

TESIS DOCTORAL

MODELO ESTOCÁSTICO DE
HUESO CORTICAL DE
COSTILLA HUMANA PARA
LA PREDICCIÓN DE
FRACTURAS MEDIANTE
EMISIÓN ACÚSTICA

Autor: *Silvia García Vilana*

Directores: *Dr. David Sánchez Molina*
Dr. Juan Velázquez Ameijide

Centro: *Universitat Politècnica de Catalunya,*
Escola d'Enginyeria de Barcelona Est
(EEBE)

Fecha: 11 de noviembre de 2020



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Título: Modelo estocástico de hueso cortical de costilla humana para la predicción de fracturas mediante emisión acústica

Autor: Silvia García Vilana

Fecha: 11 de noviembre de 2020

Resumen: En esta memoria se propone un modelo constitutivo no lineal con microfisuración e irreversibilidad de hueso cortical de costilla humana, ampliado con un modelo estocástico de fractura, basado en la emisión acústica. Ambos modelos describen el comportamiento de la costilla humana desde el inicio de la sollicitación hasta la fractura macroscópica. El desarrollo del modelo constitutivo usa la formulación de la mecánica de medios continuos, junto con el formalismo de la mecánica estadística y su combinatoria. En lo que respecta al modelo estocástico de fractura, este se basa en la teoría de la percolación y el uso de distribuciones de Weibull. Para su examen experimental se emplearon mediciones de emisión acústica.

Para mostrar la adecuación de los modelos, se han realizado ensayos de flexión de costilla humana completa con un diseño experimental innovador y también se han utilizado datos de hueso cortical de costilla ensayados a tracción. Además, se han determinado varias variables relacionadas con la microestructura del hueso, para analizar su influencia en los parámetros del modelo constitutivo.

Keywords: Costilla Humana, Emisión acústica, Modelo estocástico, Modelo constitutivo, Fisuración

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento a mis directores de tesis, los doctores David Sánchez y Juan Velázquez, así como a mi tutor el Dr. Carlos Arregui, por brindarme la oportunidad de desarrollar esta investigación, por involucrarme en otros proyectos, por las numerosas horas invertidas, los consejos y el esfuerzo y por todo lo que he podido aprender de ellos.

Así mismo, quiero agradecer a los colaboradores que han participado en esta investigación, entre ellos Jordi Llumà e Ismael Fernández, el tiempo que han invertido en su desarrollo. También quiero mencionar a mis compañeros de los departamentos de RMEE, EM y CMEM a los que agradezco la contribución con sus aportaciones intelectuales, su predisposición a colaborar y sus comentarios e ideas. Así mismo, quiero dar las gracias a Jordi Jorba, por iniciarme en la investigación hace años y mostrarme un camino que en este tiempo me ha aportado mucho.

Además, este proyecto fue posible gracias al convenio de colaboración entre la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) y el Institut de Medicina Legal i Ciències Forenses de Catalunya (IMLCFC) y al apoyo financiero y logístico de la UPC y del Grup de recerca Aplicada en Biomecànica de l'Impacte (GRABI), que hicieron materialmente posible parte de los medios usados.

Finalmente deseo expresar mi profundo agradecimiento a mis padres Ester y Javier por enseñarme lo que es la constancia y el esfuerzo, a mi marido Toni por su soporte moral e incondicional y a los miembros de mi familia y amigos por todo su apoyo, a todos ellos, gracias por sumar a lo largo de estos años.

Sumario

En esta memoria se propone un modelo constitutivo no lineal con microfisuración e irreversibilidad para hueso cortical de costilla humana, ampliado con un modelo estocástico de fractura, basado en emisión acústica. Ambos modelos son innovadores y describen el comportamiento de la costilla humana desde el inicio de la sollicitación hasta la fractura macroscópica. Experimentalmente los modelos han mostrado modelizar adecuadamente el comportamiento mecánico de la costilla, incluso en la zona no elástica, donde los procesos irreversibles han sido asociados principalmente a la propagación de microfisuras a través del material. Además, el modelo constitutivo es termodinámicamente consistente, mostrando un incremento notable en la entropía a medida que se promueve la fisuración, región en la que, a su vez, se ha observado un notable incremento asintótico de la energía liberada por el material en forma de ondas, detectadas por la técnica de emisión acústica.

Además, los parámetros constitutivos del modelo exhiben correlaciones significativas tanto con variables antropométricas, como con parámetros microestructurales, tales como la densidad, la dimensión fractal o el contenido mineral, denotando una clara importancia de la microestructura en el comportamiento del hueso cortical. En este contexto, el parámetro de atemperación del desorden, que representa el daño microestructural previo a la sollicitación y que ha sido introducido en el modelo por medio de la mecánica estadística, ha mostrado tener una gran influencia con la edad. Así mismo, también se ha encontrado una relación de la mineralización de la muestra con los caminos posibles que la fisura puede tomar en el avance a través de la red de osteonas. El número de caminos ha sido determinado mediante la combinatoria.

Por otro lado, el modelo estocástico de fractura predice adecuadamente y de manera cuantitativa la aparición de señales acústicas o *hits* asociados al nivel de tensión introducido en la muestra, siendo uno de los primeros modelos desarrollados en hueso.

Índice

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | INTRODUCCIÓN | 1 |
| 1.1 | ENFOQUE ADOPTADO DE INVESTIGACIÓN | 2 |
| 1.2 | PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN | 7 |
| 2 | ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS TEÓRICOS | 9 |
| 2.1 | LA COSTILLA HUMANA | 10 |
| 2.1.1 | <i>La geometría de la costilla humana</i> | 13 |
| 2.1.2 | <i>Ensayos y determinación de las propiedades mecánicas</i> | 14 |
| 2.1.3 | <i>Influencia de la antropometría y geometría</i> | 16 |
| 2.1.4 | <i>Influencia de la microestructura: densidad, porosidad y Dimensión Fractal</i> | 17 |
| 2.2 | MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS | 20 |
| 2.2.1 | <i>Cinemática: movimiento y deformación</i> | 22 |
| 2.2.2 | <i>Tensión</i> | 27 |
| 2.2.3 | <i>Ecuaciones constitutivas y representación de la anisotropía</i> | 28 |
| 2.2.4 | <i>Modelos constitutivos</i> | 41 |
| 2.3 | ECUACIONES DE BALANCE Y LEYES TERMODINÁMICAS | 54 |
| 2.3.1 | <i>Conservación de masa</i> | 55 |
| 2.3.2 | <i>Ecuación de balance de momentos</i> | 56 |
| 2.3.3 | <i>Primer principio de la termodinámica</i> | 58 |
| 2.3.4 | <i>Segundo principio de la termodinámica</i> | 59 |
| 2.4 | MECÁNICA ESTADÍSTICA | 63 |
| 2.4.1 | <i>Conceptos básicos de la mecánica estadística</i> | 65 |
| 2.4.2 | <i>Macroestados y relaciones termodinámicas</i> | 68 |
| 2.5 | EMISIÓN ACÚSTICA | 70 |
| 2.5.1 | <i>Descripción general de la técnica de EA</i> | 71 |
| 2.5.2 | <i>Uso de la EA en biomecánica</i> | 73 |

ÍNDICE

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | METODOLOGÍA EXPERIMENTAL | 79 |
| 3.1 | MATERIAL | 80 |
| 3.2 | PREPARACIÓN DE LAS MUESTRAS | 84 |
| 3.2.1 | <i>Mecanizado de probetas de tracción</i> | 84 |
| 3.2.2 | <i>Preparación de muestras de flexión</i> | 86 |
| 3.3 | ENSAYOS EXPERIMENTALES | 88 |
| 3.3.1 | <i>Ensayo de tracción</i> | 91 |
| 3.3.2 | <i>Ensayo de flexión</i> | 92 |
| 3.3.3 | <i>Sincronización de datos</i> | 95 |
| 3.3.4 | <i>Procesado de imágenes</i> | 97 |
| 3.4 | MEDIDA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL | 100 |
| 3.5 | DETERMINACIÓN DEL CONTENIDO MINERAL | 102 |
| 4 | MODELO PROPUESTO | 107 |
| 4.1 | CONSIDERACIONES DE LOS MODELOS HIPERELÁSTICOS | 109 |
| 4.1.1 | <i>Mecánica estadística de estados con microfisuras</i> | 111 |
| 4.1.2 | <i>Microconfiguraciones compatibles con un macroestado</i> | 113 |
| 4.1.3 | <i>Modelo no lineal con degradación</i> | 120 |
| 4.1.4 | <i>Estudio de la variación de entropía por fisuración</i> | 127 |
| 4.2 | DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LA COSTILLA HUMANA | 132 |
| 4.2.1 | <i>Triedro de Frenet-Serret de la costilla humana</i> | 134 |
| 4.2.2 | <i>Desplazamiento y deformaciones a lo largo de la costilla</i> | 138 |
| 4.3 | MODELO PARTICULARIZADO PARA TRACCIÓN SIMPLE | 140 |
| 4.3.1 | <i>Deformaciones en tracción simple</i> | 141 |
| 4.3.2 | <i>Tensiones en tracción simple</i> | 145 |
| 4.3.3 | <i>Función energía de deformación en tracción simple</i> | 145 |
| 4.4 | MODELO PARTICULARIZADO PARA FLEXIÓN EN EL PLANO | 149 |
| 4.4.1 | <i>Desplazamientos para la flexión simple</i> | 152 |
| 4.4.2 | <i>Deformaciones en flexión</i> | 154 |
| 4.4.3 | <i>Tensiones en flexión</i> | 158 |
| 4.4.4 | <i>Función energía de deformación en flexión</i> | 161 |
| 4.4.5 | <i>Caso elástico lineal transversalmente isótropo</i> | 164 |
| 4.5 | EMISIÓN ACÚSTICA Y LA MICROFISURACIÓN | 165 |
| 4.5.1 | <i>Introducción a la teoría de la percolación</i> | 166 |
| 4.5.2 | <i>Detalles matemáticos de la percolación</i> | 168 |
| 4.5.3 | <i>Percolación dependiente con distribución de Weibull</i> | 170 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.5.4 | <i>Exponentes críticos en la teoría de la percolación</i> | 171 |
| 5 | RESULTADOS | 177 |
| 5.1 | MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL | 179 |
| 5.1.1 | <i>Aplicación a los ensayos de tracción de coupons</i> | 180 |
| 5.1.2 | <i>Aplicación a los ensayos de flexión</i> | 194 |
| 5.1.3 | <i>Comparativa entre tracción y flexión</i> | 209 |
| 5.1.4 | <i>Avance de la microsifuración y aumento de entropía</i> | 224 |
| 5.2 | MODELO ESTOCÁSTICO DE FRACTURA MEDIANTE EMISIÓN ACÚSTICA | 228 |
| 5.2.1 | <i>Estudios preliminares</i> | 229 |
| 5.2.2 | <i>Curvas de hits frente a tensión corregida</i> | 233 |
| 5.2.3 | <i>Estimación de los parámetros del modelo de percolación</i> | 237 |
| 6 | CONCLUSIONES | 239 |
| 6.1 | PROBLEMAS PLANTEADOS EN EL ÁREA DE INVESTIGACIÓN | 242 |
| 6.2 | CONTRIBUCIONES PRINCIPALES | 243 |
| 6.3 | LIMITACIONES | 245 |
| 6.4 | LÍNEAS FUTURAS DE TRABAJO | 246 |
| A | ANEXO: CONCEPTOS DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS | 247 |
| A.1 | TENSORES Y MECÁNICA DE MEDIOS DE CONTINUOS | 248 |
| A.1.1 | <i>Álgebra tensorial</i> | 248 |
| A.1.2 | <i>Tensor métrico y coordenadas curvilíneas</i> | 252 |
| A.1.3 | <i>Covariancia y Contravariancia</i> | 255 |
| A.1.4 | <i>Adjunto de un tensor (traspuesto métrico)</i> | 259 |
| A.1.5 | <i>Cálculo diferencial con matrices</i> | 260 |
| A.2 | DEFORMACIÓN DE UN SÓLIDO | 264 |
| A.2.1 | <i>Tensor gradiente de deformaciones</i> | 264 |
| A.2.2 | <i>Tensores de deformación materiales</i> | 266 |
| A.2.3 | <i>Tensores de deformación espaciales</i> | 269 |
| A.2.4 | <i>Relación entre tensores de deformación</i> | 271 |
| A.3 | TEORÍA CONSTITUTIVA | 273 |
| A.3.1 | <i>Conceptos de objetividad</i> | 273 |
| A.3.2 | <i>Relaciones entre ecuaciones constitutivas específicas</i> | 275 |
| A.3.3 | <i>Consideraciones termodinámicas</i> | 280 |

ÍNDICE

| | |
|---|------------|
| B ANEXO: CÁLCULOS | 293 |
| B.1 DESARROLLO DE LA SERIE DE POTENCIAS | 293 |
| B.2 PARTICULARIZACIÓN DEL MODELO CONSTITUTIVO | 294 |
| <i>B.2.1 Tracción simple</i> | 296 |
| B.3 CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS DE UN CT | 299 |
| B.4 DESCRIPCIÓN DEL EJE BARICÉNTRICO EN LA COSTILLA HUMANA COMPLETA | 303 |
| B.5 CORRECCIÓN DE LA TENSIÓN PARA EMISIÓN ACÚSTICA | 306 |
| C ANEXO: METODOLOGÍAS Y ESTUDIOS COMPLEMENTARIOS | 309 |
| C.1 PREVENCIÓNES | 309 |
| <i>C.1.1 Prevenciones de salud del operario</i> | 310 |
| <i>C.1.2 Obtención de muestras de material biológico</i> | 310 |
| <i>C.1.3 Equipos de protección personal (EPIs)</i> | 311 |
| <i>C.1.4 Señalización</i> | 311 |
| C.2 FABRICACIÓN DE <i>coupons</i> | 312 |
| C.3 INFLUENCIA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL EN LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HUESO CORTICAL | 314 |
| C.4 INFLUENCIA DEL CONTENIDO MINERAL EN LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HUESO CORTICAL | 316 |
| BIBLIOGRAFÍA | 319 |

Lista de figuras

| | | |
|------|---|-----|
| 2.1 | Niveles jerárquicos del tejido óseo | 10 |
| 2.2 | Estructura del tejido óseo | 12 |
| 2.3 | Tórax humano | 13 |
| 2.4 | Partes y geometría de la costilla humana | 14 |
| 2.5 | Dirección preferencial de la costilla | 40 |
| 2.6 | Detección y características de las ondas detectada por EA | 72 |
| 2.7 | Emisión acústica y modelo ajustado en ensayos de esófago | 76 |
| 2.8 | Emisión acústica y modelo ajustado en ensayos de vejiga | 76 |
| | | |
| 3.1 | Limpieza del tejido blando y estado final de la costilla | 81 |
| 3.2 | Esquema de un <i>coupon</i> | 85 |
| 3.3 | Esquema de fabricación de un <i>coupon</i> | 86 |
| 3.4 | Preparación de las muestras de flexión | 87 |
| 3.5 | Esquema general de los ensayos experimentales | 89 |
| 3.6 | Cámaras de grabación de los ensayos | 90 |
| 3.7 | Ensayo de tracción de <i>coupons</i> | 91 |
| 3.8 | Esquema del ensayo de flexión | 93 |
| 3.9 | Gráficos de sincronización y fuerza | 96 |
| 3.10 | Malla de puntos en el ensayo de tracción | 98 |
| 3.11 | Puntos rastreados durante el ensayo a flexión | 99 |
| 3.12 | Secciones de un <i>coupon</i> y Transformada de Fourier | 101 |
| 3.13 | Espectro de potencias $S(\omega)$ | 102 |
| 3.14 | Proceso de secado y calcinación de <i>coupons</i> | 104 |
| | | |
| 4.1 | Camino para el problema de Catalan en una red ortogonal | 114 |
| 4.2 | Camino en una red ortogonal | 116 |
| 4.3 | Camino en una red triangular | 117 |
| 4.4 | Camino en una red hexagonal | 118 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|---|-----|
| 4.5 | Red aleatoria y propagación de microfisuras | 119 |
| 4.6 | Modelo ajustado a curva experimental | 127 |
| 4.7 | Variación de entropía y tensión-deformación | 129 |
| 4.8 | Variación de entropía sobre el espacio (β, ϵ) | 130 |
| 4.9 | Variación del ratio de energía interna | 132 |
| 4.10 | Descripción de la geometría de la costilla humana | 134 |
| 4.11 | Esquema de sollicitación del <i>coupon</i> | 140 |
| 4.12 | Triedro de Frenet-Serret <i>coupon</i> | 142 |
| 4.13 | Triedro de Frenet-Serret en flexión | 149 |
| 4.14 | Esquema de posiciones en flexión a tres puntos | 150 |
| 4.15 | Deformación de la costilla | 154 |
| 4.16 | Tipos de Percolación | 167 |
| 4.17 | Predicción de Emisión Acústica | 173 |
| 4.18 | Teselaciones Uniformes del plano | 175 |
| 5.1 | Curvas tensión-deformación de <i>coupons</i> de 10 a 40 años | 180 |
| 5.2 | Curvas tensión-deformación de <i>coupons</i> de 41 a 70 años | 181 |
| 5.3 | Curvas tensión-deformación de <i>coupons</i> de 71 a 91 años | 181 |
| 5.4 | ACP de los parámetros ajustados para <i>coupons</i> | 186 |
| 5.5 | Influencia de la edad y DF en β y α_2 | 190 |
| 5.6 | Influencia de la fracción mineral y acuosa κ_1 y ς_1 | 190 |
| 5.7 | Influencia de la composición κ_1 y ς_1 | 191 |
| 5.8 | Influencia de la densidad y fracción mineral N y r | 193 |
| 5.9 | Desplazamiento de los extremos de la costilla completa | 194 |
| 5.10 | Diagramas de esfuerzos de la costilla completa a flexión | 196 |
| 5.11 | Variación de la curvatura | 197 |
| 5.12 | Curvas tensión-deformación de muestras de flexión | 199 |
| 5.13 | ACP de los parámetros ajustados para flexión | 204 |
| 5.14 | Influencia del IMC en α_1 y γ_1 | 207 |
| 5.15 | Influencia del IMC y la edad en κ_1 y ς_1 | 208 |
| 5.16 | Influencia de la edad en β | 209 |
| 5.17 | Comparativa de propiedades mecánicas | 210 |
| 5.18 | Ajustes de las curvas de tracción y flexión | 213 |
| 5.19 | Valores promedio de $\alpha_1, \gamma_1, \kappa_1$ y ς_1 | 215 |
| 5.20 | Valores promedio de β, N y r | 219 |
| 5.21 | Distribuciones de α_1 y γ_1 | 222 |
| 5.22 | Distribuciones de β y N | 223 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.23 | Variación de la entropía | 225 |
| 5.24 | Variación del ratio de energía reversible | 226 |
| 5.25 | [Variación del ratio de energía irreversible | 227 |
| 5.26 | Curva <i>hits</i> -tensión en fémur de oveja | 231 |
| 5.27 | Curva <i>hits</i> -tensión en tibia de oveja | 231 |
| 5.28 | Curva <i>hits</i> -tensión en fémur humano | 232 |
| 5.29 | Curva <i>hits</i> -tensión en tibia humana | 232 |
| 5.30 | Curvas <i>hits</i> -tensión de las costillas de flexión | 235 |
| | | |
| A.1 | Deformación de una curva en el sólido | 264 |
| A.2 | Deformación material del cuerpo y vector alargamiento | 267 |
| A.3 | Deformación espacial del cuerpo y vector alargamiento | 269 |
| | | |
| B.1 | CT de costilla humana | 299 |
| B.2 | Proyecciones del CT de costilla | 300 |
| B.3 | Rotación del CT de costilla | 302 |
| B.4 | Ajuste del eje baricéntrico de la costilla | 304 |
| | | |
| C.1 | Señalización del laboratorio | 312 |
| C.2 | Medida del ancho de las muestras | 314 |

LISTA DE FIGURAS

Lista de tablas

| | | |
|------|---|-----|
| 2.1 | Propiedades mecánicas del hueso cortical en diferentes solicitaciones | 15 |
| 2.2 | Invariantes de valor escalar isótropas y hemitrópicas | 35 |
| 2.3 | Invariantes para los grupos de simetrías transversalmente isótropas | 38 |
| 2.4 | Invariantes para los grupos de simetrías transversalmente isótropas | 39 |
| 3.1 | Datos antropométricos de muestras de tracción | 83 |
| 3.2 | Datos antropométricos de muestras de flexión | 84 |
| 4.1 | Valores para la probabilidad crítica de percolación | 176 |
| 5.1 | Propiedades mecánicas de <i>coupons</i> en rangos de edad | 182 |
| 5.2 | Propiedades mecánicas promedio de <i>coupons</i> | 182 |
| 5.3 | Dimensión fractal y contenido mineral para los <i>coupons</i> en edades | 184 |
| 5.4 | Parámetros de los ensayos de tracción | 185 |
| 5.5 | Contribuciones de los parámetros de <i>coupons</i> en los CPs | 187 |
| 5.6 | Matriz de p -valores de los parámetros de tracción | 188 |
| 5.7 | ANOVA de los parámetros de tracción | 189 |
| 5.8 | Propiedades mecánicas de las muestras de flexión | 200 |
| 5.9 | Propiedades mecánicas promedio de los ensayos de flexión | 200 |
| 5.10 | ANOVA de las propiedades mecánicas de flexión | 202 |
| 5.11 | Parámetros de los ensayos de flexión | 203 |
| 5.12 | Parámetros promedio de los ensayos de flexión | 204 |
| 5.13 | Contribuciones de los parámetros de flexión en los CPs | 205 |
| 5.14 | Matriz de p -valores de los parámetros de flexión | 206 |
| 5.15 | ANOVA de los parámetros de flexión | 207 |
| 5.16 | Propiedades mecánicas generales | 210 |
| 5.17 | Parámetros promedio de los ensayos de tracción y flexión | 214 |
| 5.18 | Matriz de p -valores de los parámetros de ambos ensayos | 217 |

LISTA DE TABLAS

| | | |
|------|--|-----|
| 5.19 | Parámetros de las distribuciones ajustadas | 224 |
| 5.20 | Parámetros de emisión acústica | 237 |
| C.1 | Regresiones de la dimensión fractal y las propiedades mecánicas . | 315 |
| C.2 | Regresiones del contenido mineral en las propiedades mecánicas . . | 317 |

Lista de símbolos

| | | |
|---|--|-----|
| \mathbb{R}^n | Espacio euclídeo n -dimensional | 22 |
| $\alpha, \lambda, \phi \dots$ | Magnitudes escalares | 22 |
| $\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{a} \dots$ | Magnitudes vectoriales | 22 |
| $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{F}, \mathbf{C} \dots$ | Magnitudes tensoriales (de orden superior) | 22 |
| $\hat{\mathbf{E}}_A$ | Base Cartesiana material | 22 |
| $\hat{\mathbf{e}}_a$ | Base Cartesiana espacial | 23 |
| $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ | Triedro de Frenet-Serret en la configuración material | 153 |
| $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ | Triedro de Frenet-Serret en la configuración deformada | 135 |
| $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ | Coordenadas curvilíneas de Frenet-Serret | 138 |
| \mathcal{B} | Cuerpo formado por partículas | 22 |
| \mathcal{U} | Región del espacio en la configuración material | 55 |
| $\partial\mathcal{U}$ | Contorno de la región \mathcal{U} | 55 |
| | | |
| t | Tiempo | 22 |
| m | Masa | 55 |
| ρ_0 | Densidad material | 55 |
| ρ | Densidad espacial | 55 |
| V | Volumen material | 55 |
| v | Volumen espacial | 55 |
| Θ | Temperatura absoluta | 60 |
| | | |
| $(\bullet)^\flat$ | Operador de conversión en tensor covariante | 26 |
| $(\bullet)^\sharp$ | Operador de conversión en tensor contravariante | 26 |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker | 25 |
| \mathbf{I} | Tensor identidad | 25 |
| J | Jacobiano | 29 |
| ∇ | Gradiente | 266 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|---------------------------------------|---|-----|
| χ | Curvatura de la línea baricéntrica | 137 |
| τ | Torsión de la línea baricéntrica | 155 |
| φ | Mapeo o aplicación a la configuración deformada | 138 |
| $D\varphi$ | Matriz jacobiana asociada a φ | 143 |
| δ_i | Parámetro de sollicitación | 139 |
| $\bar{\nu}$ | Reducción de la sección transversal | 143 |
| h | Ratio de deformaciones curvilíneo | 153 |
| ϕ_t | Movimiento, aplicación de una configuración | 22 |
| ϕ_t^{-1} | Movimiento inverso, aplicación inversa de una configuración | 23 |
| \mathbf{X}, X^A | Vector posición material | 22 |
| \mathbf{x}, x^a | Vector posición espacial | 23 |
| \mathbf{U}, U_A | Vector desplazamiento material | 23 |
| \mathbf{u}, u^a | Vector desplazamiento espacial | 23 |
| \mathbf{V}, V^A | Vector velocidad material | 23 |
| \mathbf{v}, v^a | Vector velocidad espacial | 24 |
| \mathbf{A}, A^A | Vector aceleración material | 23 |
| \mathbf{a}, a^a | Vector aceleración espacial | 24 |
| Γ | Curva en la configuración de referencia | 264 |
| γ | Curva en la configuración deformada | 264 |
| $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}$ | Vector estiramiento | 266 |
| λ | Estiramiento | 266 |
| \mathbf{a}_0 | Vector unitario entre dos puntos | 266 |
| \mathbf{R}, R_{aB} | Tensor de rotación | 271 |
| \mathbf{U}, U_{BA} | Tensor derecho (o material) de alargamiento | 271 |
| \mathbf{v}, v_{ab} | Tensor izquierdo (o espacial) de alargamiento | 271 |
| \mathbf{F}, F_{aB} | Tensor gradiente de deformaciones | 24 |
| \mathbf{d}, d_{ab} | Tensor velocidad de deformación | 59 |
| \mathbf{C}, C_B^A | Tensor de deformaciones derecho de Cauchy-Green | 25 |
| \mathbf{E}, E_B^A | Tensor de deformaciones de Green-Lagrange | 25 |
| \mathbf{B}, B_B^A | Tensor de deformaciones de Piola | 25 |
| \mathbf{b}, b_b^a | Tensor de deformaciones izquierdo de Cauchy-Green o de Finger .. | 26 |
| \mathbf{e}, e_b^a | Tensor de deformaciones de Euler-Almansi | 26 |
| \mathbf{f} | Vector fuerza resultante | 27 |

| | | |
|--------------------------------------|--|-----|
| \mathbf{t}, t^a | Vector tracción de Cauchy | 27 |
| \mathbf{T}, T^A | Primer vector tracción de Piola-Kirchhoff | 27 |
| $\boldsymbol{\sigma}, \sigma_b^a$ | Tensor de tensiones de Cauchy | 27 |
| \mathbf{P}, P^{aA} | Primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff | 27 |
| $\boldsymbol{\tau}, \tau_b^a$ | Tensor de tensiones de Kirchhoff | 28 |
| \mathbf{S}, S^{AB} | Segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff | 28 |
| F | Fuerza aplicada | 145 |
| N_x | Esfuerzo axil | 159 |
| V_y | Esfuerzo cortante | 159 |
| M_z | Momento flector | 160 |
| $\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{n}$ | Función respuesta | 30 |
| I_n | Invariantes algebraicos | 32 |
| \mathbf{a} | Vector unitario de dirección preferencial | 39 |
| Ψ | Función de energía de deformación | 31 |
| ψ_0 | Función de energía de deformación reducida | 121 |
| α_1 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante I_1^2 .. | 126 |
| α_2 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante I_1^3 .. | 126 |
| γ_1 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante I_2 .. | 126 |
| γ_2 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante $I_1 I_2$.. | 126 |
| ν | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante I_3 .. | 126 |
| κ_1 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante I_4^2 .. | 126 |
| κ_2 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante I_4^3 .. | 126 |
| ς_1 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante I_5 .. | 126 |
| ς_2 | Parámetro constitutivo asociado a la combinación invariante $I_4 I_5$.. | 126 |
| $\bar{\mathbf{S}}$ | Tensor de tensiones sin fisuración | 126 |
| \mathbf{L} | Momento lineal | 56 |
| \mathbf{J} | Momento angular | 56 |
| \mathbf{F} | Fuerza resultante | 56 |
| \mathbf{M} | Momento resultante | 56 |
| \mathbf{b} | Fuerzas por unidad de volumen | 56 |
| $u(\mathbf{x}, t)$ | Energía interna por unidad de volumen | 58 |
| $r(\mathbf{x}, t)$ | Fuente de calor por unidad de volumen y tiempo | 58 |
| $h(\mathbf{x}, t)$ | Flujo de calor por unidad de superficie y tiempo | 58 |
| \mathcal{Q} | Potencia térmica | 58 |
| T | Energía cinética | 58 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|---------------|---|-----|
| \mathcal{E} | Energía potencial | 58 |
| P_m | Potencia mecánica | 58 |
| P_d | Potencia disipada | 58 |
| \mathbf{q} | Flujo de calor | 59 |
| $\Gamma(t)$ | Producción total de entropía | 60 |
| $\eta(x, t)$ | Entropía por unidad de volumen | 60 |
| β | Parámetro de atemperación del desorden | 61 |
| Ω | Número de microconfiguraciones compatibles con un macroestado | 67 |
| k_B | Constante de Boltzmann | 67 |
| $H, \Delta H$ | Entropía | 67 |
| p_j | Probabilidad de un microestado | 67 |
| Z | Función de partición | 69 |
| g_k | Número de posibles caminos de una fisura | 115 |
| E_k | Energía del microestado | 115 |
| r | Parámetro de red | 118 |
| m_0 | Máximo espesor del cortical | 120 |
| N | Etapas de avance de la fisura | 122 |
| ϑ | Tupla de parámetros del modelo constitutivo | 126 |
| W | Energía mecánica | 131 |
| r_e | Ratio de energía invertida en procesos reversibles | 131 |
| \bar{r}_e | Ratio de energía invertida en procesos disipativos | 131 |
| m_{sum} | Masa de la muestra en suero | 103 |
| m_s | Masa de la muestra en seco | 104 |
| m_c | Masa de la muestra calcinada | 105 |
| ρ | Densidad de la muestra | 105 |
| ρ_s | Densidad sin agua, aparente o en seco | 105 |
| f_{min} | Fracción mineral | 105 |
| f_{org} | Fracción orgánica | 105 |
| f_{agua} | Fracción de agua | 105 |
| A | Área de la sección cortical | 151 |
| I_i | Momento de inercia seccional | 151 |
| I_{ij} | Producto de inercia seccional | 151 |
| m_i | Primer momento de área | 151 |
| t | Espesor cortical promedio | 151 |

| | | |
|------------------|--|-----|
| $\mathcal{C}(x)$ | Componente conexo del nodo x en percolación | 169 |
| \mathbb{P}_p | Distribución de probabilidad de percolación | 169 |
| p_c | Probabilidad crítica de percolación | 169 |
| γ | Exponente crítico universal de percolación | 171 |
| N_{EA} | Número de <i>hits</i> detectados mediante emisión acústica | 172 |
| n_0 | Constante de proporcionalidad del modelo de EA | 172 |
| σ_0 | Parámetro de escala de la distribución de Weibull | 172 |

LISTA DE SÍMBOLOS

*Joy in looking and comprehending
is nature's most beautiful gift*

Albert Einstein (1879-1955)

1

Introducción

El esqueleto humano es una estructura compleja, encargada de sostener los tejidos blandos y la musculatura, transmitir las fuerzas que permiten el movimiento causadas por las contracciones musculares, actuar como reservorio de minerales tales como fósforo y calcio y proteger órganos vitales como el corazón o el cerebro. Dichas funciones de protección y transmisión son posibles gracias a la gran rigidez y resistencia características del hueso o sistema esquelético.^{28,35,66}

Entre todas las partes del sistema óseo, el tórax es una región especialmente importante dado que encierra y protege órganos involucrados en la circulación sanguínea y la respiración. El tórax tiene una elevada resistencia mecánica, sobre todo ante lesiones y tales características vienen dadas por las propiedades elásticas que caracterizan tanto a las costillas como a la columna vertebral.¹⁰⁹

Aun teniendo notorias propiedades, estudios anteriores han mostrado que las fracturas más comunes en traumatismos son precisamente las fracturas torácicas y específicamente, las de costilla.^{5,68,79,92} Una de las causas más habituales son los accidentes de tráfico, en los cuales ocurren graves e importantes lesiones torácicas y, aunque el número de accidentes parece haber descendido en los últimos años, la cifra de víctimas total sigue siendo alarmantemente alta, alcanzando los 10.741

(de los cuales 1.806 son fallecidos y 8.935 hospitalizados) según el último informe oficial de la Dirección General de Tráfico (2018).³² En el desglose de lesiones de los accidentes del año 2015,³¹ consta que el 15,9 % de los heridos (fallecidos y hospitalizados) en accidentes de tráfico presentaron heridas en la región torácica, siendo el 8,54 % del total, correspondiente a fracturas de costilla (4.373 personas). Así mismo, el 22,7 % de los fallecidos sufrieron lesiones torácicas, de los cuales la mitad fueron fracturas (10,1 %). Las cifras de estos mismos informes indican que las fracturas en la región torácica son la causa más frecuente de mortalidad en accidentes de tráfico, por encima del resto de lesiones.

En este contexto, parte de la literatura en biomecánica se ha centrado en el estudio de las propiedades mecánicas de la costilla humana y su relación con variables antropométricas como la edad o el sexo, físicas como la cantidad de mineral, la densidad o la porosidad, o la influencia del tipo de carga aplicada en la costilla. Si bien ello permite predecir variaciones en las propiedades mecánicas en función del valor de estas variables, las relaciones deducidas no representan por completo el comportamiento de la costilla. A tal efecto, algunas investigaciones han derivado en el desarrollo de *relaciones constitutivas* que establecen relaciones entre la tensión y la deformación en base a parámetros, tales como la velocidad de deformación o el módulo elástico. Sin embargo, las relaciones constitutivas son expresiones particulares, no generales para un estado tridimensional cualquiera. Aquí entran en valor los llamados *modelos constitutivos* generales, aplicables a cualquier tipo de sollicitación y por consiguiente, útiles en modelos computacionales. Estos modelos relacionan tensiones y deformaciones mediante una expresión matemática que incluye *parámetros constitutivos* que se ajustan específicamente a cada ensayo experimental o sujeto estudiado.

1.1 Enfoque adoptado de investigación

Existen muchos modelos específicos de hueso en la literatura según la aplicación; pueden encontrarse modelos elásticos, modelos viscoelásticos, pertinentes para representar ciertos comportamientos con altas velocidades de deformación y también algunos modelos anelásticos de daño. Incluso hay estudios que combinan ambos factores, donde la anelasticidad se introduce mediante un parámetro de daño, que refleja la pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación característica del hueso.

En el hueso, la pérdida de linealidad está asociada al final del régimen elástico de su comportamiento y la propagación de fisuras en el material que hacen que este tejido pierda rigidez. La fisuración es una propagación del daño a través de la microestructura y por tanto, es dependiente de la disposición de los elementos en la red. El hueso está principalmente formado por una fase mineral y una orgánica, ambas constituyentes de la unidad básica del hueso conocida como osteona. Las osteonas, consideradas unidad básica en este estudio, están dispuestas en la red de forma aproximadamente paralela al eje longitudinal de cualquier hueso, motivo por el cual el tejido cortical exhibe un comportamiento transversalmente isótropo, que debe estar reflejado en cualquier ecuación constitutiva. La fisuración se da preferentemente por zonas con defectos o más débiles y, por esta razón, es lógico considerar que la microestructura juega un papel fundamental en el proceso de fisuración.

La microestructura del hueso tiene una enorme cantidad de detalles aleatorios, por lo que cada vez parece más claro que un modelo pertinente debe representar de alguna manera dicha aleatoriedad. Por ello, en esta investigación se han tomado los métodos de la *mecánica estadística*,^{106,132,136} que en el caso límite de muchos elementos interactuantes predice un comportamiento agregado promedio, que funciona de manera equivalente a otros modelos puramente deterministas, pero proporciona información adicional, como variables termodinámicas y desviaciones respecto al promedio esperado. Así, la mecánica estadística ofrece la posibilidad de tratar la aleatoriedad en la propagación de las microfisuras de una forma cuasi-determinista, dado que el comportamiento del material está formado por un gran número de constituyentes y estadísticamente las fluctuaciones específicas de cada microconstituyente quedan compensadas por las de otros componentes, haciendo que el valor agregado promedio no dependa mucho de ciertos detalles aleatorios. Así mismo, el formalismo de la mecánica estadística parte de la conocida función de partición y permite determinar variables termodinámicas importantes, como la entropía o la energía interna.

De esta forma, un modelo constitutivo adecuado debe representar el daño reflejado en la curva de tensión y deformación e independientemente del tipo de consideraciones tomadas en un modelo, este debe ser consistente con las leyes termodinámicas. En base a esto, cualquier modelo constitutivo debe reflejar un incremento de la entropía (medida de desorden) cuando se inician los procesos irreversibles que, en este caso, corresponden a la propagación de fisuras.

Además, para tratar el problema de la emergencia de una fisura macroscópica poco antes de la fase de fractura, se ha recurrido a otro modelo basado en probabilidades: la *teoría de la percolación*,²⁵ que igualmente hace predicciones sobre el comportamiento general de un sistema de cierto punto crítico, que en esta investigación es el desarrollo de una fractura macroscópica. La teoría de la percolación predice comportamientos cualitativos generales sobre fenómenos que puedan representarse por probabilidades dentro de una red fija. Eso precisamente, es lo que sucede en desarrollo de una fractura,¹¹⁴ que empieza como una microfisuración aleatoria dentro de la red de osteonas del hueso cortical, por lo que el uso de la percolación parecía razonable. Igualmente, como se verá más adelante, esta idea ha permitido desarrollar un modelo que coincide de manera adecuada con los datos experimentales.

Por todas estas razones, el desarrollo de un modelo constitutivo adecuado se vuelve una tarea algo compleja cuando se trata de describir el comportamiento completo del hueso hasta la fractura y se requiere el uso interdisciplinar de ideas que han resultado útiles en otras áreas fuera de la biomecánica y la teoría de medios continuos. Además, como se ha mencionado, tratar con procesos aleatorios como la microfisuración, precisan de áreas de conocimiento adicionales y aquí es donde toma importancia la combinatoria, una rama matemática que, entre otras cosas, se enfoca al estudio de la existencia de ciertas configuraciones o propiedades que cumplen con condiciones previamente establecidas. La combinatoria aplicada a este caso particular, permite estudiar la propagación de las fisuras desde el punto de vista de los posibles caminos que esta puede tomar en su avance y con ello, es posible determinar las posibles configuraciones de la fisura en la red ósea.

Más específicamente, en el tratamiento de la fractura, podemos encontrar en la literatura algunos investigadores que han tratado de analizar la aparición de microfisuras mediante la técnica de emisión acústica (EA), utilizada desde hace años en la detección de microfallos en diversos materiales y también en el mantenimiento predictivo. La EA se basa en la colocación de unos detectores de emisiones en la muestra que detectan la energía elástica liberada en forma de ondas elásticas. Cuando una fisura progresa el material, a un lado y a otro de la misma la microestructura se relaja o “destensa” y la liberación energía potencial elástica que tenía antes de la propagación de la fisura produce una perturbación local en el campo de deformaciones y tensiones, que se propaga en forma de onda elástica viajando por el material hasta los sensores fuera de la propia zona donde se produjo la fisura.

En el ámbito de la biomecánica, algunos estudios han recurrido a la técnica de EA para relacionar el número de señales de EA o *hits* que se dan en la muestra con el nivel de carga aplicada. En estos estudios se ha observado que la mayor parte de los *hits* se producen en el régimen no elástico, cuando aparecen los procesos irreversibles asociados a la fisuración del material. Concretamente, las señales representan una clara asíntota vertical, ya prácticamente alcanzando el nivel máximo de carga del hueso. De esta forma, la EA muestra ser una herramienta potencial para demostrar que la degradación de la curva tensión-deformación en el régimen no elástico puede ser consecuencia principalmente de la propagación de las fisuras a lo largo del material (cuanto menos, a velocidades de sollicitación cuasi-estáticas, donde los efectos viscoelásticos quedan completamente en un segundo plano). Sin embargo, la carga o fuerza máxima ha sido la variable más utilizada en el estudio de hueso, siendo una característica influida por la geometría de la muestra y no únicamente propia del tejido, como sí lo es la tensión. Además, resulta de interés poder definir un modelo matemático que sea capaz de predecir el número de eventos o emisiones liberadas en el interior del material con el nivel de tensión de la muestra, hecho que permitiría mostrar que, precisamente, la energía elástica detectada por los detectores de emisión acústica viene dada por la energía invertida en la propagación de fisuras a través de la microestructura del material. Esto a su vez, debería ser consistente con las leyes termodinámicas, de tal forma que la aparición principal de *hits* debe corresponderse con el incremento mayoritario de la entropía dada por un modelo constitutivo.

De hecho, en estudios previos en tejido blando¹²⁶ se ha desarrollado un modelo que, mediante dos parámetros, es capaz de predecir el nivel de tensión en la muestra a partir del número de eventos o *hits* que se detectan en un tejido esofágico, cuya microestructura está formada por fibrillas de colágeno. Este modelo además, ha sido aplicado en tejidos blandos alternativos como la vejiga, probando su validez en distintos tejidos.^{45,46} No obstante, el patrón de emisiones acústicas, así como el número de *hits* no muestra una distribución igual en tejidos blandos que en tejidos duros como es el hueso. Además, deben realizarse distintas asunciones relacionadas con la microestructura del material, dado que, mientras en tejido blando la acumulación de daño viene dada por la rotura de las fibrillas que lo constituyen, en el caso de tejidos duros como es el hueso, su microestructura está constituida por osteonas y la acumulación de daño se produce en forma de propagación de fisuras a través del material. Es por ello que la forma de tratar con la propagación del daño es completamente distinta en ambos tejidos y, para

tratar con la fisuración del hueso, se precisa de una herramienta que permita modelizar la transición de fase que se produce entre el tejido íntegro y el estado fisurado donde se da una pérdida de integridad estructural. En este sentido, la teoría de la percolación puede proporcionar los conocimientos y asunciones necesarios para lidiar con esta transición de fase y la propagación de fisuras. La teoría de la percolación ha mostrado ser una rama relevante de la mecánica estadística y, mediante la teoría de la probabilidad, permite delimitar la transición de fase de materiales como el hueso de un estado microscópico a otro fisurado, que debería estar directamente relacionado con la aparición de la avalancha de *hits* o emisiones acústicas detectadas en hueso en otros estudios.

Por todo lo descrito, esta investigación se centra en el desarrollo de un modelo constitutivo que describe el comportamiento mecánico de la costilla humana, desde el inicio de la sollicitación hasta la fractura macroscópica. Así, el modelo tratará de describir el proceso de fisuración que se produce en el tejido cortical una vez alcanzado cierto nivel de tensión. La *mecánica de medios continuos* se utilizará para desarrollar el modelo constitutivo general sin fisuración y posteriormente, se aplicarán ciertas modificaciones al modelo mediante la mecánica estadística para incluir los efectos de la fisuración. Esto se hará partiendo de la determinación de los caminos posibles que puede tomar una fisura en la red, dados por una función desarrollada mediante la combinatoria. Este modelo será analizado para mostrar su consistencia termodinámica, específicamente el incremento de entropía cuando se inician los procesos irreversibles (fisuración). Los parámetros del modelo serán determinados a partir de los ajustes a ensayos experimentales de *coupons* de hueso cortical sometidos a tracción y de costilla completa humana en ensayos de flexión. Dichos ajustes pretenden mostrar la bondad del modelo en la representación del comportamiento de hueso cortical, así como su aplicabilidad a diferentes sollicitaciones (requisito de un modelo constitutivo). Además, los parámetros serán analizados para encontrar influencias de diferentes variables, tales como la edad, el contenido mineral, la densidad o la dimensión fractal de las muestras, esta última relacionada con la presencia y distribución de zonas de baja densidad.

Por otro lado, se propone un modelo desarrollado en base a la teoría de la percolación, que tratará de establecer una relación entre la tensión de la muestra y la liberación de energía elástica en el proceso de fisuración. Esto se hará mediante el uso de la técnica de emisión acústica, que permite detectar las ondas elásticas liberadas por el material colocando sensores en la costilla durante el ensayo ex-

perimental. Así, el modelo de percolación relacionará el número de emisiones acústicas o eventos con el nivel de tensión introducido en la costilla. Esto a su vez permitirá, por un lado, predecir el número de eventos que se produce en la muestra según el nivel de tensión y, por otro lado, que el incremento de *hits* está relacionado a un aumento de entropía, asociado al desorden en el material dado por los procesos irreversibles, es decir, la fisuración. Todo esto a su vez aportará consistencia al modelo constitutivo propuesto, mostrando que los principales mecanismos de disipación y deformación permanente del hueso vienen dados por la fisuración del material.

1.2 Preguntas de investigación

La investigación desarrollada en este trabajo se plantea dar respuesta a una serie de cuestiones relevantes, planteadas en la literatura científica sobre el comportamiento mecánico del hueso cortical:

- ¿Puede describirse el fallo de la costilla humana bajo cualquier carga en base a un modelo constitutivo que represente también la fisuración?
- ¿Qué implicaciones tiene para un modelo constitutivo que sea termodinámicamente consistente?
- ¿Qué forma y cuantas variables y parámetros debe tener un modelo estocástico de rotura de la costilla humana?
- ¿Puede desarrollarse un modelo que relacione la fisuración con la tensión usando emisión acústica?
- ¿Es posible explicar que la deformación anelástica por efecto de un proceso de microfisuración?

Con el objetivo general de clarificar la respuesta a esas preguntas, la investigación aquí desarrollada ha planteado las siguientes tareas:

- **Desarrollo de un modelo constitutivo.** El modelo propuesto usa la *mecánica de medios continuos* para describir el comportamiento mecánico del hueso combinada con el formalismo de la *mecánica estadística* que ha permitido incluir el comportamiento no lineal por fisuración.

- **Estudio del la microestructura y la propagación de fisuras.** A partir de muestras previas de tejido cortical sometidas a tracción, se ha determinado la densidad y el contenido de mineral en el hueso para un número elevado de muestras. Eso ha permitido analizar la influencia de esos factores en los parámetros constitutivos del modelo. Por otro lado, mediante la combinatoria se han modelizado los posibles caminos que puede tomar una fisura en su avance, desarrollando una función que forma parte del modelo constitutivo.
- **Determinación de las propiedades mecánicas.** Se ha desarrollado un innovador diseño experimental para el ensayo a flexión de costilla humana, del cual es posible obtener tensiones y deformaciones en el hueso, permitiendo una comparación con los ensayos estándar de tracción simple de hueso cortical más ampliamente, con los usados en la literatura.
- **Caracterización de la microestructura mediante dimensión fractal** En estudios previos, para una parte de las muestras se analizaron imágenes médicas de las mismas y a partir de ellas se computó la dimensión fractal, que da una medida de cómo se intercalan las regiones de alta y baja densidad ósea. Posteriormente en este estudio, varias de las propiedades mecánicas pudieron ser correlacionadas con los valores de la dimensión fractal que caracteriza parte de la microestructura.
- **Determinación de la liberación de energía.** Se ha usado la técnica de emisión acústica en los ensayos de flexión que ha permitido detectar microfallos internos antes de la pérdida de integridad estructural y estudiar la liberación de energía potencial elástica. Esta energía liberada ha podido ser asociada a la fisuración, por medio de un modelo matemático basado en la *teoría de la percolación*.
- **Estudio termodinámico.** Aprovechando el formalismo de la mecánica estadística, se ha computado el crecimiento previsto de la entropía dentro de las muestras, que permite comparar la pérdida de rigidez por fisuración y el aumento de entropía asociado a la propia fisuración, viendo que existe un vínculo entre ambos fenómenos. Además, el número y la calidad de las microfisuras se ha podido relacionar con las medidas de emisión acústica.

*Nothing in life is to be feared, it is
only to be understood.*

Marie Curie (1867-1934)

2

Antecedentes y fundamentos teóricos

En este capítulo se exponen los conceptos teóricos relativos a la estructura del tejido óseo y las características de la costilla humana. En la sección 2.1 se describen las propiedades mecánicas presentadas en la literatura y la influencia de la antropometría, la geometría y la microestructura. En la siguiente sección 2.2 se introducen los conceptos básicos de la *mecánica de medios continuos* y la modelización matemática de la *anisotropía* y se presenta un breve marco de las *ecuaciones constitutivas* para hueso que han sido publicadas en la literatura. En la sección 2.3 se desarrollan las *ecuaciones de balance* y *leyes termodinámicas* que debe cumplir cualquier modelo constitutivo general. A continuación, en la sección 2.4 se presenta una introducción al formalismo de la *mecánica estadística*, cuyo objetivo es la descripción de los eventos que se producen en un material macroscópico constituido de elementos microscópicos estimando promedios de microestados y usando un análisis de probabilidades y será utilizada para lidiar con la fisuración del hueso mediante el uso de la combinatoria. Finalmente, la sección 2.5, explica técnica de *emisión acústica*, cuya función es la detección de la energía elástica liberada en forma de ondas durante la fisuración del hueso.

2.1 La costilla humana

El tejido óseo posee una estructura jerárquica, organizada en distintos niveles estructurados que definen las características mecánicas del hueso (Figura 2.1). En el nivel inferior, el hueso está formado por un 65–70 % de fase mineral y un 30–35 % de matriz orgánica, células y agua.

La parte mineral se encuentra en forma de cristales o placas, ubicadas en la matriz orgánica y en su mayor parte es hidroxiapatita no pura de estructura $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$ con constituyentes adicionales como magnesio, fluoruro, estroncio, citrato o carbonato que se encuentran en la red cristalina o que han sido adsorbidos sobre la superficie del propio cristal.²⁸

Por otro lado, la matriz orgánica consiste en un 90–95 % de colágeno en forma de fibras y el 5–10 % restante de proteínas no colaginosas y mucopolisacáridos. Las fibras de colágeno son las encargadas de hacer de soporte a la fase mineral, conformando la geometría del hueso para luego acoger a los cristales de hidroxiapatita precipitados en sus huecos. De esta forma, los cristales de hidroxiapatita son los que confieren la rigidez a la fase colaginosas, mientras que la matriz orgánica aporta flexibilidad a la estructura. El colágeno es predominantemente del tipo I, con trazas del tipo III, V y X, que se sospecha aparecen durante la formación del hueso y cuya función es la de regular el diámetro de las fibras de colágeno tipo I.¹⁹ Así, el hueso puede ser descrito como un compuesto o *composite* de dos fases; el colágeno que aporta tenacidad y el mineral que determina el módulo elástico.⁵²

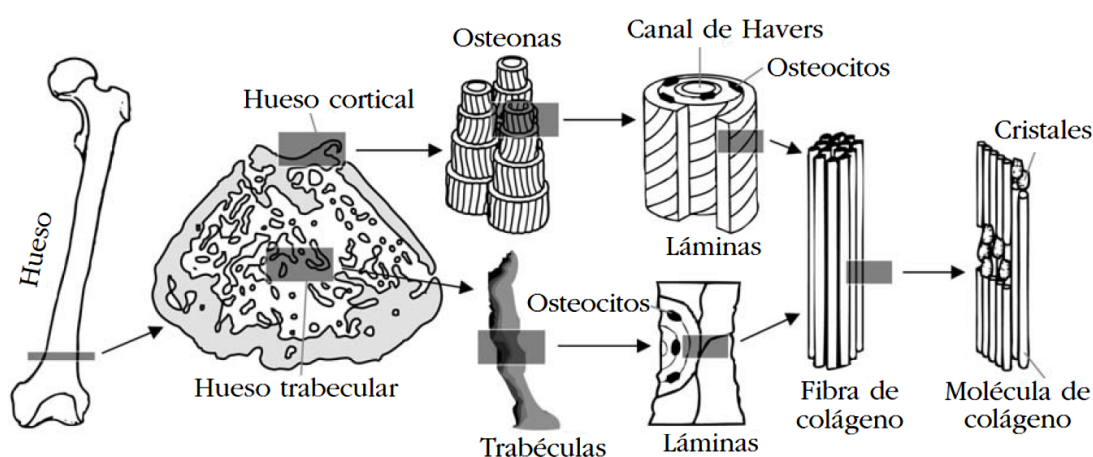


Figura 2.1. Esquema de los niveles jerárquicos del tejido óseo (Caeiro *et al.*, 2013).¹⁹

En un nivel jerárquico superior, dentro de la estructura ósea se distinguen dos tipos de hueso; el hueso *cortical* o *compacto*, que constituye aproximadamente el 80 % de la totalidad del hueso y el *trabecular* o *esponjoso*, que compone alrededor del 20 % restante (la proporción de ambos puede variar según el tipo de hueso analizado o incluso las características propias de los individuos). Entre el hueso cortical y trabecular se observan grandes diferencias en cuanto a función, propiedades y geometría, entre otros factores.²⁸

El hueso cortical es un tejido sólido y de gran densidad (alrededor de $1,9 \text{ g/cm}^3$ con un 10 % de porosidad), que constituye la parte externa de todos los huesos y, por tanto, protege y soporta el esqueleto (Figura 2.2). La unidad estructural básica del hueso cortical es la osteona, constituida por un canal central llamado *conducto de Havers*, que está orientado con su eje longitudinal en la dirección del eje del hueso y dentro del cual circulan vasos sanguíneos. El conducto de Havers está rodeado de pequeñas láminas minerales concéntricas que constituyen la matriz ósea y dentro de las cuales se encuentran las fibras de colágeno dispuestas paralelamente, aunque entre láminas la dirección de las fibras puede variar.¹⁹ Por otra parte, el tejido óseo trabecular es el que se encuentra en el interior del hueso. Este tiene una baja densidad ($0,3\text{--}0,9 \text{ g/cm}^3$), alta porosidad (50–90 %) y su función principal es la de producir células sanguíneas, proceso conocido como *hematopoyesis*.²⁸ El hueso trabecular está rodeado por el cortical y, en el caso de la costilla humana, el espesor cortical medio está entre 0,7–0,9 mm (pudiendo oscilar entre 0,4–1,4 mm en la propia sección).^{79,93} Así, mientras el hueso cortical es capaz de soportar grandes cargas con bajas deformaciones, confiriendo rigidez a la estructura y resistencia a fatiga, el hueso trabecular tiene bajos módulos elásticos pero altas deformaciones, aportando gran flexibilidad al hueso.⁶⁸

Además, la superficie del hueso está cubierta, casi en sus totalidad (excepto ligamentos, tendones y articulaciones), por el *periostio*: una membrana o tejido conectivo fino con vasos sanguíneos y nervios, que contiene células osteogénicas,¹ y cuya función es la de generar nuevo tejido óseo durante el crecimiento y curar el daño ante una fractura. Por otro lado, la superficie de la cavidad medular (zona interior del hueso) está recubierta del *endostio*, otra membrana conectiva con osteoclastos que reabsorben el hueso, reduciendo el espesor cortical.⁸

¹Las células osteogénicas son las únicas células del hueso que pueden dividirse (diferenciarse) cómo lo hacen las células madre y que derivan en osteoblastos para formar nuevo hueso.

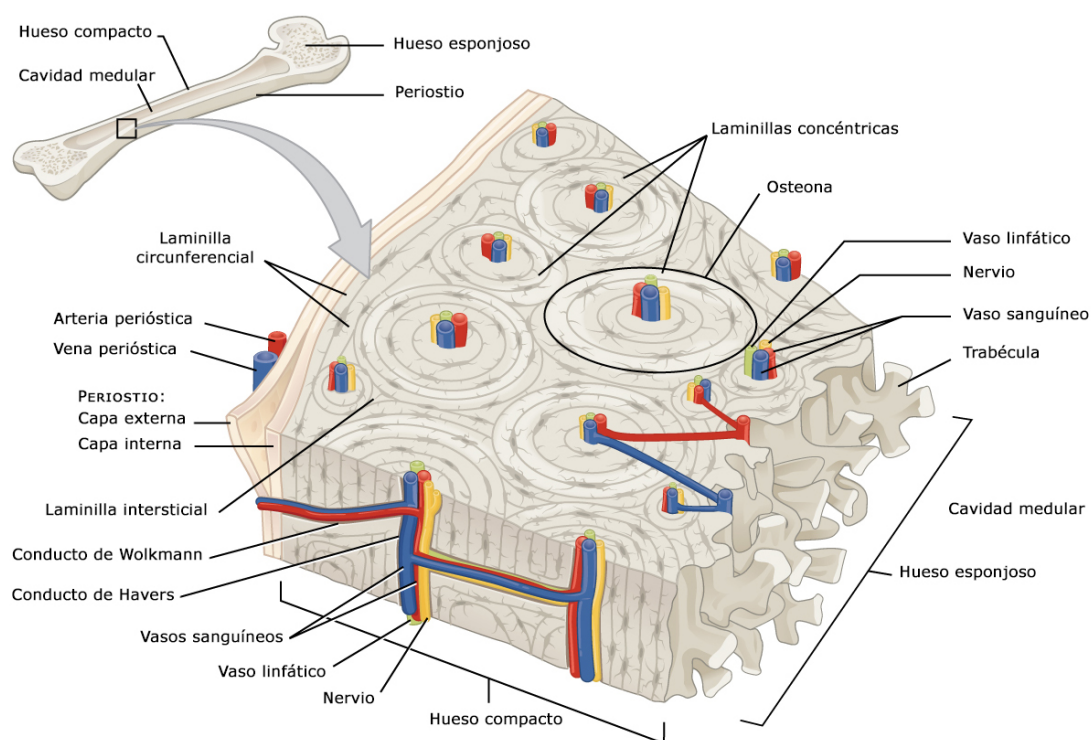


Figura 2.2. Esquema de la estructura del tejido óseo (OpenStax, 2018).³⁴

En el tejido óseo se encuentran tres tipos principales de células óseas. La primera es el *osteoblasto*, encargado de fabricar la matriz ósea, secretando la matriz orgánica y precipitando posteriormente los cristales de hidroxapatita en ella por un proceso de mineralización extracelular. Una vez el propio osteoblasto termina rodeado de la matriz que él mismo ha fabricado, se convierte en una célula del segundo tipo y pasa a llamarse *osteocito*, una célula de mantenimiento de la matriz, encargada de sostener una comunicación constante mediante señales con osteoblastos y osteoclastos para indicarles dónde reabsorber o generar hueso; este mecanismo se conoce como *mecanotransducción*.²⁸

El tercer tipo de célula es el *osteoclasto*, cuya función es la de remodelar el tejido óseo mediante la regulación de la cantidad mineral y la arquitectura. Para ello, los osteoclastos secretan unas enzimas que disuelven las fibras de colágeno y modifican el pH, haciendo soluble la hidroxapatita. De esta forma, el tejido óseo tiene la capacidad de remodelación, adaptando su microestructura a lo largo del ciclo de vida humano. Estas modificaciones redistribuyen el estado tensional de la estructura, influyendo a su vez en las propiedades mecánicas del hueso.⁷⁵

2.1.1 La geometría de la costilla humana

El tórax está formado por veinticuatro costillas (doce a cada lado) y se nombran de la primera a la duodécima desde arriba hacia abajo. De la primera a la séptima forman el grupo de las costillas esternales, de la octava a la décima las denominadas falsas costillas y por último, la onceava y duodécima son las costillas flotantes (Figura 2.3).

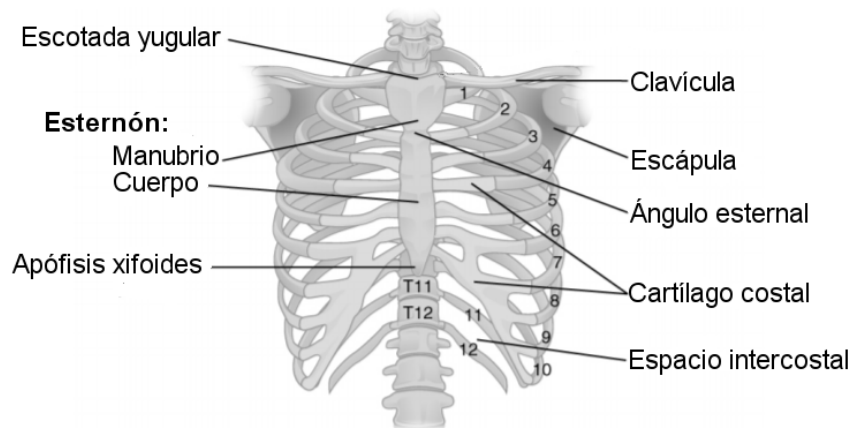


Figura 2.3. Vista anterior del tórax humano (OpenStax, 2018).³⁴

En este estudio, por uniformidad se han empleado siempre costillas cuartas. La costilla humana es un hueso plano (en referencia a su sección) en forma de arco que va unido por la parte posterior a la columna vertebral y por el cartílago costal al esternón (Figura 2.4). La geometría de la costilla humana es compleja, pues esta parte de la columna de forma oblicua descendente en ángulo agudo, formando una concavidad abierta hasta llegado un punto en el que, de forma abrupta, se dirige hacia el interior para unirse con el esternón. No solo eso, sino que la curvatura es variable sobre su eje, pues rota ligeramente sobre sí misma. La zona plana de la costilla se encuentra en su zona media y, a medida que se acerca a la columna, pasa de plana a una geometría aproximadamente cilíndrica. En esta región posterior se encuentra la tuberosidad y la cabeza, cuya función es la de proporcionar movilidad respecto a la columna, mientras que en el extremo anterior (o inferior) se halla el cartílago costal.

A pesar de que la costilla exhibe una curvatura tridimensional general, en las del segundo a quinto nivel o las de décimo nivel el eje baricéntrico está contenido [aproximadamente] en un plano principal, mostrando una desviación muy baja respecto a éste (inferior al 6 % en relación a la distancia entre extremos).⁷³

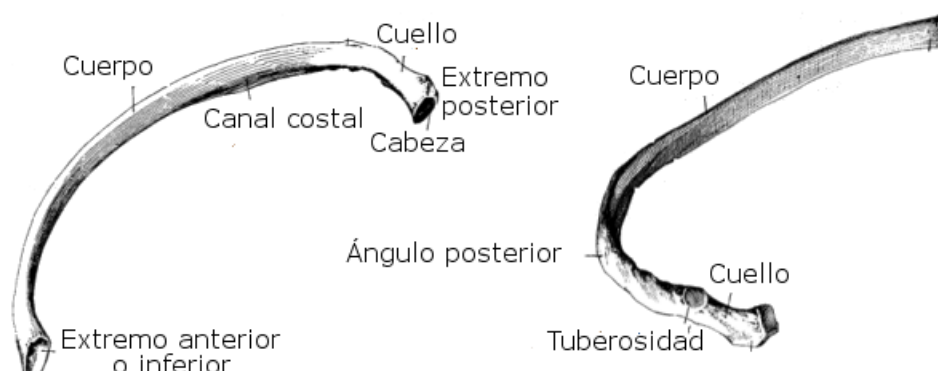


Figura 2.4. Partes y geometría de la costilla humana (Gutierrez, 1975).⁵²

Es importante tener en consideración que las propiedades y dimensiones de las costillas son fuertemente dependientes del sujeto a las que pertenece. En este contexto, factores tales como edad, altura, peso u hábitos diarios pueden afectar sobre su longitud o *densidad mineral ósea* (DMO).¹⁴¹ Ello hace de la determinación de sus propiedades una tarea más compleja, en la que debe tenerse en cuenta la influencia de diversos factores, tal y como se verá en la siguiente sección.

2.1.2 Ensayos y determinación de las propiedades mecánicas

Las propiedades mecánicas del hueso cortical han sido estudiadas en la literatura a partir del desarrollo de ensayos de tracción,^{30,67,68} de compresión,^{74,78,101} de flexión,^{7,27,69,128,129} de torsión¹⁴⁴ e incluso mediante nanoindentación,^{71,153} siendo los más comunes en costilla humana los tres primeros.

A partir de los ensayos mecánicos se obtienen distintas propiedades de interés, como son la *resistencia máxima* o *tensión máxima* σ_{\max} , la *deformación máxima* ε_{\max} o el *módulo elástico* E , también conocido como *módulo de Young*, que representa la rigidez del material. Estas propiedades son *intrínsecas* al hueso, dado que no dependen de sus características geométricas, como son la curvatura o la sección. La resistencia máxima y el módulo elástico del hueso cortical obtenidos en la literatura mediante los cuatro tipos principales de ensayos se presenta en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Valores de resistencia máxima y módulo elástico de hueso cortical humano para distintos tipos de ensayo (Caeiro *et al.*, 2013).¹⁹

| Ensayo | σ_{\max} [MPa] | E [MPa] |
|-------------------|-----------------------|-------------|
| Tracción | 107 – 170 | 11,4 – 29,2 |
| Compresión | 167 – 213 | 14,7 – 34,3 |
| Flexión | 103 – 238 | 9,8 – 15,7 |
| Torsión | 65 – 71 | 3,1 – 3,7 |

En los ensayos de tracción, la determinación de las propiedades mecánicas suele ser más sencilla, dado que se parte de probetas tipo alterio, también conocidas como *coupons*, fabricadas de hueso cortical con sección constante y por tanto, donde la influencia geométrica de la costilla no se ve reflejada.^{67,68,131,141} Sin embargo, la fabricación de las muestras es una tarea más compleja, dadas sus pequeñas dimensiones (aproximadamente 20 mm de largo y 10 mm de ancho) y la curvatura propia de la costilla, que dificulta la obtención de especímenes de sección constante. Además, debido a las pequeñas deformaciones del hueso cortical, la determinación de la deformación tiene una dificultad añadida ya que las pequeñas dimensiones de los *coupons* complican el cálculo de las deformaciones de forma precisa.

Por otro lado, en el caso de flexión, las muestras suelen ser costillas completas o tramos de costilla, ensayados habitualmente en una configuración de flexión a tres puntos, en la cual los extremos están simplemente apoyados¹²⁸ o sujetos en uno⁶⁹ o en ambos lados.⁵ La dificultad principal de este tipo de ensayos es que, a pesar de que puedan obtenerse datos tales como cargas de fractura, deflexiones máximas y rigidez,^{4,79,109} estas propiedades son *extrínsecas* al hueso, debido su dependencia de características geométricas.⁸⁹ Estas propiedades al fin y al cabo no consideran la anisotropía, heterogeneidad y la curvatura o variación de la sección a lo largo de la costilla humana y no son propias únicamente del material. Por ello, otros estudios de flexión han determinado las tensiones y deformaciones de la costilla, pero únicamente en la zona de fractura y en base a las ecuaciones más conocidas de elasticidad lineal.^{6,69,129,149} No solo eso, sino que en los ensayos de flexión aparecen tensiones cortantes y deformaciones radiales que, a pesar de no ser tan influyentes en el comportamiento mecánico del hueso, deben ser consideradas y prácticamente ningún estudio proporciona valores experimentales de estas componentes. En este sentido, un modelo constitutivo permite determinar las

relaciones entre tensión y deformación, así como predecir la respuesta del material bajo cualquier tipo de sollicitación y los ensayos de tracción y flexión permiten estimar la mayor parte de las constantes que definen dicho modelo (consúltese el capítulo 4).

De esta descripción se deduce que las propiedades mecánicas [intrínsecas] del hueso cortical no son de fácil determinación, especialmente en el caso de la deformación dado que en el hueso compacto su valor es muy bajo. Además, en ensayos con costillas completas o especímenes de sección variable, deberá considerarse la influencia de la geometría de las muestras, así como la variabilidad entre individuos, que será tratada a continuación.

2.1.3 Influencia de la antropometría y geometría

Como se ha mencionado anteriormente, hay diversos factores que afectan a las propiedades mecánicas del tejido óseo y que deben tenerse en cuenta en la discusión de los resultados.

En lo que a la geometría respecta, a lo largo de la costilla se observan variaciones de muchos parámetros, especialmente el espesor, el cual muestra diferencias entre zonas anatómicas, aumentando de la región anterior a la posterior así como en la propia sección, donde los espesores superior e inferior han mostrado ser menores que los de la zona interior y todos ellos a su vez inferiores al espesor de la cara exterior de la costilla.^{69,93} Así mismo, se ha observado un incremento significativo del área cortical desde la región anterior a la posterior, acompañada también por variaciones en los momentos de inercia.²⁷

Esta variabilidad no solo se percibe a lo largo de la costilla o entre costillas de distinto nivel, sino que también ha sido observada entre distintos individuos. Los estudios de la literatura muestran que parámetros tales como la edad, sexo o *índice de masa corporal* (IMC) influyen notablemente en la geometría de la caja torácica en general y, a su vez, en las propiedades mecánicas del hueso cortical.⁴⁹ Los efectos de la edad y el sexo, más allá de estar presentes entre sujetos, también parecen estar reflejados en el grado de variación a lo largo de la propia costilla.¹²²

Tanto las variaciones geométricas como las variables antropométricas (edad o IMC) a su vez, han mostrado ser influyentes en las propiedades mecánicas de la costilla humana. De un lado, un aumento del nivel de costilla (de la primera a la

duodécima), así como un avance desde la región anterior a la posterior, presenta una mayor rigidez y resistencia.¹²⁹ De otro lado, un aumento de la edad de los sujetos ha mostrado reducir la resistencia máxima y el módulo elástico del material.⁶⁸

2.1.4 Influencia de la microestructura: densidad, porosidad y Dimensión Fractal

No solo la edad, la zona anatómica o el nivel de costilla analizado son importantes en la determinación de las propiedades mecánicas; a nivel estructural, un factor muy relevante a tener en cuenta es la *anisotropía* del hueso cortical, dada principalmente por la alineación preferencial de las osteonas (y, a su vez, de las fibras de colágeno y placas minerales) a lo largo del eje longitudinal o axial del hueso. La anisotropía comporta diferencias en el comportamiento mecánico del tejido óseo en función de la dirección analizada, observando una disminución de las propiedades mecánicas en las direcciones radiales o transversales con respecto a la longitudinal.^{33,111}

La presencia del colágeno además, induce un comportamiento dependiente de la velocidad de sollicitación, dotando al tejido óseo de propiedades viscoelásticas que se hacen notables a velocidades de deformación elevadas en las que la tensión o el trabajo a fractura parecen aumentar.^{50,67} A pesar de que estudios antiguos reflejaron un incremento del módulo elástico con el aumento de la velocidad de sollicitación,⁸⁸ publicaciones recientes enfocadas en este ámbito no han observado una influencia clara.

La microestructura y composición del hueso han manifestado afectar a las propiedades mecánicas en general, incluso a velocidades cuasi-estáticas. En este aspecto, la porosidad ha sido relacionada con el módulo elástico por medio de una ley potencial del tipo $E = C_2(1-p)^k$, siendo p la porosidad.¹¹⁸ Una expresión similar se ha deducido en la publicación de Helgason *et al.* (2008)⁵⁸ en la que se recopilan las relaciones presentadas en la literatura entre la densidad y el módulo elástico, concluyendo que la forma genérica de esta relación es $E = C_1\rho^n$ siendo $2, 3 \leq n \leq 3$. Además del módulo elástico, la densidad también ha mostrado mejorar la resistencia del hueso;⁶⁸ en realidad, un incremento de la densidad al fin y al cabo conlleva una disminución de la porosidad del tejido.

La densidad a su vez está principalmente descrita en base al porcentaje de fase mineral en la muestra, e inversamente relacionada con la fracción de agua.¹⁴⁸ Sin embargo, la fracción mineral no ha mostrado ser influyente en propiedades mecánicas como la tenacidad a fractura,^{68,148} al contrario que la fracción de agua, que sí ha estado correlacionada inversamente con la tenacidad. Estos resultados llevaron a los autores a sugerir que la fracción acuosa podría ser un análogo a la porosidad, dado que principalmente ocuparía las cavidades en el tejido óseo, de tal forma que un incremento en el porcentaje de agua estaría relacionado con un aumento de la porosidad.

Puede verse entonces que, tanto la porosidad como la densidad, ambas conceptualmente relacionadas, son factores microestructurales de gran importancia en las propiedades mecánicas. Básicamente, un aumento de la porosidad necesariamente reduce la sección resistente, menguando su capacidad estructural. En este sentido, la porosidad ha sido considerada un factor asociado con la manifestación de la osteoporosis: una patología sistémica del hueso en la que la masa ósea se ve reducida, incrementándose así la fragilidad. La osteoporosis se hace más presente en mujeres y a partir de ciertas edades.¹¹³ Sin embargo, la estructura ósea también ha mostrado estar marcada por el avance de la edad, la práctica de diferentes deportes o actividades que inducen sollicitaciones de fatiga, pudiendo incrementar la reabsorción o daño en el hueso^{66,75,79} y la medida de la porosidad podría actuar como un indicador de la presencia de patologías.

