UNIVERSITAT DE BARCELONA

Noves aplicacions de l'àlgebra geomètrica a la física matemàtica

David Miralles Esteban

Departament de Física Fonamental

Universitat de Barcelona

Noves Aplicacions de l'Àlgebra Geomètrica a la Física Matemàtica

David Miralles Esteban

Barcelona, Desembre 2001

Noves Aplicacions de l'Àlgebra Geomètrica a la Física Matemàtica

Memòria de la tesi presentada per
David Miralles Esteban
per optar al grau de Doctor en Ciències Físiques

Director de tesi: Dr. Josep Manel Parra Serra.
Codirector de tesi: Dr. Jayme Vaz Jr.

Programa de doctorat del Departament de Física Fonamental
Mètodes Estadístics en la Física
Bienni 1995-1997
Universitat de Barcelona

Signat per Dr. Josep Manel Parra Serra i Dr. Jayme Vaz Jr.

Barcelona, Desembre 2001

Als meus pares

Agraïments

Agrair, especialment, als meus directors de tesi: el Dr. Josep Manel Parra i el Dr. Jayme Vaz per l'interès, la dedicació i la paciència que han tingut amb mi. Voldria estendre els agraïments als professors, alumnes i PAS del Departament de Física Fonamental i a la gent del IMECC de la Universidade Estadual de Campinas, així com a tota la gent que m'ha acompanyat en aquest camí. Finalment, a la meva família que sempre ha romàs al meu costat.

Índex

Introducció.

El segle XIX tingué dos anys 'miraculosos' pel que fa al càlcul vectorial. L'any 1844, mentre Hermann Grassmann presentà la *Teoria de l'extensió* [37] que contenia l'avui coneguda com àlgebra exterior o de Grassmann, William Rowan Hamilton, en el zenit de la seva carrera científica, publicava el seu primer article sobre els quaternions, que constitueixen l'origen més evident del càlcul vectorial usat en la física general, la mecànica i l'electromagnetisme. Ignorada totalment en els seus inicis, els elements de la teoria de l'extensió (punts, vectors, plans, volums,...) constitueixen un conjunt més complet de magnituds geomètriques bàsiques per a una representació de la realitat física que no els quaternions o els escalars i vectors que resultaren de la seva disgregació. D'aquest fet se n'adonà el jove geni matemàtic anglès William Kingdon Clifford que l'any 1876, presentà a la London Mathematical Society l'àlgebra geomètrica que avui porta el seu nom [18], unint a l'estructura exterior el producte escalar o mètric. Aquests treballs conclogueren, exactament dos segles després, el projecte iniciat per G.W. Leibniz l'any 1676 [30] anomenat *Característica Geomètrica* on proposava la necessitat d'inventar un càlcul simbòlic específicament geomètric. En el primer capítol de la tesi exposem, principalment, alguns dels resultats més destacats d'aquestes àlgebres. Degut al seu evident interès físic també hi trobem un estudi detallat de les àlgebres geomètriques de Clifford per l'espai 3-euclidià i per l'espai de Minkowski de signatura -2.

Tot i que sol considerar-se que l'àlgebra de Clifford entrà en la física moderna per la porta gran, a través de la celebrada equació quàntica relativista de l'electró de Dirac, la seva *característica geomètrica* fou inicialment, i encara ho és avui per a una majoria dels físics teòrics, ignorada[1]. Degut a l'èxit de la teoria de Dirac, Otto Laporte i George E. Uhlenbeck publicaren un article[50] difonent el coneixement de la teoria d'espinors de Dirac entre els físics. En aquesta i moltes altres presentacions l'estructura multivectorial de l'àlgebra geomètrica (i exterior) quedaren ocults darrera la realització matricial. L'únic ordre multivectorial que veié la llum va ser l'escalar sota la forma de traça. De fet, és impropi identificar l'àlgebra matricial de Dirac com l'àlgebra de Clifford de l'espaitemps ja que ($\mathbb{C}(4)$) correspon a diverses àlgebres geomètriques associades a espais vectorials dotats de mètriques diferents.

L'any 1966 David Hestenes [42, 43, 44], inspirat en els treballs de Marcel Riesz [71, 72], reformula la teoria relativista de Dirac i l'electromagnetisme de Maxwell posant de manifest el contingut geomètric que l'àlgebra de Clifford real pot aportar en la descripció de fenòmens físics. La diferència fonamental entre la presentació de Dirac i la de Hestenes està basada en l'ús de diferents espais de representació per a la funció d'ona. Mentre el formalisme de Dirac representa els espinors en $\mathbb{C}^4$, el de Hestenes ho fa en la subàlgebra parella (real) de l'espaitemps, aconseguint dotar-los d'un caràcter operacional. No són aquests els únics espais de representació dels espinors. Poc després del treball de Dirac es definiren els espinors algèbrics que utilitzen els ideals minimals laterals de l'àlgebra matricial [48, 76] o de l'àlgebra de Clifford complexificada [71, 70] com espais de representació. De fet fou aquesta última presentació la que dugué a Hestenes a usar l'espai real ja esmentat. I.M. Benn i R.W. Tucker manifesten la seva preocupació per aquest 'desori representacional' [5] amb les següents paraules:

> *The theory of spinors was developed independently by physicist and mathematicians, and this historical apartheid has continued.* [...] *Thus there is now a language, with many dialects, for discussing spinors in physics which makes little contact with the expositions of the theory to be found in mathematics literature.*

D'altra banda, Yvonne Choquet-Bruhat [15] ressaltà la relació que existeix entre l'observador i l'espinor, definint els espinors de Dirac com a classes d'equivalència sobre parells en què un dels termes conté un referencial vectorial. Waldyr Rodrigues *et al.* [74] estengueren la proposta de Choquet-Bruhat als altres espais de representació que apareixen

[1]El caràcter innecessàriament abstracte i purament algèbric de l'àlgebra de Dirac es contrasta i dóna un clar sentit d'advertència premonitòria desatesa a una coneguda sentència de Clifford segons la qual: [...] *for geometry, you know, is the gate of science, and the gate is so low and small that one can only enter it as a little child.*

a la literatura. Aquest treball, però, no unifica totes les definicions, ja que cada espai de representació requereix una definició diferent d'espinor. En el segon capítol d'aquesta memòria donarem una única definició d'espinor independent de l'espai de representació usat. Per aconseguir-ho caldrà, també, deslligar el referencial espinorial d'aquest espai i distingir, clarament, entre els elements 'reals/físics' i les seves representacions. Aquesta distinció ens permetrà caracteritzar la dicotomia existent a la literatura pel que fa als espinors operadors. Finalment obtindrem, a partir dels espinors algèbrics, un nou espai de graus de llibertat interns (deslligats de l'observador).

Un dels resultats més importants obtinguts per Hestenes és la descomposició polar de l'espinor. Aquesta descomposició factoritza l'espinor en una dilatació, una transformació de Lorentz i una rotació de dualitat. La dilatació i la transformació de Lorentz doten a l'espinor d'una expressió clarament geomètrica difícilment accessible en les presentacions habituals. Els efectes d'aquest resultat en la dinàmica espinorial plantegen la conveniència d'una acurada revisió i reinterpretació de la teoria de Dirac de l'electró i (re-)obren noves vies d'estudi prèvies a la segona quantització [2, 3, 79, 75]. D'altra banda, la interpretació geomètrica de la rotació de dualitat, parametritzada per l'angle [β] d'Yvon-Takabayasi, no ha estat resolta de manera satisfactòria. Aquesta dificultat coneguda com el *β-problem* [45] ha estat estudiada, entre d'altres, per Claude Daviau [23, 25] on, partint d'una extensió no lineal de l'equació de Dirac, mostra la connexió existent entre l'angle d'Yvon-Takabayasi i el signe de l'energia. Daviau obté, per casos particulars, solucions idèntiques al cas lineal però sempre d'energia positiva [24]. En el tercer capítol estudiarem la dinàmica espinorial mitjançant una generalització de l'equació de Dirac-Hestenes. Aquesta primera generalització és de caire algèbric i està basada en la llibertat que existeix en la tria de l'ideal minimal que farà d'espai de representació. Veurem que els resultats obtinguts, tot i diferir àmpliament en el mètode, coincideixen, en els casos d'interès físic[2], amb els presentats per Josep Manel Parra a [57, 64]. La generalització proposada ens permetrà donar, dins del marc d'un teoria clàssica de camps, una interpretació de l'angle d'Yvon-Takabayasi per l'equació de Dirac lineal.

Un espinor es pot descompondre en forma polar si i només si és un element parell invertible de l'àlgebra geomètrica de Clifford. La *paritat* de l'espinor està definida a partir de la $\mathbb{Z}_2$-graduació de l'àlgebra que determina la involució graduada. D'altra banda, en el procés d'obtenir un espinor de Dirac-Hestenes a partir d'un espinor de Dirac representat en $\mathbb{C}^4$ sembla que la tria dels idempotents primitius associats a la representació matricial dita

[2]Curiosament, aquests casos resulten de la tria d'ideals mútuament ortogonals.

de Dirac, sigui l'única que permet obtenir l'espinor operador i, per tant, la descomposició polar que se'n deriva. Per exemple, veurem com a partir de les representacions quiral i de Majorana no és possible, seguint el procediment habitual, obtenir un espinor operador que pertanyi a la subàlgebra parella. Aquest problema el planteja, també, Bertfried Fauser a [32] on escriu:

> *One knows that different $\mathbb{Z}_n$-gradings can produce quite different spinor modules. This fact renders the unquestioned multi-vector structure as a peculiar one. A careful study of the representation theory and their dependence on gradings in such cases is required.*

Aquesta és, bàsicament, la qüestió que estudiarem en el quart capítol. Proposarem una solució a través de $\mathbb{Z}_2$-graduacions adequades a cada representació que vindran caracteritzades per una nova (α-)involució graduada de l'àlgebra geomètrica de l'espaitemps. Així aconseguim representar l'espinor en una subàlgebra α-parella i obtenir la seva descomposició polar. Aquesta descomposició 'geomètrica' ens portarà a una millor comprensió dels lligams entre les possibilitats algèbriques i geomètriques contingudes a l'equació matricial de Dirac.

Es sabut que podem passar d'una formulació minkowskiana a una d'euclidiana complexificant la component temporal[3]. Hi ha hagut intents de donar un sentit geomètric a aquesta transformació; Nieuwenhuizen i Waldron a [61] ho aconsegueixen redefinint-la com una rotació en un espai 5-dimensional després d'afegir una nova component temporal. Pertti Lounesto [52, 54] es planteja el problema del canvi de signatura, en concret la transició de (p, q) a (q, p), des d'una perspectiva totalment diferent. El seu interès és transcriure equacions definides sobre un espai amb una determinada signatura en equacions sobre un espai de signatura oposada. Ho aconsegueix definint una transformació, que anomena *tilt*, sobre els elements de l'àlgebra de Clifford. La solució de Lounesto presenta, però, una limitació important: només pot definir-se entre àlgebres corresponents a signatura oposada. En el cinquè i darrer capítol estendrem els resultats de Lounesto en forma vàlida per a qualsevol canvi de signatura. A l'última secció d'aquest capítol, mitjançant l'ús de les $\alpha-\mathbb{Z}_2$-graduacions introduïdes al capítol anterior, obtindrem una extensió d'un dels teoremes d'estructura de l'àlgebra de Clifford estretament vinculada amb els canvis generals de signatura.

[3] Aquesta transfomació en l'àmbit de les teories quàntiques de camps és coneguda com a transformació de Wick.

Amb la voluntat de donar un caràcter autocontingut a la tesi hem inclòs tres apèndixs que tracten diversos aspectes matemàtics de les àlgebres geomètriques. En el primer exposem alguns definicions i resultats importants de la teoria algèbrica dels que hem fet ús freqüent al llarg de la memòria. Entre elles hi destaca la definició d'ideal minimal d'una àlgebra, bàsica per a la presentació dels espinors algèbrics. En el segon apèndix exposem de manera detallada l'estudi dels grups de Clifford que ens llegà un dels seus millors estudiosos, Albert Crumeyrolle [21]. El darrer apèndix consisteix en una petita introducció a les $\mathbb{Z}_2$-graduacions.

Capítol 1

L'àlgebra de Clifford.

1.1 L'àlgebra tensorial, la graduació i la paritat.

Sigui V un espai vectorial i V^* el seu dual. Definim l'espai vectorial dels tensors (p-covariants, q-contravariants) $T_p{}^q(V)$ com el conjunt de totes les aplicacions multilineals següents:

$$T : V \times .\overset{p}{.}. \times V \times V^* \times .\overset{q}{.}. \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Per poder definir més endavant l'àlgebra multivectorial ens centrarem des d'ara en l'espai q-contravariant [1]. Així doncs, considerarem l'àlgebra dels tensors contravariants, $\mathcal{T}(V)$,

$$\mathcal{T}(V) = (\oplus_{q=0}^{\infty} T^q(V), \otimes), \tag{1.2}$$

on $\otimes : T^m \times T^n(V) \longrightarrow T^{m+n}(V)$. A la suma directa anterior de vegades se l'anomena suma feble, en el sentit que cada element definit per aquesta suma té projecció no nul·la només en un número finit de subespais $T^q(V)$.

Un concepte que resulta rellevant en certes àlgebres, és la graduació. Donat $(G, +)$ un grup abelià direm que una àlgebra $\mathcal{A}$ és G-graduada si existeixen subespais A_k, $k \in G$, tal que $\mathcal{A} = \oplus_k A_k$ i si $x_k \in A_k$ i $y_k \in A_l$ aleshores $x_k y_l \in A_{k+l}$, on la juxtaposició indica el producte de l'àlgebra. Els elements de A_k els anomenarem homogenis de grau k. Per un $x_k \in A_k$ direm que $k = \mathrm{grau}(x_k)$. Ja que hem considerat G abelià aleshores

$$\mathrm{grau}(x_k x_l) = \mathrm{grau}(x_k) + \mathrm{grau}(x_l)$$

[1] De la mateixa manera podríem triar el p-covariant

De les definicions anteriors es veu fàcilment que l'àlgebra dels tensors contravariants és una àlgebra $\mathbb{Z}$-graduada. La graduació d'una àlgebra no té perquè ser única. Tot seguit veurem com podem dotar a l'àlgebra contravariant d'una graduació $\mathbb{Z}_2$. Per fer-ho ens cal definir una sèrie d'aplicacions; començarem per l'aplicació lineal anomenada automorfisme principal o involució graduada. Donat A, $B \in \mathcal{T}(V)$, definim l'automorfisme principal com

$$\alpha(A \otimes B) = \alpha(A) \otimes \alpha(B) \tag{1.3}$$

sabent que $\alpha(A) = A$ si A és un escalar i que $\alpha(A) = -A$ si A és un vector, l'aplicació queda totalment caracteritzada. D'aquí és immediat veure que si $t^p \in T^p(V)$ llavors

$$\alpha(t^p) = (-1)^{\mathrm{grau}(t^p)} t^p = (-1)^p t^p \tag{1.4}$$

Aquesta aplicació és realment un automorfisme ja que

$$\begin{aligned} \alpha(t^p \otimes s^q) &= (-1)^{deg(t^p \otimes s^q)}(t^p \otimes s^q) = (-1)^{(\mathrm{grau}(t^p)+\mathrm{grau}(s^q))}(t^p \otimes s^q) \\ &= (-1)^{\mathrm{grau}(t^p)} t^p \otimes (-1)^{\mathrm{grau}(s^q)} s^q = \alpha(t^p) \otimes \alpha(s^q) \end{aligned}$$

a més, el nom d'involució també és justificat doncs $\alpha(\alpha(T^p)) = T^p$. Val a dir que durant el treball també farem servir el barret per a la involució, i.e. $\alpha(A) \equiv \hat{A}$.

Una altra aplicació involutiva, que utilitzarem més endavant, és la reversió. Aquesta esta definida per

$$\beta(A \otimes B) = \beta(B) \otimes \beta(A) \tag{1.5}$$

on $\beta(A) = A$ tant si és un escalar, com si pertany a $T^1(V)$. Igual que abans, per tal de facilitar l'escriptura molt sovint representarem la reversió amb una titlla, $\beta(A) \equiv \tilde{A}$. Finalment, composant les aplicacions anteriors podem definir una de nova, que anomenarem conjugació.

$$\alpha(\beta(A \otimes B)) = \beta(\alpha(A \otimes B)) = \alpha(\beta(B)) \otimes \beta(\alpha(A)) \tag{1.6}$$

Usant la involució podem definir els següents projectors:

$$\pi_{\pm} = \frac{1}{2}(1 + \alpha) \tag{1.7}$$

de manera que, donat $t^p \in T^p(V)$, tenim que $\pi_{\pm} t^p = \frac{1}{2}(t^p \pm \alpha(t^p)) = \frac{1}{2}(t^p \pm (-1)^p t^p)$ descomponen l'àlgebra contravariant en dos subconjunts corresponents a la part parella i la senar. El subespai dels elements parells queda caracteritzat per $\mathcal{T}_+(V) = \pi_+(\mathcal{T}(V))$ i el dels senars per $\mathcal{T}_-(V) = \pi_-(\mathcal{T}(V))$, essent $\mathcal{T}(V) = \mathcal{T}_+(V) \oplus \mathcal{T}_-(V)$. Així doncs, hem dotat a l'àlgebra contravariant d'una graduació $\mathbb{Z}_2$:

$$\mathcal{T}_+(V) \otimes \mathcal{T}_+(V) \subset \mathcal{T}_+(V) \quad \mathcal{T}_-(V) \otimes \mathcal{T}_+(V) \subset \mathcal{T}_-(V)$$

$$\mathcal{T}_+(V) \otimes \mathcal{T}_-(V) \subset \mathcal{T}_-(V) \quad \mathcal{T}_-(V) \otimes \mathcal{T}_-(V) \subset \mathcal{T}_+(V)$$

d'on es veu que $\mathcal{T}_+(V)$ és una subàlgebra de $\mathcal{T}(V)$.

1.2 L'àlgebra exterior.

Sigui S_p el grup simètric format per les permutacions dels elements $\{1, \ldots, p\}$. Donat $\sigma' \in S_p$ definim una aplicació multilineal

$$\sigma' : V \times .\overset{p}{.}. \times V \longrightarrow \otimes^p V,$$

com $\sigma'(v_1, \ldots, v_p) = v_{\sigma'(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma'(p)}$, de la propietat universal del producte tensorial [35, 62] es conclou que l'existència d'una aplicació lineal $\sigma : \otimes^p V \longrightarrow \otimes^p V$ que satisfà el següent el diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \otimes^p V \arrow[dr, "\sigma"] & \\ V \times .\overset{p}{.}. \times V \arrow[u] \arrow[r, "\sigma'"] & \otimes^p V \end{tikzcd}$$

Donat $t = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ definim l'antisimetrització $\mathcal{A}$ com l'aplicació multilineal donada per

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma)\sigma(t) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \epsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)} \tag{1.8}$$

on, com és habitual $\epsilon(\sigma) = \pm 1$ és el signe de la permutació.

Definim un p-vector (p-covector) com un tensor contravariant (covariant) d'ordre p antisimètric. L'espai dels p-vectors el designarem per $\Lambda^p(V)$ i el dels p-covector[2] per $\Lambda^p(V^*)$. Notem que $\Lambda^1(V) = V$, $\Lambda^1(V^*) = V^*$ i $\Lambda^0(V) = \Lambda^0(V^*) = \mathbb{K}$ on $\mathbb{K}$ és el cos d'escalars. Si n és la dimensió de l'espai vectorial V, $\dim(\Lambda^p(V)) = \dim(\Lambda^p(V^*)) = \binom{n}{p}$.[3]

[2] Veure secció 6.1. del [1]

[3] Degut a què les construccions que farem són anàlogues tant pels p-vectors com pels p-covectors ens limitarem a considerar els p-vectors.

El producte tensorial d'un p-vector X^p amb un q-vector Y^p, és un tensor contravariant d'ordre $(p+q)$, però no és antisimètric. Per construir una àlgebra de tensors contravariants antisimètrics cal definir un nou producte de manera que el seu resultat pertanyi a $\Lambda^{p+q}(V)$. Sigui $X^p \in \Lambda^p(V)$ i $Y^q \in \Lambda^q(V)$ definim el producte exterior o de Grassmann [1] com

$$X^p \wedge Y^q = \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathcal{A}(X^p \otimes Y^q)$$

Degut a que el producte tensorial és bilineal i associatiu el producte exterior definit també ho serà. Els 1-vectors, o simplement vectors, com elements de V juguen un paper fonamental com a generadors. El producte exterior de vectors verifica:

$$u \wedge v = -v \wedge u \quad \text{on} \quad u, v \in \Lambda^1(V)$$

d'aquí i de les propietats associativa i de bilinealitat podem veure que

$$X^p \wedge Y^q = (-1)^{pq} Y^q \wedge X^p \tag{1.9}$$

Com l'antisimetrització de tot tensor d'ordre $p > n$ és nul·la, no pot existir un espai vectorial $\Lambda^p(V)$ amb $p > n$. Per tant, la suma directa de tots els espais $\Lambda^p(V)$ forma un nou espai vectorial $\Lambda(V) = \otimes_{p=0}^n \Lambda^p(V)$, que equipat amb el producte exterior defineix l'àlgebra exterior o de Grassmann de l'espai vectorial V. Els elements d'aquesta àlgebra els anomenarem multivectors. La seva dimensió és $\dim(\Lambda(V)) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$. Les dues graduacions $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Z}_2$ definides sobre l'àlgebra tensorial s'apliquen anàlogament a l'àlgebra exterior.

Una operació que ens serà de molta utilitat és el projector $\langle\,\rangle_p$ que es defineix com

$$\langle\,\rangle_p : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda^p(V).$$

1.3 L'àlgebra de Clifford.

L'àlgebra de Clifford fou presentada per W.K. Clifford l'any 1876 a [18] i batejada com àlgebra geomètrica. El 1878 i en part responent a Grassmann [38] publicà el que es considera la seva contribució definitiva [17]. A la literatura podem trobar diferents maneres d'introduir aquestes àlgebres [62, 67, 72, 5, 8]. Lounesto a [54] fa un excel·lent repàs de les diverses definicions. Aquí ens limitarem a una definició constructiva[4] que serà suficient pel desenvolupament de l'estudi.

[4]Una variant més detallada en la línia aquí exposada pot trobar-se en [72] on no precisa postular ni l'associativitat ni la independència lineal dels 2^n monomis.

Donat un espai vectorial V definit sobre un cos $\mathbb{K}$ i proveït d'una mètrica o forma bilineal simètrica no degenerada g de signatura $(p, q = n - p)$ la seva àlgebra de Clifford és l'àlgebra associativa generada pels elements $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n\}$ d'una base ortonormal de V on el producte està definit per les següents propietats:

1. El cos dels escalars commuta amb els vectors.

2. $e_i e_i = 1 \quad i \in \{1, \dots p\}, \quad e_i e_i = -1 \quad i \in \{p+1, \dots n\}$.

3. $e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad i \neq j$.

Notem ara que, quan apliquem aquestes relacions al producte d'un nombre arbitrari de vectors, sense més regles que la propietat distributiva del producte respecte de la suma, l'expressió resultant s'expressarà com una combinació $\mathbb{K}$-lineal de monomis de la forma:

$$e_1^{\mu_1} e_2^{\mu_2} \dots e_n^{\mu_n} \quad \text{on} \quad \mu_i = 0 \text{ ó } 1 \quad (i = 1, \dots n) \tag{1.10}$$

Aquests monomis, que identifiquem amb els 2^n multivectors base de l'àlgebra exterior $\Lambda(V)$, formen la base de l'espai vectorial de l'àlgebra. Per tant, ambdues àlgebres, l'àlgebra exterior i la de Clifford, estan definides sobre el mateix espai vectorial $\Lambda(V)$. Encara que l'àlgebra de Grassmann pot presentar-se com l'àlgebra de Clifford d'un espai mètric totalment isòtrop, resulta més natural considerar-la independentment de qualsevol mètrica. En aquesta concepció el producte de Grassmann construeix les multiplicitats o magnituds extensives, escollint quines de les n dimensions hi participen (2^n possibilitats). Sobre aquesta estructura una mètrica en V defineix el producte geomètric.

La definició del projector, $\langle\,\rangle_p$, donada en la secció anterior encara serà vigent, ara però $\langle\,\rangle_p : Cl(V, g) \longrightarrow \Lambda_p(V)$. Aquest projector, per $p = 0$, satisfà la propietat cíclica, i.e. donats $\phi, \varphi \in Cl(V, g)$ aleshores $\langle \phi\varphi \rangle_0 = \langle \varphi\phi \rangle_0$. Això és degut a que només aportaran escalars els productes dels termes ϕ i φ amb els mateixos generadors i aquests, evidentment, commuten.

L'àlgebra de Clifford combina el producte escalar i el producte exterior. Donats a, b 1-vectors el producte de Clifford, designat per juxtaposició, es pot descompondre com

$$ab = a \cdot b + a \wedge b \tag{1.11}$$

d'on

$$a \cdot b = g(a, b) = \frac{1}{2}(ab + ba), \tag{1.12}$$

$$a \wedge b = \frac{1}{2}(ab - ba) \tag{1.13}$$

I per tant podem escriure el producte escalar i exterior usant tan sols el producte geomètric de Clifford. Un element general A de $Cl_{p,q}(V)$ pren la forma

$$A = A_0 + A_1 + \cdots + A_r + \cdots + A_n$$

on $n = p + q$ i A_r és un r-vector que pertany a $\Lambda^r(V) \subset Cl_{p,q}(V)$. De l'expressió (1.9) veiem que si $a \in \Lambda_1(V)$ i $B \in \Lambda_r(V)$ aleshores $a \wedge B = (-1)^r B \wedge a$, així podem estendre la noció de producte escalar a un vector per un multivector[5]

$$a \cdot B = \frac{1}{2}(aB - (-1)^r Ba), \tag{1.14}$$

$$a \wedge B = \frac{1}{2}(aB + (-1)^r Ba) \tag{1.15}$$

de manera que

$$aB = a \cdot B + a \wedge B \tag{1.16}$$

Una altra expressió de força utilitat [42] és

$$a \cdot (a_1 \wedge \cdots \wedge a_r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} (a \cdot a_k) a_1 \wedge \cdots a_{k-1} \cdots a_{k+1} \wedge \cdots \wedge a_r \tag{1.17}$$

on $a_i \in \Lambda_1(V)$.

Per dos multivectors homogenis arbitraris es pot veure [46] que

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s}, \tag{1.18}$$

$$A_r B_s = \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} + \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|+2} + \cdots + \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \tag{1.19}$$

Les àlgebres de Clifford hereten de l'àlgebra tensorial les definicions d'involució, reversió i conjugació. Ara, la reversió i, per tant, també la conjugació actuen sobre tensors antisimètrics deixant-los invariants a menys d'un signe:

$$\beta(A_r) = \tilde{A}_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} A_r = (-1)^{[\frac{r}{2}]} A_r \quad \text{Reversió} \tag{1.20}$$

$$\bar{A}_r = \alpha(\beta(A_r)) = \beta(\alpha(A_r)) \quad \text{Conjugació} \tag{1.21}$$

$$\alpha(A_r) = \hat{A}_r = (-1)^r A_r \quad \text{Involució graduada} \tag{1.22}$$

[5]Per simplicitat notarem aquest producte amb el mateix símbol que el del producte escalar entre vectors.

De les dues graduacions de l'àlgebra tensorial tan sols la $\mathbb{Z}_2$-graduació es manté per a l'àlgebra de Clifford d'acord amb l'expressió $A_r B_s$ de (1.18). Les estructures associades a la $\mathbb{Z}_2$-graduació es conserven: els projectors $\pi_\pm$ caracteritzen les parts parelles i senars, on la part parella és una subàlgebra:

$$Cl(V,g) = Cl^+(V,g) \oplus Cl^-(V,g) \quad \text{on} \pi_\pm[Cl(V,g)] = Cl^\pm(V,g). \tag{1.23}$$

Fent ús de la involució graduada podem definir la subàlgebra parella com:

$$Cl^+(V,g) = \{\phi \in Cl(V,g)/\phi = \hat{\phi}\} \tag{1.24}$$

Aquesta subàlgebra íntimament relacionada amb el concepte de graduació és d'una gran importància dins la teoria de les àlgebres de Clifford i de les seves aplicacions a la física. En el capítol 4, partint d'altres possibles graduacions, obtindrem altres subàlgebres i discutirem algunes de les seves possibles aplicacions.

Donada una àlgebra geomètrica $Cl_{p,q}(V)$ anomenarem element de volum al monomi generador de dimensió màxima $e_1 \dots e_n \equiv e_{1\dots n}$. Aquest element, com veurem més endavant, és una peça fonamental en l'estructura de les àlgebres de Clifford. Aquí, però, ens limitem a considerar el seu paper en la definició de les operacions de dualitat. Una operació de dualitat és un isomorfisme que relaciona els espais $\Lambda^p(V)$ i $\Lambda^{n-p}(V)$. L'isomorfisme més emprat és el que defineix l'operació de dualitat anomenada estrella de Hodge. La seva definició involucra les àlgebres exteriors covariant i contravariant. En el marc de l'àlgebra geomètrica de Clifford resulta equivalent a tots els efectes pràctics - i molt més simple i natural- definir la dualitat mitjançant l'expressió:

$$*\phi = \tilde{\phi} e_{1\dots n} \quad \forall \phi \in Cl_{p,q}(V) \tag{1.25}$$

La designarem al llarg de la tesi amb el símbol $*$ i el seu invers a l'àlgebra $Cl_{p,q}(V)$ ve donat per l'expressió

$$*^{-1} A_r = (-1)^{r+q} * A_r \tag{1.26}$$

1.4 Classificació de les àlgebres de Clifford.

1.4.1 Producte tensorial d'àlgebres i àlgebres matricials completes.

Per estudiar la classificació de les àlgebres de Clifford caldrà recordar dos conceptes: el producte tensorial de dues àlgebres i el què són les àlgebres matricials completes. La importància d'aquestes últimes rau en què tota àlgebra simple sobre un cos algèbricament tancat és isomorfa a una àlgebra matricial completa [72].

Definició 1.1 *Siguin A i B dues àlgebres sobre un cos $\mathbb{K}$, tal que* $\dim(A) = m$ *i* $\dim(B) = n$. *Donades $\{a_i\}$ $(i = 1 \ldots m)$ i $\{b_k\}$ $(k = 1 \ldots n)$ bases de A i B respectivament tal que*

$$a_i a_j = \sum_k A_{ijk}\, a_k, \quad b_r b_s = \sum_t B_{rst}\, b_t \quad \text{amb} \quad A_{ijk}, B_{rst} \in \mathbb{K}$$

aleshores una àlgebra C amb $\dim(C) = mn$ *es pot definir com $C = A \otimes B$ si admet una base $\{a_{ir}\}$ $(i = 1 \ldots m,\ k = 1 \ldots n)$ tal que*

$$c_{ir} c_{js} = \sum_{kt} A_{ijk} B_{rst}\, c_{kt}$$

Definició 1.2 *Una àlgebra matricial completa $M(n, \mathbb{K})$ (en ocasions indicada senzillament com $\mathbb{K}(n)$) està formada pel conjunt de totes les matrius quadrades $n \times n$ on les entrades són elements de $\mathbb{K}$.*
No és difícil veure [5] que

$$M(n, \mathbb{K}) \otimes M(m, \mathbb{K}) \simeq M(mn, \mathbb{K}) \tag{1.27}$$

1.4.2 Teoremes d'estructura.

Per classificar les àlgebres de Clifford, el més habitual és utilitzar certs teoremes que ens mostren l'estructura que aquestes tenen. Podem dividir aquests teoremes en dos tipus: els de periodicitat i els d'isomorfia.

Teoremes de periodicitat.

Teorema 1.1

$$Cl_{p+1,q+1} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{2,0} \tag{1.28}$$

$$Cl_{q,p+2} \simeq Cl_{0,2} \otimes Cl_{p,q} \tag{1.29}$$

Demostració. Demostrarem (1.28) per construcció, la demostració de (1.29) es fa de manera similar.
Siguin $\{\bar{e}_0, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_q\}$, $\{e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q\}$, $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$ els conjunts de generadors de les àlgebres $Cl_{p+1,q+1}$, $Cl_{p,q}$ i $Cl_{2,0}$ respectivament, on $\bar{e}_0^2 = \bar{e}_i^2 = e_i^2 = 1$ i $\bar{u}_0^2 = \bar{u}_j^2 = u_j^2 = -1$ on $i \in \{1, ..., p\}$ i $j \in \{1, ..., q\}$. Com a primer pas veiem que $\dim(Cl_{p+1,q+1}) = \dim(Cl_{p,q} \otimes Cl_{2,0}) = 2^{p+q+2}$. Això ens anima a assajar un isomorfisme:

$$\begin{array}{ll} \bar{e}_0 \leftrightarrow 1 \otimes \hat{e}_2 & \bar{u}_0 \leftrightarrow 1 \otimes \hat{e}_1 \hat{e}_2 \\ \bar{e}_i \leftrightarrow e_i \otimes \hat{e}_1 & \bar{u}_j \leftrightarrow u_j \otimes \hat{e}_1 \end{array} \tag{1.30}$$

Els elements $\{1 \otimes \hat{e}_2, e_i \otimes \hat{e}_1, 1 \otimes \hat{e}_1\hat{e}_2, u_j \otimes \hat{e}_1\}$ són independents i pertanyen a la base lineal de l'àlgebra $Cl_{p,q} \otimes Cl_{2,0}$. A més, formen un conjunt complet ja que mitjançant les combinacions

$$(1 \otimes \hat{e}_1\hat{e}_2)(1 \otimes \hat{e}_2) = 1 \otimes \hat{e}_1$$

$$(e_i \otimes \hat{e}_1)(1 \otimes \hat{e}_1) = e_i \otimes 1$$

$$(u_j \otimes \hat{e}_1)(1 \otimes \hat{e}_1) = u_j \otimes 1$$

obtenim el conjunt $\{1 \otimes \hat{e}_1, 1 \otimes \hat{e}_2, e_i \otimes 1, u_j \otimes 1\}$ i aquest, trivialment, genera $Cl_{p,q} \otimes Cl_{2,0}$. Ara podem ja comprovar que els elements donats per les expressions (1.30) compleixen les relacions pròpies d'una base de generadors de $Cl_{p+1,q+1}$. Les relacions d'anticommutació:

$$\begin{aligned} \{\bar{e}_0, \bar{u}_j\} &= \{1 \otimes \hat{e}_2, u_j \otimes \hat{e}_1\} = (1 \otimes \hat{e}_2)(u_j \otimes \hat{e}_1) + (u_j \otimes \hat{e}_1)(1 \otimes \hat{e}_2) \\ &= u_j \otimes \hat{e}_2\hat{e}_1 + u_j \otimes \hat{e}_1\hat{e}_2 = u_j \otimes \{\hat{e}_2, \hat{e}_1\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\bar{e}_i, \bar{u}_0\} &= \{e_i \otimes \hat{e}_1, 1 \otimes \hat{e}_1\hat{e}_2\} = (e_i \otimes \hat{e}_1)(1 \otimes \hat{e}_1\hat{e}_2) + (1 \otimes \hat{e}_1\hat{e}_2)(e_i \otimes \hat{e}_1) \\ &= (e_i \otimes \hat{e}_1\hat{e}_1\hat{e}_2) + (e_i \otimes \hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_1) = e_i \otimes \hat{e}_1\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\} = 0 \end{aligned}$$

i de manera semblant les demés. També podem veure que satisfan les relacions de normalització:

$$(1 \otimes \hat{e}_2)(1 \otimes \hat{e}_2) = 1 \otimes \hat{e}_2\hat{e}_2 = 1 \otimes 1$$

$$(e_i \otimes \hat{e}_1)(e_i \otimes \hat{e}_1) = e_i e_i \otimes \hat{e}_1 \hat{e}_1 = 1 \otimes 1$$

$$(1 \otimes \hat{e}_1 \hat{e}_2)(1 \otimes \hat{e}_1 \hat{e}_2) = 1 \otimes \hat{e}_1 \hat{e}_2 \hat{e}_1 \hat{e}_2 = -1 \otimes 1$$

$$(u_j \otimes \hat{e}_1)(u_j \otimes \hat{e}_1) = u_j u_j \otimes \hat{e}_1 \hat{e}_1 = -1 \otimes 1$$

Teorema 1.2

$$Cl_{p,q+4} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{0,4} \tag{1.31}$$

$$Cl_{p,q+8} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{0,8} \tag{1.32}$$

Demostració. Si les àlgebres de (1.31) són generades per $\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_p, \bar{u}_1, ..., \bar{u}_{q+4}\}$, $\{e_1, ..., e_p, u_1, ..., u_q\}$, $\{\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \hat{u}_4\}$ l'isomorfisme s'estableix en base a les relacions:

$$\begin{array}{ll} \bar{e}_i \leftrightarrow \bar{e}_1 \otimes \hat{\epsilon} & i \in \{1...p\} \\ \bar{u}_j \leftrightarrow u_j \otimes \hat{\epsilon} & j \in \{1, ...q\} \\ \bar{u}_{q+k} \leftrightarrow 1 \otimes u_k & k \in \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

on $\hat{\epsilon} = \hat{u}_1 \hat{u}_2 \hat{u}_3 \hat{u}_4$. La demostració efectiva de l'isomorfisme es realitza de manera anàloga a la demostració anterior.

La relació (1.31) implica

$$Cl_{0,8} \simeq Cl_{0,4} \otimes Cl_{0,4}$$

i d'aquí

$$Cl_{p,q+8} \simeq Cl_{p,q+4+4} \simeq Cl_{p,q+4} \otimes Cl_{0,4} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{0,4} \otimes Cl_{0,4} \simeq Cl_{p,q} \otimes Cl_{0,8}$$

demostrant així (1.32).

Teoremes d'isomorfia

Teorema 1.3

$$Cl_{q+1,p} \simeq Cl_{p+1,q} \tag{1.33}$$

Demostració. Seguint l'esquema constructiu de les demostracions anteriors només cal donar la següent correspondència isomòrfica entre les bases:

$$\begin{array}{ll} \bar{e}_0 \leftrightarrow e_0 & \\ \bar{e}_j \leftrightarrow e_0 u_j & j \in \{1, ...q\} \\ \bar{u}_i \leftrightarrow e_0 e_i & i \in \{1, ..., p\} \end{array}$$

Teorema 1.4

$$Cl^+_{p,q} \simeq Cl_{q,p-1} \simeq Cl_{p,q-1} \simeq Cl^+_{q,p} \tag{1.34}$$

Demostració. Prenem $\{\bar{e}_1, ..., \bar{e}_p, \bar{u}_1, ..., \bar{u}_q\}$ com a generadors de $Cl_{p,q}$ i $\{e_1, ..., e_q, u_1, ..., u_{p-1}\}$ com a generadors de $Cl_{q,p-1}$. La subàlgebra parella $Cl^+_{p,q}$ està generada pels elements $\bar{e}_1\bar{e}_i, \bar{e}_1\bar{u}_r$ amb $i = 2, ..., p$ $r = 1, ..., q$ que s'identifiquen amb els generadors de $Cl_{q,p-1}$: $e_r = \bar{e}_1\bar{u}_r, u_i = \bar{e}_1\bar{e}_i$. Demostrat el primer isomorfisme, els isomorfismes restants són immediats a partir de (1.33).

1.4.3 Representació matricial de les àlgebres de Clifford

Sigui A una àlgebra real i V un espai vectorial qualsevol sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Una aplicació lineal $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ que satisfà $\rho(1_A) = 1_V$ i $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$ $\forall a, b \in A$ s'anomena una $\mathbb{K}$-representació de A. L'espai vectorial V triat s'anomena espai de representació de A.

Dues representacions vectorials $\rho_1 : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_1)$ i $\rho_2 : A \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V_2)$ són equivalents si existeix un K-isomorfisme $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ que satisfà $\rho_2(a) = \phi \circ \rho_1(a) \circ \phi^{-1}$, $\forall a \in A$.

Direm que una representació és fidel si $\ker \rho = 0$, és a dir, si és injectiva. Una representació s'anomena reductible o descomponible si $V = V_1 \oplus V_2$ on V_1 i V_2 són subespais invariants per l'acció de ρ, i.e., $\rho(a)(V_1) \subset V_1$ i $\rho(a)(V_2) \subset V_2$, $\forall a \in A$. Una representació és irreductible o indescomponible si els únics subespais invariants sota l'acció de ρ, són V i $\emptyset$.

Ara procedirem a l'estudi de les representacions de determinades àlgebres de Clifford de baixa dimensió. Aquestes, amb l'ajut dels teoremes d'estructura, ens permetran determinar les representacions de totes les demés. Degut a aquest caràcter generatriu de representacions les anomenarem àlgebres de Clifford primitives.

L'àlgebra $Cl_{0,1}$

Un element general i arbitrari de $Cl_{0,1}$ és de la forma:

$$\psi = a + b\,e \tag{1.35}$$

amb $e^2 = -1$ Definint l'aplicació $\rho : Cl_{0,1} \longrightarrow \mathbb{C}$ on $\rho(1) = (1, 0)$ i $\rho(e) = (0, 1) = i$ és immediat comprovar que aquesta àlgebra és isomorfa als complexos.

