Sobre el álgebra de las funciones enteras de orden acotado

Julián Cufí Sobregrau

SOBRE EL ALGEBRA DE LAS FUNCIONES ENTERAS DE ORDEN ACOTADO

Julián Cufí Sobregrau

Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias, Sección Matemáticas, por la Universidad de Barcelona.

Vº Bº

El Director de la Tesis

Josep Mª Cosenta Díaz

UNIVERSIDAD DE BARCELONA, noviembre de 1973.

Agradezco al Prof. Dr. D. Joaquín Mª Cascante Dávila la orientación y el estímulo que me ha ofrecido a lo largo de la elaboración de esta Memoria.

Barcelona, noviembre de 1973.

INDICE

INTRODUCCION

Numerosas álgebras de funciones, importantes en Análisis, se obtienen al imponer condiciones de crecimiento a funciones de un determinado espacio y dotarlas de una topología adecuada a dichas condiciones. Algunas veces se obtienen álgebras de Banach a las que es aplicable la teoría de Gelfand; otras veces son álgebras localmente multiplicativamente convexas, es decir espacios localmente convexos dotados de un producto contínuo y que poseen una base de entornos m-convexos (convexos e idempotentes para el producto), las cuales son límites proyectivos de álgebras normadas y a las que, en consecuencia, es aplicable la teoría citada, debidamente generalizada. Nosotros estudiaremos, aquí, un álgebra topológica de funciones analíticas que, por la naturaleza de las condiciones de crecimiento, no es límite de álgebras normadas, procurando poner de manifiesto las propiedades más generales que se manejan, para que el estudio sea utilizable para otras álgebras análogas.

En el Capítulo I se introduce el álgebra E^{α} de las funciones enteras de orden menor o igual que α , dotada de una topología natural, y se establecen las propiedades de es -

ta topología que se necesitarán más adelante; topologías lo - calmente convexas de este tipo y otras análogas, habían ya sido consideradas por ejemplo en [15] y en [3] donde de mo - doespecial se establece el hecho de que sean nucleares.

El Capítulo II trata a E^α desde el punto de vista de álgebra, estableciendo en especial la continuidad de la de - rivación y del paso al inverso.

En el Capítulo III se considera el espacio de sucesiones asociado a E^α probando que su topología normal coincide con la original y deduciendo de ello la densidad de los polino - mios en E^α , lo que dice que el espectro de caracteres de esta álgebra es el plano complejo.

En el Capítulo IV se estudian las propiedades más ligadas a la naturaleza de las funciones de E^α : cuestiones de acota - ción y convergencia de productos infinitos y de la descompo - sición de Hadamard de estas funciones. Los resultados obteni - dos se aplican a caracterizar los ideales cerrados de E^α a través de sus ceros, obteniéndose en particular que el espec - tro de ideales maximales cerrados del álgebra coincide con el espectro de caracteres. La determinación de ideales cerrados había sido ya tratada para álgebras de funciones analíticas con condiciones de crecimiento en [5] , [7] , [8] , [9] y [11]

En el Capítulo V se considera el problema de la inter - polación de una sucesión dada por funciones de E^α ;se intro - duce un álgebra de sucesiones dotada de una topología análoga a la de E^{α} , en la que forzosamente han de estar las sucesiones interpolables y se prueba que tales sucesiones son densas en ella, así como en el espacio de todas las sucesiones dotado de la topología producto. Los métodos utilizados se aplican, también, a estudiar los cocientes del álgebra de las funciones enteras por un ideal cerrado.

El Capítulo VI empieza con algunas condiciones para que un álgebra topológica sea un álgebra de funciones enteras y pasa después a tratar los problemas de división e inversión de una sucesión convergente en tales álgebras, los cuales están ligados a la descripción de los ideales cerrados en álgebras satisfaciendo hipótesis análogas a las propiedades estudiadas en E^{α} .

La notación utilizada en cuestiones relacionadas con las propiedades de las funciones enteras de orden finito es, en general, la de [12] que, al igual que [13], contiene todos los resultados que se utilizan sin demostración.

CAPITULO I LA TOPOLOGIÁ DE E^α.

Designaremos siempre por C el plano complejo y por E el álgebra de las funciones enteras, es decir analíticas sobre C. Supondremos que E está dotada de la topología, que llamaremos $\mathfrak{T}$, de la convergencia uniforme sobre los compactos de C, con lo cual E es un álgebra de Fréchet localmente multiplicativamente convexa, es decir su topología puede definirse por una familia de seminormas (en este caso normas) $\{p_n\}_{n \in N}$, verificando todas ellas $p_n(f.g) \leq p_n(f).p_n(g)$ cualesquiera que sean f,g de E, o lo que es equivalente: el álgebra E es límite proyectivo de álgebras normadas (véase [10]).

Para cada función entera f consideraremos la función

$$r \longrightarrow M(r,f) = \sup_{|z|\leq r} |f(z)| = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{para} \quad r \geqslant 0$$

coincidiendo ambas expresiones en virtud del principio del máximo. Evidentemente M(r,f) es una función creciente de r no acotada si f no es una constante.

Se llama orden de la función entera f al ínfimo del conjunto de números $h \geqslant 0$, para los cuales es válida la desigualdad:

$$M(r,f) \leq \exp(r^h) \qquad \text{para } r \geqslant r_0 \text{ , } r_0 \text{ conveniente}$$

Si no existe ningún h con ests condición se considera que f tiene orden infinito. El orden de f lo designaremos por $\omega(f)$ y, en virtud de la definición, tenemos que si $\omega(f) = \rho$ entonces se puede asegurarque:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \text{ existe } r_0(\varepsilon) \text{ tal que: } M(r,f) \leqslant \exp(r^{\rho+\varepsilon}) \text{ si } r \geqslant r_0$$

Para las propieda des elementales del orden de una función entera puede consultarse [12] y [13] vol. I.

Si α es un número (finito) no negativo designaremos por E^α al conjunto de funciones enteras de orden no superior a α ; es decir :

$$f \in E^\alpha \quad \text{si y sólo si } f \in E \text{ y } \omega(f) \leqslant \alpha$$

Las propiedades del orden de una función permiten asegurar que E^α es un subespacio vectorial de E y tambien una subálgebra . De las definiciones resulta inmediatamente que si $\alpha \leq \beta$ entonces $E^\alpha \subseteq E^\beta$ y que el álgebra de los polinomios $C[z]$ está contenida en E^0 y por tanto en cualquier E^α , $\alpha \geqslant 0$.

Vamos a introducir en el álgebra E^α una topología natural :

si $f \in E^\alpha$ entonces por la definición de este espacio resulta que el cociente

$$\frac{M(r,f)}{\exp(r^{\alpha+\varepsilon})} \qquad (\ \varepsilon > 0, \text{cualquiera})$$

está acotado, asintóticamente , por 1 . Pero dicho cociente está acotado para todo valor de $\underline{r}$, porque si se verifica :

$$\frac{M(r,f)}{\exp(r^{\alpha+\varepsilon})} \leq 1 \qquad \forall\ r \geq r_0$$

como este cociente es función contínua de $\underline{r}$ también está acotado entre 0 y r_0 .

Para cada $f \in E^{\alpha}$ y $\varepsilon > 0$, llamaremos :

$$p_{\varepsilon}(f) = \sup_{r \geq 0} \frac{M(r,f)}{\exp(r^{\alpha+\varepsilon})} = \sup_{z \in C} \frac{|f(z)|}{\exp(|z|^{\alpha+\varepsilon})}$$

obteniéndose la última igualdad haciendo $|z| = r$.

Es inmediato , a partir de la definición, que p_{ε} es una norma en E^{α} ; en efecto:

1) $p_{\varepsilon}(f + g) \leq p_{\varepsilon}(f) + p_{\varepsilon}(g)$ porque se cumple : $M(r,f + g) \leq M(r,f) + M(r,g)$ y dividiendo por $\exp(r^{\alpha+\varepsilon})$ se obtiene la subaditividad.

2) $p_{\varepsilon}(\lambda f) = |\lambda| \cdot p_{\varepsilon}(f)$ porque $M(r,\lambda f) = |\lambda| \cdot M(r,f)$

3) $p_{\varepsilon}(f) = 0 \Rightarrow M(r,f) = 0\ \forall\, r \geq 0$ y por tanto f ha de ser nula.

Consideraremos en E^{α} la topología, que llamaremos $\mathcal{T}^{\alpha}$, dada por la familia de normas $\{p_{\varepsilon}\}, \varepsilon > 0$ que será por tanto separada y además metrizable, porque la familia $\{p_{\varepsilon}\}, \varepsilon > 0$ es equivalente a la familia, que designaremos por $\{p_n\}$ $n \in N$ haciendo un abuso de notación :

$$p_n(f) = \sup_{r \geq 0} \frac{M(r,f)}{\exp(r^{\alpha+1/n})}$$

La equivalencia resulta de que para $1/n < \varepsilon$ se verifica :

$$\exp(r^{\alpha+1/n}) < \exp(r^{\alpha+\varepsilon}) \quad \text{y por tanto} \quad p_n(f) > p_{\varepsilon}(f).$$

Además la familia de normas $\{p_n\}$, $n \in N$ cumple obviamente :

$$p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n \leq \cdots$$

$\mathcal{T}^{\alpha}$ es, pues, una topología localmente convexa metrizable en E^{α} ; si $f \in E^{\alpha}$ los entornos de f en esta topología vienen dados como los conjuntos de funciones $g \in E^{\alpha}$ que, para cada $n \in N$ y cada $\varepsilon > 0$, verifican :

$$\sup_{r \geq 0} \frac{M(r,f-g)}{\exp(r^{\alpha+1/n})} < \varepsilon$$

es decir :

$$\forall\, r \geq 0, \quad |z| \leq r \implies |f(z) - g(z)| \leq \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/n})$$

Observación I - 1. - Las normas p_n no cumplen la condición multiplicativa $p_n(f.g) \leq p_n(f).p_n(g)$; para verlo basta tomar $f = g = z$, con lo cual:

$$z \in E^0 \qquad p_1(z) = \sup_r \frac{r}{\exp(r)} = \frac{1}{e}$$

$$p_1(z^2) = \sup_r \frac{r^2}{\exp(r)} = \frac{4}{e^2}$$

de donde : $p_1(z^2) = \dfrac{4}{e^2} \nleq p_1(z).p_1(z) = \dfrac{1}{e^2}$

Puesto que E^α es un subespacio de E (espacio de las funciones enteras) podemos considerar también en E^α la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos, que seguiremos llamando $\mathcal{T}$, al igual que en E; se verifica la siguiente :

Proposición I - 1. - Sobre el espacio E^α $(\alpha \geq 0)$ la topología $\mathcal{T}^\alpha$ definida por las normas $\{p_n\}$ es más fina que la topología $\mathcal{T}$ de la convergencia uniforme sobre los compactos.

Demostración :

Consideremos un entorno de cero V de la topología $\mathcal{T}$ que podemos suponer de la forma

$$V = \left\{ f \in E^\alpha \;\middle|\; M(r,f) \leq \varepsilon \right\} \qquad \text{para un } r \geq 0 \text{ y } \varepsilon > 0.$$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ cualquiera y $\delta > 0$ tal que

$\delta \cdot \exp(r^{\alpha+1/n}) \leq \varepsilon$ para el valor de r considerado con lo cual si $f \in E^{\alpha}$ y $p_n(f) < \delta$ obtenemos

$M(r,f) \leq \delta \cdot \exp(r^{\alpha+1/n}) \leq \varepsilon$ es decir $f \in V$ y por lo tanto V es entorno de cero de la topología $\mathcal{C}^{\alpha}$.//

El espacio E^{α} con la topología $\mathcal{C}$, inducida por E no es completo puesto que cualquier función entera (por ejemplo $\exp(\exp(z))$ que es de orden infinito y por tanto no pertenece a ningún E^{α}, $0 \leq \alpha < \infty$) es límite uniforme sobre los compactos de una sucesión de polinomios, los cuales formarán una sucesión de Cauchy según $\mathcal{C}$ en E^{α} que no será convergente en E^{α}. El siguiente resultado demuestra que la topología $\mathcal{C}^{\alpha}$ es adecuada para E^{α} :

Teorema I - 1. - El espacio E^{α} con la topología $\mathcal{C}^{\alpha}$ es completo. $(E^{\alpha}, \mathcal{C}^{\alpha})$ es, por tanto, un espacio de Fréchet.

Demostración :

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en E^{α} respecto $\mathcal{C}^{\alpha}$. Por la Proposición I - 1 (f_n) es también de Cauchy en $\mathcal{C}$ y por lo tanto convergente hacia una cierta función entera $f \in E$. Veamos que $f \in E^{\alpha}$ y además $(f_n) \longrightarrow f$ en $\mathcal{C}^{\alpha}$.

Por la condición de Cauchy tenemos que dados $p \in N$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ de modo que si $n,m > n_0$ se verifica :

$$\forall\, r \geq 0, \quad |z| \leq r \implies \left| f_n(z) - f_m(z) \right| < \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/p})$$

Al hacer tender $\underline{m}$ a infinito tenemos que $f_m(z)$ tiende a $f(z)$ y, por tanto :

si $n > n_0$ y $|z| \leq r$ es : $\left| f_n(z) - f(z) \right| \leq \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/p})$

lo cual significa por una parte (teniendo en cuenta la definición de orden) que $\omega(f - f_n) \leq \alpha + 1/p$, para algún $\underline{n}$, y como $f_n \in E^{\alpha+1/p}$ y $E^{\alpha+1/p}$ es espacio vectorial resulta que también $f \in E^{\alpha+1/p}$; como $\underline{p}$ puede ser cualquiera se sigue que $f \in E^{\alpha}$.

Por otra parte la última desigualdad establecida significa también que $(f_n) \longrightarrow f$ en $\mathcal{T}^{\alpha}$.//

Observación I - 2. - Como hemos dicho antes E^{α} no es completo con la topología $\mathcal{T}$ y sí que lo es, según acabamos de ver, con $\mathcal{T}^{\alpha}$; en particular la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$ es estrictamente más fina que la $\mathcal{T}$ (ver Proposición I - 1). Puesto que cada E^{α} contiene a E^0 y por tanto a los polinomios, el completado de $(E^{\alpha}, \mathcal{T})$ es el espacio de todas las funciones enteras E.

Puesto que, sobre E^{α}, la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$ es más fina que la $\mathcal{T}$ resulta todo conjunto $\mathcal{T}^{\alpha}$- acotado es, naturalmente, $\mathcal{T}$- acotado mientras que el recíproco no es cierto; vamos a ver, sin embargo, que la $\mathcal{T}$- convergencia de una sucesión junto con la $\mathcal{T}^{\alpha}$- acotación es suficiente para asegurar que dicha sucesión es $\mathcal{T}^{\alpha}$- convergente. Este es un criterio bastante útil de $\mathcal{C}^{\alpha}$ - convergencia que será utilizado en lo sucesivo.

Observemos que, de acuerdo con las definiciones, una parte $\mathcal{A}$ de E^{α} es $\mathcal{C}^{\alpha}$ - acotada cuando :

$$\forall n \in N \quad \text{existe} \quad M_n \geqslant 0 \quad \text{tal que :}$$

$$\forall r \geqslant 0, \quad |z| \leqslant r \Rightarrow |f(z)| \leqslant M_n . \exp(r^{\alpha + 1/n}) \quad \text{para toda } f \in \mathcal{A}.$$

Teorema I - 2. - Sea (f_n) una sucesión de funciones de E^{α} convergente según $\mathcal{C}$ hacia una función entera $\underline{f}$ y supon - gamos, además, que la sucesión (f_n) es $\mathcal{C}^{\alpha}$- acotada; en - tonces se puede asegurar que también $(f_n) \longrightarrow f$ según $\mathcal{C}^{\alpha}$ (y, en consecuencia, $f \in E^{\alpha}$).