Así, se han utilizado diferentes técnicas y parámetros en la literatura que tratan de medir la porosidad del tejido óseo cortical. Parámetros tales como la Atenuación de Ultrasonido de Banda ancha (*Broadband Ultrasound Attenuation*, BUA),¹¹² o la estructura (también conocido como *fabric*)¹⁰³ han mostrado estar relacionados con el módulo elástico del hueso trabecular y en el caso de este último, incluso describir la alineación de la microestructura,⁵³ pero parecen no ser suficientemente susceptibles a cambios leves de porosidad como los presentados en el hueso cortical. Así mismo, la Densidad Mineral Ósea (*Bone mineral Density*, BMD) ha sido determinada en base a técnicas como la velocidad de sonido (*Speed of Sound*, SoS) o la Absorciometría Dual de Rayos-X (*Dual X-ray Absorptiometry*, DXA)⁸⁰ pero han mostrado ser sensibles al espesor del hueso;¹³⁹ además, el BMD por sí solo, no caracteriza explícitamente la microestructura, la distribución del material⁵⁷ u otros aspectos que sí parece capturar la *Dimensión Fractal*.

Dimensión Fractal

La *Dimensión Fractal* (DF) es un parámetro geométrico adimensional que mide la irregularidad de una estructura geométrica a diferentes escalas, siendo capaz de describir la complejidad microestructural, así como englobar información sobre la organización espacial del hueso.³⁸ Así, la dimensión fractal es especialmente útil cuando se trata de analizar detalles que aparecen a muy pequeñas escalas.

Un aspecto muy interesante de la dimensión fractal es que puede ser determinada mediante *Correlación Digital de Imágenes* (*Digital Image Correlation*, DIC) a partir de imágenes obtenidas en base a métodos no destructivos, como la *Tomografía Computarizada* (CT). A pequeñas escalas, los CTs han mostrado diferencias significativas en la distribución de la densidad del hueso cortical que la dimensión fractal es capaz de capturar. De hecho, la DF representa la ocupación del espacio y la complejidad a distintas escalas mediante un valor numérico.

La dimensión fractal ha sido utilizada en otros estudios de tejido óseo^{57,71} donde se ha mostrado que un incremento de zonas de baja densidad está asociado a mayores valores de DF, llegando incluso a distinguir entre huesos sanos y con osteoporosis.⁷⁷ Es más, este parámetro ha manifestado predecir propiedades como la tensión máxima aún de forma más adecuada que otros parámetros como el índice Singh⁸⁰ y estar correlacionada con el módulo elástico en mayor grado que el *fabric* o la porosidad.⁵³

Sin embargo, es reducida la literatura que se ha centrado en la determinación de la dimensión fractal y su relación con las propiedades mecánicas del hueso cortical.^{71,116,151} Entre estos estudios, se ha propuesto una relación entre el módulo elástico del hueso cortical de costilla humana y la dimensión fractal del tipo $E = E_0 s^{-DF}$, siendo s un parámetro ajustado.¹¹⁶ Su vinculación con las propiedades mecánicas ha sido confirmada en investigaciones complementarias al presente estudio, donde la tensión también ha sido relacionada con la dimensión fractal en una expresión similar a la anterior, de la forma $\sigma = \sigma_0 \bar{s}^{-DF}$ (consultar Velázquez-Ameijide *et al.*, 2020¹⁴² o el resumen en el apéndice C.3.)

Siendo entonces la dimensión fractal un parámetro relacionado con la porosidad y distribución de zonas de baja densidad, podría a su vez tener algún tipo de influencia en los parámetros de un modelo constitutivo que trate de describir el comportamiento mecánico del hueso cortical y, de hecho, será aquí utilizada para tal fin.

2.2 Mecánica de medios continuos

La *mecánica de medios continuos* trata con el cambio de forma (o deformación) de cuerpos sometidos a una sollicitación externa, aplicando los principios de la mecánica clásica a cuerpos aproximados como medios continuos, en lugar de modelarlos como sistemas discretos de partículas. Esta rama de la mecánica es una formulación matemática que generaliza las leyes de Newton a un sistema continuo formado por un número infinito de puntos materiales, es decir, un conjunto continuo.² La mecánica de medios continuos se centra en:

- **Cinemática:** El estudio del movimiento y la deformación.
- **Dinámica:** El estudio de la tensión en el continuo.
- **Teoría constitutiva:** La descripción matemática de las leyes fundamentales de la física que gobiernan el movimiento del continuo, también conocidas como principios o leyes de equilibrio.

Para especificar por completo un modelo dentro de la mecánica del medio continuo es necesario caracterizar tanto la *deformación del cuerpo* como la *tensión del cuerpo*. La deformación implica especificar la cinemática del cuerpo, mientras que la tensión equivale a definir la dinámica del cuerpo. Matemáticamente, tanto la deformación como la tensión de un medio continuo vienen dados por dos tensores de segundo orden. Dado que la cinemática o descripción del movimiento no es independiente de la dinámica o descripción de las causas del movimiento, necesariamente deberá existir una relación entre el tensor de deformaciones y el tensor de tensiones; la ecuación que relaciona ambos tensores se denomina *ecuación constitutiva*. En el caso del hueso, la parte determinista que relaciona tensión y deformación será el tipo más sencillo de ecuación constitutiva: una *ecuación constitutiva elástica*. Los materiales elásticos son materiales que no presentan memoria de proceso y, por tanto, el estado de tensión en cada instante depende solo del estado de deformación en ese instante, con independencia del valor de las deformaciones en el pasado.

²El origen de la mecánica de medios continuos data del siglo XIX, formulada por el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) y, desde entonces, ha sido un área de investigación presente hasta la actualidad.

Cuando se consideran pequeñas deformaciones y no hay una excesiva microfisuración interna, un modelo elástico lineal reproduce adecuadamente el comportamiento mecánico.⁴⁰ De hecho, los materiales frágiles sometidos a cargas llegan al fallo, sin deformación no elástica previa y su fractura es de difícil anticipación.¹⁷ Sin embargo, en el caso de hueso no siempre es fácil delimitar una parte lineal de una parte claramente no lineal, porque existe una zona de transición difícil de determinar. Esta región no lineal está principalmente asociada a los mecanismos de disipación de energía (esencialmente microfisuración y daños en la microestructura)³ y por esa razón, excedido cierto nivel de tensión aparece una cantidad de deformación inelástica, así como una acumulación de daño [o microdaño] (que se refleja, entre otras cosas, en una pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación).^{84,120} La capacidad del tejido óseo de soportar daño está muy asociada con la anelasticidad¹¹ y es por ello que el uso de un modelo lineal no es adecuado, especialmente cerca de la fractura; por este motivo, resulta necesario recurrir a modelos no lineales.

En el ámbito de los modelos constitutivos, son muchos los modelos de hueso en gran parte de los cuales se consideran los efectos viscoelásticos debidos a la presencia de colágeno en el tejido óseo. Sin embargo, en este estudio dicha influencia no será considerada, dado que la velocidad de deformación $\dot{\epsilon}$ utilizada es muy baja.

En el modelo propuesto se verá que existen dos regímenes de comportamiento mecánico del tejido óseo: un primer tramo o rango elástico, donde no suceden apenas cambios permanentes en la microestructura y la relación entre tensión y deformación es casi lineal y un rango anelástico [inelástico o no elástico],⁴ en el cual se producen los fenómenos irreversibles (en concreto, el modelo propuesto analiza la microfisuración y el cambio de entropía asociado a dichos fenómenos irreversibles). En el rango anelástico se observa una falta de linealidad entre la tensión y la deformación, asociada a los fenómenos disipativos, como la nucleación y propagación de microfisuras [daño].

³La pérdida de linealidad y los mecanismos asociados se tratarán en la subsección 2.2.4.

⁴El término *plasticidad* no será utilizado en esta investigación para describir la pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación asociada al inicio de procesos irreversibles, dado que este término está comúnmente asociado al movimiento de dislocaciones que se produce en los materiales mecánicos. En su lugar, este comportamiento se definirá como anelástico, inelástico, post-elástico o simplemente no elástico, para referirse a la acumulación de daño dada por la microfisuración, como se ha definido en otros estudios como el de Natali *et al.*, 2008.⁹⁷

2.2.1 Cinemática: movimiento y deformación

En la mecánica de medios continuos, un cuerpo deformable $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ se define como un subconjunto de partículas de un espacio topológico (normalmente el espacio euclídeo tridimensional). El cuerpo \mathcal{B} inicialmente ocupa un espacio, llamado *configuración de referencia*, que corresponde a un tiempo fijo de referencia $t = 0$. En este estudio, la configuración de referencia será coincidente con la *configuración inicial*, que se tomará en $t = 0$.⁵

Al aplicar una sollicitación, el cuerpo \mathcal{B} se desplaza, rota y/o se deforma, cambiando de posición y forma y ocupando, para cada tiempo $t > 0$ una nueva configuración denominada *configuración actual o deformada* \mathcal{C} . La configuración deformada viene dada por un mapeo $\phi_t(\mathcal{B})$ [aplicación o movimiento], que depende del instante de tiempo t considerado y representa el estado deformado del cuerpo en ese tiempo. Así, \mathcal{B} tiene infinitas configuraciones en el espacio y la configuración deformada de un cuerpo cuya configuración de referencia en $t = 0$ es \mathcal{B} , se define para un tiempo fijo $t \in \mathbb{R}$ mediante la aplicación $\phi_t(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$.

La posición de cada partícula se referencia por el vector posición \mathbf{X} (respecto a un origen O), que en una base $\hat{\mathbf{E}}_A$ se define, usando la notación indicial⁶ y mediante el convenio de sumas de Einstein,⁷ como $\mathbf{X} = X^A \hat{\mathbf{E}}_A \quad \forall A = 1, 2, 3$, siendo X^A las componentes del vector posición \mathbf{X} .⁸ Así mismo, las magnitudes *covariantes* (coordenadas, vectores y/o tensores) se denotan con superíndices y las *contravariantes* con subíndices (ver anexo A.1.3 para una definición de covariancia y contravariancia).

⁵Las configuraciones de referencia e inicial no necesariamente deben ser coincidentes ya que la configuración inicial puede considerarse como un estado ya deformado en $t_1 > 0$ que, tras aplicar una sollicitación, pasará a ser una nueva configuración en $t_2 > t_1$, mientras que el estado de referencia se asocia a la configuración no deformada en $t_0 = 0$ y por tanto, previa a la configuración inicial.

⁶Para más información sobre esta notación, puede consultarse el capítulo 1 de *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering* (G.A. Holzapfel, 2002).⁶⁰

⁷El convenio de suma de Einstein establece que, ante la presencia de índices repetidos en el mismo término, dicho término debe sumarse para todo el rango (es decir, en la expresión $\mathbf{X} = X^A \hat{\mathbf{E}}_A$ para todo A , siendo $A = 1, 2, 3$).

⁸Según el orden de la variable o parámetro descrito, este se expresará de la forma $\alpha, \lambda, \phi...$ para referirse a un escalar, $\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{a}...$ para vectores (orden 1) y $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{F}, \mathbf{C}...$ para tensores (orden 2 o superior).

La posición \mathbf{X} de cada una de las partículas en la configuración inicial, puede referenciarse en la configuración deformada dada por la aplicación $\phi_t(\mathbf{X})$ para un tiempo t fijo, como $\mathbf{x} = x^a \hat{\mathbf{e}}_a$, siendo \mathbf{x} la posición actual. Las coordenadas en la configuración de referencia se conocen como coordenadas *materiales* y se designan con mayúsculas X^A , mientras que las asociadas a la configuración deformada se denominan *espaciales* y se expresan en minúsculas x_a (esta formulación se aplica tanto a coordenadas como a vectores y subíndices). Ambas posiciones pueden relacionarse, en un tiempo fijo t , mediante la aplicación $\phi_t(\mathbf{X}) = \phi(\mathbf{X}, t)$:

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t); \quad x^a = \phi^a(X^1, X^2, X^3, t) \quad (2.1)$$

Así mismo, si el movimiento es invertible, tal que cada aplicación $\phi_t(\mathcal{B})$ tiene una inversa $\phi_t^{-1}: \phi_t(\mathcal{B}) \mapsto \mathcal{B}$, es posible hallar la posición \mathbf{X} conociendo \mathbf{x} :

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t); \quad X^A = \phi_A^{-1}(x^1, x^2, x^3, t) \quad (2.2)$$

El cambio de posición de un punto material \mathbf{X} a la nueva posición \mathbf{x} viene dado por el *desplazamiento*, el cual se define como $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ en coordenadas materiales y $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ en espaciales y se expresa, respectivamente, de la forma:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (2.3b)$$

El desplazamiento puede definirse en base al movimiento inverso ϕ_t^{-1} como:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}[\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

Cuando se trata de una traslación rígida, el desplazamiento es el mismo para todas las partículas dado que éstas se desplazan la misma distancia.

En el proceso de deformación, cada partícula del sólido se mueve una distancia a lo largo de un periodo de tiempo, lo cual viene definido por la *velocidad* $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$. Así mismo, el cambio de velocidad se expresa mediante la *aceleración* $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$. Ambas dependen de la posición en las coordenadas de referencia y el tiempo transcurrido hasta la posición actual y pueden expresarse en base al movimiento:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{V}[\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{A}[\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5b)$$

siendo $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ la descripción espacial de la velocidad y la aceleración respectivamente.

Si en lugar de considerar un punto concreto definimos la posición de un conjunto de partículas del cuerpo que forman una curva $\Gamma \subset \mathcal{B}$, la posición de dichos puntos puede expresarse tras la deformación mediante la aplicación, obteniendo la curva deformada $\gamma \subset \phi_t(\mathcal{B})$. Puede encontrarse entonces el vector tangente a cada una de las curvas que, mediante la relación (2.1) que representa la posición de los puntos en ambas configuraciones, nos permite llegar al *tensor gradiente de deformaciones* \mathbf{F} , una medida primaria de la deformación que transforma un vector tangente de la configuración material a la espacial, relacionando la posición de un punto en ambas configuraciones (véase el apéndice A.2.1 para el desarrollo). Dicho de otra forma, el gradiente \mathbf{F} es la tangente de la aplicación ϕ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad F^a{}_A = \frac{\partial \phi^a(X)}{\partial X^A} = \frac{\partial x^a}{\partial X^A} \quad (2.6)$$

El tensor \mathbf{F} es invertible ($\det \mathbf{F} \neq 0$), tal que su inverso se define:⁹

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (F^{-1})^A{}_a = \frac{\partial \phi_A^{-1}(x)}{\partial x^a} = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \quad (2.7)$$

A partir del tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} puede definirse el tensor mixto traspuesto $\mathbf{F}^T = [\bar{F}^A{}_a]$ asociado a \mathbf{F} (ver Marsden J.E. & Hughes, T.J, 1983⁸⁵ para una discusión de los tensores mixtos y de los índices del gradiente de deformación), que se escribe a partir de los *tensores métricos*,¹⁰ como:

$$(F^T)^A{}_a = \bar{F}^A{}_a = g_{ab} F^b{}_B G^{AB} \quad (2.8)$$

Observando los subíndices de \mathbf{F} en las expresiones expuestas, es importante notar que el tensor \mathbf{F} es variable en función del sistema de ejes elegidos y, por tanto, por sí solo incumple el *criterio de objetividad* que debe respetar cualquier ecuación constitutiva, el cual establece que la relación obtenida debe ser invariante desde el punto de vista de dos observadores diferentes.¹¹ De esta forma,

⁹Véase el apéndice A.1.1 donde se describe las nociones básicas del cálculo tensorial.

¹⁰Ver sección A.1.2 del apéndice para una definición de tensor métrico.

¹¹En el apéndice A.3.1 se presenta una definición más extensa de objetividad, junto con los tensores de deformación y tensión objetivos.

\mathbf{F} debe introducirse en las ecuaciones en una forma que sea invariante ante una rotación o traslación del cuerpo respecto al observador. No obstante, este requisito lo cumplen otros tensores de deformación que se obtienen a partir del tensor gradiente de deformaciones y que se exponen a continuación.

Considérese un vector \mathbf{a}_0 unitario en la configuración material, dirigido de un punto \mathbf{X} a otro punto \mathbf{Y} que tras una deformación viene dado por el vector *estiramiento* $\lambda_{\mathbf{a}_0}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{a}_0$. Entonces, mediante el tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} y su traspuesta, se llega a la definición del *tensor de deformaciones derecho de Cauchy-Green* (o de *Green*) \mathbf{C} , de la forma:¹²

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad C^A_B = \bar{F}^A_a F^a_B = g_{ab} G^{AC} \frac{\partial \phi^b}{\partial X^C} \frac{\partial \phi^a}{\partial X^B} \quad (2.9)$$

El tensor de deformaciones de Green \mathbf{C} cumple el criterio de objetividad, además de ser simétrico ($\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$, es decir, $C^A_B = C^B_A$) y está expresado en coordenadas materiales, lo cual resulta de gran utilidad si los desplazamientos están determinados en este sistema (como es el caso que nos ocupa).¹³

A partir del tensor de deformaciones de Green \mathbf{C} se obtiene¹⁴ el *tensor de deformaciones de Piola* \mathbf{B} , como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}, \quad B^A_B = C^B_A = (F^{-1})^A_a \bar{F}^a_B \quad (2.10)$$

De forma muy similar puede deducirse la forma del *tensor de deformaciones de Green-Lagrange* \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad E^A_B = \frac{1}{2}(\bar{F}^A_a F^a_B - \delta^A_B) \quad (2.11)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad y δ^A_B el delta de Kronecker. El tensor \mathbf{E} es también simétrico y proporciona una medida de la deformación entre dos puntos $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{B}$, cuya distancia entre ambos tras la deformación ϕ_t se ha incrementado o reducido (el cambio de módulo de la distancia viene a su vez dado por el estiramiento).

¹²Ver apéndices A.2.2 y A.2.3 para la deducción de este y el resto de tensores de deformación.

¹³Además, \mathbf{C} es definido positivo si \mathbf{F} es una aplicación inyectiva (donde los puntos en la configuración material se corresponden a puntos diferentes en la espacial).

¹⁴Esto se cumple siempre y cuando \mathbf{C} sea invertible.

Análogamente, expresando el estiramiento y la deformación en coordenadas espaciales, se obtiene el *tensor de deformaciones de Cauchy-Green* o de *Finger* \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad b^a_b = F^a_A \bar{F}^A_b = g_{bc} G^{AB} \frac{\partial \phi^a}{\partial X^A} \frac{\partial \phi^c}{\partial X^B} \quad (2.12)$$

el cual es simétrico ($\mathbf{b} = \mathbf{b}^T$) y definido-positivo igual que \mathbf{C} .

Finalmente con algunas operaciones (ver apéndice A.2.3) se obtiene el *tensor de deformaciones de Euler-Almansi* \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}), \quad e^a_b = \frac{1}{2}[\delta^a_b - (\bar{F}^{-1})^a_A (F^{-1})^A_b] \quad (2.13)$$

un tensor simétrico que expresa la deformación entre dos puntos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi_t(\mathcal{B})$ en la configuración actual o deformada.

Dado que todos los tensores de deformación descritos se determinan a partir del gradiente de deformaciones \mathbf{F} , es obvio pensar que pueden establecerse relaciones entre ellos. De hecho, los tensores de deformación pueden relacionarse mediante operaciones que permiten pasar de un sistema de referencia a otro, entre las configuraciones antes y después de la deformación. La operación de cambio de sistema de referencia se define como *push-forward* ϕ_* si se transforma un tensor o vector de la configuración de referencia a la espacial y *pull-back* $\phi_*^{-1} = \phi^*$ si se transforma de la configuración deformada a la de referencia.¹⁵ Ambas se operan a partir de \mathbf{F} pero la combinación de operaciones dependerá de si el tensor es covariante $(\bullet)^\flat$ (como $\mathbf{E}^\flat, \mathbf{e}^\flat, \mathbf{C}^\flat$) o contravariante $(\bullet)^\sharp$ (como \mathbf{b}^\sharp) y de si la transformación va de coordenadas materiales a espaciales o a la inversa.

De forma general, para tensores las transformaciones se operan como:

$$\begin{aligned} \phi_*(\bullet)^\flat &= \mathbf{F}^{-T}(\bullet)^\flat \mathbf{F}^{-1}, & \phi^*(\bullet)^\flat &= \mathbf{F}^T(\bullet)^\flat \mathbf{F} \\ \phi_*(\bullet)^\sharp &= \mathbf{F}(\bullet)^\sharp \mathbf{F}^T, & \phi^*(\bullet)^\sharp &= \mathbf{F}^{-1}(\bullet)^\sharp \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (2.14)$$

y en el caso de vectores:

$$\begin{aligned} \phi_*(\bullet)^\flat &= \mathbf{F}^{-T}(\bullet)^\flat, & \phi^*(\bullet)^\flat &= \mathbf{F}^T(\bullet)^\flat \\ \phi_*(\bullet)^\sharp &= \mathbf{F}(\bullet)^\sharp, & \phi^*(\bullet)^\sharp &= \mathbf{F}^{-1}(\bullet)^\sharp \end{aligned} \quad (2.15)$$

¹⁵Ver apéndice A.2.4 donde se definen paso a paso las aplicaciones *push-back* y *pull-forward*.

Así, los tensores de deformación expuestos se expresan alternativamente como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}^b &= \phi^*(\mathbf{g}) , & C_{AB} &= g_{ab} F^a_A F^b_B \\
 \mathbf{c}^b &= \phi_*(\mathbf{G}) , & c_{ab} &= G_{AB} (F^{-1})^A_a (F^{-1})^B_b \\
 \mathbf{B}^\dagger &= \phi^*(\mathbf{g}^\dagger) , & B^{AB} &= g^{ab} (F^{-1})^A_a (F^{-1})^B_b \\
 \mathbf{b}^\dagger &= \phi_*(\mathbf{G}^\dagger) , & b^{ab} &= G^{AB} F^a_A F^b_B \\
 \mathbf{E}^b &= \phi^*(\mathbf{e}^b) , & E_{AB} &= e_{ab} F^a_A F^b_B \\
 \mathbf{e}^b &= \phi_*(\mathbf{E}^b) , & e_{ab} &= E_{AB} (F^{-1})^A_a (F^{-1})^B_b
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2.2 Tensión

Dado un sólido sometido a fuerzas (externas o internas), estas se transmiten a lo largo del cuerpo. Si el sólido se divide en dos partes por un plano que contenga a un punto \mathbf{x} , el cual se encuentra en una superficie ds definida por un vector \mathbf{n} normal a ella, entre ambas partes del cuerpo hay fuerzas de interacción. Definamos entonces la fuerza resultante $d\mathbf{f}$ que actúa sobre la superficie ds :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}ds = \mathbf{T}dS \tag{2.17}$$

$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ es el *vector tracción de Cauchy* en ds y $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})$ el *primer vector tracción de Piola-Kirchhoff* en dS . Ambos vectores son fuerzas por unidad de superficie definidas en las configuraciones espacial y material respectivamente y permiten describir dos tensores de tensión a partir del *teorema de tensión de Cauchy*, que postula la existencia tensores únicos, tal que:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t), \mathbf{n} \rangle, \quad t^a = \sigma^a_b n^b = g_{bc} \sigma^{ac} n^b \tag{2.18a}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \langle \mathbf{P}(\mathbf{X}, t), \mathbf{N} \rangle, \quad T^A = G_{BC} (F^{-1})^A_a P^{aC} N^B \tag{2.18b}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el *tensor de tensiones de Cauchy*, simétrico y definido en coordenadas espaciales y \mathbf{P} el *primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*, referido a las dos configuraciones. Con las expresiones (2.17) y (2.18) se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N} dS \tag{2.19}$$

y mediante la fórmula de Nanson se llega a la *transformación de Piola*:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad P^{aA} = J\sigma^{ab}(F^{-1})^A_b = J\sigma^{ab}\frac{\partial X^A}{\partial x^b} \quad (2.20)$$

relacionando \mathbf{P} y $\boldsymbol{\sigma}$ (o de forma inversa, como $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \boldsymbol{\sigma}^T$). Introduciendo el ratio de volumen $J = \det\mathbf{F}$ se define el *tensor de tensiones de Kirchhoff* $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}, \quad \tau^a_b = J\sigma^a_b \quad (2.21)$$

Y mediante el *pull-back* de $\boldsymbol{\tau}$ y las relaciones (2.20) y (2.21), se llega al tensor:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}, \quad S^{AB} = J(F^{-1})^A_a(F^{-1})^B_b\sigma^{ab} = (F^{-1})^A_a P^{aB} \quad (2.22)$$

conocido como el *tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff* \mathbf{S} , el cual carece de interpretación física; no obstante, es de gran importancia en la formulación de ecuaciones constitutivas, como se verá posteriormente, dado que es el único tensor de tensiones expresado en coordenadas materiales. El tensor \mathbf{S} es invertible, se relaciona mediante el gradiente de deformación con el primer tensor de Piola-Kirchhoff ($\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$) y además, la expresión (2.22) permite obtener el tensor de deformaciones $\boldsymbol{\sigma}$ en coordenadas espaciales:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T, \quad \sigma^a_b = J^{-1}F^a_A S^A_B (F^{-1})^B_b \quad (2.23)$$

2.2.3 Ecuaciones constitutivas y representación de la anisotropía

Principios y axiomas generales de comportamiento material

La sollicitación que se aplica a un sólido genera un estado tensional representable mediante un campo tensorial de tensiones, asociado a una deformación del cuerpo que viene definida por un campo tensorial de deformaciones. La relación entre ambas magnitudes viene dada por una expresión conocida como *modelo constitutivo*, que representa las propiedades físicas intrínsecas de un cuerpo continuo.¹⁶

¹⁶Aquí la ley constitutiva será la relación unidimensional entre variables (como la ley de Hooke $\sigma = E\epsilon$ en materiales elásticos) mientras que el modelo constitutivo será la relación entre tensores que vincula las componentes de una variable tensorial con otras variables tensoriales.

Un modelo constitutivo es una ecuación tensorial que representa el comportamiento real del material, relacionando los estímulos externos aplicados sobre el mismo con su respuesta observada.

Cuando se trata de describir el comportamiento de un material mediante un modelo constitutivo, deben asumirse una serie de principios; los más importantes son:^{39, 85, 108, 124, 145}

- **Principio de determinismo:** Magnitudes como la tensión, energía interna específica o flujo de calor de un punto material en un tiempo t , están determinadas únicamente por la historia pasada de movimiento y temperatura hasta (e incluyendo) el tiempo t . Además, se asume que el material tiene *desvanecimiento de memoria*, es decir, la historia de un pasado reciente tendrá más influencia en el estado actual que la historia de un pasado más antiguo.
- **Principio de localidad:** Dos objetos alejados suficientemente el uno del otro no pueden influirse mutuamente de forma instantánea. Aplicado este principio a la formulación basada en la mecánica del continuo, esto implica que la tensión, energía interna específica y flujo de calor en un punto material, son independientes de la historia de movimiento y temperatura más allá de su entorno inmediatamente cercano.
- **Principio de objetividad material:** La respuesta del material medida por dos observadores distintos en dos sistemas de referencia diferentes debe ser la misma; es decir, la respuesta material debe ser independiente del observador. La objetividad conlleva que, dados dos observadores en distintos sistemas de referencia y que miden una magnitud física, ésta debe estar relacionada por un cambio de coordenadas o de sistema de referencia. A pesar de que ciertos autores definen la objetividad como la invariancia del sistema ante una rotación o cambio de orientación del sistema de ejes (isometrías o rotaciones rígidas), la objetividad implica la invariancia a cualquier cambio arbitrario de coordenadas y, por ello, todas las ecuaciones deben ser invariantes en su forma para distintos observadores (es decir, covariantes).
- **Axioma de continuidad:** Expresa la indestructibilidad de la materia (no hay región positiva finita que se deforme a un volumen infinito, i.e. $0 < J < \infty$) y la existencia de una función única inversa local si, y solo si el Jacobiano dado por $J = |\partial x^i / \partial X^I|$ es distinto a cero.

- **Axioma de impenetrabilidad de la materia:** Postula que una porción de materia nunca puede penetrar en otra, hecho que conlleva que la aplicación $\mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X})$ debe ser inyectiva.
- **Principio de invariancia bajo simetrías:** Bajo la acción de un subgrupo de rotaciones adecuado, la ecuación constitutiva no cambia (esto se detallará en la presente sección, aplicado a materiales transversalmente isótropos).

La forma más general de una ecuación constitutiva viene dada por la expresión:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{g}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}) \quad (2.24)$$

siendo $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones de Cauchy, \mathbf{F} el tensor gradiente de deformaciones, \mathbf{X} el vector posición de cada partícula y \mathfrak{g} la *función respuesta*. Para materiales homogéneos¹⁷ la ecuación (2.24) puede reducirse a:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{g}(\mathbf{F}) \quad (2.25)$$

Sin embargo, dada la no objetividad del tensor \mathbf{F} , resulta más conveniente expresar las relaciones constitutivas con otros tensores de deformación objetivos, derivados del anterior a partir de las relaciones antes presentadas (secciones 2.2.1 y 2.2.2). Con ello, pueden obtenerse formas alternativas de la ecuación constitutiva en base a otros tensores de tensión y deformación:¹⁸

$$\mathbf{S} = \mathfrak{h}(\mathbf{C}) , \quad S^A_B = \mathfrak{h}(C^M_N) \quad (2.26a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{g}(\mathbf{b}) , \quad \sigma^a_b = \mathfrak{g}(b^m_n) \quad (2.26b)$$

$$\mathbf{P} = \mathfrak{n}(\mathbf{F}) , \quad P^a_A = \mathfrak{n}(F^b_B) \quad (2.26c)$$

Si bien es conocido que un material elástico es capaz de almacenar energía durante una sollicitación y volver a su estado inicial tras retirar el estímulo, Noll y Coleman (1963) mostraron, mediante una argumentación basada en la termodinámica, que cualquier material elástico es, de hecho, un material *hiperelástico*

¹⁷Un material homogéneo es aquel cuya densidad es uniforme, todos los puntos materiales son iguales y por tanto, en el cual las propiedades mecánicas son independientes de la posición.

¹⁸Tanto los tensores de tensión de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} y de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, como los tensores de deformación de Cauchy-Green \mathbf{C} y de Finger \mathbf{b} cumplen con el criterio de objetividad. La expresión (2.26c) será objetiva cumpliendo con ciertos requisitos de invariancia.

(o *material elástico de Green*).⁸⁵ Para estos materiales, existe una función de energía, conocida como *energía libre de Helmholtz* que, en el caso de que dependa del gradiente de deformación o de un tensor de deformaciones, se conoce como *función densidad energía de deformación* Ψ o SEDF¹⁹ de la cual se deriva la ecuación constitutiva del material. La función energía de deformación permite incluir la habilidad de un material de disipar energía, la relación entre la velocidad de deformación y la respuesta del material, la anisotropía del material u otros factores.¹⁰⁸ Cuando la ecuación constitutiva viene dada a través de una SEDF Ψ , además de cumplirse los principios y axiomas enumerados más arriba, la propia SEDF debe cumplir algunas condiciones matemáticas adicionales para representar adecuadamente el comportamiento material:

- **Policonvexidad:** Condición necesaria para la existencia de soluciones globales en el *problema elástico no-lineal general*, que se remonta al trabajo de John Ball sobre el problema elástico lineal general.¹³ Ello implica que la SEDF expresada en términos del tensor de deformación, debe tener la forma $\Psi(\mathbf{E}) = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*, \det(\mathbf{E}))$, siendo $\Phi : M_{3 \times 3} \times M_{3 \times 3} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una *función convexa* y donde \mathbf{E}^* es la matriz adjunta o matriz de cofactores de \mathbf{E} .
- **Minimalidad:** Para un material con una configuración de referencia natural o libre de tensiones, la SEDF alcanza un mínimo en dicha configuración.

Forma general de las ecuaciones constitutivas

Asumiendo que se trata con un material homogéneo, la SEDF es una función del tipo $\Psi = \Psi_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$, cuya variable es un tensor y su valor un escalar, que define la energía por unidad de volumen y a partir de la cual pueden obtenerse las relaciones entre tensión y deformación.²⁰ Para este tipo de materiales llamados hiperelásticos, la tensión puede deducirse a partir de la derivada de la función Ψ :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad P_a^A = \frac{\partial \Psi}{\partial F_A^a} \quad (2.27)$$

¹⁹También conocida como *energía almacenada* o simplemente *energía de deformación*. Se abrevia como SEDF por sus siglas en inglés (*Strain Energy Density Function*).

²⁰El apéndice A.3.2 refleja las propiedades de la función Ψ .

Dado que Ψ debe depender de \mathbf{F} o de un tensor de deformaciones (definido a partir de \mathbf{F}), pueden obtenerse SEDF equivalentes, dependientes de otros tensores de deformaciones, siempre y cuando la función energía de deformación Ψ sea invariante ante rotaciones, lo cual se cumple indistintamente con los tensores de deformación \mathbf{F} , \mathbf{C} y \mathbf{E} :²¹

$$\Psi_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \Psi_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}) \quad (2.28)$$

y, además, estas formas de la SEDF Ψ cumplen el criterio de objetividad. Recurriendo entonces a las diferentes relaciones entre los tensores de tensión, pueden obtenerse las ecuaciones constitutivas de forma alternativa a (2.27):²²

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \Psi_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} 2\mathbf{F}, \quad P_a^A = \frac{\partial \Psi}{\partial F_a^A} = \frac{\partial \Psi}{\partial C_A^B} 2F_a^B \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}, \quad S_A^B = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C_B^A} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_B^A} \quad (2.29b)$$

De esta forma, la ecuación constitutiva particular para el material en cuestión dependerá de la forma de la función energía de deformación Ψ .²³ Tal y como muestra el *teorema para la representación de invariantes*, para que una función tensorial (cuya variable es un tensor y cuyo resultado es un escalar, como es el caso de $\Psi(\mathbf{C})$) sea invariante ante una rotación, debe estar expresada en base a los invariantes del tensor variable (en este caso, \mathbf{C}):

$$\Psi = \Psi[I_1(\mathbf{C}), \dots, I_n(\mathbf{C})] \quad (2.30)$$

Esto mismo se cumple para $\Psi(\mathbf{E})$, donde $\Psi = \Psi[I_n(\mathbf{E})]$. Siendo Ψ una función tensorial y según la *teoría de representaciones de polinomios tensoriales*, la forma que toma Ψ en la ecuación constitutiva es la de una relación polinómica; es de-

²¹Mediante el teorema de la descomposición polar (ver A.2.4) $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, siendo \mathbf{R} la rotación y \mathbf{U} el alargamiento, puede demostrarse que $\Psi(\mathbf{F})$ solo depende del alargamiento \mathbf{U} y no de la rotación (ver A.3.2) y por las relaciones entre \mathbf{F} , \mathbf{C} y \mathbf{E} se observa que $\Psi(\mathbf{C})$ y $\Psi(\mathbf{E})$ también dependen solo del alargamiento, aunque con expresiones diferentes (de ahí los subíndices de Ψ).

²²En el apéndice A.3.2 se detalla la deducción de las ecuaciones constitutivas a partir de los diferentes tensores de deformación.

²³De ahora en adelante se obviará el subíndice de SEDF asumiendo que es conocido que la forma de Ψ será función del tensor de deformaciones del cual depende.

cir, una función tensorial cuyas componentes son funciones polinómicas de las componentes del tensor de entrada (en este caso, del tensor deformación). Esta relación debe ser *completa* (representada como una función de invariantes como dicta la expresión (2.30)) e *irreductible* (ninguno de estos invariantes puede ser expresado como combinación del resto). Recuperando entonces la expresión (2.29b) la ecuación constitutiva se obtiene derivando la función $\Psi(\mathbf{C})$, como:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{a=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial I_a} \frac{\partial I_a}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.31)$$

Así, la complejidad de la ecuación constitutiva dependerá, entre otras cosas, del número de invariantes y su forma, ello vinculado a la simetría del material.

Simetría del material y tratamiento de la anisotropía

Si bien el caso más ideal con el que puede tratarse es con un material *isótropo* (cuya respuesta dada por la deformación es la misma independientemente de la dirección en la que se aplica la sollicitación), la mayor parte de los materiales rara vez exhiben este tipo de comportamiento, pues en ellos se observan propiedades diferentes según la dirección analizada. Las características de la respuesta material dependen de su microestructura y ésta puede permanecer invariante bajo ciertas transformaciones ortogonales. El conjunto de todas ellas, forma un grupo que se conoce como la *simetría* del material.

Dado un tensor \mathbf{S}_a , una función del mismo cuyo resultado sea un escalar $\Phi(\mathbf{S}_a)$ o tensor $\mathbf{A}(\mathbf{S}_a)$ de segundo orden, será invariante ante una transformación dada por una matriz ortogonal \mathbf{Q} si se cumple que:

$$\Phi(\mathbf{Q} \mathbf{S}_a \mathbf{Q}^T) = \Phi(\mathbf{S}_a) \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q} \mathbf{S}_a \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \mathbf{A}(\mathbf{S}_a) \mathbf{Q}^T \quad (2.32b)$$

En un material concreto, el grupo formado por las transformaciones que cumplen esta condición de invariancia es el que define su simetría. Todo cuerpo elástico tiene simetrías en su microestructura que influyen en sus propiedades mecánicas observables. Por ello, tal y como anuncia el *principio de Neumann*, cualquiera de sus propiedades debe ser invariante ante las mismas transformaciones bajo las cuales la microestructura es invariante. Esto implica que la simetría de la mi-

croestructura debe estar incluida en el grupo de simetría de la función tensorial de cualquier ley constitutiva, de la cual se obtendrán sus propiedades. De esta forma, la función energía de deformación, que es la que representa el comportamiento del material al relacionar tensión y deformación, debe contemplar la simetría del material y es precisamente esta simetría la que impone las restricciones en la forma de la función Ψ de la que se deriva la ecuación constitutiva, especificando el tipo y número de variables independientes involucradas en ella.¹⁵⁰

En función del tipo de transformaciones que forman el subgrupo de simetría de Ψ del material, se dirá que este es isótropo si el grupo de simetría es el grupo ortonormal completo $O(3)$, *hemitrópico* si el grupo de simetría está formado por transformaciones pertenecientes al grupo ortogonal especial $SO(3)$ (también conocido como rotaciones) y *anisótropo* si no es ninguno de los anteriores.²⁴ El grupo de simetrías del material afecta, por tanto, directamente al número de invariantes de la función energía de deformación Ψ ; por ejemplo, los materiales isótropos son representables únicamente a través de una función energía de deformación que depende de tres invariantes obtenidos del tensor de deformaciones, sin embargo, los anisótropos deben incluir más invariantes y variables.

La forma de los invariantes viene definida por lo que se conoce como *base de integridad*, que es el conjunto mínimo de polinomios de las variables (en este caso, el tensor deformación). Estos polinomios, además, son invariantes ante una rotación y representan por completo a la función Ψ .²⁵ De hecho, la idea principal del *teorema de Hilbert*²⁶ es que para cualquier número finito de tensores variables de una función, a la cual se le asocia un grupo compacto (acotado y discreto), existe una base de integridad formada por un número finito de invariantes.²⁷

Las representaciones irreducibles y completas para las funciones tensoriales isótropas de tensores simétricos ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$), antisimétricos ($\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{U}$) y vectores

²⁴Nótese que, dado que la función que describe las propiedades del material tiene las mismas simetrías que este, también dicha función será isótropa, hemitrópica o anisótropa.

²⁵Por ejemplo, dada una función $\phi = \phi(\mathbf{v})$ que depende de un vector \mathbf{v} , para que esta sea invariante debe depender de la magnitud de \mathbf{v} en su forma invariante, que es su módulo $|\mathbf{v}| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Por ello, la forma adecuada de expresar la función para que sea invariante es $\phi = \phi(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$, donde $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ es la base de integridad de ϕ .

²⁶Zheng Q.S. (1994) extrapola este teorema a funciones tensoriales, cuyo valor es un tensor y donde existe un número finito de combinaciones invariantes que representan a la función.¹⁵⁰

²⁷De esta forma, para cualquier sistema de tensores finito existe una base de integridad finita.

($\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}$) fue desarrollada por Wang (1970), Smith (1971) y Boehler (1977) y se exponen en la Tabla 2.2, junto con las representaciones hemitrópicas.

Tabla 2.2. Invariantes para funciones tensoriales de valor escalar isotropas y hemitrópicas.

| Variables | Isotropía | Hemitropía |
|--|--|--|
| \mathbf{A} | | $\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3$ |
| \mathbf{A}, \mathbf{B} | | $\text{tr } \mathbf{AB}, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{AB}^2, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ | | $\text{tr } \mathbf{ABC}$ |
| \mathbf{W} | | $\text{tr } \mathbf{W}^2$ |
| \mathbf{A}, \mathbf{W} | | $\text{tr } \mathbf{AW}^2, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{W}^2, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{W}^2\mathbf{AW}$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{W}$ | | $\text{tr } \mathbf{ABW}, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{BW}, \text{tr } \mathbf{AB}^2\mathbf{W}^2, \text{tr } \mathbf{AW}^2\mathbf{BW}$ |
| \mathbf{W}, \mathbf{V} | | $\text{tr } \mathbf{WV}$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{W}, \mathbf{V}$ | | $\text{tr } \mathbf{AWV}, \text{tr } \mathbf{AW}^2\mathbf{V}, \text{tr } \mathbf{AWV}^2$ |
| $\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{U}$ | | $\text{tr } \mathbf{WVU}$ |
| \mathbf{v} | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ |
| \mathbf{A}, \mathbf{v} | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Av}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Av}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{Av}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}]$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{ABv}$ | $\mathbf{v} \cdot \epsilon[\mathbf{AB}], \mathbf{v} \cdot \epsilon[\mathbf{A}^2\mathbf{B}],$ $\mathbf{v} \cdot \epsilon[\mathbf{AB}^2], [\mathbf{v}, \mathbf{Av}, \mathbf{Bv}]$ |
| \mathbf{W}, \mathbf{v} | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^2\mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \epsilon\mathbf{W}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{v}, [\mathbf{v}, \mathbf{Av}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}]$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{W}, \mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{AWv}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{Wv}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{WAW}^2\mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{AWv}, \mathbf{v} \cdot \epsilon[\mathbf{AW}], \mathbf{v} \cdot \epsilon[\mathbf{AW}^2]$ |
| $\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{WVv}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^2\mathbf{Vv}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{WV}^2\mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \cdot \epsilon[\mathbf{WV}]$ |
| \mathbf{u}, \mathbf{v} | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{v}, \mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Au}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Au}, [\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{Av}], [\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{Au}]$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}, \mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})\mathbf{u}$ | — |
| $\mathbf{W}, \mathbf{v}, \mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Wu}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^2\mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{Wu}$ |
| $\mathbf{A}, \mathbf{W}, \mathbf{v}, \mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{AW} + \mathbf{WA})\mathbf{u}$ | — |
| $\mathbf{W}, \mathbf{V}, \mathbf{v}, \mathbf{u}$ | $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{WV} - \mathbf{VW})\mathbf{u}$ | — |
| $\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}$ | — | $[\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}]$ |

Sin embargo, existen muchos teoremas de representación de funciones tensoriales isotrópicas que pueden encontrarse en la literatura, previa a los autores antes citados y que postulan:

(1) Si la función Φ depende de los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$, entonces la forma del invariante es:

$$\Phi = \Phi(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j), \quad \forall \text{ pares } i, j \quad (2.33)$$

(2) Si la función depende de un tensor simétrico \mathbf{A} de segundo orden y su resultado es un escalar o un tensor, sus invariantes se determinan, respectivamente:

$$\Phi_i = \Phi_i(\text{tr}\mathbf{A}, \text{tr}\mathbf{A}^2, \text{tr}\mathbf{A}^3) \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{B} = \Phi_0\mathbf{I} + \Phi_1\mathbf{A} + \Phi_2\mathbf{A}^2 \quad (2.34b)$$

(3) Si la función depende de un tensor simétrico \mathbf{A} de segundo orden y un vector \mathbf{v} y su resultado es un escalar o un tensor, se representa, respectivamente:

$$\Phi_i = \Phi_i(\text{tr}\mathbf{A}, \text{tr}\mathbf{A}^2, \text{tr}\mathbf{A}^3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{v}) \quad (2.35a)$$

$$\mathbf{B} = \Phi_0\mathbf{v} + \Phi_1\mathbf{A}\mathbf{v} + \Phi_2\mathbf{A}^2\mathbf{v} \quad (2.35b)$$

(4) Si la función depende de dos tensores simétricos \mathbf{A} y \mathbf{B} de segundo orden y su resultado es un escalar o un tensor, se representa, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Phi_i = \Phi_i(\text{tr}\mathbf{A}, \text{tr}\mathbf{A}^2, \text{tr}\mathbf{A}^3, \text{tr}\mathbf{B}, \text{tr}\mathbf{B}^2, \text{tr}\mathbf{B}^3, \dots \\ \dots, \text{tr}\mathbf{A}\mathbf{B}, \text{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}, \text{tr}\mathbf{A}\mathbf{B}^2, \text{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2) \end{aligned} \quad (2.36a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \Phi_0\mathbf{I} + \Phi_1\mathbf{A} + \Phi_2\mathbf{A}^2 + \Phi_3\mathbf{B} + \Phi_4\mathbf{B}^2 + \Phi_5(\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B}^T) + \dots \\ \dots + \Phi_6(\mathbf{A}^2\mathbf{B} + (\mathbf{A}^2\mathbf{B})^T) + \Phi_7(\mathbf{A}\mathbf{B}^2 + (\mathbf{A}\mathbf{B}^2)^T) \end{aligned} \quad (2.36b)$$

Siendo la energía de deformación Ψ función del tensor de deformaciones (de Green-Lagrange \mathbf{E} o de Cauchy-Green \mathbf{C} , ambos simétricos) y de resultado escalar, debe recurrirse a la expresión (2.34b) (o equivalentemente a la primera fila de la Tabla 2.2) para obtener su representación para un material isotrópico o hemitrópico.

No obstante, la costilla humana no es un material isótropo, pues las osteonas (unidad básica repetitiva del hueso) están alineadas a lo largo del eje baricéntrico de la costilla, por lo cual su comportamiento es diferente según si la sollicitación se aplica en dirección perpendicular o paralela a dicho eje. Este comportamiento es propio de los materiales *transversalmente isótropos*, un subtipo de materiales *ortótropos* que muestran en sus propiedades una simetría en el plano perpendicular al eje preferente (conocido como plano de isotropía) pero un comportamiento diferente a lo largo de la dirección preferencial, habitualmente causado por la orientación de fibras del material.²⁸ Por consiguiente, la dirección preferencial en el caso particular de la costilla será su eje baricéntrico, dado que a lo largo del mismo se alinean las osteonas, consideradas unidad básica en este estudio.

La microestructura de los materiales transversalmente isótropos, de la misma forma que el resto de materiales, muestra una simetría que debe verse reflejada en cualquier función que describa sus propiedades, como en el caso de Ψ . De esta forma, en un material de este tipo, cualquier ley constitutiva será invariante ante rotaciones alrededor del eje preferencial pero no ante el resto de transformaciones propias de un material isótropo, por lo que el grupo puntual de un material transversalmente isótropo es un subgrupo del grupo puntual isótropo. No obstante, tal y como postula el *principio de isotropía del espacio*, cualquier función tensorial anisótropa puede ser expresada como una función tensorial isótropa con ciertos tensores como variables adicionales, los cuales describen en carácter anisótropo del material. Es decir, la representación de la función transversalmente isótropa vendrá dada por la representación isótropa y un tensor (o tensores) conocido como *tensor estructural*, que describe la parte anisótropa de la función. Dentro de la categoría de materiales transversalmente isótropos, podemos encontrar con cinco subtipos, cada uno con sus tensores estructurales asociados:

- $TR_1 = C_\infty$: *simetría rotacional* [$\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}$].
- $TR_2 = C_{\infty v}$: *simetría rotacional con planos paralelos [al eje de alineación] de reflexión* [\mathbf{k}].
- $TR_3 = C_{\infty h}$: *simetría rotacional con planos normales [al eje de alineación] de reflexión* [$\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{k}$].

²⁸El caso más habitual de un material transversalmente isótropo se debe a una alineación preferente de las fibras de refuerzo del material, aunque otro caso podría ser, por ejemplo, un metal cuyas microfisuras son paralelas entre sí y alineadas en una dirección.¹⁵⁰

- $TR_4 = D_{\infty h}$: isotropía transversal completa $[\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}]$.
- $TR_5 = D_{\infty}$: hemitropía transversal $[\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}]$.

Los invariantes de estos tipos de simetrías transversalmente isótropas se muestran en las Tablas 2.3 y 2.4.

Tabla 2.3. Invariantes para los grupos de simetrías transversalmente isótropas TR_4 , TR_2 y TR_5 .¹⁵⁰

| Variables | $TR_4 = D_{\infty h}$ | $TR_2 = C_{\infty v}$ | $TR_5 = D_{\infty}$ |
|----------------|--|--|--|
| A | tr A , tr A ² , tr A ³ , k · Ak , k · A ² k | | |
| A, B | tr AB , tr A ² B , tr AB ² , k · ABk | | |
| W | tr W ² , k · W ² k | | |
| A, W | tr AW ² , tr A ² W ² , tr A ² W ² AW , k · AWk , k · A ² Wk , k · WAW ² k | | |
| W, V | tr WV , k · WVk , k · W ² Vk , k · WV ² k , | | |
| v | v · v , (v · k) ² | v · v , v · k | v · v , (v · k) ² |
| A, v | v · Av , v · A ² v , (k · v)(k · Av) | v · Av , k · Av , k · A ² v | v · Av , v · A ² v , [k , v , Ak], [k , v , A ² k] [v , Av , A ² v] |
| W, v | v · W ² v , (k · v)(k · Wv), (k · Wv)(k · W ² v) | v · Wv , v · W ² v | [k , v , Wk], [k , v , W ² k] (k · v)(k · Wv), v · ϵ [W] |
| v, u | v · u , (v · k)(u · k) | v · u , (v · k)(u · k) [k , v , u] | v · u , (v · k)(u · k) [k , v , u](k · v) [k , v , u](k · u) |
| A, v, u | v · Au , v · A ² u , v · (k ⊗ Ak - Ak ⊗ k) u | v · Au | v · Au , [v , u , Au] [v , u , Av] |
| W, v, u | v · Wu , v · W ² u , v · (k ⊗ Wk - Wk ⊗ k) u | v · Wu | v · Wu |
| v, u, w | — | — | [v , u , w] |

Tabla 2.4. Invariantes para los grupos de simetrías transversalmente isótropas TR_1 y TR_3 .¹⁵⁰

| Variables | $TR_3 = C_{\infty h}$ | $TR_1 = C_{\infty}$ |
|----------------|--|---|
| A | $\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3, \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{k}, [\mathbf{k}, \mathbf{A}\mathbf{k}, \mathbf{A}^2\mathbf{k}]$ | |
| A, B | $\text{tr } \mathbf{A}\mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \text{tr } \mathbf{A}\mathbf{B}^2, \text{tr } \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2, \mathbf{k} \cdot \epsilon[\mathbf{A}\mathbf{B}], \mathbf{k} \cdot \epsilon[\mathbf{A}^2\mathbf{B}], [\mathbf{k}, \mathbf{A}\mathbf{k}, \mathbf{B}\mathbf{k}]$ | |
| W | $\text{tr } \mathbf{W}^2, \mathbf{k} \cdot \epsilon[\mathbf{W}]$ | |
| A, W | $\text{tr } \mathbf{A}\mathbf{W}^2, \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}\mathbf{W}\mathbf{k}, \mathbf{k} \cdot \epsilon[\mathbf{A}\mathbf{W}], \mathbf{k} \cdot \epsilon[\mathbf{A}\mathbf{W}^2]$ | |
| W, V | $\text{tr } \mathbf{W}\mathbf{V}, \mathbf{k} \cdot \epsilon[\mathbf{W}\mathbf{V}]$ | |
| v | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})^2$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ |
| A, v | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^2\mathbf{v}, [\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}],$ $[\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{A}^2\mathbf{v}], (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})[\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{A}^2\mathbf{k}]$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v},$ $[\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{v}], [\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{k}]$ |
| W, v | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^2\mathbf{v}, [\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{W}\mathbf{v}], [\mathbf{k}, \mathbf{v}, \mathbf{W}^2\mathbf{v}],$ $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{W}\mathbf{v})$ | $\mathbf{v} \cdot \epsilon[\mathbf{W}], \mathbf{k} \cdot \mathbf{W}\mathbf{v}$ |
| u, v | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, [\mathbf{k}, \mathbf{u}, \mathbf{v}],$ | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ |
| A, v, u | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{A}\mathbf{v})$ | — |
| W, v, u | $\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}\mathbf{u}, \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{u} \times \mathbf{W}\mathbf{v})$ | — |

Materiales transversalmente isótropos

Como se ha mencionado anteriormente, en la costilla humana la dirección principal viene dada por la alineación de las osteonas, dirigidas a lo largo de su eje longitudinal. Esta orientación puede considerarse paralela al eje baricéntrico de la costilla dado que, a su vez, la alineación de las osteonas es mayoritariamente perpendicular a cada una de sus secciones transversales. Esta dirección de alineación principal, coincidente con el eje baricéntrico, puede describirse mediante un vector unitario $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ llamado *dirección preferencial* o *de las fibras* que, como su propio nombre indica, en cada punto representa la dirección en la que se alinean las osteonas, unidad básica en este estudio. Dada la curvatura de la costilla, el vector \mathbf{a} tendrá una dirección diferente según la posición sobre ella, siendo además, tangente al eje baricéntrico en cada punto (ver Figura 2.5).

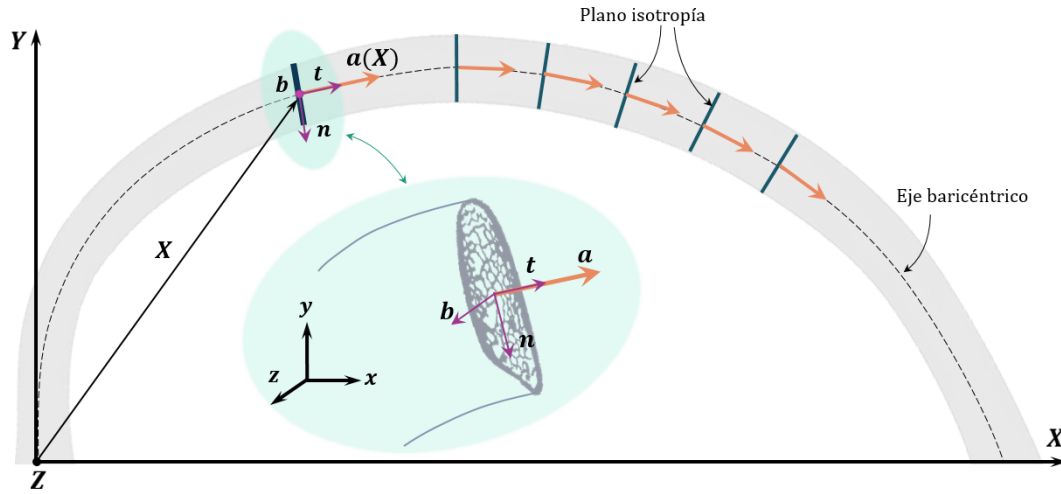


Figura 2.5. Representación del plano principal XY de la costilla humana y el eje baricéntrico (línea discontinua) a lo largo de la cual se alinean las osteonas. El plano de isotropía es perpendicular al eje baricéntrico y a lo largo de éste, se encuentra el vector dirección preferencial \mathbf{a} , cuya orientación va cambiando a lo largo de la costilla y siempre coincide con el vector tangente \mathbf{t} al eje baricéntrico, siendo \mathbf{n}, \mathbf{b} el triédro de Frenet-Serret, usado en 4.2.1.

Así, definido el vector unitario \mathbf{a} que describirá el carácter anisótropo de la costilla y eligiendo el tensor de deformaciones de Green-Lagrange \mathbf{E} como tensor variable, la SEDF Ψ de un material transversalmente isótropo, como es el caso de la costilla, tendrá la forma de $\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{a})$ y, para cumplir el Principio de invariancia bajo simetría tratado en la sección 2.2.3, esta función debe ser expresable en términos de los invariantes pertinentes. Los invariantes que satisfacen la condición de transversalidad isótropica son, además de los invariantes de materiales isótropos $\text{tr}(\mathbf{E})$, $\text{tr}(\mathbf{E}^2)$ y $\text{tr}(\mathbf{E}^3)$, otros dos invariantes de las Tablas 2.3 y 2.4 formados por una tensor de segundo orden y un vector;²⁹ estos son $\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}\mathbf{a}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}^2\mathbf{a}$. En resumen, la función energía de deformación Ψ más general para un material transversalmente isótropo es expresable mediante los tres invariantes isótropos y dos invariantes dependientes del tensor estructural \mathbf{a} . En particular, por conveniencia usaremos la forma dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \Psi_{el}(\mathbf{E}) = \Psi[I_1(\mathbf{E}), I_2(\mathbf{E}), I_3(\mathbf{E}), I_4(\mathbf{E}, \mathbf{a}), I_5(\mathbf{E}, \mathbf{a})] \quad (2.37)$$

²⁹Nótese que, aunque $I_3 = \det(\mathbf{E})$ no aparece en la Tabla 2.2, sí resulta ser una combinación lineal de invariantes de esa tabla: $\det(\mathbf{E}) = 1/6 ([\text{tr}(\mathbf{E})]^3 - 3\text{tr}(\mathbf{E})(\mathbf{E}^2) + 2\text{tr}(\mathbf{E}^3))$, ya que siempre hay varias posibilidades equivalentes para la base de invariantes. Igualmente, I_2 es una combinación lineal de invariantes que sí aparecen en las tablas de invariantes.

donde los cinco invariantes se han tomado de la forma:

$$I_1(\mathbf{E}) = \text{tr}(\mathbf{E}) \quad (2.38a)$$

$$I_2(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}[(\text{tr}\mathbf{E})^2 - \text{tr}(\mathbf{E}^2)] \quad (2.38b)$$

$$I_3(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{E}) \quad (2.38c)$$

$$I_4(\mathbf{E}, \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}\mathbf{a} \quad (2.39a)$$

$$I_5(\mathbf{E}, \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}^2\mathbf{a} \quad (2.39b)$$

Derivando la función energía de deformación $\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{a})$ representada con los cinco invariantes siguiendo la expresión (2.29b), se obtiene la ecuación constitutiva de un material transversalmente isótropo que relaciona tensión y deformación:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{E} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{E}^{-1} + \dots \\ & \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{E}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{E} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde \mathbf{E} es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange y \mathbf{a} el tensor estructural que define la dirección de alineación de las fibras [osteonas].

2.2.4 Modelos constitutivos

El desarrollo de modelos constitutivos capaces de describir el comportamiento del tejido óseo tiene una gran importancia práctica para diseñar sistemas que prevengan daños en hueso, por ejemplo, en la industria automotriz. Por ello, existen diversos estudios en la bibliografía que se han centrado en el desarrollo de modelos y relaciones constitutivas para el tejido óseo u otros materiales biológicos. Los modelos que aparecen en la literatura científica pueden separarse en dos categorías. El primero de estos grandes grupos es el de *modelos lineales*, los cuales parten de la *mecánica de la fractura lineal elástica* (LEFM), usando pocas constantes materiales como el módulo elástico, la energía de fractura o la tenacidad. Estos modelos son aplicables cuando la grieta se propaga suficientemente rápido o cuando el material es suficientemente homogéneo. Sin embargo, los modelos lineales no recogen el comportamiento óseo de forma adecuada cuando las fracturas son lentas o producidas por eventos aleatorios intermitentes o en regímenes de fractura dinámica.¹⁷ De hecho, algunas investigaciones han concluido que el uso de este tipo de modelos puede inducir hasta un 40 % de error en la resistencia

predicha, dado que no consideran el comportamiento no elástico del hueso. De hecho, en estudios como el de Zysset *et al.* (1996)¹⁵³ se asume que la “fluencia” del hueso está directamente relacionada con la acumulación de daño. Por ello, un modelo general de comportamiento mecánico del tejido óseo precisa de un modelo no lineal para evaluar la fractura. Así, otra vía de estudio utilizada en este ámbito es la *mecánica de la fractura elastoplástica* (EPFM) para estudiar el daño del tejido óseo.¹⁴⁷

Por otro lado, encontramos los *modelos no lineales* que serán más convenientes en este estudio; de hecho, esta sección se centra en la descripción de algunos de los modelos no lineales de la literatura, dado que resultan más precisos para describir el comportamiento del tejido óseo y son la base del modelo aquí desarrollado y pueden subdividirse en diferentes categorías que serán tratadas en esta sección. La pérdida del comportamiento lineal de la curva tensión-deformación del hueso se produce principalmente por la acumulación de daño en forma de generación y propagación de microfisuras (entre otros), de forma no reversible (excepto por la remodelación del tejido óseo en fracturas *in vivo*) y la fluencia pasaría a ser el punto en el cual se inicia el daño. De esta forma, de ahora en adelante, la región no elástica del comportamiento óseo se definirá como *anelástica* o *post-elástica* (como hace referencia el estudio de Natali *et al.* (2008)⁹⁷),³⁰ entendiéndose por ésta al inicio de una deformación permanente. Así mismo, el modelo desarrollado en esta investigación será un *modelo constitutivo con disipación*, donde toda la deformación no elástica se verá reflejada en los términos disipativos que hacen que la energía mecánica no se conserve y, los estudios que a continuación se describen, serán reformulados reemplazando el concepto de plasticidad por el de no elasticidad (*ne*) o anelasticidad.⁹

En la siguiente sección se tratará inicialmente con los modelos viscoelásticos, en los que se considera que el material tiene una “memoria desvaneciente” y además, el comportamiento óseo tiene relación con la velocidad de sollicitación. Posteriormente, se describirán los modelos generales no elásticos, en los cuales se considera que el tejido tiene memoria no desvaneciente y, por tanto, requieren de variables internas adicionales para representar los efectos del historial de carga por el que material ha pasado previamente.

³⁰En esta investigación, el concepto *plasticidad* no será utilizado, pues está comúnmente asociado a una deformación permanente relacionada con el movimiento de dislocaciones en los materiales metálicos.

Modelos viscoelásticos con memoria desvaneciente

La contribución viscoelástica en el comportamiento del tejido óseo ha sido estudiada desde hace años en la literatura. Investigadores como McElhaney (1966)⁸⁸ realizaron ensayos que para analizar la influencia de la velocidad de la sollicitación en la curva tensión-deformación del hueso. Este efecto viscoelástico está relacionado con la presencia de colágeno en el tejido y por ello, diversas investigaciones han considerado el hueso como un material viscoelástico desde entonces.

Los materiales viscoelásticos son *materiales con memoria*, es decir, donde el estado actual depende del estado en instantes anteriores, hecho que se ve reflejado en los modelos viscoelásticos. Sin embargo, hay ciertas simplificaciones que pueden hacerse y una de las más importantes es considerar que la mayoría de materiales son *materiales simples*, esto es, materiales en los que la tensión en un punto depende de la historia descrita por el gradiente de deformación espacial de primer orden de un punto cercano vecino y no de mayor orden.¹⁰⁰ Ello implica que pueda suponerse que los materiales viscoelásticos sean materiales simples con *pérdida de memoria*, es decir, que el estado actual de deformación tiene más influencia de la historia anterior más próxima que de la historia más antigua.³⁹

Los materiales simples con desvanecimiento de memoria suelen representarse con leyes constitutivas no lineales y fueron inicialmente presentados en los estudios de Green-Rivlin y de Coleman-Noll y usados en el modelo de Wang y en el modelo de Pipkin y Pipkin-Rogers (puede consultarse Drapaca *et al.*, 2007³⁹). Uno de los modelos más generales presentados en la literatura es el *modelo de Fung* o *modelo viscoelástico cuasi-lineal* (QLVE), uno de los primeros modelos no lineales de viscoelasticidad, ampliamente estudiado por diferentes investigadores. El modelo QLVE parte de la asunción de que un material viscoelástico es la suma de las contribuciones de un material elástico donde la tensión depende únicamente de la deformación, y de un material viscoso en el cual la tensión es función principalmente de la velocidad de deformación y el modelo constitutivo toma la forma de:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}^e(\mathbf{E}(t)) + \int_0^t \mathbf{S}^v(\mathbf{E}(s)) \frac{\partial K(t-s)}{\partial(t-s)} ds \quad (2.41)$$

Véase entonces la relajación es entonces función del producto de la contribución de ambos tipos de comportamiento³⁹ y que en los modelos para materiales vis-

coelásticos se plantea que la tensión en un tiempo t viene dada por la respuesta elástica $\mathbf{S}^e(\mathbf{E}(t))$ del material, reducida por un factor dependiente de la historia anterior (dado que la integral es negativa). El efecto de la historia se caracteriza por la función K , también llamada *función de relajación* que en su forma compacta puede expresarse como:

$$K(t) = \int_0^t \eta(s) dg_t(s) \quad (2.42)$$

La función K mide la cantidad de relajación de la tensión, que es una disminución de la misma, donde la velocidad de relajación es $\eta(s)$ y $g_t(s)$ es el *reloj de relajación* que relaciona los tiempos de relajación macroscópica local t y de relajación microscópica molecular s . Este modelo permite representar la dependencia de la historia de deformación, así como la pérdida de memoria que caracteriza a un modelo viscoelástico típico.

En un estudio posterior de Pawlikowski *et al.* (2012)¹⁰⁸ se utilizaron muestras bovinas de hueso para validar los resultados de su modelo. La función densidad de energía de deformación se divide en elástica y viscoelástica de la forma $\Psi = \Psi^e + \Psi^v$, donde la parte elástica depende de los invariantes I_1 a I_5 y la viscoelástica de los anteriores junto con los invariantes J_1 a J_{12} . Este modelo ha sido restringido a velocidades de deformación bajas ($0,6 - 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$) y la función energía de deformación toma la forma de:

$$\Psi = c_1(I_1 - 3)^3 + c_2(I_5 - 1)(e^{c_2(I_5 - 1)} - 1) + \mu_1 J_2(I_1 - 3) + \mu_2 J_5 \ln(1 + \mu_3(I_5 - 1)^2) \quad (2.43)$$

siendo c_i constantes elásticas materiales y μ_i constantes viscosas, todas ellas a ser identificadas en ensayos que fueron realizados con fémur bovino. Tras los ajustes, el modelo mostró representar un buen comportamiento hasta una compresión definida por $\lambda = 0,97$, aproximadamente a los 130 MPa, pero no pudo ser aplicado a ensayos de tracción.

A pesar de que la aplicación de los modelos viscoelásticos (o con dependencia de la velocidad de sollicitación $\dot{\varepsilon}$) es amplia y se ajusta al comportamiento material en ensayos con variación de la velocidad de deformación, suelen precisar de muchos parámetros a determinar a partir de ensayos experimentales, lo cual puede suponer un problema en la práctica. Además, los efectos viscoelásticos dejan de ser relevantes cuando la velocidad de deformación es suficientemente baja (como es el caso que ocupa este estudio).

De hecho, desde hace años los estudios realizados en hueso²² han observado que la microfisuración y la disipación toman un papel mucho más relevante en el comportamiento mecánico del hueso y la no linealidad del comportamiento óseo viene dada por otros factores, como la acumulación de daño. Esto ha llevado a otros investigadores a analizar el comportamiento del hueso desde el punto de vista de modelos de daño o modelos mixtos en los que se introduce la contribución de la velocidad de sollicitación y la acumulación de daño que conlleva la reducción de las propiedades mecánicas.

Modelos viscoelásticos con memoria no desvaneciente

Los modelos con memoria no desvaneciente en general son modelos que presentan algún tipo de deformación irreversible no recuperable. Muchos de ellos no dependen de $\dot{\epsilon}$ (pero pueden combinarse con efectos viscoelásticos dando lugar a un modelo mixto donde hay un efecto desvaneciente y otro no desvaneciente). Estos modelos anelásticos tratan de reflejar el comportamiento no lineal del tejido óseo mediante un parámetro que trata de describir el *endurecimiento*, el *daño* u otra variable interna. Típicamente, en esos modelos existe una parte elástica junto con la contribución de una parte viscosa y una anelástica que representa el daño.

En el contexto del desarrollo de modelos viscoelásticos y viscoplásticos son particularmente frecuentes los modelos mecanísticos (entendiendo por éstos los modelos que recurren al uso de muelles elásticos, amortiguadores viscoelásticos y cojinetes plásticos) y han sido ampliamente utilizados en el desarrollo de modelos constitutivos de hueso. Para ello, muchos modelos dividen la deformación total en deformaciones elásticas y anelásticas y/o viscoelásticas.⁴⁷

Uno de estos casos es el mostrado en el estudio de Frondrk *et al.* (1999),⁴² en el que se desarrolló una *relación constitutiva* para reproducir el comportamiento del hueso cortical bajo una sollicitación de tracción mediante una descripción reológica del comportamiento elástico y viscoelástico usando una ecuación mecanística y la tensión toma la forma:

$$\sigma(\epsilon, \alpha_1, \alpha_2) = E_1\epsilon + E_2(\epsilon - \alpha_1) \quad (2.44)$$

donde α_1 representa la energía interna relacionada con la viscosidad y el daño se describe mediante un parámetro $D \in [0, 1]$ a partir de $\alpha_2 = 1 - D$, que reduce la rigidez a medida que el daño se acumula. Esta relación fue capaz de representar

el comportamiento no lineal durante un ensayo de tracción. Sin embargo, cabe notar el uso de la expresión *relación* o *ecuación* constitutiva, pues a pesar de ser denominado *modelo* en el documento citado, es una relación constitutiva, es decir, una expresión particular y no generalizada a un estado tridimensional. Esto es importante, pues las relaciones constitutivas no son aplicables a la posterior simulación de elementos finitos (FEM), a diferencia de los modelos constitutivos, como el que se presenta en esta investigación.

Un ejemplo de este tipo de modelos es el planteado en estudio de Johnson *et al.* (2010),⁶⁵ el cual parte de una relación mecánica viscoelástica del tipo:

$$\sigma(t) = E_0 \dot{\varepsilon}^{ve} t + \eta_1 \dot{\varepsilon}^{ve} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_1 t}{\eta_1}\right) \right) + \eta_2 \dot{\varepsilon}^{ve} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_2 t}{\eta_2}\right) \right) \quad (2.45)$$

donde se han utilizado dos elementos viscosos de parámetros η_1 y η_2 y se ha incorporado una modificación que incluye el aspecto no elástico, donde la velocidad de deformación total $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{ve} + \dot{\varepsilon}^{vp}$ y la parte viscoplástica se relaciona con la ley de Ramberg Osgood:

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \frac{\sigma}{E} \left(\frac{E}{S_0} \right)^m \quad (2.46)$$

Esta relación, a pesar de ser válida en un amplio rango de velocidades de deformación, no incorpora la anisotropía y el fallo del tejido y la variación de los parámetros η_i parece darse por la aparición de dos mecanismos viscosos distintos. Siguiendo la línea de Johnson, Atsumi *et al.* (2017)¹⁰ proponen un *modelo para huesos largos*, que considera el hueso como un material ortotrópico y la deformación como una contribución de viscoelasticidad y viscoplasticidad. La función energía de deformación es la suma de ambas contribuciones:

$$\Psi = \Psi^{ve}(\boldsymbol{\varepsilon}^{ve}, \mathbf{D}, \mathbf{A}_0, \mathbf{G}_0, \gamma_1 \dots \gamma_n) + \Psi^{vp}(\mathbf{D}, r) \quad (2.47)$$

y el daño varía en cada una de las direcciones (longitudinal, circunferencial y radial), tal que $\mathbf{D} = D_L \mathbf{A}_0 + D_C \mathbf{G}_0 + D_R (\mathbf{I} - \mathbf{A}_0 + \mathbf{G}_0)$. Este modelo, como gran parte de los anteriores, precisa de propiedades mecánicas (E, ν_{ij}, G_{ij}) para poder ajustar los parámetros. Concretamente, el modelo tiene 11 parámetros que describen la evolución del daño. Su validez ha sido probada con datos anteriores de ensayos publicados, sin embargo en las figuras presentadas se observa que a pesar del número de parámetros, no es capaz de ajustar en todos los casos adecuadamente la región no elástica.

