quantitatives
8. Investigador participant com a part del fenomen estudiat
9. Consideració de l' experiència personal de l'investigador, a banda de la ciència
10. Consideració dels sentiments , a banda de la raó, per orientar les accions del investigador
11. Creació del significat d'un procés o document per part de l'investigador

Font: Elaboració pròpia.

8.3.1.1.3. La perspectiva naturalista

Un investigador utilitza la perspectiva naturalista per desenvolupar una recerca qualitativa quan té la cura de no manipular el fenomen que és el seu objecte d'estudi per tal de comprendre'l de la manera més rigorosa dins el seu context real (Patton, 2002). Per tant, les troballes d'un estudi qualitatiu naturalista són dades que revelen, en sí mateixos i de manera natural el fenomen sota investigació (Golafshani, 2003). Es pot dir que l'adquisició naturalista de dades és un enfocament centrat en el descobriment que demana a l'investigador una postura oberta davant l'objecte d'estudi. Això implica que l'investigador ha d'evitar establir judicis o idees prèvies sobre allò que va a estudiar i esperar els resultats de la recerca per cercar conceptes a partir de les condicions prèvies i posteriors a un canvi observat al seu entorn natural. En una recerca qualitativa de perspectiva naturalista la flexibilitat serà un tret distintiu d'aquest disseny de recerca (Patton, 2002).

Respecte a les tècniques de recollida de dades, amb l'aplicació d'un estudi qualitatiu de caire naturalista es dóna preferència a dos tipus: l'observació i l'entrevista (Patton, 2002; Golafshani, 2003). L'obtenció de les dades mitjançant l'observació la fa l'investigador, qui es situa directament a l'indret on es troba de manera natural el seu objecte d'estudi: el fenomen, l'esdeveniment, el programa, el grup, la comunitat, la relació o la interacció. Quant a les entrevistes, es recomana que se'n realitzin en indrets que siguin còmodes i familiars als

participants. A més, s'ha de tenir en compte que les preguntes plantejades a l'entrevista donin peu a respostes obertes per part dels participants (Patton, 2002).

Des del punt de vista de la rigorositat de la recerca, Lincoln i Guba (citats per Golafshani, 2003) fan referència als següents criteris: credibilitat, neutralitat o confirmabilitat, consistència o confiabilitat, i aplicabilitat o transferibilitat (**Figura 8.3.1.1.3.1**). Aquests trets són coherents amb la demanda de la cerca de nous conceptes amb els quals es pugui reflectir el tret interpretatiu de les investigacions qualitatives (Golafshani, 2003). Lincoln i Guba (citats per Agostinho, 2005) van modificar el terme per a l'adquisició de dades "naturalista" per "constructivista" a l'any 2000.

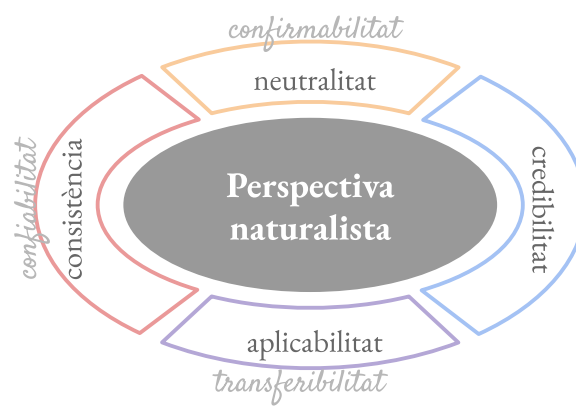


Figura 8.3.1.1.3.1. Aspectes de la perspectiva naturalista d'una recerca qualitativa (Golafshani, 2003).

Font: Elaboració pròpia.

8.3.1.1.4. La perspectiva constructivista

Tots els enfocaments de caire constructivista comparteixen un tret comú: l'anàlisi de la relació entre la realitat i els processos estudiats. Per tant, a la perspectiva constructivista s'identifica el coneixement com una construcció humana que es genera de la interpretació de la realitat social (**Figura 8.3.1.1.4**). La recerca qualitativa requereix la perspectiva per la construcció del coneixement social (Flick, 2004).

Creswell (2003) presenta el concepte *proposició de coneixement* (knowledge claim) per definir la posició que els investigadors assumeixen sobre allò que aprendran en desenvolupar un estudi o una recerca. Des de la perspectiva filosòfica, la posició sobre la *proposició de coneixement* és una demanda de tipus ontològic, epistemològic, axiològic, retòric i metodològic (**Figura 8.3.1.1.4.2**). En primer lloc, és a dir ontològicament, l'investigador es pregunta allò que és el coneixement. En segon terme, epistemològicament, l'investigador es qüestiona sobre com identificar o reconèixer el coneixement. Tercerament, des de la perspectiva axiològica, l'investigador té com a interrogant la valoració del coneixement. En quarta posició, l'investigador té preguntes de caire retòric que li ajuden a triar la millor manera d'escriure sobre el que és el

seu objecte d'estudi. Finalment, l'investigador s'ocupa de les qüestions metodològiques. És a dir, quins són els processos més adients per du a terme la recerca.

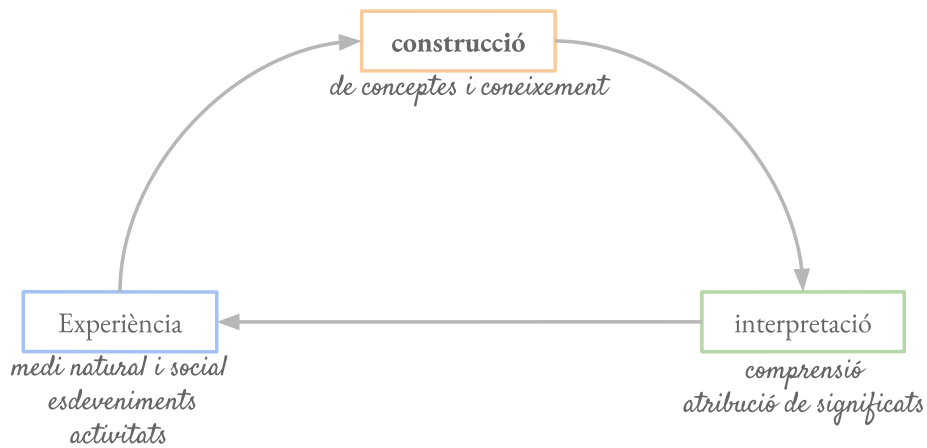


Figura 8.3.1.1.4.1. Construcció i interpretació com significats provinents de les experiències d'interacció amb el món (Flick, 2004).

Font: Elaboració pròpia.



Figura 8.3.1.1.4.2. Aspectes de la *reclamació de coneixement* d'una recerca qualitativa segons Creswell (2003).

Font: Elaboració pròpia.

Tot i que la *proposició de coneixement* de l'investigador es pot afrontar des de quatre escoles del pensament (la postpositivista, la constructivista, la participativa i el pragmatisme), s'hi analitzarà des de la posició constructivista per la seva concordança amb la metodologia qualitativa. En general, el *constructivisme* es caracteritza per quatre aspectes: comprensió, consideració de significats de múltiples participants, construcció social i històrica i la teoria de la generació (**Figura 8.3.1.1.4.3.**). Pel *constructivisme*, són els individus qui atribueixen significats en la seva cerca per comprendre el món on hi viuen. Els significats creats pels individus són subjectius i s'originen de les seves experiències, per tant, estan lligats als objectes que

defineixen. La recerca social es té en compte a una diversitat de participants, per tant, la varietat dels significats relacionats amb un mateix objecte serà tan àmplia com el nombre d'individus involucrats en l'estudi. Seguint la postura del constructivisme, els significats donats pels participants són el producte de les normes socioculturals i del moment històric en el qual es desenvolupa la recerca. Però, els significats creats pels participants d'un estudi també depenen de la interacció entre els individus. En aquest sentit, els investigadors han de focalitzar la seva atenció en el context i tots els aspectes que puguin condicionar les interaccions i les interpretacions dels participants (Creswell, 2003).

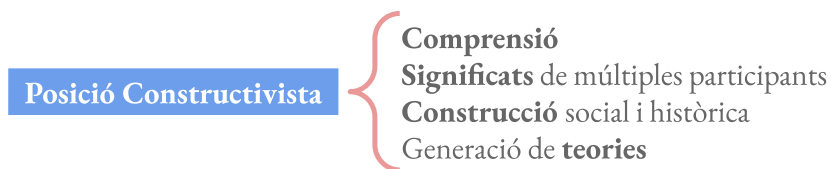


Figura 8.3.1.1.4.3. Característiques de la posició constructivista per l'establiment de la *reclamació de coneixement* en una recerca qualitativa (Creswell, 2003).

Font: Elaboració pròpia.

La perspectiva constructivista es pot reduir a les tres suposicions plantejades per Crotty (citat per Creswell, 2003): la naturalesa dels significats, les interpretacions i la generació de significats (**Taula 8.3.1.1.4.1.**). La naturalesa dels significats són producte de la implicació de l'ésser humà amb el món on hi viu i de la interpretació que hi fa del seu entorn. Per tal d'arribar a conèixer el millor possible aquests significats de creació humana, es recomana a l'investigador que plantegi als participants preguntes obertes i que a la vegada els exhorti a expressar la seva opinió de la manera més àmplia i detallada possible. Seguint amb l'aspecte de les interpretacions, la perspectiva constructivista reconeix la influència que tenen la societat, la cultura, el moment històric i la manera en la qual interactua un individu amb el món que li envolta en la construcció de significats i per tant en la interpretació del seu entorn. L'actuació dels investigadors s'ha de conduir cap a la comprensió del context dels participants. Això es pot aconseguir mitjançant la recerca exhaustiva de les condicions i particularitats del context que envolta als individus que són part de l'estudi. En conseqüència, s'ha de considerar que les interpretacions presentades pels investigadors es generen a partir dels antecedents que ells recullen i de les experiències que ells viuen com a observadors participants durant el desenvolupament de la recerca. Finalment es planteja la naturalesa de la generació bàsica dels significats. Des de la perspectiva del constructivisme, els significats es generen sempre a l'àmbit social. És a dir, les interaccions que succeeixen en una comunitat humana són el centre de generació de significats, tot i que se'n puguin donar fora la comunitat. Les dades obtingudes al camp permetran a l'investigador arribar a la identificació dels significats. S'ha de puntualitzar que el procés que condueix a aquestes troballes és de tipus inductiu (Creswell, 2003).

Taula 8.3.1.1.4.1.

La perspectiva constructivista de la recerca qualitativa segons Crotty (Creswell, 2003).

Constructivisme
1. Significats com construcció humana → Preguntes obertes
2. Interpretacions com producte de la interacció (perspectiva històrica, cultural i social) → Documentar i entendre el context → Interpretació modelada per les pròpies experiències i els antecedents
3. Generació bàsica de significat és social → Procés d'investigació qualitativa inductiu

Font: Elaboració pròpia.

8.4. Mètodes de recollida de dades de la metodologia qualitativa

Quan s'aplica la perspectiva interpretativa a la *investigació educativa*, els principals mètodes per obtenir dades són: la investigació etnogràfica, la investigació fenomenològica, l'estudi de cas i la *grounded theory* o teoria fonamentada (Sabariego, 2004). La **Taula 8.4.1.** resumeix els principals trets d'aquest mètodes (Creswell, 2003).

Taula 8.4.1.

Mètodes de la metodologia qualitativa aplicats a la investigació educativa (Creswell, 2003).

Mètodes de la metodologia qualitativa	
Mètode	Característiques
Etnogràfic	Observació perllongada i <i>in situ</i> d'un grup cultural
Grounded theory (teoria fonamentada)	Generació d'una teoria general sobre un procés, acció o interacció Basat en la interrelació de les categories de les dades (dels participants)
Estudi de cas	Exploració profunda Dades detallades
Investigació fenomenològica	Identificació de les experiències humanes al voltant d'un fenomen Observació participant de l'investigador
Investigació narrativa	Estudi d'històries de vida des de la perspectiva de l'individu d'interès i de l'investigador

Font: Elaboració pròpia.

8.4.1.1. L'estudi de cas

Una de les maneres més freqüents de recollir dades qualitatives és l'*estudi de cas* (Stake, 2003). Tot i que l'*estudi de cas* tingui els seus orígens a la medicina i la psicologia, és “una de les principals metodologies de la investigació qualitativa” d'àmplia utilització (de vegades inconscientment) a l'àmbit de l'educació (Ballester, 2004). Des de la perspectiva humanista i interpretativa, el model d'investigació de l'*estudi de cas* es pot definir com la descripció i anàlisi d'entitats (educatives) amb profunditat i detall (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992). En altres paraules, és un examen holístic sistemàtic, profund, intensiu i interactiu d'una situació que se'n fa amb l'objectiu de comprendre-la (Ballester, 2004; Sabariego, Massot i Dorio, 2004). També es pot descriure l'*estudi de cas* a partir de quatre propietats essencials que li va atribuir Merriam (citada per Arnal, del Rincón i Latorre, 1992) i que coincideixen amb Pérez Serrano (citada per Sabariego, Massot i Dorio, 2004): particular, descriptiu, heurístic i inductiu (**Taula 8.4.1.1.1.**). En ser de naturalesa particularista, l'*estudi de cas* cerca la comprensió profunda de una realitat concreta i per tant és molt útil en el descobriment i anàlisi de situacions úniques (Sabariego, Massot i Dorio, 2004). Això fa que l'*estudi de cas* mostri el seu enfocament idiogràfic (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992). La característica descriptiva d'un *estudi de cas* es fonamenta en el producte final de la recerca: la riquesa conceptual i descriptiva dels resultats (Sabariego, Massot i Dorio, 2004). Un *estudi de cas* també és heurístic perquè ajuda a la comprensió d'una situació mitjançant la revelació de significats nous (o ja coneguts) que augmenten o comproven el que se'n coneix. Finalment, es diu que un *estudi de cas* és inductiu perquè el descobriment de les relacions i conceptes i la generació d'hipòtesis són el resultat del seguiment d'un raonament inductiu sobre l'objecte d'estudi, el seu context i les seves particularitats (Sabariego, Massot i Dorio, 2004). Ballester (2004) destaca altres trets significatius dels *estudis de cas*, com ara: la limitació de la creació de generalitzacions i la relació propera amb la realitat, l'enfocament interdisciplinari.

Taula 8.4.1.1.1.

Característiques de l'estudi de cas segons Merriam (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Estudi de cas	
Característica	Descripció
particular	→ centrat en una situació específica, esdeveniment, programa o fenomen
descriptiu	→ descripció rica i intensiva de l'objecte d'estudi
heurístic	→ cerca la comprensió del cas
inductiu	→ amb les dades s'arriba cap a generalitzacions, conceptes i hipòtesis

Font: Elaboració pròpia.

Dins un *estudi de cas*, la comprensió del fenomen requereix de la interpretació d'un esdeveniment particular segons les perspectives individuals de: els membres o participants, el grup, la institució, la comunitat (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992; Ballester, 2004). L'objectiu de la comprensió d'un *estudi de cas* pot ser de caire exploratori, descriptiu i/o explicatiu (Ballester, 2004). Per tant, la seva naturalesa és heterogènia: centrada en el subjecte, en el grup, en la institució, en un programa, etc. Per una altra banda, s'ha de considerar que el nivell de descripció d'un *estudi de cas* està condicionat a la seva naturalesa, això fa que en pugui ser: una crònica, un llistat, una avaluació o una mena de contrast (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992). Ary i col·laboradors (citats per Arnal, del Rincón i Latorre, 1992) proposen cinc objectius (**Taula 8.4.1.1.2.**) assolibles amb l'*estudi de cas*. El primer objectiu és l'oportunitat de descriure i analitzar una situació particular i única. El segon objectiu és la possibilitat de generar una hipòtesi que pugui ser contrastada amb estudis de major rigositat posteriorment. El tercer objectiu és l'adquisició de coneixement. En quart és la diagnosi d'una situació amb l'objectiu de proposar orientacions, donar assessorament per fer una acció de transformació (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992). Blanco (citad per Ballester, 2004) s'adhereix a aquest tret característic dels *estudis de cas* afegint que en reflexionar sobre les dades hi obtingudes es generen orientacions que ajuden a millorar la pràctica docent o social. Finalment, el cinquè objectiu és la complementarietat amb estudis quantitius (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Taula 8.4.1.1.2.

Possibles objectius de l'estudi de cas segons Ary i col·laboradors (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Amb un estudi de cas es pot:

1. Descriure i analitzar situacions úniques
 2. Generar hipòtesis que se'n puguin contrastar després amb altres estudis
 3. Adquirir coneixements
 4. Fer la diagnosi d'una situació per donar orientació/assessorament a accions transformadores
 5. Complementar recerques quantitatives
-

Font: Elaboració pròpia.

D'*estudis de cas* n'hi ha de diferents tipus (**Figura 8.4.1.1.1.**). El primer d'ells són els *estudis de casos institucionals*, en els quals el centre de la recerca és la organització d'un centre. Això vol dir que el context i el moment el qual es realitza l'estudi són rellevants i se'n reflecteixen en l'anàlisi i descripció fetes. Un altre tipus d'*estudi de cas* és l'*observacional*, diferenciat dels altres per la utilització de l'observació participant com a eina principal de recollida d'informació. L'*estudi de cas observacional* es focalitza en un o varis dels següents aspectes d'un centre educatiu: un tret determinat de la institució (com ara: un curs, una classe, els professors, la sala de professors, etc.) o una activitat concreta del centre (per exemple: el currículum, un nou projecte de

centre, etc.). Les *històries de vida* són *estudis de cas* on l'investigador recull informació personal de primera mà mitjançant entrevistes. Una mena d'estudi orgnitzacional i observacional és l'*estudi comunitari*. L'única diferència que hi ha entre aquests tres tipus d'*estudis de cas* és el centre de la recerca, en l'*estudi comunitari* n'és una comunitat. Pel que fa a l'*estudi situacional*, n'és un *estudi de cas* que s'encarrega d'analitzar un esdeveniment puntual tenint en compte les perspectives del màxim possible d'individus hi involucrats. La *microetnografia* és un *estudi de cas* molt concret que analitzar una petita unitat d'un centre. Per tancar amb els tipus d'*estudis de cas* es presenta l'*estudi de casos múltiples*, que correspon a les investigacions que analitzen més d'una situació, subjectes o bases de dades (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992). La principal característica d'un *estudi de casos múltiple* és la comparació, és a dir, els diferents casos estudiats serveixen per donar resposta a les mateixes preguntes de recerca i les conclusions es construeixen amb la varietat de respostes obtingudes (Ballester, 2004). Malgrat que la tria del tipus d'*estudi de cas* depèn de molts factors, cal mencionar que sovint s'apliquen els *estudis de casos múltiples* (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

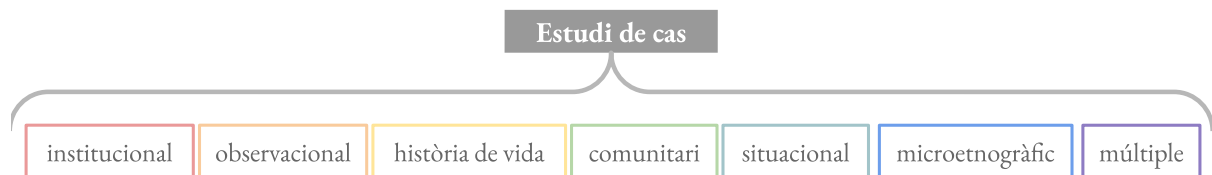


Figura 8.4.1.1.1. Tipus d'*estudis de cas* (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

Font: Elaboració pròpia.

Existeixen més classificacions pels *estudis de cas* (**Figura 8.4.1.1.2.**), però en consisteixen en una reorganització dels tipus d'estudis presentats fins ara (**Figura 8.4.1.1.1.**). Per exemple, els *estudis de cas* centrats en els individus, les famílies o els grups poden ser observacionals, històries de vida o situacionals (com es classifiquen a la **Figura 8.4.1.1.1.**). Respecte als *estudis de temes singulars* per que estudien tòpics concrets en moments i espais definits, seguint les classificacions de la **Figura 8.4.1.1.1.**, poden ser de tipus observacional, comunitari, situacional, microetnogràfic o múltiples. Finalment, seguint el mateix comparatiu entre les classificacions de la **Figura 8.4.1.1.1.** i la **Figura 8.4.1.1.2.**, els *estudis* centrats en les comunitats poden ser institucionals, observacionals, històries de vida, comunitaris, situacionals, microetnogràfics o múltiples. Segons Ballester (2004), els tipus d'*estudis de cas* de la **Figura 8.4.1.1.2.** es poden diferenciar a partir de les tècniques d'obtenció de dades que en fan servir. Així, als *estudis de cas* centrats en les persones o grups s'utilitzen les entrevistes i l'anàlisi de documents. Per la seva part, als *estudis de cas* sobre temes singulars s'aplica l'observació participant, l'entrevista, els grups de discussió i l'anàlisi de documents. En últim terme, les tècniques de recollida de dades dels *estudis de cas* enfocats en les organitzacions són les mateixes que se'n utilitzen als *estudis centrats en el tema*: l'observació participant, l'entrevista, els grups de discussió i l'anàlisi de documents.

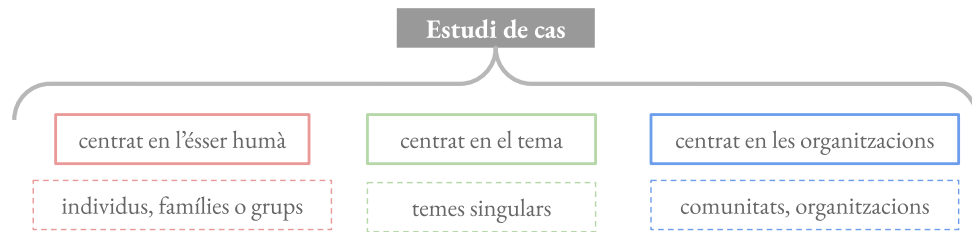


Figura 8.4.1.1.2. Famílies d'*estudis de cas* (Ballester, 2004).

Font: Elaboració pròpia.

Cal remarcar que altres autors proposen altres classificacions pels *estudis de cas* (**Taula 8.4.1.1.3.**). En concret, Sabariego, Massot i Dorio (2004) proposen els següents tipus d'*estudis de cas*: intrínsec, instrumental, col·lectiu, descriptiu, interpretatiu i avaluatiu. Per la seva part, Stake (2003) reconeix només tres tipus d'*estudis de cas*: intrínsec, instrumental i col·lectiu. La majoria dels autors fan propostes semblants, però fixant l'atenció a la classificació de Ragin (citada per Stake, 2003), que organitza quatre varietats d'*estudis de cas* en dues parelles antagòniques: (1) els estudis empírics o teòrics i (2) els estudis generals o específics. En el cas de White (citada per Stake, 2003), la classificació dels *estudis de cas* correspon al propòsit d'ells: (1) per identificar i descriure una identitat, (2) per fer l'explicació d'un fenomen i (3) amb l'objectiu de tenir control d'una situació.

Segons Ballester (2004), els *estudis de cas* tenen avantatges i limitacions (**Taula 3.4.1.1.4.**). El primer dels avantatges és l'oportunitat que té l'investigador d'arribar a fer un estudi profund dels fets o processos en estudi. Un segon avantatge és la qualitat que es pot donar a un estudi a causa de la contrastabilitat de les dades. Com tercer avantatge es troba la flexibilitat que té l'investigador per prendre decisions i modelar el camí de la recerca quan desenvolupa l'estudi. La qualitat holística, quart avantatge de l'*estudi de cas*, ajuda a l'investigador a tenir una comprensió de conjunt, és a dir totalitzadora de l'objecte d'estudi. En cinquè terme està l'avantatge relacionat amb la possibilitat, que dona l'*estudi de cas*, de tenir cura dels detalls i concretar aspectes concrets de la recerca. El sisè aspecte valuós dels *estudis de cas* deriva de l'anterior: possibilitat de tenir cura dels detalls del procés. Atès a que l'investigador pot identificar els canvis que succeeixen quan fa observacions, hi pot donar un informe acurat de la realitat (educativa, per exemple). El darrer avantatge també es pot considerar com una limitació, ja que en fa a l'exigència en recollir les dades de manera immediata per tal de seguir les situacions sense perdre informació ni veure-se'n superat pel que hi esdevingui. Pel que fa a les limitacions dels *estudis de cas*, en són: la interpretació de les dades feta per l'investigador (subjectivitat), la funció participant de l'investigador per la seva interacció amb l'objecte d'estudi (interferència), la quantitat massiva de dades generades i recollides, la dificultat per arribar a la confidencialitat quan es presenten les dades i, finalment, sense considerar la complexitat de la recerca, la realització d'un estudi de cas requereix d'un cost de recursos econòmics mitjà, però d'un període de temps llarg. Tot i que el nivell de la capacitat tècnica que comporta un estudi de cas és mitjà, en requereix de

l'investigador un alt grau de creativitat en el plantejament. Amb referència a la limitació dels *estudi de cas* pel que fa a la generalització, Sabariego, Massot i Dorio (2004) coincideixen amb aquesta observació feta per Ballester (2004). Els investigadors puntualitzen que, com ho explica Stake (citat per Sabariego, Massot i Dorio, 2004), a partir de l'estudi d'una realitat singular només és possible fer “generalitzacions menors”.

Taula 8.4.1.1.3.

Comparatiu de les classificacions de l'estudi de cas segons diferents fonts de referència.

Autors	Classificació de l'estudis de cas
Arnal, del Rincón i Latorre (1992)	<ol style="list-style-type: none"> 1. institucional 2. observacional 3. història de vida 4. comunitari 5. situacional 6. micro-etnogràfic 7. múltiple
Ballester (2004)	<ol style="list-style-type: none"> 1. individus, famílies i grups 2. temes singulars 3. comunitats i organitzacions
Ragin (1992)	<ol style="list-style-type: none"> 1. empíric o teòric 2. general o específic
Sabariego, Massot i Dorio (2004)	<ol style="list-style-type: none"> 1. intrínsec 2. instrumental 3. col·lectiu 4. descriptiu 5. interpretatiu 6. avaluatiu
Stake (2004)	<ol style="list-style-type: none"> 1. intrínsec 2. instrumental 3. col·lectiu
White (1992)	<ol style="list-style-type: none"> 1. identitat 2. explicatiu 3. control

Font: Elaboració pròpia.

Taula 8.4.1.1.4.

Avantatges i limitacions d'un estudi de cas (Ballester, 2004).

Estudi de cas	
Avantatges	Limitacions
✓ profunditat	↪ subjectivisme
✓ contrastabilitat	↪ interferència
✓ flexibilitat	↪ recollida massiva de dades
✓ comprensió de conjunt	↪ confidencialitat de les dades
✓ atenció als detalls	↪ temps
✓ atenció al procés	↪ cost
✓ immediat	↪ impossibilitat de generalització

Font: Elaboració pròpia.

En conclusió, l'estudi de cas permet a l'investigador desenvolupar una doble funció d'aprenent i professor. Tot el que el treball de recerca l'ha ensenyat a l'investigador es traspasat per ell a altres mitjançant la comunicació dels seus resultats. En conseqüència, el mecanisme de construcció del coneixement social s'activa (Stake, 2003).

8.4.1.1. Tècniques d'obtenció de dades

Segons Stake (2010), en desenvolupar un estudi qualitatiu, la selecció dels mètodes per recollir les dades ha d'obeir a un primer principi: que els instruments siguin adients a l'objecte d'estudi. En general es presenten cinc tipus de mètodes per recollir dades: (1) observació, (2) entrevista, (3) qüestionari, (4) enquesta i (6) gravacions (**Figura 8.4.1.1.1.**).



Figura 8.4.1.1.1. Mètodes de recollida de dades en un estudi qualitatiu basat en Stake (2010).

Font: Elaboració pròpia.

Es considera que les dades provenen d'una *observació* quan l'investigador les ha pogut veure, escoltar o experimentar en primera persona. En aquesta categoria de recollida de dades cal puntualitzar que és l'investigador qui decideix quines de les dades observades són susceptibles d'interpretació. L'*observació* pot ser de tipus participant. A l'observació participant, l'investigador experimenta l'activitat que és objecte de la

seva recerca com un participant més, per tant és “una forma activa d’observació”. Una crítica al mètode d’observació participant és la preocupació pel registre adequat del fenomen d’estudi, però una opció és la combinació d’aquesta tècnica amb una altra: la gravació, com es mostra a la **Figura 8.4.1.1.2.** (Stake, 2010).

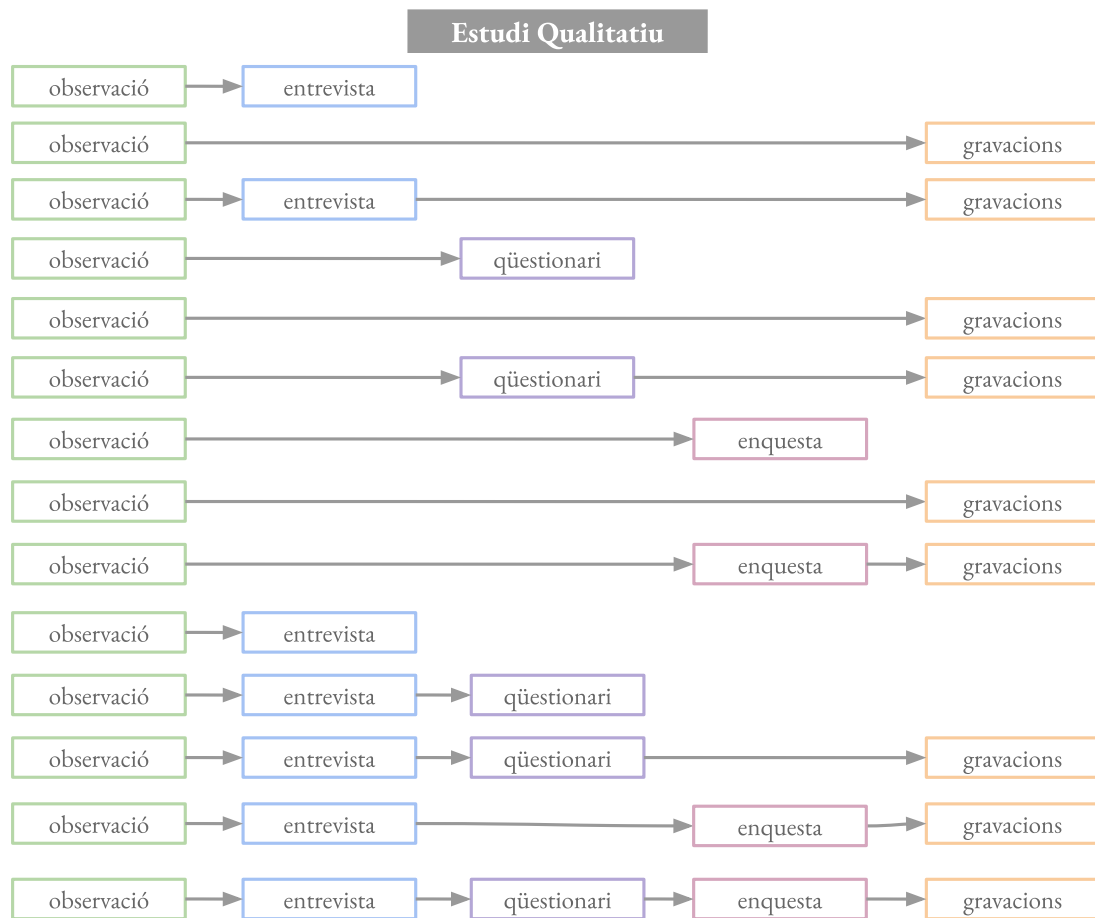


Figura 8.4.1.1.2. Mètodes de recollida de dades en un estudi qualitatiu basat en Stake (2010) i algunes de les seves possibles combinacions.

Font: Elaboració pròpia.

En la recerca qualitativa, l’*entrevista* ajuda en dos propòsits: (1) la interpretació del punt de vista personal i particular d’un tòpic i (2) trobar informació que no s’ha pogut identificar a partir de les observacions (Stake, 2010).

Dues tècniques molt semblants són el *qüestionari*. L’objectiu d’aquestes dues és centrar les respostes dels participants a aspectes molt concrets mitjançant la formulació de preguntes. En el cas de l’*enquesta* fins i tot es presenten també opcions de resposta en forma d’enunciats o amb escales. A diferència de la resta dels mètodes de recollida de dades (**Figura 8.4.1.1.2.**), amb l’*enquesta* i el *qüestionari* és possible reflectir la

informació trobada quantitativament amb facilitat mitjançant l'ús de percentatges, per exemple (Stake, 2010).

Finalment, la tècnica de recollida de dades anomenada *gravacions* representa una categoria àmplia que va des dels registres escrits fins els fitxers d'àudio i/o vídeo. Com es mostra a la **Figura 8.4.1.1.2.**, aquest mètode pot presentar-se en combinació amb altres. Concretament, un full de respostes d'una *enquesta* es considera una *gravació*, al igual que el full de respostes d'un *qüestionari* (Stake, 2010).

8.4.1.2. L'anàlisi de les dades (*grounded theory*)

La *grounded theory* o teoria fonamentada va ser desenvolupada per Glaser i Strauss en 1967 (Corbin i Strauss, 1990; 2015) amb l'objectiu d'explicar i descriure teòricament, a partir d'un conjunt de conceptes, un fenomen social en estudi. Segons aquest marc de referència, en l'àmbit social és possible descobrir la teoria a partir de l'obtenció sistemàtica i analitzada de dades (Glaser i Strauss, 1999). Aleshores, la *grounded theory* planteja un seguit d'onze cànons i procediments per la recerca social (**Figura 8.4.1.2.1.**). A banda d'aquests onze punts, els investigadors recorden als investigadors que el seguiment dels criteris indicats s'ha de fer sempre que es mantingui la fluïdesa del fenomen en estudi (Corbin i Strauss, 1990b).

Al subapartat 8.1. es fa referència al concepte: *coneixement professional*. Des de la perspectiva epistemològica, el *coneixement professional* i el *coneixement clínic* presenten l'experiència individual d'un professional i el coneixement col·lectiu. Tot i que el pas del coneixement individual cap al col·lectiu és útil en la creació de teories, com ho indica la *grounded theory* (Strauss i Corbin, citats per Stake, 2010), en un estudi qualitatiu els trets particulars i generals són “dos territoris del treball professional” que convé pensar-ne de manera separada, tot i que sovint se'n creuin o connectin com dues realitats que succeeixen de manera simultània (Stake, 2010; p. 17).

Grounded theory

1. Recollida de dades i anàlisi com processos relacionats
2. Establiment de **conceptes** com unitats bàsiques d'anàlisi
3. Desenvolupament i relació entre categories (obligatori)
4. Fonaments teòrics provinents de les mostres
5. Comparació com eina recurrent d'anàlisi
6. Necessitat de consideració dels patrons i variacions
7. El procés s'ha de construir en la teoria
8. Escripció de notes sobre teoria
9. Desenvolupament i verificació d'hipòtesis de relació entre categories
10. Treball en grup
11. Les condicions estructurals àmplies sempre han de ser considerades

Figura 8.4.1.2.1. Cànon i procediments de la *grounded theory* (Corbin i Strauss, 1990b).

Font: Elaboració pròpia.

Un punt d'interès que sorgeix en el desenvolupament de la *grounded theory* és la codificació. Segons Corbin i Strauss (1990b), se'n pot realitzar de tres maneres: (1) oberta, (2) axial o (3) selectiva (**Taula 8.4.1.2.1.**). A tots els tres tipus de codificació les dades s'organitzen en categories, però l'establiment d'elles i la consideració de les relacions entre categories són els trets que diferencien les tres opcions que hi ha per codificar les dades de l'estudi.

Taula 8.4.1.2.1.

Codificació de les dades de la "grounded theory" (Corbin i Strauss, 1990a; 1990b).

<i>Grounded theory</i>		
Codificació oberta	Codificació axial	Codificació selectiva
→ Descomposició de les dades → Basada en la comparació → Agrupació de conceptes per categories → Formació de subcategories	→ Relació entre les categories i les seves subcategories → Les relacions entre les categories i les subcategories es proven amb les dades de la recerca	→ Totes les categories pertanyen a un nucli o categoria comú → N'és un tipus de codificació relacionada amb etapes avançades (o finals) de la recerca

Font: Elaboració pròpia.

Els investigadors que segueixen la *grounded theory* es poden orientar al moment de desenvolupar el procés de recerca amb la revisió dels “criteris d’avaluació del procés de recerca” (**Taula 8.4.1.2.2.**). Els set criteris d’avaluació del procés de recerca de la *grounded theory* ajuden a revisar des de les característiques de la mostra fins el nucli en el qual es centren totes les categories d’organització de les dades. Per una altra banda, també existeixen set criteris per avaluar els fonaments teòrics trobats amb aquest mètode qualitatiu (**Taula 8.4.1.2.3.**) (Corbin i Strauss, 1990a, 1990b). Corbin i Strauss concluen (1990b, p. 426):

Aquest doble conjunt de criteris, per al procés d’investigació i per a la fonamentació empírica de les troballes teòriques, incideixen directament en les qüestions de la verificació de qualsevol estudi de teoria fonamentada i com s’ha de comprovar. Podem jutjar en quines condicions la teoria podria encaixar amb la "realitat", donar comprensió i ser útil (pràcticament i en termes teòrics). Es pot fer que els mateixos investigadors siguin més conscients de quines han estat les seves operacions i de les possibles insuficiències d’aquestes operacions. En altres paraules, serien capaços d’identificar i transmetre quines eren les limitacions del seu estudi.

Taula 8.4.1.2.2.

Criteris d’avaluació del procés de recerca de la “grounded theory” (Corbin i Strauss, 1990).

Criteris d’avaluació del procés de recerca <i>grounded theory</i>
1. Característiques de la mostra
2. Categories majors sorgides
3. Indicadors de les categories majors reconegudes
4. Formulacions teòriques que van orientar la recollida de les dades
5. Relacions conceptuals entre hipòtesis i dades recollides
6. Instàncies que recolzen les discrepàncies entre les hipòtesis i les dades recollides
7. Criteris de selecció del nucli de les categories

Font: Elaboració pròpia.

Taula 8.4.1.2.3.

Criteris dels fonaments empírics de la “grounded theory” (Corbin i Strauss, 1990).

Criteris dels fonaments empírics de la <i>grounded theory</i>
1. Es van generar conceptes?
2. Es relacionen sistemàticament els conceptes?
3. Hi ha molts vincles conceptuals i les categories estan ben desenvolupades? en tenen densitat conceptual?
4. Hi ha molta variació integrada a la teoria?
5. Les condicions més àmplies que afecten el fenomen objecte d’estudi s’incorporen a la seva explicació?
6. Es van tenir en compte els processos?
7. Les troballes teòriques semblen significatives i fins a quin punt?

Font: Elaboració pròpia.

Corbin i Strauss (2015) fan referència a l'àmplia utilització de la *grounded theory* en la creació de teories a partir de les dades. A mena de motivació, els autors postulen un seguit d'avantatges de l'utilització dels procediments indicats en aquest mètode en la recerca social (**Taula 8.4.1.2.4.**). Tal i com s'hi veu, el seguiment del procés de recerca de la *grounded theory* condueix a la construcció de la teoria subjacent d'un fenomen social mitjançant l'anàlisi de les dades, la comparació entre dades, la cerca de relacions entre dades i comportaments dels individus en observació i la identificació de significats. Però, l'aplicació de la metodologia qualitativa de la *grounded theory* dona als investigadors l'oportunitat d'anar més enllà amb la seva recerca, ja que en dona una base robusta que fa possible la continuació d'una investigació qualitativa fent la posterior cerca de dades quantitatives (Corbin i Strauss, 2015).

Taula 8.4.1.2.4.

Avantatges de la utilització dels procediments de la “grounded theory” (Corbin i Strauss, 2015).

<i>Avantatges de la utilització dels procediments de la grounded theory</i>
→ En proveeix un conjunt de procediments per construir la teoria a partir de les dades
→ En permet el desenvolupament d'explicacions comprensives (anàlisi de tòpics i comportaments)
→ En permet l'obtenció de nous coneixements i noves línies de recerca de problemes antics
→ En permet la identificació de les creences i els significats al darrere d'una acció
→ En fa possible l'anàlisi dels aspectes racionals i irracionals d'un comportament
→ En permet demostrar que tant la lògica com les emocions influeixen en les respostes de les persones
→ En forma una base robusta pel desenvolupament posterior d'estudis quantitius
→ En permet el desenvolupament de teories tant substantives com generals

Font: Elaboració pròpia.

8.4.1.3. La interpretació de les dades (triangulació)

La interpretació de les dades recollides és de caire personal. Per aquesta raó, un mètode per confirmar, validar i millorar l'explicació de les dades qualitatives n'és la triangulació. La triangulació, generalment, s'ha considerat com un procés en el qual s'utilitzen percepcions múltiples d'un mateix significat, observació o interpretació per tal de fer-ne aclariments i verificacions de repetibilitat (Stake, 2003). Existeixen tres variants de la triangulació que consisteixen en: (1) la revisió de les dades varies vegades per part del mateix investigador, (2) la revisió de les dades per un participant de l'estudi i (3) el panel de revisió (Stake, 2010).

Malgrat que la triangulació sigui del primer tipus (feta pel mateix investigador), en revisar les evidències de la recerca més d'una vegada s'augmenta la confiança de les dades qualitatives. Amb relació a la triangulació feta per una persona que no és el mateix investigador, els objectius són: donar més sensibilitat i exactitud a la interpretació de les dades qualitatives i trobar-ne significats que l'investigador no ha identificat. Si bé, les preguntes per orientar la triangulació són aplicables als tots dos tipus (**Taula 8.4.1.3.1.**), s'ha de considerar

que les dades presentades al participant que fa la triangulació no han de tenir cap anotació per tal no tenir cap influència sobre les seves observacions (Stake, 2010).

Taula 8.4.1.3.1

Preguntes que ajuden a la triangulació de les dades qualitatives (Stake, 2010).

Dades qualitatives
Els fets són correctes?
S'ha registrat tota la història?
Aquest registre pot ferir la sensibilitat d'algú?
La situació va ser més complexa?

Font: Elaboració pròpia.

El panel de revisió, tercera estratègia d'anàlisi de les dades qualitatives, és l'opció més adient però també la més complexa i costosa. La realització d'aquest tipus de triangulació requereix de la integració del panel, el qual pot ser: d'experts en la mateixa branca d'investigació, d'experts en la mateixa branca d'investigació però especialitzats en diferents metodologies, de experts en branques relacionades a la recerca, i de no experts. La tira dels membres del panel depèn de molts factors, com ara la disponibilitat. Per més que la triangulació sigui un mètode que consumeix temps (i potser recursos), és una estratègia valuosa en la millora de la qualitat de les dades qualitatives (Stake, 2010).

Amb tot plegat, la mateixa progressió cronològica de la recerca és una mena de triangulació en la qual l'investigador aprofundeix en l'estudi de manera seqüencial, guanyant experiència teòrica i experimental amb el pas del temps (Stake, 2010).

Capítol 9. Disseny de la recerca

9.1 El nostre estudi de cas

En l'educació, el casos que són rellevants per dur a terme un estudi es relacionen amb l'anàlisi de les persones i/o dels programes (Stake, 1998). Amb el propòsit d'entendre tot allò que és únic o semblant en les persones i/o els programes educatius, es planteja un estudi de cas intrínsec (Stake, 1998; 2003) centrat en un grup específic d'alumnes. Per donar seguiment a la línia de recerca de l'ensenyament de la geometria en ESO de l'autora d'aquest treball de doctorat, l'estudi de cas de la recerca doctoral d'aquest document és el mateix: l'ensenyament del dibuix geomètric a alumnes del primer curs d'ESO a un centre de secundària de Catalunya i a un programa de formació de professorat de matemàtiques d'una Universitat catalana. A causa de la manca d'estudiants d'ESO relacionats directament amb l'autora, es va fer una crida a diferents centres amb aquell nivell educatiu (l'ESO). El criteri de selecció dels participants va ser senzill: per resposta d'acceptació. Només es va rebre resposta per part d'un professor del primer curs d'ESO d'un institut públic en Barcelona.

Kemmis i McTaggart (2003) recomanen que les recerques a l'aula siguin desenvolupades pel professor. Quan una persona que no sigui el professor es fa càrrec de l'activitat a estudiar, s'ha de tenir cura que en realitzi una tasca docent. És a dir, l'estudi de les activitats que es duen a terme a l'aula les ha de moderar una persona que tingui el rol de professor. Per tant, l'itinerari d'observacions a l'aula d'aquest estudi de cas es va distribuir en cinc moments (**Figura 9.1.1**): (1) el disseny de les tasques, (2) una sessió tipus classe de preparació, (3) una sessió tipus classe d'aplicació, (4) el registre de les observacions, i (5) l'anàlisi de les observacions mitjançant l'aplicació d'eines de reflexió de l'enfocament onto-semiòtic (Godino, 2013; Breda, Pino-Fan i Font, 2017; Breda, Font i Pino-Fan, 2018).

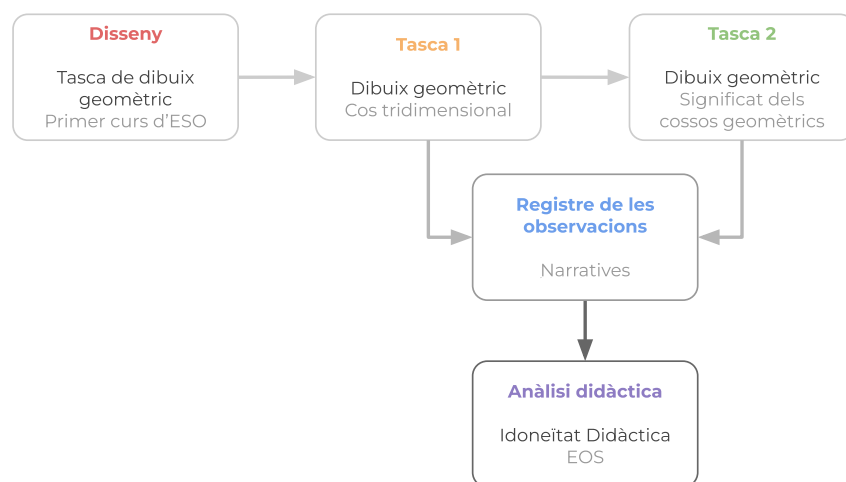


Figura 9.1.1. Esquema dels elements de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

9.1.1. El centre formador

Tal i com s'especifica al Real Decreto 1105/2014, l'educació secundària s'ha d'organitzar seguint els principis d'educació comú i tenint en compte la diversitat dels alumnes. En aquest sentit, el Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya puntualitza la necessitat de “garantir la igualtat real d'oportunitats per desenvolupar les capacitats individuals, socials, intel·lectuals, artístiques, culturals i emocionals de tots els nois i les noies que cursen aquesta etapa”.

Com ho indica la llei, l'institut al qual pertany el grup de primer d'ESO adreça els seus serveis educatius a alumnes entre els dotze i els setze anys. Pel que fa als cursos acadèmics, a l'igual que totes les escoles del nivell secundària, les matèries es distribueixen en quatre cicles escolars (Real Decreto 1105/2014, Decret 187/2015).

9.1.1.1. Característiques del centre educatiu

L'institut públic en el qual es va desenvolupar la recerca es va construir meitats del segle XX, per donar resposta al creixement de la ciutat de Barcelona. A hores d'ara, com ho comunica el Consorci d'Educació de Barcelona, un dels objectius del centre és l'emfatització del “caràcter d'integració al món laboral, als nivells formatius posteriors i el desenvolupament personal dels que seran els futurs ciutadans de Catalunya”.

L'alumnat d'aquest centre prové del mateix barri on s'hi troba, la qual cosa vol dir que els i les estudiants que viuen molt a prop l'institut. Respecte a les famílies dels alumnes, en són de classe mitjana. L'activitat laboral dels pares i les mares correspon a graus de formació professional, ja sigui per compte propi o assalariats. Hi ha tendència per part de les famílies per animar els alumnes a continuar estudiant més enllà del batxillerat per integrar-se als negocis de la família. L'alumnat té a casa seva les facilitats per fer-ho: habitacions individuals o compartides còmodes i/o espais dedicats a l'estudi. Amb relació a la llengua, el centre es caracteritza pel bilingüisme, perquè hi ha pocs alumnes nouvinguts.

Al centre, l'agrupació dels alumnes es fa de manera estratègica per tal potenciar al màxim les possibilitats de tots i cadascun dels estudiants ajustant les propostes als diferents ritmes d'aprenentatge i necessitats dels alumnes. Per tant, els grups oscil·len entre els vint i els trenta alumnes. En els grups amb trenta estudiants, “la quantitat d'alumnes queda compensada per la capacitat d'autonomia en el treball, tot permetent que el professorat atengui el seu ritme d'aprenentatge”. En el cas dels grups més reduïts correspon a les classes que requereixen d'adaptacions curriculars. També hi existeix una tercera modalitat de grup on s'integren els alumnes a qui se'ls dóna atenció individualitzada: l'aula oberta. Cal puntualitzar que en tots els casos, els grups treballen les mateixes assignatures i segueixen el mateixos llibres de text (Consorci d'Educació de Barcelona).

9.1.2. Trets d'identitat del centre educatiu

Segons ho expliquen el Decret 187/2015, el Consorci d'Educació de Barcelona i el Reial Decret 1105/2014: En un institut públic d'ensenyament secundari s'ha de facilitar el desenvolupament d'aprenentatges conceptuals, procedimentals i actitudinals que possibilitin als alumnes la comprensió dels elements bàsics de les humanitats, la ciència, la tècnica, les arts i la cultura, tot i emfatitzant-ne el caràcter d'integració als nivells educatius de formació posteriors o al món laboral.

El centre escolar, en la seva tasca de formar de manera integrals als alumnes, és un lloc que ajuda a enriquir els estudiants més enllà dels continguts curriculars. Per col·laborar en aquesta tasca, l'institut manté una postura aconfessional, laica i plural amb la qual garanteix que no hi hagi situacions que puguin excloure a l'alumnat per qüestions de religió, procedència, ètnia, llengua, cultura o ideologia. Tot compartint els valors democràtics constitucionals i estatutaris, el centre promou la solidaritat, la tolerància, la no discriminació, el diàleg i la participació i es mostra contrari a xenofòbia, el racisme, la discriminació i els rols de desigualtat de gènere. La cura del manteniment d'un marc de respecte en la convivència basat en el diàleg, la mediació i la cerca del consens col·labora en el desenvolupament de les tasques acadèmiques on cadascú assumeix els seus propis deures mentre es vetlla pels drets de tothom. Es promou entre l'alumnat una actitud d'esforç permanent per aconseguir les fites acadèmiques i personals mitjançant el seguiment de línies metodològiques, però sense oblidar que hi ha diferències entre els alumnes. L'assignació de treball col·laboratiu, producte d'una avaluació, és un mitjà per compensar les mancances individuals dels alumnes i estimular l'assoliment comú d'una formació bàsica (Consorci d'Educació de Barcelona).

Com un procés d'integració cultural i cohesió social que afavoreix l'arrelament, l'institut empra normalment el català com a llengua vehicular i d'aprenentatge (Consorci d'Educació de Barcelona).

9.2. Participants i aula

Tenint en compte la diversitat de grups que hi ha al centre, s'ha de ressaltar que l'observació es va fer a una classe amb trenta alumnes, és a dir, un grup sense adaptacions curriculars que vagin més enllà de les consideracions pedagògiques proposades pels professors a partir de les avaluacions del curs (Consorci d'Educació de Barcelona). Els trenta alumnes s'organitzen en tres fileres formades per cinc parelles de taules i cadires (**Figura 9.2.1.**). Hi ha deu alumnes per filera, la qual cosa facilita el desenvolupament d'activitats col·laboratives. Fent un esbós aproximat de la superfície de l'aula (**Figura 9.2.1.**) es pot mostrar la percepció de l'autora: l'aula és un espai reduït pel nombre d'alumnes del grup on les taules més properes als murs s'han de col·locar en contacte amb ells per tal de tenir passadissos.

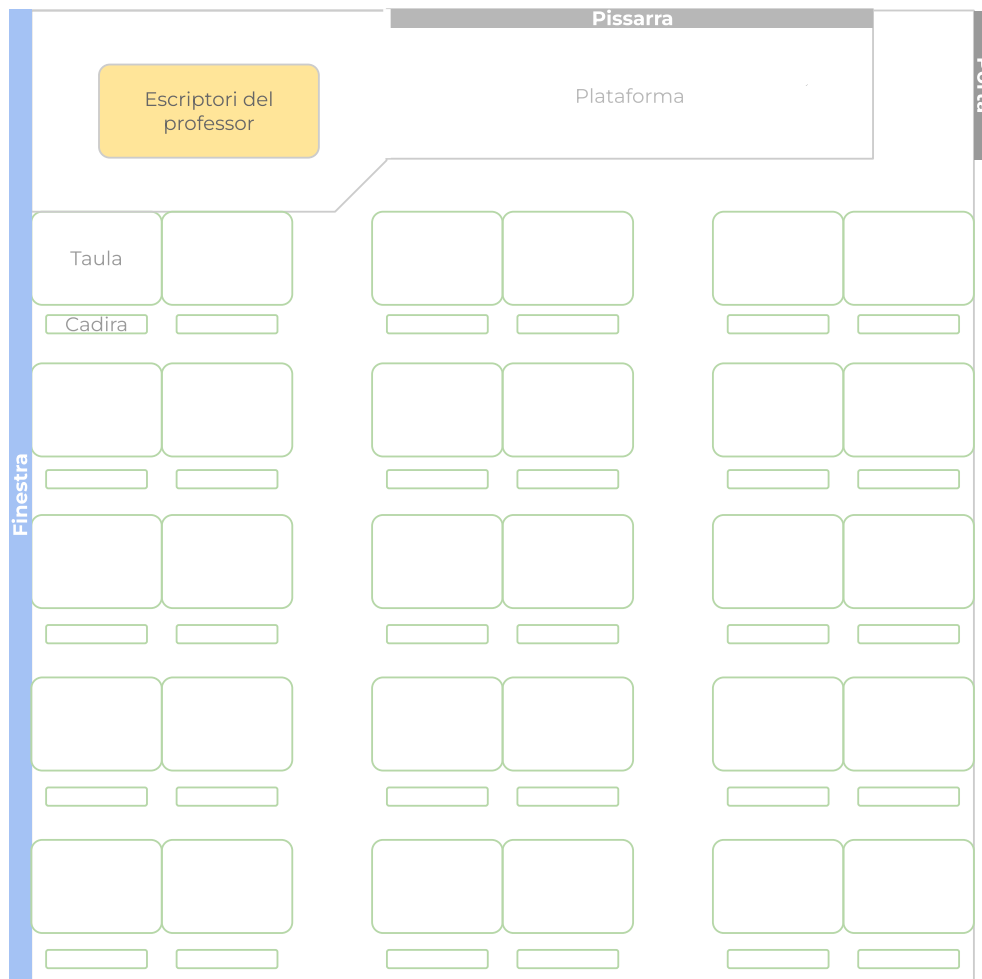


Figura 9.2.1. Esbós aproximant de l'organització del grup dins l'aula.

Font: Elaboració pròpia.

El grup d'alumnes del primer curs d'ESO a qui es va adreçar la tasca està format per un nombre equilibrat d'alumnat del sexe femení i masculí. Respecte a la llengua d'ensenyament, és el català. Per tant, la tasca es va proposar en català. Tot i que, de tant en tant les converses i discussions entre els alumnes són en castellà.

9.3 Instruments per recollir les dades

Entre els instruments per recollir la informació en un estudi qualitatiu es troben els documents produïts pels participants i els registres fets per l'observador, és a dir el mateix investigador (Massot, Dorio i Sabariego, 2009; Patton, 2002; Stake, 1998). Segons l'esquema dels elements d'aquest estudi de cas (**Figura 9.1.1.**), els instruments per recollir les dades experimentals són (**Figura 9.3.1.**): les instruccions adreçades als alumnes, les produccions fetes pels alumnes i les narratives de les observacions. En primer lloc, a l'etapa de disseny de les tasques, es van produir les propostes de les activitats adreçades als alumnes. Seguidament, a les dues sessions a l'aula, de les visites al centre educatiu es van obtenir les produccions fetes per part dels alumnes a la

proposta presentada amb les tasques u i dos. El darrer instrument per obtenir informació són les notes de camp registrades per l'autora d'aquesta tesi a partir de l'observació participant desenvolupada a l'aula.

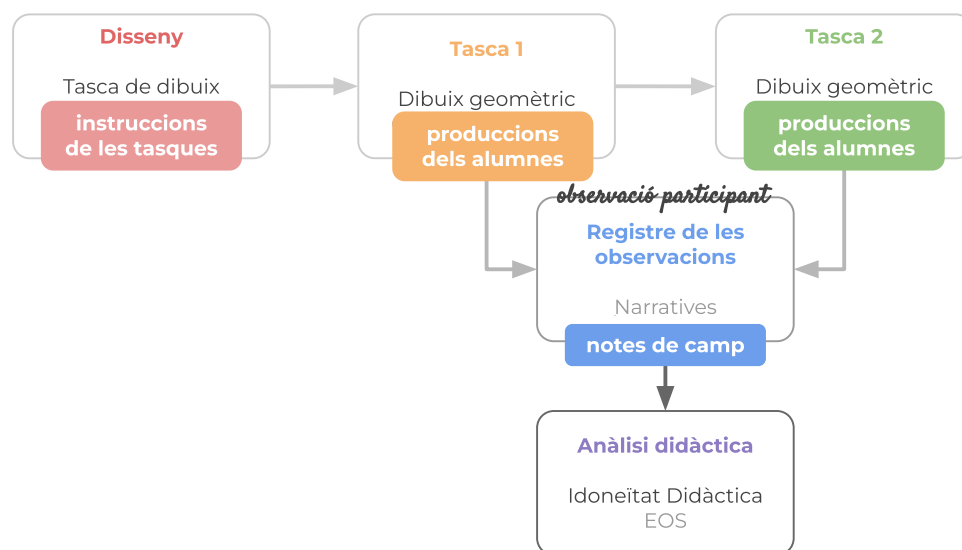


Figura 9.3.1. Esquema dels instruments de recollida de dades de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

9.3.1. El disseny: selecció del contingut curricular

A l'Annex 4 del Decret 187/2015 d'ordenació de l'ensenyament de l'educació secundària obligatòria de Catalunya es subratlla el tret competencial de l'àmbit matemàtic. S'hi estableix que l'adquisició de la competència matemàtica “es fa mitjançant els continguts, treballats de manera que potenciïn el seu desenvolupament”. Això se'n pot assolir anant “més enllà dels blocs de continguts tradicionals” donant rellevància als “processos que es desenvolupen al llarg de tot treball matemàtic (resolució de problemes; raonament i prova; connexions; comunicació i representació)”. Tots quatre processos s'associen a un nombre determinat de competències i a cada competència s'assignen uns continguts clau.

Respecte al procés de *Resolució de problemes*, el Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya especifica:

La resolució de problemes és una de les activitats més genuïnes del quefer matemàtic. S'hi posen en joc i prenen significat pràcticament tots els aspectes treballats en l'educació matemàtica. Un problema és una proposta d'enfrontament amb una situació desconeguda que es planteja a través d'un conjunt de dades dins d'un context, per a la qual, en principi, no es disposa d'una resposta immediata i que requereix reflexionar, prendre decisions i dissenyar estratègies (Annex 4 del Decret 187/2015, p. 86-87).

La dimensió de *Resolució de problemes* està conformada per quatre competències. A la **Taula 9.3.1.1.** es registren les quatre competències perquè totes elles estan relacionades amb el dibuix geomètric, segons ho indiquen els continguts clau relacionats a cadascuna d'elles. S'ha d'aclarir que també s'ha considerat un contingut clau auxiliar en el dibuix geomètric i el sentit espacial: el raonament proporcional, que s'associa a la competència dos (Annex 4 del Decret 187/2015).

Taula 9.3.1.1.

Dimensió de Resolució de problemes (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Competència	Continguts Clau relacionats amb geometria
Competència 1. Traduir un problema a llenguatge matemàtic o a una representació matemàtica utilitzant variables, símbols, diagrames i models adequats	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC11. Magnituds i mesura.
Competència 2. Emprar conceptes, eines i estratègies matemàtiques per resoldre problemes	CC2. Raonament proporcional. CC11. Magnituds i mesura. CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.
Competència 3. Mantenir una actitud de recerca davant d'un problema assajant estratègies diverses	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC10. Relacions i transformacions geomètriques.
Competència 4. Generar preguntes de caire matemàtic i plantejar problemes	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC10. Relacions i transformacions geomètriques. CC11. Magnituds i mesura.

Font: Elaboració pròpia.

Quant al procés de *Raonament i prova*, l'especificació del Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya és:

El raonament és consubstancial a la construcció del coneixement matemàtic i, per tant, ha d'estar present en l'aprenentatge de les matemàtiques. La prova, conjuntament amb el raonament, permet donar sentit i validar el coneixement matemàtic.

El desenvolupament de la capacitat de raonar que es fa dins de l'educació matemàtica ha de tenir com a objectiu que l'alumnat l'apliqui en tots els àmbits de la seva vida quotidiana amb prou precisió lògica. Quan el raonament es concreta en la prova permet a l'alumnat assolir confiança i seguretat en la resolució de situacions, siguin matemàtiques o no.

El raonament i la prova s'han de poder aplicar a la vida quotidiana en entorns no necessàriament matemàtics i contribuir als raonaments propis de les altres àrees de coneixement.

El disseny i la gestió de les activitats ha de permetre a l'alumnat: fer i fer-se preguntes, tenir una visió global del procés seguit des de la situació inicial fins al resultat final, admetre que la solució potser no existeix o que no és única, admetre que l'error forma part del procés, adonar-se que la resolució és un

pas per continuar resolent més situacions i tenir sentit crític (Annex 4 del Decret 187/2015, p. 89-90).

Les dues competències que integren la dimensió de *Raonament i prova* es relacionen amb el dibuix geomètric, tal i com se'n mostra a la **Taula 9.3.1.2.** (Annex 4 del Decret 187/2015).

Taula 9.3.1.2.

Dimensió de Raonament i prova (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Competència	Continguts Clau relacionats amb geometria
Competència 5. Construir, expressar i contrastar argumentacions per justificar i validar les afirmacions que es fan en matemàtiques	CC2. Raonament proporcional. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció. CC10. Relacions i transformacions geomètriques.
Competència 6. Emprar el raonament matemàtic en entorns no matemàtics	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.

Font: Elaboració pròpia.

En el marc de la dimensió de *Connexions*, es vetlla per què els estudiants puguin veure les matemàtiques com una eina fonamental pel descobriment i comprensió del món real. És a dir, amb un sentit d'utilitat la vida fora l'escola (Decret 187/2015):

La majoria dels conceptes estan connectats amb altres conceptes, tant en el mateix bloc de continguts com amb d'altres blocs. També els algorismes i les tècniques matemàtiques s'han de relacionar amb els conceptes i propietats en què es basen, per tal de veure que formen un tot coherent i fortament connectat.

Conèixer aquestes relacions proporciona un saber més profund i aplicable. És important que es tingui consciència que els aprenentatges adquirits són útils i són font de nous sabers. D'altra banda, les idees matemàtiques s'apliquen a un gran ventall de fenòmens (altres àrees de coneixement, vida quotidiana...) (Annex 4 del Decret 187/2015, p. 91-92).

El procés de *Connexions* està format per dues competències que tenen trets característics del dibuix geomètric (**Taula 9.3.1.3.**) (Annex 4 del Decret 187/2015).

Taula 9.3.1.3.

Dimensió de Connexions (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Competència	Continguts Clau relacionats amb geometria
Competència 7. Usar les relacions que hi ha entre les diverses parts de les matemàtiques per analitzar situacions i per raonar	CC2. Raonament proporcional. CC10. Relacions i transformacions geomètriques. CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.
Competència 8. Identificar les matemàtiques implicades en situacions properes i acadèmiques i cercar situacions que es puguin relacionar amb idees matemàtiques concretes	CC2. Raonament proporcional. CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC11. Magnituds i mesura.

Font: Elaboració pròpia.

Finalment, el procés de *Comunicació i representació*, segons el Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya, es descriu de la següent manera:

La representació és una eina per construir, estructurar i comunicar idees matemàtiques. La comunicació matemàtica, des dels esbossos més simples fins al llenguatge simbòlic més elaborat, sempre implica representació. Les múltiples varietats de representació (dibuixos, esquemes, construccions amb materials manipulables, taules, gràfics, símbols, recursos TIC) proporcionen, a més de diverses possibilitats de mostrar idees matemàtiques, diferents vies d'aproximar-se a aquestes idees, d'organitzar-les i de comprendre-les. Un bon indicador del grau de comprensió d'una idea matemàtica és la capacitat de relacionar les diferents representacions d'aquesta idea i triar la forma de representació més adequada a la situació i propòsit plantejats (Annex 4 del Decret 187/2015, p. 94).

Les quatre competències amb les quals es treballa la dimensió de *Comunicació i representació* (**Taula 9.3.1.4.**) es relacionen amb el dibuix geomètric (Annex 4 del Decret 187/2015).

El disseny de les tasques es va basar en l'orientació de l'Annex 4 del Decret 187/2015 d'ordenació de l'ensenyament de l'educació secundària obligatòria de Catalunya que indica:

L'avaluació de les competències matemàtiques s'ha de considerar des d'una perspectiva global i atendre també a la interrelació entre elles perquè no es donen aïllades, tot i això les orientacions s'han ordenat a partir de les quatre dimensions de l'àmbit per mantenir la coherència amb les altres parts del currículum (Annex 4 del Decret 187/2015, p. 98).

En aquest sentit, les orientacions per establir les activitats adreçades als alumnes provenen de l'Annex 4 del Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya (**Taula 9.3.1.5**).

Taula 9.3.1.4.

Dimensió de Comunicació i representació (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Competència	Continguts Clau relacionats amb geometria
Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.
Competència 10. Expressar idees matemàtiques amb claredat i precisió i comprendre les dels altres	CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció. CC10. Relacions i transformacions geomètriques.
Competència 11. Emprar la comunicació i el treball col·laboratiu per compartir i construir coneixement a partir d'idees matemàtiques	CC10. Relacions i transformacions geomètriques.
Competència 12. Seleccionar i usar tecnologies diverses per gestionar i mostrar informació, i visualitzar i estructurar idees o processos matemàtics	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.

Font: Elaboració pròpia.

Taula 9.3.1.5.

Orientacions per l'avaluació de l'assoliment de les competències matemàtiques relacionades amb el dibuix geomètric (Annex 4, Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Dimensió	Orientació
Resolució de problemes	Proposar problemes en què no s'explicitin les relacions entre les dades en llenguatge matemàtic.
Raonament i prova	Proposar que s'argumenti un procés de construcció d'una figura... però en un context quotidià o d'una altra disciplina
Connexions	Proposar qüestions que impliquin diversos blocs de continguts, de manera que sigui fàcil que s'evidenciïn connexions en l'exploració de la situació o en la resposta a preguntes.
Comunicació i representació	Plantejar activitats en grup. Les activitats poden ser activitats manipulatives. Es poden proposar problemes que requereixin construccions geomètriques, físiques o amb programes de geometria dinàmica; activitats manipulatives com ara construcció de figures i cossos geomètric; etc.

Font: Elaboració pròpia.

Convé puntualitzar els continguts curriculars que pertanyen al dibuix geomètric pel primer curs d'ESO i que a la vegada es relacionen amb els continguts claus dels quatre processos que ajuden al desenvolupament de les

competències matemàtiques. En primer terme, per a les dimensions de *Resolució de problemes* i de *Connexions* es tenen els mateixos continguts clau i per tant, els mateixos continguts curriculars (**Taula 9.3.1.6.**).

Taula 9.3.1.6.

Continguts curriculars associats als continguts clau de la dimensió de Resolució de problemes i Connexions (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Resolució de problemes / Connexions	
Continguts Clau	Continguts curriculars
CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	Figures geomètriques de dues dimensions - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models. - Classificació i propietats. - Posició i orientació de les figures. - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat).
CC10. Relacions i transformacions geomètriques.	Simetria - Identificació en entorns propers (natura, construccions, fotografies...) - Representació i construcció.
CC11. Magnituds i mesura.	Unitats de mesura de magnituds, longituds, angles i d'àrees - Selecció de les unitats adequades a cada situació. - Relació entre unitats i conversió entre unitats. Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions - Estimació a vista de mesures d'objectes de l'entorn. - Ús dels instruments adequats en les mesures d'objectes. - Presa de mesures de longituds. - Càlcul de longituds, angles, perímetres i àrees.
CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.	Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions - Estimació a vista de mesures d'objectes de l'entorn. - Ús dels instruments adequats en les mesures d'objectes. - Presa de mesures de longituds. - Càlcul de longituds, angles, perímetres i àrees.

Font: Elaboració pròpia.

A la dimensió de *Raonament i prova* corresponen els continguts curriculars associats als continguts clau (**Taula 9.3.1.7.**), de la mateixa manera que el cas previ en són cinc blocs de continguts però amb algunes variacions. En concret, les tres dimensions coincideixen en els continguts clau relacionats amb: la proporcionalitat (CC2), el sentit espacial (CC8), les relacions i transformacions geomètriques (CC10) i relacions mètriques (CC12). Per tant, la dimensió de *Raonament i prova* només es distingeix dels processos de *Resolució de problemes* i *Connexions* pel contingut clau: figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció (CC9).

Taula 9.3.1.7.

Continguts curriculars associats als continguts clau de la dimensió de Raonament i prova (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Raonament i prova	
Continguts Clau	Continguts curriculars
CC2. Raonament proporcional.	Fraccions - Estratègies numèriques per resoldre problemes.
CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	Figures geomètriques de dues dimensions - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models. - Classificació i propietats. - Posició i orientació de les figures. - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat).
CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.	Eines i instruments - Materials manipulables (retallables, geoplans, papers pautats). - Instruments de dibuix (regle, escaire, compàs i transportador). - Eines digitals (applets diversos i programari lliure de geometria dinàmica, tipus GeoGebra).
CC10. Relacions i transformacions geomètriques.	Simetria - Identificació en entorns propers (natura, construccions, fotografies...) - Representació i construcció.
CC12. Relacions mètriques i càlcul de mesures en figures.	Longituds, perímetres i àrees de figures en dues dimensions - Estimació a vista de mesures d'objectes de l'entorn. - Ús dels instruments adequats en les mesures d'objectes. - Presa de mesures de longituds. - Càlcul de longituds, angles, perímetres i àrees.

Font: Elaboració pròpia.

Finalment, pel que fa a la dimensió de *Comunicació i representació*, els continguts curriculars s'organitzen en tres blocs que pertanyen als tres continguts clau relacionats amb la geometria dins aquest procés matemàtic (**Taula 9.3.1.8**). Cal puntualitzar que els tres grups de continguts clau es presenten en la resta de les dimensions, però amb combinacions diferents.

Recuperant l'esquema dels instruments de recollida de dades dissenyat per aquest estudi (**Figura 9.3.1**), les dues tasques implementades a l'aula corresponen a la mateixa selecció de competències, dimensions o processos matemàtics, continguts clau i continguts curriculars relacionats amb el dibuix geomètric que pertany al primer curs d'ESO en Catalunya (**Figura 9.3.1.1**).

Taula 9.3.1.8.

Continguts curriculars associats als continguts clau de la dimensió de Comunicació i representació (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya).

Comunicació i representació	
Continguts Clau	Continguts curriculars
CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	Figures geomètriques de dues dimensions - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models. - Classificació i propietats. - Posició i orientació de les figures. - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat).
CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.	Eines i instruments - Materials manipulables (retallables, geoplans, papers pautats). - Instruments de dibuix (regle, escaire, compàs i transportador). - Eines digitals (applets diversos i programari lliure de geometria dinàmica, tipus GeoGebra).
CC10. Relacions i transformacions geomètriques.	Simetria - Identificació en entorns propers (natura, construccions, fotografies...). - Representació i construcció.

Font: Elaboració pròpia.

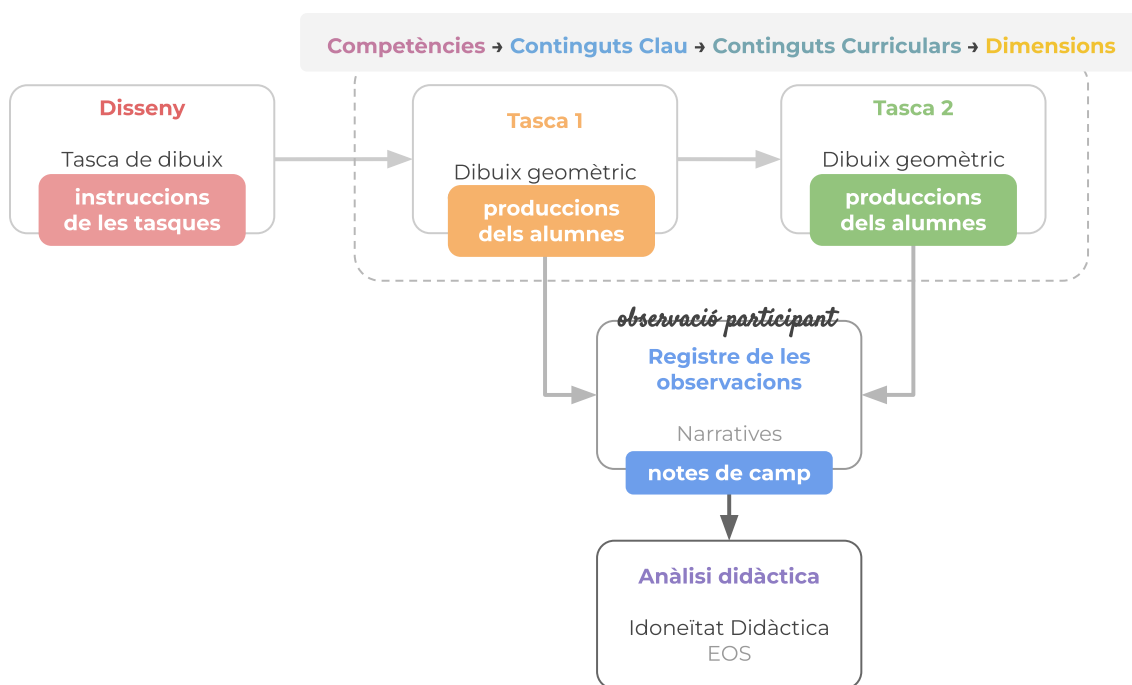


Figura 9.3.1.1. Esquema de la relació entre la selecció dels continguts curriculars i els instruments de recollida de dades de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

9.3.2. La Tasca 1

El disseny de les instruccions pel desenvolupament de la primera tasca es va pensar a partir dels següents aspectes: el tret competencial del currículum d'ESO de la Generalitat de Catalunya (Decret 187/2015; GenCat, 2017a) i les condicions de grup (nombre d'alumnes), la disposició de l'aula (materials dels quals s'hi disposa), l'organització del centre educatiu (la durada de les sessions) i la relació amb una tasca consecutiva (Tasca 2).

9.3.2.1. El contingut curricular de la Tasca 1

La selecció dels continguts curriculars se va fer tenint en ment l'objectiu de portar als alumnes una activitat de caire geomètric en la qual s'hagi d'utilitzar el dibuix geomètric com antecedent a la construcció d'un cos geomètric tridimensional. Segons s'indica al currículum del primer curs d'ESO (Decret 187/2015; GenCat, 2017 a), els continguts curriculars del bloc "Espai i forma" s'organitzen en dos grups (**Taula 9.3.2.1.1.**) amb les capçaleres dels següents continguts clau: Sentit espacial i representació de figures tridimensionals (CC8) i Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció (CC9).

Taula 9.3.2.1.1.

Continguts curriculars del bloc "Espai i forma" associats als continguts clau (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya; GenCat, 2017a).

Continguts Clau	Continguts curriculars del bloc "Espai i forma"
CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.	Figures geomètriques de dues dimensions - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models. - Classificació i propietats. - Posició i orientació de les figures. - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat).
CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.	Eines i instruments - Materials manipulables (retallables, geoplans, papers pautats). - Instruments de dibuix (regle, escaire, compàs i transportador). - Eines digitals (applets diversos i programari lliure de geometria dinàmica, tipus GeoGebra).

Font: Elaboració pròpia.

9.3.2.1.1. Justificació de la selecció dels continguts curriculars de la Tasca 1

Els continguts curriculars del bloc "Espai i forma" del currículum de l'àmbit matemàtic pel primer curs d'ESO (Decret 187/2015; GenCat, 2017 a) triats pel disseny de la Tasca 1 s'agrupen en dos conjunts: (1) Figures geomètriques de dues dimensions i (2) Eines i instruments (**Annex 1**). Com es veu a la **Taula 9.3.2.1.1.**, tots dos conjunts de continguts curriculars del bloc "Espai i forma" es relacionen amb dos continguts clau: Sentit espacial i representació de figures tridimensionals (CC8) i Figures geomètriques,

característiques, propietats i processos de construcció (CC9). A la vegada, aquests continguts ajuden al desenvolupament dels següents processos (Departament d'Ensenyament):

- Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques.

- Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes.

Aquests dos processos permeten el desenvolupament de diferents processos. En el cas concret del primer d'ells, afavoreix els processos específics de comunicació i representació, de connexions i de raonament i prova. Els processos i continguts que corresponen a aquest primer procés es descriuen a la **Taula 9.3.2.1.2.** on s'organitzen segons el procés específic que els hi correspon. En el cas del segon procés, només facilita el desenvolupament dels processos específics de comunicació i representació i de connexions. A la mateixa **Taula 9.3.2.1.2.** es mostren els processos i continguts lligats als processos específics del segon procés (Departament d'Ensenyament). S'ha d'aclarir que només s'han registrat dins aquesta graella els processos i continguts (tercera columna de la **Taula 9.3.2.1.2.**) que es relacionen amb les tasques de dibuix geomètric. Per tant, alguns d'ells han quedat fora aquest registre però s'hi poden consultar a l'**Annex 1.**

Des de la perspectiva competencial, els continguts clau vuit i nou que es relacionen amb les continguts curriculars del bloc "Espai i forma" es poden assolir amb la Competència 9 de la dimensió de Comunicació i Representació, com es pot consultar a la **Figura 9.3.1.4.** (Decret 187/2015; GenCat, 2017a). La tasca 1 es dissenya amb l'objectiu "Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic" (Competència 9), seguint els continguts clau de "Sentit espacial i representació de figures tridimensionals" i "Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció", que corresponen als continguts curriculars agrupats en les categories "Figures geomètriques de dues dimensions" i "Eines i instruments" (GenCat, 2017a). Per tant, la tasca 1 es desenvolupa en la dimensió de Comunicació i representació del Currículum de la Generalitat de Catalunya pel Primer curs d'ESO (**Figura 9.3.2.1.1.**).

Taula 9.3.2.1.2.

Processos i continguts del bloc “Espai i forma” associats als continguts clau (Departament d’Ensenyament de la Generalitat de Catalunya).

Espai i forma		
Procés	Processos específics	Processos i continguts
Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques.	Comunicació i representació	Descripció de figures geomètriques de dues i tres dimensions a partir de l’observació d’objectes de la realitat.
	Connexions	Exploració de diverses figures geomètriques i
Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes.	Raonament i prova	anàlisi de les seves característiques mitjançant geoplans, paper puntejat, programes informàtics dinàmics.
	Comunicació i representació	Dibuix d’objectes geomètrics a partir de dades establertes: longituds i mesura d’angles mitjançant instruments de dibuix habituals, regle, escaire, compàs i transportador. Representació plana d’objectes en la resolució de problemes d’àrees. Organització del pensament matemàtic propi. Comunicació del pensament matemàtic propi a companys i professors i contrast amb el dels altres. Connexions amb altres blocs de matemàtiques i amb altres àrees.
	Connexions	Reconeixement d’objectes en contextos no matemàtics com l’art, les ciències i la vida quotidiana.

Font: Elaboració pròpia.

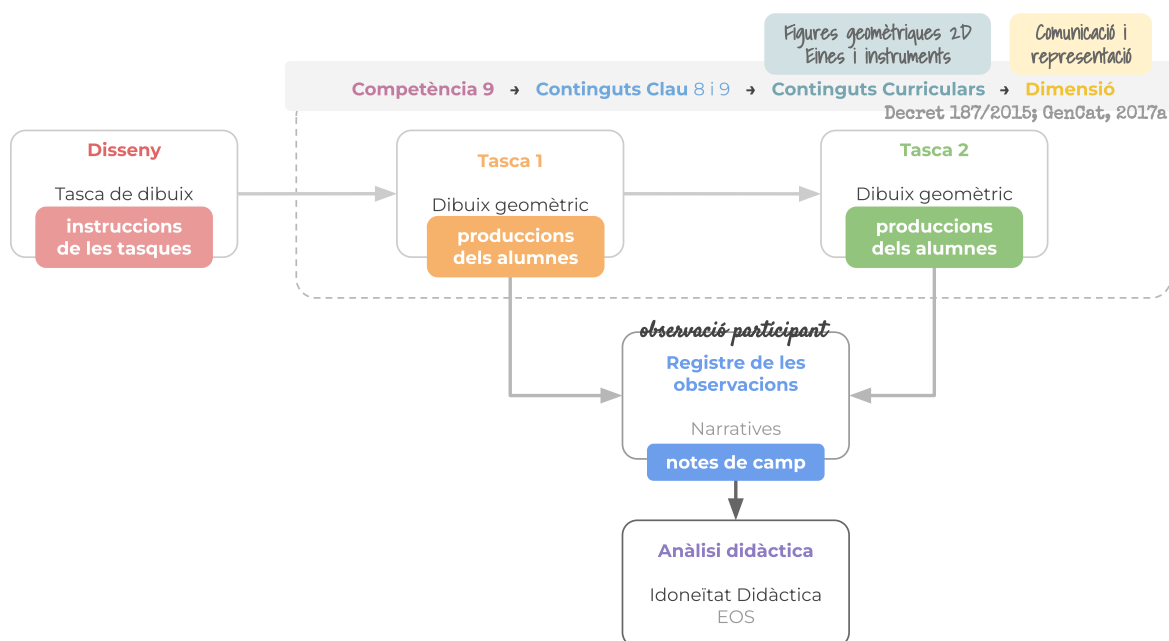


Figura 9.3.2.1.1. Esquema dels continguts curriculars de les tasques de l’estudi de cas d’aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

9.3.2.2. El disseny didàctic de la Tasca 1

Un cop identificats els elements curriculars de dibuix geomètric del primer curs d'ESO amb els quals és possible plantejar una tasca col·laborativa de construcció de cossos geomètrics (**Figura 9.3.2.2.1.**), la Tasca 1 es va dissenyar com una activitat contextualitzada i manipulativa on l'ús d'eines i instruments va ser fonamental pel seu desenvolupament.

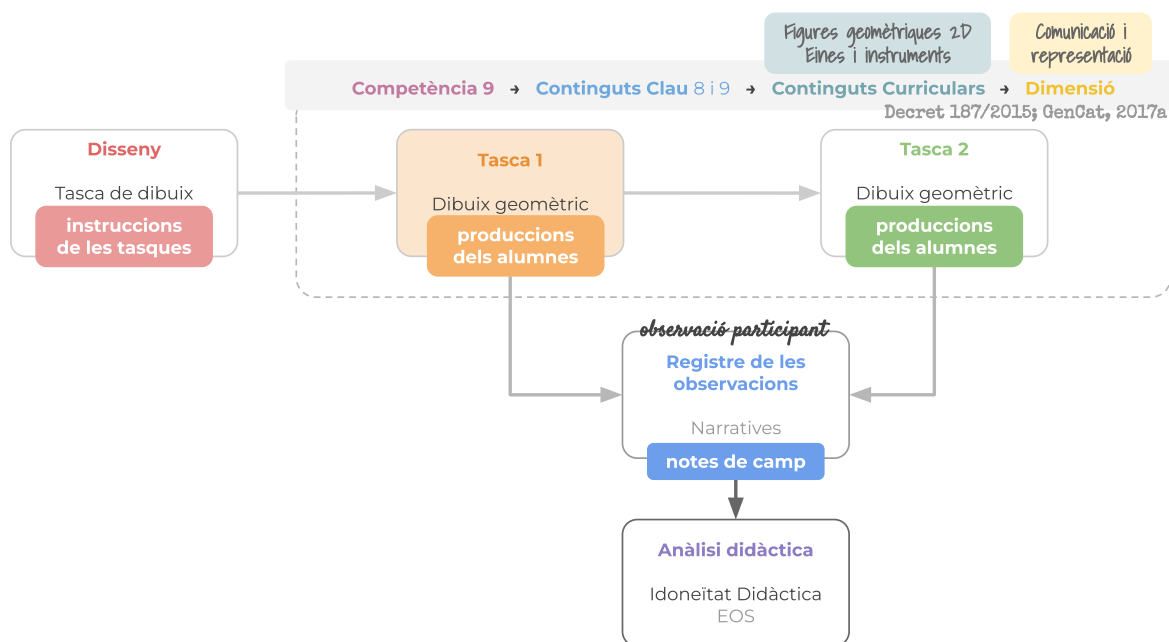


Figura 9.3.2.2.1. Esquema dels continguts curriculars de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Els objectius d'aprenentatge de la Tasca 1 es van orientar en els continguts curriculars que corresponen a les categories "Figures geomètriques de dues dimensions" i "Eines i instruments" (**Taula 9.3.2.1.1.**). Per tant, amb aquests objectius d'aprenentatge s'estableix el propòsit d'ajudar a que els alumnes identifiquin característiques d'un cos geomètric presentat en una imatge i emprin instruments de dibuix geomètric. Sense perdre el tret competencial de la dimensió de Comunicació i representació, també és objectiu de la Tasca 1 que hi hagi diàleg entre els alumnes per tal d'arribar amb èxit a l'obtenció d'una representació física d'un cos geomètric (**Taula 9.3.2.2.1.**).

Taula 9.3.2.2.1.

Objectius d'aprenentatge de la Tasca 1.

Tasca 1
Objectius d'aprenentatge
<ol style="list-style-type: none">1. Identificar la forma de les cares d'un cos geomètric específic: octaedre.2. Compartir idees, raonaments i coneixements amb els companys per desenvolupar estratègies de dibuix geomètric.3. Emprar regla, escaire i paper per dibuixar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter.4. Trobar estratègies de manera col·laborativa amb altres companys per resoldre un problema: construir un cos.5. Reconstruir un cos geomètric (octaedre) a partir de les seves cares (triangles equilàters).

Font: Elaboració pròpia.

El context pensat, per arribar als objectius d'aprenentatge plantejats (**Taula 9.3.2.2.1**), va ser creat per l'autora de la tesi qui es va inspirar en els globus de *Cantoya* i l'*European Balloon Festival*. Per una banda, els globus de *Cantoya* són petits globus de paper molt fi ("globos de papel de seda", 2021) que són construïts per fer celebracions culturals en països d'Amèrica, com Mèxic. Per una altra banda, l'*European Balloon Festival* és un esdeveniment estiuenc en el qual s'enliren globus tripulats i que es duu a terme en Igualada, Barcelona al començament de l'agost (<https://www.ebf.cat/index.php/ca/>). L'autora va proposar que la Tasca 1 fos un repte col·laboratiu de construcció d'un globus de paper. A la **Figura 9.3.2.2.1**, es mostra el plantejament del context de la tasca, part inicial del full d'instruccions en el qual s'observa el context de la tasca: un festival de globus aerostàtics.

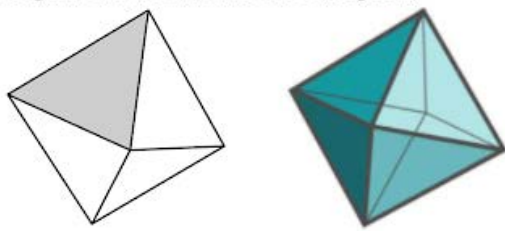
Títol	Festival de Globus
Situació	<p>Tot el grup participarà al Festival de Globus. Es tracta d'un festival especial on es prova l'habilitat dels equips que hi participen. Aquest Festival fa un sorteig de diferents cossos geomètrics perquè cada equip faci el model en paper només amb les eines donades.</p> <p>→ El cos que ha sigut assignat a la vostra classe és el següent:</p> <div style="text-align: center;"></div>

Figura 9.3.2.2.1. Context de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Un cop establert el context de la tasca, es va centrar l'atenció en el tipus d'interacció entre els alumnes. Es van proposar tres nivells d'interacció: (Tipus 1) restringida al grup de treball (**Figura 9.3.2.2.2.**), (Tipus 2) oberta a la resta dels grups de treball però restringida de compartir materials (**Figura 9.3.2.2.3.**) i (Tipus 3) oberta a la resta del grups de treball i amb opció de compartir material (**Figura 9.3.2.2.4.**). El full d'instruccions per lliurar a cada grup tenia el context de la tasca i les instruccions que corresponen al tipus d'interacció desitjada entre l'alumnat: Tipus 1, restringida (**Annex 2**); Tipus 2, oberta però restringida (**Annex 3**) i Tipus 3, oberta (**Annex 4**).

Instruccions

Tipus 1

Parleu tota la classe per tres minuts per posar-se d'acord sobre la informació que considereu necessària per arribar a la producció de la figura assignada sota les següents condicions:

1. S'han de formar vuit equips amb un nombre igual de membres.
2. La tasca s'ha de dividir en parts iguals perquè cada equip faci exactament el mateix que els altres.
3. Tots els equips disposen de vint minuts per fer la seva tasca.
4. Començat el treball en equip, no es permet compartir informació i eines amb altres equips. Tampoc es permet copiar les estratègies dels altres.
5. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes.

25'

6. Reuniu les resultats de cada equip per formar el cos assignat al grup.

10'

Figura 9.3.2.2.2. Instruccions Tipus 1 de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Instruccions

Tipus 2

Parleu tota la classe per tres minuts per posar-se d'acord sobre la informació que considereu necessària per arribar a la producció de la figura assignada sota les següents condicions:

1. S'han de formar vuit equips amb un nombre igual de membres.
2. La tasca s'ha de dividir en parts iguals perquè cada equip faci exactament el mateix que els altres.
3. Tots els equips disposen de vint minuts per fer la seva tasca.
4. Començat el treball en equip es permet parlar amb altres equips, però no es permet compartir material.
5. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes.

25'

6. Reuniu les resultats de cada equip per formar el cos assignat al grup.

10'

Figura 9.3.2.2.3. Instruccions Tipus 2 de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Instruccions

Tipus 3

Parleu tota la classe per tres minuts per posar-se d'acord sobre la informació que considereu necessària per arribar a la producció de la figura assinada sota les següents condicions:

1. S'han de formar vuit equips amb un nombre igual de membres.
2. La tasca s'ha de dividir en parts iguals perquè cada equip faci exactament el mateix que els altres.
3. Tots els equips disposen de vint minuts per fer la seva tasca.
4. Començat el treball en equip es permet interactuar amb la resta dels equips. Podeu parlar i compartir material, si voleu.
5. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes.

25'

6. Reuniu les resultats de cada equip per formar el cos assignat al grup.

10'

Figura 9.3.2.2.4. Instruccions Tipus 3 de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Per tal d'obtenir el registre del treball de grup es va preparar un full de respostes (**Annex 5**) amb preguntes adreçades a la justificació dels procediments de dibuix fets per cada grup de treball (**Taula 9.3.2.2.2.**).

Taula 9.3.2.2.2.

Preguntes del Full de Respostes de la Tasca 1.

Tasca 1
Preguntes del Full de Respostes
<ol style="list-style-type: none">1. Quina és la informació numèrica donada dins el problema?2. Quina és la informació no numèrica donada dins el problema?3. Quina informació numèrica es requereix per resoldre el problema?4. Quina informació no numèrica es requereix per resoldre el problema?5. Quina informació no té cap utilitat en la resolució del problema?6. Quines són les operacions o el dibuixos necessaris en el primer pas de la resolució del problema?7. Com descrius aquest primer pas sense fer cap operació o dibuix?8. Quines són les operacions o el dibuixos necessaris en el segon pas de la resolució del problema?9. Com descrius aquest segon pas sense fer cap operació o dibuix?10. Quina és la informació numèrica obtinguda de la resolució d'aquest problema?11. Quina és la informació no numèrica obtinguda de la resolució d'aquest problema?12. Quins conceptes de geometria has utilitzat en aquest exercici?13. Trobes d'utilitat aquest problema?

Font: Elaboració pròpia.

Les orientacions que l'investigador, en la seva actuació com a professor per la intervenció dins l'aula, pot fer als alumnes es van preveure amb una proposta de desenvolupament pla del cos geomètric que es va registrar

al seu full d'instruccions (**Figura 9.3.2.2.5.**). A l'**Annex 6** es mostra el full d'orientació o guia pel docent per implementar la tasca a l'aula.



Figura 9.3.2.2.5. Orientació per implementar la tasca 1 a l'aula per l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Finalment, per la identificació dels requeriments pel desenvolupament de l'activitat es va pensar en els materials necessaris per la construcció dels globus: fulls de paper, instruments de dibuix geomètric, adhesiu i llapis. El disseny didàctic de la Tasca 1 es pot consultar de manera íntegra en l'**Annex 7**.

9.3.3. La Tasca 2

De la mateixa manera que la Tasca 1, la Tasca 2 s'adapta a l'enfocament competencial del currículum del primer curs d'ESO de Catalunya (Decret 187/2015; GenCat, 2017a), a les condicions del grup i l'aula, l'organització del centre i la concordança amb la tasca previa (Tasca 1).

9.3.3.1. El contingut curricular de la Tasca 2

Considerant que la Tasca 2 és una activitat amb la qual es vol donar seguiment a la Tasca 1, se'n pot considerar com una sessió complementària o d'ampliació. Per consegüent, les consideracions curriculars del disseny de la Tasca 1 són el punt de partida d'aquest nou disseny didàctic: els continguts curriculars associats als continguts clau "Sentit espacial i representació de figures tridimensionals" (CC8) i "Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció" (CC9) del bloc "Espai i forma" (**Taula 9.3.2.1.1.**) (Decret 187/2015; GenCat, 2017a).

9.3.3.1.1. Justificació de la selecció dels continguts curriculars de la Tasca 2

Tal i com s'ha explicat al subapartat anterior, es justifica la selecció dels continguts curriculars de la Tasca 1 en els mateixos termes de l'activitat a la qual succeeixen: la Tasca 1 (**Figura 9.3.3.1.1.**). És per això que les directius curriculars pel disseny didàctic de la Tasca 2 tornen a ser les mateixes que aquelles utilitzades amb la

Tasca 1 (**Taula 9.3.2.1.1**): l'enfocament de la Competència 9 de la dimensió de “Comunicació i representació”, les relacions entre els continguts clau CC8 i CC9 amb els grups de continguts curriculars “Figures geomètriques en dues dimensions” i “Eines i instruments” i els processos “Anàlitzar les característiques i propietats de les figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques” i “Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes” indicades al Decret 187/2015 d'ordenació de l'ensenyament de l'educació secundària obligatòria de la Generalitat de Catalunya (**Figura 9.3.3.1.1.1**).

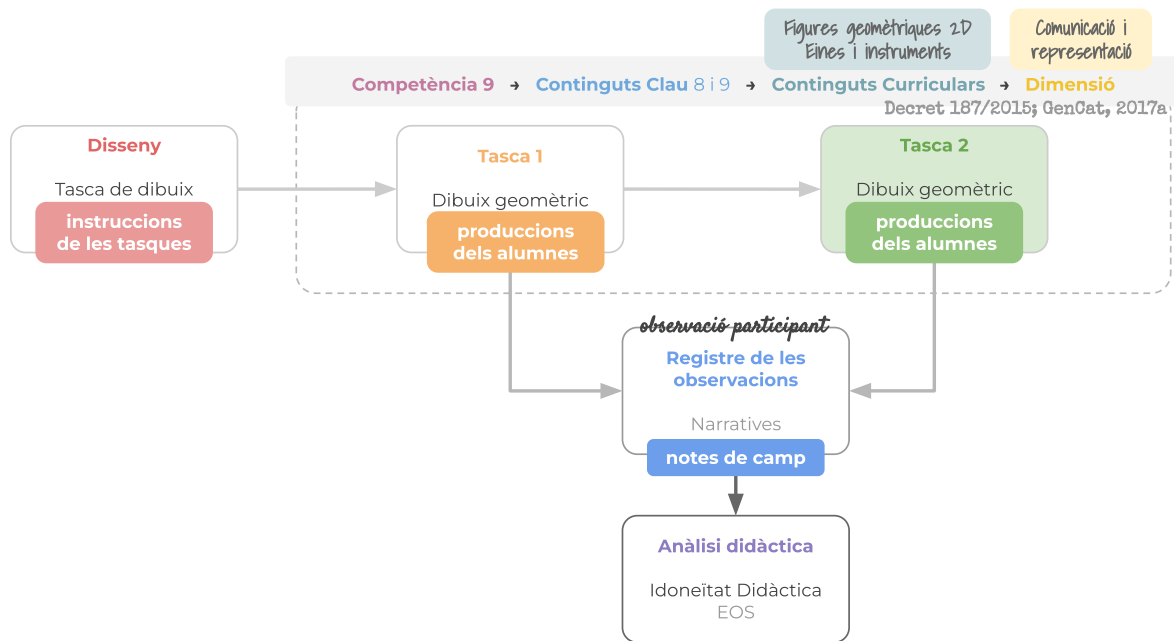


Figura 9.3.3.1.1.1. Esquema dels continguts curriculars de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

9.3.3.2. El disseny didàctic de la Tasca 2

A banda de la selecció dels elements del currículum, el disseny didàctic de la Tasca 2 té un segon punt de referència: els objectius d'aprenentatge. El propòsit general d'aquesta segona sessió és proporcionar als alumnes l'oportunitat de comparar més d'un cos geomètric a partir d'un mateix paràmetre: la superfície que requereixen les seves cares mitjançant la manipulació de cossos geomètrics construïts pels mateixos alumnes. Cosa que porta cap als objectius d'aprenentatge concrets que es mostren a la **Taula 9.3.3.2.1** d'aquest subapartat.

Taula 9.3.3.2.1.

Objectius d'aprenentatge de la Tasca 2.

Tasca 2
Objectius d'aprenentatge
<ol style="list-style-type: none">1. Identificar la forma de les cares d'un poliedre.2. Trobar estratègies de manera col·laborativa amb altres companys per identificar l'orientació i posició de les cares que conformen un poliedre.3. Compartir idees, raonaments i coneixements amb els companys per desenvolupar estratègies de dibuix geomètric pel desenvolupament pla d'un poliedre dins una superfície determinada.4. Emprar regla, escaire i paper per dibuixar el desenvolupament pla d'un poliedre.5. Reconstruir un poliedre a partir del seu desenvolupament pla.6. Reconèixer que el nombre de cares d'un poliedre és un factor determinant en l'ús de l'àrea màxima d'una superfície donada.

Font: Elaboració pròpia.

Amb relació al context triat per la Tasca 2, l'autora es va inspirar en el concepte “myrahedral projections” (<https://www.win.tue.nl/~vanwijk/myriahedral/>) que consisteix en el “desplegament” del globus terraquí per formar un mapamundi. Doncs, el repte de la Tasca 2 va ser la construcció del desenvolupament pla de diferents poliedres sobre el mapamundi (**Figura 9.3.3.2.1.**).

Títol	La forma de la Terra
Resum	Representar un cos tridimensional a partir de material de dos dimensions per fer-se quan se identifiquen totes dues les formes de les superfícies i la relació que hi ha entre elles. La reconstrucció de les superfícies planes al seu ordre respecte les altres fa possible el canvi de dimensions. D'aquesta manera, un mapa de dos dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblegament adequats.
Situació	L'estudi d'un cos de tres dimensions com la Terra es simplifica quan es treballa en una dimensió. Els mapes són imatges idealitzades del que hi ha a la Terra, però representat sobre un pla. Com faries per passar d'un mapa que té forma plana a un cos geomètric de tres dimensions?

Figura 9.3.3.2.1. Context de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

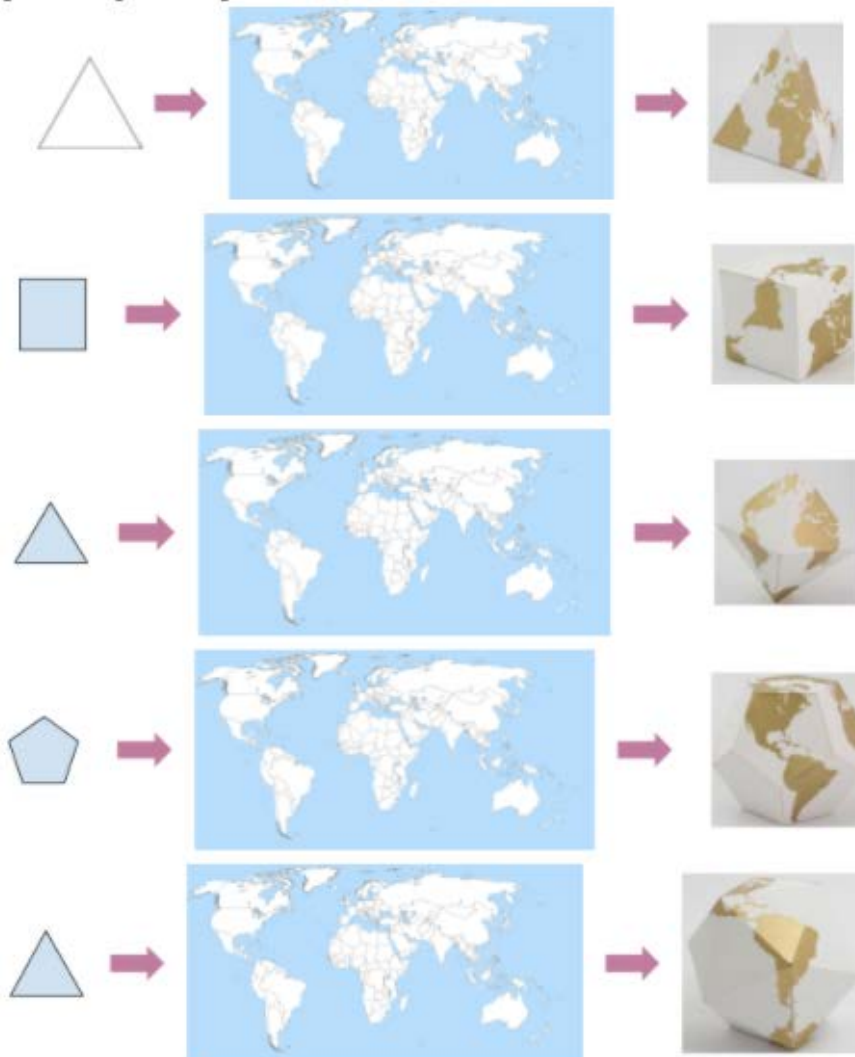
Font: Elaboració pròpia.

A partir d'aquest context, i a diferència de la Tasca 1, les instruccions donades als alumnes van ser d'un sol tipus (**Figura 9.3.3.2.2.**). S'ha de destacar que es va considerar rellevant afegir representacions gràfiques per orientar als alumnes perquè es va preveure una altra complexitat en l'activitat. El full d'instruccions que es va lliurar als alumnes es troba a l'**Annex 8**. De manera semblant a la Tasca 1, aquesta activitat té requeriments de materials específics: mapes, instruments de dibuix, etc. El mapamundi lliurat als alumnes va ser la

impressió blanc i negre en un full A4 de la imatge que es mostra a l'Annex 9. Quant a les orientacions per implementar l'activitat a l'aula, es va preparar un full amb propostes de desenvolupaments plans dels poliedres proposats als alumnes per facilitar l'actuació de l'investigador a la Tasca 2 (Annex 10). El disseny didàctic sencer de la Tasca 2 es troba a l'Annex 11.

Instruccions

1. Formeu vuit equips amb el mateix nombre de membres.
2. Disposeu de cinc mapes, porteu-los a la forma tridimensional amb les figures donades segons els següents diagrames:



3. Observeu que per cada mapa només es pot utilitzar una de les figures per formar el cos geomètric. Llavors, tots els mapes donaren un cos geomètric regular diferent.
4. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes.

25'

5. Observeu les propostes i compareu amb les vostres.

Figura 9.3.2.2.2. Instruccions de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

9.3.4. Els qüestionaris

Stake (2003) proposa la col·laboració dels participants com una estratègia de triangulació amb la qual validar les dades recollides (**Figura 9.3.4.1.**). Per tal d'obtenir la interpretació dels participants, es van dissenyar dos qüestionaris on els indicadors d'*idoneïtat didàctica* (Capítol 7) es presenten a manera de pregunta.

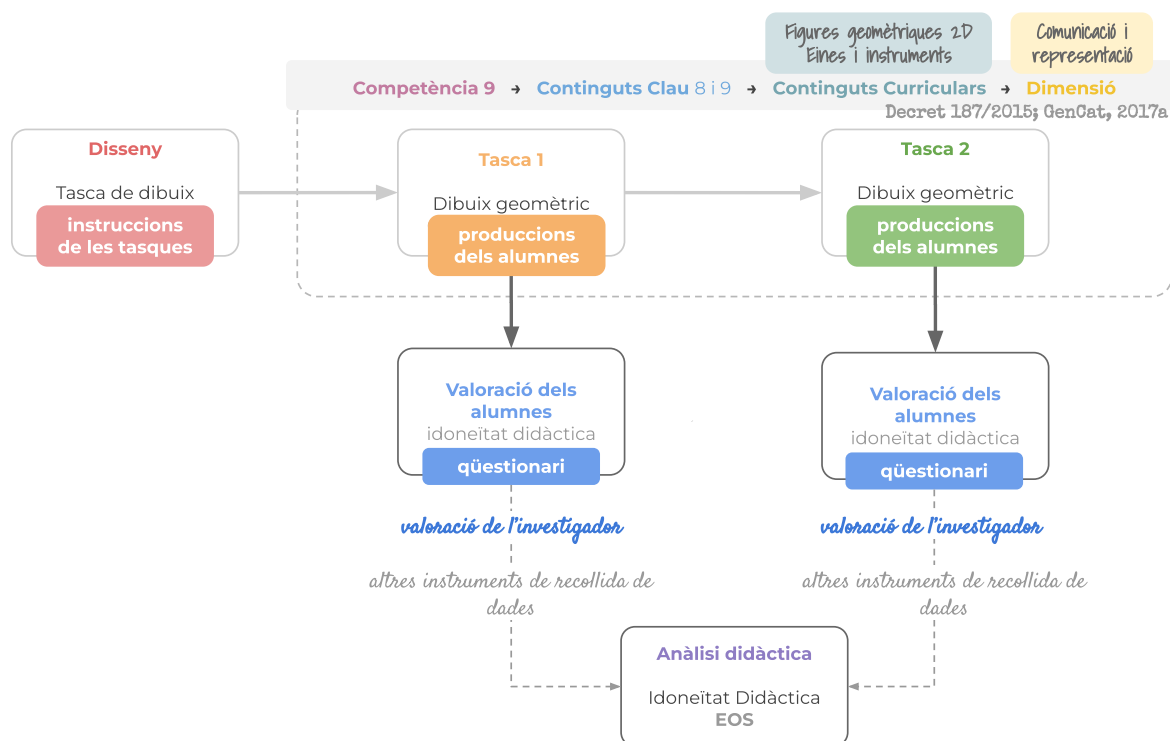


Figura 9.3.4.1. Esquema específic dels instruments d'obtenció d'informació relacionada amb els indicadors d'*idoneïtat didàctica* de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Sabent de la limitació del temps, es van redactar les preguntes de manera que la resposta es pogués triar entre un nombre definit d'opcions donades: sí, molt, poc, res. A l'**Annex 12** es mostren les preguntes adreçades als alumnes. Per una altra banda, les preguntes adreçades als professors es poden consultar a l'**Annex 13**.

9.3.5. Les notes de camp

El registre de l'observació participant de l'autora d'aquest treball de recerca doctoral es va fer mitjançant notes de camp tipus diari. Per aquesta raó, les notes de camp que corresponen a cadascuna de les dues tasques són dos documents diferenciats elaborats en el moment que se'n va desenvolupar (**Figura 9.3.5.1.**). El registre de les observacions de la Tasca 1 es poden consultar a l'**Annex 14**, mentre que a l'**Annex 15** es troba la narrativa de la Tasca 2.

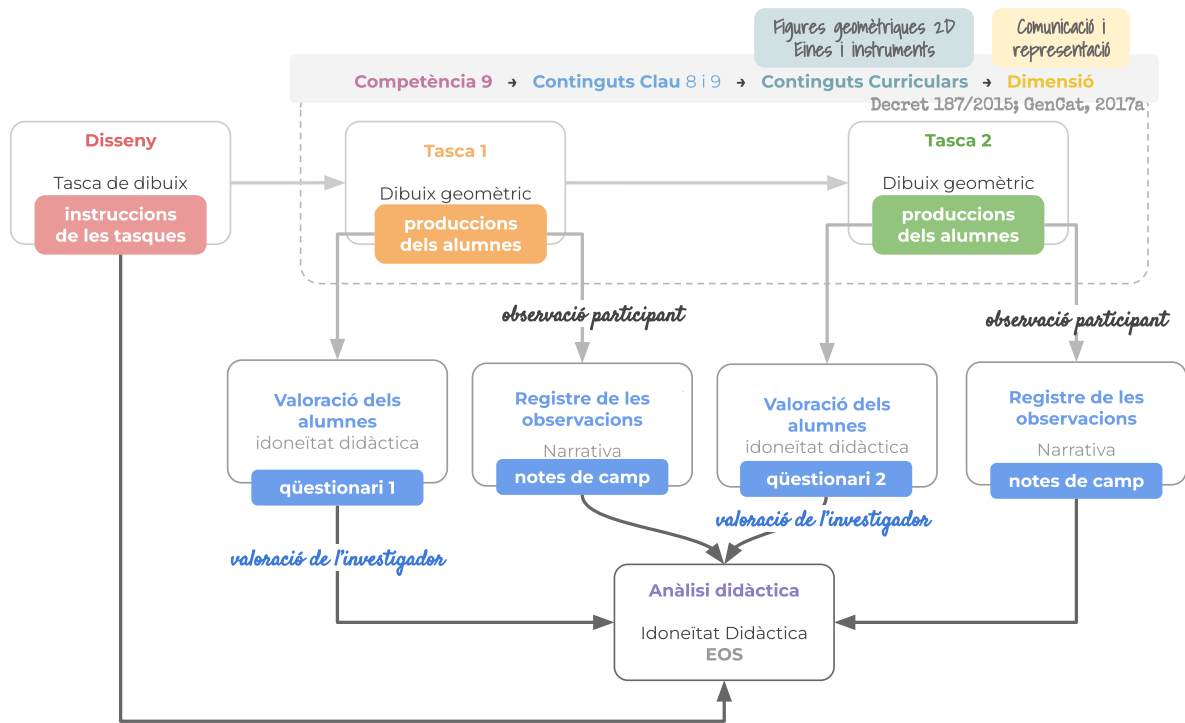


Figura 9.3.5.1. Esquema específic dels instruments d'obtenció d'informació de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 10. Processos i instruments d'anàlisi

Des de la perspectiva de l'enfocament ontosemiòtic (EOS), la identificació de les entitats primàries és el punt de partida de l'anàlisi didàctica de l'activitat matemàtica. En altres termes, les pràctiques matemàtiques, els objectes matemàtics, els processos matemàtics i les funcions semiòtiques són elements clau per modelitzar les facetes semiòtiques i antropològiques del coneixement matemàtic (Godino, 2018). En el cas de la recerca d'aquest treball de tesi, la identificació dels elements clau de les tasques de dibuix geomètric dissenyades per alumnes del primer curs d'ESO en Catalunya s'han de treure del disseny didàctic de les sessions, de les produccions dels alumnes i de les notes de camp. Els instruments per obtenir la informació són les peces fonamentals de l'anàlisi didàctica de l'estudi de cas que es discuteix en aquesta tesi doctoral i els constructes d'anàlisi didàctica de l'EOS que farem servir aquí són: les configuracions epistèmiques, les trajectòries didàctiques i la *idoneïtat didàctica*. Aquestes mateixes eines de recollida de dades es recolzen entre elles mateixes. És a dir, la identificació preliminar dels constructes hipotètics d'anàlisi didàctica orienten en el reconeixement de les dades sorgides al camp (**Figura 10.1.**).

