

ANÁLISIS TEÓRICO Y EXPERIMENTAL DE UNA VIGA SMA A FLEXIÓN

Introducción

5.1. Análisis teórico de la flexión en una viga empotrada SMA

- 5.1.1. Antecedentes en el análisis a flexión de SMA
- 5.1.2. Modelo de viga empotrada a flexión: pequeñas deformadas
- 5.1.3. Implementación numérica del modelo de viga: pequeñas deformadas
- 5.1.4. Análisis de las hipótesis impuestas en el modelo de viga
 - 5.1.4.1. Hipótesis de simetría tracción-compresión
 - 5.1.4.2. Hipótesis de pequeñas deformadas
- 5.1.5. Implementación numérica del modelo para grandes deformadas

5.2. Diseño experimental de una viga empotrada SMA a flexión

- 5.2.1. Equipos experimentales y procedimiento experimental
- 5.2.2. Resultados experimentales

5.3. Análisis del modelo a flexión y contrastación experimental

- 5.3.1. Verificación experimental del modelo con grandes deformadas a través de los ensayos a tracción
 - 5.3.2. Verificación experimental del modelo con grandes deformadas con los modelos constitutivos.
-

INTRODUCCIÓN

Como se ha podido apreciar de los capítulos anteriores, el desarrollo de un modelo constitutivo efectivo junto con un algoritmo de integración suficientemente robusto no es una tarea fácil. Esto es principalmente debido a que la descripción de transformaciones de fase requiere marcos teóricos no convencionales. Además, experimentalmente se puede demostrar que la repuesta del material depende en gran medida del modo de deformación. Por todo ello, incluso en el caso más simple unidimensional, la respuesta estructural de un elemento SMA no es trivial y el

desarrollo de un modelo de viga para SMA tiene gran interés en el ámbito del modelado de estos materiales.

El objetivo de este apartado es desarrollar un modelo de viga empotrada y sometida a flexión mediante la aplicación de una carga puntual en el extremo en voladizo, basado en la teoría clásica de Euler–Bernouilli. La simplicidad derivada de los pocos parámetros cinemáticos implicados en el modelo de viga permite el análisis detallado del complejo comportamiento de las aleaciones. Para poder cumplir este objetivo se requieren las relaciones tensión deformación de un modelo constitutivo. Si, además, el modelo es simple, efectivo y adecuado para la implementación algorítmica, se puede obtener el comportamiento de una viga de material SMA. Por tanto, se desarrolla un modelo de comportamiento a flexión para una viga empotrada SMA de NiTi utilizando las relaciones constitutivas de los modelos expuestos en el Capítulo 2 y verificados experimentalmente en el Capítulo 4. De esta manera, se pueden comparar de nuevo los modelos analizados pero bajo condiciones de carga diferentes a la de tracción.

Paralelamente, se ensaya en el laboratorio el comportamiento a flexión de una viga empotrada de SMA NiTi a diferentes temperaturas, obteniendo la relación fuerza-deformada para el extremo libre de la viga. Este modo a flexión para una viga SMA tiene un interés especial, puesto que, si el análisis se realiza bajo condiciones de baja velocidad de aplicación de la carga, el gradiente de momento flector al que se someten las distintas secciones de la viga, permite evaluar la propagación de la transformación al incrementar la fuerza aplicada. Si se supone que existe un único frente de nucleación de la transformación a lo largo de la viga, localizado en la sección que primero alcanza la tensión límite de transformación (dependiente de la temperatura de cada ensayo), al incrementar la carga aplicada, se puede evaluar teóricamente dónde se inicia la transformación, cómo se va propagando con el incremento de dicha carga y cómo afecta a la deformada en el extremo libre. Esta situación no se produce en los casos de flexión pura donde la deformada depende de dónde se inicie la transformación.

Mediante la implementación numérica del modelo a flexión desarrollado, teniendo en cuenta las relaciones constitutivas de los diferentes modelos presentados en este trabajo,

y comparando los resultados numéricos con los experimentales, se puede analizar y comparar dichos modelos con una aproximación diferente a la realizada en el Capítulo anterior.

No es posible encontrar en la literatura un estudio a flexión como el presentado en el presente trabajo, donde se combine un detallado análisis experimental junto con una implementación teórica y numérica de los modelos macromecánicos presentados.

Otra aportación interesante de este Capítulo será la verificación de las hipótesis de partida realizadas en el modelo a flexión. La hipótesis fundamental será la hipótesis de Euler-Bernouilli que establece que las secciones planas antes de la deformación permanecen planas después de la deformación. La contrastación experimental del modelo teórico con los resultados obtenidos en el laboratorio, permite comprobar la bondad de dicha hipótesis.

Otra aproximación empleada en el modelo de viga es el desarrollo en el ámbito de pequeñas deformadas, de tal forma que el momento provocado en cada sección por la carga aplicada en el extremo libre de la viga, es proporcional a la distancia entre el extremo libre y la sección analizada. Esta hipótesis inicial será analizada con detalle comparando el resultado con el supuesto contrario: que la deformada en el extremo es suficientemente grande como para que los momentos dependan del giro de cada sección. La comparación de los resultados de ambos supuestos con los valores obtenidos experimentalmente permite deducir si la complejidad introducida en el segundo caso (grandes deformadas) aproxima mejor los resultados reales.

La última hipótesis impuesta necesariamente en el modelo es la de simetría del comportamiento a tracción y compresión. En el Capítulo 3 se comentó como diversos autores han demostrado que el comportamiento puede ser significativamente diferente bajo ambos modos de carga. En este capítulo se verifica si los resultados a flexión están realmente tan condicionados por esta diferencia en el comportamiento y, se aporta, desde un punto de vista teórico y numérico, las modificaciones necesarias en el modelo presentado para incluir la diferencia en el comportamiento entre tracción y compresión.

Con todo esto, se puede establecer de forma más completa una verificación de las diferentes formulaciones para el modelado de las aleaciones con memoria de forma, comprobando así la efectividad teórica y numérica para el análisis de elementos estructurales.

5.1 DESARROLLO TEÓRICO DE LA FLEXIÓN EN UNA VIGA EMPOTRADA SMA

5.1.1. Antecedentes en el análisis a flexión de SMA

Desde el punto de vista teórico, el primer estudio preliminar realizado para una viga superelástica SMA fue el realizado por Atanackovic [ATA,1989] donde se dedujo una relación analítica explícita entre el momento y la curvatura basado en una ley constitutiva muy simple para el comportamiento superelástico de las SMA. Plietsch et al. [PLI,1994] estudiaron la flexión de vigas de sección rectangular SMA desarrollando un modelo analítico para la flexión pura aplicado al caso superelástico; suponiendo el comportamiento del material como una suma de sucesivos tramos rectos y elásticos, derivaron un procedimiento muy simple partiendo de muy pocos parámetros del material. Esta aproximación, sin embargo, está excesivamente simplificada considerando el complejo comportamiento de las SMA. Rio et al [RIO, 1995] utilizaron un modelo de elastohistéresis para el análisis teórico de vigas a flexión teniendo en cuenta los efectos térmicos. Gillet et al [GILL, 1994], [GILL, 1995],[GILL,1998] consideraron una relación más compleja entre la tensión y la deformación en 3D para el análisis de vigas y de muelles SMA y teniendo en cuenta la asimetría tracción-compresión. Rejzner, LExcellent y Raniecki [REJ,2002] analizaron también el comportamiento pseudoelástico a flexión de vigas SMA con distinto comportamiento a tracción y compresión utilizando el modelo termodinámico de Raniecki y LExcellent y comparándolo experimentalmente con ensayos de flexión pura para aleaciones CuZnAl.

Auricchio et al [AUR,1997]_a, [AUR,1999] realizaron una aproximación teórica para el análisis de un elemento SMA superelástico bajo condiciones de flexión en tres y cuatro

puntos, aplicándolo al análisis de alambre dentales [AUR,2003] y al análisis de cargas de flexión cíclicas [AUR,2001]. Glendenning et al. [GLE,2000] aplicaron el modelo de Auricchio unidimensional lineal superelástico para el análisis de elementos SMA aplicados a la ortodoncia. Brinson [BRI,1997] aplicó su modelo al análisis a flexión pero utilizando el alambre SMA como actuador para el control de la flexión de una viga de material compuesto. Una aproximación muy similar es la empleada por Moallem [MOA,2003] para el control de una viga actuada por un alambre SMA gobernado, a su vez, mediante corriente eléctrica. Utilizando el modelo de Boyd y Lagoudas [BOY,1994] Shu et al. [SHU,1997] analizaron la deformada de una viga de material elástico a flexión causada por un alambre SMA unido en su extremo y activado eléctricamente, acoplando la ecuación constitutiva de Boyd-Lagoudas con la ecuación de conducción de calor, determinaron la fuerza de actuación sobre la viga elástica.

En la mayoría de los casos anteriores, la verificación del modelo a flexión fue realizada a partir de valores teóricos generales, no realizándose un desarrollo experimental propio para la comprobación de los resultados.

Existen también algunos estudios del análisis a flexión de alambres o láminas SMA embebidos en materiales compuestos (composites) como el de Ghomshei [GHO,2001]_a, [GHO,2001]_b que analizaron la flexión de una viga de gran canto de composite con láminas SMA activadas mediante corriente eléctrica o los estudios realizados por Sittner et al [SIT,2002] para polímeros reforzados con alambres SMA. Utilizando el modelo de Liang y Rogers, Sun et al [SUN,1995] analizaron la flexión producida en un composite reforzado con alambre SMA así como Bruck et al [BRU,2004] en el que el material donde se embebían las SMA era poliuretano y analizaban la flexión del alambre dentro de la matriz. Otros estudios dentro de este campo son los de Gupta et al [GUP,2003], Yue et al [YUE,2003], Aoki et al [AOK,2003] o Marfia y Sacco [MAR,2003].

En el campo experimental el estudio más exhaustivo fue el realizado por Wick [WIC,1995] que analizó la flexión en 3 puntos, 4 puntos y flexión pura de un alambre de sección circular (diámetro=1,54 mm) y cuadrada (1,33*1,35 mm²) de NiTi superelástico (50,8% Ni y $A_f=-17^{\circ}\text{C}$). Comparó los resultados de los ensayos de 4

puntos y flexión pura con los obtenidos a tracción para examinar el comportamiento de la meseta de tensión, determinando que los valores en flexión eran bastante más altos que en tracción. Para comparar los resultados experimentales con los teóricos, utilizó la teoría de plasticidad modificada empleada por Atanackovic, determinando diferencias en el comportamiento en la descarga. B.T. Berg [BERG,1995]_a analizó el comportamiento en flexión pura diseñando un aparato experimental específico para diferentes secciones de alambre NiTi superelástico (55Ni45Ti %wt) que midiera la relación entre el momento en flexión y el ángulo de curvatura. En [BERG,1995]_b aplicó las relaciones constitutivas entre el momento y la curvatura al caso de flexión en tres puntos, comparándolo también con los resultados experimentales.

Como se puede apreciar de esta revisión previa, en ningún caso se ha analizado el comportamiento a flexión de una viga SMA como el que se presenta en este trabajo, ni a nivel experimental ni a nivel teórico y numérico. Tampoco se han verificado directamente los modelos constitutivos presentados en este trabajo bajo estas condiciones de carga, comprobando adecuadamente la idoneidad de las hipótesis establecidas en cada caso.

5.1.2. Modelo de viga empotrada a flexión: pequeñas deformadas

Se analiza en este apartado el modelo desarrollado para una viga plana de material SMA, de longitud L , sección transversal circular maciza A , empotrada por un extremo y sometida a una fuerza F que supondremos puntual en el extremo opuesto y contenida en el plano xy (figura 5.1). La viga tiene un eje vertical y de simetría y el eje x horizontal pasa por los centroides de las secciones transversales. El análisis está fundamentado en la teoría de vigas clásicas o teoría de Euler-Bernoulli, cuyas hipótesis son [TIM,1970]:

1. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje x de la viga.
2. El desplazamiento lateral (en la dirección z) es nulo.
3. Las secciones transversales normales al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas y ortogonales a dicho eje después de la deformación. Esta hipótesis es aceptable para elementos rectangulares elásticos en flexión pura [TIM,1970]. En

este caso, al incluir fuerzas cortantes, se introducirá un error que deberemos analizar, pero que, en principio será pequeño puesto que el peralte de la viga es mucho más pequeño que su claro.

Estableceremos, además, una hipótesis adicional:

4. El comportamiento del material a tracción y compresión es el mismo y, en consecuencia, al ser la sección transversal simétrica y coincidir el eje neutro y el eje centroidal, las tensiones y las deformaciones se anularán en el centroide de dicha sección transversal.

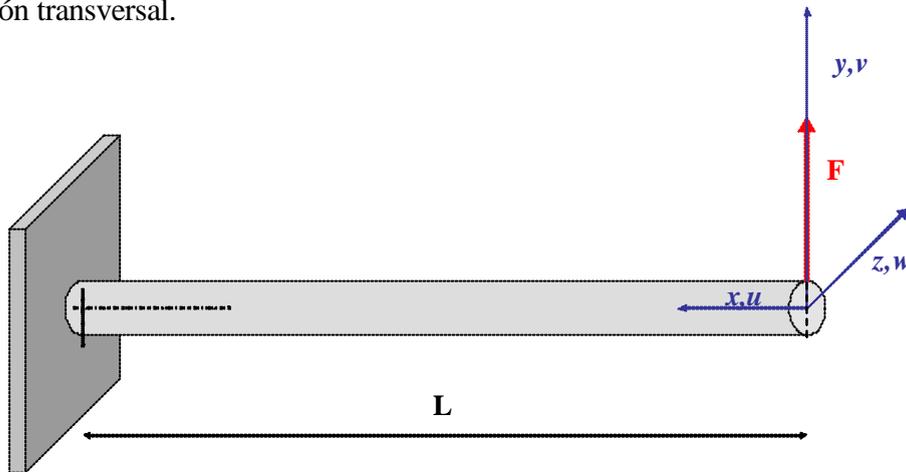


Figura 5.1: Esquema representativo de la viga empotrada de longitud L y sección transversal circular maciza A , sometida a una carga puntual (F) en el extremo.

Si se analiza una porción de la viga entre dos planos perpendiculares al eje x , (figura 5.2) se observa que, cuando esta sección Dx está sometida a dos momentos iguales $M(x)$ que actúan alrededor del eje z , estos momentos provocan la flexión de dicha sección en el plano de simetría, inclinando ligeramente los planos inicialmente perpendiculares, pero permaneciendo rectos (líneas ad y bc y $a'd'$ y $b'c'$ en la figura 5.2) como consecuencia de la hipótesis 3 de Euler-Bernouilli.

Si se amplía el elemento Δx flexionado (figura 5.3) se puede obtener la relación entre el ángulo $\Delta\theta$ girado por dos secciones adyacentes. Teniendo en cuenta que la distancia entre el eje neutro y las fibras deformadas es y (negativo según los ejes dibujados), la deformación de la fibra situada a y del eje neutro es:

EC.5.1

$$\Delta u = -y\Delta\theta$$

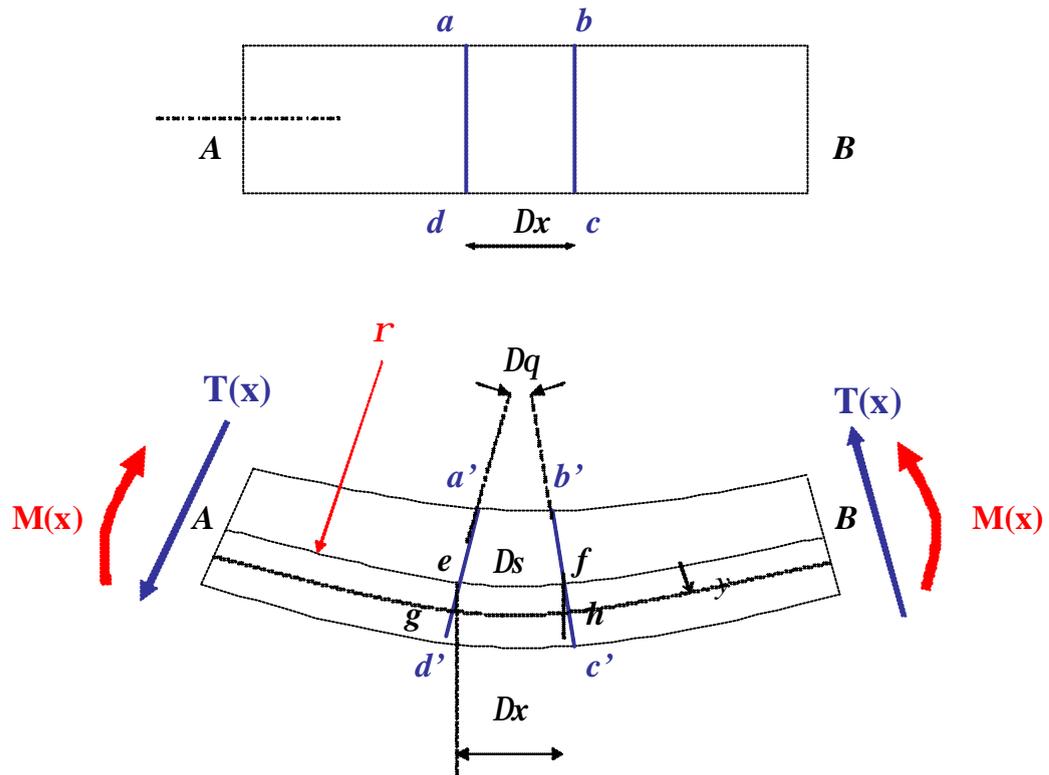


Figura 5.2: Análisis de una porción de la viga de la figura 5.1 entre dos planos perpendiculares al eje x , donde se indican el momento actuante y el radio de curvatura debido a la flexión

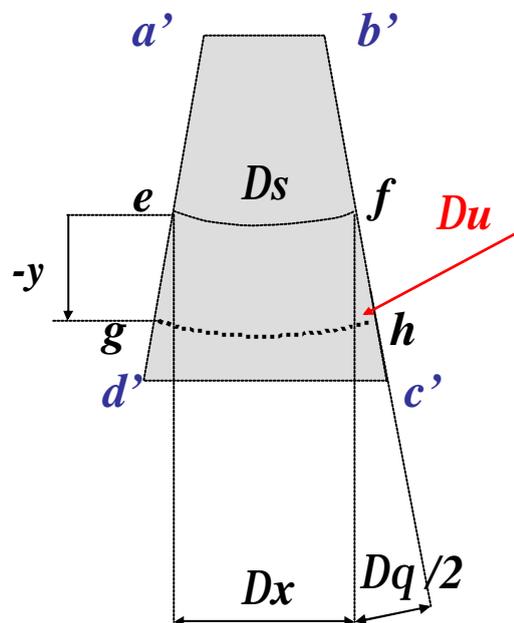


Figura 5.3: Ampliación del elemento analizado a flexión. Se deduce la relación entre el ángulo girado por la sección y el radio de curvatura.