Una división de la deformación un poco más específica es el punto de partida del modelo de Halldin *et al.* (2014),⁵⁴ donde en su estudio la deformación es una suma de un parte elástica, una viscosa, una anelástica asociada a un endurecimiento y una de remodelización, en un modelo que muestra ser capaz de predecir el comportamiento mecánico del hueso mediante un considerable número de parámetros relacionados con la rigidez de los elementos y su viscosidad.

Modelos usuales con memoria no desvaneciente

Ya en 1943, para metales, se presentó la relación plástica de *Ramberg-Osgood*, una ley potencial que introduce los parámetros n y k , de la forma:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + k \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n \quad (2.48)$$

Esta ecuación describe para el proceso de carga monótona:³¹ la deformación total observada como la suma de la deformación elástica del primer término (correspondiente a la *ley de Hooke*) y la deformación anelástica irreversible del segundo término. En este modelo, tanto k como n serían parámetros dependientes del material que deben reflejar el comportamiento no lineal.

Esta relación fue validada por Ott *et al.* (2010)¹⁰⁵ al aplicarla en datos experimentales de tracción de hueso femoral humano de estudios anteriormente publicados. Se concluyó que, a pesar de ser una relación sencilla e inicialmente pensada para metales, su curva era tangente a los valores experimentales ajustados, observando un decrecimiento de k con la edad y un aumento de n , a pesar de no ser totalmente significativo. Así mismo, no se encontraron influencias de la microestructura o la histología.

Otro modelo ampliamente usado en la literatura es el *modelo de daño de Johnson-Holmquist*,⁶⁴ desarrollado para reproducir el comportamiento en materiales frágiles, por lo que no es extraño que parcialmente se adapte bien para describir el comportamiento del hueso. El modelo asume una parte elástica lineal inicial y, en el caso de un ensayo uniaxial de tracción, la tensión última o de fractura viene dada por:

³¹Cuando se consideran ciclos de carga el comportamiento es más complejo y aparece un proceso disipativo de histéresis mecánica.

$$\sigma_{\text{fracture}}^* = B(\sigma^*)^m \left[1 + C \ln \left(\frac{d\varepsilon_p}{dt} \right) \right] \quad (2.49)$$

donde $\sigma^* = \sigma/\sigma_y$ es la tensión reducida, σ_y es la tensión de límite elástico y ε_p la deformación inelástica. Entre el final de la parte elástica y antes de la tensión de fallo la tensión se interpola linealmente:

$$\sigma^* = \sigma_0^* - D (\sigma_0^* - \sigma_{\text{frac}}^*) \quad (2.50)$$

D es una variable adicional que representa el daño acumulado que aumenta de acuerdo con la ecuación:

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{\epsilon_f} \frac{d\varepsilon_p}{dt} \quad (2.51)$$

siendo ϵ_f una función de σ^* . Este modelo ha sido muy usado obteniendo buenos resultados e incluso ha mostrado ser capaz de explicar sencillamente por qué clavículas sujetas a esfuerzos dinámicos rompen a cargas mayores que en sollicitaciones cuasi-estáticas.¹²⁵

En 1996, se publicó el *modelo de Frémond-Nedjar*,⁴⁴ desarrollado para estructuras de cemento que introduce el daño por medio de un parámetro $\beta \in [0, 1]$. Este modelo fue adaptado posteriormente en la investigación de Baldonado *et al.* (2019)¹² para aplicarlo en hueso, teniendo en cuenta la capacidad de remodelación del tejido óseo mediante la eliminación de la condición $\dot{\beta} < 0$, es decir, considerando que el daño no necesariamente debe aumentar. El modelo depende de tres parámetros λ_i , y la función *fuentes de daño* (Φ) se representa:

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \beta) = \lambda_d \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right) - \lambda_u \Psi_{q^*}((\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))) + \lambda_w \quad (2.52)$$

donde $\Psi_{q^*} = \Psi_{q^*}(\boldsymbol{\tau})$. Este modelo presenta la gran ventaja de contener pocos parámetros constitutivos. Sin embargo, a pesar de representar adecuadamente la zona lineal de la curva tensión-deformación de ensayos de tracción simulados mediante elementos finitos y datos experimentales anteriores, mostró un peor ajuste de la zona curva que presenta el régimen no elástico.

Si bien el uso de modelos no lineales como los anteriores muestran describir parcialmente o adecuadamente el comportamiento del hueso, estos en muchas ocasiones fueron deducidos en contextos especiales. Por ejemplo, los modelos

elásticos responden a modelos que tratan de explicar el desplazamiento de dislocaciones dentro de la red cristalina de un metal. Por eso, traspasar la forma de las ecuaciones a hueso, aun cuando la estructura interna es diferente puede no tener base teórica fundamentada, a pesar de que para ciertos ensayos, bajo sollicitaciones específicas, las curvas experimentales fenomenológicamente sean similares a las predichas por el modelo.

El desarrollo de un modelo constitutivo cuyos parámetros representantes del daño estén basados en consideraciones físicas generales que incluyen la microestructura, puede explicar, o cuanto menos representar los mecanismos que gobiernan la aparición de procesos irreversibles vinculados con la zona no elástica del comportamiento. Además, en este contexto, la obtención de estos parámetros a su vez podría permitir un análisis de la influencia de ciertas variables, como la edad o características microestructurales, en la fisuración y acumulación de daño en el material.

Otros modelos con memoria no desvaneciente

A parte de los modelos basados en plasticidad o daño, existen algunos otros modelos en la literatura que plantean relaciones constitutivas a partir de suposiciones diferentes. Por ejemplo, algunos se han planteado el efecto de la propagación y acumulación de microgrietas u otros mecanismos.

Una idea de ese tipo es la que se presenta en el trabajo de Luo *et al.* (2010),⁸⁴ que propone una relación constitutiva en la que la deformación anelástica se define:

$$\varepsilon_{ne} = kD^n, \quad D = 1 - \frac{E_i}{E_0} \quad (2.53)$$

siendo k y n las constantes materiales, donde el daño D se define como una relación entre los módulos de elasticidad inicial y actual, de la misma forma que han hecho otros estudios como los de Zioupos *et al.* (1996)¹⁵² y Pattin *et al.* (1996)¹⁰⁷ y se concluye que un modelo con una decadencia exponencial puede describir adecuadamente la degradación del módulo elástico como función de la deformación aplicada.

Una degradación en esta línea fue utilizada en el relación constitutiva de Ng *et al.* (2017)⁹⁹ donde la rigidez disminuye en la zona no elástica según un parámetro de daño, de la forma $\bar{E} = (1 - D)E_0$ y además, se introdujo un parámetro de endurecimiento k distinto para tracción y compresión. En esta relación se precisan

más propiedades materiales que los anteriores. Se realizaron ensayos de hueso bovino femoral a compresión y simulaciones en elementos finitos, prediciendo de forma adecuada la respuesta fuerza-desplazamiento. Nótese que tanto esta expresión como la anterior son relaciones constitutivas y no modelos constitutivos, por tanto, no son relaciones generalizadas a un estado tridimensional.

Otros modelos de hueso se han centrado en tratar de describir el daño mediante parámetros que están asociados a la presencia de fisuras del material. Estos modelos buscan representar el comportamiento no elástico del hueso y las deformaciones se dividen en su parte elástica y anelástica, tal que $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{ne}$.

Por ejemplo, en el modelo de García *et al.* (2009) se considera esta separación de la deformación y el comportamiento del tejido óseo se divide en en los regímenes de elasticidad, daño (generación y apertura de microfisuras) y anelasticidad (fricción y cierre de microfisuras, sin aumento de daño, pero con incremento de tensiones residuales). En su modelo tratan de describir el comportamiento del hueso cortical a nivel macroscópico para cargas cíclicas de tracción y compresión mediante un modelo mecanístico independiente de la velocidad de deformación. La función densidad energía de deformación Ψ de la cual se derivan las leyes constitutivas toma la forma de:

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^{ne}, D) = \begin{cases} \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{ne})_+ : \mathbb{S}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{ne}) + \dots \\ \dots + \frac{1-D}{2D} : \mathbf{E}^{ne} : \mathbb{S}\mathbf{E}^{ne} + I_{[0,1]}(D) & \text{si } D > 0, \\ \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{S}\mathbf{E} + I_{\{0\}}(\varepsilon^{ne}) & \text{si } D = 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

siendo \mathbb{S} la rigidez. Este modelo describe adecuadamente los tres regímenes mencionados y ha sido evaluado con simulación de ensayos de compresión de vértebra humana y hueso cortical y trabecular con distintas porosidades. No obstante, el hecho de usar una variable escalar D para representar el daño hace que solo sea aplicable cargas y descargas proporcionales. Su siguiente relación constitutiva unidimensional⁴⁸ trató de solventar este inconveniente, introduciendo dos parámetros de daño D_+ y D_- para tracción y compresión respectivamente, presentando una ecuación particularizada del modelo anterior pero donde el daño total es la suma de ambos $D = D_+ + D_-$. La validación con datos de ensayos cíclicos en hueso cortical bovino, confirman la presencia de los tres regímenes citados en el artículo anterior, pero muestra no predecir la pérdida de rigidez de

la zona anelástica cuando se cambia de tracción a compresión. La buena representación de este modelo podría indicar que la deformación no elástica cuya contribución se vincula al daño en la muestra parece adecuada para describir la pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación del hueso, sin la necesidad de recurrir a parámetros o modificaciones asociadas a la viscoelasticidad, al menos a velocidades bajas de sollicitación.

A nivel mesoescópico, la línea de cemento ha sido estudiada en modelos de simulación en los que se han recreado estructuras donde las grietas crecen de derecha a izquierda, propagándose principalmente por esta interfase.¹⁴³ El estudio de Moreo *et al.* (2007)⁹⁴ realiza un modelo para la línea de cemento, describiendo su comportamiento como resultado de la viscoplasticidad con endurecimiento isotrópico junto con un modelo de daño. Observan que el fallo completo de la interfase (línea de cemento) bajo cargas cíclicas de cizalla pura se da de forma inesperada y sin pérdida significativa de rigidez (lo cual representaría el daño) pero bajo carga de tracción hay una acumulación progresiva de daño, reduciendo la rigidez un 25 % progresivamente (dependiendo del nivel de tensión) antes del colapso. Esto indica que la pérdida de rigidez no es algo que nos indique el nivel de daño necesariamente, sino que hay que tener en cuenta las deformaciones no elásticas. También constataron que las deformaciones permanentes debidas al deslizamiento entre línea de cemento y hueso están dominadas por las cargas cíclicas, correspondientes al 80 % de la deformación total acumulada.

Modelos con consideraciones termodinámicas

Como se ha mencionado en el capítulo introductorio, un modelo constitutivo, más allá de representar adecuadamente el comportamiento mecánico del material, debe ser termodinámicamente consistente. De esta forma, algunos estudios han desarrollado sus modelos bajo ciertas consideraciones termodinámicas.

El estudio de Natali *et al.* (2008)⁹⁷ desarrolla un modelo que considera el comportamiento elástico y anelástico, asumiendo una ley de endurecimiento lineal:

$$\varepsilon_y(\lambda) = \varepsilon_y^I + \beta\lambda \quad (2.55)$$

donde ε_y^I es la deformación de fluencia inicial y β el parámetro de endurecimiento. Considerando una sollicitación de tracción uniaxial y una velocidad de deformación constante, tal que $\varepsilon = kt$ (siendo k la velocidad de deformación), la tensión

en la dirección normal se expresa:

$$\sigma(\varepsilon, k) = \gamma^\infty E\varepsilon + \sum^n \gamma^i E k \tau^i \left\{ 1 - e^{(-\varepsilon/k\tau^i)} \right\} \quad (2.56)$$

siendo $\gamma^\infty = 1 - \sum^n \gamma^i > 0$ la rigidez relativa de equilibrio termodinámico y γ el flujo anelástico. Este modelo es una combinación determinista y estocástica (esta última necesaria cuando un modelo muestra una considerable no linealidad) y muestra buenos resultados. El hecho de que un modelo parcialmente estocástico represente adecuadamente el comportamiento mecánico del hueso, apunta al hecho de que la acumulación de daño puede venir dada por procesos aleatorios, como es el caso de la fisuración.

El modelo publicado por An *et al.* (2016)¹¹ amplía la descripción del comportamiento anelástico del hueso con un modelo de simple del tipo:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}^e} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}^e} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^e : \mathbb{C} : \mathbf{E}^e \right), \quad \mathbb{C} = 2G\mathbb{I} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \quad (2.57)$$

siendo G y K son los módulos de cizalla y volumétrico respectivamente, \mathbb{C} el tensor de rigidez de cuarto orden isótropo, \mathbb{I} el tensor identidad de cuarto orden, \mathbf{I} el tensor identidad y $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}^{eT} (J^e \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{F}^{e-T}$. Este modelo incluye una igualdad que relaciona la velocidad de deformación como una suma de términos que dependen de las velocidades de cizalla y de dilatación, donde la velocidad de cizalla a su vez es función de los coeficientes de fricción y cohesión, todos ellos a ser determinados. Se constata que el modelo muestra un buen ajuste con la simulación numérica a partir de datos de hueso cortical bovino.

Schwiedrzik & Zysset (2013)¹²⁰ desarrollan un modelo para describir las curvas fuerza desplazamiento del hueso a distintas escalas, de la microestructural a la ultraestructural, mediante propiedades mecánicas y simulación y a partir de los procesos termodinámicos irreversibles. Combina una aproximación micromecánica para describir las propiedades elásticas junto con una ley constitutiva que describe el daño y la viscoplasticidad. Mediante un modelo mecanístico, describen el daño como $D(\kappa) = 1 - \exp(-k_p \kappa)$, siendo κ la deformación anelástica acumulada y $k_p = 10, 5$, dependiendo así el daño de la historia de la deformación permanente. Su modelo parte de una función energía de deformación:

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p, \kappa) = \frac{1}{2} (1 - D(\kappa)) (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) : \mathbb{S} (\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \quad (2.58)$$

donde \mathbb{S} es el tensor de rigidez, κ la deformación anelástica acumulada y \mathbf{E} la deformación total y la tensión es:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = (1 - D(\kappa))\mathbb{S}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^p) \quad (2.59)$$

Capaz de ajustar el comportamiento del hueso a partir de tres propiedades materiales independientes.

Resumen sobre los modelos propuestos

Como puede observarse, son diversos los modelos que pueden encontrarse en la literatura, con consideraciones y puntos de partida diferentes. El desarrollo de modelos constitutivos en ocasiones, es más sencillo si se tienen en cuenta ciertas simplificaciones; algunas de ellas se han expuesto en la descripción de los modelos anteriores, como por ejemplo la del material simple. En este contexto, Noll (1958)¹⁰⁰ postula que la mayoría de materiales son simples, en el sentido de que, como se ha mencionado anteriormente, la tensión en un punto material depende de la historia descrita por el gradiente de deformación espacial de primer orden de un punto cercano vecino, y no de mayor orden. Demostró así que la ecuación constitutiva de un material simple cumple el criterio de objetividad si la función f que relaciona tensión con el gradiente de deformación, es independiente del tiempo, tal que $\boldsymbol{\sigma} = f(F, X) = f(F(X, t), X)$ y no tiene memoria en cuanto a deformaciones pasadas. Si el material es endurecible, como algunos modelos asumen, entonces no se cumplirían los criterios de objetividad. Otra simplificación aplicable parte de considerar que el material no se envejece (*not-aging*) y por tanto pueden desprejarse los cambios permanentes en el material. Además, puede suponerse que el material es incompresible, es decir, que solo sufre deformaciones isocóricas donde $J-1 = \det(\mathbf{F})-1 = 0$, rígido (no deformable) o inextensible; dichas restricciones se consideran como relativas al material.^{39,140} Otras consideraciones y restricciones podrían aplicarse en los aspectos termodinámicos.

Observando los modelos descritos anteriormente, los modelos con memoria no desvaneciente han mostrado representar adecuadamente el comportamiento mecánico del hueso, aun no considerando efectos viscoelásticos que parecen quedar en un segundo plano, cuanto menos a bajas velocidades. La contribución viscoelástica podría ser importante en sollicitaciones dinámicas junto con la acumu-

lación de daño, pero la deformación no elástica también está presente a bajas velocidades de deformación (donde la viscoelasticidad no tendría un papel fundamental). Este comportamiento no elástico a velocidades cuasi-estáticas debe estar necesariamente producido por otros efectos que tendrían una mayor influencia una vez excedido el régimen lineal, como es la propagación de fisuras en el tejido óseo hasta la fractura macroscópica y, los modelos de daño, parecen apuntar en esta dirección. Además, modelos constitutivos de daño con parámetros constitutivos que surgen de consideraciones físicas o termodinámicas podrían permitir un análisis de la influencia de ciertas variables como la edad, la densidad o la porosidad en las variaciones observadas en el régimen no elástico de distintas muestras. De esta forma, es importante que un modelo constitutivo, aparte de representar adecuadamente el comportamiento mecánico en diferentes sollicitaciones, sea termodinámicamente consistente, reflejando el incremento de desorden microestructural cuando se producen cambios irreversibles durante la acumulación de daño.

2.3 Ecuaciones de balance y leyes termodinámicas

Como se ha mencionado en la sección anterior, si bien un modelo constitutivo debe describir adecuadamente el comportamiento mecánico del material, también debe ser consistente termodinámicamente. En este sentido, hay diferentes principios básicos de la termodinámica que deben satisfacerse, justificando así la validez del modelo.

Un sólido elástico es un sistema termodinámico que satisface la primera y segunda ley de la termodinámica y que, además, debido a su microestructura interna, puede ser tratado por medio de la mecánica estadística (que se describirá en la sección 2.4). Sin embargo, a diferencia de la aplicación usual de las leyes termodinámicas en sistemas cuyos procesos difusivos vienen dados por variaciones de temperatura, los cambios irreversibles que se producen en la microestructura del hueso en el modelo que se propone, estarán relacionados con la fisuración y acumulación del daño en el material. De esta forma, se introduce el parámetro β como un análogo a la temperatura ($\beta = 1/\Theta$, donde Θ es la temperatura absoluta), descrito como el *parámetro de atemperación del desorden*, que reflejará la pérdida de linealidad del comportamiento mecánico del hueso cuando se inicia la acumulación de daño.

En esta sección se plantean los principios básicos de la termodinámica necesarios para entender el contexto del modelo constitutivo que se presenta. Estos principios serán particularizados para la costilla humana objeto de estudio, que será considerada como un sistema cerrado en el cual la masa se mantiene constante a lo largo de la sollicitación. Los efectos térmicos serán considerados negligibles y la irreversibilidad del proceso de deformación se representará mediante la entropía, que conecta los balances presentados en esta sección con la mecánica estadística. Un desarrollo más exhaustivo de los principios y leyes que se exponen puede verse en la sección A.3.3 del apéndice de forma general, con una posterior particularización en esta investigación.

2.3.1 Conservación de masa

Dado un sistema cerrado, considérese una porción del mismo contenida en una región $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$, situado en el interior del material sólido y de masa $m = \text{cte}$. Se define $\phi_t : \mathcal{U} \mapsto \phi_t(\mathcal{U})$ a la aplicación de dicha región en su región deformada en un instante t y $\partial\mathcal{U}$ el contorno o superficie exterior del dominio $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$.³² Defínase también un elemento diferencial de masa $dm(\mathbf{X})$ en la región \mathcal{U} en la configuración de referencia y $dm(\mathbf{x}, t)$ el elemento en la configuración deformada dada por la aplicación $\phi_t(\mathcal{U})$. Siendo la masa es constante, se define:

$$dm(\mathbf{X}) = dm(\mathbf{x}, t) > 0 \quad (2.60)$$

Esta expresión se conoce como la ley de conservación de masa, que puede darse, alternativamente, en base a la densidad. Sea entonces $\rho_0(\mathbf{X}) > 0$ y $\rho(\mathbf{x}, t) > 0$ la densidad en las configuraciones material y espacial respectivamente, la masa puede reescribirse en función de la densidad como $dm(\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X})dV$ y $dm(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t)dv$ y sustituyendo entonces en la expresión anterior:

$$\rho_0(\mathbf{X})dV = \rho(\mathbf{x}, t)dv > 0 \quad (2.61a)$$

$$m = \int_{\mathcal{U}} \rho_0(\mathbf{X})dV = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t)dv = \text{cte} > 0 \quad (2.61b)$$

³²En un sistema cerrado, el volumen no tiene por qué ser constante y puede haber un intercambio de energía en forma de calor o trabajo.

Obteniendo así la conservación de masa en términos de densidad, en su forma local (2.61a) y global (2.61b). Esta relación implica que la derivada temporal de la masa \dot{m} a su vez es nula.

Si además la densidad es continua, mediante un cambio de coordenadas $dv = J(\mathbf{X}, t)dV$ y $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ y considerando un volumen arbitrario \mathcal{U} , de la expresión (2.61b) se deduce que:³³

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\phi(\mathbf{X}, t), t)J(\mathbf{X}, t) \quad (2.62)$$

Así mismo, siendo ρ_0 es independiente del tiempo, la velocidad de cambio de la densidad se escribe:

$$\frac{\partial \rho_0(\mathbf{X})}{\partial t} = \dot{\rho}_0(\mathbf{X}) = 0, \quad \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad}\rho \cdot \mathbf{v} \quad (2.63)$$

2.3.2 Ecuación de balance de momentos

Los principios de balance de momentos son generalizaciones de la primera y segunda ley de Newton en el contexto de la mecánica del continuo, debido a las fuerzas externas. Sea un cuerpo continuo sometido a un conjunto de fuerzas con una densidad $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ y considérese un campo de velocidades $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$; los balances de los momentos lineal $\mathbf{L}(t)$ y angular $\mathbf{J}(t)$ se definen en términos generales como:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \mathbf{v} \, dv = \mathbf{F}(t) \quad (2.64a)$$

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, dv = \mathbf{M}(t) \quad (2.64b)$$

donde $\mathbf{F}(t)$ es la fuerza resultante y $\mathbf{M}(t)$ el momento resultante alrededor de un punto \mathbf{x} . Tanto la fuerza como el momento resultante vienen dados por el campo de tensiones $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ por unidad de área $\partial\phi_t(\mathcal{U})$ (conocido como el campo de tensiones de Cauchy) y por las fuerzas $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ por unidad de

³³Aquí $J(\mathbf{X}, t)$ es el determinante jacobiano de la transformación $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{X})$.

volumen de la región \mathcal{U} , no asociadas a las tracciones.³⁴ Considerando estas dos fuerzas y derivando temporalmente los momentos lineal y angular,³⁵ los balances de momentos se expresan:

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \dot{\mathbf{v}} dv = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{t} da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} dv \quad (2.65a)$$

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} dv = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{t} da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dv \quad (2.65b)$$

donde los términos derechos de cada ecuación son la fuerza y el momento resultante, respectivamente. Estos balances pueden definirse análogamente en coordenadas materiales como:

$$\int_{\mathcal{U}} \rho_0 \dot{\mathbf{V}} dV = \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{T} dS + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{B} dV \quad (2.66a)$$

$$\int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \rho_0 \dot{\mathbf{V}} dV = \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{T} dS + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{B} dV \quad (2.66b)$$

El hecho de que los balances anteriores se cumplan se debe a la existencia del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ simétrico, tal que el campo de tensiones \mathbf{t} puede expresarse como $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$. Este cambio posibilita la reformulación de la integral de superficie de \mathbf{t} como una integral de volumen mediante el teorema de divergencia,³⁶ y entonces la ecuación (2.65a) nos permite llegar a la *primera ecuación de movimiento de Cauchy*:

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}) dv = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (2.67)$$

donde la expresión (2.67)₂ representa la primera ecuación del movimiento de Cauchy en su forma local para cualquier volumen. Alternativamente en la configuración material, esta ecuación puede definirse como:

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \mathbf{B} = \rho_0 \dot{\mathbf{V}} \quad (2.68)$$

³⁴Un caso claro de esta fuerza es la debida a la gravedad, tal que $\mathbf{b} = \rho \mathbf{g}$.

³⁵Esta derivada se opera realizando un cambio de coordenadas al sistema material para trabajar a partir de la región \mathcal{U} independiente del tiempo, permitiendo así una conmutación de la integral y la derivada, como se opera en el teorema de Reynolds. (ver sección A.3.3 del apéndice).

³⁶El teorema de divergencia establece que $\int_a \mathbf{A} n da = \int_v \operatorname{div} \mathbf{A} dv$.

2.3.3 Primer principio de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica trata con la conservación de la energía y su transferencia en un proceso termodinámico. Para su deducción, partamos del balance de energía:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(u)} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) dv = \int_{\phi_t(u)} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) dv + \int_{\partial\phi_t(u)} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + h) da \quad (2.69)$$

siendo $u = u(x, t)$ la energía interna por unidad de volumen,³⁷ $r = r(x, t)$ la fuente de calor por unidad de volumen y tiempo (generación interna de calor) y $h = h(x, t)$ el flujo de calor por unidad de superficie y tiempo (suma del flujo de calor más la energía mecánica disipada en alterar la microestructura), estas dos últimas, contribuciones no mecánicas de la energía. El término $\int_{\phi_t(u)} r dv$ define la velocidad a la que se genera el calor y $\int_{\partial\phi_t(u)} h da$ la velocidad a la que entra el calor. La suma de ambos términos se corresponde a la potencia térmica \mathcal{Q} . Particularizando estas dos magnitudes en nuestro estudio, asumiremos que $r \approx 0$ dado que no se generará una cantidad de calor sustancial y h representará la parte de la energía externa que ha sido usada para fisurar el hueso sólido y alterar su microestructura. Así, la expresión (2.69) se puede escribir en términos más intuitivos, dando lugar a la primera ley de la termodinámica:

$$\frac{d}{dt} (T(t) + \mathcal{E}(t)) = P_m(t) + P_d(t) \quad (2.70)$$

Siendo $T(t)$ y $\mathcal{E}(t)$ las energías cinética y potencial:³⁸

$$T(t) = \int_{\phi_t(u)} \frac{\rho}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad \mathcal{E}(t) = \int_{\phi_t(u)} u dv \quad (2.71)$$

y $P_m(t)$ y $P_d(t)$ las potencias mecánica y disipada:

$$P_m(t) = \int_{\phi_t(u)} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\phi_t(u)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad P_d(t) = \int_{\partial\phi_t(u)} h da \quad (2.72)$$

³⁷La energía interna total o integral de la energía interna por unidad de volumen sobre todo el sólido es la *función de estado* termodinámica asociada a la energía total.

³⁸La integral de la energía interna por unidad de volumen u es la energía interna total del sistema y su derivada temporal (o derivada de la energía potencial), es precisamente la potencia interna.

La potencia disipada P_d en el contexto termodinámico es conocida como potencia térmica $\mathcal{Q}(t)$ cuando se consideran tanto la contribución de las fuentes de calor $r(\mathbf{x}, t)$ como los flujos de calor $h(\mathbf{x}, t)$ (ver sección A.3.3); dado que en este estudio $R \approx 0$ y h representa la energía dedicada a fisurar el material, la potencia térmica pasa a ser llamada potencia disipada $P_d(t)$. Expresando el campo de tensiones con el tensor de Cauchy y la disipación de energía como $h(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$, donde \mathbf{q} es el flujo de calor de Cauchy, la expresión (2.70) puede escribirse localmente:

$$\dot{u} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r \quad (2.73a)$$

$$\dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + R \quad (2.73b)$$

donde \mathbf{d} es el tensor de velocidad de deformación.³⁹

2.3.4 Segundo principio de la termodinámica

Si bien la primera ley de la termodinámica describe la transferencia de energía en un proceso termodinámico, la relación que la representa no depende de la dirección de transferencia de energía. Es conocido que el calor fluye de la zona más caliente a la más fría, hecho que indica que la dirección de transferencia energética no es aleatoria. En este sentido, la segunda ley de la termodinámica sí es sensible a la dirección y aquí entra en valor la *entropía* que, de hecho, será una magnitud de gran importancia para verificar la consistencia del modelo constitutivo.

La entropía es una magnitud física de diferentes interpretaciones, aunque relacionadas entre ellas; en el ámbito de la termodinámica, la entropía describe la irreversibilidad del proceso, tratando con el desorden del sistema y en el área de mecánica estadística, como veremos la entropía mide el número de microestados compatibles con un macroestado en equilibrio. La entropía debe aumentar continuamente durante la evolución de un sistema dado que, ante la ausencia de regeneración o reorganización natural, a medida que se introduce una energía (en

³⁹El gradiente de la velocidad espacial $\mathbf{l} = \operatorname{grad} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ se descompone en dos tensores $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{d}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$, conocidos como el tensor de velocidad de deformación \mathbf{d} y el tensor velocidad de rotación \mathbf{w} , siendo $\boldsymbol{\sigma}$ simétrico y \mathbf{w} antisimétrico, $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{w} = 0$, por lo que $\boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad} \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$.

forma de deformación o tensión) el desorden del sistema debe aumentar por el hecho de ser un proceso irreversible. De hecho, en el caso que nos ocupa, en el hueso cortical a medida que se incrementa la sollicitación necesariamente la entropía debe aumentar, dado que se incrementará el grado de fisuración (y, por tanto, los daños microestructurales y el desorden), siendo la fisuración un proceso irreversible.⁴⁰ Así, cualquier cambio de entropía observado en nuestro sistema será asociado únicamente a procesos irreversibles de fisuración, ignorando posibles flujos térmicos, dado que en el modelo constitutivo desarrollado se consideran que los procesos son básicamente isotermos, con cambios despreciables de temperatura, pero sí existirán cambios sustanciales en el nivel de fisuración cuando el hueso se ve sollicitado a niveles que promueven las condiciones de rotura.

En base a lo descrito, el aumento de entropía estará gobernado por el flujo disipativo que hace que la potencia disipativa P_d sea negativa y se deberá a la existencia de un flujo de energía aplicada al sistema que se invierte en el aumento de la longitud [propagación] de las microfisuras existentes.

Siendo entonces $\eta = \eta(\mathbf{x}, t)$ la entropía por unidad de volumen, la segunda ley de la termodinámica se define, en términos generales:

$$\Gamma(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(U)} \eta \, dv + \int_{\partial\phi_t(U)} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\phi_t(U)} \frac{r}{\Theta} \, dv \geq 0 \quad (2.74)$$

donde $\Gamma(t)$ es la producción total de entropía por unidad de tiempo, \mathbf{q}/Θ el flujo de entropía por unidad de superficie, r/Θ las fuentes de entropía por unidad de volumen y Θ la temperatura absoluta. La segunda ley de la termodinámica, también conocida como *principio de desigualdad de la entropía*, como su propio nombre indica es una desigualdad (no un balance) que muestra la tendencia real de un sistema postulando la irreversibilidad del proceso.

Los flujos y fuentes de entropía están directamente relacionados con los flujos y fuentes de calor mediante la temperatura, como se ha mostrado en la expresión anterior, cuando se trata con un sistema termodinámico con intercambio de calor. Sin embargo, en el caso que nos ocupa y como se ha mencionado anteriormente, no se considera la generación de calor ($r \approx 0$) por lo cual la relación \mathbf{q}/Θ que define la cantidad de entropía debido al flujo de calor \mathbf{q} , adaptado a este caso particular

⁴⁰En este estudio no serán considerados casos de regeneración que sí se dan en el tejido óseo *in vivo*, a pesar de que al tratar con fracturas óseas suele asumirse que la velocidad de regeneración es mucho menor a la de fisuración.

representará la energía externa invertida en la fisuración. De esta forma, un aumento en la sollicitación conllevará la propagación y nucleación de microfisuras con ausencia de regeneración, suponiendo un incremento de la entropía [desorden], tal que necesariamente $\Gamma \geq 0$. Así, el daño en el hueso debe producir un aumento de entropía a pesar de la ausencia de fuentes de calor y de variaciones significativas de la temperatura. Con estas consideraciones, el principio de aumento de la entropía particularizado a este estudio toma la forma de:⁴¹

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \eta \, dv \geq \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \beta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad (2.75)$$

donde se ha eliminado la contribución de la fuente de calor $r \approx 0$ y siendo $1/\beta$ el parámetro análogo a la temperatura termodinámica que, en este caso, está relacionado con la distribución de energía entre los microestados posibles dadas unas microfisuras existentes.

En un sistema termodinámico ordinario, cuando la temperatura Θ aumenta los microestados que requieren mayores energías tienden a tener mayores probabilidades de ocupación; en un hueso fisurado, como se verá en la sección 4.1.3 donde se desarrolla el modelo constitutivo con fisuración basándose en la mecánica estadística, los especímenes con mayor valor de $1/\beta$ tienden a tener fisuras más largas con mayor probabilidad.

La desigualdad de la entropía puede expresarse en base a los tensores de tensión y deformación si se aísla r de la ecuación (2.73), se sustituye en la expresión (2.74) y se transforma la integral de superficie a una integral de volumen mediante el teorema de divergencia (ver sección A.3.3 del apéndice), llegando entonces a la forma local del segundo principio de la termodinámica:

$$\left(\frac{\dot{\eta}}{\beta} + \dot{u} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \beta \left[\mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\beta} \right) \right] \leq 0 \quad (2.76)$$

En los modelos constitutivos es habitual recurrir a la función energía de deformación Ψ del material que trata con la energía almacenada en este al ser sollicitado.

⁴¹Esta expresión sería una adaptación de la *desigualdad de Clausius-Duhem* donde se ha eliminado la fuente de entropía por generación de calor y adaptado el flujo de entropía a un caso isoterma, tal que $\Theta = 1/\beta$.

Cuando un material hiperelástico se trata en un contexto termodinámico en el que están involucradas variables térmicas (como la temperatura o la entropía), la función energía de deformación corresponde a función de energía libre de Helmholtz, como se comentó en la sección 2.2.3, que toma la forma de:

$$\psi = u - \frac{\eta}{\beta} \quad (2.77)$$

dada la importancia que toma esta función en el desarrollo del modelo constitutivo que se expone en esta investigación, resulta de gran utilidad poder representar la desigualdad de la entropía (que será una relación que permitirá validar la consistencia termodinámica del modelo constitutivo), en base a la función ψ .

Derivando la expresión anterior y reemplazando en la ecuación (2.76) se define la desigualdad reducida de la disipación, como:

$$\left(\frac{\eta}{\beta} + \dot{\psi} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \beta \left[\mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\beta} \right) \right] \leq 0 \quad (2.78a)$$

$$\left(\frac{\eta_0}{\beta} + \dot{\Psi} \right) - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \beta \left[\mathbf{Q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\beta} \right) \right] \leq 0 \quad (2.78b)$$

en su forma espacial y material, respectivamente. Esta última expresión introduce unas condiciones importantes que debe satisfacer una ecuación constitutiva y, de hecho, permite obtenerlas si se dispone de un modelo que proporcione la energía libre de Helmholtz por unidad de volumen $\psi(\beta, \mathbf{E})$. De hecho, es la mecánica estadística que se presenta en la siguiente sección, la que permite obtener esta función ψ a partir de la *función de partición* $Z(\beta, \mathbf{E})$ determinada en base a las configuraciones de microestados compatibles con un determinado macroestado, el cual vendrá caracterizado por la deformación \mathbf{E} , en una relación de la forma:

$$\psi(\beta, \mathbf{E}) = - \frac{\ln Z(\beta, \mathbf{E})}{\beta} \quad (2.79)$$

2.4 Mecánica estadística

La *mecánica estadística*, también conocida como *física estadística*, es un enfoque o formalismo de la física cuyo objetivo es explicar el comportamiento agregado de sistemas macroscópicos, que están constituidos por un gran número de elementos microscópicos. Debido al gran número de microelementos, el comportamiento colectivo de los mismos no depende de detalles específicos de cada elemento particular y el comportamiento macroscópico del sistema se acerca mucho al valor esperado o valor medio de cada variable, tratando el comportamiento de los constituyentes mediante la teoría de la probabilidad. Un ejemplo es el análisis de un gas o un material ferromagnético, los cuales admiten ecuaciones derivables mediante mecánica estadística. Un gas está formado por una cantidad grande de moléculas del orden de 10^{24} pero, el comportamiento colectivo del gas, puede conocerse sin conocer los detalles específicos de cada molécula (velocidad, posición, dirección de movimiento, etc), sino que la ecuación constitutiva del gas puede deducirse de consideraciones probabilistas. Lo mismo sucede con los materiales ferromagnéticos cuyo comportamiento depende de los espines de moléculas específicas que tienden a formar dominios coherentes, tal que la magnetización bajo un campo magnético externo depende de ese valor y también de la temperatura y existen ecuaciones constitutivas basadas en la mecánica estadística sin necesidad de conocer los detalles de cada partícula que contribuye a la magnetización interna. En esa misma línea, un material con microestructura reconocible cuyo comportamiento macroscópico es el resultado de la interacción de elementos específicos de la microestructura puede ser tratado con el mismo formalismo.

La ventaja principal que ofrece la mecánica estadística es que, a medida que el número de microconstituyentes que forman el sistema aumenta, la fluctuación individual aleatoria de cada uno de ellos respecto al valor promedio del comportamiento dado por el conjunto de estos microconstituyentes pierde importancia. Esto hace que las ecuaciones referentes al sistema general, a pesar de ser deducidas del comportamiento estadístico de los microconstituyentes, tengan un compartimiento cuasi-determinista (lo serán en mayor o menor grado dependiendo del número de partículas que constituyen el sistema, ya que ello influye en el peso de cada partícula sobre el comportamiento general). El carácter general de la mecánica estadística hace que su alcance sea extremadamente amplio, dado que prácticamente puede aplicarse a la materia en cualquier estado, tal y como se ha mostrado en la materia en estado sólido, gaseoso o líquido

e incluso en materiales de varias fases o componentes. Ello es extensible a materiales con condiciones de radiación, materiales biológicos u otros. Así mismo, con el uso de este formalismo pueden estudiarse tanto estados de no equilibrio como de equilibrio de la materia; de hecho, con el uso de la mecánica estadística puede entenderse la forma en la que un sistema pasa de un estado de no equilibrio a una situación de equilibrio.¹⁰⁶

Algunos enfoques de la mecánica estadística se usaron ya en el siglo XVIII, con trabajos importantes de la mano de D. Bernoulli (1738),⁴² J. Herapath (1821) o J.P. Joule (1851) que, por separado, trataron de establecer las bases de la conocida como *teoría cinética de los gases*. Posteriormente y tras otros trabajos que promovieron el avance en este enfoque, es R. Clausius (1859) quien, entre otros estudios, analizó el fenómeno del transporte con el concepto de *camino libre medio* y el estudio del número promedio de colisiones entre partículas, trabajo muy relevante en los posteriores teoremas desarrollados por L. Boltzmann.¹⁰⁶ Es entonces a partir de la segunda mitad del siglo XIX que la mecánica estadística emerge como una disciplina consolidada a partir trabajo de L. Boltzmann (1972) cuando establece el *teorema-H* y la conexión directa entre la entropía y la dinámica molecular. Desde entonces el trabajo en esta rama de conocimiento ha ido avanzando y, a partir de la segunda mitad del siglo XX, ha sido utilizado en sistemas cuyos constituyentes no son del tamaño molecular, si no mayores. En este aspecto, dentro del ámbito de la mecánica de medios continuos y sólidos, la mecánica estadística ha sido utilizada en modelos de daño, propagación de fisuras, *modelos de Ising* para percolación¹³⁸ como es el caso que nos ocupa o para establecer relaciones constitutivas en tejidos colaginosos.^{82,124}

En esta investigación, la mecánica estadística será aplicada en el tratamiento del proceso de fisuración de la costilla humana. La osteona será considerada la unidad básica del hueso cortical de la costilla y se entenderá por fisuración a la propagación de una fisura a través de las interfases entre osteonas. La estadística del proceso de fractura de la costilla humana se deberá a la existencia de desorden templado o congelado [*quenched disorder*] que surge cuando ciertos parámetros

⁴²Daniel Bernoulli publica su libro *Hydrodynamica* en el año 1738 donde, a parte de tratar con la mecánica de fluidos o la conservación de energía, en su décimo capítulo habla del primer modelo de la teoría cinética de los gases, demostrando que la presión del aire (que varía con la temperatura), es proporcional a la energía cinética de las partículas cuya velocidad aumenta con el calor y, por ello, la temperatura del gas es proporcional a su vez a la energía cinética.

que definen el comportamiento del sistema son variables aleatorias que no evolucionan con el tiempo [están templadas o congeladas], como es este caso. Ello justifica el uso de la mecánica estadística y la comparación del compartimiento observado con el valor esperado del modelo basado en probabilidades.

Para entender el enfoque de la mecánica estadística y la forma en la que será aplicada en esta investigación, se exponen a continuación los conceptos básicos de esta disciplina, así como las relaciones que serán utilizadas en el desarrollo del modelo constitutivo.

2.4.1 Conceptos básicos de la mecánica estadística

Sea un sistema constituido por N partículas o sistemas microscópicos idénticos, los cuales tienen una energía asociada, que interactúan entre ellos intercambiando energía. En base a la mecánica estadística puede asumirse que la energía aportada (en forma de trabajo o calor) se repartirá, según una distribución computable, entre los N elementos idénticos. En el caso que nos ocupa, el sistema es la costilla humana formada por osteonas, consideradas unidad básica en este estudio y que, por tanto, serán los elementos microscópicos que constituyen el sistema. Las osteonas tienen geometría cilíndrica, con un diámetro de alrededor de $190 \mu\text{m}$ y de algunos milímetros de longitud y en su conjunto constituyen el hueso cortical.⁹¹⁴³ Siendo entonces la osteona la unidad básica, se entenderá por fisuración del hueso la propagación de una fisura entre las osteonas debido a la pérdida de integridad estructural de las líneas de cemento. Este enfoque ha sido utilizado, por ejemplo, en el estudio de Toussaint *et al.* (2002)¹³⁷ en el que se aplica la mecánica estadística para estudiar la localización de las microfisuras en el proceso de fractura de rocas. En dicha investigación se define como unidad básica a los granos que constituyen las rocas, con un rango de tamaños cuyo promedio es de $100\mu\text{m}$ y asumiendo que la propagación de fisuras acontece en la interfase entre granos.

El modelo constitutivo objeto de este estudio se desarrollará partiendo del comportamiento elemental de las osteonas, así como de las probabilidades com-

⁴³Cabe mencionar que estudios recientes han mostrado un decrecimiento del área de la osteona (On.Ar) a medida que incrementa la edad del sujeto en el caso de las costillas humanas, no obstante no se observan variaciones significantes según si se trata de hombres o mujeres.³⁶

binatorias⁴⁴ para la propagación de fisuras en una red formada por elementos básicos. El modelo constará de una parte elástica donde la entropía se mantiene esencialmente igual a cero ($H = 0$) y una parte no elástica o disipativa, donde se desarrollan procesos irreversibles en los que la fisura o fisuras propagan a través del material y, por ende, donde se produce el aumento de la entropía $\Delta H > 0$. Así, se tratará con la probabilidad de daño emergente a partir de la maximización de la entropía.¹³⁷

Definamos entonces un *macroestado* (estado macroscópico o *macroconfiguración*) como un estado del sistema que viene definido por variables macroscópicas (tales como la energía total, la presión, el volumen, la temperatura, etc.) que, en el caso que nos ocupa, vendrá caracterizado por un nivel dado de deformación ϵ que es común a todo el material (es decir, dado un nivel de deformación, este estará relacionado con la energía total del sistema u otra variable macroscópica).⁴⁵ Este macroestado viene definido a su vez por una configuración o disposición geométrica concreta de fisuras en el material y del estado particular de cada osteona, lo cual se conoce como el *microestado* (configuración microscópica o *microconfiguración*). No obstante, hay distintas configuraciones de fisuras y estados de osteona que se corresponden a un mismo macroestado, es decir, dado un nivel de deformación macroscópica que se corresponde a un macroestado, hay muchos microestados particulares que son compatibles.⁴⁶ Así, dado un sistema de partículas $N = \sum n_i$, el número de microestados posibles o compatibles con el macroestado observable es:

⁴⁴La combinatoria es un área de las matemáticas encargada de trabajar con problemas de selección, disposición y operación de sistemas, tanto discretos como continuos. Pueden consultarse referencias como N. Loehr (2017)⁸³ para ejemplos aplicados a la probabilidad.

⁴⁵Por ejemplo, en un gas ideal la función de estado $PV = nRT$ implica que conocidas tres variables macroscópicas de estado (presión, temperatura y número de moles) puede conocerse el volumen y por tanto, se sabe el macroestado del sistema.

⁴⁶Por ejemplo, supongamos un sistema de $N = 4$ partículas en diferentes niveles de energía, tal que la energía total es de $U = n_1U_1 + n_2U_2 + \dots + n_4U_4 = 6J$. Dicho nivel de energía del sistema puede estar asociado a cuatro microestados, correspondientes a las cuatro configuraciones posibles definidas en base al nivel de energía de cada partícula: el primer macroestado es aquel en el que hay tres partículas con energía nula y una con energía 6J, tal que $U = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 6J$, donde hay cuatro permutaciones posibles dado que en cada caso una de las cuatro partículas puede tener energía de 6J, por tanto hay cuatro microestados posibles (cuatro microconfiguraciones particulares que están asociadas al macroestado mencionado); otra posibilidad sería aquel macroestado en el que $U = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 6J$ donde dos partículas no tienen energía, esta configuración tiene 12 permutaciones por tanto 12 microestados posibles, etc.

$$P = \frac{N!}{n_0!n_1!\dots n_i!} \quad (2.80)$$

En la mayoría de sistemas, el macroestado más probable es muchísimo más probable que cualquier otro macroestado hasta el punto de que, cuando el número de unidades idénticas o partículas [osteonas] N es muy grande, el resto de microestados puede ignorarse.⁴⁷ Con todo ello, la idea clave de la mecánica estadística y del trabajo de Boltzmann es que puede asumirse que el macroestado observado se corresponde, casi con seguridad, al macroestado que tiene un mayor número de microestados posibles.

Si se considera que las microconfiguraciones son igualmente probables, puede recurrirse a la formulación de Boltzmann, por medio de la cual la entropía [desorden] de cada macroestado vendrá dada por el número de microconfiguraciones Ω compatibles con este macroestado, tal que:

$$H = k_B \ln \Omega \quad (2.81)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, una constante de proporcionalidad con unidades J/K; en el caso que ocupa a este trabajo se considerará $k_B = 1$, lo cual es equivalente a medir la entropía en unidades adimensionales (que es perfectamente adecuado en este contexto). La expresión (2.81) muestra que el aumento de la entropía es producto de la evolución de un sistema formado por muchos elementos hacia la configuración más probable o equivalentemente, con más microestados posibles (dado que se alcanza cualquiera de ellos con la misma probabilidad).

Cuando no todas las microconfiguraciones son igualmente probables como es el asunto de esta investigación, se establece que la probabilidad p_j de que un mesovolumen fisurado se encuentre en el microestado j puede determinarse maximizando la expresión de C. Shannon de la entropía:

$$H = k_B \sum_{j=1}^{\Omega} p_j \ln \frac{1}{p_j} \quad \rightarrow \quad H = -k_B \sum_{j=1}^{\Omega} p_j \ln p_j \quad (2.82)$$

que no es otra cosa que una generalización de la formulación de Boltzmann. Puede observarse que, dado que $\Omega = \sum j$, si todos los microestados fueran igual

⁴⁷Partiendo del ejemplo anterior, el macroestado más probable es aquel en el que $U = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6\text{J}$ que tiene 24 microestados (microconfiguraciones) posibles o permutaciones de energía entre las 4 partículas del sistema.

de probables se cumpliría que $p_j = 1/\Omega$ y la expresión anterior se reduciría a la de Boltzmann (2.81). Sin embargo en este caso, dado que no todos los microestados tienen la misma probabilidad de darse en un macroestado, la entropía depende de la probabilidad de que un microestado sea compatible con el macroestado en cuestión. La dificultad reside entonces en encontrar aquella distribución de probabilidades p_j ($1 \leq j \leq \Omega$) que, dado un nivel de energía elástica $E(\epsilon)$, maximice la entropía H ; dicha distribución se conoce como la *distribución de Boltzmann* (o la *estadística de Maxwell-Boltzmann*). En un sólido elástico fisurado como es el caso que aquí se analiza, el macroestado viene definido por la energía o trabajo requerido para que el sólido alcance el nivel de deformación asociado ϵ y es una función $E(\epsilon)$.

2.4.2 Macroestados y relaciones termodinámicas

En este estudio, el macroestado se definirá especificando cuantas de las $N = \sum n_i$ osteonas se encuentran en el estado j , cifra que definiremos como n_j , tal que la probabilidad de que una osteona particular esté en el estado j será $p_j = n_j/N$. Así, la distribución de Boltzmann se obtendrá maximizando la entropía $H(p_j, \epsilon)$ respetando la condición de que la energía total cumpla que $\sum n_j E_j = E(\epsilon)$. Dicho de otra forma, debe encontrarse la distribución $(p_1, \dots, p_\Omega) \in \Pi$,⁴⁸ que hace que la entropía sea máxima y todo ello sujeto a una restricción:

$$\max_{\Pi} \sum_{j=1}^{\Omega} p_j \ln \frac{1}{p_j}, \quad \text{con} \quad \sum N p_j E_j = E(\epsilon) \quad (2.83)$$

Este problema de maximización con restricciones puede resolverse usando la técnica de los multiplicadores de Lagrange⁴⁹ definiendo la función:

$$\bar{H} = \sum_{j=1}^{\Omega} p_j \ln \frac{1}{p_j} + \beta [E(\epsilon) - N \sum p_j E_j] \quad (2.84)$$

⁴⁸ Π representa n-tuplas de números $0 \leq p_j \leq 1$, tales que sumen 1 ($p_1 + p_2 + \dots + p_\Omega = 1$).

⁴⁹El método de los multiplicadores de Lagrange permite simplificar resolutivamente una función de n variables con s restricciones a otra obtenida como combinación lineal de lo anterior, la cual es una función de $n + s$ variables sin restricciones.

donde β es un multiplicador de Lagrange. La solución a ese sistema es la distribución de Boltzmann para el sistema particular tratado:

$$p_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{Z(\beta)} \quad (2.85)$$

donde β es un parámetro que, como se vio en la sección 2.3.4, es el análogo a la temperatura $\Theta = 1/\beta$ y en ocasiones se le conoce como el *multiplicador de Lagrange*. El parámetro β está relacionado con la energía promedio y describe la dispersión de la distribución de probabilidades p_j del sistema de estar en el microestado j . El parámetro β de hecho, puede deducirse de diversas consideraciones termodinámicas a partir de la entropía como:

$$\beta = \left(\frac{\partial H}{\partial E} \right)_\epsilon \quad (2.86)$$

Por otro lado, $Z(\beta)$ es la *función de partición* (también llamada *Zustandssumme* o “suma de estados” por Boltzmann), un factor de normalización que garantiza que la suma de probabilidades $\sum p_j = 1$. Recuperando la expresión anterior (2.85) se deduce que:

$$Z(\beta, \epsilon) = \sum_{j=1}^{\Omega} e^{-\beta E_j} \quad (2.87)$$

Como su propio nombre indica, la función de partición (Z) es una función de las variables termodinámicas de estado (volumen, temperatura, etc.) que describe las propiedades estadísticas del sistema y que permite expresar otras variables termodinámicas como la energía, a partir de ella y sus derivadas.¹³²

De la misma forma que en expresiones anteriores de esta sección, el sumatorio de la función de partición se extiende sobre todos los microestados posibles que puede alcanzar el sistema y, dado que este número será elevado, resulta más interesante a efectos de cálculo poder agrupar todos los microestados asociados a la misma cantidad de energía y posteriormente operar el sumatorio sobre los diferentes niveles de energía. Para ello, definamos como $g(E_j)$ al número de microestados que tienen la misma energía,⁵⁰ valor que se determinará posteriormente, en la sección 4.1.2, mediante el uso de combinatoria.

⁵⁰Cuando un nivel de energía está asociado a más de un microestado o microconfiguración se conoce como “degeneración”; es decir, dos o más microestados se degeneran si tienen la misma energía asociada.

La función de partición puede reescribirse entonces como:⁵¹

$$Z(\beta, \epsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} g(E_k) e^{-\beta E_k} \quad (2.88)$$

El interés de esta función radica en que ahora es posible obviar los microestados y realizar los cálculos únicamente a partir de las energías posibles que pueden alcanzar estos microestados, simplificando así las operaciones.

Es interesante observar, como se ha mencionado, que la función $Z(\beta)$ contiene toda la información básica del sistema y a partir de ella se pueden determinar las magnitudes básicas como la *energía libre de Helmholtz* Ψ , la entropía H , la energía interna $u = \Psi + H/\beta$ o la tensión, de la forma:

$$\Psi(\epsilon, \beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(\epsilon, \beta) \quad (2.89a) \quad H(\epsilon, \beta) = -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\ln Z}{\beta} \right) \quad (2.89b)$$

$$u(\epsilon, H) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (2.89c) \quad \sigma(\epsilon, \beta) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z(\epsilon, \beta)}{\partial \epsilon} \quad (2.89d)$$

2.5 Emisión acústica

Si bien el comportamiento elástico del hueso, en lo que se refiere a tensiones y deformaciones, es determinista y viene relacionado por una ecuación constitutiva que vincula tensión y deformación, la rotura o fallo es menos previsible. Los detalles de la fractura dependen de factores heterogéneos dentro de la microestructura y de cierta aleatoriedad en la distribución de los componentes que la forman. Por esa razón, la aparición y propagación de fisuras en el hueso se ve afectada por factores no controlables y no directamente observables en la microestructura (tales como defectos microestructurales, características específicas de las osteonas u otros), cuyos efectos no son totalmente predecibles ni descriptibles con un modelo puramente determinista. De hecho, a pesar de que la mecánica estadística

⁵¹En el marco del desarrollo del modelo constitutivo se verá que el sumatorio involucrado en Z se operará sobre un número finito N que estará relacionado con los microestados compatibles con la deformación. Las consideraciones para dicho cambio se describirán en la subsección 4.1.3.

presenta la gran ventaja de poder tratar la fisuración aparentemente aleatoria como un proceso cuasi-determinista, la realidad es que la propagación del daño a través del material es un proceso *estocástico*. Los procesos estocásticos son aleatorios y vienen controlados por leyes probabilistas, que permiten asumir la aleatoriedad inducida por el conjunto de factores no controlables y que influyen en la respuesta del material.³⁷

Efectos como la nucleación y propagación de fisuras, el movimiento de dislocaciones u otros eventos aparecen a cierto nivel de tensión, produciendo cambios irreversibles en la microestructura y redistribuyen las tensiones internas. Estos cambios irreversibles van acompañados de la propagación de ondas elásticas debidas a la liberación de energía, conocidas como *emisiones acústicas* (EAs).⁵⁵ Dado que estas ondas elásticas, por tanto, son consecuencia de la formación y propagación de microfisuras, proporcionan una medida indirecta del daño acumulado en el sistema, por lo que la detección de las emisiones acústicas es importante en la predicción del fallo del material.^{20,61} De esta forma, las emisiones acústicas, asociadas a la propagación de la fisuración del material, deberían estar relacionadas con el aumento de la entropía que debe describir un modelo constitutivo una vez iniciado el rango no elástico del comportamiento material.

2.5.1 Descripción general de la técnica de EA

La *emisión acústica* (EA) es una técnica no invasiva, perteneciente a la rama de ensayos no destructivos (END) usada en diferentes campos para la monitorización del daño en tiempo real.¹ Para ello, se colocan sensores piezoeléctricos en contacto con la superficie del material, que detectan las ondas elásticas liberadas por la propagación de grietas o la aparición de microfisuras, aportando así información de la evolución del daño desde su inicio hasta incluso antes de la fractura macroscópica.^{3,43} A diferencia de otras técnicas no destructivas, la EA no examina la estructura interna del material, si no que detecta la actividad dentro del mismo y es capaz de captar desplazamientos locales a longitud de escala de nanómetros a micrómetros.⁶¹ Los microfisuras que producen la liberación de dicha energía se desencadenan en forma de avalanchas,^{45,46,126} hasta alcanzar el fallo macroscópico y, a pesar de no ser siempre visibles, las emisiones asociadas pueden ser detectadas mediante la técnica de emisión acústica.¹⁴

La Figura 2.6 muestra una onda elástica detectada mediante la técnica de emisión acústica y las distintas variables que describen su forma. Las señales por encima del umbral (*threshold*) se asocian a la propagación de fisuras o cambios irreversibles y las inferiores a ruidos o perturbaciones.

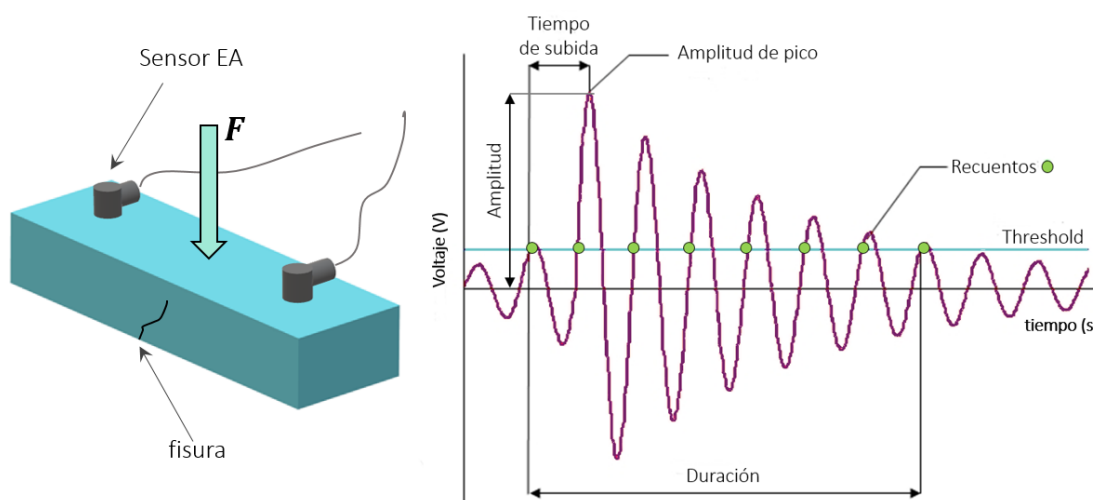


Figura 2.6. Posicionamiento de los sensores y características principales de una onda elástica detectable por EA. El umbral (*threshold*) se utiliza para discriminar las señales de EA relevantes. Se muestran los recuentos de señal, su amplitud, el tiempo de subida y la duración.

Los parámetros más utilizados para caracterizar las emisiones acústicas son:¹²³

- **Duración:** o tiempo transcurrido desde el inicio de la señal (primera intersección de la onda con el umbral) hasta su fin, entendiéndose por este el último instante en que su voltaje supera el umbral.
- **Amplitud (A):** voltaje máximo de la onda elástica.
- **Energía:** determinada como el área bajo la curva de la onda rectificada.
- **Recuento:** número de señales (por encima del umbral) que se detectan durante todo el ensayo.
- **Frecuencia:** de aparición de señales.
- **Tiempo de subida** o *rise time* (RT): tiempo en el que el voltaje de la señal va en aumento.

- **Tiempo de subida sobre la amplitud** o *rise time over amplitude* (RA): relación entre RT y la amplitud de la señal (puede entenderse como la pendiente de la recta que une el origen de señal con el pico de señal más elevado).

Varios de estos parámetros, como el recuento, amplitud, frecuencia, energía, duración de la señal o tiempo de subida (RA) incluyen información del modo de daño y el proceso de fractura. También se ha observado en los estudios que las amplitudes de las señales se distribuyen siguiendo una ley potencial, como se ha captado en materiales como rocas o cemento.^{2,20,21} No obstante, entender las propiedades estadísticas de la emisión acústica ha sido todo un reto.

2.5.2 Uso de la EA en biomecánica

La emisión acústica ha sido ampliamente utilizada en metales, pero ha mostrado su potencial en diferentes ámbitos: ha sido usada para discernir entre modos de fractura como la torsión o la flexión según la aparición de fuerzas normales o cortantes; se ha diferenciado entre rotura por *pull-out* o “extracción de fibras”, delaminación o aparición de grietas en materiales compuestos; se han realizado estudios de detección de fallo estructural en construcciones antiguas, estructuras de cemento, estructuras industriales como puentes o turbinas, problemas de fugas o corrosión y en diversos materiales como aceros,⁵² compuestos u otros.^{1,3,55,61} En el ámbito biomecánico, la emisión acústica ha sido utilizada desde hace décadas; se ha empleado para estudiar pérdidas de fijación, fricción y rotura en implantes,¹¹⁹ procesos de degradación en la superficie entre hueso e implante, el daño en articulaciones, el desgaste de cartílagos en la rodilla o la presencia de osteoartritis en las articulaciones de las extremidades de caballos e incluso en estudios de diagnosis de tejidos blandos.^{43,55,104} Por ello, especialmente en la rama de la medicina, esta técnica resulta de gran interés debido a sus múltiples ventajas con respecto a otros métodos, como la ausencia de dolor, peligro o posibilidad de infecciones en su uso con pacientes, la ausencia de radiación (presente en los Rayos-X y la Tomografía Computarizada), sus bajos costes y la opción que proporciona de monitorizar en directo, hecho muy beneficioso en el ámbito de los deportistas profesionales.⁴³

⁵²Algunas de estas aplicaciones pueden encontrarse en los libros de recopilaciones de artículos publicados, como los de A. Carpinteri & G. Lacidogna, 2007²⁰ y S. Gongtian *et al.*, 2015.¹²¹

Los primeros estudios de la literatura se basaron en encontrar diferencias en las señales de EA según si las muestras presentaban pequeños defectos y descartaron la influencia de la presencia de capas inferiores a 9 mm de tejido blando.⁵⁵ Cómo señalan distintas investigaciones, la mayor parte de las emisiones acústicas se centran en la zona no lineal de las curvas carga-deflexión,⁹⁸ percibiendo pocas señales y de baja amplitud¹⁴⁴ hasta incluso el 95 % de la carga aplicada, cuanto menos en ensayos de fatiga.¹ La velocidad de ensayo también ha mostrado ser un factor influyente, donde las altas velocidades reducen la cantidad de señales detectadas, incrementando su amplitud.⁴¹

La influencia de las variables antropométricas en las señales detectadas no ha sido clarificada; a pesar de que la edad parece incrementar el número de señales,¹⁴⁴ otros estudios determinan que no se observan influencias claras de la edad, el sexo o la zona anatómica, a pesar de que sí se intuye un inicio de detección más temprano en el tiempo y un decrecimiento del número de señales a medida que aumenta el contenido mineral.¹ Esto ha sido atribuido al incremento de fragilidad de las muestras más mineralizadas, que dificultan la propagación de fisuras y por tanto, reducen la actividad de las emisiones, a la par que aumentan su amplitud, duración y energía promedios. De hecho, la energía acumulada parece estar relacionada con la capacidad del tejido a soportar cargas.¹³⁰ Estas variaciones en las señales también se han mostrado en los ensayos de torsión, en los que los esfuerzos cortantes serían los principales causantes del fallo y donde el hueso libera ondas de mayor duración, mayor RA (tiempo de subida sobre la amplitud) y menor frecuencia promedio (AF). Por otro lado, las muestras que rompieron en la zona de la fijación por flexión (por tensiones normales) mostraron menores valores de RT y RA. De hecho, el RT (tiempo de subida) fue definido en otros estudios como un parámetro capaz de distinguir entre cracking y fricción.³

No obstante, la bibliografía sobre el uso de emisión acústica en el tejido óseo humano es limitada.^{1,3,43,56,130} La mayor parte de estas investigaciones se han centrado en el hueso animal, debido a las restricciones del acceso a las muestras humanas y el gran espectro de variables que influyen en la interpretación. Así mismo, estos estudios se limitan a relacionar la fuerza de carga con el incremento de señales, pero una vinculación y predicción de la tensión de rotura en base a las señales de emisión acústica sería más conveniente donde, además, el crecimiento de los *hits* debe ser asociado termodinámicamente al aumento de la entropía que se da en el proceso de fisuración. Como se ha mencionado anteriormente, la propagación de la fisuración es un proceso estocástico, cuya aleatoriedad puede

ser tratada en base a la teoría de la probabilidad. Un asunto un poco más estudiado, es la distribución de las energías de los *hits* que en hueso se ajustan muy bien a una distribución de probabilidad de las energías detectadas E dada por una ley potencial del tipo:

$$p(E) = CE^{-\epsilon} \quad (2.90)$$

siendo C un factor de normalización y ϵ un exponente que caracteriza la distribución de energía, tal que $1,3 \leq \epsilon \leq 1,7$ en huesos animales. Dicho exponente muestra un decrecimiento con la edad del animal, por lo que un incremento de ϵ supone un aumento de la probabilidad de emisiones más largas.¹⁴ En tejidos colagionosos también se encuentra una ley de tipo potencial, aunque con un exponente $\epsilon \approx 1,20$.¹²⁶

Sin embargo, la relación entre tensiones y la aparición de *hits*, precisa de una relación algo más compleja, que debe ser consistente y derivada del proceso de fisuración. Esto se ha mostrado en un estudio de tejido esofágico humano, donde el daño se acumula en forma de roturas de las fibras de colágeno que constituyen la microestructura y las señales de emisión acústica se han vinculado con la rotura de dichas fibras.¹²⁶ Este modelo ha sido validado en ensayos de vejiga, mostrando su adecuada representación de la relación entre daño microestructural (en forma de emisiones) y tensión de diferentes tejidos blandos. Las Figuras 2.7 y 2.8 muestran los *hits* detectados y el modelo ajustado para los ensayos de esófago y vejiga, respectivamente. No obstante, mientras que el daño en el tejido blando se produce por la rotura de las fibras de colágeno entrecruzadas, la microestructura del tejido duro o hueso está formada por la agrupación de osteonas donde el daño se da por la propagación de fisuras en el material.

Por este hecho, la relación entre tensiones y *hits* de emisión acústica en tejidos blandos no se ajusta adecuadamente a la distribución de emisiones en el tejido duro (hueso), como se muestra en el capítulo 5 de resultados. De esta forma, se necesita un modelo matemático específico para tejido óseo, que parta de distintas consideraciones referentes a la microestructura y a la forma en la que las fisuras se propagan en el material. Así mismo, el tejido blando presenta un gran número de emisiones acústicas antes de la fractura, algo que no se refleja en el tejido duro como es el hueso. A todo esto, cabe sumar la intrincada geometría de la costilla que dificulta la implementación de emisión acústica en los ensayos, hecho que se ve reflejado en los pocos artículos de la literatura en los que se ha estudiado huesos humanos, usando en su lugar fémures u otros huesos planos y largos.

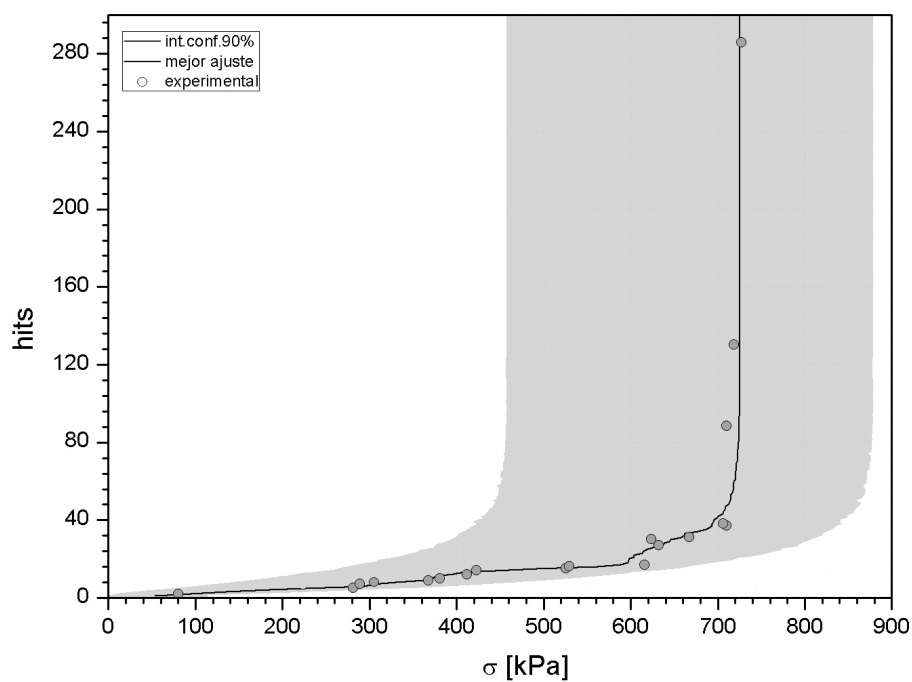


Figura 2.7. Gráfica *hits*-tensión, modelo ajustado e intervalo de confianza en esófago humano.

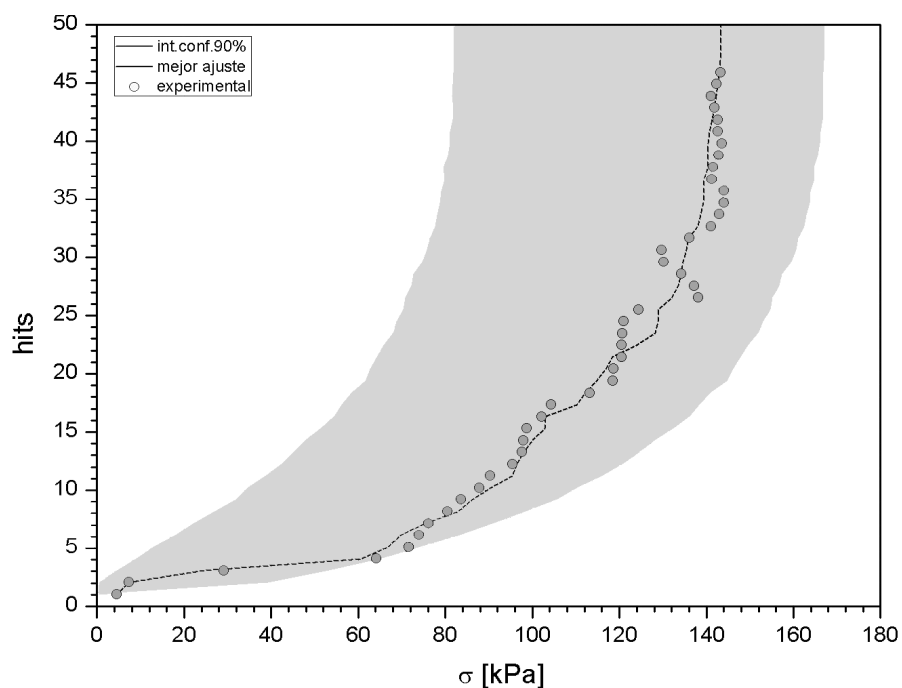


Figura 2.8. Gráfica *hits*-tensión, modelo ajustado e intervalo de confianza en vejiga porcina.

Dadas dificultades mencionadas, en el capítulo se desarrolla un nuevo modelo diferente, aunque también basado en modelos estocásticos y probabilidades, donde las tensiones y el número de *hits* pueden ser relacionados mediante un modelo basado en la *teoría de la percolación*. Dicho modelo tiene dos parámetros libres, uno de ellos viene predicho o sugerido por la teoría de percolación y los ajustes muestran que los valores experimentales del mismo no se desvían mucho de lo cabría esperar a partir de la teoría de la percolación, que será tratada en las secciones 4.5.4 y 5.2.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES Y FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3

Metodología experimental

En esta investigación se propone un modelo constitutivo de hueso cortical de costilla humana, cuyo comportamiento ha sido estudiado en base al ajuste de dicho modelo a ensayos experimentales. Para el ajuste del modelo se han utilizado resultados obtenidos de dos pruebas diferentes; por un lado, se han retomado los datos procedentes de ensayos de microtracción de *coupons* de hueso cortical de costilla humana realizados en la tesis doctoral del Dr. J. Velázquez-Ameijide (2015)¹⁴¹ y, por otro lado, se han efectuado ensayos experimentales de flexión de costilla humana completa con una nueva metodología desarrollada en este estudio y aplicada a un conjunto de muestras, junto con la implementación de la técnica de emisión acústica. Los resultados de ambos ensayos se utilizan posteriormente para probar la validez del modelo constitutivo propuesto en este estudio, así como del modelo matemático de predicción de microfisuración a partir de señales de emisión acústica. Además, se han determinado ciertas variables relacionadas con la densidad y cantidad de fase mineral presente en la muestra, así como con la cantidad y distribución de porosidad en el hueso cortical, esto último a través de la *dimensión fractal*. Estas variables serán utilizadas para explicar variaciones de los parámetros del modelo constitutivo desarrollado esta investigación.

La metodología se divide en dos capítulos principales; el presente capítulo se centra en la descripción del material utilizado (3.1), la manipulación de las muestras (3.2), el desarrollo de los ensayos experimentales y el posterior tratamiento de los datos que llevarán finalmente a determinar las tensiones y deformaciones de cada espécimen, a partir de las cuales se ajustará el modelo (3.3).

