Análisis multivariante de series temporales: dominio frecuencial frente a dominio temporal

Antonio Alegre Escolano

UNIVERSIDAD CENTRAL DE BARCELONA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y EMPRESARIALES

ANALISIS MULTIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES:

DOMINIO FRECUENCIAL FRENTE A DOMINIO TEMPORAL

Tesis Doctoral presentada por:

D. ANTONIO ALEGRE ESCOLANO

Director:

Dr. D. ALFONSO M. RODRIGUEZ RODRIGUEZ

Catedrático de la Universidad

Central de Barcelona

Barcelona, Curso 1978/79

I N D I C E

CAPITULO I

" INTRODUCCION AL ANALISIS DE SERIES TEMPORALES "

Con este primer capitulo, y a modo de introducción, pretendemos cubrir tres objetivos que creemos son necesarios para encuadrar nuestras investigaciones.

Estos objetivos son los siguientes: en primer lugar, trataremos de justificar aunque de una forma muy sucinta la elección del tema objeto de estudio, el análisis de las Series Temporales en Economía; seguidamente pasaremos a situar el tema de la investigación en sus dimensiones actuales, para lo cual realizaremos un pequeño estudio histórico-conceptual de como han evolucionado en las últimas décadas los métodos de análisis de series temporales, para pasar, en último término, a exponer el plan de investigación seguido en nuestro trabajo.

I) JUSTIFICACION DE LA ELECCION DEL TEMA OBJETO DE ESTUDIO.

Desde mis primeros contactos con los temas estadisticos, que se produjeron en la Antigua Escuela de Comercio como estudiante de Profesorado Mercantil, llamó mi atención el estudio que podríamos calificar como rudimentario, por la metodología empleada, de las Series Temporales ó Cronológicas, y pese al gran interés que en dichos temas se apuntaba, el tratamiento que se daba a los mismos me dejó realmente insatisfecho.

Al continuar mis estudios en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, mi interés por el tema creció mucho más, pues, aún cuando no había llegado a un nivel de conocimientos satisfactorio sobre el mismo, las perspectivas de aplicación se ampliaban de una forma sorprendente al encontrarme con el estudio de la Teoría Económica Dinámica en la que siempre nos referíamos a variables económicas que evolucionaban en el tiempo, y cuya trayectoria nos interesaba predecir y controlar, para poder utilizar estos resultados con vistas a la elección de las Politicas Económicas más adecuadas para lograr los objetivos propuestos.

Al mismo tiempo, y al tratar de la cuantificación de esta evolución mediante la Econometría, pude darme cuenta de la amplia problemática que llevaba consigo la introducción de variables temporales dentro de los modelos Econométricos.

Posteriormente, como encargado de la Cátedra de Estadística Empresarial, en la Escuela Universitaria de Estudios Empresariales, tuve la oportunidad de profundizar en el tema de las Series Temporales, con la fortuna de que cayese en mis manos el magnifico libro de Granger, C.W.J. (1964) "Análisis Espectral de las Series Temporales Económicas" en su versión francesa, éste abrió ante mi, con su tratamiento riguroso, un horizonte grandioso y un camino cuya primera etapa puede considerarse la elaboración de este trabajo que presento como Tesis Doctoral en Economía, pues es la Economía un campo fecundo donde la aplicación de los resultados obtenidos aquí, puede llevar a un conociento más profundo de las interrelaciones entre variables temporales, coadyuvando ésto a una mejor predicción y control de las mismas.

En cuanto a la magnitud del trabajo a realizar, no pretende abarcar ni mucho menos, cosa por otro lado no deseada siquiera, la totalidad de los temas que se podrían encuadrar bajo el título de Análisis de Series Temporales, sino más bien lo que hemos tratado de llevar a término es un estudio lo más profundo y sistemático posible de una de las parcelas que podemos considerar más útiles dentro de su posible aplicación a temas relacionados con la Economía, parcela que pasamos a situar seguidamente en su debida dimensión.

II) ESTUDIO HISTORICO CONCEPTUAL DE LOS METODOS DE ANALISIS DE SERIES TEMPORALES.

El esquema que seguiremos en este épigrafe, para efectuar un estudio histórico-conceptual lo más claro y ordenado posible, que nos refleje las caracteristicas de los métodos utilizados en el análisis de las Series Temporales, su evolución y expansión en los últimos decenios, estará basado en la consideración de los puntos siguientes:

1) Consideración de los objetivos que se ha deseado alcanzar con el desarrollo del Análisis de las Series Temporales, con el fin de tener muy presente que problemas se han querido resolver y que informaciones se han pretendido obtener del Análisis de las Series Temporales.
2) Partiendo del conocimiento de los objetivos a alcanzar, resumiremos los Fundamentos analíticos e hipótesis introducidos en los métodos que se han desarrollado para efectuar este análisis. Consideraremos aqui las dos aproximaciones del Análisis de Series Temporales que son, el "dominio temporal" y el "dominio frecuencial", partiendo de sus inicios y observando su desarrollo por caminos muy distintos. Compararemos seguidamente, los resultados obtenidos mediante la utilización de las dos aproximacio

nes, analizando las ventajas y los inconvenientes de cada una, en lo que hace referencia a sus aptitudes, tanto para resolver los problemas planteados, como para proporcionar la información que de ellos se espera obtener.

3) Analizaremos, las generalizaciones y extensiones, que se estan desarrollando a partir del análisis espectral clásico univariante, y que se han visto propiciadas, por un lado, por el propio desarrollo y conocimiento de estas técnicas de análisis, y por otro, por los nuevos problemas surgidos al tratar de aplicar estas técnicas de análisis a otros campos distintos de aquellos, en los que venían utilizándose normalmente.

4) Consideraremos, el conjunto de problemas que surgen al tratar de llevar a la práctica, el análisis espectral de series temporales económicas, y comentaremos las posibles soluciones a aplicar.

5) A continuación analizaremos los motivos que justifican la utilización de la aproximación espectral, viendo cuales son los problemas para cuya resolución es más idónea la utilización de los métodos basados en este dominio de las frecuencias.

6) Seguidamente haremos referencia a los campos del conocimiento, en los que se ha utilizado el análisis espectral, haciendo hincapié en lo referente a su utilización en el análisis de Series Temporales Económicas.

7) Para finalizar este esquema haciendo referencia a cual es nuestro objetivo, "El Análisis Espectral Multivariante", y situarlo dentro del contexto analizado en el conjunto de este epígrafe que ha sido elaborado con este único e importante motivo.

1) OBJETIVOS EN EL ANALISIS DE LAS SERIES TEMPORALES.

El Análisis Clásico de las series temporales, ha tenido como objetivo básico, la descomposición temporal de éstas en las cuatro componentes usuales, o sea,en tendencia, variaciones cíclicas, variaciones estacionales y variaciones accidentales o erráticas, con el fin de poder estudiar cada componente por separado e integrado los resultados, poder conocer la evolución global de la serie.

Los fines que se pretendían cubrir, con este conocimiento de la serie eran fundamentalmente dos: la Predicción, consistente en que, conocidas históricamente las características del tipo de evolución de una serie temporal, se pueden sacar ciertas conclusiones acerca de su futuro, y el Control, este objetivo es más moderno e implica la existencia de un modelo que relacione la evolución de una serie con respecto a otras, de forma que si se puede actuar sobre los valores de éstos últimos, podrá controlarse a traves del modelo la evolución de la primera serie.

El análisis moderno de series temporales, se centra en tres áreas fundamentales de problemas:

a) Desarrollo de medidas de la población estadística que describen la tendencia central de los fenómenos en el tiempo.

b) Formulación de modelos matemáticos de predicción que admitan explícitamente oscilaciones entre los fenómenos, así como la presencia de tendencias centrales.

c) Desarrollo de procedimientos de estimación y contraste para las medidas descriptivas de la población y de los modelos de predicción.

Este análisis es preponderantemente estadístico, por lo que se centra sobre generalidades del comportamiento asociativo, del cual el comportamiento causal es una parte.

Siguiendo a Jenkins, G.M. y Watts, D.G (1968, pag. 10 y 11) podemos clasificar los modelos de series temporales en:

- Modelos exploratorios y sofisticados

. Modelos empíricos y fisicos

. Modelos paramétricos y no paramétricos

Utilizándose estos modelos de series temporales en:

. Predicción

. Estimación de funciones de transferencia

. Filtrado y Control

. Simulación y Optimización

. Generación de nuevas teorías físicas.

2) FUNDAMENTOS Y METODOS DEL ANALISIS DE SERIES TEMPORALES.

El análisis de las series temporales es uno de los problemas que primero se plantearon los estadísticos. En principio los procedimientos empleados no se justificaron mediante ningún modelo perfectamente elaborado y como suele ocurrir en la ciencia, este modelo se ha ido elaborando con posterioridad, a medida que se ha querido justificar los procedimientos empleados y averiguar sus propiedades, para ampliar el campo de sus aplicaciones.

El primer inconveniente que se encontró al tratar de analizar las series temporales, fué que la metodología estadística disponible hacía referencia a modelos en los que las distintas observaciones eran independientes. Esta hipótesis de independencia no podía aceptarse en muchos de los casos que se pretendía estudiar, sobre todo cuando las series temporales hacían referencia a datos procedentes de campos como la economía, la empresa, la ingeniería y otros muchos en los que los datos se obtienen bajo la forma de una serie temporal cuyas observaciones son dependientes y donde el conocimiento de la naturaleza de la dependencia es de un interés fundamental. El conjunto de técnicas disponibles para el análisis de tales series de observaciones dependientes, se denomina Análisis de Series Temporales.

Dado el gran interés que supone, el conocimiento de esta independencia temporal en muchos fenómenos, y en particular en Economía, ya que las series temporales constituyenla base empírica de la que se aprovecha la Teoría-Económica para la correcta comprensión de los fenómenos económicos, no puede negarse, la gran importancia que ha tenido y tiene el desarrollo de los métodos de Análisis de Series Temporales.

Históricamente, se han producido dos aproximaciones distintas al análisis de series temporales, siguiendo caminos e instrucmentos distintos, la primera es la aproximación en el "dominio temporal" y la segunda el análisis armónico o su generalización el análisis espectral, que es una aproximación en el "dominio frecuencial".

El moderno análisis de las series temporales tiene su fundamento, en la consideración de que una serie temporal puede interpretarse como la realización de un proceso estocástico, con lo que el análisis de la serie consistirá en obtener las características del proceso generador, lo que equivale a encontrar las leyes que regulan el comportamiento de la serie.

La inclusión de las hipótesis más frecuentes, en el análisis de las series temporales, se debe fundamentalmente, a la idea de dar más sencillez al modelo que explique su comportamiento, entre los más importantes está la de la estacionariedad del proceso estocástico generador, y que además de ser estacionario, puede ser descrito adecuadamente mediante los primeros momentos de su distribución de probabilidad, los primero momentos incluyen, la media, y la función de autocovariancia o el espectro que no es más que la transformada de Fourier de dicha función de autocovariancia.

Una aproximación alternativa a la anterior, supone que el proceso estocástico puede describirse adecuadamente, mediante modelos que contienen un pequeño número de parámetros,los cuales pueden ser estimados a partir de los datos que resultan de observar el proceso.

Expondremos seguidamente, las características básicas de cada una de las aproximaciones al análisis de las series temporales, el "dominio temporal" y el "dominio frecuencial"

A) "Dominio Temporal".

Históricamente hablando, la aproximación en el "dominio temporal" para el análisis de series temporales, ha sido una extensión de la teoría clásica de la correlación, podemos citar como pioneros, en esta línea de análisis, dentro de la primera mitad del siglo, a Mann,H.B. y Wald,A., Yule, G.U. y Slutzky, E. (*), quienes impulsaron el estudio de un gran número de cuestiones acerca de la naturaleza de la dependencia intertemporal, que la teoría existente entonces, no podía contestar adecuadamente.

En el "dominio temporal", el comportamiento de una serie temporal se describe en términos de la forma en que se relacionan estadisticamente las observaciones en tiempos distintos.

El instrumento básico en este tipo de análisis es la función de autocovariancia muestral y la sucesión de sus autocorrelaciones, que pueden considerarse como una normalización de las autocovariancias. La autocorrelación en un cierto retardo, mide la extensión con la que las observaciones de un cierto momento son descritas por

---

(*) Yule, G.U. (1927) "On a Method of Investigatin Periodicities in Disturbed Series with Special Reference to Wolfer's Sunspot-Numbers" Phil. Trans. Roy. Soc. Vol 226 Serie A (pags. 267-298).

. Slutzky, E. (1937) "The Summation of Random Causes as the Source Cyclic Processes". Econometríca. Vol 5 (pags. 105-146)

. Mann, H.B. y Wald, A. (1943) "On Statistical treatment of linear Stochastic difference equations" Econometría. Vol 11 (pag 173-220) las correspondientes a un periodo adelantado en un número de periodos igual al retardo.

La representación de la función de autocorrelación, el correlograma, se utiliza en ocasiones para dar una imagen visual de la forma en que se amortigua la dependencia de la serie con el retardo o separación entre los puntos de la serie. No obstante, la función de autocorrelación es con frecuencia dificil de interpretar ya que, valores próximos de esta función, pueden estar altamente correlacionados y esto hace que la autocorrelación muestral pueda aparecer distorsionada.

En la segunda mitad del siglo, los estudios y trabajos continuan ampliando las técnicas de analisis en el "dominio temporal", encontrándonos con la obra de Quenouille, M.H. (1957) donde se estudian extensamente los métodos de Análisis Multivariante de series temporales, en el "dominio temporal", en esta línea, Durbin, J. (*) trata la estimación de parámetros en los modelos de regresión de series temporales. A partir de

---

(*) Durbin, J. (1960). "Estimation of Parámeters in Time Series Regression Models" Journal of the Royal Statistical Society. Serie B. Vol 22 (pags. 139-153).

los años 60, los métodos de análisis en este "dominio temporal" han sido aplicados con gran éxito a algunos problemas especificos, como la Predicción y Control de Series Temporales.

En los problemas de Predicción, se observa una serie univariante o con más generalidad una multivariante, hasta un cierto instante, y se desea predecir o preveer algún valor futuro de la serie univariante o de algunas de las componentes de la multivariante.

En el problema de Control, se observa una serie temporal que depende de una o varias series cuyos valores pueden determinarse por el observador. El problema consiste aqui en manipular la serie o series controlables, de tal forma que los valores futuros de la serie que nos interesa controlar, se acerquen lo más posible a lo deseado.

Una descripción de los métodos que ayudan a resolver estos problemas, puede encontrarse en Whittle, P. (1963), que utiliza métodos de regresión mínimo cuadrática y en Box, G.P.E. y Jenkins, G.M. (1970) que enfocan su tratamiento mediante modelos de series temporales correspondientes al "dominio temporal".

B) "Dominio Frecuencial".

El primer exponente serio de los principios basicos del Análisis Espectral, se remonta a la aparición de la Teoría de las Series de Fourier (*) pero, no obstante, la base del Análisis Espectral se encuentra en los trabajos de Wiener, N. (1930) y Khintchine, A. (1934), quienes por extensión del análisis ármonico clásico de Fourier, proporcionaron un extenso conocimiento de las relaciones existentes entre la función de autocorrelación de un proceso estocástico estrictamente estacionario y su transformada de Fourier, la función de densidad espectral. Este resultado, dado por Wiener, N. (1930, pags. 117 y sigts.) nos dice que las funciones de autocorrelación y de densidad espectral, así como la función de autocovariancia y el espectro, son pares de transformadas

---

(*) Fourier, J.B.J. (1822). "Theorie analytique de la Chaleur", traducido al Inglés por: Freeman, A. (1872) "The Analytical Theory of Heat" (Edit. Dover Publications, New York. 1955).
Sus trabajos, puede considerarse que tienen tres aplicaciones fundamentales:

1) Para el estudio de soluciones periodicas a problemas físicos descritos mediante ecuaciones diferenciales.
2) Como un recurso operacional para resolver ecuaciones diferenciales.
3) Para aproximar funciones no periodicas.

Siendo este tercer punto el que servirá para sentar las bases del Análisis Armónico del que se genarlizará el Análisis Espectral.

de Fourier, con lo que conocida una de ellas puede obtenerse la otra, esto significa que poseen la misma información respecto de la distribución de probabilidad que rige el proceso. Estos resultados se extendieron a una clase más amplia de procesos, como son los estacionarios en covariancia o debilmente estacionarios, J. Tukey, J.W. (1949, pags. 47 y sigts.) y Bartlett, M.S. (1950, pags. 1-16), mostraron que el espectro tiene una distribución muy estable y que los intervalos de confianza estadísticos pueden determinarse con facilidad.

A partir de estos estudios, que empezaron a dar a conocer las propiedades de la aproximación en el "dominio frecuencial", utilizando como instrumento el espectro, empezó a despertar interés el conocimiento y la aplicación de esta técnica alternativa de análisis de series temporales, una de cuyas diferencias primordiales respecto a las tecnicas utilizadas hasta entonces, según Artis, M. (1976, pag 77), es que se presta menos atención a la especificación paramétrica del modelo que genera la serie, que al tipo de interdependencia que en ella pueda observarse. Desde entonces, el espectro, constituye el elemento de análisis básico para describir las propiedades de los procesos estocásticos esta---

cionarios en covariancia, pues se basa en la descomposición del proceso en componentes orto-gonales, asociados a las diversas frecuencias. El espectro recoge la contribución que, a la variancia total del proceso, realizan las componentes que pertenecen a una determinada banda de frecuencia. Por tanto, la presencia en el espectro de picos o valores grandes,nos señala que las componentes de las frecuencias a las que corresponden estos picos, o más bien las pertenecientes a las bandas de frecuencia correspondientes, son importantes en la explicación de las fluctuaciones del proceso.

Lo satisfactorio, en los resultados proporcionados por la inclusión del espectro como un método para analizar las series temporales, podría resumirse en que, con él, se ha logrado un rigor matemático y una generalización mucho mayores que los que se habían conseguido con los métodos clásicos.

En particular, por lo que se refiere a su utilidad como técnica de análisis de series temporales, estamos totalmente de acuerdo con las afirmaciones efectuadas por Morgenstern, O. en el prólogo al libro de Granger, C.W.J. (1964) en los que considera al análisis espectral como un instrumento de importancia capital, para hacer que la Economía evolucione con su utilización de una metodología a menudo basada en la intuición y por tanto limitada, a otra fundada en conceptos y métodos modernos y verificados.

En este sentido debemos decir que, desde mucho antes de que las técnicas de análisis espectral adquirieran cierta preponderancia, ya se había utilizado en Economía la técnica de Investigación de las Periodicidades Ocultas, debido a Schuster,(*) y que recibe el nombre de Análisis del Periodograma.

Podemos considerar como pionero a Moore, H.L. (1914) que lo utilizó como instrucmento de análisis de los ciclos económicos en la lluvia caida en el valle de Ohio. Posteriormente, Beveridge, W.H. (1922) realizó una notable aplicación económica al estudiar los precios del trigo en Europa.

Pero estas aplicaciones, no dieron los resultados apetecidos, ya que surgieron dos razones

---

(*) Schuster, A. (1898). "On the Investigation of Hidden Periodicities with Application to a Supposed Twnty-Six Day Period of Meteorological Phenomers" Terrestral Magnetism, Vol 3 (pags. 13 y sigts.).

fundamentales por las que resulta inadecuada la utilización del Periodograma con series económicas.

Siguiendo a Fishman, G.S. (1969, epig. 2.6), estas razones son:

1) El modelo de periodo fijo, no se adapta a la realidad de las series económicas, pues aunque muchos fenómenos económicos muestran comportamientos recurrentes, pocos muestran apariencia de regularidad periodica. El modelo sugería que las desviaciones de la regularidad periodica, eran aparentes debidas a causas aleatorias. En realidad, no lo eran, de este modo el modelo nos daba una descripción razonable del fenómeno estudiado.

2) El periodograma contiene fallos debidos al gran número de componentes periodicas desordenadas que estan sugeridas como importantes, un pico en el periodograma corresponde a una componente periodica, surgió, por tanto, el excepticismo en torno al valor del análisis del periodograma, más tarde el trabajo analítico consistió en explicar estos picos en el periodograma, como consecuencia de utilizar un estimador que carecía de la muy deseable propiedad estadística de consistencia.

Sargan, J.D. (1953, pags, 140 y sigts.) estudió un tratamiento aproximado de las propiedades del correlograma y del periodograma, aplicando los resultados obtenidos, al estudio de la serie de precios del trigo de Beveridge, W.H.(1971,1972). Las ordenadas del periodograma son estimadores asintoticamente insesgados del espectro, en las frecuencias correspondientes, pero no son estimadores consistentes, pues la variancia de las ordenadas del periodograma no tiende a cero. Por ello, el periodograma clásico no solo es inapropiado, en economía, donde no existen componentes de frecuencia determinista, sino que conduce a resultados de muy dificil interpretación. Para evitar esta inestabilidad estadística que surge en el periodograma en cuanto se aplica a datos empíricos, se propone efectuar un alisado númerico del periodograma, esta versión alisada, se ha convertido, por sus propiedades, en la base de la mayor parte de las formas de análisis frecuencial, al utilizarse como estimador del espectro (*)

(*) En Brillinger, D.R. (1975, pags. 9 y 10) puede encontrarse una relación bibliográfica seleccionada, de los textos de artículos que abarcan los principios y la evolucón histórica del análisis frecuencial de series temporales y puede servir, para completar el estudio realizado aqui.

Por todo lo dicho, respecto a la no existencia de periodicidades exactas en las series temporales económicas, en todo lo que sigue, supondremos que la serie temporal es tal, que el proceso generador es indeterminable, por lo que la función espectral será absolutamente continua, esto implicará la existencia de componentes periodicas deterministas, cosa que como hemos dicho queda justificada en las series económicas.

Para verificar, en el caso de sospecharlo, la hipótesis de existencia de un posible salto en la función espectral, y por tanto, de la existencia de una componente principal de periodo fijo, podemos hacer uso de un test, dado por Hannan,E.J. (1960 a, pags. 76-83 y 1961 pags. 394 y sigts.), que a su vez se basa en el test dado por Fisher, R.A. (1929, pag.54), refiriendose al contraste de hipótesis en el análisis ármonico de series temporales estacionarias.

C) Comparación entre: "dominio temporal" y "dominio frecuencial".

Como hemos dicho antes, los instrumentos fundamentales sobre los que se apoyan las aproximaciones en el "dominio temporal" y en el "dominio frecuen cial", son respectivamente, la función de auto covariancia y la función espectral, que constituyen un par de transformadas de Fourier, y como tales, proporcionan una información equivalente sobre la dependencia intertemporal del proceso. No obstante, como muy bien dice, Brigham, E. O. (1974, pag. 3), cualquier proceso de transformación, y en particular la transformada de Fourier, pretende reducir la complejidad del problema inicial, para después de resuelto, retornar a su dimensión primitiva, efectuando la correspondiente transformación inversa. Esto indica, que entre un par de transformadas, una de ellas siempre tiene propiedades más sencillas de interpretar que la otra, o sea, tiene mayor valor interpretativo.

Esto es lo que ocurre en este caso con la función espectral, de la que podemos resaltar las siguientes ventajas, respecto a la función de autocovariancia:

1) La función espectral es mucho más fácil de interpretar que la función de autocovariancia, al indicar, de una manera más clara, las componentes periodicas que tienen mayor importancia significativa en las fluctuaciones del proceso, lo cual, por otra parte,

todavía puede ponerse más en evidencia mediante operaciones de transformación lineal con resultado controlable llamadas de filtrado.

Esto significa que al contemplar el espectro, observamos la serie temporal como formada por infinitas componentes ciclicas, de amplitudes aleatorias y de diferente periodo, incorrelacionadas entre si y tales que entre todas proporcionan la variancia total del proceso. El espectro pone de manifiesto cual es la contribución de cada banda de frecuencias en la variancia total del proceso. Así, mediante una simple inspección del espectro, podemos conocer los periodos de las componentes más importantes en la variabilidad de la serie. Todo ello, podría resumirse diciendo que el proceso goza de la propiedad aditiva, mientras que no ocurre lo mismo con la función de autocovariancia.

2) La aproximación espectral nos da propiedades muestrales más simples que las más complejas de la aproximación en el dominio temporal. Esto permite una descripción más incisiva y cuantitativa de la dependencia in-

tertemporal que puede obtenerse a partir de un registro muestral dado, tanto en el dominio frecuencial como en el temporal. La dependencia intertemporal se refiere a la asociación entre pasado, presente y futuro de un fenómeno variable en el tiempo.

Ahora bien, como dice Jenkins, G.M. (1965, pag. 25), es importante conocer tanto las limitaciones de una técnica como sus aplicaciones. Hay estadisticos, que sostienen que el análisis espectral tiene poco valor, mientras que otros, lo consideran la panacea universal. Como siempre el verdadero lugar está entre los extremos.

No obstante, este mismo autor, destaca que si el objetivo último del análisis es estimar parámetros representativos de las series temporales objeto de estudio, entonces, el mejor análisis espectral se utiliza unicamente para indicar que modelos deben ser ajustados. Problemas que incluyan la estimación de un pequeño número de parámetros se resuelven mejor aplicando mínimos cuadrados o métodos de máxima verosimilitud en el dominio temporal. Tambien dice, que una de las mayores desventajas del análisis espectral es que es una técnica no paramétrica. Es necesario estimar una función continua o un gran número de parámetros, en lugar de un reducido número de estos como suele ser normal en el dominio temporal. La eficiencia con que podemos estimar estos parámetros es limitada. Una ulterior desventaja del análisis espectral es el que depende de la estacionariedad de la serie, y son posibles estimaciones paramétricas en el dominio temporal sin que esta condición sea necesaria.

Consideramos, en particular, el caso de las series económicas, las razones de comportamiento están especificadas generalmente en términos temporales y no frecuenciales, pero preguntas de interés como sería ¿cómo se distribuyen en el tiempo los cambios en una variable económica?, ¿qué retardo temporal existe entre un cambio inducido en una variable por un cambio en otra? y otras muchas reciben una fácil contestación si se realiza un análisis en el dominio frecuencial.

Finalmente, diremos, que hay autores como Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. (1969, pag.44), que a pesar de considerar las dos aproximaciones como complementarias para una mejor comprensión del proceso estocástico, se inclinan por la utilización de modelos de series temporales en el dominio temporal.

La polémica sigue, pues todo método tiene ventajas e inconvenientes que cada autor valorará según su propia opinión subjetiva. (*)

3) EXTENSIONES DEL ANALISIS ESPECTRAL UNIVARIANTE

Consideraremos aqui,las líneas que está siguiendo el análisis espectral en su evolución, y que le permitirán un mayor campo de aplicación. Estas líneas distintas en las que avanza el análisis espectral de series temporales, han surgido al tratar de generalizar alguna de sus componentes, o bien, al tratar de suprimir alguna de las hipotesis del modelo original.

Así, si tratamos de generalizar el análisis espectral para el caso de una serie bivariante o con mayor generalidad aún, para una multivariante, obtendremos el Análisis Espectral Bivariante o el Multivariante; si lo que deseamos generalizar, en el orden de los momentos de la dis-

---

(*) Para un análisis más exhaustivo de las relaciones entre "dominio temporal" y "dominio frecuencial", puede verse: Wold, H.O.A. (1963) que analiza las diferencias entre ambas aproximaciones, y Engle, R.F. (1976, pags. 89 y sigts.), que da una interpretación del análisis espectral en términos de modelos en el 'dominio temporal".

tribución del proceso estocástico, que nos interesa estudiar, tomando en lugar de los momentos de segundo orden, los de tercer orden o en general los de orden superior, obtendremos el Bi-espectro o el Poli-espectro; si estamos interesados en generalizar, el número de parámetros de los que depende la serie temporal, para transformarla en una serie espacial de dimensión 2 ó en general de dimensión n, obtendremos el espectro Bidimensional o Multidimensional, y por último, si lo que pretendemos ahora es suprimir la hipótesis de estacionariedad para el proceso estocástico generador de la serie temporal, de forma que éste sea evolutivo, nos encontraríamos con el Análisis Espectral Dinámico. Pasaremos ahora a exponer brevemente, los fundamentos de cada una de estas líneas de evolución.

A) Análisis Espectral Bivariante y Multivariante.

Los fundamentos teóricos de estos métodos de análisis espectral de series bivariantes o multivariantes, surgen de la misma fuente que dió lugar al análisis espectral de una serie univariante, pues el mismo Wiener, N. (1930, pag 182) mostró que el análisis conjunto de más de una variable era posible, abonando así, el terreno para el desarrollo del análisis espectral bivariante y multivariante.

La importancia que tiene este método de análisis, para el estudio de la estructura conjunta de las relaciones entre las componentes de la serie, queda fuera de duda, y precisamente en el análisis de las series temporales económicas, será un instrumento imprescindible, para poder llegar a un conocimiento profundo de las interdependencias existentes. Un análisis aislado, de los espectros de cada serie univariante, componente de la serie multivariante, sólo nos permitiría investigar, si todos ellos tienen máximos relativos en las mismas bandas de frecuencia, pudiendo dar lugar a la posibilidad de que las series estén relacionadas. Para investigar tal posibilidad, se hace uso de las técnicas de análisis espectral bivariante o cruzado y de su generalización: el análisis espectral multivariante.

Como una confirmación, de que la mayor parte de los autores, están de acuerdo en la importancia del análisis espectral multivariante, puede verse, entre otros: Artis, M. (1976, pag. 80), Bloomfield, P. (1976, pag. 209), Fishman, G.S. (1969, prólogo), Granger, C.W.J. (1964,epig.2.4) y Pena, J.B. (1970, pag. 100).

B) Análisis del Bi-espectro y Poli-espectro.

El estudio del bi-espectro, se basa en la necesidad de poder recoger las relaciones no linea-

..les entre series temporales, a partir de los momentos de tercer orden, el bi-espectro describe entonces, la acción en la variabilidad de la serie, de los términos cuadráticos del modelo.

En Godfrey, M.D. (1965, pags. 48 y sigts.) se encuentra un análisis de la interpretación del bi-espectro de series económicas. Mientras que Hasselman, K., Munk, W. y Mac-Donal, G. (1963, pags. 125-139) hacen una aplicación del bi-espectro a la geofísica.

En Brillinger, B.R. (1964, pags. 1351 y sigts.) puede encontrarse una introducción al poli-espectro, puede consultarse tambien, Bloomfield, P. (1976, pag. 240).

C) Análisis Espectral Bi-dimentional y Multi-dimensional.

El espectro bidimensional se utiliza para analizar observaciones espaciales, con lo que las series observadas no dependen del único parámetro tiempo, sino que dependen de dos parámetros indicadores de la posición que ocupa en el espacio bidimensional el elemento oculto observado.

Bloomfield, P. (1976, Pags. 235-237), trata someramente el análisis de Series Espaciales, que resultan de efectuar observaciones dentro de un en tramado rectangular en el plano o en un espacio de mayor dimensión.

El instrumento básico para su análisis en el dominio frecuencial, es la Transformada Multidimensional discreta de Fourier, que nos lleva al periodograma multidimensional, o en su versión alisada al Espectro Multidimensional.

La forma más simple de efectuar este alisado, es dividir el plano en conjuntos posiblemente solapados, promediar cada conjunto de ordenadas del periodograma y asociar el resultado con el promedio de frecuencias. Una alternativa es, dividir los datos en rectángulos posiblemente solapados para calcular los periodogramas para cada uno y promediarlos. La última de las alternativas, necesita menor capacidad de almacenamiento en memoria de ordenador ya que los datos se procesan en segmentos. El método alisado se mejora sustancialmente introduciendo ponderaciones espectrales variables e incrementando el número de puntos en los que se calcula el promedio. Es aconsejable utilizar ventanas espectrales con simetría circular, para que la orientación en el entramado en que se recogen los datos no influya en las estimaciones.

Las propiedades de estos estimadores, se deducen sin más que efectuar las correspondientes generalizaciones para lo hecho en el caso unidimensional.

Rayner, J.N. (1971, pags. 6 y 7 y apéndice B pág. 157) describe el análisis espectral de series espaciales y da una extensa y clasificada bibliografía, sobre aplicaciones de este tipo de análisis espectral.

Unwin, D.J. y Hepple, L.W. (1974, pags. 211 y sigts.) revisan el análisis general de los procesos espaciales y dan también una extensa bibliografía incluyendo diversas aplicaciones.

D) Análisis Espectral Dinámico.

El problema de la no estacionariedad en las series temporales, ha dado lugar a un intento, por ahora fallido, de crear una teoría espectral unificada que incluya a los procesos evolutivos.

El problema consiste en determinar una función espectral dependiente del tiempo y que generalice el conocido concepto de espectro, para los procesos estacionarios, a aquellos que no lo sean. Bajo ciertas condiciones el Espectro Evolutivo en cada instante del tiempo puede ser estimado a partir de una sola realización muestral del proceso. Entonces es posible estudiar procesos con trazado espectral continuamente cambiante.

Garcia-Villalón, J.(1970, pags 45 y sigts.) y Priestley, M.B. (1965, pags. 206-223) nos ofrecen el estudio de una clase particular de estos procesos evolutivos, los Procesos Oscilantes.

Cramer, H. (1960, pags 57 y sigts.) efectúa un estudio de algunas clases de procesos no estacionarios.

Hannan, E.J. (1970, pags. 77-82), trata también el estudio de una teoría espectral para procesos no estacionarios. En él, discute algunos casos de fenómenos no estacionarios para los que se puede utilizar alguna clase de teoría espectral.

Otnes, R.K. y Enochson, L. (1972, pags. 411-417) muestran un ejemplo de cómputo del espectro evolutivo, utilizando para ello la transformada rápida de Fourier, aplicada a segmentos sucesivos de la serie temporal, y dan cuatro tipos de representación gráfica, para el espectro evolutivo estimado, de entre las que puede destacarse, la tridimensional, con representación del espectro en distintos puntos del tiempo, lográndose así, una buena imagen de su variabilidad, o la representación bidimensional mediante curvas de nivel.

Para resumir los trabajos realizados, en torno a los espectros evolutivos, es necesario mencionar el trabajo de Loynes, R.M (1968, pags. 1 y sigts.) en el que da una relación de propiedades deseables en el espectro de un proceso estacionario, comentando y justificando la necesidad de su inclusión, dando a continuación diversas definiciones de espectro evolutivo, como las de:

Page, C.H. (1952, pags. 103 y sigts.)
Levin, M.J. (1964, pags. 95 y sigts.)
Farro, R.M. (1950, pags. 546 y sigts.)
Priestley, M.B (1965, pags. 204 y sigts.)
y Dubman, M.R. (1965) (*)

y concluye con el resultado negativo de que ninguna de estas definiciones satisface toda la lista de propiedades. Por lo que acaba diciendo que no existe una definición satisfactoria que permita formar un cuerpo coherente, de la teoría del análisis espectral dinámico (**)

(*) Dubman, M.R. (1965). " The Spectral characterization and comparison of non-stationary processes". (no publicado, Rocketdyne Research Report)

(**) Subba-Rao, T. (1970, pags. 312 y sigts.), en otro orden de ideas, fuera del análisis espectral, da métodos de Ajuste de Modelos de series temporales no estacionarias con parámetros dependientes del tiempo

4) PROBLEMAS PRACTICOS QUE SE PRESENTAN EN EL ANALISIS ESPECTRAL.

En este apartado, es nuestra intención resumir los problemas prácticos más importantes que se han presentado, y se pueden presentar en la aplicación del análisis espectral, enumerando algunas de las soluciones propuestas.

A) No estacionariedad en la serie temporal.

Brillinger, D.R. (1975, pag.7) da como causa de la no estacionariedad en el comportamiento de las series socio-económicas, el que la población conoce el pasado, y entonces altera el futuro con su comportamiento, y generalmente una serie que está relacionada consigo misma no es invariante en el tiempo.

Para poder aplicar el análisis espectral correctamente, la serie debe ser estacionaria; puede verificarse la hipótesis de estacionariedad mediante diversos tests, como el clásico de los signos, dado por Kendall, M.G. y Stuart, A. (1968, pags. 355 a 360), o los dados por Otnes, R.K. y Enochson, L. (1972, Cap. 11), de entre los que destacan aquellos que se basan en la utilización de filtros lineales.

Una vez sabemos que un proceso es no estacionario la evolución del mismo puede deberse a que es: no estacionario en la media, no estacionario en la variancia, no estacionario en la media y en la variancia, y otros.

Se dispone de ciertos métodos para eliminar esta tendencia de forma que la serie resultante, pueda considerarse como estacionaria. Entre estos métodos podemos citar:

1) Métodos clásicos, como la regresión polinómica y la regresión armónica, etc.. Que pueden encontrarse por ejemplo en Davis, H.T (1941, Cap. 6) y Pulido, A. (1971, pags. 4 y sigts.).

2) Métodos basados en el empleo de filtros lineales, entre los que podemos destacar, el método de las Diferencias Variables (*).

   Este método consiste en la aplicación sucesiva del operador diferencia, puede consultarse a estos efectos, Anderson, T.W. (1971, pags. 60-79), Kendall, M.G. (1973, pag 47-53)

(*) Para una exposición del operador diferencia y las propiedades de su aplicación sucesiva, en particular a una función polinómica, puede consultarse en castellano entre otros: Golberg,S. (1958, Cap. I) y Vegas, A. y Lopez-Cachero, M. (1976, Cap. 6) y Tintner, G. (1940) entre otros. Por este método encontramos un test sobre el grado del polinomio de tendencia en, Wilks, S.S. (1962, pags. 526 y sigts.).

3) Mediante regresión en el dominio frecuencial.

Puede consultarse, Hannan, E.J. (1960 a, pags. 122-138) donde estudia los efectos que produce la eliminación de la tendencia sobre el análisis de la serie residual.

4) Para procesos no estacionarios en la variancia, pueden efectuarse transformaciones logarítmicas, o bien puede consultarse, Bendat, J.S. y Piersol, A.G. (1966) para el análisis de un modelo no estacionario en la variancia.

Una vez analizados, aunque muy sucintamente estos métodos de eliminación de lo que de evolutivo tiene el proceso, nos fijaremos en el enfoque que trata de implantarse en la actualidad:

1') Construcción de modelos en el dominio temporal como los de Box, G.E.P. y Jenkins, G.M. (1969, Cap. 4) para los que no se precisa la estacionariedad.

2') Generalización del espectro evolutivo, que ya hemos analizado. Herbest, L.J. (1964, pag. 354) propone una generalización del espectro para el caso de no estacionariedad en la varianza.

B) Problemas de cálculo complejo.

Los cálculos requeridos para determinar las estimaciones espectrales, eran muy largos y complejos, necesitando mucho tiempo de ordenador, lo que se consideraba como un inconveniente para la utilización del análisis espectral, este problema ha quedado resuelto desde la implantación para su cálculo, del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier, el cual, a partir de ser redescubierto por Cooley, J.W. y Tukey, J.W. (1965, pags. 297-301) ha representado una mejora ostensible, en el procedimiento de cálculo; para una extensa bibliografía sobre el tema, y una exposición de las posibles aplicaciones y modificaciones del algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier, puede consultarse el texto de Brighan, E.D. (1974). Es de interés el artículo de Tukey, J.W. (1967, pags. 25 y sigts.).

Puede afirmarse, que gracias a este algoritmo el análisis espectral, en lo que a cálculos se refiere es más eficiente que el dominio temporal.

C) Pérdida de Observaciones.

En ocasiones al tratar de estimar el espectro, a partir de la observación de una serie temporal nos encontramos con que los datos están incomple tos, o que algunos de ellos deben desecharse por considerarse malos. Con ello se pierde la periodicidad en las observaciones.

Se han propuesto diversos sistemas para salvar este problema, el primero en estudiarlo fue, Jones, R.H. (1962, pags. 455 y sigts.) quien propuso un modelo, en el que se consideraban pérdidas regulares. Posteriormente, Bloomfield, P. (1970, pags. 369 y sigts.; y 1976, pags. 243-244) ha propuesto diversos sistemas para resolver este inconveniente, desde un modelo con pérdidas aleatorias, hasta sistemas de subsegmentos y métodos de alisado para reducir al mínimo la variancia del espectro estimado.

Estos métodos, se podrían generalizar, al caso de una serie cuyos periodos de observación no sean iguales.

D) Problemas de calendario.

Normalmente se consideran series temporales observadas periodicamente, pero en economía, los intervalos son sólo aproximadamente iguales, ejemplos de distintos días en cada mes, días festivos en algunas semanas, etc.

Kendall, M.C. (1973, pag. 8) propone algunas formas sencillas para paliar en parte estas diferencias.

El tema particular del ajuste, por variaciones en los días laborables, ha sido ampliamente tratado en E.E.U.U. principalmente por, U.S. Bureau of the Census (1965).

5) PROBLEMAS QUE RESUELVE EL ANALISIS ESPECTRAL.

Siguiendo a Brillinger, D.R. (1975, pags. 10-12), podemos decir, que existen tres razones primordiales para la utilización del análisis espectral, esto ocurre en los casos siguientes. Obtención de Estadísticos Descriptivos útiles por si mismos. Como Instrumento de diagnóstico para indicar que análisis posterior puede ser relevante. Para contrastar Hipotéticos Modelos Teóricos.

A) Un ejemplo del primer tipo es: Analizar las Transformaciones efectuadas en las series originales. Filtrado.

En este caso, mediante la estimación de las funciones de ganancia y fase, podemos efectuar un análisis pormenorizado en el dominio frecuencial de los efectos del filtrado, cosa muy dificil de hacer, por no decir imposible, si el análisis se realiza en el dominio temporal.

Hannan, E.J. (1958, pags. 323 y sigts.), realiza la estimación del espectro después de eliminar la posible tendencia em la media, se observa la aparición de un cierto sesgo en las es timaciones que es conveniente eliminar. Propone un método para calcular el sesgo producido en el periodograma y lo corrige mediante el alisado del mismo.

En Alavi, A.S y Jenkins, G.M. (1965, pags.70 y sigts.) encontramos un ejemplo cuantificado de filtrado de las frecuencias bajas utilizando el filtro modificado Blackman-Tukey, descrito en Jenkins, G.M. (1965, pag. 14). El análisis de los resultados del filtrado se efectúa comparando los espectros de las series original y filtrada.

En Fishman, G.S. (1969, Caps. I y II) pueden encontrarse analizados en el dominio espectral la mayor parte de los filtros que se utilizan con más frecuencia.

Granger, C.W.J. y Hugues, A.D. (1971, pags. 413 y sigts.) retoman la serie de precios del trigo estudiadas por Beveridge, W.H. (1921 y 1922) utilizando el análisis ármonico, y mediante el análisis espectral, ponen de manifiesto las distorsiones producidas por la eliminación de la tendencia mediante métodos de filtrado de las bajas frecuencias.

Finalmente, citaremos a Bloomfield, P. (1976, pags. 118 y sigts.), donde trata el problema de la demodulación compleja, mediante el alisado, por medio de un filtrado lineal y el diseño de filtros óptimos, todo ello analizado en el dominio frecuencial. Nos ofrece asi mismo, el efecto que produce en una serie la eliminación de una tendencia multiplicativa y los resultados de una transformación logarítmica para eliminar la tendencia.

B) En este punto, haremos referencia a las áreas de aplicación del análisis espectral que menciona Jenkins, G.M. (1965, pags. 26 y sigts.)

   a) Para sugerir los modelos de series temporales a los que mejor se adaptan las series en estudio.

   b) En el diseño de sistemas lineales, eligiendo las funciones de ponderación óptimas para obtener en la serie transformada las caracteristicas deseadas.

En este sentidoson recientes las aplicaciones siguientes: sobre selección de modelos de Predicción por Reinmuth, J.E y Geurts, M.D. (1977, pags. 134 y sigts.); sobre Predicción por Spivey, W.A y Wroblesky, W.J. (1974, pags. 92 y sigts.), sobre Predicción y Control de Series Temporales por Box, G.B.P ., Jenkins, G.M y Mc. Gregor, J.F. (1974, pags 158 y sigts.)

y sobre el Análisis Espectral Multivariante en la toma de decisiones por: Ahlund, M.C., Barksdale, H.C. y otros (1977, pags. 734 y siguientes)

C) En el terreno del contraste de hipótesis, una aplicación importante del análisis espectral ha consistido en la obtención de un test para verificar la hipótesis de ruido blanco en una serie dada, con lo que el proceso estará incorrelacionado. Uno de los tests propuestos se debe a Jenkins, G.M. y Watts, D.G. (1968, pags. 234-237). Dan un test para verificar la hipótesis de ruido blanco, con el fin de poder detectar desviaciones del ruido blanco debidas a los efectos de la existencia en la serie de componentes periodicas importantes. Se aplica, normalmente, después de ajustar un modelo a una serie económica que contiene variaciones estacionales, lo adecuado o inadecuado del modelo, se refleja en los residuos, que de ser periódicos, nos dirán que el modelo es inadecuado, para verificar esta hipótesis se utiliza con éxito este test basado en el dominio frecuencial. El test habitual de Durbin y Watson, basado en el dominio temporal, presenta limitaciones que no se han podido superar, hasta que el análisis se ha realizado en el dominio frecuencial.

Para terminar, diremos que sobre las utilizaciones selectivas del análisis espectral, puede consultarse, Percival, J. (1975, pags. 107 y sigts.)

6) APLICACIONES DEL ANALISIS ESPECTRAL.

Las primeras aplicaciones de las técnicas de análisis espectral se han producido en Física e Ingeniería; la aplicación a la resolución de problemas económicos, puede decirse que no ha empezado hasta los años 60, pues hasta entonces los economístas habían estado familiarizados solamente con el dominio temporal y no habían llegado a asimilar todavía, el complejo instrumental matemático que requería el análisis espectral.

En este apartado, vamos a enumerar sin ánimo de exhautividad, algunas aplicaciones del análisis espectral fuera y dentro del ámbito económico. El orden será este, pues así se han dado históricamente, aunque nuestro análisis será más profundo en lo que hace referencia a las aplicaciones económicas.

A) Aplicaciones no económicas.

Las áreas de aplicación del análisis espectral son muy diversas, y simplemente nos conformaremos en hacer una simple enumeración de las mismas, así el análisis espectral se ha aplicado; a la Física, en estudios sobre radiación, descomposición de la luz y análisis de mecanismos de turbulencias; a la Astronomía; a la Ingeniería, en electrónica, electromagnetismo, acústica, comunicaciones; a las Ciencias de la tierra, en metereología, climatología, geología, geomorfología, oceanografía, seismología, geofísica; a la Medicina, en electrocardiología, electroencefalografía y a la Biología; a la Psicología, al Analisis númerico, etc. Como aplicaciones recientes, citaremos, por ejemplo, una hecha al importante y actual problema del control del medio ambiente por Box, G.E.P. y Tiao, G.C. (1975, pags. 70 y sigts.), y otra a los estudios de población por Lee, R.D (1975, pags. 295 y sigts.). Listas muy completas de aplicaciones concretas, se encuentran, Brillinger, D.R. (1975, pags 10-12), Fishman, G.S. (1969, prólogo), Hannan, E.J. (1970, pag. 3), y Rayner, J.N. (1971, pags. 6 y 7, 153-155).

B) Aplicaciones económicas.

Para que podamos dar aqui, una idea del amplio campo de aplicación que tiene el análisis espectral en economía, empezaremos enumerando las aplicaciones genéricas, para pasar después a citar algunas aplicaciones particulares, siempre a título de ejemplo.

1) Aplicaciones generales.

"Sobre Análisis de la componente estacional de las series económicas y el problema de la desestacionalización".

Los primeros estudios sobre este tema en el dominio frecuencial, los realiza Hannan, E.J. (1960 b, y 1963), desarrollándolos posteriormente en Hannan, E.J. (1964) y Nettheim, E.J. (1965, pags. 495 y sigts.) que estudia diversos métodos. Nerlove, M. (1964, pags. 241 y sigts.) estudia los efectos que se producen en las series temporales al venir afectadas por los procedimientos de ajuste estacional, posteriormente Nerlove, M. (1965, pags 442 y sigts.), evalúa la importancia de la distorsión que se produce en la serie al aplicar diversos métodos de ajuste estacional. Quinet, E. (1969, pags. 76-84) y Kendall, M.G. (1973, pag. 55) analizan los efectos que sobre las demás componentes de la serie se ejercen al efectuar ajustes estacionales por diversos métodos. Terrell, R.D. y Ttuckwell, N.E. (1971, pags 354 y sigts.) utilizan el análisis espectral en el estudio de la eficiencia de las estimaciones mínimo-cuadráticas, de una componente estacional estable. Por último, citaremos un artículo que trata el ajuste estacional para la toma de decisiones por Melnick, E.L y Moussourakis, J. (1975, pags. 252 y sigts.) (*)

"Detección de Ondas largas en Economía".

En este campo, el análisis espectral ha sido muy fecundo al permitir que Adelman, I. (1965) al estudiar los ciclos largos en la economía mediante el enfoque frecuencial, pudiese poner en duda los resultados empíricos anteriores que estaban a favor de la existencia de estos ciclos, pues demostró que estos ciclos podían tener su causa en la distorsión producida por los filtrados previos a que se sometieron los datos analizados. Suzuki, M. (1965) a efectuado un estudio sobre las largas oscilaciones de la economía japonesa. Por último, citaremos un estudio en el que se comparan las largas oscilaciones de la economía en los siglos XIX y XX, llevado a cabo por Canavella, G y Snyder, D. (1977, pags. 11 y sigts.)

(*) Un análisis clásico sobre las variaciones estacionales, puede encontrarse, por ejemplo, en Davis, H.T. (1941, pags. 237-240) y Pulido, A. (1971, pags. 40 y sigts.).

"Análisis y Predicción de los Ciclos Económicos".

El análisis espectral, ha hecho resurgir el interés por el estudio de los ciclos económicos, pues se ha podido demostrar de forma rigurosa que la simple presencia del término aleatorio en un modelo que no posea fluctuaciones cíclicas, puede crearlas si sobre él se aplican procesos de medias móviles. Puede verse, Quinet, E. (1969, pag. 66), para un tratamiento de este hecho conocido como efecto Slutsky, E. (1937, pags. 105 y sigts.) mediante el análisis espectral cruzado, Granger, C. W.J. (1964, Cap. 12) construye una generalización de los llamados indicadores coyunturales, que tienen en cuenta la totalidad de las frecuencias. Siguiendo por este camino Michaelis, L.O y Roscelly, V.A. (1974, pags. 104 y sigts) realizan una aplicación a los problemas de predicción de las crisis en los cíclos económicos.

"Interpretación de las Funciones del Análisis Espectral cruzado en términos de Modelos con Retardos Distribuidos".

La interpretación de las funciones del análisis espectral cruzado, puede verse en Hannan, E.J. (*)

(*) Hannan, E.J. (1965) "The estimation of Relationships Involving Distributed Lags" Económetrica Vol 33 que da un procedimiento de estimación de los retardos distribuidos basado en el análisis espectral cruzado de las variables que intervienen en el modelo. Hannan, E.J (1970, pags. 475 y sigts.) estudia los modelos con retardos distribuídos, que se han utilizado en economía, desde la década de los 60, con más interés cada día con relación a este tema de los modelos económicos visto desde el dominio frecuencial, Sims, CH.A. (*) plantea su disconformidad con estas técnicas, pues dice que su aportación no es significativa.

2) Aplicaciones a campos específicos de la macro y micro economía.

" Estudios sobre fluctuaciones de precios"

Meyer, C.F. y Corbeau, A.B. (1975, pags 221 y sigts.), Mc Pheters, L.R. y Stronge, W.B. (1976 pags. 69 y sigts.).

" Análisis regional"

Cho, D.W. (1977, pags. 663 y sigts.) utiliza el análisis espectral cruzado en la realización

---

(*) .Sims, CH. A. (1971) "Discrete Aproximations of Continuos Times Distributed Lags in Econometrics" Económetrica pags. 545-564
.Sims, CH. A. (1974) " Distributes Lags" En Intrillgator y Kendrick (comp.) Frontiers ofQuantitative Economics, Vol II, Worth-Holland

de un plan regional de diversificación industrial, y en Cho, D.W. y Mc. Dougall, G.S. (1978, pags. 66 y sigts.) encontramos un trabajo estructuras descriptivo.

"Análisis series de importaciones y exportaciones".

Gudmundsson, G. (1971, pags. 383 y sigts). Un importante estudio comparativo realizado con series de la Economía de Inglaterra, utilizándo el analisis espectral y espectral cruzado.

"Aplicaciones al Marketing" del análisis espectral univariante y bivariante pueden encontrarse en:

Chadfield, C. (1974, pags. 97 y sigts.)

Barksdale, H.C. y Guffey, H.J.J. (1972, pags. 271 y sigts.).

"En el campo de las Finanzas" podemos citar algunos estudios recientes sobre tasas de cambio y relación riqueza-consumo.

Upson, R.B. (1972, pags. 18 y sigts)

Stronge, W.B., Omytrow, E.D. y Redman, M.B. (1976, pags. 40 y sigts.)

Loque, D.E. y Sweeney, R.J. (1977, pags 761 y sigts.)

"Estudio de las reacciones a corto plazo de los directivos de empresa".

Quinet, E (1969, pags. 111 a 134), nos muestra un modelo en el que intervienen pedidos mensuales, pedidos pendientes, stocks a fin de mes y producción mensual.

7) ANALISIS ESPECTRAL MULTIVARIANTE, COMO OBJETO DE NUESTRA INVESTIGACION.

Tal y como hemos constatado en el apartado 3) de este epígrafe el Análisis Espectral Multivariante, es una de las cuatro generalizaciones que se están elaborando a partir del análisis espectral de una serie univariante, y hemos visto que está totalmente reconocida su importancia, como instrucmento de análisis de la estructura covariante de las series temporales que intervienen en el modelo. Además, creemos que en economía la importancia de este instrumento supera incluso a la del simple análisis espectral de una serie, pues aunque sea importante conocer la estructura de una serie aislada, lo más importante cuando se trata de series económicas, es conocer las relaciones de interdependencia que existen entre ellas, y el análisis espectral nos permitirá además, analizar en que banda de frecuencia son más importantes estas interdependencia lo que nos permitirá conocer si la relación es a corto, medio o largo plazo, información ésta de importancia capital si queremos utilizar las series analizadas como componentes de modelos de decisión y predicción.

En vistas de todos estos resultados, que se adivinan esperanzadores, para el mejor conocimiento de la realidad de las relaciones entre series económicas, es lo que nos ha animado a tomar esta parte del análisis de series temporales, como punto central a desarrollar en nuestro trabajo de investigación.

III) PLAN DE INVESTIGACION REALIZADO.

Una vez centrado el tema objeto de nuestras investigaciones, el ANALISIS MULTIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES, pasamos a exponer el plan seguido en el resto de nuestro trabajo.

El Capítulo II, se ha dedicado a definir de una forma rigurosa los elementos que utilizaremos en nuestro estudio, empezando por el Proceso Estocástico Multivariante que es el sistema de todo nuestro análisis de las series temporales multivariantes, siguiendo a continuación con los instrumentos que nos ayudaran a describir y analizar dichos procesos, tales como la Matriz de Covariancias Retardadas, la Matriz Espectral y el Concepto de transformación lineal de un proceso multivariante bajo la forma de un Filtro Lineal. Además de las definiciones anteriores se exponen tambien, las propiedades más características de estos elementos, con el fin de que podamos hacer uso de ellos en los capítulos siguientes.

En el capítulo III, efectuamos una breve exposición de los métodos de análisis multivariante más utilizados, al considerar las series temporales bajo una aproximación en el "dominio temporal". Estudiamos aqui, el Análisis de la Regresión y Correlación Multiple y Parcial, el Análisis de los Componentes Principales y el Análisis Canónico, exponiendo un método de Análisis Sintético del cual pueden deducirse los tres anteriores, sin más que efectuar un cierto número de restricciones distintas para cada uno de los casos.

Los métodos de análisis considerados en este capítulo y que podríamos llamar clásicos, dado el marco temporal a traves del que se estudian, seran contrastados en sus resultados con los que se logran al aplicar a estos métodos la aproximación del "dominio frecuencial" o análisis espectral.

En el capítulo IV, que podemos calificar como el central de este trabajo, se realizan, de una forma rigurosa, la extensión de los métodos de análisis multivariante de Series Temporales descritas en el capítulo anterior, pero considerando aqui que la aproximación utilizada para su análisis es la del "dominio frecuencial" conocida con el nombre de Análisis Espectral.

Desarrollamos en primer lugar el Análisis Espectral Multivariante de la Regresión y Correlación entre Series Temporales, considerando tres tipos de modelos: Globales, Marginales y Parciales. Se obtienen sus propiedades fundamentales, los estadisticos básicos para su descripción y las relaciones entre ellos, con el propósito de reflejar lo más claramente posible, las diferencias que existen entre los resultados a que dan lugar cada uno de estos modelos y el significado que debemos atribuir a estas diferencias, cuya consideración será de una utilidad insustituible para llegar a una amplia comprensión de las relaciones existentes entre las componentes de las Series Temporales Multivariantes objeto de análisis.

Seguidamente, tratamos el Análisis Espectral de las Componentes Principales de una Serie Temporal Multivariante y el Análisis Canónico entre Series Temporales Multivariantes bajo el enfoque Espectral, realizamos diversas generalizaciones de estos métodos de análisis clásico de series temporales para adaptarlos a la aproximación en el "dominio frecuencial", y analizamos los resultados que se obtienen considerando la información que estos ofrecen sobre las series objeto de estudio.

Por último, dentro de este capítulo IV, se sintetizan dentro del "dominio frecuencial" los métodos de análisis multivariante estudiados aqui, considerando un método de Optimización Condicionada de los Residuos, que nos permitirá deducir de sus resultados, los tres métodos de análisis antes expuestos, sin más que aplicar distintas hipótesis a las Condiciones de Optimización.

En el cápitulo V, como resumen de todo los resultados obtenidos y de la comparación entre los dos métodos de análisis utilizados, "dominio temporal" y "dominio frecuencial", se relacionan las Principales Conclusiones, que hacen referencia a: propiedades de los métodos de Análisis de Series Temporales considerados, ventajas e inconvenientes de las dos aproximaciones de análisis en los dominios temporal y frecuencial, referidas fundamentalmente a las caracteristicas propias de las Series Temporales Económicas, y posibles caminos abiertos a investigaciones futuras.

Por último, y como final de este trabajo se relacionan en el capitulo VI las fuentes bibliograficas que se han considerado fundamentales de entre las utilizadas para su elaboración.

CAPITULO II

" ALGUNAS DEFINICIONES PREVIAS CON SUS PROPIEDADES "

Dedicaremos este capítulo, a la exposición de un conjunto de definiciones a partir de las cuales desarrollaremos los capítulos siguientes.

Será útil tambien, para poder recurrir a ellas posteriormente, demostrar algunas de las propiedades más importantes de los entes definidos, con lo que quedará justificada en este contexto su utilización.

Así, trataremos aquí de los procesos estocásticos y sus caracteristicas relevantes, tanto en el "dominio temporal" como en el "dominio frecuencial", consideraremos tambien algunas transformaciones importantes de estos procesos como por ejemplo el filtrado lineal.

Las definiciones se darán en general para procesos k-variantes reales, pues son los que normalmente utilizaremos, no obstante consideraremos tambien procesos k-variantes complejos con el fin de facilitar algunas de las demostraciones.

PROCESO ESTOCASTICO K- VARIANTE

Un proceso estocástico k– variante, puede considerarse como la generalización del concepto de variable aleatoria k–variante. Así, dado un determinado experimento aleatorio, si simbolizamos por E el conjunto de resultados posibles, considerando el espacio de probabilidad (E,A,P) asociado a este experimento aleatorio y el conjunto de índices T, podemos definir el proceso estocástico k– variante χ como una aplicación,

$$\chi: T\times E \longrightarrow R^k$$
$$(t,a) \longrightarrow \chi(t,a)\in R^k$$

tal que para todo $(x_1,x_2,\ldots,x_k)\in R^k$ el intervalo infinito

$$I(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\{(y_1,y_2,\ldots,y_k)/(y_1,y_2,\ldots,y_k)\in R^k \text{ y } (\forall s)(s\in\{1,2,\ldots,k\} \Rightarrow y_s\leq x_s)\}$$

nos dé una antiimagen $\chi^{-1}(I(x_1,x_2,\ldots,x_k))$ tal que, para todo $t\in T$ tengamos:

$$pr_t(\chi^{-1}(I(x_1,x_2,\ldots,x_k)))=\{a\in E/(t,a)\in\chi^{-1}(I(x_1,x_2,\ldots,x_k))\}\in A$$

En particular T puede ser el conjunto de números reales R, reales positivos R^+, enteros Z o naturales N.

