

# Aplicación del Análisis intervalar modal a problemas en diferencias

Universitat Politècnica de Catalunya

Programa de doctorat de Matemàtica Aplicada

Departament de Matemàtica Aplicada III

Tesis doctoral

**Maria Rosa Estela Carbonell**

Directores de tesis:

**Ernest Gardeñes Martín**

Universitat de Barcelona

**Antonio Huerta Cerezuela**

Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, Julio 2005



# Agraïments

Vull fer públic el meu agraïment a les persones que m'han ajudat d'una manera o altre a fer possible aquesta tesi doctoral.

En primer lloc em sento especialment en deute amb els meus directors de tesi. Gràcies a l'Ernest Gardeñes, per tot el temps que m'ha dedicat. Amb ell no només he après anàlisi intervalar modal, sinó que de les llargues xerrades al seu despatx n'he après molt. Moltes gràcies a l'Antonio Huerta, també per dedicarme el seu temps sempre que ha fet falta, un temps molt valuós com sabem tots els que el coneixem. Sempre m'he sentit molt recolzada per ambdós directors i els hi agraeixo de veritat.

Vull agrair als meus companys del grup SIGLA/X les estones que hem compartit al llarg de tots aquests anys. De manera especial a Miguel Angel Sainz, Lambert Jorba i Remei Calm.

No m'oblido al escriure aquestes línies de la meva amiga Núria Mata. Ens vam conèixer estudiant intervals i sempre m'ha animat a continuar treballant-hi.

Gràcies també a tots els companys del departament de Matemàtica Aplicada III de la delegació del Barcelonès, i a la Marta i la Mónica pel seu interès i les seves paraules d'ànim. De manera especial gràcies al meu amic i director del departament Eusebi Jarauta. Un agraïment especial als companys del grup de recerca del Laboratori de Càlcul Numèric, que sempre m'han contestat contents i eficients a totes les preguntes que han anat sorgint. Gràcies Sonia, Esther, Antonio, Pep, Pedro, Marino i Inma.

Gràcies també a tots els meus amics que s'han interessat per aquesta tesi.

Finalment un agraïment especial a la meva família. Moltes gràcies al meu marit Salvador i als nostres fills Anna i Eduard pel seu recolzament incondicional. Moltes gràcies als meus pares Josep i Maria Rosa per l'educació que m'han donat.

Aquesta tesi està dedicada a tots vosaltres.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. El análisis intervalar como una extensión del sistema numérico . . .	2
1.2. Necesidad de una extensión estructural y semántica de $I(\mathbb{R})$ . . .	5
<b>2. Análisis intervalar modal</b>	<b>11</b>
2.1. Intervalos clásicos . . . . .	11
2.2. Intervalos modales . . . . .	12
2.3. Semántica dual . . . . .	18
2.4. Retículos intervalares . . . . .	20
2.5. Predicados y copredicados intervalares . . . . .	22
2.6. Intervalos digitales y truncaciones . . . . .	23
2.7. Intervalos $n$ -dimensionales . . . . .	24
2.8. Extensiones semánticas de las funciones reales continuas . . . . .	25
2.9. Extensiones racionales modales . . . . .	33
<b>3. Optimalidad de funciones racionales</b>	<b>37</b>
3.1. Definición . . . . .	37
3.2. Operadores optimales . . . . .	37
3.3. Conmutatividad sintáctica . . . . .	39
3.4. Optimalidad equivalente . . . . .	42
3.5. Optimalidad condicionada . . . . .	45
3.6. Interpretabilidad de cálculos $n$ -dimensionales . . . . .	57
<b>4. Sistemas intervalares de ecuaciones lineales</b>	<b>59</b>
4.1. Sistemas intervalares pseudo-lineales . . . . .	59
4.2. Estructura lineal de $I^*(\mathbb{R})$ . . . . .	65
4.2.1. Operaciones lineales . . . . .	65
4.2.2. Semántica lineal . . . . .	67
4.2.3. Funciones racionales lineales . . . . .	69
4.3. Sistemas intervalares lineales . . . . .	70
<b>5. Ecuaciones diferenciales ordinarias intervalares</b>	<b>75</b>
5.1. Problemas de valor inicial . . . . .	75
5.1.1. Estabilidad y error de métodos en diferencias . . . . .	85

5.1.2.	Métodos de paso simple . . . . .	86
5.1.3.	Error de los métodos Runge-Kutta intervalares . . . . .	98
5.2.	Problemas de contorno . . . . .	104
5.2.1.	Método del disparo . . . . .	104
5.2.2.	Resolución de ecuaciones no lineales . . . . .	108
5.3.	Diferenciación y estructura lineal . . . . .	111
5.3.1.	Discretización intervalar . . . . .	111
5.3.2.	Diferenciación de funciones intervalares . . . . .	113
<b>6.</b>	<b>Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas intervalares</b>	<b>119</b>
6.1.	Diferencias finitas . . . . .	119
6.2.	Método explícito . . . . .	120
6.3.	Métodos implícitos . . . . .	125
6.3.1.	Método de Crank-Nicolson . . . . .	125
6.3.2.	Backward-Time-Centered-Space method . . . . .	131
<b>7.</b>	<b>Aplicación al estudio de pilotes sometidos a cargas laterales</b>	<b>135</b>
7.1.	Pilote flotante y cabeza empotrada . . . . .	138
7.2.	Pilote empotrado en roca y cabeza libre . . . . .	144
<b>8.</b>	<b>Conclusiones y Futuras aportaciones</b>	<b>153</b>
8.1.	Conclusiones . . . . .	153
8.2.	Futuras aportaciones . . . . .	154
	<b>Bibliografía</b>	<b>157</b>
<b>A.</b>	<b>Implementación de la aritmética intervalar modal</b>	<b>163</b>
<b>B.</b>	<b>Marcas e intervalos de marcas</b>	<b>209</b>
B.1.	Marcas . . . . .	209
B.2.	Intervalos de marcas . . . . .	213
<b>C.</b>	<b>Crank-Nicolson</b>	<b>217</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En este texto se presentan aplicaciones del Análisis Intervalar Modal al estudio de problemas diferenciales aplicados básicamente a la resolución de problemas del ámbito de la ingeniería civil, precedidos de una sucinta revisión de la teoría básica del sistema de intervalos modales y un estudio exhaustivo de la optimalidad parcial de las funciones racionales, incorporando los conceptos de optimalidad equivalente y optimalidad condicionada, que representan una ampliación a la teoría del Análisis Intervalar Modal ya existente.

Definiremos los intervalos identificándolos con el conjunto de predicados que aceptan o rechazan predicados sobre la recta real, hecho desde luego, que permite corregir deficiencias estructurales y semánticas del Análisis Intervalar Clásico, pero que sobretodo funda la teoría intervalar en la función básica de los intervalos como referencias al sistema de los números reales compatibles con la inevitable necesidad de truncación que acompaña a cualquier valor numérico experimental.

Sobre el conjunto de los intervalos podemos definir diversos sistemas de operaciones obteniendo por ejemplo, el sistema de los intervalos modales dotados de su aritmética fundamental,  $I^*(\mathbb{R})$ , o bien dotados de una aritmética lineal,  $I^\circ(\mathbb{R})$ . Esta última aritmética se introduce en el cuarto capítulo del presente texto.

Los capítulos 5, 6, y 7 estudian distintos problemas que plantean las ecuaciones en diferencias intervalares, distinguiendo las situaciones que se pueden resolver en  $I^*(\mathbb{R})$  de las que necesitan un contexto lineal y en consecuencia el soporte aritmético de los intervalos de marcas (comentados en el apéndice B).

En el apéndice A se presenta una biblioteca  $C^{++}$  que implementa la aritmética intervalar modal soportada por los coprocesadores Intel.

## 1.1. El análisis intervalar como una extensión del sistema numérico

El sistema de los números naturales  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  con las operaciones elementales de suma y producto formaliza esencialmente las operaciones de contar.

A partir del sistema de los números naturales se plantean diversas cuestiones cuya solución hace necesaria la construcción de sistemas más complejos: La ecuación  $a + x = b$  donde  $a, b \in \mathbb{N}$ , tiene solución natural únicamente si  $b > a$ , lleva a la construcción de los números enteros ( $\mathbb{Z}$ ).

El conjunto de los números enteros  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  idealiza ya el sistema aditivo completo que permite con toda generalidad las operaciones de añadir y quitar valores enteros.

La necesidad de construcción de los números racionales  $\mathbb{Q} = \{0, \pm \frac{1}{1}, \pm \frac{1}{2}, \dots\}$  queda puesta de manifiesto al pretender resolver ecuaciones de la forma  $ax = b$ , con  $a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$ , dado que si  $b$  no es un múltiplo de  $a$ , es imposible hallar un valor entero  $x$  solución de aquella ecuación. La operación  $\frac{b}{a}$  es pues inevitablemente una operación parcial sobre  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

La introducción de los números racionales amplía los esquemas tradicionales de contar e indexar propios de los números naturales y enteros e introduce los modelos de subdivisión equiespaciada y de medición exacta. Sin embargo, el conjunto de los números racionales no puede acceder a todas las medidas geométricas sintéticamente concebibles; por ejemplo no permite la resolución de ecuaciones de la forma  $x^2 = k$ , con  $k \geq 0$ . Esta situación operativa lleva a la construcción de los números reales, con los que se consigue idealizar todo el sistema de medidas geométricas, accesibles o no al sistema de números racionales. De esta forma es posible, por ejemplo, denotar numéricamente el valor de la diagonal de un cuadrado, aunque dicho valor no sea expresable por ningún valor racional.

Debemos ser conscientes de que cada paso de un sistema numérico a otro viene motivado por una necesidad operativa y lógica, y que cada uno de estos pasos, si bien aporta una mayor agilidad conceptual, supone asimismo un incremento en la complejidad operativa del sistema respecto al anterior.

Para considerar matemáticamente aceptable cada una de estas extensiones, suele exigirse que las operaciones básicas  $+, *$  y la relación  $\leq$  mantengan en el nuevo sistema numérico las mismas propiedades algebraicas que verificaba el sistema anterior, tanto como sea posible, y que cada sistema esté contenido formalmente en el de nivel inmediatamente superior. Mediante estas dos condiciones conseguimos que, en los sistemas obtenidos por extensión, podamos aplicar razonamientos algebraicos comunes al sistema anterior y que, problemas surgidos en el contexto



de uno de los sistemas, fácilmente puedan ser generalizables a cualquiera de los sistemas vecinos.

Los números reales nos permiten trabajar con el modelo continuo de la recta real, al identificar el conjunto  $\mathbb{R}$  de los números reales con el conjunto de puntos de la recta. Sin embargo, es una ley fáctica de la manipulación de símbolos la que nos va a impedir que los números reales se comporten como su nombre parece indicar: sólo es posible etiquetar valores numéricos mediante un número finito de símbolos los cuales, finalmente, sólo podrán indicar valores numéricos aproximados a los valores reales denotados por cualquier sistema teórico. Al tratar un problema teórico podemos admitir cualquier valor real, de acuerdo a su definición o denotación teórica; pero al descender a su designación con un sistema numérico que admita la ejecución mecánica de operaciones, dicho valor deberá plasmarse en algún código cifrado finito.

Los sistemas de números codificados o escalas de marcas numéricas que se utilizan en la práctica los denominamos “red digital”, “escala digital” o “escala numérica” sobre  $\mathbb{R}$  y sus valores correspondientes “valores digitales”.

En la referencia bibliográfica [68] podemos observar situaciones en las que se ve claramente el problema que plantea la codificación digital. Así por ejemplo, representemos por  $DI(0, 1)$  la escala digital formada por los números con una única cifra decimal fraccionaria

$$DI(0, 1) = \{-0.9, -0.8, \dots, -0.1, 0, 0.1, \dots, 0.8, 0.9\}$$

o, de forma análoga,  $DI(1, 1)$  la escala digital formada por los números con una cifra entera y una cifra decimal

$$DI(1, 1) = \{-9.9, -9.8, \dots, -0.1, 0, 0.1, \dots, 9.8, 9.9\}.$$

A nivel de razonamiento, los problemas que pueda plantear alguna de estas dos escalas digitales son los mismos que plantearía cualquier otra. Con ello debemos superar la fácil ingenuidad de creer que los problemas básicos que presentan estas dos escalas se solventarían si tomásemos otra escala digital con un número más elevado de cifras. Pensemos, por ejemplo, cual sería la mejor marca en las escalas  $DI(0, 1)$  ó  $DI(1, 1)$  para representar el valor  $\frac{1}{4}$ , siendo conscientes de que el valor representado no será exactamente el de  $\frac{1}{4}$ . Si además pretendemos representar en estas mismas escalas el valor  $\frac{1}{3}$  podemos encontrarnos con el hecho de que  $\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$  si “olvidamos” que estamos trabajando en la red digital y no en la recta real. Sea cual sea la red digital en la que estemos trabajando, es evidente que no podremos nunca establecer una biyección entre dicha red y el conjunto de los números reales.

La codificación de los números reales en cualquier escala digital no es una cuestión trivial. Podría pensarse por ejemplo, que la marca digital 0.2 en el sistema  $DI(0, 1)$

representa el conjunto de valores  $\{x \in \mathbb{R} : 0.15 \leq x < 0.25\}$  y, de la misma forma, que 0.3 en dicha escala sería  $\{x \in \mathbb{R} : 0.25 \leq x < 0.35\}$ , pero observemos que al efectuar la suma tendríamos:

$$0.2_{DI(0,1)} + 0.3_{DI(0,1)} = \{x \in \mathbb{R} : 0.4 \leq x < 0.6\} \neq 0.5_{DI(0,1)}$$

Este mismo ejemplo nos muestra como el problema de codificar los números no aparece únicamente cuando los valores que queremos codificar estén determinados a través de definiciones independientes de la escala digital, sino que el problema se mantiene cuando buscamos números reales resultado de aplicar operaciones aritméticas a valores numéricos pertenecientes a la escala digital misma.

Así pues, somos conscientes de que no hay una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los elementos de cualquier escala digital y, tal como hemos visto, que no hay un criterio claro para asignar a cada número real un número digital determinado. El análisis intervalar aparece al intentar resolver esta cuestión ya que el hecho empírico es que todo número real puede acotarse superior e inferiormente por medio de marcas de una escala digital. Así, a cada número real  $x$  procedente de un proceso de medida o cálculo, admitimos que podemos asignarle dos valores digitales  $xd_1, xd_2$  tales que  $xd_1 \leq x \leq xd_2$ . Debemos destacar que, en general, ambas cotas  $xd_1$  y  $xd_2$  son necesarias para poder calcular cada una de las cotas de un resultado.

Imaginemos, por ejemplo, que estamos trabajando en la escala digital  $DI(1, 1)$  y que pretendemos calcular una cota superior del producto  $\frac{1}{3} * \frac{-1}{3}$ . Las marcas digitales determinadas por  $\frac{-1}{3}$  son  $-0.4$  y  $-0.3$ . Así mismo las marcas digitales determinadas por  $\frac{1}{3}$  son  $0.3$  y  $0.4$ . Notemos que es imposible calcular una cota superior (respectivamente cota inferior) del producto  $\frac{1}{3} * \frac{-1}{3}$  utilizando únicamente las cotas superiores (respectivamente inferiores) de cada uno de los factores. En cambio sí podemos calcular una cota superior (respectivamente inferior) de dicho producto utilizando ambas cotas de los dos factores. Comprobamos pues que la información que necesitamos entre los números reales y los valores de una escala digital es de la forma  $xd_1 \leq x \leq xd_2$  siendo  $x \in \mathbb{R}$  y  $xd_1, xd_2$  elementos de la escala digital utilizada. Otra forma de expresar esta relación es  $x \in [xd_1, xd_2]$ . Esta situación nos lleva inevitablemente al cálculo con intervalos si admitimos que la información asociada a la acotación intervalar de un dato o un resultado es la única consistente con el uso posible de la información numérica.

El análisis intervalar, una de las ramas de las matemáticas que se ha desarrollado desde finales de 1950, elabora una aritmética intervalar garantizando que, si  $w$  es una operación entre números reales y  $W$  su correspondiente operación intervalar,

$$x \in [a, b], y \in [c, d] \rightarrow xwy \in [a, b]W[c, d]$$

El libro de R. E. Moore “Interval Analysis” [45] publicado en 1966 se considera la referencia inicial del estudio de la matemática intervalar. Otras referencias destacadas de esta teoría pueden encontrarse en [77], [81], [31], [1], [52], [42], [46], [39], [53], [2], [36] y [3].

Denotaremos por  $I(\mathbb{R})$  el conjunto de los intervalos cuyos extremos sean valores reales.

$$I(\mathbb{R}) = \{[\underline{x}, \bar{x}] : \underline{x} \in \mathbb{R}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

siendo  $[\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ .

Si pretendemos trabajar con intervalos cuyos extremos sean marcas de una determinada escala digital  $DI$ , que representaremos por  $I(DI)$ , deberemos tener en cuenta las truncaciones adecuadas a los extremos que se calculen.

Así por ejemplo, veamos como sería en  $I(DI(1, 1))$ , el cálculo de  $\frac{1}{3} * \frac{-1}{3}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} * \frac{-1}{3} &= [0.3, 0.4] * [-0.4, -0.3] = \\ &[-0.16, -0.09] \subset [do(-0.16), up(-0.09)] = [-0.2, 0.0], \end{aligned}$$

siendo  $do(-0.16)$  la truncación interior de -0.16 en la escala digital  $DI(1, 1)$  y  $up(-0.09)$  la truncación exterior de -0.09.

Es curiosa la diferencia entre la construcción de los intervalos reales  $I(\mathbb{R})$  a partir de  $\mathbb{R}$  y las distintas etapas de la construcción de  $\mathbb{R}$  que habíamos mencionado con anterioridad. Recordemos el proceso por el cual cada sistema numérico es una extensión del sistema anterior; considerábamos correcta cada una de estas extensiones si las operaciones básicas y la relación  $\leq$  mantenían en gran parte sus propiedades algebraicas. La extensión de  $\mathbb{R} \longrightarrow I(\mathbb{R})$  es, en este sentido, una buena extensión de  $\mathbb{R}$  en un grado muy reducido.

## 1.2. Necesidad de una extensión estructural y semántica de $I(\mathbb{R})$

Veamos a continuación algunas características del análisis intervalar clásico que nos mostrarán claras deficiencias en el sistema  $I(\mathbb{R})$  y que impondrán la elaboración de una nueva estructura más compleja: el sistema  $I^*(\mathbb{R})$ , (conjunto de intervalos modales) significativamente más regular que  $I(\mathbb{R})$ . Ver referencias [13], [68], [23], [21], [2], [52], [53], [79].

Si observamos las propiedades de la suma intervalar, vemos que la extensión  $I(\mathbb{R})$  no posee la propiedad de grupo para la suma.

La definición conjuntista de las operaciones en  $I(\mathbb{R})$  lleva a la siguiente regla de adición.

Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I(\mathbb{R})$ ,  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$ ,

$$[\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

Considerando  $Long([\underline{x}, \bar{x}]) = \bar{x} - \underline{x} \geq 0$  para  $X \in I(\mathbb{R})$ , y puesto que

$$Long(A + B) = Long(A) + Long(B)$$

tenemos que la ecuación intervalar  $A + X = B$  no tiene solución cuando se cumpla la condición  $Long(A) > Long(B)$ . En particular la ecuación  $A + X = [0, 0]$  no tiene solución cuando  $Long(A) \neq 0$ ; en todo caso, según la regla de la adición en  $I(\mathbb{R})$ , el elemento opuesto al intervalo  $[2, 3]$  sería  $[-2, -3]$  que por definición no es un intervalo ya que  $-2 > -3$ .

Luego, a diferencia de la estructura de los números reales  $(\mathbb{R}, +)$  con la operación suma, el sistema  $(I(\mathbb{R}), +)$  de intervalos reales junto con la operación suma intervalar, no es un grupo. Esta propiedad que se conservaba del sistema  $(\mathbb{Z}, +)$  de los números enteros al sistema de los números racionales  $(\mathbb{Q}, +)$ , y al sistema de los números reales,  $(\mathbb{R}, +)$ , ahora se pierde en  $(I(\mathbb{R}), +)$ .

Si seguimos con las operaciones intervalares, cabe destacar que la operación intervalar resta

$$[\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$$

no es la operación inversa de la operación intervalo suma (análogamente con las operaciones  $*$  y  $/$ ), es decir, si  $A, B$  y  $C$  son intervalos, las expresiones  $A + B = C$ ,  $A = C - B$  y  $B = C - A$  no son equivalentes. Para valorar la importancia de esta propiedad consideremos el siguiente problema, trivial en  $\mathbb{R}$ :

Para nivelar un terreno  $C$  es necesario aportar entre 95 y 100 toneladas de tierra y para ello disponemos de dos camiones. El camión  $A$  tiene una carga de entre 20 y 30 toneladas y el camión  $B$  una carga de entre 70 y 75 toneladas. ¿Es posible nivelar el terreno?

Solución 1:  $A + B = [20, 30] + [70, 75] = [90, 105] \supseteq [95, 100]$ , por tanto no podemos responder con certeza a la pregunta si interpretamos la relación  $\supseteq$  como una incertidumbre mayor de  $A + B$  que la correspondiente a  $[95, 100]$ .

Solución 2: La carga necesaria del camión  $A$  será

$$C - B = [95, 100] - [70, 75] = [20, 30],$$

que es justo el que tenemos, por tanto la respuesta parece afirmativa, si la igualdad intervalar puede interpretarse como igualdad en la disponibilidad de los valores acotados por ambos intervalos.

Solución 3: La carga necesaria del camión  $B$  será

$$C - A = [95, 100] - [20, 30] = [65, 80].$$

Como disponemos de  $[70, 75]$  toneladas de tierra y  $[70, 75] \subseteq [65, 80]$ , la respuesta parece negativa, si los intervalos respectivos son interpretables como márgenes de disponibilidad.

Las tres soluciones son inconclusivas. Aunque los tres planteos hubieran dado respuestas correctas en  $\mathbb{R}$ , no la dan en  $I(\mathbb{R})$  debido a la ambigüedad semántica de  $I(\mathbb{R})$  respecto a los problemas precedentes en  $\mathbb{R}$ .

Otra propiedad que se pierde al pasar de  $\mathbb{R}$  a  $I(\mathbb{R})$  es la distributividad. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son intervalos, la propiedad distributiva de la suma y el producto, válida para los números enteros, racionales y reales, se debilita en la propiedad de subdistributividad

$$A * (B + C) \subset A * B + A * C$$

Así por ejemplo,

$$\begin{aligned} [-1, 1] * ([1, 1] + [-1, -1]) &= [-1, 1] * [0, 0] = [0, 0] \subset \\ [-1, 1] * [1, 1] + [-1, 1] * [-1, -1] &= [-1, 1] + [-1, 1] = [-2, 2] \end{aligned}$$

Vemos pues, que la propiedad distributiva no se mantiene en general, aunque sí existen algunos casos particulares en los que se verifica la igualdad [79]. Esta pérdida de propiedades básicas nos podría hacer pensar que  $I(\mathbb{R})$  puede ser contradictorio al dar conclusiones sobre  $\mathbb{R}$ , sin embargo, esto no es así ya que el subconjunto  $\{[x, x] : x \in \mathbb{R}\} \subset I(\mathbb{R})$  de los intervalos puntuales sí cumple todas las propiedades básicas. Esta compatibilidad hacia atrás de  $I(\mathbb{R})$  con  $\mathbb{R}$ , es sin embargo de muy poca ayuda ya que en principio prácticamente ningún dato, y menos ningún resultado inspirado en modelos sobre  $\mathbb{R}$  pertenecerán, una vez llevado al contexto de las medidas y los cálculos efectivos, al subconjunto  $\{[x, x] : x \in \mathbb{R}\}$  de  $I(\mathbb{R})$ .

La extensión de  $\mathbb{R}$  a  $I(\mathbb{R})$  es ciertamente no contradictoria, pero la pérdida de propiedades sobre todo  $I(\mathbb{R})$  significa que al trabajar con intervalos no podremos razonar del mismo modo que sobre el conjunto de los números reales que, en todo

caso, es el que define el contexto geométrico de los problemas numéricos sobre  $\mathbb{R}$ .

Atendiendo exclusivamente a las propiedades algebraicas, la pérdida de las propiedades de grupo y distributiva, al extender  $\mathbb{R}$  a  $I(\mathbb{R})$  tiene una trascendencia distinta. La propiedad de grupo respecto a la suma (y al producto en caso de intervalos que no contengan al cero), se restablece por la inclusión de  $I(\mathbb{R})$  en la estructura completada de  $I^C(\mathbb{R})$  (Ver [38]), subrayando evidentemente el carácter inacabado del sistema de los intervalos clásicos  $I(\mathbb{R})$ . La pérdida de la propiedad distributiva no se puede recuperar en  $I^C(\mathbb{R})$  y esto hace que muchos problemas intervalares sean más casuísticos que sus problemas reales análogos. Y significa, principalmente, que el uso de intervalos (es decir, el uso correcto de la información numérica digitalizada), es inevitablemente no trivial.

No es extraño pues, que el intento de traducir directamente algoritmos de  $\mathbb{R}$  a algoritmos en  $I(\mathbb{R})$  sea un fracaso, y el ejemplo más sobresaliente de esta afirmación es posiblemente la aplicación directa a intervalos del método de eliminación de Gauss para sistemas de ecuaciones lineales.

Los problemas planteados en  $\mathbb{R}$  son de una naturaleza específica, y la extensión al sistema intervalar no se resuelve simplemente por la completación algebraica de  $I(\mathbb{R})$ , sino que afecta a la semántica del uso implícito de  $I(\mathbb{R})$ , que sigue siendo indefinida en  $I^C(\mathbb{R})$ , y que debe enlazar resultados en  $I(\mathbb{R})$  o en  $I^C(\mathbb{R})$  en su caso, con relaciones sobre  $\mathbb{R}$ . Este problema es resuelto por el sistema  $I^*(\mathbb{R})$ , ver [19], de los intervalos modales, cuyo conjunto básico es isomorfo al sistema  $I^C(\mathbb{R})$ .

Ciertamente, el interés de la teoría intervalar conjuntista se debe a la existencia de ciertos algoritmos intervalares, tales como el método de Newton y la solución de sistemas lineales por métodos iterativos, que en contraste con sus equivalentes reales, ofrecen las ventajas de obtener convergencia global (en lugar de local) con menos condiciones de convergencia y existencia de solución, aparte de una cierta independencia respecto a los sistemas de redondeo de las operaciones digitales empleadas.

Sin embargo existe la necesidad de extender  $I(\mathbb{R})$  semánticamente, lo que se mostrará proponiendo algunos problemas intuitivos que en el contexto de  $I(\mathbb{R})$  no son resolubles y que nos obligan a buscar solución en un contexto superior.

Vamos a considerar un primer problema crítico: sea la escala digital  $DI = \{\dots, -3, -1, 0, 1, 3, \dots\}$  constituida por los números impares y el cero, sin fijar cotas inferiores ni superiores, pues no nos interesan en este caso particular.

El problema consiste en realizar la siguiente suma en  $I(\mathbb{R})$ :

$$[1, 3] + [5, 7] = [6, 10].$$

El resultado intervalar debe codificarse en la escala digital  $DI$ , luego si mantenemos las leyes intervalares de truncación exterior, tenemos:

$$[6, 10] \longrightarrow [do(6), up(10)] = [5, 11].$$

Observemos que la propiedad que nos permite atribuir validez al resultado  $[5,11]$  es que, si para todo  $x \in [1, 3]$  y para todo  $y \in [5, 7]$  tenemos  $x+y \in [6, 10]$ , entonces para las mismas condiciones en  $x$  e  $y$ , debe cumplirse la relación  $x + y \in [5, 11]$ .

Desde luego, cualquier intervalo que contenga a  $[6,10]$  y cuyas cotas existan en la escala digital  $D$  cumple la misma propiedad que el intervalo  $[5,11]$ ; por ejemplo, las truncaciones exteriores  $[3,15]$  o  $[-25,370]$  son igualmente consistentes desde el punto de vista formal, y esto ya indica el precio que el cálculo intervalar tenderá a pagar por su propiedad principal: la inclusividad.

Pero imaginemos ahora que para buscar la solución de la suma propuesta dentro de la escala digital  $DI$ , nos centráramos en la propiedad de que para cualquier  $z \in [6, 10]$ , existe  $x \in [1, 3]$  y existe  $y \in [5, 7]$  tales que  $x + y = z$ . En este caso, los intervalos de  $I(D)$  que pueden sustituir a  $[6,10]$  son los que estén contenidos en el mismo. Así por ejemplo, el intervalo  $[7,9]$  mantiene la propiedad, pues para cada valor  $z \in [7, 9]$  la relación  $z \in [6, 10]$  es cierta. Por consiguiente, los intervalos de  $I(DI)$  que cumplen esta propiedad són  $[7,7], [7,9]$  y  $[9,9]$ , siendo el que mantiene la máxima información del intervalo  $[6,10]$  el intervalo  $[7, 9] = [up(6), do(10)]$ , es decir, la truncación interior del intervalo  $[6,10]$  en la escala digital impar.

No existe, pues, el concepto de solución digital correcta sin una especificación de la semántica implicada por el problema.

Un problema crítico para aceptar la truncación intervalar interior sobre  $I(\mathbb{R})$  es que la truncación interior de un intervalo de  $I(\mathbb{R})$  puede no existir: así por ejemplo, no existe el intervalo truncación interior de  $[2,2]$  en la escala digital impar, pues al realizar la operación

$$[2, 2] \longrightarrow [up(2), do(2)] = [3, 1]$$

y el intervalo  $[3,1]$  no pertenece a  $I(\mathbb{R})$ , pues  $3 \geq 1$ .

Esta falta de solución general para este primer problema de truncación interior, es crucial en  $I(\mathbb{R})$ , no sólo porque este problema se plantea en términos de  $I(\mathbb{R})$  y  $I(DI)$  y no puede solucionarse en el contexto de estos dos sistemas, sino especialmente porque la posibilidad de codificar sistemáticamente en una escala digital

determinada es un punto irrenunciable para la aplicación de  $I(\mathbb{R})$ .

Examinemos ahora algunos problemas que no implican la truncación intervalar, y por tanto, son internos al sistema de intervalos clásicos  $I(\mathbb{R})$ .

**1.-** Imaginemos que deseamos pintar una pared y para ello necesitamos entre 30 y 35 Kg. de pintura. Si disponemos de pintura determinada por el intervalo  $[10,20]$ . ¿Cuál debería ser el intervalo que nos cubra la pintura restante? La solución intervalar sería resolver la ecuación  $[10,20] + X = [30,35]$ , pero dicha solución no existe en el contexto de  $I(\mathbb{R})$ , por las razones que ya se han comentado.

**2.-** Supongamos que disponemos de una máquina de envasado de botellas tipo estrella que dosifica una capacidad de  $1000 \text{ cm}^3$  mediante dos emboladas de  $500 \text{ cm}^3$  cada una. Si la dosificación del émbolo  $A$  oscila entre 498 y  $502 \text{ cm}^3$  y la del émbolo  $B$  oscila entre 495 y  $505 \text{ cm}^3$ , ¿es posible que la dosificación  $C$  de la botella esté entre 995 y  $1010 \text{ cm}^3$ ?

Si envasamos,  $A + B = [498, 502] + [495, 505] = [993, 1007] \text{ cm}^3$ . Observemos que este resultado no nos permite responder con certeza, puesto que si admitimos como posibles que las dosificaciones “reales” de cada uno fueran de  $498 \text{ cm}^3$  y de  $495 \text{ cm}^3$  la respuesta sería negativa.

Esta situación se debe a que en realidad estamos advirtiendo la relevancia del conflicto entre las proposiciones “Existe un elemento de  $[993,1007]$ ” y “Para todo elemento de  $[993,1007]$ ”, es decir, aunque trabajando en  $I(\mathbb{R})$  nos referimos al mismo intervalo  $[993,1007]$ , lo hacemos bajo dos puntos de vista distintos, lo que hace imposible la consistencia de  $I(\mathbb{R})$  si tratamos de interpretarlo atribuyendo a cada intervalo un sistema de casos definidos en  $\mathbb{R}$ .

Estos problemas no se puede negar razonablemente de que tengan solución práctica no ambigua. Estamos por tanto obligados a extender el conjunto  $I(\mathbb{R})$  hacia un sistema más amplio, el conjunto de los intervalos modales  $I^*(\mathbb{R})$ , que nos resuelva estas situaciones provocadas por la admisión de una necesaria interpretación sobre  $\mathbb{R}$  para validar los cálculos que en principio operen dentro de un sistema intervalar adecuado al uso conceptual de los intervalos.



# Capítulo 2

## Análisis intervalar modal

### 2.1. Intervalos clásicos

Referencias destacadas de la teoría el análisis intervalar clásico son [45], [31], [39], [2], [52], [53], [46], [49], [32] y [3].

Si  $\underline{a}$  y  $\bar{a}$  son dos números reales, el intervalo ordinario  $[\underline{a}, \bar{a}]'$  (la marca ' distinguirá los intervalos ordinarios de los intervalos modales) viene definido de modo conjuntista por

$$[\underline{a}, \bar{a}]' = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$$

obtenido extendiendo la interpretación de un número real  $x$  como el conjunto unitario  $\{x\}$ . Sin embargo un resultado intervalar  $X'$  señala a un número real  $x$  (o números) que verifica un determinado predicado  $P(x)$  y este hecho de señalar requiere necesariamente una elección entre los cuantificadores existencial y universal para construir una de las dos expresiones lógicas

$$E(x, X')(P(x)) : \text{ existe un elemento } x \text{ de } X' \text{ que verifica } P(x)$$

y

$$U(x, X')(P(x)) : \text{ todo elemento } x \text{ de } X' \text{ verifica } P(x).$$

Dentro del contexto de los intervalos ordinarios no existe ninguna indicación sobre cuál de estas dos alternativas semánticas corresponde a cada valor intervalar, puesto que su definición conjuntista agota la información que poseen. El efecto de esta deficiencia de los intervalos clásicos puede ser ilustrado mediante las siguientes cuatro proposiciones referidas a la relación  $a + x = b$  entre números reales, delimitados por las relaciones  $a \in [1, 2]'$  y  $b \in [3, 7]'$  :

$$1) U(a, [1, 2]')U(x, [2, 5]')E(b, [3, 7]')(a + x = b) \quad (2.1)$$

$$2) U(a, [1, 2]')U(b, [3, 7]')E(x, [1, 6]')(a + x = b) \quad (2.2)$$

$$3) U(x, [1, 6]')E(a, [1, 2]')E(b, [3, 7]')(a + x = b) \quad (2.3)$$

$$4) U(b, [3, 7]')E(a, [1, 2]')E(x, [2, 5]')(a + x = b) \quad (2.4)$$

Tenemos que 1) y 4) son verdaderas para la solución  $X' = [2, 5]'$  de la ecuación intervalar  $[1, 2]' + X' = [3, 7]'$ , mientras que 2) y 3), a pesar de que son correctas, están fuera del alcance de esta ecuación. Por otra parte, cuando la suma hay que hacerla de forma digital la única truncación posible en general, para los intervalos ordinarios es la truncación exterior, y la ecuación debe ser, por ejemplo,

$$[1, 2]' + X' \subseteq [2.9, 7.1]'$$

en este caso 1) pasaría a ser

$$1') U(a, [1, 2]')U(x, [2, 5]')E(b, [2.9, 7.1]')(a + x = b)$$

pero 4) dejaría de ser cierta, ya que la truncación exterior de  $[3, 7]'$  sería incompatible con el cuantificador universal  $U$ . Más aún, en el caso de la proposición 1), su solución no puede obtenerse mediante las operaciones internas al sistema de los intervalos ordinarios.

Las limitaciones de la teoría intervalar clásica no pueden ser superadas mientras se mantenga la idea de identificar un intervalo  $[\underline{a}, \bar{a}]'$  con el conjunto de valores reales  $x$  tales que  $\underline{a} \leq x \leq \bar{a}$ , ya que un intervalo puede representar también algún valor desconocido entre  $\underline{a}$  y  $\bar{a}$ ; por ejemplo, esto ocurre en cualquier proceso e aproximaciones sucesivas a un valor real  $x$  que pertenece a todos los intervalos de una sucesión de intervalos encajados.

## 2.2. Intervalos modales

Definiremos a continuación los principales conceptos del Análisis Intervalar Modal. Esta teoría se inicia a principios de los años 70 en la Universidad de Barcelona por un grupo de investigadores formado por Ernest Gardeñes, Honorino Mielgo, Albert Trepát y José Maria Janer. Ver referencias [19], [20], [21] y [22].

A principios de los años 90 el grupo SIGLA/X formado por Remei Calm, M. Rosa Estela, Ernest Gardeñes, Lambert Jorba, Honorino Mielgo, Miguel A. Sainz y Albert Trepát continua estudiando la teoría de intervalos modales y obtiene nuevos resultados que se encuentran publicados en las referencias [23], [66], [67], [68], [69], [70], [71], [72], [74] y [75].

**Definición 2.2.1.** (*Intervalos clásicos*) Definimos el *conjunto de intervalos clásicos* sobre  $\mathbb{R}$  como,

$$I(\mathbb{R}) := \{[\underline{a}, \bar{a}]' \mid \underline{a}, \bar{a} \in \mathbb{R}, \underline{a} \leq \bar{a}\}$$

**Definición 2.2.2.** (*Predicados clásicos*) El *conjunto de predicados clásicos* en  $\mathbb{R}$  se define como,

$$\text{Pred}(\mathbb{R}) := \{P(\cdot) \mid P(\cdot) : \mathbb{R} \longrightarrow \{0, 1\}\}$$

Como un valor real  $x$  tiene interés por los predicados que satisface, parece natural sustituir la identificación  $x \leftrightarrow \{x\}$ , existente en la teoría intervalar clásica, por  $x \leftrightarrow \text{Pred}(x)$ , siendo

$$\text{Pred}(x) := \{P(\cdot) \in \text{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\}$$

que identifica a un número real con el conjunto de propiedades que verifica. Los intervalos modales, que definimos a continuación, relacionan los intervalos con los conjuntos  $\text{Pred}(x)$  correspondientes a los puntos del intervalo.

**Definición 2.2.3.** (*Intervalo modal*) Un *intervalo modal*  $A$  es un elemento del producto cartesiano  $(I(\mathbb{R}), \{E, U\})$ ,  $A := (A', QA)$  siendo  $QA$  uno de los cuantificadores clásicos  $E$  o  $U$ .

**Definición 2.2.4.** (*Intervalos modales*) Definimos el *conjunto de intervalos modales* sobre  $\mathbb{R}$  como

$$I^*(\mathbb{R}) := \{(A', QA) \mid A' \in I(\mathbb{R}), QA \in \{E, U\}\}$$

Esta definición fundamental permite definir los siguientes subconjuntos:

**Definición 2.2.5.** (*Intervalos existenciales, universales y puntuales*) El conjunto de *intervalos existenciales* se define como

$$I_e(\mathbb{R}) := \{(A', E) \in I^*(\mathbb{R})\}$$

Definimos como conjunto de *intervalos universales* a

$$I_u(\mathbb{R}) := \{(A', U) \in I^*(\mathbb{R})\}$$

y al conjunto

$$I_p(\mathbb{R}) := \{(A', QA) \in I^*(\mathbb{R}) \mid E(x, \mathbb{R}) \ A' = [x, x]'\}$$

lo denominamos *conjunto de intervalos puntuales*.

**Definición 2.2.6.** (*Dominio y modalidad*) Para un intervalo modal  $A := (A', QA)$ , al intervalo cerrado  $A'$  le llamamos *dominio*

$$\text{Dom}((A', QA)) := A'$$

y al cuantificador  $QA$  *modalidad*

$$\text{Mod}((A', QA)) := QA$$

El concepto de cuantificador modal  $Q$  es básico en el análisis intervalar modal, y asocia a cada predicado real  $P \in \text{Pred}(\mathbb{R})$  un predicado intervalar

$$P^*(A) = (Q(x, A)P(x)) \in \text{Pred}(I^*(\mathbb{R}))$$

**Definición 2.2.7.** (*Cuantificador modal*) Para una variable  $x \in \mathbb{R}$  y un intervalo  $(A', QA) \in I^*(\mathbb{R})$ , definimos el *cuantificador modal*  $Q$  como

$$Q(x, (A', QA)) := QA(x, A')$$

Por ejemplo,

$$Q(x, ([-2, 1]', E)) x \geq 0 := E(x, [-2, 1]') x \geq 0$$

$$Q(x, ([1, 3]', U)) x \geq 0 := U(x, [1, 3]') x \geq 0$$

Asimismo, si consideramos el método de diferencias finitas para la resolución de problemas diferenciales, en un problema unidimensional, la solución vendrá representada en una malla del tipo

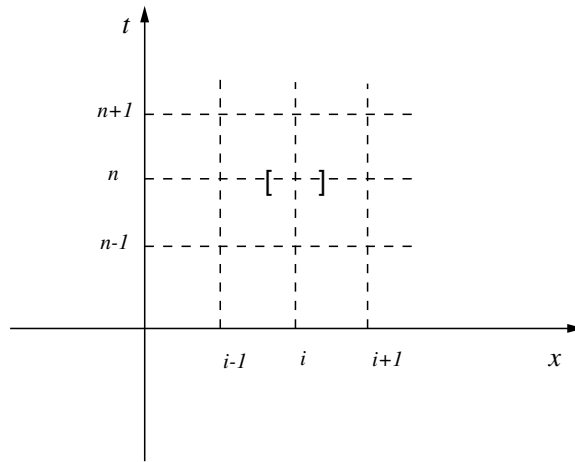


Fig. 2.1

donde el subíndice  $i$  denotará, por ejemplo, el espacio y el subíndice  $n$  denotará el tiempo, luego un punto de la forma  $(i, n)$  corresponderá a la situación  $(x_i, t^n)$  en el dominio solución  $D(x, t)$ . Si el problema se estudia en el contexto del análisis intervalar modal, un punto de la forma  $(i, n)$  corresponderá a la situación  $(X_i, t^n)$  en el dominio solución  $D(X, t)$ . Observemos que fijado  $i \in \mathbb{N}$  el intervalo  $X_i = (X'_i, QX_i)$  puede tener interpretaciones distintas:

$$X_i \in I_e(\mathbb{R}) \Rightarrow E(x_i, X'_i)$$

$$X_i \in I_u(\mathbb{R}) \Rightarrow U(x_i, X'_i)$$

**Definición 2.2.8.** (*Conjunto de predicados de un intervalo modal*) Dado un intervalo modal  $A = (A', QA)$  denominamos *conjunto de predicados* de  $A$  al conjunto de las funciones proposicionales aceptadas por  $A$ , es decir,

$$Pred(A', QA) := \{P(\cdot) \in Pred(\mathbb{R}) \mid Q(x, (A', QA))P(x) = 1\}$$

**Proposición 2.2.1.** *Dado un intervalo modal  $X = (X', QX)$ , se cumple*

$$1. \text{Pred}(X', E) = \cup(x, X')\text{Pred}(x)$$

$$2. \text{Pred}(X', U) = \cap(x, X')\text{Pred}(x)$$

donde “ $\cup(x, X')$ ” es el *operador unión* de una familia de conjuntos de índice  $x$  que toma sus valores en  $X'$ , y “ $\cap(x, X')$ ” es el correspondiente *operador intersección*.

*Demostración.* Considerando la definición de conjunto de predicados tenemos,

1.

$$\begin{aligned} P \in \text{Pred}(X', E) &\Leftrightarrow E(x, X')(P(x)) \Leftrightarrow \\ E(x, X')(P \in \{P \in \text{Pred}(\mathbb{R}) | P(x) = 1\}) &\Leftrightarrow P \in \cup(x, X')\text{Pred}(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P \in \text{Pred}(X', U) &\Leftrightarrow U(x, X')(P(x)) \Leftrightarrow \\ U(x, X')(P \in \{P \in \text{Pred}(\mathbb{R}) | P(x) = 1\}) &\Leftrightarrow P \in \cap(x, X')\text{Pred}(x) \end{aligned}$$

□

De modo que un intervalo modal es un “aceptador” de predicados, a diferencia del intervalo clásico que es en sí un predicado, pues  $A'$  se puede identificar con el predicado  $x \in A'$ , es decir, con el conjunto de puntos de la recta real pertenecientes al dominio.

**Definición 2.2.9.** (*Inclusión modal*) Sean  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ . Definimos la *inclusión modal* como

$$A \subseteq B := \text{Pred}(A) \subseteq \text{Pred}(B)$$

**Proposición 2.2.2.** (*Igualdad modal*) Sean  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , entonces

$$A = B := (A \subseteq B, B \subseteq A)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} A = B &\Leftrightarrow (\text{Pred}(A) \subseteq \text{Pred}(B), \text{Pred}(B) \subseteq \text{Pred}(A)) \\ &\Leftrightarrow (A \subseteq B, B \subseteq A) \end{aligned}$$

□

**Proposición 2.2.3.** Sean  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , entonces

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow (\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(B) \text{ si } \text{Mod}(A) = \text{Mod}(B) = E \\ &\text{Dom}(A) \supseteq \text{Dom}(B) \text{ si } \text{Mod}(A) = \text{Mod}(B) = U \\ &\text{Dom}(A) \cap \text{Dom}(B) \neq \emptyset \text{ si } (\text{Mod}(A) = U \text{ y } \text{Mod}(B) = E) \\ &\text{Dom}(A) = \text{Dom}(B) = [a, a]' \text{ si } (\text{Mod}(A) = E \text{ y } \text{Mod}(B) = U)) \end{aligned}$$

**Proposición 2.2.4.** Sean  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $A$  y  $B$  intervalos puntuales,

$$A = B \Leftrightarrow \text{Dom}(A) = \text{Dom}(B)$$

Si  $A$  y  $B$  no son puntuales

$$A = B \Leftrightarrow (\text{Dom}(A) = \text{Dom}(B), \text{Mod}(A) = \text{Mod}(B))$$

*Demostración.* Se deduce de 2.2.2 y 2.2.3 □

**Definición 2.2.10.** (*Coordenadas canónicas de un intervalo modal*) Considerando las notaciones

$$\text{Min}(A) := \min(\text{Dom}(A)),$$

$$\text{Max}(A) := \max(\text{Dom}(A)),$$

definimos como *coordenadas canónicas de un intervalo modal*  $A = (A', QA)$

$$\text{Inf}(A) := \begin{cases} \text{Min}(A) & \text{si } \text{Mod}(A) = E \\ \text{Max}(A) & \text{si } \text{Mod}(A) = U \end{cases}$$

$$\text{Sup}(A) := \begin{cases} \text{Max}(A) & \text{si } \text{Mod}(A) = E \\ \text{Min}(A) & \text{si } \text{Mod}(A) = U \end{cases}$$

**Definición 2.2.11.** (*Notación canónica*) Si  $A = (A', QA) \in I^*(\mathbb{R})$  definimos la *notación canónica* del intervalo modal dado mediante sus extremos como

$$[\underline{a}, \bar{a}] := \begin{cases} ([\underline{a}, \bar{a}]', E) & \text{si } \underline{a} \leq \bar{a} \\ ([\bar{a}, \underline{a}]', U) & \text{si } \underline{a} \geq \bar{a} \end{cases}$$

**Proposición 2.2.5.** (*Designación canónica de los conjuntos de intervalos modales*)

$$I^*(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \bar{a}] \mid \underline{a} \in \mathbb{R}, \bar{a} \in \mathbb{R}\}$$

$$I_e(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R}) \mid \underline{a} \leq \bar{a}\}$$

$$I_u(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R}) \mid \underline{a} \geq \bar{a}\}$$

$$I_p(\mathbb{R}) = \{[\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R}) \mid \underline{a} = \bar{a}\}$$

A un intervalo  $[\underline{a}, \bar{a}] \in I_e(\mathbb{R})$  le llamaremos *intervalo propio*, a un intervalo  $[\underline{a}, \bar{a}] \in I_u(\mathbb{R})$  *intervalo impropio* y a un intervalo  $[\underline{a}, \bar{a}] \in I_p(\mathbb{R})$  *intervalo puntual* o *intervalo degenerado*.

Gráficamente estos intervalos pueden representarse sobre el plano en el diagrama de ( $\text{Inf}, \text{Sup}$ ) también llamado diagrama de Moore, tal como indica la figura 2.2.

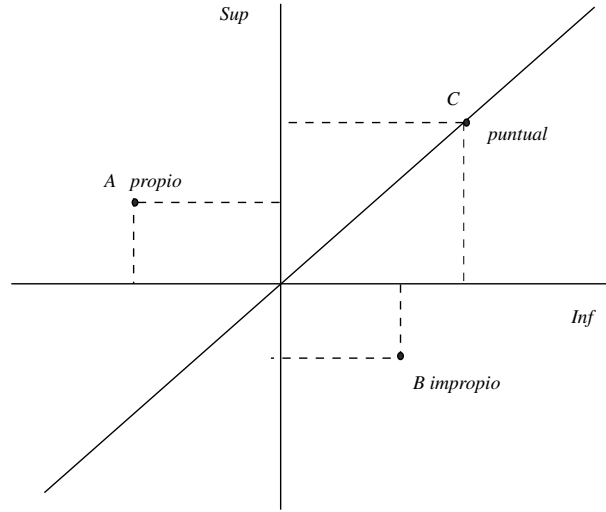


Fig. 2.2

**Proposición 2.2.6.** (Notaciones canónicas para  $I^*(\mathbb{R})$ )

$$\begin{aligned} \text{Inf}([a, \bar{a}]) &= \underline{a} \\ \text{Sup}([a, \bar{a}]) &= \bar{a} \\ \text{Dom}([a, \bar{a}]) &= [\min\{a, \bar{a}\}, \max\{\underline{a}, \bar{a}\}]' \end{aligned}$$

$$\text{Mod}([a, \bar{a}]) = \begin{cases} E & \text{si } \underline{a} \leq \bar{a} \\ U & \text{si } \underline{a} \geq \bar{a} \end{cases}$$

$$Q(x, [a, \bar{a}]) = \begin{cases} E(x, [\underline{a}, \bar{a}]') & \text{si } \underline{a} \leq \bar{a} \\ U(x, [\bar{a}, \underline{a}]') & \text{si } \underline{a} \geq \bar{a} \end{cases}$$

**Proposición 2.2.7.** Sean  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ ,  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ . Se cumple

$$[\underline{a}, \bar{a}] \subseteq [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a} \geq \underline{b}, \bar{a} \leq \bar{b})$$

$$[\underline{a}, \bar{a}] = [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a} = \underline{b}, \bar{a} = \bar{b})$$

**Definición 2.2.12.** (Relación menor o igual modal) Para  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ ,  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , definimos la relación *menor o igual* para los intervalos modales como

$$A \leq B := (\underline{a} \leq \underline{b}, \bar{a} \leq \bar{b})$$

Es importante resaltar que definimos la relación menor o igual de éste modo para tener la completación de la inclusión modal.

En el diagrama de Moore, la representación de las relaciones de “inclusión” y “menor o igual” es la que se muestra en la figura 2.3.

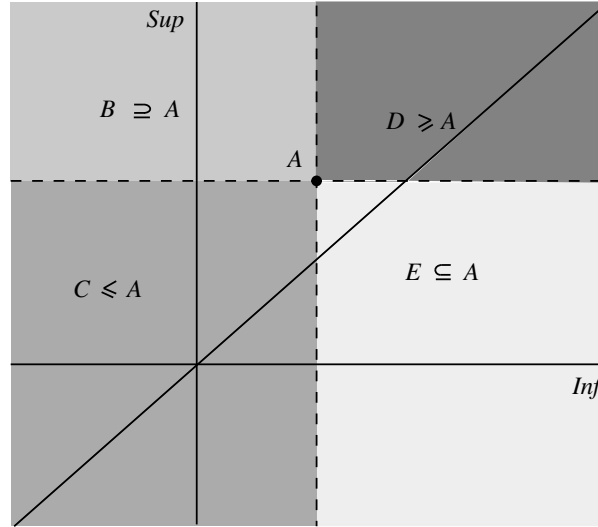


Fig. 2.3

**Proposición 2.2.8.** (*Estructura de orden para  $(I^*(\mathbb{R}), \subseteq, \leq)$* ) En  $I^*(\mathbb{R})$  las relaciones  $\subseteq$  y  $\leq$  son de orden parcial, y entre dos intervalos  $A$  y  $B$  siempre existe al menos una de las siguientes situaciones

$$A \subseteq B \text{ o } B \subseteq A \text{ o } A \leq B \text{ o } B \leq A$$

De la propiedad anterior se deduce que la teoría de intervalos no es una completación de los algoritmos numéricos, ya que entre números reales, para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$  la relación es

$$a \leq b \text{ o } b \leq a$$

y esto hace que los algoritmos intervalares sean esencialmente más complejos que los algoritmos numéricos en  $\mathbb{R}$ .

### 2.3. Semántica dual

Para cualquier intervalo modal  $A = (A', QA)$  podemos considerar el conjunto de las funciones proposicionales rechazadas por  $A$ , estableciendo de este modo, una semántica dual para  $I^*(\mathbb{R})$ .

**Definición 2.3.1.** (*Conjunto de copredicados rechazados por un intervalo modal*) Dado un intervalo modal  $A = (A', QA)$ , definimos el conjunto de las funciones proposicionales rechazadas por  $A$  como:

$$\text{Copred}(A', QA) := \{P(\cdot) \in \text{Pred}(\mathbb{R}) \mid \neg Q(x, (A', QA))P(x)\}$$

o de manera equivalente

$$\text{Copred}(A', QA) := \text{Pred}(\mathbb{R}) - \text{Pred}(A)$$



Diremos que  $P(\cdot) \in \text{Copred}(A)$  o que  $P(\cdot)$  es covalidado o rechazado por  $A$  cuando  $P(\cdot)$  no pertenezca al conjunto de predicados aceptados por  $A$ .

Por ejemplo,  $(\cdot \geq 0) \in \text{Copred}([5, 3])$  es equivalente a

$$\begin{aligned} \neg((\cdot \geq 0) \in \text{Pred}([5, 3])) &\Leftrightarrow \neg Q(x, [5, 3]) \ x \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\neg U(x, [3, 5'])(x \geq 0) \Leftrightarrow E(x, [3, 5'])(x < 0) \end{aligned}$$

**Definición 2.3.2.** (*Operador dual*) Dado  $A = (A', QA) \in I^*(\mathbb{R})$  un intervalo modal, definimos el operador dual, que representamos por  $Dual(A)$  como

$$Dual(A) = Dual(A', QA) := (A', Dual(QA))$$

$$\text{siendo } Dual(QA) = \begin{cases} U & \text{si } QA = E \\ E & \text{si } QA = U \end{cases}$$

**Definición 2.3.3.** (*Operadores propio e impropio*) Dado  $A = (A', QA)$  un intervalo modal, definimos sobre  $A$  los siguientes operadores

- *Operador propio*  $Prop(A) = Prop(A', QA) := (A', E)$
- *Operador impropio*  $Impr(A) = Impr(A', QA) := (A', U)$

Utilizando coordenadas canónicas,

$$Dual([\underline{a}, \bar{a}]) = [\bar{a}, \underline{a}]$$

$$Prop([\underline{a}, \bar{a}]) = [\text{mín}\{\underline{a}, \bar{a}\}, \text{máx}\{\underline{a}, \bar{a}\}] \in I_e(\mathbb{R})$$

$$Impr([\underline{a}, \bar{a}]) = [\text{máx}\{\underline{a}, \bar{a}\}, \text{mín}\{\underline{a}, \bar{a}\}] \in I_u(\mathbb{R})$$

**Proposición 2.3.1.** Para dos intervalos cualesquiera  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$  se cumple

$$A \subseteq B \Leftrightarrow Dual(A) \supseteq Dual(B) \Leftrightarrow \text{Copred}(A) \supseteq \text{Copred}(B)$$

**Proposición 2.3.2.** Para  $A \in I^*(\mathbb{R})$  se cumple:

- $\neg Q(x, A)P(x) \Leftrightarrow Q(x, Dual(A))\neg P(x)$
- $P(\cdot) \in \text{Copred}(A) \Leftrightarrow (\neg P(\cdot)) \in \text{Pred}(Dual(A))$

## 2.4. Retículos intervalares

A continuación se introducen las operaciones ínfimo y supremo para los retículos definidos por las relaciones de orden parcial  $\leq$  y  $\subseteq$  sobre  $I^*(\mathbb{R})$ .

**Definición 2.4.1.** (*Operadores Bottom (B) y Top (T) en  $(I^*(\mathbb{R}), \leq)$* ) Dada una familia finita de intervalos modales  $A(I) := \{A(i) \in I^*(\mathbb{R}) \mid i \in I\}$  con la relación de orden  $\leq$ , definimos

- $B_{i \in I} A(i) = \min_{i \in I} A(i) = A \in I^*(\mathbb{R})$  tal que  $(U(i, I) X \leq A(i)) \Leftrightarrow (X \leq A)$
- $T_{i \in I} A(i) = \max_{i \in I} A(i) = B \in I^*(\mathbb{R})$  tal que  $(U(i, I) X \geq A(i)) \Leftrightarrow (X \geq B)$

Estos operadores dan a  $(I^*(\mathbb{R}), \leq)$  la estructura de retículo y su cálculo se puede obtener en función de los extremos de los intervalos pertenecientes a la familia dada, tal como indica la siguiente propiedad.

**Proposición 2.4.1.** Dada una familia finita  $A(I) \subseteq I^*(\mathbb{R})$ , si  $A(i) = [\underline{a}(i), \bar{a}(i)]$ , se cumple que

- $B_{i \in I} A(i) = [\min_{i \in I} \underline{a}(i), \min_{i \in I} \bar{a}(i)]$
- $T_{i \in I} A(i) = [\max_{i \in I} \underline{a}(i), \max_{i \in I} \bar{a}(i)]$

En el conjunto de los intervalos clásicos para  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$  está definida la relación binaria  $\subseteq$  de la forma

$$[\underline{a}, \bar{a}] \subseteq [\underline{b}, \bar{b}] \Leftrightarrow (\underline{a} \geq \underline{b}, \bar{a} \leq \bar{b})$$

pero el sistema  $(I(\mathbb{R}), \subseteq)$  no tiene estructura de retículo, es decir, dados dos elementos  $A, B \in I(\mathbb{R})$ , no tiene porqué existir dentro del mismo conjunto  $I(\mathbb{R})$  el supremo y el ínfimo respecto a la relación  $\subseteq$ . Cuando completamos el conjunto de los intervalos clásicos con los intervalos impropios, obteniendo el conjunto  $I^*(\mathbb{R})$ , la misma relación binaria  $\subseteq$  que teníamos definida, sí da lugar al retículo  $(I^*(\mathbb{R}), \subseteq)$ . Nos interesa destacar los elementos supremo e ínfimo por la relación  $\subseteq$  dado que serán de suma importancia en el estudio de las extensiones semánticas  $f^*$  y  $f^{**}$  de una función continua  $f$ .

**Definición 2.4.2.** (*Operadores Meet ( $\wedge$ ) y Join ( $\vee$ ) en  $(I^*(\mathbb{R}), \subseteq)$* ) Dada una familia finita de intervalos modales  $A(I) := \{A(i) \in I^*(\mathbb{R}) \mid i \in I\}$  con la relación de orden  $\subseteq$ , definimos

- $\bigwedge_{i \in I} A(i) = A \in I^*(\mathbb{R})$  tal que  $(U(i, I) X \subseteq A(i)) \Leftrightarrow (X \subseteq A)$
- $\bigvee_{i \in I} A(i) = B \in I^*(\mathbb{R})$  tal que  $(U(i, I) X \supseteq A(i)) \Leftrightarrow (X \supseteq B)$

$\bigwedge_{i \in I} A(i)$  es el ínfimo por la relación  $\subseteq$  de los elementos de la familia  $A(I)$  y  $\bigvee_{i \in I} A(i)$  es el supremo por la relación  $\subseteq$  de los elementos de la familia  $A(I)$ .