Las fibras que se encuentran en la superficie neutra curva de la viga deformada (distancia ef en la figura 5.3) no se deforman en la flexión. Por tanto, la longitud de arco Ds es la longitud inicial de todas las fibras entre las secciones $a'd'$ y $b'c'$. Así pues, se puede reescribir la ecuación EC.5.1 dividiendo por Ds :

EC.5.2

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = -y \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s}$$

o bien :

$$\frac{du}{ds} = -y \frac{dq}{ds}$$

Y como $\frac{du}{ds}$ es la deformación unitaria normal en una fibra de la viga situada a y del eje neutro, se puede establecer que:

EC.5.3

$$\frac{du}{ds} = e$$

Observando el dibujo de la figura 5.2, se deduce que $Ds = rDq$ y, por tanto:

EC.5.4

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} = \frac{1}{r} = k$$

Donde κ es la curvatura del eje neutro en la sección analizada. Si lo relacionamos con la deformación normal unitaria (EC.5.3), se obtiene:

EC.5.5

$$\frac{1}{r} = k = \frac{dq}{ds} = -\frac{e}{y}$$

En base a la tercera hipótesis de Euler-Bernouilli, podemos establecer que, en una sección transversal cualquiera de la viga, la distribución de las deformaciones será lineal y, en consecuencia a la cuarta hipótesis, las deformaciones serán nulas en el centroide de la sección (figura 5.4). Así, empleando en la ecuación EC.5.5 la deformación máxima (de la

fibra más alejada del eje neutro), podemos determinar el giro de cada sección Dx debida al momento aplicado en dicha sección:

EC.5.6

$$e_{\max} = -\frac{D}{2} \frac{\Delta q}{\Delta x}$$

Una vez conocida la relación entre la deformada máxima en cada sección y su ángulo girado, se puede deducir la deformada total en el extremo de la viga (donde se aplica la carga) mediante consideraciones geométricas. Para ello, se divide la longitud total de la viga en tramos Dx y para cada uno de ellos se calcula el ángulo de giro en función de la deformada máxima mediante la ecuación EC.5.6 tomada en valor absoluto (ver figura 5.5). Calculando la deformada relativa entre secciones o tramos Dx , la deformada en el extremo libre de la viga será la suma total de todas las deformadas relativas. En la figura 5.5 se representa este proceso suponiendo la viga dividida en sólo tres tramos Dx . De acuerdo a este esquema de la figura 5.5, la deformada máxima en el extremo es:

EC.5.7

$$d_{\max} = \sum_{i=1}^n l_{i,i-1}$$

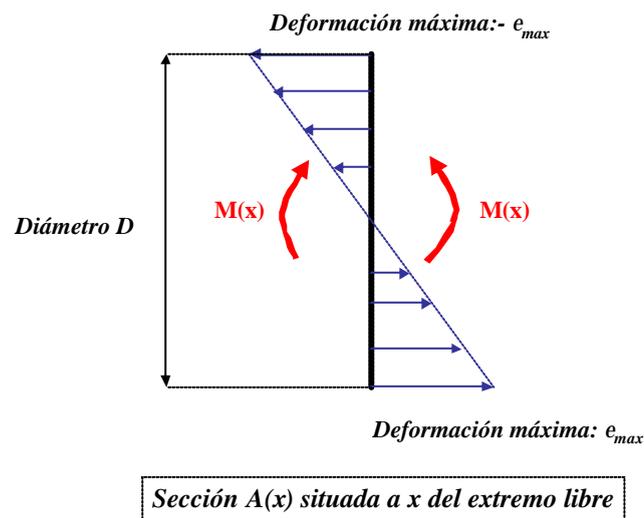


Figura 5.4: distribución de las deformaciones en una sección transversal cualquiera A situada a una distancia x del origen (extremo libre de la viga).

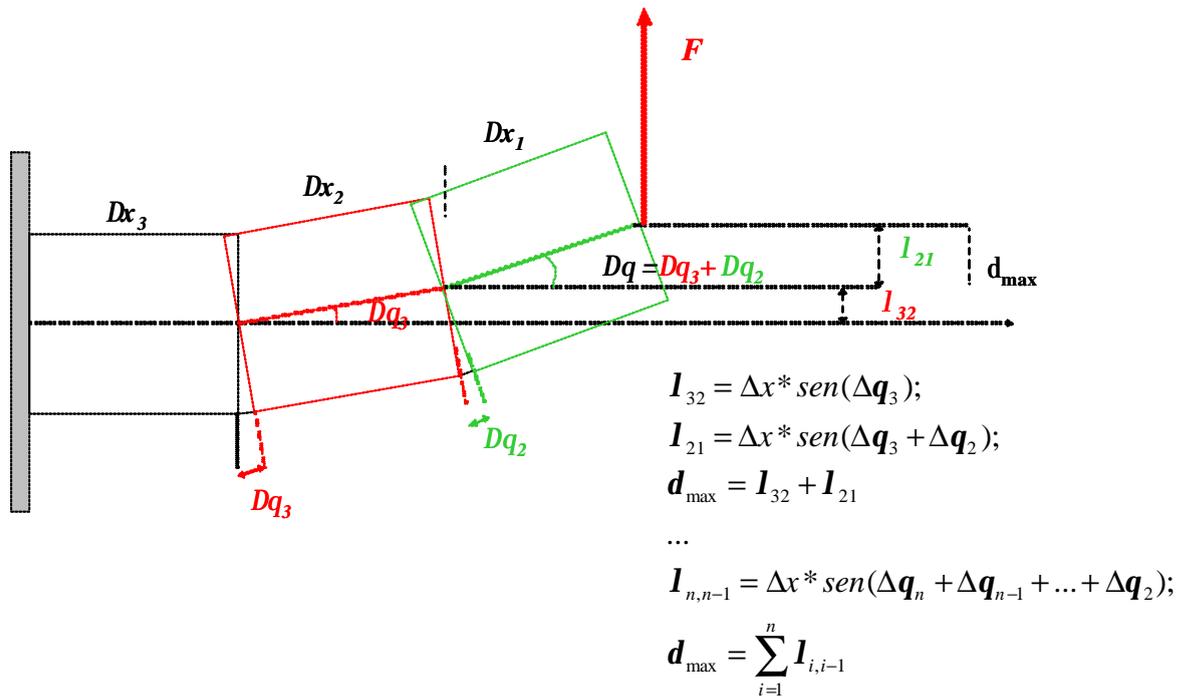


Figura 5.5: Esquema del proceso geométrico para relacionar los giros de cada sección con la deformada en el extremo en voladizo. Para simplificar se suponen la viga dividida solo en tres tramos.

En el proceso anterior, se ha dado por supuesto que la deformación máxima unitaria (ϵ_{\max}) en cada sección era conocida. Para que así sea, se debe encontrar una relación entre el momento aplicado en cada sección y la deformación máxima unitaria resultante. Para encontrar esa relación se impone, en cada sección transversal, la condición de equilibrio que establece que la suma de momentos aplicados externamente y de los momentos resistentes internos debe ser cero:

EC.5.8

$$M_z(x) = \iint_A y * s_x(y) dA$$

Para calcular los momentos externos aplicados, supondremos, en primera aproximación, que las deformadas son pequeñas y, por tanto, el punto de aplicación de la carga no cambia de forma perceptible y el momento flector (girando alrededor del eje z) en cada sección analizada situada a una distancia x del origen, vendrá dado por:

EC.5.9

$$M_z(x) = F \cdot x$$

Esta suposición será mejorada en el apartado 5.1.4 donde el momento en cada sección dependerá del ángulo girado por las secciones adyacentes.

Analizando la ecuación EC.5.8, se puede observar que el proceso de determinación de la deformada máxima en el extremo en voladizo consistirá en un proceso iterativo para determinar qué deformación máxima unitaria (y, en consecuencia, que ley lineal de deformaciones unitarias), produce unas tensiones (que, debido a la no-linealidad del comportamiento del material, no serán lineales) que cumplan con la condición de equilibrio EC.5.8.

Como el objetivo final es obtener la relación *fuerza aplicada-deformada máxima*, para cada F aplicada y para cada sección transversal Dx , se iterará sucesivas veces hasta encontrar la deformación máxima unitaria (y sus tensiones) que cumplan la condición de equilibrio con el momento exterior $F*x$. Esto se explica con más detalle en el apartado siguiente donde se presenta todo el proceso numérico de cálculo.

5.1.3. Implementación numérica del modelo de viga empotrada a flexión: pequeñas deformadas

Como se acaba de presentar, el procedimiento de cálculo de la deformada máxima en el extremo en voladizo de la viga requiere de un proceso de iteración para cada sección de la viga Dx , en el que se determine aquella deformación máxima unitaria (y por tanto, todas las deformaciones unitarias de esa sección) cuyas tensiones asociadas (calculadas según cada modelo constitutivo) cumplan la condición de equilibrio de la EC.5.8. Como se desea calcular la deformada máxima para diferentes valores de fuerza, este proceso deberá repetirse para cada valor de la fuerza exterior impuesta. Este proceso se representa esquemáticamente en la figura 5.6.

Desde el punto de vista numérico, para el proceso de integración necesario para resolver la EC.5.8 sustituiremos el diferencial de área por un diferencial de longitud, mediante la relación entre el diámetro de la sección y la variable y . (figura 5.7).

EC.5.10

$$(D/2)^2 = y^2 + (\frac{z}{2})^2;$$

$$z = 2 * \sqrt{(D/2)^2 - y^2}$$

$$M_z(x) = \iint_A y * s_x(y) dA = \int_{-D/2}^{D/2} s_x(y) * y * 2 * \sqrt{(R^2 - y^2)} dy$$

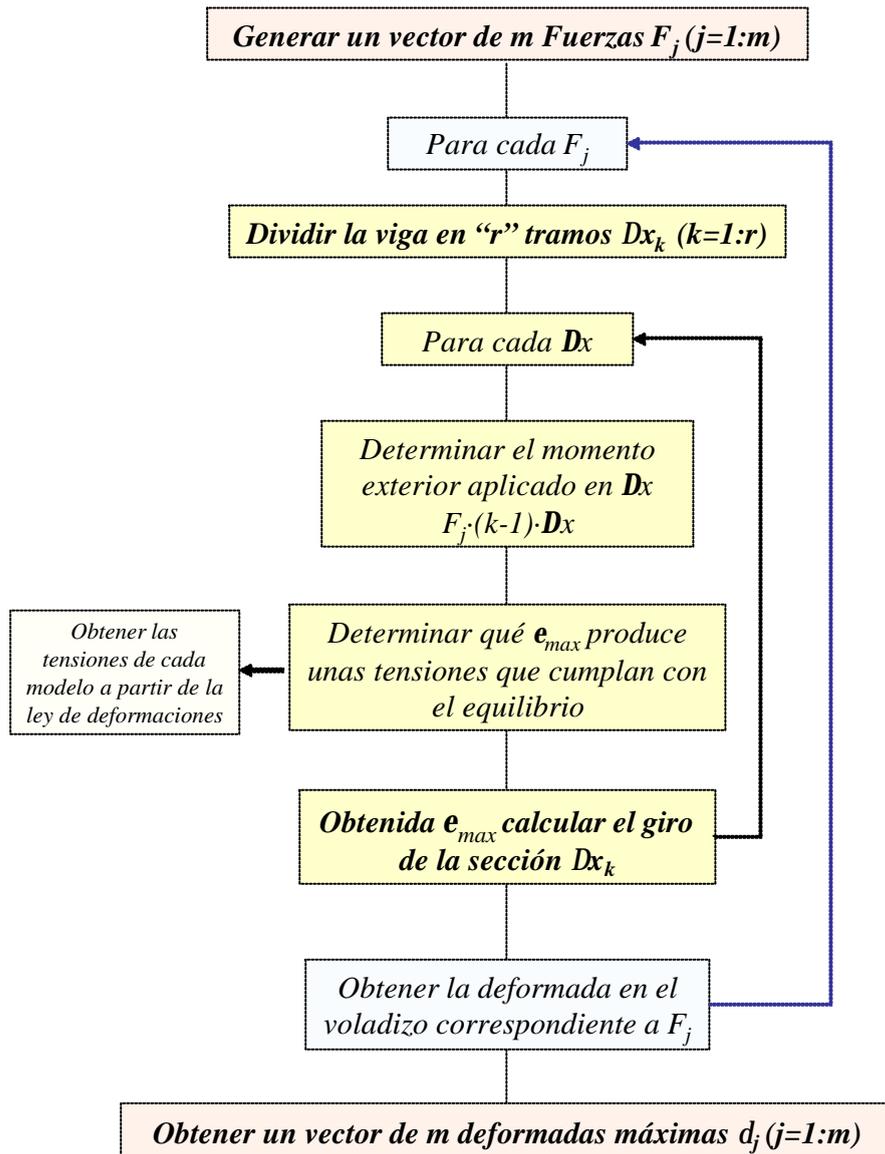


Figura 5.6: Esquema del proceso iterativo para el cálculo de un vector de deformadas máximas en el extremo libre a partir de un vector de fuerzas exteriores aplicadas en el voladizo.

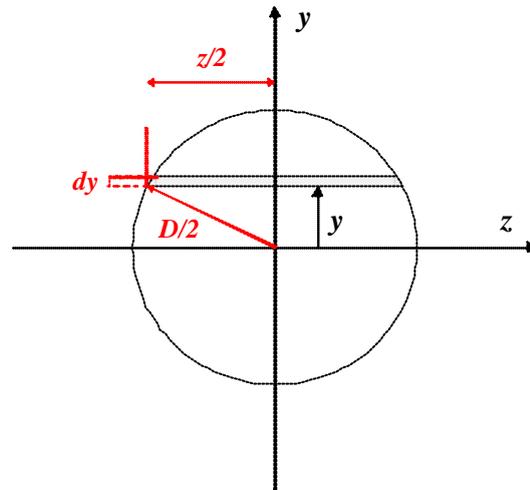


Figura 5.7: Relación entre la variable z y la variable y para pasar de diferencial de área a diferencial de línea.

Para resolver la integral utilizaremos las fórmulas de Newton-Cotes [HOF,1992] donde se sustituye la función a integrar por un polinomio que interpole dicha función en un conjunto de puntos equiespaciados del intervalo de integración. Estos polinomios se obtienen a partir de la fórmula de interpolación de Lagrange (EC.5.11).

EC.5.11

$$\int_{-D/2}^{D/2} f(y)dy \approx \int_{-D/2}^{D/2} P_n(y)dy;$$

$$P_n(y) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(y);$$

$$L_i(y) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{y - y_k}{y_i - y_k};$$

$$\int_{-D/2}^{D/2} f(y)dy \approx \sum_{i=0}^n f_i \int_{-D/2}^{D/2} L_i(y)dy;$$

$$y = -D/2 + h * t$$

$$\int_{-D/2}^{D/2} f(y)dy \approx h \sum_{i=0}^n f_i \int_0^n \mathbf{j}_i(t)dt;$$

$$\mathbf{a}_i = \int_0^n \mathbf{j}_i(t)dt;$$

$$\int_{-D/2}^{D/2} f(y)dy \approx h \sum_{i=0}^n f_i * \mathbf{a}_i$$

Si se divide el intervalo de integración en una partición de intervalos más pequeños y se aplica la integración a cada partición, se obtienen las fórmulas de Newton-Cotes compuestas. Si además se toma $n=2$ se obtiene la fórmula de Simpson compuesta para la integración de cada subintervalo (EC.5.12):

EC.5.12

$$y_i = -D/2 + i * h;$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1;$$

$$h = \frac{D/2 + D/2}{N};$$

$$\int_{-D/2}^{D/2} f(y) dy \approx \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{h}{3} \{f(y_{2i}) + 4f(y_{2i+1}) + f(y_{2i+2})\}$$

Para resolver la integral se deben conocer los valores de la tensión para cada valor de y . Como las deformaciones unitarias son lineales, se impone una deformación máxima unitaria, se obtienen las demás por la relación lineal (EC.5.13) y se calcula, a través de las relaciones constitutivas propias de cada modelo, la tensión correspondiente. Obtenida cada tensión, se calcula la integral y se compara con el momento exterior aplicado en cada sección. Cuando ambos momentos se igualen, la deformación máxima unitaria será la correcta. Para este proceso de resolución recurriremos, de nuevo, al método de Newton-Raphson. (EC.5.14).