Según sea T numerable o no, surgen los procesos DISCRETOS y CONTINUOS respectivamente.

Podemos dar dos interpretaciones del concepto de proceso estocástico:

1) Si nos fijamos en el espacio muestral E, puede considerarse a χ como un conjunto de funciones temporales vectoriales, considerando que T significa el tiempo, podría significar espacio, y ser funciones espaciales, etc.

$$\chi = \{\chi(t;a)/\chi(t;a)=\chi(t,a) \text{ y } a\varepsilon E\}$$

2) Si nos fijamos en el dominio temporal T, χ puede considerarse como un conjunto de variables aleatorias k-variantes $\{\chi(t)\}$ indiciadas en T.

$$\chi = \{\chi(t)=\chi(a;t)/\chi(a;t)=\chi(t,a) \text{ y } t\varepsilon T\}$$

SERIE TEMPORAL K-VARIANTE

Basándonos en la segunda interpretación del proceso estocástico, ésta nos resulta especialmente útil, pues nos permitirá describir la evolución de un fenómeno con el paso del tiempo.

Al conjunto indiciado de observaciones correspondientes a cada una de las variables aleatorias $\chi(t)$ se le denomina SERIE TEMPORAL K-VARIANTE. Por tanto, puede considerarse que una SERIE TEMPORAL es la realización de un proceso estocástico, es decir, una muestra en el dominio temporal formada por una única realización para cada $t\varepsilon T$. Por todo lo cual, podemos afirmar que analizar la serie temporal consiste en determinar las características del proceso generador.

Teniendo en cuenta lo anterior, en lo que sigue no haremos distinción entre PROCESO GENERADOR y SERIE TEMPORAL, y considerando en particular los procesos discretos tendremos que SERIE TEMPORAL K–VARIANTE será:

$$\chi'(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_k(t)\right)=\{\chi'(t)/t\varepsilon Z\}$$

donde $\chi'(t)$ significa el vector fila transpuesto del vector columna $\chi(t)$ y Z el conjunto de los números enteros.

MOMENTOS DE UN PROCESO K-VARIANTE

a) VECTOR ESPERANZA O VECTOR DE TENDENCIA

$$E\left(\chi'(t)\right)=E\left((X_1(t),..,X_i(t),..,X_k(t))\right)$$
$$=\left((E\ X_1(t),..,E\ X_i(t),..,E\ X_k(t))\right)$$
$$=\left((\mu_1(t),\ldots,\mu_i(t),\ldots,\mu_k(t))\right)=\mu'(t)$$

b) MATRIZ DE COVARIANCIAS RETARDADAS

$$C(t_1,t_2)=E\left((\chi(t_1)-\mu(t_1)).(\chi(t_2)-\mu(t_2))'\right)$$
$$=\left(C_{ij}(t_1,t_2)\right)_{i,j\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}}$$

Si i=j, entonces:

$$C_{ii}(t_1,t_2)=E\left((X_i(t_1)-\mu_i(t_1)).(X_i(t_2)-\mu_i(t_2))\right)$$

es la función de auto–covariancia del proceso univariante $X_i(t)$.

Si i≠j, entonces:

$$C_{ij}(t_1,t_2)=E\left((X_i(t_1)-\mu_i(t_1)).(X_j(t_2)-\mu_j(t_2))\right)$$

es la función de covariancia cruzada del proceso $X_i(t)$ con el $X_j(t)$.

c) MATRIZ DE VARIANCIAS Y COVARIANCIAS

Si $t_1=t_2=t$

$\mathcal{C}(t,t)=\mathcal{C}(t)=\left(C_{ij}(t,t)\right)=\left(C_{ij}(t)\right)_{i,j\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}}$

siendo para i=j : $C_{ii}(t)=Var\left(X_i(t)\right)$

y para i≠j : $C_{ij}(t)=Cov\left(X_i(t),X_j(t)\right)$

que son las funciones de variancias y covariancias de las variables componentes en el mismo índice t.

PROCESOS ESTACIONARIOS

a) ESTACIONARIEDAD ESTRICTA

El proceso estocástico k-variante $\chi(t)$ es ESTRICTAMENTE ESTACIONARIO, si para todo $s\varepsilon N$ y para todo $u,t_{r_1},t_{r_2},\ldots,t_{r_s}\varepsilon Z$ con $r_1,r_2,\ldots,r_s\varepsilon$ $\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$, la variable aleatoria s-variante $\left(X_{r_1}(t_1),X_{r_2}(t_2),\ldots,X_{r_s}(t_s)\right)$ tiene la misma distribución de probabilidad, que la variable $\left(X_{r_1}(t_1+u),X_{r_2}(t_2+u),\ldots,X_{r_s}(t_s+u)\right)$.

Esto significa, que la distribución conjunta es invariante respecto a cualquier traslación común en todos los índices temporales.

b) ESTACIONARIEDAD EN SENTIDO AMPLIO, DE SEGUNDO ORDEN O PROCESO DEBILMENTE ESTACIONARIO

$X(t)$ es un proceso estacionario de segundo orden, si:

$$\mu(t)=\mu \qquad \text{y}$$

$$C(t+u,t)=E\left((X(t+u)-\mu).(X(t)-\mu)'\right)$$
$$=C(u)=\left(c_{ij}(u)\right)_{i,j\in\{1,2,...,k\}}\ (*)$$

La matriz de covariancias retardadas tiene la propiedad siguiente:

$$C(u)'=E\left(\{(X(t+u)-\mu).(X(t)-\mu)'\}'\right)$$
$$=E\left((X(t)-\mu).(X(t+u)-\mu)'\right)$$
$$=E\left((X(t'-u)-\mu).(X(t')-\mu)'\right)=C(-u)$$

(*) Si $X(t)$ fuese un proceso estocástico k- variante complejo: $C(u)=E\left((X(t+u)-\mu).(\overline{X(t)-\mu})'\right)$ quedando entonces la propiedad: $\overline{C(u)}'= C(-u)$. Aquí y en todo lo que sigue, consideraremos $\overline{A}$ como el conjugado de A, y cuando A sea un vector o una matriz, $\overline{A}$ será el vector o la matriz cuyos elementos serán los complejos conjugados de los elementos de A.

por las definiciones de estacionariedad, se deduce inmediatamente, que si un proceso estacionario k-variante es estrictamente estacionario y posee momentos de primer y segundo orden finitos, este proceso es estacionario de segundo orden.

MATRIZ ESPECTRAL

Sea $\mathfrak{X}(t)$ un proceso estocástico k-variante estacionario de segundo orden con $\sum_{u=-\infty}^{\infty}|\mathcal{C}(u)|$ convergente, definimos entonces la MATRIZ ESPECTRAL como:

$$\mathfrak{f}(\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\mathcal{C}(u).\exp\{-i\lambda u\} \quad \text{para} \quad \lambda\varepsilon R$$

siendo:

$$\mathfrak{f}(\lambda)=\left(f_{hj}(\lambda)\right)_{h,j\varepsilon\{1,2,...,k\}}$$

una función matricial de la variable real λ llamada FRECUENCIA ANGULAR POR UNIDAD DE TIEMPO o simplemente FRECUENCIA.

Si h=j:

$$f_{hh}(\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{hh}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

se denomina AUTO-ESPECTRO, ESPECTRO DE POTENCIA o simplemente ESPECTRO del proceso $X_h(t)$.

Si h≠j:

$$f_{hj}(\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{hj}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

se denomina ESPECTRO CRUZADO del proceso $X_h(t)$ con el $X_j(t)$.

Con referencia al ESPECTRO CRUZADO, son de interés las definiciones siguientes:

1) CO-ESPECTRO: Como la parte real del espectro cruzado $Re\{f_{hj}(\lambda)\}=C_{hj}(\lambda)$.
2) ESPECTRO DE CUADRATURA: Como la parte imaginaria del espectro cruzado $Im\{f_{hj}(\lambda)\}=q_{hj}(\lambda)$.
3) ESPECTRO DE FASE: Como el argumento del espectro cruzado $arg\{f_{hj}(\lambda)\}=\phi_{hj}(\lambda)$.
4) ESPECTRO DE AMPLITUD: Como el módulo del espectro cruzado $|f_{hj}(\lambda)|=\left(C_{hj}^2(\lambda)+q_{hj}^2(\lambda)\right)^{1/2}$.

Son de destacar, por su importancia, las propiedades siguientes de la matriz espectral:

a) $\mathfrak{f}(\lambda)$ está acotada y es uniformemente continua.
b) $\mathfrak{f}(\lambda)$ es una función matricial periódica con periodo 2π.

$$\mathfrak{f}(\lambda+2\pi)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\mathcal{C}(u).\exp\{-i(\lambda+2\pi)u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\mathcal{C}(u).\exp\{-i\lambda u\}.\exp\{-i2\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\mathcal{C}(u).\exp\{-i\lambda u\}=\mathfrak{f}(\lambda)$$

luego, será suficiente considerar:

$$\mathfrak{f}(\lambda) \quad \text{con } -\pi\leq \lambda \leq \pi$$

c) $f(-\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C(u).\exp\{-i(-\lambda)u\}$

$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C(u).\exp\{+i\lambda u\}$

$=(2\pi)^{-1}.\sum_{v=-\infty}^{\infty}C(-v).\exp\{-i\lambda v\}$

$=(2\pi)^{-1}.\sum_{v=-\infty}^{\infty}C(v)'.\exp\{-i\lambda v\}=f(\lambda)'$

entonces para h=j:

$$f_{hh}(-\lambda)=f_{hh}(\lambda)$$

con lo que el espectro es simetrico respecto al origen. Y para h≠j:

$$f_{hj}(-\lambda)=f_{jh}(\lambda)$$

d) Si $X(t)$ tal como hemos definido es un proceso k-variante real, la matriz espectral $f(\lambda)$ es HERMITIANA, o sea:

$$\overline{f(\lambda)}'=f(\lambda)$$

donde $f(\lambda)'$ es la traspuesta de $f(\lambda)$ y siendo $\overline{f(\lambda)}$ la matriz conjugada de $f(\lambda)$.

$\overline{f(\lambda)}'=\overline{\left((2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C(u).\exp\{-i\lambda u\}\right)}'$

$=\overline{\left((2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C(u)'.\exp\{-i\lambda u\}\right)}$

$=\overline{\left((2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C(-u).\exp\{-i\lambda u\}\right)}=$

$$= (2\pi)^{-1}. \sum_{u=-\infty}^{\infty} C(-u).\exp\{i\lambda u\}$$

$$= (2\pi)^{-1}. \sum_{v=-\infty}^{\infty} C(v).\exp\{-i\lambda v\}=f(\lambda)$$

con lo que, para todo $h,j\varepsilon\{1,2,...,k\}$ tenemos:

$$f_{hj}(\lambda)=\overline{f_{jh}(\lambda)}.$$

e) Para todo $i\varepsilon\{1,2,...,k\}$ tenemos que $f_{ii}(\lambda)$ es real.

Se deduce inmediatamente de la propiedad anterior, ya que de $f_{ii}(\lambda)=\overline{f_{ii}(\lambda)}$, tenemos que $f_{ii}(\lambda)$ es real. Y además como :

$$f_{hj}(-\lambda)=f_{jh}(\lambda) \quad y \quad f_{hj}(\lambda)=\overline{f_{jh}(\lambda)}$$

tendremos que:

$$f_{hj}(-\lambda)=\overline{f_{hj}(\lambda)}$$

luego:

$$C_{hj}(-\lambda)=C_{hj}(\lambda) \quad y \quad q_{hj}(\lambda)=-q_{jh}(\lambda)=-q_{hj}(-\lambda)$$

lo que nos dice que el co-espectro es simétrico respecto al origen y el espectro de cuadratura es antisimétrico respecto al origen.

f) Consideraremos un proceso estocástico univariante complejo $Y(t)$, entonces:

$$C_{YY}(u)=E\{(Y(t+u)-\mu_Y).\overline{(Y(t)-\mu_Y)}\}$$

$$f_{YY}(\lambda)=(2\pi)^{-1}. \sum_{u=-\infty}^{\infty} C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

veamos que $f_{YY}(\lambda)\geq 0$, para todo $\lambda\varepsilon R$. Para ello, consideraremos el PERIODOGRAMA definido como:

$$I_{YY}^{(N)}(\lambda)=(2\pi N)^{-1}\left|\sum_{t=1}^{N} y(t).\exp\{-i\lambda t\}\right|^{2} \qquad (*)$$

que por ser el producto de un número positivo por el cuadrado del módulo de un complejo, es:

$$I_{YY}^{(N)}(\lambda)\geq 0 \text{ para todo } \lambda\varepsilon R$$

puede efectuarse la siguiente transformación:

$$I_{YY}^{(N)}(\lambda)=$$

$$=(2\pi N)^{-1}\Big(\sum_{t=1}^{N} y(t).\exp\{-i\lambda t\}\Big).\overline{\Big(\sum_{r=1}^{N} y(r).\exp\{-i\lambda r\}\Big)}$$

$$=(2\pi N)^{-1}\Big(\sum_{t=1}^{N} y(t).\exp\{-i\lambda t\}\Big).\Big(\sum_{r=1}^{N} \overline{y(r)}.\exp\{i\lambda r\}\Big)$$

$$=(2\pi N)^{-1}\sum_{t=1}^{N}\sum_{r=1}^{N} y(t).\overline{y(r)}.\exp\{-i\lambda(t-r)\}$$

si efectuamos un cambio de variable en los sumatorios, haciendo t-r=u, entonces t=r+u, y tendremos que:

$$I_{YY}^{(N)}(\lambda)=(2\pi N)^{-1}\sum_{r=1}^{N}\sum_{u=1-r}^{N-r} y(r+u).\overline{y(r)}.\exp\{-i\lambda u\}$$

Tomando valores esperados:

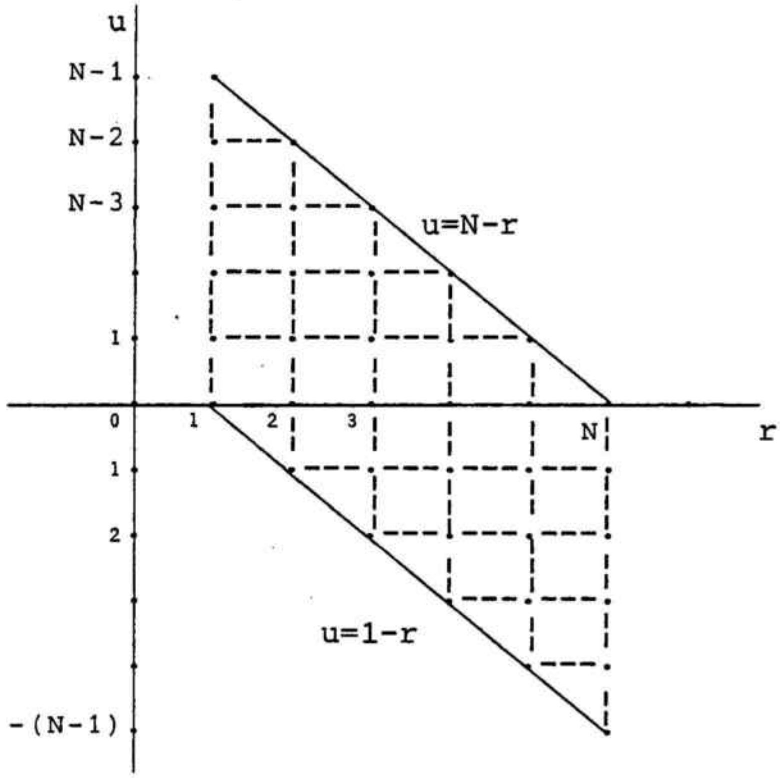
$$E\left(I_{YY}^{(N)}(\lambda)\right)=$$

$$=(2\pi N)^{-1}\sum_{r=1}^{N}\sum_{u=1-r}^{N-r} E\left(y(r+u).\overline{y(r)}\right).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi N)^{-1}\sum_{r=1}^{N}\sum_{u=1-r}^{N-r} C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

Intercambiando el orden de sumación; según el gráfico siguiente:

(*) Siendo $y(t)=Y(t)-\mu_Y$



(*)

obtenemos:

$$E\left(I_{YY}^{(N)}(\lambda)\right)=(2\pi N)^{-1}\Big(\sum_{u=0}^{N-1}\ \sum_{r=1}^{N-u} C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}+$$

$$+\sum_{u=-(N-1)}^{-1}\ \sum_{r=1-u}^{N} C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}\Big)$$

$$=(2\pi N)^{-1}\Big(\sum_{u=0}^{N-1}(N-u).C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}+$$

$$+\sum_{u=-(N-1)}^{-1}(N+u).C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}\Big)$$

$$=(2\pi N)^{-1}\Big(\sum_{u=0}^{N-1}(N-|u|).C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}+$$

$$+\sum_{u=-(N-1)}^{-1}(N-|u|).C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}\Big)$$

(*) Diagramas utilizados por Velasco, R. (1973).

$$=(2\pi N)^{-1}\sum_{u=-(N-1)}^{N-1}(N-|u|).C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\sum_{u=-(N-1)}^{N-1}(1-|u|/N).C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=f_{YY}^{(N)}(\lambda)\ \text{y}$$

$f_{YY}^{(N)}(\lambda)\geq 0$, pues al ser $I_{YY}^{(N)}(\lambda)\geq 0$ por definición, la esperanza $E\left(I_{YY}^{(N)}(\lambda)\right)=f_{YY}^{(N)}(\lambda)$ también será mayor o igual a cero.

Entonces, haciendo que N tienda a infinito, tenemos:

$$\lim_{N\to\infty} f_{YY}^{(N)}(\lambda)=$$
$$=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-1}\sum_{u=-(N-1)}^{N-1}(1-|u|/N).C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}=f_{YY}(\lambda)$$

luego, el espectro de potencia del proceso Y(t) se obtiene como límite de una sucesión de valores positivos o nulos, y por tanto $f_{YY}(\lambda)\geq 0$.

g) $\mathfrak{f}(\lambda)$ es una matriz semi-definida positiva, o lo que es lo mismo, la forma cuadratica $\alpha'\mathfrak{f}(\lambda).\bar{\alpha}\geq 0$ para cualquier vector k-variante complejo α.

Definamos el proceso estocástico complejo univariante:

$Y(t)=\alpha'.\mathcal{X}(t)$

y veamos que es estacionario si lo es $\mathcal{X}(t)$

$E(Y(t))=E(\alpha'.\mathcal{X}(t))=\alpha'.E(\mathcal{X}(t))=\alpha'.\mu=\mu_Y$ y

$$C_{YY}(t+u,t)=E((Y(t+u)-\mu_Y).\overline{(Y(t)-\mu_Y)})$$

$$=E(\alpha'(\mathcal{X}(t+u)-\mu).\overline{\alpha'(\mathcal{X}(t)-\mu)})$$

$$=E(\alpha'(\mathcal{X}(t+u)-\mu).(\mathcal{X}(t)-\mu)'.\overline{\alpha})$$

$$=\alpha'.\mathcal{C}(u).\overline{\alpha}=C_{YY}(u)$$

De aquí, el espectro de potencias del proceso $Y(t)$ será:

$$f_{YY}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\sum_{u=-\infty}^{\infty} C_{YY}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\sum_{u=-\infty}^{\infty} \alpha'.\mathcal{C}(u).\overline{\alpha}.\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=\alpha'.(2\pi)^{-1}\sum_{u=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}(u).\exp\{-i\lambda u\}.\overline{\alpha}=\alpha'.\mathfrak{f}(\lambda)\overline{\alpha}\geq 0$$

por la propiedad anterior, luego $\mathfrak{f}(\lambda)$ es semi-definida positiva.

Podemos considerar por último, que dada:

$$\mathfrak{f}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\sum_{u=-\infty}^{\infty} \mathcal{C}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

puede invertirse, para obtener la expresión:

$\mathcal{C}(u)=\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{f}(\lambda).\exp\{iu\lambda\}.d\lambda$ para $u\in Z$, lo que nos lleva a poder afirmar que las matrices $\mathfrak{f}(\lambda)$ y $\mathcal{C}(u)$, matriz espectral y la matriz de covariancias del proceso, nos proporcionan información equivalente, pues, de una cualquiera de ellas puede obtenerse la otra. Si efectuamos el análisis del proceso a partir de $C(u)$, decimos que nos movemos en el "Dominio Temporal", y si lo efectuamos mediante $f(\lambda)$ diremos que se realiza en el "Dominio Frecuencial".

(k,r) FILTROS LINEALES

Al analizar una serie temporal k-variante, es necesario normalmente efectuar transformaciones, por lo general lineales, de sus componentes, para transformarla en una r-variante. Este efecto se logrará mediante un filtrado lineal.

Un operador L que transforme una serie temporal k-variante $X(t)$ en una r-variante: $Y(t)=L(X)(t)$ se denomina un (k,r) FILTRO LINEAL, si dicho operador es LINEAL e INVARIANTE EN EL TIEMPO.

El operador L, será LINEAL, si dadas las series k-variantes $X_1(t)$ y $X_2(t)$, y las constantes a_1,a_2:

$$L(a_1 \cdot X_1+a_2 \cdot X_2)(t)=a_1 \cdot L(X_1)(t)+a_2 \cdot L(X_2)(t)$$

Si definimos ahora, el opeerador SIGUIENTE en u, S^u como:

$$S^u X(t)=X(t+u)$$

el operador L será entonces INVARIANTE EN EL TIEMPO, si:

$$L(S^u X)(t)=L(X)(t+u)$$

Para lo que sigue, es necesario generalizar el concepto de (k,r) FILTRO LINEAL, de forma que el dominio no incluya sólo funciones vectoriales como las series k-variantes, sino también funciones matriciales de orden kxk que simbolizaremos: $\mathcal{M}(t)=\left[M_j(t)\right]_{j\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}}$ siendo $M_j(t)$ la función vectorial k-variante, columna j-ésima de la función matricial $\mathcal{M}(t)$.

Entonces el resultado de aplicar un (k,r) FILTRO LINEAL a la función matricial $\mathcal{M}(t)$, será:

$$L\left[\mathcal{M}\right](t)=\left[L\left[M_j\right](t)\right]_{j\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}}$$

función matricial de orden rxk, donde $L\left[M_j\right](t)$ es la función vectorial r-variante, resultante de transformar mediante la acción del (k,r) FILTRO LINEAL, la j-ésima columna de la función matricial $\mathcal{M}(t)$ de orden kxk.

FUNCION DE TRANSFERENCIA O DE RESPUESTA FRECUENCIAL DE UN (k,r) FILTRO LINEAL

Sea L un (k,r) FILTRO LINEAL, con dominio en las matrices funcionales de orden kxk; considerese en particular la función matricial:

$$e(t)=\exp\{i\lambda t\}.I_k$$

donde I_k simboliza la matriz unidad de orden kxk.

Por las propiedades de linealidad e invariancia de L, al ser:

$e(t+u)=\exp\{i\lambda(t+u)\}.I_k=\exp\{i\lambda u\}.\exp\{i\lambda t\}.I_k=\exp\{i\lambda u\}.e(t)$

tenemos que:

$L(S^u e)(t)=L(e)(t+u)=L(\exp\{i\lambda u\}.e)(t)=\exp\{i\lambda u\}.L(e)(t)$

Haciendo t=0, obtenemos:

$$L(e)(u)=\exp\{i\lambda u\}.L(e)(0)=\exp\{i\lambda u\}.A(\lambda)$$

y sustituyendo u por t, quedará:

$$L(e)(t)=\exp\{i\lambda t\}.A(\lambda)$$

siendo $A(\lambda)=L(e)(0)$ LA MATRIZ FUNCIONAL DE TRANSFERENCIA O DE RESPUESTA FRECUENCIAL del (k,r) FILTRO LINEAL, que tiene dimensión kxk, podemos considerar la propiedad siguiente:

$$A(\lambda+2\pi)=A(\lambda)$$

ya que:

$\exp\{i(\lambda+2\pi)t\}=\exp\{i\lambda t+i2\pi t\}=\exp\{i\lambda t\}.\exp\{i2\pi t\}=\exp\{i\lambda t\}$

Por tanto, la matriz funcional de transferencia del (k,r) FILTRO LINEAL, es periódica con periodo 2π.

(k,r) FILTRO LINEAL SUMATIVO

Una importante clase de (k,r) FILTROS LINEALES, toma la forma:

$$Y(t)=L(X)(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).X(u)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).X(t-u)$$

en la que $\{a(u)\}_{u\in Z}$ es una sucesión de matrices de orden rxk tales que:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |a(u)| \text{ es convergente} \qquad (1)$$

Un (k,r) filtro lineal que pertenezca a esta clase, se le denomina (k,r) FILTRO SUMATIVO, y se simboliza con $\{a(u)\}$.

La matriz funcional de transferencia de esta clase de filtros será:

$$L(e)(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).e(t-u) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\exp\{i\lambda(t-u)\}.I_k =$$

$$=\exp\{i\lambda t\}. \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\exp\{-i\lambda u\} \text{ de donde:}$$

$$A(\lambda) = L(e)(0) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\exp\{-i\lambda u\} .$$

Esta matriz es uniformemente continua respecto a λ, ya que se satisface la condición (1).

La función matricial $a(u)$ con $u \varepsilon Z$, se suele denominar FUNCION MATRICIAL DE RESPUESTA A IMPULSO, del filtro dado, esto es debido a que si consideramos el dominio del filtro incluyendo las matrices funcionales $k_x k$, el resultado de aplicar el filtro a la serie matricial de impulso único:

$$X(t) = \begin{cases} I_k \text{ para } t = 0 \\ 0 \text{ para } t \neq 0 \end{cases}$$

sería la función matricial de orden $r_x k$, dada por:

$$Y(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).X(u) = a(t).X(0) = a(t).I_k = a(t)$$

luego $a(t)$ es la función matricial que se obtiene al apli car un impulso unitario al filtro definido por $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$.

Algunas propiedades importantes de este tipo de filtros son:

a) Si $\{a_1(t)\}$ y $\{a_2(t)\}$ son (k,r) filtros sumativos, con funciones de transferencia $A_1(\lambda)$ y $A_2(\lambda)$ respectivamente, entonces $\{a_1(t)+a_2(t)\}$ es un (k,r) filtro sumativo y su función de transferencia es $A_1(\lambda)+A_2(\lambda)$.

El que $\{a_1(t)+a_2(t)\}$ es sumativo, es inmediato, pues de la definición:

$$Y(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left(a_1(t-u)+a_2(t-u)\right).X(u) \quad \text{con}$$

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty}|a_1(u)+a_2(u)|\leq \sum_{u=-\infty}^{\infty}|a_1(u)|+\sum_{u=-\infty}^{\infty}|a_2(u)|$$

que será convergente al ser menor o igual que la suma de dos convergentes.

Además:

$$A(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left(a_1(u)+a_2(u)\right).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty}a_1(u).\exp\{-i\lambda u\}+\sum_{u=-\infty}^{\infty}a_2(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=A_1(\lambda)+A_2(\lambda).$$

b) Si $\{b_1(t)\}$ es un (k,r) filtro sumativo con función de transferencia $B_1(\lambda)$ y $\{b_2(t)\}$ es un (r,s) filtro, también sumativo con función de transferencia $B_2(\lambda)$, entonces $\{b_2 * b_1(t)\}$ que representa el filtro resultante de aplicar primero $\{b_1(t)\}$ y seguidamente $\{b_2(t)\}$ es un (k,s) filtro sumativo y su función de transferencia es $B_2(\lambda) . B_1(\lambda)$.

Veamos en primer lugar, la estructura de la matriz de RESPUESTA A IMPULSO: $b_2 * b_1(t)$.

Como:

$$Y(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1(u) . X(t-u)$$

entonces,

$$Z(t) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} b_2(t-v) . Y(v)$$

$$= \sum_{v=-\infty}^{\infty} b_2(t-v) \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1(u) . X(v-u)$$

haciendo el cambio de variables, v-u=h y u=u, tendremos que:

$$Z(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_2\big(t-(u+h)\big) . b_1(u) . X(h)$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{u=-\infty}^{\infty} b_2\big((t-h)-u\big) b_1(u) \right] . X(h)$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_2 * b_1(t-h) . X(h) \qquad \text{luego:}$$

$$b_2 * b_1(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_2(t-u) . b_1(u) .$$

La función de transferencia del filtro compuesto será:

$$B(\lambda)=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{u=-\infty}^{\infty} b_2(v-u).b_1(u)\right].\exp\{-i\lambda v\}$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{\infty} b_1(u).b_2(v-u).\exp\{-i\lambda\left(u+(v-u)\right)\}$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1(u).\exp\{-i\lambda u\}.\sum_{v=-\infty}^{\infty} b_2(v-u).\exp\{-i\lambda(v-u)\}$$

haciendo en el segundo sumatorio el cambio de variables v-u=z, tenemos:

$$B(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1(u).\exp\{-i\lambda u\}.\sum_{z=-\infty}^{\infty} b_2(z).\exp\{-i\lambda z\}$$

$$=B_1(\lambda).B_2(\lambda).$$

Esto nos lleva a observar que la composición de filtros puede contemplarse en el dominio frecuencial de una forma más simple, pues a la convolución $b_2 * b_1(t)$ de las funciones RESPUESTA A IMPULSO en el dominio temporal, corresponde simplemente el producto $B_1(\lambda).B_2(\lambda)$ de las funciones de transferencia en el dominio frecuencial.

c) MATRIZ DE COVARIANCIAS Y MATRIZ ESPECTRAL DEL PROCESO RESULTANTE DE UN FILTRO LINEAL SUMATIVO.

Dado el proceso estacionario k-variante $\mathbb{X}(t)$ con:

$E(\mathbb{X}(t))=\mu_X$, $C_X(u)=E((\mathbb{X}(t+u)-\mu_X).(\mathbb{X}(t)-\mu_X)')$

y $f_X(\lambda)=(2\pi)^{-1}\sum_{u=-\infty}^{\infty} C_X(u).\exp\{-i\lambda u\}$

consideremos el (k,r) filtro lineal sumativo dado por $\{a(u)\}$ con función de transferencia $A(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\exp\{-i\lambda u\}$ entonces el proceso r-variante:

$$\mathbb{Y}(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\mathbb{X}(t-u) \text{ será tal que:}$$

$$E(\mathbb{Y}(t))=E\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\mathbb{X}(t-u)\right)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).E(\mathbb{X}(t-u))=$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\mu_X=\mu_X.\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u)=\mu_Y$$

y también:

$$\begin{aligned}
C_Y(u)&=E((\mathbb{Y}(t+u)-\mu_Y).(\mathbb{Y}(t)-\mu_Y)')\\
&=E\left[\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} a(v)(\mathbb{X}(t+u-v)-\mu_X)\right).\right.\\
&\qquad\left..\left(\sum_{z=-\infty}^{\infty} a(z)(\mathbb{X}(t-z)-\mu_X)\right)'\right]\\
&=E\left[\sum_{v=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty} a(v).(\mathbb{X}(t+u-v)-\mu_X).\right.\\
&\qquad\left..(\mathbb{X}(t-z)-\mu_X)'.a'(z)\right]\\
&=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty} a(v)E((\mathbb{X}(t-z+(u+z-v))-\mu_X).\\
&\qquad.(\mathbb{X}(t-z)-\mu_X)')a'(z)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{z=-\infty}^{\infty} a(v) . C_X(u+z-v) . a'(z)$$

que es la expresión de la matriz de covariancias retardadas del proceso $Y(t)$ en función de las mismas matrices del proceso $X(t)$.

A partir de aquí, podremos obtener la matriz espectral del proceso r-variante $Y(t)$:

$$f_Y(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{u=-\infty}^{\infty} C_Y(u) . \exp\{-i\lambda u\}$$

$$= (2\pi)^{-1} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{z=-\infty}^{\infty} a(v) . C_X(u+z-v) . a'(z) \right] . \exp\{-i\lambda u\}$$

llamando a u+z-v=w y dejando v y z, tendremos:

$$f_Y(\lambda) = (2\pi)^{-1} \sum_{w=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{v=-\infty}^{\infty} \sum_{z=-\infty}^{\infty} a(v) . C_X(w) . a'(z) \right] . \exp\{-i\lambda (w-z+v)\}$$

$$= \sum_{v=-\infty}^{\infty} a(v) . \exp\{-i\lambda v\} . (2\pi)^{-1} \sum_{w=-\infty}^{\infty} C_X(w) . \overline{. \exp\{-i\lambda w\} .} \sum_{z=-\infty}^{\infty} a'(z) . \exp\{-i\lambda z\}$$

$$= A(\lambda) . f_X(\lambda) . \overline{A'(\lambda)} .$$

En particular si $X(t)$ es univariante y $\{a(u)\}$ es un (1,1) filtro lineal sumativo:

$$A(\lambda) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u) . \exp\{-i\lambda u\} \qquad \text{y}$$

$$f_Y(\lambda) = A(\lambda) . f_X(\lambda) . \overline{A(\lambda)} = |A(\lambda)|^2 . f_X(Y)$$

luego, el (1,1) filtro lineal sumativo, transforma el proceso X(t) en el Y(t), tal que el espectro de potencia de Y(t) es el X(t) multiplicado por el módulo al cuadrado de la función de transferencia del filtro.

d) TRANSFORMADA INVERSA DE LA MATRIZ FUNCIONAL DE TRANSFERENCIA.

Para un (k,r) filtro lineal sumativo $\{a(u)\}$ hemos dicho que su función de transferencia era:

$$A(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

la transformada inversa de esta expresión, nos dará la matriz RESPUESTA A IMPULSO del filtro, conocida la función de transferencia $A(\lambda)$.

Así, tendremos:

$$a(u)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}A(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda.$$

CAPITULO III

" METODOS DE ANALISIS MULTIVARIANTE
EN EL DOMINIO TEMPORAL"

El presente capítulo se dedicará, a una breve exposición de los métodos de análisis multivariante más utilizados, al considerar las series temporales bajo el punto de vista del " dominio temporal ".

Estos métodos de análisis, se utilizan en el capítulo siguiente, considerados desde el punto de vista del análisis en el " dominio frecuencial".

Los métodos multivariantes que consideraremos son el ANALISIS DE LA REGRESION Y CORRELACION MULTIPLE Y PARCIAL, ANALISIS DE LAS COMPONENTES PRINCIPALES y por último el ANALISIS CANONICO.

Trataremos de sistematizar nuestro estudio con toda generalidad, obteniendo como casos particulares, las expresiones y propiedades consideradas por muchos de los autores que han tratado en sus obras estos métodos multivariantes.

i) ANALISIS MULTIVARIANTE: REGRESION Y CORRELACION

Realizaremos nuestro estudio, en dos etapas; primero analizaremos el modelo, con toda generalidad, considerando r variables endógenas a explicar por el modelo y k variables explicativas, deduciendo las caracteristicas más significativas y los parámetros básicos del modelo; seguidamente, obtendremos algunos estimadores y bajo la hipótesis de normalidad en las variables, deduciremos el tipo de distribución a la que se adaptan, aunque sea asintóticamente, estos estimadores.

1) ESTUDIO DEL MODELO

Consideremos la variable aleatoria r+k-variante, escrita vectorialmente:

$$Z = \begin{pmatrix} Y \\ \cdots \\ X \end{pmatrix}$$

como vector particionado de componentes Y variable aleatoria r-variante y X variable aleatoria k-variante. El vector de medias y la matriz de variancias y covariancias, serán respectivamente:

$$\mu_Z = E(Z) = \begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_X \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_{ZZ} = E\left((Z-\mu_Z)\cdot(Z-\mu_Z)'\right) = \left(\begin{array}{c:c} C_{YY} & C_{YX} \\ \hdashline C_{XY} & C_{XX} \end{array}\right)$$

Donde C_{YY} es la matriz de orden rxr de variancias y covariancias de Y, C_{XX} es la matriz de orden kxk de varian cias y covariancias de $\mathcal{X}$, que supondremos regular, y C_{XY} matriz de orden kxr, C_{YX} matriz de orden rxk con $C'_{YX} = C_{XY}$ son las matrices de covariancias entre $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$.

La obtención de la REGRESION LINEAL de $\mathcal{Y}$ sobre $\mathcal{X}$ consistirá en determinar el vector α r-variante y la matriz β de orden rxk tales que la variable aleatoria r-variante:

$$\alpha + \beta . \mathcal{X}$$

transformada de $\mathcal{X}$, sea lo más próxima posible a la variable $\mathcal{Y}$. El sentido de proximidad entre $\mathcal{Y}$ y $\alpha+\beta.\mathcal{X}$ lo entenderemos, como el que haga mínima a la matriz de orden rxr:

$$\mathcal{H}(\alpha,\beta) = E\{(\mathcal{Y}-\alpha-\beta.\mathcal{X}).(\mathcal{Y}-\alpha-\beta.\mathcal{X})'\} \qquad (*)$$

Desarrollando, tenemos:

(*) El mínimo está referido a la ordenación de matrices Hermitianas $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$, si y solo si $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ es semidefinida positiva, ver referencias en Bellman,R. (1965,pag.120). Puede verse que esta ordenación implica también tr $\mathcal{A} \geq$ tr $\mathcal{B}$, con tr $\mathcal{A}$ simbolizando la traza de la matriz $\mathcal{A}=(a_{ij})_{i,j\in\{1,2,.n\}}$ y siendo tr $\mathcal{A}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, pues una condición necesaria y suficiente para que una matriz sea semidefinida positiva, ver Bellman,R. (1965,pag.60), es que todas sus raices caracteristicas sean no negativas, y al ser entonces tr$(\mathcal{A}-\mathcal{B}) \geq 0$ y como tr$(\mathcal{A}-\mathcal{B})$=tr $\mathcal{A}$-tr $\mathcal{B}$ implica que tr $\mathcal{A} \geq$ tr $\mathcal{B}$ pues tr $\mathcal{A}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ con λ_i las raices caracteristicas de $\mathcal{A}$, Bellman,R. (1965,pag.106). Tambien puede consultarse Rao. C.R. (1973, pags. 45 y 46).

$$\mathrm{H}(\alpha,\beta)=(\mu_Y-\alpha-\beta.\mu_X).(\mu_Y-\alpha-\beta.\mu_X)'+C_{YY}-\beta.C_{XY}-C_{YX}.\beta'+$$
$$+\beta.C_{XX}.\beta' \qquad (*)$$

y reordenando los términos, podemos escribir:

$$\mathrm{H}(\alpha,\beta)=(\mu_Y-\alpha-\beta.\mu_X).(\mu_Y-\alpha-\beta.\mu_X)'+C_{YY}-C_{YX}.C_{XX}^{-1}.C_{XY}+$$
$$+(\beta.C_{XX}-C_{YX}).C_{XX}^{-1}.(\beta.C_{XX}-C_{YX})'\geq$$
$$\geq C_{YY}-C_{YX}.C_{XX}^{-1}.C_{XY} \qquad (**)$$

(*) Recordemos que, ver Rios,S. (1967,pag.160), dadas dos variables aleatorias, ξ,η tenemos: $E(\xi.\eta)=E(\xi).E(\eta)+Cov(\xi,\eta)$ y entonces:

$$E((Y-\alpha-\beta.X))=\mu_Y-\alpha-\beta.\mu_X$$
$$Cov((Y-\alpha-\beta.X),(Y-\alpha-\beta.X)')=E\{((Y-\mu_Y)-\beta(X-\mu_X)).((Y-\mu_Y)-\beta(X-\mu_X))'\}=$$
$$=E((Y-\mu_Y).(Y-\mu_Y)')-E(\beta.(X-\mu_X).(Y-\mu_Y)')-$$
$$-E((Y-\mu_Y).(X-\mu_X)'.\beta')+E(\beta.(X-\mu_X).(X-\mu_X)'.\beta')=$$
$$=C_{YY}-\beta.C_{XY}-C_{YX}.\beta'+\beta.C_{XX}.\beta'$$

(**) Podemos escribir esta desigualdad,ya que la matriz diferencia $\mathrm{H}(\alpha,\beta)-(C_{YY}-C_{YX}.C_{XX}^{-1}.C_{XY})$ es semidefinida positiva, al obtenerse que:

a) C_{XX} es definida positiva.
Pues, para cualquier vector k-variante $\omega\neq 0$ tenemos que si definimos la variable aleatoria $Z=\omega'.X$
$\mu_Z=E(Z)=E(\omega'.X)=\omega'.\mu_X$ y entonces, $Var(Z)=E((Z-\mu_Z).(\overline{Z-\mu_Z}))=$
$=E\{(\omega'.(X-\mu_X)).(\overline{\omega'.(X-\mu_X)})'\}=\omega'.C_{XX}.\overline{\omega}\geq 0$

b) Dada una matriz real A de orden rxk la matriz $A.A'$ de orden rxr es semi-definida positiva.
Pues: $\omega'.(A.A').\overline{\omega}=(\omega'.A).(A'.\overline{\omega})=(\omega'.A).(\overline{\omega'.A})'=\gamma'.\overline{\gamma}=\sum_{i=1}^{r}|\gamma|^2\geq 0$

c) Dada una matriz definida positiva A de orden kxk y una matriz real B de orden rxk,entonces $B.A.B'$ es semi-definida positiva.
Pues: $\omega'.B.A.B'.\overline{\omega}=(\omega'.B).A.(\omega'.B)'=\gamma'.A.\overline{\gamma}\geq 0$

Alcanzandose la igualdad y por tanto el mínimo cuando:

$$\beta = C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1} \quad \text{y}$$

$$\alpha = \mu_Y - C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1} \cdot \mu_X$$

Esto hace que para estos valores de α y β, según nota página (84), se minimice la traza de $H(\alpha,\beta)$ o sea, se minimice:

$$\sum_{j=1}^{r} E\left((Y_j-\alpha_j-\beta_j.X).(Y_j-\alpha_j-\beta_j.X)'\right) = \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Var}(Y_j-\alpha_j-\beta_j.X)$$

que es la suma de las variancias de las variables aleatorias residuos de la regresión. Al ser todas positivas o nulas este mínimo se alcanza minimizando por separado cada una de ellas, así:

$$\mathrm{Var}(Y_j-\alpha_j-\beta_j.X) = E\{((Y_j-\mu_j)-\beta_j(X-\mu_X))^2\} =$$

$$= E\left((Y_j-\mu_j)^2+\beta_j(X-\mu_X).(X-\mu_X)'\beta_j'-2\beta_j(Y_j-\mu_j).(X-\mu_X)\right) =$$

$$= C_{Y_jY_j}+\beta_j.C_{XX}.\beta_j'-2.\beta_j.C_{Y_jX}$$

el mínimo se alcanzará:

$$\frac{\partial}{\partial\beta_j}\left(\mathrm{Var}(Y_j-\alpha_j-\beta_j.X)\right) = 2.\beta_j.C_{XX}-2.C_{Y_jX}=0$$

de aquí:

$$\beta_j = C_{Y_jX}.C_{XX}^{-1} \quad \text{y}$$

$$\alpha_j = \mu_Y-\beta_j.\mu_X \quad \text{para } j\in\{1,2,\ldots,r\}$$

(**) Continuación página anterior:

d) Si A es definida positiva A^{-1} también lo es.
Pues, haciendo en c) $r=k$ y $B=A^{-1}$ con A simétrica $A^{-1}.A.\left[A^{-1}\right]'=A^{-1}$
Por todo lo cual, haciendo en b) $A=\mu_Y-\alpha-\beta.\mu_X$ y en c) $B=\beta.C_{XX}-C_{YX}$ queda demostrada la desigualdad.

Resumiendo las r ecuaciones en una sola expresión matricial, teniendo en cuenta que β_j simboliza la fila j-ésima de la matriz β y C_{Y_jX} la fila j-ésima de la matriz C_{YX} tenemos:

$$\beta=C_{YX}.C_{XX}^{-1} \qquad \text{y}$$

$$\alpha=\mu_Y-\beta\cdot\mu_X=\mu_Y-C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot\mu_X$$

que no es otra cosa, que el resultado obtenido antes al minimizar la matriz $H(\alpha,\beta)$. (*)

A la matriz $\beta=C_{YX}.C_{XX}^{-1}$ se le denomina MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DE REGRESION DE Y SOBRE X.

Podemos ahora definir la variable aleatoria r-variante ε como el RESIDUO DE LA REGRESION:

$$\varepsilon=Y-(\alpha+\beta.X)=Y-(\mu_Y+C_{YX}.C_{XX}^{-1}.(X-\mu_X))$$

siendo su vector de medias y matriz de variancias y covariancias:

$$\mu_\varepsilon=E(\varepsilon)=E\{Y-(\mu_Y+C_{YX}.C_{XX}^{-1}.(X-\mu_X))\}=$$
$$=\mu_Y-(\mu_Y+C_{YX}.C_{XX}^{-1}.(\mu_X-\mu_X))\quad=0$$

$$C_{\varepsilon\varepsilon}=E(\varepsilon.\varepsilon')=H(\alpha,\beta)=C_{YY}-C_{YX}.C_{XX}^{-1}.C_{XY}=\left(c_{\varepsilon_i\varepsilon_j}\right)=$$
$$=\left(c_{Y_i,Y_j.X}\right)_{i,j\in\{1,2,\ldots,r\}}$$

(*) En Anderson,T.W.(1.958,pag.32) puede verse, que se podria llegar a estos mismos resultados, maximizando la correlación entre Y y $\alpha+\beta.X$ en lugar de minimizando las variaciones residuales.

Para i=j:

$C_{\varepsilon_i \varepsilon_i}=C_{Y_i Y_i.\mathcal{X}}$ representa la variancia de los residuos ε_i de la variable Y_i en la regresión sobre $\mathcal{X}$, nos indica la variación de Y_i inexplicada por la relación lineal de la variable k-variante $\mathcal{X}$.

Si consideramos la variable Y_i y su correspondiente residuo en la regresión sobre $\mathcal{X}$, se define el CUADRADO DEL COEFICIENTE DE CORRELACION MULTIPLE O COEFICIENTE DE DETERMINACION, como:

$$R^2_{Y_i,\mathcal{X}}=1-\frac{C_{\varepsilon_i \varepsilon_i}}{C_{Y_i Y_i}}=1-\frac{C_{Y_i Y_i.\mathcal{X}}}{C_{Y_i Y_i}}$$

Si Y fuese univariante, lo sería ε, y tendriamos que:

$$R^2_{Y,\mathcal{X}}=1-\frac{C_{YY}-C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}}{C_{YY}}=\frac{C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}}{C_{YY}}$$

Puede probarse que $R^2_{Y,\mathcal{X}}$ es el cuadrado del coeficiente de correlación entre Y y la variable:

$$Y^*=\alpha+\beta.\mathcal{X}=\mu_Y+C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot(\mathcal{X}-\mu_Y)$$

ya que: $\mu_{Y^*}=E(Y^*)=\mu_Y$

$$Cov(Y,Y^*)=E((Y-\mu_Y).(Y^*-\mu_{X^*}))=E((Y-\mu_Y).\{C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot(\mathcal{X}-\mu_X)\}')=$$

$$=E((Y-\mu_Y).(\mathcal{X}-\mu_X)'.C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY})=C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}$$

$Var(Y)=C_{YY}$ y

$$Var(Y^*)=E\{C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot(\mathcal{X}-\mu_X).(C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot(\mathcal{X}-\mu_X))'\}=$$

$$=C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot E((\mathcal{X}-\mu_X)\cdot(\mathcal{X}-\mu_X)')\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}$$
$$=C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}=C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}$$

Con lo que:

$$r^2_{Y,Y*}=\left(\frac{\mathrm{cov}(Y,Y^*)}{(\mathrm{Var}(Y).\mathrm{Var}(Y^*))^{1/2}}\right)^2=\frac{\left(C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\right)^2}{C_{YY}\cdot\left(C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\right)}=$$
$$=\frac{C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}}{C_{YY}}=R^2_{Y,\mathcal{X}}$$

Para $i\neq j$:

$C_{Y_i,Y_j\cdot\mathcal{X}}$ es la covariancia de las variables aleatorias ε_i y ε_j,residuos de la regresión sobre $\mathcal{X}$, correspondientes a las variables Y_i e Y_j denominándose, COVARIANCIA PARCIAL de Y_i con Y_j, pues, nos indica la covariancia entre Y_i e Y_j una vez hemos eliminado de estas variables, toda la influencia lineal que ejerce la variable k-variante $\mathcal{X}$.

De igual forma, si consideramos el coeficiente de correlación lineal entre ε_i y ε_j :

$$r_{\varepsilon_i\varepsilon_j}=\frac{C_{\varepsilon_i\varepsilon_j}}{(C_{\varepsilon_i\varepsilon_i}\cdot C_{\varepsilon_j\varepsilon_j})^{1/2}}=r_{Y_iY_j\cdot\mathcal{X}}$$

a este coeficiente se le llama: COEFICIENTE DE CORRELACION PARCIAL de Y_i con Y_j. (*)

Consideremos ahora, la variable k-variante $\mathcal{X}$,

(*) Por lo que se refiere al coeficiente de correlación parcial, ver entre otros, Nieto de Alba,U.(1973, Tomo II,pag.185) y Yule-Kendall (1967, Cap. XII).

particionada en dos variables marginales, siendo la primera X_1, una variable k_1-variante y la segunda X_2, k_2-variante con $k_1+k_2=k$, podremos escribir:

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ \cdots\cdots \\ X_2 \end{pmatrix}$$

obteniendo entonces, el vector de medias y la matriz de variancias y covariancias expresados en forma particionada como sigue:

$$\mu_X=\begin{pmatrix} \mu_{X_1} \\ \cdots\cdots \\ \mu_{X_1} \end{pmatrix}$$

$$C_X=\left(\begin{array}{c:c} C_{X_1X_1} & C_{X_1X_2} \\ \hdashline C_{X_2X_1} & C_{X_2X_2} \end{array}\right)$$

a partir de aquí podemos hacer con X_1 lo que antes hemos hecho con X y obtener LA REGRESION MARGINAL DE Y sobre X_1 como:

$$Y=\alpha_{YX_1}+\beta_{YX_1}\cdot X_1+\varepsilon_{YX_1}$$

donde α_{YX_1} y β_{YX_1} vendran dados por:

$$\alpha_{YX_1}=\mu_Y-\beta_{YX_1}\cdot\mu_{X_1} \quad \text{y}$$

$$\beta_{YX_1}=C_{YX_1}\cdot C^{-1}_{X_1X_1}$$

donde β_{YX_1} sea la MATRIZ DE LOS COEFICIENTES DE REGRESION MARGINALES DE Y sobre X_1.

La matriz de variancias y covariancias de los RESIDUOS MARGINALES será:

$$
\begin{aligned}
C_{\varepsilon_{YX_1}\varepsilon_{YX_1}} &= C_{YY}-\beta_{YX_1}\cdot C_{X_1Y} \\
&= C_{YY}-C_{YX_1}\cdot C^{-1}_{X_1X_1}\cdot C_{X_1Y}
\end{aligned}
$$

matriz que comparada con la $C_{\varepsilon\varepsilon}$, nos permite conocer la aportación que en la explicación de Y supone la inclusión de la variable X_2, en la regresión marginal de Y sobre X_1. En el caso r=1

$$
\begin{aligned}
C_{\varepsilon^{(1)}_{YX_1}\varepsilon^{(1)}_{YX_1}} &= C_{YY}-C_{YX_1}\cdot C^{-1}_{X_1X_1}\cdot C_{X_1Y}= \\
&= \left(1-\frac{C_{YX_1}\cdot C^{-1}_{X_1X_1}\cdot C_{X_1Y}}{C_{YY}}\right)\cdot C_{YY}= \\
&= (1-R^2_{YX_1})\cdot C_{YY}
\end{aligned}
$$

donde $R^2_{YX_1}$ es el coeficiente de CORRELACION MULTIPLE CUADRADO o de DETERMINACION MARGINAL.

La diferencia, $R^2{}_{YX}-R^2_{YX_1}$ nos da la aportación neta de la variable k_2-variante X_2, a la regresión de Y cuando ya esta presente la X_1. Estos datos pueden utilizarse para efectuar el Análisis de la Variancia. (*)

En ocasiones es interesante obtener, ya no la regresión de Y sobre X_1 directamente, sino la relación entre estas variables una vez se ha eliminado de ambas el efecto de otro conjunto de variable dado por X_2, entonces consideraremos la variable:

$$W=\begin{pmatrix} Y \\ \cdots \\ X_1 \end{pmatrix} \qquad \text{siendo:}$$

$$\mu_W=\begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_{X_1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C_W=\begin{pmatrix} C_{YY} & \vdots & C_{YX_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{X_1Y} & \vdots & C_{X_1X_1} \end{pmatrix}$$

y obtendremos la regresión de W sobre X_2 dada por:

$$W=\delta+\gamma . X_2+\xi$$

con,

$$\delta=\mu_W-\gamma . \mu_{X_2}=\begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_{X_1} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \gamma_{YX_2} \\ \cdots \\ \gamma_{X_1X_2} \end{pmatrix} . \mu_{X_2}=\begin{pmatrix} \mu_Y-\gamma_{YX_2} . \mu_{X_2} \\ \cdots \\ \mu_{X_1}-\gamma_{X_1X_2} . \mu_{X_1} \end{pmatrix}$$

siendo:

$$\gamma=C_{WX_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2}=\begin{pmatrix} C_{YX_2} \\ \cdots \\ C_{X_1X_2} \end{pmatrix} \cdot C^{-1}_{X_2X_2}=\begin{pmatrix} C_{YX_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \\ \cdots \\ C_{X_1X_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \end{pmatrix}$$

(*) Respecto al Análisis de la Variancia, pueden verse entre otros: Jenkins & Watts (1.968, pag. 480), Johnston,J. (1.975, cap. 5, epigr. 4).

y la matriz de variancias y covariancias de los residuos será:

$$
\begin{aligned}
C_{\xi\xi} &= C_{WW} - C_{WX_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \cdot C_{X_2W} \\
&= \begin{pmatrix} C_{YY} & \vdots & C_{YX_1} \\ \cdots & & \cdots \\ C_{X_1Y} & \vdots & C_{X_1X_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_{YX_2} \\ \cdots \\ C_{X_1X_2} \end{pmatrix} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \cdot \begin{pmatrix} C_{X_2Y} & \vdots & C_{X_2X_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_{YY} - C_{YX_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \cdot C_{X_2Y} & \vdots & C_{YX_1} - C_{YX_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \cdot C_{X_2X_1} \\ \cdots & & \cdots \\ C_{X_1Y} - C_{X_1X_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \cdot C_{X_2Y} & \vdots & C_{X_1X_1} - C_{X_1X_2} \cdot C^{-1}_{X_2X_2} \cdot C_{X_2X_1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C_{\xi_1\xi_1} & \vdots & C_{\xi_1\xi_2} \\ \cdots & & \cdots \\ C_{\xi_2\xi_1} & \vdots & C_{\xi_2\xi_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

con:

$$\mu_{\xi} = E(\xi) = \mu_W - (\delta + \gamma \cdot \mu_{X_2}) = \mu_W - \gamma \cdot \mu_{X_2} - \delta = 0$$

siendo ξ_1 la variable r-variante residuo de la regresión de Y sobre X_2, y ξ_2 la variable k_1-variante residuo de la regresión de X_1 sobre X_2.

A partir de lo anterior, la REGRESION PARCIAL Y sobre X_1, una vez eliminada la influencia lineal que X_2 ejerce sobre ambas variables, será la regresión de ξ_1 sobre ξ_2, esta regresión nos dará la relación lineal existente entre las variaciones de Y y X_1 cuando consideremos constantes las X_2, o sea cuando consideramos eliminada la influencia que las variaciones de X_2 ejerce sobre Y y X_1, tendremos entonces:

$$\xi_1=\alpha_{YX_1.X_2}+\beta_{YX_1.X_2}\cdot\xi_2+\eta$$

siendo:

$$\alpha_{YX_1.X_2}=\mu_{\xi_1}-\beta_{YX_1.X_2}\cdot\mu_{\xi_2}=0 \qquad \text{y}$$

$$\beta_{YX_1.X_2}=C_{\xi_1\xi_2}\cdot C^{-1}_{\xi_2\xi_2}$$

$$=\left(C_{YX}-C_{YX_2}\cdot C^{-1}_{X_2X_2}\cdot C_{X_2X_1}\right)\cdot\left(C_{X_1X_1}-C_{X_1X_2}\cdot C^{-1}_{X_2X_2}\cdot C_{X_2X_1}\right)^{-1}$$

a $\beta_{YX_1.X_2}$ se le denomina MATRIZ DE LOS COEFICIENTES de la REGRESION PARCIAL de Y sobre X_1, una vez eliminada la influencia de X_2 sobre ambas variables.

La matriz de variancias y covariancias de los errores será:

$$C_{\eta\eta}=C_{\xi_1\xi_1}-C_{\xi_1\xi_2}\cdot C^{-1}_{\xi_2\xi_2}\cdot C_{\xi_2\xi_1}$$

y en el caso $r=k_1=1$, tendremos:

$$C_{\eta\eta}=C_{\xi_1\xi_1}-C_{\xi_1\xi_2}\cdot C^{-1}_{\xi_2\xi_2}\cdot C_{\xi_2\xi_1}$$

$$=\left(1-\frac{C_{\xi_1\xi_2}\cdot C^{-1}_{\xi_2\xi_2}\cdot C_{\xi_2\xi_1}}{C_{\xi_1\xi_1}}\right)\cdot C_{\xi_1\xi_1}$$

$$= \left(1 - \frac{C_{\xi_1 \xi_2} \cdot C_{\xi_2 \xi_1}}{C_{\xi_1 \xi_1} \cdot C_{\xi_2 \xi_2}} \right) \cdot C_{\xi_1 \xi_1}$$

$$= \left(1 - \frac{\left(C_{\xi_1 \xi_2} \right)^2}{C_{\xi_1 \xi_1} \cdot C_{\xi_2 \xi_2}} \right) \cdot C_{\xi_1 \xi_1}$$

$$= \left(1 - r^2_{\xi_1 \xi_2} \right) \cdot C_{\xi_1 \xi_1} = \left(1 - r^2_{YX_1 . X_2} \right) C_{\xi_1 \xi_1}$$

con $r_{YX_1 . X_2}$ el coeficiente de correlación parcial entre Y y X_1 una vez eliminada ambas variables la influencia lineal de la variable k_2-variante $\mathcal{X}_2$.