Demostración :

Sea $(f_n) \longrightarrow f$ en $\mathcal{C}$ verificando, además, la con - dición de $\mathcal{C}^{\alpha}$ - acotación; es decir :

$$\forall q \in N \text{ existe } M_q : \quad |z| \leqslant r \Rightarrow |f_n(z)| \leqslant M_q . \exp(r^{\alpha + 1/q}), \forall n \in N, r \geqslant 0$$

Para probar el teorema basta ver que (f_n) es de Cau - chy según $\mathcal{C}^{\alpha}$. Para ello supongamos dados $\varepsilon > 0$ y $p \in N$ y consideremos el desarrollo de Taylor de cada f_n; sea :

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n z^k \quad (z \in C) \quad \text{con} \quad a_k^n = \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} \qquad \begin{array}{l} n=1,2,.. \\ k=0,1,.. \end{array}$$

con lo cual cada sucesión $(a_k^n)_{n \in N}$ es convergente (porque la convergencia en $\mathcal{C}$ implica la convergencia de la función y todas sus derivadas).

Además por las desigualdades de Cauchy tenemos que :

$$\forall\, r \geq 0,\ \forall\, n \in N \quad \text{es :} \quad |a_k^n| \leq \frac{M(r,f_n)}{r^k}$$

y por la condición de $\mathscr{C}^{\alpha}$ - acotación de las f_n se obtiene :

$$\forall\, r \geq 0, \forall\, n \in N \qquad |a_k^n| \leq M_q \frac{\exp(r^{\alpha+1/q})}{r^k} \qquad (\text{con } q \in N).$$

Para establecer la condición de Cauchy para las f_n, dado $p \in N$, escojamos $q > p$, $q \in N$ y $\delta > 0$, este último suficientemente pequeño para que se verifique :

$$(r + \delta)^{\alpha+1/q} \leq r^{\alpha+1/p} \qquad \forall\, r \geq 0.$$

Se ve que esto ès posible porque :

$$q > p \Rightarrow 1/q < 1/p \quad \text{luego} \quad r^{\alpha+1/p} = r^{\alpha+1/q} + \eta \qquad (\eta > 0)$$

y basta tomar $\delta > 0$ de modo que $(r + \delta)^{\alpha+1/q} \leq r^{\alpha+1/q} + \eta$.

lo que es posible ya que $(r + \delta)^{\alpha+1/q} \longrightarrow r^{\alpha+1/q}$ si $\delta \longrightarrow 0$.

Ahora, con esta elección de $\underline{q}$ y δ y, teniendo en cuenta la a cotación que satisfacen los coeficientes a_k^n, tenemos :

$$|z| \leq r \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| \leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^n - a_k^m) z^k \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^n - a_k^m| r^k = \sum_{k=0}^{k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k + \sum_{k>k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k \leq$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k + 2 \sum_{k>k_0} \frac{M_q \cdot \exp(r+\delta)^{\alpha+1/q}}{(r+\delta)^k} r^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k + 2M_q \cdot \exp(r+\delta)^{\alpha+1/q} \cdot \sum_{k>k_0} \left(\frac{r}{r+}\right)^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k + 2M_q \cdot \exp(r^{\alpha+1/\rho}) \cdot \sum_{k>k_0} \left(\frac{r}{r+}\right)^k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k + 2M_q \cdot \varepsilon' \exp(r^{\alpha+1/\rho})$$

siempre que k_0 sea suficientemente grande y donde $\varepsilon' > 0$ es un número que después será convenientemente elegido.

El término $\sum_{k=0}^{k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k$ consta de ún número finito de sumandos en los que el factor $|a_k^n - a_k^m|$ que afecta a r^k puede hacerse tan pequeño como se quiera para n,m grandes por ser $(a_k^n)_n$ de Cauchy; asi pues para $\varepsilon' > 0$, se puede conseguir que :

$$\sum_{k=0}^{k_0} |a_k^n - a_k^m| r^k \leq \varepsilon' \cdot r^{k_0} \quad \text{si } m,n > \nu \text{ conveniente}$$

Ahora bien :

$$\varepsilon' \cdot r^{k_0} \leq \varepsilon' \cdot \exp(r^{\alpha+1/\rho}) \quad \text{si } r \geqslant r_0 \text{ conveniente}$$

y si $\varepsilon > 0$ es el número prefijado en la condición de Cauchy se puede, fácilmente, tomar $\varepsilon' < \varepsilon$ adecuado para que la desigualdad

$$\varepsilon' \cdot r^{k_0} \leq \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/\rho})$$

sea cierta también para $0 \leq r \leq r_0$. Se obtiene, en resumen :

$$|z| \leq r \quad \Rightarrow |f_n(z) - f_m(z)| \leq \varepsilon \cdot (1 + 2M_q).\exp(r^{\alpha + 1/p}) \text{ si } n,m > \nu$$

que es, esencialmente, la condición de Cauchy según $\mathcal{T}^\alpha$ para la sucesión (f_n).//

<u>Corolario 1</u>. - El espacio E^α con la topología $\mathcal{T}^\alpha$ es de Montel.

<u>Demostración</u>.:

Toda sucesión acotada por $\mathcal{T}^\alpha$ es acotada por $\mathcal{T}$, luego tendrá una parcial $\mathcal{T}$ - convergente, según el teorema clásico de Montel, la cual en virtud de lo anterior será también $\mathcal{T}^\alpha$ - convergente. Asi pues todo conjunto acotado de E^α es relativamente compacto por sucesiones y por tanto relativamente compacto por ser E^α metrizable.//

<u>Corolario 2</u>. - El espacio E^α con la topología $\mathcal{T}^\alpha$ es separable.

<u>Demostración</u> :

En efecto, se trata de un espacio que es de Fréchet y de Montel.//

Como ya se ha dicho en el Capítulo I, de las propiedades del orden de una función entera, resulta inmediatamente que el espacio vectorial E^{α} tiene también estructura de álgebra con el producto ordinario de funciones. Vamos a ver, en primer lugar, que este producto es compatible con la topología, es decir que E^{α} es un álgebra topológica :

Proposición II - 1. - El producto de funciones en E^{α} es contínuo con la topología $\mathcal{E}^{\alpha}$.

Demostración :

Puesto que el producto es una forma bilineal, basta ver que es contínua en el origen; hay que probar, pues, que : dados $\varepsilon > 0$ y $n \in N$, existen $\delta > 0$ y $m \in N$ de modo que :

$$f, g \in E^{\alpha} \quad y \quad p_m(f) < \delta \quad , \; p_m(g) < \delta \implies \quad p_n(f.g) < \varepsilon .$$

A tal fin basta tomar $m = 2n$ con lo cual se tiene :

$$p_m(f) < \delta \implies M(r,f) \leq \delta \cdot \exp(r^{\alpha + 1/2n}) \quad \forall \, r \geq 0$$

$$p_m(g) < \delta \implies M(r,g) \leq \delta \cdot \exp(r^{\alpha + 1/2n}) \quad \forall \, r \geq 0$$

y puesto que, obviamente, $M(r,f.g) \leq M(r,f).M(r,g)$ obtenemos:

$$M(r,f.g) \leq \delta^2 \cdot \exp(2r^{\alpha+1/2n})$$

y si r_0 es suficientemente grande para que $r \geqslant r_0$ implique $2 < r^{1/2n}$, entonces se verifica :

$$M(r,f.g) \leq \delta^2 \cdot \exp(r^{\alpha+1/n}) \qquad \text{si} \quad r \geqslant r_0$$

y como $\delta^2 \cdot \exp(r^{\alpha+1/n})$ y $\varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/n})$ son funciones estricta - mente crecientes de $\underline{r}$ se puede tomar δ suficientemente pe - queño a fin de que :

$$\delta^2 \cdot \exp(r^{\alpha+1/n}) \leq \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/n}) \qquad \forall\, r \geqslant 0$$

lo cual significa que $p_n(f.g) < \varepsilon$ .//

Así pues E^α es un espacio de Fréchet provisto de una multiplicación contínua y en este sentido diremos que es un álgebra de Fréchet, a pesar de que no sea localmente multi - plicativamente convexa, es decir límite proyectivo de álge - bras normadas

Observación II - 1. - Si consideramos el álgebra E^α pro - vista de la sola norma p_n, entonces al variar $\underline{n}$ obtendre - mos un sistema proyectivo de álgebras, cada una de las cua - les será un espacio localmente convexo, de límite E^α con la topología $\mathcal{T}^\alpha$; pero en E^α con la topología dada por la sola norma p_n el producto no tiene porqué ser contínuo, es decir, (E^{α}, p_n) no es álgebra normada.

Otra descomposición de E^{α} como límite proyectivo, que es útil para estudiar a E^{α} como espacio localmente convexo, es la siguiente :

$$\text{sea} \qquad H^{\alpha} = \left\{ f \in E \;\middle|\; M(r,f) \leqslant K.\exp(r^{\alpha}) \; \forall\, r \geqslant 0 \right\}$$

(K constante) con lo cual es inmediato que H^{α} es espacio vectorial en el que se introduce la norma natural :

$$f \longrightarrow \sup_{r \geqslant 0} \frac{M(r,f)}{\exp(r^{\alpha})}$$

Entonces se verifica evidentemente :

$$E^{\alpha} = \bigcap_{\beta > \alpha} H^{\beta} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H^{\alpha + 1/n}$$

y, por tanto, E^{α} límite proyectivo de la sucesión $H^{\alpha+1/n}$ recibe la estructura de espacio de Fréchet que claramente coincide con la anteriormente introducida $\mathcal{T}^{\alpha}$.

Sin embargo cada H^{α} no es ni tan sólo cerrado para el producto de funciones lo cual hace que esta descomposición no tenga interés para el estudio de E^{α} como álgebra topoló - gica. Para convencerse de tal afirmación respecto de H^{α} basta considerar, por ejemplo, la función exp(z), para la cual se tiene :

$$M(r, \exp(z)) = \exp(r) \leqslant \exp(r) \qquad \forall\, r \geqslant 0$$

en cambio para exp(z).exp(z) = exp(2z) es :

$$M(r,\exp(2z)) = \exp(2r)$$

que no puede estar acotado por ningún múltiplo de exp(r) porque :

$$\exp(2r) \leq K.\exp(r) \implies \exp(r) \leq K,$$

lo que es absurdo.

Pasamos a estudiar a continuación la derivación en el álgebra E^{α} . Por las propiedades del orden de una fun - ción entera (vease[12] ó [13]), es sabido que una función y su derivada tienen el mismo orden, $\omega(f) = \omega(f')$. Así pues E^{α} es cerrada para la derivación. Vamos a probar ahora la compatibilidad de esta operación con la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$.

<u>Proposición II - 2</u>. - La derivación $f \longrightarrow f'$ es una operación contínua en el espacio E^{α} con la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$. La $\mathcal{T}^{\alpha}$- convergencia de una sucesión implica, pues, la $\mathcal{T}^{\alpha}$- convergencia de las sucesiones de derivadas.

<u>Demostración</u> :

Hemos de probar que, dados $\varepsilon > 0$, $n \in N$, existen $\delta > 0$ $m \in N$ de modo que :

$$p_m(f) < \delta \implies p_n(f') < \varepsilon$$

o bien, lo que es lo mismo :

$$\forall\, r \geq 0 : \quad M(r,f) < \delta \cdot \exp(r^{\alpha+1/m}) \quad \Longrightarrow \quad M(r,f') < \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/n}).$$

Empecemos por observar que para todo $r \geq 1$ se verifica la desigualdad :

$$M(r,f') \leq M(2r,f)$$

la cual, por comodidad de lectura, establecemos a continuación siguiendo a [12] (p. 244):

considerando la circunferencia γ de centro el punto z, siendo $|z| = r$, y radio la unidad, orientada positivamente, el teorema de los residuos aplicado a la función

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}$$

nos dá :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi = \mathrm{Res}(f,z) = f'(z)$$

de donde se obtiene la desigualdad :

$$|z| = r \Rightarrow |f'(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma |f(\xi)|\, d\xi = M(r+1,f)$$

porque sobre $\gamma : |\xi - z| = 1$ y $|f(\xi)| \leq M(r+1,f)$. En resumen, se tiene :

$$M(r,f') \leq M(r+1,f) \qquad \forall\, r \geq 0$$

de donde, si $r \geqslant 1$, resulta finalmente :

$$M(r,f') \leq M(r+1,f) \leq M(2r,f)$$

Así, pues, la hipótesis $p_m(f) < \delta$, hecha al principio, permite establecer :

$$M(r,f') \leq M(2r,f) \leq \delta\cdot\exp(2^{\alpha+1/m}\cdot r^{\alpha+1/m}) \qquad r \geqslant 1$$

y si hemos tomado $\underline{m}$ de modo que $1/m < 1/n$, con lo cual $1/n = 1/m + h$ $(h > 0)$, entonces se verifica :

$$M(r,f') \leq \delta\cdot\exp(2^{\alpha+1/m}\cdot r^{\alpha+1/m}) \leq \delta\cdot\exp(r^{\alpha+1/m+h}) = \delta\cdot\exp(r^{\alpha+1/n})$$

siempre que $r \geqslant r_0$ conveniente (basta p. ej. que $r^h > 2^{\alpha+1/m}$).

Ahora bien, incluso para $0 \leq r \leq r_0$ tenemos, según hemos visto antes, la desigualdad :

$$M(r,f') \leq M(r+1,f)$$

y por tanto :

$$M(r,f') \leq \delta\cdot\exp((r+1)^{\alpha+1/m}) \leq \delta\cdot\exp((r+1)^{\alpha+1/n}) \qquad 0 \leq r \leq r_0$$

Finalmente, puesto que tanto $\exp((r+1)^{\alpha+1/n})$ como $\exp(r^{\alpha+1/n})$ son funciones crecientes y no nulas de $\underline{r}$, se puede elegir $\delta > 0$ de modo que :

$$M(r,f') \leq \delta\cdot\exp((r+1)^{\alpha+1/n}) \leq \varepsilon\cdot\exp(r^{\alpha+1/n}) \quad 0 \leq r \leq r_0$$

y como, por otra parte, habíamos obtenido :

$$M(r,f') \leq \delta \cdot \exp(r^{\alpha+1/4}) \qquad r \geqslant r_0$$

basta que δ se elija, también, menor que ε para poder asegurar que :

$$p_m(f) < \delta \quad \Longrightarrow \quad p_n(f') < \varepsilon$$

como se quería probar.//

Queremos determinar, ahora, los elementos inversibles del álgebra E^{α} y estudiar la compatibilidad del paso al inverso en E^{α} con la topología $\mathcal{C}^{\alpha}$.

Los elementos inversibles de E^{α} se obtienen inmediatamente a partir de las propiedades conocidas, aunque no elementales, de las funciones enteras de orden finito; en efecto, tenemos la siguiente :

<u>Proposición II - 3</u>. - Una función $f \in E^{\alpha}$ es inversible en E^{α} si y sólo si es de la forma

$$f(z) = \exp(P(z))$$

donde $P(z)$ es una función polinómica de grado no superior a α.

<u>Demostración</u> :

Si f es inversible en E^{α}, entonces f ha de ser una función sin ceros y como f es de orden finito ($\omega(f) \leq \alpha$), por el teorema de descomposición de Hadamard (véase p. ej.

[12] , p. 251), ha de ser de la forma

$$f(z) = \exp(P(z))$$

con P(z) función polinómica; como, por otra parte, el orden de exp(P(z)) coincide con el grado de P(z) resulta que este no puede superar a α.