EC.5.13

$$e(y) = \frac{y * e_{\max}}{D/2}$$

Una vez obtenida la deformación máxima unitaria que cumpla la condición de equilibrio, se puede obtener el giro correspondiente de cada sección según la EC.5.6 en valor absoluto. Obtenido el giro de todas las secciones, se puede calcular la deformada máxima del extremo en voladizo por la EC.5.7 y según la figura 5.5.

EC.5.14

$$\begin{aligned}
 M(\mathbf{e}_{\max}) &= M_{\text{ext}}(\Delta x_k) - M_{\text{int}}(\Delta x_k) \\
 M_{\text{ext}}(\Delta x_k) &= F_j * (k-1)\Delta x \\
 M_{\text{int}}(\Delta x_k) &= \int_{-D/2}^{D/2} \mathbf{s}_x(y) * y * 2 * \sqrt{(R^2 - y^2)} dy; \\
 k &= 2 \dots r (\text{número de tramos en la longitud}) \\
 \\
 M(\mathbf{e}_{\max}^k) &= M(\mathbf{e}_{\max}^{k-1}) + (\mathbf{e}_{\max}^k - \mathbf{e}_{\max}^{k-1}) * M'(\mathbf{e}_{\max}^{k-1}); \\
 M'(\mathbf{e}_{\max}^k) &= \frac{M(\mathbf{e}_{\max}^k + \text{dif}) - M(\mathbf{e}_{\max}^k)}{\text{dif}} \\
 \text{si } |\mathbf{e}_{\max}^{k+1} - \mathbf{e}_{\max}^k| &\leq \text{TOL} \Rightarrow \mathbf{e}_{\max}^k \text{ solución}
 \end{aligned}$$

El algoritmo completo de resolución se presenta en la Tabla 5.1. Los datos de entrada necesarios para el algoritmo son:

- **Fmax:** fuerza máxima de la simulación para poder generar el vector de fuerzas
- **D:** diámetro de la viga
- **L:** longitud de la viga
- **r:** número de tramos en los que se desea dividir la viga, **función de L y r** según:

$$\Delta x = L/r$$

Para la resolución del método de Newton-Raphson, es necesario:

- **tol_impuesta:** tolerancia deseada en el método de Newton
- **dif:** incremento para el proceso de derivación en Newton-Raphson

Y para la resolución de la integral de Simpson, es necesario definir:

- **N:** número de subintervalos de integración entre $-D/2$ y $D/2$.

Tabla 5.1: algoritmo de cálculo de la deformada máxima en extremo de viga en voladizo

*Crear vector de Fuerzas: F_j ; $j = 1 \dots m$ y crear vector de Dx_k iguales; $k = 1 \dots r$ *

for j=1:m

$d_{\max}^j = 0$

$\Delta q_{\text{acumulado}} = 0$

for k = r : 2

$M_{\text{ext}}^k = F_j * (k - 1) Dx$

p = 1

TOL="valor_inicial"

*imponer deformación máxima primera iteración $e_{\max}^{\text{iteración-p=1}}$ *

while TOL > tol-impuesta

*obtener $e^{\text{iteración-p}}(y) \Rightarrow EC.5.13$ *

*obtener $s_x^{\text{iteración-p}}(y) \Rightarrow \text{modelo constitutivo}$ *

*obtener $M_{\text{int}}^p(\Delta x_k)$ según Simpson $\Rightarrow EC.5.12$ *

$M_p(e_{\max}^p) = M_{\text{ext}}^k - M_{\text{int}}^p(\Delta x_k)$

$M'_p(e_{\max}^p) = \frac{M_p(e_{\max}^p + dif) - M_p(e_{\max}^p)}{dif}$

$e_{\max}^{p+1} = e_{\max}^p - \frac{M_p(e_{\max}^p)}{M'_p(e_{\max}^k)}$

$|e_{\max}^{p+1} - e_{\max}^p| = TOL$

$e_{\max}^{p+1} = e_{\max}^p$

end while

$e_{\max}^k = e_{\max}^p$

calcular giro de sección

$Dq_k = \frac{2 * Dx * e_{\max}^k}{D}$

$\Delta q_{\text{acumulado}} = \Delta q_{\text{acumulado}} + \Delta q_k$

$I_k = \Delta x * \text{sen}(\Delta q_{\text{acumulado}})$

$d_{\max}^j = d_{\max}^j + I_k$

end for

end for

} **Tabla 5.2**

Tabla 5.2: algoritmo de resolución del proceso de integración

*con el valor de N , se genera el incremento en la variable y *

$$\text{incr_r} = D/N$$

for $y = -D/2$: incr_r : $D/2$

$$\mathbf{e}_y^k = \frac{y * \mathbf{e}_{\max}^k}{D/2}$$

Calcular \mathbf{s}_y^k mediante programa de simulación del modelo constitutivo

end for

$$h = \frac{D/2 + D/2}{N}$$

$\text{inc_int} = 0$

for $i = 0$: $(\frac{N}{2} - 1)$

$$y_i = -D/2 + i * h;$$

$$\begin{aligned} \text{incr_int} = \text{incr_int} &+ \frac{h}{3} (\mathbf{s}_x(y_{2i}) * y_{2i} * 2 * \sqrt{(R^2 - y_{2i}^2)} + \\ &+ 4(\mathbf{s}_x(y_{2i+1}) * y_{2i+1} * 2 * \sqrt{(R^2 - y_{2i+1}^2)}) + \mathbf{s}_x(y_{2i+2}) * y_{2i+2} * 2 * \sqrt{(R^2 - y_{2i+2}^2)}) \end{aligned}$$

end for

$$M_{int}^p(\mathbf{D}x_k) = \text{incr_int}$$

5.1.4. Análisis de la hipótesis impuestas en el modelo de viga

5.1.4.1. Hipótesis de simetría tracción/compresión

En el apartado 5.1.2 se estableció, como una de las hipótesis de partida, que existe simetría en el comportamiento del material a tracción y a compresión. Esta hipótesis, pese a que no puede ser contrastada experimentalmente puesto que no es posible realizar ensayos a compresión con el material de estudio de esta investigación, sí puede ser mejora a nivel de análisis teórico y numérico. Se presenta a continuación cuáles serían las diferencias en el modelo si se tuviera en cuenta esta diferencia en el comportamiento del material.

Los modelos constitutivos analizan el comportamiento a compresión exactamente igual que a tracción, diferenciándose, sin embargo, en los valores numéricos de los parámetros constitutivos. Esto quiere decir que el diagrama crítico tensión-temperatura es formalmente igual en tracción que en compresión excepto en los parámetros y , por tanto, si se dispone de esos parámetros, se puede obtener el valor de la tensión a compresión (σ_C) correspondiente a la deformación impuesta (ϵ_C). La diferencia pues, que existe al considerar la asimetría en el comportamiento, afectará al desplazamiento del eje neutro respecto al centroide de la sección y la condición de equilibrio de fuerzas externas igual a fuerzas internas deberá ser impuesta. Además, se deberá tener en cuenta este desplazamiento del centroide para el cálculo del giro de cada sección y el cálculo de la deformada máxima en el extremo en voladizo.

Se presenta a continuación el procedimiento de cálculo adecuado para la consideración de no simetría tracción/compresión.

Suponiendo que el desplazamiento del eje neutro respecto al eje centroidal es d (figura 5.8), la ley de deformaciones en una sección A cualquiera es:

EC.5.15

$$e = -y \frac{e_T^{max}}{\frac{D}{2} + d}$$

Donde e_T^{max} es la deformación máxima en la zona traccionada (para $y = -D/2$).

La determinación del valor de d para un valor dado de momento exterior $M=F*x$ se puede obtener imponiendo la condición de equilibrio EC.5.16.

EC.5.16

$$\int s_y dA = \int s_y 2 \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - y^2} dy = 0$$

Considerando un valor de e_T^{max} se obtiene la ley de deformadas por la ecuación EC.5.15 e imponiendo la EC.5.16 se puede iterar hasta obtener aquél valor de d que la cumpla. El proceso de integración de la EC.5.16 deberá resolverse mediante una aproximación con el método de Simpson y el proceso de iteración para obtener d se resuelve mediante

Newton-Raphson. Obtenido el valor de d y, por tanto la ley de deformaciones correcta, se debe iterar con respecto a e_T^{max} imponiendo la condición de equilibrio de momentos igual que en el apartado anterior.

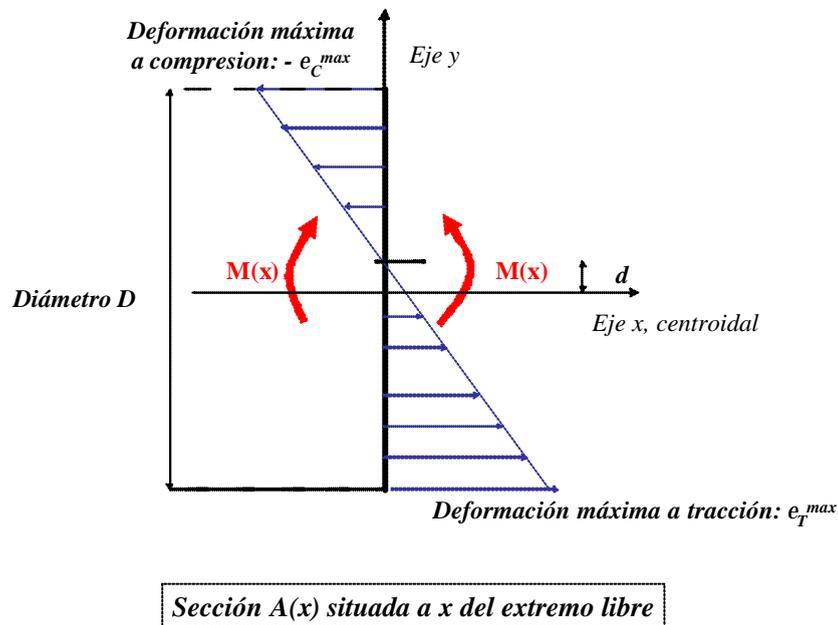


Figura 5.8: Relación entre el desplazamiento del eje neutro y el eje centroidal a causa de la no simetría tracción compresión.

Obtenida la e_T^{max} que cumpla la condición de equilibrio de momentos, la obtención del ángulo girado $\Delta\theta$ de la sección en análisis, viene dado por la ecuación EC.5.17.

EC.5.17

$$\frac{Dq}{Ds} = \left| \frac{e_T^{max}}{\frac{D}{2} + d} \right|$$

Y, a partir de aquí, el proceso es idéntico al apartado anterior donde se consideraba simétrico el comportamiento a tracción y compresión. Sin embargo, y como se ha comentado anteriormente, dado que no podemos verificar el procedimiento explicado experimentalmente, no se ha implementado numéricamente.

5.1.4.2. Hipótesis de pequeñas deformadas

En los apartados anteriores se ha supuesto que las deformaciones que se producían en la viga no eran suficientemente grandes como para variar la línea de acción de la fuerza aplicada (se suponía $M = F \cdot x$). Para evitar esta hipótesis, debe corregirse el momento exterior aplicado en cada tramo Dx teniendo en cuenta el giro de cada sección. Además, puede ser que exista una no-linealidad adicional si la distancia entre el punto de aplicación de carga a la probeta y la célula de carga (y, por tanto, desplazamiento del marco) no es suficientemente grande (distancia L_1 en la figura 5.9). Pese a que este factor es totalmente controlable en el ensayo, como se ve en el apartado 5.2, se introduce aquí la corrección necesaria si el valor de esta distancia es apreciable (o, equivalentemente, el valor de α en la figura 5.9 es apreciable).

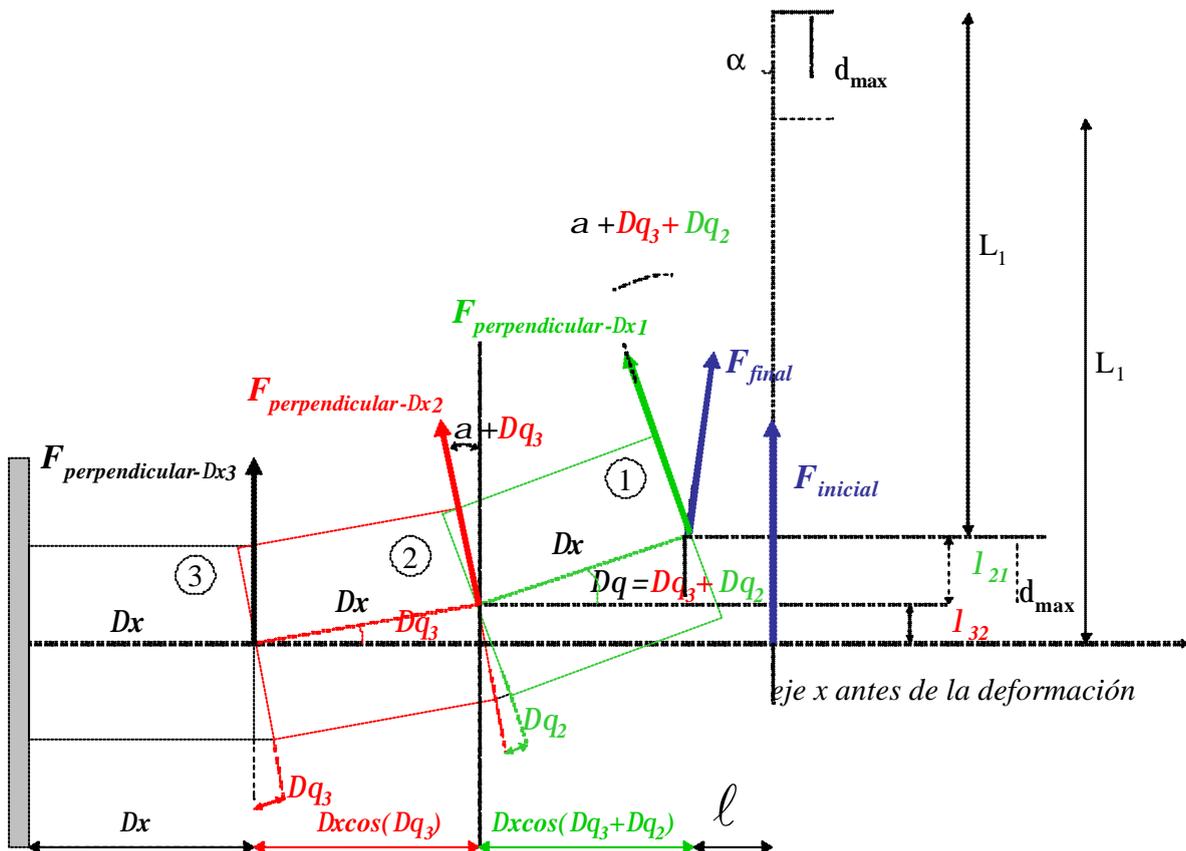


Figura 5.9: Representación esquemática en tres elementos, de la variación del momento en cada sección en función de la no-linealidad provocada por las altas deformadas y por la distancia del punto de aplicación de la carga.

Como se aprecia de la figura 5.9 la fuerza perpendicular al eje neutro en cada Dx cambia en función del ángulo girado, de tal forma que, para la figura representada y con sólo tres elementos, la fuerza y el momento en cada uno es:

EC.5.18

$$\begin{aligned}
 F_{M3} &= F * \cos(\mathbf{a}) \\
 M_{ext-3} &= F_{M3} * 2 * Dx \\
 F_{M2} &= F * \cos(\mathbf{a} + D\mathbf{q}_3) \\
 M_{ext-2} &= F_{M2} * 1 * Dx \\
 F_{M1} &= F * \cos(\mathbf{a} + D\mathbf{q}_3 + D\mathbf{q}_2) \\
 M_{ext-1} &= F_{M3} * 0 * Dx = 0 \\
 &\dots \\
 k &= r \dots 2 \\
 F_{M-r} &= F * \cos(\mathbf{a}) \\
 F_{M-k} &= F * \cos(\mathbf{a} + D\mathbf{q}_{r-1} + \dots + D\mathbf{q}_k + \dots + D\mathbf{q}_3 + D\mathbf{q}_2) \\
 M_{ext-k} &= F_{M-k} * (k - 1) * Dx
 \end{aligned}$$

Observando el esquema de la figura 5.9 se deduce el valor del ángulo α :

EC.5.19

$$tg \mathbf{a} = \frac{\ell}{L_1}$$

Para obtener el valor de ℓ , es necesario conocer el ángulo girado en cada sección y proyectar el eje neutro.

EC.5.20

$$\begin{aligned}
 \ell &= L - (Dx + Dx \cos(D\mathbf{q}_3) + Dx \cos(D\mathbf{q}_3 + D\mathbf{q}_2)) \\
 &\dots \\
 &\text{con } r \text{ elementos :} \\
 \ell &= L - (Dx + \dots + Dx \cos(D\mathbf{q}_r + \dots + D\mathbf{q}_3 + D\mathbf{q}_2))
 \end{aligned}$$

Como se puede deducir, al igual que antes, el proceso es iterativo pero, además, para poder calcular α es necesario, primero, calcular todos los ángulos girados, con lo que la iteración se deberá realizar sucesivamente mientras se considere que el ángulo α es suficientemente considerable como para afectar a los cálculos.