El cálculo de los operadores Meet y Join puede obtenerse en función de los extremos de los intervalos que pertenecen a la familia dada, tal como indica la siguiente propiedad.

**Proposición 2.4.2.** Dada una familia finita  $A(I) \subseteq I^*(\mathbb{R})$ , si  $A(i) = [\underline{a}(i), \bar{a}(i)]$ , se cumple que

- $\bigwedge_{i \in I} A(i) = [\max_{i \in I} \underline{a}(i), \min_{i \in I} \bar{a}(i)]$
- $\bigvee_{i \in I} A(i) = [\min_{i \in I} \underline{a}(i), \max_{i \in I} \bar{a}(i)]$

En el diagrama de Moore, la representación de las operaciones reticulares Bottom, Top, Meet y Join es la que indica la figura 2.4.

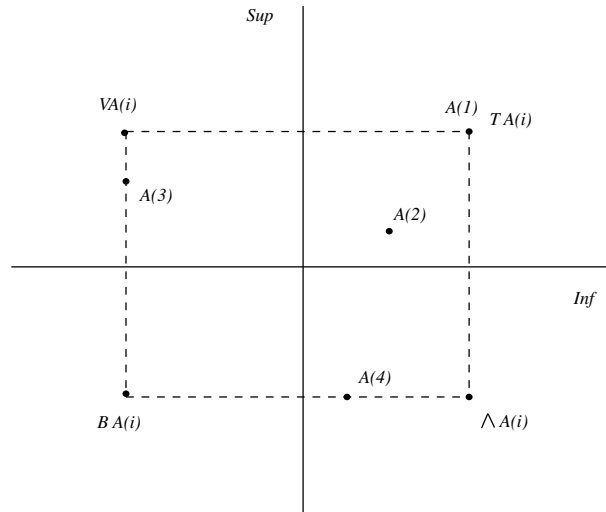


Fig. 2.4

**Definición 2.4.3.** (Operador Meet-Join ) Si  $A \in I^*(\mathbb{R})$  definimos el *operador meet-join* que representamos por  $\Omega(a, A)$  como

$$\Omega(a, A) := \begin{cases} \bigwedge_{a \in A'} & \text{si } A \text{ es impropio} \\ \bigvee_{a \in A'} & \text{si } A \text{ es propio} \end{cases}$$

**Proposición 2.4.3.** Si  $A \in I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

$$A = \Omega(a, A)[a, a]$$

**Proposición 2.4.4.** Si  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

1.  $Pred(A \wedge B) \subseteq Pred(A) \cap Pred(B)$
2.  $Pred(A \vee B) \supseteq Pred(A) \cup Pred(B)$
3.  $Copred(A \wedge B) \supseteq Copred(A) \cup Copred(B)$
4.  $Copred(A \vee B) \subseteq Copred(A) \cap Copred(B)$

Observemos que no se cumple la igualdad ya que el meet de dos intervalos no se identifica con la intersección, ni el el join de dos intervalos se identifica con la unión.

## 2.5. Predicados y copredicados intervalares

**Definición 2.5.1.** (*Conjunto de predicados intervalares*) Definimos el *conjunto de predicados intervalares* que representamos por  $Pred^*(\mathbb{R})$  a

$$Pred^*(\mathbb{R}) := \{P(\cdot) \in Pred(\mathbb{R}) \mid P(\cdot) = (\cdot \in X')\}$$

**Definición 2.5.2.** (*Conjunto de copredicados intervalares*) Definimos el *conjunto de copredicados intervalares* que representamos por  $Copred^*(\mathbb{R})$  a

$$Copred^*(\mathbb{R}) := \{P(\cdot) \in Pred(\mathbb{R}) \mid P(\cdot) = (\neg(\cdot \in X'))\}$$

**Definición 2.5.3.** (*Conjunto de predicados intervalares aceptados por A*) Definimos el *conjunto de predicados intervalares aceptados por A* que representamos por  $Pred^*(A)$  a

$$Pred^*(A) := \{P(\cdot) \in Pred^*(\mathbb{R}) \mid P(\cdot) \in Pred(A)\}$$

**Definición 2.5.4.** (*Conjunto de predicados intervalares rechazados por A*) Definimos el *conjunto de predicados intervalares rechazados por A* que representamos por  $Copred^*(A)$  a

$$Copred^*(A) := \{P(\cdot) \in Copred^*(\mathbb{R}) \mid P(\cdot) \in Copred(A)\}$$

**Proposición 2.5.1.** Dado  $A \in I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

- $(\cdot \in X') \in Pred^*(A) \Leftrightarrow Impr(X') \subseteq A$
- $(\neg(\cdot \in X')) \in Copred^*(A) \Leftrightarrow Prop(X') \supseteq A$

**Proposición 2.5.2.** Si  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

1.  $Pred^*(A \wedge B) = Pred^*(A) \cap Pred^*(B)$
2.  $Pred^*(A \vee B) \supseteq Pred^*(A) \cup Pred^*(B)$
3.  $Copred^*(A \wedge B) \supseteq Copred^*(A) \cup Copred^*(B)$
4.  $Copred^*(A \vee B) = Copred^*(A) \cap Copred^*(B)$

## 2.6. Intervalos digitales y truncaciones

**Definición 2.6.1.** (*Intervalos modales digitales*) En el análisis intervalar modal, si  $DI \subseteq \mathbb{R}$  es una escala digital de los números reales,

$$I^*(DI) := \{[\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R}) \mid \underline{a} \in DI, \bar{a} \in DI\}$$

**Definición 2.6.2.** (*Truncaciones intervalares modales*) Si  $DI \subseteq \mathbb{R}$  es una digitalización de los números reales,  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$ , definimos la truncación interna y externa como

$$Inn([\underline{a}, \bar{a}]) = [Right(\underline{a}), Left(\bar{a})] \in I^*(DI)$$

$$Out([\underline{a}, \bar{a}]) = [Left(\underline{a}), Right(\bar{a})] \in I^*(DI)$$

siendo  $Left(x)$  y  $Right(x)$  elementos pertenecientes a la escala digital  $DI$  que cumplen

$$Left(x) \leq x, \quad Right(x) \geq x \quad \forall x \in DI$$

**Proposición 2.6.1.** Si  $A \in I^*(\mathbb{R})$ ,

$$Inn(A) \subseteq A \subseteq Out(A)$$

Observemos que para los intervalos clásicos, no siempre se cumple la condición

$$Inn([\underline{a}, \bar{a}]) \subseteq [\underline{a}, \bar{a}] \subseteq Out([\underline{a}, \bar{a}])$$

Por ejemplo  $Inn[3.14, 3.15]$  en la escala  $DI(1, 1)$  formada por los números con una cifra entera y una decimal, equivale a  $[3.2, 3.1] \notin I^*(\mathbb{R})$

Sin embargo, este mismo ejemplo en  $I^*(\mathbb{R})$  cumple

$$Inn[3.14, 3.15] = [3.2, 3.1] \subseteq [3.14, 3.15]$$

**Teorema 2.6.1.** Si  $A \in I^*(\mathbb{R})$ ,

$$Inn(A) = Dual(Out(Dual(A)))$$

*Demostración.* Este teorema se deduce de la propiedad

$$A \subseteq B \Leftrightarrow Dual(A) \supseteq Dual(B)$$

y hace innecesaria la implementación de la truncación interna. □

**Teorema 2.6.2.** Si  $A \in I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

$$Pred(Inn(A)) \subseteq Pred(A) \subseteq Pred(Out(A))$$

$$Copred(Inn(A)) \supseteq Copred(A) \supseteq Copred(Out(A))$$

## 2.7. Intervalos $n$ -dimensionales

La teoría intervalar modal se extiende de forma natural a estructuras intervalares  $n$ -dimensionales y en la referencia [22] se encuentra un desarrollo completo de la teoría intervalar  $n$ -dimensional.

Las definiciones estudiadas anteriormente sobre intervalos modales se definen componente a componente en los intervalos modales  $n$ -dimensionales.

**Definición 2.7.1.** (*Conjunto de intervalos modales  $n$ -dimensionales*)

$$I^*(\mathbb{R}^n) := \{A = (A_1, \dots, A_n) \mid A_1 \in I^*(\mathbb{R}), \dots, A_n \in I^*(\mathbb{R})\}$$

**Definición 2.7.2.** (*Inclusión e igualdad  $n$ -dimensional*) Si  $A = (A_1, \dots, A_n)$  y  $B = (B_1, \dots, B_n)$  son intervalos modales  $n$ -dimensionales se define,

$$A \subseteq B := (A_1 \subseteq B_1, \dots, A_n \subseteq B_n)$$

$$A = B := (A_1 = B_1, \dots, A_n = B_n)$$

**Definición 2.7.3.** (*Operadores propio e impropio*) Si  $X = (X_1, \dots, X_n) \in I^*(\mathbb{R}^n)$  y  $X' = (X'_1, \dots, X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$  se definen

$$Prop(X) = Prop(X') := ((X'_1, E), \dots, (X'_n, E))$$

$$Impr(X) = Impr(X') := ((X'_1, U), \dots, (X'_n, U))$$

**Definición 2.7.4.** (*Conjuntos de predicados y copredicados intervalares  $n$ -dimensionales*) Si  $A = (A_1, \dots, A_n) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ ,  $X' = (X'_1, \dots, X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$  y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se definen

$$x \in X' := (x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n)$$

$$\begin{aligned} Pred^*(A) &:= \{(x \in X') \mid (x_1 \in X'_1) \in Pred^*(A_1), \dots, (x_n \in X'_n) \in Pred^*(A_n)\} \\ &= \{(x \in X') \mid Q(x_1, A'_1), \dots, Q(x_n, A'_n)(x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Copred^*(A) &:= \{(x \notin X') \mid (x_1 \notin X'_1) \in Pred^*(A_1), \dots, (x_n \notin X'_n) \in Pred^*(A_n)\} \\ &= \{(x \notin X') \mid \neg(Q(x_1, A'_1), \dots, Q(x_n, A'_n)(x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n))\} \end{aligned}$$

**Definición 2.7.5.** Si  $A = (A_1, \dots, A_n) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ ,  $X' = (X'_1, \dots, X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$  y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , análogamente al caso unidimensional se verifica que

$$(x \in X') \in Pred^*(A) \Leftrightarrow Impr(X') \subseteq A$$

$$(x \notin X') \in Copred^*(A) \Leftrightarrow Prop(X') \supseteq A$$

El estudio de los intervalos modales  $n$ -dimensionales nos permite construir la teoría semántica de las funciones racionales modales.

## 2.8. Extensiones semánticas de las funciones reales continuas

La verdadera importancia del análisis intervalar modal la constituye la posibilidad de efectuar una interpretación útil, mediante los cuantificadores existencial y universal, del cálculo de funciones cuyas variables operativas, así como su imagen, sean valores intervalares.

En la mayoría de problemas cuantitativos que pretendemos estudiar, se nos presentará una o varias funciones reales de  $n$ -variables de las que intentaremos conocer su comportamiento a partir de su cálculo cuando sus variables sean intervalares. Para que este cálculo sea posible y significativo, nuestra función inicial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es extendida a una nueva función  $\tilde{f} : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ , exigiendo a esta extensión algunos requisitos que aseguren su utilidad. Estudiaremos las extensiones de funciones continuas ya que el espacio real  $(n + 1)$ -dimensional  $\mathbb{R}^{n+1}$  está definido básicamente por las funciones continuas  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que representan las superficies  $n$ -dimensionales

$$\{(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

Una misma función puede tener diversas extensiones, según lo que a éstas les sea exigido. Así por ejemplo, en el caso del Análisis Intervalar Clásico, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, podemos condiderar la extensión conjuntista siguiente:

**Definición 2.8.1.** (*Extensión unida*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, definimos para  $X' = (X'_1, \dots, X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$

$$R_f : I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R}) \\ (X'_1, \dots, X'_n) \rightarrow R_f(X'_1, \dots, X'_n) = \{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n\}$$

que será el intervalo

$$[\min\{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n\}, \max\{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n\}]$$

A esta extensión la denominaremos *extensión unida* de  $f$ .

La extensión unida de  $f$ , no considera nunca intervalos impropios, y es la extensión intervalar utilizada básicamente por el análisis intervalar clásico. El hecho de que la mayoría de las veces sea difícil efectuar su cálculo obliga, cuando  $f$  sea una función racional continua, a trabajar con una nueva extensión que se denomina extensión racional intervalar de  $f$  y que se define tal como vemos a continuación.

**Definición 2.8.2.** (*Extensión racional intervalar*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, definimos la *extensión racional intervalar* de  $f$  y la representamos por  $fR : I(\mathbb{R}^n) \rightarrow I(\mathbb{R})$  a la función definida por el propio programa de cálculo

indicado por la función racional, substituyendo los valores reales por valores intervalares y los operandos reales por sus correspondientes operaciones intervalares, considerando además independientes las variables que sean multiincidentes en la formulación concreta de la función racional. En caso de tener que truncar los cálculos, situación común en cualquier aritmética actual, se considerará la truncación exterior:  $X'wY' \subseteq X'w^RY' := Out(X'wY')$ .

Estas dos extensiones de la misma función  $f$  cumplen

$$R_f(X'_1, \dots, X'_n) \subseteq fR(X'_1, \dots, X'_n)$$

con lo que  $fR(X'_1, \dots, X'_n)$  que es calculable a partir de los extremos de  $X'_1, \dots, X'_n$ , representa una sobreestimación de  $R_f(X'_1, \dots, X'_n)$  que, en general, no es calculable.

Las funciones racionales intervalares tienen la propiedad, fundamental para todo el Análisis Intervalar, de ser inclusivas, es decir, para

$$A'_1 \subseteq B'_1, \dots, A'_n \subseteq B'_n$$

se mantiene la relación

$$fR(A'_1, \dots, A'_n) \subseteq fR(B'_1, \dots, B'_n)$$

considerando que no hay división de intervalos en caso de que éstos contengan al cero.

Un hecho crítico es que la extensión unida de  $f$  a los intervalos  $X'_1, \dots, X'_n$  tiene como única semántica compatible con el redondeo exterior

$$U(x_1, X'_1) \dots U(x_n, X'_n) E(z, R_f(X'_1, \dots, X'_n))(z = f(x_1, \dots, x_n))$$

y, en el caso en que  $R_f$  no fuera calculable y  $f$  fuera racional y continua,

$$U(x_1, X'_1) \dots U(x_n, X'_n) E(z, fR(X'_1, \dots, X'_n))(z = f(x_1, \dots, x_n))$$

Sin embargo, estas dos extensiones son válidas únicamente en el contexto intervalar clásico. En el contexto de los Intervalos Modales cabe esperar que al igual que el predicado real  $P(x)$  se transforma en el predicado intervalar  $Q(x, X)(P(x))$ , la relación  $z = f(x_1, \dots, x_n)$  se transforme en algún tipo de relación intervalar  $Z = F(f)(X_1, \dots, X_n)$  garantizando algún predicado intervalar  $(n+1)$ -dimensional del tipo

$$Q_1(x_1, X_1) \dots Q_n(x_n, X_n) Q_z(z, Z) z = f(x_1, \dots, x_n)$$

donde evidentemente aparece un problema de orden ya que los prefijos cuantificadores no son, en general, conmutativos.



Si pretendemos introducirnos en el contexto Intervalar Modal, debemos resolver dos cuestiones importantes fundamentalmente ligadas entre sí: en primer lugar ¿cómo definimos las extensiones intervalares utilizando los intervalos modales? y en segundo lugar ¿qué semántica es la que se obtiene al aplicar dichas extensiones?

Las funciones reales continuas  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , en general no son accesibles desde el punto de vista computacional, y tampoco lo son sus extensiones unidas  $f$  de  $I(\mathbb{R}^n)$  en  $I(\mathbb{R})$ . El tipo más elemental de funciones calculables que extienden a las funciones reales continuas  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$  son las funciones  $F$  de  $DI^n$  en  $I(DI)$  (donde  $DI$  es un subconjunto digital de  $\mathbb{R}$ ) por lo que, dada una función continua  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , la extensión intervalar más simple sería la función para la que dado un valor  $a$  retome dos valores, uno mayor y otro menor que  $f(a)$ . Por ello definimos en primer lugar la función que denominaremos extensión intervalar pobre de  $f$ .

**Definición 2.8.3.** (*Extensión intervalar pobre*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real continua, definimos la *extensión intervalar pobre* de  $f$  y la representamos por  $F$  a la función

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow I(\mathbb{R}) \\ a \rightarrow F(a)' \text{ tal que } f(a) \in F(a)'$$

La utilidad de esta definición para inducir a una extensión más general del tipo  $F : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$  está en la siguiente proposición.

**Proposición 2.8.1.** (*Formulación semántica de la extensión intervalar pobre*) Si  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow I(\mathbb{R})$  es la extensión intervalar pobre de la función real continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , siempre que  $F(a)' \in I(\mathbb{R})$  exista, la condición  $f(a) \in F(a)'$  es equivalente a:

$$U(X', I(\mathbb{R}^n))((x \in X') \in \text{Pred}^*([a, a]) \Rightarrow (z \in f(X')) \in \text{Pred}^*(\text{Prop}(F(a)'))))$$

Tomando  $X' = [a, a]$  se obtiene

$$a \in [a, a] \Rightarrow E(z, F(a))z \in f([a, a]) \Rightarrow E(z, F(a))(z = f(a)) \Rightarrow f(a) \in F(a)$$

Luego, la propiedad anterior, puede escribirse en la forma

$$U(X', I(\mathbb{R}^n))((x \in X') \in \text{Pred}^*([a, a]) \Rightarrow (z \in f(X')) \in \text{Pred}^*(F(a)))$$

siendo esta relación equivalente a que  $F$  sea una extensión intervalar pobre.

Esta propiedad es la que de un modo natural nos conduce a la definición de la extensión intervalar modal de  $f$ .

**Definición 2.8.4.** (*Extensión intervalar modal de funciones reales continuas*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real continua, definimos la *extensión intervalar modal* de  $f$  sobre el intervalo  $A$  a cualquier función  $F$  de  $I^*(\mathbb{R}^n)$  en  $I^*(\mathbb{R})$  que, siempre que exista  $F(A)$ , verifique la propiedad

$$U(X', I(\mathbb{R}^n))((x \in X') \in \text{Pred}^*(A) \Rightarrow (z \in f(X')) \in \text{Pred}^*(F(A)))$$

(en esta definición y en lo sucesivo, el dominio de  $f$  puede ser, en vez de  $\mathbb{R}^n$ , cualquier intervalo compacto  $C \subseteq \mathbb{R}^n$ , con lo que el dominio de  $F$  pasa a ser  $I^*(C)$ ).

Observemos que la definición de extensión intervalar modal no es operativa.

A continuación definimos dos extensiones algebraicas intervalares de una función continua  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , que serán básicas para el estudio de la teoría intervalar modal, porque están muy relacionadas con las extensiones intervalares modales y darán significado a los cálculos intervalares.

**Definición 2.8.5.** (*Función \*-semántica*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función real continua,  $X = (X_p, X_i) \in I^*(\mathbb{R}^n)$  intervalo donde se han separado las componentes propias y las impropias, definimos la *extensión intervalar  $f^*$*  de  $f$  como:

$$\begin{aligned} f^* & : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R}) \\ X & \rightarrow f^*(X) = \bigvee_{x_p \in X'_p} \bigwedge_{x_i \in X'_i} [f(x_p, x_i), f(x_p, x_i)] \end{aligned}$$

**Definición 2.8.6.** (*Función \*\*-semántica*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua,  $X = (X_p, X_i) \in I^*(\mathbb{R}^n)$  intervalo donde se han separado las componentes propias y las impropias, definimos la *extensión intervalar  $f^{**}$*  de  $f$  como:

$$\begin{aligned} f^{**} & : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R}) \\ X & \rightarrow f^{**}(X) = \bigwedge_{x_i \in X'_i} \bigvee_{x_p \in X'_p} [f(x_p, x_i), f(x_p, x_i)] \end{aligned}$$

Evidentemente si  $X_p = \emptyset$  o  $X_i = \emptyset$  entonces  $f^*(X) = f^{**}(X)$ .

Si  $X_i = \emptyset$ , entonces

$$f^*(X) = f^{**}(X) =$$

$$[\text{mín}\{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n\}, \text{máx}\{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n\}]$$

que es el intervalo correspondiente a la extensión unida de  $f$ ,  $R_f$ , del análisis intervalar clásico.

Si  $X_p = \emptyset$ , entonces

$$f^*(X) = f^{**}(X) =$$

$[\text{máx}\{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n\}, \text{mín}\{f(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \dots, x_n \in X'_n\}]$

y es el dual de la extensión conjuntista  $R_f$  con modalidad existencial.

**Ejemplo 2.8.1.** Para la función

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow f(x, y) = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

las imágenes del intervalo  $X = ([-1, 1], [1, -1])$  son

$$f^*([-1, 1], [1, -1]) = \bigvee_{x \in [-1, 1]'} \bigwedge_{y \in [-1, 1]'} [x^2 + y^2, x^2 + y^2] = \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [x^2 + 1, x^2] = [1, 1]$$

$$f^{**}([-1, 1], [1, -1]) = \bigwedge_{y \in [-1, 1]'} \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [x^2 + y^2, x^2 + y^2] = \bigwedge_{y \in [-1, 1]'} [y^2, y^2 + 1] = [1, 1]$$

Para la función

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow g(x, y) = (x + y)^2 \end{aligned}$$

las imágenes del mismo intervalo  $X = ([-1, 1], [1, -1])$  son

$$\begin{aligned} g^*([-1, 1], [1, -1]) &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} \bigwedge_{y \in [-1, 1]'} [(x + y)^2, (x + y)^2] \\ &= \bigvee \left\{ \bigvee_{x \in [-1, 0]'} [(x - 1)^2, 0], \bigvee_{x \in [0, 1]'} [(x + 1)^2, 0] \right\} \\ &= \bigvee \{[1, 0], [1, 0]\} = [1, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{**}([-1, 1], [1, -1]) &= \bigwedge_{y \in [-1, 1]'} \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [(x + y)^2, (x + y)^2] \\ &= \bigwedge \left\{ \bigwedge_{y \in [-1, 0]'} [0, (y - 1)^2], \bigwedge_{y \in [0, 1]'} [0, (y + 1)^2] \right\} \\ &= \bigvee \{[0, 1], [0, 1]\} = [0, 1] \end{aligned}$$

Las funciones  $f^*$  y  $f^{**}$  no siempre serán calculables, excepto para funciones sencillas como las del ejemplo anterior.

Por otra parte, aunque para la función  $g(x, y) = (x + y)^2$  obtengamos

$$g^*([-1, 1], [1, -1]) = [1, 0]$$

y

$$g^{**}([-1, 1], [1, -1]) = [0, 1]$$

estos resultados, por el momento, no tienen ningún significado respecto a los posibles valores que pueda tener  $g$  en el intervalo  $X = ([-1, 1], [1, -1])$ .

En  $I^*(\mathbb{R})$  las extensiones semánticas de los operadores aritméticos son las extensiones semánticas de las funciones continuas  $w(x, y) = xwy$ , siendo  $w = \{+, -, *, /\}$ , y pueden calcularse mediante la extensión  $w^*$  o bien  $w^{**}$  ya que en este caso, tal como se demostrará más adelante, coinciden.

Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ ,

$$A + B = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

$$A - B = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$$

$$A * B = \left\{ \begin{array}{ll} [\underline{ab}, \bar{a}\bar{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} \geq 0 \\ [\underline{ab}, \underline{a}\bar{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} < 0 \\ [\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} < 0, \bar{b} \geq 0 \\ [\bar{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \\ [\underline{ab}, \bar{a}\underline{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} < 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} \geq 0 \\ [\text{máx}\{\bar{a}\bar{b}, \underline{ab}\}, \text{mín}\{\bar{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}\}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} < 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} < 0 \\ [0, 0] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} < 0, \underline{b} < 0, \bar{b} \geq 0 \\ [\bar{a}\bar{b}, \underline{a}\bar{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} < 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \\ [\bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} \geq 0 \\ [0, 0] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} < 0 \\ [\text{mín}\{\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}\}, \text{máx}\{\underline{ab}, \bar{a}\bar{b}\}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} < 0, \bar{b} \geq 0 \\ [\bar{a}\underline{b}, \underline{ab}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \\ [\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} < 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} \geq 0 \\ [\bar{a}\bar{b}, \bar{a}\bar{b}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} < 0, \underline{b} \geq 0, \bar{b} < 0 \\ [\bar{a}\underline{b}, \underline{ab}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} < 0, \underline{b} < 0, \bar{b} \geq 0 \\ [\bar{a}\bar{b}, \underline{ab}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} < 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \end{array} \right.$$

$$A/B = \left\{ \begin{array}{ll} [\underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} > 0, \bar{b} > 0 \\ [\bar{a}/\bar{b}, \underline{a}/\underline{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \\ [\underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\bar{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} < 0, \underline{b} > 0, \bar{b} > 0 \\ [\bar{a}/\underline{b}, \underline{a}/\underline{b}] & \text{si } \underline{a} \geq 0, \bar{a} < 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \\ [\underline{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} > 0, \bar{b} > 0 \\ [\bar{a}/\bar{b}, \underline{a}/\underline{b}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} \geq 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \\ [\underline{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} < 0, \underline{b} > 0, \bar{b} > 0 \\ [\bar{a}/\underline{b}, \underline{a}/\underline{b}] & \text{si } \underline{a} < 0, \bar{a} < 0, \underline{b} < 0, \bar{b} < 0 \end{array} \right.$$

**Proposición 2.8.2.** (*Propiedades de las funciones semánticas  $f^*$  i  $f^{**}$* ) Si  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua,  $\forall X \in I^*(\mathbb{R}^n)$  se cumple

1.  $Dual(f^*(X)) = f^{**}(Dual(X))$

2.  $f^*(X) \subseteq f^{**}(X)$

**Teorema 2.8.1.** Si  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. Dados  $X, Y \in I^*(\mathbb{R}^n)$  se cumple

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (f^*(X) \subseteq f^*(Y), f^{**}(X) \subseteq f^{**}(Y))$$

Utilizando las dos definiciones que exponemos a continuación, podremos encontrar situaciones en las que  $f^*(X)$  coincida con  $f^{**}(X)$ .

**Definición 2.8.7.** (*Punto de silla*) Si  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, para  $X \in I^*(\mathbb{R}^n)$  con  $X' = (X'_1, X'_2) \in I(\mathbb{R}^n)$ , definimos el conjunto de puntos de silla de  $f$  en  $(X'_1, X'_2)$ , y lo representamos por  $SDP(f, X'_1, X'_2)$  a

$$SDP(f, X'_1, X'_2) := \{(x_1^m, x_2^M) \mid U(x_1, X'_1)U(x_2, X'_2) (f(x_1^m, x_2) \leq f(x_1^m, x_2^M) \leq f(x_1, x_2^M))\}$$

**Definición 2.8.8.** (*SDV*) Si  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, para  $X \in I^*(\mathbb{R}^n)$  con  $X' = (X'_1, X'_2) \in I(\mathbb{R}^n)$ , definimos el valor que toma la función  $f$  en los puntos de silla de  $(X'_1, X'_2)$ , y lo representamos por  $SDV(f, X'_1, X'_2)$  a

$$SDV(f, X'_1, X'_2) := \begin{cases} f(x_1^m, x_2^M) & \text{si } (x_1^m, x_2^M) \in SDP(f, X'_1, X'_2) \\ \text{no definido} & \text{si } SDP(f, X'_1, X'_2) = \emptyset \end{cases}$$

**Proposición 2.8.3.** Bajo las condiciones de las definiciones 2.8.7 y 2.8.8, si  $(x_1^m, x_2^M)$  es un punto de silla de  $f$  en  $(X'_1, X'_2)$ , se cumple

$$SDV(f, X'_1, X'_2) = f(x_1^m, x_2^M) = \min_{x_1 \in X'_1} \max_{x_2 \in X'_2} f(x_1, x_2) = \max_{x_2 \in X'_2} \min_{x_1 \in X'_1} f(x_1, x_2)$$

**Teorema 2.8.2.** (*Conmutatividad Join-Meet*) Sea  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Dado  $X \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , si separamos las componentes propias y las impropias, de modo que  $X = (X_p, X_i)$ , se cumple que

$$\left. \begin{array}{l} SDP(f, X'_p, X'_i) \neq \emptyset \\ SDP(f, X'_i, X'_p) \neq \emptyset \end{array} \right\} \Leftrightarrow (f^*(X) = f^{**}(X))$$

En este caso se cumple,

$$f^*(X) = f^{**}(X) = [SDV(f, X'_p, X'_i), SDV(f, X'_i, X'_p)]$$

y diremos que  $f$  es JM-conmutativa para  $X \in I^*(\mathbb{R}^n)$ .

Veamos a continuación los dos teoremas semánticos que dan pleno significado a las dos extensiones intervalares  $f^*$  y  $f^{**}$  de una función continua.

**Teorema 2.8.3.** (*Teorema semántico para  $f^*$* ) Si  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $f^*$  su extensión algebraica,  $A \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , siempre que exista  $F(A) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , las siguientes proposiciones son equivalentes:

$$a) U(X', I(\mathbb{R}^n))((x \in X') \in Pred^*(A) \Rightarrow (z \in f(X')) \in Pred^*(F(A)))$$

$$b) f^*(A) \subseteq F(A)$$

$$c) U(a_p, A'_p)Q(z, F(A))E(a_i, A'_i) z = f(a_p, a_i)$$

Obsérvese que al ser  $F(A)$  un intervalo cualquiera, el teorema es cierto si, en particular,  $F$  es la extensión intervalar modal de  $f$  sobre  $A$ . Obsérvese asimismo, que de no existir  $F(A)$  el apartado c) puede tener sentido pero no es equivalente a b).

**Teorema 2.8.4.** (*Teorema semántico para  $f^{**}$* ) Si  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $f^{**}$  su extensión algebraica,  $A \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , siempre que exista  $F(A) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , las siguientes proposiciones son equivalentes:

$$a) U(X', I(\mathbb{R}^n))((x \notin X') \in Copred^*(A) \Rightarrow (z \notin f(X')) \in Copred^*(F(A)))$$

$$b) F(A) \subseteq f^{**}(A)$$

$$c) U(a_i, A'_i)Q(z, Dual(F(A)))E(a_p, A'_p) z = f(a_p, a_i)$$

*Demostración.* Este teorema puede probarse por dualidad, teniendo en cuenta que,

$$\begin{aligned} Dual(f^*(X)) &= Dual\left(\bigvee_{x_p \in X'_p} \bigwedge_{x_i \in X'_i} [f(x_p, x_i), f(x_p, x_i)]\right) \\ &= \bigwedge_{x_p \in X'_p} \bigvee_{x_i \in X'_i} [f(x_p, x_i), f(x_p, x_i)] \\ &= f^{**}(Dual(X)) \end{aligned}$$

Luego, si aplicamos el teorema semántico para la función  $f^*$  al intervalo  $Dual(A)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} Dual(F(A)) &\supseteq f^*(Dual(A)) \Rightarrow \\ F(A) &\subseteq Dual(f^*(Dual(A))) = f^{**}(Dual(Dual(A))) = f^{**}(A) \end{aligned}$$

□

Observemos que este teorema es cierto, en particular, si  $F(A)$  es la extensión intervalar modal de  $f$  sobre  $A$ .

Los dos teoremas semánticos proporcionan un completo significado a las extensiones algebraicas intervalares  $f^*$  y  $f^{**}$  de una función continua.

## 2.9. Extensiones racionales modales

Las extensiones semánticas  $f^*$  y  $f^{**}$  de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua son bastante inaccesibles a los cálculos, a excepción de funciones reales muy simples. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  además de continua es una función racional, existe otra extensión intervalar sintáctica ( $fR$ ), resultante de sustituir las operaciones racionales del árbol sintáctico por las correspondientes operaciones intervalares. Este nuevo tipo de extensión es calculable, a diferencia de las funciones  $f^*$  y  $f^{**}$ , pero no tienen en principio, una semántica completa. El problema de interpretación de estas funciones racionales modales, que son realmente el centro de los cálculos numéricos, consiste en relacionarlas con las correspondientes funciones semánticas.

**Definición 2.9.1.** (*\*-extensión racional modal*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, su \*-extensión racional modal, que representaremos por  $fR^*$ , se define como  $fR^* : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$  donde cada operador intervalar del árbol sintáctico que forma la función  $f$ , se sustituye por su \*-extensión semántica.

**Definición 2.9.2.** (*\*\*-extensión racional modal*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, su \*\*-extensión racional modal, que representaremos por  $fR^{**}$ , se define como  $fR^{**} : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$  donde cada operador intervalar del árbol sintáctico que forma la función  $f$ , se sustituye por su \*\*-extensión semántica.

Por ejemplo, para  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = xy + (x + y)^2$  los árboles sintácticos (programas de cálculo) para  $f$ ,  $fR^*$  y  $fR^{**}$ , considerando  $g(x, y) = (x + y)^2$ , son los que muestra la figura 2.5.

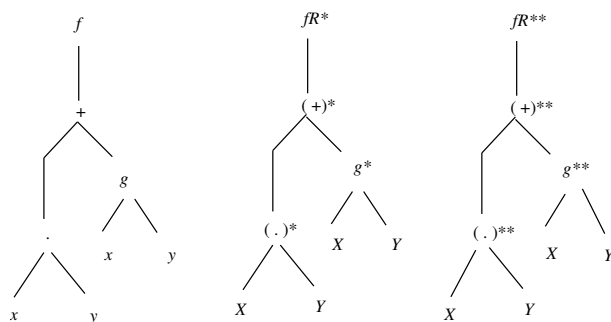


Fig. 2.5

**Definición 2.9.3.** (*Cálculo de la truncación externa de  $fR^*(X)$* )  $Out(fR^*(X))$  es la función definida mediante el programa de cálculo de  $fR^*$  donde el valor de cada componente  $X$  se sustituye por su truncación externa correspondiente y el valor exacto de cada operador, se sustituye por su truncación externa correspondiente. Es decir,  $X_i$  se sustituye por  $Out(X_i) \supseteq X_i$  y  $w^*(A)$  se sustituye por  $Out(w^*(A)) \supseteq w^*(A)$ .

**Definición 2.9.4.** (*Cálculo de la truncación interna de  $fR^{**}(X)$* )  $Inn(fR^{**}(X))$  es la función definida mediante el programa de cálculo de  $fR^{**}$  donde el valor de cada componente  $X$  se sustituye por su truncación interna correspondiente y el valor exacto de cada operador, se sustituye por su truncación interna correspondiente. Es decir,  $X_i$  se sustituye por  $Inn(X_i) \subseteq X_i$  y  $w^{**}(A)$  se sustituye por  $Inn(w^{**}(A)) \subseteq w^{**}(A)$ .

**Proposición 2.9.1.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y  $fR^*$  y  $fR^{**}$  son las  $*$  y  $**$  extensiones racionales modales, entonces,  $\forall X \in I^*(\mathbb{R}^n)$  se cumple

$$Dual(fR^*(X)) = fR^{**}(Dual(X))$$

$$Dual(Out(fR^*(X))) = Inn(fR^{**}(Dual(X)))$$

**Definición 2.9.5.** (*Operadores racionales*) Un operador racional es cualquier función continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que sea JM-conmutativa.

**Definición 2.9.6.** (*Función racional modal*) Una extensión racional modal  $fR$  de una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función definida análogamente a  $fR^*$  o  $fR^{**}$  tal que todos sus operadores son operadores racionales.

Observemos que la función  $g(x, y) = (x + y)^2$  no es una función racional modal en  $([-1, 1], [1, -1])$  porque

$$g^*([-1, 1], [1, -1]) = [1, 0] \neq [0, 1] = g^{**}([-1, 1], [1, -1])$$

**Teorema 2.9.1.** (*Proceso dual*) Si  $fR$  es una función racional modal, entonces

$$Inn(fR(X)) = Dual(Out(fR(Dual(X))))$$

Este teorema permite implementar únicamente la truncación externa en la aritmética intervalar modal.

Tal como hemos comentado anteriormente, las extensiones  $f^*$  y  $f^{**}$  son semánticamente interpretables, pero no calculables en general y la extensión racional modal  $fR$  es calculable pero no interpretable. Nos interesará pues, relacionar los dos tipos de extensiones para poder obtener un cálculo interpretable.

La interpretabilidad de las funciones racionales modales ha sido estudiada exhaustivamente por el grupo de investigación SIGLA/X y por el grupo de investigación MiceLab de la Universitat de Girona, que aplica la teoría del análisis intervalar modal a la simulación y al control. En las referencias [21], [19], [71], [75], [5] podemos encontrar las demostraciones de las propiedades y teoremas que enunciamos a continuación.



**Definición 2.9.7.** (*Uniincidencia y multiincidencia*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función racional, diremos que la componente  $x_i$  de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  es uniincidente en  $f$  si ocupa únicamente una hoja del árbol sintáctico de la función. En caso contrario, diremos que  $x_i$  es multiincidente en  $f$ .

**Proposición 2.9.2.** (*Interpretabilidad de las operaciones racionales en una rama del árbol sintáctico*) Si  $G_i, X$  e  $Y \in I_e(\mathbb{R})$ ,  $H_j, U, V \in I_u(\mathbb{R})$ ,  $F \in I^*(\mathbb{R})$  y  $f, g_i, h_j$  son funciones reales continuas tales que

$$f^*(G, H) \subseteq F, \quad g_i^*(X, U) \subseteq G_i, \quad h_j^*(Y, V) \subseteq H_j$$

y las componentes de  $u$  y  $v$  correspondientes a los vectores universales  $U$  y  $V$  no tienen componentes comunes en  $g_i$  y  $h_j$ , si definimos

$$f \circ (g, h)(x, y, u, v) := f(g_i(x, u), h_j(y, v))$$

se cumple

$$(f \circ (g, h))^*(X, Y, U, V) \subseteq F$$

**Teorema 2.9.2.** (*\*-interpretabilidad de las funciones racionales modales*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, y  $X \in I^*(\mathbb{R})$  es un intervalo modal en el cuál todas las componentes impropias son uniincidentes en  $fR(X)$ , y si existe  $Out(fR(Prop(X)))$  entonces

$$f^*(X) \subseteq Out(fR(X))$$

**Teorema 2.9.3.** (*\*\*-interpretabilidad de las funciones racionales modales*) Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, y  $X \in I^*(\mathbb{R})$  es un intervalo modal en el cuál todas las componentes propias son uniincidentes en  $fR(X)$ , y si existe  $Inn(fR(Prop(X)))$  entonces

$$f^{**}(X) \supseteq Inn(fR(X))$$

**Teorema 2.9.4.** (*Interpretabilidad de las funciones racionales modales uniincidentes*) Si  $fR(X)$  es una función racional modal uniincidente en todas las componentes de  $X$ , entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(X) \subseteq f^{**}(X)$$

**Teorema 2.9.5.** (*Coerción a la \*-interpretabilidad*) Si la función racional modal  $fR(X)$  tiene componentes impropias multiincidentes y si  $Xt^*$  se obtiene de  $X$ , sustituyendo cada componente impropia multiincidente por un intervalo puntual definido por cualquiera de los puntos de su dominio, entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(Xt^*)$$

**Teorema 2.9.6.** (*Coerción a la \*\*-interpretabilidad*) Si la función racional modal  $fR(X)$  tiene componentes propias multiincidentes y si  $Xt^{**}$  se obtiene de  $X$ , sustituyendo cada componente propia multiincidente por un intervalo puntual definido por cualquiera de los puntos de su dominio, entonces

$$fR(Xt^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$



## Capítulo 3

# Optimalidad de funciones racionales

En el capítulo anterior hemos estudiado distintas extensiones intervalares asociadas a una función continua  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada. La extensión  $fR$  es calculable pero no siempre tiene interpretación semántica; por ejemplo si  $f(x, y) = x^2 + xy$ , para  $X = [2, 1]$ ,  $Y = [4, 5]$ , la función  $fR([2, 1], [4, 5]) = [12, 6]$  no es \*-interpretable. Por otro lado, las extensiones  $f^*$  y  $f^{**}$  nos dan una interpretación semántica, pero en general no son calculables.

A continuación, el estudio de las funciones optimales nos proporciona, en caso de existir, el mejor cálculo interpretable de funciones intervalares. Las demostraciones omitidas a continuación pueden encontrarse en las referencias [72] y [74]. En dichas referencias se introduce el concepto de función árbol-optimal que nosotros denominamos función sintácticamente conmutativa porque preferimos asociar el adjetivo optimal a los cálculos en lugar de aplicarlo a las funciones.

### 3.1. Definición

**Definición 3.1.1.** (*Función racional optimal*) Si para cada  $X \in I^*(\mathbb{R}^n)$  para el que  $fR(Prop(X))$  esté definida, se cumple la condición

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

entonces, diremos que  $fR$  es *optimal*.

En este caso,  $f^*(X)$  y  $f^{**}(X)$  son calculables a partir de  $fR(X)$  y  $fR(X)$  es interpretable mediante los teoremas semánticos de  $f^*(X)$  y  $f^{**}(X)$ .

### 3.2. Operadores optimales

**Proposición 3.2.1.** (*Asociatividad monótona por la izquierda*) Si  $g$  es un operador monótono de una variable y  $fR(X)$  es optimal, entonces la función racional  $gR(fR(X))$  también es optimal.

**Proposición 3.2.2.** (*Asociatividad monaria por la derecha*) Si  $g_1(x_1), \dots, g_n(x_n)$  son operadores continuos de una variable y  $fR(X)$  es optimal, entonces

$$fR(g_1R(X_1), \dots, g_nR(X_n))$$

también es optimal.

Los operadores interesantes son los monótonos o bien operadores fácilmente programables, como por ejemplo los siguientes:

Si  $X = [x_1, x_2] \in I^*(\mathbb{R})$

$$\ln X := [\ln x_1, \ln x_2] \quad \text{si } X' > 0$$

$$\exp X := [\exp(x_1), \exp(x_2)]$$

$$|X| := \begin{cases} [x_1, x_2] & \text{si } x_1 \geq 0, x_2 > 0 \\ [ |x_2|, |x_1| ] & \text{si } x_1 < 0, x_2 < 0 \\ [0, \max(|x_1|, |x_2|)] & \text{si } x_1 < 0, x_2 \geq 0 \\ [\max(|x_1|, |x_2|), 0] & \text{si } x_1 \geq 0, x_2 < 0 \end{cases}$$

$$X^n := [x_1^n, x_2^n] \quad \text{si } n \text{ es impar}$$

Si  $n$  es par:

$$X^n := \begin{cases} [x_1^n, x_2^n] & \text{si } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ [x_2^n, x_1^n] & \text{si } x_1 < 0, x_2 < 0 \\ [0, \max(|x_1|^n, |x_2|^n)] & \text{si } x_1 < 0, x_2 \geq 0 \\ [\max(|x_1|^n, |x_2|^n), 0] & \text{si } x_1 \geq 0, x_2 < 0 \end{cases}$$

**Definición 3.2.1.** (*Función parcialmente monótona*) Una función continua  $f(x, y)$  es parcialmente monótona respecto  $x$  si para cada valor de  $y$ , la función es monótona respecto  $x$  (aunque para algunos valores de  $y$  sea creciente respecto  $x$ , y para otros valores de  $y$  sea decreciente respecto  $x$ ).

**Definición 3.2.2.** (*Función uniformemente monótona*) Una función continua  $f(x, y)$  es uniformemente monótona respecto  $x$  si  $f(x, y)$  es siempre creciente (o siempre decreciente) respecto  $x$  sea cual sea el valor de  $y$ .

Obviamente estas propiedades o la falta de ellas son relevantes sólo para el dominio intervalar implicado en cada cálculo.

**Proposición 3.2.3.** Cualquier función continua de dos variables  $f(x, y)$  que sea parcialmente monótona en un dominio  $(X', Y')$  es JM-conmutativa en el correspondiente intervalo  $(X, Y)$ .

Operadores interesantes son  $f(x, y) = x + y, x - y, xy, x/y, x^y, \text{máx}(x, y)$  y  $\text{mín}(x, y)$ .

**Proposición 3.2.4.** (*Asociatividad uniforme por la izquierda*) Si  $g(x_1, \dots, x_n)$  es un operador uniformemente monótono, y  $f_1R(Y_1), \dots, f_nR(Y_n)$  son funciones racionales optimales, entonces  $gR(f_1R(Y_1), \dots, f_nR(Y_n))$  también es optimal.

### 3.3. Conmutatividad sintáctica

El concepto de conmutatividad sintáctica es importante en el estudio de los intervalos modales ya que permite obtener buenos resultados en caso de que la función tenga variables multiincidentes.

**Definición 3.3.1.** (*Función sintácticamente conmutativa*) Una función racional modal  $fR(X)$  es *sintácticamente conmutativa*, si dada cualquiera de sus ramas elementales no uniformemente monótonas es seguida inferiormente en el árbol  $fR$  solamente por operadores de una variable.

**Teorema 3.3.1.** (*Optimalidad de las funciones racionales sintácticamente conmutativas*) Si  $fR(X)$  es sintácticamente conmutativa y  $X$  es uniincidente en  $fR(X)$ , entonces  $fR(X)$  es optimal.

Por ejemplo,  $fR(X)$  es sintácticamente conmutativa para la función  $f(x, y, z, u) = xy + zu \forall (X, Y, Z, U)$ , pero  $gR(X)$  no es sintácticamente conmutativa para la función  $g(x, y, z, u) = (x + y)(z + u)$  en  $X = [-2, 2], Y = [1, -1], Z = [-1, 1], U = [2, -2]$  y no es optimal ya que

$$g^*([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = [1.5, -1.5]$$

$$g^{**}([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = [-1.5, 1.5]$$

$$gR([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = [0, 0]$$

Si la función racional modal es sintácticamente conmutativa pero  $X$  no es uniincidente, los siguientes teoremas permiten una interpretación del programa de cálculo.

**Teorema 3.3.2.** (*Coerción a la \*-interpretabilidad para una función racional sintácticamente conmutativa*) Si la función racional modal  $fR(X)$  es sintácticamente conmutativa y tiene componentes impropias multiincidentes y si  $XT^*$  se obtiene de  $X$ , sustituyendo cada componente impropia multiincidente por su dual, excepto una de ellas, entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(XT^*)$$

**Teorema 3.3.3.** (*Coerción a la  $**$ -interpretabilidad para una función racional sintácticamente conmutativa*) Si la función racional modal  $fR(X)$  es sintácticamente conmutativa y tiene componentes propias multiincidentes y si  $XT^{**}$  se obtiene de  $X$ , sustituyendo cada componente propia multiincidente por su dual, excepto una de ellas, entonces

$$fR(XT^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

**Definición 3.3.2.** (*Función totalmente monótona*) Una función real  $f(x)$  es totalmente monótona respecto  $x \in \mathbb{R}^n$ , si es uniformemente monótona respecto de  $x$  considerando como variables globales sus componentes multiincidentes, y uniformemente monótona para cada incidencia de cada componente multiincidente de  $x$ .

**Teorema 3.3.4.** (*Coerción a la  $*$ -optimalidad parcial*) Sea  $X$  un vector intervalar y  $fR$  definida en el dominio  $Prop(X)$  sintácticamente conmutativa y totalmente monótona para un subconjunto  $Z$  de componentes multiincidentes. Sea  $XDT^*$  un vector extensión de  $X$ , tal que cada incidencia de cada componente multiincidente del subconjunto con monotonía total se incluye en  $XDT^*$  como una componente independiente, pero transformada en su dual si el punto de incidencia correspondiente tiene un sentido de monotonía contrario al global de la correspondiente componente  $Z$ ; para las demás, las componentes impropias multiincidentes se transforman en su dual en cada incidencia excepto en una. Entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(XDT^*) \subseteq fR(XT^*)$$

bajo la condición de que las componentes multiincidentes que no pertenezcan a  $Z$  sufren en  $XT^*$  la misma transformación que en  $XDT^*$ .

Si la función  $fR$  no es sintácticamente conmutativa, se obtiene

$$f^*(X) \subseteq fR(XDt^*)$$

siendo  $XDt^*$  el vector obtenido por ampliación de  $X$  tomando cada incidencia de las componentes de  $Z$  como independiente y se transforma en su dual, si para dicha incidencia  $f$  es monótona con sentido de monotonía contrario al global de la correspondiente componente de  $Z$ . El resto de las incidencias de las componentes multiincidentes impropias se transforman en cualquier otro punto de su dominio.

**Teorema 3.3.5.** (*Coerción a la  $**$ -optimalidad parcial*) Sea  $X$  un vector intervalar y  $fR$  definida en el dominio  $Prop(X)$  sintácticamente conmutativa y totalmente monótona para un subconjunto  $Z$  de componentes multiincidentes. Sea  $XDT^{**}$  un vector extensión de  $X$ , tal que cada incidencia de cada componente multiincidente del subconjunto con monotonía total se incluye en  $XDT^{**}$  como una componente independiente, pero transformada en su dual si el punto de incidencia correspondiente tiene un sentido de monotonía contrario al global

de la correspondiente componente  $Z$ ; para las demás, las componentes propias multiincidentes se transforman en su dual en cada incidencia excepto en una. Entonces

$$fR(XT^{**}) \subseteq fR(XDT^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

bajo la condición de que las componentes multiincidentes que no pertenezcan a  $Z$  sufren en  $XT^{**}$  la misma transformación que en  $XDT^{**}$ .

Si la función  $fR$  no es sintácticamente conmutativa, se obtiene

$$fR(XDt^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

siendo  $XDt^{**}$  el vector obtenido por ampliación de  $X$  tomando cada incidencia de las componentes de  $Z$  como independiente y se transforma en su dual, si para dicha incidencia  $f$  es monótona con sentido de monotonía contrario al global de la correspondiente componente de  $Z$ . El resto de las incidencias de las componentes multiincidentes propias se transforman en cualquier otro punto de su dominio.

**Teorema 3.3.6.** (*Coerción a la optimalidad*) Sea  $X$  un vector intervalar y  $fR$  definida y sintácticamente conmutativa en el dominio  $Prop(X)$  y totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes. Sea  $XD$  el vector extensión de  $X$ , tal que cada incidencia de cada componente multiincidente del conjunto con monotonía total está incluido en  $XD$  como una componente independiente, pero transformada en su dual si el correspondiente punto de incidencia tiene sentido de monotonía contrario a todas las  $X$ -componentes correspondientes. Entonces

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

Revisada la teoría básica del Análisis Intervalar Modal nos planteamos aplicarla a la resolución de problemas del ámbito de la ingeniería. En primer lugar nos planteamos estudiar un problema de propagación del calor en una dimensión. Si empleamos el método de resolución más sencillo como es el método explícito, aparecen problemas en la aplicación de la teoría debido a la restricciones que exige a las funciones el concepto de optimalidad. Esta situación motiva el estudio de la optimalidad condicionada que resolverá el problema de conducción del calor tal como se demuestra más adelante en el capítulo 6, apartado 6.2.

En el árbol de una función racional sintácticamente conmutativa, los operadores de  $n \geq 1$  variables sólo pueden tener ramas descendientes no-monarias cuando ellos sean uniformemente monótonos en el dominio definido por sus argumentos intervalares. A continuación veremos que algunas condiciones suplementarias de los argumentos, permiten identificar casos en los que los operadores de dos variables parcialmente monótonos, también pueden ocupar nodos generales de una función racional sin cancelar las consecuencias de la optimalidad sintáctica propias de los operadores uniformemente monótonos. Ver referencias [70], [74] y [75].

### 3.4. Optimalidad equivalente

**Definición 3.4.1.** (*Funciones racionales equivalentes*) Diremos que la función racional  $fR$  es una *función racional equivalente* a la función racional  $gR$ , cuando  $f$  y  $g$  coincidan como funciones reales, independientemente de su expresión racional.

**Teorema 3.4.1.** (*Teorema de optimalidad equivalente*) Si  $fR$  es una función racional uniincidente, con una función racional equivalente  $gR$  que tenga un cálculo optimal en un dominio de valores de su argumento  $X$ , entonces  $fR$  es optimal en el dominio dado.

*Demostración.* Por ser  $fR$  una función racional uniincidente se cumple (para cualquier argumento  $X$  para el que la función  $fR(Prop(X))$  exista) que  $f^*(X) \subseteq fR(X) \subseteq f^{**}(X)$ . Como  $f$  y  $g$  son iguales como funciones, se cumple que  $f^*(X) = g^*(X)$  y que  $f^{**}(X) = g^{**}(X)$ . Si  $gR(X)$  tiene un cálculo optimal  $gR_{opt}(X)$  (aplicando de ser preciso el teorema de coerción a la optimalidad), como función es optimal; es decir  $g^*(X) = gR_{opt}(X) = g^{**}(X)$  y por tanto,  $f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$ . Luego la función  $f$  es optimal y el cálculo  $fR$  es optimal.  $\square$

En los ejemplos que seguirán consideramos la función racional  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(a, b, c) = a(b + c)$ , que tiene la función racional equivalente  $g(a, b, c) = ab + ac$  que tiene a su vez cálculo optimal en ciertos dominios <sup>1</sup>. Entonces, como consecuencia del teorema de optimalidad equivalente 3.4.1,  $f$  será optimal en esos dominios.

**Ejemplo 3.4.1.** Tomemos los valores  $A = [-1, 1]$ ,  $B = [1, 2]$  y  $C = [3, 1]$ .

La función  $gR$  es sintácticamente optimal (como función racional es uniformemente monótona respecto de  $a$  e isotónica para las dos incidencias de  $a$ ); luego, por el teorema de coerción, el cálculo  $gR(A, B, C) = A * B + A * C$  es optimal; por tanto, según el teorema 3.4.1, también lo es  $fR(A, B, C) = A * (B + C)$ .

$$gR(A, B, C) = [-1, 1] * [1, 2] + [-1, 1] * [3, 1] = [-3, 3]$$

$$fR(A, B, C) = [-1, 1] * ([1, 2] + [3, 1]) = [-1, 1] * [4, 3] = [-3, 3]$$

Hagamos ahora como ilustración, el cálculo directo de  $f^*(A, B, C)$  y  $f^{**}(A, B, C)$ .

$$\begin{aligned} f^*(A, B, C) &= \bigvee_{a \in [-1, 1]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} \bigwedge_{c \in [1, 3]'} [a(b + c), a(b + c)] \\ &\text{utilizamos la } \bigvee\text{-asociatividad y la } a\text{-antitonía o la } a\text{-isotonía} \\ &= \bigvee \left\{ \bigvee_{a \in [-1, 0]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} [a(b + 1), a(b + 3)], \bigvee_{a \in [0, 1]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} [a(b + 3), a(b + 1)] \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \bigvee_{a \in [-1, 0]'} [3a, 4a], \bigvee_{a \in [0, 1]'} [4a, 3a] \right\} \\ &= \bigvee \{ [-3, 0], [0, 3] \} = [-3, 3] \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>cuando  $0 \in interior(B' + C')$



$$\begin{aligned}
f^{**}(A, B, C) &= \bigwedge_{c \in [1,3]'} \bigvee_{b \in [1,2]'} \bigvee_{a \in [-1,1]'} [a(b+c), a(b+c)] \\
&= \bigwedge_{c \in [1,3]'} \bigvee_{b \in [1,2]'} [-(b+c), b+c] \\
&= \bigwedge_{c \in [1,3]'} [-(2+c), 2+c] = [-3, 3]
\end{aligned}$$

Observemos que en este ejemplo podemos asegurar la igualdad de las funciones  $fR$  y  $gR$  a partir del hecho de que los intervalos  $B$  y  $C$  pertenecen a la misma zona de distributividad respecto de  $A$ . Ver [79].

**Ejemplo 3.4.2.** Sean los valores  $A = [-1, 1]$ ,  $B = [3, 4]$  y  $C = [-1, -3]$ . La función  $g$  es uniformemente monótona para  $a$ , isotónica para la primera incidencia de  $a$  y antitónica para la segunda incidencia. En este caso la optimalidad no está asociada a las regiones de distributividad determinadas por  $A$ , ya que  $B$  y  $C$  no pertenecen a la misma región; aplicando sin embargo el teorema de coerción optimal, obtendremos un cálculo racional optimal para la función  $g$  sustituyendo la segunda incidencia de  $A$  por  $Dual(A)$ .

$$\begin{aligned}
gR_{opt}(A, B, C) &= A * B + Dual(A) * C \\
&= [-1, 1] * [3, 4] + [1, -1] * [-1, -3] = [-1, 1]
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
fR(A, B, C) &= A * (B + C) \\
&= [-1, 1] * ([3, 4] + [-1, -3]) = [-1, 1] * [2, 1] = [-1, 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^*(A, B, C) &= \bigvee_{a \in [-1,1]'} \bigvee_{b \in [3,4]'} \bigwedge_{c \in [-3,-1]'} [a(b+c), a(b+c)] \\
&= \bigvee_{a \in [-1,0]'} \bigvee_{b \in [3,4]'} [a(b-3), a(b-1)], \bigvee_{a \in [0,1]'} \bigvee_{b \in [3,4]'} [a(b-1), a(b-3)] \\
&= \bigvee_{a \in [-1,0]'} [a, 2a], \bigvee_{a \in [0,1]'} [2a, a] \\
&= \bigvee_{a \in [-1,0]'} [-1, 0], [0, 1] = [-1, 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{**}(A, B, C) &= \bigwedge_{c \in [-3,-1]'} \bigvee_{b \in [3,4]'} \bigvee_{a \in [-1,1]'} [a(b+c), a(b+c)] \\
&= \bigwedge_{c \in [-3,-1]'} \bigvee_{b \in [3,4]'} [-(b+c), b+c] \\
&= \bigwedge_{c \in [-3,-1]'} [-(4+c), 4+c] = [-1, 1]
\end{aligned}$$

Evidentemente, el cálculo racional

$$gR(A, B, C) = [-1, 1] * [3, 4] + [-1, 1] * [-1, -3] = [-5, 5]$$

no es optimal ya que no se tiene en cuenta el teorema de coerción a la optimalidad.

**Ejemplo 3.4.3.** Sean  $A = [-1, 1]$ ,  $B = [1, 2]$  y  $C = [0, -4]$ . En este caso la función  $g(a, b, c) = ab + ac$  sólo es parcialmente monótona respecto de  $a$ , es decir, no es uniformemente monótona. No podemos encontrar un cálculo optimal porque la función no es uniformemente monótona para la variable multincidente, luego no se cumplen las hipótesis del teorema de coerción a la optimalidad.

Observemos que en este caso

$$\begin{aligned} fR(A, B, C) &= A * (B + C) \\ &= [-1, 1] * ([1, 2] + [0, -4]) = [-1, 1] * [1, -2] = [0, 0] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} gR(A, B, C) &= A * B + A * C \\ &= [-1, 1] * [1, 2] + [-1, 1] * [0, -4] = [-2, 2] \end{aligned}$$

no coinciden, pero esto no es significativo, pues ésta situación ya se daba en el ejemplo anterior. Lo característico de este ejemplo es la no existencia de un cálculo racional optimal para la función  $g$ .