2) ESTIMACION

Si consideramos una muestra formada por N observaciones de la variable:

$$Z = \begin{pmatrix} Y \\ \cdots \\ X \end{pmatrix}$$

y ordenamos los valores obtenidos en las matrices de orden (r×N) y (k×N):

$$\underline{Y} = \left(Y_i \right)_{i \varepsilon \{1,2,\dots,N\}}$$

$$\underline{X} = \left(X_i \right)_{i \varepsilon \{1,2,\dots,N\}}$$

podemos obtener los vectores de medias muestrales como:

$$\bar{Y} = N^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} Y_i \right) \qquad \bar{X} = N^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)$$

y simbolizamos las matrices de desviaciones muestrales, como:

$$y=\left(y_i\right)=\left(Y_i-\overline{Y}\right)_{i\varepsilon\{1,2,\ldots,N\}}$$

$$x=\left(x_i\right)=\left(X_i-\overline{X}\right)_{i\varepsilon\{1,2,\ldots,N\}}$$

Consideraremos los siguientes estimadores:

$$\hat{\mu}_Z=\begin{pmatrix}\hat{\mu}_X\\ \cdots\\ \hat{\mu}_X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{Y}\\ \cdots\\ \overline{X}\end{pmatrix}$$

$$\hat{C}_{ZZ}=N^{-1}.\begin{pmatrix}y\\ \cdots\\ x\end{pmatrix}.(y'\vdots x')=N^{-1}.\left(\begin{array}{c:c}y.y' & y.x'\\ \hdashline x.y' & x.x'\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{c:c}N^{-1}.y.y' & N^{-1}.y.x'\\ \hdashline N^{-1}.x.y' & N^{-1}.x.x'\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c}\hat{C}_{YY} & \hat{C}_{YX}\\ \hdashline \hat{C}_{XY} & \hat{C}_{XX}\end{array}\right)$$

La matriz de coeficientes de regresión de Y sobre X puede estimarse mediante:

$$\hat{\beta}=\hat{C}_{YX}.\hat{C}_{XX}^{-1}=N^{-1}.y.x'(N^{-1}.x.x')^{-1}=y.x'.(x.x')^{-1}$$

y el vector de términos independientes estimado, será:

$$\hat{\alpha}=\hat{\mu}_Y-\hat{C}_{YX}.\hat{C}_{XX}^{-1}.\hat{\mu}_X=\overline{Y}-N^{-1}.y.x'(N^{-1}.x.x')^{-1}.\overline{X}=$$

$$=\bar{Y}-y.x'.(x.x')^{-1}.\bar{X}=\bar{Y}-\hat{\beta}.\bar{X}$$

La matriz de variancias y covariancias de los residuos de la regresión, se estimará, para que los estimadores resulten insesgados mediante:

$$\hat{C}_{\xi\xi}=\left(N-(k+1)\right)^{-1}.N.(\hat{C}_{YY}-\hat{C}_{YX}.\hat{C}_{XX}^{-1}.\hat{C}_{XY})$$

$$=\left(N-(k+1)\right)^{-1}.N.\left[N^{-1}.y.y'-N^{-1}.y.x'.N.(x.x')^{-1}.N^{-1}.x.y'\right]$$

$$=\left(N-(k+1)\right)^{-1}.\left[y.y'-y.x'.(x.x')^{-1}.x.y'\right]$$

$$=\left(N-(k+1)\right)^{-1}.y.\left[I_r-x'.(x.x')^{-1}.x\right].y'$$

si el modelo $\alpha=0$ se multiplicara por (N-k) en lugar de por $\left(N-(k+1)\right)$.

Suponiendo ahora, que las variables aleatorias X e Y son normales multivariantes, podemos deducir intervalos de confianza para los coeficientes de regresión de la matriz β y para predicciones de los valores esperados de Y o alguna de sus componentes, para valores dados de X, y también podemos obtener contrastes para verificar hipótesis acerca de los coeficientes de regresión de la matriz β, o de relaciones lineales entre ellos. Todo ello, a partir de considerar la siguiente distribución:

$$\frac{\lambda'.\rho(\hat{\beta}-\beta)}{(\lambda'.\{\hat{C}_{\xi\xi}\otimes(x.x')^{-1}\}.\lambda)^{1/2}}$$

que para cualquier vector columna λ no nulo, de orden k.r, se distribuye siguiendo una t de Student con N-(k+1) grados de libertad.

Si $\mu_Y=0, \mu_X=0$ entonces $\alpha=0$ y los grados de libertad serían N-k. (*)

Como caso particular, para obtener intérvalos de confianza para el elemento β_{ij} de la matriz β se considerará λ como un vector con todo ceros, excepto un uno en el lugar k.(i-1)+j ; tendríamos:

$$\frac{\hat{\beta}_{ij}-\beta_{ij}}{\sqrt{\hat{C}_{\varepsilon_i \varepsilon_i} . a_{jj}}}$$

(*) Dada la matriz A de orden rxk, se puede efectuar la vectorización de A transformando la matriz en un vector columna de orden k.r, tal que el elemento A_{ij} de la matriz A ocupe el lugar k.(i-1)+j. Esto es, se ordenan los elementos de la matriz en una columna, tomando los elementos de la matriz por filas de izquierda a derecha, desde la primera a la última.
La vectorización de A la simbolizaremos, $\rho(A)$.
Consideraremos también, aquí, el producto de Kronecker de dos matrices, ver Bellman (1965,pag.250), tal que, dadas las matrices $A(m\text{x}n)$ y $B(p\text{x}q)$ con $A=(A_{ij})$ sea:

$$A \otimes B = \left(A_{ij} . B\right) \text{ de orden } (m.p \text{ x } n.q).$$

Por lo que respecta a la distribución t, ver Anderson,T.W. (1958,cap.8), Johnston (1975,epig.5-4), Kendall-Stuart (1968, Vol.III,cap.42) y Rao,C.R. (1973,cap.4) entre otros.

con a_{jj} elemento de $(X.X')^{-1}$ (*)

La distribución de otros estadisticos, puede determinarse, sabiendo que la matriz:

$$N.\hat{C}_{ZZ} = N.\begin{bmatrix} \hat{C}_{YY} & \vdots & \hat{C}_{YX} \\ \cdots & & \cdots \\ \hat{C}_{XY} & \vdots & \hat{C}_{XX} \end{bmatrix}$$

se distribuye siguiendo la llamada distribución k+r variante de WISHART:

$$W_{k+r}(N, C_{ZZ}).$$

Esta distribución, puede considerarse como una generalización multivariante de la distribución χ^2.

La matriz $(N-(k+1)).\hat{C}_{\varepsilon\varepsilon}$ se distribuye, siguiendo una distribución:

$$W_r(N-(k+1), C_{\varepsilon\varepsilon}).$$

Para el caso r=1, $(N-(k+1)).\hat{C}_{\varepsilon\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$ que dividido por $\sigma_\varepsilon^2 = C_{\varepsilon\varepsilon}$ se distribuye según sabemos, como una χ^2 con N-(k+1) grados de libertad.

En el caso del modelo con $\alpha=0$ sería N-k en lugar de N-(k+1). (**)

(*) Ver expresión equivalente en Johnston (1975,pag.158).

(**) Por lo que se refiere a la distribución de Wishart, puede consultarse Anderson,T.W. (1958,cap.7) y Rao,C.R. (1973,cap.8,epig.b), para mayor detalle.

II) ANALISIS DE LAS COMPONENTES PRINCIPALES

El análisis de las componentes principales, consiste en reducir la dimensionalidad de una variable k-variante, transformándola en otra de dimensión s menor que k, de forma que se conserve la máxima información posible de la variable inicial, estando sus s componentes incorrelacionadas dos a dos,o lo que es lo mismo, considerando la transformación ortogonal.

Con ello, podemos observar el grado de indepencia que existe entre las componentes de la variable k-variante inicial.

Trataremos primero el modelo genérico, y estudiaremos posteriormente la estimación mediante una muestra dada de la variable k-variante original.

1) ESTUDIO DEL MODELO

Sea la variable aleatoria k-variante X, con vector de medias μ_X y matriz de variancias y covariancias C_{XX}.

Consideremos el problema de obtener una transformación lineal $Y=B.X$ con B una matriz de orden sxk, con $s<k$, tal que, Y tenga componentes incorrelacionadas, es decir, que:

$$E((Y-\mu_Y).(Y-\mu_Y)')=E(B.(X-\mu_X).\{B.(X-\mu_X)\}')=B.C_{XX}.B'$$

sea diagonal, y que aplicando a Y la transformación $Z=D\cdot Y$ con D una matriz de orden kxs, la variable $\alpha+Z=\alpha+D\cdot B\cdot X$ sea lo más próxima posible a la variable inicial X.

El problema, consistirá en obtener el vector k-variante μ, y las matrices B de orden sxk y D de orden kxs tales que se minimice la matriz simétrica:

$$H(\alpha,B,D)=E\left((X-\alpha-D\cdot B\cdot X)\cdot(X-\alpha-D\cdot B\cdot X)'\right)$$

minimizandose por tanto su traza. (*)

Tendremos por tanto, que:

$$H(\alpha,B,D)=E\left(((I_k-D\cdot B)\cdot X-\alpha)\cdot((I_k-D\cdot B)\cdot X-\alpha\right)'=$$

$$=\left((I_k-D\cdot B)\cdot\mu_X-\alpha\right)\cdot\left((I_k-D\cdot B)\cdot\mu_X-\alpha\right)'+$$

$$+E\{\left(((I_k-D\cdot B)\cdot(X-\mu_X)\right)\cdot\left((I_k-D\cdot B)\cdot(X-\mu_X)\right)'\}\geq$$

$$\geq(I_k-D\cdot B)\cdot C_{XX}\cdot(I_k-D\cdot B)' \qquad (**)$$

Y como que $B\cdot C_{XX}\cdot B'$ debe ser diagonal, consideraremos la diagonalización de C_{XX} dada por:

(*) Según dijimos en nota página: 84 , la ordenación de matrices podrá efectuarse considerando sus trazas de forma que $A\geq B$, si y sólo si $\mathrm{tr}\, A\geq \mathrm{tr}\, B$.

(**) Recuérdese nota página: 85

$$T' \cdot C_{xx} \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} = M_k$$

con, $T=\left(V_1, V_2, \ldots, V_k\right)$, la matriz de transformación y V_i el vector característico asociado a la raíz característica λ_i.

Siendo entonces $C_{xx}=T \cdot M_k \cdot T'$ (*)

Si hacemos, $B=\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}$ obtendremos:

$$B \cdot C_{xx} \cdot B' = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} \cdot C_{xx} \cdot \left(V_1, V_2, \ldots, V_s\right) =$$

(*) Sobre diagonalización de matrices, puede verse entre otros: Bellman (1965, Cap.3) y Rodriguez, A. M. (1975, pag. 274).

$$=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s \end{pmatrix}=M_s$$

entonces, tenemos que:

$$H(\alpha,B,D)\geq(I_k-D\cdot B)\cdot T\cdot M_k\cdot T'\cdot(I_k-D\cdot B)'=(T-D\cdot B\cdot T)\cdot M_k\cdot(T-D\cdot B\cdot T)'$$

y como:

$$B\cdot T=\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}\cdot\left(V_1,V_2,\ldots,V_k\right)=\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\vdots\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right)=\left(I_s\vdots 0\right)$$

con lo que:

$$\begin{aligned} H(\alpha,B,D) &= (T-D\cdot\left(I_s\vdots 0\right))\cdot M_k\cdot(T-D\cdot\left(I_s\vdots 0\right))' \\ &= (T-\left(D\vdots 0\right))\cdot M_k\cdot(T-\left(D\vdots 0\right))' \\ &= ((V_1,V_2,\ldots,V_k)-(D_1,\ldots,D_s,0,\ldots,0))\cdot M_k\cdot \\ &\quad\cdot((V_1,V_2,\ldots,V_k)-(D_1,\ldots,D_s,0,\ldots,0))'= \\ &= (V_1-D_1,V_2-D_2,\ldots,V_s-D_s,V_{s+1},\ldots,V_k)\cdot M_k\cdot \\ &\quad\cdot(V_1-D_1,V_2-D_2,\ldots,V_s-D_s,V_{s+1},\ldots,V_k)'= \\ &= \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\cdot(V_i-D_i)\cdot(V_i-D_i)'+\sum_{i=s+1}^{k}\lambda_i\cdot V_i\cdot V_i' \end{aligned}$$

y por ser $\lambda_i \geq 0$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$, ya que las λ_i son las raices características de la matriz simétrica definida positiva C_{XX}, tenemos que:

$$H(\alpha,B,D) \geq \sum_{i=s+1}^{k} \lambda_i \cdot V_i \cdot V_i'$$

con V_i el vector característico asociado a la raíz λ_i.

Al ser:

$$tr(V_i \cdot V_i') = tr(V_i' \cdot V_i) = \sum_{j=1}^{k} v_{ji}^2 = 1$$

quedará,

$$tr\left(\sum_{i=s+1}^{k} \lambda_i \cdot V_i \cdot V_i'\right) = \sum_{i=s+1}^{k} \lambda_i$$

y el mínimo se alcanzará por tanto, tomando las λ_i con $i\varepsilon$ $\varepsilon\{s+1,\ldots,k\}$ las k-s menores raices características de C_{XX}.

Con todo lo cual, vemos que el mínimo de $H(\alpha,B,D)$ será $\sum_{i=s+1} \lambda_i \cdot V_i \cdot V_i'$ siempre que:

$$\alpha = (I_k - D \cdot B) \cdot \mu_X, \text{ siendo } \quad B = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}$$

con V_i $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ los vectores característicos asociados a las s mayores raices características de C_{XX} y siendo además:

$$D = \left(V_1, V_2, \ldots, V_s\right) = B'$$

Con ello, la variable X quedaría aproximada por:

$$\alpha + D \cdot B \cdot X = (I_k - D \cdot B) \cdot \mu_X + D \cdot B \cdot X = \mu_X + D \cdot B \cdot (X - \mu_X) = \mu_X + \sum_{i=1}^{s} V_i \cdot V_i' \cdot (X - \mu_X)$$

La variable $Y=B\cdot X$ se dice que esta formada por las s PRIMERAS COMPONENTES PRINCIPALES de X, siendo la i-ésima componente:

$$Y_i=V_i'\cdot X$$

Si C_{XX} fuese de rango s, entonces tendría k-s raices características nulas, con lo que:

$$H(\alpha,B,D)=0$$

y por tanto, toda la información dada por la variable k-variante X, quedaría recogida en la transformada s-variante Y. Aunque esto no ocurra, y C_{XX} sea regular, con todas sus raices características positivas, si k-s de ellas son suficientemente pequeñas respecto a las otras s, podemos considerar que la mayor parte de la información que proporciona queda recogida en la transformada Y.

Si consideramos que X es una variable normal k-variante con distribución:

$$N_k(\mu_X,C_{XX})$$

la variable Y formada por las s primeras componentes principales de X, se distribuirá también normalmente, con distribución:

$$N_s(B\cdot\mu_X\ ,\ B\cdot C_{XX}\cdot B')=N_s(B\cdot\mu_X\ ,\ M_s)$$

luego, las componentes Y_i con $i\in\{1,2,...,s\}$ se distribuirán normal e independientemente con distribución:

$$N_1(V_i'.\mu_X\ ,\ \lambda_i) \text{ para } i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}\ .$$

2) ESTIMACION

Supuesta obtenida una muestra de tamaño N, de la variable k-variante X y ordenados los valores observados en la matriz:

$$\underline{X}=\left(X_i\right) \quad i\varepsilon\{1,2,\ldots,N\}$$

de orden (kxN), obtendremos el vector de medias muestrales:

$$\overline{X}=N^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$$

y la matriz de desviaciones muestrales:

$$x=(x_i)=\left(X_i-\overline{X}\right) \quad i\varepsilon\{1,2,\ldots,N\}$$

Consideraremos los siguientes estimadores:

$$\hat{\mu}_X=\overline{X} \qquad y \qquad \hat{C}_{XX}=N^{-1}.x.\ x'$$

Con ello, podemos estimar λ_i raiz característica de C_{XX}, mediante $\hat{\lambda}_i$, la correspondiente raiz característica de $\hat{C}_{XX}$ y V_i vector característico asociado en C_{XX} a la raiz λ_i,mediante $\hat{V}_i$ vector característico asociado a la raiz $\hat{\lambda}_i$ de $\hat{C}_{XX}$.

Por lo que se refiere a la teoría de la estimación de raices y vectores característicos, ver por ejemplo: Anderson,T.W. (1.963,1.958,cap.11), Brillinger (1.975,pag.341), Girshck,M. (1.939), Kendall-Stuart (Vol III, 1.968, pag. 291) y Rao,C.R. (1.973,pag.530) entre otros, cuyos resultados fundamentales, podemos resumir del siguiente modo:

Si suponemos, para simplificar, que $\mu_X=0$ y además que las raices características λ_i $i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$ de C_{XX}, son distintas, la variable $\{\hat{\lambda}_i,\hat{V}_i\ ;\ i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}\}$ es asintóticamente normal, y las marginales

$$\{\hat{\lambda}_i;\ i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}\} \text{ y } \{\hat{V}_i;\ i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}\}$$

son asintóticamente normales e independientes.

Para muestras grandes, tenemos que, asintóticamente:

$$E\left(\hat{\lambda}_i\right)=\lambda_i \qquad \text{y} \qquad E\left(\hat{V}_i\right)=V_i \quad \text{para } i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$$

también:

$$\mathrm{Cov}\left(\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j\right)=\delta_{ij}.2\lambda_i^2/N \qquad \text{para } i,j\varepsilon\{1.2,\ldots,k\}$$

con lo que $i\neq j$ $\hat{\lambda}_i$ y $\hat{\lambda}_j$ están incorrelacionados, y

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\lambda}_i\right)=2.\lambda_i^2/N \qquad \text{para } i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$$

pero más corrientemente se utiliza el que la

$$\mathrm{Var}\left(\log_e\hat{\lambda}_i\right)=2/N \text{ independientemente de } \lambda_i.$$

Además, $\mathrm{Cov}\left(\hat{V}_i,\hat{V}_j\right)=\delta_{ij}.\lambda_i.\{\sum_{h\neq j}\lambda_h.(\lambda_i-\lambda_h)^{-2}.V_h.V_h'\}/N-$

$$-\left(1-\delta_{ij}\right).\lambda_i.\lambda_j.(\lambda_i-\lambda_j)^{-2}.V_j.V_i'/N$$

III) ANALISIS CANONICO O DE LAS CORRELACIONES CANONICAS

Dadas las variables: Y r-variante y X k-variante, el análisis canónico, de la relación entre Y y X, consiste en obtener sendas transformaciones lineales de Y y X, tales que se satisfagan las siguientes restricciones:

a) Las transformadas de Y y X, tienen todas sus componentes con variancia unitaria.

b) Toda componente de la transformada de Y está incorrelacionada con cualquier otra de estas componentes.

c) Toda componente de la transformada de X está incorrelacionada con cualquier otra de estas componentes.

d) Toda componente de la transformada de Y está incorrelacionada con cualquier componente de la transformada de X menos con una, y podemos ordenar las componentes de las transformaciones para lograr que la primera componente de la transformación de Y esté correlacionada con la primera componente de la transformación de X, y así sucesivamente.

Los resultados del análisis de la correlación canónica, son con frecuencia difíciles de interpretar, y se utilizan frecuentemente, como un análisis previo de los datos, para darnos alguna idea de la complejidad de la estructura multivariante en estudio.

1) ESTUDIO DEL MODELO

Consideremos la variable (k+r)-variante

$$Z=\begin{pmatrix} Y \\ \cdots \\ X \end{pmatrix}$$

de componentes, Y r-variante y X k-variante, con vector de medias:

$$\mu_Z=E(Z)=\begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_X \end{pmatrix}$$

y matriz de variancias y covariancias:

$$C_{ZZ}=\begin{pmatrix} C_{YY} & \vdots & C_{YX} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{XY} & \vdots & C_{XX} \end{pmatrix}$$

en la que supondremos que C_{YY} y C_{XX} son regulares.

Consideraremos el problema de transformar, Y mediante la matriz E de orden s×r y X mediante la matriz F de orden s×k, con $s\leq\min\{r,k\}$, para dar:

$$\eta=E\cdot Y \qquad y \qquad \xi=F\cdot X$$

variables ambas s-variantes, tales que, sus matrices de variancias y covariancias son:

$$C_{\eta\eta}=E\{(E\cdot(Y-\mu_Y))\cdot(E\cdot(Y-\mu_Y))'\}=E\cdot C_{YY}\cdot E'=I_s$$

$$C_{\xi\xi}=E\{(F\cdot(X-\mu_X))\cdot(F\cdot(X-\mu_X))'\}=F\cdot C_{XX}\cdot F'=I_s$$

y con E y F tomadas de forma que:

$$\eta-(\alpha+\xi)=E\cdot Y-(\alpha+F\cdot X)$$

sea lo más pequeño posible, siendo α un vector de dimensión s.

Debemos por tanto, determinar los valores de α, E y F tales que hagan mínimo el escalar:

$$E((E\cdot Y-\alpha-F\cdot X)'\cdot(E\cdot Y-\alpha-F\cdot X)) \qquad (*)$$

condicionado este mínimo a que:

$$E\cdot C_{YY}\cdot E'=I_s \qquad y \qquad F\cdot C_{XX}\cdot F'=I_s$$

Minimizaremos por tanto la matriz:

$$\begin{aligned}H(\alpha,E,F)&=E((E\cdot Y-\alpha-F\cdot X)\cdot(E\cdot Y-\alpha-F\cdot X)')\\&=(E\cdot\mu_Y-\alpha-F\cdot\mu_X)\cdot(E\cdot\mu_Y-\alpha-F\cdot\mu_X)'+\\&\quad+E\{(E\cdot(Y-\mu_Y)-F\cdot(X-\mu_X))\cdot(E\cdot(Y-\mu_Y)-F\cdot(X-\mu_X))'\}\geq\\&\geq E\cdot C_{YY}\cdot E'+F\cdot C_{XX}\cdot F'-E\cdot C_{YX}\cdot F'-F\cdot C_{XY}\cdot E' \qquad (**)\end{aligned}$$

(*) Obsérvese que este escalar, no es otra cosa que la traza de:

$$E((E\cdot Y-\alpha-F\cdot X)\cdot(E\cdot Y-\alpha-F\cdot X)')$$

ya que, dadas las matrices A y B, tenemos que $tr(A\cdot B)=tr(B\cdot A)$ siempre que ambos productos sean posibles. Ver Bellman,R. (1965, pag.106).

(**) Recuérdese nota página: 85

a) Podemos considerar E dada, y minimizar:

$$H(\alpha,F;E)\geq E\cdot C_{YY}\cdot E'+F\cdot C_{XX}\cdot F'-E\cdot C_{YX}\cdot F'-F\cdot C_{XY}\cdot E'$$

$$=F\cdot C_{XX}\cdot F'-F\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot F'+$$

$$+(E\cdot C_{YY}-F\cdot C_{XY})\cdot C_{YY}^{-1}\cdot (E\cdot C_{YY}-F\cdot C_{XY})'\geq$$

$$\geq F\cdot C_{XX}\cdot F'-F\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot F'$$

$$=F\cdot C_{XX}^{1/2}\cdot C_{XX}^{1/2}\cdot F'-$$

$$-F\cdot C_{XX}^{1/2}\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot C_{XX}^{1/2}\cdot F' \quad (*)$$

Haciendo:

$$F\cdot C_{XX}^{1/2}=F^*$$

con lo que:

$$F=F^*\cdot C_{XX}^{-1/2}$$

(*) Aqui, utilizamos el que C_{XX} es definida positiva, para definir:

$$C_{XX}^{1/2}=T\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k^{1/2}\end{pmatrix}\cdot T'$$

siendo:

$$C_{XX}=T\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}\cdot T'$$

Ver Bellman, R. (1965, pag.103).

y podremos escribir:

$$H(\alpha, F^*; E) \geq F^* \cdot F^{*\prime} - F^* \cdot C_{XX}^{-1/2} \cdot C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1/2} \cdot F^{*\prime}$$

siendo además:

$$F^* \cdot F^{*\prime} = F \cdot C_{XX}^{1/2} \cdot C_{XX}^{1/2} \cdot F' = F \cdot C_{XX} \cdot F' = I_s$$

por la condición de ortonormalidad.

LLamado:

$U = \left(U_1 \cdots\cdots U_k \right)$ a la matriz formada por los vectores característicos, y

$$M_U = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_k \end{pmatrix}$$

a la matriz diagonal de las raices caracterís ticas de la matriz

$$C_{XX}^{-1/2} \cdot C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1/2}$$

tendremos que:

$$\begin{aligned} H(\alpha, F^*; E) &\geq I_s - F^* \cdot U \cdot M_U \cdot U' \cdot F^{*\prime} \\ &= I_s - F^* \cdot U \cdot M_U \cdot (F^* \cdot U)' \end{aligned}$$

si hacemos que $F^* = \begin{pmatrix} F_1' \\ F_2' \\ \vdots \\ F_s' \end{pmatrix}$ con F_i un vector colum-

na de dimensión k, tenemos que según Bellman,R.

(1965,pag.125), la traza de $H(\alpha,F^*;E)$ será mínima, cuando $F_i=U_i$ con $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$ los vectores característicos asociados a las s mayores raices características.

Con ello, para una E dada, el mínimo de $H(\alpha,F;E)$ se alcanzará, cuando:

$$\alpha=E\cdot\mu_Y-F\cdot\mu_X \qquad y$$

$$F=\begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ \vdots \\ U_s' \end{pmatrix}\cdot C_{XX}^{-1/2}$$

b) Si considerásemos de forma simétrica F dada, y minimizásemos

$$H(\alpha,F;E)\geq E\cdot C_{YY}\cdot E'+F\cdot C_{XX}\cdot F'-E\cdot C_{YX}\cdot F'-$$
$$-F\cdot C_{XY}\cdot E'$$
$$=E\cdot C_{YY}\cdot E'-E\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot E'+$$
$$+(F\cdot C_{XX}-E\cdot C_{YX})\cdot C_{XX}^{-1}\cdot (F\cdot C_{XX}-E\cdot C_{XX})'\geq$$
$$\geq E\cdot C_{YY}\cdot E'-E\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot E'$$

y haciendo

$$E\cdot C_{YY}^{1/2}=E^*$$

con lo que

$$E=E^*\cdot C_{YY}^{-1/2}$$

tenemos que:

$$H(\alpha,E^*;F) \geq E^*.E^{*\prime} - E^*.C_{YY}^{-1/2}.C_{YX}.C_{XX}^{-1}.C_{XY}.C_{YY}^{-1/2}.E^{*\prime}$$

con $E^*.E^{*\prime}=I_s$

y llamado $V=(V_1,\ldots\ldots,V_r)$ a la matriz formada por los vectores caracteristicos, y

$$M_V=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

a la matriz diagonal de las raices caracterís ticas de la matriz:

$$C_{YY}^{-1/2}.C_{YX}.C_{XX}^{-1}.C_{XY}.C_{YY}^{-1/2}$$

tendremos que:

$$H(\alpha,E^*;F) \geq I_s - E^*.V.M_V.V'E^{*\prime}$$

El mínimo se alcanzará, igual que antes, con

$$E^*=\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}$$ y V_i los vectores característicos que corresponden a las s mayores raíces características.

Luego, para F dada, el mínimo de $H(\alpha,E;F)$ se alcanza al hacer:

$$\alpha = E \cdot \mu_Y - F \cdot \mu_X \qquad \text{y}$$

$$E = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2}$$

Con todo lo anterior, el mínimo de $H(\alpha;E,F)$ se obtendrá, al hacer:

$$\alpha = E \cdot \mu_Y - F \cdot \mu_X$$

$$F = \begin{pmatrix} U_1' \\ U_2' \\ \vdots \\ U_s' \end{pmatrix} \cdot C_{XX}^{-1/2} \qquad \text{y}$$

$$E = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2}$$

y éste será:

$$E \cdot C_{YY} \cdot E' + F \cdot C_{XX} \cdot F' - E \cdot C_{YX} \cdot F' - F \cdot C_{XY} \cdot E'$$

$$= I_s + I_s - \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1/2} \cdot (U_1\, U_2 \cdots U_s) -$$

$$-\begin{pmatrix} U'_1 \\ U'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U'_s \end{pmatrix} \cdot C_{XX}^{-1/2} \vdots C_{XY} \cdot C_{YY}^{-1/2} \vdots \left(V_1, V_2, \ldots, V_s\right)$$

$$=2 . I_s - 2 . \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \qquad (*)$$

(*) Sea A una matriz de orden rxk, entonces:

a) $A \cdot A'$ es de orden rxr tal que $V' . (A \cdot A') V = M_V$ donde $V = (V_1, V_2, \ldots, V_r)$ es la matriz de los vectores característicos y M_V la matriz diagonal de las r raices características λ_i de $A \cdot A'$.

b) $A' . A$ es de orden kxk tal que $U' . (A' . A) . U = M_V$ donde $U = \left(U_1, U_2, \ldots, U_k\right)$ es la matriz de los vectores característicos y M_U es la matriz diagonal de las k raices características μ_i de $A' A$.

Si definimos la matriz Λ de orden rxk como

$$\Lambda = \left(M_V^{1/2} \vdots 0\right)$$

tenemos que:

$V \cdot \Lambda = A \cdot U$ o lo que es lo mismo $V' . A . U = \Lambda$ ya que:

$$A \cdot A' = A \cdot I_k \cdot A' = A \cdot U \cdot U' \cdot A' = V . \Lambda . \Lambda . V' = V . \left(M_V^{1/2} \vdots 0\right) . \begin{pmatrix} M_V^{1/2} \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} . V' = V . M_V . V'$$

A partir de esto: $\Lambda' . V' . V . \Lambda = U' . A' A . U$ o sea $\Lambda' . I_r . \Lambda = M_U$ y

$$\Lambda' . \Lambda = \begin{pmatrix} M_V^{1/2} \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} . \left(M_V^{1/2} \vdots 0\right) = \begin{pmatrix} M_V & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} = M_U$$

Luego la traza tamará como valor mínimo:

$$2.s-2.\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^{1/2}=2.(s-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i^{1/2}).$$

La matriz de variancias y covariancias de las variables transformadas $\begin{pmatrix} E\cdot Y \\ \hdashline F\cdot X \end{pmatrix}$ será:

(*) Continuación página anterior:

o sea que:

$$\left(\begin{array}{c:c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_k \end{pmatrix}$$

y con ello, tenemos que para $i\in\{1,2,\dots,r\}$ $\mu_i=\lambda_i$ y para $i\in\{r+1,\dots,k\}$ $\mu_i=0$.

Sin más que hacer $A=C_{YY}^{-1/2}C_{YX}C_{XX}^{-1/2}$ entonces:

$$V'\cdot C_{YY}^{-1/2}C_{YX}C_{XX}^{-1/2}\cdot U=\Lambda=\left(\begin{array}{c:c} \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r^{1/2} \end{pmatrix} & 0 \end{array}\right)$$ y por tanto:

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} C_{YY}^{-1/2}C_{YX}C_{XX}^{-1/2}\cdot(U_1,U_2,\dots,U_s)=\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0\dots0 \\ 0 & \ddots \quad 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0\dots0 & \lambda_1^{1/2} \end{pmatrix}$$

$$E\left[\left\{\begin{pmatrix} E \cdot Y \\ \cdots\cdots \\ F \cdot X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E \cdot \mu_Y \\ \cdots\cdots \\ F \cdot \mu_X \end{pmatrix}\right\} \cdot \left\{\begin{pmatrix} E \cdot Y \\ \cdots\cdots \\ F \cdot X \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E \cdot \mu_Y \\ \cdots\cdots \\ F \cdot \mu_X \end{pmatrix}\right\}'\right] =$$

$$= E\left[\begin{pmatrix} E \cdot (Y-\mu_Y) \\ \cdots\cdots\cdots \\ F \cdot (X-\mu_X) \end{pmatrix} \cdot \left((Y-\mu_Y)' \cdot E' \;\vdots\; (X-\mu_X)' \cdot F' \right)\right]$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} E \cdot C_{YY} \cdot E' & E \cdot C_{YX} \cdot F' \\ \hdashline F \cdot C_{XY} \cdot E' & F \cdot C_{XX} \cdot F' \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c:c} I_s & \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \\ \hdashline \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{1/2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} & I_s \end{array}\right)$$

Al ser todas las variancias unitarias, ésta, será también la MATRIZ DE CORRELACIONES CANONICAS.

Las variables componentes de η y ξ se denominan VARIABLES CANONICAS. Entonces:

$$\eta_i=V_i'\cdot C_{yy}^{-1/2}\cdot Y=\beta_i'\cdot Y \quad y \quad \xi_i=U_i'\cdot C_{xx}^{-1/2}\cdot X=\alpha_i'\cdot X$$

son el i-ésimo par de variables canónicas, con $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$, siendo:

$$\mathrm{Var}(\eta_i)= \mathrm{Var}(\xi_i)=1 \quad y \quad \mathrm{Corr}(\eta_i,\xi_i)=\lambda_i^{1/2}=\rho_i$$

Las variables canónicas, tal como han sido definidas, satisfacen las siguientes relaciones en cuanto a β_i y α_i con $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ por ser V_i,U_i los vectores característicos de las matrices:

$$C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1/2} \quad y \quad C_{XX}^{-1/2}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}$$

respectivamente, con λ_i las raices características, que son iguales en ambas matrices, tendremos que:

Para todo $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ $V_i'\cdot V_i=1$ y $U_i'\cdot U_i=1$

y por tanto:

$$V_i'\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YY}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot V_i=\beta_i'\cdot C_{YY}\cdot\beta_i=1=\mathrm{Var}\left(\eta_i\right)$$

$$U_i'\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot C_{XX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot U_i=\alpha_i'\cdot C_{XX}\cdot\alpha_i=1=\mathrm{Var}\left(\xi_i\right)$$

también,

$$C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot V_i=\lambda_i\cdot V_i$$

$$C_{XX}^{-1/2}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot U_i=\lambda_i\cdot U_i \qquad (*)$$

(*) Si $T'\cdot A\cdot T=M$ es la diagonalización de A tenemos que: $A\cdot T=T\cdot M$ luego,

$$\left(A\cdot V_1,A\cdot V_2,\ldots,A\cdot V_k\right)=\left(V_1,V_2,\ldots,V_k\right)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}=\left(\lambda_1\cdot V_1,\lambda_2\cdot V_2,\ldots,\lambda_k\cdot V_k\right)$$

y por tanto $A\cdot V_i=\lambda_i\cdot V_i$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$

de donde, premultiplicando por $C_{YY}^{-1/2}$ y $C_{XX}^{-1/2}$ respectivamente, tenemos:

$$C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot(C_{YY}^{-1/2}\cdot V_i)=\lambda_i\cdot(C_{YY}^{-1/2}\cdot V_i)$$

$$C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot(C_{XX}^{-1/2}\ U_i)=\lambda_i\cdot(C_{XX}^{-1/2}\cdot U_i)$$

luego:

$$C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot\beta_i=\lambda_i\cdot\beta_i$$

$$C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot C_{YX}\cdot\alpha_i=\lambda_i\cdot\alpha_i$$

En ocasiones, para simplificar las propiedades de los estimadores correspondientes a los parámetros λ_i,α_i y β_i $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$, se modifica ligeramente la definición de las variables canónicas, de forma que:

$$\eta_i^* = \beta_i^{*\prime}\cdot Y \quad \text{y} \quad \xi_i^* = \alpha_i^{*\prime}\cdot X$$

con:

$$\beta_i^* = h_i\cdot\beta_i \quad \text{y} \quad \alpha_i^*=k_i\cdot\alpha_i \text{ para } k_i \text{ y } h_i\text{, tales que:}$$

$$\beta_i^{*\prime}\cdot\beta_i^* =1 \quad \text{y} \quad \alpha_i^{*\prime}\cdot\alpha_i^*=1$$

entonces:

$$1=\beta_i^{*\prime}\beta_i^*=h_i^2\cdot\ \beta_i'\cdot\beta_i=h_i^2\cdot V_i'\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot V_i=h_i^2\cdot V_i'\cdot C_{YY}^{-1}\cdot V_i$$

de aquí:

$$h_i = (V_i'\cdot C_{YY}^{-1}\cdot V_i)^{-1/2} \qquad \text{y}$$

$$1=\alpha_i^{*\prime}\cdot\alpha_i^*=k_i^2\cdot\ \alpha_i'\cdot\alpha_i=k_i^2\cdot U_i'\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot U_i=k_i^2\cdot U_i'\cdot C_{XX}^{-1}\cdot U_i$$

y de aquí:

$$k_i=(U_i^{\prime}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot U_i)^{-1/2}$$

siendo por tanto:

$$\beta_i^*=\frac{\beta_i}{(V_i^{\prime}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot V_i)^{1/2}}=\frac{\beta_i}{(\beta_i^{\prime}\cdot\beta_i)^{1/2}}$$

$$\alpha_i^*=\frac{\alpha_i}{(U_i^{\prime}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot U_i)^{1/2}}=\frac{\alpha_i}{(\alpha_i^{\prime}\cdot\alpha_i)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
Var(\eta_i^*)&=E\left(\beta_i^{*\prime}\cdot(Y-\mu_Y)\cdot(Y-\mu_Y)^{\prime}\cdot\beta_i^*\right)=\beta_i^{*\prime}\cdot C_{YY}\cdot\beta_i^*=\\
&=h_i\cdot\beta_i^{\prime}\cdot C_{YY}\cdot h_i\cdot\beta_i=h_i^2=(V_i^{\prime}\cdot C_{YY}^{-1}\cdot V_i)^{-1}\\
Var(\xi_i^*)&=E\left(\alpha_i^{*\prime}\cdot(X-\mu_X)\cdot(X-\mu_X)^{\prime}\cdot\alpha_i^*\right)=\alpha_i^{*\prime}\cdot C_{XX}\cdot\alpha_i^*=\\
&=k_i\cdot\alpha_i^{\prime}\cdot C_{XX}\cdot k_i\cdot\alpha_i=k_i^2=(U_i^{\prime}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot U_i)^{-1}\\
Cov(\eta_i^*,\xi_i^*)&=E\left(\beta_i^{*\prime}\cdot(Y-\mu_Y)\cdot(X-\mu_X)^{\prime}\cdot\alpha_i^*\right)=\beta_i^{*\prime}\cdot C_{YX}\cdot\alpha_i^*=\\
&=h_i\cdot k_i\cdot\beta_i^{\prime}\cdot C_{YX}\cdot\alpha_i=h_i\cdot k_i\cdot\lambda_i^{1/2}\\
Corr(\eta_i^*,\xi_i^*)&=\lambda_i^{1/2}
\end{aligned}$$

con todo ello, la matriz de variancias y covariancias de las variables:

$$\begin{pmatrix}\eta^*\\ \cdots\\ \xi^*\end{pmatrix}$$

será:

$$
\left(\begin{array}{c:c}
\begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_s^2 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} h_1 . k_1 . \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_s . k_s . \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \\
\hdashline
\begin{pmatrix} h_1 . k_1 . \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_s . k_s . \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} k_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k_s^2 \end{pmatrix}
\end{array}\right)
$$

y la matriz de correlaciones será:

$$
\left(\begin{array}{c:c}
I_s &
\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \\
\hdashline
\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} &
I_s
\end{array}\right)
$$

2) ESTIMACION

Consideremos una muestra de tamaño N para la variable:

$$\begin{pmatrix} Y \\ \cdots\cdots \\ X \end{pmatrix}$$

si ordenamos los valores obtenidos en las matrices:

$$\underline{Y} = (Y_i)_{i\varepsilon\{1,2,...,N\}} \text{ y } \underline{X} = (X_i)_{i\varepsilon\{1,2,...,N\}}$$

los vectores de medias serán:

$$\overline{Y} = N^{-1}.\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) \quad \text{y} \quad \overline{X} = N^{-1}.\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$$

y las matrices de desviaciones muestrales podrán escribirse como:

$$y = (y_i) = (Y_i - \overline{Y})_{i\varepsilon\{1,2,...,N\}} \text{ y } x = (x_i) = (X_i - \overline{X})_{i\varepsilon\{1,2...,N\}}$$

con ello, podemos considerar los siguientes estimadores de las matrices de variancias y covariancias de Y y X,

$$\hat{C}_{YY} = N^{-1}.\sum_{i=1}^{N} y_i \cdot y_i'$$

$$\hat{C}_{XY} = N^{-1}.\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i'$$

$$\hat{C}_{XX} = N^{-1}.\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot x_i'$$

A partir de éstos, podemos determinar estimaciones de λ_i, β_i^* y α_i^*, mediante las ecuaciones:

$$\hat{C}_{YY}^{-1} \cdot \hat{C}_{YX} \cdot \hat{C}_{XX}^{-1} \cdot \hat{C}_{XY} \cdot \hat{\beta}_i^* = \hat{\lambda}_i \cdot \hat{\beta}_i^*$$

$$\hat{C}_{XX}^{-1} \cdot \hat{C}_{XY} \cdot \hat{C}_{YY}^{-1} \cdot \hat{C}_{YX} \cdot \hat{\alpha}_i^* = \hat{\lambda}_i \cdot \hat{\alpha}_i^*$$

2) ESTIMACION

Consideremos una muestra de tamaño N para la variable: $\begin{pmatrix} Y \\ \cdots\cdots \\ X \end{pmatrix}$

si ordenamos los valores obtenidos en las matrices:

$\underline{Y}=(Y_i)_{i\varepsilon\{1,2,\dots,N\}}$ y $\underline{X}=(X_i)_{i\varepsilon\{1,2,\dots,N\}}$

los vectores de medias serán:

$\bar{Y}=N^{-1}.\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)$ y $\bar{X}=N^{-1}.\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$

y las matrices de desviaciones muestrales podrán escribirse como:

$y=(y_i)=(Y_i-\bar{Y})_{i\varepsilon\{1,2,\dots,N\}}$ y $x=(x_i)=(X_i-\bar{X})_{i\varepsilon\{1,2\dots,N\}}$

con ello, podemos considerar los siguientes estimadores de las matrices de variancias y covariancias de Y y X,

$$\hat{C}_{YY}=N^{-1}.\sum_{i=1}^{N} y_i\cdot y_i'$$

$$\hat{C}_{XY}=N^{-1}.\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot y_i'$$

$$\hat{C}_{XX}=N^{-1}.\sum_{i=1}^{N} x_i\cdot x_i'$$

A partir de éstos, podemos determinar estimaciones de λ_i, β_i^* y α_i^*, mediante las ecuaciones:

$$\hat{C}_{YY}^{-1}\cdot\hat{C}_{YX}\cdot\hat{C}_{XX}^{-1}\cdot\hat{C}_{XY}\cdot\hat{\beta}_i^*=\hat{\lambda}_i\cdot\hat{\beta}_i^*$$

$$\hat{C}_{XX}^{-1}\cdot\hat{C}_{XY}\cdot\hat{C}_{YY}^{-1}\cdot\hat{C}_{YX}\cdot\hat{\alpha}_i^*=\hat{\lambda}_i\cdot\hat{\alpha}_i^*$$

con las condiciones de normalización:

$$\hat{\beta}_i^{*\prime}.\hat{\beta}_i^{*}=1 \quad \text{y} \quad \hat{\alpha}_i^{*\prime}.\hat{\alpha}_i^{*}=1$$

Si suponemos que la variable

$$\begin{pmatrix} Y \\ \cdots\cdots \\ X \end{pmatrix}$$

se distribuye normalmente, como:

$$N_{r\times k}\left(0\ ,\ \begin{pmatrix} C_{YY} & \vdots & C_{YX} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ C_{XY} & \vdots & C_{XX} \end{pmatrix}\right)$$

y suponemos que $r \leq k$ con λ_i $i\varepsilon\{1,2,...,r\}$ todas distintas, entonces la variable $\{\hat{\lambda}_i,\hat{\beta}_i^*,\ \hat{\alpha}_i^*;i\varepsilon\{1,2,...,s\}\}$ tiene una distribución asintóticamente normal, siendo las marginales $\{\hat{\lambda}_i;\ i\varepsilon\{1,2,..,s\}\}$ y $\{\hat{\beta}_i^*,\hat{\alpha}_i^*;\ i\varepsilon\{1,2,...,s\}\}$ asintóticamente normales e independientes.

Para muestras grandes, puede verse en:Anderson T.W (1.958,cap.12), Brillinger,R. (1.975,pag.373),Kendall Stuart (1.968,Vol.III,pag 299) y Rao,C.R. (1,973,pag.582) que asintóticamente: para $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$

$E(\hat{\lambda}_i)=\lambda_i$, $E(\hat{\beta}_i^*)=\beta_i^*$, $E(\hat{\alpha}_i^*)=\alpha_i^*$ y

$$\mathrm{Cov}(\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j)=\delta_{ij}.4.\lambda_i.(1-\lambda_i)^2/N$$

y de esta última expresión se deduce que:

$$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}_i)=4.\lambda_i.(1-\lambda_i)^2/N$$

siendo las distribuciones de $\hat{\lambda}_i$ asintóticamente incorrelacionadas, y por ser normales, independientes.

Suele utilizarse el hecho de que,

$$\mathrm{Var}\left(\mathrm{arctagh}\,\hat{\lambda}^{1/2}\right) = \frac{1}{N}$$

que es independiente del valor de λ_i.

Pueden obtenerse también las variancias y covariancias de β_i^* y α_i^* .

IV) SINTESIS DE LOS METODOS DESARROLLADOS EN LOS EPIGRAFES ANTERIORES

Dada la variable r+k-variante

$$\begin{pmatrix} Y \\ \cdots \\ X \end{pmatrix}$$

con componentes Y r-variante y X k-variante. Con vector de medias:

$$\begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_X \end{pmatrix}$$

y matriz de variancias y covariancias,

$$\left(\begin{array}{c:c} C_{YY} & C_{YX} \\ \hdashline C_{XY} & C_{XX} \end{array}\right)$$

donde supondremos que C_{XX} es regular.

Consideremos el problema de obtener una transformación de $\mathcal{X}$ con rango reducido, $s\leq\min\{r,k\}$ dada por la matriz $\mathcal{A}$ de orden rxk o lo que es lo mismo, la transformación resultante de aplicar sucesivamente las matrices $\mathcal{B}$ de orden sxk y $\mathcal{D}$ de orden rxs, ambas de rango s, siendo $\mathcal{A}=\mathcal{D}.\mathcal{B}$, tal que, con α de orden rx1, la variable:

$$\mathcal{Y}-(\alpha+\mathcal{A}.\mathcal{X})$$

sea lo más pequeña posible.

Entenderemos este mínimo, como el mínimo de la forma cuadrática:

$$h(\alpha,\mathcal{A};\Omega)=E\{(\mathcal{Y}-\alpha-\mathcal{A}.\mathcal{X})'.\Omega^{-1}.(\mathcal{Y}-\alpha-\mathcal{A}.\mathcal{X})\}$$

con Ω una matriz simétrica definida positiva dada, de orden rxr.

Por ser Ω definida positiva, también lo es Ω^{-1} y admite la definición de $\Omega^{-1/2}$ con:

$$\Omega^{-1/2}.\Omega^{-1/2}=\Omega^{-1} \qquad (*)$$

y entonces:

$$\begin{aligned} h\ (\alpha,\mathcal{A};\Omega)&=E\{(\mathcal{Y}-\alpha-\mathcal{A}.\mathcal{X})'.\Omega^{-1/2}.\Omega^{-1/2}.(\mathcal{Y}-\alpha-\mathcal{A}.\mathcal{X})\} \\ &=E\{[\Omega^{-1/2}.(\mathcal{Y}-\alpha-\mathcal{A}.\mathcal{X})]'.[\Omega^{-1/2}.(\mathcal{Y}-\alpha-\mathcal{A}.\mathcal{X})]\} \end{aligned}$$

pero como $h(\alpha,\mathcal{A};\Omega)$ no es otra cosa que la traza de:

(*) Ver Bellman,R. (1.965,pag. 100 a 103).

$$H(\alpha,A;\Omega)=E\{(\Omega^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-A\cdot X))\cdot(\Omega^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-A\cdot X))'\}$$

minimizaremos $H(\alpha,A;\Omega)$, operando tendremos:

$$H(\alpha,A;\Omega)=(\Omega^{-1/2}\cdot(\mu_Y-\alpha-A\cdot\mu_X))\cdot(\Omega^{-1/2}\cdot(\mu_Y-\alpha-A\cdot\mu_X))'+$$

$$+E\{(\Omega^{-1/2}\cdot((Y-\mu_Y)-A\cdot(X-\mu_X)))\cdot$$

$$\cdot(\Omega^{-1/2}\cdot((Y-\mu_Y)-A\cdot(X-\mu_X)))'\}\geq$$

$$\geq E\{\Omega^{-1/2}\cdot((Y-\mu_Y)-A\cdot(X-\mu_X))\cdot((Y-\mu_Y)-A\cdot(X-\mu_X))'\cdot\Omega^{-1/2}\}$$

$$=\Omega^{-1/2}\cdot(C_{YY}+A\cdot C_{XX}\cdot A'-C_{YX}\cdot A'-A\cdot C_{XY})\cdot\Omega^{-1/2}$$

y transformando los términos dentro del corchete:

$$H(\alpha,A;\Omega)\geq\Omega^{-1/2}\cdot(C_{YY}-C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}+$$

$$+(C_{YX}-A\cdot C_{XX})\cdot C_{XX}^{-1}\cdot(C_{YX}-A\cdot C_{XX})')\cdot\Omega^{-1/2}$$

$$=\Omega^{-1/2}\cdot(C_{YY}-C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY})\cdot\Omega^{-1/2}+$$

$$+(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}-\Omega^{-1/2}\cdot A\cdot C_{XX})\cdot C_{XX}^{-1}\cdot$$

$$\cdot(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}-\Omega^{-1/2}\cdot A\cdot C_{XX})'$$

El mínimo de $H(\alpha,A;\Omega)$ se obtendrá haciendo:

$$\alpha=\mu_Y-A\cdot\mu_X$$

y tomando:

$$A=D\cdot B$$

de forma que se minimice:

$$G(A;\Omega)=(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}-\Omega^{-1/2}\cdot A\cdot C_{XX})\cdot C_{XX}^{-1}\cdot$$

$$\cdot(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}-\Omega^{-1/2}\cdot A\cdot C_{XX})'=$$

$$=(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}-\Omega^{-1/2}\cdot A\cdot C_{XX}^{1/2})\cdot$$
$$\cdot(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}-\Omega^{-1/2}\cdot A\cdot C_{XX}^{1/2})'$$

ya que al ser C_{XX} simétrica y definida positiva, C_{XX}^{-1} admite la descomposición:

$$C_{XX}^{-1}=C_{XX}^{-1/2}\cdot C_{XX}^{-1/2}$$

Para hallar este mínimo, y teniendo en cuanta que A debe descomponerse en el producto de B y D de orden s$\times$k y r$\times$s respectivamente, consideraremos la matriz Q de orden r$\times$s y rango s, de forma que $Q\cdot Q'$ será de orden r$\times$r y rango s. Hagamos entonces:

$$\Omega^{-1/2}\cdot A\cdot C_{XX}^{1/2}=(Q\cdot Q')\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}$$

con lo que:

$$A=\Omega^{1/2}\cdot(Q\cdot Q')\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}$$
$$=(\Omega^{1/2}\cdot Q)\cdot(Q'\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1})=D\cdot B$$

El problema, se resolverá entonces, minimizando:

$$G(Q;\Omega)=\left(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}-(Q\cdot Q')\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}-(Q\cdot Q')\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\right)'$$
$$=\left((I_r-Q\cdot Q')\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\right)\cdot$$
$$\cdot\left((I\ -Q\cdot Q')\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\right)'=$$
$$=(I_r-Q\cdot Q')\cdot\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot\Omega^{-1/2}\cdot(I_r-Q\cdot Q')'$$

Si diagonalizamos la matriz:

$$\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot\Omega^{-1/2}=T\cdot M\cdot T' \qquad \text{con}$$

$$T=(V_1,V_2,\ldots,V_r) \qquad y \qquad M=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r\end{pmatrix}$$

tendremos:

$$G(Q)=(I_r-Q\cdot Q')\cdot T\cdot M\cdot T'\cdot(I_r-Q\cdot Q')'=(T-Q\cdot Q'\cdot T)\cdot M\cdot(T-Q\cdot Q'\cdot T)'$$

que alcanzará su mínimo para:

$$Q=(V_1,V_2,\ldots,V_s)$$

ya que entonces:

$$\begin{aligned}T-Q\cdot Q'\cdot T&=(V_1,\ldots,V_s\vdots V_{s+1},\ldots,V_r)-\\ &-(V_1,\ldots,V_s)\cdot\begin{pmatrix}V_1'\\ \vdots\\ V_s'\end{pmatrix}\cdot(V_1,\ldots,V_s\vdots V_{s+1},\ldots,V_r)=\\ &=(V_1,\ldots,V_s\vdots V_{s+1},\ldots,V_r)-(V_1,\ldots,V_s)\cdot(I_s\vdots 0)\\ &=(V_1,\ldots,V_s\vdots V_{s+1},\ldots,V_r)-(V_1,\ldots,V_s\vdots 0)\\ &=(0\vdots V_{s+1},\ldots,V_r)\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}G((V_1,\ldots,V_s))&=(0\vdots V_{s+1},\ldots,V_r)\cdot M\cdot(0\vdots V_{s+1},\ldots,V_r)'\\ &=\sum_{i=s+1}^{r}\lambda_i\cdot V_i\cdot V_i'\end{aligned}$$

con λ_i, $i\varepsilon\{s+1,\ldots,r\}$ las r-s menores raices características de:

$$\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot \Omega^{-1/2}$$

Luego el mínimo de $H(\alpha, A;\Omega)$ será:

$$\Omega^{-1/2}\cdot (C_{YY}-C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY})\cdot \Omega^{-1/2}+\sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i\cdot V_i\cdot V_i'$$

cuya traza, o mínimo de $h(\alpha, A;\Omega)$ es,

$$tr(\Omega^{-1/2}\cdot (C_{YY}-C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY})\cdot \Omega^{-1/2})+tr(\sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i\cdot V_i\cdot V_i')$$

$$=tr(C_{YY}\cdot \Omega^{-1})-tr(\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot \Omega^{-1/2})+\sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i$$

$$=tr(C_{YY}\cdot \Omega^{-1})-\sum_{i=1}^{r} \lambda_i+\sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i=tr(C_{YY}\cdot \Omega^{-1})-\sum_{i=1}^{s} \lambda_i \qquad (*)$$

siendo λ_i $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$ las s mayores raices características de la matriz:

$$\Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot \Omega^{-1/2}$$

Este mínimo se alcanza, por tanto, haciendo:

$$\alpha=\mu_Y-D\cdot B\cdot \mu_X$$

$$B=Q'\cdot \Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}=\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}\cdot \Omega^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1} \qquad y$$

$$D=\Omega^{1/2}\cdot Q=\Omega^{1/2}\cdot (V_1,\dots,V_s)$$

(*) Para escribir estas igualdades, nos basamos en que:
$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$ y $tr(A\cdot B\cdot C)=tr(B\cdot C\cdot A)$

Consideraremos ahora, los casos particulares siguientes:

A) Si $\Omega = I_r$:

Obtendremos el mínimo de:

$h(\alpha, A; I_r) = E\left((Y-\alpha-A\cdot X)'\cdot(Y-\alpha-A\cdot X)\right)$

que es el mínimo de:

$H(\alpha, A; I_r) = E\left((Y-\alpha-A\cdot X)\cdot(Y-\alpha-A\cdot X)'\right)$

con $A=D\cdot B$ de rango $s \leq \min\{r,k\}$ y que serán respectivamente:

$$tr\left(C_{YY}\right) - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \qquad y$$

$$C_{YY} - C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY} + \sum_{i=s+1}^{r} \lambda_i \cdot V_i \cdot V_i'$$

donde V_i y λ_i $i\varepsilon\{1,2,\ldots,r\}$ son los vectores y raices característicos de la matriz

$$C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}$$

con λ_i $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ las s mayores raices características .

Dicho mínimo se alcanzará para:

$\alpha = \mu_Y - D\cdot B\cdot \mu_X$ con

$$B = \begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} \cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1} \quad y \quad D = (V_1, \ldots, V_s)$$

A_1) Si, además de $\Omega = I_r$ tenemos que s=r se obtendrá la REGRESION MULTIPLE, pues minimizamos:

$$h(\alpha, A) \quad \text{ó} \quad H(\alpha, A)$$

con $A = B$ de orden rxk y de rango r; obteniéndose los mínimos:

$$tr(C_{YY}) - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \quad \text{y} \quad C_{YY} - C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1} \cdot C_{XY}$$ respectivamente, con λ_i $i \varepsilon \{1, 2 ..., r\}$ las raíces características de $C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1} \cdot C_{XY}$.

Alcanzandose los mínimos para:

$$\alpha = \mu_Y - \beta \cdot \mu_X \qquad \text{y}$$

$$\beta = A = D \cdot B = (V_1, ..., V_r) \cdot \begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_r' \end{pmatrix} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1}$$

$$= T \cdot T' \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1} = C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1}$$

como ya obtuvimos en el epígrafe I de este capítulo, al tratar la regresión multiple.

A_2) Si además de $\Omega = I_r$ tenemos que r=k e $Y = X$, se obtendrán las s PRIMERAS COMPONENTES PRINCIPALES DE X, pues, minimizamos:

$$E\{(X - \alpha - D \cdot B \cdot X)' \cdot (X - \alpha - D \cdot B \cdot X)\}$$

ó de forma equivalente:

$E\{(X-\alpha-D\cdot B\cdot X)\cdot(X-\alpha-D\cdot B\cdot X)'\}$

obteniéndose los mínimos:

$$\sum_{i=s+1}^{k} \lambda_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=s+1}^{k} \lambda_i \cdot V_i \cdot V_i'$$

respectivamente, con V_i el vector característico correspondiente a una de las k-s menores raices características λ_i de C_{XX}.

Ya que:

$$C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}=C_{XX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XX}=C_{XX} \quad \text{y}$$

$$tr(C_{YY})-\sum_{i=1}^{s} \lambda_i=tr(C_{XX})-\sum_{i=1}^{s} \lambda_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{k} \lambda_i-\sum_{i=1}^{s} \lambda_i=\sum_{i=s+1}^{k} \lambda_i.$$

Dicho mínimo se alcanzará para:

$$\alpha=\mu_X-D\cdot B\cdot\mu_X=(I_k-D\cdot B)\cdot\mu_X$$

$$B=\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}\cdot C_{XX}\cdot C_{XX}^{-1}=\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}$$

$$D=(V_1,\ldots,V_s)$$

Siendo, por tanto, $Y=B\cdot X=\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}\cdot X$

las s primeras componentes principales de X.

Todos estos resultados concuerdan, como puede comprobarse, con los obtenidos en el epígrafe II de este capítulo, al tratar del Análisis de las Componentes Principales.

B) Si $\Omega=C_{YY}$. Obtendremos las VARIABLES CANONICAS.