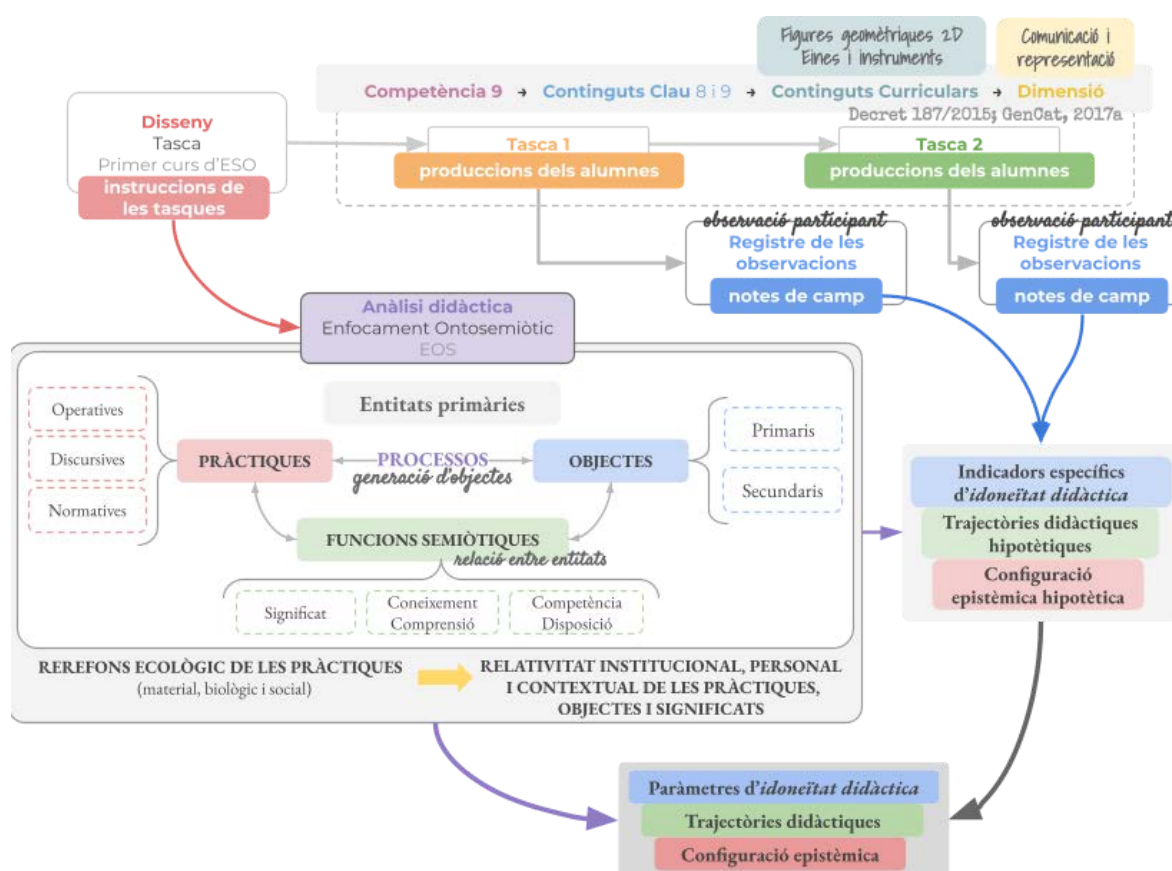


Figura 10.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i els constructes d'anàlisi didàctica de l'EOS per l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.1. Configuració epistèmica hipotètica de les tasques

Godino, Batanero i Font (2009) estableixen la relació i interdependència entre els objectes matemàtics primaris d'una activitat matemàtica. La identificació dels objectes matemàtics que es pretén portar cap a l'aula en implementar la tasca de dibuix geomètric dissenyada dins aquest treball de recerca prové d'un dels instruments de recollida de dades: el disseny didàctic de les tasques. Amb l'establiment de la configuració epistèmica hipotètica de cadascuna de les dues tasques és possible centrar l'atenció en els objectes matemàtics que s'espera puguin sorgir en implementar les tasques a l'aula (**Figura 10.2.1.**).

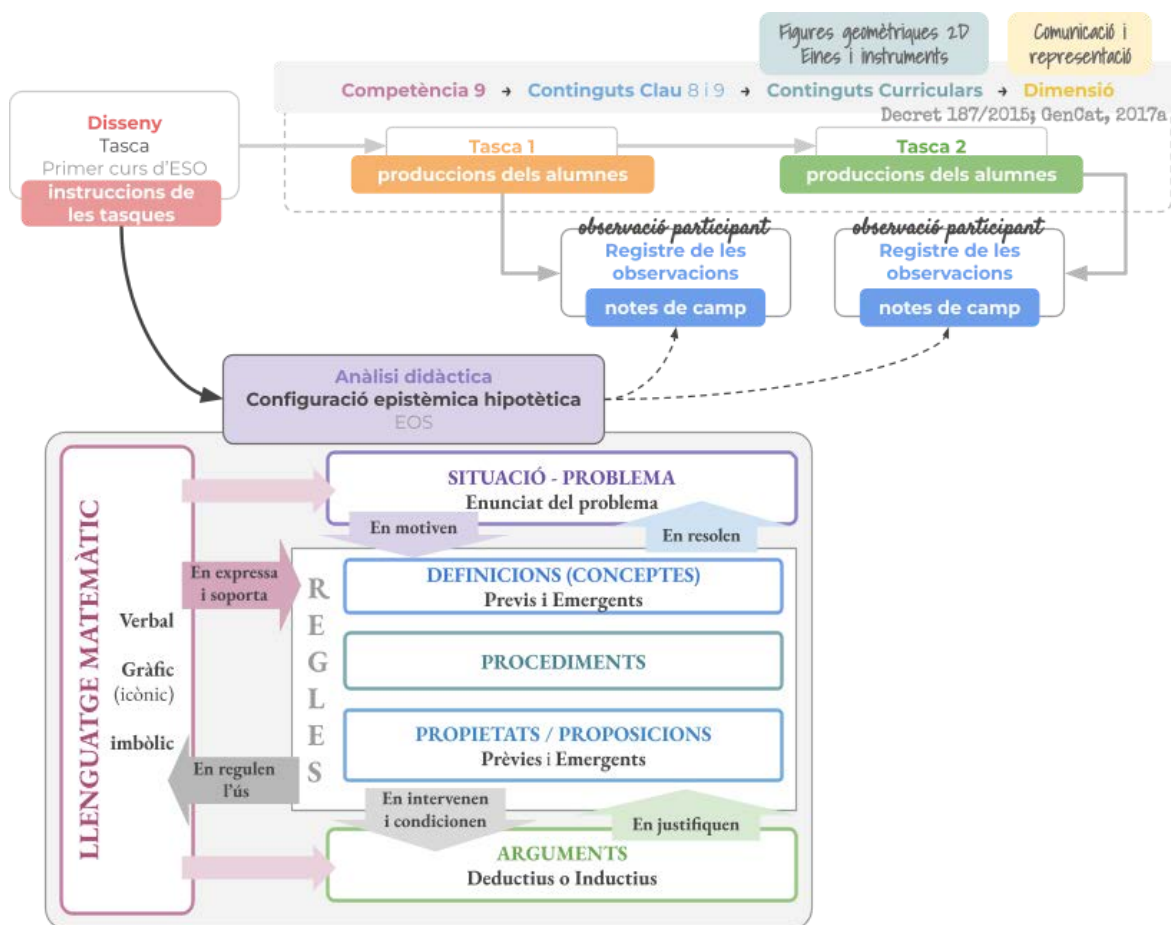


Figura 10.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració hipotètica d'objectes primaris de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

El disseny didàctic de les dues tasques implementades en l'estudi de cas analitzat en aquest treball de recerca, com s'ha explicat al subapartat 9.3.3. d'aquest document, es basa en una mateixa selecció d'elements curriculars. Per tant, s'espera que el llenguatge matemàtic sorgit en la implementació de cadascuna de les dues tasques sigui molt semblant o fins i tot igual. Ara bé, les situacions-problema que es plantegen en les dues de les tasques són diferents i per aquesta raó hi haurà implicacions que impactin en la diferenciació de

les definicions, les propietats/proposicions, els procediments i els arguments donats en una tasca específica. Per aquest fet, es considera adequat fer el plantejament d'una configuració hipotètica d'objectes matemàtics primaris per a cadascuna de les dues tasques.

10.1.1. Configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1

La configuració hipotètica dels objectes primaris de la Tasca 1 és un constructe específic d'aquesta primera activitat que es considera independent a la tasca que la succeeix, la Tasca 2. De manera que, la principal orientació per la identificació dels objectes primaris de la primera de les tasques de dibuix geomètric implementada a l'aula amb aquest treball de recerca, anomenada "El festival de globus", són els objectius d'aprenentatge, l'anàlisi competencial, els continguts clau, els continguts curriculars i els processos que se'n registren al disseny didàctic de la Tasca 1 (**Figura 10.1.1.1**). L'establiment de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 es fa a partir dels elements curriculars, el disseny didàctic de la Tasca 1 i el seu objectiu és donar una orientació sobre el que s'espera obtenir al moment de la implementació de l'activitat a l'aula.

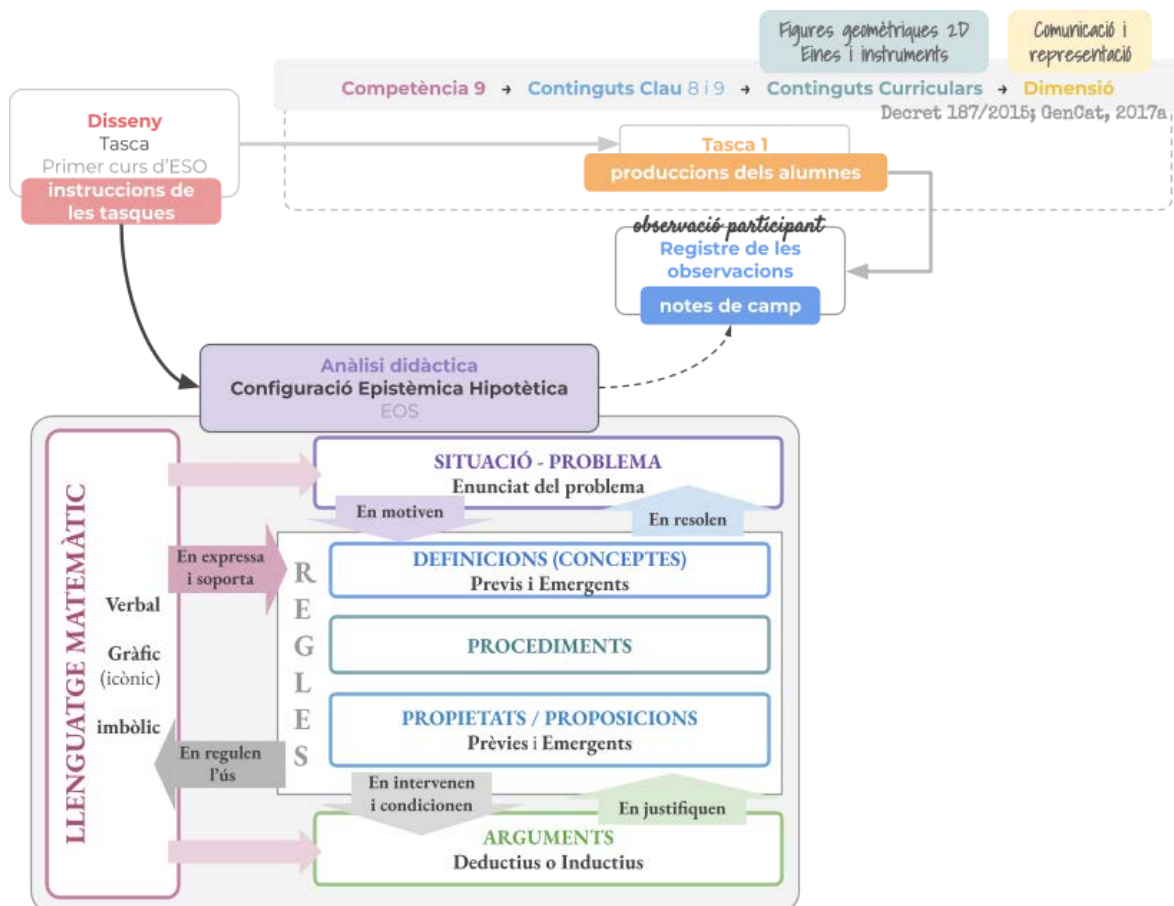


Figura 10.1.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.1.1.1. La unitat d'anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1

L'objecte matemàtic primari de la configuració epistèmica hipotètica que pot ser identificat amb major facilitat és “les situacions-problema” de la Tasca 1 (SP1), ja que són una còpia textual del repte a plantejar a la classe. Segons es mostra a la Metodologia presentada al Disseny didàctic de la Tasca 1 (**Annex 7**), el problema a resoldre consisteix en la construcció d'un octaedre però com una activitat de grup (**Taula 10.1.1.1.1.**).

Taula 10.1.1.1.1.

Unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1.

Tasca 1		
Codi	Objecte Primari	Descripció de l'Objecte Primari
SP1	Situacions-Problema de la Tasca 1	Plantejar el problema de construcció grupal d'un octaedre als alumnes.
DC1	Definicions (Conceptes) de la Tasca 1	globus, cossos geomètrics, model, figura, vuit, igual, parts iguals, exactament el mateix, reunir Emergents: desenvolupament pla i octaedre
LMVE1	Llenguatge Matemàtic Verbal/Escrit de la Tasca 1	cossos geomètrics, model, figura, vuit, igual, parts iguals, exactament el mateix, reunir, desenvolupament pla, octaedre, dades, informació numèrica donada, informació no numèrica donada i geometria
LMG1	Llenguatge Matemàtic Gràfic de la Tasca 1	Representació gràfica icònica d'un octaedre en grises Representació gràfica icònica d'un octaedre en verd amb transparències Desenvolupament pla d'un octaedre amb les cares diferenciades per colors
PP1	Propietats / Proposicions de la Tasca 1	1. Identificar la forma de les cares d'un octaedre: triangles equilàters. 2. Les mides dels costats d'un triangle han de ser iguals per tal d'assegurar que s'ha dibuixat un triangle equilàter.
P1	Procediments de la Tasca 1	1. Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques. 2. Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització per a resoldre problemes. 3. Emprar regle, escaire i paper per dibuixar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter. 4. Reconstruir un cos geomètric (octaedre) a partir de les seves cares (triangles equilàters).
A1	Arguments de la Tasca 1	1. L'ús d'eines tant de dibuix com de mesura és fonamental per quantificar les dades necessàries per treballar amb materials manipulatius com el paper. 2. Segons les eines disposades s'organitza l'estratègia de dibuix geomètric a seguir.

Font: Elaboració pròpia.

A partir del plantejament de la “situació-problema” de la Tasca 1 es pot identificar un altre objecte primari: el llenguatge matemàtic verbal/escrit (LMVE1) (**Taula 10.2.1.1.1.**). Segons s’observa al full d’instruccions adreçats als alumnes (**Annex 4**), a l’apartat “Situació” es troben els conceptes: globus, cossos geomètrics, model. Per una altra banda, a l’apartat “instruccions” se’n troben: figura, vuit, igual, parts iguals, exactament el mateix, reunir. A més, al full d’instruccions per orientar a l’investigador en la implementació de la Tasca 1 (**Annex 6**), es troben uns altres conceptes, com ara: desenvolupament pla i octaedre. En observar el full de respostes (**Annex 5**), que es lliurarà als alumnes, s’hi identifiquen els termes: dades, informació numèrica donada, informació no numèrica donada i geometria. Seguint amb la parella de fulls d’instruccions dels Annexes 4 i 6, s’arriba a la identificació d’un altre objecte primari: el llenguatge matemàtic gràfic de la Tasca 1 (LMG1). En aquest cas, es tracta de dues representacions gràfiques icòniques d’un octaedre: un d’escales grises i un altre de color verd amb transparències. A més, al full d’instruccions per orientar l’investigador (**Annex 6**), es troba la representació gràfica del desenvolupament pla d’un octaedre amb les seves cares diferenciades amb colors (**Taula 10.2.1.1.1.**).

La majoria dels termes identificats com el llenguatge matemàtic verbal/escrit de la Tasca 1 (LMVE1) també es consideren com un altre objecte matemàtic primari: les definicions o conceptes de la Tasca 1 (DC1). Pel seu tet general i freqüència d’ús, se n’han tret els quatre que provenen del full de respostes (**Annex 5**): dades, informació numèrica, informació no numèrica i geometria. A més, els termes trobats al full d’orientació per a la implementació de la Tasca 1 es consideren definicions emergents que s’espera que surtin quan els alumnes desenvolupin l’activitat a l’aula (**Taula 10.1.1.1.1.**).

Per tal d’identificar les propietats/proposicions de la Tasca 1 (PP1) s’analitza el Disseny didàctic de la tasca en estudi (**Annex 7**). El primer objectiu d’aprenentatge indica la primera de les propietats/proposicions dels cossos geomètrics la qual es pretén que els alumnes reconeixin. El fragment final del quart objectiu d’aprenentatge correspon a la segona propietat/proposició de la Tasca 1 (**Taula 10.1.1.1.1.**).

L’objecte matemàtic primari anomenat Procediments (P1) s’identifica a l’apartat amb nom semblant dins el document Disseny didàctic de la Tasca 1: Processos (**Annex 7**). També es tenen indicis d’aquest objecte primari a l’apartat dels Objectius d’aprenentatge d’aquesta mateixa referència (**Annex 7**) en els punts tres i quatre, respectivament (**Taula 10.1.1.1.1.**).

Al Resum del Disseny didàctic de la Tasca 1 (**Annex 7**) es troben els arguments (A1), que és el darrer dels objectes matemàtics primaris de la tasca de referència. En concret, els arguments (A1) són les dues últimes frases del Resum (**Taula 10.1.1.1.1.**).

10.1.1.2. L'esquema de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1

L'organització dels objectes matemàtics primaris de la Tasca 1 segons la proposta de Godino, Batanero i Font (2009) ajuda a identificar les relacions i interdependències que hi ha entre ells. Per consegüent, la configuració epistèmica hipotètica, en la qual es presenten els objectes matemàtics primaris provinents dels instruments de recollida d'informació i registrats a la **Taula 10.1.1.1.**, és l'esquema de la **Figura 10.1.1.2.1.** que es troba a continuació.

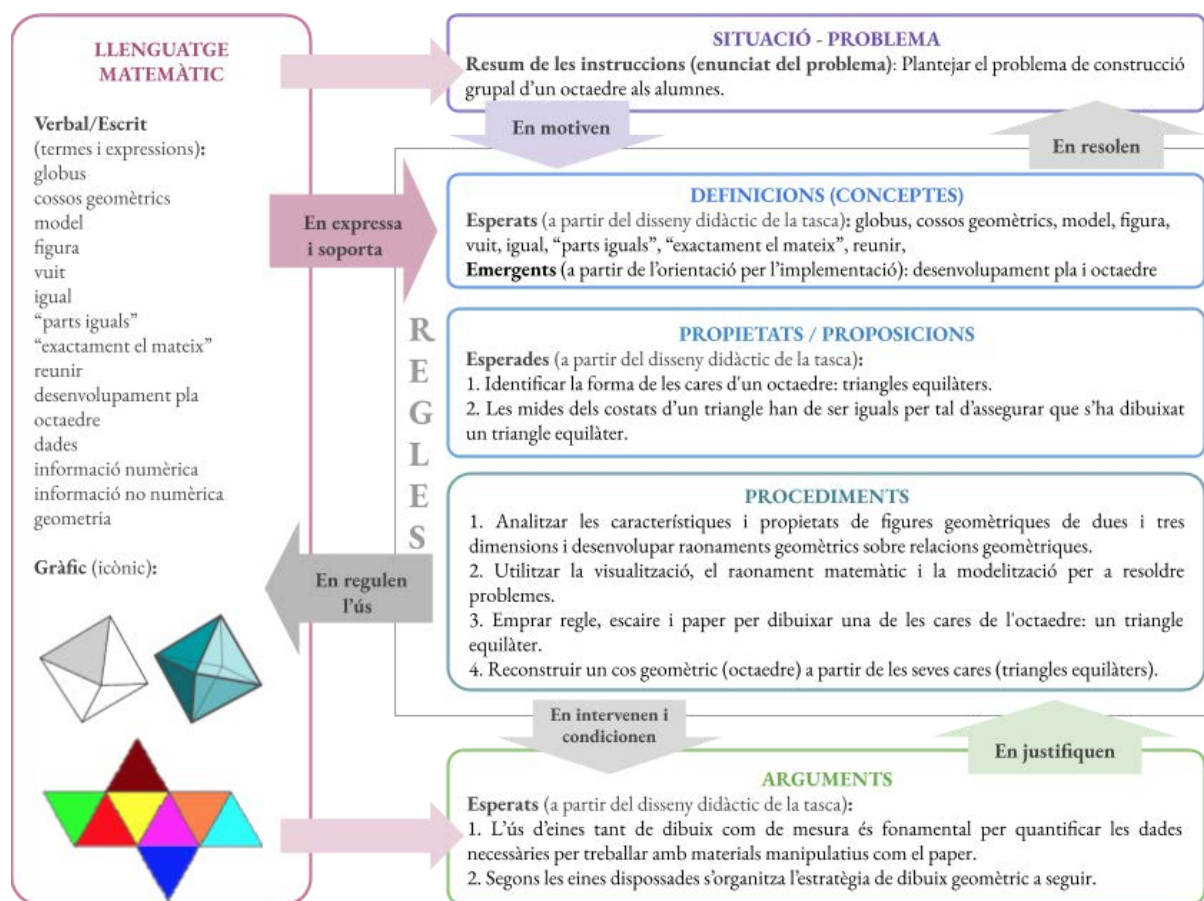


Figura 10.1.1.2.1. Configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.1.2. Configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2

Tal i com s'ha fet per establir la configuració epistèmica hipotètica dels objectes primaris de la Tasca 1, l'anàlisi emprat amb la Tasca 2 és semblant. El constructe específic d'aquesta segona tasca es considera sense tenir en compte la tasca que li precedeix (**Figura 10.1.2.1.**), la Tasca 1. Així, la configuració hipotètica dels objectes primaris de la Tasca 2 depèn dels següents elements de l'activitat: el resum de la tasca, la situació, les instruccions per donar als alumnes (**Annex 8**), el material a lliurar (**Annex 9**), les orientacions per l'investigador (**Annex 10**), els objectius d'aprenentatge i els processos relacionats amb els continguts clau i curriculars (**Annex 11**). Cal esmentar que el disseny didàctic, document on es van registrar els objectius

d'aprenentatge, l'anàlisi competencial, els continguts clau, els continguts curriculars, els processos, els processos i continguts, els requeriments i la metodologia de la Tasca 2 es troben a l'**Annex 11**.

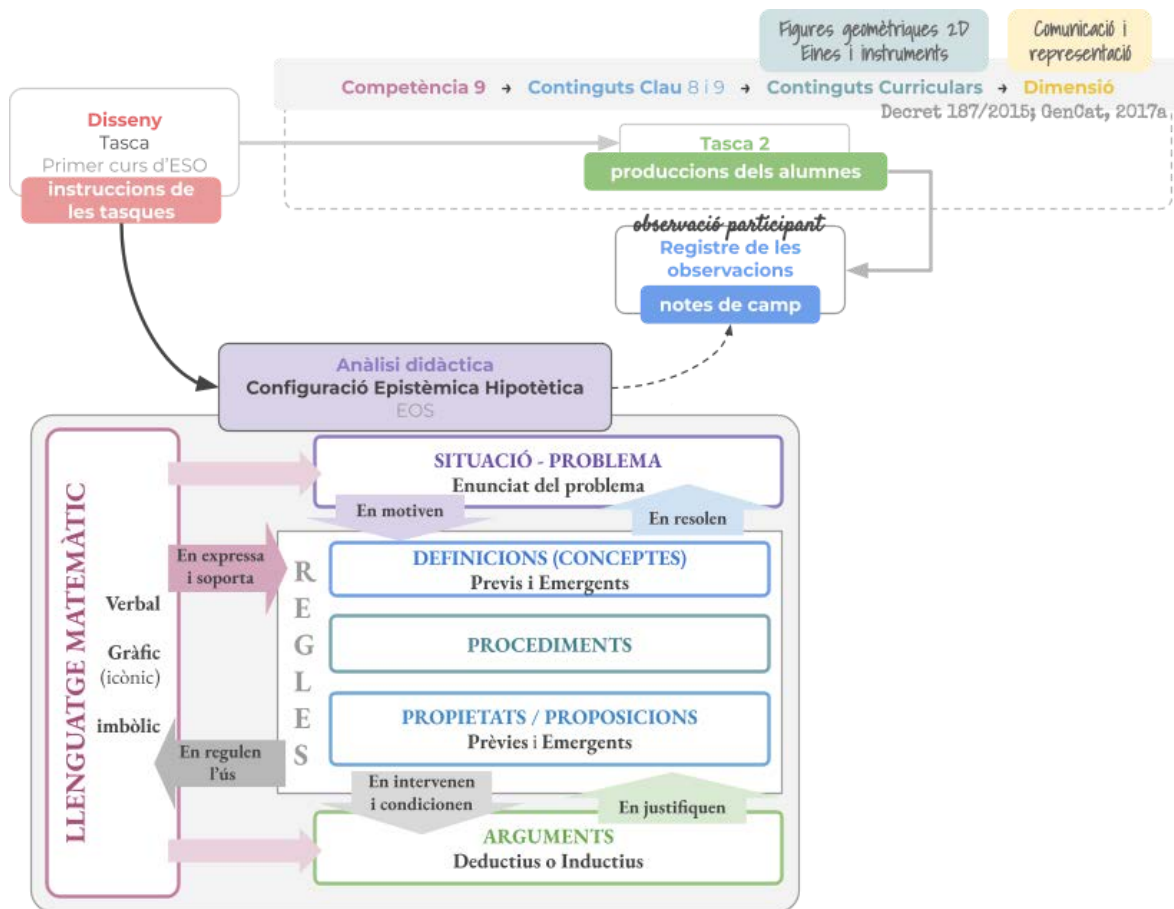


Figura 10.1.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.1.2.1. La unitat d'anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2

Seguint la mateixa seqüència d'anàlisi feta amb la Tasca 1 per establir la configuració d'objectes primaris, la **Taula 10.1.2.1.1.** mostra els elements d'aquest constructe pel cas de la Tasca 2. Tot començant amb la determinació de "les situacions-problema" a partir de la redacció del repte plantejat al full d'instruccions donat als alumnes (**Annex 8**).

Taula 10.1.2.1.1.

Unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2.

Tasca 2		
Codi	Objecte Primari	Descripció de l'Objecte Primari
SP2	Situacions-Problema de la Tasca 2	L'estudi d'un cos de tres dimensions com la Terra es simplifica quan es treballa en una dimensió. Els mapes són imatges idealitzades del que hi ha a la Terra, però representat sobre un pla. Com faries per passar d'un mapa que té forma plana a un cos geomètric de tres dimensions?
DC2	Definicions (Conceptes) de la Tasca 2	cos de tres dimensions, una dimensió, imatge idealitzada, pla, forma plana, cos geomètric, tres dimensions, cos geomètric de tres dimensions Emergents: desenvolupament pla, piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre
LMVE2	Llenguatge Matemàtic Verbal/Escrit de la Tasca 2	cos de tres dimensions, una dimensió, imatge idealitzada, pla, forma plana, cos geomètric, tres dimensions, cos geomètric de tres dimensions, desenvolupament pla, piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, "planisferi", "mapa físic - polític"
LMG2	Llenguatge Matemàtic Gràfic de la Tasca 2	Representació gràfica de la relació entre les cares (triangle equilàter, quadrat i pentàgon), el mapamundi i el cos geomètric associat a la forma geomètrica de la cara mostrada (isomètric d'una piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre)
PP2	Propietats / Proposicions de la Tasca 2	Representar un cos tridimensional a partir de material de dues dimensions pot fer-se quan se identifiquen: les formes de les cares planes del cos geomètric i la relació que hi ha entre elles. El canvi de dues a tres dimensions, és a dir la reconstrucció d'un cos geomètric de tres dimensions, es fa possible mitjançant la correcta identificació de la relació que hi ha entre les cares planes del cos geomètric. Un mapa de dues dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblegament adequats que el portin a una forma tridimensional.
P2	Procediments de la Tasca 2	<ol style="list-style-type: none">1. Identificar la forma de les cares d'un poliedre.2. Trobar estratègies de manera col·laborativa per identificar l'orientació i posició de les cares que conformen un poliedre.3. Compartir idees, raonaments i coneixements amb els companys per desenvolupar estratègies de dibuix geomètric pel desenvolupament pla d'un poliedre dins una superfície determinada.4. Emprar regle, escaire i paper per dibuixar el desenvolupament pla d'un poliedre.5. Reconstruir un poliedre a partir del seu desenvolupament pla.
A2	Arguments de la Tasca 2	El nombre de cares d'un poliedre és un factor determinant en l'ús de l'àrea màxima d'una superfície donada.

Font: Elaboració pròpia.

La identificació de la "situació-problema" de la Tasca 2 (**Annex 8**) permet identificar alguns dels termes del llenguatge matemàtic verbal/escrit d'aquesta tasca (LMVE2) (**Taula 10.1.2.1.1.**): cos de tres dimensions,

una dimensió, imatge idealitzada, pla, forma plana, cos geomètric, tres dimensions, cos geomètric de tres dimensions. A l'apartat "instruccions" d'aquesta mateixa referència, el full d'instruccions (**Annex 8**), es troben el termes. mapes, forma tridimensional, figures i cos geomètric regular. L'**Annex 9**, el mapamundi a lliurar als alumnes, mostra les paraules: "planisferi" i "mapa físic - polític".

De la mateixa manera que amb l'anàlisi de la Tasca 1, els termes que són part del llenguatge matemàtic verbal/escrit de la Tasca 2 (LMVE2) també són els elements de l'objecte matemàtic primari anomenat "definicions o conceptes" (DC2). En observar el full d'orientació, adreçat a la persona que hagi d'implementar la Tasca 2 (**Annex 10**), es troben els termes que es considera seran necessaris al moment del desenvolupament de l'activitat i per tant es consideren com definicions emergents: desenvolupament pla, piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre. S'ha d'aclarir que els termes trobats al mapa no es tenen en compte dins aquest objecte matemàtic primari (**Taula 10.1.2.1.1.**).

Per tal d'identificar el llenguatge matemàtic gràfic de la Tasca 2 (LMG2) s'ha d'analitzar el full d'instruccions (**Annex 8**). En aquest document s'ha volgut orientar als alumnes en el desenvolupament de l'activitat mitjançant la representació gràfica de la relació entre la figura geomètrica que correspon a la forma de les cares dels diferents cossos geomètrics proposats, el mapa a utilitzar com superfície de traç i el cos geomètric a construir (**Taula 10.1.2.1.1.**).

El Disseny Didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**) prové de la informació necessària per trobar les propietats/proposicions (PP2), el procediments (P2) i els arguments (A2). Donant més detalls, el resum és el punt de referència per establir les propietats/proposicions (PP2). Els procediments (P2), tot i que es poden expressar de manera resumida amb les dues frases registrades a l'apartat "Processos", es concreten en els cinc primers objectius d'aprenentatge. El cinquè dels objectius d'aprenentatge de la Tasca 2 és l'argument (A2) al qual s'espera arribin els alumnes en desenvolupar l'activitat de dibuix geomètric d'aquesta tasca (**Taula 10.1.2.1.1.**).

10.1.2.2. L'esquema de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2

Per organitzar els objectes matemàtics primaris de la Tasca 2, registrats a la **Taula 10.2.2.1.1.** de l'apartat anterior, es segueix el model de Godino, Batanero i Font (2009). La relació entre els objectes matemàtics primaris que s'espera es presentin en implementar la segona tasca es pot identificar en la seva configuració epistèmica hipotètica (**Figura 10.1.2.2.1.**).

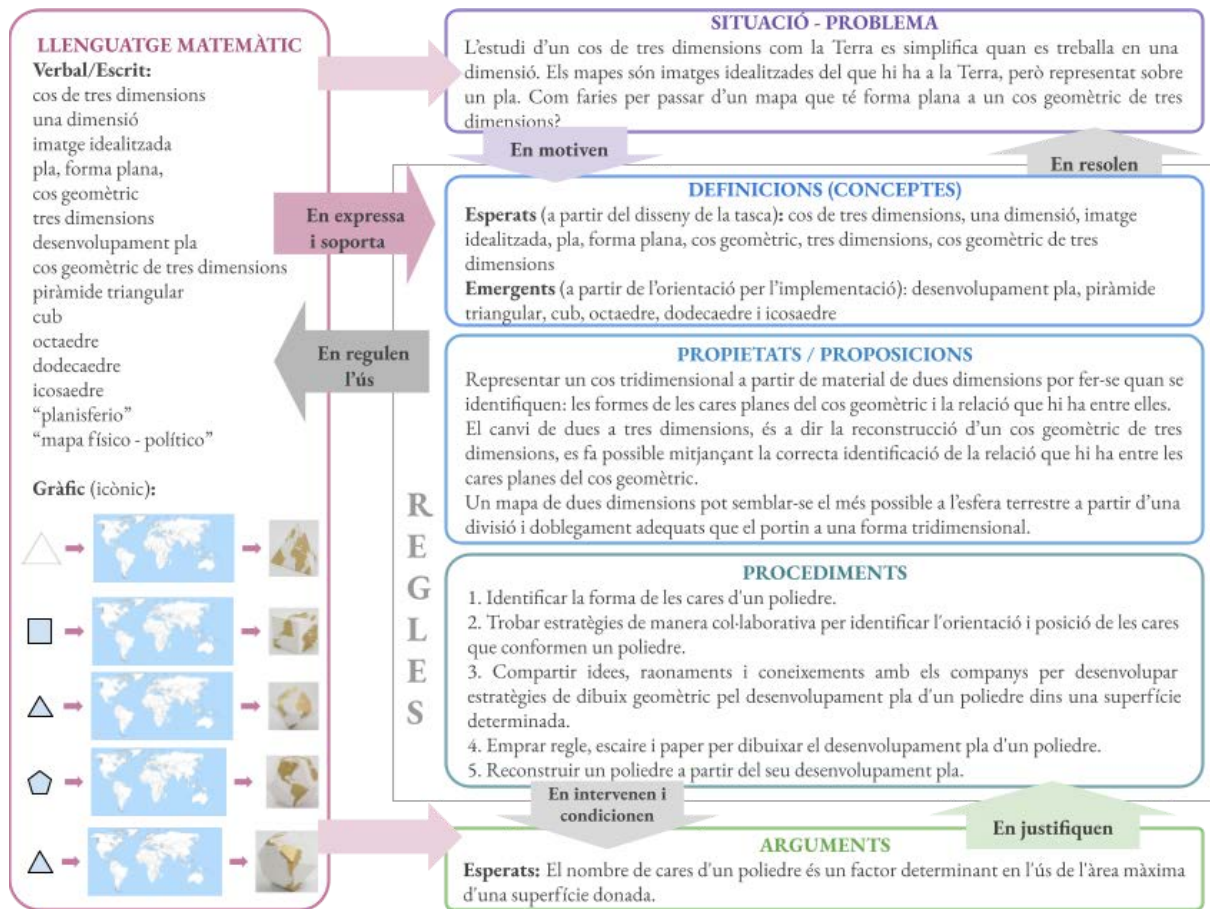


Figura 10.1.2.2.1. Configuració hipotètica d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.2. Trajectòria didàctica hipotètica de les tasques

Dins un procés d'instrucció matemàtica intervenen dimensions epistèmiques, docents, discents, mediacionals, cognitives i emocionals (Godino, Contreras i Font, 2006). Cadascuna d'aquestes dimensions representa una subtrajectòria d'igual denominació: subtrajectòria epistèmica, subtrajectòria docent, subtrajectòria discent, etc. Totes aquestes subtrajectòries formen el conjunt anomenat *trajectòria didàctica* del procés d'instrucció, el qual ajuda a reconèixer les dimensions (subtrajectòries) que intervenen en l'assoliment d'una configuració didàctica final a partir d'una altra d'inicial (Godino, Batanero i Font, 2009). En el cas d'aquest treball de recerca, l'establiment de trajectòries didàctiques hipotètiques és una referència amb la qual s'orienta la implementació de les tasques i la seva observació en el camp. Tot i que hi ha un ampli llistat de subtrajectòries que formen la trajectòria didàctica, aquesta anàlisi didàctica preliminar es centra en les dimensions: epistèmica, docent i discent (**Figura 10.2.1.**).

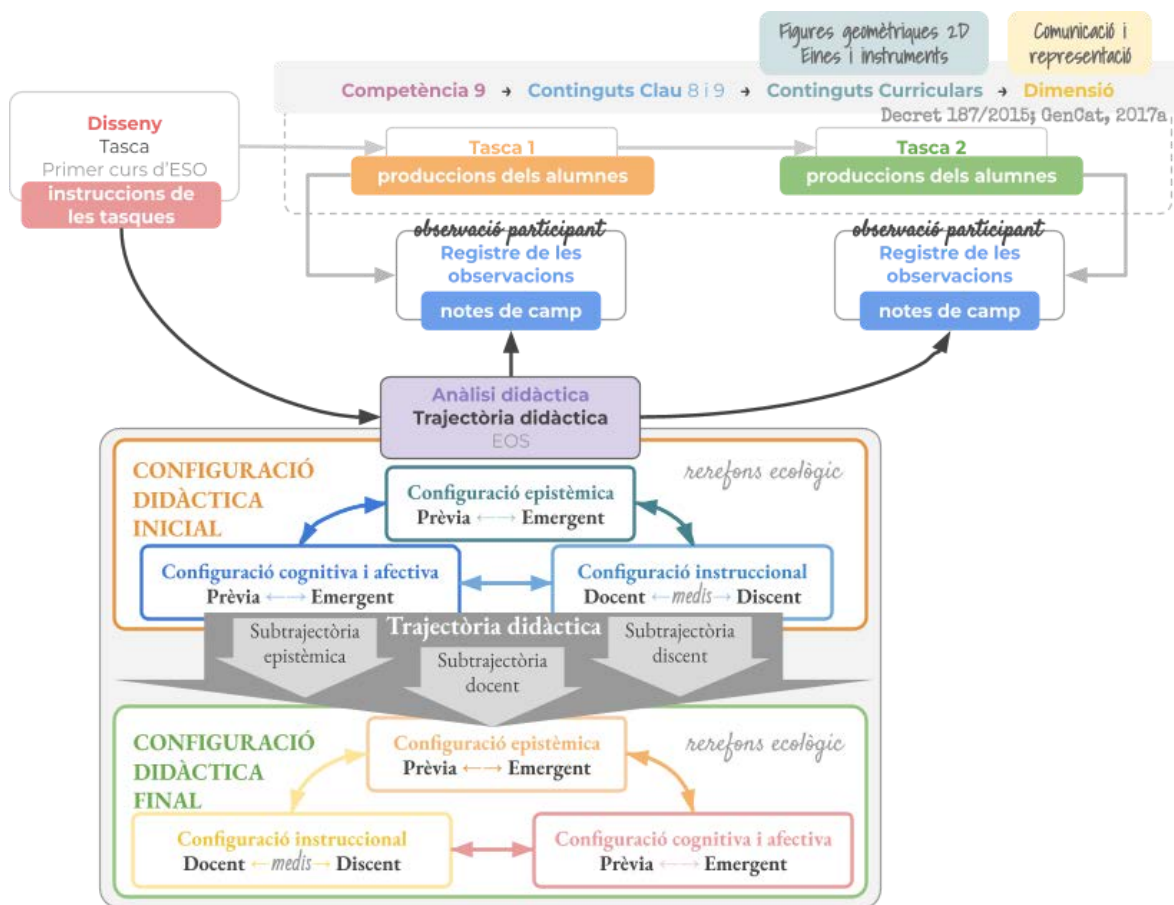


Figura 10.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les configuracions didàctiques a partir de les interaccions didàctiques identificades amb les trajectòries didàctiques (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Godino, Contreras i Font (2006) estableixen amb detall els aspectes que pertanyen a cadascuna de les subtrajectòries, les quals són les referències per concretar els elements de les tres dimensions que són objecte d'aquesta anàlisi preliminar. Com s'ha fet per la identificació de les configuracions epistèmiques hipotètiques, es farà l'anàlisi didàctica de les subtrajectòries epistèmica, docent i discent per a cadascuna de les dues tasques proposades en aquest estudi de cas.

Tal i com ho estableixen Godino, Contreras i Font (2006), la subtrajectòria epistèmica es manifesta en sis estats possibles (**Taula 10.2.1.**) que s'apliquen de manera separada a cadascuna de les dues tasques d'aquest treball de recerca per identificar com s'espera que es doni aquesta dimensió (subtrajectòria epistèmica hipotètica). Similarment, el seguit de les sis funcions amb les quals Godino, Contreras i Font (2006) modelitzen la subtrajectòria docent (**Taula 10.2.2.**) s'ha d'aplicar a les dues tasques per tal d'establir les subtrajectòries docents hipotètiques. Finalment, les subtrajectòries discents hipotètiques provindran de

l'anàlisi dels nou estats o funcions que detallen aquesta dimensió segons les propostes de Godino, Contreras i Font (2006) (**Taula 10.2.3.**).

Taula 10.2.1.

Estats possibles dins una subtrajectòria epistèmica segons Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria epistèmica d'un procés d'instrucció matemàtica		
Codi	Estat	Descripció
E1	Situacional	enunciació d'un exemplar d'un cert tipus de problema
E2	Actuacional	abordament del desenvolupament o estudi d'una manera de resoldre el problema
E3	Lingüístic	introducció de notació, representacions gràfiques, etc.
E4	Conceptual	formulació o interpretació de definicions dels objectes matemàtics en joc
E5	Proposicional	enunciació e interpretació de propietats
E6	Argumentatiu	justificació de les accions adoptades o de les propietats enunciades

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.2.2.

Funcions possibles dins una subtrajectòria docent segons Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria docent d'un procés d'instrucció matemàtica		
Codi	Funció	Descripció
P1	Planificació	disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar (construcció del significat al qual es pretén arribar-ne i de la trajectòria epistèmica prevista)
P2	Motivació	creació d'un clima d'afectivitat, respecte i estímul per treball individual i cooperatiu, a fi que hi hagi implicació en el procés d'instrucció
P3	Assignació de tasques	direcció i control del procés d'estudi, assignació de temps, adaptació de les tasques, d'orientació i estímul de l'estudiant
P4	Regulació	establiment de normes (definicions, enunciats, justificacions, resolució de problemes, exemples), repàs i interpretació dels coneixements previs necessaris per a la progressió de l'estudi, readaptació de la planificació prevista
P5	Avaluació	observació i valoració de l'estat de l'aprenentatge assolit en moments crítics (inicial, final i durant el procés) i resolució de les dificultats individuals observades
P6	Investigació	reflexió i anàlisi del desenvolupament del procés per introduir canvis en futures implementacions d'aquest mateix procés, així com l'articulació entre els diferents moments i parts del procés d'estudi

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.2.3.

Funcions o estats possibles dins una subtrajectòria discent segons Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria discent d'un procés d'instrucció matemàtica		
Codi	Estat/Funció	Descripció
A1	Acceptació	del compromís educatiu, adopció d'una actitud positiva cap a l'estudi i de cooperació amb els companys
A2	Exploració	indagació, cerca de conjectures i maneres de respondre a les qüestions plantejades
A3	Record	interpretació i seguiment de regles (conceptes i proposicions) i del significat dels elements lingüístics en cada situació
A4	Formulació	de solucions a les situacions o tasques proposades, ja sigui per part del professor, cap a tota la classe o dins un petit grup
A5	Argumentació i justificació	de conjectures (adreçades al professor o els companys)
A6	Recepció d'informació	sobre com fer, descriure, anomenar, validar
A7	Demanda d'informació	al professor o als companys (per exemple, quan no hi entenen els significat del llenguatge utilitzat o no s'encorden els coneixements previs necessaris)
A8	Exercitació	realització de tasques rutinàries per dominar les tècniques específiques
A9	Avaluació	realització de tests proposats pel professor o d'autoavaluació

Font: Elaboració pròpia.

10.2.1. Trajectòria didàctica hipotètica de la Tasca 1

Les dimensions epistèmiques, docents i discents (Godino, Contreras i Font, 2006) que conformen la trajectòria didàctica de la Tasca 1 permeten establir una trajectòria didàctica prevista o trajectòria didàctica hipotètica. L'objectiu de l'obtenció de la trajectòria didàctica hipotètica de la Tasca 1 és la identificació dels estats i funcions de les dimensions epistèmica, docent i discent que orientin la implementació d'aquesta tasca davant el grup (**Figura 10.2.1.1.**). En conseqüència, dins aquest subapartat es presenten els següents constructes d'anàlisi didàctica: la subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1, la subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 1 i la subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1.

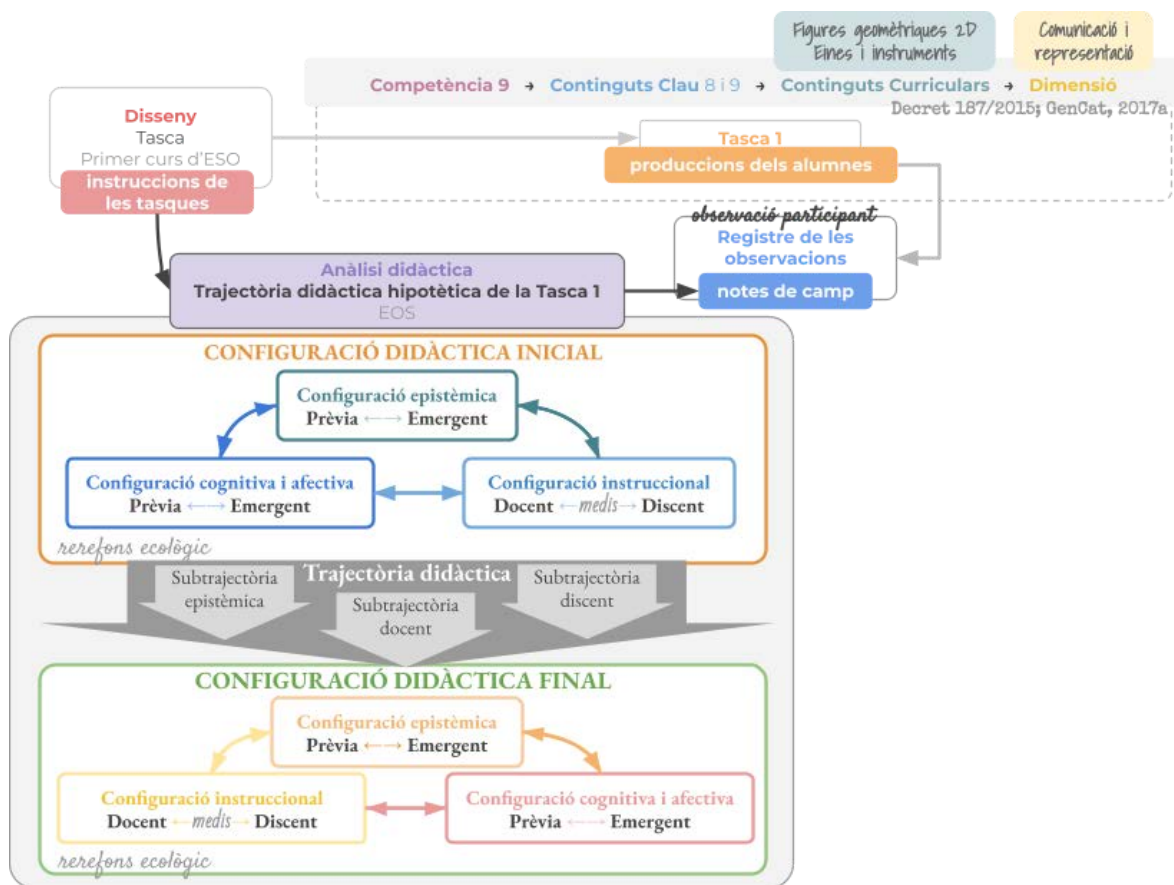


Figura 10.2.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica hipotètica corresponent a la Tasca 1 (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.2.1.1. La subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi

L'establiment de la subtrajectòria hipotètica de la Tasca 1 que es centra en la dimensió epistèmica té com punt de partida els sis estats proposats per Godino, Contreras i Font (2006). L'anàlisi de la Tasca 1 es fa amb l'orientació de les descripcions dels tots sis estats. Per tant, les dades hi analitzades provenen del fitxers: el full d'instruccions pels alumnes (**Annex 4**), el full de respostes pel registre de les activitats fetes (**Annex 5**), el full d'instruccions per orientar l'investigador (**Annex 6**) i el disseny didàctic de la tasca (**Annex 7**).

L'apartat "Metodologia" del Disseny didàctic de la Tasca 1 (**Annex 7**) dirigeix cronològicament el desenvolupament de la tasca i es complementa amb les instruccions mostrades al full d'instruccions pels alumne (**Annex 4**) i al full d'instruccions per orientar l'investigador (**Annex 5**). La metodologia plantejada pels investigadors sobre el que ha de ser la implementació de la tasca a l'aula delimita de manera important la identificació de les unitats epistèmiques que organitzen la Tasca 1. Consegüentment, la descripció de les unitats epistèmiques que s'espera seguir en la implementació de la Tasca 1 són el fill conductor de la concreció dels estats de la subtrajectòria epistèmica hipotètica de la tasca (**Taula 10.2.1.1.1**).

Taula 10.2.1.1.1.

Subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1		
Unitat Epistèmica	Descripció	Estat
0	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Situacional (E1)
1	Presentació de la representació gràfica del cos geomètric assignat: octaedre	Lingüístic (E3)
2	Lliurament dels materials manipulatius (paper, eines de dibuix geomètric i full de respostes) i del full de registre de respostes	Actuacional (E2)
3	Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)
4	Desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric d'una de les cares de l'octaedre	Actuacional (E2)
5	Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)
6	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Argumentatiu (E6)

Font: Elaboració pròpia.

10.2.1.2. La subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi

De manera semblant al cas de l'establiment de la subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1, les propostes de Godino, Contreras i Font (2006) són les eines d'anàlisi didàctica per la identificació de la subtrajectòria docent hipotètica de la primera tasca. Les sis funcions docents d'aquesta dimensió de la trajectòria didàctica (**Taula 10.2.2.**) s'apliquen a la seqüència cronològica formada per les activitats de la tasca extretes de les instruccions pels alumnes (**Annex 4**), les respostes pel registre de les activitats fetes (**Annex 5**), les orientacions per l'investigador (**Annex 6**) i la metodologia del disseny didàctic de la tasca (**Annex 7**). Les funcions corresponents a la subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 1 (**Taula 10.2.1.2.1.**) segueixen el fil conductor establert per les unitats epistèmiques de la subtrajectòria epistèmica hipotètica de la tasca (**Taula 10.2.1.1.1.**).

Taula 10.2.1.2.1.

Subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 1 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 1		
Unitat Docent	Descripció	Funció
0	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)
1	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Motivació (P2)
2	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Motivació (P2)
3	Organització dels grups de treball i lliurament dels materials manipulatius (paper, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions) i del full de registre de respostes	Assignació de tasques (P3)
4	Observació de les discussions en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre (triangle equilàter) i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Avaluació (P5)
5	Organització del nou grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Assignació de tasques (P3)
6	Observació de la discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Avaluació (P5)
7	Reflexió i anàlisi del desenvolupament del procés per introduir canvis en futures implementacions d'aquest mateix procés, així com l'articulació entre els diferents moments i parts del procés d'estudi	Investigació (P6)

Font: Elaboració pròpia.

10.2.1.3. La subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi

Tal i com s'ha fet prèviament, seguint els instruments d'anàlisi didàctica de Godino, Contreras i Font (2006), per establir les funcions-estat que s'espera els alumnes assumin en desenvolupar la Tasca 1 (**Taula 10.2.3.**) cal adreçar-se a les subtrajectòries hipotètiques de caire epistèmic (**Taula 10.2.1.1.1.**) i docent (**Taula 10.2.1.3.1.**). A més de l'orientació donada per altres subtrajectòries hipotètiques, també són referència per l'establiment de la subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 (**Taula 10.2.1.2.1.**): el full d'instruccions dels alumnes (**Annex 4**), el full de respostes (**Annex 5**), el full d'orientació (**Annex 6**) i el disseny didàctic de la tasca (**Annex 7**).

Taula 10.2.1.3.1.

Subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1		
Unitat Discent	Descripció	Funció/Estat
0	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)
1	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d’informació (A6)
2	Integració en un grup de treball i exploració dels materials manipulatius disponibles (full d’instruccions, paper, eines de dibuix geomètric i full de respostes)	Recepció d’informació (A6) Exploració (A2)
3	Discussió en grup per l’establiment d’una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l’octaedre (triangle equilàter)	Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5)
4	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de l’estratègia de dibuix geomètric per traçar una de les cares de l’octaedre (triangle equilàter)	Exercitació (A8)
5	Integració del nou grup per l’establiment d’una estratègia de construcció física de l’octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Recepció d’informació (A6) Exploració (A2)
6	Discussió en grup per l’establiment d’una estratègia de construcció física de l’octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5) Exercitació (A8)

Font: Elaboració pròpia.

10.2.2. Trajectòria didàctica hipotètica de la Tasca 2

L’establiment de la trajectòria didàctica hipotètica, que orienti la implementació de la Tasca 2 a l’aula, es precisa en la identificació de les funcions - estat epistèmiques, docents i discents (Godino, Contreras i Font, 2006). El conjunt de les subtrajectòries epistèmica, docent i discent que conformen la trajectòria didàctica d’una tasca concreta són l’antecedent que puntualitza els aspectes rellevants de la sessió. En conseqüència, la distinció de les subtrajectòries didàctiques hipotètiques de la Tasca 2 permet assentar l’observació dels fenòmens que es viuran a l’aula en aspectes rellevants determinats (**Figura 10.2.2.1.**). Tot i que les Tasques 1 i 2 deriven d’uns mateixos continguts curriculars, la variació dels exercicis intervé en la modificació de les trajectòries didàctiques hipotètiques de totes dues.

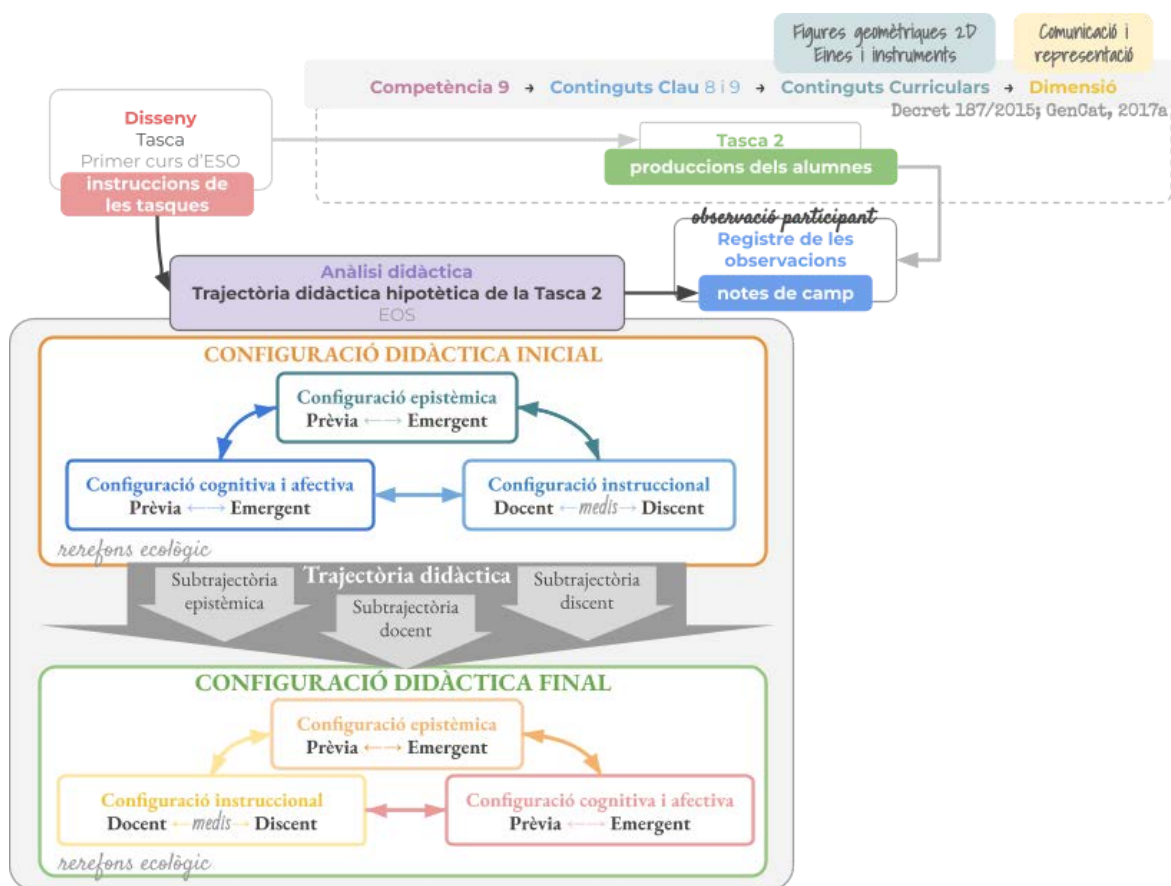


Figura 10.2.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica hipotètica corresponent a la Tasca 2 (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.2.2.1. La subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi

Obeint a la seqüència d'anàlisi didàctica emprada amb la Tasca 1, la subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 2 s'obté a partir de la identificació dels estats proposats per Godino, Contreras i Font (2006). Els documents consultats per aquest efecte són: el full d'instruccions pels alumnes (**Annex 8**), el full d'instruccions per orientar l'investigador (**Annex 10**) i el disseny didàctic (**Annex 11**).

L'organització cronològica de les activitats prové de la "Metodologia" establerta pel desenvolupament de la Tasca 2. Aquesta informació es troba al fitxer del disseny didàctic (**Annex 11**). També es tenen en compte el full d'instruccions pels alumne (**Annex 8**) i el full d'instruccions per orientar l'investigador (**Annex 9**) per registrar com s'espera que sigui implementada la tasca (**Taula 10.2.2.1.1**).

Taula 10.2.2.1.1.

Subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 2 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 2		
Unitat Epistèmica	Descripció	Estat
0	Discussió en grup per respondre un qüestionari sobre la Tasca 1	Argumentatiu (E6)
1	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Situacional (E1)
2	Presentació de la representació gràfica dels cossos geomètrics assignats	Lingüístic (E3)
3	Lliurament dels materials manipulatius (mapes, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions)	Actuacional (E2)
4	Discussió en grup per l'establiment d'estratègies de dibuix per construir els cossos geomètrics assignats	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)
5	Desenvolupament col·laboratiu i/o autònom del dibuix geomètric	Actuacional (E2)
6	Discussió en grup per fer conjectures a partir de la comparació de les construccions físiques dels cossos geomètrics assignats	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)

Font: Elaboració pròpia.

10.2.2.2. La subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi

Tenint la subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 2 com a referència (**Taula 10.2.2.1.1.**), per reconèixer la seqüència cronològica de la sessió, és possible establir les funcions que limiten la subtrajectòria docent hipotètica (Godino, Contreras i Font, 2006) (**Taula 10.2.2.**). Llavors, les fonts de consulta per delimitar la trajectòria docent hipotètica de la Tasca 2 (**Taula 10.2.2.2.1.**) tornen a ser: el full d'instruccions pels alumnes (**Annex 8**), el full d'orientacions per l'investigador (**Annex 10**) i el disseny didàctic de la tasca (**Annex 11**).

Taula 10.2.2.2.1.

Subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2		
Unitat Docent	Descripció	Funció
0	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)
1	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Motivació (P2)
2	Organització dels grups de treball i lliurament del qüestionari	Assignació de tasques (P3)
3	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Motivació (P2)
4	Lliurament dels materials manipulatius (mapes, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions)	Assignació de tasques (P3)
5	Observació de les discussions en grup per l'establiment de les estratègies de dibuix per construir els cossos geomètrics assignats i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Avaluació (P5)

Font: Elaboració pròpia.

10.2.2.3. La subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi

D'acord amb Godino, Contreras i Font (2006), les funcions-estat de la dimensió discent (**Taula 10.2.3.**), la subtrajectòria hipotètica epistèmica hipotètica de la Tasca 2 (**Taula 10.2.2.1.1.**) i la subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2 (**Taula 10.2.2.2.1.**) són l'orientació per la identificació de la subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 2 (**Taula 10.2.2.3.1.**). Per un altra banda, el full d'instruccions dels alumnes (**Annex 4**), el full de respostes (**Annex 5**), el full d'orientació (**Annex 6**) i el disseny didàctic de la tasca (**Annex 7**) també són documents de referència en aquesta comesa.

Taula 10.2.1.3.1.

Subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 2 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 2		
Unitat Discent	Descripció	Funció/Estat
0	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)
1	Integració en un grup de treball i exploració del qüestionari sobre la Tasca 1	Recepció d’informació (A6)
2	Resolució col·laborativa del qüestionari sobre la Tasca 1	Exploració (A2) Argumentació i justificació (A5)
3	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d’informació (A6)
4	Exploració dels materials manipulatius disponibles (full d’instruccions, mapes i eines de dibuix geomètric) i discussió en grup per l’establiment de les estratègies de dibuix per construir els cossos geomètrics assignats i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Exploració (A2) Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5)
5	Discussió en grup per fer conjectures a partir de l’exploració i comparació de les construccions físiques dels cossos geomètrics assignats	Argumentació i justificació (A5)

Font: Elaboració pròpia.

10.3. Indicadors d’*idoneïtat didàctica* de les tasques

El reconeixement de les evidències sobre la *idoneïtat didàctica* se centra en la identificació dels indicadors (Godino, 2013). Com s’ha explicat al **Capítol 7**, la integració de les propostes de Godino (2013), Breda, Pino-Fan i Font (2017) i Breda, Font i Pino-Fan (2018) són el conjunt d’indicadors considerats en aquesta anàlisi didàctica. Amb l’objectiu de concretar el màxim possible l’anàlisi, les descripcions escrites dels indicadors es van separar (**Figura 10.3.1.**). Així, es fa possible reconèixer un aspecte concret d’indicador. Aquesta diferenciació dels aspectes d’un mateix indicador d’idoneïtat didàctica es fa visible a la redacció de les preguntes dels qüestionaris pels alumnes (**Annex 12**) i el professor o facilitador de la tasca (**Annex 13**). Amb aquests documents és possible observar la numeració assignada als indicadors segons la dimensió (primer nombre), la component (segon nombre) i els aspectes de l’indicador en qüestió (tercer nombre). Tot i que aquesta numeració no és rellevant, l’inclouem per explicitar la informació trobada als qüestionaris dels annexes. Cal mencionar que cadascuna de les dimensions té assignat un nombre concret. Les components de les dimensions tenen assignats nombres relacionats amb el seu ordre: primera, l’u; segona, el dos; tercera, el tres; etc. En aquest mateix ordre es numeren els aspectes dels indicadors. Per tant, el número u correspon a la

dimensió epistèmica (**Taula 10.3.1**). Els indicadors de la dimensió cognitiva comencen amb el número dos (**Taula 10.3.2**). El número tres pertany a la dimensió interaccional (**Taula 10.3.3**), el quatre a la mediacional (**Taula 10.3.4**), el cinc a l'afectiva (**Taula 10.3.5**) i el sis a l'ecològica (**Taula 10.3.6**).

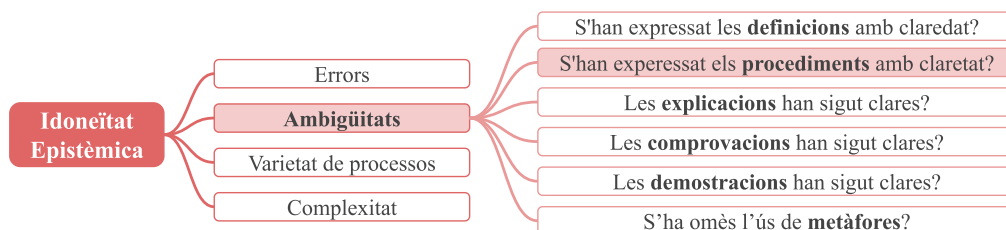


Figura 10.3.1. Exemple de la separació dels aspectes d'un indicador d'*idoneïtat didàctica* d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.3.1.

Numeració dels indicadors d'adequació epistèmica.

Component		Indicador	
Control d'errors	1.1.1	Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	
		1.2.1	S'han expressat les definicions amb claredat?
Control d'ambigüitats		1.2.2	S'han expressat els procediments amb claredat?
		1.2.3	Les explicacions han sigut clares?
		1.2.4	Les comprovacions han sigut clares?
		1.2.5	Les demostracions han sigut clares?
		1.2.6	S'ha omès l'ús de metàfores?
	Riquesa de processos	1.3.1	Es considera la modelització en la seqüència de tasques?
1.3.2		Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?	
1.3.3		Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?	
1.3.4		S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?	
Representativitat de la complexitat	1.4.1	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	
	1.4.2	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	
	1.4.3	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	
	1.4.4	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	
	1.4.5	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	
	1.4.6	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	
	1.4.7	Es proposa una mostra representativa de problemes?	
	1.4.8	Es fa ús de representacions verbals?	
	1.4.9	Es fa ús de representacions gràfiques?	
	1.4.10	Es fa ús de representacions simbòliques?	
	1.4.11	Es fa ús de diferents conversions?	
	1.4.12	Es fa ús de diferents tractaments?	

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.3.2.*Numeració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva.*

Component	Indicador
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?
Aprentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?
	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?
Alta demanda cognitiva	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.3.3.*Numeració dels indicadors d'idoneïtat interaccional.*

Component	Indicador
Interacció docent-discent	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?
	3.1.4 S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?
	3.1.5 Has identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?
	3.1.6 Has interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?
	3.1.7 Has conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?
	3.1.8 Has promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?
	3.1.9 Has utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?
	3.1.10 Has observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?
Interacció entre alumnes	3.2.1 Has observat que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?
Avaluació formativa	3.4.1 Has realitzat una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.3.4.*Numeració dels indicadors d'idoneïtat mediacional.*

Component	Indicador
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?
	4.1.2 Els instruments de mesura (regla i transportador) t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regla, escaire, cartabó i compàs) t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?
	4.1.4 La calculadora t'ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?
	4.2.2 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?
	4.2.3 Has pogut visualitzar les definicions i propietats?
	4.3.1 Penses que el nombre de companys que han participat de la tasca t'ha ajudat a aprendre?
	4.3.2 Penses que la distribució dels teus companys dins l'aula t'ha ajudat al desenvolupament de la tasca i t'ha facilitat l'aprenentatge?
Temps	4.3.3 Penses que l'horari de la classe és l'adequat?
	4.3.4 Penses que la teva aula és apropiada per el desenvolupament de la tasca?
	4.3.5 Penses que la distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?
	4.4.1 Penses que has tingut prou temps per realitzar la tasca?
	4.4.2 Penses que s'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?
	4.4.3 Penses que s'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.3.5.*Numeració dels indicadors d'idoneïtat afectiva.*

Component	Indicador
Interessos i necessitats	5.1.1 T'ha resultat interessant la tasca?
	5.1.2 Has trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?
	5.1.3 Has trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?
Actituds	5.2.1 Penses que aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?
	5.2.2 Penses que els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?
	5.2.3 Penses que s'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?
Emocions	5.3.1 Penses que aquesta tasca t'ha ajudat a promoure la teva autoestima?
	5.3.2 Penses que aquesta tasca t'ha ajudat a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?
	5.3.3 Penses que aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?
	5.3.4 Penses que aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?

Font: Elaboració pròpia.

Taula 10.3.6.*Numeració dels indicadors d'idoneïtat ecològica.*

Component	Indicador
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?
Innovació didàctica	6.4.1 Has aplicat temes que ja coneixies per arribar a contingut nou?
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?
	6.4.3 S'apliquen nous mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?

Font: Elaboració pròpia.

10.3.1. La unitat d'anàlisi pels indicadors d'*idoneïtat didàctica*

Les condicions en les quals es fa la implementació de les tasques dins l'aula determinen els instruments d'obtenció d'informació del qual es disposa en aquest treball de recerca doctoral. S'ha de puntualitzar que la manca de qualsevol mena d'instrument digital directament a l'aula obliga a explotar al màxim els documents de recollida de dades: full d'instruccions pels alumnes, full de respostes, full d'orientació pel professor, disseny didàctic, les produccions dels alumnes (físiques i digitalitzades) i les notes de camp. Per tant, la unitat d'anàlisi per la determinació dels indicadors de la *idoneïtat didàctica* són els fragments de tots aquests documents.

10.3.2. Codis d'anàlisi pels indicadors d'*idoneïtat didàctica*

L'establiment de la *idoneïtat didàctica* dels processos d'ensenyament i aprenentatge estudiats en aquest treball de recerca es va fer en dues etapes: (1) identificació dels indicadors d'*idoneïtat didàctica* a partir de les dades recollides i (2) representació gràfica dels indicadors, els components i les dimensions de la *idoneïtat didàctica* per tal d'arribar a un esquema gràfic general d'*idoneïtat didàctica*. A la primera etapa d'anàlisi didàctic es van utilitzar codis numèrics, mentre que per la segona d'elles es van utilitzar codis de color. Cal explicar que la identificació dels indicadors, les components, les dimensions i la *idoneïtat didàctica* es fa de manera separada per cadascuna de les dues tasques de dibuix geomètric d'aquest treball de recerca.

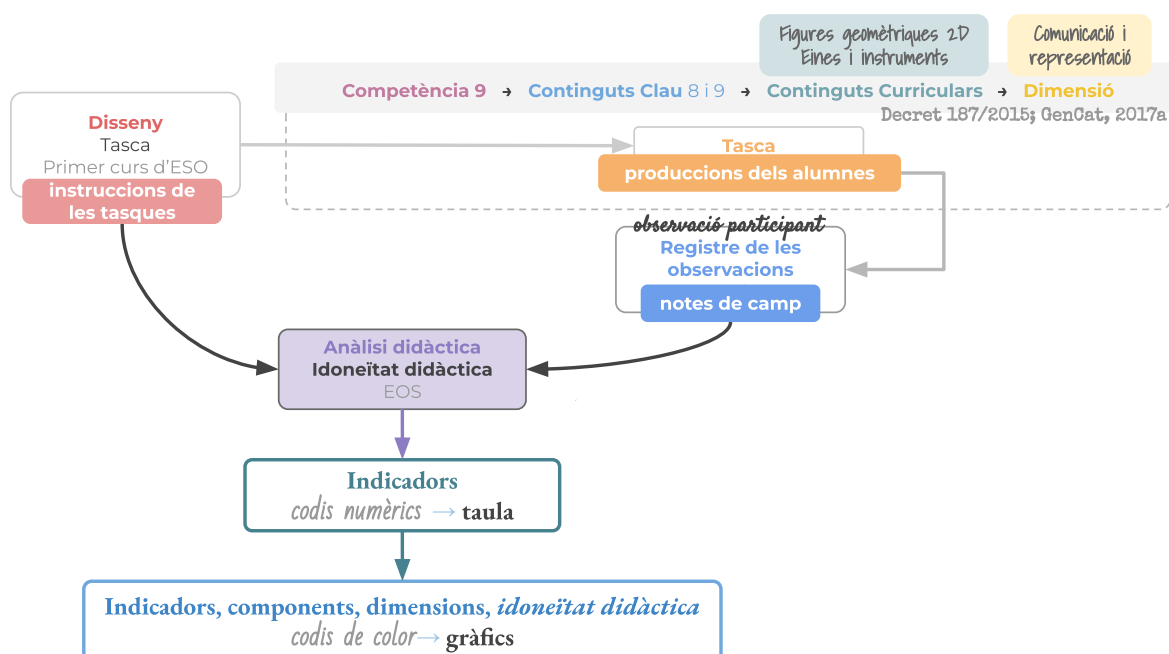


Figura 10.3.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, les etapes d'anàlisi didàctica i els codis d'anàlisi de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.2.1. Codis numèrics dels indicadors d'*idoneïtat didàctica*

La primera etapa d'identificació dels indicadors de la *idoneïtat didàctica* va consistir en la concentració de les dades recollides dins una taula. Per tal d'organitzar, simplificar i sistematitzar la tasca, es va dissenyar una taula per a cadascuna de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica*. Dins cadascuna de les graelles es va fer una assignació numèrica per reflectir el nivell d'assoliment dels indicadors de cadascuna de les components (**Taula 10.3.2.1.1**).

Taula 10.3.2.1.1.

Valors per especificar el nivell d'assoliment d'un indicador.

Valor numèric	Nivell d'assoliment de l'indicador analitzat
0	No assolit o no visualitzat
0,25	Baix assoliment
0,5	Assoliment mitjà
0,75	Assoliment alt
1,0	Assoliment complet

Font: Elaboració pròpia.

Un cop identificats els valors assignats a cadascun dels indicadors, s'estableix un valor percentual. Aquest percentatge, mostrat a l'equació 1, permet la representació gràfica dels constructes conformats pels indicadors: les components. En conseqüència, en els gràfics on es mostren les dimensions d'*idoneïtat didàctica* també s'utilitzen aquests valors percentuals.

$$\text{percentatge d'assoliment} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{valor dels indicadors}}{\sum_{i=1}^n \text{indicadors}} \quad (1)$$

10.3.2.2. Codis de color dels indicadors i les components de la *idoneïtat didàctica*

Per la representació gràfica de les dades obtingudes mitjançant la identificació dels indicadors d'*idoneïtat didàctica*, l'autora d'aquesta tesi va proposar una diferenciació visual per colors. Cadascuna de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* es va associar a un color determinat de manera arbitrària (**Taula 10.3.2.1.**). Com a conseqüència d'aquesta decisió, els components de les diferents dimensions de la *idoneïtat didàctica* també es registren dins la gamma de color corresponent. A tall d'exemple, els quatre components de la *idoneïtat epistèmica* es representen gràficament amb variacions en la intensitat del color vermell (**Figura 10.3.2.1.**).

Taula 10.3.2.1.

Codis de color per les dimensions d'idoneïtat didàctica d'aquest treball de recerca.

Color	Dimensió d' <i>idoneïtat didàctica</i>
vermell	epistèmica
groc	cognitiva
verd	interaccional
blau	mediacional
lila	afectiva
taronja	ecològica

Font: Elaboració pròpia.

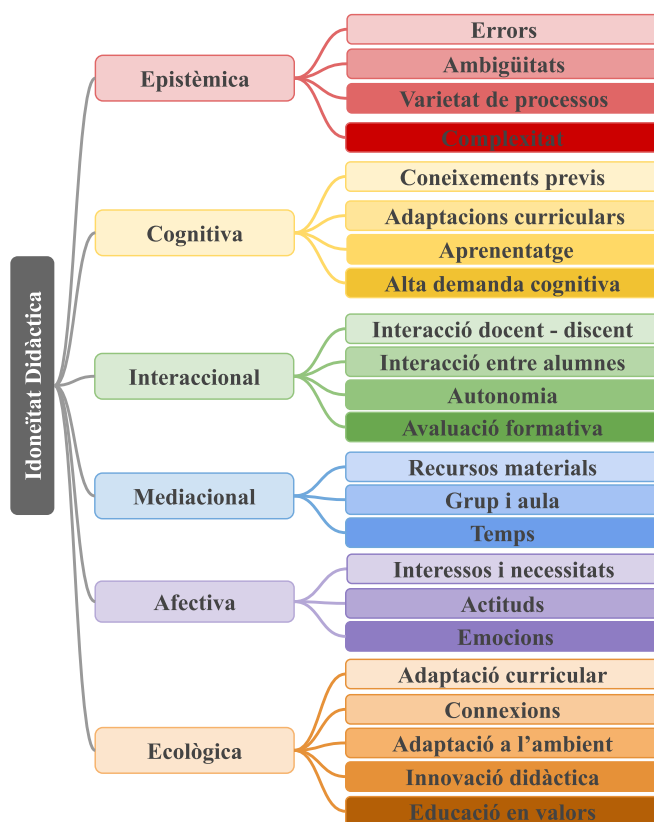


Figura 10.3.2.1. Codi de colors dels components de les dimensions d'*idoneïtat didàctica* d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3 Idoneïtat didàctica hipotètica

Tal i com s'ha fet amb els instruments d'anàlisi didàctica previs, en aquest apartat s'establiran paràmetres d'*idoneïtat didàctica hipotètica*, és a dir, les dimensions de la *idoneïtat didàctica* que s'espera siguin assolides

en implementar cadascuna de les tasques davant el grup. Per a tal efecte, es valoraran, per separat, els indicadors de les components de cadascuna de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* per a totes dues tasques de dibuix geomètric dissenyades per aquest treball de recerca (**Figura 10.3.3.1.**).

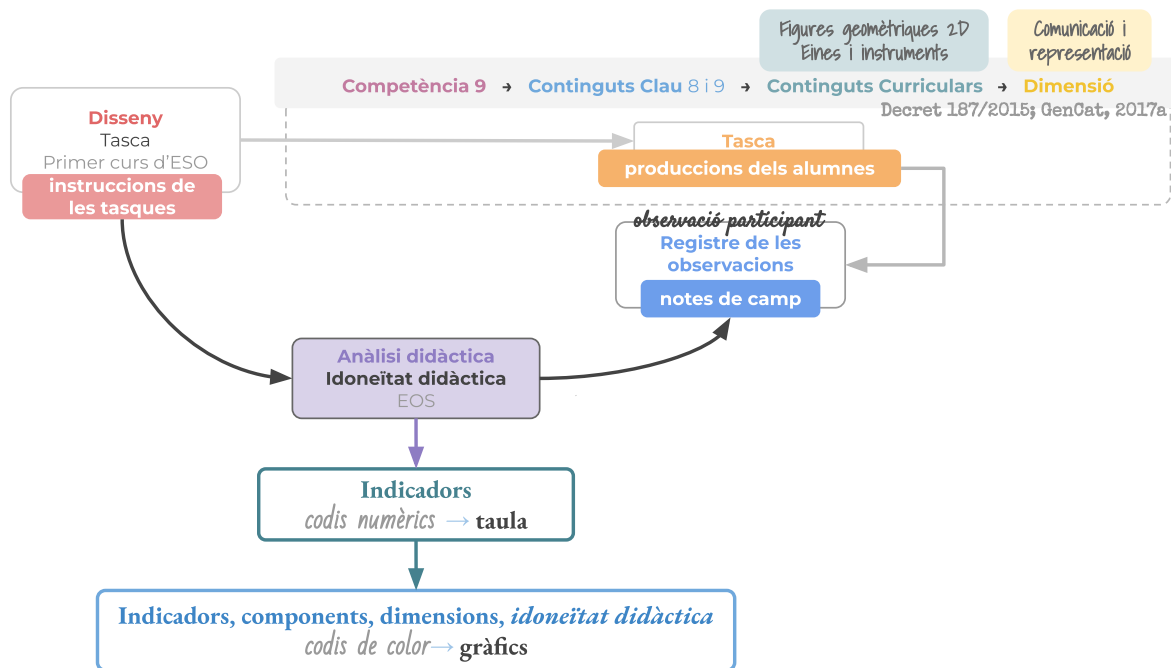


Figura 10.3.3.1. Esquema de la relació entre els instruments de disseny didàctic i la *idoneïtat didàctica hipotètica* de les tasques de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1. La idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 1

La identificació dels aspectes hipotèticament compatibles amb els indicadors de les components de cadascuna de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* (epistèmica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva i ecològica) prové de l'anàlisi dels instruments de disseny de la Tasca 1 (**Figura 10.3.3.1.1.**): el full d'instruccions adreçat als alumnes (**Annex 2**), el full de respostes (**Annex 5**), el full d'orientació pel facilitador de la tasca (**Annex 6**) i el disseny didàctic de la tasca (**Annex 7**).

Cal fer esment de les dades presentades a la **Taula 10.3.2.1.1.** que indiquen el rang de valoracions per caracteritzar el nivell d'assoliment d'indicador: 0 per l'indicador no assolit; 0,25 per a un assoliment baix; 0,5 per indicar un assoliment mitjà; 0,75 per un indicador assolit en bon grau i 1 com a valor màxim d'assoliment d'un indicador.

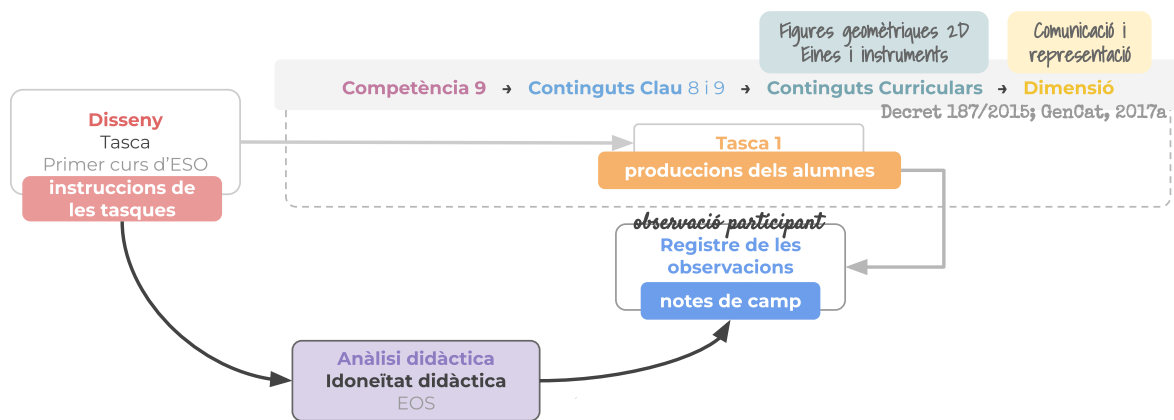


Figura 10.3.3.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de disseny didàctic de la Tasca 1, de l'estudi de cas d'aquesta recerca, i la seva *idoneïtat didàctica hipotètica*.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1.1. La idoneïtat epistèmica hipotètica de la Tasca 1

Tenint com a referència la **Taula 10.3.1.**, el primer component de la dimensió epistèmica de la *idoneïtat didàctica* és el control d'errors. L'únic indicador que descriu aquest component qüestiona sobre el control que té el docent o facilitador per realitzar pràctiques matemàtiques que siguin correctes. Tot i que no hi ha cap font específica dins cap dels documents de referència, es considera la major valoració per aquest indicador ja que n'és un dels objectius de la implementació de la tasca (**Taula 10.3.3.1.1.1.**). Seguint el mateix raonament, es pot dir que també s'assigna la valoració màxima per a tots els indicadors del segon component de la *idoneïtat epistèmica*, el *control d'ambigüitats* (**Taula 10.3.3.1.1.1.**).

El tercer component de la dimensió epistèmica correspon a la *riquesa de processos*. En aquest cas, a l'apartat "processos i continguts" del disseny didàctic de la Tasca 1 (**Annex 7**) permet preveure que hi hagi un bon desenvolupament de la modelització, resolució de problemes i connexions, perquè es demana la creació d'un dibuix per a la construcció física d'un cos tridimensional. Per una altra banda, el treball col·laboratiu especificat a la metodologia del mateix document (**Annex 7**) contribueix a l'argumentació.

Per tal d'analitzar els 12 indicadors de la *representativitat de la complexitat*, tercer component de la *idoneïtat epistèmica*, en primer lloc es pot dir que les *definicions* dels objectes matemàtics que puguin sortir a la sessió són visibles a la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 (**Figura 10.1.1.2.1.**). Aleshores, es considera que les definicions (indicador 1.4.1), les propietats (indicador 1.4.2) i els procediments (indicador 1.4.3) relacionats amb la tasca corresponen a continguts curriculars d'etapes escolar prèvies (GenCat, 2017a) i que a la vegades en són representatives del contingut curricular triat (**Annex 7**), per tal raó s'assigna com la valoració màxima (**Taula 10.3.3.1.1.1.**).

Taula 10.3.3.1.1.1.*Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat epistèmica per a la implementació de la Tasca 1.*

Component	Indicador	Valoració		
Control d'errors	1.1.1	Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	1	
	1.2.1	S'han expressat les definicions amb claredat?	1	
	1.2.2	S'han expressat els procediments amb claredat?	1	
	Control d'ambigüitats	1.2.3	Les explicacions han sigut clares?	1
		1.2.4	Les comprovacions han sigut clares?	1
		1.2.5	Les demostracions han sigut clares?	1
1.2.6		S'ha omès l'ús de metàfores?	1	
Riquesa de processos	1.3.1	Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.2	Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.3	Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.4	S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?	1	
Representativitat de la complexitat	1.4.1	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	
	1.4.2	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	
	1.4.3	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	
	1.4.4	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	
	1.4.5	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	
	1.4.6	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	
	1.4.7	Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	
	1.4.8	Es fa ús de representacions verbals?	1	
	1.4.9	Es fa ús de representacions gràfiques?	1	
	1.4.10	Es fa ús de representacions simbòliques?	0	
	1.4.11	Es fa ús de diferents conversions?	1	
	1.4.12	Es fa ús de diferents tractaments?	1	

Font: Elaboració pròpia.

De la mateixa manera, la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 (**Figura 10.1.1.2.1.**) també justifica que s'assigni la màxima valoració pels indicadors relacionats amb les definicions (indicador 1.4.4), propietats (indicador 1.4.5) i procediments (indicador 1.4.6) són representatius de les nocions matemàtiques que es pretenen portar a l'aula (**Taula 10.3.3.1.1.1.**). Com a conseqüència de la manca d'existència de més problemes a la mateixa tasca, no podem assignar cap valor al indicador 1.4.7 (**Taula 10.3.3.1.1.1.**). A les explicacions que s'han programat a la sessió, segons l'apartat de la metodologia del disseny didàctic (**Annex 7**), es justifica l'existència de representacions verbals (indicador 1.4.8) que poden garantir un màxim nivell d'assoliment d'aquest indicador (**Taula 10.3.3.1.1.1.**). Al full d'instruccions pels alumnes (**Annex 2**) es presenten il·lustracions amb les quals es justifica l'existència de representacions gràfiques que es relacionen amb una valoració màxima d'aquest indicador 1.4.9 (**Taula 10.3.3.1.1.1.**). El que sí identifiquem és una

manca de representacions simbòliques (indicador 1.4.10), per tant, aquest indicador ha de valorar-se com a zero (**Taula 10.3.3.1.1.1**). Finalment, podem dir que esperem hi hagi ús de diferents conversions (indicador 1.4.11) i tractaments (indicador 1.4.12) per què les processos i continguts del disseny didàctic (**Annex 7**) ho especifiquen, per tant aquesta parella d'indicadors pot valorar-se amb el nivell màxim (**Taula 10.3.3.1.1.1**). Presentant les valoracions de la **Taula 10.3.3.1.1.1**, a manera de gràfic (**Figura 10.3.3.1.1.1**) és possible fer una comparació amb el que és la *idoneïtat epistèmica ideal*, és a dir, aquella que correspon a l'assoliment de la valoració màxima de tots els indicadors de les components d'aquesta faceta.

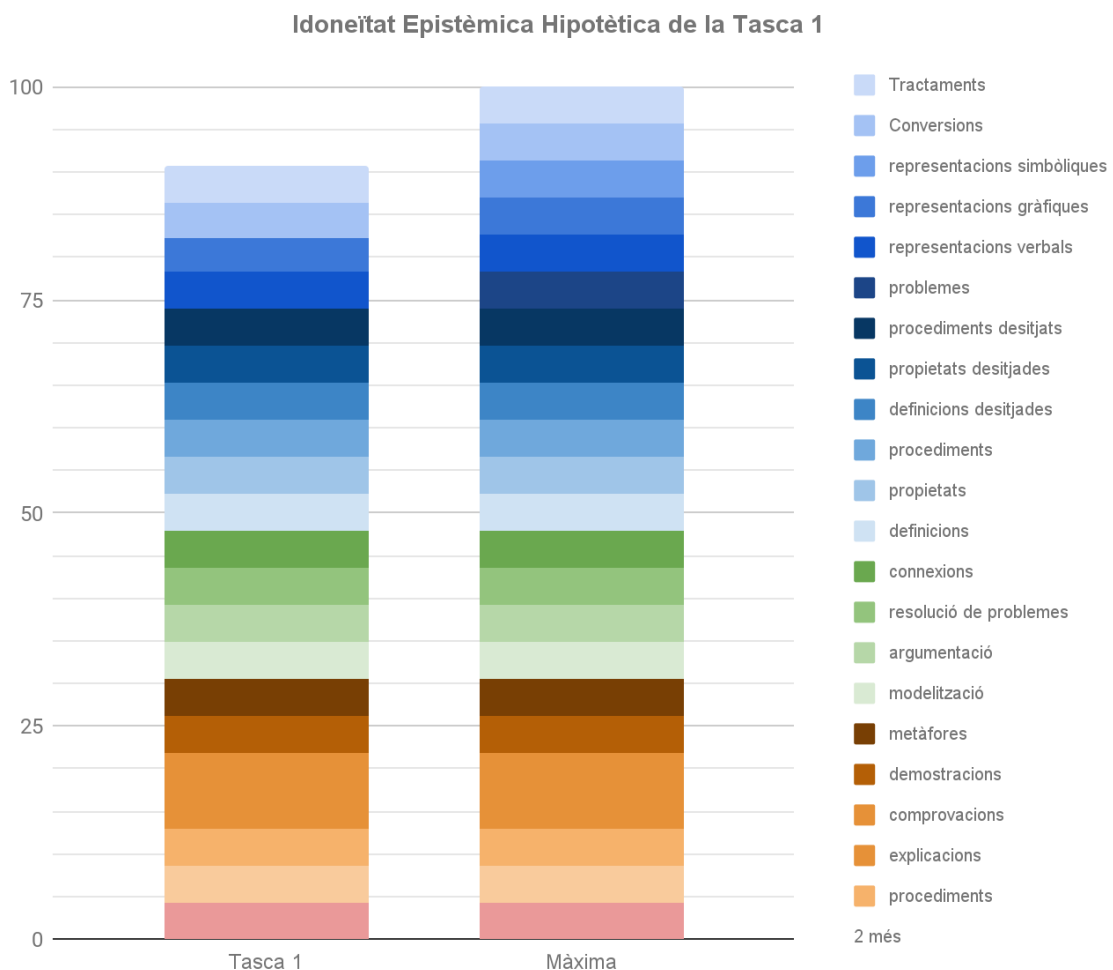


Figura 10.3.3.1.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica hipotètica i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1.2. La idoneïtat cognitiva hipotètica de la Tasca 1

Respecte al primer component de la dimensió *cognitiva* de la *idoneïtat didàctica*, els *coneixements previs*, els dos indicadors que el concreten es poden valorar com a conseqüència de la justificació d'alguns dels

indicadors de la *idoneïtat epistèmica*. En són un bon exemple els indicadors 2.1.1 i 2.1.1 (**Taula 10.3.3.1.2.1.**) que qüestionen sobre els coneixements previs dels alumnes i la seva possibilitat d'assolir el nivell de complexitat que en demanen. La consideració dels continguts curriculars que pertanyen a les etapes educatives ho confirmen (GenCat; 2017a, 2017b). Per tant, aquesta parella d'indicadors poden puntuar-se amb la màxima nota (**Taula 10.3.3.1.2.1.**).

El segon component de la *idoneïtat cognitiva*, és a dir les *adaptacions curriculars diferenciades*, es desplega en dos indicadors. El primer d'ells: la presència de tasques de desenvolupament (indicador 2.2.1). El segon: les activitats de suport (indicador 2.2.2). En revisar el disseny didàctic (**Annex 7**) és evident que no hi ha cap evidència sobre aquests dos indicadors, per tant el valor assignat a tots dos és zero (**Taula 10.3.3.1.2.1.**).

Taula 10.3.3.1.2.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat cognitiva per a la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	1
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	1
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0
Aprenentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	1
Alta demanda cognitiva	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0,5
	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	1
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	1
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	1
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	1

Font: Elaboració pròpia.

Quant al component *aprenentatge*, l'apartat de la metodologia al disseny didàctic (**Annex 7**) explica el darrer pas de la tasca que consisteix en la construcció física d'un octaedre. Per tant, l'únic indicador d'aquest component està previst i es pretén assolir-lo completament. O sigui, es valora amb u (**Taula 10.3.3.1.2.1.**). En darrer terme, la component *alta demanda cognitiva* que es defineix en cinc indicadors. Per analitzar el primer d'ells (indicador 2.4.1) s'utilitza més la reflexió des de l'experiència docent. Per tant, l'indicador 2.4.1

es valora en el rang mitjà: 0,5 (**Taula 10.3.3.1.2.1.**). En relació amb el següent indicador, el 2.4.2, l'apartat de processos i continguts del disseny didàctic (**Annex 7**) dona elements per valorar aquest indicador amb u (**Taula 10.3.3.1.2.1.**). Aquesta mateixa puntuació, u, també correspon als tres últims indicadors d'aquest component (indicadors 2.4.3, 2.4.4 i 2.4.5) perquè el disseny didàctic (**Annex 7**), el full d'instruccions pels alumnes (**Annex 2**) i el full d'orientació pel facilitador (**Annex 6**) mostren que la tasca demana als alumnes fer canvis de representacions (del model gràfic cap a la construcció del model físic), especular i promou la metacognició (**Taula 10.3.3.1.2.1.**).

La **Figura 10.3.3.1.2.1.** mostra el comparatiu entre la dimensió *cognitiva* esperada en implementar la Tasca 1 a l'aula i el cas idealitzat de l'assoliment del màxim grau de desenvolupament de tots els indicadors dels seus quatre components.

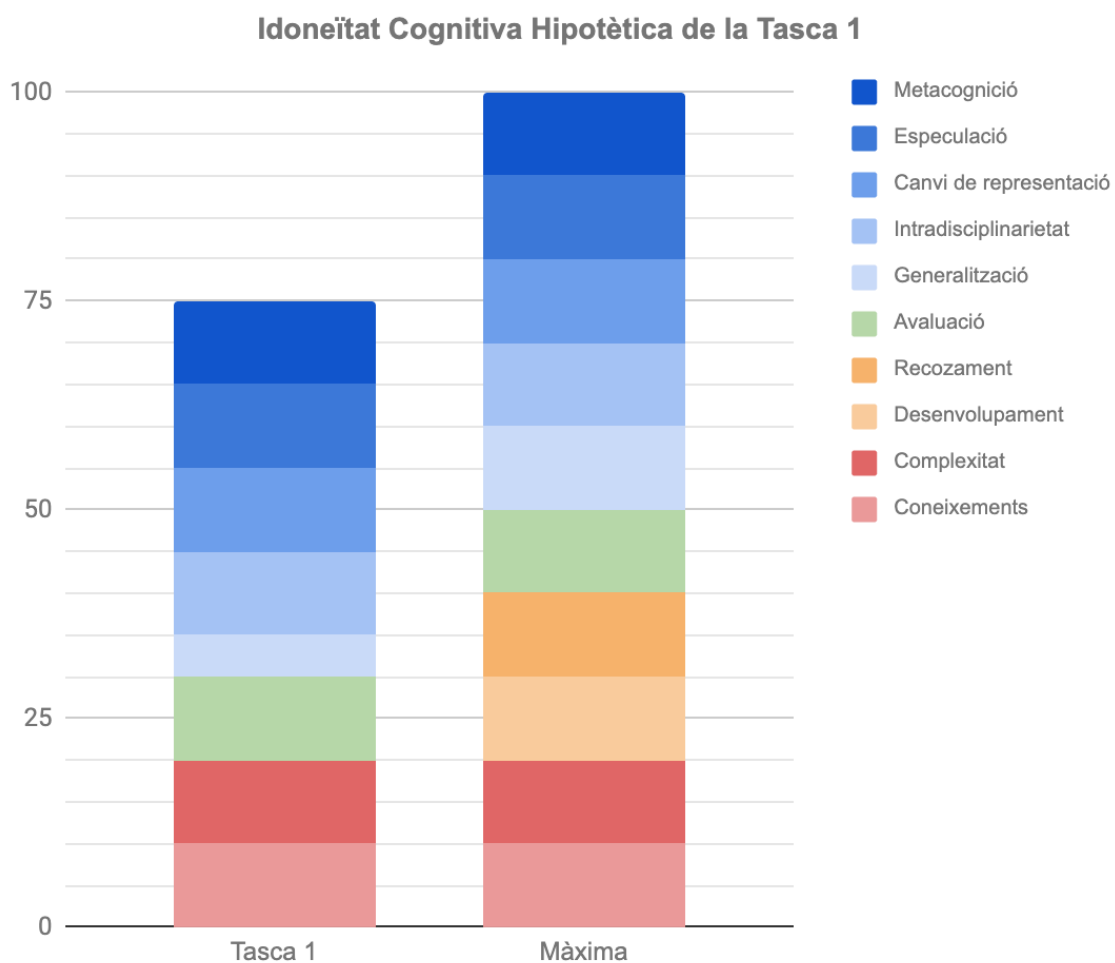


Figura 10.3.3.1.2.1. Comparació de la idoneïtat cognitiva hipotètica i la idoneïtat cognitiva màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1.3. La idoneïtat interaccional hipotètica de la Tasca 1

El primer component de la *idoneïtat interaccional* (**Taula 10.3.3.1.3.1.**) es valora a partir de la reflexió del paper del facilitador de la Tasca 1, des del punt de vista de les interaccions. La preparació prèvia a la sessió permetrà presentar la tasca amb claredat (indicador 3.1.1), ben organitzada (indicador 3.1.2), amb una expressió oral adequada (indicador 3.1.3), fent èmfasi en els conceptes clau (indicador 3.1.4). També es podran identificar els conflictes cognitius dels alumnes (indicador 3.1.5), interpretar i resoldre les dubtes de la classe (indicador 3.1.6), conduir apropiadament els conflictes cognitius (indicador 3.1.7), arribar al consens (indicador 3.1.8), captar l'atenció dels estudiants amb arguments retòrics i racionals (indicador 3.1.9) i que la tasca facilitarà la inclusió dels alumnes (indicador 3.1.10). Així, aquests deu indicadors del primer component es valorem amb u (**Taula 10.3.3.1.3.1.**).

Taula 10.3.3.1.3.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat interaccional per a la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Interacció docent - discent	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1
	3.1.4 S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1
	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1
	3.1.8 S'han promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	1
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	1
	3.1.10 S'han observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	1
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'hi observa que es promou el diàleg i la comunicació entre estudiants?	1
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	1
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	1
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?	1
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?	1
Avaluació formativa	3.4.1 S'ha realitzat una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	1

Font: Elaboració pròpia.

També des de la intuïció es valoren amb la puntuació màxima els dos indicadors del component *interacció entre alumnes*, perquè es preveu que amb la Tasca 1 hi haurà diàleg entre els alumnes. A més promou la integració dels alumnes en un grup de treball (**Taula 10.3.3.1.3.1**). Similarment, els tres indicadors del component *autonomia* i l'únic indicador de la component *avaluació formativa* seran assolits al màxim nivell amb la Tasca 1 (**Taula 10.3.3.1.3.1**).

En graficar les valoracions de la *idoneïtat interaccional* esperada en la implementació de la Tasca 1 dins l'aula (**Figura 10.3.3.1.3.1**) se li pot comparar visualment amb el cas més òptim.

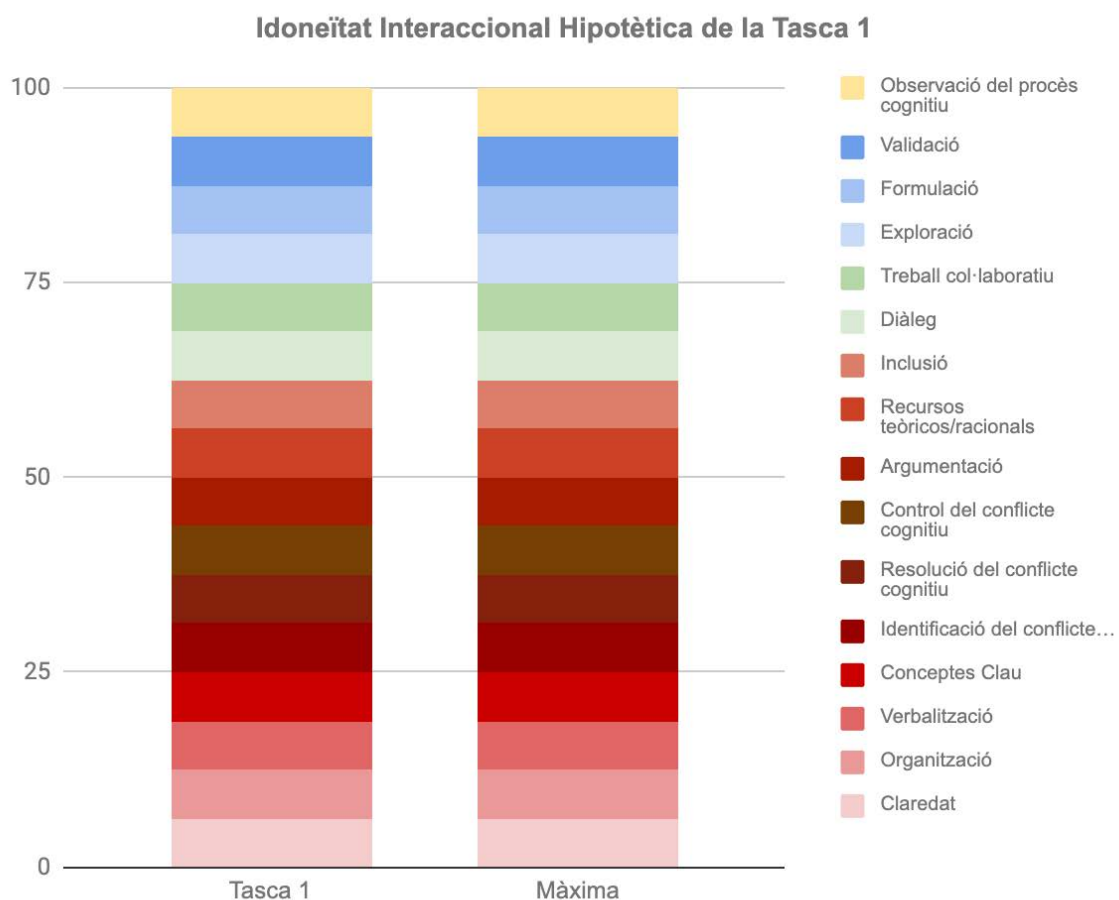


Figura 10.3.3.1.3.1. Comparació de la idoneïtat interaccional hipotètica i la idoneïtat interaccional màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1.4. La idoneïtat mediacional hipotètica de la Tasca 1

A l'apartat dels requeriments del disseny didàctic de la Tasca 1 (**Annex 7**) s'identifiquen arguments per assignar la màxima valoració als indicadors 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.6, 4.1.7 i 4.1.8 (**Taula 10.3.3.1.4.1**) del

primer component de la dimensió *mediacional* de la implementació de la Tasca 1, ja que els materials manipulables ajudaran a l'ús del llenguatge, el desenvolupament de procediments i l'argumentació de caire matemàtic mentre els alumnes realitzen una activitat derivada d'una situació aplicada, fan un model i visualitzen les definicions i propietats de les figures i els cossos geomètrics (**Taula 10.3.3.1.4.1.**). Però no hi ha arguments per assignar cap valoració als indicadors 4.1.4 i 4.1.5 perquè no es considera que els alumnes facin servir dispositius com ara: calculadores, ordinadors o tauletes. (**Taula 10.3.3.1.4.1.**)

Taula 10.3.3.1.4.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat mediacional per a la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1
	4.1.4 La calculadora t'ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	1
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	1
	4.1.8 Has pogut visualitzar les definicions i propietats?	1
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre d'alumnes que han participat de la tasca ha ajudat a aprendre?	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1
	4.2.3 L'horari de la classe és l'adequat?	0,5
	4.2.4 L'aula és apropiada pel desenvolupament de la tasca?	1
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?	1
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	1
	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?	1

Font: Elaboració pròpia.

Pel que fa al segon component, *condicions del grup i de l'aula*, a partir de les dades donades oralment pel professor del centre on es farà la implementació. Es pot dir que es preveu la formació de grup de treball amb quatre o cinc membres, la qual cosa és adequada i fa que l'indicador 4.3.1 pugui puntuar-se amb el màxim (**Taula 10.3.3.1.4.1.**). A nivell de previsió, l'autora de la tesi espera que la distribució de l'aula sigui adequada, per tant l'indicador 4.3.2 es puntua amb u (**Taula 10.3.3.1.4.1.**). Com que el professor del centre també ens ha informat que l'horari de la sessió és al voltant del migdia, la valoració de l'indicador 4.3.3 és 0,5 (**Taula 10.3.3.1.4.1.**). Finalment, s'assigna la puntuació màxima als dos últims indicadors del

component perquè l'autora de la tesi estima que l'aula i la distribució dels alumnes en ella seran apropiats pel desenvolupament de la tasca (indicadors 4.3.4 i 4.3.5) (**Taula 10.3.3.1.4.1.**).

Per tancar amb la dimensió *mediacional* tots els indicadors del seu darrer component es valoren amb la puntuació més alta, considerant que hi haurà prou temps per realitzar la tasca (indicador 4.4.1), es destinarà prou temps al tema central (indicador 4.4.2.) i s'ha programat el temps necessari per desenvolupar l'activitat més complexa de la tasca (indicador 4.4.3.) (**Taula 10.3.3.1.4.1.**). Així mateix, es presenta el comparatiu entre les valoracions estimades i les màximes de la dimensió *mediacional* (**Figura 10.3.3.1.4.1.**).

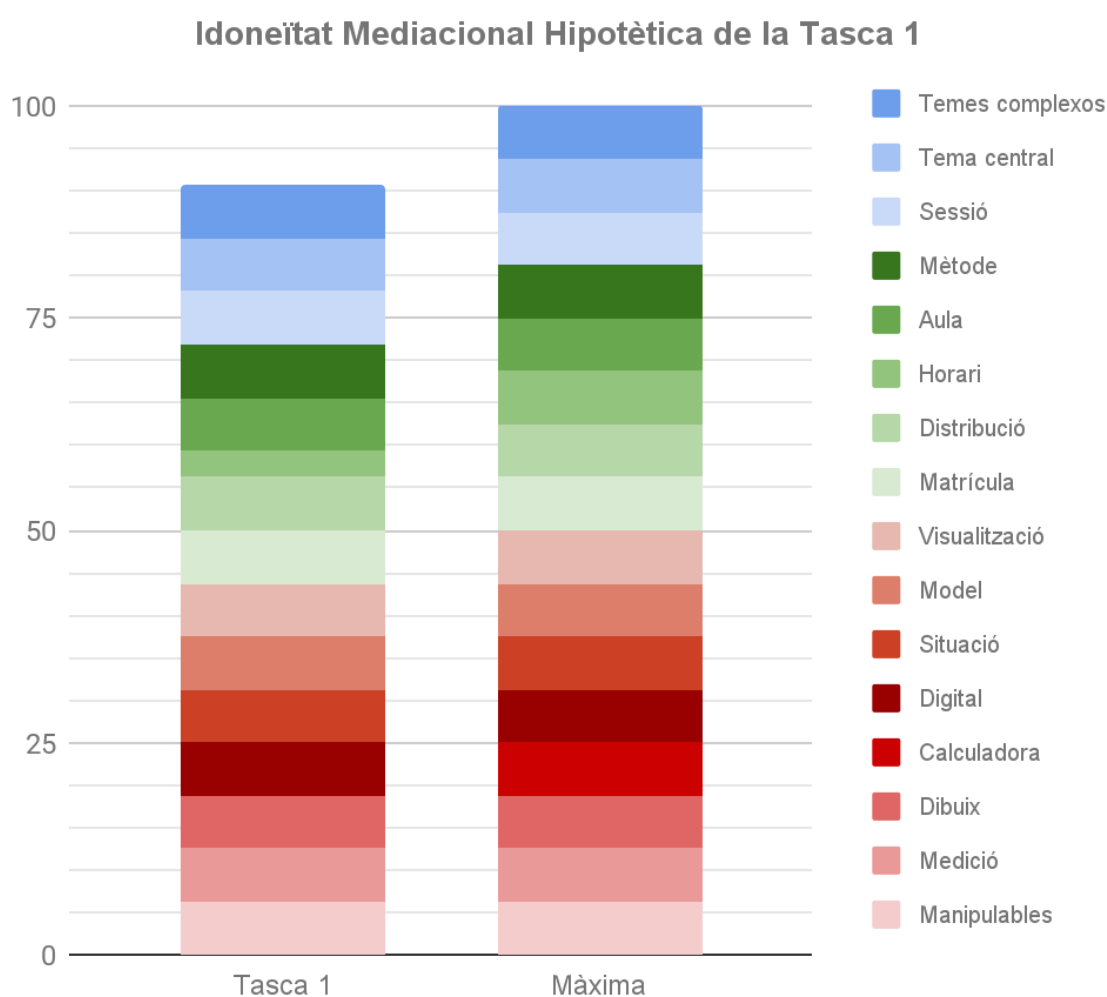


Figura 10.3.3.1.4.1. Comparació de la idoneïtat mediacional hipotètica i la idoneïtat mediacional màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1.5. La idoneïtat afectiva hipotètica de la Tasca 1

Per analitzar els indicadors de la *idoneïtat afectiva*, cal recordar les converses mantingudes per fer el disseny de la Tasca 1. En discutir-la amb el grup de professors investigadors de la Universitat es va concloure que el context de la Tasca: el concurs de globus (**Annex 2**) és un factor que pot fer que els alumnes s'interessin en l'activitat (indicador 5.1.1 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**), la trobin útil a nivell quotidià (indicador 5.1.2 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**) i professional (indicador 5.1.3 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**). Per tant, tots aquests indicadors s'assoleixen en la seva totalitat (**Taula 10.3.3.1.5.1.**).

Taula 10.3.3.1.5.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat afectiva per a la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	1
	5.1.2 S'has trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	1
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	1
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverància, responsabilitat, etc.?	1
	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	1
	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ajuda a promoure l'autoestima?	1
	5.3.2 Aquesta tasca ajuda a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	1
	5.3.3 Aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	1
	5.3.4 Aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	1

Font: Elaboració pròpia.

Respecte als tres indicadors del component *actituds* i als quatre indicadors del component *emocions*, també arriben al màxim nivell d'assoliment (**Taula 10.3.3.1.5.1.**) perquè en demanar la construcció física del cos geomètric (**Annex 7**) es promou la perseverança (indicador 5.2.1 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**). Per una altra banda, es té previst tenir cura de promoure la igualtat (indicador 5.2.2 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**) i no jutjar cap dels arguments (indicador 5.2.3 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**) en el desenvolupament de la tasca a l'aula. Així mateix, es creu que la tasca i l'actuació del professor o facilitador ajudaran en la promoció de l'autoestima (indicador 5.3.1 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**), evitar el rebuig o fòbies cap a les matemàtiques (indicador 5.3.2 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**), emfatitzen les qualitats estètiques (indicador 5.3.3 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**) i de precisió de les matemàtiques (indicador 5.3.4 de la **Taula 10.3.3.1.5.1.**).

En graficar totes les dades de la **Taula 10.3.3.1.5.1**, s'obté el compartiu entre la valoració dels indicadors de les components de la *idoneïtat afectiva* que s'estima assolir en implementar la Tasca 1 respecte els valors màximes de tots aquests paràmetres (**Figura 10.3.3.1.5.1**).

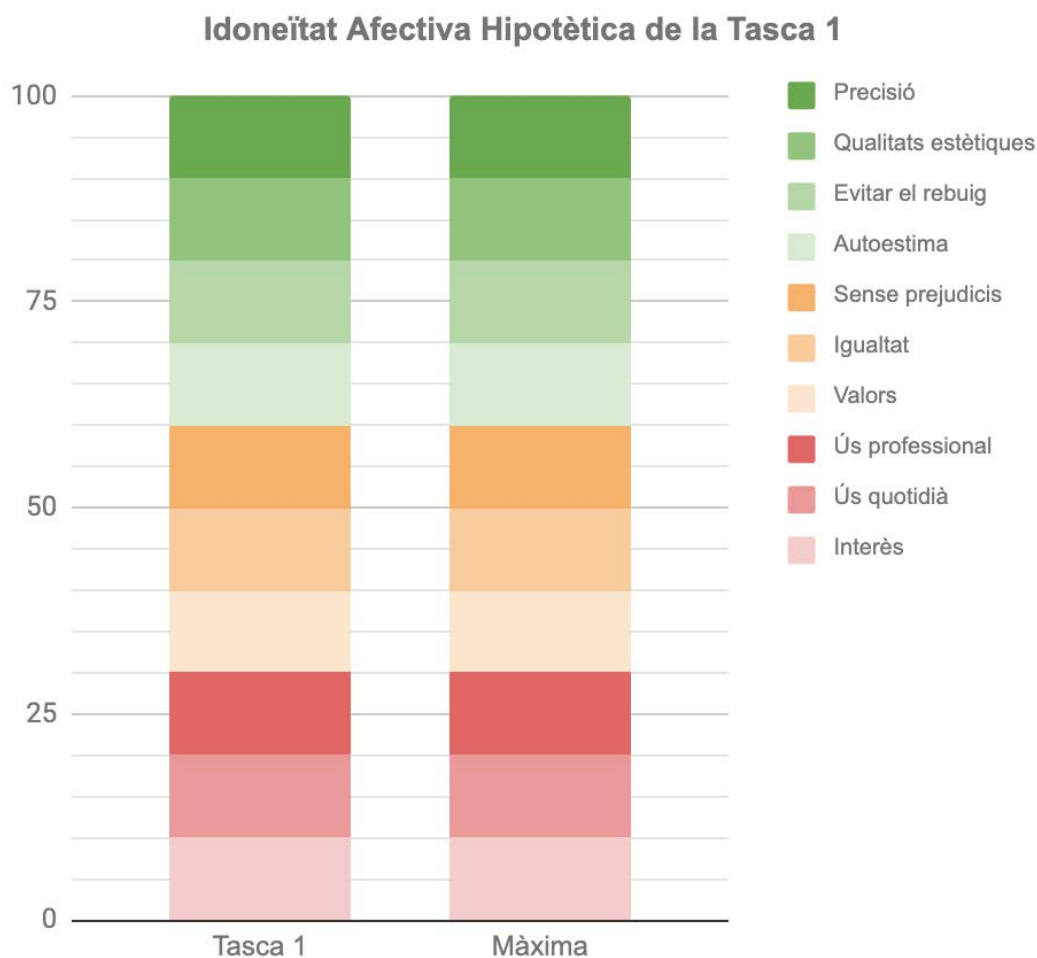


Figura 10.3.3.1.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva hipotètica i la idoneïtat afectiva màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1.6. La idoneïtat ecològica hipotètica de la Tasca 1

L'anàlisi de la dimensió *ecològica* es fa a partir de la reflexió al voltant de quatre components: *adaptació al currículum*, *connexions intra i interdisciplinars*, *adaptació socioprofessional i cultural* i *innovació didàctica* (**Taula 10.3.3.1.6.1**).