Recíprocamente, si $f(z) = \exp(P(z))$ con $gr(P) \leq \alpha$, entonces f es una función sin ceros y portanto es inversible dentro del álgebra de las funciones enteras; ahora bien su inversa es la función $\exp(-P(z))$, que pertenece también a E^{α} , porque su orden es $gr(-P) \leq \alpha$ .//

En la teoría de las álgebras topológicas son conocidas las llamadas álgebras con inverso contínuo que son álgebra s en las cuales existe un entorno de la unidad formado por elementos inversibles y además la operación de paso al inverso es contínua. Este hecho, que se utiliza de modo esencial en la teoría de Gelfand de las álgebras normadas, hace que las álgebras con inverso contínuo sean, en algunos aspectos, muy parecidas a las álgebras de Banach.

La posibilidad de ser un álgebra con inverso contínuo se desca rta inmediatamente para el álgebra E^{α} :

<u>Proposición II - 4</u>. - El álgebra E^{α} no es un álgebra con inverso contínuo (no posee un entorno de la unidad de elementos inversibles).

Demostración :

Consideremos un entorne arbitrario de la unidad, que será de la forma :

$$V = \left\{ f \in E^{\alpha} \;\middle\backslash\; p_n(f-1) \leq \varepsilon \right\}$$

y veamos que siempre contiene funciones de E^{α} con ceros y, por tanto, no inversibles; en efecto :

puesto que $\underline{z}$ es una función de orden cero existe una constante $M > 0$ tal que :

$$|z| \leq M.\exp(|z|^{\alpha+1/n}) \quad \text{para todo } \underline{z} \text{ complejo;}$$

consideremos, ahora, la función :

$$f(z) = 1 + \delta\, z \quad \text{con } \delta = \varepsilon/M ,$$

con lo cual se tiene :

$$|f(z)-1| = |\delta\, z| = \delta\, |z| \leq \delta \cdot M\exp(|z|^{\alpha+1/n}) = \varepsilon \cdot \exp(|z|^{\alpha+1/n})$$

es decir $p_n(f-1) \leq \varepsilon$ y $f \in V$, pero la función $1 + \delta \cdot z$ tiene ceros y por tanto no es inversible.//

Según acabamos de ver los elementos inversibles de E no forman ninguna parte abierta de este espacio; sin embargo si designamos por U al conjunto de dichos elementos, la operación $f \longrightarrow f^{-1}$ que puede realizarse dentro de U es contínua, como vamos a probar a continuación. Empacemos, para ello, estableciendo el siguiente resultado auxiliar :

Lema II - 1. - Supongamos que una sucesión de polinomios reales

$$P_n(r) = a_0^n + a_1^n r + \dots + a_\alpha^n r^\alpha$$

todos ellos de grado menor o igual que α , es tal que $\lim_{n \to \infty} P_n(r) = 0$ para todo $r \geq 0$; entonces las sucesiones de coeficientes

$$(a_0^n),\ (a_1^n),\ \dots,\ (a_\alpha^n) \qquad n \in N$$

son toda s ellas convergentes hacia cero.

Demostración :

Dando a r sucesivamente los valores 1, 2,...,α obtenemos las siguientes sucesiones de límite cero :

$$P_n(0) = \lambda_0^n = a_0^n \longrightarrow 0$$

$$P_n(1) = \lambda_1^n = a_0^n + a_1^n + \dots + a^n \longrightarrow 0$$

$$P_n(2) = \lambda_2^n = a_0^n + 2a_1^n + \dots + 2\ a^n \longrightarrow 0$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$P_n(\alpha) = \lambda_\alpha^n = a_0^n + \alpha a_1^n + \dots + \alpha^\alpha a_\alpha^n \longrightarrow 0$$

Las igualdades anteriores permiten despejar a_0^n, a_1^n... a_α^n como combinación lineal de $\lambda_0^n, \lambda_1^n, \dots, \lambda_\alpha^n$ con coeficientes independientes de n; para verlo basta observar que el determinante del sistema que se obtiene al considerar a_0^n, $a_1^n, \dots, a_\alpha^n$ como incógnitas es el determinante de Vandermonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1^2 \dots & 1^\alpha \\ 1 & 2 & 2^2 \dots & 2^\alpha \\ \dots & & \dots & \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \dots & \alpha^\alpha \end{vmatrix}$$

correspondiente a $(0, 1, 2, \dots, \alpha)$ que es distinto de cero.

Puesto que $\lambda_0^n, \lambda_1^n, \dots, \lambda_\alpha^n$ tienden hacia cero se obtiene el resultado deseado para $a_0^n, a_1^n, \dots, a_\alpha^n$.//

Pasamos ahora a establecer la continuidad del paso al inverso en $\dot{E}^\alpha$:

<u>Teorema II - 1.</u> - Sea U el conjunto de elementos inversibles en E^α ; entonces la aplicación $f \longrightarrow f^{-1}$ es contínua sobre U para la topología $\mathcal{C}^\alpha$.

<u>Demostración</u> :

Basta, para establecer este resultado, demostrar que si $f_n \in U$ y $f_n \longrightarrow 1$ (en $\mathcal{C}^\alpha$) entonces también $1/f_n \longrightarrow 1$; porque, por la continuidad del producto (Proposición II - 1) si $f_n \longrightarrow g \in U$ tendremos $f_n/g \longrightarrow 1$, de donde $g/f_n \longrightarrow 1$ y de nuevo $1/f_n \longrightarrow 1/g$ (multiplicando por $1/g \in U$).

Supongamos, a tal fin, que

$$f_n(z) = \exp(P_n(z)), \quad gr(P_n) \leq \alpha \quad \text{(ver Prop. II-3)}$$

y que $\exp(P_n(z)) \longrightarrow 1$; es decir :

$\forall\ \varepsilon>0,\ p\in N$ existe $n_0 : |z|\leq r \Rightarrow |\exp(P_n(z)) - 1| \leq \varepsilon\cdot\exp(r^{\alpha+1/p})\ (n\geq n_0)$

Según sabemos (Proposición I - 1) $\exp(P_n(z)) \longrightarrow 1$ uniformemente sobre cada compacto y, en particular, es :

$$\forall z\in C : \quad \exp(P_n(z)) \longrightarrow 1 \qquad \text{y de aquí}$$

$$|\exp(P_n(z))| = \exp(Re(P_n(z))) \longrightarrow 1 \Rightarrow Re(P_n(z)) \longrightarrow 0$$

Ahora pongamos $z = r.\exp(i\theta)$, con lo cual :

$$|1/f_n - 1| = |\exp(-P_n(z)) - 1| = |\exp(P_n(z) - 1|\cdot|\exp(-P_n(z))| =$$

$$= |\exp(P_n(z)) - 1|\cdot\exp(Re(-P_n(re^{i\theta}))).$$

Llamemos :

$$P_n(z) = c_0^n + c_1^n z + \dots + c_{\alpha'}^n z^{\alpha'} \text{ con } c_k^n = -a_k^n + ib_k^n \quad (\alpha' = [\alpha])$$

con lo cual tendremos para todo $r\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$:

$$Re(P_n(re^{i\theta})) = -a_0^n - (a_1^n\cos\theta + b_1^n\operatorname{sen}\theta)r - (a_2^n\cos 2\theta + b_2^n\operatorname{sen}2\theta)r^2 -$$

$$-\dots\dots-(a_{\alpha'}^n\cos\alpha'\theta + b_{\alpha'}^n\operatorname{sen}\alpha'\theta)r^{\alpha'} \longrightarrow 0$$

y de acuerdo con el Lema II - 1 :

$$a_k^n\cos k\theta + b_k^n\operatorname{sen}k\theta \longrightarrow 0 \quad k = 0,1,\dots,\alpha' \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

y de aquí :

$$a_k^n \longrightarrow 0\ ;\quad b_k^n \longrightarrow 0 \quad \text{para} \quad k = 0,1,\dots,\alpha'.$$

Así, pues, suponiendo que $r \geq 1$ obtenemos la acotación :

$$|\exp(-P_n(z)) - 1| = |\exp(P_n(z) - 1|\cdot \exp(\sum_{k=0}^{\alpha'}(a_k^n \cos k\theta + b_k^n \operatorname{sen} k\theta) r^k) \leq$$

$$\leq |\exp(P_n(z)) - 1|\cdot \exp(\sum_{k=0}^{\alpha'}\left[|a_k^n| + |b_k^n|\right] r^k) \leq$$

$$\leq |\exp(P_n(z)) - 1|\cdot \exp\left\{(\sum_{k=0}^{\alpha'}\left[|a_k^n| + |b_k^n|\right]) r^{\alpha'}\right\}$$

y si llamamos $\quad M_n = \sum_{k=0}^{\alpha'}\left[|a_k^n| + |b_k^n|\right]$

obtenemos :

$$|\exp(-P_n(z)) - 1| \leq |\exp(P_n(z)) - 1|\cdot \exp(M_n . r^{\alpha}) \text{ con } M_n \longrightarrow 0$$

Ahora se trata de ver que dados $\delta > 0$ y $q \in N$ se verifica :

$$|z| \leq r \Rightarrow |\exp(-P_n(z) - 1| \leq \delta \exp(r^{\alpha+1/q}) \qquad n \geq n_0$$

para lo cual tomemos $p = 2q$ y $\varepsilon > 0$ que elegiremos convenientemente. Se tiene :

$$|z| \leq r \Rightarrow |\exp(-P_n(z)) - 1| \leq |\exp(P_n(z)) - 1|\cdot \exp(M_n . r^{\alpha}) \leq$$

$$\leq \varepsilon\cdot \exp(r^{\alpha+1/p}) . \exp(M_n . r^{\alpha}) \leq \varepsilon\cdot \exp((1+M_n) r^{\alpha+1/p}) \qquad \text{si } r \geq 1 \text{ y } n \geq n_0$$

Puesto que la sucesión (M_n) está acotada ($M_n \longrightarrow 0$) se deduce que existe una constante $M \geq 0$, de modo que :

$$|z| \leq r \Rightarrow |\exp(-P_n(z) - 1| \leq \varepsilon\cdot \exp(M . r^{\alpha+1/p}), \ r \geq 1, n \geq n_0$$

y si $r_0 \geq 1$ es tal que $M \leq r_0^{1/p}$, entonces tendremos :

$$|z| \leq r \Rightarrow |\exp(-P_n(z)) - 1| \leq \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+\varepsilon/\rho}) = \varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/q})$$

siempre que $r \geqslant r_0$ y $n \geqslant n_0$. Ahora bien, $\varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/q})$ y $\delta \cdot \exp(r^{\alpha+1/q})$ son funciones estrictamente crecientes de **r** y por tanto, se puede elegir $\varepsilon > 0$ de modo que :

$\varepsilon < \delta$ y, si $0 \leq r \leq r_0$, es : $\varepsilon \cdot \exp(r^{\alpha+1/q}) \leq \varepsilon \exp(r_0^{\alpha+1/q}) < \delta \leq \delta \cdot \exp(r^{\alpha+1/q})$

obteniéndose finalmente :

$$|z| \leq r \Rightarrow |\exp(-P_n(z)) - 1| \leq \delta \cdot \exp(r^{\alpha+1/q}) \quad \text{para todo } r \geqslant 0, n \geqslant n_0. //$$

CAPITULO III EL ESPACIO DE SUCESIONES DE E^{α}.

Para cada función $f \in E^{\alpha}$ consideremos la sucesión $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ de los coeficientes de su desarrollo de Taylor como función entera; es decir :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \qquad , \quad z \in C.$$

Las sucesiones complejas que corresponden a funciones de E^{α} forman un espacio vectorial que denotaremos por Ω^{α}, subespacio del de todas las sucesiones complejas. Es fácil, utilizando los teoremas de Hadamard sobre funciones enteras de orden finito, caracterizar las sucesiones dé este espacio :

Proposición III - 1. - La sucesión compleja $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ es la sucesión de coeficientes del desarrollo de una función de E^{α} si y sólo si cumple la condición :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot n^{n\beta} < +\infty \qquad \text{para todo} \quad : \quad 0 \leq \beta < \frac{1}{\alpha} .$$

Demostración :

Empecemos por observar que, según un teorema de Ha -

damard (véase [12] p. 246), si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n$ es una función entera de orden $\rho < +\infty$, entonces se verifica :

$$1/\rho = \sup\left\{ \varepsilon > 0 \,\middle|\, \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/n^{\varepsilon};\ \forall\, n \geq n_0 \text{ conveniente} \right\}$$

De aquí se desprende que si $f \in E^{\alpha}$ se tiene :

$$\omega(f) \leq \alpha \Rightarrow 1/\omega(f) \geq 1/\alpha$$

y, por tanto :

$$\beta < 1/\alpha \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq M.n^{-n\beta} \quad \text{, siendo M cierta cte.}$$

y tomando $\beta < \beta' < 1/\alpha$ se obtiene :

$$|a_n| \leq M.n^{-n\beta'} \Rightarrow |a_n| . n^{n\beta} \leq M.n^{n(\beta-\beta')} \qquad (\beta' - \beta > 0)$$

y de aquí :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^{n.\beta} < +\infty \qquad \text{si} \qquad \beta < 1/\alpha .$$

Recíprocamente : si (a_n) cumple esta condición, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n$ define una función entera, porque :

$$\forall\, \beta < 1/\alpha \quad \text{es :} \quad |a_n|\, n^{n\beta} \longrightarrow 0$$

y por tanto :

$$|a_n|^{1/n} \leq 1/n^{\beta} \quad \text{si } n \geq n_0 \text{ conveniente;}$$

de aquí resulta :

$|a_n|^{1/n} \longrightarrow 0$, luego $f \in E$ y, además, $1/\omega(f) \geq 1/\alpha$ es decir $f \in E^{\alpha}$.//

En virtud de la Proposición anterior, decir que una sucesión (a_n) pertenece a Ω^α es equivalente a que verifi - que las condiciones :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot n^{n\beta_k} < +\infty \quad \text{donde} \quad \beta_k = 1/\alpha - 1/k \text{ , } k = 1,2,\ldots$$

Dicho de otro modo el espacio Ω^α, de las sucesiones correspondientes a funciones de E^α, se identifica con el espacio escalonado definido por la sucesión (n^n) y sus po - tencias de exponentes $\beta_k = 1/\alpha - 1/k$, $k = 1,2,3,\ldots$

Representemos por Ω^k al espacio de sucesiones :

$$(a_n) \in \Omega^k \iff \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, n^{n\beta_k}$$

provisto de la norma :

$$q_k(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, n^{n\beta_k}$$

Entonces lo que hemos dicho equivale a que :

$$\Omega^\alpha = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega^k$$

y en Ω^α podemos considerar la topología de espacio localmente convexo definida por la familia de normas $\{q_k\}$. Esta topología es la topología normal del espacio Ω^α y con ella Ω^α es metrizable y completo (para estos puntos puede consultarse [6] p. 419). Vamos a ver a continuación que esta topología coincide con la $\mathcal{T}^\alpha$.

<u>Proposición III - 2</u>. - Consideremos E^α con la topología $\mathscr{C}^\alpha$ y el espacio de sucesiones Ω^α con la topología normal; entonces el isomorfismo entre E^α y Ω^α que asocia a cada f los coeficientes de su desarrollo es un isomorfismo topológico.