Consideraremos el mínimo de:

$$h(\alpha,B,D;C_{YY})=E\{(Y-\alpha-B\cdot D\cdot X)'\cdot C_{YY}^{-1}\cdot(Y-\alpha-B\cdot D\cdot X)\}$$

$$=E\{(C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-B\cdot D\cdot X))'\cdot$$

$$\cdot(C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-B\cdot D\cdot X))\}$$

Como dicho mínimo sabemos que se alcanza para:

$$\alpha=\mu_Y-D\cdot B\cdot\mu_X$$

$$B=\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}$$

$$D=C_{YY}^{1/2}\cdot(V_1,V_2,\ldots,V_s)$$

con V_i el vector característico asociado a la i-ésima mayor raiz característica de la matriz

$$C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1/2}$$

y como:

$$(V_1,\ldots,V_s,\ldots,V_r)\cdot\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}=I_r$$

tendremos que:

$$h(\alpha,B,D;C_{YY})=E\{(C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-D\cdot B\cdot X))'\cdot$$

$$\cdot I_r\cdot(C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-D\cdot B\cdot X))\}=$$

$$=E\{(\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-D\cdot B\cdot X))'\cdot$$

$$\cdot(\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\alpha-D\cdot B\cdot X))\}$$

cuyo valor mínimo, considerando la matriz cuya traza es $h(\alpha,B,D;C_{YY})$, será:

$$H_0=E\{(\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\mu_Y+D\cdot B\cdot\mu_X-D\cdot B\cdot X))\cdot$$

$$\cdot(\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\mu_Y+D\cdot B\cdot\mu_X-D\cdot B\cdot X))'\}$$

$$=E\{(\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\mu_Y)-\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YY}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot(V_1,\ldots,V_s)\cdot\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot(X-\mu_X))\cdot$$

$$\cdot(\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\mu_Y)-\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YY}^{1/2}\cdot$$

$$\cdot(V_1,\ldots,V_s)\cdot\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1}\cdot(X-\mu_X))'\}$$

y teniendo en cuenta lo que hemos hecho al estudiar el análisis canónico, podemos llamar:

$$E=\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}$$

y por nota página 116 , teniamos que:

$$\begin{pmatrix}V'_1\\ \vdots\\ V'_s\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YX}\cdot C_{XX}^{-1/2}\cdot(U_1,\ldots,U_s)=\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}$$

luego, $$\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1/2} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_s' \end{pmatrix} \quad (*)$$

y como
$$F = \begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_s' \end{pmatrix} \cdot C_{XX}^{-1/2}$$

tendremos:

$$H_0 = E\left\{ \left(\begin{pmatrix} E \\ \cdots\cdots\cdots \\ \begin{pmatrix} V_{s+1}' \\ \vdots \\ V_r' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2} \end{pmatrix} \cdot (Y-\mu_Y) - \right.\right.$$

$$\left. - \begin{pmatrix} I_s \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \cdot F \cdot (X-\mu_X) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\begin{pmatrix} E \\ \cdots\cdots\cdots \\ \begin{pmatrix} V_{s+1}' \\ \vdots \\ V_r' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2} \end{pmatrix} \cdot (Y-\mu_Y) - \right.$$

$$\left.\left. - \begin{pmatrix} I_s \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 \cdots & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \cdot F \cdot (X-\mu_X) \right)' \right\} =$$

(*) Este resultado es cierto, ya que a pesar de no poderse post-multiplicar

(*) Continuación página anterior:

directamente por: $\begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_s' \end{pmatrix}$

ya que:

$$\begin{pmatrix} U_1, \dots, U_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_s' \end{pmatrix} \neq I_s$$

tenemos que:

$$V' \cdot C_{YY}^{-1/2} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1/2} \cdot U = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda_1^{1/2} & 0 \dots & 0 & \\ & \ddots & \vdots & \\ 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots 0 & \lambda_r^{1/2} & \end{array} \right)$$

y post-multiplicando por:

$$U' = \begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_k' \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta que:

$$U' \cdot U = U \cdot U' = I_k$$

nos queda:

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_r' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1/2} = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda_1^{1/2} & 0 \dots & 0 & \\ & \ddots & \vdots & \\ 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots 0 & \lambda_r^{1/2} & \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} \cdot U_1' \\ \vdots \\ \lambda_r^{1/2} \cdot U_k' \end{pmatrix}$$

con lo que:

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ \vdots \\ V_s' \end{pmatrix} \cdot C_{YY}^{-1/2} \cdot C_{YX} \cdot C_{XX}^{-1/2} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} \cdot U_1' \\ \vdots \\ \lambda_s^{1/2} \cdot U_s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_s' \end{pmatrix}$$

$$=E\left\{\left[\begin{array}{c} E\cdot(Y-\mu_Y)-\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & 0\\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}\cdot F\cdot(X-\mu_X) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{pmatrix}V'_{s+1}\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\mu_Y)\end{array}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\begin{array}{c} E\cdot(Y-\mu_Y)-\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & 0\\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}\cdot F\cdot(X-\mu_X) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{pmatrix}V'_{s+1}\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\mu_Y)\end{array}\right]'\right\}$$

y como:

$$E\{E\cdot(Y-\mu_Y)\cdot(Y-\mu_Y)'\cdot E'+\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & 0\\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot F\cdot(X-\mu_X)\cdot(X-\mu_X)'\cdot F'\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & 0\\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}-$$

$$-E\cdot(Y-\mu_Y)\cdot(X-\mu_X)'\cdot F'\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & 0\\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} . F . (X-\mu_X) . (Y-\mu_Y)' . E' \} =$$

$$= E . C_{YY} . E' + \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} . F . C_{XX} . F' . \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} -$$

$$- E . C_{YX} . F' . \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} . F . C_{XY} . E' =$$

$$= I_s + \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} . I_s . \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} =$$

$$= I_s - \begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} ,$$

$$E\{E . (Y-\mu_Y) . (Y-\mu_Y)' . C_{YY}^{-1/2} . (V_{s+1}, \ldots, V_r) -$$

$$-\begin{pmatrix} \lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2} \end{pmatrix} . F . (X-\mu_X) . (Y-\mu_Y)' . C_{YY}^{-1/2} . (V_{s+1}, \ldots, V_r) \} =$$

$$=E\cdot C_{YY}^{1/2}\cdot\left[\left(V_{s+1},\ldots,V_r\right)-\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} 0 & \cdots & 0\\ 0 & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ 0 \cdots 0 & & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}\right].$$

$$\cdot F\cdot C_{XY}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot\left(V_{s+1},\ldots,V_r\right)=R \qquad \text{y}$$

$$E\left\{\begin{pmatrix}V'_{s+1}\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot(Y-\mu_Y)\cdot(Y-\mu_Y)'\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot\left(V_{s+1},\ldots,V_r\right)\right\}=$$

$$=\begin{pmatrix}V'_{s+1}\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot C_{YY}\cdot C_{YY}^{-1/2}\cdot\left(V_{s+1},\ldots,V_r\right)=$$

$$=\begin{pmatrix}V'_{s+1}\\ \vdots\\ V'_r\end{pmatrix}\cdot(V_{s+1},\ldots,V_r)=I_{r-s}$$

con lo que:

$$H_0=\left(\begin{array}{c:c} I_s-\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 \cdots 0\\ 0 & 0\\ \vdots & \ddots\\ 0\cdots 0 & \lambda_s\end{pmatrix} & R\\ \hdashline R' & I_{r-s}\end{array}\right)$$

y por tanto, el mínimo de h será:

$$h_0=\operatorname{tr}\left(H_0\right)=s-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i+r-s=r-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$$

que confirma el resultado de:

$$tr(C_{YY}\cdot C_{YY}^{-1})-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=tr(I_r)-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i=r-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$$

Obteniendose,por tanto, como variables canónicas

$$\eta=E\cdot Y \qquad y \qquad \xi^*=\begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix}\cdot F\cdot X$$

con una matriz de variancias y covariancias de

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \cdots\\ \xi^*\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} I_s & \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

y una matriz de correlaciones:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_s & \begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}\lambda_1^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_s^{1/2}\end{pmatrix} & I_s\end{array}\right)$$

como corresponde a las variables canónicas.

CAPITULO IV

" METODOS DE ANALISIS MULTIVARIANTE EN EL DOMINIO FRECUENCIAL "

En este capítulo pretendemos extender los métodos de análisis multivariante del capítulo anterior, de forma que puedan analizarse las series temporales multiples desde el punto de vista del " dominio frecuencial " dando lugar al llamado ANALISIS ESPECTRAL MULTIVARIANTE.

Estudiaremos por tanto el análisis espectral de la Regresión y Correlación Multiple y Parcial entre series temporales multivariantes, la determinación de las componentes principales de una serie temporal k-variante y por último desarrollaremos los métodos de análisis de variables canónicas mediante la consideración de las correlaciones canónicas entre series temporales multivariantes.

I) ANALISIS ESPECTRAL MULTIVARIANTE DE LA REGRESION Y CORRELACION ENTRE SERIES TEMPORALES

En este epígrafe, definimos en primer lugar los elementos que vamos a manejar, esto es, las series temporales que serán objeto de nuestro estudio y que trataremos de seleccionar a través de un modelo de regresión, dentro del dominio frecuencial, que toma la forma de un MODELO DINAMICO CON RETARDOS DISTRIBUIDOS. Seguidamente desarrollaremos el modelo con toda generalidad obteniendo los parámetros significativos del mismo, en función de los elementos básicos de la teoría espectral, que vienen resumidos en la matriz de densidad espectral. Una vez analizada la regresión entre series temporales, consideraremos la correlación asociada a las mismas y definiremos los coeficientes que la representen, viendo su interpretación y sus propiedades básicas.

A continuación consideraremos la partición en dos subseries de la serie temporal que representa a las variables explicativas, y de este modo analizaremos el MODELO MARGINAL que resulta de considerar solamente las componentes de una de estas dos subseries. Comparando los resultados obtenidos en el modelo MARGINAL con los del modelo GLO-

BAL, podremos analizar el efecto que causa en éste la incorporación de las componentes de la segunda subserie.

Por último dentro de la elaboración del modelo de regresión y correlación consideraremos el MODELO PARCIAL, que resultará al relacionar series temporales multivariantes en las que previamente se habrá eliminado la influencia lineal de una tercera serie temporal multivariante, para de esta forma analizar la relación en la consideración de que esta última serie temporal no tiene influencia sobre las que nos interesa relacionar, o lo que es lo mismo, obtendremos la relación entre las dos primeras series considerando que la tercera se mantiene constante.

Para terminar el epígrafe, realizaremos la estimación de los parámetros del modelo, suponiendo que disponemos de una observación temporal formada por N registros conjuntos de todas las series temporales univariantes que intervengan como componentes de las multivariantes consideradas. Se obtendrán diversos estimadores de los parámetros más significativos, analizando sus distribuciones aunque solo sea asintóticamente, para construir intervalos de estimación y verificar hipótesis concernientes a estos parámetros.

1) ESTUDIO DEL MODELO

Consideremos la serie (r+k)-variante $\mathcal{Z}(t)$, que supondremos es debilmente estacionaria, y que podemos particionar en:

$$\mathcal{Z}(t)=\begin{pmatrix} \mathcal{Y}(t) \\ \cdots\cdots \\ \mathcal{X}(t) \end{pmatrix}$$

siendo, $\mathcal{Y}(t)$ una serie temporal r-variante con:

$$\mathcal{Y}(t)'=(Y_1(t),\ Y_2(t),\ldots,\ Y_r(t))$$

cuyas componentes podemos interpretar como variables endógenas a explicar por el modelo de regresión, y $\mathcal{X}(t)$ una serie temporal k-variante, cuyas componentes será útil considerar agrupadas en dos subseries, la primera $\mathcal{X}_1(t)$, k_1-variante y la segunda $\mathcal{X}_2(t)$ k_2-variante con $k_1+k_2=k$, de forma que:

$$\mathcal{X}(t)=\begin{pmatrix} \mathcal{X}_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{X}_2(t) \end{pmatrix}$$

y por tanto, tenemos:

$$\mathcal{X}(t)'=(\mathcal{X}_1(t)' \ \vdots\ \mathcal{X}_2(t)')=(X_1(t),\ldots,X_{k_1}(t)\ \vdots\ X_{k_1+1}(t),\ldots,X_k(t))$$

cuyas componentes podremos interpretar aquí, como las variables exógenas del modelo.

Para la serie temporal $\mathcal{Z}(t)$ tendremos:

El vector de medias será:

$$\mu_Z=E\{Z(t)\}=E\left\{\begin{pmatrix} Y(t) \\ \cdots\cdots \\ X(t)\end{pmatrix}\right\}=E\left\{\begin{pmatrix} Y(t) \\ \cdots\cdots \\ X_1(t) \\ \cdots\cdots \\ X_2(t)\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_{X_1} \\ \cdots \\ \mu_{X_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_X\end{pmatrix}$$

La matriz de covariancias retardadas para $u\varepsilon Z$, será:

$$C_{ZZ}(u)=E\{(Z(t+u)-\mu_Z)\cdot(Z(t)-\mu_Z)'\}$$

$$=E\left\{\begin{pmatrix} Y(t+u)-\mu_Y \\ \cdots\cdots\cdots \\ X(t+u)-\mu_X\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y(t)-\mu_Y \\ \cdots\cdots\cdots \\ X(t)-\mu_X\end{pmatrix}'\right\}$$

$$=E\left\{\begin{pmatrix} Y(t+u)-\mu_Y \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_1(t+u)-\mu_{X_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_2(t+u)-\mu_{X_2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} Y(t)-\mu_Y \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_1(t)-\mu_{X_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_2(t)-\mu_{X_2}\end{pmatrix}'\right\}$$

$$=E\left\{\begin{pmatrix} Y(t+u)-\mu_Y \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_1(t+u)-\mu_{X_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_2(t+u)-\mu_{X_2}\end{pmatrix}\cdot\left((Y(t)-\mu_Y)' \ \vdots\ (X_1(t)-\mu_{X_1})' \ \vdots\ (X_2(t)-\mu_{X_2})'\right)\right\}$$

$$=\left(\begin{array}{c:c:c} C_{YY}(u) & C_{YX_1}(u) & C_{YX_2}(u) \\ \hdashline C_{X_1Y}(u) & C_{X_1X_1}(u) & C_{X_1X_2}(u) \\ \hdashline C_{X_2Y}(u) & C_{X_2X_1}(u) & C_{X_2X_2}(u)\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} C_{YY}(u) & C_{YX}(u) \\ \hdashline C_{XY}(u) & C_{XX}(u)\end{array}\right)$$

y por la propiedad de la matriz de covariancias retardadas vista en pag. 62 , sabemos que $C_{ZZ}(u)=C_{ZZ}(-u)'$, luego para $A,B\varepsilon\{Y,X,X_1,X_2\}$ tenemos que:

$$C_{BA}(u)=C_{AB}(-u)'$$

La matriz de densidad espectral, para $\lambda\varepsilon R$ con $C_{ZZ}(u)$ absolutamente convergente será:

$$f_{ZZ}(\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{ZZ}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{c:c} C_{YY}(u) & C_{YX}(u) \\ \hdashline C_{XY}(u) & C_{XX}(u)\end{array}\right).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left(\begin{array}{c:c:c} C_{YY}(u) & C_{YX_1}(u) & C_{YX_2}(u) \\ \hdashline C_{X_1Y}(u) & C_{X_1X_1}(u) & C_{X_1X_2}(u) \\ \hdashline C_{X_2Y}(u) & C_{X_2X_1}(u) & C_{X_2X_2}(u)\end{array}\right).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=\left(\begin{array}{c:c:c} f_{YY}(\lambda) & f_{YX_1}(\lambda) & f_{YX_2}(\lambda) \\ \hdashline f_{X_1Y}(\lambda) & f_{X_1X_1}(\lambda) & f_{X_1X_2}(\lambda) \\ \hdashline f_{X_2Y}(\lambda) & f_{X_2X_1}(\lambda) & f_{X_2X_2}(\lambda)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c} f_{YY}(\lambda) & f_{YX}(\lambda) \\ \hdashline f_{XY}(\lambda) & f_{XX}(\lambda)\end{array}\right)$$

y por la propiedad d) de la matriz espectral sabemos que es hermitiana, ver pag. 65 , o sea que $f_{ZZ}(\lambda)=\overline{f_{ZZ}(\lambda)'}$ luego para $A,B\varepsilon\{Y,X,X_1,X_2\}$ tenemos que $f_{BA}(\lambda)=\overline{f_{AB}(\lambda)'}$.

A) En primer lugar, fijaremos nuestra atención en el problema de determinar una transformación lineal de la serie temporal k-variante $X(t)$, mediante la acción de un (k,r) filtro lineal sumativo $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ de forma que, con α un vector r-dimensional,

$$\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).X(u)$$

sea lo más igual posible a la serie temporal r-variante $Y(t)$.

Podemos escribir por tanto:

$$Y(t)=\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).X(u)+\varepsilon(t)$$

donde $\varepsilon(t)$ será la serie temporal de ERRORES, resultante de tratar de aproximar la serie temporal r-variante $Y(t)$ mediante una versión filtrada de la serie k-variante $X(t)$.

Suponiendo que la matriz espectral $f_{XX}(\lambda)$ es regular y considerando la aproximación buscada en el sentido de minimizar la matriz:

$H(\alpha,a(u))=E\{\varepsilon(t).\varepsilon(t)'\}=$

$$=E\{(Y(t)-\alpha-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).X(u)).(Y(t)-\alpha-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).X(u))'\}$$

tendremos por la nota pag. 85 que:

$$H(\alpha,a(u))=(\mu_Y-\alpha-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u)\right).\mu_X).(\mu_Y-\alpha-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u)\right).\mu_X)'+$$

$$+E\{((Y(t)-\mu_Y)-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).(X(u)-\mu_X)).$$

$$.((Y(t)-\mu_Y)-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).(X(u)-\mu_X))'\}\geq$$

$$\geq E\{(Y(t)-\mu_Y).(Y(t)-\mu_Y)'+\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).(X(u)-\mu_X).$$

$$.\sum_{v=-\infty}^{\infty}(X(v)-\mu_X)'.a(t-v)'-(Y(t)-\mu_Y).$$

$$.\sum_{u=-\infty}^{\infty}(X(u)-\mu_X)'.a(t-u)'-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).(X(u)-\mu_X).(Y(t)-\mu_Y)'\}$$

$$=C_{YY}(0)+\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t-u).C_{XX}(u-v).a(t-v)'-$$

$$-\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{YX}(t-u).a(t-u)'-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).C_{XY}(u-t)$$

y haciendo, $t-u=z$ y $t-v=w$, con lo que $u-v=t-v-(t-u)=w-z$ tenemos que:

$$H(\alpha,a(u))\geq C_{YY}(0)+\sum_{z=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty}a(z).C_{XX}(w-z).a(w)'-$$

$$-\sum_{z=-\infty}^{\infty}C_{YX}(z).a(z)'-\sum_{z=-\infty}^{\infty}a(z).C_{XY}(-z).$$

Teniendo en cuenta que por la fórmula de inversión de la pag. 70

$$C(u)=\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda$$

entonces,

$$H(\alpha,a(u))\geq\int_{-\pi}^{\pi} f_{YY}(\lambda)\,d\lambda+\sum_{z=-\infty}^{\infty}\ \sum_{w=-\infty}^{\infty}a(z).\int_{-\pi}^{\pi} f_{XX}(\lambda).\exp\{i(w-z)\lambda\}d\lambda.$$

$$.a(u)'-\sum_{z=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f_{YX}(\lambda).\exp\{iz\lambda\}d\lambda.a(z)'-$$

$$-\sum_{z=-\infty}^{\infty}a(z).\int_{-\pi}^{\pi} f_{XY}(\lambda).\exp\{-iz\lambda\}d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\{f_{YY}(\lambda)+\left(\sum_{z=-\infty}^{\infty}a(z).\exp\{-iz\lambda\}\right).f_{XX}(\lambda).$$

$$.\left(\sum_{w=-\infty}^{\infty}a(w)'.\exp\{iw\lambda\}\right)-f_{YX}(\lambda).\left(\sum_{z=-\infty}^{\infty}a(z)'.\exp\{iz\lambda\}\right)-$$

$$-\left(\sum_{z=-\infty}^{\infty}a(z).\exp\{-iz\lambda\}\right).f_{XY}(\lambda)\}d\lambda$$

y si: $A(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u).\exp\{-i\lambda u\}$

es la Matriz de Transferencia o de Respuesta Frecuencial del (k,r) filtro lineal sumativo $\{a(u)\}_{u\in Z}$ (*)

(*) Ver pag. 74

entonces:

$$H(\alpha,A(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\{f_{YY}(\lambda)+A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'-f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'-$$

$$-A(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\}d\lambda$$

que podremos escribir como:

$$H(\alpha,A(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\{f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\ +$$

$$+\left(f_{YX}(\lambda)-A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\right)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\overline{\left(f_{YX}(\lambda)-A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\right)}'\}d\lambda$$

$$\geq\int_{-\pi}^{\pi}\{f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\}d\lambda$$

Alcanzandose por lo tanto el mínimo de $H(\alpha,A(\lambda))$ cuando:

$$\alpha=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u)\right)\cdot\mu_X$$

$$=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right)\cdot\mu_X \qquad\qquad y$$

$$A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)=f_{YX}(\lambda) \qquad \text{o sea}$$

$$A(\lambda)=f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

y por tanto el mínimo en $H(\alpha,a(u))$ se alcanzará con:

$$a(u)=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}A(\lambda)\cdot\exp\{iu\lambda\}d\lambda$$

pues según vimos en pag. 80 , $A(\lambda)$ es la matriz de transferencia del filtro $\{a(u)\}_{u\in Z}$.

para estos valores de α y $a(u)$ el mínimo alcanzado por $H(\alpha,a(u))$ será:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\}d\lambda$$

Llamaremos a $A(\lambda)$ la MATRIZ DE LOS COEFICIENTES COMPLEJOS DE LA REGRESION DE $Y(t)$ SOBRE $X(t)$ EN LA FRECUENCIA λ.

La serie temporal r-variante $\varepsilon(t)$ definida por:

$$\varepsilon(t)=Y(t)-\alpha-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u)\cdot X(u)$$

al dar a α y $a(u)$ los valores que minimizan $H(\alpha,a(u))$ es tal que,

$$\mu_{\varepsilon}=E\{\varepsilon(t)\}=\mu_Y-\alpha-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u)\right)\cdot\mu_X=$$

$$=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u)\right)\cdot\mu_X-\alpha=\alpha-\alpha=0$$

y cuya matriz de variancias y covariancias será:

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(0)=E\{\varepsilon(t)\cdot\varepsilon(t)'\}=\int_{-\pi}^{\pi}\{f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\}d\lambda$$

con lo que al ser:

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(0)=\int_{-\pi}^{\pi}f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)d\lambda$$

tendremos que la MATRIZ DEL ESPECTRO DE LOS ERRORES será:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-A(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)$$

que puede escribirse en la forma:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot$$
$$\cdot\left[I_r-f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right]\cdot$$
$$\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}$$

lo que nos lleva a considerar la matriz $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ de orden rxr definida por:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

como la medida de la asociación lineal de $Y(t)$ con $X(t)$ en la frecuencia λ denominandola MATRIZ DE COHERENCIA. (*)

Pudiendose escribir entonces el espectro de los errores como:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot\left[I_r-\gamma^2_{YX}(\lambda)\right]\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}$$

y al ser $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ semidefinida positiva (**)

(*) Ver nota (*) pag. 163

(**) $\gamma^2_{YX}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$

$=\overline{\left(f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right)}'\cdot\left(f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right)$

$=\overline{\gamma_{YX}(\lambda)}'\cdot\gamma_{YX}(\lambda)$

por cualquier r-variante complejo $\overline{\alpha}$

$\overline{\alpha}'\cdot\overline{\gamma_{YX}(\lambda)}'\cdot\gamma_{YX}(\lambda)\cdot\alpha=\overline{(\gamma_{YX}(\lambda)\cdot\alpha)}'\cdot(\gamma_{YX}(\lambda)\cdot\alpha)\geq 0$

tendremos que $\gamma^2_{YX}(\lambda)=T\cdot M\cdot T'$ con T matriz de vectores característicos y M la matriz diagonal de raices características de $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ siendo todas ellas no negativas.

Con ello podemos escribir:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot T\cdot(I_r-M)\cdot T'\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2} \quad \text{y}$$

$$T\cdot(I_r-M)\cdot T'=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

al ser $f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$ semidefinida positiva por serlo las matrices espectrales. (*)

Los elementos de la diagonal de I_r-M deben ser todos no negativos, luego todas las raices características de $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ estan comprendidas entre 0 y 1. Luego las raices características de $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ pueden utilizarse como una medida de la regresión lineal de $Y(t)$ sobre $X(t)$ en la frecuencia λ. Así, si todas las raices características son 1, tendremos que $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=0$ con lo que esto corresponderá a la existencia de una perfecta relación lineal entre $Y(t)$ y $X(t)$ en la frecuencia λ.

Por el contrario si todas las raices características de $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ fuesen cero, esto implicaría que $\gamma^2_{YX}(\lambda)=0$ y por tanto $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)$ lo que significa la inexistencia de relación lineal entre $Y(t)$ y $X(t)$ en la frecuencia λ.

(*) Ver propiedad pag. 69

Además, como:

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) &= f_{YY}(\lambda) - A(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\\
&= f_{YY}(\lambda) - A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\\
&= f_{YY}(\lambda) - A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot \overline{(f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1})'}\\
&= f_{YY}(\lambda) - A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot \overline{A(\lambda)}'
\end{aligned}$$

el que $\gamma^2_{YX}(\lambda)=0$ no es otra cosa que $A(\lambda)=0$ ya que suponemos $f_{XX}(\lambda)$ regular. Luego la hipótesis de no existencia de relación lineal en la frecuencia λ es equivalente a la hipótesis de $A(\lambda)=0$.

Bajo la hipótesis de que $f_{YY}(\lambda)$ sea también regular, resulta interesante considerar el caso en que las series temporales $Y(t)$ y $X(t)$, alteren sus papeles dentro del modelo, llegando a las expresiones siguientes:

$$X(t)=\alpha^* + \sum_{u=-\infty}^{\infty} a^*(t-u)\cdot Y(u)+\varepsilon^*(t)$$

donde los valores óptimos para el vector k-dimensional α^* y el (r,k) filtro lineal sumativo $\{a^*(u)\}_{u\in Z}$ serán:

$$\alpha^* = \mu_X - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} a^*(u)\right)\cdot \mu_Y \qquad \text{y}$$

$$a^*(u)=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} A^*(\lambda)\cdot\exp\{iu\lambda\}d\lambda$$

siendo:

$$A^*(\lambda)=f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}$$

con lo que la matriz del espectro de los errores $\varepsilon^*(t)$ será:

$$f_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(\lambda)=f_{XX}(\lambda)-f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)$$

y la matriz de coherencia es,

$$\gamma^2_{XY}(\lambda)=f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}.$$

A partir de estos resultados, es facil comprobar que $\gamma^2_{YX}(\lambda)=0$ equivale a $\gamma^2_{XY}(\lambda)=0$.

Pues supuesta $\gamma^2_{YX}(\lambda)=0$ sabemos que equivale a $A(\lambda)=f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}=0$ y de aquí al ser $f_{XX}(\lambda)$ regular lo será también $f_{XX}(\lambda)^{-1}$ y por lo tanto también $f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$ con lo que:

$$\begin{aligned}\gamma^2_{XY}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}&=f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\\&=f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot A(\lambda)\\&=f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot 0=0\end{aligned}$$

y por tanto $\gamma^2_{XY}(\lambda)=0$.

El reciproco sería identico sin más que intercambiar X e Y.

Si en particular hacemos r=1 la serie temporal Y(t) será univariante, siendo entonces:

$$\alpha=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right)\cdot\mu_X$$

$$a(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} A(\lambda).\exp\{iu\lambda\}.d\lambda$$

con:

$$A(\lambda)=f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

siendo, α y μ_Y escalares; $a(u)$ y $A(\lambda)$ vectores fila k-variantes. Entonces:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)$$

$$=\left(1-\frac{f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}\right).f_{YY}(\lambda)$$

$$=\left(1-\gamma_{YX}^{2}(\lambda)\right).f_{YY}(\lambda)$$

siendo,

$$\gamma_{YX}^{2}(\lambda)=\frac{f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

LA COHERENCIA MULTIPLE entre $Y(t)$ y $X(t)$ en la frecuencia λ. Que como hemos visto en el caso general satisface la relación:

$$0\leq\gamma_{YX}^{2}(\lambda)\leq 1$$

Otra forma alternativa de expresar la coherencia multiple se puede obtener, considerando la matriz espectral

$$f_{ZZ}(\lambda)=\left(\begin{array}{c:c} f_{YY}(\lambda) & f_{YX}(\lambda) \\ \hdashline f_{XY}(\lambda) & f_{XX}(\lambda)\end{array}\right)$$

cuya inversa $f_{ZZ}(\lambda)^{-1}=\left(f^{ZZ}_{ij}(\lambda)\right)$ tendrá como elemento para i,j=1 :

$$f^{ZZ}_{11}(\lambda)=\left(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\right)^{-1} \qquad (*)$$

con lo que:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\frac{f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

$$=\frac{f_{YY}(\lambda)-\left(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\right)}{f_{YY}(\lambda)}$$

$$=1-\frac{1}{f_{YY}(\lambda)\cdot\left(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\right)^{-1}}$$

$$=1-\frac{1}{f_{YY}(\lambda)\cdot f^{ZZ}_{11}(\lambda)} \qquad (**)$$

(*) Ya que como es bien conocido dada la matriz particionada:

$$A=\left(\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

con A_{11} y A_{22} cuadradas, su inversa de existir es de la forma:

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{c:c} E & -E\cdot A_{12}\cdot A_{22}^{-1} \\ \hdashline -A_{22}^{-1}\cdot A_{21}\cdot E & A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1}\cdot A_{21}\cdot E\cdot A_{12}\cdot A_{22}^{-1} \end{array}\right) \text{ con } E=\left(A_{11}-A_{12}\cdot A_{22}^{-1}\cdot A_{21}\right)^{-1}$$

(**) Expresión dada por GOODMAN, N.R. (1965,pag.4).

Podemos tener en cuenta también que:

$$f_{11}^{ZZ}(\lambda)=\left(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)\right)^{-1}=f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)^{-1}$$

luego,

$$\gamma_{YX}^{2}(\lambda)=1-\frac{1}{f_{YY}(\lambda).f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)^{-1}}=1-\frac{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

que nos da la coherencia multiple en la frecuencia λ, como el complemento a uno del cociente entre los espectros de la serie de errores $\varepsilon(t)$ y de la serie $Y(t)$ en la frecuencia λ.

Todo lo obtenido anteriormente para la coherencia multiple puede interpretarse haciendo:

$$\mathrm{Var}\left(\varepsilon(t)\right)=C_{\varepsilon\varepsilon}(0)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda).d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\gamma_{YX}^{2}(\lambda)\right).f_{YY}(\lambda).d\lambda$$

que nos da la variancia de la serie temporal error, resultante de la aproximación de la serie $Y(t)$ mediante una transformación lineal invariante de $\chi(t)$, descompuesta según la frecuencia λ; tendremos que:

$$\mathrm{Var}\left(\varepsilon(t)\right)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{YY}(\lambda).d\lambda-\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_{YX}^{2}(\lambda).f_{YY}(\lambda).d\lambda$$

de donde

$$\mathrm{Var}\left(Y(t)\right)-\mathrm{Var}\left(\varepsilon(t)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\gamma_{YX}^{2}(\lambda).f_{YY}(\lambda).d\lambda$$

que nos permite descomponer la variancia de $Y(t)$ explicada por $\chi(t)$ según la frecuencia λ.

Si consideramos ahora que además de r=1 también es k=1, tendremos simplemente el caso bivariante. (*)

Obteniendose:

$$\alpha=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right).\mu_X$$

$$a(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}A(\lambda).\exp\{iu\lambda\}.d\lambda \qquad \text{con}$$

$$A(\lambda)=f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}=\frac{f_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}$$

siendo entonces, el espectro del error,

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)$$

$$=f_{YY}(\lambda)-\frac{f_{YX}(\lambda).f_{XY}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}$$

$$=f_{YY}(\lambda)-A(\lambda).f_{XY}(\lambda)$$

y

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\frac{f_{YX}(\lambda).f_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda).f_{XX}(\lambda)}=\frac{|\ f_{YX}(\lambda)\ |^2}{f_{YY}(\lambda).f_{XX}(\lambda)}$$

(*) Tratado por ejemplo en BLOOMFIELD,P. (1976,pags.221-223),FISHMAN, G.S. (1969,epig.2.26) y GRANGER,C.W.J. (1964,cap.5).

la coherencia en el caso bivariante. (*)

También podemos expresarla como:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\frac{C^2_{YX}(\lambda)+q^2_{YX}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda).f_{XX}(\lambda)} \qquad (**)$$

(*) Como hace observar Bloomfield,P. (1976,pag.214), es frecuente ver definida la coherencia en términos similares pero dispares; así, puede hablarse de que:

$$\gamma_{YX}(\lambda)=\frac{f_{YX}(\lambda)}{\left(f_{XX}(\lambda).f_{YY}(\lambda)\right)^{1/2}}$$

es la COHERENCIA COMPLEJA en la frecuencia λ entre las series X(t) e Y(t), ver entre otros: KOOPMANS, L.H. (1974,pag.137).
Y también de que:

$$|\gamma_{YY}(\lambda)|=\frac{|f_{YX}(\lambda)|}{\left(f_{XX}(\lambda).f_{YY}(\lambda)\right)^{1/2}}$$

es la COHERENCIA O COEFICIENTE DE COHERENCIA en la frecuencia λ; ver entre otros; FISHMAN, G.S. (1969,epig.2.26) y KOOPMANS, L.H. (1974,pag.137). Entonces $\gamma^2_{YX}(\lambda)=|\gamma_{YX}(\lambda)|^2$, nosotros siguiendo a CHOW, G.C. (1975,epig.48), COX, D.R.-MILLER, H.D. (1965,pag.332), GARCIA-VILLALON, J. (1967,pag.75), GOODMAN,N.R. (1965,pag.VII), GRANGER, C.W.J. (1964,pag.77), HANNAN, E.J. (1970,pag.43) y RAYNER, J.N. (1971,pag.94) entre otros, utilizaremos esta expresión de la coherencia al cuadrado simplemente como la coherencia entre las series Y(t) y X(t) en la frecuencia λ.

(**)Según las definiciones de coespectro y espectro de cuadratura dadas en pag. 64

$f_{YX}(\lambda)=C_{YX}(\lambda)+i.q_{YX}(\lambda)$ y de aquí $|f_{YX}(\lambda)|=\left(C^2_{YX}(\lambda)+q^2_{YX}(\lambda)\right)^{1/2}$

podemos escribir también:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-\frac{f_{YX}(\lambda).f_{XY}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)}.f_{XX}(\lambda)$$

$$=f_{YY}(\lambda)-A(\lambda).\overline{A(\lambda)}.f_{XX}(\lambda)$$

$$=f_{YY}(\lambda)-|A(\lambda)|^2.f_{XX}(\lambda) \qquad (*)$$

luego:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=\left[1-|A(\lambda)|^2.\frac{f_{XX}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}\right].f_{YY}(\lambda)$$

pudiendose escribir la coherencia como:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=|A(\lambda)|^2.\frac{f_{XX}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

Por la expresión de la coherencia en el caso bivariante, como:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\frac{f_{YX}(\lambda).f_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda).f_{XX}(\lambda)}$$

es evidente que $\gamma^2_{YX}(\lambda)=\gamma^2_{XY}(\lambda)$.

Al ser complejo el coeficiente $A(\lambda)$ de regresión de $Y(t)$ sobre $X(t)$, es posible escribirlo en forma binómica como:

(*) Una expresión equivalente puede encontrarse en FISHMAN,G.S. (1969,epig.2.26)

$$A(\lambda)=\frac{f_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}=\frac{C_{YX}(\lambda)+i.q_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}=$$

$$=\frac{C_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}+i\,\frac{q_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}=A_R(\lambda)+i.A_I(\lambda)$$

donde $A_R(\lambda)=\dfrac{C_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}$ es la PARTE REAL del coeficiente complejo $A(\lambda)$ y $A_I(\lambda)=\dfrac{q_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}$ es su PARTE IMAGINARIA.

Tambien podremos escribir el complejo $A(\lambda)$ en forma polar, del siguiente modo:

$$A(\lambda)=G(\lambda).\exp\{i\phi(\lambda)\}$$

siendo,

$$G(\lambda)=|A(\lambda)|=\frac{|f_{YX}(\lambda)|}{f_{XX}(\lambda)}=\frac{\left(C^2_{YX}(\lambda)+q^2_{YX}(\lambda)\right)^{1/2}}{f_{XX}(\lambda)}$$

el modulo de $A(\lambda)$, que se denomina la GANANCIA DE $Y(t)$ sobre $X(t)$ en la frecuencia λ. (*)

(*) Algunos autores definen la ganancia como: $G^2(\lambda)$ el cuadrado de $G(\lambda)$, entre ellos puede citarse a KENDALL, M.G.(1976,pag.130).
Una definición analoga a la nuestra puede verse en GRANGER, C.W.J. (1964,pag.78) donde $G_{XY}(\lambda)$ se define por:

$$f_{YY}(\lambda).G^2_{XY}(\lambda)=f_{XX}(\lambda).\gamma^2_{XY}(\lambda)$$

luego: $G^2_{XY}(\lambda)=\dfrac{f_{XX}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}.\gamma^2_{XY}(\lambda)=\dfrac{f_{YX}(\lambda)^2}{f_{YY}(\lambda)^2}$. Analogamente $G^2_{YX}(\lambda)$.

También CHOW, G.C.(1975,epig.4.8) define la ganancia o coeficiente de regresión como $G_{YX}(\lambda)$

El término ganancia surge al considerar la propiedad c) de los (1,1) filtros lineales:

$$f_Y(\lambda)=|A(\lambda)|^2.f_X(\lambda)=G(\lambda)^2.f_X(\lambda) \qquad (*)$$

pues vemos entonces que la amplitud de la componente de frecuencia λ en X(t) se ve multiplicada por $G(\lambda)^2$ para dar la amplitud de la componente de frecuencia λ de Y(t).

La ganancia tiene las siguientes propiedades:

a) $G(\lambda)$ es no negativa por definición.

b) $G(\lambda)$ es periodica de periodo 2π, pues

$$G(\lambda+2\pi)=\frac{|f_{YX}(\lambda+2\pi)|}{f_{XX}(\lambda+2\pi)}=\frac{|f_{YX}(\lambda)|}{f_{XX}(\lambda)}=G(\lambda) \qquad (**)$$

c) $$G(-\lambda)=|A(-\lambda)|=\frac{|f_{YX}(-\lambda)|}{f_{XX}(-\lambda)}=\frac{|f_{XY}(\lambda)|}{f_{XX}(\lambda)}=$$

$$=\frac{\left(C^2_{XY}(\lambda)+q^2_{XY}(\lambda)\right)^{1/2}}{f_{XX}(\lambda)}=$$

$$=\frac{\{C^2_{YX}(\lambda)+\left(-q_{YX}(\lambda)\right)^2\}^{1/2}}{f_{XX}(\lambda)}=$$

(*) Ver pag. 79

(**) Según propiedad b) pag. 64

$$= \frac{\left(C^2_{YX}(\lambda)+q^2_{YX}(\lambda)\right)^{1/2}}{f_{XX}(\lambda)} = G\ (\lambda) \qquad (*)$$

Además:

$$\phi(\lambda)=\arg\{A(\lambda)\}=\arg\{\frac{f_{YX}(\lambda)}{f_{XX}(\lambda)}\}=\arg\{f_{YX}(\lambda)\} \qquad (**)$$

es la función argumento que está definida en el intervalo $]-\pi,\pi]$, y entonces:

(*) Según propiedades de la matriz espectral $f(\lambda)$ pags. 65 y 66

(**) Al ser $f_{XX}(\lambda)\geq 0$; tenemos que podemos aplicar la siguiente propiedad de los números complejos:

$$\arg\{a+ib\}=\alpha \text{ tal que tg } \alpha=\frac{b}{a} \text{ entonces con } c>0$$

$$\arg\{\frac{a}{c}+i\frac{b}{c}\}=\beta \text{ tal que tg } \beta=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{b}{a} \text{ luego } \beta=\alpha$$

$$\text{Si } c<0 \quad \arg\{\frac{a}{c}+i\frac{b}{c}\}=\beta \text{ tal que tg } \beta=\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}}=\frac{-b}{-a} \text{ luego } \beta=\pi-\alpha$$

$$\phi(\lambda)=\arg\{f_{YX}(\lambda)\} = \arg\{C_{YX}(\lambda)+i.q_{YX}(\lambda)\} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{q_{YX}(\lambda)}{C_{YX}(\lambda)} & \text{con } C_{YX}(\lambda)>0 \\ \operatorname{arctg} \dfrac{q_{YX}(\lambda)}{C_{YX}(\lambda)} +\pi & \text{con } \begin{cases} C_{YX}(\lambda)<0 \\ \text{y} \\ q_{YX}(\lambda)\geq 0 \end{cases} \\ \operatorname{arctg} \dfrac{q_{YX}(\lambda)}{C_{YX}(\lambda)} -\pi & \text{con } \begin{cases} C_{YX}(\lambda)<0 \\ \text{y} \\ q_{YX}(\lambda)<0 \end{cases} \\ \pi/2 & \text{con } C_{YX}(\lambda)=0 \text{ y } q_{YX}(\lambda)>0 \\ -\pi/2 & \text{con } C_{YX}(\lambda)=0 \text{ y } q_{YX}(\lambda)<0 \\ \text{indeterminado} & \text{con } C_{YX}(\lambda)=q_{YX}(\lambda)=0 \end{cases} \quad (*)$$

A, $\phi(\lambda)$ se la denomina FASE O ANGULO DE FASE entre Y(t) y X(t) en la frecuencia λ; y puede interpretarse como el angulo existente entre la componente de frecuencia λ en X(t) y la correspondiente componente en Y(t), teniendo las siguientes propiedades:

(*) Esta definición de la función argumento es necesaria ya que la función arctg definida en R, toma valores en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ y asigna el mismo valor al arco resultante de dividir dos números positivos que al que resulta de dividir dos negativos, siendo los argumentos de los correspondientes complejos evidentemente distintos. Ver Bloomfield, P. (1976, pag. 12).

a) $\phi(\lambda)$ es periodica con periodo 2π, pues:

$\phi(\lambda+2\pi)=\arg\{f_{YX}(\lambda+2\pi)\}=\arg\{f_{YX}(\lambda)\}=\phi(\lambda)$

b) $\phi(-\lambda)=\arg\{f_{YX}(-\lambda)\}=\arg\{\overline{f_{YX}(\lambda)}\}=$

$=-\arg\{f_{YX}(\lambda)\}=-\phi(\lambda)$

luego la Fase es antisimétrica respecto al origen $\lambda=0$.

Y por tanto $\phi(0)=-\phi(0)$ nos lleva a que $\phi(0)=0$.

c) En ocasiones se utiliza una función de la Fase:

$$\frac{d\phi(\lambda)}{d\,\lambda}=\frac{d\left(\arg\{f_{YX}(\lambda)\}\right)}{d\,\lambda}=\frac{d\left(\arg\{A(\lambda)\}\right)}{d\,\lambda}$$

a la que se le denomina RETARDO CONJUNTO de $Y(t)$ sobre $X(t)$ alrededor de la frecuencia λ.

Cuya interpretación es la siguiente: (*)

Consideremos en particular el (1,1) filtro lineal sumativo $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ tal que:

$$a(u)=\begin{cases}\alpha & \text{para } u=u_0\varepsilon Z\\ 0 & \text{para } u\varepsilon Z-\{u_0\}\end{cases} \qquad (**)$$

(*) Ver Hannan, E.J. (1970,pag.60) para una aproximación similar, y Hannan, E.J. y Thompson,P.J. (1973, pags. 241 y sigts).

(**) Ver por ejemplo Otero, J.M. (1978,pag.301) donde trata el modelo con un retardo fijo.

entonces,

$$Y(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u).X(t-u)=\alpha.X(t-u_0)$$

La función de transferencia será:

$$A(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u).\exp\{-i\lambda u\}=\alpha.\exp\{-i\lambda u_0\}$$

La ganancia será, $G(\lambda)=|\alpha|$, constante en todas las frecuencias y el angulo de Fase será:

$$\phi(\lambda)=\begin{cases}-\lambda u_0 \pmod{2\pi} & \alpha>0\\ \pi-\lambda u_0 \pmod{2\pi} & \alpha<0\end{cases}$$

y $\dfrac{d\,\phi(\lambda)}{d\lambda}=-u_0$ que nos da un retardo $-u_0$ constante para todo λ de Y(t) respecto a X(t). Si $u_0>0$, Y(t) esta retardada respecto a X(t) y si $u_0<0$, Y(t) esta adelantada o restardada negativamente respecto a X(t).

En este caso sencillo al ser la Fase una función lineal de λ su derivada es constante, pero en general esto no ocurre, no obstante si $\phi(\lambda)$ es lisa alrededor de una frecuencia λ_0 podemos aproximarla por su desarrollo en serie con los dos primeros términos y obtener:

$$\phi(\lambda)\simeq\phi(\lambda_0)+(\lambda-\lambda_0).\phi'(\lambda_0)$$

esto no es más que la aproximación de la función $\phi(\lambda)$ por su tangente en λ_0. Entonces:

$$\phi(\lambda) \simeq \phi(\lambda_0) - \lambda_0 . \phi'(\lambda_0) + \lambda . \phi'(\lambda_0)$$

que es una función lineal en λ, y $\phi'(\lambda_0)$ es su coeficiente angular, que se prodrá interpretar como el retardo de $Y(t)$ respecto a $X(t)$ en una banda de frecuencia alrededor de λ_0.

A partir de la coherencia en el caso bivariante podemos interpretar la coherencia multiple cuando $r=1$ y $k\geq 1$ de la siguiente forma;

$$Y(t) = \alpha + \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) . \chi(u) + \varepsilon(t)$$

puede escribirse como:

$$Y(t) = Y^*(t) + \varepsilon(t) \qquad \text{siendo}$$

$$Y^*(t) = \alpha + \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) . \chi(u)$$

una transformación lineal de la serie k-variante $\chi(t)$.

Analicemos la coherencia entre las series univariantes $Y(t)$ e $Y^*(t)$.

$$\gamma^2_{YY^*}(\lambda) = \frac{|f_{YY^*}(\lambda)|^2}{f_{YY}(\lambda) . f_{Y^*Y^*}(\lambda)} = \frac{|f_{Y^*Y}(\lambda)|^2}{f_{YY}(\lambda) . f_{Y^*Y^*}(\lambda)}$$

Obtengamos para ello $f_{Y^*Y^*}(\lambda)$ y $f_{Y^*Y}(\lambda)$.

a) $f_{Y*Y*}(\lambda)=A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)'}$

como vimos en pag. 79 al analizar el espectro del output de un filtro lineal sumativo, ya que la adición de α no influye en el cálculo de $C_{Y*Y*}(u)$ y por lo tanto tampoco influye en $f_{Y*Y*}(\lambda)$.

b) $C_{Y*Y}(u)=E\{(Y^*(t+u)-\mu_{Y*})\cdot(Y(t)-\mu_Y)\}$

$$=E\{(\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t+u-v)\cdot(X(v)-\mu_X)\cdot(Y(t)-\mu_Y)\}$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t+u-v)\cdot E\{(X(v)-\mu_X)\cdot(Y(t)-\mu_Y)\}$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t+u-v)\cdot C_{XY}(v-t)$$

y haciendo el cambio de variables v-t=w, tenemos que:

$$C_{Y*Y}(u)=\sum_{w=-\infty}^{\infty}a(u-w)\cdot C_{XY}(w)$$

entonces:

$$f_{Y*Y}(u)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{Y*Y}(u)\cdot\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty}a(u-w)\cdot C_{XY}(w)\cdot\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{w=-\infty}^{\infty}C_{XY}(w)'\cdot\exp\{-i\lambda w\}\cdot$$

$$\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u-z)'\cdot\exp\{-i\lambda(u-w)\}=$$

$$=\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)'\cdot A(\lambda)'=A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda) \qquad (*)$$

con lo que:

$$\gamma^2_{YY*}(\lambda)=\frac{|\;A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)\;|^2}{f_{YY}(\lambda)\cdot A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'}$$

$$=\frac{A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)\cdot\overline{(A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda))}'}{f_{YY}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'}$$

$$=\frac{A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'}{f_{YY}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'}=\frac{A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}=$$

$$=\frac{\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}=\gamma^2_{YX}(\lambda)$$

luego hemos obtenido que el coeficiente de coherencia multiple $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ entre la serie univariante Y(t) y la k-variante $\mathbf{X}(t)$ es igual al coeficiente de coherencia entre la misma serie Y(t) y la serie univariante Y*(t) que es una transformación lineal invariante de la serie k-variante $\mathbf{X}(t)$.

También podemos obtener la coherencia multiple como:

$$\frac{f_{Y*Y*}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}=\frac{A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'}{f_{YY}(\lambda)}=$$

(*) Ya que: $a(u-w)\cdot C_{XY}(w)=(a(u-w)\cdot C_{XY}(w))'=C_{XY}(w)'\cdot a(u-w)'$ y

$\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)'\cdot A(\lambda)'=(A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda))'=A(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)$ por ser ambos escalares

$$= \frac{\delta_{YX}(\lambda)\cdot\delta_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\delta_{XX}(\lambda)\cdot\delta_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\delta_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

$$= \frac{\delta_{YX}(\lambda)\cdot\delta_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\delta_{XY}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)} = \gamma^2_{YX}(\lambda)$$

luego obtenemos $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ como cociente de los espectros de la serie $Y^*(t)$, transformación lineal invariante de la serie $X(t)$ que mejor se adapta a la serie $Y(t)$ y el espectro de la propia serie $Y(t)$. Entonces:

$$\frac{f_{Y^*Y^*}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)} = 1 - \frac{f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)} \qquad \text{y por tanto,}$$

$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{Y^*Y^*}(\lambda)$, luego $f_{YY}(\lambda)=f_{Y^*Y^*}(\lambda)+f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ e integrando entre $-\pi$ y π, tenemos:

$$\mathrm{Var}\left(Y(t)\right)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{YY}(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi} f_{Y^*Y^*}(\lambda)\,d\lambda+\int_{-\pi}^{\pi} f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\mathrm{Var}\left(Y^*(t)\right)+\mathrm{Var}\left(\varepsilon(t)\right)$$

que nos dá la variancia de la serie $Y(t)$ descompuesta en la suma de la variancia de la serie $Y^*(t)$ transformada lineal de la $X(t)$ y la variancia de la serie residuo de la regresión $\varepsilon(t)$; pero además, disponemos de la descomposición de estas variancias en el campo de la frecuencia λ, entre $-\pi$ y π.

B) En segundo lugar fijemos nuestra atención en la serie r-variante $Y(t)$ y la serie k_1-variante $X_1(t)$.

Consideremos entonces la relación:

$$Y(t)=\alpha_1+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a_1(t-u).X_1(u)+\varepsilon_1(t)$$

donde aquí $\varepsilon_1(t)$ será la serie temporal error, resultante de aproximar la serie $Y(t)$ mediante una versión filtrada de unicamente $k_1<k$ componentes $X_1(t)$ de $X(t)$. Como veremos el modelo resultante es simbolicamente idéntico al estudiado anteriormente, con lo que los resultados del anterior se extenderán a éste sin más que añadir el correspondiente subindice 1. Así el vector k-variante α_1 y el (k,r) filtro lineal sumativo$\{a_1(t-u)\}_{u\varepsilon Z}$ que hacen menor el error $\varepsilon_1(t)$ en el mismo sentido que antes, vendrán dados por:

$$\alpha_1=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} a_1(u)\right).\mu_{X_1} \qquad \text{y}$$

$$a_1(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} A_1(\lambda).\exp\{\ iu\lambda\}d\lambda$$

con $A_1(\lambda)=f_{YX_1}(\lambda).f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}$ y siendo,

$$f_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{YX_1}(\lambda).f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}.f_{X_1Y}(\lambda)=$$
$$=f_{YY}(\lambda)^{1/2}.\{I_r-f_{YY}(\lambda)^{-1/2}.f_{YX_1}(\lambda).f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}.$$
$$.f_{X_1Y}(\lambda).f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\}.f_{YY}(\lambda)^{1/2}$$

el ESPECTRO MARGINAL DE LOS ERRORES.

Podemos también de forma similar definir:

$$\gamma^2_{YX_1}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

como la MATRIZ DE COHERENCIA MARGINAL que nos dá la medida de la asociación lineal entre $Y(t)$ y la serie $X_1(t)$ que pue̲de considerarse como marginal de $X(t)$ al estar formada por $k_1<k$ componentes de entre las k de $X(t)$, pudiendose escribír también:

$$f_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot\left(I_r-\gamma^2_{YX_1}(\lambda)\right)\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}$$

Comparemos seguidamente $\gamma^2_{YX_1}(\lambda)$ con $\gamma^2_{YX}(\lambda)$:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

$$=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\left(f_{YX_1}(\lambda)\,\vdots\,f_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\begin{pmatrix} f_{X_1X_1}(\lambda) & \vdots & f_{X_1X_2}(\lambda)\\ \cdots & \vdots & \cdots\\ f_{X_2X_1}(\lambda) & \vdots & f_{X_2X_2}(\lambda)\end{pmatrix}^{-1}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} f_{X_1Y}(\lambda)\\ \cdots\\ f_{X_2Y}(\lambda)\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}=$$

$$=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\left(f_{YX_1}(\lambda)\,\vdots\,f_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}+f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot H\cdot f_{X_2X_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1} & \vdots & -f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot H\\ \cdots & \vdots & \cdots\\ -H\cdot f_{X_2X_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1} & \vdots & H\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \sigma_{X_1Y}(\lambda) \\ \cdots\cdots \\ \sigma_{X_2Y}(\lambda) \end{pmatrix}\cdot\sigma_{YY}(\lambda)$$

con $H=(\sigma_{X_2X_2}(\lambda)-\sigma_{X_2X_1}(\lambda)\cdot\sigma_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{X_1X_2}(\lambda))^{-1}$ (*)

de aquí:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\left(\sigma_{YX_1}(\lambda)\,\vdots\,\sigma_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\left[\begin{pmatrix} \sigma_{X_1X_1}(\lambda)^{-1} & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\begin{pmatrix} \sigma_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{X_1X_2}(\lambda)\cdot H\cdot\sigma_{X_2X_1}(\lambda)\cdot\sigma_{X_1X_1}(\lambda)^{-1} & \vdots & -\sigma_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{X_1X_2}(\lambda)\cdot H \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots \\ -H\cdot\sigma_{X_2X_1}(\lambda)\cdot\sigma_{X_1X_1}(\lambda)^{-1} & \vdots & H \end{pmatrix}\right]$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \sigma_{X_1Y}(\lambda) \\ \cdots\cdots \\ \sigma_{X_2Y}(\lambda) \end{pmatrix}\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2} =$$

$$=\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{YX_1}(\lambda)\cdot\sigma_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{X_1Y}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}+$$

(*) Aquí hemos utilizado una expresión simétrica a la que se le dió en la nota de la pag. 160 ,para la inversa de:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \vdots & A_{12} \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ A_{21} & \vdots & A_{22} \end{pmatrix}$$ que podemos ver es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot H\cdot A_{21}\cdot A_{11}^{-1} & \vdots & -A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot H \\ \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ -H\cdot A_{21}\cdot A_{11}^{-1} & \vdots & H \end{pmatrix} \text{con } H=\left(A_{22}-A_{21}\cdot A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\right)^{-1}$$

$$+f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\left(f_{YX_1}(\lambda) \,\vdots\, f_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{c:c} f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot H\cdot f_{X_2X_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1} & -f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot H \\ \hdashline -H\cdot f_{X_2X_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1} & H \end{array}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{c} f_{X_1Y}(\lambda) \\ \hdashline f_{X_2Y}(\lambda) \end{array}\right)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2} \geq$$

$$\geq f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2} = \gamma^2_{YX_1}(\lambda) \qquad (*)$$

(*) H es definida positiva al ser como veremos despues la inversa de la matriz espectral de los errores que surgen al explicar $X_2(t)$ mediante $X_1(t)$. Entonces llamando $K = f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1X_2}(\lambda)$ tenemos que:

$\left(\begin{array}{c:c} K\cdot H\cdot \overline{K}' & -K\cdot H \\ \hdashline -H\cdot\overline{K}' & H \end{array}\right)$ es definida positiva, pues para cualquier vector α,β de dimensión conveniente:

$$(\alpha \,\vdots\, \beta)\cdot\left(\begin{array}{c:c} K\cdot H\cdot \overline{K}' & -K\cdot H \\ \hdashline -H\cdot\overline{K}' & H \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c} \overline{\alpha}' \\ \hdashline \overline{\beta}' \end{array}\right) = \left(\alpha.K\cdot H\cdot\overline{K}' - \beta.H.\overline{K}' \,\vdots\, -\alpha.K\cdot H + \beta.H\right)\cdot\left(\begin{array}{c} \overline{\alpha}' \\ \hdashline \overline{\beta}' \end{array}\right) =$$

$$= \alpha.K.H.\overline{K}'.\overline{\alpha}' - \beta.H.\overline{K}'.\overline{\alpha}' - \alpha.K.H.\overline{\beta}' - \beta.H.\overline{\beta}' = \alpha.K.H.(\overline{K}'.\overline{\alpha}' - \overline{\beta}') - \beta.H.(\overline{K}'.\overline{\alpha}' - \overline{\beta}')$$

$$= (\alpha.K-\beta).H.\overline{(\alpha.K-\beta)}' \geq 0$$

Esto nos dice que para cualquier λ, $\gamma^2_{YX}(\lambda)\geq\gamma^2_{YX_1}(\lambda)$ y por comparación de estas matrices de coherencia, podremos poner de relieve la aportación adicional a la explicación de $Y(t)$, que supone la inclusión de la serie $X_2(t)$ en el modelo en la que ya esta presente la serie $X_1(t)$.

Si suponemos ahora que las series $X_1(t)$ y $X_2(t)$ tienen coherencia nula para toda frecuencia λ. Podemos escribir según lo visto en pag. 157 que las matrices $A(\lambda)$ y $A^*(\lambda)$ de los coeficientes complejos de la regresión de $X_1(t)$ sobre $X_2(t)$ y de $X_2(t)$ sobre $X_1(t)$ respectivamente serán ambas nulas, con lo que:

$$A^*(\lambda)=f_{X_2X_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}=0$$

y a partir de este resultado, tenemos:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\gamma^2_{YX_1}(\lambda)+f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\left(f_{YX_1}(\lambda)\cdot f_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{X_1Y}(\lambda) \\ \cdots \\ f_{X_2Y}(\lambda)\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}=$$

$$=\gamma^2_{YX_1}(\lambda)+\gamma^2_{YX_2}(\lambda) \qquad (*)$$

(*) A este resultado puede llegarse facilmente haciendo :

$f_{X_2X_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}=0$ en la última expresión de $\gamma^2_{YX}(\lambda)$

En particular para r=1

$$\gamma^2_{YX_1}(\lambda)=\frac{f_{YX_1}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

y $\gamma^2_{YX}(\lambda)-\gamma^2_{YX_1}(\lambda)\geq 0$ pudiéndose escribir entonces:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) &= \left(1-\gamma^2_{YX}(\lambda)\right)\cdot f_{YY}(\lambda) \\ &= \left(1-\gamma^2_{YX_1}(\lambda)-(\gamma^2_{YX}(\lambda)-\gamma^2_{YX_1}(\lambda))\right)\cdot f_{YY}(\lambda) \\ &= \left(1-\gamma^2_{YX_1}(\lambda)\right)\cdot f_{YY}(\lambda)-\left(\gamma^2_{YX}(\lambda)-\gamma^2_{YX_1}(\lambda)\right)\cdot f_{YY}(\lambda) \\ &= f_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(\lambda)-\left(\gamma^2_{YX}(\lambda)-\gamma^2_{YX_1}(\lambda)\right)\cdot f_{YY}(\lambda)\leq f_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(\lambda) \end{aligned}$$

que nos dá para cada λ, la reducción que se observa en el espectro de los errores en la relación de $Y(t)$ respecto a $X_1(t)$ al añadir en el modelo $X_2(t)$.

Hemos considerado por tanto en esta parte, la coherencia marginal $\gamma^2_{YX_1}(\lambda)$ comparada con la que podríamos denominar coherencia total $\gamma^2_{YX}(\lambda)$; esta comparación nos permite estudiar los efectos que en cada frecuencia λ produce la incorporación en el modelo como variable explicativa de la serie $X_2(t)$.

Si $X_1(t)$ y $X_2(t)$ tienen coherencia nula en todas las frecuencias λ, tendremos:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(\lambda)-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda) \qquad (*)$$

ya que:

$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\gamma^2_{YX_1}(\lambda)+\gamma^2_{YX_2}(\lambda)$, y obtenemos el espectro del residuo en la regresión de Y(t) sobre $\chi(t)$ como el espectro del residuo en la regresión de Y(t) sobre $\chi_1(t)$ solamente, menos la parte de Y(t) explicada por $\chi_2(t)$, que viene dada por $\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)$, y que se resta directamente de $f_{\varepsilon_1\varepsilon_1}(\lambda)$ por tener las series $\chi_1(t)$ y $\chi_2(t)$ coherencia nula.

C) En tercer lugar, es importante considerar el efecto que tiene $\chi_1(t)$ sobre $Y(t)$, pero estando ambas series libres de la influencia de $\chi_2(t)$. (**)

En lo que sigue consideraremos:

$$W(t)=\begin{bmatrix} Y(t) \\ \cdots \\ \chi_1(t) \end{bmatrix}$$

con lo que trataremos de explicar el comportamiento de la serie $(r+k_1)$-variante $W(t)$ mediante la correspondiente

---

(*) En Fishman,G.S. (1.969,epig.2.26.final) puede hallarse una expresión equivalente para el caso particular en que $\chi_1(t)$ y $\chi_2(t)$ sean series univariantes, o sea, cuando $k_1=k_2=1$.