Así mismo, también se describirán los procesos usados en esta investigación para la obtención de la dimensión fractal (3.4), así como de la densidad y las fracciones presentes de cada componente en el hueso (3.5). Todas las secciones serán divididas en dos apartados, en los que se explica las particularidades de cada etapa según si el ensayo es de microtracción de *coupons* o de flexión de costilla completa.

La segunda parte de la metodología se expone en el capítulo 4, donde se presenta el desarrollo del modelo constitutivo que describe el comportamiento de la costilla humana desde el inicio de la sollicitación hasta la fractura macroscópica, el cual será ajustado a partir de los datos presentados en este capítulo. Además, también se describe el modelo matemático de emisión acústica que tratará de predecir los *hits* o señales captadas por los detectores de emisión acústica a partir del nivel de tensión en la muestra y permitirá indagar en la relación entre señales y la microfisuración del hueso.

3.1 Material

En esta investigación se han utilizado costillas procedentes de sujetos humanos fallecidos. Las muestras han sido obtenidas por el Servicio de Patología del *Institut de Medicina Legal i Ciències Forenses de Catalunya* (IMLCFC), en el cual se mantiene un estricto control de los sujetos para evitar la transmisión de enfermedades y los posibles peligros que pueda conllevar el tratamiento de material biológico. Para la manipulación de muestras biológicas es necesario seguir un estricto protocolo que evite la transmisión de patógenos y asegure la adecuada limpieza y tratamiento de las muestras. Este protocolo ha estado aprobado por los supervisores de riesgos laborales de la UPC y se detalla en la sección C.1 del apéndice.

En el desarrollo de este estudio se ha utilizado siempre la cuarta costilla de los sujetos, indistintamente izquierda (*left*, L), derecha (*right*, R) o ambas si ello ha sido posible. De cada muestra se registró por parte del IMLCFC el número

de necropsia para la identificación del sujeto, edad, altura, peso e índice de masa corporal (IMC), junto con la causa de la muerte. El código de necropsia se asignó a cada cuerpo entrante en IMLCFC, según el número de fallecido durante el año vigente.¹ Así mismo, se incluyó la causa de fallecimiento para asegurar que esta no hubiera podido provocar daños torácicos.² A lo largo de esta investigación, cada muestra ha sido identificada por el número de necropsia seguido de la letra que indica el costado de la costilla. Esa codificación asegura que se cumple con el anonimato que exige el convenio.

Para extraer las costillas del sujeto fue necesario un procedimiento especial, diferente a la metodología empleada por los forenses para realizar las autopsias. Normalmente toda la caja torácica es retirada con un corte de todas las costillas por los laterales para poder extraer la parte torácica superior y acceder a los órganos internos. Sin embargo, para esta investigación se cortaron las costillas exceptuando la cuarta, la cual se extrajo completa desde la parte posterior. Así fue posible obtener un espécimen completo, como el mostrado en la Figura 3.1(a).

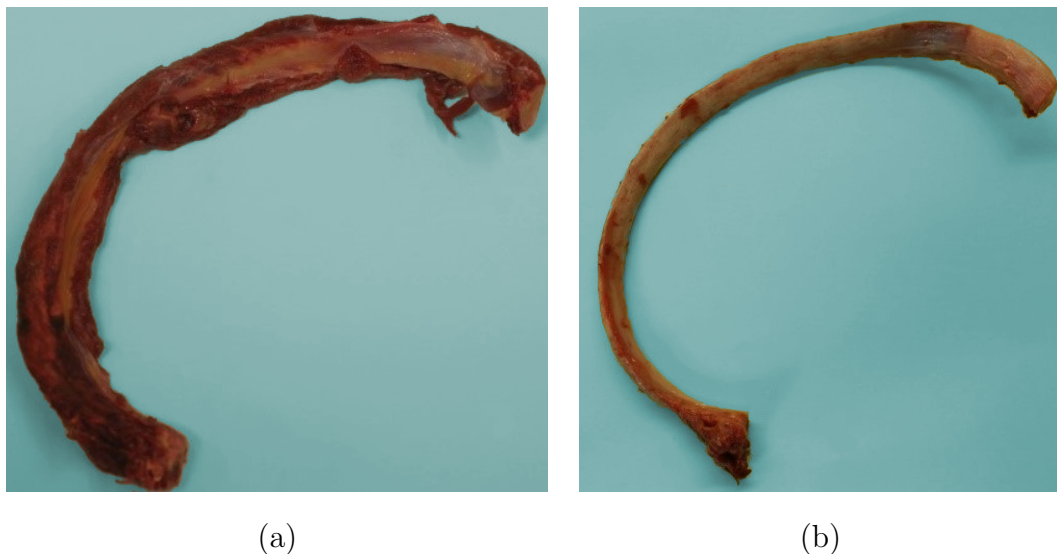


Figura 3.1. (a) Costilla humana recibida del IMLCFC antes de retirar el tejido blando y (b) tras la limpieza.

¹El número 1321/17 indica que el espécimen pertenece al fallecido número 1321 del año 2017.

²Por ejemplo, las muestras procedentes de sujetos cuya causa de muerte ha sido precipitación u atropello no han sido utilizadas.

Tras la extracción, las muestras fueron trasladadas a las instalaciones de la UPC habilitadas para su manipulación, donde fueron congeladas a una temperatura de -20°C .³ Previamente a la manipulación y/o mecanizado, las costillas fueron descongeladas en un refrigerador a 5°C durante 12h y el tejido blando fue retirado mediante un procedimiento mecánico de extracción con el uso de un bisturí, rascando suavemente la muestra hasta su completa eliminación (Figura 3.1(b)). Posteriormente, las costillas fueron cubiertas en gasa empapada en solución salina para su adecuada conservación, manteniendo así sus propiedades mecánicas. Los ensayos se realizaron 24h después de la etapa de descongelación, asegurando su relajación. Este mismo procedimiento ha sido seguido en otros estudios.^{95,99,108}

Para los ensayos experimentales se ha utilizado un total de 66 costillas humanas divididas en dos grupos según el ensayo realizado. Para la fabricación y ensayos de tracción de *coupons* (probetas de microtracción tipo alterio) de hueso cortical se han usado 51 costillas (35 hombres y 16 mujeres) con un rango de edad de entre 10 y 91 años y un promedio de (56 ± 21) años y un índice de masa corporal (IMC) promedio de $28,7 \pm 6$ kg/m^2 . Estas muestras se fabricaron y ensayaron en la tesis doctoral del Dr. J. Velázquez-Ameijide (2015)¹⁴¹ y tanto los *coupons* como los datos resultantes de los ensayos experimentales de tracción han sido posteriormente utilizados y analizados en el desarrollo de la presente investigación.

En lo que respecta a los ensayos de flexión de costilla humana completa, se han utilizado 17 costillas (11 hombres, 4 mujeres), procedentes de 11 sujetos con edades comprendidas entre los 26 y los 62 años (51 ± 11 años). Las edades han sido acotadas a un grupo de edad más estrecho de edad media con el fin de restringir el efecto e influencia de la edad en los resultados obtenidos. Sin embargo, los valores promedio de edad son bastante similares entre los grupos de muestras de tracción y flexión. En las Tablas 3.1 y 3.2 se aportan las variables antropométricas (edad, sexo, altura, peso e índice de masa corporal (IMC)) de cada una de las muestras utilizadas en los ensayos de tracción y flexión respectivamente, ordenadas por número de necropsia.

³Sedlin & Hirsch (1966), Pelker *et al.* (1984), Panjabi *et al.* (1985) y Borchers *et al.* (1995) entre otros, han demostrado que la conservación de los especímenes óseos a temperaturas de -20°C no altera sus propiedades.⁶⁸

Tabla 3.1. Datos antropométricos de las muestras utilizadas en los ensayos de tracción de *coupons* de costilla humana.

| Muestra | Edad | Sexo | Altura [cm] | Peso [kg] | IMC [kg/m ²] | Muestra | Edad | Sexo | Altura [cm] | Peso [kg] | IMC [kg/m ²] |
|---------|------|------|----------------|--------------|-----------------------------|---------|------|------|----------------|--------------|-----------------------------|
| 0004/12 | 34 | H | 168 | 80 | 28,3 | 1328/11 | 70 | H | 172 | 85 | 28,7 |
| 0011/12 | 73 | M | 151 | 90 | 39,5 | 1335/11 | 67 | M | 152 | 60 | 26 ,0 |
| 0027/12 | 68 | H | 176 | 105 | 33,9 | 1338/11 | 91 | M | 140 | 45 | 23,0 |
| 0031/12 | 43 | H | 168 | 81 | 28,7 | 1345/11 | 66 | M | 147 | 102 | 47,2 |
| 0035/12 | 63 | M | 153 | 82 | 35,0 | 1354/11 | 30 | M | 175 | 65 | 21,2 |
| 0036/12 | 74 | H | 175 | 95 | 31,0 | 1360/11 | 34 | H | 173 | 90 | 30,1 |
| 0045/12 | 71 | H | 164 | 57 | 21,2 | 1364/11 | 73 | M | 160 | 93 | 36,3 |
| 0048/12 | 57 | H | 177 | 103 | 32,9 | 1368/11 | 25 | H | 167 | 90 | 32,3 |
| 0049/12 | 43 | H | 170 | 83 | 28,7 | 1385/11 | 10 | H | 170 | 68 | 23,5 |
| 0058/12 | 74 | H | 154 | 47 | 19,8 | 1389/11 | 37 | H | 163 | 64 | 24,1 |
| 0059/12 | 62 | H | 162 | 93 | 35,4 | 1394/11 | 33 | H | 170 | 115 | 39,8 |
| 0083/12 | 87 | H | 167 | 67 | 24,0 | 1397/11 | 86 | M | 141 | 82 | 41,3 |
| 0102/12 | 61 | M | 161 | 70 | 27,0 | 1400/11 | 65 | M | 163 | 58 | 21,8 |
| 0104/12 | 40 | H | 174 | 82 | 27,1 | 1404/11 | 26 | H | 168 | 72 | 25,5 |
| 0106/12 | 62 | H | 167 | 80 | 28,7 | 1409/11 | 76 | H | 159 | 80 | 31,6 |
| 0107/12 | 56 | H | 170 | 65 | 22,5 | 1417/11 | 88 | H | 151 | 48 | 21,1 |
| 0113/12 | 52 | H | 171 | 71 | 24,3 | 1425/11 | 48 | H | 172 | 110 | 37,2 |
| 0114/12 | 26 | H | 180 | 76 | 23,5 | 1427/11 | 63 | H | 165 | 95 | 34,9 |
| 0116/12 | 41 | M | 160 | 75 | 29,3 | 1441/11 | 36 | H | 146 | 64 | 30,0 |
| 0121/12 | 33 | M | 158 | 84 | 33,7 | 1444/11 | 35 | H | 169 | 72 | 25,2 |
| 0136/12 | 63 | H | 168 | 79 | 28,0 | 1453/11 | 49 | M | 157 | 82 | 33,3 |
| 0160/12 | 83 | H | 163 | 70 | 26,4 | 1467/11 | 88 | M | 150 | 61 | 27,1 |
| 1311/11 | 55 | H | 168 | 92 | 32,6 | 1468/11 | 65 | H | 155 | 53 | 22,1 |
| 1321/11 | 38 | M | 152 | 64 | 27,7 | 1470/11 | 81 | H | 165 | 71 | 26,1 |
| 1325/11 | 23 | H | 157 | 55 | 22,3 | 1471/11 | 90 | M | 157 | 58 | 23,5 |
| 1326/11 | 36 | H | 169 | 80 | 28,0 | | | | | | |

Tabla 3.2. Datos antropométricos de las muestras utilizadas en los ensayos de flexión de costilla humana.

| Muestra | Edad | Sexo | Altura [cm] | Peso [kg] | IMC [kg/m ²] | Muestra | Edad | Sexo | Altura [cm] | Peso [kg] | IMC [kg/m ²] |
|----------|------|------|----------------|--------------|-----------------------------|----------|------|------|----------------|--------------|-----------------------------|
| 0136/18L | 61 | H | 168 | 87 | 30,8 | 2268/17L | 44 | H | 170 | 86 | 29,8 |
| 0136/18R | 61 | H | 168 | 87 | 30,8 | 2268/17R | 44 | H | 170 | 86 | 29,8 |
| 0182/18L | 52 | H | 163 | 77 | 29,0 | 2273/17L | 59 | H | 163 | 80 | 30,1 |
| 0182/18R | 52 | H | 163 | 77 | 29,0 | 2273/17R | 59 | H | 163 | 80 | 30,1 |
| 0520/18L | 26 | M | 175 | 74 | 24,2 | 2275/17L | 54 | H | 174 | 127 | 41,9 |
| 0584/18L | 62 | M | 169 | 83 | 29,1 | 2311/17L | 54 | M | 153 | 88 | 37,6 |
| 2102/17L | 58 | H | 170 | 75 | 26,0 | 2311/17R | 54 | M | 153 | 88 | 37,6 |
| 2103/17L | 29 | H | 196 | 99 | 25,8 | | | | | | |

3.2 Preparación de las muestras

X Tras la descongelación de las costillas y previamente a los ensayos experimentales, las muestras fueron tratadas de forma diferente en función del tipo de ensayo. Para los ensayos de tracción, las costillas fueron mecanizadas en la tesis doctoral del Dr. J. Velázquez Ameijide (2015)¹⁴¹ con el fin de obtener muestras de microtracción o *coupons* de sección constante y se determinó la dimensión fractal de las mismas. Dado que tanto los resultados obtenidos de dicha tesis doctoral como los propios *coupons* tras el ensayo fueron utilizados posteriormente en la presente investigación, el proceso de mecanizado y el ensayo de tracción realizado serán descritos en el presente capítulo. Por otro lado, para los ensayos de flexión únicamente se retiró el cartílago costal de las costillas usadas. Ambos procedimientos se detallan en las siguientes subsecciones.

3.2.1 Mecanizado de probetas de tracción

Al determinar las propiedades mecánicas del tejido óseo debe tenerse en cuenta la geometría del hueso en cuestión y la influencia que ésta tiene en los resultados obtenidos. Las probetas *coupon* o tipo alterio de microtracción de hueso cortical permiten eliminar la influencia geométrica, obteniendo así las propiedades

intrínsecas del material. Estas muestras son pequeñas probetas de sección constante, sin variaciones en el espesor, fabricadas para realizar ensayos de tracción. Los *coupons* tienen dimensiones de 28 mm de largo y 8 mm de ancho, con una longitud de referencia de 6 mm de largo y 2 mm de ancho y un espesor típicamente de 0,5 mm en función del grosor del hueso cortical de la costilla utilizada (las dimensiones se muestran en la Figura 3.2).

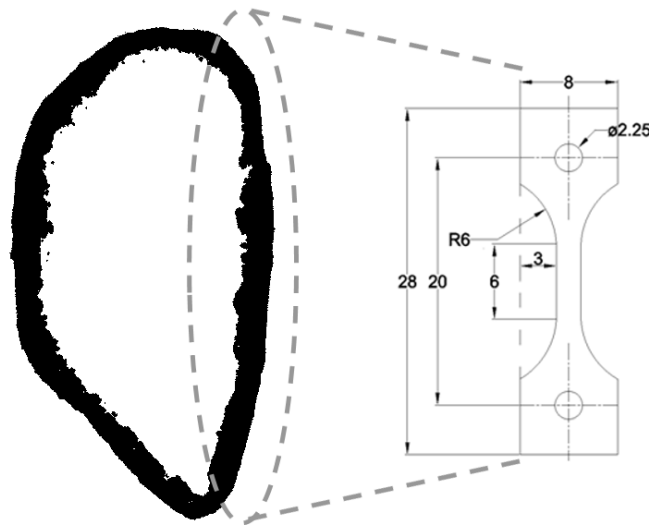


Figura 3.2. Sección de la costilla humana, donde se indica la zona de obtención de los *coupons* cuyas dimensiones (mm) se muestran en el esquema.

Los *coupons* fueron obtenidos del tramo anterior de las costillas, del cual se cortó la lámina del cortical exterior. Estas láminas se perforaron, realizando dos orificios de 2 mm de diámetro separados 20 mm entre ellos y, posteriormente fueron mecanizadas con una fresa copiadora y una plantilla de aluminio con la forma de *coupon*. Finalmente, obtenida la geometría del *coupon* las muestras se pulieron hasta obtener un espesor constante en la zona central, de aproximadamente 0,5 mm. Este proceso se resume en la Figura 3.3. Para conocer la sección efectiva de cada *coupon*, el espesor se midió mediante un micrómetro y el ancho, típicamente de 2 mm, se determinó de forma precisa sobre una fotografía y mediante un software que incorpora herramientas de medición. Todo el procedimiento viene descrito en detalle en la sección C.2 del anexo. Siguiendo las etapas descritas, se obtuvieron los $N_c = 51$ *coupons* de la zona anterior de las costillas, que fueron analizados en este estudio.

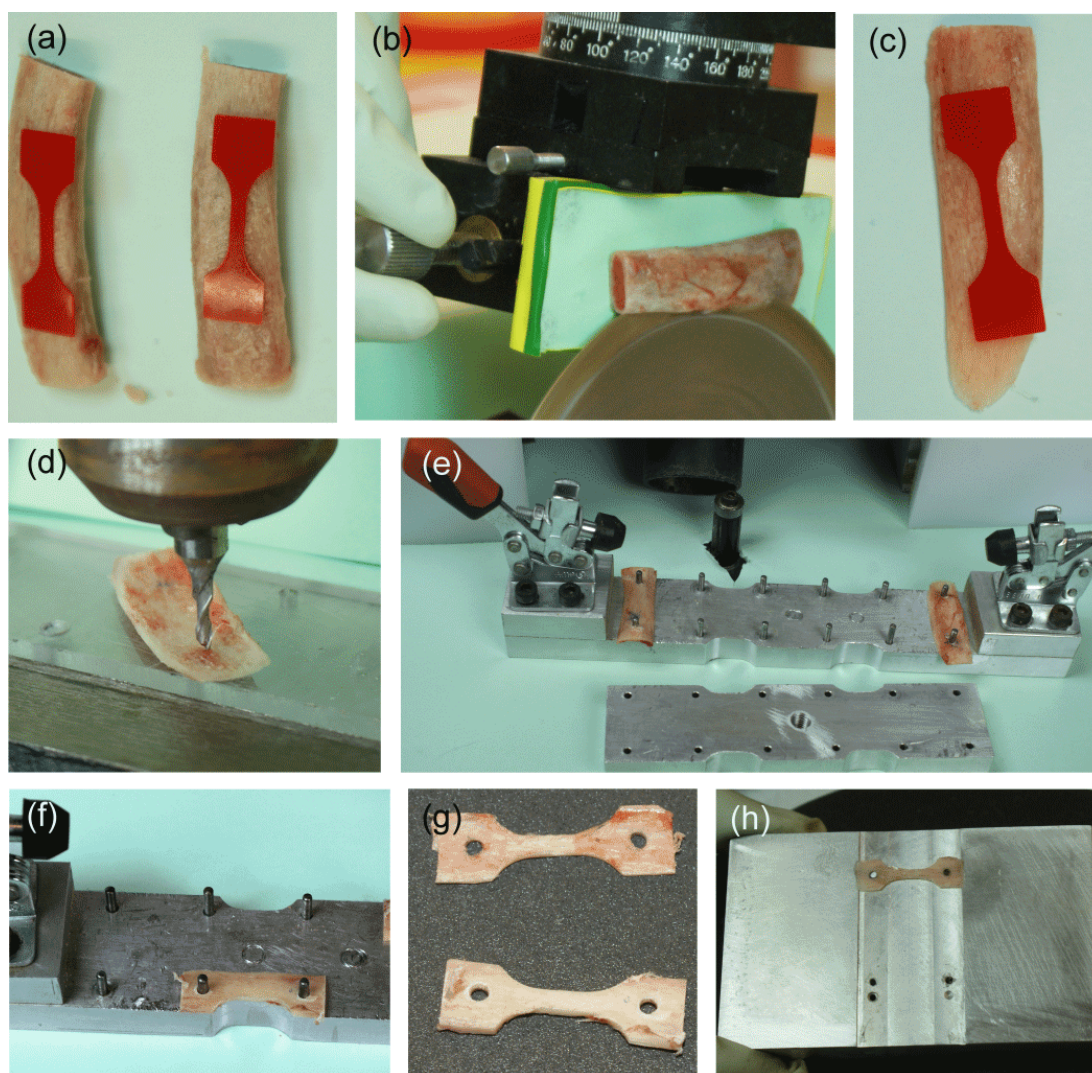


Figura 3.3. Proceso de mecanizado de los *coupons* de tracción: (a) Tramo anterior de la costilla, (b) proceso de corte para obtener una lámina de hueso cortical, (c) lámina de cortical obtenida, (d) perforación de los orificios en la lámina con un fresolín, (e) mecanizado de la muestra con una fresadora y una plantilla de aluminio, (f) mecanizado de la mitad del *coupon*, (g) *coupon* obtenido y (h) pulido de la muestra.

3.2.2 Preparación de muestras de flexión

En esta investigación se han realizado ensayos de flexión de costilla humana completa, con el fin de obtener las tensiones y deformaciones en cualquier punto de la muestra y usar los resultados en los ajustes del modelo constitutivo propuesto.

3.2. PREPARACIÓN DE LAS MUESTRAS

Para ello, se propone un ensayo en el cual los extremos deslizan libremente sobre una guía, a medida que se ejerce una fuerza en la parte superior central de la costilla. En este ensayo se parte de la asunción de que la costilla es aproximadamente una viga curva de hueso cortical de sección similar a la tubular y, por tanto, constituida del mismo material (con las mismas propiedades o cuanto menos, muy semejantes).

Sin embargo, la presencia del cartílago costal resulta problemática en este tipo de ensayo dado que sus características son diferentes a las del hueso cortical y su unión con el extremo de la costilla no es rígida, dificultando la determinación de las propiedades mecánicas del hueso cortical a flexión hasta su rotura. Por otro lado, en la mayoría de las muestras se observó que el extremo posterior donde se encuentra el cuello de la costilla presentaba una superficie irregular, astillada por el proceso de extracción durante la autopsia. Ello junto con la geometría del cuello podría dificultar el libre deslizamiento de los extremos durante el ensayo.

De esta forma, el cartílago costal y el cuello fueron retirados mediante un corte con la sierra de corte lento. En el lado anterior de la costilla se dejó únicamente un margen de 2 mm de cartílago para facilitar el deslizamiento del extremo a lo largo de la guía en el ensayo de flexión (que se describirá posteriormente) y en el lado posterior se realizó un corte justo después de la tuberosidad de la costilla, retirando la parte astillada (ver Figura 3.4).



Figura 3.4. (a) Estado inicial de la costilla y (b) costilla resultante tras el corte del cartílago costal y una pequeña región del extremo posterior.

Por último, como se verá en la sección 3.3.4, antes del ensayo experimental se colocaron unas gomas elásticas a modo de marcadores para poder determinar el cambio geométrico de la costilla a medida que se incrementa la sollicitación.

3.3 Ensayos experimentales

En un ensayo experimental ya sea de tracción o de flexión, las muestras se colocan en la máquina mediante un sistema de fijación adecuado y se aplica una sollicitación que se incrementa de forma progresiva con el paso del tiempo.

En la configuración utilizada en esta investigación, la celda de carga situada en la bancada superior de la máquina capta las fuerzas que se aplican a la muestra y las envía a la unidad de digitalización de adquisición de datos (Spider[®] 8-30 de HBM) que se controla mediante el software CATMAN[®]. Este sistema a su vez envía los datos al ordenador, en el cual se graba un archivo de texto donde constan, para cada instante de tiempo, la fuerza tomada por la celda de carga junto con el alargamiento de la muestra, determinado por el cambio de posición de la bancada de la máquina. Partiendo de estos datos y mediante las ecuaciones elementales y ciertos parámetros de la muestra, se puede calcular la tensión y la deformación a lo largo de todo el ensayo.

La dificultad del ensayo de tejido óseo reside en la determinación de los alargamientos de la muestra a lo largo de todo el experimento (especialmente en los ensayos de microtracción) ya que, dada la baja deformación del hueso cortical (que no suele superar el 2,5 – 3 %), el incremento de longitud instantáneo, dado por la posición de la bancada de la máquina, no es suficientemente preciso. Además, a ello se le añade la complejidad geométrica de la costilla humana completa en el caso de ensayos de flexión. Por este motivo, se ha visto la necesidad de recurrir a una metodología específicamente desarrollada, en la que se recurre a la grabación de un video de la zona de interés de la muestra durante el ensayo. Esto servirá para rastrear las posiciones de diversos puntos materiales de la muestra a lo largo de todo el ensayo, a partir de las cuales pueda determinarse posteriormente la deformación con precisión. La configuración experimental general se muestra en la Figura 3.5.

En la tesis del Dr. J. Velázquez-Ameijide (2015),¹⁴¹ en la que se estudiaron las propiedades de hueso cortical de costilla en los *coupons* de 0,5 mm de grosor usados en esta investigación, ya se planteó una metodología experimental para realizar estos ensayos. La solución a la problemática de la determinación de los alargamientos en muestras tan pequeñas viene dada por la grabación de un video de la longitud de referencia del *coupon* durante todo el ensayo. El video puede descomprimirse posteriormente en *frames* o imágenes que, tras su procesado, pueden aportar datos de la deformación de la muestra con mucha precisión.

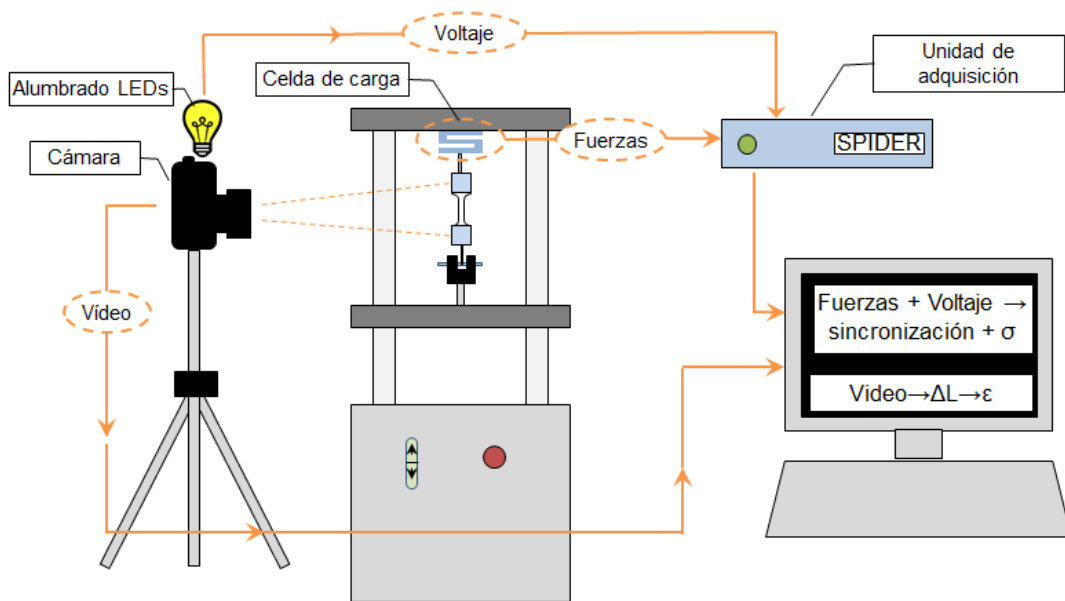


Figura 3.5. Colocación de los dispositivos en los ensayos experimentales; la muestra se coloca en la máquina de tracción y la celda de carga envía datos de fuerzas a la unidad de adquisición Spider[®]. Por otro lado, la cámara graba la muestra durante el ensayo. El voltaje de la iluminación instalada en la cámara está conectado a la unidad de adquisición para realizar la sincronización de datos.

En los ensayos de microtracción de *coupons* se usó una cámara modelo Casio[®] Exilim EX-F1 con una lente incorporada de 10 dioptrías fijada a un trípode, capaz de grabar 60 *frames* por segundo (Figura 3.6(a)). Esta cámara mostró ser adecuada para la grabación de una zona pequeña, como es el caso de la longitud de referencia del *coupon*. En los ensayos de flexión desarrollados en este estudio, se ha utilizado una cámara PCO 1200 de Camware[®] de alta velocidad (Figura 3.6(b)), cuya velocidad de captura es de hasta 1200 *frames* por segundo y permite grabar la muestra completa con una definición apropiada (el procesamiento de los videos se tratará en la subsección 3.3.4).

De esta forma, se obtiene el archivo de fuerzas para cada instante de tiempo, a partir del cual se obtienen las tensiones y por otro lado, un video de la muestra durante el ensayo, cuyo procesamiento permite conocer las deformaciones. No obstante, es importante determinar el nivel de deformación de la muestra para cada valor de tensión y, por tanto, es necesario poder sincronizar o relacionar el video grabado por la cámara con el archivo de fuerzas para cada instante de tiempo.

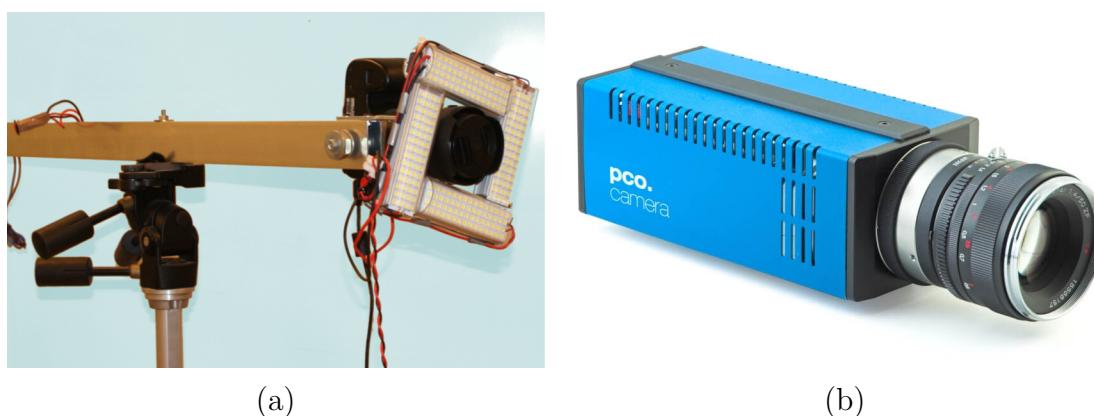


Figura 3.6. (a) Cámara Casio® Exilim EX-F1 para la grabación del ensayo de *coupons* con la adaptación del alumbrado LED para la sincronización de archivos y (b) cámara PCO 1200 de Camware® usada en los ensayos de flexión.

Para poder hacerlo, se recurrió al alumbrado de LEDs instalado en la cámara, usado hasta el momento para iluminar la muestra durante la grabación. Se optó por el uso de LEDs dado que éstos no calientan la muestra y evitan la fluctuación producida por la incandescencia consecuencia del uso de una bombilla común, que depende de la frecuencia de la red y que impide la grabación de vídeo a alta velocidad. En el alumbrado de LED se instaló un cable que se conectó a la unidad de adquisición Spider® que captaba las fuerzas, registrando así para cada valor de fuerza el voltaje de la iluminación. Por otro lado, se instaló en el alumbrado un contacto NC, para encender y apagar la iluminación. Con ello, al iniciar el video y la captación de datos por parte del ordenador, la muestra está iluminada, siendo el voltaje positivo en el archivo de fuerzas. A continuación, al presionar el contacto NC la luz se apaga, oscureciendo por completo la imagen de la muestra en el video y a su vez, registrando valores nulos del voltaje. Finalmente, la iluminación se enciende, mostrando un incremento de voltajes en el archivo de fuerzas y de nuevo la muestra iluminada en el video. Ello permite sincronizar el archivo de fuerzas con el video mediante la caída de datos de voltaje del primero y la ausencia de luz en el segundo.

La sincronización mediante el apagado de la iluminación se realizó antes justo antes de iniciar la aplicación de fuerza, dejando constancia de las imágenes oscuras en el video y de la caída de voltaje en el archivo de fuerzas y, segundos después, se inició el ensayo experimental. Este procedimiento ha sido seguido en los ensayos de tracción y de flexión. En las subsecciones a continuación, se exponen las características particulares de ambos ensayos.

3.3.1 Ensayo de tracción

Para realizar los ensayos de microtracción de *coupons* de hueso cortical, la muestra debe estar sujeta a la máquina de tracción y contenida en el plano, evitando cualquier recolocación que pueda darse durante el incremento de sollicitación, pudiendo afectar a las deformaciones obtenidas del video.

A fin de sujetar las muestras en la máquina se diseñó un juego de mordazas de aluminio, cada una con un pasador que se insertó a través de cada orificio del *coupon*. Las mordazas se cerraron colocando la parte superior e introduciendo cuatro tornillos de apriete para fijar el conjunto, que se roscaron mediante una llave dinamométrica para no ejercer una fuerza excesiva que pudiera dañar el *coupon* y repartir la fuerza uniformemente. El montaje del *coupon* en las mordazas se realizó en un mecanismo de aluminio diseñado para tal fin, que sujeta las mordazas firmemente mediante dos tornillos, evitando así cualquier movimiento que pueda producir daños en el *coupon* (ver Figura 3.7).

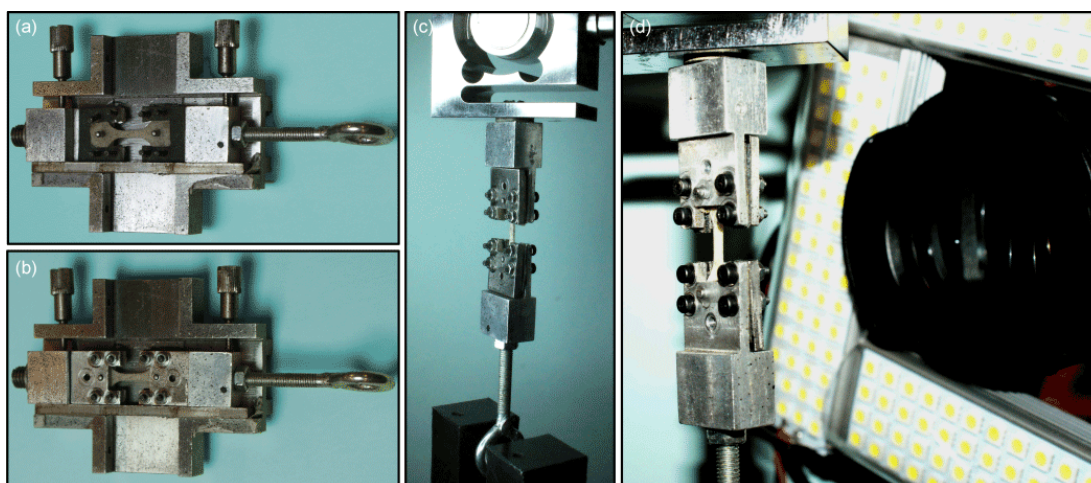


Figura 3.7. (a) Colocación del *coupon* en las mordazas, fijadas en el sistema de montaje, (b) cierre de las mordazas colocando la parte superior y los cuatro tornillos de fijación, (c) fijación de las mordazas a la celda de carga de la máquina de tracción y se colocación del pasador a través del cáncamo inferior y la pieza polimérica y (d) montaje final, donde la muestra queda frente a la cámara.

Una vez colocada la muestra en las mordazas y sin retirar el conjunto del sistema de montaje, se procede a la colocación del *coupon* en la máquina de tracción. Para ello, en la mordaza superior se instaló un tornillo, en la mordaza inferior un cáncamo y en la bancada inferior de la máquina de tracción fijó una pieza de polímero en forma de *U*, con dos orificios en sus laterales. La mordaza superior

se roscó directamente a la celda de carga, quedando el cáncamo de la mordaza inferior situado en la parte central de la pieza polimérica y alineado con sus orificios. A través de los orificios de la pieza polimérica y del cáncamo se introdujo un pasador de aluminio. Este diseño proporciona un único punto de contacto entre el cáncamo y el pasador, evitando las recolocaciones de la muestra. Previamente a los ensayos, tanto el cáncamo como la pieza polimérica fueron debidamente alineados para evitar torsiones que pudieran dañar el *coupon* y asegurar que éste siempre se encontró el plano de la máquina. Una vez fijada la muestra a la máquina de tracción se retiró el sistema de montaje de aluminio, dejando la muestra colocada en la posición de ensayo.

3.3.2 Ensayo de flexión

Son muchos los tipos de ensayos a flexión que se han desarrollado con costilla humana y que pueden encontrarse en la literatura, en los que se observa variedad en las condiciones, restricciones, fijaciones y características de la muestra ensayada. En esta investigación se busca simular un ensayo de flexión en el cual la muestra pueda moverse con la mayor libertad posible antes de la fractura, pudiendo así analizar la evolución de su posición y curvatura hasta el fallo macroscópico. De esta forma, se propone un diseño experimental en el cual los extremos de la costilla deslicen libremente a lo largo de una guía a medida que se incrementa la sollicitación, ejerciendo la fuerza con un impactor prismático para minimizar la concentración de tensiones. El objetivo finalmente es poder determinar la tensión y la deformación en cada punto de la muestra y a lo largo de toda la costilla.

El montaje experimental del ensayo de flexión se muestra en la Figura 3.8. Se diseñó una guía de acero de perfil *U* de 20 mm de luz, dentro de la cual se situaron los dos extremos de la costilla. Para minimizar la fricción entre la guía y los extremos, dentro del perfil de acero se colocó otro perfil de aluminio de 18 mm de luz, fijado firmemente al primero mediante un tornillo y sin juego entre ambos perfiles. Con ello se asegura la rigidez del perfil de acero al ejercer la fuerza y una mejora de la fricción gracias al perfil de aluminio. Así mismo, el interior de la guía se cubrió con un lubricante deslizante y además, con el fin de minimizar el rozamiento, ambos extremos de la costilla fueron envueltos en cinta de PTFE (politetrafluoroetileno). Es conocido que el politetrafluoroetileno o teflón tiene un bajo coeficiente de fricción, hecho que ayuda al deslizamiento de la muestra.

La guía fue fijada a la celda de carga colocada en la bancada superior de la máquina de tracción, quedando la costilla en posición invertida, tal que los extremos se introdujeron en la guía y la fuerza se aplicó en la parte central de la costilla desde la bancada inferior.

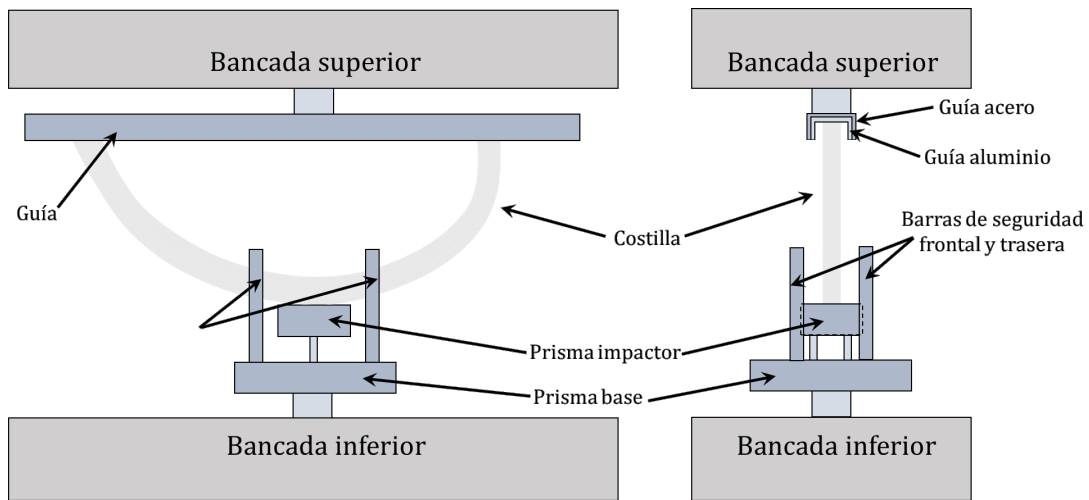


Figura 3.8. Esquema del diseño experimental del ensayo de flexión, vistas frontal (izquierda) y lateral (derecha). La guía es un perfil de aluminio insertado en un perfil de acero que se fija a la bancada superior. En la bancada inferior se coloca el prisma base con las cuatro barras de seguridad (dos frontales y dos traseras) y al cual se fija el prisma que ejerce la fuerza sobre la costilla (prisma impactor). Los extremos de la costilla se sitúan dentro de la guía la parte central exterior en contacto con el prisma impactor.

El útil diseñado para la bancada inferior está formado por una pieza prismática de aluminio, en cuya base tiene una rosca para ser fijada a la bancada y en la cual se realizaron cuatro colisos pasantes. Estos colisos tienen por objetivo sujetar cuatro barras verticales, cuya función es la de asegurar la protección si la costilla deslizara en exceso y sus extremos salieran de la guía (estas barras no deben estar en contacto con la costilla, su única función es la de aportar seguridad al montaje). Los colisos permiten el desplazamiento de las barras para ser ajustadas en la posición deseada. En el centro de la pieza prismática se realizaron dos agujeros roscados a través de los cuales se insertan dos tornillos por la parte inferior, que se roscaron a una segunda pieza prismática más pequeña. Este prisma queda colocado entre las cuatro barras de seguridad y entra en contacto con la costilla, ejerciendo la fuerza en ella. Tras hacer pruebas previas con un rodillo a modo de impactor, se comprobó que este tipo de geometría ejerce la fuerza de forma puntual, produciendo daños locales en la costilla. Sin embargo, el objetivo es

captar las microfracturas que se dan en la costilla en la zona con mayor tensión usando la técnica de emisión acústica y, por ello, se optó por aplicar la fuerza de forma distribuida para evitar las concentraciones que provoquen fracturas locales. Es por este motivo que se eligió la pieza prismática de aluminio, que asegura mayor contacto con la muestra durante la aplicación de la sollicitación, evitando concentradores de tensiones que produzcan tanto daños como señales de emisión acústica que no son de interés, lo cual podría inducir la fractura macroscópica a tensiones menores a la máxima. Además, dada la curvatura de la costilla, la zona de contacto entre el impactor y la costilla es pequeña.

Siguiendo la metodología del ensayo de tracción, el de flexión fue grabado con una cámara de alta velocidad para poder posteriormente computar los desplazamientos y obtener las deformaciones. La cámara utilizada, modelo PCO 1200 de Camware[®] se controló mediante la conexión de un cable de red de la cámara a un ordenador y usando el software Camware[®]. Dicho software permite grabar en modo búfer para asegurar que el ensayo se graba hasta el final del mismo. La cámara fue fijada a un trípode y situada frente a la costilla.

Una de las dificultades principales de este ensayo fue poder definir qué puntos debe rastrear el programa sobre el video para poder computar los desplazamientos. Mientras que en ensayos de tracción de muestras planas normalizadas y de sección rectangular existen diversas normativas y formas de calcular la deflexión, el módulo elástico y otros parámetros o propiedades de interés, en el caso de costilla completa con una geometría irregular y curva, estas normativas no son aplicables. Para obtener las deformaciones de la costilla completa es necesario conocer tanto la curvatura en cada instante como la posición de diferentes puntos a lo largo de toda la muestra. Con el fin de solventar este inconveniente, se optó por colocar en la costilla diversas gomas elásticas de colores a modo de marcadores. Estas finas gomas se colocaron rodeando la costilla a lo largo de toda su longitud y los puntos que se analizaron fueron las intersecciones de las gomas con la línea o contorno superior e inferior de la costilla, como se detalla en la sección 3.3.4.

Previamente a la colocación de la muestra en la máquina se instalaron tres sensores de emisión acústica; uno en la superficie interior central de la costilla y dos en cada extremo y sobre la superficie exterior. Mientras que el objetivo del sensor central es el de detectar los microfallos en la muestra, los sensores extremos tienen como función discriminar las señales procedentes del rozamiento de la muestra con el entorno (guía o prisma impactor). Estos sensores se fijaron

a la costilla mediante bridas y, entre el sensor y la muestra, se colocó un gel para la correcta transmisión de las señales. Los sensores detectan las señales asociadas a los microfallos y envían la información sobre las ondas elásticas propagadas durante la rotura a la central de emisión acústica. Los datos de emisión acústica se exportaron en un archivo de datos para poder ser tratados. La central de emisión acústica está formada por una unidad de adquisición conectada a un segundo ordenador, en el cual se registraron las señales captadas junto con el voltaje de la cámara. De esta forma fue posible la sincronización de los datos de emisión acústica tanto con el video como con los valores de fuerza.

El procedimiento de ensayo sigue los pasos descritos al inicio de la presente sección; una vez colocada la muestra en su posición y aplicada la precarga, se inició la grabación del video con la cámara de alta velocidad y la lectura de datos de fuerza en la unidad de adquisición y de emisión acústica. Tras ello se apagó y encendió la iluminación de la cámara para enviar la caída de voltaje tanto a la central de emisión acústica como a la unidad de adquisición de fuerzas y a su vez, generar una pérdida de luz en el video. Tras ello se inició el incremento de sollicitación hasta la rotura y con ello se obtuvieron los tres archivos de interés; un video del ensayo, un archivo con las fuerzas y otro con las señales de emisión acústica (el tratamiento de todos los datos se describe en la siguiente sección). Los ensayos fueron realizados a una velocidad de 10 mm/min que permitió una obtención de datos suficiente para poder posteriormente extraer los resultados. El ensayo fue detenido una vez captada una fractura macroscópica en la muestra, lo cual pudo percibirse tanto físicamente como en la gráfica instantánea de fuerzas de la máquina de tracción.

3.3.3 Sincronización de datos

Tras los ensayos se obtuvo el vídeo, el archivo de fuerzas y voltajes y, en el caso de flexión, los datos de emisión acústica. El siguiente paso fue la sincronización de todos estos archivos para poder relacionar los datos en cada instante. El objetivo es hallar el punto de inicio de la sollicitación en ambos archivos y únicamente procesar los fotogramas desde ese punto hasta la imagen previa a la rotura, que corresponde al conjunto de fotogramas que aportará las deformaciones. Este procedimiento es común a ambos ensayos.

Para poder relacionar datos e imágenes se creó en investigaciones previas una rutina de MATLAB® de sincronización que, a partir de la localización de la caída de voltaje en el video y el documento de datos, relaciona ambos archivos. La rutina inicialmente abre y lee el archivo de fuerzas, en el cual se encuentran los valores de tiempo, fuerza y voltaje, adquiridos a una frecuencia de 60 Hz y localiza el punto en el cual se encuentra la caída de voltaje, entendiendo por ésta el intervalo en el que el voltaje pasa de 1014 V a 0 V y, el punto en el cual el voltaje vuelve a incrementarse a 1014 V de nuevo, que corresponde a la iluminación del vídeo tras el apagón de luz (Figura 3.9(a)).

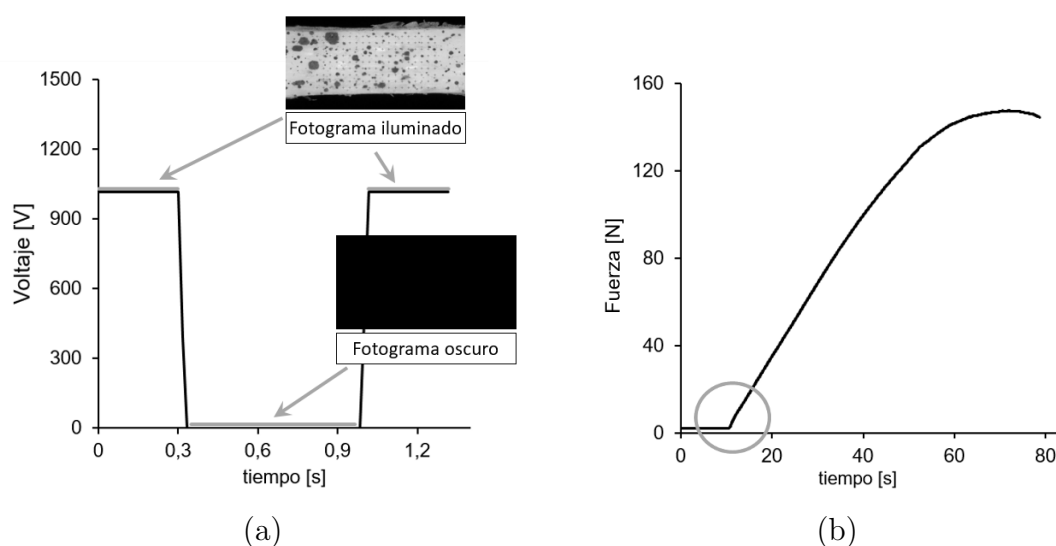


Figura 3.9. (a) Gráfico voltaje-tiempo y representación del apagón de luz en el ensayo de tracción y (b) curva fuerza-tiempo para localización del inicio de ensayo.

A continuación, abre el conjunto de fotogramas y calcula la intensidad de los diez primeros. Para ello, convierte los colores de las imágenes en escala de grises⁴ y en cada fotograma realiza un sumatorio de la intensidad de todos los píxeles. Entre estas imágenes localiza los fotogramas cuya intensidad es próxima a cero, asociándolos al apagón de luz. De esta forma pudo relacionarse el archivo de fuerzas con el video. El siguiente paso fue encontrar el punto en el cual se inicia el ensayo, es decir, cuando la fuerza empieza a incrementarse. Con este fin, la rutina busca el punto en el cual se incrementa la pendiente de fuerza de forma

⁴La codificación de intensidad de píxeles de una imagen va desde el 0 para el color negro al 255 para el blanco.

más brusca, correspondiente al inicio de la sollicitación. De la misma forma, esta rutina localiza el dato de fractura buscando la caída más grande de fuerza en el archivo. La rutina de MATLAB® proporcionó un archivo de texto donde consta el número de dato de fuerzas y el número de fotograma correspondiente para la caída de voltaje, la subida, el inicio de la sollicitación y la fractura.

3.3.4 Procesado de imágenes

Una vez sincronizados los datos, se procedió al procesado de los videos para determinar las deformaciones de las muestras en cada instante de tiempo y relacionarlas con las tensiones. Para ello, se utilizó el módulo de trabajo *Digital Image Correlation and Tracking* (DIC) implementado en MATLAB®, que incorpora rutinas específicas para el procesado de fotogramas de vídeo. Este conjunto de rutinas se basa en la generación de una matriz o malla de puntos sobre la primera imagen y posteriormente, el rastreo de dichos puntos en las siguientes imágenes, proporcionando un archivo en el que consta la posición de cada punto en cada fotograma del vídeo. A partir de las posiciones de cada punto pueden determinarse sus desplazamientos y, posteriormente, las deformaciones.

La creación de dicha malla o conjunto de puntos depende del tipo de ensayo, como se especificará en las siguientes subsecciones. Una vez generados los puntos, el módulo de trabajo del software transforma los colores de las imágenes a escala de grises y, en el primer fotograma, lee los colores de los píxeles (intensidad) en un entorno alrededor de cada punto de la malla (dicho entorno dependerá del tipo de ensayo). A continuación, el software busca en los siguientes fotogramas un punto cercano, en el cual la intensidad del entorno sea la misma o la más similar a la leída en la imagen anterior, situando ahí la posición del punto en cuestión. Esto se repite para todos los puntos de la malla y todos los fotogramas del video, proporcionando un archivo de salida en el cual consta la posición de cada punto en cada instante de tiempo.

Nótese que, para que el proceso de rastreo efectuado por el software sea lo más efectivo posible, es importante que los puntos se definan sobre una superficie en la cual las intensidades o colores de los píxeles varíen y, por tanto, en que la textura de la muestra o del entorno sea diferente. Con ello, la intensidad de píxeles alrededor del punto a seguir será diferente al resto e inequívoca y el software podrá definir la posición de cada punto de forma precisa. Según el tipo

de ensayo, se definieron dos formas para facilitar el rastreo de los puntos, que se describirán a continuación junto con el resto de características particulares en cada ensayo. El cálculo de deformaciones se expone en la metodología teórica del capítulo 4, en las subsecciones 4.3.1 y 4.4.2 para los ensayos de tracción y flexión respectivamente, en las que se detallan las consideraciones teóricas y geométricas que deben tenerse en cuenta en cada caso.

Procesado de coupons

En el ensayo de microtracción de *coupons*, la tensión y la deformación se determinaron sobre la longitud de referencia de la muestra (es decir, la zona central de 2 mm de ancho y aproximadamente 0,5 mm de espesor). Para el procesado de imágenes en este tipo de ensayo, se creó una malla rectangular en la longitud de referencia formada por puntos separados 50 píxeles entre ellos. Así, el software MATLAB[®] calculó la intensidad de los píxeles alrededor de cada punto en un cuadro de 50×50 píxeles (con centro en el propio punto) y buscó la posición del punto en el resto de fotogramas hasta el final del ensayo (Figura 3.10).

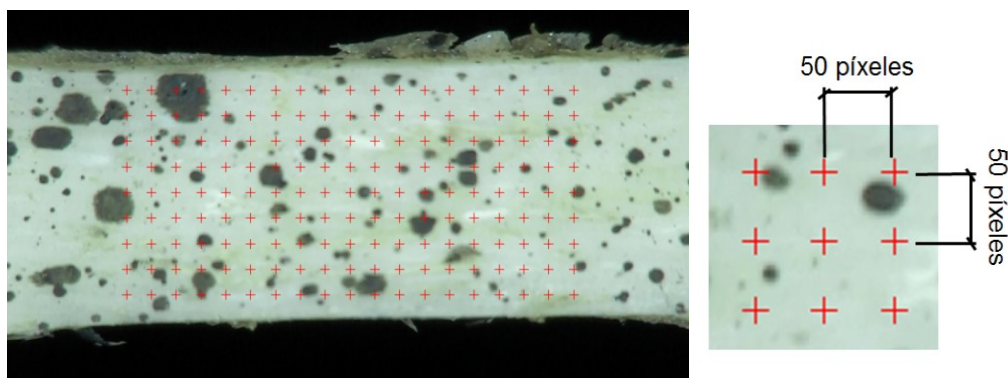


Figura 3.10. Malla de puntos rectangular creada sobre la longitud de referencia del *coupon*, con una separación entre puntos de 50 píxeles.

Para facilitar el proceso de rastreo de los puntos, antes del ensayo experimental de tracción los *coupons* fueron pintados con una nube de pintura de spray, dejando un patrón aleatorio de pequeños puntos negros sobre la longitud de referencia. De esta forma, la aleatoriedad del patrón de puntos hizo que la intensidad de los píxeles en el entorno de cada punto de la malla fuera particular y diferenciada de la del resto de puntos de la malla.

Procesado de flexión

Tras los ensayos de flexión se obtiene la grabación de la costilla completa cuya curvatura cambia a medida que se incrementa la sollicitación. Es por ello que no es posible procesar las imágenes mediante una malla rectangular, además del hecho de que no es de interés conocer las deformaciones de una zona específica, ya que la deformación no es la misma en cualquier punto sobre la muestra como en el caso de los *coupons*.

Para poder obtener los parámetros del modelo constitutivo objeto de esta investigación es necesario conocer las deformaciones a lo largo de toda la costilla, las cuales se determinan a partir de los desplazamientos de diversos puntos creados con el software. Por ello y como se comentó en la sección 3.3.2, en la costilla se colocaron unas gomas elásticas, cuya intersección con los contornos superior e inferior de la costilla definieron un conjunto de puntos que fueron rastreados con el software (Figura 3.11).

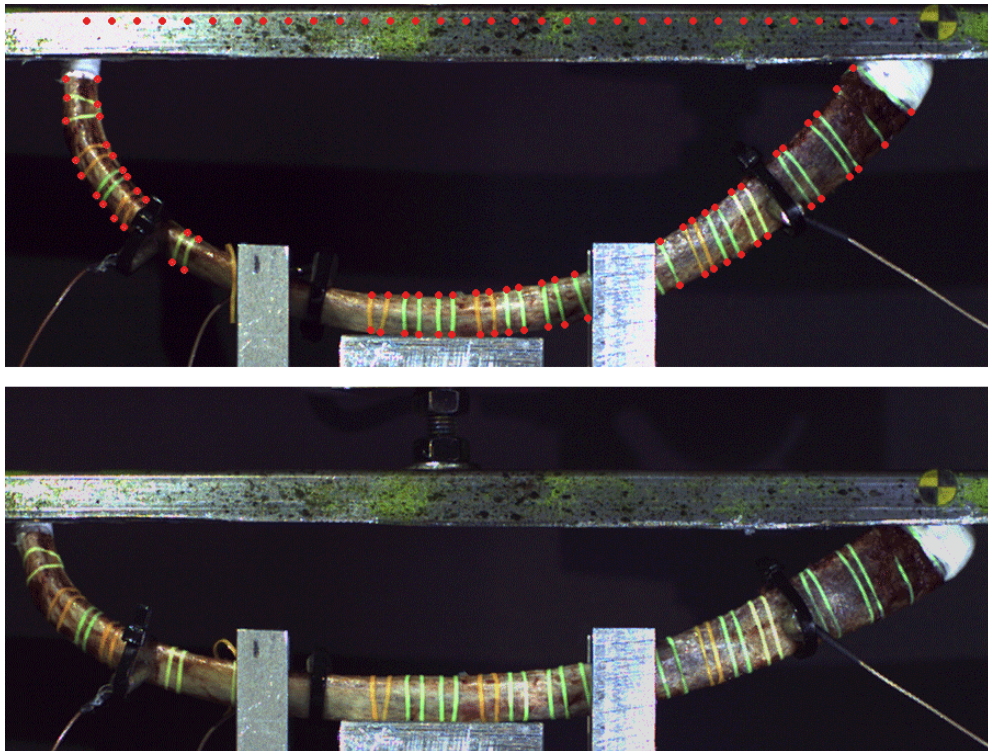


Figura 3.11. Fotogramas de la posición inicial de la costilla, donde se definieron con el software MATLAB[®] los puntos a rastrear en costilla y bancada (superior) y posición final de la costilla justo antes de la rotura (inferior).

Los desplazamientos deben determinarse con respecto a un sistema de referencia fijo, en este caso la bancada inferior donde se situaron los extremos de la costilla. Dado que fue la bancada superior la que se desplazó presionando la costilla contra el impactor, fue necesario conocer tanto la posición de la bancada en cada instante de tiempo como la posición de diferentes puntos sobre la muestra. De esta forma, inicialmente trazó una línea con el software MATLAB[®] de 31 puntos sobre la guía, cuyo rastreo proporcionó la posición de la bancada en cada fotograma. Con este fin, la guía fue previamente pintada con un patrón de puntos aleatorio para determinar correctamente las posiciones de los puntos creados con el software. Seguidamente, se definió con el software los puntos sobre la costilla, que fueron generados en las intersecciones entre el contorno superior e inferior de la muestra y cada goma colocada. Definidos los puntos, el software buscó la posición de cada uno de ellos, tanto de la guía como de la costilla, en todos los *frames* que formaban parte del ensayo experimental.

En este caso, el entorno de cada punto para buscar la intensidad de los píxeles de alrededor fue definido como 10×10 píxeles, para evitar interferencias de los cables de emisión acústica u otros elementos del entorno que pudieran producir la pérdida de la posición de alguno de los puntos. A partir de las posiciones de estos puntos se determinó la deformación de la costilla y mediante las fuerzas definidas por la celda de carga se calcularon las tensiones (ver sección 4.4).

3.4 Medida de la dimensión fractal

La dimensión fractal de los *coupons* utilizados en esta investigación fue determinada en el marco de la tesis del Dr. J. Velázquez-Ameijide (2015).¹⁴¹ Para ello se utilizó un equipo Argus[®] PET/CT donde se realizó una *Tomografía Computarizada* (CT) de las muestras. Dicha técnica se basa en la toma de un conjunto de radiografías a partir de las cuales se crea un conjunto de imágenes, correspondientes a los cortes transversales de los *coupons* que, mediante el software adecuado permiten su reconstrucción tridimensional. A partir de la reconstrucción de los CT de cada *coupon*, se obtuvo la distribución de masa de la muestra y de ella se extrajeron las imágenes correspondientes a la longitud de referencia (zona central) del *coupon* para determinar la dimensión fractal.

La dimensión fractal aproxima numéricamente la dimensión de *Hausdorff-Besicovitch*. Para dicho cálculo se empleó el método expuesto en G. Dougherty

& G.M. Henebry (2001),³⁸ que usa Transformadas Rápidas de Fourier (FFT), como se resume a continuación. El procedimiento parte de las imágenes del CT correspondientes al conjunto de secciones que constituyen la longitud de referencia del *coupon*. Cada imagen en escala de grises puede ser concebida como una función que, a cada pixel de coordenadas (x, y) , le asigna el valor de grises $0 \leq G_s(x, y) \leq 255$. Esa función se analiza espectralmente mediante la Transformada de Fourier \hat{G}_s de la función original G_s que viene dada por la fórmula:

$$\hat{G}_s(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_s(x, y) e^{-2\pi i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy \quad (3.1)$$

donde $G_s(x, y) = 0$ cuando $x > x_{\max}$ o $y > y_{\max}$ y cuando $x < 0$ o $y < 0$, tal que solo la región ocupada por la imagen contribuye en la integral. La transformada de Fourier se calculó para cinco secciones distintas de la longitud de referencia de cada *coupon*.

Tras el cálculo de la integral se hace un cambio de variable $(\omega_x, \omega_y) \mapsto (\omega, \alpha)$ usando la relación compleja $\omega e^{i\alpha} = \omega_x + i\omega_y$, definiendo la función $\Gamma_s(\omega, \alpha)$ por medio de la expresión $\Gamma_s(\omega, \alpha) = \hat{G}_s(\omega_x, \omega_y) = \hat{G}_s(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha)$.

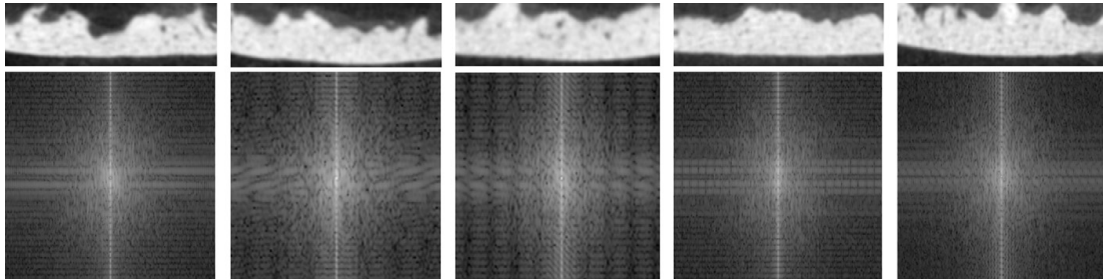


Figura 3.12. Cinco secciones de μ CT de un *coupon* y su transformada de Fourier (FFT) en (ω_x, ω_y) .

A continuación, se determina el espectro de energía radial promedio $S(\omega)$ de la FFT de cada sección:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Gamma_s(\omega, \alpha) \Gamma_s^*(\omega, \alpha)| d\alpha \quad (3.2)$$

Graficando el espectro de potencia $S(\omega)$ frente a la frecuencia (ver Figura 3.13), puede observarse que a frecuencias ω elevadas (o equivalentemente longitudes de onda bajas) la potencia decrece asintóticamente como $S(\omega) \approx a\omega^{-\alpha}$.

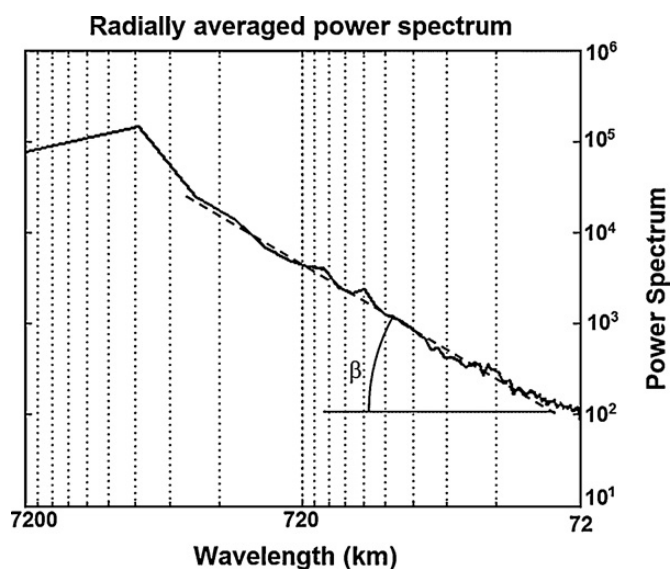


Figura 3.13. Gráfico del espectro de potencia frente a la longitud de onda. Se observa una caída lineal en la segunda parte del gráfico, cuya pendiente β está relacionada con la dimensión fractal ($DF = 4 - \beta/2$).

Este exponente α permite calcular la dimensión fractal (DF) como:

$$DF = 4 - \frac{\alpha}{2} \quad (3.3)$$

De esta forma, se obtuvo un valor de la dimensión fractal para cada una de las cinco secciones procesadas de cada *coupon* y el promedio de estos cinco valores de DF fue considerado como la DF del *coupon*. Tanto el cálculo de las FFT como el espectro radial promedio de potencia $S(\omega)$ se determinaron mediante el software MATLAB® y correlación digital de imágenes (DIC).

3.5 Determinación del conenido mineral

Como se describió en los antecedentes, varios autores han señalado la influencia de las fases presentes en el tejido óseo (que aquí entenderemos por composición) en sus propiedades mecánicas.^{68,148} Por ello, dado que los valores de los parámetros del modelo constitutivo aquí propuesto dependerán de la tensión y deformación de la muestra, resulta de interés saber qué relación tienen con la composición.

3.5. DETERMINACIÓN DEL CONTENIDO MINERAL

Para estudiar la composición de las muestras, se ha realizado un proceso de secado y calcinación de los *coupons* ensayados a tracción. Una vez rotos tras los ensayos, los *coupons* fueron conservados en probetas cilíndricas con suero fisiológico dentro de un refrigerador. Estos *coupons* fueron recuperados para el desarrollo de este estudio. La metodología de calcinación aquí seguida está basada en la expuesta en los artículos de Yeni *et al.* (1998)¹⁴⁸ y Kemper *et al.* (2005)⁶⁸ y permite determinar la fracciones mineral, orgánica y acuosa del tejido óseo.

El primer paso de la metodología de calcinación fue determinar el peso y la densidad de cada *coupon*, usando una balanza hidrostática (ver Figura 3.14(a)-(c)). En la base de la balanza se colocó un recipiente de vidrio lleno de suero fisiológico, cuya densidad fue conocida ($\rho_{suero}=1,08 \text{ g/cm}^3$).⁵ El *coupon* se extrajo de la probeta cilíndrica y se colocó sobre un papel absorbente para retirar el exceso de suero restante del recipiente. Una vez seco, se puso en la bandeja superior de la balanza, obteniendo la masa del *coupon* (m). A continuación, el *coupon* se colocó sobre la rejilla inmersa en el suero de dentro del recipiente de vidrio y se tomó nota de la masa del *coupon* en el suero (m_{sum}).

La siguiente etapa es el secado de la muestra para extraer el contenido de agua del tejido, sometiendo a las muestras a una temperatura de 100°C durante 24h en condiciones de vacío. Para ello, se diseñó un recipiente de acero AISI 303 de medio litro de capacidad, con una cubierta del mismo material, que se fijó al recipiente mediante cuatro tornillos. En la cubierta se instaló una válvula de vacío y una junta para evitar las fugas.

Con el fin de optimizar el proceso de secado, se fabricó un sistema de separación de muestras a modo de estantería que permite secar varios *coupons* simultáneamente. Dicho sistema consta de cuatro barras de latón como columnas, a través de las cuales se insertaron diez láminas circulares de aluminio alineadas verticalmente y separadas medio centímetro entre ellas por tuercas metálicas. Este sistema se fabricó con elementos metálicos capaces de transmitir el calor que irradian las paredes del recipiente de acero por conducción en el interior del mismo. Tras colocar un *coupon* en cada nivel del sistema de separación, el conjunto se introdujo en el recipiente de acero, que se cerró y se colocó en una estufa previamente termalizada a 100°C (Figura 3.14(d)-(f)). Para realizar el vacío en el recipiente, se conectó a la válvula de la cubierta un tubo de goma y en el exterior de la estufa,

⁵La densidad del suero se determinó usando un densímetro a la temperatura del laboratorio.



Figura 3.14. Proceso de secado y calcinación de *coupons*: (a) Balanza hidrostática para determinar la densidad y masa de los *coupons*, (b) pesaje en seco en la bandeja superior de la balanza, (c) pesaje de la muestra sumergida en suero, (d) colocación de los *coupons* en el sistema de separación, (e) introducción del sistema de separación con los *coupons* en el vaso de vacío, (f) secado de las muestras en la estufa en condiciones de vacío, (g) introducción de los *coupons* en los crisoles para la calcinación.

el otro extremo del tubo se ensambló a una bomba rotatoria TELSTAR® RV30. Esta bomba se mantuvo activa durante las 24h del proceso de secado, asegurando las condiciones de vacío en el interior del recipiente en todo momento. Tras el proceso de secado, las muestras se dejaron reposar a temperatura ambiente y posteriormente se pesaron de nuevo en la balanza, determinando la masa en seco del *coupon* (m_s), o masa sin agua.

3.5. DETERMINACIÓN DEL CONTENIDO MINERAL

El último paso es la calcinación de los *coupons* en un horno a 600°C durante 24 horas. Este proceso se realizó usando crisoles como recipientes en los que se introdujeron los *coupons*. La temperatura en el interior del horno fue controlada en todo momento mediante una sonda. Transcurrida la etapa de calcinación, los crisoles se dejaron 1h a temperatura ambiente y finalmente, los *coupons* se colocaron de nuevo en la balanza para tomar los valores de la masa de los *coupons* calcinados (m_c).

A partir de los valores determinados, el volumen se calculó como:

$$V = \frac{m - m_{sum}}{\rho_{suero}} \quad (3.4)$$

siendo m la masa original del *coupon*, m_{sum} su masa en el suero y ρ_{suero} la densidad del suero. Obtenido el volumen, puede definirse la densidad del *coupon* como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.5)$$

La densidad anterior considera la masa de las tres fracciones presentes en el hueso cortical (mineral, orgánica y agua); sin embargo, la densidad también puede determinarse partiendo de la masa en seco o sin agua calculada tras el proceso de secado, obteniendo lo que será definido como *densidad aparente* ρ_s o simplemente densidad sin agua:

$$\rho_s = \frac{m_s}{V} \quad (3.6)$$

Por último, las fracciones de cada componente presente en el hueso cortical se obtuvieron como:

$$\text{fracción mineral} \rightarrow f_{min} = \frac{m_c}{m} \quad (3.7a)$$

$$\text{fracción orgánica} \rightarrow f_{org} = \frac{m_s - m_c}{m} \quad (3.7b)$$

$$\text{fracción de agua} \rightarrow f_{agua} = \frac{m - m_s}{m} \quad (3.7c)$$

donde la suma de las tres fracciones $f_{min} + f_{org} + f_{agua} = 1$. Los valores de las densidades y fracciones obtenidas con este procedimiento se exponen la sección 5.1.1 junto con el resto de resultados.

4

Modelo propuesto

En el presente capítulo se presenta el modelo constitutivo propuesto en esta investigación que describe el comportamiento mecánico del hueso cortical de costilla humana, tanto en régimen elástico lineal como en el no elástico, donde se produce la fisuración y la acumulación de daño de la costilla. Los parámetros del modelo constitutivo han sido ajustados usando las tensiones y deformaciones obtenidas en los ensayos experimentales de tracción de *coupons* y de flexión de costilla completa, ambos descritos en el capítulo anterior.

El modelo constitutivo propuesto es un *modelo hiperelástico no lineal con degradación*, donde la función de densidad de energía de deformación $\Psi(\mathbf{E})$ se calcula mediante la función de partición $Z(\mathbf{E}, \beta)$, determinada a partir del análisis de las microconfiguraciones posibles de las microfisuras y con el uso de la *mecánica estadística*.

Matemáticamente, $Z(\mathbf{E}, \beta)$ es un sumatorio sobre las energías posibles E_k de los macroestados asociados a la deformación aplicada. Para cada macroestado, hay un número de microestados compatibles descritos por los caminos posibles que puede tomar una microfisura en su avance. Estas diferentes configuraciones de una fisura para un macroestado están asociadas a la misma energía E_k y vienen

definidas por la función g_k que describe el número de caminos posibles que puede tomar la fisura (correspondientes a los microestados) y que son compatibles con la energía E_k asociada al macroestado.