Segons la referència al currículum que es recull a l'**Annex 1**, els tres indicadors del primer component (*adaptació al currículum*) es compleixen per complet per què: (1) el contingut és part del pla curricular del primer curs d'ESO (indicador 6.1.1 de la **Taula 10.3.3.1.6.1.**), la implementació també és part del contingut curricular (indicador 6.1.2 de la **Taula 10.3.3.1.6.1.**) i l'avaluació que es pensar fer-ne mitjançant la construcció física del cos geomètrica també es troba dins el pla curricular (indicador 6.1.3 de la **Taula 10.3.3.1.6.1.**).

Taula 10.3.3.1.6.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat ecològica per a la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	0
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	0
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	1
Innovació didàctica	6.4.1 S'han aplicat temes coneguts per arribar a contingut nou?	1
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0
	6.4.3 S'apliquen noves mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0,5
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0

Font: Elaboració pròpia.

En relació amb el segon component, *connexions intra i interdisciplinars* (**Taula 10.3.3.1.6.1.**), només el primer indicador es considera que es pot assolir al màxim perquè els continguts de dibuix geomètric i construcció de cossos geomètrics de la Tasca 1 (**Annex 7**) són temes del currículum del primer curs d'ESO (**Annex 1**) que a la vegada es relacionen amb continguts de mesura (GenCat, 2017a). Però, no tenim elements per justificar que hi hagi relació entre els continguts de la Tasca 1 i continguts matemàtics fora del currículum de matemàtiques o d'altres assignatures (**Taula 10.3.3.1.6.1.**).

El component *adaptació socioprofessional i cultural* de la dimensió *ecològica* de la Tasca 2 també es considera que s'assoleix completament perquè la tasca ajuda als alumnes en la identificació de preferències sobre activitats professionals (indicador 6.3.1 de la **Taula 10.3.3.2.6.1.**).

La reflexió sobre el darrer component de la *idoneïtat ecològica*, la *innovació didàctica* (**Taula 10.3.3.1.6.1**), permet identificar dos indicadors que es pensa s'assoleixen al màxim. La revisió dels continguts curriculars de primària permet assegurar que la Tasca 1 és una oportunitat per aplicar coneixements de dos dels blocs curriculars d'aquest nivell educatiu: *espai i forma* i *mesura* (GenCat, 2017b), per tant, el primer indicador del component té assignada la màxima puntuació (indicador 6.4.1 de la **Taula 10.3.3.1.6.1**). Com que a la Tasca 1 es demana la construcció del cos geomètric, aquesta activitat pot interpretar-se com una mena d'avaluació i per això es valora amb una puntuació mitja el tercer indicador del component ara analitzat (indicador 6.4.3 de la **Taula 10.3.3.1.6.1**). Per finalitzar, els indicadors 6.4.2 i 6.4.4 (**Taula 10.3.3.1.6.1**) es valoren amb zero perquè a la Tasca 1 no es contempla l'ús de dispositius tecnològics (**Taula 10.3.3.1.6.1**).

En portar les dades de la **Taula 10.3.3.1.6.1** a una representació gràfica s'estableix un comparatiu entre els valors hipotètics dels indicadors de la dimensió *ecològica* i la puntuació màxima d'ells mateixos (**Figura 10.2.4.1.6.1**).

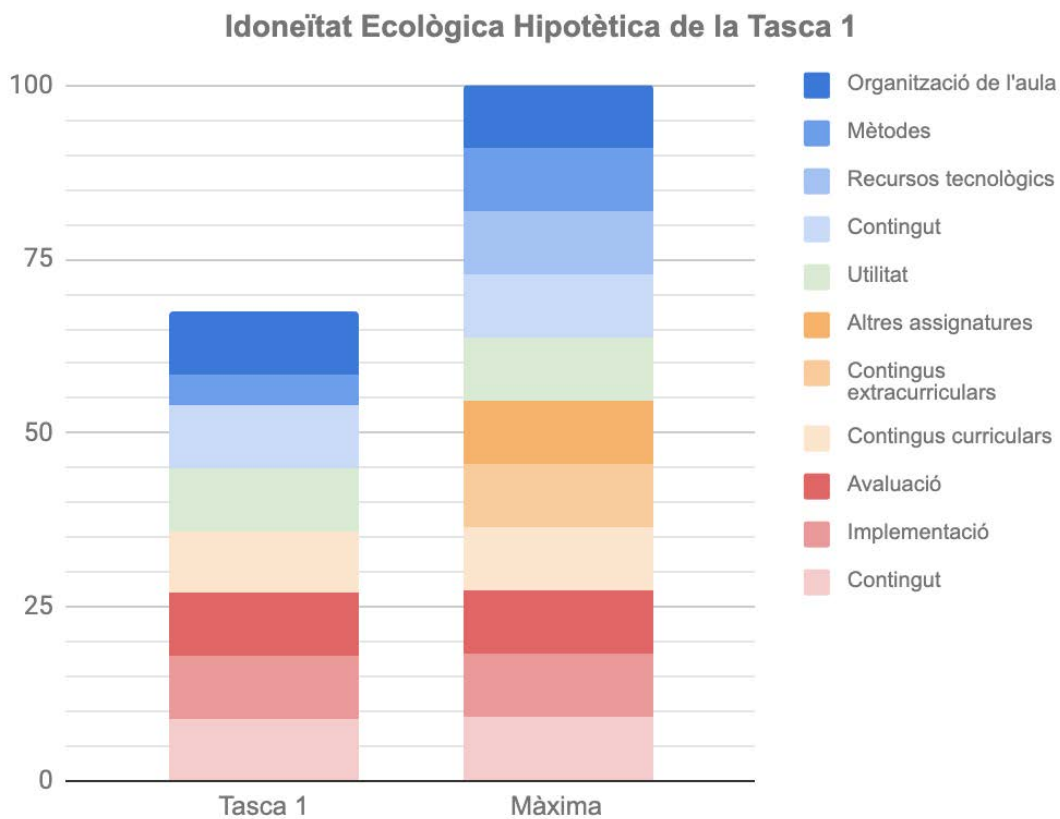


Figura 10.3.3.1.6.1. Comparació de la idoneïtat ecològica hipotètica i la idoneïtat ecològica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.1.7. Les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 1

Les valoracions generades per descriure el que s'espera assolir en implementar la Tasca 1 permeten caracteritzar les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica*. A la **Figura 10.3.3.1.7.1.** es fa un recull de les puntuacions dels indicadors d'un mateix component. Per tant, les sis dimensions d'*idoneïtat didàctica* s'hi representen com a la suma dels valors assignats als indicadors que integren un component. A la vegada, amb aquesta **Figura 10.3.3.1.7.1.** es comparen les valoracions assignades a la Tasca 1 amb els cas ideal en el qual tots els indicadors assoleixen la màxima puntuació.

A efectes de comparar només les components de les dimensions d'*idoneïtat didàctica*, al gràfic de la **Figura 10.3.3.1.7.2.** es fa la unificació de les valoracions dels components de cadascuna d'elles. També, en aquest gràfic es tornen a comparar les dades hipotètiques i ideals per a la Tasca 1.

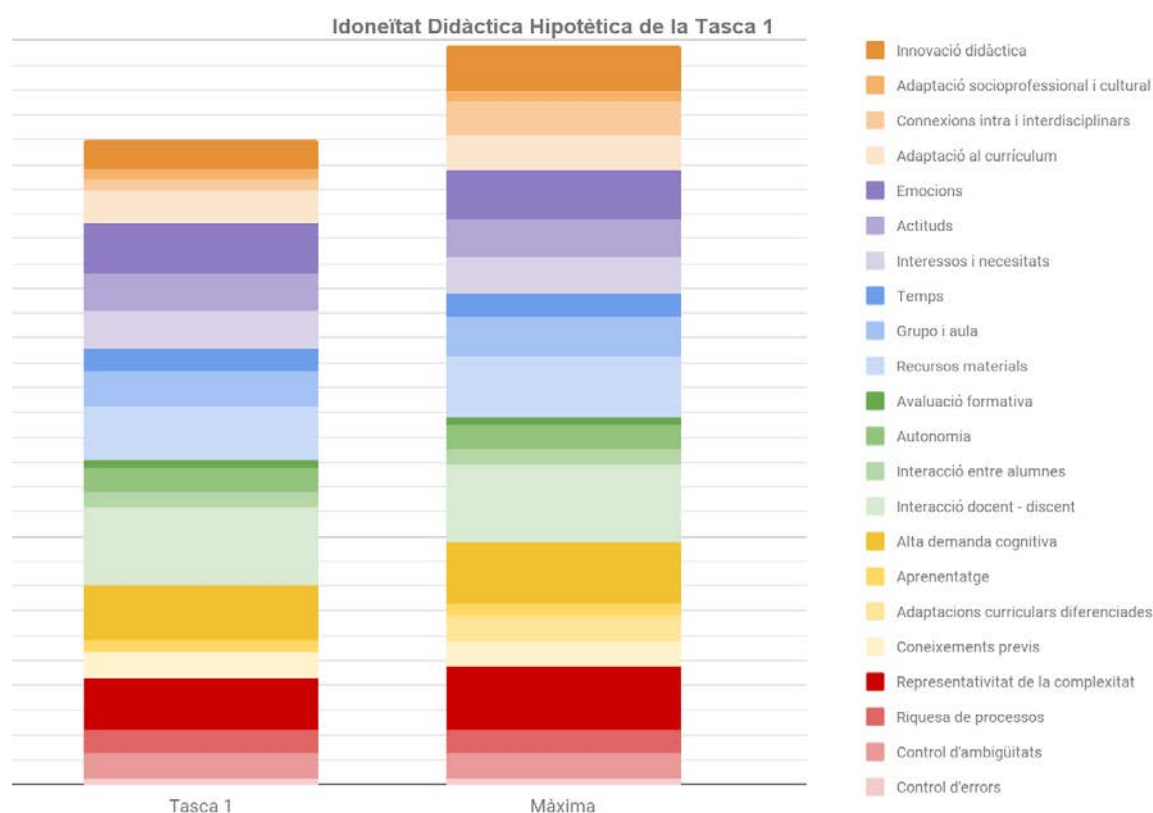


Figura 10.3.3.1.7.1. Comparació dels components de la idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

Una comparació global de la *idoneïtat didàctica* es fa reproduint la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013). Aleshores, a la **Figura 10.3.3.1.7.3.** es mostra la valoració global i hipotètica de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1 comparada amb l'assoliment màxim d'aquests sis paràmetres.

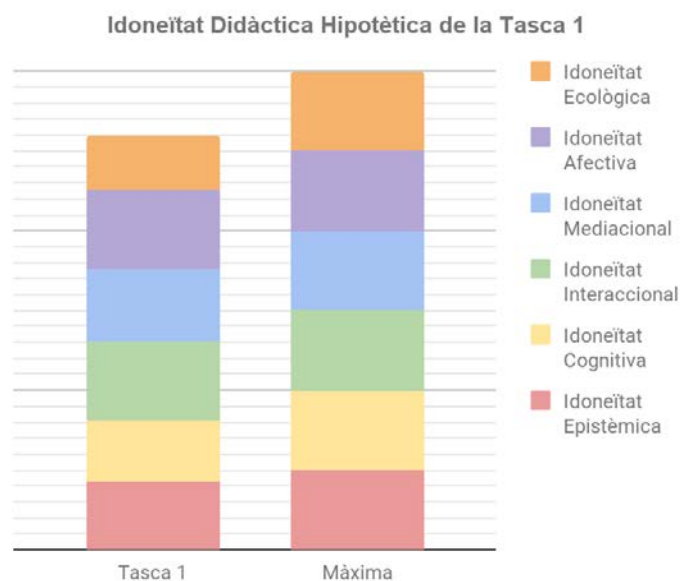


Figura 10.3.3.1.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

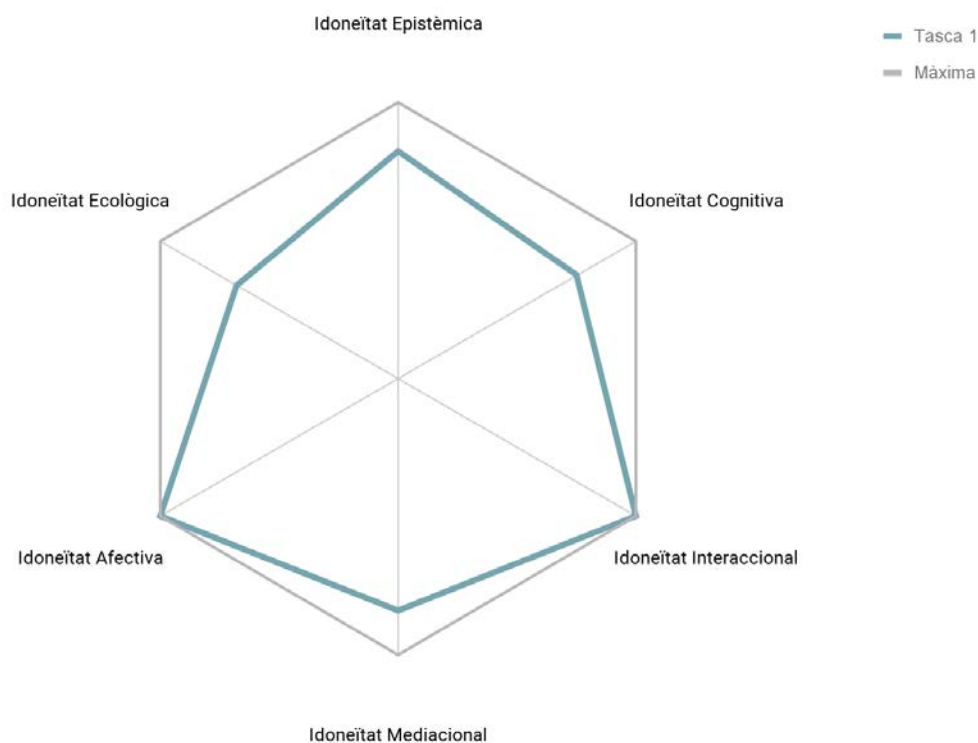


Figura 10.3.3.1.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 1 d'aquest treball de recerca segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2. La idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 2

De manera similar a l'anàlisi preliminar fet per establir els indicadors i components de la *idoneïtat didàctica hipotètica* de la Tasca 1, es repeteix el procediment sencer, però aplicat a la Tasca 2 (**Figura 10.4.3.2.1.**).

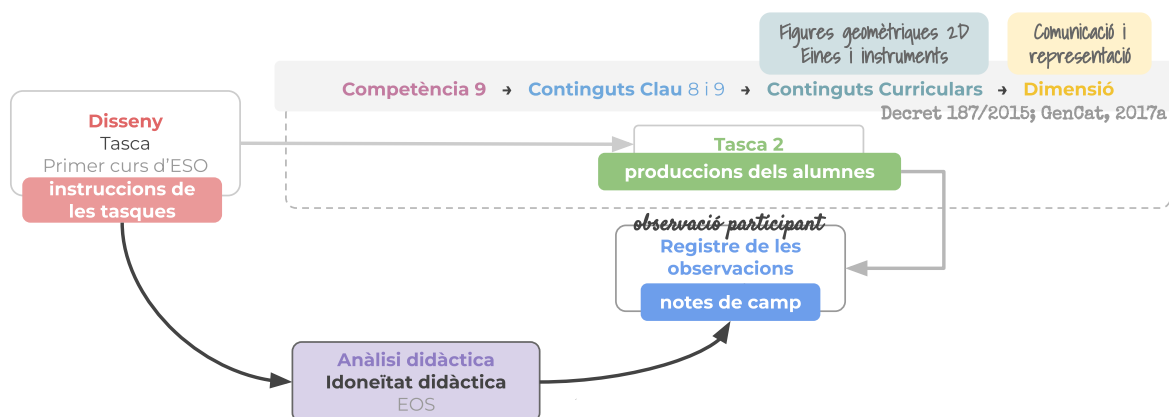


Figura 10.3.3.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de disseny didàctic de la Tasca 2, de l'estudi de cas d'aquesta recerca, i la seva *idoneïtat didàctica hipotètica*.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2.1. La idoneïtat epistèmica hipotètica de la Tasca 2

Per assignar valors per caracteritzar els indicadors dels primers dos components de la dimensió *epistèmica* de la *idoneïtat didàctica* (*control d'errors* i *control d'ambigüïtats*) no tenim fonts de referència però, des de la perspectiva com a “facilitador” de l'activitat a l'aula, l'autora d'aquest treball de tesi considera que farà una preparació prou bona per assolir el màxim compliment dels indicadors d'aquesta parella de components en la implementació de la tasca (**Taula 10.3.3.1.2.1.**).

Hi ha elements per valorar la *riquesa de processos*, tercer component de la *idoneïtat epistèmica*, en el full d'instruccions pels alumnes (**Annex 8**), el full d'orientació pel facilitador (**Annex 10**) i el disseny didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**). L'apartat “processos i continguts” del disseny didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**) justifica que s'assigni la màxima puntuació pels indicadors del component discutit en aquest paràgraf perquè en la Tasca 2 es demana el dibuix geomètric per a la construcció de poliedres i aquesta és una activitat de modelització i resolució de problemes que implica que els alumnes facin connexions i argumentacions (**Taula 10.3.3.2.1.1.**).

Taula 10.3.3.2.1.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'adequació epistèmica per a la implementació de la Tasca 2.

Component		Indicador	Valoració	
Control d'errors	1.1.1	Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	1	
	1.2.1	S'han expressat les definicions amb claredat?	1	
	1.2.2	S'han expressat els procediments amb claredat?	1	
	Control d'ambigüitats	1.2.3	Les explicacions han sigut clares?	1
		1.2.4	Les comprovacions han sigut clares?	1
		1.2.5	Les demostracions han sigut clares?	1
1.2.6		S'ha omès l'ús de metàfores?	1	
Riquesa de processos	1.3.1	Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.2	Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.3	Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.4	S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?	1	
Representativitat de la complexitat	1.4.1	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,75	
	1.4.2	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	
	1.4.3	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	
	1.4.4	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,75	
	1.4.5	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	
	1.4.6	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	
	1.4.7	Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	
	1.4.8	Es fa ús de representacions verbals?	1	
	1.4.9	Es fa ús de representacions gràfiques?	1	
	1.4.10	Es fa ús de representacions simbòliques?	0	
	1.4.11	Es fa ús de diferents conversions?	1	
	1.4.12	Es fa ús de diferents tractaments?	1	

Font: Elaboració pròpia.

La informació de referència per a la valoració dels indicadors del tercer component de la *adequació epistèmica*, la *representativitat de la complexitat*, prové de la configuració epistèmica hipotètica d'aquesta tasca (**Figura 10.2.2.2.1.**). Com s'hi pot confirmar, a les definicions es van ometre el terme “poliedre” que porta cap a la propietat de repetició de cares o de congruència en les figures geomètriques de les cares dels cossos geomètrics mostrades a la representació gràfica del full d'instruccions pels alumnes (**Annex 8**), el full d'orientació pel facilitador (**Annex 10**). Per tant, els indicadors 1.4.1 i 1.4.4 es valoren amb 0,75 punts (**Taula 10.3.3.2.1.1.**) perquè no són del tot coherents o explícits en relació amb les propietats que es volen ensenyar. Les mateixes referències, el full d'instruccions pels alumnes (**Annex 8**) i el full d'orientació pel facilitador (**Annex 10**), donen elements per assignar la màxima puntuació als indicadors 1.4.2, 1.4.3, 1.4.5 i 1.4.6 perquè la tasca ajuda a que els alumnes observin propietats representatives dels poliedres i les recolzin

amb procediments com ho són el dibuix geomètric de les cares per a l'obtenció d'un desenvolupament pla i la construcció física de cossos geomètrics (**Taula 10.3.3.2.1.1**). El disseny didàctic de la tasca (**Annex 11**) justifica que es valori amb u l'indicador 1.4.8 perquè es preveu que el facilitador faci una presentació o explicació verbal de la tasca (**Taula 10.3.3.2.1.1**). El full d'instruccions pels alumnes (**Annex 8**) i el full d'orientació pel facilitador (**Annex 10**) també permeten identificar que l'indicador 1.4.9 assoleix el màxim nivell i que els indicadors 1.4.7 i 1.4.10 el valor zero, perquè a la tasca es consideren representacions gràfiques però no s'hi inclou una mostra representativa de problemes ni tampoc hi ha cap representació simbòlica (**Taula 10.3.3.2.1.1**). Per una altra banda, els indicadors 1.4.11 i 1.4.12 es puntuen en el màxim nivell perquè la tasca requereix que els alumnes facin conversions i tractaments diferents per desenvolupar la tasca (**Taula 10.3.3.2.1.1**), com es veu al disseny didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**). Utilitzant les valoracions de la **Taula 10.3.3.2.1.1**, es presenta la informació en format gràfic (**Figura 10.3.3.2.1.1**) per comparar la idoneïtat epistèmica hipotètica de la Tasca 2 amb la idoneïtat epistèmica que correspon a l'assoliment de la valoració màxima de tots els indicadors de les components d'aquesta dimensió: la *idoneïtat epistèmica màxima*.

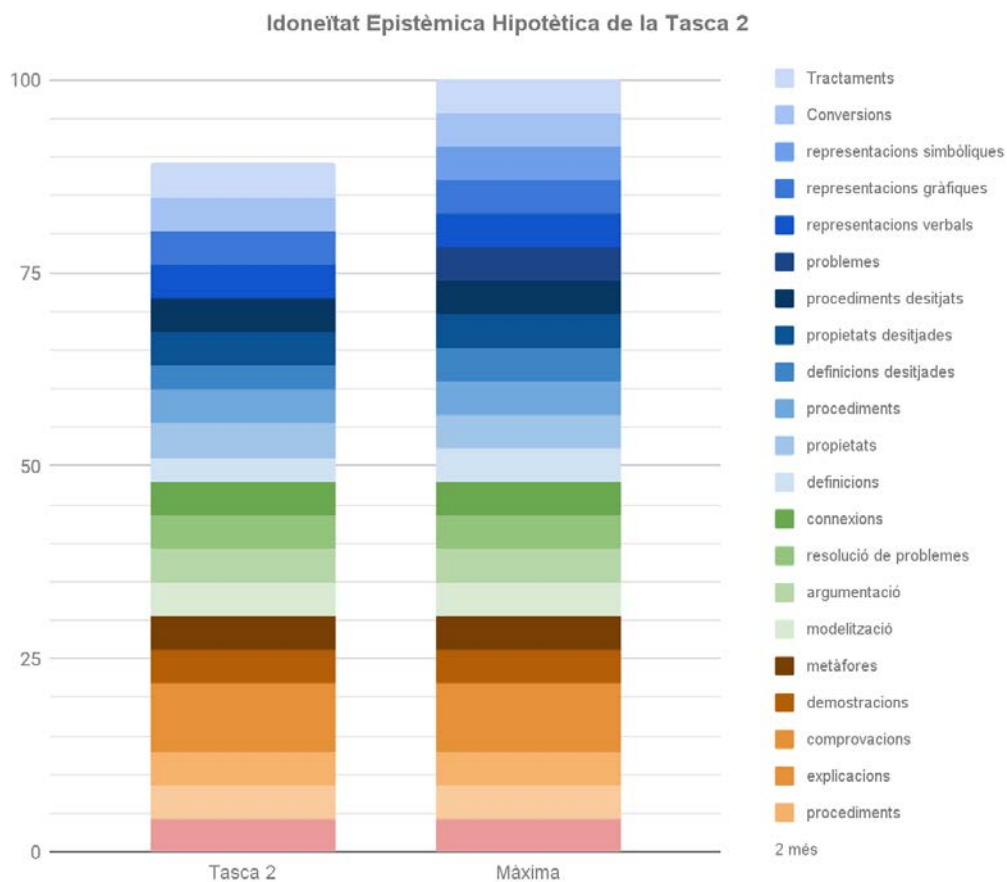


Figura 10.3.3.2.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica hipotètica i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2.2. La idoneïtat cognitiva hipotètica de la Tasca 2

L'estudi de la *idoneïtat cognitiva* comença amb l'anàlisi del seu primer component: els *coneixements previs*. El disseny didàctic (**Annex 11**) i el recull de continguts del primer curs d'ESO considerats per aquesta Tasca (GenCat, 2017a) permet valorar amb u els dos indicadors d'aquest component perquè es sap que els alumnes tenen els coneixements previs necessaris per treballar amb figures planes i cossos geomètrics, per tant es considera que ells poden assolir el nivell de complexitat de la tasca (**Taula 10.3.3.2.2.1.**).

El disseny didàctic (**Annex 11**) també recolza que es puntuï amb zero tots els indicadors del component *adaptacions curriculars diferenciades* perquè hi es veu que no es van preparar tasques de desenvolupament ni de suport (**Taula 10.3.3.2.2.1.**). A la vegada, aquest mateix document justifica la màxima puntuació per a l'únic indicador del component *aprenentatge* perquè es considera com a avaluació la construcció del poliedre (**Taula 10.3.3.2.2.1.**).

Taula 10.3.3.2.2.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat cognitiva per a la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	1
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	1
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0
Aprenentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	1
Alta demanda cognitiva	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0,75
	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	1
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	1
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	1
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	1

Font: Elaboració pròpia.

A conseqüència de la manca d'ús del terme “poliedre”, es pensa que el primer indicador del component *alta demanda cognitiva* es veurà afectat perquè potser es complica que els alumnes puguin fer generalitzacions. Per tant, l'indicador 2.4.1 es puntuja amb 0,75 (**Taula 10.3.3.2.2.1.**). Per una altra banda, l'apartat *processos i*

continguts del disseny didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**) dona elements per valorar amb la màxima puntuació la resta dels indicadors del component discutit en aquest paràgraf. Això es justifica en la cerca de connexions entre diferents continguts matemàtics (indicador 2.4.2) que han de fer els alumnes per fer canvis de representacions entre figures planes i cossos tridimensionals (indicador 2.4.3) mitjançant l'especulació (indicador 2.4.4) i la metacognició (indicador 2.4.5) que prové de la comprovació que fan els mateixos alumnes amb la construcció física dels poliedres (**Taula 10.3.3.2.2.1**).

El comparatiu de les valoracions dels indicadors dels components de la *idoneïtat cognitiva* de la Tasca 2 (**Taula 10.3.3.2.2.1**) amb els valors màxims de tots ells s'observa en la **Figura 10.3.3.2.2.1**, que es presenta a continuació

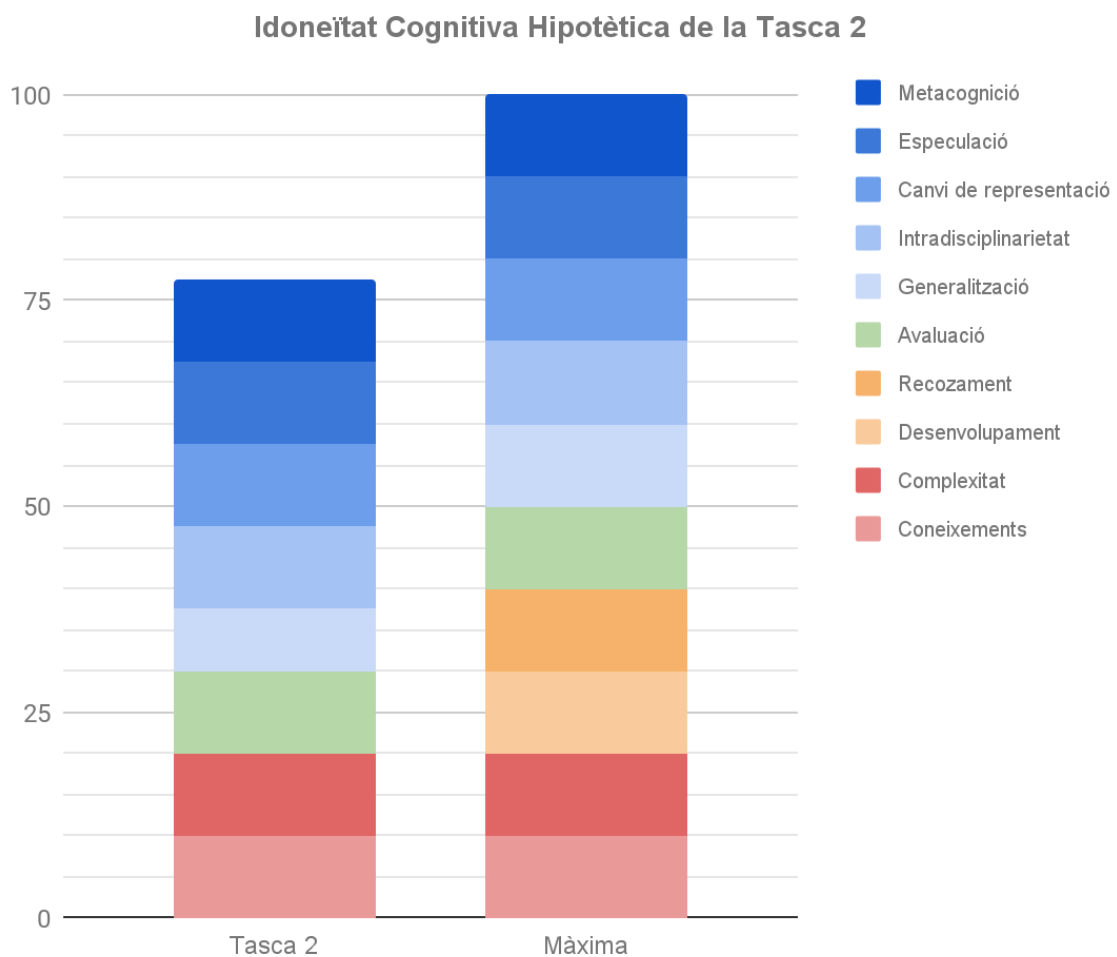


Figura 10.3.3.2.2.1. Comparació de la idoneïtat cognitiva hipotètica i la idoneïtat cognitiva màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2.3. La idoneïtat interaccional hipotètica de la Tasca 2

L'assignació de valors per establir *idoneïtat interaccional* que espera assolir amb la implementació de la Tasca 2 a l'aula (**Taula 10.3.3.1.3.1.**) es comença amb els components *interacció docent-discent* i *interacció entre alumnes*. Els deu indicadors que conformen aquest component es poden avaluar a partir de la reflexió del facilitador, l'autora d'aquest treball de recerca. Per tant, tots els indicadors es relacionen amb la valoració màxima perquè l'autora considera que la tasca es presentarà amb claredat (indicador 3.1.1 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), ben organitzada (indicador 3.1.2 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), amb una expressió oral adequada (indicador 3.1.3 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), fent èmfasi en els conceptes clau (indicador 3.1.4), identificant els conflictes cognitius dels alumnes (indicador 3.1.5 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), interpretant i resolent els dubtes de la classe (indicador 3.1.6 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), conduint apropiadament els conflictes cognitius (indicador 3.1.7 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), arribant al consens (indicador 3.1.8 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), captant l'atenció dels estudiants amb arguments retòrics i racionals (indicador 3.1.9 de la **Taula 10.3.3.2.4.**) i facilitant la inclusió dels alumnes (indicador 3.1.10 de la **Taula 10.3.3.2.4.**). Així mateix, es pensa que el disseny didàctic de la tasca (**Annex 11**) promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants (indicador 3.2.1 de la **Taula 10.3.3.2.4.**) i la integració en grups (indicador 3.2.2 de la **Taula 10.3.3.2.4.**).

La metodologia de la tasca, segons es marca a l'**Annex 11**, es preveu que hi haurà moments en els quals els alumnes es faran responsables del seu propi estudi mitjançant l'exploració (indicador 3.3.1 de la **Taula 10.3.3.2.4.**), la formulació (indicador 3.3.2 de la **Taula 10.3.3.2.4.**) i la validació (indicador 3.3.3 de la **Taula 10.3.3.2.4.**). La qual cosa caracteritza amb la puntuació més alta tots els indicadors del tercer component de la *idoneïtat interaccional*: l'*autonomia* (**Taula 10.3.3.2.3.1.**). Però també no rep cap puntuació l'indicador del component *avaluació formativa* perquè no es va plantejar fer cap observació sistemàtica del progrés dels alumnes (**Taula 10.3.3.2.3.1.**).

Finalment es presenta el gràfic de les valoracions de la *idoneïtat interaccional hipotètica de la Tasca 1* comparada amb la *idoneïtat interaccional ideal* o màxima (**Figura 10.3.3.2.3.1.**).

Taula 10.3.3.2.3.1.*Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat interaccional per a la implementació de la Tasca 2.*

Component	Indicador	Valoració
	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1
	3.1.4 S'han enfatitzat els conceptes clau del tema?	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1
Interacció docent - discent	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1
	3.1.8 S'ha promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	1
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	1
	3.1.10 S'ha observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	1
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'ha observat que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?	1
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	1
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	1
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?	1
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?	1
Avaluació formativa	3.4.1 Es va realitzar una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	0

Font: Elaboració pròpia.

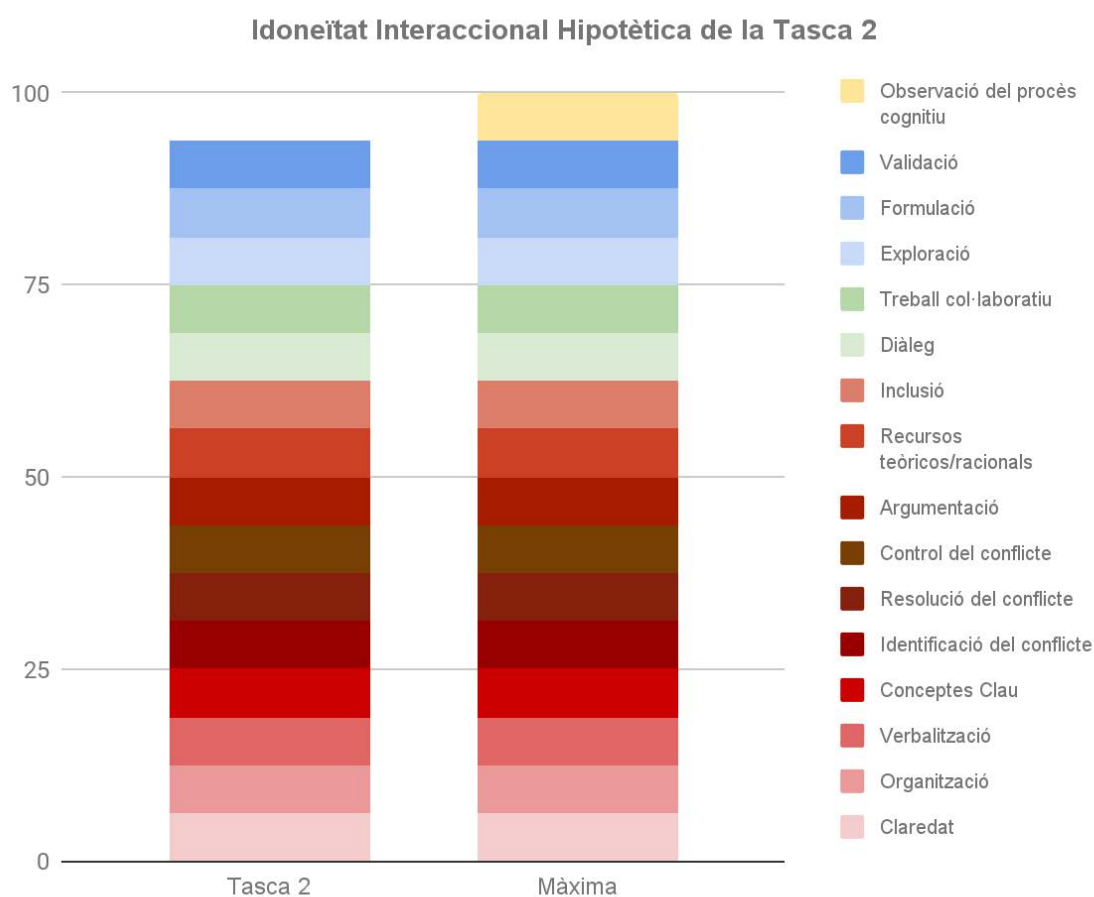


Figura 10.3.3.2.3.1. Comparació de la idoneïtat interaccional hipotètica i la idoneïtat interaccional màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2.4. La idoneïtat mediacional hipotètica de la Tasca 2

El component *recursos materials*, primer element d'anàlisi per establir la *idoneïtat mediacional hipotètica de la Tasca 2*, es valora a partir de les estimacions fetes per l'autora d'aquest treball de recerca. Per tant, es considera que els materials manipulables ajudaran als alumnes en la utilització del llenguatge, els procediments i l'argumentació matemàtica (indicador 4.1.1. de la **Taula 10.3.3.2.4.**). També es pensa que els instruments de mesura (indicador 4.1.2 de la **Taula 10.3.3.2.4.**) i de dibuix geomètric (indicador 4.1.3 de la **Taula 10.3.3.2.4.**) contribueixen en el mateix aspecte. La manca d'ús de calculadores (indicador 4.1.4 de la **Taula 10.3.3.2.4.**) i dispositius digitals (indicador 4.1.5 de la **Taula 10.3.3.2.4.**) impedeix que se'n utilitzin i en conseqüència que en tinguin cap valoració assignada a la **Taula 10.3.3.2.4.** d'aquest apartat.

Taula 10.3.3.2.4.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat mediacional per a la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1
	4.1.4 La calculadora ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	1
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	1
	4.1.8 S'han pogut visualitzar les definicions i propietats?	1
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre de companys que han participat de la tasca t'ha ajudat a aprendre?	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1
	4.2.3 L'horari de la classe és l'adequat?	0,5
	4.2.4 L'aula és apropiada per al desenvolupament de la tasca?	1
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?	1
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	1
	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tèmics de major dificultat?	1

Font: Elaboració pròpia.

El disseny didàctic de la Tasca (**Annex 11**) i els fulls d'instruccions pels alumnes (**Annex 8**) i d'orientació pel facilitador (**Annex 10**) fan que es justifiqui l'assignació de la màxima puntuació als indicadors 4.2.1, 4.2.2 i 4.2.3 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.** perquè es pensa que les definicions i les propietats es presenten en una situació aplicada i mitjançant un model que permeten la seva visualització (**Taula 10.3.3.2.4.1.**).

Les dades donades pel professor titular del centre on es farà la implementació de les tasques són referències que es tenen en compte per assignar valors a les *condicions del grup i de l'aula*, segon component de la dimensió *mediacional*. Reproduint les valoracions fetes per a la implementació de la Tasca 1, es preveu que els grups de treball tinguin entre quatre i cinc membres (indicador 4.3.1 del a **Taula 10.3.3.2.4.1.**). També s'espera que la distribució de l'aula sigui adequada (indicador 4.3.2 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.**), que l'aula serà un espai que permetrà el desenvolupament correcte de la tasca (indicador 4.3.4 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.**) i la implementació de la metodologia programada per dur-la a terme (indicador 4.3.5 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.**). Aleshores, tots aquests indicadors tenen assignada la màxima puntuació (**Taula**

10.3.3.2.4.1.) Al igual que amb l'anàlisi de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1, es considera que l'horari de la sessió no és l'adequat perquè correspon al migdia (indicador 4.3.3 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.**). Així, aquest indicador es relaciona amb la puntuació 0,5 com es fa constar a la **Taula 10.3.3.2.4.1.** d'aquest apartat.

Els tres indicadors que descriuen el component *temps*, es valoren amb la puntuació màxima perquè l'autora de la tesi considera que el disseny didàctic (**Annex 11**) permet acabar la Tasca 2 en els 45 minuts de la sessió (indicador 4.4.1 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.**), dedicar prou temps als aspectes centrals de la sessió (indicador 4.4.2 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.**) i als tòpics de major dificultat de la tasca (indicador 4.4.3 de la **Taula 10.3.3.2.4.1.**).

La representació gràfica de la *idoneïtat mediacional hipotètica de la Tasca 2* (**Taula 10.3.3.2.4.1.**) es complementa amb els valors màxims dels indicadors dels components d'aquesta dimensió de la *idoneïtat didàctica* per la seva comparació (**Figura 10.3.3.2.4.1.**).

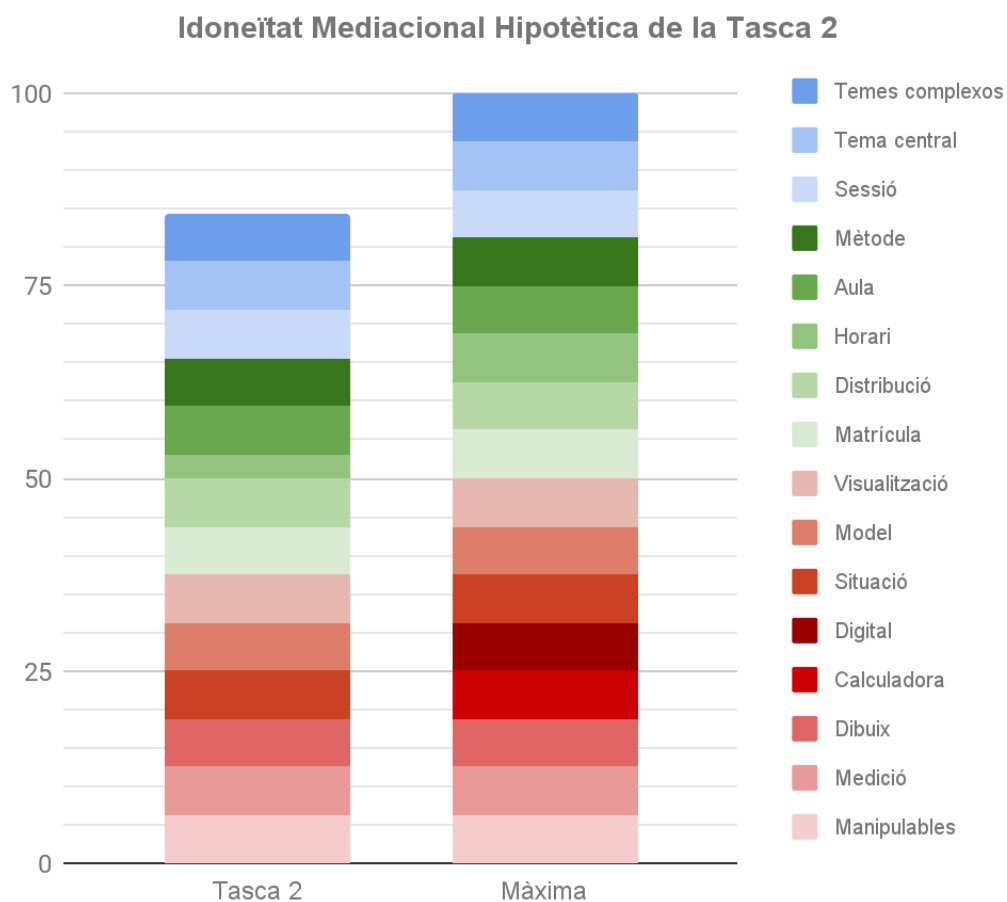


Figura 10.3.3.2.4.1. Comparació de la idoneïtat mediacional hipotètica i la idoneïtat mediacional màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2.5. La idoneïtat afectiva hipotètica de la Tasca 2

Des de la perspectiva dels autors del disseny didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**), es considera que tots els indicadors de la *idoneïtat afectiva* s'assoleixen fins el punt màxim perquè: es pensa que és una tasca interessant contextualitzada en la representació física a escala del globus terraqüi (indicador 5.1.1 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**), la qual pot ser d'utilitat a la vida quotidiana (indicador 5.1.2 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**) i professional (indicador 5.1.3 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**).

De la mateixa manera que amb la Tasca 1, l'autora de la tesi pensa que els indicadors de les components *actituds* i *emocions* també es puntuen amb u perquè la construcció física del mapamundi formant un poliedre (**Annex 11**) promou la perseverància (indicador 5.2.1 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**). L'autora d'aquest treball de recerca, en la seva funció com a facilitadora de la Tasca 2 es compromet a promoure la igualtat (indicador 5.2.2 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**), a no jutjar cap dels arguments dels alumnes (indicador 5.2.3 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**), a ajudar en la promoció de l'autoestima (indicador 5.3.1 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**) i a evitar el rebuig o fòbies cap a les matemàtiques (indicador 5.3.2 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**). A més, l'autora pensa que amb aquesta segona tasca també s'enfatitzen les qualitats estètiques (indicador 5.3.3 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**) i de precisió de les matemàtiques (indicador 5.3.4 de la **Taula 10.3.3.2.5.1.**).

Taula 10.3.3.2.5.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'idoneïtat afectiva per a la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	1
	5.1.2 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	1
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	1
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverància, responsabilitat, etc.?	1
	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	1
	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ha ajudat a promoure la teva autoestima?	1
	5.3.2 Aquesta tasca ha ajudat a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	1
	5.3.3 Aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	1
	5.3.4 Aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	1

Font: Elaboració pròpia.

La gràfica de les dades de la **Taula 10.3.3.2.5.1.** en conjunt amb la *idoneïtat afectiva màxima* es presenten a la **Figura 10.3.3.2.5.1.** d'aquest subapartat.

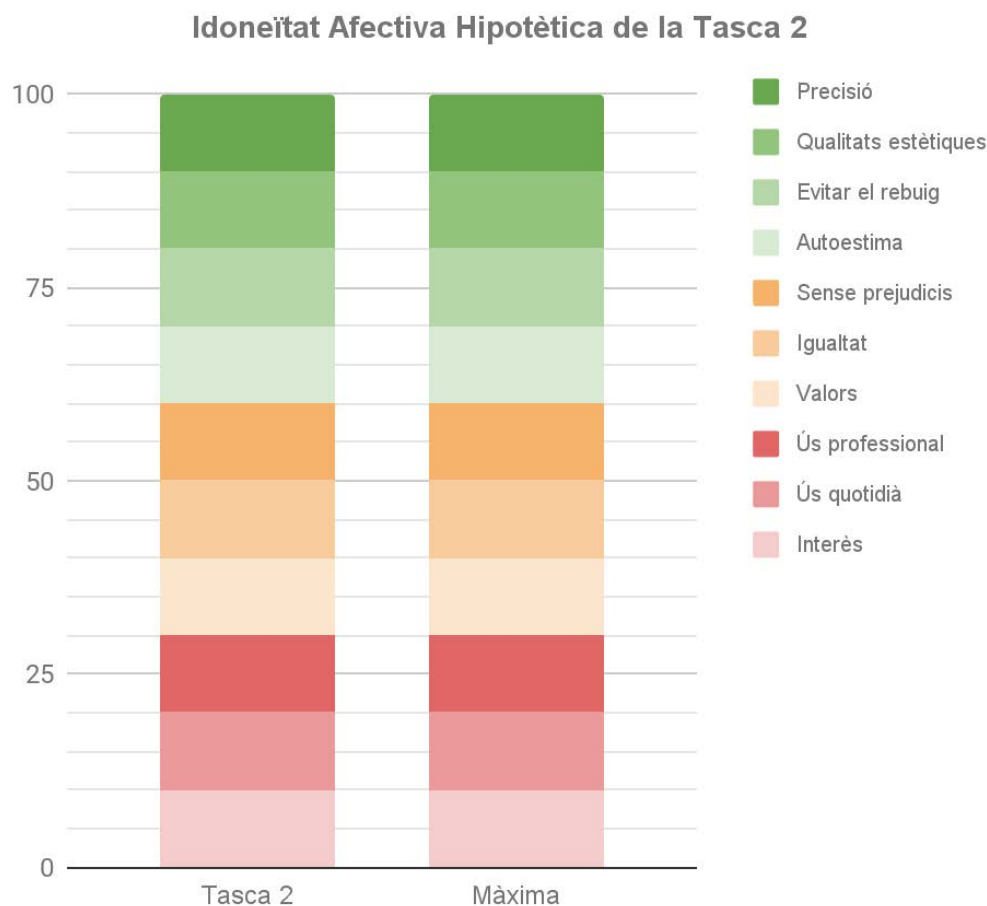


Figura 10.3.3.2.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva hipotètica i la idoneïtat afectiva màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2.6. La idoneïtat ecològica hipotètica de la Tasca 2

La *idoneïtat ecològica* de la Tasca 2 té una valoració igual a la establerta per a la Tasca 1, ja que totes dues tasques parteixen dels mateixos continguts curriculars (**Annex 1**). Llavors, els tres indicadors de l'*adaptació al currículum* de la Tasca 2, primer component de la *idoneïtat ecològica* es valoren amb la màxima puntuació perquè, de la mateixa manera que amb la Tasca 1: (1) el contingut és part del pla curricular del primer curs d'ESO (indicador 6.1.1 de la **Taula 10.3.3.2.6.1.**), la implementació també és part del contingut curricular (indicador 6.1.2 de la **Taula 10.3.3.2.6.1.**) i l'avaluació que es pensa fer-ne mitjançant la construcció física del cos geomètric també es troba dins el pla curricular (indicador 6.1.3 de la **Taula 10.3.3.2.6.1.**).

Taula 10.3.3.2.6.1.

Valoració hipotètica dels indicadors d'adequació ecològica per a la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	0
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	0
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	1
Innovació didàctica	6.4.1 Has aplicat temes que ja coneixies per arribar a contingut nou?	1
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0
	6.4.3 S'apliquen nous mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0,5
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0

Font: Elaboració pròpia.

Es preveu l'assoliment del màxim nivell pel primer indicador (indicador 6.2.1 de la **Tasca 10.3.3.2.6.1.**) de la component *connexions intra i interdisciplinars* perquè els continguts de dibuix geomètric i construcció de cossos geomètrics de la Tasca 2 (**Annex 11**) són continguts curriculars del primer curs d'ESO (**Annex 1**) que es relacionen amb continguts de mesura (GenCat, 2017a). Pel contrari, la resta dels indicadors d'aquest component tenen assignada la valoració mínima perquè no hi ha cap relació entre els continguts de la Tasca 2 i continguts matemàtics fora del currículum de matemàtiques o d'altres assignatures (indicadors 6.2.2 i 6.2.3 de la **Taula 10.3.3.2.6.1.**).

Com que els autors de la Tasca 2 consideren que els continguts ajuden a identificar preferències per una activitat professional (indicador 6.3.1 de la **Taula 10.3.3.2.6.1.**), aquest indicador del component *adaptació socioprofessional i cultural* descriu per complet aquest element d'anàlisi.

Respecte amb la *innovació didàctica* (**Taula 10.3.3.2.6.1.**), darrer component de la *adequació ecològica de la Tasca 2*, només hi ha elements per valorar amb la màxima puntuació el primer indicador (indicador 6.4.1 de la **Taula 10.3.3.2.6.1.**) perquè es pot dir que la Tasca 2 permet als alumnes aplicar coneixements dels blocs

d'espai i forma i de mesura (GenCat, 2017b) per fer el dibuix geomètric dels desenvolupaments plans dels poliedres i la seva construcció física en tres dimensions.

A partir de la **Taula 10.3.3.2.6.1**, es presenten de manera gràfica els indicadors hipotètics de la *idoneïtat ecològica de la Tasca 2* comparats amb el cas ideal per aquesta dimensió (**Figura 10.2.4.2.6.1**).

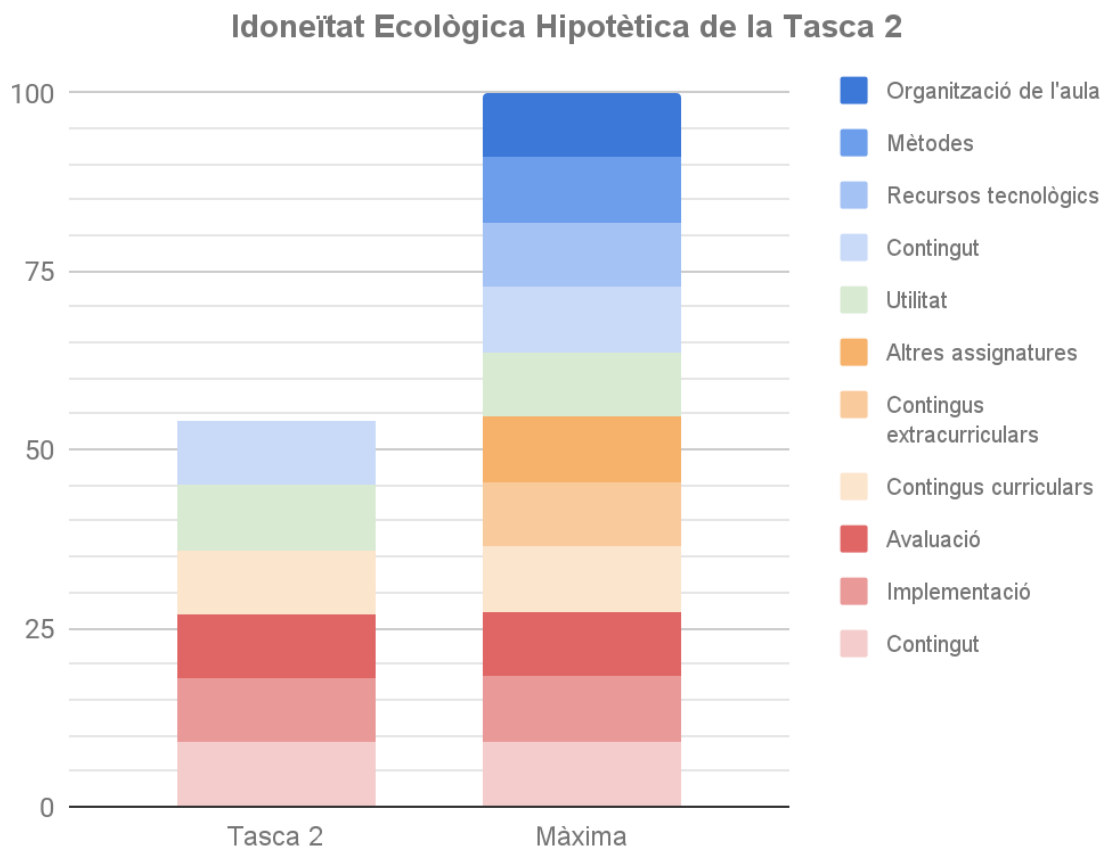


Figura 10.3.3.2.6.1. Comparació de la idoneïtat ecològica hipotètica i la idoneïtat ecològica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

10.3.3.2.7. Les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 2

A nivell global, la *idoneïtat didàctica hipotètica de la Tasca 2* es caracteritza de les sis dimensions del constructe a partir de valors que indiquin el nivell d'assoliment dels indicadors de les seves components comparats amb el cas ideal del assoliment màxim de tots els indicadors de les components de les sis idoneïtats (**Figura 10.3.3.2.7.1**).

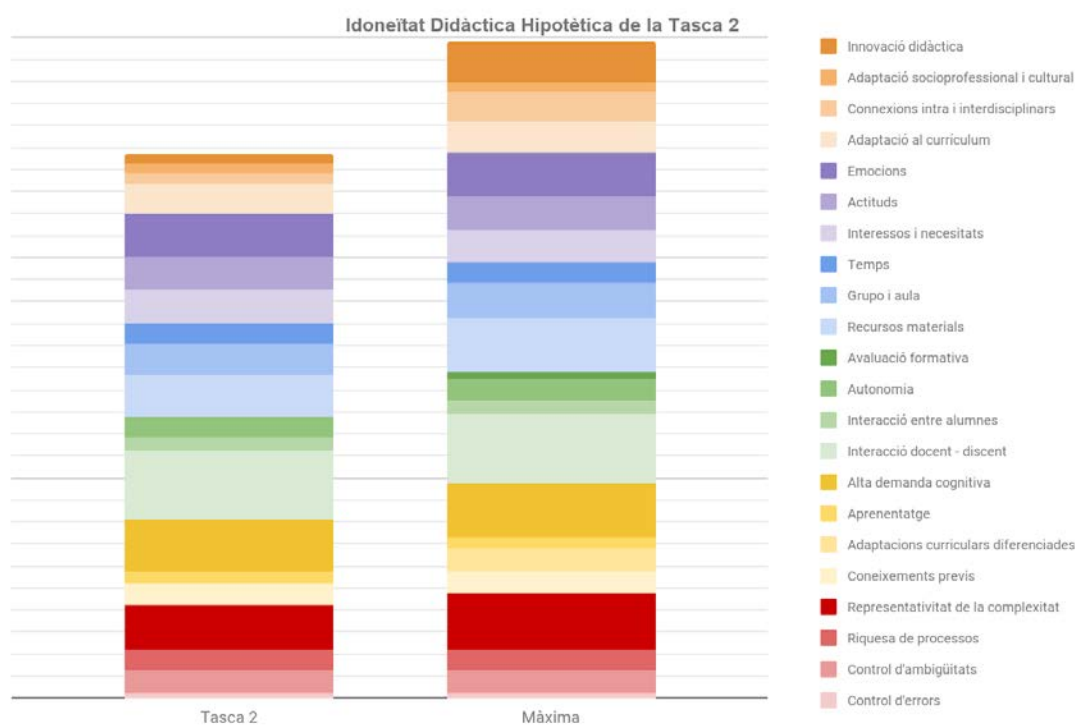


Figura 10.3.3.2.7.1. Comparació de les components de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Agrupant tots els indicadors de les components de cadascuna de les sis dimensions d'*idoneïtat didàctica* és possible comparar les estimacions o *idoneïtats hipotètiques* i ideals per a la Tasca 2 (**Figura 10.3.3.2.7.2**).

Seguint la proposta de Godino (2013), el gràfic radial que produeix la metàfora de l'hexàgon de la *idoneïtat didàctica hipotètica* versus la *idoneïtat didàctica ideal* o màxima (**Figura 10.3.3.2.7.3**) permet una visualització general del constructe per aquesta segona tasca de dibuix geomètric.

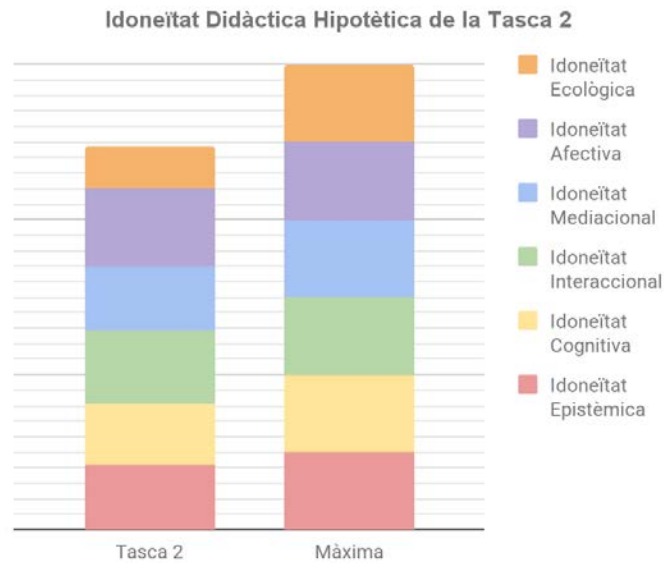


Figura 10.3.3.2.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca.

Font: Elaboració pròpia.

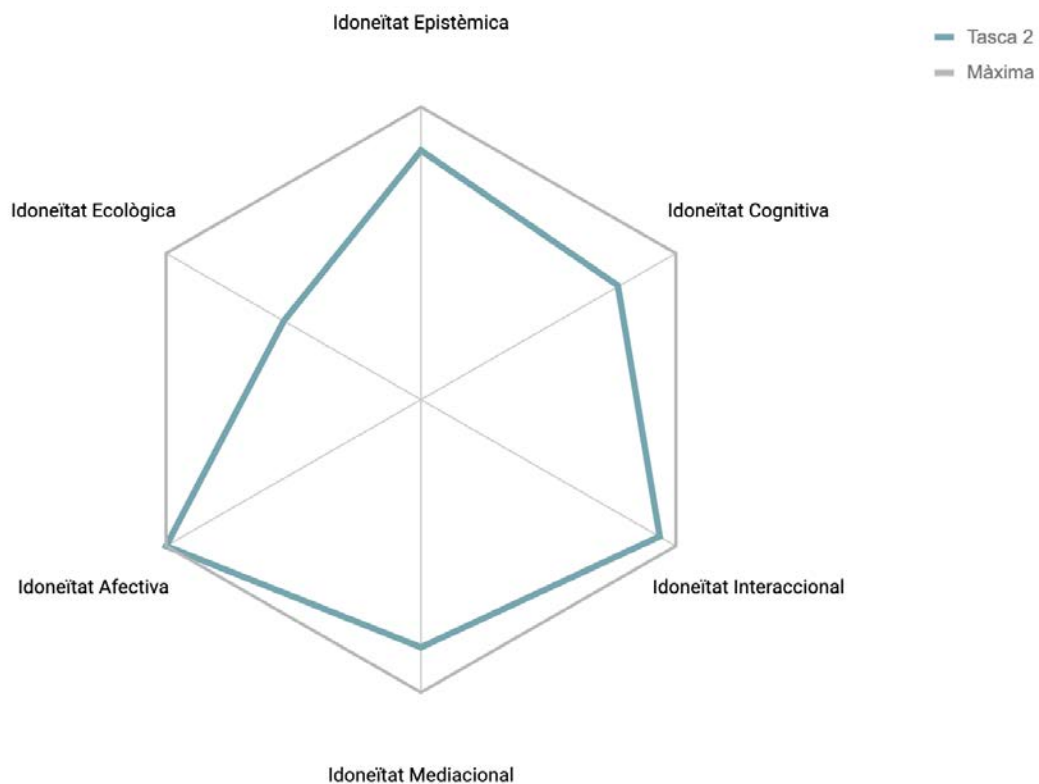


Figura 10.3.3.2.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica hipotètica i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal de la Tasca 2 d'aquest treball de recerca segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 11. Consideracions ètiques i de qualitat de la recerca

Des de l'any 2010, la Universitat de Barcelona va establir un codi de bones pràctiques per aplegar els elements propis d'un encàrrec de recerca de màxim nivell. A l'any 2018, es va aprovar el "Codi ètic d'integritat i bones pràctiques" on es van recollir els punts clau que ha d'observar la comunitat universitària que executa investigacions. Avui dia, el "Codi d'Integritat en la Recerca" també es basa en el "codi europeu de conducta per a la integritat en la recerca". La Universitat exposa objectius (**Taula 11.1.**) i principis (**Taula 11.2.**) que constitueixen pautes d'acció aplicables a "tots els agents i les estructures de recerca" que condueixin cap a una recerca de qualitat. A banda dels sis principis en la integritat de la recerca, la Universitat aconsella vigilar la integritat i imparcialitat "per tal de preservar l'interès de la societat i la credibilitat de la comunitat investigadora" (Vicerectorat de Recerca de la Universitat de Barcelona, 2020).

Amb l'objectiu d'aprofundir en els aspectes ètics i de qualitat del treball de recerca d'aquesta tesi doctoral, els sis principis de la integritat de la recerca de la UB (**Taula 11.2.**) s'ha organitzat en tres apartats: criteris ètics, criteris de qualitat i criteris d'igualtat de gènere. Al primer apartat, anomenat de criteris ètics, es discuteixen els principis d'honestat i de responsabilitat i rendició de comptes. Als criteris de qualitat es concentren els principis de fiabilitat, rigor i independència. Finalment, el principi de respecte entre els quals s'inclouen els criteris de respecte cap a la comunitat d'investigadors i d'igualtat de gènere.

Taula 11.1.

Objectius del Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona (Vicerectorat de Recerca de la Universitat de Barcelona, 2020).

Objectius del codi d'integritat en la recerca de la UB

1. Millorar la qualitat, l'impacte i els resultats de la recerca en tots els seus camps.
2. Establir mecanismes per garantir la integritat científica.
3. Proporcionar unes bones pràctiques científiques al personal investigador en formació.
4. Fomentar la cultura d'integritat en la recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Taula 11.2.

Principis de la integritat en la recerca de la Universitat de Barcelona (Vicerectorat de Recerca de la Universitat de Barcelona, 2020).

Principis de la integritat en la recerca de la UB

1. Honestedat
2. Responsabilitat i rendició de comptes
3. Fiabilitat
4. Rigor
5. Respecte
6. Independència

Font: Elaboració pròpia.

11.1. Criteris ètics

La Comissió Europea (2018) estableix que les recerques de caire humanístic han d'adreçar-se cap a l'obtenció de coneixements nous. En aquest sentit, l'aprovació del pla de recerca presentat abans iniciar el treball de recerca garanteix que els resultats obtinguts són aportacions a l'àmbit de l'anàlisi didàctica de l'ensenyament de la geometria i la formació del professorat de matemàtiques.

11.1.1. Honestedat

En el marc dels principis del Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona, s'estableix que:

El personal investigador ha de ser honest respecte de les seves activitats de recerca, així com envers les activitats d'altres investigadors. L'honestedat és aplicable a la totalitat del treball de recerca, tant si és experimental com de camp: a la formulació inicial de les hipòtesis, al disseny metodològic, a l'anàlisi de les dades, a la publicació dels resultats, al reconeixement de la contribució d'altres investigadors i a les activitats de revisió i avaluació fetes per encàrrec del personal (Vicerectorat de Recerca, 2020; p. 9).

Per aquest fet, “el personal investigador ha de ser honest i ha d'informar i comunicar la recerca de manera transparent, justa, completa i imparcial” (Vicerectorat de Recerca, 2020). L'autora va redactar les notes de camp des d'una perspectiva de transparència, justícia i imparcialitat per tal de reflectir de manera més impol·luta possible. A més, hi va comunicar tots els fitxers creats per a l'obtenció d'informació, els quals es troben al final d'aquest document a l'apartat anomenat “Annexes”. Per una altra banda, s'hi garanteix la transparència i justícia en la cura pel registre de les totes referències consultades i utilitzades per establir aspectes teòrics que fonamenten i recolzen aquest treball de recerca doctoral.

11.1.2. Responsabilitat i rendició de comptes

Amb referència al principi de responsabilitat i rendició de comptes, el Codi d'Integritat de la Recerca de la Universitat de Barcelona subratlla que “el personal investigador és responsable de la recerca que duu a terme, des de la concepció de la idea fins a la publicació”. La qual cosa implica presentar en el termini previst els informes que “reflecteixen exactament el treball dut a terme” (Vicerectorat de Recerca, 2020). Tot i que el nivell educatiu i el bloc de continguts curriculars plantejats al pla de recerca es mantenen, l'enfocament de les tasques de dibuix geomètric portades a l'aula es van reorientar amb el suport de les eines d'anàlisi didàctica de l'enfocament ontosemiòtic: configuracions epistèmiques, trajectòries didàctiques i indicadors de la *idoneïtat didàctica*.

11.2. Criteris de qualitat

Tal i com s'ha esmentat a la presentació d'aquest capítol, el primer objectiu del Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona és “millorar la qualitat” de la recerca. L'observació del conjunt de principis d'integritat en la recerca porten cap aquesta fita (Vicerectorat de Recerca, 2020).

11.2.1. Fiabilitat

Segons el Vicerectorat de Recerca de la Universitat de Barcelona (2020), el principi de fiabilitat estipula que “el personal investigador ha de garantir la qualitat de la recerca, que abraça el disseny, la metodologia, l'anàlisi i l'ús dels recursos (humans, econòmics i materials)”. A l'efecte d'aconseguir-ho, el disseny i l'anàlisi de la recerca es va basar en pressupostos teòrics ben fonamentats de la didàctica de les matemàtiques: l'enfocament ontosemiòtic. Respecte de la metodologia, el tret humanista de la recerca va indicar la perspectiva més adient per desenvolupar aquesta recerca: la metodologia qualitativa.

11.2.2. Rigor

Citant el Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona, el principi de rigor es defineix com:

El personal investigador ha de portar a terme un acurat procés de descobriment i interpretació, en línia amb les normes i els estàndards vigents en la recerca i utilitzant mètodes adequats –adherint-se, quan escaigui, als protocols vigents– en el disseny, la interpretació, les conclusions de la recerca i la comunicació dels resultats. Això requereix una revisió detallada dels resultats obtinguts abans de publicar-los. En cas que s'hi detectin errors després que s'hagin publicat, s'ha de fer una rectificació pública tan aviat com sigui possible (Vicerectorat de Recerca, 2020; p. 10).

La utilització dels constructes de l'enfocament ontosemiòtic (configuracions epistèmiques, trajectòries didàctiques i *idoneïtat didàctica*) representa una eina per garantir, per una banda la fiabilitat i per una altra banda el rigor d'aquest treball de recerca.

11.2.2.1. Generalització i limitacions

Per la seva naturalesa, un estudi qualitatiu es pot aprofundir (Stake, 2010) i una investigació educativa demana una actitud oberta per part de l'investigador (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992). Tot i que la investigació educativa millora l'educació (Ballester, 2004), fer-la des de la perspectiva de la metodologia qualitativa implica una aproximació al món empíric (Stake, 2010; Taylor, Bogdan i DeVault, 2016; Sabariego, 2004) per donar resposta a qüestions ben concretes (Ruíz, 2012). Segons Merriam (citada per Arnal, del Rincón i Latorre, 1992), un estudi de cas permet arribar a fer generalitzacions de manera inductiva. Amb aquest treball de tesi cerquem establir un procés de sistematització pel disseny de seqüències didàctiques basat en l'aplicació de cicles d'anàlisi didàctica formats per constructes de l'enfocament ontosemiòtic (com es presenta als capítols 9 i 10).

Per una altra banda, el tret situacionista d'un estudi qualitatiu (Stake, 2010) obliga a tenir en compte les particularitats de la parella de col·lectius participants: el professorat i l'alumnat. En conseqüència, les limitacions d'aquest estudi provenen del plantejament interpretatiu aplicat, el qual marca com a limitació el tret subjectiu de la recerca (Arnal, del Rincón i Latorre, 1992).

11.2.3. Independència

El principi d'independència del Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona (Vicerectorat de Recerca, 2020) demana als docents i investigadors evitar caure en "conflictes d'interès que puguin comprometre la validesa dels resultats de la seva recerca". També s'aconsella declarar-los, en cas que s'hi donin. Com que en aquest treball de recerca no hi ha cap interès econòmic, personal ni tan sols jeràrquic que pugui influenciar el judici dels investigadors hi involucrats, es dona per aconseguit aquest principi.

11.2.3.1. Validació dels instruments d'anàlisi

En veure la varietat d'instruments d'anàlisi d'aquest treball de recerca, cal plantejar diferents estratègies de validació. Pel que fa a les produccions dels alumnes i al qüestionari, l'estratègia de validació més adient és la recollida de dades directament dels participants de l'estudi (**Figura 11.2.2.1.1**). Seguint la proposta metodològica de Dalkey i Helmer (1963), el disseny didàctic es va analitzar i discutir en dues sessions amb experts. L'objectiu del primer torn de valoració amb experts va ser la posada en comú de la proposta i la discussió sobre la possibilitat d'aconseguir el desenvolupament de la *idoneïtat didàctica*. Aleshores, es va

tractar d'un exercici clau en l'assoliment del disseny implementat a l'aula. Tot i que per garantir el seguiment de les observacions fetes, un segon torn de examinació es va dur a terme (**Figura 11.2.2.1.1.**).

Segons ho especifica Stake (2001), la triangulació és una tècnica de validació que pot realitzar el mateix investigador en repetir l'aplicació dels instruments d'anàlisi més d'una vegada per comprovar la coherència de les dades obtingudes. Per tal d'aconseguir-ho, l'autora d'aquest treball de recerca va replicar aquest estratègia d'ús repetit dels instruments d'anàlisi didàctica dissenyats per aquesta tesi (**Figura 11.2.2.1.1.**).

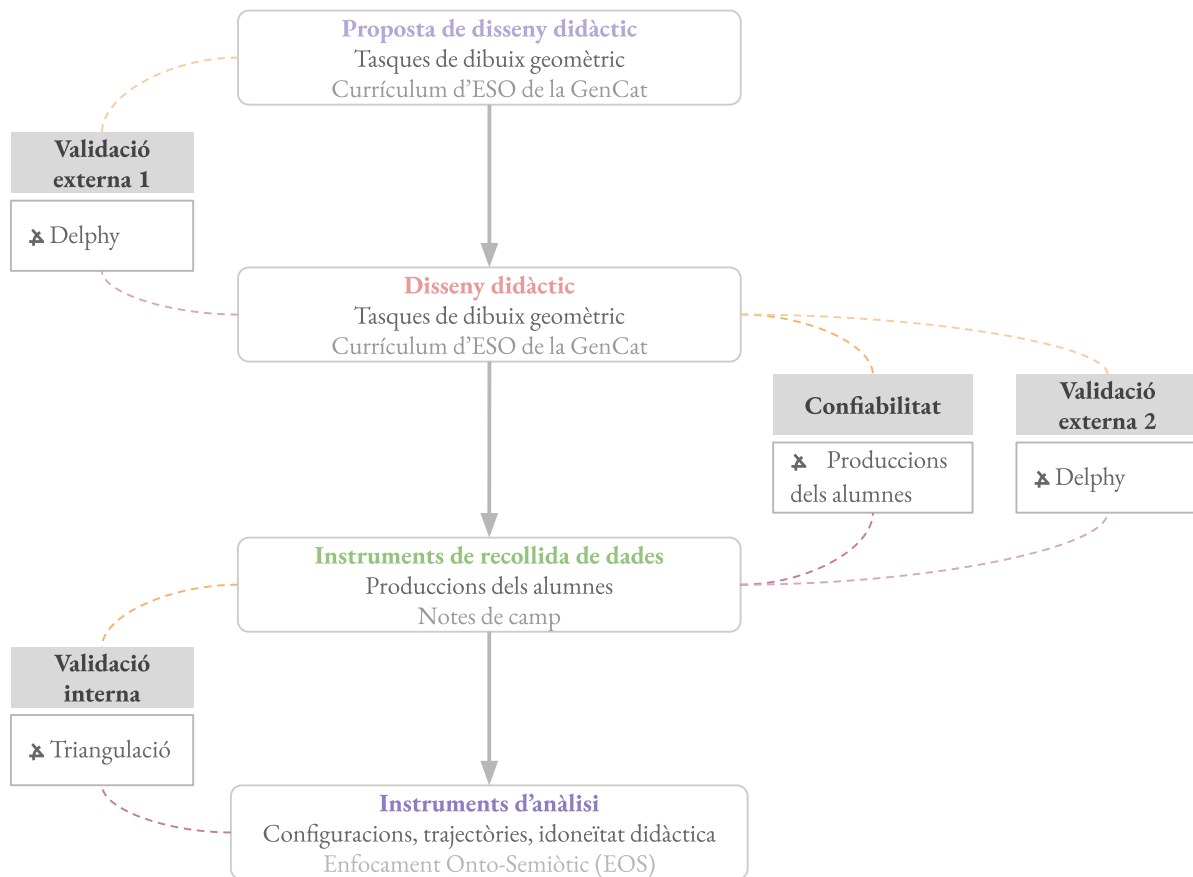


Figura 11.2.2.1.1. Elements i etapes de validació de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

11.2.3.2. Replicabilitat

La comunicació de les etapes de l'estudi de cas i dels instruments d'anàlisi (com es fa als **Capítols 9 i 10**), dels elements de les etapes de validació (**Figura 11.2.2.1.1.**) i dels instruments de disseny i de recollida de dades (registrats als annexes) fan possible la replicació de l'estudi de cas hi presentat per comprovar els patrons hi identificats. Aquesta habilitat de reconèixer comportaments que és necessària en el seguiment de la metodologia qualitativa (Patton, 2002).

11.3. Criteris de respecte

El Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona (2020) indica:

El personal investigador ha de ser respectuós amb els col·legues, els participants en la recerca, la societat, els ecosistemes, el patrimoni cultural i el medi ambient. Així mateix, ha de respectar en tot moment la diversitat i ja d'evitar qualsevol discriminació per raó d'origen, raça, sexe, religió, opinió, discapacitat, orientació sexual, identitat de gènere o qualsevol altra (Vicerectorat de Recerca, 202; p. 11).

El garantir la cura i el respecte dels participants és un principi cabdal en l'execució d'una recerca (Comissió Europea, 2018). Per tant, es van utilitzar formes de consentiment oral per sol·licitar la participació del professorat i alumnat que van ser part d'aquest estudi de cas (tal i com es registra a les notes de camp als Annexes 14 i 15).

A banda de tractar-se d'una qüestió d'honestedat, s'ha de destacar la puntualització que fa el Consell Nacional per a l'Ètica en la Recerca de les Ciències Socials i les Humanitats de Noruega (National Committee for Research Ethics in the Social Science and the Humanities, 2018) sobre el respecte a la comunitat científica en comunicar “ les contribucions d'altres investigadors, i observar els estàndards de reconeixement d'autories i cooperació”. La qual cosa es relaciona directament amb una bona pràctica de citació de fonts de referència.

11.3.1. Igualtat de gènere

Un altre aspecte del criteri de respecte del Codi d'Integritat en la Recerca de la Universitat de Barcelona (2020) estipula que:

..., el personal dedicat a la recerca ha de vetllar especialment per la igualtat de gènere des de diversos angles i en les diferents fases de la recerca. Des de la redacció de les propostes de projectes fins a la publicació i explotació dels resultats (Vicerectorat de Recerca, 202; p. 11).

En aquest sentit, es van seguir les orientacions de la Comissió Europea (2018) posant especial èmfasi en anonimitzar les dades i en el registre de dades de manera que es pugui identificar el gènere, però no la identitat dels participants en cap moment.

Quarta Part. Resultats

Capítol 12. Configuracions epistèmiques

Tal i com es va exposar al **Capítol 10**, la utilització de l'enfocament ontosemiòtic per dirigir una anàlisi didàctica condueix cap a la identificació de les entitats primàries de l'activitat matemàtica en estudi (Godino, 2018). En aquest sentit, les configuracions epistèmiques permeten establir les relacions entre els objectes matemàtics (Godino, Batanero i Font, 2009) de les tasques de dibuix geomètric adreçades a alumnes del primer curs d'ESO dissenyades per aquest treball de recerca doctoral. Tot i que al **Capítol 10** es van identificar els objectes matemàtics que es pretén portar cap a l'aula en implementar les dues tasques de dibuix geomètric mitjançant l'establiment de la configuració epistèmica hipotètica de cadascuna d'elles, l'objectiu d'aquest capítol és el reconeixement dels objectes matemàtics, les seves relacions i interdependències al moment de la implementació de cadascuna de les dues tasques a l'aula. En aquest capítol s'identifiquen les configuracions epistèmiques reals o experimentals (**Figura 12.1**). Per tant, els documents de referència per aquesta comesa són: el disseny didàctic, el full d'instruccions pels alumnes, el full d'orientació pel professor o facilitador de la tasca, les produccions dels alumnes i les notes de camp.

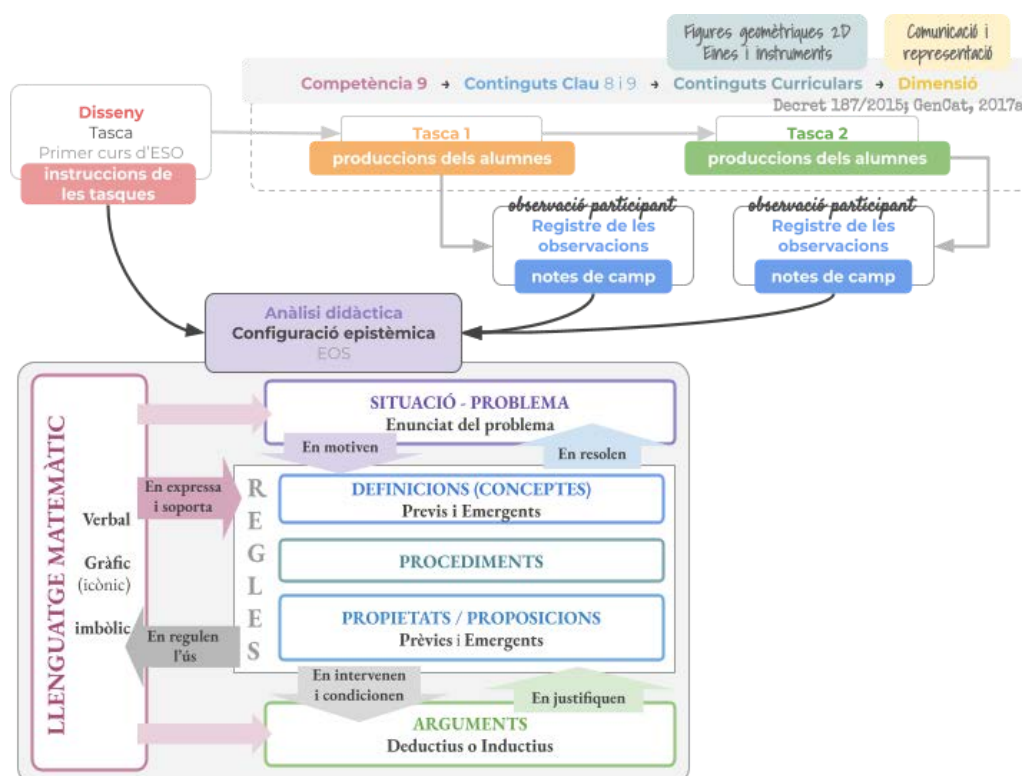


Figura 12.1. Relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració epistèmica d'aquest estudi de cas.

Font: Elaboració pròpia.

12.1. Configuració epistèmica de la Tasca 1

El cas particular de la identificació de la configuració epistèmica de la Tasca 1, al igual que en l'establiment de les configuracions epistèmiques hipotètiques, es considera independentment de la Tasca 2 (**Figura 12.1.1.**). El punt de partida d'aquesta anàlisi didàctica de la tasca anomenada “El festival de globus” és el disseny didàctic (**Annex 7**). D'aquest document s'extreuen els objectius d'aprenentatge, l'anàlisi competencial, els continguts clau, els continguts curriculars i els processos que estableixen la implementació a l'aula de la Tasca 1. Segons s'il·lustra a l'esquema de la **Figura 12.1.1.**, l'establiment de la configuració dels objectes primaris de la Tasca 1 es fa a partir dels elements curriculars, el disseny didàctic de la Tasca 1, les produccions dels alumnes i les observacions participants del investigador al moment de la implementació de l'activitat a l'aula.

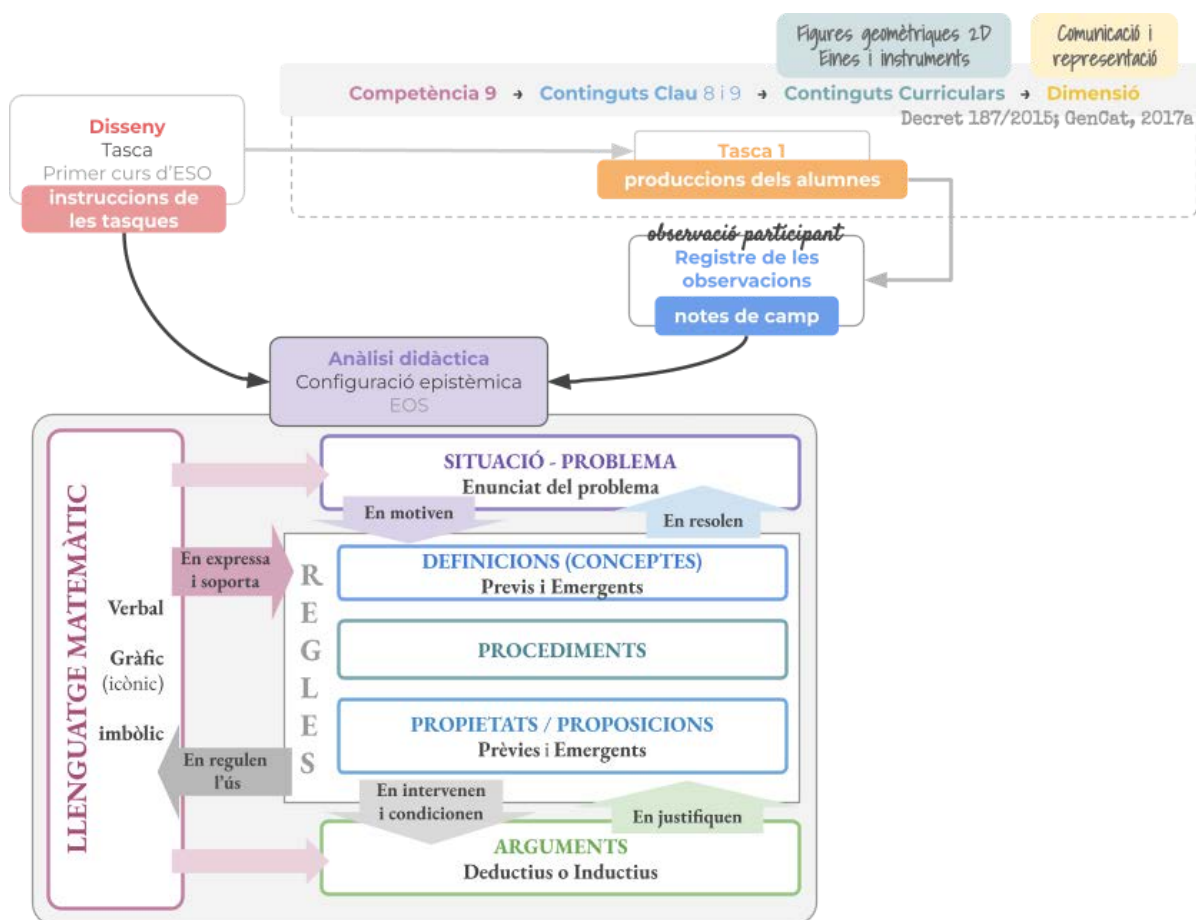


Figura 12.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració d'objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

12.1.1. Les unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica de la Tasca 1

Seguint el mateix ordre d'identificació dels objectes primaris per la identificació de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1, es comença amb la identificació de les “situacions-problema” (SP1). Aquest objecte

primari SP1 es registra mitjançant la còpia d'una breu frase de l'explicació verbal presentada a la classe i mostrada en el registre dels codis en les notes de camp a l'**Annex 16**: “Llavors, vaig ometre el context del concurs de globus per reduir el temps de participació passiva dels alumnes i passar directament a la part activa.”. Aleshores, la situació plantejada es va treure de context per tal d'avançar el començament de l'activitat i trencar amb la dinàmica dels alumnes que feien malbé les eines de dibuix geomètric que se'ls van lliurar per desenvolupar la tasca (**Taula 12.1.1.1.**).

Seguint amb el relat de les notes de camp (**Annex 16**), es troben els següents conceptes (DC1) donats pel facilitador de la tasca (en aquest cas l'autora del treball de recerca que aquí es presenta): octaedre, figures geomètriques, forma, cares, triangles, triangles equilàters, iguals, mateixes mides, altura del triangle, altura del full, informació, dibuixar, figura (**Taula 12.1.1.1.**). En començar a desenvolupar l'activitat els grups de treball es van identificar dificultats per realitzar el dibuix geomètric d'un triangle equilàter. Aleshores, el facilitador (l'autora de la tesi) va orientar el procediment de dibuix geomètric dels alumnes mitjançant la presentació d'instruccions generals adreçades a tot el grup. D'aquestes instruccions van sorgir els següents conceptes emergents (**Annex 16**): costats més llargs del full, costats del triangle equilàter, punt mig, longitud del costat, extrems i costat oposat del full (**Taula 12.1.1.1.**).

En relació amb el llenguatge matemàtic verbal i escrit (LMVE1), la manca de participació dels alumnes es va reflectir en l'escàs o gairebé nul ús de termes matemàtics. Els registres de llenguatge escrit dels alumnes va coincidir amb les instruccions generals donades per orientar el traç: 42 cm i 21 cm (**Annex 16**). Ara bé, el llenguatge oral dels alumnes va ser amb termes de caire col·loquial, com ho són: aquí, allà, més lluny, més a prop, ratlla i està tort o torta (**Annex 16**). Pel que fa al llenguatge matemàtic gràfic (LMG1), els alumnes van disposar de dues representacions icòniques per l'octaedre en el full d'instruccions que se'ls va lliurar (**Annex 2**): una en escala de gris i una altra en color verd amb transparències que permeten observar tots els vèrtexs i costats del cos geomètric (LMG1). També es considera com llenguatge matemàtic gràfic als triangles dibuixats pels alumnes (LMG1). Malgrat la manca de permís per fer cap mena de registre digital a l'aula, el registre fotogràfic dels octaedres fet a posteriori (**Annex 16**) és una evidència d'aquesta afirmació (**Taula 12.1.1.1.**).

Amb referència a les propietats i proposicions (PP1), les instruccions donades per promoure la participació dels alumnes van limitar aquest objecte primari a l'exposició del facilitador (l'autora d'aquesta tesi), com es mostra amb el text subratllat a l'**Annex 16** que es transcriu a continuació:

Per tal de construir tots junts un octaedre (DC1) es necessiten vuit figures geomètriques (DC1) amb la forma (DC1) de les cares (DC1), quina és o quines són? Es tracta de triangles (DC1), però d'un tipus

especial: triangles equilàters (DC1). Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter. Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals (DC1), per tant han de tenir les mateixes mides (DC1), quines poden ser? Fixem l'altura del triangle (DC1), aquesta serà la mateixa altura que fa el full (DC1). Amb aquesta informació (DC1) teniu prou per dibuixar (DC1) la figura (DC1)?

En aquest sentit, es consideren com a propietats i proposicions prèvies la primera part de l'exposició del facilitador (**Annex 16**): *Per tal de construir tots junts un octaedre (DC1) es necessiten vuit figures geomètriques (DC1) amb la forma (DC1) de les cares (DC1), quina és o quines són? Es tracta de triangles (DC1), però d'un tipus especial: triangles equilàters (DC1). Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter.* En resumir aquest text, a la **Taula 12.1.1.1.** es registra: "Identificar la forma de les cares d'un octaedre: triangles equilàters". Per una altra banda, la resta del text de l'exposició del facilitador són les propietats i proposicions emergents (**Taula 12.1.1.1.**) de la introducció de la tasca. La transcripció del fragment d'aquesta instrucció és el següent: *Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals (DC1), per tant han de tenir les mateixes mides (DC1), quines poden ser? Fixem l'altura del triangle (DC1), aquesta serà la mateixa altura que fa el full (DC1). Amb aquesta informació (DC1) teniu prou per dibuixar (DC1) la figura (DC1)?* . Mentre que la redacció registrada a la **Taula 12.1.1.1.** és: "Les mides dels costats d'un triangle han de ser iguals per tal d'assegurar que s'ha dibuixat un triangle equilàter".

Al igual que amb les propietats i proposicions, els procediments de la Tasca 1 (P1) van quedar limitats a les quatre passes donades a les instruccions grupals (**Taula 12.1.1.1.**). El text esmentat també es troba subratllat a l'**Annex 16**, però es mostra la seva còpia textual a continuació:

- 1. Trieu un dels costats més llargs del full (DC1) per localitzar un dels costats del triangle equilàter (DC1).*
- 2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identifiqueu el seu punt mig (DC1): com que la longitud del costat (DC1) és 42 cm (LMVE1), el punt mig és a 21 cm (LMVE1) de qualsevol dels seus extrems (DC1).*
- 3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig.*
- 4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full (DC1). (**Annex 16**)*

Finalment, amb l'observació a l'aula es pot identificar l'assoliment del primer tret del Resum del Disseny de la Tasca 1 (**Annex 7**): L'ús d'eines tant de dibuix com de mesura és fonamental per quantificar les dades necessàries per treballar amb materials manipulatius com el paper. La qual cosa es considera l'argument (A1) implícit en el desenvolupament de la Tasca 1 a l'aula (**Taula 12.1.1.1.**).

Taula 12.1.1.1.

Unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Tasca 1		
Codi	Objecte Primari	Descripció de l'Objecte Primari
SP1	Situacions-Problema de la Tasca 1	Plantejar el problema de construcció grupal d'un octaedre als alumnes (sense context).
DC1	Definicions (Conceptes) de la Tasca 1	octaedre, figures geomètriques, forma, cares, triangles, triangles equilàters, iguals, mateixes mides, altura del triangle, altura del full, informació, dibuixar, figura Emergents: costats més llargs del full, costats del triangle equilàter, punt mig, longitud del costat, extrems i costat oposat del full
LMVE1	Llenguatge Matemàtic Verbal/Escrit de la Tasca 1	Verbal: aquí, allà, més lluny, més a prop, ratlla i està tort o torta Escrit: 42 cm, 21 cm
LMG1	Llenguatge Matemàtic Gràfic de la Tasca 1	Representació gràfica icònica d'un octaedre en grises Representació gràfica icònica d'un octaedre en verd amb transparències Triangles dibuixats pels alumnes
PP1	Propietats / Proposicions de la Tasca 1	Prèviés: Identificar la forma de les cares d'un octaedre: triangles equilàters. Emergents: Les mides dels costats d'un triangle han de ser iguals per tal d'assegurar que s'ha dibuixat un triangle equilàter.
P1	Procediments de la Tasca 1	1. Trieu un dels costats més llargs del full per localitzar un dels costats del triangle equilàter. 2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identificar el seu punt mig; com que la longitud del costat és 42 cm, el punt mig és a 21 cm de qualsevol dels seus extrems. 3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig. 4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full.
A1	Arguments de la Tasca 1	L'ús d'eines tant de dibuix com de mesura és fonamental per quantificar les dades necessàries per treballar amb materials manipulatius com el paper.

Font: Elaboració pròpia.

12.1.2. L'esquema de la configuració epistèmica de la Tasca 1

Seguint l'esquema proposat per Godino, Batanero i Font (2009), la **Figura 12.1.2.1.** és la representació gràfica de les relacions i interdependències entre els objectes primaris identificats al subapartat anterior (**Taula 12.1.1.1.**). L'esmentada figura mostra la configuració epistèmica de la Tasca 1.

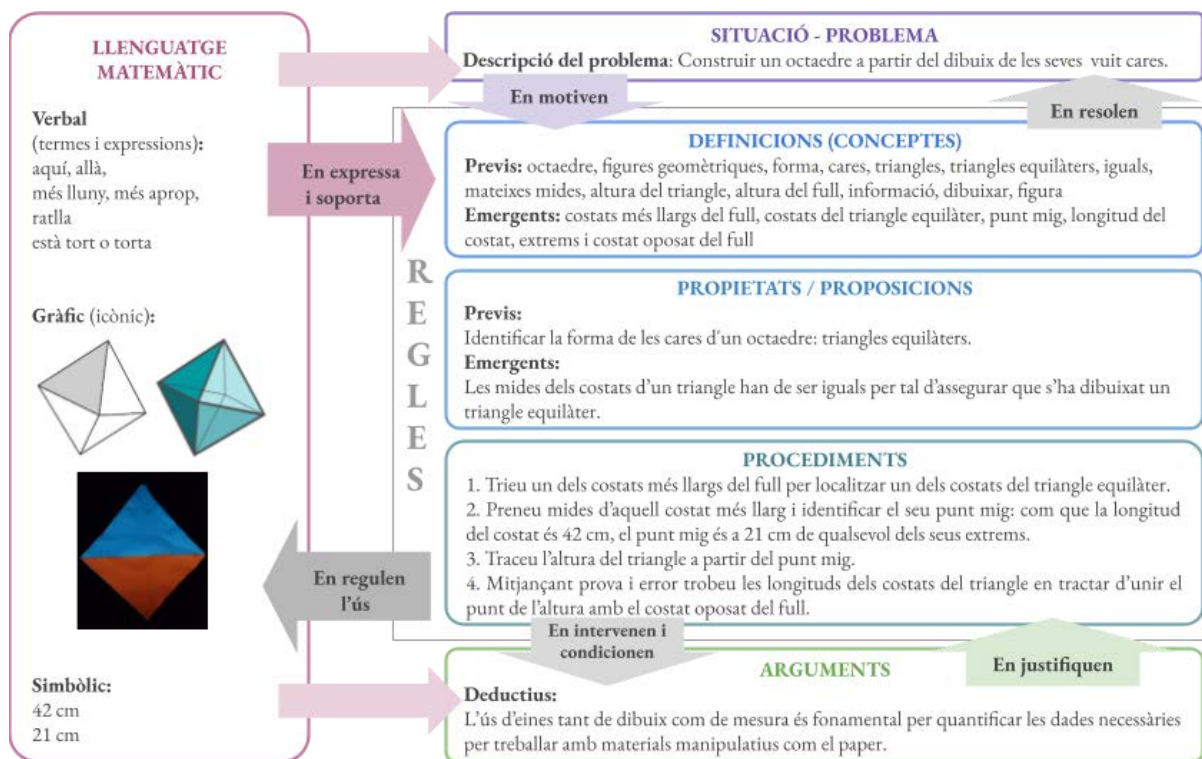


Figura 12.1.2.1. Configuració epistèmica dels objectes primaris de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

12.2. Configuració epistèmica de la Tasca 2

Tot aplicant el mateix procediment per establir la configuració dels objectes primaris de la Tasca 1, la configuració epistèmica de la Tasca 2 (**Figura 12.2.1.**). Tot i que la configuració hipotètica dels objectes primaris de la Tasca 2 depèn dels objectius d'aprenentatge, l'anàlisi competencial, els continguts clau, els continguts curriculars associats als continguts clau, els processos relacionats amb els continguts clau i curriculars presentat al Disseny didàctic de la tasca (**Annex 11**). En el cas de la configuració epistèmica real o implementada són les notes de camp i les produccions dels alumnes (**Annex 15**) les referències principals d'aquesta part de l'anàlisi didàctica.

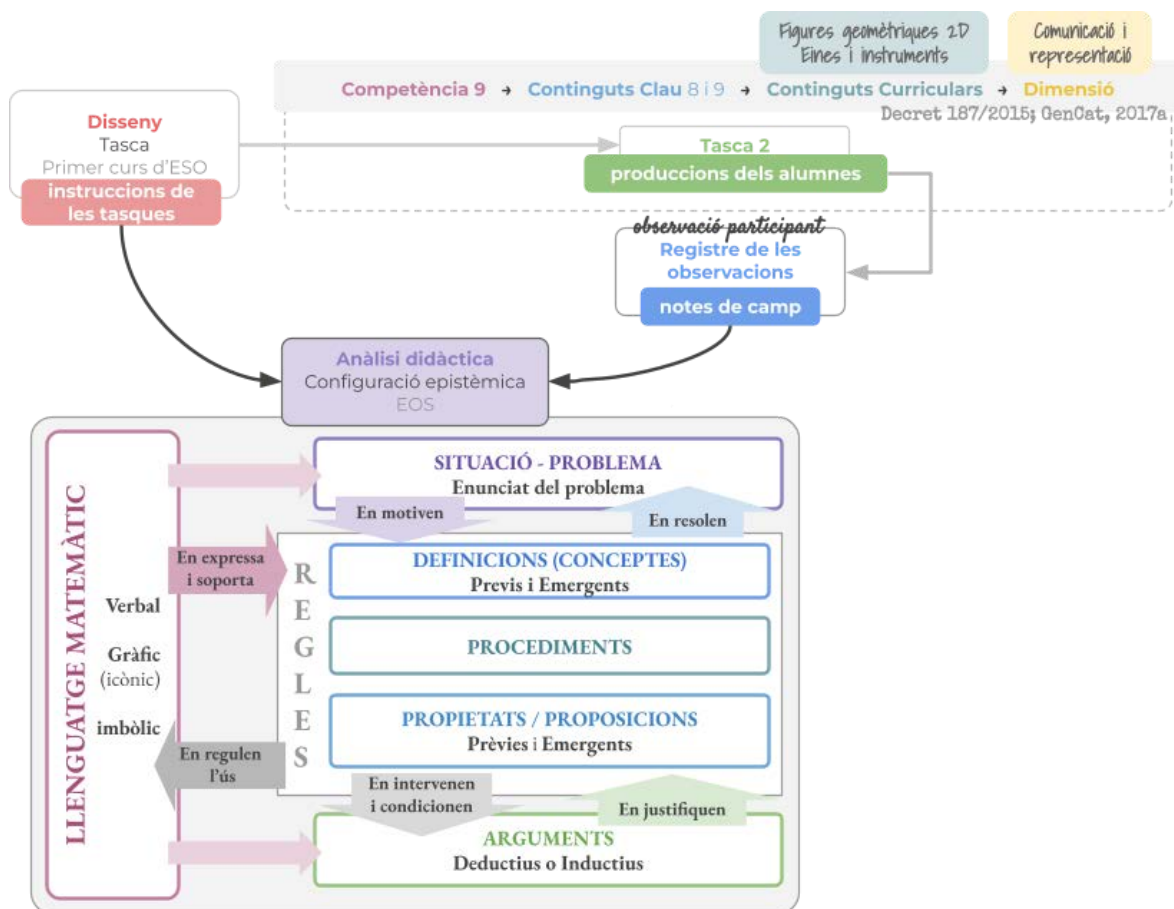


Figura 12.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la configuració epistèmica d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

12.2.1. Les unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica de la Tasca 2

En observar les notes de camp és possible identificar el primer dels objectes primaris per establir la configuració epistèmica de la Tasca 2: “les situacions-problema” (SP2). Per tant, el registre de les “situacions-problema” de la segona tasca consisteix en la redacció coherent de la recopilació de dos fragments de l'explicació verbal presentada a la classe (**Annex 17**): “trobar la millor representació en tres dimensions del mapamundi” i “cada membre de l'equip hauria de dibuixar un desenvolupament pla al mapamundi per reconstruir-lo en tres dimensions i comprovar amb quin cos geomètric es conserva més superfície del mapa” (**Taula 12.2.1.1.**). En aquest mateix text s'identifica el segon objecte primari: definicions i conceptes de la segona tasca (DC2). Els quals es subratllen a l'**Annex 17** i es presenten a continuació en el mateix ordre d'aparició del document de referència: tres dimensions, mapamundi, tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, desenvolupament pla, cos geomètric, superfície i mapa (**Taula 12.2.1.1.**). Segons es troba a les notes de camp (**Annex 17**), en desenvolupar l'activitat els alumnes es van trobar amb dubtes relacionades amb el dibuix geomètric. Per tant, van sorgir els següents conceptes emergents (DC2): pentàgon regular, compàs i cercles (**Taula 12.2.1.1.**). A conseqüència dels problemes d'execució del dibuix geomètric i la

manca de diàleg dels alumnes, el llenguatge matemàtic verbal de la segona tasca (LMVE2) es va limitar a les instruccions del facilitador (**Annex 17**) i per tant, en coincideix amb les definicions i conceptes de la Tasca 2 (DC2): tres dimensions, mapamundi, tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, desenvolupament pla, cos geomètric, superfície, mapa, pentàgon regular, compàs i cercles (**Taula 12.2.1.1.**). Pel que fa al llenguatge matemàtic escrit, els alumnes van registrar nombres corresponents a mides a la superfície del mapa (**Annex 17**). Ara bé, el llenguatge oral dels alumnes es va reduir a fer preguntes generals sobre el procediment de dibuix, però sense cap registre de caire matemàtic (**Annex 17**). El llenguatge matemàtic gràfic (LMG1), de la mateixa manera que per l'establiment de la configuració epistèmica hipotètica, prové de les representacions icòniques del full d'instruccions (**Annex 8**) que consisteix en la figura plana que correspon a les cares que generen cadascun dels cossos geomètrics demanats i la superfície sobre la qual s'ha de fer el dibuix geomètric: triangle i tetraedre, quadrat i cub, triangle i octaedre, pentàgon i dodecaedre, triangle i icosaedre (LMG2). El llenguatge matemàtic gràfic produït pels alumnes que es presenta al registre fotogràfic de l'**Annex 17** i que consisteix en el traç del desenvolupament pla assignat sobre el mapamundi lliurat (LMG2), com es registra a la **Taula 12.2.1.1.** d'aquest subapartat. Respecte a les propietats i proposicions de la Tasca 2 (PP2), es poden considerar com a prèvies el resum (**Taula 12.2.1.1.**) presentat a l'inici del full d'instruccions lliurat als alumnes (**Annex 8**) i la intervenció del professor de geografia al moment d'introduir l'activitat a la classe registrada a les notes de camp (**Annex 15**): qui "va intervenir per explicar breument la dificultat que hi ha per fer representacions acurades de la Terra" (**Taula 12.2.1.1.**). Per identificar de manera més clara l'aportació del professor de geografia, s'ha ressaltat la seva participació a l'**Annex 17**, la qual s'ha etiquetat amb el codi PP2. Considerant que "van haver-hi moltes preguntes sobre com fer els traços" (**Annex 15**), es pot dir que les propietats i proposicions emergents (PP2) ressaltades a l'**Annex 17** es poden resumir com a qüestionaments relacionats amb el procés de dibuix geomètric del "desenvolupament pla de cossos geomètrics diferents al cub" (**Annex 17**) (**Taula 12.2.1.1.**). Els procediments seguits pels alumnes en el desenvolupament de la segona tasca (P2) es ressalten a l'**Annex 17**: *els alumnes podien dibuixar una de les cares del cos geomètric però la construcció del desenvolupament pla ja no era possible perquè hi havia dificultat per identificar la posició relativa entre les figures. És a dir, un cop dibuixada la primera de les cares, els alumnes no van poder continuar el traç per tal d'obtenir la seqüència correcta de figures iguals.* A més, les imatges registrades a les notes de camp amb codis d'identificació per l'establiment de la configuració epistèmica (**Annex 17**) indiquen que els alumnes van doblegar els desenvolupaments plans produïts per tal de passar de dues dimensions cap a tres dimensions. En resum, s'identifiquen cinc passes seguides pels alumnes: (1) identificació de la forma de les cares el cos geomètric assignat, (2) ús d'instruments per dibuixar una de les cares del cos geomètric sobre el mapa, (3) identificació de la posició d'altres cares a partir de la cara dibuixada, (4) dibuix de les cares restants a partir dels costats de la cara dibuixada i (5) reconstrucció del poliedre mitjançant el doblegament del desenvolupament pla (**Taula 12.2.1.1.**). Al sisè (i darrer) objectiu d'aprenentatge del Disseny Didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**)

s'especifica que s'espera que els alumnes puguin “reconèixer que el nombre de cares d'un poliedre és un factor determinant en l'ús de l'àrea màxima d'una superfície donada”. És a dir, en acabar aquesta tasca s'esperava que hi hagués un diàleg entre els alumnes per reflexionar sobre la relació entre la superfície de traç, el mapa, i els cossos geomètrics formats. Però aquesta argumentació no va arribar a l'aula. Ben al contrari, els alumnes manifestaven que “eren coses que no feien a l'assignatura de matemàtiques” (**Taula 12.2.1.1.**).

Taula 12.2.1.1.

Unitats d'anàlisi de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Tasca 2		
Codi	Objecte Primari	Descripció de l'Objecte Primari
SP2	Situacions-Problema de la Tasca 2	Trobar la millor representació en tres dimensions pel mapamundi mitjançant el dibuix del desenvolupament pla de diferents cossos geomètrics sobre la superfície del mapa.
DC2	Definicions (Conceptes) de la Tasca 2	Prèvijs: tres dimensions, mapamundi, tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, desenvolupament pla, cos geomètric, superfície i mapa Emergents: pentàgon regular, compàs i cercles
LMVE2	Llenguatge Matemàtic Verbal/Escrit de la Tasca 2	tres dimensions, mapamundi, tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, desenvolupament pla, cos geomètric, superfície, mapa, pentàgon regular, compàs i cercles
LMG2	Llenguatge Matemàtic Gràfic de la Tasca 2	Representació gràfica de la relació entre les cares (triangle equilàter, quadrat i pentàgon), el mapamundi i el cos geomètric associat a la forma geomètrica de la cara mostrada (isomètric d'una piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre) i desenvolupament pla assignat dibuixat sobre el mapamundi lliurat
PP2	Propietats / Proposicions de la Tasca 2	Prèvijs: Representar un cos tridimensional a partir de material de dos dimensions por fer-se quan se identifiquen totes dues les formes de les superfícies i la relació que hi ha entre elles. La reconstrucció de les superfícies planes al seu ordre respecte les altres fa possible el canvi de dimensions. D'aquesta manera, un mapa de dos dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblament adequats. Hi ha dificultat per fer representacions acurades de la Terra. Emergents: Com es dibuixa el desenvolupament pla d'un cos diferent al cub?
P2	Procediments de la Tasca 2	1. Identificar la forma de les cares el cos geomètric assignat. 2. Emprar regla, escaire i paper per dibuixar la cara sobre el mapa. 3. Identificar la posició de la resta de les cares a partir de la cara dibuixada. 4. Dibuir les cares restants tenint com referència els costats de la cara o les cares ja dibuixades. 5. Reconstruir un poliedre mitjançant el doblament del seu desenvolupament pla.
A2	Arguments de la Tasca 2	El dibuix no és una tasca que aquests alumnes fan a la classe de matemàtiques.

Font: Elaboració pròpia.

12.2.2. L'esquema de la configuració epistèmica de la Tasca 2

Tenint com a referència els objectes primaris registrats a la **Taula 12.2.1.1.**, l'esquema per il·lustrar les relacions i interdependències entre ells es presenta a la **Figura 12.2.2.1.** d'aquest subapartat.

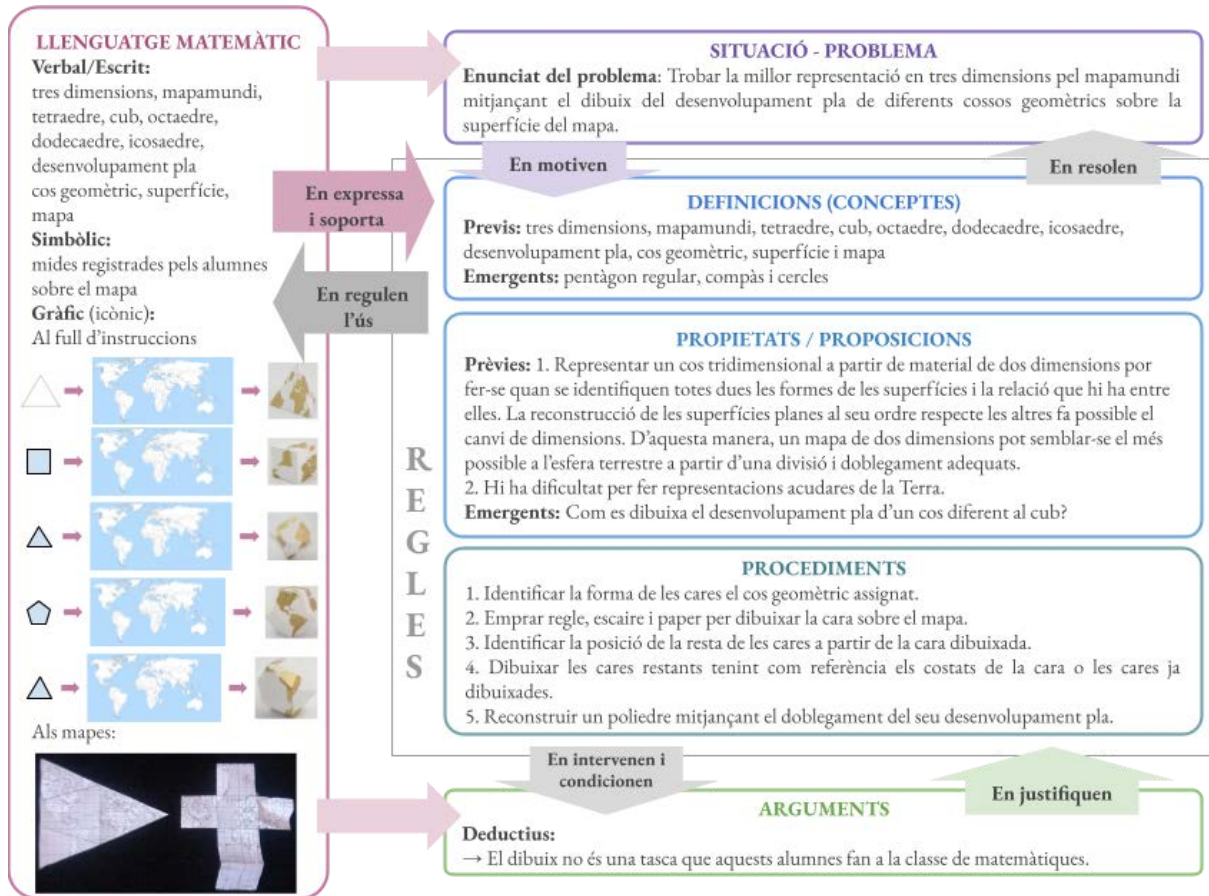


Figura 12.2.2.1. Configuració d'objectes primaris de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 13. Trajectòries didàctiques

Les dimensions epistèmica, docent i discent que han intervingut en el procés d'instrucció matemàtica (Godino, Contreras i Font, 2006), com ho són les tasques de dibuix geomètric que són l'objecte d'estudi d'aquest treball de recerca doctoral, permeten caracteritzar la trajectòria didàctica de les sessions portades a l'aula (Godino, Batanero i Font, 2009). A tall de referència, al capítol 10 es troben les subtrajectòries hipotètiques de les tres dimensions esmentades: epistèmica, docent i discent. Aquests antecedents, les subtrajectòries hipotètiques, van significar una important orientació per conduir de la millor manera l'observació dels fenòmens a l'aula. Ara, un cop implementades les tasques, les subtrajectòries epistèmica, docent i discent descriuen el pas de la configuració didàctica inicial cap a la configuració didàctica final de cadascuna de les sessions de dibuix geomètric dissenyades per aquest estudi de cas (**Figura 13.1**).