(**) Aquí discrepamos del enfoque dado por Fishman,G.S.(1.969,epig. 2.30) al considerar solamente la eliminación de la influencia de $\chi_2(t)$ en $\chi_1(t)$ y dejar a $Y(t)$ invariable.

versión filtrada de $X_2(t)$, considerando, entonces, los residuos correspondientes, como la parte de las series $Y(t)$ y $X_1(t)$ que no se vé influenciada linealmente por la serie $X_2(t)$; escribiremos por tanto:

$$\begin{pmatrix} Y(t) \\ \cdots\cdots \\ X_1(t) \end{pmatrix} = W(t) = \beta + \sum_{u=-\infty}^{\infty} b(t-u) \cdot X_2(u) + \xi(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots\cdots \\ \beta_2 \end{pmatrix} + \sum_{u=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} b_1(t-u) \\ \cdots\cdots \\ b_2(t-u) \end{pmatrix} \cdot X_2(u) + \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \cdots\cdots \\ \xi_2(t) \end{pmatrix}$$

Como ya sabemos el vector β y el filtro $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ que hacen mínimos los errores, vendrán dados por:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \cdots \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \beta = \mu_W - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u) \right) \cdot \mu_{X_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdots \\ \mu_{X_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1(u) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_2(u) \end{pmatrix} \cdot \mu_{X_2} = \begin{pmatrix} \mu_Y - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1(u) \right) \cdot \mu_{X_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_{X_1} - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b_2(u) \right) \cdot \mu_{X_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1(u) \\ \cdots\cdots \\ b_2(u) \end{pmatrix} = b(u) = (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} B(\lambda) \cdot \exp\{iu\lambda\} d\lambda =$$

$$= (2\pi)^{-1} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} B_1(\lambda) \\ \cdots\cdots \\ B_2(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \exp\{iu\lambda\} d\lambda =$$

$$=\begin{pmatrix} (2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} B_1(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} B_2(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda \end{pmatrix}$$

con : $\begin{pmatrix} B_1(\lambda) \\ \cdots\cdots \\ B_2(\lambda) \end{pmatrix} = B(\lambda) = f_{WX_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}$

$$=\begin{pmatrix} f_{YX_2}(\lambda) \\ \cdots\cdots \\ f_{X_1X_2}(\lambda) \end{pmatrix}\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} f_{YX_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1} \end{pmatrix}$$

y entonces el espectro de los errores viene dado por:

$$\begin{pmatrix} f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) & \vdots & f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) & \vdots & f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) \end{pmatrix} = f_{\xi\xi}(\lambda) = f_{WW}(\lambda) - f_{WX_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_2W}(\lambda)$$

$$=\begin{pmatrix} f_{YY}(\lambda) & \vdots & f_{YX_1}(\lambda) \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ f_{X_1Y}(\lambda) & \vdots & f_{X_1X_1}(\lambda) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_{YX_2}(\lambda) \\ \cdots\cdots \\ f_{X_1X_2}(\lambda) \end{pmatrix}\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\left(f_{X_2Y}(\lambda) \vdots f_{X_2X_1}(\lambda)\right)$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} f_{YY}(\lambda)-f_{YX_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_2Y}(\lambda) & f_{YX_1}(\lambda)-f_{YX_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_2X_1}(\lambda) \\ \hdashline f_{X_1Y}(\lambda)-f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_2Y}(\lambda) & f_{X_1X_1}(\lambda)-f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_2X_1}(\lambda) \end{array}\right]$$

por su significado simbolizaremos explícitamente las variables que han intervenido en la obtención de $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$, escribiendo:

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=f_{WW.X_2}(\lambda) \qquad \text{y por tanto:}$$

$$\left[\begin{array}{c:c} f_{\xi_1\xi_1}(\lambda) & f_{\xi_1\xi_2}(\lambda) \\ \hdashline f_{\xi_2\xi_1}(\lambda) & f_{\xi_2\xi_2}(\lambda) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} f_{YY.X_2}(\lambda) & f_{YX_1.X_2}(\lambda) \\ \hdashline f_{X_1Y.X_2}(\lambda) & f_{X_1X_1.X_2}(\lambda) \end{array}\right]$$

donde, $f_{YY.X_2}(\lambda)$ será la matriz espectral de la serie $Y(t)$ libre de la influencia de la serie $X_2(t)$ y $f_{YX_1.X_2}(\lambda)$ será la matriz espectral-cruzada de las series $Y(t)$ y $X_1(t)$ libres de la influencia lineal de la serie $X_2(t)$.

Interpretandose todas las demás de igual forma, entonces:

$$W(t)=\beta+\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(t-u)\cdot X_2(u)+\xi(t)=\tilde{X}_2(t)+\xi(t)$$

Determinemos $\gamma^2_{\tilde{X}_2X_2}(\lambda)$ y $\gamma^2_{\xi X_2}(\lambda)$, para ello calcularemos:

$$f_{\tilde{X}_2\tilde{X}_2}(\lambda)=B(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)\cdot\overline{B(\lambda)'} \qquad (*)$$

(*) Como vimos en pag. 172 para el caso de $\tilde{X}_2(t)$ univariante.

y $f_{\tilde{X}_2 X_2}(\lambda)=B(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)$, entonces:

$$\gamma^2_{\tilde{X}_2X_2}(\lambda)=f_{\tilde{X}_2\tilde{X}_2}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{\tilde{X}_2X_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_2\tilde{X}_2}(\lambda)\cdot f_{\tilde{X}_2\tilde{X}_2}(\lambda)^{-1/2}$$

$$=\left(B(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)\cdot\overline{B(\lambda)'}\right)^{-1/2}\cdot\left(B(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)\right)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(f_{X_2X_2}(\lambda)\cdot\overline{B(\lambda)'}\right)\cdot\left(B(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)\cdot\overline{B(\lambda)'}\right)=I_{r+k_1}$$

y como era de esperar $X_2(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ son perfectamente coheren_ tes, pues $\tilde{X}_2(t)$ no es otra cosa que la transformación lineal de $X_2(t)$. Además, como:

$$C_{\xi X_2}(u)=E\{\xi(t+u)\cdot(X_2(t)-\mu_{X_2})'\}$$

$$=E\left\{\left[(W(t+u)-\mu_W)-\sum_{v=-\infty}^{\infty}b(t+u-v)\cdot(X_2(v)-\mu_{X_2})\right]\cdot(X_2(t)-\mu_{X_2})'\right\}$$

$$=C_{WX_2}(u)-\sum_{v=-\infty}^{\infty}b(t+u-v)\cdot C_{X_2X_2}(v-t)$$

$$=C_{XW_2}(u)-\sum_{z=-\infty}^{\infty}b(z+u)\cdot C_{X_2X_2}(-z)$$

entonces:

$$f_{\xi X_2}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{\xi X_2}(u)\cdot\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left(C_{WX_2}(u)-\sum_{z=-\infty}^{\infty}b(z+u)\cdot C_{X_2X_2}(-z)\right)\cdot\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=f_{WX_2}(\lambda)-\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(z+u)\exp\{-i\lambda(z+u)\}\cdot$$

$$\cdot(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{z=-\infty}^{\infty}C_{X_2X_2}(-z)\cdot\exp\{i\lambda z\}$$

$$=\delta_{wx_2}(\lambda)-B(\lambda)\cdot\delta_{x_2x_2}(\lambda)$$
$$=\delta_{wx_2}(\lambda)-(\delta_{wx_2}(\lambda)\cdot\delta_{x_2x_2}(\lambda)^{-1})\cdot\delta_{x_2x_2}(\lambda)=0$$

luego, $\gamma^2_{\xi x_2}(\lambda)=0$; esto nos indica que:

$$W(t)=\begin{bmatrix}Y(t)\\ \cdots\\ X_1(t)\end{bmatrix}=\tilde{X}_2(t)+\xi(t)$$

queda descompuesta en la suma de dos series, tales que la primera $\tilde{X}_2(t)$ es perfectamente coherente con $X_2(t)$ y la segunda $\xi(t)$ es perfectamente incoherente con $X_2(t)$, de esta forma en $\xi(t)$ tenemos el resto de la relación lineal entre:

$$W(t)=\begin{bmatrix}Y\ (t)\\ \cdots\\ X_1(t)\end{bmatrix} \quad \text{y } X_2(t).$$

Consideremos ahora la relación que nos de $\xi_1(t)$ mediante una cierta versión filtrada de $\xi_2(t)$, esto es, estaremos relacionando $Y(t)$ con $X_1(t)$ despues de haber eliminado de ambas la parte que esta relacionada linealmente con $X_2(t)$, dicha relación vendrá dada por:

$$\xi_1(t)=\delta+\sum_{u=-\infty}^{\infty}d(t-u)\cdot\xi_2(u)+\eta(t)$$

Alcanzándose el mínimo de los residuos $\eta(t)$ al hacer:

$$\delta=\mu_{\xi_1}-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d(u)\right).\mu_{\xi_2}=0 \qquad \text{y} \qquad (*)$$

$$d(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{D}(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda \qquad \text{con:}$$

$$\mathrm{D}(\lambda)=f_{\xi_1\xi_2}(\lambda).f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}=f_{YX_1.X_2}(\lambda).f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}$$

$$=\left(f_{YX_1}(\lambda)-f_{YX_2}(\lambda).f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}.f_{X_2X_1}(\lambda)\right).$$

$$.\left(f_{X_1X_1}(\lambda)-f_{X_1X_2}(\lambda).f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}.f_{X_2X_1}(\lambda)\right)^{-1}$$

A $\mathrm{D}(\lambda)$ la denominamos, MATRIZ DE LOS COEFICIENTES COMPLEJOS DE LA REGRESION PARCIAL de $Y(t)$ sobre $X_1(t)$, una vez eliminada la influencia lineal de $X_2(t)$ sobre ambas series.

El coeficiente de regresión parcial para el caso $r=k_1=1$, será:

$$D(\lambda)=\frac{f_{YX_1.X_2}(\lambda)}{f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)} \qquad (**)$$

la correspondiente MATRIZ ESPECTRAL DE ERRORES PARCIAL, vendrá dada por:

(*) Ya que como vimos en pag. 154 $E\left(\xi_1(t)\right)=E\left(\xi_2(t)\right)=0$

(**) Ver expresión equivalente en Granger,C.W.J. (1964,pag.93).

$$
\begin{aligned}
f_{\eta\eta}(\lambda) &= f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)-f_{\xi_1\xi_2}(\lambda)\cdot f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{\xi_2\xi_1}(\lambda)= \\
&= f_{YY.X_2}(\lambda)-f_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y.X_2}(\lambda)= \\
&= f_{YY.X_2}(\lambda)^{1/2}\cdot\Big[I_r-f_{YY.X_2}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot \\
&\quad \cdot f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y.X_2}(\lambda)\cdot f_{YY.X_2}(\lambda)^{-1/2}\Big]\cdot \\
&\quad \cdot f_{YY.X_2}(\lambda)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

De aquí podemos definir la MATRIZ DE COHERENCIA PARCIAL, que nos dá la medida de la asociación lineal entre la serie r-variante $Y(t)$ y la serie k_1-variante $X_1(t)$ en la frecuencia λ, habiendo eliminado previamente tanto de $Y(t)$ como de $X_1(t)$ la influencia lineal debida a la serie k_2-variante $X_2(t)$, como:

$$
\begin{aligned}
\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda) &= f_{YY.X_2}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}\cdot \\
&\quad \cdot f_{X_1Y.X_2}(\lambda)\cdot f_{YY.X_2}(\lambda)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Para el caso en que r=1, la coherencia multiple parcial entre Y(t) y $X_1(t)$ previa eliminación de la influencia de $X_2(t)$ será:

$$
\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)=\frac{f_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y.X_2}(\lambda)}{f_{YY.X_2}(\lambda)}
$$

y en particular para $r=k_1=1$

$$\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)=\frac{f_{YX_1.X_2}(\lambda).f_{X_1Y.X_2}(\lambda)}{f_{YY.X_2}(\lambda).f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)}$$

$$=\frac{|f_{YX_1.X_2}(\lambda)|^2}{f_{YY.X_2}(\lambda).f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)} \qquad (*)$$

A este mismo resultado podemos llegar, razonando análogamente a lo hecho en pag. 173 , pues de:

$$\xi_1(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} d(t-u) * \xi_2(t)+\eta(t) \qquad (**)$$

podemos escribir:

$$\xi_1(t)=\xi_1^*(t)+\eta(t)$$

y entonces,

$$\frac{f_{\xi_1^*\xi_1^*}(\lambda)}{f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)}=\frac{\mathrm{D}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{\xi_2\xi_2}(\lambda)\cdot\overline{\mathrm{D}(\lambda)}'}{f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)}=$$

$$=\frac{\mathfrak{f}_{\xi_1\xi_2}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{\xi_2\xi_2}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{\xi_2\xi_1}(\lambda)}{f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)}=$$

(*) Expresión análoga a la dada por Granger,C.W.J. (1964,pag.92).

(**) Ver pag. 186, teniendo en cuenta que $\delta=0$.

$$= \frac{\mathscr{f}_{\xi_1\xi_2}(\lambda)\cdot\mathscr{f}_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathscr{f}_{\xi_2\xi_1}(\lambda)}{f_{\xi_1\xi_1}(\lambda)} = \gamma^2_{\xi_1\xi_2}(\lambda) = \gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)$$

Además, como por pag. 184

$$f_{YX_1.X_2}(\lambda) = f_{YX_1}(\lambda) - \mathscr{f}_{YX_2}(\lambda)\cdot\mathscr{f}_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathscr{f}_{X_2X_1}(\lambda)$$

$$f_{YY.X_2}(\lambda) = f_{YY}(\lambda) - \mathscr{f}_{YX_2}(\lambda)\cdot\mathscr{f}_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathscr{f}_{X_2Y}(\lambda)$$

$$= \left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\ \ .f_{YY}(\lambda)\right) \qquad (*)$$

$$f_{X_1X_1.X_2}(\lambda) = f_{X_1X_1}(\lambda) - \mathscr{f}_{X_1X_2}(\lambda)\cdot\mathscr{f}_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathscr{f}_{X_2X_1}(\lambda)$$

$$= \left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda) \qquad (*)$$

tenemos que:

$$\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda) = \frac{|f_{YX_1.X_2}(\lambda)|^2}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)}$$

$$= \frac{|f_{YX_1.X_2}(\lambda)|^2}{f_{YY}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1}(\lambda)}\cdot\frac{1}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

$$= \frac{|f_{YX_1.X_2}(\lambda)|^2}{|f_{YX_1}(\lambda)|^2}\cdot\frac{\gamma^2_{YX_1}(\lambda)}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

(*) Según definición de la coherencia multiple de la pag. 159

$$=\left|\frac{f_{YX_1.X_2}(\lambda)}{f_{YX_1}(\lambda)}\right|^2 \cdot \frac{\gamma^2_{YX_1}(\lambda)}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

$$=\left|\frac{f_{YX_1}(\lambda)-\mathfrak{f}_{YX_2}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{X_2X_1}(\lambda)}{f_{YX_1}(\lambda)}\right|^2 \cdot$$

$$\cdot\frac{\gamma^2_{YX_1}(\lambda)}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

$$=\left|1-\frac{\mathfrak{f}_{YX_2}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{X_2X_1}(\lambda)}{f_{YX_1}(\lambda)}\right|^2 \cdot$$

$$\cdot\frac{\gamma^2_{YX_1}(\lambda)}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

en el caso de que $k_2=1$ tendremos:

$$\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)=\left(1-\frac{|f_{YX_2}(\lambda)|\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot|f_{X_2X_1}(\lambda)|}{|f_{YX_1}(\lambda)|}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot\frac{\gamma^2_{YX_1}(\lambda)}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

$$= \left[1 - \frac{\dfrac{|f_{YX_2}(\lambda)|}{\left(f_{YY}(\lambda).f_{X_2X_2}(\lambda)\right)^{1/2}} \cdot \dfrac{|f_{X_2X_1}(\lambda)|}{\left(f_{X_2X_2}(\lambda).f_{X_1X_1}(\lambda)\right)^{1/2}}}{\dfrac{|f_{YX_1}(\lambda)|}{\left(f_{YY}(\lambda).f_{X_1X_1}(\lambda)\right)^{1/2}}} \right]^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{\gamma^2_{YX_1}(\lambda)}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right).\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

$$= \frac{\left(|\gamma_{YX_1}(\lambda)|-|\gamma_{YX_2}(\lambda)|.|\gamma_{X_2X_1}(\lambda)|\right)^2}{\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right).\left(1-\gamma^2_{X_1X_2}(\lambda)\right)}$$

Por último en el caso en que, $r=k_1=1$, podemos considerar el coeficiente complejo $D(\lambda)$ de la regresión parcial de $Y(t)$ sobre $X_1(t)$, una vez eliminada de ambas series la influencia de $X_2(t)$

$$D(\lambda) = \frac{f_{YX_1.X_2}(\lambda)}{f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)}$$

que tendrá la siguiente expresión binómica:

$$D(\lambda)=\frac{C_{YX_1.X_2}(\lambda)+i.q_{YX_1.X_2}(\lambda)}{f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)}$$

$$=\frac{C_{YX_1.X_2}(\lambda)}{f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)}+i.\frac{q_{YX_1.X_2}(\lambda)}{f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)}=D_1(\lambda)+i.D_2(\lambda)$$

donde con $C_{YX_1.X_2}(\lambda)$ y $q_{YX_1.X_2}(\lambda)$, indicamos los correspondientes COESPECTRO y ESPECTRO DE CUADRATURA PARCIALES de $Y(t)$ y $X_1(t)$ una vez eliminada de ambas la influencia de $X_2(t)$.

Obteniendo la expresión polar del complejo del siguiente modo:

$$D(\lambda)=|D(\lambda)|.\exp\{i.\psi(\lambda)\}$$

donde $|D(\lambda)|=G_{YX_1.X_2}(\lambda)$ indicará la GANANCIA PARCIAL de $Y(t)$ sobre $X_1(t)$ previa eliminación de la influencia de $X_2(t)$, y $\psi(\lambda)=\phi_{YX_1.X_2}(\lambda)$ indicará la FASE O ANGULO DE FASE PARCIAL. Tanto $G_{YX_1.X_2}(\lambda)$ como $\phi_{YX_1.X_2}(\lambda)$ tendrán expresiones análogas a $G(\lambda)$ y $\phi(\lambda)$ definidas en pags. 165 Y 168 sin más que sustituir espectros, espectros cruzados, coespectros y espectros de cuadratura por sus parciales correspondientes. Manteniéndose todas las propiedades ya analizadas.

D) Consideremos ahora, en cuarto lugar, las diferencias que surgen al definir la coherencia multiple parcial, observando la relación entre la serie $Y(t)$ y la parte $\xi_2(t)$ de $X_1(t)$ no coherente con $X_2(t)$. (*)

La relación entre $Y(t)$ y $\xi_2(t)$, la podremos escribir como:

$$Y(t)=\delta^*+\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^*(t-u).\xi_2(u)+\eta^*(t) \qquad (**)$$

El mínimo de los residuos $\eta^*(t)$, se alcanzará al hacer:

$$\delta^*=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^*(u)\right).\mu_{\xi_2}=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^*(u)\right).0=\mu_Y$$

y

$$d^*(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} D^*(\lambda).\exp\{iu\lambda\}.d\lambda$$

con

$$D^*(\lambda)=f_{Y\xi_2}(\lambda).f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}=f_{Y(X_1.X_2)}(\lambda).f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}$$

donde con $f_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)$ simbolizamos la matriz espectral cruzada entre $Y(t)$ y la parte de $X_1(t)$ no coherente con $X_2(t)$.

Determinemos ahora, la expresión de $f_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)$ a partir de submatrices espectrales de la $f_{ZZ}(\lambda)$ dada en pag. 149 para ello, consideraremos:

(*) Tal como hace Fishman, G. (1969,epíg. 2.30) y que nosotros ya indicamos en pag. 181

(**) Donde colocamos el asterisco * para diferenciarlos de los definidos por nosotros en pag. 186

$$C_{Y\xi_2}(u)=E\{(Y(t+u)-\mu_Y).\xi_2(t)'\}$$

$$=E\{(Y(t+u)-\mu_Y).\left[(X_1(t)-\mu_{X_1})-\sum_{v=-\infty}^{\infty} b_2(t-v).(X_2(v)-\mu_{X_2})\right]'\}$$

$$=E\{(Y(t+u)-\mu_Y).(X_1(t)-\mu_{X_1})'-\sum_{v=-\infty}^{\infty}(Y(t+u)-\mu_Y).$$

$$.(X_2(v)-\mu_{X_2})'.b_2(t-v)'\}$$

$$=C_{YX_1}(u)-\sum_{v=-\infty}^{\infty}C_{YX_2}(t+u-v).b_2(t-v)'$$

haciendo z=t-v+u tendremos que:

$$C_{Y\xi_2}(u)=C_{YX_1}(u)-\sum_{z=-\infty}^{\infty}C_{YX_2}(z).b_2(z-u)'$$

y de aquí:

$$f_{Y\xi_2}(\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{Y\xi_2}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left[C_{YX_1}(u)-\sum_{z=-\infty}^{\infty}C_{YX_2}(z).b_2(z-u)'\right].\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{YX_1}(u).\exp\{-i\lambda u\}-(2\pi)^{-1}.\sum_{z=-\infty}^{\infty}C_{YX_2}(z).$$

$$.\exp\{-i\lambda u\}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}b_2(z-u)'.\exp\{-i(u-z)\lambda\}$$

$$=f_{YX_1}(\lambda)-f_{YX_2}(\lambda)\cdot\overline{B_2(\lambda)}'$$

$$=f_{YX_1}(\lambda)-f_{YX_2}(\lambda)\cdot\overline{\left[f_{X_1X_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\right]}'$$

$$=f_{YX_1}(\lambda)-f_{YX_2}(\lambda)\cdot f_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_2X_1}(\lambda) \qquad (*)$$

luego, hemos obtenido que:

$$f_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)=f_{Y\xi_2}(\lambda)=f_{\xi_1\xi_2}(\lambda)=f_{YX_1.X_2}(\lambda) \qquad (**)$$

Por lo tanto, hemos llegado a demostrar que:

$$D^*(\lambda)=D(\lambda)$$

cuya igualdad nos dice que la matriz de los coeficientes complejos de la regresión parcial en este enfoque debido a Fishman coincide con la dada en la parte tercera de este capítulo, pag. 187

Ahora bien, la matriz espectral de errores parciales, cuando se ha eliminado solamente de $X_1(t)$ la influencia lineal de $X_2(t)$, será:

(*) La última igualdad es cierta ya que por pag. 150

$$\overline{f_{X_2X_2}(\lambda)}'=f_{X_2X_2}(\lambda) \quad y \quad \overline{f_{X_1X_2}(\lambda)}'=f_{X_2X_1}(\lambda)$$

(**) Sin más que comparar el resultado anterior con el obtenido en pag. 184.

$$f_{\eta^*\eta^*}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{Y\xi_2}(\lambda)\cdot f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{\xi_2 Y}(\lambda)$$

$$=f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot\left[I_r-f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{Y\xi_2}(\lambda)\cdot f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot f_{\xi_2 Y}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right]\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}$$

obteniéndose entonces:

$$\gamma^2_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{Y\xi_2}(\lambda)\cdot f_{\xi_2\xi_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{\xi_2 Y}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

$$= f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y.X_2}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

que en el caso en que r=1 nos dá:

$$\gamma^2_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)=\frac{f_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y.X_2}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

expresión dada por Fishman, como la "coherencia multiple al cuadrado". Observese que:

$$\gamma^2_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)=\frac{f_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot f_{X_1X_1.X_2}(\lambda)^{-1}\cdot f_{X_1Y.X_2}(\lambda)}{f_{YY.X_2}(\lambda)}\cdot$$

$$\cdot\frac{f_{YY.X_2}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}=\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot\frac{f_{YY.X_2}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}$$

y como:

$$f_{YY.X_2}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-\delta_{YX_2}(\lambda)\cdot\delta_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\delta_{X_2Y}(\lambda)$$

$$=\left[1-\frac{\delta_{YX_2}(\lambda)\cdot\delta_{X_2X_2}(\lambda)^{-1}\cdot\delta_{X_2Y}(\lambda)}{f_{YY}(\lambda)}\right]\cdot f_{YY}(\lambda)$$

$$=\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)\cdot f_{YY}(\lambda)$$

tenemos que:

$$\gamma^2_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)=\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)\cdot\left(1-\gamma^2_{YX_2}(\lambda)\right)$$

luego,

$$\gamma^2_{Y(X_1.X_2)}\leq\gamma^2_{YX_1.X_2}$$

al no eliminar de $Y(t)$ la influencia de $X_2(t)$, la coherencia compara la variación explicada por $\xi_2(t)$ respecto a la total variación de $Y(t)$ y no respecto a la que queda despues de eliminar el efecto de $X_2(t)$, luego se subestima la coherencia entre $Y(t)$ y $X_1(t)$ considerada $X_2(t)$ constante.

2) ESTIMACION.

Para proceder a la estimación de los parámetros correspondientes a los tres modelos de regresión desarrollados en este epígrafe I), supondremos que poseemos la información sobre la serie (r+k)-variante $Z(t)$, dada por un registro temporal de amplitud N, que simbolizaremos por

1.- La Función de Autocovariancia o Covariancia Cruzada Muestral Ponderada.

2.- El Periodograma o Periodograma Cruzado Alisado

Con la utilización de programas de cálculo basados en la Transformada Rápida de Fourier, el segundo método de obtener los estimadores resulta mejor, pues requiere menor tiempo de cálculo. Entonces, partiendo de las observaciones $\{Z(t)\}_{t\varepsilon\{1,2...N\}}$ se calculará el vector (r+k)-variante de las Transformadas Finitas de Fourier, que viene dado por

$$d_{ZZ}^{(N)}(\lambda) = \sum_{t=1}^{N} Z(t) . \exp\{-i\lambda t\}$$

y la Matriz de los Periodogramas y Periodogramas Cruzados de orden (r+k)x(r+k) será:

$$I_{ZZ}^{(N)}(\lambda) = (2\pi N)^{-1} . d_{ZZ}^{(N)}(\lambda) . \overline{d_{ZZ}^{(N)}(\lambda)'}$$

y eligiendo ahora la Función Matricial Ventana Espectral $W^{(N)}(\omega)$, obtendremos la estimación de la matriz espectral, como la matriz de los periodogramas alisados. Así,

$$\hat{f}_{ZZ}(\lambda) = \frac{2\pi}{N} . \sum_{s=1}^{N-1} W^{(N)}\left(\lambda - \frac{2\pi s}{N}\right) . I_{ZZ}^{(N)}\left(\frac{2\pi s}{N}\right)$$

Una vez obtenida la matriz espectral estimada $\hat{f}_{ZZ}(\lambda)$, particionándola convenientemente, obtendremos las submatrices espectrales estimadas, que sustituidas en lugar de las reales, en todas las expresiones obtenidas en la parte 1) de este epígrafe, nos darán las correspondientes estimaciones de los parámetros de las regresiones Global, Marginal y Parcial. Bajo ciertas hipótesis respecto a la distribución del proceso generado de $Z(t)$, y según la matriz $W^{(N)}(\omega)$ utilizada, obtendremos las distribuciones de dichos parámetros y podremos construir intervalos de confianza aproximados para los mismos. Para ello, puede verse Goodman, N.R. (1965) y Enochson, L.D. y Goodman, N.R (1965) para el caso de que se admita la hipótesis de proceso Gaussiano.

II) ANALISIS ESPECTRAL DE LAS COMPONENTES PRINCIPALES DE UNA SERIE TEMPORAL MULTIVARIANTE

Consideraremos en este epígrafe, el análisis de las componentes principales de una serie temporal k-variante, realizando este análisis desde el punto de vista del "dominio frecuencial"; trataremos de obtener una serie s-variante con $s \leq k$, a partir de una transformación lineal invariante de la serie original, de forma que sus componentes tengan una estructura covariante sencilla y que conserven la mayor información posible respecto a las componentes de la serie original, pudiéndose recuperar esta información mediante una oportuna transformación lineal invariante de la serie reducida.

En primer lugar analizaremos el modelo con toda generalidad, interpretando los resultados que se obtengan y considerando los parámetros más significativos del modelo, para pasar posteriormente a la estimación de los mismos mediante la construcción de los oportunos estimadores y el estudio de sus propiedades más importantes

1) ESTUDIO DEL MODELO

Sea la serie temporal k-variante $\chi(t)$ estacionaria de segundo orden con vector de medias:

$$\mu_X = E\{\chi(t)\}$$

y matriz de covariancias retardadas:

$$C_{XX}(u)=E\{(X(t+u)-\mu_X)\cdot(X(t)-\mu_X)'\}$$

para la que supondremos que es convergente,

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty}|C_{XX}(u)|$$

y con matriz espectral dada por:

$$f_{XX}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{XX}(u)\cdot\exp\{-i\lambda u\}$$

Consideraremos el problema de determinar, un (k,s) filtro lineal sumativo $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$, tal que aplicado a la serie k-variante $X(t)$ nos dé la serie s-variante:

$$Y(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(t-u)\cdot X(u)$$

con matriz de covariancias retardadas

$$C_{YY}(u)=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty}b(v)\cdot C_{XX}(u+z-v)\cdot b(z)' \qquad (*)$$

diagonal para todo $u\varepsilon Z$ y por tanto, la matriz espectral:

$$f_{YY}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{YY}(u)\cdot\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=B(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{B(\lambda)}' \qquad (*)$$

tambien deberá ser diagonal.

(*) Ver propiedad C) de los filtros lineales sumativos pag. 77

Además $\mathbb{Y}(t)$ deberá conservar la máxima información posible respecto a la serie original $\mathbb{X}(t)$, de forma que al aplicar a la serie s-variante $\mathbb{Y}(t)$ una transformación lineal invariante, a través del oportuno (s,k) filtro lineal sumativo $\{d(v)\}_{v\varepsilon Z}$, la serie k-variante:

$$\mathbb{X}^*(t)=\alpha+\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\mathbb{Y}(v)$$

sea lo más próxima posible a la serie original $\mathbb{X}(t)$.

Consideraremos la diferencia entre $\mathbb{X}(t)$ y $\mathbb{X}^*(t)$ medida a través de la matriz: (*)

$$\mathbb{H}(\alpha,\{b(u)\},\{d(v)\})=E\{(\mathbb{X}(t)-\mathbb{X}^*(t)).(\mathbb{X}(t)-\mathbb{X}^*(t))'\}$$

$$=E\{(\mathbb{X}(t)-\alpha-\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\mathbb{Y}(v)).$$

$$.(\mathbb{X}(t)-\alpha-\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\mathbb{Y}(v))'\}$$

$$=E\{(\mathbb{X}(t)-\alpha-\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(v-u).\mathbb{X}(u)).$$

$$.(\mathbb{X}(t)-\alpha-\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(v-u).\mathbb{X}(u))'\}$$

Si consideramos ahora la expresión:

(*) Brillinger, D.R. (1975,pag.344) minimiza:

$$h(\alpha,\{b(u)\},\{d(v)\})=tr(\mathbb{H}(\alpha,\{b(u)\},\{d(v)\}))$$

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v) \cdot \sum_{u=-\infty}^{\infty} b(v-u) \cdot X(u) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v) \cdot b(v-u) \right) \cdot X(u) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) \cdot X(u)$$

tendremos que $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ es un (k,k) filtro lineal obtenido por la aplicación sucesiva del (k,s) filtro lineal $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y el (s,k) filtro lineal $\{d(u)\}_{v\varepsilon Z}$,con lo que podremos escribir:

$$H(\alpha,\{b(u)\},\{d(v)\}) = H(\alpha,\{a(u)\}) = E\{ \left(X(t) - \alpha - \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) \cdot X(u) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(X(t) - \alpha - \sum_{v=-\infty}^{\infty} a(t-v) \cdot X(v) \right)' \}$$

$$= \left(\mu_X - \alpha - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u) \right) \cdot \mu_X \right) \cdot \left(\mu_X - \alpha - \left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} a(v) \right) \cdot \mu_X \right)' +$$

$$+ E\{ \left((X(t) - \mu_X) - \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) \cdot (X(u) - \mu_X) \right) \cdot$$

$$\cdot \left((X(t) - \mu_X) - \sum_{v=-\infty}^{\infty} a(t-v) \cdot (X(v) - \mu_X) \right)' \} \geq$$

$$\geq E\{ (X(t) - \mu_X) \cdot (X(t) - \mu_X)' \} + E\{ \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) \cdot$$

$$\cdot (X(u) - \mu_X) \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} (X(v) - \mu_X)' \cdot a(t-v)' \} -$$

$$- E\{ (X(t) - \mu_X) \cdot \sum_{v=-\infty}^{\infty} (X(v) - \mu_X)' \cdot a(t-v)' \} -$$

$$- E\{ \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u) \cdot (X(u) - \mu_X) \cdot (X(t) - \mu_X)' \} =$$

$$=C_{XX}(0)+\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t-u).C_{XX}(u-v).a(t-v)'-$$

$$-\sum_{v=-\infty}^{\infty}C_{XX}(t-v).a(t-v)'-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).C_{XX}(u-t)$$

y teniendo en cuenta que:

$$C_{XX}(u)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{XX}(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda \qquad (*)$$

tenemos:

$$H(\alpha,\{a(u)\})\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(f_{XX}(\lambda)+\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t-u).f_{XX}(\lambda).\exp\{i(u-v)\lambda\}.$$

$$.a(t-v)'-\sum_{v=-\infty}^{\infty}f_{XX}(\lambda).\exp\{i(t-v)\lambda\}.a(t-v)'-$$

$$-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).f_{XX}(\lambda).\exp\{i(u-t)\lambda\}\Bigg)d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(f_{XX}(\lambda)+\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).\exp\{-i(t-u)\lambda\}.f_{XX}(\lambda).$$

$$.\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t-v)'.\exp\{i(t-v)\lambda\}-f_{XX}(\lambda).\sum_{v=-\infty}^{\infty}a(t-v)'.$$

$$.\exp\{i(t-v)\lambda\}-\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(t-u).\exp\{-i(t-u)\lambda\}.f_{XX}(\lambda)\Bigg)d\lambda$$

y como sabemos que:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u).\exp\{-iu\lambda\}=A(\lambda)$$

(*) Recordar la fórmula de inversión dada en pag. 70

es la función de transferencia del filtro compuesto $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ siendo,

$$A(\lambda)=D(\lambda)\cdot B(\lambda)$$

con $B(\lambda)$ y $D(\lambda)$ las funciones de transferencia de los filtros $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y $\{d(u)\}_{u\varepsilon Z}$ respectivamente. (*)

Con todo ello, tendremos:

$$H(\alpha,\{a(u)\})=H(\alpha,A(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\, f_{XX}(\lambda)+A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'-$$

$$-f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{A(\lambda)}'-A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\Big)d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(I_k-A(\lambda)\right)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{\left(I_k-A(\lambda)\right)}'d\lambda$$

y al ser $f_{XX}(\lambda)$,matriz hermitiana,existirá una matriz unitaria $U(\lambda)$ tal que: (**)

$$f_{XX}(\lambda)=U(\lambda)\cdot\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_k(\lambda)\end{pmatrix}\cdot\overline{U(\lambda)}'$$

$$=U(\lambda)\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)}'$$

(*) Recuérdese la propiedad de composición de filtros lineales sumativos dada en pag. 75.

(**) Ver propiedad d) de la matriz espectral, pag. 65.

siendo $U(\lambda)=\left[U_1(\lambda),U_2(\lambda),\ldots,U_k(\lambda)\right]$ la matriz formada por los vectores característicos de $f_{xx}(\lambda)$ y $M_k(\lambda)$ la matriz diagonal cuyos elementos son las correspondientes raices características. (*)

Entonces:

$$H(\alpha,A(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}(I_k-A(\lambda))\cdot U(\lambda)\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)}'\cdot(I_k-A(\lambda))d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(U(\lambda)-A(\lambda)\cdot U(\lambda))\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{(U(\lambda)-A(\lambda)\cdot U(\lambda))}'\,d\lambda$$

y como hemos dicho que:

$$A(\lambda)=B(\lambda)\cdot D(\lambda)$$

tendremos que:

$$H(\alpha,A(\lambda))=H(\alpha,B(\lambda),D(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}(U(\lambda)-D(\lambda)\cdot B(\lambda)\cdot U(\lambda))\cdot$$

$$\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{(U(\lambda)-D(\lambda)\cdot B(\lambda)\cdot U(\lambda))}'\,d\lambda$$

por la condición de diagonalización de $B(\lambda)\cdot f_{xx}(\lambda)\cdot\overline{B(\lambda)}'$, $B(\lambda)$ será una submatriz de $\overline{U(\lambda)}'$, que podemos escribir como:

(*) Ver Bellman,R.(1965,pag.28 y 65), para las definiciones de matriz unitaria U tal que $\overline{U}'\cdot U=I$ y para la diagonalización de matrices hermitianas. Si H es una matriz hermitiana, existe una matriz unitaria tal que:

$$H=U\cdot\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\ldots 0\\ 0 & \ddots\ \ 0\\ \vdots & \ddots\\ 0\ldots 0 & \mu_k\end{pmatrix}\cdot\overline{U}' \quad \text{con lo que} \quad \begin{pmatrix}\mu_1 & 0\ldots 0\\ 0 & \ddots\ \ 0\\ \vdots & \ddots\\ 0\ldots 0 & \mu_k\end{pmatrix}=\overline{U}'\cdot H\cdot U$$

Ver, tambien Dieudonné,J.(1960,pag.117-118),para formas hermitianas;

(*) Continuación página anterior:

y Queysanne, M. (1974,cap.14 y 15), para endomorfismos y formas hermitianas.

El estudio de las formas hermitianas, nos ha llevado a considerar la NO UNICIDAD de la matriz unitaria U, que diagonaliza a la matriz hermitiana H.

Si suponemos que:
$$\overline{U}'\cdot H\cdot U=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \mu_k\end{pmatrix}$$

y consideramos la matriz diagonal:
$$C=\begin{pmatrix}c_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & c_k\end{pmatrix}$$

con c_i números complejos tales que su modulo $|c_i|=1$ para $i\varepsilon\{1,2,..,k\}$, facilmente podemos comprobar que C es unitaria, pues:

$$\overline{C}'\cdot C=\begin{pmatrix}\overline{c}_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \overline{c}_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & c_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{c}_1\cdot c_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \overline{c}_k\cdot c_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|c_1|^2 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & |c_k|^2\end{pmatrix}=I_k$$

entonces el producto $U\cdot C$ de dos matrices unitarias será otra matriz unitaria ya que: $\overline{(U\cdot C)}'\cdot(U\cdot C)=\overline{C}'\cdot\overline{U}'\cdot U\cdot C=\overline{C}'\cdot I_k\cdot C=\overline{C}'\cdot C=I_k$

Veamos que esta nueva matriz unitaria, tambien diagonaliza a H, de la misma forma que lo hacia U, ya que:

$$\overline{(U\cdot C)}'\cdot H\cdot(U\cdot C)=\overline{C}'\cdot\overline{U}'\cdot H\cdot U\cdot C=\overline{C}'\cdot\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \mu_k\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}\overline{c}_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \overline{c}_k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \mu_k\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}c_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & c_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{c}_1\cdot\mu_1\cdot c_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \overline{c}_k\cdot\mu_k\cdot c_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|c_1|^2\cdot\mu_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & |c_k|^2\cdot\mu_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\dots 0\\ 0 & \ddots\ 0\\ 0\dots 0 & \mu_k\end{pmatrix}$$

(*) Continuación página anterior:

Luego el conjunto de vectores característicos de $\mathbb{H}$ que forma la matriz unitaria $\mathbb{U}=(\mathbb{U}_1\ldots,\mathbb{U}_k)$, con la condición de ortonormalidad, no es único, sino que pueden obtenerse otros, sin más que multiplicar cada uno de ellos por un número complejo de módulo 1, ya que:

$$\mathbb{U}\cdot\mathbb{C}=(\mathbb{U}_1\cdots,\mathbb{U}_k)\cdot\begin{pmatrix} c_1 & 0\ldots0 \\ 0 & \ddots\ 0 \\ \vdots\ \ddots & \\ 0\ldots0 & c_k \end{pmatrix}=(c_1\cdot\mathbb{U}_1\cdots,c_k\cdot\mathbb{U}_k)$$

y la matriz $\mathbb{U}\cdot\mathbb{C}$ esta formada por un conjunto de vectores característicos de $\mathbb{H}$, ortonormales también al ser $\mathbb{U}\cdot\mathbb{C}$ unitaria como hemos visto.

En lo que sigue, consideraremos $\mathbb{U}$ como la matriz unitaria formada por los vectores característicos $\mathbb{U}_i$ que tienen real su i-ésima componente para todo $i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$ con lo que $\mathbb{U}$ tendrá real su diagonal principal. Esta elección quedará justificada posteriormente en pag. 237 y siguientes.

Si algún $\mathbb{U}_i$ no tuviese su i-ésima componente real, $U_{ii}=$ $=a+bi=|U_{ii}|.\exp\{i\omega\}$ con $\omega\neq 0$, multiplicariamos el vector $\mathbb{U}_i$ por el complejo de módulo uno, $C_i=\exp\{-i\omega\}$, con lo que $C_i.\mathbb{U}_i$ tendria como i-ésima componente el producto $C_i.U_{ii}=\exp\{-i\omega\}.|U_{ii}|.\exp\{i\omega\}=|U_{ii}|\varepsilon R$.

Es de interés también, destacar algunas propiedades de las raices y vectores característicos de la matriz hermitiana $\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)$, que surgen al poseer esta las propiedades b) y c) dadas en pag. 64 .

1) Al ser $\mathfrak{f}_{XX}(\lambda+2\pi)=\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)$, tendremos que $\mathbb{M}_k(\lambda+2\pi)=\mathbb{M}_k(\lambda)$ y $\mathbb{U}(\lambda+2\pi)=\mathbb{U}(\lambda)$ lo que significa que para todo $i\varepsilon\{1,2,..,k\}$, tenemos que $\mu_i(\lambda+2\pi)=\mu_i(\lambda)$ y $\mathbb{U}_i(\lambda+2\pi)=\mathbb{U}_i(\lambda)$, obteniéndose las raices y vectores característicos de $\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)$ como funciones periódicas respecto a λ y con periodo 2π.
2) Al ser $\mathfrak{f}_{XX}(-\lambda)=\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)'$, tendremos que $\mathbb{U}(-\lambda).\mathbb{M}_k(-\lambda).\mathbb{U}(-\lambda)'=$ $\mathfrak{f}_{XX}(-\lambda)=\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)'=(\mathbb{U}(\lambda).\mathbb{M}_k(\lambda).\overline{\mathbb{U}(\lambda)'})'=\overline{\mathbb{U}(\lambda)}.\mathbb{M}_k(\lambda).\mathbb{U}(\lambda)'$ con lo que: $\mathbb{M}_k(-\lambda)=\mathbb{M}_k(\lambda)$ y $\mathbb{U}(-\lambda)=\overline{\mathbb{U}(\lambda)}$, esto significa que para todo $i\varepsilon\{1,2,..,k\}$, tenemos: $\mu_i(-\lambda)=\mu_i(\lambda)$ y $\mathbb{U}_i(-\lambda)=\overline{\mathbb{U}(\lambda)}$; luego las raices características de $\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)$ son funciones simétricas respecto al origen y se consideran para valores de $\lambda\varepsilon[0,\pi]$.

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}$$

con lo que :

$$U(\lambda)-D(\lambda).B(\lambda).U(\lambda)=U(\lambda)-D(\lambda).\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}.U(\lambda)$$

$$=U(\lambda)-D(\lambda).\left(I_s\vdots 0\right)=U(\lambda)-\left(D(\lambda)\vdots 0\right)=$$

$$=\left(U_1(\lambda)-D_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)-D_s(\lambda),U_{s+1}(\lambda),\ldots,U_k(\lambda)\right)$$

y de aquí:

$$H(\alpha,B(\lambda),D(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{i=1}^{s}\mu_i(\lambda).(U_i(\lambda)-D_i(\lambda)).\overline{(U_i(\lambda)-D_i(\lambda))'}+\right.$$

$$\left.\sum_{i=s+1}^{k}\mu_i(\lambda).U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}\right)d\lambda$$

como todas las raices características son $\mu_i(\lambda)\geq 0$, por ser $f_{XX}(\lambda)$ semidefinida positiva, H se minimizará haciendo $D_i(\lambda)=$ $=U_i(\lambda)$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ y tomando para $i\varepsilon\{s+1,\ldots,k\}$, $\mu_i(\lambda)$ como las k-s menores raices características de $f_{XX}(\lambda)$. Así el mínimo de H se obtendrá haciendo:

$$\alpha=\mu_X-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right).\mu_X=\left(I_k-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right)\right).\mu_X$$

y como:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v)\,.\,b(v-u)\right)=$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v)\,.\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(v-u)=\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(v)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u)\right)$$

tendremos,

$$\alpha=\left(I_k-\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(v)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u)\right)\right).\mu_X$$

$$b(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{B}(\lambda).\exp\{i\lambda u\}d\lambda \qquad \text{y}$$

$$d(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{D}(\lambda).\exp\{i\lambda u\}d\lambda$$

donde:

$$\mathrm{B}(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{U}_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{\mathrm{U}_s(\lambda)'}\end{pmatrix} \qquad \text{y} \quad \mathrm{D}(\lambda)=\left(\mathrm{U}_1(\lambda),\ldots,\mathrm{U}_s(\lambda)\right)$$

siendo $\mathrm{U}_i(\lambda)$ para $i\in\{1,2,\ldots,s\}$ los vectores característicos de $f_{XX}(\lambda)$ asociados a las s mayores raices características $\mu_i(\lambda)$. El mínimo alcanzado para H será entonces:

$$\mathrm{H}_0=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{i=s+1}^{k}\mu_i(\lambda).\mathrm{U}_i(\lambda).\overline{\mathrm{U}_i(\lambda)'}\right)d\lambda$$

que puede interpretarse como sigue:

Consideremos la serie temporal k-variante residuo,

$$\varepsilon(t)=\mathbb{X}(t)-\mathbb{X}^*(t)$$

cuando $\mathbb{X}^*(t)$ se define con los valores que minimizan $\mathbb{H}$, entonces,

$$E\{\varepsilon(t)\}=E\{\mathbb{X}(t)-\mathbb{X}^*(t)\}=\mu_X-E\{\mathbb{X}^*(t)\}$$

$$=\mu_X-E\{\alpha+\sum_{v=-\infty}^{\infty}d(t-v).\mathbb{Y}(v)\}$$

$$=\mu_X-\alpha+\sum_{v=-\infty}^{\infty}d(t-v).E\{\mathbb{Y}(v)\}$$

$$=\mu_X-\alpha+\sum_{v=-\infty}^{\infty}d(t-v).E\{\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(t-u).\mathbb{X}(u)\}$$

$$=\mu_X-\alpha+\sum_{v=-\infty}^{\infty}d(t-v).\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(t-u).\mu_X$$

$$=\left(\mathbb{I}_k-\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty}d(v)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(u)\right)\right).\mu_X-\alpha=\mathbb{0}$$

con lo que:

$$\mathbb{C}_{\varepsilon\varepsilon}(0)=E\{\varepsilon(t).\varepsilon(t)'\}=\mathbb{H}_0(\alpha,\{b(u)\},\{d(v)\})$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{i=s+1}^{k}\mu_i(\lambda).\mathbb{U}_i(\lambda).\overline{\mathbb{U}_i(\lambda)'}\right)d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi}\mathfrak{f}_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)d\lambda$$

luego la matriz espectral de los residuos $\varepsilon(t)$, será:

$$\mathfrak{f}_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=\sum_{i=s+1}^{k}\mu_i(\lambda).\mathbb{U}_i(\lambda).\overline{\mathbb{U}_i(\lambda)'}$$

Puede observarse por tanto que la aproximación de la serie $\chi(t)$ lograda mediante la serie $\chi^*(t)$, será tanto mejor, cuanto menores sean las k-s menores raices características de $f_{XX}(\lambda)$. Si todas éstas k-s raices características fuesen nulas, para toda frecuencia λ, entonces $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=0$ y con ello $C_{\varepsilon\varepsilon}(u)=0$, que nos indica que la matriz de covariancias retardadas de $\varepsilon(t)$ es idénticamente nula y por tanto que la estructura covariante de la serie $\chi(t)$ ha quedado totalmente recogida en la serie $Y(t)$, resultado éste que nos permite reducir la dimensionalidad de la serie k-variante original $\chi(t)$.

En la práctica, aunque las k-s menores raices características de $f_{XX}(\lambda)$ no sean nulas,si son suficientemente pequeñas, se conservará en $Y(t)$ la mayor parte de la información referente a la estructura covariante de $\chi(t)$.

La serie $Y(t)$ se dice, que está formada por las s PRIMERAS SERIES COMPONENTES PRINCIPALES de $\chi(t)$, cuya matriz espectral vendrá dada por

$$f_{YY}(\lambda)=B(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{B(\lambda)'}=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{bmatrix} \cdot U(\lambda) \cdot M_k(\lambda) \cdot \overline{U(\lambda)'} \cdot \left(U_1(\lambda), \ldots, U_s(\lambda)\right)$$

$$=\left(I_s \vdots\, 0\right) \cdot M_k(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} I_s \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(M_s(\lambda) \vdots\, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} I_s \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=M_s(\lambda)=\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 \ldots 0 \\ 0 & \ddots \quad 0 \\ \vdots \ \ddots & \\ 0 \ldots 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que las series $Y_i(t)$ $i\varepsilon\{1,2\ldots,s\}$ componentes principales de $X(t)$ tienen como espectro $f_{Y_iY_i}(\lambda)=\mu_i(\lambda)$, las raices características de la matriz $f_{XX}(\lambda)$ y al ser $f_{Y_iY_j}(\lambda)=0$ para $i\neq j$ nos indica que la coherencia entre la componente $Y_i(t)$ y la componente $Y_j(t)$ es:

$$\gamma^2_{Y_iY_j}(\lambda)=\frac{|f_{Y_iY_j}(\lambda)|^2}{f_{Y_iY_i}(\lambda)\cdot f_{Y_jY_j}(\lambda)}=0$$

con lo que hemos obtenido las componentes principales de $X(t)$ como series temporales incorrelacionadas en toda frecuencia λ.

Si consideramos ahora la estructura covariante entre la serie residual $\varepsilon(t)$ y la serie de componentes principales $\mathcal{Y}(t)$, obtenemos que la matriz de covariancias retardadas entre $\varepsilon(t)$ e $\mathcal{Y}(t)$ será:

$$C_{\varepsilon Y}(u)=E\{\varepsilon(t+u).(\mathcal{Y}(t)-\mu_Y)'\}$$ y como:

$$\varepsilon(t+u)=\mathcal{X}(t+u)-\mathcal{X}^*(t+u)=\mathcal{X}(t+u)-\left(\alpha+\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t+u-v).\mathcal{Y}(v)\right)$$

$$=\mathcal{X}(t+u)-\mu_X-\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t+u-v).(\mathcal{Y}(v)-\mu_Y)$$

tendremos:

$$C_{\varepsilon Y}(u)=E\{(\mathcal{X}(t+u)-\mu_X).(\mathcal{Y}(t)-\mu_Y)'-$$

$$-\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t+u-v).(\mathcal{Y}(v)-\mu_Y).(\mathcal{Y}(t)-\mu_Y)'\}$$

$$= C_{XY}(u)-\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t+u-v).C_{YY}(v-t)$$

$$= C_{XY}(u)-\sum_{z=-\infty}^{\infty} d(u-z).C_{YY}(z)$$

Además:

$$C_{XY}(u)=E\{(\mathcal{X}(t+u)-\mu_X).(\mathcal{Y}(t)-\mu_Y)'\}$$

$$=E\{(\mathcal{X}(t+u)-\mu_X).\left[\sum_{v=-\infty}^{\infty} b(t-v).(\mathcal{X}(v)-\mu_X)\right]'\}$$

$$=E\{\sum_{v=-\infty}^{\infty}(\mathcal{X}(t+u)-\mu_X).(\mathcal{X}(v)-\mu_X)'.b(t-v)'\}$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty} C_{XX}(t+u-v).b(t-v)'=\sum_{z=-\infty}^{\infty} C_{XX}(z+u).b(z)'$$

luego:

$$C_{\varepsilon Y}(u)=\sum_{z=-\infty}^{\infty} C_{XX}(z+u).b(z)'-\sum_{z=-\infty}^{\infty} d(u-z).C_{YY}(z)$$

Entonces la matriz espectral cruzada entre las series $\varepsilon(t)$ e $\mathrm{Y}(t)$, será:

$$f_{\varepsilon Y}(\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{\varepsilon Y}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

y sustituyendo $C_{\varepsilon Y}(u)$ por la expresión ya obtenida, tendremos:

$$f_{\varepsilon Y}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty}C_{XX}(z+u).\exp\{-i\lambda(z+u)\}.b(z)'.\exp\{i\lambda z\}-\right.$$

$$\left.-\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty}d(u-z).\exp\{-i\lambda(u-z)\}.C_{YY}(z).\exp\{-i\lambda z\}\right)$$

$$=f_{XX}(\lambda).\overline{B(\lambda)}'-D(\lambda).f_{YY}(\lambda)$$

$$=f_{XX}(\lambda).\overline{B(\lambda)}'-D(\lambda).B(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{B(\lambda)}'$$

$$=f_{XX}(\lambda).\overline{B(\lambda)}'-D(\lambda).M_s(\lambda) \qquad (*)$$

Sustituyendo $B(\lambda)$ y $D(\lambda)$ por los valores óptimos y escribiendo $f_{XX}(\lambda)$ en función de la matriz diagonal $M_k(\lambda)$, tenemos:

$$f_{\varepsilon Y}(\lambda)=\left[U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda),\ldots,U_k(\lambda)\right].M_k(\lambda).\begin{bmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_k(\lambda)'}\end{bmatrix}.$$

$$.\left[U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\right]-\left[U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\right].M_s(\lambda)=$$

(*) Ya que según pag. 203 $f_{YY}(\lambda)=B(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{B(\lambda)}'=M_s(\lambda)$

$$=\left[\mu_1(\lambda)\cdot U_1(\lambda),\ldots,\mu_s(\lambda)\cdot U_s(\lambda)\vdots\ \ldots,\mu_k(\lambda)\cdot U_k(\lambda)\right]$$

$$\cdot\left[\begin{array}{c} I_s \\ \cdots \\ 0 \end{array}\right]-\left[\mu_1(\lambda)\cdot U_1(\lambda),\ldots,\mu_s(\lambda)\cdot U_s(\lambda)\right]=0$$

Esto nos dice que la matriz espectral cruzada entre las series $\varepsilon(t)$ e $Y(t)$ es nula, con lo que la coherencia $\gamma^2_{\varepsilon_i Y_j}(\lambda)=0$ para cualquier $i\varepsilon\{1,2,..,k\}$ y $j\varepsilon\{1,2...,s\}$, que nos dice que las series $Y_j(t)$ componentes principales de $X(t)$ y la serie residual k-variante $\varepsilon(t)$ están incorrelacionadas en toda frecuencia λ.

Del mismo modo, la estructura covariante entre la serie residual $\varepsilon(t)$ y la serie $X^*(t)$ vendrá dada por la matriz de covariancias retardadas:

$$C_{\varepsilon X^*}(u)=E\{\varepsilon(t+u)\cdot\left(X^*(t)-\mu_{X^*}\right)'\}$$

$$=E\{\varepsilon(t+u)\cdot\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v)\cdot(Y(v)-\mu_Y)\right)'\}$$

$$=E\{\sum_{v=-\infty}^{\infty}\varepsilon(t+u)\cdot\left(Y(v)-\mu_Y\right)'\cdot d(t-v)'\}$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty}C_{\varepsilon Y}(t+u-v)\cdot d(t-v)'$$

$$=\sum_{z=-\infty}^{\infty}C_{\varepsilon Y}(z+u)\cdot d(z)'$$

con lo que la matriz espectral cruzada será:

$$f_{\varepsilon X^*}(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} C_{\varepsilon X^*}(u).\exp.\{-i\lambda u\}$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty} C_{\varepsilon Y}(z+u).\exp\{-i\lambda(z+u)\}.d(z)'.\exp\{i\lambda z\}$$

$$=f_{\varepsilon Y}(\lambda).\overline{D(\lambda)'}=f_{\varepsilon Y}(\lambda).B(\lambda).$$

y como $f_{\varepsilon Y}(\lambda)=0$ como ya hemos visto, tambien $f_{\varepsilon X^*}(\lambda)=0$ con lo que las series $\varepsilon(t)$, residual, y $X^*(t)$ que contiene la parte de la estructura covariante de $X(t)$ conservada por la serie $Y(t)$ formada por las s primeras componentes principales de $X(t)$, tienen coherencia:

$$\gamma_{\varepsilon_i X_j^*}(\lambda)=0 \text{ para cualquier } i,j\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$$

Esto nos dice que las series $X^*(t)$ parte de $X(t)$ conservada por $Y(t)$ y $\varepsilon(t)$ error o parte de $X(t)$ no conservada por $Y(t)$, tienen una estructura incorrelacionada para cualquier frecuencia λ.

Como hemos mostrado anteriormente, la serie $Y(t)$ formada por las s primeras series componentes principales de la serie k-variante $X(t)$, tiene como matriz espectral:

$$f_{YY}(\lambda)=\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0\ldots 0 \\ & \ddots \\ 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0\ldots 0 & \mu_s(\lambda)\end{pmatrix}$$

con lo que para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ tenemos que el espectro de la serie $Y_i(t)$ i-ésima componente principal de $\mathbb{X}(t)$ será $f_{Y_iY_i}(\lambda)=\mu_i(\lambda)$ y por tanto tenemos que:

$$\mathrm{Var}\left(Y_i(t)\right)=C_{Y_iY_i}(0)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{Y_iY_i}(\lambda)\,d\lambda=\int_{-\pi}^{\pi} \mu_i(\lambda)\,d\lambda$$

A partir de aquí, vamos a considerar ahora, la obtención de las s primeras componentes principales de $\mathbb{X}(t)$, como las series resultantes de la aplicación de un (k,s) filtro lineal sobre la serie k-variante $\mathbb{X}(t)$ de forma que la serie resultante tenga componentes de variancia máxima, pero con la condición de que al considerarlas dos a dos, tenga coherencia nula en toda frecuencia λ.

Sea el (k,s) filtro lineal sumativo $\{b^*(u)\}_{u\varepsilon Z}$, que aplicado sobre la serie k-variante $\mathbb{X}(t)$ dará lugar a la serie s-variante:

$$\mathbb{Y}^*(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} b^*(t-u).\mathbb{X}(u)$$

con,

$$\mathbb{B}^*(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} b^*(u).\exp\{-iu\lambda\}$$

la función de transferencia del filtro.