Hagamos, para completar el ejemplo, el cálculo de  $f^*$  y  $f^{**}$ :

$$\begin{aligned} f^*(A, B, C) &= \bigvee_{a \in [-1, 1]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} \bigwedge_{c \in [-4, 0]'} [a(b + c), a(b + c)] \\ &= \bigvee \left\{ \bigvee_{a \in [-1, 0]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} [a(b - 4), ab], \bigvee_{a \in [0, 1]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} [ab, a(b - 4)] \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \bigvee_{a \in [-1, 0]'} [-2a, a], \bigvee_{a \in [0, 1]'} [a, -2a] \right\} \\ &= \bigvee \{ [0, 0], [0, 0] \} = [0, 0] \end{aligned}$$

Debido a la complejidad del cálculo para  $f^{**}(A, B, C)$  estudiaremos separadamente las cotas superior e inferior del intervalo.

$$\begin{aligned} \inf(f^{**}(A, B, C)) &= \max_{c \in [-4, 0]'} \min_{a \in [-1, 1]'} \min_{b \in [1, 2]'} (a(b + c)) \\ &= \max_{c \in [-4, 0]'} \min \left\{ \min_{a \in [-1, 0]'} \min_{b \in [1, 2]'} a(b + c), \min_{a \in [0, 1]'} \min_{b \in [1, 2]'} a(b + c) \right\} \\ &= \max_{c \in [-4, 0]'} \min \left\{ \min_{a \in [-1, 0]'} a(2 + c), \min_{a \in [0, 1]'} a(1 + c) \right\} \\ &= \max_{c \in [-4, 0]'} \min \left\{ -(2 + c) \text{ si } c \geq -2, 1 + c \text{ si } c < -2 \right\} = -0,5 \end{aligned}$$

El cálculo de  $\sup(f^{**}(A, B, C))$  puede obtenerse por simetría ya que

$$\begin{aligned} -f^{**}(A, B, C) &= - \bigwedge_{c \in [-4, 0]'} \bigvee_{a \in [-1, 1]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} [a(b + c), a(b + c)] \\ &= \bigwedge_{c \in [-4, 0]'} \bigvee_{a \in [-1, 1]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} [(-a)(b + c), (-a)(b + c)] \\ &= \bigwedge_{c \in [-4, 0]'} \bigvee_{a' \in [-1, 1]'} \bigvee_{b \in [1, 2]'} [(a')(b + c), (a')(b + c)] \text{ siendo } a' = -a \end{aligned}$$

Resulta pues que  $f^{**}(A, B, C) = [-0,5, 0,5]$  y por tanto como

$$f^*(A, B, C) \neq f^{**}(A, B, C)$$

### 3.5. Optimalidad condicionada

La optimalidad condicionada impone nuevas condiciones para estudiar la optimalidad sintáctica de funciones racionales que dependerán de las modalidades de sus argumentos. Si las funciones racionales son unimodales, el cálculo racional es optimal cuando sus argumentos son uniincidentes; si no existe unimodalidad debilitaremos la condición de conmutatividad sintáctica. Esta nueva condición que llamaremos condición de c-conmutatividad sintáctica nos permite considerar un conjunto más amplio de funciones para las cuales puede asegurarse la optimalidad.

Es conveniente tener en cuenta las observaciones siguientes:

1. Diremos que  $x = (x_1, \dots, x_n)$  es una lista uniincidente de vectores cuando cada uno de ellos no tiene ninguna componente repetida, ni tienen tampoco entre ellos ninguna componente común.
2. Notaremos  $f^*(g_1(X_1), \dots, g_n(X_n))$  a la función  $f^*(X_1, \dots, X_n)$  siendo  $f := f_0 \circ (g_1, \dots, g_n)(x_1, \dots, x_n)$  y  $f_0$  el operador principal del árbol sintáctico asociado a la función  $f$ . En principio, siempre se partirá de la hipótesis que  $f_0$  es una función monótona parcial de dos variables. Las excepciones a esta hipótesis se indicarán en cada caso.

**Lema 3.5.1.** (*\*-optimalidad de operadores parcialmente monótonos de dos variables*) Si  $f(g(x), h(y, v))$  es una función continua h-parcialmente monótona, uniincidente, y  $X$  es un vector propio, entonces

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V))$$

siendo  $Y$  y  $V$  los argumentos propio e impropio de  $h$ . Diremos que  $fR$  es \*-optimal.

*Demostración.* Consideremos  $G' = \{g(x) : x \in X'\}$

$$G'_+ = \{g : g \in G' : f(g, h) \text{ es h-isotónico}\}$$

$$G'_- = \{g : g \in G' : f(g, h) \text{ es h-antitónico}\}$$

$$\begin{aligned} f^*(g(X), h(Y, V)) &= \bigvee_{x \in X'} \bigvee_{y \in Y'} \bigwedge_{v \in V'} [f_0(g(x), h(y, v)), f_0(g(x), h(y, v))] \\ &= \bigvee_{g \in G'} \bigvee_{y \in Y'} \bigwedge_{v \in V'} [f_0(g, h(y, v)), f_0(g, h(y, v))] \end{aligned}$$

Como los operadores reticulares son asociativos, se cumple

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = \bigvee \left\{ \bigvee_{g \in G'_+} \bigvee_{y \in Y'} \bigwedge_{v \in V'} [f_0(g, h(y, v)), f_0(g, h(y, v))], \right. \\ \left. \bigvee_{g \in G'_-} \bigvee_{y \in Y'} \bigwedge_{v \in V'} [f_0(g, h(y, v)), f_0(g, h(y, v))] \right\}$$

y dado que el operador  $f_0(g, \cdot)$  es monótono uniforme para  $g \in G'_+$  y para  $g \in G'_-$ , entonces

$$\begin{aligned} f^*(g(X), h(Y, V)) &= \bigvee \left\{ \bigvee_{g \in G'_+} [f_0(g, \min_{y \in Y'} \max_{v \in V'} \{h(y, v)\}), f_0(g, \max_{y \in Y'} \min_{v \in V'} \{h(y, v)\})], \right. \\ &\quad \left. \bigvee_{g \in G'_-} [f_0(g, \max_{y \in Y'} \min_{v \in V'} \{h(y, v)\}), f_0(g, \min_{y \in Y'} \max_{v \in V'} \{h(y, v)\})] \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \bigvee_{g \in G'_+} f_0^*(g, h^*(Y, V)), \bigvee_{g \in G'_-} f_0^*(g, h^*(Y, V)) \right\} \\ &= \bigvee_{g \in G'} f_0^*(g, h^*(Y, V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) \end{aligned}$$

□

Observemos que las únicas hipótesis sobre  $g(x)$  y  $h(y, v)$  es que son continuas y además, puesto que son tratadas exclusivamente como funciones, la uniincidencia supone exclusivamente la independencia de las componentes de  $x$  e  $(y, v)$ .

**Ejemplo 3.5.1.** Sea la función  $f(x, y, v) = x(y + v)$  definida sobre el dominio  $X = [-1, 1]$ ,  $Y = [1, 2]$  y  $V = [0, -4]$ . Podemos expresar  $f_0(g, h) := gh$  donde  $g(x) = x$ ,  $y$   $h(y, v) = y + v$ . Efectivamente  $f_0$  es  $h$ -parcialmente monótona ya que  $f_0$  es un producto. Además,  $X$  es propio e  $Y, V$  son respectivamente propio e impropio. Entonces el lema 3.5.1 se cumple:

$$f^*(g([-1, 1]), h([1, 2], [0, -4])) = f_0^*(g^*([-1, 1]), h^*([1, 2], [0, -4])) = [0, 0]$$

tal como se ha demostrado en el ejemplo 3.4.3 (En este caso  $f^* \neq f^{**}$ ).

**Ejemplo 3.5.2.** Observemos que la condición de ser  $X$  vector unimodal propio es necesaria, ya que, por ejemplo, si consideramos la función

$$f(g(x), h(y, v)) = x(y + v)$$

definida sobre  $X = [1, -1]$ ,  $Y = [0, 4]$ ,  $V = [-2, -3]$  entonces el lema ya no se cumple, pues

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = [0.5, -0.5]$$

mientras que

$$f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) = [0, 0]$$

tal como se demuestra a continuación.

Calculemos  $f^*(g(X), h(Y, V))$ .

Debido a la complejidad del cálculo para  $f^*(g(X), h(Y, V))$  estudiaremos separadamente las cotas superior e inferior del intervalo.

$$\begin{aligned}
 \inf(f^*(g(X), h(Y, V))) &= \min_{y \in [0, 4]'} \max_{x \in [-1, 1]'} \max_{v \in [-3, -2]'} (x(y + v)) \\
 &= \min_{y \in [0, 4]'} \max \left\{ \max_{x \in [-1, 0]'} \max_{v \in [-3, -2]'} x(y + v), \max_{x \in [0, 1]'} \max_{v \in [-3, -2]'} x(y + v) \right\} \\
 &= \min_{y \in [0, 4]'} \max \left\{ \max_{x \in [-1, 0]'} x(y - 3), \max_{x \in [0, 1]'} x(y - 2) \right\} \\
 &= \min_{y \in [0, 4]'} \max \{ 3 - y \text{ si } y \leq 3, y - 2 \text{ si } y > 2 \} = 0.5
 \end{aligned}$$

Tal como vimos en el ejemplo 3.4.3 por simetría se obtiene

$$\sup(f^*(g(X), h(Y, V))) = -0.5$$

luego

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = [0.5, -0.5].$$

Calculemos ahora  $f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V))$

$$\begin{aligned}
 g^*(X) &= \bigwedge_{x \in [-1, 1]'} [x, x] = [1, -1] \\
 h^*(Y, V) &= \bigvee_{y \in [0, 4]'} \bigwedge_{v \in [-3, -2]'} [y + v, y + v] = \bigvee_{y \in [0, 4]'} [y - 2, y - 3] = [-2, 1]
 \end{aligned}$$

Luego

$$f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) = \bigvee_{h \in [-2, 1]'} \bigwedge_{g \in [-1, 1]'} [g * h, g * h] = \bigvee_{h \in [-2, 1]'} [|h|, -|h|] = [0, 0]$$

y por tanto

$$f^*(g(X), h(Y, V)) \neq f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V))$$

**Ejemplo 3.5.3.** El ejemplo 3.5.1 ilustra un caso donde la función  $fR$  es  $*$ -optimal sin ser optimal, ya que  $f^* \neq f^{**}$ . En dicho ejemplo  $g^*(X) = [-1, 1]$  y  $h^*(Y, V) = [1, -2]$  tienen distinta modalidad, luego cabría preguntarnos si el hecho de que  $g^*(X)$  y  $h^*(Y, V)$  tengan la misma modalidad (es decir, sean propios) implica la optimalidad de la función objeto de estudio. En el presente ejemplo se ilustra la no influencia de la modalidad de  $h^*(Y, V)$  en la optimalidad de la función  $f$ .

Tomemos  $X = [-3, 1]$ ,  $Y = [-1, 2]$  y  $V = [1, -1]$  para  $f_0(g, h) := gh$  donde  $g(x) = x$  y  $h(y, v) = y + v$ . En este caso,  $h^*(Y, V) = [0, 1]$  luego propio y sin

embargo, la función  $f$  no es optimal ya que como se demuestra a continuación  $f^* \neq f^{**}$ .

Como  $f_0$  es una función continua  $h$ -parcialmente monótona y  $X$  es un vector propio, por el lema 3.5.1 sabemos que  $f$  es  $*$ -optimal, luego

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)).$$

$$g^*(X) = \bigvee_{x \in [-3, 1]'} [x, x] = [-3, 1]$$

$$h^*(Y, V) = \bigvee_{y \in [-1, 2]'} \bigwedge_{v \in [-1, 1]'} [y + v, y + v] = \bigvee_{y \in [-1, 2]'} [y + 1, y - 1] = [0, 1]$$

Luego

$$f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) = \bigvee_{g \in [-3, 1]'} \bigwedge_{h \in [0, 1]'} [g * h, g * h]$$

$$= \bigvee \left\{ \bigvee_{g \in [-3, 0]'} [g, 0], \bigvee_{g \in [0, 1]'} [0, g] \right\} = \bigvee \{ [0, 1], [-3, 0] \} = [-3, 1]$$

y por tanto  $f^*(g(X), h(Y, V)) = [-3, 1]$ , que observemos se puede determinar gráficamente tal como indica la figura 3.1.

Tomando los valores  $X = [-3, 1]$ ,  $Y = [-1, 2]$  y  $V = [1, -1]$ ,  $X$  varía de  $-3$  a  $1$  e  $Y + V$  varía de  $-2$  a  $3$ . Representemos dichos valores sobre los ejes  $x$  e  $y + v$ .

Los dominios marcados con flechas son los dominios de parámetro  $(x, y)$  determinados por la valoración de  $v \in [-1, 1]'$ . Los dos dominios así indicados están situados de tal manera que nos proporcionan los valores de  $I^*$  y  $S^*$  ( $-3$  y  $1$  respectivamente).

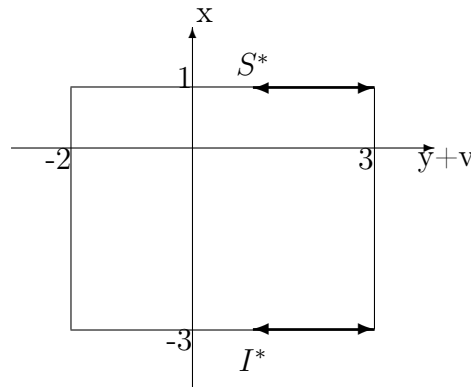


Fig. 3.1

Determinemos ahora gráficamente  $f^{**}(g(X), h(Y, V))$

$$f^{**}(g(X), h(Y, V)) = \left( \begin{array}{c} \text{mín} \\ \text{máx} \end{array} \right)_{v \in V'} \left( \begin{array}{c} \text{máx} \\ \text{mín} \end{array} \right)_{x \in X'} \left( \begin{array}{c} \text{máx} \\ \text{mín} \end{array} \right)_{y \in Y'} \left[ \begin{array}{c} x(y + v) \\ x(y + v) \end{array} \right]$$

En el gráfico 3.2 se ilustra el dominio de valores  $(x, y + v)$ . Los dominios rectangulares marcados son los dominios de parámetro  $(x, y)$  que corresponden al valor de  $v = -1$ , y son los que nos proporcionan los valores  $I^{**} = -3$  y  $S^{**} = 2.25$ .

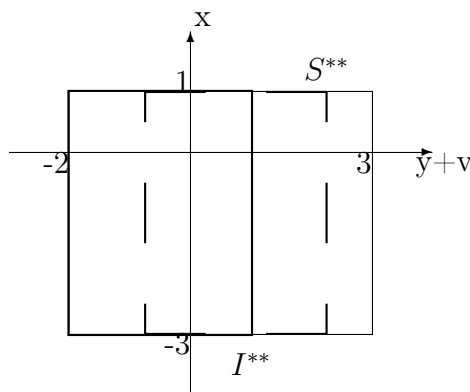


Fig. 3.2

$$f^{**}(g(X), h(Y, V)) = [-3, 2.25]$$

luego  $f$  no es optimal.

**Ejemplo 3.5.4.** El lema 3.5.1 no supone la monotonía parcial de  $f_0$  respecto de  $g$ . Este ejemplo ilustra la independencia del lema respecto a esta condición.

A la función  $f(x, y, v) = x^2(y + v)$  le podemos asociar, por ejemplo, dos funciones racionales. En primer lugar, consideremos  $g_1(x) = x$ ,  $h(y, v) = y + v$  y la función  $f_1(g_1(x), h(y, v)) = x^2(y + v)$ . Por otro lado, tomando  $g_2(x) = x^2$  obtenemos asimismo  $f_2(g_2(x), h(y, v)) = x^2(y + v)$ . Observamos que la función  $f_1$  no es parcialmente monótona respecto de  $g$  mientras que la función  $f_2$  sí es parcialmente monótona respecto de  $g$ .

Veamos que dados los valores  $X = [-1, 1]$ ,  $Y = [0, 2]$  y  $V = [0, -3]$  se cumple el lema 3.5.1 tanto para la función  $f_1$  como para  $f_2$ , es decir,

$$f_1^*(g_1(X), h(Y, V)) = f_{10}^*(g_1^*(X), h^*(Y, V))$$

$$f_2^*(g_2(X), h(Y, V)) = f_{20}^*(g_2^*(X), h^*(Y, V))$$

Calculemos  $f^*(X, Y, V)$ .

$$\begin{aligned}
 f^*(X, Y, V) &= f_1^*(g(X), h(Y, V)) = f_2^*(g(X), h(Y, V)) \\
 &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} \bigvee_{y \in [0, 2]'} \bigwedge_{v \in [-3, 0]'} [x^2(y + v), x^2(y + v)] \\
 &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} \bigvee_{y \in [0, 2]'} [x^2 y, x^2(y - 3)] \\
 &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [0, -x^2] = [0, 0]
 \end{aligned}$$

Calculemos ahora  $f_{10}^*(g_1^*(X), h^*(Y, V))$

$$\begin{aligned}
 g_1^*(X) &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [x, x] = [-1, 1] \\
 h^*(Y, V) &= \bigvee_{y \in [0, 2]'} \bigwedge_{v \in [-3, 0]'} [y + v, y + v] = \bigvee_{y \in [0, 2]'} [y, y - 3] = [0, -1]
 \end{aligned}$$

Luego

$$f_{10}^*(g_1^*(X), h^*(Y, V)) = \bigvee_{x \in [-1, 1]'} \bigwedge_{h \in [0, -1]'} [x^2 * h, x^2 * h] = \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [0, -x^2] = [0, 0]$$

Análogamente

$$f_{20}^*(g_2^*(X), h^*(Y, V)) = [0, 0]$$

**Ejemplo 3.5.5.** La condición de que la función  $f$  sea  $h$ -parcialmente monótona es necesaria, ya que por ejemplo, si consideramos la función  $f(g, h) = g^2 h^2$  siendo  $g(x) = x$  y  $h(y, v) = y + v$ , tomando por ejemplo los argumentos  $X = [-1, 1]$ ,  $Y = [1, 2]$  y  $V = [0, -4]$ , entonces el lema 3.5.1 ya no se cumple. Observemos que en este caso la función  $f$  no es parcialmente monótona ni respecto a  $g$  ni respecto a  $h$ .

Calculemos  $f^*(g(X), h(Y, V))$ .

$$\begin{aligned}
 f^*(g(X), h(Y, V)) &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} \bigvee_{y \in [1, 2]'} \bigwedge_{v \in [0, -4]'} [x^2(y + v)^2, x^2(y + v)^2] \\
 &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} \bigvee_{y \in [1, 2]'} [x^2(y - 4)^2, x^2 y^2] = \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [4x^2, 4x^2] = [0, 4]
 \end{aligned}$$

Calculemos ahora  $f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V))$

$$\begin{aligned}
 g^*(X) &= \bigvee_{x \in [-1, 1]'} [x, x] = [-1, 1] \\
 h^*(Y, V) &= \bigvee_{y \in [1, 2]'} \bigwedge_{v \in [-4, 0]'} [y + v, y + v] = \bigvee_{y \in [1, 2]'} [y, y - 4] = [1, -2]
 \end{aligned}$$



Luego

$$f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) = \bigvee_{g \in [-1, 1]'} \bigwedge_{h \in [-2, 1]'} [g^2 * h^2, g^2 * h^2] = \bigvee_{g \in [-1, 1]'} [4g^2, 0] = [0, 0]$$

y por tanto

$$f^*(g(X), h(Y, V)) \neq f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V))$$

**Observación** Evidentemente, si  $g^*(X)$  y  $h^*(Y, V)$  tienen cálculos racionales \*-optimales, que notaremos por  $gR^*(X)$  y  $hR^*(Y, V)$ , entonces

$$f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) = f_0^*(gR^*(X), hR^*(Y, V))$$

que anotaremos por  $fR^*(X, Y, V)$  o por  $fR^*(g(X), h(Y, V))$ .

**Lema 3.5.2.** (*\*\*-optimalidad de operadores parcialmente monótonos de dos variables*) Si  $f(g(u), h(y, v))$  es una función continua h-parcialmente monótona uniincidente, y  $U$  es un vector impropio, entonces

$$f^{**}(g(U), h(Y, V)) = f_0^{**}(g^{**}(U), h^{**}(Y, V))$$

siendo  $Y$  y  $V$  los argumentos propio e impropio de  $h$ . Diremos que  $fR$  es \*\*-optimal.

*Demostración.* Dual del lema 3.5.1 □

**Ejemplo 3.5.6.** *Tal como vimos en el ejemplo 3.5.2. la función  $f(g(u), h(y, v)) = u(y + v)$  definida sobre  $U = [1, -1]$ ,  $Y = [0, 4]$  y  $V = [-2, -3]$  no es \*-optimal. Veamos que en este caso la función es \*\*-optimal.*

Calculemos  $f^{**}(g(U), h(Y, V))$ .

$$\begin{aligned} f^{**}(g(U), h(Y, V)) &= \bigwedge_{u \in [-1, 1]'} \bigwedge_{v \in [-3, -2]'} \bigvee_{y \in [0, 4]'} [u(y + v), u(y + v)] \\ &= \bigwedge \left\{ \bigwedge_{u \in [-1, 0]'} \bigwedge_{v \in [-3, -2]'} [u(4 + v), uv], \bigwedge_{u \in [0, 1]'} \bigwedge_{v \in [-3, -2]'} [uv, u(4 + v)] \right\} \\ &= \bigwedge \left\{ \bigwedge_{u \in [-1, 0]'} [u, -2u], \bigwedge_{u \in [0, 1]'} [2u, u] \right\} \\ &= \bigwedge \{ [0, 0], [0, 0] \} = [0, 0] \end{aligned}$$

Calculemos ahora  $f_0^{**}(g^{**}(U), h^{**}(Y, V))$

$$\begin{aligned} g^{**}(U) &= \bigwedge_{u \in [-1, 1]'} [u, u] = [1, -1] \\ h^{**}(Y, V) &= \bigwedge_{v \in [-2, -3]'} \bigvee_{y \in [0, 4]'} [y + v, y + v] = \bigwedge_{v \in [-2, -3]'} [v, 4 + v] = [-2, 1] \end{aligned}$$

Luego

$$f_0^{**}([1, -1], [-2, 1]) = [1, -1] * [-2, 1] = [0, 0]$$

Así pues,

$$f^{**}(g([1, -1]), h([0, 4], [-2, -3])) = f_0^{**}(g^{**}([1, -1]), h^{**}([0, 4], [-2, -3])) = [0, 0]$$

**Observación** Evidentemente, si  $g^{**}(U)$  y  $h^{**}(Y, V)$  tienen cálculos racionales  $^{**}$ -optimales, que notaremos por  $gR^{**}(U)$  y  $hR^{**}(Y, V)$ , entonces

$$f^{**}(g(U), h(Y, V)) = f_0^{**}(gR^{**}(U), hR^{**}(Y, V))$$

**Definición 3.5.1.** (*Modalidad partida*) Diremos que la función  $f(g(x), h(y))$  cumple la condición de modalidad partida cuando  $f_0$  es  $(g, h)$ -parcialmente monótono,  $X$  es un vector propio e  $Y$  es un vector impropio.

**Teorema 3.5.1.** (*Primer teorema de la optimalidad condicionada. Optimalidad de los operadores con modalidad partida*) Dada una función continua  $f(g(x), h(y))$  que cumple la condición de modalidad partida, entonces

$$\begin{aligned} f^*(g(X), h(Y)) &= f_0^*(g^*(X), h^*(Y)) = \\ &= f_0^{**}(g^{**}(X), h^{**}(Y)) = f^{**}(g(X), h(Y)) \end{aligned}$$

*Demostración.* Se deduce del lema 3.5.1 y del lema 3.5.2 y del hecho que  $f_0$  es optimal (por ser un operador principal parcialmente monótono) y  $g$  y  $h$  son funciones optimales (por ser unimodales).  $\square$

**Observación** En las condiciones del teorema 3.5.1, y si  $g$  y  $h$  tienen cálculos racionales optimales  $gR$  y  $hR$ , entonces  $f_0(gR(X), hR(Y))$  es optimal.

**Teorema 3.5.2.** (*Optimalidad del producto n-dimensional*) Si  $A_1, \dots, A_n \in I^*(\mathbb{R})$ , entonces el producto n-dimensional  $A_1 * \dots * A_n$  es optimal.

*Demostración.* Supongamos  $A = (A_1, \dots, A_p, A_{p+1}, \dots, A_n)$  con  $A_1, \dots, A_p$  intervalos propios y  $A_{p+1}, \dots, A_n$  intervalos impropios. Considerando  $f(A)$  definida por  $f(A) = f(g(A_1, \dots, A_p), h(A_{p+1}, \dots, A_n)) = (A_1 * \dots * A_p) * (A_{p+1} * \dots * A_n)$ , observemos que  $f$  cumple la condición de modalidad partida y  $g$  y  $h$  son optimales por ser unimodales. Entonces estamos en las condiciones de teorema anterior y por tanto  $f$  es optimal, así como cualquier reordenación.  $\square$

**Lema 3.5.3.** (*Primer lema de optimalidad condicionada*) Sea  $f(g(u), h(y, v))$  una función continua

- uniformemente monótona para  $h$
- $g$ -parcialmente monótona

- $U$  vector unimodal impropio
- $Y$  y  $V$  los subvectores de las componentes propia e impropia del argumento  $h$
- $h$  es optimal para  $(Y, V)$
- $U$  y  $V$  sin argumentos comunes

entonces,  $f$  es  $*$ -optimal, es decir,

$$f^*(g(U), h(Y, V)) = f_0^*(g^*(U), h^*(Y, V))$$

*Demostración.* Sean  $G = g^*(U)$  y  $H = h^*(Y, V)$ . Por ser  $f_0$  parcialmente monótona,  $g(U)$  optimal y  $h(Y, V)$  optimal,

1. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} & f_0^*(g^*(U), h^*(Y, V)) \\ & \text{como } f \text{ es } (g, h)\text{-parcialmente monótona} \\ & = f_0^{**}(g^*(U), h^*(Y, V)) = M(g, G')f^*(g, H) \end{aligned}$$

2. Por otro lado se cumple que

$$\begin{aligned} & f^*(g(U), h(Y, V)) \\ & = \bigvee_{y \in Y'} \bigwedge_{u \in U'} \bigwedge_{v \in V'} [f(g(u), h(y, v)), f(g(u), h(y, v))] \\ & \quad \text{Supongamos que } f \text{ es } h\text{-}(\text{uniformemente}) \text{ isotónica } (*) \end{aligned}$$

$$= \bigvee_{y \in Y'} \bigwedge_{g \in G'} [f(g, \max_{v \in V'} h(y, v)), f(g, \min_{v \in V'} h(y, v))]$$

Dadas las funciones  $h_1(y) = \max_{v \in V'} h(y, v)$  y  $h_2(y) = \min_{v \in V'} h(y, v)$ ,

$f(g, h_1)$  y  $f(g, h_2)$  son funciones de modalidad partida sobre  $(G, Y)$ , por tanto

$$\begin{aligned} & f^*(g(U), h(Y, V)) \\ & = \bigwedge_{g \in G'} \bigvee_{y \in Y'} [f(g, \max_{v \in V'} h(y, v)), f(g, \min_{v \in V'} h(y, v))] \\ & = \bigwedge_{g \in G'} [f(g, \min_{y \in Y'} \max_{v \in V'} h(y, v)), f(g, \max_{y \in Y'} \min_{v \in V'} h(y, v))] \\ & = \bigwedge_{g \in G'} f^*(g, H) \end{aligned}$$

Si  $f(g, h)$  es  $h$ -uniformemente antitónica después de  $(*)$  se seguiría:

$$\begin{aligned} & = \bigvee_{y \in Y'} \bigwedge_{g \in G'} [f(g, \min_{v \in V'} h(y, v)), f(g, \max_{v \in V'} h(y, v))] \\ & = \bigwedge_{g \in G'} \bigvee_{y \in Y'} [f(g, \min_{v \in V'} h(y, v)), f(g, \max_{v \in V'} h(y, v))] \\ & = \bigwedge_{g \in G'} [f(g, \max_{y \in Y'} \min_{v \in V'} h(y, v)), f(g, \min_{y \in Y'} \max_{v \in V'} h(y, v))] \\ & = \bigwedge_{g \in G'} f^*(g, H) \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 3.5.7.** Definimos la función  $f(g(u), h(y, v)) := u(y+v)$  sobre  $U = [1, 0]$ ,  $Y = [-4, 0]$  y  $V = [2, 1]$

Calculemos  $f^*(g(U), h(Y, V))$

$$\begin{aligned}
& f^*(g(U), h(Y, V)) \\
&= \bigvee_{y \in [-4, 0]'} \bigwedge_{u \in [0, 1]'} \bigwedge_{v \in [1, 2]'} [u(y+v), u(y+v)] \\
&= \bigvee_{y \in [-4, 0]'} \bigwedge_{u \in [0, 1]'} [u(y+2), u(y+1)] \\
&= \bigvee_{y \in [-4, 0]'} [(y+2 \text{ si } y \geq -2; 0 \text{ si } y < -2), (0 \text{ si } y \geq -1; y+1 \text{ si } y < -1)] \\
&= [0, 0]
\end{aligned}$$

Calculemos ahora  $f_0^*(g^*(U), h^*(Y, V))$ .

$$\begin{aligned}
g^*(U) &= \bigwedge_{u \in [0, 1]'} [u, u] = [1, 0] \\
h^*(Y, V) &= \bigvee_{y \in [-4, 0]'} \bigwedge_{v \in [1, 2]'} [y+v, y+v] = \bigvee_{y \in [-4, 0]'} [y+2, y] = [-2, 0]
\end{aligned}$$

Luego

$$f_0^*([1, 0], [1, -2]) = [1, 0] * [-2, 0] = [0, 0]$$

Así pues,

$$f^*(g([1, 0]), h([1, 2], [0, -4])) = f_0^*(g^*([1, 0]), h^*([1, 2], [0, -4])) = [0, 0]$$

**Lema 3.5.4.** (Segundo lema de optimalidad condicionada) Sea  $f(g(x), h(y, v))$  una función continua

- uniformemente monótona para  $h$
- $g$ -parcialmente monótona
- $X$  vector unimodal propio
- $Y$  y  $V$  los subvectores de las componentes propia e impropia de  $h$
- $h$  optimal para  $(Y, V)$
- $X$  e  $Y$  sin componentes comunes

entonces,  $f$  es  $**$ -optimal, es decir,

$$f^{**}(g(X), h(Y, V)) = f_0^{**}(g^{**}(X), h^{**}(Y, V))$$

*Demostración.* Dual del primer lema de optimalidad condicionada.  $\square$

**Teorema 3.5.3.** (*Segundo teorema de optimalidad condicionada*) Dada una función continua  $f(g(x), h(y, v))$  tal que

- $f$  es  $h$ -uniformemente monótona
- $f$  es  $g$ -parcialmente monótona
- $X$  vector unimodal
- $Y$  y  $V$  los subvectores de las componentes propias e impropias de  $h$
- $h(Y, V)$  optimal para  $Y$  y  $V$
- $X, Y$  y  $V$  sin argumentos comunes

entonces,  $f$  tiene cálculo optimal, es decir,

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) = f^{**}(g(X), h(Y, V))$$

*Demostración.* Se deduce de los dos lemas de optimalidad condicionada.  $\square$

**Definición 3.5.2.** (*Operadores racionales c-optimales*) Si  $fR$  es una función racional diremos que es un *operador racional c-optimal* si  $f$  cumple una de las siguientes condiciones:

- a)  $f(\ )$  es uniformemente monótona (*propriadamente optimal*)
- b)  $f(\ ) := f(g(x), h(y))$  es  $(g, h)$ -parcialmente monótona y cumple la condición de modalidad partida para  $(X, Y)$
- c)  $f(\ ) := f(g(x), h(y, v))$  es  $g$ -parcialmente monótona,  $h$ -uniformemente monótona y  $h(Y, V)$  optimal para  $Y$  y  $V$ .  $X$  es unimodal e  $Y$  y  $V$  los subvectores de las componentes propias e impropias de los argumentos de  $h$  y  $X, Y$  y  $V$  no tienen componentes en común.

**Definición 3.5.3.** (*Funciones racionales condicionalmente optimales*) La función  $fR(X)$  es *sintácticamente c-conmutativa (sintácticamente condicionalmente conmutativa)* sobre  $X$ , si cualesquiera de sus operadores no c-optimales está seguido en el árbol sintáctico sólomente por operadores de una variable y precedido en el árbol sintáctico sólomente por operadores c-optimales. Por tanto,  $fR$  no es sintácticamente c-conmutativa en  $X$  si y sólo si, existe un operador no c-optimal, seguido hacia abajo en el árbol sintáctico por un operador no monario.

**Teorema 3.5.4.** (*Optimalidad condicionada*) Si la función  $fR(X)$  es uniincidente y es sintácticamente c-conmutativa, entonces  $fR(X)$  es optimal, es decir,

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

*Demostración.* Se deduce de la definición y de los resultados anteriores.  $\square$

**Ejemplo 3.5.8.** *En el ejemplo 3.4.3 vimos que para  $A = [-1, 1]$ ,  $B = [1, 2]$  y  $C = [0, -4]$  a la función  $g(a, b, c) = ab + ac$  no se le puede aplicar el teorema de coerción a la optimalidad debido a que  $g$  tan sólo es parcialmente monótona respecto de  $a$  (como variable global), es decir, no es uniformemente monótona para la variable multiincidente. En este caso, por este motivo, tampoco podemos aplicar el teorema de coerción optimal condicionada.*

*Tomemos la función  $f$  equivalente a  $g$ , y definida por  $f(a, b, c) = a(b + c)$  en el mismo dominio. A la función  $f$  tampoco le podemos aplicar el teorema 3.5.4 de optimalidad condicionada ya que  $f$  no es sintácticamente  $c$ -conmutativa.*

*Es importante observar que la monotonía global de una función respecto de las variables sólo depende de la función, y no del programa de cálculo, mientras que las monotonías parciales o la multiincidencia sí que dependen de la expresión particular de la función.*

**Ejemplo 3.5.9.** *En el ejemplo 3.5.7 estudiamos la función  $f(g(u), h(y, v)) = u(y + v)$  para  $U = [1, 0]$ ,  $Y = [-4, 0]$  y  $V = [2, 1]$ . Esta función no es sintácticamente conmutativa si se prescinde de la  $c$ -optimalidad; sin embargo, es posible aplicar el teorema de optimalidad condicionada ya que  $fR$  es una función sintácticamente  $c$ -conmutativa ya que cumple la condición  $c$ ) de la definición de operador racional  $c$ -optimal. Observemos que  $f$  no cumple la condición de modularidad partida.*

*Al ser  $fR(X)$  optimal se cumple*

$$f^*(g(U), h(Y, V)) = f^{**}(g(U), h(Y, V)) = [1, 0] * ([-4, 0] + [2, 1]) = [0, 0]$$

**Teorema 3.5.5.** *(Coerción a la optimalidad condicionada)* Si la función  $fR(XD)$  es una función racional sintácticamente  $c$ -conmutativa en el dominio  $Prop(X)$ , totalmente monótona para cada componente multiincidente de  $X$ , siendo  $XD$  el vector obtenido por ampliación de  $X$  considerando cada incidencia de las componentes de  $X$  como argumento independiente, transformada en su dual si en la incidencia correspondiente  $f$  es monótona con sentido de monotonía contrario al global de la correspondiente componente de  $X$ , entonces,

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

*Demostración.* Teniendo en cuenta que todas las componentes multiincidentes son totalmente monótonas, se deduce

$$f^*(XD) = f^*(X) \subseteq fR(XD) \subseteq f^{**}(X) = f^{**}(XD)$$

Debido a la c-conmutatividad sintáctica de la función y a la independencia de las componentes de  $XD$ , tenemos

$$f^*(XD) = f^{**}(XD)$$

luego

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

□

**Ejemplo 3.5.10.** Consideremos la función  $f(x, y, z) = x(y+z) - y$  en el dominio  $X = [1, 0]$ ,  $Y = [2, 3]$  y  $Z = [-3, -1]$ . Observemos que siendo  $f$  uniformemente monótona respecto la variable multiincidente  $y$ , en principio no podemos aplicar el teorema de coerción optimal porque la función  $fR$  no es sintácticamente conmutativa.

La función racional asociada a  $f$  es sintácticamente c-conmutativa ya que cumple la condición c) de la definición de operador racional c-optimal, luego permite aplicar el teorema 3.5.5 de coerción optimal condicionada. Así pues

$$fR(XD) = X * (Dual(Y) + Z) - Y$$

es optimal y el cálculo será

$$f([1, 0], [2, 3], [3, 2], [-3, -1]) = [1, 0] * ([3, 2] + [-3, -1]) - [2, 3] = [-3, -2]$$

Si consideramos la función racional  $g(x, y, z) = xy + xz - y$  equivalente a la función  $f$  definida anteriormente, vemos que no tiene cálculo optimal ya que al no ser  $g$  uniformemente monótona respecto a la variable multiincidente  $x$ , no podemos aplicar los teoremas de optimalidad. La diferencia con la función  $f$  está en que en la expresión de  $fR$  la variable  $x$  no es multiincidente; contrariamente al caso de  $gR$ .

### 3.6. Interpretabilidad de cálculos n-dimensionales

**Teorema 3.6.1.** (*\*-interpretabilidad de cálculos n-dimensionales*) Sea  $X = (X_p, X_i) \in I^*(\mathbb{R}^m)$  y  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $X'$  definida por  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Sea  $(f_1R(A_1), \dots, f_nR(A_n)) \subseteq (B_1, \dots, B_n)$  un sistema de cálculos interpretables, con truncación externa interpretable de  $f_1^*(X_1), \dots, f_n^*(X_n)$ , siendo  $(A_1, \dots, A_n)$  un vector definido a partir de  $X$  que tenga las mismas componentes propias que  $X$ , y con cada componente impropia de  $X$  transformada en su dual para todo  $X_j$  excepto una. En este caso,

$$U(x_p, X'_p)Q^*(z, B)E(x_i, X'_i) z = f(x_p, x_i)$$

siendo  $Q^*(z, B)$  la secuencia de  $Q(z_j, B_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) con los cuantificadores universales encabezando la secuencia.

Observemos que los argumentos  $(A_1, \dots, A_n)$  deben modificarse de acuerdo con los teoremas de coerción interpretables, dependiendo de si las funciones racionales modales  $f_i R$  son o no sintácticamente conmutativas.

**Teorema 3.6.2.** (*\*\*-interpretabilidad de cálculos  $n$ -dimensionales*) Sea  $X = (X_p, X_i) \in I^*(\mathbb{R}^m)$  y  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en  $X'$  definida por  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ . Sea  $(f_1 R(A_1), \dots, f_n R(A_n)) \supseteq (B_1, \dots, B_n)$  un sistema de cálculos con truncación interna interpretable de  $f_1^{**}(X_1), \dots, f_n^{**}(X_n)$ , siendo  $(A_1, \dots, A_n)$  un vector definido a partir de  $X$  que tenga las mismas componentes impropias que  $X$ , y con cada componente propia de  $X$  transformada en su dual para todo  $X_j$  excepto una. En este caso,

$$U(x_i, X'_i)Q^*(z, \text{Dual}(B))E(x_p, X'_p) z = f(x_p, x_i)$$



# Capítulo 4

## Sistemas intervalares de ecuaciones lineales

El producto aritmético definido para los intervalos modales tiene una estructura que no es adecuada para resolver problemas cuya estructura sea esencialmente distinta. Básicamente, las deficiencias de las operaciones aritméticas se reducen a su falta de linealidad, sin embargo algunos problemas lineales se han estudiado en el contexto habitual de  $I^*(\mathbb{R})$ , como por ejemplo en [60] y [61]. Estudios iniciales de este problema se encuentran planteados en las referencias [15], [16] y [17].

El problema de sistemas de ecuaciones lineales también se estudia en el contexto del análisis intervalar clásico, siendo los trabajos de S. P. Shary (ver referencias [63], [64] y [65]) los más próximos al análisis intervalar modal.

Para intentar solucionar el problema de la linealidad definiremos el producto lineal, sin embargo el aspecto fundamental del problema es que exige un cambio básico de la aritmética de soporte. Este segundo problema quedará resuelto a partir de la utilización de intervalos de marcas estudiadas en [37].

### 4.1. Sistemas intervalares pseudo-lineales

Sobre  $I^*(\mathbb{R})$  nos planteamos estudiar la resolución de sistemas lineales intervalares, que se definen de forma natural a partir del concepto de sistema de ecuaciones lineal real considerando las operaciones intervalares clásicas. Al no ser lineales las operaciones intervalares hablaremos de sistemas intervalares pseudo-lineales.

**Definición 4.1.1.** (*Sistema intervalar pseudo-lineal*) Si  $n, m \in \mathbb{N}$ , un sistema intervalar pseudo-lineal de  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas, es

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n & = & B_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

donde  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_{ij} \in I^*(\mathbb{R})$  son los coeficientes intervalares del sistema;  $B_i \in I^*(\mathbb{R})$  son los términos independientes intervalares y  $X_j \in I^*(\mathbb{R})$  son las incógnitas del sistema.

**Definición 4.1.2.** (*Solución de un sistema intervalar pseudo-lineal*) La solución exacta de un sistema intervalar pseudo-lineal dado sería idealmente

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n & = & B_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

y estaría formada por aquellos valores intervalares que sustituidos en todas las ecuaciones cumplan todas las igualdades.

Para poder interpretar el sistema a partir de la semántica de  $f^*$ , debemos calcular intervalos  $Y_1, \dots, Y_n$  que cumplan

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n & \subseteq & B_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} * Y_1 + \cdots + A_{mn} * Y_n & \subseteq & B_m \end{array} \right\}$$

y diremos que son solución del sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n & = & B_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

Dicha solución no será en general ni exacta, ni óptima, ni única. En particular, un sistema general de este tipo da lugar a problemas semánticos importantes si se consideran valores impropios para  $X_i$ .

**Proposición 4.1.1.** (*Propiedades algebraicas de los operadores aritméticos*) Si  $A, B, X \in I^*(\mathbb{R})$ ,

- $A + X = B$  tiene solución única  $X = B - \text{Dual}(A)$
- $A * X = B$  tiene solución única  $X = \frac{B}{\text{Dual}(A)}$  si  $0 \notin A'$

Las dos propiedades siguientes nos muestran la resolución de los dos casos más simples que podemos plantearnos en una aritmética con truncación.

**Proposición 4.1.2.** Dados  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , las soluciones de la ecuación  $A+X \subseteq B$  deberán cumplir la relación

$$X \subseteq B - Dual(A)$$

*Demostración.* Para resolver la ecuación  $A+X = B$  buscamos  $Y \in I^*(\mathbb{R})$  tal que

$$A + Out(Y) \subseteq B$$

$$Out(Y) \subseteq Inn(B - Dual(A))$$

porque

$$A + Out(Y) \subseteq A + Inn(B - Dual(A)) \subseteq A + (B - Dual(A)) = B$$

Luego, en función de la aritmética, consideraremos

$$Out(Y) = Inn(B - Dual(A))$$

La solución  $Y$  que buscamos cumplirá

$$Y \subseteq Inn(B - Dual(A))$$

porque si  $Y$  es solución, también lo son todos los intervalos incluidos en  $Y$ . Luego podemos considerar

$$Y = Inn(B - Dual(A))$$

□

**Proposición 4.1.3.** Dados  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , las soluciones de la ecuación  $A*X = B$  deberán cumplir

$$X \subseteq \frac{B}{Dual(A)}$$

*Demostración.* Para resolver la ecuación  $A * X \subseteq B$  buscamos intervalos  $Y \in I^*(\mathbb{R})$  tales que

$$A * Out(Y) \subseteq B$$

Siempre que  $0 \notin A'$ , se cumple

$$Out(Y) \subseteq Inn\left(\frac{B}{Dual(A)}\right)$$

porque

$$A + Out(Y) \subseteq A * Inn\left(\frac{B}{Dual(A)}\right) \subseteq A * \frac{B}{Dual(A)} = B$$

En general consideraremos

$$Out(Y) = Inn\left(\frac{B}{Dual(A)}\right)$$

La solución buscada en realidad cumplirá

$$Y \subseteq Inn\left(\frac{B}{Dual(A)}\right)$$

porque si  $Y$  es solución, también los son todos los intervalos incluidos en  $Y$ . Luego podemos considerar

$$Y = Inn\left(\frac{B}{Dual(A)}\right)$$

□

Los teoremas semánticos del análisis intervalar modal dan una interpretación lógica a las soluciones de las dos ecuaciones  $A + X \subseteq B$  y  $A * X \subseteq B$ , independientemente de las modalidades de los intervalos  $A$ ,  $B$  y  $X$  y compatible con la truncación.

Para la resolución de un sistema de ecuaciones intervalar pseudo-lineal

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n & = & B_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

aunque podemos aplicar distintos métodos ([37], [60] [61]), el producto aritmético intervalar plantea el problema que estudiamos a continuación.

Consideremos el sistema pseudo-lineal

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n & = & B_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

De acuerdo con el teorema semántico para funciones  $n$ -componentes, la interpretación semántica del sistema intervalar pseudo-lineal dependerá de las modalidades de los intervalos que lo forman, de modo que:

- Si todas las incógnitas que sean intervalos impropios  $X_i$  tienen todas sus multiincidencias convertidas en sus duales, menos una de ellas, la semántica será

$$U(x_p, X_p)U(a_p, A_p)Q(b, B)E(x_i, X_i)E(a_i, A_i)(ax = b)$$

- en caso contrario, la única semántica cierta, aunque débil, es

$$U(x_p, X_p)U(a_p, A_p)Q(b, B)E(x_i, X_i)E(a_i, A_i)(ax \leq b)$$

Dado un sistema intervalar pseudo-lineal

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n & = & B_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

si la modalidad de alguna de las incógnitas es impropia, y si esta incógnita se repite en más de una ecuación, el sistema no es directamente interpretable a partir de la semántica de  $f^*$ .

Consideremos por ejemplo, el sistema intervalar

$$\left. \begin{array}{rcl} X - 2 * Y & = & [-4, -1] \\ X + 3 * Y & = & [10, 15] \end{array} \right\}$$

que en un cálculo efectivo se traduce en

$$\left. \begin{array}{rcl} X - 2 * Y & \subseteq & [-4, -1] \\ X + 3 * Y & \subseteq & [10, 15] \end{array} \right\}$$

Si resolvemos el sistema obtenemos  $X = [4, 3]$  y  $Y = [2, 4]$  y utilizando el teorema semántico

$$f^*(A) \subseteq F(A) \Leftrightarrow U(a_p, A'_p)Q(z, F(A))E(a_i, A'_i)(z = f(a_p, a_i))$$

deducimos de la

- primera ecuación  $U(y, [2, 4])E(a, [-4, -1])E(x, [3, 4]) : x - 2y = a$
- segunda ecuación  $U(y, [2, 4])E(b, [10, 15])E(x, [3, 4]) : x + 3y = b$

Observemos que la semántica asociada a cada ecuación no da lugar a una semántica del sistema, porque el valor  $x_1 \in [3, 4]$  tal que  $x_1 - 2y = a$  puede no coincidir con el valor  $x_2 \in [3, 4]$  tal que  $x_2 + 3y = b$ . Así pues, el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} X - 2 * Y & = & [-4, -1] \\ X + 3 * Y & = & [10, 15] \end{array} \right\}$$

no es interpretable.

Intentando solucionar este problema, consideramos el teorema de \*-interpretabilidad y estudiamos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} X - 2 * Y \subseteq [-4, -1] \\ Dual(X) + 3 * Y \subseteq [9, 16] \end{array} \right\}$$

observando que al sustituir  $X$  e  $Y$  por los valores obtenidos anteriormente  $X = [4, 3]$  y  $Y = [2, 4]$  modificamos el término independiente de la segunda ecuación del sistema.

Aplicando el teorema semántico para  $f^*$  (teorema 2.8.3.) obtenemos la siguiente interpretación semántica

$$\left. \begin{array}{l} U(y, [2, 4])E(a, [-4, -1])E(x, [3, 4]) : x - 2y = a \\ U(y, [2, 4])U(x, [3, 4])E(b, [9, 16]) : x + 3y = b \end{array} \right\}$$

Luego el sistema modificado convenientemente con los intervalos duales es interpretable, con la semántica

$$U(y, [2, 4])E(x, [3, 4])E(a, [-4, -1])E(b, [9, 16]) : x - 2y = a, x + 3y = b$$

Observemos que los términos independientes de los dos sistemas cumplen

$$\begin{array}{l} [-4, -1] \subseteq [-4, -1] \\ [9, 16] \not\subseteq [10, 15] \end{array}$$

luego se mantiene el problema de interpretación del sistema original. Por ejemplo, si  $y = 4$ , los valores que resuelven la interpretación semántica del sistema

$$\left. \begin{array}{l} X - 2 * Y \subseteq [-4, -1] \\ Dual(X) + 3 * Y \subseteq [9, 16] \end{array} \right\}$$

son  $x = 4$ ,  $a = -4$ ,  $b = 16$ , y como  $16 \notin [10, 15]$  esta interpretación semántica no es válida para el sistema

$$\left. \begin{array}{l} X - 2 * Y \subseteq [-4, -1] \\ X + 3 * Y \subseteq [10, 15] \end{array} \right\}$$

Es importante remarcar que dado un sistema intervalar pseudo-lineal

$$\left. \begin{array}{l} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n = B_1 \\ \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n = B_m \end{array} \right\}$$

la modalidad de las incógnitas queda determinada una vez se ha resuelto el sistema.

## 4.2. Estructura lineal de $I^*(\mathbb{R})$

Para intentar solucionar estos problemas de interpretación cuando aparecen multiincidencias impropias, definiremos el contexto intervalar lineal. Las operaciones lineales solucionan esta dificultad con una semántica que, aunque aparentemente pueda resultar más débil, será fundamental en la interpretación de sistemas de ecuaciones lineales. Por otro lado, el contexto intervalar lineal verifica la propiedad distributiva, deficiencia que presenta el producto aritmético intervalar.

A continuación definimos las distintas operaciones que dan a  $I^*(\mathbb{R})$  una estructura lineal. Las demostraciones que se omiten en este apartado pueden encontrarse en la referencia [37].

### 4.2.1. Operaciones lineales

**Definición 4.2.1.** (*Suma lineal intervalar*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$  se define la suma lineal intervalar

$$A + B = [\underline{a}, \bar{a}] + [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

Es importante observar que la suma lineal de dos intervalos coincide operativamente con la suma aritmética intervalar.

**Definición 4.2.2.** (*Diferencia lineal intervalar*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$  representamos por  $\underline{\circ}$  la diferencia lineal intervalar y se define como

$$A \underline{\circ} B = [\underline{a}, \bar{a}] \underline{\circ} [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}]$$

**Proposición 4.2.1.** (*Relación entre diferencia aritmética y diferencia lineal*) Si  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

$$A \underline{\circ} B = A - \text{Dual}(B)$$

*Demostración.* Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$

$$A \underline{\circ} B = [\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}] = [\underline{a}, \bar{a}] - [\underline{b}, \bar{b}] = A - \text{Dual}(B)$$

□

**Definición 4.2.3.** (*Producto lineal intervalar*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$ , tales que  $0 \notin A'$  y  $0 \notin B'$ , definimos el producto lineal de los intervalos  $A$  y  $B$  que notaremos por  $A \circ B$  como

$$A \circ B = [\underline{a}, \bar{a}] \circ [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{ab}, \bar{a}\bar{b}]$$

**Definición 4.2.4.** (*Producto lineal extendido*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$  definimos el producto lineal extendido de los intervalos  $A$  y  $B$  que notaremos por  $A \circ B$  como

$$A \circ B = [\underline{a}, \bar{a}] \circ [\underline{b}, \bar{b}] = [\underline{ab}, \bar{a}\bar{b}]$$

Observemos que el producto lineal extendido coincide con el producto lineal cuando ninguno de los operandos contiene a cero en su interior. La semántica que proporciona el producto lineal extendido es poco útil en la mayoría de las situaciones y es por este motivo que nuestro estudio se centrará en el producto lineal.

**Proposición 4.2.2.** (*Relación entre producto aritmético y producto lineal*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  tales que  $0 \notin A'$  y  $0 \notin B'$  se cumple

$$A \circ B = \begin{cases} A * B & \text{si } A \geq 0 \text{ y } B \geq 0 \\ Dual(A) * B & \text{si } A \geq 0 \text{ y } B < 0 \\ A * Dual(B) & \text{si } A < 0 \text{ y } B \geq 0 \\ Dual(A) * Dual(B) & \text{si } A < 0 \text{ y } B < 0 \end{cases}$$

$$A * B = \begin{cases} A \circ B & \text{si } A \geq 0 \text{ y } B \geq 0 \\ Dual(A) \circ B & \text{si } A \geq 0 \text{ y } B < 0 \\ A \circ Dual(B) & \text{si } A < 0 \text{ y } B \geq 0 \\ Dual(A) \circ Dual(B) & \text{si } A < 0 \text{ y } B < 0 \end{cases}$$

**Proposición 4.2.3.** Si  $A \in I^*(\mathbb{R})$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  se cumple

$$\lambda \circ A = \begin{cases} \lambda * A & \text{si } \lambda \geq 0 \\ Dual(\lambda * A) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

**Definición 4.2.5.** (*Cociente lineal intervalar*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$  tales que  $B'$  no contiene a 0, definimos el cociente lineal de los intervalos  $A$  y  $B$  que notaremos por  $A/\circ B$  como

$$A/\circ B = [\underline{a}, \bar{a}] \circ \left[ \frac{1}{\underline{b}}, \frac{1}{\bar{b}} \right] = \left[ \frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]$$

**Proposición 4.2.4.** (*Estructuras algebraicas*) Considerando en  $I^*(\mathbb{R})$  las operaciones lineales anteriormente definidas, sistema que notaremos por  $I^\circ(\mathbb{R})$ , se cumplen las propiedades:

- $(I^\circ(\mathbb{R}), +)$  tiene estructura de grupo conmutativo
- $(I^\circ(\mathbb{R}), +, \circ)$  tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad



Observemos que el producto lineal no es inclusivo; es decir

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \subseteq B_1 \\ A_2 \subseteq B_2 \end{array} \right\} \not\Rightarrow A_1 \circ A_2 \subseteq B_1 \circ B_2$$

Por ejemplo, si  $A_1 = [2, 4]$ ,  $B_1 = [1, 4]$ ,  $A_2 = [-2, -5]$  y  $B_2 = [-3, -4]$

$$\begin{array}{l} A_1 \subseteq B_1 \\ A_2 \subseteq B_2 \end{array}$$

y sin embargo

$$A_1 \circ A_2 = [-4, -20] \not\subseteq [-3, -16] = B_1 \circ B_2$$

Así pues, al trabajar con las operaciones intervalares lineales que incluyan al producto dentro de una aritmética con truncación, no queda determinada la truncación de los operandos, mientras que si las operaciones se realizan con el producto aritmético sí que están fijadas.

#### 4.2.2. Semántica lineal

**Proposición 4.2.5.** (*Semántica de la suma lineal*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$ , la suma lineal  $A + B$  cumple para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$((1 - \alpha)\underline{a} + \alpha\bar{a}) + ((1 - \alpha)\underline{b} + \alpha\bar{b}) = ((1 - \alpha)(\underline{a} + \underline{b}) + \alpha(\bar{a} + \bar{b}))$$

Se deducen las siguientes interpretaciones:

- $U(a, A')E(b, B')E(c, (A + B)') \quad a + b = c$
- $U(b, B')E(a, A')E(c, (A + B)') \quad a + b = c$
- $U(c, (A + B)')E(a, A')E(b, B') \quad a + b = c$

Observemos que si calculamos con las operaciones intervalares aritméticas, las modalidades de los operandos y del resultado son las que determinan la interpretación semántica modal, mientras que al considerar la suma lineal, y análogamente para todas las operaciones lineales, la semántica no depende de la modalidad de los distintos intervalos.

**Proposición 4.2.6.** (*Semántica de la diferencia lineal*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$ , la diferencia lineal  $A \ominus B$  cumple para cualquier  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$((1 - \alpha)\underline{a} + \alpha\bar{a}) - ((1 - \alpha)\underline{b} + \alpha\bar{b}) = ((1 - \alpha)(\underline{a} - \underline{b}) + \alpha(\bar{a} - \bar{b}))$$

Se deducen las siguientes interpretaciones:

- $U(a, A')E(b, B')E(c, (A \ominus B)') \quad a - b = c$

- $U(b, B')E(a, A')E(c, (A \circ B)') \quad a - b = c$
- $U(c, (A \circ B)')E(a, A')E(b, B') \quad a - b = c$

**Proposición 4.2.7.** (*Semántica del producto lineal*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$ , tales que  $0 \notin \text{interior } A'$  y  $0 \notin \text{interior } B'$ , el producto lineal  $A \circ B$  cumple la semántica

$$U(\alpha, [0, 1])E(\beta, [0, 1])$$

$$((1 - \alpha)\underline{a} + \alpha\bar{a})((1 - \beta)\underline{b} + \beta\bar{b}) = ((1 - \alpha)\underline{ab} + \alpha\bar{a}\bar{b})$$

Es decir, si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$ , tales que  $0 \notin A'$ ,  $0 \notin B'$  y  $\alpha \in [0, 1]$  es un número real que define, simultáneamente, un punto del segmento  $\underline{a}\bar{a}$  y un punto del segmento  $(\underline{ab})(\bar{a}\bar{b})$ , existe una función  $\beta(\alpha)$  creciente, que verifica  $\beta(0) = 0$  y  $\beta(1) = 1$  y define un punto del segmento  $\underline{b}\bar{b}$ .

Un resultado análogo se obtiene si  $\alpha \in [0, 1]$  define, simultáneamente, un punto del segmento  $\underline{b}\bar{b}$  y un punto del segmento  $(\underline{ab})(\bar{a}\bar{b})$ ; entonces existe una función  $\beta(\alpha)$  creciente que verifica  $\beta(0) = 0$  y  $\beta(1) = 1$  y define un punto del segmento  $\underline{a}\bar{a}$ . Por tanto de la semántica del producto lineal se deducen las siguientes interpretaciones equivalentes:

- $U(a, A')E(b, B')E(c, (A \circ B)') \quad ab = c$
- $U(b, B')E(a, A')E(c, (A \circ B)') \quad ab = c$
- $U(c, (A \circ B)')E(a, A')E(b, B') \quad ab = c$

Si interpretamos  $A$ ,  $B$  y  $A \circ B$  como segmentos, los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que intervienen en la semántica, definen trayectorias que asocian a cada par de puntos de dos segmentos un punto del otro segmento. Por ello, la semántica que puede obtenerse del producto lineal es distinta y más “débil” que la del producto aritmético.