<u>Demostración</u> :

De acuerdo con el Teorema I - 1 y lo observado anteriormente tanto E^α como Ω^α, con sus topologías respectivas, son espacios de Fréchet; así, pues, basta probar que el citado isomorfismo $E^\alpha \longrightarrow \Omega^\alpha$ es contínuo; es decir, que la topología $\mathscr{C}^\alpha$ es más fina que la topología normal. Así hemos de probar que dados $\varepsilon > 0$, $\beta < 1/\alpha$ existen $\delta > 0$, $\rho > \alpha$ tales que :

$$f \in E^\alpha \quad , M(r,f) \leq \delta \cdot \exp(r^\rho) \quad \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, n^{n\beta} < \varepsilon$$

siendo (a_n) los coeficientes de Taylor de f.

Para ello sea $\rho > \alpha$ tal que $\beta < 1/\rho < 1/\alpha$ y $\delta > 0$ que determinaremos; para cada $r \geqslant 0$ y $n \in N$ se tiene :

$$|a_n| \leq \frac{M(r,f)}{r^n} \leq \delta \cdot \frac{\exp(r^\rho)}{r^n}$$

supuesto que $M(r,f) \leq \delta \cdot \exp(r^\rho)$. Si para cada <u>n</u> damos a <u>r</u> el valor

$$r = \frac{n^{1/\rho}}{\rho^{1/\rho}}$$

que es el que hace mínimo el cociente $\dfrac{\exp(r^{\rho})}{r^n}$ tendremos :

$$|a_n| \leq \delta \cdot \frac{(e.\rho)^{n/\rho}}{n^{n/\rho}} \quad \Rightarrow \quad |a_n| \cdot n^{n\beta} \leq \delta \cdot \frac{(e.\rho)^{n/\rho}}{n^{n/\rho}} n^{n\beta}$$

y de aquí resulta :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot n^{n\beta} \leq \delta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e.\rho)^{n/\rho}}{n^{n/\rho}} n^{n\beta}$$

y esta serie es convergente porque, aplicando el criterio de la raiz, se tiene :

$$\frac{(e.\rho)^{1/\rho}}{n^{1/\rho}} n^{\beta} = (e.\rho)^{1/\rho} . n^{\beta - 1/\rho} \longrightarrow 0 \text{ , ya que } \beta - 1/\rho > 0$$

Así, pues, basta elegir $\delta > 0$, de modo que :

$$\delta \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e.\rho)^{n/\rho}}{n^{n/\rho}} n^{n\beta} < \varepsilon \quad \text{siendo} \quad \rho < 1/\beta .$$

El caso $\alpha = 0$ queda incluído en la discusión anterior observando que E^0 se identifica con el espacio de las suce - siones (a_n) tales que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| n^{n\beta} < +\infty \qquad \forall \beta \geq 0.$$

y entonces basta tomar $\rho = 1/k$ de modo que $1/\rho > \beta$, o sea $k > \beta$ .//

Como aplicación de lo anterior vamos a deducir un re -

sultado sobre la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$, utilizando una propiedad de la topología normal de un espacio de sucesiones :

Teorema III - 1. - Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n . z^n$ una función de E^{α}; entonces las sumas parciales de esta serie

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k . z^k$$

convergen hacia f en la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$. En consecuencia, el espacio de los polinomios es denso en E^{α} provisto de $\mathcal{T}^{\alpha}$.

Demostración :

En efecto cada polinomio P_n se identifica en Ω^{α} con la sección $(a_0, a_1,...,a_n, 0,...,0...)$ de la sucesión (a_n) correspondiente a f. Así, pues, el enunciado del teorema se traduce en que, en Ω^{α}, las secciones de una sucesión converjan hacia ella por la topología definida por las normas $\{q_k\}$, que como hemos recordado, coincide con la topología normal de Ω^{α} (la cual coincide con $\mathcal{T}^{\alpha}$ por la Proposición III - 2). Ahora bien, es un resultado conocido (véase [6] p. 414) que en todo espacio de sucesiones que contenga a φ (espacio de las sucesiones casi-nulas) las secciones de una sucesión convergen hacia ella por la topología normal y, obviamente, Ω^{α} contiene a φ.//

Dada un álgebra topológica A, el espectro de caracteres de A es el conjunto de morfismos contínuos de A en C, no nulos, provisto de la topología débil inducida por el sis -

tema dual $\langle A', A \rangle$ (el espectro de A es una parte de A', dual topológico de A como espacio vectorial topológico).

El hecho de que los polinomios sean densos en E^{α} permite determinar el espectro de caracteres de esta álgebra :

<u>Teorema III - 2</u>. - El álgebra E^{α} provista de la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$ posee a la función $\underline{z}$ como generador topológico. El espectro de caracteres de E^{α} se identifica con C (como espacio topológico).

<u>Demostración</u> :

El álgebra sobre C engendrada por $\underline{z}$ es el álgebra de los polinomios, la cual es densa en E^{α} provista de $\mathcal{T}^{\alpha}$ (teorema III - 1), lo que significa que $\underline{z}$ genera topológicamente a E^{α} .

Por otra parte cada punto del plano complejo $\lambda \in C$ define un carácter sobre E^{α} , sea φ_{λ}, poniendo :

$$\varphi_{\lambda} : \; f \longrightarrow f(\lambda)$$

ya que la convergencia según $\mathcal{T}^{\alpha}$ implica la convergencia puntual. Además, si $\lambda \neq \mu$ es también $\varphi_{\lambda} \neq \varphi_{\mu}$.

Recíprocamente, si $\varphi : E^{\alpha} \longrightarrow C$ es un carácter, llamando

$$\lambda = \varphi(z) \qquad (\underline{z} \text{ es la función idéntica})$$

se tiene :

$$\varphi(P_n(z)) = P_n(\lambda) \qquad \text{para cada polinomio } P_n$$

y, por tanto, por la continuidad de φ y la densidad de los polinomios, resulta :

$$\varphi(f) = f(\lambda) \qquad \text{para toda } f \in E^{\alpha}$$

es decir $\varphi = \varphi_{\lambda}$.

Finalmente por ser los elementos de E^{α} funciones contínuas sobre C, resulta que la topología ordinaria de C es más fina q ue la débil e inmediatamente se ve que coincide con ella .//

En el Capítulo I ya se vió (Observación I - 1) que las normas $\{p_n\}$ utilizadas para definir la topología no verificaban la condición multiplicativa : $p_n(f.g) \leq p_n(f).p_n(g)$. Ahora podemos probar que esta condición no se verifica tampoco para ningún sistema de seminormas que definan $\mathcal{T}^{\alpha}$, es decir que $(E^{\alpha}, \mathcal{T}^{\alpha})$ no es un álgebra localmente multiplicativamente convexa o todavía, formulado de forma equivalente (véase [10] p. 13) :

<u>Proposición III - 3.</u> - El álgebra E^{α} provista de la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$ no es límite proyectivo de una sucesión de álgebras normadas.

<u>Demostración</u> :

En efecto, si E^{α} fuera límite proyectivo de álgebras normadas, $\mathcal{E}^\alpha$ vendría definida por una familia de normas $\{q_n\}$ equiva lente a las $\{p_n\}$ verificando además la con - dición multiplicativa lo que implica que E^α con la sola norma q_n es álgebra normada; así pues cada carácter del á lgebra (E^α, q_n) y por tanto de su completada, el álgebra de Bana ch $(\tilde{E}^\alpha, \tilde{q}_n)$ determina un carácter de $(E^\alpha, \mathcal{E}^\alpha)$; dicho de otro modo, el espectro de $(\tilde{E}^\alpha, \tilde{q}_n)$ que es un espa - cio compacto está contenido en el espectro de caracteres de $(E^\alpha, \mathcal{E}^\alpha)$ el cual, en virtud del teorema III - 2 coincide con C , y su topología es también la inducida por C, por tratarse de funciones contínuas.

Por otra parte, para cada $\lambda \in C$, el morfismo :

$$f \longrightarrow f(\lambda) \qquad f \in E^\alpha$$

es contínuo sobre E^α provisto de la sola norma p_n, como resulta de la definición de esta norma; así pues este morfismo ha de ser contínuo por la topología definida por alguna norma q_m; esto significa que para algún $\underline{m}$, C está incluído en el espectro de $(\tilde{E}^\alpha, \tilde{q}_m)$. Se tendría, pues, que C coincidiría con el espectro de $(\tilde{E}^\alpha, \tilde{q}_m)$, lo que está en contradicción con que dicho espectro sea compacto.//

<u>Observación III - 1</u>. - Para cada $\alpha < \beta$ tenemos $E^\alpha \subset E^\beta$ y la inyección natural $E^\alpha \longrightarrow E^\beta$ es contínua por ser $\mathcal{E}^\alpha$ más fina que $\mathcal{E}^\beta$ como se desprende de su definición. Si

damos a α los valores 1, 2, 3, ... podemos considerar el límite inductivo de los espacios E^n :

$$\varinjlim E^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n$$

que no es más que el espacio de todas las funciones enteras de orden finito. Lo único que queremos hacer notar aquí es que este límite no es estricto porque cada E^n es denso como subespacio de E^{n+1}, ya que los polinomios son densos en E^{n+1} y pertenecen a E^n; si la topología de E^n fuera la inducida por E^{n+1}, como E^n es completo, tendría que coincidir con E^{n+1} lo que, claramente, es falso.

En este Capítulo estudiamos propiedades de los ideales de E^{α} utilizando como instrumento la convergencia según la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$ de productos infinitos adecuados. Antes de pasar a establecer los resultados conviene recordar algunas nociones y propiedades de las mismas que aparecerán con frecuencia; la referencia para las mismas es [12] ó [13].

Sea f una función entera de orden finito (p. ej. $f \in E^{\alpha}$) y sean $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ sus ceros no nulos; el exponente de convergencia de los ceros de f es el ínfimo, μ, del conjunto de los números $\varepsilon > 0$, tales que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\varepsilon}} < +\infty$$

También es interesante considerar el número λ que sea el mínimo número entero no negativo tal que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}} < +\infty$$

Se verifica siempre la desigualdad :

$$\mu \leq \omega(f) \qquad (\omega(f) = \text{orden de } f)$$

y, obviamente :

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$$

Así, pues, para una función de E^{α} siempre existe un tal entero λ y, recordando el teorema de descomposición de Weierstrass de una función entera, se tiene que el producto :

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n + (z/z_n)^2 + \dots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$$

es uniformemente convergente sobre cada compacto. Si, además, f tiene en el origen un cero de orden $\underline{k}$, entonces la función :

$$z \longrightarrow z^k . \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n).\exp(z/z_n + \dots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$$

se llama el producto canónico de $\underline{f}$. Es importante tener en cuenta que, para un producto canónico, se verifica siempre que su orden coincide con el exponente de convergencia de sus ceros.

Un teorema de Hadamard asegura que toda función entera de orden finito, $\underline{f}$, se puede escribir de la forma :

$$f(z) = \exp(P(z)).z^k . \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n).\exp(z/z_n + \dots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$$

como producto del producto canónico de $\underline{f}$ por el factor exp(P(z)), donde P(z) es un polinomio de grado no superior al orden de f; además, se verifica que el orden de f es el máximo entre el grado de P(z) y el orden del producto canónico; es decir :

$$\omega(f) = \text{máx}(\ gr(P(z));\ \mu\ ).$$

Utilizaremos con frecuencia una acotación conocida de los factores primos de Weierstrass cuya demostración, que es un simple cálculo y omitimos por brevedad, puede encontrarse en[12](p. 250) :

Lema IV - 1. - Para todo $\lambda = 1,2,\ldots$ se tiene la desigualdad:

$$\left|(1 - z).\exp(z + z^2 + \ldots + \tfrac{1}{\lambda}z^\lambda)\right| \leq \exp(A|z|^\rho) \qquad , z \in C$$

válida para : $\lambda \leq \rho \leq \lambda + 1$, y donde A depende sólo de ρ . Para $\lambda = 0$ la desigualdad sigue siendo cierta con tal que : $\lambda < \rho \leq \lambda + 1$.

Pasamos a estudiar ahora la convergencia de un producto ca nónico según la topología de E^α . Tenemos :

Teorema IV - 1. - Sea $f \in E^\alpha$ y pongamos f(z) = exp(P(z)).F(z), donde

$$F(z) = z^m.\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n + \ldots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^\lambda)$$

es el producto canónico de f. Entonces se verifica :

$$\lim_{n\to\infty} \exp(P(z)).z^m.\prod_{k=1}^{n}(1 - z/z_k).\exp(z/z_k+\ldots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_k)^\lambda) = f$$

según la topología $\mathcal{T}^\alpha$.

<u>Demostración</u> :

Teniendo en cuenta que $\exp(P(z))$ y z^m pertenecen a E^α y la Proposición II - 1, si llamamos

$$g_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 - z/z_k).\exp(z/z_k+\ldots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_k)^\lambda)$$

basta demostrar que (g_n) es $\mathcal{T}^\alpha$ - convergente, ya que entonces $\exp(P(z)).z^m.g_n$ será $\mathcal{T}^\alpha$ - convergente y su límite ha de ser <u>f</u>, porque así es con la topología $\mathcal{T}$ del espacio de las funciones entera y $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}^\alpha$ (Prop. I - 1). Además de acuerdo con el Teorema I - 2 para asegurar que (g_n) es $\mathcal{T}^\alpha$ - convergente es suficiente ver que es $\mathcal{T}^\alpha$ - acotada, ya que es uniformemente convergente sobre los compactos.

Para establecer este punto, sea μ el exponente de convergencia de la sucesión (z_n) con lo cual :

$$\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1 \qquad \text{y} \qquad \mu \leq \alpha$$

Como $g_n \in E^\mu$ y la inyección natural $E^\mu \longrightarrow E^\alpha$ es contínua resulta que es suficiente probar que (g_n) es $\mathcal{T}^\mu$ - acotada. A tal fin distinguiremos dos casos :

1º caso: $\mu < \lambda + 1$. En este caso si p es un número natural suficientemente grande, tenemos $\lambda \leq \mu + 1/2p \leq \lambda + 1$ y podemos aplicar el lema IV - 1 para obtener :

$$\left|(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\dots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})\right| \quad \exp(A|z/z_n|^{\mu+1/2\rho})$$

y, por tanto :

$$|g_n(z)| \le \prod_{k=1}^{m} \exp(A|z/z_k|^{\mu+1/2\rho}) \le \exp(A|z|^{\mu+1/2\rho}.\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|^{\mu+1/2\rho}}) \le \exp(K|z|^{\mu+1/2\rho})$$

siendo $K > 0$ cierta constante, en virtud de que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|^{\mu+1/2\rho}} < +\infty$

Tenemos, pues :

$$M(r,g_n) \le \exp(Kr^{\mu+1/2\rho})$$

y si $r \geqslant r_0$, conveniente, podemos conseguir $K < r^{1/2p}$ con lo cual

$$M(r,g_n) \le \exp(r^{\mu+1/\rho}) \qquad \text{si} \quad r \geqslant r_0$$

Ahora bien, para $0 \le r \le r_0$ $\exp(Kr^{\mu+1/2\rho})$ y $\exp(r^{\mu+1/\rho})$ son funciones estrictamente crecientes de r, por lo cual existe una constante $H > 0$ tal que

$$\exp(Kr^{\mu+1/2\rho}) \le H.\exp(r^{\mu+1/\rho}) \qquad 0 \le r \le r_0$$

y, en resumen, se obtiene

$$M(r,g_n) \le H.\exp(r^{\mu+1/\rho}) \qquad \forall n \text{ y } \rho \text{ suf. grande}$$

lo que prueba que (g_n) es $\mathscr{C}^{\mu}$- acotada.