Podemos explicitar las s componentes de $\mathbb{Y}^*(t)$ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} Y_1^*(t) \\ \vdots \\ Y_i^*(t) \\ \vdots \\ Y_s^*(t) \end{pmatrix} = \mathrm{Y}^*(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} b^*(t-u) \cdot \mathrm{X}(u) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} b_1^*(t-u) \\ \vdots \\ b_i^*(t-u) \\ \vdots \\ b_s^*(t-u) \end{pmatrix} \cdot \mathrm{X}(u) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1^*(t-u) \cdot \mathrm{X}(u) \\ \vdots \\ \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_i^*(t-u) \cdot \mathrm{X}(u) \\ \vdots \\ \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_s^*(t-u) \cdot \mathrm{X}(u) \end{pmatrix}$$

con lo que:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}_1^*(\lambda) \\ \vdots \\ \mathrm{B}_i^*(\lambda) \\ \vdots \\ \mathrm{B}_s^*(\lambda) \end{pmatrix} = \mathrm{B}^*(\lambda) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} b^*(u) \cdot \exp\{-i\lambda u\} = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} b_1^*(u) \\ \vdots \\ b_i^*(u) \\ \vdots \\ b_s^*(u) \end{pmatrix} \cdot \exp\{-i\lambda u\} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_1^*(u) \cdot \exp\{-i\lambda u\} \\ \vdots \\ \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_i^*(u) \cdot \exp\{-i\lambda u\} \\ \vdots \\ \sum_{u=-\infty}^{\infty} b_s^*(u) \cdot \exp\{-i\lambda u\} \end{pmatrix}$$

donde consideraremos que los vectores $\mathrm{B}_i^*(\lambda)$ estan normalizados, o sea que para $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$ tenemos que:

$$B_i^*(\lambda)\cdot\overline{B_i^*(\lambda)}'=1$$

El vector fila de números complejos $B_i^*(\lambda)$, de dimensión k, podremos siempre escribirlo como una combinación lineal con coeficientes complejos de los vectores fila de la matriz:

$$\overline{U(\lambda)}'=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)}'\\ \vdots\\ \overline{U_j(\lambda)}'\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)}'\\ \vdots\\ \overline{U_k(\lambda)}'\end{pmatrix}$$

que es unitaria y esta formada por los conjugados de los vectores característicos de la matriz espectral $f_{XX}(\lambda)$ tomados en fila, con lo que forman una base ortonormal del espacio complejo k-dimensional C^k.Así:

$$\begin{aligned}B_i^*(\lambda)&=\sum_{j=1}^{k}c_{ij}(\lambda)\cdot\overline{U_j(\lambda)}'\\&=\left(c_{i1}(\lambda),...,c_{ij}(\lambda),...,c_{ik}(\lambda)\right)\cdot\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)}'\\ \vdots\\ \overline{U_j(\lambda)}'\\ \vdots\\ \overline{U_k(\lambda)}'\end{pmatrix}\\&=C_i(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)}'\end{aligned}$$

y entonces:

$$B^*(\lambda)=\begin{bmatrix} B_1^*(\lambda) \\ \vdots \\ B_i^*(\lambda) \\ \vdots \\ B_s^*(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'} \\ \vdots \\ C_i(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'} \\ \vdots \\ C_s(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(\lambda) \\ \vdots \\ C_i(\lambda) \\ \vdots \\ C_s(\lambda) \end{bmatrix}\cdot\overline{U(\lambda)'}=C(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'}$$

siendo $C(\lambda)=(c_{ij}(\lambda))_{\substack{i\varepsilon\{1,2,\dots,s\} \\ j\varepsilon\{1,2,\dots,s,\dots,k\}}}$ la matriz de coeficientes complejos que nos da la transformación de la matriz $\overline{U(\lambda)'}$ en $B^*(\lambda)$.

A partir de este resultado, podemos obtener la matriz espectral de la serie $Y^*(t)$ como:

$$f_{Y^*Y^*}(\lambda)=B^*(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{B^*(\lambda)'} \qquad (*)$$

sustituyendo $B^*(\lambda)$ y escribiendo $f_{XX}(\lambda)$ la función de su correspondiente matriz diagonalizada, obtenemos:

$$f_{Y^*Y^*}(\lambda)=C(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'}\cdot(U(\lambda)\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'})\cdot\overline{(C(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'})}'$$

$$=C(\lambda)\cdot(\overline{U(\lambda)'}\cdot U(\lambda))\cdot M_k(\lambda)\cdot(\overline{U(\lambda)'}\cdot U(\lambda))\cdot\overline{C(\lambda)'}$$

$$=C(\lambda)\cdot I_k\cdot M_k(\lambda)\cdot I_k\cdot\overline{C(\lambda)'}=C(\lambda)\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{C(\lambda)'} = .$$

(*) Ver propiedad c) de los filtros lineales sumativos, pag. 77

$$=\begin{pmatrix} C_1(\lambda) \\ \vdots \\ C_i(\lambda) \\ \vdots \\ C_s(\lambda) \end{pmatrix} \cdot M_k(\lambda) \cdot \left(\overline{C_1(\lambda)'}, \ldots, \overline{C_i(\lambda)'}, \ldots, \overline{C_s(\lambda)'}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} C_1(\lambda) \cdot M_k(\lambda) \\ \vdots \\ C_i(\lambda) \cdot M_k(\lambda) \\ \vdots \\ C_s(\lambda) \cdot M_k(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \left(\overline{C_1(\lambda)'}, \ldots, \overline{C_i(\lambda)'}, \ldots, \overline{C_s(\lambda)'}\right)$$

$$=\left(C_p(\lambda) \cdot M_k(\lambda) \cdot \overline{C_q(\lambda)'}\right)_{p,q\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}} = \left(f_{Y_pY_q}(\lambda)\right)$$

Luego, para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ el espectro de la componente i-ésima $Y_i(t)$ será:

$$f_{Y_iY_i}(\lambda) = C_i(\lambda) \cdot M_k(\lambda) \cdot \overline{C_i(\lambda)'}$$

$$=\left(c_{i1}(\lambda), \ldots, c_{ij}(\lambda), \ldots, c_{ik}(\lambda)\right) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \mu_i(\lambda) & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 \cdots & 0 & \mu_k(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{c_{i1}(\lambda)} \\ \vdots \\ \overline{c_{ij}(\lambda)} \\ \vdots \\ \overline{c_{ik}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

$$=\sum_{j=1}^{k} c_{ij}(\lambda) \cdot \overline{c_{ij}(\lambda)} \cdot \mu_j(\lambda) = \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}(\lambda)|^2 \cdot \mu_j(\lambda)$$

y para $p,q\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ el espectro cruzado entre la componente $Y_p(t)$ y la $Y_q(t)$ será:

$$f_{Y_pY_q}(\lambda)=\mathcal{C}_p(\lambda)\cdot\mathcal{M}_k(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{C}_q(\lambda)}'=\sum_{j=1}^{k} c_{pj}(\lambda)\cdot\overline{c_{qj}(\lambda)}\cdot\mu_j(\lambda)$$

Como nuestro propósito es maximizar las variancias de las componentes de $\mathcal{Y}(t)$ condicionado este máximo a que dichas componentes tengan coherencia nula en toda frecuencia λ , los espectros cruzados $f_{Y_pY_q}(\lambda)$ para $p\neq q$ deberán ser todos identicamente nulos, con lo que $\gamma^2_{Y_pY_q}(\lambda)=0$ para toda frecuencia λ. Y al ser:

$$\mathrm{Var}\big(Y_i(t)\big)=C_{Y_iY_i}(0)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{Y_iY_i}(\lambda)\,d\lambda$$

el espectro $f_{Y_iY_i}(\lambda)$ deberá hacerser máximo en toda frecuencia λ. El problema consistirá por tanto en determinar $\mathcal{C}(\lambda)$ que satisfaga las anteriores condiciones y que cumpla, para todo $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$

$$1=\mathcal{B}_i^*(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{B}_i^*(\lambda)}'=\mathcal{C}_i(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{U}(\lambda)}'\cdot\overline{\big(\mathcal{C}_i(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{U}(\lambda)}'\big)}'$$

$$=\mathcal{C}_i(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{U}(\lambda)}'\cdot\overline{\mathcal{U}(\lambda)}\cdot\overline{\mathcal{C}_i(\lambda)}'=\mathcal{C}_i(\lambda)\cdot\mathcal{I}_k\cdot\overline{\mathcal{C}_i(\lambda)}'$$

$$=\mathcal{C}_i(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{C}_i(\lambda)}'=\sum_{j=1}^{k} c_{ij}(\lambda)\cdot\overline{c_{ij}(\lambda)}=\sum_{j=1}^{k}|c_{ij}(\lambda)|^2=1$$

El proceso a seguir será, maximizar sucesivamente cada una de las s variancias de $Y_i(t)$ con $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ condicionados estos máximos a las restricciones especificadas anteriormente.

a) Empezaremos maximizando:

$$f_{Y_1Y_1}(\lambda)=\sum_{j=1}^{k}|C_{1j}(\lambda)|^2.\mu_j(\lambda)$$

condicionado a $\sum_{j=1}^{k}|C_{1j}(\lambda)|^2=1$

Cuyo máximo, suponiendo $\mu_1(\lambda)$ la mayor de las raices características de la matriz $\delta_{XX}(\lambda)$ se alcanzará para $|C_{11}(\lambda)|=1$ y $|C_{12}(\lambda)|=|C_{13}(\lambda)|=$ $=\ldots=|C_{1k}(\lambda)|=0$ con lo que el máximo de $f_{Y_1Y_1}(\lambda)$ será $\mu_1(\lambda)$. (*)

(*) Supongamos la función $Y=\sum_{i=1}^{k}a_i.X_i^2$ con $a_1=\max\{a_1a_2\ldots,a_k\}$ y maximicemosla sujeta a la restricción $\sum_{i=1}^{k}X_i^2=1$, para ello formaremos la función de Lagrange:

$\psi(X_1,\ldots X_k;\lambda)=\sum_{i=1}^{k}a_iX_i^2-\lambda(\sum_{i=1}^{k}X_i^2-1)$ que derivada parcialmente dará:

$\frac{\partial\psi}{\partial X_i}=2a_i.X_i-2\lambda X_i=0$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$ luego $a_i.X_i-\lambda X_i=0$ o sea

$(a_i-\lambda).X_i=0$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$ con la condición de que $\sum_{i=1}^{k}X_i^2=1$.

La solución del sistema no es otra que $\lambda=a_{i_0}$ para $i_0\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}$ y $X_i=0$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,k\}-\{i_0\}$ y de aquí por la restricción será $X_{i_0}=1$ y para maximizar $Y=a_{i_0}$ tendremos que tomar $i_0=1$ con lo que el máximo de:

$Y=\sum_{i=1}^{k}a_i.X_i^2$ condicionado a $\sum_{i=1}^{k}X_i^2=1$ se obtendrá haciendo

$X_1=1$ y $X_2=X_3=\ldots=X_k=0$ siendo el máximo $Y_{max}=a_1$.

b) Como $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ deben tener coherencia 0 para toda frecuencia λ, tendremos que $f_{Y_1Y_2}(\lambda)=0$ y al ser:

$$f_{Y_1Y_2}(\lambda)=\sum_{j=1}^{k} C_{1j}(\lambda).\overline{C_{2j}(\lambda)}.\mu_j(\lambda)=$$

$$=C_{11}(\lambda).C_{21}(\lambda).\mu_1(\lambda)+\sum_{j=2}^{k} C_{ij}(\lambda).\overline{C_{2j}(\lambda)}.\mu_j(\lambda)$$

y por a) tenemos que $C_{12}(\lambda)=C_{13}(\lambda)=\ldots,C_{1k}(\lambda)=0$ luego $f_{Y_1Y_2}(\lambda)=C_{11}(\lambda).C_{21}(\lambda).\mu_1(\lambda)=0$ y esto implica que $C_{21}(\lambda)=0$

c) Maximizaremos ahora $f_{Y_2Y_2}(\lambda)=\sum_{j=1}^{k}|C_{2j}(\lambda)|^2.\mu_j(\lambda)$ que al ser por b) $C_{21}(\lambda)=0$ nos lleva a que:

$$f_{Y_2Y_2}(\lambda)=\sum_{j=2}^{k}|C_{2j}(\lambda)|^2.\mu_j(\lambda)$$

condicionado este máximo a $\sum_{j=1}^{k}|C_{2j}(\lambda)|^2=1$

ó sea también como antes por b), $\sum_{j=2}^{k}|C_{2j}(\lambda)|^2=1$.

Maximización identica a la realizada en a) con lo que el máximo se alcanzará para $|C_{22}(\lambda)|=1$ y $|C_{23}(\lambda)|=\ldots=|C_{2k}(\lambda)|=0$ siendo éste $f_{Y_2Y_2}(\lambda)=\mu_2(\lambda)$.

d) Como lo hemos hecho en b) aquí debemos asegurar que $Y_3(t)$ tenga coherencia nula tanto con $Y_1(t)$ como con $Y_2(t)$ y esto nos llevará a hacer nulos los

los espectros cruzados $f_{Y_1Y_3}(\lambda)$ y $f_{Y_2Y_3}(\lambda)$ con lo que obtendremos $C_{31}(\lambda)=0$ y $C_{32}(\lambda)=0$.

e) Reiterando sucesivamente lo hecho en los apartados a), b), c)y d) llegaríamos a tener que maximizar $f_{Y_pY_{p_k}}(\lambda)$ con $p\leq s$, tendremos entonces que $f_{Y_pY_p}(\lambda)=\sum_{j=1}^{k}|C_{pj}(\lambda)|^2\cdot\mu_j(\lambda)=\sum_{j=p}^{k}|C_{pj}(\lambda)|^2\cdot\mu_j(\lambda)$ condicionado a que:

$$\sum_{j=1}^{k}|C_{pj}(\lambda)|^2=\sum_{j=p}^{k}|C_{pj}(\lambda)|^2=1$$

obteniendose el máximo de $f_{Y_pY_p}(\lambda)$ igual a $\mu_p(\lambda)$ al hacer $|C_{pp}(\lambda)|=1$ y $|C_{p,p+1}(\lambda)|=\ldots=|C_{pk}(\lambda)|=0$

con todo lo anterior hemos obtenido la matriz $\mathcal{C}$ de orden sxk, que toma la forma:

$$\mathcal{C}=\left(\begin{pmatrix} C_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ss}(\lambda) \end{pmatrix} \vdots \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right)$$

con $|C_{11}(\lambda)|=\ldots=|C_{ss}(\lambda)|=1$, y por tanto:

$$B^*(\lambda)=\mathcal{C}(\lambda)\cdot\overline{\mathcal{U}(\lambda)'}=$$

$$=\left(\begin{pmatrix} C_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ss}(\lambda) \end{pmatrix} \vdots\; 0\right)\cdot\begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{\mathcal{U}_s(\lambda)'} \\ \cdots\cdots \\ \vdots \\ \overline{\mathcal{U}_k(\lambda)'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & C_{ss}(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(\lambda)\cdot\overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ C_{ss}(\lambda)\cdot\overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix}$$

con $C_{ii}(\lambda)$ $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ números complejos de módulo $|C_{ii}(\lambda)|=1$. Según la nota de pag.:208 sabemos que con esta condición de $|C_{ii}(\lambda)|=1$, el vector $C_{ii}(\lambda)\cdot U_i(\lambda)$ es un vector característico de la matriz $f_{XX}(\lambda)$. Con lo cual, la matriz espectral de la serie s-variante $Y^*(t)$ será:

$$f_{Y^*Y^*}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{con}$$

$\mu_i(\lambda)$ $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ las s mayores raices características de la matriz $f_{XX}(\lambda)$. Este resultado podemos ver que coincide con el obtenido para la serie s-variante $Y(t)$ formada por las s primeras componentes principales de $X(t)$ dado en pag. 215 .

Analizaremos, por último, para terminar este epígrafe, la PLURALIDAD de COMPONENTES PRINCIPALES de una serie temporal, debida a la falta de unicidad en el conjunto de vectores característicos ortonormales de una matriz compleja,que ya pusimos de manifiesto en nota de la pag.208. Para ello tendremos que comparar las distintas formas en que podrá ser definido el vector de componentes principales.

Consideremos las series s-variantes $Y(t)$ e $Y^*(t)$ ambas formadas por las s primeras series componentes principales de $X(t)$, definidas del siguiente modo:

$$Y(t)=\sum_{v=-\infty}^{\infty} b(t-v).X(v) \qquad \text{con}$$

$B(\lambda)=\sum_{v=-\infty}^{\infty} b(v).\exp\{-iv\lambda\}$ la función de transferencia del (k,s) filtro lineal $\{b(v)\}_{v\varepsilon Z}$ y

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix}$$ siendo $U_i(\lambda)$ el vector característico de la matriz espectral $f_{XX}(\lambda)$ asociada a su i-ésima mayor raiz característica. Con la condición de que la i-ésima componente de este vector, $U_{ii}(\lambda)$ sea real.

De forma análoga,

$$Y^*(t)=\sum_{z=-\infty}^{\infty} b^*(t-z).X(z) \qquad \text{con}$$

$B^*(\lambda)=\sum_{z=-\infty}^{\infty} b^*(z).\exp\{-iz\lambda\}$ la función de transferencia que corresponde ahora al (k,s) filtro lineal $\{b^*(z)\}_{z\varepsilon Z}$ y

$$B^*(\lambda) = C_s(\lambda)\cdot\begin{bmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{bmatrix} = C_s(\lambda)\cdot B(\lambda)$$

siendo $C_s(\lambda)$ una matriz compleja diagonal y unitaria de la forma:

$$C_s(\lambda) = \begin{bmatrix} C_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & C_{ss}(\lambda)\end{bmatrix} \qquad \text{con}$$

$|C_{ii}(\lambda)|=1$ para todo $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$.

Hemos demostrado ya que:

$$f_{YY}(\lambda) = f_{Y^*Y^*}(\lambda) = M_s(\lambda)$$

siendo $M_s(\lambda)$ la matriz diagonal formada por las s mayores raices características de la matriz espectral $f_{XX}(\lambda)$, o sea:

$$M_s(\lambda) = \begin{bmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ 0 & & & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)\end{bmatrix}$$

Analizaremos en primer lugar, la matriz de coherencia entre las series $Y(t)$ e $Y^*(t)$, dada por:

$$\gamma^2_{YY^*}(\lambda) = f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YY^*}(\lambda)\cdot f_{Y^*Y^*}(\lambda)^{-1}\cdot f_{Y^*Y}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2} \qquad (*)$$

será necesario obtener la matriz espectral cruzada $f_{YY^*}(\lambda)$,

---

(*) Recuerdese la expresión de la matriz $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ dada en pag. 155

para ello obtendremos en primer lugar la matriz de covarian cias retardadas:

$$C_{YY^*}(u)=E\{(Y(t+u)-\mu_Y).(Y^*(t)-\mu_{Y^*})'\}$$

$$=E\{\sum_{v=-\infty}^{\infty}b(t+u-v).(X(v)-\mu_X).(\sum_{z=-\infty}^{\infty}b^*(t-z).(X(z)-\mu_z))'\}$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty}b(t+u-v).E\{(X(v)-\mu_X).(X(z)-\mu_X)'\}.b^*(t-z)'$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\sum_{z=-\infty}^{\infty}b(t+u-v).C_{XX}(v-z).b^*(t-z)'$$

cambiando de variable y haciendo t-z=w tenemos:

$$C_{YY^*}(u)=\sum_{v=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty}b(t+u-v).C_{XX}(v+w-t).b^*(w)'$$

y cambiando t+u-v=k queda:

$$C_{YY^*}(u)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty}b(k).C_{XX}(u+w-k).b^*(w)'$$

luego:

$$f_{YY^*}(\lambda)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{YY^*}(u).\exp\{-iu\lambda\}=$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}(\sum_{k-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty}b(k).C_{XX}(u+w-k).b^*(w)').\exp\{-iu\lambda\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty}b(k).\exp\{-ik\lambda\}.C_{XX}(u+w-k).$$

$$.\exp\{-i(u+w-k)\lambda\}.b^*(w)'.\exp\{iw\lambda\}$$

cambiando u+w-k=j tenemos:

$$f_{YY^*}(\lambda)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b(k).\exp\{-ik\lambda\}.(2\pi)^{-1}.\sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{XX}(j).\exp\{-ij\lambda\}.$$

$$.\sum_{w=-\infty}^{\infty} b^*(w).\exp\{iw\lambda\}=B(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{B^*(\lambda)}'$$

$$=B(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{(C_s(\lambda).B(\lambda))}'$$

$$=B(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{B(\lambda)}'.\overline{C_s(\lambda)}'.=M_s(\lambda).\overline{C_s(\lambda)}$$

$$=\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 \cdots 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 \cdots 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \overline{C_{11}(\lambda)} & 0 \cdots 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 \cdots 0 & \overline{C_{ss}(\lambda)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda).\overline{C_{11}(\lambda)} & 0 \cdots 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 \cdots 0 & \mu_{ss}.\overline{C_{ss}(\lambda)} \end{pmatrix}$$

además,

$$f_{Y^*Y}(\lambda)=\overline{f_{YY^*}(\lambda)}'=\overline{(M_s(\lambda).\overline{C_s(\lambda)})}'=C_s(\lambda)'.\overline{M_s(\lambda)}'=C_s(\lambda).M_s(\lambda) \qquad (*)$$

con todo lo cual, la matriz de coherencia será:

$$\gamma^2_{YY^*}(\lambda)=M_s(\lambda)^{-1/2}.M_s(\lambda).\overline{C_s(\lambda)}.M_s(\lambda)^{-1}.C_s(\lambda).M_s(\lambda).M_s(\lambda)^{-1/2}$$

$$=M_s(\lambda)^{1/2}.\overline{C_s(\lambda)}.M_s(\lambda)^{-1}.C_s(\lambda).M_s(\lambda)^{1/2}$$

y por ser todas las matrices diagonales podremos aplicar la conmutatividad del producto, quedando:

(*) Según hemos visto en pag. 65 , propiedad d) del espectro cruzado, y por ser $C_s(\lambda)$ diagonal y $M_s(\lambda)$ diagonal y real.

$$\gamma^2_{YY*}(\lambda)=\overline{C_s(\lambda)}\cdot I_s\cdot C_s(\lambda)=\overline{C_s(\lambda)}\cdot C_s(\lambda)=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{C_{11}(\lambda)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \overline{C_{ss}(\lambda)}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & C_{ss}(\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|C_{11}(\lambda)|^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & |C_{ss}(\lambda)|^2\end{pmatrix}=I_s$$

Este resultado nos indica que las series $Y(t)$ e $Y^*(t)$ estan perfectamente correlacionadas en toda frecuencia λ. Más aun, no es esto solo lo que podemos apreciar respecto a la correlación entre $Y(t)$ e $Y^*(t)$, pues al ser:

$$\delta_{YY*}(\lambda)=\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)\cdot\overline{C_{11}(\lambda)} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)\cdot\overline{C_{ss}(\lambda)}\end{pmatrix}$$

diagonal, esto nos indica que las componentes de $Y(t)$ e $Y^*(t)$ son tales que $Y_i(t)$ e $Y^*_j(t)$ con $i,j\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ tienen como coherencia:

$$\gamma^2_{Y_iY^*_j}(\lambda)=\frac{f_{Y_iY^*_i}(\lambda)\cdot f_{Y^*_jY_i}(\lambda)}{f_{Y_iY_i}(\lambda)\cdot f_{Y^*_jY^*_j}(\lambda)}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{para } i\neq j\\ \dfrac{\mu_i(\lambda)\cdot\overline{C_{ii}(\lambda)}\cdot C_{ii}(\lambda)\cdot\mu_i(\lambda)}{\mu_i(\lambda)\cdot\mu_i(\lambda)}=|C_{ii}(\lambda)|^2=1 & \text{para } i=j\end{cases}$$

luego para todo $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ la componente i-ésima de $Y(t)$

está perfectamente correlacionada con la componente i-ésima de $\mathbf{Y}^*(t)$ la toda frecuencia λ, estando totalmente incorrelacionada con cualquier otra de las componentes de $\mathbf{Y}^*(t)$ también en cualquier frecuencia λ.

La ganancia $G_{Y_i Y_i^*}(\lambda)$ es por tanto:

$$G_{Y_i Y_i^*}(\lambda) = \frac{|f_{Y_i Y_i^*}(\lambda)|}{f_{Y_i^* Y_i^*}(\lambda)} = \frac{|\mu_i(\lambda) . \overline{C_{ii}(\lambda)}|}{\mu_i(\lambda)} = \frac{\mu_i(\lambda) . |C_{ii}(\lambda)|}{\mu_i(\lambda)} = |C_{ii}(\lambda)| = 1$$

para $i \varepsilon \{1,2,...,s\}$ (*)

La fase $\phi_{Y_i Y_i^*}(\lambda)$ será, no obstante,

$$\phi_{Y_i Y_i^*}(\lambda) = \arg\{\frac{f_{Y_i Y_i^*}(\lambda)}{f_{Y_i^* Y_i^*}(\lambda)}\} = \arg\{\frac{\mu_i(\lambda) . \overline{C_{ii}(\lambda)}}{\mu_i(\lambda)}\} = \arg\{\overline{C_{ii}(\lambda)}\}$$

luego las componentes $Y_i(t)$ e $Y_i^*(t)$ difieren únicamente en fase, estando perfectamente correlacionadas en toda frecuencia λ al ser la coherencia identicamente igual a 1.

Para que el angulo de fase fuese identicamente igual a cero, $\overline{C_{ii}(\lambda)}$ debería ser $\underline{1}$ con lo que $Y_i(t) = Y_i^*(t)$.

Veamos ahora, la estructura covariante entre la serie k-variante $\mathbf{X}(t)$ y sus s primeras componentes correspondientes a la serie s-variante $\mathbf{Y}^*(t)$. Calcularemos primero la matriz de covariancias retardadas:

(*) Recuerdese la expresión dada para la ganancia en pag. 165

$$C_{Y^*X}(u)=E\{(Y^*(t+u)-\mu_{Y^*})\cdot(X(t)-\mu_X)'\}$$

$$=E\{\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} b^*(t+u-v)\cdot(X(v)-\mu_X)\cdot(X(t)-\mu_X)'\right\}$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty} b^*(t+u-v)\cdot E\{(X(v)-\mu_X)\cdot(X(t)-\mu_X)'\}$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty} b^*(t+u-v)\cdot C_{XX}(v-t)$$

y haciendo el cambio de variable v-t=w tenemos:

$$C_{Y^*X}(u)=\sum_{w=-\infty}^{\infty} b^*(u-w)\cdot C_{XX}(w)$$

De aquí la matriz espectral cruzada será:

$$f_{Y^*X}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty} C_{Y^*X}(u)\cdot\exp\{-iu\lambda\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty} b^*(u-w)\cdot C_{XX}(w)\cdot\exp\{-iu\lambda\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty} b^*(u-w)\cdot\exp\{-i(u-w)\lambda\}\cdot C_{XX}(w)\cdot\exp\{-iw\lambda\}$$

y haciendo el cambio de variable u-w=z tenemos,

$$f_{Y^*X}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{z=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty} b^*(z)\cdot\exp\{-iz\lambda\}\cdot C_{XX}(w)\cdot\exp\{-iw\lambda\}$$

$$=\sum_{z=-\infty}^{\infty} b^*(z)\cdot\exp\{-iz\lambda\}\cdot(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{w=-\infty}^{\infty} C_{XX}(w)\cdot\exp\{-iw\lambda\}$$

$$=B^*(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)=C_s(\lambda)\cdot\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)}'\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)}'\end{pmatrix}\cdot f_{XX}(\lambda)=$$

$$=C_s(\lambda)\cdot\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot U(\lambda)\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'}$$

$$=C_s(\lambda)\cdot(I_s\vdots 0)\cdot M_k(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'}$$

$$=(C_s(\lambda)\vdots 0)\cdot\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)\cdot\overline{U_1(\lambda)'}\\ \mu_s(\lambda)\cdot\overline{U_s(\lambda)'}\\ \mu_k(\lambda)\cdot\overline{U_k(\lambda)'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}(\lambda)\cdot\mu_1(\lambda)\cdot\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ C_{ss}(\lambda)\cdot\mu_s(\lambda)\cdot\overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}$$

De aquí el espectro cruzado entre X_i e Y_i^* para todo $i\varepsilon\{1,2,\dots,s\}$ será:

$$f_{Y_i^*X_i}(\lambda)=C_{ii}(\lambda)\cdot\mu_i(\lambda)\cdot\overline{U_{ii}(\lambda)}=\mu_i(\lambda)\cdot C_{ii}(\lambda)\cdot\overline{U_{ii}(\lambda)}$$

Entonces la fase entre Y_i^* y X_i será:

$$\phi_{Y_i^*X_i}(\lambda)=\arg\{f_{Y_i^*X_i}(\lambda)\}=\arg\{\mu_i(\lambda)\cdot C_{ii}(\lambda)\cdot\overline{U_{ii}(\lambda)}\}$$

$$=\arg\{C_{ii}(\lambda)\cdot\overline{U_{ii}(\lambda)}\}$$

Este angulo será identicamente nulo $\phi_{Y_i^*X_i}(\lambda)\equiv 0$, siempre y cuando $C_{ii}(\lambda)\cdot\overline{U_{ii}(\lambda)}$ sea real, esto nos dirá que la i-ésima componente de la serie k-variante original $X(t)$, está en FASE con la serie i-ésima componente principal de $X(t)$, para $i\varepsilon\{1,2,\dots,s\}$. Esto justifica la arbitrariedad aparente, que surgió en la nota de la pag. 210, cuando dijimos que de entre todos los conjuntos de vectores ortogonales que diagonalizaban a $\delta_{XX}(\lambda)$ tomaríamos, aquel cuyos vectores tuviesen real su i-ésima componente. Entonces el complejo $C_{ii}(\lambda)$ deberá ser identicamente igual a 1 para todo $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ siendo entonces $Y^*(t)=Y(t)$. Siendo, por tanto, $Y(t)$ de entre todas las series s-variantes formadas por las s primeras componentes de $X(t)$, aquella cuyas componentes están en fase con la correspondiente componente de la serie original $X(t)$. La serie $Y^*(t)$ puede tomarse tambien, de forma que sus componentes esten en fase con cualquier conjunto de s componentes de entre las k de $X(t)$.

Es de observar por último que cualquiera que sea la serie $Y^*(t)$ formada por las s primeras componentes de $X(t)$, conserva la misma cantidad de información respecto a la serie original, pues al ser:

$$B^*(\lambda)=\begin{pmatrix} C_{11}(\lambda).\overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ C_{ss}(\lambda).\overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix}$$

tendremos que:

$$D^*(\lambda)=\overline{B^*(\lambda)'}=(\overline{C_{11}(\lambda)}.U_1(\lambda),\ldots,\overline{C_{ss}(\lambda)}.U_s(\lambda))$$

y entonces $A^*(\lambda)$ que es la función de transferencia del (k,k) filtro lineal sumativo resultante de aplicar sucesivamente los filtros con función de transferencia $B^*(\lambda)$ y $D^*(\lambda)$ será:

$$A^*(\lambda)=D^*(\lambda).B^*(\lambda)$$

$$=\{\overline{c_{11}(\lambda)}.U_1(\lambda),\dots,\overline{c_{ss}(\lambda)}.U_s(\lambda)\}.\begin{bmatrix} c_{11}(\lambda).\overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ c_{ss}(\lambda).\overline{U_s(\lambda)'} \end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\overline{c_{ii}(\lambda)}.U_i(\lambda).\ c_{ii}(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}=\sum_{i=1}^{s}|c_{ii}(\lambda)|.U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}=\{U_1(\lambda),\dots,U_s(\lambda)\}.\begin{bmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{bmatrix}=D(\lambda).B(\lambda)=A(\lambda)$$

Por todo lo anterior, consideraremos a $Y(t)$ como la serie s-variante formada por las s primeras componentes principales de la serie original k-variante $X(t)$.

2) ESTIMACION.

Dada la serie temporal k-variante $X(t)$, y disponiendo de un registro muestral de tamaño N, que simbolizaremos $\{X(t)\}_{t\varepsilon\{1,2\dots N\}}$, nos interesará transformar estos datos de dimensión-k en otros cuya dimensión sea s con s<k, con la finalidad de que en estos nuevos datos se transmita la mayor información sobre la estructura covariante de los datos originales, pero con la ventaja de haber reducido lo más posible la dimensionalidad de la información. Esto se utiliza fundamentalmente en los trabajos empíricos

de exploración, muy corrientes en áreas del conocimiento como son las investigaciones en economía, o, marketing y empresa. (*)

Tambien puede ser interesante obtener, las componentes principales de la serie $\chi(t)$, para introducirlas como variables exógenas en un modelo paramétrico y de esta forma reducir el número de parámetros de que constará el modelo, y que debían estimarse con el registro muestral dado. Aunque la interpretación posterior de dichos parámetros será generalmente complicada, quizás el modelo podrá ser útil para los fines que se ha diseñado (**)

A partir del registro muestral $\{\chi(t)\}_{t\varepsilon\{1,2,..N\}}$ se obtendrá la estimación de la matriz espectral, $\hat{f}_{XX}(\lambda)$ determinaremos sus raices caracteristicas que simbolizaremos por $\{\hat{\mu}_i(\lambda)\}_{i\varepsilon\{1,2...k\}}$, y a partir de estos los

(*) Para una aplicación de este tipo puede verse, Frank, R.E. Kuehn, A.A y Massy, W.F. (1962). Quantitative Techniques in Marketing Analysis, Irwin Inc. Illinois.

(**) Massy, W.F. (1965. pags. 234-242). Trata de la aplicación de las componentes principales a modelos de regresión, en los que precisamente se efectue la regresión sobre estas componentes principales y no sobre la totalidad de las componentes de la serie original.

vectores caracteristicos asociados $\{\hat{U}_i(\lambda)\}_{i\varepsilon\{1,2...k\}}$ (*) que nos servirán como estimadores de las raices $\{\mu_i(\lambda)\}_{i\varepsilon\{1,2...k\}}$ y vectores caracteristicos $\{U_i(\lambda)\}$ con $i\varepsilon\{1,2...k\}$ de la matriz espectral $f_{xx}(\lambda)$ correspondiente a la serie temporal k-variante $X(t)$.

Una vez determinadas las raices caracteristicas $\{\hat{\mu}_i(\lambda)\}_{i\varepsilon\{1,2...k\}}$ se eligirán las s mayores para a partir de ellas obtener las s-primeras componentes principalesen la frecuencia λ.

La matriz espectral de la serie de errores $\varepsilon(t)$, o serie formada por la parte de la estructura covariante de la serie $X(t)$, cuya información no conservan las s-primeras componentes principales, podrá estimarse mediante

$$\hat{f}_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=\sum_{i=s+1}^{k}\hat{\mu}_i(\lambda)\cdot\hat{U}_i(\lambda)\cdot\overline{\hat{U}_i(\lambda)}'$$

(*) para evitar cambios de fase en los componentes principales, debe recordarse que los vectores caracteristicos $\hat{U}_i(\lambda)$ serán k-dimensionales con sus componentes complejos en general, debiendo efectuarse las transformaciones oportunas para que la i-esima componente del vector $\hat{U}_i(\lambda)$ sea real. En Robinson, E.A. (1967, cap.4) pueden encontrarse procedimientos de conjunto de estas raices y vectores caracteristicos, programados en el lenguage Fortram-IV.

donde se supone que las raices $\{\hat{\mu}_i(\lambda)\}_{i\varepsilon\{1,2\cdots K\}}$ se han ordenado de mayor a menor.

Un análisis de la Matriz $\hat{f}_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ nos permitirá conocer la mayor o menor representatividad de la serie s-variante $Y(t)$ de componentes principales como sustituto subdimensionado de la serie original $X(t)$.

Por último, la función de Transferencia estimada del filtro que nos permitirá pasar de la serie original k-variante $X(t)$ a la serie de componentes principales $Y(t)$, vendrá dada por:

$$\hat{B}(\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{\hat{U}_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{\hat{U}_s(\lambda)'} \end{pmatrix}$$

matriz cuyas filas son los vectores transpuestos conjugados de los vectores caracteristicos asociados a las s mayores raices caracteristicas de $\hat{f}_{XX}(\lambda)$

En Brillinger, D.R. (1975, pig 94) puede encontrarse una aproximación a las distribuciones muestrales de los estimadores

$$\{\hat{\mu}_i(\lambda)\}_{i\varepsilon\{1,2\ldots k\}} \text{ y } \{\hat{U}_i(\lambda)\}_{i\varepsilon\{1,2.k\}}$$

de las raíces y vectores caracteristicos de la matriz espectral $\hat{f}_{XX}(\lambda)$.

III) ANALISIS CANONICO DE SERIES TEMPORALES MULTIVARIANTES, BAJO EL ENFOQUE ESPECTRAL

Consideraremos en este epígrafe, el análisis canónico ó de las correlaciones canónicas entre series temporales multivariantes, realizando este análisis desde el punto de vista del dominio frecuencial.

Dadas las series temporales, $Y(t)$ r-variante y $X(t)$ k-variante, nuestro objetivo será obtener dos series s-variantes $\eta(t)$ y $\xi(t)$ con $s \leq \min\{r,k\}$, tales que sean transformaciones lineales invariantes de las series originales $Y(t)$ y $X(t)$ respectivamente, obtenidas dichas transformaciones mediante la aplicación de los oportunos filtros lineales sumativos.

Satisfaciéndose las siguientes restricciones:

a) Toda componente de la serie s-variante $\eta(t)$ tiene coherencia nula respecto a cualquier otra de sus componentes.

b) Toda componente de la serie s-variante $\xi(t)$ tiene coherencia nula respecto a cualquier otra de sus componentes.

c) Toda componente de la serie s-variante $\eta(t)$ tiene coherencia nula respecto a cualquiera de las componentes de la serie s-variante $\xi(t)$, menos con una sola de ellas, pudiendo reordenarse las componentes para que la primera componente de la serie $\eta(t)$ tenga coherencia máxima distinta de cero respecto a la primera componente de la serie $\xi(t)$, y así sucesivamente hasta las s-ésimas componentes. A estos pares de componentes con coherencia máximas se les denominará SERIES CANONICAS siendo su coherencia la correspondiente COHERENCIA CANONICA.

Pasaremos seguidamente, al análisis del modelo que nos permita obtener estos pares de series canónicas y sus coherencias, tratando a continuación, el modo como pueden ser estimadas éstas, a partir de un registro muestral de las series originales $\mathrm{Y}(t)$ y $\mathrm{X}(t)$.

1) ESTUDIO DEL MODELO

Consideremos la serie (r+k)-variante $\mathrm{Z}(t)$, que supondremos es debilmente estacionaria y cuyas componentes pueden particionarse obteniendo:

$$\mathrm{Z}(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{Y}(t) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{X}(t) \end{pmatrix}$$

con $\mathrm{Y}(t)$ una serie r-variante formada por las r primeras componentes de $\mathrm{Z}(t)$ y $\mathrm{X}(t)$ la serie k-variante formada por las restantes componentes.

La serie temporal $\mathrm{Z}(t)$, posee las siguientes características:

El vector de medias μ_Z, será:

$$\mu_Z=E\{\mathrm{Z}(t)\}=E\{\begin{pmatrix} \mathrm{Y}(t) \\ \cdots\cdots \\ \mathrm{X}(t) \end{pmatrix}\}=\begin{pmatrix} E\{\mathrm{Y}(t)\} \\ \cdots\cdots\cdots \\ E\{\mathrm{X}(t)\} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdot\cdot \\ \mu_X \end{pmatrix}$$

La matriz $C_{ZZ}(u)$ de covariancias retardadas para $u \varepsilon Z$, será:

$$C_{ZZ}(u)=E\{(Z(t+u)-\mu_Z).(Z(t)-\mu_Z)'\}$$

$$=E\left\{\begin{bmatrix} Y(t+u)-\mu_Y \\ \cdots\cdots\cdots \\ X(t+u)-\mu_Y \end{bmatrix}.((Y(t)-\mu_Y)' \vdots (X(t)-\mu_X)')\right\}$$

$$=\begin{bmatrix} E\{(Y(t+u)-\mu_Y).(Y(t)-\mu_Y)'\} & \vdots & E\{(Y(t+u)-\mu_Y).(X(t)-\mu_X)'\} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E\{(X(t+u)-\mu_X).(Y(t)-\mu_Y)'\} & \vdots & E\{(X(t+u)-\mu_X).(X(t)-\mu_X)'\} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_{YY}(u) & \vdots & C_{YX}(u) \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ C_{XY}(u) & \vdots & C_{XX}(u) \end{bmatrix} \qquad (*)$$

para la que supondremos es convergente:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |C_{ZZ}(u)|$$

con lo que, la matriz espectral $f_{ZZ}(\lambda)$ para $\lambda \varepsilon R$, vendrá dada por:

$$f_{ZZ}(\lambda)=(2\pi)^{-1}. \sum_{u=-\infty}^{\infty} C_{ZZ}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}. \sum_{u=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} C_{YY}(u) & \vdots & C_{YX}(u) \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ C_{XY}(u) & \vdots & C_{XX}(u) \end{bmatrix}.\exp\{-i\lambda u\}=$$

(*) Siendo, según sabemos, por la propiedad de la matriz de covariancias retardadas, dada en pag. 62. $C_{ZZ}(-u)'=C_{ZZ}(u)$ con lo que $C_{YX}(-u)'=C_{XY}(u)$.

$$= \begin{pmatrix} f_{YY}(\lambda) & \vdots & f_{YX}(\lambda) \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ f_{XY}(\lambda) & \vdots & f_{XX}(\lambda) \end{pmatrix}$$

Siendo $f_{XY}(\lambda)=\overline{f_{YX}(\lambda)'}$ y en la que consideraremos a las submatrices espectrales $f_{YY}(\lambda)$ y $f_{XX}(\lambda)$ regulares, o lo que es equivalente, las consideraremos definidas positivas.

Fijaremos nuestra atención en el problema consistente en determinar sendas transformaciones lineales de las series temporales $\mathcal{Y}(t)$ y $\mathcal{X}(t)$, mediante la aplicación del (r,s) filtro lineal sumativo $\{e(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y del (k,s) filtro lineal sumativo $\{g(u)\}_{u\varepsilon Z}$ respectivamente, con $s\leq\min\{r,k\}$, para obtener las series temporales s-variantes $\eta(t)$ y $\xi(t)$ transformadas de las originales $\mathcal{Y}(t)$ y $\mathcal{X}(t)$ mediante la acción de los mencionados filtros. Asi tendremos que:

$$\eta(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} e(t-u).\mathcal{Y}(u) \qquad \text{y}$$

$$\xi(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} g(t-u).\mathcal{X}(u)$$

series s-variantes cuyas características principales serán las siguientes:

Sea la serie 2.s-variante $\psi(t)$ que tiene como componentes las series $\eta(t)$ y $\xi(t)$, de forma que,

$$\psi(t)=\begin{pmatrix} \eta(t) \\ \cdots \\ \xi(t) \end{pmatrix}$$

El vector de medias μ_ψ vendrá dado por:

$$\mu_{\psi}=E\{\psi(t)\}=E\left\{\begin{pmatrix}\eta(t)\\ \dots\\ \xi(t)\end{pmatrix}\right\}=E\left\{\begin{pmatrix}\sum_{u=-\infty}^{\infty}e(t-u)\cdot Y(u)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \sum_{u=-\infty}^{\infty}g(t-u)\cdot X(u)\end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\begin{pmatrix}\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}e(u)\right)\cdot\mu_Y\\ \dots\dots\dots\dots\\ \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}g(u)\right)\cdot\mu_X\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_{\eta}\\ \dots\\ \mu_{\xi}\end{pmatrix}$$

La matriz $C_{\psi\psi}(u)$ de covariancias retardadas para $u\varepsilon Z$, será:

$$C_{\psi\psi}(u)=E\{(\psi(t+u)-\mu_{\psi})\cdot(\psi(t)-\mu_{\psi})'\}$$

$$=E\left\{\begin{pmatrix}\eta(t+u)-\mu_{\eta}\\ \dots\dots\dots\\ \xi(t+u)-\mu_{\xi}\end{pmatrix}\cdot\left((\eta(t)-\mu_{\eta})'\,\vdots\,(\xi(t)-\mu_{\xi})'\right)\right\}$$

$$=E\left\{\left(\begin{array}{c:c}(\eta(t+u)-\mu_{\eta})\cdot(\eta(t)-\mu_{\eta})' & (\eta(t+u)-\mu_{\eta})\cdot(\xi(t)-\mu_{\xi})'\\ \hdashline (\xi(t+u)-\mu_{\xi})\cdot(\eta(t)-\mu_{\eta})' & (\xi(t+u)-\mu_{\xi})\cdot(\xi(t)-\mu_{\xi})'\end{array}\right)\right\}$$

$$=\left(\begin{array}{c:c}C_{\eta\eta}(u) & C_{\eta\xi}(u)\\ \hdashline C_{\xi\eta}(u) & C_{\xi\xi}(u)\end{array}\right)$$

siendo:

$$C_{\eta\eta}(u)=E\{(\eta(t+u)-\mu_{\eta})\cdot(\eta(t)-\mu_{\eta})'\}$$

$$=E\left\{\left(\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}e(t+u-v_1)\cdot(Y(v_1)-\mu_Y)\right)\cdot\left(\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}e(t-v_2)\cdot(Y(v_2)-\mu_Y)\right)'\right\}$$

$$=\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}e(t+u-v_1)\cdot E\{(Y(v_1)-\mu_Y)\cdot(Y(v_2)-\mu_Y)'\}\cdot e(t-v_2)'$$

$$=\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}e(t+u-v_1)\cdot C_{YY}(v_1-v_2)\cdot e(t-v_2)'$$

y cambiando de variables, haciendo $t-v_1=z_1$ y $t-v_2=z_2$ con lo que $v_1-v_2=t-z_1-(t-z_2)=z_2-z_1$ tendremos:

$$C_{\eta\eta}(u)=\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}e(z_1+u)\cdot C_{YY}(z_2-z_1)\cdot e(z_2)'$$

Del mismo modo:

$$C_{\xi\xi}(u)=E\{(\xi(t+u)-\mu_\xi)\cdot(\xi(t)-\mu_\xi)'\}$$

$$=E\{(\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}g(t+u-v_1)\cdot(X(v_1)-\mu_X))\cdot$$

$$\cdot(\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}g(t-v_2)\cdot(X(v_2)-\mu_X))'\}=$$

$$=\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}g(t+u-v_1)\cdot E\{(X(v_1)-\mu_X)\cdot(X(v_2)-\mu_X)'\}\cdot g(t-v_2)'$$

$$=\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}g(t+u-v_1)\cdot C_{XX}(v_1-v_2)\cdot g(t-v_2)'$$

y haciendo el mismo cambio de variables anterior, tendremos:

$$C_{\xi\xi}(t)=\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}g(z_1+u)\cdot C_{XX}(z_2-z_1)\cdot g(z_2)'$$

y de forma análoga:

$$C_{\eta\xi}(u)=E\{(\eta(t+u)-\mu_\eta)\cdot(\xi(t)-\mu_\xi)'\}$$

$$=E\{(\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}e(t+u-v_1)\cdot(Y(v_1)-\mu_Y))\cdot$$

$$\cdot(\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}g(t-v_2)\cdot(X(v_2)-\mu_X))'\}=$$

$$=\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}e(t+u-v_1)\cdot E\{(Y(v_1)-\mu_Y)\cdot(X(v_2)-\mu_X)'\}\cdot g(t-v_2)'$$

$$=\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}e(t+u-v_1)\cdot C_{YX}(v_1-v_2)\cdot g(t-v_2)'$$

y haciendo de nuevo el cambio anterior, quedará:

$$C_{\eta\xi}(u)=\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}e(z_1+u)\cdot C_{YX}(z_2-z_1)\cdot g(z_2)'$$

y por último:

$$C_{\xi\eta}(u)=C_{\eta\xi}(-u)'=\Big(\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\sum_{j_2=-\infty}^{\infty}e(j_1-u)\cdot C_{YX}(j_2-j_1)\cdot g(j_2)'\Big)'$$

$$=\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\sum_{j_2=-\infty}^{\infty}g(j_2)\cdot C_{YX}(j_2-j_1)'\cdot e(j_1-u)'$$

$$=\sum_{j_1=-\infty}^{\infty}\sum_{j_2=-\infty}^{\infty}g(j_2)\cdot C_{XY}(j_1-j_2)\cdot e(j_1-u)'$$

y haciendo el cambio $j_1-u=z_2$ y $j_2-u=z_1$; será $j_2=z_1+u$ y $j_1-j_2=z_2+u-(z_1-u)=z_2-z_1$, quedando entonces:

$$C_{\xi\eta}(u)=\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}g(z_1+u)\cdot C_{XY}(z_2-z_1)\cdot e(z_2)'$$

Agrupando los resultados anteriores queda:

$$C_{\psi\psi}(u)=\left(\begin{array}{c:c} C_{\eta\eta}(u) & C_{\eta\xi}(u) \\ \hdashline C_{\xi\eta}(u) & C_{\xi\xi}(u)\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c:c} \sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}e(z_1+u)\cdot C_{YY}(z_2-z_1)\cdot e(z_2)' & \sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}e(z_1+u)\cdot C_{YX}(z_2-z_1)\cdot g(z_2)' \\ \hdashline \sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}g(z_1+u)\cdot C_{XY}(z_2-z_1)\cdot e(z_2)' & \sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}g(z_1+u)\cdot C_{XX}(z_2-z_1)\cdot g(z_2)'\end{array}\right)$$

A partir de este resultado, podemos obtener la matriz espectral $f_{\psi\psi}(\lambda)$ para $\lambda\varepsilon R$, siendo:

$$f_{\psi\psi}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{\psi\psi}(u)\cdot\exp\{-i\lambda u\}=$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix} C_{\eta\eta}(u) & C_{\eta\xi}(u) \\ C_{\xi\eta}(u) & C_{\xi\xi}(u)\end{bmatrix}.\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=\begin{bmatrix} f_{\eta\eta}(u) & f_{\eta\xi}(u) \\ f_{\xi\eta}(u) & f_{\xi\xi}(u)\end{bmatrix}$$

siendo:

$$f_{\eta\eta}(u)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{\eta\eta}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{z_2=-\infty}^{\infty}e(z_1+u).C_{YY}(z_2-z_1).e(z_2)'\Big).\exp\{-i\lambda u\}$$

haciendo el cambio de variables, $j=z_1+u$, $k=z_2-z_1$ y $w=z_2$ cuyo inverso es $z_2=w$, $z_1=z_2-k=w-k$ y $u=j-z_1=j-(w-k)=j+k-w$, tendremos:

$$f_{\eta\eta}(u)=(2\pi)^{-1}.\sum_{j=-\infty}^{\infty}\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}\ \sum_{w=-\infty}^{\infty}e(j).C_{YY}(k).e(w)'.\exp\{-i\lambda(j+k-w)\}$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e(j).\exp\{-i\lambda j\}.(2\pi)^{-1}.\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_{YY}(k).\exp\{-i\lambda k\}.\sum_{w=-\infty}^{\infty}e(w)'.\exp\{i\lambda u\}$$

$$=E(\lambda).f(\lambda).\overline{E(\lambda)'}$$

siendo $E(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}e(u).\exp\{-i\lambda u\}$ la matriz funcional de transferencia del (r,s) filtro lineal sumativo $\{e(u)\}_{u\in z}$.

Del mismo modo:

$$f_{\xi\xi}(u)=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}C_{\xi\xi}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{z_2=-\infty}^{\infty}g(z_1+u).C_{XX}(z_2-z_1).g(z_2)'\Big).\exp\{-i\lambda u\}$$

y haciendo el mismo cambio que antes,quedará:

$$f_{\xi\xi}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty} g(j)\cdot C_{XX}(k)\cdot g(w)'.\exp\{-i\lambda(j+k-w)\}$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty} g(j).\exp\{-i\lambda j\}\ .(2\pi)^{-1}.\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{XX}(k).\exp\{-i\lambda k\}.$$

$$\cdot\sum_{w=-\infty}^{\infty} g(w)'.\exp\{i\lambda w\}$$

$$=G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)'}$$

siendo $G(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} g(u).\exp\{-i\lambda u\}$ la matriz funcional de transfe̲rencia del (k,s) filtro lineal sumativo $\{g(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y de forma análoga,tendremos:

$$f_{\eta\xi}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty} C_{\eta\xi}(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{u=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty} e(z_1+u)\cdot C_{YX}(z_2-z_1)\cdot g(z_2)'\Big).\exp\{-i\lambda u\}$$

y haciendo de nuevo el cambio anterior, tendremos:

$$f_{\eta\xi}(\lambda)=(2\pi)^{-1}\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{w=-\infty}^{\infty} e(j)\cdot C_{YX}(k)\cdot g(w)'.\exp\{-i\lambda(j+k-w)\}$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty} e(j).\exp\{-i\lambda j\}.(2\pi)^{-1}.\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{YX}(k).\exp\{-i\lambda k\}.\ \sum_{w=-\infty}^{\infty} g(w)'.\exp\{i\lambda w\}$$

$$=E(\lambda)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)'}$$

y por último:

$$f_{\xi\eta}(\lambda)=\overline{f_{\eta\xi}(\lambda)}'=\overline{\left(E(\lambda)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)'}\right)}'$$

$$=\overline{\left(\overline{G(\lambda)}\cdot f_{YX}(\lambda)'\cdot E(\lambda)'\right)}$$

$$=G(\lambda)\cdot\overline{f_{YX}(\lambda)'}\cdot\overline{E(\lambda)}'=G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'$$

Agregando los resultados anteriores, podemos escribir:

$$f_{\psi\psi}(\lambda)=\left(\begin{array}{c:c} f_{\eta\eta}(\lambda) & f_{\eta\xi}(\lambda) \\ \hdashline f_{\xi\eta}(\lambda) & f_{\xi\xi}(\lambda)\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{c:c} E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}' & E(\lambda)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}' \\ \hdashline G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}' & G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'\end{array}\right)$$

Siendo las cuatro submatrices de orden sxs y debiendo ser todas ellas diagonales, para que se satisfagan las condiciones impuestas en la especificación de las series canónicas, en lo que se refiere a las coherencias nulas entre componentes,pue para que la coherencia sea nula deberá serlo el correspondiente espectro cruzado. (*)

El problema consiste por tanto en encontrar las transformaciones $\eta(t)$ y $\xi(t)$ de las series $Y(t)$ y $X(t)$ dadas respectivamente por los filtros $\{e(u)\}_{u\varepsilon z}$ y $\{g(u)\}_{u\varepsilon z}$, de forma que siendo α un vector de dimensión s la serie s-variante.

$$\eta(t)-(\alpha+\xi(t)$$

sea lo más pequeña posible.

(*) Recuerdese la definición de coherencia dada en pag. 162.

Debemos por tanto, determinar el vector α y los filtros $\{e(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y $\{g(u)\}_{u\varepsilon Z}$ tales que sea mínima la matriz:

$$\begin{aligned}H(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\}) &= E\{(\eta(t)-(\alpha+\xi(t))).(\eta(t)-(\alpha+\xi(t)))'\}\\ &= (\mu_\eta-(\alpha+\mu_\xi)).(\mu_\eta-(\alpha+\mu_\xi))'+\\ &\quad +E\{((\eta(t)-\mu_\eta)-(\xi(t)-\mu_\xi)).((\eta(t)-\mu_\eta)-(\xi(t)-\mu_\xi))'\}\\ &\geq E\{((\eta(t)-\mu_\eta)-(\xi(t)-\mu_\xi)).((\eta(t)-\mu_\eta)-(\xi(t)-\mu_\xi))'\}\end{aligned}$$

La igualdad se producirá cuando:

$$\mu_\eta-(\alpha+\mu_\xi)=0$$

o sea, si:

$$\alpha=\mu_\eta-\mu_\xi=\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}e(u)\right).\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}g(u)\right).\mu_X$$

Sustituyendo, $\eta(t)$ y $\xi(t)$ en función de las series originales $Y(t)$ y $X(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned}H(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\}) &\geq E\left\{\left[\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}e(t-u_1).(Y(u_1)-\mu_Y)-\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}g(t-v_1).(X(v_1)-\mu_X)\right].\right.\\ &\quad \left..\left[\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}e(t-u_2).(Y(u_2)-\mu_Y)-\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}g(t-v_2).(X(v_2)-\mu_X)\right]'\right\}\\ &= \sum_{u_1=-\infty}^{\infty}\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}e(t-u_1).E\{(Y(u_1)-\mu_Y).(Y(u_2)-\mu_Y)'\}.e(t-u_2)'+\\ &\quad +\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}g(t-v_1).E\{(X(v_1)-\mu_X).(X(v_2)-\mu_X)'\}.g(t-v_2)'-\\ &\quad -\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}e(t-u_1).E\{(Y(u_1)-\mu_Y).(X(v_2)-\mu_X)'\}.g(t-v_2)'-\\ &\quad -\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}g(t-v_1).E\{(X(v_1)-\mu_X).(Y(u_2)-\mu_Y)'\}.e(t-u_2)'=\end{aligned}$$

$$= \sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \sum_{u_2=-\infty}^{\infty} e(t-u_1) \cdot C_{YY}(u_1-u_2) \cdot e(t-u_2)' +$$

$$+ \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} g(t-v_1) \cdot C_{XX}(v_1-v_2) \cdot g(t-v_2)' -$$

$$- \sum_{u_1=-\infty}^{\infty} \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} e(t-u_1) \cdot C_{YX}(u_1-v_2) \cdot g(t-v_2)' -$$

$$- \sum_{v_1=-\infty}^{\infty} \sum_{u_2=-\infty}^{\infty} g(t-v_1) \cdot C_{XY}(v_1-u_2) \cdot e(t-u_2)'$$

y cambiando de variables, llamando:

$$z_1=t-u_1 \ , \ z_2=t-u_2 \ , \ w_1=t-v_1 \ \text{ y } \ w_2=t-v_2$$

siendo entonces:

$$u_1-u_2=t-z_1-(t-z_2)=z_2-z_1 \ , \ v_1-v_2=t-w_1-(t-w_2)=w_2-w_1 \ ,$$
$$u_1-v_2=t-z_1-(t-w_2)=w_2-z_1 \ \text{ y } \ v_1-u_2=t-w_1-(t-z_2)=z_2-w_1$$

tendremos que:

$$H(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\}) \geq \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \sum_{z_2=-\infty}^{\infty} e(z_1) \cdot C_{YY}(z_2-z_1) \cdot e(z_2)' +$$

$$+ \sum_{w_1=-\infty}^{\infty} \sum_{w_2=-\infty}^{\infty} g(w_1) \cdot C_{XX}(w_2-w_1) \cdot g(w_2)' -$$

$$- \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \sum_{w_2=-\infty}^{\infty} e(z_1) \cdot C_{YX}(w_2-z_1) \cdot g(w_2)' -$$

$$- \sum_{w_1=-\infty}^{\infty} \sum_{z_2=-\infty}^{\infty} g(w_1) \cdot C_{XY}(z_2-w_1) \cdot e(z_2)'$$

y como para $A,B \varepsilon \{X,Y\}$ tenemos que:

$$C_{AB}(u)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{AB}(\lambda) . \exp\{iu\lambda\} d\lambda \qquad (*)$$

(*) Recuerdese la fórmula de reciprocidad de la transformada de Fourier, propiedad g) de la matriz espectral, pag. 70.

podremos escribir:

$$\mathrm{H}(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\})\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty} e(z_1).\delta_{YY}(\lambda).e(z_2)'.\exp\{i(z_2-z_1)\lambda\}+$$

$$+\sum_{w_1=-\infty}^{\infty}\sum_{w_2=-\infty}^{\infty} g(w_1).\delta_{XX}(\lambda).g(w_2)'.\exp\{i(w_2-w_1)\lambda\}-$$

$$-\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{w_2=-\infty}^{\infty} e(z_1).\delta_{YX}(\lambda).g(w_2)'.\exp\{i(w_2-z_1)\lambda\}-$$

$$-\sum_{w_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty} g(w_1).\delta_{XY}(\lambda).e(z_2)'.\exp\{i(z_2-w_1)\lambda\}\Big).d\lambda$$

que puede escribirse mediante las matrices funcionales de transferencia $E(\lambda)$ y $G(\lambda)$ de los correspondientes filtros lineales sumativos $\{e(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y $\{g(u)\}_{u\varepsilon Z}$ quedando:

$$\mathrm{H}(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\})=\mathrm{H}(\alpha,E(\lambda),G(\lambda))$$

$$\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Big(E(\lambda).\delta_{YY}(\lambda).\overline{E(\lambda)}'+G(\lambda).\delta_{XX}(\lambda).\overline{G(\lambda)}'-$$

$$-E(\lambda).\delta_{YX}(\lambda).\overline{G(\lambda)}'-G(\lambda).\delta_{XY}(\lambda).\overline{E(\lambda)}'\Big).d\lambda$$

Para obtener los valores de $E(\lambda)$ y $G(\lambda)$ que minimizan la expresión matricial $\mathrm{H}(\alpha,E(\lambda),G(\lambda))$, actuaremos en dos etapas, en la primera consideraremos dada la matriz funcional $E(\lambda)$ y en la segunda consideraremos de forma simétrica que se conoce la matriz $G(\lambda)$.

a) Consideremos dada $E(\lambda)$ y minimicemos:

$$\mathrm{H}_1(\alpha,G(\lambda);E(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Big(E(\lambda).\delta_{YY}(\lambda).\overline{E(\lambda)}'+G(\lambda).\delta_{XX}(\lambda).\overline{G(\lambda)}'-$$

$$-E(\lambda).\delta_{YX}(\lambda).\overline{G(\lambda)}'-G(\lambda).\delta_{XY}(\lambda).\overline{E(\lambda)}'\Big).d\lambda=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'-$$
$$-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'+$$
$$+\{E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\overline{\{E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\}}'\Big)\cdot d\lambda \qquad (*)$$

y al ser la matriz:

$$\big(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\big)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\overline{\big(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\big)}'$$

semi-definida positiva al serlo $f_{YY}(\lambda)^{-1}$, tendremos que:

$$H_1(\alpha,G(\lambda);E(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Big(G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'-$$
$$-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'\Big)\cdot d\lambda$$

y como tambien hemos supuesto $f_{XX}(\lambda)$ definida positiva, existe $f_{XX}(\lambda)^{1/2}$ que será así mismo definida positiva, con inversa $f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$.