**Proposición 4.2.8.** (*Semántica del cociente lineal*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  y  $B = [\underline{b}, \bar{b}] \in I^*(\mathbb{R})$ , tales que  $0 \notin \text{interior } A'$  y  $0 \notin \text{interior } B'$ , el cociente lineal  $A /^\circ B$  cumple la semántica

$$U(\alpha, [0, 1])E(\beta, [0, 1])$$

$$((1 - \alpha)\underline{a} + \alpha\bar{a})\left((1 - \beta)\frac{1}{\underline{b}} + \beta\frac{1}{\bar{b}}\right) = \left((1 - \alpha)\frac{a}{\underline{b}} + \alpha\frac{\bar{a}}{\bar{b}}\right)$$

Si  $C = A /^\circ B$  se deducen las siguientes interpretaciones:

- $U(a, A')E(b, B')E(c, C') \quad a/b = c$
- $U(b, B')E(a, A')E(c, C') \quad a/b = c$
- $U(c, C')E(a, A')E(b, B') \quad a/b = c$

### 4.2.3. Funciones racionales lineales

**Definición 4.2.6.** (*Extensión racional lineal de una función racional*) Dada una función racional  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  llamamos extensión racional lineal de  $f$  y la representamos por  $fL$  a la función intervalar  $fL : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$  que resulta de sustituir en la función  $f$  cada una de las operaciones que la forman por su operación lineal intervalar equivalente y cada una de las variables reales  $(x_1, \dots, x_n)$  por variables intervalares  $(X_1, \dots, X_n) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , siempre que

1.  $U(x_1, X'_1), \dots, U(x_n, X'_n)(x_1, \dots, x_n) \in \text{Dom}(f)$
2. Esté definida la semántica de cada uno de los operadores para los intervalos a los que se aplica

**Proposición 4.2.9.** (*Cálculo de la extensión racional lineal a partir de las coordenadas*) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función racional y  $fL : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$  su correspondiente extensión racional lineal sobre los intervalos  $X_1, \dots, X_n \in I^*(\mathbb{R}^n)$ . Si  $Y = fL(X_1, \dots, X_n)$  y  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  designamos  $X_i$  por  $[\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ , se cumplirá

$$(Y = [\underline{y}, \bar{y}]) \Leftrightarrow (\underline{y} = f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n), \bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n))$$

**Proposición 4.2.10.** (*Semántica de extensiones racionales lineales respecto de una variable uniincidente*) Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función racional uniincidente respecto de la variable  $x_i$ , si  $Y = fL(X_1, \dots, X_n)$  es la extensión racional lineal de  $f$  sobre los intervalos  $(X_1, \dots, X_n) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ , se cumple que

$$U(\alpha, [0, 1])E((\beta_1, \dots, \hat{\beta}_i, \dots, \beta_n), [0, 1]^{n-1})$$

$$f(x_1(\beta_1), \dots, x_i(\alpha), \dots, x_n(\beta_n)) = y(\alpha)$$

**Proposición 4.2.11.** (*Semántica de funciones racionales continuas*) Dados los intervalos  $X_1, \dots, X_n \in I^*(\mathbb{R}^n)$  y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $\text{Prop}(X_1, \dots, X_n)$ , si  $Y = fL(X_1, \dots, X_n)$ , entonces se cumple

$$U(y, Y')E(x_1, X'_1) \dots E(x_n, X'_n) y = f(x_1, \dots, x_n)$$

**Definición 4.2.7.** (*Forma canónica de  $A_1 \circ B_1 + \dots + A_n \circ B_n = C$* ) Dados los intervalos  $\{A_i, B_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \in I^*(\mathbb{R})$ , diremos que la expresión

$$A_1 \circ B_1 + \dots + A_n \circ B_n = C$$

viene dada en forma canónica, cuando todas las sumas sean aritméticas; es decir, si existiese alguna diferencia lineal se habría convertido en suma modificando el término  $\underline{\circ}A_k \circ B_k$  tal como indicamos

$$\underline{\circ}A_k \circ B_k = [-\underline{a}_k, -\bar{a}_k] \circ [\underline{b}_k, -\bar{b}_k] = +[\underline{a}_k, \bar{a}_k] \circ [-\underline{b}_k, -\bar{b}_k]$$

**Proposición 4.2.12.** (*Semántica de expresiones*  $A_1 \circ B_1 + \dots + A_n \circ B_n = C$  en forma canónica) Dados los intervalos  $\{A_i, B_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \in I^*(\mathbb{R})$ , si  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$   $0 \notin A'_i$  y  $0 \notin B'_i$ , la expresión en forma canónica

$$A_1 \circ B_1 + \dots + A_n \circ B_n = C$$

verifica la semántica parametrizada siguiente

$$U(\alpha, [0, 1])E((\beta_1, \dots, \beta_n), [0, 1]^n)a_1(\alpha)b_1(\beta_1) + \dots + a_n(\alpha)b_n(\beta_n) = c(\alpha)$$

### 4.3. Sistemas intervalares lineales

**Definición 4.3.1.** (*Sistema intervalar lineal*) Si  $n, m \in \mathbb{N}$ , un sistema intervalar lineal de  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas, es

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} \circ X_1 + \dots + A_{1n} \circ X_n & = & B_1 \\ & \vdots & \vdots \\ A_{m1} \circ X_1 + \dots + A_{mn} \circ X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

donde  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $A_{ij} \in I^*(\mathbb{R})$  son los coeficientes intervalares del sistema;  $B_i \in I^*(\mathbb{R})$  son los términos independientes intervalares y  $X_j \in I^*(\mathbb{R})$  son las incógnitas del sistema.

**Definición 4.3.2.** (*Solución de un sistema intervalar lineal*) La solución exacta de un sistema intervalar lineal dado,

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} \circ X_1 + \dots + A_{1n} \circ X_n & = & B_1 \\ & \vdots & \vdots \\ A_{m1} \circ X_1 + \dots + A_{mn} \circ X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

está formada por aquellos intervalos  $X_1, \dots, X_n \in I^*(\mathbb{R})$  que sustituidos en todas las ecuaciones cumplan todas las igualdades.

Si

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} \circ X_1 + \dots + A_{1n} \circ X_n & = & B_1 \\ & \vdots & \vdots \\ A_{m1} \circ X_1 + \dots + A_{mn} \circ X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

donde ninguno de los intervalos que intervienen en el sistema contiene a cero en su interior, podemos resolver el sistema resolviendo los dos sistemas puntuales construidos con los extremos de los intervalos que se obtienen al desarrollar los productos lineales, es decir,

$$\left. \begin{array}{rcl} \underline{a}_{11}\underline{x}_1 + \dots + \underline{a}_{1n}\underline{x}_n & = & \underline{b}_1 \\ & \vdots & \vdots \\ \underline{a}_{m1}\underline{x}_1 + \dots + \underline{a}_{mn}\underline{x}_n & = & \underline{b}_m \end{array} \right\}$$

y

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_{11}\bar{x}_1 + \cdots + \bar{a}_{1n}\bar{x}_n &= \bar{b}_1 \\ &\vdots \\ \bar{a}_{m1}\bar{x}_1 + \cdots + \bar{a}_{mn}\bar{x}_n &= \bar{b}_m \end{aligned} \right\}$$

Su interpretación semántica es independiente de las modalidades de los intervalos que lo forman y se basa en la semántica del producto lineal. Es decir, fijado un número real  $\alpha \in [0, 1]$ , que determina un punto en cada uno de los segmentos  $X_1, \dots, X_n, B_1, \dots, B_m$ , entonces existen números reales

$$\beta_1(X_1, \alpha), \dots, \beta_n(X_n, \alpha) \in [0, 1]$$

que definen puntos en los segmentos  $A_{ij}$  de modo que

$$\left. \begin{aligned} ((1 - \beta_1)\underline{a}_{11} + \beta_1\overline{a}_{11})(1 - \alpha)\underline{x}_1 + \alpha\overline{x}_1 + \dots + ((1 - \beta_n)\underline{a}_{1n} + \beta_n\overline{a}_{1n})(1 - \alpha)\underline{x}_n + \alpha\overline{x}_n &= ((1 - \alpha)\underline{b}_1 + \alpha\overline{b}_1) \\ &\dots \\ ((1 - \beta_1)\underline{a}_{m1} + \beta_1\overline{a}_{m1})(1 - \alpha)\underline{x}_1 + \alpha\overline{x}_1 + \dots + ((1 - \beta_n)\underline{a}_{mn} + \beta_n\overline{a}_{mn})(1 - \alpha)\underline{x}_n + \alpha\overline{x}_n &= ((1 - \alpha)\underline{b}_m + \alpha\overline{b}_m) \end{aligned} \right\}$$

Por ello la semántica del sistema es

$$U((x, b), (X, B)^d)U(i, \{1, \dots, n\})E(a_{i1}, A_{i1}) \dots E(a_{in}, A_{in})(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i)$$

siendo

$$(X, B)^d = \{(x(\alpha), b(\alpha)) | x(\alpha) = (1 - \alpha)\underline{x} + \alpha\overline{x}, b(\alpha) = (1 - \alpha)\underline{b} + \alpha\overline{b}\}$$

es decir, dado  $\alpha$ , que determina  $x$  y  $b$ , existen  $\beta_1(X_1, \alpha), \dots, \beta_n(X_n, \alpha)$  definidos como se obtuvo para la semántica del producto lineal, que determinan respectivamente  $a_{i1}, \dots, a_{in}$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

Dada la relación existente entre el producto lineal y el aritmético, si  $A'_{ij}$  y  $B'_i$  no contienen a cero, las ecuaciones con el producto lineal pueden expresarse como ecuaciones con el producto aritmético y, por tanto, participar de su semántica y viceversa.

**Ejemplo 4.3.1.** La ecuación  $[-2, -5] \circ X = [14, 10]$  tiene por solución  $X = [-7, -2]$  y su semántica es

$$U(a, [-5, -2])E(b, [10, 14])E(x, [-7, -2])(ax = b)$$

Como  $[-2, -5] \circ [-7, -2] = [14, 10]$  equivale a  $[-5, -2] * [-2, -7] = [14, 10]$ , el teorema semántico permite afirmar

$$U(a, [-5, -2])U(b, [10, 14])E(x, [-7, -2])(ax = b)$$

que es una semántica más fuerte.

El problema del producto lineal aparece al trabajar en cualquier contexto digital. El resultado de un cálculo se obtiene con un número determinado de cifras, luego el proceso de cálculo intervalar debe resolver el problema inevitable de las truncaciones, si queremos aplicar las semánticas estudiadas anteriormente.

El resultado de una operación aritmética intervalar siempre debe truncarse exteriormente para poder aplicar correctamente el teorema \*-semántico, sin embargo con las operaciones lineales no hay una truncación prefijada. Si el intervalo  $X \in I^*(\mathbb{R})$  aparece en un cálculo lineal, en la semántica del cálculo aparecerá  $U(x, X')$  o bien  $E(x, X')$  siendo dichas interpretaciones independientes de la modalidad del intervalo  $X$ .

- Si  $X$  aparece con la expresión  $U(x, X')$  debemos truncar  $X$  de forma que  $(Trunc(X))' \subseteq X'$ , luego
  - si  $X$  es impropio,  $Trunc(X) = Out(X)$
  - si  $X$  es propio,  $Trunc(X) = Inn(X)$
- Si  $X$  aparece con la expresión  $E(x, X')$  debemos truncar  $X$  de forma que  $X' \subseteq (Trunc(X))'$ , luego
  - si  $X$  es impropio,  $Trunc(X) = Inn(X)$
  - si  $X$  es propio,  $Trunc(X) = Out(X)$

El problema que hace inviable construir un proceso de truncación coherente con la semántica a aplicar al efectuar cualquier cálculo intervalar  $fL(X_1, \dots, X_n)$  reside en la dificultad que comporta conocer de forma previa a un cálculo la modalidad del resultado de una operación lineal. Existen situaciones en las que podemos conocer de antemano la modalidad de la solución de un cálculo lineal, sin embargo, estas situaciones son muy limitadas y nos interesa abarcar el estudio de sistemas con un planteamiento general. El problema queda resuelto con el estudio de los intervalos de marcas, donde la truncación, formalmente no existe.

Así pues, si queremos estudiar el sistema lineal

$$\left. \begin{array}{rcl} A_{11} \circ X_1 + \dots + A_{1n} \circ X_n & = & B_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ A_{m1} \circ X_1 + \dots + A_{mn} \circ X_n & = & B_m \end{array} \right\}$$

donde ninguno de los intervalos que intervienen contiene a cero, consideramos el sistema con intervalos de marcas

$$\left. \begin{array}{rcl} \mathcal{A}_{11} \circ \mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{A}_{1n} \circ \mathcal{X}_n & = & \mathcal{B}_1 \\ & \vdots & \vdots \\ & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_{m1} \circ \mathcal{X}_1 + \dots + \mathcal{A}_{mn} \circ \mathcal{X}_n & = & \mathcal{B}_m \end{array} \right\}$$

siendo

$$\mathcal{A}_{ij} = \langle [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}], g_{ij} \rangle = [\langle \underline{a}_{ij}, g_{ij} \rangle, \langle \bar{a}_{ij}, g_{ij} \rangle]$$

y

$$\mathcal{B}_i = \langle [\underline{b}_i, \bar{b}_i], g_i \rangle = [\langle \underline{b}_i, g_i \rangle, \langle \bar{b}_i, g_i \rangle]$$

si en el sistema inicial  $A_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$  y  $B_i = [\underline{b}_i, \bar{b}_i]$ .

Si en el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} \mathcal{A}_{11} \circ \mathcal{X}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{1n} \circ \mathcal{X}_n & = & \mathcal{B}_1 \\ & \vdots & \vdots \\ \mathcal{A}_{m1} \circ \mathcal{X}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{mn} \circ \mathcal{X}_n & = & \mathcal{B}_m \end{array} \right\}$$

expresamos cada una de las incógnitas  $\mathcal{X}_j$  como

$$\mathcal{X}_j = \langle [\underline{x}_j, \bar{x}_j], g_{xj} \rangle = [\langle \underline{x}_j, g_{xj} \rangle, \langle \bar{x}_j, g_{xj} \rangle]$$

reducimos el cálculo de dicho sistema a los dos sistemas de ecuaciones siguientes

$$\left. \begin{array}{rcl} \langle \underline{a}_{11}, g_{11} \rangle * \langle \underline{x}_1, g_{x1} \rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{1n}, g_{1n} \rangle * \langle \underline{x}_n, g_{xn} \rangle & = & \langle \underline{b}_1, g_1 \rangle \\ & \vdots & \vdots \\ \langle \underline{a}_{m1}, g_{m1} \rangle * \langle \underline{x}_1, g_{x1} \rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{mn}, g_{mn} \rangle * \langle \underline{x}_n, g_{xn} \rangle & = & \langle \underline{b}_m, g_m \rangle \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{rcl} \langle \bar{a}_{11}, g_{11} \rangle * \langle \bar{x}_1, g_{x1} \rangle + \cdots + \langle \bar{a}_{1n}, g_{1n} \rangle * \langle \bar{x}_n, g_{xn} \rangle & = & \langle \bar{b}_1, g_1 \rangle \\ & \vdots & \vdots \\ \langle \bar{a}_{m1}, g_{m1} \rangle * \langle \bar{x}_1, g_{x1} \rangle + \cdots + \langle \bar{a}_{mn}, g_{mn} \rangle * \langle \bar{x}_n, g_{xn} \rangle & = & \langle \bar{b}_m, g_m \rangle \end{array} \right\}$$

La resolución de estos sistemas utilizando métodos reales con operaciones de marcas determinará una solución que podemos suponer del tipo  $\langle \underline{y}_1, g_{y1} \rangle, \dots, \langle \underline{y}_n, g_{yn} \rangle$  y  $\langle \bar{y}_1, g_{y1} \rangle, \dots, \langle \bar{y}_n, g_{yn} \rangle$ .

Para estas soluciones se cumplirá

$$\left. \begin{array}{rcl} \langle \underline{a}_{11}, g_{11} \rangle * \langle \underline{y}_1, g_{y1} \rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{1n}, g_{1n} \rangle * \langle \underline{y}_n, g_{yn} \rangle & \approx_\alpha & \langle \underline{b}_1, g_1 \rangle \\ & \vdots & \vdots \\ \langle \underline{a}_{m1}, g_{m1} \rangle * \langle \underline{y}_1, g_{y1} \rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{mn}, g_{mn} \rangle * \langle \underline{y}_n, g_{yn} \rangle & \approx_\alpha & \langle \underline{b}_m, g_m \rangle \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{rcl} \langle \bar{a}_{11}, g_{11} \rangle * \langle \bar{y}_1, g_{y1} \rangle + \cdots + \langle \bar{a}_{1n}, g_{1n} \rangle * \langle \bar{y}_n, g_{yn} \rangle & \approx_\alpha & \langle \bar{b}_1, g_1 \rangle \\ & \vdots & \vdots \\ \langle \bar{a}_{m1}, g_{m1} \rangle * \langle \bar{y}_1, g_{y1} \rangle + \cdots + \langle \bar{a}_{mn}, g_{mn} \rangle * \langle \bar{y}_n, g_{yn} \rangle & \approx_\alpha & \langle \bar{b}_m, g_m \rangle \end{array} \right\}$$

siempre que las granularidades resultantes sean compatibles con  $\alpha t$ ,  $\alpha \in ]0, 1]$ .

Así pues, considerando los intervalos de marcas

$$\mathcal{Y}_1 = \langle [\underline{y}_1, \bar{y}_1], g_{y1} \rangle = [\langle \underline{y}_1, g_{y1} \rangle, \langle \bar{y}_1, g_{y1} \rangle]$$

$$\mathcal{Y}_n = \langle [\underline{y}_n, \bar{y}_n], g_{yn} \rangle = [\langle \underline{y}_n, g_{yn} \rangle, \langle \bar{y}_n, g_{yn} \rangle]$$

tenemos

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_{11} \circ \mathcal{Y}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{1n} \circ \mathcal{Y}_n \approx_{\alpha} \mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}_{m1} \circ \mathcal{Y}_1 + \cdots + \mathcal{A}_{mn} \circ \mathcal{Y}_n \approx_{\alpha} \mathcal{B}_m \end{array} \right\}$$



# Capítulo 5

## Ecuaciones diferenciales ordinarias intervalares

En este capítulo se abordará, desde el punto de vista del Análisis Intervalar Modal, el estudio de ecuaciones en diferencias definidas como solución numérica a ecuaciones diferenciales.

El modelo intervalar y los métodos de cálculo numérico son conceptualmente distintos: mientras que el cálculo numérico calcula trayectorias singulares aproximadas, el cálculo intervalar calcula haces de trayectorias asociadas a una estrategia determinada por las modalidades de los intervalos. Además, y esta es una cuestión muy importante, el cálculo intervalar está basado en la inclusividad de las soluciones intervalares y por ello da lugar esencialmente a modelos exactos desde el punto de vista de las semánticas asociadas a la inclusión, frente al caso del cálculo numérico que se apoya esencialmente en el concepto de aproximación.

### 5.1. Problemas de valor inicial

Nos planteamos encontrar la solución intervalar de problemas definidos como problemas de valor inicial del tipo

$$y' = f(x, y) \quad y(a) = y_0$$

sobre un intervalo  $[a, b]$ , suponiendo que el problema considerado tenga solución en  $\mathbb{R}$ . Supondremos en concreto que  $f$  verifica la condición de Lipschitz respecto a su variable  $y$ .

Un criterio de buena disciplina intervalar es que los modelos deben intervalizarse lo mínimo posible, ya que, de lo contrario desaparece el sistema referencial del problema sin que la solución gane una mayor adecuación empírica. Así pues, al plantear el estudio de un problema intervalar en diferencias, se empezará por

tomar la variable independiente como puntual (lo cual, y repetimos, no supone la exigencia de una “exactitud” empírica particularmente alta, sino la consistencia del modelo respecto de las escalas de medida de los parámetros que intervengan en él).

Así pues, de acuerdo con esta observación, consideraremos  $x \in \mathbb{R}$ , y por tanto, el cálculo intervalar  $F$  tendrá la forma general

$$F : \mathbb{R} \times I^*(\mathbb{R}^m) \longrightarrow I^*(\mathbb{R}^m)$$

Planteado el modelo de una situación experimental, inevitablemente debemos considerar el aspecto formal (matemático) y el aspecto pragmático (es decir, la consistencia con su aplicación). Nosotros nos planteamos estudiar el aspecto matemático considerando la posibilidad de variables intervalares. Para ello, resolveremos el problema en tres etapas.

La primera etapa del modelo corresponde a la formalización analítica del problema. Esta etapa se complementa con la obtención de un método de cálculo numérico digitalizando en principio el problema (segunda etapa). El tercer paso será considerar los cálculos intervalares asociados al modelo numérico sobre los reales, que en el caso más favorable, permitirá un cálculo intervalar interpretable optimal.

**Definición 5.1.1.** (*Problema de valor inicial intervalar*<sup>1</sup>) A una ecuación sobre los reales de la forma

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) & x \in [a, b] \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

le corresponderá con las hipótesis oportunas, una ecuación en diferencias de la forma

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} &= h \Phi_f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_n, x_n; h) \\ y_\mu &= \eta_\mu(h), \quad \mu = 0, 1, \dots, k-1 \end{aligned} \right\}$$

Fijado pues un método de resolución digital que lo haga posible, plantearemos un cálculo intervalar que se obtendrá mediante una intervalización del cálculo digital.

**Proposición 5.1.1.** (*Interpretación semántica del P.V.I.I.*) La interpretación semántica de un cálculo intervalar

$$F_D(X_D) \subseteq Y_D$$

---

<sup>1</sup>que abreviadamente escribiremos P.V.I.I.

asociado a un método numérico  $f_D$  determinado, tomará la forma lógica sistemática

$$U(xd_p, X'_{Dp})Q(y_D, Y_D)E(xd_i, X'_{Di})f_D(xd_p, xd_i) = y_D$$

cuya validez dependerá del método  $F_D$  y de las variables intervalares  $X_D \in I^*(\mathbb{R}^n)$  que intervengan en las operaciones racionales que define la función  $F_D$ .

Si el método  $f_D$  es estable, las soluciones digitales puntuales a las que se refiere el teorema semántico, cumplirán la condición

$$\forall \delta \in \Delta \quad \exists \varepsilon > 0 : f(xd + \delta) = y + \varepsilon$$

*Demostración.* Es consecuencia de la aplicación del teorema semántico para  $f_D^*$  y de que  $f_D$  sea una aproximación estable a la función real  $y = f(x)$ .  $\square$

Para la resolución de ecuaciones diferenciales mediante métodos intervalares tendremos siempre como referencia analítica del problema el desarrollo de Taylor de la función que define la ecuación diferencial real.

**Teorema 5.1.1.** (*Teorema de Taylor*) Supongamos que  $y(x) \in \mathcal{C}^{N+1}[a, b]$  y que  $y(x)$  tiene el desarrollo de Taylor de orden  $N$  alrededor de un punto  $x = x_0 \in [a, b]$  dado por

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y^{(3)}(x_0)}{3!}h^3 + \dots + \frac{y^{(N)}(x_0)}{N!}h^N + \dots$$

donde  $y^{(j)}(x)$  denota la derivada ( $j$ )-ésima de la función  $y(x)$  con respecto a  $x$ .

Observemos que las fórmulas de las derivadas sucesivas pueden calcularse recursivamente usando la regla de la cadena y si estudiamos la resolución del problema de ecuación  $y' = f(x, y)$  obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= f \\ y''(x) &= f_x + f_y y' = f_x + f_y f \\ y^{(3)}(x) &= f_{xx} + 2f_{xy}y' + f_y y'' + f_{yy}(y')^2 \\ &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f) \\ y^{(4)}(x) &= f_{xxx} + 3f_{xxy}y' + 3f_{xyy}(y')^2 + 3f_{xy}y'' + f_y y''' + 3f_{yy}y'y'' + f_{yyy}(y')^3 \\ &= (f_{xxx} + 3f_{xxy}f + 3f_{xyy}f^2 + f_{yyy}f^3) + f_y(f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2) \\ &= +3(f_x + f_y f)(f_{xy} + f_{yy}f) + f_y^2(f_x + f_y f) \end{aligned}$$

y en general,

$$y^{(N)}(x) = D^{(N-1)}f(x, y(x))$$

donde  $D$  es el operador de derivación

$$D = \left( \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Debido a la complejidad de los cálculos en las derivadas sucesivas, no es práctico evaluar un número elevado de derivadas; en todo caso las series de Taylor efectivas serán truncadas. Consideraremos pues, el error de un desarrollo de Taylor finito de orden  $N$  que notaremos  $e_N(x, h)$ ,

$$e_N(x, h) = \frac{y^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)!} h^{N+1}$$

siendo  $x_0 \leq \theta \leq x_0 + h$ .

Las aproximaciones intervalares son exactas, en el sentido de que si

$$y(x_0 + h) = t_N(x_0, h) + e_N(x_0, h)$$

siendo  $t_N(x_0, h)$  el desarrollo de Taylor finito de orden  $N$  de la función  $y(x)$ . El cálculo intervalar asociado

$$T_N(x_0, h) \subseteq T$$

es una ecuación exacta, es decir, contiene modalmente la solución del problema si se cumplen las condiciones de los teoremas de programación asociados al teorema semántico.

Observemos que el hecho de que las condiciones iniciales del problema sean intervalos propios o bien impropios condiciona la interpretación semántica. Se puede dar cuenta del error de truncación del método mediante un cálculo intervalar de  $e_N(x, h)$  o introduciendo los valores asociados a la relación

$$(\delta, \varepsilon) \subseteq (\Delta, E)$$

en el teorema semántico.

A continuación vamos a concretar en el ejemplo siguiente los tres niveles que intervienen en la resolución de problemas de valor inicial intervalares.

**Ejemplo 5.1.1.** *Resolución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x-y}{2} & x \in [0, 3] \\ y(0) = [0.9, 1.1] \end{cases} \quad (5.2)$$

La ecuación diferencial planteada considerando la condición inicial  $y(0) = 1$  tiene solución analítica en  $\mathbb{R}$

$$y(x) = 3e^{-\frac{x}{2}} - 2 + x$$

así pues, compararemos los resultados intervalares con la solución analítica del problema. Ver figura 5.1.

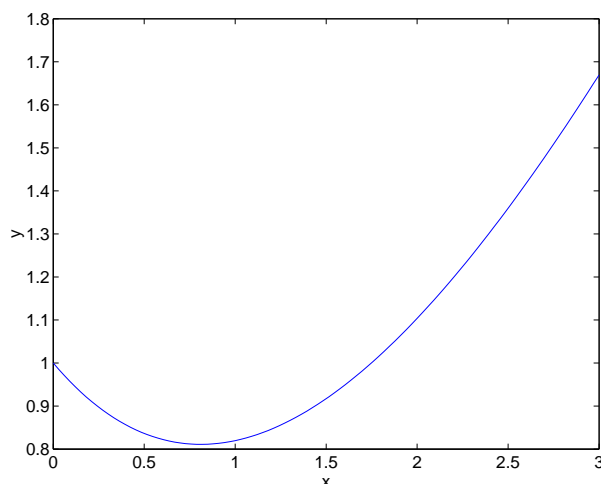


Fig. 5.1

Estudiaremos el desarrollo de Taylor de la función real  $y(x)$ , solución de la ecuación diferencial, en el punto  $x_0 = 0$ .

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots$$

imponiendo

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x-y}{2} \\ y''(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x-y}{2} \right) = \frac{1-y'}{2} = \frac{1-\frac{x-y}{2}}{2} = \frac{2-x+y}{4} \\ y'''(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{2-x+y}{4} \right) = \frac{-1+y'}{4} = \frac{-1+\frac{x-y}{2}}{4} = \frac{-2+x-y}{8} \\ y^{(4)}(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{-2+x-y}{8} \right) = \frac{1-y'}{8} = \frac{1-\frac{x-y}{2}}{8} = \frac{2-x+y}{16} \end{aligned}$$

y obtenemos

$$y(x) = y(0) - \frac{y(0)}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{y(0)}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{y(0)}{48}x^3 + \dots$$

Consideremos a nivel de ejemplo, el desarrollo de Taylor de orden 3

$$y(x) = y(0) - \frac{y(0)}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{y(0)}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{y(0)}{48}x^3$$

Esta es la expresión del método numérico  $f_D$  que considerando condiciones iniciales del problema valores intervalares, lleva a un cálculo intervalar  $F_D$  de expresión

$$Y(x) = Y(0) - \frac{Y(0)}{2} * x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{Y(0)}{8} * x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{Y(0)}{48} * x^3$$

Observamos que la variable intervalar  $Y(0)$  es multiincidente luego para obtener un cálculo intervalar optimal debemos aplicar los teoremas de coerción a la

optimalidad y estudiar la monotonía respecto a la variable  $Y(0)$ . Es importante destacar que el estudio intervalar del método de Taylor siempre implica una truncación del desarrollo que permitirá estudiar la monotonía.

Generalmente, estudiaremos una estimación del error imponiendo una cota máxima, estudiando los errores de truncación  $E_i$  asociados al desarrollo de Taylor de orden  $N$ , para  $1 \leq i \leq N$ .

Consideremos pues, el desarrollo de Taylor de orden 3 y nuestro objetivo es encontrar un cálculo intervalar óptimal de

$$Y(x) = Y(0) - \frac{Y(0)}{2} * x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{Y(0)}{8} * x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{Y(0)}{48} * x^3$$

Debemos estudiar el signo de

$$\frac{\partial Y}{\partial Y(0)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48}$$

y observamos que para valores de  $x$  dentro del intervalo  $[0, 3]$  este cociente siempre es positivo, luego la expresión del cálculo intervalar óptimal es

$$Y(x) = Y(0) - \frac{\text{Dual}(Y(0))}{2} * x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{Y(0)}{8} * x^2 - \frac{1}{24}x^3 - \frac{\text{Dual}(Y(0))}{48} * x^3$$

La figura 5.2 muestra la resolución del problema intervalar considerando el desarrollo de Taylor de tercer orden.

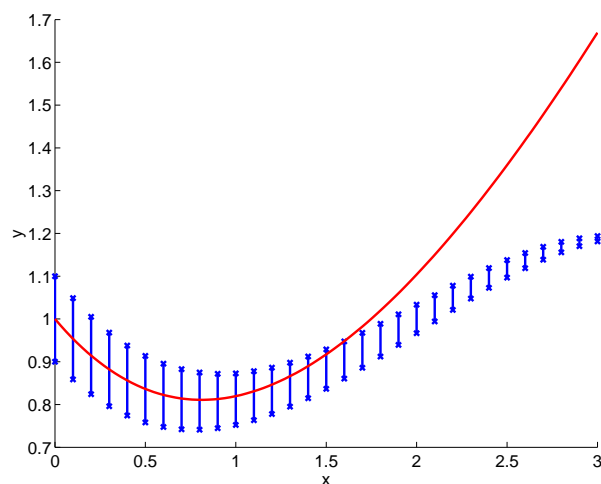


Fig. 5.2

En nuestro ejemplo, el error que se comete al considerar la aproximación del desarrollo de Taylor viene dado por la expresión

$$\frac{y^{(4)}(t)}{4!}x^4 \quad 0 \leq t \leq x$$

Si la función  $y$  es conocida, como ocurre en nuestro ejemplo, podemos calcular el valor máximo y mínimo de

$$e_3 = \frac{y^{(4)}(t)}{4!}x^4$$

obteniendo la cota intervalar

$$E_3 = [e_{\text{mín}}, e_{\text{máx}}]$$

que en nuestro caso corresponde a

$$E = [0, 0.6328]$$

La figura 5.3 muestra el cálculo considerando el término de error. Observamos que en este caso, y como es lógico, la solución intervalar contiene a la solución puntual de la ecuación diferencial.

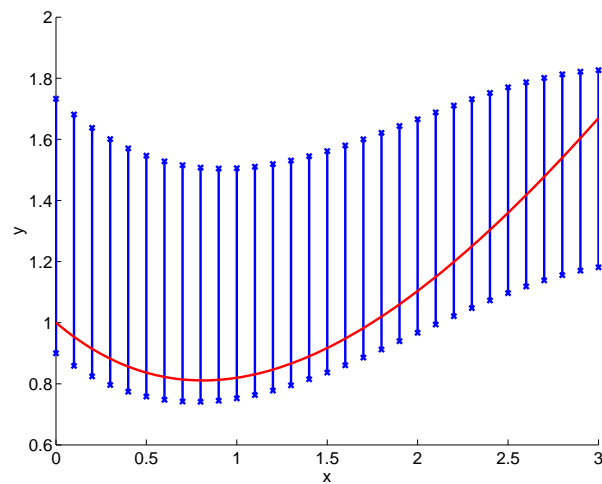


Fig. 5.3

Si normalizamos el problema, es decir, consideramos el cambio de variable

$$h = \frac{x}{3}$$

obtenemos los resultados que muestra la gráfica 5.4

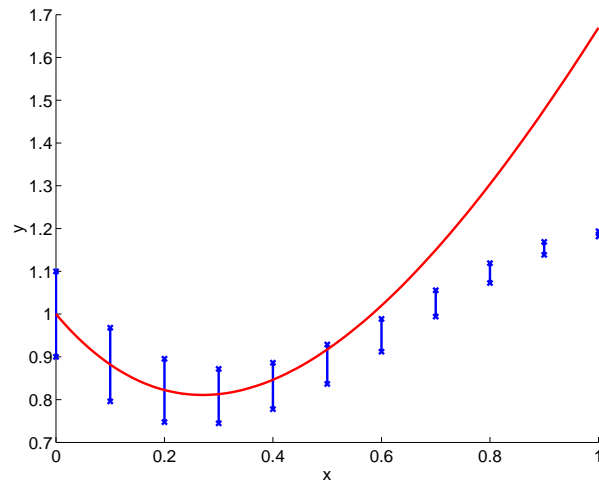


Fig. 5.4

Considerando el error asociado al desarrollo de Taylor,

$$E_3 = [e_{\text{mín}}, e_{\text{máx}}]$$

que en nuestro ejemplo particular es, evidentemente, igual que si no normalizamos,

$$E_3 = [0, 0.6328]$$

obtenemos los resultados que muestra la figura 5.5.

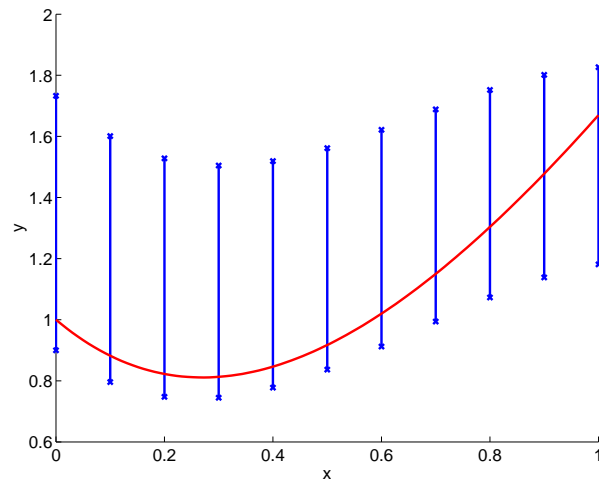


Fig. 5.5

Generalmente, la solución de la ecuación diferencial (5.1) será desconocida y en este caso, para estudiar el intervalo de error  $E_N$  consideraremos una aproximación de  $y(x)$  aplicando el desarrollo de Taylor hasta el término que aconseje el modelo



numérico. Por ejemplo, si  $y(0)$  y  $y'(0)$  son conocidos y  $y''(c)$  es el valor absoluto máximo conocido,

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + [-1, 1] * \left[ y''(c) \frac{x^2}{2!} \right]$$

Aún siendo el método de Taylor exacto intervalarmente, normalmente debemos calcular un desarrollo con muchos términos para obtener las aproximaciones deseadas. A continuación estudiaremos métodos numéricos en diferencias y su comportamiento intervalar.

Los métodos numéricos presuponen la discretización; por ejemplo, se sustituye un intervalo  $[a, b]$  de  $x$ , por el conjunto discreto de puntos  $\{x_n\}$  definidos por  $x_n = a + nh$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  siendo  $N = \frac{b-a}{h}$ . Al parámetro  $h$  lo denominaríamos en este caso, longitud de paso y podría ser también variable según las conveniencias. En el tipo de problemas que vamos a comentar ahora, notaremos  $y_n$  a una aproximación de la solución  $y(x_n)$  de la ecuación

$$y' = f(x, y) \quad y(a) = y_0, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \tag{5.3}$$

para  $x = x_n$ . Nuestro objetivo será encontrar una sucesión  $\{y_n\}$  que aproxime la solución de (5.2) en el conjunto discreto de puntos  $\{x_n\}$ .

Un método numérico multipaso es una ecuación en diferencias que involucra a unas aproximaciones  $y_{n+j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$  a partir de las que es posible calcular  $y_{n+k}$  y por último la secuencia completa  $\{y_n : n = 0, 1, 2 \dots N\}$ . Al valor  $k \in \mathbb{Z}$  se le denomina número de paso del método; si  $k = 1$  hablaremos de métodos de un paso, mientras que si  $k > 1$  hablaremos de métodos multipaso o métodos de  $k$ -pasos.

Consideraremos la solución numérica del problema de valor inicial (5.3) obtenida mediante un método general del tipo

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} &= h \Phi_f(y_{n+k}, y_{n+k-1}, \dots, y_n, x_n; h) \\ y_\mu &= \eta_\mu(h), \quad \mu = 0, 1, \dots, k-1 \end{aligned} \right\}$$

La presencia de  $y_{n+k}$  en el segundo término de la ecuación dará lugar a ecuaciones implícitas que tendrán un estudio intervalar mucho más delicado que las ecuaciones explícitas.

**Definición 5.1.2.** (*Ecuación intervalar en diferencias*) Una ecuación intervalar en diferencias de un paso, explícita, en una hipotética aritmética exacta, tendría la forma

$$Y_{n+1} = F(X_n, Y_n) \text{ para } n = 0, 1, \dots$$

pero en una aritmética intervalar efectiva, su forma es

$$Y_{n+1} \supseteq F(X_n, Y_n) \text{ para } n = 0, 1, \dots$$

siendo  $Y_0$  conocido y  $F : I^*(\mathbb{R}) \times I^*(\mathbb{R}^m) \longrightarrow I^*(\mathbb{R}^m)$ . Una solución de la ecuación en diferencias será una sucesión de vectores  $\{Y_{n+1} = F(X_n, Y_n)\}$  para un dominio de  $Y_0$  dados.

Si la ecuación en lugar de ser explícita fuese implícita,  $Y_{n+1}$  estaría también en el segundo término de la ecuación y suponiendo que la función  $F$  cumpla las propiedades generales de las funciones intervalares racionales, la necesidad de la truncación exterior para conservar las relaciones

$$Y_{n+1} \supseteq F(x_n, Y_n, Y_{n+1})$$

implicaría una solución de cada paso de la forma

$$Y_{n+1}^{(2)} \supseteq F(x_n, Y_n^{(2)}, Y_{n+1}^{(1)})$$

en la que

$$Y_i^{(2)} \supseteq Y_i^{(1)} \supseteq Y_i$$

donde  $Y_i$  sería la solución ideal exacta, cuyo grado de aproximación a sus cálculos  $Y_i^{(2)}$  e  $Y_i^{(1)}$  no estaría en principio determinado.

Con una aritmética de marcas, donde la truncación formalmente no existe, el problema tendría también la forma

$$Y_{n+1} \supseteq F(x_n, Y_n, Y_{n+1})$$

pero la relación

$$Y_i^{(2)} \supseteq Y_i^{(1)} \supseteq Y_i$$

tendría en cambio la forma

$$Y_i^{(2)} \approx Y_i^{(1)} \approx Y_i$$

donde  $\approx$  sería la relación empírica de marcas (ver apéndice B) evidentemente sometida a la condición de ser significativa de acuerdo con el parámetro de confusión de las marcas  $Y_i^{(2)}$  e  $Y_i^{(1)}$ .<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Existe el riesgo de que el cálculo pueda no finalizar por perderse el significado de las marcas prematuramente ( $g > kt$  siendo  $k < 1$ )

### 5.1.1. Estabilidad y error de métodos en diferencias

En el análisis numérico clásico es indispensable conocer la estabilidad de los métodos numéricos. Si la solución del problema es inestable, en el sentido que cambios arbitrariamente pequeños en la condición inicial producen grandes cambios en la solución para  $x$  suficientemente grande, deja de tener sentido la solución numérica del problema. Los errores de redondeo y de truncación, de naturaleza esencialmente caótica, causarán que la hipotética solución aproximada sea determinada erráticamente.

La estabilidad afectará evidentemente cualquier cálculo intervalar. Aún en el caso en que el cálculo intervalar sea “intervalarmente correcto”, la amplificación, y quizás el comportamiento cualitativo de los sucesivos valores intervalares, producirá un resultado que no guarde relación con la ecuación analítica exacta. En este caso el esquema en diferencias asociado al problema será inadecuado.

Planteado un problema de valor inicial, consideraremos el estudio de la estabilidad del problema real asociado, y en caso de estabilidad del método en diferencias determinado, consideraremos los cálculos intervalares imponiendo condiciones iniciales intervalares. Observemos que el estudio intervalar es más complejo ya que cada operación puede llevar a una amplificación de resultados.

Es importante resaltar que el estudio de la viabilidad dentro del Análisis Intervalar Modal raramente podrá aplicarse a métodos analíticos generales, puesto que la estructura de las aproximaciones racionales efectivas de estos métodos es decisiva para la validez de los cálculos asociados.

Los métodos clásicos del análisis numérico para la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales nos dan una aproximación de la solución analítica y como cabe esperar, la solución aproximada tiene un error cuyo estudio es una cuestión importante. Observemos que dentro del Análisis Intervalar esta situación es distinta. Tendremos dos métodos intervalares asociados a cada método numérico real dependiendo de si introducimos o no el error de integración del método en el cálculo de los intervalos sucesivos.

Si semánticamente interesa tener la solución exacta del problema objeto de estudio, dado un método

$$y_{n+1} = cl(y_n)$$

(siendo  $cl(y_n)$  la expresión clásica de un método en diferencias del análisis numérico real), debemos estudiar dentro del análisis intervalar modal, la optimalidad de la función

$$Y_{n+1} = clR(Y_n) + E_{n+1}$$

siendo  $E_{n+1}$  el error asociado al método. En este caso aunque perdemos información, técnicamente controlamos la solución del problema (tal como hemos visto

en la proposición 5.1.1).

Observemos que el intervalo asociado al término de error del método,  $E_{n+1}$ , siempre será un intervalo propio.

Si contrariamente, únicamente nos interesan las soluciones de la ecuación en diferencias, y no la solución exacta del problema, debemos buscar la optimalidad para la función

$$Y_{n+1} = clR(Y_n)$$

### 5.1.2. Métodos de paso simple

Los métodos Runge-Kutta son métodos de paso simple para la resolución del problemas del tipo

$$y' = f(x, y) \quad y(a) = y_0, \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

en los que se define la etapa  $s$ -ésima del método por

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

siendo

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) \quad i = 1, 2, \dots, s$$

y

$$c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} \quad i = 1, \dots, s$$

Mediante las fórmulas de Butcher se obtienen las expresiones de los diferentes métodos Runge-Kutta, ver referencias [41], [62].

A continuación estudiaremos el comportamiento de estos métodos dentro del contexto del Análisis Intervalar Modal considerando los casos particulares

- Método de Euler

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$$

- Método de Euler modificado

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$$

Del estudio que abordamos seguidamente, se deduce que es posible aplicar métodos Runge Kutta de orden superior para la resolución de ecuaciones diferenciales intervalares pero evidentemente el estudio analítico del problema es más complejo y es inherente a cada ejemplo particular. Esto es debido a que la obtención de cualquier cálculo optimal en funciones intervalares con variables multiincidentes conlleva un estudio de la monotonía de la función respecto a dichas variables.

La aplicación de métodos de paso simple a problemas intervalares se ha estudiado en el contexto del análisis intervalar clásico. La aportación personal que se presenta en esta tesis es el estudio en el contexto del análisis intervalar modal.

**Proposición 5.1.2.** (*Optimalidad del método de Euler*) Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua c-sintácticamente conmutativa, la expresión del método de Euler sobre  $\mathbb{R}$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

tendrá cálculo optimal en  $I^*(\mathbb{R})$  si:

- $y$  es uniincidente para  $fR$ 
  1. Si  $1 + h\frac{\partial f}{\partial y} > 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$  la expresión optimal del método es
 
$$Y_{n+1} \supseteq Y_n + hfR(x_n, Y_n) + \Delta$$
  2. Si  $1 + h\frac{\partial f}{\partial y} > 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$  la expresión optimal del método es
 
$$Y_{n+1} \supseteq Y_n + hfR(x_n, Dual(Y_n)) + \Delta$$
  3. Si  $1 + h\frac{\partial f}{\partial y} < 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} < 0$  la expresión optimal del método es
 
$$Y_{n+1} \supseteq Dual(Y_n) + hfR(x_n, Y_n) + \Delta$$

siendo  $\Delta$  una cota intervalar del error del método, que generalmente corresponde a un intervalo propio.

- Si  $y$  es multiincidente en la función  $fR$ , se estudiará cada caso concreto, considerando los teoremas de optimalidad de funciones racionales expuestos en el capítulo 3.

*Demostración.* Esta proposición es consecuencia del teorema de coerción optimal condicionada (3.5.5).  $\square$

Si el orden del método Runge-Kutta es mayor que 1, la optimalidad se estudiará en cada caso concreto.

Veamos por ejemplo, el estudio del método de Euler modificado para  $f(x, y) = x + y$  y para  $f(x, y) = xy$ . Ambas funciones son uniincidentes en  $y$ , y sin embargo tienen distinto comportamiento, respecto a las incidencias, en la expresión del método de Euler modificado.

**Ejemplo 5.1.2.** Si consideramos el método de Euler modificado

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$$

para la resolución del problema

$$y' = f(x, y) \quad y(a) = y_0$$

siendo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x, y) = x + y$  obtenemos la expresión

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h^2}{2} + h(1 + \frac{h}{2})x_n + h(1 + \frac{h}{2})y_n = g(x_n, y_n)$$

Estudiamos el árbol sintáctico asociado a la función  $g$  (ver figura 5.6).

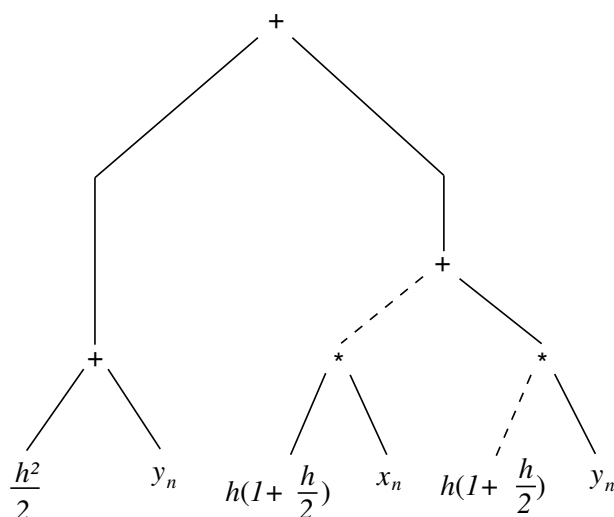


Fig. 5.6

La línea discontinua en la figura 5.6 significa que la rama correspondiente no influye en la naturaleza del árbol intervalar.

Observemos que los valores reales, desde el punto de vista intervalar son constantes y por este motivo no forman parte de las variables del árbol.

Como la función  $gR(x_n, Y_n)$  es sintácticamente conmutativa, totalmente monótona respecto a  $y_n$ , por ser

$$\frac{\partial g}{\partial y_n} = 1 + h(1 + \frac{h}{2}) > 0$$

y uniformemente monótona para cada incidencia de  $y_n$ , del teorema de coerción optimal condicionada se deduce que la expresión

$$Y_{n+1} \supseteq Y_n + \frac{h^2}{2} + h(1 + \frac{h}{2})x_n + h(1 + \frac{h}{2}) * Y_n$$

es optimal.

Observemos que en este caso particular,  $fR$  será cálculo optimal independiente del valor de  $h$ .

**Ejemplo 5.1.3.** Si consideramos el método de Euler modificado (ver ejemplo 5.1.2) para la resolución del problema definido por  $f(x, y) = xy$  obtenemos la expresión

$$y_{n+1} = y_n + (h + \frac{h^3}{4})x_n y_n + \frac{h^2}{2}x_n^2 y_n + \frac{h^2}{2}y_n = g(x_n, y_n)$$

La función  $gR$  es sintácticamente conmutativa (ver figura 5.7),

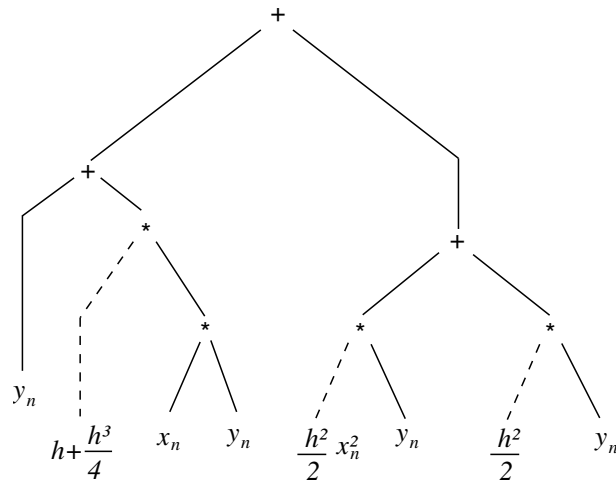


Fig. 5.7

sin embargo, al ser

$$\frac{\partial g}{\partial y_n} = 1 + (h + \frac{h^3}{4})x_n + \frac{h^2}{2}x_n^2 + \frac{h^2}{2}$$

la monotonía global respecto a las variables intervalares multiincidentes, y consecuentemente, el estudio de la optimalidad, dependerá del signo de  $x_n$  y de los valores de  $h$ .

1. Si  $x_n \geq 0$  entonces  $\frac{\partial g}{\partial y_n} > 0$  y del teorema de coerción optimal condicionada se deduce que el cálculo intervalar optimal del método es

$$Y_{n+1} \supseteq Y_n + (h + \frac{h^3}{4})x_n * Y_n + \frac{h^2}{2}x_n^2 * Y_n + \frac{h^2}{2} * Y_n$$

2. Si  $x_n < 0$  y  $|(h + \frac{h^3}{4})x_n| < |1 + \frac{h^2}{2}x_n^2 + \frac{h^2}{2}|$  entonces  $\frac{\partial g}{\partial y_n} > 0$  y del teorema de coerción optimal condicionada se deduce que el cálculo intervalar optimal del método es

$$Y_{n+1} \supseteq Y_n + (h + \frac{h^3}{4})x_n * Dual(Y_n) + \frac{h^2}{2}x_n^2 * Y_n + \frac{h^2}{2} * Y_n$$

3. Si  $x_n < 0$  y  $|(h + \frac{h^3}{4})x_n| > |1 + \frac{h^2}{2}x_n^2 + \frac{h^2}{2}|$  entonces  $\frac{\partial g}{\partial y_n} < 0$  y el cálculo intervalar optimal es

$$Y_{n+1} \supseteq Dual(Y_n) + (h + \frac{h^3}{4})x_n * Y_n + \frac{h^2}{2}x_n^2 * Dual(Y_n) + \frac{h^2}{2} * Dual(Y_n)$$

En el ejemplo 5.1.3 y tal como hemos comentado al introducir el estudio de los problemas en diferencias intervalares, estamos considerando  $x \in \mathbb{R}$ . Si consideramos  $X \in I^*(\mathbb{R})$  y consideramos las variables intervalares  $X = [-1, 1]$  y  $Y = [-1, 1]$  la función  $g$  es sintácticamente conmutativa, pero no coercionable a un cálculo optimal (por no cumplir el teorema 3.3.4 al no ser totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes). Al tratarse de un esquema de un método iterativo existiría una amplificación enorme de los cálculos, luego en este caso, el cálculo optimal no existe. Se podría considerar un cálculo coercionado a la interpretabilidad, pero como daría lugar a un cálculo intervalar divergente, no tiene sentido.

**Ejemplo 5.1.4.** *Aplicación del método de Euler modificado a la resolución del problema intervalar de valor inicial*

$$y' = -xy$$

en  $[0, 3]$  con  $Y(0) = [0.9, 1.1]$

La ecuación diferencial planteada considerando la condición inicial  $y(0) = 1$  tiene solución analítica en  $\mathbb{R}$

$$y(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

así pues, compararemos los resultados intervalares con la solución analítica del problema. Ver figura 5.8.



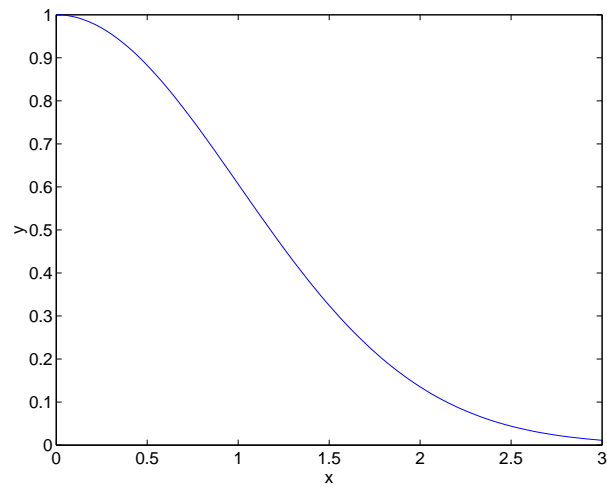


Fig. 5.8

Consideramos la expresión del método de Euler modificado

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)\right)$$

para  $f(x, y) = -xy$  y obtenemos

$$Y_{n+1} \supseteq \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) * Y_n + \left(\frac{h^3}{4} - h\right) x_n * Y_n + \frac{h^2}{2} x_n^2 * Y_n$$

Si no optimizamos los cálculos intervalares el problema no se resuelve ya que las operaciones amplifican mucho la amplitud de los intervalos. Así por ejemplo, para  $h = 0.125$  y tal como muestra la figura 5.9,

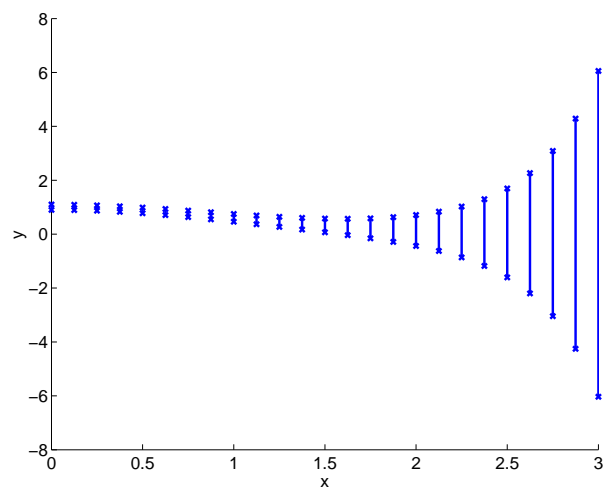


Fig. 5.9

El cálculo intervalar optimal del problema se obtiene al aplicar los teoremas de optimalidad del análisis intervalar modal. Estudiaremos pues, la monotonía respecto de la variable intervalar multiincidente  $y_n$  en la función

$$y_{n+1} = \left(1 - \frac{h^2}{2}\right) y_n + \left(\frac{h^3}{4} - h\right) x_n y_n + \frac{h^2}{2} x_n^2 y_n = g(h, x_n, y_n)$$

Al ser  $h > 0$ ,  $x_n \geq 0$  y  $y_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , deducimos la expresión del cálculo intervalar optimal, que tendrá dos cálculos distintos, dependiendo del signo de

$$\frac{\partial g}{\partial y_n} = 1 - \frac{h^2}{2} + \left(\frac{h^3}{4} - h\right) x_n + \frac{h^2}{2} x_n^2$$

Observemos que en los cálculos optimales intervalares no aplicaremos la propiedad distributiva porque el cálculo optimal depende del valor de  $h$ .

- Si  $\frac{\partial g}{\partial y_n} > 0$

$$Y_{n+1} \supseteq Y_n - \frac{h^2}{2} * Dual(Y_n) + \frac{h^3}{4} x_n * Y_n - h x_n * Dual(Y_n) + \frac{h^2}{2} x_n^2 * Y_n$$

- Si  $\frac{\partial g}{\partial y_n} < 0$

$$Y_{n+1} \supseteq Dual(Y_n) - \frac{h^2}{2} * Y_n + \frac{h^3}{4} x_n * Dual(Y_n) - h x_n * Y_n + \frac{h^2}{2} x_n^2 * Dual(Y_n)$$

En nuestro caso concreto, obtenemos los siguientes resultados.

Para  $h = 1$

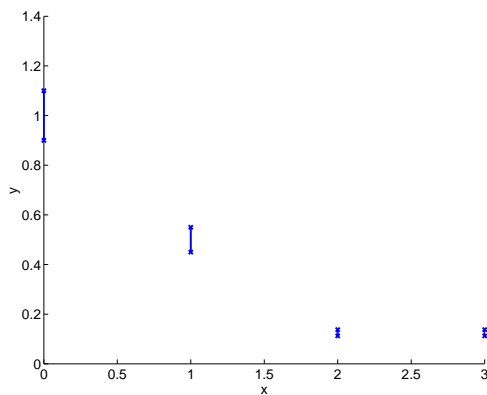


Fig. 5.10

Para  $h = 0.5$

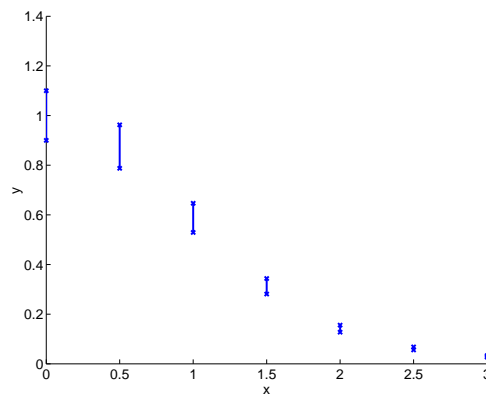


Fig. 5.11

Para  $h = 0.25$

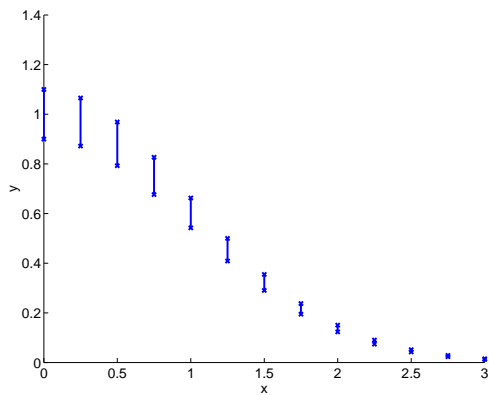


Fig. 5.12

Para  $h = 0.125$

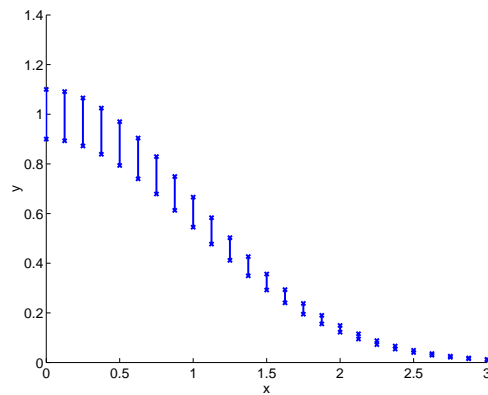


Fig. 5.13

Si los datos del problema plantean una condición inicial impropia el problema se resuelve de manera análoga.

**Ejemplo 5.1.5.** *Aplicación del método de Euler modificado a la resolución del problema intervalar de valor inicial*

$$y' = -xy$$

en  $[0, 3]$  con  $Y(0) = [1.1, 0.9]$

En el caso particular  $h = 0.125$  tenemos los resultados que muestra la figura 5.14,

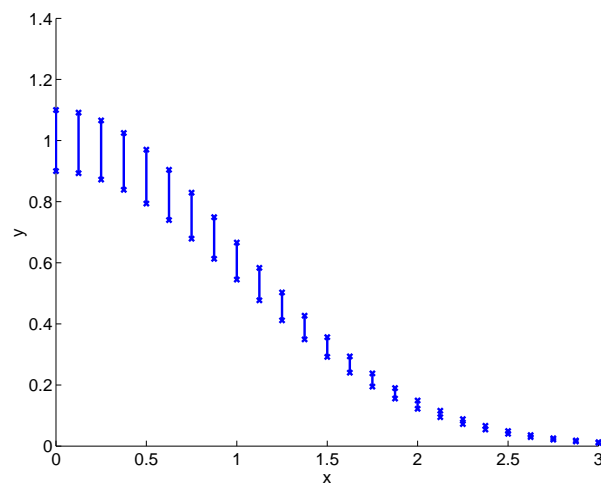


Fig. 5.14

Para cualquier valor de  $h$ , aparecen prácticamente los mismos resultados que en el ejemplo anterior si descontamos el distinto comportamiento respecto a la truncación que en este caso quedaría neutralizado por la estabilidad del problema, pero los intervalos son impropios.