L'àlgebra $Cl_{1,0}$

Donats dos elements arbitraris de $Cl_{1,0}$

$$\begin{aligned} \varphi &= a + be \\ \phi &= c + de \end{aligned} \tag{1.36}$$

amb $e^2 = 1$, podem escriure el producte com

$$\varphi\phi = ac + bd + (ad + bc)e$$

Podríem definir uns doblets (a, b) amb $a, b \in \mathbb{R}$, d'igual manera que es fa pels complexos, dotant-los d'un producte com l'anterior, és a dir,

$$(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

aquest conjunt d'elements forma un anell i se'ls anomena nombres duals de Clifford, $\mathbb{D}$. Encara que podem trobar un esquema interessant de classificació i representació de les àlgebres de Clifford reals on hi participen aquests nombres [49], nosaltres la deixarem de banda i seguirem la línia dominant [67] que considera l'isomorfisme entre $\mathbb{D}$ i $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Sigui (a, b) on $a, b \in \mathbb{R}$ amb el següent producte

$$(a, b) \bullet (c, d) = (ac, bd) \tag{1.37}$$

aquest defineix l'àlgebra de la suma directa $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Veiem mitjançant l'aplicasió $\vartheta : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ definida per $\vartheta(a, b) = (a + b, a - b)$, que $\vartheta((a, b)(c, d)) = \vartheta(a, b) \bullet \vartheta(c, d)$, per tant, $Cl_{1,0} \simeq \mathbb{D} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

L'àlgebra $Cl_{0,2}$

Veurem que aquesta àlgebra és isomorfa a l'àlgebra dels quaternions. Un element general de l'àlgebra el podem escriure com

$$\psi = a + b\,e_1 + c\,e_2 + d\,e_{12} \tag{1.38}$$

amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $e_1^2 = e_2^2 = e_{12}^2 = -1$. L'isomorfisme amb l'àlgebra dels quaternions s'estableix mitjançant les relacions:

$$\rho(1) = 1 \quad \rho(e_1) = \mathbf{i} \quad \rho(e_2) = \mathbf{j} \quad \rho(e_{12}) = \mathbf{k} \tag{1.39}$$

així doncs $Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$

Les àlgebres $Cl_{2,0}$ i $Cl_{1,1}$

Un cas particular de l'isomorfisme $Cl_{p+1,q} \simeq Cl_{q+1,p}$ és $Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1}$. Aquestes dues àlgebres són isomorfes a l'àlgebra de les matrius reals 2×2. Podem veure-ho de manera directa ja que les matrius generadores de $M(2, R)$

$$\left\{ \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

són de quadrat ± 1 i anticommuten, de la mateixa manera que els generadors de $Cl_{2,0}$

$$e_1^2 = e_2^2 = 1 \;\; (e_1 e_2)^2 = -1$$

i els generadors de $Cl_{1,1}$

$$u_1^2 = u_2^2 = -1 \;\; (u_1 u_2)^2 = 1$$

Hi trobem, però, una clara diferència a l'hora d'establir les correspondències matricials dels generadors ja que per $Cl_{2,0}$

$$\rho(1) = \mathbf{f}_1 \quad \rho(e_1) = \mathbf{f}_2 \quad \rho(e_2) = \mathbf{f}_3 \quad \rho(e_{12}) = \mathbf{f}_4 \tag{1.40}$$

i per $Cl_{1,1}$

$$\rho'(1) = \mathbf{f}_1 \quad \rho'(u_1) = \mathbf{f}_2 \quad \rho'(u_2) = \mathbf{f}_4 \quad \rho'(u_{12}) = \mathbf{f}_3 \tag{1.41}$$

Aquest és un exemple paradigmàtic de com, amb la representació matricial, perdem la informació geomètrica continguda en els elements de l'àlgebra de Clifford. Per exemple, $\mathbf{f}_4$ és tant la representació d'un bivector en $Cl_{2,0}$ com la representació d'un vector de $Cl_{1,1}$.

1.4.4 El teorema de periodicitat i la classificació matricial de les àlgebres

Amb l'ajut dels anteriors isomorfismes i amb alguns dels teoremes d'estructura podem completar la construcció de les representacions matricials de les àlgebres de Clifford reals. La peça clau d'aquest procés constructiu és la relació de periodicitat d'ordre vuit $Cl_{p,q+8} \simeq Cl_{0,8} \otimes Cl_{p,q}$. Determinem, en primer lloc, quina és l'àlgebra matricial isomorfa a $Cl_{0,8}$. Utilitzant (1.31) podem escriure

$$Cl_{0,8} \simeq Cl_{0,4} \otimes Cl_{0,4} \tag{1.42}$$

dels isomorfismes estudiats recentment $Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$ i $Cl_{2,0} \simeq M(2,\mathbb{R})$ i de (1.29), trobem que $Cl_{0,4} \simeq Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \simeq \mathbb{H} \otimes M(2,\mathbb{R})$. Ara escriurem

$$Cl_{0,8} \simeq M(2,\mathbb{R}) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes M(2,\mathbb{R}) \tag{1.43}$$

De (1.28) i de l'isomorfime $Cl_{2,0} \simeq Cl_{1,1} \simeq M(2,\mathbb{R})$ obtenim

$$Cl_{p+1,q+1} \simeq Cl_{1,1} \otimes Cl_{p,q} \simeq M(2,\mathbb{R}) \otimes Cl_{p,q}$$

i d'aquí, i de la coneguda propietat matricial $\mathcal{M}(m,\mathbb{R}) \otimes M(n,\mathbb{R}) \simeq M(mn,\mathbb{R})$, que $Cl_{2,2} \simeq M(4,\mathbb{R})$. Per una altra banda de (1.29) podem veure que $Cl_{2,2} \simeq Cl_{0,2} \otimes Cl_{0,2}$, i com ja hem vist que $Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, aleshores $Cl_{2,2} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. Així podem concloure que

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \simeq M(4,\mathbb{R})$$

Ara 1.43 queda

$$Cl_{0,8} \simeq M(2,\mathbb{R}) \otimes M(4,\mathbb{R}) \otimes M(2,\mathbb{R}) \simeq M(16,\mathbb{R})$$

i per tant

$$Cl_{p,q+8} \simeq Cl_{p,q} \otimes M(16,\mathbb{R}) \tag{1.44}$$

Les àlgebres de Clifford complexes $\mathbb{C} \otimes Cl_{p,q} \equiv Cl_C(n)$ on $n = p + q$, presenten una menor varietat d'estructures i la seva classificació només depèn de la paritat de n i no de la signatura (p,q). El resultat d'aquesta classificació [21] queda resumit en els isomorfismes:

$$Cl_{\mathbb{C}}(2k) \simeq M(2^k,\mathbb{C}) \tag{1.45}$$

$$Cl_{\mathbb{C}}(2k+1) \simeq M(2^k,\mathbb{C}) \oplus M(2^k,\mathbb{C}). \tag{1.46}$$

1.5 L'àlgebra geomètrica de l'espai euclidià.

Sigui $\mathbb{R}^{3,0}$ un espai vectorial real de tres dimensions proveït de la forma bilineal euclidiana $g_{ij} = \delta_{ij}$. L'àlgebra $Cl(\mathbb{R}^{3,0}, \delta_{ij}) \equiv Cl_{3,0}$ que genera aquest espai s'anomena àlgebra de Clifford euclidiana de l'espai. Donat que $\dim(\mathbb{R}^{3,0}) = 3$ llavors $\dim(Cl_{3,0}) = 2^3 = 8$. Un element A arbitrari d'aquesta àlgebra serà de la forma

$$A = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_{12}e_{12} + a_{23}e_{23} + a_{31}e_{31} + \lambda e_{123}$$

on les components pertanyen al cos que defineix l'àlgebra, en aquest cas $\mathbb{R}$. Un element genèric està format per un escalar, un vector, un 2-vector o bivector i un 3-vector o trivector. El trivector constitueix, en aquesta àlgebra, l'element de volum i presenta propietats operacionals força interessants

$$e_{123}^2 = -1, \tag{1.47}$$

$$e_{123}A = Ae_{123} \quad \forall A \in Cl_{3,0} \tag{1.48}$$

conferint-li una clara identificació amb la unitat imaginària. Com a curiositat podem considerar [11] vectors isòtrops a R^3: $e_1 + ie_3 = e_1 + e_{12}$ té quadrat nul.

També resulta interessant analitzar la relació que hi ha entre el producte geomètric i el producte vectorial habitual definit a partir d'un determinant d'ordre 3. El producte geomètric de dos vectors $u, v \in \mathbb{R}^{3,0}$ dóna, a més del seu producte escalar, un bivector corresponent al pla format per u i v. Aquest bivector és substituït pel vector director del pla en el formalisme habitual. Tot i que aquesta substitució es pot formalitzar mitjançant l'aplicació de la dualitat de Hodge, no té significat físic: el moment angular $L =< rp >_2= r \wedge p$ és, pròpiament, un bivector que es conserva en camps centrals com mostra la llei de Kepler de conservació de la velocitat areolar. La definició $L =< rp >_2$ és vàlida en qualsevol nombre de dimensions.

L'àlgebra de Clifford euclidiana és isomorfa a l'àlgebra de les matrius complexes dos per dos, i.e. $Cl_{3,0} \simeq M(2, \mathbb{C})$. Sota aquesta forma es coneix com àlgebra de Pauli, essent les σ_i la representació dels e_i.

En el formalisme de Clifford les transformacions isomètriques de les magnituds geomètriques [6] són descrites per elements de la mateixa àlgebra. Una rotació sobre $v \in \mathbb{R}^{3,0} \subset Cl_{3,0}$ i, de fet, sobre qualsevol element de $Cl_{3,0}$ és expressada per la fórmula

$$\phi_R(v) = RvR^{-1}$$

[6] A l'apèndix 2 es realitza un estudi detallat dels grups de Clifford per qualsevol dimensió i signatura.

on R pertany al grup Spin(3, 0) definit per

$$\mathrm{Spin}(3,0) = \{R \in Cl_{3,0} / \tilde{R}R = 1\}$$

El grup Spin(3, 0) és el doble recobriment del grup de rotacions SO(3). Degut a l'isomorfisme $Cl_{3,0} \simeq M(2,\mathbb{C})$ es pot veure que $\mathrm{Spin}(3,0) \equiv \mathrm{SU}(2) = \{g \in M(2,\mathbb{C}) \,/\, g^\dagger g = 1, \det g = 1\}$. L'homomorfisme de grups $\rho : \mathrm{Spin}(3,0) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ és exhaustiu i el $\ker \rho = \{\pm 1\}$. Això implica que a SU(2) hi ha dos elements $\{\pm g\}$ que representen la mateixa rotació $\phi_{\pm g} \in SO(3)$.

1.6 L'àlgebra de l'espaitemps.

L'àlgebra de l'espaitemps és el nom que donà Hestenes [42] a l'àlgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^{1,3}, \eta) \equiv Cl_{1,3}$ on η correspon a la mètrica de Minkowski de signatura -2. Prenent una base ortonormal per l'espai vectorial $\mathbb{R}^{1,3}$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tenim un vector de tipus temps $\mathbf{e}_0^2 = 1$ i tres de tipus espai $\mathbf{e}_i^2 = -1$ amb $i = 1, 2, 3$. Una base lineal $\mathcal{G}$ de l'àlgebra, de dimensió $2^4 = 16$ ve donada per

$$\mathcal{G} = \begin{cases} 1 & \text{escalars,} \\ \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 & \text{vectors,} \\ \mathbf{e}_{01}, \mathbf{e}_{02}, \mathbf{e}_{03}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{23}, \mathbf{e}_{31} & \text{bivectors,} \\ \mathbf{e}_{012}, \mathbf{e}_{013}, \mathbf{e}_{023}, \mathbf{e}_{123} & \text{trivectors,} \\ \mathbf{e}_{0213} & \text{4-vectors o element de volum.} \end{cases} \tag{1.49}$$

L'element de volum, igual que en $Cl_{3,0}$, també té quadrat -1, però no commuta amb tots els elements. Commuta amb els parells i anticommuta amb els senars:

$$A_r \mathbf{e}_{0123} = (-1)^r \mathbf{e}_{0123} A_r$$

La subàlgebra parella $Cl_{1,3}^+$ és isomorfa a $Cl_{3,0}$ i, per tant, a l'àlgebra de Pauli. Aquest isomorfisme (que l'establim amb l'àlgebra de Pauli per evitar confusió entre els vectors de l'espai i els vectors espacials de l'espaitemps)pot establir-se fàcilment mitjançant la correspondència

$$\tau : Cl_{3,0} \simeq M(2,\mathbb{C}) \longrightarrow Cl_{1,3}^+ \tag{1.50}$$

$\tau(\sigma_i) = e_0 e_i$ amb $i = 1, 2, 3$. Així, tenim per exemple que $\tau(\sigma_1) = e_{01}$, $\tau(\sigma_{12}) = \tau(\sigma_1)\tau(\sigma_2) = e_{01}e_{02} = e_{21}$, $\tau(\sigma_{123}) = e_{0123}$.

Els grups de Clifford[7] que presenta l'àlgebra de l'espaitemps són de gran interès físic ja que entre ells es troba el grup de transformacions de Lorentz. Sigui $Cl^*_{1,3}$ el grup de tots els elements invertibles de l'àlgebra. Definim el grup de Clifford-Lipschitz com

$$\Gamma(1,3) = \{g \in Cl^*_{1,3} \,/\, gvg^{-1} = \Lambda_g(v) \in \mathbb{R}^{1,3} \quad \forall v \in \mathbb{R}^{1,3}\} \tag{1.51}$$

$$\text{on} \quad \Lambda : \Gamma(1,3) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1,3}); \quad g \longmapsto \Lambda_g$$

És senzill veure que Λ_g és una isometria ja que

$$\Lambda_g(v)\Lambda_g(v) = gvg^{-1}gvg^{-1} = gv^2g^{-1} = v^2$$

donat que el producte de Clifford d'un vector amb ell mateix coincideix amb el producte escalar. Ja que $\Lambda_g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{1,3})$ aleshores $\Lambda_g(v)$ $\forall v \in \mathbb{R}^{1,3}$ complirà que

$$\beta[\Lambda_g(v)] = \Lambda_g(v) \tag{1.52}$$

$$\alpha[\Lambda_g(v)] = -\Lambda_g(v) \tag{1.53}$$

L'expressió (1.52) ens imposa

$$\beta(gvg^{-1}) = \widetilde{g^{-1}}v\tilde{g} = gvg^{-1}$$

de l'última igualtat es segueix

$$g^{-1}\widetilde{g^{-1}}v\tilde{g}g = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^{1,3}$$

Aquesta darrera expressió indica que els elements de $\Gamma(1,3)$ verifiquen la condició $\tilde{g}g \in \mathbb{R}$. Això ens suggereix la possibilitat i conveniència de definir nous grups fixant la normalització de g. De fet, el producte $\tilde{g}g$ s'anomena norma espinorial $\mathrm{N}(g)$. Definim així

$$\mathrm{Pin}(1,3) = \{g \in \Gamma(1,3) \,/\, \tilde{g}g = \pm 1\}$$

Procedint de manera anàloga a partir de (1.53) trobem que $\hat{g} = \pm g$. Tenint present la graduació $\mathbb{Z}_2$ de les àlgebres de Clifford veiem que

$$\hat{g} = g \;\Leftrightarrow\; g \in Cl^+_{1,3}, \tag{1.54}$$

$$\hat{g} = -g \;\Leftrightarrow\; g \in Cl^-_{1,3} \tag{1.55}$$

[7]Veure apèndix B.

és a dir, que aquests elements són de paritat definida. Això implica [21] que es poden escriure com

$$g = w_1 \dots w_k \quad \text{on} \quad w_i \in \mathbb{R}^{1,3} \quad \text{i} \quad w_i^2 \neq 0 \tag{1.56}$$

Si $g = w_1$, descomponem $\mathbb{R}^{1,3} = W \oplus W^\perp$, amb W subespai no isòtrop generat per w_1. Tot vector v es descompon en la forma $v = v_\parallel + v_\perp$, amb $v_\parallel \in W$ i $v_\perp \in W^\perp$. Aleshores $gvg^{-1} = w_1(v_\parallel + v_\perp)w_1^{-1} = v_\parallel - v_\perp$ que, com es veu, es tracta d'una reflexió relativa a l'hiperplà $W^\perp$. La composició de dues reflexions és una rotació. Així, d'acord amb el teorema de Cartan-Dieudonné veiem que quan el nombre k de vectors w_i és parell l'expressió (1.56) defineix una rotació i quan k és senar una reflexió. Això motiva la definició del grup Spin especial:

$$\mathrm{Spin}_+(1,3) = \{g \in \Gamma^+(1,3) \,/\, \mathrm{N}(g) = 1\}$$

és clar que $\mathrm{Spin}_+(1,3) \subset \mathrm{Pin}(1,3)$. El següent teorema ens permetrà veure més clar el caràcter generador de rotacions que tenen els elements de $\mathrm{Spin}_+(1,3)$.

Teorema 1.5 *Si $\hat{g} = g$ i $N(g) = 1$ llavors*

$$g = \pm e^B \tag{1.57}$$

on B és un multivector. Triat B, pot escollir-se el signe de (1.57), excepte quan $B^2 = 0$ on llavors $g = -e^B$. La demostració d'aquest teorema es pot trobar a [42]. Segons el signe del quadrat de B es tractarà d'una rotació espacial si $B^2 < 0$ o d'una rotació temporal hiperbòlica o 'boost' si $B^2 > 0$. A més a més, sempre podem descompondre g com el producte d'una rotació espacial i una temporal [63]. Donat que les rotacions d'espaitemps es poden representar amb el grup $\mathrm{Spin}_+(1,3)$ no ens estranyarà l'isomorfisme existent entre aquest grup i $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Així, el grup $\mathrm{Spin}_+(1,3)$ és el doble recobriment de $\mathrm{SO}_+(1,3)$, també conegut com grup propi ortòcron de Lorentz. Expressat d'una altra manera, $\mathrm{Spin}_+(1,3)/\{\pm 1\} \simeq \mathrm{SO}_+(1,3)$. Igualment es verifica $\mathrm{Pin}(1,3)/\{\pm 1\} \simeq \mathrm{O}_+(1,3)$.

1.7 La diferencial exterior, la codiferencial i l'operador de Dirac.

Ja des d'un principi venim treballant amb multivectors, és a dir, tensors contravariants antisimètrics. L'operador diferencial exterior no es pot definir actuant sobre tensors contravariants [63] degut a la incompatibilitat amb les seves lleis de transformació. Malgrat això, com l'àlgebra de Clifford està equipada d'una mètrica, donat un multivector $A \in Cl(V, g)$ podem trobar, mitjançant g, el seu multicovector o multiforma associada, diferenciar-la exteriorment i, finalment, trobar el multivector associat a aquesta multiforma diferenciada. Aquest procés el farem sempre que calgui i abusant del llenguatge ens permetrem d'escriure $\mathrm{d}A$. És clar que aquest procediment no és aplicable a l'àlgebra exterior de multivectors en absència d'una estructura mètrica, situació en la qual l'estructura exterior no es completa amb una estructura Clifford. L'operador codiferencial el definirem com $\delta = *\mathrm{d}*$. Aquests dos operadors ens permeten definir l'operador nabla:

$$\nabla = \mathrm{d} + \delta$$

També és comú definir aquests operador com $\nabla \equiv e^{\mu}\nabla_{\mu}$ on ∇_{μ} és la derivada covariant en la direcció del vector e_{μ}. Al llarg d'aquest treball no tractarem amb espais corbats, així que l'expressió de l'operador nabla pren una forma més simple, $\nabla = e^{\mu}\partial_{\mu}$, sempre i quan ens mantinguem en coordenades cartesianes. Aquest operador, independentment de si l'espai que el sustenta té curvatura, té les propietats algèbriques d'un vector. Vegem-ho estudiant com actua aquest operador sobre camps multivectorials de l'àlgebra de l'espaitemps. Donat $A_r = A_r(x)$ tal que $A_r(x) \in \Lambda^r(\mathbb{R})$, de (1.16) veiem que

$$\nabla A = \nabla \cdot A + \nabla \wedge A$$

on $\nabla \cdot A \in \Lambda^{r-1}(\mathbb{R}^{1,3})$ i $\nabla \wedge A \in \Lambda^{r+1}(\mathbb{R}^{1,3})$. Si $\phi \in \Lambda_0(\mathbb{R}^{1,3})$ llavors $\nabla \cdot \phi = 0$ i $\nabla\phi = \nabla \wedge \phi$. Si $u \in \Lambda^1(\mathbb{R}^{1,3})$ aleshores $\nabla u = \nabla \cdot u + \nabla \wedge u$ on $\nabla \cdot u$ és la (quadri-)divergència de u i $\nabla \wedge u$ és el (sis-)rotacional de u.

1.8 Una aplicació física: el camp electromagnètic.

En electromagnetisme és habitual presentar el camp elèctric com un vector polar i el magnètic com un vector axial [33]. Això és degut a que aquests dos camps es comporten de diferent manera sota paritat. Aquest operador, que el podem definir actuant sobre els vectors de la base de l'espai com $\mathcal{P}(e_i) = -e_i$, canvia el sentit del camp elèctric, mentre deixa invariant el camp magnètic. La necessitat d'introduir els termes *polar* i *axial* quan es fa ús de l'àlgebra vectorial de Gibbs, i que no troben una simbolització en la pròpia àlgebra, reflecteix la negligència de les magnituds bivectorials que Clifford denuncià al seu article de 1878[8].

Ja en el marc newtonià els dos camps, elèctric i magnètic, passen a descriure's com un únic multivector on $Cl_{3,0}$, on $E \in \Lambda^1(\mathbb{R})$ i $B \in \Lambda^2(\mathbb{R})$ que gaudeix de les correctes propietats de transformació sota les simetries de l'espai. La simetria física implicada pel principi de relativitat (i l'experiment de Michelson-Morley) obliga a ampliar aquest marc matemàtic de manera que permeti expressar adequadament les transformacions dels camps sota aquesta simetria. Això ens obliga a plantejar-nos l'existència d'un marc on E i B comparteixin una mateixa estructura matemàtica. Aquesta estructura és la dels tensors antisimètrics de segon ordre. En el formalisme de Clifford la transició del formalisme tridimensional newtonià al quadridimensional relativista és immediata fent servir l'isomorfisme $Cl_{3,0} \simeq Cl^+_{1,3}$. El camp elèctric passa de ser un vector en $Cl_{3,0}$ a un bivector temporal en $Cl^+_{1,3}$. El camp magnètic segueix sent un bivector espacial. Val a dir que l'expressió bivectorial del camp elèctric va ser més difícil de copsar que la del camp magnètic degut al caràcter escalar que pren el temps en la mecànica newtoniana.

Un primer exemple de la simplicitat aconseguida mitjançant l'ús de l'àlgebra de Clifford és el fet que els dos invariants Lorentz (l'escalar i el pseudoescalar) del camp electromagnètic representat pel tensor de Faraday

$$F = -(E_1 e_{01} + E_2 e_{02} + E_3 e_{03} + B_1 e_{23} + B_2 e_{31} + B_3 e_{12}) \tag{1.58}$$

es determinen mitjançant l'única expressió:

$$F\tilde{F} = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 - B_1^2 - B_2^2 - B_3^2 - 2(B_1E_1 + B_2E_2 + B_3E_3)e_{0123}$$

És immediat comprovar la invariància sota transformacions de Lorentz ($R\tilde{R} = 1$):

$$F'\tilde{F}' = RF\tilde{R}\;\beta(RF\tilde{R}) = RF\tilde{R}R\tilde{F}\tilde{R} = RF\tilde{F}\tilde{R} = F\tilde{F}.$$

Continuant amb la presentació d'algunes expressions bàsiques de l'electromagnetisme relativista considerem ara l'expressió:

$$Fe_0\tilde{F} = (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2)e_0 + \tag{1.59}$$
$$+ 2(B_3E_2 - B_2E_3)e_1 + 2(B_1E_3 - B_3E_1)e_2 + 2(B_2E_1 - B_1E_2)e_3 \tag{1.60}$$

[8]... it is instructive to observe that the distinction between a quantity and its "Ergänzung"[dual]*i. e.* between an area and its representative vector, which, for some purposes it is so convenient to ignore, has to be reintroduced in physics. Thus Maxwell specially distinguishes the two kinds of vectors which he calls *force* and *flow*, and which in fact are respectively linear functions of the units and of their binary products. [17]

Les components temporal i espacial del vector "imatge" del e_0 que resulta per "conjugació" amb el tensor de Faraday corresponen, llevat d'una constant multiplicativa que depèn del sistema d'unitats utilitzat, la densitat del quadrivector energia-moment del camp electromagnètic. En efecte:

$$\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 \quad \propto \quad \text{Densitat d'energia} \tag{1.61}$$

$$2\mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad \propto \quad \text{Vector de Poynting} \tag{1.62}$$

L'extensió natural de l'expressió anterior a tots els elements de la tètrada $\{e_\mu\}$ ens dóna 'per columnes' la totalitat de les components del tensor d'energia-moment electromagnètic en la base $\{e_\mu\}$

$$Fe_\mu \tilde{F} \propto T_\mu^\nu e_\nu$$

Aquest tensor en la formulació habitual ve donat per

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(-F^{\mu\rho}F_\rho^\nu + \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma})$$

Resulta força curiós, i de significatives conseqüències que analitzarem en capítols posteriors, observar que l'expressió del quadrivector energia-moment d'una partícula de massa m és formalment idèntica a la que hem presentat per al camp electromagnètic. En efecte, raonant en el cas més simple d'una partícula en repòs en un sistema de referència inercial Σ', el seu quadrimoment me_0' s'expressa en un sistema inercial d'observació Σ mitjançant l'expressió:

$$me_0' = mRe_0\tilde{R} \qquad R \in \text{Spin}_+(1,3) \tag{1.63}$$

on R és la transformació de Lorentz que relaciona Σ amb Σ'. L'extensió als altres vectors de la base de l'expressió anterior

$$e_\mu' = Re_\mu\tilde{R}$$

ens dóna l'orientació espacial de la partícula relativa a Σ.

Constatem així que en ambdós exemples, el del camp electromagnètic i el de la partícula massiva, les expressions corresponents als observables energia-moment, tensions de Maxwell i orientació de la partícula, estan donats per expressions formalment idèntiques. L'objecte físic està caracteritzat per un multivector $(F, \sqrt{m}R)$ que, actuant per conjugació sobre els vectors de la tètrada Σ de l'observador, donen els observables de l'objecte en Σ.

Extensions d'aquest tipus d'expressions als tensors de superenergia han estat realitzades recentment per J. M. Pozo [68]. És important notar la similitud d'aquestes fórmules amb el càlcul d'observables en mecànica quàntica. Aquest es realitza mitjançant expressions bilineals en la funció d'ona (que descriu l'objecte físic) que actuen sobre un operador que està determinat pel sistema d'observació (Bohr [7]).

Finalment, les equacions de Maxwell, amb l'ajut de l'operador ∇ de $Cl_{1,3}$, poden escriure's [72] com

$$\nabla F = J \tag{1.64}$$

on J és el 4-corrent. Més endavant tindrem oportunitat de veure com aquest mateix operador ∇ permet donar una versió multivectorial real de l'equació de Dirac per a l'electró [57, 64], estenent a les equacions dinàmiques el 'contacte de formalismes' establert en el cas dels observables.

Capítol 2

Espinors i classes d'equivalència.

2.1 Motivació.

És habitual atribuir la primera aparició dels espinors a Élie Cartan a [9] l'any 1913, on a partir dels grups lineals fonamentals generà i classificà tots els grups projectius que no deixen invariant cap multiplicitat plana. Tanmateix la seva irrupció al món de la Física tingué lloc degut a la formulació de les equacions d'ona mecànico-quàntiques que permeteren la descripció d'una nova característica de l'electró: el moment angular intrínsec o espí, proposat per Uhlenbeck i Goudsmit el 1925. L'equació de Pauli (1927) i, especialment, l'equació relativista de Dirac (1928) [26] motivaren un ràpid desenvolupament màtematic de la teoria dels espinors. Les representacions espinorials són a la base de l'enorme importància que ha adquirit la teoria de grups a la física teòrica. Aquest mateix desenvolupament, prosseguit simultàniament en els dominis de la matemàtica pura i de la matemàtica directament aplicada a la física, ha produït al llarg dels anys un gran nombre de definicions i presentacions no sempre fàcils de relacionar, i que han arribat a construir, en paraules de Benn i Tucker [5] una veritable torre de Babel. Amb referència constant a l'equació i espinors de Dirac, de validesa sòlidament establerta en Física, i amb l'àlgebra geomètrica de Clifford com a estructura matemàtica de gran capacitat integradora entre conceptes i tècniques de caràcters geomètric i algèbric, el treball que es presenta pretén contribuir a una síntesi plena de significat físic.

Pel que fa a la física, partirem, doncs, dels espinors *lineals* de Dirac, basats en la representació del grup $\mathrm{Spin}_{1,3}$ sobre $\mathbb{C}^4$. Ja l'any 1930 Juvet i Sauter [48, 76], plantaren la llavor dels que després s'han anomenat espinors algèbrics substituint l'espai lineal $\mathbb{C}^4$ pel subespai de les matrius de $\mathbb{C}(4)$ en què només la primera columna és diferent de zero.

Marcel Riesz, l'any 1947 [70], fou el primer en considerar els espinors com elements d'un ideal minimal per l'esquerra d'una àlgebra de Clifford. Els espinors *algèbrics* de Riesz obrien així una nova via que encara trigaria a ser explorada. L'any 1956 Gürsey [40] va rescriure l'equació de Dirac utilitzant matrius quaterniòniques 2×2, isomorfes a l'àlgebra de Clifford d'un espaitemps de signatura -2. Finalment, David Hestenes [42], basant-se en els treballs de Riesz reformulà la teoria de Dirac de l'electró definint els espinors *operadors* dins l'àlgebra real $Cl^+_{1,3}$. La principal diferència i dificultat d'integració entre totes aquestes definicions recau en la diversitat d'espais lineals utilitzats i que fa difícil respondre a la qüestió: què és un espinor?

Pel que fa als desenvolupaments matemàtics Choquet-Bruhat [15] utilitzà de manera essencial el concepte de classe d'equivalència per a definir els espinors. La seva definició no està basada en un nou canvi en l'espai lineal, sinó en presentar l'espinor com un conjunt de parells o *díades*

$$\text{(referencial espinorial, element del espai lineal)}$$

lligades per una relació d'equivalència. L'interès d'aquestes díades es basa en què incorporen, de manera explícita, un nou concepte que en les formulacions més habituals està força amagat: el referencial espinorial. Com veurem, aquest referencial espinorial està íntimament vinculat al concepte (o entitat física) d'observador. Aquest nou enfocament, en conjunció amb els treballs de Hestenes, resulta essencial per a una completa interpretació geomètrica de l'espinor. Malauradament, la presentació de Choquet-Bruhat només va ser definida sobre $\mathbb{C}^4$ i, a més, presentava certa dificultat vinculada a la definició de la pròpia relació d'equivalència que tampoc quedà resolta en una segona presentació [16]. Un primer intent d'estendre aquesta formulació a d'altres espais lineals fou publicada per Rodrigues et al. a [74]. Aquí s'estudiaren els espinors de Dirac, els algèbrics i els de Hestenes des del marc conceptual-matemàtic proposat per Choquet-Bruhat. Aquest treball formalitzà la revisió de la invariància relativista de l'equació de Dirac-Hestenes[1] presentada per Parra en [64].

El capítol l'hem estructurat en nou parts començant per una senzilla reformulació del concepte de transformació passiva en espais vectorials, amb l'objectiu d'introduir un concepte de la màxima importància pel que seguirà: la funció representació f_Σ. Seguidament estendrem, via un morfisme que respecta el producte exterior, aquesta funció de representació a tota l'àlgebra de Clifford. En la secció següent, seguint els passos de [15, 64, 80, 74],

[1]L'equació de Dirac-Hestenes és l'equació de Dirac escrita en el marc de l'àlgebra geomètrica.

aportarem noves definicions pels espinors i pels referencials espinorials que no dependran de l'espai de representació. Després de mostrar uns exemples concrets, estudiarem els bilineals covariants generats pels espinors i justificarem l'adjectiu *covariant.* En la secció 7, distingirem de manera clara les diverses interpretacions que es possible donar als espinors operadors i justificarem la nostra tria. Mostrarem que és en aquest context on es pot interpretar millor el caràcter geomètric de l'espinor. L'espinor, per dir-ho breument, serà l'element que fa de pont entre l'observador i l'observable. Finalment, presentarem un nou tipus d'espinor derivat dels algèbrics i mostrarem una nova possibilitat de descriure graus interns de llibertat.

2.2 Transformacions vectorials passives.

Considerem un vector $X \in \mathcal{A}$ i una base $\Sigma \equiv \{e_I\}$. L'expressió d'aquest vector escrita en la base Σ és $X = X^I e_I$. Sigui Σ' una altra base de $\mathcal{A}$ que està relacionada amb Σ mitjançant

$$e'_I = M(e_I) = M^J{}_{I'} e_J \quad \text{where} \quad M \in \mathrm{GL}(\mathcal{A}) \ . \tag{2.1}$$

X s'escriu en Σ' com $X^{I'} e'_I$ i, evidentment,

$$X = X^{I'} e'_I = X^I e_I \tag{2.2}$$

Aquesta última igualtat es satisfà si i només si $X^I = M^I{}_{J'} X^{J'}$. El concepte de transformació passiva queda establert en (2.2) on les igualtats fan referència als vectors resultants i no a la seva expressió concreta.

Una altra manera de representar les transformacions vectorials passives es introduint les classes d'equivalència. Aquesta construcció ens serà molt útil per definir els espinors.

2.2.1 Representació en components o *cartesiana.*

Aquest tipus de representació es centra en les components i les bases dels vectors. Donat un vector $X = X^I e_I$ l'associarem a la díade $(\Sigma, \{X^I\})$ on Σ fa referència a la base, és a dir, $\Sigma \equiv \{e_I\}$ i les components $\{X^I\}$ són elements[2] de $\mathbb{R}^n$. Podem construir una relació

[2]Això ens ha suggerit el nom de *representació cartesiana*

d'equivalència entre dues díades de la següent manera:

$$\mathcal{R}_c : (\Sigma, \{X^I\}) \sim (\Sigma', \{Y^I\}) \Leftrightarrow \exists M \in \mathrm{GL}(\mathcal{A}) \mid e'_I = M(e_I) = M^J{}_{I'} e_J \ , \quad X^I = M^I{}_{J'} Y^{J'} \tag{2.3}$$

Aquesta definició dóna per equivalents dues díades quan generen (tenen associades) el mateix vector, i.e. $X^{I'} e'_I = X^I e_I$. La classe d'equivalència associada al vector X la designarem per $[X]$, i els seus elements els anomenarem representants cartesians. Així doncs, en aquest esquema, una transformació passiva d'un vector X és una transformació d'un representant a un altre: una aplicació dins la mateixa classe d'equivalència. Conseqüentment, una transformació activa s'interpreta com una correspondència entre diferents classes d'equivalència.

La representació en components no resulta adequada als objectius del nostre treball, on pretenem considerar espais lineals en general i no restringir-nos a $\mathbb{R}^n$. A més, la nostra intenció és presentar els vectors de manera intrínseca, com a elements definits amb un significat (físic, si s'escau) precís i independent a la determinació o caracterització de qualsevol base. Es per això que necessitem la definir un objecte que ens faci de lligam entre els vectors i la seva representació en qualsevol espai lineal.

2.2.2 Representació vectorial i funció de representació.

En aquesta secció definirem un nou tipus de representant més general i que, per tant, tindrà el cartesià com a cas particular. Per introduir-lo considerem un espai vectorial $\hat{\mathcal{A}}$ genèric amb les mateixes propietats i dimensió que $\mathcal{A}$, però completament independent d'ell i sense l'atribució de cap significat geomètric. Per ara, de $\mathcal{A}$ només hem considerat propietats lineals, més endavant les propietats de caràcter geomètric aniran prenen cos, sobretot quan introduïm l'àlgebra geomètrica sobre $\mathcal{A}$.

Sigui $\mathcal{B}$ el conjunt de bases lineals de $\mathcal{A}$. Definim la funció representació com:

$$f : \mathcal{B} \times \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}}; \qquad (\Sigma, X) \mapsto f(\Sigma, X) \equiv f_\Sigma(X) \quad f_\Sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \hat{\mathcal{A}} \text{ és bijectiva} \, \forall \Sigma. \tag{2.4}$$

D'on podem interpretar $f_\Sigma(X) \in \hat{\mathcal{A}}$ com una representació lineal de $X \in \mathcal{A}$ en el sistema de referència $\Sigma \in \mathcal{B}$. Cal remarcar que X no està associat a cap base, inclús quan escrivim (Σ, X). És, justament, $f_\Sigma(X)$ qui ens dóna aquesta associació.

Siguin $X, Y \in \mathcal{A}$ i $\Sigma, \Sigma' \in \mathcal{B}$. Suposant que $Y = M(X)$ i $\Sigma' = M(\Sigma)$ amb $M \in \mathrm{GL}(\mathcal{A})$, sembla natural demanar que la representació de X en Σ coincideixi amb la de Y en Σ', i.e.,

$f_\Sigma(X) = f_{\Sigma'}(Y)$. Aquesta propietat, per linealitat, és equivalent a la condició següent:

$$f_\Sigma(\Sigma) = f_{\Sigma'}(\Sigma'). \tag{2.5}$$

D'aquí, fent servir la composició obtenim

$$f_\Sigma = f_{\Sigma'} \circ M. \tag{2.6}$$

L'expressió (2.5) implica que l'elecció d'una funció de representació f privilegia una base en l'espai genèric $\mathcal{A}$,

$$f_\Sigma(\Sigma) \equiv \hat{\Sigma}_0 \equiv \{\hat{e}_\mu\}. \tag{2.7}$$

De fet, aquesta relació entre el conjunt de representació f i el conjunt de bases de $\hat{\mathcal{A}}$ és bijectiva.

Seguint la mateixa estructura que en la representació cartesiana definim les díades $(\Sigma, \hat{X}) \in \mathcal{B} \times \hat{\mathcal{A}}$. Amb aquestes podem construir la relació d'equivalència següent:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_v : (\Sigma, \hat{X}) \sim (\Sigma', \hat{Y}) \iff & \quad f_\Sigma^{-1}(\hat{X}) = f_{\Sigma'}^{-1}(\hat{Y}) \\ \text{o també,} \iff & \quad \hat{Y} = f_{\Sigma'} \circ f_\Sigma^{-1}(\hat{X}) \equiv \hat{M}^{-1}(\hat{X}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

on $\hat{M} \equiv f_\Sigma \circ M \circ f_\Sigma^{-1} : \hat{\mathcal{A}} \to \hat{\mathcal{A}}$ és l'endomorfisme en $\hat{\mathcal{A}}$ corresponent a $M : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$.

Aquesta relació d'equivalència ens garanteix que dues díades $(\Sigma, f_\Sigma(X))$ i $(\Sigma', f_{\Sigma'}(Y))$ són equivalents si i només si $X = Y \in \mathcal{A}$. Pot veure's que si l'espai genèric $\hat{\mathcal{A}}$ és $\mathbb{R}^n$ recuperem la representació cartesiana.

2.3 L'àlgebra de Clifford genèrica

En la secció anterior hem tractat la representació de vectors sense tenir en compte cap mètrica. Considerem l'espai vectorial $\mathcal{A}$ dotat d'una forma bilineal simètrica g de signatura (p, q). Igualment dotarem a l'espai genèric $\hat{\mathcal{A}}$ d'una mètrica $\hat{g}$ que complirà la condició d'isometria:

$$g(a, b) = \hat{g}(f_\Sigma(a), f_\Sigma(b)) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

Així doncs, si l'espai vectorial $\mathcal{A}$ amb mètrica g genera l'àlgebra de Clifford $Cl_{p,q}$, anàlogament, $\hat{\mathcal{A}}$ amb $\hat{g}$ genera l'àlgebra genèrica de Clifford $\widehat{Cl}_{p,q}$. Podem estendre la funció f_Σ a tota l'àlgebra de Clifford [46] via la definició del següent morfisme que manté el producte exterior:

$$f_\Sigma^{\text{ext}} : Cl_{p,q} \longrightarrow \widehat{Cl}_{p,q}\,; \quad f_\Sigma^{\text{ext}}(A \wedge B) = f_\Sigma^{\text{ext}}(A) \wedge f_\Sigma^{\text{ext}}(B) \quad f_\Sigma^{\text{ext}}(a) = f_\Sigma(a)\, \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.9)$$

Ja que $f_\Sigma : \mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ és una isometria, la seva extensió f_Σ^{ext} serà un isomorfisme d'àlgebres. Per no complicar la notació designarem també per f_Σ l'extensió de la funció de representació.

Com es pot veure en l'apèndix B, el grup $\text{Spin}_{p,q}$ és un subconjunt de l'àlgebra de Clifford parella $Cl^+_{p,q}$:

$$\text{Spin}_{p,q} = \{R \in Cl^+_{p,q} / RvR^{-1} \in \mathcal{A}\ \forall v \in \mathcal{A},\, R\tilde{R} = \pm 1\} \quad (2.10)$$

El grup spin és el doble recobriment del grup d'isometries $\text{SO}(\mathcal{A})$. Sigui $\mathcal{H}$ l'aplicació que relaciona els dos grups

$$\mathcal{H} : \text{Spin}_{p,q} \longrightarrow \text{SO}(\mathcal{A}); \quad R \mapsto \mathcal{H}(R) \quad (2.11)$$

on $\mathcal{H}(R) \in \text{SO}(\mathcal{A})$ és l'endomorfisme

$$\mathcal{H}(R) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}; \quad v \mapsto \mathcal{H}(R)(v) \equiv RvR^{-1} \quad (2.12)$$

Anàlogament a (2.10), el grup genèric $\widehat{\text{Spin}}_{p,q}$ es defineix com el corresponent subconjunt genèric de la subàlgebra de Clifford parella $\widehat{Cl}^+_{p,q}$. La restricció de $f_\Sigma : Cl_{p,q} \longrightarrow \widehat{Cl}_{p,q}$ pel subconjunt $\text{Spin}_{p,q}$, és un isomorfisme de grups:

$$f_\Sigma : \text{Spin}_{p,q} \longrightarrow \widehat{\text{Spin}}_{p,q}; \quad f_\Sigma(R_1R_2) = f_\Sigma(R_1)f_\Sigma(R_2) \quad \forall R_1, R_2 \in \text{Spin}_{p,q}$$

També podem definir la funció $\hat{\mathcal{H}}$ com la còpia genèrica de (2.11):

$$\hat{\mathcal{H}} : \widehat{\text{Spin}}_{p,q} \longrightarrow \text{SO}(\hat{\mathcal{A}})$$

on denotarem $\text{SO}(\hat{\mathcal{A}}) = \widehat{\text{SO}}$.

Les definicions donades en aquestes dues primeres seccions ens permetran d'endinsar-nos detalladament en l'estudi dels espinors.

2.4 Referencial espinorial i espinors.

El concepte d'espinor està íntimament relacionat amb les representacions dels grups d'isometries. La presentació de Cartan [11], que de manera molt estesa perdura fins avui dia, roman més en l'èmfasi de les propietats de transformació dels espinors, que no pas en el concepte d'observador. Nosaltres considerarem l'observador com una eina fonamental per entendre l'espinor des d'un punt de vista físic i geomètric. De fet, com veurem en aquesta secció, l'observador passarà a formar part indissoluble de l'espinor. Aquesta idea, però, no és nova. Choquet-Bruhat introduí els espinors [15] utilitzant classes d'equivalència de manera similar a com han estat presentats els vectors en la secció 2.2. Tot i això, només es considerà [15, 16] un tipus concret d'espai lineal per a la representació dels espinors; aquests espinors els anomenarem clàssics. Més recentment [34, 74], aquests treballs han estat estesos a d'altres espais lineals de representació a fi de poder tractar els espinors algèbrics i els espinors operadors formalitzats com a classes d'equivalència. En aquesta secció presentarem sota una mateixa definició els tres tipus d'espinors citats i resoldrem certs problemes dels treballs anteriors.