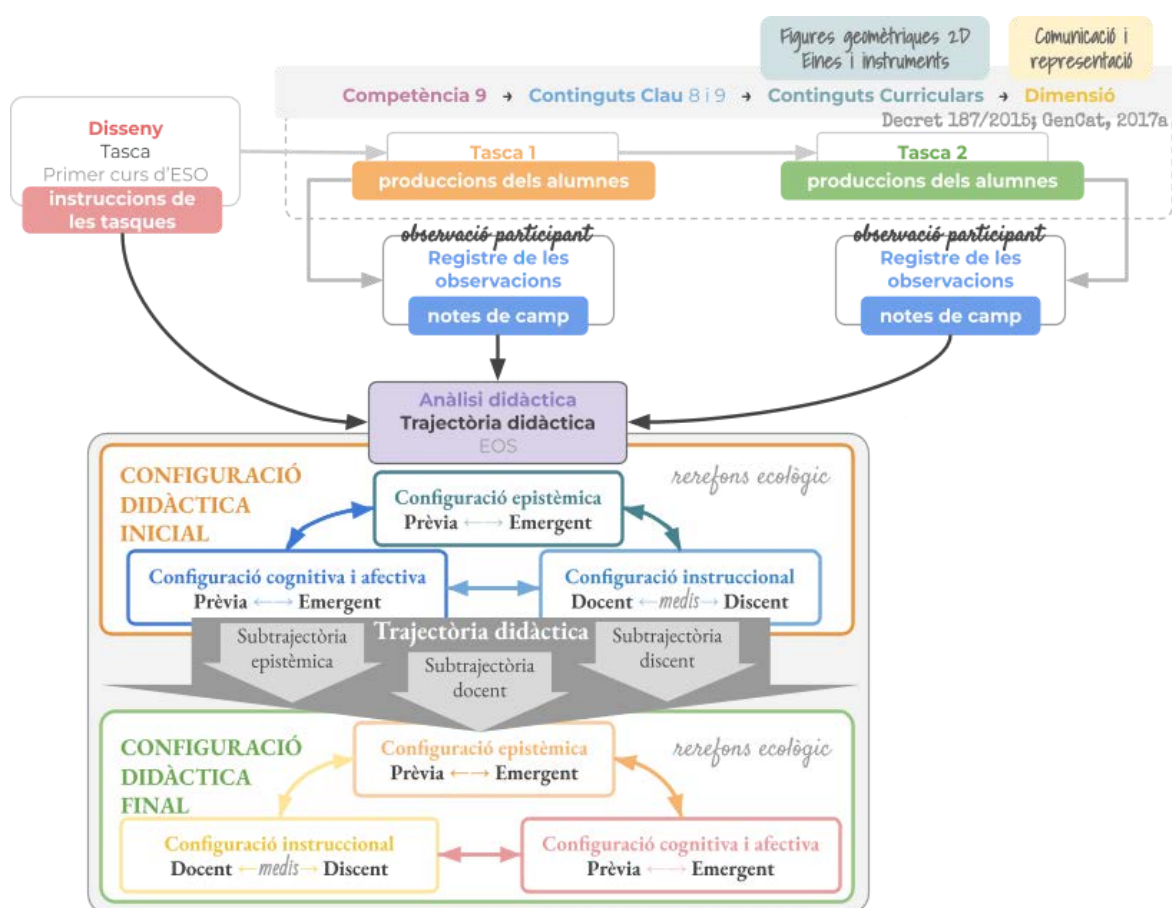


Figura 13.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les configuracions didàctiques a partir de les interaccions didàctiques identificades amb les trajectòries didàctiques (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

13.1. Trajectòria didàctica de la Tasca 1

Les tres subtrajectòries que defineixen la primera tasca de dibuix geomètric d'aquest estudi de cas reuneixen elements del disseny didàctic, de les produccions dels alumnes i de les notes de camp (**Figura 13.1.1**). A continuació es presenten, seguint els estats i/o funcions descrites per Godino, Contreras i Font (2009), les tres subtrajectòries de la Tasca 1.

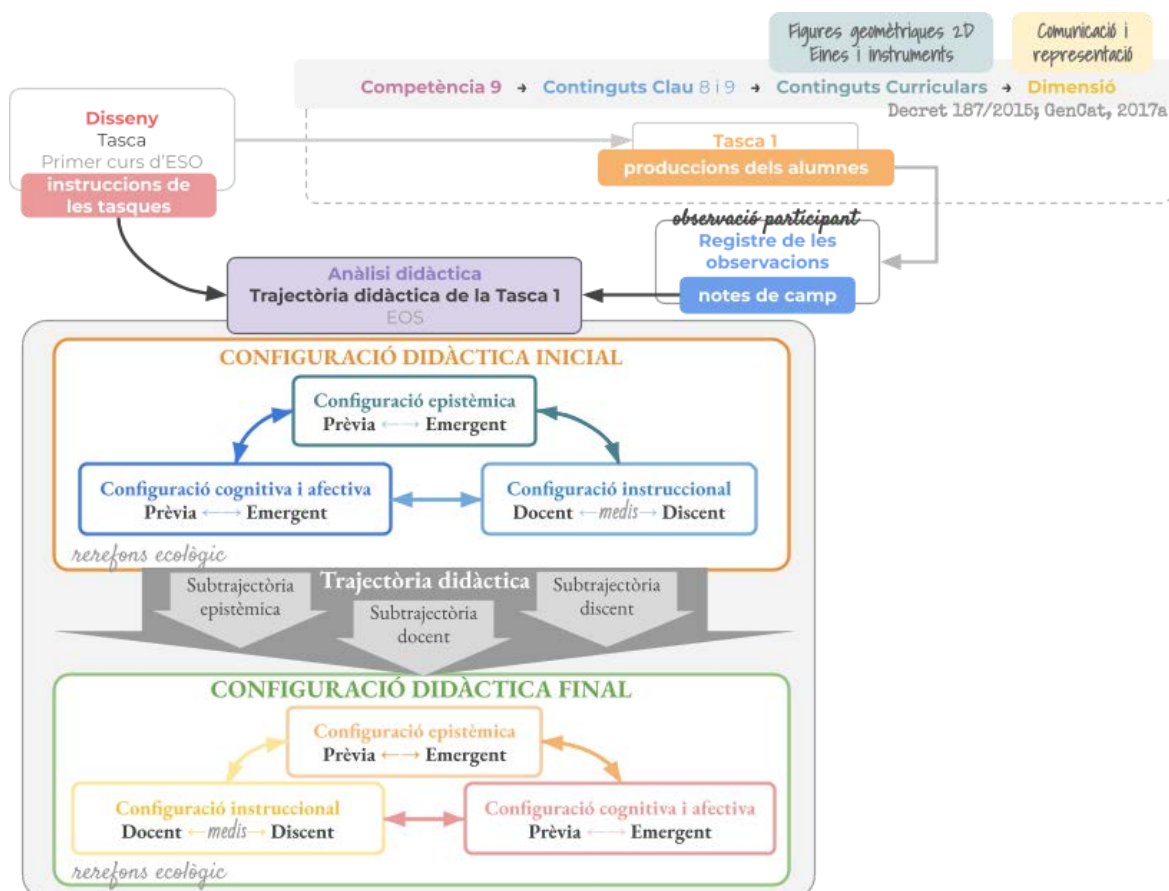


Figura 13.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica (Godino, Batanero i Font, 2009) de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

13.1.1. La subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi

Godino, Contreras i Font (2009) determinen sis estats per definir la subtrajectòria epistèmica d'una activitat matemàtica. Les notes de camp (**Annex 14**) són el principal document de referència per a la identificació dels trets de la dimensió epistèmica en la seqüència cronològica del relat sobre la implementació de la tasca en l'aula.

Seguint la narrativa presentada a les notes de camp de la Tasca 1, on es ressalten els estats de la subtrajectòria epistèmica (**Annex 18**), és possible identificar quatre etapes: (0) plantejament de la situació-problema i

introducció de la representació gràfica, (1) discussió grupal i desenvolupament de la primera part de la tasca, (2) reorganització del grup per a la segona part de la tasca, i (3) desenvolupament de la segona part de la tasca i discussió.

La primera de les cinc unitats epistèmiques de la implementació de la Tasca 1 correspon a un estat *situacional* (**Taula 13.1.1.1.**) en el qual s'explica el repte plantejat: produir tots junts un octaedre amb el material manipulable donat (cartolina, regla, escaire, cartabó i estisores) (**Annex 18**). De manera simultània, en exposar la situació-problema es va presentar un parell d'imatges icòniques del cos geomètric demanat al full d'instruccions lliurat (**Annex 4**). Per tant, també es va donar l'estat lingüístic (**Taula 13.1.1.1.**).

Taula 13.1.1.1.

Subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1		
Unitat Epistèmica	Descripció	Estat
0	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca Presentació de la representació gràfica del cos geomètric assignat: octaedre	Situacional (E1) Lingüístic (E3)
1	Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter Desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric d'una de les cares de l'octaedre	Conceptual (E4) Argumentatiu (E6) Actuacional (E2)
2	Organització d'un nou grup per a la construcció de l'octaedre	Situacional (E1)
3	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Actuacional (E2) Argumentatiu (E6)

Font: Elaboració pròpia.

A la segona unitat epistèmica de la Tasca 1 també es van presentar de manera simultània i alterna tres estats: el *conceptual*, l'*argumentatiu* i l'*actuacional* (**Taula 13.1.1.1.**). El primer estat d'aquesta segona unitat epistèmica s'assigna a les converses entre els alumnes relacionades amb el desenvolupament del dibuix geomètric d'un triangle equilàter (**Annex 18**). Pel que fa al segon estat, es determina a partir de la realització dels traços per assolir el dibuix geomètric demanat (**Annex 18**).

L'estat *situacional* relacionat amb la tercera unitat epistèmica (**Taula 13.1.1.1.**) correspon a l'assignació de la segona part de la Tasca 2: la construcció del cos geomètric a partir de les figures de dues dimensions construïdes per cada grup mitjançant la formació d'un nou grup representatiu de tota la classe (**Annex 14**).

Finalment, la quarta unitat epistèmica també es descriu amb dos estats simultanis i intercalats: *actuacional* i *argumentatiu* (**Taula 13.1.1.1.**). La manca de diàleg i el baix nivell d'interacció i participació dels alumnes va fer que a diferència de la segona unitat epistèmica, l'estat *conceptual* hagi desaparegut en aquesta darrera fase de la sessió (**Annex 18**).

13.1.2. La subtrajectòria docent de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi

Tenint com a referència les sis funcions que defineixen una subtrajectòria docent (Godino, Contreras i Font, 2006) per contrastar les notes de camp de la implementació de la Tasca 1 (**Annex 14**), es pot dir que s'hi identifiquen sis unitats docents. La primera d'elles, la *planificació* (**Taula 13.1.2.1.**), es justifica amb el Disseny Didàctic d'aquesta tasca (**Annex 7**). A l'**Annex 19**, les notes de camp on es ressalten els elements que pertanyen a les unitats docents, tot i que es va fer la introducció del facilitador de la sessió (l'autora d'aquest treball de recerca) i es va convidar als alumnes a col·laborar, només es reconeix un episodi de la funció de *motivació* i *assignació de tasques*: la presentació de la situació-problema de la primera part de la Tasca 1 (**Taula 13.1.2.1.**). Seguint la seqüència cronològica presentada en les notes de camp (**Annex 19**), l'*avaluació* és la tercera funció identificada en el seguiment fet per la facilitadora de la tasca de les accions preses pels alumnes a l'inici del desenvolupament del dibuix geomètric del triangle equilàter (**Taula 13.1.2.1.**). L'actuació de la facilitadora per orientar els traços dels alumnes (**Annex 19**) es considera una funció d'*assignació de tasques* (**Taula 13.1.2.1.**). Així mateix, el següent episodi donat a la sessió es categoritza com a una funció d'*assignació de tasques* que consisteix en la formació d'un equip nou amb un membre de cada grup per construir el cos geomètric mitjançant la unió dels triangles equilàters dibuixats (**Taula 13.1.2.1.**). El seguiment fet al desenvolupament de la tasca de construcció física de l'octaedre per part del grup de representants dels equips (**Annex 19**) es considera la sisena unitat docent, la qual és del tipus d'*avaluació* (**Taula 13.1.2.1.**). Com a conseqüència d'aquesta sisena funció, la intervenció de la facilitadora per tal de tornar a organitzar el treball del grup de representants (**Annex 19**) és una funció docent d'*assignació de tasques* (**Taula 13.1.2.1.**) que condueix a un nou episodi d'*avaluació* (**Annex 19**) de la implicació de la classe en la resolució dels qüestionaris lliurats (**Taula 13.1.2.1.**). Finalment, s'identifica una novena unitat docent en la qual la facilitadora fa la funció d'*assignació de tasques* (**Taula 13.1.2.1.**) per aprofitar els minuts restants de la sessió en la resolució del qüestionari (**Annex 19**) relacionats amb trets de la *idoneïtat didàctica* (**Annex 12**).

Taula 13.1.2.1.

Subtrajectòria docent de la Tasca 1 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria docent de la Tasca 1		
Unitat Docent	Descripció	Funció
0	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)
1	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Motivació (P2) Assignació de tasques (P3)
2	Observació de les discussions en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre (triangle equilàter) i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Avaluació (P5)
3	Presentació de les instruccions generals per reorientar el procediment de dibuix del triangle equilàter aprofitant al màxim la superfície de la cartolina	Assignació de tasques (P3)
4	Organització del nou grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Assignació de tasques (P3)
5	Observació de la discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Avaluació (P5)
6	Reorganització del grup de representants per la construcció física de l'octaedre	Assignació de tasques (P3)
7	Observació de la participació de la resta del grup amb la resolució del qüestionari	Avaluació (P5)
8	Reorganització de la classe per respondre de manera col·lectiva el qüestionari	Assignació de tasques (P3)

Font: Elaboració pròpia.

13.1.3. La subtrajectòria discent de la Tasca 1 i les seves unitats d'anàlisi

El tercer element de la trajectòria didàctica de la Tasca 1, la subtrajectòria discent, es concreta en les unitats discents identificades en la narrativa de les notes de camp que recullen les dades de la implementació de la tasca a l'aula (**Annex 14**). Les deu unitats discents marcades a les notes de camp (**Annex 20**) segons les propostes teòriques de Godino, Contreras i Font (2006) són un relat que segueix la línia temporal de l'actuació dels alumnes en la implementació de la tasca.

La introducció de la facilitadora de la sessió, per part del professor titular de la classe (**Annex 20**) és la primera unitat discent on s'activa la funció/estat d'*acceptació* (**Taula 13.1.3.1.**). La formació dels grups de treball per part de la facilitadora i immediata interacció dels alumnes amb les eines de dibuix geomètric lliurades (**Annex 20**), corresponen a la segona unitat discent, la qual es relaciona amb dues funcions/estat:

recepció d'informació i exploració (**Taula 13.1.3.1.**). La presentació de la situació-problema a resoldre per part de la facilitadora (**Annex 20**), tercera unitat discent, representa una funció/estat de *recepció d'informació* (**Taula 13.1.3.1.**).

Taula 13.1.3.1.

Subtrajectòria discent de la Tasca 1 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria discent de la Tasca 1		
Unitat Discent	Descripció	Funció/Estat
0	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)
1	Integració en un grup de treball i exploració dels materials manipulatius disponibles (full d'instruccions, paper, eines de dibuix geomètric i full de respostes)	Recepció d'informació (A6) Exploració (A2)
2	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d'informació (A6)
3	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de l'estratègia de dibuix geomètric per traçar una de les cares de l'octaedre (triangle equilàter)	Exercitació (A8)
4	Presentació d'una estratègia de dibuix geomètric per traçar el triangle equilàter	Recepció d'informació (A6)
5	Desenvolupament d'una estratègia d'assaig i error de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre (triangle equilàter)	Exercitació (A8)
6	Integració del nou grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Recepció d'informació (A6)
7	Aplicació d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Exercitació (A8)
8	Instrucció per a la resolució grupal del qüestionari dels aspectes de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la sessió	Recepció d'informació (A6)
9	Resolució grupal del qüestionari	Record (A3)

Font: Elaboració pròpia.

A la quarta unitat discent s'identifica el treball en grup per a la realització del dibuix geomètric dels triangle equilàter assignat a cada equip (**Annex 20**) que es caracteritza com a una funció/estat d'*exercitació* (**Taula 13.1.3.1.**). La intervenció de la facilitadora per explicar una metodologia de traç d'orientació per tot el grup és la cinquena unitat discent (**Annex 20**) que és pròpia a una funció/estat de *recepció d'informació* (**Taula 13.1.3.1.**). L'aplicació de l'estratègia d'assaig i error per a la realització del dibuix geomètric del triangle

(Annex 20) és una funció/estat d'exercitació de la sisena unitat discent (Taula 13.1.3.1.), seguida de la funció/estat de recepció d'informació (Taula 13.1.3.1.) per avançar cap a la segona part de la tasca: la construcció física o l'assemblatge de l'octaedre (Annex 20). La funció/estat d'exercitació es va tornar a repetir al treball de grup fet per assemblar les cares de l'octaedre a la vuitena unitat discent de la sessió (Taula 13.1.3.1.). En acabar la sessió es van presentar dues unitats discents més, la novena i la dècima, relacionades amb les funcions/estat de recepció d'informació i record respectivament (Taula 13.1.3.1.). Les instruccions donades per la facilitadora per la resolució grupal del qüestionari de l'Annex 12 (Annex 20) indiquen la novena unitat discent, mentre que les respostes donades pels alumnes senyalen la darrera unitat de la subtrajectòria discent de la Tasca 1 (Annex 20).

13.2. Trajectòria didàctica de la Tasca 2

A fi de seguir les orientacions rebudes de les tres subtrajectòries hipotètiques que integren la trajectòria didàctica hipotètica per la implementació de la Tasca 2 a l'aula (les quals es poden consultar al Capítol 10), es reconeix la trajectòria didàctica real de la segona tasca de dibuix geomètric de l'estudi de cas que es discuteix en aquest treball de recerca doctoral a partir de la definició de les seves subtrajectòries epistèmica, docent i discent permet. Per aconseguir-ho s'analitzen, des de la perspectiva teòrica de Godino, Batanero i Font (2009), alguns elements del disseny didàctic, de les produccions dels alumnes i de les notes de camp relacionades amb aquesta segona tasca (Figura 13.2.1.).

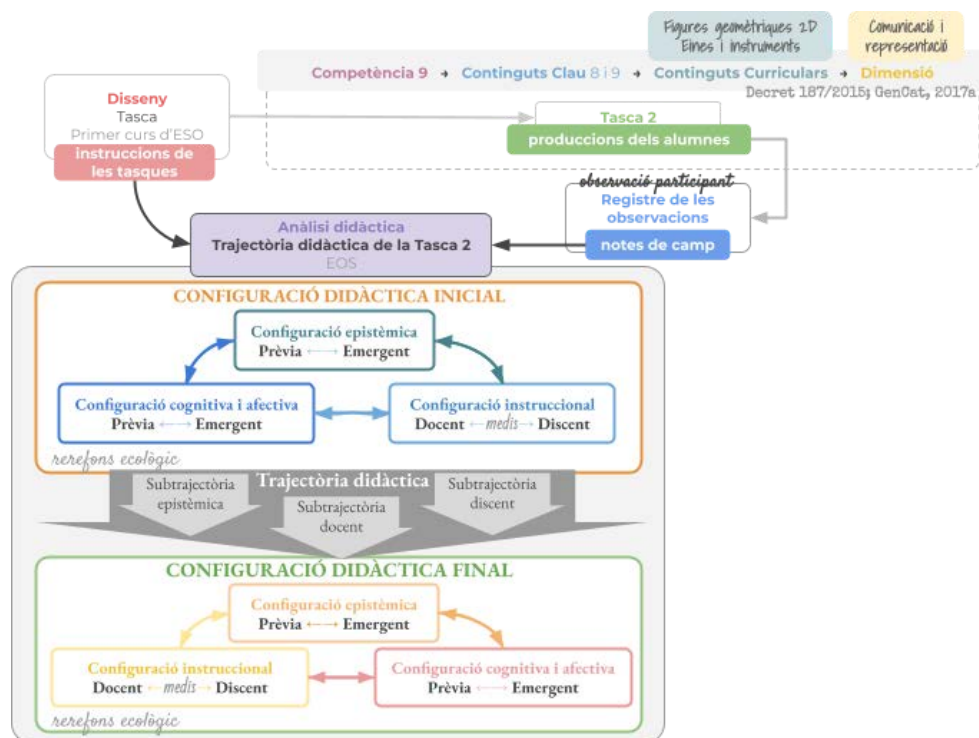


Figura 13.2.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i la trajectòria didàctica de la Tasca 2 (Godino, Batanero i Font, 2009) donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

13.2.1. La subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi

El conjunt d'estats possibles dins una subtrajectòria epistèmica publicats per Godino, Contreras i Font (2006) s'apliquen als documents en el quals es va recollir la informació relacionada amb la segona tasca de dibuix geomètric d'aquest treball de recerca doctoral. El document referit és: les notes de camp de la implementació a l'aula (**Annex 15**). A la lectura de les notes de camp corresponents a la segona tasca de dibuix geomètric el primer estat de caire epistèmic és *actuacional* (**Taula 13.2.1.1.**), ja que en iniciar la sessió es van organitzar els grups de treball dels alumnes i es va lliurar el material (**Annex 21**). El segon estat epistèmic identificat en la seqüència temporal del desenvolupament de la Tasca 2 va ser el plantejament de l'explicació de l'activitat a dur a terme per part de la facilitadora (**Annex 21**), per tant es tracta d'un estat no només *situacional* sinó també *lingüístic* (**Taula 13.2.1.1.**). La col·laboració dels alumnes en la realització dels traços demanats va donar peu a un tercer estat epistèmic, un d'*actuació* (**Taula 13.2.1.1.**), en el qual es van abordar diferents opcions per dibuixar el desenvolupament pla dels cossos assignats (**Annex 21**). Com a conseqüència de les dificultats dels alumnes en fer el dibuix d'algunes figures planes, com ara un pentàgon regular, es va produir la modificació d'aspectes de la tasca per ometre un dels cossos geomètrics inclòs en el disseny didàctic: el dodecaedre (**Annex 21**). Aquest episodi es caracteritza com un estat epistèmic *situacional* (**Taula 13.2.1.1.**). El fi de la sessió va arribar mentre els alumnes continuaven amb la realització dels traços corresponents al desenvolupament pla dels cossos assignats, tot això abans d'acabar totes les passes previstes per a la lliçó (**Annex 21**). Aleshores, el darrer succés a l'aula va ser un estat epistèmic *actuacional* (**Taula 13.2.1.1.**).

Taula 13.2.1.1.

Subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2 segons els estats proposats per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2		
Unitat Epistèmica	Descripció	Estat
0	Lliurament dels materials manipulatius (mapes, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions)	Actuacional (E2)
1	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca i de les representacions gràfiques dels cossos geomètrics assignats	Situacional (E1) Lingüístic (E3)
2	Desenvolupament autònom de la realització del desenvolupament pla relacionat amb el cos geomètric assignat	Actuacional (E2)
3	Modificació de la tasca en eliminar un dels cossos assignats per manca de material: el dodecaedre.	Situacional (E1)
4	Continuació del desenvolupament autònom de la realització del desenvolupament pla relacionat amb el cos geomètric assignat o reassignat.	Actuacional (E2)

Font: Elaboració pròpia.

13.2.2. La subtrajectòria docent de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi

Les notes de camp de la implementació a l'aula de la Tasca 2 (**Annex 15**) es reproduïxen per ressaltar els trets característics de la subtrajectòria docent, proposats per Godino, Contreras i Font (2006), d'aquesta tasca (**Annex 22**). En primer terme, es va presentar una funció de *planificació* (**Taula 13.2.2.1.**) en la qual l'autora d'aquest treball de recerca doctoral va dissenyar la tasca (**Annex 11**). La successió d'esdeveniments que van tenir lloc a l'aula van permetre la identificació de quatre funcions docents consecutives (**Annex 22**). La primera d'elles va ser una funció docent de *motivació* (**Taula 13.2.2.1.**) que va consistir en la presentació de la facilitadora (l'autora d'aquesta tesi) a la classe (**Annex 22**). La segona funció docent esdevinguda a l'aula va ser l'*assignació de tasques* (**Taula 13.2.2.1.**) presentades a la classe un cop organitzats els grups de treball i lliurats el materials manipulables: el traç del desenvolupament pla d'un dels cinc cossos geomètrics al full d'instruccions (**Annex 22**). La tercera funció docent, de *regulació* (**Taula 13.2.2.1.**), es relaciona amb les orientacions donades per part dels professors davant les preguntes dels alumnes i la consegüent modificació de la tasca amb l'omissió del dodecaedre del seguit de cossos geomètrics assignats degut a la manca de compassos i transportador d'angles per traçar els pentàgons regulars necessaris pel desenvolupament pla de la figura omesa (**Annex 22**). Amb la funció docent d'*avaluació* es va arribar al final de la sessió (**Taula 13.2.2.1.**). En ella, la facilitadora es va dedicar a observar les estratègies de dibuix geomètric dels alumnes pel desenvolupament de l'activitat assignada en aquesta Tasca 2 de construcció del desenvolupament pla d'un poliedre a partir de la identificació d'una de les seves cares (**Annex 22**).

Taula 13.2.2.1.

Subtrajectòria docent de la Tasca 2 segons les funcions proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria docent de la Tasca 2		
Unitat Docent	Descripció	Funció
0	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)
1	Introducció del "professor" a càrrec de la sessió	Motivació (P2)
2	Organització dels grups de treball, lliurament del materials manipulables i presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Assignació de tasques (P3)
3	Resolució de preguntes dels alumnes i modificació de la tasca en ometre un dels cossos assignats per manca de material per realitzar el seu traç	Regulació (P4)
4	Observació de les estratègies individuals de dibuix per construir el desenvolupament pla del poliedre assignat	Avaluació (P5)

Font: Elaboració pròpia.

13.2.3. La subtrajectòria discent de la Tasca 2 i les seves unitats d'anàlisi

Per tancar aquest capítol s'analitza la Tasca 2 des de la perspectiva del tercer element de la trajectòria didàctica: la subtrajectòria discent (Godino, Contreras i Font, 2009). Amb aquest propòsit es consulten les notes de camp on es registra la implementació de la Tasca 2 a l'aula (**Annex 15**). Dels fenòmens observats a l'aula es subratllen set moments en els quals es van duu a terme set funcions/estat de caire discent (**Annex 23**). La presentació de l'autora d'aquesta tesi davant la classe per part del professor titular (**Annex 23**) es reconeix com una funció/estat d'*acceptació* (**Taula 13.2.3.1**). La posterior formació de grups de treball, lliurament de material (fulls d'instruccions i manipulable) i explicació de les instruccions de la tasca de dibuix del desenvolupament pla d'un poliedre sobre la superfície d'un mapa (**Annex 23**) correspon a una funció/estat de *recepció d'informació* (**Taula 13.2.3.1**). L'episodi consecutiu en el qual els alumnes van començar a explorar i establir, de manera individual, estratègies de dibuix geomètric (**Annex 23**) es categoritza com una funció/estat de *formulació* (**Taula 13.2.3.1**). La interacció professor-alumne derivada del plantejament de preguntes per part dels alumnes, a causa dels dubtes sorgits en la realització dels traços (**Annex 23**) és una funció/estat de *demanda d'informació* (**Taula 13.2.3.1**). Les orientacions dels professors en donar resposta a les preguntes dels alumnes i les modificacions de la tasca original deguda a la manca de material pertanyen a la funció/estat anomenada *recepció d'informació* (**Taula 13.2.3.1**). La continuació de la tasca per part dels alumnes, seguint les orientacions dels professor és una funció/estat de *exercitació* (**Taula 13.2.3.1**). Finalment, la verificació feta pels alumnes en doblegar el desenvolupament pla dibuixat per ells mateixos va esdevenir en la darrera funció/estat de la sessió: *avaluació* (**Taula 13.2.3.1**).

Taula 13.2.3.1.

Subtrajectòria discent de la Tasca 2 segons les funcions-estat proposades per Godino, Contreras i Font (2006).

Subtrajectòria discent de la Tasca 2		
Unitat Discent	Descripció	Funció/Estat
0	Introducció del "professor" a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)
1	Integració en un grup de treball, lliurament de material manipulable i presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d'informació (A6)
2	Establiment de les estratègies individuals de dibuix del desenvolupament pla del poliedre assignat	Formulació (A4)
3	Orientació per part dels professors a les preguntes dels alumnes	Demanda d'informació (A7)
4	Presentació de modificacions de la tasca derivades de les preguntes fetes i de la manca de materials manipulables adients	Recepció d'informació (A6)
5	Realització dels traços necessaris per dibuixar el desenvolupament pla del poliedre assignat	Exercitació (A8)
6	Construcció en tres dimensions del poliedre assignat mitjançant el doblegament del desenvolupament pla dibuixat	Avaluació (A9)

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 14. Idoneïtat didàctica

L'anàlisi didàctica de les dues tasques de dibuix geomètric que componen el disseny didàctic d'aquest treball de tesi doctoral es du a terme mitjançant l'aplicació del constructe *idoneïtat didàctica*. Amb l'objectiu de donar seguiment a la metodologia d'anàlisi didàctica plantejada en la determinació dels paràmetres de la *idoneïtat didàctica hipotètica*, l'establiment dels paràmetres d'*idoneïtat didàctica real* per a cadascuna de les dues tasques de dibuix geomètric d'aquesta recerca es va realitzar en dues etapes: una primera fase d'identificació dels indicadors de les components de cadascuna de les sis dimensions d'*idoneïtat didàctica* a partir de l'exploració del disseny didàctic i de les dades recollides per a posteriorment donar peu a la representació gràfica de tots aquests paràmetres (**Figura 14.1**). Un altre cop, s'ha d'aclarir que s'ha fet una anàlisi didàctica independent per a cadascuna de les dues tasques de dibuix geomètric de la seqüència didàctica implantada en aquest treball de recerca doctoral.

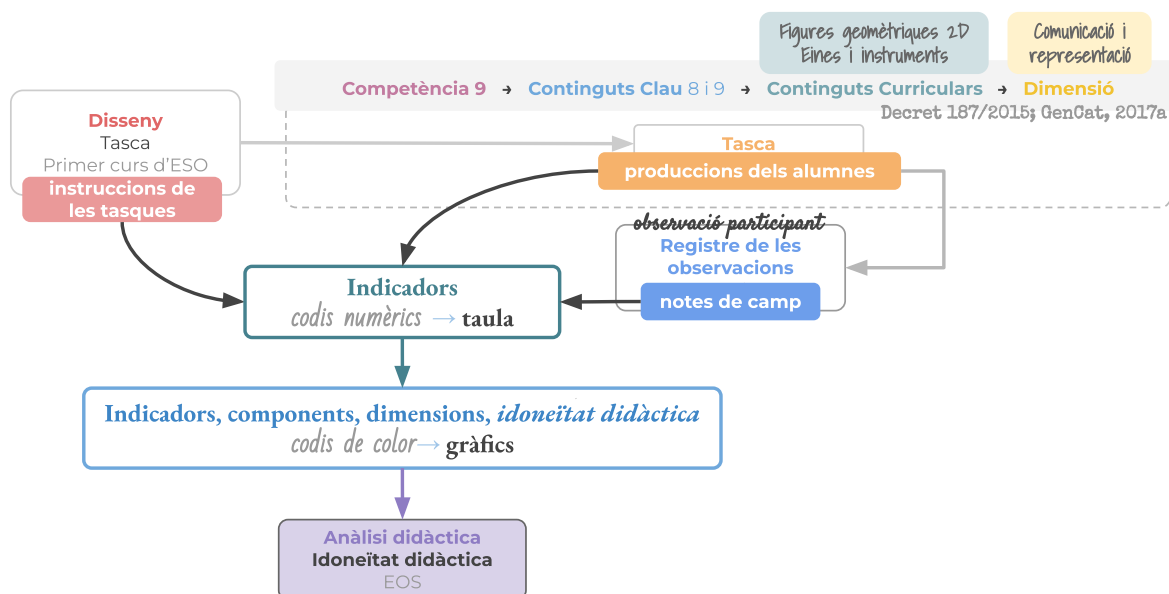


Figura 14.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la *idoneïtat didàctica* de les tasques de dibuix geomètric de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

14.1. Les dimensions de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1

En relació a la primera de les dues tasques de dibuix geomètric de l'estudi de cas d'aquest treball de recerca, el reconeixement de les dimensions epistèmica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva i ecològica de la *idoneïtat didàctica* és el resultat del seguiment de la metodologia d'anàlisi per a l'identificació d'indicadors a partir del disseny didàctic de la tasca (**Annex 7**), el full d'instruccions adreçat cap als alumnes (**Annex 2**), el

full donat als alumnes per hi enregistrar les seves respostes (**Annex 5**), el full d'orientacions adreçat al facilitador de la tasca (**Annex 6**) i les notes de camp (**Annex 14**) (**Figura 14.1.1.**).

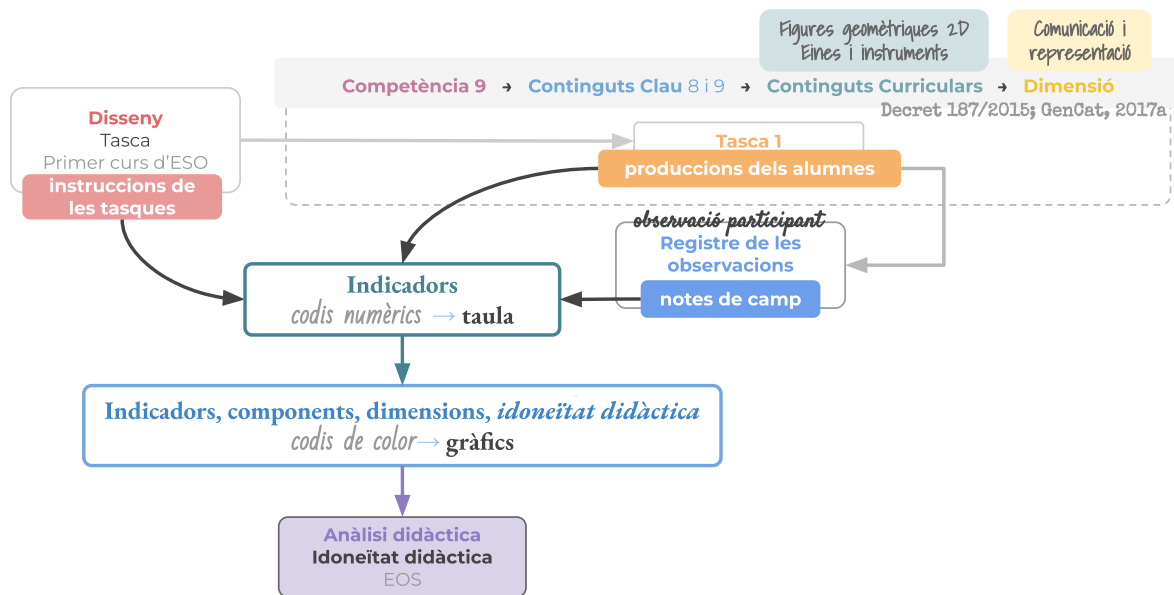


Figura 14.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

14.1.1. La idoneïtat epistèmica de la Tasca 1

La valoració dels indicadors que descriuen els quatre components de la *idoneïtat epistèmica* comença amb el *control d'errors*. Es considera que l'indicador 1.1.1 (**Taula 14.1.1.**) reconeix el nivell de control de l'existència de pràctiques matemàtiques correcte per part del facilitador de la tasca (l'autora d'aquesta tesi). Segons es puntualitza a les notes de camp (**Annex 24**), on es registren els codis numèrics dels indicadors observats en cadascun del paràgrafs del text, la facilitadora de la tasca va orientar la classe amb instruccions addicionals per tal de tenir cura del desenvolupament matemàticament correcte de les pràctiques observades a l'aula. Però en vista de les construccions finals, els octaedres de cartró, es pot dir que aquest indicador 1.1.1 es va assolir en un nivell mitjà (**Taula 14.1.1.1.**).

En relació amb el segon component, el *control d'ambigüitats*, a la implementació de la tasca no es va trobar cap evidència per valorar els indicadors sobre la claredat de les definicions (indicador 1.2.1 de la **Taula 14.1.1.**), comprovacions (indicador 1.2.4) i les demostracions (indicador 1.2.5). Aleshores, tots ells han rebut zero com a puntuació (**Taula 14.1.1.**). Per un altre costat, a les notes de camp (**Annex 24**) hi ha constància de les intervencions que la facilitadora de la tasca va fer en dos moments concrets de la sessió per orientar al grup mitjançant l'explicació de procediments davant la classe sense l'ús de metàfores. Per tant, els indicadors 1.2.2 i 1.2.6 es valoren amb la màxima puntuació (**Taula 14.1.1.**). Com que, a banda de la

primera explicació que la facilitadora va donar al grup per començar a desenvolupar la tasca, va caldre plantejar un procediment addicional per orientar al grup, es conclou que les explicacions no van ser del tot clares. En conseqüència, l'indicador 1.2.3 es va valorar amb la meitat dels punts (**Taula 14.1.1.1.**).

Taula 14.1.1.1.

Valoració dels indicadors d'adoneïtat epistèmica de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració		
Control d'errors	1.1.1	Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	0,5	
	1.2.1	S'han expressat les definicions amb claredat?	0	
	1.2.2	S'han expressat els procediments amb claredat?	1	
	Control d'ambigüïtats	1.2.3	Les explicacions han sigut clares?	0,5
		1.2.4	Les comprovacions han sigut clares?	0
		1.2.5	Les demostracions han sigut clares?	0
1.2.6		S'ha omès l'ús de metàfores?	1	
Riquesa de processos	1.3.1	Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.2	Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?	0,25	
	1.3.3	Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.4	S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?	1	
Representativitat de la complexitat	1.4.1	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,5	
	1.4.2	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,5	
	1.4.3	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	
	1.4.4	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,5	
	1.4.5	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,5	
	1.4.6	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	
	1.4.7	Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	
	1.4.8	Es fa ús de representacions verbals?	0,5	
	1.4.9	Es fa ús de representacions gràfiques?	1	
	1.4.10	Es fa ús de representacions simbòliques?	1	
	1.4.11	Es fa ús de diferents conversions?	1	
	1.4.12	Es fa ús de diferents tractaments?	1	

Font: Elaboració pròpia.

El component *riquesa de processos*, el tercer de la dimensió epistèmica de la *adoneïtat didàctica*, es concreta en la modelització (indicador 1.3.1), l'argumentació (indicador 1.3.2), la resolució de problemes (indicador 1.3.3) i les connexions (indicador 1.3.4). El disseny didàctic de la Tasca 1, en el seu apartat "processos i continguts" (**Annex 7**), justifica l'existència i l'assoliment del màxim nivell de tres d'aquest quatre indicadors (**Taula 14.1.1.1.**). Tot i això, les notes de camp (**Annex 24**) reflecteixen que l'indicador 1.3.2 relacionat amb l'argumentació, es va assolir en un nivell molt baix (**Taula 14.1.1.1.**).

El indicador del component de la *representativitat de la complexitat* es valoren tenint com a referència la *configuració epistèmica* de la Tasca 1 (**Figura 12.1.2.1.**). Els indicadors 1.4.1 i 1.4.2 (**Taula 14.1.1.1.**), relacionats amb les definicions i les propietats, corresponen als continguts curriculars del primer curs d'ESO (GenCat, 2017a) però el seu assoliment va ser limitat perquè els diàlegs entre els alumnes ho hi van mostrar (**Annex 24**). Els procediments (indicador 1.4.3) sí que es valoren amb la puntuació més alta perquè l'objectiu de la tasca, la construcció física de l'octaedre, que es va aconseguir és part del currículum del primer curs d'ESO (GenCat, 2017a). Així mateix, la valoració dels indicadors 1.4.4 i 1.4.5 es van puntuar amb 0,5 punts perquè, segons s'indica a la *configuració epistèmica* de la Tasca 1 (**Figura 12.1.2.1.**), les definicions i propietats desenvolupades pels alumnes van ser inferiors (**Annex 24**) al que es va establir en el disseny didàctic (**Annex 7**). Això es va comprovar als diàlegs entre els alumnes (**Annex 24**). Pel contrari, l'indicador 1.4.6 relacionat amb els procediments sí va arribar al seu màxim desenvolupament. Això es comprova amb l'assoliment de les produccions físiques de l'octaedre (**Annex 24**). La manca d'existència de diferents tipus de problemes dins la mateixa sessió justifica l'assignació de la mínima puntuació per l'indicador 1.4.7 (**Taula 14.1.1.1.**). Les explicacions de la facilitadora de la tasca i del diàleg entre els alumnes (**Annex 24**) són evidència de l'existència de representacions verbals (identificador 1.4.8), però d'un nivell col·loquial, al menys per part dels alumnes. Així, la valoració assignada a aquest indicador 1.4.8 ha estat 0.5 (**Taula 14.1.1.1.**). Les representacions gràfiques mostrades al full d'instruccions (**Annex 2**) i al full d'orientació pel facilitador (**Annex 6**) justifiquen que l'indicador 1.4.9 tingui la màxima valoració (**Taula 14.1.1.1.**). Les anotacions dels alumnes per registrar mides i fer traços, com ho registren les notes de camp (**Annex 24**), són l'evidència de l'assignació del màxim de puntuació per a l'indicador 1.4.10 relacionat amb les representacions simbòliques. Les produccions dels alumnes (**Annex 24**) donen elements per afirmar l'existència de l'ús de diferents conversions i tractaments (indicadors 1.4.11 i 1.4.12 de la **Taula 14.1.1.1.**).

En utilitzar totes les valoracions de la **Taula 14.1.1.1.** i comparar-les amb les puntuacions màximes, s'obté la comparació de la dimensió epistèmica implementada a l'aula amb el cas idealitzat de la *idoneïtat epistèmica* (**Figura 14.1.1.1.**).

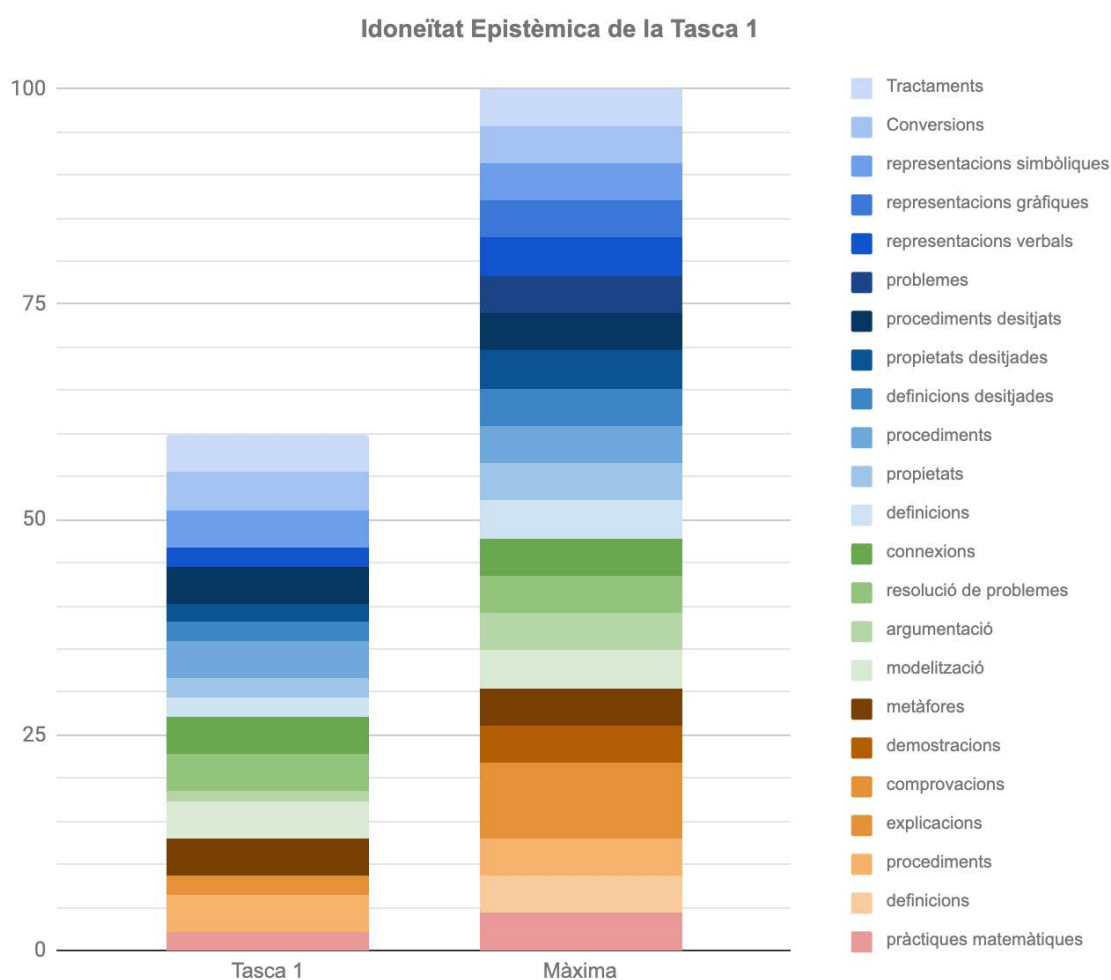


Figura 14.1.1.1. Comparació de la *idoneïtat epistèmica* de la Tasca 1 i la *idoneïtat epistèmica* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.1.2. La idoneïtat cognitiva de la Tasca 1

La *idoneïtat cognitiva* de la implementació de la Tasca 1 es puntualitza en quatre components, el primer d'ells: els *coneixements previs*. Segons es mostra a les notes de camp (**Annex 24**), els alumnes van requerir la intervenció de la facilitadora per tal d'explicar un procediment de dibuix que els orientés en la seva tasca. Això s'explica a partir de l'indicador (2.1.1), perquè els alumnes no tenen els coneixements previs requerits pel desenvolupament exitós de la Tasca 1. Aquest indicador 2.1.1. es puntua amb la meitat del valor màxim (**Taula 14.1.2.1**). Aquest mateix document, les notes de camp (**Annex 24**), fa un recull de les produccions dels alumnes. Es pot dir que l'indicador 2.1.2, que descriu la capacitat dels alumnes per assolir el nivell de complexitat dels continguts, es puntua amb la màxima valoració perquè hi ha evidències fotogràfiques del producte final: la construcció física de l'octaedre (**Taula 14.1.2.1**).

Taula 14.1.2.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	0.5
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	1
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0
Aprentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	1
	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0
Alta demanda cognitiva	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	0
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	1
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	0
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	0

Font: Elaboració pròpia.

A partir del disseny didàctic de la Tasca 1 (**Annex 7**) es sap que no hi ha cap activitat de desenvolupament (indicador 2.2.1) ni tan sols de suport (indicador 2.2.2), això explica la valoració d'aquests dos indicadors amb zero (**Taula 14.1.2.1**).

En relació amb els mètodes d'avaluació contemplats a l'indicador 2.3.1, el disseny didàctic estableix la construcció física d'un octaedre (**Annex 7**). Segons es recull a les notes de camp (**Annex 24**), les produccions dels alumnes són exitoses i aquest fet és una evidència dels aprenentatges i competències implementades en la sessió. Així, aquest indicador es puntua amb el màxim valor (**Taula 14.2.1**).

Les notes de camp (**Annex 24**) només proveeixen evidències sobre els canvis de representació fets pels alumnes en el desenvolupament de la Tasca 1: verbal, numèrica, gràfica i figurativa (indicador 2.4.3). Aleshores, aquest indicador es relaciona amb la màxima puntuació i a la vegada és l'únic indicador del component *alta demanda cognitiva* amb valoració. La resta dels indicadors no poden justificar-se, per tant romanen sense cap valoració (**Taula 14.1.2.1**).

La comparació entre les valoracions assignades a partir de les evidències mostrades pels instruments de recollida de dades i el cas idealitzat es mostra de manera gràfica a la **Figura 14.1.2.1.** que es presenta a continuació.

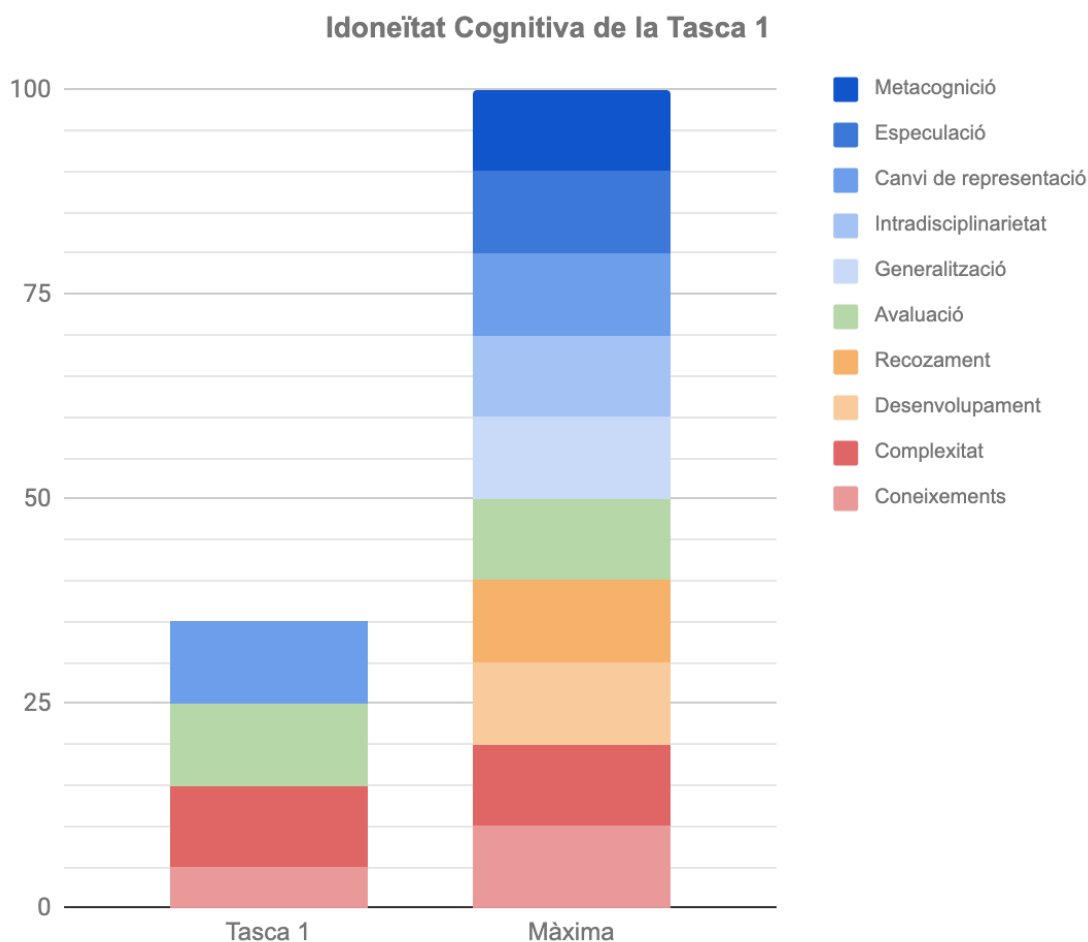


Figura 14.1.2.1. Comparació de la *idoneïtat cognitiva* de la Tasca 1 i la *idoneïtat cognitiva* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.1.3. La idoneïtat interaccional de la Tasca 1

La dimensió *interaccional* de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1 té quatre components. En primer lloc, el component *interacció docent-discent*. Les explicacions fetes per la facilitadora de la tasca (**Annex 24**), l'autora d'aquesta tesi, justifiquen l'assignació de la màxima valoració als indicadors que corresponen a la presentació clara (indicador 3.1.1), ben organitzada (indicador 3.1.2), amb una expressió verbal adequada (indicador 3.1.3) i emfatitzant els conceptes clau del tema (indicador 3.1.4). La posterior presentació de noves instruccions per part de la facilitadora (**Annex 24**) amb l'objectiu de donar orientacions addicionals a la classe són evidència de la identificació de les expressions físiques dels estudiants que es troben davant un conflicte cognitiu (indicador 3.1.5), de la interpretació i resolució de preguntes que expressen conflictes

cognitiu per part dels alumnes (indicador 3.1.6) i de la utilització de recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció (indicador 3.1.9). Les intervencions de la facilitadora de la tasca per recuperar l'atenció dels alumnes i retornar al desenvolupament de la Tasca 1 quan hi havia distraccions o pèrdua de seguiment de l'activitat (**Annex 24**) mostren que es va assolir la valoració màxima dels indicadors 3.1.7 i 3.1.9. Pel que fa als indicadors relacionats amb la promoció per arribar al consens mitjançant l'argumentació (indicador 3.1.8) i la facilitació de la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe (indicador 3.1.10), hi ha evidències de la tendència al treball individual per torns i la manca de diàleg entre els alumnes. Per tant, aquests dos últims indicadors s'han valorat amb zero (**Taula 14.1.3.1**).

Taula 14.1.3.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1
	3.1.4 S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1
Interacció docent - discent	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1
	3.1.8 S'han promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	0
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	1
	3.1.10 S'han observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	0
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'hi observa que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?	0,25
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	0,5
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	1
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?	1
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?	1
Avaluació formativa	3.4.1 S'ha realitzat una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	0

Font: Elaboració pròpia.

Així mateix, la manca de diàleg entre els alumnes i el treball individual per torns (**Annex**) es reflecteixen en les baixes puntuacions dels indicadors 3.2.1 (observació de la promoció del diàleg i la comunicació entre els

estudiants) i 3.2.2 (promoció de la integració en grups per desenvolupar la tasca) del component *interacció entre alumnes* (**Taula 14.1.3.1.**).

Els tres indicadors del component *autonomia* s'han valorat amb la puntuació més alta perquè al desenvolupament de la tasca hi ha proves que validen l'existència de moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi mentre treballaven en grup (indicador 3.3.1). L'exploració dels alumnes confirma que ells van fer formulacions (indicador 3.3.2) i validacions (indicador 3.3.3) mentre desenvolupaven els dibuixos geomètrics i feien la construcció física de l'octaedre (**Taula 14.1.3.1.**). En relació amb el component *avaluació formativa*, l'indicador 3.4.1 (que recomana la realització d'una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes) no es va localitzar en lloc. Aleshores, la puntuació d'aquest component és zero (**Taula 14.1.3.1.**). La representació gràfica dels valors assignats als diferents indicadors dels components de la *idoneïtat interaccional* sorgida de la implementació a l'aula de la Tasca 1, comparat amb les puntuacions màximes de tots aquests paràmetres es pot observar a la **Figura 14.1.3.1.** d'aquest subapartat.

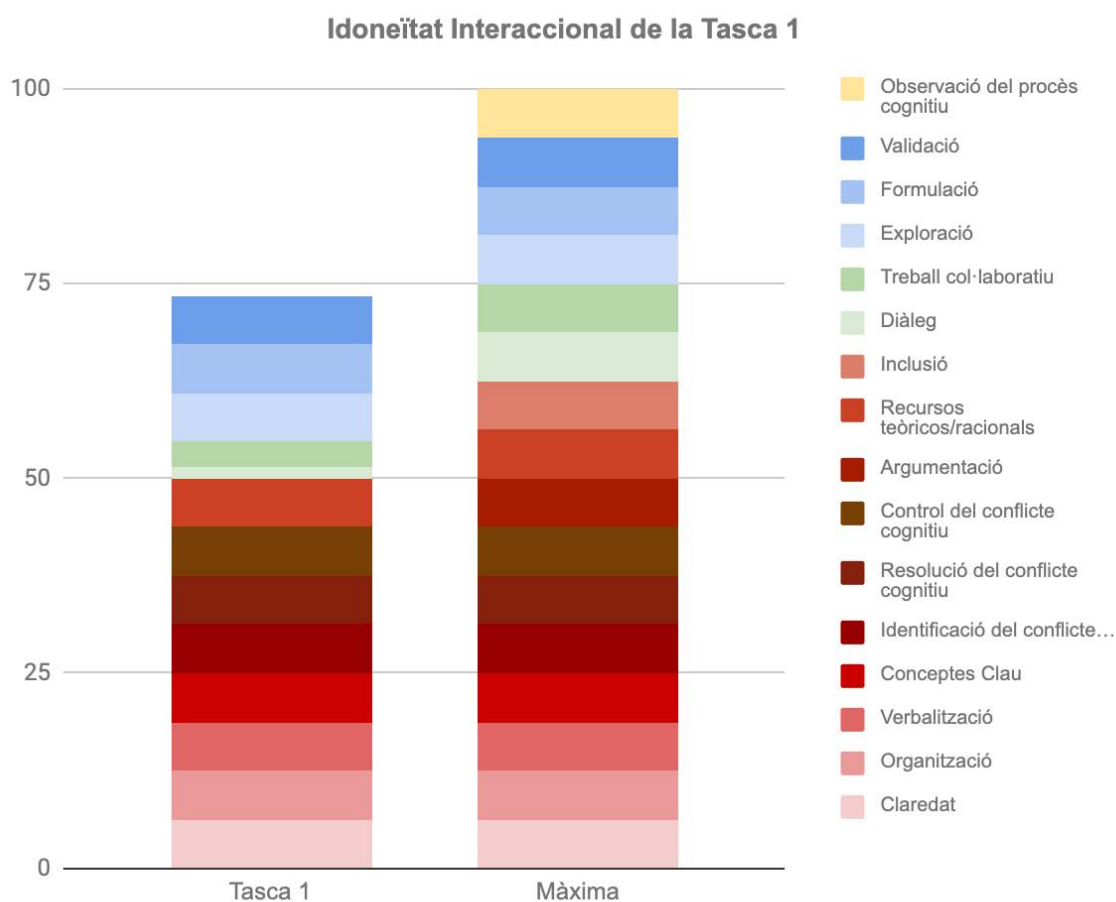


Figura 14.1.3.1. Comparació de la *idoneïtat interaccional* de la Tasca 1 i la *idoneïtat interaccional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.1.4. La idoneïtat mediacional de la Tasca 1

El *recursos materials*, primer component de la *idoneïtat mediacional*, han tingut un impacte positiu en el desenvolupament de la Tasca 1 (**Annex 24**). Tot i que l'activitat es va portar cap a l'assoliment exitós de la fita plantejada amb l'exercici de dibuix geomètric, és cert que l'ús de materials (indicador 4.1.1), instruments de mesura (indicador 4.1.2) i eines de dibuix geomètric (indicador 4.1.3) no van promoure gaire la utilització del llenguatge i l'argumentació de caire matemàtic però sí en van convidar al seguiment de procediments (**Annex 24**). Per tant, aquests indicadors es van valorar amb la puntuació mínima: 0,25 (**Taula 14.1.4.1**). L'aplicació de termes col·loquials en les poques converses donades entre els alumnes (**Annex 24**) també limita les puntuacions assignades als indicadors 4.1.6 (ús de definicions i propietats en la situació presentada) i 4.1.7 (presentació de definicions i propietats mitjançant un model).

Taula 14.1.4.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0,25
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0,25
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0,25
	4.1.4 La calculadora t'ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	0,25
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	0,5
	4.1.8 Has pogut visualitzar les definicions i propietats?	0
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre d'alumnes que han participat de la tasca ha ajudat a aprendre?	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1
	4.2.3 L'horari de la classe és l'adequat?	0
	4.2.4 L'aula és apropiada pel desenvolupament de la tasca?	0,75
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?	1
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	1
	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?	1

Font: Elaboració pròpia.

Les puntuacions assignades als indicadors de les *condicions del grup i de l'aula*, segon component de la *idoneïtat mediacional*, prové de les notes de camp (**Annex 24**). Segons s'hi va registrar, l'horari de la sessió va ser al migdia just abans l'hora de sortida. Per tant, no es va trobar gaire adequat aquest horari per fer la sessió

(indicador 4.2.3): divendres a la darrera hora. El grup estava format per 30 alumnes, per tant es considera un nombre adequat d'alumnes (indicador 4.2.1). Com que els alumnes es van poder organitzar en sis grups amb quatre o tres membres, la distribució dels alumnes va ajudar al desenvolupament de la tasca (indicador 4.2.2). La distribució en files formades per parelles d'alumnes també va facilitar la distribució dels alumnes dins l'aula (indicador 4.2.5). En termes generals, es va trobar que l'aula era prou adequada pel desenvolupament de la tasca (indicador 4.2.4). Les valoracions dels indicadors del component *condicions del grup i de l'aula* es troben en el rang superior de les puntuacions (**Taula 14.1.4.1**). A les notes de camp (**Annex 24**) es confirma l'assoliment exitós de la Tasca 1 per part dels alumnes, això permet assignar la màxima puntuació als tres indicadors del component *temps* de la *idoneïtat mediacional* (**Taula 14.1.4.1**). Finalment, les valoracions assolides pels indicadors de la *idoneïtat mediacional* es compara amb les puntuacions màximes d'aquests mateixos paràmetres dins un gràfic (**Figura 14.1.4.1**).

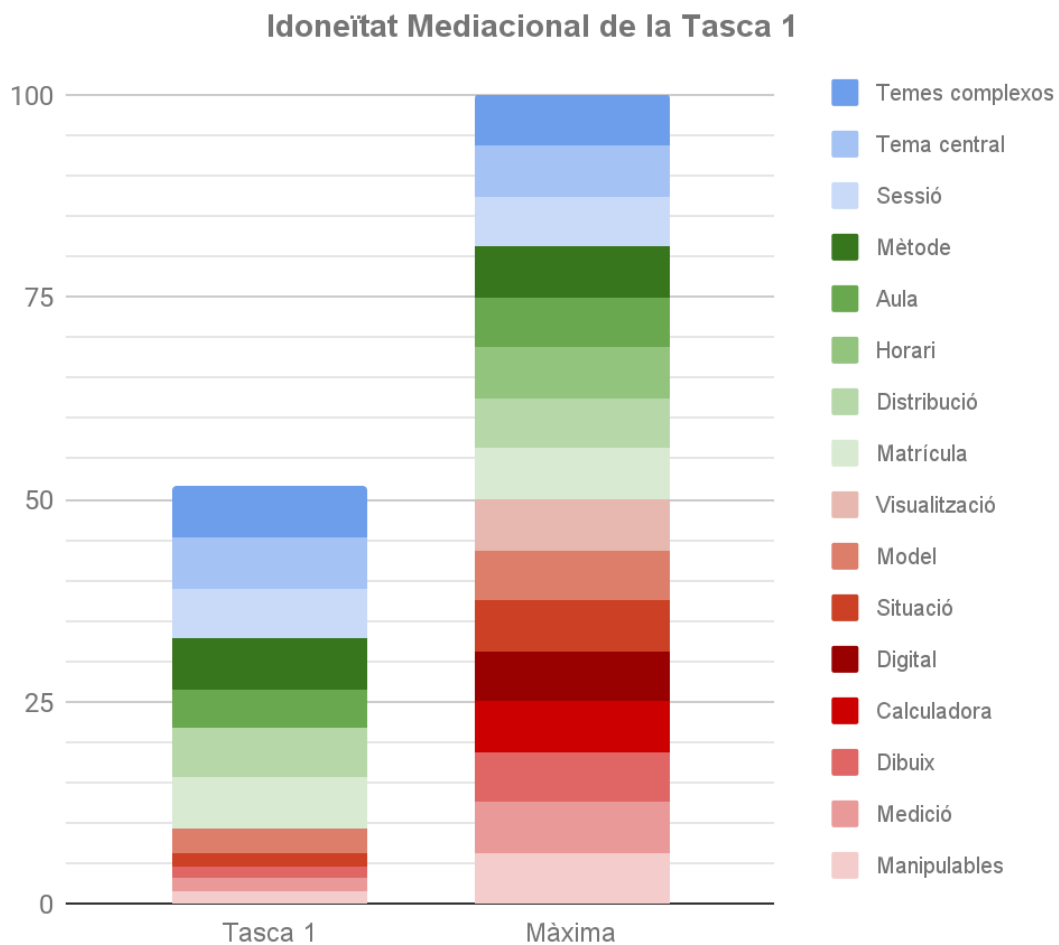


Figura 14.1.4.1. Comparació de la *idoneïtat mediacional* de la Tasca 1 i la *idoneïtat mediacional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.1.5. La idoneïtat afectiva de la Tasca 1

La dimensió *afectiva* de la *idoneïtat didàctica* es concretitza en tres components. La primera d'elles, els *interessos i necessitats*, no va assolir cap puntuació per ningú del tres indicadors que la descriuen. Segons es relata a les notes de camp (**Annex 24**), els alumnes no van mostrar gaire interès (indicador 5.1.1) i no es van recollir evidències de la identificació de la utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes (indicador 5.1.2) o professionals (indicador 5.1.3) (**Taula 14.1.5.1.**).

Taula 14.1.5.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat afectiva de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	0
	5.1.2 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	0
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	0
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?	0
	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	0,5
	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ajuda a promoure l'autoestima?	0
	5.3.2 Aquesta tasca ajuda a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	0
	5.3.3 Aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	0
	5.3.4 Aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	1

Font: Elaboració pròpia.

Respecte del component *actituds*, només hi ha referència en les notes de camp (**Annex 24**) a la cerca d'igualtat en adreçar els raonaments cap al grup sencer, però el fet de demanar un representant de cada grup per fer la construcció física de l'octaedre va deixar fora de l'activitat a la major part de la classe. Aleshores, aquest indicador 5.2.2 es valora amb la meitat del total dels punts. L'indicador que sí va assolir el màxim compliment és aquell que es refereix a la consideració igualitària i sense judicis dels arguments dels alumnes (indicador 5.2.3) (**Taula 14.1.5.1.**).

En l'àmbit del component de les *emocions*, l'únic indicador assolit ha estat el 5.3.4 que detalla l'èmfasi en la precisió. Això es justifica amb els registres de mides que van fer els alumnes en fer el dibuix geomètric dels triangles equilàters (**Taula 14.1.5.1.**).

La representació gràfica dels valors assolits pels indicadors dels components de la *idoneïtat afectiva* de la Tasca 1 es compara amb els valors màxims d'aquesta mateixa dimensió (**Figura 14.1.5.1.**).

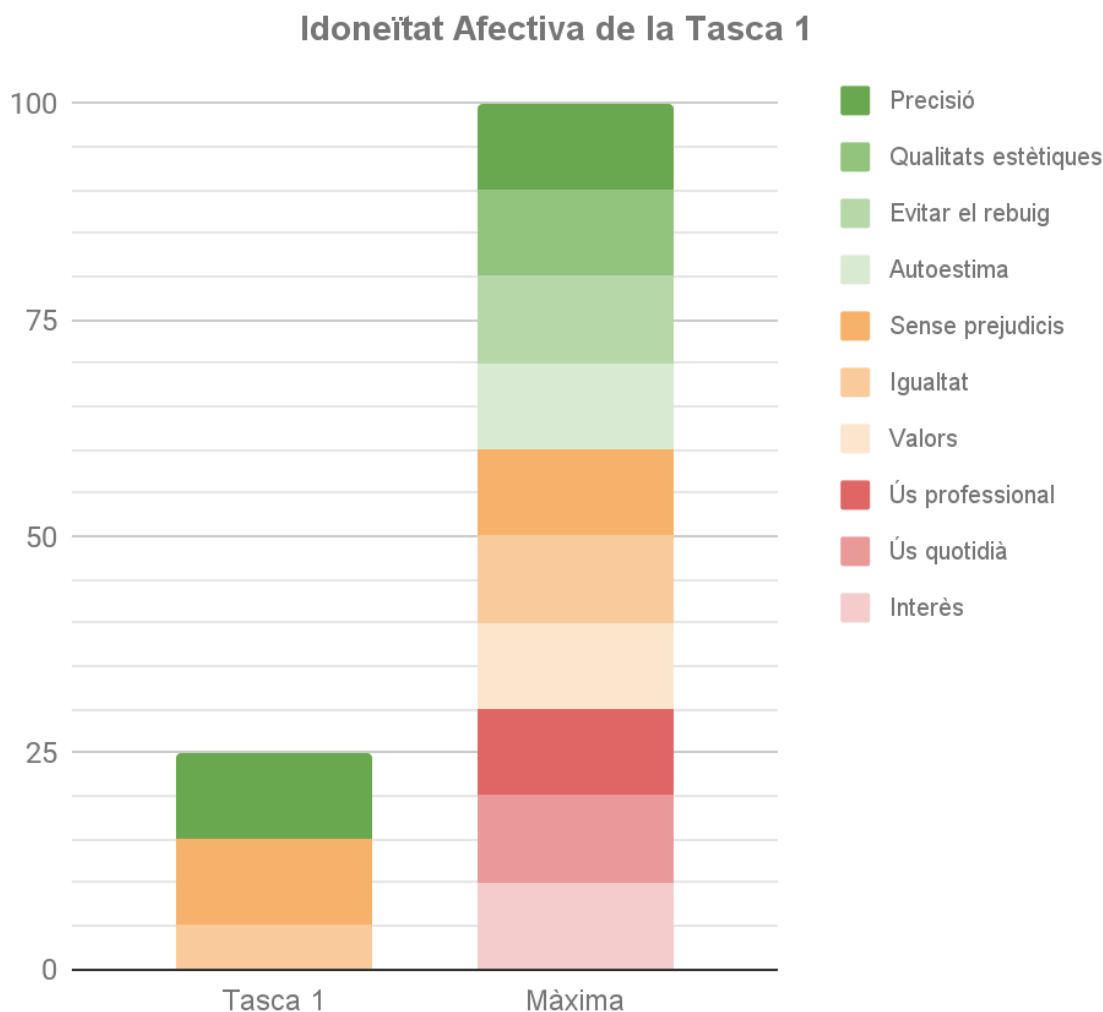


Figura 14.1.5.1. Comparació de la *idoneïtat afectiva* de la Tasca 1 i la *idoneïtat afectiva* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.1.6. La idoneïtat ecològica de la Tasca 1

La *idoneïtat ecològica* de la Tasca 1 es defineix en quatre components. La primera d'elles s'anomena *adaptació al currículum*. A partir de l'anàlisi dels documents institucionals (GenCat, 2017a) es veu que el disseny curricular de la Tasca 1 (**Annex 7**) té com a referència els continguts curriculars del primer curs d'ES (**Annex 1**). Per tant, els indicadors 6.1.1, 6.1.2 i 6.1.3 es valoren amb la màxima puntuació (**Taula 14.1.6.1.**). Les *connexions intra i interdisciplinars* de la Tasca 1 només es troben entre continguts de l'àmbit matemàtic. Per aquesta raó, només hi ha valoració pel primer indicador d'aquest component, el 6.2.1 (**Taula 14.1.6.1.**)

Taula 14.1.6.1.

Valoració dels indicadors d'adoneïtat ecològica de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	0
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	0
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	0
Innovació didàctica	6.4.1 S'han aplicat temes coneguts per arribar a contingut nou?	1
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0
	6.4.3 S'apliquen noves mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0,5
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0

Font: Elaboració pròpia.

La narrativa de la implementació de la Tasca 1 que se'n recull a les notes de camp (**Annex 24**), es va ometre el context de l'activitat. Per tant, l'*adaptació socioprofessional i cultural* de la tasca es va deixar fora i amb això també va desaparèixer tota valoració d'aquest component (**Taula 14.1.6.1.**).

Els únics dos indicadors del component *innovació didàctica* que van assolir puntuació han sigut el 6.4.1. i 6.4.3. El primer d'aquests indicadors fa referència a l'aplicació de continguts previs per arribar a continguts nous. S'interpreta que la capacitat de concloure la Tasca 1 és un argument per valorar amb la màxima puntuació aquest indicador. Això també recolza l'assignació de 0,5 punts per a l'indicador 6.4.3, referit a l'aplicació de noves mètodes d'avaluació (**Taula 14.1.6.1.**).

Es tanca l'anàlisi de la dimensió *ecològica* de la *adoneïtat didàctica* de la Tasca 1 amb la comparació entre les valoracions obtingudes i les màximes per als indicadors dels components d'aquesta adoneïtat (**Figura 14.1.6.1.**).

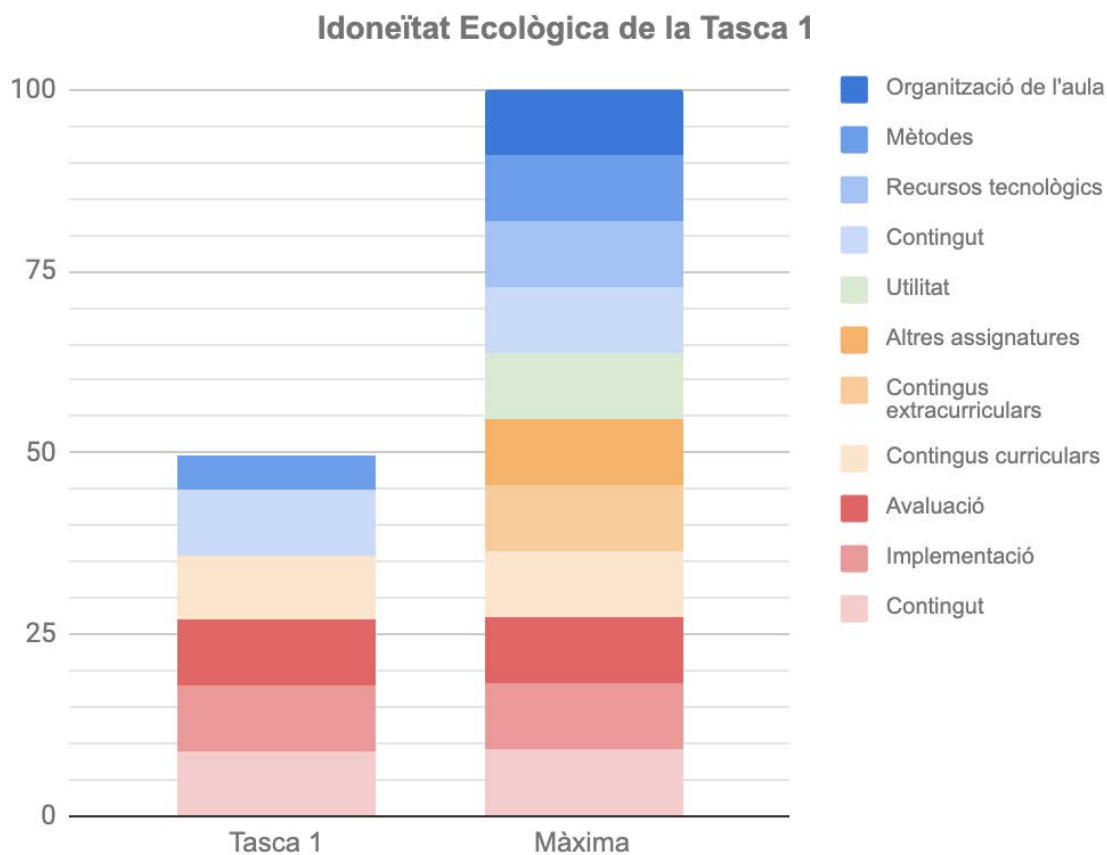


Figura 14.1.6.1. Comparació de la *idoneïtat ecològica* de la Tasca 1 i la *idoneïtat ecològica* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.1.7. La *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1

En ajuntar les valoracions de tots els indicadors de cadascun dels components de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* per a la Tasca 1 es pot establir una comparació amb la configuracions d'aquest components quan els indicadors arriben al màxim nivell d'assoliment (**Figura 14.1.7.1.**).

Una nova representació gràfica per a la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1 prové de l'agrupació dels components que integren cadascuna de les sis dimensions d'*idoneïtat didàctica* (**Figura 14.1.7.2.**).

Un esquema global del que és la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1 prové de la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013), amb la qual es compara el nivell d'assoliment de les sis dimensions. Aquest gràfic radial s'obté d'una nova agrupació: la suma de les valoracions dels indicadors de les components de cadascuna de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* (**Figura 14.1.7.3.**).

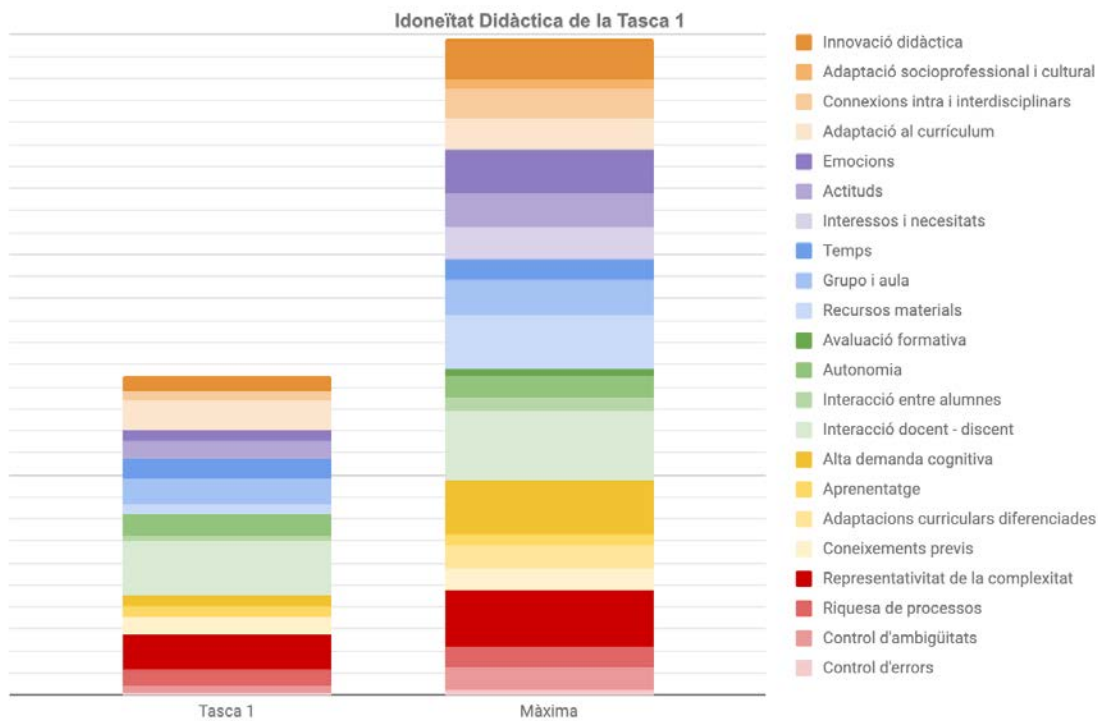


Figura 14.1.7.1. Comparació dels components de la idoneïtat didàctica de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima.

Font: Elaboració pròpia.

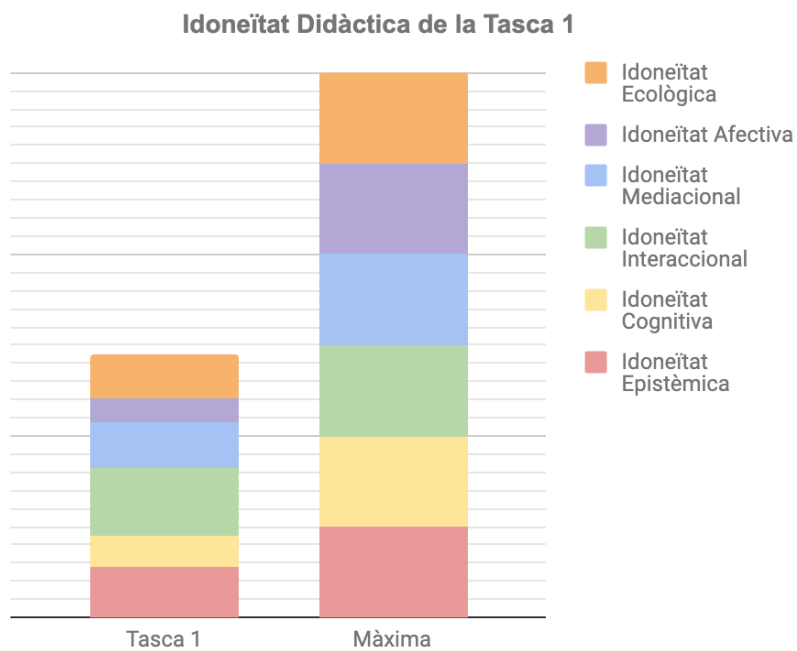


Figura 14.1.7.2. Comparació de les dimensions d'idoneïtat didàctica de la Tasca 1 i d'idoneïtat didàctica màxima.

Font: Elaboració pròpia.

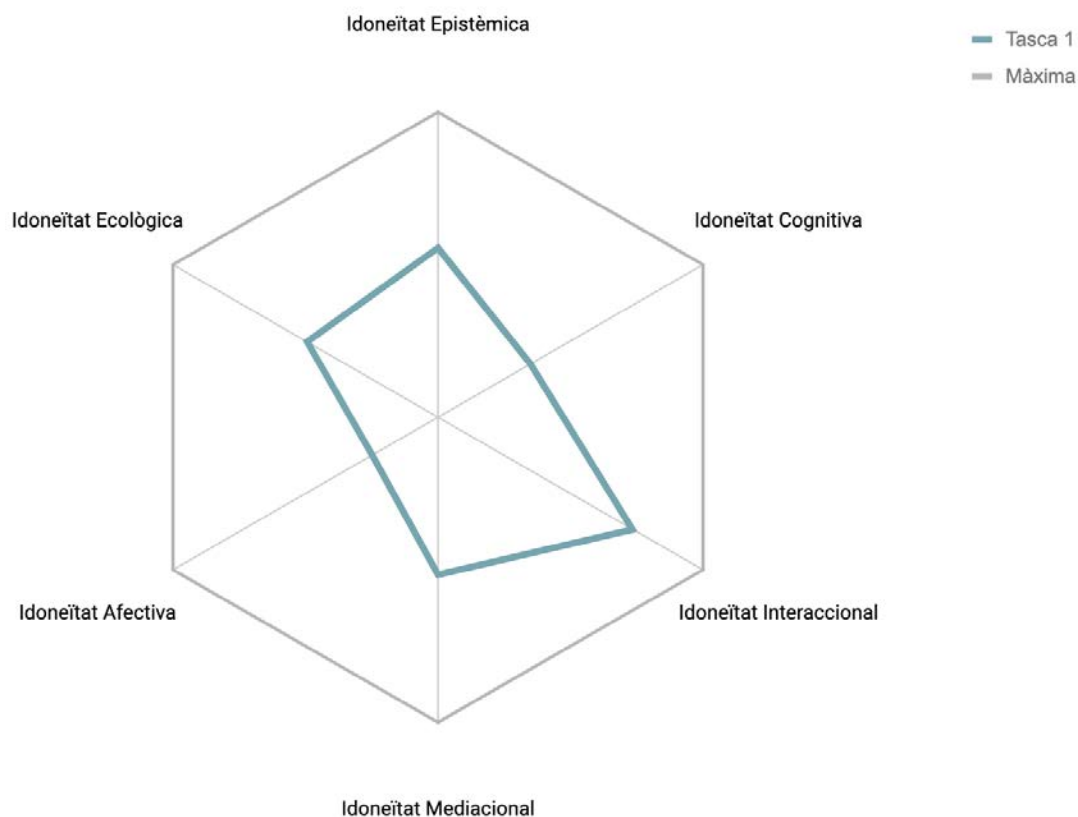


Figura 14.1.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

14.2. Les dimensions de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 2

L'anàlisi didàctica de la Tasca 2, utilitzant els indicadors dels components de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* prové de l'exploració del disseny didàctic de la tasca (**Annex 11**), el full d'instruccions adreçat cap als alumnes (**Annex 8**), el full d'orientacions adreçat al facilitador de la tasca (**Annex 10**) i les notes de camp (**Annex 25**) (**Figura 14.2.1.**).

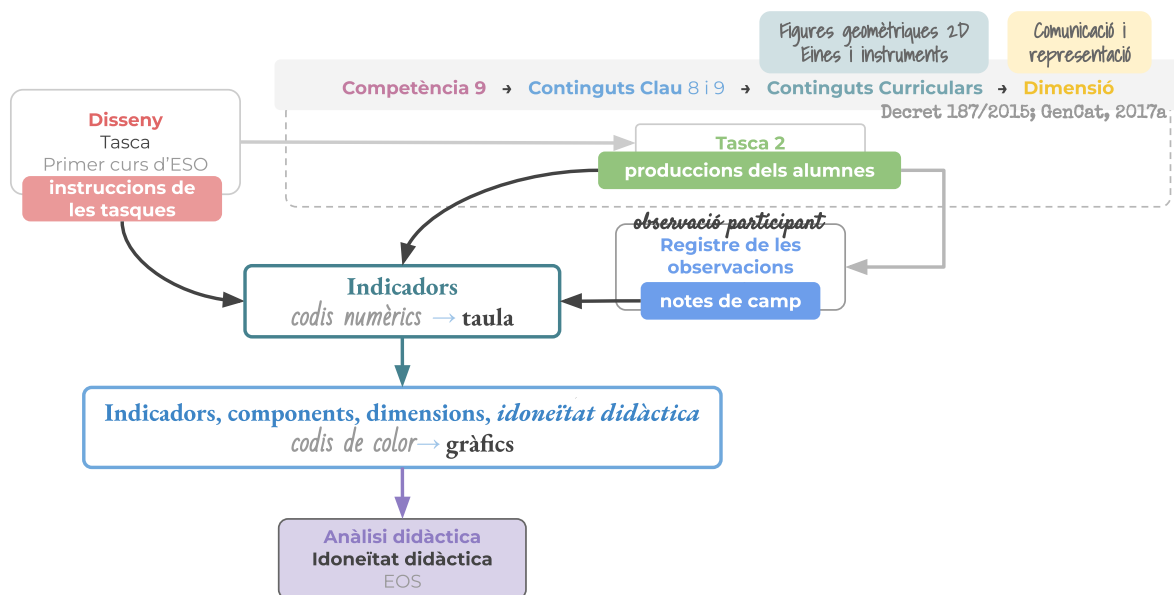


Figura 14.1.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades i les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

14.2.1. La idoneïtat epistèmica de la Tasca 2

La *idoneïtat epistèmica* de la Tasca 2 es caracteritza a partir de la valoració dels indicadors dels quatre components d'aquesta dimensió. En primer terme, s'analitza el component *control d'errors*. Les notes de camp (**Annex 25**) mostren que els facilitadors de la tasca, l'autora d'aquest treball de recerca i el professor titular de la classe, van orientar els alumnes amb les seves preguntes per tal de tenir control del correcte desenvolupament de les pràctiques matemàtiques. Però el baix índex d'èxit dels alumnes justifica que la puntuació assignada a aquest indicador sigui 0,5 (**Taula 14.2.1.1.**).

El component *control d'ambigüitats* es defineix en sis indicadors. Les notes de camp (**Annex 25**) reflecteixen que potser les definicions, els procediments i les explicacions no van ser explicats amb prou claredat perquè la facilitadora de la tasca, l'autora de la tesi, va repetir de grup en grup algunes instruccions rellevants. Això justifica l'assignació de la meitat dels punts pels indicadors 1.2.1 i 1.2.2. Per un altre costat, les notes de camp (**Annex 25**) recolzen l'assignació de la màxima puntuació per al indicador 1.2.6 perquè la facilitadora de la tasca va tenir cura en l'omissió de metàfores (**Taula 14.2.1.1.**).

Els indicadors de la *riquesa de processos*, tercer component de la *idoneïtat epistèmica*, van assolir la màxima puntuació en la seva majoria. El full d'instruccions donats als alumnes (**Annex 8**) i les notes de camp (**Annex 25**) són testimoni de l'aplicació de la modelització (indicador 1.3.1), la resolució de problemes (indicador 1.3.3.) i l'establiment de connexions (indicador 1.3.4.) com a processos rellevants i necessaris en la realització de la Tasca 2. Com que la facilitadora va demanar als grups que cada persona treballés amb un sol

cos geomètric (**Annex 25**), l'argumentació (indicador 1.3.2) es va treure de la Tasca 2 i en conseqüència la seva valoració va ser zero (**Taula 14.2.1.1.**).

Taula 14.2.1.1.

Valoració dels indicadors d'adequació epistèmica de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració	
Control d'errors	1.1.1 Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	0,5	
	1.2.1 S'han expressat les definicions amb claredat?	0,5	
	1.2.2 S'han expressat els procediments amb claredat?	0,5	
	Control d'ambigüitats	1.2.3 Les explicacions han sigut clares?	0,5
		1.2.4 Les comprovacions han sigut clares?	0
		1.2.5 Les demostracions han sigut clares?	0
1.2.6 S'ha omès l'ús de metàfores?		1	
Riquesa de processos	1.3.1 Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.2 Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?	0	
	1.3.3 Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?	1	
	1.3.4 S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?	1	
Representativitat de la complexitat	1.4.1 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,5	
	1.4.2 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,5	
	1.4.3 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,5	
	1.4.4 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,5	
	1.4.5 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,5	
	1.4.6 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,5	
	1.4.7 Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	
	1.4.8 Es fa ús de representacions verbals?	1	
	1.4.9 Es fa ús de representacions gràfiques?	1	
	1.4.10 Es fa ús de representacions simbòliques?	0,5	
	1.4.11 Es fa ús de diferents conversions?	0,25	
	1.4.12 Es fa ús de diferents tractaments?	0,25	

Font: Elaboració pròpia.

El component anomenat *representativitat de la complexitat* de la *adequació epistèmica* de la Tasca 2 requereix de la identificació de 12 indicadors. Els primers sis d'ells, els indicadors 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5 i 1.4.6, no es va assolir del tot perquè segons es veu a les notes de camp (**Annex 25**) i el full d'instruccions (**Annex 8**) les definicions, les propietats i els procediments que es volen explorar en aquesta sessió no arriben a ser del tot representatius del currículum del primer curs d'ESO (**Annex 1**) ni dels objectius de la Tasca 2 (**Annex 11**). L'exposició de la facilitadora de la tasca, l'autora de la tesi, justifica que es va fer ús de representacions verbals (indicador 1.4.8). Al full d'instruccions lliurat als alumnes (**Annex 8**) hi ha evidències de l'ús de

representacions gràfiques (indicador 1.4.10). Per tant, tots dos indicadors 1.4.8 i 1.4.10 es valoren amb u (Taula 14.2.1.1.). Les notes de camp (Annex 25) indiquen que els alumnes va requerir l'ús de representacions simbòliques (indicador 1.4.10), de diferents conversions (indicador 1.4.11) i tractaments (indicador 1.4.12). Com que la realització dels poliedres es va complicar, la puntuació dels indicadors 1.4.10, 1.4.11 i 1.4.12 no va ser la màxima. Es veu a la Taula 14.2.1.1. que l'indicador referit a les representacions simbòliques ha tingut una puntuació major que els altres dos perquè malgrat que els alumnes van fer representacions simbòliques, només uns pocs d'ells van assolir la construcció física del poliedre assignat.

La representació gràfica de les valoracions dels indicadors de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 2 es presenta en conjunt amb les puntuacions màximes d'aquests mateixos paràmetres per tal d'establir una comparació (Figura 14.2.1.1.).

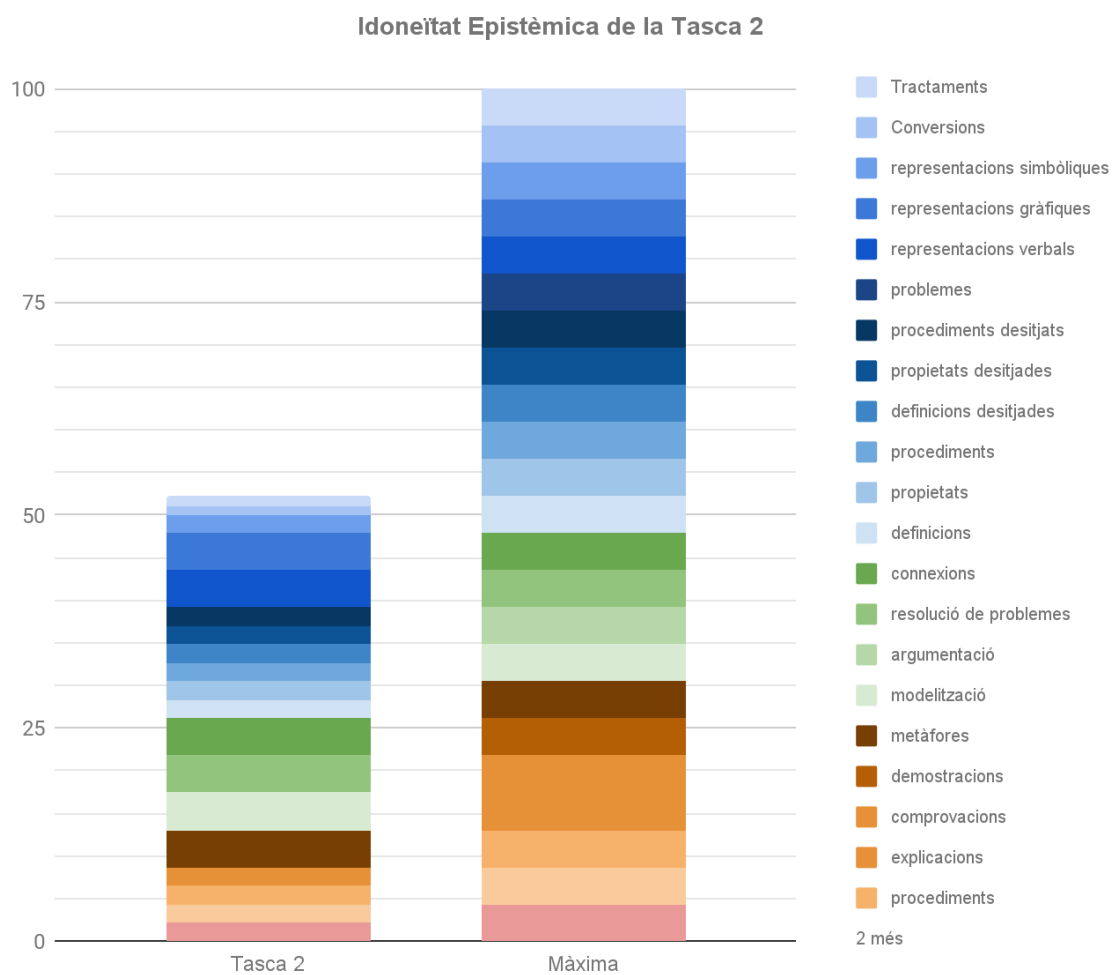


Figura 14.2.1.1. Comparació de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 2 i la idoneïtat epistèmica màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.2.2. La idoneïtat cognitiva de la Tasca 2

Les múltiples dificultats que van tenir la majoria dels alumnes per concloure la Tasca 2 de dibuix geomètric de desenvolupaments plans de poliedres (**Annex 25**) ha posat en evidència: la manca de coneixements previs dels alumnes (indicador 2.1.1), la impossibilitat dels alumnes per assolir el nivell de complexitat dels continguts de la tasca (indicador 2.1.2), la generalització de conceptes (indicador 2.4.1), l'establiment de connexions (indicador 2.4.2), la capacitat de fer canvis de representació (indicador 2.4.3), l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució (indicador 2.4.4) i la promoció de la metacognició (indicador 2.4.5) (**Taula 14.2.2.1.**).

Taula 14.2.2.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	0
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	0
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0
Aprentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	0
	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0
Alta demanda cognitiva	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	0
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	0
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	0
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	0

Font: Elaboració pròpia.

Al disseny didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**) no es van trobar evidències per donar cap puntuació als dos indicadors del component *adaptacions curriculars diferenciades*. Similarment succeeix amb l'únic indicador del component *aprenentatge*, no hi ha cap explicació per assignar puntuació sobre els mètodes d'avaluació (**Taula 14.2.2.1.**).

En portar a un mateix gràfic les valoracions obtingudes per als indicadors de la dimensió *cognitiva* en la implementació a l'aula de la Tasca 2 i les puntuacions màximes d'aquests paràmetres, s'obté una comparació entre l'exercici a l'aula i el cas ideal (**Figura 14.2.2.1.**).

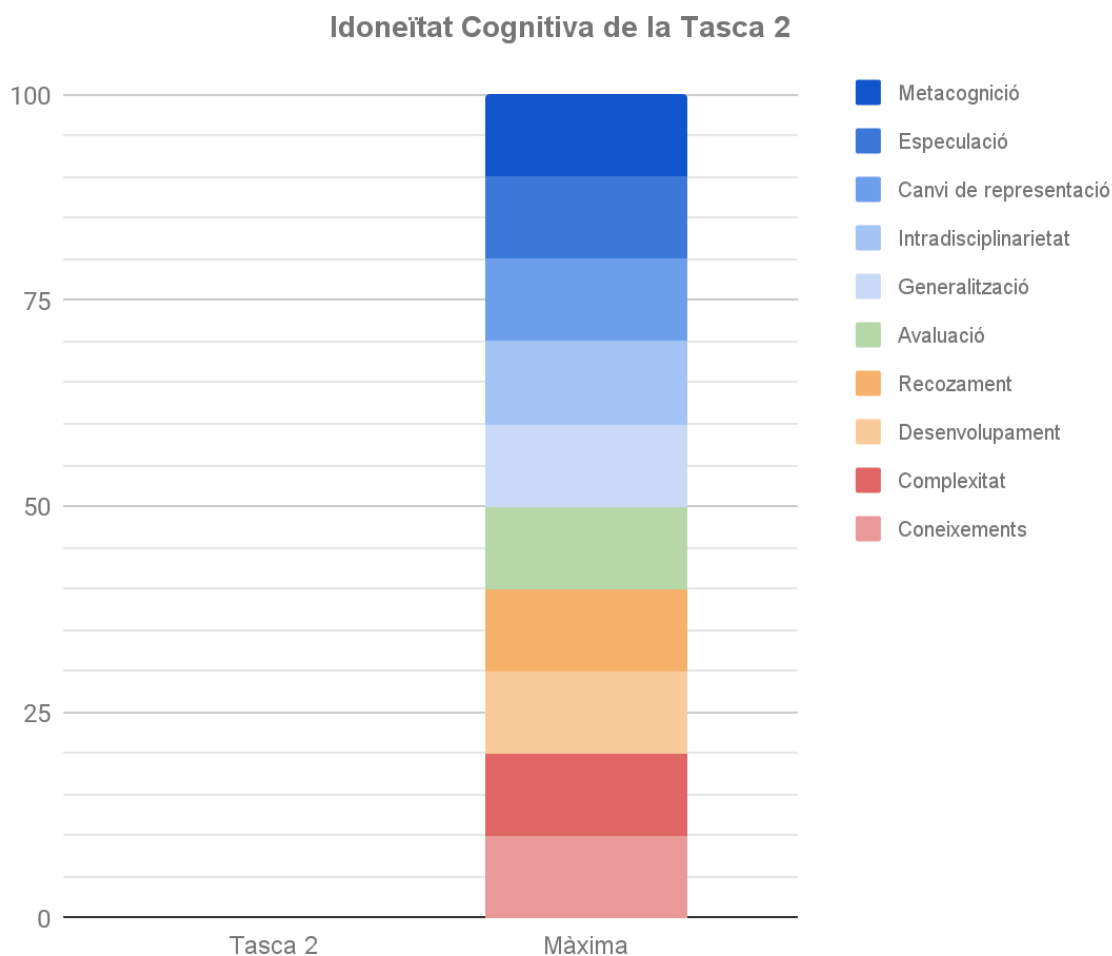


Figura 14.2.2.1. Comparació de la *idoneïtat cognitiva* de la Tasca 2 i la *idoneïtat cognitiva* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.2.3. La idoneïtat interaccional de la Tasca 2

Per analitzar la dimensió *interaccional* de la Tasca 2 es comença amb el component d'*interacció docent-discent*. Segons els registres de les notes de camp (**Annex 25**), la facilitadora de la tasca va presentar les explicacions de l'activitat amb claredat (indicador 3.1.1), ben organitzada (indicador 3.1.2), utilitzant expressions verbals adequades (indicador 3.1.3) i enfatitzant els conceptes clau (indicador 3.1.4). En el desenvolupament de la tasca, els dos facilitadors de la tasca (l'autora d'aquesta tesi i el professor titular de la classe) van identificar les expressions físiques dels alumnes que es trobaven en problemes per desenvolupar el dibuix geomètric (indicador 3.1.5). Per tant, tots aquests indicadors reben la màxima puntuació. Pel que fa a la interpretació i resolució de preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes (indicador 3.1.6), la conducció

apropiada de les contribucions dels alumnes que expressen conflictes cognitius (indicador 3.1.7), la utilització de recursos retòrics i racionals per involucrar els alumnes (indicador 3.1.8) i la facilitació de la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe (indicador 3.1.10) van ser puntuats amb 0,25 per la baixa participació dels alumnes (**Taula 14.2.3.1**).

Taula 14.2.3.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Interacció docent - discent	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1
	3.1.4 S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1
	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	0,25
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	0,25
	3.1.8 S'ha promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	0
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	0,25
	3.1.10 S'ha observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	0,25
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'ha observat que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?	0
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	0
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	0,25
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?	0,25
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?	0,25
Avaluació formativa	3.4.1 Es va realitzar una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	0

Font: Elaboració pròpia.

Com que la tasca es va assignar de manera individual, és a dir cada membre d'un mateix grup de treball era responsable de la construcció d'un poliedre, la component *interacció entre els alumnes* va ser nul·la (**Annex 25**). Conseqüentment, les valoracions dels indicadors d'aquest component també són zero (**Taula 14.2.3.1**). Els alumnes van treballar de manera autònoma, però van fer moltes preguntes als facilitadors (**Annex 25**). Llavors, les exploracions (indicador 3.3.1), formulacions (3.3.2) i valoracions (3.3.3) dels alumnes van ser molt limitades. Això es mostra amb les baixes puntuacions assignades als indicadors del component *autonomia* (**Taula 14.2.3.1**). Portant a un gràfic de barres les puntuacions de la implementació

de la Tasca 2 i les puntuacions màximes dels indicadors de la *idoneïtat interaccional* s'obté la comparació del cas real i el cas ideal (**Figura 14.2.3.1**).

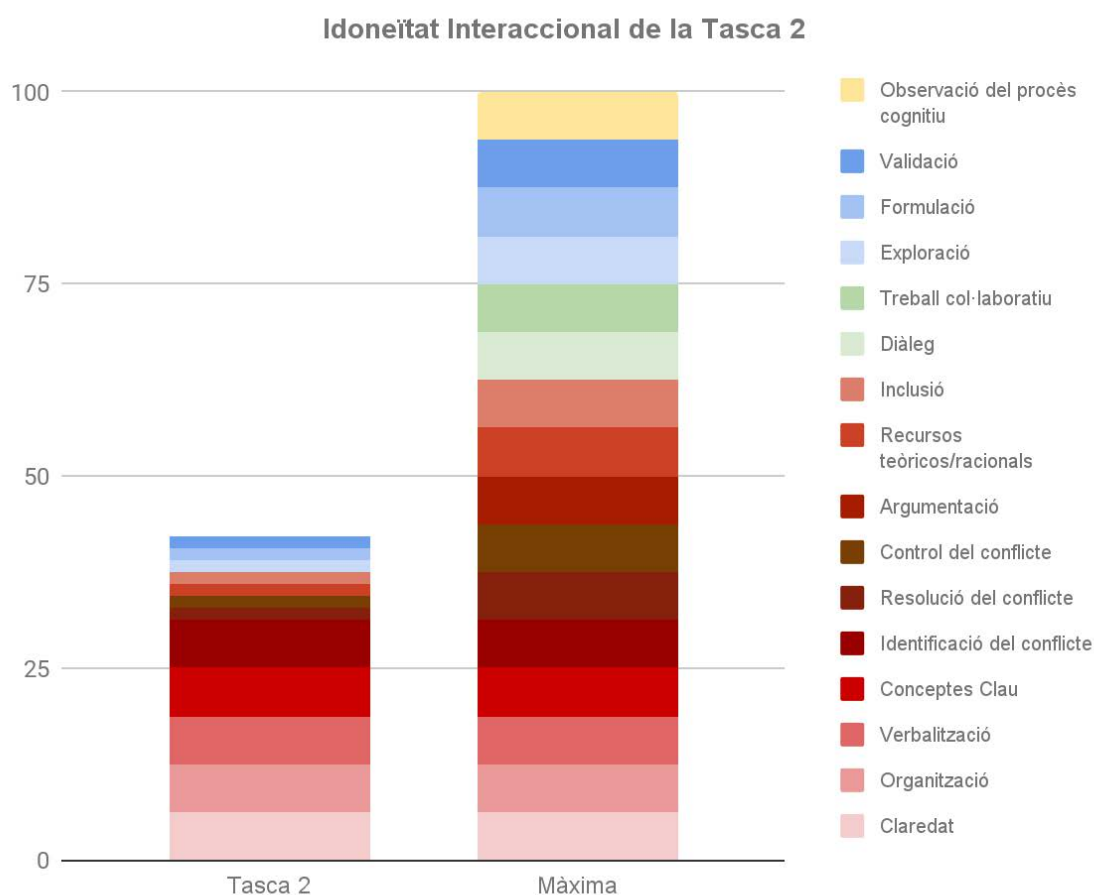


Figura 14.2.3.1. Comparació de la *idoneïtat interaccional* de la Tasca 2 i la *idoneïtat interaccional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.2.4. La idoneïtat mediacional de la Tasca 2

Les evidències per a la valoració dels indicadors dels components de la *idoneïtat mediacional* de la Tasca 2 provenen de les notes de camp (**Annex 25**). Per analitzar el component *recursos materials*, s'ha vist que els materials (indicador 4.1.1), els instruments de mesura (indicador 4.1.2) i les eines de dibuix geomètric (indicador 4.1.3) van ajudar poc en l'utilització de llenguatge de caire geomètric o matemàtic, en el desenvolupament dels procediments i en les argumentacions perquè els alumnes van treballar de manera individual i amb força dificultat. Això justifica que tots aquests indicadors són valorats amb 0,25 punts. El full d'instruccions lliurat als alumnes (**Annex 8**) i les explicacions de la facilitadora de la tasca per introduir i conduir la sessió (**Annex 25**) són proves de l'assoliment relatiu de l'ús de les definicions i propietats en situacions aplicades (indicador 4.1.6) i mitjançant un model (indicador 4.1.7). El reduït nombre d'alumnes

que van terminar l'activitat (**Annex 25**) recolza el baix assoliment del darrer indicador del component *recursos materials*: la visualització de les definicions i propietats (**Taula 14.2.4.1**).

Taula 14.2.4.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0,5
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0,5
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0,5
	4.1.4 La calculadora ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	0,5
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	0,5
	4.1.8 S'han pogut visualitzar les definicions i propietats?	0,25
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre d'alumnes que han participat de la tasca t'ha ajudat a aprendre?	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1
	4.2.3 L'horari de la classe és l'adequat?	0
	4.2.4 L'aula és apropiada per el desenvolupament de la tasca?	1
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?	0
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	0
	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?	0,25

Font: Elaboració pròpia.

A l'**Annex 25** es registra el nombre d'alumnes de la classe (indicador 4.2.1), la distribució dels alumnes a l'aula en files de parelles (indicador 4.2.2). Per aquesta raó també es pot dir que, al igual que aquests dos indicadors, l'aula és apropiada pel desenvolupament de la tasca (indicador 4.2.4) i que la distribució dels alumnes va afavorir l'activitat duta a terme (indicador 4.2.5). Aleshores, tots aquests indicadors del component *condicions del grup i de l'aula* es puntuen amb el màxim nivell. Pel contrari de l'horari (indicador 4.2.3), el qual es van puntuar amb zero per tractar-se d'una sessió de divendres a última hora (**Taula 14.2.4.1**).

Respecte del component *temps*, el baix nombre d'alumnes que van aconseguir fer la construcció física del poliedre assignat (**Annex 25**) fa que les puntuacions dels tres indicadors d'aquest paràmetre tinguin valoracions nul·les o molt baixes (**Taula 14.2.4.1**).

Portant les valoracions de la **Taula 14.2.4.1.** al gràfic on es presenten les puntuacions màximes dels indicadors de la *idoneïtat mediacional* (**Figura 14.2.4.1.**) es produeix una comparació entre els resultats de la implementació de la Tasca 2 a l'aula i el cas idealitzat d'aquesta dimensió de la *idoneïtat didàctica*.

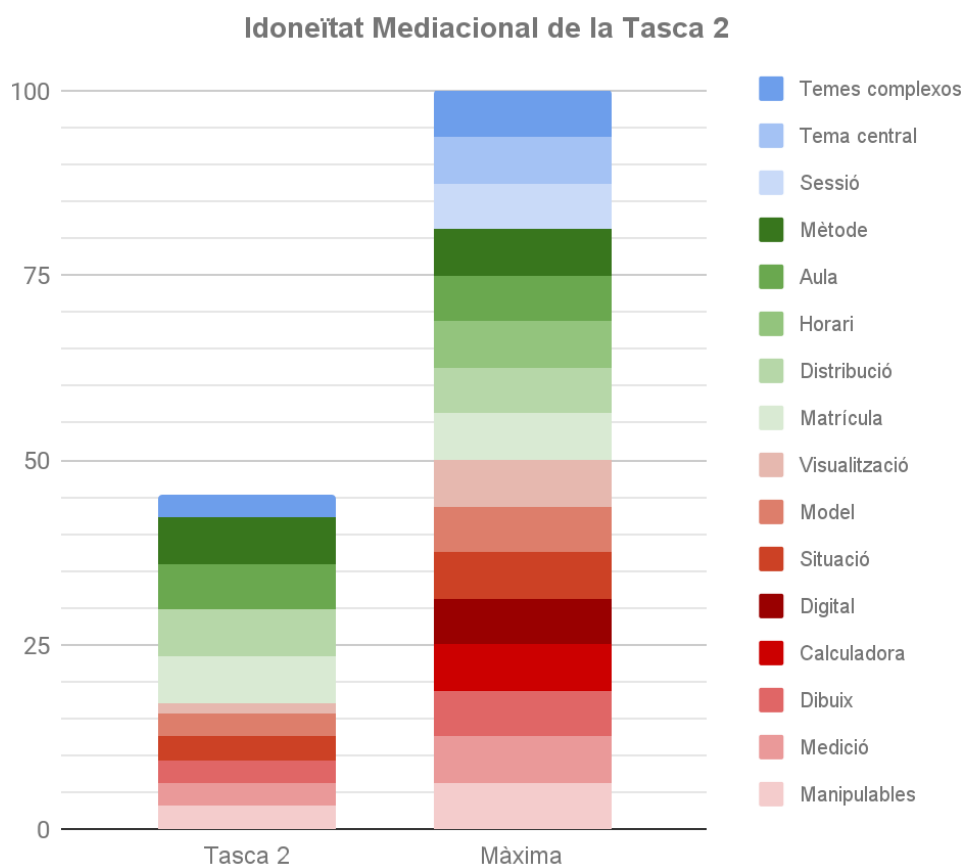


Figura 14.2.4.1. Comparació de la *idoneïtat mediacional* de la Tasca 2 i la *idoneïtat mediacional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.2.5. La idoneïtat afectiva de la Tasca 2

En relació amb la valoració de la dimensió *afectiva* de la Tasca 2, les notes de camp (**Annex 25**) només donen evidències del tractament igualitari (indicador 5.2.2) i de la consideració dels arguments dels alumnes sense fer cap judici (indicador 5.2.3) (**Taula 14.2.5.1**).