**Ejemplo 5.1.6.** Estudiaremos la estabilidad del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(x) = -10y & x \in [0, 1] \\ y(0) = [0.9, 1.1] \end{cases} \quad (5.4)$$

aplicando el método de Euler y estudiando el comportamiento del método para distintos valores de  $h$ .

El método de Euler asociado al problema real considerando la condición inicial  $y(0) = 1$ , es absolutamente estable si

$$|1 - 10h| < 1 \Leftrightarrow 0 < h < 0.2$$

La ecuación diferencial planteada considerando la condición inicial  $y(0) = 1$  tiene solución analítica en  $\mathbb{R}$

$$y(x) = e^{-10x}$$

así pues, compararemos los resultados intervalares con la solución analítica del problema. Ver figura 5.15.

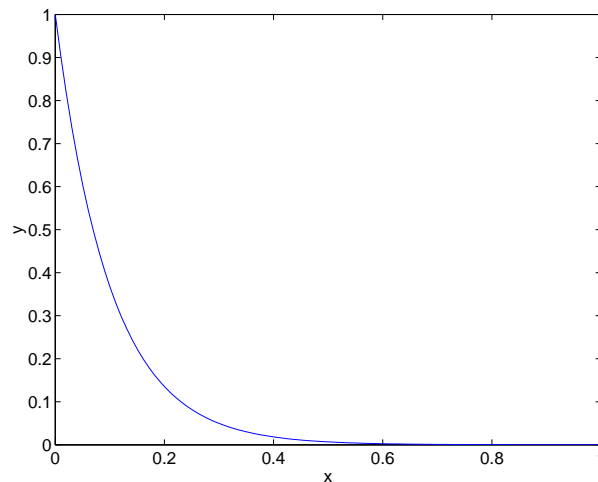


Fig. 5.15

Aplicando el método de Euler para la resolución del problema intervalar obtenemos la expresión

$$y_{n+1} = y_n + h(-10y_n) = y_n - 10hy_n$$

Al ser la variable  $y_n$  multiincidente, debemos estudiar la monotonía respecto de  $y_n$  y para ello estudiamos el signo de

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = 1 - 10h$$

Así pues,

- Si  $1 - 10h > 0$  la expresión de cálculo intervalar optimal del método es

$$Y_{n+1} \supseteq Y_n - 10h * Dual(Y_n)$$

- Si  $1 - 10h < 0$  la expresión de cálculo intervalar optimal del método es

$$Y_{n+1} \supseteq Dual(Y_n) - 10h * Y_n$$

Para distintos valores de  $h$  obtenemos los siguientes resultados

Para  $h = 0.01$

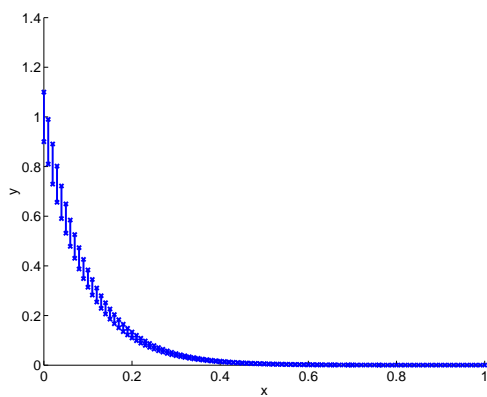


Fig. 5.16

Para  $h = 0.05$

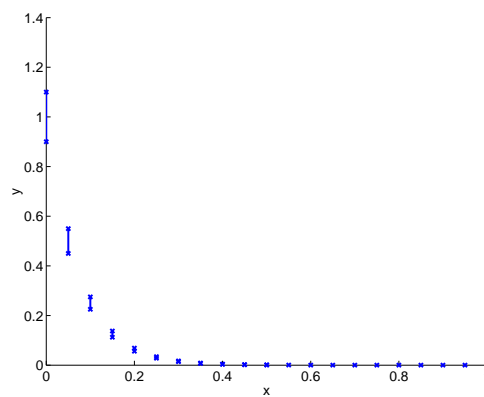


Fig. 5.17

Para  $h = 0.25$

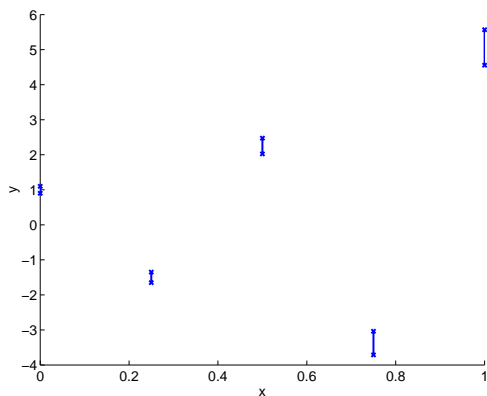


Fig. 5.18

Para  $h = 0.5$

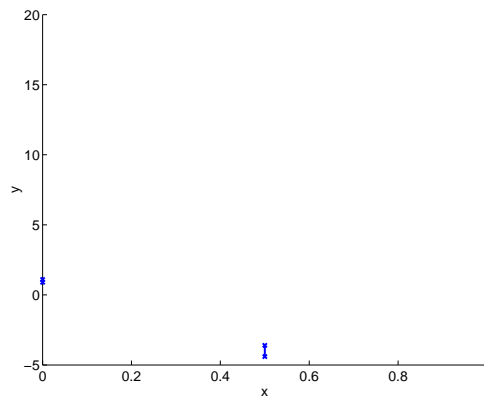


Fig. 5.19

Si  $h = 0.01$ ,  $h = 0.05$  el método es estable, y observamos que para  $h = 0.25$  y  $h = 0.5$  el método es inestable tal como ocurre en el caso puntual.

Así pues, este caso es integrable intervalarmente, es decir, intervalarmente calculable, para cualquier valor de  $h$ , sin embargo solo es fuertemente integrable intervalarmente si el esquema es analíticamente estable.

Al aplicar el método de Euler en el ejemplo 5.1.6, obtenemos

$$y_{n+1} = y_n - 10hy_n$$

Observemos que en este ejemplo particular, podemos evitar la multiincidencia, y consecuentemente el estudio de monotonía, considerando

$$y_{n+1} = (1 - 10h)y_n$$

Los dos métodos de cálculo intervalar asociados son optimales, pero si consideramos la diferencia de los intervalos  $Y(1)$  y  $D(1)$ , que notaremos

$$R(1) = Y(1) - Dual(D(1))$$

siendo  $D$  el cálculo asociativo

$$D_{n+1} = (1 - 10h) * D_n$$

obtenemos para

- $h = 0.5$   $R(1) = [-3.5527e^{-15}, 7.1054e^{-15}]$

- $h = 0.01$   $R(1) = [-5.421e^{-20}, -1.185e^{-19}]$

Vemos que al aplicar los dos esquemas en diferencias la diferencia es muy pequeña, pero favorable al cálculo asociativo, luego siempre que podamos evitar las multiincidencias lo tendremos en cuenta.

**Ejemplo 5.1.7.** *A continuación estudiaremos en el contexto del análisis intervalar modal la estabilidad del problema*

$$\begin{cases} y'(x) = -10y & x \in [0, 1] \\ y(0) = [0.9, 1.1] \end{cases} \quad (5.5)$$

*aplicando el método de diferencias centradas, inestable  $\forall h \in \mathbb{R}$  en el análisis numérico real.*

*El esquema completo del método de diferencias centradas es*

$$\begin{cases} y_0 = y(0) \\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i) \quad i = 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (5.6)$$

*que en nuestro ejemplo concreto se convierte en*

$$\begin{cases} Y_0 = [0.9, 1.1] \\ Y_1 \supseteq (1 - 10h) * Y_0 \\ Y_{i+1} \supseteq Y_{i-1} - 20h * Y_i \quad i = 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (5.7)$$

Para distintos valores de  $h$  obtenemos los siguientes resultados

Para  $h = 0.01$

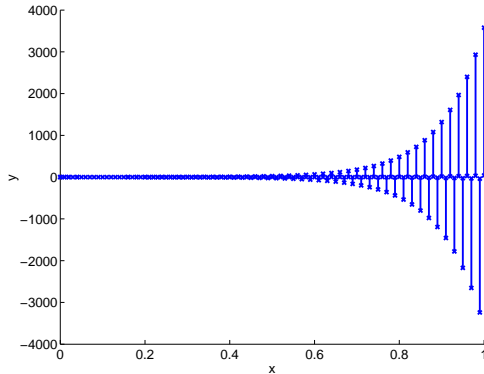


Fig. 5.20

Para  $h = 0.05$

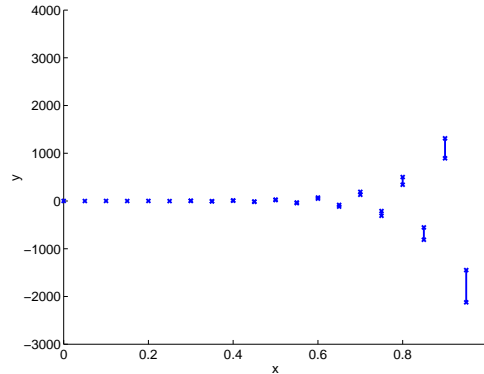


Fig. 5.21

Para  $h = 0.25$

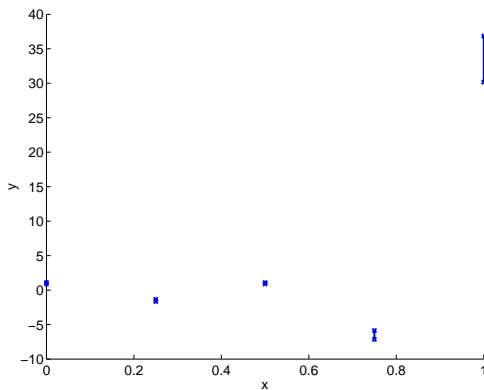


Fig. 5.22

Para  $h = 0.5$

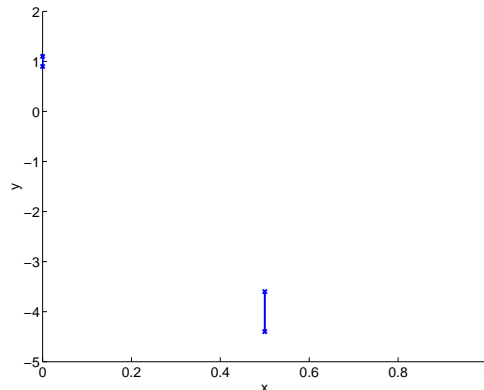


Fig. 5.23

Observamos que el método es inestable en cualquier caso y más inestable al disminuir el valor de  $h$  tal como ocurre en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 5.1.8.** A continuación estudiaremos el mismo problema que en el ejemplo anterior pero considerando la condición inicial impropia.

$$\begin{cases} y'(x) = -10y & x \in [0, 1] \\ y(0) = [1.1, 0.9] \end{cases} \quad (5.8)$$

Aplicando el método de diferencias centradas en nuestro ejemplo concreto se convierte en

$$\begin{cases} Y_0 = [1.1, 0.9] \\ Y_1 \supseteq (1 - 10h) * Y_0 \\ Y_{i+1} \supseteq Y_{i-1} - 20h * Y_i \quad i = 1, \dots, m - 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

Para distintos valores de  $h$  obtenemos los siguientes resultados

Para  $h = 0.01$

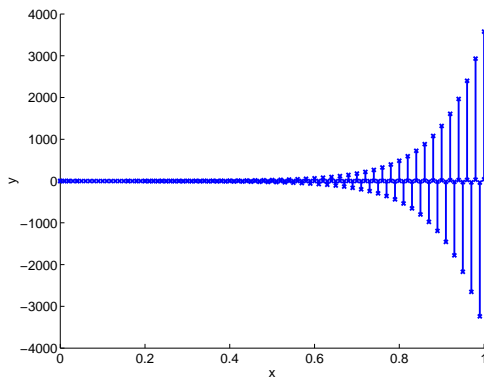


Fig. 5.24

Para  $h = 0.05$

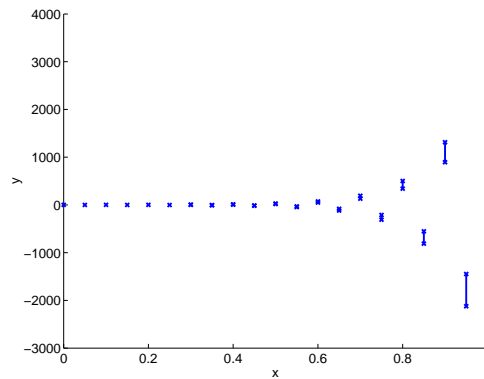


Fig. 5.25

Para  $h = 0.25$

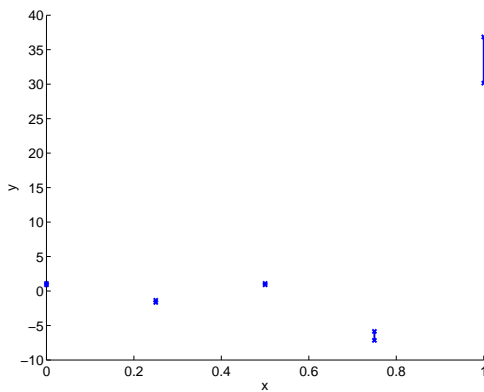


Fig. 5.26

Para  $h = 0.5$

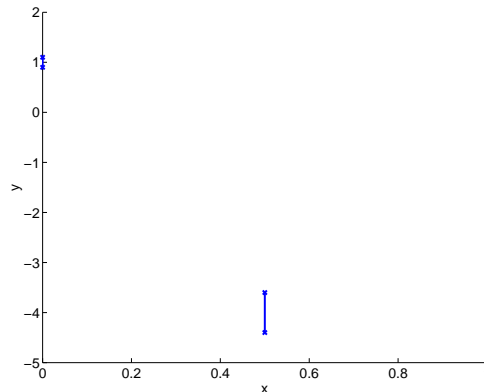


Fig. 5.27

Observamos que el método es inestable en cualquier caso, sin embargo el resultado no es exactamente el mismo debido a la truncación.

### 5.1.3. Error de los métodos Runge-Kutta intervalares

A continuación estudiaremos el error de discretización para los métodos de diferencias comentados anteriormente.

**Teorema 5.1.2.** (Precisión del método de Euler en  $\mathbb{R}$ ) Sea  $y(x)$  la solución del problema de valor inicial

$$y' = f(x, y)$$

en  $[x_0, x_M]$  con  $y(x_0) = y_0$ . Si  $y(x) \in \mathcal{C}^2[x_0, b]$  y  $\{(x_k, y_k)\}_{k=0}^M$  es la sucesión de aproximaciones generada por el método de Euler, entonces

- el error de truncamiento global o error de discretización global  $e_k$  cumple

$$|e_k| = |y(x_k) - y_k| = \mathcal{O}(h)$$



- el error de truncamiento local o error de discretización local  $\varepsilon_{k+1}$  cumple

$$|\varepsilon_{k+1}| = |y(x_{k+1}) - y_k - hf(x_k, y_k)| = \mathcal{O}(h^2)$$

Al aplicar el método de Euler, el término que se desprecia en cada paso es

$$y''(c_k) \frac{h^2}{2}$$

El error al final del intervalo se llama error global final y viene dado por

$$E(y(b), h) = |y(b) - y_M| = \mathcal{O}(h)$$

Si  $y''(c_k)(h^2/2)$  fuera el único error que se comete en cada paso de la discretización, entonces en el otro extremo del intervalo, una vez dados  $M$  pasos, el error acumulado sería

$$\sum_{k=1}^M y''(c_k) \frac{h^2}{2} \approx M y''(c) \frac{h^2}{2} = \frac{hM}{2} y''(c) h = \frac{b-a}{2} y''(c) h$$

y aunque podría haber otros errores, esta estimación es la que predomina.

Del teorema 5.1.2 se deduce que

$$E\left(y(b), \frac{h}{2}\right) \approx \frac{1}{2} E(y(b), h)$$

es decir, si reducimos a la mitad el tamaño de paso en el método de Euler, entonces cabe esperar que el error final global se reduzca también a la mitad.

Estudiamos a continuación si esta propiedad se mantiene al aplicar la teoría del análisis intervalar modal a problemas intervalares.

**Ejemplo 5.1.9.** *Estudiaremos la resolución del problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x-y}{2} & x \in [0, 3] \\ y(0) = [0.9, 1.1] \end{cases} \quad (5.10)$$

*La ecuación diferencial planteada considerando la condición inicial  $y(0) = 1$  tiene solución analítica en  $\mathbb{R}$*

$$y(x) = 3e^{-\frac{x}{2}} - 2 + x$$

*así pues, compararemos los resultados intervalares con la solución analítica del problema. Ver figura 5.28.*

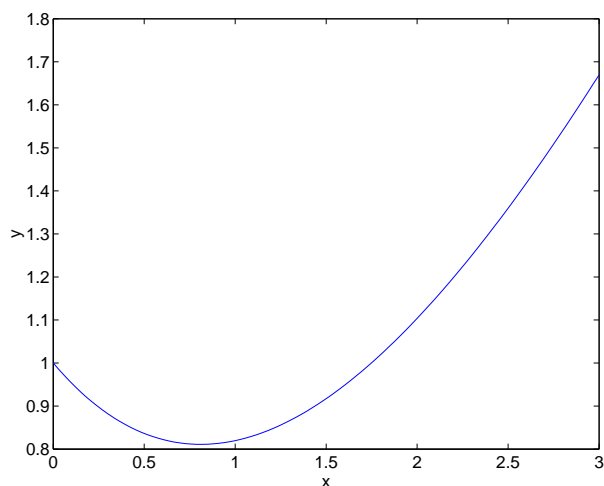


Fig. 5.28

Consideremos el método de Euler para la resolución del problema y obtenemos la expresión

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{x_n - y_n}{2}$$

Al ser la variable  $y_n$  multiincidente, debemos estudiar la monotonía respecto de  $y_n$  y para ello estudiamos el signo de

$$\frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} = 1 - \frac{h}{2}$$

Así pues,

- Si  $1 - \frac{h}{2} > 0$  la expresión de cálculo intervalar optimal del método es

$$Y_{n+1} \supseteq Y_n + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} * \text{Dual}(Y_n)$$

- Si  $1 - \frac{h}{2} < 0$  la expresión de cálculo intervalar optimal del método es

$$Y_{n+1} \supseteq \text{Dual}(Y_n) + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} * Y_n$$

Observemos que  $1 - \frac{h}{2} < 0 \Leftrightarrow h > 2$ , luego como normalmente  $h < 2$  la expresión optimal del cálculo intervalar es

$$Y_{n+1} \supseteq Y_n + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} * \text{Dual}(Y_n)$$

Para elegir un valor de  $h$  es interesante imponer la condición de que la amplitud añadida debida al error sea menor que un cierto valor que nosotros controlemos.

Si por ejemplo tomamos  $h = 1$  y consideramos  $y(x_n)$  la solución exacta del problema escalar con  $y(0) = 1$ ;  $y_n$  es el resultado de aplicar el método de Euler escalar, e  $Y_n$  la solución al problema intervalar considerando el método de Euler, tenemos:

$x_n$	$y(x_n)$	$y_n$	$Y_n$
0	1.0	1.0	[0.9, 1.1]
1	0.819592	0.5	[0.449999, 0.550000]
2	1.103638	0.75	[0.724999, 0.775000]
3	1.669390	1.375	[1.362499, 1.387501]

Observemos que  $Y(3) = [1.362499, 1.387501]$  contiene a la solución que obtiene el método de Euler en el caso del cálculo numérico clásico, 1.375, pero no contiene a la solución exacta del problema puntual, en caso de considerar  $y(0) = 1$ , 1.669390.

Si estudiamos el problema para  $h = 0,5$  tenemos:

$x_n$	$y(x_n)$	$y_n$	$Y_n$
0	1.0	1.0	[0.9, 1.1]
0.5	0.836402	0.75	[0.674999, 0.825000]
1	0.819592	0.6875	[0.631249, 0.743750]
1.5	0.917100	0.765625	[0.723437, 0.807813]
2	1.103638	0.949219	[0.917578, 0.980859]
2.5	1.359514	1.211914	[1.188183, 1.235645]
3	1.669390	1.533936	[1.516137, 1.551734]

Observemos que  $Y(3) = [1.516137, 1.551734]$  contiene a la solución que obtiene el método de Euler en el caso del cálculo numérico clásico, 1.533936, pero no contiene a la solución exacta del problema puntual, en caso de considerar  $y(0) = 1$ , 1.669390.

Si reducimos el valor de  $h$  estas consideraciones anteriores se mantienen. Por ejemplo,

- Si  $h = 0.25$  el problema intervalar modal obtiene  $Y(3) = [1.584109, 1.624394]$ , y  $y(3) = 1.604252$ , valor obtenido al aplicar el cálculo numérico clásico correspondiente está incluido en dicho resultado.
- Si  $h = 0.125$  el problema intervalar modal obtiene  $Y(3) = [1.616181, 1.658678]$ , y  $y(3) = 1.637429$ , valor obtenido al aplicar el cálculo numérico clásico correspondiente está incluido en dicho resultado.

Una de las futuras aportaciones previstas, es analizar cuál es el valor de  $h$  que hace que la solución intervalar contenga a la solución puntual.

La representación gráfica de los resultados de nuestro problema intervalar son los siguientes:

Para  $h = 1$

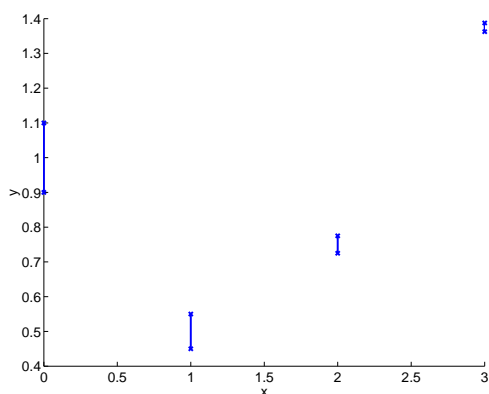


Fig. 5.29

Para  $h = 0.5$

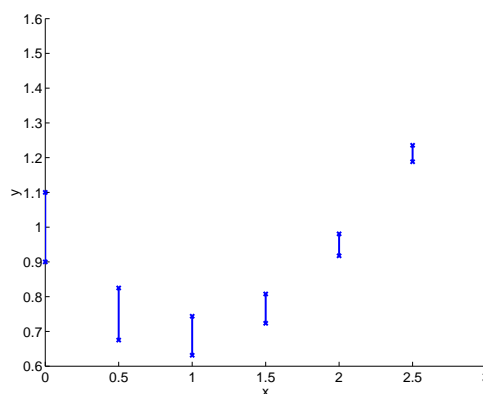


Fig. 5.30

Para  $h = 0.25$

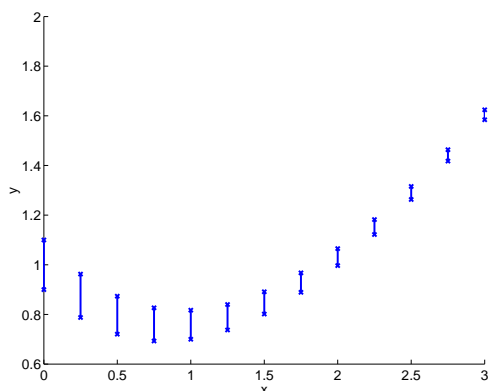


Fig. 5.31

Para  $h = 0.125$

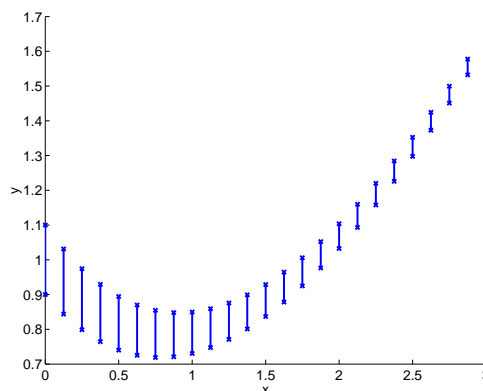


Fig. 5.32

Una técnica que estudiaremos para controlar el error de truncamiento local para métodos explícitos Runge-Kutta es la extrapolación de Richardson (Ver [41], [30], [76]); técnica que se puede aplicar a cualquier método numérico.

Supongamos que hemos usado un método Runge-Kutta de orden  $p$  para obtener la solución numérica  $y_{n+1}$  en el punto  $x_{n+1}$ . Si  $y(x_{n+1})$  representa el valor exacto, el error de truncamiento local  $T_{n+1}$  puede escribirse como

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \Psi(y(x_n))h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) \quad (5.11)$$

siendo  $\Psi(y(x_n))$  una función de las diferenciales de orden  $p+1$  evaluadas en  $y(x_n)$ .

Calculemos ahora una segunda solución numérica en  $x_{n+1}$  usando dos veces el mismo método Runge-Kutta de orden  $p$  con paso  $\frac{h}{2}$  y empezando desde  $x_n$ . A la solución que obtenemos la notaremos  $z_{n+1}$ . Así pues, podemos escribir

$$y(x_{n+1}) - z_{n+1} = 2\Psi(y(x_n))\left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) \quad (5.12)$$

Despreciando los términos  $\mathcal{O}(h^{p+2})$  de (5.11) y (5.12) podemos eliminar la constante desconocida  $\Psi(y(x_n))$  y extrapolar una mejor aproximación para  $y(x_{n+1})$ , de donde se deduce que el error estimado para la truncación local es:

$$T_{n+1} = \frac{y_{n+1} - z_{n+1}}{2^p - 1}$$

A continuación estudiaremos la solución del mismo problema intervalar 5.1.9 añadiendo el error de truncamiento local utilizando la técnica de extrapolación de Richardson.

$$T_{n+1} = Y_{n+1} - Z_{n+1}$$

siendo en nuestro caso particular,

$$Y_{n+1} = Y_n + h * \frac{x_n - Y_n}{2}$$

y  $Z_{n+1}$  una segunda solución numérica obtenida usando dos veces el mismo método de Euler con paso  $\frac{h}{2}$  y empezando desde  $x_n$

$$Z_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} * Y_n - \frac{h^2}{16}x_n + \frac{h^2}{16} * Y_n$$

Así pues,

$$T_{n+1} = Y_{n+1} - Z_{n+1} = \frac{h^2}{16}x_n - \frac{h^2}{16} * Y_n$$

Estudiamos pues, la optimalidad de la función

$$Y_{n+1} = clR(Y_n) + T_{n+1} = Y_n + h * \frac{x_n - Y_n}{2} + \frac{h^2}{16}x_n - \frac{h^2}{16} * Y_n$$

- Si  $1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{16} > 0$  la expresión optimal del cálculo es

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} * Dual(Y_n) + \frac{h^2}{16}x_n - \frac{h^2}{16} * Dual(Y_n)$$

- Si  $1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{16} < 0$  la expresión optimal del cálculo es

$$Y_{n+1} = Dual(Y_n) + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} * Y_n + \frac{h^2}{16}x_n - \frac{h^2}{16} * Y_n$$

Observamos que  $1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{16} < 0 \Leftrightarrow h \in (-\infty, -9.65) \cup (1.65685, +\infty)$ , luego este caso no será habitual.

Estudiamos pues el problema para  $h = 1$ ,  $h = 0.5$ ,  $h = 0.25$  y  $h = 0.125$  considerando el cálculo intervalar

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}x_n - \frac{h}{2} * Dual(Y_n) + \frac{h^2}{16}x_n - \frac{h^2}{16} * Dual(Y_n)$$

- Para  $h = 1$  obtenemos  $Y(3) = [1.446459, 1.463209]$
- Para  $h = 0.125$  obtenemos  $Y(3) = [1.625351, 1.666801]$

Observamos que la solución intervalar se aproxima mejor a la solución exacta del problema  $y(3) = 1.669390$  pero no la contiene.

Como una aportación futura pensamos en el estudio de otros métodos para obtener estimaciones del error.

## 5.2. Problemas de contorno

Cuando las condiciones adicionales que determinan una única solución de una ecuación diferencial de orden  $n$  están dadas en varios puntos del intervalo de resolución  $[a, b]$ , generalmente en los extremos, se habla de condiciones de contorno y dan lugar a los problemas de contorno.

En particular, un problema de contorno de segundo orden consiste en encontrar una solución  $y(x)$  de una ecuación diferencial de la forma

$$y'' = f(x, y, y')$$

para  $a \leq x \leq b$  con la condición de contorno  $y(a) = \alpha$  y  $y(b) = \beta$ .

### 5.2.1. Método del disparo

Un problema de contorno lineal puede transformarse en un problema de valor inicial y aplicar los mismos métodos numéricos que se utilizan para la resolución de problemas de valor inicial. La técnica que permite esta reformulación del problema es el llamado método del disparo.

Esta técnica no siempre se podrá aplicar en problemas intervalares pues dependerá de los valores de los intervalos que intervengan en el problema. Nosotros comentaremos a continuación un problema sencillo que da lugar a interpretaciones semánticas distintas, dependiendo de si las condiciones iniciales del problema son intervalos propios o bien impropios.

Normalmente el estudio intervalar de estos problemas aplicando el método de diferencias finitas, implicará un estudio en  $I^\circ(\mathbb{R})$ , sin embargo, en problemas sencillos el producto aritmético es equivalente al producto lineal.

**Ejemplo 5.2.1.** Resolver el problema intervalar de valores en la frontera

$$y'' = 1 + y, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = [0.9, 1.1] \quad y \quad y(1) = [1.9, 2.1] \quad (5.13)$$

usando el método del disparo con el método de Euler con paso  $h = \frac{1}{4}$ .

Para resolver la ecuación  $y'' = 1 + y$  consideramos el cambio de variable  $y' = z$ , luego  $z' = 1 + y$  y las condiciones iniciales son  $y(0) = [0.9, 1.1]$   $z(0) = y'(0) = S = [s_1, s_2]$ .

Así pues, el método de Euler se reduce a solucionar el sistema:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}_n + h \begin{pmatrix} z \\ 1 + y \end{pmatrix}_n$$

Observemos que el valor  $h$  siempre es un número positivo, luego en este ejemplo, el producto aritmético coincide con el producto lineal.

Considerando variables intervalares  $y$  en una supuesta aritmética exacta, el sistema

$$\left. \begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + hZ_n \\ Z_{n+1} &= Z_n + h(1 + Y_n) \end{aligned} \right\}$$

tiene cálculo optimal, luego

$$\left. \begin{aligned} Y\left(\frac{1}{4}\right) &= Y(0) + \frac{1}{4}Z(0) = \left[0.9 + \frac{s_1}{4}, 1.1 + \frac{s_2}{4}\right] \\ Z\left(\frac{1}{4}\right) &= Z(0) + \frac{1}{4}(1 + Y(0)) = \left[s_1 + \frac{1.9}{4}, s_2 + \frac{2.1}{4}\right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Y\left(\frac{1}{2}\right) &= Y\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}Z\left(\frac{1}{4}\right) = \left[1.01875 + \frac{s_1}{2}, 1.23125 + \frac{s_2}{2}\right] \\ Z\left(\frac{1}{2}\right) &= Z\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}(1 + Y\left(\frac{1}{4}\right)) = \left[\frac{3.8}{4} + \frac{17}{16}s_1, \frac{4.2}{4} + \frac{17}{16}s_2\right] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Y\left(\frac{3}{4}\right) &= Y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}Z\left(\frac{1}{2}\right) = \left[1.25625 + 0.765625s_1, 1.49375 + 0.765625s_2\right] \\ Z\left(\frac{3}{4}\right) &= Z\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}(1 + Y\left(\frac{1}{2}\right)) = \left[1.4546875 + 1.1875s_1, 1.6078125 + 1.1875s_2\right] \end{aligned} \right\}$$

$$Y(1) = Y\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}Z\left(\frac{3}{4}\right) = \left[1.6199219 + 1.0625s_1, 1.8957031 + 1.0625s_2\right] = [1.9, 2.1]$$

De donde

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 0.004044 \\ s_2 &= 0.451838 \end{aligned} \right\}$$

Luego

$x$	$y$
0	[0.9, 1.1]
$\frac{1}{4}$	[0.901011, 1.2129595]
$\frac{1}{2}$	[1.020772, 1.457169]
$\frac{3}{4}$	[1.2593462, 1.8396884]
1	[1.9, 2.1]

La interpretación semántica considerando cada paso del método es,

$$U(y_0, [0.9, 1.1])U(s, [0.004044, 0.451838])E(y_{\frac{1}{4}}, [0.9, 1.1]) : y_0 + \frac{1}{4}s = y_{\frac{1}{4}}$$

$$U(s, [0.004044, 0.451838])U(y_0, [0.9, 1.1])E(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838]) : s + \frac{1}{4}(1+y_0) = z_{\frac{1}{4}}$$

$$U(y_{\frac{1}{4}}, [0.9, 1.1])U(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838])E(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169]) : y_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{4}} = y_{\frac{1}{2}}$$

$$U(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838])U(y_{\frac{1}{4}}, [0.9, 1.1])E(z_{\frac{1}{2}}, [0.95429675, 1.530077]) : z_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(1+y_{\frac{1}{4}}) = z_{\frac{1}{2}}$$

$$U(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169])U(z_{\frac{1}{2}}, [0.95429675, 1.530077])E(y_{\frac{3}{4}}, [1.2593462, 1.8396884]) : y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{2}} = y_{\frac{3}{4}}$$

$$U(z_{\frac{1}{2}}, [0.95429675, 1.530077])U(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169])E(z_{\frac{3}{4}}, [1.459489, 2.144370]) : z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(1+y_{\frac{1}{2}}) = z_{\frac{3}{4}}$$

$$U(y_{\frac{3}{4}}, [1.2593462, 1.8396884])U(z_{\frac{3}{4}}, [1.459489, 2.144370])E(y_1, [1.9, 2.1]) : y_{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{3}{4}} = y_1$$

De donde se obtiene la semántica global

$$U(y_0, [0.9, 1.1])U(s, [0.004044, 0.451838])E(y_{\frac{1}{4}}, [0.9, 1.1])E(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838])$$

$$E(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169])E(z_{\frac{1}{2}}, [0.95429675, 1.530077])E(y_{\frac{3}{4}}, [1.2593462, 1.8396884])$$

$$E(z_{\frac{3}{4}}, [1.459489, 2.144370])E(y_1, [1.9, 2.1]) : y_0 + \frac{1}{4}s = y_{\frac{1}{4}}, \quad s + \frac{1}{4}(1+y_0) = z_{\frac{1}{4}},$$

$$y_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{4}} = y_{\frac{1}{2}}, \quad z_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(1+y_{\frac{1}{4}}) = z_{\frac{1}{2}}, \quad y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{2}} = y_{\frac{3}{4}}, \quad z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(1+y_{\frac{1}{2}}) = z_{\frac{3}{4}}, \quad y_{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{3}{4}} = y_1$$

Estudiamos a continuación, el mismo problema pero considerando las condiciones iniciales como intervalos impropios.



**Ejemplo 5.2.2.** Resolver el problema intervalar de valores en la frontera

$$y'' = 1 + y, \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = [1.1, 0.9] \quad y \quad y(1) = [2.1, 1.9]$$

usando el método del disparo con el método de Euler con paso  $h = \frac{1}{4}$ .

Para resolver la ecuación  $y'' = 1 + y$  consideramos el cambio de variable  $y' = z$ , luego  $z' = 1 + y$  y las condiciones iniciales son  $y(0) = [1.1, 0.9]$   $z(0) = y'(0) = S = [s_1, s_2]$ .

El método de Euler nos lleva a solucionar el sistema:

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}_{n+1} = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}_n + h \begin{pmatrix} Z \\ 1 + Y \end{pmatrix}_n$$

El sistema

$$\left. \begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + hZ_n \\ Z_{n+1} &= Z_n + h(1 + Y_n) \end{aligned} \right\}$$

tiene cálculo optimal, sin embargo, al considerar intervalos impropios la interpretación semántica es distinta de la del ejemplo anterior.

$$\left. \begin{aligned} Y\left(\frac{1}{4}\right) &= Y(0) + \frac{1}{4}Z(0) = [1.1 + \frac{s_1}{4}, 0.9 + \frac{s_2}{4}] \\ Z\left(\frac{1}{4}\right) &= Z(0) + \frac{1}{4}(1 + Y(0)) = [s_1 + \frac{2.1}{4}, s_2 + \frac{1.9}{4}] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Y\left(\frac{1}{2}\right) &= Y\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}Z\left(\frac{1}{4}\right) = [1.23125 + \frac{s_1}{2}, 1.01875 + \frac{s_2}{2}] \\ Z\left(\frac{1}{2}\right) &= Z\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}(1 + Y\left(\frac{1}{4}\right)) = [1.05 + 1.0625s_1, 0.95 + 1.0625s_2] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Y\left(\frac{3}{4}\right) &= Y\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}Z\left(\frac{1}{2}\right) = [1.49375 + 0.765625s_1, 1.25625 + 0.765625s_2] \\ Z\left(\frac{3}{4}\right) &= Z\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}(1 + Y\left(\frac{1}{2}\right)) = [1.6078125 + 1.1875s_1, 1.4546875 + 1.1875s_2] \end{aligned} \right\}$$

$$Y(1) = Y\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}Z\left(\frac{3}{4}\right) = [1.8957031 + 1.0625s_1, 1.6199219 + 1.0625s_2] = [2.1, 1.9]$$

De donde

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 0.451838 \\ s_2 &= 0.004044 \end{aligned} \right\}$$

Luego

$x$	$y$
0	[1.1, 0.9]
$\frac{1}{4}$	[1.2129595, 0.901011]
$\frac{1}{2}$	[1.457169, 1.020772]
$\frac{3}{4}$	[1.8396884, 1.2593462]
1	[2.1, 1.9]

Considerando cada paso del método, obtenemos la interpretación semántica,

$$\begin{aligned}
E(y_0, [0.9, 1.1])E(s, [0.004044, 0.451838])U(y_{\frac{1}{4}}, [0.901011, 1.2129595]) &: y_0 + \frac{1}{4}s = y_{\frac{1}{4}} \\
E(s, [0.004044, 0.451838])E(y_0, [0.9, 1.1])U(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838]) &: s + \frac{1}{4}(1+y_0) = z_{\frac{1}{4}} \\
E(y_{\frac{1}{4}}, [0.901011, 1.2129595])E(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838])U(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169]) &: y_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{4}} = y_{\frac{1}{2}} \\
E(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838])E(y_{\frac{1}{4}}, [0.901011, 1.2129595])U(z_{\frac{1}{2}}, [0.9542967, 1.5300778]) &: z_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(1+y_{\frac{1}{4}}) = z_{\frac{1}{2}} \\
E(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169])E(z_{\frac{1}{2}}, [0.9542967, 1.5300778])U(y_{\frac{3}{4}}, [1.2593462, 1.8396884]) &: y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{2}} = y_{\frac{3}{4}} \\
E(z_{\frac{1}{2}}, [0.9542967, 1.5300778])E(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169])U(z_{\frac{3}{4}}, [1.4594897, 2.1443701]) &: z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(1+y_{\frac{1}{2}}) = z_{\frac{3}{4}} \\
E(y_{\frac{3}{4}}, [1.2593462, 1.8396884])E(z_{\frac{3}{4}}, [1.4594897, 2.1443701])U(y_1, [1.9, 2.1]) &: y_{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{3}{4}} = y_1
\end{aligned}$$

de donde se deduce la semántica global,

$$\begin{aligned}
U(y_1, [1.9, 2.1])E(y_0, [0.9, 1.1])E(s, [0.004044, 0.451838])E(y_{\frac{1}{4}}, [0.901011, 1.2129595]) \\
E(z_{\frac{1}{4}}, [0.479044, 0.976838])E(y_{\frac{1}{2}}, [1.020772, 1.457169])E(z_{\frac{1}{2}}, [0.9542967, 1.5300778]) \\
E(y_{\frac{3}{4}}, [1.2593462, 1.8396884])E(z_{\frac{3}{4}}, [1.4594897, 2.1443701]) &: y_0 + \frac{1}{4}s = y_{\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

$$s + \frac{1}{4}(1 + y_0) = z_{\frac{1}{4}}, y_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{4}} = y_{\frac{1}{2}}, z_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}(1 + y_{\frac{1}{4}}) = z_{\frac{1}{2}},$$

$$y_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}z_{\frac{1}{2}} = y_{\frac{3}{4}}, z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(1 + y_{\frac{1}{2}}) = z_{\frac{3}{4}}, y_{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4}z_{\frac{3}{4}} = y_1$$

### 5.2.2. Resolución de ecuaciones no lineales

Como hemos visto anteriormente, los problemas de contorno pueden resolverse reformulando el problema mediante el método del disparo y transformándolo en un problema de valor inicial. El problema se reduce a determinar unas condiciones iniciales de manera que la solución numérica de la ecuación diferencial cumpla las condiciones de contorno. Estas condiciones de contorno son generalmente, la solución de ecuaciones no lineales que no tienen expresión analítica conocida, y se resuelven aplicando métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales.

Uno de los métodos más conocido en el análisis numérico es el método de Newton, a veces llamado, método de Newton-Raphson.

**Definición 5.2.1.** (*Amplitud de un intervalo*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ , definimos la amplitud del intervalo  $A$  y notaremos  $span(A)$  a

$$span(A) = \bar{a} - \underline{a}$$

De la definición anterior se deduce que la amplitud de la suma y diferencia de intervalos cumple las relaciones

$$span(A + B) = span(A) + span(B)$$

$$span(A - B) = span(A) + span(B)$$

**Teorema 5.2.1.** (*Método de Newton-Raphson*) Supongamos que la función  $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$  y que existe un número  $s \in [a, b]$  tal que  $f(s) = 0$ . Si  $f'(s) \neq 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que la sucesión  $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$  definida por el proceso iterativo

$$s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}$$

converge a  $s$  para cualquier aproximación inicial  $s_0 \in [s - \delta, s + \delta]$ .

Observemos que en el contexto intervalar, aunque podamos definir los conceptos que intervienen en el algoritmo real del método de Newton, el método no es directamente extrapolable a valores intervalares, ya que la expresión

$$X_{n+1} = X_n - \frac{G(X_n)}{G'(X_n)}$$

no converge debido a que

$$span(X_{n+1}) = span(X_n) + span\left(\frac{G(X_n)}{G'(X_n)}\right)$$

de donde se deduce que  $span(X_{n+1}) \geq span(X_n)$  y tenemos un sucesión de intervalos de amplitud creciente, luego el método no converge.

El algoritmo de Newton para la resolución de ecuaciones no lineales, se ha estudiado en el análisis intervalar clásico, como puede verse en las referencias [46], [79] y [32], siendo la principal dificultad el cálculo de  $G'(X_n)$ , intervalo que no puede contener al cero.

**Proposición 5.2.1.** (*Método de Newton intervalar*) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continuamente diferenciable,  $f'$  su derivada,  $x^*$  un cero de  $f$ ,  $F$  y  $F'$  extensiones de  $f$  y  $f'$  con las propiedades de extensión, inclusión y continuidad. Definimos el operador de Newton

$$N(x, X) = x - \frac{f(x)}{F'(X)}$$

donde  $x$  es cualquier elemento  $x \in X$ .

Sea  $X_0$  tal que  $x^* \in X_0$  y  $x_n \in X_n$  arbitrario. Si definimos el método

$$X_{n+1} = X_n \cap N(x_n, X_n)$$

entonces se cumple:

1.  $x^* \in X_n$
2.  $X_n \longrightarrow x^*$  y  $x_n \longrightarrow x^*$
3.  $\text{span}(X_n) \leq q_n \text{span}(X_{n-1})$ ,  $q_n = 1 - \chi(F(X_n))$

siendo  $\chi : I(\mathbb{R}) \longrightarrow [-1, 1]$ , tal que si  $A = [a_1, a_2]$

$$\chi(A) = \begin{cases} \frac{a_1}{a_2} & \text{si } |a_1| \leq |a_2| \neq 0 \\ \frac{a_2}{a_1} & \text{si } |a_2| \leq |a_1| \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es conveniente y eficiente considerar  $x_n$  como el punto medio del intervalo  $X_n$ , luego normalmente, se considera de este modo.

En la versión original del método de Newton intervalar, Moore suponía que  $0 \notin F'(x_0)$ . Independientemente, Alefeld y Hansen en estudios posteriores, extendieron el algoritmo e incluyeron el caso  $0 \in F'(x_0)$ . Si  $0 \in F'(x_0)$  la intersección  $X_{n+1} \cap N(x_n, X_n)$  es finita aunque  $N(x_n, X_n)$  no es finita, ver [32].

Existen estudios más recientes del Método de Newton intervalar [59], sin embargo, este método supone un coste computacional importante y normalmente el método de la secante (con menor coste computacional), es una buena alternativa al método de Newton.

Si  $f'(x_n)$  no es conocida (o no se puede calcular), siendo  $f$  una función que cumple las hipótesis del teorema 5.2.1, podemos utilizar

$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

y sustituir en el método de Newton, obteniendo el **método de la secante**:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}(x_n - x_{n-1})$$

Planteamos el método de la secante como un método de tanteo y su eficacia dependerá de si la ecuación está bien condicionada.

Siendo el método de la secante un método geométrico, podríamos pensar en  $I^\circ(\mathbb{R})$ , sin embargo como la importancia de los intervalos lineales está en la interpretación semántica y en nuestro caso la ecuación no tendrá interpretación ya que simplemente tanteamos un valor que en este caso será intervalar, consideraremos las operaciones aritméticas que dan al conjunto de intervalos la estructura intervalar modal  $I^*(\mathbb{R})$ .

Del mismo modo, no consideramos el problema de la truncación ya que estamos buscando un valor aproximado.

Si  $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $A - B$  es el intervalo de diferencias y  $A - Dual(B)$  da la diferencia de los intervalos  $A$  y  $B$ , luego en nuestro caso debemos considerar

$$X_{n+1} = X_n - Dual\left(\frac{F(X_n)}{Dual(F(X_n) - Dual(F(X_{n-1})))} * (X_n - Dual(X_{n-1}))\right)$$

Al aparecer el operador Dual en el denominador de esta expresión, la ecuación asociada al método de la secante, no corresponde a un operador racional, luego la ecuación no tiene interpretación semántica; simplemente estamos buscando un valor intervalar.

Las operaciones intervalares modales que identifican el método de la secante implican el cálculo de ínfimos y supremos de los intervalos que intervienen en la ecuación, luego el resultado será el mismo que si consideramos la aritmética lineal de  $I^\circ(\mathbb{R})$  siempre que la función que define la ecuación diferencial originaria del problema y los intervalos que consideremos cumplan las condiciones necesarias.

## 5.3. Diferenciación y estructura lineal

### 5.3.1. Discretización intervalar

La discretización de un modelo considerando paso intervalar impone considerar la estructura lineal de los intervalos modales, es decir,  $I^*(\mathbb{R})$  con las operaciones lineales, conjunto que denominamos  $I^\circ(\mathbb{R})$ .

Las operaciones aritméticas no son operaciones lineales, luego no serán las operaciones adecuadas para modelos que tengan linealidad macroscópica. La aritmética lineal permite cálculos adecuados a problemas con propiedades lineales globales, sin embargo, al realizar cálculos en una aritmética efectiva, es decir en una aritmética con truncaciones, existirán problemas asociados a un concepto fundamental en la teoría intervalar; la inclusión de intervalos. Este problema se resolverá considerando los intervalos de marcas, donde formalmente, la truncación no existe.

Discutimos esta situación con un ejemplo concreto.

Consideremos una ecuación en diferencias determinada por una función  $F$ , y los intervalos  $D = [0, 1]$  y  $F(0) = [5, 7]$ . Si  $F$  suma un incremento  $D$ , se obtiene

$$F(1) = F(0) + D = [5, 7] + [0, 1] = [5, 8]$$

De  $F(1)$  podemos obtener  $F(2)$ ,

$$F(2) = F(1) + D = [5, 8] + [0, 1] = [5, 9]$$

pero si queremos obtener  $F(0)$  a partir de  $F(1)$  observamos que

$$F(1) - D = [5, 8] - [0, 1] = [4, 8] \neq F(0)$$

Obtendremos el cálculo adecuado si a  $F(1)$  le sumamos el intervalo opuesto de  $D$ , concepto que definimos a continuación.

**Definición 5.3.1.** (*Opuesto de un intervalo*) Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$  definimos el intervalo opuesto de  $A$ , que notaremos  $Opp(A)$ , a

$$Opp(A) = [-\underline{a}, -\bar{a}] = -Dual(A)$$

Observemos que

$$F(1) + Opp(D) = [5, 8] + [0, -1] = [5, 7] = F(0)$$

Si consideramos las operaciones lineales en  $I^*(\mathbb{R})$ , es decir,  $I^\circ(\mathbb{R})$ , la diferencia lineal es una operación consistente con el problema que estamos planteando, en el sentido de que

$$F(1) \circ D = [5, 8] \circ [0, 1] = [5, 7] = F(0)$$

Estudiemos ahora el cálculo en una aritmética efectiva.

Consideremos una truncación externa  $D_e$  del intervalo  $D$ ; por ejemplo  $D \subseteq D_e = [-1, 2]$ .

$$F_e(2) = F(1) + D_e = [5, 8] + [-1, 2] = [4, 10]$$

y se cumple

$$F(2) \subseteq F_e(2)$$

Para calcular  $F_e(0)$  debemos considerar, igual que en el caso anterior, el intervalo opuesto.

$$F_e(0) = F(1) + Opp(D_e) = [5, 8] + [1, -2] = [6, 6]$$

y en este caso

$$[6, 6] = F_e(0) \not\subseteq F(0) = [5, 7]$$

sino que se cumple

$$F_e(0) \subseteq F(0)$$

Así pues, la truncación externa de  $F(0)$  no puede obtenerse de una truncación externa directa  $D_e$  de  $D$ .

En este caso, si consideramos las operaciones intervalares lineales,

$$F_e(0) = F(1) \circ D_e = [5, 8] \circ [-1, 2] = [6, 6]$$

luego continua existiendo el mismo problema de inclusión respecto a la truncación externa.

### 5.3.2. Diferenciación de funciones intervalares

Para estudiar la diferenciabilidad de funciones intervalares debemos considerar la estructura lineal de los intervalos modales, es decir,  $I^*(\mathbb{R})$  con las operaciones lineales, puesto que ésta estructura es la que conserva globalmente las propiedades geométricas del problema.

Existen ejemplos sencillos, por ejemplo, la función constante  $F(X) = [1, 2]$  que muestran la problemática que existe al considerar las operaciones aritméticas al intentar generalizar el concepto real de derivada.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(X + \Delta t) - F(X)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[1, 2] - [1, 2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[-1, 1]}{\Delta t} = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(X + \Delta t) \circ F(X)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[1, 2] \circ [1, 2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[0, 0]}{\Delta t} = 0$$

Un primer análisis del estudio en  $I^*(\mathbb{R})$  de derivadas de funciones intervalares se encuentra en las referencias [16] y [18].

**Definición 5.3.2.** (*Derivada de una función intervalar*) Dados  $X \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $h \in \mathbb{R}$  y una función  $F : I^*(\mathbb{R}) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ . Supongamos que en un entorno de  $h = 0$  podemos considerar

$$F(X + h) = [\underline{F}(X + h), \overline{F}(X + h)] = [\underline{f}(h), \overline{f}(h)]$$

siendo  $\underline{f}$  y  $\overline{f}$  funciones derivables con derivada continua. En estas condiciones, definimos la derivada intervalar de  $F$  en  $X$  como

$$F'(X) = \lim_{h \rightarrow 0} ((F(X + h) - \text{Dual}(F(X))) \circ \frac{1}{h})$$

**Proposición 5.3.1.** En las condiciones de la definición anterior, se cumple

$$F'(X) = [\underline{f}'(0), \overline{f}'(0)]$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} F'(X) &= \lim_{h \rightarrow 0} ((F(X+h) - \text{Dual}(F(X))) \circ \frac{1}{h}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ([\underline{f}(h), \overline{f}(h)] - \text{Dual}(F(X))) \circ \frac{1}{h} \\ &= [\underline{f}'(0), \overline{f}'(0)] \end{aligned}$$

□

**Definición 5.3.3.** En las condiciones de la definición 5.3.2 si  $\Delta X \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $\Delta X \neq 0$ . Dado  $f(x+h)$ , definimos  $F(X + \Delta X)$  como

$$f^*(X + \Delta X) = \Omega_{x \in X', h \in \Delta X'}^* f(x+h)$$

siendo  $\Omega^* := \bigvee \bigwedge$  es decir, la secuencia de operadores meet y join, con las operaciones join encabezando la secuencia. Entonces,

$$F'(X) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} ((F(X + \Delta X) - \text{Dual}(F(X))) \circ \frac{1}{\Delta X})$$

**Proposición 5.3.2.** (*Propiedades de la derivada intervalar*) Si  $A, X \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $F$  y  $G$  son funciones del tipo  $F : I^*(\mathbb{R}) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

$$1. (F(X) + G(X))' = F'(X) + G'(X)$$

$$2. (A \circ X)' = A$$

$$3. (X \circ A)' = \begin{cases} A & \text{si } X \geq 0 \\ \text{Dual}(A) & \text{si } X \leq 0 \\ \text{Sup}(A) & \text{si } X \supseteq 0 \\ \text{Inf}(A) & \text{si } X \subseteq 0 \end{cases}$$

$$4. (-F(X))' = -F'(X)$$

$$5. (\text{Dual}(F(X)))' = \text{Dual}(F'(X))$$

**Proposición 5.3.3.** Si  $F(X) = [\underline{f}(X), \overline{f}(X)]$ ,  $G(X) = [\underline{g}(X), \overline{g}(X)]$  y en un entorno de  $X$ ,  $\underline{h}(X) = \min(\underline{f}, \underline{g})$ ,  $\overline{h}(X) = \max(\overline{f}, \overline{g})$ , entonces

$$(F(X) \vee G(X))' = [\underline{h}'(X), \overline{h}'(X)]$$

y se puede obtener de forma análoga para las demás operaciones reticulares.

Considerando las relaciones entre el producto lineal y el producto aritmético, podemos demostrar la siguiente propiedad.



**Proposición 5.3.4.** Si  $A = [\underline{a}, \bar{a}] \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $X \in D_i(A)$   $i = 1 \div 4$ , siendo  $D_i(A)$  los dominios de distributividad asociados al coeficiente  $A$  (ver [79]),

$$(A * X)'$$

cumple

	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
$A \geq 0$	$A$	$\text{Dual}(A)$	$\text{sup}(A)$	$\text{inf}(A)$
$A \leq 0$	$A$	$\text{Dual}(A)$	$\text{inf}(A)$	$\text{sup}(A)$
$A \supseteq 0$	$A$	$\text{Dual}(A)$	$\sigma(A)$	$0$
$A \subseteq 0$	$A$	$\text{Dual}(A)$	$0$	$\sigma(A)$

siendo

$$\sigma(A) = \begin{cases} \underline{a} & \text{si } \underline{a} = \bar{a} \\ \underline{a} & \text{si } \underline{a} = -\bar{a} \\ \bar{a} & \text{si } |\underline{a}| < |\bar{a}| \\ \underline{a} & \text{si } |\underline{a}| > |\bar{a}| \end{cases}$$

**Definición 5.3.4.** Dados  $X \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $\Delta X \in I^*(\mathbb{R})$  y una función  $F : I^*(\mathbb{R}) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ , definimos

$$F(X, \Delta X) := \Omega(h, \Delta X)F(X + h)$$

**Proposición 5.3.5.** Dados  $X \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $\Delta X \in I^*(\mathbb{R})$  y una función  $F : I^*(\mathbb{R}) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ , se cumple

- a) Si  $\Delta X$  es propio  $F(X, \Delta X) = F(X + \Delta X)$
- b) Si  $\Delta X$  es impropio  $F(X, \Delta X) \supseteq F(X + \Delta X)$

*Demostración.*

$$a) F(X, \Delta X) = \bigvee_{h \in \Delta X'} F(X + h) = \bigvee_{h \in \Delta X'} [\underline{f}(h), \bar{f}(h)] = F(X + \Delta X)$$

$$b) F(X, \Delta X) = \bigwedge_{h \in \Delta X'} F(X + h) = \bigwedge_{h \in \Delta X'} [\underline{f}(h), \bar{f}(h)] \supseteq F(X + \Delta X)$$

□

**Ejemplo 5.3.1.** Consideremos el operador  $F(X) = X^2$ ,  $\Delta X = [0, -1]$ ,  $X = [0, 1]$

$$F(X, \Delta X) = \bigwedge_{h \in \Delta[-1,0]} F([0, 1] + h) = [0, \frac{1}{4}]$$

$$F(X + \Delta X) = [0, 0]$$

En general,  $F(X, \Delta X)$  y  $F(X + \Delta X)$  no coinciden en los puntos en que  $X + \Delta X$  sea un extremo de la función  $F$ , consecuencia de la propiedad 5.3.5 y del hecho que los operadores meet y join no son conmutativos.

**Proposición 5.3.6.**

$$F(X, \Delta X) = F(X) + F'(X) \circ \Delta X + \mathcal{O}(\text{mag}^2(\Delta X))$$

*Demostración.* Se deduce de la definición 5.3.3 y de las propiedades de los operadores meet y join. Ver las referencias [16], [79].  $\square$

De la propiedad 5.3.6 se deduce que el término principal de la derivada es

$$\frac{F(X, \Delta X) \ominus F(X)}{\Delta X}$$

que no es equivalente a

$$\frac{F(X + \Delta X) \ominus F(X)}{\Delta X}$$

a no ser que  $\Delta X$  sea un intervalo puntual, y es debido a que, en general,

$$F(X + \Delta X) \neq F(X, \Delta X)$$

$F'(X)$  es un coeficiente diferencial obtenible por aproximación exterior, que coincide con la derivada en caso de que ésta exista.

Es importante destacar que, en general,

$$F(X) + F'(X) \circ \Delta X \supseteq F(X + \Delta X)$$

(se cumple la igualdad si  $\Delta X$  es un intervalo propio).

Luego si en un problema en diferencias consideramos el planteamiento intervalar desde un principio, es decir, la estructura lineal de los intervalos modales, en este caso, en lugar de considerar la truncación interior debemos aplicar la truncación exterior. Esta relación, no está relacionada con el término de error sino que es consustancial con la estructura de los intervalos.

De los resultados comentados en este apartado, se deduce un método de cálculo para  $F(X, \Delta X)$ , como una aproximación exterior de  $F(X + \Delta X)$ .

Consideremos un problema intervalar discreto dado por un sistema de valores intervalares

$$\{(X_i, F_i)\}_{i \in I}$$

siendo  $X_i = i * h + [0, 1]$ , por ejemplo,  $h = \frac{1}{10}$ . Si nos preguntamos la posibilidad de recuperar el valor puntual  $F(i * h)$ , la respuesta es afirmativa en caso de tener

$$\{(X_i, F_i, F_i^D)\}_{i \in I}$$

siendo  $F_i^D$  una estimación de la derivada, siempre que no estemos alrededor de puntos en los que la función alcance algún extremo, y el modelo sea insensible a las derivadas de orden superior, del mismo modo que lo es la experiencia.