Para comprender el desarrollo del modelo constitutivo con degradación, previamente se exponen las consideraciones generales de los modelos hiperelásticos y se recurre a la mecánica estadística y la combinatoria para desarrollar las modificaciones oportunas en el modelo que introducen factores relacionados con los procesos disipativos, vinculados con la nucleación y propagación de microfisuras en el material (sección 4.1). En esta misma sección se aplica mecánica estadística a la combinatoria de posibles caminos que puede tomar una fisura durante su propagación de una forma determinista.¹ Este esquema teórico permite predecir la relación entre tensión y deformación durante todo el régimen de comportamiento de la costilla, desde el inicio de sollicitación hasta la fractura. Además, el modelo se ha desarrollado de forma consistente con las leyes termodinámicas; para corroborarlo, se ha analizado la variación de la entropía, asociada a la irreversibilidad del proceso de fisuración, con el fin de demostrar que el modelo es consistente termodinámicamente (la entropía debe aumentar más cuanto más fisuración hay y, por tanto, cuando se observa una mayor pérdida de linealidad).

El modelo constitutivo relaciona los tensores de tensión y de deformación para cualquier sollicitación, los cuales pueden particularizarse, tomando una forma específica según el tipo de ensayo. En los ensayos de tracción, la deformación y la tensión son homogéneas en la región de interés, mientras que, en los ensayos de flexión, tanto la tensión como la deformación varían para cada punto de la costilla. Las posiciones de los puntos de referencia, tanto en los ensayos de tracción como de flexión, varían a lo largo del ensayo. En el caso de la tracción existe una dirección de tracción a lo largo de la cual los puntos tienden a separarse y en la dirección perpendicular a acercarse ligeramente. En el ensayo de flexión, la curvatura de la costilla cambia a medida que se incrementa la carga. Para caracterizar las deformaciones de ambos ensayos se emplea el tensor de deformaciones de Green–Saint-Venant (deformaciones de Green–Lagrange).

En cuanto a las tensiones, se caracterizan mediante el segundo tensor de Piola–Kirchhoff y se calcula a partir de las fuerzas axiales y los momentos flectores,

¹Al fin y al cabo, la microfisuración es un proceso aleatorio que puede ser tratado como un hecho predecible mediante dichos campos de conocimiento.

así como a magnitudes geométricas como el área, los momentos y productos de inercia de cada sección o el espesor. Las fuerzas axiales y los momentos flectores se calculan a partir de la fuerza aplicada que se mide durante el ensayo. Para los cálculos se emplea un sistema de coordenadas que viene dado por base vectorial móvil a partir de la cual referenciar la posición de diversos puntos sobre la costilla humana.

El estudio de la geometría de la costilla y la descripción del sistema de coordenadas se dará en la sección 4.2, junto con el cálculo de los desplazamientos y deformaciones generales (para cualquier sollicitación) a lo largo de la costilla. Seguidamente, se particularizan los tensores de tensión y deformación para las sollicitaciones de tracción y flexión (secciones 4.3 y 4.4, respectivamente). A partir de estos tensores, se obtienen las formas particulares del modelo para cada tipo de ensayo, que serán utilizadas para ajustar los parámetros del modelo constitutivo y probar su adecuada representación del comportamiento del hueso cortical (esto se verá en el capítulo 5 de resultados).

En los ensayos de tracción se ha utilizado la técnica de emisión acústica para detectar las ondas elásticas liberadas por la muestra, asociadas a la microfisuración del tejido. Esto se ha hecho por medio de la colocación de tres detectores de emisión acústica en la costilla que envían los datos de las señales de emisión acústica a la central. A partir de estas señales o *hits* se ha desarrollado un modelo matemático basado en la *teoría de la percolación* para relacionar dichas señales con el avance de la microfisuración (sección 4.5). Con este modelo se tratará de mostrar que la variación máxima de entropía asociada con los procesos irreversibles está relacionada con el incremento del número de emisiones acústicas.

4.1 Consideraciones de los modelos hiperelásticos

El modelo constitutivo presentado en esta investigación representa el comportamiento del hueso cortical y para ajustarlo se usarán datos experimentales de hueso cortical de costillas humanas. La costilla está formada por un núcleo de hueso trabecular, rodeado por el tejido óseo cortical compacto; sin embargo, dada la elevada porosidad del tejido trabecular (o esponjoso), su contribución a la resistencia es menor que el de la capa exterior de hueso cortical. De esta forma, el

estudio de las propiedades de la costilla puede tratarse desde un punto de vista de un tubo óseo curvo y hueco.

Estructuralmente, el hueso cortical está compuesto por osteonas que se consideran como la unidad básica que constituye el hueso. Es decir, el modelo parte de que el hueso cortical es un agregado de osteonas unidas por tejido intersticial e interfase donde, para grandes tensiones, las fisuras discurren a lo largo de este espacio interosteónico.² De hecho, la aparición de fisuras altera la interconexión de las osteonas y hace que el hueso pierda rigidez mecánica. El espacio entre osteonas viene ocupado por el tejido intersticial y la interfase entre osteonas y tejido intersticial está definida por la línea de cemento, que rodea a cada osteona.

Geoméricamente las osteonas se encuentran alineadas predominantemente en la dirección longitudinal del hueso. Esa disposición preferente hace que el hueso cortical sea un material anisótropo con un comportamiento diferente en la dirección longitudinal que en la dirección transversal. En particular, el tipo de anisotropía descrita hace que el hueso sea un material transversalmente isótropo, donde el vector que marca la dirección preferencial en el caso de la costilla es el propio eje baricéntrico de la misma. Por esas razones geométricas y microestructurales, es común que muchos otros estudios hayan considerado al hueso cortical como un material compuesto reforzado con fibras, siendo la osteona la fibra y el hueso intersticial la matriz.^{96,143}

Como se anticipó en la sección 2.2.3, un modelo constitutivo que relacione tensión aplicada con deformación experimentada por el material puede ser obtenido a partir de la derivación de una función energía de deformación $\Psi(\mathbf{E})$.³ Además, con el fin de respetar el tipo de simetría del material, la función $\Psi(\mathbf{E})$ debe ser una combinación de los invariantes que representan la *simetría material* del hueso cortical.⁴ Para un *material transversalmente isótropo*, como en el caso del hueso cortical de costilla, los invariantes algebraicos necesarios para desarrollar la función Ψ son cinco. Estos invariantes algebraicos son funciones polinómicas

²Como se expone en el apartado 4.1.1, diversos autores en la literatura han observado que las microfisuras se encuentran y propagan preferentemente en el tejido intersticial.

³Esto es una consecuencia del teorema de Noll que afirma que bajo asunciones matemáticas que se cumplen razonablemente en la realidad, cualquier material elástico resulta ser hiperelástico.⁸⁵

⁴Como el grupo de simetría de un material transversalmente isótropo es $SO(2)$, se deben incluir tanto los invariantes generales como los invariantes específicos, ver tablas 2.4 y 2.3.

de las componentes del tensor deformación de Green-Lagrange \mathbf{E} y del vector \mathbf{a} que define la dirección de alineación preferencial de las osteonas en cada punto de la muestra, que en caso que nos ocupa, será el vector que describa la dirección del eje baricéntrico de la costilla. Por tanto, la función energía de deformación tendrá la forma $\Psi(\mathbf{E}) = \tilde{\Psi}(I_1(\mathbf{E}), I_2(\mathbf{E}), I_3(\mathbf{E}), I_4(\mathbf{E}, \mathbf{a}), I_5(\mathbf{E}, \mathbf{a}))$.

Para obtener las ecuaciones constitutivas del modelo asociadas a la función $\Psi(\mathbf{E})$ es necesario derivar esta función respecto al tensor de deformaciones \mathbf{E} . De ese modo se obtiene la expresión que relaciona la tensión con la deformación (ecuación 2.40):

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = & \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial I_2} \mathbf{E} + I_3 \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial I_3} \mathbf{E}^{-1} + \dots \\ & \dots + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial I_4} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial I_5} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{E} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{E} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Esto tipo de ecuación permite representar el comportamiento no lineal del tejido óseo cortical.⁵ Sin embargo, para describir adecuadamente la fisuración, un modelo constitutivo general de este tipo necesita incluir explícitamente otras variables que den cuenta el daño acumulado que se produce por la propagación de microfisuras a través del material,⁶ pues la expresión (4.1) es aplicable a materiales hiperelásticos transversalmente isótropos⁶⁰ en los que no se prevé la aparición de microfisuración. Las consideraciones que llevan a esas variables adicionales se explican en la siguiente sección.

4.1.1 Mecánica estadística de estados con microfisuras

Para que el modelo constitutivo propuesto describa el comportamiento mecánico del hueso cortical durante todo el proceso desde la deformación hasta la fractura, debe incluir una representación del efecto del daño que se produce en la costilla

⁵La no linealidad del comportamiento entre tensiones y deformaciones es una característica observable en las curvas tensión-deformación del hueso para diferentes tipo de sollicitación. En esas curvas una vez se alcanza cierto nivel de deformación, la tensión se desvía de su tendencia lineal.

⁶Más adelante se verá que un modelo así puede comportar cambios de entropía, lo cual revela que se está produciendo un cambio irreversible en el interior del material.

por el avance de la microfisuración a medida que se incrementa la tensión. En el proceso de propagación del daño, las fisuras preexistentes entre las osteonas del hueso evolucionan, observándose alteraciones en su número y longitud. Para modelizar la estructura altamente aleatoria de dichas microfisuras y su evolución en el tiempo, se usa la mecánica estadística.

Como se ha descrito en la sección 2.4, la mecánica estadística es un formalismo que permite representar adecuadamente el comportamiento real de materiales con microestructura interna, como la costilla humana analizada en este estudio. En este caso, el hueso cortical se considera un agregado de osteonas dentro del cual crecen microfisuras y la mecánica estadística se emplea aquí para promediar sobre el conjunto de microestados posibles o microconfiguraciones (que en este caso son las posibles evoluciones de las microfisuras dentro del material) asociados a un macroestado medible experimentalmente (a través de la deformación o equivalentemente, la energía).

El formalismo de la función de partición parte de una *función de partición* (ver sección 2.4.1) que está directamente relacionada con la *función de densidad de energía de deformación* o SEDF⁷ que designamos como Ψ . Tanto la función de partición como la SEDF se construyen a partir de los invariantes algebraicos propios de un material transversalmente isótropo, por lo que las ecuaciones mecánicas de comportamiento obtenidas presentarán también esa simetría. Igualmente, en una muestra sometida a ensayo, el daño dado por el inicio y propagación de la fisuración que se acumula gradualmente debido al incremento de sollicitación, se manifestará en un aumento de la entropía y será calculable a partir de la función de partición (ver ecuaciones (2.89) de la sección 2.4.1).

La función energía de deformación Ψ de un material puede obtenerse mediante las relaciones de la ecuación (2.89), una vez conocida la función de partición del sistema. Cada nivel de deformación aplicado a la muestra introduce una energía en el sistema (macroestado), para la cual hay un conjunto Ω de microestados j (microconfiguraciones internas) compatibles, y la función de partición Z se expresa de la forma:

$$Z(\beta, \epsilon) = \sum_{j=1}^{\Omega} e^{-\beta E_j} \quad (4.2)$$

donde la suma se extiende sobre las microconfiguraciones compatibles con un macroestado y cada E_j es la energía asociada a cada microestado. El número de

⁷Siglas de *Strain Energy Deformation Function*.

microestados posibles crece exponencialmente a medida que progresa la fisura y, por ello, resulta de mayor interés agrupar los microestados asociados que tengan la misma cantidad de energía E_j y realizar el sumatorio sobre los distintos niveles de energía (en lugar de sobre los microestados posibles). De esta forma, para cada nivel de deformación asociado a una energía E_k se evalúan los microestados que son compatibles con este nivel de energía E_k .

El análisis sobre las energías permite reescribir la función de partición como:

$$Z(\beta, \epsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} g(E_k) e^{-\beta E_k} \quad (4.3)$$

siendo $g(E_k)$ la función que define el número de microestados compatibles con la energía E_k consecuencia de la deformación aplicada. Así, para poder determinar la función energía de deformación Ψ de la que derivar posteriormente la forma de la tensión \mathbf{S} no lineal con degradación (que por ende incluye el daño que se acumula en la muestra) es necesario definir la forma de la función $g(E_k)$ que permite conocer los microestados posibles.

El estudio de la función $g(E_k)$ se tratará en el primer apartado de esta sección, donde se verá que su forma puede ser determinada a partir de la evaluación de los caminos posibles que puede tomar una fisura que se propaga por el material, tal que cada camino posible corresponderá a un microestado compatible con el macroestado (energía). Posteriormente y partiendo de esta función, se derivará la forma general de la tensión no lineal con degradación \mathbf{S} .

4.1.2 Microconfiguraciones compatibles con un macroestado

Para cada nivel de deformación de la muestra [macroestado] se introduce en el sistema una cierta cantidad energía y, para ese valor de la energía, hay un número finito de microconfiguraciones posibles que vienen dadas por la forma en la que se propaga la fisura a lo largo del material. Para un macroestado concreto, hay diferentes caminos o configuraciones [microestados] que puede tomar una fisura y que están asociados al mismo nivel de deformación (o energía). El número de microestados se evalúa de manera combinatoria, buscando el número de caminos posibles que puede recorrer una fisura en la red de osteonas. Considerando que una fisura está formada por eslabones de longitud k , la energía crece con el número de eslabones k de la fisura y se tiene una relación de la energía del sistema con la longitud de dicha fisura $E = E_k$.

Definimos la función $g_k = g(E_k)$, donde g_k es número de caminos que puede tomar una fisura cuando la energía disponible es E_k . La forma de la función g_k se describirá a partir del análisis de tres retículas ideales: la ortogonal, la triangular y la hexagonal. Para calcular g_k se busca el número de los posibles caminos que puede tomar una fisura de longitud ℓ en una retícula.

Red ortogonal. El caso de una retícula ortogonal, por ejemplo, es una variante del problema de Catalan (Figura 4.1), estudiado por el matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894). En este problema se determinan el número de caminos posibles que puede trazar una línea en una red ortogonal de dimensiones $m \times m$ mediante el uso de la combinatoria.⁸

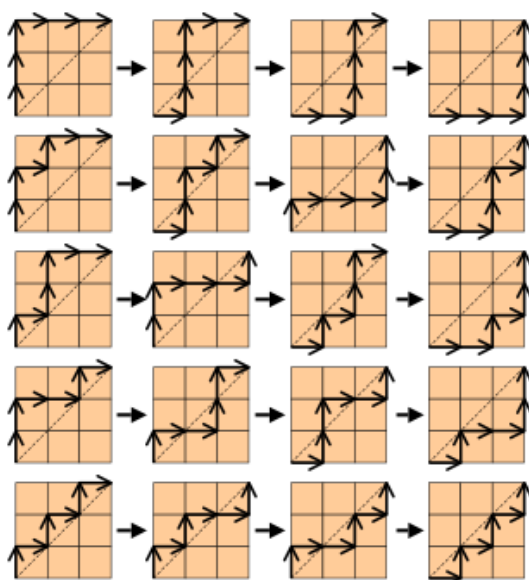


Figura 4.1. Combinatoria para el problema de Catalan, para el número de caminos posibles en una red ortogonal.

En el caso de este estudio, la red representa la distribución de osteonas, consideradas aquí como la unidad básica. Por otro lado, los eslabones que rodean a cada osteona son los análogos al tejido intersticial y las interfases o líneas de cemento. En este estudio e igual que en el problema de Catalan, la fisura

⁸Los números de Catalan C_n buscan un conjunto de números naturales aplicables a muchas áreas y que proporcionan la solución a problemas de combinatoria, como en número de posibilidades de agrupación de $n + 1$ factores en un paréntesis, el número de divisiones posibles de un polígono de $n + 2$ lados en triángulos o, como se aplica en este estudio, el número de caminos monótonos que puede seguir una línea en una red ortogonal de $m \times m$ celdas.

únicamente puede propagarse a través de estas interfases, representadas con los eslabones. Cada etapa de propagación se definirá como el avance de la fisura a través de un eslabón y se analizarán los caminos posibles que puede tomar la fisura en cada etapa o cada nodo con el que se encuentra tras incrementar su longitud en un eslabón. Estudios de la literatura muestran que la mayoría de microfisuras preexistentes en el hueso cortical se encuentran *in vivo* en el tejido intersticial y que las osteonas pueden detener el avance y propagación de las fisuras. La microfisuración se produce preferentemente entre osteonas, que actúan como barrera en la propagación, siendo la línea de cemento la interfase más débil que puede promover la separación de las osteonas del tejido intersticial.^{51,96,102,143}

Asumiendo que la energía α para fisurar un eslabón o enlace es común a todos los eslabones, todas las configuraciones dadas por una fisura de igual longitud ℓ tendrán la misma energía $E = \alpha\ell$. Sin embargo, a través de la red pueden darse distintas fisuras con la misma longitud ℓ (y por tanto la misma energía E_k) que hayan tomado caminos diferentes en la propagación. La función $g_k = g(E_k)$ definirá cuantos caminos posibles están asociados a la energía E_k y, por ende, son compatibles con este macroestado energético.

Para determinar el número de caminos posibles, definamos primero una red cuadrada o retícula ortogonal de dimensiones $m \times m$ como en el problema de Catalan, en la cual la fisura avanzará siempre a lo largo de un eslabón o unión entre nodos (Figura 4.2). En la propagación se asume que una vez la fisura ha pasado por un eslabón, no puede volver a cruzarlo. Cada cuadrado correspondería a una osteona y los eslabones a las interfases entre las mismas. Supongamos una fisura iniciada en el margen izquierdo (Figura 4.2(a)) y planteemos entonces cuales son los caminos posibles que puede tomar en su avance. Una vez alcanzado un nodo, la fisura puede tomar tres direcciones [eslabones]: izquierda, arriba o derecha. Indistintamente del camino que tome, en cada etapa de su avance se volverá a encontrar con estos tres caminos posibles (Figuras 4.2(b)-(c)) y avanzará m veces hasta completar su recorrido al llegar a otro margen. Nótese entonces que, pudiendo avanzar en cada nodo en tres direcciones diferentes y tras recorrer m eslabones, el número de caminos posibles será $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^m$.

No obstante, debido a la sollicitación aplicada en la muestra o la mayor facilidad de progresión, muchas fisuras no toman caminos que conlleven un retroceso en su dirección; es decir, una fisura que avanza hacia arriba o a la derecha, es menos probable que tienda a seguir su camino a la izquierda o hacia abajo.

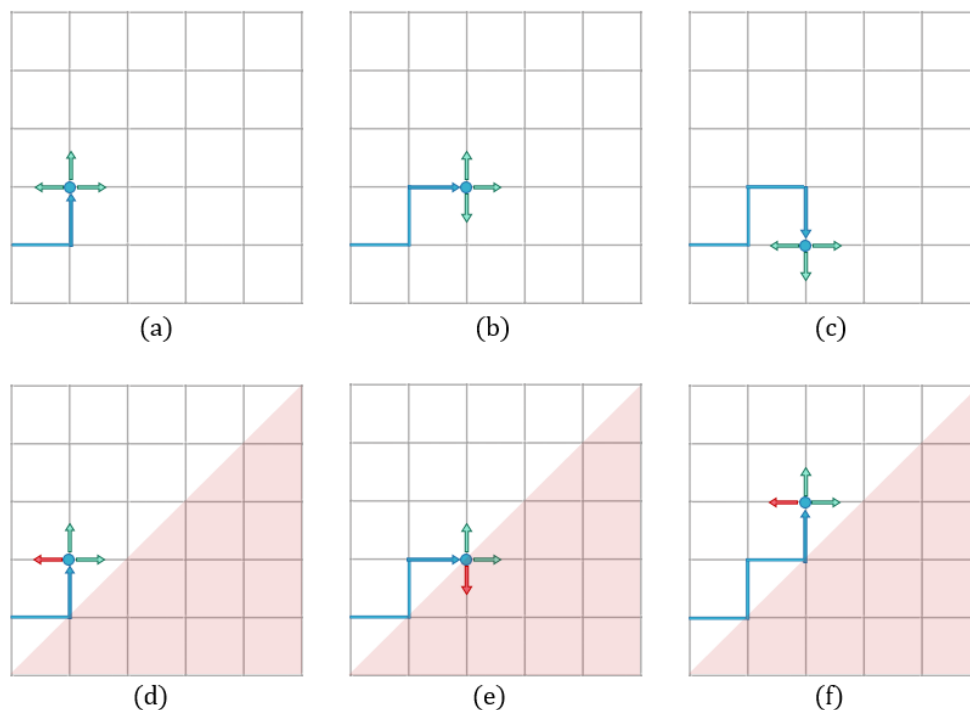


Figura 4.2. Posibles caminos para una fisura en una red ortogonal: (a-c) La fisura avanza libremente, con tres eslabones posibles a seguir en cada etapa. (d-f) Restricción de no retroceso: la fisura no puede cruzar la zona sombreada, reduciéndose los eslabones posibles a dos.

Planteemos entonces el caso de *no retroceso* para la misma retícula ortogonal (Figuras 4.2(d)-(f)). En este caso, en el primer nodo es más probable que la fisura avance a la derecha o hacia arriba que a la izquierda ya que retrocedería y, por tanto, se encuentra con dos caminos posibles. Indistintamente si avanza arriba o a la derecha, en el siguiente nodo de nuevo se encontrará con los mismos dos caminos potenciales. Nótese entonces que para cada nodo existe una zona en la cual la fisura en ningún momento puede entrar (zona sombreada de la red) para no retroceder. Asumiendo esta restricción y dado que la fisura se encuentra con dos caminos accesibles en cada etapa, el número posible de caminos se reducirá a 2^m , correspondiente a la solución del problema de Catalan antes mencionado. De esta forma, la función g_m que define los caminos posibles que puede tomar una fisura que se propaga por una red ortogonal $m \times m$ sin posibilidad de retroceso, toma la forma de $g_m = 2^m$.

La forma de g_m puede encontrarse para otras configuraciones de red distintas; en este estudio se han analizado la red triangular y la hexagonal.

Red triangular. El caso de la red triangular se muestra en la Figura 4.3. Análogamente al caso ortogonal, se observa en las Figuras 4.3(a)-(c) las posibilidades de avance de una fisura sin restricciones que tendrá siempre 5 eslabones a elegir en cada nodo, siendo los caminos posibles en esta configuración $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdots 5 = 5^m$. Sin embargo, si se restringe el avance al caso de no retroceso, en cada nodo se encuentran tres eslabones posibles de avance y dos no accesibles, que permitirían a la fisura entrar en el área sombreada. Así, en una red triangular con una fisura sin retroceso, los caminos posibles son $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 = 3^m$.

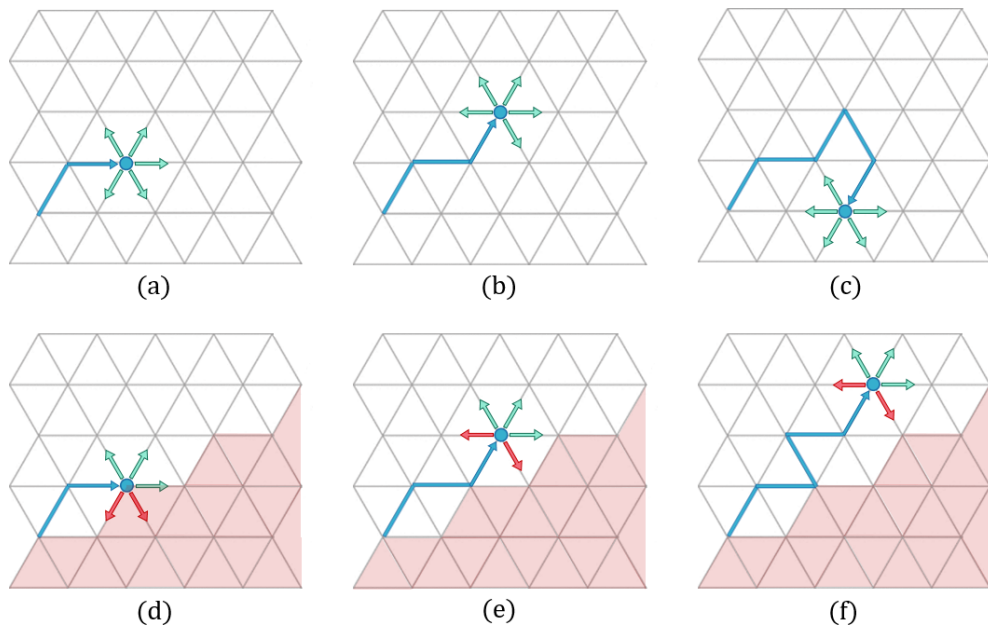


Figura 4.3. Posibles caminos para una fisura en una red triangular: (a-c) la fisura avanza libremente, con cinco eslabones posibles a seguir en cada etapa. (d-f) restricción de no retroceso: la fisura no puede cruzar la zona sombreada, reduciéndose los eslabones posibles a tres.

Red hexagonal. El caso más especial posiblemente es el observado en una red hexagonal (Figura 4.4). La fisura a su paso por cada nodo se encuentra con dos vías o eslabones posibles, tal que los caminos que se contabilizan son $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^m$. Sin embargo, si se restringe el avance al caso de no retroceso (Figura 4.4(d-f)), la fisura inicialmente se encuentra con dos caminos posibles, el izquierdo y el horizontal pero en el siguiente nodo únicamente puede tomar un camino para no retroceder. En el nodo que se encuentra a continuación, de nuevo puede seguir dos caminos, en el siguiente uno y así sucesivamente. De esta forma, el número de caminos posibles que puede tomar una fisura en una red hexagonal sin retroceso es de $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 1 \cdot 2 = 2^{m/2} = (\sqrt{2})^m$.

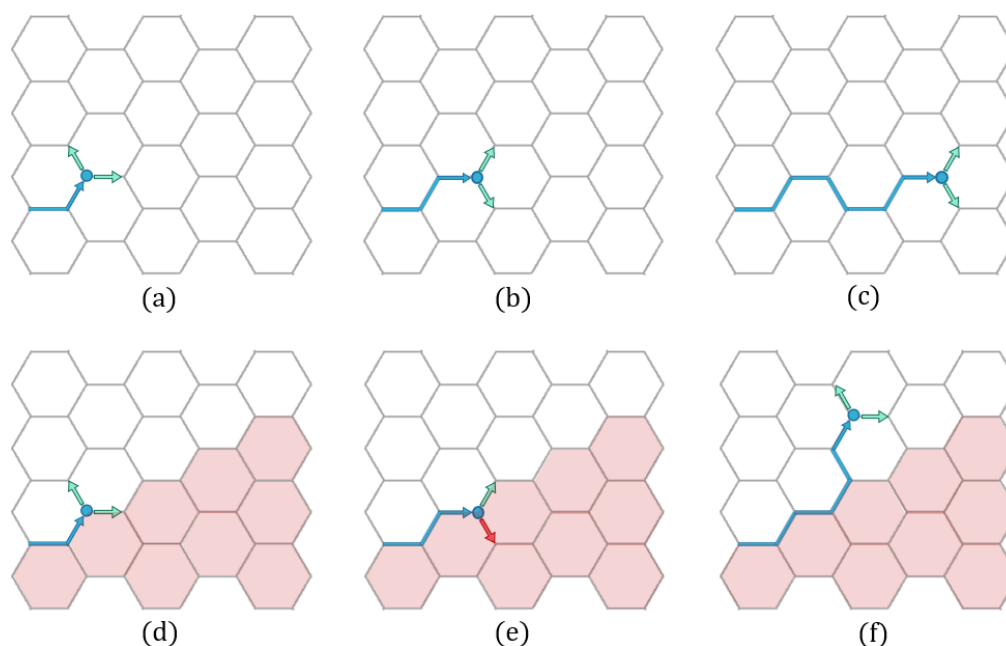


Figura 4.4. Posibles caminos para una fisura en una red hexagonal: (a-c) la fisura avanza libremente, con dos eslabones posibles a seguir en cada etapa. (d-f) restricción de no retroceso: la fisura no puede cruzar la zona sombreada, reduciéndose los caminos posibles a dos o uno de forma alternada, según el nodo con en el que se encuentra la fisura.

Del análisis de las redes ideales anteriores se deduce que la forma general de la función g_m que define los posibles caminos que puede seguir una fisura en una red de dimensiones $m \times m$, toma la forma general de:⁹

$$g_m = r^m \quad (4.4)$$

siendo m la dimensión de la red en cuestión y donde r será definido como el *parámetro de red* que, asumiendo que la fisura no puede retroceder como plantea este estudio, toma el valor de $r = \sqrt{2}$ para una red hexagonal o de rectángulos en *opus quadratum*, $r = 2$ para una ortogonal y $r = 3$ para una triangular.

⁹Para casos en que el número de capas de osteonas m_0 en alguna dirección sea limitado, la expresión para $m > m_0$ debería ser modificada. Por ejemplo, considerando el número de particiones de la forma $m = m_1 + m_2 + \dots + m_s$ en s sumandos. Este número se denomina en *teoría de números* $p_s(m)$ siendo el número de particiones total $p(m) = \sum_{s=1}^m p_s(m)$ y asintóticamente sabemos que $p(m) \approx \exp(\pi\sqrt{2m/3}) < r^m$ para cierto $m > m_0$. En el modelo presente se vio que no era necesario considerar esa forma dado que las longitudes estimadas la fisura mediante regresión eran cortas y por tanto los términos con m grande eran despreciables.

De esta forma, se obtiene una función que depende del nivel energético asociado a la deformación introducida y que proporciona el número de caminos posibles que puede tomar una fisura con ese nivel de energía. La energía a su vez, está directamente relacionada con la longitud de la fisura si se asume que todas las interfases o eslabones tienen la misma energía asociada.

Conclusiones generales. Del análisis desarrollado sobre las redes ideales se podría concluir que, si asumimos que la red formada por las osteonas se asemeja a alguna de las anteriores y que además la fisura no puede retroceder, el parámetro de red debería encontrarse en el rango $\sqrt{2} \leq r \leq 3$. Sin embargo, la distribución de las osteonas no es tan ideal como la disposición de estas redes; por el contrario, hay una distribución de tamaños (pues no todas tienen el mismo diámetro idéntico) y su disposición es irregular, no siguiendo un patrón (Figura 4.5).

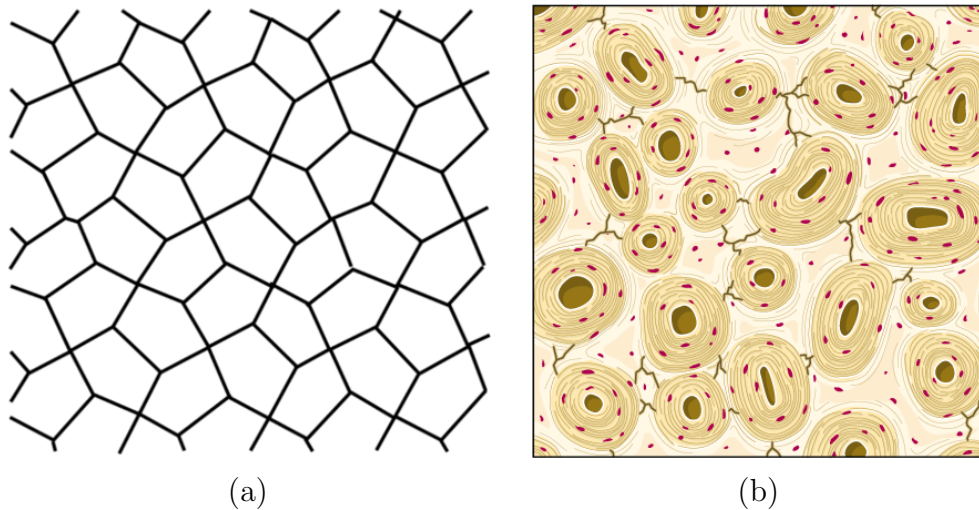


Figura 4.5. (a) Red aleatoria no ideal, donde la posibilidad de caminos varía de nodo a nodo. (b) Propagación de microfisuras en la interfase entre osteonas (fuente: Smart Servier website).

Por ello, la propagación de microfisuras en el hueso cortical no es tan aleatoria en cuanto al camino elegido a seguir en cada nodo,¹⁰ así como que tras cada etapa de avance el número de eslabones o caminos disponibles no será necesariamente el mismo por la irregularidad de la red. Esta irregularidad en cuanto a la distribución de las osteonas afectaría al parámetro de red r , facilitando o dificultando en cada etapa de avance la propagación de la fisura por un camino u otro.

¹⁰Por ejemplo, ciertos caminos en la red podrían requerir de menor nivel de energía para su rotura, pudiendo ser preferentes en el avance de la fisura.

De este modo, en este estudio no se restringirá el valor de r al rango mencionado, si no que la condición del parámetro de red será que su valor sea $1 < r \leq 3$ y será ajustado para encontrar el valor óptimo.

Por otro lado, siendo m_0 la menor dimensión de la retícula en una de las direcciones (en el caso de *coupons* de tracción será el número de osteonas en el espesor o dirección perpendicular al plano; en el caso de flexión de costilla completa, el número de capas concéntricas de osteonas en el hueso cortical), la expresión (4.4) sería válida para $m \leq m_0$, dado que es el número máximo de eslabones que puede cruzar la fisura en esa dirección. Si $m > m_0$, la fisura podría haber cruzado la muestra por completo, en función de cuantos eslabones han sido atravesados por ésta en ambas dimensiones. De esta forma, sería adecuado introducir la condición $m \leq m_0$. Sin embargo, la fisura así mismo podría tomar un camino con ciertos tramos en una dirección y otros en la otra, llegando al borde del material con una longitud mayor que la menor dimensión. Por ello, se espera que el valor m sea un número finito y de valor máximo $m \leq 2m_0$, considerando así los casos en los que la fisura pueda ser más larga que el propio espesor cortical o de la muestra. De hecho, no todas las muestras tendrán el mismo número de osteonas y para respetar el carácter universal del modelo, debe permitirse que este parámetro sea variable. Por ello y como se verá a continuación, dicho parámetro será también ajustado.

4.1.3 Modelo no lineal con degradación

El modelo constitutivo propuesto que se propone en este estudio es un *modelo hiperelástico no lineal con degradación*, cuya función de densidad de energía de deformación (SEDF) $\Psi(\mathbf{E})$ se calcula a partir del estudio de las microconfiguraciones posibles de las fisuras, que se deduce del número caminos potenciales que puede seguir una la fisura a través de la red de osteonas. Del análisis desarrollado en la subsección anterior se deriva que para cada macroestado dado por una energía E_k asociada a una deformación, hay un número de microestados compatibles descritos por los caminos posibles que puede tomar una microfisura en su avance. Este número de configuraciones de una fisura compatibles con un macroestado y asociadas a la misma energía E_k , viene dado por una función g_k :

$$g_k = g(E_k) = r^k \quad (4.5)$$

donde r^k cuenta el número de caminos posibles que puede tomar una microfisura dentro de la red de osteonas para cada macroestado descrito por la energía E_k . Como se ha mencionado anteriormente, se asume que la propagación de la fisura nunca es retrógrada, es decir, que no tomará caminos que supongan un cambio brusco de la trayectoria de partida que requerirían de una mayor cantidad de energía y, por tanto, siempre propagará por caminos de avance.

Partiendo de la función g_k y recurriendo a la mecánica estadística, puede definirse la función de partición $Z(\mathbf{E}, \beta)$ de la cual se deriva la función $\Psi(\mathbf{E})$. Matemáticamente, $Z(\mathbf{E}, \beta)$ es un sumatorio sobre las energías posibles E_k de los macroestados asociados a la deformación aplicada. Si cada macroestado k se define como una etapa de avance de la fisura (es decir, la fisuración de un eslabón o una interfase), cada una de estas etapas conlleva un aumento de deformación que incrementa la energía E_k y que a su vez promueve la fisuración. Así, al propagar la fisura un número k de interfases, la energía asociada al macroestado general vendrá dada por $E_k = k\psi_0$, siendo $\psi_0 = \psi_0(\mathbf{E}) = \tilde{\psi}_0(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)$ la función energía de deformación sin considerar la acumulación de daño, que denominaremos *función energía de deformación reducida*.¹¹ Con ello y considerando la forma de g_k , la función de partición definida en la expresión (4.3) a partir de la cual se derivará la ecuación constitutiva con degradación, puede reescribirse como:

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} g_k e^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})k} \quad (4.6)$$

El sumatorio anterior incluye la función $g_k = r^k$ permite definir el número de caminos posibles que puede tomar una fisura en la red, donde r es un parámetro que depende del tipo de red y k el número de etapas o eslabones de la fisura. Si bien sumatorio sobre los niveles de energía k se extiende teóricamente hasta infinito ya que no se impone un límite máximo de la fisura, el número de posibles caminos de la fisura no puede ser infinito, pues cabe notar que la propagación de la fisura se producirá hasta llegar al otro extremo de la muestra. Más concretamente, dado que las osteonas están alineadas en la dirección del eje baricéntrico de la costilla y, en el caso de flexión, la carga se aplica perpendicularmente a la alineación, la microfisura propagará también de forma perpendicular a esta dirección preferencial, progresando entre las osteonas (como en la Figura 4.5(b)).

¹¹Este nombre se justifica porque para pequeñas deformaciones $\Psi \approx \psi_0$.

De esta forma, la longitud de la fisura no podrá ser muy superior al propio espesor cortical¹² que típicamente es de 0,7–0,9 mm aproximadamente.^{79,93} Siendo el tamaño promedio de una osteona de 190 μm ,⁹¹ son una media de 4 o 5 las osteonas que tienen cabida en el espesor cortical (en una muestra de tracción uniaxial de geometría *coupon*, la sección es de 2 mm de ancho y 0,5 mm de espesor). Es obvio entonces que la fisura no puede propagarse infinitamente, teniendo que alcanzar una longitud aproximada al espesor el cortical. Por ello se define como N el número máximo de etapas de avance, cuyo valor máximo será aproximado al número de osteonas que se encuentran en el espesor de la muestra y que también tendrá relación con el tamaño de estas osteonas y su distribución.¹³ Así, el sumatorio se operará sobre los estados desde $k = 1$ (inicio de la fisura) hasta $k = N$, siendo N un parámetro libre que se ajustará en cada muestra.¹⁴

$$Z = \sum_{k=1}^N g_k e^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})k} \quad (4.7)$$

Obtenida la función de partición Z , la relación (2.89a) permite calcular la función de densidad energía de deformación de la forma:

$$\Psi(\mathbf{E}, \beta) = -\frac{\ln Z(\mathbf{E}, \beta)}{\beta} \quad (4.8)$$

donde β es el parámetro que mide el nivel de microfisuración previa,¹⁵ aportando al modelo la desviación característica de la curva de tensión y deformación en el régimen no elástico.

¹²Cabe recordar que g_k no contempla el retroceso de la fisura y que esta tenderá a avanzar.

¹³Por estas consideraciones físicas relacionadas con la longitud de la fisura, se asume que a partir de cierto valor $k \approx O(N)$ el factor g_k deja de crecer exponencialmente y numéricamente no existe gran diferencia entre considerar o no los términos con $k > N$.

¹⁴Dado que el número, tamaño y distribución de osteonas será diferente en cada muestra, se establecerá un rango de N coherente con estas deducciones y N será ajustado para encontrar el óptimo de cada una de las muestras.

¹⁵ β desempeña un papel análogo al del inverso de la temperatura $1/T$ en otros sistemas, por lo que dictamina como se repartirá la energía entre microfisuras de diferentes tamaños. A veces en la literatura β se denomina *quenched disorder parameter*, es decir, “parámetro de temperación del orden”. Precisamente debido a $\beta = 1/T$ el sumatorio de la función de partición Z debe iniciarse en $k = 1$ ya que en un estado sin fisuras $k = 0$ sucede que $T = 0$ y la entropía $S = 0$, por lo que $\beta = -\infty \forall \epsilon = 0$. Ello implica que las condiciones iniciales no están bien definidas y debe considerarse que en el estado inicial existe algo de fisuración, donde $\beta \neq 0$.¹³⁷

Reuniendo ambas expresiones, la función $\Psi(\mathbf{E})$ puede escribirse como:

$$\Psi(\mathbf{E}) = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{1}{\beta} \ln \left[\sum_{k=1}^N g_k e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k} \right] \quad (4.9)$$

Y la tensión \mathbf{S} que incluye el daño por fisuración se obtendrá derivando $\Psi(\mathbf{E})$ siguiendo la expresión (2.29) tal que:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mathbf{E}} = -\frac{1}{\beta Z} \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.10)$$

derivando Z respecto a \mathbf{E} y simplificando:¹⁶

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\beta Z} \sum_k g_k (-\beta k) \frac{\partial \psi_0(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k} = \frac{1}{Z} \sum_k k g_k \frac{\partial \psi_0(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k} \quad (4.11)$$

Dado que la tensión sin fisuración $\bar{\mathbf{S}} = \partial \psi_0 / \partial \mathbf{E}$ no depende de k , esta puede salir del sumatorio y la tensión con fisuración \mathbf{S} resulta en:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \frac{1}{Z} \bar{\mathbf{S}} \sum_k k g_k e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k} \quad (4.12)$$

El sumatorio de la expresión anterior puede realizarse de forma cerrada si en lugar de derivar respecto al tensor de deformaciones \mathbf{E} se hace respecto a β :

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \mathbf{E}} \leftrightarrow \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \sum_k g_k (-k \psi_0) e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k} \quad (4.13)$$

Puesto que la función energía de deformación reducida ψ_0 no se ve afectada por el sumatorio, esta expresión puede reorganizarse como:

$$\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z} \psi_0 \sum_k k g_k e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k} \quad (4.14)$$

¹⁶En la deducción que sigue se obvian los límites $k = 1$ y N del sumatorio para mayor claridad de las expresiones.

Nótese que la relación (4.14) y la expresión (4.12) tienen en común la forma del sumatorio y el factor $1/Z$; teniendo en cuenta el signo y el factor ψ_0 , de ambas expresiones puede reescribirse que:

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \mathbf{E}} = \bar{\mathbf{S}} \left(-\frac{1}{\psi_0} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right) \quad (4.15)$$

obteniendo así la expresión (4.12) a partir de la derivación parcial respecto a β en lugar de \mathbf{E} . Con ello, la tensión con degradación toma la forma:

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{E}) \frac{\sum_k k g_k e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k}}{\sum_k g_k e^{-\beta \psi_0(\mathbf{E})k}} \quad (4.16)$$

La forma expresión (4.16) no es adecuada para encontrar β y los parámetros de la función energía deformación reducida ψ_0 a partir de los datos experimentales, ya que el sumatorio dificulta la forma del modelo y el uso de los algoritmos de ajuste. No obstante, si se desarrolla la función de partición $Z(\mathbf{E}, \beta)$ en serie de potencias, el sumatorio de Z puede realizarse de forma cerrada (ver sección B.1 del apéndice, donde se muestran las operaciones correspondientes):

$$Z = \sum_{k=1}^N r^k e^{-\beta \psi_0 k} = r e^{-\beta \psi_0} \frac{1 - (r e^{-\beta \psi_0})^N}{1 - r e^{-\beta \psi_0}} \quad (4.17)$$

donde se ha reemplazado la función de degeneración $g_k = r^k$. Sustituyendo en la relación (4.15₂) esta nueva expresión de Z en la que ya no se encuentra el sumatorio, se deduce que:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= -\frac{\bar{\mathbf{S}}}{\psi_0} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\bar{\mathbf{S}}}{\psi_0} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\ln \left(r e^{-\beta \psi_0} \frac{1 - (r e^{-\beta \psi_0})^N}{1 - r e^{-\beta \psi_0}} \right) \right] \\ &= -\frac{\bar{\mathbf{S}}}{\psi_0} \frac{\partial}{\partial \beta} [\ln(r e^{-\beta \psi_0}) + \ln(1 - r^N e^{-\beta \psi_0 N}) - \ln(1 - r e^{-\beta \psi_0})] \\ &= -\frac{\bar{\mathbf{S}}}{\psi_0} \left[\frac{(-\psi_0) r e^{-\beta \psi_0}}{r e^{-\beta \psi_0}} + \left(\frac{-(-\psi_0 N) r^N e^{-\beta \psi_0 N}}{1 - r^N e^{-\beta \psi_0 N}} \right) - \left(\frac{-(-\psi_0) r e^{-\beta \psi_0}}{1 - r e^{-\beta \psi_0}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Simplificando la función ψ_0 y los signos de la ecuación anterior, se obtiene finalmente la expresión de la tensión con degradación:

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}} \left(\frac{1}{1 - r e^{-\beta \psi_0}} - \frac{N r^N e^{-\beta \psi_0 N}}{1 - r^N e^{-\beta \psi_0 N}} \right) = \bar{\mathbf{S}} \Phi (\beta \psi_0(\mathbf{E}), N, r) \quad (4.19)$$

Nótese que la tensión \mathbf{S} que engloba el comportamiento completo (tanto el régimen elástico como el anelástico) es la tensión sin degradación corregida por una función Φ que depende de la función energía de deformación reducida ψ_0 , el parámetro β que contempla el desorden generado por la fisuración y de los parámetros N y r que tratan con los posibles caminos que puede tomar la fisura en su propagación.¹⁷

Precisamente, la función energía de deformación reducida ψ_0 de la expresión de la tensión es una combinación de los invariantes que describen la simetría del material, tal y como se mencionó en la introducción de esta sección. Para un material transversalmente isótropo como la costilla humana, son cinco los invariantes necesarios que debe contener la función energía de deformación. Entonces, la función energía de deformación reducida $\psi_0(\mathbf{E})$ será un polinomio formado por estos cinco invariantes, los cuales a su vez son función de la deformación. Dadas las pequeñas deformaciones propias del tejido óseo, la función ψ_0 ha sido aproximada por serie de Taylor a un polinomio de tercer orden, ya que el mayor grado de la deformación se encuentra en el invariante I_3 el cual es cúbico en las componentes de \mathbf{E} .¹⁸ Respetando el orden de los invariantes, el polinomio toma la forma general:

$$\psi_0(\mathbf{E}) = \alpha_0 I_1 + \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_1^3 + \gamma_1 I_2 + \gamma_2 I_1 I_2 + \nu I_3 + \kappa_0 I_4 + \kappa_1 I_4^2 + \kappa_2 I_4^3 + \varsigma_1 I_5 + \varsigma_2 I_4 I_5 \quad (4.20)$$

donde se encuentran todas las combinaciones posibles de los invariantes hasta tercer orden.¹⁹ Sin embargo y dados los conocimientos sobre el comportamiento

¹⁷De hecho, en el material antes de la sollicitación existe un desorden dado por las impurezas, imperfecciones y microfisuras presentes por la fatiga de los años; por este motivo, se asume que ya hay una energía residual previa en el material que justifica el inicio del sumatorio de las energías en $k = 1$ (si se considera $k = 0$ se está partiendo de la hipótesis de que no hay energía residual en el material).

¹⁸Los invariantes I_1 e I_4 son funciones polinómicas de grado uno $f(E_{ij})$, I_2 e I_5 son invariantes cuadráticos de la forma $f(E_{ij}^2)$ e I_3 son de orden cúbico $f(E_{ij}^3)$ (ver ecuaciones (2.38) y (2.39)).

¹⁹Las combinaciones de invariantes se han desarrollado separando los invariantes de materiales isótropos (I_1, I_2, I_3) con los de materiales transversalmente isótropos (I_4, I_5) para poder adaptar el modelo a materiales más simples.

mecánico del tejido óseo, experimentalmente el hueso cortical tiene un comportamiento cuasi-lineal para pequeñas deformaciones (ver Figura 4.6(a)) pero a medida que aumenta la deformación, la curva tensión-deformación pierde la linealidad. Para reproducir ese comportamiento empírico en el régimen de pequeñas deformaciones resulta que la función ψ_0 no debe contener términos primer orden en la deformación, sino únicamente términos cuadráticos o de orden superior.²⁰ De esta forma, deben anularse los términos lineales anulando los parámetros correspondientes ($\alpha_0 = 0$ y $\kappa_0 = 0$) tal que:

$$\psi_0(\mathbf{E}) = \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_1^3 + \gamma_1 I_2 + \gamma_2 I_1 I_2 + \nu I_3 + \kappa_1 I_4^2 + \kappa_2 I_4^3 + \varsigma_1 I_5 + \varsigma_2 I_4 I_5 \quad (4.21)$$

La función energía de deformación reducida $\psi_0(\mathbf{E})$ en esta forma se encontrará tanto en los términos exponenciales del modelo constitutivo (4.19) como en la tensión sin degradación $\bar{\mathbf{S}}$. Definiendo como $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \kappa_1, \kappa_2, \varsigma_1, \varsigma_2)$ a la tupla de coeficientes ajustables de la expresión ψ_0 , tal que $\psi_0 = \psi_0(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{E}, \mathbf{a})$, entonces el modelo constitutivo (4.19) puede escribirse en función de sus parámetros y variables, como:

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{E}, \mathbf{a}) \left(\frac{1}{1 - r e^{-\beta \psi_0(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{E}, \mathbf{a})}} - \frac{N r^N e^{-\beta \psi_0(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{E}, \mathbf{a}) N}}{1 - r^N e^{-\beta \psi_0(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{E}, \mathbf{a}) N}} \right) \quad (4.22)$$

La tensión sin degradación $\bar{\mathbf{S}}$ se obtendrá de la ecuación (4.1), que mediante la función ψ_0 obtenida en la expresión (4.21), resulta en:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} = & \left((2\alpha_1 + \gamma_1) I_1 + 3\alpha_2 I_1^2 + \gamma_2 (I_1^2 + I_2) \right) \mathbf{I} - (\gamma_1 + \gamma_2 I_1) \mathbf{E} + \nu I_3 \mathbf{E}^{-1} \dots \\ & \dots + (2\kappa_1 I_4 + 3\kappa_2 I_4^2 + \varsigma_2 I_5) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + (\varsigma_1 + \varsigma_2 I_4) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{E} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{E} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Así, siendo N y r parámetros libres (como se ha justificado en esta sección) y β el parámetro que representa el daño, los parámetros del modelo que deben ser ajustados de datos experimentales son $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \kappa_1, \kappa_2, \varsigma_1, \varsigma_2, \beta, N, r$ o equivalentemente, $\boldsymbol{\vartheta}, N, r$.

²⁰La necesidad de eliminar los términos lineales ha sido verificada, calculando la tensión sin degradación con la función ψ_0 de la expresión (4.20) y ajustando el total de parámetros de esta expresión a una curva tensión-deformación real. Se observó que, para poder ajustar el tramo no lineal de la curva, los parámetros α_0 y κ_0 correspondientes a los términos lineales toman un valor de 0.

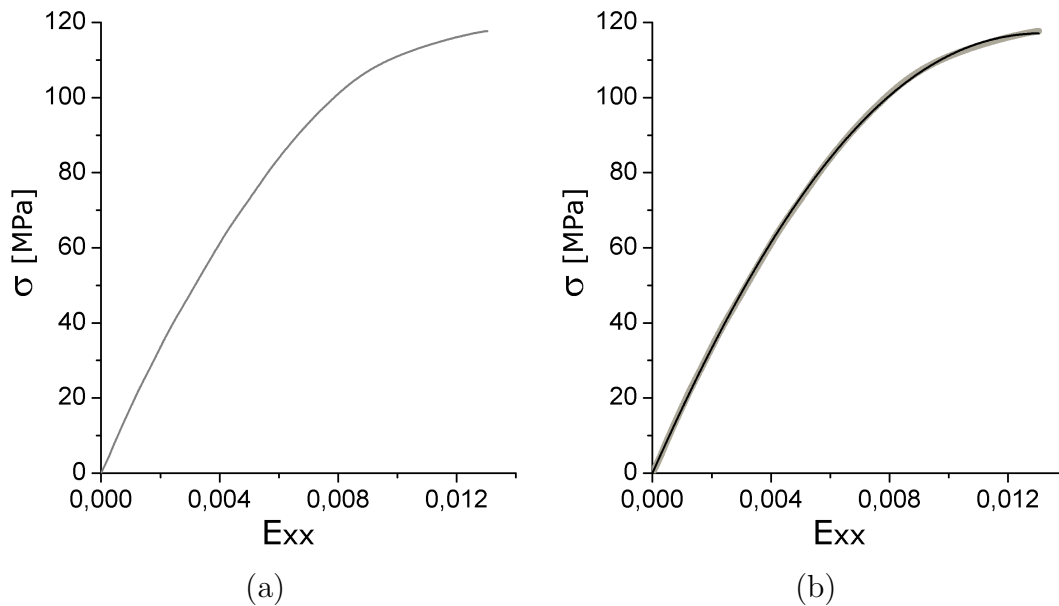


Figura 4.6. (a) Curva tensión-deformación experimental en la dirección longitudinal de la muestra de tracción uniaxial 0048_12, (b) Curva tensión-deformación (línea gris) y modelo constitutivo no lineal con degradación ajustado a la muestra 0048_12 (línea negra).

La Figura 4.6(b) anticipa el comportamiento del modelo constitutivo ajustado a los datos experimentales; puede observarse que el modelo ajusta el tramo lineal y a partir de cierto nivel de deformación, el efecto de la fisuración es más notorio y la curva se vuelve claramente convexa, de la misma forma que lo hace la curva tensión-deformación de los datos experimentales. Esto permite probar que todas las consideraciones expuestas en esta sección han permitido desarrollar un modelo constitutivo capaz de predecir el comportamiento mecánico del tejido óseo.

4.1.4 Estudio de la variación de entropía por fisuración

El modelo constitutivo propuesto no solo debe representar adecuadamente el comportamiento mecánico de la costilla humana, sino que también debe ser consistente con las leyes termodinámicas (ver sección 2.3). Así, el modelo debe mostrar un aumento de la entropía cuando se inician los procesos irreversibles que se producen en la zona anelástica, relacionados con el inicio y propagación de la microfisuración. Por ello, es conveniente desarrollar la forma de la entropía y comprobar la adecuación del modelo a ese respecto.

Tal y como se resumió en la sección 2.4.1, la función energía de deformación Ψ puede obtenerse a partir de la función de partición Z como se mostró en la ecuación (4.10); usando la forma de Z de (4.17) se llega a que:

$$\Psi(\mathbf{E}) = -\frac{\ln Z}{\beta} = \psi_0(\mathbf{E}) - \frac{\ln r}{\beta} - \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 - (re^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})})^N}{1 - re^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})}} \quad (4.24)$$

De acuerdo a las relaciones termodinámicas, la entropía [por unidad de volumen] viene dada por la ecuación general (2.89):

$$H = \beta^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} = \beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{\ln Z}{\beta} \right) = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$$

Si en esta expresión se introduce la derivada parcial de Z respecto a β , desarrollada en (4.14), la entropía toma la forma más específica de:

$$H = \ln \left[\sum_{k=1}^N r^k e^{-\beta\psi_0 k} \right] + \beta\psi_0 \frac{\sum_{k=1}^N k r^k e^{-\beta\psi_0 k}}{\sum_{k=1}^N r^k e^{-\beta\psi_0 k}} \quad (4.25)$$

Finalmente, reescribiendo el sumatorio como serie de potencias, la entropía del modelo propuesto es:

$$H = \ln \left[re^{-\beta\psi_0} \frac{1 - (re^{-\beta\psi_0})^N}{1 - re^{-\beta\psi_0}} \right] + \beta\psi_0 \left[\frac{1}{1 - re^{-\beta\psi_0}} - \frac{N(re^{-\beta\psi_0})^N}{1 - (re^{-\beta\psi_0})^N} \right] \quad (4.26)$$

La expresión anterior puede escribirse de forma más compacta definiendo la función $\phi(\mathbf{E}, \beta) = re^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})}$, tal que:

$$H = \ln \left(\phi \frac{1 - \phi^N}{1 - \phi} \right) + \beta\psi_0 \left(\frac{1}{1 - \phi} - \frac{N\phi^N}{1 - \phi^N} \right) \quad (4.27)$$

Siendo $H(\mathbf{E} = \mathbf{0}) \neq 0$, puede definirse la variación de la entropía ΔH :

$$\Delta H(\mathbf{E}) = H(\mathbf{E}) - H(\mathbf{0}) \quad (4.28)$$

La variación de la entropía $\Delta H(\mathbf{E}) > 0$ proporciona el aumento de la entropía, que siendo mayor que 0 corrobora la irreversibilidad del modelo. Esto puede ser verificado en la Figura 4.7, donde se muestra la evolución de la entropía con el incremento de deformación para una de las muestras de microtracción analizadas

en este estudio. En la Figura 4.7(a) puede verse una clara tendencia exponencial de la entropía a medida que se incrementa la deformación. Comparando la variación de la entropía con la tensión de la muestra (Figura 4.7(b)), se observa un claro incremento abrupto de H cuando la tensión pierde la linealidad, es decir, al entrar en el régimen anelástico. Dada que la no linealidad de la curva tensión-deformación está asociada a la nucleación y propagación de las fisuras a través del tejido óseo y el aumento de entropía más notorio se inicia en régimen no lineal, esto permite verificar que la entropía se incrementa precisamente cuando se empieza a acumular daño en la muestra, validando que el modelo cumple los criterios termodinámicos. Con el fin de ilustrar este punto, se ha considerado la

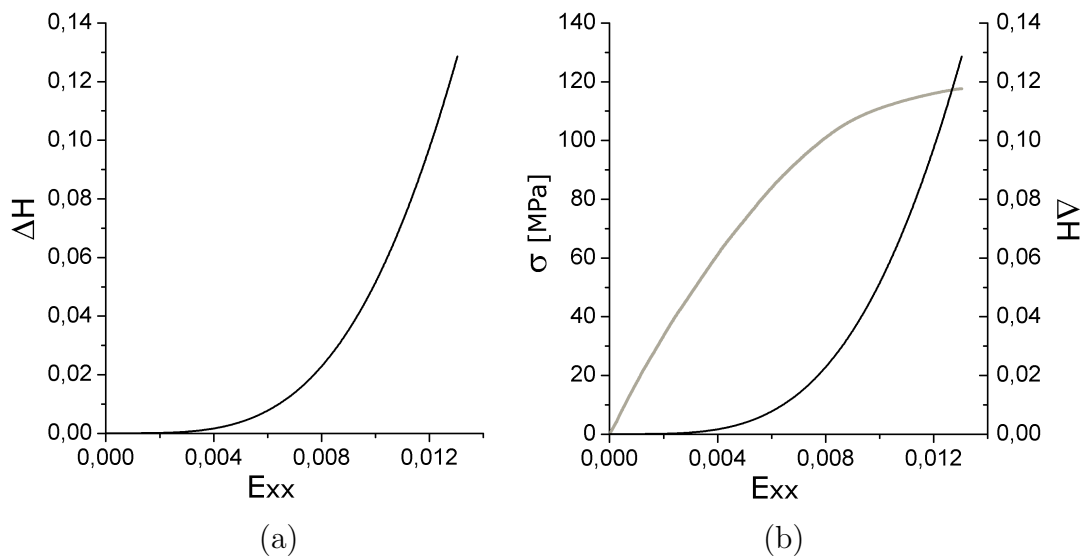


Figura 4.7. (a) Variación de entropía ΔH frente a la deformación en la dirección longitudinal E_x de la muestra 0048_12 obtenida a partir de los parámetros ajustados con la expresión (4.27), (b) Curva de tensión-deformación experimental en la dirección longitudinal de la muestra 0048_12 (línea gris) y variación de la entropía de la misma muestra (línea negra); se observa un claro incremento de la variación de entropía ΔH cuando la curva tensión-deformación pierde la linealidad.

variación de la entropía como una función dependiente de β y de una deformación genérica ϵ , pudiendo así analizar la evolución de la entropía frente a ambas variables, como se representa en la Figura 4.8. Para cualquier valor de β (en este caso representado en el rango $\beta \in [1, 2]$ a pesar de que puede tomar cualquier valor $\beta \geq 0$), la entropía aumenta exponencialmente al alcanzar cierto nivel de deformación, asociado con el inicio de la propagación de microfisuras y a partir del cual el daño se acumula hasta el fallo.

Así mismo, cuanto mayor es β , más grande es la variación de entropía antes de la fractura macroscópica. Esto igualmente, también da validez a las consideraciones de este modelo, pues β se define como un parámetro relacionado con la acumulación de daño de la muestra y cuanto mayor es el nivel de fisuración que puede alcanzar el tejido, más entropía hay en el sistema. Los procesos irreversibles men-

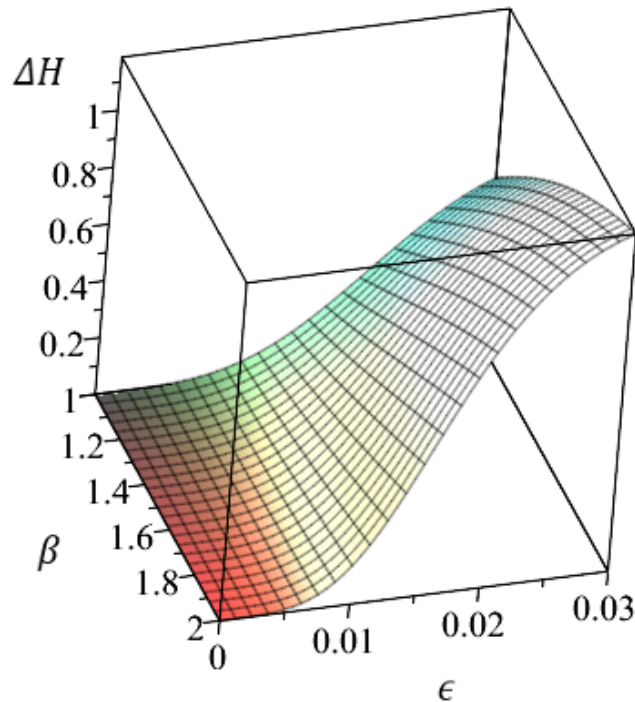


Figura 4.8. Variación de la entropía ΔH sobre el espacio β, ϵ calculada mediante los parámetros ajustados de la muestra 48_12; se observa como un incremento de β supone un mayor aumento de la entropía del sistema para un nivel de deformación ϵ , así como que, para cualquier $\beta \in [1, 2]$ la entropía aumenta de forma más abrupta al alcanzar cierto nivel de deformación, asociado con el inicio del daño.

cionados deben estar relacionados con un aumento de la disipación de la energía introducida en el material. Esto puede mostrarse en este modelo mediante las relaciones termodinámicas que permiten determinar la cantidad de energía invertida en la deformación de la muestra y en la propagación de las microfisuras.

Para ello, se parte de la relación de la función energía de deformación Ψ con las variables termodinámicas:

$$\Psi = u - \frac{H}{\beta} \quad (4.29)$$

donde u es precisamente la energía interna del sistema; es decir, la energía introducida en el material (al incrementar la fuerza o el nivel de deformación). Para un proceso de deformación en el cual el parámetro β [que trata con el desorden] no cambia, se tiene:

$$\Delta u = \Delta W + \frac{\Delta H}{\beta} \quad (4.30)$$

de esta forma, la energía total invertida Δu se expresa como la suma de la energía mecánica ΔW más la energía de disipación debida a la nucleación y propagación de las microfisuras $\Delta H/\beta$. El trabajo puede obtenerse como:

$$W = \sum_{i,j} \int S_{ij} dE_{ij} \quad (4.31)$$

En la práctica, este trabajo W corresponde al área bajo la curva de tensión frente a deformación. A partir de esta magnitud, puede definirse entonces el ratio de energía invertida en procesos reversibles respecto a la energía total:

$$r_e = \frac{\Delta W}{\Delta u} = \frac{\Delta W}{\Delta W + \Delta H/\beta} = \frac{1}{1 + \Delta H/(\beta \Delta W)} \quad (4.32)$$

Análogamente, también puede obtenerse el ratio entre la energía disipada en procesos irreversibles con respecto a la energía total invertida:

$$\bar{r}_e = 1 - r_e = 1 - \frac{\Delta W}{\Delta u} = \frac{\Delta H/\beta}{\Delta u} \quad (4.33)$$

La Figura 4.9 muestra la evolución de los ratios r_e y \bar{r}_e para la misma muestra anterior, a medida que se incrementa la deformación. Como puede observarse en la Figura 4.9(a), la energía introducida en el sistema se invierte inicialmente por completo en deformar elásticamente la muestra, dado que no se dan procesos disipativos (en este caso relacionados con la propagación de las microfisuras), tal que $r_e = 1$. Sin embargo, a medida que se incrementa el nivel de deformación, cierta parte de la energía total interna Δu no se está dedicando al a deformación elástica y el ratio r_e cae hasta $r_e = 0,91$ cuando se alcanza el fallo total de la muestra. Este $\Delta r = -0,09$ perdido corresponde precisamente a la energía disipada, que ha sido invertida en la propagación de las microfisuras. Esto se representa en la Figura 4.9(b), donde se observa que inicialmente no hay energía asociada a los procesos disipativos que incrementen la entropía ($\bar{r}_e = 0$) pero, a medida que aumenta la

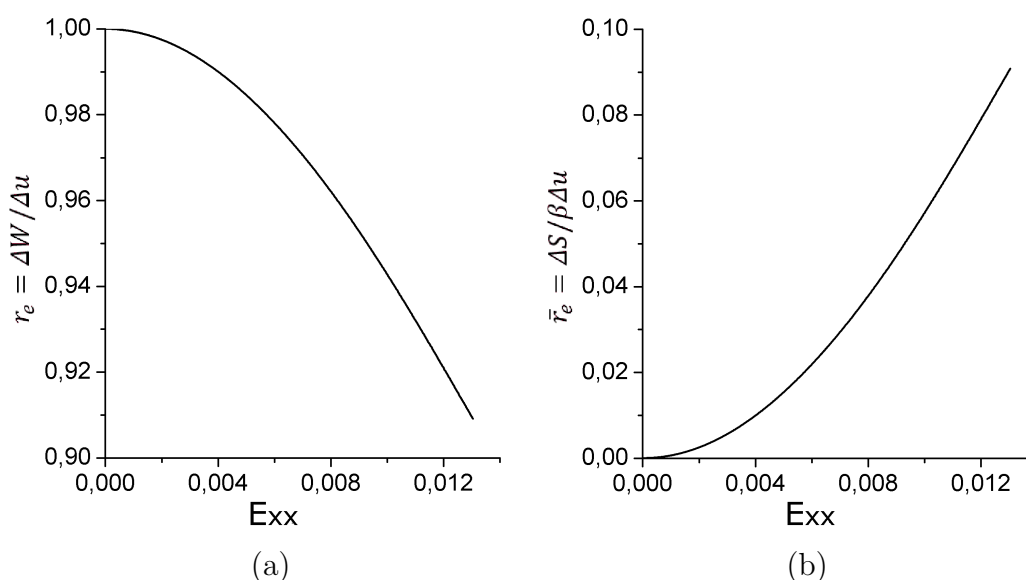


Figura 4.9. (a) Variación del ratio de energía mecánica respecto a la energía interna total (b) Variación del ratio de energía invertida en procesos irreversibles frente a la energía total, calculados a partir de datos experimentales de la muestra 48_12.

deformación, cierta parte de la energía total introducida en el sistema se dedica a la fisuración de la muestra. En el caso del *coupon* analizado para desarrollar el estudio de la consistencia termodinámica, prácticamente un 10 % del total de la energía introducida se invierte en los procesos de disipación, es decir, en la nucleación y propagación de microfisuras. Por todo lo descrito, puede corroborarse la consistencia del modelo propuesto con las leyes termodinámicas.

4.2 Descripción geométrica de la costilla humana

La integridad estructural de las costillas humanas, es decir, la capacidad de éstas de soportar una deformación o fuerza antes de llegar a la fractura, viene dada tanto por las propiedades mecánicas del tejido óseo como por su geometría. Por esta razón, para conocer las *propiedades mecánicas intrínsecas* (tensión, deformación máxima o módulo elástico entre otros) que caracterizan al hueso, es necesaria una descripción adecuada de la geometría de la costilla que permita aislar los factores geométricos influyentes en los resultados de los ensayos experimentales.^{23,70}

En esta sección se expone la descripción geométrica de la costilla humana completa en términos generales, que permitirá calcular las tensiones y deformaciones propias del hueso en las situaciones particulares planteadas en esta investigación (microtracción y flexión).

La geometría de la parte cortical de costilla humana se puede describir como un *prisma curvo* de sección variable $\Sigma_s \subset \mathbb{R}^2$ donde, para cada sección transversal Σ_s , se considera su centro de gravedad (centroide). El conjunto de todos los centroides de todas las secciones transversales constituyen el llamado *eje baricéntrico* de la costilla, el cual tiene un papel fundamental ya que permite calcular los momentos flectores y los cambios de curvatura debidos a las solicitaciones externas. Estructuralmente, como se ha mencionado previamente, las osteonas vienen alineadas de forma predominantemente paralela al eje baricéntrico. Siendo las osteonas la unidad básica de análisis para estudiar las microconfiguraciones de fisuración. Por esa razón, una descripción deficiente del eje baricéntrico influiría mucho en los resultados numéricos obtenidos en el análisis de las tensiones y deformaciones, ya que la dirección de *alineación preferencial de las osteonas* aparece en los invariantes I_4 e I_5 que forman parte de la ecuación constitutiva, tal y como se expuso en la sección 2.2.3. Varios estudios previos han analizado la variación de características geométricas como el área cortical, el espesor promedio, la distancia entre extremos y la longitud de la curva⁹³ y su relación con variables tales como la fuerza máxima o rigidez⁴ o la influencia con la edad.⁴⁹ Otros estudios aproximan el eje baricéntrico mediante el ajuste de círculos y semielipses⁷³ o espirales.⁵⁹

En lo que a la tensión y la deformación se refiere, ambas magnitudes varían a lo largo de la costilla y, como se verá en apartados posteriores, vienen influidas así mismo por su geometría, en la que se incluye el eje baricéntrico. Para poder describir la posición de cualquier punto sobre la costilla y determinar la tensión y/o deformación en dicho punto, es necesario definir una base vectorial de trabajo a partir de la cual referenciar la posición del punto material de interés sobre la muestra. Por ello inicialmente se definirá la base vectorial usada y la definición de los puntos materiales sobre la costilla. Posteriormente en las secciones correspondientes, se describirá el método usado para definir tanto el eje baricéntrico como la posición de un punto en los casos de tracción simple y flexión a tres puntos tratados en este estudio. La geometría general de la costilla humana completa ha sido definida a partir de la Tomografía Computarizada (CT) de un espécimen, que ha sido tratado para obtener los parámetros geométricos necesarios, los cuales reescalados han sido utilizados para los cálculos de tensiones y deformaciones.

4.2.1 Triedro de Frenet-Serret de la costilla humana

La costilla humana muestra una curva principal en uno de sus planos, tomando una forma de arco, cuya curvatura es variable a lo largo de su longitud y, además, se observa una segunda curvatura en la dirección perpendicular a dicho arco. Sin embargo, en las costillas superiores como la cuarta, objeto de estudio en esta investigación, ésta se encuentra principalmente contenida en un plano que definiremos como *plano principal*, descrito por los ejes XY (Figura 4.10).²¹⁷³ Así, el eje baricéntrico también puede considerarse como una curva contenida en dicho plano, cuya geometría será variable a lo largo del ensayo, pues la deformación de la costilla causada por el incremento de sollicitación altera su curvatura.

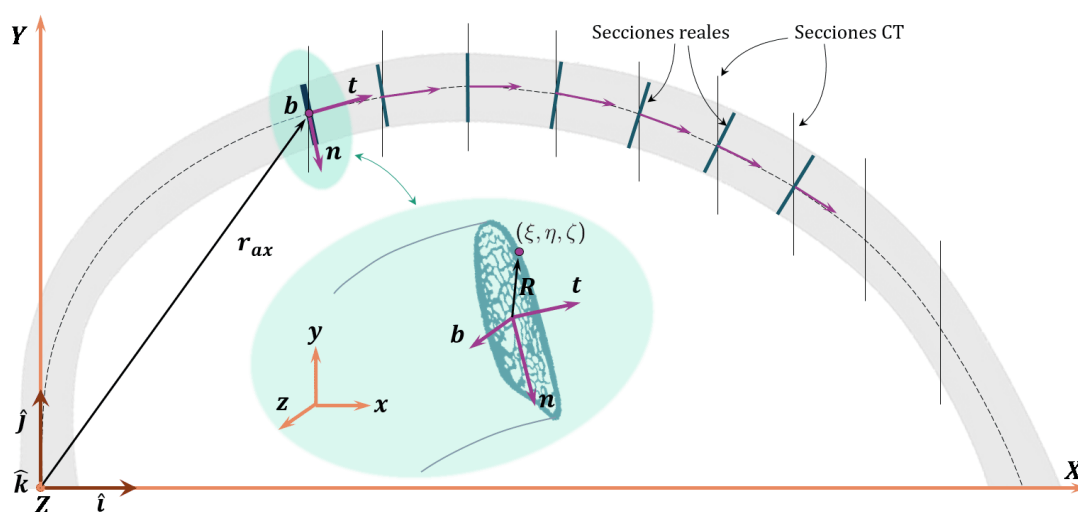


Figura 4.10. Descripción de la geometría de la costilla humana; el origen de la base vectorial se sitúa en el extremo izquierdo (ejes naranjas). Se observa eje baricéntrico (línea discontinua) formado por los centroides de la costilla, las secciones del CT (líneas verticales negras) y la proyección que da paso a las secciones reales Σ_s (líneas azul oscuro, perpendiculares al eje baricéntrico). El triedro de Frenet-Serret (ejes violetas) que forma la base móvil está constituido por los vectores \mathbf{t} (es perpendicular a la sección real) y \mathbf{n}, \mathbf{b} pertenecientes a la sección. El vector \mathbf{r}_{ax} define la posición del centroide de una sección en cuestión y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{ax} + \eta\mathbf{n} + \zeta\mathbf{b}$ es el vector que describe la posición de un punto de interés sobre dicha sección y cuya posición puede definirse por las coordenadas matemáticas (ξ, η, ζ) , dirigidas a lo largo de los ejes $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$.