Les dades de la **Taula 14.2.5.1.** que mostren els valors absoluts pels indicadors dels components de la *idoneïtat afectiva* de la Tasca 2 es comparen amb el cas idealitzat, quan tots els indicadors arriben al màxim nivell de concreció (**Figura 14.2.5.1**).

Taula 14.2.5.1.

Valoració dels indicadors d'adoneïtat afectiva de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	0
	5.1.2 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	0
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	0
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?	0
	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	1
	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ha ajudat a promoure la teva autoestima?	0
	5.3.2 Aquesta tasca ha ajudat a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	0
	5.3.3 Aquesta tasca enfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	0
	5.3.4 Aquesta tasca enfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	0

Font: Elaboració pròpia.

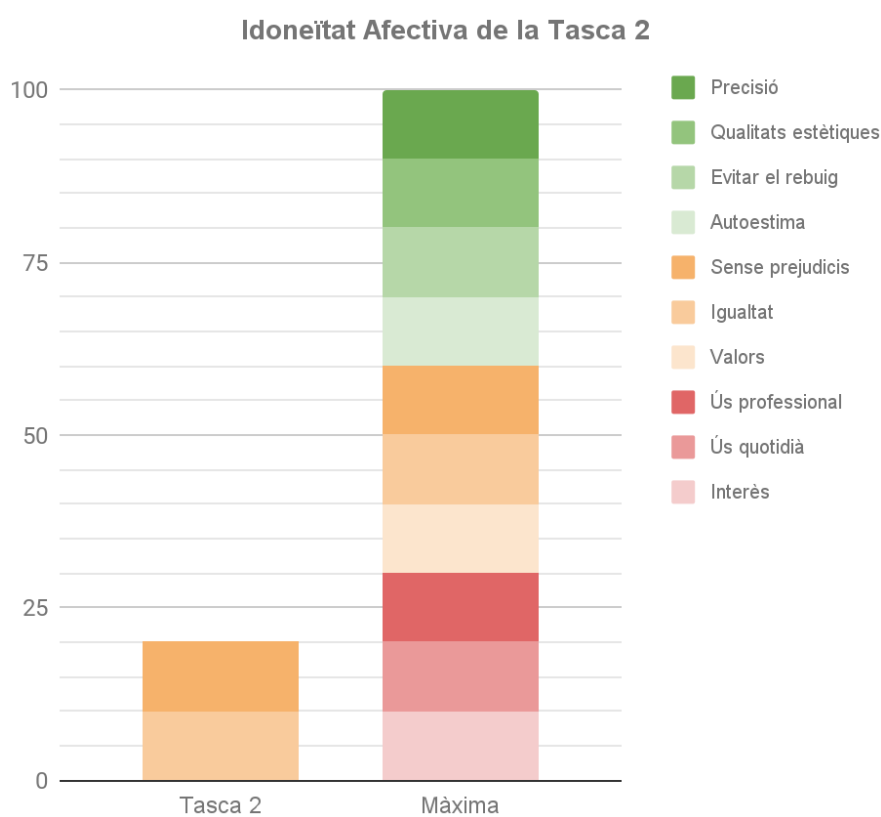


Figura 14.2.5.1. Comparació de la idoneïtat afectiva de la Tasca 2 i la idoneïtat afectiva màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.2.6. La idoneïtat ecològica de la Tasca 2

Al igual que per a la Tasca 1, la dimensió *ecològica* es relaciona amb els mateixos continguts curriculars del primer curs d'ESO (GenCat, 2017a). Segons consta a l'**Annex 1**, tots els indicadors del component *adaptació al currículum* tenen la màxima valoració perquè corresponen al curs que pertoca a la classe en la qual s'implementin (**Annex 25**).

Citant les mateixes referències, l'**Annex 1** i l'**Annex 25**, l'explicació de la facilitadora de la tasca qui va relacionar la construcció de cossos geomètrics amb la representació en tres dimensions del mapamundi (**Annex 25**) fa que hi hagi evidència per assignar la valoració màxima als indicadors el component *connexions intra i interdisciplinars*. A més, la contribució del professor titular de la classe fent menció de les dificultats que hi ha a la geografia per establir representacions físiques acurades de la Terra (**Annex 25**), justifica la valoració de l'únic indicador del component *adaptació socioprofessional i cultural* (**Taula 14.2.6.1**).

Taula 14.2.6.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat ecològica de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	1
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	1
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	1
Innovació didàctica	6.4.1 Has aplicat temes que ja coneixies per arribar a contingut nou?	0
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0
	6.4.3 S'apliquen nous mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0

Font: Elaboració pròpia.

La representació gràfica dels valors dels indicadors dels components de la dimensió *ecològica* de la Tasca 2, en comparació amb les puntuacions màximes d'aquests paràmetres permet visualitzar el contrast entre el cas real i el cas idealitzat (**Figura 14.2.6.1**).

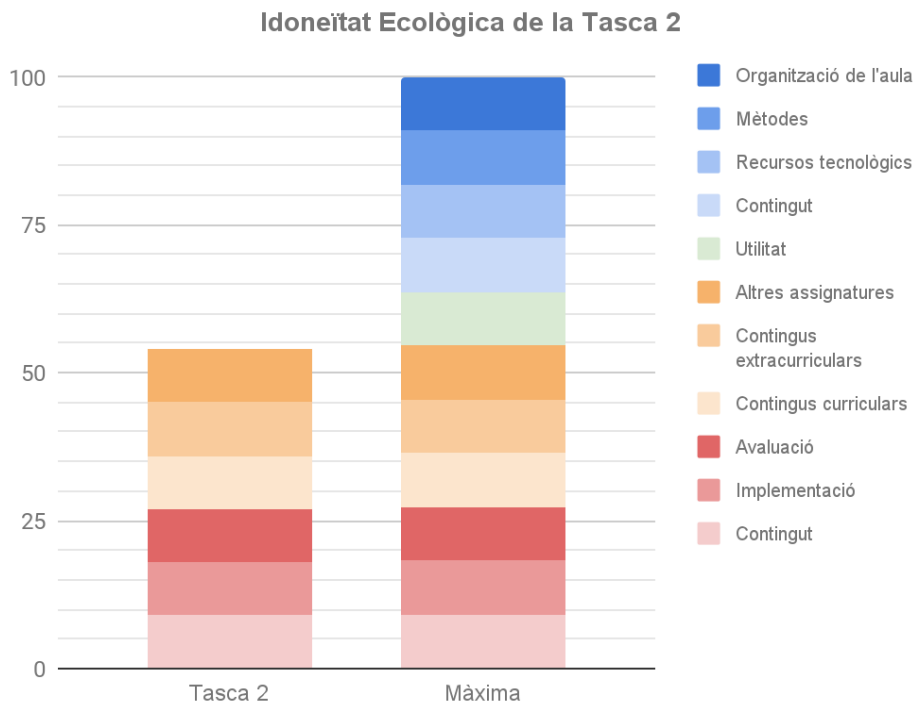


Figura 14.2.6.1. Comparació de la *idoneïtat ecològica* de la Tasca 2 i la *idoneïtat ecològica* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

14.2.7. La *idoneïtat didàctica* de la Tasca 2

Per caracteritzar la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 2 de manera general s'agrupen els indicadors dels components de cadascuna de les seves dimensions: *epistèmica*, *cognitiva*, *interaccional*, *mediacional*, *afectiva* i *ecològica*. La comparació es fa possible mitjançant la integració, dins la mateixa gràfica, dels valors màxims dels indicadors (**Figura 14.2.7.1.**).

Per donar rellevància a les dimensions de la *idoneïtat didàctica*, s'agrupen tots els components que conformen una mateixa dimensió. El contrast, un altre cop, es fa possible a partir de la consideració dels valors màxims que pertanyen a cadascuna de les sis idoneïtats (**Figura 14.2.7.2.**).

Finalment, la metàfora de l'hexàgon proposada per Godino (2013) és una eina de visualització global de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 2 (**Figura 14.2.7.3.**).

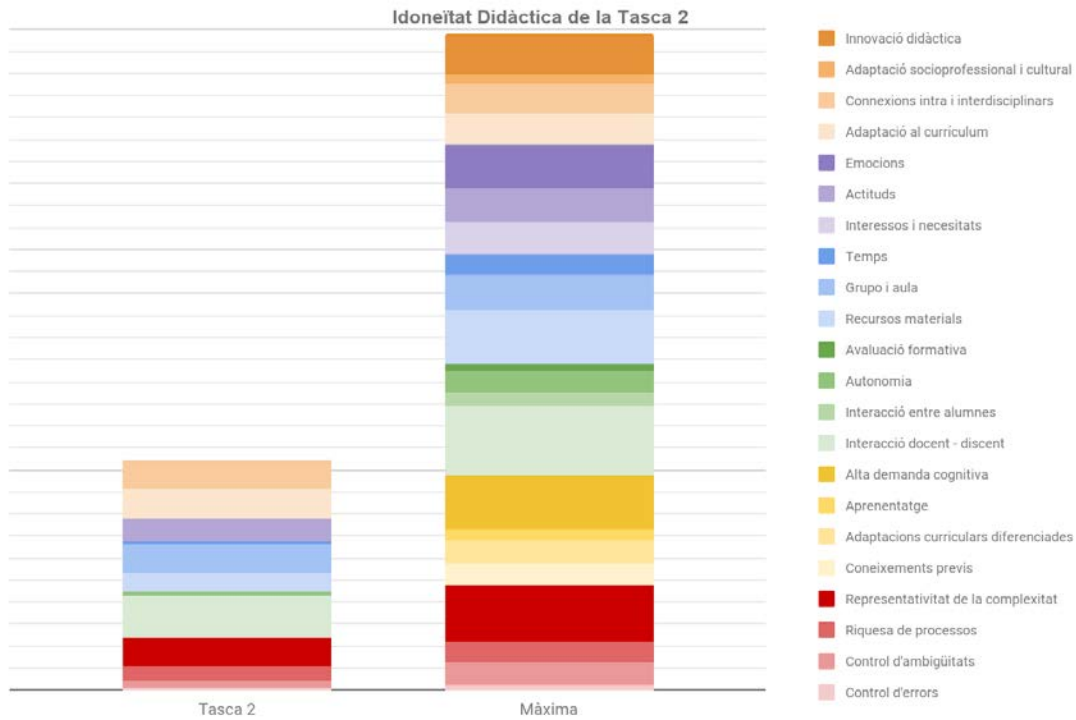


Figura 14.2.7.1. Comparació de les components de les dimensions de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

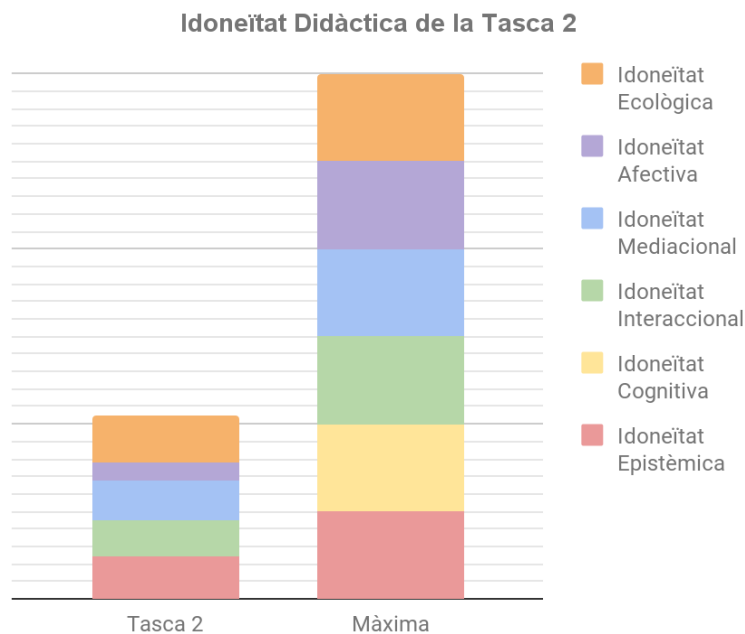


Figura 14.2.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

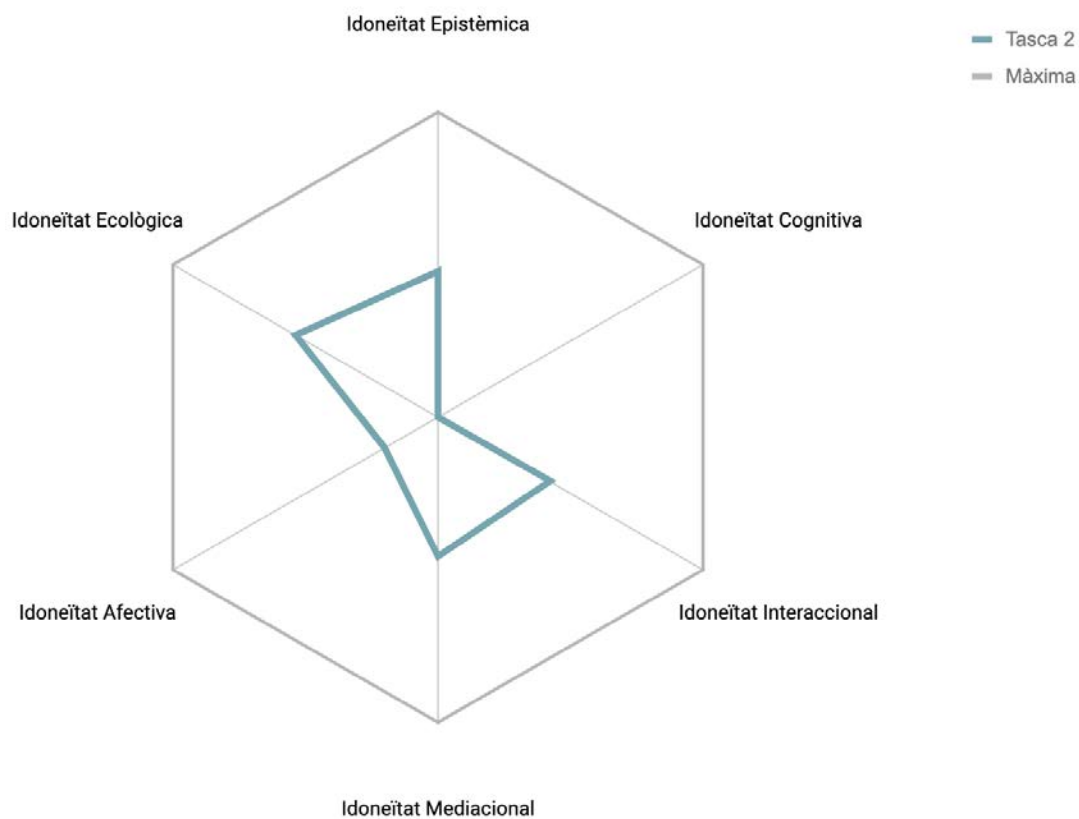


Figura 14.2.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima o ideal segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

Cinquena Part. Discussió dels resultats

Capítol 15. Discussió de les configuracions epistèmiques

Les configuracions epistèmiques que mostren la relació entre els objectes matemàtics primaris de les activitats matemàtiques (Godino, Batanero i Font, 2009) que integren el treball de recerca es presenten en dos moments: (1) a priori, per establir els objectes matemàtics que s'espera sorgeixin en la implementació de les tasques, i (2) a posteriori, per reconèixer tots els objectes matemàtics sorgits en implementar les tasques a l'aula (**Figura 15.1.**). En aquest capítol es contrasten aquests dos instruments d'anàlisi didàctica de l'EOS per a cadascuna de les dues tasques de dibuix geomètric portades a l'aula per identificar i comparar el llenguatge matemàtic, les situacions-problema, les definicions, els procediments, les propietats i els arguments que s'esperava poguessin sorgir en la implementació i que finalment se'n van observar.

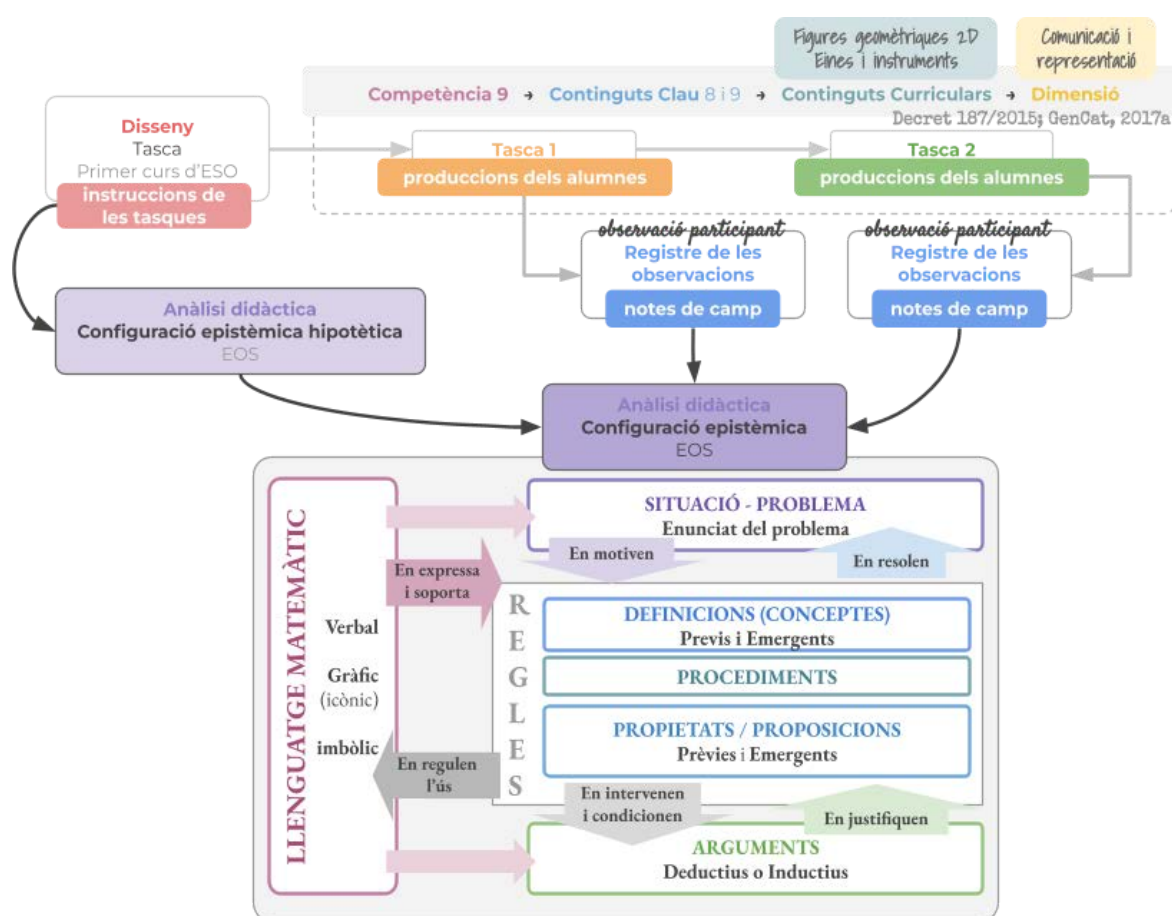


Figura 15.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, la configuració epistèmica hipotètica i la configuració epistèmica dels objectes primaris de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

15.1. Discussió de les configuracions epistèmiques de la Tasca 1

Al **Capítol 10** d'aquest document es troben les descripcions de l'obtenció dels objectes matemàtics primaris que integren la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1. Mentre que al **Capítol 12** és la informació relacionada amb la identificació dels objectes matemàtics primaris de la configuració epistèmica de la Tasca 1 al moment de la seva implementació a l'aula. En determinar la configuració epistèmica hipotètica i la configuració epistèmica produïda de la implementació de la Tasca 1 es pretén fer ús d'aquesta eina d'anàlisi didàctica de l'EOS per orientar la reflexió del professor sobre la seva pròpia pràctica (Font, Planas i Godino, 2010).

En comparar el primer objecte matemàtic primari de les configuracions epistèmiques, les situacions-problema (**Taula 15.1.1.**), es pot observar una primera diferència: la manca de contextualització. Tot i que al full d'instruccions lliurat de la Tasca 1 (**Annex 7**) lliurat als alumnes es registra un context, el comportament dels alumnes va fer que el facilitador (l'autora d'aquest treball de recerca) avancés en el desenvolupament de l'activitat per tal de mantenir el control de la classe, com es recull a les notes de camp (**Annex 14**).

Taula 15.1.1.

Comparació de les situacions-problema de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
Plantejar el problema de construcció grupal d'un octaedre als alumnes.	Plantejar el problema de construcció grupal d'un octaedre als alumnes (sense context).

Font: Elaboració pròpia.

La creació de pautes d'interacció que ajudin als alumnes en el seu procés d'estudi és una funció cabdal del docent o facilitador (Loef Franke, Kazemi i Battey, 2007). Segons s'observa, la variació de les situacions-problema de la Tasca 1 (**Taula 15.1.1.**) va incidir en el següent objecte primari de les configuracions epistèmiques, les definicions o conceptes (**Taula 15.1.2.**). En primer lloc, conceptes relacionats amb el context de la Tasca 1 (**Annex 7**) considerats a la configuració epistèmica hipotètica (**Taula 15.1.2.**) van desaparèixer donant peu al sorgiment de conceptes relacionats amb l'orientació del dibuix geomètric presentada als alumnes per ajudar-los a resoldre els seus dubtes (**Annex 14**).

Taula 15.1.2.

Comparació de les definicions (conceptes) de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
globus, cossos geomètrics, model, figura, vuit, igual, parts iguals, exactament el mateix, reunir Emergents: desenvolupament pla i octaedre	octaedre, figures geomètriques, forma, cares, triangles, triangles equilàters, iguals, mateixes mides, altura del triangle, altura del full, informació, dibuixar, figura Emergents: costats més llargs del full, costats del triangle equilàter, punt mig, longitud del costat, extrems i costat oposat del full

Font: Elaboració pròpia.

En relació amb el llenguatge matemàtic verbal i escrit, la configuració epistèmica de la implementació de la Tasca 1 mostra que els registres dels alumnes són col·loquials (**Annex 14**) i que els termes que s'esperava trobar als diàlegs dels alumnes no es van assolir. Però també s'ha identificat un aspecte que va quedar fora de tota consideració: que els alumnes fan registre de les mides que prenen quan fan dibuix geomètric (**Taula 15.1.3.**).

Taula 15.1.3.

Comparació de les llengües matemàtic verbal/escrit de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
cossos geomètrics, model, figura, vuit, igual, parts iguals, exactament el mateix, reunir, desenvolupament pla, octaedre, dades, informació numèrica donada, informació no numèrica donada i geometria	Verbal: aquí, allà, més lluny, més a prop, ratlla i està tort o torta Escrit: 42 cm, 21 cm

Font: Elaboració pròpia.

El llenguatge matemàtic gràfic (**Taula 15.1.4.**), les propietats/proposicions (**Taula 15.1.5.**) i els procediments (**Taula 15.1.6.**) són objectes matemàtics primaris que va mantenir similituds entre la seva descripció en la configuració epistèmica hipotètica i la configuració epistèmica produïda a partir de les dades de la implementació. Això es pot relacionar amb la intervenció de la facilitadora de la sessió, l'autora d'aquesta recerca, qui va pautar de manera molt concreta el dibuix geomètric a realitzar davant la impossibilitat de molts alumnes en fer-ho (**Annex 14**).

Taula 15.1.4.

Comparació de les llengüatges matemàtic gràfic de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
Representació gràfica icònica d'un octaedre en grisos Representació gràfica icònica d'un octaedre en verd amb transparències Desenvolupament pla d'un octaedre amb les cares diferenciades per colors	Representació gràfica icònica d'un octaedre en grisos Representació gràfica icònica d'un octaedre en verd amb transparències Triangles dibuixats pels alumnes

Font: Elaboració pròpia.

Taula 15.1.5.

Comparació de les propietats/proposicions de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
1. Identificar la forma de les cares d'un octaedre: triangles equilàters. 2. Les mides dels costats d'un triangle han de ser iguals per tal d'assegurar que s'ha dibuixat un triangle equilàter.	Prèvis: Identificar la forma de les cares d'un octaedre: triangles equilàters. Emergents: Les mides dels costats d'un triangle han de ser iguals per tal d'assegurar que s'ha dibuixat un triangle equilàter.

Font: Elaboració pròpia.

Taula 15.1.6.

Comparació de les procediments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
1. Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques. 2. Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització per a resoldre problemes. 3. Emprar regle, escaire i paper per dibuixar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter. 4. Reconstruir un cos geomètric (octaedre) a partir de les seves cares (triangles equilàters).	1. Trieu un dels costats més llargs del full per localitzar un dels costats del triangle equilàter. 2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identifiqueu el seu punt mig: com que la longitud del costat és 42 cm, el punt mig és a 21 cm de qualsevol dels seus extrems. 3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig. 4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full.

Font: Elaboració pròpia.

La intervenció de la facilitadora de la Tasca 1, l'autora d'aquesta tesi, també va impactar en el desenvolupament d'arguments per part dels alumnes (**Annex 14**). Un altre cop, la regulació del procés d'aprenentatge dels alumnes per part de la figura docent va generar arguments donats a la configuració epistèmica de la implementació de la Tasca que són diferents dels esperats identificats a la configuració epistèmica hipotètica (**Taula 15.1.7**).

Taula 15.1.7.

Comparació dels arguments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 1.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
1. L'ús d'eines tant de dibuix com de mesura és fonamental per quantificar les dades necessàries per treballar amb materials manipulatius com el paper. 2. Segons les eines disposades s'organitza l'estratègia de dibuix geomètric a seguir.	L'ús d'eines tant de dibuix com de mesura és fonamental per quantificar les dades necessàries per treballar amb materials manipulatius com el paper.

Font: Elaboració pròpia.

15.2. Discussió de la configuració epistèmica de la Tasca 2

De manera similar al que s'ha presentat a l'apartat previ, els objectes matemàtics primaris que intervenen en una activitat de caire matemàtic són utilitzats en la seva faceta hipotètica i d'implementació per a la Tasca 2 de dibuix geomètric d'aquest treball de recerca.

En primer terme, les situacions-problema de la configuració epistèmica de la implementació de la Tasca 2 és una versió simplificada del repte plantejat al full d'instruccions dels alumnes (**Annex 8**) amb la qual s'estableix el mateix objecte matemàtic primari per a la configuració epistèmica hipotètica (**Taula 15.2.1**). Aquesta diferència entre les descripcions de les situacions-problemes de la versió hipotètica comparada amb la versió sorgida de la implementació es justifiquen en les notes de camp (**Annex 17**) on es registra aquesta intervenció oral de la facilitadora de la tasca (l'autora d'aquesta tesi). Aleshores, la variació entre les dues versions pot atribuir-se a les adequacions fetes per la facilitadora en transformar el text del full d'instruccions al discurs verbalitzat. Aquesta transformació de les instruccions al llenguatge oral també va influir en la manca de correspondència exacta entre les definicions o conceptes de la configuració epistèmica hipotètica i la configuració epistèmica de la implementació de la Tasca 2 a l'aula (**Taula 15.2.2**). Es pot observar que alguns termes van ser omesos per part de la facilitadora. Però també és possible identificar la incongruència entre les definicions o conceptes emergents (**Taula 15.2.2**). Això demostra que els termes que s'esperava fossin externalitzats per part dels alumnes, a la configuració epistèmica hipotètica, van ser diferents i més senzills en implementar la tasca a l'aula.

Taula 15.2.1.

Comparació de les situacions-problemes de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
L'estudi d'un cos de tres dimensions com la Terra es simplifica quan es treballa en una dimensió. Els mapes són imatges idealitzades del que hi ha a la Terra, però representat sobre un pla. Com faries per passar d'un mapa que té forma plana a un cos geomètric de tres dimensions?	Trobar la millor representació en tres dimensions pel mapamundi mitjançant el dibuix del desenvolupament pla de diferents cossos geomètrics sobre la superfície del mapa.

Font: Elaboració pròpia.

Taula 15.2.2.

Comparació de les definicions (conceptes) de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
cos de tres dimensions, una dimensió, imatge idealitzada, pla, forma plana, cos geomètric, tres dimensions, cos geomètric de tres dimensions Emergents: desenvolupament pla, piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre	Prèvijs: tres dimensions, mapamundi, tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, desenvolupament pla, cos geomètric, superfície i mapa Emergents: pentàgon regular, compàs i cercles

Font: Elaboració pròpia.

El tercer objecte matemàtic primari de les configuracions epistèmiques, el llenguatge matemàtic verbal/ escrit, també marca diferències entre la versió hipotètica i la realitat viscuda a la implementació de la Tasca 2. A la **Taula 15.2.3.** s'aprecia la diferència numèrica entre la quantitat de termes identificats en la configuració epistèmica hipotètica (**Annex 8**) respecte amb aquells reconeguts a la implementació de la Tasca 2 (**Annex 17**). És de remarcar el sorgiment del terme "cercle" que es relaciona amb la construcció de polígons regulars i que no es va preveure en el plantejament del disseny didàctic de la Tasca 2 (**Annex 11**) i que com a resposta a les consultes dels alumnes es va identificar (**Annex 17**). La manca d'utilització de termes relacionats amb el mapamundi pot interpretar-se com a una descontextualització dels alumnes al moment de realitzar els traços. Això es recolza amb les produccions fetes pels estudiants, en les quals s'observa l'espai lliure del mapa deixat fora el desenvolupament pla dibuixat (**Annex 17**).

Taula 15.2.3.

Comparació del llenguatge matemàtic verbal/escrit de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 1 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
cos de tres dimensions, una dimensió, imatge idealitzada, pla, forma plana, cos geomètric, tres dimensions, cos geomètric de tres dimensions, desenvolupament pla, piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, "planisferio", "mapa físico - político"	tres dimensions, mapamundi, tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre, icosaedre, desenvolupament pla, cos geomètric, superfície, mapa, pentàgon regular, compàs i cercles

Font: Elaboració pròpia.

El llenguatge matemàtic gràfic de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 va ser superat en la configuració epistèmica obtinguda de l'estudi de la implementació de la mateixa tasca (**Taula 15.2.4.**). En aquest aspecte, s'identifica que malgrat que no s'hagi donat un exemple gràfic del que és un desenvolupament pla al full d'instruccions lliurat als alumnes (**Annex 8**), els alumnes tenien après aquest concepte perquè alguns alumnes van ser capaços de generar amb èxit aquesta figura plana en el cas del cub (**Annex 17**).

Taula 15.2.4.

Comparació del llenguatge matemàtic gràfic de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
Representació gràfica de la relació entre les cares (triangle equilàter, quadrat i pentàgon), el mapamundi i el cos geomètric associat a la forma geomètrica de la cara mostrada (isomètric d'una piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre)	Representació gràfica de la relació entre les cares (triangle equilàter, quadrat i pentàgon), el mapamundi i el cos geomètric associat a la forma geomètrica de la cara mostrada (isomètric d'una piràmide triangular, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre) i desenvolupament pla assignat dibuixat sobre el mapamundi lliurat

Font: Elaboració pròpia.

En relació amb les propietats/proposicions (**Taula 15.2.5.**), la diferència entre la configuració epistèmica hipotètica i la configuració epistèmica de la implementació de la Tasca 2 és el producte de la manca de pràctica en el traç de polígons regulars que va ser un impediment en el desenvolupament de l'activitat (**Annex 17**). Aquesta situació també va incidir en altre objecte matemàtic primari, els procediments, perquè en treballar de manera individual es va eliminar el tercer pas del procés: compartir idees i raonaments (**Taula 15.2.6.**).

Taula 15.2.5.

Comparació de les propietats/proposicions de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
<p>Representar un cos tridimensional a partir de material de dues dimensions por fer-se quan se identifiquen: les formes de les cares planes del cos geomètric i la relació que hi ha entre elles.</p> <p>El canvi de dues a tres dimensions, és a dir la reconstrucció d'un cos geomètric de tres dimensions, es fa possible mitjançant la correcta identificació de la relació que hi ha entre les cares planes del cos geomètric.</p> <p>Un mapa de dues dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblament adequats que el portin a una forma tridimensional.</p>	<p>Prèvis: Representar un cos tridimensional a partir de material de dos dimensions por fer-se quan se identifiquen totes dues les formes de les superfícies i la relació que hi ha entre elles. La reconstrucció de les superfícies planes al seu ordre respecte les altres fa possible el canvi de dimensions. D'aquesta manera, un mapa de dos dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblament adequats.</p> <p>Hi ha dificultat per fer representacions acurades de la Terra.</p> <p>Emergents: Com es dibuixa el desenvolupament pla d'un cos diferent al cub?</p>

Font: Elaboració pròpia.

Taula 15.2.6.

Comparació dels procediments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
<ol style="list-style-type: none">1. Identificar la forma de les cares d'un poliedre.2. Trobar estratègies de manera col·laborativa per identificar l'orientació i posició de les cares que conformen un poliedre.3. Compartir idees, raonaments i coneixements amb els companys per desenvolupar estratègies de dibuix geomètric pel desenvolupament pla d'un poliedre dins una superfície determinada.4. Emprar regla, escaire i paper per dibuixar el desenvolupament pla d'un poliedre.5. Reconstruir un poliedre a partir del seu desenvolupament pla.	<ol style="list-style-type: none">1. Identificar la forma de les cares el cos geomètric assignat.2. Emprar regla, escaire i paper per dibuixar la cara sobre el mapa.3. Identificar la posició de la resta de les cares a partir de la cara dibuixada.4. Dibuir les cares restants tenint com referència els costats de la cara o les cares ja dibuixades.5. Reconstruir un poliedre mitjançant el doblament del seu desenvolupament pla.

Font: Elaboració pròpia.

Finalment, el contrast entre els arguments establerts a la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i la configuració epistèmica sorgida de la implementació d'aquesta tasca mostra que no es va assolir l'objectiu de l'activitat de dibuix geomètric per la manca de pràctica dels alumnes (**Taula 15.2.7.**).

Taula 15.2.7.

Comparació dels arguments de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 i de la configuració epistèmica de la Tasca 2.

Descripció de l'Objecte Primari Hipotètic	Descripció de l'Objecte Primari Implementat
El nombre de cares d'un poliedre és un factor determinant en l'ús de l'àrea màxima d'una superfície donada.	El dibuix no és una tasca que aquests alumnes fan a la classe de matemàtiques.

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 16. Discussió de les trajectòries didàctiques

Les dimensions epistèmiques, docents i discents que intervenen en un procés d'instrucció matemàtica, anomenades *subtrajectòries* donen forma a les *trajectòries didàctiques* (Godino, Contreras i Font, 2006). Per tal de donar peu a un estat final, partint d'un estat inicial, l'establiment de les *subtrajectòries* epistèmica, docent i discent són necessàries (Godino, Batanero i Font, 2009). Els estats i/o funcions que concreten aquestes tres *subtrajectòries* en un cas hipotètic són elements d'anàlisi de la implementació de les dues tasques de dibuix geomètric que integren aquest treball de recerca (**Figura 16.1.**). Dins aquest capítol es discuteixen les coincidències i les diferències entre els estats i/o funcions del cas hipotètic comparat amb el cas real producte de la implementació a l'aula.

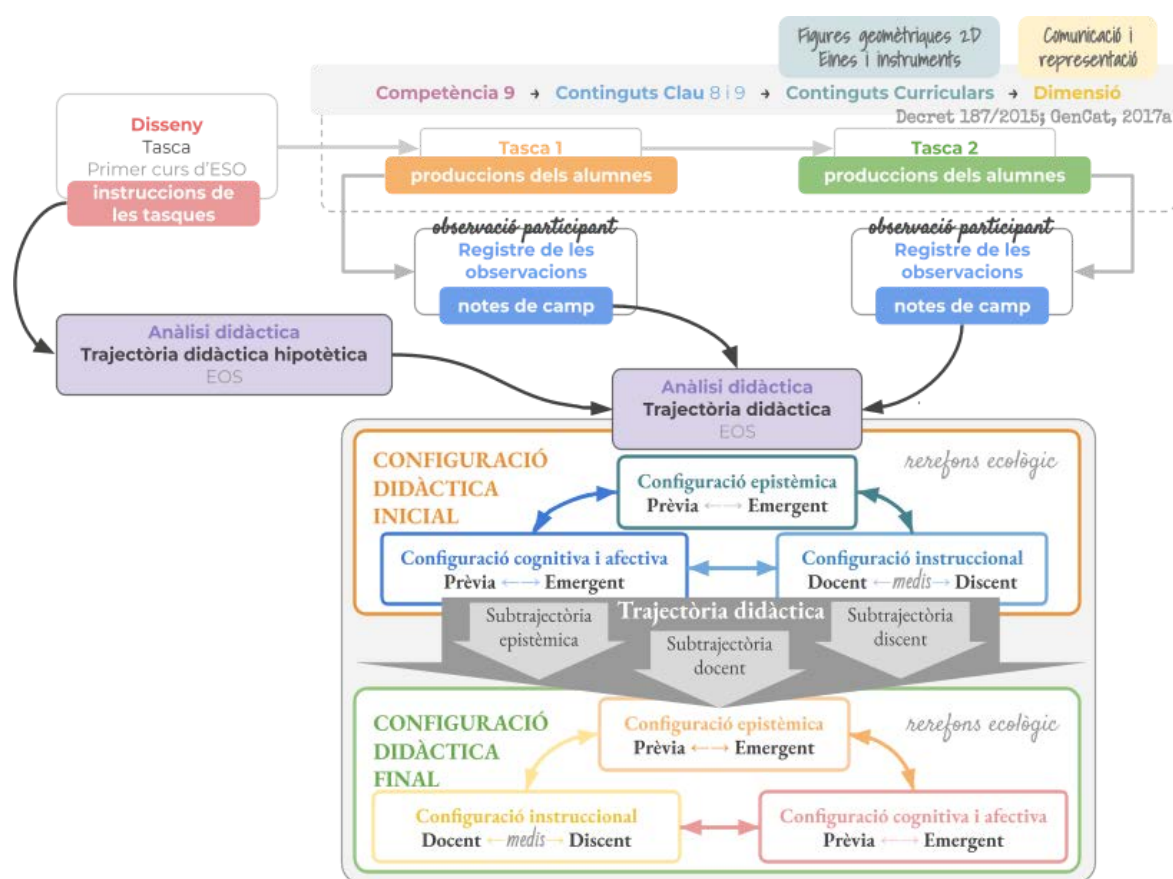


Figura 16.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, les trajectòries didàctiques hipotètiques i les trajectòries didàctiques donades dins l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Com es pot intuir de les incongruències entre la configuració epistèmica hipotètica i la configuració epistèmica de la implementació de les tasques que s'han observat en el capítol anterior (**Capítol 15**), s'espera

que hi hagi diferències entre les subtrajectòries que integren la trajectòria didàctica hipotètica i la trajectòria didàctica de cadascuna de les dues tasques que corresponen a aquest estudi de recerca.

16.1. Discussió de la trajectòria didàctica de la Tasca 1

La concepció de les subtrajectòries que integren la trajectòria didàctica de la Tasca 1 prové de l'anàlisi dels instruments que detallen aquesta tasca: el disseny didàctic (**Annex 7**), els recursos a lliurar als alumnes (**Annexos 4, 5 i 6**) i les notes de camp (**Annex 14**).

16.1.1 Discussió de la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1

Segons es pot apreciar a la **Taula 16.1.1.1.**, a la subtrajectòria epistèmica hipotètica de la Tasca 1 es preveu un seguit de set estats que van des de: (0) la presentació de l'enunciat de la situació-problema de la tasca de dibuix geomètric fins el (6) desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les cares d'aquest cos geomètric. La implementació de la Tasca 1 dins l'aula va produir modificacions en la subtrajectòria epistèmica hipotètica. La subtrajectòria epistèmica de la implementació de la Tasca, com a resultat de la seva execució per part dels alumnes, va conduir cap a la reducció del nombre d'estats presents a la sessió a l'aula. Per una banda, aquesta disminució d'estats es relaciona amb el funcionament simultani dels dos estats de la subtrajectòria epistèmica hipotètica.

S'ha d'explicar que els dos moments en els quals es preveu, a la subtrajectòria epistèmica hipotètica, un conjunt de tres estats simultanis "conceptual, proposicional i argumentatiu" de les unitats 3 i 5 es van reduir a un moment de dos estats simultanis "conceptual i argumentatiu" en la implementació de la Tasca 1. També és possible observar la discrepància en la observació d'un estat "situacional", segons ho avançava la subtrajectòria epistèmica hipotètica, el qual va presentar-se dos cops dins l'aula (**Taula 16.1.1.1.**).

Taula 16.1.1.1.

Comparació de la subtrajectòria epistèmica hipotètica i la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 1.

Unitat Epistèmica	Descripció de la subtrajectòria epistèmica hipotètica	Estat	Descripció de la subtrajectòria epistèmica	Estat
0	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Situacional (E1)	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca Presentació de la representació gràfica del cos geomètric assignat: octaedre	Situacional (E1) Lingüístic (E3)
1	Presentació de la representació gràfica del cos geomètric assignat: octaedre	Lingüístic (E3)	Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter Desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric d'una de les cares de l'octaedre	Conceptual (E4) Argumentatiu (E6) Actuacional (E2)
2	Lliurament dels materials manipulats (paper, eines de dibuix geomètric i full de respostes) i del full de registre de respostes	Actuacional (E2)	Organització d'un nou grup per a la construcció de l'octaedre	Situacional (E1)
3	Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Actuacional (E2) Argumentatiu (E6)
4	Desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric d'una de les cares de l'octaedre	Actuacional (E2)		
5	Discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)		
6	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Argumentatiu (E6)		

Font: Elaboració pròpia.

16.1.2. Discussió de la subtrajectòria docent de la Tasca 1

Les divergències entre les funcions previstes en la subtrajectòria docent hipotètica respecte de les funcions dutes a terme a la implementació de la Tasca 1 mostren la pèrdua de la relació numèrica entre totes dues subtrajectòries epistèmiques: la hipotètica i la provinent de l'experiència a l'aula. A la **Taula 16.1.2.1.** es fa el comparatiu entre les funcions de la subtrajectòria docent hipotètica i de la subtrajectòria docent de la implementació de la Tasca 1. Per començar, a la subtrajectòria docent hipotètica es despleguen vuit funcions mentre que la subtrajectòria docent de la Tasca 1 hi ha nou funcions.

En termes generals, les modificacions de la subtrajectòria docent hipotètica que van donar pas a la subtrajectòria docent produïda en la implementació de la Tasca 1 són el resultat de la intervenció de la facilitadora de la tasca (l'autora de la tesi) per reorientar el treball dels alumnes i donar solució als dubtes per ells externats. Una evidència clara d'aquestes actuacions són les unitats 3, 6 i 8. En la unitat 3 es va introduir una funció d'assignació de tasques per part de la facilitadora per presentar noves instruccions per ajudar els alumnes a reorientar l'elaboració del dibuix geomètric del triangle equilàter. Aquesta funció d'assignació de tasques també es va replicar per part de la facilitadora per tornar a organitzar el grup de representants dels grup al moment de fer la construcció física de l'octaedre. El darrer cop en el qual la facilitadora va intervenir assumint aquesta funció d'assignació de tasques va ser en finalitzar la sessió per tractar de realitzar de manera grupal la resolució del qüestionari (**Taula 16.1.2.1.**).

Malgrat que a la subtrajectòria docent hipotètica es plantegen dos moments categoritzats amb la funció "motivació", a la subtrajectòria docent de la implementació de la Tasca 1 només hi ha un moment en el qual es du a terme aquesta funció. Per un altre cantó, la previsió de tancar la sessió amb un moment dirigit per la funció "investigació" (com se'n puntualitza a la subtrajectòria docent hipotètica) es veu afectat per la dinàmica de la classe que va impedir arribar a aquest moment dins l'aula (**Taula 16.1.2.1.**).

16.1.3. Discussió de la subtrajectòria discent de la Tasca 1

Des de la perspectiva quantitativa, la subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 té molta variació respecte de la subtrajectòria discent de la implementació de la mateixa tasca a l'aula (**Taula 16.1.3.1.**). Les set funcions/estat reconegudes per la subtrajectòria discent hipotètica són àmpliament superades per les deu funcions/estat que descriuen la subtrajectòria discent de la implementació de la Tasca 1.

Des de l'aspecte numèric, a la subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 es va plantejar un moment pel desenvolupament de la funció/estat "exercitació", però aquesta previsió es va veure superada en un al implementar la tasca dins l'aula (**Taula 16.1.3.1.**).

Taula 16.1.2.1.*Comparació de la subtrajectòria docent hipotètica i la subtrajectòria docent de la Tasca 1.*

Unitat Docent	Descripció de la subtrajectòria docent hipotètica	Funcions	Descripció de la subtrajectòria docent	Funcions
0	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)
1	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Motivació (P2)	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Motivació (P2) Assignació de tasques (P3)
2	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Motivació (P2)	Observació de les discussions en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre (triangle equilàter) i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Avaluació (P5)
3	Organització dels grups de treball i lliurament dels materials manipulats (paper, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions) i del full de registre de respostes	Assignació de tasques (P3)	Presentació d'instruccions generals per reorientar el procediment de dibuix del triangle equilàter aprofitant al màxim la superfície de la cartolina	Assignació de tasques (P3)
4	Observació de les discussions en grup per l'establiment d'una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l'octaedre (triangle equilàter) i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Avaluació (P5)	Organització del nou grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Assignació de tasques (P3)
5	Organització del nou grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Assignació de tasques (P3)	Observació de la discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Avaluació (P5)
6	Observació de la discussió en grup per l'establiment d'una estratègia de construcció física de l'octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Avaluació (P5)	Reorganització del grup de representants per la construcció física de l'octaedre	Assignació de tasques (P3)
7	Reflexió i anàlisi del desenvolupament del procés per introduir canvis en futures implementacions d'aquest mateix procés, així com l'articulació entre els diferents moments i parts del procés d'estudi	Investigació (P6)	Observació de la participació de la resta del grup amb la resolució del qüestionari	Avaluació (P5)
8			Reorganització de la classe per respondre de manera col·lectiva el qüestionari	Assignació de tasques (P3)

Font: Elaboració pròpia.

Taula 16.1.3.1.

Comparació de la subtrajectòria discent hipotètica i la subtrajectòria discent de la Tasca 1.

Unitat Discent	Descripció de la subtrajectòria discent hipotètica	Estat	Descripció de la subtrajectòria discent	Estat
0	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)
1	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d’informació (A6)	Integració en un grup de treball i exploració dels materials manipulatius disponibles (full d’instruccions, paper, eines de dibuix geomètric i full de respostes)	Recepció d’informació (A6) Exploració (A2)
2	Integració en un grup de treball i exploració dels materials manipulatius disponibles (full d’instruccions, paper, eines de dibuix geomètric i full de respostes)	Recepció d’informació (A6) Exploració (A2)	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d’informació (A6)
3	Discussió en grup per l’establiment d’una estratègia de dibuix per traçar una de les cares de l’octaedre (triangle equilàter)	Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5)	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de l’estratègia de dibuix geomètric per traçar una de les cares de l’octaedre (triangle equilàter)	Exercitació (A8)
4	Desenvolupament col·laboratiu i autònom de l’estratègia de dibuix geomètric per traçar una de les cares de l’octaedre (triangle equilàter)	Exercitació (A8)	Presentació d’una estratègia de dibuix geomètric per traçar el triangle equilàter	Recepció d’informació (A6)
5	Integració del nou grup per l’establiment d’una estratègia de construcció física de l’octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Recepció d’informació (A6) Exploració (A2)	Desenvolupament d’una estratègia d’assaig i error de dibuix per traçar una de les cares de l’octaedre (triangle equilàter)	Exercitació (A8)
6	Discussió en grup per l’establiment d’una estratègia de construcció física de l’octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5) Exercitació (A8)	Integració del nou grup per l’establiment d’una estratègia de construcció física de l’octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters)	Recepció d’informació (A6)
7			Aplicació d’una estratègia de construcció física de l’octaedre a partir de la unió de les seves cares (triangles equilàters) i desenvolupament col·laboratiu i autònom de la construcció	Exercitació (A8)
8			Instrucció per a la resolució grupal del qüestionari dels aspectes de la <i>idoneïtat didàctica</i> de la sessió	Recepció d’informació (A6)
9			Resolució grupal del qüestionari	Record (A3)

Font: Elaboració pròpia.

En la subtrajectòria discent hipotètica de la Tasca 1 es va preveure el desenvolupament simultani de varies funcions/estat. Per exemple, a la unitat discent 3, en la qual es va esperar que els alumnes desenvolupessin tres funcions/estat alhora. Així mateix, es tenia previst a la unitat discent 6 l'actuació simultània de quatre funcions/estat per part dels alumnes. En implementar la Tasca 1 es va observar la simplificació de les funcions/estat executades pels alumnes. S'arriba a aquesta afirmació a partir de les descripcions de les funcions/estat discents identificades a la subtrajectòria discent de la implementació de la Tasca 1, on es veu que només a la segona unitat discent els alumnes desenvolupen de cop dos funcions/estats: la recepció d'informació i l'exploració. La resta de les funcions/estat que caracteritzen l'activitat dels alumnes en el desenvolupament de les activitats de la Tasca 1 es poden definir amb una sola funció/estat (**Taula 16.1.3.1**).

Finalment, les funcions/estat “formulació” i “argumentació i justificació” presents a la subtrajectòria discent hipotètica van desaparèixer en la subtrajectòria discent produïda a partir de les dades de la implementació de la Tasca 1 dins l'aula (**Taula 16.1.3.1**).

16.2 Discussió de la trajectòria didàctica de la Tasca 2

Seguint el desenvolupament de l'anàlisi didàctica presa per comparar les subtrajectòries que integren la trajectòria didàctica que defineix la Tasca 1, per a la Tasca 2 també s'estableix un contrast entre les subtrajectòries hipotètiques i les subtrajectòries obtingudes de la implementació de la tasca dins l'aula.

16.2.1. Discussió de la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2

A les previsions pel desenvolupament de la Tasca 2 es van considerar set conjunts d'estats que defineixen la subtrajectòria epistèmica hipotètica. En comparació amb la realització a l'aula d'aquesta tasca, la qual va donar peu a l'obtenció de la subtrajectòria epistèmica de la implementació de la Tasca 2, es va tenir una disminució en els conjunts d'estats. La subtrajectòria epistèmica de la implementació de la Tasca 2 es concreta en només cinc estats, és a dir, dos menys que la seva contrapart hipotètica (**Taula 16.2.1.1**).

Les discrepàncies entre la versió hipotètica i d'implementació de la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2 es justifica en l'eliminació dels dos estats considerats en la darrera part de la subtrajectòria epistèmica hipotètica: (5) el desenvolupament del dibuix geomètric de manera col·laborativa i autònoma i (6) la discussió en grup per fer conjectures a partir de la comparació de les construccions físiques dels poliedres assignats (**Taula 16.2.1.1**).

Per últim, els estats “conceptual”, “proposicional” i “argumentatiu” identificats a la subtrajectòria epistèmica hipotètica no es van presentar en cap moment de la implementació de la Tasca 1, com es fa constar a la **Taula 16.2.1.1.** d'aquest subapartat.

Taula 16.2.1.1.

Comparació de la subtrajectòria epistèmica hipotètica i la subtrajectòria epistèmica de la Tasca 2.

Unitat Epistèmica	Descripció de la subtrajectòria epistèmica hipotètica	Estat	Descripció de la subtrajectòria epistèmica	Estat
0	Discussió en grup per respondre un qüestionari sobre la Tasca 1	Argumentatiu (E6)	Lliurament dels materials manipulatius (mapes, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions)	Actuacional (E2)
1	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Situacional (E1)	Enunciat de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca i de les representacions gràfiques dels cossos geomètrics assignats	Situacional (E1) Lingüístic (E3)
2	Presentació de la representació gràfica dels cossos geomètrics assignats	Lingüístic (E3)	Desenvolupament autònom de la realització del desenvolupament pla relacionat amb el cos geomètric assignat	Actuacional (E2)
3	Lliurament dels materials manipulatius (mapes, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions)	Actuacional (E2)	Modificació de la tasca en eliminar un dels cossos assignats per manca de material: el dodecaedre.	Situacional (E1)
4	Discussió en grup per l'establiment d'estratègies de dibuix per construir els cossos geomètrics assignats	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)	Continuació del desenvolupament autònom de la realització del desenvolupament pla relacionat amb el cos geomètric assignat o reassignat.	Actuacional (E2)
5	Desenvolupament col·laboratiu i/o autònom del dibuix geomètric	Actuacional (E2)		
6	Discussió en grup per fer conjectures a partir de la comparació de les construccions físiques dels cossos geomètrics assignats	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)		

Font: Elaboració pròpia.

16.2.2. Discussió de la subtrajectòria docent de la Tasca 2

La comparació de la subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2 i de la subtrajectòria docent de la implementació d'aquesta mateixa tasca comença des de la vessant numèrica. Mentre que a la subtrajectòria docent hipotètica s'identifiquen sis funcions consecutives, a la subtrajectòria docent provinent de la implementació de la mateixa tasca a l'aula se'n extreuen només cinc (**Taula 16.2.2.1.**). La reducció en el nombre de funcions es pot atribuir a la modificació en la cronologia de les activitats de la sessió de la tasca en les unitats finals de la subtrajectòria docent hipotètica. Igualment, la discordança entre la versió hipotètica i la real de la subtrajectòria docent es justifica en la incorporació de modificacions en les tasques assignades per tal de resoldre les dificultats presentades pels alumnes en el dibuix de polígons regulars. Cal remarcar l'aparició de la funció de regulació, no prevista la subtrajectòria docent hipotètica.

Taula 16.2.2.1.

Comparació de la subtrajectòria docent hipotètica i la subtrajectòria docent de la Tasca 2.

Unitat Docent	Descripció de la subtrajectòria docent hipotètica	Funcions	Descripció de la subtrajectòria docent	Funcions
0	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)	Disseny del procés, selecció dels continguts i significats a estudiar	Planificació (P1)
1	Introducció del "professor" a càrrec de la sessió	Motivació (P2)	Introducció del "professor" a càrrec de la sessió	Motivació (P2)
2	Organització dels grups de treball i lliurament del qüestionari	Assignació de tasques (P3)	Organització dels grups de treball, lliurament dels materials manipulables i presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Assignació de tasques (P3)
3	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Motivació (P2)	Resolució de preguntes dels alumnes i modificació de la tasca en ometre un dels cossos assignats per manca de material per realitzar el seu traç	Regulació (P4)
4	Lliurament dels materials manipulats (mapes, eines de dibuix geomètric i full d'instruccions)	Assignació de tasques (P3)	Observació de les estratègies individuals de dibuix per construir el desenvolupament pla del poliedre assignat	Avaluació (P5)
5	Observació de les discussions en grup per l'establiment de les estratègies de dibuix per construir els cossos geomètrics assignats i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Avaluació (P5)		

Font: Elaboració pròpia.

Finalment, la tendència a treballar de manera individual i la impossibilitat dels alumnes per terminar l'activitat (**Annex 22**) va fer que la subtrajectòria docent de la implementació de la Tasca 2 tingués un altre aspecte menys que la hipotètica: l'observació de les discussions en grup per l'establiment d'estratègies de dibuix geomètric i el desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric aplicat als cossos assignats (**Taula 16.2.2.1.**).

L'existència de dos moments caracteritzats per la funció “motivació”, determinada a partir de l'anàlisi de la subtrajectòria docent hipotètica de la Tasca 2, contrasta amb l'eliminació d'un d'ells en la implementació d'aquesta tasca dins l'aula. Així mateix, el treball de camp permet observar el sorgiment d'una funció no prevista a la subtrajectòria docent hipotètica: la regulació (**Taula 16.2.2.1.**).

16.2.3. Discussió de la subtrajectòria discent de la Tasca 2

A diferència de les subtrajectòries epistèmica i docent, la subtrajectòria discent de la implementació de la Tasca 2 dins l'aula representa un increment del nombre de funcions/estat previstos a la seva subtrajectòria discent hipotètica (**Taula 16.2.3.1.**). Aquesta primera diferència es justifica en la incorporació de la funció/estat “demanda d'informació” no previst en la subtrajectòria discent hipotètica.

Seguint el sentit cronològic de les unitats discents és possible identificar l'inici de la divergència entre la subtrajectòria discent hipotètica i la subtrajectòria discent de la implementació de la Tasca 2: la tercera de les unitats. Aleshores, és visible el moment en el qual els alumnes comencen a desenvolupar funcions/estats diferents a les previstes. Conseqüentment, els episodis que succeeixen a l'aula després d'aquesta tercera unitat també presentaran variacions derivades d'aquesta alteració (**Taula 16.2.3.1.**).

Com s'ha vist en altres subtrajectòries, la diferència entre l'anàlisi del cas hipotètic i de la implementació dins l'aula fa que algunes funcions/estat apareguin o desapareguin. En el cas de la subtrajectòria discent hipotètica es considera l'existència de la funció/estat “argumentació i justificació” en tres moments de la sessió, però dins l'aula aquesta funció/estat mai no es va fer evident. De manera semblant succeeix amb la funció/estat “exploració”. Mentre que la subtrajectòria discent hipotètica la posiciona en dos moments diferents de la sessió, la subtrajectòria discent produïda a partir de l'experiència en el camp no posiciona aquesta funció/estat en cap moment de la sessió. Per un altre costat, també es reconeix l'aparició de la funció/estat “avaluació”, no prevista a la subtrajectòria discent hipotètica, dins l'estudi fet en l'establiment de la subtrajectòria discent de la implementació de la Tasca 2 (**Taula 16.2.3.1.**).

Taula 16.2.3.1.

Comparació de la subtrajectòria discent hipotètica i la subtrajectòria discent de la Tasca 2.

Unitat Discent	Descripció de la subtrajectòria discent hipotètica	Estat	Descripció de la subtrajectòria discent	Estat
0	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)	Introducció del “professor” a càrrec de la sessió	Acceptació (A1)
1	Integració en un grup de treball i exploració del qüestionari sobre la Tasca 1	Recepció d’informació (A6)	Integració en un grup de treball, lliurament de material manipulable i presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d’informació (A6)
2	Resolució col·laborativa del qüestionari sobre la Tasca 1	Exploració (A2) Argumentació i justificació (A5)	Establiment de les estratègies individuals de dibuix del desenvolupament pla del poliedre assignat	Formulació (A4)
3	Presentació de la situació-problema de dibuix geomètric de la tasca	Recepció d’informació (A6)	Orientació per part dels professors a les preguntes dels alumnes	Demanda d’informació (A7)
4	Exploració dels materials manipulatius disponibles (full d’instruccions, mapes i eines de dibuix geomètric) i discussió en grup per l’establiment de les estratègies de dibuix per construir els cossos geomètrics assignats i desenvolupament col·laboratiu i autònom del dibuix geomètric	Exploració (A2) Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5)	Presentació de modificacions de la tasca derivades de les preguntes fetes i de la manca de materials manipulables adients	Recepció d’informació (A6)
5	Discussió en grup per fer conjectures a partir de l’exploració i comparació de les construccions físiques dels cossos geomètrics assignats	Argumentació i justificació (A5)	Realització dels traços necessaris per dibuixar el desenvolupament pla del poliedre assignat	Exercitació (A8)
6			Construcció en tres dimensions del poliedre assignat mitjançant el doblegament del desenvolupament pla dibuixat	Avaluació (A9)

Font: Elaboració pròpia.

Capítol 17. Discussió de la idoneïtat didàctica

D'acord amb Godino, Batanero i Font (2020), els criteris de la *idoneïtat didàctica* són una eina d'anàlisi didàctica amb els quals és possible identificar les accions i els recursos a utilitzar dins l'aula durant els processos d'instrucció per tal d'optimitzar l'aprenentatge de les matemàtiques. En aquest sentit, al igual que s'ha fet als dos capítols anteriors, ara es presenta la confrontació entre els paràmetres obtinguts de la reflexió de les propostes dissenyades per ser portades a l'aula i la revisió dels documents on es van recollir les dades sorgides de la implementació de les mateixes tasques (**Figura 17.1.**).

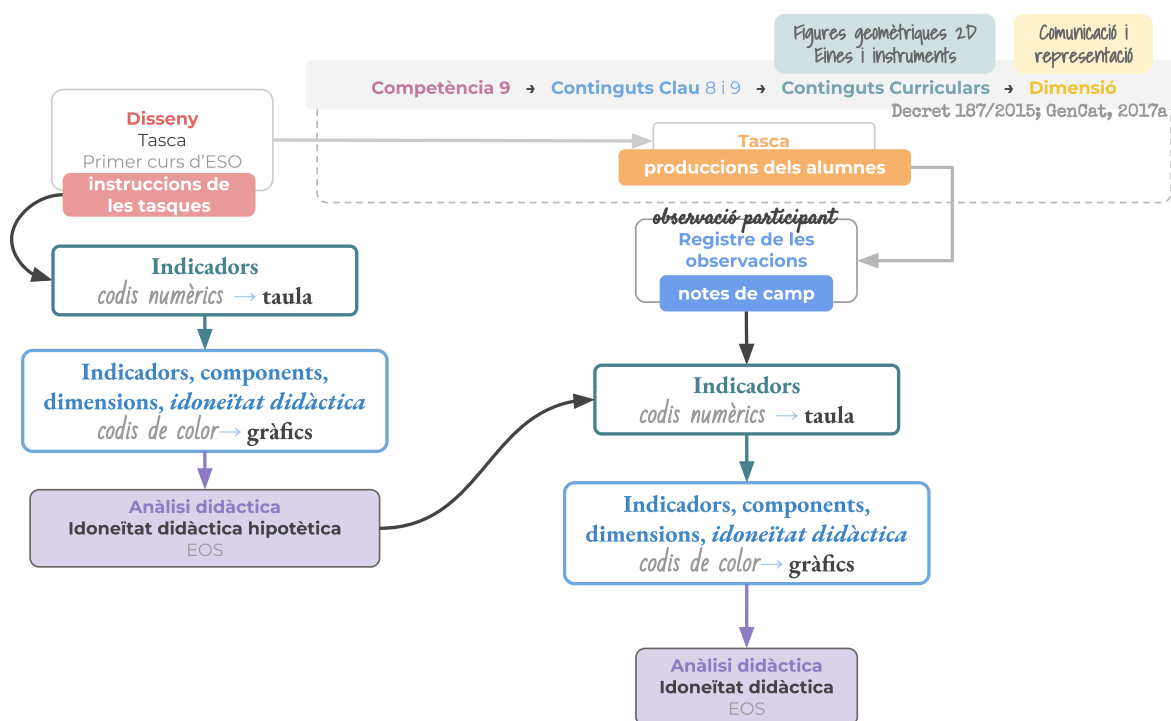


Figura 17.1. Esquema de la relació entre els instruments de recollida de dades, les etapes d'anàlisi didàctica per establir els paràmetres de la *idoneïtat didàctica* hipotètica i la *idoneïtat didàctica* de les tasques de dibuix geomètric de l'estudi de cas d'aquesta recerca.

Font: Elaboració pròpia.

Tal i com s'ha trobat en els dos capítols anteriors, és d'esperar-se que els paràmetres de la *idoneïtat didàctica hipotètica* siguin diferents d'aquells que provenen de l'estudi dels resultats de la implementació de les tasques davant els alumnes.

17.1. Discussió de les dimensions de la idoneïtat didàctica de la Tasca 1

Tot reunint les anàlisis fetes als capítols 10 i 14, per les vessants hipotètica i d'implementació de la Tasca 1, la comparació entre els indicadors de les components de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* es presenta de manera separada per a cadascuna de les sis dimensions: epistèmica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva i ecològica.

17.1.1. Discussió de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 1

La valoració numèrica assignada als indicadors de cadascun dels components de la *idoneïtat epistèmica* és un primer recurs per establir comparacions entre el que és la *idoneïtat epistèmica hipotètica* i la *idoneïtat epistèmica real* o que resulta de la implementació de la Tasca 1 a l'aula.

A la **Taula 17.1.1.1.** es reuneixen les valoracions assignades en tots dos moments: abans la implementació (hipotètica) i després de la implementació (real). Com s'hi pot observar, les previsions fetes amb les valoracions dels indicadors de la *idoneïtat epistèmica hipotètica* només coincideixen per a alguns indicadors: procediments expressats amb claredat (indicador 1.2.2), omissió de l'ús de metàfores per part de la professora (indicador 1.2.6), ús de la modelització (indicador 1.3.1), ús de la resolució de problemes (indicador 1.3.3), la presència de connexions (indicador 1.3.4), els procediments com a mostres representatives de les nocions matemàtiques indicades al currículum (indicador 1.4.3), els procediments com a mostres representatives de la noció matemàtica que es vol ensenyar (indicador 1.4.5), l'ús de representacions gràfiques (indicador 1.4.9), l'ús de diferents conversions (indicador 1.4.11) i l'ús de diferents tractaments (indicador 1.4.12). En totes aquestes valoracions els indicadors han assolit la màxima puntuació, per tant, tots els indicadors ara esmentats s'han presentat de la millor manera en la implementació de la Tasca 1. Coincidint així amb la previsió feta amb la *idoneïtat epistèmica hipotètica*. Cal puntualitzar que també hi hagut un altre indicador que ha mantingut la valoració prevista a la dimensió *epistèmica hipotètica*, la manca d'una mostra representativa de problemes (indicador 1.4.7). En aquest cas, ja s'esperava que aquest indicador mantingués el valor més baix perquè el disseny didàctic de la Tasca 1 no ho considera (**Annex 17**) i com que es va portar a l'aula la mateixa tasca sense cap modificació, doncs aquesta valoració ja es tenia previst que fos la mateixa per a l'anàlisi de la situació hipotètica i de la real. El recull dels indicadors que al moment de la implementació de la tasca van mantenir les valoracions previstes a la *idoneïtat epistèmica hipotètica* de la Tasca 1 es fa a la **Taula 17.1.1.2.** per la seva identificació separada de la resta dels indicadors d'aquesta dimensió de la *idoneïtat didàctica*.

Taula 17.1.1.1.*Valoració dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica i de la implementació de la Tasca 1.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'errors	1.1.1 Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	1	0,5
	1.2.1 S'han expressat les definicions amb claredat?	1	0
Control d'ambigüïtats	1.2.2 S'han expressat els procediments amb claredat?	1	1
	1.2.3 Les explicacions han sigut clares?	1	0,5
	1.2.4 Les comprovacions han sigut clares?	1	0
	1.2.5 Les demostracions han sigut clares?	1	0
	1.2.6 S'ha omès l'ús de metàfores?	1	1
	Riquesa de processos	1.3.1 Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	1
1.3.2 Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?		1	0,25
1.3.3 Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?		1	1
1.3.4 S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?		1	1
Representativitat de la complexitat	1.4.1 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.2 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.3 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	1
	1.4.4 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.5 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.6 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	1
	1.4.7 Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	0
	1.4.8 Es fa ús de representacions verbals?	1	0,5
	1.4.9 Es fa ús de representacions gràfiques?	1	1
	1.4.10 Es fa ús de representacions simbòliques?	0	1
	1.4.11 Es fa ús de diferents conversions?	1	1
	1.4.12 Es fa ús de diferents tractaments?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.1.2.

Relació dels indicadors d'adoneïtat epistèmica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la adoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1.

Component		Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'ambigüitats	1.2.2	S'han expressat els procediments amb claredat?	1	1
	1.2.6	S'ha omès l'ús de metàfores?	1	1
Riquesa de processos	1.3.1	Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	1	1
	1.3.3	Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?	1	1
	1.3.4	S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?	1	1
Representativitat de la complexitat	1.4.3	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	1
	1.4.6	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	1
	1.4.7	Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	0
	1.4.9	Es fa ús de representacions gràfiques?	1	1
	1.4.11	Es fa ús de diferents conversions?	1	1
	1.4.12	Es fa ús de diferents tractaments?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

La implementació de la Tasca 1, a més de mantenir paràmetres previstos a la *adoneïtat epistèmica hipotètica*, mostra la pèrdua del nivell d'assoliment d'alguns indicadors. Són el cas: el control de les pràctiques matemàticament correctes (indicador 1.1.1), la claredat de les explicacions (indicador 1.2.3), l'ús de l'argumentació en la seqüència de tasques (indicador 1.3.2), l'ús de definicions que siguin mostres representatives de les nocions matemàtiques del currículum (indicador 1.4.1), l'ús de propietats que siguin mostres representatives de les nocions matemàtiques del currículum (indicador 1.4.2), l'ús de definicions que siguin mostres representatives de les nocions matemàtiques que es volen ensenyar (indicador 1.4.4), l'ús de propietats que siguin mostres representatives de les nocions matemàtiques que es volen ensenyar (indicador 1.4.5) i l'ús de representacions verbals (**Taula 17.1.1.3.**). Això vol dir que la previsió feta per a tots aquests indicadors no es va dur a terme de la manera prevista. Malgrat la presència d'aquests indicadors a la implementació de la Tasca 1, el seu nivell d'assoliment va ser menor de l'esperat. El pitjor cas es va presentar amb l'indicador 1.3.2 relacionat amb l'ús de l'argumentació, ja que va ser molt limitat el diàleg entre els alumnes (**Annex 24**).

Taula 17.1.1.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'errors	1.1.1 Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	1	0,5
Control d'ambigüïtats	1.2.3 Les explicacions han sigut clares?	1	0,5
Riquesa de processos	1.3.2 Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?	1	0,25
Representativitat de la complexitat	1.4.1 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.2 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.4 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.5 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.8 Es fa ús de representacions verbals?	1	0,5

Font: Elaboració pròpia.

També es va donar el cas d'indicadors que van tenir assignada una valoració preveient la seva presència i assoliment i que a la implementació de la Tasca 1 no es va trobar cap evidència del seu compliment (**Taula 17.1.1.1.**). Es tracta dels indicadors 1.2.1, 1.2.4 i 1.2.5, tots ells del component del control d'ambigüïtats. Per tant, hi ha una relació de tres indicadors de la *idoneïtat epistèmica* que no es van presentar a la implementació de la Tasca 1, tot i tenir previst que hi figuressin (**Taula 17.1.1.4.**).

Taula 17.1.1.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'ambigüïtats	1.2.1 S'han expressat les definicions amb claredat?	1	0
	1.2.4 Les comprovacions han sigut clares?	1	0
	1.2.5 Les demostracions han sigut clares?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Finalment, es va donar el cas particular d'un indicador no considerat a la *idoneïtat didàctica hipotètica* i que sí que va irrompre a la implementació: l'ús de representacions simbòliques (**Taula 17.1.1.1.**). Aleshores, l'indicador 1.4.10 va ser l'únic que va millorar la seva valoració hipotètica al moment de portar a l'aula la Tasca 1 (**Taula 1.1.5.**).

Taula 17.1.1.5.

Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van millorar la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Representativitat de la complexitat	1.4.10 Es fa ús de representacions simbòliques?	0	1

Font: Elaboració pròpia.

La visió global del contrast entre les valoracions esperades, *idoneïtat epistèmica hipotètica*, i les valoracions reals obtingudes de l'estudi dels documents de recollida de dades de la implementació de la Tasca 1 dins l'aula es mostra de manera gràfica a la **Figura 17.1.1.1.** que es veu a continuació. En aquesta imatge es pot identificar que, tot i que les valoracions de la *idoneïtat epistèmica hipotètica* ja es trobaven per sota les valoracions màximes (*idoneïtat epistèmica màxima* o ideal) la realitat encara va posicionar més a baix el nivell d'assoliment dels indicadors de la dimensió *epistèmica*. És a dir, la realitat de l'aula no va ser compatible amb algunes de les propostes del disseny didàctic de la Tasca 1 (**Annex 17**).

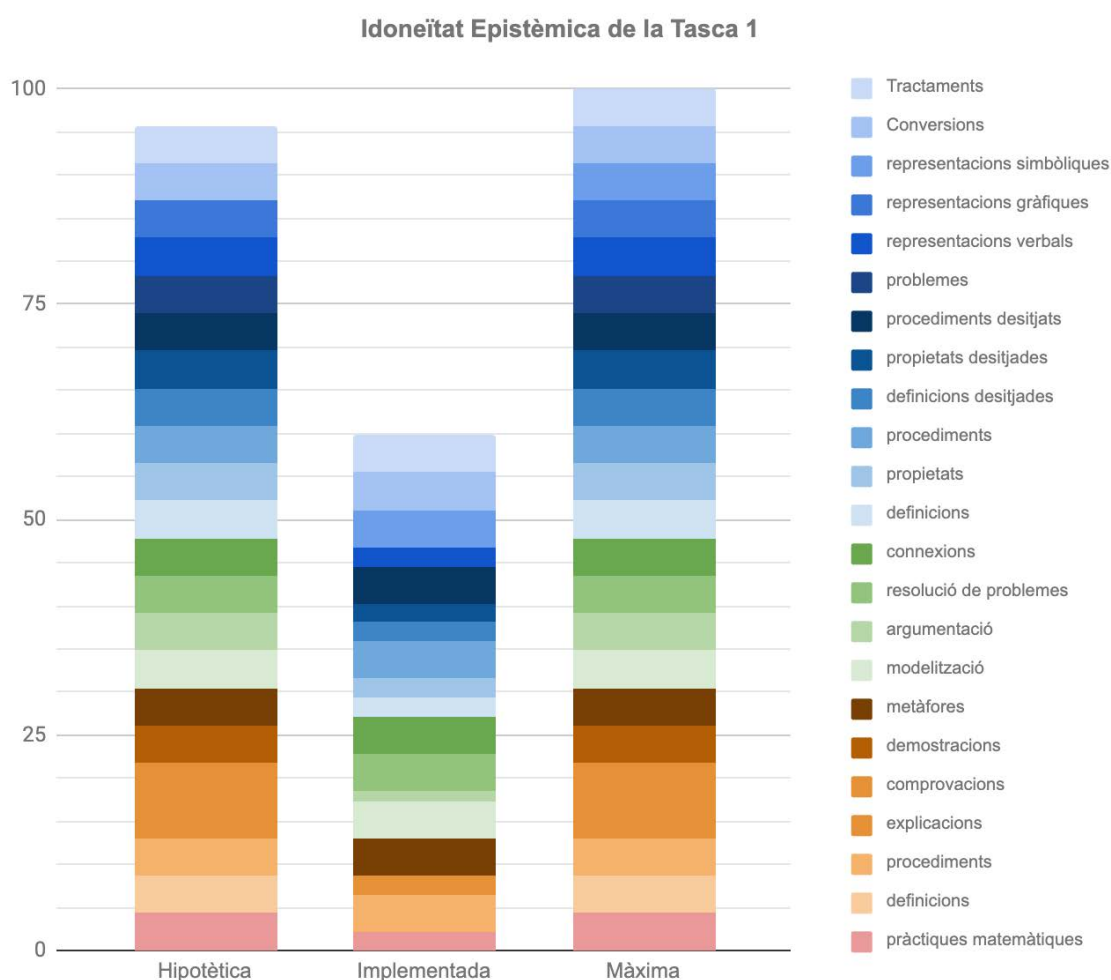


Figura 17.1.1.1. Comparació de la *idoneïtat epistèmica hipotètica*, la *idoneïtat epistèmica* de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la *idoneïtat epistèmica* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.1.2. Discussió de la idoneïtat cognitiva de la Tasca 1

La comparació de les valoracions dels indicadors de les components que integren la dimensió *cognitiva* de la *idoneïtat didàctica hipotètica* i de la implementació de la Tasca 1 mostren semblances i diferències entre el que es tenia previst i tot allò que va ocórrer dins l'aula (**Taula 17.1.2.1.**). En primer lloc, s'identifiquen les coincidències. Els indicadors que van mantenir les valoracions fetes a l'anàlisi preliminar (*idoneïtat cognitiva hipotètica*) a la implementació de la tasca són: l'assoliment del nivell de complexitat dels continguts de la tasca per part dels alumnes (indicador 2.1.2), la manca d'activitats de desenvolupament (indicador 2.2.1) i de suport (indicador 2.2.2), l'ús de mètodes d'avaluació que mostrin els aprenentatges o les competències implementades (indicador 2.3.1) i l'indicador 2.4.3 del component "alta demanda cognitiva" relacionat amb els requeriments de la tasca que obliguen als alumnes a fer canvis de representació (**Taula 17.1.2.2.**).

Per una altra banda, a la **Taula 17.1.2.1.** també es poden identificar els indicadors que va aconseguir un nivell d'assoliment més baix del previst a la *idoneïtat cognitiva hipotètica*. En el cas de l'indicador 2.1.1, relacionat amb el fet que els estudiants disposen dels coneixements previs dels alumnes per desenvolupar la tasca assignada, el nivell de compliment va ser caracteritzat amb la puntuació mitjana i no amb la nota més alta (**Taula 17.1.2.3.**). En canvi, la majoria dels indicadors relacionats amb el component de l'alta demanda cognitiva van desaparèixer (**Taula 17.1.2.4.**).

Taula 17.1.2.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	1	0.5
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	1	1
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0	0
Aprentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	1	1
	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0,5	0
Alta demanda cognitiva	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	1	0
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	1	1
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	1	0
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.2.2.

Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Coneixements previs	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	1	1
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0	0
Aprenentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	1	1
Alta demanda cognitiva	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.2.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	1	0.5

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.2.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Alta demanda cognitiva	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0,5	0
	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	1	0
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	1	0
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

De manera similar a la *idoneïtat epistèmica*, la previsió del nivell d'assoliment global de la *idoneïtat cognitiva hipotètica* es inferior al cas idealitzat (*idoneïtat cognitiva màxima*). Així mateix, les valoracions dels indicadors de la *idoneïtat cognitiva* al moment de la implementació de la Tasca 1 han quedat encara més per sota de la situació prevista a la *idoneïtat cognitiva hipotètica* (**Figura 17.1.2.1.**).

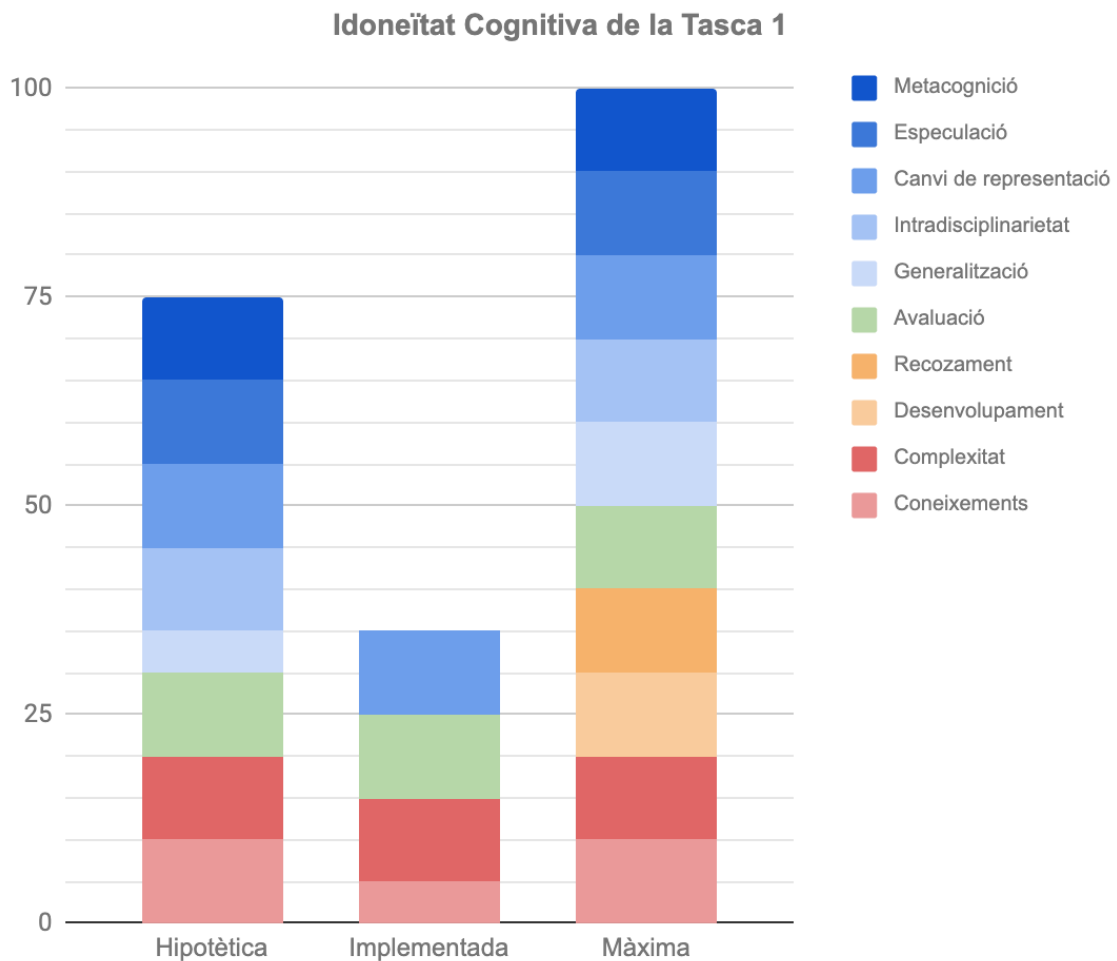


Figura 17.1.2.1. Comparació de la *idoneïtat cognitiva hipotètica*, la *idoneïtat cognitiva* de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la *idoneïtat cognitiva* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.1.3. Discussió de la idoneïtat interaccional de la Tasca 1

En la dimensió *interaccional*, la contraposició de les valoracions dels indicadors a la fase hipotètica i de la fase de la implementació es concentren a la **Taula 17.1.3.1.** que es pot veure a continuació.

Taula 17.1.3.1.*Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica i de la implementació de la Tasca 1.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció docent - discent	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1	1
	3.1.4 S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?	1	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1	1
	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	1
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	1
	3.1.8 S'han promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	1	0
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	1	1
	3.1.10 S'han observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	1	0
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'hi observa que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?	1	0,25
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	1	0,5
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	1	1
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?	1	1
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?	1	1
Avaluació formativa	3.4.1 S'ha realitzat una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Del registre anterior s'extreuen, primerament, tots els indicadors que han mantingut la seva valoració en les dues etapes: la hipotètica i la real (**Taula 17.1.3.2.**). Són: la presentació clara (indicador 3.1.1), ben organitzada (indicador 3.1.2) i amb una verbalització adequada (indicador 3.1.3) de la tasca; l'èmfasi dels conceptes clau del tema (indicador 3.1.4); la identificació de les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (indicador 3.1.5); la interpretació i resolució de preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes (indicador 3.1.6); la conducció apropiada de les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes (indicador 3.1.7) i la utilització de recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció (indicador 3.1.9).

Taula 17.1.3.2.

Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció docent - discent	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1	1
	3.1.4 S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?	1	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1	1
	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	1
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	1
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	1	1
	Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	1
3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?		1	1
3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?		1	1

Font: Elaboració pròpia.

Un altre aspecte rellevant és el reconeixement dels indicadors que van disminuir la valoració assignada a la idoneïtat interaccional hipotètica: tots aquells relacionats amb el component "interacció entre alumnes". A la **Taula 17.1.3.3.** es veu que el nivell d'assoliment dels dos indicadors que integren el component "interacció entre alumnes" (**Taula 17.1.3.1.**) tan sols van aconseguir la puntuació mínima.

Pel que fa als indicadors que a la idoneïtat interaccional hipotètica es van valorar amb qualsevol puntuació i que en la implementació no es van manifestar de cap manera (**Taula 17.1.3.1.**), es té un recull de tres indicadors (**Taula 17.1.3.4.**): la manca de promoció del consens per mitjà de l'argumentació (indicador 3.1.8), la manca d'observació de que la tasca va afavorir la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la sessió (indicador 3.1.10) i la manca d'avaluació formativa mitjançant la realització d'observacions sistemàtiques del progrés cognitiu dels alumnes (indicador 3.4.1).

Taula 17.1.3.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'hi observa que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?	1	0,25
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	1	0,5

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.3.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció docent - discent	3.1.8 S'han promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	1	0
	3.1.10 S'han observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	1	0
Avaluació formativa	3.4.1 S'ha realitzat una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

En termes generals, la *idoneïtat interaccional* manté la tendència de les dimensions *epistèmica* i *cognitiva*: la reducció, i fins i tot l'eliminació, del nivell d'assoliment valorat a la contrapart hipotètica d'alguns indicadors. En conseqüència, els indicadors de la *idoneïtat interaccional* de la implementació de la Tasca 1 és inferior a la previsió feta amb les valoracions hipotètiques i màximes (**Figura 17.1.3.1.**).

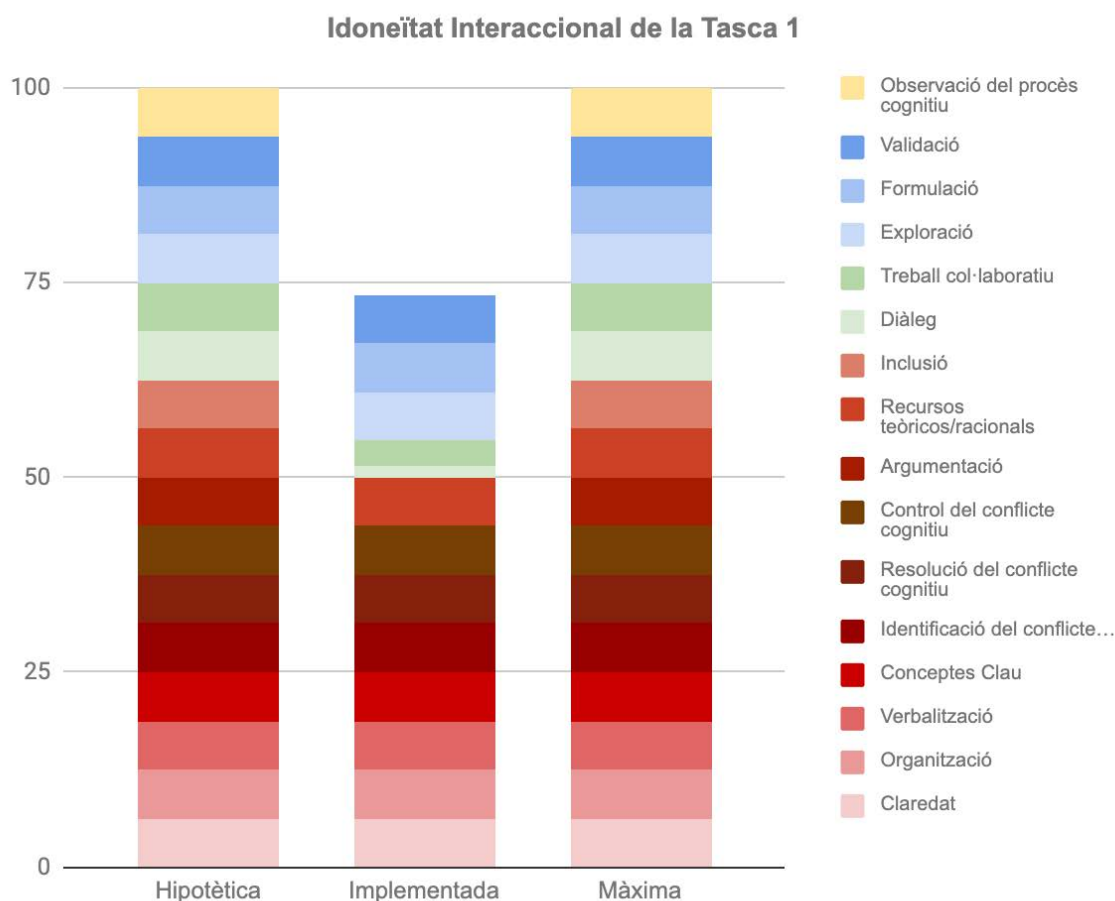


Figura 17.1.3.1. Comparació de la *idoneïtat interaccional hipotètica*, la *idoneïtat interaccional* de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la *idoneïtat interaccional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.1.4. Discussió de la idoneïtat mediacional de la Tasca 1

Les similituds i diferències entre les valoracions dels indicadors de la *idoneïtat mediacional* es presenta a la **Taula 17.1.4.1.** per acurar la *idoneïtat mediacional hipotètica* i la *idoneïtat mediacional* de la implementació de la Tasca 1. Per començar s'hi poden distingir tots els indicadors que conserven les mateixes valoracions en de l'anàlisi del cas hipotètic al cas pràctic (**Taula 17.1.4.2.**), es tracta dels indicadors: 4.1.4, relacionat amb l'absència d'ús de la calculadora per promoure l'ús del llenguatge, procediments i argumentacions matemàtiques; 4.1.5, que correspon a la manca d'ús de dispositius digitals per promoure el llenguatge, els procediments i les argumentacions matemàtiques; 4.2.1, que puntualitza el nombre adequat d'alumnes que han de participar en la tasca; 4.2.2, que valora la distribució dels alumnes per facilitar l'aprenentatge; 4.2.5, que fa consciència sobre la distribució dels alumnes per facilitar el desenvolupament de la tasca; 4.3.1, sobre

el temps necessari per realitzar la tasca; 4.3.2, que parla del temps necessari pels temes centrals i l'indicador 4.3.3 que es relaciona amb el temps que requereix la tasca més complexa.

Taula 17.1.4.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica i de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,25
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,25
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,25
	4.1.4 La calculadora t'ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	1	0,25
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	1	0,5
	4.1.8 Has pogut visualitzar les definicions i propietats?	1	0
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre d'alumnes que han participat de la tasca ha ajudat a aprendre?	1	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1	1
	4.2.3 L'horari de la classe és l'adequat?	0,5	0
	4.2.4 L'aula és apropiada pel desenvolupament de la tasca?	1	0,75
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1	1
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?	1	1
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	1	1
	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

En la **Taula 17.1.4.3.** es mostren tots aquells indicadors que tenien la valoració màxima a la *idoneïtat mediacional hipotètica* però que van veure afectada la seva puntuació a la implementació de la tasca a l'aula. Es fa referència als indicadors: ús de materials (indicador 4.1.1), instruments de mesura (indicador 4.1.2) i instruments de dibuix geomètric (indicador 4.1.3) per ajudar en la utilització de llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics; l'aplicació de definicions i propietats en situacions aplicades (indicador 4.1.6) i mitjançant un model (indicador 4.1.7.), així com l'ús d'un aula adequada pel desenvolupament de la tasca.

Taula 17.1.4.2.

Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Recursos materials	4.1.4 La calculadora t'ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre d'alumnes que han participat de la tasca ha ajudat a aprendre?	1	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1	1
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1	1
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?	1	1
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	1	1
	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.4.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,25
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,25
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,25
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	1	0,25
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	1	0,5
Condicions del grup i de l'aula	4.2.4 L'aula és apropiada pel desenvolupament de la tasca?	1	0,75

Font: Elaboració pròpia.

Per últim, a la **Taula 17.1.4.4.** s'observen dos indicadors que no es van presentar en implementar la Tasca 1: la visualització de definicions i propietats (indicador 4.1.8) i l'ús d'un horari adequat per a la sessió de matemàtiques (indicador 4.2.3).

Taula 17.1.4.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 1.

Component		Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Recursos materials	4.1.8	Has pogut visualitzar les definicions i propietats?	1	0
Condicions del grup i de l'aula	4.2.3	L'horari de la classe és l'adequat?	0,5	0

Font: Elaboració pròpia.

En concordança amb les dimensions *epistèmica*, *cognitiva* i *interaccional*, la valoració dels indicadors de la *idoneïtat mediacional* de la implementació de la Tasca 1 mostra una disminució en el nivell d'assoliment previst a la *idoneïtat mediacional hipotètica* (**Figura 17.1.4.1.**). El qual és, a la mateixa vegada, inferior a les valoracions idealitzades de la dimensió *mediacional* de la *idoneïtat didàctica*.

Idoneïtat Mediacional de la Tasca 1

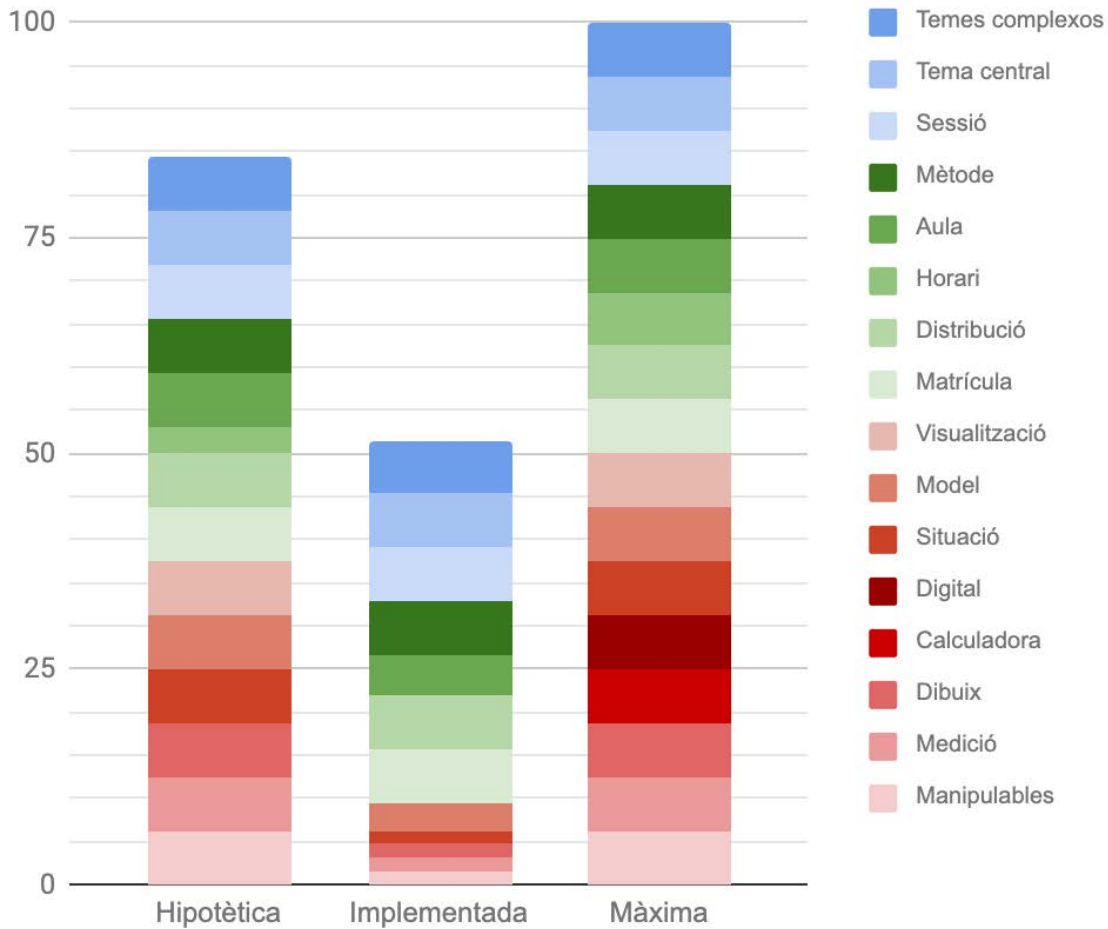


Figura 17.1.4.1. Comparació de la *idoneïtat mediacional hipotètica*, la *idoneïtat mediacional* de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la *idoneïtat mediacional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.1.5. Discussió de la idoneïtat afectiva de la Tasca 1

Tenint com a punt de partida la confrontació de les valoracions dels indicadors dels components de la dimensió *afectiva* per a la situació hipotètica i la implementació de la Tasca 1 dins l'aula (**Taula 17.1.5.1.**) s'identifiquen les coincidències i les discrepàncies entre aquestes dues etapes de l'anàlisi didàctica. La **Taula 17.1.5.2.** permet observar els dos indicadors que van refermar les valoracions de l'etapa hipotètica en la implementació de la Tasca 1: l'indicador 5.2.3 del component "actituds", relacionat amb la consideració dels arguments sense fer cap jutjament sobre la persona que els emet i l'indicador 5.3.4 del component "emocions", que fa referència a l'èmfasi que fa la tasca de les qualitats de precisió de les matemàtiques.

Taula 17.1.5.1.*Valoració dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 1.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	1	0
	5.1.2 Has trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	1	0
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	1	0
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?	1	0
	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	1	0,5
	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1	1
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ajuda a promoure l'autoestima?	1	0
	5.3.2 Aquesta tasca ajuda a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	1	0
	5.3.3 Aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	1	0
	5.3.4 Aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.5.2.*Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 1.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Actituds	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1	1
Emocions	5.3.4 Aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

Seguint amb l'anàlisi de les valoracions dels indicadors de la *idoneïtat afectiva* es reconeix que només un indicador del component "actituds" va disminuir la valoració estimada a la *idoneïtat afectiva hipotètica*: l'indicador 5.2.2 referent als raonaments necessaris per que la Tasca 1 es vagi donar de manera igualitària i sense cap preferència al voltant d'una petita part del grup (**Taula 17.1.5.3.**).

Taula 17.1.5.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Actituds	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	1	0,5

Font: Elaboració pròpia.

Malauradament, també hi hagut set indicadors que a la *idoneïtat afectiva hipotètica* es considerava que serien assolits al màxim nivell a la implementació de la tasca a l'aula, però que això no va ser així. La *idoneïtat afectiva* obtinguda de les dades de la implementació de la Tasca 1 no va mostrar cap justificació per assegurar l'existència dels indicadors: 5.1.1, relacionat amb l'interès generat per la tasca; 5.2.1, relacionat amb la identificació de trets d'utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb ajuda de la tasca; 5.1.3, sobre la identificació d'aspectes útils de les matemàtiques que puguin aplicar-se a la vida professional; 5.2.1., que qüestiona la promoció de valors com ara la perseverança, la responsabilitat, entre altres; i 5.3.1, sobre com la tasca ajuda a promoure l'autoestima en els estudiants (**Taula 17.1.5.4.**).

Taula 17.1.5.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	1	0
	5.1.2 Has trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	1	0
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	1	0
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?	1	0
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ajuda a promoure l'autoestima?	1	0
	5.3.2 Aquesta tasca ajuda a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	1	0
	5.3.3 Aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Fent una comparació general dels indicadors que s'agrupen en els components de la *idoneïtat afectiva*, es pot tornar a verificar la tendència visualitzada a les dimensions de la *idoneïtat didàctica* analitzades anteriorment: disminució del nivell d'assoliment dels indicadors de la *idoneïtat afectiva hipotètica* de la Tasca 1 durant la seva implementació a l'aula (**Figura 17.1.5.1**).

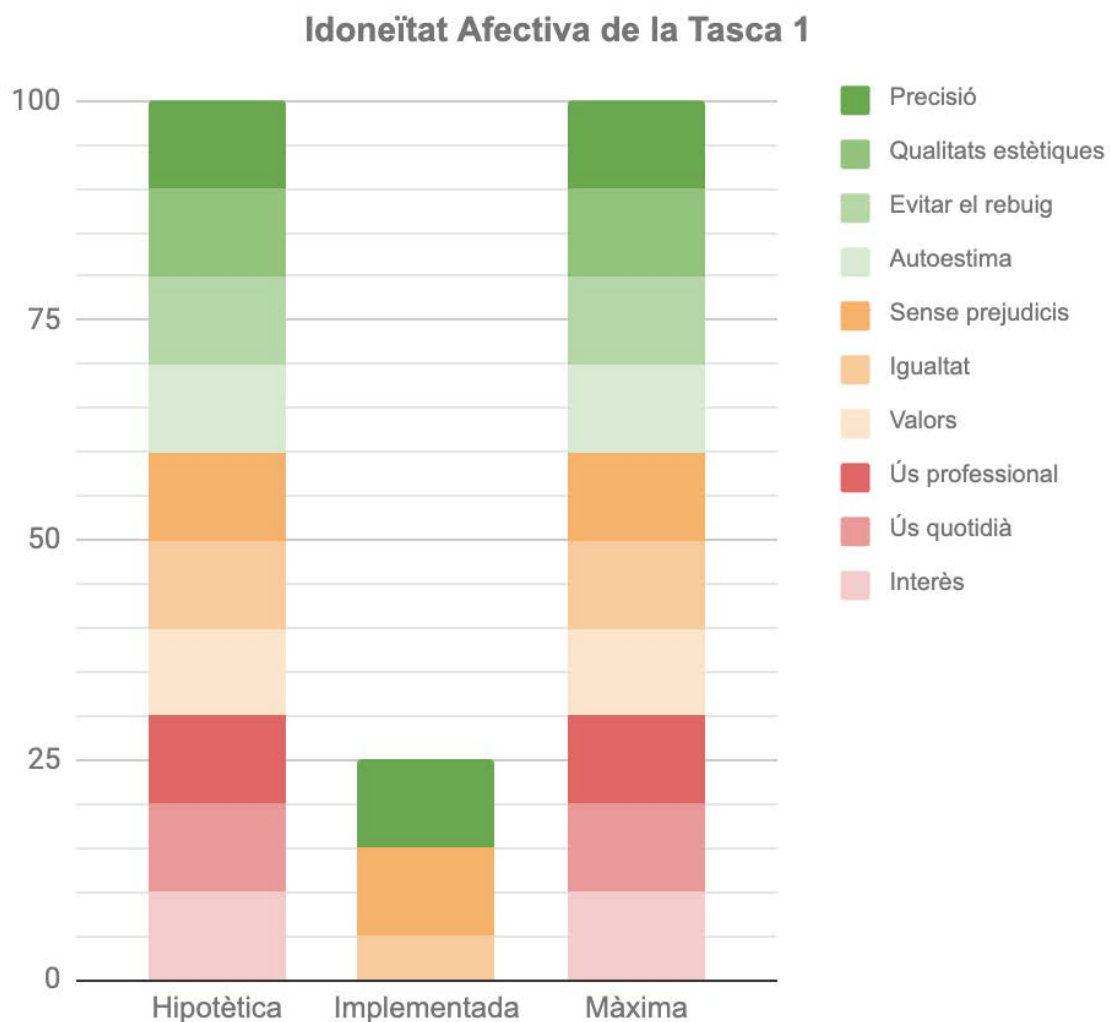


Figura 17.1.5.1. Comparació de la *idoneïtat afectiva hipotètica*, la *idoneïtat afectiva* de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la *idoneïtat afectiva* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.1.6. Discussió de la idoneïtat ecològica de la Tasca 1

Per concloure amb l'anàlisi de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1 es comparen les valoracions dels indicadors dels components de la *idoneïtat ecològica hipotètica* de la tasca respecte aquells obtinguts de les dades provinents de la implementació de la mateixa tasca dins l'aula (**Taula 17.1.6.1**).

Taula 17.1.6.1.*Valoració dels indicadors d'adoneïtat ecològica hipotètica i de la implementació de la Tasca 1.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1	1
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	0	0
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	0	0
Adaptació socioprofession al i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	1	0
Innovació didàctica	6.4.1 S'han aplicat temes coneguts per arribar a contingut nou?	1	1
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0	0
	6.4.3 S'apliquen noves mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0,5	0,5
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0	0

Font: Elaboració pròpia.

Com es veu a la **Taula 17.1.6.1.**, la majoria dels indicadors de la *idoneïtat ecològica* van conservar les mateixes valoracions de l'etapa hipotètica al moment de la implementació. Això es mostra de manera més clara a la **Taula 17.1.6.2.** i també es confirma amb les dades de la **Taula 17.1.6.3.** on es verifica que només un dels indicadors de la *idoneïtat ecològica hipotètica* va desaparèixer al moment de la implementació de la Tasca 1. L'únic indicador que es va perdre en implementar la tasca és el nombre 6.3.1, relacionat amb l'ajuda que proporciona el contingut per què els alumnes puguin identificar alguna preferència sobre una activitat professional.

Finalment, en compulsar el conjunt de valors assignats als indicadors que integren la *idoneïtat ecològica hipotètica* de la Tasca 1 amb aquells que són producte de la implementació davant els alumnes de la mateixa tasca es té una tendència de disminució del nivell d'assoliment d'aquest paràmetres al camp (**Figura 17.1.6.**).

Taula 17.1.6.2.

Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1	1
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	0	0
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	0	0
Innovació didàctica	6.4.1 S'han aplicat temes coneguts per arribar a contingut nou?	1	1
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0	0
	6.4.3 S'apliquen noves mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0,5	0,5
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0	0

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.1.6.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 1.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

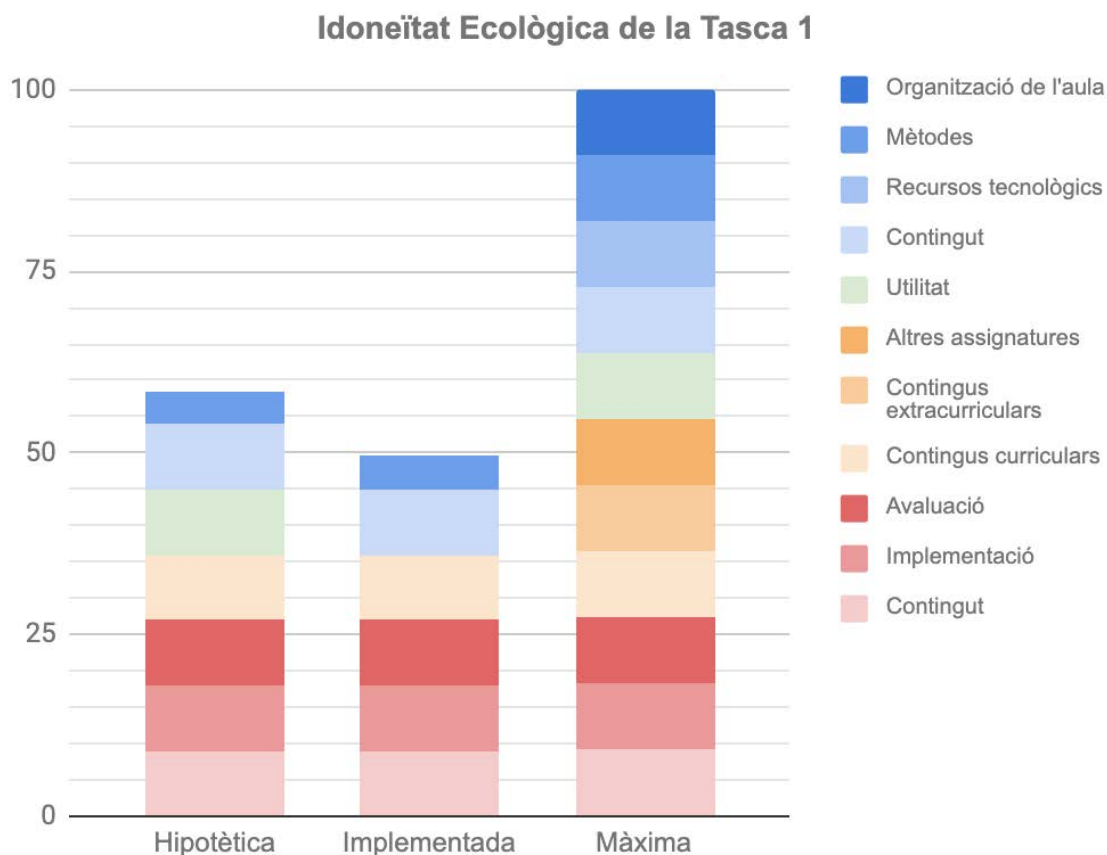


Figura 17.1.6.1. Comparació de la *idoneïtat ecològica hipotètica*, la *idoneïtat ecològica* de la implementació a l'aula de la Tasca 1 i la *idoneïtat ecològica* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.1.7. Discussió de la idoneïtat didàctica de la Tasca 1

Ajuntant les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* per establir un comparatiu general d'aquest constructe per a la Tasca 1 (**Figura 17.1.7.1.**), es té un nivell d'assoliment decreixent que comença amb els valors màxims del cas ideal fins les valoracions mínimes de la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la tasca. En agrupar les valoracions dels components d'una mateixa dimensió de la *idoneïtat didàctica* (**Figura 17.1.7.2.**) s'accentuen aquelles dimensions amb diferències notables entre l'etapa hipotètica i d'implementació de la Tasca 1: la cognitiva i l'afectiva. La qual cosa es torna a fer visible a la gràfica radial (**Figura 17.1.7.3.**) inspirada en la metàfora de l'hexàgon (Godino, 2013).

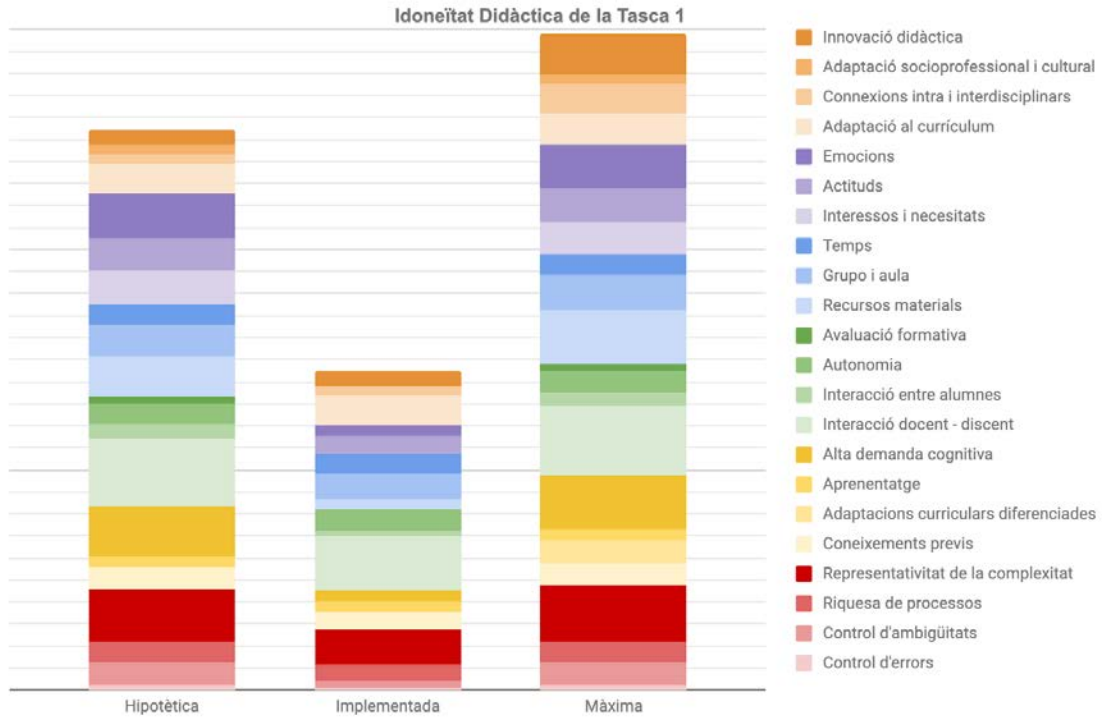


Figura 17.1.7.1. Comparació dels components de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima.

Font: Elaboració pròpia.

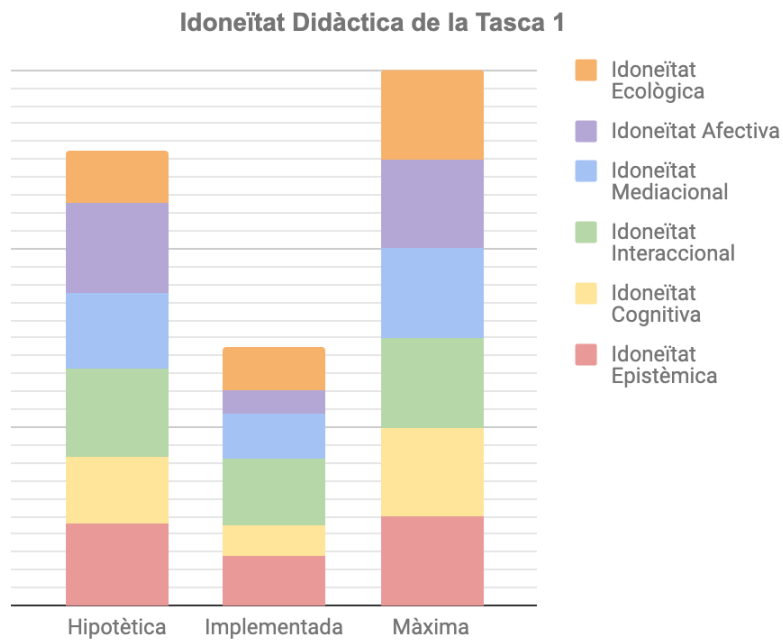


Figura 17.1.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima.

Font: Elaboració pròpia.