2º caso: $\mu = \lambda + 1$. En este caso tenemos $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|^{\mu}} < +\infty$

y como $\lambda \le \mu \le \lambda + 1$, aplicando el lema IV - 1 tenemos :

$$\left|(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\dots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})\right| \le \exp(A|z/z_n|^{\mu})$$

y, por tanto :

$$|g_n(z)| \leq \prod_{k=1}^{n} \exp(A|z/z_k|^{\mu}) \leq \exp(A|z|^{\mu}. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\mu}}) = \exp(K|z|^{\mu})$$

y, por tanto, para $r \geqslant 1$:

$$M(r,g_n) \leq \exp(Kr^{\mu}) \leq \exp(Kr^{\mu+1/4p})$$

y de aquí se deduce la $\mathcal{C}^{\mu}$- acotación de (g_n) exactamente igual que en el 1º caso.

Observemos, finalmente, que el caso $\lambda = 0$ queda incluído en el 1º caso si $\mu < 1$, ya que $\mu + 1/2p > 0$ siempre; y queda incluído en el 2º caso si $\mu = 1$, y esto completa la demostración del teorema.//

Hemos visto que la descomposición de Hadamard de una función de E^{α} converge hacia ella según $\mathcal{C}^{\alpha}$. Vamos a considerar ahora la convergencia de los restos de dicha descomposición. Si f es una función de E^{α} , de modo que :

$$f(z) = \exp(P(z)).z^m. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\ldots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$$

entonces el producto

$$F_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty} (1 - z/z_k).\exp(z/z_k+\ldots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_k)^{\lambda})$$

define una función $F_n \in E^{\alpha}$, porque el exponente de convergencia de la sucesión $(z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_i, \ldots)$ es menor o igual que el de la sucesión $(z_1, z_2, \ldots)$, sea μ , y por tanto $\omega(F_n) \leq \mu \leq \alpha$. Queremos probar ahora que los restos F_n

tienden a 1 en $\mathcal{C}^*$. Empecemos por estudiar la convergencia local uniforme de tales restos :

Lema IV - 2. - Sea $f \in E$, una función entera, y su descomposición de Weierstrass :

$$f(z) = \exp(h(z)).z^m.\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\dots+\tfrac{1}{\lambda_n}(z/z_n)^{\lambda_n})$$

donde este producto converge uniformemente sobre todo compacto; entonces la sucesión de restos

$$F_k(z) = \prod_{n=k+1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\dots+\tfrac{1}{\lambda_n}(z/z_n)^{\lambda_n})$$

tiende a 1, uniformemente sobre todo compacto.

Demostración :

Dado $R > 0$ y $\varepsilon > 0$, vamos a ver que existe s_0 tal que :

$$\left|\prod_{n=s+1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\dots+ (z/z_n)) - 1\right| < \varepsilon \text{ si } |z| \leq R \text{ , } s > s_0$$

Para ello tomemos h_0 tal que $|z_h| > R$ si $h \geq h_0$ con lo cual $F_h(z)$ no tiene ningún cero en el disco de centro el origen y radio R, y por tanto $|F_h(z)| \geq \eta > 0$ si $|z| \leq R$, con $\eta > 0$. Ahora bien, como :

$$F_h(z) = \lim_{i\to\infty}\prod_{n=h+1}^{h+i}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\dots+\tfrac{1}{\lambda_n}(z/z_n)^{\lambda_n})$$

uniformemente sobre $|z| \leq R$, tendremos llamando $a_i(z) = (1- z/z_{h+i}).\exp(z/z_{h+i}+\dots+\frac{1}{\lambda_{h+i}}(z/z_{h+i})^{\lambda_{h+i}})$, que :

$$|a_1(z).a_2(z)\dots a_s(z)| \geq \eta/2 \text{ para todo } s \geq s_0.$$

Por otra parte, por la condición uniforme de Cauchy, se tiene :

$$|a_1(z)\ldots a_{s+r}(z) - a_1(z)\ldots a_s(z)| < \varepsilon\cdot \eta/2 \ \forall r, \text{ si } s > s_0, |z| \le R$$

de donde, dividiendo por $|a_1(z)\ldots a_s(z)| \geqslant \eta/2$ se obtiene :

$$|a_{s+1}(z)\ldots a_{s+r}(z) - 1| \le \varepsilon \ \forall r \quad \text{si} \quad s > s_0 \quad , \quad |z| \le R$$

y, por tanto :

$$\left|\prod_{n=s+1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\ldots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda_n}) - 1\right| \le \varepsilon \quad \text{si } |z|\le R.//$$

Podemos establecer ahora el resultado análogo para la $\mathcal{T}^\alpha$ - convergencia :

Teorema IV - 2. - Sea

$$F(z) = z^m. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\ldots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$$

el producto canónico de una función de E^α (es decir el exponente de convergencia de (z_n) es $\le \alpha$) y llamemos :

$$F_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty}(1 - z/z_k).\exp(z/z_k+\ldots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_k)^{\lambda}).$$

Entonces se verifica que $F_n(z) \longrightarrow 1$ según la topología $\mathcal{T}^\alpha$.

Demostración :

Ya hemos observado antes que $F_n \in E^\alpha$, ysea , como siempre, μ el exponente de convergencia de la sucesión (z_n).

En virtud del Lema IV - 2, $F_n \longrightarrow 1$ uniformemente sobre cada compacto; por tanto según el Teorema I - 2 es suficiente ver que (F_n) es una sucesión $\mathcal{E}^{\kappa}$ - acotada y como $\mu \leq \kappa$ basta ver que es $\mathcal{E}^{\mu}$ - acotada. La demostración es análoga a la del Teorema IV - 1 y vamos a indicar solamente como se obtiene la acotación fundamental :

1º caso: $\lambda \leq \mu < \lambda + 1$; entonces por el lema IV - 1 es :

$$\left|\prod_{k=m+1}^{\infty}(1 - z/z_k).\exp(z/z_k + \dots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_k)^{\lambda})\right| \leq \exp(A\,|z|^{\mu+1/2p}).\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|^{\mu+1/2p}} \leq$$

$$\leq \exp(K\,|z|^{\mu+1/2p})$$

siendo $p \in N$ convenientemente grande para que $\mu + 1/2p \leq \lambda + 1$.

2º caso: $\mu = \lambda + 1$; entonces $\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|^{\mu}} < +\infty$ y se tiene :

$$\left|\prod_{k=m+1}^{\infty}(1 - z/z_k).\exp(z/z_k + \dots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_k)^{\lambda})\right| \leq \exp(A\,|z|^{\mu}).\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{|z_k|^{\mu}} \leq$$

$$\leq \exp(K\,|z|^{\mu}).$$

En ambos casos, así como cuando $\lambda = 0$, se razona como en la demostración del Teorema antes citado.//

Con la notación del Teorema IV - 1, el resultado anterior dice que :

$$f(z)/z^m.g_n(z) \longrightarrow \exp(P(z))$$

en $\mathcal{E}^{\alpha}$, cuando $n \longrightarrow \infty$. Como, además, $\exp(P(z))$ es inversible y el producto contínuo, se tiene también :

$$f(z)/\exp(P(z)).z^m.g_n(z) \longrightarrow 1.$$

Vamos a aplicar los resultados anteriores al estudio de los ideales cerrados de E^{α} , para lo cual conviene introducir una notación adecuada :

Si I es un ideal de E designaremos por Z(I) al conjunto de puntos de C en los que se anulan simultáneamente todas las funciones de I, entendiendo que a cada punto de Z(I) se le asigna una multiplicidad, que es la mínima que tenga como cero de una función de I. Por su definición Z(I) es siempre un conjunto discreto y cerrado, eventualmente vacío. Por otra parte, si $A \subset C$ es discreto y cerrado designaremos por $\mathcal{J}(A)$ al ideal formado por todas las funciones de E^{α} que se anulan en cada punto de A. Estos puntos pueden ir afectados de una multiplicidad y entonces las funciones de $\mathcal{J}(A)$ han de tener ceros de este orden, como mínimo. El ideal $\mathcal{J}(A)$ es cerrado en virtud de las Proposiciones I - 1 y II - 2.

Pasamos a demostrar, a continuación que el espectro de caracteres de E^{α} (ver Teorema III - 2) coincide con el espectro de ideales maximales cerrados.

<u>Teorema IV - 3</u>. - Si I es un ideal de E^{α} tal que $Z(I) = \emptyset$ entonces I es denso en E^{α} , provista de $\mathcal{C}^{\alpha}$.

<u>Demostración</u> :

Por ser el producto contínuo y I ideal, basta ver que $1 \in \overline{I}$, es decir que existen funciones $F_n \in I$ tales que $F_n \longrightarrow 1$, en $\mathcal{C}^{\alpha}$. Desde luego $I \neq (0)$ y sea $f \in I$, $f \neq 0$:

$$f(z) = \exp(P(z)).z^m.\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n+\dots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$$

con $\lambda \leq \alpha$,$gr(P) \leq \alpha$. Vamos a ver que $f(z)/z-z_n \in I$, para todo z_n (incluído el origen). Desde luego $f(z)/z-z_n \in E^{\alpha}$ porque este cociente es una función entera, $f \in E^{\alpha}$ y $z-z_n \in E^{\alpha}$ (ver p. ej. [12] p.255); pero además por hipótesis existe $g \in I$ tal que $g(z_n) \neq 0$, con lo cual tenemos :

$$g(z_n).\frac{f(z)}{z - z_n} = f(z).\frac{g(z_n) - g(z)}{z - z_n} + g(z).\frac{f(z)}{z - z_n}$$

donde $\dfrac{g(z_n) - g(z)}{z - z_n} \in E^{\alpha}$ y $\dfrac{f(z)}{z - z_n} \in E^{\alpha}$

de lo que se deduce que $g(z_n).\dfrac{f(z)}{z - z_n} \in I$ y, por tanto,

$\dfrac{f(z)}{z - z_n} \in I$. Aplicando este resultado reiteradamente y teniendo en cuenta que $\exp(P(z))$ y $\exp(z/z_n+\dots+\frac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$ son elementos inversibles de E^{α} (Proposición II - 3) resulta que

$$F_n(z) = \prod_{k=n+1}^{\infty}(1 - z/z_k).\exp(z/z_k+\dots+\tfrac{1}{\lambda}(z/z_k)^{\lambda}) \in I \quad \forall n$$

y, finalmente, de acuerdo con el Teorema IV - 2 se cumple que $F_n \longrightarrow 1$, según $\mathcal{E}^{\alpha}$.//

Para cada $\lambda \in C$, el conjunto M_{λ} de las funciones que se anulan en λ forman un ideal maximal cerrado de E^α ; tenemos ahora el recíproco :

Corolario 1. - Si M es un ideal maximal cerrado de E existe un punto $\lambda \in C$ tal que M es el ideal de las funciones que se anulan en λ .

Demostración :

En virtud del Teorema IV - 3 existe un punto $\lambda \in C$, tal que $f \in M$ implica $f(\lambda) = 0$; es decir $M \subset M_\lambda$ y por tanto $M = M_\lambda$.//

Corolario 2. - En E^α con $\mathcal{T}^\alpha$ existen ideales densos.

Demostración :

Consideremos la sucesión $z_n = \rho^n$ ($\rho > 1$) cuyo exponente de convergencia es nulo. Sea I el ideal formado por las funciones de E^α que se anulan en los z_n , de uno de ellos en adelante; entonces $Z(I) = \emptyset$ porque la función

$$\prod_{n=k+1}^{\infty} (1 - z/z_n)$$

pertenece a I y no se anula en $z_1,\ldots,z_k$. (Estas funciones son de E^0 y por tanto de E^α, $\forall \alpha \geq 0$).//

La descripción de los ideales cerrados de E^α es ahora consecuencia fácil del siguiente resultado, válido para una amplia clase de álgebras de funciones enteras, que se encuentra p. ej. en [14] p. 456 :

<u>Lema IV - 3</u>. - Sea I un ideal de E^α , $f \in I$ y $a \in Z(I)$ con multiplicidad <u>m</u>. Si $f(a) = 0$ con multiplicidad $n \geq m$, entonces

$$\frac{f(z)}{(z-a)^p} \in I, \quad \text{para} \quad p = 1,2,\ldots,n-m.$$

<u>Demostración</u> :

Basta considerar el caso $n = m + 1$ y ver que $f(z)/z-a \in I$; por hipótesis existe $g \in I$ con :

$$g(z) = (z-a)^m . h(z) \qquad , \quad h(a) \neq 0$$

Ahora basta poner

$$h(a).\frac{f(z)}{z-a} = f(z).\,\frac{h(a)-h(z)}{z-a} + g(z).\,\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \in I$$

porque $f,g \in I$ y los coeficientes son de E^α ; como $h(a) \neq 0$ también es $f(z)/z-a \in I$.//

<u>Teorema IV - 4</u>. - Sea I un ideal propio cerrado de E^α ; entonces se verifica que $I = \mathfrak{I}(Z(I))$.

<u>Demostración</u> :

Por el Teorema IV - 3 es $Z(I) \neq \emptyset$ y, desde luego, $I \subset \mathfrak{I}(Z(I))$; sea ahora $f \in \mathfrak{I}(Z(I))$ y veamos que $f \in I$; podemos suponer que $I \neq (0)$ y elegir por tanto una función $g \in I$, $g \neq 0$ que será de la forma :

$$g(z) = \exp(P(z)).z^m.\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n + \ldots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^\lambda)$$

Llamando $g_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1 - z/z_k).\exp(z/z_k + \ldots + \frac{1}{\lambda}(z/z_k)^{\lambda})$, se tiene de acuerdo con el Teorema IV - 2 :

$$\frac{g(z)}{\exp(P(z))z^m g_n(z)} \longrightarrow 1 \quad , \text{ en } \mathscr{E}^{\alpha}$$

y, por tanto, $$\frac{f.g}{\exp(P)z^m g_n} \longrightarrow f$$

Ahora bien, si un cero z_k tiene multiplicidad $\underline{r}$ en g, multiplicidad $\underline{s}$ en f y multiplicidad $\underline{h}$ en Z(I), se tiene $s \geqslant h$ y como en f.g tiene multiplicidad $r+s$ y $r+s-h \geqslant r$ se puede aplicar el Lema IV - 3 para obtener $f.g/(z-z_k)^r \in I$. En resumen, se ha visto que

$$\frac{f.g}{\exp(P)z^m g_n(z)} \in I$$

de donde se sigue que $f \in \bar{I}$ y, como I es cerrado, $f \in I$.//

Corolario. - Si I es un ideal propio de E^{α} , se verifica : $\bar{I} = \mathscr{I}(Z(I))$.

Demostración :

$\mathscr{I}(Z(I))$ es un ideal cerrado que contiene a I y, además, si $J \supset I$, J ideal cerrado se tiene :

$$J \supset I \Rightarrow Z(J) \subset Z(I) \Rightarrow J = \mathscr{I}(Z(J)) \supset \mathscr{I}(Z(I))$$

según el Teorema; por tanto $\mathscr{I}(Z(I))$ es el mínimo ideal cerrado que contiene a I.//

Si A es un conjunto discreto y cerrado de C dispondremos sus puntos en una sucesión ordenada según los módulos crecientes $A = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ con $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$ donde $|z_n| \longrightarrow \infty$ y cada z_i puede estar repetido un cierto número de veces o, equivalentemente, ir afectado de una multiplicidad que designaremos por r_i.

Hemos visto que

$$I = \{ f \in E^{\alpha} \mid f(z_i) = 0 \text{ con multipl.} \geq r_i \}$$

es un ideal cerrado de E^{α} y, recíprocamente, (Teorema IV - 4) todo ideal cerrado es de esta forma, siendo $A = Z(I)$. Como los puntos de A son ceros de funciones de E^{α}, se ha de verificar : exponente de convergencia de $(z_n) \leq \alpha$; es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha+\varepsilon}} < +\infty \qquad \forall \varepsilon > 0$$

y esta condición, a su vez, es necesaria para que $\mathcal{I}(A)$ sea distinto de (0). El razonamiento del siguiente Teorema prueba que también es suficiente, a la vez que determina los ideales cerrados de E^{α}.