²¹La curvatura de la costilla es diferente según el nivel (1 a 12) considerado; la cuarta costilla se encuentra mayoritariamente contenida en un plano y por ello en este estudio se considera que el eje baricéntrico es una curva plana o contenida en el plano, tal y como se ha realizado en otras investigaciones, como en Kindig *et al.* (2013).

Nótese entonces que, estando las osteonas preferentemente alineadas a lo largo del eje baricéntrico, éste último vendrá relacionado con el vector \mathbf{a} que define la dirección a lo largo de la cual el comportamiento mecánico difiere con respecto al del resto de direcciones (de hecho, dicho vector será tangente al eje baricéntrico en cada punto). De esta forma, el vector \mathbf{a} estará necesariamente contenido a su vez en el plano XY .

Situando el origen de coordenadas de una base ortogonal (X, Y, Z) en extremo posterior de la costilla, justo sobre el eje baricéntrico (Figura 4.10), el eje X define la posición longitudinal a lo largo de la costilla, el eje Y la posición en dirección vertical (ambos ejes definiendo el plano en el cual está contenido, tanto el eje baricéntrico como la propia costilla) y el eje Z es perpendicular a ambos y define la profundidad. Con ello, un punto sobre el eje baricéntrico puede definirse simplemente mediante un vector $\mathbf{r}_{ax} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$,²² y por otro lado, un punto genérico sobre la muestra puede designarse con un vector de la forma $\mathbf{r} = \bar{x}\hat{\mathbf{i}} + \bar{y}\hat{\mathbf{j}} + \bar{z}\hat{\mathbf{k}}$.²³ Véase entonces que para cada punto sobre el eje baricéntrico puede definirse un plano perpendicular, correspondiente a una sección Σ_s de la costilla, en el cual se encuentran contenidos los puntos materiales de esta sección (líneas azules de la Figura 4.10). Entonces, cualquier punto material de la costilla puede describirse alternativamente como la posición del centro de gravedad de la sección a la cual pertenece el punto (que se encuentra sobre el eje baricéntrico), más la distancia desde el centro de gravedad de la sección hasta dicho punto (contenida en el plano de la sección).

Sin embargo, debido a la curvatura de la costilla, las secciones perpendiculares al eje baricéntrico cambian de orientación a lo largo de la misma y por ello resulta más conveniente trabajar con una base móvil curvilínea en lugar de una base ortogonal fija. Esta base curvilínea viene definida por el triedro de *Frenet-Serret*; una tríada de vectores unitarios, formada por los vectores tangente, normal y binormal $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, con origen en el extremo posterior de la costilla, sobre el eje baricéntrico (ver Figura 4.10). Siendo el triedro $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ una base móvil, esta tríada de vectores cambia de orientación para cada posición sobre el propio eje, tal que el vector tangente siempre indica la dirección tangente al eje baricéntrico

²²El vector \mathbf{r}_{ax} que define la posición del eje baricéntrico, no tendrá dimensión $\hat{\mathbf{k}}$ dado que el eje está contenido en el plano XY , por lo que $z = 0$.

²³Nótese que las coordenadas de un punto sobre el eje y un punto genérico sobre la costilla, se definen como x_i y \bar{x}_i respectivamente para evitar confusiones, dado que no son coincidentes.

en cada punto, el vector normal la dirección perpendicular a \mathbf{t} hacia el centro de curvatura y el vector binormal está dirigido perpendicularmente a ambos. Dado que el eje baricéntrico pertenece al plano XY , los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} también están contenidos en dicho plano y el vector \mathbf{b} será perpendicular a ambos, apuntando siempre hacia el eje Z [profundidad]. Así mismo, siendo el vector \mathbf{t} tangente al eje baricéntrico en cada punto sobre él, este vector es normal a la sección en cuestión, mientras que los vectores \mathbf{n} y \mathbf{b} están contenidos en la sección.

Con ello, la posición de un punto material sobre la costilla estará contenida en una sección perpendicular al eje baricéntrico y vendrá definida por la distancia ξ dada sobre el eje baricéntrico (correspondiente a la longitud de arco desde el extremo posterior al centroide de la sección que contiene al punto) más las distancias η y ζ en las direcciones de los vectores \mathbf{n} y \mathbf{b} respectivamente, los cuales definen (y están contenidos en) el plano de la sección.

Otra característica interesante que deriva del uso del triedro $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ es que, dado que el eje baricéntrico coincide con la alineación preferencial de las osteonas, que viene definida por el vector unitario \mathbf{a} , el vector \mathbf{a} coincide con el vector tangente \mathbf{t} en cualquier punto sobre el eje, tal que $\mathbf{a} = \mathbf{t}$. Esta tríada de vectores también nos permitirá tratar más fácilmente con el cambio de curvatura del eje baricéntrico a medida que se aplica una deformación en el caso de flexión, como se verá en la sección 4.4.

Los vectores tangente, normal y binormal pueden obtenerse a partir del propio eje baricéntrico de la costilla, el cual puede definirse mediante un polinomio $y(x)$ de quinto orden, cuya forma específica se trata en la sección B.4 del apéndice. Considérese entonces el origen de coordenadas de una base vectorial fija $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ situada en el extremo posterior de la costilla tal y como se mencionó anteriormente; la posición de cualquier punto del eje baricéntrico puede definirse entonces como $\mathbf{r}_{ax} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ o alternativamente usando el polinomio que describe el eje, como $\mathbf{r}_{ax} = x\hat{\mathbf{i}} + y(x)\hat{\mathbf{j}}$ (Figura 4.10). Así, el vector tangente se obtiene como:²⁴

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}_{ax}/dx}{|d\mathbf{r}_{ax}/dx|} \Rightarrow \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{j}} \quad (4.34)$$

²⁴Nótese que, por definición $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ siendo $s = \int \sqrt{(dx/dx)^2 + (dy/dx)^2} dx$ la longitud de arco; derivando \mathbf{r} y s respecto a x se obtiene $\mathbf{t} = (d\mathbf{r}_{ax}/dx)/\sqrt{1 + [y'(x)]^2}$, lo cual es equivalente a la ecuación (4.34).

Por otro lado, siendo el plano principal el definido por los ejes X e Y donde está contenida la costilla, es decir, el plano osculador de la línea baricéntrica, el vector binormal para cualquier posición sobre el eje es $\mathbf{b} = -\hat{\mathbf{k}}$; así, puede obtenerse el vector normal de la forma:

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{j}} \quad (4.35)$$

En consecuencia y en base a lo mencionado anteriormente, para cualquier posición sobre el eje baricéntrico, los vectores \mathbf{t} y \mathbf{n} están contenidos en el plano osculador y cambian de orientación para cada punto sobre el eje y, además, \mathbf{b} es perpendicular a dicho plano para cualquier punto.

Los vectores $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ no solo cambian a lo largo del eje baricéntrico de la costilla, sino que también varían con su deformación. A medida que se incrementa la sollicitación, la geometría de la costilla se ve alterada, experimentando cambios en su curvatura. Por consiguiente, tanto las posiciones de los puntos materiales sobre la costilla como el propio eje baricéntrico varían y, con ellos, también cambia la orientación de $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Esto implica que para cada nivel de deformación de la costilla, los coeficientes del polinomio $y(x)$ que define el eje baricéntrico son distintos y la curvatura de la costilla para cada nivel de deformación puede determinarse a partir de dicho polinomio y para cualquier punto sobre el eje, según:²⁵

$$\chi(x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} \quad (4.36)$$

Junto con el vector tangente que permitirá obtener el vector de alineación \mathbf{a} y la curvatura en cada punto del eje, también se precisan valores de diferentes parámetros geométricos de las secciones de la costilla, tales como los momentos de inercia o el área. Para conocer los datos geométricos de la costilla, se ha recurrido a una Tomografía Computarizada (CT) de una costilla humana genérica, distinta a las usadas en los ensayos experimentales. Tal y como se describió en la sección 3.4, un CT es un conjunto de imágenes transversales correspondi-

²⁵La curvatura $\chi(x)$ puede calcularse como $\chi = d\theta/ds$; derivando cada término respecto a x y siendo $\theta = \arctan(dy(x)/dx)$ se llega a la ecuación (4.36).

entes a las secciones paralelas, en este caso de la costilla humana completa (estas secciones vienen representadas por líneas paralelas en la Figura 4.10). Estas imágenes pueden procesarse con el software adecuado para determinar diferentes parámetros geométricos de cada sección. Para ello, se usó el módulo BoneJ® del software ImageJ®, específico para el análisis de CTs de huesos. Mediante el uso de este software, se trataron las imágenes para aislar el hueso cortical y se exportaron todos los parámetros geométricos de cada sección, incluyendo la posición del centroide, el área, los momentos de inercia o el espesor promedio de cada una de las secciones, entre otros.

Es importante notar que las secciones que forman el CT son paralelas entre sí y, por tanto, no son las secciones reales relevantes para el cálculo de la tensión, sino una proyección de las mismas (ver la Figura 4.10). Las secciones reales que deben analizarse son las perpendiculares al eje baricéntrico, por lo que se requiere una proyección de los parámetros obtenidos y mencionados anteriormente para determinar los valores reales de los mismos (los cuales siempre serán iguales o menores a los determinados por el software). Así, partiendo de un polinomio $y(x)$ ajustado para el eje baricéntrico, se han proyectado todas las secciones y con ello, todos los parámetros geométricos, obteniendo sus valores reales correspondientes a la geometría de cada sección perpendicular al eje (para una descripción más exhaustiva del tratamiento de los datos obtenidos del CT, puede recurrirse a la sección B.3 del apéndice). De esta forma, se obtuvieron todos los datos geométricos necesarios a lo largo de la costilla completa, usados para los cálculos posteriores derivados de los ensayos de flexión.

4.2.2 Desplazamiento y deformaciones a lo largo de la costilla

Para tratar con el cambio de posición de los puntos tras una deformación, definamos un punto sobre la configuración de referencia (previa a la deformación) mediante las coordenadas materiales (ξ, η, ζ) y, después de la deformación, con las coordenadas espaciales $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$. El paso de la configuración de referencia (material) a la configuración actual (espacial o deformada), puede expresarse como una aplicación o mapeo φ de la configuración sin deformar a la deformada:

$$(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{r}(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) = \xi\delta_1\mathbf{t} + \eta\delta_2\mathbf{n} + \zeta\delta_3\mathbf{b} \quad (4.37)$$

donde δ_i son parámetros que deben introducirse según el tipo de sollicitación y que definirán, tanto dicha sollicitación como la relación entre las deformaciones E_{ij} en las diferentes direcciones. La aplicación φ define el cambio de posición de un punto material cualquiera sobre la costilla tras una deformación, es decir, el desplazamiento, a partir del cual se obtiene el tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} y posteriormente, el tensor de deformaciones de Green-Saint-Venant \mathbf{E} . De hecho, el tensor de deformaciones es la matriz jacobiana $D\varphi$, tal que:²⁶

$$D\varphi = \left[\frac{\partial x^i}{\partial X^j} \right] = \left[\frac{\partial x^i}{\partial \xi}, \frac{\partial x^i}{\partial \eta}, \frac{\partial x^i}{\partial \zeta} \right] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] \quad \forall x^i = (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) \quad (4.38)$$

donde $[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$ son los vectores [columna] desplazamiento que constituyen la matriz jacobiana y cuyas componentes corresponden a las que se obtienen derivando el vector \mathbf{r} respecto a las coordenadas ξ, η, ζ respectivamente. Definida la aplicación φ , el tensor gradiente de deformaciones se determina como $\mathbf{F} = D\varphi$, tal que se podrá obtener entonces el tensor de deformaciones \mathbf{E} de la forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (4.39)$$

Los tensores de deformación y tensión toman una forma particular según el tipo de sollicitación aplicada, dado que ésta anula ciertos componentes de ambos, haciéndolos más simples. Precisamente, son los tensores de tensión y deformación los que proporcionan una forma particular al modelo en los distintos tipos de sollicitación. Para poder desarrollar un modelo y determinar todo el conjunto de parámetros que en él se presentan, se precisa la realización de diversos ensayos experimentales con diferentes tipos de sollicitación; por ejemplo, ciertas componentes de la deformación o la tensión de un ensayo de flexión, se ven anuladas en los tensores de un ensayo de tracción.

En este estudio se han obtenido los tensores de tensión y deformación para las sollicitaciones de tracción y flexión, obteniendo posteriormente los valores de los parámetros del modelo para cada muestra a partir de los datos experimentales. Para ello, inicialmente deben obtenerse y particularizarse los tensores de deformaciones \mathbf{E} y tensiones \mathbf{S} , así como la función energía de deformación reducida ψ_0 ,

²⁶La matriz jacobiana de una aplicación $f(x)$ de $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ diferenciable es una matriz $m \times n$ formada por las derivadas parciales de la aplicación con respecto a las componentes x_i .

también influida por las componentes presentes de la deformación. Todos ellos se exponen en las secciones posteriores, para los ensayos de tracción y flexión. Así, para cada sollicitación se presenta la estimación de los desplazamientos y tensores de deformación, seguido del cálculo del tensor de tensiones. Una vez obtenida la forma del modelo para estas dos sollicitaciones particulares, se obtendrán los valores de los parámetros de tracción mediante los datos experimentales de *coupons* y de flexión con los datos de los ensayos de costilla humana completa. Estos parámetros serán determinados por medio de ajustes no lineales utilizando el software OriginLab[®], donde se introducirán las ecuaciones del modelo en cada una de las direcciones.

4.3 Modelo particularizado para tracción simple

El modelo constitutivo propuesto ha sido particularizado para una sollicitación de *tracción simple*, con el fin de obtener sus parámetros a partir de los ensayos experimentales de probetas tipo alterio o (*coupons*) de hueso cortical de costilla humana. Las muestras de tracción simple de hueso cortical fueron fabricadas con su dimensión más larga en la dirección longitudinal del hueso, de tal forma que el eje a lo largo del cual se aplica la fuerza coincide con la dirección principal de alineación de las osteonas. Así, consideremos el eje X coincidente con el eje longitudinal y, a su vez, el eje de aplicación de la tensión, el eje Y perpendicular a X y contenido en el plano principal de la muestra y el eje Z perpendicular a ambos y en la dirección del espesor (Figura 4.11).

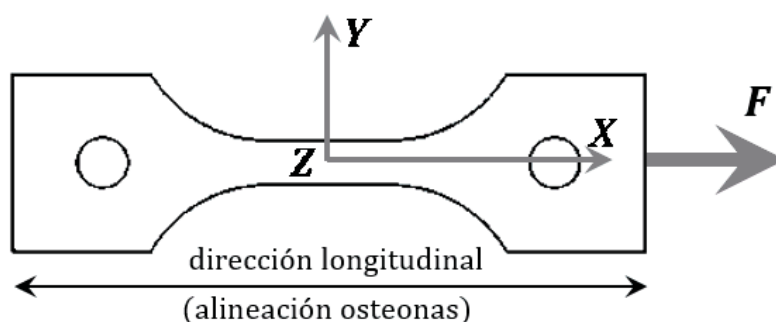


Figura 4.11. Esquema de sollicitación del *coupon*; el eje X va dirigido en la dirección longitudinal del hueso a lo largo del cual se alinean las osteonas, el eje Y perpendicular a X y contenido en el plano del *coupon* y el eje Z normal a ambos y en dirección del espesor.

Nótese que, siendo la muestra plana, el eje baricéntrico del *coupon* coincide precisamente con el eje X . Dado que el estado de deformación en tracción simple es homogéneo, es decir, con deformaciones constantes en la *región de interés*²⁷ (RdI), resulta que el desplazamiento longitudinal es directamente $U_x(X, t) \approx \varepsilon_t X$, siendo ε_t la deformación longitudinal en cada instante de tiempo y X , la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto material en cuestión y en la dirección longitudinal. De esta forma, el conjunto de desplazamientos U_x de todos los puntos experimentales definidos en la longitud de referencia (ver sección 3.3.4) se encuentran sobre una recta y, estimando la pendiente de dicha recta se obtiene la deformación longitudinal:

$$\varepsilon_t \approx \frac{\partial U_x}{\partial X} \quad (4.40)$$

Las deformaciones en el resto de direcciones se calcularán a partir de ε_t , obtenida de los ensayos experimentales. Los detalles del cálculo de las otras deformaciones se describirán en la siguiente sección 4.3.1.

Por otro lado, en un ensayo de tracción simple el estado tensional solo tiene una componente no nula que se puede calcular como la fuerza aplicada entre el área inicial de la muestra $S_{xx} = F_t/A_0$.²⁸ La forma del tensor de tensiones se dará en la sección 4.3.2.

Partiendo de la forma particular de los tensores de tensiones y deformaciones, se determina la función energía de deformación reducida ψ_0 , de la que se deduce la forma particular del modelo constitutivo para una sollicitación de tracción simple. A partir de esa forma particular se ajustan los parámetros del modelo para cada muestra del conjunto *coupons*, ver sección 4.3.3.

4.3.1 Deformaciones en tracción simple

Para determinar la forma particular del tensor de deformaciones \mathbf{E} en una sollicitación de tracción simple, se parte de las direcciones de los vectores que forman

²⁷La región de interés (RdI) corresponde a la longitud de referencia o zona central constante del *coupon*.

²⁸El área A_0 fue determinada mediante un micrómetro y siguiendo un procedimiento de medición de imágenes, descrito en la sección C.2 del apéndice.

el triedro de Frenet-Serret. Como se mencionó anteriormente, los *coupons* ensayados a tracción han sido fabricados en la dirección longitudinal de la costilla, por lo que el eje baricéntrico dirigido a lo largo de la dirección longitudinal coincide con X . De esta forma, el polinomio $y(x)$ que ajusta dicho eje es sencillamente $y(x) = 0$. Por otro lado, el vector \mathbf{t} coincidente con el eje baricéntrico, tendrá una dirección constante en la dirección X , el vector \mathbf{n} , perpendicular al tangente y contenido en el plano principal de la muestra, coincidirá con el eje Y y el vector \mathbf{b} será perpendicular a ambos y por tanto en la dirección Z (del espesor). Así, estos tres vectores toman la forma sencilla de $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{k}}$. Así mismo, siendo el eje X coincidente con el eje de alineación de las osteonas, el vector \mathbf{a} que define la dirección de orientación preferencial es $\mathbf{a} = \mathbf{t} = \hat{\mathbf{i}}$ (Figura 4.12).

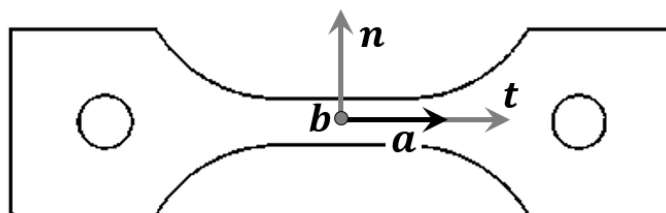


Figura 4.12. Situación del Triedro de Frenet-Serret en la sollicitación de tracción simple; el vector tangente \mathbf{t} se dirige a lo largo de X , el vector normal \mathbf{n} en dirección de Y y el binormal \mathbf{b} a lo largo de Z . El vector de alineación de osteonas \mathbf{a} coincide con \mathbf{t} en cualquier punto.

Para definir la aplicación φ desde la configuración de referencia a la deformada, expresemos el cambio de coordenadas de un punto de la muestra. En el caso de tracción simple, donde la muestra es plana y el eje baricéntrico recto, podemos considerar las coordenadas materiales (ξ, η, ζ) como un sistema cartesiano, es decir, $(\xi, \eta, \zeta) = (x, y, z)$. La convención es la siguiente; ξ describirá la distancia sobre el eje baricéntrico y dicho eje baricéntrico coincidirá con la dirección uniaxial de aplicación de la tensión (eje X), mientras que η y ζ definirán las distancias en las direcciones transversales Y y Z respectivamente, desde el centroide de la sección hasta el punto material considerado, es decir, corresponderán a las componentes y y z del vector posición. Con esta convención tenemos $\xi = x$ en la dirección del vector tangente \mathbf{t} , $\eta = y$ en la dirección \mathbf{n} y $\zeta = z$ en la otra dirección perpendicular \mathbf{b} . Así, el vector posición de un punto en la configuración inicial o material será:

$$\mathbf{R} = x\mathbf{t} + y\mathbf{n} + z\mathbf{b} = \xi\mathbf{t} + \eta\mathbf{n} + \zeta\mathbf{b}$$

Con ello, siendo (ξ, η, ζ) las coordenadas materiales o iniciales y $(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ las coordenadas espaciales (configuración deformada), se usará el mapeo o aplicación dada por $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \varphi(\xi, \eta, \zeta)$ que viene descrita por la expresión:

$$(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}) = \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda \xi \mathbf{t} + \left[1 - \frac{\bar{\nu}(\lambda)}{2} (\lambda^2 - 1) \right]^{1/2} (\eta \mathbf{n} + \zeta \mathbf{b}) \quad (4.41)$$

donde $\lambda > 0$ es el estiramiento que experimenta la muestra en la dirección longitudinal al aplicar la deformación y $0 < \bar{\nu}(\lambda) < 1$ da cuenta de la reducción de sección transversal²⁹ a medida que aumenta el alargamiento.³⁰

Nótese que la disminución de dimensiones transversales es idéntica en las direcciones perpendiculares al eje de estiramiento dado el comportamiento transversalmente isótropo del tejido cortical; por esa razón se tendrá que $E_{yy} = E_{zz}$ y $S_{yy} = S_{zz}$.

De esta forma, la deformación se puede representar como una aplicación dada por $\mathbf{r} = \phi(\mathbf{R})$, cuya matriz jacobiana $D\varphi = [\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{R}]$ permitirá determinar el tensor de deformaciones. La matriz jacobiana se calcula como:

$$D\varphi = \left[\frac{\partial x^i}{\partial X^j} \right] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right] = \lambda \mathbf{t} \\ \mathbf{u}_2 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right] = \left[1 - \frac{\bar{\nu}(\lambda)}{2} (\lambda^2 - 1) \right]^{1/2} \mathbf{n} \\ \mathbf{u}_3 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \right] = \left[1 - \frac{\bar{\nu}(\lambda)}{2} (\lambda^2 - 1) \right]^{1/2} \mathbf{b} \end{cases} \quad (4.42)$$

donde $x^i = (\xi, \eta, \zeta)$ son las coordenadas espaciales y $X^j = (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ las materiales. Puesto que el gradiente de deformaciones \mathbf{F} se obtiene como $\mathbf{F} = D\varphi$, éste es:

²⁹Más adelante se verá que para pequeños alargamientos esta función desempeña un papel relacionado con el del coeficiente de Poisson en un material elástico lineal. La forma explícita de la función se determinará en la sección 4.3.3.

³⁰Nótese que esta expresión es análoga a (4.37), donde los coeficientes δ_i tienen ahora la forma $\delta_1 = \lambda$, $\delta_2 = \delta_3 = [1 - (\bar{\nu}(\lambda)/2)(\lambda^2 - 1)]^{1/2}$.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 - \frac{\bar{\nu}(\lambda)}{2}(\lambda^2 - 1)\right]^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \left[1 - \frac{\bar{\nu}(\lambda)}{2}(\lambda^2 - 1)\right]^{1/2} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Y finalmente, el tensor de deformaciones de Green-Saint-Venant \mathbf{E} es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\nu}(\lambda)(\lambda^2 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\bar{\nu}(\lambda)(\lambda^2 - 1) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Como puede deducirse del tensor de deformaciones, las componentes $E_{yy} = E_{zz}$ son iguales, dado que el comportamiento en las direcciones y, z es el mismo y las componentes cortantes de la deformación son nulas $E_{xy} = E_{yx} = 0$, $E_{xz} = E_{zx} = 0$ y $E_{zy} = E_{yz} = 0$.

Véase que, como el ensayo de tracción simple se corresponde con un caso de *tensión plana* donde $S_{yy} = S_{zz} = 0$ (ver sección 4.3.2), la función incógnita $\bar{\nu}(\lambda)$ debe ser tal que se cumpla dicha condición, como se analizará en la siguiente sección. Sin embargo, antes de calcular la forma explícita de la función $\bar{\nu}(\lambda)$ es posible determinar su comportamiento en el régimen elástico lineal. Esto permite ver que la función $\bar{\nu}(\lambda)$ debe tener un efecto similar al coeficiente de Poisson en elasticidad lineal. En el rango elástico, es decir, para pequeñas deformaciones $E_{xx} = (\lambda^2 - 1)/2 \rightarrow 0$, el coeficiente de Poisson ν_0 equivalente al ratio entre la deformación longitudinal y la deformación transversal $E_{yy} = -\bar{\nu}(\lambda^2 - 1)/2$:

$$\nu_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 1} -\frac{E_{yy}}{E_{xx}} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\bar{\nu}(\lambda)(\lambda^2 - 1)/2}{(\lambda^2 - 1)/2} = \bar{\nu}(1) \quad (4.45)$$

Por tanto, queda claro que $\bar{\nu}(\lambda)$ desempeña el papel análogo a un coeficiente de Poisson. Si el material fuera elástico lineal, entonces $\bar{\nu}(\lambda)$ sería una constante cuyo valor sería igual al coeficiente de Poisson, en este caso, del tejido óseo. En la sección 4.3.3 se calculará explícitamente la forma necesaria para $\bar{\nu}(\lambda)$ que satisfaga que la deformación dada por (4.41) corresponda a una situación de *tensión plana*.

4.3.2 Tensiones en tracción simple

La sollicitación en un ensayo de tracción uniaxial simple se aplica a lo largo de una dirección, en este caso eje X . A pesar de que ello provoca deformaciones tanto en la dirección de sollicitación como en las transversales (concretamente un alargamiento en x y un encogimiento en y, z debido a la conservación de volumen), el tensor de tensiones únicamente tendrá una componente en la dirección longitudinal. Expresando el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, en un ensayo de tracción uniaxial éste toma la forma de:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} F/A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

siendo F la fuerza aplicada y A_0 la sección resistente, en este caso correspondiente a la sección de la longitud de referencia. Dado que el hueso cortical es un material que no experimenta grandes deformaciones, así como tampoco presenta una zona localizada de estricción, el área considerada para el cálculo de la tensión a lo largo de todo el ensayo será la sección inicial determinada antes del ensayo experimental.

4.3.3 Función energía de deformación en tracción simple

El modelo constitutivo propuesto para relacionar tensiones y deformaciones depende de los parámetros N y r relacionados con la fisuración y del parámetro β de *atemperación del orden*, así como de los parámetros $\boldsymbol{\vartheta}$ incluidos en la función energía de deformación reducida ψ_0 (ver ecuación (4.22)). La función ψ_0 (ecuación (4.21)) es la que introduce las variables del modelo, concretamente las componentes del tensor de deformaciones de Green-Saint-Venant \mathbf{E} , a través de los invariantes que definen la simetría del material.

En el caso que nos ocupa, ψ_0 es una función de los invariantes isótropos y los invariantes específicos asociados a un material transversalmente isótropo. Considerando que $E_{xy} = E_{xz} = E_{yz} = 0$, $E_{yy} = E_{zz}$ y que $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}$, los invariantes particulares para un ensayo de tracción simple vienen dados por:

$$I_1(\mathbf{E}) = E_{xx} + 2E_{yy} \quad (4.47a)$$

$$I_2(\mathbf{E}) = 2E_{xx}E_{yy} + E_{yy}^2 \quad (4.47b)$$

$$I_3(\mathbf{E}) = E_{xx}E_{yy}^2 \quad (4.47c)$$

$$I_4(\mathbf{E}) = E_{xx} \quad (4.48a)$$

$$I_5(\mathbf{E}) = E_{xx}^2 \quad (4.48b)$$

Partiendo de estos invariantes y recurriendo a la ecuación (4.21), la función energía de deformación reducida ψ_0^c particularizada es:

$$\begin{aligned} \psi_0^c(\mathbf{E}) &= \alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + \alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^3 + \gamma_1(2E_{xx}E_{yy} + E_{yy}^2) + \dots \\ &\dots + \gamma_2(2E_{xx}^2E_{yy} + 5E_{xx}E_{yy}^2 + 2E_{yy}^3) + \nu(E_{xx}E_{yy}^2) + \dots \\ &\dots + \kappa_1E_{xx}^2 + \kappa_2E_{xx}^3 + \varsigma_1E_{xx}^2 + \varsigma_2E_{xx}^3 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Nótese entonces que mientras κ_1 y ς_1 quedan multiplicados por E_{xx}^2 , los parámetros κ_2 y ς_2 multiplican a E_{xx}^3 . Ello impide poder ajustar los cuatro parámetros independientemente en esta sollicitación, precisando un agrupamiento de los mismos de la forma $\rho_1 = \kappa_1 + \varsigma_1$ y $\rho_2 = \kappa_2 + \varsigma_2$, tal que ahora:

$$\begin{aligned} \psi_0^c(\mathbf{E}) &= \alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + \alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^3 + \gamma_1(2E_{xx}E_{yy} + E_{yy}^2) + \dots \\ &\dots + \gamma_2(2E_{xx}^2E_{yy} + 5E_{xx}E_{yy}^2 + 2E_{yy}^3) + \nu(E_{xx}E_{yy}^2) + \dots \\ &\dots + \rho_1E_{xx}^2 + \rho_2E_{xx}^3 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Obtenida la función ψ_0^c , puede determinarse la tensión sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ como se definió en la expresión (4.23), derivando la función $\psi_0^c(\mathbf{E})$ respecto al tensor de deformaciones \mathbf{E} :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \left((2\alpha_1 + \gamma_1)(E_{xx} + 2E_{yy}) + 3\alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + \gamma_2((E_{xx} + 2E_{yy})^2 + \dots \right. \\ &\dots + (2E_{xx}E_{yy} + E_{yy}^2)) \mathbf{I} - (\gamma_1 + \gamma_2(E_{xx} + 2E_{yy}))\mathbf{E} + \nu(E_{xx}E_{yy}^2)\mathbf{E}^{-1} + \dots \\ &\dots + (2\kappa_1E_{xx} + 3\kappa_2E_{xx}^2 + \varsigma_2E_{xx}^2) \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + (\varsigma_1 + \varsigma_2E_{xx}) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{E}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{E} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

A partir de la tensión sin degradación $\bar{\mathbf{S}}$ se obtiene la tensión con fisuración del modelo constitutivo propuesto en la ecuación (4.19), de la forma:

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}\Phi(\beta\psi_0^c(\mathbf{E}, \boldsymbol{\vartheta}^c), N, r) ; \quad S_{ij} = \bar{S}_{ij}(E_{mn}, \boldsymbol{\vartheta}^c)\Phi(E_{mn}, \boldsymbol{\vartheta}^c, \beta, N, r) \quad (4.52)$$

donde $\boldsymbol{\vartheta}^c$ engloba los parámetros presentes en la función ψ_0^c (4.50) y en consecuencia, también en la tensión sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ (4.51) y siendo β, N y r los parámetros introducidos en el modelo con degradación. Del tensor de tensiones \mathbf{S} para la sollicitación particular de tracción simple (4.46), se concluyó que la única componente no nula de la tensión es S_{xx} , siendo $S_{yy} = S_{zz} = 0$, igual que las componentes tangenciales. Además, analizando la expresión (4.52) puede verse que, siendo $\Phi \neq 0$, $S_{yy} = 0$ si y solo si $\bar{S}_{yy} = 0$ y lo mismo sucede para $S_{zz} = 0$. En base a esto, las componentes del tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ son:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xx}^c = & 2\alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy}) + 3\alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + 2\gamma_1 E_{yy} + \dots \\ & \dots + \gamma_2 E_{yy}(4E_{xx} + 5E_{yy}) + \nu E_{yy}^2 + 2\rho_1 E_{xx} + 3\rho_2 E_{xx}^2 \end{aligned} \quad (4.53a)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{yy}^c = \bar{S}_{zz}^c = & 2\alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy}) + 3\alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + \gamma_1(E_{xx} + E_{yy}) + \dots \\ & \dots + \gamma_2(E_{xx}^2 + 5E_{xx}E_{yy} + 3E_{yy}^2) + \nu E_{xx}E_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (4.53b)$$

Finalmente, reemplazando tanto el tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ como la función energía de deformación sin fisuración ψ_0^c en la expresión (4.22), se obtiene el modelo constitutivo particularizado para una sollicitación de tracción simple:

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\vartheta}^c) \left(\frac{1}{1 - r e^{-\beta \psi_0^c(\boldsymbol{\vartheta}^c)}} - \frac{N r^N e^{-\beta \psi_0^c(\boldsymbol{\vartheta}^c) N}}{1 - r^N e^{-\beta \psi_0^c(\boldsymbol{\vartheta}^c) N}} \right) \quad (4.54)$$

Los parámetros a ajustar en el modelo constitutivo de hueso cortical de costilla humana sometido a tracción simple son β, N y r , además del conjunto de parámetros englobado en $\boldsymbol{\vartheta}^c = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \rho_1, \rho_2)$. Los parámetros ajustados deben cumplir que, para las deformaciones de los ensayos de tracción (determinadas a partir las posiciones de los puntos experimentales y calculadas mediante la expresión (4.44)), la tensión S_{xx} obtenida del modelo sea igual a la tensión experimental y, además, que la tensión $\bar{S}_{yy} = \bar{S}_{zz} = 0$. Este ajuste puede entonces operarse mediante mínimos cuadrados, como:

$$0 = \sum_j (S_{xx,j} - S_{xx,j}^*)^2 + (\bar{S}_{yy,j} - 0)^2$$

donde S_{xx}^* es la tensión experimental F/A_0 y la suma se extiende sobre todos los fotogramas j del vídeo del ensayo. Con ello se obtienen finalmente los parámetros del modelo particularizado para una sollicitación de tracción simple.

Para poder ajustar el modelo, solo queda pendiente determinar la función incógnita $\bar{\nu}(\lambda)$ que da cuenta de los acortamientos en las direcciones transversales perpendiculares a la dirección de estiramiento. Teniendo en cuenta que, , de acuerdo con la ecuación (4.19), se tiene que $S_{yy} = S_{zz} = 0$ si y solo si $\bar{S}_{yy} = \bar{S}_{zz} = 0$, entonces se debe cumplir la condición:

$$\bar{S}_{yy} = A(\lambda)\bar{\nu}^2(\lambda) + B(\lambda)\bar{\nu}(\lambda) + C(\lambda) = 0$$

cuyos coeficientes vienen dados por:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 12\alpha_2 E_{xx}^2 \\ B(\lambda) &= -[(5\gamma_2 + 12\alpha_2 + \nu)E_{xx}^2 + (3\gamma_2 + 4\alpha_1 + 2\gamma_1)E_{xx}] \\ C(\lambda) &= (3\alpha_2 + \gamma_2)E_{xx}^2 + (2\alpha_1 + \gamma_1)E_{xx} \end{aligned}$$

siendo $E_{xx} = (\lambda^2 - 1)/2$. Esto permite calcular fácilmente la función $\bar{\nu}(\lambda)$:

$$\bar{\nu}(\lambda) = \text{sgn}(B) \frac{-B(\lambda) + \text{sgn}(B)[B^2(\lambda) - 4A(\lambda)C(\lambda)]^{1/2}}{2A(\lambda)} \quad (4.55)$$

Es sencillo razonar que la solución físicamente admisible debe llevar el signo opuesto a B .³¹ Las funciones signo $\text{sgn}(B)$ se introducen para proporcionar el signo correcto según si B es positivo o negativo. Un desarrollo en serie de Taylor proporciona el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \frac{1}{24\alpha_2} [3\gamma_2 + 4\alpha_1 + 2\gamma_1] \frac{15\gamma_2^2 + (3\nu + 42\alpha_1 + 36\alpha_2 + 10\gamma_1)\gamma_2 + 2\gamma_1\nu + 4\alpha_1\nu}{9\gamma_2^2 + (12\gamma_1 + 24\alpha_1)\gamma_2 + 16\alpha_1\gamma_1 + 16\alpha_1^2 + 4\gamma_1^2} \\ &\dots - (5\gamma_2 + 12\alpha_2 + \nu)] + O(E_{xx}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Esto es importante porque el primer término es una combinación de constantes que, para muy pequeñas deformaciones, debe dar el coeficiente de Poisson experimental ν_0 , por lo que de entrada se puede eliminar una de las constantes en término de las otras.

³¹En el límite cuando $E_{xx} \rightarrow 0$, el coeficiente $A(E_{xx})$ dentro la expresión $A(E_{xx})\bar{\nu}^2 + B(E_{xx})\bar{\nu} + C(E_{xx}) = 0$ decrece mucho más rápido que B o C . Por tanto, la solución en ese límite debería ser $\bar{\nu}(\lambda) \rightarrow -C/B$, si $B > 0$ que es precisamente el límite de la solución cuadrática con el signo adecuado $\lim_{A \rightarrow 0} (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/2A = \lim_{A \rightarrow 0} (-B \pm |B|(1 - 2AC/B^2))/2A$. De los dos límites anteriores, uno da infinito y el otro da el valor absoluto del valor correcto $C/|B|$ por lo que vuelve a ser necesario emplear la función signo.

4.4 Modelo particularizado para flexión en el plano

La particularización del modelo constitutivo ha sido planteada también para una sollicitación de flexión a tres puntos, para poder ajustar los parámetros del modelo partiendo de ensayos experimentales de flexión de costilla humana completa. La fuerza ha sido aplicada en la superficie exterior central de la costilla, siendo los puntos de apoyo directamente los dos extremos de la muestra que, con el incremento de sollicitación se deslizan por el interior de la guía (ver Figura 4.13).

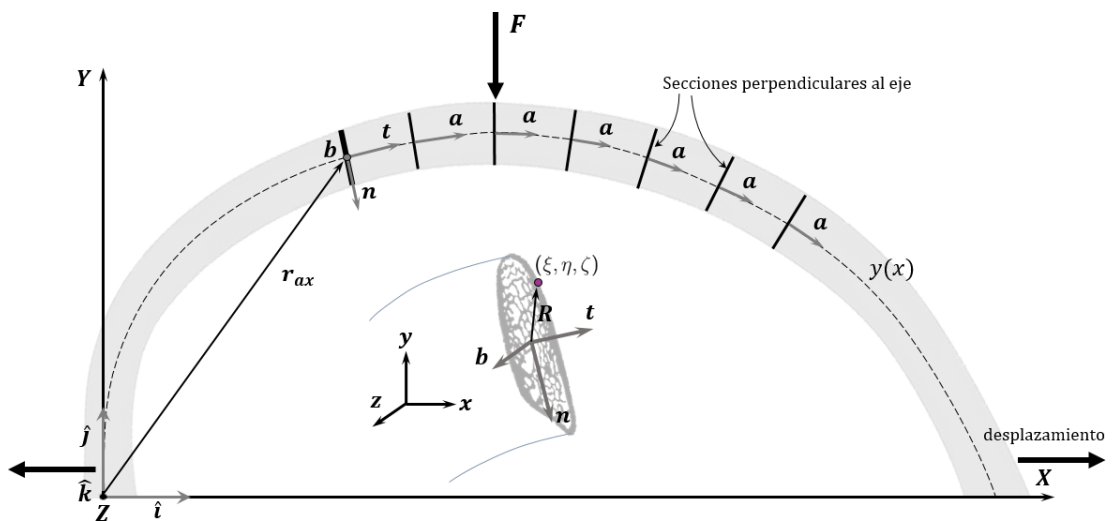


Figura 4.13. Situación del triedro de Frenet-Serret en la sollicitación de flexión a tres puntos; la fuerza se aplica en la superficie exterior central de la costilla, mientras que los extremos se deslizan. La costilla está contenida en el plano XY y el eje baricéntrico indica la dirección de alineación de las osteonas a , coincidente con el vector tangente t . La posición de un punto material se define con las coordenadas (ξ, η, ζ) siendo ξ la longitud de arco desde el origen al centroide de la sección e η, ζ las distancias en n y b respectivamente, contenidas en la sección.

Como se mencionó en la sección 4.2, la costilla humana es un hueso curvo en forma de arco que, para costillas superiores como es la de cuarto nivel, ésta se encuentra contenida principalmente en un plano que vendrá definido por los ejes X e Y . Dado que en los ensayos de flexión se trata con la costilla completa, el sistema de ejes usado en este caso es exactamente el descrito en la sección 4.2.1 tal que, situando el origen de la base cartesiana en el extremo posterior de la costilla, el eje X se corresponde con la dirección longitudinal, el eje Y con la vertical y el eje Z perpendicular a ambos y por ende, al plano en el que está contenida la costilla (Figura 4.13).

Análogamente al caso de tracción simple, las deformaciones se calculan a partir de los desplazamientos de diversos puntos materiales en la costilla. Estos puntos fueron definidos sobre la costilla a partir de la colocación de varias gomas elásticas (ver sección 3.3.4). Las intersecciones de cada goma con los contornos superior e inferior de la costilla fueron definidas como los puntos a seguir a lo largo del ensayo. Estas intersecciones son precisamente los extremos superior e inferior de la goma, cuya posición será conocida para todo el ensayo tras el procesado de video. El punto medio entre la intersección superior e inferior de cada goma o marcador se considera perteneciente al eje baricéntrico (Figura 4.14) y el conjunto de estos puntos medios proporcionará el cambio de geometría del eje.³²

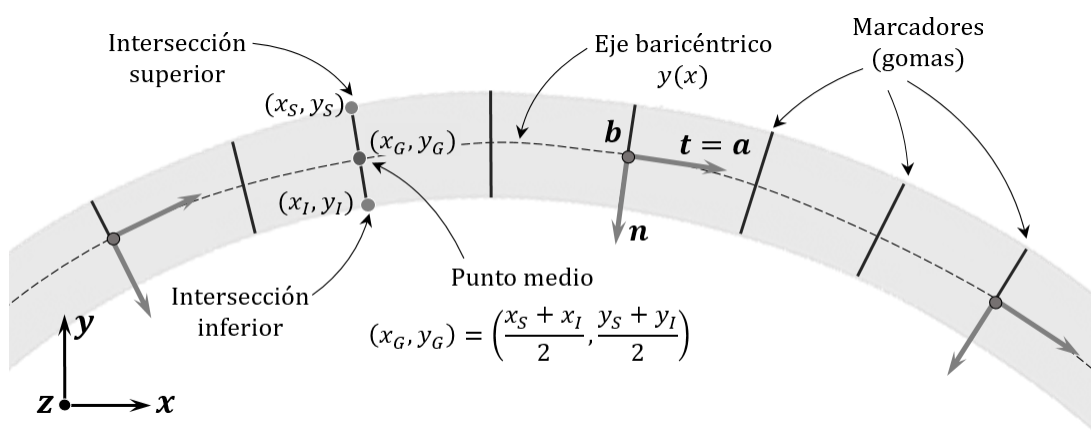


Figura 4.14. Cálculo de las posiciones de los puntos de la costilla; se definen las intersecciones superior x_S, y_S e inferior x_I, y_I de las gomas (líneas negras) con el contorno o fibras exterior e interior de la costilla. El punto intermedio de ambas x_G, y_G se considera perteneciente al eje baricéntrico (línea punteada). El triedro de Frenet-Serret $\{t, n, b\}$ cambia de orientación sobre el eje, a lo largo del cual se orientan las osteonas cuya alineación viene dada por a .

A partir de las posiciones de estos puntos (x_G, y_G) , puede ajustarse un polinomio $y(x)$ de quinto orden que define el eje baricéntrico (ver apéndice B.4). Debido al incremento de deformación progresivo durante el ensayo, los coeficientes del polinomio varían para cada instante de tiempo, por lo que se ha ajustado

³²Recurriendo al CT de la costilla humana utilizado para el cómputo de los parámetros geométricos, se ha calculado la diferencia entre el punto medio y la posición del centroide; en la zona central (donde se dan las tensiones máximas) el error cometido es de $3 \pm 2,5 \%$, cuyo máximo es $9,5 \%$ equivalente a $0,4 \text{ mm}$ de error (en la costilla global, el error máximo es del 13% correspondiente a $0,55 \text{ mm}$). Dado que los errores son bajos, esta aproximación será suficiente para probar el método de cálculo de las tensiones y deformaciones de la costilla completa desarrollado en este estudio y computar los parámetros del modelo.

un polinomio $y(x)$ el eje para cada uno de estos instantes, del cual se derivarán ciertas propiedades (tales como la curvatura, la dirección de alineación de las osteonas o los esfuerzos) que llevarán a la obtención de las tensiones y deformaciones. El cálculo de los desplazamientos de la costilla se describe en el siguiente apartado 4.4.1, seguido del procedimiento de determinación de las deformaciones en la sección 4.4.2.

Por otro lado, la tensión en cada punto material de la costilla dependerá de los esfuerzos aplicados, es decir, el axil, flector y cortante, que pueden calcularse a partir de la posición actual de la costilla y la fuerza aplicada por la máquina de ensayo. La tensión se calcula por medio de la *fórmula de Navier*, que combina esfuerzos y características geométricas de la muestra. Aquí se lidiará de nuevo con una dificultad adicional en este estudio que reside en la variación que presenta la geometría a lo largo de la costilla dado que, a diferencia de los *coupons*, a medida que se avanza longitudinalmente en el eje baricéntrico se observan cambios en la forma, espesor, sección y distribución de hueso cortical.

Para el cálculo de la tensión y la deformación de los ensayos de flexión de costilla humana completa será necesario conocer ciertas magnitudes geométricas para cada sección de la costilla, así como la distancia desde el centroide hasta las fibras superior e inferior de la costilla, donde se producen las tensiones máximas. Las dimensiones han sido determinadas a partir del CT de una costilla humana genérica que ha sido reescalada usando la relación de longitudes entre la costilla escaneada en el CT y la ensayada a flexión, tal y como se describió en la sección 4.2.1. De cada sección transversal del CT se ha determinado la *posición del centroide* (X_G, Y_G) sobre el plano de corte, el *área* A de la sección cortical, los *momentos de inercia* (I_n, I_b) y *producto de inercia* (I_{nb}), el primer momento de área m_b , el espesor promedio t y la cuerda en las direcciones radiales.³³ A partir del conjunto de centroides de las secciones del CT se ha reconstruido el eje baricéntrico, el cual ha sido descrito por medio de un polinomio de quinto orden ajustado, que permite proyectar las dimensiones de cada sección o imagen del CT y obtener su valor real. Todo el procedimiento ha sido descrito en la sección B.3 del apéndice. Estas magnitudes serán necesarias para calcular la tensión y la deformación, tal y como se hará en las secciones siguientes.

³³La cuerda se define como la distancia desde el centroide hasta el final de la muestra en la dirección del eje utilizado para determinar el momento de inercia.

Finalmente y partiendo de la forma de los tensores \mathbf{E} y \mathbf{S} , se dará la forma específica de la función energía de deformación reducida ψ_0 de la cual se deriva el modelo constitutivo. El modelo en su forma particular, será ajustado a los ensayos de flexión a tres puntos de costilla humana completa, obteniendo los parámetros en este tipo de sollicitación.

4.4.1 Desplazamientos para la flexión simple

En base a lo descrito al inicio de la sección y siendo el eje baricéntrico una curva contenida en el plano XY , se recurrirá al uso del triedro de Frenet-Serret en la forma de la Figura 4.14, donde el vector tangente \mathbf{t} irá en la dirección del eje baricéntrico, el vector normal \mathbf{n} perpendicular al tangente y apuntando hacia el centro de curvatura y el vector binormal \mathbf{b} perpendicular a ambos y al plano principal de la costilla, en la dirección de la profundidad. Los tres vectores, así como la curvatura, se obtienen a partir del polinomio $y(x)$ que define el eje baricéntrico de la costilla y mediante las expresiones (4.34) a (4.36).

El hecho de que la costilla esté sometida a flexión implica que las deformaciones y las tensiones no son homogéneas en toda la muestra, a diferencia de lo que sucede en un estado tensión-deformación homogéneo como es el caso de tracción simple analizado anteriormente. La no homogeneidad implica no solo que las tensiones serán diferentes para cada sección transversal Σ_s de la costilla, sino que, asimismo, dentro de cada sección las deformaciones no serán uniformes. La curva exterior de la costilla tendrá un estado tensional y una deformación distinta a la curva interior. Además, debido al carácter transversalmente anisótropo de la costilla humana, el comportamiento en el eje baricéntrico a lo largo de la cual se alinean preferentemente las osteonas será diferente al observado en las direcciones perpendiculares [radiales]. Así, el vector unitario \mathbf{a} que indica la dirección de alineación de las osteonas coincidirá con el vector tangente \mathbf{t} en cualquier punto de la costilla.

Para obtener los tensores asociados a la deformación y la tensión, se define la aplicación de cada punto de la costilla desde el estado material o inicial (X, Y, Z) previo a la aplicación de carga, al estado espacial o instantáneo (x, y, z) cuando se ha iniciado la sollicitación (estado deformado). En una muestra inicialmente plana que tras una sollicitación a flexión se curva, la aplicación para un punto cualquiera se define como:

$$(X, Y, Z) \mapsto \mathbf{r}(X, Y, Z) = \mathbf{r}_{ax}(X) + Y\mathbf{n}(X) + Z\mathbf{b}(X) \quad (4.57)$$

No obstante, en una muestra inicialmente curva cuya curvatura cambia con la sollicitación, la aplicación matemática que relaciona el estado no deformado con un estado deformado resulta algo más compleja. Para esta situación más general, definamos la posición de cada punto sobre todas las posibles secciones de la muestra en consideración, mediante las coordenadas matemáticas (ξ, η, ζ) . En base a lo definido anteriormente, ξ es la distancia recorrida sobre el eje baricéntrico desde uno de los extremos de la muestra³⁴ (por tanto, equivalente a longitud de arco), η es la distancia hasta el punto sobre el eje vertical de la sección (es decir, para una sección concreta cuya posición se define por ξ , la distancia sobre el eje \mathbf{n} hasta el punto de la muestra analizado) y ζ la distancia hasta el punto en cuestión a lo largo del eje horizontal de la sección (en la dirección de \mathbf{b}).

Supongamos una configuración de referencia en la que la muestra ha sido plana y definamos dos aplicaciones; un primer mapeo φ_0 desde dicha configuración de referencia plana a la inicial [material] curva y una segunda aplicación de la configuración de referencia donde la muestra es plana a la de un estado posterior al inicial [configuración espacial o deformada] φ obtenida tras la sollicitación (Figura 4.15). Estas configuraciones o aplicaciones pueden definirse como:

$$\begin{cases} (\xi, \eta, \zeta) \mapsto \varphi_0(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{R}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{R}_{ax}(\xi) + \eta\mathbf{N}(\xi) + \zeta\mathbf{B}(\xi) \\ (\xi, \eta, \zeta) \mapsto \varphi(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{r}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{r}_{ax}(\xi) + \eta\mathbf{n}(\xi) + h(\eta, \zeta)\mathbf{b}(\xi) \end{cases} \quad (4.58)$$

donde $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ son los vectores del triedro de Frenet-Serret sobre el eje baricéntrico en la configuración inicial [material] donde la muestra es curva y $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ los vectores del triedro en la configuración espacial, los cuales para cada instante de tiempo cambian de orientación en cada punto de la muestra según la nueva geometría del eje baricéntrico. La función $h(\eta, \zeta)$ se introduce para dar cuenta del efecto de Poisson en la dirección perpendicular al plano de flexión.³⁵

³⁴Nótese que ξ define de alguna forma la posición del centroide de la sección, que se encuentra sobre el eje baricéntrico descrito anteriormente; es decir, describe la posición de la sección sobre la que se encuentra el punto de estudio.

³⁵A fin de mantener los cálculos simples, se considerará la aproximación de $\partial h / \partial \eta \approx 0$ en primer orden.

Con estas descripciones y aplicaciones se determinarán las expresiones para los tensores de deformación y tensión.

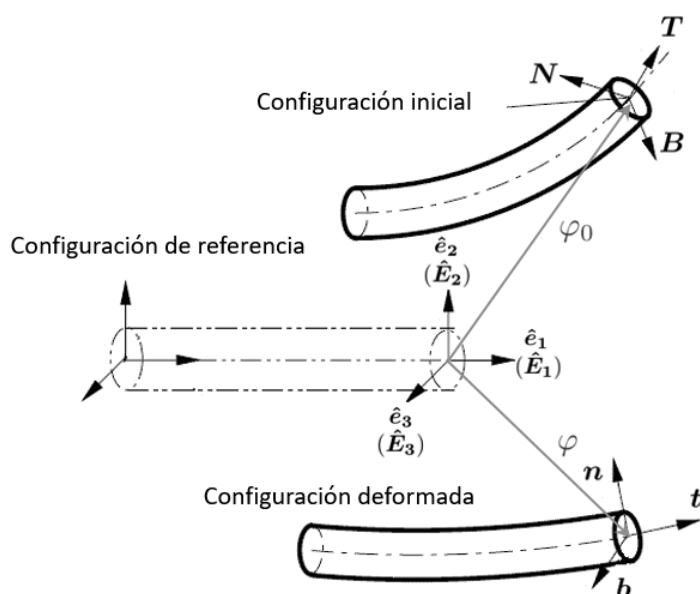


Figura 4.15. La deformación real de la costilla pasa de la configuración inicial (base $\{T, N, B\}$) a la deformada (base $\{t, n, b\}$). Estas configuraciones se definen como una aplicación φ_0 desde la situación de referencia plana para la inicial y otra aplicación φ desde la configuración de referencia plana a la deformada.

4.4.2 Deformaciones en flexión

El cambio de estado desde la configuración material inicial curva a la configuración espacial en un instante posterior viene dada por un primer mapeo φ_0^{-1} del estado inicial a la configuración de referencia plana y una segunda aplicación φ de dicho estado intermedio a la configuración solicitada curva.³⁶ El tensor gradiente de deformación viene dado, por tanto, por la composición $\mathbf{F} = D\varphi \circ D\varphi_0^{-1}$ de ambas aplicaciones. Para determinar la forma de \mathbf{F} , inicialmente se determinan las matrices jacobianas $D\varphi$ y $D\varphi_0^{-1}$, cada columna de las cuales corresponde a la derivada respecto a (ξ, η, ζ) de \mathbf{r} y \mathbf{R} respectivamente. Para la aplicación φ , el cálculo de $D\varphi$ es más sencillo:

³⁶Es decir, en el paso del estado inicial curvo al estado deformado también curvo (aunque de curvatura distinta), la muestra pasa por un estado intermedio plano.

$$D\varphi = \left[\frac{\partial x^i}{\partial U^j} \right] = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right] = \mathbf{t} + \eta \mathbf{n}' + h(\eta, \zeta) \mathbf{b}' \\ \mathbf{u}_2 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right] \approx \mathbf{n} \\ \mathbf{u}_3 = \left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \right] \approx \frac{\partial h}{\partial \zeta} \mathbf{b} \end{cases} \quad (4.59)$$

donde $U^j = (U_1, U_2, U_3) = (\xi, \eta, \zeta)$ y las derivadas \mathbf{n}' y \mathbf{b}' pueden reemplazarse por las fórmulas de Frenet-Serret:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \chi & 0 \\ -\chi & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{t}' = \chi \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' = -\chi \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} \end{cases} \quad (4.60)$$

De esta forma, los vectores de (4.59) anteriores se reescriben como:

$$D\varphi = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_1 = (1 - \eta\chi)\mathbf{t} - h(\eta, \zeta)\tau\mathbf{n} + \eta\tau\mathbf{b} \\ \mathbf{u}_2 \approx \mathbf{n} \\ \mathbf{u}_3 \approx \frac{\partial h}{\partial \zeta} \mathbf{b} \end{cases} \quad (4.61)$$

Por otro lado, la matriz jacobiana de la aplicación desde el estado material curvo al plano intermedio $D\varphi_0^{-1}$ se determina a partir de la matriz jacobiana $D\varphi_0$ que, análogamente a la aplicación anterior, toma la forma de:

$$D\varphi_0 = \left[\frac{\partial X^i}{\partial U^j} \right] = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{U}_1 = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \right] = \mathbf{T} + \eta \mathbf{N}' + \zeta \mathbf{B}' \\ \mathbf{U}_2 = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \right] = \mathbf{N} \\ \mathbf{U}_3 = \left[\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \zeta} \right] = \mathbf{B} \end{cases} \quad (4.62)$$

Reemplazando por las ecuaciones de Frenet-Serret se obtiene:

$$D\varphi_0 = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3] \rightarrow \begin{cases} \mathbf{U}_1 = (1 - \eta\bar{\chi})\mathbf{T} - \zeta\bar{\tau}\mathbf{N} + \eta\bar{\tau}\mathbf{B} \\ \mathbf{U}_2 = \mathbf{N} \\ \mathbf{U}_3 = \mathbf{B} \end{cases} \quad (4.63)$$

Con ello, la matriz jacobiana de la aplicación $D\varphi_0^{-1}$ es:

$$\begin{aligned} D\varphi_0^{-1} &= \left[\frac{\partial X^i}{\partial U^j} \right]^{-1} = \frac{1}{\det D\varphi_0} \text{adj}(D\varphi_0)^T \\ &= \frac{1}{U} [\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_3 \times \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2]^T \\ &= \frac{1}{U} [\bar{\mathbf{U}}_1, \bar{\mathbf{U}}_2, \bar{\mathbf{U}}_3]^T \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde $\det D\varphi_0 = U = \mathbf{U}_1 \cdot (\mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_3) = (1 - \eta\bar{\chi})$ y los vectores $\bar{\mathbf{U}}_i$ toman la forma:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{U}_2 \times \mathbf{U}_3 = \mathbf{T} \\ \bar{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{U}_3 \times \mathbf{U}_1 = \bar{\tau}\zeta\mathbf{T} + (1 - \eta\bar{\chi})\mathbf{N} \\ \bar{\mathbf{U}}_3 = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2 = -\bar{\tau}\eta\mathbf{T} + (1 - \eta\bar{\chi})\mathbf{B} \end{cases} \quad (4.65)$$

Definidas ambas matrices jacobianas, puede calcularse el tensor gradiente de deformaciones $\mathbf{F} = D\varphi \circ D\varphi_0^{-1}$:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{U} [\mathbf{u}_1 \otimes \bar{\mathbf{U}}_1 + \mathbf{u}_2 \otimes \bar{\mathbf{U}}_2 + \mathbf{u}_3 \otimes \bar{\mathbf{U}}_3] \quad (4.66)$$

Reemplazando los vectores de (4.61) y (4.65) obtenidos anteriormente:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \approx & \frac{[(1 - \eta\bar{\chi})\mathbf{t} - h\tau\mathbf{n} + \eta\tau\mathbf{b}] \otimes \mathbf{T}}{(1 - \eta\bar{\chi})} + \frac{\mathbf{n} \otimes [\bar{\tau}\zeta\mathbf{T} + (1 - \eta\bar{\chi})\mathbf{N}]}{(1 - \eta\bar{\chi})} + \dots \\ & \dots + \frac{\partial h\mathbf{b} \otimes [-\eta\bar{\tau}\mathbf{T} + (1 - \eta\bar{\chi})\mathbf{B}]}{\partial \zeta (1 - \eta\bar{\chi})} \end{aligned} \quad (4.67)$$

En un problema plano, se cumple que $\tau = \bar{\tau} = 0$, por lo que el tensor \mathbf{F} resulta:

$$\mathbf{F} \approx \frac{(1 - \eta\chi)}{(1 - \eta\bar{\chi})} \mathbf{t} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N} + \frac{\partial h}{\partial \zeta} \mathbf{b} \otimes \mathbf{B} \quad (4.68)$$

Asumiendo que el eje baricéntrico de la costilla se halla principalmente contenido en el plano XY (ver 4.2.1), se establece que $t_z = n_z = 0$, $b_x = b_y = 0$ y de la misma forma, $T_z = N_z = 0$, $B_x = B_y = 0$.

Para operar los productos tensoriales de la expresión (4.68) los vectores deben estar expresados en la misma base. Dado que las tensiones se determinan sobre la configuración deformada, el tensor \mathbf{F} se expresará en la base final $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Además, como costilla se encuentra contenida en el plano principal XY , no habiendo cambio de curvatura en la dirección Z , se deduce que $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ en cualquier instante. Así, siendo los vectores tangente y normal ortogonales entre sí en cualquier estado de sollicitación, la transformación de los vectores de la configuración material $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ a la espacial puede expresarse como una rotación de dicha base material alrededor del eje binormal, para llegar a la posición de la base espacial. Definiendo como α el ángulo a girar desde la base espacial a la material, los vectores $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ se expresan en la base espacial como:

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \cos \alpha \mathbf{t} - \sin \alpha \mathbf{n} \\ \mathbf{N} = \sin \alpha \mathbf{t} + \cos \alpha \mathbf{n} \\ \mathbf{B} = \mathbf{b} \end{cases} \quad (4.69)$$

Reemplazando estas igualdades en (4.68), el gradiente de deformaciones es:

$$\mathbf{F} \approx \frac{(1 - \eta\chi)}{(1 - \eta\bar{\chi})} \mathbf{t} \otimes (\cos \alpha \mathbf{t} - \sin \alpha \mathbf{n}) + \mathbf{n} \otimes (\sin \alpha \mathbf{t} + \cos \alpha \mathbf{n}) + \frac{\partial h}{\partial \zeta} \mathbf{b} \otimes \mathbf{b} \quad (4.70)$$

que equivalentemente puede escribirse:

$$\mathbf{F} \approx \begin{bmatrix} \frac{(1 - \eta\chi)}{(1 - \eta\bar{\chi})} \cos \alpha & -\frac{(1 - \eta\chi)}{(1 - \eta\bar{\chi})} \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial h}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

El tensor de deformaciones de Green-Saint-Venant \mathbf{E} se calcula:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (4.72)$$

Operando con el tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} , finalmente se obtiene:

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 - \eta\chi}{1 - \eta\bar{\chi}} \right)^2 - 1 \right] \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ -\sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{h} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

donde se ha definido \tilde{h} de tal manera que se cumpla:

$$E_{zz} \approx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 - \eta\chi}{1 - \eta\bar{\chi}} \right)^2 - 1 \right] \tilde{h} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial \zeta} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.74)$$

Dado que en tensión plana $E_{zz} \approx -\bar{\nu}(E_{xx} + E_{zz})/(1 - \bar{\nu})$ debe tomarse $\tilde{h} \approx -\bar{\nu}/(1 - \bar{\nu})$, donde $\bar{\nu}$ es el coeficiente de Poisson estimado a partir del tramo elástico lineal inicial. Esto conlleva que la función $h(\eta, \zeta)$ toma la forma aproximada de:

$$h(\zeta, \eta) \approx \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \bar{\nu}}} \left[\bar{\nu} \left(\frac{1 - \eta\chi}{1 - \eta\bar{\chi}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (4.75)$$

La función $h(\eta, \zeta)$ ahora permite aproximar convenientemente un problema de tensión plana.³⁷

4.4.3 Tensiones en flexión

Para determinar las tensiones en una sollicitación de flexión, se precisa del cálculo de los esfuerzos axiales, cortantes y flectores que se producen en la muestra.

Para cada instante de tiempo, tanto la magnitud de la carga $\mathbf{F} = -F\hat{\mathbf{j}}$ como la

³⁷La fórmulas anteriores no son exactas pero puede comprobarse que típicamente con los datos reales se cumple que $(\partial h / \partial \eta) / (\partial h / \partial \zeta) \approx 0,01$ lo cual es suficientemente aproximado para lograr un buen ajuste. La solución exacta se puede lograr con una forma más complicada de la hipótesis cinemática, pero el coste computacional es mucho mayor. En la aproximación actual $E_{xz} \approx E_{yz} \approx 0$ ya que esas deformaciones dan un orden de magnitud menor.

posición de aplicación de ésta sobre la costilla son conocidas. Sea L_x la distancia horizontal entre los dos extremos de la costilla, que se divide en a_t y b_t , donde a es distancia en la dirección horizontal X desde el extremo posterior de la costilla (origen de coordenadas) al punto de aplicación de la carga \mathbf{F} y $b = L_x - a$ la distancia desde el punto donde se aplica dicha carga hasta el extremo anterior de la muestra.

Las reacciones en los extremos de la costilla pueden determinarse como:

$$\mathbf{R}_p = \frac{Fb}{L_x} \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{R}_a = \frac{Fa}{L_x} \hat{\mathbf{j}} = -(\mathbf{R}_p + \mathbf{F}) \quad (4.76)$$

siendo \mathbf{R}_p y \mathbf{R}_a las reacciones en los extremos posterior y anterior de la costilla, respectivamente. Nótese entonces que las reacciones \mathbf{R}_p y \mathbf{R}_a se van incrementando a medida que lo hace la sollicitación y las distancias a_t y b_t también aumentan con la deformación de la muestra, dado que los extremos deslizan en direcciones opuestas.

Los esfuerzos axiles para cada sección son tangentes al eje baricéntrico, es decir, en la dirección de \mathbf{t} (ecuación (4.34)), tal que:

$$N_x(x) = \begin{cases} \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{t} = \frac{Fb}{L_x} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}, & (0 \leq x < a) \\ -\mathbf{R}_a \cdot \mathbf{t} = -\frac{Fa}{L_x} \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}, & (a \leq x < L_x) \end{cases} \quad (4.77)$$

Los esfuerzos cortantes van en dirección de \mathbf{n} :

$$\begin{cases} V_y(y) = \mathbf{R}_p \cdot \mathbf{n} = \frac{Fb}{L_x} \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}, & (0 \leq x < a) \\ V_y(y) = -\mathbf{R}_a \cdot \mathbf{n} = -\frac{Fa}{L_x} \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}, & (a \leq x < L_x) \end{cases} \quad (4.78)$$

Por último, los momentos flectores se determinan como:

$$\begin{cases} M_z(z) = \mathbf{R}_p \cdot x & = \frac{Pb}{L_x} x, & (0 \leq x < a) \\ M_z(z) = \mathbf{R}_a \cdot x + \mathbf{P} \cdot (x - a) & = \frac{Pa(L_x - x)}{L_x}, & (a \leq x < L_x) \end{cases} \quad (4.79)$$

Con todo ello y considerando que no hay sollicitación en el plano z , la tensión se calcula mediante la fórmula de Navier, como:

$$\sigma(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_x}{A} - \frac{\eta I_b - \zeta I_{bn}}{I_n I_b - I_{bn}^2} M_z \quad (4.80)$$

siendo I_n e I_b los momentos de inercia de la sección transversal en la que se encuentra contenido el punto en cuestión respecto a los ejes \mathbf{n} y \mathbf{b} respectivamente, I_{bn} el producto de inercia respecto a estos dos ejes,³⁸ A el área de la sección (de hueso cortical) y η y ζ las distancias contenidas en la sección, desde el eje baricéntrico hasta el punto analizado y a lo largo de los ejes \mathbf{n} y \mathbf{b} respectivamente.

Para el cálculo de la tensión cortante se recurre a la fórmula de Collignon-Jourawski:¹⁵

$$\tau_n(\xi, \eta) = \frac{V_n(\xi) m_b(\eta)}{I_b t_b(\eta)} \quad (4.81)$$

que así mismo depende de la sección en cuestión, donde V_n es la fuerza cortante, m_b el primer momento de área parcial, I_b el momento de inercia de la sección respecto a un eje perpendicular al esfuerzo cortante y t_b el espesor de la sección en la misma dirección.

Con ambas tensiones se construye el tensor de tensiones para una sollicitación de flexión plana:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau_n & 0 \\ \tau_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

³⁸Nótese que $I_n \equiv \bar{I}_{yy}$, $I_b \equiv \bar{I}_{zz}$ e $I_{bn} \equiv \bar{I}_{yz}$, siendo \bar{I}_{ii} los momentos de inercia proyectados perpendicularmente al eje baricéntrico.

4.4.4 Función energía de deformación en flexión

En un material transversalmente anisótropo, los invariantes que aparecen en la función energía de deformación ψ_0 a partir de la cual se desarrolla el modelo constitutivo, dependen tanto de las componentes del tensor de deformaciones \mathbf{E} particularizado para el estado tensional (en este caso flexión plana) como del vector de alineación preferencial de las fibras \mathbf{a} .

Tal y como se mencionó en el apartado 4.4.1, dado que las fibras se alinean a lo largo del eje baricéntrico, cuya tangente en todo momento viene dada por el vector \mathbf{t} en cualquier punto, el vector de alineación \mathbf{a} coincidirá con el vector tangente, tal que $\mathbf{a} = \mathbf{t}$ en cualquier punto de la costilla. Por ende, estando la costilla (y el eje baricéntrico) contenidos principalmente en el plano XY , el vector \mathbf{a} pertenecerá a dicho plano, igual que el vector tangente, siendo $a_z = t_z = 0$. Además, considerando que la base móvil cambia de orientación a medida que la costilla se deforma, el vector tangente describirá la alineación de las fibras para cualquier nivel de sollicitación.

Dada la base definida por el triedro de Frenet-Serret asociado a la línea media de la costilla, en una sollicitación de flexión como la tratada en este estudio se da un estado de tensión plana en el cual se cumple que $E_{xz} = E_{yz} = 0$, tal y como se mostró en la ecuación (4.73) del tensor de deformaciones \mathbf{E} . Particularizando los invariantes para un caso de flexión en el plano, se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1(\mathbf{E}) = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz} \\ I_2(\mathbf{E}) = E_{xx}E_{yy} + E_{xx}E_{zz} + E_{yy}E_{zz} - E_{xy}^2 \\ I_3(\mathbf{E}) = (E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2)E_{zz} \\ I_4(\mathbf{E}) = a_x^2 E_{xx} + 2a_x a_y E_{xy} + a_y^2 E_{yy} \\ I_5(\mathbf{E}) = a_x^2 (E_{xx}^2 + E_{xy}^2) + 2a_x a_y E_{xy} (E_{xx} + E_{yy}) + a_y^2 (E_{yy}^2 + E_{xy}^2) \end{array} \right. \quad (4.83)$$

En este caso, la función energía de deformación ψ_0^f para flexión tiene la forma de la ecuación (4.21):

$$\psi_0(\mathbf{E}) = \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_1^3 + \gamma_1 I_2 + \gamma_2 I_1 I_2 + \nu I_3 + \kappa_1 I_4^2 + \kappa_2 I_4^3 + \varsigma_1 I_5 + \varsigma_2 I_4 I_5 \quad (4.84)$$

La forma explícita de la función ψ_0^f se obtiene directamente reemplazando los invariantes particularizados en la expresión anterior.