# Capítulo 6

## Ecuaciones diferenciales parciales parabólicas intervalares

Estudiaremos el prototipo de las ecuaciones parabólicas, la ecuación del calor en una dimensión

$$f_t = kf_{xx} \quad (k \text{ constante})$$

que suele considerarse para  $x$  en algún intervalo fijo, por ejemplo  $0 \leq x \leq L$  y el tiempo  $t \geq 0$ , con las condiciones iniciales  $f(x, 0) = u(x)$  y las condiciones de frontera en  $x = 0$  y  $x = L$  para todo  $t \geq 0$ .

Planteamos el problema intervalar modal

$$T_t = KT_{xx} \quad K \in I^*(\mathbb{R})$$

siendo  $T$  la temperatura en grados  $C$  y  $K$  la difusión termal ( $cm^2/s$ ). Consideramos una barra de longitud  $1 \text{ cm}$  y buscamos una función intervalar  $T(x, t)$  que cumpla la distribución inicial de temperatura

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= 200x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ T(x, 0) &= 200(1 - x) & 0.5 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

y que la temperatura en los dos extremos de la barra sea nula en cualquier momento, es decir

$$T(0, t) = T(1, t) = 0$$

### 6.1. Diferencias finitas

Para un problema de propagación unidimensional consideramos una malla bidimensional en el espacio  $xt$ . Usaremos el subíndice  $i$  para representar el espacio (es decir,  $x_i = x_0 + i\Delta x$   $i = 0, \dots, N + 1$ ) y el superíndice  $n$  para representar el tiempo (i.e.  $t^n = n\Delta t$   $n = 0, \dots$ ). Así pues, el punto  $(i, n)$  corresponde al lugar

$(x_i, t^n)$  en el dominio solución  $D(x, t)$ .

La variable dependiente en un punto de la malla se representará con la misma notación de subíndice y superíndice. Así pues, la función  $f(x, t)$  en el punto  $(i, n)$  se representa por

$$f(x_i, t^n) = f_i^n$$

y si las funciones son intervalares

$$T(x_i, t^n) = T_i^n$$

De forma similar, las derivadas se representan como

$$\frac{\partial f(x_i, t^n)}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i^n = f_t \Big|_i^n$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, t^n)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i^n = f_{xx} \Big|_i^n$$

En nuestro caso, planteamos la resolución intervalar del problema

$$T_t = KT_{xx}$$

siendo  $0 \leq x \leq L$  y  $t \geq 0$ , luego  $x_0 = 0$  y  $t^0 = 0$ .

Las condiciones iniciales del problema se representan por

$$T_i^0 = 200 \frac{i}{N+1} \quad 0 \leq i \leq \frac{N+1}{2}$$

$$T_i^0 = 200(1 - \frac{i}{N+1}) \quad \frac{N+1}{2} \leq i \leq N+1$$

y las condiciones de contorno por  $T_0^n = 0$ ,  $T_{N+1}^n = 0$   $n = 0, \dots$

Observemos que si la longitud de la barra es 1 cm,

$$T_0^n = T(x_0, t^n) = T(0, t^n)$$

$$T_{N+1}^n = T(x_{N+1}, t^n) = T(1, t^n)$$

## 6.2. Método explícito

En primer lugar, estudiaremos la resolución numérica de la ecuación

$$f_t = kf_{xx} \quad (k \text{ constante})$$

mediante una aproximación en diferencias finitas centradas hacia adelante, es decir,

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = k \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

de donde se deduce

$$f_i^{n+1} = f_i^n + d(f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n)$$

siendo  $d = k \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  la constante de difusión.

Considerando  $K \in I^*(\mathbb{R})$  y condiciones iniciales y de contorno intervalares nos planteamos el problema en diferencias intervalar asociado a

$$f_i^{n+1} = g(f_i^n, f_{i+1}^n, f_{i-1}^n, d)$$

siendo  $gR$  el árbol sintáctico que muestra la figura 6.1.

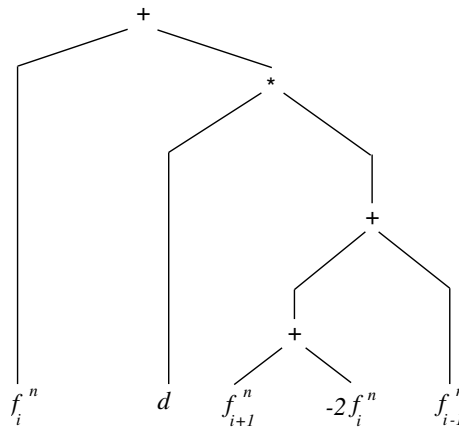


Fig. 6.1

La interpretación semántica del cálculo intervalar

$$G(T_i^n, T_{i+1}^n, T_{i-1}^n, D) \subseteq T_i^{n+1}$$

asociado al método explícito y diferencias centradas hacia adelante,

$$T_i^{n+1} = T_i^n + D * (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

tomará la lógica

$$U(xd_p, X'_{Dp})Q(t_i^{n+1}, T_i^{n+1})E(xd_i, X'_{Di})g(xd_p, xd_i) = t_i^{n+1}$$

cuya validez dependerá de las variables intervalares  $X_D = (T_i^n, T_{i+1}^n, T_{i-1}^n, D) \in I^*(\mathbb{R}^n)$  que intervengan en las operaciones racionales que define la función  $g$ .

La convergencia de este método está demostrada [34] para  $d \leq \frac{1}{2}$  luego, si el método  $g$  es estable, las soluciones digitales puntuales a las que se refiere el teorema semántico, cumplirán la condición

$$\forall \delta \in \Delta \exists \varepsilon > 0 : g(xd + \delta) = t_i^{n+1} + \varepsilon$$

Así pues, considerando  $K \in I^*(\mathbb{R})$ ,  $D = K \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \in I^*(\mathbb{R})$  obtenemos el cálculo

$$T_i^{n+1} = T_i^n + D * (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

que intentaremos optimizar aplicando los teoremas de optimalidad y optimalidad condicionada expuestos en el tercer capítulo de este texto.

En nuestro caso, la función  $gR$  no es sintácticamente conmutativa porque existen operadores no uniformemente monótonos seguidos inferiormente en el árbol sintáctico por operadores no monarios. Estudiaremos la condición de conmutatividad c-sintáctica intentando aplicar el teorema de coerción a la optimalidad condicionada ya que en este caso tenemos la variable  $f_i^n$  como multiincidente.

Consideremos  $f(g, h) = gh$  siendo  $g(d) = d$  y

$$h(f_{i+1}^n, f_i^n, f_{i-1}^n) = f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n$$

Se cumple

- $f$  es  $h$ -uniformemente monótona
- $f$  es  $g$ -parcialmente monótona
- $h$  es optimal para  $(T_{i+1}^n, T_i^n, T_{i-1}^n)$  ya que  $h$  es uniformemente monótona respecto cada una de las variables, isotónica respecto  $f_{i+1}^n$  y  $f_{i-1}^n$  y antitónica respecto  $f_i^n$ .
- $D$  es unimodal
- $D$  y  $(T_{i+1}^n, T_i^n, T_{i-1}^n)$  no tienen componentes en común

luego la función es c-sintácticamente conmutativa.

Veamos si se cumple la condición de monotonía global para la variable  $f_i^n$  multiincidente,

$$\frac{\partial f_i^{n+1}}{\partial f_i^n} = 1 - 2d > 0 \quad (\Leftrightarrow d < \frac{1}{2})$$

condición de convergencia del método, luego  $gR$  es totalmente monótona respecto de  $f_i^n$ , isotónica para la primera incidencia y antitónica para la segunda.

Aplicando pues, el teorema 3.5.5. de coerción a la optimalidad condicionada, el cálculo intervalar optimal es

$$T_i^{n+1} = T_i^n + D * (T_{i+1}^n - 2Dual(T_i^n) + T_{i-1}^n)$$



Veamos a continuación, a nivel de ejemplo, una situación concreta para ilustrar el comportamiento intervalar de este tipo de problemas.

Supongamos que la longitud de la barra es  $L = 1.0 \text{ cm}$  y el coeficiente de difusión térmica  $k = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ . La distribución inicial de temperatura en la barra se especifica por

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= 200x & 0.0 \leq x \leq 0.5 \\ T(x, 0) &= 200(1 - x) & 0.5 \leq x \leq 1.0 \end{aligned}$$

siendo  $T$  la temperatura en grados centígrados (C). La temperatura en los dos extremos de la barra es de  $0.0 \text{ C}$  para cualquier instante de tiempo, luego

$$T(0.0, t) = T(1.0, t) = 0.0$$

En estas condiciones, la solución del problema considerando  $\Delta x = 0.1 \text{ cm}$ ,  $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ . para  $n = 10$  es la que ilustra la figura 6.2.

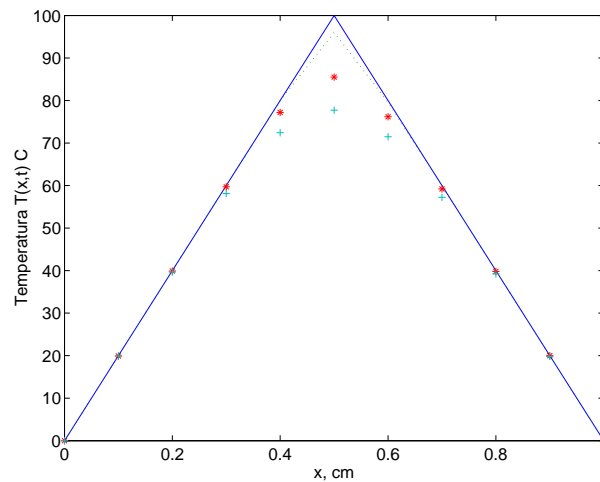


Fig. 6.2

Supongamos que debido a la composición material de la barra no conocemos el valor exacto del coeficiente de difusión térmica  $k$ . Por ejemplo, para

- hormigón  $1600 \text{ Kg}/\text{m}^3$ ,  $k = 0.004596 \text{ cm}^2/\text{s}$
- hormigón  $2080 \text{ Kg}/\text{m}^3$ ,  $k = 0.006585 \text{ cm}^2/\text{s}$
- hormigón  $2400 \text{ Kg}/\text{m}^3$ ,  $k = 0.009839 \text{ cm}^2/\text{s}$

Consideremos pues  $K = [0.004, 0.01]$

Observemos que

$$D = K * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = [0.004, 0.01] * \frac{0.1}{(0.1)^2} = [0.04, 0.1] < [0.5, 0.5]$$

luego se mantiene la condición de convergencia del método explícito, que tal como vimos anteriormente, coincide con la condición de monotonía global para  $f_i^n$  que exige el teorema de coerción a la optimalidad condicionada.

Las figuras 6.3 y 6.4 muestran los resultados intervalares considerando el cálculo intervalar

$$T_i^{n+1} = T_i^n + D * (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)$$

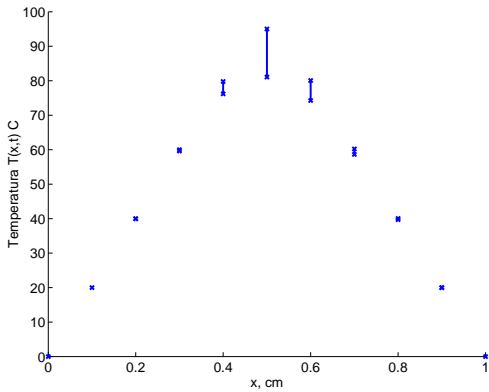


Fig. 6.3  $n = 10, t = 5$

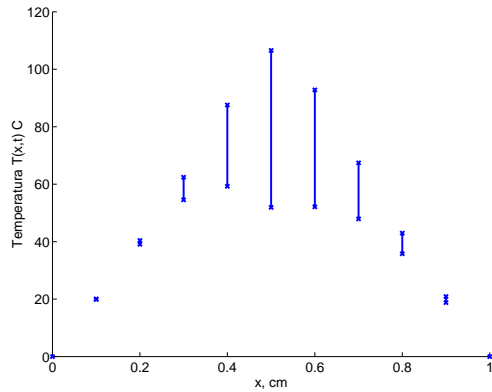


Fig. 6.4  $n = 10, t = 10$

mientras que las figuras 6.5. y 6.6 corresponden al cálculo intervalar optimal

$$T_i^{n+1} = T_i^n + D * (T_{i+1}^n - 2Dual(T_i^n) + T_{i-1}^n)$$

que como observamos reduce la amplitud de los intervalos solución.

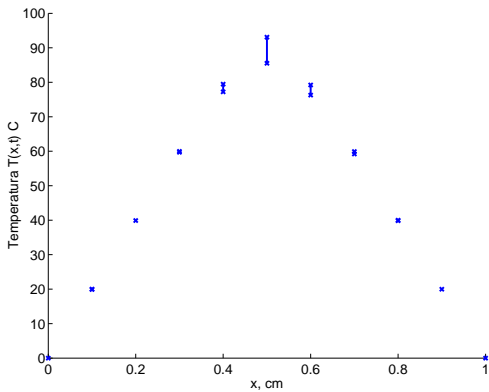


Fig. 6.5  $n = 10, t = 5$

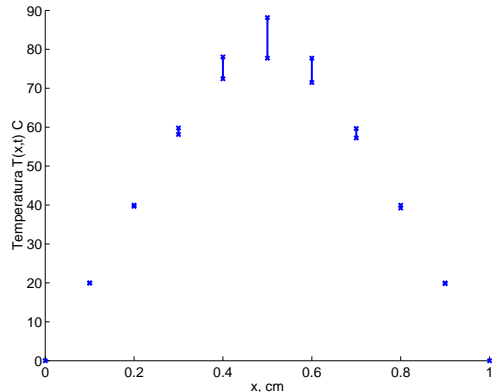


Fig. 6.6  $n = 10, t = 10$

De la misma manera que en el capítulo de ecuaciones diferenciales ordinarias, la inestabilidad de los métodos puntuales también se ve reflejada en los problemas intervalares. Por ejemplo, si no se cumple la condición de estabilidad,  $D < [0.5, 0.5]$  el método intervalar tampoco es estable, coherentemente con la situación análoga en  $\mathbb{R}$ .

Las gráficas 6.7 y 6.8 muestran los cálculos obtenidos al considerar  $K = [0.009, 0.1]$ .

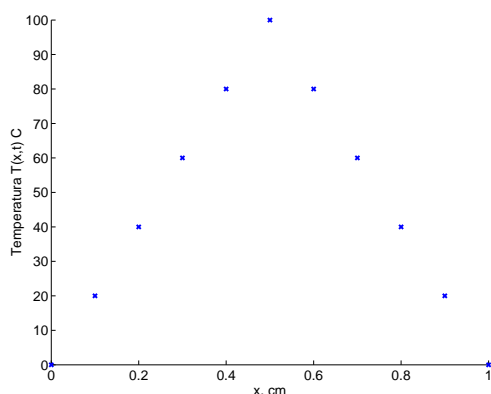


Fig. 6.7  $n = 10, t = 0$

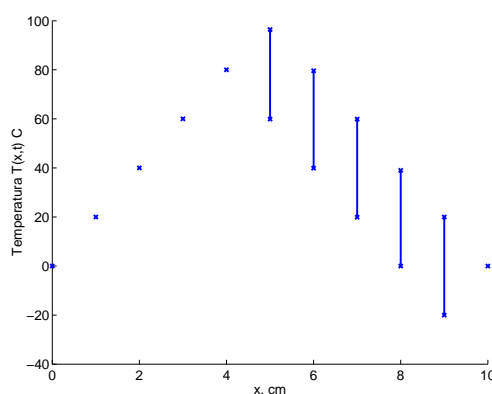


Fig. 6.8  $n = 10, t = 1$

que cumple

$$D = K * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = [0.009, 0.1] * \frac{0.1}{(0.1)^2} = [0.09, 1] \not\subset [0.5, 0.5]$$

### 6.3. Métodos implícitos

Los métodos explícitos de diferencias finitas presentan un gran inconveniente, y es que son condicionalmente estables o incluso en ciertas ocasiones, no son consistentes con la ecuación diferencial en derivadas parciales. Este problema no se presenta en los métodos implícitos de diferencias finitas, que son incondicionalmente estables, aunque presentan mayor dificultad de cálculo.

El método implícito intervalar provoca el estudio de los intervalos en su contexto lineal  $I^\circ(\mathbb{R})$  porque el producto aritmético intervalar no es lineal en el sentido de no conservación de las propiedades geométricas globales de un determinado problema.

#### 6.3.1. Método de Crank-Nicolson

La condición de convergencia del método explícito tiene desventajas ya que para alcanzar una exactitud suficiente es necesario elegir  $\Delta x$  pequeños, lo cual hace que,  $\Delta t$  sea muy pequeño. El método de Crank-Nicolson que estudiaremos a continuación es incondicionalmente estable. Ver [34].

La aproximación en diferencias propuesta por Crank y Nicolson (1947) consiste en aproximar en el punto  $(i, n + \frac{1}{2})$  por

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{f(x_i, t^{n+1}) - f(x_i, t^n)}{\Delta t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t^{n+1}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i, t^n) \right)$$

de donde se deduce la aproximación en diferencias finitas de la ecuación  $f_t = kf_{xx}$ ,

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = k \frac{1}{2} \left( \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right)$$

que reordenando términos equivale a

$$-df_{i-1}^{n+1} + 2(1-d)f_i^{n+1} - df_{i+1}^{n+1} = df_{i-1}^n + 2(1-d)f_i^n + df_{i+1}^n \quad (6.1)$$

siendo  $d = k \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  la constante de difusión.

Si consideramos la malla de diferencias finitas que permite obtener la solución del nivel  $n+1$  a partir de la solución del nivel  $n$ , la ecuación 6.1 se aplica directamente del punto 2 hasta el punto  $N-1$  (siendo  $N+1$  el último punto de la malla respecto a la coordenada  $x$ ). En los puntos 1 y  $N$  modificamos la ecuación 6.1 considerando los valores conocidos  $f(0, t)$  y  $f(L, t)$  (condiciones de frontera del problema).

De este modo obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 2(1+d) & -d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d & 2(1+d) & -d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d & 2(1+d) & -d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 2(1+d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ f_3^{n+1} \\ \vdots \\ f_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} b_1 &= df(0, t^n) + 2(1-d)f_1^n + df_2^n + df(0, t^{n+1}) \\ b_2 &= df_1^n + 2(1-d)f_2^n + df_3^n \\ b_3 &= df_2^n + 2(1-d)f_3^n + df_4^n \\ &\vdots \\ b_N &= df_{N-1}^n + 2(1-d)f_N^n + df(L, t^n) + df(L, t^{n+1}) \end{aligned}$$

Este problema puede resolverse en el contexto de  $I^*(\mathbb{R})$  aplicando el método propuesto en las referencias [60] [61], tal como se ha escrito en el apéndice C de este texto.

Sin embargo, existen problemas con la interpretación semántica del sistema si la modalidad de alguna de las incógnitas es impropia, tal como se ha estudiado en el capítulo 4. Además, estamos encubriendo un problema en la resolución del sistema que comentaremos a continuación en el caso más simple, considerando

$N = 2$ .

$$\begin{pmatrix} 2(1+D) & -D \\ -D & 2(1+D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Si consideramos el producto aritmético,

$$\begin{pmatrix} 2(1+D) & -D \\ -D & 2(1+D) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

pasamos a estudiar un problema macroscópicamente no lineal cuando en realidad, el sistema planteado corresponde a un problema lineal. Considerando en  $I^*(\mathbb{R})$  las operaciones aritméticas, dos puntos no definen una recta, sin embargo en  $I^\circ(\mathbb{R})$  sí se mantiene esta propiedad geométrica de  $\mathbb{R}$ . Esto es debido a que  $(I^*(\mathbb{R}), +, \circ)$  tiene estructura de anillo conmutativo con elemento unidad, mientras que las operaciones aritméticas de  $I^*(\mathbb{R})$  están definidas mediante la estructura reticular.

Observemos por ejemplo, que

$$[1, 2] * [-2, 3] = [-4, 6]$$

luego no se mantiene el producto de ínfimos y supremos, propiedad que sí conserva el producto lineal estudiado en el capítulo 4,

$$[1, 2] \circ [-2, 3] = [-2, 6]$$

Es importante observar que la resolución del sistema es distinta considerando el producto aritmético, o bien el producto lineal.

Por ejemplo, si  $D = [0.1, 0.1]$ ,  $F_1 = F_2 = [1, 1.1]$ ,

$$\begin{pmatrix} 2(1+D) & -D \\ -D & 2(1+D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

si consideramos en una supuesta aritmética exacta, las operaciones aritméticas se cumple,

$$\begin{pmatrix} [2.2, 2.2] & [-0.1, -0.1] \\ [-0.1, -0.1] & [2.2, 2.2] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [1, 1.1] \\ [1, 1.1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2.09, 2.32] \\ [2.09, 2.32] \end{pmatrix}$$

y si consideramos las operaciones lineales

$$\begin{pmatrix} [2.2, 2.2] & [-0.1, -0.1] \\ [-0.1, -0.1] & [2.2, 2.2] \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} [1, 1.1] \\ [1, 1.1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2.1, 2.31] \\ [2.1, 2.31] \end{pmatrix}$$

Consideremos el valor  $D \in I^*(\mathbb{R})$  correspondiente al problema del calor que hemos estudiado para  $K = [0.004, 0.01]$ .

$$D = K * \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = [0.004, 0.01] * \frac{0.1}{(0.1)^2} = [0.04, 0.1]$$

Si la semántica está referida a las relaciones entre los números reales, es decir una visión microscópica del problema, debemos considerar el producto aritmético, y obtenemos

$$\begin{pmatrix} [2.08, 2.2] & -[0.04, 0.1] \\ -[0.04, 0.1] & [2.08, 2.2] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [1, 1.1] \\ [1, 1.1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1.97, 2.38] \\ [1.97, 2.38] \end{pmatrix}$$

Si el sistema intervalar refleja una linealidad macroscópica debemos considerar el modelo lineal con planteamiento lineal, es decir, considerar el producto lineal y la diferencia lineal,

$$\begin{pmatrix} [2.08, 2.2] & \underline{\circ}[0.04, 0.1] \\ \underline{\circ}[0.04, 0.1] & [2.08, 2.2] \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} [1, 1.1] \\ [1, 1.1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2.04, 2.31] \\ [2.04, 2.31] \end{pmatrix}$$

Observemos que las diferencias entre las soluciones se acentúan y tanto si  $F_1$  y  $F_2$  son intervalos propios como impropios, los intervalos  $B_1$  y  $B_2$  obtenidos al considerar las operaciones aritméticas en  $I^*(\mathbb{R})$  siempre contienen a los intervalos  $B_1$  y  $B_2$  obtenidos al considerar las operaciones lineales en  $I^\circ(\mathbb{R})$ . Sin embargo, la cuestión realmente importante es que las soluciones son distintas al considerar las distintas operaciones intervalares, tanto si consideramos intervalos propios como impropios.

$$\begin{pmatrix} [2.08, 2.2] & -[0.04, 0.1] \\ -[0.04, 0.1] & [2.08, 2.2] \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} [1.1, 1] \\ [1.1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2.18, 2.16] \\ [2.18, 2.16] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} [2.08, 2.2] & \underline{\circ}[0.04, 0.1] \\ \underline{\circ}[0.04, 0.1] & [2.08, 2.2] \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} [1.1, 1] \\ [1.1, 1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [2.24, 2.1] \\ [2.24, 2.1] \end{pmatrix}$$

Existe un tercer caso que consiste en considerar el producto lineal y la diferencia aritmética. La elección de considerar unas operaciones u otras dependerá del modelo que estemos considerando en cada ejemplo concreto.

El estudio de sistemas intervalares en una aritmética con truncación, plantea problemas que ilustraremos en el siguiente ejemplo.

Consideremos el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2(1+d) * X - d * Dual(Y) &= A \\ -d * Dual(X) + 2(1+d) * Y &= B \end{aligned} \right\}$$

para los valores  $d = 0.5$ ,  $A = [5, 2.5]$  y  $B = [5, 2.5]$ .

En una aritmética exacta obtenemos  $X = Y = [2, 1]$  porque

$$\left. \begin{aligned} 3 * [2, 1] - 0.5 * [1, 2] &= [5, 2.5] \\ -0.5 * [1, 2] + 3 * [2, 1] &= [5, 2.5] \end{aligned} \right\}$$

y la interpretación semántica del sistema es

$$U(y, [1, 2]')U(a, [2.5, 5]')E(x, [1, 2]') : a = 3x - 0.5y$$

$$U(x, [1, 2]')U(b, [2.5, 5]')E(y, [1, 2]') : b = -0.5x + 3y$$

Supongamos que en una aritmética con truncación obtuviéramos el resultado  $X = [2.1, 0.9]$ , truncación m-interior (modalmente interior), es decir

$$[2.1, 0.9] \subseteq [2, 1]$$

para garantizar la semántica correcta de  $f^*$ .

Consideramos el sistema,

$$\left. \begin{aligned} 3 * [2.1, 0.9] - 0.5 * [1, 2] &= [5.3, 2.2] \subseteq [5, 2.5] \\ -0.5 * [0.9, 2.1] + 3 * [2, 1] &= [4.95, 2.55] \supseteq [5, 2.5] \end{aligned} \right\}$$

y observamos que una truncación interior de las variables no implica que el sistema mantenga la propiedad inclusiva. Luego la truncación es incoherente con la lógica del sistema pues la segunda ecuación no sería interpretable de acuerdo con la semántica deseada.

Si en lugar de considerar las operaciones aritméticas en  $I^*(\mathbb{R})$  consideramos  $I^\circ(\mathbb{R})$  veremos a continuación que el problema de la truncación se mantiene.

Supongamos ahora que en el sistema

$$\begin{pmatrix} 2(1+D) & -D \\ -D & 2(1+D) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

los valores  $F_1$  y  $F_2$  son las incógnitas y  $B_1 = B_2 = [2.04, 2.31]$  dados, siendo  $D = [0.04, 0.1]$ . Como en una aritmética con truncación no podemos pretender obtener una solución exacta obtendremos una solución truncada.

Al no existir ningún algoritmo que nos de la solución, impondremos que la solución sea inclusiva, es decir

$$\begin{pmatrix} [2.08, 2.2] & [-0.04, -0.1] \\ [-0.04, -0.1] & [2.08, 2.2] \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} [2.04, 2.31] \\ [2.04, 2.31] \end{pmatrix}$$

Considerando  $F_1, F_2 \geq 0$ , de la primera ecuación del sistema

$$[2.08, 2.2] \circ F_1 + [-0.04, -0.1] \circ F_2 \subseteq [2.04, 2.31]$$

equivalente a

$$[2.08, 2.2] * F_1 + [-0.04, -0.1] * Dual(F_2) \subseteq [2.04, 2.31]$$

se deduce que  $F_1$  debe truncarse interiormente porque si  $F'_1$  es una aproximación de  $F_1$ , debe cumplirse

$$[2.08, 2.2] * F'_1 + [-0.04, -0.1] * Dual(F_2) \subseteq [2.04, 2.31]$$

luego

$$F'_1 \subseteq F_1$$

De la segunda ecuación del sistema

$$[-0.04, -0.1] \circ F_1 + [2.08, 2.2] \circ F_2 \subseteq [2.04, 2.31]$$

equivalente a

$$[-0.04, -0.1] * Dual(F_1) + [2.08, 2.2] * F_2 \subseteq [2.04, 2.31]$$

se deduce que  $F_1$  debe truncarse exteriormente, porque si  $F'_1$  es una aproximación de  $F_1$  debe cumplirse

$$[-0.04, -0.1] * Dual(F'_1) + [2.08, 2.2] * F_2 \subseteq [2.04, 2.31]$$

luego

$$Dual(F'_1) \subseteq Dual(F_1) \Rightarrow F'_1 \supseteq F_1$$



Luego existe una incoherencia que hace inviable construir un proceso de truncación coherente con la semántica a aplicar.

Observemos que la suposición  $F_1, F_2 \geq 0$  es totalmente prescindible para el razonamiento referente al problema de la truncación. En este caso hacemos ésta suposición, porque  $F_1$  y  $F_2$  eran conocidos a priori.

Al considerar un modelo lineal completo, la truncación no tiene sentido y la única manera de prescindir de la truncación es calcular con marcas en lugar de considerar cotas, luego la solución de este problema se encuentra en los intervalos de marcas. Sin embargo, el hecho de considerar intervalos de marcas no significa que se pueda resolver cualquier problema. Podremos calcular sistemas de ínfimos y supremos pero siempre que no consideremos intervalos que contengan al cero; existe la posibilidad de que un sistema iterativo no tenga solución y/o que su interpretación semántica sea incoherente con el sistema.

La base de esta problemática radica en que no podemos deducir de un algoritmo en  $\mathbb{R}$  un algoritmo en  $I^*(\mathbb{R})$  porque de las relaciones  $\leq$  y  $\geq$  de  $\mathbb{R}$  pasamos a las relaciones  $\leq, \geq, \subseteq$  y  $\supseteq$  en  $I^*(\mathbb{R})$ . No tiene sentido plantear las relaciones de inclusividad en el conjunto de los números reales y no tiene sentido prescindir de ellas en el conjunto de los intervalos.

Luego en  $I^*(\mathbb{R})$  no existe un único modelo derivado de un modelo real y estamos en la misma situación que por ejemplo si pretendiéramos deducir la geometría en el plano de la geometría de la recta real. Así pues, un modelo asociado a un problema intervalar debe plantearse desde su inicio desde el punto de vista intervalar.

### 6.3.2. Backward-Time-Centered-Space method

Planteamos a continuación, la resolución numérica de la ecuación

$$f_t = kf_{xx} \quad (k \text{ constante})$$

mediante una aproximación en diferencias finitas centradas hacia atrás, es decir,

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = k \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

que reordenando términos equivale a

$$-df_{i-1}^{n+1} + (1 + 2d)f_i^{n+1} - df_{i+1}^{n+1} = f_i^n \quad (6.2)$$

siendo  $d = k \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$  la constante de difusión.

Si consideramos la malla de diferencias finitas que permite obtener la solución del nivel  $n + 1$  a partir de la solución del nivel  $n$ , la ecuación 6.2 se aplica directamente del punto 2 hasta el punto  $N - 1$  (siendo  $N + 1$  el último punto de la malla respecto a la coordenada  $x$ ). En los puntos 1 y  $N$  modificamos la ecuación 6.2 considerando los valores conocidos  $f(0, t)$  y  $f(L, t)$  (condiciones de frontera del problema).

De este modo obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} (1+2d) & -d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d & (1+2d) & -d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d & (1+2d) & -d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d & (1+2d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ f_3^{n+1} \\ \vdots \\ f_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} b_1 &= f_1^n + df(0, t^{n+1}) \\ b_2 &= f_2^n \\ b_3 &= f_3^n \\ &\vdots \\ b_N &= f_N^n + df(L, t^{n+1}) \end{aligned}$$

que prescindiendo de la notación matricial, podemos escribir como:

$$\left. \begin{aligned} (1+2d)f_1^{n+1} - df_2^{n+1} - f_1^n - df_0^{n+1} &= 0 \\ -df_1^{n+1} + (1+2d)f_2^{n+1} - df_3^{n+1} - f_2^n &= 0 \\ -df_2^{n+1} + (1+2d)f_3^{n+1} - df_4^{n+1} - f_3^n &= 0 \\ \cdots & \\ -df_{N-1}^{n+1} + (1+2d)f_N^{n+1} - f_N^n - df_{N+1}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Planteamos a continuación el problema intervalar

$$T_t = KT_{xx} \quad K \in I^*(\mathbb{R})$$

y estudiamos su resolución aplicando el método de diferencias centradas hacia atrás, luego nuestro objetivo es resolver el siguiente sistema intervalar:

$$\left. \begin{aligned} (1+2D) * T_1^{n+1} - D * T_2^{n+1} - T_1^n - D * T_0^{n+1} &= 0 \\ -D * T_1^{n+1} + (1+2D) * T_2^{n+1} - D * T_3^{n+1} - T_2^n &= 0 \\ -D * T_2^{n+1} + (1+2D) * T_3^{n+1} - D * T_4^{n+1} - T_3^n &= 0 \\ \cdots & \\ -D * T_{N-1}^{n+1} + (1+2D) * T_N^{n+1} - T_N^n - D * T_{N+1}^{n+1} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

siendo  $D = K \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ .

Si intentamos aplicar los teoremas de optimalidad del análisis intervalar modal para resolver el sistema, encontramos que la variable  $D$  (la única multiincidente) no tiene monotonía definida independientemente de cada caso particular, tal como se demuestra a continuación.

Definimos

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= (1 + 2d)f_1^{n+1} - df_2^{n+1} - f_1^n - df_0^{n+1} \\ F_2 &= -df_1^{n+1} + (1 + 2d)f_2^{n+1} - df_3^{n+1} - f_2^n \\ F_3 &= -df_2^{n+1} + (1 + 2d)f_3^{n+1} - df_4^{n+1} - f_3^n \\ &\dots \\ F_N &= -df_{N-1}^{n+1} + (1 + 2d)f_N^{n+1} - f_N^n - df_{N+1}^{n+1} \end{aligned} \right\}$$

luego

$$\frac{\partial F_i}{\partial d} = -f_{i-1}^{n+1} + 2f_i^{n+1} - f_{i+1}^{n+1} \quad (i = 1, \dots, N)$$

y al no tener signo definido no permite aplicar los teoremas de optimalidad.

Este inconveniente se puede resolver reordenando los términos del sistema 6.3 tal como estudiamos para el método de Crank-Nicolson; obtendremos soluciones microscópicamente correctas, pero sigue existiendo el mismo problema de interpretación que en el método anterior, implícito a cualquier problema que técnicamente se plantea en términos de sistemas lineales. Necesitamos mantener la linealidad macroscópica del problema y por ello debemos recurrir a  $I^\circ(\mathbb{R})$  que se digitaliza en  $I_M^\circ(\mathbb{R})$ , es decir debemos recurrir a los intervalos de marcas.



## Capítulo 7

# Aplicación al estudio de pilotes sometidos a cargas laterales

En el ejemplo que abordamos a continuación, se trata de determinar los desplazamientos horizontales que experimentan pilotes sometidos a la acción de una carga lateral. Resolvemos el problema aplicando la teoría del Análisis Intervalar Modal ya que se considerarán como datos del problema valores intervalares modales.

En el dimensionamiento de pilotes frente a cargas horizontales el criterio fundamental de diseño no suele ser el criterio resistente, sino la flecha máxima admisible. Así como en cierto tipo de estructuras (provisionales) se puede admitir que su cimentación pueda tener movimientos relativamente importantes, no es el caso de los puentes o edificios de gran altura en los que es imprescindible limitar al máximo los movimientos admisibles en sus cimentaciones. Tradicionalmente se ha hecho uso de datos experimentales obtenidos de ensayos a gran escala para estimar los movimientos horizontales del pilote en función del tipo de suelo en que se ejecute. Más recientemente se han desarrollado aproximaciones teóricas que permiten predecir correctamente estos corrimientos laterales. Una de las teorías más comúnmente empleadas ha sido la aproximación de Winkler (“subgrade-reaction”). En ella no se considera la continuidad del suelo y se considera que el esfuerzo en un punto del pilote es directamente proporcional a la flecha en ese punto. El planteamiento de la teoría de Winkler conduce a la resolución de una ecuación diferencial ordinaria lineal de cuarto orden, con condiciones de contorno en ambos extremos del pilote.

Para describir el comportamiento estructural del pilote frente a la acción de la carga lateral  $Q_H$ , se recurre a la teoría clásica de vigas (teoría de Euler-Bernouilli). Teniendo en cuenta que el pilote está sujeto, adicionalmente, a la presión de confinamiento del terreno, e ignorando el efecto de cargas axiales, puede escribirse

la ecuación de flexión de vigas,

$$E_p I_p \frac{d^4 \omega(z)}{dz^4} = -p(z)$$

donde  $E_p$  es el módulo de Young del pilote;  $I_p$  el momento de inercia de su sección;  $\omega(z)$  el desplazamiento horizontal de un punto del pilote a profundidad  $z$  y  $p(z)$  la reacción del terreno por unidad de longitud.

Observemos que para un pilote de sección cilíndrica

$$I_p = \pi \frac{D^4}{64}$$

La teoría de Winkler asume que la relación entre la reacción  $p$  del terreno por unidad de longitud y el desplazamiento horizontal  $\omega$  de un punto del pilote viene dada por

$$p(z) = k_h(z) D \omega(z)$$

relación lineal, donde  $D$  es el diámetro del pilote y  $k_h$ , el módulo de reacción del suelo.

Combinando la ecuación de flexión de vigas con la hipótesis de Winkler, la ecuación de gobierno para el problema de desplazamientos verticales en un pilote sometido a carga lateral, resulta ser

$$E_p I_p \frac{d^4 \omega(z)}{dz^4} + k_h(z) D \omega(z) = 0$$

para  $0 < z < L$ , siendo  $L$  la longitud total del pilote.

Para resolver la ecuación diferencial planteada es necesario llegar a establecer hasta cuatro condiciones de contorno en el pilote. Se deberán establecer dos condiciones en la cabeza del pilote y dos condiciones en su frontera.

Para establecer las condiciones de contorno correspondientes a la cabeza del pilote, se pueden plantear dos posibles situaciones.

1. Cabeza libre: en este caso se supone que no existe ningún tipo de elemento que impida los movimientos (horizontal y giro) de la cabeza. Al no poder establecer condiciones sobre los movimientos se deberán imponer las condiciones sobre los esfuerzos. En particular se deberá establecer que el valor del cortante y el momento en  $z = 0$  son iguales a las cargas transmitidas por la estructura al pilote.

$$\text{Cortante} \quad E_p I_p \left. \frac{d^3 \omega}{dz^3} \right|_{z=0} = Q_H$$

$$\text{Momento} \quad E_p I_p \left. \frac{d^2 \omega}{dz^2} \right|_{z=0} = M$$

2. Cabeza empotrada: esta situación corresponde a una cimentación con encepado. La restricción de empotramiento se impone únicamente sobre el giro, puesto que con este tipo de cimentación no queda restringido el movimiento horizontal de la cabeza del pilote. Así, además de la condición sobre el giro, se deberá establecer una condición sobre los esfuerzos. Esta condición se debe establecer sobre el valor del esfuerzo cortante.

$$\text{Giro} \quad E_p I_p \left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=0} = 0$$

$$\text{Cortante} \quad E_p I_p \left. \frac{d^3 \omega}{dz^3} \right|_{z=0} = Q_H$$

Para establecer las condiciones de contorno en la puntera del pilote también se deben considerar dos posibles situaciones.

1. Pilote flotante: en esta situación se considera que la puntera del pilote no tiene coaccionado ninguno de sus movimientos, por lo que la situación es análoga a la planteada para la situación de cabeza libre.

$$\text{Cortante} \quad E_p I_p \left. \frac{d^3 \omega}{dz^3} \right|_{z=L} = 0$$

$$\text{Momento} \quad E_p I_p \left. \frac{d^2 \omega}{dz^2} \right|_{z=L} = 0$$

2. Pilote empotrado en roca: en esta situación se impide cualquier tipo de movimiento en la puntera del pilote, por lo que se deberá imponer que tanto el desplazamiento horizontal como el giro en la puntera sean nulos.

$$\text{Desplazamiento} \quad \omega(z = L) = 0$$

$$\text{Giro} \quad E_p I_p \left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=L} = 0$$

Para completar la formulación del problema es necesario hacer una hipótesis adicional sobre la variación del módulo de reacción del suelo a lo largo del contacto suelo-pilote. La distribución más aceptada es la propuesta por Palmer y Thomson en 1948, dada por

$$k_h(z) = k_L \left( \frac{z}{L} \right)^\gamma$$

donde  $k_L$  es el valor de  $k_h$  en la punta del pilote ( $z = L$ ) y  $\gamma \geq 0$  es un índice empírico.

Habitualmente, se acepta para arcillas  $\gamma = 0$  (es decir,  $k_h$  constante con la profundidad). Esta aproximación proporciona buenos resultados para el caso de suelos granulares poco cohesivos (arenas) tomando como valor de  $\gamma$  la unidad ( $\gamma = 1$ ) es decir, módulo variable linealmente con la profundidad.

Por otra parte, en el caso  $\gamma = 1$ , es costumbre escribir

$$k_h(z) = n_h \left( \frac{z}{D} \right)$$

donde  $n_h$  es un nuevo coeficiente de balasto.

Davisson y Prakash sugieren en 1963,  $\gamma = 0.15$  para arcillas, (presumiblemente en condiciones no drenadas) argumentando que de este modo se contempla la posibilidad de un comportamiento plástico del suelo en superficie.

## 7.1. Pilote flotante y cabeza empotrada

Se considera un pilote de hormigón, de geometría cilíndrica, ejecutado en un estrato de suelo de espesor  $H$ , por debajo del cual se encuentra terreno competente. El pilote se considera aislado y la profundidad de su punta es inferior a la del estrato rígido (pilote flotante). La cabeza del pilote se supone empotrada y sometida a una carga horizontal  $Q_H$ .

El estudio de pilotes sometidos a cargas laterales recorriendo a la teoría clásica de vigas (teoría de Euler-Bernoulli) y a la teoría de Winkler anteriormente comentada, hemos visto que conduce a la resolución de la ecuación diferencial

$$E_p I_p \frac{d^4 \omega(z)}{dz^4} + k_h(z) D \omega(z) = 0 \quad 0 < z < L$$

En la situación particular de pilote flotante y cabeza empotrada, las condiciones de contorno del problema son:

$$\begin{aligned} E_p I_p \left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=0} &= 0 \\ E_p I_p \left. \frac{d^3 \omega}{dz^3} \right|_{z=0} &= Q_H \\ E_p I_p \left. \frac{d^3 \omega}{dz^3} \right|_{z=L} &= 0 \\ E_p I_p \left. \frac{d^2 \omega}{dz^2} \right|_{z=L} &= 0 \end{aligned}$$



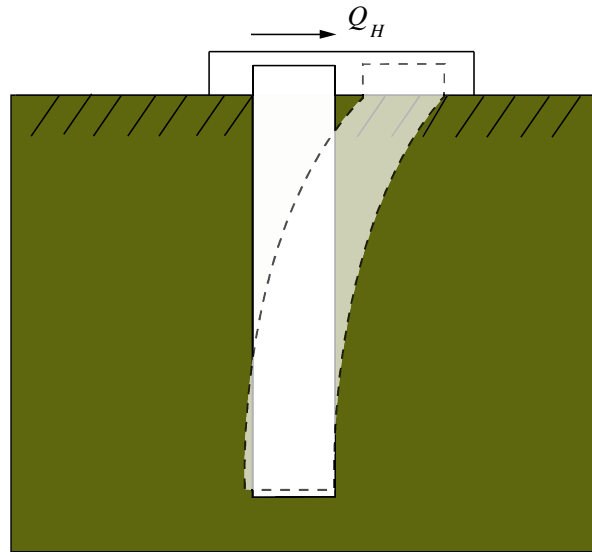


Fig. 7.1 Pilote flotante y cabeza empotrada

considerando la reacción del suelo (contacto suelo-pilote)

$$k_h(z) = k_L \left( \frac{z}{L} \right)^\gamma \quad \gamma \geq 0$$

es decir,

$$\omega^{(4)}(z) = -k \left( \frac{z}{L} \right)^\gamma \omega(z)$$

siendo

$$k = \frac{k_L}{E_p I_p} D$$

Consideraremos suelo de arcillas para el cual, y tal como hemos comentado anteriormente, se acepta  $\gamma = 0$ . En este caso obtenemos la ecuación diferencial

$$\omega^{(4)}(z) = -k\omega(z) \quad 0 < z < L$$

con las condiciones de contorno

$$\omega'(0) = 0, \quad \omega'''(0) = \frac{Q_H}{E_p I_p}, \quad \omega''(L) = 0, \quad \omega'''(L) = 0$$

Si  $k_h = Cte.$  el problema admite solución analítica (ver [56]). La solución analítica obtenida por Hetenyi en 1946, puede expresarse como

$$w = \frac{2Q_H\beta}{k_h D} K_{wH}(z) - \frac{2M_0\beta^2}{k_h D} K_{wM}(z)$$

donde los parámetros  $\beta$  y  $M_0$  vienen dados por

$$\beta = \left( \frac{k_h D}{4E_p I_p} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$M_0 = -\frac{Q_H}{2\beta} \left[ \frac{\sinh^2(\beta L) + \sin^2(\beta L)}{\sinh(\beta L) \cosh(\beta L) + \sin(\beta L) \cos(\beta L)} \right]$$

mientras que las funciones  $K_{wH}(z)$  y  $K_{wM}(z)$  se definen como

$$K_{wH}(z) = \left[ \frac{K_1(z) \sinh(\beta L) - K_2(z) \sin(\beta L)}{\sinh^2(\beta L) - \sin^2(\beta L)} \right]$$

$$K_{wM}(z) = \left[ \frac{K_3(z) \sinh(\beta L) + K_4(z) \sin(\beta L)}{\sinh^2(\beta L) - \sin^2(\beta L)} \right]$$

siendo

$$K_1(z) = \cos(\beta z) \cosh(\beta(L - z))$$

$$K_2(z) = \cosh(\beta z) \cos(\beta(L - z))$$

$$K_3(z) = \cosh(\beta(L - z)) \sin(\beta z) - \sinh(\beta(L - z)) \cos(\beta z)$$

$$K_4(z) = \cos(\beta(L - z)) \sinh(\beta z) - \sin(\beta(L - z)) \cosh(\beta z)$$

La figura 7.2 visualiza la solución analítica considerando como datos fundamentales del problema  $Q_H = 50$  kN,  $L = 12$  m,  $D = 0.6$  m,  $E_p = 2.1 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>,  $k_L = 67 \frac{c_u}{D}$  kN/m<sup>3</sup> y  $c_u = 200$  kN/m<sup>2</sup>.

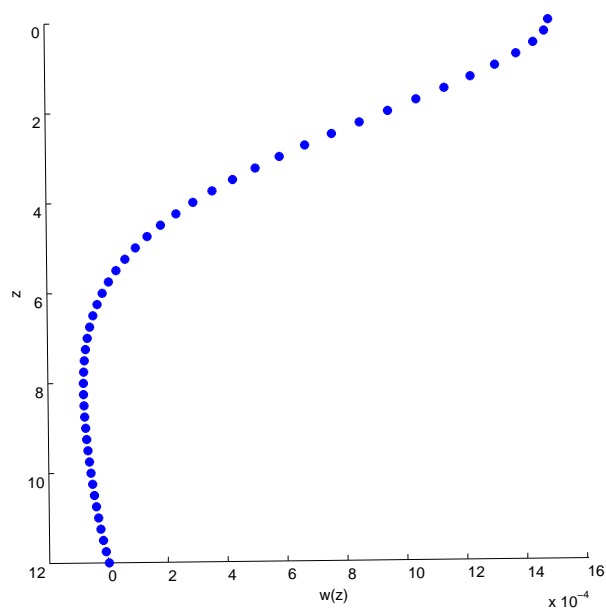


Fig. 7.2

Nuestro objetivo es estudiar este problema considerando  $K \in I^*(\mathbb{R})$  y por ello hacemos un estudio previo del problema real, considerando como técnica numérica base el método de diferencias finitas.

El problema real, se puede resolver aplicando cambios de variable y reduciendo la ecuación diferencial a la resolución del sistema

$$\begin{pmatrix} \omega' \\ \omega'_1 \\ \omega'_2 \\ \omega'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ -k\omega \end{pmatrix}$$

considerando las condiciones iniciales

$$\omega(0) = u, \quad \omega_1(0) = 0, \quad \omega_2(0) = v, \quad \omega_3(0) = \frac{Q_H}{E_p I_p}$$

Apliquemos, por ejemplo, el método de Euler, con las condiciones  $\omega_2(L) = 0$ ,  $\omega_3(L) = 0$ .

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_k + h \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ -k\omega \end{pmatrix}_k$$

El problema consiste en encontrar valores  $u$ ,  $v$  tales que  $\omega_2(L) = 0$ ,  $\omega_3(L) = 0$ .

Una forma de solucionar este problema es aplicar el método de Newton

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_k - (J^{-1}) \begin{pmatrix} \omega_2(L, u_k, v_k) \\ \omega_3(L, u_k, v_k) \end{pmatrix}$$

que puede escribirse de manera equivalente como

$$(J) \begin{pmatrix} u_{k+1} - u_k \\ v_{k+1} - v_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \omega_2(L, u_k, v_k) \\ \omega_3(L, u_k, v_k) \end{pmatrix}$$

y se resuelve, por ejemplo, aplicando el método de Cramer siendo  $J$  la matriz

$$(J) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_2}{\partial u} & \frac{\partial \omega_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial u} & \frac{\partial \omega_3}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2(u+\varepsilon, v) - \omega_2(u, v)}{\varepsilon} & \frac{\omega_2(u, v+\varepsilon) - \omega_2(u, v)}{\varepsilon} \\ \frac{\omega_3(u+\varepsilon, v) - \omega_3(u, v)}{\varepsilon} & \frac{\omega_3(u, v+\varepsilon) - \omega_3(u, v)}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Imponiendo  $u_{k+1} - u_k < \tau$ ,  $v_{k+1} - v_k < \tau$ , siendo  $\tau$  un coeficiente de error predefinido, obtenemos  $u$  y  $v$  y de este modo el desplazamiento  $\omega$ .

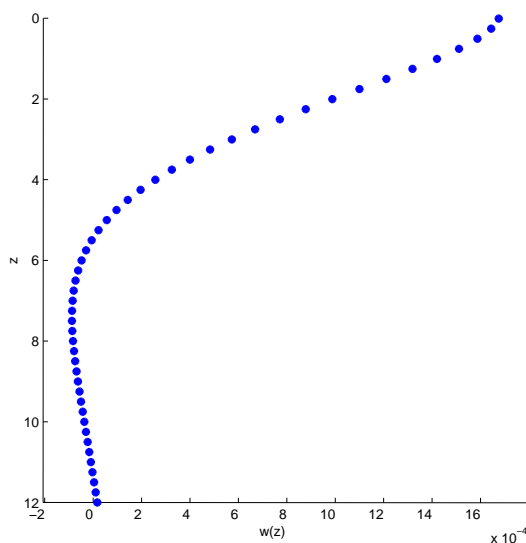


Fig. 7.3

La figura 7.3 muestra el resultado obtenido al considerar  $h = 0.25$  y los mismos valores para  $Q_H$ ,  $L$ ,  $D$ ,  $E_p$ ,  $k_L$  y  $c_u$  que en la figura 7.2. Observamos que la aproximación es muy buena.

Nos planteamos el problema intervalar y consideramos por ejemplo,  $c_u = [100, 300]$  y los mismos valores  $E_p$ ,  $I_p$ ,  $Q_H$ ,  $L$  y  $D$  que para el caso real. Con estos datos obtenemos  $K = [0.0498, 0.1495]$ .

El método de resolución originado en contexto del cálculo numérico no funciona al trasladar el problema al contexto intervalar, es decir al considerar  $K \in I^*(\mathbb{R})$ , debido a que los elementos de la matriz que aproxima las derivadas contiene valores singulares del determinante.

Es un ejemplo más de que en  $I^*(\mathbb{R})$  no podemos utilizar los mismos algoritmos de resolución que en el contexto numérico clásico. Siempre debemos situarnos en  $I^*(\mathbb{R})$  desde el planteo mismo del problema.

Nos planteamos la resolución del sistema que resulta al aplicar el método de Newton considerando un método alternativo a la regla de Cramer, sin embargo, considerando las observaciones que se han discutido en el capítulo anterior, la mejor solución del problema es la que considera los intervalos de marcas.

Otro método alternativo al que hemos acudido para tener un planteo compatible con el contexto intervalar, sin tener que involucrar el estudio de sistemas lineales, es el método del desarrollo de Taylor.

Consideremos pues el estudio de la ecuación diferencial

$$\omega^{(4)}(z) = -k\omega(z), \quad 0 < z < L, \quad \omega'(0) = 0, \quad \omega''(L) = 0, \quad \omega'''(0) = \frac{Q_H}{E_p I_p}, \quad \omega'''(L) = 0$$

y estudiaremos el caso  $k \in I^*(\mathbb{R})$ .

Resolvemos esta ecuación diferencial considerando el desarrollo de Taylor de orden 4 de  $\omega$  alrededor de  $z = 0$ , orden mínimo para que el desarrollo sea significativo.

$$\omega(z) = \omega(0) + \omega'(0)z + \frac{\omega''(0)}{2}z^2 + \frac{\omega'''(0)}{6}z^3 + \frac{\omega^{(4)}(0)}{24}z^4$$

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos,

$$\omega(z) = \frac{Q_H}{E_p I_p} \left( \frac{1}{L * k} - \frac{L}{4}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24L}z^4 \right)$$

Considerando  $K$  valor intervalar y aplicando la teoría de optimalidad de funciones intervalares, estudiada en el tercer capítulo de este texto, al ser

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{Q_H}{E_p I_p} \left( -\frac{1}{Lk^2} \right) < 0$$

la expresión que nos da un cálculo intervalar optimal de  $\omega(z)$  no varia, es decir,

$$W(z) = \frac{Q_H}{E_p I_p} \left( \frac{1}{L * K} - \frac{L}{4}z^2 + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24L}z^4 \right)$$

Considerando como datos fundamentales del problema  $Q_H = 50$  kN,  $L = 12$  m,  $D = 0.6$  m,  $E_p = 2.1 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>,  $k_L = 67 \frac{c_u}{D}$  kN/m<sup>3</sup> y  $c_u = [100, 300]$  kN/m<sup>2</sup>, obtenemos los resultados que visualiza la figura 7.4.

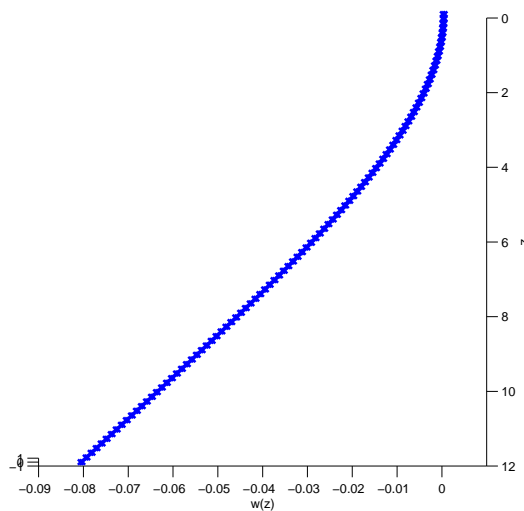


Fig. 7.4

La gràfica 7.4 visualiza los resultados obtenidos. Es importante resaltar que el desarrollo de Taylor es una aproximación local.

## 7.2. Pilote empotrado en roca y cabeza libre

Consideremos un pilote de hormigón de geometría cilíndrica empotrado en roca, es decir, se impide cualquier tipo de movimiento en la puntera del pilote; y de cabeza libre, es decir, en este caso se supone que no existe ningún tipo de elemento que impida los movimientos (horizontal y giro) de la cabeza.

Así pues, planteado el problema, resolvemos la ecuación

$$E_p I_p \frac{d^4 \omega(z)}{dz^4} + k_h(z) D \omega(z) = 0 \quad 0 < z < L$$

considerando el pilote empotrado en roca y cabeza libre, es decir,

$$E_p I_p \left. \frac{d^3 \omega}{dz^3} \right|_{z=0} = Q_H$$

$$E_p I_p \left. \frac{d^2 \omega}{dz^2} \right|_{z=0} = M$$

$$\omega(z = L) = 0$$

$$E_p I_p \left. \frac{d\omega}{dz} \right|_{z=L} = 0$$

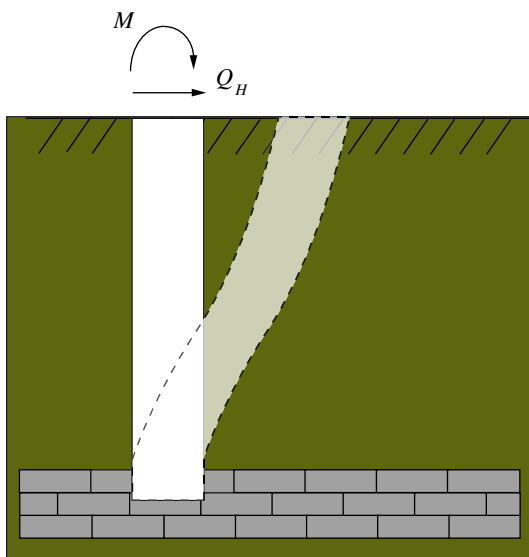


Fig. 7.5

y considerando la reacción del suelo

$$k_h(z) = k_L \left( \frac{z}{L} \right)^\gamma \quad \gamma \geq 0$$

A continuación, proponemos la resolución del problema para  $\gamma = 1$ .

$$E_p I_p \frac{d^4 \omega(z)}{dz^4} + k_h(z) D \omega(z) = 0 \quad 0 < z < L$$

$$k_h(z) = k_L \left( \frac{z}{L} \right)$$

$$E_p I_p \frac{d^4 \omega(z)}{dz^4} = -k_L \left( \frac{z}{L} \right) D \omega(z) \quad 0 < z < L$$

Consideremos pues el estudio de la ecuación diferencial

$$\omega^{(4)}(z) = -kz\omega(z), \quad 0 < z < L, \quad \omega'''(0) = \frac{Q_H}{E_p I_p}, \quad \omega''(0) = \frac{Q_H}{E_p I_p}, \quad \omega(L) = 0, \quad \omega'(L) = 0$$

siendo

$$k = \frac{k_L D}{L E_p I_p}$$

y estudiaremos el caso  $k_L \in I^*(\mathbb{R})$ .

Debido a los problemas que hemos comentado anteriormente en el apartado 6.1, no utilizaremos los métodos de resolución habituales del cálculo numérico, sino que normalizamos el pilote y resolvemos la ecuación diferencial considerando el desarrollo de Taylor de  $\omega$  alrededor de  $z = 0$ .

Imponiendo las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} \omega(1) &= 0 \\ \omega'(1) &= 0 \\ \omega''(0) &= \widehat{M} \\ \omega'''(0) &= \widehat{Q}_N \end{aligned}$$

$$\text{siendo } \widehat{Q}_N = \frac{Q_H}{L^3 E_p I_p}, \quad \widehat{M} = \frac{M}{L^2 E_p I_p}.$$

Para que las condiciones iniciales del problema sean significativas, es decir, para que tengan sentido las condiciones de contorno, debemos considerar como mínimo el desarrollo de Taylor de orden 5 de  $\omega$  alrededor de  $z = 0$ .

Observamos que si consideramos como origen del pilote el punto donde está empotrado, e imponiendo las condiciones de contorno, que en este caso serán  $\omega(0) = \omega'(0) = 0$ ,  $\omega''(1) = \widehat{M}$  y  $\omega'''(1) = \widehat{Q}$ , siendo  $\widehat{Q} = -\widehat{Q}_N$ .

De  $\omega^{(4)}(z) = kz\omega(z)$  se deduce

$$\omega^{(5)}(0) = \omega^{(6)}(0) = 0$$

y el desarrollo de Taylor de  $\omega$  de orden 6 es

$$\omega(z) = \frac{\widehat{M} - \widehat{Q}}{2} z^2 + \frac{\widehat{Q}}{6} z^3$$

Considerando  $\widehat{M}$  y  $\widehat{Q}$  valores intervalares y aplicando la teoría de optimalidad de funciones intervalares, estudiada en el tercer capítulo de este texto, al ser

$$\frac{\partial \omega}{\partial \widehat{Q}} = -\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} = z^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{z}{6} \right) < 0 \quad \text{si } 0 < z < 1$$

la expresión que proporciona un cálculo optimal es

$$W(z) = \frac{\widehat{M} - \widehat{Q}}{2} z^2 + \frac{Dual(\widehat{Q})}{6} z^3$$

Considerando los valores  $Q_H = 50$  kN,  $L = 12$  m,  $D = 0.6$  m,  $E_p = 2.1 \cdot 10^7$  kN/m<sup>2</sup>,  $k_L = 67 \frac{c_u}{D}$  kN/m<sup>3</sup> y  $c_u = 200$  kN/m<sup>2</sup>,  $M = 100$  kN, obtenemos los resultados de la figura 7.6.