En el apartado siguiente se implementa numéricamente el proceso teniendo en cuenta estas no-linealidades.

5.1.5. Implementación numérica del modelo para grandes deformadas

En función de lo explicado en el apartado anterior, se implementa a continuación el algoritmo de cálculo de la deformada de una viga empotrada sometida a una carga puntual en el extremo teniendo en cuenta las no-linealidades derivadas de las grandes deformadas y del descentrado de la carga puntual.

El algoritmo completo de resolución se presenta en la Tabla 5.3. Los datos de entrada necesarios para el algoritmo son:

- ***Fmax***: fuerza máxima de la simulación para poder generar el vector de fuerzas
- ***D***: diámetro de la viga
- ***L***: longitud de la viga
- ***L₁***: distancia entre el punto de aplicación de la carga y la probeta.
- ***tol_tangente***: tolerancia permitida a la tangente del ángulo de descentramiento de la carga
- ***r***: número de tramos en los que se desea dividir la viga.

En función de L y r : $\Delta x = L/r$

Para la resolución del método de Newton-Raphson, es necesario:

- ***tol_impuesta***: tolerancia deseada en el método de Newton
- ***dif***: incremento para el proceso de derivación en Newton-Raphson

Y para la resolución de la integral de Simpson, es necesario definir:

- ***N***: número de subintervalos de integración entre $-D/2$ y $D/2$.

Tabla 5.3: algoritmo de cálculo de la deformada de viga en voladizo: grandes deformaciones

*Crear vector de Fuerzas: F_j ; $j = 1 \dots m$ y crear vector de Dx_k iguales; $k = 1 \dots r$ *

for $j=1:m$

$d_{\max}^j = 0$

$\Delta \mathbf{q}_{\text{acumulado}} = 0$

$TOLER = \text{"valor inicial"}$

$\mathbf{a}_{\text{inicial}} = 0$

while $TOLER > tol\text{-tangente}$

for $k = r : 2$

$F_{\text{ext}}^k = F_j \cos(\mathbf{Dq}_{\text{acumulado}} + \mathbf{a}_{\text{inicial}})$

$M_{\text{ext}}^k = F_{\text{ext}}^k * (k - 1) Dx$

$p = 1$

$TOL = \text{"valor_inicial"}$

*imponer deformación máxima primera iteración $\mathbf{e}_{\max}^{\text{iteración-p=1}}$ *

while $TOL > tol\text{-impuesta}$

*obtener $\mathbf{e}^{\text{iteración-p}}(y) \Rightarrow EC.5.13$ *

*obtener $\mathbf{s}_x^{\text{iteración-p}}(y) \Rightarrow \text{modelo constitutivo}$ *

*obtener $M_{\text{int}}^p(\Delta x_k)$ según Simpson $\Rightarrow EC.5.12$ *

} **Tabla 5.2**

$M_p(\mathbf{e}_{\max}^p) = M_{\text{ext}}^k - M_{\text{int}}^p(\Delta x_k)$

$M'_p(\mathbf{e}_{\max}^p) = \frac{M_p(\mathbf{e}_{\max}^p + dif) - M_p(\mathbf{e}_{\max}^p)}{dif}$

$\mathbf{e}_{\max}^{p+1} = \mathbf{e}_{\max}^p - \frac{M_p(\mathbf{e}_{\max}^p)}{M'_p(\mathbf{e}_{\max}^k)}$

$|\mathbf{e}_{\max}^{p+1} - \mathbf{e}_{\max}^p| = TOL$

$\mathbf{e}_{\max}^{p+1} = \mathbf{e}_{\max}^p$

end while

$\mathbf{e}_{\max}^k = \mathbf{e}_{\max}^p$

calcular giro de sección

$Dq_k = \frac{2 * Dx * \mathbf{e}_{\max}^k}{D}$

$Dq_{\text{acumulado}} = Dq_{\text{acumulado}} + Dq_k$

$\mathbf{l}_k = Dx * \text{sen}(Dq_{\text{acumulado}})$

$d_{\max}^j = d_{\max}^j + \mathbf{l}_k$

$\ell_{\text{acumulado}} = \ell_{\text{acumulado}} + Dx * \cos(Dq_{\text{acumulado}})$

end for

$$tga = \left| \frac{L - \ell_{acumulado}}{L_1} \right|$$

$$a = \arctg \left| \frac{L - \ell_{acumulado}}{L_1} \right|$$

$$TOLER = \left| tga - tga_{inicial} \right|$$

$$a_{inicial} = a$$

end while

end for

5.2 DISEÑO EXPERIMENTAL DE UNA VIGA EMPOTRADA SMA A FLEXIÓN

5.2.1. Equipos Experimentales y procedimiento experimental

Para el ensayo en el laboratorio de la flexión de viga SMA empotrada se emplea la misma máquina de ensayos y cámara térmica que los empleados en los ensayos a tracción, así como el mismo material, pero con algunas modificaciones y condicionantes que implican el diseño de los nuevos dispositivos adecuados para la realización correcta de los ensayos a flexión a diferentes temperaturas. El conjunto de todos los elementos dispuestos en la máquina de ensayos se aprecia en la Figura 5.10. A continuación se explica detalladamente cada uno de los elementos.

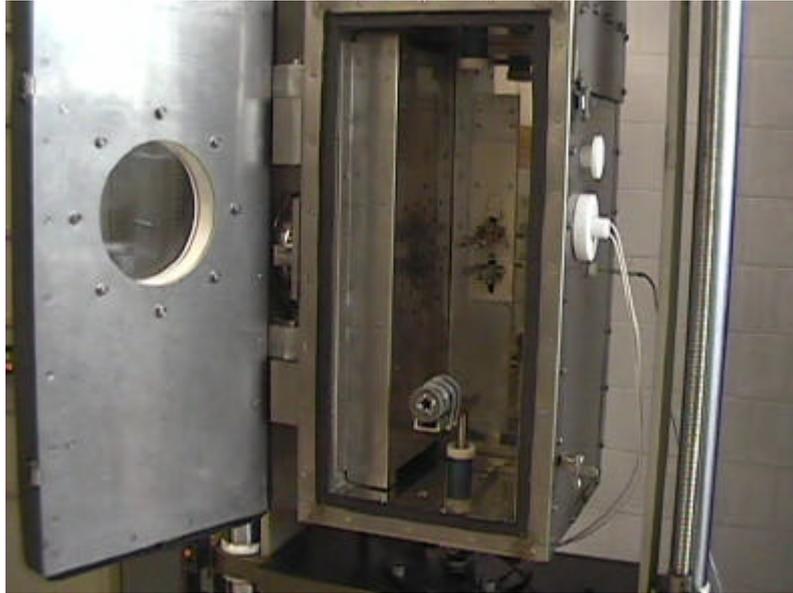


Figura 5.10: Conjunto de los elementos diseñados para los ensayos a flexión de alambre NiTi a diferentes temperaturas.

- **Diseño del empotramiento:** el sistema de sujeción pretende obtener las condiciones de empotramiento perfecto y para ello se ha construido un utillaje adecuado prestando especial atención a la rigidez del conjunto. Con este fin, se ha utilizado como base un portabrocas con una capacidad de anclaje muy superior al diámetro del alambre y cuyo peso propio es suficiente como para inmovilizar la viga durante el ensayo. Fijando el portabrocas a una columna solidaria al carro móvil de la máquina de ensayos y, mediante el desplazamiento del mismo, se provoca la flexión en el alambre. La rigidez de este conjunto es suficientemente alta como para no considerar las deformaciones debidas a la flexibilidad del empotramiento. En las Figuras 5.11 y 5.12 se aprecia con detalle la disposición del portabrocas en el conjunto así como la disposición de la probeta.



Figura 5.11: vista frontal del portabrocas empleado como empotramiento de la probeta donde se aprecia la disposición de unión con la máquina de ensayos.

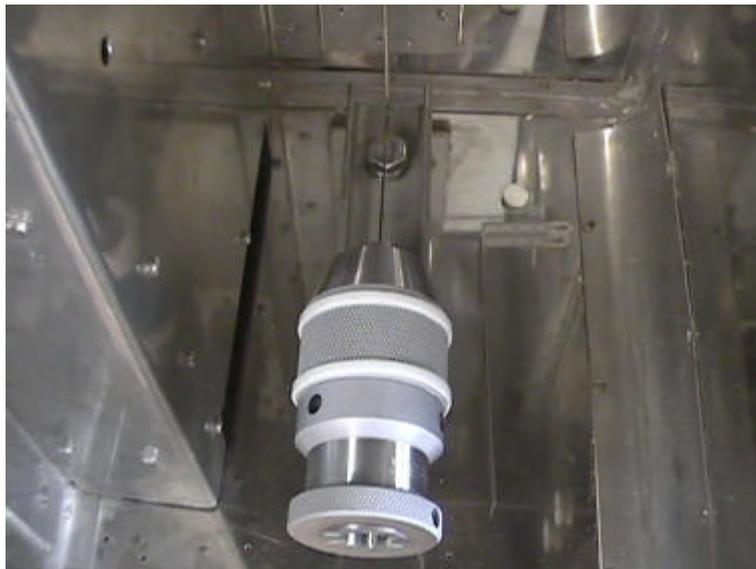


Figura 5.12: vista superior del portabrocas empleado para los ensayos a flexión, donde se aprecia la disposición de la probeta y el enlace de la misma con la varilla metálica.

- **Célula de carga:** para la aplicación de la carga se requiere una célula de carga cuyo rango de medición sea acorde con los valores de la fuerza que se pretende medir. Se ha utilizado una célula Zwick BC066130.1 clase 0,5 con un rango de medición de 0,8 a 20N según EN ISO 7500-1. La disposición de la célula de carga se observa en la figura 5.13.



Figura 5.13: Detalle de la célula de carga y su disposición. Se puede apreciar el extremo curvado de la varilla de 660 mm que transmitirá la fuerza a la probeta.

- **Probeta:** la probeta empleada en los ensayos es del mismo material que el empleado en los ensayos a tracción (NiTi SME495 de diámetro 1 mm como se presentó en el Capítulo 3). Los alambres son sometidos a un proceso de tratamiento térmico de 500°C durante 1 hora y templado al agua. Se realiza el tratamiento térmico a la probetas en el dispositivo explicado en el Capítulo 3 mediante el que se garantiza que adopten la forma recta en el proceso de recocido. Es importante garantizar que las condiciones del tratamiento térmico sean las mismas que en los ensayos a tracción, de donde se obtuvieron los parámetros constitutivos necesarios para la modelización del comportamiento a flexión.
- **Longitud de la probeta:** la longitud de la probeta condiciona el rango de fuerzas aplicables puesto que una probeta corta provocará fuerzas grandes y deformaciones pequeñas para un determinado estado tensional en el empotramiento. Al aumentar la longitud de la probeta se obtiene una mayor precisión en la lectura de las deformaciones y una menor influencia de las fuerzas de corte. Con una probeta excesivamente larga se obtendrán las mismas transformaciones con fuerzas más pequeñas y con unas deformaciones que se alejen mucho de la hipótesis de pequeñas

deformaciones. En estas condiciones las componentes axiales de carga sobre la viga podrían no ser negligibles. Después de diversos ensayos preliminares se ha optado por una longitud de probeta de 70 mm.

- **Sistema de aplicación de la carga:** la aplicación de la carga al extremo libre de la probeta se realiza mediante una varilla de acero suficientemente rígida para evitar que sufra deformaciones apreciables. Esta varilla se enlaza, por su parte superior a la célula de carga a través de un extremo curvado que permite que la varilla pivote sobre el enlace con la célula para conseguir la estabilidad adecuada. (ver figura 5.13). La longitud de la varilla de acero debe ser suficientemente larga como para garantizar que la aplicación de la fuerza en el extremo de la probeta sea lo más perpendicular posible. Esta longitud es de 660 mm. El extremo de la varilla que enlaza con la probeta está también curvado, al igual que el extremo libre de la probeta. De esta forma se intenta que la aplicación de la carga sea lo más puntual posible (figura 5.14).

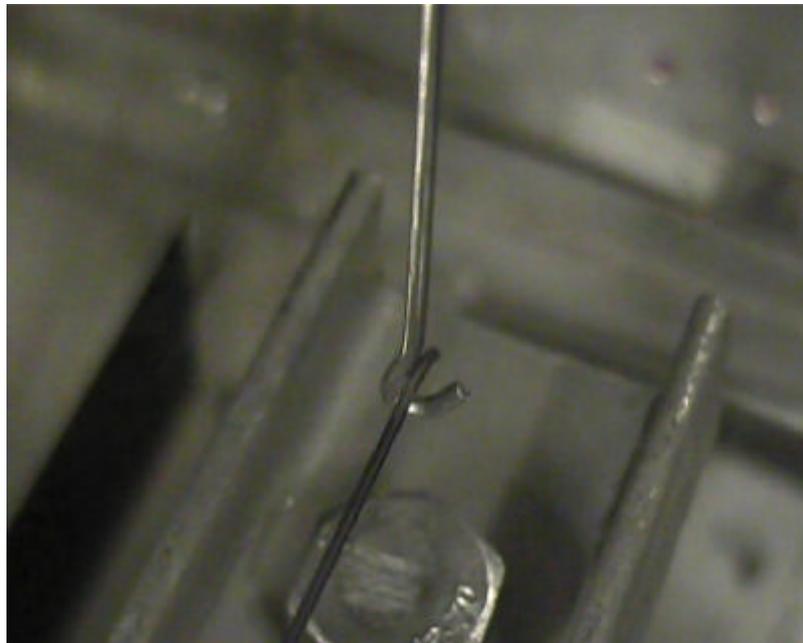


Figura 5.14: Detalle de extremo curvado inferior de la varilla metálica y su enlace con la probeta para transmitirle la fuerza en el extremo libre.

- **Velocidad del ensayo:** en el Capítulo 3 del presente trabajo se determinó la velocidad máxima de aplicación de la carga adecuada para los ensayos a tracción, siendo de 1,5 mm/min. En el ensayo a flexión es importante que la velocidad de ensayo utilizada sea acorde con la empleada a tracción para poder comparar los valores obtenidos en ambos ensayos. Esta velocidad de ensayo se ha estimado de 90 mm/min.

El procedimiento seguido para realizar los experimentos a flexión de los alambres SMA, al igual que se ha presentado a lo largo de todo el trabajo, han de ser realizados de manera muy cuidadosa y sistemática puesto que ya se ha explicado cómo afectan los diversos parámetros experimentales al comportamiento del material.

- En primer lugar, y cortado el alambre a la longitud deseada se le realizan unas marcas que señalan el punto de anclaje en el portabrocas.
- Se coloca la probeta en el portabrocas con firmeza pero vigilando no introducir deformaciones en el material en la colocación.
- Se verifica la perpendicularidad entre el alambre y la varilla que produce la deformada.
- Calentamiento de la cámara térmica a temperatura deseada.
- Estabilizada la temperatura, se procede al ensayo a flexión a la velocidad determinada anteriormente.
- Registro y procesado de datos.

5.2.2. Resultados experimentales

Se seleccionaron diversas temperaturas de ensayo representativas de los diferentes estados posibles del material, tal y como se ve en la tabla 5.4.

Tabla 5.4. Temperaturas de ensayo previstas

$T < M_f$	$T \sim M_s$	$M_s < T < A_s$	$A_s < T < A_f$	$T > A_f$
19°C; 22°C	46,5°C	55°C; 70°C	80°C	100°C

Se presentan, a continuación, los resultados de los ensayos realizados a flexión para las diversas temperaturas.