Clàssicament, els espinors es defineixen com elements de l'espai de representació d'un dels grups d'isometries [21], en concret el grup $\mathrm{Spin}_{p,q}$. Donat un espai lineal S definim l'aplicació:

$$\alpha : \widehat{\mathrm{Spin}}_{p,q} \times S \longrightarrow S; \quad (\hat{R}, \psi) \mapsto \alpha(\hat{R}, \psi) \equiv \alpha_{\hat{R}}(\psi) \tag{2.13}$$

de manera que satisfaci la següent propietat:

$$\alpha(\hat{R}_1, \alpha(\hat{R}_2, \psi)) = \alpha(\hat{R}_1 \hat{R}_2, \psi)$$

Conseqüentment, aquest producte constitueix una representació del grup $\widehat{\mathrm{Spin}}_{p,q}$:

$$\tilde{\alpha} : \widehat{\mathrm{Spin}}_{p,q} \longrightarrow \mathrm{End}(S); \quad \hat{R} \mapsto \tilde{\alpha}(\hat{R}) \equiv \alpha_{\hat{R}}$$

on l'espai S s'anomena espai de representació.

Un primer tempteig és definir els espinors com una classe d'equivalència de díades a l'igual dels vectors utilitzant, però, bases (referencials vectorials) ortonormals com a observadors. Sigui $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ el conjunt de bases ortonormals de $\mathcal{A}$. Considerem unes noves díades de la forma:

$$(\Sigma, \psi) \quad \text{on} \quad \Sigma = \{e_I\} \in \mathcal{B} \quad \text{i} \quad \psi \in S$$

La classe d'equivalència[3] quedarà definida per:

$$(\Sigma, \psi) \sim (\Sigma', \psi') \Leftrightarrow \exists R \in \mathrm{Spin}(\mathcal{A}), \text{ tal que } \Sigma' = \mathcal{H}(R)\Sigma \text{ i } \psi = \alpha(f_\Sigma(R), \psi') \tag{2.14}$$

[3] Al final del capítol es comprova la propietat transitiva i es veurà amb detall com actúa $\mathcal{H}(R)$ i f_Σ

Prenent $R = -1$ es desprèn de la definició anterior que les díades (Σ, ψ) i $(\Sigma, -\psi)$ són equivalents. Aquest comportament, degut a la no injectivitat de l'endomorfisme $\mathcal{H}(R)$, es considera inapropiat. De fet, és per evitar aquest problema que s'introdueix el referencial espinorial.

Per construir el referencial espinorial simplement ens caldria un referencial vectorial Σ i un criteri per tal de distingir els dos representants ψ i $-\psi$. El criteri, però, hauria de permetre relacionar els diferents representants de manera contínua, mentre que $\{+,-\}$ formen un conjunt discret. És per això que la definició estàndard del referencial espinorial presenta una estructura molt més complexa.

Definició 2.1 *Qualsevol element* (Σ, R) *del conjunt* $\mathcal{B}_0 \times \mathrm{Spin}_{p,q}$ *l'anomenarem referencial espinorial potencial.*

L'adjectiu potencial és degut a que $\mathcal{B}_0 \times \mathrm{Spin}_{p,q}$ conté molts més elements dels necessaris. El conjunt dels referencials espinorials que emprarem els anomenarem propis i seran una restricció de $\mathcal{B}_0 \times \mathrm{Spin}_{p,q}$.

Definició 2.2 *Dos referencials espinorials potencials s'anomenaran compatibles si i només si satisfan la relació d'equivalència*

$$\mathcal{C} : (\Sigma, R) \bowtie (\Sigma', R') \Leftrightarrow \mathcal{H}(R'^{-1})\Sigma' = \mathcal{H}(R^{-1})\Sigma \equiv \Sigma_0$$

on cada classe de compatibilitat està caracteritzada per un referencial vectorial fiducial[4] Σ_0, *ja que en cada classe hi ha un únic element de la forma* $(\Sigma_0, 1)$.

$\mathcal{C}$ relaciona parelles (base,transformació) tals que les transformacions remeten les respectives bases a una mateixa base 'fiducial' que, amb la transformació identitat constitueix el representant canònic de la classe.

Cadascuna de les classes de compatibilitat és un element del conjunt quocient $(\mathcal{B}_0 \times \mathrm{Spin}_{p,q})/\mathcal{C}$. Com hem vist, la tria d'una base Σ_0 determina una única classe d'equivalència. Aquesta tria, tot i ser arbitrària entre el conjunt de bases ortonormals, és necessària per a poder realitzar l'ancoratge dels espinors en l'estructura de l'espaitemps. La classe que resulta privilegida d'aquesta tria serà el conjunt de referencials espinorials propis. Per tant definim formalment:

Definició 2.3 *Un conjunt complet de referencials espinorials propis* $\mathcal{F}$ *és un element de* $(\mathcal{B}_0 \times \mathrm{Spin}_{p,q})/\mathcal{C}$.

[4]De l'anglès, *fiducial: taken as standard of reference*

La diferència més rellevant amb les presentacions que en fan altres autors consisteix en què hem aconseguit deslligar la definició de referencial espinorial de l'espai de representació dels espinors.

Definició 2.4 *Un α-espinor és una classe d'equivalència del conjunt $\mathcal{F} \times S$ definida per la relació d'equivalència:*

$$\mathcal{R}_s : (\Sigma_\sigma, \psi) \sim (\Sigma'_\sigma, \psi') \Leftrightarrow \alpha(f_\Sigma(R), \psi) = \alpha(f_{\Sigma'}(R'), \psi') \tag{2.15}$$

on $\Sigma_\sigma = (\Sigma, R)$ i $\Sigma'_\sigma = (\Sigma', R')$.

Per definició $\Sigma_\sigma, \Sigma'_\sigma \in \mathcal{F}$, és a dir,

$$\Sigma' = \mathcal{H}(R'R^{-1})\Sigma$$

Podem reformular la condició (2.15), que defineix l'espinor, d'una manera més propera a les formulacions habituals en física. Partint de

$$\alpha(f_\Sigma(R), \psi) = \alpha(f_{\Sigma'}(R'), \psi')$$

o, equivalentment, de

$$\psi' = \alpha(f_{\Sigma'}(R'^{-1}) f_\Sigma(R), \psi),$$

i sabent que $f_{\Sigma'} = f_\Sigma \circ \mathcal{H}(RR'^{-1})$ podem escriure

$$\psi' = \alpha(f_\Sigma[\mathcal{H}(RR'^{-1})R'^{-1}] f_\Sigma(R), \psi) = \alpha(f_\Sigma(RR'^{-1}R'^{-1}R'R^{-1}R), \psi).$$

Arribem així a poder-los també caracteritzar amb l'expressió:

$$\psi' = \alpha(f_\Sigma(RR'^{-1}), \psi).$$

Cal remarcar que en cap moment hem fixat una representació en concret, d'acord amb l'objectiu d'obtenir una definició general. Vegem, tot seguit, com la definició 2.4 comprèn els espinors clàssics, els algèbrics i els espinors operadors [34].

2.4.1 Els espinors clàssics.

La teoria dels espinors que hem anomenat clàssics està basada en la representació del grup $\mathrm{Spin}_{p,q}$ sobre $\mathbb{C}^r$. Quan la teoria és desenvolupada en el marc donat per les àlgebres de Clifford [19, 20], l'espai genèric ve donat per $\hat{\mathcal{A}} = \text{span}\{\gamma_\mu\}$ on γ_μ són les bases dels 1-vectors en una de les representacions matricials de $Cl_{p,q}$.

En base a l'expressió (2.13) establim, mitjançant la funció de representació, la base de l'espai genèric $\hat{\mathcal{A}}$:

$$\hat{\Sigma}_0 = f_\Sigma(\Sigma) \quad \text{és a dir} \quad \gamma_\mu = f_{\{e_\mu\}}(e_\mu).$$

L'extensió de f_Σ a tota l'àlgebra de Clifford és una aplicació de $Cl_{p,q}$ a l'àlgebra real de matrius generada per les matrius $\{\gamma_\mu\}$, i.e.,

$$f_\Sigma : Cl_{p,q} \longrightarrow \text{gen}\{\gamma_\mu\}$$

La imatge del grup spin serà designada per[5] $\text{Spin}\{\gamma_\mu\} \equiv f_\Sigma(\text{Spin}_{p,q})$.

La definició 2.4 és així aplicable a exemples prou coneguts:

Definició 2.5 *Un espinor clàssic de Pauli és un $\mathcal{P}$-espinor, on*

$$\mathcal{P} : \text{Spin}_{3,0}\{\sigma_i\} \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$\mathcal{P}(\hat{R}, \psi) = \hat{R}\psi$ és el producte matricial i σ_i són les matrius de Pauli[6] [47].

Definició 2.6 *Un espinor clàssic de Dirac és un $\mathcal{D}$-espinor, on*

$$\mathcal{D} : \text{Spin}\{\gamma_\mu^D\} \times \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$$

$\mathcal{D}(\hat{R}, \psi) = \hat{R}\psi$ és el producte matricial i γ_μ^D són les matrius de Dirac.

Definició 2.7 *Un espinor clàssic de Majorana és un $\mathcal{M}$-espinor, on*

$$\mathcal{M} : \text{Spin}\{\gamma_\mu^M\} \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

$\mathcal{M}(\hat{R}, \psi) = \hat{R}\psi$ és el producte matricial i γ_μ^M són les matrius de Majorana per l'àlgebra $Cl_{3,1}$.

[5] Seria redundant posar barret al grup $\text{Spin}\{\gamma_\mu\}$ donat que els γ_μ ja pertanyen a l'espai genèric.
[6] Recordem que $\text{Spin}_{3,0}\{\sigma_i\} = \text{SU}(2)$.

Definició 2.8 *Un espinor clàssic de Weyl és un $\mathcal{W}$-espinor, on*

$$\mathcal{W} : \mathrm{Spin}\{\gamma_\mu\} \times \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

$\mathcal{W}(\hat{R}, \psi) \equiv \omega(\hat{R})\psi$ *on*

$$\omega : \mathrm{Spin}\{\gamma_\mu\} \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

és l'isomorfisme definit per: $\omega(\gamma_{0i}) = \sigma_i$ i $\omega(\gamma_{0123}) = \pm i1$ i d'aquí $\omega(\gamma_{ij}) = \pm i\sigma_k$. El signe $+$ correspon als espinors left i el signe $-$ als espinors right.

2.4.2 Espinors algèbrics.

El concepte d'espinor algèbric està basat en les restriccions irreductibles de les representacions regulars de $\widehat{Cl}_{p,q} \otimes \mathbb{K}$. En l'apèndix A, on discutim les representacions de les àlgebres de Clifford, veiem que un ideal minimal per l'esquerra constitueix també un espai de representació de l'àlgebra. En conseqüència, tindrem que

$$\mathcal{L}_{p,q}^{\hat{\mathcal{I}}\otimes\mathbb{K}} : \widehat{Cl}_{p,q} \otimes \mathbb{K} \times \hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{K} \longrightarrow \hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{K}; \quad (\hat{C}, \hat{\psi}) \mapsto \mathcal{L}_{p,q}^{\hat{\mathcal{I}}\otimes\mathbb{K}}(\hat{C}, \hat{\psi}) = \hat{C}\hat{\psi}$$

essent l'espai de representació $\hat{\mathcal{I}}\otimes\mathbb{K}$ un ideal minimal per l'esquerra de $\widehat{Cl}_{p,q}\otimes\mathbb{K}$. Utilitzar aquest ideal pels espinors és possible ja que qualsevol representació de l'àlgebra $\widehat{Cl}_{p,q}$ és també una representació del grup $\widehat{\mathrm{Spin}}_{p,q}$, ja que aquest grup és un subconjunt de $\widehat{Cl}_{p,q}$. De fet, aquest és el punt de contacte entre les tres definicions d'espinors que estem donant. Vegem ara com basant-nos en la definició 2.4 podem aplicar-la als espinors més coneguts.

Definició 2.9 *Un espinor algèbric de Pauli és un $\mathcal{L}_{3,0}^{\hat{\mathcal{I}}\otimes\mathbb{R}}$-espinor.*

Definició 2.10 *Un espinor algèbric de Dirac és un $\mathcal{L}_{1,3}^{\hat{\mathcal{I}}\otimes\mathbb{C}}$-espinor.*

Un cas ben estudiat entre els espinors algèbrics de Dirac [4, 53] és el que s'obté quan l'ideal per l'esquerra minimal és generat per l'idempotent:

$$\frac{1}{4}(1 + \hat{e}_0)(1 + i\hat{e}_{12}) \tag{2.16}$$

Definició 2.11 *Un espinor algèbric de Majorana és un* $\mathcal{L}_{3,1}^{\hat{\mathcal{I}}\otimes\mathbb{R}}$*-espinor.*

Els espinors de Weyl són un cas especial. Aquests no es poden representar com un ideal minimal de l'àlgebra ja que estan sotmesos a l'acció de l'operador paritat. Per tant no poden ser representats mitjançant un ideal minimal de tota l'àlgebra $Cl_{1,3}$. És per això que es tracten com un ideal minimal $\hat{\mathcal{I}}^+(\mathbb{R})$ de la subàlgebra parella $Cl_{1,3}^+$.

Definició 2.12 *Un espinor algèbric de Weyl és un* $\mathcal{L}_{1,3}^{\hat{\mathcal{I}}^+\otimes\mathbb{R}}$*-espinor, on*

$$\mathcal{L}_{1,3}^{\hat{\mathcal{I}}^+\otimes\mathbb{R}} : \widehat{Cl}_{1,3}^+ \otimes \mathbb{R} \times \hat{\mathcal{I}}^+ \otimes \mathbb{R} \longrightarrow \hat{\mathcal{I}}^+ \otimes \mathbb{R}; \quad (\hat{C}, \hat{\psi}) \mapsto \hat{C}\hat{\psi}$$

L'idempotent que genera l'ideal per l'esquerra minimal és

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{e}_{03})$$

on el signe distingirà distingirà els espinors dret i esquerre de Weyl.

2.4.3 Espinors operadors per l'esquerra.

Els espinors operadors es caracteritzen per utilitzar la subàlgebra parella de Clifford com espai de representació, i.e., $S = Cl_{p,q}^+$. Dins del nostre marc de treball distingim l'existència de dos tipus d'espinors operadors, que anomenarem espinors operadors per l'esquerra i per la dreta. En aquesta secció tractarem els espinors operadors per l'esquerra, ja que aquests s'acomoden sense problemes a la definició 2.4. Els espinors operadors per la dreta són essencialment diferents i els estudiarem més endavant.

Els espinors operadors per l'esquerra es basen en les representacions irreductibles de l'àlgebra de Clifford parella. Així doncs,

$$\mathcal{L}_{p,q}^+ : \widehat{Cl}_{p,q}^+ \times \widehat{Cl}_{p,q}^+ \longrightarrow \widehat{Cl}_{p,q}^+; \quad (\hat{C}, \hat{\psi}) \mapsto \mathcal{L}_{p,q}^+(\hat{C}, \hat{\psi}) \equiv \hat{C}\hat{\psi}$$

Pel cas de Weyl i Majorana serà necessari utilitzar una representació regular[7] restringida a un ideal per l'esquerra:

$$\mathcal{L}_{p,q}^+\big|_{\mathcal{I}} : \widehat{Cl}_{p,q}^+ \times \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}$$

$$\mathcal{L}_{p,q}^+\big|_{\mathcal{I}}(\hat{C}, \hat{\psi}) \equiv \mathcal{L}_{p,q}^+(\hat{C}, \hat{\psi}) \qquad \forall \hat{\psi} \in \mathcal{I} \subset \widehat{Cl}_{p,q}^+$$

[7] Veure apèndix A.

Definició 2.13 *Un espinor operador per l'esquerra de Pauli és un $\mathcal{L}^+_{3,0}$-espinor.*

Definició 2.14 *Un espinor operador per l'esquerra de Dirac és un $\mathcal{L}^+_{1,3}$-espinor.*
Aquest tipus d'espinor ha estat anomenat espinor de Dirac-Hestenes [28, 27].

Definició 2.15 *Un espinor operador per l'esquerra de Majorana és un $\mathcal{L}^+_{1,3}\big|_{\mathcal{I}_{M^\pm}}$-espinor, on*

$$\mathcal{I}_{M^\pm} = \widehat{Cl}^+_{1,3}\frac{1}{2}(1 \mp \hat{e}_{01}).$$

El signe de $\mathcal{I}_{M^\pm}$ correspon al valor propi de l'operador conjugació de càrrega [53].

Definició 2.16 *Un espinor operador per l'esquerra de Weyl $\mathcal{L}^+_{1,3}\big|_{\mathcal{I}_{W^\pm}}$-espinor, on*

$$\mathcal{I}_{W^\pm} = \widehat{Cl}^+_{1,3}\frac{1}{2}(1 \pm \hat{e}_{03}).$$

El signes distingeixen els espinors de Weyl dret i esquerre.

2.5 Bilineals covariants.

Des d'un punt de vista físic són els bilineals covariants les magnituds directament relacionades amb els observables. En el marc de la teoria de l'electró proposada per Dirac [26] i, per tant, utilitzant espinors clàssics, aquestes magnituds són prou conegudes [6]. No ho són tant les seves formulacions en funció dels espinors algèbrics i dels espinors operadors. És per això que, abans de continuar la nostra exposició, estudiarem amb detall com es defineixen aquests bilineals. Les tècniques que adoptarem ens seran també molt útils en capítols posteriors amb altres finalitats.

Partint dels bilineals covariants formats pels espinors clàssics veurem com obtenir els bilineals pels casos algèbric i operacional. Treballarem tan sols l'aspecte algèbric, deixant per a la propera secció el lligam amb els referencials, punt clau d'aquest capítol.

Essent $\varphi \in \mathbb{C}^4$, els seus bilineals covariants són:

$$\rho = \bar{\varphi}\varphi \tag{2.17}$$

$$j_\mu = \bar{\varphi}\gamma_\mu\varphi; \quad \text{vector densitat de corrent de probabilitat.} \tag{2.18}$$

$$\Pi_{\mu\nu} = -\Pi_{\nu\mu} = \bar{\varphi} i \gamma_{\mu\nu} \varphi; \quad \frac{q\hbar}{2m}\Pi_{\mu\nu} \text{ tensor densitat de magnetització} \tag{2.19}$$

$$K_\mu = \bar{\varphi} i \gamma_5 \gamma_\mu \varphi; \quad \frac{\hbar}{2} K_\mu \text{ vector densitat d'espín} \tag{2.20}$$

$$\omega = -\bar{\varphi}\gamma_5\varphi \tag{2.21}$$

on $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ i $\bar{\varphi}$ és el conjugat de Dirac de φ, és a dir, $\bar{\varphi} = \varphi^\dagger\gamma_0$.

Triat un idempotent primitiu adequat, $\varphi \in \mathbb{C}^4$ queda associat a $\psi \in \mathbb{C}(4)$.

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \psi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Així doncs, per exemple:

$$j_\mu = \bar{\varphi}\gamma_\mu\varphi = \mathrm{tr}[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi]$$

on tr ens dóna la traça de $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \in \mathbb{C}(4)$. Recordem que l'àlgebra matricial de Dirac $\mathbb{C}(4)$ és isomorfa a l'àlgebra de Clifford $Cl_{4,1}$. I aquesta última, alhora és isomorfa a $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. Essent $Z \in \mathbb{C}(4)$, la traça de Z en $\mathbb{C}(4)$ [80] és idèntica a fer[8]

$$4 < Z >_{0+5} \quad Z \in Cl_{4,1}, \qquad 4 < Z >_0 \quad Z \in Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}.$$

Ara podem escriure j_μ com:

$$j_\mu = \mathrm{tr}[\bar{\psi}\gamma_\mu\psi] = \mathrm{tr}[\psi^\dagger\gamma_0\gamma_\mu\psi] = 4 < e_0\widetilde{\Psi^*}e_\mu\Psi >_0 = 4 < e_\mu\Psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_0$$

aprofitant que el projector $< >_0$, igual que la traça, gaudeix de la propietat cíclica. Amb l'ànim de distingir els aspectes matricials dels algèbrics, després de la tercera igualtat hem adoptat un nou símbol per l'espinor, Ψ i per les matrius γ ja que, ara, aquests pertanyen a $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. En aquest punt -la tercera igualtat- hem usat una correspondència entre operacions que és totalment independent [14] de la representació utilitzada[9], a saber, $\psi^\dagger \to e_0\widetilde{\Psi^*}e_0$. A més, de $\Psi e_0\widetilde{\Psi^*}$ només ens cal la part vectorial ja que serà l'única que contribuirà amb grau zero després de fer el producte amb e_μ,

$$j_\mu = 4e_\mu \cdot < \Psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_1$$

[8] A [53] es poden trobar moltes relacions de correspondència entre $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ i $\mathbb{C}(4)$

[9] Sempre que estiguin relacionades amb una representació unitària

Així podem definir:

$$J \equiv 4 < \Psi e_0 \widetilde{\Psi^*} >_1 \tag{2.23}$$

on $\Psi \in (Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C})f$ essent f un idempotent primitiu de $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$.

Pel tensor $\Pi_{\mu\nu}$ tindrem:

$$\Pi_{\mu\nu} = \bar{\varphi} i \gamma_{\mu\nu} \varphi = \mathrm{tr}[\bar{\psi} i \gamma_{\mu\nu} \psi] = 4 < e_0 \widetilde{\Psi^*} e_0 e_0 i e_{\mu\nu} \Psi >_0 = 4ie_{\mu\nu} \cdot < \Psi e_0 \widetilde{\Psi^*} >_2$$

i d'aquí definim:

$$\Pi \equiv -4i < \Psi e_0 \widetilde{\Psi^*} >_2 \tag{2.24}$$

Pel vector associat a la densitat d'espín:

$$\begin{aligned} K_\mu = \bar{\varphi} i \gamma_5 \gamma_\mu \varphi = \mathrm{tr}[\psi^\dagger \gamma_0 i \gamma_5 \gamma_\mu \psi] = 4 < e_0 \widetilde{\psi^*} i e_5 e_\mu \psi >_0 = \\ = 4i < e_\mu \psi e_0 \widetilde{\psi^*} e_5 >_0 = e_\mu \cdot (-4) i e_5 < \psi e_0 \widetilde{\psi^*} >_3 \end{aligned}$$

aleshores

$$K \equiv -4ie_5 < \psi e_0 \widetilde{\psi^*} >_3$$

I per ω:

$$\omega = -\bar{\varphi} \gamma_5 \varphi = -\mathrm{tr}[\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_5 \psi] = -4 < e_5 \psi e_0 \widetilde{\psi^*} >_0 = -4e_5 < \psi e_0 \widetilde{\psi^*} >_4$$

Així doncs, hem fet explícita la correspondència que existeix entre els espinors clàssics i els algèbrics. Podem, però, prosseguir i veure com un espinor algèbric definit en l'ideal $(Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C})f$ és igual a un altre en $Cl_{1,3}^+ f$.

Sigui $\Psi \in (Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C})f$ amb $f = \frac{1}{4}(1 + e_0)(1 + ie_{12})$, descomponem Ψ en part real i imaginària pura de manera que:

$$\Psi = \phi f = (\mathrm{Re}[\phi] + \mathrm{Im}[\phi])f = \mathrm{Re}[\phi]f + \mathrm{Im}[\phi]ie_{12}f$$

ja que $ie_{12}f = fie_{12} = f$. El terme $\mathrm{Im}[\phi]ie_{12} \in Cl_{1,3} \otimes \mathbb{R} \equiv Cl_{1,3}$ i, per tant

$$\Psi = \chi f \quad \text{on}\, \chi f \in Cl_{1,3} f.$$

Seguint un procediment semblant, però, descomponent en parts parelles i senars, i tenint en compte que $e_0 f = f e_0 = f$, tenim que:

$$\Psi = \chi f = (\chi^+ + \chi^-)f = (\chi^+ + \chi^-)f = (\chi^+ f + \chi^- e_0 f) = (\chi^+ + \chi^- e_0)f = \eta f$$

i, per tant $\eta f \in Cl^+_{1,3}f$. A partir de l'expressió (2.23)podem, finalment, expressar el bilineal J com:

$$J = 4 < \Psi e_0 \widetilde{\Psi^*} >_1 = 4 < \eta f e_0 \widetilde{f^* \eta^*} >_1 = 4 < \eta f e_0 \tilde{\eta} >_1 = < \eta(1+e_0)(1+ie_{12})\tilde{\eta} >_1 =$$
$$= < \eta(1 + ie_{12} + e_0 + ie_{012})\tilde{\eta} >_1 = < \eta\tilde{\eta} + i\eta e_{12}\tilde{\eta} + \eta e_0 \tilde{\eta} + i\eta e_{012}\tilde{\eta} >_1 =$$
$$= < \eta e_0 \tilde{\eta} >_1 = \eta e_0 \tilde{\eta}$$

on $\eta \in Cl^+_{1,3}$ i és, precisament, un espinor operacional. Procedint anàlogament pels altres bilineals obtenim les expressions següents en funció dels espinors operadors:

$$\Pi = \eta e_{21} \tilde{\eta} \tag{2.25}$$

$$K = \eta e_3 \tilde{\eta} \tag{2.26}$$

2.6 Bilineals covariants i classes d'equivalència.

En aquesta secció connectarem els bilineals, presentats en la secció anterior des d'un punt de vista algèbric, amb els referencials vectorials i espinorials. Ens concentrarem, igual que abans, en els espinors de Dirac i, més en concret, en el vector densitat de corrent o bilineal J.

Recordem de la definició 2.4 que un espinor és una classe d'equivalència de parells (Σ_σ, ψ) tals que:

$$\mathcal{R}_s : (\Sigma_\sigma, \psi) \sim (\Sigma'_\sigma, \psi') \Leftrightarrow \alpha(f_\Sigma(R), \psi) = \alpha(f_{\Sigma'}(R'), \psi').$$

En aquesta definició apareix la funció f_Σ que ja havia estat utilitzada en la classe d'equivalència de vectors,

$$\mathcal{R}_v : (\Sigma, \hat{X}) \sim (\Sigma', \hat{X}') \iff f_\Sigma^{-1}(\hat{X}) = f_{\Sigma'}^{-1}(\hat{X}').$$

Com $\hat{J}$ està definit en funció de ψ a cada representant (Σ_σ, ψ) de l'espinor li correspon una díade $(\Sigma, \hat{J})$. Aquest fet implica que la relació d'equivalència espinorial $\mathcal{R}_s$ indueix una nova relació d'equivalència 'bilineal' $\mathcal{R}_b$ entre els parells $(\Sigma, \hat{J})$. Demostrarem que la relació 'bilineal' induïda és la vectorial $\mathcal{R}_v$, mostrant el caràcter covariant del bilineal.

Sigui $((\Sigma, R), \psi)$ un representant d'un espinor. El seu bilineal covariant $\hat{J}$ es defineix com una funció quadràtica de ψ

$$\hat{J} \equiv \hat{\beta}(\psi) \tag{2.27}$$

on $\hat{\beta}$ és independent[10] de Σ i R. Sabem de la definició d'un α-espinor que dos representants són equivalents si i només si:

$$\mathcal{R}_s : ((\Sigma, R), \psi) \sim ((\Sigma', R), \psi') \Leftrightarrow \Sigma' = \mathcal{H}(R'R^{-1})\Sigma, \quad \psi' = \alpha_{f_\Sigma(RR'^{-1})}(\psi).$$

$\mathcal{R}_s$ indueix la següent relació d'equivalència:

$$\mathcal{R}_b : (\Sigma, \hat{J}) \sim (\Sigma', \hat{J}') \Leftrightarrow \hat{J} = \hat{\beta}(\psi), \quad \hat{J}' = \hat{\beta}(\psi') = \hat{\beta} \circ \alpha_{f_\Sigma(RR'^{-1})}(\psi) \tag{2.28}$$

Cal veure si $\mathcal{R}_b$ i la relació d'equivalència

$$\mathcal{R}_v : (\Sigma, \hat{J}) \sim (\Sigma', \hat{J}') \Leftrightarrow \hat{J}' = f_{\Sigma'} \circ f_\Sigma^{-1}(\hat{J})$$

coincideixen. Abans, però, escriurem $\mathcal{R}_v$ d'una altra manera. Sabem que dos referencials vectorial estan relacionats per

$$\Sigma' = \mathcal{H}(R'R^{-1})\Sigma$$

d'on es segueix que

$$f_{\Sigma'} = f_\Sigma \circ \mathcal{H}(RR'^{-1}) = \hat{\mathcal{H}}[f_\Sigma(RR'^{-1})] \circ f_\Sigma.$$

Llavors podem escriure

$$\mathcal{R}_v : (\Sigma, \hat{J}) \sim (\Sigma', \hat{J}') \Leftrightarrow \hat{J}' = \hat{\mathcal{H}}[f_\Sigma(RR'^{-1})]\hat{J} \tag{2.29}$$

Ara podem trobar la condició per a que $\mathcal{R}_v$ i $\mathcal{R}_b$ siguin la mateixa relació d'equivalència. Aquesta serà:

$$\hat{\beta} \circ \alpha_{f_\Sigma(RR'^{-1})}(\psi) = \hat{\mathcal{H}}[f_\Sigma(RR'^{-1})] \circ \hat{\beta}(\psi) \quad \forall \psi \in S, \ \forall R' \in \mathrm{Spin}_{1,3},$$

és a dir, fent $\hat{R} = f_\Sigma(RR'^{-1})$ tenim que:

$$\hat{\beta} \circ \alpha_{\hat{R}} = \hat{\mathcal{H}}(\hat{R}) \circ \hat{\beta} \quad \forall \hat{R} \in \widehat{\mathrm{Spin}}_{1,3}. \tag{2.30}$$

Aquesta és la condició exigida per a la covariància del bilineal $\hat{J} = \hat{\beta}(\psi)$. Tot seguit comprovarem com els espinors de Dirac clàssics, algèbrics i espinors operadors per l'esquerra acompleixen aquesta condició.

[10] De fet, aquesta és la raó que feia possible, en la secció anterior, presentar els bilineals sense parlar dels referencials.

- Espinor de Dirac clàssic.

  Ja hem vist que el bilineal covariant $\hat{J}$ és pot calcular fent:

$$\hat{J}_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu^D\psi = \psi^\dagger\gamma_0^D\gamma_\mu^D\psi$$

on $\hat{J} \in \mathbb{R}^4$ i $\{\hat{J}_\mu\}$ són les seves quatre components. Val a dir que quan introduírem el concepte d'espinor clàssic de Dirac vàrem considerar que l'espai genèric estava generat per les quatre matrius de Dirac γ_μ. Això va facilitar la connexió amb els casos algèbrics i operacionals. El vector de l'espai genèric $\hat{J}$ ve donat per:

$$\hat{\beta}(\psi) = \hat{J} = \hat{J}_\mu\gamma^{D\mu} = [\bar{\psi}\gamma_\mu^D\psi]\gamma^{D\mu} \in \hat{\mathcal{A}}$$

Podem comprovar que la condició (2.30) es satisfà:

$$\hat{\beta}[\mathcal{D}_{\hat{R}}(\psi)] = [\overline{\mathcal{D}_{\hat{R}}(\psi)}\gamma_\mu^D\mathcal{D}_{\hat{R}}(\psi)]\gamma^{D\mu} = [(\hat{R}\psi)^\dagger\gamma_0^D\gamma_\mu^D\hat{R}\psi]\gamma^{D\mu} = [\bar{\psi}\gamma_0^D\hat{R}^\dagger\gamma_0^D\gamma_\mu^D\hat{R}\psi]\gamma^{D\mu} \tag{2.31}$$

Degut a que $\gamma_0^{D\dagger} = \gamma_0$ i $\gamma_i^{D\dagger} = -\gamma_i^D$ aleshores,

$$\gamma_0^D\gamma_0^{D\dagger}\gamma_0^D = \gamma_0^D \tag{2.32}$$

$$\gamma_i^D\gamma_i^{D\dagger}\gamma_i^D = \gamma_i^D(-\gamma_i^D)\gamma_i^D = \gamma_i^D \tag{2.33}$$

Com sabem, la antiivolució que preserva els vectors és la reversió, per tant $\gamma_0^D\hat{R}^\dagger\gamma_0^D = \gamma_0^D\tilde{\hat{R}}\gamma_0^D$. Si $\hat{R} \in \mathrm{Spin}_{1,3}$, aleshores, $\tilde{R} = R^{-1}$. Així, (2.31) s'escriurà com

$$[\bar{\psi}\hat{R}^{-1}\gamma_\mu^D\hat{R}\psi]\gamma^{D\mu} = [\bar{\psi}\hat{R}^{-1}\gamma_{\mu'}^D\hat{R}\psi]\gamma^{D\mu'}$$

i fent

$$\gamma_{\mu'}^D = \hat{R}\gamma_\mu\hat{R^{-1}}$$
$$\gamma^{D\mu'} = \hat{R}\gamma^\mu\hat{R^{-1}}$$

obtenim

$$[\bar{\psi}\gamma_\mu^D\psi]\hat{R}\gamma^{D\mu}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{\beta}(\psi)\hat{R}^{-1} = \hat{\mathcal{H}}(\hat{R}) \circ \hat{\beta}(\psi)$$

- Espinors algèbrics.

  En aquest cas el bilineal covariant $\hat{J} \in \hat{\mathcal{A}}$ és

$$\hat{\beta}(\hat{\psi}) = \hat{J} = \langle\hat{\psi}\hat{e}_0\tilde{\hat{\psi}}^*\rangle_1$$

De manera senzilla podem comprovar la condició (2.30):

$$\hat{\beta}[\mathcal{L}_{1,3}^{\hat{\mathcal{I}}\otimes\mathbb{C}}(\hat{R},\hat{\psi})] = \langle\hat{R}\hat{\psi}\hat{e}_0\tilde{\hat{\psi}}^*\hat{R}^{-1}\rangle_1 = \hat{R}\langle\hat{\psi}\hat{e}_0\tilde{\hat{\psi}}^*\rangle_1\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{\beta}(\hat{\psi})\hat{R}^{-1}$$

- Espinors operadors per l'esquerra. El bilineal ve definit per:

$$\hat{\beta}(\hat{\psi}) = \hat{J} = \hat{\psi}\hat{e}_0\tilde{\hat{\psi}} \tag{2.34}$$

  i la condició es satisfà, ja que:

$$\hat{\beta}[\mathcal{L}^+_{1,3}(\hat{R},\hat{\psi})] = \hat{R}\hat{\psi}\hat{e}_0\tilde{\hat{\psi}}\hat{R}^{-1} = \hat{R}\hat{\beta}(\hat{\psi})\hat{R}^{-1}$$

2.7 Espinors operadors per la dreta.

Els espinors operadors per la dreta són força diferents als espinors definits anteriorment ja que no encaixen en la definició 2.4. Tot i així, aquests nous espinors es poden presentar partint dels espinors operadors per l'esquerra. Sigui l'aplicació

$$\mathcal{Z} : \mathcal{F} \times \widehat{Cl}^+_{p,q} \longrightarrow \mathcal{F} \times Cl^+_{p,q}; \quad (\Sigma_\sigma, \hat{\psi}) \mapsto (\Sigma_\sigma, \psi) \quad \text{amb} \quad \psi \equiv f_\Sigma^{-1}(\hat{\psi}) \in Cl^+_{p,q}. \tag{2.35}$$

Aquesta aplicació ens porta de la relació d'equivalència $\mathcal{R}_s$, definida (2.15) en l'espai $\mathcal{F} \times \widehat{Cl}^+_{p,q}$, a una de nova, que designarem per $\mathcal{R}_d$, definida en $\mathcal{F} \times Cl^+_{p,q}$:

$$\mathcal{R}_d : (\Sigma_\sigma, \psi) \sim (\Sigma'_\sigma, \psi') \Leftrightarrow \mathcal{R}_s : \mathcal{Z}^{-1}(\Sigma_\sigma, \psi) \sim \mathcal{Z}^{-1}(\Sigma'_\sigma, \psi'). \tag{2.36}$$

De la definició de $\mathcal{Z}$ i $\mathcal{R}_s$ veiem que l'expressió anterior és equivalent a:

$$\mathcal{R}_s : (\Sigma_\sigma, f_\Sigma(\psi)) \sim (\Sigma'_\sigma, f_{\Sigma'}(\psi')) \Leftrightarrow f_{\Sigma'}(R')f_{\Sigma'}(\psi') = f_\Sigma(R)f_\Sigma(\psi). \tag{2.37}$$

Ja que f_Σ és un isomorfisme d'àlgebres tindrem que:

$$f_{\Sigma'}(R'\psi') = f_\Sigma(R\psi) \Leftrightarrow f_\Sigma^{-1} \circ f_{\Sigma'}(R'\psi') = R\psi.$$

Recordant que $f_{\Sigma'} = f_\Sigma \circ \mathcal{H}(RR'^{-1})$ obtenim

$$\mathcal{H}(RR'^{-1})R'\psi' = R\psi \Leftrightarrow \psi'R' = \psi R$$

Aquest resultat ens suggereix la següent definició:

Definició 2.17 *Un espinor operador per la dreta és una classe d'equivalència del conjunt $\mathcal{F} \times Cl^+_{p,q}$ definida per la relació d'equivalència:*

$$\mathcal{R}_d : (\Sigma_\sigma, \psi) \sim (\Sigma'_\sigma, \psi') \Leftrightarrow \psi R = \psi' R' \tag{2.38}$$

on $\Sigma_\sigma = (\Sigma, R)$ i $\Sigma'_\sigma = (\Sigma', R')$.

Aquesta nova definició té diferències bàsiques respecte 2.4. Podem veure que

$$\alpha_d : \mathrm{Spin}^+_{p,q} \times Cl^+_{p,q} \longrightarrow Cl^+_{p,q}; \quad \alpha_d(R,\psi) = \psi R$$

és una representació antiautomòrfica, és a dir,

$$\alpha_d(R_1, \alpha_r(R_2,\psi)) = \alpha_d(R_2 R_1, \psi).$$

Els espinors definits en 2.4, tot i que no és habitual trobar-ho esmentat [16], depenen de la base. Això ho vèiem en (2.15), ja que en ella apareix la funció representació $f_\Sigma(R)$. En canvi, ara veiem que α_d és independent de la base Σ. Remarquem que els espinors operadors per la dreta són una representació de $\mathrm{Spin}^+_{p,q}$ en lloc de $\widehat{\mathrm{Spin}}^+_{p,q}$, és a dir són una representació de les 'rotacions físiques'. Pel que fa als espinors de Pauli i de Dirac les definicions són:

Definició 2.18 *Un espinor operador de Pauli per la dreta és un* $\{3,0\}$*-espinor operador per la dreta.*

Definició 2.19 *Un espinor operador de Dirac per la dreta és un* $\{1,3\}$*-espinor operador per la dreta.*

En les definicions anteriors, $\{3,0\}$ i $\{1,3\}$ indiquen la signatura de l'àlgebra geomètrica emprada.

Estudiem ara els bilineals covariants des de la perspectiva 'fisica' que ofereixen els espinors per la dreta. Tornarem a prendre com exemple el vector densitat de corrent J corresponent a l'espinor de Dirac. Pels espinors operadors per l'esquerra i per la dreta tenim, respectivament:

$$\hat{J} = \hat{\psi}\hat{e}_0\tilde{\hat{\psi}} \quad \mathrm{i} \quad J = \psi e_0 \tilde{\psi}. \tag{2.39}$$

Malgrat la seva semblança, aquestes dues fórmules mostren una diferència essencial. $\hat{J}$ pertany a l'espai genèric $\hat{\mathcal{A}}$ i, juntament amb Σ, forma el representant $(\hat{J},\Sigma)$ del vector densitat de corrent. D'altra banda, J pertany a l'espai vectorial $\mathcal{A}$ i és, en si mateix, el vector densitat de corrent. Coherentment, J no es transforma quan canviem el representant (Σ_σ, ψ) de l'espinor.

En (2.39) el vector e_0 és un vector temporal del sistema Σ. Per tant, canvia quan Σ canvia:

$$e_0' = M(e_0) = \mathcal{H}(R'R^{-1})e_0,$$

on (Σ, R), $(\Sigma', R') \in \mathcal{F}$. D'acord amb la definició 2.17, $\psi \in Cl^+_{1,3}$ canvia com

$$\psi' = \psi R R'^{-1}.$$

Llavors, no és difícil veure que el bilineal J és el mateix per ambdós representants (Σ_σ, ψ) i (Σ'_σ, ψ'), ja que:

$$J' = \psi' e'_0 \tilde{\psi}' = \psi R R'^{-1} R' R^{-1} e_0 R R'^{-1} R' R^{-1} \tilde{\psi} = \psi e_0 \tilde{\psi} = J \tag{2.40}$$

És en aquest cas on es fa més clara la interpretació de l'espinor com l'objecte matemàtic que descriu la relació entre la partícula i l'observador [57, 64].

Per introduir els espinors de Majorana i de Weyl cal considerar [53] el vector densitat d'espín i el bivector densitat de magnetització:

$$\Pi = \eta \gamma_{21} \tilde{\eta}; \quad K = \eta \gamma_3 \tilde{\eta}.$$

Aleshores, les definicions dels espinors de Weyl i Majorana seran:

Definició 2.20 *Un espinor operador de Majorana per la dreta és un element del subconjunt dels $\{1,3\}$-espinor operadors per la dreta que satisfà $K = 0$.*

Definició 2.21 *Un espinor operador de Weyl per la dreta és un element del subconjunt dels $\{1,3\}$-espinor operadors per la dreta que satisfà $\Pi = 0$.*

2.8 L'espinor de Dirac-Hestenes.

Acabem de veure que és en el context dels espinors per la dreta on resulta més clara la interpretació de l'espinor com objecte matemàtic que descriu la relació entre la partícula i l'observador. Sempre a l'espai de Minkowski de signatura -2, anomenarem als espinors definits en 2.19 espinors de Dirac-Hestenes. Altres autors [28, 27] defineixen l'espinor de Hestenes com espinor operador per l'esquerra d'acord, per tant, amb 2.14. Nosaltres, però, considerem que aquesta darrera definició desaprofita la simplicitat conceptual i de càlcul que ofereix l'àlgebra geomètrica. Els espinors de Dirac-Hestenes foren descoberts per David Hestenes l'any 1966 [42] i des d'aleshores ha existit un creixent interès per ells [43, 44, 52, 74, 73].