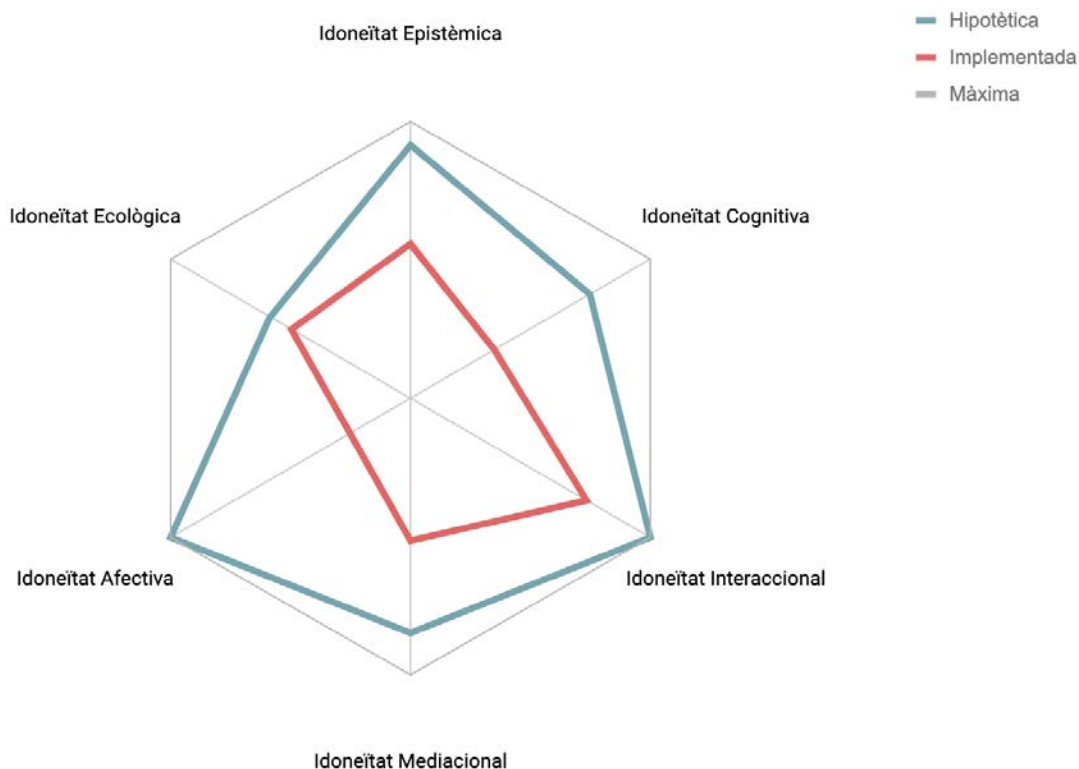


Figura 17.1.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica hipotètica, la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

17.2. Discussió de les dimensions de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2

L'anàlisi didàctica basada en la valoració dels indicadors dels components de cadascuna de les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* es repeteix per a la Tasca 2. Replicant l'estudi fet amb les dades experimentals de la Tasca 1, la discussió es centra en la comparació dels nivells d'assoliment dels indicadors d'una dimensió de la *idoneïtat didàctica* en cada subapartat.

17.2.1. Discussió de la idoneïtat epistèmica de la Tasca 2

A la **Taula 17.2.1.1.** es fa el recull de les valoracions dels indicadors dels components de la *idoneïtat epistèmica hipotètica* de la Tasca 2 aparellats amb les puntuacions assignades en la implementació d'aquesta mateixa tasca davant els alumnes.

Taula 17.2.1.1.*Valoració dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica i de la implementació de la Tasca 2.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'errors	1.1.1 Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	1	0,5
	1.2.1 S'han expressat les definicions amb claredat?	1	0,5
Control d'ambigüitats	1.2.2 S'han expressat els procediments amb claredat?	1	0,5
	1.2.3 Les explicacions han sigut clares?	1	0,5
	1.2.4 Les comprovacions han sigut clares?	1	0
	1.2.5 Les demostracions han sigut clares?	1	0
	1.2.6 S'ha omès l'ús de metàfores?	1	1
	Riquesa de processos	1.3.1 Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	
1.3.2 Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?		1	1
1.3.3 Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?		1	0
1.3.4 S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?		1	1
Representativitat de la complexitat	1.4.1 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,75	0,5
	1.4.2 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.3 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.4 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,75	0,5
	1.4.5 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.6 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.7 Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	0
	1.4.8 Es fa ús de representacions verbals?	1	1
	1.4.9 Es fa ús de representacions gràfiques?	1	1
	1.4.10 Es fa ús de representacions simbòliques?	0	0,5
	1.4.11 Es fa ús de diferents conversions?	1	0,25
	1.4.12 Es fa ús de diferents tractaments?	1	0,25

Font: Elaboració pròpia.

A partir del recull general de la **Taula 17.2.1.1.** es pot identificar el seguit d'indicadors que van mantenir la mateixa valoració a les etapes hipotètica i d'implementació de la Tasca 2. Aquest indicadors són: 1.2.6, referit a l'omissió de metàfores; 1.3.1, que indica la consideració de la modelització en la tasca; 1.3.3, que fa referència a la consideració de resolució de problemes; 1.3.4, que puntualitza l'establiment de connexions en

la tasca; 1.4.7, sobre l'absència d'una mostra representativa de problemes; 1.4.8, que senyala l'ús de representacions verbals i l'indicador 1.4.9, que subratlla l'ús de representacions gràfiques.

Taula 17.2.1.2.

Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'ambigüitats	1.2.6 S'ha omès l'ús de metàfores?	1	1
	1.3.1 Es considera la modelització en la seqüència de tasques?	1	1
Riquesa de processos	1.3.3 Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?	1	1
	1.3.4 S'estableixen connexions en la seqüència de tasques?	1	1
Representativitat de la complexitat	1.4.7 Es proposa una mostra representativa de problemes?	0	0
	1.4.8 Es fa ús de representacions verbals?	1	1
	1.4.9 Es fa ús de representacions gràfiques?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

En una segona categoria es troben els indicadors que van disminuir les valoracions fetes a la *idoneïtat epistèmica hipotètica* de la Tasca 2 al moment de la seva implementació. Entre ells es troben: el control de pràctiques matemàticament correctes (indicador 1.1.1); l'expressió clara de les definicions (indicador 1.2.1), dels procediments (indicador 1.2.2) i de les explicacions (indicador 1.2.3); la presentació de definicions (indicador 1.4.1), propietats (indicador 1.4.2) i procediments (indicador 1.4.3) representatives de la noció matemàtica del currículum; la consideració de definicions (indicador 1.4.4), propietats (indicador 1.4.5) i procediments (indicador 1.4.6) adients a la noció matemàtica que es desitja portar a l'aula i l'ús de conversions (indicador 1.4.11) i tractaments (indicador 1.4.12) diferents a la tasca (**Taula 17.2.1.3.**).

Com a cas més greu es presenten els tres indicadors que van obtenir la puntuació màxima a la valoració de la *idoneïtat epistèmica hipotètica* de la Tasca 2, però que en van desaparèixer a la implementació de la tasca davant els alumnes. Aquests tres indicadors són: la presència de comprovacions (indicador 1.2.4) i demostracions (indicador 1.2.5) clares i la consideració de l'argumentació en la Tasca 2 (indicador 1.3.2). La manca d'evidències per justificar l'assignació de cap puntuació per a aquests tres indicadors ha fet que se'ls hagués de valorar amb zero a la implementació de la Tasca 2 (**Taula 17.2.1.4.**).

Taula 17.2.1.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'errors	1.1.1 Es controla que les pràctiques siguin matemàticament correctes?	1	0,5
Control d'ambigüitats	1.2.1 S'han expressat les definicions amb claredat?	1	0,5
	1.2.2 S'han expressat els procediments amb claredat?	1	0,5
	1.2.3 Les explicacions han sigut clares?	1	0,5
Representativitat de la complexitat	1.4.1 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	0,75	0,5
	1.4.2 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.3 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?	1	0,5
	1.4.4 Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	0,75	0,5
	1.4.5 Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.6 Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?	1	0,5
	1.4.11 Es fa ús de diferents conversions?	1	0,25
	1.4.12 Es fa ús de diferents tractaments?	1	0,25

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.2.1.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Control d'ambigüitats	1.2.4 Les comprovacions han sigut clares?	1	0
	1.2.5 Les demostracions han sigut clares?	1	0
Riquesa de processos	1.3.2 Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

També es va presentar el cas del indicador 1.4.10, relacionat amb l'ús de representacions simbòliques, que tot i ser valorat com a zero a la *idoneïtat epistèmica hipotètica* de la Tasca 2 a la implementació a l'aula va sorgir (**Taula 17.2.1.5.**).

Taula 17.2.1.5.

Relació dels indicadors d'idoneïtat epistèmica hipotètica que van millorar la seva valoració a la idoneïtat epistèmica de la implementació de la Tasca 2.

Component		Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Representativitat de la complexitat	1.4.10	Es fa ús de representacions simbòliques?	0	0,5

Font: Elaboració pròpia.

Per concloure amb aquesta dimensió de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 2, s'agrupen en el gràfic de la **Figura 17.2.1.1.** tots els indicadors dels components que integren la *idoneïtat epistèmica hipotètica* de la Tasca 2 amb els mateixos paràmetres que caracteritzen a aquesta dimensió al moment de la seva implementació i amb la valoració màxima dels indicadors per representar el cas idealitzat de la *idoneïtat epistèmica*. Així es pot veure que la previsió del nivell d'assoliment dels indicadors de la *idoneïtat epistèmica* fets a l'estudi hipotètic són inferiors als valors màxims o ideals. A més, les valoracions dels indicadors de la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la Tasca 2 són encara més baixos que els establerts a la *idoneïtat epistèmica hipotètica*.

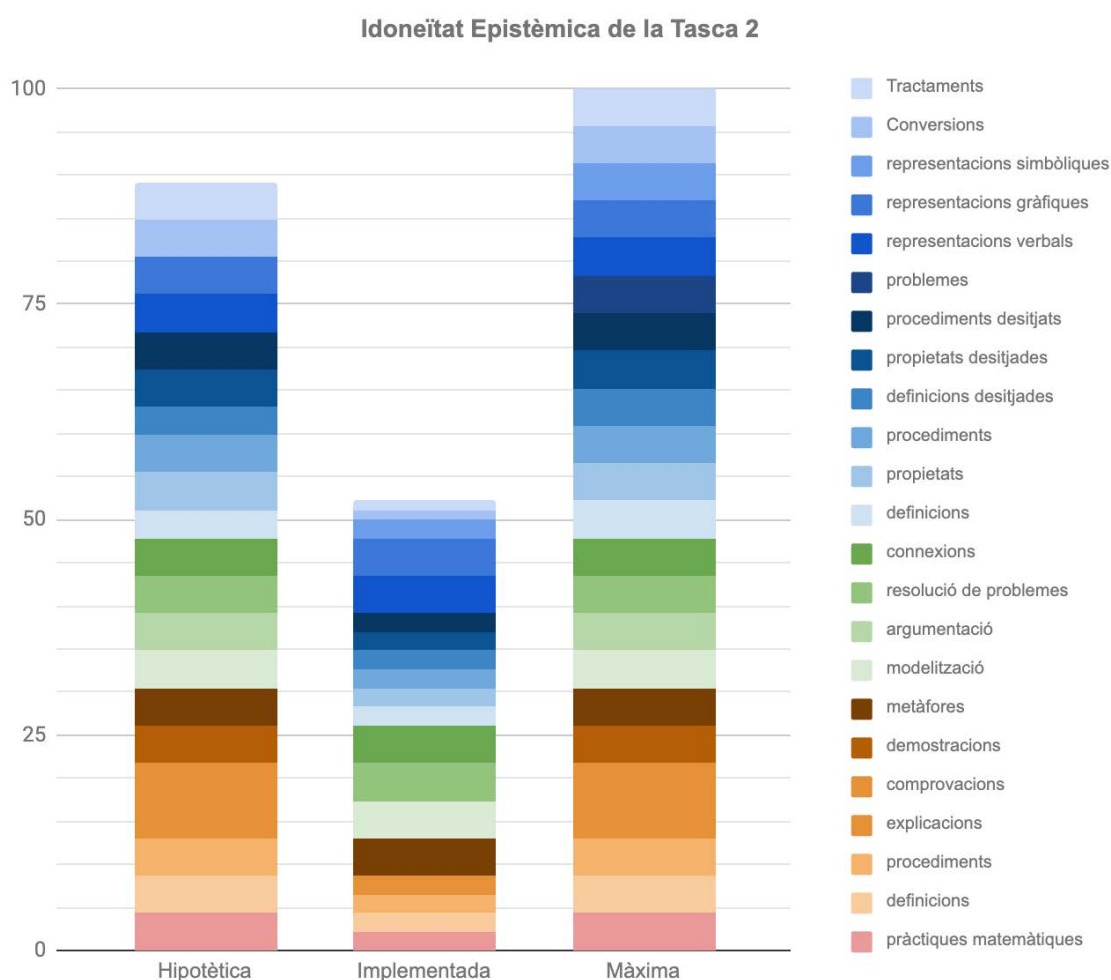


Figura 17.2.1.1. Comparació de la *idoneïtat epistèmica hipotètica*, la *idoneïtat epistèmica* de la implementació a l’aula de la Tasca 2 i la *idoneïtat epistèmica* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.2.2. Discussió de la idoneïtat cognitiva de la Tasca 2

Les puntuacions assignades als indicadors de la *idoneïtat cognitiva hipotètica* de la Tasca 2 i de la seva implementació davant els alumnes es reuneixen a la **Taula 17.2.2.1.** per comparar-les. La primera observació que es fa sobre aquests paràmetres són els dos indicadors que van mantenir les mateixes valoracions a totes dues situacions, la hipotètica i la real. Es tracta dels indicadors 2.2.1 i 2.2.2 que integren el component “adaptacions curriculars diferenciades”. Aquest parell d’indicadors, tal i com es va preveure des de la *idoneïtat cognitiva hipotètica*, no es van presentar a la implementació de la Tasca 2 (**Taula 17.2.2.2.**).

Taula 17.2.2.1.*Valoració dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 2.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	1	0
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	1	0
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0	0
Aprentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	1	0
	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0,75	0
Alta demanda cognitiva	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	1	0
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	1	0
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	1	0
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.2.2.2.*Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 2.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Adaptacions curriculars diferenciades	2.2.1 La tasca inclou activitats de desenvolupament?	0	0
	2.2.2 La tasca inclou activitats de suport?	0	0

Font: Elaboració pròpia.

Per una altra banda, els indicadors que van rebre puntuació a la etapa hipotètica de la Tasca 2 i que al moment de la seva implementació no es va trobar cap evidència amb la qual puntuar-los són tots els indicadors restants. És a dir, van desaparèixer les components: “coneixements previs”, “aprenentatge” i “alta demanda cognitiva”. Això es deu a que tots els indicadors que descriuen aquests components van rebre zero com a puntuació en el moment de portar la Tasca 2 a l'aula (**Taula 17.2.2.3.**).

Taula 17.2.2.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat cognitiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat cognitiva de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Coneixements previs	2.1.1 Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?	1	0
	2.1.2 Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?	1	0
Aprenentatge	2.3.1 Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?	1	0
Alta demanda cognitiva	2.4.1 La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?	0,75	0
	2.4.2 La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?	1	0
	2.4.3 La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte: verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?	1	0
	2.4.4 La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?	1	0
	2.4.5 La tasca promou processos de metacognició?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

En termes generals, es té el gràfic on s'acumulen verticalment les valoracions dels indicadors de la *idoneïtat cognitiva hipotètica* per comparar-los amb la mateixa dimensió però que prové de l'anàlisi de la situació aplicada dins l'aula i el cas ideal de l'assoliment màxim de tots els indicadors. Aquesta representació, el gràfic, permet marcar les diferències entre les valoracions d'aquests tres estats (hipotètic, real i ideal). Així es pot percebre la notable diferència entre la *idoneïtat cognitiva hipotètica* i la inexistent *idoneïtat cognitiva real* o implementada per a la Tasca 2 (**Figura 17.2.2.1.**).

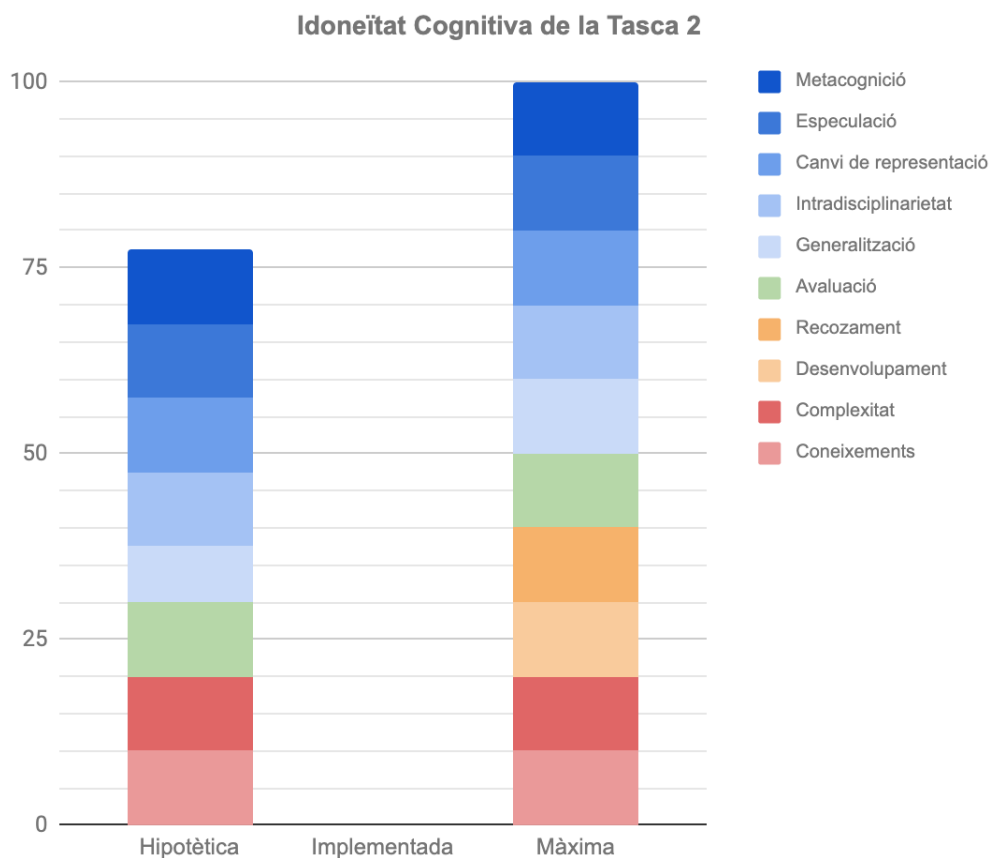


Figura 17.2.2.1. Comparació de la *idoneïtat cognitiva hipotètica*, la *idoneïtat cognitiva* de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la *idoneïtat cognitiva* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.2.3. Discussió de la idoneïtat interaccional de la Tasca 2

El conjunt dels indicadors que concreten les components de la *idoneïtat interaccional* es mostra a la **Taula 17.2.3.1.** per comparar les valoracions de les etapes hipotètica i d'implementació de la Tasca 2. A partir d'aquest registre s'obté una segona taula, la **Taula 17.2.3.2.**, per aïllar els indicadors que van rebre la mateixa puntuació per a la *idoneïtat interaccional hipotètica* de la Tasca 2 i la seva implementació amb estudiants. Dins aquesta segona taula es pot verificar que la tasca es va presentar amb claredat (indicador 3.1.1), ben organitzada (indicador 3.1.2), amb una verbalització adequada (indicador 3.1.3), emfatitzant els conceptes clau del tema (indicador 3.1.4), identificant les expressions físiques dels estudiants que es trobaven davant un conflicte cognitiu (indicador 3.1.5) i que no es va fer cap observació sistemàtica per registrar el progrés cognitiu dels alumnes (indicador 3.4.1).

Taula 17.2.3.1.*Valoració dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica i de la implementació de la Tasca 2.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció docent - discent	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1	1
	3.1.4 S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?	1	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1	1
	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	0,25
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	0,25
	3.1.8 S'ha promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	1	0
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	1	0,25
	3.1.10 S'ha observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	1	0,25
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'ha observat que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?	1	0
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	1	0
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	1	0,25
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?	1	0,25
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?	1	0,25
Avaluació formativa	3.4.1 Es va realitzar una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	0	0

Font: Elaboració pròpia.

Al a **Taula 17.2.3.3.** es compilen els indicadors que van tenir un nivell d'assoliment més alt a la *idoneïtat interaccional hipotètica* de la Tasca 2 respecte de la *idoneïtat interaccional real* o de la implementació d'aquesta tasca. Són: la interpretació i resolució de les preguntes amb les quals els alumnes expressen els seus conflictes cognitius (indicador 3.1.6), la conducció apropiada de les contribucions del grup que expressen els conflictes cognitius dels alumnes (indicador 3.1.7), la utilització de recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció (3.1.9), la facilitació de la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la sessió (indicador 3.1.10), l'existència de moments on els alumnes es fan càrrec del seu estudi mitjançant l'exploració (indicador 3.3.1), la formulació (indicador 3.3.2) i la validació (indicador 3.3.3).

Taula 17.2.3.2.

Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció docent - discent	3.1.1 S'ha presentat la tasca amb claredat?	1	1
	3.1.2 S'ha presentat la tasca ben organitzada?	1	1
	3.1.3 La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	1	1
	3.1.4 S'han enfatitzat els conceptes clau del tema?	1	1
	3.1.5 S'han identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?	1	1
Avaluació formativa	3.4.1 Es va realitzar una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?	0	0

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.2.3.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció docent - discent	3.1.6 S'han interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	0,25
	3.1.7 S'han conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?	1	0,25
	3.1.9 S'han utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?	1	0,25
	3.1.10 S'ha observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?	1	0,25
Autonomia	3.3.1 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?	1	0,25
	3.3.2 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?	1	0,25
	3.3.3 Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?	1	0,25

Font: Elaboració pròpia.

Com a última observació, les indicadors considerats a la *idoneïtat interaccional hipotètica* de la Tasca 2 que no es van presentar a la seva implementació dins l'aula són: la promoció del consens mitjançant

l'argumentació (indicador 3.1.8), l'observació de la promoció del diàleg i la comunicació entre els alumnes (indicador 3.2.1) i la promoció de la integració en grups (indicador 3.2.2).

Taula 17.2.3.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat interaccional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat interaccional de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interacció docent - discent	3.1.8 S'ha promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?	1	0
Interacció entre alumnes	3.2.1 S'ha observat que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?	1	0
	3.2.2 Amb la tasca es promou la integració en grups?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Com a conseqüència de l'anàlisi dels canvis en les valoracions dels indicadors de la dimensió *interaccional* de la *idoneïtat didàctica hipotètica* de la Tasca 2, de la seva implementació i del cas ideal de les puntuacions màximes es pot dir que hi ha una tendència de disminució de les puntuacions màximes per a la Tasca 2 a la valoració de la seva *idoneïtat interaccional hipotètica*. Aquesta mateixa tendència de reducció de valors es manté en comparar l'acumulació dels indicadors de la *idoneïtat interaccional hipotètica* de la Tasca 2 amb els mateixos paràmetres però per a l'etapa de la implementació d'aquesta tasca (**Figura 17.2.3.1**).

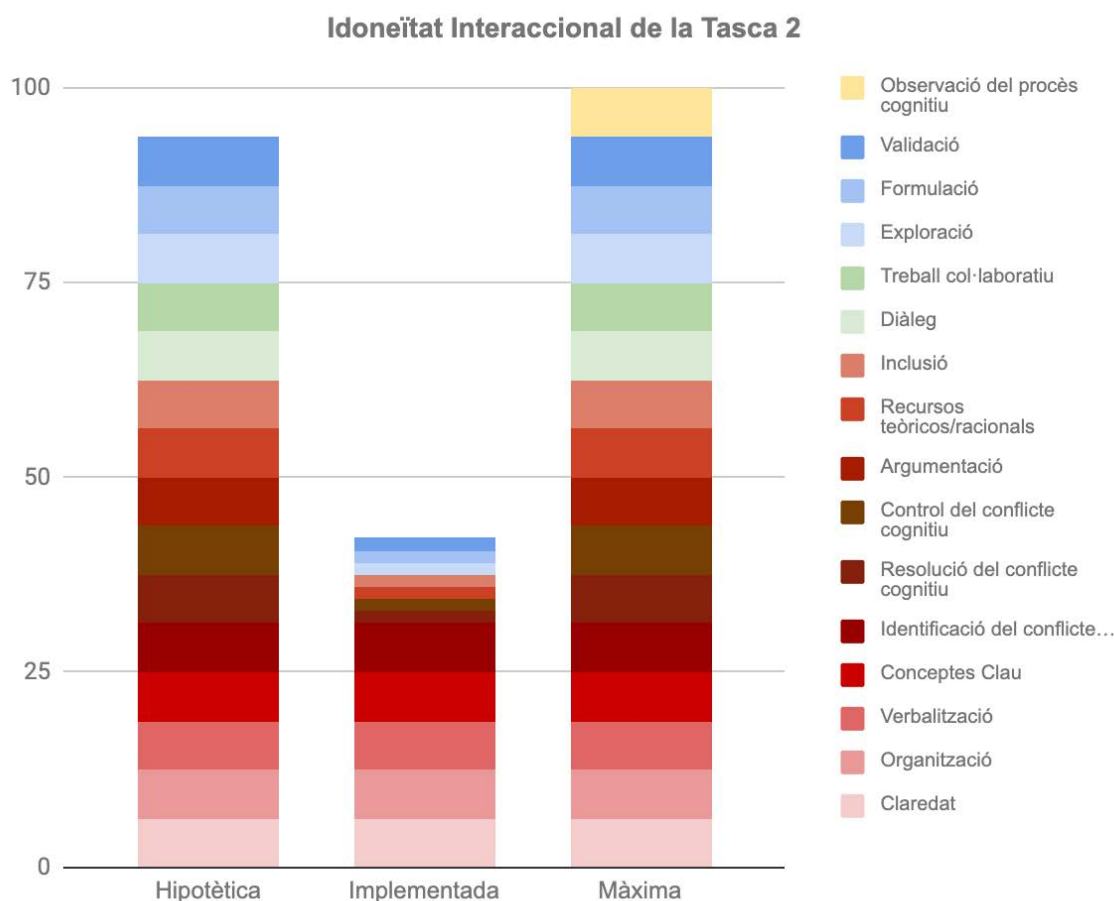


Figura 17.2.3.1. Comparació de la *idoneïtat interaccional hipotètica*, la *idoneïtat interaccional* de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la *idoneïtat interaccional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.2.4. Discussió de la idoneïtat mediacional de la Tasca 2

Els indicadors de la *idoneïtat mediacional* de la Tasca 2 es recullen en dues categories: valoracions de la fase hipotètica i de la fase d'implementació (**Taula 17.2.4.1.**). L'observació d'aquestes dades admet classificar els indicadors de la *idoneïtat mediacional* de la Tasca 2 en tres categories: (1) els indicadors que mantenen la mateixa valoració a totes dues fases hipotètica i d'implementació (**Taula 17.2.4.2.**), (2) els indicadors que van disminuir la valoració obtinguda a la *idoneïtat mediacional hipotètica* al moment de la implementació a l'aula de la Tasca 2 (**Taula 17.2.4.3.**) i (3) els indicadors pels quals no es va trobar cap evidència per puntuar-los al moment de presentar la Tasca 2 davant els alumnes (**Taula 17.2.4.4.**). A la primera categoria (**Taula 17.2.4.2.**) pertanyen els indicadors 4.1.4 (ús de la calculadora per ajudar en la utilització del llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics), 4.1.5 (ús de dispositius digitals, com ara l'ordinador o la tauleta, per ajudar en la utilització del llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics), 4.2.1

(contribució del nombre de companys que han participat en la tasca en l'aprenentatge), 4.2.2 (contribució de la distribució dels alumnes dins l'aula en el desenvolupament de la tasca i en l'aprenentatge), 4.2.3 (aula adequada pel desenvolupament de la tasca) i 4.2.5 (distribució dels alumnes dins l'aula que afavoreix el desenvolupament de la tasca).

Taula 17.2.4.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica i de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,5
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,5
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,5
	4.1.4 La calculadora ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	1	0,5
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	1	0,5
	4.1.8 S'han pogut visualitzar les definicions i propietats?	1	0,25
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre de companys que han participat de la tasca t'ha ajudat a aprendre?	1	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1	1
	4.2.3 L'horari de la classe és l'adequat?	0,5	0
	4.2.4 L'aula és apropiada pel desenvolupament de la tasca?	1	1
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1	1
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?		
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	1	0
	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?	1	0,25

Font: Elaboració pròpia.

La segona categoria d'indicadors (**Taula 17.2.4.3.**), aquells que van veure disminuïda la seva valoració obtinguda a la *idoneïtat mediacional hipotètica* de la Tasca 2, està composta per: la contribució dels materials (indicador 4.1.1), els instruments de mesura (indicador 4.1.2) i els instruments de dibuix geomètric (indicador 4.1.3) en la utilització del llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics; la presentació

de definicions i propietat mitjançant una situació aplicada (indicador 4.1.6) i un model (indicador 4.1.7); la visualització de definicions i propietats (indicador 4.1.8) i la dedicació de temps suficient per al tòpic de major dificultat (indicador 4.3.3).

Taula 17.2.4.2.

Relació dels indicadors d'adoneïtat mediacional hipotètica que van mantenir la seva valoració a la adoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Recursos materials	4.1.4 La calculadora ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
	4.1.5 L'ordinador o la tauleta han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	0	0
Condicions del grup i de l'aula	4.2.1 El nombre de companys que han participat de la tasca t'ha ajudat a aprendre?	1	1
	4.2.2 La distribució dels alumnes dins l'aula ha ajudat al desenvolupament de la tasca i ha facilitat l'aprenentatge?	1	1
	4.2.4 L'aula és apropiada pel desenvolupament de la tasca?	1	1
	4.2.5 La distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

La tercera i última categoria són els indicadors que ja no es van fer evidents a la implementació de la Tasca 2, contradient el que estava previst a la *adoneïtat mediacional hipotètica* (**Taula 17.2.4.4.**). Dins d'aquest grup són els indicadors: 4.2.3, relacionat amb l'horari adequat per fer la sessió de matemàtiques; 4.3.1, que qüestiona si el temps ha sigut suficient per realitzar la tasca; i el indicador 4.3.2 que es relaciona amb la dedicació de temps necessària pels temes o aspectes centrals de la tasca.

La unió de les tres categories d'indicadors permet obtenir un gràfic de barres acumulades de la *adoneïtat mediacional* de la implementació de la Tasca 2 on es compara també l'acumulació de les valoracions obtingudes amb la *adoneïtat mediacional hipotètica* de la tasca i el cas idealitzat de l'obtenció de les màximes puntuacions per a tots els indicadors de la dimensió *mediacional* de la *adoneïtat didàctica* (**Figura 17.2.3.1.**). Dins aquesta gràfica es pot observar que la *adoneïtat mediacional* de la implementació de la Tasca 2 ha rebut puntuacions més baixes que la *adoneïtat mediacional hipotètica*. És a dir, el nivell d'assoliment dels indicadors de la *adoneïtat mediacional* és el més baix a l'etapa d'implementació de la Tasca 2.

Taula 17.2.4.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van disminuir la seva valoració a la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Recursos materials	4.1.1 Els materials utilitzats han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,5
	4.1.2 Els instruments de mesura (regle i transportador) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,5
	4.1.3 Els instruments de dibuix geomètric (regle, escaire, cartabó i compàs) han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	1	0,5
	4.1.6 Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	1	0,5
	4.1.7 Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	1	0,5
	4.1.8 S'han pogut visualitzar les definicions i propietats?	1	0,25
Temps	4.3.3 S'ha dedicat prou temps als tòpics de major dificultat?	1	0,25

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.2.4.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat mediacional hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat mediacional de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Condicions del grup i de l'aula	4.2.3 L'horari de la classe és l'adequat?	0,5	0
Temps	4.3.1 S'ha tingut prou temps per realitzar la tasca?	1	0
	4.3.2 S'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Idoneïtat Mediacional de la Tasca 2

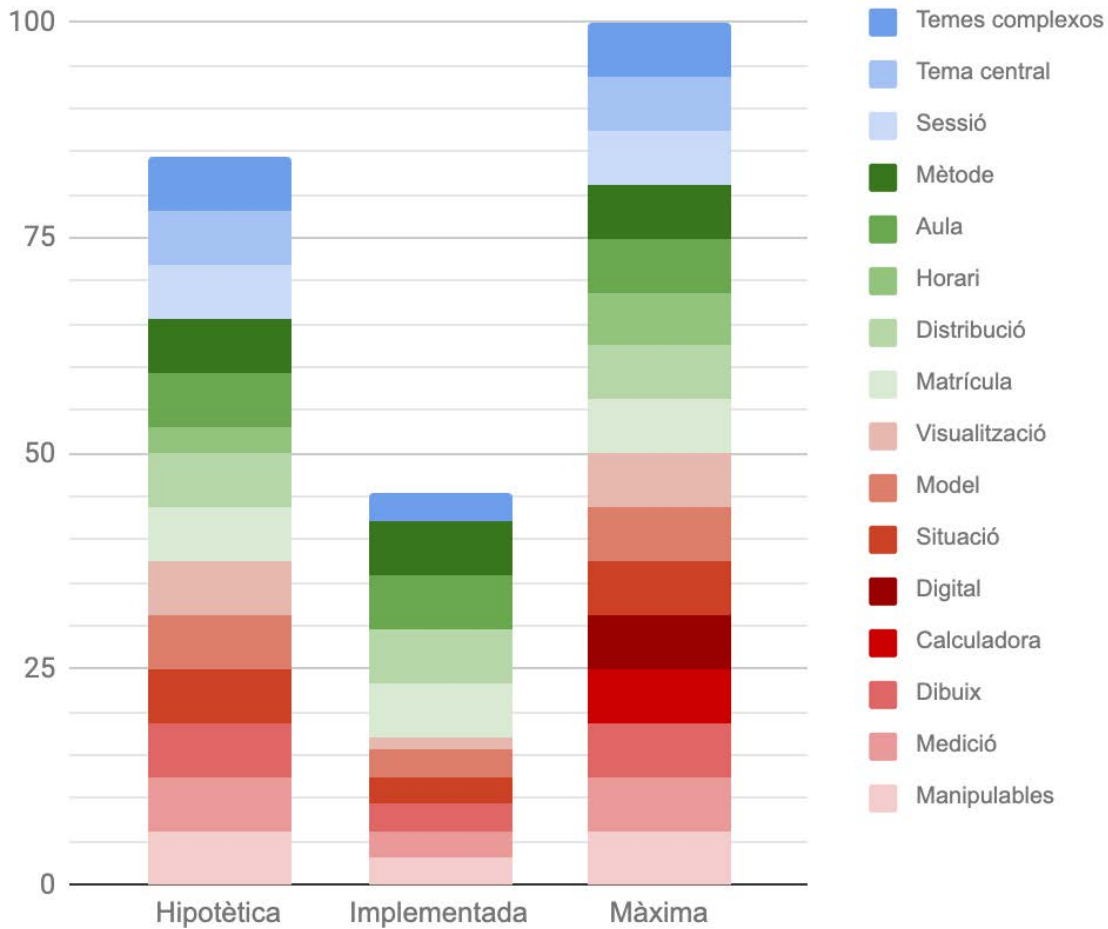


Figura 17.2.4.1. Comparació de la *idoneïtat mediacional hipotètica*, la *idoneïtat mediacional* de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la *idoneïtat mediacional* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.2.5. Discussió de la idoneïtat afectiva de la Tasca 2

En comparar les puntuacions que caracteritzen el nivell d'assoliment dels indicadors de la *idoneïtat afectiva* de la Tasca 2 al moment de preveure les situacions a viure a l'aula (*idoneïtat afectiva hipotètica*) amb la realitat experimentada a l'aula (*idoneïtat afectiva* de la implementació) s'identifiquen dues tendències: (1) indicadors que presenten la mateixa valoració a les fases hipotètica i d'implementació i (2) els indicadors que, tot i ser considerats a la fase hipotètica, no es van presentar al moment de la implementació de la tasca (**Taula 17.2.5.1.**).

Taula 17.2.5.1.*Valoració dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica i de la implementació de la Tasca 2.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	1	0
	5.1.2 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	1	0
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	1	0
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?	1	0
	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	1	1
	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1	1
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ha ajudat a promoure la teva autoestima?	1	0
	5.3.2 Aquesta tasca ha ajudat a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	1	0
	5.3.3 Aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	1	0
	5.3.4 Aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

Pel que fa als indicadors que tenen igual puntuació a la *idoneïtat afectiva hipotètica* de la Tasca 2 i a la real o d'implementació, a la **Taula 17.2.5.2** es mostra que es tracta dels indicadors 5.2.2 (raonaments considerats de manera igualitària) i 5.2.3 (arguments considerats sense fer cap judici sobre la persona que els emet).

Taula 17.2.5.2.*Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 2.*

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Actituds	5.2.2 Els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	1	1
	5.2.3 S'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	1	1

Font: Elaboració pròpia.

Com es pot observar de comparar la **Taula 17.2.5.1.** amb la **Taula 17.2.5.2.**, tots els indicadors que no es localitzen a la **Taula 17.2.5.2.** (és a dir, tots els indicadors que van mantenir el mateix valor a la *idoneïtat afectiva hipotètica* de la Tasca 2 i a la seva implementació) comparteixen una mateixa característica: ja no es van evidenciar a la fase d'implementació de la Tasca 2. En concret, es tracta dels indicadors: 5.1.1, relacionat amb l'interès dels alumnes sobre la tasca; 5.1.2, sobre la identificació del sentit d'utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes gràcies a la Tasca 2; 5.1.3, que parla de la identificació de la utilitat de les matemàtiques en la vida professional amb ajuda de la Tasca 2; 5.2.1, que ressalta la promoció de valors com la perseverança o la responsabilitat; 5.3.1, relatiu a la promoció de l'autoestima; 5.3.2, sobre l'ajuda a evitar el rebuig, la fòbia o la por cap a les matemàtiques; 4.3.3, sobre l'èmfasi en les qualitats estètiques de les matemàtiques i per finalitzar, el indicador 5.3.4, que fa referència a l'èmfasi en les qualitats de precisió de les matemàtiques (**Taula 17.2.5.3.**).

Taula 17.2.5.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat afectiva hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat afectiva de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Interessos i necessitats	5.1.1 Ha resultat interessant la tasca?	1	0
	5.1.2 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	1	0
	5.1.3 S'ha trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	1	0
Actituds	5.2.1 Aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?	1	0
Emocions	5.3.1 Aquesta tasca ha ajudat a promoure la teva autoestima?	1	0
	5.3.2 Aquesta tasca ha ajudat a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	1	0
	5.3.3 Aquesta tasca emfatitza les qualitats estètiques de les matemàtiques?	1	0
	5.3.4 Aquesta tasca emfatitza les qualitats de precisió de les matemàtiques?	1	0

Font: Elaboració pròpia.

La gràfica de barres acumulades en la qual es recull tota la informació presentada a la **Taula 17.2.5.1.** mostra la gran diferència entre les valoracions dels indicadors de la *idoneïtat afectiva hipotètica* de la Tasca 2 respecte de la seva implementació a l'aula.

Idoneïtat Afectiva de la Tasca 2

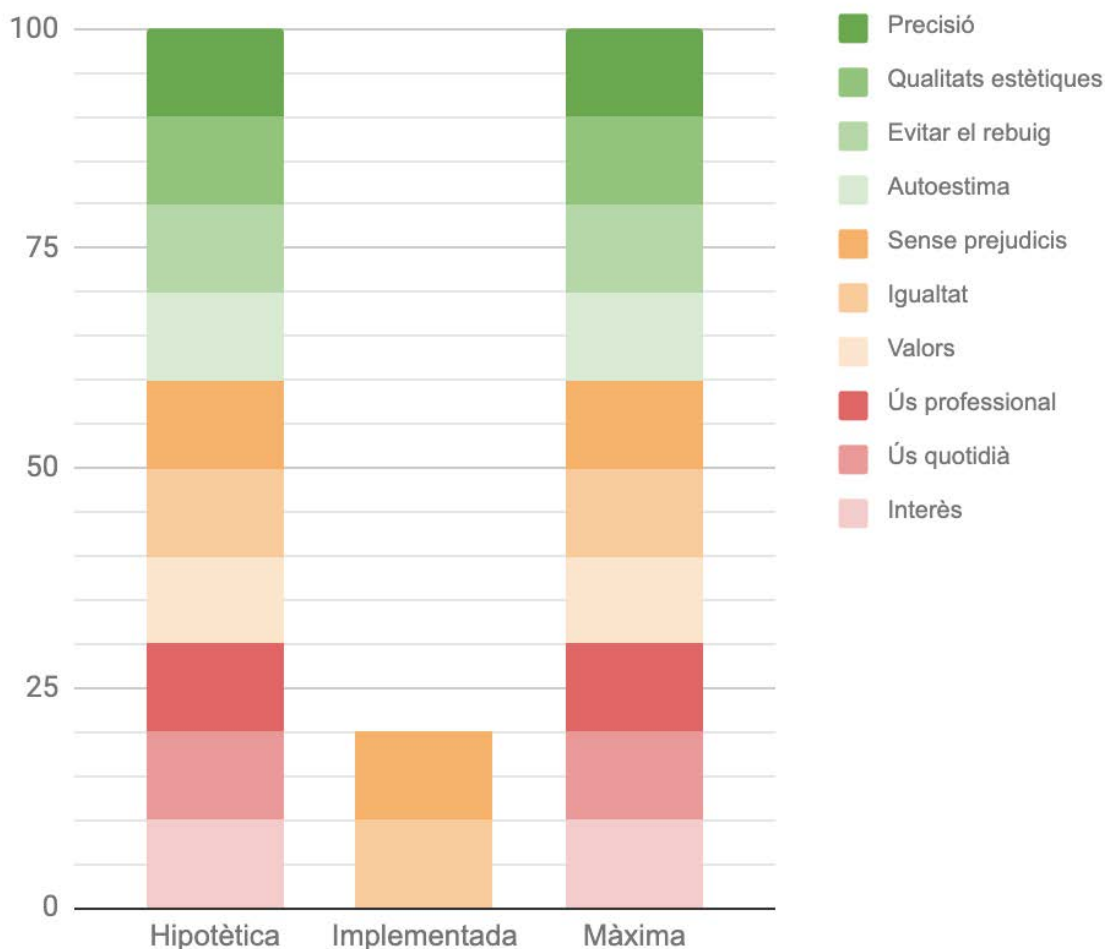


Figura 17.2.5.1. Comparació de la *idoneïtat afectiva hipotètica*, la *idoneïtat afectiva* de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la *idoneïtat afectiva* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.2.6. Discussió de la idoneïtat ecològica de la Tasca 2

La sisena dimensió de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 2, la *idoneïtat ecològica*, s'analitza amb ajuda de la recopilació de les valoracions del nivell d'assoliment dels indicadors dels components d'aquesta dimensió en dos moments: abans la implementació de la tasca (hipotètica) i després de la seva implementació (real o d'implementació). A la **Taula 17.2.6.1.** es fa aquest recull de puntuacions. Els indicadors 6.1.1 (el contingut de la tasca és al pla curricular), 6.1.2 (la implementació del contingut de la tasca és al pla curricular), 6.1.3 (l'avaluació de la tasca és al pla curricular), 6.2.1 (el contingut es relaciona amb altres temes de les matemàtiques del mateix nivell acadèmic), 6.3.1 (el contingut de la tasca ajuda als alumnes a identificar preferències cap una activitat professional), 6.4.2 (amb la tasca no s'introdueixen recursos tecnològics

després de la reflexió) i 6.4.3 (no es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió) conserven el mateix nivell d'assoliment a les etapes hipotètica i d'implementació de la Tasca 2 (**Taula 17.2.6.2.**). Els indicadors 6.4.1 (aplicació de temes coneguts per arribar a contingut nou) i 6.4.3 (aplicació de nous mètodes d'avaluació després de la reflexió) no es van poder puntuar per la manca de dades que donessin evidències d'ells a la fase de la implementació de la Tasca 2, contrari al que es va contemplar a la valoració de la *idoneïtat ecològica hipotètica* (**Taula 17.2.6.3.**). Per una altra banda, els indicadors 6.2.2 (el contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum) i 6.2.3 (el contingut s'ha relacionat amb temes que s'han vist en altres assignatures) malgrat no tenir assignada cap puntuació a la *idoneïtat ecològica hipotètica* de la Tasca 2 sí que es van presentar a la implementació de la tasca (**Taula 17.2.6.4.**).

Taula 17.2.6.1.

Valoració dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica i de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1	1
	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	0	1
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	0	1
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	1	1
Innovació didàctica	6.4.1 Has aplicat temes que ja coneixies per arribar a contingut nou?	1	0
	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0	0
	6.4.3 S'apliquen nous mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0,5	0
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0	0

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.2.6.2.

Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van mantenir la seva valoració a la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Adaptació al currículum	6.1.1 El contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.2 La implementació del contingut forma part del pla curricular?	1	1
	6.1.3 L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?	1	1
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.1 El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?	1	1
Adaptació socioprofessional i cultural	6.3.1 El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	1	1
Innovació didàctica	6.4.2 S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?	0	0
	6.4.4 Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?	0	0

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.2.6.3.

Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van desaparèixer a la valoració de la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Innovació didàctica	6.4.1 Has aplicat temes que ja coneixies per arribar a contingut nou?	1	0
	6.4.3 S'apliquen nous mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?	0,5	0

Font: Elaboració pròpia.

Taula 17.2.6.4.

Relació dels indicadors d'idoneïtat ecològica hipotètica que van millorar la seva valoració a la idoneïtat ecològica de la implementació de la Tasca 2.

Component	Indicador	Valoració hipotètica	Valoració d'implementació
Connexions intra i interdisciplinars	6.2.2 El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?	0	1
	6.2.3 El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	0	1

Font: Elaboració pròpia.

Formant un gràfic de barres mitjançant l'acumulació de les valoracions que els indicadors de la *idoneïtat ecològica* van rebre a la fase prèvia a la implementació de la Tasca 2 (ideal o màxima i hipotètica) i a la fase posterior a la seva implementació (d'implementació o real) es té un comparatiu entre els aspectes ideal, hipotètic i real de la Tasca 2 (**Figura 17.2.6.1**). En aquesta gràfica és possible identificar les semblances entre el nivell d'assoliment dels indicadors de la dimensió *ecològica* a la fase hipotètica i d'implementació. Tots dos, molt més inferior a les valoracions màximes idealitzades de la *idoneïtat ecològica* de la Tasca 2.

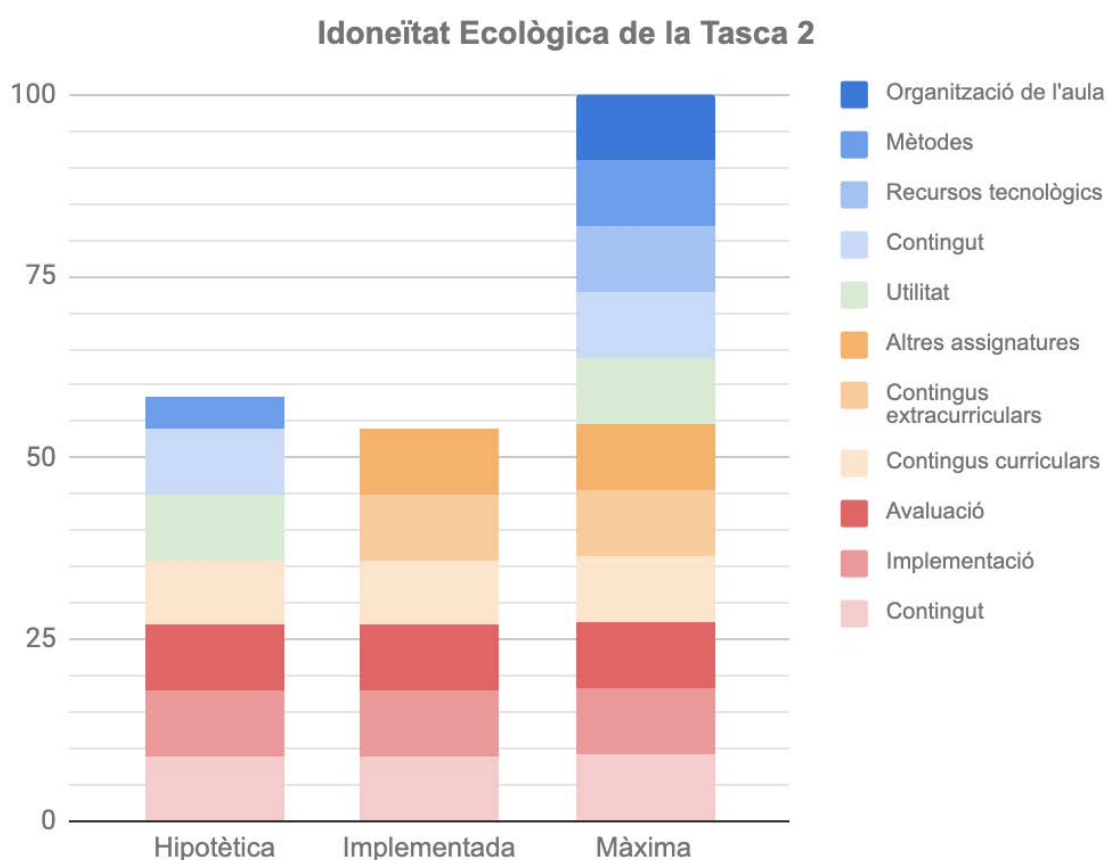


Figura 17.2.6.1. Comparació de la *idoneïtat ecològica hipotètica*, la *idoneïtat ecològica* de la implementació a l'aula de la Tasca 2 i la *idoneïtat ecològica* màxima o ideal.

Font: Elaboració pròpia.

17.2.7. Discussió de la idoneïtat didàctica de la Tasca 2

El conjunt de les dimensions *epistèmica*, *cognitiva*, *interaccional*, *mediacional*, *afectiva* i *ecològica* de la Tasca 2 és la *idoneïtat didàctica* d'aquesta tasca. En representar-la mitjançant un gràfic de barres acumulades, com

s'ha fet per comparar cadascuna d'aquestes sis dimensions, es pot visualitzar en termes globals la *idoneïtat didàctica* de la fase hipotètica i de la implementació tenint com a punt de referència les valoracions màximes idealitzades d'aquest constructe. A la **Figura 17.2.7.1.** es mostra la contribució dels nivells d'assoliment dels indicadors que componen els diferents components de totes les sis dimensions de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 2. Llavors, es fa evident la tendència de disminució del nivell d'assoliment dels indicadors de la *idoneïtat didàctica* a la implementació de la Tasca 2.

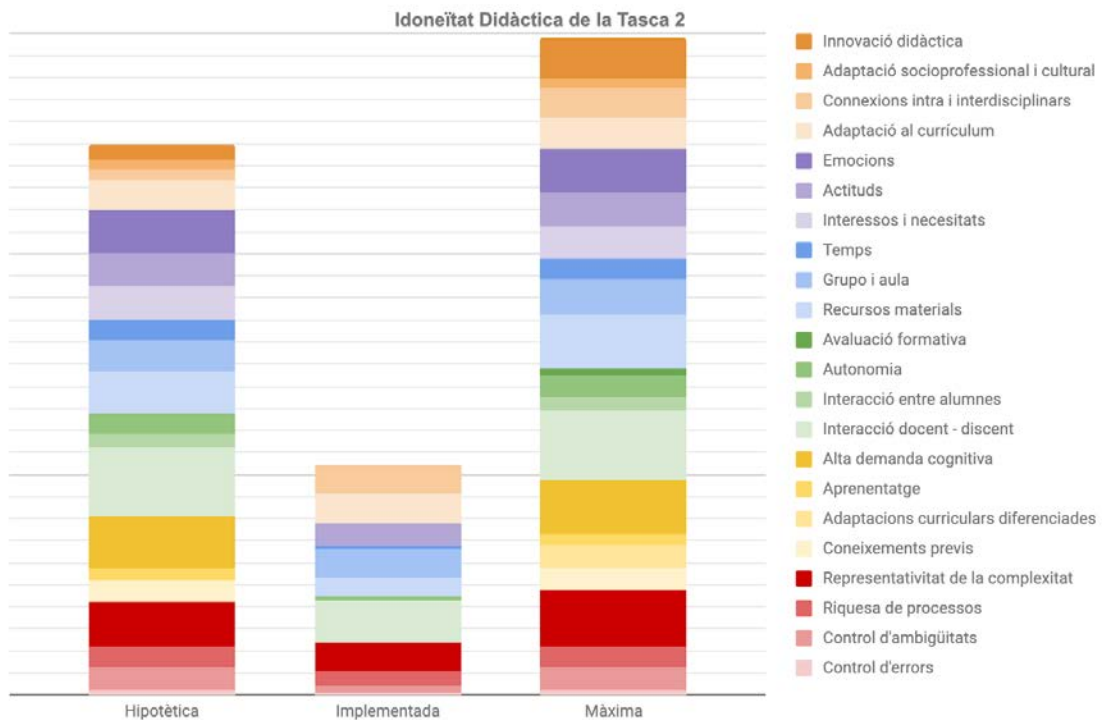


Figura 17.2.7.1. Comparació dels components de la *idoneïtat didàctica hipotètica*, de la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la Tasca 2 i de la *idoneïtat didàctica* màxima.

Font: Elaboració pròpia.

El comparatiu entre els components de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* es fa més visible a la **Figura 17.2.7.2.** on s'han agrupat tots els indicadors d'un mateix component. Aleshores, és encara més clar que una de les dimensions s'ha vist molt reduïda: la *idoneïtat afectiva*. A més, s'hi identifica que la dimensió *cognitiva*, present a la *idoneïtat cognitiva hipotètica*, ja no s'assoleix a la implementació de la Tasca 2 a l'aula.

Una altra manera de mostrar el comparatiu global és mitjançant l'ús de la metàfora de l'hexàgon (Godino, 2013). Tot i que les dades hi registrades són les mateixes que es presenten a les gràfiques de la **Figura 17.2.7.1.** i de la **Figura 17.2.7.2.**, la gràfica radial de la **Figura 17.2.7.3.** proporciona un canvi de representació que ajuda a contrastar de manera directa una mateixa dimensió dins un estat diferent: l'ideal, l'hipotètic i el de la implementació.

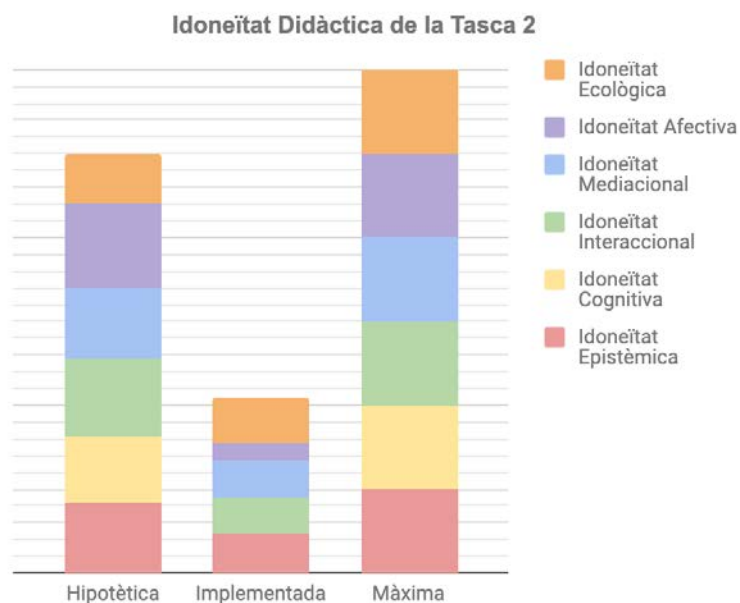


Figura 17.2.7.2. Comparació de les dimensions de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i de la idoneïtat didàctica màxima.

Font: Elaboració pròpia.

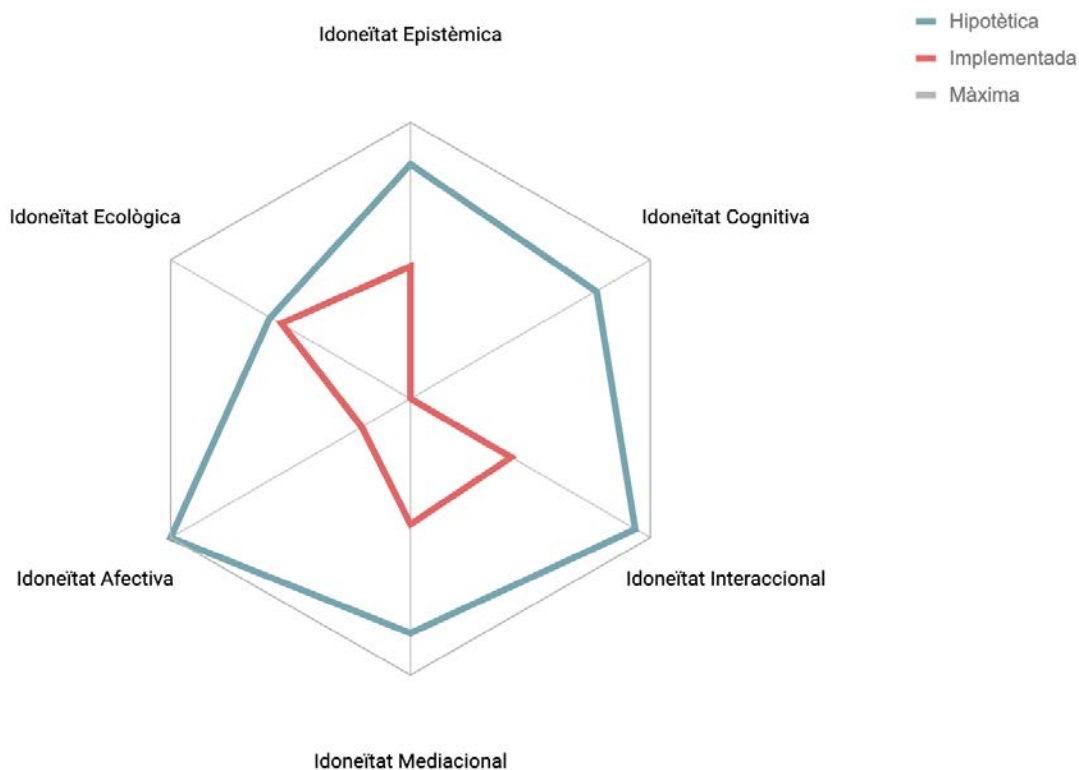


Figura 17.2.7.3. Comparació de la idoneïtat didàctica hipotètica, la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

Sisena Part. Conclusions, impacte i limitacions

Capítol 18. Conclusions

Aquesta tesi doctoral es va iniciar amb la voluntat de fer servir la recerca per donar eines que tinguessin utilitat per al professorat de matemàtiques de secundària, en l'àmbit de l'ensenyament de la geometria. El punt d'inici va ser una activitat de traç geomètric que havia fet fa deu anys amb els meus estudiants d'ESO a Mèxic. Fent aquesta activitat em vaig adonar de la necessitat de dotar el professorat de matemàtiques d'eines contrastades per la recerca per tal de donar-los suport en la seva tasca diària, a l'aula, però també en la planificació i disseny de les classes.

Amb aquesta voluntat vaig començar a endinsar-me en el món de la didàctica de la matemàtica i, en concret, de la didàctica de la geometria. Tal i com he mostrat a l'inici d'aquesta tesi, vaig conèixer i estudiar els principals models i escoles de didàctica de la geometria, i especialment les aportacions del matrimoni van Hiele, i els seus nivells de desenvolupament del pensament geomètric.

Tanmateix, tots aquests enfocaments es centraven sovint en la part de la geometria, però quedaven més lluny de la part didàctica. Per aquest motiu, vaig començar a estudiar les aportacions de diferents models i aproximacions a la formació del professorat de matemàtiques. Quines són les problemàtiques que més han interessat als investigadors i a les investigadores, quins són els coneixements (matemàtics i didàctics) que un docent de matemàtiques ha de tenir per portar a terme la seva professió de manera eficaç i facilitar l'aprenentatge dels seus estudiants? Aquestes i altres eren preguntes que se'm plantejaven.

De mica en mica, vaig conèixer els treballs de recerca més coneguts: el model de Shulman (1986 i 1987) del coneixement del professorat (el CK, PCK, etcètera) i les variacions posteriors d'aquest model, com el model MKT de Ball i col·laboradors (2001, 2005 i 2008). També vaig estudiar les aportacions de Schoenfeld i Kilpatrick (2008) a la formació professional del docent de matemàtiques, i els diferents elements que destaquen com a importants en la formació del professorat de matemàtiques (coneixement del contingut, coneixement dels estudiants, dissenys d'aprenentatge, les normes, la reflexió sobre la pròpia pràctica, etcètera). Altres models que han estat referenciat a la primera part d'aquesta tesi inclouen la taxonomia de

l'estructura d'aprenentatges assolits observats de Biggs i Collis (1982), l'estudi de lliçons (*lesson study*) de Yoshida i Fernández (2004), el *teacher noticing* de Sherin, Jacobs i Philipps (2011), entre d'altres.

Progressivament vaig adonar-me de la importància de desenvolupar una “mirada crítica propositiva” de la tasca docent (Ávila, 2008) i la necessitat de sistematitzar el procés d'observació dels esdeveniments de l'aula (Fuentes, 2011). Així vaig posar en valor al reflexió en la pràctica professional del professor de matemàtiques, i la importància de tenir models que orientin aquesta reflexió. Vaig conèixer de la mà del meu director de tesi l'enfocament del Model del Coneixement Didàctic-Matemàtic del professor de matemàtiques (model CDM), que més endavant va incorporar competències, esdevenint-se en el model CCDM (Model del Coneixement i Competències Didàctic-Matemàtiques del professor de matemàtiques), proposat des de l'enfocament de l'EOS (Font, 2011; Pino-Fan, Font i Breda, 2017) (**Figura 18.1**).

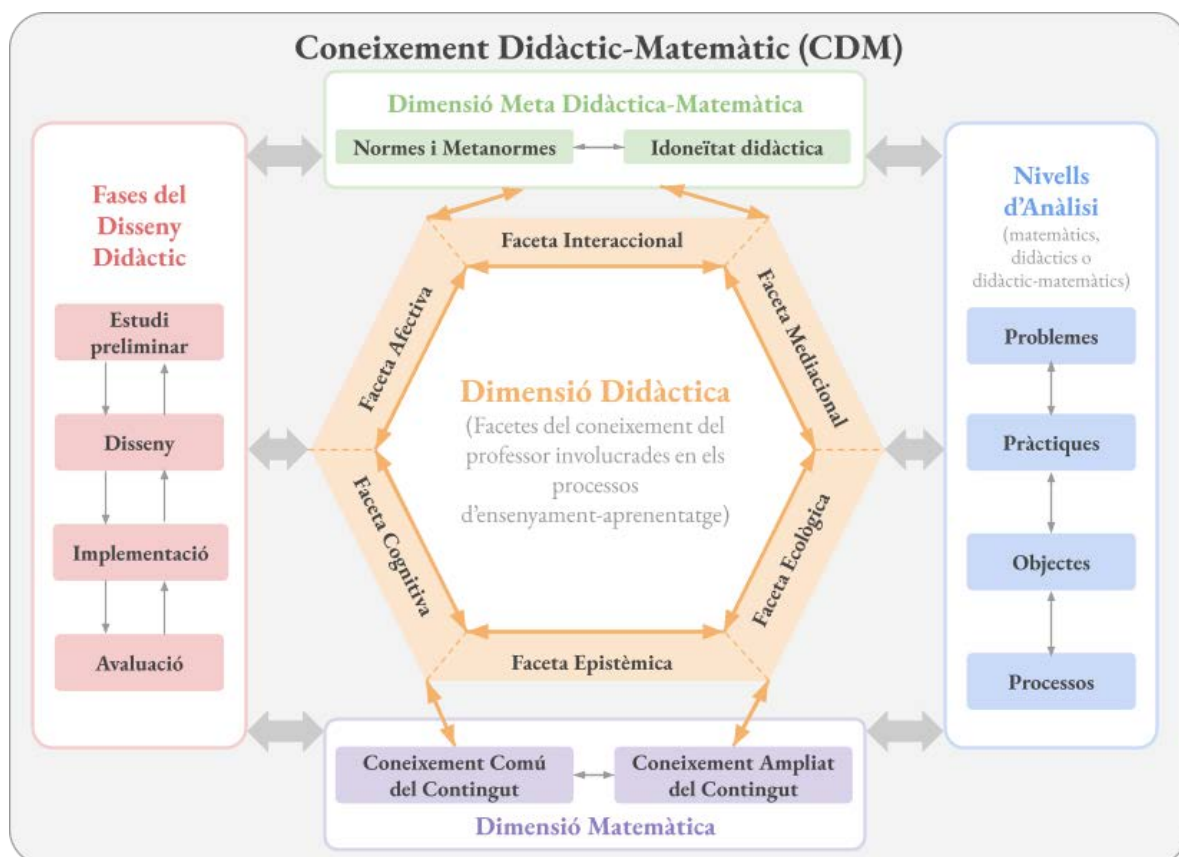


Figura 18.1. Esquema del model del Coneixement Didàctic-Matemàtic basat en Pino-Fan, Castro i Font (2022).

Font: Elaboració pròpia.

El model inicial, el CDM, considerava tres elements importants en la formació i la tasca professional del docent de matemàtiques: la dimensió matemàtica, la dimensió didàctica i la dimensió meta didàctic-matemàtic.

Pel que fa a la **dimensió matemàtica**, en aquesta tesi doctoral s'han explorat una part del contingut de geometria. En particular els continguts curriculars relacionats amb el bloc *Espai i Forma* i els quatre processos de l'àmbit de les matemàtiques que el currículum català preveu pel primer curs d'ESO (Decret 187/2015 de la Generalitat de Catalunya). Al **Capítol 9** es pot veure l'exposició dels elements de geometria treballats, arran de la meua preocupació original de donar suport als docents de matemàtiques quan ensenyen la geometria a l'aula. Tal i com ho vaig dir al projecte de tesi, un dels objectius per dur a terme aquesta recerca era *reconèixer el llenguatge geomètric com a part fonamental del desenvolupament de la competència geomètrica per a la interpretació i l'enteniment de la forma i la mesura, i identificar a la competència matemàtica com a la composició d'altres competències com a la geomètrica*. Per fer-ho, vaig establir una referència per identificar els termes del llenguatge geomètric de l'estudi basada en el contingut curricular del curs al qual es va adreçar aquesta recerca: primer d'ESO.

Les eines de treball construïdes en el marc de l'EOS (els constructes) m'han permès assolir aquestes dues fites completament. Un d'aquests constructes són les **configuracions epistèmiques**, mitjançant les quals he pogut determinar amb un gran grau de detall tant el coneixement del contingut de geometria, com el coneixement ampliat d'aquest contingut, centrant-me en els continguts clau CC8 (Sentit espacial i representació de figures tridimensionals) i CC9 (Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció) del currículum de geometria del primer curs d'ESO (veure **Capítol 9**). En contrastar els objectes primaris de les configuracions epistèmiques de les dues tasques de l'estudi de recerca s'ha vist que hi ha una diferència notable entre la majoria d'ells.

En el cas de la primera de les dues tasques, malgrat les diferències entre el llenguatge matemàtic, les definicions/conceptes, les propietats/proposicions, els procediments i els arguments els alumnes van assolir desenvolupar amb èxit el dibuix de les cares de l'octaedre i la seva construcció (**Figura 18.2**). Per tant, es pot dir que aquestes modificacions dels objectes matemàtics primaris van ser necessàries per arribar a aconseguir el repte proposat. Pel que fa a la segona tasca, els alumnes utilitzaven un llenguatge col·loquial per expressar les seves idees. Més que fer referència a les figures geomètriques i les seves propietats, els alumnes van fer descripcions relacionades amb l'espai, com es mostra a la comparació de les configuracions epistèmiques a la **Figura 18.3**. La modificació del llenguatge matemàtic, les definicions/conceptes, les propietats/proposicions, els procediments i els arguments van ser impediments en l'assoliment del repte plantejat: la construcció de diferents poliedres per fer aproximacions d'una representació tridimensional d'un mapamundi (**Figura 18.3**).

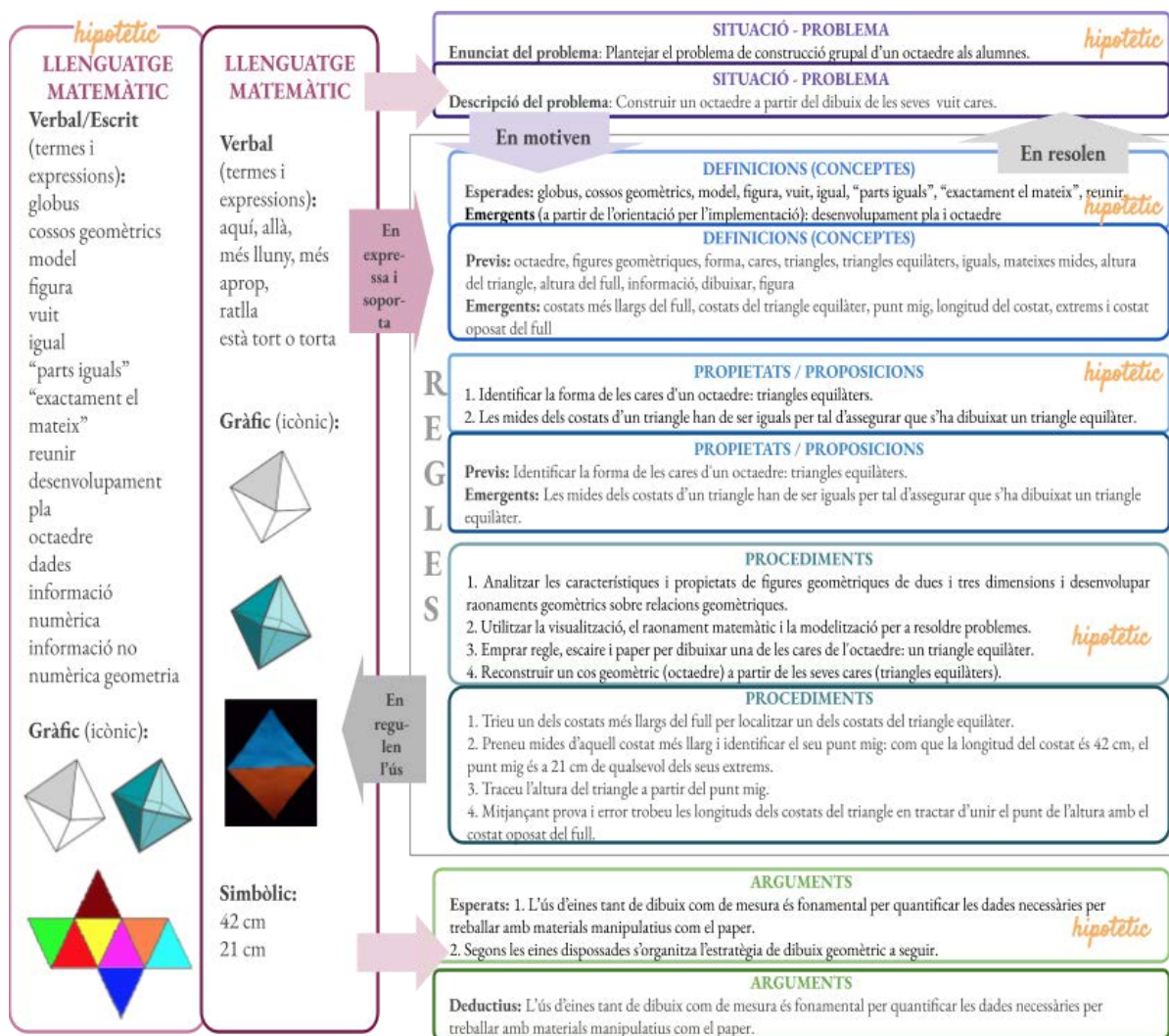


Figura 18.2. Comparació dels objectes primaris de les configuracions epistèmiques hipotètica i de la implementació de la Tasca 1.

Font: Elaboració pròpia.

Es pot afirmar que les modificacions dels objectes primaris de la configuració epistèmica hipotètica d'una tasca ha tingut un efecte positiu en la implementació de la Tasca 1, però en portar a l'aula la Tasca 2 l'efecte va ser el contrari. Els canvis dels objectes primaris de la configuració epistèmica hipotètica de la Tasca 2 va interferir en la capacitat dels alumnes per arribar a construir la majoria dels poliedres assignats: piràmide, octaedre, dodecaedre i icosaedre. Aquestes comparacions entre la configuració epistèmica hipotètica de cadascuna de les tasques i la configuració epistèmica producte de la implementació de la mateixa tasca mostren més enllà del que marca el Model de la Competència i Coneixement Didàctic i Matemàtic de Font, Planas i Godino (2010) per ajuntar la Competència Matemàtica del professor amb la seva Competència d'Anàlisi i Intervenció Didàctica (Pino-Fan, Castro i Font, 2022): l'impacte del docent amb la realitat del seu grup i que en el paper, les propostes didàctiques són una cosa que no sempre coincideix amb la seva

implementació. Les diferències s'observen un cop inicia la sessió. En modificar la situació-problema que es tenia prevista, es modifiquen les definicions (conceptes) d'ella derivats. Tot i que s'espera que el llenguatge matemàtic també canviï, com a conseqüència de les modificacions ara esmentades, es va observar que les expressions verbals dels alumnes van ser de caire col·loquial. Per tant, hi ha evidència ferma sobre la influència del canvi de la situació-problema plantejada sobre el nivell del llenguatge geomètric dels alumnes. Pel que fa al llenguatge escrit, el qual no s'havia previst, els alumnes van fer ús d'anotacions per enregistrar mesures expressades en centímetres.

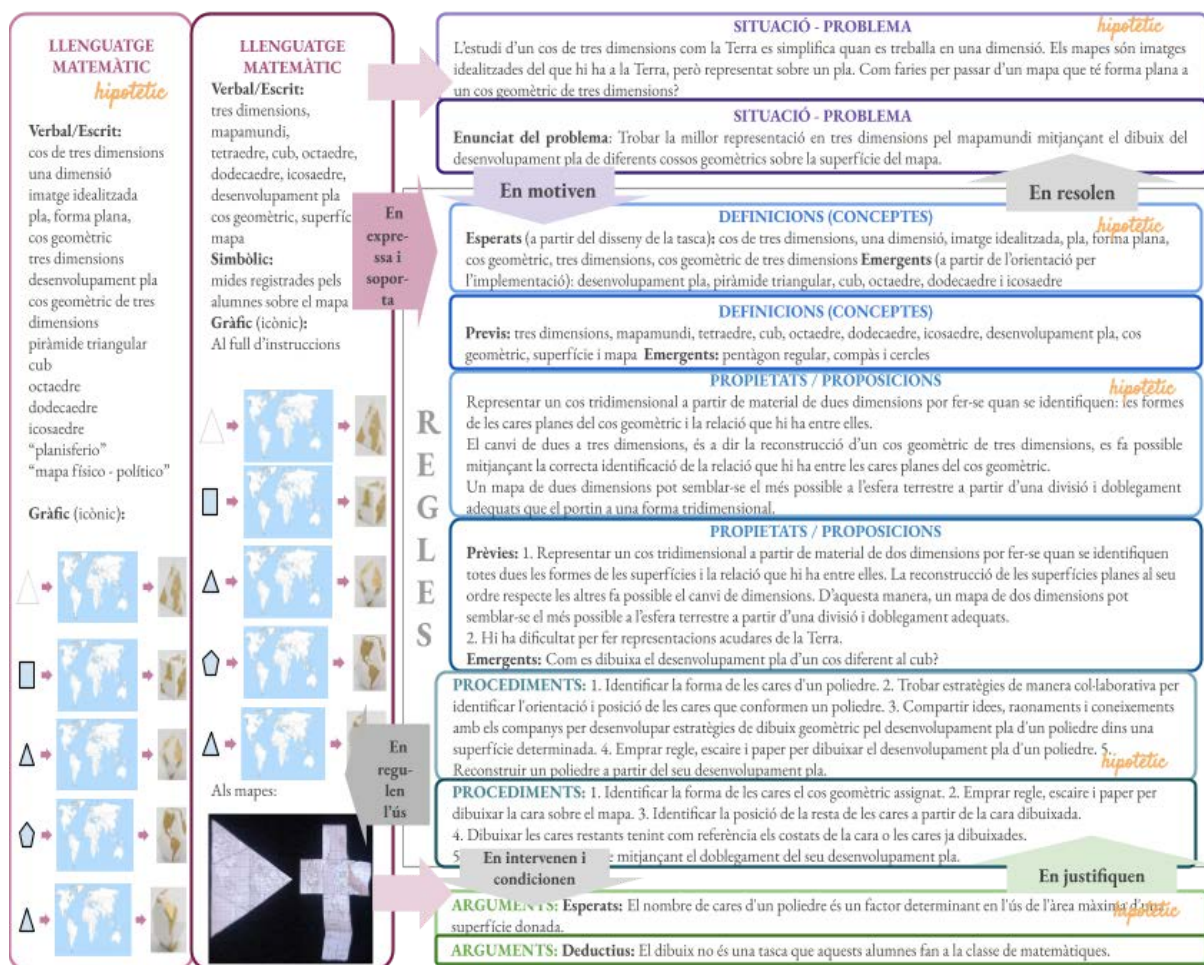


Figura 18.3. Comparació dels objectes primaris de les configuracions epistèmiques hipotètica i de la implementació de la Tasca 2.

Font: Elaboració pròpia.

En aquesta tesi vam decidir fer el disseny d'una tasca de geometria a partir d'un estudi preliminar de la meua experiència docent a Mèxic, amb el dibuix geomètric. A partir d'aquí, vam plantejar i dissenyar una activitat, i probablement per primera vegada en els estudis emmarcats en la línia de l'EOS, en comptes de treballar directament amb el professorat en formació o en servei (per exemple, en el mar d'un programa de màster de formació de professorat de matemàtiques), vam centrar-nos en dissenyar les nostres seqüències didàctiques

en el món real, a una classe real, amb estudiants reals. Per tant, vam dur a terme la implementació del disseny didàctic que havíem fet conjuntament amb el meu director de tesi (i contrastat amb el professorat i la resta de companys i companyes del programa de doctorat, a través del seminari de doctorat, on es va exposar tot el material). En l'avaluació d'aquesta primera tasca es va tenir en compte no només la dimensió didàctica (a partir de les sis facetes del model de l'EOS), sinó també la dimensió meta didàctic-matemàtica (mitjançant l'ús del constructe dels criteris d'*idoneïtat didàctica*). L'EOS ens ha permès un alt nivell de detall en la nostra anàlisi de com els i les estudiants de primer d'ESO van rebre les tasques de la primera seqüència didàctica que vam dissenyar. Com s'explica al **Capítol 10** d'aquesta memòria, mitjançant els criteris d'*idoneïtat didàctica* vaig poder estudiar diferents nivells relatius a la seqüència didàctica, incloent les activitats (problema), les pràctiques (dutes a terme pels estudiants), l'ús dels objectes geomètrics proposats i la part dels processos que van sortir durant aquesta la implementació que vaig dur a terme. Per tal de presentar les evidències obtingudes s'organitza aquest capítol seguint els objectius d'aquest treball de recerca doctoral (**Capítol 2**).

18.1. Conclusions sobre els objectius particulars

Segons s'indica al **Capítol 2**, es pretén: *aplicar la idoneïtat didàctica com eina de disseny de seqüències didàctiques de dibuix geomètric pel primer grau d'ESO dins el currículum català*. Aquesta fita s'assoleix amb l'aplicació dels instruments d'anàlisi didàctica de l'EOS. Però, encara més enllà, recuperant també les redaccions dels objectius de l'anàlisi de la seqüència didàctica i la pràctica docent (**Capítol 2**), tenim: *identificar els aspectes epistèmics assolits amb l'aplicació de la seqüència didàctica de dibuix geomètric, puntualitzar els aspectes cognitius coberts amb la seqüència didàctica de dibuix geomètric, reconèixer les interaccions que es duen a terme durant la seqüència didàctica de dibuix geomètric, ressaltar els trets mediacionals involucrats a la seqüència didàctica de dibuix geomètric, detectar les emocions desenvolupades quan s'aplica la seqüència didàctica de dibuix geomètric, i definir els trets ecològics de la seqüència didàctica de dibuix geomètric*. Aquest sis objectius s'assoleixen de manera implícita quan es compleix el primer perquè per aplicar la *idoneïtat didàctica* cal identificar els seus trets epistèmics, cognitius, interaccionals, mediacionals, afectius i ecològics.

Es va comprovar que els indicadors de les components de les dimensions de la **idoneïtat didàctica** van ser clau en el disseny de les propostes de les tasques. Tot i que a l'anàlisi didàctica és l'eina de reflexió que es presenta al final, va ser la primera referència considerada en el disseny de les tasques. Començant per la dimensió ecològica, per concretar continguts adients al curs al qual es van dirigir les tasques. Seguint per la dimensió interaccional, per promoure la participació dels alumnes, però sense deixar fora la resta de les dimensions per tal de presentar una *bona sessió* (Godino, 2013) de geometria. En primer lloc, la gràfica de barres on s'acumulen les valoracions dels indicadors dels components de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* en les fases ideal, hipotètica i real de la Tasca 1 (**Figura 18.1.1.**) ens permet concloure que vam

tenir una tendència de disminució progressiva del nivell d'assoliment dels indicadors des de la valoració màxima de la *idoneïtat didàctica ideal*, passant per la *idoneïtat didàctica hipotètica* fins arribar al nivell més baix que correspon a la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la Tasca 1. Aquest gràfic també permet identificar tots els indicadors que es van veure afectats amb la implementació de la Tasca 1. Centrant l'atenció en els indicadors que no es van fer evidents en portar a l'aula la Tasca 1, podem dir que aquesta tasca no va atendre als interessos i necessitats dels alumnes, no va considerar una avaluació formativa, no va representar una alta demanda cognitiva, ni va considerar adaptacions curriculars diferenciades i no va permetre tenir control dels errors dels alumnes.

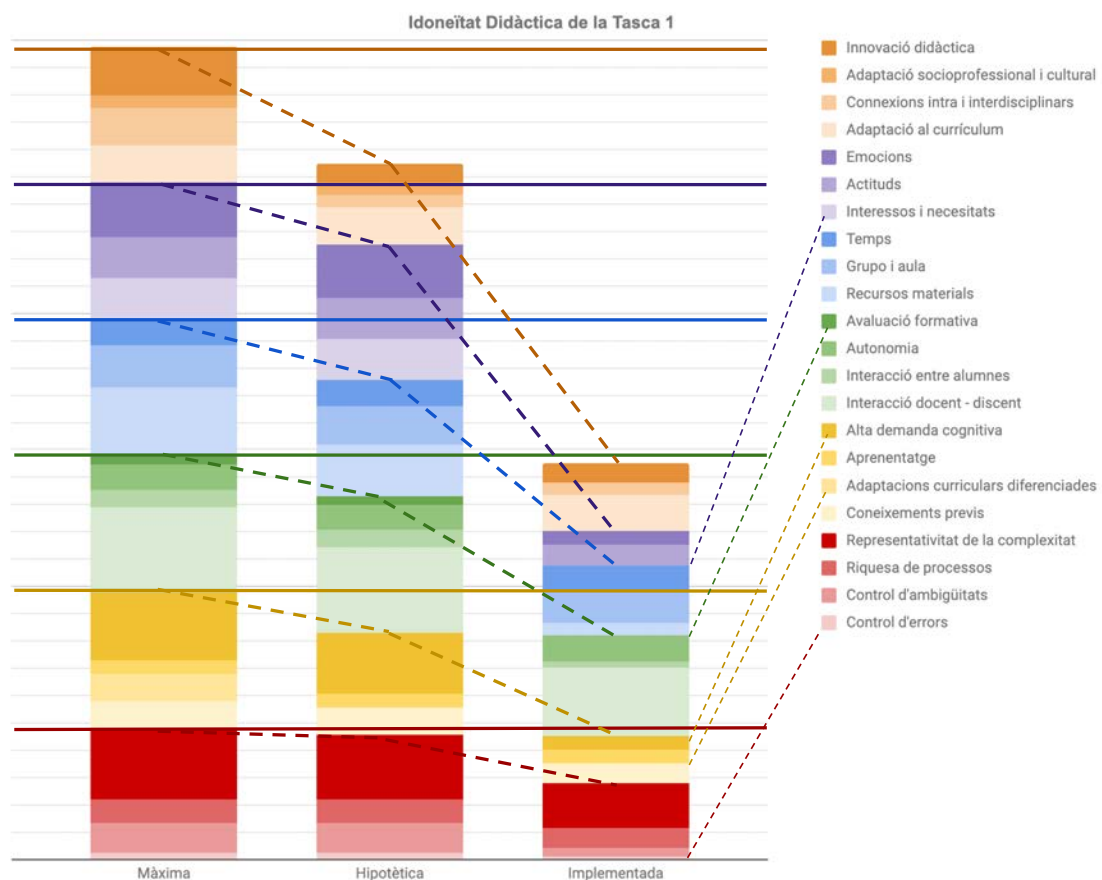


Figura 18.1.1. Tendència dels components de la idoneïtat didàctica hipotètica, de la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 1 i de la idoneïtat didàctica màxima.

Font: Elaboració pròpia.

En relació a les dimensions de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1, la **Figura 18.1.2.** ens dona elements per assegurar que al moment de la implementació les dimensions més afectades van ser la *idoneïtat afectiva* i la *epistèmica*. També es pot dir que des de la fase hipotètica ja es tenia en compte que la Tasca 1 ajustes en les dimensions ecològica, mediacional i cognitiva. Es pot dir que la diferència entre els nivells d'assoliments esperats (*idoneïtat hipotètica*) i els reals es deu a la manca d'aprofitament de les dimensions afectiva i cognitiva. En termes generals, es pot dir que la implementació de la Tasca 1 es va caracteritzar per dos

fenòmens antagònics: l'assoliment de la dimensió *ecològica* quasi en els paràmetres previstos a la *idoneïtat didàctica hipotètica* de la tasca i la greu afectació de la dimensió *afectiva* (**Figura 18.1.3.**).

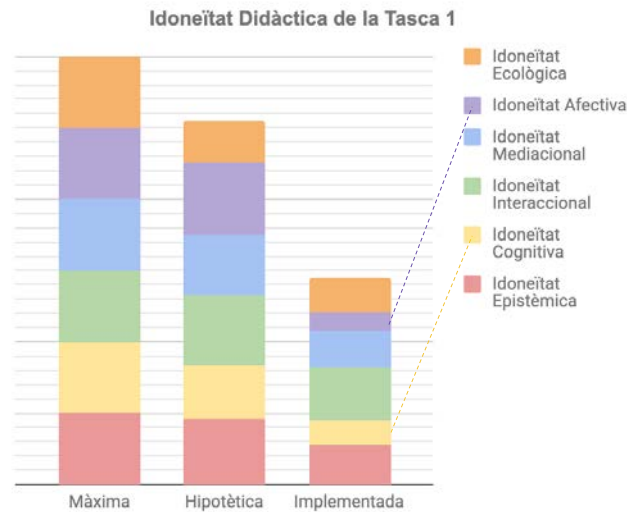


Figura 18.1.2. Tendència de les dimensions de la *idoneïtat didàctica hipotètica*, de la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la Tasca 1 i de la *idoneïtat didàctica* màxima.

Font: Elaboració pròpia.

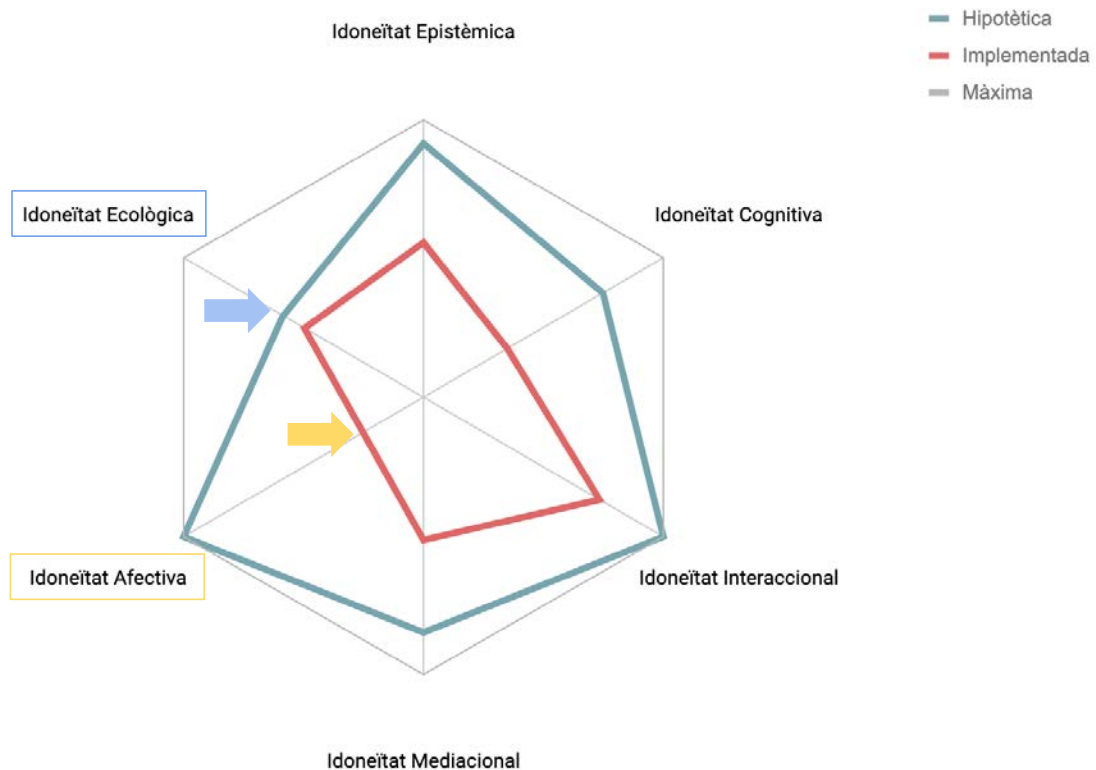


Figura 18.1.3. Tendència de la *idoneïtat didàctica hipotètica*, la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la Tasca 1 i la *idoneïtat didàctica* màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

En segon terme es presenta la gràfica de barres acumulades per presentar les valoracions dels indicadors dels components de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* ideal, hipotètica i real de la Tasca 2 (**Figura 18.1.4.**). Aquesta representació gràfica fa possible observar com va disminuir de manera progressiva el nivell d'assoliment dels indicadors de les fases ideal, hipotètica i real corresponents a la Tasca 2. Amb precisió, els codis de color senyalitzen els indicadors que van aconseguir un nivell d'assoliment més baix del que s'esperava amb la implementació de la tasca. És el cas de: la innovació didàctica, l'adaptació socioprofessional i cultural, les emocions, les actituds, el temps, els recursos materials, l'avaluació formativa, l'alta demanda cognitiva, l'aprenentatge, les adaptacions curriculars diferenciades i els coneixements previs.

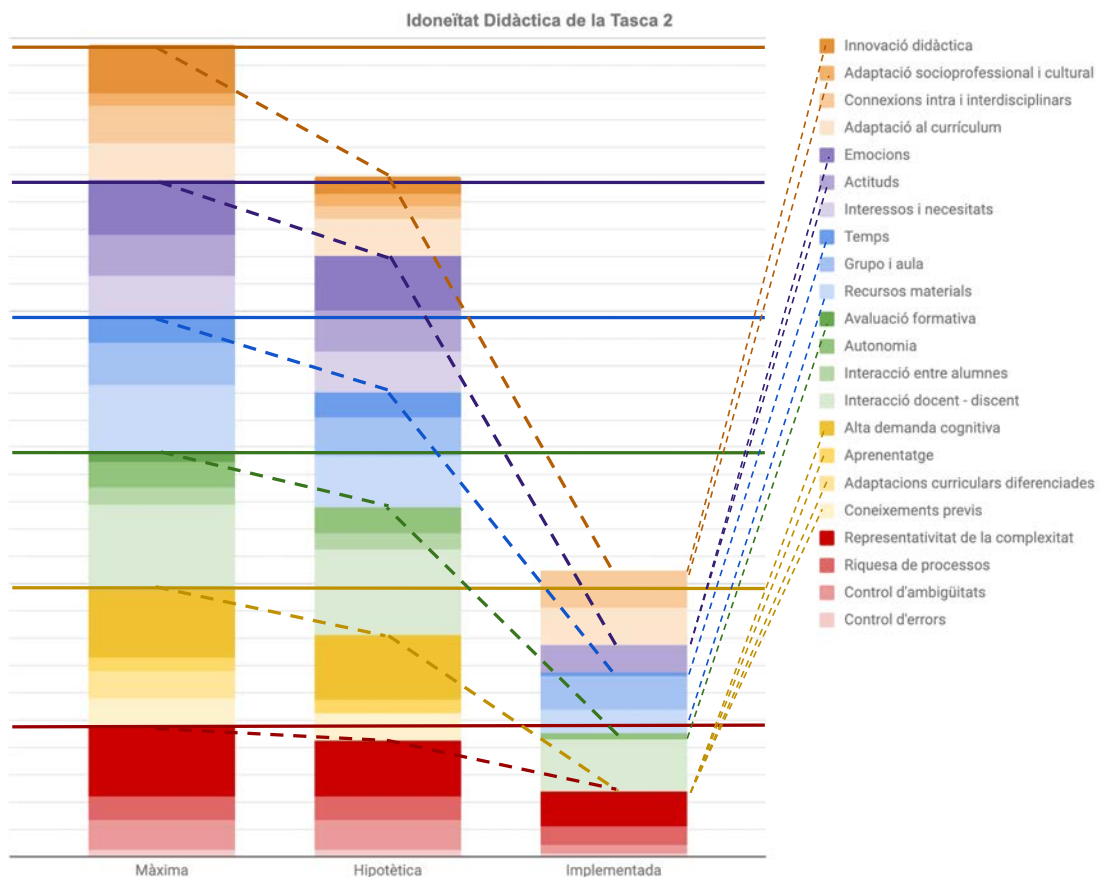


Figura 18.1.4. Tendència dels components de la *idoneïtat didàctica hipotètica*, de la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la Tasca 2 i de la *idoneïtat didàctica* màxima.

Font: Elaboració pròpia.

Al representar en una sola gràfica els indicadors de cadascuna de les components que integren una mateixa dimensió de la *idoneïtat didàctica* (**Figura 18.1.5.**) es va reconèixer que la implementació de la Tasca 2 va afectar les dimensions *afectiva* i *interaccional*, però en un nivell inferior. El cas més greu correspon a la desaparició de la dimensió *cognitiva*.

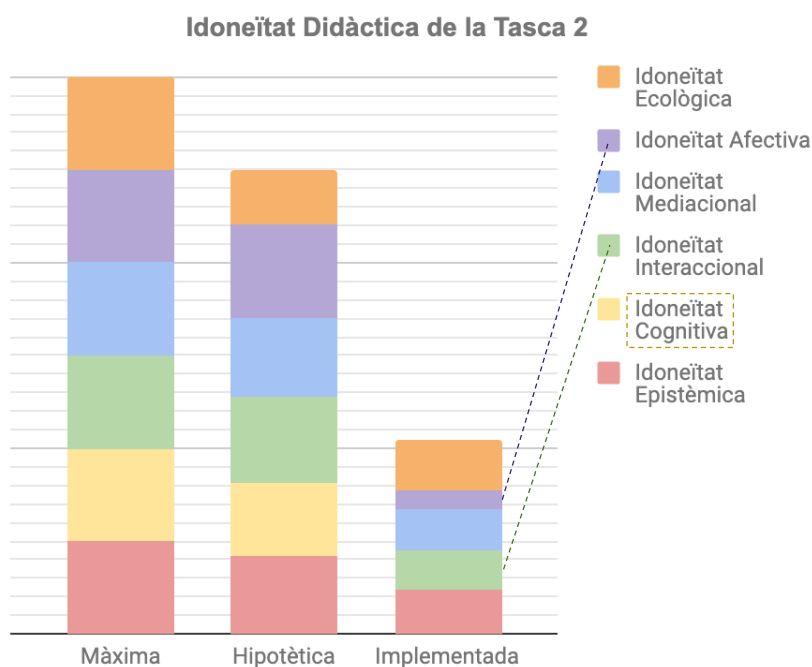


Figura 18.1.5. Tendència de les dimensions de la *idoneïtat didàctica hipotètica*, de la *idoneïtat didàctica* de la implementació de la Tasca 2 i de la *idoneïtat didàctica* màxima.

Font: Elaboració pròpia.

Al igual que amb l'anàlisi global de la *idoneïtat didàctica* de la Tasca 1, la implementació de la Tasca 2 es va definir en dos fenòmens antagònics: el manteniment del nivell d'assoliment prevista la *idoneïtat didàctica hipotètica* per a una de les dimensions i l'afectació d'altres dimensions (**Figura 18.1.6.**). La *idoneïtat ecològica* va ser la dimensió que va mantenir nivells d'assoliment semblants en les fases hipotètiques i d'implementació de la Tasca 2. Pel contrari, les dimensions *afectiva* i *cognitiva* es van mermar de manera important al moment de portar a l'aula la Tasca 2. L'afectació de la *idoneïtat cognitiva* va ser tan profunda que fins i tot no es va observar cap indicador d'ella al camp. Les variacions entre els nivells d'assoliment de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* de les dues tasques es poden relacionar amb la manca d'elaboració d'un estudi preliminar a la **fase de disseny didàctic**, tal i com s'indica al model CDM (Pino-Fan, Castro i Font, 2022) (veure **Figura 18.1**). També es pot dir que s'ha assolit l'objectiu: utilitzar la idoneïtat didàctica a mena d'avaluació generalitzada de una seqüència didàctica (**Capítol 2**) perquè l'esquema de la metàfora de l'hexàgon (Godino, 2013) permet observar que les tasques posseeixen uns atributs de disseny i d'implementació. La variació dels atributs de les tasques mostra el repte quotidià de la pràctica del professor: assolir els resultats que ha previst amb el disseny d'una tasca de matemàtiques.

Quan em trobava dins l'aula coduint la Tasca 2, vaig tenir molts dubtes sobre el meu desenvolupament en la implementació de l'activitat. La dinàmica del grup em va fer continuar però amb aquesta preocupació dins

meu. Les modificacions que vaig implementar in situ, com a evidència del *teacher's noticing* de Sherin, Jacobs i Philipps (2011), van ajudar a donar seguiment al treball dins l'aula. La reflexió que vaig realitzar fora de l'aula aplicant els constructes de la *idoneïtat didàctica* em van orientar sobre els aspectes que van fer que la sessió duta a terme amb els i les alumnes hagués canviat respecte la proposta dissenyada. Per tant, es pot dir que s'ha assolit l'objectiu: *utilitzar la idoneïtat didàctica a mena d'avaluació generalitzada de una seqüència didàctica* (Capítol 2) perquè l'esquema de la metàfora de l'hexàgon (Godino, 2013) permet observar que les tasques posseeixen uns atributs de disseny i d'implementació. La variació dels atributs de les tasques mostra el repte quotidià de la pràctica del professor: assolir els resultats que ha previst amb el disseny d'una tasca de matemàtiques.

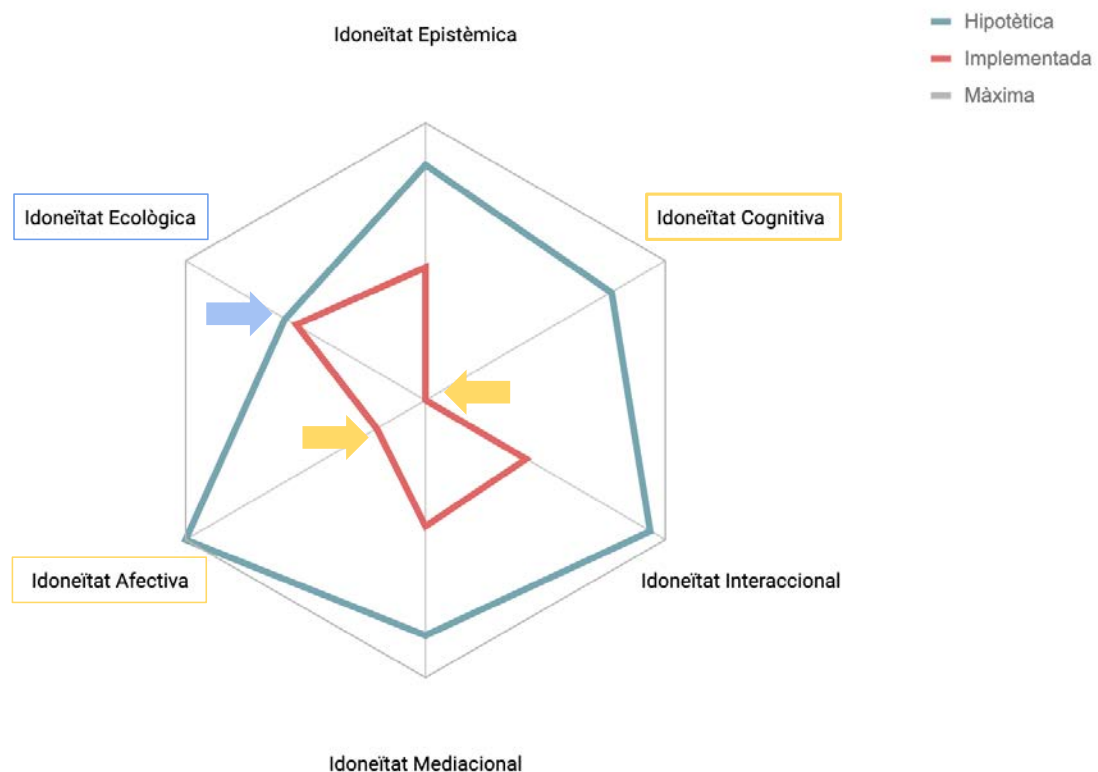


Figura 18.1.6. Tendència de la idoneïtat didàctica hipotètica, la idoneïtat didàctica de la implementació de la Tasca 2 i la idoneïtat didàctica màxima segons la metàfora de l'hexàgon de Godino (2013).

Font: Elaboració pròpia.

Els indicadors de les components de les dimensions de la **idoneïtat didàctica** ofereixen una guia exhaustiva i àmplia d'anàlisi didàctica amb la qual *identificar els punts forts i febles de la seqüència didàctica de dibuix geomètric davant la seva aplicació a l'aula i des de la perspectiva de la idoneïtat didàctica*. Aquest objectiu per re-dissenyar la seqüència didàctica (Capítol 2) s'assoleix en considerar com a punts forts d'una tasca tots els indicadors presents o valorats amb puntuacions altes. Pel contrari, els punts febles de la tasca són aquells

sense puntuació o que no es van visualitzar. S'ha de puntualitzar que per fer aquesta caracterització només es considera l'anàlisi didàctica feta al moment de la implementació de les tasques per tal de recollir tot allò que va ser efectiu a l'aula. Ara, des de una perspectiva objectiva, basada en els indicadors de la *idoneïtat didàctica*, puc dir que els punts forts de les propostes didàctiques són les dimensions **ecològica**, **mediacional** i **interacciona** (tot i que en són millorables), mentre que els punts febles són les dimensions **afectiva** i **cognitiva**.

El repte de modificar una seqüència didàctica és una tasca complexa si es fa des de la intuïció personal. Com a docent sovint m'he trobat davant episodis de classe, propis i d'altres companys, que penso "jo ho faria d'una altra manera". Però aquestes modificacions poden ser més estil de presentació o dinamització dels continguts que veritables millores de la proposta inicial. Els resultats d'aquesta recerca que he pogut dur a terme en el marc del programa de doctorat mostra la importància de poder disposar de constructes teòrics i metodològics, avalats per la recerca prèvia, per tal de poder re-dissenyar una tasca per millorar-la centrant l'atenció en els indicadors relacionats amb els punts febles de la tasca. Així és possible *proposar estratègies per millorar i re-dissenyar la seqüència didàctica de dibuix geomètric sota la mirada de l'enfocament onto-semiòtic que proporciona la idoneïtat didàctica (Capítol 2)*. D'aquesta anàlisi podem dir que la tasca més afectada és la segona.

D'acord amb la evidència recollida, sembla indicar que per millorar la tasca 1 cal centrar-se en el desenvolupament de la **idoneïtat cognitiva** creant activitats que siguin del nivell de raonament geomètric dels alumnes, com ho indica el component "alta demanda cognitiva" (Godino, 2013; Breda, Font i Pino-Fan, 2016). Aquestes modificacions també han de tenir en compte les components: aprenentatge i adaptacions curricular diferenciades (Godino, 2013; Breda, Font i Pino-Fan, 2016). També s'han de considerar la component **afectiva** per atendre als "interessos i necessitats dels alumnes" (Godino, 2013; Breda, Font i Pino-Fan, 2016). Quan no es coneixen als alumnes, es pot fer una entrevista al professor titular de matemàtiques per tenir orientacions sobre les característiques del grup que ajudin en la identificació de trets que permetin proposar activitats que siguin d'interès pels alumnes. En conèixer als alumnes també es pot atendre la dimensió **interaccional** de la tasca per identificar la millor manera d'organitzar al grup per tal de tenir la major col·laboració entre els alumnes.

L'anàlisi didàctica aquí presentat (basada en l'exploració dels indicadors de les components de les dimensions de la *idoneïtat didàctica*) ha permet assolir els objectius generals d'aquesta tesi: *aplicar els criteris de la idoneïtat didàctica per reflexionar sistematitzadament sobre la pràctica docent de l'ensenyament de la geometria al primer grau de l'ESO, reconèixer la idoneïtat didàctica com una eina de reflexió aplicable en etapes prèvies i posteriors al desenvolupament d'una seqüència didàctica a l'aula, pel seu disseny, avaluació i*

re-disseny per millorar-ne i proposar estratègies pel millorament d'una seqüència didàctica de dibuix geomètric des de la perspectiva del enfocament onto-semiòtic (Capítol 2).

Per tancar aquest apartat recuperem la pregunta de recerca (**Capítol 2**): *Una tasca col·laborativa que requereix l'aplicació del dibuix geomètric promou que els alumnes transitin els nivells de van Hiele sobre les entitats geomètriques involucrades?* Les **configuracions epistèmiques** de les tasques han mostrat manca de coherència entre el llenguatge geomètric del que disposen els i les alumnes i la proposta del currículum. Aquest fet constitueix una informació vital per als mestres, per poder re-dissenyar les seves propostes didàctiques, a fi i efecte de impactar i millorar en el llenguatge geomètric, que com sabem per la recerca prèvia, és un dels aspectes particulars de la geometria (l'especificitat del seu llenguatge) que s'acostuma a destacar com a "dificultat" en termes del seu ensenyament i aprenentatge. A més, en base a les valoracions dels indicadors de les dimensions **cognitiva** i **epistèmica** de la **idoneïtat didàctica**, s'ha vist que cal modificar les tasques per tal d'assolir aquesta fita acadèmica.

18.1.1. Conclusions sobre l'anàlisi de la seqüència didàctica i la pràctica docent

Com s'indica al **Capítol 2**, s'espera *plantejar una metodologia sistematitzada per l'ús de la idoneïtat didàctica com eina d'anàlisi de seqüències didàctiques*. Aquest objectiu es veu completament assolit a la quarta i cinquena part d'aquesta tesi. Des del **Capítol 12** fins al **Capítol 14** es va buidar les notes de camp (veure **Annexes**) segons els elements de les **configuracions epistèmiques**, les **trajectòries didàctiques** i les dimensions de la **idoneïtat didàctica**. Malgrat la meua manca d'experiència en l'anàlisi didàctica, vaig comprovar que aquests tres constructes formen un marc de referència sòlid per realitzar de manera ordenada i clara la reflexió sobre la pràctica docent. M'adono que hi va haver aspectes que vaig recollir a les notes de camp, ordenats de manera cronològica a les narratives, que només van ser significatius fins el moment de cercar elements dels constructes. Per exemple, només vaig ser capaç de *visualitzar* que els alumnes anotaven les mides en centímetres quan vaig cercar el *llenguatge matemàtic* com a objecte primari de les **configuracions epistèmiques** de la implementació de la tasca u (**Taula 12.1.1.1**). Amb aquesta eina d'anàlisi didàctica també vaig identificar la diferència entre el nivell previst i el nivell real de raonament geomètric dels alumnes. Com que les configuracions epistèmiques hipotètiques mostren un Nivell 1 de raonament geomètric de van Hiele (Burger i Shaughnessy, 1987), a la implementació es va observar un Nivell 0 de la mateixa escala de referència (Burger i Shaughnessy, 1987). A les dues tasques es van presentar modificacions dels estats-funcions de les tres subtrajectòries al moment de la implementació. Totes dues es van simplificar, això es veu en la reducció dels estats-funcions produïts tant a la tasca u (**Taula 18.1.1.1**) com a la dos (**Taula 18.1.1.2**). Una altre cop es veu la influència de la realització d'un estudi preliminar a la *fase de disseny* (com ho indica el model CDM) per conèixer el grup abans la implementació. Vaig veure que l'assignació de les activitats es va veure greument afectada amb la intensió de incorporar als alumnes en la

dinàmica de la sessió, analitzat a la subtrajectòria epistèmica. Una altra mostra de l'afectació de la manca de coneixement del grup s'observa en les modificacions de les tasques que vaig anar fent al moment de la implementació per incorporar estats de exercitació no previstos.

Taula 18.1.1.1.

Comparació de les subtrajectòries epistèmica, docent i discents hipotètiques i de la implementació de la Tasca 1.

Unitat	Subtrajectòria epistèmica hipotètica	Subtrajectòria epistèmica real	Subtrajectòria docent hipotètica	Subtrajectòria docent real	Subtrajectòria discent hipotètica	Subtrajectòria discent real
0	Situacional (E1)	Situacional (E1) Lingüístic (E3)	Planificació (P1)	Planificació (P1)	Acceptació (A1)	Acceptació (A1)
1	Lingüístic (E3)	Conceptual (E4) Argumentatiu (E6) Actuacional (E2)	Motivació (P2)	Motivació (P2) Assignació de tasques (P3)	Recepció d'informació (A6)	Recepció d'informació (A6) Exploració (A2)
2	Actuacional (E2)	Situacional (E1)	Motivació (P2)	Avaluació (P5)	Recepció d'informació (A6) Exploració (A2)	Recepció d'informació (A6)
3	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)	Actuacional (E2) Argumentatiu (E6)	Assignació de tasques (P3)	Assignació de tasques (P3)	Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5)	Exercitació (A8)
4	Actuacional (E2)		Avaluació (P5)	Assignació de tasques (P3)	Exercitació (A8)	Recepció d'informació (A6)
5	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)		Assignació de tasques (P3)	Avaluació (P5)	Recepció d'informació (A6) Exploració (A2)	Exercitació (A8)
6	Argumentatiu (E6)		Avaluació (P5)	Assignació de tasques (P3)	Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5) Exercitació (A8)	Recepció d'informació (A6)
7			Investigació (P6)	Avaluació (P5)		Exercitació (A8)
8				Assignació de tasques (P3)		Recepció d'informació (A6)
9						Record (A3)

Font: Elaboració pròpia.

Taula 18.1.1.2.

Comparació de les subtrajectòries epistèmica, docent i discents hipotètiques i de la implementació de la Tasca 2.

Unitat	Subtrajectòria epistèmica hipotètica	Subtrajectòria epistèmica real	Subtrajectòria docent hipotètica	Subtrajectòria docent real	Subtrajectòria discent hipotètica	Subtrajectòria discent real
0	Argumentatiu (E6)	Actuacional (E2)	Planificació (P1)	Planificació (P1)	Acceptació (A1)	Acceptació (A1)
1	Situacional (E1)	Situacional (E1) Lingüístic (E3)	Motivació (P2)	Motivació (P2)	Recepció d'informació (A6)	Recepció d'informació (A6)
2	Lingüístic (E3)	Actuacional (E2)	Assignació de tasques (P3)	Assignació de tasques (P3)	Exploració (A2) Argumentació i justificació (A5)	Formulació (A4)
3	Actuacional (E2)	Situacional (E1)	Motivació (P2)	Regulació (P4)	Recepció d'informació (A6)	Demanda d'informació (A7)
4	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)	Actuacional (E2)	Assignació de tasques (P3)	Avaluació (P5)	Exploració (A2) Record (A3) Formulació (A4) Argumentació i justificació (A5)	Recepció d'informació (A6)
5	Actuacional (E2)		Avaluació (P5)		Argumentació i justificació (A5)	Exercitació (A8)
6	Conceptual (E4) Proposicional (E5) Argumentatiu (E6)					Avaluació (A9)

Font: Elaboració pròpia.

Les **trajectòries didàctiques** em van fer possible identificar la seqüència d'instrucció de la sessió que vaig utilitzar mitjançant el reconeixement dels estats-funcions. Va ser la comparació del cas hipotètic amb el cas real el que em va permetre reflexionar sobre la meua actuació davant del grup. En analitzar la proposta abans i després de portar-la a l'aula vaig poder centrar-me en els aspectes que van provocar la modificació del disseny de la tasca al moment de la seva implementació i identificar els fenòmens que van generar aquestes variacions.