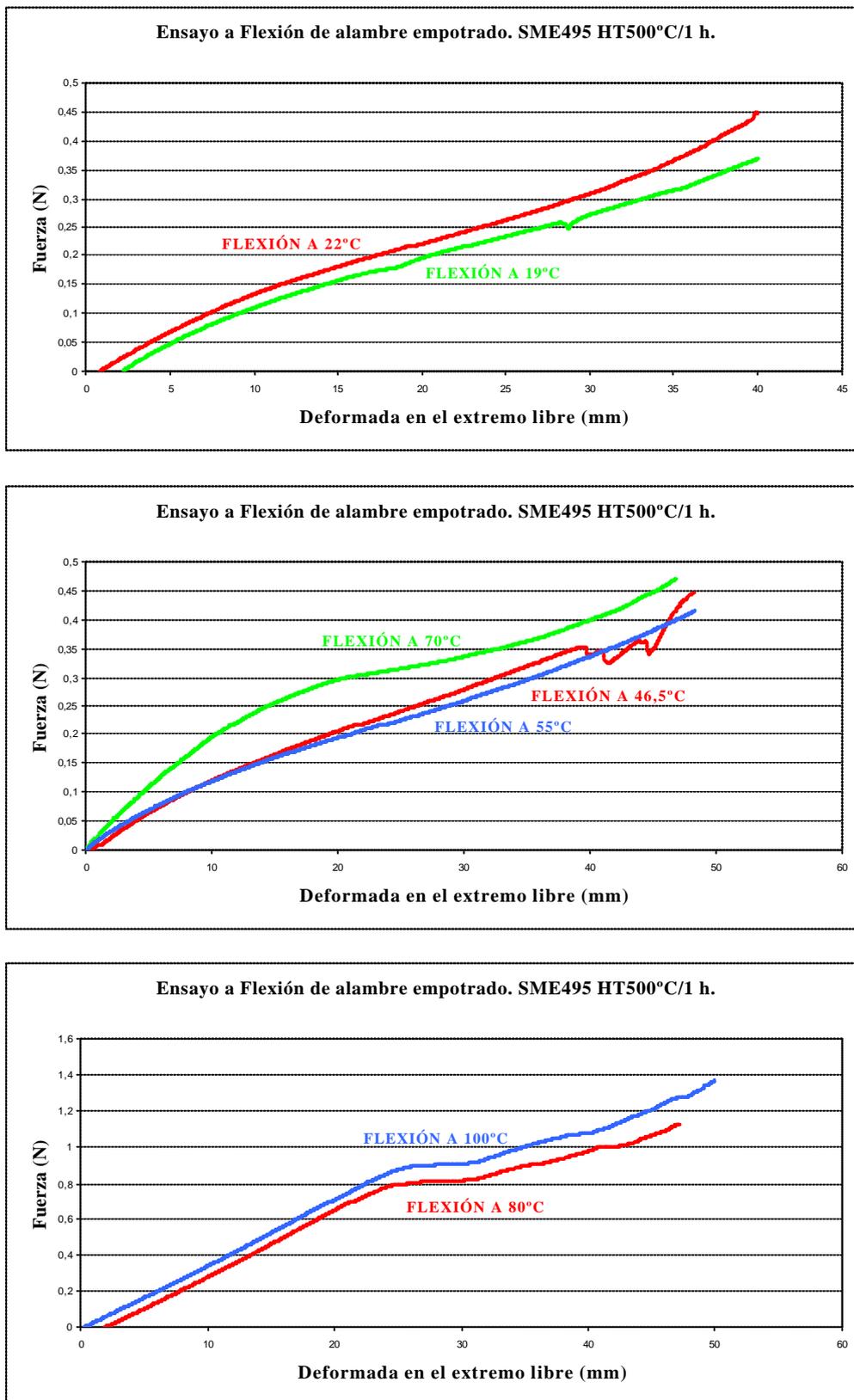


Figura 5.15: Resultados experimentales Fuerza-Deformada del extremo libre para alambres NiTi a diferentes temperaturas

En general, ante los gráficos presentados, se pueden realizar las siguientes observaciones:

- Exceptuando la probeta ensayada a 70°C que presenta un comportamiento más atípico, las demás siguen una curva similar: un primer tramo más constante con una ligera inflexión que, probablemente, corresponde a la tensión de transformación de fase.
- La mayor inflexión y el comportamiento más diferencial en la zona de transformación se aprecia a mayores temperaturas: 80°C y 100°C, mientras que a 19°C, 22°C, 46,5°C y 55°C la inflexión no es tan marcada. Esto es coherente con el comportamiento a tracción: a temperaturas inferiores la meseta de transformación es prácticamente horizontal, y los valores de tensión de inicio y final son semejantes. Esto puede producir que la meseta de transformación, en el proceso a flexión, sea prácticamente inapreciable.
- La relación Fuerza-deformada es creciente con la temperatura, excepto para los 19°C y 22°C. Sin embargo, tal y como comprobamos en el Capítulo 3 y 4, a temperaturas inferiores a la M_s , el comportamiento era lineal de pendiente negativa, lo que significa que temperaturas más bajas presentan la tensión de transformación más elevadas y tienen, por tanto, un tramo recto lineal de mayor deformación.
- La curva de 70°C probablemente es la más sensible a la temperatura, puesto que se encuentra, al igual que la 55°C en un tramo de mezcla de fases. Esto se confirmó en los gráficos de la figura 3.43 del Capítulo 3, donde, en los ensayos isotérmicos, a 70°C el material presentó un salto brusco de comportamiento.
- A partir de cierto nivel de deformada, los valores registrados sufrían discontinuidades o saltos a causa de pequeños deslizamientos en el punto de aplicación de la carga. Es por ello que el último tramo de la curva deberá considerarse con reservas.

5.3 ANÁLISIS DEL MODELO A FLEXIÓN Y CONTRASTACIÓN EXPERIMENTAL

5.3.1. Verificación experimental del modelo con grandes deformadas a través de los ensayos a tracción

En este apartado se verifica el modelo a flexión desarrollado para grandes deformadas, tomando como datos (valores tensión deformación) los valores de la curva experimental obtenida del ensayo a tracción. De esta forma podremos verificar el modelo a flexión independientemente del modelo constitutivo empleado para la obtención de la tensión a partir de la deformación.

Para conseguir este proceso, se procesan los resultados de tracción correspondientes a las mismas temperaturas que se han ensayado a flexión, de tal manera que sólo nos quedemos con la curva en el proceso de carga. El programa de flexión obtiene la tensión necesaria para cada deformación resultado del proceso iterativo de Newton-Raphson e interpola para ajustar el valor. Mediante este procedimiento, se han podido comparar las curvas de flexión presentadas anteriormente (figura 5.15) con las teóricas *del modelo de grandes deformadas*. No se ha implementado las comparaciones con el modelo de pequeñas deformadas puesto que el modelo de grandes deformadas, después de observar los resultados de la figura 5.15, responde mejor a la realidad. Sin embargo, se ha creído conveniente presentar una gráfica comparativa entre ambas aproximaciones en la figura 5.16. En ella se representa la aproximación con los dos modelos, pequeñas y grandes deformadas, para los datos isotérmicos del ensayo a 100°C. Se observa cómo, lógicamente, el modelo de grandes deformadas produce valores menores de deformada en el extremo en voladizo puesto que el momento exterior es menor que en el caso de pequeñas deformadas.

Los resultados correspondientes a la comparación entre los ensayos a flexión obtenidos del laboratorio y las simulaciones con el modelo de grandes deformadas tomando como datos los ensayos isotérmicos, se presentan en la figura 5.17 a 5.23.

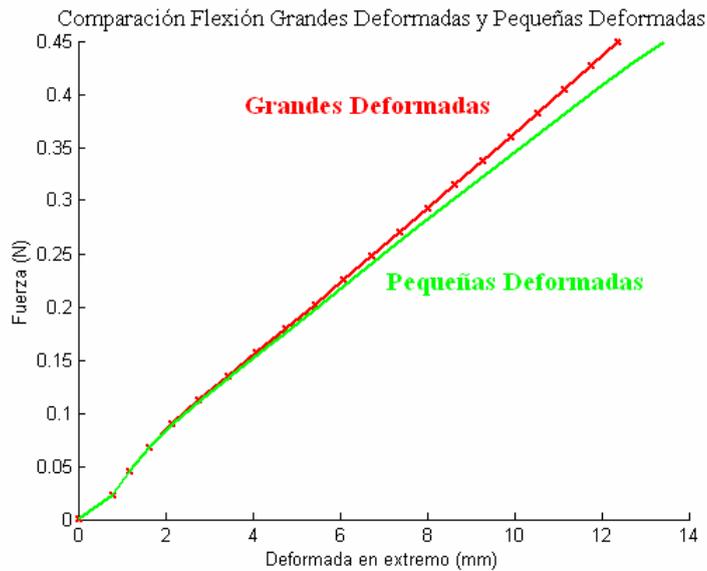


Figura 5.16: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con la implementación del modelo de pequeñas deformadas. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 100°C.

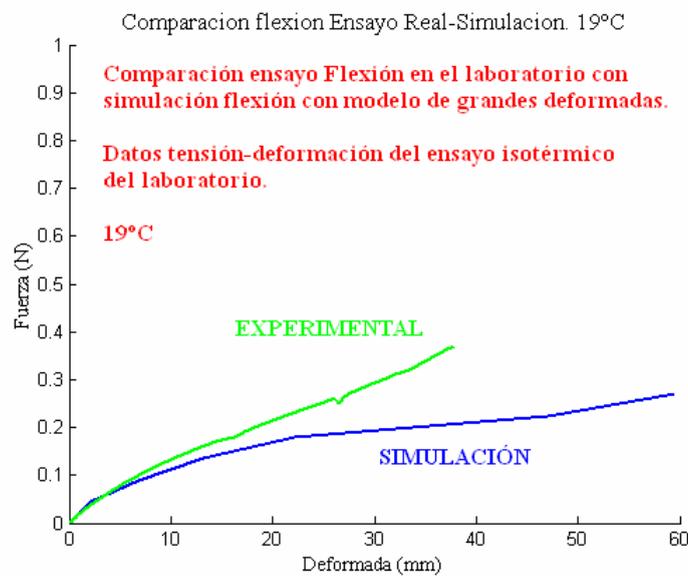


Figura 5.17: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 19°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 19°C.

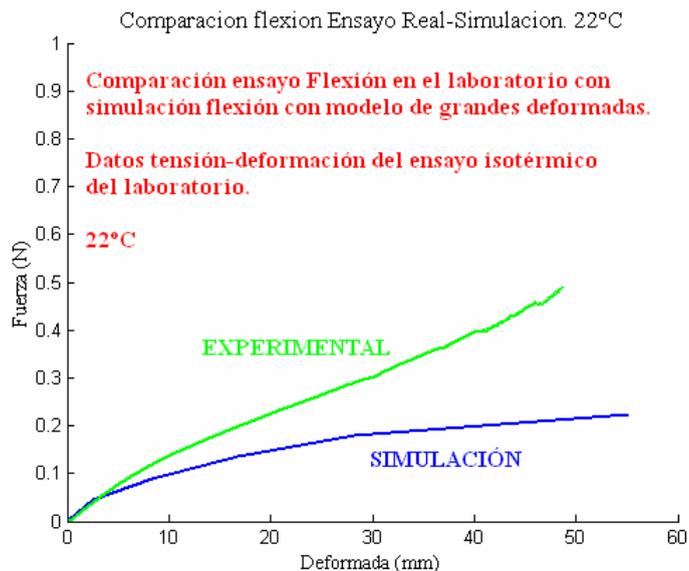


Figura 5.18: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 22°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 22°C.

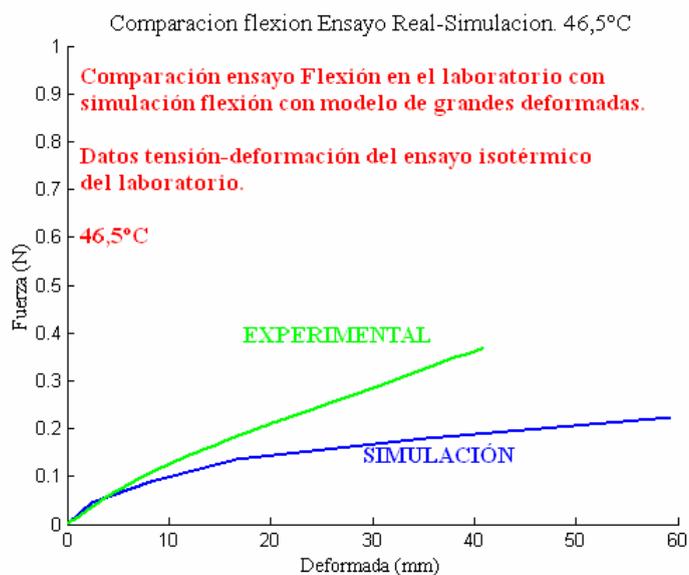


Figura 5.19: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 46,5°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 46,5°C.

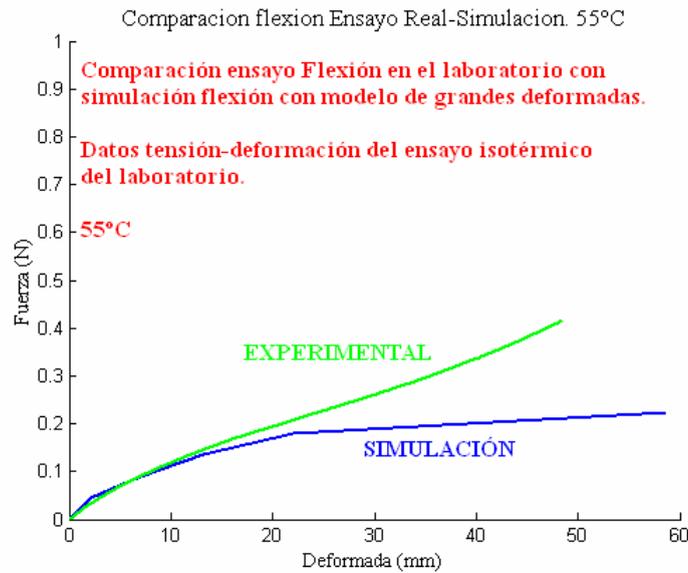


Figura 5.20: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 55°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 55°C.

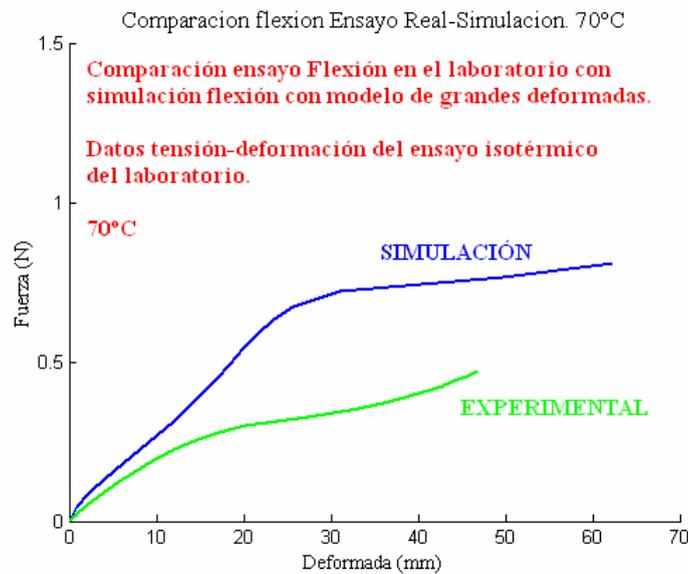


Figura 5.21: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 70°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 70°C.

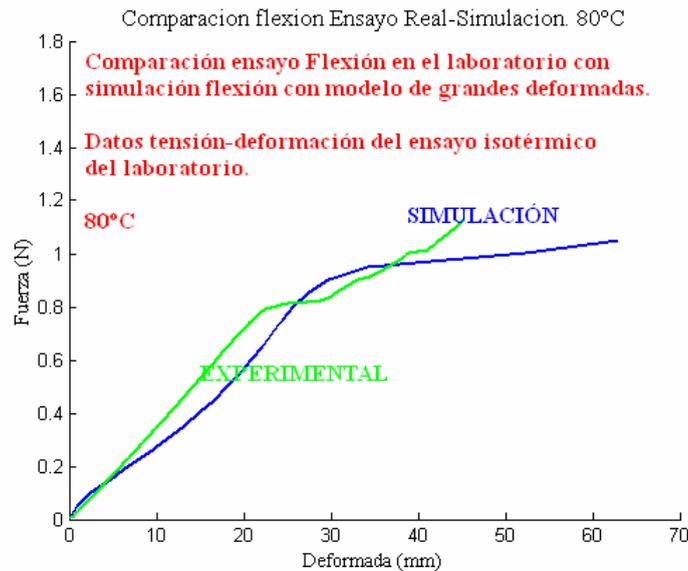


Figura 5.22: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 80°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 80°C.

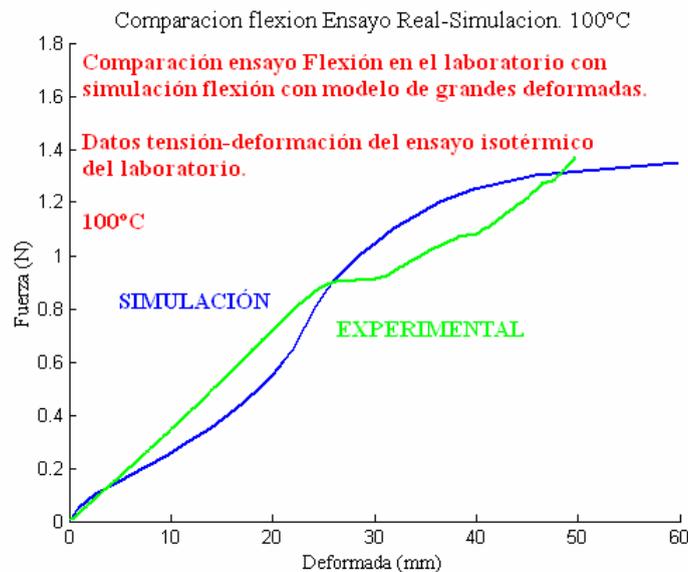


Figura 5.23: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 100°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los resultados experimentales del ensayo isotérmico correspondiente a 100°C.

A partir de los gráficos anteriores se puede observar cómo el modelo a flexión ajusta adecuadamente con los resultados experimentales siendo mejor el ajuste a mayores temperaturas. La mayor diferencia se aprecia para 70°C quizás a causa de que es la temperatura de transición entre fases.

En los tramos inferiores a la tensión crítica de transición los resultados de la simulación presentan valores muy similares a los experimentales presentado menor similitud dentro de la zona de transformación.

A temperaturas inferiores, los resultados de la simulación presentan, a igual valor de fuerza, mayor valor de deformada que los resultados experimentales a flexión. Este comportamiento, también presentado Wick [WIC,1995] en sus resultados de flexión, significa que a flexión se produce una rigidización del material, posiblemente a causa del diferente comportamiento a tracción y compresión ya reportado por Liu [LIU,1998]. Dado que esta asimetría es más acentuada a temperaturas martensíticas, el ajuste entre los resultados teóricos y experimentales es mayor a temperaturas austeníticas.