En la secció 1.8 del primer capítol mostràrem que el càlcul d'observables tant de les partícules com del camp electromagnètic presentaven, si més no, una curiosa similitud. Veurem que pel camp de Dirac aquesta semblança torna a aparèixer.

Degut a la definició 2.19, que es recolza en la 2.17, l'espinor ha estat considerat com una classe d'equivalència de díades (Σ_σ, ψ) de cara a mantenir la covariància dels bilineals. Això es veu de manera molt clara en la secció 2.6 i, també, en l'expressió (2.40). Recordem que el representant de l'espinor no ve definit únicament per ψ, sinó que porta associat un referencial espinorial i, aquest, un observador. D'altra banda, l'observable vector densitat de corrent en funció dels espinors operadors ve definit per (2.39), i.e.,

$$J = \psi e_0 \tilde{\psi} \quad \text{amb} \quad \psi \in Cl^+_{1,3} \tag{2.41}$$

És en aquesta expressió on es fan evidents les similituds esmentades. Fixem-nos que J i els observables definits en la secció 1.8 tenen la mateixa estructura. Podem encara anar més enllà.

Sabem que que el representant ψ del nostre espinor de Dirac-Hestenes pertany a $Cl^+_{1,3}$. Un element de $Cl^+_{1,3}$ sempre es pot escriure com

$$\psi = \sqrt{\rho} R e^{\frac{\beta}{2} e_5} \tag{2.42}$$

on $\rho \in \mathbb{R}^+$, $R \in \mathrm{Spin}^+_{1,3}$ i β és l'angle d'Yvon-Takabayasi [82, 77]. Aquesta és l'anomenada descomposició polar de l'espinor de Dirac-Hestenes i ens permet veure de manera força clara quin és el paper de l'espinor si ens fixem en (2.41). Aquest fa de pont entre el sistema físic sotmès a observació (p. ex. una partícula d'espín $\frac{1}{2}$) i l'observador, descrit aquí pels elements de la seva tètrada $\{e_\mu\}$. La relació entre sistema observat i observador s'efectúa mitjançant una dilatació, una transformació de Lorentz i una rotació de dualitat. La dilatació, relacionada amb la norma espinorial, té a veure amb la densitat de presència i sembla naturalment relacionada amb el factor $\sqrt{m}$ de l'expressió bilineal que donava el quadrimoment d'una partícula. La transformació de Lorentz ho està amb la quadrivelocitat i orientació local associades al camp de Dirac. Finalment, per una interpretació de la rotació de dualitat es requereix trobar una explicació al 'misteriós' angle d'Yvon-Takabayasi. En el proper capítol en proposarem una.

2.9 Espinors interns.

En aquesta secció presentem un altre tipus d'espinor. Aquest, a l'igual que els operadors per la dreta, comparteixen la propietat de generar directament els observables en lloc dels seus representants en un espai genèric. Grosso modo, aquests espinors seran als espinors algèbrics el que els espinors operadors per la dreta eren als operadors per l'esquerra. És a dir, seran elements d'un ideal per l'esquerra de $Cl_{p,q}$ en comptes de ser-ho de l'àlgebra genèrica $\widehat{Cl}_{p,q}$. En la seva definició com a classe d'equivalència no figuren els referencials espinorials. És en la mesura que queden desvinculats dels observadors que hem considerat adequat anomenar-los espinors interns.

Aquests espinors es basen en una curiosa propietat que tenen determinats espinors algèbrics de Dirac. La manera més directa d'obtenir espinors algèbrics de Dirac a partir dels clàssics és a través de l'ideal per l'esquerra minimal generat per l'idempotent primitiu:

$$P = \frac{1}{4}(1+\hat{e}_0)(1+i\hat{e}_{12}); \quad P^2 = P \tag{2.43}$$

Com ja vàrem veure, s'acompleix que: $P\hat{e}_0 = \hat{e}_0 P = P$. Aquesta propietat té importants efectes en la definició dels bilineals ja que l'*operador* $\hat{e}_0$ resultarà absorbit per l'espinor. Els bilineals corresponents als espinors algèbrics vénen donats per:

$$\rho = 4 < \hat{\psi}\hat{e}_0\widetilde{\hat{\psi}} >_0, \quad \hat{J} = 4 < \hat{\psi}\hat{e}_0\widetilde{\hat{\psi}} >_1$$

$$\hat{\Pi} = -4i < \hat{\psi}\hat{e}_0\widetilde{\hat{\psi}} >_2, \quad \hat{K} = -4i\hat{e}_{0123} < \hat{\psi}\hat{e}_0\widetilde{\hat{\psi}} >_3, \quad \hat{\omega} = -4\hat{e}_{0123} < \hat{\psi}\hat{e}_0\widetilde{\hat{\psi}} >_4$$

Combinant adequadament aquests bilineals podem obtenir una única expressió que ens dóna tots els observables, a saber:

$$4\hat{\psi}\hat{e}_0\widetilde{\hat{\psi}} = \rho + \hat{J} + i\hat{\Pi} - i\hat{e}_{0123}\hat{K} + \hat{e}_{0123}\omega \tag{2.44}$$

Quan $\hat{\psi}$ és definit mitjançant l'idempotent (2.43) aleshores, $\hat{\psi} = \hat{\psi}P$ i $\hat{\psi}\hat{e}_0 = \hat{\psi}$, resultant que:

$$4\hat{\psi}\widetilde{\hat{\psi}} = \rho + \hat{J} + i\hat{\Pi} - i\hat{e}_{0123}\hat{K} + \hat{e}_{0123}\omega \tag{2.45}$$

És aquest el punt clau. En $\hat{\psi}\widetilde{\hat{\psi}}$ ha desaparegut la referència explícita a la base, i.e., $\hat{e}_0$. Considerem que aquest resultat no és un mer tecnicisme i que ens permet adoptar un nou punt de vista conceptual.

Abans, però, analitzem el grau de generalitat en la tria d'un idempotent del tipus (2.43). Per fer-ho cal estudiar detalladament el procediment emprat per obtenir l'espinor algèbric a partir del clàssic. En (2.22) posàrem en equivalència

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \hat{\psi}^R = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

on $\hat{\psi}^R = \hat{\mathcal{I}}^R = (\widehat{Cl}_{1,3} \otimes \mathbb{C})\hat{P}^R$. $\hat{P}^R$ és un idempotent primitiu de $\widehat{Cl}_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. Per tal que $\hat{\psi}^R$ quedi representat per (2.46) cal triar una representació matricial adient. Aquesta representació ha estat simbolitzada pel superíndex R. De fet, entre $\mathbb{C}(4)$ i $\widehat{Cl}_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ hi actúa una aplicació lineal que depèn de la representació:

$$h^R(\gamma_\mu^R) = \hat{e}_\mu \quad \text{amb} \quad \hat{e}_\mu \in \widehat{Cl}_{1,3} \otimes \mathbb{C} \tag{2.47}$$

Les representacions unitàries es defineixen com aquelles per les quals, en la signatura -2, les matrius gamma són hermítiques, i.e., $\gamma_\mu^{R\dagger} = \gamma_\mu^R$ o, equivalentment, aquelles que s'obtenen de les matrius de Dirac per una transformació unitària. Aquest tipus de representació fa possible la relació entre els espinors algèbrics expressats matricialment i els representats per un ideal de $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. Considerant ϕ membre d'un ideal de $\mathbb{C}(4)$ i el corresponent ψ en un ideal de $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ la següent relació es vàlida per les representacions matricials unitàries:

$$\bar{\hat{\phi}}\phi = \hat{\phi}^\dagger \gamma_0 \hat{\phi} = 4 < \hat{\psi}^R \hat{e}_0 \widetilde{\hat{\psi}^{R*}} >_0$$

Un canvi de representació unitari $\gamma_\mu^R = U\gamma_\mu^D U^\dagger$ $(UU^\dagger = 1)$ resulta totalment equivalent a la condició

$$\hat{U}^D \hat{e}_0 \widetilde{\hat{U}^{D*}} = \hat{e}_0 \quad \text{on} \quad h^D(U) = \hat{U}^D$$

D'altra banda, els $\hat{e}_0$ que figuren en els bilineals algèbrics es poden absorbir, és a dir $\hat{\psi}^R \hat{e}_0 = \hat{\psi}^R$, si i només si $\hat{P}^R \hat{e}_0 = \hat{P}^R$. Aquest és el cas quan fem ús de l'idempotent (2.43).

Donat un espinor algèbric $\hat{\psi}^R$, procedent d'una determinada representació R, en podem generar d'altres que pertanyen a ideals diferents. Donat un element invertible $\hat{S} \in \widehat{Cl}_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ podem escriure

$$P^{R'} = \hat{S}^{-1} \hat{P}^R \hat{S} \quad \text{on} \quad (P^{R'})^2 = P^{R'}$$

$$\text{o també} \quad \hat{\mathcal{I}}^{R'} \otimes \mathbb{C} = (\hat{\mathcal{I}}^R \otimes \mathbb{C})\hat{S}$$

Ara, podem trobar sota quina condició es mantindran les expressions dels bilineals covariants sense que hi figuri $\hat{e}_0$.

$$4 < \hat{\psi}^R \hat{S} \widetilde{(\hat{\psi}^R \hat{S})^*} >_r = 4 < \hat{\psi}^R S \widetilde{\hat{S}^*} \widetilde{(\hat{\psi}^R)^*} >_r$$

per tant la condició és

$$S\widetilde{\hat{S}^*} = 1. \tag{2.48}$$

Resumint, si hi ha un canvi de representació cal que s'acompleixi:

$$\hat{U}^D \hat{e}_0 \widetilde{\hat{U}^{D*}} = \hat{e}_0 \tag{2.49}$$

i si hi ha un canvi d'ideal:

$$S\widetilde{\hat{S}^*} = 1 \tag{2.50}$$

Considerem $\hat{S} = \hat{U}^D$ com un cas particular d'element invertible. Fem ara,

$$\hat{\psi}^D_{\hat{U}^D} \equiv \hat{\psi}^D \hat{U}^D \quad \text{on} \quad \gamma^R_\mu = U\gamma^D_\mu U^{-1},$$

aleshores, si es satisfà:

$$\hat{U}^D \hat{e}_0 \widetilde{\hat{U}^{D*}} = \hat{e}_0 \quad \text{i} \quad U^D \widetilde{\hat{U}^{D*}} = 1$$

tenim que $\hat{\psi}^D_{\hat{U}^D}$ i $\hat{\psi}^D$ pertanyen al mateix ideal.

Utilitzarem la condició (2.48) per estudiar les transformacions que permeten canviar d'ideal però que no transformen els bilineals. Veiem, efectivament, que podem transformar $\hat{\psi}$ en $\hat{\psi}\hat{R}$ mitjançant $\hat{R} \in \mathrm{Spin}^+_{p,q}$, sense que els bilineals canviïn:

$$(\hat{\psi})(\tilde{\hat{\psi}}) = \hat{\psi}\hat{R}\tilde{\hat{R}}\tilde{\hat{\psi}} = \hat{\psi}\tilde{\hat{\psi}} \quad \text{ja que} \quad \hat{R}\tilde{\hat{R}} = 1 \tag{2.51}$$

En la definició dels espinors algèbrics de Dirac designàrem com espai de representació un ideal minimal $\hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C}$. En el cas que apliquem una transformació com l'anterior, i.e., $\hat{\psi} \mapsto \hat{\psi}' \equiv \hat{\psi}\hat{R}$ veiem que l'element $\hat{\psi}'$ pertany a un altre ideal $\hat{\mathcal{I}}' \otimes \mathbb{C} \equiv (\hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C})\hat{R}$. Cal remarcar que cada ideal defineix un espai diferent d'espinors algèbrics de Dirac. Per tant, el conjunt d'aplicacions:

$$\xi_R : \hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \hat{\mathcal{I}}' \otimes \mathbb{C}; \quad \hat{\psi} \mapsto \hat{\psi}' \equiv \hat{\psi}\hat{R} \tag{2.52}$$

defineix una relació d'equivalència entre elements de diferents ideals, es a dir entre diferents espais de representació d'espinors.

Recordem ara com havíem passat dels espinors operadors per l'esquerra als espinors operadors per la dreta. L'element bàsic fou la introducció de l'aplicació $\mathcal{Z} : \mathcal{F} \times \widehat{Cl}^+_{p,q} \longrightarrow$

$\mathcal{F} \times Cl^+_{p,q}$. Anem a veure quin tipus d'estructura obtenim establint una aplicació anàloga partint dels espinors de Dirac algèbrics. Aquesta aplicació vindrà definida per:

$$\mathcal{Y} : \mathcal{F} \times \hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{F} \times Cl_{p,q} \otimes \mathbb{C}; \quad (\Sigma_\sigma, \hat{\psi}) \mapsto (\Sigma_\sigma, \psi) \quad \text{amb} \quad \psi \equiv f_\Sigma^{-1}(\hat{\psi}). \qquad (2.53)$$

L'espai imatge d'aquesta aplicació $\mathcal{Y}$ que, en general, no podrà restringir-se a un ideal determinat, es pot expressar com:

$$\mathcal{G} \equiv \mathcal{Y}(\mathcal{F} \times \hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C}) = \bigcup_{\Sigma_\sigma} (\Sigma_\sigma, \mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathbb{C}),$$

on

$$\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathbb{C} = f_\Sigma^{-1}(\hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C}) = (Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}) P_\Sigma \quad \text{amb} \quad P_\Sigma = \frac{1}{4}(1 + e_0)(1 + ie_{12}).$$

El conjunt $\mathcal{F} \times \hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C}$ està format per les díades $(\Sigma_\sigma, \hat{\psi})$ on els elements $\hat{\psi}$ pertanyen a un únic ideal minimal per l'esquerra $\hat{\mathcal{I}} \otimes \mathbb{C}$ per a tots els referencials espinorials $\Sigma_\sigma \in \mathcal{F}$. En canvi, el conjunt imatge $\mathcal{G}$ està format per les díades (Σ_σ, ψ) on per cada referencial espinorial tenim un ideal minimal diferent $\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathbb{C}$. Això fa que l'espai de representació $\bigcup_{\Sigma_\sigma} (\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathbb{C})$ no sigui un espai lineal.

Un element $\psi \in \bigcup_{\Sigma_\sigma} (\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathbb{C})$ pertany a un únic $\mathcal{I}_\Sigma \otimes \mathbb{C}$, ja que la unió d'ideals minimals per l'esquerra és disjunta. Per tant, un element ψ determina sense ambigüitat a quin ideal minimal per l'esquerra pertany. Alhora aquest ideal determina l'idempotent primitiu que el genera P_Σ i aquest determina parcialment el referencial espinorial Σ_σ; si s'utilitza l'idempotent (2.43), ψ determina e_0, e_3. Això ens porta a considerar que part de la informació continguda en una díade del tipus $(\Sigma_\sigma, \psi) \in \mathcal{G}$ és redundant.

Seguint l'exposició feta per els espinors operadors per la dreta, podem definir una nova relació d'equivalència $\mathcal{R}_a$ que ve donada per:

$$\mathcal{R}_a : (\Sigma_\sigma, \psi) \sim (\Sigma'_\sigma, \psi') \Leftrightarrow \mathcal{R}_s : \mathcal{Y}^{-1}(\Sigma_\sigma, \psi) \sim (\Sigma'_\sigma, \psi') \Leftrightarrow \psi' R' = \psi R$$

Aleshores tenim que els bilineals es poden escriure com:

$$\rho + J + i\Pi - ie_{0123}K + e_{0123}\omega = f_\Sigma^{-1}(\hat{\rho} + \hat{J} + i\hat{\Pi} - ie_{0123}\hat{K} + e_{0123}\hat{\omega}) = 4 f_\Sigma^{-1}(\hat{\psi}) f_\Sigma^{-1}(\tilde{\hat{\psi}}) = 4\psi\tilde{\psi}.$$

Fixem-nos que l'expressió obtinguda pels observables no precisa de la referència a un *observador* Σ_σ. Això ens permetrà introduir un nou tipus d'espinor on de la díade (Σ_σ, ψ) s'elimina el referencial espinorial Σ_σ.

Si fixem un ideal $\mathcal{I}_{\Sigma_0} \otimes \mathbb{C}$, els seus elements no constitueix una representació del grup spin, tot i que segueixen sent una 'arrel quadrada' dels observables. En canvi, podem veure que per mantenir l'expressió (2.51) no és necessari que R pertanyi al grup spin. De fet, els elements R que acompleixen (2.51) vénen definits per:

$$G = \{R \in Cl_{1,3} \,/\, R\tilde{R} = 1\} \quad \text{amb} \quad \text{Spin}^+_{1,3} \subset G. \tag{2.54}$$

Resulta interessant donar ara dues definicions que habitualment apareixen en contexts propers.

Definició 2.22 *Siguin $\mathcal{I} \otimes \mathbb{C}$ i $\mathcal{I}_0 \otimes \mathbb{C}$ dos ideals minimals per l'esquerra de l'àlgebra $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. Direm que aquests ideals són geomètricament equivalents si i nomes si estan relacionats per una transformació del tipus $\mathcal{I} \otimes \mathbb{C} = (\mathcal{I}_0 \otimes \mathbb{C})R$ amb $R \in Spin^+_{1,3}$.*

Definició 2.23 *Siguin $\mathcal{I} \otimes \mathbb{C}$ i $\mathcal{I}_0 \otimes \mathbb{C}$ dos ideals minimals per l'esquerra de l'àlgebra $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. Direm que aquests ideals són algèbricament equivalents si i nomes si estan relacionats per una transformació del tipus $\mathcal{I} \otimes \mathbb{C} = (\mathcal{I}_0 \otimes \mathbb{C})R$ amb $R \in G \backslash Spin^+_{1,3}$.*

En qualsevol cas, donat $Q \subseteq G$, podem definir:

Definició 2.24 *Un espinor Q-intern és una classe d'equivalència de l'espai $(\mathcal{I}_0 \otimes \mathbb{C})Q$ definida per la següent relació:*

$$\mathcal{R}_i : \psi \sim \psi' \Leftrightarrow \exists R \in Q \quad \textit{tal que} \quad \psi' = \psi R$$

on $(\mathcal{I}_0 \otimes \mathbb{C})Q = \bigcup_{R \in Q} (\mathcal{I}_0 \otimes \mathbb{C})R$.

Apèndix

La intenció d'aquest petit apèndix és la d'exposar alguns detalls tècnics que mostren el funcionament de diverses aplicacions que han estat definides al llarg del capítol. En particular demostrarem que la relació (2.14) és d'equivalència. Pot semblar estranya la tria d'aquesta relació -ja que en el treball ha estat descartada- i no de la relació (2.15). La raó és que la demostració de (2.15) és quasi immediata, mentre que la relació triada dóna més joc i permet mostrar el funcionament de diverses eines.

Així doncs, volem veure que

$$(\Sigma, \psi) \sim (\Sigma', \psi') \Leftrightarrow \exists R \in \text{Spin}(\mathcal{A}), \text{ tal que } \Sigma' = \mathcal{H}(R)\Sigma \text{ i } \psi = \alpha(f_\Sigma(R), \psi') \qquad (2.55)$$

és una relació d'equivalència.

Sigui $\mathcal{B}_0 \times S$ un conjunt i $\sim$ una relació entre els seus elements, $\sim \subset (\mathcal{B}_0 \times S) \times (\mathcal{B}_0 \times S)$. Direm que $\sim$ és una relació d'equivalència definida en $\mathcal{B}_0 \times S$ si:

- És reflexiva:

$$\forall (\Sigma, \psi) \in \mathcal{B}_0 \times S \Rightarrow (\Sigma, \psi) \sim (\Sigma, \psi).$$

  La demostració es fa evident fent $R = 1$.

- És simètrica:

$$\text{Si}(\Sigma, \psi) \sim (\Sigma', \psi') \Rightarrow (\Sigma', \psi') \sim (\Sigma, \psi) \quad \forall (\Sigma, \psi), (\Sigma', \psi') \in \mathcal{B}_0 \times S.$$

  La demostració és immediata renombrant $\Sigma \leftrightarrow \Sigma'$ i $\psi \leftrightarrow \psi'$.

- És transitiva:

$$\begin{aligned} \text{Si } (\Sigma, \psi) \sim (\Sigma', \psi') \text{ i } (\Sigma', \psi') \sim (\Sigma'', \psi'') \Rightarrow (\Sigma, \psi) \sim (\Sigma'', \psi'') \\ \forall (\Sigma, \psi), (\Sigma', \psi'), (\Sigma'', \psi'') \in \mathcal{B}_0 \times S. \end{aligned}$$

  La demostració d'aquesta propietat presenta certs detalls interessant. De l'enunciat de la suposada relació d'equivalència tenim:

$$(\Sigma, \psi) \sim (\Sigma', \psi') \Leftrightarrow \exists R_1 \in \text{Spin}(\mathcal{A}), \text{ tal que } \Sigma' = \mathcal{H}(R_1)\Sigma \text{ i } \psi = \alpha(f_\Sigma(R_1), \psi'),$$

$$(\Sigma', \psi') \sim (\Sigma'', \psi'') \Leftrightarrow \exists R_2 \in \text{Spin}(\mathcal{A}), \text{ tal que } \Sigma'' = \mathcal{H}(R_2)\Sigma \text{ i } \psi' = \alpha(f_{\Sigma'}(R_2), \psi'')$$

i s'haurà de complir que:

$$(\Sigma, \psi) \sim (\Sigma'', \psi'') \Leftrightarrow \exists R_3 \in \text{Spin}(\mathcal{A}), \text{ tal que } \Sigma'' = \mathcal{H}(R_3)\Sigma' \text{ i } \psi = \alpha(f_\Sigma(R_3), \psi'')$$

Vegem, primer, quina forma ha de tenir R_3:

$$\Sigma'' = \mathcal{H}(R_2)\Sigma' = \mathcal{H}(R_2)\mathcal{H}(R_1)\Sigma = \mathcal{H}(R_2R_1)\Sigma,$$

per tant

$$R_3 = R_2R_1.$$

D'altra banda, sabem que:

$$\begin{aligned} \psi = \alpha(f_\Sigma(R_1), \psi') = \alpha(f_\Sigma(R_1), \alpha(f_{\Sigma'}(R_2), \psi'')) = \\ = \alpha(f_\Sigma(R_1)f_{\Sigma'}(R_2), \psi'') = \alpha(f_\Sigma(R_1)f_\Sigma[M^{-1}_{\Sigma\Sigma'}(R_2)], \psi'') \end{aligned} \tag{2.56}$$

on la relació $f'_\Sigma(R_2) = f_\Sigma[M^{-1}_{\Sigma\Sigma'}(R_2)]$ ha estat extreta de (2.6). El subíndex $\Sigma\Sigma'$ ens indica que M és la transformació que ens porta de Σ a Σ'. Aquesta transformació es pot representar per l'endomorfisme $\mathcal{H}(R_1) \in \text{SO}(\mathcal{A})$ de forma que (2.56) quedarà:

$$\begin{aligned} \alpha(f_\Sigma(R_1)f_\Sigma[\mathcal{H}^{-1}(R_1)R_2], \psi'') = \alpha(f_\Sigma(R_1)f_\Sigma(R_1^{-1}R_2R_1), \psi'') = \\ = \alpha(f_\Sigma(R_2R_1), \psi'') = \alpha(f_\Sigma(R_3), \psi'') \end{aligned}$$

demostrant la propietat transitiva.

Capítol 3

De l'electró al positró.

3.1 Del lagrangià de Dirac a l'equació de Dirac-Hestenes.

Des d'una perspectiva estrictament matemàtica, i en el marc d'una teoria clàssica de camps, considerem la densitat lagrangiana del camp de Dirac [69]

$$\mathcal{L}_D = \frac{i}{2}(\bar{\varphi}\gamma^\mu\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\bar{\varphi}\gamma^\mu\varphi) - q\,\bar{\varphi}A_\mu\gamma^\mu\varphi - m\bar{\varphi}\varphi \tag{3.1}$$

on $q\,\bar{\varphi}A_\mu\gamma^\mu\varphi$ és el terme d'interacció electromagnètica, q és la càrrega elèctrica de la partícula ($q < 0$ per l'electró) i m la massa en repòs d'aquesta. L'espai de representació emprat pels espinors del lagrangià anterior és $\mathbb{C}^4$. Seguint les definicions donades en el capítol anterior, estem tractant amb espinors de Dirac clàssics. Evidentment, la dinàmica que es deriva del lagrangià és independent de l'espai lineal on són representats els espinors. Tot i així, l'expressió explícita del lagrangià dependrà de l'espai de representació.

Hem vist que l'espinor de Dirac-Hestenes és el que sembla mostrar de manera més clara el contingut geomètric de la funció d'ona espinorial. Així doncs, sembla interessant escriure l'equació de Dirac utilitzant $Cl^+_{1,3}$ com espai de representació pels espinors. Aquesta idea fou portada a terme, per primer cop, per David Hestenes [42]. En aquesta secció arribarem als mateixos resultats, però partint del lagrangià 3.1. El procés que seguirem és similar al de la secció 2.5 quan estudiàrem els bilineals covariants. L'espinor $\varphi \in \mathbb{C}^4$ del lagrangià pot incloure's en $\mathbb{C}(4)$ fent, per exemple:

$$\varphi \longrightarrow \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

on ara ψ pertany a un ideal minimal per l'esquerra $\mathbb{C}(4)f$ i on f és un idempotent matricial. L'isomorfisme $\mathbb{C}(4) \simeq Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ ens permetrà escriure el lagrangià fent ús de l'àlgebra geomètrica complexificada. Utilitzarem dos dels resultats del capítol anterior:

- El càlcul de la traça d'un element de $\mathbb{C}(4)$ és equivalent a la projecció d'ordre zero (part escalar) de l'element corresponent en $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$.
- El conjugat hermític $\varphi^\dagger$ de $\varphi \in \mathbb{C}^4$ correspon a $e_0\widetilde{\Psi^*}e_0$ amb $\Psi \in Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$.

Per tal d'escriure el lagrangià en $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ començarem per transformar el terme cinètic:

$$\frac{i}{2}(\bar{\varphi}\gamma^\mu\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\bar{\varphi}\gamma^\mu\varphi) = \frac{i}{2}\mathrm{tr}[\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi] \quad \text{amb} \quad \psi \in \mathbb{C}(4)$$

En $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ quedarà:

$$\frac{4i}{2} < e_0\widetilde{\Psi^*}e^\mu\partial_\mu\Psi - \partial_\mu(e_0\widetilde{\Psi^*})e^\mu\Psi >_0 = 2i[< e_0\widetilde{\Psi^*}e^\mu\partial_\mu\Psi >_0 - < \partial_\mu\widetilde{\Psi^*}e^\mu\Psi e_0 >_0] =$$
$$2i[< e_0\widetilde{\Psi^*}e^\mu\partial_\mu >_0 - < \beta[(e_0\widetilde{\Psi^*}e^\mu\partial_\mu)^*] >_0 .$$

On recordem que β és una segona notació per a la reversió. Si $A \in Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ aleshores

$$< A >_0 + < \widetilde{A^*} >_0 = 2\mathrm{Re}\{< A >_0\}$$

$$< A >_0 - < \widetilde{A^*} >_0 = 2\mathrm{Im}\{< A >_0\}i$$

per tant el terme cinètic pot escriure's com:

$$4i\mathrm{Im}\{< e_0\widetilde{\Psi^*}e^\mu\partial_\mu\Psi\}i = -4\mathrm{Im}\{< e^\mu\partial_\mu\psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_0\}.$$

Per el terme electromagnètic tindrem:

$$q\,\bar{\varphi}A_\mu\gamma^\mu\varphi = q\,\mathrm{tr}\{\bar{\psi}A_\mu\gamma^\mu\psi\} = 4q < e_0\widetilde{\Psi^*}A_\mu e^\mu\Psi >_0 = 4q < A_\mu e^\mu\Psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_0 .$$

I per el terme de massa:

$$m\bar{\varphi}\varphi = m\mathrm{tr}\{\bar{\psi}\psi\} = 4m < e_0\widetilde{\Psi^*}\Psi >_0 = 4m < \Psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_0$$

Així, el lagrangià de Dirac en $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ s'escriurà com:

$$\mathcal{L}_D = -4\mathrm{Im}\{< e^\mu\partial_\mu\Psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_0\} - 4q < A_\mu e^\mu\Psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_0 -4m < \Psi e_0\widetilde{\Psi^*} >_0 \qquad (3.3)$$

L'espinor algèbric Ψ pertany a un ideal minimal per l'esquerra de $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. Aquest tipus d'ideal, com hem vist en el capítol anterior i en l'apèndix A, és generat per un idempotent primitiu. Per obtenir l'equació que Hestenes trobà cal utilitzar l'idempotent, associat a la representació dita de Dirac,

$$P = \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12}).$$

Així doncs, $\Psi = \Psi P$ i, per tant, $\Psi \in (Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C})P$. Ja vàrem veure en la secció 2.5 que:

$$\Psi = \eta P \quad \text{on} \quad \eta \in Cl^+_{1,3}$$

on és clar que $\widetilde{\eta^*} = \tilde{\eta}$. Substituint en el lagrangià, i tenint en compte que $\widetilde{P^*} = P$ obtindrem:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= -4\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu (\eta P) e_0 \widetilde{(\eta P)^*} >_0 - 4q < A_\mu e^\mu (\eta P) e_0 \widetilde{(\eta P)^*} >_0 - 4m < \eta P e_0 \widetilde{(\eta P)^*} >_0 = \\ &= -4\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu \eta P e_0 P \tilde{\eta} >_0\} - 4q < A_\mu e^\mu \eta P e_0 P \tilde{\eta} >_0 - 4m < \eta P e_0 P \tilde{\eta} >_0\end{aligned}$$

ja que $Pe_0 = P$ i que $P^2 = P$. Explicitant l'idempotent P tenim pel lagrangià:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= -4\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu \eta \frac{1}{2}(1 + e_0)(1 + ie_{12})\tilde{\eta} >_0\} - 4q < A_\mu e^\mu \eta \frac{1}{2}(1 + e_0)(1 + ie_{12})\tilde{\eta} >_0 \\ &\quad - 4m < \eta \frac{1}{2}(1 + e_0)(1 + ie_{12})\tilde{\eta} >_0 = \\ &= -\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu \eta \tilde{\eta} + e^\mu \partial_\mu \eta i e_{12} \tilde{\eta} + e^\mu \partial_\mu \eta e_0 \tilde{\eta} + e^\mu \partial_\mu \eta i e_{012} \tilde{\eta} >_0\} \\ &\quad - q < A_\mu e^\mu \eta \tilde{\eta} + A_\mu e^\mu \eta i e_{12} \tilde{\eta} + A_\mu e^\mu \eta e_0 \tilde{\eta} + A_\mu e^\mu \eta i e_{012} \tilde{\eta} >_0 \\ &\quad - m < \eta \tilde{\eta} + \eta i e_{12} \tilde{\eta} + \eta e_0 \tilde{\eta} + \eta i e_{012} \tilde{\eta} >_0\end{aligned} \tag{3.4}$$

El primer sumand de l'última igualtat és una projecció sobre els imaginaris purs. Per tant els termes que hi contribueixen són:

$$< e^\mu \partial_\mu \eta e_{12} \tilde{\eta} + e^\mu \partial_\mu \eta e_{012} \tilde{\eta} >_0 .$$

La projecció sobre la part escalar redueix l'expressió anterior a:

$$< e^\mu \partial_\mu \eta e_{012} \tilde{\eta} >_0 ,$$

ja que $\eta \in Cl_{1,3}$.

De la mateixa manera, pel segon i tercer terme de (3.4) tenim:

$$< A_\mu e^\mu \eta e_0 \tilde{\eta} >_0 , \quad < \eta\tilde{\eta} >_0$$

El lagrangià escrit en termes de l'espinor de Dirac-Hestenes quedarà:

$$\mathcal{L}_D = - < \partial\eta e_{012}\tilde{\eta} >_0 - q < A\eta e_0\tilde{\eta} >_0 - m < \eta\tilde{\eta} >_0 \tag{3.5}$$

on $A \equiv A_\mu e^\mu$ és el potencial electromagnètic i hem designat l'operador ∇ de l'espai de Minkowski com $\partial \equiv e^\mu \partial_\mu$, seguint la notació més estesa en aquest camp.

Per obtenir la dinàmica del camp espinorial de Dirac-Hestenes cal utilitzar l'equació d'Euler-Lagrangre. El desenvolupament del formalisme lagrangià en teories de camps dins del context multivectorial pot trobar-se descrit a [80, 51, 28, 74, 60]. D'aquests treballs, importem la següent equació d'Euler-Lagrange pel lagrangià de Dirac-Hestenes:

$$\partial_\eta \mathcal{L}_D - (\partial_{\partial\eta}\mathcal{L}_D)\overleftarrow{\partial} = 0 \tag{3.6}$$

on $\overleftarrow{\partial}$ ens indica que l'operador nabla deriva per l'esquerra i multiplica vectorialment per la dreta a $(\partial_{\partial\eta}\mathcal{L}_D)$. El resultat de l'aplicació de les derivades funcionals és:

$$\partial_\eta \mathcal{L}_D = -qAe_0\tilde{\eta} - m\tilde{\eta}$$

$$\partial_{\partial\eta}\mathcal{L}_D = -e_{012}\tilde{\eta}$$

per tant, l'equació (3.6) passa a escriure's:

$$-qAe_0\tilde{\eta} - m\tilde{\eta} + e_{012}\tilde{\eta}\overleftarrow{\partial} = 0.$$

Aplicant ara la reversió i multiplicant per la dreta per e_0 obtenim l'equació de Dirac-Hestenes:

$$\partial\eta e_{21} - qA\eta - m\eta e_0 = 0. \tag{3.7}$$

La conjugació de càrrega en el formalisme de Hestenes es pot definir com:

$$\mathcal{C}(\eta) = \eta e_{01}$$

ja que, multiplicant per l'esquerra de (3.7) per l'element e_{01} obtenim l'equació per una partícula amb càrrega oposada:

$$\partial(\eta e_{01})e_{21} + q\,A(\eta e_{01}) - m(\eta e_{01})e_0 = 0. \tag{3.8}$$

Estudiem ara certes característiques de les solucions de l'equació (3.7) pel cas lliure ($A = 0$) d'una partícula carregada d'espín $\frac{1}{2}$ amb un moment p que apunta en el sentit positiu de l'eix z.

$$\eta_{\uparrow}^{+} = N(1 - k\, e_{03})\, \exp(e_{12}\,\varphi) \tag{3.9}$$

$$\eta_{\downarrow}^{+} = N(e_{31} - k\, e_{01})\, \exp(e_{12}\,\varphi) \tag{3.10}$$

$$\eta_{\uparrow}^{-} = N(k - e_{03})\, \exp(e_{21}\,\varphi) \tag{3.11}$$

$$\eta_{\downarrow}^{-} = N(k\, e_{13} - e_{01})\, \exp(e_{21}\,\varphi) \tag{3.12}$$

on $N = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$ és un factor de normalització, $k = \frac{p}{E+m}$ on E és l'energia de la partícula i $\varphi = (Et - pz)$ on t i z son variables de temps i espai. Pot comprovar-se, fent la correspondència $e_\mu \to \gamma_\mu$, que aquestes solucions són idèntiques a les obtingudes en la representació matricial de Dirac [39]. Les solucions d'energia positiva (negativa) han estat etiquetades amb signe $+$ ($-$) i les solucions amb spin up (down) per $\uparrow$ ($\downarrow$).

3.2 Interpretació vectorial de l'equació de Dirac-Hestenes.

En aquesta secció estudiarem el treball de Parra [57, 64, 32] on mitjançant una reformulació purament vectorial de l'equació de Dirac, inspirada en les idees de Darwin [22], obté quatre equacions d'evolució per a quatres espinors diferents.

Sigui l'equació de Dirac[1] en la seva forma més coneguda [6]:

$$(i\hbar\, \gamma^\mu \partial_\mu + qc\, \gamma^\mu A^\mu - mc)\Psi = 0 \tag{3.13}$$

on Ψ pertany a l'espai de representació $\mathbb{C}^4$, és a dir, pren la forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \\ e + if \\ g + ih \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

L'equació (3.13) es pot descompondre en un conjunt de vuit equacions diferencials

[1]Per qüestions que mostrarem més endavant, aquest no normalitzarem les constants $\hbar$ i c.

fortament acoblades:

$$\mathrm{mc}\, a + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\,\phi\, a - A^1 g - A^2 h - A^3 e) + \hbar\,(+\partial_0 b + \partial_1 h - \partial_2 g + \partial_3 f) = 0 \tag{3.15}$$
$$\mathrm{mc}\, b + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\,\phi\, b - A^1 h + A^2 g - A^3 f) + \hbar\,(-\partial_0 a - \partial_1 g - \partial_2 h - \partial_3 e) = 0 \tag{3.16}$$
$$\mathrm{mc}\, c + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\,\phi\, c - A^1 e + A^2 f + A^3 g) + \hbar\,(+\partial_0 d + \partial_1 f + \partial_2 e - \partial_3 h) = 0 \tag{3.17}$$
$$\mathrm{mc}\, d + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\,\phi\, d - A^1 f - A^2 e + A^3 h) + \hbar\,(-\partial_0 c - \partial_1 e + \partial_2 f + \partial_3 g) = 0 \tag{3.18}$$
$$\mathrm{mc}\, e + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\,\phi\, e + A^1 c + A^2 d + A^3 a) + \hbar\,(-\partial_0 f - \partial_1 d + \partial_2 c - \partial_3 b) = 0 \tag{3.19}$$
$$\mathrm{mc}\, f + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\,\phi\, f + A^1 d - A^2 c + A^3 b) + \hbar\,(+\partial_0 e + \partial_1 c + \partial_2 d + \partial_3 a) = 0 \tag{3.20}$$
$$\mathrm{mc}\, g + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\,\phi\, g + A^1 a - A^2 b - A^3 c) + \hbar\,(-\partial_0 h - \partial_1 b - \partial_2 a + \partial_3 d) = 0 \tag{3.21}$$
$$\mathrm{mc}\, h + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\,\phi\, h + A^1 b + A^2 a - A^3 d) + \hbar\,(+\partial_0 g + \partial_1 a - \partial_2 b - \partial_3 c) = 0 \tag{3.22}$$

Fixant-nos en la primera de les equacions, i amb l'ànim de donar sentit a aquest sistema, proposem que les quantitats reals g, h i e representin en forma cartesiana el vector $\mathbf{E} = (g, h, e)$, que així entra en producte escalar amb el potencial vector. Coherentment la variable a haurà de ser un escalar. L'equació (3.20) presenta una dependència similar en el conjunt de variables f, d, c, b encara no interpretades. Això suggereix que els termes d, $-c$ i b formen un segon vector $\mathbf{B} = (d, -c, b)$ i f ha d'interpretar-se com un escalar. Dues equacions han estat suficients per fixar el possible caràcter geomètric, sota rotacions, dels vuit graus de llibertat reals de l'espinor de Dirac. Que les altres sis equacions respectin aquesta assignació no ens sembla pugui considerar-se fruit de l'atzar.

Amb tot, altres assignacions obtingudes a partir d'una tria diferent de parelles 'complementàries' resulten igualment coherents, conduint a sistemes d'equacions similars encara que no idèntics:

$$(3.15)\ \text{i}\ (3.20) \begin{cases} \text{Escalars: } a, f \\ \mathbf{E} = (g, h, e) \\ \mathbf{B} = (d, -c, b) \end{cases} \quad \text{Opció}\,\{0\}$$

$$(3.17)\ \text{i}\ (3.22) \begin{cases} \text{Escalars: } c, h \\ \mathbf{E} = (e, -f, g) \\ \mathbf{B} = (b, a, -d) \end{cases} \quad \text{Opció}\,\{2\}$$

$$(3.18)\text{ i }(3.21)\begin{cases}\text{Escalars: } d, g \\ \mathbf{E} = (f, e, -h) \quad \text{Opció}\,\{1\} \\ \mathbf{B} = (a, -b, -c)\end{cases}$$

$$(3.16)\text{ i }(3.19)\begin{cases}\text{Escalars: } b, e \\ \mathbf{E} = (h, -g, f) \quad \text{Opció}\,\{3\} \\ \mathbf{B} = (c, d, a)\end{cases}$$

Anomenant els dos escalars α i λ, i d'acord amb les quatre opcions anteriors, podem escriure l'espinor de Dirac (3.14) de les quatre formes següents:

$$\Psi_{\{0\}} = \begin{pmatrix} \alpha + iB_3 \\ -B_2 + iB_1 \\ E_3 + i\lambda \\ E_1 + iE_2 \end{pmatrix} \qquad \Psi_{\{2\}} = \begin{pmatrix} B_2 + iB_1 \\ \alpha - iB_3 \\ E_1 - iE_2 \\ -E_3 + i\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{\{3\}} = \begin{pmatrix} E_3 + i\lambda \\ E_1 + iE_2 \\ \alpha + iB_3 \\ -B_2 + iB_1 \end{pmatrix} \qquad \Psi_{\{1\}} = \begin{pmatrix} E_1 - iE_2 \\ -E_3 + i\lambda \\ B_2 + iB_1 \\ \alpha - iB_3 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Treballarem de moment amb l'opció $\{0\}$. Amb el corresponent canvi de nom les equacions (3.15-3.22) s'han transformat en:

$$\mathrm{mc}\,\alpha + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(\alpha\,\phi\; - \mathbf{A}\cdot\mathbf{E}) + \hbar\,((\mathrm{grad}\,\lambda)_3 + \dot{B}_3 + (\mathrm{curl}\,\mathbf{E})_3) = 0$$

$$\mathrm{mc}\,\lambda + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\lambda\,\phi\; + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + \hbar\,((\mathrm{grad}\,\alpha)_3 + \dot{E}_3 - (\mathrm{curl}\,\mathbf{B})_3) = 0$$

$$\mathrm{mc}\,E_1 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\phi E_1 + \alpha A^1 - (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1) + \hbar(-\dot{E}_2 - \partial_2\alpha + (\mathrm{curl}\,\mathbf{B})_2) = 0$$

$$\mathrm{mc}\,E_2 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\phi E_2 + \alpha A^2 - (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_2) + \hbar(+\dot{E}_1 + \partial_1\alpha - (\mathrm{curl}\,\mathbf{B})_1) = 0$$

$$\mathrm{mc}\,E_3 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\phi E_3 + \alpha A^3 - (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_3) + \hbar(-\dot{\lambda} - \mathrm{div}\mathbf{B}) = 0$$

$$\mathrm{mc}\, B_1 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\phi B_1 - \lambda A^1 - (\mathbf{A}\times\mathbf{E})_1) + \hbar(+\dot{B}_2 + \partial_2\lambda + (\mathrm{curl}\,\mathbf{E})_2) = 0$$

$$\mathrm{mc}\, B_2 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\phi B_2 - \lambda A^2 - (\mathbf{A}\times\mathbf{E})_2) + \hbar(-\dot{B}_1 - \partial_1\lambda - (\mathrm{curl}\,\mathbf{E})_1) = 0$$

$$\mathrm{mc}\, B_3 + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\phi B_3 - \lambda A^3 - (\mathbf{A}\times\mathbf{E})_3) + \hbar(-\dot{\alpha} - \mathrm{div}\mathbf{E}) = 0. \tag{3.24}$$

Tot i que aquestes equacions mostren certa simetria, clarament no són invariants sota rotacions. Una manera d'aconseguir-ho és substituir l'escalar $\hbar$ per $\hbar\hat{n}$ on $\hat{n} = (0,0,1)$. Així les vuit equacions (3.24) es converteixen en dues escalars i dues vectorials:

$$\mathrm{mc}\,\alpha + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(\alpha\,\phi\ - \mathbf{A}\cdot\mathbf{E}) + \hbar\,(\mathrm{grad}\,\lambda + \dot{\mathbf{B}} + \mathrm{curl}\,\mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$$

$$\mathrm{mc}\,\lambda + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\lambda\,\phi\ + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) + \hbar\,(\mathrm{grad}\,\alpha + \dot{\mathbf{E}} - \mathrm{curl}\,\mathbf{B})\cdot\hat{\mathbf{n}} = 0$$

$$\mathrm{mc}\,\mathbf{E} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(-\phi\mathbf{E} + \alpha\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\mathbf{B}) - \hbar((\dot{\lambda} + \mathrm{div}\mathbf{B})\hat{\mathbf{n}} + (\mathrm{grad}\alpha + \dot{\mathbf{E}} - \mathrm{curl}\,\mathbf{B})\times\hat{\mathbf{n}}) = 0$$

$$\mathrm{mc}\,\mathbf{B} + \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{c}}\,(+\phi\mathbf{B} - \lambda\mathbf{A} - \mathbf{A}\times\mathbf{E}) - \hbar((\dot{\alpha} + \mathrm{div}\mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} - (\mathrm{grad}\lambda + \dot{\mathbf{B}} + \mathrm{curl}\,\mathbf{E})\times\hat{\mathbf{n}}) = 0 \tag{3.25}$$

Val a dir que aquestes equacions són les mateixes que (3.24). Simplement, l'exigència de simetria sota rotacions ha tret a la llum la interpretació vectorial de $\hbar$, és a dir, el vector d'espín. Podem anar encara més enllà. En el context de l'àlgebra geomètrica de l'espai temps $Cl_{1,3}$ i, per tant, en un context de simetria més ampli, podem escriure[2] les equacions (3.25) com una única equació multivectorial que no és altra que la de Dirac-Hestenes (3.7):

$$\hbar(\partial\eta_{\{0\}})\,e_{12} + \frac{q}{c}A\,\eta_{\{0\}} + mc\,\eta_{\{0\}}e_0 = 0 \tag{3.26}$$

on $\eta_{\{0\}} \in Cl^+_{1,3}$ de forma que:

$$\eta_{\{0\}} = \alpha + E_1\,e_{01} + E_2\,e_{02} + E_3\,e_{03} + B_1\,e_{23} + B_2\,e_{31} + B_3\,e_{12} + \lambda e_{0123}$$

[2]En el treball de Parra [57, 64] s'ofereix una discussió detallada.