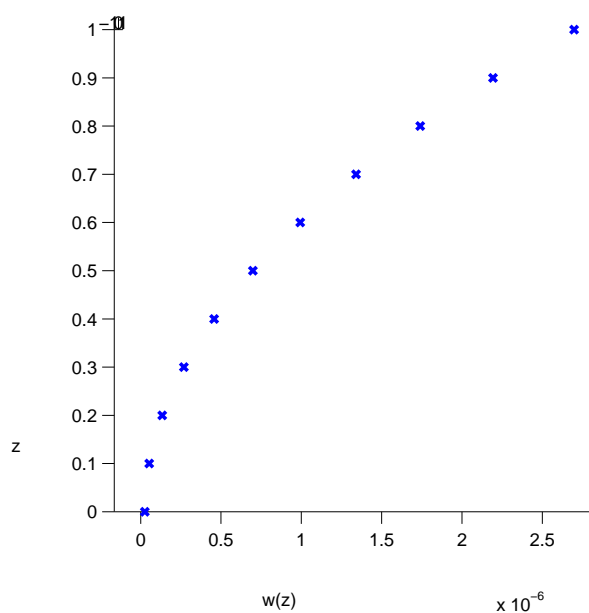


Fig. 7.6

Para que el valor  $K \in I^*(\mathbb{R})$  (consecuencia de tomar como dato del problema, por ejemplo,  $c_u = [100, 300]$  kN/m<sup>2</sup>) sea significativo, debemos considerar como mínimo el desarrollo de Taylor de orden 7 de  $\omega$  alrededor de  $z = 0$ .



La aproximación a la solución de la ecuación diferencial que estamos estudiando utilizando el desarrollo de Taylor de grado 7 es,

$$\omega(z) = \frac{1}{10-k} * \left( 5(\widehat{M} - \widehat{Q})z^2 + \frac{4\widehat{Q} * (10-k) - 5k * (\widehat{M} - \widehat{Q})}{24} z^3 + \frac{k}{168} * (\widehat{M} - \widehat{Q})z^7 \right)$$

Estudiaremos la posibilidad de cálculos optimales aplicando la teoría de optimalidad.

Para simplificar el estudio, observemos que si  $\widehat{M} = 0$

$$\omega_{\widehat{Q}} = \frac{\widehat{Q}}{10-k} * \left( -5z^2 + \frac{4(10-k) + 5k}{24} z^3 - \frac{k}{168} z^7 \right)$$

y si  $\widehat{Q} = 0$

$$\omega_{\widehat{M}} = \frac{\widehat{M}}{10-k} * \left( 5z^2 - \frac{5k}{24} z^3 + \frac{k}{168} z^7 \right)$$

Luego podemos escribir el desplazamiento como

$$\omega = \omega_{\widehat{Q}} + \omega_{\widehat{M}}$$

Si consideramos la expresión general del desarrollo de Taylor

$$\begin{aligned} \omega(z) = \omega(0) + \omega'(0)z + \frac{\omega''(0)}{2} z^2 + \frac{\omega'''(0)}{3!} z^3 + \frac{\omega^{(4)}(0)}{4!} z^4 + \frac{\omega^{(5)}(0)}{5!} z^5 + \\ + \frac{\omega^{(6)}(0)}{6!} z^6 + \frac{\omega^{(7)}(0)}{7!} z^7 + \frac{\omega^{(8)}(0)}{8!} z^8 + \dots \end{aligned}$$

De  $\omega^{(8)}(z) = 4k\omega'''(z) + kz\omega^{(4)}(z)$  se deduce  $\omega^{(8)}(0) = 4k\omega'''(0)$ , y para  $z = 1$

$$\frac{\omega^{(7)}(1)}{7!} z^7 + \frac{\omega^{(8)}(1)}{8!} z^8 = \frac{3k\omega''(1)}{7!} + \frac{4k\omega'''(1)}{8!} < k \frac{\max(|\omega''(1)|, |\omega'''(1)|)}{6!}$$

Supongamos que esta cota es menor que  $10^{-3}$  y que podemos despreciarla en el desarrollo de  $\omega$  hasta  $z = 1$ .

Teniendo como objetivo estudiar el comportamiento del pilote considerando variables intervalares, aproximamos  $\omega$  por

$$\omega(z) = \frac{\omega''(0)}{2} z^2 + \frac{\omega'''(0)}{6} z^3$$

y consideramos las dos situaciones siguientes;

- A)  $w(1) = D \quad w'(1) = 0$

- B)  $w(1) = 0 \quad w'(1) = T$

siendo  $D, T \in I^*(\mathbb{R})$ .

Caso A)

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{w''(0)}{2} + \frac{w'''(0)}{6} &= D \\ w''(0) + \frac{w'''(0)}{2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

De donde se deduce  $w''(0) = 6D$ ,  $w'''(0) = -12D$ , luego

$$\omega_D(z) = 3Dz^2 - 2Dz^3 = Dz^2(3 - 2z)$$

La gráfica de  $\omega_D(z)$  en este caso corresponde a la que muestra la figura 7.7.

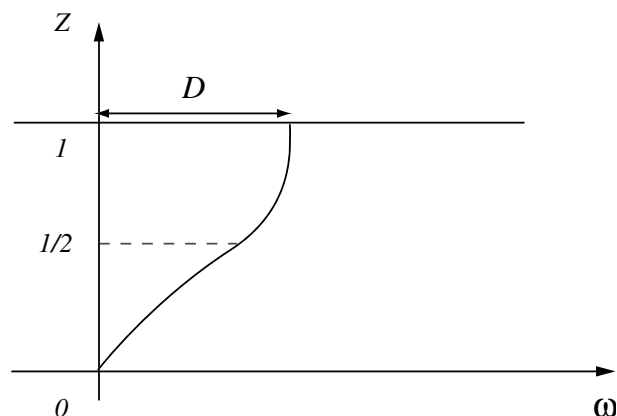


Fig. 7.7

Caso B)

Imponiendo las condiciones iniciales obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{w''(0)}{2} + \frac{w'''(0)}{6} &= 0 \\ w''(0) + \frac{w'''(0)}{2} &= T \end{aligned} \right\}$$

De donde se deduce  $w''(0) = -2T$ ,  $w'''(0) = 6T$ , luego

$$\omega_T(z) = Tz^2(z - 1)$$

La gráfica de  $\omega_T(z)$  en este caso corresponde a la que muestra la figura 7.8.

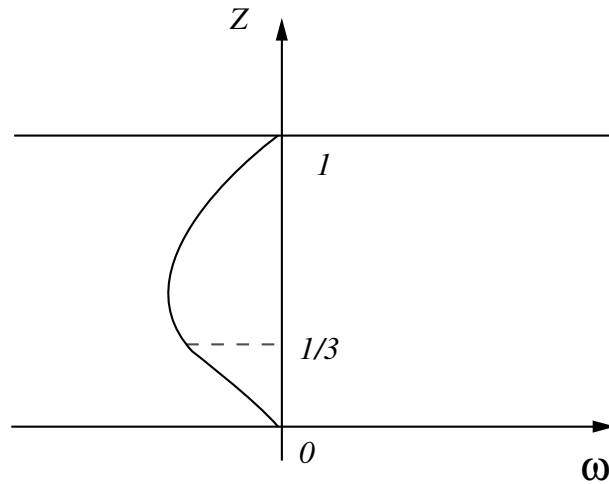


Fig. 7.8

En una situación general, cualquier solución es combinación lineal de  $\omega_D$  y  $\omega_T$  con  $D$  y  $T$  distintos de cero, determinados. Como un caso particular de combinación lineal, consideramos la suma.

$$\omega(z) = \omega_D(z) + \omega_T(z) = (3D - T)z^2 + (T - 2D)z^3$$

Estudiamos a continuación, la relación existente entre  $\widehat{Q}$ ,  $\widehat{M}$ ,  $T$  y  $D$ .

De la igualdad

$$\omega(z) = \frac{\widehat{M} - \widehat{Q}}{2}z^2 + \frac{\widehat{Q}}{6}z^3 = (3D - T)z^2 + (T - 2D)z^3$$

obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\widehat{M} - \widehat{Q}}{2} &= 3D - T \\ \frac{\widehat{Q}}{6} &= T - 2D \end{aligned} \right\}$$

De donde se deducen las relaciones

$$\begin{aligned} \widehat{Q} &= 6T - 12D \\ \widehat{M} &= 4T - 6D \\ D &= \frac{\widehat{M} - \widehat{Q}}{2} + \frac{\widehat{Q}}{6} \\ T &= \widehat{M} - \frac{\widehat{Q}}{2} \end{aligned}$$

y por tanto

$$\omega_D(z) = \left( \frac{\widehat{M} - \widehat{Q}}{2} + \frac{\widehat{Q}}{6} \right) z^2(3 - 2z)$$

$$\omega_T(z) = \left( \widehat{M} - \frac{\widehat{Q}}{2} \right) z^2(z - 1)$$

Aplicando los teoremas de optimalidad obtenemos que el cálculo optimal de  $\omega_D$  es

$$\omega_D(z) = \left( \frac{\widehat{M} - \widehat{Q}}{2} + \frac{Dual(\widehat{Q})}{6} \right) z^2(3 - 2z)$$

debido a que

$$\frac{\partial \omega}{\partial \widehat{Q}} = -\frac{1}{3}z^2(3 - 2z) < 0$$

para  $z \in [0, 1]$ ; y el cálculo optimal de  $\omega_T$  es

$$\omega_T(z) = \left( \widehat{M} - \frac{\widehat{Q}}{2} \right) z^2(z - 1)$$

al no haber variables multiincidentes.

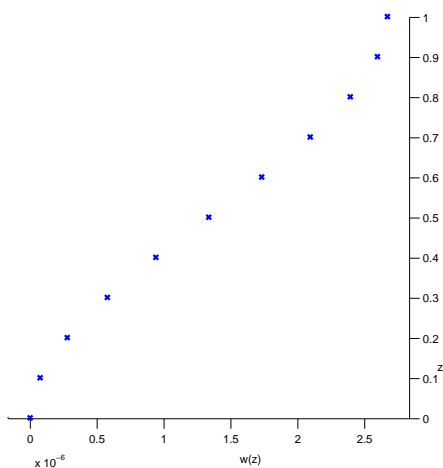


Fig. 7.9  $\omega_D$

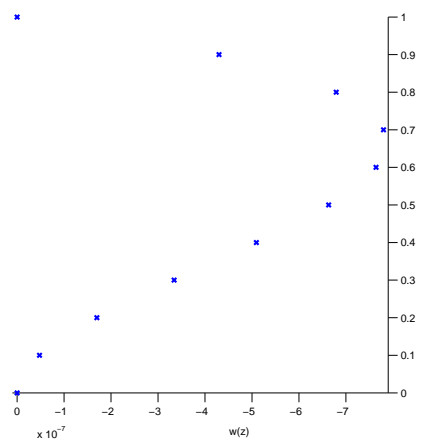


Fig. 7.10  $\omega_T$

En nuestro ejemplo particular, el cálculo optimal de  $\omega$  será la suma de los cálculos optimales de  $\omega_D$  y  $\omega_T$ . Es importante remarcar que esto no siempre será de este modo.

La figura 7.11 corresponde a la gráfica de  $\omega(z)$  y es coherente con el desplazamiento del pilote que mostrábamos en la figura 7.5.

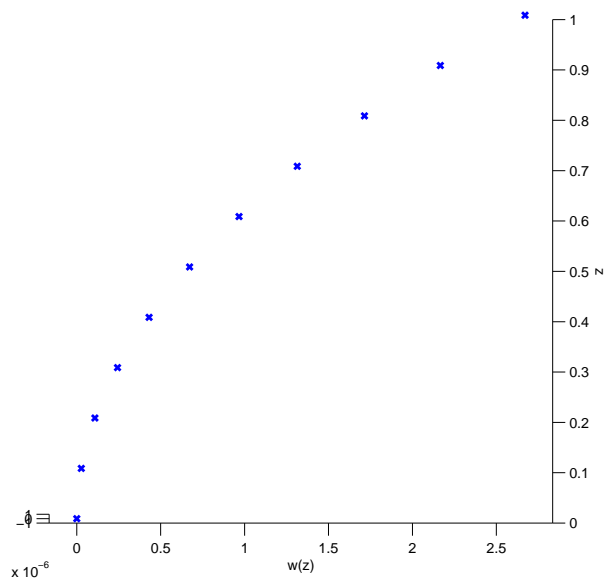


Fig. 7.11  $\omega$

Considerando los mismos valores para  $L$ ,  $D$  y  $E_p$ , pero con  $Q_H = [45, 55]$  kN y  $M = [100, 200]$  kN, obtenemos los resultados que muestra la figura 7.12.

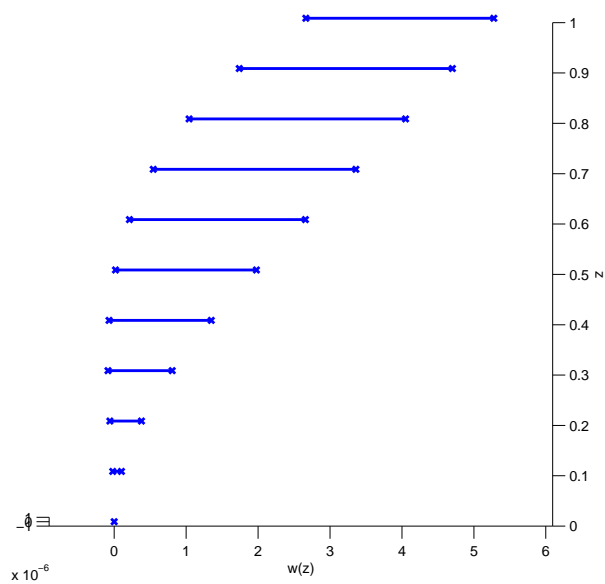


Fig. 7.12  $\omega$



# Capítulo 8

## Conclusiones y Futuras aportaciones

### 8.1. Conclusiones

Esta tesis explora la perspectiva que pueden presentar algunos problemas en diferencias típicos de la ingeniería civil, al plantearlos y resolverlos desde el marco del Análisis intervalar modal.

Revisada la teoría básica del Análisis intervalar modal, nos proponemos aplicarla a la resolución de problemas del ámbito de la ingeniería. Así, al plantearnos la resolución de problemas incluso elementales, como el de propagación del calor en una dimensión, nos encontramos con problemas de planteo en la aplicación de la teoría intervalar debido a las restricciones que impone la posibilidad de cálculos optimales. Esta situación lleva al estudio de la optimalidad condicionada que se ha presentado en el tercer capítulo de este texto.

Admitiendo restricciones sobre las modalidades de los argumentos de las funciones racionales se obtienen conceptos nuevos como el de modalidad partida o el de optimalidad lateral, que finalmente permiten introducir el concepto de función racional sintácticamente  $c$ -conmutativa, que permite obtener un conjunto más amplio de funciones a las que se les puede asociar un cálculo optimal.

Desde el punto de vista del análisis intervalar modal hemos estudiado ecuaciones en diferencias definidas como solución numérica a ecuaciones diferenciales. El modelo intervalar y los métodos de cálculo numérico son objetivamente distintos: mientras que el cálculo numérico calcula trayectorias singulares aproximadas, el cálculo intervalar calcula haces de trayectorias asociadas a una estrategia determinadas por las modalidades de los intervalos. Además, y esta es una cuestión muy importante, el cálculo intervalar está basado en la inclusividad de las soluciones intervalares y por ello da lugar esencialmente a modelos exactos desde el

punto de vista de las semánticas asociadas a la inclusión; frente al caso del cálculo numérico que se apoya esencialmente en el concepto de aproximación.

Una propiedad estructuralmente básica del Análisis intervalar es que no es posible aprovechar los algoritmos de los métodos numéricos en  $\mathbb{R}$  como algoritmos en  $I^*(\mathbb{R})$  puesto que la estructura de  $I^*(\mathbb{R})$  es esencialmente “mayor” que la de  $\mathbb{R}$  y por lo tanto debemos plantear cada problema intervalar siempre *ab initio*, en el interior del propio contexto intervalar. Fundamentalmente esto está determinado por el hecho de que de las relaciones  $\leq$  y  $\geq$  en  $\mathbb{R}$  pasamos en  $I^*(\mathbb{R})$  a las relaciones  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $\subseteq$  y  $\supseteq$ . (No tiene sentido plantear las relaciones de inclusividad en el conjunto de los números reales, por reducirse a la identidad, y no tiene sentido prescindir de ellas en  $I^*(\mathbb{R})$ ; por ello las bifurcaciones que en los algoritmos sobre  $\mathbb{R}$  son binarias, pasan a ser cuaternarias sobre  $I^*(\mathbb{R})$ ).

Se han estudiado también problemas de contorno que se plantean en el cálculo numérico clásico, esencialmente sobre un contexto geométrico lineal. Dado que las operaciones aritméticas básicas de los intervalos modales no son operaciones lineales, no serán las operaciones adecuadas para modelos que pidan linealidad global o “macroscópica”. Los sistemas con operaciones lineales obligarán a un uso más elaborado de la modalidad, pero mantienen la geometría lineal que usualmente está exigida por el planteo experimental del problema. En la misma consideración de un modelo lineal, sin embargo, y tal como se ha estudiado en el capítulo 6, aparece un problema lógico con la truncación de los intervalos, cuya solución lleva inevitablemente a la aritmética de marcas.

La conclusión final que se desprende de esta tesis es que el Análisis intervalar modal introduce una capacidad adicional de análisis de los problemas en diferencias propios de la ingeniería, y asimismo una nueva capacidad de cálculo. Por otro lado, el aspecto inacabado del Análisis intervalar modal se ha visto que es una limitación efectiva a la resolución de problemas en este campo.

## 8.2. Futuras aportaciones

Tal como se ha comentado en esta tesis, el análisis intervalar admite su planteo definitivo al introducir la aritmética de marcas. Para desarrollar algunos de los problemas comentados en este texto es imprescindible implementar la aritmética de marcas y profundizar en la teoría de intervalos de marcas.

Profundizar en el contexto lineal intervalar. El sistema de marcas permite hacer operativas las operaciones lineales y permite estudiar problemas geométricos que eran intocables en el análisis intervalar modal disponiendo únicamente de las operaciones aritméticas modales básicas.



La lógica de los intervalos modales permite una interpretación de los problemas que consideran haces de soluciones aproximadas. Consideramos interesante replantear los grandes temas del cálculo numérico desde el punto de vista del análisis intervalar modal y profundizar en el estudio de las consecuencias de su aplicación a los cálculos técnicos.

Por ejemplo, el estudio de los métodos multipaso para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias deberá apoyarse en un replanteo modal soportado por la aritmética de marcas, dado el carácter fuertemente geométrico de su planteo.



# Bibliografía

- [1] G. Alefeld, J. Herzberger. *Einführung in die Intervallrechnung* Bibliographisches Institut AG, Mannheim. (1974).
- [2] G. Alefeld, J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations* Academic Press. (1983).
- [3] F. Bierbaum, and K.P. Schwiertz. *A Bibliography on Interval-Mathematics. Appendix A, in: R. Moore, Methods and Applications of Interval Analysis* SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia (1995).
- [4] C. Bonet y otros. *Càlcul numèric* Centre publicacions d'abast. (1991).
- [5] R. Calm. *Análisis intervalar modal: su construcción teórica, implementación y posibilidades de aplicación a la simulación y al control*. Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya. (2005).
- [6] F.J. Ceballos. *Curso de programación C++: programación orientada a objetos* RAMA Editorial. (1991).
- [7] M. Crouzeix, A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles* Ed. Masson. (1984).
- [8] G.F. Corliss. *Where Is Validated ODE Solving Going?* in Proceedings of the IMACS-GAMM International Symposium on Numerical Methods and Error Bounds, Juergen Herzberger (ed.), Akademie Verlag, Berlin. (1996). pp.48-57.
- [9] J. Donea, A. Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems* John Wiley, England. (2003).
- [10] B.H. Flowers. *An Introduction to Numerical Methods in C++* Oxford University Press. (1995).
- [11] S. Garcia-Reyero, J.L. Martinez, SIGLA/X-Group. *Modal intervalar arithmetic implementation using floating point emulation*. Applications of interval analysis to systems and control, pages 231-243. (1999).

- [12] E. Gardesnes, A. Trepap. *The interval computing system SIGLA-PL/I(0)*. Freiburg Intervall-Berichte 79/8. (1979).
- [13] E. Gardesnes. *SIGLA: Realistic data and results for the future*. International Senior Management seminar on trends in computer applications held at the international Executive Centre of Sperry UNIVAC in St. Paul de Vence 13-15 May (1980).
- [14] E. Gardesnes, A. Trepap. *Fundamentals of SIGLA, an interval computing system over the completed set of intervals*. Computing. Springer-Verlag, 24:161-179 (1980).
- [15] E. Gardesnes, A. Trepap, J.M. Janer. *SIGLA-PL/I development and applications*. Interval Mathematics 1980. Academic Press. (1980).
- [16] E. Gardesnes, A. Trepap, J.M. Janer. *Approaches to Simulation and to the Linear Problem in the SIGLA System*. Institut für Angewandte Mathematic.-Universität. Freiburg Intervall Berichte. Germany (1981)
- [17] E. Gardesnes. *Computing with the completed set of intervals: Sigla. PL/I-System*. 22<sup>nd</sup> Science Week. Damascus 1982. Latakia (Syria)
- [18] E. Gardesnes, A. Trepap, H. Mielgo. *Present perspective of the SIGLA interval system*. Freiburg Intervall-Berichte 82/9, pages 1-65. (1982)
- [19] E. Gardesnes, H. Mielgo, A. Trepap. *Modal intervals: reason and ground semantics*. Interval Mathematics 1985. Ed. K.Nickel, Springer. (1985)
- [20] E. Gardesnes. *Numerical information and modal interval*. 26<sup>th</sup> Science Week. November 1986. Latakia (Syria)
- [21] E. Gardesnes, H. Mielgo. *Modal intervals: Functions*. *Proc. of the Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics at the Zamenkhov's University of Poznań*. (1986), 36–58.
- [22] E. Gardesnes, H. Mielgo, A. Trepap. *Modal interval analysis: n-dimensional theory*. 3rd. Polish Symposium on Fuzzy Sets and Interval Analysis. (1989)
- [23] E. Gardesnes, H. Mielgo, M.A. Sainz. *Presentation of the Research Group Sigla/X*. Technical report, Universitat de Girona. IMA 95-10 (1995)
- [24] E. Gardesnes, M.A. Sainz. *Intervalles modaux*. Capítulo del libro: Modèles et raisonnements qualitatifs. Ed. Hermes Science París. pp. 155-192 (2003).
- [25] C.W. Gear. *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall, INC. (1971).

- [26] S. Godounov, V. Riabenki. *Schémas aux différences*. Editions Mir. Moscou (1977).
- [27] M. Grau, M. Noguera. *Càlcul numèric*. Edicions UPC. (1993).
- [28] A. Griewank, C. Bischof, A. Carle, G. Corliss and K. Williamson. *Derivative Convergence for Iterative Equation Solvers*. Optimization Methods and Software,2. (1993) pp.321-355.
- [29] R.W. Hamming. *Introduction to Applied Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York. (1971).
- [30] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (1987).
- [31] E.R. Hansen. *Topics in Interval Analysis*. Oxford University Press. (1969).
- [32] E.R. Hansen. *Global Optimization using Interval Analysis*. Marcel Dekker, Inc. (1992).
- [33] P. Henrici. *Error Propagation for Difference Methods*. Ed. John Wiley and Sons. (1963).
- [34] J.D. Hoffman. *Numerical Methods for Engineers and Scientists. Second Edition* Marcel Dekker, Inc. (2001).
- [35] A. Huerta, J. Sarrate, A. Rodriguez-Ferran. *Métodos numéricos. Introducción, aplicaciones y programación*. Edicions UPC. Universitat Politècnica de Catalunya (2001).
- [36] R.L. Hummel. *PC Magazine Programmer's Technical Reference. The processor and coprocessor*. Ziff-Davis Press. (1992).
- [37] L. Jorba Jorba. *Intervals de Marques*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona. (2003).
- [38] E. Kaucher. *Algebraische Erweiterungen der Intervall-rechnung unter Erhaltung der Ordnungs und Verbands-strukturen*. Computing. Supplementum 1, 6579, Springer. (1977).
- [39] E. Kaucher. *Interval Analysis in the Extended Interval Space IR*. Computing Supplementum 2, Springer, Heidelberg (1980), pp.33-49.
- [40] E.W. Kaucher, U.W. Kulish and C. Ullrich. *Computer arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages*. Ed. Wiley-Teubner Series in Computer Science. Stuttgart. (1987).

- [41] J.D. Lambert. *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: the initial value problem*. Ed. John Wiley and Sons. (1991).
- [42] S.E. Laveuve. *Definition einer kahan-arithmetik und ihre implementierung*. Interval Mathematics. Springer Verlag, pages 236-245. Lecture Notes in Computer Science 29. (1975).
- [43] R.J. Lohner. *Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems*. in Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages, E.W.Kaucher, U.W.Kulish and C.Ullrich, eds., Wiley-Teubner Series in Computer Science, Stuttgart (1987). pp.255-286.
- [44] J.H. Mathews, K.D. Fink. *Métodos Numéricos con MATLAB*. Prentice Hall. (2000).
- [45] R.E. Moore. *Interval Analysis*. Prentice Hall (1966).
- [46] R.E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia (1979).
- [47] H. Mielgo. *Sigladef: a generator for problem-oriented dialects of programming languages*. 22nd. Science Week. Damascus (1982).
- [48] Ned S. Nedialkov, Ken R. Jackson and G. Corliss. *Validated Solutions of Initial Value Problems for Ordinary Differential Equations*. Appl. Math and Comp.,105 (1) (1999).pp.21-68.
- [49] A. Neumaier. *Interval Methods for Systems of Equations*. Cambridge University Press. (1990)
- [50] A. Neumaier. *The wrapping effect, ellipsoid arithmetic, stability and confidence regions*. Computing Supplementum 9. (1993). pp.175-190.
- [51] A. Neumaier. *Taylor Forms-Use and Limits*. Reliable Computing 9:43-79. (2003)
- [52] K. Nickel. *Interval Mathematics* Lecture Notes in Computer Science, Springer. (1975)
- [53] K. Nickel. *Interval Mathematics 1980* Academic Press. (1980)
- [54] K.Nickel. *How to fight the wrapping effect*. in Interval Analysis. ed., Lecture Notes in Computer Science No.212, Springer, Berlin (1985). pp.121-132.
- [55] E. Pärt-Enander, A. Sjöberg. *The Matlab 5 handbook*. Prentice Hall. (1999).
- [56] H.G. Poulos, E.H. Davis. *Pile foundation analysis and design*. Ed. Rebert E. Krieger Publishing Co., Florida. (1990).

- [57] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press. (1992).
- [58] H. Ratscheck. *Nichtnumerische aspekte der Interval-Mathematik*. in Interval Mathematics, Springer, Heidelberg (1975).
- [59] L.B. Rall. *Evaluation of Functions, Gradients, and Jacobians*. Reliable Computing 9: 177-182 (2003).
- [60] M.A Sainz, E. Gardeñes, L. Jorba. *Formal Solution to Systems of Interval Linear or Non-linear Equations* Reliable Computing. Kluwer Academic Publishers. Vol 8. N.3 (2002) pp.189-211.
- [61] M.A Sainz, E. Gardeñes, L. Jorba. *Interval Estimations of Solution Sets to Real-Valued Systems of Linear or Non-linear Equations* Reliable Computing. Kluwer Academic Publishers. Vol 8. N.4 (2002) pp.283-305.
- [62] L.F. Shampine. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* Chapman and Hall, Inc. London (1994)
- [63] S.P. Shary. *Algebraic Solutions to Interval Linear Equations and their Applications* Numerical Methods and Error Bounds. G. Alefeld and J. Herzberger, eds. Akademik Verlag, Berlin (1996) pp. 224-233.
- [64] S.P. Shary. *Controllable solution set to interval static systems* Applied Mathematics and Computation, 86 (1997) pp.185-196.
- [65] S.P. Shary. *Interval Gauss-Seidel Method for Generalized Solution Sets to Interval Linear Systems* Applications of Interval Analysis to Systems and Control (Proceedings of the Workshop MISC'99) Universitat de Girona (1999) pp.67-81.
- [66] SIGLA/X Group. *Construcción de los intervalos modales* Technical report, Universitat de Girona. IMA 96-07-RR (1996).
- [67] SIGLA/X Group. *Ground construction of modal intervals* Technical report, Universitat de Girona. IMA 96-04-RR (1996).
- [68] SIGLA/X Group. *Información numérica e Intervalos Modales*. Technical report, Universitat de Girona. IMA 96-08-RR (1996).
- [69] SIGLA/X Group. *Aritmética intervalar en el entorno C++* Technical report, Universitat de Girona. IMA 97-06-RR (1997).
- [70] SIGLA/X Group. *Optimalidad condicionada de las funciones racionales modales*. Technical report, Universitat de Girona. IMA 98-02-RR (1998).

- [71] SIGLA/X Group. *Extensiones de las funciones continuas*. Technical report, Universitat de Girona. IMA 98-04-RR (1998).
- [72] SIGLA/X Group. *Optimalidad de las funciones racionales modales*. Technical report, Universitat de Girona. IMA 98-05-RR (1998).
- [73] SIGLA/X Group. *Modal Intervals draft for a basic tutorial*. Technical report, Universitat de Girona. IMA 98-07-RR (1998).
- [74] SIGLA/X Group. *Modal Intervals. Basic Tutorial Applications of Interval Analysis to Systems and Control (Proceedings of the Workshop MISC'99)* Universitat de Girona. pp.139-210 (1999).
- [75] SIGLA/X Group. *Modal Intervals Reliable Computing*. Kluwer Academic Publishers Vol.7 (2001) pp.77-111.
- [76] J. Stoer, R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag New York Inc. (1980).
- [77] T. Sunaga. *Theory of an Interval Algebra and Its Applications to Numerical Analysis*. RAAG Memoirs 2 (1958), pp. 547-564.
- [78] T. Swan. *Mastering Borland C++*. Sams. A division of Prentice Hall Computer Publishing. (1992).
- [79] A. Trepát. *Completación reticular del espacio de intervalos*. Tesina Facultad de Matemáticas. Universidad de Barcelona. (1982).
- [80] A. Trepát. *Development of a collection of simsigla applications to models of discrete and continuous character*. (1982).
- [81] M. Warmus. *Approximations and Inequalities in the Calculus of Approximations. Classification of Approximate Numbers*. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961), pp.241-245.
- [82] M. Warmus. *Calculus of Approximations*. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. CL.III-4 (1956), pp.253-259.



## Apéndice A

# Implementación de la aritmética intervalar modal

La primera implementación de la aritmética intervalar modal se realizó en 1978 con el diseño del sistema SIGLA ([12], [14], [15], [18], [17]), y estaba basado en el lenguaje PL/I sobre máquinas IBM. Posteriormente se construyó la versión SIGLADEF ([47]) y a finales de los años 80 la simulación de sistemas condujo a la implementación de un nuevo paquete llamado SIMSIGLA ([80]).

Hacia el año 1995 deja de estar disponible el entorno informático que en su día condicionó la implementación del sistema SIGLA y consideramos la posibilidad de construir una aritmética intervalar en el entorno C++. Como miembro del grupo SIGLA/X he contribuido en el desarrollo de la implementación de la aritmética de intervalos modales en el entorno operativo Windows bajo procesador Intel con compilador Borland C++. Ver referencias [69], [11].

El objetivo de dicha implementación es construir una biblioteca donde los objetos sean intervalos y las operaciones aritméticas sean las definidas entre intervalos, considerando un control de la truncación en las operaciones intervalares para obtener resultados que contengan modalmente al resultado exacto. Además de controlar la truncación, realizamos un control de las excepciones en punto flotante, tales como por ejemplo, dividir por cero, infinito,...

Hemos estructurado la implementación de la aritmética intervalar modal en dos librerías: `fbicd` (float binary code) y `ivalt`; la primera para el control de las operaciones en punto flotante y la segunda para la aritmética intervalar.

A continuación se presentan dichas librerías.

```

//
// flbicd.h
//
//
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <limits.h>
#include <float.h>
#include <ctype.h>
#include <conio.h>
#include <string.h>
#include <iomanip.h>
#include <fstream.h>
#include <process.h>
//
//
#ifdef _FLBICD_
#define _FLBICD_
//
// COUT/CIN TEXT-FILE SUPPORT:
extern char CHBUFFER[80]; //String auxiliar que permite la salida
//hexadecimal no standard del punto flotante.
// *****
// AUXILIARY ITEMS
//
float max(const float,const float);
double max(const double,const double);
long double max(const long double,const long double);
//
float min(const float,const float);
double min(const double,const double);
long double min(const long double,const long double);
//
// *****
// ROUNDING CONTROL MACROS.
//
#define RCD _control87( RC_DOWN, MCW_RC ) //Left rounding.
#define RCU _control87( RC_UP , MCW_RC ) //Right rounding.
#define RCN _control87( RC_NEAR, MCW_RC ) //Near rounding.
//
// Coprocessor's Rounding Control masks in float.h:
//
// MCW_RC          0x0c00 /* Rounding Control */

```

```

//      RC_CHOP      0x0c00 /* chop          */
//      RC_UP        0x0800 /* up          */
//      RC_DOWN      0x0400 /* down        */
//      RC_NEAR      0x0000 /* near        */
//
// *****
// COPROCESSOR'S EXCEPTION MANAGING FUNCTIONS.
//
unsigned GetCE();
unsigned ResetCE();
unsigned MaskCE();
void SetCE(const unsigned ce);
//
// Coprocessor's Exception Managing masks in float.h:
//
//      MCW_EM        0x003f /* interrupt Exception Masks*/
//      EM_INVALID    0x0001 /* invalid          */
//      EM_DENORMAL    0x0002 /* denormal         */
//      EM_ZERODIVIDE  0x0004 /* zero divide      */
//      EM_OVERFLOW    0x0008 /* overflow         */
//      EM_UNDERFLOW   0x0010 /* underflow        */
//      EM_INEXACT     0x0020 /* inexact (precision) */
//
//
// *****
// CONSTANTS
//
extern int const FLDEMND;          // Fl.Dec.Exp. Max.Numb. of Digs.
extern unsigned const FLXMMND;    //Fl.heX.Mant. Max.Numb. of Digs.
extern float const FLZERO;
//
extern int const DBDEMND;          // DB.DEc.Exp. Max.Numb. of Digs.
extern unsigned const DBXMMND1;    //DB.heX.Mant. M.N. of D.1.
extern unsigned const DBXMMND2;
extern double const DBZERO;
//
extern int const LDDEMND;          // DB.DEc.Exp. Max.Numb. of Digs.
extern unsigned const LDXMMND;    //DB.heX.Mant. M.N. of D.1.
extern long double const LDZERO;
//
extern float const FLNODEF;
extern float const FLINFP;
extern float const FLINFN;

```

```

//
extern double const DBNODEF;
extern double const DBINFP;
extern double const DBINFN;
//
extern long double const LDNODEF;
extern long double const LDINFP;
extern long double const LDINFN;
//
// *****
// NODEF'S RECOGNITION AND COUT'S READERS.
//
unsigned isNoDef( const float& fl);
unsigned isInfP( const float& fl);
unsigned isInfN( const float& fl);
unsigned isInf( const float& fl);
float BFloat(const char* bf);
//
unsigned isNodef( const double& db);
unsigned isInfP( const double& db);
unsigned isInfN( const double& db);
unsigned isInf( const double& db);
double BDouble(const char* bf);
//
unsigned isNodef( const long double& ld);
unsigned isInfP( const long double& ld);
unsigned isInfN( const long double& ld);
unsigned isInf( const long double& ld);
long double BLongD(const char* bf);
//
// *****
// FLOAT TYPES' BINARY CODE FOR STREAM OUTPUT.
//
class FBCode
{
private:
unsigned sz;
float fl;
double db;
long double ld;
public:
~FBCode();
FBCode();

```

```
FBCode(const FBCode&);
FBCode(const float xx);
FBCode(const double xx);
FBCode(const long double xx);
friend ostream& operator<<(ostream& out, const FBCode& xx);
friend ostream& flBCode(ostream& out, const float fl);
friend ostream& dbBCode(ostream& out, const double db);
friend ostream& ldBCode(ostream& out, const long double ld);
};
//
// *****
// CORRECTED DIVISION ( for the cases of finite/zero).
//
float CDiv(const float a, const float b);
double CDiv(const double a, const double b);
long double CDiv(const long double a, const long double b);
//
// *****
// CORRECTED MULTIPLICATION ( for the cases of zero*infinite).
//
#endif
```

```

//
// flbicd.cpp
//
#include "flbicd.h"
//
// *****
// AUXILIARY ITEMS.
//
char CHBUFFER[80]= {'\0'};
//
template< class T >
T max( const T a, const T b ) { return ( a>= b )? a : b ; }
//
template< class T >
T min( const T a, const T b ) { return ( a<= b )? a : b ; }
//
// *****
// COPROCESSOR'S EXCEPTION MANAGING FUNCTIONS.
//
unsigned GetCE()
{ return (MCW_EM & _control87( 0, 0 )); }
//
/*unsigned ResetCE()
{ _fpreset(); return _control87( 0, 0 );} */
//
unsigned MaskCE()
{ _control87( MCW_EM, MCW_EM );
return (MCW_EM & _control87( 0, 0 )); }
void SetCE(const unsigned ce)
{ _control87(ce, MCW_EM); }
//
// *****
// CONSTANTS
//
int const FLDEMND=3;          // Fl.Dec.Exp. Max.Numb. of Digs.
unsigned const FLXMMND=6;    //Fl.heX.Mant. Max.Numb. of Digs.
float const FLZERO= 0.0;
//
int const DBDEMND=4;         // DB.DEc.Exp. Max.Numb. of Digs.
unsigned const DBXMMND1=5;   //DB.heX.Mant. M.N. of D.1.
unsigned const DBXMMND2=8;
double const DBZERO= (double)0.0;
//

```

```

int const LDDEMND=5;          // DB.DEc.Exp. Max.Numb. of Digs.
unsigned const LDXMMND=8;    //DB.heX.Mant. M.N. of D.1.
long double const LDZERO= (long double)0.0;;
//
// *****
// FLOAT PARAMETERS AND ANOMALOUS VALUES
//
union FLcd{ unsigned long cd; float fl;};
static FLcd FLNODEFcd= {0xffc00000UL};
extern float const FLNODEF= FLNODEFcd.fl;
//
static FLcd FLINFPS= {0x7f800000UL};
extern float const FLINFP= FLINFPS.fl;
static FLcd FLINFNS= {0xff800000UL};
extern float const FLINFN= FLINFNS.fl;
//
//
unsigned isInfP(const float& x)
{
return (x== FLINFP);
}
//
unsigned isInfN(const float& x)
{
return (x== FLINFN);
}
//
unsigned isInf(const float& x)
{
return ((x== FLINFP)|| (x== FLINFN));
}
//
unsigned isNodef( const float& fl)
{
union{float fl; unsigned long nt;} x;
x.fl= fl;
if((x.nt & 0x7f800000UL)== 0x7f800000UL)
{if((x.nt & 0x007fffffUL)!= 0UL) return 1U;}
// False Infinites.
return 0U;
}
//
// *****

```

```

//
float BFloat(const char* bf)
{
union{float fl; unsigned long cd;};
unsigned long sg, mnhead, mn;
int xp, xpsg(+1);      // The exponent's sign may be implicit.
unsigned cn, bnd;     // bf-counter and digits bound.
cn=0;
if(bf[cn]!='(') return FLNODEF;
//
cn=1;
if(bf[cn]=='+') sg= 0UL;
else if(bf[cn]=='-') sg=1UL;
else return FLNODEF;  // The global sign must be explicit.
//
cn=2;
if(bf[cn]!='B')return FLNODEF;
//
cn=3;
if(bf[cn]=='+' ){xpsg=+1; ++cn;}
else if(bf[cn]=='-'){xpsg=-1; ++cn;}
else xpsg=+1;
//
bnd=0;      // Controlling the number of the xp's dec. digits.
xp=0;
while (isdigit(bf[cn])&&(bnd< FLDEMND))
{xp= xp*10+ (int(bf[cn])- int('0'));
++cn; ++bnd;}
xp*= xpsg;
if((xp<-126)|(xp>128)) return FLNODEF;
//
if(bf[cn]!='(',')')return FLNODEF;
++cn;
if(bf[cn]!='H')return FLNODEF;
++cn;
if(bf[cn]=='1') mnhead=1;
else if(bf[cn]=='0') mnhead=0;
else return FLNODEF;
++cn;
if(bf[cn]!='.') return FLNODEF;
++cn;
bnd=0;
mn=0;

```



```

while((isxdigit(bf[cn]))&&(bnd< FLXMMND))
{
if(isdigit(bf[cn]))
{mn= (mn<<4)+ (unsigned(bf[cn])-unsigned('0'));
++cn; ++bnd;}
else if( (unsigned('a')<= unsigned(bf[cn]))
&&(unsigned(bf[cn])<= unsigned('f')) )
{mn= (mn<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('a'));
++cn; ++bnd;}
else
{mn= (mn<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('A'));
++cn; ++bnd;}
}
while(bnd< FLXMMND)
{mn= mn<<4; ++bnd;}
//
if(bf[cn]!='.') return FLNODEF;
//
if((mn & 1UL)!= 0UL) return FLNODEF;
if(xp==128) // 0x80.
if((mnhead!=1UL)|| (mn!=0UL)) return FLNODEF; // Infinites.
if(xp== -126) // -0x7e.
if(mnhead==0UL) xp=-127; // -0x7f.
//Denormals and Zeroes.
if((xp>-126)&&(xp<128)&&(mnhead==0UL)) return FLNODEF;
//
mn>>=1;
//
cd= 0|((sg<<31)
|(((unsigned long)(xp+127))<<23)
|mn);
return fl;
}
// "float BFloat(char* bf)".
//
// *****
// DOUBLE TYPE PARAMETERS AND ANOMALOUS VALUES
//
union DBcd{unsigned long cd[2]; double db;};
static DBcd DBNODEFcd= {{0x0UL, 0xffff80000UL}};
extern double const DBNODEF= DBNODEFcd.db;
static DBcd DBINFPcd= {{0x0UL, 0x7ff00000UL}};
extern double const DBINFP= DBINFPcd.db;

```

```

static DBcd DBINFNcd= {{0x0UL, 0xffff00000UL}};
extern double const DBINFN= DBINFNcd.db;
//
//
unsigned isInfP(const double& x)
{
return (x== DBINFP);
}
//
unsigned isInfN(const double& x)
{
return (x== DBINFN);
}
//
unsigned isInf(const double& x)
{
return ((x== DBINFP)|| (x== DBINFN));
}
//
unsigned isNodef( const double& db)
{
union{double fl; unsigned long nt[2];} x;
x.fl= db;
if((x.nt[1]& 0x7ff00000UL)== 0x7ff00000UL)
{if(((x.nt[1]& 0x000ffffUL)!= 0UL)|| (x.nt[0]!= 0UL))
// False Infinites.
return 1U;
}
return 0U;
}
// "unsigned isNodef( double db)"
//
double BDouble(const char* bf)
{
union{unsigned long cd[2]; double db;};
// "static" is needed to keep "cd[2]" contiguous.
unsigned long sg, mn[2];
int xp, xpsg(+1), xdig2(0), mnhead;
// The exponent's sign may be implicit.
unsigned cn, bnd; // bf-counter and digits bound.
cn=0;
if(bf[cn]!='(') return DBNODEF;
//

```

```

cn=1;
if(bf[cn]=='+') sg= 0UL;
else if(bf[cn]=='-') sg=1UL;
else return DBNODEF; // The global sign must be explicit.
//
cn=2;
if(bf[cn]!='B')return DBNODEF;
cn=3;
if(bf[cn]=='+'){xpsg=+1; ++cn;}
else if(bf[cn]=='-'){xpsg=-1; ++cn;}
else xpsg=+1;
//
bnd=0; // Controlling the number of the xp's dec. digits.
xp=0;
while (isdigit(bf[cn])&&(bnd< DBDEMND))
{xp= xp*10+ (int(bf[cn])- int('0'));
++cn; ++bnd;}
xp*= xpsg;
if((xp<-1022)|(xp>1024)) return DBNODEF;
//
if(bf[cn]!='.')return DBNODEF;
++cn;
if(bf[cn]!='H')return DBNODEF;
++cn;
if(bf[cn]=='1') {mnhead=1; ++cn;}
else if(bf[cn]=='0'){mnhead=0; ++cn;}
else return DBNODEF;
//
if(bf[cn]!='.') return DBNODEF;
++cn;
//
bnd=0;
mn[1]=0;
while((isxdigit(bf[cn]))&&(bnd< DBXMMND1))
{
if(isdigit(bf[cn]))
{mn[1]= (mn[1]<<4)+ (unsigned(bf[cn])-unsigned('0')));
++cn; ++bnd;}
else if( (unsigned('a')<= unsigned(bf[cn]))
&&(unsigned(bf[cn])<= unsigned('f')) )
{mn[1]= (mn[1]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('a')));
++cn; ++bnd;}
else

```

```

{mn[1]= (mn[1]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('A')));
++cn; ++bnd;}
}
if(bnd< DBXMMND1)
{ xdig2=1;
while(bnd< DBXMMND1){mn[1]= mn[1]<<4; ++bnd;}
}
//
bnd=0;
mn[0]=0;
if(xdig2==0)
{ while((isxdigit(bf[cn]))&&(bnd< DBXMMND2))
{
if(isdigit(bf[cn]))
{mn[0]= (mn[0]<<4)+ (unsigned(bf[cn])-unsigned('0')));
++cn; ++bnd;}
else if( (unsigned('a')<= unsigned(bf[cn]))
&&(unsigned(bf[cn])<= unsigned('f')) )
{mn[0]= (mn[0]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('a')));
++cn; ++bnd;}
else
{mn[0]= (mn[0]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('A')));
++cn; ++bnd;}
}
}
while(bnd< DBXMMND2){mn[0]= mn[0]<<4; ++bnd;}
//
if(bf[cn]!=')') return DBNODEF;
//
if(xp==1024) // xp==0x400.
if((mnhead!=1UL)|| (mn[1]!=0UL)|| (mn[0]!=0UL))
return DBNODEF; // Infinites.
if(xp==-1022) // xp==-0x3fe.
if(mnhead==0UL) xp=-1023; // Denormals and Zeroes.
// xp=-0x3ff.
if((xp>-1022)&&(xp<1024)&&(mnhead!=1UL)) return DBNODEF;
//
cd[1]= 0|(sg<<31)
|(((unsigned long)(xp+1023))<<20)
|mn[1];
cd[0]= mn[0];
return db;
}

```

```

// "double BDouble(char* bf)"
//
//
// *****
// LONG DOUBLE PARAMETERS AND ANOMALOUS VALUES
//
union LDcd{unsigned long cd[3]; long double ld;};
static LDcd LDNODEFcd= {{ 0x0UL,0xc0000000UL,0xffffUL,}};
extern long double const LDNODEF= LDNODEFcd.ld;
static LDcd LDINFPcd= {{ 0x0UL,0x80000000UL,0x7fffUL,}};
extern long double const LDINFP= LDINFPcd.ld;
static LDcd LDINFNcd= {{ 0x0UL,0x80000000UL,0xffffUL,}};
extern long double const LDINFN= LDINFNcd.ld;
//
//
unsigned isInfP(const long double& x)
{
return (x== LDINFP);
}
//
unsigned isInfN(const long double& x)
{
return (x== LDINFN);
}
//
unsigned isInf(const long double& x)
{
return ((x== LDINFP)|| (x== LDINFN));
}
//
unsigned isNodef( const long double& ld)
{
union{long double fl; unsigned nt[5];} x;
x.fl= ld;
if((x.nt[4]& 0x7fff)== 0x7fff)
{if((x.nt[3]!= 0x8000U)|| (x.nt[2]!= 0U)
|| (x.nt[1]!= 0U)|| (x.nt[0]!= 0U)) // False Infinites.
return 1U;
}
if((x.nt[4]& 0x7fff)== 0U)
{if((x.nt[3]& 0x8000)!= 0U) // False Denormals.
return 1U;
}
}

```

```

if((x.nt[4]& 0x7fff)!= 0U)
{if((x.nt[3]& 0x8000)== 0U)    // False Normals.
return 1U;
}
return 0U;
}
// "unsigned isNodef( long double ld)"
//
long double BLongD(const char* bf)
{
union{unsigned long cd[3]; long double ld;};
// "static" is needed to keep "cd[2]" contiguous.
unsigned long sg, mnhead, mn[2];
int xp, xpsg(+1), xdig2(0);
// The exponent's sign may be implicit.
unsigned cn, bnd; // bf-counter and digits bound.
cn=0;
if(bf[cn]!='(') return LDNODEF;
//
cn=1;
if(bf[cn]=='+') sg= 0UL;
else if(bf[cn]=='-') sg=1UL;
else return LDNODEF; // The global sign must be explicit.
//
cn=2;
if(bf[cn]!='B')return LDNODEF;
cn=3;
if(bf[cn]=='+'){xpsg+=1; ++cn;}
else if(bf[cn]=='-'){xpsg=-1; ++cn;}
else xpsg+=1;
//
bnd=0; // Controlling the number of the xp's dec. digits.
xp=0;
while (isdigit(bf[cn])&&(bnd< LDDEMND))
{xp= xp*10+ (int(bf[cn])- int('0'));
++cn; ++bnd;}
xp*= xpsg;
if((xp<-16382)|(xp>16384)) return LDNODEF;
//
if(bf[cn]!='.')return LDNODEF;
++cn;
if(bf[cn]!='H')return LDNODEF;
++cn;

```

```

if(bf[cn]=='1') {mnhead=1; ++cn;}
else if(bf[cn]=='0'){mnhead=0; ++cn;}
else return LDNODEF;
//
if(bf[cn]!='.') return LDNODEF;
++cn;
//
bnd=0;
mn[1]=0UL;
while((isxdigit(bf[cn]))&&(bnd< LDXMMND))
{
if(isdigit(bf[cn]))
{mn[1]= (mn[1]<<4)+ (unsigned(bf[cn])-unsigned('0'))};
++cn; ++bnd;}
else if( (unsigned('a')<= unsigned(bf[cn]))
&&(unsigned(bf[cn])<= unsigned('f')) )
{mn[1]= (mn[1]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('a'))};
++cn; ++bnd;}
else
{mn[1]= (mn[1]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('A'))};
++cn; ++bnd;}
}
if(bnd< LDXMMND)
{ xdig2=1;
while(bnd< LDXMMND){mn[1]= mn[1]<<4; ++bnd;}
}
//
bnd=0;
mn[0]=0UL;
if(xdig2==0)
{ while((isxdigit(bf[cn]))&&(bnd< LDXMMND))
{
if(isdigit(bf[cn]))
{mn[0]= (mn[0]<<4)+ (unsigned(bf[cn])-unsigned('0'))};
++cn; ++bnd;}
else if( (unsigned('a')<= unsigned(bf[cn]))
&&(unsigned(bf[cn])<= unsigned('f')) )
{mn[0]= (mn[0]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('a'))};
++cn; ++bnd;}
else
{mn[0]= (mn[0]<<4)+ (10+ unsigned(bf[cn])-unsigned('A'))};
++cn; ++bnd;}
}

```

```

}
while(bnd< LDXTMMND){mn[0]= mn[0]<<4; ++bnd;}
if((1UL & mn[0])!= 0UL) return LDNODEF;
//
if(bf[cn]!='') return LDNODEF;
//
if(xp==16384) // 0x4000.
if((mnhead!=1UL)|| (mn[1]!=0UL)|| (mn[0]!=0UL))
return LDNODEF;
// Infinites.
if(xp==-16382) // -0x3ffe.
if(mnhead==0UL) xp=-16383; // -0x3fff.
//Denormals and Zeroes.
if((xp>-16382)&&(xp<16384)&&(mnhead!=1UL)) return LDNODEF;
//
cd[2]= 0|(sg<<15)|((unsigned long)(xp+16383));
cd[1]= 0|(mn[1]>>1)|(mnhead<<31);
cd[0]= 0|((mn[0]>>1)|(mn[1]<<31));
return ld;
}
// "long double BLongD(char* bf)"
//
// *****
// FLOAT TYPES' BINARY CODE FOR STREAM OUTPUT.
// *****
//
// Constructors:
//
FBCode::~FBCode(){ }
FBCode::~FBCode()
{ sz=0; }
FBCode::~FBCode(const FBCode& xx)
{ sz= xx.sz;
if(sz== 0);
else if(sz== sizeof(float)) fl= xx.fl;
else if(sz== sizeof(double)) db= xx.db;
else if(sz== sizeof(long double)) ld= xx.ld;
}
FBCode::~FBCode(const float xx)
{ sz= sizeof(xx); fl= xx; }
FBCode::~FBCode(const double xx)
{ sz= sizeof(xx); db= xx; }
FBCode::~FBCode(const long double xx)

```



```

{ sz= sizeof(xx); ld= xx; }
//
// Insertion operator:
//
ostream& operator<<(ostream& out, const FBCode& xx)
{
if(xx.sz==sizeof(float)) return flBCode(out, xx.fl);
else
if(xx.sz==sizeof(double)) return dbBCode(out, xx.db);
else
if(xx.sz==sizeof(long double)) return ldBCode(out, xx.ld);
return out;
}
//
// FLOAT TYPE BINARY INSERTION:
//
ostream& flBCode(ostream& out, const float fl)
{
if(isNodef(fl))
{out<< "(*B,FLNODEF*); return out;}
else if(fl== FLINFP)
{out<< "(*B,FLINFP*); return out;}
else if(fl== FLINFN)
{out<< "(*B,FLINFN*); return out;}
else
{
union{float fl; unsigned long nt;} x;
x.fl= fl;
unsigned long sg;
int xp;
unsigned hxd[6];
unsigned long lft;
unsigned dnorm= 0;
//
sg= x.nt>>31;
if(sg==0) out<< "(+B";
else      out<< "(-B";
//
lft= x.nt<<1;
xp= ((int)(lft>>24))-127;
if(xp==-127) {xp= -126; dnorm= 1;}
out<< dec<< xp;
//

```

```

if(dnorm==1) out<< ",H0.";
else out<< ",H1.";
//
for(int i=0; i<6; ++i)
{hxd[i]= (unsigned)(lft & 0x0000000fL);
  lft>>=4;}
for(i=5; i>=0; --i){out<< hex<< hxd[i];}
out<< ")"<< flush;
return out;
}
}
//
// DOUBLE TYPE BINARY INSERTION.
//
ostream& dbBCode(ostream& out, const double db)
{
//
if(isNodef(db))
{out<< "(*B,DBNODEF*); return out;}
else if(db== DBINFP)
{out<< "(*B,DBINFP*); return out;}
else if(db== DBINFN)
{out<< "(*B,DBINFN*); return out;}
else
{
union{double fl; unsigned long nt[2];} x;
x.fl= db;
unsigned long sg;
int xp;
unsigned dnorm= 0;
unsigned hxd[13];
sg= x.nt[1] & 0x80000000L;
//
if(sg==0) out<< "(+B"; else out<< "(-B";
//
xp= ((int)((x.nt[1]<<1)>>21))-1023;
if(xp==-1023) {xp= -1022; dnorm= 1;}
out<< dec<< xp;
if(dnorm==1) out<< ",H0.";
else out<< ",H1.";
//
for(int i=0; i<8; ++i)
{hxd[i]= (unsigned)(x.nt[0] & 0x0000000fL);

```

```

    x.nt[0]>>=4;}
for(i=8; i<13; ++i)
{hxd[i]= (unsigned)(x.nt[1] & 0x0000000fL);
  x.nt[1]>>=4;}
//
for(i=12; i>=0; --i){out<< hex<< hxd[i];}
//
out<< ")"<< flush;
return out;
}
} // "ostream& FBCode::dbBCode(ostream& out, double db)"
//
// LONG DOUBLE'S TYPE BINARY INSERTION.
//
ostream& ldBCode(ostream& out, const long double ld)
{
//
if(isNodef(ld))
{out<< "(*B,LDNODEF*); return out;}
else if(ld== LDINFP)
{out<< "(*B,LDINFP*); return out;}
else if(ld== LDINFN)
{out<< "(*B,LDINFN*); return out;}
else
{
union{long double fl; unsigned nt[5];} x;
x.fl= ld;
unsigned int sg;
int xp;
unsigned hxd[17];
//
sg= x.nt[4] & 0x8000;
if(sg==0) out<< "(+B"; else out<< "(-B";
//
xp= ((int)((x.nt[4]<<1)>>1))-16383;
if(xp== -16383) xp=-16382; // Denormals and Zeroes.
// The mantissa's head is the leftmost bit
// of x.nt[3].
out<< dec<< xp<< ", ";
//
hxd[16]= ((x.nt[3]&0x8000)>>15);
out<< "H"<< hex<< hxd[16]<< ".";
for(int k=4; k>=1; --k)

```

```

{x.nt[k]= x.nt[k]|((x.nt[k-1]&0x8000)>>15);
 x.nt[k-1]= x.nt[k-1]<<1;}
for(k=0; k<4; ++k)
{for(int i=0; i<4; ++i)
{hxd[4*k+i]= x.nt[k]&0x000f; x.nt[k]>>=4;}}
for(int i=15; i>=0; --i){out<< hex<< hxd[i];}
out<< ")"<< flush;
return out;
}
} // "ostream& FBCode::ldFBCode(ostream& out, long double ld)"
//
// *****
// CORRECTED DIVISION.
//
template <class FL>
FL CDiv(const FL a, const FL b)
{
static FL z;
static unsigned szFL= sizeof(FL);
if((a!= (FL)0)&&(b== (FL)0))
{ if(szFL== sizeof(float)) z= FLNODEF;
 else if(szFL== sizeof(double)) z= DBNODEF;
 else if(szFL== sizeof(long double)) z= LDNODEF;
 }
else z= a/b;
return z;
}
//
// end "flbicd.cpp"

```

```

//
// "ivalt.h"
//
#ifndef _IVALT_H
#define _IVALT_H
//
#include "flbicd.h"
//
//
// *****
// IVAL CLASS DECLARATION.
//
class YBCode;
//
template<class FL>
class Ival
{
    friend class Ival<float>;
    friend class Ival<double>;
    friend class Ival<long double>;
private:
    FL ii;    //Infimum.
    FL ss;    //Supremum.
public:
    //Constructors.
    ~Ival(){}
    Ival();
    Ival( const char* x, const char* y , const char cdchar= 'B');
    //Binary coded parameters for cdchar== 'B', and
    // atof() parameters for cdchar= 'D'.
    Ival( const char* x, const char cdchar= 'B');
    //Idem.
    Ival( const FL x, const FL y ); /*When used with literal float constants
        the correct truncation is not guaranteed.*/
    Ival( const FL x );    //Idem.
    // YNodef's functions.
    friend unsigned isNodef(const Ival<FL> a);
    friend unsigned isNull(const Ival<FL> a);
    friend void toYNodef(FL& a, FL& b);
    friend unsigned upYNodef(FL& a, FL& b);
    friend Ival<FL> upY2Nodef(const Ival<FL>& a, const Ival<FL>& b);
    // Assignment and Copy Constructor.
    Ival<FL>& Ival<FL>::operator=( const Ival<FL> x );