Llamando $G^*(\lambda)=G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{1/2}$ tendremos, $G(\lambda)=G^*(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$ y podemos escribir H_1 en función de $G^*(\lambda)$, quedando:

$$H_1^*(\alpha,G^*(\lambda);E(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Big(G^*(\lambda)\cdot\overline{G^*(\lambda)}'-G^*(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot$$
$$\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot G^*(\lambda)}'\Big)\cdot d\lambda$$

(*) ya que: $\big(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\big)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\overline{\big(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\big)}'=$
$=\big(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\big)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\big(\overline{f_{YY}(\lambda)}'\cdot\overline{E(\lambda)}'-\overline{f_{XY}(\lambda)}'\cdot\overline{G(\lambda)}'\big)=$
$=\big(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\big)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\big(f_{YY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'-f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'\big)=$
$=E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'-E(\lambda)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'+$
$+G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'$

con la condición de que:

$$G^*(\lambda)\cdot\overline{G^*(\lambda)}'=\left(G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{1/2}\right)\cdot\overline{\left(G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{1/2}\right)}'$$

$$=G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{1/2}\cdot\overline{\left(f_{XX}(\lambda)^{1/2}\right)}'\cdot\overline{G(\lambda)}'$$

$$=G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'$$

debe ser diagonal, para que se cumplan las restricciones de que las coherencias entre componentes de $\xi(t)$ sean nulas.

Si simbolizamos por:

$$M_V(\lambda)=\begin{pmatrix}\nu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \nu_k(\lambda)\end{pmatrix}$$

la matriz diagonal de las raices características de la matriz:

$$f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

y por:

$$V(\lambda)=\left(V_1(\lambda),V_2(\lambda),\ldots,V_k(\lambda)\right)$$

la matriz formada por los correspondientes vectores característicos, podremos escribir:

$$H_1^*(\alpha,G^*(\lambda);E(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\left(G^*(\lambda)\cdot\overline{G^*(\lambda)}'-\right.$$

$$\left.-G^*(\lambda)\cdot V(\lambda)\cdot M_V\cdot\overline{V(\lambda)}'\cdot\overline{G^*(\lambda)}'\right)\cdot d\lambda$$

Si hacemos que:

$$G^*(\lambda)=\begin{bmatrix}\overline{G_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{G_s(\lambda)'}\end{bmatrix}$$

con $G_i(\lambda)$ un vector columna de dimensión k, el mínimo de $H_1^*(\alpha,G^*(\lambda);E(\lambda))$ se alcanzará haciendo $G_i(\lambda)=V_i(\lambda)$, con $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$ los vectores característicos asociados a las s mayores raices características $\nu_i(\lambda)$.

Con todo ello, para una matriz $E(\lambda)$ dada, el mínimo de $H_1(\alpha,G(\lambda);E(\lambda))$ se alcanzará, cuando:

$$\alpha=\Big(\sum_{u=-\infty}^{\infty}e(u)\Big).\mu_Y-\Big(\sum_{u=-\infty}^{\infty}g(u)\Big).\mu_X \qquad \text{y}$$

$$G(\lambda)=\begin{bmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{bmatrix}\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

siendo:

$$e(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}E(\lambda).\exp\{iu\lambda\}.d\lambda \qquad \text{y}$$

$$g(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}G(\lambda).\exp\{iu\lambda\}.d\lambda$$

b) Si consideramos ahora, de forma simétrica a lo efectuado en el apartado a), dada $G(\lambda)$, y minimizamos:

$$H_2(\alpha, E(\lambda); G(\lambda)) \geq \int_{-\pi}^{\pi} \Big(E(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)}' + G(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda) \cdot \overline{G(\lambda)}' -$$

$$- E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot \overline{G(\lambda)}' - G(\lambda) \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)}'\Big) \cdot d\lambda =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(E(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)}' -$$

$$- E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)}' +$$

$$+ \{G(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda) - E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda)\} \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot$$

$$\cdot \overline{\{G(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda) - E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda)\}'}\Big) \cdot d\lambda \qquad (*)$$

y al ser tambien aquí, semidefinida positiva la matriz:

$$\big(G(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda) - E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda)\big) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot \overline{\big(G(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda) - E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda)\big)}'$$

y al ser definida positiva $f_{XX}(\lambda)^{-1}$ por serlo $f_{XX}(\lambda)$ por hipótesis, tendremos que:

$$H_1(\alpha, E(\lambda); G(\lambda)) \geq \int_{-\pi}^{\pi} \Big(E(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)}' -$$

$$- E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)}'\Big) d\lambda$$

y haciendo:

$$E^*(\lambda) = E(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}$$

tendremos que:

$$E(\lambda) = E^*(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2} \qquad \text{y}$$

podremos escribir H_2 en función de $E^*(\lambda)$, quedando:

(*) Igualdad que se deduce de forma simétrica a lo hecho en nota pag. 256.

$$H_2^*(\alpha,E^*(\lambda);G(\lambda)) \geq \int_{-\pi}^{\pi} \left(E^*(\lambda)\cdot\overline{E^*(\lambda)}'-E^*(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\overline{E^*(\lambda)}'\right)d\lambda$$

con la condición de que:

$$E^*(\lambda)\cdot\overline{E^*(\lambda)}'=\left(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}\right)\cdot\overline{\left(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}\right)}'$$
$$=E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot\overline{\left(f_{YY}(\lambda)^{1/2}\right)}'\cdot\overline{E(\lambda)}'$$
$$=E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'$$

debe ser diagonal, para que se cumplan las restricciones de que las coherencias entre componentes de $\eta(t)$ sean nulas.

Si simbolizamos, aquí, por:

$$M_u(\lambda)=\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_r(\lambda) \end{pmatrix}$$

la matriz diagonal de las raices características de la matriz:

$$f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

y por:

$$U(\lambda)=\left(U_1(\lambda),U_2(\lambda),\ldots,U_r(\lambda)\right)$$

la matriz formada por los correspondientes vectores característicos, podremos escribir:

$$H_2^*(\alpha,E^*(\lambda);G(\lambda)) \geq \int_{-\pi}^{\pi} \left(E^*(\lambda)\cdot\overline{E^*(\lambda)}'-\right.$$
$$\left.-E^*(\lambda)\cdot U(\lambda)\cdot M_u(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)}'\cdot\overline{E^*(\lambda)}'\right)d\lambda$$

Si hacemos que:

$$E^*(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{E_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{E_s(\lambda)'}\end{pmatrix}$$

con $E_i(\lambda)$ un vector columna de dimensión r, el mínimo de $H_2^*(\alpha,E^*(\lambda);G(\lambda))$ se alcanzará, igual que antes, haciendo $E_i(\lambda)=U_i(\lambda)$ con $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$ los vectores característicos asociados a las s mayores raices características $\mu_i(\lambda)$.

Con todo lo cual, para una matriz $G(\lambda)$ dada, el mínimo de $H_2(\alpha,E(\lambda);G(\lambda))$ se alcanzará, cuando:

$$\alpha=\Big(\sum_{u=-\infty}^{\infty}e(u)\Big).\mu_Y-\Big(\sum_{u=-\infty}^{\infty}g(u)\Big).\mu_X \qquad \text{y}$$

$$E(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

siendo, como antes:

$$e(u)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}E(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda \qquad \text{y}$$

$$g(u)=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}G(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda$$

Resumiendo los dos apartados anteriores, llegamos a la conclusión de que, el mínimo de la expresión matricial, $\mathrm{H}(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\})$ se obtendrá, al hacer:

$$\alpha=\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}e(u)\right)\cdot\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}g(u)\right)\cdot\mu_X$$

$$e(u)=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{E}(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda \qquad \text{y}$$

$$g(u)=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{G}(\lambda).\exp\{iu\lambda\}d\lambda$$

siendo:

$$\mathrm{E}(\lambda)=\begin{bmatrix}\overline{\mathrm{U}_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{\mathrm{U}_s(\lambda)'}\end{bmatrix}\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2} \quad \text{y} \quad \mathrm{G}(\lambda)=\begin{bmatrix}\overline{\mathrm{V}_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{\mathrm{V}_s(\lambda)'}\end{bmatrix}\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

donde, $\mathrm{U}_i(\lambda)$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ son los vectores característicos asociados a las s-mayores raices características de la matriz, de orden rxr:

$$\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{YX}(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{XY}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

y $\mathrm{V}_i(\lambda)$ para $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ son los vectores característicos asociados a las s-mayores raices características de la matriz de orden kxk:

$$\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{XY}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{YX}(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

siendo siempre $s\leq\min\{r,k\}$.

El valor mínimo que tomará; $\mathrm{H}(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\})$ será:

$$H_0=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'+G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'-$$

$$-E(\lambda)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'-G(\lambda)\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'\Big)\cdot d\lambda$$

con:

$$E(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)}'=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot\left\{\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right\}'$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\Big(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\Big)$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot\Big(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\Big)=I_s$$

$$G(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)}'=\begin{pmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot\left\{\begin{pmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\right\}'$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot\Big\{V_1(\lambda),\ldots,V_s(\lambda)\Big\}=$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot\left(V_1(\lambda),\ldots,V_s(\lambda)\right)=I_s$$

$$E(\lambda)\cdot б_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)'}=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot б_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot б_{YX}(\lambda)\cdot\left(\overline{\begin{pmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot б_{XX}(\lambda)^{-1/2}}\right)'$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot б_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot б_{YX}(\lambda)\cdot б_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot\left(V_1(\lambda),\ldots,V_s(\lambda)\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0\ldots & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & \ldots 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}\qquad (*)$$

y por último:

$$G(\lambda)\cdot б_{XY}(\lambda)\cdot\overline{E(\lambda)'}=\left(\overline{E(\lambda)\cdot б_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G(\lambda)'}}\right)'=\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0\ldots & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & \ldots 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}$$

(*) Recordar nota pag. 116

luego:

$$H_0=\int_{-\pi}^{\pi}\{I_s+I_s-\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}\}.d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}2\{I_s-\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}\}.d\lambda$$

Llamando $\varepsilon(t)=\eta(t)-(\alpha+\xi(t))$ tenemos que :

$$\mu_\varepsilon=E\{\varepsilon(t)\}=\mu_\eta-(\alpha+\mu_\xi)=0$$

y entonces:

$$H(\alpha,\{e(u)\},\{g(u)\})=E\{\varepsilon(t).\varepsilon(t)'\}=C_{\varepsilon\varepsilon}(0)$$

con lo que, la matriz espectral de los errores $\varepsilon(t)$ vendrá dada por:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=2\{I_s-\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}\}=\begin{pmatrix}2(1-\mu_1(\lambda)^{1/2}) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 2(1-\mu_s(\lambda)^{1/2})\end{pmatrix}$$

y la matriz espectral de las variables transformadas, quedará:

$$f_{\psi\psi}(\lambda)=\left(\begin{array}{c:c}f_{\eta\eta}(\lambda) & f_{\eta\xi}(\lambda)\\ \hdashline f_{\xi\eta}(\lambda) & f_{\xi\xi}(\lambda)\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c:c}E(\lambda).f_{YY}(\lambda).\overline{E(\lambda)'} & E(\lambda).f_{YX}(\lambda).\overline{G(\lambda)'}\\ \hdashline G(\lambda).f_{XY}(\lambda).\overline{E(\lambda)'} & G(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{G(\lambda)'}\end{array}\right)=$$

$$
= \left[\begin{array}{c:c}
I_s & \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 \cdots 0 \\ & \ddots \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots \ddots & \\ 0 \cdots 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \\
\hdashline
\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 \cdots 0 \\ & \ddots \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots \ddots & \\ 0 \cdots 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} & I_s
\end{array}\right]
$$

De aquí podemos deducir facilmente la matriz de coherencias entre las componentes de $\eta(t)$ y $\xi(t)$, ya que:

$$
\gamma^2_{\eta\xi}(\lambda) = f_{\eta\eta}(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{\eta\xi}(\lambda) \cdot f_{\xi\xi}(\lambda)^{-1} \cdot f_{\xi\eta}(\lambda) \cdot f_{\eta\eta}(\lambda)^{-1/2}
$$

$$
= I_s \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 \cdots 0 \\ & \ddots \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots \ddots & \\ 0 \cdots 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot I_s \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 \cdots 0 \\ & \ddots \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots \ddots & \\ 0 \cdots 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot I_s
$$

$$
= \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 \cdots 0 \\ & \ddots \vdots \\ 0 & 0 \\ \vdots \ddots & \\ 0 \cdots 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (*)
$$

luego para $i \in \{1,2,\ldots,s\}$, la coherencia entre $\eta_i(t)$, i-ésima componente de $\eta(t)$, y $\xi_i(t)$, i-ésima componente de $\xi(t)$, será:

(*)Recuerdese la definición de la matriz de coherencia dada en pag. 155.

$$\gamma^2_{\eta_i \xi_i}(\lambda)=\mu_i(\lambda)$$

donde $\mu_i(\lambda)$ sabemos que es la i-ésima mayor raiz característica de la matriz hermitiana, semi-definida positiva:

$$f_{YY}(\lambda)^{-1/2}.f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda).f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

Las componentes $\eta_i(t)$ y $\xi_i(t)$ de las series transformadas $\eta(t)$ y $\xi(t)$, asociadas dos a dos con coherencia $\mu_i(\lambda)$ se denominan el i-ésimo PAR DE SERIES CANONICAS y la coherencia $\mu_i(\lambda)$ se denomina i-ésima COHERENCIA CANONICA.

El par de series canónicas, $\eta_i(t)$ y $\xi_i(t)$ con $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$, podrán escribirse como sigue:

$$\eta_i(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} e_i(t-u).Y(u)$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left[(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} E_i(\lambda).\exp\{i(t-u)\lambda\}.d\lambda\right].Y(u)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} E_i(\lambda).\exp\{it\lambda\}.\left[(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}Y(u).\exp\{-i\lambda u\}\right].d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} E_i(\lambda).Y^*(\lambda).\exp\{it\lambda\}.d\lambda$$

donde $Y^*(\lambda)$ es la transformada de Fourier de la serie original $Y(t)$, actuando $E_i(\lambda)$ como el vector fila de dimensión r, de los coeficientes de la transformación que nos da la componente $\eta_i(t)$.

De igual forma:

$$\xi_i(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_i(t-u).\chi(u)$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{\infty}\left[(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi} G_i(\lambda).\exp\{i(t-u)\lambda\}.d\lambda\right].\chi(u)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} G_i(\lambda).\exp\{it\lambda\}.\left[(2\pi)^{-1}.\sum_{u=-\infty}^{\infty}\chi(u).\exp\{-i\lambda u\}\right].d\lambda$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} G_i(\lambda).\chi^*(\lambda).\exp\{it\lambda\}.d\lambda$$

donde tambiến, $\chi^*(\lambda)$ es la transformada de Fourier de la serie original $\chi(t)$, actuando $G_i(\lambda)$ como el vector fila de dimensiốn k, de los coeficientes de la transformación que nos da la componente $\xi_i(t)$. (*)

Veamos ahora que propiedades tienen los vectores $E_i(\lambda)$ y $G_i(\lambda)$, con $i\epsilon\{1,2,..,s\}$. Al ser:

$$E_i(\lambda) = \left[E(\lambda)\right]_i = \left[\begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} . \delta_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right]_i = \overline{U_i(\lambda)'} . \delta_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

y

$$G_i(\lambda) = \left[G(\lambda)\right]_i = \left[\begin{pmatrix} \overline{V_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{V_s(\lambda)'} \end{pmatrix} . \delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}\right]_i = \overline{V_i(\lambda)'} . \delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

(*) Pueden encontrarse expresiones similares en Brillinger,D.R.(1975,pag:381).

con $U_i(\lambda)$ y $V_i(\lambda)$ $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ los vectores característicos correspondientes a las s-mayores raices características $\mu_i(\lambda)$, de las matrices, $\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{YX}(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot$ $\cdot\sigma_{XY}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}$ y $\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{XY}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{YX}(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}$ respectivamente, tendremos:

$$\overline{U_i(\lambda)'}\cdot U_i(\lambda)=1 \quad \text{y} \quad \overline{V_i(\lambda)'}\cdot V_i(\lambda)=1$$

luego:

$$\overline{U_i(\lambda)'}\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{YY}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot U_i(\lambda)=\left[\overline{U_i(\lambda)'}\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right]\cdot\sigma_{YY}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\overline{\left[\overline{U_i(\lambda)'}\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\right]'}=$$

$$=E_i(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)\cdot\overline{E_i(\lambda)'}=1$$

y

$$\overline{V_i(\lambda)'}\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{XX}(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot V_i(\lambda)=\left[\overline{V_i(\lambda)'}\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\right]\cdot\sigma_{XX}(\lambda)\cdot$$

$$\cdot\overline{\left[\overline{V_i(\lambda)'}\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\right]'}=$$

$$=G_i(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)\cdot\overline{G_i(\lambda)'}=1$$

y tambien, al ser:

$$\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{YX}(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{XY}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot U_i(\lambda)=\mu_i(\lambda)\cdot U_i(\lambda) \quad \text{y}$$

$$\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot\sigma_{XY}(\lambda)\cdot\sigma_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\sigma_{YX}(\lambda)\cdot\sigma_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot V_i(\lambda)=\mu_i(\lambda)\cdot V_i(\lambda) \quad (*)$$

(*) Recuerdese nota pag. 119

premultiplicando por $f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$ y $f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$ respectivamente, tenemos:

$$f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot\left(f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot U_i(\lambda)\right)=\mu_i(\lambda)\cdot\left(f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot U_i(\lambda)\right)$$

y

$$f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\left(f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot V_i(\lambda)\right)=\mu_i(\lambda)\cdot\left(f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot V_i(\lambda)\right)$$

con lo que:

$$f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot\overline{E_i(\lambda)'}=\mu_i(\lambda)\cdot\overline{E_i(\lambda)'}$$
$$f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot\overline{G_i(\lambda)'}=\mu_i(\lambda)\cdot\overline{G_i(\lambda)'}$$

En ocasiones para simplificar las propiedades de los estimadores correspondientes a las raices $\mu_i(\lambda)$ y a los vectores $E_i(\lambda)$ y $G_i(\lambda)$ $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$, se modofica ligeramente la definición de las variables canónicas, de forma que se toman $E_i^*(\lambda)$ y $G_i^*(\lambda)$ $i\varepsilon\{1,2,...,s\}$ tales que satisfagan las dos últimas igualdades y que cumplan la condición de normalización, esto es que:

$$E_i^*(\lambda)\cdot\overline{E_i^*(\lambda)'}=1 \qquad \text{y} \qquad G_i^*(\lambda)\cdot\overline{G_i^*(\lambda)'}=1 \qquad (*)$$

2) ESTIMACION

Dada la serie (r+k)-variante $Z(t)$, cuyas componentes consideramos particionadas, obteniéndose

---

(*) Ver por ejemplo, Brillinger,D.R. (1.975,pag.382).

$$Z(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ \cdots\cdots \\ X(t) \end{bmatrix}$$

siendo $Y(t)$ una serie r-variante y $X(t)$ una serie k-variante, nos interesa estimar las coherencias canónicas, para ello consideraremos la estimación de la matriz espectral de la serie $Z(t)$, que nos dará:

$$\hat{f}_{ZZ}(\lambda) = \left[\begin{array}{c:c} \hat{f}_{YY}(\lambda) & \hat{f}_{YX}(\lambda) \\ \hdashline \hat{f}_{XY}(\lambda) & \hat{f}_{XX}(\lambda) \end{array}\right]$$

y a partir del conocimiento de esta matriz obtendremos las estimaciones, de $\mu_i(\lambda)$, $E_i(\lambda)$ y $G_i(\lambda)$, como las soluciones del sistema:

$$\hat{f}_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\hat{f}_{YX}(\lambda)\cdot\hat{f}_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\hat{f}_{XY}(\lambda)\cdot\overline{\hat{E}_i(\lambda)'} = \hat{\mu}_i(\lambda)\cdot\overline{\hat{E}(\lambda)'}$$

$$\hat{f}_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\hat{f}_{XY}(\lambda)\cdot\hat{f}_{YY}(\lambda)^{-1}\cdot\hat{f}_{YX}(\lambda)\cdot\overline{\hat{G}_i(\lambda)'} = \hat{\mu}_i(\lambda)\cdot\overline{\hat{G}(\lambda)'}$$

con las condiciones de normalización:

$$\hat{E}_i(\lambda)\cdot\overline{\hat{E}_i(\lambda)'} = 1 \quad \text{y} \quad \hat{G}_i(\lambda)\cdot\overline{\hat{G}_i(\lambda)'} = 1$$

siendo entonces, $\hat{\mu}_i(\lambda)$ la coherencia canónica estimada, correspondiente al par i-esimo de series canónicas, que se obtienen de las originales $Y(t)$ y $X(t)$ mediante la aplicación de sendas transformaciones cuyas matrices de transferencia son $\hat{E}_i(\lambda)$ y $\hat{G}_i(\lambda)$ respectivamente. Para una aproximación al estudio de las propiedades de estos estimadores y la determinación de sus distribuciones de probabilidad, puede consultarse, Brillinger, D.R. (1969, pags.337-341 y 1975 pags.386-388) Whittle, P. (1953, pag. 129).

IV) SINTESIS DE LOS METODOS DESARROLLADOS EN LOS EPIGRAFES ANTERIORES

En este epígrafe que cierra el capítulo, intentaremos sintetizar dentro de un mismo modelo, los tres métodos de análisis multivariante de series temporales, que hemos desarrollado anteriormente desde el punto de vista del dominio frecuencial, de forma similar a lo hecho ya en el capítulo anterior cuando nuestro estudio se basaba en el dominio temporal.

Sea la serie temporal (r+k)-variante $Z(t)$, que consideraremos debilmente estacionaria, y particionaremos en:

$$Z(t)=\begin{pmatrix} Y(t) \\ \cdots\cdots \\ X(t) \end{pmatrix}$$

siendo $Y(t)$ r-variante y $X(t)$ k-variante.

El vector de medias será:

$$\mu_Z=E\{Z(t)\} =E\{\begin{pmatrix} Y(t) \\ \cdots\cdots \\ X(t) \end{pmatrix}\}=\begin{pmatrix} \mu_Y \\ \cdot\cdot \\ \mu_X \end{pmatrix}$$

y la matriz de covariancias retardadas para $u\varepsilon Z$, vendrá dada por:

$$C_{ZZ}(u)=E\{(Z(t+u)-\mu_Z).(Z(t)-\mu_Z)'\}$$

$$=E\{\begin{pmatrix} Y(t+u)-\mu_Y \\ \cdots\cdots\cdots \\ X(t+u)-\mu_X \end{pmatrix}.\left[(Y(t)-\mu_Y)'\vdots(X(t)-\mu_X)'\right]\}=$$

$$= \begin{pmatrix} C_{YY}(u) & \vdots & C_{YX}(u) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{XY}(u) & \vdots & C_{XX}(u) \end{pmatrix}$$

sucesión de matrices con $u\varepsilon Z$, que supondremos absolutamente convergente.

Consideraremos entonces para $\lambda\varepsilon R$ la matriz de densidad espectral:

$$f_{ZZ}(\lambda) = (2\pi)^{-1} . \sum_{u=-\infty}^{\infty} C_{ZZ}(u) . \exp\{-i\lambda u\}$$

$$= (2\pi)^{-1} . \sum_{u=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} C_{YY}(u) & \vdots & C_{YX}(u) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{XY}(u) & \vdots & C_{XX}(u) \end{pmatrix} . \exp\{-i\lambda u\}$$

$$= \begin{pmatrix} f_{YY}(\lambda) & \vdots & f_{YX}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{XY}(\lambda) & \vdots & f_{XX}(\lambda) \end{pmatrix}$$

y supondremos que la submatriz $f_{XX}(\lambda)$ es regular.

Estudiaremos el problema de obtener una transformación lineal invariante de la serie $X(t)$, dada por la aplicación del (k,r) filtro lineal sumativo $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ sobre $X(t)$, pero teniendo en cuenta que el filtro $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ sea de rango $s\leq\min\{r,k\}$, esto es, que el (k,r) filtro lineal $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ sea el resultado de aplicar sucesivamente sobre $X(t)$ el (k,s) filtro lineal sumativo $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y el (s,r) filtro lineal sumativo $\{d(u)\}_{u\varepsilon Z}$. Obteniendose las transformaciones siguientes:

$$\chi^*(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(t-u).\chi(u)$$

donde con $\chi^*(t)$ representaremos, por tanto, la serie s-variante resultante de aplicar sobre la serie original k-variante $\chi(t)$ el (k,s) filtro lineal $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$, y

$$\chi^{**}(t)=\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\chi^*(v)$$

donde con $\chi^{**}(t)$ representaremos la serie r-variante resultante de aplicar sobre $\chi^*(t)$, transformada por $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ de $\chi(t)$, el (s,r) filtro lineal sumativo $\{d(v)\}_{v\varepsilon Z}$. Con lo que $\chi^{**}(t)$ es el resultado de aplicar sucesivamente dos filtros lineales sumativos sobre la serie original $\chi(t)$, este resultado es el mismo que se obtendría aplicando a $\chi(t)$ el filtro compuesto por $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y $\{d(v)\}_{v\varepsilon Z}$, éste será $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ tal que:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).\chi(u)=\chi^{**}(t)=\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\chi^*(v)$$

$$=\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(v-u).\chi(u)$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(t-v).b(v-u)\right).\chi(u)$$

$$=\sum_{u=-\infty}^{\infty} d_* b(t-u).\chi(u)$$

y por tanto $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}=\{d_* b(u)\}_{u\varepsilon Z}$; (*)

(*) Ver pag. 75 propiedad b) de la composición de filtros.

con lo que las correspondientes matrices funcionales de transferencia serán:

$$\mathrm{A}(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\exp\{-i\lambda u\}$$

$$\mathrm{B}(\lambda)=\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u).\exp\{-i\lambda u\} \qquad y$$

$$\mathrm{D}(\lambda)=\sum_{v=-\infty}^{\infty} d(v).\exp\{-i\lambda v\}$$

relacionadas por la siguiente igualdad:

$$\mathrm{A}(\lambda)=\mathrm{D}(\lambda).\mathrm{B}(\lambda) \qquad (*)$$

siendo $\mathrm{B}(\lambda)$ una matriz de orden $s\times k$ y rango s, $\mathrm{D}(\lambda)$ de orden $r\times s$ y rango s, con lo que $\mathrm{A}(\lambda)$ será de orden $r\times k$ y rango $s\leq \min\{r,k\}$.

El problema se reduce por tanto a la obtención del (k,r) filtro lineal $\{a(u)\}_{u\in Z}$ de rango reducido $s\leq \min\{r,k\}$, tal que la serie r-variante $\mathrm{X}^{**}(t)$ transformada de la k-variante $\mathrm{X}(t)$ sea tal que, tomando α como un vector de dimensión r, la serie $\mathrm{Y}^*(t)=\alpha+\mathrm{X}^{**}(t)$ sea lo más próxima posible a la serie original $\mathrm{Y}(t)$, tendremos por tanto que hacer mínima la diferencia $\varepsilon(t)= \mathrm{Y}(t)-\mathrm{Y}^*(t)$.

Este mínimo podriamos entenderlo como, el mínimo de :

$$h_1(\alpha, \{a(u)\})=E\{\varepsilon(t).\varepsilon(t)'\}=E\{(\mathrm{Y}(t)-\mathrm{Y}^*(t))'.(\mathrm{Y}(t)-\mathrm{Y}^*(t))\}$$

$$=\sum_{i=1}^{r} E\{(Y_i(t)-Y_i^*(t))^2\}=\sum_{i=1}^{r} E\{\varepsilon_i(t)^2\}$$

(*) Ver pag.75 propiedad b) de la composición de filtros.

Ahora bien, para actuar con toda generalidad y considerar la posible estructura covariante de la serie $\varepsilon(t)=$ $=Y(t)-Y^*(t)$ efectuaremos una transformación lineal invariante de esta serie de residuos, mediante la aplicación de un (r,r) filtro lineal sumativo $\{\omega(z)\}_{z\varepsilon Z}$, obteniendose, la serie de residuos transformados:

$$\varepsilon^*(t)=\sum_{z=-\infty}^{\infty}\omega(t-z).\varepsilon(z)=\sum_{z=-\infty}^{\infty}\omega(t-z).\left(Y(z)-Y^*(z)\right)$$

y llamando $\Gamma(\lambda)$ a la matriz funcional de transferencia del (r,r) filtro lineal $\{\omega(z)\}_{z\varepsilon Z}$, tendremos que:

$$\Gamma(\lambda)=\sum_{z=-\infty}^{\infty}\omega(z).\exp\{-i\lambda z\}$$

Supondremos, que $\Gamma(\lambda)$ es hermitiana y definida positiva, con lo que su rango será r, y se tratará por tanto de una transformación regular.

Dada por tanto la matriz $\Gamma(\lambda)$ o lo que es equivalente el (r,r) filtro lineal $\{\omega(z)\}_{z\varepsilon Z}$, minimizaremos:

$$h(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\})=E\{\varepsilon^*(t)'.\varepsilon^*(t)\}=\sum_{i=1}^{r}E\{\varepsilon_i^*(t)^2\}$$

que no es otra cosa que la traza de la matriz:

$H(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\})=E\{\varepsilon^*(t).\varepsilon^*(t)'\}=$

$$=E\{\left[\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\omega(t-z_1).\left(Y(z_1)-Y^*(z_1)\right)\right].\left[\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}\omega(t-z_2).\left(Y(z_2)-Y^*(z_2)\right)\right]'\}$$

$$=E\{\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}\omega(t-z_1).\left(Y(z_1)-Y^*(z_1)\right).\left(Y(z_2)-Y^*(z_2)\right)'.\omega(t-z_2)'\}=$$

$$= \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \sum_{z_2=-\infty}^{\infty} \omega(t-z_1).E\{(Y(z_1)-Y^*(z_1)).(Y(z_2)-Y^*(z_2))'\}.\omega(t-z_2)'$$

$$= \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \sum_{z_2=-\infty}^{\infty} \omega(t-z_1).E\{(Y(z_1)-(\alpha+\sum_{u_1=-\infty}^{\infty} a(z_1-u_1).X(u_1))).$$

$$.(Y(z_2)-(\alpha+\sum_{u_2=-\infty}^{\infty} a(z_2-u_2).X(u_2)))'\}.\omega(t-z_2)'=$$

$$= \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \sum_{z_2=-\infty}^{\infty} \omega(t-z_1).\Bigg((\mu_Y-(\alpha+\sum_{u_1=-\infty}^{\infty} a(z_1-u_1).\mu_X)).$$

$$.(\mu_Y-(\alpha+\sum_{u_2=-\infty}^{\infty} a(z_2-u_2).\mu_X))'+$$

$$+E\Big\{\Big((Y(z_1)-\mu_Y)-\sum_{u_1=-\infty}^{\infty} a(z_1-u_1).(X(u_1)-\mu_X)\Big).$$

$$.\Big((Y(z_2)-\mu_Y)-\sum_{u_2=-\infty}^{\infty} a(z_2-u_2).(X(u_2)-\mu_X)\Big)'\Big\}\Bigg).\omega(t-z_2)' \quad (*)$$

como además:

$$\sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \sum_{z_2=-\infty}^{\infty} \omega(t-z_1).\Big((\mu_Y-(\alpha+\sum_{u_1=-\infty}^{\infty} a(z_1-u_1).\mu_X)).(\mu_Y-(\alpha+\sum_{u_2=-\infty}^{\infty} a(z_2-u_2).\mu_X))'\Big).$$

$$.\omega(t-z_2)'= \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \omega(t-z_1).(\mu_Y-(\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\mu_X)).$$

$$.\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}\Big(\omega(t-z_2).(\mu_Y-(\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\mu_X))\Big)'=$$

$$= \sum_{z_1=-\infty}^{\infty} \omega(t-z_1).(\mu_Y-(\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\mu_X)).$$

$$.\Big(\sum_{z_2=-\infty}^{\infty} \omega(t-z_2).(\mu_Y-(\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u).\mu_X))\Big)'=A\cdot A'$$

(*) Para la última igualdad, recordar nota (*) pag.85

es semidefinida positiva. (*)

Podremos escribir que:

$$H(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\}) \geq \sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}\omega(t-z_1).E\{(Y(z_1)-\mu_Y).(Y(z_2)-\mu_Y)'-$$

$$-\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}a(z_1-u_1).(X(u_1)-\mu_X).(Y(z_2)-\mu_Y)'-$$

$$-\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}(Y(z_1)-\mu_Y).(X(u_2)-\mu_X)'.a(z_2-u_2)'+$$

$$+\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}a(z_1-u_1).(X(u_1)-\mu_X).(X(u_2)-\mu_X)'.$$

$$.a(z_2-u_2)'\}.\omega(t-z_2)'=$$

$$=\sum_{z_1=-\infty}^{\infty}\sum_{z_2=-\infty}^{\infty}\omega(t-z_1).\Big(C_{YY}(z_1-z_2)-\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}a(z_1-u_1).$$

$$.C_{XY}(u_1-z_2)-\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}C_{YX}(z_1-u_2).a(z_2-u_2)'+$$

$$+\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}a(z_1-u_1).C_{XX}(u_1-u_2).a(z_2-u_2)'\Big).\omega(t-z_2)'$$

cambiando de variables, haciendo $t-z_1=w_1$ y $t-z_2=w_2$,tendremos que, $z_1=t-w_1$, $z_2=t-w_2$ y $z_1-z_2=t-w_1-(t-w_2)=w_2-w_1$, con lo que podremos escribir:

$$H(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\}) \geq \sum_{w_1=-\infty}^{\infty}\sum_{w_2=-\infty}^{\infty}\omega(w_1).\Big(C_{YY}(w_2-w_1)-\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}a(t-w_1-u_1)$$

$$.C_{XY}(u_1-t+w_2)-\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}C_{YX}(t-w_1-u_2).a(t-w_2-u_2)'+$$

$$+\sum_{u_1=-\infty}^{\infty}\sum_{u_2=-\infty}^{\infty}a(t-w_1-u_1).C_{XX}(u_1-u_2).a(t-w_2-u_2)'\Big).\omega(w_2)'$$

(*) Ver nota (**) epígrafe b). pag. 85

y haciendo ahora el cambio, $t-u_1=v_1$ y $t-u_2=v_2$, tendremos que $u_1=t-v_1$, $u_2=t-v_2$ y $u_1-u_2=t-v_1-(t-v_2)=v_2-v_1$, con lo que obtendremos definitivamente:

$$H(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\}) \geq \sum_{w_1=-\infty}^{\infty}\sum_{w_2=-\infty}^{\infty}\omega(w_1).\Big(C_{YY}(w_2-w_1)-\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}a(v_1-w_1).$$

$$.C_{XY}(w_2-v_1)-\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}C_{YX}(v_2-w_1).a(v_2-w_2)'+$$

$$+\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}a(v_1-w_1).C_{XX}(v_2-v_1).a(v_2-w_2)'\Big).\omega(w_2)'=$$

$$=\sum_{w_1=-\infty}^{\infty}\sum_{w_2=-\infty}^{\infty}\omega(w_1).\Big(\int_{-\pi}^{\pi}f_{YY}(\lambda).\exp\{i(w_2-w_1)\lambda\}.d\lambda-$$

$$-\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}a(v_1-w_1).\int_{-\pi}^{\pi}f_{XY}(\lambda).\exp\{i(w_2-v_1)\lambda\}.d\lambda-$$

$$-\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f_{YX}(\lambda).\exp\{i(v_2-w_1)\lambda\}.d\lambda.a(v_2-w_2)'+$$

$$+\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}a(v_1-w_2).\int_{-\pi}^{\pi}f_{XX}(\lambda).\exp\{i(v_2-v_1)\lambda\}.$$

$$.d\lambda.a(v_2-w_2)'\Big).\omega(w_2)'=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{w_1=-\infty}^{\infty}\sum_{w_2=-\infty}^{\infty}\omega(w_1).\exp\{-iw_1\lambda\}.\Big(f_{YY}(\lambda)-$$

$$-\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}a(v_1-w_1).\exp\{-i(v_1-w_1)\lambda\}.f_{XY}(\lambda)-$$

$$-\sum_{v_2=-\infty}^{\infty}f_{YX}(\lambda).a(v_2-w_2)'.\exp\{i(v_2-w_2)\lambda\}+$$

$$+\sum_{v_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{v_2=-\infty}^{\infty} a(v_1-w_2).\exp\{-i(v_1-w_2)\lambda\}.\,f_{XX}(\lambda).$$

$$.\,a(v_2-w_2)'.\exp\{i(v_2-w_2)\lambda\}\Big].\,\omega(w_2)'.\exp\{iw_2\lambda\}.d\lambda=$$

$$=\int_{\pi}^{\pi}\Gamma(\lambda).\big(f_{YY}(\lambda)-A(\lambda).f_{XY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).\overline{A(\lambda)'}+$$

$$+A(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{A(\lambda)'}\big).\overline{\Gamma(\lambda)'}.d\lambda$$

Al ser $\Gamma(\lambda)$ hermitiana tenemos que $\overline{\Gamma(\lambda)}'=\Gamma(\lambda)$, y como la consideramos definida positiva, existirá $\Gamma(\lambda)^{-1}$ que tambien será hemitiana.

Podemos definir entonces, $\Omega(\lambda)=\Gamma(\lambda)^{-2}$ matriz hermitiana y definida positiva tal que $\Gamma(\lambda)=\Omega(\lambda)^{-1/2}$, de esta forma sustituyendo $\Gamma(\lambda)$ en la expresión anterior por $\Omega(\lambda)^{-1/2}$ obtendremos una expresión simétrica a la dada en el capítulo anterior al efectuar el análisis en el "dominio temporal". Con todo ello podemos escribir:

$$H(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\})=H(\alpha,A(\lambda);\Gamma(\lambda))=H^*(\alpha,A(\lambda);\Omega(\lambda))\geq$$

$$\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\lambda)^{-1/2}.\big(f_{YY}(\lambda)-A(\lambda).f_{XY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).\overline{A(\lambda)'}+$$

$$+A(\lambda).f_{XX}(\lambda).\overline{A(\lambda)'}\big).\Omega(\lambda)^{-1/2}.d\lambda=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\lambda)^{-1/2}.\big(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)+$$

$$+(f_{YX}(\lambda)-A(\lambda).f_{XX}(\lambda)).f_{XX}(\lambda)^{-1}.$$

$$.\overline{(f_{YX}(\lambda)-A(\lambda).f_{XX}(\lambda))'}\big).\Omega(\lambda)^{-1/2}.d\lambda \qquad (*)$$

(*) Recuerdese que $f_{XX}(\lambda)^{-1}$ existe ya que hemos supuesto $f_{XX}(\lambda)$ regular.

y por tanto nos queda que:

$$H^*(\alpha,A(\lambda);\Omega(\lambda))\geq\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot\left[f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\right]\cdot$$

$$\cdot\Omega(\lambda)^{-1/2}.d\lambda+\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot\left[f_{YX}(\lambda)-A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)\right]\cdot$$

$$\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\overline{(f_{YX}(\lambda)-A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda))}'\cdot\Omega(\lambda)^{-1/2}.d\lambda$$

El mínimo de $H^*(\alpha,A(\lambda);\Omega(\lambda))$ se obtendrá haciendo:

$$\alpha=\mu_Y-\left[\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right]\cdot\mu_X=\mu_Y-\left[\sum_{u=-\infty}^{\infty}d(u)\right]\cdot\left[\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(u)\right]\cdot\mu_X \quad (*)$$

y tomando:

$$A(\lambda)=D(\lambda)\cdot B(\lambda)$$

con $B(\lambda)$ de orden sxk y rango s, y $D(\lambda)$ de orden rxs y rango s, de forma que se minimice:

$$G(A(\lambda);\Omega(\lambda))=\int_{-\pi}^{\pi}\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot(f_{YX}(\lambda)-A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda))\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\overline{(f_{YX}(\lambda)-A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda))}'\cdot\Omega(\lambda)^{-1/2}.d\lambda=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}-\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{1/2}\right)\cdot$$

$$\cdot\overline{\left(\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}-\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot A(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{1/2}\right)}'\cdot d\lambda \quad (**)$$

(*) Esta última igualdad, es cierta, según se demostró en pag. 212 ya que si $a(u)=d_*b(u)$, entonces: $\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)=\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}d(u)\right)\cdot\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(u)\right)$

(**) En esta igualdad hemos tenido en cuenta que al ser $\Gamma(\lambda)=\Omega(\lambda)^{-1/2}$ hermitiana, entonces $\left(\overline{\Omega(\lambda)^{-1/2}}\right)'=\overline{\Gamma(\lambda)}'=\Gamma(\lambda)=\Omega(\lambda)^{-1/2}$ y que al ser $f_{XX}(\lambda)$ la matriz espectral de la serie $X(t)$ por propiedad d) pag. 65 es hermitiana, siendolo tambien $f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$.

Para determinar el mínimo de esta expresión, éste se alcanzará para una función matricial $A(\lambda)$ de orden rxk y rango s para cualquier $\lambda\varepsilon R$.

Consideremos la matriz $Q(\lambda)$ de orden rxs y rango s para cualquier $\lambda\varepsilon R$, de forma que $Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)}'$ será de orden rxr y rango s. Hagamos entonces:

$$\Omega(\lambda)^{-1/2}.A(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{1/2}=\left(Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}\right).\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

con lo que:

$$\begin{aligned} A(\lambda)&=\Omega(\lambda)^{1/2}.\left(Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}\right).\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1} \\ &=\left(\Omega(\lambda)^{1/2}.Q(\lambda)\right).\left(\overline{Q(\lambda)'}.\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1}\right) \\ &=D(\lambda).B(\lambda) \end{aligned}$$

El problema, se resolverá minimizando:

$$\begin{aligned} G^*(Q(\lambda);\Omega(\lambda))=\int_{-\pi}^{\pi}&\Big[\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}-\left(Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}\right). \\ &.\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}\Big].\overline{\Big[\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}-} \\ &\overline{-\left(Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}\right).\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}\Big]}'.d\lambda= \\ =\int_{-\pi}^{\pi}&\Big[\left(I_r-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}\right).\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}\Big]. \\ &.\overline{\Big[\left(I_r-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}\right).\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}\Big]}'.d\lambda= \\ =\int_{-\pi}^{\pi}&\left(I_r-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}\right).\Omega(\lambda)^{-1/2}.\delta_{YX}(\lambda).\delta_{XX}(\lambda)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \Omega(\lambda)^{-1/2} \cdot \overline{\left(I_r - Q(\lambda) \cdot \overline{Q(\lambda)'}\right)'} \cdot d\lambda \qquad (*)$$

Para obtener la matriz $Q(\lambda)$ que minimiza $G^*(Q(\lambda);\Omega(\lambda))$, diagonalizaremos la matriz hermitiana:

$$\Omega(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \Omega(\lambda)^{-1/2}$$

resultando expresada entonces, como:

$$U(\lambda) \cdot M_r(\lambda) \cdot \overline{U(\lambda)'}$$

siendo $U(\lambda) = (U_1(\lambda), \ldots, U_r(\lambda))$ la matriz unitaria formada por los r vectores característicos de la matriz:

$$\Omega(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \Omega(\lambda)^{-1/2}$$

y

$$M_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 \ldots 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \\ \vdots \ddots & \\ 0 \ldots 0 & \mu_r(\lambda) \end{pmatrix}$$

la matriz diagonal formada por sus r raices características. (**)

(*) En la última igualdad hemos tenido en cuenta que $\overline{\left(\Omega(\lambda)^{-1/2}\right)}' = \Omega(\lambda)^{-1/2}$ y $\overline{\left(f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\right)}' = f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$, por ser hermitianas, y que además $\overline{f_{YX}(\lambda)}' = f_{XY}(\lambda)$.

(**) La matriz $\Omega(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \Omega(\lambda)^{-1/2}$ es hermitiana, ya que: $\overline{\left(\Omega(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \Omega(\lambda)^{-1/2}\right)}' = \overline{\left(\Omega(\lambda)^{-1/2}\right)}' \cdot \overline{f_{XY}(\lambda)}' \cdot \overline{\left(f_{XX}(\lambda)^{-1}\right)}' \cdot \overline{f_{YX}(\lambda)}' \cdot \overline{\left(\Omega(\lambda)^{-1/2}\right)}' = \Omega(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \Omega(\lambda)^{-1/2}$ por lo visto en notas pag.150 y pag.281. Al ser la matriz hermitiana, podemos aplicarle lo dicho en nota pag.208.

Tendremos entonces, sustituyendo en la matriz $G^*(Q(\lambda);\Omega(\lambda))$, que:

$$G(Q(\lambda))=\int_{-\pi}^{\pi}(I_r-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}).U(\lambda).M_r(\lambda).\overline{U(\lambda)'}.\overline{(I_r-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'})'}.d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(U(\lambda)-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}.U(\lambda)).M_r(\lambda).\overline{(U(\lambda)-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}.U(\lambda))'}.d\lambda$$

alcanzandose el mínimo para:

$$Q(\lambda)=\left(U_1(\lambda),U_2(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\right)$$

ya que entonces:

$$U(\lambda)-Q(\lambda).\overline{Q(\lambda)'}.U(\lambda)=\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\vdots\ \ldots,U_r(\lambda)\right)-$$

$$-\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\right).\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}.\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\vdots\ \ldots,U_r(\lambda)\right)$$

$$=\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\vdots\ \ldots,U_r(\lambda)\right)-\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\right).\left(I_s\vdots 0\right)$$

$$=\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\vdots\ \ldots,U_r(\lambda)\right)-\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\vdots 0\right)$$

$$=\left(0\vdots U_{s+1}(\lambda),\ldots,U_r(\lambda)\right)$$

y con ello quedá:

$$G((U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)))=\int_{-\pi}^{\pi}\left(0\vdots U_{s+1}(\lambda),\ldots,U_r(\lambda)\right).M_r(\lambda).$$

$$.\overline{\left(0\vdots U_{s+1}(\lambda),\ldots,U_r(\lambda)\right)}'.d\lambda=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[0\vdots\mu_{s+1}(\lambda)\cdot\mathrm{U}_{s+1}(\lambda),\ldots,\mu_r(\lambda)\cdot\mathrm{U}_r(\lambda)\right]\cdot$$

$$\cdot\overline{\left[0\vdots\mathrm{U}_{s+1}(\lambda),\ldots,\mathrm{U}_r(\lambda)\right]}'\cdot d\lambda=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot\mathrm{U}_i(\lambda)\cdot\overline{\mathrm{U}_i(\lambda)}'\cdot d\lambda$$

y el mínimo de esta expresión se obtendrá al tomar $\mu_i(\lambda)$, $i\varepsilon\{s+1,\ldots,r\}$ las r-s menores raices características de la matriz hermitiana:

$$\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)\cdot\Omega(\lambda)^{-1/2}$$

Con todo lo cual, tenemos que el mínimo de $\mathrm{H}(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\})$ será:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\Omega(\lambda)^{-1/2}\cdot\left(\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)-\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)\right)\cdot\Omega(\lambda)^{-1/2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot\mathrm{U}_i(\lambda)\cdot\overline{\mathrm{U}_i(\lambda)}'\right]\cdot d\lambda$$

Este mínimo se alcanza, por tanto, haciendo:

$$\alpha=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right)\cdot\mu_X=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}d(u)\right)\cdot\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(u)\right)\cdot\mu_X$$

y siendo:

$$a(u)=d*b(u)$$

$$b(u)=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{B}(\lambda)\cdot\exp\{iu\lambda\}\cdot d\lambda \qquad \text{y}$$

$$d(v)=(2\pi)^{-1}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{D}(\lambda)\cdot\exp\{iv\lambda\}\cdot d\lambda$$

donde $\mathrm{B}(\lambda)$ y $\mathrm{D}(\lambda)$, funciones matriciales de transferencia de los correspondientes filtros, vienen dadas por :

$$B(\lambda)=\overline{Q(\lambda)}'.\Omega(\lambda)^{-1/2}.f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}.\Omega(\lambda)^{-1/2}.f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

y

$$D(\lambda)=\Omega(\lambda)^{1/2}.Q(\lambda)=\Omega(\lambda)^{1/2}.\left(U_1(\lambda)\ldots\ldots U_s(\lambda)\right)$$

y la matriz de transferencia del filtro compuesto $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}=\{d_* b(u)\}_{u\varepsilon Z}$, vendrá dada ,entonces, por:

$$A(\lambda)=D(\lambda).B(\lambda)=\Omega(\lambda)^{1/2}.\left(U_1(\lambda)\ldots U_s(\lambda)\right).\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}.\Omega(\lambda)^{-1/2}.f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

$$=\Omega(\lambda)^{1/2}.\left(\sum_{i=1}^{s} U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}\right).\Omega(\lambda)^{-1/2}.f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

siendo,en todas las expresiones anteriores, $U_i(\lambda)$ con $i\varepsilon\{1,2..s\}$ los vectores característicos de la matriz hermitiana:

$$\Omega(\lambda)^{-1/2}.f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda).\Omega(\lambda)^{-1/2},$$

asociados a las s mayores raices características; considerando dado previamente el (r,r) filtro lineal sumativo $\{\omega(z)\}_{z\varepsilon Z}$ tal que:

$$\Omega(\lambda)^{-1/2}=\Gamma(\lambda)=\sum_{z=-\infty}^{\infty}\omega(z).\exp\{-i\lambda z\} \quad \text{con } \Gamma(\lambda) \text{ una}$$

matriz hermitiana de orden rxr definida positiva.

Veamos ahora que características tienen las series temporales $\varepsilon(t)$ y su transformación $\varepsilon^*(t)$.

$$E\{\varepsilon(t)\}=E\{Y(t)-Y^*(t)\}=E\{Y(t)-(\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).X(t))\}=$$

$$=\mu_y-(\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).\mu_x)=\mu_y-\left[\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u)\right].\mu_x-\alpha=\alpha-\alpha=0$$

con lo que:

$E\{\varepsilon(t).\varepsilon(t)'\}$ es la matriz de variancias y covariancias de las componentes de la serie temporal de residuos $\varepsilon(t)$ y:

$$E\{\varepsilon(t)'.\varepsilon(t)\}=tr\left(E\{\varepsilon(t).\varepsilon(t)'\}\right)=\sum_{i=1}^{r} E\{\varepsilon_i(t)^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{r} var\{\varepsilon_i(t)\}.$$

A partir de estos resultados, en relación a la serie $\varepsilon^*(t)$ tenemos:

$$E\{\varepsilon^*(t)\}=E\{\sum_{z=-\infty}^{\infty} \omega(t-z).\varepsilon(z)\}=\sum_{z=-\infty}^{\infty} \omega(t-z).E\{\varepsilon(z)\}$$

$$=\sum_{z=-\infty}^{\infty}\omega(t-z).0=0$$

y entonces:

$$h(\alpha,\{a(u)\};\{\omega(z)\})=E\{\varepsilon^*(t)'.\varepsilon^*(t)\}=\sum_{i=1}^{r} E\{\varepsilon_i^*(t)^2\}$$

$$=\sum_{i=1}^{r} var\{\varepsilon_i^*(t)\}$$

que no es otra cosa que la traza de la matriz de variancias de la serie de residuos transformados $\varepsilon^*(t)$:

$$C_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(0)=H(\alpha,\{\dot{a}(u)\};\{\omega(z)\})=H(\alpha,A(\lambda);\Omega(\lambda))$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\Omega(\lambda)^{-1/2}.(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)).\right.$$

$$\left..\Omega(\lambda)^{-1/2}+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda).U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}\right)d\lambda$$

y al ser $C_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(0)=\int_{-\pi}^{\pi}f_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(\lambda)d\lambda$ tenemos que la matriz espectral de los residuos transformados es:

$$f_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(\lambda)=\Omega(\lambda)^{-1/2}.(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)).$$

$$.\Omega(\lambda)^{-1/2}+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda).U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}\ .$$

Consideraremos ahora, los casos particulares siguientes:

A) Si $\Omega(\lambda)=I_r$:

tenemos que $\Gamma(\lambda)=\Omega(\lambda)^{-1/2}=I_r$

con lo que:

$$\omega^*(z)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}I_r.\exp\{iz\lambda\}d\lambda$$

$$=I_r.(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}\exp\{iz\lambda\}d\lambda$$

$$=\begin{cases} I_r.(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}1d\lambda=I_r & \text{para } z=0 \\ I_r.(2\pi)^{-1}.\left[\dfrac{\exp\{iz\lambda\}}{iz}\right]_{-\pi}^{\pi}=0 & \text{para } z\in Z-\{0\} \quad (*) \end{cases}$$

(*) ya que: $\left[\dfrac{\exp\{iz\lambda\}}{iz}\right]_{-\pi}^{\pi}=\dfrac{1}{iz}\left(\exp\{iz\pi\}-\exp\{-iz\pi\}\right)=\dfrac{1}{iz}\left(\cos z\pi+i\,\mathrm{sen}\,z\pi-(\cos z\pi-\right.$

$\left.-i\,\mathrm{sen}\,z\pi)\right)=\dfrac{2\,\mathrm{sen}\,z\pi}{z}=0$ para $z\in Z-\{0\}$

y por tanto,

$$\varepsilon^*(t)=\sum_{z=-\infty}^{\infty}\omega^*(t-z).\left(Y(z)-Y^*(z)\right)=I_r.\left(Y(t)-Y^*(t)\right)$$

$$=Y(t)-Y^*(t)=\varepsilon(t)$$

que no es otra cosa que la diferencia entre la serie original $Y(t)$ y la serie $Y^*(t)=\alpha+X^{**}(t)$ con $X^{**}(t)$ la transformada de $X(t)$ mediante el (r,k) filtro lineal $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ de rango reducido $s\leq\min\{r,k\}$. Entonces:

$$H(\alpha,\{a(u)\};\{\omega^*(z)\})=E\{\left(Y(t)-Y^*(t)\right).\left(Y(t)-Y^*(t)\right)'\}$$

$$=H(\alpha,A(\lambda);I_r)$$

cuyo mínimo será:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XY}(\lambda)+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda).U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}\right).d\lambda$$

Dicho mínimo se alcanzará para:

$$\alpha=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right).\mu_X=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}d(u)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(u)\right).\mu_X$$

con $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}=\{d_*b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ el (r,k) filtro resultante de componer el (r,s) filtro $\{d(v)\}_{v\varepsilon Z}$ con el (s,k) filtro $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$, cuyas funciones de transferencia $B(\lambda)$ y $D(\lambda)$ vendrán dadas por:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \qquad y$$

$$D(\lambda)=(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda))$$

con lo que $A(\lambda)$ matriz de transferencia del filtro compuesto $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ será:

$$A(\lambda)=\left(\sum_{i=1}^{s} U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}\right)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \qquad (*)$$

y entonces la matriz espectral de la serie residual $\varepsilon(t)$, vendrá dada por:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)+$$

$$+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}$$

donde $\mu_i(\lambda)$ $i\varepsilon\{s+1,\ldots r\}$ son las r-s menores raices características de la matriz hermitiana:

$$f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)$$

y $U_i(\lambda)$ el correspondiente vector característico asociado a la raiz $\mu_i(\lambda)$. (**)

(*) Un resultado análogo a éste, puede encontrarse en Brillenger,D.R.(1.969, pag.335).

(**) A éste resultado llega Brillinger,D.R.(1.975,pag.380) minimizando $E\{\varepsilon(t)'.\varepsilon(t)\}=tr\left(E\{\varepsilon(t).\varepsilon(t)'\}\right)$.

A_1) Si, además de $\Omega(\lambda)=I_r$, tenemos que s=r, se obtiene la REGRESION MULTIPLE, pues minimizamos $H(\alpha,A(\lambda);I_r)=E\{\varepsilon(t)\cdot\varepsilon(t)'\}$ con $A(\lambda)$ la matriz de transferencia del (r,k) filtro lineal $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ de rango r, siendo $A(\lambda)$ una matriz de orden r x k y de rango s=r.

El mínimo será entonces:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\right)\cdot d\lambda$$

que corresponde a una matriz espectral de la serie de errores $\varepsilon(t)$ dada por:

$$f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)-f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)$$

mínimo obtenido al hacer:

$$\alpha=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right)\cdot\mu_X$$

con $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ el (r,k) filtro lineal sumativo cuya matriz de transferencia es:

$$A(\lambda)=\left(\sum_{i=1}^{r}U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}\right)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

$$=\left(U(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'}\right)\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

$$=I_r\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}=f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

que como podemos observar, no es más que la matriz de los coeficientes complejos de la regresión de $Y(t)$ sobre $X(t)$ en la frecuencia λ.

Resultados, todos ellos, que ya obtuvimos en el epígrafe I de este capítulo al tratar el estudio de modelo de Regresión en el dominio frecuencial.

A_2) Si además de $\Omega(\lambda)=I_r$, tenemos que r=k y las series $Y(t)$ y $X(t)$ son la misma serie, o sea $Y(t)=X(t)$, se obtendrán las s-PRIMERAS COMPONENTES PRINCIPALES de la serie temporal k-variante $X(t)$. Minimizaremos aquí, la matriz

$$E\{(X(t)-X^*(t)).(X(t)-X^*(t))'\}$$

con $X^*(t)=\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).X(t)$

y $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}$ un (k,k) filtro lineal sumativo de rango reducido $s\leq k$, es decir un filtro tal que su matriz de transferencia $A(\lambda)$ de orden $k_x k$ será de rango $s\leq k$. El valor mínimo para dicha matriz será

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f_{XX}(\lambda)-f_{XX}(\lambda).f_{XX}(\lambda)^{-1}.f_{XX}(\lambda)+$$
$$+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda).U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}\Big)d\lambda=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda).U_i(\lambda).\overline{U_i(\lambda)'}\Big)d\lambda$$

mínimo que se alcanzará, haciendo :

$$\alpha = \mu_X - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u) \right) \cdot \mu_X = \left(I_k - \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u) \right) \cdot \mu_X =$$

$$= \left(I_k - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d(u) \right) \cdot \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u) \right) \right) \cdot \mu_X$$

con $\{a(u)\}_{u \in Z}$ el (k,k) filtro lineal sumativo de rango reducido, cuya matriz de transferencia es

$$A(\lambda) = D(\lambda) \cdot B(\lambda) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} U_i(\lambda) \cdot \overline{U_i(\lambda)'} \cdot f_{XX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} U_i(\lambda) \cdot \overline{U_i(\lambda)'}$$

de orden $k \times k$ y rango $s \leq k$, y que resulta de la composición del (k,s) filtro lineal $\{d(v)\}_{v \in Z}$ con el (s,k) filtro lineal $\{b(u)\}_{u \in Z}$ cuyas matrices de transferencia vienen dadas por:

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D(\lambda) = \left(U_1(\lambda), \ldots, U_s(\lambda) \right)$$

siendo $U_i(\lambda)$ $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ los vectores característicos asociados a las s-mayores raices características de la matriz

$$f_{XX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot f_{XX}(\lambda) = f_{XX}(\lambda)$$

siendo, por tanto,

$$Y(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} b(t-u) \cdot X(u)$$

la serie temporal formada por las s-primeras componentes principales de la serie k-variante original $\chi(t)$.