Arribem així a l'equació de Dirac-Hestenes .

Fins aquí només hem desenvolupat les conseqüències de la proposta $\{0\}$ d'interpretació geomètrica de l'espinor. Seguint un procés idèntic a l'anterior per les altres opcions obtenim:

$$\text{Opció } \{0\} \qquad \hbar(\partial\eta_{\{0\}})\, e_{21} - \frac{q}{c} A\, \eta_{\{0\}} - mc\, \eta_{\{0\}} e_0 = 0$$

$$\text{Opció } \{1\} \qquad \hbar(\partial\eta_{\{1\}}) e_{21} + \frac{q}{c} A \eta_{\{1\}} - mc\, \eta_{\{1\}} e_0 = 0$$

$$\text{Opció } \{2\} \qquad \hbar(\partial\eta_{\{2\}})\, e_{12} - \frac{q}{c} A\, \eta_{\{2\}} - mc\, \eta_{\{2\}} e_0 = 0$$

$$\text{Opció } \{3\} \qquad \hbar(\partial\eta_{\{3\}})\, e_{12} + \frac{q}{c} A\, \eta_{\{3\}} - mc\, \eta_{\{3\}} e_0 = 0 \tag{3.27}$$

Veiem que les equacions $\{0\}$ i $\{1\}$ són idèntiques llevat, òbviament de l'espinor, i d'un signe associat a la càrrega. La mateixa diferència mostren $\{2\}$ i $\{3\}$. D'altra banda, les equacions $\{0\}$ i $\{2\}$ es diferencien en l'orientació del bivector e_{12}, associat al pla d'espín. La mateixa diferència mostren $\{1\}$ i $\{3\}$.

Així doncs, el procés de forçar una interpretació de l'equació matricial de Dirac en el marc vectorial-geomètric de l'espai de Minkowski ens ha conduït a, com a mínim, quatre equacions multivectorials. La diferència en el signe de la càrrega de les equacions $\{0\}$ i $\{1\}$ ens fa evident que l'equació matricial de Dirac conté ocultes equacions diferents per a l'electró i el positró.

Sense entrar en detalls considerem que una interpretació física completa d'una solució de l'equació matricial requereix posar-la en relació amb una o més de les opcions exposades.

3.3 De l'electró al positró a través de l'estructura algèbrica dels ideals

En la primera secció hem partit del lagrangià de Dirac i hem obtingut l'equació de Dirac-Hestenes definida sobre un espinor operacional que pertany a l'àlgebra geomètrica de l'espaitemps. En el procés de definició de l'espinor algèbric tingué un paper especial la tria de l'idempotent

$$P = \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + i\, e_{12}) \tag{3.28}$$

En aquesta secció estudiarem, seguint el mètode lagrangià, alternatives a l'equació de Dirac-Hestenes.

Partim del lagrangià (3.3), ja que en aquest punt encara no s'havia escollit l'idempotent que connectava els espinors algèbrics matricials amb els algèbrics de Clifford. Així doncs, considerem:

$$\mathcal{L}_D = -4\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu \Psi e_0 \widetilde{\Psi^*} >_0\} - 4q < A_\mu e^\mu \Psi e_0 \widetilde{\Psi^*} >_0 -4m < \Psi e_0 \widetilde{\Psi^*} >_0 \tag{3.29}$$

La nostra proposta es basa en partir de la següent família d'idempotents:

$$f(\beta_0, R_0) = \frac{1}{2}(1 + e^{-\beta_0 e_5} e_0)\frac{1}{2}(1 + R_0 i e_{12}) \tag{3.30}$$

on

$$R_0 \equiv e^{e_{23}\frac{\delta}{2}} e^{e_{31}\theta} e^{e_{23}\frac{\delta}{2}} \quad \text{i} \quad e_5 = e_{0123}.$$

Amb un càlcul senzill pot veure's que $f^2(\beta_0, R_0) = f(\beta_0, R_0) \equiv f$. Emprant aquest idempotent, el lagrangià (3.29) es converteix en la família de lagrangians $\mathcal{L}_D(\beta_0, R_0)$. De fet, els mateixos espinors algèbrics, en representar-se en un ideal minimal per l'esquerra de l'àlgebra generat per un idempotent, dependran de l'idempotent triat:

$$\mathcal{L}_D = -4\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu (\Psi f) e_0 \widetilde{(\Psi f)^*} >_0 -4q < A_\mu e^\mu (\Psi f) e_0 \widetilde{(\Psi f)^*} >_0 -4m < \Psi f e_0 \widetilde{(\Psi f)^*} >_0 . \tag{3.31}$$

Sabent que $e^{-\beta_0 e_5} e_0 f = R_0 i e_{12} f = f$, i seguint la tècnica usada en la secció 2.5 del capítol anterior, veiem que:

$$\Psi\, f(\beta, R_0) = \eta\, f(\beta, R_0) \quad \text{on} \quad \eta \in Cl^+_{1,3}.$$

L'establiment d'aquesta igualtat resulta possible gràcies a l'estructura particular del conjunt d'idempotents triats[3]. A partir d'ella podem establir contacte amb la secció anterior, ja que si descrivim η per

$$\eta = \alpha + E_1\, e_{01} + E_2\, e_{02} + E_3\, e_{03} + B_1\, e_{23} + B_2\, e_{31} + B_3\, e_{12} + \lambda e_{0123}$$

[3]El que resulta rellevant és la paritat dels termes que hi figuren; en el proper capítol estudiarem aquesta qüestió en detall.

i busquem la seva expressió matricial en la representació de Dirac, de $\Psi(2\pi, 1)$ obtenim:

$$\Psi(2\pi,1) = \begin{pmatrix} \alpha + i\,B_3 & 0 & 0 & 0 \\ -B_2 + i\,B_1 & 0 & 0 & 0 \\ E_3 + i\,\lambda & 0 & 0 & 0 \\ E_1 + i\,E_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

espinor que correspon a l'opció $\{0\}$ de la secció anterior. De manera anàloga trobem:

$$\text{Opció}\,\{1\} \quad \Psi(\pi,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E_1 - i\,E_2 \\ 0 & 0 & 0 & -E_3 + i\,\lambda \\ 0 & 0 & 0 & B_2 + i\,B_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - i\,B_3 \end{pmatrix},$$

$$\text{Opció}\,\{2\} \quad \Psi(2\pi,-1) = \begin{pmatrix} 0 & B_2 + i\,B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - i\,B_3 & 0 & 0 \\ 0 & E_1 - i\,E_2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_3 + i\,\lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Opció}\,\{3\} \quad \Psi(\pi,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_3 + i\,\lambda & 0 \\ 0 & 0 & E_1 + i\,E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + i\,B_3 & 0 \\ 0 & 0 & -B_2 + i\,B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vist això, estudiem quina és la família d'equacions que es deriva de (3.31). Per fer-ho, vegem primer que:

$$\eta f e_0 \widetilde{(\eta f)}^* = \eta f e_0 \tilde{\eta}. \tag{3.33}$$

Això és cert ja que:

$$\tilde{f}^* = \frac{1}{2}(1 + e^{\beta e_5} e_0)\frac{1}{2}(1 + i e_{12}\tilde{R}_0) = \frac{1}{2}(1 + e^{\beta e_5} e_0)\frac{1}{2}(1 + iR_0 e_{12}) \tag{3.34}$$

$$e_0\tilde{f}^* = \frac{1}{2}(1 + e^{-\beta e_5} e_0)\frac{1}{2}(1 + iR_0 e_{12})e_0 = f e_0 \tag{3.35}$$

aleshores $\eta f e_0 \widetilde{(\eta f)}^* = \eta f e_0 \tilde{f}^* \tilde{\eta} = \eta f e_0 \tilde{\eta}$.

Prenent el terme cinètic de (3.31), i aprofitant el resultat anterior podem escriure:

$$\begin{aligned} -4\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu(\eta f)\, e_0\tilde{\eta} >_0\} &= -\mathrm{Im}\{< e^\mu \partial_\mu(+e^{-\beta e_5} e_0)\frac{1}{2}(1 + iR_0 e_{12}) e_0\tilde{\eta} >_0\} = \\ &- \mathrm{Im}\{< \partial\eta e_0\tilde{\eta} + \partial\eta e^{-\beta_0 e_5}\tilde{\eta} + \partial\eta i R_0 e_{120}\tilde{\eta} + \partial\eta e^{-\beta_0 e_5} i R_0 e_{12}\tilde{\eta} >_0\} \end{aligned} \tag{3.36}$$

De tots aquests termes, només contribueix a la part escalar imaginària el següent:

$$< \partial\eta R_0 e_{120}\tilde{\eta} >_0$$

Fent el mateix pels termes de massa i d'acoblament de (3.31), tenim:

$$\mathcal{L}_D(\beta_0, R_0) =< \partial\eta e_{210} R_0 \tilde{\eta} >_0 -q < \eta e_0 \tilde{\eta} A >_0 -m < \eta\, e^{-\beta_0 e_5} \tilde{\eta} >_0,$$

amb $\eta = \eta(R_0, \beta_0) \in Cl_{1,3}^+$.

D'aquest lagrangià, aplicant el formalisme d'Euler-Lagrange, obtenim l'equació:

$$\partial\eta e_{21} \tilde{R}_0 - qA\eta - m\eta e^{\beta_0 e_5} e_0 = 0 \quad \eta \in Cl_{1,3}^+ \tag{3.37}$$

Així aconseguim recuperar, com a casos particulars d'una estructura més general, les equacions (3.27) [57, 64] segons siguin els valors de (β_0, R_0):

$$(2\pi, 1) \qquad \partial\eta_{\{0\}}\, e_{21} - qA\,\eta_{\{0\}} - mc\,\eta_{\{0\}} e_0 = 0 \tag{3.38}$$

$$(\pi, -1) \qquad \partial\eta_{\{1\}} e_{21} + qA\eta_{\{1\}} - mc\,\eta_{\{1\}} e_0 = 0 \tag{3.39}$$

$$(2\pi, -1) \qquad \partial\eta_{\{2\}}\, e_{12} - qA\,\eta_{\{2\}} - mc\,\eta_{\{2\}} e_0 = 0 \tag{3.40}$$

$$(\pi, 1) \qquad \partial\eta_{\{3\}}\, e_{12} + qA\,\eta_{\{3\}} - mc\,\eta_{\{3\}} e_0 = 0 \tag{3.41}$$

Tenint present la definició de conjugació de càrrega donada a la primera secció d'aquest capítol, veiem que

$$\mathcal{C}(\eta_{\{0\}}) = \eta_{\{0\}} e_{01} = \eta_{\{1\}}$$

ja que si multipliquem per la dreta l'equació (3.38) per e_{01} obtenim (3.39). És mes, de la definició de la conjugació de càrrega [39] sobre l'espai de representació $\mathbb{C}^4$ sabem que:

$$\psi^c = i\gamma^2 \phi^*.$$

Aplicant aquest resultat a la representació matricial de $\eta_{\{0\}}$, i.e, $\Psi(2\pi, 1)$ tenim que:

$$i\gamma^2 \Psi(2\pi, 1) = \Psi(\pi, -1)$$

Les solucions de (3.38) estan relacionades amb l'ideal generat per l'idempotent $\frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12})$. Si fem actuar l'operador conjugació de càrrega sobre aquest idempotent:

$$\frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + ie_{12})e_{01} = e_{01}\frac{1}{2}(1 - e_0)\frac{1}{2}(1 - ie_{12})$$

obtenim, precisament l'idempotent associat a (3.39). És a dir, en el nostre tractament la conjugació de càrrega ens porta directament al positró, a diferència d'altres presentacions en les quals s'obté primer un electró d'energia negativa que posteriorment, via la teoria dels forats [39], s'identifica amb el positró. D'altra banda, les equacions (3.40) i (3.41) són iguals a (3.38) i (3.39), respectivament, llevat d'un canvi d'orientació del pla d'espín.

Val a dir que totes les possibles equacions contingudes en (3.37) són compatibles amb l'equació matricial de Dirac, ampliant-se les possibilitats presentades en [57, 64]. Tot i això, ens centrarem en les equacions (3.38) i (3.39) en el cas lliure, és a dir, sense acoblament electromagnètic.

El tensor d'energiamoment del camp de Dirac pel cas lliure, usant l'espai de representació $\mathbb{C}^4$, s'expressa com:

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\bar{\varphi}\gamma_\nu\partial_\mu\varphi - \partial_\mu\bar{\varphi}\gamma_\nu\varphi).$$

El nostre formalisme ens permet escriure aquest tensor com:

$$T_{\mu\nu} =< e_\nu\partial_\mu\eta e_{210}R_0\tilde{\eta} >_0 . \tag{3.42}$$

Pel cas lliure, les equacions (3.38) i (3.39) són idèntiques. Recordem, però, que els seus espinors han estat definits en ideals diferents i aquesta característica ha quedat marcada en el tensor d'energiamoment mitjançant el factor R_0 que hi figura. Donada una solució lliure η de l'equació (3.38), la densitat d'energia ve donada per la component T_{00} del tensor dit de Tetrode:

$$T_{00}(\eta) =< e_0\partial_0\eta e_{210}\tilde{\eta} >_0, \tag{3.43}$$

on hem fet $R_0 = 1$. Si apliquem la conjugació de càrrega, passarem a un altre ideal, i per tant la definició del tensor energiamoment (3.42) canviarà i la densitat d'energia serà:

$$T_{00}(\eta e_{01}) = - < e_0\partial_0\eta e_{01}e_{210}\eta\tilde{e}_{01} >_0=< e_0\partial_0\eta e_{210}\tilde{\eta} >_0= T_{00}(\eta)$$

Per tant, si η és una solució d'energia positiva de (3.38) aleshores ηe_{01} també té energia positiva i, a més, és solució de (3.39). De fet, ηe_{01} també és solució de (3.38), però amb energia negativa.

L'expressió de l'espín de la partícula segons l'ideal triat és:

$$S = \eta e^{-\beta_0 e_5}R_0 e_{21}\eta^{-1} \tag{3.44}$$

que, pels dos casos que estem analitzant, es reduirà a:

$$S = \eta e_{21} \eta^{-1}$$

Vegem ara que sota conjugació de càrrega l'espín de la partícula canvia de signe[4]. Per fer-ho escriurem η en la seva forma polar $\eta = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2} e_5} R$.

$$(\eta e_{01})^{-1} = e_{01} (\sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2} e_5} R)^{-1} = e_{01} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\frac{\beta}{2} e_5} \tilde{R}$$

aleshores

$$S(\eta e_{01}) = (\eta e_{01}) e_{21} (\eta e_{01})^{-1} = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2} e_5} R e_{01} e_{21} e_{01} e^{-\frac{\beta}{2} e_5} \tilde{R} = -\eta e_{21} \eta^{-1} = -S(\eta)$$

Així doncs, una partícula d'energia positiva i spin up, es converteix sota conjugació de càrrega en una partícula d'energia positiva i spin down.

Vegem una altra novetat que aporta la nostra presentació. L'equació per l'electró i el positró en el cas llire són les mateixes. En el nostre formalisme les solucions, tot i ser les mateixes, presentaran, segons es tracti de l'electró o del positró, característiques físiques diferents com hem vist en el cas del tensor d'energiamoment. Recordem, de la primera secció d'aquest capítol, que una partícula lliure amb espín up, que es desplaça en la direcció positiva de l'eix OZ, ve descrita per la solució (3.9):

$$\eta^{+}_{\{0\}\uparrow} = N(1 - k\, e_{03})\, e^{e_{12}\varphi} \tag{3.45}$$

Aquesta solució, tant en el formalisme matricial com en la presentació de Hestenes, és vàlida simultàniament per l'electró com pel positró. En el nostre tractament, de manera natural, no resulta ser així: o bé es tracta d'un electró o bé d'un positró, però no de les dues partícules simultàniament. Analitzem-ho amb més detall. Si considerem que l'equació (3.38), és a dir la proposta $(2\pi, 1)$, descriu l'electró, la densitat d'energia (3.42) serà positiva i l'espín de la partícula (3.44) serà up (proporcional al bivector e_{21}). Aquesta mateixa solució, interpretada com a solució de l'equació (3.39), corresponent a l'opció $(\pi, -1)$, passa a tenir energia negativa, com es pot comprovar fent ús de (3.42).

En l'opció $(\pi, -1)$, la solució d'energia positiva per una partícula (en aquest cas el positró) amb espín up i desplaçant-se en la direcció positiva de l'eix z ve donada per:

$$\eta^{+}_{\{1\}\uparrow} = N(k - e_{03})\, e^{e_{21}\varphi} \tag{3.46}$$

[4] Aquest resultat és independent del valor del potencial vector A

Fixem-nos que aquesta solució, tot i ser igual a (3.11) ara té energia positiva. Així doncs, (3.45) descriu l'electró i (3.46) el positró. Aquesta presentació té una conseqüencia interessant a l'hora de calcular la densitat de magnetització de les solucions anteriors. La densitat de magnetització, en funció de l'idempotent triat ve donada per:

$$M = \frac{|q|}{2m} \eta e^{-e_5 \beta_0} R_0 e_{21} \tilde{\eta}$$

i en els dos casos que estem analitzant, i.e. $(2\pi, 1)$ i $(\pi, -1)$, serà:

$$M = \frac{|q|}{2m} \eta e_{21} \tilde{\eta} \tag{3.47}$$

Tant en el formalisme matricial com en el de Hestenes l'expressió per a la magnetització difereix de la nostra en què en aquesta darrera hi figura el valor absolut de la càrrega en comptes de la càrrega. En el cas lliure els formalismes citats utilitzen exactament una única funció d'ona per a les dues partícules, solució d'una equació en la qual la càrrega no hi figura enlloc. En conseqüència, és únicament en la definició de l'observable on ha de tenir-se en compte la diferent realitat empírica d'alineació o antialineació dels moments angular i magnètic. En el nostre cas és en el domini de solucions admissibles de la pròpia equació de l'electró i del positró on s'hi troba expressada la diferent realitat de les dues partícules. La solució (3.45) és d'energia positiva en l'opció $\{0\}$ mentre que (3.46) és solució, també d'energia positiva, de l'opció $\{1\}$. La utilització del criteri d'energia positiva[5] per a determinar el domini de solucions admissibles ens ha conduït, en el cas lliure, a l'obtenció de camps multivectorials diferenciats per a l'electró i el positró. Continuem, doncs, amb el càlcul de la densitat de magnetització per a les dues solucions proposades.

Sabem que un espinor operador es pot descompondre en forma polar com a producte commutatiu d'un element R del grup $\mathrm{Spin}^+_{1,3} = \{R \in Cl^+_{1,3} / R\tilde{R} = 1\}$, d'una dilatació $\sqrt{\rho}$ i d'una transformació de dualitat parametritzada per l'angle d'Yvon-Takabayasi β:

$$\phi = \sqrt{\rho} e^{\frac{\beta}{2} e_5} R \quad \text{verificant} \quad \phi\tilde{\phi} = \rho\, e^{\beta e_5}$$

Pot veure's fàcilment que les solucions (3.42) i (3.46) satisfan:

$$\eta^+_{\{0\}\uparrow} \widetilde{\eta^+_{\{0\}\uparrow}} = 1 \tag{3.48}$$

$$\eta^+_{\{1\}\uparrow} \widetilde{\eta^+_{\{1\}\uparrow}} = -1. \tag{3.49}$$

[5]Per a una pionera aplicació d'aquest criteri físic per a la selecció i construcció de solucions de l'equació de Dirac veure [31]

És a dir, per l'electró $\eta^{+}_{\{0\}\dagger} \in \mathrm{Spin}^{+}_{1,3}$ i, per tant, $\beta = 0$. En canvi, pel positró $\beta = \pi$. Fixem-nos que la magnetització (3.47), a diferència de l'espín, depèn de l'angle d'Yvon-Takabayasi:

$$M = \frac{|q|}{2m}\phi e_{21}\tilde{\phi} = \frac{|q|}{2m}\rho e^{\beta e_5} R e_{21}\tilde{R}$$

Els càlculs anteriors, entre d'altres, mostren la possibilitat de diferenciar les magnituds 'físicament observables' dels camps de Dirac en dues categories: les magnituds mecàniques (quadrivelocitat, moment angular, ...) que estan associades a conjugacions que fan ús de l'invers de l'espinor i les específicament electromagnètiques (densitat de corrent, de magnetització, ...) que ho estan a bilineals que fan ús de l'espinor conjugat. El factor rellevant és el diferent comportament de la rotació de dualitat sota inversió i conjugació. En el cas de la densitat de magnetització hem vist com l'angle d'Yvon-Takabayasi de les solucions conté informació sobre el signe de la càrrega. Així, doncs, sembla raonable pensar en aquest angle com una variable essencial en la configuració de l'estructura electromagnètica de les partícules.

Capítol 4

Versions multivectorials de l'equació de Dirac.

4.1 L'espinor de Dirac-Hestenes i el problema quiral.

Sigui l'equació de Dirac

$$i\,\gamma^\mu \partial_\mu \varphi + q\,A_\mu \gamma^\mu \varphi - mc\,\varphi = 0 \quad \text{amb} \quad \varphi \in \mathbb{C}^4 \tag{4.1}$$

Sabem dels capítols anteriors que aquesta equació es pot escriure usant com espai de representació per l'espinor un ideal minimal per l'esquerra de l'àlgebra matricial $\mathbb{C}(4)$. Degut a l'isomorfisme que existeix entre aquesta àlgebra i $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ podem escriure l'equació anterior[1] com:

$$(\partial \psi - m\psi)P = 0, \tag{4.2}$$

on, per a la representació matricial dita de Dirac, l'idempotent P està donat per

$$P_D = \frac{1}{2}(1 + e_0)\frac{1}{2}(1 + i\,e_{12}) = p_D p \quad \text{amb} \quad p_D = \frac{1}{2}(1 + e_0).$$

A partir d'aquí, com hem vist, podem obtenir l'equació de Dirac-Hestenes per a un espinor operador representat per un element parell de l'àlgebra de l'espaitemps. Vegem ara què succeeix quan en lloc d'usar la representació matricial de Dirac utilitzem la quiral. En aquest cas l'idempotent de $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$, que correspon matricialment a l'opció $\{0\}$ del capítol anterior, és

$$P_Q = \frac{1}{2}(1 + e_{03})\frac{1}{2}(1 + i\,e_{12}) = p_Q\, p. \tag{4.3}$$

[1] Per simplicitat i sense pèrdua de generalitat estudiarem el cas lliure.

Aquest idempotent es diferencia de P_D en el factor p_Q i, simbòlicament, escriurem $P_{Q,D} = p_{Q,D}\,p \equiv fp$. L'equació (4.2) pels casos Dirac i quiral s'expressarà com:

$$(\partial\psi - m\psi)f\,p = 0, \tag{4.4}$$

Fent ús de les igualtats $ie_{12}\,p = p$ i $fp = pf$, l'espinor algèbric ψfp de l'equació anterior es pot expressar en funció d'un espinor real Ψ:

$$\psi fp = \psi\,p\,f = (\mathrm{Re}[\psi] + \mathrm{Im}[\psi])\,p\,f = (\mathrm{Re}[\psi] + \mathrm{Im}[\psi]ie_{12})\,p\,f = \Psi\,p\,f = \Psi\,f\,p.$$

Ja que $(\partial\Psi - m\Psi)f \in Cl_{1,3}\otimes\mathbb{R}$, ara, podem descompondre l'equació

$$(\partial\Psi - m\Psi)f\,\frac{1}{2}(1 + i\,e_{12}) = 0, \tag{4.5}$$

en una part real i una part imaginària pura, ambdues satisfent la mateixa equació:

$$\partial\Psi f - m\Psi f = 0 \quad \text{amb} \quad \Psi f \in Cl_{1,3}\otimes\mathbb{R}.$$

Vegem, mitjançant un procés similar, que l'espinor que s'obté a partir de Ψf pel cas quiral ($f = p_Q$) no pertany a la subàlgebra parella $Cl^+_{1,3}$, i.e. no és un espinor operador:

$$\Psi p_Q = (\Psi^+ + \Psi^-)\frac{1}{2}(1 + e_{03}) = (\Psi^+ + \Psi^- e_{03})\frac{1}{2}(1 + e_{03}) \neq \eta\frac{1}{2}(1 + e_{03}) \quad \text{amb} \quad \eta \in Cl^+_{1,3}$$

ja que $\Psi^- e_{03} \notin Cl^+_{1,3}$. Com veiem, la paritat del grau de l'element e_{03} que figura en l'idempotent juga un paper fonamental. Quan és parell resulta impossible satisfer l'última igualtat. Aquest problema sembla limitar la validesa de la interpretació de l'equació de Dirac feta per Hestenes a un conjunt de representacions massa restringit, ja que ni tan sols la quiral hi té cabuda. En aquest capítol resoldrem aquesta aparent limitació, veient que podem donar més d'una versió multivectorial de l'equació de Dirac. En el capítol anterior aquest problema no es presentà ja que els termes $e^{-\beta_0 e_5}e_0$, $R_0 ie_{12}$ que apareixen en l'idempotent $f(\beta_0, R_0)$ tenien la paritat adequada: senar i parell, respectivament. Això ens permetia trobar sense problemes un espinor operador en $Cl^+_{1,3}$.

4.2 La descomposició $Cl^{\parallel}_{1,3} \oplus Cl^{\perp}_{1,3}$, una primera solució.

Definim els subespais

$$Cl^{\parallel}_{1,3} = \{\phi \in Cl_{1,3} \;/\; e_0\phi e_0 = \hat{\phi}\} \tag{4.6}$$

$$Cl_{1,3}^{\perp} = \{\phi \in Cl_{1,3} \;/\; e_0 \phi e_0 = -\hat{\phi}\} \tag{4.7}$$

on $\hat{\phi}$ és la involució graduada de ϕ. Pel que segueix resulta rellevant que ambdós e_0 i e_{03} pertanyin a $Cl_{1,3}^{\perp}$, el subespai que no és subàlgebra. A més,

$$Cl_{1,3} = Cl_{1,3}^{\|} \oplus Cl_{1,3}^{\perp}$$

sent $Cl_{1,3}^{\|}$ una subàlgebra de $Cl_{1,3}$. Per tant, aquesta descomposició introdueix una nova $\mathbb{Z}_2$-graduació en l'àlgebra de l'espaitemps. Ara, tant pel cas de Hestenes com pel quiral, el problema que presentàvem en la primera secció pren un caire diferent. Si descomponem l'espinor en parts $\|$ i $\perp$ tenim que:

$$\psi P_D = (\Psi^{\|} + \Psi^{\perp}) P_D = (\Psi^{\|} + \Psi^{\perp} e_0) P_D = \eta P_D \quad \text{on} \quad \eta \in Cl_{1,3}^{\|} \tag{4.8}$$

$$\psi P_Q = (\Psi^{\|} + \Psi^{\perp}) P_Q = (\Psi^{\|} + \Psi^{\perp} e_{03}) P_Q = \xi P_Q \quad \text{on} \quad \xi \in Cl_{1,3}^{\|} \tag{4.9}$$

Podem, doncs, obtenir una nova versió multivectorial de l'equació de Dirac on l'espai de representació és la subàlgebra $Cl_{1,3}^{\|}$. Entenem, però, que encara queden dos problemes per resoldre:

- La solució proposada és molt particular en tant que adaptada als casos quiral i 'de Dirac'.
- Cal donar una interpretació geomètrica a la nova subàlgebra 'parella'.

Aquestes són les qüestions que abordarem en les properes seccions. Per tal de trobar una solució general al problema caldrà recórrer a les $\mathbb{Z}_2$-graduacions; un estudi d'aquestes es presenta a l'apèndix C.

4.3 Les equacions de Dirac multivectorials.

El canvi de representació més general associat a les matrius de Dirac $\{\gamma_\mu\}$ i al seu espai de representació $\mathbb{C}^4$ està donat per les expressions

$$\gamma_\mu = U \gamma_\mu^D U^{-1}, \quad \varphi = U \varphi^D. \tag{4.10}$$

Per cada $\{\gamma_\mu\}$ podem definir un nou isomorfisme:

$$\rho : Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}(4)\,; \quad (e_\mu \otimes 1) \mapsto \gamma_\mu .$$

de manera que tot conjunt de matrius $\{\gamma_\mu\}$, en una representació donada, li correspon un conjunt ortonormal real $\{e_\mu\}$ de l'àlgebra de l'espaitemps inclosa en $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$. D'altra banda, definim S com l'element multivectorial que, mitjançant l'isomorfisme anterior, està en correspondència amb el canvi de representació matricial U. És a dir:

$$S \equiv \rho_D^{-1}(U) \in Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}.$$

Podem associar a cadascun d'aquests elements S de la següent 'aplicació adjunta':

$$\mathrm{ad}_S : \longrightarrow Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}\,; \quad \mathrm{ad}_S[(a \otimes z)] = S[(a \otimes z)]S^{-1}, \quad \text{amb} \quad a \in Cl_{1,3} \text{ i } z \in \mathbb{C}.$$

que recupera, sobre $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$, el caràcter de transformació que tenien sobre $\mathbb{C}(4)$ les matrius U. Per composició obtenim

$$\rho = \rho_D \circ \mathrm{ad}_S\,; \quad \rho(a \otimes z) = \rho_D[S(a \otimes z)S^{-1}]$$

Aplicant ρ^{-1} a l'equació de Dirac lliure

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi \quad \text{amb} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \psi\mathcal{P} \tag{4.11}$$

obtenim:

$$ie_\mu \partial^\mu \Phi = m\Phi \tag{4.12}$$

amb $\Phi = \rho^{-1}(\psi) = \rho^{-1}(\psi\mathcal{P}) = \rho^{-1}(\psi)\rho^{-1}(\mathcal{P}) = \Phi P$. On mitjançant l'aplicació adjunta definida anteriorment, hem trobat l'idempotent primitiu $\rho^{-1}(\mathcal{P})$ de $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C}$ que determina l'ideal minimal en l'àlgebra:

$$\rho^{-1}(\mathcal{P}) = \mathrm{ad}_{S^{-1}} \circ \rho_D^{-1}(\mathcal{P}) = \mathrm{ad}_{S^{-1}}(P_D) = S^{-1}P_D S = P.$$

Aleshores P es pot escriure com:

$$P = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma) \tag{4.13}$$

amb $u = S^{-1}e_0 S$, $\sigma = S^{-1}e_{12}S$ tals que $u^2 = 1$, $\sigma^2 = -1$ i $u\sigma = \sigma u$. En general, u i σ no tenen perquè ser reals, encara que ho són per a tots els casos físics que coneixem.

És clar que això no implica que la matriu de transformació U sigui real. De fet, encara que $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}(4)$ és tal que $\rho_D(a \otimes i) = i\rho_D(a \otimes 1)$, la matriu $\rho_D(a \otimes 1)$ pot ser complexa; només cal pensar en la representació de Dirac del vector e_2 per γ_2^D.

A partir de l'expressió (4.13) podem formar la família d'idempotents mútuament ortogonals:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma), \\ P_2 &= \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1-i\sigma), \\ P_3 &= \frac{1}{2}(1-u)\frac{1}{2}(1+i\sigma), \\ P_4 &= \frac{1}{2}(1-u)\frac{1}{2}(1-i\sigma), \end{aligned} \tag{4.14}$$

L'idempotent (4.13) acompleix $iP = -P\sigma$ i per tant ens permet d'escriure Φ com:

$$\Phi P = [\mathrm{Re}\{\Phi\}P + \mathrm{Im}\{\Phi\}] = [\mathrm{Re}\{\Phi\}P + \mathrm{Im}\{i\sigma P\}] = \phi P \quad \text{on} \quad \phi \in Cl_{1,3} \otimes \mathbb{R} \equiv Cl_{1,3} \tag{4.15}$$

Això ens permet escriure (4.12) com:

$$\partial\phi\frac{1}{2}(1+i\sigma)\sigma + m\phi(1+i\sigma) = 0.$$

Resulta immediat comprovar que la part real i imaginària de l'equació anterior són idèntiques a:

$$\partial\phi\sigma + m\phi = 0 \tag{4.16}$$

on ϕ no tan sols és un multivector real sinó que pertany a l'ideal que indiquem en la forma $\in Cl_{1,3}(\frac{1}{2}(1+u))$. Aquesta és l'equació de Dirac escrita en termes dels espinors algèbrics de $Cl_{1,3} \otimes \mathbb{R}$. D'aquesta equació podem obtenir una versió operacional que, a diferència de la de Hestenes, no està restringida per una tria concreta de matrius γ. El grau d'aquesta generalitat està codificat per u i σ.

L'equació de Dirac-Hestenes pot recuperar-se a partir de (4.16) amb $u = e_0$, usant la $\mathbb{Z}_2$-graduació parell/senar i projectant en $Cl_{1,3}^+$. El nostre propòsit és definir una nova $\mathbb{Z}_2$-graduació, basada en els elements u i σ, de manera que els espinors operadors que es derivin de (4.16) pertanyin a una subàlgebra de $Cl_{1,3}$.

Per tal de considerar l'espinor com un objecte operacional definirem una $\mathbb{Z}_2$-graduació, $Cl_{1,3} = Cl^0 \oplus Cl^1$ [62] de manera que u sigui senar i σ parell respecte d'ella. Expressat d'una altra manera, demanarem que els subespais Cl^0 i Cl^1 acompleixin:

$$Cl^0Cl^0 \subset Cl^0, \quad Cl^0Cl^1 \subset Cl^1, \quad Cl^1Cl^0 \subset Cl^1, \quad Cl^1Cl^1 \subset Cl^0,$$

i que $u \in Cl^1$, $\sigma \in Cl^0$. De la relació anterior es segueix que Cl^0 és una subàlgebra de $Cl_{1,3}$. Per a cadascuna d'aquestes $\mathbb{Z}_2$-graduacions trobem un automorfisme graduat[2] α, de manera que:

$$Cl^k = \{\phi \in Cl_{1,3} \otimes \mathbb{R} \,/\, \alpha(\phi) = (-1)^k \phi \text{ amb } k = 0, 1\}$$

També podem definir les projeccions $\pi_k : Cl_{1,3} \otimes \mathbb{R} \longrightarrow Cl^k$ com:

$$\pi_k(\phi) = \frac{\phi + (-1)^k \alpha(\phi)}{2}$$

Fixem-nos que α és a $Cl^0 \oplus Cl^1$ el que la involució graduada és a $Cl^+_{1,3} \oplus Cl^-_{1,3}$. Ens referirem a Cl^0 i Cl^1 com les parts α-parella i α-senar de $Cl_{1,3}$.

Ara estem en condicions de donar una versió operacional de l'equació (4.16). Ja que

$$\phi = \phi \frac{1}{2}(1 + u) \quad \text{amb} \quad u \in Cl^1$$

de $\phi = \phi u$ es segueix que:

$$\pi_1(\phi) = \pi_1(\phi u) = \pi_1(\pi_0(\phi)u + \pi_1(\phi)u) = \pi_0(\phi)u. \tag{4.17}$$

Projectant l'equació (4.16) en les seves parts α-parella i α-senar tindrem:

$$[\pi_0(\partial) + \pi_1(\partial)][\pi_0(\phi) + \pi_1(\phi)]\sigma + m[\pi_0(\phi) + \pi_1(\phi)] = 0$$

La separació que hem efectuat de l'operador ∇ de $Cl_{1,3}$, escrit aquí com ∂ de Dirac, en part α-parella i part α-senar, està en principi limitada a l'ús de coordenades cartesianes, ja que la connexió present en un sistema de coordenades genèric implica que les derivacions covariants contingudes en la part 'no vectorial' de l'operador ∂ barrejaran diferents paritats. En aquests casos la separació α-graduada de l'equació ha d'efectuar-se un cop s'han realitzat totes les derivacions. Tanmateix quan la connexió respecta la α-graduació, com succeeix per transformacions de coordenades i graduacions que respecten l'isotropia espacial, continua sent vàlida la descomposició $\partial = \pi_0(\partial) + \pi_1(\partial)$.

Substituint (4.17) en la darrera equació obtenim:

$$\pi_0(\partial)[\pi_0(\phi) + \pi_0(\phi)u]f\sigma + \pi_1(\partial)[\pi_0(\phi) + \pi_0(\phi)u]f\sigma + m[\pi_0(\phi) + \pi_0(\phi)u]f = 0$$

[2]En aquest capítol i l'apèndix C α generalitza i, per tant, no és sinònim de l'automorfisme principal o involució graduada definida en el primer capítol.

amb $f = \frac{1}{2}(1+u)$. Finalment, explicitant f tenim:

$$\underbrace{\pi_0(\partial)\pi_0(\phi)\sigma}_{\in Cl^0} + \underbrace{\pi_0(\partial)\pi_0(\phi)u\sigma}_{\in Cl^1} + \underbrace{\pi_1(\partial)\pi_0(\phi)\sigma}_{\in Cl^0} + \underbrace{\pi_1(\partial)\pi_0(\phi)u\sigma}_{\in Cl^1} + \underbrace{m\pi_0(\phi)}_{\in Cl^0} + \underbrace{m\pi_0(\phi)u}_{\in Cl^1} = 0,$$

on apareixen dues equacions: una per la part α-parella i una altra per la α-senar. Prenent l'equació α-parella[3], definint $\pi_0(\phi) \equiv \eta$ i multiplicant-la per la dreta per u obtenim:

$$\pi_0(\partial)\eta u\sigma + \pi_1(\partial)\eta\sigma + m\eta u = 0$$

o també:

$$\breve{\partial}\eta\sigma + m\eta u = 0\,, \quad \eta \in Cl^0 \tag{4.18}$$

amb $\breve{\partial}(\cdot) = \pi_0(\partial)(\cdot)u + \pi_1(\partial)(\cdot)$. Essent aquesta l'equació de Dirac en la versió operacional generalitzada que estàvem buscant. Fent $u = e_0$ i $\sigma = e_{12}$ es recupera l'equació de Dirac-Hestenes.

Com una primera aplicació podem veure quina és la versió operacional de l'equació de Dirac en la representació de Majorana. En aquesta representació les matrius són de la forma:

$$\gamma_0^M = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma_1^M = \begin{pmatrix} -i\sigma_3 & 0 \\ 0 & -i\sigma_3 \end{pmatrix},\ \gamma_2^M = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma_3^M = \begin{pmatrix} i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix},$$

d'aquí seguint els passos marcats anteriorment obtenim l'idempotent:

$$P_M = \frac{1}{2}(1+e_{20})\frac{1}{2}(1+ie_2)$$

on identifiquem $u = e_{20}$ i $\sigma = e_1$. Podem definir una $\mathbb{Z}_2$-graduació de manera que e_{20} sigui α-senar i e_1 α-senar. De fet, aquesta graduació no és única. D'entre elles escollim la següent:

	Cl^0	Cl^1
0-vectors	1	
1-vectors	e_1, e_2, e_3	e_0
2-vectors	e_{12}, e_{23}, e_{31}	e_{10}, e_{20}, e_{30}
3-vectors	e_{123}	$e_{012}, e_{023}, e_{031}$
4-vectors		e_{0123}

,

[3]Pot veure's que l'equació que es deriva de la tria α-senar és idèntica.