<u>Teorema IV - 5</u>. - Todo ideal cerrado de E^{α} es principal. El recíproco también es cierto.

<u>Demostración</u> :

Podemos suponer $I \neq (0)$; sean $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ los puntos de $Z(I)$ distintos del origen; por ser ceros de funciones de E^{α} se tiene : exp. de conv. de $(z_n) \leq \alpha$; es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha+\varepsilon}} < +\infty \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Sea ahora λ el mínimo entero no negativo tal que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda+1}} < +\infty$$

con lo cual el producto canónico

$$z \longrightarrow z^m . \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/z_n).\exp(z/z_n + \ldots + \tfrac{1}{\lambda}(z/z_n)^{\lambda})$$

converge (ponemos z^m, si el origen figura con multiplicidad <u>m</u> en $Z(I)$).

Sea $F(z)$ el valor de dicho producto canónico con lo cual $\omega(F) = \exp.\ \mathrm{conv.}(z_n) \leq \alpha$ y $F(z)$ se anula exactamente en los puntos (z_n). Así, pues, $F \in I$ y para cada $g \in I$ la función g/F es entera y de orden $\leq \alpha$. Es decir, $I = (F)$.

El que todo ideal principal sea cerrado es consecuencia inmediata de las Proposiciones I - 1 y II - 2.//

<u>Observación IV - 1.</u> - Los métodos y resultados de este Capítulo se pueden aplicar también al álgebra E de todas las funciones enteras con la topología de la convergencia local

uniforme, para obtener resultados conocidos de dicha álgebra. Queremos observar, aquí, solamente el hecho de que al ser E un álgebra localmente multiplicativamente convexa se pueden utilizar también las propiedades generales de estas álgebras, lo cual no es posible para E^{α}. Así, por ejemplo, la igualdad entre el espectro de caracteres y el espectro de ideales maximales cerrados se obtiene directamente por este camino y el resultado central contenido en el Teorema IV - 3, que significa que todo ideal no denso está contenido en un ideal maximal cerrado es cierto en toda álgebra localmente m-convexa (véase [10]).

CAPITULO V INTERPOLACION POR FUNCIONES DE E^{α}.

Consideremos un conjunto discreto y cerrado del plano complejo, cuyos puntos supondremos dispuestos en sucesión de módulos crecientes : $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$ y donde cada a_i va afectado de una multiplicidad $r_i > 0$. Tal como se ha visto en el Capítulo anterior estas sucesiones determinan todos los ideales cerrados de E^{α} . Queremos estudiar ahora el espacio de las sucesiones (ω_n) para las cuales existe una función $f \in E^{\alpha}$ tal que $f(a_i) = \omega_i$, con multiplicidad r_i.

En primer lugar, si queremos que entre las sucesiones interpolables estén las sucesiones casi-nulas es necesario que el exponente de convergencia de (a_n) sea menor o igual que α ,porque todas las a_n, salvo un número finito, han de figurar entre los ceros de una función de E^{α} no idénticamente nula. Supondremos en lo que sigue que (a_n) cumple esta condición, es decir que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\alpha+\varepsilon}} < +\infty \qquad \forall \varepsilon > 0$$

Vamos a introducir un espacio de sucesiones que será utilizado en lo sucesivo en relación con la interpolación por funciones de E :

si (ω_n) es interpolable, es decir, existe $f \in E^{\alpha}$ con $f(a_i) = \omega_i$, desde luego (ω_n) no puede ser arbitraria ya que:

$$f \in E^{\alpha} \implies |\omega_n| = |f(a_n)| \leq \exp(|a_n|^{\alpha+\varepsilon}) \quad \text{para } n \geqslant n_0,\ \varepsilon > 0$$

ya que $|a_n| \longrightarrow \infty$. Así, pues, es necesario que (ω_n) cum - pla esta condición o la condición equivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ existe } M_\varepsilon \geqslant 0 : |\omega_n| \leq M_\varepsilon . \exp(|a_n|^{\alpha+\varepsilon}) \qquad \forall n$$

Fijada (a_n) con las condiciones antes citadas llamare - mos <u>$\Omega(a_n)$ al conjunto de sucesiones complejas que cumplen la condición necesaria de interpolación</u>; es decir :

$$\Omega(a_n) = \left\{ (\omega_n) \big| |\omega_n| \leq M_\varepsilon . \exp(|a_n|^{\alpha+\varepsilon}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \right\}$$

En virtud de la definición tenemos que si $(\omega_n) \in \Omega(a_n)$ son finitas las cantidades

$$p_\varepsilon(\omega_n) = \sup_n \frac{|\omega_n|}{\exp(|a_n|^{\alpha+\varepsilon})} \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Es inmediato que $\Omega(a_n)$ tiene estructura de espacio vectorial y tambien de álgebra sobre C, con las operaciones habituales de sucesiones. Consideraremos en $\Omega(a_n)$ la to- pología definida por la sucesión de normas

$$p_k(\omega_n) = \sup_n \frac{|\omega_n|}{\exp(|a_n|^{\alpha+1/k})} \qquad k = 1,2,\ldots$$

que es equivalente a la definida por la familia $\{p_\varepsilon\}$.

Por su sencillez y analogía con los resultados correspondientes para el álgebra E^α omitimos la demostración de la siguiente :

<u>Proposición V - 1.</u> - El álgebra $\Omega(a_n)$, con la topología definida por las normas p_k, es un álgebra topológica. Dicha topología es más fina que la inducida por la topología producto del espacio de todas las sucesiones complejas y hace de $\Omega(a_n)$ un espacio de Fréchet.

Vamos a obtener a continuación un resultado parcial de interpolación, que utilizaremos después :

<u>Proposición V - 2.</u> - Sea (a_n) con $|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \ldots \longrightarrow \infty$ una sucesión de números complejos de exponente de convergencia $\leq \alpha$, donde ca da a_i va afectado de una multiplicidad $r_i > 0$; entonces elegidos números complejos $\omega_i^1, \omega_i^2, \ldots, \omega_i^{r_i}$ existe una función $f \in E^\alpha$ tal que :

$$f(a_i) = \omega_i^1,\ f'(a_i) = \omega_i^2, \ldots,\ f^{r_i-1}(a_i) = \omega_i^{r_i}$$

y $\forall n \neq i$: $\quad f(a_n) = 0,\ f'(a_n) = 0, \ldots,\ f^{r_n-1}(a_n) = 0.$

<u>Demostración</u> :

Por las hipótesis hechas sobre (a_n) existe una función

$g \in E^{\alpha}$ tal que $g(a_j) = 0$ con multiplicidad r_j, para todo $j = 1,2,\ldots$ ya que basta considerar por ejemplo la función

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - z/a_n).\exp(z/a_n + \ldots + \tfrac{1}{\lambda}(z/a_n)^{\lambda})$$

siendo λ el mínimo entero no negativo tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\lambda+1}} < +\infty$

Sea :

$$g(z) = b_i(z - a_i)^{r_i} + b_{i+1}(z - a_i)^{r_i+1} + \ldots$$

el desarrollo de g alrededor de a_i, y consideremos la función racional :

$$H(z) = \frac{\lambda_1}{z - a_i} + \frac{\lambda_2}{(z - a_i)^2} + \ldots + \frac{\lambda_{r_i}}{(z - a_i)^{r_i}}$$

con lo cual $f(z) = g(z).H(z)$ es una función entera que pertenece a E^{α}, ya que

$$g(z).\frac{\lambda_1}{z - a_i} \in E^{\alpha}, \ldots\ldots, g(z).\frac{\lambda_{r_i}}{(z - a_i)^{r_i}} \in E^{\alpha}$$

y, además

$$f(z) = g(z).H(z) = b_i.\lambda_{r_i} + (b_{i+1}.\lambda_{r_i} + b_i.\lambda_{r_i-1})(z - a_i) + \ldots$$

de donde haciendo

$$\omega_i^1 = b_i.\lambda_{r_i} \; ; \quad \omega_i^2 = b_{i+1}.\lambda_{r_i} + b_i.\lambda_{r_i-1}; \ldots\ldots$$

se pueden obtener $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_{r_i}$ a fin de que f cumpla las condiciones deseadas, ya que en los puntos $a_n \neq a_i$, f posee un cero del mismo orden que g, por lo menos.//

<u>Observación V - 1.</u> - Evidentemente el resultado anterior es también válido cuando las condiciones a f y sus derivadas se imponen sobre un número finito de puntos a_i, ya que entonces basta tomar la suma de las funciones que las cumplen para cada uno de los a_i considerados.

Dado un ideal cerrado de E^{α} vamos a construir un homomorfismo contínuo de E^{α} en un álgebra de sucesiones adecuada, cuyo núcleo sea I; determinar la imagen de este homomorfismo está relacionado con el problema de interpolación.

Supongamos que I es el ideal cerrado determinado por los ceros : $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$ (donde a_i aparece con multiplicida d r_i) y consideremos el álgebra $\Omega(a_n)$ definida anteriormente; en <u>$\Omega(a_n)$ llamaremos π a la topología inducida por la topología producto de $C^N \supset \Omega(a_n)$ y ω a la topología definida por las normas</u>

$$p_k(\omega_n) = \sup_n \frac{|\omega_n|}{\exp(|a_n|^{\alpha+1/k})} \quad k = 1,2\dots$$

Consideremos ahora el espacio vectorial <u>$\Omega(a_n,N)$ que sea producto de una sucesión de espacios iguales a $\Omega(a_n)$</u>, <u>provisto de la topología, que seguiremos llamando ω, producto de la topología ω sobre cada factor</u>. Es decir :

$$\Omega(a_n,N) = \prod_{r>0}^{\infty} E_r \quad . \text{ con } E_r = \Omega(a_n)., \text{ provisto de } \omega \quad , \forall\ r \geq 0$$

con lo cual $\Omega(a_n,N)$ es un espacio de Fréchet por la

Proposición V - 1. En $\Omega(a_n,N)$ podemos considerar también la topología π , producto de la topología π de $\Omega(a_n)$ que es menos fina que la ω (y con la cual $\Omega(a_n)$ no es completo).

Un elemento de $\Omega(a_n,N)$ es, pues, una sucesión doble (ω_n^m) $n = 1,2,\ldots$ $m = 0,1,\ldots$ Si $r_1,r_2,\ldots,r_n,\ldots$ es la sucesión de multiplicidades de los ceros del ideal I, consideremos el siguiente subespacio de $\Omega(a_n,N)$:

$$\Omega(a_n,r_n) = \left\{ (\omega_n^m) \in \Omega(a_n,N) \;\middle|\; \forall\, n \in N: \omega_n^m = 0 \text{ si } m \geqslant r_n \right\}$$

Por ser, en $\Omega(a_n,N)$, la topología ω más fina que la π resulta que $\Omega(a_n,r_n)$ es un subespacio cerrado de $\Omega(a_n,N)$ y por tanto es, a su vez, un espacio de Fréchet.

Definamos, a continuación, una aplicación lineal $\varphi : E^{\alpha} \longrightarrow \Omega(a_n,r_n)$ de la forma siguiente :

$$\varphi : f \longrightarrow (\omega_n^m) \begin{cases} \omega_n^m = f^{(m)}(a_n)/m! & \text{si} \quad 0 \leq m \leq r_n - 1 \\ \omega_n^m = 0 & \text{si} \quad m \geqslant r_n \end{cases}$$

La sucesión $\varphi(f) \in \Omega(a_n,r_n)$ por ser $f,f',f'',\ldots$ funciones de E^{α} . La aplicación lineal φ es contínua cuando se dota a E^{α} de la topología $\mathcal{T}^{\alpha}$ y a $\Omega(a_n,r_n)$ de la topología ω ; en efecto :

el paso de E^{α} a $\Omega(a_n)$ dado por $f \longrightarrow (f(a_n))$ es contínuo porque

$$|f(z)| \leq \delta \cdot \exp(|z|^{\alpha+1/k}) \qquad \forall\, z \qquad k \in N$$

implica

$$|f(a_n)| \leq \delta \cdot \exp(|a_n|^{\alpha+1/k}) \qquad \forall\, n \qquad k \in N$$

y por la Proposición II - 2 lo son, en E^{α}, las aplicaciones $f \longrightarrow f' \longrightarrow f'' \longrightarrow \ldots$. De lo dicho y de que la topolo - gía de $\Omega(a_n, r_n)$ es la producto de la de $\Omega(a_n)$ se dedu - ce la continuidad de φ.

El espacio $\Omega(a_n, r_n)$ se puede dotar de una estructura de álgebra topológica de modo que φ sea una representación contínua de núcleo I. A tal fin designemos, como es habitual, por $C[[X]]$ el álgebra de las series formales a coeficientes complejos y para ca da r_i, orden de multiplicidad de a_i, con - sideremos el ideal (X^{r_i}) de $C[[X]]$ y el álgebra cociente

$$C[[X]]/(X^{r_i})$$

que es un álgebra de dimensión finita r_i. Si formamos, ahora, el álgebra producto

$$C[[X, r_n]] = C[[X]]/(X^{r_1}) \times C[[X]]/(X^{r_2}) \times \ldots \times C[[X]]/(X^{r_n}) \times \ldots$$

resulta que $\Omega(a_n, r_n)$ se identifica a una parte de este pro- ducto; en efecto, basta hacer corresponder al elemento

(ω_n^m) con $\omega_n^m = 0$ si $m \geq r_n$, de $\Omega(a_n, r_n)$

la sucesión

$$(\omega_1^0, \omega_1^1, \ldots, \omega_1^{r_1-1}; \omega_2^0, \omega_2^1, \ldots, \omega_2^{r_1-1}; \ldots)$$

del citado producto. Si suponemos a $\Omega(a_n, r_n)$ dotado de la estructura de álgebra que le transmite su inclusión en $\prod_{n=1}^{\infty} C[[X]]/(X^{r_n})$ (con lo cual la multiplicación es contínua respecto de la topología ω), resulta que la aplicación lineal

$$\varphi : E^{\alpha} \longrightarrow \Omega(a_n, r_n)$$

antes introducida, es un homomorfismo (de álgebras) como se ve sin más que tener en cuenta la regla de Leibniz de derivación de un producto. Finalmente, recordando el Teorema IV - 4 se tiene que el núcleo de φ es precisamente el ideal I. Resumiendo todo lo anterior tenemos la

<u>Proposición V - 3</u>. - Cada ideal cerrado I de E^{α} determina un homomorfismo contínuo de núcleo I, en el álgebra $\Omega(a_n, r_n)$ provisto de su topología de Fréchet ω. (ver p. 63)

Observemos, ahora, que determinar la imagen del homomorfismo φ equivale a determinar cual es el espacio de los valores que se pueden prefijar para una función de E^{α} y un número finito de sus derivadas en los puntos a_n. Vamos a obtener algunos resultados sobre este espacio.

<u>Lema V - 1</u>. - Consideremos el espacio $\Omega(a_n)$ provisto de su topología ω ; entonces cada $(\omega_n) \in \Omega(a_n)$ es lími -

te, según ω, de sus secciones. En particular, el espacio de las sucesiones casi-nulas es denso en $\Omega(a_n)$.