Análogamente al caso de tracción simple visto en la sección anterior, la tensión sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ se obtiene mediante la expresión (4.23), derivando la función $\psi_0^f(\mathbf{E})$ respecto al tensor de deformaciones \mathbf{E} , tal que:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{S}} = & \left[(2\alpha_1 + \gamma_1)(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}) + 3\alpha_2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz})^2 + \dots \right. \\
 & \dots + \gamma_2((E_{xx} + E_{yy} + E_{zz})^2 + (E_{xx}E_{yy} + E_{xx}E_{zz} + E_{yy}E_{zz} - E_{xy}^2)) \left. \right] \mathbf{I} - \dots \\
 & \dots - (\gamma_1 + \gamma_2(E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}))\mathbf{E} + \nu((E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2)E_{zz})\mathbf{E}^{-1} + \dots \\
 & \dots + \left[2\kappa_1(a_x^2 E_{xx} + 2a_x a_y E_{xy} + a_y^2 E_{yy}) + \dots \right. \\
 & \dots + 3\kappa_2(a_x^2 E_{xx} + 2a_x a_y E_{xy} + a_y^2 E_{yy})^2 + \dots \\
 & \dots + \varsigma_2(a_x^2(E_{xx}^2 + E_{xy}^2) + 2a_x a_y E_{xy}(E_{xx} + E_{yy}) + a_y^2(E_{yy}^2)) \left. \right] \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \dots \\
 & \dots + \left[\varsigma_1 + \varsigma_2(a_x^2 E_{xx} + 2a_x a_y E_{xy} + a_y^2 E_{yy}) \right] (\mathbf{a} \otimes \mathbf{Ea} + \mathbf{aE} \otimes \mathbf{a})
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

Entonces, la tensión con fisuración \mathbf{S} se calculará mediante la tensión sin degradación $\bar{\mathbf{S}}$ definida en la expresión anterior. Recurriendo a la expresión (4.19), la tensión \mathbf{S} tomará la forma de:

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}\Phi(\beta\psi_0^f(\mathbf{E}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\vartheta}^f), N, r) ; \quad S_{ij} = \bar{S}_{ij}(E_{mn}, a_m, \boldsymbol{\vartheta}^f)\Phi(E_{mn}, a_m, \boldsymbol{\vartheta}^f, \beta, N, r) \tag{4.86}$$

donde, en este caso, $\boldsymbol{\vartheta}^f$ es la tupla formada por el conjunto de parámetros hallados en la función energía de deformación ψ_0^f (4.84) y, por tanto, incluidos en la tensión sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ (4.85) y siendo β , N y r los parámetros introducidos en el modelo con degradación.

Del tensor de tensiones sin degradación (4.85) se obtienen cuatro componentes inicialmente no nulas (S_{xx} , S_{yy} , S_{zz} y S_{xy}); sin embargo, a diferencia del tensor de tensiones obtenido en el caso de tracción simple, para una sollicitación de flexión las componentes no nulas del tensor de tensiones \mathbf{S} son $S_{xx} \equiv \sigma$ y $S_{xy} \equiv \tau_{xy}$ (ver (4.82)). Nótese entonces que, siendo $\Phi \neq 0$ se deduce, de la misma forma que se hizo en tracción simple, que $S_{yy} = 0$ si y solo si $\bar{S}_{yy} = 0$ y lo mismo sucede para $S_{zz} = 0$. Con ello, las componentes del tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ son:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xx} = & \left((2\alpha_1 + \gamma_1)I_1 + 3\alpha_2 I_1^2 + \gamma_2(I_1^2 + I_2) \right) - (\gamma_1 + \gamma_2 I_1)E_{xx} + \nu E_{zz}E_{yy} + \dots \\ & \dots + (2\kappa_1 I_4 + 3\kappa_2 I_4^2 + \varsigma_2 I_5) a_x^2 + 2(\varsigma_1 + \varsigma_2 I_4) (E_{xx}a_x + E_{xy}a_y)a_x \end{aligned} \quad (4.87a)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{yy} = & \left((2\alpha_1 + \gamma_1)I_1 + 3\alpha_2 I_1^2 + \gamma_2(I_1^2 + I_2) \right) - (\gamma_1 + \gamma_2 I_1)E_{yy} + \nu E_{zz}E_{xx} + \dots \\ & \dots + (2\kappa_1 I_4 + 3\kappa_2 I_4^2 + \varsigma_2 I_5) a_y^2 + 2(\varsigma_1 + \varsigma_2 I_4) (E_{xy}a_x + E_{yy}a_y)a_y = 0 \end{aligned} \quad (4.87b)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{zz} = & \left((2\alpha_1 + \gamma_1)I_1 + 3\alpha_2 I_1^2 + \gamma_2(I_1^2 + I_2) \right) - \dots \\ & \dots - (\gamma_1 + \gamma_2 I_1)E_{zz} + \nu(E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2) = 0 \end{aligned} \quad (4.87c)$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xy} = & -(\gamma_1 + \gamma_2 I_1)E_{xy} - \nu E_{zz}E_{xy} + (2\kappa_1 I_4 + 3\kappa_2 I_4^2 + \varsigma_2 I_5) a_x a_y + \dots \\ & \dots + (\varsigma_1 + \varsigma_2 I_4) (E_{xy} + (E_{xx} + E_{yy})a_x a_y) \end{aligned} \quad (4.87d)$$

Obtenida la forma del tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ y la función energía de deformación ψ_0^f , la tensión con degradación \mathbf{S} se determina particularizando el modelo constitutivo propuesto en la expresión (4.22), tal que:

$$\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{E}, \mathbf{a}, \boldsymbol{\vartheta}^f) \left(\frac{1}{1 - r e^{-\beta \psi_0^f(\boldsymbol{\vartheta}^f)}} - \frac{N r^N e^{-\beta \psi_0^f(\boldsymbol{\vartheta}^f) N}}{1 - r^N e^{-\beta \psi_0^f(\boldsymbol{\vartheta}^f) N}} \right) \quad (4.88)$$

Para una sollicitación de flexión plana, el conjunto de parámetros a ajustar son $\boldsymbol{\vartheta}^f = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \kappa_1, \kappa_2, \varsigma_1, \varsigma_2)$, junto con β, N y r . El ajuste se operará por mínimos cuadrados, de la forma:

$$0 = \sum_j (S_{xx,j} - S_{xx,j}^*)^2 + (S_{xy,j} - S_{xy,j}^*)^2 + (\bar{S}_{yy,j} - 0)^2 + (\bar{S}_{zz,j} - 0)^2 \quad (4.89)$$

donde $S_{xx,j}^*$ es la tensión experimental σ obtenida mediante la fórmula de Navier (4.80) para el instante j y $S_{xy,j}^*$ corresponde a la tensión cortante experimental calculada por Collignon-Jourawski (4.81) para el mismo instante.

Para poder realizar los ajustes, será conveniente introducir algunas condiciones o rangos de valores posibles que puedan tomar alguno de los parámetros del conjunto. Para ello, en la sección siguiente se ha realizado una comparación del modelo con el caso elástico lineal transversalmente isótropo.

4.4.5 Caso elástico lineal transversalmente isótropo

Dado el número de parámetros a ajustar, resulta conveniente comparar las ecuaciones obtenidas anteriormente con las de elasticidad lineal en el caso anisótropo, ya que en el límite de pequeñas deformaciones las ecuaciones anteriores coincidirán con las de un sólido lineal transversalmente isótropo. Para hacer esa comparación, desarrollemos en serie de Taylor las ecuaciones (4.87) e impongamos que en $a_x \approx 1$ y $a_y \approx 0$:³⁹

$$\bar{S}_{xx} \approx (2\alpha_1 + \gamma_1)I_1 - \gamma_1 E_{xx} + 2(\kappa_1 + \varsigma_1)E_{xx} \quad (4.90a)$$

$$\bar{S}_{yy} \approx (2\alpha_1 + \gamma_1)I_1 - \gamma_1 E_{yy} \quad (4.90b)$$

$$\bar{S}_{zz} \approx (2\alpha_1 + \gamma_1)I_1 - \gamma_1 E_{zz} \quad (4.90c)$$

$$\bar{S}_{xy} \approx -\gamma_1 E_{xy} + \varsigma_1 E_{xy} \quad (4.90d)$$

Las componentes del tensor de tensiones \mathbf{S} dado por la ecuación constitutiva (4.52) son de la forma $S_{ij}(\mathbf{E}) = \bar{S}_{ij}(\mathbf{E}) \cdot \Phi(\mathbf{E})$. Dado que el factor Φ viene dado en el paréntesis de la ecuación (4.22) y no contiene términos lineales en las deformaciones, sino solo cuadráticos y cúbicos, dicho factor hasta primer orden se aproxima como:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{1}{1 - r e^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})}} - \frac{Nr^N e^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})}}{1 - r^N e^{-\beta\psi_0(\mathbf{E})^N}} \approx \frac{1}{1 - r} - \frac{Nr^N}{1 - r^N} \quad (4.91)$$

Por tanto, en primer se obtiene que $S_{ij} = \bar{S}_{ij}\Phi_0$ siendo la constante de proporcionalidad $\Phi_0 = 1/(1 - r) - Nr^N/(1 - r^N)$.

Las ecuaciones dadas en (4.90), para un material elástico lineal transversalmente isótropo son de la forma:

$$S_{xx} = Y_\ell E_{xx} + A_x(\nu_t, \nu_{\ell t})I_1 + B_x(\nu_t, \nu_{\ell t})E_{xx} \quad (4.92a)$$

$$S_{yy} \approx Y_t E_{yy} + A_y(\nu_t, \nu_{\ell t})I_1 + B_y(\nu_t, \nu_{\ell t})E_{xx} \quad (4.92b)$$

³⁹Frecuentemente y tal y como se ha observado en los ensayos experimentales, la fractura macroscópica se produce en el centro de la costilla, donde la tangente al eje baricéntrico es prácticamente horizontal, tal que $t_x = a_x \approx 1$ y $t_y = a_y \approx 0$.

$$S_{zz} = Y_t E_{zz} - A_z(\nu_t, \nu_{lt}) I_1 = 0 \quad (4.92c)$$

$$S_{xy} \approx G_t E_{xy} \quad (4.92d)$$

donde Y_ℓ, Y_t son los módulos de Young en las direcciones longitudinal (ℓ) y transversal (t), $\nu_t, \nu_{lt}, \nu_{t\ell} = \nu_{lt} Y_t / Y_\ell$ son los coeficientes de Poisson⁴⁰ y G_ℓ, G_t los módulos de cizalladura frente a cortantes.

Esto permite sacar algunas conclusiones generales sobre los parámetros constitutivos el modelo:

- $\gamma_1 < 0$ puesto que el módulo de Young Y_ℓ es siempre positivo.
- $2\alpha_1 + \gamma_1 > 0$ puesto que $A_x(\nu_t, \nu_{lt}) > 0$ y $A_y(\nu_t, \nu_{lt}) > 0$.
- $\varsigma_1 > \gamma_1$ puesto que $G_t > 0$.

Además, comparando con el valor típico del módulo de Young de hueso cortical y el coeficiente de Poisson recogidos en la literatura, se puede establecer el orden de magnitud de los parámetros, lo cual facilitará el ajuste.⁴¹

4.5 Emisión Acústica y la microfisuración

En un ensayo de tejido óseo, con el avance de la fisuración se producen liberaciones en forma de energía elástica, dando lugar a ondas elásticas que se propagan dentro del hueso cortical y pueden ser detectadas e interpretadas por detectores de emisión acústica. Previamente al inicio del ensayo de flexión de costilla humana completa, se colocaron tres sensores de emisión acústica (uno en la zona central interior del hueso y dos en los extremos, en la superficie exterior) para detectar dichas emisiones acústicas (ver sección 3.3.2). Tanto el número de señales como su intensidad están relacionadas con el proceso de microfisuración interno.

⁴⁰Los dos coeficientes de Poisson no son independientes; de hecho, están ligados por la relación $\nu_{t\ell} / Y_t = \nu_{\ell t} / Y_\ell$.

⁴¹El orden de magnitud estimado previamente a partir del valor de los módulos de Young fue: $1300 < \alpha_1 < 6800$ y $-1500 < \alpha_1 < 7750$ dependiendo del valor de N . Más adelante se muestra que todos ajustados a partir datos experimentales efectivamente encajan dentro de ese rango.

En esta sección se propone un modelo matemático que permita relacionar las mediciones de emisión acústica, realizadas durante los ensayos de flexión, con el avance de la microfisuración. La entropía ha sido utilizada en secciones anteriores como una predicción de la microfisuración y el modelo aquí presentado pretende mostrar que, en los momentos en que la entropía presenta más variación y, por tanto, se incrementa la microfisuración, más emisión acústica se produce.

El modelo desarrollado a continuación está basado en la teoría matemática de la percolación, proporcionando el número esperado de señales detectadas bajo ciertas condiciones. De hecho, se verá más adelante que el número de señales tiene un comportamiento asintótico cerca de la tensión de rotura, lo cual permite ver que se están produciendo cambios irreversibles cerca de la fractura macroscópica. La concordancia del modelo predictivo para el número de señales acústicas con el modelo de mecánica estadística de las secciones anteriores permite ver que la microfisuración, detectable mediante emisión acústica, es el proceso degenerativo clave que puede explicar tanto los datos puramente mecánicos del ensayo de flexión como las mediciones de señales de emisión acústica liberadas por parte del material.

4.5.1 Introducción a la teoría de la percolación

Históricamente, la teoría de la percolación fue desarrollada para resolver una serie de problemas mecánicos y de difusión en sólidos, asumiendo que esos sólidos microscópicamente pueden ser modelizados como una red o retícula de nodos enlazados. La idea básica era que los nodos de esa retícula podían estar o no conectados de acuerdo a una distribución de probabilidad, según el tipo de problema tratado.

Siguiendo con esta idea, definiendo p como la probabilidad de que dos nodos de la red estén conectados en retículas de grandes dimensiones, el comportamiento tiende a ser predecible en base a varios tipos de *leyes de los grandes números*⁴² que describen como evoluciona la cantidad de enlaces dentro de la retícula según la variación de la probabilidad p .

⁴²Es decir, cuando tenemos un gran número de variables aleatorias independientes, podemos aproximar el resultado por el resultado del promedio, en virtud del conocido *teorema del límite central*.

La *teoría de la percolación* fue introducida en los años 1950¹⁸ y rápidamente evolucionó hasta convertirse en una rama relevante para la mecánica estadística, la física del estado sólido, la mecánica del medio continuo, la teoría de grafos aleatorios y la combinatoria. Mediante esta relevante teoría se ha investigado sistemáticamente la resistencia mecánica del hueso mediante la percolación^{117,134} e incluso su microfisuración.¹¹⁰ De hecho, algunos estudios recientes han utilizado la teoría de la percolación junto con medidas basadas en emisión acústica,^{81,114} aunque de un modo diferente a como se usarán en esta investigación.

La teoría de percolación básica en redes d -dimensionales tiene dos versiones o enfoques diferentes: la *percolación de celdas* de la red, o la *percolación de enlaces* dentro de la red, según si las probabilidades de ocupación [de celdas] o unión [de enlaces] se asignan a las celdas de la red o a los enlaces entre nodos, respectivamente. La Figura 4.16 da una idea de la distinción de estas dos versiones en el caso de bidimensional.

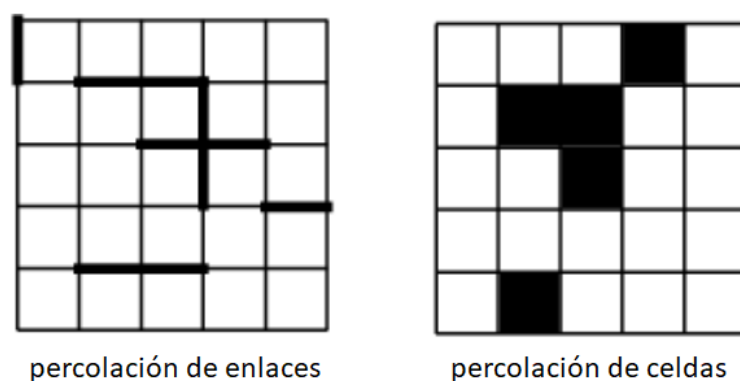


Figura 4.16. Dos ejemplos de percolación, según si la probabilidad de ocupación se asigna a los enlaces (percolación de enlaces) o a las celdas (percolación de celdas).

La teoría de la percolación es el modelo más simple propuesto que exhibe una *transición de fase* abrupta de un tipo de estado macroscópico a otro. En la modelización de hueso cortical, la percolación se usará para modelizar la transición desde un hueso estructuralmente íntegro, aunque microfisurado, a un hueso que presenta fisuras macroscópicas y falta de integridad estructural. La razón por la cual la teoría de la percolación aparece tan frecuentemente en muchas aplicaciones es que, en una y dos dimensiones, muchas cuestiones pueden ser bien entendidas y resueltas de forma completamente analítica. Por esa razón esta teoría permite entender ciertos fenómenos críticos de manera clara e intuitiva. Así, la teoría de la percolación explica la emergencia de formas fractales en patrones de fisuración,

fenómenos de escala y la ocurrencia de fenómenos críticos regulados por exponentes universales.²⁵

En una retícula infinita, la transición de un tipo de estado macroscópico a otro ocurre en un umbral de probabilidad perfectamente definido. Por consiguiente, cuando la probabilidad de que un eslabón entre dos nodos de una red esté marcado⁴³ se acerca a cierto valor, ocurre una transición desde un estado en que hay pequeñas islas de nodos conectados entre sí por líneas, a la aparición un agrupamiento de nodos conectados a nivel macroscópico. En una retícula grande pero no infinita pueden darse crecimientos muy pronunciados cerca del umbral de probabilidad crítico y es ahí donde aparecen los exponentes críticos, alguno de los cuales será calculados en el modelo propuesto y comparados con las predicciones de la teoría de la percolación matemática en dos y tres dimensiones. Los detalles matemáticos de la percolación y las explicaciones y deducciones serán tratados en el contexto de la propagación de fisuras en una red, asociada al tejido óseo.

4.5.2 Detalles matemáticos de la percolación

La *percolación de enlaces* es un modelo matemático definido sobre una retícula de puntos regular \mathbb{L}^d contenida en el espacio euclídeo de d dimensiones, en la que cada par de puntos adyacentes define un enlace o “arista”.⁴⁴ Un modelo de percolación de enlaces en el contexto de fisuración, parte de considerar un conjunto potencial de aristas en la red:

$$\mathbb{A} = \{(x, y) \in \mathbb{L}^d \mid x \text{ e } y \text{ son adyacentes}\}$$

En una muestra fisurada, consideremos un conjunto de fisuras A que ocupen una parte de esta red $A \subset \mathbb{A}$.⁴⁵ Definiendo como a a cada arista que constituye al conjunto $a \in \mathbb{A}$, el *modelo de percolación de enlaces simple de Bernoulli* considera que dicha arista a pertenecerá a A con una probabilidad $p \in [0, 1]$.

⁴³En nuestro contexto, marcado sería equivalente a fisurado, aunque en otras aplicaciones de la percolación “marcado” puede tener otras interpretaciones.

⁴⁴En la terminología de la teoría de grafos, un grafo es un conjunto de puntos o nodos denominados “vértices” y cualquier línea que una dos de estos vértices se denomina “arista”. Un grafo G de n vértices y A aristas es un par $G = (V, A)$ donde $|V| = n$ y $A \subset V \times V$.

⁴⁵Como el conjunto de aristas fisuradas es aleatorio, en realidad se tiene una variable aleatoria cuyos valores son grafos $G : \Omega \rightarrow A$ con $\omega \in \Omega \mapsto A_\omega \subset \mathbb{A}$.

De esta forma, p representa la probabilidad de que el enlace a esté fisurado. Para cada vértice [nodo] x de la retícula, se define como $\mathcal{C}(x)$ al *componente conexo*, entendiéndose por este al conjunto de nodos de la red que pueden estar conectados con x a través de un camino contenido en el conjunto de enlaces fisurados A .⁴⁶ Consideremos un punto cualquiera, que denominaremos origen O y definamos el componente conexo $\mathcal{C}_O = \mathcal{C}(O)$ como el conjunto de nodos unidos por una fisura que pasa por O . Una característica de interés para la teoría de percolación es la *probabilidad de percolación* \mathbb{P}_p ,⁴⁷ tal que:

$$\mathbb{P}_p(\# | \mathcal{C}_O | = \infty) =: \theta(p)$$

donde la notación $\#|B|$ se refiere al número de elementos de un conjunto B y \mathbb{P}_p se define como la probabilidad asociada a un suceso cuando la probabilidad de que un enlace esté fisurado es p . En esas condiciones, se define la *probabilidad crítica* como aquella probabilidad a partir de la cual la red pasa a estar percolada, es decir, la red está completamente conectada por el elemento conexo (o equivalentemente, la fisura ha propagado de extremo a extremo del material), como:

$$p_c = \sup\{p \mid \theta(p) = 0\}$$

Comúnmente la *percolación de enlaces* se considera que es algo menos general que la *percolación de celdas*, debido al hecho de que todo modelo de enlaces puede ser reformulado con un modelo de celdas (sobre una retícula algo diferente). A pesar de ello, en el caso de la fisuración asociada a la emisión acústica parece más sencillo e intuitivo emplear el modelo de enlaces. Además, existen modelos mixtos que usan celdas y enlaces e incluso el *modelo simple de Bernoulli*, utilizado como punto de partida en el apartado posterior, que considera que la probabilidad ocupación [fisuración] p de todas las aristas es independiente de la del resto, puede ser generalizado a un modelo non-bernoulliano, en que las probabilidades de que un enlace esté fisurado dependan de la probabilidad de los enlaces vecinos (como sucede, de hecho, en la propagación de fisuras).

⁴⁶El componente conexo de x es un conjunto $\mathcal{C}(x) \subset V$, conocido a veces en la literatura de percolación como *clúster*.

⁴⁷En nuestro contexto, con una red interosteónica finita, la probabilidad de percolación se refiere a la probabilidad de que haya una fisura que atraviese la muestra de un extremo a otro.

4.5.3 Percolación dependiente con distribución de Weibull

En el contexto de la fisuración, el *modelo de Bernoulli [no-dependiente]*⁴⁸ parte de la suposición de que existe una probabilidad de ocupación (en este caso de fisuración) p para cada enlace de la red y que esta probabilidad es independiente del punto en dicha red. Así mismo, en el modelo mencionado se considera que el hecho de que un enlace se fisure, es independiente de que los enlaces adyacentes estén o no fisurados. Puede verse que este modelo de Bernoulli simple no parece ser demasiado realista para modelizar la propagación de fisuras en sólidos reales, ya que es lógico pensar que la probabilidad de fisura aumenta con la tensión, tal que los enlaces de la retícula situados en las regiones de mayor tensión deberían tener probabilidades superiores de fisuración. Además, dado que las fisuras tienden a propagarse, incrementando su longitud, la probabilidad p de fisuración de los enlaces que se hallan en la prolongación de una fisura preexistente debería verse incrementada. De esta forma, se hablará de *percolación dependiente* cuando la probabilidad de un enlace depende de la de los enlaces cercanos y de *percolación no homogénea* cuando la probabilidad no es uniforme a lo largo de la retícula y, por tanto, depende del nivel de tensión u otros factores (aun cuando en dos ubicaciones distintas de la red se tenga la misma configuración de fisura). Dadas las consideraciones previas mencionadas, queda patente que un proceso de fisuración totalmente realista debería ser modelizado mediante un modelo de percolación dependiente y no-homogéneo.

La no homogeneidad del modelo de percolación puede ser tratada a partir del campo de tensiones. Dado que el objetivo es el desarrollo de un modelo aplicado en tejido óseo, el cual puede ser tratado como un material cerámico por sus bajas deformaciones, puede tenerse en cuenta únicamente la primera tensión principal⁴⁹ y con ello, puede asumirse que la probabilidad de fisuración en una localización específica depende de la primera tensión principal existente en ese punto. Teniendo en cuenta la *teoría de materiales cerámicos*, la probabilidad de fisuración de un enlace específico de la red material puede computarse mediante la

⁴⁸El modelo de Bernoulli trata con la ocupación genérica de los enlaces, que aquí será considerada como la ocupación por una fisura, es decir, que el enlace está fisurado.

⁴⁹La primera tensión principal en el caso de flexión plana corresponde a S_{xx} , dado que la única componente no nula junto con ella es $S_{xy} = \tau_{xy}$ que en ningún caso, tal y como se verá en los resultados posteriores, excede el 7% de la tensión principal.

distribución de probabilidad de Weibull, tal y como proponen ciertos autores.¹⁶ En particular, parece razonable asumir que dicha probabilidad podría tener la forma:

$$p = 1 - e^{-(\sigma/\sigma_0)^\alpha} \quad (4.93)$$

siendo σ la tensión en el eslabón de la red que puede o no estar fisurado y (σ_0, α) son dos parámetros que dan una distribución de Weibull (σ_0 se denomina parámetro de escala y α se denomina parámetro de forma). Diversos estudios han encontrado que α parece depender entre otras cosas, del tipo de material. En los hallazgos reflejados en la literatura,^{16,90,133} α se presenta en un rango de valores diferente para materiales cerámicos al obtenido en biomateriales. Basándonos en dichos estudios, se tomará $\alpha = 4$ que supone el límite entre ambos tipos de materiales y siendo el hueso un material biocerámico, dicho valor parece razonable. Cómo se verá en la sección 5.2.2 del capítulo de resultados, esta forma de la ecuación (4.93) asociada a los resultados de la teoría de la percolación parece dar una relación que se ajusta razonablemente bien a los datos empíricos.

4.5.4 Exponentes críticos en la teoría de la percolación

En la *teoría de percolación*, matemáticamente se establece (cuanto menos, para el caso bernouilliano simple) que, en una retícula infinita, cuando $p \rightarrow p_c$ (la probabilidad de fisuración tiende a la crítica) resulta que \mathcal{C}_O , antes de contener formalmente un conjunto infinito de nodos, crece según una ley que es independiente de la forma de la retícula:

$$\#|\mathcal{C}_O| \propto \frac{1}{|p - p_c|^\gamma} \quad (4.94)$$

siendo γ un parámetro que es independientemente de la forma de la retícula, por lo que se denomina *exponente crítico universal*. Es decir, para todas las retículas ese exponente tiene el mismo valor a pesar de que p_c muestra ser fuertemente dependiente de la topología de la retícula. Además del tamaño del mayor componente percolado $\#|\mathcal{C}_O|$, otras magnitudes asociadas la red percolada tienden a infinito en el límite $p \rightarrow p_c$ y, en todos esos casos, la divergencia hacia infinito viene dada por expresiones similares a la ecuación (4.94), donde aparecen otros exponentes críticos que parecen ser también universales (independientes de la forma de la red). Esa independencia de la forma de la red, sugiere que pueden encontrarse valores invariantes a partir de ajustes experimentales que no depen-

den de detalles secundarios, como por ejemplo la forma exacta de la retícula. La teoría de la percolación clásica (percolación no-dependiente de Bernoulli) muestra que, con independencia de la forma de la red, en el límite $p \rightarrow p_c$ el comportamiento de muchos parámetros y variables viene dado por una serie de exponentes críticos universales.¹²⁷ Este carácter universal de ciertos parámetros es de gran interés dado que, al no depender de la forma específica de la red, son parámetros generales y aplicables a muchas situaciones, incluso en redes no regulares como es nuestro caso (ver 4.1.2). De hecho, incluso en percolación dependiente se ha encontrado que numéricamente, muchos de los exponentes siguen mostrando esa constancia en su valor, lo cual hace que sean aún más generales de lo que podría pensarse.²⁴ Estos resultados sugieren que la hipótesis de universalidad del exponente γ podría ser examinada para la microfisuración del hueso cortical.

Puede considerarse entonces que, puesto que cada rotura o fisuración que se produce dentro de la red está asociada a cierta liberación de energía (en forma de emisión acústica) y se espera que estas emisiones aumenten cuando se inicia el régimen no elástico, el número de *hits de emisión acústica* detectables se predice que seguirá una ley similar a la de ecuación (4.94).⁵⁰ Es decir, se espera que el número de *hits* de emisión acústica N_{EA} se acerque a la siguiente ecuación basada en la teoría de la percolación:

$$N_{EA} \propto \frac{1}{|p - p_c|^\gamma} \quad (4.95)$$

Introduciendo en esta expresión los resultados obtenidos en la sección anterior 4.5.3, el número de *hits* N_{EA} debería mostrar un comportamiento dado por:

$$N_{EA} = \frac{n_0}{|(1 - p_c) - e^{-(\sigma/\sigma_0)^\alpha}|^\gamma} \quad (4.96)$$

donde n_0 es una constante de proporcionalidad que dependerá de cada muestra y σ_0 es el parámetro de escala de la distribución de Weibull para la probabilidad de que un eslabón de la red interosteónica esté roto.

⁵⁰En una muestra real de hueso cortical la retícula, aunque contiene un número grande de osteonas no estrictamente una infinita, por lo que solo se encontrará un comportamiento similar al resultado teórico de la teoría de percolación para una retícula infinita. Por eso, los exponentes críticos universales como γ numéricamente diferirán ligeramente de los valores teóricos de la teoría de la percolación para una retícula infinita.

A medida que se incrementa la sollicitación, la ecuación (4.96) muestra un incremento exponencial del número de *hits* N_{EA} , el cual presentará una asíntota cuando:

$$\sigma \rightarrow \sigma_{\infty} = \sigma_0 \ln^{1/\alpha} \left(\frac{1}{1-p_c} \right) \quad (4.97)$$

En la Figura 4.17 se observa claramente como el número de *hits* va creciendo exponencialmente hasta alcanzar una clara asíntota, dada por (4.97) y la forma en que un modelo del tipo Weibull como el propuesto en esta investigación es capaz de predecir de forma razonable el número de *hits* que se producen según el nivel de sollicitación, asociados a la propagación de las fisuras.

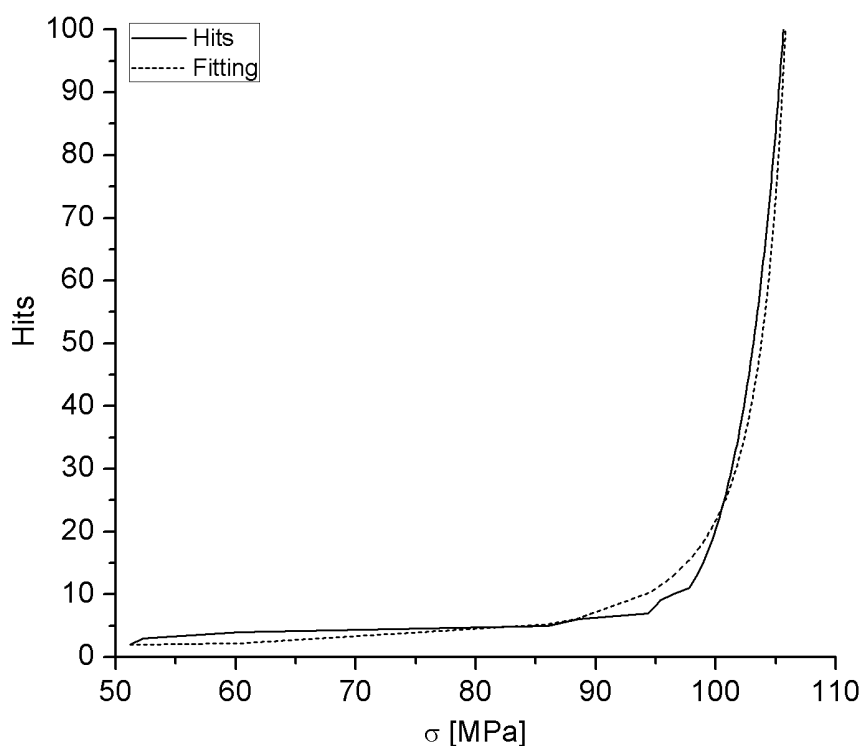


Figura 4.17. Número de hits detectados experimentalmente frente a la tensión corregida por degradación de la sección resistente para la muestra 0584/18R.

La ecuación (4.96) puede ser reescrita en términos de σ_{∞} , tal que:

$$N_{EA} = \frac{n_0}{\left| (1-p_c) - \exp \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_{\infty}} \right)^{\alpha} \ln(1-p_c) \right] \right|^{\gamma}} \quad (4.98)$$

O equivalentemente:

$$N_{EA} = n_0 \left| (1 - p_c) - (1 - p_c) (\sigma/\sigma_\infty)^\alpha \right|^{-\gamma} \quad (4.99)$$

Nótese que a medida que la fisura propaga a través de la red, la sección resistente se ve en cierta forma reducida y cuando esta *degradación de la sección resistente* se produce algo antes que la fractura macroscópica, la curva tensión-deformación muestra una bajada de tensión progresiva después de haber alcanzado el máximo. En realidad, la tensión debería considerar la reducción del área; si esto sucediera se observaría un aumento de la tensión donde, una vez superado el valor máximo, no debería observarse una caída posterior. Así mismo, considerando la sección inicial en el valor de la tensión, cuando la curva tensión-deformación experimenta una caída de tensión, también se percibiría un retroceso de la curva mostrada en la Figura 4.17, de donde se deduciría que una bajada de tensión produce un incremento de *hits*, lo cual es incoherente con todo el desarrollo aquí expuesto. No obstante, la tensión puede ser corregida (ver sección B.5 del apéndice) para incorporar la reducción de la sección resistente. Por esa razón, todos los ajustes mostrados en la sección 5.2 del capítulo de resultados usan *tensiones corregidas*, por lo que la tensión σ en las ecuaciones anteriores no es la tensión aparente, sino la tensión corregida por pérdida de sección resistente. De esta forma, el modelo aquí propuesto en la ecuación (4.99) será ajustado a la tensión y número de hits acumulados obtenidos experimentalmente en los ensayos a flexión, obteniendo los parámetros n_0 , σ_∞ y γ considerando $\alpha = 4$.

Problemas abiertos en percolación

Para concluir esta sección, se procede al cálculo de la probabilidad crítica p_c que depende del tipo de red, para el caso de un problema abierto. Retomando las tres redes analizadas en el estudio de los posibles caminos de la propagación de fisuras (sección 4.1.2), la teoría de la percolación bidimensional establece que para una red cuadrada $p_c = 1/2 = 0,5000$, mientras que para una red triangular es $p_c = 2 \sin(\pi/18) \approx 0,3473$ y para una retícula hexagonal $p_c = 1 - 2 \sin(\pi/18) \approx 0,6527$. Así mismo, el valor exacto de p_c se conoce para las otras ocho teselaciones⁵¹

⁵¹Se define a una teselación a aquella red o patrón totalmente regular que cubre completamente una región.

uniformes del plano⁶² y ha sido aproximado para decenas de redes regulares más. Las once teselaciones uniformes del plano euclídeo (estas son, las tres tratadas en este estudio más las ocho restantes) se muestran en la Figura 4.18 y en la Tabla 4.1 se resume los valores calculados para las teselaciones uniformes del plano. Sin embargo, no está perfectamente bien definido este valor de p_c para una red estocástica aunque, teniendo en cuenta los valores de r y las deducciones hechas en este parámetro en la sección 4.1.2, podría pensarse que $0,3473 < p_c < 0,7404$, siendo estos valores el mínimo y máximo respectivamente de la Tabla 4.1.

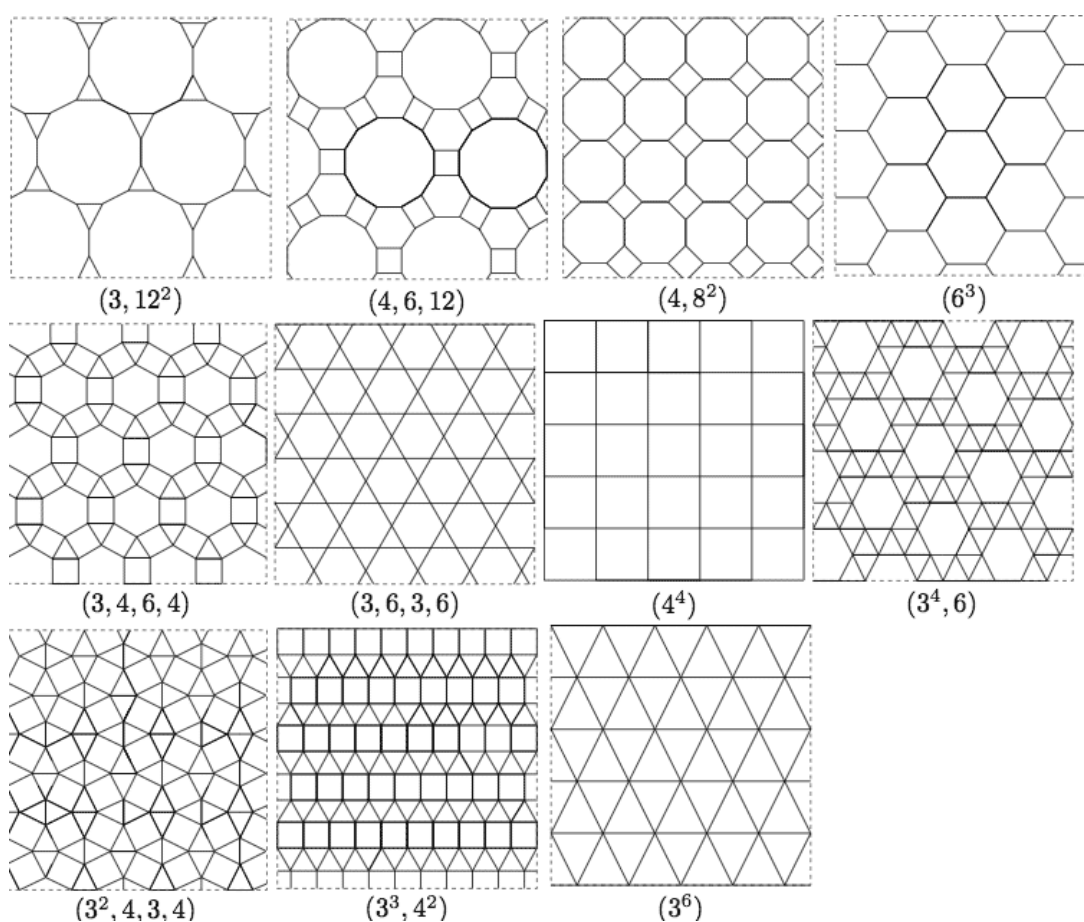


Figura 4.18. Resumen de las once teselaciones uniformes del plano euclídeo. De derecha a izquierda: teselación octogonal no truncada, trihexagonal truncada, cuadrada truncada, hexagonal, romitrihexagonal, trihexagonal, cuadrada, triangular-hexagonal, triangular cuadrada, triangular elongada y triangular.

Tabla 4.1. Valores exactos de la probabilidad crítica p_c para cada una de las once teselaciones uniformes del plano euclídeo.¹⁴⁶

| Tipo de red | Codificación | r | p_c |
|-----------------------|------------------|--------|---------|
| Octogonal no truncada | $(3, 12^2)$ | — | 0,74042 |
| Trihexagonal truncada | $(4, 6, 12)$ | — | 0,69373 |
| Cuadrada truncada | $(4, 8^2)$ | — | 0,67680 |
| Hexagonal | (6^3) | 1,4142 | 0,65270 |
| Trihexagonal | $(3, 6, 3, 6)$ | — | 0,52440 |
| Rombitrihexagonal | $(3, 4, 6, 4)$ | — | 0,52483 |
| Cuadrada | (4^4) | 2,0000 | 0,50000 |
| Triangular-hexagonal | $(3^4, 6)$ | — | 0,43430 |
| Triangular-cuadrada | $(3^2, 4, 3, 4)$ | — | 0,41414 |
| Triangular elongada | $(3^2, 4^2)$ | 2,4495 | 0,41964 |
| Triangular | (3^6) | 3,0000 | 0,34730 |

Una observación interesante es que los valores de r en la expresión para el número de microestados no están muy lejos de $1/p_c$: para la retícula cuadrada ortogonal $r/(1/p_c) = 1$, para la retícula triangular $r/(1/p_c) = 1,04$ y para retícula hexagonal $r/(1/p_c) = 0,92$. Por lo que tal vez exista una relación del tipo $p_c = p_c(r)$ que sería de gran interés ya que permitiría precisar en gran medida los resultados una vez conocido el valor de r de los ajustes experimentales.

*No research is ever quite complete.
It is the glory of a good bit of work
That it opens the way for some-
thing still better, and this repeat-
edly leads to its own eclipse*

Mervin Gordon

5

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados tanto para el *modelo constitutivo no lineal* como para el *modelo estocástico de fractura*. En el caso del modelo constitutivo se exponen los valores computados para los parámetros constitutivos y se discuten sus relaciones, así como con las variables antropométricas y se presenta una discusión de los resultados donde se compara con la literatura científica que estudia los mismos problemas. En el caso del modelo estocástico, dada su novedad, se computan los parámetros del mismo y se hace una discusión interna del mismo. Más específicamente, el modelo constitutivo ha sido analizado en el caso de dos solicitaciones diferentes: flexión a tres puntos y tracción simple. En los ensayos de tracción se han usado láminas de hueso cortical mecanizadas en forma de *coupons* y, para los ensayos de flexión, dada la curvatura de la costilla, se tiene un caso de flexión compuesta de tres puntos. Para ambos tipos de ensayos mecánicos se han calculado las deformaciones y las tensiones según los procedimientos descritos en el capítulo anterior. Una vez obtenidos los diferentes tipos de curvas de tensión-deformación, se sigue un procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados para los parámetros (ver sección 4.1.3), con el objetivo de comprobar las predicciones del modelo constitutivo con los datos experimentales.

De esta forma, los parámetros constitutivos ajustados proceden de dos conjuntos de ensayos diferentes: (a) ensayos de tracción simple y (b) ensayos de flexión con costilla completa. Eso permite comprobar que para ambos tipos de datos se obtienen valores similares de los parámetros más importantes, justificando que el modelo propuesto en el capítulo anterior es válido para diferentes tipos de solicitaciones.

Además de verificar que el modelo constitutivo predice adecuadamente los datos experimentales, se analiza la dependencia de los parámetros constitutivos con las propiedades antropométricas. Así, los parámetros constitutivos ajustados se han comparado con variables tales como la edad y el índice de masa corporal (IMC), obteniendo algunas relaciones estadísticamente significativas.

Para las muestras de tracción simple (*coupons*) se ha computado la dimensión fractal (DF) de la sección transversal de las muestras en estudios previos. Las muestras fueron escaneadas mediante un tomografía computarizada (CT) que permitió calcular la *dimensión fractal* (ver sección 3.4) de las secciones transversales de las muestras. Estos resultados han sido utilizados con el fin de determinar si las características de las imágenes médicas obtenidas para esas muestras permiten predecir de manera significativa algunos de los parámetros del modelo. Igualmente, para estas muestras se ha determinado en el presente estudio el contenido mineral con precisión, cuyos datos son aquí utilizados con el mismo objetivo. Los valores de la DF y el contenido mineral han permitido encontrar correlaciones estadísticamente significativas entre varios parámetros y la microestructura.

Para las muestras de flexión (costillas completas) se han examinado las mismas relaciones variables antropométricas (edad e IMC). Junto con ello, durante los ensayos se llevaron a cabo mediciones de *emisión acústica* (EA) mediante la colocación de tres sensores sobre cada muestra. Estas mediciones de EA son la base del *modelo estocástico de fractura* de costilla completa. Las señales de EA se analizaron con el objetivo de determinar la aparición de microfallos estructurales internos que pudieran ayudar a comprender como la acumulación de dichos microfallos produce una fisura macroscópica que eventualmente lleva a la pérdida de integridad estructural de la costilla.

En cuanto al análisis estadístico para determinar si los parámetros del modelo (propiedades mecánicas intrínsecas) están significativamente correlacionados, bien entre sí, bien con las propiedades antropométricas, bien con otro tipo de mediciones, se han llevado a cabo varios análisis de regresión mediante ANOVA (*ANalysis Of VAriance*) para comparar múltiples medidas. En todos los casos

de análisis, cuando se encuentra una correlación significativa se proporciona el p -valor de cada variable independiente, que permite ver el grado de significatividad de la influencia en la variable dependiente.

Es importante notar que el interés del análisis de p -valores es determinar qué variables influyen en las propiedades mecánicas, los parámetros del modelo u otros datos calculados previamente y no la obtención de un modelo lineal que describa completamente a una variable, dado que ésta vendrá definida por muchos otros parámetros no tratados en esta investigación. De esta forma, se utilizará el p -valor para constatar la influencia de una variable independiente en otra dependiente cuando el p -valor $< 0,05$ (es decir, la variable independiente influye significativamente en la variable dependiente, al menos con un 95% de fiabilidad).

Así mismo, en varios momentos se usa un *Análisis de Componentes Principales* (ACP),¹ para vislumbrar relaciones iniciales entre parámetros del modelo, junto con variables antropométricas. El uso del ACP es especialmente importante para observar relaciones entre los parámetros del modelo en los dos tipos de ensayo. Finalmente, los parámetros más importantes serán descritos mediante ajustes de distribución.

5.1 Modelo constitutivo para hueso cortical

En esta sección se considera el modelo constitutivo propuesto en la sección 4.1.3 y se usan las formas particularizadas del mismo, detalladas en las secciones 4.3 y 4.4, para interpretar los datos de los ensayos realizados bajo sollicitaciones de tracción y flexión. El objetivo es verificar que el modelo puede adaptarse igualmente bien a dos casos de sollicitación muy diferentes, en los que las componentes de deformación y tensión presentes difieren. Así mismo, se comprueba que existen algunos parámetros del modelo (que representan propiedades mecánicas) que no difieren significativamente, ya hayan sido determinados mediante ajustes de los ensayos de tracción o flexión. Por otro lado, se pretende interpretar la variabilidad de algunos parámetros del modelo en base a variables relacionadas con la antropometría del sujeto y la composición del tejido.

¹El ACP es un proceso que parte de un conjunto de variables dependientes entre ellas y realiza una transformación de dicho conjunto, obteniendo un nuevo grupo de variables independientes, cada una de ellas formada por una combinación lineal de las variables dependientes iniciales.

Los resultados se presentan en dos apartados según el tipo de sollicitación y, tras ello, se expone una comparativa de ambos tipos de ensayo, resumiendo las características generales de los resultados extraídos del modelo.

5.1.1 Aplicación a los ensayos de tracción de coupons

Se han fabricado un total de $N_c = 51$ *coupons* de microtracción de hueso cortical de costilla humana, que han sido ensayados a tracción simple para determinar sus propiedades mecánicas y las tensiones y deformaciones a lo largo de todo el ensayo. Las curvas tensión-deformación de todas las muestras se exponen en las Figuras 5.1-5.3, agrupadas por rangos de edad. La deformación e representada en tanto por ciento, corresponde a la deformación longitudinal E_{xx} de la muestra y σ a S_{xx} , siendo ambas las contribuciones principales.

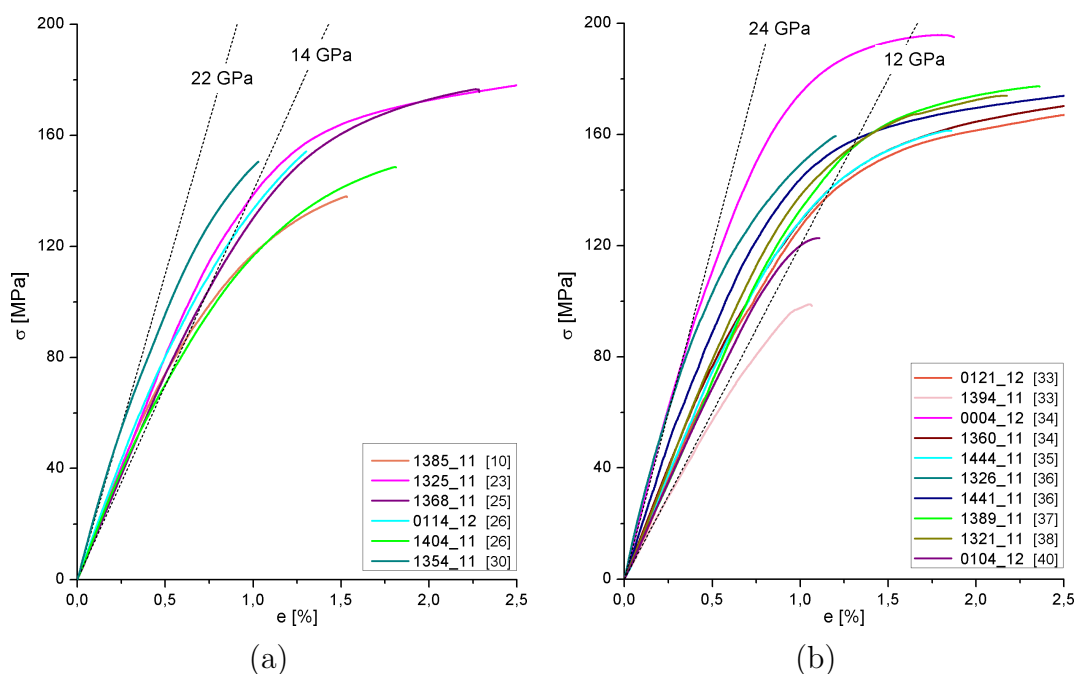


Figura 5.1. Curvas tensión-deformación obtenidas de los ensayos de *coupons* para los grupos de edad de (a) menores de 30 años y (b) de 31 a 40 años.

5.1. MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL

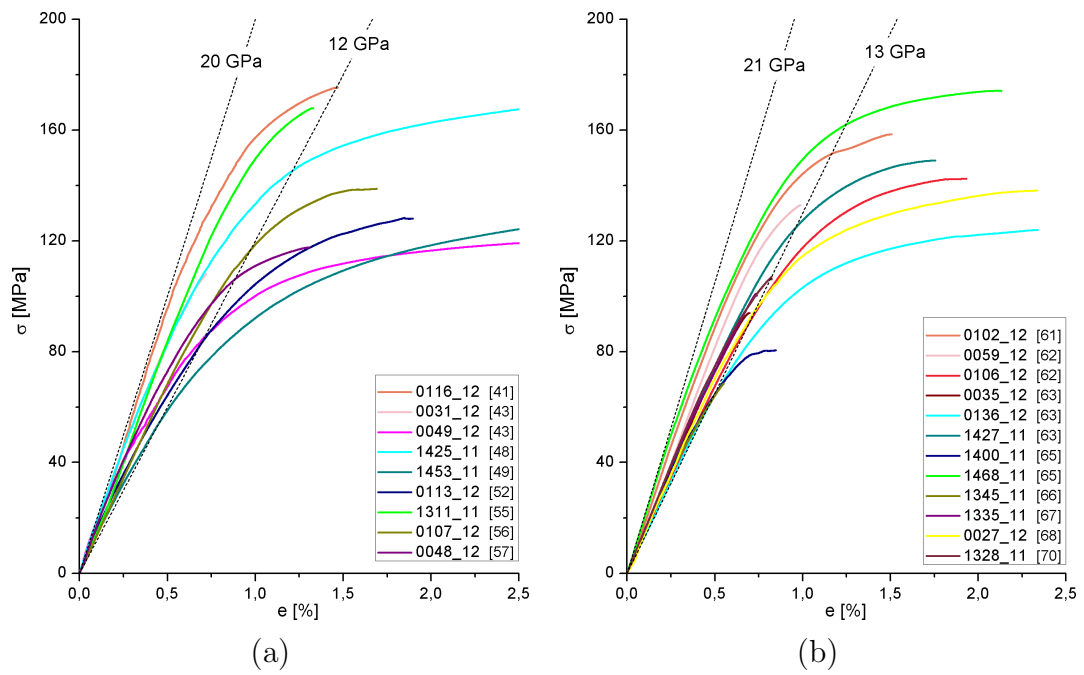


Figura 5.2. Curvas tensión-deformación obtenidas de los ensayos de *coupons* para los grupos de edad de (a) 41 a 60 años y (b) de 51 a 70 años.

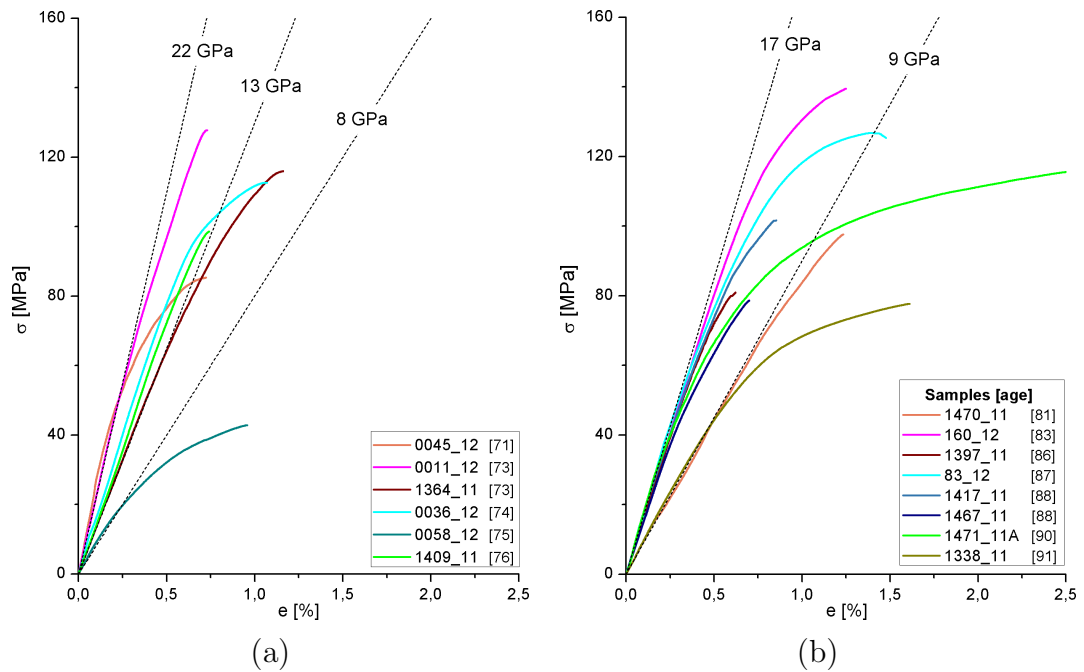


Figura 5.3. Curvas tensión-deformación obtenidas de los ensayos de *coupons* para los grupos de edad de (a) 71 a 80 años y (b) de 81 a 91 años.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

De las curvas tensión-deformación de cada *coupon* se ha obtenido la tensión máxima (σ_{\max}), la deformación máxima (e_{\max}), el módulo elástico o módulo de Young (E), el límite elástico ($\sigma_{0,2}$) y el trabajo a fractura (W) determinado como el área bajo la curva tensión-deformación. Los valores promedio resultantes y la desviación se exponen en la Tabla 5.1 distribuidos en rangos de edad.

Tabla 5.1. Propiedades mecánicas de *coupons* agrupados en rangos de edad: tensión máxima (σ_{\max}), deformación máxima (e_{\max}), módulo de Young (E), límite elástico ($\sigma_{0,2}$) y trabajo a fractura (W).

| Edad | σ_{\max} [MPa] | e_{\max} [%] | E [GPa] | $\sigma_{0,2}$ [MPa] | W [kJ/m ³] |
|---------|--------------------------|-------------------|--------------|-------------------------|-----------------------------|
| [10-30] | 162,1 ± 7,5 | 2,40 ± 0,58 | 17,5 ± 1,28 | 126,0 ± 6,94 | 2,99 ± 0,94 |
| [31-40] | 162,3 ± 9,4 | 2,37 ± 0,43 | 17,3 ± 1,6 | 134,4 ± 5,7 | 3,04 ± 0,75 |
| [41-60] | 139,9 ± 8,4 | 2,04 ± 0,34 | 16,4 ± 0,7 | 116,2 ± 9,8 | 2,08 ± 0,44 |
| [61-70] | 122,5 ± 9,4 | 1,42 ± 0,21 | 15,6 ± 0,6 | 111,6 ± 7,0 | 1,32 ± 0,29 |
| [71-80] | 97,19 ± 12,4 | 0,92 ± 0,09 | 16,9 ± 2,8 | 92,7 ± 13 | 0,55 ± 0,09 |
| [81-91] | 102,5 ± 8,3 | 1,34 ± 0,26 | 14,8 ± 1,3 | 91,5 ± 7,3 | 0,98 ± 0,28 |

En la Tabla 5.2 se muestra el valor promedio y la desviación, así como los valores máximo y mínimo para cada una de las propiedades mecánicas mencionadas. Los resultados se comparan con valores hallados por otros autores y reflejados en literatura científica.

Tabla 5.2. Propiedades mecánicas promedio obtenidas de los ensayos de *coupons* y comparativa con los resultados de otras investigaciones.

| Propiedad | Media ± SD | Min | Max | Kemper <i>et al.</i> ⁶⁸⁶⁹ | Subit <i>et al.</i> ¹³¹ | Katzenberger <i>et al.</i> ⁶⁷ |
|--------------------------|--------------|------|-------|---|---------------------------------------|---|
| σ_{\max} [MPa] | 131,9 ± 36,5 | 42,8 | 195,8 | 118,1 ÷ 124,2 | 112,1 ± 24,5 | 53 ÷ 149 |
| $\sigma_{0,2}$ [MPa] | 113,2 ± 27,5 | 36,0 | 163,7 | 93,9 | – | 28,9 ÷ 97,2 |
| E [GPa] | 16,3 ± 3,8 | 8,70 | 27,3 | 13,9 ÷ 14,4 | 13,5 ± 2,6 | 11,1 ÷ 24,4 |
| e_{\max} [%] | 1,76 ± 1,08 | 0,55 | 5,46 | 1,88 ÷ 2,71 | 1,06 ± 0,29 | 1,1 ÷ 5,3 |
| W [kJ/m ³] | 1,85 ± 1,72 | 0,21 | 8,69 | – | – | 0,78 ÷ 4,28 |

A partir de la Tabla 5.2 puede validarse que los resultados obtenidos se encuentran dentro de los rangos de la literatura. De los valores determinados para las propiedades mecánicas en la Tabla 5.1 se intuye una disminución de los valores promedio a medida que la edad se incrementa, exceptuando el módulo elástico o módulo de Young E . Por ello, se ha analizado la influencia de las variables antropométricas, edad e *índice de masa corporal* (IMC),² en las propiedades mecánicas por medio de un *análisis de la varianza* o ANOVA. El análisis de la varianza permite determinar si existe un efecto significativo de la edad en varias propiedades como la tensión máxima ($p < 0,0001$), la deformación máxima ($p = 0,0014$), el límite elástico ($p < 0,0001$) y el trabajo a fractura ($p = 0,0002$). Todas estas propiedades disminuyen significativamente con el aumento de la edad. De esta forma, un aumento de los años conlleva una pérdida de facultades del hueso, dada por la disminución de la capacidad de resistencia ante cargas y la deformación que puede exhibir el hueso antes de la fractura.

No se observa una influencia estadísticamente significativa de la edad en el módulo elástico E (o módulo de Young). Esto se corresponde a lo observado en otros estudios,⁶⁸ en los que al retirar del análisis estadístico los sujetos menores a 18 años, no se obtiene una relación significativa de la edad en el módulo de Young. A pesar de que el módulo de Young venga dado por la pendiente inicial de la curva tensión-deformación en el régimen elástico y se observe una disminución de la tensión y deformación máximas con la edad, si estas disminuyen de forma más o menos proporcional no se observarían influencias de dicha variable en el módulo elástico, justificando los resultados obtenidos. Este análisis, aun no siendo el objetivo principal de la presente investigación, será utilizado en la sección posterior para validar los resultados de las propiedades mecánicas a flexión obtenidas con el nuevo método aquí propuesto, las cuales se espera que muestren la misma tendencia.

Previamente a los ensayos experimentales se ha determinado la dimensión fractal (DF) para 40 de los *coupons* ensayados y, tras los ensayos de tracción, se ha realizado un proceso de secado y calcinación para el cálculo de las variables relacionadas con el contenido mineral. Los valores de dimensión fractal (DF), densidad (ρ), densidad aparente o sin agua (ρ_s) y las fracciones mineral (f_{min}),

²Previamente, se ha descartado cualquier relación estadísticamente significativa entre la edad e el IMC ($p = 0,757$).

orgánica o de colágeno (f_{org}) y de agua (f_{agua}) se presentan en la Tabla 5.3, agrupados por rangos de edad.³ Estas variables serán utilizadas en esta investigación posteriormente para tratar de ver influencias de las mismas en los parámetros del modelo constitutivo aquí propuesto.

Tabla 5.3. Valores de la dimensión fractal (DF) y parámetros del contenido mineral para los *coupons* de hueso cortical, agrupados por rangos de edad.

| Edad | DF | ρ [g/cm ³] | ρ_s [g/cm ³] | f_{min} | f_{org} | f_{agua} |
|---------|-------------|--------------------------------|----------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| [10-30] | 1,77 ± 0,02 | 2,06 ± 0,02 | 1,80 ± 0,03 | 0,581 ± 0,009 | 0,290 ± 0,008 | 0,129 ± 0,006 |
| [31-40] | 1,71 ± 0,02 | 2,09 ± 0,02 | 1,84 ± 0,02 | 0,589 ± 0,008 | 0,287 ± 0,008 | 0,124 ± 0,003 |
| [41-60] | 1,73 ± 0,02 | 2,08 ± 0,03 | 1,81 ± 0,04 | 0,592 ± 0,013 | 0,275 ± 0,007 | 0,133 ± 0,010 |
| [61-70] | 1,73 ± 0,03 | 2,04 ± 0,04 | 1,79 ± 0,04 | 0,589 ± 0,010 | 0,288 ± 0,006 | 0,123 ± 0,005 |
| [71-91] | 1,77 ± 0,01 | 2,05 ± 0,03 | 1,82 ± 0,04 | 0,586 ± 0,010 | 0,300 ± 0,006 | 0,114 ± 0,008 |

El estudio de la influencia de las variables antropométricas sobre la dimensión fractal y el contenido mineral, así como de estas variables en las propiedades mecánicas se ha realizado en el contexto de otros estudios complementarios, que se exponen en los apéndices C.3 y C.4. No obstante, dado que los parámetros del modelo constitutivo tratan de ajustar el comportamiento dado por las propiedades mecánicas, se ha analizado la influencia de estas variables en los parámetros del modelo. De hecho, en los estudios complementarios se concluye que tanto la dimensión fractal como el contenido mineral influyen en las propiedades mecánicas y ello se debe a que la dimensión fractal representa la distribución de zonas de baja densidad (que al fin y al cabo reducen la capacidad estructural del tejido) y la fracción mineral mejora las propiedades mecánicas (concretamente, tensión máxima y módulo de Young), aumentando la capacidad del material de resistir solicitaciones.¹⁴²

El modelo constitutivo propuesto ha sido ajustado mediante los datos de los ensayos a tracción simple. Los resultados medios de los valores obtenidos para los parámetros se presentan en la Tabla 5.4 agrupados por rangos de edad.

³Nótese que los valores de sujetos entre 71 y 91 años han sido agrupados dado que el número de *coupons* de este rango se ha visto reducido en este estudio complementario.

5.1. MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL

Tabla 5.4. Parámetros del modelo constitutivo ajustados para los ensayos de tracción de *coupons* de costilla humana, distribuidos por grupos de edad.

| Edad | α_1 | $-\alpha_2$ | $-\gamma_1$ | $-\gamma_2$ | β |
|---------|------------|----------------|-------------|----------------|-------------|
| [10-30] | 4492 ± 201 | 326806 ± 54464 | 4668 ± 210 | 30771 ± 12640 | 0,55 ± 0,21 |
| [31-40] | 4960 ± 738 | 272012 ± 41659 | 5160 ± 757 | 92286 ± 16285 | 1,56 ± 0,26 |
| [41-60] | 4688 ± 215 | 305135 ± 49514 | 4872 ± 216 | 198814 ± 69460 | 1,94 ± 0,18 |
| [61-70] | 3775 ± 284 | 170507 ± 30125 | 3942 ± 268 | 144837 ± 37166 | 2,37 ± 0,35 |
| [71-80] | 4230 ± 464 | 395906 ± 94217 | 4436 ± 495 | 170809 ± 80324 | 2,24 ± 0,59 |
| [81-91] | 4551 ± 407 | 251769 ± 51059 | 4756 ± 430 | 171374 ± 42211 | 3,02 ± 0,47 |

| Edad | $-\nu$ | κ_1 | $-\varsigma_1$ | ρ_2 | N | r |
|---------|-----------------|-------------|----------------|---------------|------------|-------------|
| [10-30] | 328133 ± 66486 | 7203 ± 1016 | 5895 ± 977 | 25845 ± 5262 | 2,82 ± 0,1 | 1,32 ± 0,03 |
| [31-40] | 212831 ± 60012 | 6437 ± 695 | 5523 ± 787 | 23238 ± 11972 | 3,02 ± 0,3 | 1,44 ± 0,09 |
| [41-60] | 139743 ± 46559 | 6161 ± 670 | 5313 ± 801 | 28958 ± 9143 | 2,84 ± 0,2 | 1,25 ± 0,04 |
| [61-70] | 52113 ± 22006 | 7255 ± 445 | 6512 ± 429 | 16193 ± 6577 | 3,38 ± 0,1 | 1,31 ± 0,05 |
| [71-80] | 294313 ± 152776 | 7856 ± 1709 | 7246 ± 1531 | 32415 ± 14889 | 3,37 ± 0,1 | 1,25 ± 0,04 |
| [81-91] | 133613 ± 61536 | 5254 ± 786 | 4854 ± 828 | 30600 ± 10389 | 2,97 ± 0,2 | 1,27 ± 0,05 |

Se denomina $\boldsymbol{\vartheta}^c$ a la tupla de parámetros ajustables dada por $\boldsymbol{\vartheta}^c = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \rho_1, \rho_2)$ y junto con β, N y r forman el conjunto de parámetros ajustables. Los parámetros ρ_1 y ρ_2 se usan en los ajustes para los ensayos de tracción simple, y se relacionan con los parámetros del modelo básico por $\rho_1 = \kappa_1 + \varsigma_1$ y $\rho_2 = \kappa_2 + \varsigma_2$. Dadas las simetrías que presenta la sollicitación de tracción simple, no se pueden determinar los parámetros κ_i y ς_i por separado usando únicamente los datos del ensayo. Sin embargo, teniendo en cuenta que el módulo elástico E en la dirección longitudinal es conocido, si se considera la forma extendida de la componente longitudinal tensión sin degradación \bar{S}_{xx} y se desarrolla por serie de Taylor hasta primer orden, puede establecerse que:

$$E = 2\alpha_1 + \kappa_1 + \rho_1$$

Recurriendo a los módulos de Young de cada *coupon*, obtenidos de la pendiente del tramo elástico de las curvas tensión-deformación, se han podido calcular a posteriori los parámetros κ_1 y ς_1 como $\kappa_1 = E - 2\alpha_1 - \rho_1$ y $\varsigma_1 = \rho_1 - \kappa_1$. Dada la diversidad de valores entre los diferentes parámetros y el gran número de muestras, se ha recurrido al *Análisis de Componentes Principales* (ACP) para interpretar la importancia de los parámetros en la tensión que de modelo predice, así como la dependencia de los mismos. La Figura 5.4⁴ representa la contribución de los dos primeros Componentes Principales (CPs) y las contribuciones en los cuatro primeros componentes se muestran en la Tabla 5.5.

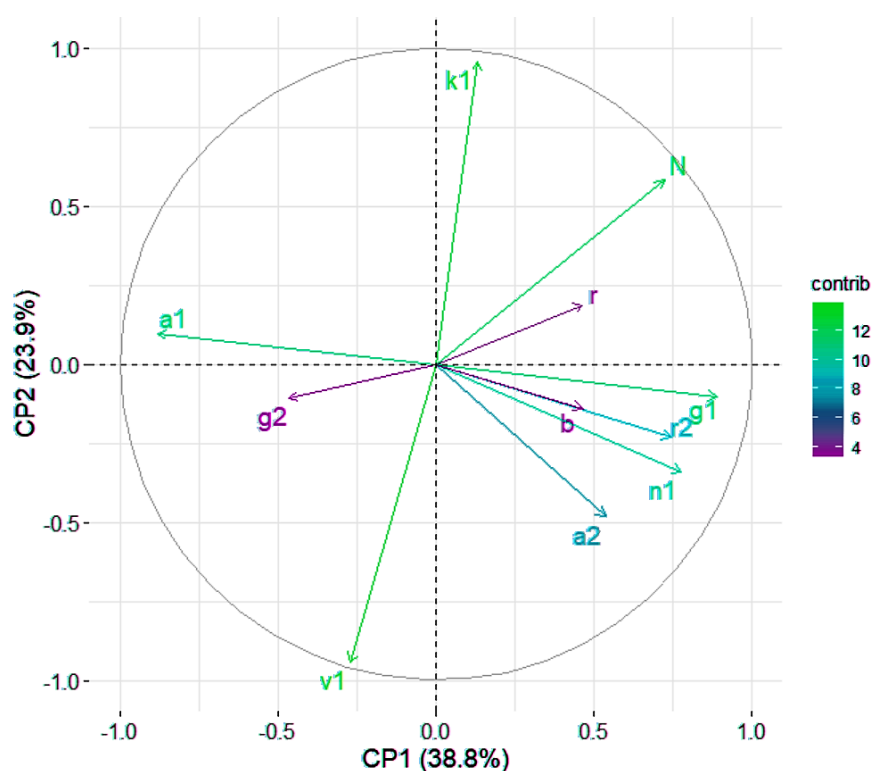


Figura 5.4. Gráfico de CP1 y CP2 del ACP de los parámetros ajustados para *coupons*.

Del ACP se deduce que los cuatro primeros Componentes Principales (CPs) por sí mismos ya describen el 80,5 % de la variabilidad del conjunto total de parámetros obtenidos, representando CP1 (38,8 %), CP2 (23,9 %), CP3 (12,4 %) y CP4 (7,4 %) tal que los dos primeros CPs definen el 62,7 % de la variabilidad.

⁴Siendo $a_i \equiv \alpha_i$, $g_i \equiv \gamma_i$, $n_1 \equiv \nu_1$, $k_i \equiv \kappa_i$, $v_1 \equiv \varsigma_1$ y $r_2 \equiv \rho_2$.

5.1. MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL

Tabla 5.5. Componentes Principales CP1 a CP4 con su varianza (Var %) y contribución de los parámetros ajustados de *coupons* en cada CP.

| CP (Var) | α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 | β | ν | κ_1 | ς_1 | ρ_2 | N | r |
|--------------|------------|------------|------------|------------|---------|-------|------------|---------------|----------|------|------|
| CP1 (38,8 %) | 18,2 | 6,74 | 18,5 | 5,08 | 5,04 | 14,1 | 0,41 | 1,72 | 13,0 | 12,2 | 5,02 |
| CP2 (23,9 %) | 0,35 | 8,83 | 0,40 | 0,43 | 0,75 | 4,44 | 34,8 | 33,7 | 2,03 | 12,9 | 1,32 |
| CP3 (12,4 %) | 4,13 | 14,7 | 3,9 | 46,6 | 26,0 | 1,89 | 0,56 | 0,06 | 0,19 | 0,98 | 0,94 |
| CP4 (7,37 %) | 7,69 | 1,85 | 5,96 | 0,31 | 1,15 | 1,16 | 0,35 | 0,31 | 1,51 | 0,06 | 79,7 |

El componente principal CP1 viene principalmente descrito por la contribución de los parámetros α_1 (18,2 %) y γ_1 (18,5 %), así como ν (14,1 %). Los dos primeros a su vez corresponden a los parámetros más influyentes en la función energía de deformación reducida ψ_0 del modelo constitutivo, así como en la tensión sin degradación \bar{S} dado que multiplican a términos de primer orden de la deformación, tal que $2\alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy})$ y $\gamma_1(E_{xx} + 2E_{yy})$ respectivamente. Por otro lado, CP2 está dado esencialmente por los parámetros κ_1 (34,8 %) y ς_1 (33,7 %), que igual que los anteriores, también multiplican a términos de primer orden de la deformación en el modelo junto con componentes del vector dirección preferencial \mathbf{a} ; sin embargo, siendo $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{i}}$ en la sollicitación particular de tracción, entonces los términos que aparecen en el modelo particular son $2\kappa_1 E_{xx}$ y $\varsigma_1 E_{xx}$. El tercer componente principal CP3 viene fundamentalmente descrito por los parámetros γ_2 (46,6 %) y β (26 %) y finalmente, el componente CP4 está principalmente definido por r (79,7 %).

A partir de las contribuciones observadas en los componentes principales y usando regresiones lineales específicas es posible encontrar correlaciones entre los parámetros constitutivos.

Del CP1 se deduce que α_1 muestra una fuerte influencia de γ_1 ($p < 0,0001$) así como que ν es estadísticamente significativo en ambos parámetros ($p < 0,0001$). Por otro lado, de CP2 se deriva que ς_1 influye significativamente en κ_1 ($p < 0,0001$). Nótese que ambas relaciones $\alpha_1 \leftrightarrow \gamma_1$ y $\kappa_1 \leftrightarrow \varsigma_1$ pueden verse fácilmente en el gráfico de la Figura 5.4, donde cada pareja de variables muestra una influencia totalmente opuesta. Ello indica que los signos de α_1 y κ_1 son opuestos a los de γ_1 y ς_1 . De hecho, en la Tabla 5.4 se constata que para valores de α_1 y κ_1 positivos se obtienen cifras de γ_1 y ς_1 negativas (respectivamente) que, en valor absoluto, crecen de forma pareja.