Aquesta àlgebra no és isomorfa a la que es deriva de la representació de Dirac ja que $Cl^0 \simeq Cl_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. És interessant remarcar que, en aquesta graduació, no tots els vectors e_μ són α-senars i, per tant $\pi_0(\partial) = e_k\partial^k$ amb $k = 1, 2, 3$ i $\pi_1(\partial) = e_0\partial^0$. Així l'equació (4.18) per a la representació de Majorana és:

$$e_0\partial^0\eta + e_k\partial^k\eta e_{20} = m\eta e_{20}e_1, \quad \eta \in Cl^0.$$

Multiplicant per la dreta per e_0 i fent $e_0\eta e_0 = \hat{\eta}$, l'equació anterior ens queda com:

$$\partial^0\hat{\eta} + e_k\partial^k\eta e_2 = m\eta e_{12}, \quad \eta \in Cl_0 = Cl_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}.$$

4.4 Correspondències formals entre espinors algèbrics i espinors α-operacionals.

Sigui

$$\iota : (Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C})P_1 \to Cl^0 \otimes \mathbb{R}, \quad \iota(\Phi) = \eta = 4\pi_0(\mathrm{Re}(\Phi)), \tag{4.19}$$

una aplicació que relaciona els espinors algèbrics amb els α-operacionals. Tot i que $Cl^0 \otimes \mathbb{R} \equiv Cl^0$ és una àlgebra real, aquesta està dotada d'un estructura complexa [41, 78]. Una estructura complexa en un espai vectorial V és un endomorfisme antiinvolutiu J sobre V de manera que $J^2 = -1_V$. En Cl^0 l'endormorfisme

$$J : Cl^0 \longrightarrow Cl^0, \quad \eta \mapsto J(\eta) = -\eta\sigma \tag{4.20}$$

defineix una estructura complexa, ja que:

$$J(J(\eta)) = J(-\eta\sigma) = -(-\eta\sigma)\sigma = -\eta$$

Vegem que amb aquesta estructura complexa l'aplicació ι, definida en (4.19), és un isomorfisme complex. Per demostrar-ho veurem que existeix ι^{-1} i que $\iota^{-1}(J(\eta)) = i\iota^{-1}(\eta)$:

- Sigui $\Phi \in (Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C})P_1$. Llavors

$$\begin{aligned}\eta &= 4\pi_0(\mathrm{Re}(\Phi)) = 4\pi_0(\frac{\Phi + \Phi^*}{2}) = 2\pi_0(\Phi P_1 + \Phi^* P_2)\\ &= \Phi P_1 + \alpha(\Phi P_1) + \Phi^* P_2 + \alpha(\Phi^* P_2)\end{aligned} \tag{4.21}$$

Degut a la tria $u \in Cl^1$ i $\sigma \in Cl^0$ sabem que $\alpha(P_1) = P_3$ i $\alpha(P_2) = P_4$. Aleshores 4.21 quedarà

$$\eta = \Phi P_1 + \Phi^* P_2 + \alpha(\Phi) P_3 + \alpha(\Phi^*) P_4,$$

d'on multilplicant per P_1 per la dreta obtenim:

$$\Phi = \eta P_1$$

i per tant $\iota^{-1}(\eta) = \eta P_1$.

- D'altra banda,

$$\iota^{-1}(J(\eta)) = \iota^{-1}(-\eta\sigma) = -\eta\sigma P_1 = i\eta P_1 = i\iota^{-1}(\eta)$$

Així doncs, es tracta d'un isomorfisme complex.

Aplicant l'isomorfisme ρ de la secció anterior, podem obtenir l'expressió geomètrica equivalent a l'acció d'una matriu $\mathsf{A} \in \mathbb{C}(4)$ sobre un element $\psi \in \mathbb{C}(4)\mathcal{P}$. Definint $A \equiv \rho^{-1}(\mathsf{A})$, tenim que $\mathsf{A}\psi \mapsto A\Phi$. Descomponent l'operador A en part real i complexa $A = \mathrm{Re}\{A\} + i\,\mathrm{Im}\{A\}$, podem esciure:

$$A\Phi = \mathrm{Re}\{A\}\Phi - i\,\mathrm{Im}\{A\}\Phi\sigma \quad \mathrm{amb}\, i\, P = P\sigma$$

Anem a transcriure en termes α-operacionals l'acció algèbrica $A\Phi$. Aplicant ι a l'expressió anterior tenim:

$$\iota(\mathrm{Re}[A]\Phi) = 4\pi_0[\mathrm{Re}[\mathrm{Re}[A]\Phi]] = 4\pi_0[\mathrm{Re}[A]\mathrm{Re}[\Phi]],$$

on ara

- Si $\mathrm{Re}[A] \in Cl^0$,

$$4\pi_0[\mathrm{Re}[A]\mathrm{Re}[\Phi]] = \mathrm{Re}[A]4\pi_0[\mathrm{Re}[\Phi] = \mathrm{Re}[A]\eta$$

- Si $\mathrm{Re}[A] \in Cl^1$,

$$4\pi_0[\mathrm{Re}[A]\mathrm{Re}[\Phi]] = 4\pi_0[\mathrm{Re}[A]\mathrm{Re}[\Phi]u] = \mathrm{Re}[A]4\pi_0[\mathrm{Re}[\Phi]]u = \mathrm{Re}[A]\eta u$$

Per tant finalment:

$$\iota(\mathrm{Re}[A]\Phi) = \begin{cases} \mathrm{Re}[A]\eta, & \text{si } \mathrm{Re}[A] \in Cl^0, \\ \mathrm{Re}[A]\eta u, & \text{si } \mathrm{Re}[A] \in Cl^1, \end{cases} \tag{4.22}$$

Per $\mathrm{Im}[A]$ les expressions són anàlogues.

Del resultat anterior es pot veure que l'operador de Dirac modificat $\breve{\partial}(\cdot) = \pi_0(\partial)(\cdot)u + \pi_1(\partial)(\cdot)$ pren una forma més simple. Sigui Cl^0 un espai de representació de $Cl_{1,3}$. Mitjançant (4.22) definim una representació:

$$\mathsf{Op} : Cl_{1,3} \longrightarrow \mathrm{Aut}(Cl^0)\,; \quad \mathsf{Op}(\varphi)(\eta) = \phi_0\eta + \varphi_1\eta u.$$

on $\eta \in Cl^0$ i $\phi \in Cl_{1,3}$ amb $\phi = \phi_0 + \phi_1,\ \phi_k \in Cl^k$. Llavors podem escriure:

$$\breve{\partial} = \mathsf{Op}(\partial)$$

L'operador moment també es pot escriure en el formalisme α-operacional. Aquest operador actuant sobre l'espai de representació $\mathbb{C}^4$ ve donat per $p_\mu[\varphi] = i\partial_\mu[\varphi]$. Mitjançant ρ podem escriure per l'espinor algèbric:

$$p_\mu[\Phi] = i\partial_\mu\Phi = -\partial_\mu\Phi\sigma.$$

Finalment, l'operador moment en funció dels espinors operadors s'obté aplicant ι i recordant que σ és α-parell:

$$p_\mu[\eta] = -\partial_\mu\eta\sigma \tag{4.23}$$

4.5 Versió multivectorial en representació quiral.

Considerem les matrius gamma en la representació quiral:

$$\rho_Q(e_0) = \gamma_0^Q = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_Q(e_k) = \gamma_k^Q = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3.$$

L'idempotent primitiu associat associat a aquesta representació és:

$$P \equiv P_Q = \frac{1}{2}\left(1 + e_{30}\right)\frac{1}{2}\left(1 + ie_{12}\right), \quad \text{on identifiquem} \quad u = e_{30}\,,\ \sigma = e_{12}.$$

Abans de trobar la corresponent versió operacional de l'equació de Dirac cal expressar, en aquest formalisme, l'operador quiralitat Q. Aquest operador quan actua sobre espinors definits en l'espai $\mathbb{C}^4$ ve donat [6] per:

$$\mathsf{Q}[\varphi] = \gamma_5\varphi = -i\gamma_{0123}\varphi.$$

Aplicant l'isomorfisme ρ^{-1} i les propietats algèbriques $-iP = Pe_{12}$, $e_{30}P = P$, $\Phi = \Phi P$ obtenim l'expressió corresponent a la seva acció sobre els espinors algèbrics:

$$\mathsf{Q}[\Phi] = -ie_{0123}\Phi = e_{0123}\Phi e_{12} = e_{0123}\Phi e_{30}e_{12} = -e_{0123}\Phi e_{0123} = \hat{\Phi}$$

on $\hat{\Phi}$ és la involució graduada de Φ.

Fent ús de l'isomorfisme ι que relaciona els espinors algèbrics amb els operacionals, i del fet que l'involució graduada $\hat{}$ i α commuten[4] podem escriure:

$$\mathsf{Q}[\eta] = 4\pi_0[\mathrm{Re}[\hat{\Phi}]] = 4\widehat{\pi_0[\mathrm{Re}[\hat{\Phi}]]} = \hat{\eta} \tag{4.24}$$

Una $\mathbb{Z}_2$-graduació adequada[5] pel cas quiral serà:

	Cl^0	Cl^1
0-vectors	1	
1-vectors	e_0	e_1, e_2, e_3
2-vectors	e_{12}, e_{23}, e_{31}	e_{01}, e_{02}, e_{03}
3-vectors	$e_{012}, e_{023}, e_{031}$	e_{123}
4-vectors		e_{0123}

(4.25)

Un cop definida, l'operador de quiralitat ens permet descompondre Cl^0 en les usuals $\hat{}$-parella i $\hat{}$-senar, és a dir, $Cl^{0\pm} = Cl^0 \cap Cl^{\pm}_{1,3}$. Es segueix de (4.24) que podem donar una caracterització clara de la quiralitat[6] referida als espinors operadors:

$$\begin{aligned} Cl^{0+} &= \{\text{Espai dels espinors } \textit{right-handed}\} \\ Cl^{0-} &= \{\text{Espai dels espinors } \textit{left-handed}\}, \end{aligned}$$

La versió operacional de l'equació de Dirac en la representació quiral serà:

$$e_0\partial^0\eta e_{30} + e_k\partial^k\eta = -m\eta e_{30}e_{21}, \quad \eta \in Cl^0.$$

Donat que e_0 commuta amb Cl^0 podem escriure finalment:

$$-\partial^0\eta e_{12} + (e_{23}\partial^1 + e_{31}\partial^2 + e_{12}\partial^3)\hat{\eta} = me_0\eta, \quad \eta \in Cl^0. \tag{4.26}$$

[4]Recordem que, en aquest capítol α és una generalització de la involució graduada

[5]Demanarem $u = e_{30} \in Cl^1$ i $\sigma = e_{12} \in Cl^0$

[6]La distinció quiral entre espinors *right(left)-handed* no té res a veure amb la distinció espinor operador per la dreta i per l'esquerra introduïda al capítol 2.

4.6 Descomposició polar de l'espinor α-operador.

En les seccions anteriors hem obtingut equacions multivectorials de Dirac corresponents a diferents representacions de les matrius gamma. Aquestes equacions i els espais espinorials associats a elles difereixen de les obtingudes en la presentació de Dirac-Hestenes. En aquesta secció mostrarem com, fent ús de la possibilitat de modificar la $\mathbb{Z}_4$-graduació $\oplus_{k=0}^4 \Lambda^k(V)$ de , podem sempre obtenir una equació formalment idèntica a la de Dirac-Hestenes i que, com ella, l'espai espinorial corresponent és isomorf a $Cl_{1,3}^+$.

Sigui $\{e_\mu\}$ una base ortonormada de l'espaitemps de Minkowski $\mathbb{M}$. Recordem que havíem definit l'idempotent $P = \frac{1}{2}(1+u)\frac{1}{2}(1+i\sigma)$ amb $u = S^{-1}e_0S$ i $\sigma = S^{-1}e_{12}S$. Definim, mitjançant aquesta transformació S, un nou conjunt de 'vectors' $\{E_\mu \,/\, E_\mu = S^{-1}e_\mu S\}$, que verifiquen $E_\mu E_\nu + E_\nu E_\mu = 2g_{\mu\nu}$. És a dir, $\{E_\mu\}$ constitueix també un conjunt ortonormal generador respecte del producte geomètric tot i que, en general, els seus elements no són vectors de $\mathbb{M}$.

Definim els operadors de reversió $(\cdot)^R$ i paritat $(\cdot)^P$ relatius a la nova base $\{E_\mu\}$ de la següent manera:

$$(E_\mu)^R = E_\mu, \text{ estenent-se a } Cl_{1,3}\otimes\mathbb{C} \text{ com un antiautomorfisme,}$$
$$(E_\mu)^P = -E_\mu, \text{ estenent-se a } Cl_{1,3}\otimes\mathbb{C} \text{ com un automorfisme.}$$

Naturalment, $(\cdot)^R$ i $(\cdot)^P$ defineixen una $\mathbb{Z}_4$-graduació per a l'estructura d'espais vectorials de $Cl_{1,3}\otimes\mathbb{C}$ que fem explícita mitjançant l'expressió:

$$Cl_{1,3}\otimes\mathbb{C} = \bigoplus_{k=0}^{4} C_k,$$

on

$$\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{C} \text{ (escalars)},\\
C_1 &= \{a : a^P = -a \text{ and } a^R = a\},\\
C_2 &= \{a : a^P = a \text{ and } a^R = -a\},\\
C_3 &= \{a : a^P = -a \text{ and } a^R = -a\},\\
C_4 &= \{a : a^P = a \text{ and } a^R = a\} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{0123}\}.
\end{aligned}$$

Sigui $\rho : Cl_{1,3}\otimes\mathbb{C} \to \mathbb{C}(4)$ l'isomorfisme definit per $\rho(E_\mu) = \gamma_\mu^D$. Seguint el procediment habitual, però ara amb:

$$P = \frac{1}{2}(1+E_0)\frac{1}{2}(1+iE_{12}) \quad \text{on} \quad E_0 = u \ i \ E_{12} = \sigma$$

obtenim:

$$\mathfrak{D}\Phi E_{12} + m\Phi = 0, \quad \text{on} \quad \Phi \equiv 4\,\mathrm{Re}(\psi) \; i \; \mathfrak{D} \equiv E_\mu \partial^\mu$$

La $\mathbb{Z}_4$-graduació indueix sobre l'estructura d'espais vectorials de $Cl_{1,3}$ una $\mathbb{Z}_2$-graduació a l'estructura algèbrica de $Cl_{1,3}$, a saber:

$$Cl_{1,3} = Cl^0 \oplus Cl^1, \quad \text{on } Cl^0 \equiv \bigoplus_{k \text{ parells}} C_k \quad \text{i} \quad Cl^1 \equiv \bigoplus_{k \text{ senars}} C_k.$$

D'acord amb el procediment seguit a les seccions anteriors, prenent $\alpha = (\cdot)^P$ i $\breve{\partial} = \mathfrak{D}$ trobem la següent versió operacional de l'equació de Dirac:

$$\mathfrak{D}\eta E_{21} = m\eta E_0, \quad \text{amb } \eta \in Cl^0 = C_0 \oplus C_2 \oplus C_4 \text{ i } \mathfrak{D} \equiv E_\mu \partial^\mu. \tag{4.27}$$

Veiem que aquesta equació és formalment idèntica a l'equació de Dirac-Hestenes. Les quantitats que hi apareixen, però, han estat modificades respecte les de Hestenes per una transformació basada en $E_\mu = S^{-1} e_\mu S$. En especial, l'operador $\mathfrak{D}$ associa les derivacions ∂^μ corresponents a les coordenades Minkowskianes a uns 'multivectors' obtinguts dels e_μ mitjançant S, que és una isometria de l'àlgebra $Cl_{1,3}$. Només quan S és una isometria de l'espai de Minkowski, base de l'àlgebra, es conserva plenament el significat geomètric de l'operador $\partial \equiv \nabla$.

D'altra banda, l'espai dels espinors solució de l'equació (4.27) s'ha obtingut a partir de l'espai dels espinors operadors de Hestenes a través de $Cl^0 = S^{-1} Cl^+_{1,3} S$ i, per tant, isomorf a $Cl^+_{1,3} \simeq \mathbb{C}(2)$. Com a conseqüència, l'espinor $\eta \in Cl^0$ admet una descomposició polar

$$\eta = \sqrt{\varrho}\, e^{\frac{\beta}{2} E_{0123}} R = S^{-1} \left(\sqrt{\varrho}\, e^{e_{0123}} R' \right) S,$$

on R' i no pas R és una transformació de Lorentz de l'espaitemps.

El conjunt ortonormal $\{E_\mu\}$ forma un espai vectorial real de quatre dimensions:

$$W \equiv \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{E_0, E_1, E_2, E_3\}$$

sobre el que podem definir la mètrica $h(x, y) = \frac{1}{2}(xy + yx)$ amb $x, y \in W$. W és isomètric a l'espai de Minkowski $\mathbb{M}$ i, per tant, $Cl(W) \otimes \mathbb{C} \simeq Cl(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{C}$. Cal recordar, però, que el subespai real W és una combinació de multivectors de diferents graus de $Cl(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{C}$. D'altra banda, en la descomposició polar anterior, $R \in \mathrm{Spin}_+(W) = \{a \,/\, a^P = a \text{ i } a^R a = 1\}$. $\mathrm{Spin}^+(W)$ és el doble recobridor del grup $\mathrm{SO}_+(W)$ de W, però no del grup d'isometries pròpies ortocrones de l'espai de Minkowski.

En aquesta secció hem arribat, doncs, a una conclusió força similar a l'obtinguda en el capítol 2 quan tractàvem dels referencials espinorials. En aquell cas l'ancoratge de l'estructura espinorial requeria introduir una relació d'equivalència entre els excessivament nombrosos parells (Σ, R) i seleccionar un únic parell $(\Sigma_0, 1)$ com a 'fiducial'. La doble multiplicitat 'Lorentz' dels parells (Σ, R) quedava estructurada en una multiplicitat *espúria* que relaciona les diferents eleccions 'fiducials' (els diferents elements del conjunt quocient) i una multiplicitat *física*, corresponent al principi de relativitat, que permet obtenir tots els elements de la classe seleccionada que, ara sí, es corresponen de manera unívoca amb tots els sistemes de referència inercials. Pel cas de la teoria matricial de Dirac, tractat aquí, l'ancoratge en l'espaitemps requereix la tria d'un parell fiducial $(\Sigma, \{\gamma_\mu\})$ com, per exemple $(\Sigma_0, \{\gamma_\mu^D\})$. El grup de transformacions invertibles de l'àlgebra de Clifford permet moure'ns per tot el conjunt de parells, sent l'anàleg de la doble multiplicitat Lorentz desestructurada del cas anterior. Un cop triada la fiducial aquest grup queda estructurat en transformacions físiques corresponents al principi de relativitat i transformacions espúries corresponents a formalismes matricials *alternatius i equivalents* per a l'equació de Dirac.

Capítol 5

El canvi de signatura.

-Vostè és euclidià i no té ni idea del trasbals que estem passant.
Pere Calders a *Invasió subtil i altres contes.*

5.1 Motivació.

El canvi de signatura no és una novetat en física matemàtica. En moltes ocasions ha permès donar solucions a problemes físics ja plantejats, mentre en altres ha estat un incentiu per plantejar nous interrogants. Exemple dels primers és la formulació euclidiana de les teories de camps quàntics [36] i dels segons determinats treballs realitzats en el marc de la relativitat general [29, 55]. En el domini de les àlgebres de Clifford obre una porta a l'especulació amb idees prou interessants com les presentades per Pezzaglia a [65], on estudia la irraonable llibertat d'elecció entre les dues signatures d'espaitemps.

Hem vist, en el primer capítol, que per definir l'àlgebra de Clifford generada sobre un espai vectorial V necessitem dotar a aquest espai d'una forma bilineal g. Així doncs, l'estructura de l'àlgebra no depèn només de la dimensió de V sinó també de la signatura de g. Això comporta, com vàrem veure quan estudiàvem els teoremes d'isomorfia, que dues àlgebres $Cl_{p,q}$ i $Cl_{p',q'}$ amb $p+q=p'+q'=n$, en general, no siguin isomorfes. En el cas minkowskià la tria de la signatura, $+2$ o -2 ha arribat a provocar una mena d'escissió entre els físics i, fins i tot, a causar més d'un desencís [81]. Per a l'espaitemps les dues àlgebres de Clifford 'enfrontades' són $Cl_{3,1}$ i $Cl_{1,3}$. Aquestes no són isomorfes ja que, en termes d'àlgebres matricials, la primera és isomorfa a les matrius quaterniòniques 2×2 i la segona a les matrius reals 4×4, reflectint la diferència en els quadrats dels monomis multivectorials. Aquesta característica de les àlgebres reals desapareix al procedir a la seva complexificació. L'estructura de les àlgebres de Clifford complexes depèn només de la dimensió de V, i no de la seva signatura. En contraposició al que és habitual la complexificació causa, en aquest cas, un empobriment de les estructures.

Podem passar d'una teoria minkowskiana a una d'euclidiana fent imaginària la component temporal $t \longrightarrow it$; aquesta és la coneguda transformació de Wick. Donar una interpretació geomètrica a aquesta transformació no és senzill. Nieuwenhuizen i Waldron [61] ho fan considerant la transformació com una rotació en un espai de cinc dimensions, després d'afegir una nova component temporal. Tot i que el treball escapa de manera enginyosa del problema de la degeneració de la forma bilineal, el significat d'aquesta nova dimensió està per aclarir.

L'equació de Dirac, on l'operador ∇ està definit per tota dimensió i signatura, es formula en espais quadridimensionals en termes de matrius complexes 4×4 que obeeixen la relació $\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}$ on $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ en el cas euclidià i $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ o $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ en el minkowskià. L'àlgebra $\mathbb{C}(4)$ de les matrius complexes 4×4 és la representació matricial de l'àlgebra de Clifford $Cl_4 \otimes \mathbb{C}$. Ja que les àlgebres de Clifford complexificades de mateixa dimensió són totes isomorfes podem escriure que:

$$\mathbb{C}(4) \simeq \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{C} \simeq Cl_{3,1} \otimes \mathbb{C} \simeq Cl_{1,3} \otimes \mathbb{C} \simeq Cl_{4,0} \otimes \mathbb{C} \simeq \cdots \equiv Cl_4 \otimes \mathbb{C}.$$

D'altra banda la mateixa àlgebra matricial $\mathbb{C}(4)$ és isomorfa a les àlgebres de Clifford reals $Cl_{4,1} \simeq Cl_{2,3} \simeq Cl_{0,5}$, mostrant la complexificació de l'àlgebra pot resultar de la introducció d'una nova dimensió.

En aquest capítol presentarem el canvi de signatura en les àlgebres de Clifford reals com una transformació efectuada dins l'estructura algèbrica que sustenta la teoria, sense cap necessitat d'introduir noves dimensions i per tant evitant la complexificació. El principal precedent el trobem en els treballs de Lounesto [52, 54]. En aquests es discuteix el problema de canvis entre signatures oposades, és a dir, transformacions de $Cl_{p,q}$ a $Cl_{q,p}$. La nostra proposta pretén abraçar qualsevol canvi en qualsevol dimensió.

5.2 La transformació tilt.

Quan es vol passar d'una àlgebra a la seva oposada, posem per exemple de $Cl_{1,3}$ a $Cl_{3,1}$, és costum utilitzar la transformació $\gamma_\mu \longrightarrow i\gamma_\mu$ on $\{\gamma_\mu\}$ formen base de l'espai vectorial que genera l'àlgebra. Aquesta transformació no té cap sentit dins $\mathbb{R}^4$, ja que $i\gamma_\mu \in i\mathbb{R}^4$. La idea de Lounesto es dotar a $\mathbb{R}^4$ de dues estructures quadràtiques $\mathbb{R}^{1,3}$ i $\mathbb{R}^{3,1}$. Així doncs, posarem en correspondència una base de l'espaitemps $\mathbb{R}^{1,3}$ $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ amb una altra de $\mathbb{R}^{3,1}$ $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, de manera que un mateix vector $A \in \mathbb{R}^4$ es podrà expressar com

$$A^0\gamma_0 + A^1\gamma_1 + A^2\gamma_2 + A^3\gamma_3 \in Cl_{1,3}$$

$$A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 \in Cl_{3,1}$$

i, evidentment, tindran quadrats diferents.

La transformació *tilt* aconsegueix relacionar els productes de Clifford d'ambdues àlgebres mitjançant:

$$\underbrace{ab}_{Cl_{1,3}\,product} \quad \rightarrow \quad \underbrace{b^+a^+ + b^+a^- + b^-a^+ - b^-a^-}_{Cl_{3,1}\,product} \tag{5.1}$$

El que fa aquesta correspondència és simular el producte geomètric de $Cl_{3,1}$ dins $Cl_{1,3}$. Els superíndexs $+$ i $-$ corresponen a la part parella i senar, respectivament, de l'element en qüestió. Encara que la transformació *tilt* és vàlida per a qualsevol dimensió, està limitada als canvis entre signatures oposades. En les pròximes seccions, a més de donar una definició més pràctica del producte tilt veurem com generalitzar-lo per a qualsevol canvi de signatura.

5.3 El producte vee.

Sigui V un espai vectorial real de dimensió 4. En aquesta dimensió podem construir cinc àlgebres de Clifford reals diferents depenent de la signatura triada: $Cl_{4,0}$, $Cl_{3,1}$, $Cl_{2,2}$, $Cl_{1,3}$ i $Cl_{0,4}$. Considerem pel moment les àlgebres $Cl_{1,3}$ i $Cl_{4,0}$. Sigui $A, B \in Cl_{4,0}$ i AB el seu producte de Clifford. Definirem un nou producte, que anomenarem producte vee, $\vee$, que simularà el producte de Clifford de $Cl_{1,3}$ dins $Cl_{4,0}$. Per fer-ho seleccionarem primer en $\mathbb{R}^{4,0}$ (l'espai vectorial real que sustenta $Cl_{4,0}$) un vector unitari e_0 per representar la quarta dimensió i completarem la base amb tres vectors ortonormals més $\{e_i\}$ on $i = 1, 2, 3$. Definim ara, per $u, v \in \mathbb{R}^{4,0}$ el producte:

$$u \vee v \equiv (-1)\,(vu - 2(v \cdot e_0)(e_0 \cdot u)) \tag{5.2}$$

d'aquesta definició veiem que

$$e_o \vee e_0 = (-1)\,(vu - 2(v \cdot e_0)(e_0 \cdot u))$$

$$e_i \vee e_i = (-1)(e_i e_i) = -1 \quad i = 1, 2, 3$$

Donats $u, w \in Cl_{4,0}$ sabem que

$$uw + wu = 2u \cdot w = 2(u_0 w_0 + u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3)$$

ara utilitzant el producte *vee* tenim que,

$$\begin{aligned} u \vee w + w \vee u &= -wu + 2(w \cdot e_0)(e_0 \cdot u) - uw + 2(u \cdot e_0)(e_0 \cdot w) \\ &= 2(u_0 w_0 - u_1 w_1 - u_2 w_2 - u_3 w_3) \end{aligned}$$

De cara a estendre el producte més enllà dels vectors podem donar una expressió una mica més general que ens permetrà comprovar el bon comportament de la nostra proposta. Siguin B_k un k-vector i v un 1-vector de $Cl_{4,0}$. Per ells podem definir

$$B_k \vee v = (-1)^k [v B_k - 2(v \cdot e_0)(e_0 \cdot B_k)] \tag{5.3}$$

$$v \vee B_k = (-1)^k [B_k v - 2(B_k \cdot e_0)(e_0 \cdot v)] \tag{5.4}$$

Aquesta definició, que inclou com a cas particular (5.2), ens permet mostrar que el nou producte és associatiu. Esbossarem la demostració per de tal mostrar com treballa el nou producte. Cal doncs veure que $v \vee (u \vee w) = (v \vee u) \vee w$.

$$\begin{aligned} &v \vee (u \vee w) = v \vee [-wu + 2(w \cdot e_0)(e_0 \cdot u)] = \\ &v \vee [-w \cdot u - w \wedge u + 2(w \cdot e_0)(e_0 \cdot u)] = \\ &-(w \cdot u)v + 2(w \cdot e_0)(e_0 \cdot u)v - v \vee (w \wedge u) \end{aligned}$$

utilitzant (5.4) podem escriure el terme $v \vee (w \wedge u)$ com

$$\begin{aligned} &(w \wedge u)v - 2((w \wedge u) \cdot e_0)(e_0 \cdot v) = \\ &(w \wedge u) \cdot v + w \wedge u \wedge v - 2((w \wedge u) \cdot e_0)(e_0 \cdot v) \end{aligned}$$

així $v \vee (u \vee w)$ quedarà

$$\begin{aligned} &-(w \cdot u)v + 2(w \cdot e_0)(e_0 \cdot u)v \\ &\qquad - (w \wedge u) \cdot v - w \wedge u \wedge v + 2((w \wedge u) \cdot e_0)(e_0 \cdot v) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ara de la relació (1.17) veiem que

$$\begin{aligned} &(w \wedge u) \cdot v = -v \cdot (w \wedge u) = -(v \cdot w)u + (v \cdot u)w \\ &(w \wedge u) \cdot e_0 = -(e_0 \cdot w)u + (e_0 \cdot u)w \end{aligned}$$

i substituint a (5.5) obtenim

$$-(w\cdot u)v+(w\cdot v)u-(u\cdot v)w-w\wedge u\wedge v+2(w\cdot e_0)(e_0\cdot u)v \\ -2(e_0\cdot v)(e_0\cdot w)u+2(e_0\cdot v)(e_0\cdot u)w \quad (5.6)$$

fent el mateix procediment per $(v\vee u)\vee w$ veiem que el producte que hem definit és associatiu.

Una altra propietat bàsica d'aquest producte és la preservació de l'estructura multivectorial. Donats dos vectors u, w tenim que

$$\frac{1}{2}[u,v]_\vee=\frac{1}{2}(u\vee v-v\vee u)=\frac{1}{2}(-vu+2u_0v_0+uv-2u_0v_0) \\ =\frac{1}{2}(uv-vu)=\frac{1}{2}[u,v]=u\wedge v$$

Finalment, essent A_l un l-vector i B_k un k-vector podem expressar el producte $A_l\vee B_k$ com

$$A_l\vee B_k=(-1)^{kl}[B_kA_l-2(B_k\cdot e_0)(e_0\cdot A_l)] \quad (5.7)$$

Aquesta expressió pel producte vee, que està formulada en termes de la $\mathbb{Z}$-graduació vectorial de l'àlgebra ens permet realitzar el producte entre elements arbitraris. Notem, però, que requereix la singularització d'un vector, en aquest cas e_0.

En totes les aplicacions del canvi de signatura que seguiran considerarem identificat a tot multivector contravariant de l'àlgebra de partida un multivector de l'àlgebra de Grassmann contravariant amb idèntiques components. Aquest element pot llavors considerar-se que pertany a totes les àlgebres de Clifford contravariants de la mateixa dimensió i, per tant, li correspondrà el mateix símbol. Aquesta associació suposa, des d'un punt de vista pràctic, posar a disposició dels multivectors de Grassmann totes les estructures mètriques no degenerades. I el que permeten les operacions de canvi de signatura és condensar-les totes en una única estructura Clifford.

5.4 L'equació de Dirac-Hestenes i el producte vee.

Com a primera aplicació del nou producte *vee* simularem l'equació de Dirac ordinària en el context euclidià. Per diferenciar en quina algebra estem treballant cal tenir cura de la notació. Les bases de $Cl_{1,3}$ vindran descrites per γ_I i les de $Cl_{4,0}$ per e_I. Partint de l'equació de Dirac-Hestenes, després d'operar per la dreta amb e_{12} podem escriure:

$$\partial\psi+q\,A\psi\gamma_{12}-m\psi\gamma_{012}=0 \quad (5.8)$$

Podem escriure aquesta equació usant el producte *vee* en un espaitemps euclidià amb $\psi \in Cl_{4,0}$, on $e^{\mu} = e_{\mu}$, com:

$$\partial \vee \psi + q\, A\psi e_{12} - m\psi \vee e_{012} = 0 \tag{5.9}$$

Cal notar també que $e_{012} = e_0 e_1 e_2 = e_0 \vee e_1 \vee e_2$. Vegem com aquesta equació es pot escriure en termes del producte de Clifford original (el minkowskià) en l'espaitemps euclidià. Per fer-ho separarem l'operador de Dirac en les seves parts espacials i temporals,

$$\partial \vee \psi = e_0 \vee \partial_0 \psi + e_i \vee \partial_i \psi$$

Usant $\partial_0\psi \cdot e_0 = \frac{1}{2}(\partial_0\psi e_0 - e_0\partial_0\psi)$ podem escriure la part temporal com

$$\begin{aligned} e_0 \vee \partial_0\psi &= \partial_0\psi e_0 - 2(\partial_0\psi \cdot e_0)(e_0 \cdot e_0) \\ &= \partial_0\psi e_0 - 2[\frac{1}{2}(\partial_0\psi e_0 - e_0\partial_0\psi)] = e_0\partial_0\psi \end{aligned}$$

D'altra banda, per la part espacial tenim:

$$e_i \vee \partial_i\psi = \partial_i\psi e_i - 2[(\partial_i\psi) \cdot (e_0 \cdot e_i)] = \partial_i\psi e_i$$

Així, podem escriure l'operador de Dirac com:

$$\partial \vee \psi = e_0\partial_0\psi + \partial_i\psi e_i \tag{5.10}$$

És fàcil veure que s'acompleix:

$$\nabla \vee \nabla \vee \psi = \Box_M \psi \tag{5.11}$$

on $\Box_M = \partial_0^2 - \sum_{i=1}^3 \partial_i^2$, mentre que $\nabla^2\psi = \Box_E\psi$ amb $\Box_E = \partial_0^2 + \sum_{i=1}^3 \partial_i^2$.

El terme de massa de l'equació quedarà com:

$$m\psi \vee e_{012} = me_{12}\psi e_0 \tag{5.12}$$

i el terme d'acoblament electromagnètic serà:

$$A \vee \psi \vee e_{12} = e_{12}(\psi A - 2(\psi \cdot e_0)A_0) \tag{5.13}$$

Per tant l'equació de Dirac en $Cl_{4,0}$ és:

$$e_0\partial_0\psi + \partial_i\psi e_i + e_{12}(\psi A - 2(\psi \cdot e_0)A_0) - me_{12}\psi e_0 = 0 \tag{5.14}$$

És important tenir en compte que totes les expressions estan escrites en $Cl_{4,0}$. A més, pot veure's que les solucions de (5.8) són solucions de (5.14) i viceversa, en el sentit de la identificació multivectorial establerta al final de l'apartat anterior.

5.5 Producte vee i producte tilt. El cas general.

Com ja hem vist, Lounesto estudià el canvi entre mètriques de signatura oposada. Per això definí la transformació *tilt* (5.1) que, com veiérem, està basada en la descomposició parell/senar de l'àlgebra. Per incorporar aquesta correspondència al nostre formalisme la reinterpretarem mitjançant un nou producte, que anomenarem producte *tilt* que indicarem per $*_t$:

$$A_l \vee B_k = (-1)^{kl} B_k A_l \tag{5.15}$$

Així doncs, tenim definits dos productes

$$\text{Producte vee:} \qquad A_l \vee B_k = (-1)^{kl}[B_k A_l - 2(B_k \cdot e_0)(e_0 \cdot A_l)] \tag{5.16}$$

$$\text{Producte tilt:} \qquad A_l *_t B_k = (-1)^{kl} B_k A_l \tag{5.17}$$

Com es pot veure les expressions dels dos productes tenen un terme comú. El producte *tilt* és més intrínsec en el sentit que només depèn dels propis factors. Vegem quin és el significat del terme amb component e_0 del producte vee. Com hem vist aquest producte simula el canvi de signatura

$$\underbrace{(++++)}_{Cl_{4,0}} \to \underbrace{(+---)}_{Cl_{1,3}}$$

on els signes corresponen als quadrats dels elements de la base canònica. Fixem-nos que tots els quadrats canvien llevat del corresponent a la component e_0. La definició del producte *vee* pel canvi oposat, ie. $(+---) \to (++++)$, és exactament la mateixa conservant-se també el quadrat de la component e_0. D'altra banda, el producte *tilt* canvia tots els quadrats,

$$\underbrace{(+---)}_{Cl_{1,3}} \to \underbrace{(-+++)}_{Cl_{3,1}}$$

resultant innecessària la substracció de termes. Un cop més, el problema oposat $(-+++) \to (+---)$ es resol amb la mateixa definició pel producte. Tots aquests raonaments ens porten, pel camí de l'heurística, a estendre el nostre producte *vee* a una expressió genèrica que permeti qualsevol canvi. Pels casos de més interès físic tenim:

$$\begin{array}{ccc} (++++) & \leftrightarrow & (+---) \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ (----) & \leftrightarrow & (-+++) \end{array}$$

El canvi de signatura en una mateixa fila s'efectua utilitzant el producte vee. El canvi entre files de la mateixa columna utilitzant el producte tilt. Un canvi en diagonal, per exemple $(++++) \leftrightarrow (-+++)$, requerirà composar els productes *vee* i tilt. L'esquema el podem estendre a totes les signatures possibles en quatre dimensions:

$$\begin{array}{ccccccccc} (++++) & \leftrightarrow & (+---) & \leftrightarrow & (--++) & \leftrightarrow & (---+) & \leftrightarrow & (----) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ (----) & \leftrightarrow & (-+++) & \leftrightarrow & (++--) & \leftrightarrow & (+++-) & \leftrightarrow & (++++) \end{array} \tag{5.18}$$

Podem canviar la signatura al llarg de la mateixa fila coneixent l'element de la base canònica e_μ que no canvia el seu quadrat; aleshores

$$A_l \vee B_k = (-1)^{kl}[B_k A_l - 2(B_k \cdot e_\mu)(e^\mu \cdot A_l)] \tag{5.19}$$

on l'índex fixat μ no segueix el conveni d'Einstein. Pel canvi entre files de la mateixa columna el producte *tilt* és sempre el mateix:

$$A_l *_t B_k = (-1)^{kl} B_k A_l \tag{5.20}$$

Tot i que només hem treballat en quatre dimensions, no sembla difícil generalitzar aquest esquema a qualsevol dimensió.

5.6 Operador de Hodge i operadors diferencials.

En aquesta secció simularem estructures euclidianes dins l'espaitemps de Minkowski. En particular estudiarem la diferencial exterior i la codiferencial, operadors rellevants en el problema de trobar solucions autoduals i antiautoduals del camp electromagnètic. Com és ben sabut, en l'espaitemps de Minkowski no existeixen solucions reals al problema $*F = \pm F$, on F és el bivector de Faraday (2-forma) del camp electromagnètic i $*$ és l'operador estrella de Hodge. En canvi, en l'espaitemps euclidià aquest problema té solucions; aquestes són donades per $E = \pm B$, on E i B són les components 'elèctriques' i 'magnètiques' de F. Reproduirem aquests resultats a l'espai de Minkowski on tindrem ara camps elèctrics i magnètics reals 'pseudoduals'. Aquesta 'pseudodualitat' porta aparellada una redefinició de l'estrella de Hodge i els operadors diferencial exterior i codiferencial.

5.6.1 L'estrella de Hodge.

L'operador estrella de Hodge $*$ en l'espaitemps de Minkowski és:

$$*\Phi = \tilde{\Phi}\gamma_5 \tag{5.21}$$

Utilitzant el producte *vee* podem escriure l'operador estrella de Hodge $\star$ euclidià en $Cl_{1,3}$ com:

$$\star\Phi = \tilde{\bar{\Phi}} \vee \gamma_5 \tag{5.22}$$

Recordem que $\gamma_0 \vee \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ i que $\gamma_5 \vee \gamma_5 = 1$ mentre que $\gamma_5\gamma_5 = -1$. Per avaluar l'expressió (5.22) usant la definició del producte *vee* és convenient separar Φ segons la graduació parell/senar, és a dir $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ on $\Phi^\pm = \pm\hat{\Phi}^\pm$. Això ens permet d'escriure,

$$\Phi \vee \gamma_5 = \Phi^+ \vee \gamma_5 + \Phi^- \vee \gamma_5 \tag{5.23}$$

on

$$\begin{aligned}\Phi^+ \vee \gamma_5 &= \gamma_5\Phi^+ + 2\gamma_{123}(\gamma_0 \cdot \Phi^+) = \gamma_5(\Phi^+ - 2\gamma_0(\gamma_0 \cdot \Phi^+)) \\ &= \gamma_5(\Phi^+ - \gamma_0(\gamma_0\Phi^+ - \Phi^+\gamma_0) = \gamma_5\gamma_0\Phi^+\gamma_0\end{aligned}$$

Amb un procediment semblant per la part senar obtenim

$$\Phi^- \vee \gamma_5 = \gamma_5\Phi^- + 2\gamma_{123}(\gamma_0 \cdot \Phi^-) = -\gamma_5\gamma_0\Phi^-\gamma_0$$

i, per tant, podem escriure (5.23) com

$$\Phi \vee \gamma_5 = \gamma_5\gamma_0\hat{\Phi}\gamma_0$$

Finalment, l'operador estrella de Hodge euclidià quedarà com

$$\star\Phi = \gamma_5\gamma_0\overline{\Phi}\gamma_0, \tag{5.24}$$

on recordem que $\overline{\Phi} = \hat{\tilde{\Phi}} = \tilde{\hat{\Phi}}$. Si tenim present que l'operador paritat $\mathcal{P}$ ve donat per

$$\mathcal{P}(\Phi) = \gamma_0\Phi\gamma_0$$

i reescrivim (5.24) com

$$\star\Phi = -\gamma_0\overline{\Phi\gamma_5}\gamma_0$$

aleshores

$$\star\Phi = -\mathcal{P}(*\Phi) \tag{5.25}$$

obtenint finalment una expressió de l'operador de Hodge euclidià $\star$ escrit exclussivament en termes propis de l'espaitemps de Minkowski.

5.6.2 La diferencial exterior i la codiferencial.

En l'espaitemps de Minkowski, la diferencial exterior d i la codiferencial δ es poden escriure en funció de l'operador de Dirac [42] com

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{2}\left(\nabla\Phi + \hat{\Phi}\overleftarrow{\nabla}\right), \qquad \delta\Phi = \frac{1}{2}\left(\nabla\Phi - \hat{\Phi}\overleftarrow{\nabla}\right) \tag{5.26}$$

on recordem que l'acció per la dreta de l'operador de Dirac $\overleftarrow{\nabla}$ es defineix com $\Phi\overleftarrow{\nabla} = (\partial_\mu\Phi)\gamma^\mu$. No és difícil comprovar que les expressions anteriors verifiquen la propietat definitòria $\delta = *\mathrm{d}*$. La diferencial i codiferencial euclidianes les designarem per $\breve{\mathrm{d}}$ i $\breve{\delta}$. Com la diferencial es defineix sobre multivectors covariants (formes diferencials) independentment de l'existència d'una estructura mètrica[1] es verificarà la relació $\breve{\mathrm{d}} = \mathrm{d}$, que comprovarem com a prova de consistència del formalisme. En canvi, això no passarà amb l'operador codiferencial ja que aquest depèn de la mètrica.