5.3.2. Verificación experimental del modelo con grandes deformadas con los modelos constitutivos

Se presentan a continuación las simulaciones del comportamiento a flexión para los modelos analizados de Tanaka, Liang-Rogers, Brinson y Auricchio lineal y exponencial. En todos los modelos se emplea sólo la aproximación de Voigt para el módulo elástico dado la escasa influencia de las diferentes aproximaciones en los resultados de la modelización.

Para la implementación numérica del comportamiento a flexión de los diferentes modelos, según el algoritmo presentado en la tabla 5.3, los valores de las tensiones correspondientes a la deformación de cada iteración, se obtienen de la simulación a tracción de cada uno de los modelos constitutivos analizados.

Los resultados de las simulaciones de *los modelos de Tanaka y Liang-Rogers* a 46,5°C, 55°C, 70°C y 100°C comparados con los resultados experimentales, se presentan en la figuras 5.24. Para 19°C y 22°C no se realizan las simulaciones con estos modelos constitutivos puesto que no eran capaces de reproducir el comportamiento a tracción por debajo de M_s . En todos los gráficos se presenta el valor de la fuerza aplicada frente al valor de la deformada en el extremo en voladizo.

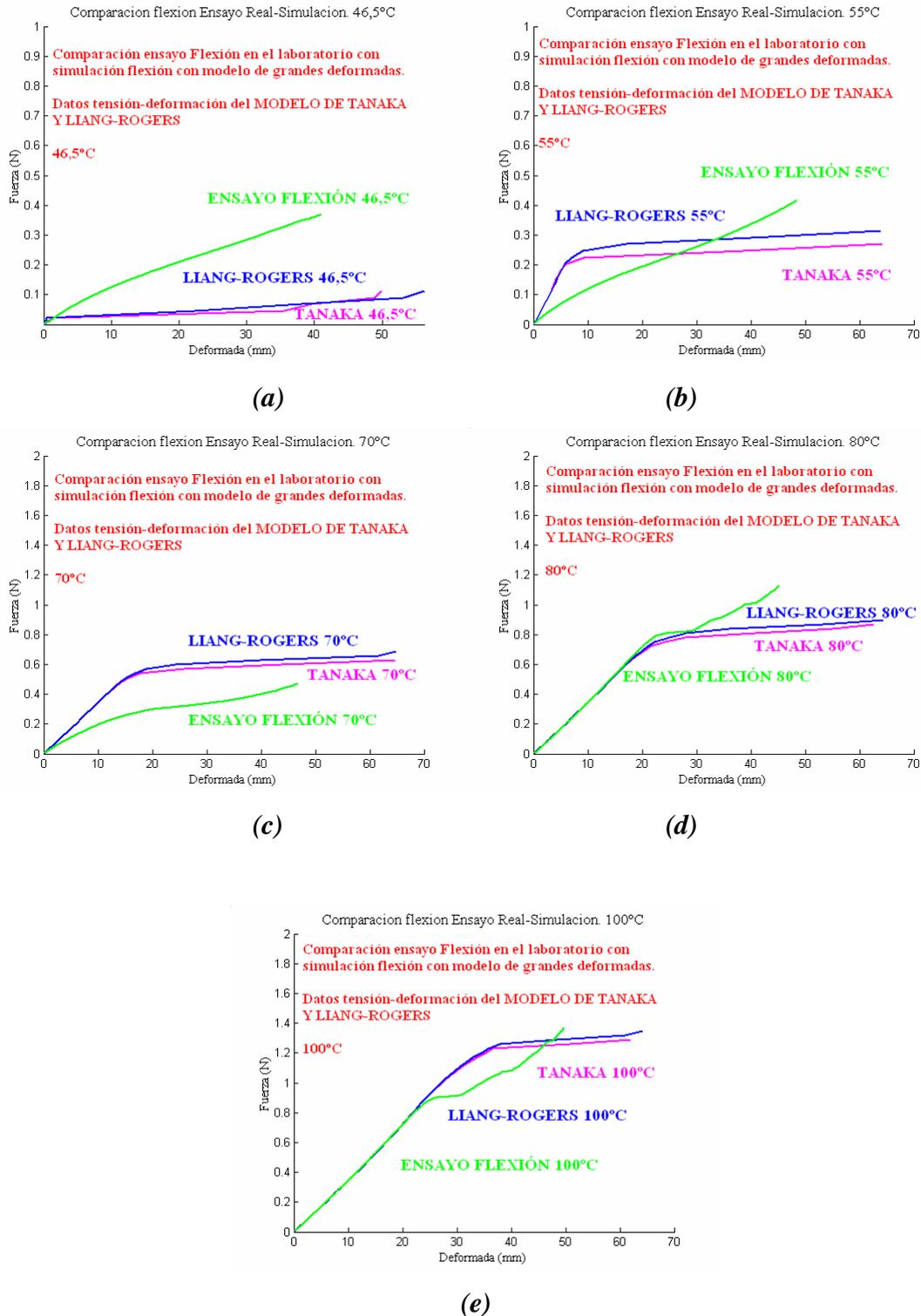


Figura 5.24: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo de flexión. Los datos de tensión-deformación se obtienen del Modelo a tracción de Tanaka y Liang-Rogers para (a) 46,5°C. (b) 55°C. (c) 70°C. (d) 80°C. (e) 100°C.

En la figura 5.24(a) se observa como para 46,5°C y 55°C los modelos subpredicen el comportamiento a flexión, comparando con los resultados experimentales. Esto es coherente con la predicción de estos modelos para el comportamiento a tracción a esta temperatura como se vio en la figura 4.4(a) y 4.5(a). A 55°C las previsiones de los modelos para el comportamiento a tracción consideraban un valor del módulo elástico superior al real, y, en consecuencia, el comportamiento a flexión produce resultados superiores al experimental. A 70°C el comportamiento no sigue esta tendencia: los modelos subpredicían el comportamiento a tracción y, contrariamente, en flexión simulan resultados superiores. Esto reafirma la conclusión de que el ensayo a 70°C, al estar dentro del intervalo de mezcla de fases, tiene un comportamiento muy variable. A 80°C y a 100°C las predicciones de ambos modelos ajustan adecuadamente el resultado experimental.

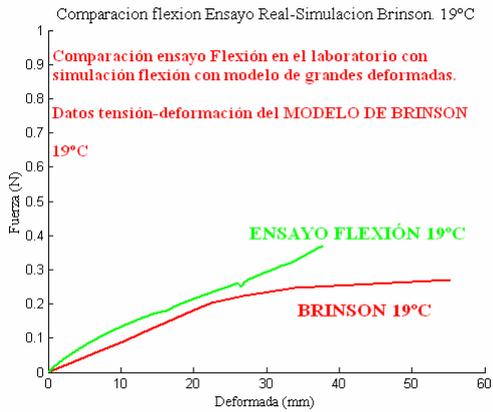
Se presentan en la figura 5.25 los resultados de las simulaciones a flexión para el *modelo de Brinson* a 19°C, 22°C, 46,5°C, 55°C, 70°C, 80°C y 100°C, comparándose con los resultados experimentales a flexión.

En la figura 5.26 se presentan los resultados de las simulaciones a flexión para el *modelo de Auricchio Lineal* a 19°C, 22°C, 46,5°C, 55°C, 70°C, 80°C y 100°C, comparándose con los resultados experimentales a flexión.

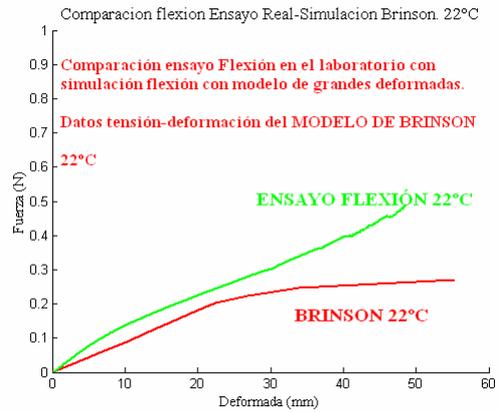
En la figura 5.27 se presentan los resultados de las simulaciones a flexión para el *modelo de Auricchio Exponencial con $b=1$* a 19°C, 22°C, 46,5°C, 55°C, 70°C, 80°C y 100°C, comparándose con los resultados experimentales a flexión.

En la figura 5.28 se presentan los resultados de las simulaciones a flexión para el *modelo de Auricchio Exponencial con $b=10$* a 19°C, 22°C, 46,5°C, 55°C, 70°C, 80°C y 100°C, comparándose con los resultados experimentales a flexión.

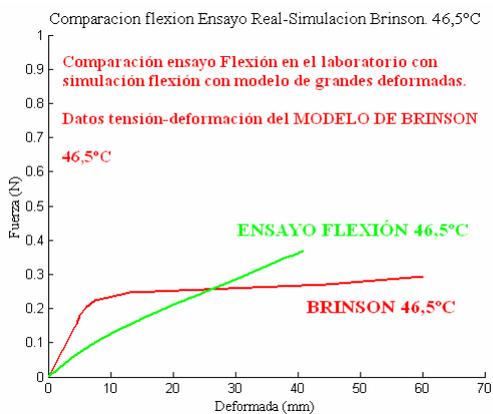
En la figura 5.29 se presentan los resultados de las simulaciones a flexión para el *modelo de Auricchio Exponencial con $b=100$* a 19°C, 22°C, 46,5°C, 55°C, 70°C, 80°C y 100°C, comparándose con los resultados experimentales a flexión.



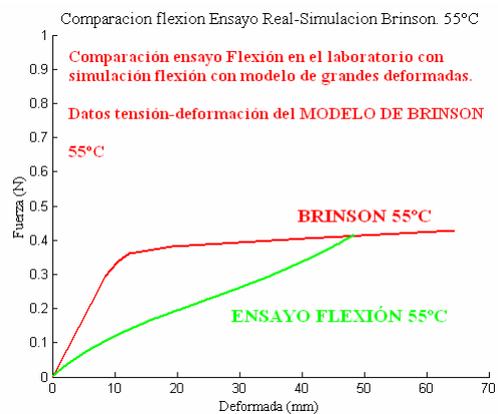
(a)



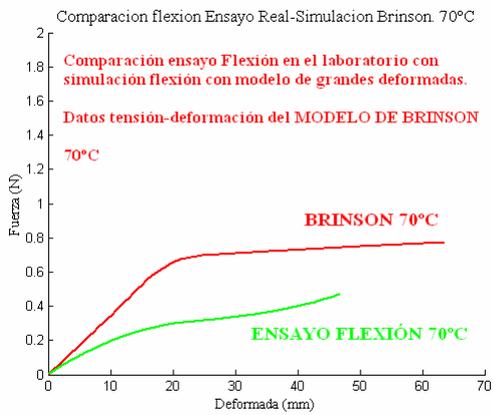
(b)



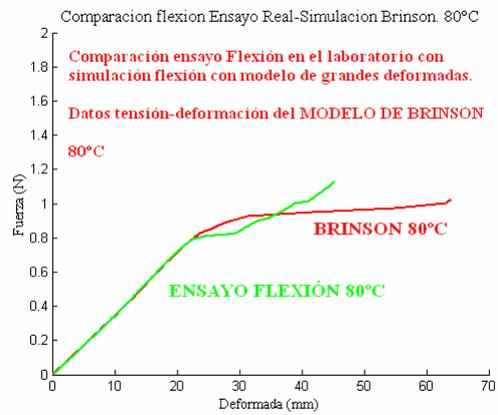
(c)



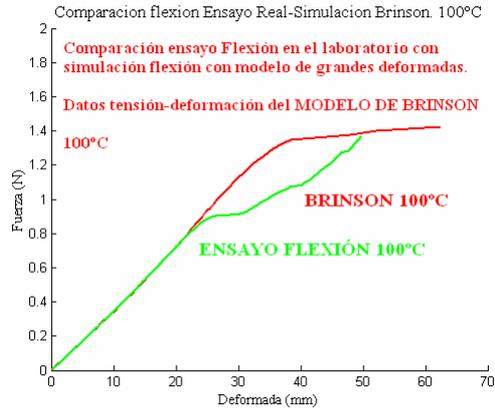
(d)



(e)

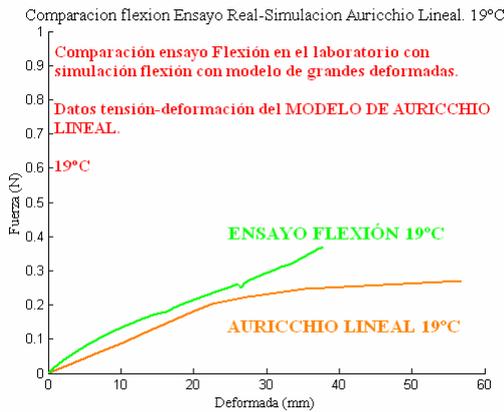


(f)

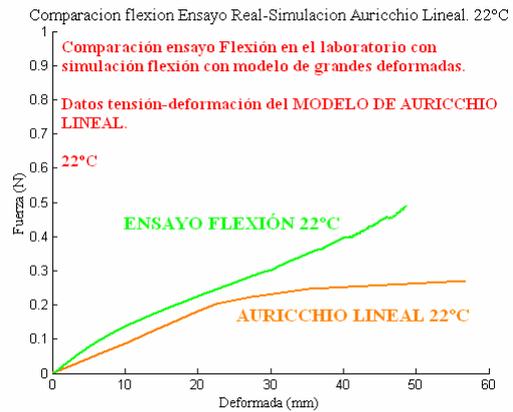


(g)

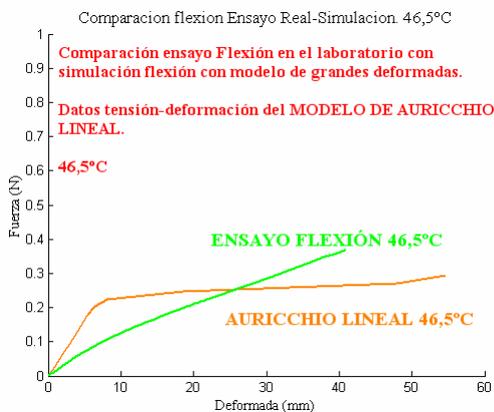
Figura 5.25: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo a flexión. Los datos de tensión-deformación se obtienen del Modelo a tracción de Brinson para (a) 19°C. (b) 22°C. (c) 46,5°C. (d) 55°C. (e) 70°C. (f) 80°C. (g) 100°C.



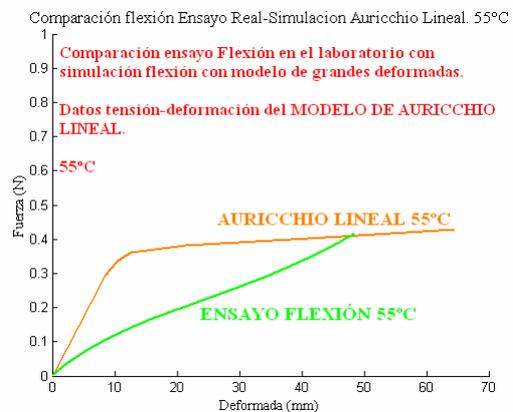
(a)



(b)



(c)



(d)

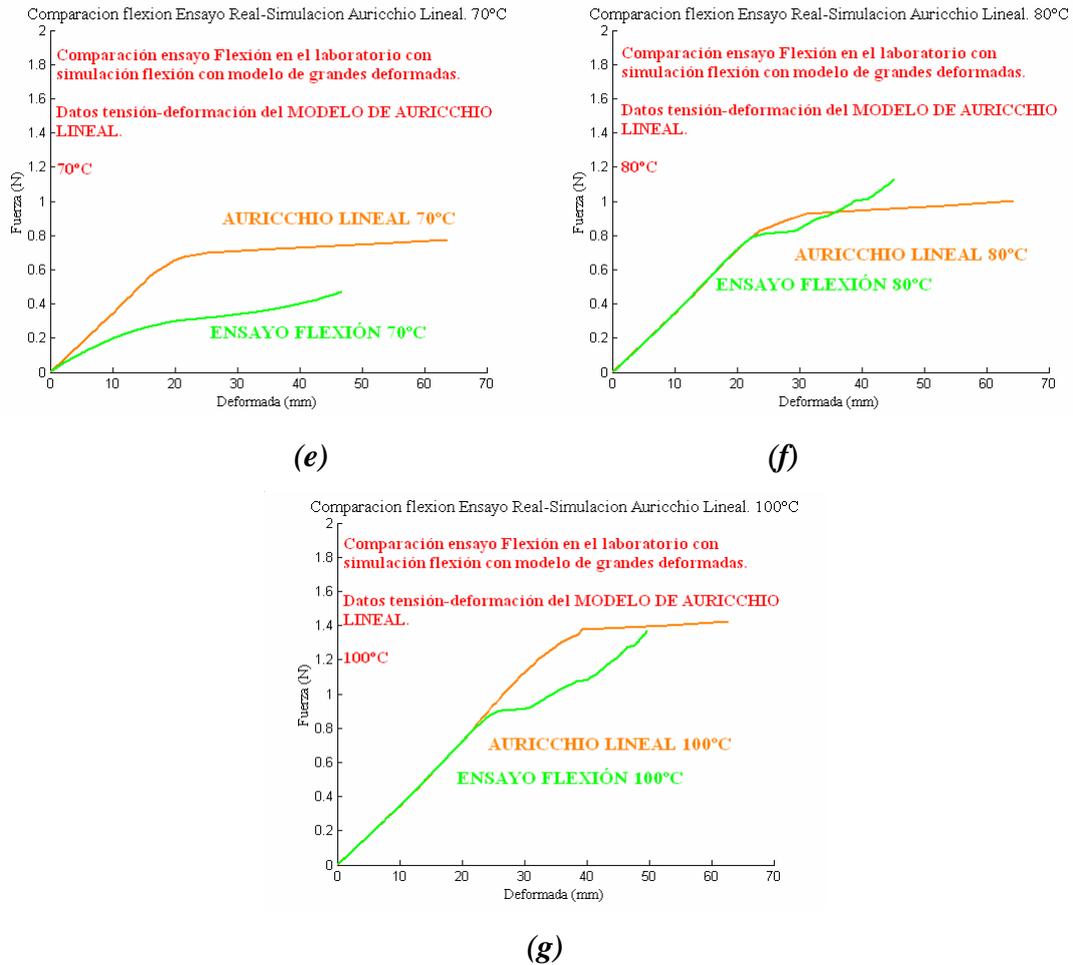
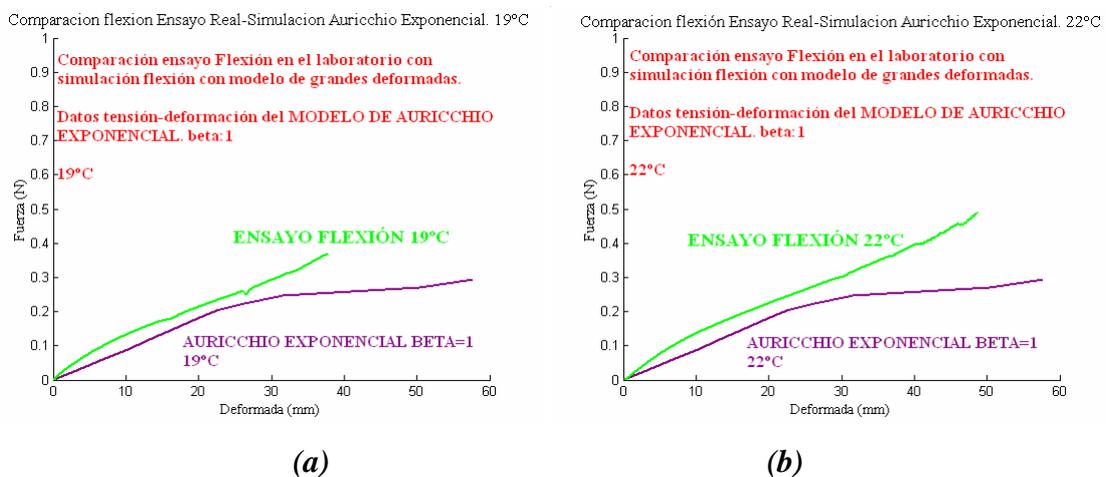