```

```

Ival( const Ival<FL>& x );
operator Ival<float>();
operator Ival<double>();
operator Ival<long double>();
// Monary operators.
friend Ival<FL> operator-( const Ival<FL> );
friend Ival<FL> Inf(const Ival<FL> a);
friend Ival<FL> Sup(const Ival<FL> a);
friend Ival<FL> Du( const Ival<FL> );
friend Ival<FL> Pro( const Ival<FL> );
friend Ival<FL> Impr( const Ival<FL> );
// Relational.
friend unsigned operator<=( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend unsigned operator>=( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend unsigned operator<<( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend unsigned operator>>( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend unsigned operator==( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
// Binary inner operators.
friend Ival<FL> operator+( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend Ival<FL> operator-( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend Ival<FL> operator*( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend Ival<FL> operator/( const Ival<FL>, const Ival<FL> );
friend Ival<FL> operator&&( const Ival<FL>, const Ival<FL> ); //Meet.
friend Ival<FL> operator||( const Ival<FL>, const Ival<FL> ); //Join.
//Ival<FL>s' I/O.
//char* Str(int pr=MXPREC ); //Returns the string value of the qualified
//interval with precision pr.
friend istream& operator >> (istream& os, Ival<FL>& a);
friend ostream& operator << (ostream& os, const Ival<FL> a);
friend ostream& operator << (ostream& out, const YBCode xx);
friend unsigned isNodef(const Ival<FL> x);
};
//
// *****
// CONSTANTS
//
extern Ival<float> YFLNODEF;
extern Ival<double> YDBNODEF;
extern Ival<long double> YLDNODEF;
//
// *****
// YBCode:
//

```

```
class YBCode
{
public:
unsigned sz;
    Ival<float>* yfl;
    Ival<double>* ydb;
    Ival<long double>* yld;
//
~YBCode();
YBCode();
YBCode(const YBCode&);
YBCode(const Ival<float> xx);
YBCode(const Ival<double> xx);
YBCode(const Ival<long double> xx);
};
//
ostream& operator<<(ostream& out, const YBCode xx);
//
#endif
// Ival.h end!
```

```

//
//IVALT.CPP
//
#include "ivalt.h"
#include <stdlib.h>
#include <float.h>
//
//
// *****
// CONSTANTS.
//
Ival<float> YFLNODEF(FLNODEF, (float)0);
Ival<double> YDBNODEF(DBNODEF, (double)0);
Ival<long double> YLDNODEF(LDNODEF, (long double)0);
//
// *****
// YNODEF's CONTROL FUNCTIONS.
//
template<class FL>
unsigned isNodef(const Ival<FL> a)
{
return(isNodef(a.ii)&& (a.ss>= 0));
}
//
template<class FL>
unsigned isNull(const Ival<FL> a)
{
// Meaningless answer if isNodef(a).
static Ival<FL> z;
if(isNodef(a)) return 0;
else
{
z.ii= min(a.ii, a.ss); z.ss= max(a.ii, a.ss);
if( ((z.ii<= 0)&&(z.ss>= 0))
||((z.ii<= 0)&&(z.ss>= 0)) )return 1;
else return 0;
}
}
//
template<class FL>
void toYNodef(FL& a, FL& b)
{
static unsigned szFL= sizeof(FL);

```



```

if(szFL== sizeof(float))
{a= FLNODEF; b= 0;}
else if(szFL== sizeof(double))
{a= DBNODEF; b= 0;}
else if(szFL== sizeof(long double))
{a= LDNODEF; b= 0;}
}
//
//
template<class FL>
unsigned upYNodef(FL& a, FL& b)
{
static unsigned isND;
isND= isNodef(a)&&(b>=0);
if(isND) b= b+1;
return isND;
}
//
//
template<class FL>
Ival<FL> upY2Nodef(const Ival<FL>& x, const Ival<FL>& y)
{
static Ival<FL> z;
if(isNodef(x))
{ if(isNodef(y))
{ z.ii= x.ii; z.ss= 1+max(x.ss, y.ss); }
else
{ z.ii= x.ii; z.ss= 1+ x.ss ; }
}
else
{
if(isNodef(y)) {z.ii= y.ii; z.ss= 1+y.ss; }
else z.ii= z.ss= (FL)0.;
}
return z;
}
//
// *****
// Ival<FL> Constructors.
//
template<class FL>
Ival<FL>::Ival()
{

```

```

ii= (FL)0.; ss= (FL)0.;
}
//
//
template<class FL>
Ival<FL>::Ival(const char* x, const char* y, const char cdchar)
{
unsigned szFL=sizeof(FL);
if(cdchar== 'B')
{if(szFL== sizeof(float))
  {ii= BFloat(x); ss= BFloat(y);}
  else if(szFL== sizeof(double))
  {ii= BDouble(x); ss= BDouble(y);}
  else if(szFL== sizeof(long double))
  {ii= BLongD(x); ss= BLongD(y);}
  if(isNodef(ii)|| isNodef(ss)) toYNodef(ii,ss);
}
else if(cdchar== 'D')
{RCD;ii= (FL)atof(x);
  RCU;ss= (FL)atof(y);
  RCN;
  if(isNodef(ii)|| isNodef(ss)) toYNodef(ii,ss);
}
else toYNodef(ii,ss);
} // "Ival<FL>::Ival( char* x, char* y, char cdchar )"
//
//
template<class FL>
Ival<FL>::Ival( const char* x , const char cdchar)
{
unsigned szFL= sizeof(FL);
if(cdchar== 'B')
{if(szFL== sizeof(float))
  {ii= ss= BFloat(x);}
  else if(szFL== sizeof(double))
  {ii= ss= BDouble(x);}
  else if(szFL== sizeof(long double))
  {ii= ss= BLongD(x);}
  if(isNodef(ss)) toYNodef(ii,ss);
}
else if(cdchar== 'D')
{unsigned cew= GetCE();
  RCD;ii= (FL)atof(x);

```

```

    RCU;ss= (FL)atof(x);
    SetCE(cew);
    if(isNodef(ss)) toYNodef(ii,ss);
}
else toYNodef(ii,ss);
}
//
//
template<class FL>
Ival<FL>::Ival( const FL x, const FL y )
{
ii= x; ss= y;
if(isNodef(ii) || isNodef(ss)) toYNodef(ii, ss);
}
//
//
template<class FL>
Ival<FL>::Ival( const FL x )
{
ii= ss= x;
if(isNodef(ii)) toYNodef(ii, ss);
}
//
// *****
// Assignment operator and Copy-constructor.
//
template<class FL>
Ival<FL>& Ival<FL>::operator=( const Ival<FL> x )
{
ii= x.ii; ss= x.ss;
// No "upYnodef(ii,ss)"!
return *this;
}
//
//
template<class FL>
Ival<FL>::Ival( const Ival<FL>& x )
{
ii= x.ii; ss= x.ss;
// No "upYNodef(ii,ss)"!
}
//
// *****

```

```

// CASTING OPERATOR
//
template<class FL>
Ival<FL>::operator Ival<float>()
{
static Ival<float> z;
if(isNodef(*this))
{z.ii= FLNODEF; z.ss= (float)(1.+ ss);}
else
{
if(ii>=0) {RCD; z.ii= (float)ii;}
else {RCU; z.ii= -(float)(-ii);}
if(ss>=0) {RCU; z.ss= (float)ss;}
else {RCD; z.ss= -(float)(-ss);}
}
RCN;
return z;
}
//
template<class FL>
Ival<FL>::operator Ival<double>()
{
static Ival<double> z;
if(isNodef(*this))
{z.ii= DBNODEF; z.ss= (double)(1.+ ss);}
else
{
if(ii>=0) {RCD; z.ii= (double)ii;}
else {RCU; z.ii= -(double)(-ii);}
if(ss>=0) {RCU; z.ss= (double)ss;}
else {RCD; z.ss= -(double)(-ss);}
}
RCN;
return z;
}
//
template<class FL>
Ival<FL>::operator Ival<long double>()
{
static Ival<long double> z;
if(isNodef(*this))
{z.ii= LDNODEF; z.ss= (long double)(1.+ ss);}
else

```

```

{
if(ii>=0) {RCD; z.ii= (long double)ii;}
else {RCU; z.ii= -(long double)(-ii);}
if(ss>=0) {RCU; z.ss= (long double)ss;}
else {RCD; z.ss= -(long double)(-ss);}
}
RCN;
return z;
}
//
// *****
// MONARY OPERATORS AND FUNCTIONS.
//
template<class FL>
Ival<FL> Inf(const Ival<FL> x)
{
static Ival<FL> z;
z= x;
if(!upYNodef(z.ii, z.ss)) z.ss= x.ii;
return z;
}
//
//
template<class FL>
Ival<FL> Sup(const Ival<FL> x)
{
static Ival<FL> z;
z= x;
if(!upYNodef(z.ii, z.ss)) z.ii= x.ss;
return z;
}
//
//
template<class FL>
Ival<FL> Du(const Ival<FL> x)
{
static Ival<FL> z;
z= x;
if(!upYNodef(z.ii, z.ss)) { z.ii= x.ss; z.ss= x.ii; }
return z;
}
//
//

```

```

template<class FL>
Ival<FL> operator-(const Ival<FL> x)
{
static Ival<FL> z;
z= x;
if(!upYNodef(z.ii, z.ss)) { z.ii= -x.ss; z.ss= -x.ii; }
return z;
}
//
// *****
// RELATIONAL OPERATORS.
//
template<class FL>
unsigned operator<=(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
if(isNodef(x)|| isNodef(y)) return 0;
else return((x.ii<= y.ii)&& (x.ss<= y.ss));
}
//
//
template<class FL>
unsigned operator>=(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
if(isNodef(x)|| isNodef(y)) return 0;
else return((x.ii>= y.ii)&& (x.ss>= y.ss));
}
//
//
template<class FL>
unsigned operator<<(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
if(isNodef(x)|| isNodef(y)) return 0;
else return((x.ii>= y.ii)&& (x.ss<= y.ss));
}
//
//
template<class FL>
unsigned operator>>(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
if(isNodef(x)|| isNodef(y)) return 0;
else return((x.ii<= y.ii)&& (x.ss>= y.ss));
}
//

```

```

//
template<class FL>
unsigned operator==(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
if(isNodef(x)|| isNodef(y)) return 0;
else return((x.ii== y.ii)&& (x.ss== y.ss));
}
//
// *****
// SIMPLE BINARY OPERATORS.
//
// *****
// Meet
//
template<class FL>
Ival<FL> operator&&(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
static Ival<FL> z;
z= upY2Nodef(x,y);
if(isNodef(z));
else
{ z.ii= max(x.ii, y.ii);
z.ss= min(x.ss, y.ss);
}
return z;
}
//
// *****
// Join
//
template<class FL>
Ival<FL> operator||(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
static Ival<FL> z;
z= upY2Nodef(x,y);
if(isNodef(z));
else
{ z.ii= min(x.ii, y.ii);
z.ss= max(x.ss, y.ss);
}
return z;
}
//

```

```

// *****
// Suma
//
template<class FL>
Ival<FL> operator+(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
static Ival<FL> z;
z= upY2Nodef(x,y);
if(isNodef(z));
else
{ if( (isInf(x.ii)&&(y.ii==x.ii))
|| (isInf(x.ss)&&(y.ss==x.ss)))
toYNodef(z.ii, z.ss);
else
{ RCD; z.ii= x.ii + y.ii;
RCU; z.ss= x.ss + y.ss;
RCN; }
}
return z;
}
//
// *****
// Diferencia
//
template<class FL>
Ival<FL> operator-(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
static Ival<FL> z;
z= upY2Nodef(x,y);
if(isNodef(z));
else
{ if( (isInf(x.ii)&&(y.ss==x.ii))
|| (isInf(x.ss)&&(y.ii==x.ss)))
toYNodef(z.ii, z.ss);
else
{ RCD; z.ii= x.ii - y.ss;
RCU; z.ss= x.ss - y.ii;
RCN; }
}
return z;
}
//
// *****

```



```

// Multiplication.
//
template<class FL>
Ival<FL> operator*(const Ival<FL> x, const Ival<FL> y)
{
static Ival<FL> z;
z= upY2Nodef(x,y);
if(isNodef(z)) ;
else if( (isNull(x)&&(isInf(y.ii)||isInf(y.ss)))
|| (isNull(y)&&(isInf(x.ii)||isInf(x.ss))) )
toYNodef(z.ii, z.ss);
else
{
if( x.ss>= 0 )
{ if( x.ii>= 0 )
{ if( y.ss>= 0 )
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii* y.ii;
RCU; z.ss= x.ss* y.ss;
RCN; }
else
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss* y.ii;
RCU; z.ss= x.ss* y.ss;
RCN; }
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss< 0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii* y.ii;
RCU; z.ss= x.ii* y.ss;
RCN; }
else
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss<0 , y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss* y.ii;
RCU; z.ss= x.ii* y.ss;
RCN; }
}
}
else
{ if( y.ss>= 0 )
{ if( y.ii>= 0 )

```

```

// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii* y.ss;
RCU; z.ss= x.ss* y.ss;
RCN; }
else
// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii=
  min(x.ss* y.ii, x.ii*y.ss);
RCU; z.ss=
  max(x.ss* y.ss, x.ii* y.ii);
RCN; }
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= 0.0;
RCU; z.ss= 0.0;
RCN; }
else
// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss* y.ii;
RCU; z.ss= x.ii* y.ii;
RCN; }
}
}
}
else
{ if( x.ii>= 0 )
{ if( y.ss>= 0 )
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii* y.ii;
RCU; z.ss= x.ss* y.ii;
RCN; }
else
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= 0.0;
RCU; z.ss= 0.0;
RCN; }
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss< 0, y.ii>=0.

```

```

{ RCD; z.ii=
  max(x.ii* y.ii, x.ss* y.ss);
RCU; z.ss=
  min(x.ss* y.ii, x.ii* y.ss);
RCN; }
else
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss< 0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss* y.ss;
RCU; z.ss= x.ii* y.ss;
RCN; }
}
}
else
{ if( y.ss>= 0 )
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii* y.ss;
RCU; z.ss= x.ss* y.ii;
RCN; }
else
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ii* y.ss;
RCU; z.ss= x.ii* y.ii;
RCN; }
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ss* y.ss;
RCU; z.ss= x.ss* y.ii;
RCN; }
else
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss* y.ss;
RCU; z.ss= x.ii* y.ii;
RCN; }
}
}
}
if(isNodef(z.ii)||isNodef(z.ss))
toYNodef(z.ii,z.ss) ;
}
return z;

```

```

}
//
// *****
// Division.
//
template<class FL>
Ival<FL> operator/( const Ival<FL> x, const Ival<FL> y )
{
static Ival<FL> z;
z= upY2Nodef(x,y);
if(isNodef(z)) ;
else if
( isNull(y)
||((isInf(y.ii)||isInf(y.ss))&&(isInf(x.ii)||isInf(x.ss)))
)
toYNodef(z.ii, z.ss);
else
{
if( x.ss>= 0 )
{ if( x.ii>= 0 )
{ if( y.ss>= 0 )
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii/ y.ss;
RCU; z.ss= x.ss/ y.ii;
RCN; }
else
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii< 0.
;
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss< 0, y.ii>=0.
;
else
// x.ss>=0, x.ii>=0, y.ss<0 , y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss/ y.ss;
RCU; z.ss= x.ii/ y.ii;
RCN; }
}
}
else
{ if( y.ss>= 0 )

```

```
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii/ y.ii;
RCU; z.ss= x.ss/ y.ii;
RCN; }
else
// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii< 0.
;
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii>=0.
;
else
// x.ss>=0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss/ y.ss;
RCU; z.ss= x.ii/ y.ss;
RCN; }
}
}
}
else
{ if( x.ii>= 0 )
{ if( y.ss>= 0 )
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii/ y.ss;
RCU; z.ss= x.ss/ y.ss;
RCN; }
else
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss>=0, y.ii< 0.
;
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss< 0, y.ii>=0.
;
else
// x.ss< 0, x.ii>=0, y.ss< 0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss/ y.ii;
RCU; z.ss= x.ii/ y.ii;
RCN; }
}
}
```

```

}
else
{ if( y.ss>= 0 )
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii>=0.
{ RCD; z.ii= x.ii/ y.ii;
RCU; z.ss= x.ss/ y.ss;
RCN; }
else
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss>=0, y.ii< 0.
;
}
else
{ if( y.ii>= 0 )
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii>=0.
;
else
// x.ss< 0, x.ii< 0, y.ss< 0, y.ii< 0.
{ RCD; z.ii= x.ss/ y.ii;
RCU; z.ss= x.ii/ y.ss;
RCN; }
}
}
}
if(isNodef(z.ii)||isNodef(z.ss))
toYNodef(z.ii,z.ss) ;
}
return z;
}
//
// *****
// STREAM OPERATORS.
//
template<class FL>
istream& operator >> (istream& is, Ival<FL>& a)
{
unsigned szFL= sizeof(FL);
FL x=0, y=0;
char c=0;
char str[27]= {'\0'};
if(is)
{
is >> c;

```

```

if(c == '[')
{ is >> c;
if(c == '(')
{ unsigned i=0;
str[i]= c;
while((c != ')')&&(i<27))
{++i; is >> c; str[i]= c;}
if(szFL== sizeof(float))
x= BFloat(str);
else if(szFL== sizeof(double))
x= BDouble(str);
else if(szFL== sizeof(long double))
x= BLongD(str);
is >> c;
if(c == ',')
{ is >> c; i=0; str[i]= c;
while((c != ')')&&(i<27))
{++i; is >> c; str[i]= c;}
if(szFL== sizeof(float))
y= BFloat(str);
else if(szFL== sizeof(double))
y= BDouble(str);
else if(szFL== sizeof(long double))
y= BLongD(str);
is >> c;
}
if (c != ']') is.clear(ios::badbit);
}
else
{ is.putback(c);
is >> x >> c;
if (c == ',') is >> y >> c;
if (c != ']') is.clear(ios::badbit);
}
}
else
{ if(c == '(')
{ unsigned i=0;
str[i]= c;
while((c != ')')&&(i<27))
{++i; is >> c; str[i]= c;}
if(szFL== sizeof(float))
x= BFloat(str);

```

```

else if(szFL== sizeof(double))
x= BDouble(str);
else if(szFL== sizeof(long double))
x= BLongD(str);
y= x;
}
else {is.putback(c); is >> x; y= x;}
}
if(isNodef(x) || isNodef(y)) toYNodef(x,y);
}
else toYNodef(x,y);
a = Ival<FL>(x,y);
return(is);
}
//
//
/*
ostream& operator << (ostream& os, const Ival<float> a)
{
double b,c;
os << "[";
if (a.ii != 0.0) {
    b=log10(fabs(a.ii));
    modf(b,&c);
    c=pow(10.0,6.0-(c+1.0));
    b=a.ii*c;
    b=floor(b);
    b=b/c;
    os << gcvt(b,6,CHBUFFER) << ","; }
else
    os << gcvt(a.ii,6,CHBUFFER) << ",";
if (a.ss != 0.0) {
    b=log10(fabs(a.ss));
    modf(b,&c);
    c=pow(10.0,6.0-(c+1.0));
    b=a.ss*c;
    b=ceil(b);
    b=b/c;
    os << gcvt(b,6,CHBUFFER)<< "]" ;}
else
    os << gcvt(a.ss,6,CHBUFFER) << ",";
return os;
}

```



```

*/
/*
template<class FL>
ostream& operator << (ostream& os, const Ival<FL> a)
{
    return os << "[" << a.ii << "," << a.ss << "];"
}
*/

ostream& operator << (ostream& os, const Ival<float> a)
{
    os << "[";
    if(a.ii >= (float)0.)
    { RCD; os << gcvt(a.ii,7,CHBUFFER)<< ","; }
    else
    { RCU; os << "-"<< gcvt(-a.ii,7,CHBUFFER)<< ","; }
    if(a.ss >= (float)0.)
    { RCU; os << gcvt(a.ss,7,CHBUFFER)<< "];" }
    else
    { RCD; os << "-"<< gcvt(-a.ss,7,CHBUFFER)<< "];" }
    RCN;
    return os;
    // The pair (a.ii, a.ss) with no further filtering.
}
//
template<class FL>
ostream& operator << (ostream& os, const Ival<FL> a)
{
    os << "[";
    if(a.ii >= (FL)0.)
    { RCD; os << gcvt((double)a.ii,16,CHBUFFER)<< ","; }
    else
    { RCU; os << "-"<< gcvt((double)(-a.ii),16,CHBUFFER)<< ","; }
    if(a.ss >= (FL)0.)
    { RCU; os << gcvt((double)a.ss,16,CHBUFFER)<< "];" }
    else
    { RCD; os << "-"<< gcvt((double)(-a.ss),16,CHBUFFER)<< "];" }
    RCN;
    return os;
    // The pair (a.ii, a.ss) with no further filtering.
}

/*#if 0

```

```

//
//
//char aa[1+3+2*(7+MXPREC)];
char aa[1+3+2*(7+MXPREC)];
char*a=aa;
char*Ivfloat::Str(int pr)
{
//char axbf[MXPREC+7];
char axbf[MXPREC+7];
int whts;
if( pr< 1 ) pr= 1; if( pr> MXPREC ) pr= MXPREC;
strcpy(aa, "[");
ii>=0 ? RCD : RCU;
// gcvt( ii, pr, axbf ); whts= MXPREC+7 - strlen( axbf );
gcvt( ii, pr, axbf ); whts= MXPREC+7 - strlen( axbf );
for( int j=0; j<whts ; ++j ) strcat( aa," " );
strcat( aa, axbf );
strcat( aa, "," );
ss>=0 ? RCU : RCD;
// gcvt( ss, pr, axbf ); whts= MXPREC+7 - strlen( axbf );
gcvt( ss, pr, axbf ); whts= MXPREC+7 - strlen( axbf );
for( j=0; j<whts ; ++j ) strcat( aa," " );
strcat( aa, axbf );
strcat( aa, "]" );
RCN; return a;
}
//
#endif
*/
//
// *****
// YBCode:
//
YBCode::~YBCode()
{ if(sz== 0);
else if(sz== sizeof(Ival<float>)) delete yfl;
else if(sz== sizeof(Ival<double>)) delete ydb;
else if(sz== sizeof(Ival<long double>)) delete yld;
}
//
YBCode::YBCode()
{ sz=0; yfl=0; ydb=0; yld=0; }
//

```

```

YBCode::YBCode(const YBCode& xx)
{ sz= xx.sz;
if(sz== 0)
{ yfl=0; ydb=0; yld=0; }
else if(sz== sizeof(Ival<float>))
yfl= new Ival<float>(*(xx.yfl));
else if(sz== sizeof(Ival<double>))
ydb= new Ival<double>(*(xx.ydb));
else if(sz== sizeof(Ival<long double>))
yld= new Ival<long double>(*(xx.yld));
}
//
YBCode::YBCode(const Ival<float> xx)
{ sz= sizeof(Ival<float>);
yfl= new Ival<float>(xx);
}
//
YBCode::YBCode(const Ival<double> xx)
{ sz= sizeof(Ival<double>);
ydb= new Ival<double>(xx);
}
//
YBCode::YBCode(const Ival<long double> xx)
{ sz= sizeof(Ival<long double>);
yld= new Ival<long double>(xx);
}
//
ostream& operator<<(ostream& out, const YBCode xx)
{
if(xx.sz== sizeof(Ival<float>))
{out<< '['<< FBCode(xx.yfl->ii);
out<< ', '<< FBCode(xx.yfl->ss)<< ']'<< '};}
else if(xx.sz== sizeof(Ival<double>))
{out<< '['<< FBCode(xx.ydb->ii);
out<< ', '<< FBCode(xx.ydb->ss)<< ']'<< '};}
else if(xx.sz== sizeof(Ival<long double>))
{out<< '['<< FBCode(xx.yld->ii);
out<< ', '<< FBCode(xx.yld->ss)<< ']'<< '};}
return out;
}
//
//IVAL.CPP's end!
//

```

```

//
// coutfile.h
//
#ifndef _COUTFILE_
#define _COUTFILE_
//
#include <iostream.h>
#include <fstream.h>
//
class doubleio
{
public:
ofstream* file;
//
doubleio(char* fname, unsigned md=0);
doubleio(doubleio&);
~doubleio();
};
//
template<class CIOARG>
doubleio& operator<<(doubleio &os, CIOARG tt)
{ ::cout << tt;
*(os.file) << tt;
return os;
}
//
template<class CIOARG>
doubleio& operator>>(doubleio &is, CIOARG& tt)
{
::cin >> tt;
*(is.file) << tt;
return is;
}
//
// *****
// COUT/CIN TEXT-FILE MACRO.
//
#define COUTFILE(FNAME); \
doubleio cout(FNAME); \
doubleio& cin(cout); \
cout<< "***** COUTFILE IS INSTALLED! *****" \
<< endl<< endl
//

```

```
// *****
// NEW SCREEN( heading) MACRO
//
extern char NewScrMessage;
#define NEWSOCR(HEADING)  \
cout<<                               \
" ***** Enter ANY CHARACTER for a new page!! **[ ";\
cin>> NewScrMessage;                \
cout<< " ]**"<< endl<< endl;        \
clrscr();                             \
cout<< HEADING<< endl<< endl
//

#endif
// END OF "coutfile.h"
```

```
//  
// "coutfile.cpp"  
//  
#include "coutfile.h"  
//  
// *****  
// COUTFILE and NEWSCREEN support.  
//  
doubleio::doubleio(char* fname, unsigned md)  
{ file= new ofstream(fname,md); }  
//  
doubleio::doubleio(doubleio& dio)  
{ file= dio.file; }  
//  
doubleio::~~doubleio()  
{ delete file; }  
//  
//  
char NewScrMessage;  
//  
// END OF "coutfile.cpp"
```

# Apéndice B

## Marcas e intervalos de marcas

Las escalas numéricas, tanto de lectura/escritura como las de cálculo, presentan una ambigüedad morfológica debido a que obligan a considerar exactos, es decir puntuales, valores que en realidad no lo son. A la vez, como su número de cifras es siempre limitado, acostumbra a suceder que el valor que representamos en ellas, no coincide con el hipotético valor exacto al que queremos señalar.

Al trabajar con escalas numéricas sería más correcto referirnos a zonas de puntos en las que los números reales que pertenecen a dicha zona son indiscernibles entre ellos respecto de la escala en la que trabajamos. Son precisamente estas zonas de indiscernibilidad las que nos conducen al concepto de marca numérica en una escala digital.

La marca es un concepto que lleva asociado un intervalo impropio, pero su definición irá más allá de la pura noción intervalar. Así pues, hablaremos de tolerancia, granularidad y también de los elementos que determinan la escala numérica, como son el número de dígitos y la base en la que los expresamos. Una teoría completa de marcas se encuentra en la referencia [37].

### B.1. Marcas

**Definición B.1.1.** (*Marca sobre una escala digital*) La marca sobre una escala digital  $DI_n$  es un objeto que representaremos por  $\langle c, t, g, n, b \rangle$  donde

- $c \in DI_n$  es el centro de la marca
- $t \in ]0, 1[$  es la tolerancia técnica, valor que nos indica la mayor separación relativa entre puntos indiscernibles de la marca y su centro
- $g \in ]0, 1[$  es la granularidad técnica, número que es admisible como unidad de medida de la tolerancia

- $n \in \mathbb{N}$  es el número de dígitos fraccionarios de la mantisa de la escala  $DI_n$
- $b$  es la base de la escala digital  $DI_n$

Observemos que es conveniente exigir  $1 > t > g \geq b^{-n}$  para que la marca sea coherente.

El conjunto de las marcas con tolerancia  $t$  y paso digital  $b^{-n}$  sobre una escala digital  $DI_n$  lo simbolizamos por  $\mathbb{M}(t, n, b)$ , donde los elementos  $t, n$  y  $b$  constituyen el *tipo* de la marca. Conocido el tipo de una marca, ésta queda determinada indicando solamente el centro y la granularidad.

**Definición B.1.2.** (*Intervalos asociados a la marca*) Dada la marca  $X = \langle c, g \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$ , definimos

- intervalo asociado a  $X$  al intervalo  $Iv(X) = c * (1 \pm t) = c * [1 + t, 1 - t]$
- sombra externa de  $X$  al intervalo  $Exsh(X) = Iv(X) * prop(1 \pm g)$

**Proposición B.1.1.** Dada la marca  $X = \langle c, g \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$  se cumple

$$Exsh'(X) \subseteq Iv'(X)$$

Aunque toda marca lleva asociado el intervalo impropio  $Iv(X)$ , cuando consideremos el intervalo  $prop(c * (1 \pm t))$  hablaremos del intervalo de indiscernibilidad de  $X$  y lo representaremos por  $Ind(X)$ . Al referirnos a puntos reales de  $Ind(X)$  lo haremos como a lecturas de  $X$ .

El cociente  $\frac{g}{t}$  es el índice de imprecisión de la marca y su complemento a uno es lo que llamaríamos índice de validez.

La construcción de este nuevo concepto comporta que debamos construir también las correspondientes relaciones entre marcas y además queremos que coincidan con las relaciones entre números reales. Así pues, tendrá sentido hablar de relaciones de igualdad y de desigualdad entre marcas, pero no de relaciones de inclusión. Las relaciones entre marcas se definirán cuando las marcas a relacionar sean comparables (tengan la misma tolerancia y vengan expresadas en la misma base). Bajo este supuesto, si  $X_1 = \langle c_1, g_1 \rangle$  y  $X_2 = \langle c_2, g_2 \rangle$  definiremos

**Definición B.1.3.** (*Relaciones de igualdad*)

- Igualdad material:  $X_1 = X_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2$
- Igualdad débil o paramétrica respecto de  $\alpha \in ]0, 1]$

$$X_1 \approx_\alpha X_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 \in Ind\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b \rangle \\ o \\ c_1 \in Ind\langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b \rangle \end{cases}$$



La relación de igualdad débil cumple las propiedades reflexiva, simétrica y  $(\alpha + \beta)$ -transitiva.

**Definición B.1.4.** (*Relaciones de desigualdad*)

- Desigualdad material:  $X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow c_1 \leq c_2$
- Desigualdad débil o paramétrica respecto de  $\alpha \in ]0, 1]$

$$X_1 \preceq_\alpha X_2 \Leftrightarrow X_1 \leq X_2 \text{ o } X_1 \approx_\alpha X_2$$

La relación de desigualdad débil es reflexiva, antisimétrica y  $(\alpha + \beta)$ -transitiva.

**Definición B.1.5.** (*Relaciones de desigualdad estricta*)

- Desigualdad estricta material:  $X_1 < X_2 \Leftrightarrow Iv(X_1) < Iv(X_2)$
- Desigualdad estricta débil o paramétrica respecto de  $\alpha \in ]0, 1]$

$$X_1 \prec_\alpha X_2 \Leftrightarrow (\neg(X_1 \approx_\alpha X_2)), c_1 < c_2$$

En cualquier cálculo entre marcas acostumbra a haber una pérdida de significación que se refleja sobre la granularidad del resultado. Para dar homogeneidad al sistema, datos y resultados deberán pertenecer al mismo tipo. Debemos reconvertir los valores puntuales a marcas y esta reconversión representaría la operación de medida que deberíamos hacer para obtener un valor efectivo experimental a partir de un valor analítico.

**Definición B.1.6.** (*Operador de marcas con valores intervalares*) Si  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, el operador de marcas con valores intervalares asociado a  $f$  es cualquier función de la forma

$$f_{MI} : \mathbb{M}(t, n, b) \times \mathbb{M}(t, n, b) \longrightarrow I^*(\mathbb{R})$$

tal que si  $X_1$  y  $X_2$  son marcas del tipo  $\mathbb{M}(t, n, b)$  entonces

$$f_{MI}(X_1, X_2) := f(x_1^0, x_2^0) + (1 \pm t)$$

donde  $(x_1^0, x_2^0) \in Iv'(X_1, X_2)$ .

Un operador de este tipo se llama *racional* o *centrado* cuando

$$fR(Iv(X_1), Iv(X_2)) \subseteq f(c_1, c_2) * (1 \pm t)$$

donde  $fR$  es la función intervalar asociada a  $f$  y  $c_1, c_2$  son los centros de las marcas  $X_1$  y  $X_2$  respectivamente.

**Definición B.1.7.** (*Operadores de marcas con valores en  $\mathbb{M}(t, n, b)$* ) Representamos por  $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t, n, b) \times \mathbb{M}(t, n, b) \longrightarrow \mathbb{M}(t, n, b)$  el operador de marcas sobre  $\mathbb{M}(t, n, b)$  asociado a la función continua  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  y si  $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$  siendo  $X_1 = \langle c_1, g_1 \rangle$  y  $X_2 = \langle c_2, g_2 \rangle$  entonces

$$f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, X_2) = \langle dif(c_1, c_2), t, g_z, n, b \rangle$$

donde

- $dif(c_1, c_2)$  es el cálculo digital de  $f$  en  $(c_1, c_2)$  sobre la escala  $DI_n$ .
- La granularidad resultante  $g_z$  la expresamos como  $g_z = \gamma_{1,2} + b^{-n}$  admitiendo que hay desplazamiento relativo en el cálculo de  $dif(c_1, c_2)$  respecto del valor exacto y éste desplazamiento es mínimo; es decir, menor o igual que el valor de la granularidad digital  $b^{-n}$ .

Al valor  $\gamma_{1,2}$  le denominamos término principal de la granularidad imagen. Exigimos siempre que  $\gamma_{1,2} \geq g_{1,2}^M$  siendo  $g_{1,2}^M = \max\{g_1, g_2\}$ . Para determinar este valor  $\gamma_{1,2}$  en la referencia [37] se ha estudiado el criterio minimalista, en el que se piden las dos condiciones siguientes:

$$f(c_1, c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq fR(c_1 * (1 \pm g_1), c_2)$$

$$f(c_1, c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq fR(c_1, c_2 * (1 \pm g_2))$$

El estudio de los operadores aritméticos lleva a que si  $X_1 = \langle c_1, g_1 \rangle$  y  $X_2 = \langle c_2, g_2 \rangle$  son marcas del mismo tipo,  $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$ , entonces

1.  $X_1 * X_2 = \langle dif(c_1 * c_2), t, g_{1,2}^M + b^{-n}, n, b \rangle$
2.  $\frac{X_1}{X_2} = \left\langle dif\left(\frac{c_1}{c_2}\right), t, \max\left\{g_1, \frac{g_2}{1 - g_2}\right\} + b^{-n}, n, b \right\rangle$  siempre que  $0 \notin Ind(X_2)$
3.  $\max\{X_1, X_2\} = \langle \max\{c_1, c_2\}, t, g_{1,2}^M, n, b \rangle$
4.  $\min\{X_1, X_2\} = \langle \min\{c_1, c_2\}, t, g_{1,2}^M, n, b \rangle$
5. Si  $\text{signo}(c_1) = \text{signo}(c_2)$ ,  $X_1 + X_2 = \langle dif(c_1 + c_2), t, g_{1,2}^M + b^{-n}, n, b \rangle$
6. Si  $\text{signo}(c_1) \neq \text{signo}(c_2)$ ,

$$X_1 + X_2 = \left\langle dif(c_1 + c_2), t, \max\left\{g_{1,2}^M, \left|\frac{|c_1|g_1}{|c_1| - |c_2|}\right|, \left|\frac{|c_2|g_2}{|c_1| - |c_2|}\right|\right\} + b^{-n}, n, b \right\rangle$$

Ya estudiados los operadores elementales, si  $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$  es una función racional continua y  $X_1, \dots, X_k \in \mathbb{M}(t, n, b)$ , la función de marcas asociada a  $f$  sobre los argumentos  $X_1, \dots, X_k$  la representamos por  $f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, \dots, X_k)$  y es aquella función en la que

- Cada variable  $x_i$  de la función  $f$  es sustituida por la marca  $X_i$  correspondiente, considerando independientes las incidencias de las variables multiincidentes, si las hubiera
- Cada operador de los que constituyen el árbol sintáctico de  $f$  es sustituido por el operador de marcas correspondiente.
- La semántica del cálculo  $Z = \langle c_z, g_z \rangle = f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, \dots, X_k)$  es

$$(\forall z \in Iv'(\tilde{Z}))(\exists(x_1, \dots, x_k) \in Iv'(X_1) \times \dots \times Iv'(X_k)) z = f(x_1, \dots, x_k)$$

donde  $\tilde{Z}$  es la marca asociada a la sombra de  $Z$ , es decir,

$$\tilde{Z} = \langle c_z, t - g(1 + t), b^{-n}, n, b \rangle$$

## B.2. Intervalos de marcas

La construcción de los intervalos de marcas es paralela a la construcción de los intervalos modales.

**Definición B.2.1.** (*Intervalo de marcas*) Dadas las marcas  $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{M}(t, n, b)$ , designadas por  $\langle a, g \rangle$  y  $\langle \bar{a}, g \rangle$  respectivamente, si  $\underline{A} \leq \overline{A}$ , el intervalo ordinario de marcas de extremos  $\underline{A}$  y  $\overline{A}$  es

$$\mathcal{A}' = [\underline{A}, \overline{A}]' := \{A \in \mathbb{M}(t, \infty, b) \mid A = \langle a, g' \rangle, a \in \mathbb{R}, g' \in [0, 1[, \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\}$$

Al conjunto de intervalos ordinarios de marcas lo denotaremos  $I(\mathbb{M}(t, n, b))$  aunque para simplificar la notación escribiremos  $I(\mathbb{M})$ .

**Definición B.2.2.** (*Intervalo modal de marcas*) Un intervalo modal de marcas del tipo  $\mathbb{M}(t, n, b)$  está formado por un intervalo ordinario de marcas y un cuantificador, la modalidad, es decir

$$\mathcal{A} = ((A', Q_A), A' \in I(\mathbb{M}), Q_A \in \{E, U\})$$

Al conjunto de intervalos de marcas del tipo  $t, n, b$  lo notaremos  $I^*(\mathbb{M})$ .

**Definición B.2.3.** (*Ínfimo y supremo de una marca*) Si  $\mathcal{A}$  es  $([\underline{A}, \overline{A}]', Q_{\mathcal{A}})$  definimos

- ínfimo de  $\mathcal{A}$

$$\text{inf}(\mathcal{A}) = \begin{cases} \text{mín}\{\underline{A}, \overline{A}\} & \text{si } \text{mod}(\mathcal{A}) = E \\ \text{máx}\{\underline{A}, \overline{A}\} & \text{si } \text{mod}(\mathcal{A}) = U \end{cases}$$

- supremo de  $\mathcal{A}$

$$\sup(\mathcal{A}) = \begin{cases} \text{máx}\{\underline{A}, \overline{A}\} & \text{si } \text{mod}(\mathcal{A}) = E \\ \text{mín}\{\underline{A}, \overline{A}\} & \text{si } \text{mod}(\mathcal{A}) = U \end{cases}$$

Observemos que la definición de ínfimo y supremo implica que los extremos de  $\mathcal{A}$  tengan la misma granularidad ya que los operadores mínimo y máximo sobre marcas consideran la mayor de las granularidades de los operandos.

**Proposición B.2.1.** (*Relaciones de inclusión, igualdad y desigualdad*)

- $\mathcal{A}$  está incluido en  $\mathcal{B}$  cuando  $\text{Pred}(\mathcal{A}) \subseteq \text{Pred}(\mathcal{B})$
- $\mathcal{A}$  es igual a  $\mathcal{B}$  cuando  $\text{Pred}(\mathcal{A}) = \text{Pred}(\mathcal{B})$
- $\mathcal{A}$  está débilmente incluido en  $\mathcal{B}$  respecto de  $\alpha$  cuando  $\underline{A} \succeq_\alpha \underline{B}$ ,  $\overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}$
- $\mathcal{A}$  es débilmente igual a  $\mathcal{B}$  respecto de  $\alpha$  cuando  $\underline{A} \approx_\alpha \underline{B}$ ,  $\overline{A} \approx_\alpha \overline{B}$

A partir de las propiedades de las relaciones de desigualdad débil entre marcas se deduce que la inclusión débil de intervalos de marcas cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y  $(\alpha + \beta)$ -transitiva (siempre que las granularidades sean correctas).

También a partir de las propiedades de la igualdad débil entre marcas se deducen las propiedades de la relación de igualdad débil entre intervalos de marcas; reflexiva, antisimétrica y  $(\alpha + \beta)$ -transitiva (suponiendo la compatibilidad de las granularidades con  $\alpha t$ ,  $\beta t$  i/o  $(\alpha + \beta)t$ , según sea necesario).

**Definición B.2.4.** (*Relaciones de menor o igual*)

- $\mathcal{A}$  es menor o igual que  $\mathcal{B}$  cuando  $\underline{A} \leq \underline{B}$ ,  $\overline{A} \leq \overline{B}$
- $\mathcal{A}$  es débilmente menor o igual que  $\mathcal{B}$  respecto de  $\alpha$  cuando  $\underline{A} \preceq_\alpha \underline{B}$ ,  $\overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}$

Análogamente a como se define para el análisis intervalar modal definimos la extensión \*-semántica.

**Definición B.2.5.** (*Función \*-semántica*) La función \*-semántica asociada a  $f_{\mathbb{M}(t,n)}$  se representa por

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}^* : I^*(\mathbb{M}(t,n)^k) \subseteq I^*(\mathbb{M}(t,\infty)^k) \rightarrow I^*(\mathbb{M}(t,\infty))$$

y si  $\mathcal{X} \in I^*(\mathbb{M}(t,n)^k)$ , se define como

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}^*(\mathcal{X}) := \langle f^*(\text{ProjReal}(\mathcal{X})), t, g_f(\mathcal{X}), \infty, b \rangle$$

siendo  $g_f(\mathcal{X})$  la máxima de las granularidades que se obtendrían en el cálculo de los extremos de  $f^*(\text{ProjReal}(\mathcal{X}))$ .

La semántica que verificará esta extensión en términos de intervalos de marcas queda reflejada en el siguiente teorema.

**Teorema B.2.1.** (*Teorema semántico*) Sea  $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n)^k \rightarrow \mathbb{M}(t,n)$ . Dado  $\mathcal{A} \in I^*(\mathbb{M}(t,n)^k)$ , si  $F_{\mathbb{M}(t,\infty)} : I^*(\mathbb{M}(t,n)^k) \rightarrow I^*(\mathbb{M}(t,\infty))$  es una función tal que existe  $F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathcal{A}) \in I^*(\mathbb{M}(t,\infty))$ , entonces, si todas las marcas que intervienen son válidas, las siguientes afirmaciones son equivalentes,

- $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}^*(\mathcal{A}) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathcal{A})$
- $U(\mathcal{X}', I(\mathbb{M}(t,n)^k))(\cdot \in \mathcal{X}') \in \text{Pred} * (\mathcal{A}) \Rightarrow (\cdot \in Df_{\mathbb{M}}(\mathcal{X}')) \in \text{Pred} * (F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathcal{A}))$
- $U(A_p, \mathcal{A}'_p)Q(Z, F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathcal{A}))E(A_i, \mathcal{A}'_i) Z = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, A_i)$

La construcción de los intervalos de marcas sigue un camino paralelo al de los intervalos modales, por tanto los resultados que obtenemos en  $I^*(\mathbb{M})$  serán básicamente equivalentes a los resultados en  $I^*(\mathbb{R})$ , si bien el carácter fundamentalmente “fuzzy” del parámetro de validez de las marcas introduce efectivamente un nivel adicional de complejidad.



# Apéndice C

## Crank-Nicolson

El sistema

$$\begin{pmatrix} 2(1+d) & -d & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -d & 2(1+d) & -d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d & 2(1+d) & -d & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 2(1+d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ f_3^{n+1} \\ \vdots \\ f_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} b_1 &= df(0, t^n) + 2(1-d)f_1^n + df_2^n + df(0, t^{n+1}) \\ b_2 &= df_1^n + 2(1-d)f_2^n + df_3^n \\ b_3 &= df_2^n + 2(1-d)f_3^n + df_4^n \\ &\vdots \\ b_N &= df_{N-1}^n + 2(1-d)f_N^n + df(L, t^n) + df(L, t^{n+1}) \end{aligned}$$

puede escribirse, prescindiendo de la notación matricial, de la forma

$$\left. \begin{aligned} 2(1+d)f_1^{n+1} - df_2^{n+1} - 2(1-d)f_1^n - df_2^n - d(f_0^{n+1} + f_0^n) &= 0 \\ -df_1^{n+1} + 2(1+d)f_2^{n+1} - df_3^{n+1} - df_1^n - 2(1-d)f_2^n - df_3^n &= 0 \\ -df_2^{n+1} + 2(1+d)f_3^{n+1} - df_4^{n+1} - df_2^n - 2(1-d)f_3^n - df_4^n &= 0 \\ \cdots & \\ -df_{N-1}^{n+1} + 2(1+d)f_N^{n+1} - df_{N-1}^n - 2(1-d)f_N^n - d(f_{N+1}^{n+1} + f_{N+1}^n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Si dividimos por  $d$  y consideramos el cambio de variable  $c = \frac{1}{d}$  en cada ecuación del sistema, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} 2(1+c)f_1^{n+1} - f_2^{n+1} + 2(1-c)f_1^n - f_2^n - (f_0^{n+1} + f_0^n) &= 0 \\ -f_1^{n+1} + 2(1+c)f_2^{n+1} - f_3^{n+1} - f_1^n + 2(1-c)f_2^n - f_3^n &= 0 \\ -f_2^{n+1} + 2(1+c)f_3^{n+1} - f_4^{n+1} - f_2^n + 2(1-c)f_3^n - f_4^n &= 0 \\ \cdots & \\ -f_{N-1}^{n+1} + 2(1+c)f_N^{n+1} - f_{N-1}^n + 2(1-c)f_N^n - (f_{N+1}^{n+1} + f_{N+1}^n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (C.1)$$

Planteamos a continuación el problema intervalar

$$T_t = KT_{xx} \quad K \in I^*(\mathbb{R})$$

y estudiamos su resolución aplicando el método de Crank-Nicolson, luego nuestro objetivo es resolver el siguiente sistema intervalar:

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * T_1^{n+1} - T_2^{n+1} + 2(1-C) * T_1^n - T_2^n - (T_0^{n+1} + T_0^n) &= 0 \\ -T_1^{n+1} + 2(1+C) * T_2^{n+1} - T_3^{n+1} - T_1^n + 2(1-C) * T_2^n - T_3^n &= 0 \\ -T_2^{n+1} + 2(1+C) * T_3^{n+1} - T_4^{n+1} - T_2^n + 2(1-C) * T_3^n - T_4^n &= 0 \\ \dots & \\ -T_{N-1}^{n+1} + 2(1+C) * T_N^{n+1} - T_{N-1}^n + 2(1-C) * T_N^n - (T_{N+1}^{n+1} + T_{N+1}^n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Este sistema no permite aplicar los teoremas de optimalidad del análisis intervalar modal, ya que si estudiamos la monotonía respecto a la variable multiincidente  $C$  se comprueba, tal como veremos a continuación, que no hay monotonía.

Consideremos

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 2(1+c)f_1^{n+1} - f_2^{n+1} + 2(1-c)f_1^n - f_2^n - (f_0^{n+1} + f_0^n) \\ F_2 &= -f_1^{n+1} + 2(1+c)f_2^{n+1} - f_3^{n+1} - f_1^n + 2(1-c)f_2^n - f_3^n \\ F_3 &= -f_2^{n+1} + 2(1+c)f_3^{n+1} - f_4^{n+1} - f_2^n + 2(1-c)f_3^n - f_4^n \\ \dots & \\ F_N &= -f_{N-1}^{n+1} + 2(1+c)f_N^{n+1} - f_{N-1}^n + 2(1-c)f_N^n - (f_{N+1}^{n+1} + f_{N+1}^n) \end{aligned} \right\}$$

Estudiamos la posible monotonía respecto a la variable multiincidente

$$\frac{\partial F_i}{\partial c} = 2f_i^{n+1} - 2f_i^n \quad (i = 1, \dots, N)$$

y como vemos, no tiene signo definido.

Sin embargo, observemos que reordenando términos, podemos escribir el sistema C.1 en la forma

$$\left. \begin{aligned} 2(1+c)(f_1^{n+1} - f_1^n) - (f_2^{n+1} - f_2^n) + 4f_1^n - 2f_2^n - (f_0^{n+1} + f_0^n) &= 0 \\ -(f_1^{n+1} - f_1^n) + 2(1+c)(f_2^{n+1} - f_2^n) - (f_3^{n+1} - f_3^n) - 2f_1^n + 4f_2^n - 2f_3^n &= 0 \\ -(f_2^{n+1} - f_2^n) + 2(1+c)(f_3^{n+1} - f_3^n) - (f_4^{n+1} - f_4^n) - 2f_2^n + 4f_3^n - 2f_4^n &= 0 \\ \dots & \\ -(f_{N-1}^{n+1} - f_{N-1}^n) + 2(1+c)(f_N^{n+1} - f_N^n) - 2f_{N-1}^n + 4f_N^n - (f_{N+1}^{n+1} + f_{N+1}^n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuyo problema intervalar asociado

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * (T_1^{n+1} - T_1^n) - (T_2^{n+1} - T_2^n) + 4T_1^n - 2T_2^n - (T_0^{n+1} + T_0^n) &= 0 \\ -(T_1^{n+1} - T_1^n) + 2(1+C) * (T_2^{n+1} - T_2^n) - (T_3^{n+1} - T_3^n) - 2T_1^n + 4T_2^n - 2T_3^n &= 0 \\ -(T_2^{n+1} - T_2^n) + 2(1+C) * (T_3^{n+1} - T_3^n) - (T_4^{n+1} - T_4^n) - 2T_2^n + 4T_3^n - 2T_4^n &= 0 \\ \dots & \\ -(T_{N-1}^{n+1} - T_{N-1}^n) + 2(1+C) * (T_N^{n+1} - T_N^n) - 2T_{N-1}^n + 4T_N^n - (T_{N+1}^{n+1} + T_{N+1}^n) &= 0 \end{aligned} \right\}$$



sí nos da una solución intervalar optimal interpretable, tal como se demuestra a continuación.

Definimos

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 2(1+c)(f_1^{n+1} - f_1^n) - (f_2^{n+1} - f_2^n) + 4f_1^n - 2f_2^n - (f_0^{n+1} + f_0^n) \\ F_2 &= -(f_1^{n+1} - f_1^n) + 2(1+c)(f_2^{n+1} - f_2^n) - (f_3^{n+1} - f_3^n) - 2f_1^n + 4f_2^n - 2f_3^n \\ F_3 &= -(f_2^{n+1} - f_2^n) + 2(1+c)(f_3^{n+1} - f_3^n) - (f_4^{n+1} - f_4^n) - 2f_2^n + 4f_3^n - 2f_4^n \\ &\dots \\ F_N &= -(f_{N-1}^{n+1} - f_{N-1}^n) + 2(1+c)(f_N^{n+1} - f_N^n) - 2f_{N-1}^n + 4f_N^n - (f_{N+1}^{n+1} + f_{N+1}^n) \end{aligned} \right\}$$

Si calculamos las derivadas parciales de las funciones  $F_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) respecto a sus variables multiincidentes obtenemos:

$$\frac{\partial F_i}{\partial f_{i-1}^n} = -1 \quad (i = 2, \dots, N)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial f_i^n} = -2(1+c) + 4 < 0 \Leftrightarrow c > 1 \Leftrightarrow \Delta t < \frac{(\Delta x)^2}{k} \quad (c = \frac{(\Delta x)^2}{k\Delta t}) \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial f_{i+1}^n} = -1 \quad (i = 1, \dots, N-1)$$

Aplicando los teoremas de optimalidad se deduce que el cálculo optimal para dicho sistema es:

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * (T_1^{n+1} - T_1^n) - Dual(T_2^{n+1} - T_2^n) &= B_1 \\ -Dual(T_1^{n+1} - T_1^n) + 2(1+C) * (T_2^{n+1} - T_2^n) - Dual(T_3^{n+1} - T_3^n) &= B_2 \\ -Dual(T_2^{n+1} - T_2^n) + 2(1+C) * (T_3^{n+1} - T_3^n) - Dual(T_4^{n+1} - T_4^n) &= B_3 \\ &\dots \\ -Dual(T_{N-1}^{n+1} - T_{N-1}^n) + 2(1+C) * (T_N^{n+1} - T_N^n) &= B_N \end{aligned} \right\}$$

siendo

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -4T_1^n + 2Dual(T_2^n) + Dual(T_0^{n+1} + T_0^n) \\ B_2 &= 2Dual(T_1^n) - 4T_2^n + 2Dual(T_3^n) \\ B_3 &= 2Dual(T_2^n) - 4T_3^n + 2Dual(T_4^n) \\ &\dots \\ B_N &= 2Dual(T_{N-1}^n) - 4T_N^n + Dual(T_{N+1}^{n+1} + T_{N+1}^n) \end{aligned} \right\}$$

Resolvemos este sistema considerando las variables  $I_i = T_i^{n+1} - T_i^n$ , y por tanto

$$T_i^{n+1} = I_i + Dual(T_i^n)$$

Para resolver el sistema

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * I_1 - Dual(I_2) &= B_1 \\ -Dual(I_1) + 2(1+C) * I_2 - Dual(I_3) &= B_2 \\ -Dual(I_2) + 2(1+C) * I_3 - Dual(I_4) &= B_3 \\ \dots & \\ -Dual(I_{N-1}) + 2(1+C) * I_N &= B_N \end{aligned} \right\}$$

utilizamos el método propuesto en las referencias [60] [61] y que adaptado a nuestro sistema particular es el siguiente:

Consideremos  $(i_1, \dots, i_N)$  una solución real del sistema

$$\left. \begin{aligned} 2(1+c)i_1 - i_2 &= b_1 \\ -i_1 + 2(1+c)i_2 - i_3 &= b_2 \\ -i_2 + 2(1+c)i_3 - i_4 &= b_3 \\ \dots & \\ -i_{N-1} + 2(1+c)i_N &= b_N \end{aligned} \right\}$$

siendo  $2(1+c)$  cualquier número real perteneciente al conjunto  $2(1+C)'$  y  $b_i$  cualquier número real del conjunto  $B'_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) y consideremos  $I^0 = ([i_1, i_1], \dots, [i_N, i_N]) = (I_1^0, \dots, I_N^0)$ .

$I^0$  es solución del sistema

$$\left. \begin{aligned} Impr(2(1+C)) * I_1 - I_2 &\subseteq Prop(B_1) \\ -I_1 + Impr(2(1+C)) * I_2 - I_3 &\subseteq Prop(B_2) \\ -I_2 + Impr(2(1+C)) * I_3 - I_4 &\subseteq Prop(B_3) \\ \dots & \\ -I_{N-1} + Impr(2(1+C)) * I_N &\subseteq Prop(B_N) \end{aligned} \right\}$$

Utilizando el operador intervalar Jacobi asociado a este sistema obtenemos

$$I_1^1 = J(I_1^0) = \frac{Prop(B_1) + Dual(I_2^0)}{Dual(Impr(2(1+C)))}$$

$$I_i^1 = J(I_i^0) = \frac{Prop(B_i) + Dual(I_{i-1}^0) + Dual(I_{i+1}^0)}{Dual(Impr(2(1+C)))} \quad i = 2, \dots, N-1$$

$$I_N^1 = J(I_N^0) = \frac{Prop(B_N) + Dual(I_{N-1}^0)}{Dual(Impr(2(1+C)))}$$

suponiendo que  $0 \notin 2(1+C)$ .

A continuación definimos  $Y_0 = (Y_1^0, \dots, Y_N^0) := (I_1^1, \dots, I_N^1)$  que es solución inicial del sistema

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * I_1 - I_2 &\supseteq B_1 \\ -I_1 + 2(1+C) * I_2 - I_3 &\supseteq B_2 \\ -I_2 + 2(1+C) * I_3 - I_4 &\supseteq B_3 \\ \dots & \\ -I_{N-1} + 2(1+C) * I_N &\supseteq B_N \end{aligned} \right\}$$

Si  $Y^0$  es una solución propia del sistema (por ejemplo, cualquier aproximación interior del conjunto de soluciones del sistema)

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * I_1 - I_2 &\subseteq B_1 \\ -I_1 + 2(1+C) * I_2 - I_3 &\subseteq B_2 \\ -I_2 + 2(1+C) * I_3 - I_4 &\subseteq B_3 \\ \dots & \\ -I_{N-1} + 2(1+C) * I_N &\subseteq B_N \end{aligned} \right\}$$

entonces  $Y^0$  también es solución del sistema

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * I_1 - Dual(I_2) &\subseteq B_1 \\ -Dual(I_1) + 2(1+C) * I_2 - Dual(I_3) &\subseteq B_2 \\ -Dual(I_2) + 2(1+C) * I_3 - Dual(I_4) &\subseteq B_3 \\ \dots & \\ -Dual(I_{N-1}) + 2(1+C) * I_N &\subseteq B_N \end{aligned} \right\}$$

Si consideramos el operador intervalar Jacobi asociado a este sistema

$$\begin{aligned} J(I_1) &= \frac{B_1 + I_2}{Dual(2(1+C))} \\ J(I_i) &= \frac{B_i + I_{i-1} + I_{i+1}}{Dual(2(1+C))} \quad i = 2, \dots, N-1 \\ J(I_N) &= \frac{B_N + I_{N-1}}{Dual(2(1+C))} \end{aligned}$$

suponiendo que  $0 \notin 2(1+C)$  podemos obtener una secuencia de vectores intervalares  $Y^0, Y^1 = J(Y^0), Y^2 = J(Y^1), \dots$  que cumple

$$Y^0 \subseteq Y^1 \subseteq Y^2 \subseteq Y^3 \subseteq Y^4 \subseteq Y^5 \subseteq \dots$$

y cualquier  $Y^t$  es solución de

$$\left. \begin{aligned} 2(1+C) * I_1 - Dual(I_2) &\subseteq B_1 \\ -Dual(I_1) + 2(1+C) * I_2 - Dual(I_3) &\subseteq B_2 \\ -Dual(I_2) + 2(1+C) * I_3 - Dual(I_4) &\subseteq B_3 \\ \dots & \\ -Dual(I_{N-1}) + 2(1+C) * I_N &\subseteq B_N \end{aligned} \right\}$$

La condición suficiente de convergencia es que  $\text{Prop}(A)$  sea una matriz intervalar estrictamente diagonal dominante.

Aplicando este método al ejemplo particular que hemos estudiado anteriormente en el apartado 6.2, y considerando  $K = [0.004, 0.01]$  obtiene resultados parecidos a los que obtiene el método explícito tal como muestra la figura C.1.

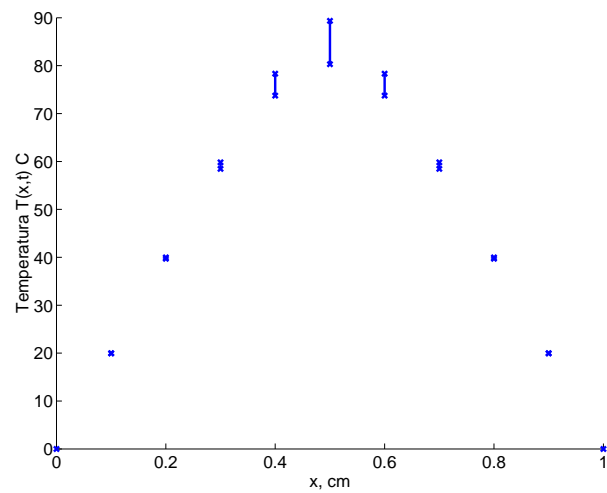


Fig. C.1  $n = 10, t = 10$