Escrivim els dos operadors euclidians en l'espaitemps de Minkowski usant el producte *vee* en les fórmules (5.26), en lloc del producte Clifford,

$$\breve{\mathrm{d}}\Phi = \frac{1}{2}\left(\nabla \vee \Phi + \hat{\Phi} \vee \overleftarrow{\nabla}\right), \qquad \breve{\delta}\Phi = \frac{1}{2}\left(\nabla \vee \Phi - \hat{\Phi} \vee \overleftarrow{\nabla}\right), \tag{5.27}$$

Estudiem detingudament les expressions $\nabla \vee \Phi = \gamma^\mu \vee \partial_\mu\Phi$ i $\Phi \vee \overleftarrow{\nabla} = \partial_\mu\Phi \vee \gamma^\mu$. Per $\Phi_k \in \Lambda^k$ aleshores

$$\begin{aligned}
\nabla \vee \Phi_k &= \gamma^0 \vee \partial_0\Phi_k + \gamma^i \vee \partial_i\Phi_k \\
&= (-1)^k[\partial_0\Phi_k\gamma^0 - 2(\partial_0\Phi_k \cdot \gamma^0)] + (-1)^k\partial_i\Phi_k\gamma^i \\
&= \gamma^0\partial_0\Phi_k + (-1)^k(\partial_i\Phi_k)\gamma^i
\end{aligned}$$

on hem utilitzat que

$$\partial_0\Phi_k \cdot \gamma_0 = \frac{1}{2}(\partial_0\Phi_k\gamma_0 - (-1)^k\gamma_0\partial_0\Phi_k)$$

De manera similar podem obtenir

$$\Phi_k \vee \overleftarrow{\nabla} = (-1)^k\gamma^i\partial_i\Phi_k + \partial_0\Phi_k\gamma^0$$

per tant tenim que

$$\nabla \vee \Phi = \gamma^0\partial_0\Phi + \partial_i\hat{\Phi}\gamma^i, \qquad \Phi \vee \overleftarrow{\nabla} = \gamma^i\partial_i\hat{\Phi} + \partial_0\Phi\gamma^0.$$

[1] D'acord amb aquesta propietat, en tota aquesta secció considerarem identificats els diferents multivectors Clifford i els exteriors en la seva forma covariant.

Finalment, substituint en les expressions (5.27) demostrem:

$$\begin{aligned} \check{\mathrm{d}}\Phi &= \frac{1}{2}\left(\gamma^0\partial_0\Phi + \partial_i\hat{\Phi}\gamma^i + \gamma^i\partial_i\Phi + \partial_0\hat{\Phi}\gamma^0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\hat{\Phi}\gamma^\mu\right) = \mathrm{d}\Phi, \end{aligned} \tag{5.28}$$

mentre que per a l'expressió de la codiferencial $\check{\delta}$ tenim que

$$\begin{aligned} \check{\delta}\Phi &= \frac{1}{2}\left(\gamma^0\partial_0\Phi + \partial_i\hat{\Phi}\gamma^i - \gamma^i\partial_i\Phi - \partial_0\hat{\Phi}\gamma^0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\gamma^0\partial_0\Phi - \gamma^i\partial_i\Phi\right) - \left(\partial_0\hat{\Phi}\gamma^0 - \partial_i\hat{\Phi}\gamma^i\right)\right] \end{aligned} \tag{5.29}$$

on clarament es mostra que $\check{\delta} \neq \delta$. Utilitzant l'expressió (5.24) per l'operador de Hodge euclidià escrit en Minkowski tenim que

$$\mathrm{d}\star\Phi = \frac{1}{2}\left(-\gamma_5\gamma^\mu\gamma_0\partial_\mu\bar{\Phi}\gamma_0 + \gamma_5\gamma_0\partial_\mu\tilde{\Phi}\gamma_0\gamma^\mu\right)$$

i per tant

$$\begin{aligned} \star\mathrm{d}\star\Phi &= \frac{1}{2}\left(\gamma_5\partial_\mu\Phi\gamma_0\gamma^\mu\gamma_5\gamma_0 + \gamma_5\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0\partial_\mu\hat{\Phi}\gamma_5\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0\partial_\mu\Phi - \partial_\mu\hat{\Phi}\gamma_0\gamma^\mu\gamma_0\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\gamma^0\partial_0\Phi - \gamma^i\partial_i\Phi\right) - \left(\partial_0\hat{\Phi}\gamma^0 - \partial_i\hat{\Phi}\gamma^i\right)\right] \end{aligned}$$

comparant aquest equació amb (5.27) obtenim la propietat definitòria de la codiferencial euclidiana:

$$\check{\delta} = \star\check{\mathrm{d}}\star = \star\mathrm{d}\,\star$$

5.6.3 Solucions duals i antiduals del camp electromagnètic.

Considerem les equacions de Maxwell lliures pel camp electromagnètic en l'espaitemps de Minkowski,

$$\mathrm{d}F = 0, \qquad \delta F = 0 \tag{5.30}$$

Aquestes equacions no tenen solucions duals ni antiduals, és a dir, solucions que satisfacin les condicions

$$F = \pm * F \tag{5.31}$$

En $Cl_{1,3}$ l'única solució per a (5.31) és $F=0$, ja que $F=\pm * F=\mp F\gamma_5=\mp(\mp F\gamma_5)\gamma_5=F(\gamma_5)^2=-F$. Fixem-nos que el quadrat de l'element de volum juga un paper clau ja que si fos positiu existirien bivectors autoduals o antiautoduals, situació que clarament es dóna a $Cl_{4,0}$ on l'element de volum té quadrat $+1$. Fent ús del producte *vee* podem escriure les equacions de Maxwell euclidianes dins l'espaitemps minkowskià com:

$$\check{\mathrm{d}}F=0, \qquad \check{\delta}F=0, \tag{5.32}$$

Aquestes equacions admeten solucions que satisfan $F=\pm\star F$ i que podran escriure's com:

$$F=\pm\gamma_5\gamma_0\bar{F}\gamma_0=\pm\gamma_5\gamma_0\tilde{F}\gamma_0. \tag{5.33}$$

A més, sabem que el bivector F es pot descompondre com

$$F=E+\gamma_5 B,$$

on

$$E=\frac{1}{2}(F-\gamma_0F\gamma_0), \qquad \gamma_5B=\frac{1}{2}(F+\gamma_0F\gamma_0),$$

per tant $E\gamma_0=-\gamma_0E$ i $\gamma_5B\gamma_0=\gamma_0\gamma_5B$. Ara és immediat comprovar que les solucions duals i antiduals del cas euclidià $E=\pm B$ satisfan les equacions (5.33) que transcriuen la dualitat/antidualitat euclidianes.

5.7 El canvi de signatura i la $\mathbb{Z}_2$-graduació de les àlgebres de Clifford.

Entre els teoremes d'estructura de les àlgebres geomètriques de Clifford presentats en el primer capítol n'hi ha un que relaciona les àlgebres parelles de signatura oposada, i.e. $Cl^+_{p,q}\simeq Cl^+_{q,p}$. Basant-se en ell i en l'isomorfisme (C.4) de l'apèndix C és immediat estendre aquest teorema al domini de les àlgebres α-parelles basades en la α-$\mathbb{Z}_2$-graduació:

Teorema 5.1

$$Cl^0_{p,q}\simeq Cl^0_{p_0+q_1,q_0+p_1} \tag{5.34}$$

Demostració.

$$Cl^0_{p,q}\simeq Cl_{p_0,q_0}\otimes Cl^+_{p_1,q_1}\simeq Cl_{p_0,q_0}\otimes Cl^+_{q_1,p_1}\simeq Cl^0_{p_0+q_1,q_0+p_1}$$

El producte *vee* (5.19) ha estat definit en funció d'un element de la base canònica e_μ. Aquest element és aquell que manté el seu quadrat en el canvi de signatura. És per això que, triada una signatura, el mecanisme del producte *vee* permet canviar a qualsevol altra signatura seguint determinats itineraris (5.18). En canvi, l'expressió del producte *tilt* només permet canvis entre signatures oposades però la seva expressió és independent de la signatura. Si tenim present que en el canvi de signatura corresponent al producte *tilt* tots els 1-vectors canvien per igual, com també succeeix amb l'automorfisme principal que dóna la $\mathbb{Z}_2$-graduació, podem pensar en la possibilitat d'obtenir una formulació més canònica del producte *vee* basada en una α-$\mathbb{Z}_2$-graduació adequada. De fet això ho aconseguirem per als canvis de signatura que resulten de la composició d'una transformació *vee* i una *tilt* i que expressarem mitjançant un producte vee-tilted $\vee_t$. La tria d'aquesta graduació es fa seguint el criteri següent: l'únic 1-vector de Cl^1 serà aquell que el seu quadrat canviï de signe. Així, per exemple, pel canvi de signatura: $(++++) \to (-+++)$ la graduació serà:

	Cl_0	Cl_1
0-vectors	1	
1-vectors	$\{e_k\}$	e_0

L'expressió que fa efectiu el producte $\vee_t$ és:

$$A_k \vee_t B_l = (-1)^{kl} A_k B_l \tag{5.35}$$

on k, l prenen els valors 0 ó 1 segons la α-paritat de l'element.

Notem ara que podem reformular de nou de manera compacte el producte *tilt* d'una manera més fidel a la formulació original de Lounesto [52], fent servir com ell la $\mathbb{Z}_2$-graduació:

$$A_l *_t B_k = (-1)^{kl} B_k A_l \tag{5.36}$$

on ara k, l prenen els valors 0 ó 1 segons la paritat de l'element.

Els productes (5.19) i (5.20) estan basats en una graduació $\mathbb{Z}$ d'espais vectorials i, per tant deslligada de qualsevol consideració mètrica. D'altra banda, les expressions anteriors estan basades en una $\mathbb{Z}_2$ graduació de l'àlgebra de Clifford.

Conclusions i perspectives.

En aquesta memòria pretenem haver mostrat, un cop més, que l'àlgebra geomètrica de Clifford és una eina molt eficient per l'estudi de problemes físics. Aquesta eficiència ha estat posada de manifest en les seccions 1.8 i 2.5 on es demostra que el càlcul dels observables d'una partícula, del camp electromagnètic i del camp de Dirac poden realitzar-se de manera formalment idèntica. A un sistema físic objecte d'estudi, caracteritzat per l'observador Σ mitjançant un multivector $\mathcal{S}_\Sigma$ (R, F o Ψ segons el cas), el càlcul de la magnitud multivectorial observada $\mathcal{O}_\Sigma$ es realitza mitjançant una expressió del tipus:

$$(\mathcal{S}_\Sigma) \quad \widehat{\mathcal{O}_\Sigma} \quad (\mathcal{S}_\Sigma)' \;=\; \mathcal{O}_\Sigma$$

on $\widehat{\mathcal{O}}_\Sigma$ és el multivector operador observable.

D'entre aquests camps físics hem dedicat el nostre treball, principalment, a l'estudi del camp de Dirac clàssic. El segon capítol ha pretès donar resposta a la necessitat de dotar d'un llenguatge comú a la *babel* espinorial. Ho hem assolit generalitzant la unificació de dos punts de vista: el relatiu a la teoria de representacions espinorials i el de la definició d'espinor com classe d'equivalència. En la secció 2.4 hem construït el referencial espinorial deslligant-lo de l'espai de representació. Aquesta construcció ens ha permès definir l'espinor independentment de l'espai de representació usat. Una eina important ha estat la funció representació definida en la secció 2.2, que relaciona l'espai vectorial 'físic' (a on pertanyen els 'vectors físics' que no es transformen sota canvis d'observador) amb l'espai 'genèric'(al qual pertanyen les representacions d'aquests 'vectors físics'). La funció de representació permet mostrar, de manera clara i en tot moment, en quin espai estan definits els objectes de treball. La distinció entre l'espai 'físic' i genèric ha permès, també, caracteritzar dos tipus d'espinors operadors (per l'esquerra o per la dreta) segons el comportament dels seus observables sota canvis de referència. D'altra banda, un tractament similar aplicat als espinors algèbrics ens ha dut a definir un nou tipus d'espinor que hem anomenat intern, en el sentit que transformacions que permeten canviar d'ideal (i deslligades de l'observador) no transformen els observables. Aquestes transformacions formen un grup G (secció2.9) que conté el grup Spin com a subgrup.

En el tercer capítol hem establert, mitjançant l'estructura algèbrica d'ideals, una relació entre l'electró i el positró. Aquesta relació generalitza els treballs de Hestenes, bo i permetent més llibertat en la tria dels idempotents primitius que generen els ideals minimals utilitzats com espai de representació. S'ha demostrat que, pels casos de major interès físic, els nostres resultats coincideixen amb els obtinguts per Parra [57, 64] en l'estudi vectorial de l'equació de Dirac. Ara, però, l'equació per l'electró i pel positró que obtenim a partir del nostre formalisme porten associades la marca de l'ideal minimal del que es deriven. Això permet, inclús en el cas lliure d'acoblament electromagnètic, distingir les dues equacions. A més, hem mostrat que la densitat d'energia també porta associada aquesta empremta de l'ideal, validant com a solucions d'energia positiva, per l'equació del positró, aquelles que en les presentacions habituals són considerades d'energia negativa. Així doncs, tot i tenir dues equacions 'idèntiques' pel cas lliure, les solucions d'energia positiva d'ambdues són diferents. Al final del capítol demostrem, fent ús de la descomposició polar, que aquesta diferència es deguda a la rotació de dualitat que conté l'espinor. És més, aquesta distinció ha permès redefinir la densitat de magnetització com $M = \frac{|q|}{2m}\phi e_{21}\tilde{\phi}$ on el valor absolut posa de manifest que el signe de la càrrega està incorporat en la funció d'ona, codificat per l'angle d'Yvon-Takabayasi.

Com vàrem comentar a la introducció Fauser a [32] conclou la necessitat d'una revisió de la connexió existent entre la teoria de representacions espinorials i les $\mathbb{Z}_2$-graduacions. En el quart capítol hem efectuat aquesta revisió. Partint de l'equació de Dirac demostrem que, per un cas genèric, no podem obtenir una equació de Dirac-Hestenes usant la $\mathbb{Z}_2$-graduació habitual. Mostrem que aquesta limitació és deguda el fort acoblament entre l'estructura de l'idempotent primitiu i la caracterització de les parts reals/imaginàries, parelles/senars de l'equació de Dirac 'algèbrica'. Pel cas de Hestenes el desacoblament el realitza la graduació habitual. Pel cas general demostrem que, respectant determinades condicions, una nova $\mathbb{Z}_2$-graduació desacobla les equacions en una part α-parella i una part α-senar. En l'última secció del capítol, en analitzar la relació existent entre la nova subàlgebra α-parella i la de Hestenes, hem vist que la primera presenta serioses limitacions degudes a la seva desvinculació amb les transformacions de Lorentz sobre l'espai de Minkowski. No estem donant cap limitació sobre el conjunt de de possibles representacions matricials. Simplement, donada una representació matricial (o un idempotent primitiu) associada a una tètrada inercial de l'espai de Minkowski, només les representacions conectades via el principi de relativitat tindran un ancoratge físic. Aquest ancoratge, com ja succeïa pels referencials espinorials fiducials, es basa en una tria arbitrària, però fixada.

El lligam entre el canvi de signatura i les $\alpha - \mathbb{Z}_2$-graduacions presentades anteriorment es mostra en el darrer capítol de la tesi. Lounesto defineix la transformació *tilt* a través de la $\mathbb{Z}_2$-graduació habitual. Hem vist que nous productes basats en la $\mathbb{Z}$-graduació usual, definida sobre l'estructura vectorial de l'àlgebra, resulten efectius pel canvi de signatura. Hem classificat aquests nous productes en dos tipus: els productes *tilt*, que reprodueixen els canvis entre signatures oposades, i els productes *vee*, que reprodueixen els altres canvis. La diferència formal entre aquest dos productes és que l'expressió pel producte *vee*, a diferència de la *tilt*, no és canònica. Finalment, hem estés el terema d'isomorfia de subàlgebres parelles de signatures oposades a un teorema d'isomorfia d'àlgebres α-parelles. Aquest teorema ha permès reconduir a una formulació canònica els productes associats als canvis generals de signatura.

En acabar aquesta memòria les següents qüestions ofereixen noves perspectives de continuïtat en la línia de recerca iniciada:

- L'extensió i la generalització del càlcul d'observables de sistemes físics, aquesta darrera en la línia indicada per [68], pensem que pot contribuir, de manera significativa, a una millor comprensió de la realitat geomètrica subjacent als camps físics i compartida per les teories clàssica i quàntica.

- El resultat del capítol tercer on es conclou que la relació entre l'electró i el positró pot establir-se a través de l'estructura algèbrica dels ideals, suggereix l'oportunitat d'un estudi detallat dels espinors interns i del seu grup de simetria associat. Aquest estudi, emmarcat dins el domini de les teories de gauge, pot permetre posar en relació l'estructura d'aquests nous espinors amb exposicions com les realitzades per J.S.R. Chisholm i R.S. Farwell [13, 12] sobre la teoria electrofeble.

- Finalment, creiem molt convenient estendre l'estudi comparatiu dels camps espinorials associats a l'electró i el positró, fet al tercer capítol, a casos amb camp electromagnètic extern. Un estudi detallat del factor de la descomposició polar que conté l'angle d'Yvon-Takabayasi podria aportar nous elements de diferenciació geomètrica entre els camps de Dirac associats a les dues partícules.

Apèndix A

Àlgebres de Clifford i àlgebres simples.

A.1 Idempotents, ideals i àlgebres de divisió.

Definició A.1 *Un element f, diferent de zero, d'una àlgebra A s'anomena idempotent si $f^2 = f$.*

Definició A.2 *Dos idempotents f_1 i f_2 s'anomenen ortogonals si $f_1 f_2 = f_2 f_1 = 0$.*

Definició A.3 *Anomenarem a f idempotent primitiu si no es pot escriure com la suma de dos idempotents ortogonals, és a dir, $f \neq f_1 + f_2$ on $f_1^2 = f_1$, $f_2^2 = f_2$ i $f_1 f_2 = f_2 f_1 = 0$.*

Definició A.4 *Un conjunt $I_L \subset A$ s'anomena ideal a l'esquerra de A si $\forall a \in A$ i $\forall x \in I_L$ tenim que $ax \in I_L$.*

Definició A.5 *Un conjunt $I_R \subset A$ s'anomena ideal a la dreta de A si $\forall a \in A$ i $\forall x \in I_R$ tenim que $xa \in I_R$.*

Definició A.6 *El conjunt $I \subset A$ s'anomena ideal bilateral, o simplement ideal de A, si $\forall a, b \in A$ i $\forall x \in I$ tenim que $axb \in I$.*

Definició A.7 *Un ideal I és minimal si no conté cap subideal no trivial, on per trivial s'entén I i $\emptyset$.*

Definició A.8 *A és una àlgebra simple si els seus dos únics ideals (bilaterals) són A i $\emptyset$.*

Definició A.9 *Una àlgebra semisimple és la suma directa d'àlgebres simples.*

Definició A.10 *Una àlgebra de divisió és aquella en que tot element no nul posseeix un invers.*[1] D'aquesta definició es segueix que una àlgebra de divisió no té altre idempotent que la unitat: $f = f^{-1}f^2 = f^{-1}f = 1$.

Teorema A.1 *f és l'únic idempotent de fAf si i tant sols si f és primitiu.*

Demostració. Si no fos primitiu llavors $f = g + h$ amb $gh = hg = 0$ d'on veiem que $gf = fg = (g+h)g = g$ i $fh = hf = h$ i per tant g i h són elements de fAf, és a dir, no hi ha un únic idempotent. Això ens demostra l'enunciat en el sentit en que ens diu que si f és únic llavors és primitiu. La demostració en sentit contrari no és més complicada i segueix utilitzant el recurs de la doble negació. Si g és un idempotent en fAf, a més de f, llavors $f - g$ també és idempotent

$$(f-g)(f-g) = f^2 - fg - gf + g^2 = f - 2g + g = f - g$$

on ens hem aprofitat de que f és la identitat en fAf. A més a més, $g(f-g) = (f-g)g = 0$ i per tant podem descompondre f en la suma de dos idempotents ortogonals $f = (f-g)+g$ mostrant-nos que f no és primitiu. D'aquesta doble negació concloem que si és primitiu aleshores és únic.

Teorema A.2 *Si f és un idempotent primitiu llavors fAf és una àlgebra de divisió.*

Demostració. De primer demostrarem que els únics ideals a l'esquerra de fAf són el propi fAf i $\emptyset$. Sigui $I = Af$ un ideal a l'esquerra de A. Si f és primitiu aquest ideal és minimal. Sigui J un ideal a l'esquerra no nul, aleshores $J \subset fAf$ i $AJ \subset AfAf = AfI \subset I$, és a dir, $AJ \subset I$. Però com havíem dit que I és minimal i J no és nul l'única possibilitat és que $AJ = I$. Per una altra banda $fAf = fI = fAJ \subset J$ per tant $fAf \subset J$ però hem vist que $J \subset fAf$ per tant $J = fAf$, i.e., els únics ideals a l'esquerra de fAf són el propi fAf i $\emptyset$. Sigui $z \in fAf$ no nul. El conjunt $fAfz$ és un ideal a l'esquerra de fAf. Però com fAf hem vist que no conté subideals no trivials tenim que $fAf = fAfz$. Això significa que existeixen $\omega, \omega' \in fAf$ tals que $\omega z = \omega'$ i en conseqüència existirà un $z' \in fAf$, no nul, tal que $z'z = f$ on com ja vàrem veure f és la identitat en fAf. Pel mateix argument existirà un $z'' \in fAf$ tal que $z''z = f$. Ara $z'' = z''z'z = z$, o sigui, $z'z = zz' = f$ el que mostra que fAf és una àlgebra de divisió amb la unitat f.

[1] En general les àlgebres de Clifford no són àlgebres de divisió. En canvi tota àlgebra de divisió associativa que estén els reals correspon a una o més àlgebres de Clifford. De fet tenim: $\mathbb{R} \simeq Cl_{0,0} \simeq Cl^+_{1,0} \simeq Cl^+_{0,1}$, $\mathbb{C} \simeq Cl_{0,1} \simeq Cl^+_{2,0} \simeq Cl^+_{0,2}$, $\mathbb{H} \simeq Cl_{0,2} \simeq Cl^+_{3,0} \simeq Cl^+_{0,3}$.

A.2 Representació regular i representacions irreductibles.

Definició A.11 *Donat $a \in A$, essent A una àlgebra, definim l'aplicació lineal $L : A \longrightarrow \mathrm{End}(A)$ com*

$$L(a)b = ab \ \ \forall b \in A$$

L és una representació, ja que $L(1) = 1$ i $L(ab) = L(a)L(b)$, que anomenarem representació regular.

La representació regular aprofita l'estructura vectorial de la pròpia àlgebra. Aquesta representació és fidel. Per veure-ho demostrarem que és injectiva. Si $L(a)c = L(b)c$ llavors $L(a-b)c = (a-b)c = 0$ si prenem $c = 1$ aleshores $a = b$.

Imaginem que existeixen uns espais B_1 i B_2 que són invariants sota l'acció de L, és a dir, $L(a)B_1 \subset B_1$ i que $L(a)B_2 \subset B_2$, $\forall a \in A$. Aleshores podem escriure $L = L_1 \oplus L_2$ on $L_1 : A \longrightarrow \mathrm{End}(B_1)$ i $L_2 : A \longrightarrow \mathrm{End}(B_2)$. Podria donar-se el cas que existissin subespais de B_1 i B_2 que fossin invariants sota l'acció de L_1 i L_2. Continuant aquest raonament podem arribar a un espai $\mathcal{S}$ i una representació $\mathcal{L} : A \longrightarrow End(\mathcal{S})$ de manera que els seus únics subespai invariants sota l'acció de $\mathcal{L}$ són $\mathcal{S}$ i $\emptyset$. Aleshores $\mathcal{L}$ s'anomena irreductible. $\mathcal{S}$ és un ideal minimal a l'esquerra de A ja que $\mathcal{L}(a)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ i per tant $\forall a \in A$ i $\forall x \in \mathcal{S}$ tenim que $ax \in \mathcal{S}$. Així doncs, podem concloure un resultat molt important pels nostres interessos:

Teorema A.3 *L'espai de representació associat a una representació irreductible és un ideal minimal a l'esquerra de l'àlgebra.*

La representació regular és fa encara més rellevant si treballem amb àlgebres simples, això és degut a un teorema [5] que diu:

Teorema A.4 *Totes les representacions irreductibles d'una àlgebra simple són equivalents.*

En el cas d'àlgebres semisimples un altre teorema no menys important ens diu:

Teorema A.5 *Les representacions irreductibles d'una àlgebra semisimple són equivalents si i només si els seus nuclis són els mateixos.*

Aquests últims teoremes seran de gran utilitat estudiar si les àlgebres de Clifford són simples o semisimples.

A.3 Àlgebres de Clifford i àlgebres simples

Quan vàrem donar la classificació de les àlgebres de Clifford veiérem que les podíem expressar o com $\mathbb{K}\otimes M(n,\mathbb{R})$ o bé com $[\mathbb{K}\otimes M(n,\mathbb{R})]\oplus[\mathbb{K}\otimes M(n,\mathbb{R})]$. Aquesta classificació no és gratuita i ens permetrà identificar el caràcter simple o semisimple de les nostres àlgebres. Per fer-ho serà necessari demostrar un resultat molt important:

Teorema A.6 *Una àlgebra A és simple si i només si $A = \mathbb{K}\otimes M(n,\mathbb{R})$ on $\mathbb{K}$ és una àlgebra de divisió.*

Demostració. Farem primer la demostració cap a l'esquerra, és a dir, demostrarem que una àlgebra que pot prendre la forma $\mathbb{K}\otimes M(n,\mathbb{R})$ és una àlgebra simple. De l'àlgebra $M(n,\mathbb{R})$ considerem el conjunt de les n^2 matrius E_{ij} definides de la forma següent $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ no és difícil veure que E_{ij} formen base per $M(n,\mathbb{R})$. Com una àlgebra simple és aquella en que els únics ideals bilaterals de l'àlgebra són ella mateixa i $\emptyset$, agafarem un element x d'un suposat ideal $I\subset A$ i veurem a què correspon. Ja que $I\subset A$ aleshores $x\in A$ i el podem escriure com $x=\sum_{ij}x_{ij}E_{ij}$ on $x_{ij}\in\mathbb{K}$. Si $x=0$ llavors $I=\emptyset$. Ara hem de veure que si $x\neq 0$ llavors $I=A$. Per fer-ho determinarem primer els coeficients x_{ij} sabent que les matrius E_{ij} satisfan $E_{ij}E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$ i que $\sum_i E_{ii}=1_A$

$$\begin{aligned}\sum_k E_{ki}xE_{jk} &= \sum_{klm} x_{lm}E_{ki}E_{lm}E_{jk} = \sum_{klm} x_{lm}\delta_{il}E_{km}E_{jk} \\ &= \sum_{klm} x_{lm}\delta_{il}\delta_{jm}E_{kk} = x_{ij}\sum_k E_{kk} = x_{ij}1_A\end{aligned}$$

Si F és una àlgebra de divisió aleshores existeix x_{ij}^{-1} i tindrem

$$\sum_k x_{ij}^{-1}E_{ki}xE_{jk} = 1_A \tag{A.1}$$

Aquesta equació ens mostra que $1_A\in AxA$, és a dir, $1_A\in I$. Prenent doncs $x=1$ tenim que $AA=A\subset I$. Com $A\subset I$ i $I\subset A$ llavors $I=A$.

La demostració en sentit contrari és més elaborada. Es tracta de veure que si A és simple es pot escriure com $\mathbb{K} \otimes M(n, \mathbb{R})$. Partim, doncs, d'una àlgebra simple A i considerem els seus idempotents primitius $\{f_1, \ldots, f_n\}$ mutuament ortogonals. Definim uns certs subespais $A_{ij} \equiv f_i A f_j$, de fet són àlgebres ja que són subespais tancats sota el producte. Calculem el producte de dues àlgebres distintes

$$A_{ij}A_{pk} = A_{ij}f_jf_pA_{pk} = A_{ij}A_{jk}\delta_{jp} = f_iAf_jAf_k\delta_{jp}$$

Com f_j és un idempotent Af_jA és un ideal bilateral, però com A és simple i $f_j \neq 0$ llavors $Af_jA = A$ i per tant

$$A_{ij}A_{pk} = f_iAf_k\delta_{jp} = A_{ik}\delta_{jp} \tag{A.2}$$

Treballem amb una àlgebra en concret $A_{11} = A_{1j}A_{j1}\ \forall j$. Un element d'aquesta àlgebra és l'idempotent f_1 i per tant existeixen uns $\mathbf{e}_{1j} \in A_{1j}$ i $\mathbf{e}_{j1} \in A_{j1}$ tals que $f_1 = \mathbf{e}_{1j}\mathbf{e}_{j1}$. Definim també uns $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{i1}\mathbf{e}_{1j} \in A_{ij}$ que compliran $f_k\mathbf{e}_{ij} = f_kf_i\mathbf{e}_{ij}f_j = f_kf_if_i\mathbf{e}_{ij}f_j = \delta_{ki}f_i\mathbf{e}_{ij}f_j = \mathbf{e}_{ij}\delta_{ik}$ i de la mateixa manera $\mathbf{e}_{ij}f_k = \mathbf{e}_{ij}\delta_{jk}$. Ara estem en condicions de calcular el producte $\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{pq}$ que de manera anàloga a A.2 donarà

$$\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{pq} = \mathbf{e}_{iq}\delta_{jp}$$

Aquest resultat ens mostra que $\mathbf{e}_{ii}$ és un idempotent que ens servirà per expressar la identitat 1_A de A

$$1_A = \sum_i \mathbf{e}_{ii}$$

ja que $\sum_k \mathbf{e}_{kk}\mathbf{e}_{ij} = \sum_k \delta_{ki}\mathbf{e}_{kj} = \mathbf{e}_{ij} = 1_A\mathbf{e}_{ij}$. Com f_i és primitiu serà l'únic idempotent de A_{ii} i com $\mathbf{e}_{ii}$ també pertany a A_{ii} aleshores $\mathbf{e}_{ii} = f_i$. Tornant-nos a aprofitar del fet de que f_i és primitiu llavors $A_{ii} = f_iAf_i$ serà una àlgebra de divisió amb f_i com a identitat. A més les àlgebres A_{ii} són isomorfes entre si. Ho demostrarem per construcció establint la següent aplicació lineal

$$\phi_{ij} : A_{ii} \longrightarrow A_{jj}; \quad x_i \mapsto \phi_{ij}(x_i) = \mathbf{e}_{ji}x_i\mathbf{e}_{ij}$$

veiem que es conserva l'estructura:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}(x_iy_j) &= \mathbf{e}_{ji}x_iy_i\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ji}x_if_iy_i\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ji}x_i\mathbf{e}_{ii}y_i\mathbf{e}_{ij} \\ &= \mathbf{e}_{ji}x_i\mathbf{e}_{ij}\mathbf{e}_{ji}y_i\mathbf{e}_{ij} = \phi_{ij}(x_i)\phi_{ij}(y_i) \end{aligned}$$

a més és invertible ja que $\phi_{ij}^{-1} = \phi_{ji}$. Per tant veiem[2] que les àlgebres de divisió A_{ii} $\forall i$ són isomorfes entre si.

Essent $\mathbb{K}$ una àlgebra de divisió, definim ara el següent isomorfisme com

$$\eta : A_{11} \longrightarrow \mathbb{K}; \quad x_1 \mapsto \sum_j \mathbf{e}_{j1} x_1 \mathbf{e}_{1j} = \sum_j x_j = \eta(x_1) \equiv x \tag{A.3}$$

on l'invers el podem obtenir fent $\mathbf{e}_{11} x \mathbf{e}_{11} = x_1$. Així doncs, tenim que $A_{11} \simeq A_{kk} \simeq \mathbb{K}$. Encara podem veure que per $x \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} x\mathbf{e}_{ij} &= \sum_k x_k \mathbf{e}_{ij} = \sum_k \mathbf{e}_{k1} x_1 \mathbf{e}_{1k} \mathbf{e}_{ij} = \sum_k \mathbf{e}_{k1} x_1 \mathbf{e}_{1k} \delta_{ki} = \mathbf{e}_{i1} x_1 \mathbf{e}_{1j} \\ &= \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{j1} x_1 \mathbf{e}_{1j} = \mathbf{e}_{ij} x_j = \sum_k \mathbf{e}_{ij} x_k = \mathbf{e}_{ij} x \end{aligned}$$

A cada $a \in A$ li podem associar $(a_{ij})_k = \mathbf{e}_{ki} a \mathbf{e}_{jk}$. Llavors

$$(a_{ij})_k = \mathbf{e}_{k1} \mathbf{e}_{1i} a \mathbf{e}_{j1} \mathbf{e}_{1k} = \mathbf{e}_{k1} (a_{ij})_1 e_{1k}$$

i, per tant, si $a_{ij} = \sum_k (a_{ij})_k$ segons (A.3) $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Ara podem veure que

$$\begin{aligned} \sum_{ij} a_{ij} \mathbf{e}_{ij} &= \sum_{ijk} (a_{ij})_k \mathbf{e}_{ij} = \sum_{ijk} \mathbf{e}_{k1} \mathbf{e}_{1i} a \mathbf{e}_{j1} \mathbf{e}_{1k} \mathbf{e}_{ij} = \sum_{ijk} \mathbf{e}_{ki} a \mathbf{e}_{jk} \mathbf{e}_{ij} \\ &= \sum_{ijk} \mathbf{e}_{ki} a \mathbf{e}_{jj} \delta_{ki} = \sum_{ij} \mathbf{e}_{ii} a \mathbf{e}_{jj} = \sum_{ij} f_i a f_j = a \end{aligned}$$

i per tant $A = \mathbb{K} \otimes M(n, \mathbb{R})$.

L'expressió $a = \sum_{ij} a_{ij} \mathbf{e}_{ij}$ trobada per l'element $a \in A$ no és única ja que donat $r \in A$ tal que $\exists r^{-1}$ sempre podem definir una nova base

$$\mathbf{e}'_{ij} = r \mathbf{e}_{ij} r^{-1}$$

i aleshores tindrem $a = \sum_{ij} a'_{ij} \mathbf{e}'_{ij}$.

Degut a la tria feta en escollir A_{11}, l'espai de representació serà Af_1. Per $a \in A$ podem escriure

$$af_1 = \sum_{ij} a_{ij} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{11} = \sum_{ij} \mathbf{e}_{i1}$$

[2]De [16] sabem que un morfisme $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ s'anomena isomorfisme si existeix $g \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ tal que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, $\quad g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

d'on veiem que $\{\mathbf{e}_{i1}\}$ genera Af_1. No és difícil demostrar que $\{\mathbf{e}_{i1}\}$ és una base per l'ideal a l'esquerra Af_1. Com $\mathbf{e}_{i1} \simeq \mathbf{e}_i$ on $\mathbf{e}_i$ és una base de $\mathbb{R}^n$ aleshores $Af_1 \simeq \mathbb{K} \otimes \mathbb{R}^n$.

Per obtenir un espai de representació irreductible hem de conèixer l'idempotent primitiu, ja que serà ell qui ens generarà, mitjançant la multiplicació per la dreta sobre l'àlgebra, un ideal minimal a l'esquerra $Cl_{p,q}f$. Hi ha un teorema [66] que ens permetrà trobat aquest idempotent.

Teorema A.7 *Un ideal minimal a l'esquerra $I_{p,q}$ d'una àlgebra de Clifford $Cl_{p,q}$ és de la forma $I_{p,q} = Cl_{p,q}f_{pq}$, on $f_{pq} = \frac{1}{2}(1+e_{\alpha_1})\cdots\frac{1}{2}(1+e_{\alpha_k})$ és un idempotent primitiu de $Cl_{p,q}$ és un conjunt d'elements de la base canònica de l'espai vectorial que forma l'àlgebra tal que $(e_{\alpha_i}^2 = 1$ amb $i = 1, \dots, k$, que generen un grup d'ordre 2^k on $k = q - r_{q-p}$, on r_i són els nombres de Radon-Hurwitz.*

Els nombres de Radon-Hurwitz es poden definir amb la relació de recurrència $r_{i+8} = r_i + 4$ i la taula següent:

i	0	1	2	3	4	5	6	7
r_i	0	1	2	2	3	3	3	3

Apèndix B

Els grups de Clifford

Aquest apèndix està basat en el llibre *Othogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures* que llegà Albert Crumeyrolle l'any 1990 [21]. La moderna presentació dels grups de Clifford, fonamentals en aquesta tesi, que realitza Crumeyrolle es troba en la frontera de màxima interacció entre matemàtica i física. Sense cap pretensió de originalitat, hem cregut oportú incorporar aquest estudi com apèndix per raons de completesa i facilitat de referència.

B.1 El grup d'isometries.

Sigui (V, g) un espai vectorial amb una forma bilineal simètrica. Les aplicacions lineals Λ sobre V tals que

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\Lambda(\mathbf{u}), \Lambda(\mathbf{v})) \tag{B.1}$$

les anomenarem isometries. De la definició d'aplicació adjunta tenim que Λ^T complirà

$$g(\mathbf{u}, \Lambda(\mathbf{v})) = g(\Lambda^T(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \tag{B.2}$$

L'equació (B.1) es pot escriure en forma matricial de la següent manera:

$$\Lambda g \Lambda^T = g$$

i d'aquí, prenent determinants, no resulta difícil veure que

$$\det \Lambda = \pm 1$$

Aquest resultat ens classifica les isometries Λ en rotacions si $det\,\Lambda = 1$ i en reflexions si $\det\Lambda = -1$. El conjunt de totes les isometries formen un grup anomenat grup d'isometries o grup de transformacions ortogonals $\mathrm{O}(p,q)$ on (p,q) fa referència a la signatura de l'espai vectorial. $\mathrm{O}(p,q)$ conté les rotacions com a subgrup rellevant. El grup de les rotacions, també anomenat grup ortogonal especial, es designa per $\mathrm{SO}(p,q)$. Les reflexions, en canvi, no formen subgrup.

B.2 Els grups de Clifford

Definició B.1 *Donada una àlgebra de Clifford $Cl_{p,q}$, el conjunt d'elements invertibles d'aquesta àlgebra formen un grup que designarem per $Cl^*_{p,q}$.*

Essent g invertible, definim una aplicació del tipus $\phi_g : V \longrightarrow V$ de la següent manera

$$\phi_g(\mathbf{u}) = g\mathbf{u}g^{-1} \quad \forall \mathbf{u} \in V \tag{B.3}$$

Definició B.2 *Els $g \in Cl^*_{p,q}$ tal que $\phi_g(\mathbf{u}) \in V$ formen un grup G anomenat grup de Clifford-Lipschitz. Dit d'una altra manera*

$$G = \{g \in Cl^*_{p,q} \,/\, g\mathbf{u}g^{-1} \in V \quad \forall \mathbf{u} \in V\}$$

Això ens porta a definir la següent aplicació: $\phi : G \longrightarrow \mathrm{End}(V);\ g \mapsto \phi_g$. Veiem algunes propietats de ϕ_g i de ϕ :

- ϕ_g és lineal

$$\phi_g(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda\phi_g(\mathbf{u}) + \mu\phi_g(\mathbf{v})$$

- ϕ_g és injectiva ja que

$$\phi_g(\mathbf{u}) = \phi_g(\mathbf{v})$$

$$g\mathbf{u}g^{-1} = g\mathbf{v}g^{-1}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

- De les dues afirmacions anteriors i del fet que $\phi_g \in \mathrm{End}(V)$, ϕ_g és un isomorfisme d'espais vectorials.

- ϕ és homomorfisme ja que

$$\phi_{gg'}(\mathbf{u}) = gg'\mathbf{u}(gg')^{-1} = gg'\mathbf{u}g'^{-1}g^{-1} = \phi_g \circ \phi_{g'}(\mathbf{u})$$

Definició B.3 *El grup de Clifford especial G^+ queda definit per $G \cap Cl^+_{p,q}$.*

B.2.1 El grup de Clifford i els grups d'isometries

El producte de Clifford d'un vector amb si mateix coincideix amb el seu producte escalar. Així podem veure com ϕ_g és una isometria.

$$\phi_g(\mathbf{u})\phi_g(\mathbf{u}) = g\mathbf{u}g^{-1}g\mathbf{u}g^{-1} = g\mathbf{u}^2g^{-1} = \mathbf{u}^2$$

Per tant ϕ és una representació de G en $\mathrm{O}(p,q)$, i.e., $\phi_G \subset \mathrm{O}(p,q)$

Per comparar aquests dos grups començarem estudiant el nucli de l'aplicació. Si $g \in \ker\phi$ aleshores $\phi_g = \mathrm{id}$ i d'aquí

$$\phi_g(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \Rightarrow g\mathbf{u}g^{-1} = \mathbf{u} \Rightarrow g\mathbf{u} = \mathbf{u}g$$

per tant $\ker\phi = G \cap Z$ on Z és el centre de l'àlgebra. Si n és parella $Z = \mathbb{R}$ i com els elements de G cal que siguin invertibles llavors $\ker\phi = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$. Si n és senar el centre de l'àlgebra és $Z = \mathbb{R} \oplus \Lambda^n$, aleshores si busquem el $\ker\phi_{G^+} = G^+ \cap Z = \mathbb{R}^*$.

Un exemple concret de ϕ_g el tenim quan g és un vector. És clar que com cal que tingui invers, $\phi_{\mathbf{a}}$ amb $\mathbf{a} \in V$ només estarà definida pel subespai de vectors no isòtrops de V.

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) &= \frac{\mathbf{ava}}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})} = \frac{\mathbf{a}(2g(\mathbf{v},\mathbf{a}) - \mathbf{av})}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})} \\ &= \frac{2g(\mathbf{v},\mathbf{a})}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})}\mathbf{a} - \frac{\mathbf{aav}}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})} = -\mathbf{v} + \frac{2g(\mathbf{v},\mathbf{a})}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})}\mathbf{a} \qquad \text{(B.4)}\end{aligned}$$

$\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ és una reflexió del vector $\mathbf{v}$ respecte de $\mathbf{a}$. $-\phi_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ és una reflexió del vector $\mathbf{v}$ respecte a l'hiperplà ortogonal a $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^{\perp}$. Aquesta última ens serà molt útil per demostrar els següents teoremes.