<u>Demostración</u> :

Hay que ver que para todo $\varepsilon > 0$ y $\rho > \alpha$, existe n_0 tal que

$$p_\rho(0,\ldots,0,\omega_n,\omega_{n+1},\ldots) < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_0$$

donde (ω_n) es una sucesión de $\Omega(a_n)$; dicho de otra manera

$$|\omega_n| \leq \varepsilon \cdot \exp(|a_n|^\rho) \qquad \text{si} \qquad n \geqslant n_0$$

Elijamos, para ello, ρ' tal que $\alpha < \rho' < \rho$ con lo cual

$$(\omega_n) \in \Omega(a_n) \quad \Rightarrow \quad |\omega_n| \leq \exp(|a_n|^{\rho'}) \qquad n \geqslant n_1$$

pero además, puesto que $|a_n| \longrightarrow \infty$ es

$$\exp(|a_n|^{\rho'}) < \varepsilon \cdot \exp(|a_n|^\rho) \qquad n \geqslant n_2$$

ya que ello equivale a ver que si $\rho' < \rho$, entonces $\exp(r^{\rho'}) < \varepsilon \cdot \exp(r^\rho)$ para $r \geqslant r_0$, que a su vez equivale a

$$r^\rho - r^{\rho'} > -\log \varepsilon$$

y como $\rho = \rho' + \delta$ ello significa que

$$r^{\rho'+\delta} - r^{\rho'} = r^{\rho'}(r^\delta - 1) > -\log \varepsilon$$

lo que es claramente posible. Finalmente se tiene, pues:

$$|\omega_n| \leq \exp(|a_n|^{\rho'}) \leq \varepsilon \cdot \exp(|a_n|^\rho) \qquad \forall\, \rho > \alpha. \;//$$

<u>Teorema V - 1</u>. - Consideremos el homomorfismo $\varphi : E^{\alpha} \longrightarrow \Omega(a_n, r_n)$ (introducido en p. 65) y $\Omega(a_n, r_n)$ dotado de la topología ω ; entonces la imagen de φ es un subespacio denso de $\Omega(a_n, r_n)$.

<u>Demostración</u> :

Por una parte $\Omega(a_n, r_n)$ está incluído en el producto de una sucesión de espacios $\Omega(a_n)$ y su topología es la producto de las topologías ω en cada $\Omega(a_n)$. Por otra parte, llamando ϕ al espacio de sucasiones casi-nulas, el Lema V - 1 nos permite asegurar que el espacio

$$(\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} \phi) \cap \Omega(a_n, r_n)$$

es denso en $\Omega(a_n, r_n)$. Así, pues, para establecer el Teorema es suficiente ver que la imagen de φ contiene al subespacio $(\overset{\infty}{\underset{1}{\oplus}} \phi) \cap \Omega(a_n, r_n)$; pero esto no es más que el enunciado de la Proposición V - 2, combinado con la definición de φ .//

Hemos hecho notar antes que el espacio $\Omega(a_n, r_n)$, que contiene a la imagen de φ , es a su vez una parte del álgebra

$$C[[X, r_n]] = C[[X]]/(X^{r_1}) \times \dots \times C[[X]]/(X^{r_n}) \times \dots$$

en la cual podemos considerar la topología producto de la de cada espacio de dimensión finita $C[[X]]/(X^{r_n})$. Entonces se tiene :

<u>Teorema V - 2</u>. - La imagen del homomorfismo φ es un subespacio denso y magro de $C\{\!\{X,r_n\}\!\}$ (que como espacio vectorial es isomorfo a C^N), con la topología producto.

<u>Demostración</u> :

Como por la topología producto una sucesión es límite de sus secciones, razonando como en el teorema anterior, se tiene que

$$\left(\overset{\infty}{\oplus} \phi \right) \cap \Omega(a_n, r_n)$$

es denso en $C\{\!\{X,r_n\}\!\}$ y por tanto también lo es la imagen de φ, contiene a $\left(\overset{\infty}{\oplus} \phi \right) \cap \Omega(a_n,r_n)$. Por otra parte $C\{\!\{X,r_n\}\!\}$ con la topología producto es un espacio de Fréchet y el homomorfismo φ no es exhaustivo, ya que por ejemplo la sucesión

$$\omega_n = \exp(\exp(|a_n|))$$

no se puede interpolar por funciones de E^{α}. El resultado enunciado se deduce por el teorema de la aplicación abierta. //

Queremos terminar este Capítulo viendo como los métodos desarrollados en el mismo, que son aplicables también al álgebra de las funciones enteras, dan en este caso resultados mucho más precisos, y obtener como aplicación un teorema sobre aproximación por funciones enteras con ceros dados.

Como ya se hizo notar en la Observación IV – 1, los resultados del Capítulo IV son válidos para el álgebra E de todas las funciones enteras provista de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos. En particular si I es un ideal cerrado de E, existe un conjunto discreto y cerrado $|a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots$ de modo que I está formado por las funciones enteras que se anulan en cada a_i (con una multiplicidad determinada r_i). Consideremos el homomorfismo, φ , del álgebra E en el álgebra $C[[X, r_n]] = \prod_{n=1}^{\infty} C[[X]]/(X^{r_n})$, considerado antes; es decir :

$$E \ni f \xrightarrow{\varphi} \left(f(a_1), f'(a_1), \dots, \frac{f^{(r_1-1)}(a_1)}{(r_1-1)!} ; f(a_2), f'(a_2), \dots, \frac{f^{(r_2-1)}(a_2)}{(r_2-1)!} ; \dots \right)$$

que también en este caso es contínuo porque la convergencia local uniforme implica la convergencia puntual de la función y sus derivadas. Además, por lo antes dicho, también I es el núcleo de φ . Tenemos ahora :

<u>Teorema V – 3</u>. – Si I es un ideal cerrado de E de ceros (a_n) con multiplicidades (r_n), entonces el álgebra cociente E/I es isomorfa (algebraica y topológicamente) al álgebra $C[[X, r_n]]$.

<u>Demostración</u> :

El homomorfismo $\varphi : E \longrightarrow C[[X, r_n]]$ es exhaustivo; en efecto, ello equivale a afirmar que dada una sucesión arbitraria de números complejos

$$(\omega_1^1, \dots, \omega_1^{r_1-1}; \omega_2^1, \dots, \omega_2^{r_2-1}; \dots; \omega_i^1, \dots, \omega_i^{r_i-1}; \dots)$$

existe una función entera tal que en cada punto a_i la función y sus $r_i - 1$ primeras derivadas toman los valores establecidos $\omega_i^1, \dots, \omega_i^{r_i-1}$. Esto es una conocida propiedad de interpolación por funciones enteras (ver p. ej. W. Rudin "Real and Complex Analysis" Mc. Graw Hill p. 298). Resulta, pues, que φ induce un homomorfismo de E/I sobre $C[[X, r_n]]$; dotando a E/I de la topología cociente este homomorfismo será contínuo y E/I es un espacio de Fréchet. Por el teorema de la aplicación abierta se obtiene que el homomorfismo entre E/I y $C[[X, r_n]]$, que es biyectivo, será también topológico.//

Como aplicación deducimos el siguiente :

<u>Teorema V - 4</u>. - Sea (a_n) una sucesión de puntos del plano complejo con $|a_n| \longrightarrow \infty$ y para cada a_n tenemos un entero no negativo r_n. Entonces dado un compacto arbitrario K del plano y un número $\varepsilon > 0$, existe un número finito de a_n, $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_s}\}$ y un $\delta > 0$ de modo que :

para toda función entera f verificando :

$$|f(a_1)| < \delta, \dots, |f^{(r_1-1)}(a_1)| < \delta; \dots ; |f(a_{i_s})| < \delta, \dots, |f^{(r_{i_s}-1)}(a_{i_s})| < \delta$$

existe una función entera g que cumple

$$g(a_1) = 0, \dots, g^{(r_1-1)}(a_1) = 0;\; g(a_2) = 0, \dots, g^{(r_2-1)}(a_2) = 0; \dots$$

en todo punto a_n, y además

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \quad \text{en todo } z \in K.$$

Demostración :

Consideremos el ideal cerrado I definido por los ceros (a_n, r_n) y establezcamos el isomorfismo bicontínuo entre E/I y $C[\![X,r_n]\!]$; el inverso de dicho isomorfismo

$$\varphi^{-1} : C[\![X,r_n]\!] \longrightarrow E/I$$

es contínuo con las topologías que hemos considerado en cada uno de estos espacios y esto significa que si para una función entera f la sucesión de valores $\left(f(a_1), \ldots, \frac{f^{(r_1-1)}(a_1)}{(r_1-1)!}; \ldots \right)$ está suficientemente próxima a cero en $C[\![X,r_n]\!]$ existe otra función entera equivalente a la primera, es decir f - h con $h \in I$, próxima al cero en E; es decir que es posible aproximar una función entera que tome valores pequeños (ella y sus derivadas) en un conjunto finito de a_i, por una función del ideal, uniformemente sobre cada compacto. Y esto es lo que se afirma en el Teorema. //

Empezamos por dar condiciones suficientes para que un álgebra topológica se pueda considerar como un álgebra de funciones enteras. En lo que sigue, álgebra de Fréchet significará espacio de Fréchet provisto de un producto contínuo. Si A es un álgebra de Fréchet indicaremos por X el espectro de caracteres de A, es decir de morfismos contínuos no nulos de A en C, espectro que dotaremos de la topología débil inducida por el sistema dual $\langle A', A \rangle$.

Lema VI - 1. - Si A es un álgebra topológica que posee un generador topológico $z \in A$, entonces el espectro de caracteres X de A se puede identificar con una parte de C.

Demostración :

Para cada $x \in A$ podemos considerar la función contínua

$$\tilde{x} : X \longrightarrow C \qquad \text{por} \qquad \tilde{x}(\chi) = \chi(x) \quad \forall \chi \in X$$

En particular tenemos $\tilde{z} : X \longrightarrow C$, contínua, que además es inyectiva ya que si $\chi_1, \chi_2 \in X$ fueran tales que

$$\tilde{z}(\chi_1) = \tilde{z}(\chi_2) \quad \text{o sea} \quad \chi_1(z) = \chi_2(z)$$

entonces también ocurriría $\chi_1(x) = \chi_2(x)$ para cada $x \in A$ por ser $\underline{z}$ generador y, por tanto, $\chi_1 = \chi_2$. Identificaremos el carácter χ con el punto del plano $\tilde{z}(\chi)$.//

En virtud del lema anterior sobre el espectro X de un álgebra A con un sólo generador podemos considerar además de la topología débil, la topología inducida por la de C; como la inclusión $\tilde{z} : X \longrightarrow C$ es contínua, resulta que la topología débil de X es más fina que la inducida por C. Vamos a dar una condición para que ambas topologías coincidan.

Según acabamos de observar cada elemento de un álgebra A determina una función contínua sobre X; diremos que A es un álgebra de funciones si el único elemento de A que determina la función nula, es el cero de A. En este caso podemos considerar sobre A la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de X por la topología inducida por C y se tiene la

<u>Proposición VI - 1</u>. - Sea A un álgebra de Fréchet de funciones con un generador $\underline{z}$, cuya topología sea más fina que la de la convergencia uniforme sobre los compactos de $X = \mathrm{Spc}(A)$ dotado de la topología inducida por C y tal que, además, por ella X sea localmente compacto; entonces sobre X, la topología débil coincide con la de C.

<u>Demostración</u> :

En primer lugar observemos que $\tilde{z} : X \longrightarrow C$ es contí -

nua cuando se dota a X de la topología de C, porque :

$$|\chi(z) - \chi_0(z)| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |\hat{z}(\chi) - \hat{z}(\chi_0)| < \varepsilon$$

Así pues también son funciones contínuas sobre X todos los elementos de A de la forma P(z) (P polinomio). Ahora bien, si $x \in A$ tenemos

$$x = \lim P_n(z) \qquad \text{(en A)} \quad P_n \text{ polinomios}$$

y si $\chi_0 = \chi_0(z) \in X$, por hipótesis existe un entorno compacto V de χ_0 sobre el cual $P_n(z) \longrightarrow x$ uniformemente, por ser la topología de A más fina que la de la convergencia sobre los compactos. De aquí resulta que x es una función contínua en V y por tanto en χ_0.

El hecho de que cada $x \in A$ sea una función contínua en X por la topología inducida por C implica que esta coincida con la débil, porque si $x \in A$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad |\chi(z) - \chi_0(z)| < \delta \Rightarrow |\chi(x) - \chi_0(x)| < \varepsilon$$

quiere decir que la débil es menos fina que la de C y ya se ha observado el recíproco.//

Si suponemos que el generador z de A es una función trascendente sobre C, entonces el álgebra de los polinomios C[z] la podemos considerar incluída en A y estos elementos de A son funciones sobre C. En el siguiente resultado hacemos una hipótesis más sobre A :

<u>Proposición VI - 2</u>. - Sea A un álgebra de Fréchet de funciones con un generador $\underline{z}$, trascendente sobre C, cuya topología sea más fina que la de la convergencia uniforme sobre los compac - tos de X = Spec(A) por la topología inducida por C y que in - duzca sobre C[z] una topología más fina que la de la conver - gencia puntual; entonces A es un álgebra de funciones enteras.

<u>Demostración</u> :

Por el Lema VI - 1 $\underline{X}$ se incluye en C; veamos en primer lugar que en este caso X = C; en efecto, cada $\lambda \in C$ define un carácter en el álgebra C[z] de los polinomios poniendo

$$P(z) \longrightarrow P(\lambda)$$

esta forma sobre C[z] es contínua por la topología de A por hipótesis y como C[z] es densa en A se extenderá a una forma lineal contínua de A en C, que también será un carácter por la continuidad del producto en A. Así pues cada $\lambda \in C$ deter - mina un carácter de A y recíprocamente.

Ahora por la Proposición VI - 1 la topología débil de X cóincide con la de C y A es un álgebra de funciones contínuas sobre C. Finalmente cada x A es límite de una sucesión de polinomios uniformemente sobre cada compacto de C y por tanto es una función entera.//

<u>Observación</u> : La completitud de A no es necesaria para los re- sultados anteriores. La hemos incluído únicamente porque, más adelante, aparecerán álgebras con las hipótesis de la Prop. VI-2.

En un álgebra topológica de Fréchet hay dos problemas de convergencia que tienen interés para utilizar la descomposición de Weierstrass de una función entera dentro de un álgebra determinada de funciones enteras. Estos problemas son :

1º : Si tenemos una sucesión convergente $f_n \longrightarrow f$ y un elemento α del álgebra que divida a cada f_n ¿ cuándo se puede asegurar que α divide a f y además f_n/α —— f/α ?

2º : Si tenemos una sucesión convergente $f_n \longrightarrow f$ y un elemento α del álgebra de modo que cada f_n divide a α ¿ cuándo podemos asegurar que f divide a α y además $\alpha/f_n \longrightarrow \alpha/f$?

La primera cuestión es fácil de contestar en condiciones generales; en efecto, en primer lugar observemos que el hecho de que $\alpha \mid f_n$ implique que $\alpha \mid f$ (si $f_n \longrightarrow f$) es equivalente a decir que los ideales principales del álgebra sean cerrados; vamos a ver que esta condición necesaria para que la respuesta a 1º sea afirmativa es también suficiente :

<u>Proposición VI - 3</u>. - Sea A un álgebra de Fréchet, sin divisores de cero, cuyos ideales principales sean cerrados; entonces si $f_n \longrightarrow f$ en A y $\alpha \in A$ es tal que $\alpha \mid f_n$, se verifica $\alpha \mid f$ y también $f_n/\alpha \longrightarrow f/\alpha$.