L'anàlisi didàctica generada amb les **configuracions epistèmiques** l'he pogut relacionar amb el contingut matemàtic, mentre que les tres dimensions de la **trajectòria didàctica** em van oferir una visió més fenomenològica dels episodis d'aula. Però, els **indicadors** de les components de les dimensions de la **idoneïtat didàctica** em van mostrar el rerefons de les variacions entre les **configuracions epistèmiques** i les **subtrajectòries didàctiques** hipotètiques i de la implementació.

18.2. Conclusions generals

La reflexió dels resultats acadèmics dels estudiants està relacionada amb la formació del professorat en la construcció del que s'anomena *competència d'anàlisi didàctica* (Fuertes, 2011). Segons el model de Coneixements i Competències Didàctiques i Matemàtiques (model CCDM) (Font, 2011; Breda, Pino-Fan i Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero i Font, 2017; Pino-Fan, Font i Breda, 2017; Pino-Fan, Castro i Font, 2022), la *competència d'anàlisi didàctica* és una “acció competent” que integra un conjunt de coneixements, habilitats, disposicions afectives per a l'acció, eines de reflexió entre altres aspectes que fan possible el desenvolupament efectiu de la tasca docent. El model CCDM planteja dues competències clau en la pràctica docent del professor de matemàtiques: (1) la *competència matemàtica* i (2) la *competència d'anàlisi i intervenció didàctica dels processos d'instrucció matemàtica*. Pel que fa a la *competència matemàtica*, el professor de matemàtiques ha de conèixer els continguts matemàtics que porta a l'aula. Mentre que la *competència d'anàlisi i intervenció didàctica dels processos d'instrucció matemàtica* es refereix al disseny, aplicació i valoració de les seqüències d'aprenentatge mitjançant l'aplicació de tècniques d'anàlisi didàctica amb les quals pugui establir cicles de planificació, implementació, avaluació i plantejament de propostes de millora (Breda, Pino-Fan i Font, 2017). Ávila (2008) explica que el millorament d'aquesta *competència d'anàlisi i intervenció didàctica* s'aconsegueix “entrenant” al professor per tal que amb la seva observació sigui capaç d'identificar aspectes clau de la planificació docent, així com del desenvolupament i implementació de les seqüències didàctiques dins l'aula. En concret, que el professor desenvolupi una “mirada crítica propositiva”. Font, Planas i Godino (2010) consideren que la *idoneïtat didàctica* és un model que permet fer l'anàlisi del disseny d'una lliçó de matemàtiques i també dels episodis que succeeixen a l'aula quan el professor implementa la lliçó. Per tant, els constructes desenvolupats per l'EOS són una eina que s'adapta de manera natural en el desenvolupament de la *competència d'anàlisi i intervenció didàctica*. L'anàlisi dels constructes *configuració epistèmica*, *trajectòries didàctiques* i *idoneïtat didàctica* de l'EOS ofereixen tècniques d'anàlisi didàctica que contribueixen en la sistematització de l'observació, demanada per Fuertes (2011), i del desenvolupament de la “mirada crítica propositiva” de la qual ha de disposar el professor (Ávila, 2008). La reflexió dels processos d'instrucció matemàtica orientada amb els constructes de l'EOS mostren el que estableix el model CCDM de Font, Planas i Godino (2010): és possible ajuntar la *competència matemàtica* del professor amb la seva *competència d'anàlisi i intervenció didàctica*. Incorporant les idees de Planas i Iranzo (2009), es pot portar més enllà el model CCDM en considerar les implicacions que té la interacció social donada a partir del plantejament d'un contingut matemàtic específic (**Figura 18.2.1.**).

L'ús dels constructes desenvolupats per l'EOS ha provat ser una eina potent per a la sistematització de l'observació del professor (Fuertes, 2011) que ajuda en el desenvolupament d'una “mirada crítica propositiva” (Ávila, 2008).

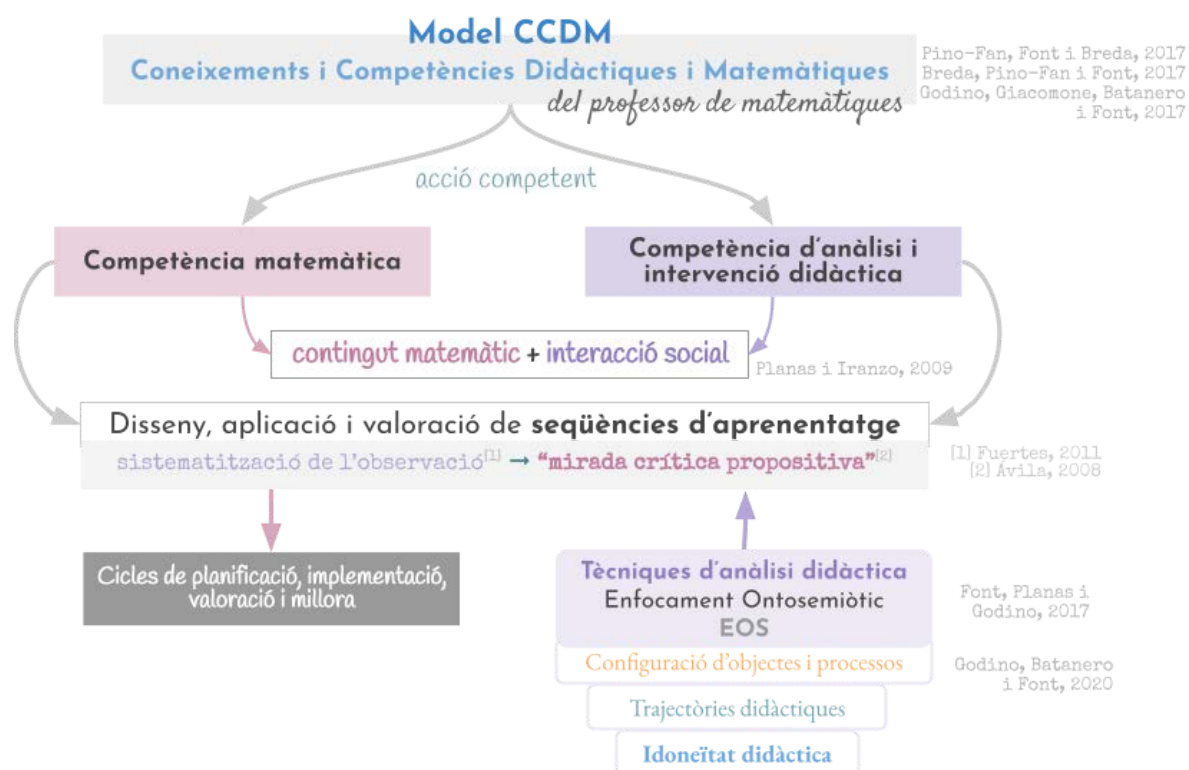


Figura 18.2.1. Esquematització de la influència dels constructes de l'EOS en el model CCDM (Font, 2011; Breda, Pino-Fan i Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero i Font, 2017; Pino-Fan, Font i Breda, 2017) com a eina de sistematització de l'observació (Fuertes, 2011) de la "mirada crítica propositiva" del professor (Àvila, 2008).

Font: Elaboració pròpia.

Finalment, s'ha identificat que l'aplicació dels constructes *configuració epistèmica*, *trajectòria didàctica* i *idoneïtat didàctica* de l'EOS abans i després de la sessió de matemàtiques permet una doble funció d'aquests instruments: (1) com a eines per establir una situació hipotètica amb la qual proposar fites a aconseguir en la implementació d'un procés d'instrucció matemàtica a l'aula, i (2) com instruments per avaluar el grau d'èxit de la implementació d'una tasca dins l'aula. Aquesta aplicació recurrent dels constructes de l'EOS es fa possible desenvolupar el model de recerca crítica de Skovsmose i Borba (2004), la qual condueix a aconseguir l'objectiu del model CCDM (Font, 2011; Breda, Pino-Fan i Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero i Font, 2017; Pino-Fan, Font i Breda, 2017): la creació de cicles de planificació, implementació, valoració i millora de les seqüències didàctiques de matemàtiques.

Aquesta tesi m'ha donat la oportunitat de fer servir els instruments d'anàlisi i planificació didàctica desenvolupats prèviament a l'EOS (constructe de la idoneïtat didàctica, configuracions epistèmiques), fer servir els indicadors i components dels criteris d'idoneïtat (Godino, 2013; Breda, Font i Pino-Fan, 2016), aplicats en un estudi de cas amb una trentena d'estudiants, en una aula real. El detall d'anàlisi i la riquesa de la

informació obtinguda (suportada per les evidències recollides), permet el poder fer una mirada acurada del procés de disseny i planificació didàctica, i especialment de l'anàlisi que tot docent hauria de poder fer del que succeeix amb un material didàctic (seqüència didàctica, tasca, etc.) quan s'implementa a l'aula. L'EOS a través del model CCDDM destaca no només la dimensió del contingut matemàtic, sinó també la dimensió de la competència d'anàlisi i intervenció didàctica. Mitjançant aquesta tesi s'espera que s'hagi pogut aportar un document que mostra la importància de fer aquest tipus d'anàlisi per millorar com podem intervenir a les aules per millorar el com ensenyem les matemàtiques, o, com en el meu cas, la geometria.

Capítol 19. Impacte i limitacions de l'estudi

Tal i com ja s'ha comentat anteriorment, la motivació principal d'aquesta tesi és impactar positivament sobre la tasca professional dels docents de matemàtiques. En termes generals, el principal impacte que s'espera que pugui tenir aquest treball és l'haver fet servir els principals constructes desenvolupats per l'EOS en el marc del model CCDM per a l'anàlisi i intervenció didàctiques. Es fa en el cas d'un aula real, en el marc d'un estudi de cas. A més a més, el propi desenvolupament de la recerca m'ha portat a fer propostes addicionals, com ara fer servir els criteris de idoneïtat didàctica de manera "quantitativa", és a dir, per mesurar fins a quin punt s'estava (o no) assolint els objectius hipotètics (a priori) del que espera un docent quan planifica una intervenció didàctica (i.e., una seqüència didàctica, una tasca d'aula, etc.). S'espera que la manera de fer-ho pugui servir d'orientació a futures recerques, que serveixin per afinar i corregir en el cas que sigui necessari, el que no hem sabut o pogut fer en aquesta tesi doctoral. D'altra banda, també s'han proposat noves eines d'anàlisi, com les trajectòries i subtrajectòries didàctiques, que s'espera poder sotmetre a discussió.

En tot cas, passo a comentar més en detall els principals impactes de la recerca de la tesi doctoral que reporto aquí, en aquesta memòria.

19.1 Impacte de l'estudi

L'aplicació dels constructes de l'**enfocament onto-semiòtic** per l'anàlisi didàctica de tasques de dibuix geomètric ha estat la línia de recerca de les contribucions que antecedeixen aquesta tesi. A la **Taula 19.1.1.** es veu que els estudis de doctorat li han permès a l'autora d'aquesta tesi aplicar coneixements teòrics per fer contribucions a l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques amb la revisió de treballs d'altres investigadors.

Taula 19.1.1.

Publicacions en revistes Q2.

Any	Citació
2019	García-Mora, E. (2019). Researching and using progressions (trajectories) in mathematics education [Review]. <i>REDIMAT</i> , 8(2), 226-227. DOI: 10.4471/redimat.2018.3839

Font: Elaboració pròpia.

Els treballs de recerca dels primers anys dels estudis doctorals de l'autora d'aquesta tesi es poden resumir en els capítols de llibre publicats al 2019 (**Taula 19.1.2.**). Seguint cronològicament els capítols de llibre es pot veure l'evolució de l'aplicació del constructe *idoneïtat didàctica*, l'aprofundiment en la caracterització de les

dimensions de la *idoneïtat didàctica*, els canvis de representació dels gràfics comparatius de les components de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* i l'enriquiment del corpus d'indicadors de les components de les dimensions del constructe *idoneïtat didàctica* mitjançant la incorporació dels treballs de recerca compatibles de Godino (2013) i Breda, Font i Pino-Fan (2016). També es veure la modificació dels codis de color i la reconsideració de les escales que caracteritzen les components d'una dimensió de la *idoneïtat didàctica*. Les comunicacions de la participació en congressos, jornades i simposis (**Taula 19.1.3.**) permeten la visualització més pausada i progressiva de l'evolució de l'anàlisi didàctica aplicada en aquesta tesi doctoral.

Taula 19.1.2.

Publicació de capítols de llibres.

Any	Citació
2021	García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2021). Uso del constructo idoneidad didáctica del EOS en el diseño de una tarea de matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria: el caso de la enseñanza de la geometría. 1ª Jornada de Estudiantes de Postgrado. Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Onto-Semiótico. Universidad de Los Lagos. Xile.
2019	García-Mora, E. i Díez-Palomar, J. (2019). Discusión del uso del constructo “idoneidad didáctica” para el análisis de tareas de construcción de objetos geométricos. En M.P. Bermúdez (Ed.), <i>Avances en Ciencias de la Educación y del Desarrollo</i> (pp. 231-235). Granada: Universidad de Granada-Asociación Española de Psicología Conductual.
2019	García-Mora, E. i Díez-Palomar, J. (2019). Comparación de esquemas de idoneidad didáctica del Enfoque Onto-Semiótico para analizar una secuencia didáctica de construcciones geométricas complejas. En J.M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J.M. Muñoz-Escolano i A. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (pp. 618). Valladolid: SEIEM-Universidad de Valladolid.

Font: Elaboració pròpia.

A la darrera etapa de la recerca doctoral, cap al 2020, l'autora va començar a estendre l'aplicació dels constructes de l'**enfocament onto-semiòtic** a la formació de professorat. Les comunicacions recollides a la **Taula 19.1.4.** es centren en la utilització dels indicadors de les components de les dimensions de la *idoneïtat didàctica* com a eines per sistematitzar la reflexió del professor en formació en àmbits no matemàtics. Inspirada en els treballs de Font (2011), Breda, Pino-Fan i Font (2017), Godino, Giacomone, Batanero i Font (2017), Pino-Fan, Font i Breda (2017) i Pino-Fan, Castro i Font (2022) sobre el model del Coneixement i Competències Didàctiques i Matemàtiques, l'autora d'aquesta tesi considera que les col·laboracions sobre l'aplicació dels constructes de l'**enfocament onto-semiòtic** en la sistematització de l'observació del professor en formació és una línia de recerca de futur amb la qual es pot en àmbits més enllà de l'educació matemàtica.

Taula 19.1.3.

Comunicacions i participacions en congressos.

Any	Comunicació
2021	García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2021). Didactic Suitability Characterization of Three Levels of Achievement on Geometric Drawing of Secondary School Students. ICME-14, Pequí, Xina [telemàtic].
2020	García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2020). Uso del constructo idoneidad didáctica del EOS en el diseño de una tarea de matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria: el caso de la enseñanza de la geometría. 1ª Jornada de Estudiantes de Postgrado. Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Onto-Semiótico. Universidad de Los Lagos. Xile [telemàtic].
2019	García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2019). Comparación de esquemas de idoneidad didáctica del Enfoque Onto-Semiótico para analizar una secuencia didáctica de construcciones geométricas complejas. SEIEM Investigación en Educación Matemática XXIII. Valladolid, Espanya [pòster].
2019	García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2019). Discusión del uso del constructo “idoneidad didáctica” para el análisis de tareas de construcción de objetos geométricos. Simposio invitado “La noción de idoneidad didáctica como herramienta para organizar la reflexión del profesor”. 7th International Congress of Educational Sciences and Development (Codi F19024). Granada, Espanya.
2019	García-Mora, E. (2019). Análisis de ejercicios de construcción geométrica de alumnos de primer grado de secundaria basados en instrucciones cuasi-formales desde la perspectiva del Enfoque Onto-Semiótico: un estudio de caso para alumnos mexicanos (ID 208). VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa. Lleida, Catalunya, Espanya.
2018	García-Mora, E. (2018). Curricular organization to the complex geometrical productions of secondary students based on quasi-formal statements. Mixed Methods in Mathematics and Science Education Research (STEM II). Universitat de Barcelona, Barcelona, Catalunya, Espanya.

Font: Elaboració pròpia.

Taula 19.1.4.

Comunicacions i participacions en congressos sobre formació de professorat.

Any	Comunicació
2022	Marín, M., Montes, H., Montserrat, M., Moreno, C., Pérez, I., i García-Mora, E. (2022). Matematización de pruebas físicas para el aprendizaje de probabilidad y estadística en primaria. CIMIE. Barcelona, 30 de juny al 01 de juliol de 2022.
2022	García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2022). Using the Didactic Suitability Criteria to Foster Equitable Mathematical Education by Supporting Pre-service Teachers. AERA, 21 al 26 d'abril de 2022 [telemàtic].
2022	García-Mora, E. i Díez-Palomar J. (2022). Idoneidad didáctica: sistematización de la observación y mejora de intervenciones en el aula. CIDIDMAT, 26 de febrer al 26 de març de 2022 [telemàtic].
2021	García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2021). Desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica del maestro de matemáticas en el contexto de un seminario de prácticas profesionales. RELME 34. Quetzaltenango, Guatemala [telemàtic].
2021	García-Mora, E. i Díez-Palomar, J. (2021). Uso del constructo de idoneidad didáctica como herramienta para sistematizar la observación y el análisis didáctico en profesores de primaria en formación. CIMIE 21, 01 i 02 de juliol de 2021 [telemàtic].
2021	García-Mora, E. i Díez-Palomar, J. (2021). Didactic Analysis of High-School Student Geometric Production as a Planning Improvement Strategy of Training Teacher Task Design. ECER 2020. Glasgow, Anglaterra [telemàtic].
2021	Breda, A., Díez-Palomar, J., García-Mora, E., Hummes, V. i Font, V. (2021). Drawing on the Didactical Suitability Criteria to Analyse a Lesson Study Enhancing Teachers Competence of Didactical Reflection. ICME-14, Pequí, Xina [telemàtic].
2020	Soria, A., i García-Mora, E. (2020). Anàlisi didàctic d'una intervenció de càlcul mental per alumnes de primària sota la mirada de l'enfocament onto-semiòtic. Congrés Català d'Educació Matemàtica. Barcelona, Catalunya, Espanya [telemàtic].

Font: Elaboració pròpia.

19.2 Limitacions d'aquest estudi i prospectiva

Tota recerca té les seves limitacions, per definició, perquè és impossible abastar-ho tot amb un estudi. Per tant, des del moment en que acotem l'objecte d'estudi, estem acceptant (i imposant) un seguit de limitacions. És el cas clar d'un estudi de cas, com el que hem dut a terme aquí. Els estudis de cas (Stake, 1995) són una gran eina de treball, perquè permeten un nivell de detall que difícilment el podríem assolir mitjançant una enquesta, o un estudi clínic, per exemple. Però també és cert que les seves fites són completament diferents. En un estudi amb una mostra representativa, el que s'acostuma a voler es o bé descriure la realitat, i obtenir-ne una fotografia més o menys representativa (d'acord amb uns marges de confiança), o bé comprovar la resposta a un determinat esdeveniment (com per exemple, el resultat d'un fàrmac). Però en el meu cas el que volia era analitzar en detall l'ús d'una sèrie de constructes, en el marc d'una classe sobre dibuix i composició geomètriques. Per tant, necessitava una metodologia més detallista, però que, per contra,

introdueix la limitació de la generabilitat dels resultats. No es poden generalitzar. D'altra banda, el posicionar-me com a part participant en la recerca, en una posició subjectiva i participant, té les seves avantatges indubtablement també desavantatges.

Tot i que un punt fort d'aquest treball de recerca ha sigut l'observació participant de la investigadora, aquest tret és a la vegada un limitació que impedeix trobar patrons amb els quals estendre els resultats. L'estudi de cas en el qual va participar de manera directa l'autora d'aquesta tesi com a implementadora de les tasques, de dibuix geomètric contextualitzat i col·laboratiu, l'han orientat per establir un marc de referència. He pogut fer servir alguns dels constructes de l'EOS per analitzar amb detall (i fins i tot mesurar, en certa manera) els diferents criteris que d'acord amb el CCDM, s'ha de pensar i reflexionar sobre la intervenció didàctica. Aquesta feina esperem que pugui ser un punt d'inici que serveixi per a futurs estudis, més generals, més de caire confirmatori (o per rebatre), el que s'ha assolit aquí. En tot cas, això ja seria matèria per a futures línies de treball.

Referències

- Agostinho, S. (2005). Naturalistic inquiry in e-learning research. *International Journal of Qualitative Methods* 4(1), 13-26.
- Aiken, L.R. (1972). Language Factors in Learning Mathematics. En J.L. Higgins (Ed.) *Science, Mathematics, and Environmental Education* (pp. 5-44). Columbus, Ohio: SMEAC.
- Alsina, A. (2004). *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos para niños y niñas de 6 a 12 años*. Narcea Ediciones. ISBN: 84-277-1453-X
- Alsina, A. i Llach, S. (2019). Un modelo para la enseñanza de la notación numérica y lingüística en educación infantil a partir del análisis de la práctica del profesorado. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado* 23(3), 389-412.
<https://dois.org/10.30827/profesorado.v23i3.11235>
- Alsina, C., i Nelsen, R.B. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. USA: The Mathematical Association of America.
- Anderson, J.R. (2002). Spanning seven orders of magnitude: a challenge for cognitive modeling. *Cognitive Science* 26, 85-112.
- Anderson, J.R., Boyle, C.F., Corbett, A.T. i Lewis, M.W. (1990). Cognitive Modeling and Intelligent Tutoring. *Artificial Intelligence* 42, 7-49.
- Anderson, J.R. i Lebiere, C. (1998). *The atomic components of thought*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Anderson, J.R., Matessa, M., i Lebiere, C. (1997). ACT-R: A Theory of Higher Level Cognition and Its Relation to Visual Attention. *Human-Computer Interaction* 12, 439-462.
- Aubert, A., Flecha, A., García, C., Flecha, R. i Racionero, S. (2010). *Aprendizaje dialógico en la Sociedad de la Información*. Tercera edició. Barcelona: Hipatia Editorial.
- Ávila, R. (2008). La observación, una palabra para desbaratar y re-significar. Hacia una epistemología de la observación. *Revista Científica Guillermo de Ockham* 6(1), 15-26.

- Arnal, J., del Rincón, D., i Latorre, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodologías*. Labor Universitaria.
- Aslan-Tutak, F., i Adams, T.L. (2015). A Study of Geometry Content Knowledge of Elementary Preservice Teachers. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 7(3), 301-318.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., i Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Ball, D., Thames, M. i Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <http://dx.doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Ballester, L. (2004). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Universitat de les Illes Balears.
- Battista, M.T., i Clements, D.H. (1990). Logo environments and geometric learning. Paper presented at the meeting of the *National Council of Teachers of Mathematics*, Salt Lake City, UT.
- Bell, E.T. (1999). *Historia de las matemáticas*. Fondo de Cultura Económica.
- Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema*, 32 (61), 526-548.
- Berrocal, D. (2013). Análisis Crítico de la “Pedagogía Constructivista”. *Investigación Educativa*, 17(2), 97-104.
- Berthelot, B. i Salin, M.H. (1998). Reasoning in Geometry. Section V. The Role of Pupils' Spatial Knowledge in The Elementary Teaching of Geometry. En C. Mammana i V. Villani (Eds.) *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 29-83
- Biggs, J.B. (1979). Individual Differences in Study Processes and The Equality of Learning Outcomes. *Higher Education*, 8, 381-394.

- Biggs, J.B., i Collis, K.F. (1982). *EVALUATING THE QUALITY OF LEARNING. The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome)*. Academic Press.
- Bishop, A.J. (1986). What are some obstacles to learning geometry? En *Studies in mathematics education*. Paris, France: UNESCO, United Nations.
- Bishop, A.J. (1988). A Review of Research on Visualization in Mathematics Education. *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (12th)*. Veszprem: Hungary.
- Blum, W., Artigue, M., Mariotti, M.A., Sträßer, R, i Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2017). European Didactic Traditions in Mathematics. *Proceedings of 13th International Congress on Mathematical Education*: G. Kaiser.
- Breda, A., Pino-Fan, L.R., i Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13 (6), 1893-1918.
- Breda, A., Font, V., i Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo *idoneidad didáctica*. *BOLEMA*, 32 (60), 255-278.
- Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.
- Bruner, J. (1997). Celebrating divergence: Piaget and Vygotsky. *Human Development*, 40, 63-73.
- Bueno, R. (2007). Una visión crítica del Constructivismo. *Revista Cultura*, 21(21), 82-93.
- Burger, W.F. i Shaughnessy, J.M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for Research in Mathematics Education* 17(1), 31-48.
- Calderón, D.I. (2012). El lenguaje en las matemáticas escolares. En D.I. Calderón (Ed.), *Énfasis. Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación. Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas. Educación Matemática* (pp. 79-107). Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Calero, C.I., Shalom, D.E., Spelke, E.S., i Sigman, M. (2019). Language, gesture, and judgment: Children's paths to abstract geometry. *Journal of Experimental Child Psychology* 177, 70-85.
- Call, R.J., i Wiggin, N.A. (1966). Reading and Mathematics. En E.D. Nichols (Ed.), *The Mathematics Teacher*, (pp. 149-158). Tallahassee, Florida: Florida State University.
- Camargo, L. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Revista Colombiana de Educación*, 60(1), 41-60.
- Camargo, L. (2019). Perspectivas para leer la práctica del profesor de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, i M.T. González (Eds.) *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca.
- Capraro, R.M. (2001, 1-3 de Febrer). *Exploring the Influences of Geometric Spatial Visualization, Gender, and Ethnicity on the Acquisition of Geometry Content Knowledge* [Conference presentation]. Annual Meeting of the Southwest Educational Research Association, New Orleans, LA, Estats Units.
- Carrillo, J., Contreras, L.C., Climent, N., Montes, M.A., Escudero, D.I. i Flores, E. [Coords.] (2016). *Didáctica de las Matemáticas para maestros de educación primaria*. Paraninfo Universidad.
- Castro, J. (2004). El desarrollo de la noción de espacio en el niño de Educación Inicial. *Acción Pedagógica*, 13(2), 162-170.
- Chronaki, A., i Jones, K. (1999). Language Use and Geometry Texts. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 19 (1), 95-100.
- Clark, R. (1975). Some Aspects of Psycholinguistics. En E. Jacobsen (Ed.), *Interactions between Linguistics and Mathematical Education: Final Report of the Symposium Sponsored by UNESCO, CEDO and ICM* (pp. 1-11). Nairobi, Kenya: UNESCO.
- Clements, D.H. (1998). Geometric and Spatial Thinking in Young Children. *National Science Foundation*.
- Clements, D.H. (2003). Teaching and learning geometry. En J. Kilpatrick, W.G. Martin i D. Schifter (Eds.) *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 151-178). Reston, Va.: NCTM

- Clements, D.H., i Battista, M.T. (1990). Constructivist Learning and Teaching. En *The Arithmetic Teacher*, 38(1). ProQuest Central (p. 34).
- Clements, D.H., i Battista, M.T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. A. Grouwq (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). New York: Macmillan.
- Clements, D.H., i Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes. *NCTM Teaching Children Mathematics*, 482-488.
- Clements, D.H., i Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education, *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Clements, D.H., Sarama, J., Swaminathan, S., Weber, D., i Trawick-Smith, J. (2018). Teaching and learning Geometry: early foundations. *Quadrante 27*(2), 7-31.
- Cochran, K.F. (1997). Pedagogical Content Knowledge: Teachers' Integration of Subject Matter, Pedagogy, Students, and Learning Environments. *Research Matters - to the Science Teacher* No. 9702. NARST.
- Colignatus, T. (2015). *Pierre van Hiele, David Tall and Hans Freudenthal: Getting the facts right*. <http://thomascool.eu>
- Collette, J.-P. (2006). Historia de las matemáticas I. Siglo veintiuno editores.
- Common Core State Standards (2010). *Mathematics*. Appendix A: Designing High School Mathematics Courses Based on the Common Core State Standards. USA.
- Conley, D.T. (2014). *The Common Core State Standards: Insight into their development and purpose*. Council of Chief State School Officers.
- Contreras, F.A. (2012). La evolución de la didáctica de la matemática, *Horizonte de la Ciencia*, 2(2). FE-UNCP/ISSN 230-4330.
- Corbin, J. i Strauss, A. (1990a). Grounded Theory Research: Procedures, Canons, and Evaluative Criteria. *Qualitative Sociology* 13(1), 3-21.

- Corbin, J. i Strauss, A. (1990b). Grounded Theory Research: Procedures, Canons, and Evaluative Criteria. *Zeitschrift für Soziologie*, 19(6), 418-427.
- Corbin, J. i Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research. Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory*. SAGE.
- Creswell, J.W. (2003). *Research Design. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage.
- Crowley, M.L. (1987). The van Hiele Models of the Development of Geometric Thought. En M. Montgomery (Ed.), *Learning and Teaching Geometry, K-12* (pp. 1-16). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cuevas, G.J. (1984). Mathematics Learning in English as a Second Language. *Journal for Research in Mathematics Education* 15(2), 134-144.
- da Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte i J.F. Matos (Organitzadors). *XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Conferència plenària duta a terme en Lisboa, Portugal.
- Dalkey, N. i Helmer, O. (1963). An experimental application of the Delphi method to the use of experts. *Management science* 9 (3), 458-467.
- Darling-Hammond, L. (2000). Teacher Quality and Student Achievement: A Review of State Policy Evidence, *Education Policy Analysis Archives*, 8(1). ISSN 1068-2341. Arizona State University.
- de Villiers, M. (02-04 d'octubre, 1996). *The Future of Secondary School Geometry* [Resum de conferència plenària]. SOSI Geometry Imperfect Conference, UNISA, Pretoria.
- Decret 181 de 2008 [Generalitat de Catalunya]. Pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments del segon cicle de l'educació infantil. 12 de febrer de 2009.
- Decret 101 de 2010 [Generalitat de Catalunya]. D'ordenació dels ensenyaments del primer cicle de l'educació infantil. 05 d'agost de 2010.

- Decret 119 de 2015 [Generalitat de Catalunya]. D'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària. 26 de juny de 2015.
- Decret 187 de 2015 [Generalitat de Catalunya]. D'ordenació de l'ensenyament de l'educació secundària obligatòria. 28 d'agost de 2015.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: how the mind creates mathematics*. New York, USA: Oxford University Press.
- Díez-Palomar, J. (2004). *La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas: un modelo dialógico* (tesis doctoral). Universitat de Barcelona, Barcelona, Catalunya.
- Díez-Palomar, J. (2017). Matemáticas Dialógicas. 'Yo soy de mates'. *Modelling in Science Education and Learning*, 10(1), 289-308.
- Díez-Palomar, J., Giménez, J. i García-Wehrle, P. (2005). Dialogic multiculturalism in mathematics class. *CIEAEM* 57, 212-216.
- Dillon, M.I. (2010). *Geometry Through History. Euclidean, Hyperbolic, and Projective Geometries*. Springer.
- Driscoll, M. J. (1983). *Research within reach: Secondary School mathematics*. St. Louis, MO: CEMREL. Inc.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of Mathematics Education*. 23-26 d'Octubre. Cuernavaca, Morelos, Mèxic.
- Espín, J.V. (2002). El análisis de contenido: una técnica para explorar y sistematizar información. *Revista de Educación*, 4, 95-105.
- DG Research and Innovation (2018). *Ethics in Social Science and Humanities*. European Commission.
- Fennema, E., i Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 147-164). Macmillan Publishing Co, Inc.

- Ferrán, J.M. (2004). La Geometría de Emma Castelnuovo. *SUMA* 45, 126.
- Ferreiro, E. (2006). La escritura antes de la letra. *CPU-e, Revista de Investigación Educativa*, 3. Recuperat el 03 d'agost de 2020, de http://www.uv.mx/cpue/num3/inves/Ferreiro_Escritura_antes_letra.htm
- Ferrer, A. (1974). *Història. L'Infanta, mig segle educant*. Institut Infanta Isabel d'Aragó. <https://agora.xtec.cat/iesinfanta/linstitut/historia/>
- Fernández, T., Godino, J. D. i Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema*, 26 (42), 39-63.
- Fernández, C., i Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24(2), 139-162.
- Flecha, R., Vargas, J., i Dávila, A. (2004). Metodología Comunicativa Crítica en la Investigación en Ciencias Sociales: La Investigación Workaló. *LANHARREMANAK*, 11(II), 21-33.
- Flick, U. (2004). Constructivism. En U. Flick, E. von Kardorff i I. Steinke (Eds.), *A Companion to Qualitative Research* (p. 88-94). Sage.
- Flick, U. (2010). *An Introduction to Qualitative Research*. Sage.
- Flotts, M.P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejías, N., i Abarzúa, A. (2016). *Aportes para la enseñanza de la matemática*. Chile, UNESCO.
- Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, 1-35.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 26, 9-25.

- Font, V., i Godino, J.D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa*, 8(1), 67-98.
- Font, V., Planas, N., i Godino, J.D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, Journal for the Study of Education and Development*, 33(1), 89-105. <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Fuertes, M.T. (2011). La observación de las prácticas educativas como elemento de evaluación y de mejora de la calidad en la formación inicial y continua del profesorado. *Revista de Docencia Universitaria*, 9(3), 237-258.
- Fuller, F.F. (1969). Concerns of Teachers: A Developmental Conceptualization. *American Educational Research Journal*, 6(2), 207-226.
- Fuys, D., Geddes, D., Lovett, C.J. i Tischler, R. (1984). *English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. Nova York: Brooklyn College, CUNY.
- Fuys, D. (1988). *Cognition, metacognition, and the van Hiele model*. Paper presented at the meeting of the *International Group for the Psychology in Mathematics Education - North American Chapter*, DeKalb, IL.
- Gairín, J. i Rodríguez-Gómez, D. (2012). La pràctica professional i la seva vinculació amb la creació i gestió del coneixement col·lectiu. *Temps d'Educació* 42, 269-286.
- Gariboldi, M.B. i Salsa, A.M. (2016). Influencia de la Cantidad y el Nombre de las Unidades Gráficas en el Reconocimiento y la Diferenciación Precoz Entre Dibujo, Escritura y Numerales. *Psykhé*, 25(2), 1-15. <https://doi.org/10.7764/psykhe.25.2.813>
- García-Mora, E. i Díez-Palomar, J. (2019). Discusión del uso del constructo “idoneidad didáctica” para el análisis de tareas de construcción de objetos geométricos. En M.P. Bermúdez (Ed.), *Avances en Ciencias de la Educación y del Desarrollo* (p. 231-235). Universidad de Granada - Asociación Española de Psicología Conductual.

- García-Mora, E. i Díez-Palomar, J. (2019). Análisis De Ejercicios De Construcción Geométrica De Alumnos De Primer Grado De Secundaria Basados En Instrucciones Cuasi-formales Desde La Perspectiva Del Enfoque Ontosemiótico: Un Estudio de Caso Para Alumnos Mexicanos. VIII Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa. Lleida, Catalunya.
- García-Mora, E., i Díez-Palomar, J. (2021). Uso del constructo idoneidad didáctica del EOS en el diseño de una tarea de matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria: el caso de la enseñanza de la geometría. 1ª Jornada de Estudiantes de Postgrado. Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Onto-Semiótico [Acceptat per publicació].
- Geary, D.C., i Hoard, MK. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. En J.I.D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253-267). Nova York: Psychology Press.
- Generalitat de Catalunya (2012). *Currículum i orientacions. Educació Infantil. Primer Cicle*. Departament d'Ensenyament.
- Generalitat de Catalunya (2015). *Currículum educació secundària obligatòria. Àmbit matemàtic (matemàtiques)*. Barcelona, Catalunya: Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat.
- Generalitat de Catalunya (2016). *Currículum i orientacions. Educació Infantil*. Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària.
- Generalitat de Catalunya (2017a). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria*. Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat.
- Generalitat de Catalunya (2017b). *Currículum. Educació Primària*. Barcelona, Catalunya: Servei d'Ordenació Curricular d'Educació Infantil i Primària.
- Generalitat de Catalunya (2020). *Quaderns d'Avaluació. 46. Abril de 2020. L'avaluació de quart d'ESO 2020*. Recuperat de: <http://csda.gencat.cat/ca/>
- Glaser, B.G. i Strauss, A.L. (1999). *The discovery of grounded theory: strategies for qualitative research*. Routledge.

Globo de papel de seda. (12 d'agost, 2021). En Wikipedia.

https://es.wikipedia.org/wiki/Globo_de_papel_seda

Godino, J.D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática. *Quadrante* 2(1) 9-22.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Universidad de Granada.

Godino, J.D. (2010). *Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Tecnocientífica*. Recuperat de: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/perspectiva_ddm.pdf

Godino, J.D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, (11), 111-132.

Godino, J.D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas*. Universidad de Granada. Recuperat de: www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D. (2018). *Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática*. Universidad de Granada. Recuperat de: http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf

Godino, J.D. (2021, 02 de juliol). *De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática* [Conferència plenària]. RELME 34, Quetzaltenango, Guatemala.

Godino, J.D., Batanero, C., Burgos, M., i Gea, M.M. (2021). Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. *Revemop*, 3, 1-30.

Godino, J.D., Batanero, C., i Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education* 39, 127-135.

- Godino, J.D., Batanero, C., i Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática* 10, 7-37.
- Godino, J. D., Batanero, C. i Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12 (2), 3-15.
- Godino, J.D., Bencomo, D., Font, V., i Wilhelmi, M.R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *PARADIGMA*, 27(2), 221-252.
- Godino, J.D., Contreras, A., i Font, V. (2006). Análisis de Procesos de Instrucción Basado en el Enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., i Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31 (57), 90-113.
- Godino, J.D., i Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada.
- Gökkurt, B., Şahin, Ö., Soylu, Y., i Doğan, Y. (2015). Pre-service Teachers' Pedagogical Content Knowledge Regarding Student Mistakes on the Subject of Geometry Shapes. *Elementary Education Online*, 14(1), 55-71. <https://doi.org/10.17051/ieo.2015.55159>
- Golafshani, N. (2003). Understanding Reliability and Validity in Qualitative Research. *The Qualitative Report* 8(4), 597-607.
- Gómez, A., i Díez-Palomar, J. (2009). Metodología Comunicativa Crítica: Transformaciones y Cambios en el s. XXI. *Revista Electrónica Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, 10(3), 105-118. Recuperat de: <http://www.redalyc.org/pdf/2010/201014898007.pdf>
- Gonseth, F. (1945-1955). *La géométrie et le problème de l'espace*. Lausanne: Editions du Griffon.
- González, L.M. (2003). Proceso de Construcción de la Lengua Escrita en Niños Preescolares Trujillanos. *Ágora* 11. Trujillo.

- Grimmett, P., i MacKinnon, A. (1992). Craft Knowledge and the Education of Teachers. *Review of Research in Education*, 18, 385-456. doi:10.2307/1167304
- Grossman, P., Hammerness, K. y McDonald M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching* 15(2), 273-289.
- Gutek, G.L. (2004). *The Montessor Method*. Rowan & Littlefield Publishers.
- Harris, D.N., i Sass, T.R. (2007). Teacher Training, Teacher Quality, and Student Achievement, *National Center for Analysis of Longitudinal Data in Education Research*. CALDER Urban Institute.
- Herbst, P., Fujita, T., Halverscheid, S., i Weiss, M. (2017). *The Learning and Teaching of Geometry in Secondary Schools, A Modeling Perspective*. Routledge.
- Hilbert, D. (1999). *Foundations of Geometry*. Open Court Classics.
- Houdement, C. i Kuzniak, A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x* 55, 5-21.
- Jones, B.R., Hopper, P.F., i Franz, D.P. (2008). Mathematics: A Second Language. *Mathematics Teacher* 102(4), 307-312.
- Jones, K. (1995). Geometrical reasoning, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 15(3), 43-47.
- Jones, K. (1998a). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1 i 2), 29-34.
- Jones, K. (1998b). Visualisation, Imagery and the Development of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1 i 2), 123-128.
- Jones, K. (2002). Issues in the teaching and learning of geometry. En L. Haggarty (Ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*, pp. 121-139. RoutledgeFalmer.

- Jones, K., Fujita, T., i Ding, L. (2006). Informing the pedagogy for geometry: learning from teaching approaches in China and Japan. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 26(2), 110-114.
- Kane, T.J., i Staiger, D.O. (2008). Estimating Teacher Impacts on Student Achievement: An Experimental Evaluation. *NBER Working Paper Series*. Working Paper 14607. Recuperat de <http://www.nber.org/papers/w14607>
- Kemmis, S. i McTaggart, R. (2003). Participatory Action Research. En N. Denzin i Y.S. Lincoln (Eds.) *Strategies of Qualitative Inquiry*, pp. 336-396. SAGE.
- Koehler, M.J. (24 de setembre de 2012). *TPACK Explained*. <http://tpack.org/>
- Lambert, M. (1985). How Do Teachers Manage to Teach? Perspectives on Problems in Practice. *Harvard Educational Review* 55(2), 178-194.
- Levinson, S.C. (1996). Language and Space. *Annual Reviews Anthropology* 25, 353-382.
- Li, Y., i Lappan, G. (eds.) *Mathematics Curriculum in School Education: Advancing Research and Practice from an International Perspective*. En *Mathematics Curriculum in School Education*. Springer (pp. 3-12).
- Loef Franke, M., Kazemi, E., i Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. En F.K. Lester, J., (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 225-256.
- Lourenço, O. (2012). Piaget and Vygotsky: Many resemblances, and a crucial difference, *New Ideas in Psychology* 3, 281-295.
- Lovell, K. (1959). A follow-up study of some aspects of the work of Piaget and Inhelder on the child's conception of space. *British Journal of Educational Psychology*, 29(2), p. 104-117. <https://dois.org/10.1111/j.2044-8279.1959.tb01484.x>
- Maffia, A. i Pelillo, M. (2015). Intuitive Geometry by Emma Castelnuovo: still contemporary in the digital devices' era. *EDiMaST* 1, 2, 131-140.

- Marchis, J. (2012). Preservice Primary School Teachers' Elementary Geometry Knowledge. *Acta Didactica Napocensia*, 5(2), 33-40.
- Marshall, C. i Rossman, G.B. (1999). *Designing Qualitative Research*. Sage.
- Martín, F. (2002). Recensiones. *SUMA* 41, 133-136.
- Mason, J. (2002). *Qualitative Researching*. SAGE.
- Massot, I., Dorio, I. i Sabariego, M. (2009). Estrategias de recogida y análisis de la información. En R. Bisquerra (Coord.) *Metodología de la investigación educativa*, 329-368.
- Merriam, S. (1995). What Can You Tell From An N of 1?: Issues of Validity and Reliability in Qualitative Research. *PAACE Journal of Lifelong Learning*, 4, 51-60.
- Midgett, C.W., i Eddins, S.K. (2001). NCTM's Principles and Standards for School Mathematics: Implications for Administrators. *NASSP Bulletin* 85 (623), 35-42.
- Milgram, R.J. (2007). What Is Mathematical Proficiency? En A. Schoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (pp. 31-58). Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511755378.007>
- Mishra, P., i Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
<https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Moschkovich, J. (2003). What Counts as Mathematical Discourse? *Proceedings of the 27th International Group for the Psychology of Mathematics Education Conference and 25th PME-NA Conference* (3), 325-332.
- Mosquera, J.C. (1996). La informática y el proceso de investigación matemática en la escuela. *Educación Matemática* 8 (1), 13-
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. In *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*.

National Center for Educational Statistics (2020). *Mathematics* (2019). Recuperat de: <https://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/>

National Committee for Research Ethics in the Social Science and the Humanities (2018). *Guidelines for Research Ethics in the Social Sciences, Humanities, Law and Theology*. Norwegian National Research Ethics Committees. <https://www.forskningsetikk.no/en/guidelines/social-sciences-humanities-law-and-theology/guidelines-for-research-ethics-in-the-social-sciences-humanities-law-and-theology/>

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The National Council of Teachers of Mathematics.

National Research Council (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. The National Academies Press. doi: 10.17226/9822

OCDE (2020). *PISA 2021 Mathematics Framework*. Recuperat de: <https://pisa2021-maths.oecd.org/#Mathematical-Reasoning>

O'Neill, G. (2010). Teaching Toolkit, *UCD Teaching and Learning / Resources*. Recuperat de <http://www.ucd.ie/t4cms/UCDILT0025.pdf>

Palarea, M.M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas* 40, 3-28.

Patton, M.Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods*. SAGE.

Pérez-Echeverría, M.P., Martí, E. i Pozo, J.I. (2010). Los sistemas externos de representación como herramientas de la mente. *Cultura y Educación* 22(2) 133-147.

Peters, M. (2008). The Development of a Semantic Model for Learning Mathematics. En M. Joubert (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 28 (2).

Piaget, J. (1973). *Introduction à l'épistémologie génétique: La pensée biologique, la pensée psychologique, et la pensée sociologique*. Presses Universitaires de France.

- Piaget, J., i Inhelder, B. (1967). *Psicología del niño*. Ediciones Morata.
- Piaget, J., i Inhelder, B. (1971). *Mental imagery and the child*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J., i García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo veintiuno editores.
- Pino-Fan, L., Font, V., i Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. En B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh i B. H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 33-40. Singapur: PME.
- Pino-Fan, L.R., Castro, W.F. & Moll, V.F. (2022). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- Pipkorn, D. (2015). *What Makes a Mathematically Proficient Student?* National Council of Teachers of Mathematics Publications. Recuperat de https://www.nctm.org/Publications/Mathematics-Teaching-in-Middle-School/Blog/What-Makes-a-Mathematically-Proficient-Student_/
- Planas, N., i Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(2), 179-213.
- Planas, N., i Reverter, F. (2011). Hay mucho de lengua en las matemáticas. *Cuadernos de Pedagogía* (413), 38-41.
- Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*, 14 (3), 361-394.
- Poulou, M. (2007). Student-teachers' concerns about teaching practice. *European Journal of Teacher Education*, 30(1), 91-110.
- Power, R.J.D., i Longuet-Higgins, H.C. (1978). Learning to count: a computational model of language acquisition. *Proceedings of Royal Society of London* 200, 391-417.

- Prather, R., i Alibali, W. (2011). Children's Acquisition of Arithmetic Principles: The Role of Experience. *Journal of Cognition and Development* 12 (3), 332-354.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez i P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 205-236). The Netherlands.
- Pytlak, M. (2015). Learning geometry through paper-based experiences. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 571-577.
- Ramellini, G., Veltroni, W., Martín, F., Esposti, C. (2004). Emma Castelnuovo cumple noventa años. *SUMA* 45, 5-16.
- Rauner, F. (2007). Practical knowledge and occupational competence. *European journal of vocational training*, 40(1), 52-66.
- Real Decreto 1105 de 2014 [Ministerio de Educación, Cultura y Deporte]. Pel qual s'estableix el currículum bàsic de l'Educació Secundària Obligatòria i del Batxillerat. 03 de gener de 2015.
- Reguant-Álvarez, M., i Torrado-Fonseca, M. (2016). El método Delphi. *REIRE, Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, 9 (1), 87-102. DOI: 10.1344/reire2016.9.1916
- Ritter, S., Anderson, J.R., Koedinger, K.R. i Corbett, A. (2007). Cognitive Tutor: Applied research in mathematics education. *Psychonomic Bulletin & Review* 14(2), 249-255.
- Rivkin, S., Hanushek, E., i Kain, J.F. (2005). Teachers, Schools, and Academic Achievement, *Econometrica*, 73(2), 417-458.
- Rodríguez, B. (2015). Algunas reflexiones sobre la enseñanza de la Geometría en la escuela primaria. *Quehacer educativo*, 12-19.
- Rodríguez, J., Martí, E., i Salsa, A. (2016). La naturaleza semiótica de los conocimientos numéricos: aportes al campo de la educación. *Revista de Psicología* 12(23), 67-79.

- Rønning, F. (2004). Language and Concept Development in Geometry. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4*, 137-144.
- Ruiz, J.I. (2012). *Metodología de la investigación cualitativa*. Deusto. ISBN: 978-84-9830-673-6
- Sabariego, M., i Bisquerra, R. (2004). Fundamentos Metodológicos de la Investigación Educativa. En R. Bisquerra (Coord.) *Metodología de la investigación educativa*, 19-50.
- Sabariego, M., Massot, I., i Dorio, I. (2004). Métodos de Investigación Cualitativa. En R. Bisquerra (Coord.) *Metodología de la investigación educativa*, 19-50.
- Sánchez, M.C., i Revuelta, F.I. (2005). El proceso de transcripción en el marco de la metodología de investigación cualitativa actual. *Enseñanza*, 23, 367-386. ISSN:0212-5374
- Sarnecka, B.W. i Wright, C.E. (2013). The Idea of an Exact Number: Children's Understanding of Cardinality and Equinumerosity. *Cognitive Science*, 1-14.
- Schoenfeld, A.H. (1982). *Expert and Novice Mathematical Problem Solving. Final Project Report and Appendices B-H*. National Science Foundation.
- Schoenfeld, A.H. (1986). On having and using geometric knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Lawrence Erlbaum.
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. Dirección General de Desarrollo Curricular, Dirección General de Formación Continua de Maestro en Servicio. Subsecretaría de Educación Básica. Secretaría de Educación Pública.
- Secretaría de Educación Pública (2012). *Los elementos del currículo en el contexto del enfoque formativo de la evaluación*. Dirección General de Desarrollo Curricular, Subsecretaría de Educación Básica. Secretaría de Educación Pública. ISBN: 978-607-467-276-3
- Secretaría de Educación Pública (2020). *Planes y programas de estudio*. Ciudad de México: México. Recuperat de: <https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx>

- Senk, S.L. (1989). Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs, *Journals for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321.
- Sherin, M.G., Jacobs, V.R., i Philipp, R.A. (2011). Situating the Study of Teacher Noticing. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs, i R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes*. Routledge.
- Sherin, M.G., Russ, R.S., i Colestock, A.A. (2011). Accessing mathematics teachers' in-the-moment noticing. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs, i R.A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing. Seeing Through Teachers' Eyes*. Routledge.
- Shoenfeld, A.H. (2007). What is Mathematical Proficiency and How Can It Be Assessed? En A.H. Shoenfeld (Ed.), *Assessing Mathematical Proficiency* (pp. 59-74). Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511755378
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review* 57(1).
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Skovsmose, O., i Borba, M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. P. Valero i R. Zevenbergen (Eds.) *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology*, 207-226.
- Sotos, M. i López, M. C. (2015). El proceso de construcción del saber pedagógico en Educación Matemática: el caso de María Antònia Canals. *Épsilon* 32(2), 59-69.
- Stake, R.E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Ediciones Morata, S.L.
- Stake, R.E. (2003). Case Study. En Denzin, N., i Lincoln, Y.S. (Eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 134-164). Sage.
- Stake, R.E. (2010). *Qualitative Research. Studying How Things Work*. The Guilford Press.

- Stenhouse, L. (1975). *An introduction to curriculum research and development* (pp. 52-83). Heinemann.
- Sykes, G., Bird, T. i Kennedy, M. (2010). Teacher Education: Its Problems and Some Prospects. *Journal of Teacher Education* 6(5), 464-476.
- Taylor, S.J., Bogdan, R. i DeVault, M.J. (2016). *Introduction to Qualitative Research Methods. A Guidebook and Resource*. Wiley.
- Tripp, D. (1994). Teacher's lives, critical incidents, and professional practice. *Qualitative studies in education* 7(1), 65-76.
- Tyler, R.W. (1950). *Basic principles of curriculum and instruction*. University of Chicago Press.
- van Hiele, P.M. (1959). *Structure and insight*. Academic Press.
- Vecino, F. (2003). Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria. En M.C. Chamorro (Coord.) *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 301-328). Pearson.
- Veenman, S. (1984). Perceived Problems of Beginning Teachers. *Review of Educational Research*, 54(2), 143-178.
- Veenman, S., de Laat, H., i Staring, C. (Septiembre de 1998). Coaching Beginning Teachers. Article presentat en l'European Conference on Educational Research, Ljubljana, Slovenia.
- Vicerectorat de la Universitat de Barcelona (2020). *Codi d'integritat en la recerca*. Universitat de Barcelona.
- Vygotsky, L. (1987). *Problems of general psychology* In *The collected works of L.S. Vygotsky*. Plenum.
- Wiling, C. (2013). *Introducing Qualitative Research in Psychology*. McGrawHill Education.

Annexos

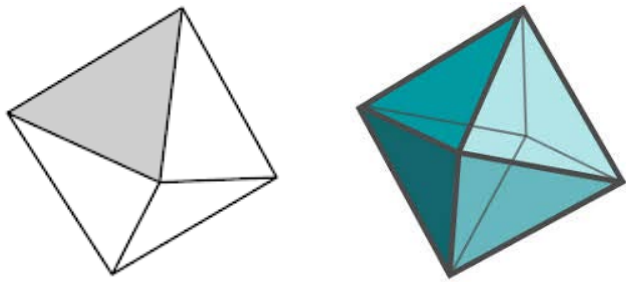
Annex 1.

Justificació de la tria dels continguts curricular de la Tasca 1 a partir de la relació entre els continguts clau, els continguts curriculars i els processos (Departament d'Ensenyament).

1º ESO (GenCat, 2017)				
Espai i forma		Espai i forma		
Bloc	Continguts clau	Continguts curriculars	Processos	Processos específics
			Processos	Processos i continguts
			Anàlitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques.	(3) Comunicació i representació (4) Connexions
	8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals.			Descripció de figures geomètriques de dues i tres dimensions a partir de l'observació d'objectes de la realitat. Relació entre angles, longituds i àrees de figures semblants de dues dimensions. Exploració de diverses figures geomètriques i anàlisi de les seves característiques mitjançant goepians, paper puntejat, programes informàtics i dinàmics. Les piràmides egípcies
	9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.	· Figures geomètriques de dues dimensions. · Figures i cossos geomètrics	Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització geomètrica per a resoldre problemes.	(2) Raonament i prova (4) Connexions
				(3) Comunicació i representació (3) Comunicació i representació (4) Connexions (3) Comunicació i representació (3) Comunicació i representació (4) Connexions
				Dibuix d'objectes geomètrics a partir de dades establertes: longituds i mesura d'angles mitjançant instruments de dibuix habituals, regla, escaire, compàs i transportador. Representació plana d'objectes en la resolució de problemes d'àrees. Reconeixement d'objectes en contextos no matemàtics com l'art, les ciències i la vida quotidiana. Organització del pensament matemàtic propi. Comunicació del pensament matemàtic propi a companys i professors i contrast amb els altres. Connexions amb altres blocs de matemàtiques i amb altres àrees.

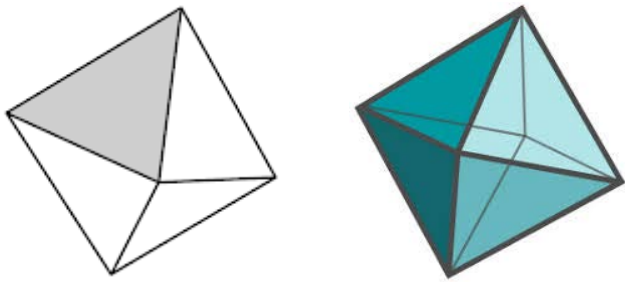
Annex 2.

Full d'instruccions pels alumnes pel desenvolupament de la Tasca 1 considerant una interacció restringida als membres d'un mateix grup de treball (Tipus 1).

Títol	Festival de Globus
Situació	<p>Tot el grup participarà al Festival de Globus. Es tracta d'un festival especial on es prova l'habilitat dels equips que hi participen. Aquest Festival fa un sorteig de diferents cossos geomètriques perquè cada equip faci el model en paper només amb les eines donades.</p> <p>→ El cos que ha sigut assignat a la vostra classe és el següent:</p> <div data-bbox="491 875 1118 1155" style="text-align: center;"></div> <p style="text-align: right;">1'</p>
Instruccions	<p style="text-align: right;">Tipus 1</p> <p>Parleu tota la classe per tres minuts per posar-se d'acord sobre la informació que considereu necessària per arribar a la producció de la figura assignada sota les següents condicions:</p> <ol style="list-style-type: none">1. S'han de formar vuit equips amb un nombre igual de membres.2. La tasca s'ha de dividir en parts iguals perquè cada equip faci exactament el mateix que els altres.3. Tots els equips disposen de vint minuts per fer la seva tasca.4. Començat el treball en equip, <u>no es permet compartir informació</u> i eines amb altres equips. Tampoc es permet copiar les estratègies dels altres.5. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes. <p style="text-align: right;">25'</p> <ol style="list-style-type: none">6. Reuniu les resultats de cada equip per formar el cos assignat al grup. <p style="text-align: right;">10'</p>

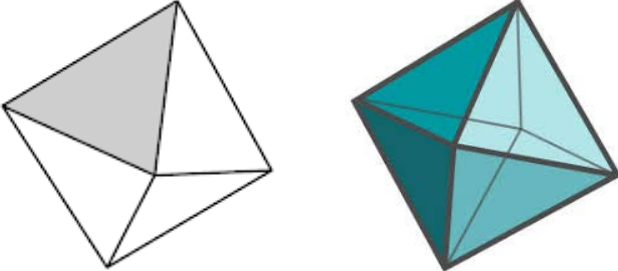
Annex 3.

Full d'instruccions pels alumnes pel desenvolupament de la Tasca 1 considerant una interacció oberta als membres d'altres grups de treball però amb restricció per compartir materials (Tipus 2).

Títol	Festival de Globus
Situació	
<p>Tot el grup participarà al Festival de Globus. Es tracta d'un festival especial on es prova l'habilitat dels equips que hi participen. Aquest Festival fa un sorteig de diferents cossos geomètriques perquè cada equip faci el model en paper només amb les eines donades.</p> <p>→ El cos que ha sigut assignat a la vostra classe és el següent:</p> <div data-bbox="475 869 1102 1149" style="text-align: center;"></div> <p style="text-align: right;">1'</p>	
Instruccions	
<p style="text-align: right;">Tipus 2</p> <p>Parleu tota la classe per tres minuts per posar-se d'acord sobre la informació que considereu necessària per arribar a la producció de la figura assignada sota les següents condicions:</p> <ol style="list-style-type: none">1. S'han de formar vuit equips amb un nombre igual de membres.2. La tasca s'ha de dividir en parts iguals perquè cada equip faci exactament el mateix que els altres.3. Tots els equips disposen de vint minuts per fer la seva tasca.4. Començat el treball en equip es permet parlar amb altres equips, però no es permet compartir material.5. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes. <p style="text-align: right;">25'</p> <ol style="list-style-type: none">6. Reuniu les resultats de cada equip per formar el cos assignat al grup. <p style="text-align: right;">10'</p>	

Annex 4.

Full d'instruccions pels alumnes pel desenvolupament de la Tasca 1 considerant una interacció oberta als membres d'altres grups de treball i a la compartició de materials (Tipus 3).

Títol	Festival de Globus
Situació	
<p>Tot el grup participarà al Festival de Globus. Es tracta d'un festival especial on es prova l'habilitat dels equips que hi participen. Aquest Festival fa un sorteig de diferents cossos geomètrics perquè cada equip faci el model en paper només amb les eines donades.</p> <p>→ El cos que ha sigut assignat a la vostra classe és el següent:</p> <div data-bbox="491 882 1110 1151" style="text-align: center;"></div> <p style="text-align: right;">1'</p>	
Instruccions	
<p style="text-align: right;">Tipus 3</p> <p>Parleu tota la classe per tres minuts per posar-se d'acord sobre la informació que considereu necessària per arribar a la producció de la figura assignada sota les següents condicions:</p> <ol style="list-style-type: none">1. S'han de formar vuit equips amb un nombre igual de membres.2. La tasca s'ha de dividir en parts iguals perquè cada equip faci exactament el mateix que els altres.3. Tots els equips disposen de vint minuts per fer la seva tasca.4. Començat el treball en equip es permet interactuar amb la resta dels equips. Podeu parlar i compartir material, si voleu.5. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes. <p style="text-align: right;">25'</p> <ol style="list-style-type: none">6. Reuniu les resultats de cada equip per formar el cos assignat al grup. <p style="text-align: right;">10'</p>	

Annex 5.

Full de respostes pel registre de les activitats fetes pels alumnes en desenvolupar la Tasca 1.

Títol	Festival de Globus
Justificació de la resposta:	
1. Dades 1.1 Informació numèrica donada dins el problema: 1.2 Informació no numèrica donada dins el problema: 1.3 Informació numèrica per respondre: 1.4 Informació no numèrica per respondre: 1.5 Informació sense cap utilitat (justifica):	
2. Procediment 2.1 Primer pas 2.1.1 Descripció (explica sense fer cap operació o dibuix): 2.1.2 Realització del pas:	

Justificació de la resposta:

2. Procediment

2.2 Segon pas

2.2.1 Descripció (explica sense fer cap operació o dibuix):

2.2.2 Realització del pas:

2.3 Tercer pas

2.3.1 Descripció (explica sense fer cap operació o dibuix):

2.3.2 Realització del pas:

→ Demana fulls per escriure la resta dels passos.

3. Resposta

3.1 Informació numèrica obtinguda:

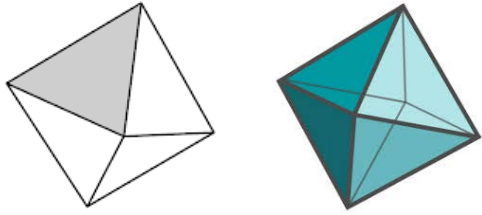
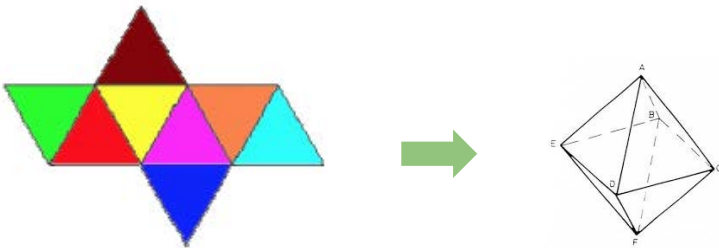
3.2 Informació no numèrica obtinguda:

4. Quins conceptes de geometria has utilitzat en aquest exercici? Explica-ho.

5. Trobes d'utilitat aquest procediment o aquesta informació? Explica-ho.

Annex 6.

Full d'instruccions per orientar l'investigador en la implementació de la Tasca 1 a l'aula.

Títol	Festival de Globus
Situació	
<p>Tot el grup participarà al Festival de Globus. Es tracta d'un festival especial on es prova l'habilitat dels equips que hi participen. Llavors, es fa un sorteig de diferents cossos geomètriques perquè cada equip faci el model en paper.</p>	
<p>→ El cos que ha sigut assignat a la vostra classe és el següent:</p>	
 <p style="text-align: right;">1'</p>	
Instruccions	
Tipus 1	
<p>Parleu tota la classe per tres minuts per posar-se d'acord sobre la informació que considereu necessària per arribar a la producció de la figura assignada sota les següents condicions:</p>	
<ol style="list-style-type: none">1. S'han de formar vuit equips amb un nombre igual de membres.2. La tasca s'ha de dividir en parts iguals perquè cada equip faci exactament el mateix que els altres.3. Tots els equips disposen de vint minuts per fer la seva tasca.4. Començat el treball en equip, no es permet compartir informació i eines amb altres equips. Tampoc es permet copiar les estratègies dels altres.5. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes.	
25'	
<ol style="list-style-type: none">6. Reuniu les resultats de cada equip per formar el cos assignat al grup.	
10'	
Resposta	
 <p style="text-align: center;">Desenvolupament del octaedre</p>	

Annex 7.

Disseny didàctic de la Tasca 1

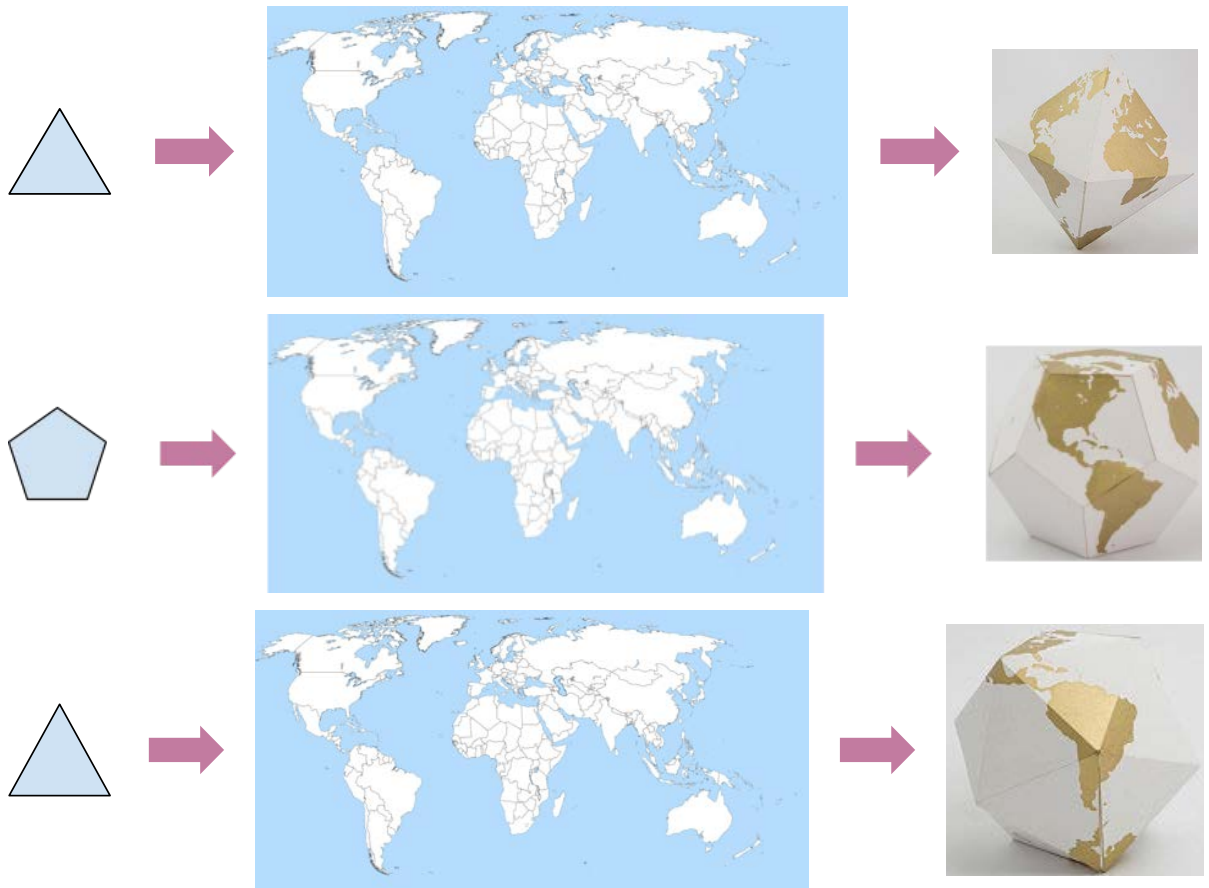
Títol	El festival de Globus			
Curs	Primer d'ESO	Bloc	Espai i Forma	
Resum	L'anàlisi de cossos geomètrics (com l'octaedre) permet la identificació de propietats i característiques (vuit cares, forma de les cares triangular) amb les quals és possible fer una reproducció a escala. L'ús d'eines tant de dibuix com de mesura és fonamental per quantificar les dades necessàries per treballar amb materials manipulats com el paper. Segons les eines disposades s'organitza l'estratègia de dibuix geomètric a seguir.			
Objectius d'aprenentatge	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar la forma de les cares d'un octaedre: triangles equilàters. 2. Compartir idees, raonaments i coneixements amb els companys per desenvolupar estratègies de dibuix geomètric que permetin traçar un triangle equilàter en paper. 3. Emprar regla, escaire i paper per dibuixar una de les cares de l'octaedre: un triangle equilàter. 4. Aplicar estratègies de dibuix geomètric que garanteixin que les mides dels costats del triangle dibuixat sobre paper són iguals per tal d'assegurar que s'ha dibuixat un triangle equilàter. 5. Trobar estratègies de manera col·laborativa per resoldre un problema: construir un octaedre. 6. Reconstruir un cos geomètric (octaedre) a partir de les seves cares (triangles equilàters). 			
Anàlisi Competencial	Competència	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
	Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.	9.1. Interpretar i construir representacions de conceptes o relacions matemàtiques vinculades a situacions concretes.	9.2. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i valorar la més adequada en cada situació.	9.3. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i emprar els canvis de representació com a estratègia de treball matemàtic.
Continguts Clau	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietats i processos de construcció.			
Continguts Curriculars	Figures geomètriques de dues dimensions - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models. - Classificació i propietats. - Posició i orientació de les figures. - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat). Eines i instruments - Materials manipulables (retallables, geoplans, papers pautats). - Instruments de dibuix (regla, escaire, compàs i transportador).			
Processos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques. 2. Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització per a resoldre problemes. 			
Processos i continguts	Referent al primer procés: → Comunicació i representació: Descripció de figures geomètriques de dues i tres dimensions a partir de l' observació d'objectes de la realitat. → Connexions: Relació entre angles, longituds i àrees de figures semblants de dues dimensions. Exploració de diverses figures geomètriques. → Raonament i prova: Anàlisi de les característiques de diverses figures geomètriques mitjançant geoplans, paper puntejat, programes informàtics dinàmics, etc. Referent al segon procés: → Comunicació i representació: Dibuix d'objectes geomètrics a partir de dades establertes: longituds i mesura d'angles mitjançant instruments de dibuix habituals, regla, escaire, compàs i transportador. Organització del pensament matemàtic propi. Comunicació del pensament matemàtic pròpia a companys i professors i contrast amb el dels altres.			

Requeriments	<p>Materials</p> <p>8 fulls de cartolina A3, 8 fulls d'instruccions, 8 fulls de respostes, 8 jocs de geometria, 8 estisores, 8 rotllos de cinta celo, Llapis (els porten els alumnes)</p>
Metodologia	<ol style="list-style-type: none"> 1. Plantejar el problema de construcció grupal d'un octaedre als alumnes: El festival de Globus. 2. Organitzar la classe en vuit grups i repartir el material i els fulls d'instruccions i de respostes. 3. Observar el desenvolupament del dibuix geomètric de les cares de l'octaedre i orientar als alumnes que ho demanin però sense fer suggeriments directes. 4. Sol·licitar un representant de cada grup per construir el cos geomètric (octaedre) a partir de les seves cares.

Annex 8.

Full d'instruccions pels alumnes pel desenvolupament de la Tasca 2.

Títol	La forma de la Terra
Resum	
<p>Representar un cos tridimensional a partir de material de dos dimensions por fer-se quan se identifiquen totes dues les formes de les superfícies i la relació que hi ha entre elles. La reconstrucció de les superfícies planes al seu ordre respecte les altres fa possible el canvi de dimensions. D'aquesta manera, un mapa de dos dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblegament adequats.</p>	
Situació	
<p>L'estudi d'un cos de tres dimensions com la Terra es simplifica quan es treballa en una dimensió. Els mapes són imatges idealitzades del que hi ha a la Terra, però representat sobre un pla. Com faríes per passar d'un mapa que té forma plana a un cos geomètric de tres dimensions?</p>	
Instruccions	
<p>1. Formeu vuit equips amb el mateix nombre de membres.</p>	
<p>2. Disposeu de cinc mapes, porteu-los a la forma tridimensional amb les figures donades segons els següents diagrames:</p>	
 <p>The diagram illustrates two methods of transforming a 2D world map into a 3D object. In the top row, a triangle is shown on the left, followed by a world map, and then a pyramid with the world map printed on its faces. In the bottom row, a square is shown on the left, followed by a world map, and then a cube with the world map printed on its faces. Arrows indicate the sequence of steps from the 2D shape to the map and then to the 3D object.</p>	



3. Observeu que per cada mapa només es pot utilitzar una de las figures per formar el cos geomètric. Llavors, tots els mapes donaren un cos geomètric regular diferent.

4. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes.

25'

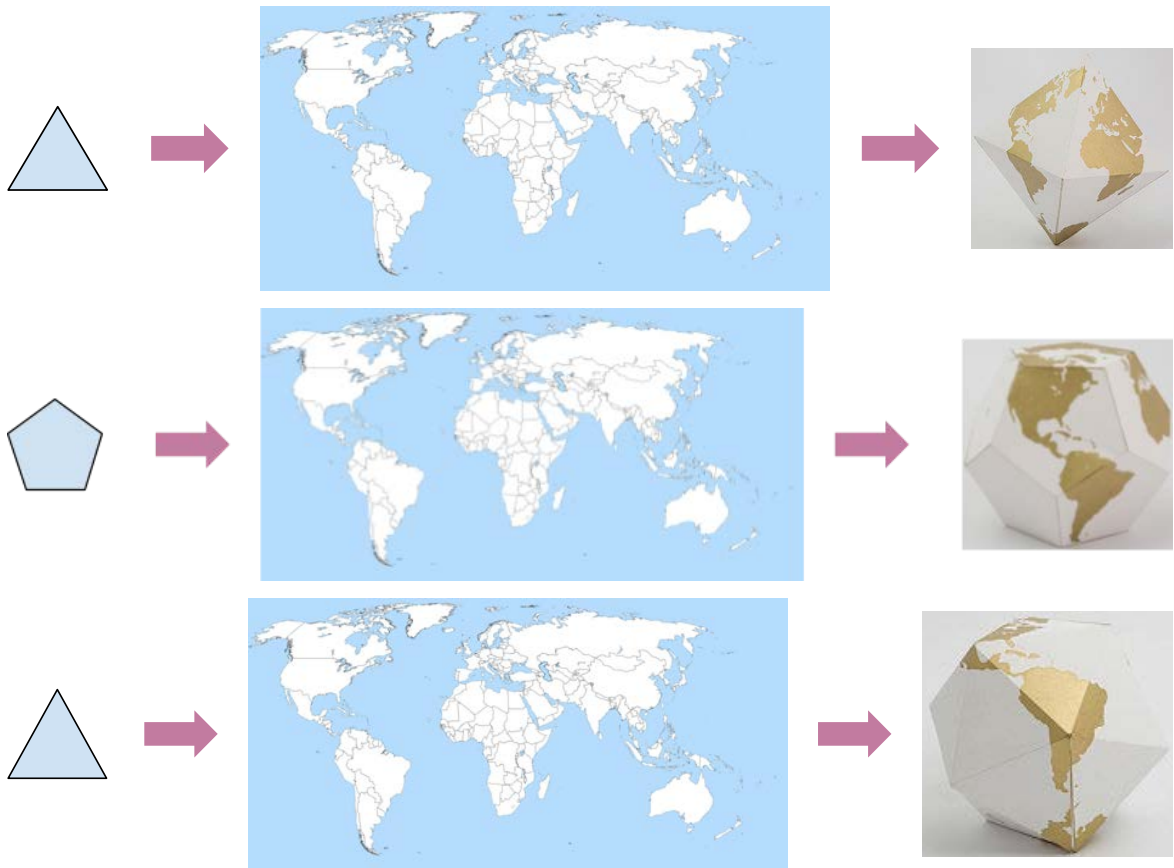
5. Observeu les propostes i compareu amb les vostres.

10'

Annex 10.

Full d'instruccions per orientar l'investigador en la implementació de la Tasca 2 a l'aula.

Títol	La forma de la Terra
Resum	
<p>Representar un cos tridimensional a partir de material de dos dimensions por fer-se quan se identifiquen totes dues les formes de les superfícies i la relació que hi ha entre elles. La reconstrucció de les superfícies planes al seu ordre respecte les altres fa possible el canvi de dimensions. D'aquesta manera, un mapa de dos dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblament adequats.</p>	
Situació	
<p>L'estudi d'un cos de tres dimensions com la Terra es simplifica quan es treballa en una dimensió. Els mapes són imatges idealitzades del que hi ha a la Terra, però representat sobre un pla. Com faries per passar d'un mapa que té forma plana a un cos geomètric de tres dimensions?</p>	
1'	
Instruccions	
<p>1. Formeu vuit equips amb el mateix nombre de membres.</p>	
<p>2. Disposeu de cinc mapes, porteu-los a la forma tridimensional amb les figures donades segons els següents diagrames:</p>	
 <p>The diagram illustrates two methods of transforming a 2D map into a 3D shape. In the top row, a triangle is shown on the left, followed by a right-pointing arrow leading to a world map. A second right-pointing arrow leads to a 3D pyramid where the world map is printed on its faces. In the bottom row, a square is shown on the left, followed by a right-pointing arrow leading to a world map. A second right-pointing arrow leads to a 3D cube where the world map is printed on its faces.</p>	



3. Observeu que per cada mapa només es pot utilitzar una de las figures per formar el cos geomètric. Llavors, tots els mapes donaren un cos geomètric regular different.

4. En cada equip s'ha de fer el registre de l'estratègia desenvolupada dins el full de respostes i amb la gravació de les activitats fetes.

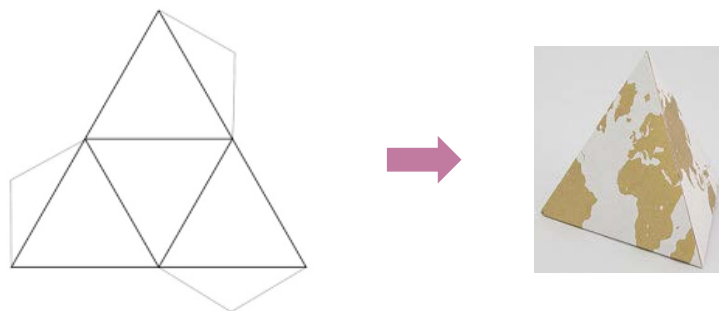
25'

5. Observeu les propostes i compareu amb les vostres.

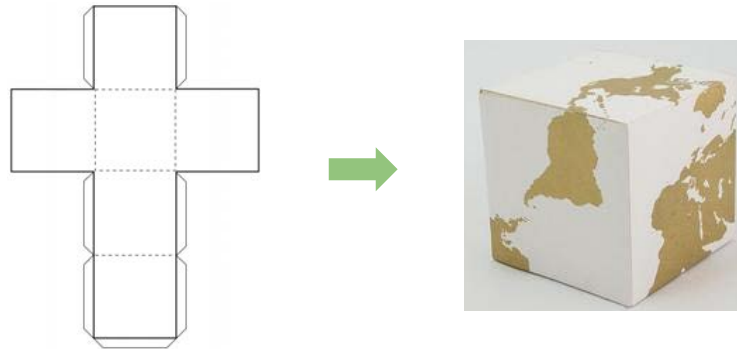
10'

Desenvolupaments plans

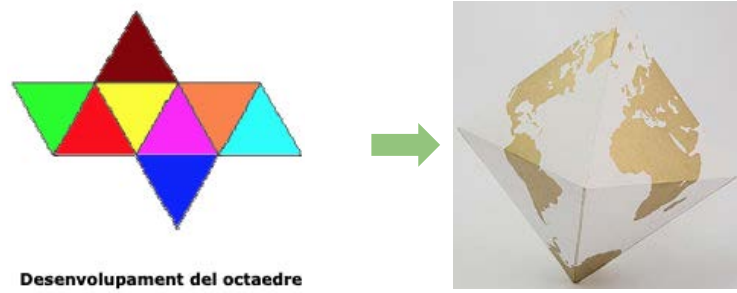
1. Piràmide triangular



2. **Cub**

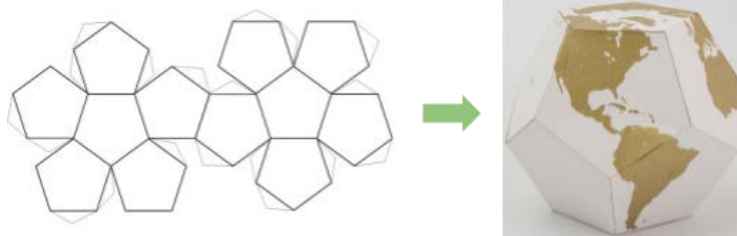


3. **Octaedre**

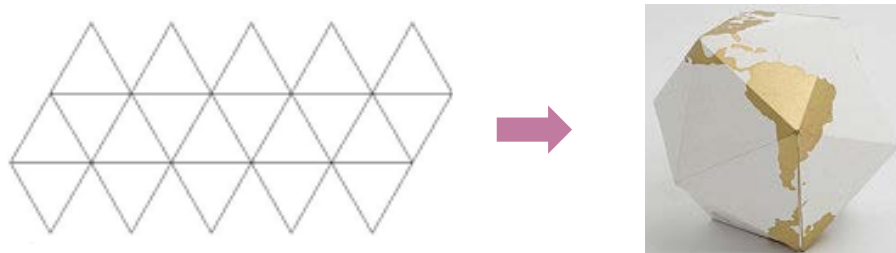


Desenvolupament del octaedre

4. **Dodecaedre**



5. **Icosaedre**



Annex 11.

Disseny didàctic de la Tasca 2.

Títol	La forma de la Terra			
Curs	Primer d'ESO	Bloc	Espai i Forma	
Resum	Representar un cos tridimensional a partir de material de dues dimensions por fer-se quan se identifiquen: les formes de les cares planes del cos geomètric i la relació que hi ha entre elles. El canvi de dues a tres dimensions, és a dir la reconstrucció d'un cos geomètric de tres dimensions, es fa possible mitjançant la correcta identificació de la relació que hi ha entre les cares planes del cos geomètric. Aleshores, un mapa de dues dimensions pot semblar-se el més possible a l'esfera terrestre a partir d'una divisió i doblament adequats que el portin a una forma tridimensional.			
Objectius d'aprenentatge	<ol style="list-style-type: none"> 1. Identificar la forma de les cares d'un poliedre. 2. Trobar estratègies de manera col·laborativa per identificar l'orientació i posició de les cares que conformen un poliedre. 3. Compartir idees, raonaments i coneixements amb els companys per desenvolupar estratègies de dibuix geomètric pel desenvolupament pla d'un poliedre dins una superfície determinada. 4. Emprar regla, escaire i paper per dibuixar el desenvolupament pla d'un poliedre. 5. Reconstruir un poliedre a partir del seu desenvolupament pla. 6. Reconèixer que el nombre de cares d'un poliedre és un factor determinant en l'ús de l'àrea màxima d'una superfície donada. 			
Anàlisi Competencial	Competència	Nivell 1	Nivell 2	Nivell 3
	Competència 9. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres i usar el canvi de representació com a estratègia de treball matemàtic.	9.1. Interpretar i construir representacions de conceptes o relacions matemàtiques vinculades a situacions concretes.	9.2. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i valorar la més adequada en cada situació.	9.3. Representar un concepte o relació matemàtica de diverses maneres, ser capaç de comprendre les representacions dels altres i emprar els canvis de representació com a estratègia de treball matemàtic.
Continguts Clau	CC8. Sentit espacial i representació de figures tridimensionals. CC9. Figures geomètriques, característiques, propietat i processos de construcció.			
Continguts Curriculars	Figures geomètriques de dues dimensions - Identificació i descripció a partir d'objectes reals, imatges i models. - Classificació i propietats. - Posició i orientació de les figures. - Elements bàsics de la geometria plana (paral·lelisme i perpendicularitat). Eines i instruments - Materials manipulables (retallables, geoplans, papers pautats). - Instruments de dibuix (regla, escaire, compàs i transportador).			
Processos	<ol style="list-style-type: none"> 1. Analitzar les característiques i propietats de figures geomètriques de dues i tres dimensions i desenvolupar raonaments geomètrics sobre relacions geomètriques. 2. Utilitzar la visualització, el raonament matemàtic i la modelització per a resoldre problemes. 			

<p>Processos i continguts</p>	<p>Referent al primer procés:</p> <p>→ <u>Comunicació i representació</u>: Descripció de figures geomètriques de dues i tres dimensions a partir de l'observació d'objectes de la realitat.</p> <p>→ <u>Connexions</u>: Relació entre angles, longituds i àrees de figures semblants de dues dimensions.</p> <p>Exploració de diverses figures geomètriques.</p> <p>→ <u>Raonament i prova</u>: Anàlisi de les característiques de diverses figures geomètriques mitjançant geoplans, paper puntejat, programes informàtics dinàmics, etc.</p> <p>Referent al segon procés:</p> <p>→ <u>Comunicació i representació</u>: Dibuix d'objectes geomètrics a partir de dades establertes: longituds i mesura d'angles mitjançant instruments de dibuix habituals, regle, escaire, compàs i transportador.</p> <p>Organització del pensament matemàtic propi.</p> <p>Comunicació del pensament matemàtic pròpia a companys i professors i contrast amb el dels altres.</p>
<p>Requeriments</p>	<p>Materials</p> <p>6 fulls d'instruccions</p> <p>12 qüestionaris pels alumnes</p> <p>2 qüestionaris pel professor</p> <p>30 mapes</p> <p>6 estisores</p> <p>6 jocs de geometria</p> <p>6 rotllos de cinta celo</p> <p>Llapis (els porten els alumnes)</p>
<p>Metodologia</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1. El tutor (doctoranda) organitza el grup en equips amb 5 membres. S'espera que siguin 6 equips. 2. El tutor (doctoranda) demana que cada equip respongui el qüestionari per avaluar l'activitat del darrer dia. S'espera que siguin 6 qüestionaris. 3. El tutor (doctoranda) lleu el material als equips mentre ells responen el qüestionari: 1 full d'instruccions, 5 mapes, 1 joc de geometria, 1 estisores, 1 rotllo de cinta adhesiva. 4. El tutor (doctoranda) presenta l'activitat al grup. 5. El tutor (doctoranda) organitza el desenvolupament de l'activitat. 6. En acabar de construir l'octaedre, el tutor (tesista o professor) presenta una alternativa per la construcció (desenvolupament pla). 7. Si hi ha temps es pot demanar omplir un nou qüestionari per equip.

Annex 12.

Qüestionari per valorar alguns indicadors de la *idoneïtat didàctica* per part dels alumnes basat en Godino (2013) i Breda, Font i Pino-Fan (2018).

Qüestionari - Alumnes					
Instruccions: Marca amb una creu la teva resposta.					
No.	Preguntes	Respostes			
1.2.1	S'han expressat les definicions amb claredat?	Sí	Molt	Poc	Res
1.2.2	S'han expressat els procediments amb claredat?	Sí	Molt	Poc	Res
1.2.3	Les explicacions han sigut clares?	Sí	Molt	Poc	Res
1.2.4	Les comprovacions han sigut clares?	Sí	Molt	Poc	Res
1.2.5	Les demostracions han sigut clares?	Sí	Molt	Poc	Res
3.1.1	S'ha presentat la tasca amb claredat?	Sí	Molt	Poc	Res
3.1.2	S'ha presentat la tasca ben organitzada?	Sí	Molt	Poc	Res
3.1.3	La tasca ha sigut presentada verbalment de manera adequada?	Sí	Molt	Poc	Res
3.1.4	S'han emfatitzat els conceptes clau del tema?	Sí	Molt	Poc	Res
4.1.1	Els materials utilitzats t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	Sí	Molt	Poc	Res
4.1.2	Els instruments de mesura (regla i transportador) t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	Sí	Molt	Poc	Res
4.1.3	Els instruments de dibuix geomètric (regla, escaire, cartabó i compàs) t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	Sí	Molt	Poc	Res
4.1.4	La calculadora t'ha ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	Sí	Molt	Poc	Res
4.1.5	L'ordinador o la tauleta t'han ajudat a utilitzar el llenguatge, procediments i argumentacions matemàtics?	Sí	Molt	Poc	Res
4.2.1	Les definicions i les propietats s'han presentat en una situació aplicada?	Sí	Molt	Poc	Res
4.2.2	Les definicions i les propietats s'han presentat mitjançant un model?	Sí	Molt	Poc	Res
4.2.3	Has pogut visualitzar les definicions i propietats?	Sí	Molt	Poc	Res
4.3.1	Penses que el nombre de companys que han participat de la tasca t'ha ajudat a aprendre?	Sí	Molt	Poc	Res
4.3.2	Penses que la distribució dels teus companys dins l'aula t'ha ajudat al desenvolupament de la tasca i t'ha facilitat l'aprenentatge?	Sí	Molt	Poc	Res
4.3.3	Penses que l'horari de la classe és l'adequat?	Sí	Molt	Poc	Res
4.3.4	Penses que la teva aula és apropiada per el desenvolupament de la tasca?	Sí	Molt	Poc	Res
4.3.5	Penses que la distribució dels alumnes dins l'aula ha afavorit el desenvolupament d'aquesta tasca?	Sí	Molt	Poc	Res

4.4.1	Penses que has tingut prou temps per realitzar la tasca?	Sí	Molt	Poc	Res
4.4.2	Penses que s'ha dedicat prou temps als temes o aspectes centrals del tema?	Sí	Molt	Poc	Res
4.4.3	Penses que s'ha dedicat prou temps als tònics de major dificultat?	Sí	Molt	Poc	Res
5.1.1	T'ha resultat interessant la tasca?	Sí	Molt	Poc	Res
5.1.2	Has trobat cap utilitat de les matemàtiques en situacions quotidianes amb aquesta tasca?	Sí	Molt	Poc	Res
5.1.3	Has trobat cap utilitat de les matemàtiques que puguin aplicar-se en la vida professional amb aquesta tasca?	Sí	Molt	Poc	Res
5.2.1	Penses que aquesta tasca promou valors com la perseverança, responsabilitat, etc.?	Sí	Molt	Poc	Res
5.2.2	Penses que els raonaments necessaris per aquesta tasca s'han donat de manera igualitària sense cap preferència fins una petita part del grup?	Sí	Molt	Poc	Res
5.2.3	Penses que s'han considerat els arguments sense cap jutjament fins qui els emet?	Sí	Molt	Poc	Res
5.3.1	Penses que aquesta tasca t'ha ajudat a promoure la teva autoestima?	Sí	Molt	Poc	Res
5.3.2	Penses que aquesta tasca t'ha ajudat a evitar el rebuig, la fòbia o la por a les matemàtiques?	Sí	Molt	Poc	Res
5.3.3	Penses que aquesta tasca emfatitzi les qualitats estètiques de les matemàtiques?	Sí	Molt	Poc	Res
5.3.4	Penses que aquesta tasca emfatitzi les qualitats de precisió de les matemàtiques?	Sí	Molt	Poc	Res
6.2.3	El contingut s'ha relacionat amb temes que has vist en altres matèries?	Sí	Molt	Poc	Res
6.3.1	El contingut t'ha ajudat a identificar cap preferència d'una activitat professional?	Sí	Molt	Poc	Res
6.4.1	Has aplicat temes que ja coneixies per arribar a contingut nou?	Sí	Molt	Poc	Res

Annex 13.

Questionari per valorar alguns indicadors de la *idoneïtat didàctica* per part dels professors basat en Godino (2013) i Breda, Font i Pino-Fan (2018).

Questionari - Professor					
No.	Pregunta	Respostes			
		Sí	Molt	Poc	No
1.2.6	S'ha omès l'ús de metàfores?				
1.3.1	Es considera la modelització en la seqüència de tasques?				
1.3.2	Es considera l'argumentació en la seqüència de tasques?				
1.3.3	Es considera la resolució de problemes en la seqüència de tasques?				
1.4.1	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?				
1.4.2	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?				
1.4.3	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica en el currículum?				
1.4.4	Les definicions són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?				
1.4.5	Les propietats són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?				
1.4.6	Els procediments són mostres representatives de la noció matemàtica del que es desitja ensenyar?				
1.4.7	Es proposa una mostra representativa de problemes?				
1.4.8	Es fa ús de representacions verbals, gràfiques i simbòliques?				
1.4.9	Es fa ús de diferents tractaments o conversions?				
2.1.1	Els estudiants tenen els coneixements previs requerits per desenvolupar aquesta tasca?				
2.1.2	Els alumnes poden assolir el nivell de complexitat dels continguts d'aquesta tasca?				
2.2.1	La tasca inclou activitats de desenvolupament?				
2.2.2	La tasca inclou activitats de suport?				
2.3.1	Els mètodes d'avaluació demostren els aprenentatges o les competències implementades?				
2.4.1	La tasca permet que els alumnes realitzin la generalització dels conceptes?				
2.4.2	La tasca permet que els alumnes estableixin connexions amb temes propis de les matemàtiques?				
2.4.3	La tasca requereix que els alumnes facin canvis de representacions, és a dir, que presentin de diferents maneres un mateix concepte:				

	verbalment, numèricament, gràficament, figurativament?				
2.4.4	La tasca convida els alumnes a l'especulació per resoldre dubtes i arribar a la solució?				
2.4.5	La tasca promou processos de metacognició?				
3.1.5	Has identificat les expressions físiques dels estudiants que es van trobar davant un conflicte cognitiu (silenci, expressions facials, etcètera)?				
3.1.6	Has interpretat i resolt preguntes que expressen conflictes cognitius dels alumnes?				
3.1.7	Has conduït apropiadament les contribucions del grup que expressen conflictes cognitius dels alumnes?				
3.1.8	Has promogut aconseguir un consens per mitjà de l'argumentació?				
3.1.9	Has utilitzat recursos retòrics i racionals variats per involucrar els estudiants i captar la seva atenció?				
3.1.10	Has observat que la tasca facilita la inclusió dels alumnes en la dinàmica de la classe?				
3.2.1	Has observat que es promou el diàleg i la comunicació entre els estudiants?				
3.2.2	Amb la tasca es promou la integració en grups?				
3.3.1	Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de l'exploració?				
3.3.2	Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la formulació?				
3.3.3	Van existir moments en els quals els alumnes es van fer càrrec del seu estudi per mitjà de la validació?				
3.4.1	Has realitzat una observació sistemàtica del progrés cognitiu dels alumnes?				
6.1.1	El contingut forma part del pla curricular?				
6.1.2	La implementació del contingut forma part del pla curricular?				
6.1.3	L'avaluació del contingut es contempla en el pla curricular?				
6.2.1	El contingut es relaciona amb altres temes de la matemàtica del mateix nivell acadèmic del currículum?				
6.2.2	El contingut es relaciona amb temes de les matemàtiques fora del currículum?				
6.4.2	S'introdueixen recursos tecnològics després de la reflexió o la pràctica?				
6.4.3	S'apliquen nous mètodes d'avaluació després de la reflexió o la pràctica?				
6.4.4	Es modifica l'organització de l'aula després de la reflexió o la pràctica?				

Annex 14.

Notes de camp de la Tasca 1.

Data	Divendres, 13 de desembre de 2019, 12.25 hores.
<p>Antecedents</p> <p>Amb la col·laboració del professor de geografia de l'institut, vam poder duu a terme la seqüència didàctica de dibuix geomètric amb alumnes de primer d'ESO.</p> <p>Divendres, 12.25 a 13.30 hores</p> <p>El professor de geografia em va presentar a la classe. Va fer menció de la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va convidar a donar tot el seu suport a la tasca. No va semblar que hagués gaire interès per part dels alumnes.</p> <p>Seguidament vaig organitzar el grup en vuit equips, com que la classe va ser de 30 alumnes, es van fer sis grups amb 4 alumnes i dos amb tres. Com que l'aula va tenir tres fileres amb dues tauletes, es van fer tres equips a les fileres dels costats i dos a la filera del mig, d'aquesta manera es va evitar el moviment dels alumnes per tractar de mantenir l'ordre de la classe. Immediatament vaig començar repartir el material als equips: fulls d'instruccions, full de registre de respostes, un full A3 de cartolina de color (29,7×42 cm), un regle de 40 cm, un escaire gran i un cartabó també gran i unes estisores. Al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Aleshores, vaig interrompre breument la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Aquesta intervenció no va ser ben rebuda pels alumnes. Alguns van fer cas, uns altres van seguir fent-ho però vigilant de no ser vistos.</p> <p>Davant aquesta situació, em vaig apressar a fer l'explicació de l'activitat amb la intenció de que es possessin a treballar el més aviat possible per trencar amb la dinàmica de fer malbé els companys i el material. Llavors, vaig ometre el context del concurs de globus per reduir el temps de participació passiva dels alumnes i passar directament a la part activa. Els vaig plantejar l'objectiu de la tasca: produir tots junts una figura geomètrica amb el material donat: un octaedre. Segons</p>	

el disseny de la tasca s'esperava que els mateixos alumnes, tota la classe, fessin una discussió per analitzar les dimensions dels fulls donats i concloure quines mides hauria de fer el cos geomètric i així les seves cares. Però la manca de participació de la classe em va fer dirigir l'activitat i donar només les següents dades: *Per tal de construir tots junts un tetraedre es necessiten vuit figures geomètriques amb la forma de les cares, quina és o quines són? Es tracta de triangles, però d'un tipus especial: triangles equilàters. Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter. Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals, per tant han de tenir les mateixes mides, quines poden ser? Fixem l'altura del triangle, aquesta serà la mateixa altura que fa el full. Amb aquesta informació teniu prou per dibuixar la figura? Endavant!*

Els alumnes van començar a treballar. Com es normal, hi ha alumnes que participen més que els altres i també hi ha equips més col·laboratius que uns altres. El que va ser evident va ser la diferència dels procediments de traç dels equips: un equip va començar pel vèrtex oposat al costat horitzontal de la figura, un altre va trobar primer un costat horitzontal, va haver qui va començar per un costat transversal...

Vista aquesta situació i en previsió de les diferències que es tindrien sota aquesta dinàmica de treball, vaig tractar d'orientar els traços cap al dibuix de prova que vaig fer a la meva preparació a casa donant instruccions a tot el grup:

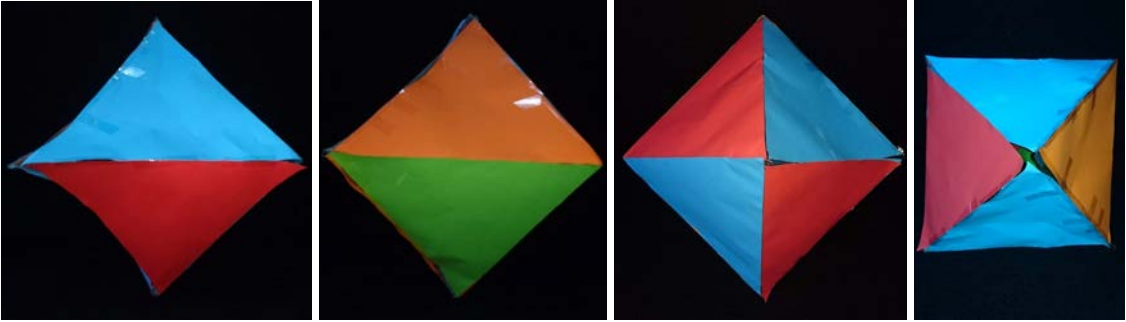
1. Trieu un dels costats més llargs del full per localitzar un dels costats del triangle equilàter.
2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identificar el seu punt mig: com que la longitud del costat és 42 cm, el punt mig és a 21 cm de qualsevol dels seus extrems.
3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig.
4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full.

La metodologia més comú va ser el treball entre dues persones (i fins i tot només una) i la resta observant els companys. Quan l'alumne que es posava a fer el traç fracassava al seu intent, ho començava a fer un altre. No va haver-hi gaire preocupació en fer-ho bé. En general, la classe no va mostrar gaire d'interès en l'activitat i van acabar ràpidament aquesta primera part. Per tant, va haver poc diàleg entre els membres dels equips. A més dels termes o conceptes utilitzats en les

instruccions verbals que vaig fer, en les converses entre els alumnes es feia referència a la ubicació espacial sobre el full amb paraules com ara: aquí, allà, més, menys, més lluny, més aprop. A banda dels registres de les mides de les longituds donades a les instruccions generals, els alumnes van utilitzar termes col·loquials per expressar les característiques de les formes dibuixades: ratlla, està tort(a).

Per construir l'octaedre els vaig demanar un representat de cada equip. Tots plegats, els representants dels equips es van organitzar entre ells per ajuntar les cares del cos geomètric amb celo. El grup d'alumnes es va posar al davant de l'aula, sobre l'esglaió on es troba l'escriptori del professor. En un inici van treballar tots junts sota el lideratge d'un nen qui prenia la iniciativa en fer alguna cosa, però el diàleg va tornar a ser escàs i poc matemàtic. A mesura que enganxaven les cares, l'oportunitat i l'espai de participació es reduïa i dificultava la tasca. Llavors, es va demanar als alumnes que ja no feien res tornar als seus equips. Aleshores, el grup ja no estava al cas del que feien els seus companys i el soroll era massa fort. Malgrat que tenien un qüestionari amb preguntes fetes a partir dels indicadors de les facetes de la idoneïtat didàctica, però sobre els aspectes que poden donar resposta els alumnes, la majoria no el feien o només un alumne llegia les preguntes però sense donar cap resposta. Aleshores, vaig començar a recollir el material, ja que tornaven a fer-li mal bé.

La tasca es va terminar uns minuts abans de l'hora de classe, llavors vaig aprofitar per fer el qüestionari de manera grupal. Vaig anar llegint pregunta per pregunta però els alumnes no responien gaire. En sonar la campana, la majoria van sortir de cop de l'aula. Em vaig adonar de que ja volien sortir perquè es tractava de l'hora de dinar i a més, era divendres! Només dos o tres alumnes van romandre a l'aula per ajudar tornar les cadires al seu lloc i netejar una mica les peces de cartró a terra.



Annex 15.

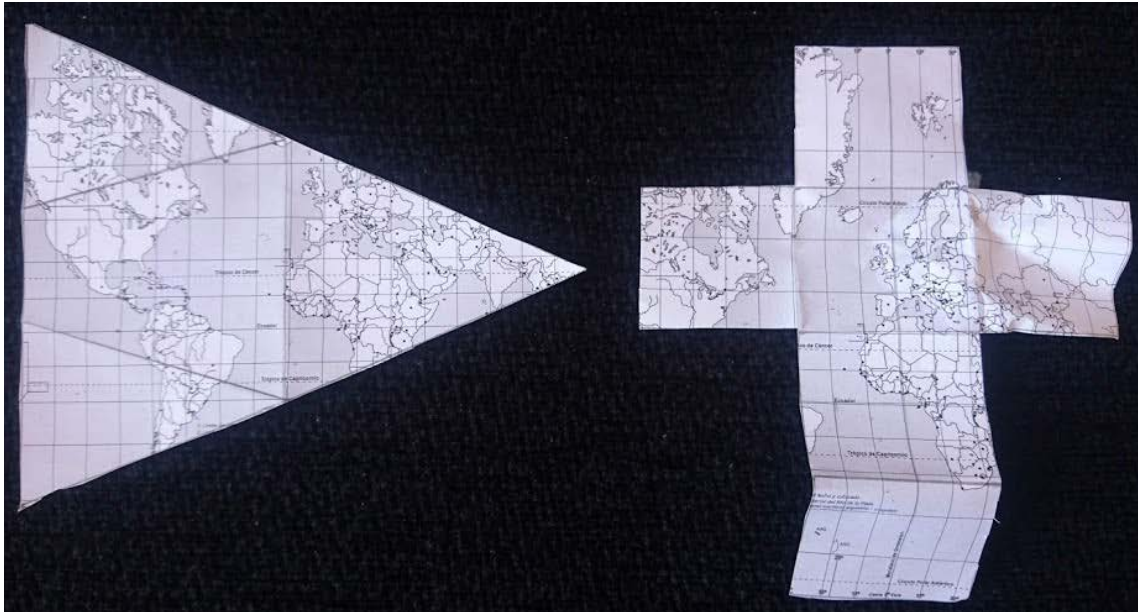
Notes de camp de la Tasca 2.

Data	Divendres, 10 de gener de 2020, 12.25 hores.
<p data-bbox="193 443 1398 533">El professor de geografia va recordar a la classe la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va tornar a convidar a donar tot el seu suport a la tasca.</p> <p data-bbox="193 611 1398 1115">Recordant l'organització de l'aula (tres fileres amb dues tauletes d'amplada), vaig organitzar el grup en dos equips per filera per tal d'arribar a sis equips amb 5 alumnes en total. Amb l'ajuda del professor vaig repartir el material als equips: un full d'instruccions, cinc mapes, un joc d'eines de dibuix geomètric, estisores i celo. De la mateixa manera que la sessió passada, al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Una altra vegada, vaig haver d'interrompre la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Com la darrera ocasió, el alumnes van mostrar disgust i van seguir amb la mateixa actitud però vigilant no ser vistos.</p> <p data-bbox="193 1193 1398 1574">Els vaig explicar l'activitat: trobar la millor representació en tres dimensions pel mapamundi. El professor de geografia va intervenir per explicar breument la dificultat que hi ha per fer representacions acurades de la Terra. Vaig demanar als alumnes que dins cada equip fer la distribució de les cinc opcions dels exemples dels fulls d'instruccions: tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre. Així, cada membre de l'equip hauria de dibuixar un desenvolupament pla al mapamundi per reconstruir-lo en tres dimensions i comprovar amb quin cos geomètric es conserva més superfície del mapa.</p> <p data-bbox="193 1653 1398 1977">Els alumnes no estaven gaire motivats a treballar i aquesta oportunitat de triar es va convertir en una lluita per triar "el cos geomètric més fàcil" o per assignar "el cos geomètric més difícil" al company menys estimat de l'equip. Aquesta darrera situació va ser molt pronunciada a un equip on vaig identificar una actitud molt agressiva d'una nena qui va "deixar" l'icosaedre a un dels seus companys. El nen, trist, estava en silenci tractant d'esbrinar com en sortir-se quan em vaig apropar i li vaig preguntar a la nena perquè li havia assignat ella el cos al seu company. La nena no</p>	

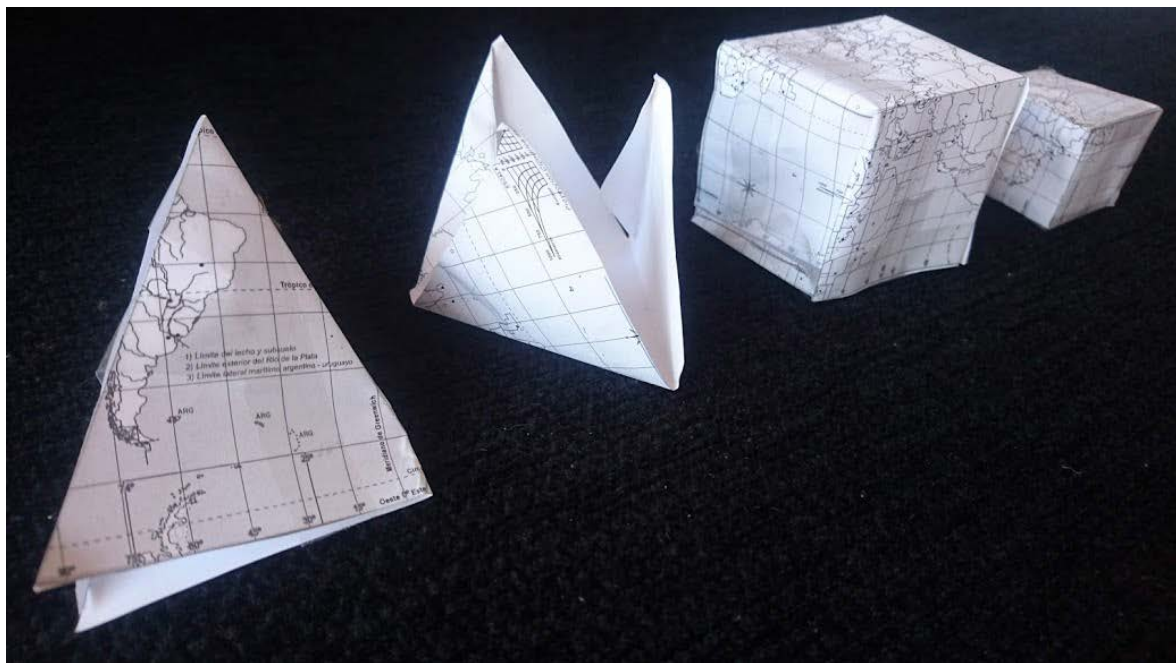
va contestar res i la vaig convidar a fer-lo ella. Llavors, la seva actitud d'abús va parar i ella es va concentrar en tractar de fer el que li vaig assignar.

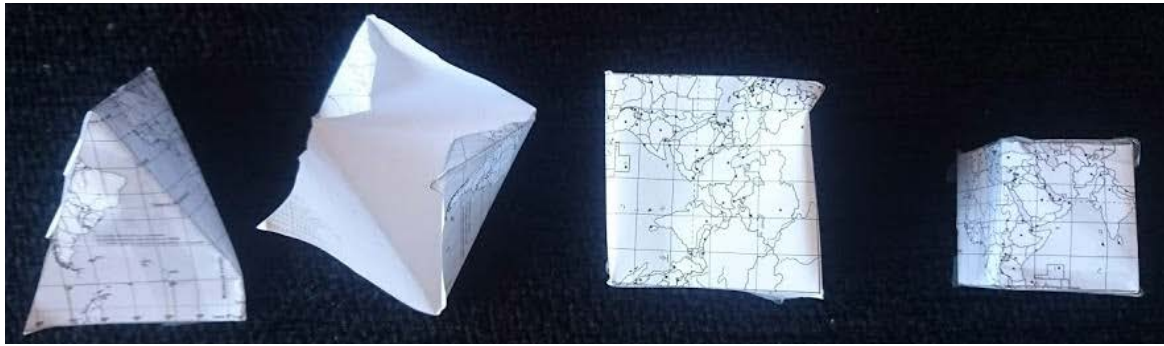
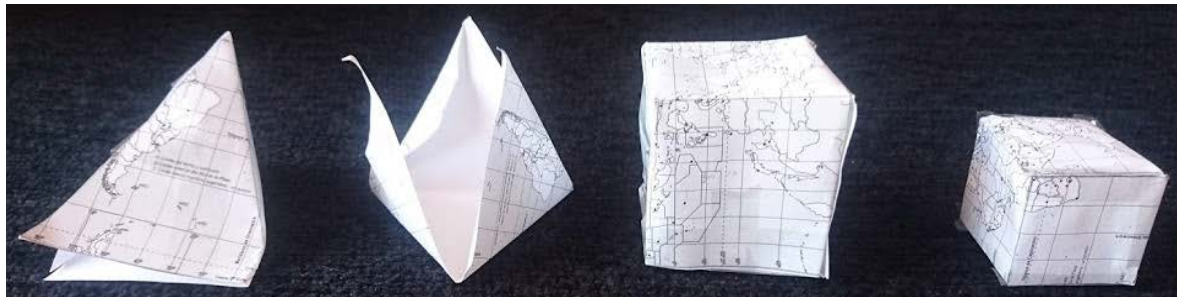
Van haver-hi moltes preguntes sobre com fer els traços, era evident que no tenien gaire pràctica amb el dibuix geomètric. Els equips van demanar força d'ajuda tant al professor de geografia com a mi. Entre les preguntes, la que més es va repetir va ser com dibuixar un pentàgon regular per traçar el dodecaedre. Els alumnes van dir que eren coses no feien a l'assignatura de matemàtiques. En aquí em vaig adonar de que no hi havia inclòs un compàs o motlles/plantilles de cercles i que això era un impediment pel desenvolupament d'aquesta part de la tasca i vaig haver d'ometre aquest cos geomètric als equips. Els dibuixos del desenvolupament pla de cossos diferents al cub es van complicar massa i també vaig veure que la majoria dels casos els alumnes no van establir cap relació entre les mides del mapa i les mides que registraven (les quals serien les mides del cos dibuixat). Llavors, es van deixar molta de superfície fora del desenvolupament pla. Això es va mencionar per cada equip i també es va puntualitzar la importància de "mantenir" les terres dels continents per fer una millor representació del planeta amb el cos geomètric assignat.

Segons es podia observar, els alumnes podien dibuixar una de les cares del cos geomètric però la construcció del desenvolupament pla ja no era possible perquè hi havia dificultat per identificar la posició relativa entre les figures. És a dir, un cop dibuixada la primera de les cares, els alumnes no van poder continuar el traç per tal d'obtenir la seqüència correcta de figures iguals.