Teorema B.1 *Si la dimensió de V és parella llavors $\phi_G = \mathrm{O}(p,q)$ i $\phi_{G^+} = \mathrm{SO}(p,q)$.*

Demostració. Si u és una transformació ortogonal el teorema de Cartan-Dieudonné [56, 10] ens garanteix que $u = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2...\mathbf{u}_h$, on $\mathbf{u}_i$ són reflexions relatives als hiperplans $\mathbf{a}_1^\perp, \mathbf{a}_2^\perp, ..., \mathbf{a}_h^\perp$ on $\mathbf{a}_i$ són vectors no isotròpics. Aleshores, com hem vist abans, aquestes reflexions es poden escriure com $\mathbf{u}_i = -\phi_{\mathbf{a}_i}$, així

$$u = (-\phi_{\mathbf{a}_1})(-\phi_{\mathbf{a}_2})...(-\phi_{\mathbf{a}_h}) = (-1)^h\phi_{\mathbf{a}_1}\phi_{\mathbf{a}_2}...\phi_{\mathbf{a}_h} = (-1)^h\phi_{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2...\mathbf{a}_h}$$

fent $g = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2...\mathbf{a}_h$ tenim que

$$\phi_g = (-1)^h u \tag{B.5}$$

Cal tenir en compte que no estem dient que tots els elements de G es puguin escriure com $g = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2...\mathbf{a}_h$. En concret els elements no homogenis en paritat no els podem escriure així.

- $\forall u \in \mathrm{SO}(p,q) \Rightarrow \det u = \Pi_{i=1}^h \det \mathbf{u}_i = (-1)^h = 1 \Leftrightarrow h$ és parell. Llavors $\exists g \in G^+$ tal que $u = \phi_g \Rightarrow \mathrm{SO}(p,q) \subset \phi_{G^+}$.

- $\forall u \in \mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q) \Rightarrow \det u = \Pi_{i=1}^h \det \mathbf{u}_i = (-1)^h = -1 \Leftrightarrow h$ és senar. Aleshores $\exists g \in G^-$ tal que $u = -\phi_g$ i d'aquí tenim que

$$\mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q) \subset -\phi_{G^-} \tag{B.6}$$

  Ara demostrarem que per dimensió parella $-\phi_{G^-} = \phi_{G^-}$. En aquest cas $\mathbf{e}_N\mathbf{x}\mathbf{e}_N^{-1} = -\mathbf{x}\mathbf{e}_N\mathbf{e}_N^{-1} = -\mathbf{x}\ \forall\mathbf{x} \in V$ on $\mathbf{e}_N$ és l'element de volum. Per tant $\mathbf{e}_N \in G^+$ i $\phi_{\mathbf{e}_N} = -\mathrm{Id}$. Aleshores $\forall g \in G^-\ \exists g' = g\mathbf{e}_N \in G^-$ tal que $\phi_{g'} = \phi_{g\mathbf{e}_N} = \phi_g\phi_{\mathbf{e}_N} = -\phi_g \Rightarrow \phi_{G^-} = -\phi_{G^-}$. Això juntament amb (B.6) implica que $\mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q) \subset \phi_{G^-}$

- Veiem quins resultats tenim per ara,

$$\mathrm{SO}(p,q) \subset \phi_{G^+} \tag{B.7}$$

$$\mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q) \subset \phi_{G^-} \tag{B.8}$$

  d'aquí treiem que $\mathrm{O}(p,q) \subset \phi_{G^+} \cup \phi_{G^-}$. Com $\phi_G \subset \mathrm{O}(p,q)$, per ser representació, llavors $\phi_G \subset \phi_{G^+} \cup \phi_{G^-}$. és clar que $\phi_{G^+} \cup \phi_{G^-} \subset \phi_G$ per tant podem escriure $\phi_G \subset \mathrm{O}(p,q) \subset \phi_{G^+} \cup \phi_{G^-} \subset \phi_G$ el que ens diu que

$$\mathrm{O}(p,q) = \phi_G = \phi_{G^+} \cup \phi_{G^-}$$

  Així, $\forall g \in G\backslash(G^+ \cup G^-)$, és a dir, pels elements no homogenis en paritat tindrem que $\phi_g \in \phi_{G^+} \cup \phi_{G^-}$.

- Sabent de (B.7) que $\mathrm{SO}(p,q) \subset \phi_{G^+}$ per veure que $\phi_{G^+} = \mathrm{SO}(p,q)$ cal demostrar que $\phi_{G^+} \subset \mathrm{SO}(p,q)$. Ho farem per reducció a l'absurd. Suposem que $\exists l \in G^+$ tal que $\phi_l \notin \mathrm{SO}(p,q)$, per tant $\phi_l \in \mathrm{O}(p,q)\backslash(p,q)$. De (B.8) sabem que $\exists g \in G^-$ tal que $\phi_l = \phi_g \Rightarrow \phi_{lg^{-1}} = Id \Rightarrow lg^{-1} \in \ker\phi$. Recordem, però, que $\ker\phi = \mathbb{R}^*$ i $lg^{-1} \in G^-$ que ens porta a una contradicció. Per tant $\phi_{G^+} \subseteq \mathrm{SO}(p,q)$.

Teorema B.2 *Si la dimensió de V és senar aleshores $\phi_G = \phi_{G^+} = \mathrm{SO}(p,q)$.*

Demostració. Del teorema anterior aprofitarem que $\mathrm{SO}(p,q) \subseteq \phi_{G^+}$ ja que no hem necessitat en la demostració que n fos parella. Ho farem, un cop més, per reducció a l'absurd. Suposem que $\phi_G \not\subset \mathrm{SO}(p,q)$ llavors $\exists g \in G$ tal que $\phi_g \in \mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q)$, aleshores $\exists l \in G^-$ tal que $\phi_g = -\phi_l \Rightarrow \phi_{gl^{-1}} = -\mathrm{Id}$. Anomenem $t = gl^{-1} \in G$ tal que $t\mathbf{x}t^{-1} = -\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in V$, $t\mathbf{e}_i t^{-1} = -\mathbf{e}_i$ i per extensió

$$t\mathbf{e}_N t^{-1} = -\mathbf{e}_N \tag{B.9}$$

però per n senar $\mathbf{e}_N \in Z$, i això contradiu (B.9), per tant no podem tenir un $t \in G$ tal que $\phi_t = -\mathrm{Id}$ i en conseqüència $\phi_G \subset \mathrm{SO}(p,q) \subset \phi_{G^+} \subset \phi_G$, i d'aquí

$$\phi_G = \phi_{G^+} = \mathrm{SO}(p,q)$$

Cal destacar dels teoremes anteriors que si n és parella els elements de G es poden escriure com $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2...\mathbf{u}_k$ on $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_k$ són vectors no isotròpics. Si la dimensió de V és senar això és cert pels elements de G^+.

Fixem-nos que en els nuclis de ϕ_G i de ϕ_{G^+}, hi ha una infinitat d'elements de G i de G^+ que són representació de la unitat del grup ortogonal.

B.2.2 La norma espinorial i els grups Pin i Spin

Donat $\mathbf{x} \in V$ i $g \in G$, com $\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, veiem que $\mathbf{x}' = g\mathbf{x}g^{-1}$ és invariant sota la reversió. Aquesta propietat ens permet mostrar que $\beta(G) = G$ ja que

$$\beta(\mathbf{x}') = \beta(g\mathbf{x}g^{-1}) = \beta(g^{-1})\beta(\mathbf{x})\beta(g)$$

$$\mathbf{x}' = \beta(g^{-1})\mathbf{x}\beta(g) \tag{B.10}$$

i com la reversió conserva el grau tindrem que $\beta(G^+) = G^+$.
Estudiem ara quin tipus d'element és $\beta(g)g$. Podem escriure (B.10) com $g\mathbf{x}g^{-1} = \beta(g^{-1})\mathbf{x}\beta(g)$. D'aquí sabent que $\beta(g)^{-1} = \beta(g^{-1})$, obtenim

$$\beta(g)g\mathbf{x} = \mathbf{x}\beta(g)g$$

Així doncs, $\beta(g)g \in G \cap Z$. Si $g \in G^+$, com -independentment de la dimensió de V- $G^+ \cap Z = \mathbb{R}^*$ llavors $\beta(g)g \in \mathbb{R}^*$. Si la dimensió de V és parella $\forall g \in G$ $\beta(g)(g) \in \mathbb{R}^*$.

Definició B.4 *Anomenem norma espinorial a l'homomorfisme*

$$N : G^+ \longrightarrow \mathbb{R}^*; \quad N(g) = \beta(g)g$$

N és un homomorfisme:

$$N(gg') = \beta(gg')gg' = \beta(g')\beta(g)gg' = N(g)N(g')$$

La possibilitat de que la dimensió de V sigui senar és el que restringeix la definició de la norma espinorial a G^+. En el cas en que la dimensió de V sigui parella la definició es pot ampliar $\forall g \in G$, i.e., $N : G \longrightarrow \mathbb{R}^*$.

Dimensió de V parella.

Si n és parell llavors definim

Definició B.5

$$\mathrm{Pin}_+(p,q) = \{g \in G/N(g) = 1\}$$

amb el nom de grup de Clifford reduït, altres autors el designen per G_0.
Aquest grup es pot definir també com el nucli de la norma espinorial.

Definició B.6 *Anomenarem grup de Clifford reduït especial a*

$$\mathrm{Spin}_+(p,q) = \{g \in G^+/N(g) = 1\}$$

de vegades també anomenat G_0^+.
És clar que $\mathrm{Spin}_+(p,q) = \mathrm{Pin}_+(p,q) \cap Cl^+_{p,q}$. Altres grups d'interès són els pròpiament anomenats $\mathrm{Pin}(p,q)$ i $\mathrm{Spin}(p,q)$ definits com

Definició B.7

$$\text{Pin}(p,q) = \{g \in G/N(g) = \pm 1\}$$

Definició B.8

$$\text{Spin}(p,q) = \{g \in G^+/N(g) = \pm 1\}$$

Un element de G es pot escriure com $g = \mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_k$. Si la signatura és definida positiva llavors $\beta(g)g = \mathbf{x}_k ... \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_k > 0$. Veient la definició dels grups Pin i Spin tenim que

$$\text{Spin}(p,0) = \text{Spin}_+(p,0) \subset \text{Pin}_+(p,0) = \text{Pin}(p,0)$$

Si la signatura és negativa poden passar dues coses: si k és parella llavors $\beta(g)g > 0$, en aquest cas

$$\text{Spin}(0,q) = \text{Spin}_+(0,q) = \text{Pin}_+(0,q) \subset \text{Pin}(0,q)$$

si k és senar $\beta(g)g < 0$, els elements de G que compleixen això pertanyen a $\text{Pin}(0,q)$. Si la signatura no està definida, en general, tindrem que

$$\text{Spin}(p,q)_+ \subset \text{Pin}_+(p,q) \subset \text{Pin}(p,q)$$

a més, $\text{Spin}_+(p,q) \subset \text{Spin}(p,q)$.

Donat un $g \in G$ tenim que $\phi_{\lambda g} = \phi_g$ amb $\lambda \in R$ ja que

$$\phi_{\lambda g}(\mathbf{x}) = \lambda g \mathbf{x} (\lambda g)^{-1} = g \mathbf{x} g^{-1} = \phi_g(\mathbf{x})$$

aquesta és una de les raons per a l'aparició dels grups Pin i Spin. D'alguna manera estem normalitzant G i G^+. Veiem això amb més detall: Sigui $g' = \mathbf{x}_1 ... \mathbf{x}_k \in G$ i $N(g')$ la seva norma espinorial. Si $N(g') > 0$ buscarem un $g = \rho g'$ tal que $N(g) = 1$

$$N(\rho g') = \beta(\rho g')\rho g' = \rho^2 N(g') = 1$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{N(g')}}$$

Si $N(g') < 0$ no puc normalitzar per un $g = \delta g'$ amb $N(g) = 1$ sense sortir-me del cos dels reals. Així doncs triarem $N(g) = -1$ i procedirem de manera anàloga. D'alguna forma $\mathrm{Pin}(p,q)$ és G però "normalitzat". El mateix passa amb $\mathrm{Spin}(p,q)$ i G^+. Des d'aquí podem veure que

$$\phi_{\mathrm{Pin}(p,q)} = \mathrm{O}(p,q)$$

$$\phi_{\mathrm{Spin}(p,q)} = \mathrm{SO}(p,q)$$

El grup $\mathrm{Spin}_+(p,q)$ només pot normalitzar aquells $g \in G$ tals que $\beta(g)g > 0$. Per tant, elements com $g = \mathbf{e}_{01} \notin \mathrm{Spin}_+(p,q)$, ja que

$$\beta(\mathbf{e}_{01})\mathbf{e}_{01} = \mathbf{e}_{10}\mathbf{e}_{01} = -1$$

en canvi $g = \alpha + \mu\mathbf{e}_{01} \in \mathrm{Spin}_+(p,q)$ sempre que $\alpha^2 - \mu^2 = 1$.

Ja vàrem veure que $\ker\phi_G = G \cap Z$, ara de les definicions dels grups Pin i Spin és immediat que

$$\ker\phi_{\mathrm{Pin}} = \ker\phi_{\mathrm{Spin}} = \pm 1$$

En aquest cas, en el que $\ker\phi$ és discret, direm que ϕ és un recobriment.

Dimensió de V senar.

Si la dimensió de V és senar i la signatura és definida, positiva o negativa, aleshores $\mathrm{Spin}_+(p,q) = \mathrm{Spin}(p,q)$. En el cas en que la signatura no estigui definida $\mathrm{Spin}_+(p,q) \subset \mathrm{Spin}(p,q)$. De manera anàloga a l'anterior deduim que $\phi_{\mathrm{Spin}(p,q)} = \mathrm{SO}(p,q)$ i que $\ker\phi = \pm 1$.

Fixem-nos que les representacions de ϕ en el grup d'isometries depenen de n, la dimensió de V. A més a més, quan n és senar no aconseguim representar la totalitat de $\mathrm{O}(p,q)$. Seguidament cercarem una aplicació que permeti ser representada en $\mathrm{O}(p,q)$ i sigui independent de la dimensió de l'espai vectorial.

B.3 Els grups de Clifford isomètricament complets

Definició B.9 *Definim el grup de Clifford isomètricament complet com*

$$\Gamma(p,q) = \{g \in G \,/\, \alpha(g)\mathbf{x}g^{-1} \equiv p_g\mathbf{x},\ \forall\mathbf{x} \in V\}$$

De la mateixa manera que abans $\Gamma^+(p,q) = \Gamma(p,q) \cap Cl^+_{p,q}$

- p és una representació de $\Gamma(p,q)$ en $\mathrm{O}(p,q)$.

  Comencem veient que l'aplicació p_g pertany al grup d'isometries. De

$$p_g(\mathbf{x}) = \alpha(g)\mathbf{x}g^{-1} = \mathbf{x}' \quad \mathbf{x},\mathbf{x}' \in V$$

  tenim que[1]

$$\begin{aligned} -\mathbf{x}^2 &= \alpha(g)(-\mathbf{x}^2)g^{-1} = \alpha(g)\mathbf{x}\alpha(\mathbf{x})\alpha(g^{-1}) \\ &= \alpha(g)\mathbf{x}g^{-1}g\alpha(\mathbf{x})g^{-1} = \mathbf{x}\mathbf{x}' = -\mathbf{x}'^2 \end{aligned} \tag{B.11}$$

  Aquesta aplicació és lineal

$$\begin{aligned} p_g(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) &= \alpha(g)(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})g^{-1} = \alpha(g)\lambda\mathbf{x}g^{-1} + \alpha(g)\mu\mathbf{y}g^{-1} \\ &= \lambda p_g(\mathbf{x}) + \mu p_g(\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{B.12}$$

  i a més

$$p_{gh}\mathbf{x} = \alpha(gh)\mathbf{x}(gh)^{-1} = \alpha(g)\alpha(h)\mathbf{x}h^{-1}g^{-1} = \alpha(g)p_h(\mathbf{x})g^{-1} = p_g \circ p_h(\mathbf{x}).$$

  i clarament $p_{1_G} = 1_V$.

- Si $\mathbf{a} \in V$ i no és isotròpic llavors $p_\mathbf{a}$ és una reflexió relativa a $\mathbf{a}^\perp$ ja que

$$\begin{aligned} p_\mathbf{a}(\mathbf{v}) &= \frac{-\mathbf{ava}}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})} = \frac{-\mathbf{a}(2g(\mathbf{v},\mathbf{a}) - \mathbf{av})}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})} \\ &= \mathbf{v} - \frac{2g(\mathbf{v},\mathbf{a})}{g(\mathbf{a},\mathbf{a})}\mathbf{a} \end{aligned} \tag{B.13}$$

Teorema B.3 *$p_{\Gamma(p,q)} = O(p,q)$ i $p_{\Gamma^+(p,q)} = SO(p,q)$, aconseguint representar tot el grup d'isometries independentment de la dimensió de l'espai vectorial.*
Demostració. Com ja havíem vist una transformació $u \in \mathrm{O}(p,q)$ l'escrivim

$$u = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_h = p_{\mathbf{x}_1} \ldots p_{\mathbf{x}_h} = p_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_h} = p_g \tag{B.14}$$

Si h és parell $g \in \Gamma^+(p,q)$, el $\det u = 1$ i, per tant, $u \in \mathrm{SO}(p,q)$. En aquest cas $\forall u \in \mathrm{SO}(p,q)$, $\exists g \in \Gamma^+(p,q)$ tal que $p_g = u$ d'on

$$\mathrm{SO}(p,q) \subseteq p_{\Gamma^+} \tag{B.15}$$

[1] Això que ve ara no està clar.

Si h és senar donat $g \in \Gamma^-$, llavors $g\mathbf{e}_N \in \Gamma^-$ si n és parella, o bé $g\mathbf{e}_N \in \Gamma^+$ si n és senar. En qualsevol cas $\det u = -1$. Si n és parell

$$p_{\mathbf{e}_N}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{e}_N)\mathbf{x}\mathbf{e}_N^{-1} = \mathbf{e}_N\mathbf{x}\mathbf{e}_N^{-1} = -\mathbf{x} \Rightarrow p_{\mathbf{e}_N} = -Id$$

aleshores

$$p_{g\mathbf{e}_N} = p_g p_{\mathbf{e}_N} = -p_g \tag{B.16}$$

i de (B.14) tenim que $p_{g\mathbf{e}_N} = -u$.

Si n és senar

$$p_{\mathbf{e}_N}\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{e}_N)\mathbf{x}\mathbf{e}_N^{-1} = -\mathbf{e}_N\mathbf{x}\mathbf{e}_N^{-1} = -\mathbf{x} \Rightarrow p_{\mathbf{e}_N} = -Id$$

per tant, independentment de la dimensió de V

$$p_{g\mathbf{e}_N} = -u$$

llavors $\forall u \in \mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q)$, $\exists g\mathbf{e}_N \in \Gamma(p,q)$ tal que $p_{g\mathbf{e}_N} = -u$. Això i (B.15) ens mostra que $\mathrm{O}(p,q) \subset p_\Gamma$ i com p_Γ és representació de $\mathrm{O}(p,q)$, i.e., $p_\Gamma \subset \mathrm{O}(p,q)$ llavors

$$p_\Gamma = \mathrm{O}(p,q) \tag{B.17}$$

Ara demostrarem que $p_{\Gamma^+(p,q)} = \mathrm{SO}(p,q)$. Sabent (B.15), només ens cal mostrar que $p_{\Gamma^+(p,q)} \subset \mathrm{SO}(p,q)$.

Si $u \in \mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q)$ aleshores h és senar. Llavors $g' \in \Gamma^-$ de manera que $u = p_{g'}$ on $g' = g\mathbf{e}_N$, on si n parella $g \in \Gamma^-$. Veiem si per un element parell ξ de Γ puc obtenir la transformació u.

$$p_{g'}(\mathbf{x}) = p_\xi(\mathbf{x})$$

$$p_{g\mathbf{e}_N}(\mathbf{x}) = p_\xi(\mathbf{x})$$

de (B.16)

$$-p_g(\mathbf{x}) = p_\xi(\mathbf{x})$$

$$-\alpha(g)\mathbf{x}g^{-1} = \alpha(\xi)\mathbf{x}\xi^{-1}$$

$$\xi^{-1}g\mathbf{x} = \mathbf{x}\xi^{-1}g$$

d'on $\xi^{-1}g \in Z$ però també sabem que $g\xi^{-1} \in \Gamma^-$ i aquestes dues afirmacions són incompatibles per n parella. Per tant $\nexists\xi \in \Gamma^+$ tal que $p_\xi = u$ i que $u \in \mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q) \Rightarrow p_{\Gamma^+} \subset \mathrm{SO}(p,q)$.

Si n és senar, donat $\xi \in \Gamma^+$, $\mathbf{e}_N \in \Gamma^-$, $p_{\mathbf{e}_N}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$

$$\alpha(\mathbf{e}_N)\mathbf{x}\mathbf{e}_N^{-1} = -\mathbf{x} = \xi\mathbf{x}\xi^{-1}$$

$$\xi\mathbf{e}_N\xi^{-1} = -\mathbf{e}_N \Rightarrow \mathbf{e}_N \notin Z$$

D'aquí veiem que $\nexists\xi \in \Gamma^+$ tal que $p_\xi = -\mathrm{Id}$ per tant amb $\xi \in \Gamma^+$ no puc generar $\mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q) \Rightarrow p_{\Gamma^+} \not\subset \mathrm{O}(p,q)\backslash\mathrm{SO}(p,q) \Rightarrow p_{\Gamma^+} \subset \mathrm{SO}(p,q)$.

- Els elements u que pertanyin al nucli de l'aplicació p compliran que

$$\alpha(u)\mathbf{x} = \mathbf{x}u \quad \forall\mathbf{x} \in V$$

Per determinar quins són aquests elements descompondrem u en part parella i senar, i.e., $u = u^+ + u^-$ llavors de la condició de pertànyer al nucli tindrem

$$u^+\mathbf{x} = \mathbf{x}u^+ \quad \forall\mathbf{x} \in V \tag{B.18}$$

$$u^-\mathbf{x} = -\mathbf{x}u^- \quad \forall\mathbf{x} \in V \tag{B.19}$$

u^+ és pot descompondre com $u^+ = v_0 + \mathbf{e}_1 v_1$ on $\mathbf{e}_1$ és un element de la base ortogonal de V i, v_0 i v_1 són combinacions lineals d'elements on $\mathbf{e}_1$ no apareix.

$$v_0 + \mathbf{e}_1 v_1 = \mathbf{e}_1 v_0 \mathbf{e}_1^{-1} + \mathbf{e}_1^2 v_1 \mathbf{e}_1^{-1} = v_0 - \mathbf{e}_1 v_1 \Rightarrow v_1 = 0$$

un cop hem imposat que $u^+\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 u^+$. Evidentment la tria de $\mathbf{e}_1$ ha estat totalment arbitrària i es pot extendre per tots els elements de la base de V. Això ens mostra que sota la condició (B.18) $u \in \mathbb{R}^*$. De la mateixa manera, descomponent la part senar de u com $u^- = w_0 + \mathbf{e}_1 w_1$ trobem que $w_1 = 0$ després d'imposar que $u^-\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 u^-$. Ara, però, $u^- = 0$ ja que $R^* \not\subset Cl^-_{p,q}$. Així tenim que

$$\ker p = \mathbb{R}^*$$

- Es pot demostrar que Γ és el conjunt $\lambda x_1 ... x_k$ tal que x_i són vectors no isotròpics. De la mateixa manera passa amb Γ^+ ara, és clar, amb k parell. Això ens permet comparar amb G i ens mostra que $\Gamma = G$ si n és parell i que $\Gamma^+ = G^+$ si n és senar[2].

[2] O parell.

B.3.1 Els grups Pin i Spin isomètricament complets

De manera totalment anàloga a la norma espinorial definida anteriorment podem provar que $\forall g \in \Gamma,\ \beta(\alpha(g))g = \bar{N}(g)$ és un escalar i a més $\bar{N}(gg') = \bar{N}(g)\bar{N}(g')$. En relació amb l'antiga norma $N(g) = \pm\bar{N}(g)$.

Definim ara

$$\mathrm{Pin}^{\alpha}(p,q) = \{g \in \Gamma \ / \bar{N}(g) = \pm 1\} \tag{B.20}$$

$$\mathrm{Spin}^{\alpha}(p,q) = \{g \in \Gamma^{+} \ / \bar{N}(g) = \pm 1\} \tag{B.21}$$

Si n és parell $\Gamma = G$ llavors $\mathrm{Pin}^{\alpha} = \mathrm{Pin}$ i $\mathrm{Spin}^{\alpha} = \mathrm{Spin}$. Si n és senar $\mathrm{Spin}^{\alpha} = \mathrm{Spin}$.

Apèndix C

$\mathbb{Z}_2$-graduació. Aspectes formals.

Aquesta secció és part integrant de [59] i, en especial, de [58] on s'estan estudiant extensament les $\mathbb{Z}_2$-graduacions.

En el capítol 4 consideràrem una $\mathbb{Z}_2$-gàduació com una descomposició de $Cl_{p,q} = Cl^0 \oplus Cl^1$ en termes de la suma directa d'espais vectorials Cl^i, $i = 0, 1$ que satisfan:

$$Cl^i Cl^j \subseteq Cl^{i+j (\mathrm{mod}\, 2)}. \tag{C.1}$$

Cl^0 és una subàlgebra de $Cl_{p,q}$. Podem associar un automorfisme a cadascuna d'aquestes descomposicions de manera que:

$$\alpha : Cl_{p,q} \to Cl_{p,q}\,, \quad \alpha|_{Cl_i} = (-1)^i \,\mathrm{id}_{Cl_i} \tag{C.2}$$

Les projeccions π_i sobre Cl^i vénen donades per

$$\pi_i(a) = \frac{a + (-1)^i \alpha(a)}{2}$$

Per a $\mathbb{Z}_2$-graduacions no trivials ($Cl^1 \neq 0$) podem fixar un element a no nul de Cl^1 i definir un isomorfisme d'espais vectorials: $Cl^0 \to Cl^1$ amb $x \mapsto ax$. De (C.2) veiem que α no té perquè preservar els espais $\Lambda^k(\mathbb{M})$, és a dir, el grau del multivector. Llevat de l'última secció del capítol 4 considerarem els automorfismes que satisfan $\alpha(\mathbb{R}^{p,q}) \subseteq \mathbb{R}^{p,q}$ on $\mathbb{R}^{p,q}$ és l'espai vectorial real dotat d'una mètrica de signatura $p - q$ sobre el que hem construït l'àlgebra $Cl_{p,q}$. En aquest cas, α preserva cadascun dels $\Lambda^k(\mathbb{R}^{p,q})$. En concret, l'element $1 \in \Lambda^0(\mathbb{R}^{p,q})$ és parell, ja que $\alpha(1) = \alpha(1 \cdot 1) = \alpha(1)\alpha(1) \Rightarrow \alpha(1) = 1$.

Sigui $V^i \equiv \mathbb{R}^{p,q} \cap Cl^i$, i.e. V^0 (V^1) és l'espai dels 1-vectors α-parells (α-senars). Les projeccions π_i descomponen l'espai vectorial mètric en $\mathbb{R}^{p,q} = V^0 \oplus V^1$. De l'estructura de l'àlgebra geomètrica de Clifford $Cl_{p,q}$ sabem que dos elements $x \in V^0$ i $y \in V^1$ acompliran que $xy + yx = 2g(x, y)$. Ja que elart emes de la part esquerra de la igualtat anterior pertanyen a Cl^1 i la part dreta pertany a Cl^0 tenim que $g(x, y) = 0$, demostrant així l'ortogonalitat dels espais V^0 i V^1.

Siguin $\mathcal{B}_0 = \{v_1, \ldots, v_a\}$ i $\mathcal{B}_1 = \{v_{a+1}, \ldots, v_{a+b}\}$ bases ortonormals de V^0 i V^1 respectivament. Aleshores $\{v_1, \ldots, v_{a+b}\}$ és una base ortonormal de $\mathbb{R}^{p,q}$ i $\{v_{i_1 \cdots i_k}, 0 \leq k \leq n\}$ és una base ortonormal de $Cl_{p,q}$. Aleshores de (C.1) tenim que Cl^0 estarà formada per tots els productes possibles d'elements dels dos tipus:

$$\begin{array}{ll} \text{(i) } v_i, & \text{amb } i \leq a, \\ \text{(ii) } v_i v_j, & \text{amb } i, j > a. \end{array} \tag{C.3}$$

Ja que els elements de tipus (i) commuten amb els de tipus (ii) Cl^0 podrà expressar-se com producte directe o producte tensorial sobre els reals dels conjunts dels dos tipus d'elements. Si p_i (q_i) és el nombre d'elements de $\mathcal{B}_i$ que tenen per quadrat $+1$ (-1) tenim que els elements de tipus (i) generen Cl_{p_0,q_0} mentre els productes d'elements de tipus (ii) formen l'àlgebra $Cl^+_{p_1,q_1}$. Per tant podem escriure:

$$Cl^0 \simeq Cl_{p_0,q_0} \otimes Cl^+_{p_1,q_1}, \tag{C.4}$$

Com a cas particular de l'expressió anterior veiem que en la $\mathbb{Z}_2$-graduació habitual no existeixen elements del tipus (i), és a dir, $p_0 = q_0 = 0$, $p_1 = p$ i $q_1 = q$ i per tant $Cl^0 = Cl^+_{p,q}$ com era d'esperar.

Els exemples següents mostren casos particulars C.4) en àlgebres geomètriques de Clifford amb interès a la física. Vegem que per certs valors de p_i i q_i la subàlgebra Cl^0 no és una àlgebra de Clifford:

Example 1 L'àlgebra de l'espaitemps $Cl_{1,3}$ és isomorfa a les matrius quaterniòniques d'ordre 2, $\mathbb{H}(2)$. De (C.4) es segueixen els casos següents:

(a) De $p_0 = q_0 = 0$ resulta $Cl^0 \simeq Cl^+_{1,3} \simeq \mathbb{C}(2)$.

(b) De $p_0 = 0$, $q_0 = 3$ resulta $Cl^0 \simeq Cl_{0,3} \otimes Cl^+_{1,0} \simeq Cl_{0,3} \simeq Cl_{0,3} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

Per a qualsevol altra elecció obtenim una àlgebra isomorfa a un dels casos anteriors [58].

Example 2 L'algebra de Clifford euclidiana $Cl_{3,0}$ és isomorfa a l'àlgebra matricial complexa de Pauli $\mathbb{C}(2)$. Per aquest cas tenim les següents possibilitats:

(a) De $p_0 = q_0 = 0$ resulta $Cl^0 \simeq Cl^+_{3,0} \simeq \mathbb{H}$.

(b) De $p_0 = 2$, $q_0 = 0$, resulta $Cl^0 \simeq Cl_{2,0} \otimes eqCl_{2,0} \simeq \mathbb{R}(2)$.

(c) De $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, resulta $Cl^0 \simeq Cl_{1,0} \otimes Cl^+_{2,0} \simeq (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

En els casos (a) i (b), Cl^0 és una àlgebra de Clifford real, però no ho és en el cas (c). De fet el centre de l'àlgebra obtinguda en aquest darrer cas té dimensió 4.

Si $Cl_{p,q}$ és simple, llavors totes les possibles Cl^0 es poden obtenir prenent la part parella (en el sentit usual) de les àlgebres de Clifford reals o complexes isomorfes a $Cl_{p,q}$. Una mostra d'aquest resultat el tenim en l'exemple 2: $Cl_{3,0} \simeq \mathbb{C}(2)$, les àlgebres de Clifford isomorfes a $\mathbb{C}(2)$ són $Cl_{3,0}$, $Cl_{1,2}$ i $Cl_2 \otimes \mathbb{C}$. Prenent les seves subàlgebres parelles tenim que $Cl^+_{3,0} \simeq Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, $Cl^+_{1,2} \simeq Cl_{2,0} \simeq \mathbb{R}(2)$ i, finalment, $(Cl_2 \otimes \mathbb{C})^+ \simeq Cl_1 \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

Bibliografia

[1] R Abraham, J.E. Marsden, and T Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications.* Springer, New York, 1988.

[2] A. O. Barut. Is Second Quantization Necessary? In *Tutzing 1984, Proceedings, Quantum Theory and The Structures Of Time and Space*, 83-89.

[3] A.O. Barut and N. Zanghi. Classical Model of the Dirac Electron. *Phys. Rev. Lett.*, 52:1984, 2009-2012.

[4] W.E. Baylis, editor. *Clifford (Geometric) Algebras*, Boston, 1996. Birkhäuser.

[5] IM Benn and RW Tucker. *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics.* IOP Publishing Ltd 1987, Bristol, 1987.

[6] J.D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill, New York, 1964.

[7] N Bohr. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.*, (48):696–702, 1935.

[8] N Bourbaki. *Algèbre (Actual. Sci. Ind. n° 1272).* Hermann, Paris, 1959.

[9] E Cartan. Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. *Bull. Soc. Math. France*, (41), 1913.

[10] E Cartan. *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann.* (Gautiers-Villards, Paris, 1951.

[11] E Cartan. *The Theory of Spinors.* Hermann, Paris, 1966.

[12] J. S. R. Chisholm and R. S. Farwell. Gauge Transformations of Spinors within a Clifford Algebraic Structure. *J. Phys.*, A32:2805–2823, 1999.

[13] J. S. R. Chisholm and Ruth S. Farwell. Electroweak Spin Gauge Theories and The Frame Field. *J. Phys.*, A20:6561–6580, 1987.

[14] J.S.R. Chisholm and R.S. Farwell. Properties of Clifford Algebras for Fundamental Particles. In Baylis [4], pages 365–388.

[15] Y Choquet-Bruhat. *Géométrie Différentielle et Systèmes Extérieurs.* Dunod, Monographies universitaires de mathématiques; 28, Paris, 1968.

[16] Y Choquet-Bruhat, C DeWitt-Morette, and M Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics.* North-Holland, Amsterdam, 2nd edition, 1978.

[17] W K Clifford. Applications of Grassmann's extensive algebra. *Amer. J. Math.*, (1):350–358, 1878.

[18] W.K. Clifford. On the Classification of Geometric Algebras. *Proc. London Math. Soc.*, (VII):135, 1876.

[19] R. Coquereaux. Modulo 8 periodicity of real clifford algebras and particle physics. *Phys. Lett.*, B115:389, 1982.

[20] R. Coquereaux. Spinors, Refections and Clifford Algebras: a Review. *Trieste 1986, Proceedings, Spinors in physics and geometry*, pages 135–190, 1986.

[21] A Crumeyrolle. *Othogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures.* Kluwer, Dordrecht, 1990.

[22] C. G. Darwin. The wave equations of the electron. *Proc. Royal Soc. London*, (A 118):654–680, 1928.

[23] C Daviau. Equation de dirac non lineaire. Ph. D. Thesis, Université de Nantes, 1993.

[24] C Daviau. Linear and Nonlinear Dirac Equation. *Found. Phys.*, 23:1431–1443, 1993.

[25] C Daviau. Remarques sur une Équation de Dirac non Linéaire. *Ann. Fond. Louis de Broglie*, 19:349–360, 1994.

[26] P.A.M. Dirac. The Quantum Theory of Electron. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, (A 117):610–624, 1928.

[27] C.J.L. Doran. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Ph. D. Thesis, University of Cambridge, 1994.

[28] C.J.L. Doran, A.N. Lasenby, and S.F. Gull. Grassmann Mechanics, Multivector Derivatives and Geometric Algebra. *Foundations of Physics*, (23):215–226, 1993.

[29] Tevian Dray, George Ellis, Charles Hellaby, and Corinne A. Manogue. Gravity and signature change. *Gen. Rel. Grav.*, 29:591–597, 1997.

[30] J Echeverría. *Leibniz.* Barcanova, Barcelona, 1981.

[31] W PauliC Eckart and B.L. Griffing. A Positive energy Wave Packet Solution of the Dirac Equation. *Physical Review*, 50:1145–1147, 1936.

[32] B Fauser. On the equivalence of Daviau's space Clifford algebraic, Hestenes' and Parra's formulations of (real) Dirac theory. *International Journal of Theoretical Physics*, (A 118):654–680, 2001.

[33] R Feynman, R Leighton, and M Sands. *The Feynman Lectures on Physics.* Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1963.

[34] V. L. Figueiredo, E. Capelas de Oliveira, and W. A. Rodrigues. Covariant, algebraic, and operator spinors. *Int. J. Theor. Phys.*, 29:371–395, 1990.

[35] J Girbau. *Geometria Diferencial i Relativitat.* Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra, 1993.

[36] J Glimm and A Jaffe. *Quantum Physics. A functional Integral Point of View.* Springer-Verlag, New York, 1987.

[37] H Grassmann. *Die Ausdehnungslehere*, 1862.

[38] H Grassmann. The Position of the Hamiltonian Quaternions in Extension Theory (en alemany). *Math. Annalen*, (12):375–386, 1877.

[39] W Greiner. *Relativistic Quantum Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.

[40] F Gürsey. Correspondence between quaternions and four-spinors. *Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul*, (A21):33–54, 1956.

[41] A Harvey, editor. New York, 1999. Springer-Verlag.

[42] D Hestenes. *Space-Time Algebra.* Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, 1966.

[43] D Hestenes. Real Spinor Fields. *J. Math. Phys.*, (():798–808, 1967.

[44] D Hestenes. Local Observables in the Dirac Theory. *J. Math. Phys.*, (14):893–905, 1973.

[45] D Hestenes. Real Dirac Theory. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 7:97–144, 1997.

[46] D Hestenes and G Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus.* D. Reidel Publishing Company, 1984.

[47] C Itzykson and J Zuber. *Quantum Field Theory.* McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1980.

[48] G Juvet. Opérateurs de Dirac et équations de Maxwell. *Comment. Math. Helv.*, (2):225–235, 1930.

[49] J Keller. Quaternionic, complex duplex and real Clifford algebras. *Advances in Applied Clifford Algebras*, (4):1–12, 1994.

[50] O Laporte and G Uhlenbeck. *Phys. Rev.*, 37:1380, 1931.

[51] A.N. Lasenby, C.J.L. Doran, and S.F. Gull. A multivector derivative approach to lahrangian field theory. *Foundations of Physics*, (23):1295–1327, 1993.

[52] P Lounesto. Clifford algebras and Hestenes spinors. *Foundations of Physics*, (23):1203–1237, 1993.

[53] P Lounesto. Clifford Algebras and Spinor Operators. In Baylis [4], pages 5–35.

[54] P Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[55] Marc Mars, Jose M. M. Senovilla, and Raul Vera. Signature change on the brane. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4219–4222, 2001.

[56] A Micali. Groupes de Clifford et groupes des spineurs. *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, pages 67–77, 1986.

[57] A Micali, R Boudet, and J Helmstetter, editors. *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, Dordrecht, 1992. Kluwer Academic Publishers.

[58] R Mosna. Ph. D. Thesis, Universidade Estadual de Campinas.

[59] R Mosna and D Miralles i J Vaz. Multivector Dirac Equation and $\mathbb{Z}_2$-gradings of Clifford Algebras. *Preprint*, 2001.

[60] A. M. Moya, V. V. Fernandez, and W. A. Rodrigues. Lagrangian Formalism for Multiform Fields on Minkowski Spacetime. *Int. J. Theor. Phys.*, 40:299–313, 2001.

[61] P Nieuwenhuizen and A Waldron. On Euclidean spinors and Wick rotations. *Physics Letters B*, (389):29–36, 1996.

[62] J Olivert. *Estructuras de álgebra multilineal.* Universitat de València, València, 1996.

[63] J.M. Parra. Contribució a l'estudi de les àlgebres de Clifford. Aplicacions a la física. Tesi doctoral. Universitat de Barcelona, 1984.

[64] J.M. Parra. On Dirac and Dirac-Darwin-Hestenes equations. An example of the subtle relationship between mathematics and physics. In Micali et al. [57], pages 463–477.

[65] W. M. Pezzaglia and J.J. Adams. Should metric signature matter in clifford algebra formulations of physical theories? gr-qc/9704048, April 1997.

[66] I Porteus. *Topological Geometry.* Van Nostrand Reinhold, London, 1969.

[67] I Porteus. *Clifford Algebras and the Classical Groups.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[68] J.M. Pozo and J.M. Parra. Positivity and Conservation of Superenergy Tensors. *gr-qc/0110050*, 2001.

[69] P Ramond. *Field Theory. A Modern Primer.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc, Massachusetts, 1981.

[70] L Gårding and Hörmander, editors. *Sur certain notions fondamentales en théorie quantique relativiste*, Berlin, 1988. Springer.

[71] M Riesz. *Dixiéme Congrés des Mathematicians Scandinaves*, page 123, 1946.

[72] M Riesz. *Clifford Numbers and Spinors. Reprint.* Kluwer, Dordrecht, 1993.

[73] W A Rodrigues and J Vaz Jr. From Electromagnetism to Relativistic Quantum Mechanics. *Foundations of Physics*, (28):789–814, 1998.

[74] W.A. Rodrigues, Q.A.G. de Souza, J. Vaz Jr., and P. Lounesto. Dirac-Hestenes Spinor Fields in Riemann-Cartan Space-Time. *Int. J. Theor. Phys.*, (35), 1996.

[75] Y.A. Rylov. Dirac Equation in Terms of Hydrodynamic Variables. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 5:1–40, 1995.

[76] F Sauter. Lösung der Diracschen Gleichungen ohne Spezialisierung der Diracschen Operatoren. *Z. Phys. Suppl. Prog. Theor. Phys.*, (63):803–814, 1930.

[77] T Takabayasi. Relativistic Hidrodynamics of the Dirac Matter. *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, (4), 1957.

[78] A Trautman. On Complex Structures in Physics. In Harvey [41], pages 487–501.

[79] J. Vaz. The Barut and Zanghi Model, and Some Generalizations. *Phys. Lett.*, B344:149–157, 1995.

[80] J Vaz Jr. A Álgebra do Espaço-Tempo, o Spinor de Dirac-Hestenes e a Teoria do Elétron. Ph. D. Thesis, Universidade Estadual de Campinas, 1993.

[81] S Weinberg. *The Quantum Theory of Fields: Foundations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[82] J Yvon. Equations de Dirac-Mandelung. *J. Phys. et Radium*, (8), 1940.