<u>Demostración</u> :

Designemos por A_α el ideal principal engendrado por α el cual, por hipótesis, será un espacio de Fréchet; por ser el producto contínuo y carecer A de divisores de cero, la apli -

cación :

$$\varphi : A \longrightarrow A_\alpha \qquad \text{definida por} \qquad f \longrightarrow \alpha\cdot f,$$

es biyectiva, lineal y contínua. Ahora el teorema de la apli - cación abierta asegura que φ^{-1} es también contínua y como $f_n, f \in A_\alpha$ tenemos que $\varphi^{-1}(f_n) \longrightarrow \varphi^{-1}(f)$, es decir $f_n/\alpha \longrightarrow f/\alpha$ .//

Damos a continuación un criterio que permite asegurar que los ideales principales de un álgebra de funciones enteras son cerrados y que es aplicable a la mayor parte de álgebras conocidas :

Proposición VI - 4. - Sea A un álgebra de funciones enteras con una topología que implique la convergencia puntual y tal que :

1º : La derivación $f \longrightarrow f'$ es contínua en A.

2º : Si $f, g \in A$ y f/g es una función entera, entonces $f/g \in A$.

En estas condiciones los ideales principales de A son cerrados.

Demostración :

En efecto, si $f_n \longrightarrow f$ en A entonces por 1º también $f_n' \longrightarrow f'$; $f_n'' \longrightarrow f''$;.... Si $\alpha \mid f_n$, los ceros de lo son de cada f_n con multiplicidad no superior; por tanto cada cero de α lo es también de f con multiplicidad no superior; así pues f/α será una función entera y por 2º será de A.//

El álgebra de las funciones enteras y el álgebra E^{α} satisfacen estas condiciones (ver Proposición II - 2) y a ellas es, por tanto, aplicable la Proposición VI - 3.

El 2º problema planteado es difícil de resolver con condiciones generales; incluso para el álgebra E^{α} no hemos sabido establecer dicha afirmación, la cual probamos a continuación para el álgebra de las funciones enteras, resultado que utilizaremos más adelante.

<u>Proposición VI - 5</u>. - Si f_n, f, α son funciones enteras de modo que $f_n \longrightarrow f$ (uniformemente sobre cada compacto), $f_n \mid \alpha$ y $f \mid \alpha$, entonces $\alpha/f_n \longrightarrow \alpha/f$.

<u>Demostración</u> :

Todos los ceros de f_n y f son ceros de α ; dado un compacto K y $\varepsilon > 0$ habrá sólo un número finito de ceros de α en K y, prescindiendo de un entorno de cada uno de ellos, obtendremos un compacto $K' \subset K$ en el que se cumplirá

$$|f(z)| \geqslant m_1 > 0$$

y como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre K', también

$$|f_n(z)| \geqslant m > 0 \quad , \quad |f(z)| \geqslant m \text{ sobre } K' \text{ si } n \geqslant n_0$$

Así, pues, tenemos :

$$\left|\alpha/f_n - \alpha/f\right| = \left|\frac{\alpha(f - f_n)}{f_n . f}\right| \leq \frac{|\alpha|\cdot|f - f_n|}{m^2} \longrightarrow 0$$

uniformemente en K'. Basta, pues, ver que también $\dfrac{\alpha\cdot(f - f_n)}{f_n . f}$

tiende a cero uniformemente en el entorno de cada cero de α ; podemos suponer para ello que se trata de un cero simple y que además es el origen, de manera que :

$$f = z.\tilde{f} \quad ; \quad f_n = z.\tilde{f}_n \quad ; \quad \alpha = z.\tilde{\alpha}$$

en un entorno compacto de dicho cero. Ahora por la Proposición VI - 3, aplicada a E, tenemos que $\tilde{f}_n \longrightarrow \tilde{f}$ (en E) y como $\tilde{f} \neq 0$ en un entorno del origen también será $\tilde{f}_n \neq 0$ en dicho entorno, para n avanzado; se tiene, por tanto :

$$\frac{\alpha(f - f_n)}{f_n . f} = \frac{\tilde{\alpha}\cdot(\tilde{f} - \tilde{f}_n)}{\tilde{f}_n . \tilde{f}}$$

y como el denominador es $\neq 0$ en un entorno del origen y $\tilde{f}_n - \tilde{f} \longrightarrow 0$ queda establecido el resultado .//

Observación VI - 1. - En primer lugar queremos hacer notar que el hecho de que $f \mid \alpha$ ha de formar parte de la hipótesis en el enunciado del problema 2º ya que no se puede esperar que $f_n \mid \alpha$ implique $f \mid \alpha$ (puede ser cada f_n sin ceros y f con ceros).

Observemos ahora que el 2º problema enunciado es equi -

valente a un problema de inversión de aplicaciónes lineales contínuas entre espacios de Fréchet; en efecto

si llamamos $A_n = (f_n)$, $A_0 = (f)$ y suponemos que los ideales principales son cerrados y que A no tiene divisores de cero, podemos considerar las aplicaciones biyectivas, lineales y contínuas entre espacios de Fréchet

$$\varphi_n : A \longrightarrow A_n \qquad\qquad \varphi_0 : A \longrightarrow A_0$$

definidas por : $x \longrightarrow x.f_n$ y $x \longrightarrow x.f$

de manera que $f_n \longrightarrow f$ implica $\varphi_n \longrightarrow \varphi_0$ (por lo menos puntualmente). Si ahora consideramos las aplicaciones inversas

$$\varphi_n^{-1} : A_n \longrightarrow A \qquad\qquad \varphi_0^{-1} : A_0 \longrightarrow A$$

definidas todas ellas en el subespacio $\tilde{A} = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap A_0$, el problema enunciado significa que $\varphi_n^{-1} \longrightarrow \varphi_0^{-1}$, puntualmente sobre $\tilde{A}$.

Queremos, para terminar este Capítulo, ver el interés que tiene en la determinación de los ideales cerrados de un álgebra el que sea afirmativa la respuesta a los problemas 1º y 2º, antes planteados; para abreviar diremos que una tal álgebra tiene <u>cocientes contínuos</u> ; en primer lugar tenemos el :

<u>Lema VI - 2</u>. - Sea $f = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$ un producto infinito convergente en un álgebra A con cocientes contínuos; entonces el producto $g_k = \prod_{n=k+1}^{\infty} f_n$ es también convergente y, además, la sucesión (g_k) tiende a 1, en A.

Demostración :

Tenemos que $f_1, f_1.f_2, f_1.f_2.f_3, \ldots \longrightarrow f$ y como f_1 divide a cada término deducimos que

$$f_2, f_2.f_3, \ldots \longrightarrow f/f_1$$

Análogamente $f_{k+1} \ldots . f_n \longrightarrow f/f_1 \ldots f_k$ y por tanto $g_k = f/f_1 \ldots f_k$. Finalmente como $f_1 \ldots f_k \longrightarrow f$ y $f_1 \ldots f_k$ divide a f obtenemos que

$$g_k = f/f_1 \ldots f_k \longrightarrow f/f = 1 \ .//$$

Podemos ver ahora como la estructura de los ideales cerrados obtenida en el Capítulo IV para el álgebra E^{α} depende unicamente de que las operaciones algebráicas y topológicas con funciones enteras se puedan efectuar en el álgebra considerada.

Teorema VI - 1. - Sea A un álgebra de Fréchet, sin divisores de cero, tal que verifique las hipótesis de la Proposición VI - 2 y además

1º : Si $f \in A$ y $f(z_0) = 0$ entonces $f/z - z_0 \in A$.

2º : La derivación $f \longrightarrow f'$ es contínua en A.

3º : Si $f_n \longrightarrow f$ y $f_n \mid \alpha$ entonces α/f_n converge en A.

4º : La descomposición de Weierstrass de cada $f \in A$ es válida en A en el siguiente sentido

si $f(z) = \exp(h(z)).z^r. \prod_{n=1}^{\infty}(1-z/z_n).\exp(z/z_n + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}(z/z_n)^{\lambda_n})$

este producto converge en A y las funciones $\exp(h(z))$,

$\exp(z/z_n+\dots+\frac{1}{\lambda_n}(z/z_n)^{\lambda_n})$ son inversibles en A.

En estas hipótesis cada ideal cerrado de A es el conjunto de funciones de A que se anulan (contando multiplicidades) en una parte discreta y cerrada de Spec(A) = C, que es precisamente el conjunto de ceros del ideal.

Demostración :

En primer lugar, de las hipótesis 1º, 3º y 4º, junto con la Proposición VI - 2, se tiene que A es un álgebra de funciones enteras y que si $f,g \in A$ entonces $f/g \in A$ (por ser A completa y por la Proposición VI - 5). Esto junto con la hipótesis 2º y las Proposiciones VI - 4 y VI - 3 nos asegura que A es un álgebra con cocientes contínuos.

Sea ahora I un ideal cerrado de A y Z(I) el conjunto discreto y cerrado de sus ceros y sea $\mathcal{J}(Z(I))$ el ideal de las funciones de A que se anulan en Z(I); se trata de ver que $I = \mathcal{J}(Z(I))$.

Basta ver que si $f \in \mathcal{J}(Z(I))$ entonces $f \in I$; en primer lugar ha de ser $Z(I) \neq \emptyset$ de manera totalmente análoga al Teorema IV - 3, aplicando el Lema VI - 2. Este mismo Lema permite aplicar el razonamiento del Teorema IV - 4, ya que en virtud del mismo si

$$g_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (1-z/z_k).\exp(z/z_k+\dots+\tfrac{1}{\lambda_k}(z/z_k)^{\lambda_k})$$

es un producto parcial en la descomposición de g , tenemos que

$$g/\exp(h(z)).z^{r}.g_n \longrightarrow 1 \quad \text{en } A \text{ ,}$$

siendo $\exp(h(z))$ y z^r la función sin ceros y los ceros en el origen que aparecen en la descomposición de g.//

BIBLIOGRAFIA

[1] CUFI, J. " Sobre los cocientes del álgebra de las funciones enteras ". II Jorn. Mat. Hispano-Portuguesas. Madrid. (1973).

[2] GELAND-RAIKOV-CHILOV. " Les anneaux normés commutatifs ". Gauthier Villars. París (1964).

[3] GROTHENDIECK, A. " Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires ". Mem. Amer. Math. Soc. 16. (1955).

[4] HELMER, O. " Divisibility properties of integral functions ". Duke Math. J. 6, 345-356. (1940).

[5] KELLEHER-TAYLOR, B.A. " Closed ideals in locally convex algebras of analytic functions ". J. reine und angew. Math. 255, 190-209. (1972).

[6] KOTHE, G. " Topological Vector Spaces " Die grund. math. Wissen. Bd. 159. Springer-Verlag. Berlin-Heidelbrg-New York (1969).

[7] KRASICHKOV, I.F. " Closed ideals in locally convex algebras of entire functions. Algebras of minimal

type ". Siberian Math. J. 9, 59-71 (1968).

[8] KRASICHKOV, I.F. " Closed ideals in locally convex algebras of entire functions ". Math. URSS Izv. 1, 35-55 (1967).

[9] KRASICHKOV, I.F. " Closed ideals in locally convex algebras of entire functions . II ". Math. URSS Izv. 32, 979-986 (1968).

[10] MICHAEL, E. " Locally multiplicatively-convex topological algebras ". Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[11] RASEVSKII, P.K. " Closed ideals in a countably normed algebra of analytic entire functions ". Sov. Math. Dokl. 6, 717-719 (1965).

[12] SAKS-ZYGMUND. " <u>Fonctions Analytiques</u> ". Masson et Cie. Paris (1970).

[13] SANSONE-GERRETSEN. " <u>Lectures on the theory of functions of a complex variable</u> " Nordhoff. Groningen(1960)

[14] TAYLOR, B.A. " Some locally convex spaces of entire functions ". Proc. Symp. Pure Math. (Amer. Math. Soc) 11, 431-467 (1968).

[15] TAYLOR, B.A. " A seminorm topology for some DF-spaces of entire functions ". Duke Math. J. 38,379-385(1971)

SOBRE EL ALGEBRA DE LAS FUNCIONES ENTERAS DE ORDEN ACOTADO

J. Cufí

A N E X O

I) La demostración del Teorema I - 2 (pag. 13) debe sustituirse por la siguiente :

Empecemos por ver que $f \in E^{\alpha}$; en efecto, por ser (f_n) $\mathcal{E}^{\alpha}$-acotada, dado $p \in N$ existe M_p tal que :

$$|f_n(z)| \leq M_p.\exp(r^{\alpha+1/p}) \qquad \text{si } |z| \leq r \qquad \forall n \in N .$$

y en consecuencia como $f_n(z) \longrightarrow f(z)$, se tiene

$$|f(z)| \leq M_p.\exp(r^{\alpha+1/p}) \qquad \text{si } |z| \leq r$$

lo que significa que $f \in E^{\alpha}$.

Ahora tenemos, pues, que $(f_n - f)$ es una sucesión $\mathcal{E}^{\alpha}$-acotada; dado $q \in N$ sea $p > q$ y M_p tal que

$$|f_n(z) - f(z)| \leq M_p.\exp(r^{\alpha+1/p}) \qquad \text{si } |z| \leq r \qquad \forall n \in N \;;$$

dado $\varepsilon > 0$, obviamente existirá un r_0 tal que

$$\forall n \qquad |f_n(z) - f(z)| \leq M_p.\exp(r^{\alpha+1/p}) \leq \varepsilon .\exp(r^{\alpha+1/q}) \text{ si } r \geq r_0$$

Ahora bien, como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente sobre los compactos se podrá conseguir

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon .\exp(r^{\alpha+1/q}) \qquad \text{si } 0 \leq |z| \leq r_0$$

locual, junto con lo anterior, completa la demostración.

II) La demostración de la Proposición VI - 5 (pag. 78) necesita un mayor detalle a partir del punto en que se afirma que $\alpha.(f - f_n)/f_n.f$ tiende a cero uniformemente en un entorno de cada cero de α :

Desde luego se puede suponer que dicho cero es el origen y que $f(0) = 0$ ya que en otro caso es inmediato. Supongamos que $f(z) = z^k.\tilde{f}(z)$ con $\tilde{f}(0) \neq 0$ y observemos que el orden del origen como cero de f_n no puede ser superior a $\underline{k}$ para infinitos valores de $\underline{n}$. Pongamos, pues :

$$\alpha(z) = z^k.\tilde{\alpha}(z) \quad ; \quad f_n(z) = z^{h_n}.\tilde{f}_n(z) \text{ con } \tilde{f}_n(0) \neq 0 \text{ y } 0 \leq h_n \leq k$$

y consideremos las sucesiones parciales de (f_n)

(f_n^0) formada por la s f_n tales que $h_n = 0$

(f_n^1) " " $h_n = 1$

....

(f_n^k) " " $h_n = k$

Evidentemente basta demostrar que $\alpha.(f - f_n^i)/f_n^i.f \longrightarrow 0$ uniformemente en un entorno del origen para $i = 1,\dots,k$. Ahora bien:

$$\frac{\alpha\cdot(f - f_n^i)}{f_n^i.f} = \frac{z^k.\tilde{\alpha}.z^i.(\tilde{f}^i - \tilde{f}_n^i)}{z^i.\tilde{f}_n^i.z^k.\tilde{f}} = \frac{\tilde{\alpha}.(\tilde{f}^i - \tilde{f}_n^i)}{\tilde{f}_n^i.\tilde{f}}$$

donde $f(z) = z^i.\tilde{f}^i(z)$ para $i = 1,\dots,k$. Además se verifica que $\tilde{f}_n^i \longrightarrow \tilde{f}^i$ (por la Prop. VI-3) y $\tilde{f} \neq 0$ en un entorno del origen. Como también $\tilde{f}_n^i(0) \neq 0$ las $\tilde{f}_n^i$ serán $\neq 0$ en un entorno del origen en que no haya otro cero de α, y de aquí se obtiene lo deseado.