Todos estos resultados concuerdan, como puede comprobarse, con los obtenidos en el epígrafe II de este capítulo al tratar del análisis de las componentes principales de una serie temporal k-variante $\chi(t)$, efectuado éste bajo el dominio frecuencial.

B) Si $\Omega(\lambda)=\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)$, con $\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)$ regular, o lo que es lo mismo, definida positiva. Obtendremos las SERIES CANONICAS.

El valor mínimo de la matriz

$H(\alpha,\{a(u)\};\ \{\omega(z)\})$

con $\{a(z)\}_{z\varepsilon Z}$ el (r,r) filtro lineal sumativo, cuya función de transferencia es $\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)^{-1/2}$, será:

$$H_o=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot(\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)-\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda))\cdot$$
$$\cdot\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)^{-1/2}+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}\Big)d\lambda=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(I_r-\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot\mathfrak{f}_{YX}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot\mathfrak{f}_{XY}(\lambda)\cdot\mathfrak{f}_{YY}(\lambda)^{-1/2}+$$
$$+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}\Big)d\lambda=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\Big(I_r-U(\lambda)\cdot M_r(\lambda)\cdot\overline{U(\lambda)'}+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}\Big)d\lambda$$

y como además podemos escribir:

$$\mathrm{U}(\lambda).\mathrm{M}_r(\lambda).\overline{\mathrm{U}(\lambda)'}=\left(\mathrm{U}_1(\lambda),\ldots,\mathrm{U}_r(\lambda)\right).\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda) & 0\ldots 0\\ 0 & \ddots \quad 0\\ \vdots \ \ddots & \\ 0\ldots 0 & \mu_r(\lambda)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{U}_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{\mathrm{U}_r(\lambda)'}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\mu_1(\lambda).\mathrm{U}_1(\lambda),\ldots,\mu_r(\lambda).\mathrm{U}_r(\lambda)\right).\begin{pmatrix}\overline{\mathrm{U}_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{\mathrm{U}_r(\lambda)'}\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\lambda).\mathrm{U}_i(\lambda).\overline{\mathrm{U}_i(\lambda)'}$$

tendremos que:

$$\mathrm{H}_0=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathrm{I}_r-\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\lambda).\mathrm{U}_i(\lambda).\overline{\mathrm{U}_i(\lambda)'}+\sum_{i=s+1}^{r}\mu_i(\lambda).\mathrm{U}_i(\lambda).\overline{\mathrm{U}_i(\lambda)'}\right).d\lambda$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\mathrm{I}_r-\sum_{i=1}^{s}\mu_i(\lambda).\mathrm{U}_i(\lambda).\overline{\mathrm{U}_i(\lambda)'}\right).d\lambda$$

Este mínimo se alcanzará al hacer:

$$\alpha=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}a(u)\right).\mu_X=\mu_Y-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}d(u)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty}b(u)\right).\mu_X$$

y siendo:

$$a(u)=d*b(u) \qquad \text{con}$$

$$b(u)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{B}(\lambda).\exp\{iu\lambda\}.d\lambda$$

$$d(v)=(2\pi)^{-1}.\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{D}(\lambda).\exp\{iv\lambda\}.d\lambda$$

donde las matrices de transferencia $B(\lambda)$ y $D(\lambda)$ vendrán dadas por:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1} \quad \text{y}$$

$$D(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot\left(U_1(\lambda),\ldots,U_s(\lambda)\right)$$

siendo $U_i(\lambda)$ con $i\varepsilon\{1,2,\ldots,s\}$ el vector característico asociado a la i-ésima mayor raiz característica $\mu_i(\lambda)$, de la matriz:

$$f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}\cdot f_{XY}(\lambda)\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}.$$

El mínimo alcanzado en H_0, sabemos que es la matriz de variancias y covariancias de la serie temporal r-variante $\varepsilon^*(t)$, transformada mediante la acción del (r,r) filtro lineal que tiene como matriz funcional de transferencia $f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$ de la serie r-variante residual:

$$\varepsilon(t)=Y(t)-Y^*(t)=Y(t)-\left(\alpha+X^{**}(t)\right)$$

donde $X^{**}(t)$ representa la serie r-variante resultante de aplicar sucesivamente sobre la serie original k-variante $X(t)$, el (k,s) filtro lineal $\{b(u)\}_{u\varepsilon Z}$ y el (s,r) filtro lineal $\{d(u)\}_{u\varepsilon Z}$, o lo que es lo mismo, el (k,r) filtro lineal compuesto $\{a(u)\}_{u\varepsilon Z}=\{d*b(u)\}_{u\varepsilon Z}$. Con ello tendremos que:

$$C_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(0)=\int_{-\pi}^{\pi}\left(I_r-\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}\right)\cdot d\lambda$$

y por tanto:

$$f_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(\lambda)=I_r-\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\lambda)\cdot U_i(\lambda)\cdot\overline{U_i(\lambda)'}$$

Si consideramos ahora la transformación de la serie $\varepsilon^*(\lambda)$ mediante un (r,s) filtro lineal sumativo con matriz funcional de transformación dada por:

$$\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}$$

obtendríamos la serie s-variante $\varepsilon^{**}(\lambda)$, que es precisamente la que se obtendría partiendo de $\varepsilon(\lambda)$ y aplicando el (r,s) filtro lineal compuesto por aquéllos cuya matriz funcional de transferencia es:

$$D^{-1}(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}$$

producto de las funciones de transferencia anteriores.

La simbolizamos por $\mathbb{D}^{-1}(\lambda)$, ya que al aplicar el (r,s) filtro lineal $\{d^{-1}(u)\}_{u\varepsilon Z}$ que tiene a $\mathbb{D}^{-1}(\lambda)$ como función de transferencia, componiendolo con el (s,r) filtro lineal $\{d(u)\}_{u\varepsilon Z}$, para dar el (s,s) filtro lineal $\{d^{-1}*d(u)\}_{u\varepsilon Z}$, su función de transferencia sabemos que será el producto:

$$\mathbb{D}^{-1}(\lambda).\mathbb{D}(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{\mathbb{U}_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{\mathbb{U}_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot \delta_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot \delta_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot(\mathbb{U}_1(\lambda),\ldots,\mathbb{U}_s(\lambda))$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{\mathbb{U}_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{\mathbb{U}_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot\left(\mathbb{U}_1(\lambda),\ldots,\mathbb{U}_s(\lambda)\right)=\mathbb{I}_s$$

con lo que:

$$d^{-1}*d(u)=\mathbb{I}(u)=\begin{cases}\mathbb{I}_s & \text{para} \quad u=0\\ 0 & \text{para} \quad u\varepsilon Z-\{0\}\end{cases}$$

que no es otro que el (s,s) filtro lineal identidad

Con todo ello, podemos escribir que:

$$\varepsilon^{**}(t)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}d^{-1}(t-u).\varepsilon(u)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}d^{-1}(t-u).\left[\mathbb{Y}(u)-\left(\alpha+\mathbb{X}^{**}(u)\right)\right]=$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(t-u).Y(u) - \left[\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(u)\right).\alpha + \right.$$

$$\left. + \sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(t-u).X^{**}(u)\right] =$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(t-u).Y(u) - \left[\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(u)\right).\mu_Y - \right.$$

$$-\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(u)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d(u)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u)\right).\mu_X +$$

$$\left. + \sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(t-u). \sum_{v=-\infty}^{\infty} d(u-v).X^{*}(v)\right] =$$

$$= \sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(t-u).Y(u) - \left[\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(u)\right).\mu_Y - \right.$$

$$\left. -\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u)\right).\mu_X + \sum_{u=-\infty}^{\infty} b(t-u).X(u)\right] \qquad (*)$$

y al ser:

$$D^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} . \delta_{YY}(\lambda)^{-1/2} = E(\lambda)$$

tendremos que $\{d^{-1}(u)\}_{u\varepsilon Z} = \{e(u)\}_{u\varepsilon Z}$, con lo que:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(t-u).Y(u) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} e(t-u).Y(u) = \eta(t)$$

que no es otra que la serie s-variante transfor-

(*) Como $d^{-1} * d(u) = I(u)$, y por pag. 212 tenemos que:

$$\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(u)\right).\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d(u)\right) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} I(u) = I_s \qquad \text{y}$$

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(t-u). \sum_{v=-\infty}^{\infty} d(u-v).X^{*}(v) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} I(t-v).X^{*}(v) = X^{*}(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} b(t-u).X(u)$$

mada de la $Y(t)$.

$$\left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} d^{-1}(u)\right)\cdot\mu_Y - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u)\right)\cdot\mu_X = \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} e(u)\right)\cdot\mu_Y - \left(\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(u)\right)\cdot\mu_X = \alpha^*$$

y además, al ser:

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}= \qquad (*)$$

(*) Recuerdese que por la nota pag. 137 tenemos que:

$$\begin{pmatrix}\overline{U_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{U_s(\lambda)'}\end{pmatrix}\cdot f_{YY}(\lambda)^{-1/2}\cdot f_{YX}(\lambda)\cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}=\begin{pmatrix}\mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & & 0\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\overline{V_1(\lambda)'}\\ \vdots\\ \overline{V_s(\lambda)'}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot G(\lambda) = G^*(\lambda)$$

con $V_i(\lambda)$ el vector característico correspondiente a la raiz $\mu_i(\lambda)$ de la matriz:

$$f_{XX}(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda)^{-1} \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

tenemos que:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} b(t-u) \cdot X(u) = \xi^*(t)$$

serie s-variante que resulta de aplicar a la serie canonica s-variante $\xi(t)$ el (s,s) filtro lineal, de proporcionalidad, cuya matriz de transferencia es:

$$\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix}$$

por todo lo cual, tenemos:

$$\varepsilon^{**}(t) = \eta(t) - \left(\alpha^* + \xi^*(t)\right)$$

la matriz espectral de la serie s-variante $\varepsilon^{**}(t)$ será:

$$f_{\varepsilon^{**}\varepsilon^{**}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} \cdot f_{\varepsilon^*\varepsilon^*}(\lambda) \cdot \left[U_1(\lambda), \ldots, U_s(\lambda)\right] =$$

$$=\begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} \cdot (I_r - \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\lambda) \cdot U_i(\lambda) \cdot \overline{U_i(\lambda)'}) \cdot \left(U_1(\lambda), \ldots, U_s(\lambda)\right)$$

$$= I_s - \begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} \cdot \left(U_1(\lambda), \ldots, U_s(\lambda)\right) \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 \ldots 0 \\ & \ddots \\ 0 & \quad 0 \\ \vdots \ddots \\ 0 \ldots 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \overline{U_1(\lambda)'} \\ \vdots \\ \overline{U_s(\lambda)'} \end{pmatrix} \cdot \left(U_1(\lambda), \ldots, U_s(\lambda)\right) =$$

$$= I_r - \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 \ldots 0 \\ & \ddots \\ 0 & \quad 0 \\ \vdots \ddots \\ 0 \ldots 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

que coincide con la que corresponde a los residuos $\varepsilon_1(t)$ de las series canónicas $\eta(t)$ y $\xi^*(t)$, pues:

$$f_{\varepsilon_1 \varepsilon_1}(\lambda) = E(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)'} + G^*(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda) \cdot \overline{G^*(\lambda)'} -$$

$$- E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot \overline{G^*(\lambda)'} - G^*(\lambda) \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)'} =$$

$$= E(\lambda) \cdot f_{YY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)'} +$$

$$+\begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot G(\lambda) \cdot f_{XX}(\lambda) \cdot \overline{G(\lambda)'} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} -$$

$$- E(\lambda) \cdot f_{YX}(\lambda) \cdot \overline{G(\lambda)'} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot G(\lambda) \cdot f_{XY}(\lambda) \cdot \overline{E(\lambda)'} =$$

$$= I_s + \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot I_s \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda)^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} =$$

$$= I_s - \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

de lo que se deduce que:

$$f_{\eta\eta}(\lambda) = I_s$$

$$f_{\xi^*\xi^*}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$f_{\eta\xi^*}(\lambda) = f_{\xi^*\eta}(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz de coherencias entre componentes de $\eta(t)$ y $\xi^*(t)$ vendrá dada por:

$$\gamma^2_{\eta\xi^*}(\lambda) = f_{\eta\eta}(\lambda)^{-1/2} \cdot f_{\eta\xi^*}(\lambda) \cdot f_{\xi^*\xi^*}(\lambda)^{-1} \cdot f_{\xi^*\eta}(\lambda) \cdot f_{\eta\eta}(\lambda)^{-1/2}$$

$$= I_s^{-1/2} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix} \cdot I_s^{-\frac{1}{2}} =$$

(*) Recuerdense los resultados obtenidos en pag. 266

$$= \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

con lo que obtenemos las coherencias canónicas entre los respectivos pares de componentes canónicas de las series s-variantes $\eta(t)$ y $\xi^*(t)$. Resultados todos ellos análogos a los ya obtenidos en el epígrafe tercero de este capítulo, salvo la oportuna transformación de la serie $\xi(t)$ para dar $\xi^*(t)$.

CAPITULO V

" CONCLUSIONES "

En este capítulo, recogemos a modo de resumen las CONCLUSIONES a las que podemos llegar despues de examinar y comparar los resultados obtenidos en los dos capítulos anteriores, esto es, al comparar los métodos de Análisis Multivariante de Series Temporales, desde las aproximaciones del "dominio temporal" y del "dominio frecuencial".

Las conclusiones, se referirán siempre a los modelos más generales de los cuales se deducen de forma inmediata, otras conclusiones más simples, pero con el mismo contenido, aplicables a los modelos más restringidos, a estos los denominaremos COROLARIOS, a pesar de que esta nomenclatura no es demasiado usual, en este tipo de contextos.

I) CONCLUSIONES RESPECTO A LA APROXIMACION FRECUENCIAL AL MODELO DE REGRESION.

Dividiremos este apartado de conclusiones en tres partes recogiendo sucesivamente, aquellas que hacen referencia a los Modelos Global, Marginal y Parcial.

A) MODELO GLOBAL

Aqui, se ha considerado la regresión de la Serie Temporal r-variante $Y(t)$, cuyos componentes actúan como variables endógenas, sobre la Serie Temporal k-variante $X(t)$, cuyos componentes se consideran variables exógenas, relacionados a traves del modelo,

$$Y(t)=\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).X(u)+\varepsilon(t)$$

llegándose a las siguientes conclusiones

PRIMERA.

La Matriz del Espectro de los Errores $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ que es de orden rxr nos informa de la estructura de covariación de la serie temporal residual r-variante $\varepsilon(t)$ en la frecuencia λ, obteniendose la matriz de variancias y covariancias de los componentes, a traves de la expresión:

$$C_{\varepsilon\varepsilon}(0)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)\,d\lambda$$

Mediante el análisis de la matriz, $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ y en particular de su diagonal, podremos conocer la mayor o menor importancia que en la variancia de los componentes de la serie residual $\varepsilon(t)$ tiene una determinada banda de frecuencias.

COROLARIO.

En el caso particular en que r=1, la serie Y(t) es univariante y entonces $f_{\varepsilon\varepsilon}(1)$ será una función, tal que,

$$\mathrm{Var}\left(\varepsilon(t)\right)= C_{\varepsilon\varepsilon}(0)=\int_{-\pi}^{\pi} f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda).d\lambda$$

De lo que se desprende que mediante el espectro de los errores podemos averiguar que bandas de frecuencia influyen más en la variancia de la serie residual $\varepsilon(t)$.

Esto nos interesa en gran manera, pues significa que para dichas bandas de frecuencia la serie k-variante $\chi(t)$ explica peor el comportamiento de la serie univariante Y(t), a través del modelo especificado.

Si llamamos,

$$Y^*(t)=\alpha+\sum_{u=-\infty}^{\infty} a(t-u).\chi(u)$$

que no es sino la serie transformada lineal de la k-variante $\chi(t)$ que mejor se adapta a la serie Y(t), tenemos los siguientes resultados

$$Y(t)=Y^*(t)+\varepsilon(t),$$

$$f_{YY}(\lambda)=f_{Y^*Y^*}(\lambda)+f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda) \qquad \text{y,}$$

por integración:

$$Var\left(Y(t)\right)=Var\left(Y^*(t)\right)+Var\left(\varepsilon(t)\right)$$

que nos da la variancia de la serie Y(t) descompuesta en la suma de variancias de las series, Y*(t) que es la transformada lineal de la k-variante $\chi(t)$ y de la $\varepsilon(t)$ que es el residuo de la regresión, resultado análogo al obtenido en el análisis multivariante por el "dominio temporal" pero con la ventaja adicional, de que cada una de estas variancias la tenemos descompuesta en el campo de frecuencias, por lo que en un análisis de las relaciones entre la serie Y(t) y la de $\chi(t)$ podemos saber en que bandas de frecuencia su relación es más fuerte ó más débil, conclusión ésta de gran importancia en el caso de series temporales económicas en que nos interesa saber si la relación entre las series se produce a corto, medio o largo plazo, o sea en bandas de frecuencia proximas a los extremos del intervalo, medias ó cercanas a la frecuencia 0.

SEGUNDA.

La Matriz de Coherencia $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ que es de orden rxr, está relacionada con la Matriz del Espectro de los errores, a traves de la siguiente relación:

$$f_{33}(\lambda)=f_{YY}(\lambda)^{1/2}\cdot\left[I_r-\gamma^2_{YX}(\lambda)\right]\cdot f_{YY}(\lambda)^{1/2}$$

y por tanto $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ nos proporciona igual que $f_{\varepsilon\varepsilon}(\lambda)$ una medida de la regresión lineal de $Y(t)$ sobre $X(t)$ en la frecuencia λ.

Esta medida está relacionada con las raices características de la matriz de coherencia $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ que hemos demostrado, estan todas comprendidas entre 0 y 1. Obteniéndose como casos extremos, aquel en que todas las raices caracteristicas son 1 que corresponde a una regresión lineal perfecta de $Y(t)$ sobre $X(t)$ en la frecuencia λ y el opuesto en que todas fuesen iguales a 0, que correspondería al caso en que $Y(t)$ fuese linealmente independiente de $X(t)$ en la frecuencia λ.

COROLARIO

En el caso particular en que r=1, la coherencia multiple correspondiente a la regresión de Y(t) sobre $X(t)$ será una función $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ de la frecuencia λ, tal que estará siempre compensada entre 0 y 1.

La coherencia múltiple nos da en la frecuencia λ una información equivalente a la dada por el coeficiente de correlación multiple en el "dominio temporal", o sea que representa el tanto por uno de la variación de Y(t) en la frecuencia λ que queda explicada mediante la regresión sobre $X(t)$.

Este resultado es realmente interesante para analizar, en economía, las relaciones entre una serie Y(t) y otra serie k-variante $\chi(t)$ pues si representamos gráficamente la función $\gamma^2_{YX}(\lambda)$, nos dará una idea de la bondad de la regresión de Y(t) sobre $\chi(t)$ en cada frecuencia λ, con lo que tendremos una forma de contraste de la validez del modelo para relaciones a corto, medio o largo plazo.

TERCERA.

En el caso bivariante, en que r=k=1, o sea cuando las series Y(t) y X(t) son univariantes, podemos utilizar para analizar las relaciones entre estas series, además de la coherencia $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ la Ganancia (λ) y la Fase $\phi(\lambda)$, que son respectivamente el módulo y el argumento del coeficiente complejo de la regresión A(λ).

La Ganancia G(λ) puede interpretarse como el coeficiente por el que se multiplica la amplitud de la componente de la serie X(t) en la frecuencia λ, para obtener la amplitud de la componente de la correspondiente transformada Y*(t) en la misma frecuencia, que podrá compararse con la de la serie Y(t) en dicha frecuencia, para ver los desajustes que se producen en el modelo de regresión, bivariante.

La Fase $\phi(\lambda)$, se interpreta como el ángulo existente entre las componentes de frecuencia correspondientes a las series Y(t) y X(t) y proponemos la utilización de la función derivada de la fase respecto a la frecuencia λ, a a la que se denomina Retardo Conjunto y que en el caso de que $\phi(\lambda)$ sea lisa alrededor de una cierta frecuencia λ_0, (en un entorno de λ_0 pueda ser sustituida por la tangente), $\phi'(\lambda_0)$ se interpreta como el retardo de Y(t) respecto a X(t) en una banda de frecuencia alrededor de λ_0.

El análisis de la Ganancia G (λ) y de la Fase $\phi(\lambda)$ es muy importante en el estudio de las propiedades de los filtros y aqui se aplica a un caso particular del modelo de regresión, donde lo que se hace es, en realidad, obtener un filtro para que aplicado a X(t) nos aproxime lo más posible a Y(t).

B) MODELO MARGINAL

Es idéntico al Modelo Global, con la única diferencia de que no se toma la serie k-variante $\chi(t)$, sino una subserie k_1-variante $\chi_1(t)$ con $k_1<k$.

PRIMERA.

Hemos demostrado que la Matriz de Coherencia $\gamma^2_{YX_1}(\lambda)$ al ser comparada con la matriz de coherencia del modelo global $\gamma^2_{YX}(\lambda)$ satisface siempre la relación, $\gamma^2_{YX}(\lambda)\geq\gamma^2_{YX_1}(\lambda)$ para cualquier frecuencia λ, lo que nos lleva a la conclusión de que comparando la Matriz de Coherencia marginal, podemos analizar la aportación adicional en la explicación de la serie $Y(t)$, que supone la inclusión en el modelo marginal de la serie k_2-variante $\chi_2(t)$ con $k_2<k$ y $k_1+k_2=k$ formada por los componentes de $\chi(t)$ no incluídas en $\chi_1(t)$.

COROLARIO.

En el caso particular de que r=1, la coherencia multiple global $\gamma^2_{YX}(\lambda)$, y la coherencia multiple marginal $\gamma^2_{YX_1}(\lambda)$ satisfacen la relación, $\gamma^2_{YX}(\lambda) \geq \gamma^2_{YX_1}(\lambda)$ propiedad equivalente a la que en el dominio temporal se dá entre los coeficientes de correlación multiple.

Esta propiedad puede interpretarse diciendo, que al añadir en un modelo de regresión, nuevas series consideradas como variables exógenas, la explicación que logramos del comportamiento de Y(t) en cada frecuencia λ, no puede tener un efecto negativo, o sea no puede reducir la coherencia del conjunto total.

Esta propiedad, tiene gran importancia en los modelos que utilizan series económicas, pues nos interesará incluir aquellas series que más relacionadas estén con la endógena Y(t), pero precisamente en las frecuencias para las que las exógenas incluidas en el modelo marginal proporcionen menor coherencia.

SEGUNDA.

Si las Subseries, $X_1(t)$, k -variante y $X_2(t)$, k -variante, tienen coherencia nula en la frecuencia λ, las matrices de coherencia global y marginales respecto a $X_1(t)$, $X_2(t)$ satisface la siguiente relación:

$$\gamma^2_{YX}(\lambda)=\gamma^2_{YX_1}(\lambda)+\gamma^2_{YX_2}(\lambda)$$

que se interpreta como la propiedad aditiva de las matrices de coherencia, las dos subseries actúan por separado sobre la $Y(t)$, al tener coherencia cero, y sus efectos se suman.

COROLARIO.

En el caso r=1, las funciones de coherencia global y las marginales satisfacen la misma relación indicada, esto es en el caso de coherencia nula en la frecuencia entre las variables exógenas que tratan de explicar la variación de la serie $Y(t)$, sus efectos se suman en dicha frecuencia, o sea, el tanto por uno de la variación explicada por $X_1(t)$ se le suma el explicado por la $X_2(t)$, esta puede considerarse como la propiedad equivalente a la que posee el coheficiente de correlación múltiple en el caso de variables exógenas incorrelacionadas.

C) MODELO PARCIAL.

Aqui, hemos considerado el modelo de la regresión, entre las series residuales $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$, resultantes de la eliminación de las series originales $Y(t)$ y $X_1(t)$, respectivamente, la parte de variación explicada en ambas series por la $X_2(t)$

PRIMERA.

La Matriz Espectral de Errores Parciales $f_{\eta\eta}(\lambda)$, nos proporciona para cualquier frecuencia λ la amplitud de la componente correspondiente a la serie residual en la regresión de $\xi_1(t)$ sobre $\xi_2(t)$ ó lo que es lo mismo, en la regresión de $Y(t)$ sobre $X_1(t)$, una vez eliminada de ambas series la parte que se ve influenciada linealmente por la $X_2(t)$

Esta forma de actuar, equivale a la consideración de que al variar en el tiempo las series $Y(t)$ y $X_1(t)$, la serie $X_2(t)$ permanezca constante.

A través del modelo parcial, pueden estudiarse las relaciones entre series temporales económicas, eliminando de las mismas, previamente, los efectos de la influencia que sobre ellos ejercen otras series, con el fin de obtener las relaciones intrínsecas existentes entre las series y que estas no se vean oscurecidas de una forma indirecta debido a la influencia de otras series distintas.

SEGUNDA.

La Matriz de Coherencia Parcial, que simbolizamos por $\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)$ nos da una medida de la bondad en la regresión de la serie $Y(t)$ sobre $X_1(t)$ en la frecuencia λ, pero a diferencia de la matriz de coherencia $\gamma^2_{YX}(\lambda)$, de las series $Y(t)$ y $X_1(t)$ se ha eliminado la influencia que sobre sus componentes de frecuencia λ ejercía la serie $X_2(t)$.

COROLARIO.

En el caso particular en que r=1, la coherencia múltiple parcial entre $Y(t)$ y $X_1(t)$, previa la eliminación de la influencia de $X_2(t)$, será la función $\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)$, que para una frecuencia dada nos proporciona el tanto por uno de la amplitud de la frecuencia λ de lo que queda un Y(t) al eliminar la influencia de $X_2(t)$, explicado en la regresión sobre la serie $X_1(t)$, habiendose eliminado también de esta la influencia de $X_2(t)$

TERCERA.

Analizamos tambien, en el caso en que $r=k_1=1$, la Ganancia Parcial $G_{YX_1.X_2}(\lambda)$, y la Fase Parcial $\phi_{YX_1.X_2}(\lambda)$ siendo sus interpretaciones las dadas en el caso del modelo global pero aplicadas sobre las series residuales univariantes $\xi_1(t)$ y $\xi_2(t)$, resultantes de eliminar de Y(t) y $X_1(t)$ la influencia que sobre ellos ejerce la serie $X_2(t)$.

CUARTA.

Hemos considerado por último un modelo de regresión que podríamos calificar como serie-parcial, pues tiene en cuenta la regresión de la serie original Y(t), sobre la serie $\xi_2(t)$ resultante de eliminar de $X_1(t)$ la influencia de $X_2(t)$.

Hemos demostrado, que aunque las matrices de los coeficientes complejos de la regresión parcial coincide con los de la que hemos dado en llamar semi-parcial, la Matriz de Coherencia Semi-parcial $\gamma^2_{Y(X_1.X_2)}(\lambda)$ no coincide con la matriz de coherencia parcial $\gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)$ por lo que aunque desde el punto de vista de los coeficientes complejos de regresión, los modelos lleven a resultados idénticos, esta identidad no existe con referencia a las matrices de coherencia.

COROLARIO.

En el caso particular r=1, hemos demostrado que la coherencia multiple semi-parcial es siempre menor o igual que la correspondiente coherencia múltiple parcial, o sea, que para cualquier λ, tenemos que:

$$\gamma^2_{Y(X_1.X_2)}(\lambda) \leq \gamma^2_{YX_1.X_2}(\lambda)$$

ya que al no eliminar de Y(t) la influencia de $\chi_2(t)$, la coherencia compara la variación explicada por $\xi_2(t)$ respecto a la total variación de Y(t) y no respecto a la que queda después de eliminar el efecto de $\chi_2(t)$, luego subestima la coherencia entre Y(t) y $\chi_1(t)$ cuando se considera constante $\chi_2(t)$.

II) CONCLUSIONES RESPECTO AL ANALISIS ESPECTRAL DE LAS COMPONENTES PRINCIPALES.

Dada la serie k-variante $\chi(t)$, hemos obtenido, mediante una oportuna transformación, la serie s-variante $Y(t)$, con $s \leq k$ y cuyas componentes tienen una estructura covariante sencilla, y al mismo tiempo consideran la mayor información posible respecto a los componentes de la serie original $X(t)$, pudiéndose recuperar esta información, aplicando a la serie $Y(t)$ una determinada transformación.

PRIMERA.

La no unicidad, de la Matriz Unitaria que diagonaliza a una Matriz Hermitiana dada, como la matriz espectral $f_{XX}(\lambda)$, hace que el problema de determinar las s-primeras componentes principales de la serie k-variante $X(t)$, incluídas en la serie $Y(t)$, no tenga una solución única, para resolver esta indeterminación, hemos optado por elegir, de entre todos los posibles valores para la serie s-variante $Y(t)$, aquel para el cual sus componentes esten una a una en Fase, con las s-primeras componentes de la serie original $X(t)$, podría adoptarse si conviene, el que estuvieran en fase con s. cualesquieras de las componentes de $X(t)$, no necesariamente las primeras, sin más que efectuar una simple reordenación. Esto se consigue, asociando a las s-mayores raices caracteristicas de la matriz espectral $f_{XX}(\lambda)$, los vectores característicos que tengan la propiedad de, que su i-esima componente sea real.

SEGUNDA.

Las componentes principales de la serie $X(t)$ que vienen dadas por la serie s-variante $Y(t)$, conservan tanta más información acerca de la estructura de $X(t)$, cuanto más pequeñas sean las k-s menores raices caracteristicas de la matriz espectral $f_{XX}(\lambda)$. Si todas estas k-raices fuesen nulas, para toda la frecuencia λ, entonces la estructura covariante de la serie original k-variante $X(t)$ quedaría recogida en su totalidad en la serie s-variante $Y(t)$, formada por sus s-primeras componentes principales, resultado éste que nos permite afirmar, que aún cuando las raices no sean cero, si son suficientemente pequeñas, en la práctica, se permite reducir de dimensionalidad de la serie original $X(t)$, sustituyéndola por la serie $Y(t)$ de sus s-primeras componentes principales, pues ésta conservará casi toda la información que lleva $X(t)$, al conservar practicamente la totalidad de su estructura covariante.

Esto en las aplicaciones a modelos temporales con series temporales económicos, es muy importante de cara a su especificación, para reducir en lo posible el número de series que en él intervienen, al poderse sustituir la serie k-variante $X(t)$ por la formada por sus s-primeras componentes principales $Y(t)$ cuya dimensionalidad se ha reducido en k-s.

TERCERA.

Las componentes principales de la serie k-variante $X(t)$, dadas a traves de la serie s-variante $Y(t)$, son series temporales incorrelacionadas en toda frecuencia λ, es decir, poseen coherencia nula, al considerarlas dos a dos.

CUARTA.

Simbolizando por $X^*(t)$ la serie k-variante, que puede reconstruirse a partir de la serie s-variante $Y(t)$, formada por las s-primeras componentes de la serie original $X(t)$ y $\xi(t) = X(t)-X^*(t)$, podemos decir que la serie original $X(t)$, se ha descompuesto en dos partes; por un lado $X^*(t)$ serie que contiene parte de su estructura covariante, precisamente la conservada por la serie s-variante $Y(t)$ de sus s-primeras componentes principales, y por otro lado, $\xi(t)$ parte que representa la parte de la estructura covariante de $X(t)$ no conservada por $Y(t)$, siendo las series $X(t)$ y $\xi(t)$ tales que presenta una estructura incorrelacionada para cualquier frecuencia λ.

QUINTA.

Las primeras componentes principales de la serie $X(t)$, pueden considerarse como las componentes de una serie s-variante $Y^*(t)$, resultante de efectuar una transformación lineal en $X(t)$, de forma que las componentes de $Y^*(t)$ tengan las máximas variancias posibles, pero con la condición de que al considerar estas componentes, dos a dos, tengan coherencia nula en toda frecuencia λ. El problema de la no univocidad del resultado, se resuelve del mismo modo que lo hemos hecho antes considerando sus fases respecto a las componentes de la serie original $X(t)$.

III) CONCLUSIONES RESPECTO AL ANALISIS CANONICO EN EL DOMINIO FRECUENCIAL.

Dadas las series temporales, $Y(t)$ r-variante y $X(t)$ k-variante, nuestro objetivo ha sido obtener dos series s-variantes $\eta(t)$ y $\xi(t)$ con $s \leq \min \{r,k\}$, tales que sean transformaciones de $Y(t)$ y $X(t)$ respectivamente, cuya matriz de coherencia $\gamma^2_{\eta\xi}(\lambda)$ sea diagonal, y de forma que los elementos de la diagonal sean lo más grandes posibles. Esto significa que los pares de componentes de las series $\eta(t)$ y $\xi(t)$ llamadas Series Canónicas, tengan coherencias máximas, denominadas Coherencias Canónicas.

PRIMERA.

Las transformaciones que debemos aplicar a las series $Y(t)$ y $X(t)$ para obtener las Series Canónicas $\eta(t)$ y $\xi(t)$ dependen respectivamente de los vectores característicos asociados a las s-mayores raices características de las matrices,

$$\delta_{YY}(\lambda)^{-1/2} \cdot \delta_{YX}(\lambda) \cdot \delta_{XX}(\lambda)^{-1} \cdot \delta_{XY}(\lambda) \cdot \delta_{YY}(\lambda)^{-1/2} \text{ y}$$

$$\delta_{XX}(\lambda)^{-1/2} \cdot \delta_{XY}(\lambda) \cdot \delta_{YY}(\lambda)^{-1} \cdot \delta_{YX}(\lambda) \cdot \delta_{XX}(\lambda)^{-1/2}$$

y como en el caso de las componentes principales, el problema de la obtención de estos vectores será indeterminado eligiéndose de forma que las s-primeras componentes de $Y(t)$ y $X(t)$ esten en fase con las correspondientes componentes de las series canónicas $\eta(t)$ $\xi(t)$, para lo cual deberá ser real la componente i-esima de los vectores caracteristicos asociados.

SEGUNDA.

Las coherencias canónicas entre los pases de componentes de las series canónicas $\eta(t)$ y $\xi(t)$ son iguales a las s-mayores raices caracteristicas de las matrices dadas antes, habiéndose probado la igualdad entre estas s-primeras raices caracteristicas, de una y otra matriz.

TERCERA

Para simplificar las propiedades de los estimadores correspondientes, se pueden normalizar las series canónicas, de forma que conservando sus coherencias canónicas, tengan variancias unitarias, esta normalización es equivalente a la efectuada al analizar las correlaciones canónicas en el dominio temporal.

IV) CONCLUSIONES RESPECTO AL MODELO SINTETICO.

En este último apartado, hemos obtenido un modelo general para analizar la estructura covariante entre dos series temporales, $Y(t)$ r-variante y $X(t)$ k-variante.

PRIMERA.

Mediante el método de optimización condicionado, aplicado a la estructura covariante de la serie $\xi(t)$, de los resíduos resultantes de comparar la serie $Y(t)$ con una doble tranformación lineal de rango reducido, aplicada sobre la serie $X(t)$, y utilizada como condicionante una Transformación Regular de la estructura de estos residuos $\xi(t)$, obtenemos un modelo del que se deducen facilmente los tres métodos de análisis descritos aqui: Regresión, Componentes Principales y Análisis Canónico, sin más que efectuar las correspondientes restricciones, que afectan a la transformación regular condicionante y a las series originales $Y(t)$ y $X(t)$.

SEGUNDA.

Consideramos el estudio de este modelo sintético, como un punto que requeriría un posterior y más amplio desarrollo, pues un análisis exhaustivo de sus propiedades condicionadas, quizás realizando algunas posibles modificaciones de matiz en las definiciones, podría llevarnos a métodos de análisis más eficientes, para un mejor conocimiento de las relaciones covariantes entre series temporales desde la aproximación espectral. Esta es una tarea que el doctorando, espera tener oportunidad de realizar en un futuro próximo.

CAPITULO VI

" FUENTES BIBLIOGRAFICAS "

En este último capítulo, se incluye una relación ordenada alfabéticamente por autores, de aquellos textos y artículos que han sido utilizados para la realización de este trabajo de tesis doctoral en economía, y que son citados en el mismo, con la finalidad de que ayuden, en algunos casos, a centrar el contexto y los temas tratados, y en otros a profundizar caminos y estudios que aqui solo se han apuntado.

No obstante, no han sido incluidos en esta relación aquellos textos, tales que aún habiendo sido necesaria su consulta por el doctorado, para lograr una formación básica en determinados temas, sus aportaciones no han sido directamente concluyentes para la realización de este trabajo y no se ha considerado oportuno hacer referencia a ellos.

ADELMAN, I. (1965). "Long cycles: fact or artifact". *American Economic Review*, Vol 55.

AHLUND, M.C., BARKSDALE, H.C. y otros (1977). Multivariate Spectral Analysis - An Illustration". *Decision Sciences*, Vol 8. n°4. Oct. 1977 (pags. 734-752).

ALAVI, A.S. Y JENKINS, G.M. (1965). "An example of Digital Filtering" *Applied Statistics. Journal of the Royal Statistical Society*. Serie C. Vol 14. n°1 (pags. 70-74).

ALEXANDER, M.J. Y VOK, C.A. (1963). *Tables of the Cumulative Distribution of Sample Multiple Coherence*. Rocketdyne Division, North American Aviation Inc. Reseach Report 63-37, November 15.

ANDERSON, R.L. (1942). "Distribution of the Serial correlation coefficient". *Ann. Math. Stat.* Vol 13, (pags. 1 y sigts).

ANDERSON, T.W. (1958). *An Introduction to Multivariate Statistical*. Analysis. John Wiley. New York.

ANDERSON, T.W. (1963)."Asymptotic Theory for principal component Analysis". *Ann Math. Statist.* n°34, (pags. 122 -148).

ANDERSON, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley. New York.

ARTIS, M. (1976). *La especificación de los Modelos Econométricos*. Departamento de Econometría de la Facultad de Ciencias Economicas y Empresariales de Barcelona.

BARKSDALE, H.C. Y GUFFEY, H.J. Jr. (1972). An Illustration of Cross-Spectral Analysis in Marketing". *Journal of Marketing Research.* Vol 9. n° 3, Agosto 72. (pags. 271-278).

BARTLETT, M.S. (1950). "Periodogram Analysis and Continuos Spectra". *Biometrika,* Vol 31 (pags. 1-16).

BARTLETT, M.S. (1963). "The Spectral Analysis of Point Processes". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 25, n°2 (pags. 264-296).

BARTLETT, M.S. (1966). *An Introduction to Stochastic Processes.* Cambridge University Press. Londres. Segunda edic.

BELLMAN, R. (1960). *Introduccion al Análisis Matricial,* Ed. Reverté, S.A., Barcelona 1965. Del original: *Introduction to Matrix Analysis,* Mc. Graw-Hill. New York.

BENDAT, J.S. Y PIERSOL, A.G. (1966). *Measurement and Analysis of Randon Data.* Wiley. New York.

BEVERIDGE, W.H. (1921). "Weather and Harvest Cycles". *Econ. J.* Vol 31, (pags. 429-452).

BEVERIDGE, W.H. (1922). "Wheat prices and rainfall in Western Europe". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie A. Vol 85 (pags 412-459).

BLOOMFIELD, P. (1970). "Spectral Analysis with Ramdomly Missing Observations". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 32, n°3 (pags. 369-380).

BLOOMFIELD, P. (1976). *Fourier Analysis of Time Series: An Introduction.* John Wiley, New York.

BOX, G.E.P. Y JENKINS, G.M. (1969). *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* Holden - Day. San Francisco. Edición revisada 1976.

BOX, G.E.P.; JENKINS, G.M. Y MACGREGOR, J.F. (1974). Some Recent Advances in Forecasting and Control" *Applied Statistics*. Vol 23, n°2 (pags. 158-197).

BOX, G.E.P. Y TIAO, G.C. (1975). "Intervention Analysis with Applications to Economic and Environmental Problems" *Journal of the American Statistical Association*. Vol 70. n°349. Marzo 1975. (pags. 70-79).

BRIGHAM, E.O. (1974). *The Fast Fouvier Transform.* Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey.

BRILLINGER, D.R. (1964). "An Introduction to Polyspectra". Research Memor. n°67, *Econometric Research Programs.* Princeton University, New Jersey. Editado tambien en, *Ann. Math. Statist.* Vol 36 año 1965 (pags. 1351-1374).

BRILLINGER, D.R. (1968). "Estimation of the Cross-spectrum of a Stationary Bivariate Ganssian Process from its Zeros" *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 30, N°1 (pags. 145-159).

BRILLINGER, D.R. (1969). "The Canonical Analysis of Stationary Time Series". Incluido en: *multivariate Analysis-II*, editado por P.R. KRISHNAIAH. Academic Press. New York. (pags. 331-350).

BRILLINGER, D.R. (1975). *Time Series, Data Analysis and Theory.* Holt. Inc. New York.

CANARELLA, G. Y SNYDER, D. (1977). "The Long Swing - A Spectral Comparison of Nineteenth and Twentieth Century United States Experience". *Nebraska Journal of Economic and Bussiness.* Vol 16, n°2 (pags. 11-24).

COOLEY, J.W. Y TUKEY, J.W. (1965). "An algorithm for the machine computation of complex Fourier Series". *Math. Comput.* Vol 19, (pags. 297-301).

COX, D.R. Y MILLER, H.D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes.* Chapman and Hall, London, reimpresion 1977.

CRAMER, H. (1960). "On some classes of non stationary processes" *Proc. Fourth Berkeley Symposium Math. Statist. and Prob.* Vol 2. University of California Press. (pags. 57-78).

CHATFIELD, C. (1974). "Some Comments on Spectral Analysis in Marketing". *Journal of Marketing Research.* Vol 11, n°2, Febrero 1974 (pags. 97-101).

CHO, D.W. (1977). "A Spectral Measurement of the Cydical Patterns of Multivariate Time Sesies". *Decision Sciences,* Vol 8, n°4, Oct. 1977 (pags 663-676).

CHO, D.W. Y MCDOUGALL, G.S. (1978). "Regional Cyclical Patterns and Structure, 1954-1975". *Economic Geografhyc,* Vol 54, Enero 1978 (pags. 66-74).

CHOW, G.C. (1975). *Analysis and Control of Dynamic economic sistems.* John Wiley & sons. New York.

DANIELS, H.E. (1962). "The Estimation of Spectral Densities" *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 24 n°1 (pags. 185-198).

DAVENPORT, W.B.Jr. Y ROOT, W.L. (1958). *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise.* Mc. Graw-Hill. New York.

DAVIS, H.T. (1941). *The Analysis of Economic Time Series.* Principia Press of Trinity University San Antonio, Texas, 1963. Original publicado en 1941 como monografía n°6 de la Cowles Commission.

DIEUDONNE, J. (1960). *Fundamentos de Analisis Moderno,* Editorial Reverté, S.A Barcelona 1966, del original: *Foundations of Modern Analysis.* Academic Press. New-York 1960.

DOOB, J.L. (1953). *Stochastic Processes.* John Wiley & Sons, Inc. New York.

EICKER, F. (1973). "Concepts of Consistency in Spectral Estimation for Multivariate Time Series". Incluido en: *Multivariate Analysis-III.* Editado por. P.R. KRISHNAIAH Academic Press New York). (pags 17-30).

ENGLE, R.F. (1976). "Interpreting Spectral Analysis in Terms of Time-domain Models". *Annals of Economic and Social Measurement.* Vol 5, n°1 (pags 89-109).

ENOCHSON, L.D. YGOODMAN, N.R. (1965). "Gaussian Aproximation to the Distribution of Sample Coherence". *Technical Report.* AFFOL-65-57. Ohio.

FANO, R.M. (1950). "Short-time Autocorrelation functions and power Spectra". *J. Aconst. Soc. Amer.* Vol 22 (pags. 546-550).

FELLER, W. (1966). *Introducciôna la Teoría de Probabilidades y sus aplicaciones* (Volumen II) Limusa, Mexico 1978, de: *An introduction to Probability Theory and its Applications.* (Volumen II) John Wiley. Segunda Edición 1971.

FISHER, R.A. (1929). "Tests of significance in harmonic analysis" *Proc. Roy. Soc.* Serie A n°125 (pag. 54-59).

FISHMAN, G.S. (1969). *Spectral Methods in Econometrics.* Harvard University Press Cambridge.

GARCIA-VILLALON, J. (1967). "Análisis espectral de series temporales en economía". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles.* 1967. n°7 (pags 17-113).

GARCIA-VILLALON, J. (1970). "Consideraciones sobre el análisis espectral dinámico". *Anales del Instituto de Actuarios Españoles.* 1970 - 71 n°11 y 12 (pags. 45-54).

GIRSHICK, M.A. (1939). "On the Sampling Theory of the roots of determinantal equactions". *Ann. Math. Statist.* n°10 (pags. 203-224).

GODFREY, M.D. (1965). "An Exploratory Study of the Bispectrum of economic time series" *Applied Statistics. Journal of the Royal Statistical Society.* Serie C, Vol 14 n°1 (pag. 48-69).

GOLDBERG, S. (1958). *Ecuaciones en diferencias finitas*. Ed. Marcombo. Barcelona 1964. Del original: "*Introduction to difference equations*". John Wiley & Sons, Inc. New York 1958.

GOODMAN, N.R. (1965). "Measurement or Matrix Frequency Response Functions and Multiple Coherence Functions". *Technical Report*. AFFDL-65-56 Ohio

GOODMAN, N.R. YDUBMAN, M.R. (1969). "Theory of Time-rarying Spectral Analysis and Complex Wishart Matrix Processes". Incluido en: *Multivariante Analisis-II*, Editado por P.R. KRISHNAIAH, Academic Press, New York (pags. 351-366).

GRANGER, C.W.J. (1964). con la colaboración de HATANAKA, *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton University Press.

GRANGER, C.W.J. Y NEWBOLD, P. (1974). "Spurios Regression in Econometrics". *Journal of Econometrics*. Vol 2.

GREMANDER, U. (1958). "Bandwidth and Variance in Estimation of the Spectrum". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie B. Vol 20 n°1 (pags. 152-157).

GRANGER, C.W.J. Y HUGHES, A.O. (1971). "A New Look al Some Old Data: The Beveridge wheat Price Series". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie A. Vol 134. parte 3° (pags. 413-428).

GRENANDER, U. Y ROSENBLATT, M. (1957). *Statistical Analysis of Stationary Time Series.* John Wiley, New York.

GUDMUNDSSON, G. (1971). "Time-Series Analysis of Imports, Exports and Other Economic Variables". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie A. Vol 34, 3°parte, (pags. 384-412).

HANNAN, E.J. (1958). "The Estimation of the Spectral Density After Trend Remoral". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 20 n°2, (pags. 323-333).

HANNAN, E.J. (1960 A). *Time Series Analysis.* Chapman and Hall London, reimpresión 1975.

HANNAN, E.J. (1960 B). "The Estimation of Seasonal Variation". *Australian Journal of Statistics.* Vol 2 (pags. 1-15).

HANNAN, E.J. (1961). Testing for a Jump in the Spectral Function". *Journal fo the Royal Statistical Society.* Serie B (methodological). Vol 23 n°2, (pags. 394-404).

HANNAN, E.J. (1963). "The Estimation of Seasonal Variation in Economic Time Series". *Journal of the American Statistical Association.* (pags. 31-44).

HANNAN, E.J. (1964). "The Estimation of a Changing Seasonal Pattern". *Journal of the American Statistical Association.* Vol 59.

HANNAN, E.J. (1970). *Multiple Time Series.* John Wiley, New York, 1970.

HANNAN, E.J. Y THOMSON, P.J. (1973). "Estimating group delay" *Biometrica* n°60, (pags. 241-253).

HASSELMAN, K; MUNK, W Y MACDONALD, G (1963). "Bi-Spectrum of Ocean Wares". Dentro de, *Time Series Analysis*, edited by M. Rosemblalt. John Wiley and Sons, New York (pags. 125-139).

HERBST, L.J. (1964). "Spectral Analysis in the Presence of Variance Fluctuations". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B, Vol 26, n°2 (pags. 354-360).

JENKINS, G.M. (1965). "A Survey of Spectral Analysis". *Applied Statistics, Journal of the Royal Statistical Society.* Serie C. Vol 14 n°1, (pags. 2-32).

JENKINS, G.M. Y PRIESTLEY, M.B. (1957). "The Spectral Analysis of Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B *Methodological). Vol 19 n°1 (pags. 1-12).

JENKINS, G.M. Y WATTS, D.G. (1968). *Spectral Analysis and its applications.* Holden-Day, San Francisco.

JOHNSTON, J. (1972). *Métodos de Econometría.* Vicens Universidad, tercera edición 1975. Del original: *Econometric Methods*, Mc. Graw-Hill, New York, segunda edición 1972.

JONES, R.H. (1962). "Spectral Analysis with regularity missed observations". *Ann. Math. Statist.* Vol 33 (pags. 455-461).

KENDALL, M.G. (1973). *Time-Series*. Segunda edición. Charles Griffin, London. 1976.

KENDALL, M.G. Y STUART, A. (1968,1969 y 1973). *The Advanced Theory of Statistics*. Charles Griffin, London.
Volumen I.- "Distribution Theory" 3 edic. 1969
Volumen 2.- "Inference and Relation ship". 3° edic. 1973.
Volumen 3.- "Design and Analysis, and Time-Series". 2°edic. 1968.

KHINTCHINE, A. (1934). "Korrelations theory der Stationären Stochastichen Prozesse". *Math. Annalen*. Vol 109 (pags. 604-615).

KOOPMANS, L.H. (1974). *The Spectral Analysis of Time-Series*. Academic Press, New York.

LEE,R.D. (1975)."Natural Fertility, Population Cycles and the Spectral Analysis of Births and Marriages". *Journal of the American Statistical Association*. Võl 70 n°350, (pags 295-304).

LEVIN, M.J. (1964). "Instantaneous Spectra and Ambiquity Functions. *I E E E Trans. Inf. Theory* It-10. (pags. 95-97).

LINNIK, Y.V. (1963). *Méthode des Moindres Carrés*. Dunod, Paris.

LOGUE, D.E. Y SWEENEY, R.J. (1977). "White-noise in Imperfect Markets - The Case of the Franc/Dollar Exchange Prate" *Journal of Finance*. Vol 32 n°3, Junio 1977 (pags. 761-768).

LOMNICKI, Z.A Y ZAREMBA, J.K. (1957). "On Estimating the Spectral Density Function of a Stochastic Process" *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie B, Vol 19 n°1, (pags.13-37).

LOYNES, R.M. (1968). "On the Concept of Spectrum for Non-stationary Processes". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie B, Vol 30 n°1, (pags. 1-30).

MALINVAUD, E. (1963). *Métodos Estadísticos de la Econometría*. Ariel, Barcelona 1967. Del original: *Méthodes Statistiques de l'econométric*. Dunod, Paris.

MASSY, W:F: (1965). "Principal Componets Regression in exploratory Statistical Research". *Journal of the American Statistical Association*. Marzo 1965, Vol 60 n°309, (pags. 234-256).

MC PHETERS, L.R. Y STRONGE, W.B. (1976). "Canadian Response to Fluctuations in United States Prices". *The Review of Economics and Statistics*. Vol 58, n°1, Feb. 1976 (pags 69-74).

MELNICK, E.L. Y MOUSSOURAKIS, J. (1975). "Seasonal Adjustments for the Decision Maker". *Decision Sciences*, Vol 6, n°2, Abril 1975 (pags. 252-258).

MEYER, C.F. Y CORBEAU, A.B. (1975). "The Application of Spectral Analysis to Demostrate the Stochastic Distortion in the Delta Mid-range of Price Series". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. Vol. 10, n°2 (pags.221-230).

MICHAELIS, L.O Y ROSCELLI, V.A. (1974). "Undercyclic Estimation Problems". *American Statistical Association Proceedings of the Business and Economics Statistics Section.* (pags. 104-109).

MOORE, H.L. (1914). *Economic Cycles: Their Law and Cause.* Macmillan Company. New York.

NERLOVE, M. (1964). "Spectral Analysis of Seasonal Adjustment Procedures". *Econometría.* Vol 32. n° 3, (pags 241-286). Julio 1964.

NERLOVE, M. (1965). "A comparison of a Modified "HANNAN" and the B L S Seasonal Adjustment Filters". *Journal of the American Statistical Association.* Vol 60, n°310, Junio 1965 (pags. 442-491).

NETTHEIM, N.F. (1965). "Fourier Methods for Evolving Seasonal Patterns". *Journal of the American Statistical Association.* Vol 60, n°310, Junio 1965 (pags. 492-502).

NEUMANN, J. VON. (1941). "Distribution of the Ratio of the Mean-Square Successive Differencie to the Variance". *Annals of Mathematicas Statistics.* Vol 12.

NIETO DE ALBA, U. (1973). *Introducción a la Estadística.* Tomo II: "Modelo Matemático". Ed. Aguilar, Madrid.

OTERO, J.M. (1978). "Fundamentos del análisis espectral y sus aplicaciones en Econometría". *Cuadernos de Economía,* Barcelona. Vol 6, n°16 Mayo-agosto 1978 (pags. 272-326).

OTNES, R.K. Y ENOCHSON, L. (1972). *Digital Time Series Analysis*. John Wiley. New York.

PAGE, C.H. (1952). "Instantaneous Power Spectra". *Journal Appl. Phys.* Vol 23 (pags. 103-116).

PAPOULIS, A. (1962). *The Fourier Integral and its Applications*. Mc Graw-Hill, New York.

PARZEN, E. (1958). "On Asymptotically Efficient Consistent Estimates of the Spectral Density Function of a Stationary Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie B. Vol 20 n°2, (pags. 303-322).

PARZEN, E. (1969). "Multiple Time Series Modeling". Incluido en: *Multivariate Analysis-II*. Editado por P.R. KRISHNAIAN, Academic Press, New York (pags. 389-409).

PENA, J.B. (1970). "Análisis Espectral de los procesos estocásticos estacionarios de segundo orden". *Anales de Economía*. Año 1070, 3°época Enero-Diciembre n°5-8. (pags. 97-140).

PERCIVAL, J. (1975). "On the Selective Use of Spectral Analysis". *Review of Economics and Statistics*. Vol 57 n°1. Febrero 1975 (pags. 107-109).

PRIESTLEY, M.B. (1965 A). "The Role of Bandwidth in Spectral Analysis". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie C. Vol 14 n°1 (pags. 33-47).

PRIESTLEY, M.B. (1956 B). Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B, Vol 27, n°2 (pags 204-237).

PULIDO, A. (1971). "Tratamiento econométrico de Series Temporales Aislados I.- Descomposición Temporal" *Documento de Trabajo.* (Curso 1971/72) Universidad de Valencia.

QUENOUILLE, M.H. (1949). "Approximate test of correlation in time-series". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 11 (pags 68-84).

QUENOUILLE, M.H. (1957). *The Analysis of Multiple Time Series.* Griffin. London.

QUENOUILLE, M.H. (1958). "The Comparison of Correlations in Time-Series". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 20, n°1 (pags. 158-164).

QUEYSANNE, M. (1974). *Algebra Básica.* Vicens-Vives, segunda reimpresión del original *Algebra* (1964) Librairie Armand Colin.

QUINET, E. (1969). *Séries Temporelles et décisions économiques,* Dunod, Paris.

QUINET, J. (1966). *Cours Elémentaire de Mathématiques Supérieurs.* Tome-4. Dunod, Paris.

RAO, C.R. (1973). *Linear Statistical Inference and its applications.* John Wiley and Sons, New York. Segunda edición. 1973.

RAYNER, J.N. (1971). *An Introduction to Spectral Analysis.* lion limited, London.

REINMUTH, J.E. Y GEURTS, M.D. (1977). "using Spectral Analysis for Forecast Model Selection". *Decision Sciencies*, Vol 8 n°1, En. 1977 (pag 134-150).

RIOS,S. (1972). *Métodos Estadísticos*. Ediciones del Castillo, S.A. Madrid.

ROBINSON, E.A (1967). *Multichannel Time Series Analysis with Digital Computer Programs*. Holden Day, San Francisco

RODRIGUEZ, A.M. (1975). *Matemáticas para Economistas I.* Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Barcelona.

SARGAN, J.D. (1953). "Correlogram and Periodogram". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B, Vol 15, n°1 (pags. 140-152).

SLUTSKY, E. (1937). "The Sumation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes". *Econometrica.* Vol 5 (pags. 105 y sigts.).

SPIVEY, W.A. Y WROBLESKY, W.J. (1974). "Analyzing and Forecasting Time Series". *American Statisticas Association Proceedings of the Business and Economics Statistics Section.* (pags. 92-101).

STRONGE, W.B.; DMYTROW, E.D. Y REDMAN, M.B. (1976). "A Cross Spectral Analysis of Money and Expenditures". *Journal of Economics And Business.* Vol 29 n°1 (pags. 40-45).

SUBBA-RAO, T. (1970). "The Fitting of Non-stationary Time-Series Models with Time-dependent Parameters". *Journal of the Royal Statistical Society*. Serie B. Vol 32 n°2 (pags. 312-322).

SUZUKI, M. (1965). "A Spectral Analysis of Japanese economic time series since the 1880´s". *Kyklos*. Bâle.

TERRELL, R.D. Y TUCKWELL, N.E. (1971). "The efficiency of Least Squares in Estimating a Stable Seasonal Pattern". *Journal of the American Statistical Association*. Vol 66 n°334, Junio 1971 (pags. 354 - 362).

TINTNER, G. (1940). *The Variate-Difference Method*. Bloomington Prers. Indian.

TUKEY, J.W. (1949). "The Sampling Theory of Power Spectrum estivates". *Symposium of Applications of Auto Correlation Analysis to Physical Problems*. O.N.R. Woods Hole, NAVEXOS-P-735 (pags. 47-67).

TUKEY, J.W. (1967). "Spectrum calculations in the new world of the last Fourier Transform" en *Advanced Seminar on Spectral Analysis Time Series*, Ed. B. Harris Wiley, New York (pags. 25-46).

UNWIN, D.J. Y HEPPLE, L.W. (1974). "The Statistical Analysis of Spatial Series". *Statistician*, Vol 23. (pags. 211-227).

U.S. BUREAU OF THE CENSUS (1965). "Estimating Trading day Variations in Monthly Economic Time Series" *Technical Paper n°12.*

UPSON, R.B. (1972). "Randon-walk and Forward Exchange-rates A Spectral Analysis". *Journal of Financial and Quantitative Analysis.* Vol 7 n°4 Septiembre 1972 (pags. 18-97).

VEGAS, A Y LOPEZ CACHERO, M. (1976). *Elementos de Matemáticas para Economistas.* Ediciones Pirámide, S.A. Madrid.

VELASCO, R. (1973). *Curso monografico de doctorado sobre Análisis Numérico.* Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Barcelona.

WHITTLE, P. (1953). "The Analysis of Multiple Stationary Time Series". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B. Vol 15 n°1 (pags 125-139).

WHITTLE, P. (1957). "Curve and Periodogram Smoothing". *Journal of the Royal Statistical Society.* Serie B Vol 19, n°1 (pags. 38-47).

WHITTLE, P. (1963). *Prediction and regulation by linear-squares methods.* The English Universities Press. London.

WIENER, N. (1930). "Generalized Harmonic Analysis", *Acta. Mathematica.* Stockh. Vol 55 (pags. 117-258).

WILKS, S.S. (1962). *Mathematical Statistics*. John Wiley & Sons. Inc. New York.

WOLD, H.O.A. (1954). *A Study in the Analysis of Stationary Time-Series*. 2°Edicion. Almquist y Wicksell, Uppsala.

WOLD, H.O.A. (1963). "Forecasting by the chain principle". En *Time Series Analysis*. Ed. M. Rosemblalt Wiley. New York. (pags. 471-497).

YULE, G.U. Y KENDALL, M.G. (1967). *Introducción a la Estadistica Matemática*. Quinta Edición. Aguilar. Madrid.