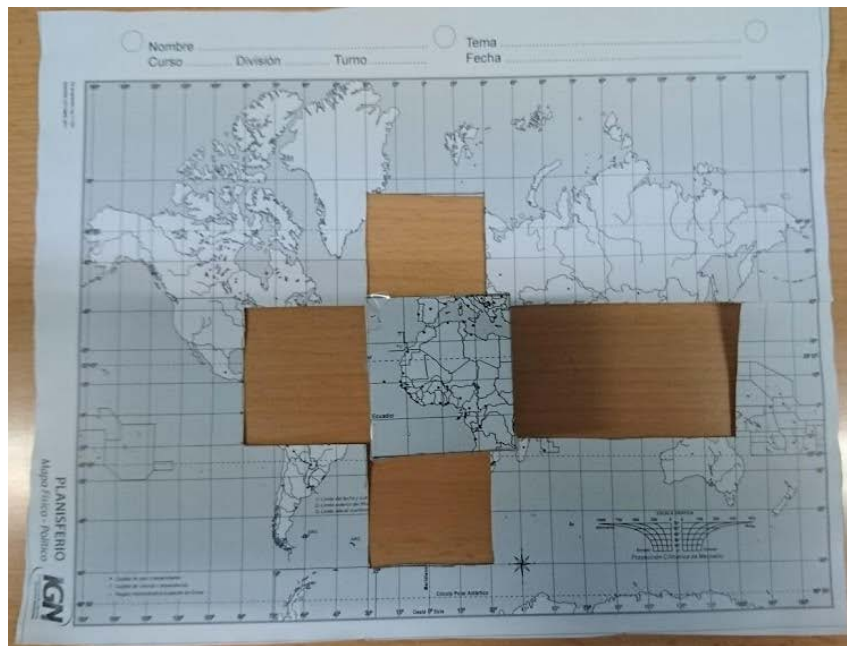


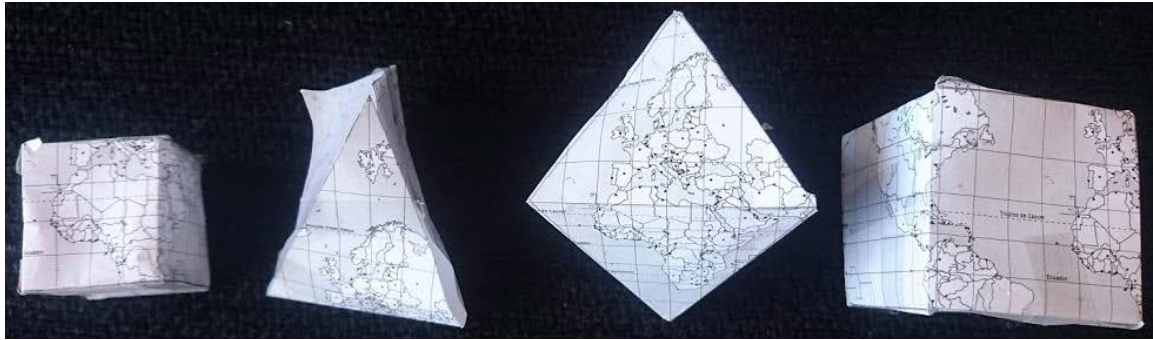
Els pocs alumnes que van poder acabar van ser aquells qui van fer el cub i en dos casos els tetraedres, però força malament.





En observar els cossos geomètrics assolits, vaig descobrir una característica comuna: el desenvolupament pla es va centrar a Europa. Llavors, una de les cares conté Espanya.





El temps de la sessió es va esgotar sense arribar a establir comparacions ni conclusions sobre la relació entre la superfície del mapa utilitzada per dibuixar els desenvolupaments plans i el cos geomètric que millor representa la Terra.

Annex 16.

Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels objectes primaris per l'establiment de la seva configuració epistèmica.

Data	Divendres, 13 de desembre de 2019, 12.25 hores.
<p data-bbox="204 488 371 521">Antecedents</p> <p data-bbox="204 548 1385 640">Amb la col·laboració del professor de geografia de l'institut, vam poder duu a terme la seqüència didàctica de dibuix geomètric amb alumnes de primer d'ESO.</p> <p data-bbox="204 719 582 752">Divendres, 12.25 a 13.30 hores</p> <p data-bbox="204 779 1385 931">El professor de geografia em va presentar a la classe. Va fer menció de la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va convidar a donar tot el seu suport a la tasca. No va semblar que hagués gaire interès per part dels alumnes.</p> <p data-bbox="204 1010 1385 1682">Seguidament vaig organitzar el grup en vuit equips, com que la classe va ser de 30 alumnes, es van fer sis grups amb 4 alumnes i dos amb tres. Com que l'aula va tenir tres fileres amb dues tauletes, es van fer tres equips a les fileres dels costats i dos a la filera del mig, d'aquesta manera es va evitar el moviment dels alumnes per tractar de mantenir l'ordre de la classe. Immediatament vaig començar repartir el material als equips: fulls d'instruccions, full de registre de respostes, un full A3 de cartolina de color (29,7×42 cm), un regle de 40 cm, un escaire gran i un cartabó també gran i unes estisores. Al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Aleshores, vaig interrompre breument la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Aquesta intervenció no va ser ben rebuda pels alumnes. Alguns van fer cas, uns altres van seguir fent-ho però vigilant de no ser vistos.</p> <p data-bbox="204 1760 1385 1973">Davant aquesta situació, em vaig apressar a fer l'explicació de l'activitat amb la intenció de que es possessin a treballar el més aviat possible per trencar amb la dinàmica de fer malbé els companys i el material. Llavors, vaig ometre el context del concurs de globus per reduir el temps de participació passiva dels alumnes i passar directament a la part activa (SP1). Els vaig plantejar</p>	

l'objectiu de la tasca: produir tots junts una figura geomètrica amb el material donat: un octaedre (DC1). Segons el disseny de la tasca s'esperava que els mateixos alumnes, tota la classe, fessin una discussió per analitzar les dimensions dels fulls donats i concloure quines mides hauria de fer el cos geomètric i així les seves cares. Però la manca de participació de la classe em va fer dirigir l'activitat i donar només les següents dades: *Per tal de construir tots junts un octaedre (DC1) es necessiten vuit figures geomètriques (DC1) amb la forma (DC1) de les cares (DC1), quina és o quines són? Es tracta de triangles (DC1), però d'un tipus especial: triangles equilàters (DC1). Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter. Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals (DC1), per tant han de tenir les mateixes mides (DC1), quines poden ser? Fixem l'altura del triangle (DC1), aquesta serà la mateixa altura que fa el full (DC1). Amb aquesta informació (DC1) teniu prou per dibuixar (DC1) la figura (DC1)? (PP1) Endavant!*

Els alumnes van començar a treballar. Com es normal, hi ha alumnes que participen més que els altres i també hi ha equips més col·laboratius que uns altres. El que va ser evident va ser la diferència dels procediments de traç dels equips: un equip va començar pel vèrtex oposat al costat horitzontal de la figura, un altre va trobar primer un costat horitzontal, va haver qui va començar per un costat transversal...

Vista aquesta situació i en previsió de les diferències que es tindrien sota aquesta dinàmica de treball, vaig tractar d'orientar els traços cap al dibuix de prova que vaig fer a la meua preparació a casa donant instruccions a tot el grup:

1. Trieu un dels costats més llargs del full (DC1) per localitzar un dels costats del triangle equilàter (DC1).
2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identifiqueu el seu punt mig (DC1): com que la longitud del costat (DC1) és 42 cm (LMVE1), el punt mig és a 21 cm (LMVE1) de qualsevol dels seus extrems (DC1).
3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig.
4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full (DC1). (P1)

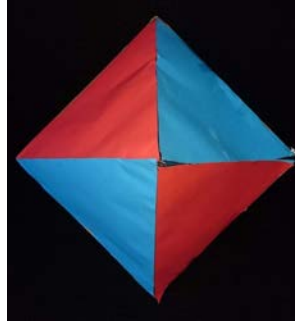
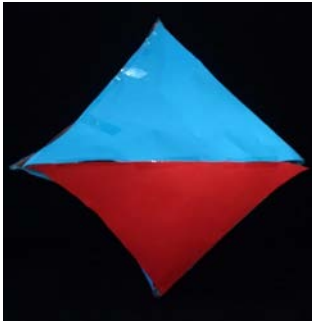
La metodologia més comú va ser el treball entre dues persones (i fins i tot només una) i la resta observant els companys. Quan l'alumne que es posava a fer el traç fracassava al seu intent, ho començava a fer un altre. No va haver-hi gaire preocupació en fer-ho bé. En general, la classe no va mostrar gaire d'interès en l'activitat i van acabar ràpidament aquesta primera part. Per tant, va haver poc diàleg entre els membres dels equips. A més dels termes o conceptes utilitzats en les instruccions verbals que vaig fer, en les converses entre els alumnes es feia referència a la ubicació espacial sobre el full amb paraules com ara: aquí, allà, més, menys, més lluny, més aprop (LMVE1). A banda dels registres de les mides de les longituds donades a les instruccions generals (LMVE1), els alumnes van utilitzar termes col·loquials per expressar les característiques de les formes dibuixades: ratlla, està tort(a) (LMVE1).

Per construir l'octaedre els vaig demanar un representat de cada equip. Tots plegats, els representants dels equips es van organitzar entre ells per ajuntar les cares del cos geomètric amb celo. El grup d'alumnes es va posar al davant de l'aula, sobre l'esglaó on es troba l'escriptori del professor. En un inici van treballar tots junts sota el lideratge d'un nen qui prenia la iniciativa en fer alguna cosa, però el diàleg va tornar a ser escàs i poc matemàtic. A mesura que enganxaven les cares, l'oportunitat i l'espai de participació es reduïa i dificultava la tasca. Llavors, es va demanar als alumnes que ja no feien res tornar als seus equips. Aleshores, el grup ja no estava al cas del que feien els seus companys i el soroll era massa fort. Malgrat que tenien un qüestionari amb preguntes fetes a partir dels indicadors de les facetes de la idoneïtat didàctica, però sobre els aspectes que poden donar resposta els alumnes, la majoria no el feien o només un alumne llegia les preguntes però sense donar cap resposta. Aleshores, vaig començar a recollir el material, ja que tornaven a fer-li mal bé.

La tasca es va terminar uns minuts abans de l'hora de classe, llavors vaig aprofitar per fer el qüestionari de manera grupal. Vaig anar llegint pregunta per pregunta però els alumnes no responien gaire. En sonar la campana, la majoria van sortir de cop de l'aula. Em vaig adonar de que ja volien sortir perquè es tractava de l'hora de dinar i a més, era divendres! Només dos o tres alumnes van romandre a l'aula per ajudar tornar les cadires al seu lloc i netejar una mica les peces de cartró a terra.



(LMG1)



Annex 17.

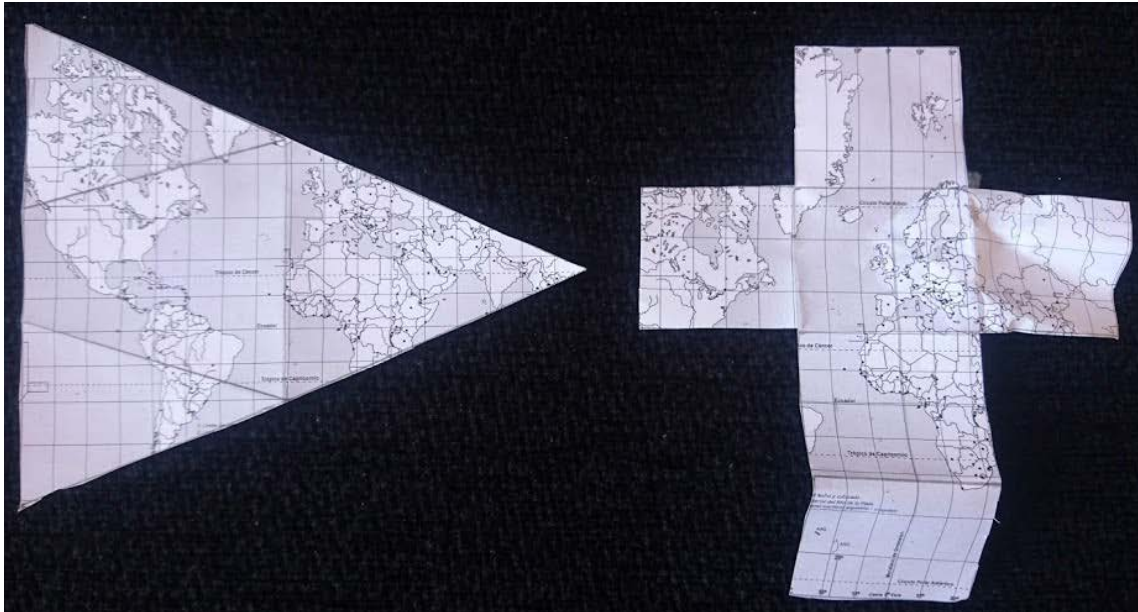
Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels objectes primaris per l'establiment de la seva configuració epistèmica.

Data	Divendres, 10 de gener de 2020, 12.25 hores.
<p>El professor de geografia va recordar a la classe la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va tornar a convidar a donar tot el seu suport a la tasca.</p> <p>Recordant l'organització de l'aula (tres fileres amb dues tauletes d'amplada), vaig organitzar el grup en dos equips per filera per tal d'arribar a sis equips amb 5 alumnes en total. Amb l'ajuda del professor vaig repartir el material als equips: un full d'instruccions, cinc mapes, un joc d'eines de dibuix geomètric, estisores i celo. De la mateixa manera que la sessió passada, al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Una altra vegada, vaig haver d'interrompre la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Com la darrera ocasió, el alumnes van mostrar disgust i van seguir amb la mateixa actitud però vigilant no ser vistos.</p> <p>Els vaig explicar l'activitat: <u>trobar la millor representació en tres dimensions (DC2) pel mapamundi (DC2) (SP2)</u>. El professor de geografia va intervenir per explicar breument la <u>dificultat que hi ha per fer representacions acurades de la Terra (PP2)</u>. Vaig demanar als alumnes que dins cada equip fer la distribució de les cinc opcions dels exemples dels fulls d'instruccions: <u>tetraedre (DC2)</u>, <u>cub (DC2)</u>, <u>octaedre (DC2)</u>, <u>dodecaedre (DC2)</u> i <u>icosaedre (DC2)</u>. Així, <u>cada membre de l'equip hauria de dibuixar un desenvolupament pla (DC2) al mapamundi per reconstruir-lo en tres dimensions i comprovar amb quin cos geomètric (DC2) es conserva més superfície (DC2) del mapa (DC2) (SP2)</u>.</p> <p>Els alumnes no estaven gaire motivats a treballar i aquesta oportunitat de triar es va convertir en una lluita per triar "el cos geomètric més fàcil" o per assignar "el cos geomètric més difícil" al company menys estimat de l'equip. Aquesta darrera situació va ser molt pronunciada a un equip on vaig identificar una actitud molt agressiva d'una nena qui va "deixar" l'icosaedre a un dels seus</p>	

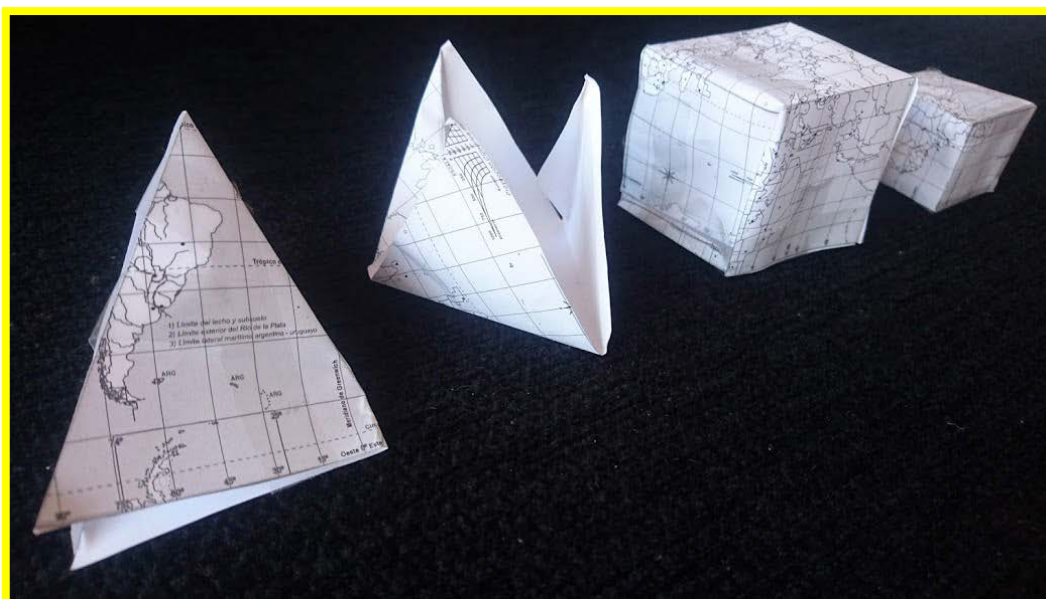
companys. El nen, trist, romanava en silenci tractant d'esbrinar com ensortir-se quan em vaig apropar i li vaig preguntar a la nena perquè li havia assignat ella el cos al seu company. La nena no va contestar res i la vaig convidar a fer-lo ella. Llavors, la seva actitud d'abús va parar i ella es va concentrar en tractar de fer el que li vaig assignar.

Van haver-hi moltes preguntes sobre com fer els traços, era evident que no tenien gaire pràctica amb el dibuix geomètric (PP2). Els equips van demanar força d'ajuda tant al professor de geografia com a mi. Entre les preguntes, la que més es va repetir va ser com dibuixar un pentàgon regular (DC2) (PP2) per traçar el dodecaedre. Els alumnes van dir que eren coses no feien a l'assignatura de matemàtiques (A2). En aquí em vaig adonar de que no hi havia inclòs un compàs (DC2) o motlles/plantilles de cercles (DC2) i que això era un impediment pel desenvolupament d'aquesta part de la tasca i vaig haver d'ometre aquest cos geomètric als equips. Els dibuixos del desenvolupament pla de cossos diferents al cub es van complicar massa (PP2) i també vaig veure que la majoria dels casos els alumnes no van establir cap relació entre les mides del mapa i les mides que registraven (LMVE2) (les quals serien les mides del cos dibuixat). Llavors, es van deixar molta de superfície fora del desenvolupament pla. Això es va mencionar per cada equip i també es va puntualitzar la importància de "mantenir" les terres dels continents per fer una millor representació del planeta amb el cos geomètric assignat.

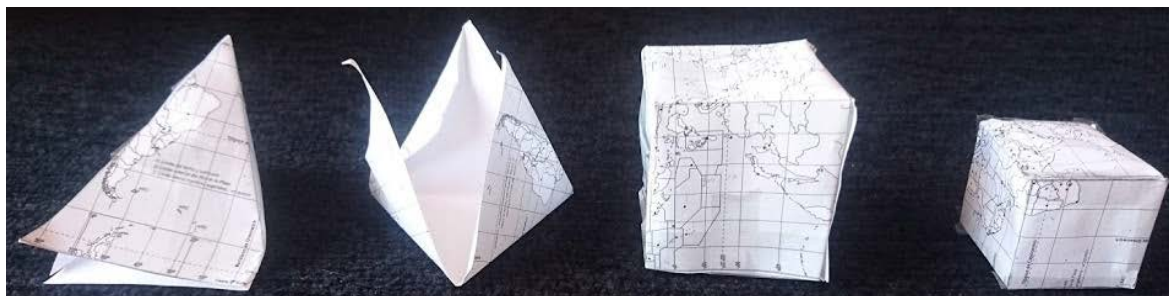
Segons es podia observar, els alumnes podien dibuixar una de les cares del cos geomètric però la construcció del desenvolupament pla ja no era possible perquè hi havia dificultat per identificar la posició relativa entre les figures. És a dir, un cop dibuixada la primera de les cares, els alumnes no van poder continuar el traç per tal d'obtenir la seqüència correcta de figures iguals (P2).

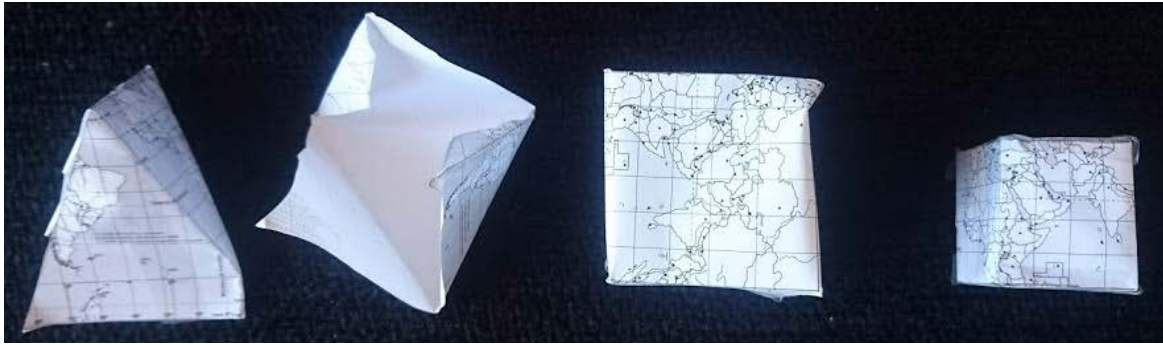


Els pocs alumnes que van poder acabar van ser aquells qui van fer el cub i en dos casos els tetraedres, però força malament.

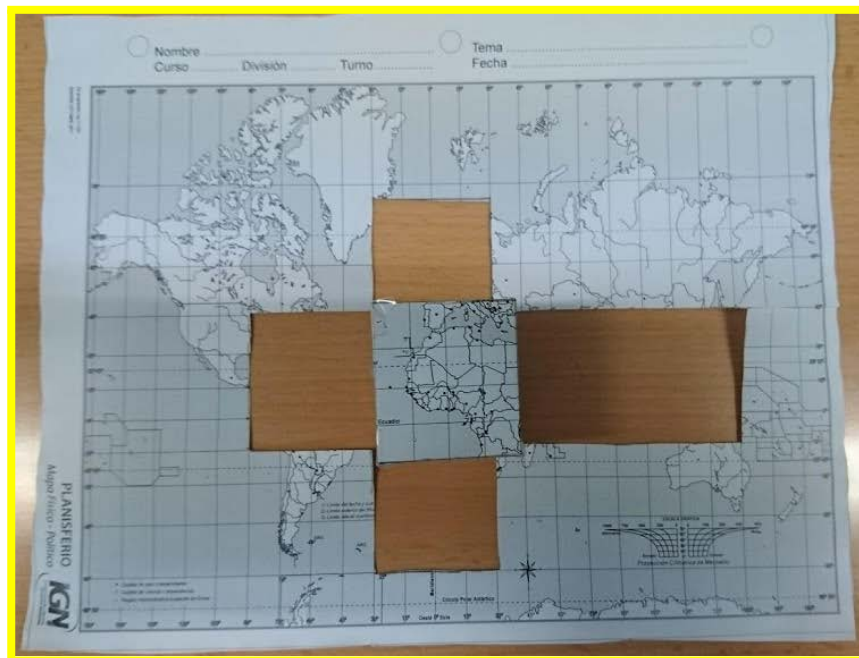


(P2)

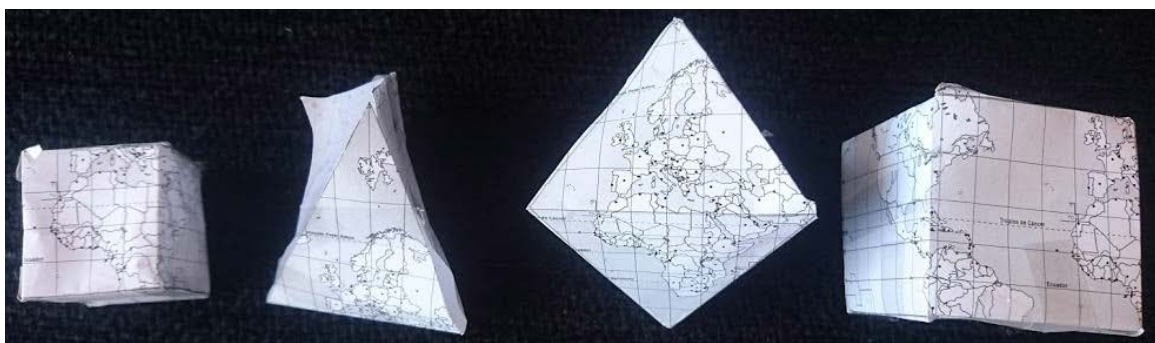




En observar els cossos geomètrics assolits, vaig descobrir una característica comuna: el desenvolupament pla es va centrar a Europa. Llavors, una de les cares conté Espanya.



(LMG2)



El temps de la sessió es va esgotar sense arribar a establir comparacions ni conclusions sobre la relació entre la superfície del mapa utilitzada per dibuixar els desenvolupaments plans i el cos geomètric que millor representa la Terra.

Annex 18.

Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels estats per l'establiment de la seva subtrajectòria epistèmica.

Data	Divendres, 13 de desembre de 2019, 12.25 hores.
<p data-bbox="202 488 371 521">Antecedents</p> <p data-bbox="202 548 1385 640">Amb la col·laboració del professor de geografia de l'institut, vam poder duu a terme la seqüència didàctica de dibuix geomètric amb alumnes de primer d'ESO.</p> <p data-bbox="202 721 584 754">Divendres, 12.25 a 13.30 hores</p> <p data-bbox="202 781 1385 931">El professor de geografia em va presentar a la classe. Va fer menció de la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va convidar a donar tot el seu suport a la tasca. No va semblar que hagués gaire interès per part dels alumnes.</p> <p data-bbox="202 1012 1385 1682">Seguidament vaig organitzar el grup en vuit equips, com que la classe va ser de 30 alumnes, es van fer sis grups amb 4 alumnes i dos amb tres. Com que l'aula va tenir tres fileres amb dues tauletes, es van fer tres equips a les fileres dels costats i dos a la filera del mig, d'aquesta manera es va evitar el moviment dels alumnes per tractar de mantenir l'ordre de la classe. Immediatament vaig començar repartir el material als equips: fulls d'instruccions, full de registre de respostes, un full A3 de cartolina de color (29,7×42 cm), un regle de 40 cm, un escaire gran i un cartabó també gran i unes estisores. Al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Aleshores, vaig interrompre breument la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Aquesta intervenció no va ser ben rebuda pels alumnes. Alguns van fer cas, uns altres van seguir fent-ho però vigilant de no ser vistos.</p> <p data-bbox="202 1762 1385 1973">Davant aquesta situació, em vaig apressar a fer l'explicació de l'activitat amb la intenció de que es possessin a treballar el més aviat possible per trencar amb la dinàmica de fer malbé els companys i el material. Llavors, vaig ometre el context del concurs de globus per reduir el temps de participació passiva dels alumnes i passar directament a la part activa. Els vaig plantejar l'objectiu</p>	

de la tasca: produir tots junts una figura geomètrica amb el material donat: un octaedre (E3). Segons el disseny de la tasca s'esperava que els mateixos alumnes, tota la classe, fessin una discussió per analitzar les dimensions dels fulls donats i concloure quines mides hauria de fer el cos geomètric i així les seves cares. Però la manca de participació de la classe em va fer dirigir l'activitat i donar només les següents dades: *Per tal de construir tots junts un octaedre es necessiten vuit figures geomètriques amb la forma de les cares, quina és o quines són? Es tracta de triangles (DC1), però d'un tipus especial: triangles equilàters. Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter. Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals, per tant han de tenir les mateixes mides, quines poden ser? Fixem l'altura del triangle, aquesta serà la mateixa altura que fa el full. Amb aquesta informació teniu prou per dibuixar la figura? Endavant!* (E1)

Els alumnes van començar a treballar. Com es normal, hi ha alumnes que participen més que els altres i també hi ha equips més col·laboratius que uns altres. El que va ser evident va ser la diferència dels procediments de traç dels equips: un equip va començar pel vèrtex oposat al costat horitzontal de la figura, un altre va trobar primer un costat horitzontal, va haver qui va començar per un costat transversal...

Vista aquesta situació i en previsió de les diferències que es tindrien sota aquesta dinàmica de treball, vaig tractar d'orientar els traços cap al dibuix de prova que vaig fer a la meva preparació a casa donant instruccions a tot el grup:

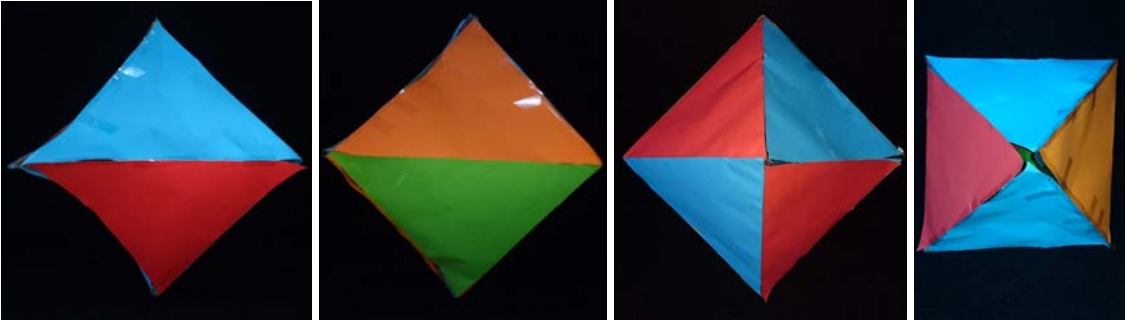
1. Trieu un dels costats més llargs del full per localitzar un dels costats del triangle equilàter.
2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identifiqueu el seu punt mig: com que la longitud del costat és 42 cm, el punt mig és a 21 cm de qualsevol dels seus extrems.
3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig.
4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full.

La metodologia més comú va ser el treball entre dues persones (i fins i tot només una) i la resta observant els companys. Quan l'alumne que es posava a fer el traç fracassava al seu intent, ho començava a fer un altre (E2). No va haver-hi gaire preocupació en fer-ho bé. En general, la classe no va mostrar gaire d'interès en l'activitat i van acabar ràpidament aquesta primera part. Per tant,

va haver poc diàleg entre els membres dels equips. A més dels termes o conceptes utilitzats en les instruccions verbals que vaig fer (E4), en les converses entre els alumnes es feia referència a l'ubicació espacial sobre el full amb paraules com ara: aquí, allà, més, menys, més lluny, més aprop. A banda dels registres de les mides de les longituds donades a les instruccions generals, els alumnes van utilitzar termes col·loquials per expressar les característiques de les formes dibuixades: ratlla, està tort(a) (E6).

Per construir l'octaedre els vaig demanar un representat de cada equip (E1). Tots plegats, els representants dels equips es van organitzar entre ells per ajuntar les cares del cos geomètric amb celo. El grup d'alumnes es va posar al davant de l'aula, sobre l'esglaó on es troba l'escriptori del professor. En un inici van treballar tots junts sota el lideratge d'un nen qui prenia la iniciativa en fer alguna cosa, però el diàleg va tornar a ser escàs i poc matemàtic (E2 i E6). A mesura que enganxaven les cares, l'oportunitat i l'espai de participació es reduïa i dificultava la tasca. Llavors, es va demanar als alumnes que ja no feien res tornar als seus equips. Aleshores, el grup ja no estava al cas del que feien els seus companys i el soroll era massa fort. Malgrat que tenien un qüestionari amb preguntes fetes a partir dels indicadors de les facetes de la idoneïtat didàctica, però sobre els aspectes que poden donar resposta els alumnes, la majoria no el feien o només un alumne llegia les preguntes però sense donar cap resposta. Aleshores, vaig començar a recollir el material, ja que tornaven a fer-li mal bé.

La tasca es va terminar uns minuts abans de l'hora de classe, llavors vaig aprofitar per fer el qüestionari de manera grupal. Vaig anar llegint pregunta per pregunta però els alumnes no responien gaire. En sonar la campana, la majoria van sortir de cop de l'aula. Em vaig adonar de que ja volien sortir perquè es tractava de l'hora de dinar i a més, era divendres! Només dos o tres alumnes van romandre a l'aula per ajudar tornar les cadires al seu lloc i netejar una mica les peces de cartró a terra.



Annex 19.

Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació de les funcions per l'establiment de la seva subtrajectòria docent.

Data	Divendres, 13 de desembre de 2019, 12.25 hores.
<p data-bbox="204 495 373 524">Antecedents</p> <p data-bbox="204 551 1385 640">Amb la col·laboració del professor de geografia de l'institut, vam poder duu a terme la seqüència didàctica de dibuix geomètric amb alumnes de primer d'ESO.</p> <p data-bbox="204 725 584 754">Divendres, 12.25 a 13.30 hores</p> <p data-bbox="204 784 1385 931"><u>El professor de geografia em va presentar a la classe. Va fer menció de la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va convidar a donar tot el seu suport a la tasca.</u> No va semblar que hagués gaire interès per part dels alumnes.</p> <p data-bbox="204 1016 1385 1682">Seguidament vaig organitzar el grup en vuit equips, com que la classe va ser de 30 alumnes, es van fer sis grups amb 4 alumnes i dos amb tres. Com que l'aula va tenir tres fileres amb dues tauletes, es van fer tres equips a les fileres dels costats i dos a la filera del mig, d'aquesta manera es va evitar el moviment dels alumnes per tractar de mantenir l'ordre de la classe. Immediatament vaig començar repartir el material als equips: fulls d'instruccions, full de registre de respostes, un full A3 de cartolina de color (29,7×42 cm), un regle de 40 cm, un escaire gran i un cartabó també gran i unes estisores. Al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Aleshores, vaig interrompre breument la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Aquesta intervenció no va ser ben rebuda pels alumnes. Alguns van fer cas, uns altres van seguir fent-ho però vigilant de no ser vistos.</p> <p data-bbox="204 1767 1385 1973">Davant aquesta situació, em vaig apressar a fer l'explicació de l'activitat amb la intenció de que es possessin a treballar el més aviat possible per trencar amb la dinàmica de fer malbé els companys i el material. Lavors, vaig ometre el context del concurs de globus per reduir el temps de participació passiva dels alumnes i passar directament a la part activa. Els vaig plantejar l'objectiu</p>	

de la tasca: produir tots junts una figura geomètrica amb el material donat: un octaedre. Segons el disseny de la tasca s'esperava que els mateixos alumnes, tota la classe, fessin una discussió per analitzar les dimensions dels fulls donats i concloure quines mides hauria de fer el cos geomètric i així les seves cares. Però la manca de participació de la classe em va fer dirigir l'activitat i donar només les següents dades: *Per tal de construir tots junts un octaedre es necessiten vuit figures geomètriques amb la forma de les cares, quina és o quines són? Es tracta de triangles (DC1), però d'un tipus especial: triangles equilàters. Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter. Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals, per tant han de tenir les mateixes mides, quines poden ser? Fixem l'altura del triangle, aquesta serà la mateixa altura que fa el full. Amb aquesta informació teniu prou per dibuixar la figura? Endavant!*

Els alumnes van començar a treballar (P2 i P3). Com es normal, hi ha alumnes que participen més que els altres i també hi ha equips més col·laboratius que uns altres. El que va ser evident va ser la diferència dels procediments de traç dels equips: un equip va començar pel vèrtex oposat al costat horitzontal de la figura, un altre va trobar primer un costat horitzontal, va haver qui va començar per un costat transversal... (P5)

Vista aquesta situació i en previsió de les diferències que es tindrien sota aquesta dinàmica de treball, vaig tractar d'orientar els traços cap al dibuix de prova que vaig fer a la meva preparació a casa donant instruccions a tot el grup:

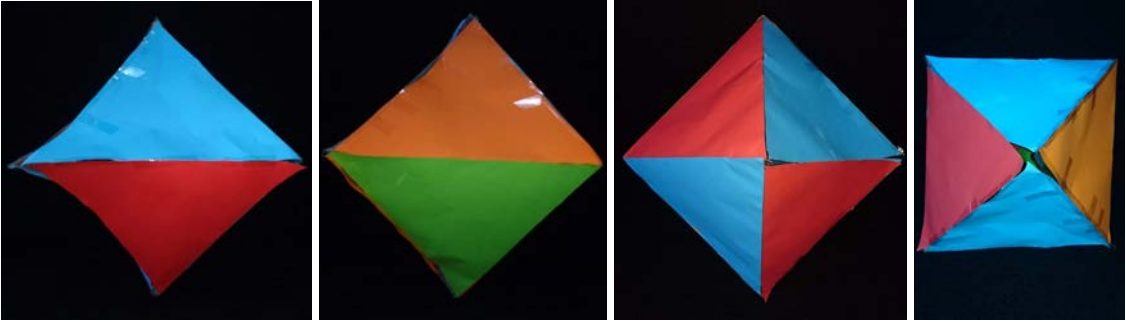
1. Trieu un dels costats més llargs del full per localitzar un dels costats del triangle equilàter.
2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identifiqueu el seu punt mig: com que la longitud del costat és 42 cm, el punt mig és a 21 cm de qualsevol dels seus extrems.
3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig.
4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full. (P3)

La metodologia més comú va ser el treball entre dues persones (i fins i tot només una) i la resta observant els companys. Quan l'alumne que es posava a fer el traç fracassava al seu intent, ho començava a fer un altre. No va haver-hi gaire preocupació en fer-ho bé. En general, la classe no va mostrar gaire d'interès en l'activitat i van acabar ràpidament aquesta primera part. Per tant, va

haver poc diàleg entre els membres dels equips. A més dels termes o conceptes utilitzats en les instruccions verbals que vaig fer, en les converses entre els alumnes es feia referència a la ubicació espacial sobre el full amb paraules com ara: aquí, allà, més, menys, més lluny, més aprop. A banda dels registres de les mides de les longituds donades a les instruccions generals, els alumnes van utilitzar termes col·loquials per expressar les característiques de les formes dibuixades: ratlla, està tort(a).

Per construir l'octaedre els vaig demanar un representat de cada equip (P3). Tots plegats, els representants dels equips es van organitzar entre ells per ajuntar les cares del cos geomètric amb celo. El grup d'alumnes es va posar al davant de l'aula, sobre l'esglaó on es troba l'escriptori del professor. En un inici van treballar tots junts sota el lideratge d'un nen qui prenia la iniciativa en fer alguna cosa, però el diàleg va tornar a ser escàs i poc matemàtic. A mesura que enganxaven les cares, l'oportunitat i l'espai de participació es reduïa i dificultava la tasca (P5). Llavors, es va demanar als alumnes que ja no feien res tornar als seus equips (P3). Aleshores, el grup ja no estava al cas del que feien els seus companys i el soroll era massa fort. Malgrat que tenien un qüestionari amb preguntes fetes a partir dels indicadors de les facetes de la idoneïtat didàctica, però sobre els aspectes que poden donar resposta els alumnes, la majoria no el feien o només un alumne llegia les preguntes però sense donar cap resposta (P5). Aleshores, vaig començar a recollir el material, ja que tornaven a fer-li mal bé.

La tasca es va terminar uns minuts abans de l'hora de classe, llavors vaig aprofitar per fer el qüestionari de manera grupal. Vaig anar llegint pregunta per pregunta però els alumnes no responien gaire (P3). En sonar la campana, la majoria van sortir de cop de l'aula. Em vaig adonar de que ja volien sortir perquè es tractava de l'hora de dinar i a més, era divendres! Només dos o tres alumnes van romandre a l'aula per ajudar tornar les cadires al seu lloc i netejar una mica les peces de cartró a terra.



Annex 20.

Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria discent.

Data	Divendres, 13 de desembre de 2019, 12.25 hores.
<p data-bbox="204 488 371 524">Antecedents</p> <p data-bbox="204 546 1386 640">Amb la col·laboració del professor de geografia de l'institut, vam poder duu a terme la seqüència didàctica de dibuix geomètric amb alumnes de primer d'ESO.</p> <p data-bbox="204 719 584 754">Divendres, 12.25 a 13.30 hores</p> <p data-bbox="204 777 1386 931">El professor de geografia em va presentar a la classe. Va fer menció de la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va convidar a donar tot el seu suport a la tasca (A1). No va semblar que hagués gaire interès per part dels alumnes.</p> <p data-bbox="204 1010 1386 1682">Seguidament vaig organitzar el grup en vuit equips, com que la classe va ser de 30 alumnes, es van fer sis grups amb 4 alumnes i dos amb tres. Com que l'aula va tenir tres fileres amb dues tauletes, es van fer tres equips a les fileres dels costats i dos a la filera del mig, d'aquesta manera es va evitar el moviment dels alumnes per tractar de mantenir l'ordre de la classe. Immediatament vaig començar repartir el material als equips: fulls d'instruccions, full de registre de respostes, un full A3 de cartolina de color (29,7×42 cm), un regle de 40 cm, un escaire gran i un cartabó també gran i unes estisores (A6 i A2). Al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Aleshores, vaig interrompre breument la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Aquesta intervenció no va ser ben rebuda pels alumnes. Alguns van fer cas, uns altres van seguir fent-ho però vigilant de no ser vistos.</p> <p data-bbox="204 1760 1386 1973">Davant aquesta situació, em vaig apressar a fer l'explicació de l'activitat amb la intenció de que es possessin a treballar el més aviat possible per trencar amb la dinàmica de fer malbé els companys i el material. Llavors, vaig ometre el context del concurs de globus per reduir el temps de participació passiva dels alumnes i passar directament a la part activa. Els vaig plantejar l'objectiu</p>	

de la tasca: produir tots junts una figura geomètrica amb el material donat: un octaedre (A6). Segons el disseny de la tasca s'esperava que els mateixos alumnes, tota la classe, fessin una discussió per analitzar les dimensions dels fulls donats i concloure quines mides hauria de fer el cos geomètric i així les seves cares. Però la manca de participació de la classe em va fer dirigir l'activitat i donar només les següents dades: *Per tal de construir tots junts un tetraedre es necessiten vuit figures geomètriques amb la forma de les cares, quina és o quines són? Es tracta de triangles, però d'un tipus especial: triangles equilàters. Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter. Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals, per tant han de tenir les mateixes mides, quines poden ser? Fixem l'altura del triangle, aquesta serà la mateixa altura que fa el full. Amb aquesta informació teniu prou per dibuixar la figura? Endavant!*

Els alumnes van començar a treballar. Com es normal, hi ha alumnes que participen més que els altres i també hi ha equips més col·laboratius que uns altres. El que va ser evident va ser la diferència dels procediments de traç dels equips: un equip va començar pel vèrtex oposat al costat horitzontal de la figura, un altre va trobar primer un costat horitzontal, va haver qui va començar per un costat transversal... (A8)

Vista aquesta situació i en previsió de les diferències que es tindrien sota aquesta dinàmica de treball, vaig tractar d'orientar els traços cap al dibuix de prova que vaig fer a la meva preparació a casa donant instruccions a tot el grup:

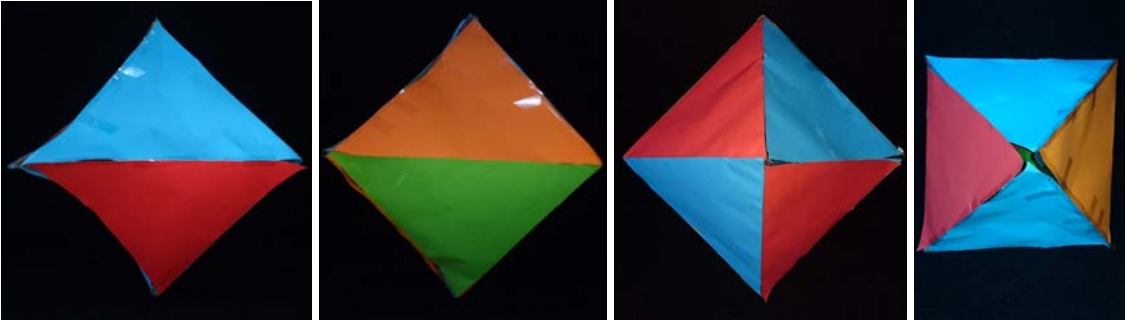
1. Trieu un dels costats més llargs del full per localitzar un dels costats del triangle equilàter.
2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identificar el seu punt mig: com que la longitud del costat és 42 cm, el punt mig és a 21 cm de qualsevol dels seus extrems.
3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig.
4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full. (A6)

La metodologia més comú va ser el treball entre dues persones (i fins i tot només una) i la resta observant els companys. Quan l'alumne que es posava a fer el traç fracassava al seu intent, ho començava a fer un altre (A8). No va haver-hi gaire preocupació en fer-ho bé. En general, la classe no va mostrar gaire d'interès en l'activitat i van acabar ràpidament aquesta primera part. Per tant,

va haver poc diàleg entre els membres dels equips. A més dels termes o conceptes utilitzats en les instruccions verbals que vaig fer, en les converses entre els alumnes es feia referència a la ubicació espacial sobre el full amb paraules com ara: aquí, allà, més, menys, més lluny, més aprop. A banda dels registres de les mides de les longituds donades a les instruccions generals, els alumnes van utilitzar termes col·loquials per expressar les característiques de les formes dibuixades: ratlla, està tort(a).

Per construir l'octaedre els vaig demanar un representat de cada equip. Tots plegats, els representants dels equips es van organitzar entre ells per ajuntar les cares del cos geomètric amb celo. El grup d'alumnes es va posar al davant de l'aula, sobre l'esglaó on es troba l'escriptori del professor (A6). En un inici van treballar tots junts sota el lideratge d'un nen qui prenia la iniciativa en fer alguna cosa, però el diàleg va tornar a ser escàs i poc matemàtic (A8). A mesura que enganxaven les cares, l'oportunitat i l'espai de participació es reduïa i dificultava la tasca. Llavors, es va demanar als alumnes que ja no feien res tornar als seus equips. Aleshores, el grup ja no estava al cas del que feien els seus companys i el soroll era massa fort. Malgrat que tenien un qüestionari amb preguntes fetes a partir dels indicadors de les facetes de la idoneïtat didàctica, però sobre els aspectes que poden donar resposta els alumnes, la majoria no el feien o només un alumne llegia les preguntes però sense donar cap resposta. Aleshores, vaig començar a recollir el material, ja que tornaven a fer-li mal bé.

La tasca es va terminar uns minuts abans de l'hora de classe, llavors vaig aprofitar per fer el qüestionari de manera grupal (A6). Vaig anar llegint pregunta per pregunta però els alumnes no responien gaire (A3). En sonar la campana, la majoria van sortir de cop de l'aula. Em vaig adonar de que ja volien sortir perquè es tractava de l'hora de dinar i a més, era divendres! Només dos o tres alumnes van romandre a l'aula per ajudar tornar les cadires al seu lloc i netejar una mica les peces de cartró a terra.



Annex 21.

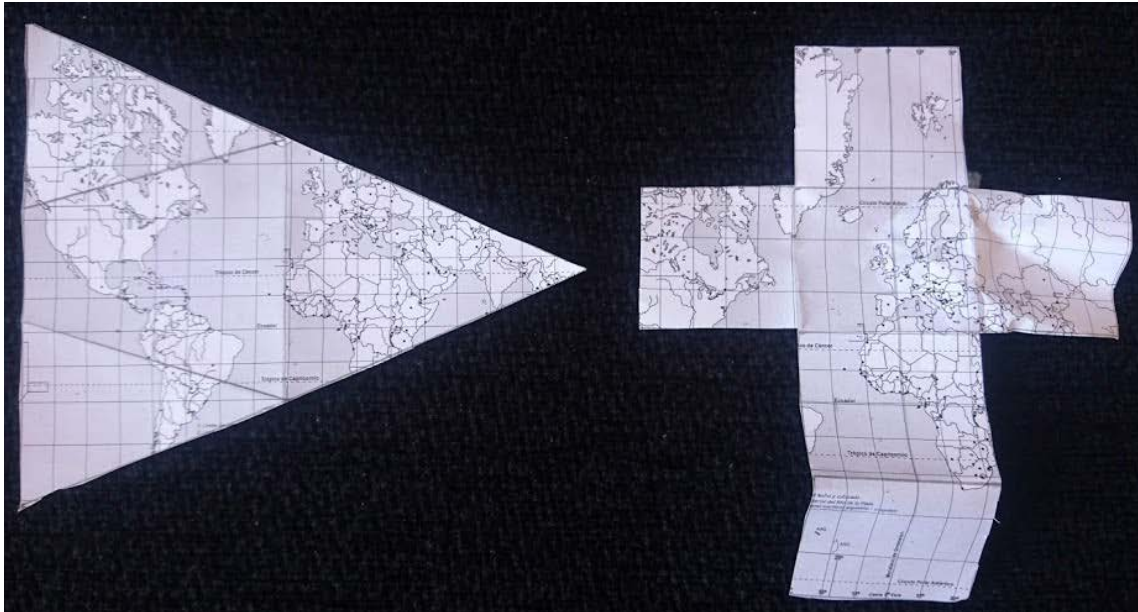
Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria epistèmica.

Data	Divendres, 10 de gener de 2020, 12.25 hores.
<p>El professor de geografia va recordar a la classe la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va tornar a convidar a donar tot el seu suport a la tasca.</p>	
<p>Recordant l'organització de l'aula (tres fileres amb dues tauletes d'amplada), vaig organitzar el grup en dos equips per filera per tal d'arribar a sis equips amb 5 alumnes en total. Amb l'ajuda del professor vaig repartir el material als equips: un full d'instruccions, cinc mapes, un joc d'eines de dibuix geomètric, estisores i celo (E2). De la mateixa manera que la sessió passada, al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Una altra vegada, vaig haver d'interrompre la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Com la darrera ocasió, el alumnes van mostrar disgust i van seguir amb la mateixa actitud però vigilant no ser vistos.</p>	
<p>Els vaig explicar l'activitat: trobar la millor representació en tres dimensions pel mapamundi. El professor de geografia va intervenir per explicar breument la dificultat que hi ha per fer representacions acurades de la Terra. Vaig demanar als alumnes que dins cada equip fer la distribució de les cinc opcions dels exemples dels fulls d'instruccions: tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre. Així, cada membre de l'equip hauria de dibuixar un desenvolupament pla al mapamundi per reconstruir-lo en tres dimensions i comprovar amb quin cos geomètric es conserva més superfície del mapa (E1 i E3).</p>	
<p>Els alumnes no estaven gaire motivats a treballar i aquesta oportunitat de triar es va convertir en una lluita per triar "el cos geomètric més fàcil" o per assignar "el cos geomètric més difícil" al company menys estimat de l'equip. Aquesta darrera situació va ser molt pronunciada a un equip on vaig identificar una actitud molt agressiva d'una nena qui va "deixar" l'icosaedre a un dels seus companys. El nen, trist, estava en silenci tractant d'esbrinar com en sortir-se quan em vaig</p>	

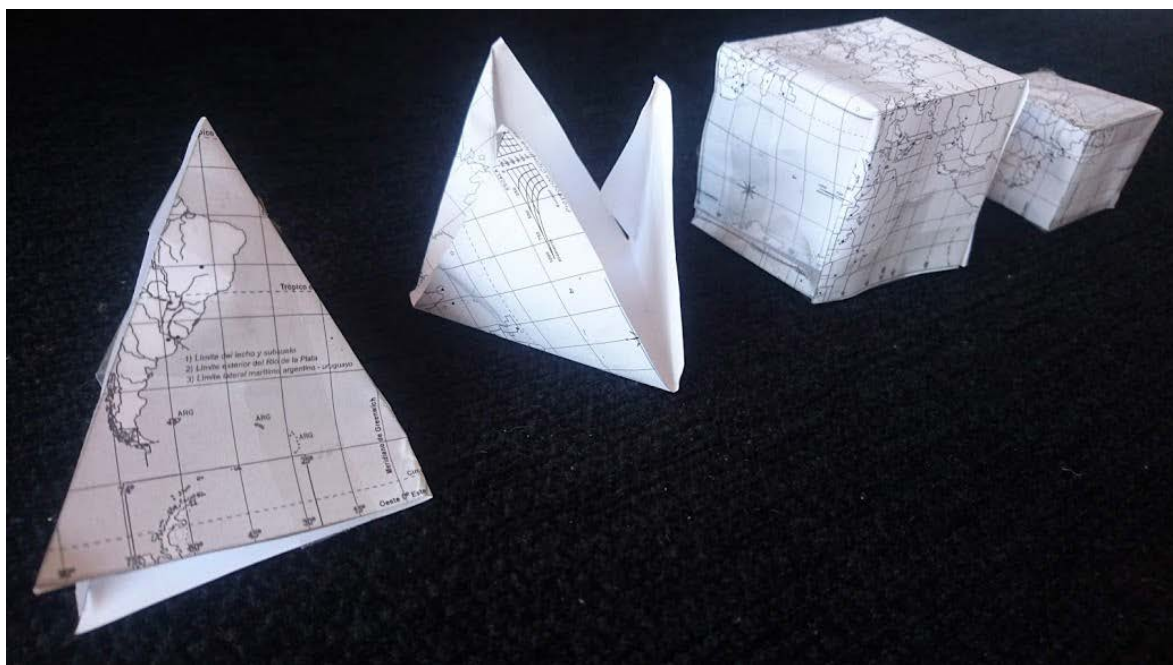
apropar i li vaig preguntar a la nena perquè li havia assignat ella el cos al seu company. La nena no va contestar res i la vaig convidar a fer-lo ella. Llavors, la seva actitud d'abús va parar i ella es va concentrar en tractar de fer el que li vaig assignar.

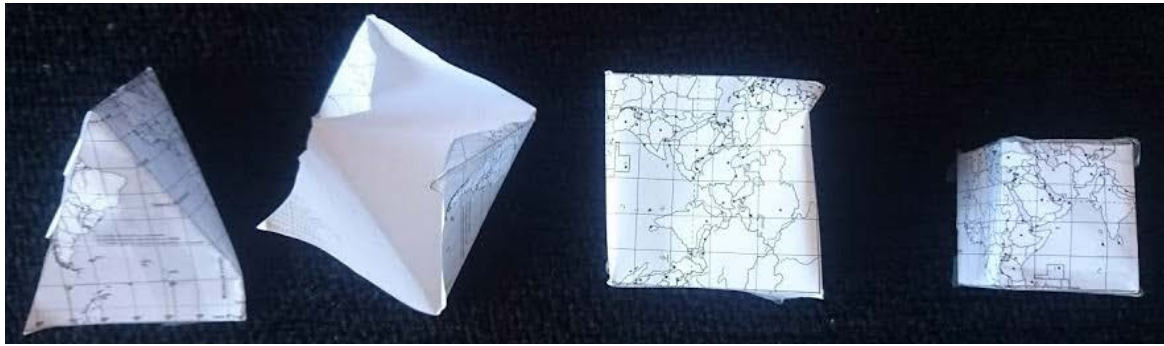
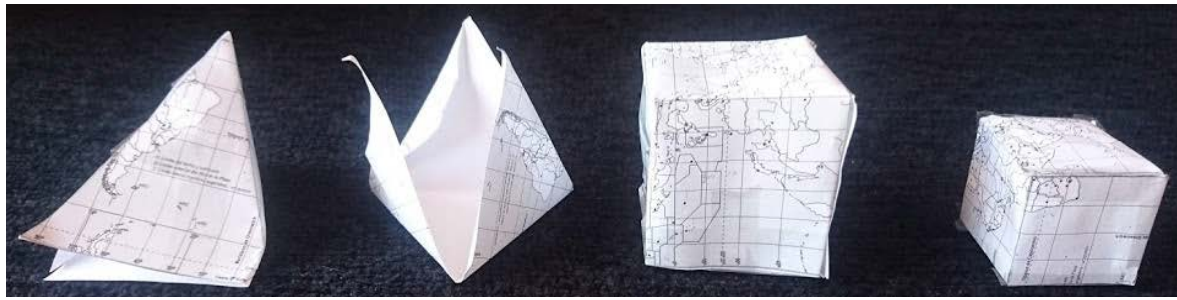
Van haver-hi moltes preguntes sobre com fer els traços, era evident que no tenien gaire pràctica amb el dibuix geomètric. Els equips van demanar força d'ajuda tant al professor de geografia com a mi (E2). Entre les preguntes, la que més es va repetir va ser com dibuixar un pentàgon regular per traçar el dodecaedre (E1). Els alumnes van dir que eren coses no feien a l'assignatura de matemàtiques. En aquí em vaig adonar de que no hi havia inclòs un compàs o motlles/plantilles de cercles i que això era un impediment pel desenvolupament d'aquesta part de la tasca i vaig haver d'ometre aquest cos geomètric als equips (E1). Els dibuixos del desenvolupament pla de cossos diferents al cub es van complicar massa i també vaig veure que la majoria dels casos els alumnes no van establir cap relació entre les mides del mapa i les mides que registraven (les quals serien les mides del cos dibuixat). Llavors, es van deixar molta de superfície fora del desenvolupament pla. Això es va mencionar per cada equip i també es va puntualitzar la importància de "mantenir" les terres dels continents per fer una millor representació del planeta amb el cos geomètric assignat (E2).

Segons es podia observar, els alumnes podien dibuixar una de les cares del cos geomètric però la construcció del desenvolupament pla ja no era possible perquè hi havia dificultat per identificar la posició relativa entre les figures. És a dir, un cop dibuixada la primera de les cares, els alumnes no van poder continuar el traç per tal d'obtenir la seqüència correcta de figures iguals (E2).

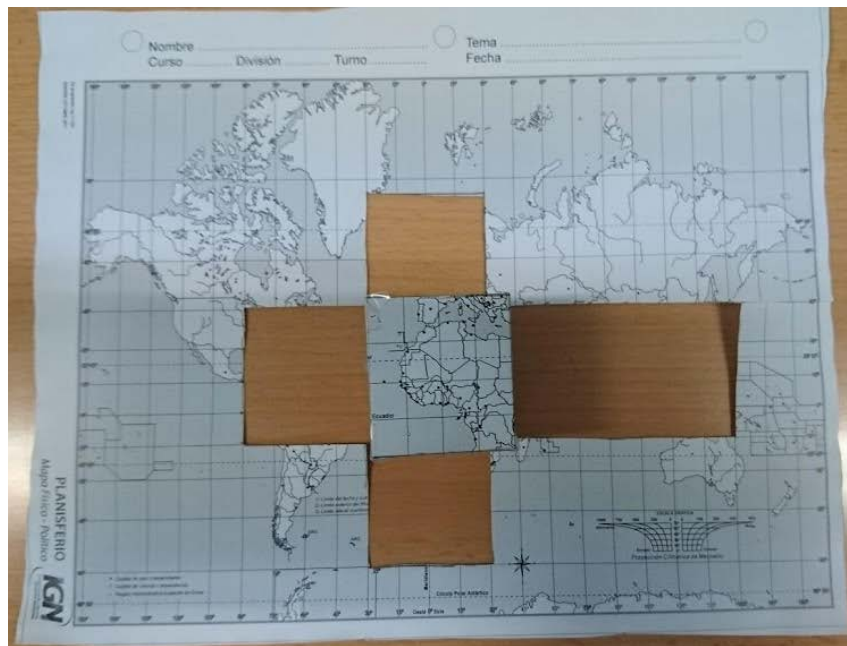


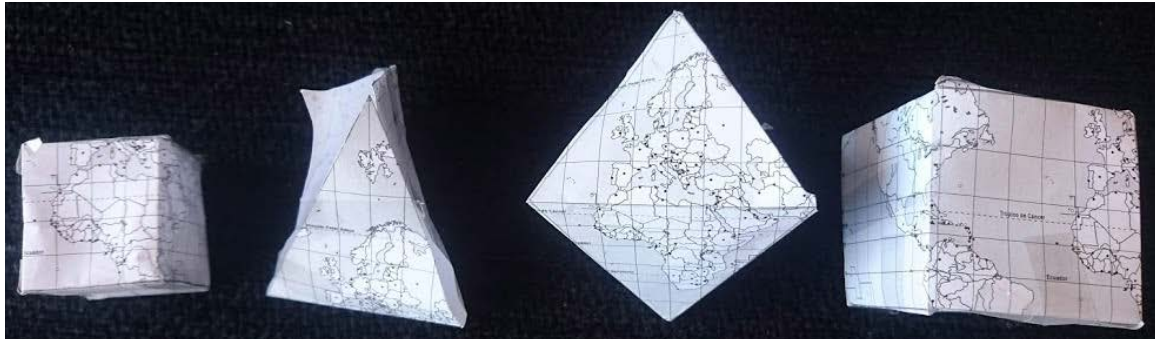
Els pocs alumnes que van poder acabar van ser aquells qui van fer el cub i en dos casos els tetraedres, però força malament.





En observar els cossos geomètrics assolits, vaig descobrir una característica comuna: el desenvolupament pla es va centrar a Europa. Llavors, una de les cares conté Espanya.





El temps de la sessió es va esgotar sense arribar a establir comparacions ni conclusions sobre la relació entre la superfície del mapa utilitzada per dibuixar els desenvolupaments plans i el cos geomètric que millor representa la Terra.

Annex 22.

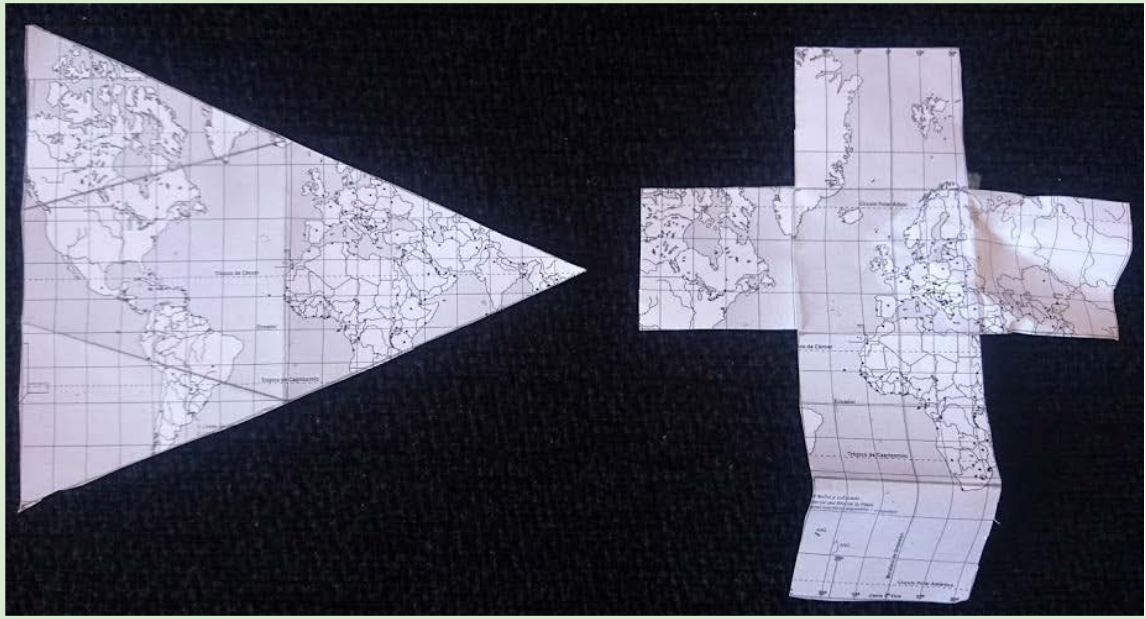
Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria docent.

Data	Divendres, 10 de gener de 2020, 12.25 hores.
<p>El professor de geografia va recordar a la classe la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va tornar a convidar a donar tot el seu suport a la tasca (P2).</p>	
<p>Recordant l'organització de l'aula (tres fileres amb dues tauletes d'amplada), vaig organitzar el grup en dos equips per filera per tal d'arribar a sis equips amb 5 alumnes en total. Amb l'ajuda del professor vaig repartir el material als equips: un full d'instruccions, cinc mapes, un joc d'eines de dibuix geomètric, estisores i celo (P3). De la mateixa manera que la sessió passada, al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Una altra vegada, vaig haver d'interrompre la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Com la darrera ocasió, el alumnes van mostrar disgust i van seguir amb la mateixa actitud però vigilant no ser vistos.</p>	
<p>Els vaig explicar l'activitat: trobar la millor representació en tres dimensions pel mapamundi (P3). El professor de geografia va intervenir per explicar breument la dificultat que hi ha per fer representacions acurades de la Terra. Vaig demanar als alumnes que dins cada equip fer la distribució de les cinc opcions dels exemples dels fulls d'instruccions: tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre. Així, cada membre de l'equip hauria de dibuixar un desenvolupament pla al mapamundi per reconstruir-lo en tres dimensions i comprovar amb quin cos geomètric es conserva més superfície del mapa (P3).</p>	
<p>Els alumnes no estaven gaire motivats a treballar i aquesta oportunitat de triar es va convertir en una lluita per triar "el cos geomètric més fàcil" o per assignar "el cos geomètric més difícil" al company menys estimat de l'equip. Aquesta darrera situació va ser molt pronunciada a un equip on vaig identificar una actitud molt agressiva d'una nena qui va "deixar" l'icosaedre a un dels seus</p>	

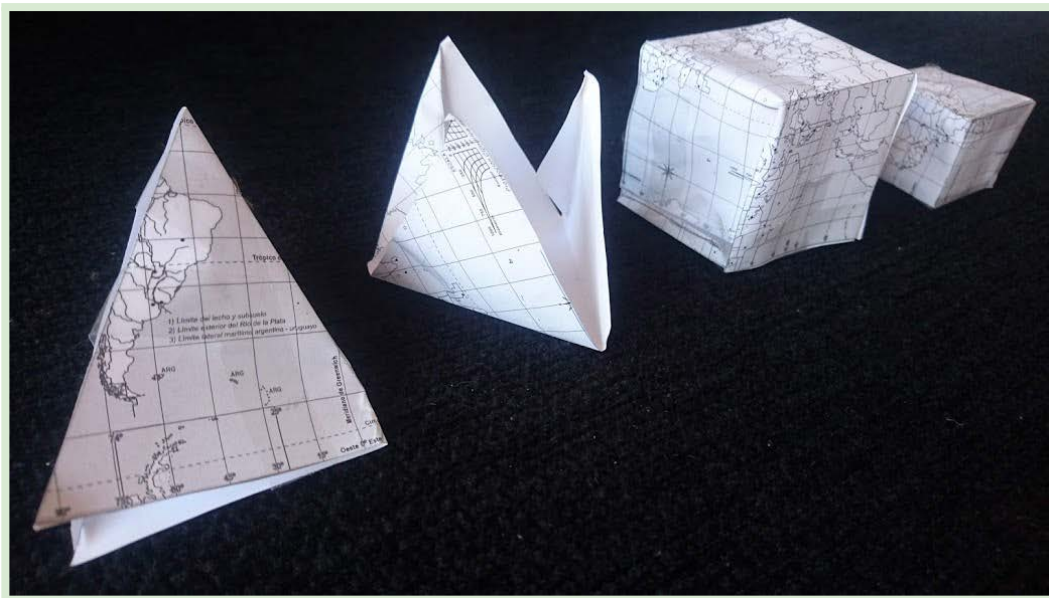
companys. El nen, trist, estava en silenci tractant d'esbrinar com en sortir-se quan em vaig apropar i li vaig preguntar a la nena perquè li havia assignat ella el cos al seu company. La nena no va contestar res i la vaig convidar a fer-lo ella. Llavors, la seva actitud d'abús va parar i ella es va concentrar en tractar de fer el que li vaig assignar.

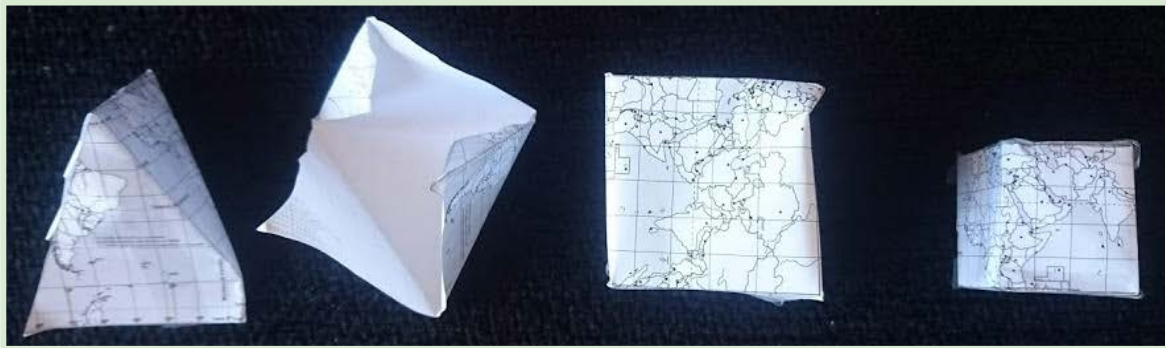
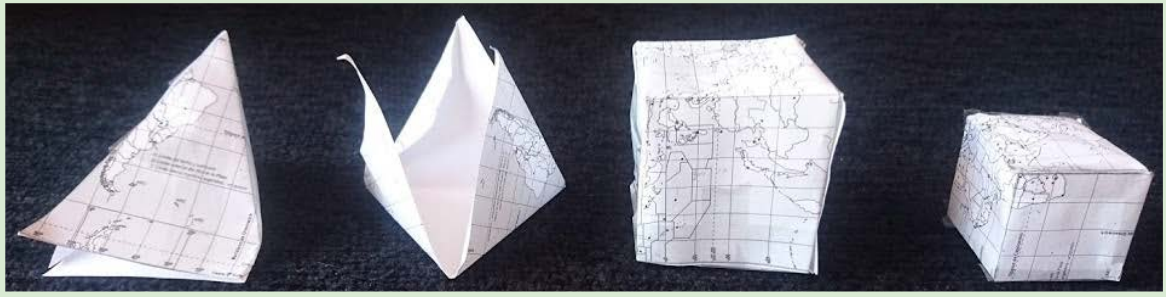
Van haver-hi moltes preguntes sobre com fer els traços, era evident que no tenien gaire pràctica amb el dibuix geomètric. Els equips van demanar força d'ajuda tant al professor de geografia com a mi. Entre les preguntes, la que més es va repetir va ser com dibuixar un pentàgon regular per traçar el dodecaedre (P4). Els alumnes van dir que eren coses no feien a l'assignatura de matemàtiques. En aquí em vaig adonar de que no hi havia inclòs un compàs o motlles/plantilles de cercles i que això era un impediment pel desenvolupament d'aquesta part de la tasca i vaig haver d'ometre aquest cos geomètric als equips (P4). Els dibuixos del desenvolupament pla de cossos diferents al cub es van complicar massa i també vaig veure que la majoria dels casos els alumnes no van establir cap relació entre les mides del mapa i les mides que registraven (les quals serien les mides del cos dibuixat). Llavors, es van deixar molta de superfície fora del desenvolupament pla. Això es va mencionar per cada equip i també es va puntualitzar la importància de "mantenir" les terres dels continents per fer una millor representació del planeta amb el cos geomètric assignat (P5).

Segons es podia observar, els alumnes podien dibuixar una de les cares del cos geomètric però la construcció del desenvolupament pla ja no era possible perquè hi havia dificultat per identificar la posició relativa entre les figures. És a dir, un cop dibuixada la primera de les cares, els alumnes no van poder continuar el traç per tal d'obtenir la seqüència correcta de figures iguals (P5).

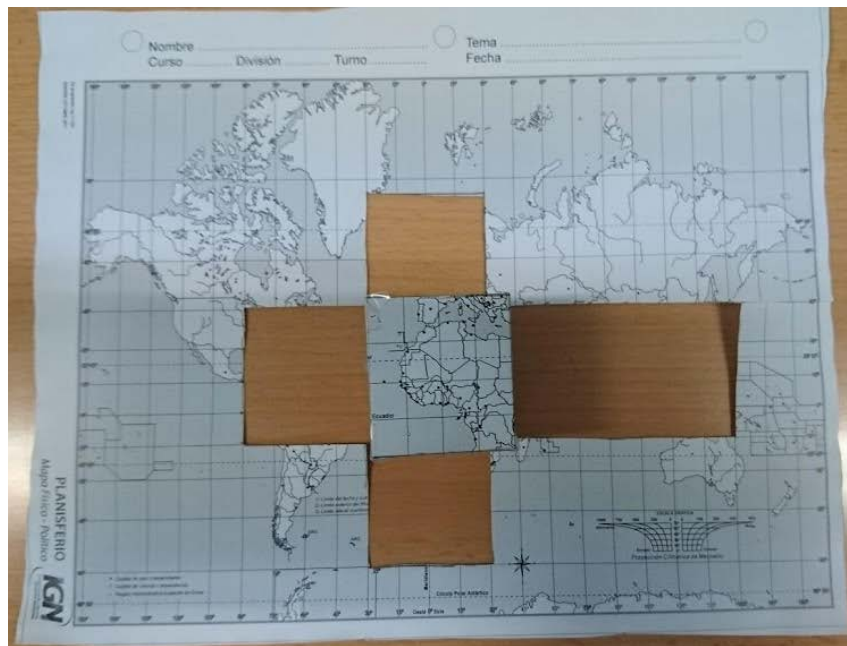


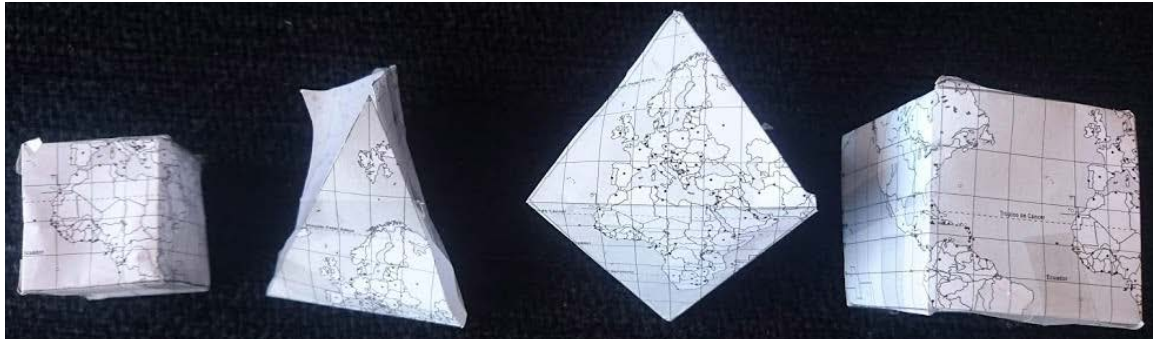
Els pocs alumnes que van poder acabar van ser aquells qui van fer el cub i en dos casos els tetraedres, però força malament (P5).





En observar els cossos geomètrics assolits, vaig descobrir una característica comuna: el desenvolupament pla es va centrar a Europa. Llavors, una de les cares conté Espanya.





El temps de la sessió es va esgotar sense arribar a establir comparacions ni conclusions sobre la relació entre la superfície del mapa utilitzada per dibuixar els desenvolupaments plans i el cos geomètric que millor representa la Terra.

Annex 23.

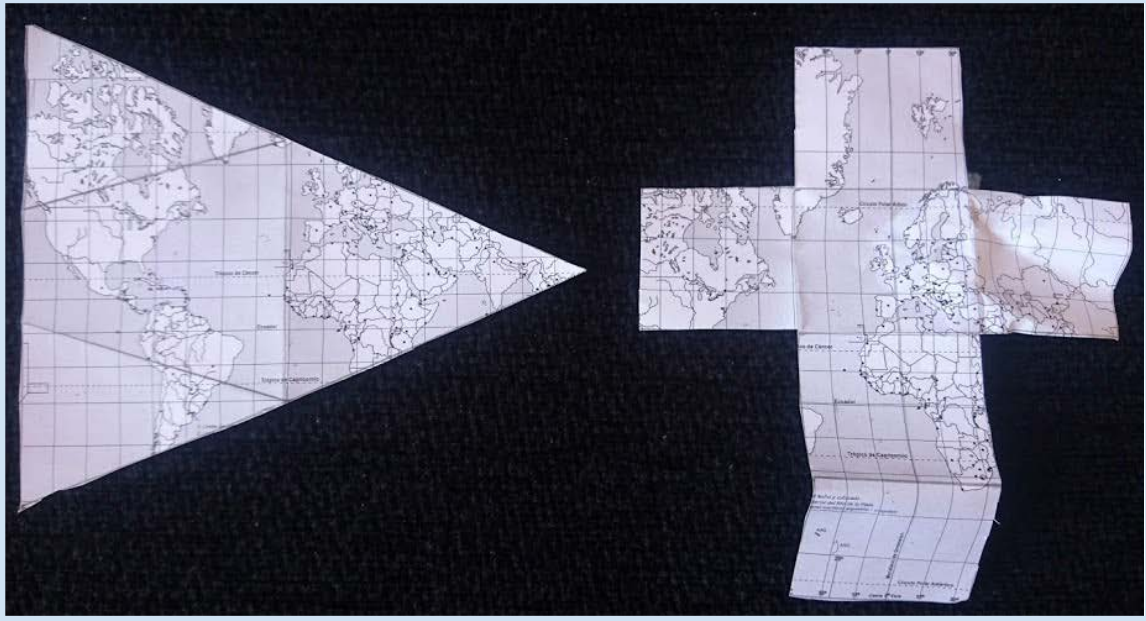
Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels estats/funció per l'establiment de la seva subtrajectòria discent.

Data	Divendres, 10 de gener de 2020, 12.25 hores.
<p>El professor de geografia va recordar a la classe la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va tornar a convidar a donar tot el seu suport a la tasca (A1).</p>	
<p>Recordant l'organització de l'aula (tres fileres amb dues tauletes d'amplada), vaig organitzar el grup en dos equips per filera per tal d'arribar a sis equips amb 5 alumnes en total. Amb l'ajuda del professor vaig repartir el material als equips: un full d'instruccions, cinc mapes, un joc d'eines de dibuix geomètric, estisores i celo (A6). De la mateixa manera que la sessió passada, al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Una altra vegada, vaig haver d'interrompre la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Com la darrera ocasió, el alumnes van mostrar disgust i van seguir amb la mateixa actitud però vigilant no ser vistos.</p>	
<p>Els vaig explicar l'activitat: trobar la millor representació en tres dimensions pel mapamundi. El professor de geografia va intervenir per explicar breument la dificultat que hi ha per fer representacions acurades de la Terra. Vaig demanar als alumnes que dins cada equip fer la distribució de les cinc opcions dels exemples dels fulls d'instruccions: tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre. Així, cada membre de l'equip hauria de dibuixar un desenvolupament pla al mapamundi per reconstruir-lo en tres dimensions i comprovar amb quin cos geomètric es conserva més superfície del mapa (A6).</p>	
<p>Els alumnes no estaven gaire motivats a treballar i aquesta oportunitat de triar es va convertir en una lluita per triar "el cos geomètric més fàcil" (A4) o per assignar "el cos geomètric més difícil" al company menys estimat de l'equip. Aquesta darrera situació va ser molt pronunciada a un equip on vaig identificar una actitud molt agressiva d'una nena qui va "deixar" l'icosaedre a un</p>	

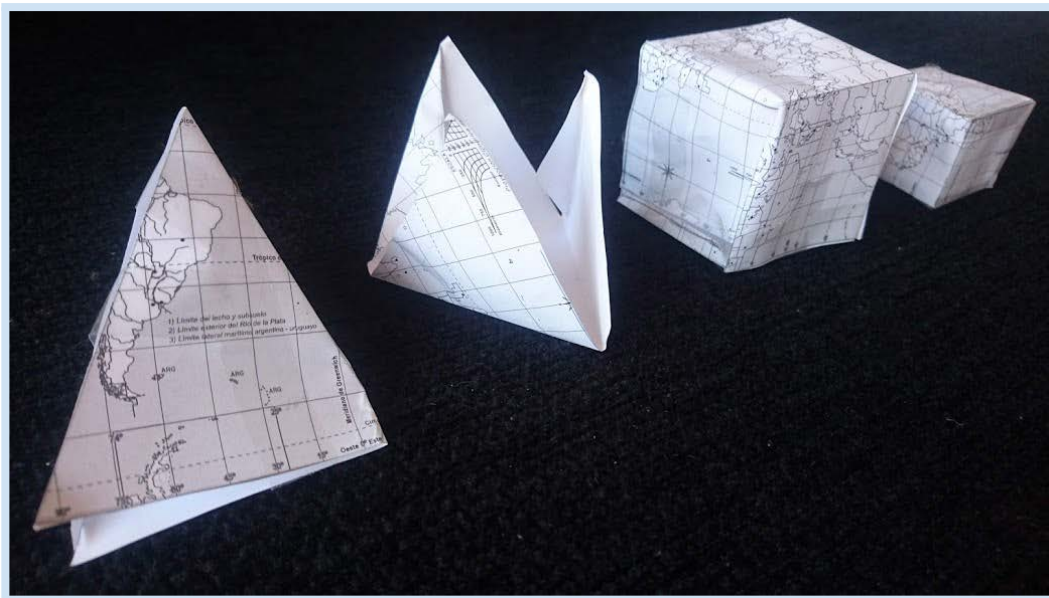
dels seus companys. El nen, trist, estava en silenci tractant d'esbrinar com en sortir-se quan em vaig apropar i li vaig preguntar a la nena perquè li havia assignat ella el cos al seu company. La nena no va contestar res i la vaig convidar a fer-lo ella. Llavors, la seva actitud d'abús va parar i ella es va concentrar en tractar de fer el que li vaig assignar.

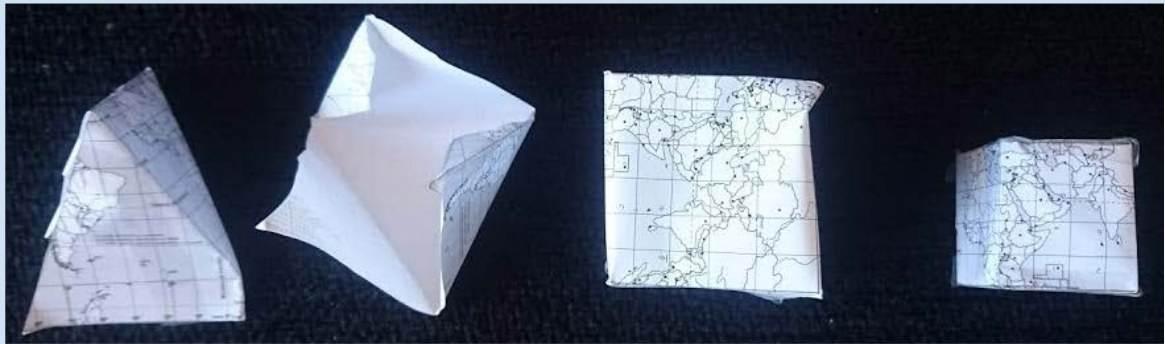
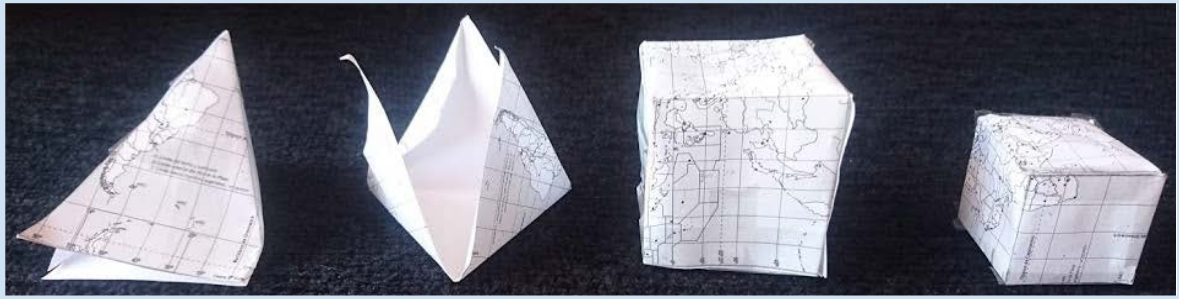
Van haver-hi moltes preguntes sobre com fer els traços, era evident que no tenien gaire pràctica amb el dibuix geomètric. Els equips van demanar força d'ajuda tant al professor de geografia com a mi (A7). Entre les preguntes, la que més es va repetir va ser com dibuixar un pentàgon regular per traçar el dodecaedre. Els alumnes van dir que eren coses no feien a l'assignatura de matemàtiques. En aquí em vaig adonar de que no hi havia inclòs un compàs o motlles/plantilles de cercles i que això era un impediment pel desenvolupament d'aquesta part de la tasca i vaig haver d'ometre aquest cos geomètric als equips (A6). Els dibuixos del desenvolupament pla de cossos diferents al cub es van complicar massa i també vaig veure que la majoria dels casos els alumnes no van establir cap relació entre les mides del mapa i les mides que registraven (les quals serien les mides del cos dibuixat). Llavors, es van deixar molta de superfície fora del desenvolupament pla. Això es va mencionar per cada equip i també es va puntualitzar la importància de "mantenir" les terres dels continents per fer una millor representació del planeta amb el cos geomètric assignat (A8).

Segons es podia observar, els alumnes podien dibuixar una de les cares del cos geomètric però la construcció del desenvolupament pla ja no era possible perquè hi havia dificultat per identificar la posició relativa entre les figures. És a dir, un cop dibuixada la primera de les cares, els alumnes no van poder continuar el traç per tal d'obtenir la seqüència correcta de figures iguals (A9).

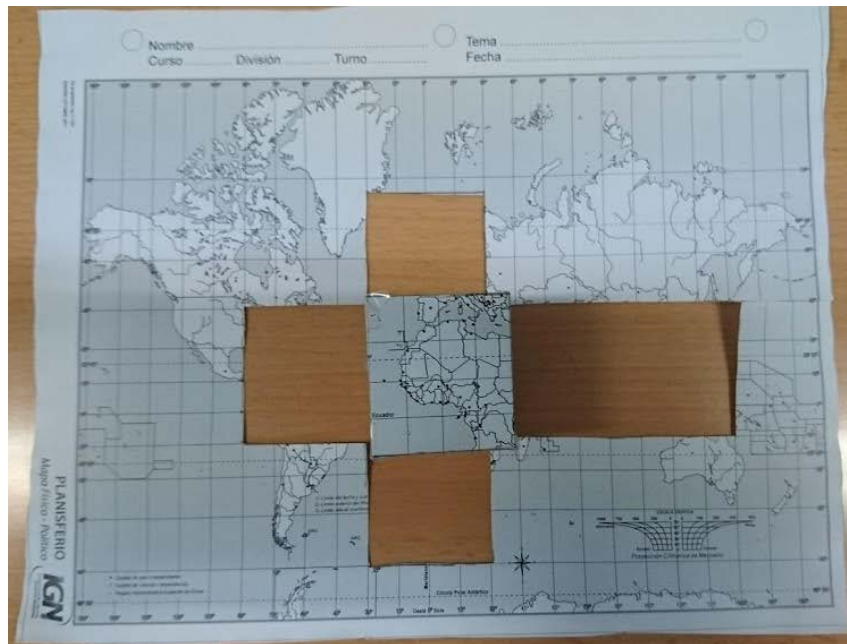


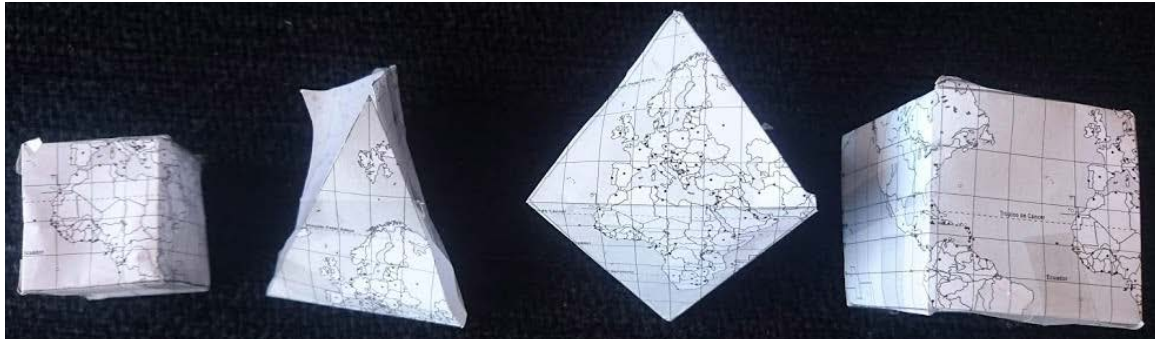
Els pocs alumnes que van poder acabar van ser aquells qui van fer el cub i en dos casos els tetraedres, però força malament (A9).





En observar els cossos geomètrics assolits, vaig descobrir una característica comuna: el desenvolupament pla es va centrar a Europa. Llavors, una de les cares conté Espanya.





El temps de la sessió es va esgotar sense arribar a establir comparacions ni conclusions sobre la relació entre la superfície del mapa utilitzada per dibuixar els desenvolupaments plans i el cos geomètric que millor representa la Terra.

Annex 24.

Notes de camp de la Tasca 1 amb codis d'identificació dels indicadors d'*idoneïtat didàctica*.

Data	Divendres, 13 de desembre de 2019, 12.25 hores.
<p data-bbox="204 443 373 477">Antecedents</p> <p data-bbox="204 499 1385 589">Amb la col·laboració del professor de geografia de l'institut, vam poder duu a terme la seqüència didàctica de dibuix geomètric amb alumnes de primer d'ESO.</p> <p data-bbox="204 674 676 707">Divendres, 12.25 a 13.30 hores [4.2.3]</p> <p data-bbox="204 730 1385 887">El professor de geografia em va presentar a la classe. Va fer menció de la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va convidar a donar tot el seu suport a la tasca. No va semblar que hagués gaire interès per part dels alumnes.</p> <p data-bbox="204 965 1385 1693">Seguidament vaig organitzar el grup en vuit equips, com que la classe va ser de 30 alumnes [4.2.1], es van fer sis grups amb quatre alumnes i dos amb tres [4.2.2]. Com que l'aula va tenir tres fileres amb dues tauletes, es van fer tres equips a les fileres dels costats i dos a la filera del mig, d'aquesta manera es va evitar el moviment dels alumnes per tractar de mantenir l'ordre de la classe [4.2.2, 4.2.4, 4.2.5]. Immediatament vaig començar repartir el material als equips: fulls d'instruccions, full de registre de respostes, un full A3 de cartolina de color (29,7×42 cm), un regle de 40 cm, un escaire gran i un cartabó també gran i unes estisores. Al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Aleshores, vaig interrompre breument la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Aquesta intervenció no va ser ben rebuda pels alumnes. Alguns van fer cas, uns altres van seguir fent-ho però vigilant de no ser vistos.</p> <p data-bbox="204 1771 1385 1984">Davant aquesta situació, em vaig apressar a fer l'explicació de l'activitat amb la intenció de que es possessin a treballar el més aviat possible per trencar amb la dinàmica de fer malbé els companys i el material. Llavors, vaig ometre el context del concurs de globus per reduir el temps de participació passiva dels alumnes i passar directament a la part activa [6.3.1]. Els vaig plantejar</p>	

l'objectiu de la tasca: produir tots junts una figura geomètrica amb el material donat: un octaedre. Segons el disseny de la tasca s'esperava que els mateixos alumnes, tota la classe, fessin una discussió per analitzar les dimensions dels fulls donats i concloure quines mides hauria de fer el cos geomètric i així les seves cares. Però la manca de participació de la classe em va fer dirigir l'activitat i donar només les següents dades: *Per tal de construir tots junts un tetraedre es necessiten vuit figures geomètriques amb la forma de les cares, quina és o quines són? Es tracta de triangles, però d'un tipus especial: triangles equilàters. Llavors, cada equip ha de fer un triangle equilàter. Heu de tenir cura de que tots el triangles siguin iguals, per tant han de tenir les mateixes mides, quines poden ser? Fixem l'altura del triangle, aquesta serà la mateixa altura que fa el full. Amb aquesta informació teniu prou per dibuixar la figura? Endavant!* [1.2.3, 1.2.6, 1.3.3, 1.3.4, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4,]

Els alumnes van començar a treballar. Com es normal, hi ha alumnes que participen més que els altres i també hi ha equips més col·laboratius que uns altres. El que va ser evident va ser la diferència dels procediments de traç dels equips: un equip va començar pel vèrtex oposat al costat horitzontal de la figura, un altre va trobar primer un costat horitzontal, va haver qui va començar per un costat transversal... [1.1.1, 1.3.1, 2.4.3, 3.1.5, 3.3.1, 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3]

Vista aquesta situació i en previsió de les diferències que es tindrien sota aquesta dinàmica de treball, vaig tractar d'orientar els traços cap al dibuix de prova que vaig fer a la meva preparació a casa donant instruccions a tot el grup:

1. Trieu un dels costats més llargs del full per localitzar un dels costats del triangle equilàter.
2. Preneu mides d'aquell costat més llarg i identifiqueu el seu punt mig: com que la longitud del costat és 42 cm, el punt mig és a 21 cm de qualsevol dels seus extrems.
3. Traceu l'altura del triangle a partir del punt mig.
4. Mitjançant prova i error trobeu les longituds dels costats del triangle en tractar d'unir el punt de l'altura amb el costat oposat del full.

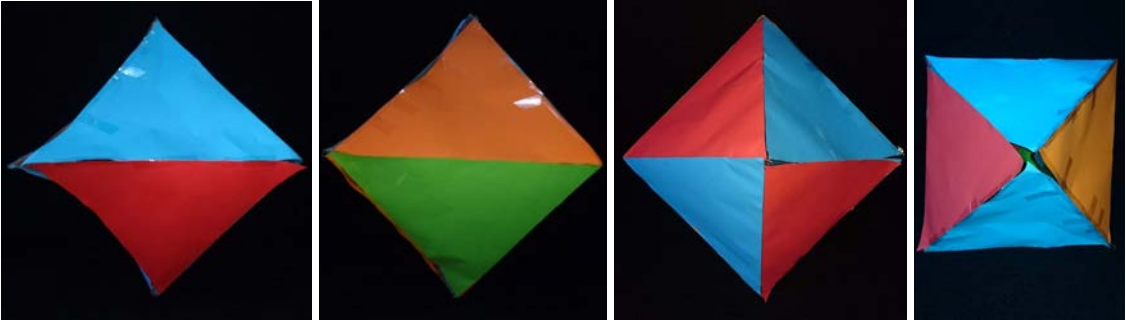
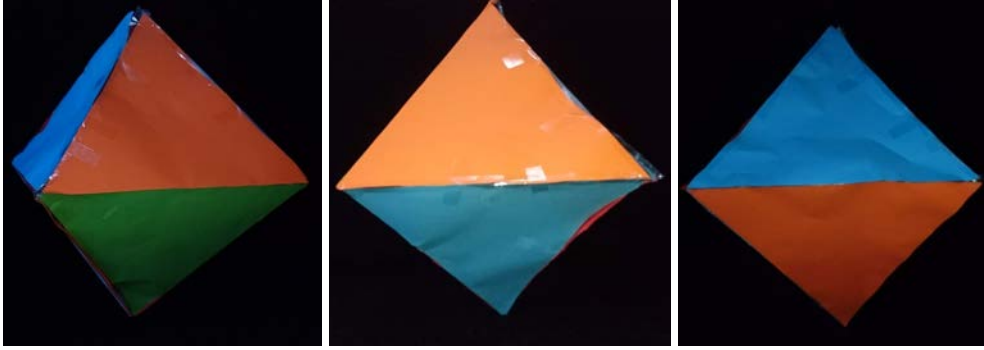
[1.1.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.6, 1.3.1, 1.4.2, 1.4.6, 2.1.2, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.9, 4.3.2., 4.3.3]

La metodologia més comú va ser el treball entre dues persones (i fins i tot només una) i la resta observant els companys [3.2.2, 3.3.2, 3.3.3]. Quan l'alumne que es posava a fer el traç

fracassava al seu intent, ho començava a fer un altre. No va haver-hi gaire preocupació en fer-ho bé. En general, la classe no va mostrar gaire d'interès en l'activitat i van acabar ràpidament aquesta primera part [5.1.1., 5.1.2, 5.1.3]. Per tant, va haver poc diàleg entre els membres dels equips [1.3.2, 3.2.1, 3.3.1, 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3]. A més dels termes o conceptes utilitzats en les instruccions verbals que vaig fer, en les converses entre els alumnes es feia referència a la ubicació espacial sobre el full amb paraules com ara: aquí, allà, més, menys, més lluny, més aprop [1.4.1, 1.4.2]. A banda dels registres de les mides de les longituds [1.4.10, 5.3.4] donades a les instruccions generals, els alumnes van utilitzar termes col·loquials per expressar les característiques de les formes dibuixades: ratlla, està tort(a). [1.4.1, 1.4.2, 1.4.4, 1.4.5, 2.2.1, 2.4.3, 2.4.1, 2.4.3, 3.1.5, 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 4.1.6, 4.1.7]

Per construir l'octaedre els vaig demanar un representat de cada equip [5.2.2]. Tots plegats, els representants dels equips es van organitzar entre ells per ajuntar les cares del cos geomètric amb celo. El grup d'alumnes es va posar al davant de l'aula, sobre l'esglaó on es troba l'escriptori del professor. En un inici van treballar tots junts sota el lideratge d'un nen qui prenia la iniciativa en fer alguna cosa, però el diàleg va tornar a ser escàs i poc matemàtic [3.2.1, 3.2.2, 3.3.3, 4.1.6, 4.1.7]. A mesura que enganxaven les cares, l'oportunitat i l'espai de participació es reduïa i dificultava la tasca [3.2.1, 3.2.2]. Llavors, es va demanar als alumnes que ja no feien res tornar als seus equips [3.1.7, 3.1.9]. Aleshores, el grup ja no estava al cas del que feien els seus companys i el soroll era massa fort. Malgrat que tenien un qüestionari amb preguntes fetes a partir dels indicadors de les facetes de la idoneïtat didàctica, però sobre els aspectes que poden donar resposta els alumnes, la majoria no el feien o només un alumne llegia les preguntes però sense donar cap resposta. Aleshores, vaig començar a recollir el material, ja que tornaven a fer-li mal bé [3.1.10].

La tasca es va terminar uns minuts abans de l'hora de classe [1.4.3, 2.1.2, 2.4.3, 3.1.6, 4.3.1, 6.4.1], llavors vaig aprofitar per fer el qüestionari de manera grupal. Vaig anar llegint pregunta per pregunta però els alumnes no responien gaire. En sonar la campana, la majoria van sortir de cop de l'aula. Em vaig adonar de que ja volien sortir perquè es tractava de l'hora de dinar i a més, era divendres! [4.2.3] Només dos o tres alumnes van romandre a l'aula per ajudar tornar les cadires al seu lloc i netejar una mica les peces de cartró a terra. [1.4.12]



[1.1.1, 1.4.3, 1.4.6, 1.4.11, 1.4.12, 2.1.2]

Annex 25.

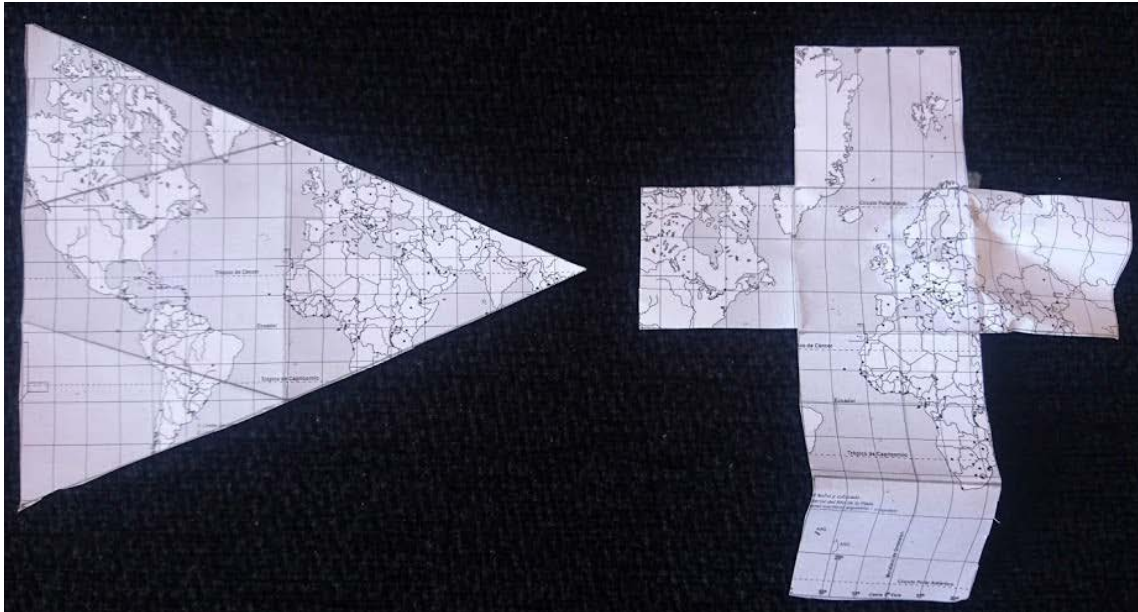
Notes de camp de la Tasca 2 amb codis d'identificació dels indicadors d'*idoneïtat didàctica*.

Data	Divendres, 10 de gener de 2020, 12.25 hores [4.2.3].
<p>El professor de geografia va recordar a la classe la tasca de recerca que fem a la Universitat al voltant de la matemàtica educativa i els va tornar a convidar a donar tot el seu suport a la tasca.</p> <p>Recordant l'organització de l'aula (tres fileres amb dues tauletes d'amplada), vaig organitzar el grup en dos equips per filera per tal d'arribar a sis equips amb 5 alumnes en total [4.2.1, 4.2.2, 4.2.4, 4.2.5]. Amb l'ajuda del professor vaig repartir el material als equips: un full d'instruccions, cinc mapes, un joc d'eines de dibuix geomètric, estisores i celo. De la mateixa manera que la sessió passada, al moment de fer l'entrega del material als nens van començar a fer-lo malbé: tallar les taules amb els regles i les estisores, fer cops als companys, tractar de doblegar els regles, punxar als companys amb els escaires i cartabons... Una altra vegada, vaig haver d'interrompre la repartició del material per cridar l'atenció als alumnes i demanar la cura del material en préstec. Com la darrera ocasió, el alumnes van mostrar disgust i van seguir amb la mateixa actitud però vigilant no ser vistos.</p> <p>Els vaig explicar l'activitat: trobar la millor representació en tres dimensions pel mapamundi. El professor de geografia va intervenir per explicar breument la dificultat que hi ha per fer representacions acurades de la Terra [6.2.2, 6.2.3, 6.3.1]. Vaig demanar als alumnes que dins cada equip fer la distribució de les cinc opcions dels exemples dels fulls d'instruccions: tetraedre, cub, octaedre, dodecaedre i icosaedre [1.2.1, 1.3.3, 1.3.4, 1.4.1, 1.4.2, 1.4.3., 1.4.4, 1.4.5, 1.4.6, 1.4.8, 1.4.9, 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3]. Així, cada membre de l'equip hauria de dibuixar un desenvolupament pla al mapamundi per reconstruir-lo en tres dimensions i comprovar amb quin cos geomètric es conserva més superfície del mapa [1.3.2,].</p> <p>Els alumnes no estaven gaire motivats a treballar [5.1.1, 5.1.2, 5.1.3] i aquesta oportunitat de triar es va convertir en una lluita per triar "el cos geomètric més fàcil" o per assignar "el cos geomètric més difícil" al company menys estimat de l'equip. Aquesta darrera situació va ser molt pronunciada a un equip on vaig identificar una actitud molt agressiva d'una nena qui va "deixar"</p>	

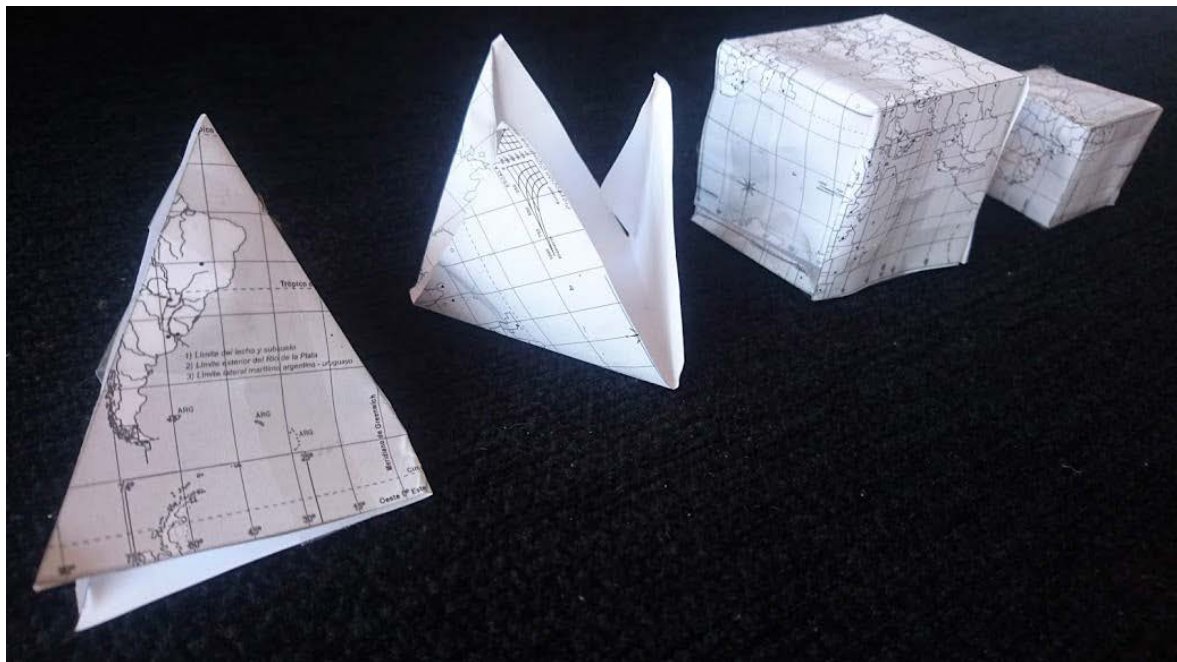
l'icosaedre a un dels seus companys. El nen, trist, estava en silenci tractant d'esbrinar com en sortir-se quan em vaig apropar i li vaig preguntar a la nena perquè li havia assignat ella el cos al seu company. La nena no va contestar res i la vaig convidar a fer-lo ella. Llavors, la seva actitud d'abús va parar i ella es va concentrar en tractar de fer el que li vaig assignar [3.1.5, 3.1.9, 3.2.2, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3].

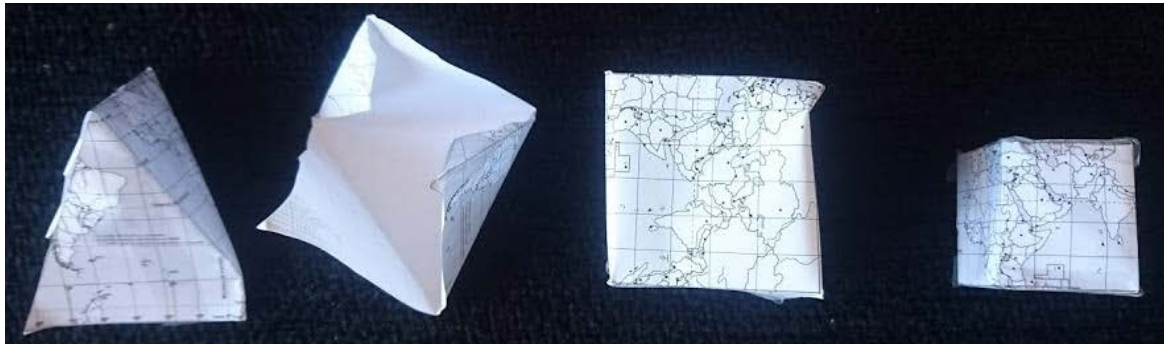
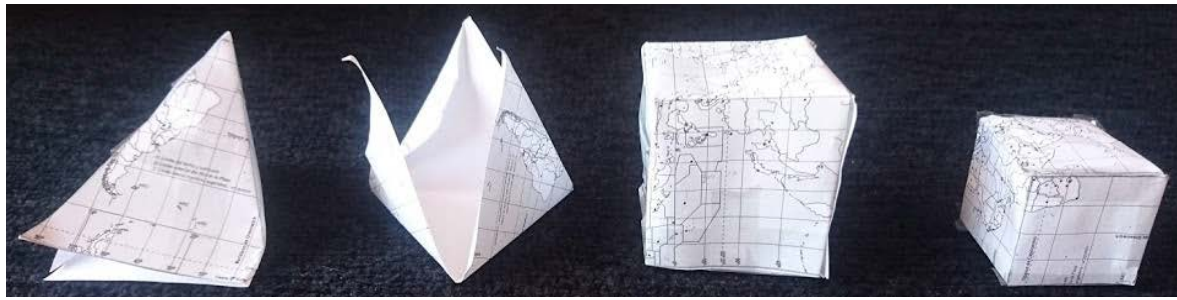
Van haver-hi moltes preguntes sobre com fer els traços, era evident que no tenien gaire pràctica amb el dibuix geomètric [1.1.1, 2.1.1, 2.4.1]. Els equips van demanar força d'ajuda tant al professor de geografia com a mi [3.3.1,]. Entre les preguntes, la que més es va repetir va ser com dibuixar un pentàgon regular per traçar el dodecaedre [1.3.3]. Els alumnes van dir que eren coses no feien a l'assignatura de matemàtiques. En aquí em vaig adonar de que no hi havia inclòs un compàs o motlles/plantilles de cercles i que això era un impediment pel desenvolupament d'aquesta part de la tasca i vaig haver d'ometre aquest cos geomètric als equips [1.4.4, 1.4.5, 1.4.6, 2.1.2, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 3.1.5, 3.1.6, 3.1.7, 3.1.9]. Els dibuixos del desenvolupament pla de cossos diferents al cub es van complicar massa i també vaig veure que la majoria dels casos els alumnes no van establir cap relació entre les mides del mapa i les mides que registraven (les quals serien les mides del cos dibuixat) [1.4.9, 1.4.10]. Llavors, es van deixar molta de superfície fora del desenvolupament pla [1.4.4, 1.4.5, 1.4.6.]. Això es va mencionar per cada equip i també es va puntualitzar la importància de "mantenir" les terres dels continents per fer una millor representació del planeta amb el cos geomètric assignat [1.1.1, 1.2.1, 1.2.2, 1.3.3, 1.3.4, 3.1.9, 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, 4.1.6, 4.1.7].

Segons es podia observar, els alumnes podien dibuixar una de les cares del cos geomètric però la construcció del desenvolupament pla ja no era possible perquè hi havia dificultat per identificar la posició relativa entre les figures. És a dir, un cop dibuixada la primera de les cares, els alumnes no van poder continuar el traç per tal d'obtenir la seqüència correcta de figures iguals [1.1.1, 1.4.2, 1.4.3, 1.4.11, 1.4.12].

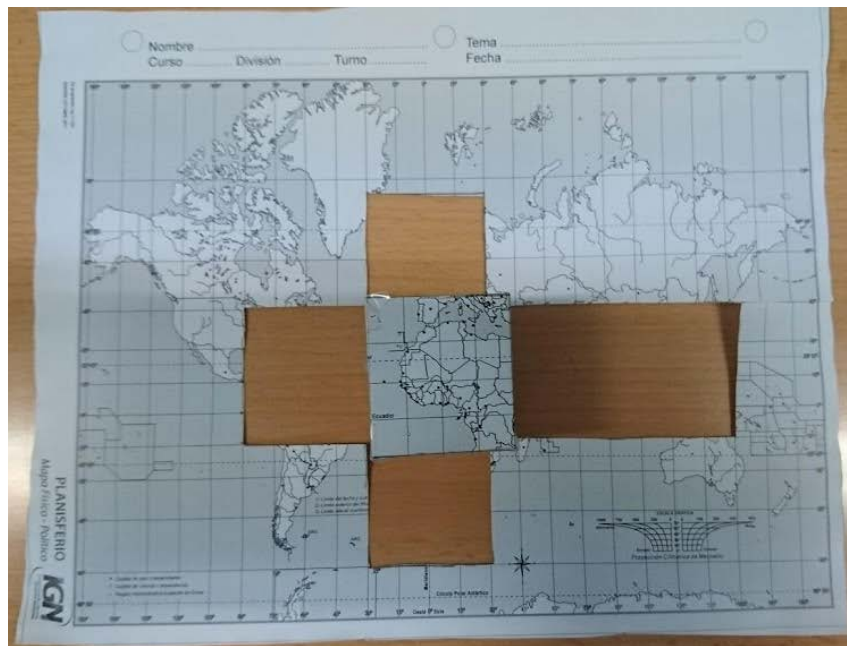


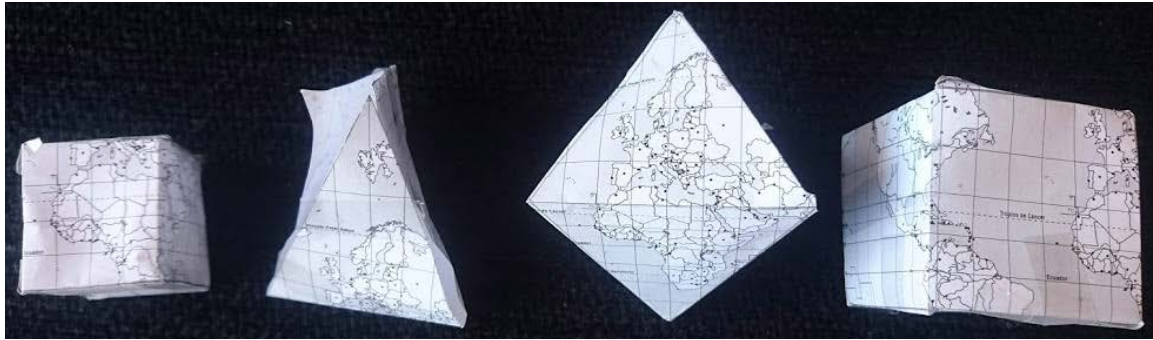
Els pocs alumnes que van poder acabar van ser aquells qui van fer el cub i en dos casos els tetraedres, però força malament [2.1.2, 2.3.1, 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, 3.1.10, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 4.1.8, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 6.2.1].





En observar els cossos geomètrics assolits, vaig descobrir una característica comuna: el desenvolupament pla es va centrar a Europa. Llavors, una de les cares conté Espanya.





El temps de la sessió es va esgotar sense arribar a establir comparacions ni conclusions sobre la relació entre la superfície del mapa utilitzada per dibuixar els desenvolupaments plans i el cos geomètric que millor representa la Terra [4.1.8, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3].