Figura 5.26: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo a flexión. Los datos de tensión-deformación se obtienen del Modelo a tracción de Auricchio Lineal para (a) 19°C. (b) 22°C. (c) 46,5°C. (d) 55°C. (e) 70°C. (f) 80°C. (g) 100°C.



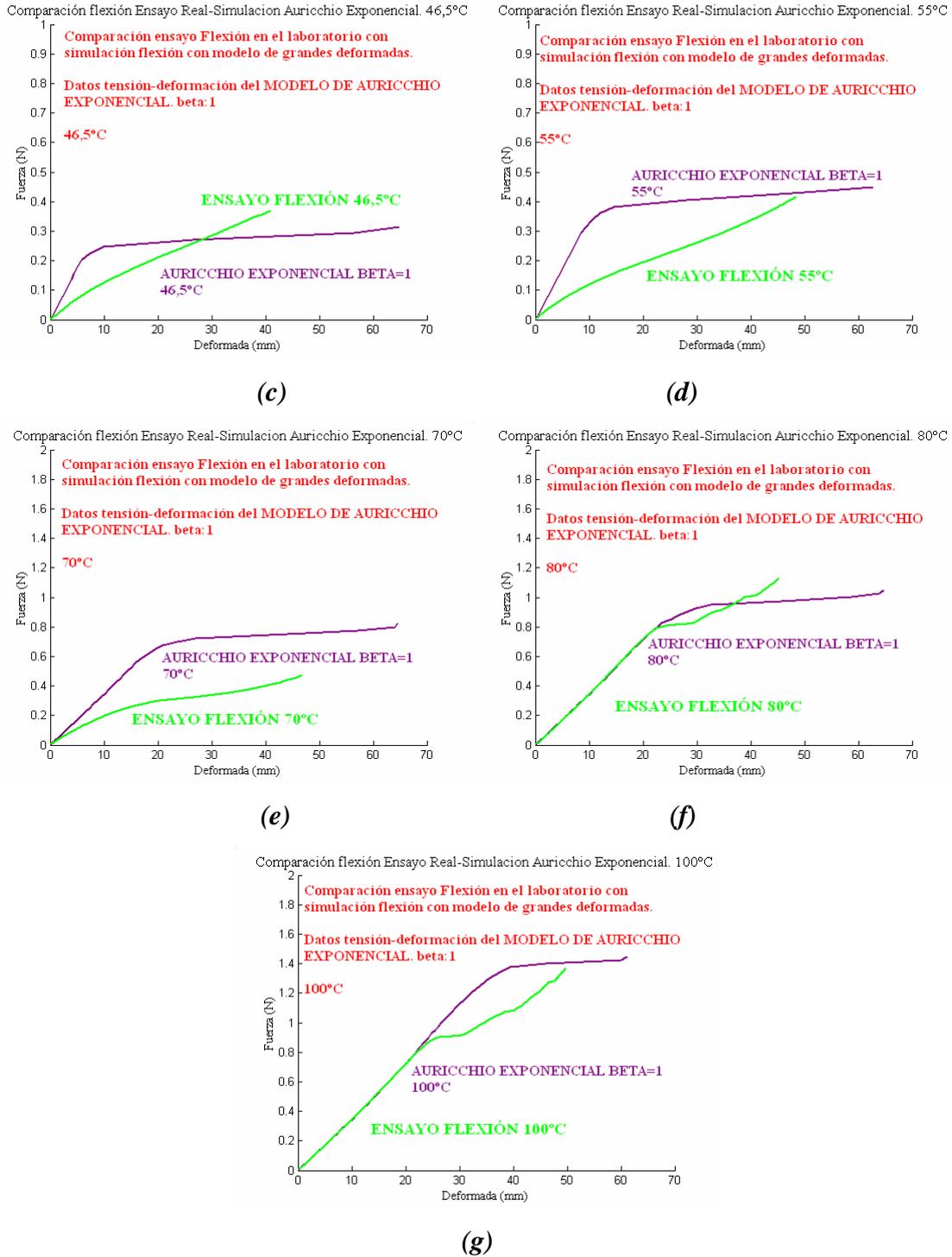
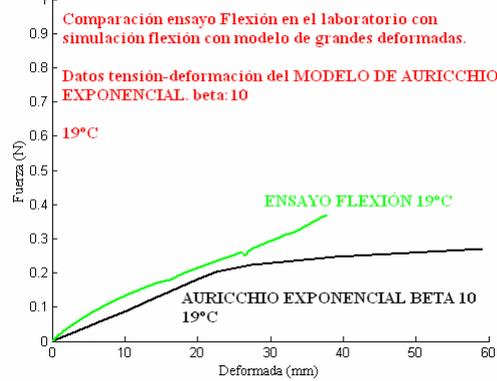


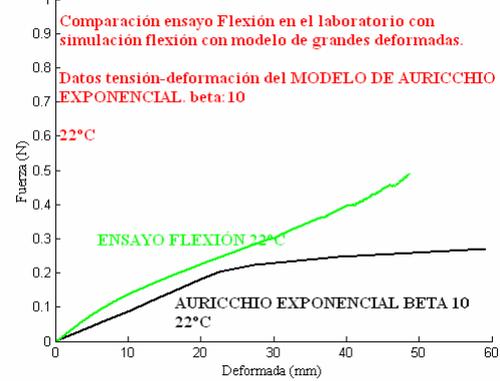
Figura 5.27: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo a flexión. Los datos de tensión-deformación se obtienen del Modelo a tracción de Auricchio Exponencial con $b=1$ para (a) 19°C. (b) 22°C. (c) 46,5°C. (d) 55°C. (e) 70°C. (f) 80°C. (g) 100°C.

Comparación flexión Ensayo Real-Simulación Auricchio Exponencial. 19°C



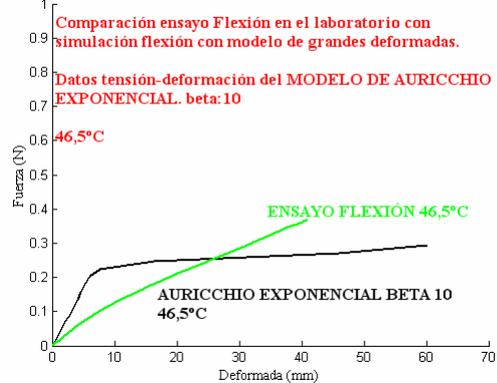
(a)

Comparación flexión Ensayo Real-Simulación Auricchio Exponencial. 22°C



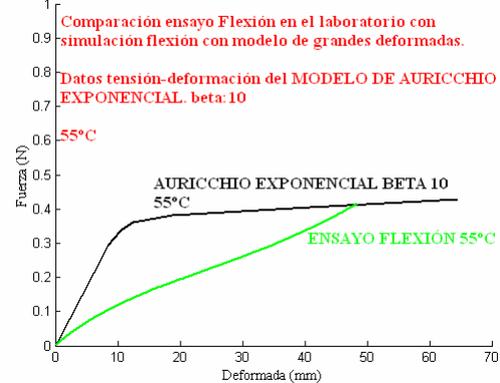
(b)

Comparación flexión Ensayo Real-Simulación Auricchio Exponencial. 46,5°C



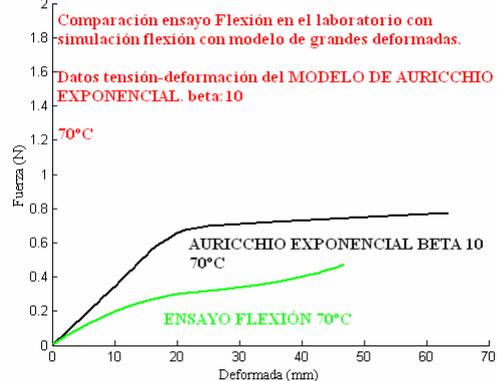
(c)

Comparación flexión Ensayo Real-Simulación Auricchio Exponencial. 55°C



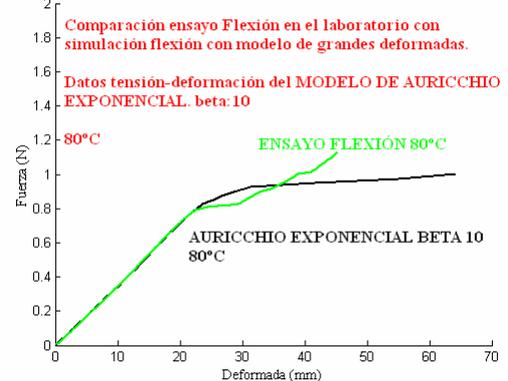
(d)

Comparación flexión Ensayo Real-Simulación Auricchio Exponencial. 70°C

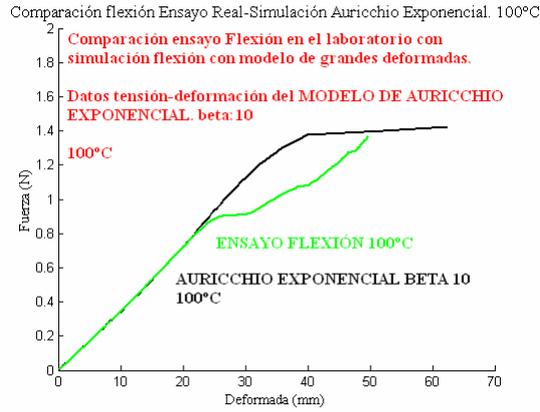


(e)

Comparación flexión Ensayo Real-Simulación Auricchio Exponencial. 80°C

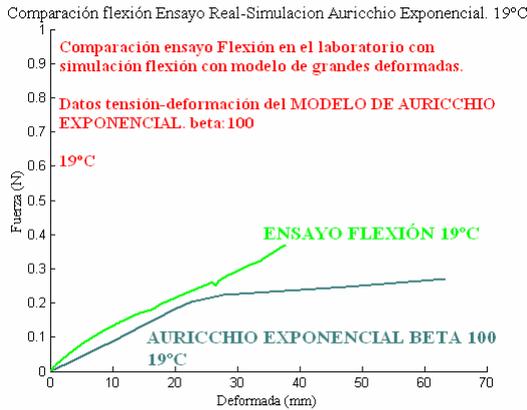


(f)

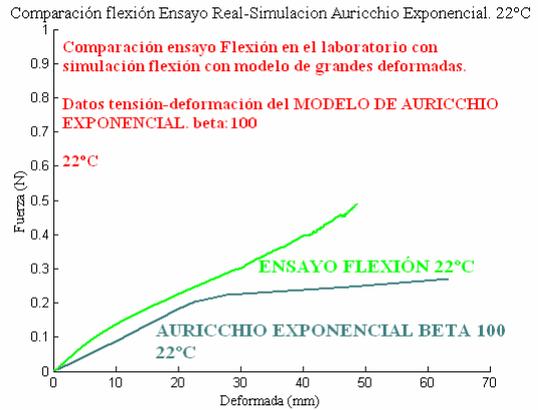


(g)

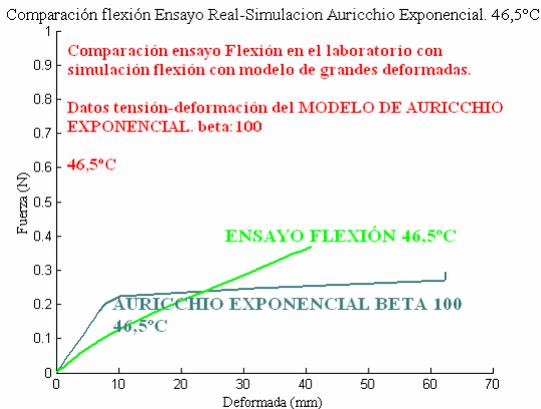
Figura 5.28: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo a flexión. Los datos de tensión-deformación se obtienen del Modelo a tracción de Auricchio Exponencial con $b=10$ para (a) 19°C. (b) 22°C. (c) 46,5°C. (d) 55°C. (e) 70°C. (f) 80°C. (g) 100°C.



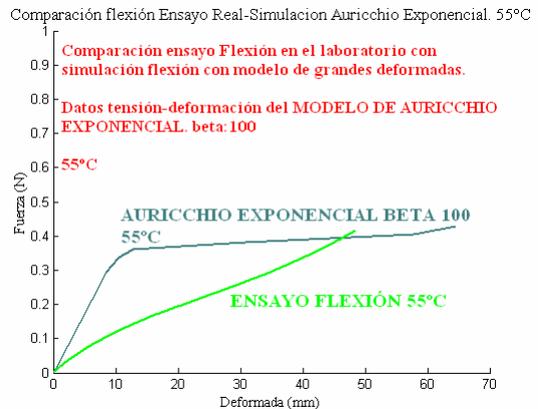
(a)



(b)



(c)



(d)

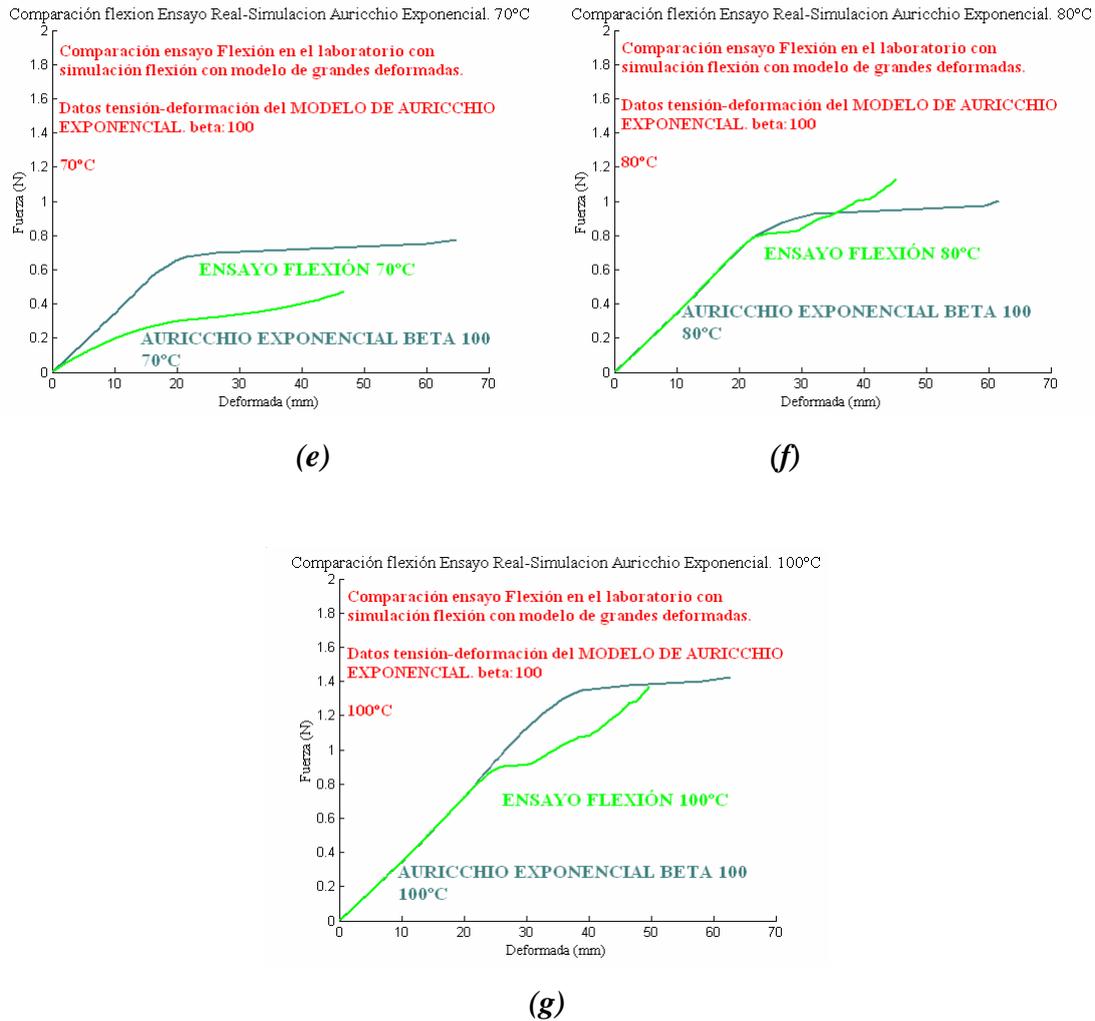


Figura 5.29: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo a flexión. Los datos de tensión-deformación se obtienen del Modelo a tracción de Auricchio Exponencial con $b=100$ para (a) 19°C. (b) 22°C. (c) 46,5°C. (d) 55°C. (e) 70°C. (f) 80°C. (g) 100°C.

En las figuras anteriores, para los modelos de Brinson y Auricchio Lineal y Exponencial, podemos observar cómo las diferencias en los ajustes son debidas, en parte, por las divergencias que ya se detectaron en el comportamiento a tracción (figuras 4.6, 4.7 y 4.8) especialmente para las temperaturas de 46,5°C y 55°C. De nuevo, las comparaciones entre las simulaciones a 70°C y el ensayo a la misma temperatura presenta las mayores diferencias, causa del variable comportamiento del material dentro de la zona interfase. A altas temperaturas el comportamiento se ajusta mucho más adecuadamente igual que ocurría con las comparaciones a tracción isotérmica.

Para poder comparar si alguno de los modelos aproxima mejor el resultado experimental, se presentan, de forma conjunta, todos los ensayos a todas las temperaturas.

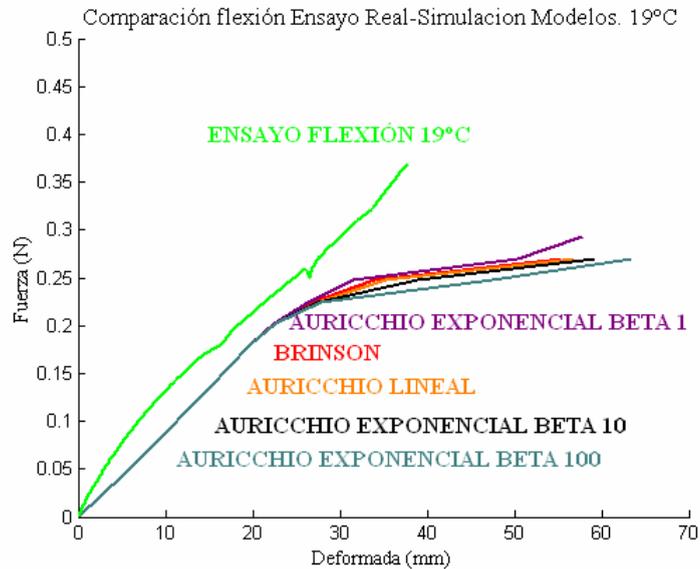


Figura 5.30: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 19°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los diferentes modelos constitutivos.

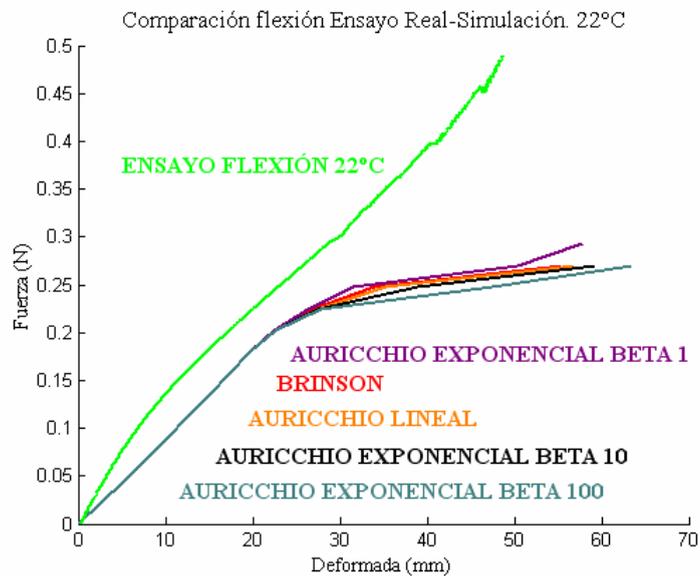


Figura 5.31: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 22°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los diferentes modelos constitutivos.

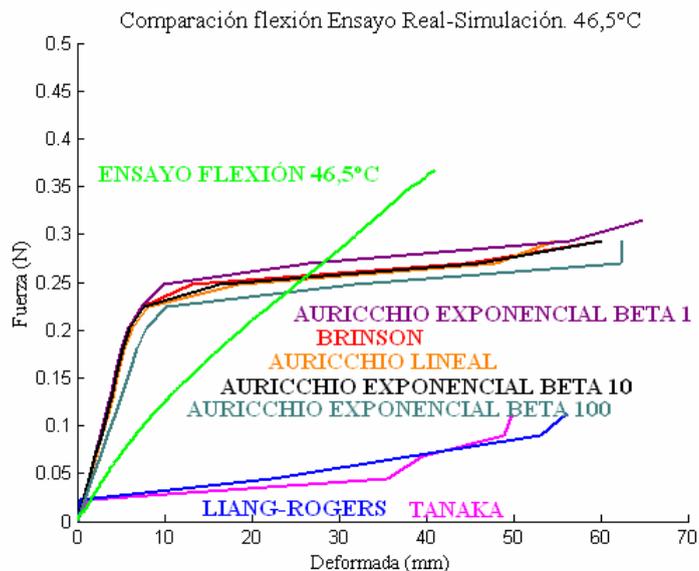


Figura 5.32: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 46,5°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los diferentes modelos constitutivos.

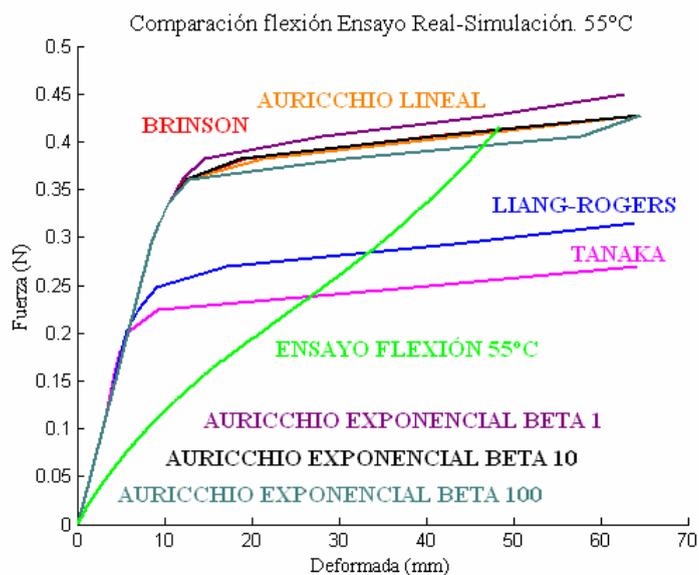


Figura 5.33: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 55°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los diferentes modelos constitutivos.

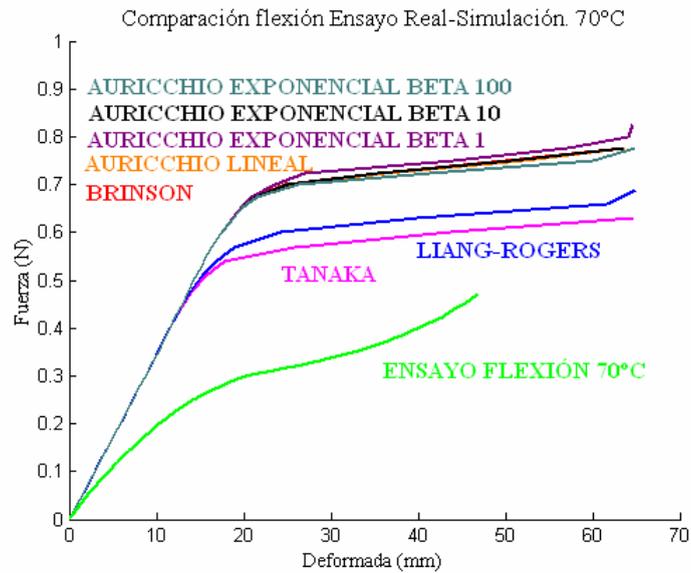


Figura 5.34: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 70°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los diferentes modelos constitutivos.

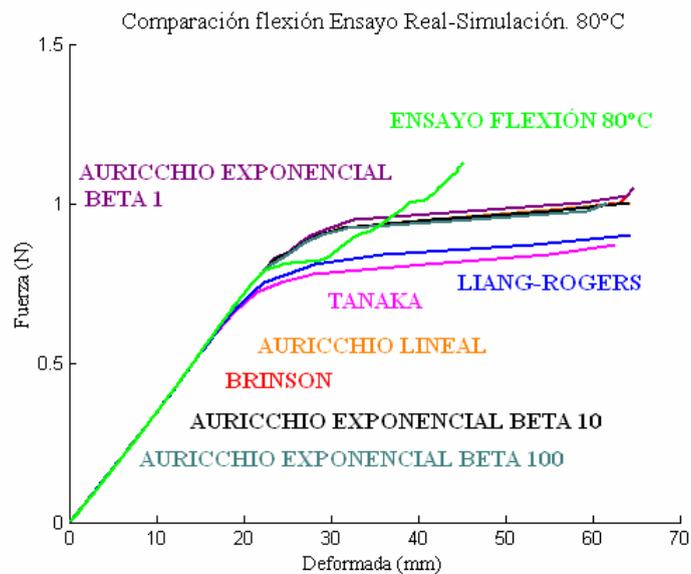


Figura 5.35: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 80°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los diferentes modelos constitutivos.

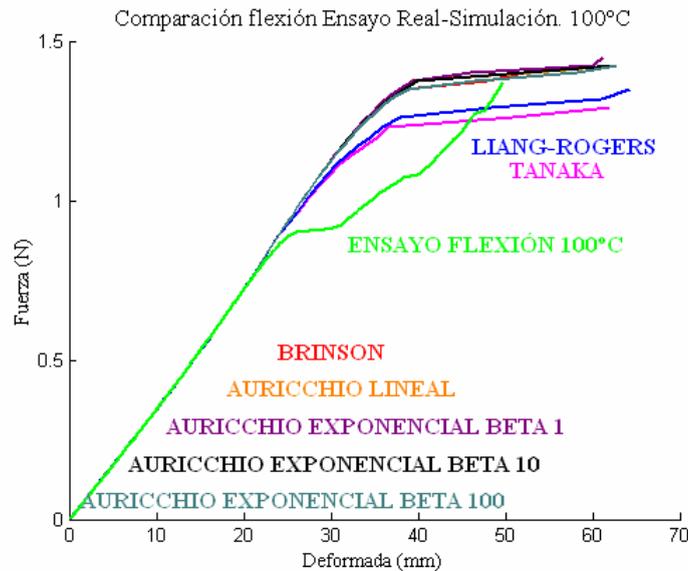


Figura 5.36: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio de flexión a 100°C. Los datos de tensión-deformación se obtienen de los diferentes modelos constitutivos.

De las figuras 5.30-5.36 podemos concluir que:

- Los modelos de Tanaka y Liang-Rogers no predicen con adecuación el comportamiento a bajas temperaturas, siendo más adecuados los modelos de Brinson y Auricchio exponencial y lineal.
- A altas temperaturas, por el contrario, el ajuste es similar para todos los modelos y más concretamente en el tramo elástico inicial.
- Para todos los modelos, el ajuste en cada temperatura es similar al ajuste que se obtuvo del comportamiento a tracción y, por tanto, en aquellas temperaturas donde a tracción el modelo predecía valores superiores de tensión también produce valores superiores en flexión.
- Para todos los modelos, en aquellas temperaturas a las que el modelo no ajustaba bien el módulo elástico a tracción, tampoco predice bien el comportamiento a flexión. Esto se puede corregir con *el modelo propuesto* donde los valores de amplitud de transformación así como las pendientes en los tramos elástico son más ajustados.

Se presenta, a continuación, la comparación entre *la simulación a flexión con el Modelo Propuesto* y deducido en el Capítulo 4, comparado con los resultados experimentales a flexión para las temperaturas de 19°C, 46,5°C, 70°C y 100°C.

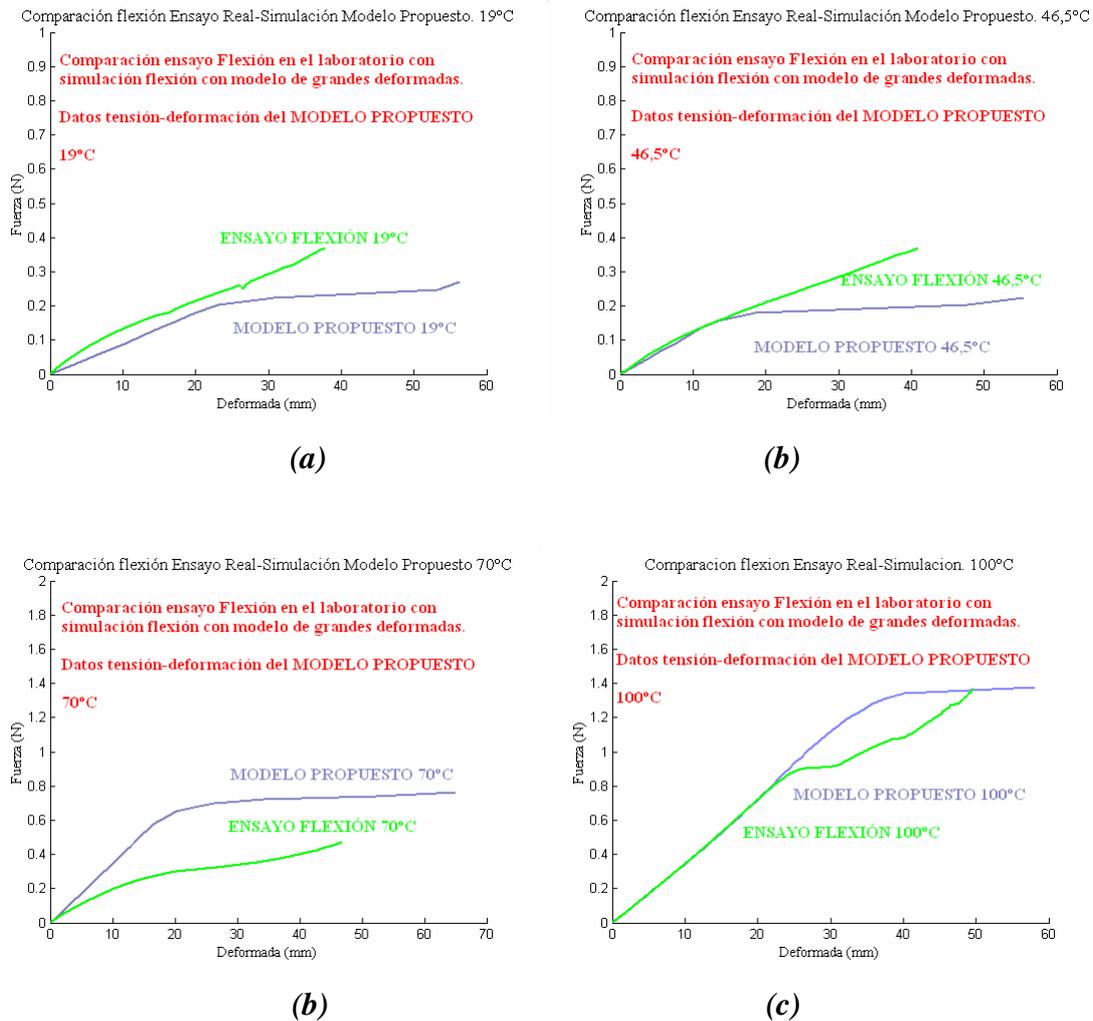


Figura 5.37: Comparación de la implementación numérica del modelo a flexión de grandes deformadas con el ensayo en el laboratorio a flexión. Los datos de tensión-deformación se obtienen del Modelo Propuesto. (a) 19°C; (b) 46,5°C; (c) 70°C; (d) 100°C.

Se puede observar cómo, con las mejoras introducidas con el *Modelo Propuesto* la aproximación a los resultados experimentales es mejor, concretamente a 46,5°C. Sin embargo, los mejores ajustes se consiguen en las zonas lineales, siendo las zonas de transformación, las zonas de mayor diferencia a causa, posiblemente, del diferente comportamiento del material a tracción que a compresión. A 100°C, en régimen austenítico, donde la asimetría tracción-compresión no es tan acusada, el ajuste entre el modelo propuesto y el resultado experimental es más preciso.