Del tercer componente principal se observa la influencia de β en γ_2 ($p = 0,0008$), tal que un aumento de β conlleva un aumento [en valor absoluto] de γ_2 , siendo ésta última negativa en todas las muestras de *coupons*. Finalmente, r influye significativamente en α_1 ($p = 0,039$) y, por tanto, en γ_1 ($p = 0,023$), a pesar de ser relaciones menos significativas. Dadas las relaciones estadísticas encontradas entre parámetros tras el ACP, se ha determinado la matriz de p -valores (ver Tabla 5.6), que muestra las correlaciones significativas entre parejas de parámetros. En ella se observan varias relaciones estadísticamente significativas, que indican la presencia de simetrías en la sollicitación de tracción, debido a las restricciones que este tipo de sollicitación sobre las cargas actuantes.

A pesar de que el objetivo de esta investigación no se centra en determinar los parámetros exactos del modelo constitutivo, se espera que en estados tensionales más complejos (como es el caso de flexión) el número de simetrías se reduzca, dada la aparición de nuevas componentes de deformación que se introducen en el modelo de forma más singular.

Tabla 5.6. Matriz de p -valores de relaciones entre los parámetros de tracción.

| | α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 | ν | κ_1 | ς_1 | ρ_2 | β | N | r |
|---------------|------------|------------|------------|------------|-------|------------|---------------|----------|---------|-----|-----|
| α_1 | × | *** | *** | | *** | | | *** | | *** | * |
| α_2 | *** | × | *** | | *** | * | | * | | | |
| γ_1 | *** | *** | × | | *** | | | *** | | *** | * |
| γ_2 | | | | × | *** | | | * | ** | * | |
| ν | *** | *** | *** | *** | × | | | *** | ** | * | |
| κ_1 | | * | | | | × | *** | | | *** | |
| ς_1 | | | | | | *** | × | | | *** | |
| ρ_2 | *** | * | *** | * | *** | | | × | * | * | * |
| β | | | | ** | ** | | | * | × | | |
| N | *** | | *** | * | * | *** | *** | * | | × | *** |
| r | * | | * | | | | | * | | ** | × |

** p -valor < 0,001 / *** 0,001 < p -valor < 0,01 / * 0,01 < p -valor < 0,05

Para tratar de explicar las variaciones en los parámetros obtenidos en base a características físicas del hueso cortical, se ha estudiado la influencia de las variables antropométricas, la dimensión fractal, la densidad y el contenido mineral en los parámetros ajustados del modelo mediante análisis de varianzas ANOVA. Los p -valores significativos del análisis se muestran en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7. p -valores del ANOVA de los parámetros de tracción con la edad, densidad (ρ), densidad corregida (ρ_s), fracciones mineral (f_{min}) y de agua (f_{agua}) y dimensión fractal (DF).

| Param | Edad | IMC | DF | ρ | ρ_s | f_{min} | f_{agua} |
|---------------|----------|--------|--------|--------|----------|-----------|------------|
| α_2 | — | — | 0,0181 | — | — | — | — |
| κ_1 | — | — | — | 0,0121 | 0,0041 | 0,0002 | 0,0135 |
| ς_1 | — | — | — | 0,0085 | 0,0021 | <0,0001 | 0,0065 |
| ρ_2 | — | 0,0185 | — | — | — | — | — |
| β | < 0,0001 | — | — | — | — | — | — |
| N | — | — | — | — | 0,0453 | 0,0057 | 0,0006 |
| r | — | — | — | — | — | 0,013 | — |

Respecto a las variables antropométricas, se observa una influencia del *índice de masa corporal* en ρ_2 ($p = 0,0185$) y de la edad en β , con un p -valor muy bajo ($p < 0,0001$) (ver Figura 5.5(a)). El parámetro β es el que gráficamente define el inicio de la pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación, siendo un parámetro definido como “parámetro de temperación del desorden” (ver sección 4.1.3). De esta forma, β describe la presencia inicial de microdaños y, dada la influencia positiva de la edad, este resultado indica que los huesos de personas con más edad presentan un mayor grado de microfisuras preexistentes en el material. Ello corrobora el sentido físico de β como un parámetro que refleja la flexibilidad del tejido antes de la acumulación de daño a medida que se incrementa la edad. De hecho, estos resultados ya son perceptibles en la Tabla 5.4 donde se exponen los valores de los parámetros por grupos de edad, observando un aumento de β a medida que ésta se incrementa.

En cuanto a las variables relacionadas con la estructura y composición del hueso cortical, la *dimensión fractal* muestra ser una variable influyente en α_2 ($p = 0,0181$), siendo la dimensión fractal una variable adimensional que describe la cantidad y distribución de zonas de baja densidad (Figura 5.5(b)).

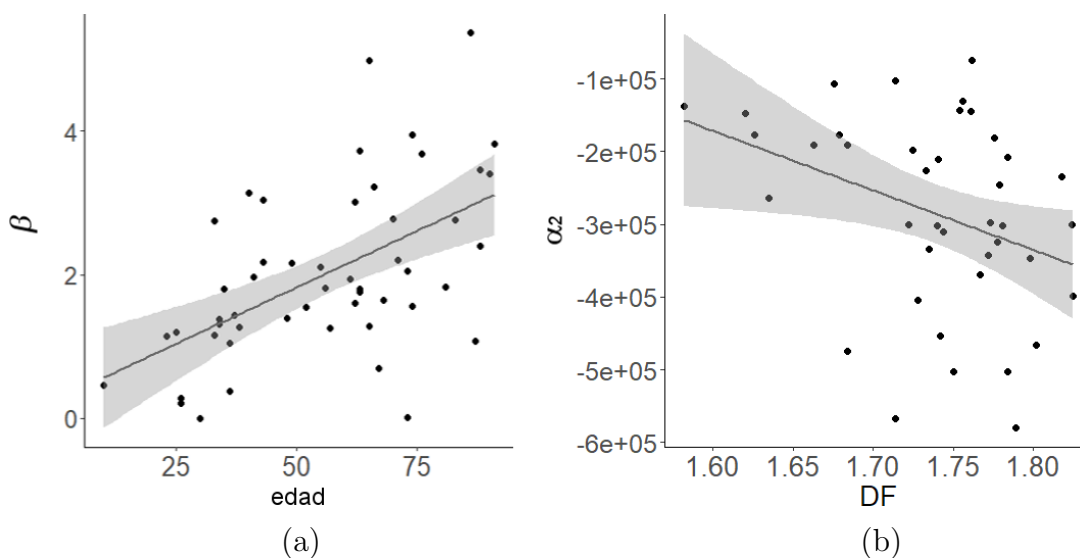


Figura 5.5. Gráficos de (a) β frente a la edad y (b) α_2 frente a la dimensión fractal (DF), donde se muestra la línea de tendencia y el intervalo de confianza.

Por otro lado, la densidad, tanto en su forma inicial ρ como sin la fracción de agua ρ_s es estadísticamente significativa en los parámetros κ_1 y ς_1 (Figura 5.6), ambos relacionados entre ellos y principales contribuyentes del CP2. Con ello, se deduce que un aumento de la densidad del tejido cortical supone un incremento de κ_1 , así como una disminución de ς_1 (o aumento de este último en módulo).

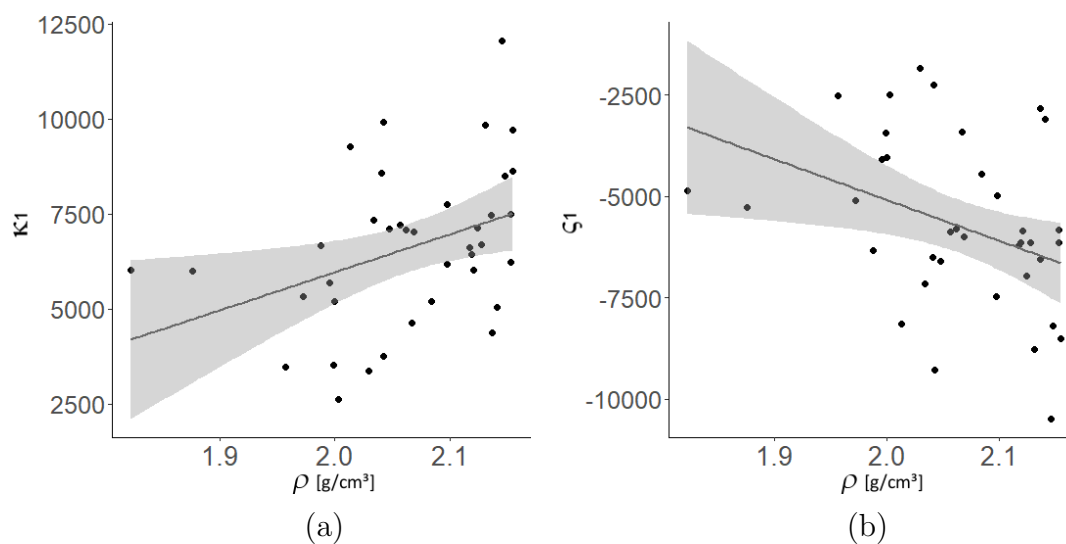


Figura 5.6. Gráficos de (a) κ_1 y (b) ς_1 frente a la densidad del *coupon*, donde se muestra la línea de tendencia y el intervalo de confianza.

Es interesante observar en la Tabla 5.7 que, igual que se constató en el estudio complementario de la influencia de la densidad en las propiedades mecánicas, la densidad sin la fracción de agua ρ_s parece mostrar una mayor correlación que la densidad ρ y por tanto, parece que la fracción de agua presente en el hueso cortical no muestra una gran contribución en los parámetros κ_1 y ς_1 . De hecho, en la Tabla 5.7 y la Figura (5.7) puede verse que, precisamente, tanto la fracción de mineral f_{min} como la de agua f_{agua} influyen estadísticamente en ambos parámetros κ_1 y ς_1 (esta última cuando se considera la densidad ρ).

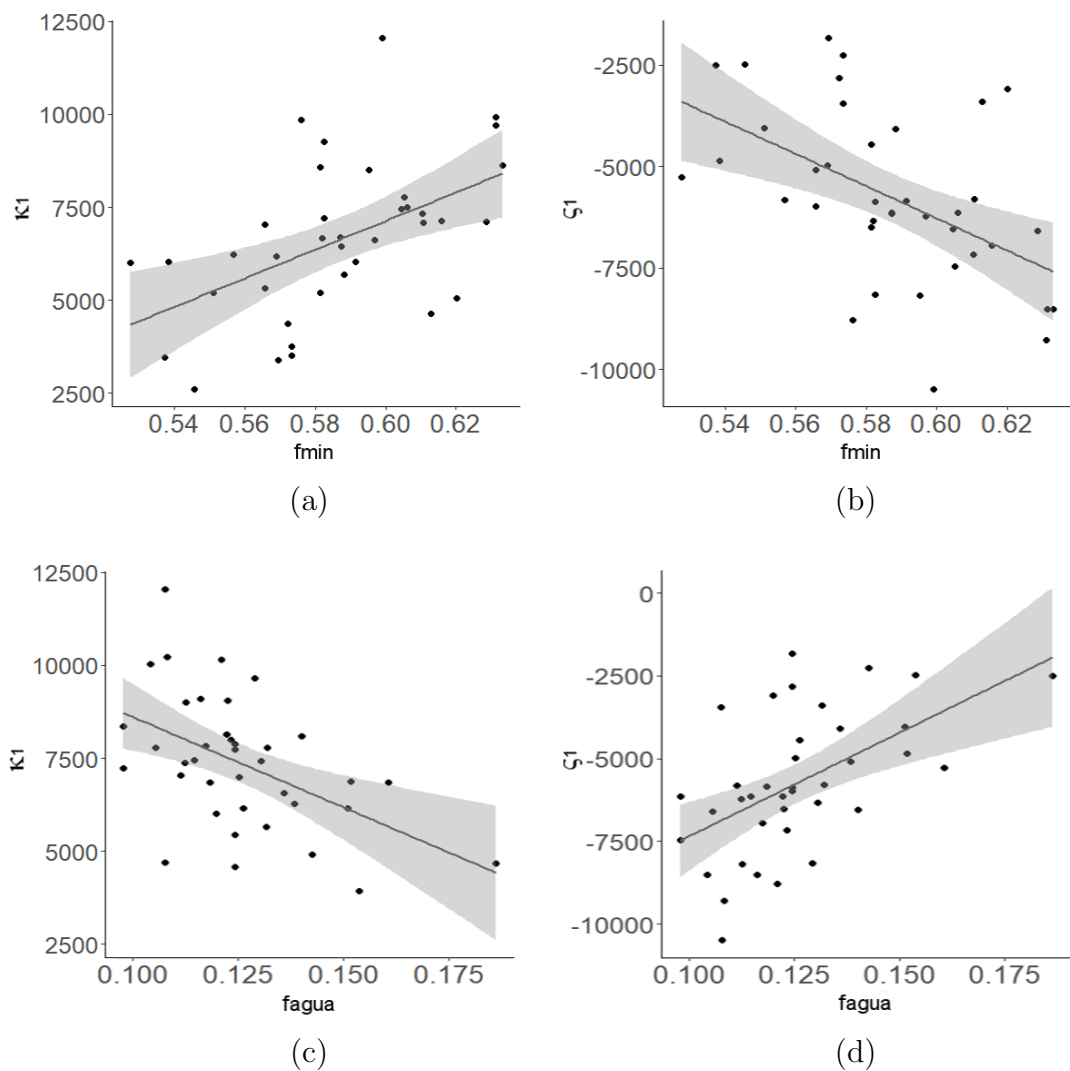


Figura 5.7. Gráficos de (a) κ_1 y (b) ς_1 frente a las fracción mineral f_{min} y (c) κ_1 y (d) ς_1 frente a la fracción de agua f_{agua} del *coupon*, donde se muestra la línea de tendencia y el intervalo de confianza.

Cabe considerar que la fracción orgánica $f_{org} = 1 - f_{min} - f_{agua}$ y, por ello, no ha sido considerada, dado que la influencia de las fracciones mineral y de agua ya implica la influencia de la fracción orgánica. Específicamente, un aumento de la fase mineral supone un incremento en el valor absoluto de ambos parámetros, e inversamente, un aumento de la fracción de agua implica una disminución de los mismos. Nótese que, siendo la fracción de agua la que ocupa principalmente las zonas de baja densidad del tejido (poros u otros), ésta representa en parte la fase no ocupada por mineral y, por tanto, el inverso a la sección resistente.

Así, teniendo en cuenta que en estudios complementarios se ha observado una influencia de la fracción de mineral f_{min} en la densidad ρ , el estudio de la influencia de la densidad y las fracciones de mineral y agua en κ_1 y ς_1 lleva a la deducción de que a mayor contenido mineral (f_{min}) en la muestra, κ_1 aumenta, mientras que ς_1 aumenta en valor negativo, de la misma forma que lo hace la propia densidad. Además, dado que la densidad a su vez ha mostrado influir en las propiedades mecánicas del tejido óseo, concretamente en σ_{max} y E , a mayor resistencia mecánica y mayor rigidez del tejido óseo, más elevado será el valor κ_1 y, por ende, más negativo ς_1 .

Finalmente, se aprecia una influencia positiva de la densidad y la fracción mineral en el parámetro N , así como una disminución de N con la fracción de agua (Figuras 5.8(a-c)). El parámetro N ha sido considerado el número de etapas de propagación de la fisura a través de la red antes de la fractura macroscópica y junto con el parámetro de red r , define el número de caminos posibles que puede tomar una fisura en su avance mediante la función $g_k = r^k$ con $k \leq N$.

La interpretación del parámetro N permite deducir que cuanto mayor sea la densidad y la fracción mineral y menor la fracción de agua, más etapas de propagación realizará la microfisura antes de la rotura macroscópica de la muestra. Véase entonces en la Tabla 5.6 de p -valores que el parámetro N está relacionado con α_1 , γ_1 , κ_1 y ς_1 y que, como se ha descrito, todos ellos junto con N muestran un aumento en su valor a medida que la densidad del tejido aumenta; por tanto, el incremento de estos parámetros parece estar relacionado con el aumento de la resistencia y rigidez del hueso cortical (ambos a su vez influidos por la densidad). Por otro lado, como se ha descrito anteriormente, el parámetro de red r trata con los posibles caminos que puede tomar una fisura en cada etapa de avance. Este parámetro ha mostrado estar relacionado con la fracción mineral, tal que el incremento de f_{min} supone un aumento de r y, por tanto, de los posibles caminos que por los que puede avanzar la fisura en su propagación en cada etapa.

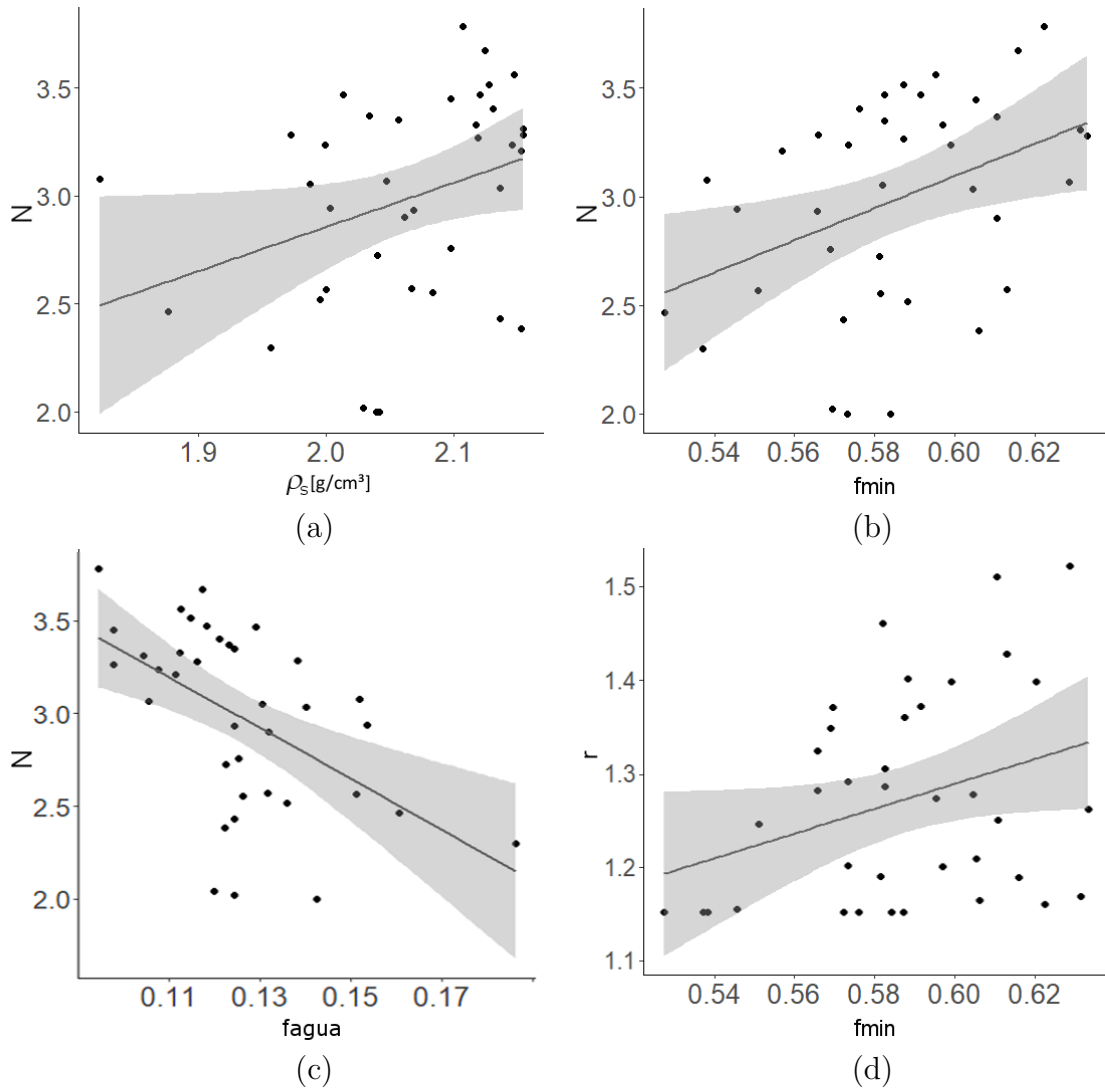


Figura 5.8. Gráficos de N frente a (a) la densidad aparente ρ_s , (b) la fracción mineral f_{min} y (c) la fracción de agua f_{agua} y (d) r frente a la densidad aparente ρ_s , donde se muestra la línea de tendencia y el intervalo de confianza.

De esta forma, se deduce que la presencia de más mineral en el hueso cortical supone un aumento de r y N y, por tanto, de los posibles caminos que puede tomar la fisura en su avance (g_k), lo cual a su vez implica que la propagación es más sencilla en hueso con mayor fracción mineral, pues dentro de los caminos o rutas posibles de la fisura, algunos estarán asociados a menores niveles de energía que facilitarán el avance.

5.1.2 Aplicación a los ensayos de flexión

De los ensayos de flexión de las $N_f = 15$ costillas humanas completas se ha obtenido la posición de diversos puntos materiales sobre la costilla a lo largo de todo el ensayo. El diseño experimental utilizado ha sido pensado con el objetivo de permitir el libre movimiento de la costilla durante el ensayo de flexión. Para ello, se ejerce una fuerza en la zona central exterior de la costilla que incrementa progresivamente, mientras los extremos de la costilla deslizan a lo largo de una guía de aluminio. Los extremos de la costilla han sido envueltos en teflón y la guía lubricada para reducir la fricción.

Dado que a partir de los resultados experimentales se determinarán las tensiones y las deformaciones que se utilizarán para ajustar el modelo constitutivo, previamente al cálculo de los parámetros se comprueba la adecuación del deslizamiento de los extremos de la costilla en la guía. Así, en la Figura 5.9 se representa el cambio de posición longitudinal de los extremos posterior y anterior a lo largo de la guía, en función del tiempo de ensayo transcurrido.

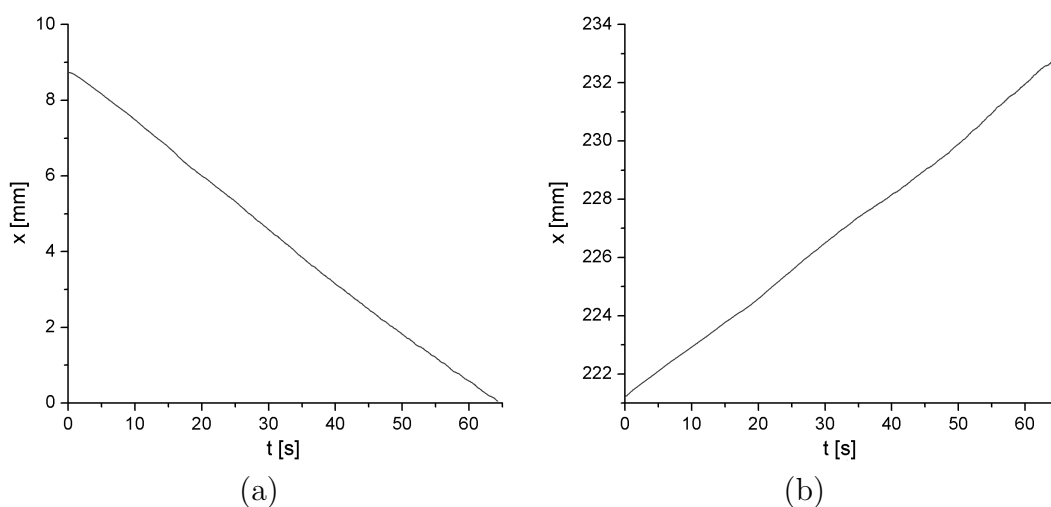


Figura 5.9. Gráfico de desplazamiento de los extremos de la costilla completa frente al tiempo durante el ensayo, para los extremos (a) anterior y (b) posterior.

En ambos gráficos puede observarse cómo el avance de los dos extremos es prácticamente lineal en el tiempo. Eso indica que hay un reposicionamiento progresivo, uniforme y sin saltos o cambios abruptos de tendencia, lo que indica que no existen fricciones de consideración en el montaje desarrollado para el ensayo.

Con ello se asume que el deslizamiento de extremos ha sido adecuado gracias al uso de teflón y lubricante y, por tanto, los resultados obtenidos más adelante corresponden al comportamiento de la costilla humana de un ensayo a flexión, donde sus extremos han deslizado libremente sin momentos aplicados o fuerzas que puedan introducir reacciones no esperadas.

Para el cálculo de las tensiones experimentales se requieren los esfuerzos axiales y cortantes y los momentos flectores, cuyos valores serán variables en función de la posición a lo largo de la costilla. Por otro lado, las deformaciones se han calculado partiendo de la curvatura del eje baricéntrico, que también es distinta según la posición sobre la costilla y así mismo, va variando con el incremento de sollicitación. Para verificar los resultados obtenidos, se han realizado simulaciones bidimensionales de algunas de las costillas. Así, se han tomado las posiciones iniciales del eje baricéntrico de estas muestras y en base a ellas se ha reconstruido el eje baricéntrico en el software ED-Tridim[®] de CIMNE. Sobre el eje baricéntrico obtenido, se ha aplicado la fuerza máxima alcanzada durante el ensayo en la posición exacta en la que se aplicó y los apoyos han sido restringidos en las direcciones Y y Z . A partir de esta configuración, se han determinado los diagramas de los esfuerzos axiales, cortantes y flectores, que se representan en la Figura 5.10 junto con la deformada, que permitirá corroborar que el cambio de curvaturas a lo largo del ensayo sigue la tendencia esperada.

El diagrama de esfuerzos axiales muestra como la fuerza N_x va decreciendo del extremo posterior al centro, aumentando posteriormente hasta alcanzar el extremo anterior, mientras que el diagrama de cortantes indica un cambio de signo a partir de la posición de aplicación de la carga. Por otro lado, el diagrama de momentos flectores señala que la zona traccionada es la fibra interior de la costilla, alcanzando el momento máximo en la zona central. Toda esta información corrobora la adecuación de los resultados numéricos obtenidos, en los cuales se observa que la tensión en fibra interior es positiva, indicando que dicha fibra está traccionada, mientras que la fibra exterior de la costilla está comprimida al tener signos negativos en la tensión.

Por otro lado, la deformada proporciona una idea de los cambios de curvatura entre el inicio y final del ensayo, a partir de la cual se determinan las deformaciones. Puede observarse cómo la zona central, que es donde se da la máxima tensión en el ensayo, experimenta una disminución de la curvatura (por ende, se allana) tal y como se ve en los cálculos experimentales.

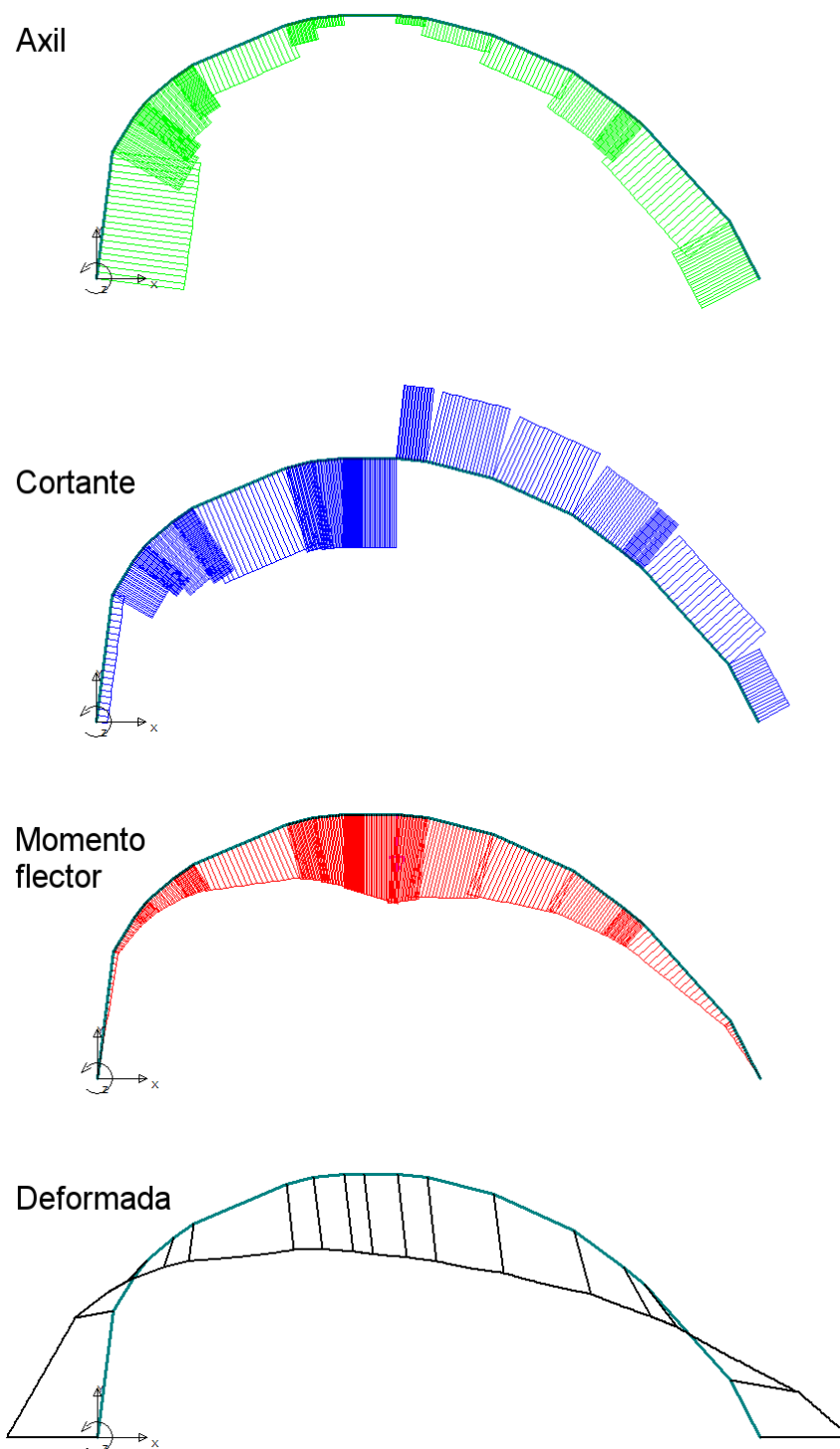


Figura 5.10. Diagramas de los esfuerzos axiles y cortantes, los momentos y la deformada de la costilla completa sometida a flexión a tres puntos.

La Figura 5.11 representa la variación de curvatura a lo largo de la costilla de una de las muestras, para los tiempos inicial y final del test, donde se constata esta disminución de la curvatura en la zona central. Además, el lado derecho de la costilla se descurva, observando una disminución de la curvatura en esa zona, mientras que en el izquierdo depende del punto analizado, igual que sucede en los datos experimentales. Ello corrobora la coherencia de los resultados obtenidos del ensayo y los cálculos y lo previsto en el diagrama simulado en la Figura 5.10.

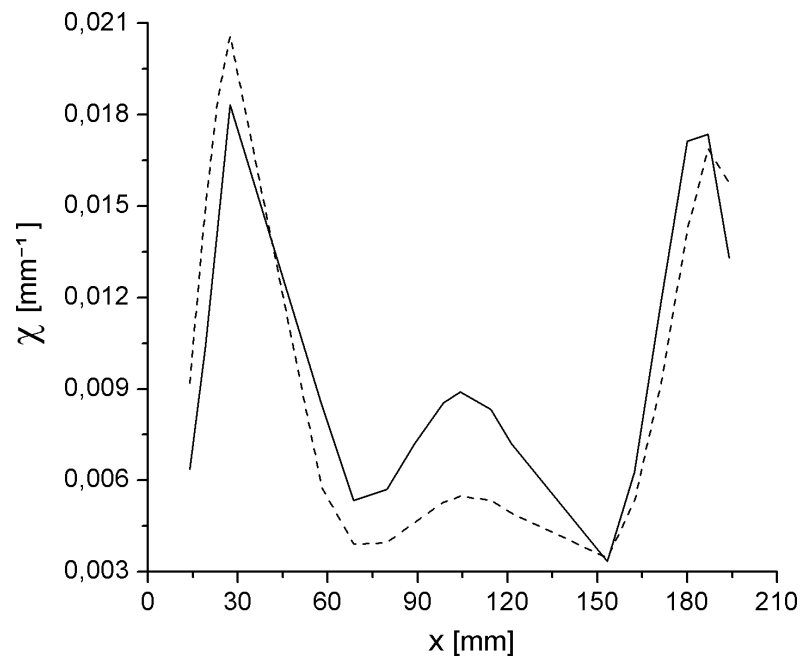


Figura 5.11. Variación de la curvatura a lo largo de la costilla en el ensayo de tracción para el tiempo inicial del ensayo (línea sólida) y antes de la fractura (línea discontinua) de una de las costillas utilizadas en esta investigación.

En cuanto a las deformaciones, siendo la tensión positiva en la fibra interior y negativa en la exterior, se espera que en la zona central de la fibra traccionada se observen valores positivos que indiquen alargamientos para E_{xx} y por tanto, negativos en E_{yy} y E_{zz} . Por otro lado, el signo E_{xy} irá directamente relacionado con el de los esfuerzos cortantes (el cual cambia a partir del punto de aplicación de la carga, como puede verse en la Figura 5.10). Así mismo, se ha verificado que la tensión cortante V_{\max} es $6 \pm 0,6$ % de la tensión máxima, no excediendo en ningún caso el 7 %, como se verá en los resultados de las propiedades mecánicas.

Los desplazamientos de los puntos a lo largo de la costilla se han determinado a partir del rastreo de las intersecciones definidas por diversos marcadores o gomas colocados a lo largo de la costilla con el contorno superior e inferior de la misma (ver 3.3.4). El punto medio de la intersección superior e inferior de cada marcador con la costilla ha sido considerado como un punto perteneciente al eje baricéntrico.⁵ El conjunto de puntos del eje baricéntrico ha sido ajustado para obtener un polinomio $y(x)$ de quinto orden que define al propio eje en cualquier punto a lo largo de la costilla (ver sección 4.4). Dado que la curvatura cambia a medida que se incrementa la sollicitación, se ha ajustado un polinomio para cada instante de tiempo (o, equivalentemente, para cada *frame* o fotograma perteneciente al ensayo). Así, las deformaciones han sido determinadas a partir de las posiciones de los puntos junto con las propiedades geométricas obtenidas de una tomografía computarizada (CT) de una costilla genérica, que ha sido reescalada de la relación de longitudes (ver subsección 4.4.2).

Por otro lado, las tensiones han sido calculadas partiendo de los esfuerzos axiales, cortantes y momentos flectores, junto con los vectores tangente y normal en cada punto de la costilla (ver subsección 4.4.3). Las deformaciones no nulas vienen dadas por las componentes E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} y E_{xy} , mientras que las tensiones no nulas son las componentes axial $\sigma = S_{xx}$ y tangencial $\tau_{xy} = S_{xy}$. El modelo constitutivo particularizado a flexión ha sido ajustado a partir de estos datos, obteniendo los valores del conjunto de parámetros y analizando posteriormente las relaciones entre parámetros y las variables antropométricas.

Las curvas tensión-deformación $S_{xx} - E_{xx}$ ($\sigma - e$) para todas las costillas ensayadas a flexión se exponen en las Figura 5.12. Además, en la Tabla 5.8 se presentan los valores máximos de la tensión axial (σ_{\max}), la tensión cortante (τ_{\max}), las deformaciones no nulas (E_{xx} , E_{yy} , E_{zz} , E_{xy}) y el módulo de Young (E), este último calculado como la pendiente del tramo elástico de la curva $S_{xx} - E_{xx}$.⁶ Con el fin comprobar la validez del método de cálculo usado para computar las tensiones y las deformaciones, la Tabla 5.9 presenta una comparativa de la tensión máxima σ_{\max} , el módulo elástico E y la deformación axial máxima e_{\max} con valores de la literatura, dado que estas propiedades son las únicas calculadas en otras investigaciones.

⁵Como se ha mencionado en la sección 4.4, el error cometido al considerar el punto medio de las intersecciones con el eje baricéntrico ha sido del $3 \pm 2,5$ % en la zona central.

⁶Nótese que $\sigma_{\max} = S_{xx,\max}$, $\tau_{\max} = S_{xy,\max}$ y $e_{\max} = E_{xx,\max}$.

5.1. MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL

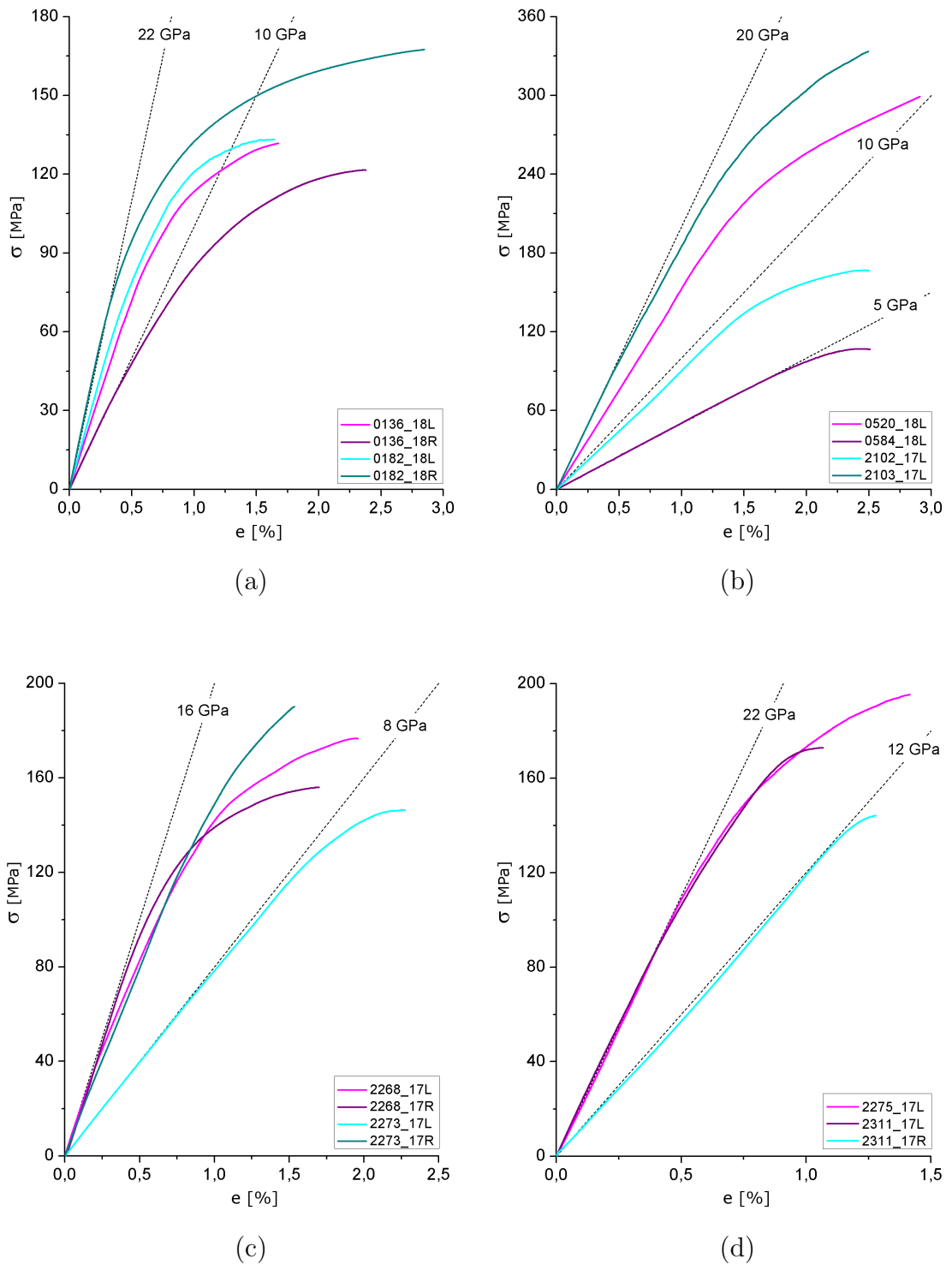


Figura 5.12. Curvas tensión-deformación $S_{xx} - E_{xx}$ ($\sigma - e$) de los ensayos de flexión.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

Tabla 5.8. Propiedades mecánicas de las muestras de flexión; tensión axil máxima (σ_{\max}), tensión cortante máxima (τ_{\max}), deformaciones ($E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, E_{xy}$) y módulo de Young (E).

| Muestra | σ_{\max} [MPa] | τ_{\max} [MPa] | E_{xx} | E_{yy} | E_{zz} | E_{xy} | E [GPa] |
|----------|--------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------|
| 0136/18L | 131,8 | -6,85 | $1,68 \cdot 10^{-2}$ | $2,59 \cdot 10^{-5}$ | $-5,92 \cdot 10^{-3}$ | $-6,00 \cdot 10^{-4}$ | 15,0 |
| 0136/18R | 121,6 | -6,99 | $2,38 \cdot 10^{-2}$ | $3,20 \cdot 10^{-6}$ | $-1,02 \cdot 10^{-2}$ | $-2,48 \cdot 10^{-4}$ | 10,2 |
| 0182/18L | 133,3 | -9,38 | $1,64 \cdot 10^{-2}$ | $1,17 \cdot 10^{-5}$ | $-7,05 \cdot 10^{-3}$ | $-4,23 \cdot 10^{-4}$ | 17,3 |
| 0182/18R | 171,7 | -10,6 | $3,65 \cdot 10^{-2}$ | $1,65 \cdot 10^{-4}$ | $-1,55 \cdot 10^{-2}$ | $-4,44 \cdot 10^{-8}$ | 22,8 |
| 0520/18L | 299,1 | -16,3 | $2,91 \cdot 10^{-2}$ | $1,07 \cdot 10^{-4}$ | $-1,24 \cdot 10^{-2}$ | $-1,77 \cdot 10^{-3}$ | 15,1 |
| 0584/18L | 107,0 | -6,30 | $2,51 \cdot 10^{-2}$ | $1,04 \cdot 10^{-5}$ | $-1,08 \cdot 10^{-2}$ | $-5,15 \cdot 10^{-4}$ | 5,05 |
| 2102/17L | 166,9 | -9,38 | $2,50 \cdot 10^{-2}$ | $9,91 \cdot 10^{-5}$ | $-1,08 \cdot 10^{-2}$ | $-1,64 \cdot 10^{-3}$ | 8,88 |
| 2103/17L | 333,5 | -17,2 | $2,50 \cdot 10^{-2}$ | $2,58 \cdot 10^{-5}$ | $-1,07 \cdot 10^{-2}$ | $-7,37 \cdot 10^{-4}$ | 19,8 |
| 2268/17L | 176,6 | -10,6 | $1,96 \cdot 10^{-2}$ | $2,32 \cdot 10^{-5}$ | $-8,40 \cdot 10^{-3}$ | $-6,82 \cdot 10^{-4}$ | 18,5 |
| 2268/17R | 156,0 | -11,1 | $1,73 \cdot 10^{-2}$ | $1,46 \cdot 10^{-6}$ | $-7,43 \cdot 10^{-3}$ | $-1,50 \cdot 10^{-5}$ | 19,5 |
| 2273/17L | 146,3 | -9,14 | $2,28 \cdot 10^{-2}$ | $1,80 \cdot 10^{-5}$ | $-9,76 \cdot 10^{-3}$ | $-6,03 \cdot 10^{-4}$ | 7,97 |
| 2273/17R | 190,0 | -10,2 | $1,53 \cdot 10^{-2}$ | $4,07 \cdot 10^{-7}$ | $-6,57 \cdot 10^{-3}$ | $-1,29 \cdot 10^{-5}$ | 16,0 |
| 2275/17L | 195,4 | -13,5 | $1,42 \cdot 10^{-2}$ | $5,25 \cdot 10^{-7}$ | $-6,06 \cdot 10^{-3}$ | $-8,69 \cdot 10^{-5}$ | 21,5 |
| 2311/17L | 172,8 | -9,83 | $1,07 \cdot 10^{-2}$ | $1,42 \cdot 10^{-5}$ | $-4,65 \cdot 10^{-3}$ | $-3,93 \cdot 10^{-4}$ | 22,3 |
| 2311/17R | 144,1 | -8,54 | $1,28 \cdot 10^{-2}$ | $9,26 \cdot 10^{-6}$ | $-5,49 \cdot 10^{-3}$ | $-3,45 \cdot 10^{-4}$ | 11,3 |

Tabla 5.9. Propiedades mecánicas promedio obtenidas de los ensayos de flexión y comparativa con los resultados de otras investigaciones.

| Propiedad | Valor promedio | SD | Stain & Granik ¹²⁸ | Stitzel <i>et al.</i> ¹²⁹ | Kemper <i>et al.</i> ⁶⁹ | Cormier <i>et al.</i> ²⁷ | Albert <i>et al.</i> ⁷ |
|-----------------------|----------------|------|-------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| σ_{\max} [MPa] | 176,4 | 62,4 | 106 | – | 153,5 | 184,7 | – |
| E [GPa] | 15,4 | 5,60 | 11,5 | – | 11,9 | 20,0 | – |
| e_{\max} [%] | 2,07 | 0,69 | – | 1,07 ÷ 1,32 | – | 1,44 | 1,06 |

Previamente al ajuste de los parámetros del modelo constitutivo, como se ha mencionado, se han comparado los resultados experimentales obtenidos de tensión y deformación en esta investigación con los de los estudios de otros autores. De las tablas puede verse que tanto la tensión máxima promedio como el módulo de Young se encuentran cerca o en el rango de los valores presentados en la literatura. En los otros estudios con los que se compara, las tensiones y módulos de Young fueron calculados con una aproximación en base a la teoría elástica lineal de vigas, mientras que en el presente estudio han sido determinados considerando los esfuerzos que se dan en la muestra y recurriendo a las fórmulas de Navier y Collignon-Jourawski, obteniendo los valores reales de las tensiones axial y cortante.

Por otro lado, la deformación obtenida en los ensayos de flexión de este estudio está algo por encima de los valores observados en otras investigaciones; sin embargo, cabe mencionar que estos estudios no realizan ensayos de costilla completa, sino de secciones de la parte lateral (a parte de la zona anterior o posterior en alguno de ellos). En los tres estudios el tipo de sollicitación genera un estado de tensión en la zona exterior de la costilla y de compresión en el interior, al contrario que en esta investigación; ello se debe a que tanto Kemper *et al.*⁶⁹ como Stitzel *et al.*¹²⁹ aplican la fuerza en la cara interna de la costilla y, por otro lado, Cormier *et al.*²⁷ presionan los extremos de la muestra hacia sí, generando el estado de compresión en la zona central de la costilla.

Además, en los tres estudios se midieron las deformaciones con galgas y se hicieron los ensayos a velocidades elevadas, mientras que en la investigación aquí expuesta se realizaron ensayos a baja velocidad de deformación, determinando las deformaciones a partir del rastreo de diferentes puntos sobre la costilla sobre un video del ensayo recurriendo a la curvatura instantánea y otras propiedades de la muestra. Siendo el hueso un material viscoelástico, donde estos efectos dados por la presencia de colágeno se perciben a velocidades elevadas, es razonable que puedan obtenerse valores más elevados de ciertas propiedades mecánicas.

Así, dadas las disparidades observadas en los métodos y características del ensayo y de los posteriores cálculos con respecto al resto de estudios, no es posible hacer una comparación directa de los resultados obtenidos. A pesar de ello, los valores aquí presentados son cercanos a los obtenidos en la literatura y, como se verá en la sección 5.1.3, del orden de los determinados en los ensayos de tracción.

La influencia de las variables antropométricas en las propiedades mecánicas de las costillas solicitadas a flexión ha sido analizada por medio de análisis de varianza (ANOVA), obteniendo los resultados presentados en la Tabla 5.10. Previamente, se ha descartado un posible vínculo de la edad con el IMC, determinando que no hay una relación significativa ($p = 0,162$).

Tabla 5.10. p -valores obtenidos por ANOVA de las propiedades mecánicas obtenidas para los ensayos de flexión frente a la edad y el IMC.

| | σ_{\max} | τ_{\max} | E_{xx} | E_{yy} | E_{zz} | E_{xy} |
|-------------|-----------------|---------------|----------|----------|----------|----------|
| Edad | < 0,0001 | < 0,0001 | – | – | – | – |
| IMC | – | – | 0,0056 | – | 0,0067 | 0,0315 |

Para las propiedades mecánicas obtenidas de ensayos de flexión, se observa una influencia significativa de la edad tanto en la tensión longitudinal σ_{\max} como en la tensión cortante τ_{\max} . Los resultados muestran que un aumento de la edad del sujeto conlleva una disminución de ambas propiedades, reduciendo así su capacidad de resistencia. Por otro lado, el *índice de masa corporal* (IMC) muestra ser estadísticamente significativo en las deformaciones E_{xx} , E_{zz} y E_{xy} . Ello refleja que un incremento del IMC reduce la capacidad de deformación del hueso. Véase que, siendo el índice de masa corporal proporcional al peso e inversamente proporcional al cuadrado de la altura, en personas más obesas (para una altura dada) el tejido cortical exhibe deformaciones menores antes de presentar la fractura macroscópica.

Sin embargo, no se ha encontrado una influencia significativa de ninguna de estas variables antropométricas en el módulo elástico del tejido óseo. Estos resultados ya muestran ciertas similitudes con los hallados en los ensayos de tracción. La comparativa entre ambos ensayos para todos los resultados obtenidos se presenta en el apartado 5.1.3.

Los parámetros constitutivos han sido obtenidos por un ajuste de mínimos cuadrados para las $N_f = 15$ costillas completas ensayadas a flexión. Los parámetros constitutivos para la sollicitación particular de flexión son los dados por la tupla $\vartheta^f = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \kappa_1, \kappa_2, \varsigma_1, \varsigma_2)$, junto con β, N y r . Los resultados obtenidos se exponen en la Tabla 5.11 y el valor promedio y desviación de cada parámetro del modelo se presenta en la Tabla 5.12.

Tabla 5.11. Parámetros ajustados para los ensayos de flexión de costilla humana.

| Muestra | α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 | ν | β | κ_1 | κ_2 | ζ_1 | ζ_2 | N | r |
|----------|------------|------------|------------|------------|---------|---------|------------|------------|-----------|-----------|------|------|
| 0136/18L | 3856,1 | -18434 | -6034,1 | 1015897 | -195278 | 2,26 | 6106,2 | 286695 | -6034,1 | -16139 | 3,01 | 1,15 |
| 0136/18R | 3699,8 | 20581 | -5134,4 | 195592 | 164171 | 1,39 | 5313,2 | 1335,9 | -5134,4 | 5208,8 | 2,05 | 1,15 |
| 0182/18L | 5367,0 | 208994 | -7460,2 | -715060 | 1020216 | 1,87 | 4589,4 | 500003 | -4257,8 | -786875 | 2,57 | 1,15 |
| 0182/18R | 5510,6 | -30643 | -8057,0 | -308374 | -208568 | 2,23 | 1263,7 | -73680 | 203,2 | 90541 | 2,56 | 1,15 |
| 0520/18L | 3289,6 | -45752 | -4664,0 | 567313 | -126870 | 0,65 | -6802,7 | -124417 | 6445,3 | 312628 | 3,89 | 1,15 |
| 0584/18R | 1851,8 | 211611 | -2571,4 | -1288263 | 866915 | 1,61 | 1230,5 | 443786 | -2245,0 | -797281 | 4,74 | 2,01 |
| 2102/17L | 2119,2 | 164733 | -2944,8 | -939860 | 696930 | 1,40 | -4768,3 | 704946 | 4567,2 | -946039 | 2,98 | 2,07 |
| 2103/17L | 4655,3 | 196439 | -6459,2 | -941900 | 872194 | 0,40 | -8576,1 | 761069 | 8542,0 | -1025177 | 3,50 | 1,15 |
| 2268/17L | 4910,2 | -102241 | -6828,0 | -135356 | 534963 | 1,22 | 6389,8 | 650784 | -6204,3 | -736682 | 2,90 | 1,15 |
| 2268/17R | 4401,2 | 60415 | -6548,4 | 338134 | 308427 | 1,87 | 5359,3 | -22587 | -5454,1 | 91334 | 3,80 | 1,15 |
| 2273/17L | 2928,9 | 840,3 | -4083,5 | 274709 | 64038 | 1,36 | 3913,6 | -19678 | -4083,5 | 89127 | 2,02 | 2,23 |
| 2273/17R | 4646,1 | -119271 | -6448,0 | 1478072 | -307196 | 1,52 | 6363,5 | 296775 | -6448,0 | 107313 | 2,58 | 1,56 |
| 2275/17L | 5133,5 | 191814 | -7117,8 | -493522 | 989405 | 1,59 | 6948,5 | 312074 | -6811,9 | -440633 | 3,50 | 1,15 |
| 2311/17L | 5859,6 | 95388 | -8123,6 | 878338 | 499711 | 2,67 | 8003,2 | 194661 | -8098,8 | 107885 | 3,00 | 1,15 |
| 2311/17R | 4283,7 | 66803 | -5895,7 | 240308 | 454321 | 1,47 | 5652,3 | -9003,2 | -5895,7 | 95459 | 2,00 | 1,16 |

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

Tabla 5.12. Parámetros promedio ajustados para los ensayos de flexión de costilla humana.

| α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 | ν | β |
|-----------------|---------------------|------------------|----------------------|---------------------|----------------|
| 4168 ± 1204 | 62717 ± 122757 | -5891 ± 1704 | 11069 ± 796979 | 375559 ± 460020 | $1,57 \pm 0,6$ |
| κ_1 | κ_2 | ς_1 | ς_2 | N | r |
| 2732 ± 5277 | 260184 ± 299838 | -2727 ± 5231 | -256622 ± 470912 | $3,01 \pm 0,8$ | $1,37 \pm 0,4$ |

Análogamente al análisis de los resultados de tracción, se ha realizado un Análisis de Componentes Principales (ACP) para estudiar la variabilidad del conjunto de parámetros obtenidos y predecir las posibles relaciones entre ellos. La contribución de los parámetros en los dos primeros Componentes Principales (CPs) se presenta en la Figura 5.13 y las contribuciones en los cuatro primeros CPs se exponen en la Tabla 5.13.

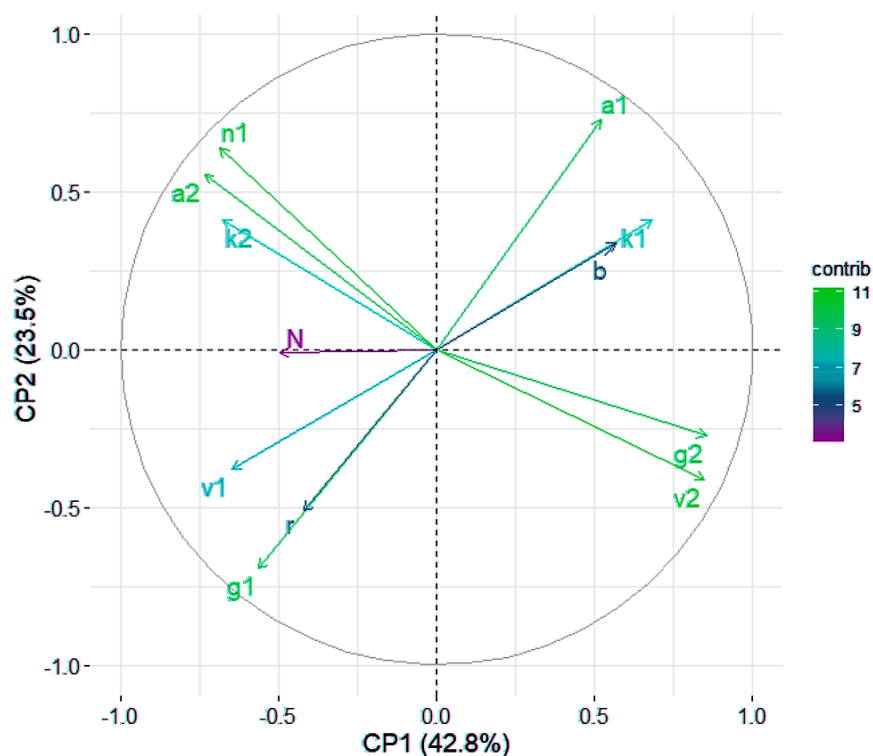


Figura 5.13. Gráfico de los dos primeros componentes principales del ACP de los parámetros ajustados para los ensayos de flexión.

5.1. MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL

Tabla 5.13. Componentes Principales CP1 a CP4 con su varianza (Var %) y contribución de los parámetros ajustados de flexión en cada CP.

| CP (Var) | α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 | β | ν | κ_1 | κ_2 | ς_1 | ς_2 | N | r |
|---------------------|------------|------------|------------|------------|---------|-------|------------|------------|---------------|---------------|------|------|
| CP1 (42,8 %) | 5,27 | 10,5 | 6,17 | 14,2 | 6,32 | 9,17 | 9,03 | 8,96 | 8,15 | 14,02 | 4,76 | 3,45 |
| CP2 (23,5 %) | 18,7 | 10,8 | 17,1 | 2,67 | 4,00 | 14,4 | 5,90 | 5,98 | 5,14 | 6,04 | 0,00 | 9,27 |
| CP3 (14,0 %) | 9,16 | 1,09 | 9,62 | 0,21 | 12,4 | 1,97 | 19,1 | 0,21 | 22,0 | 0,44 | 0,46 | 23,3 |
| CP4 (7,33 %) | 0,68 | 0,51 | 0,11 | 0,11 | 8,26 | 0,36 | 0,00 | 7,82 | 0,10 | 3,64 | 75,3 | 3,12 |

De los resultados obtenidos tras el ACP se observa que los cuatro primeros componentes principales son capaces de describir el 87,6 % de la variabilidad total del conjunto de parámetros obtenidos, dividida en CP1 (42,8 %), CP2 (23,5 %), CP3 (14 %) y CP4 (7,3 %), donde los dos primeros definen el 66,3 %.

En base a los resultados de la Tabla 5.13 se concluye que el CP1 está asociado básicamente a los parámetros γ_2 (14,2 %), ς_2 (14 %) y α_2 (10,5 %), lo cual indica una relación entre los tres valores, confirmado mediante un ANOVA (en las interacciones, los p -valores son $p < 0,0001$). En lo que a CP2 respecta, las contribuciones mayoritarias vienen dadas por α_1 (18,7 %) y γ_1 (17,1 %). De hecho, en la sollicitación a flexión, ambos parámetros multiplican a términos de primer orden, concretamente a $I_1 = \text{tr}(\mathbf{E})$, teniendo una gran influencia en el valor de la tensión. Así mismo, el componente principal CP3 viene esencialmente descrito por los parámetros κ_1 (19,2 %) y ς_1 (22 %), donde ambos también multiplican a términos de primer orden de la deformación junto con componentes del vector dirección preferencial \mathbf{a} (dependiendo de la componente de tensión). Nótese que la parejas formadas por los parámetros $\alpha_1 \leftrightarrow \gamma_1$ y $\kappa_1 \leftrightarrow \varsigma_1$ muestran claramente su relación inversa en la Figura 5.13. Finalmente, el CP4 muestra una contribución muy elevada del parámetro N (75,3 %).

Partiendo de las observaciones realizadas a partir de las contribuciones en los componentes principales, se han usado regresiones lineales específicas para definir relaciones estadísticamente significativas entre parámetros. De CP1 se deriva que los parámetros α_2, γ_2 y ς_2 están relacionados entre ellos (todos los p -valores son $p < 0,0001$) y de CP2 se encuentra que γ_1 es significativamente influyente en α_1 ($p < 0,0001$) tal que, siendo $\alpha_1 > 0$ y $\gamma_1 < 0$, a medida que α_1 aumenta, γ_1 también lo hace en módulo. Así mismo, de CP3 se concluye que ς_1 influye significativamente en κ_1 , tal que un aumento de κ_1 implica un incremento del módulo de ς_1 . Véase en la Tabla 5.11 que, en el caso de flexión

no se mantienen unos signos constantes para estos dos parámetros, a pesar de que en la mayoría de ensayos $\kappa_1 > 0$ y $\varsigma_1 < 0$. Sin embargo, sí se observa que ambos muestran signos opuestos (exceptuando una única muestra). Finalmente, del CP4 se concluye que N es independiente del resto de parámetros, dado que es el principal y prácticamente único parámetro que contribuye en la variabilidad de este componente (75,3 %).

Para establecer todas las relaciones existentes entre parámetros, se ha calculado la matriz de correlaciones donde se exponen los p -valores significativos, la cual se presenta en la Tabla 5.14. Véase que las relaciones antes determinadas a partir de los componentes principales se confirman y son de las más significativas, además de verificar la independencia del parámetro N , que no muestra estar relacionado con ningún otro parámetro.

Tabla 5.14. Matriz de p -valores de relaciones entre los parámetros de flexión.

| | α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 | ν | κ_1 | κ_2 | ς_1 | ς_2 | β | N | r |
|---------------|------------|------------|------------|------------|-------|------------|------------|---------------|---------------|---------|-----|-----|
| α_1 | × | | *** | | | | | | | | | *** |
| α_2 | | × | | *** | *** | | * | | ** | | | |
| γ_1 | *** | | × | | | | | | | | | *** |
| γ_2 | | *** | | × | ** | | * | | *** | | | |
| ν | | *** | | ** | × | | ** | | *** | | | |
| κ_1 | | | | | | × | | *** | | ** | | |
| κ_2 | | * | | * | ** | | × | | *** | | | |
| ς_1 | | | | | | *** | | × | | ** | | |
| ς_2 | | ** | | *** | *** | | *** | | × | | | |
| β | | | | | | ** | | ** | | × | | |
| N | | | | | | | | | | | × | |
| r | *** | | *** | | | | | | | | | × |

*** p -valor < 0,001 / **0,001 < p -valor < 0,01 / *0,01 < p -valor < 0,05

Así mismo, se ha analizado la influencia de los parámetros obtenidos con las variables antropométricas, tal y como se muestra en la Tabla 5.15.

Tabla 5.15. p -valores obtenidos por ANOVA de los parámetros de flexión frente a la edad y el índice de masa corporal IMC [kg/m^2].

| | α_1 | γ_1 | κ_1 | ς_1 | β | r |
|------|------------|------------|------------|---------------|---------|--------|
| Edad | – | – | 0,0153 | 0,0138 | 0,0179 | 0,0215 |
| IMC | 0,0317 | 0,0473 | 0,0030 | 0,0029 | – | – |

En este caso, los parámetros principalmente relacionados en el análisis ACP y ANOVA son los que presentan una influencia con la edad o el índice de masa corporal. Concretamente, la pareja α_1 y γ_1 viene influenciada significativamente por el índice de masa corporal (Figura 5.14), mientras que κ_1 y ς_1 están relacionadas estadísticamente tanto con la edad como con el IMC (Figura 5.15). Así, estos cuatro parámetros muestran aumentar (en módulo) su valor con el incremento de edad (y en κ_1 y ς_1 también con el índice de masa corporal). En este caso, siendo $\alpha_1 > 0$ y $\gamma_1 < 0$, el aumento de edad implica que el primer parámetro incrementa en valores positivos, mientras el segundo lo hace en cifras negativas. Sin embargo, en los ensayos a flexión no se observa una constancia de signos en cuanto a κ_1 y ς_1 , aunque sí presentan signos opuestos.

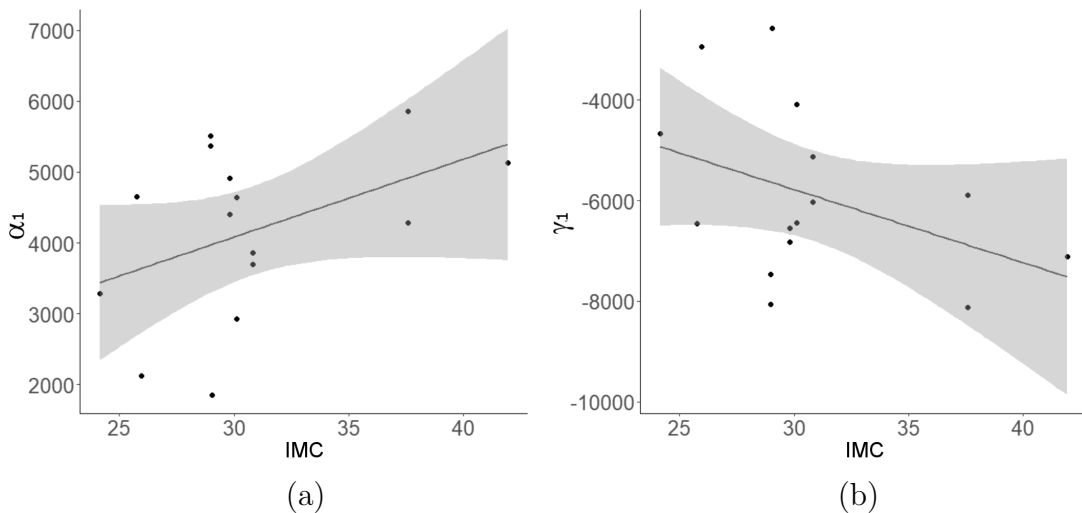


Figura 5.14. Gráficos de (a) α_1 y (b) γ_1 frente al índice de masa corporal de las costillas ensayadas a flexión, donde se muestra la línea de tendencia y el intervalo de confianza.

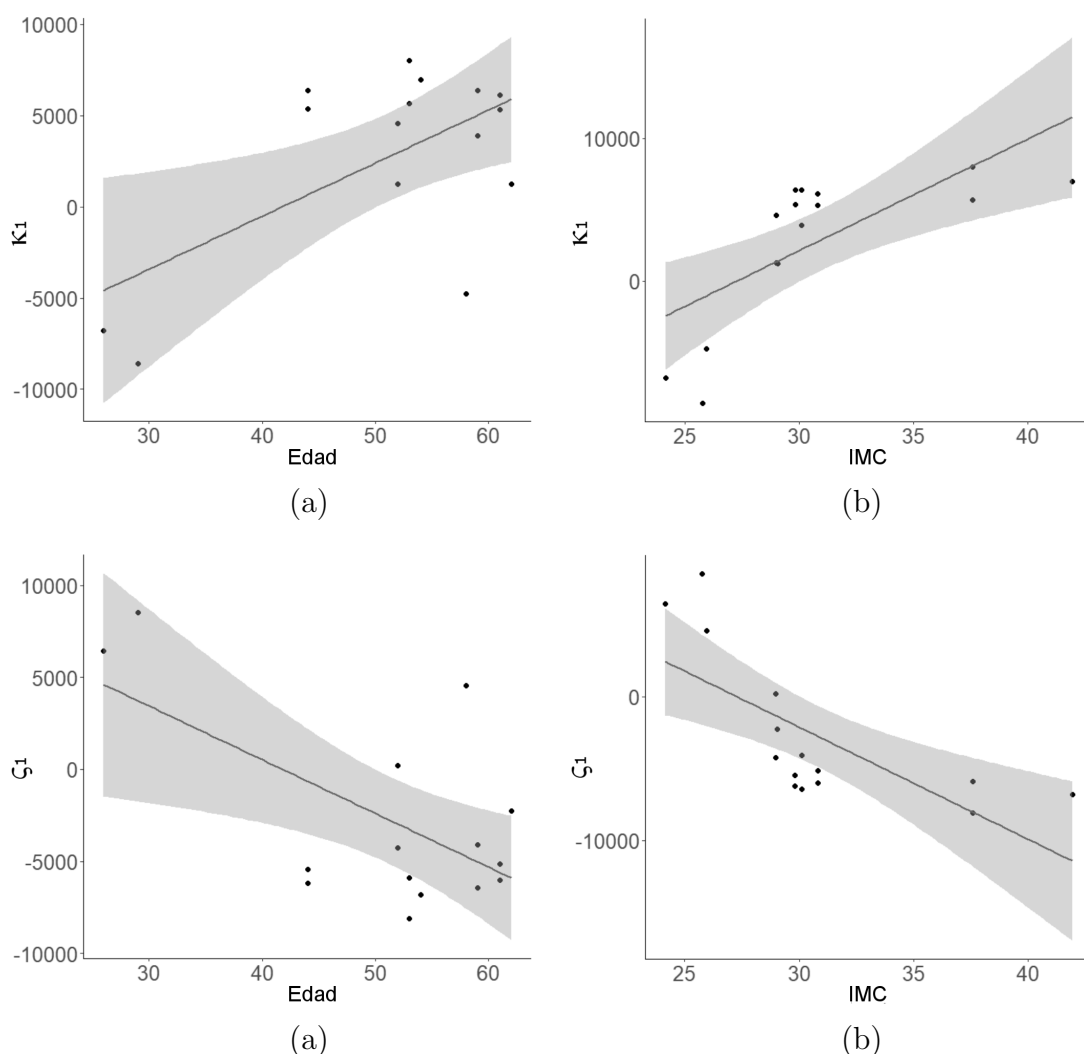


Figura 5.15. Gráficos de κ_1 frente a (a) la edad y (b) el IMC y de ζ_1 frente a (c) la edad y (d) el IMC, donde se muestra la línea de tendencia y el intervalo de confianza.

El parámetro β también muestra un incremento de su valor con la edad (Figura 5.16). De esta forma, un aumento de la edad supone un incremento de β , lo que corrobora la conjetura de que, a medida que la edad se incrementa, el tejido cortical exhibe un mayor nivel de microfisuración inicial (previa a la sollicitación) representado por el parámetro β . Nótese que la edad es estadísticamente significativa en la tensión máxima σ_{\max} , reduciendo la resistencia del tejido a medida que aumenta y, por tanto, ello implica que en sujetos de mayor edad, la presencia de un mayor número de microfisuras descrita por β reduce la resistencia máxima antes de la fractura macroscópica.

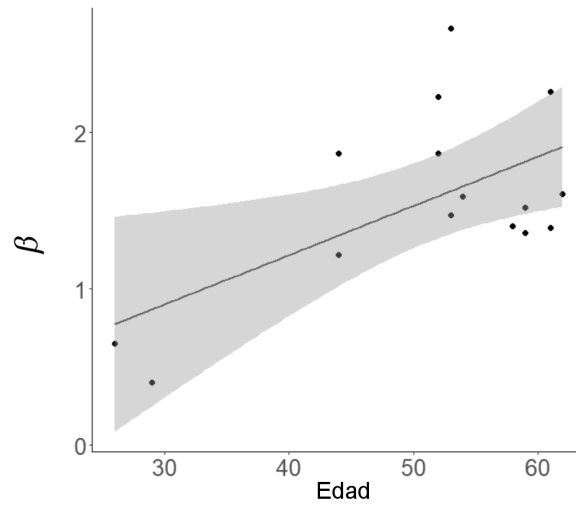


Figura 5.16. Gráfico de β frente a la edad de las costillas ensayadas a flexión, donde se muestra la línea de tendencia y el intervalo de confianza.

Finalmente, también se ha observado una influencia de la edad en el parámetro de red r . Dicho parámetro representa el tipo de red y está relacionado con la función $g_k = r^k$, donde $k \leq N$ es el número de etapas que debe propagar la fisura antes de la fractura catastrófica de la muestra y la función g_k predice el número de caminos posibles que se encuentra la fisura en su avance. Dado que r experimenta un aumento con la edad, ello implica que a medida que ésta aumenta, la fisura se encuentra con más caminos posibles y, por ende, es más sencilla su propagación a lo largo del material. Esto a su vez está relacionado con la disminución de la resistencia máxima del hueso con la edad, dado que cuantos más caminos puede tomar la fisura, menos resistencia encuentra en su propagación y por ende, más daño (β) acumula progresivamente hasta la fractura completa.

5.1.3 Comparativa entre tracción y flexión

En este apartado se comparan los resultados anteriores de tracción simple y flexión compuesta. Tanto para la sollicitación de tracción como para la de flexión, se han determinado las tensiones y deformaciones para cada instante de tiempo. Eso permite obtener las curvas tensión-deformación y estimar el valor adecuado de los parámetros constitutivos de cada muestra. Las propiedades más relevantes, comunes a ambos tipos de ensayo son la tensión máxima $\sigma_{\max} \equiv S_{xx,\max}$, el módulo elástico E y deformación máxima en la dirección longitudinal $e_{\max} \equiv E_{xx,\max}$.

El resumen de los parámetros obtenidos en ambos tipos de ensayo se expone en la Tabla 5.16 y, además, se presenta una comparación gráfica para las tres propiedades mecánicas mencionadas en la Figura 5.17.

Tabla 5.16. Propiedades mecánicas promedio obtenidas de los ensayos de tracción y flexión; tensión máxima (σ_{\max}), módulo elástico (E) y deformación axial máxima (e_{\max}).

| Propiedad | Tracción | | | Flexión | | |
|-----------------------|--------------|------|-------|--------------|------|-------|
| | Media±SD | Min | Max | Media±SD | Min | Max |
| σ_{\max} [MPa] | 131,9 ± 36,5 | 42,8 | 195,8 | 176,4 ± 62,4 | 107 | 333,5 |
| E [GPa] | 16,3 ± 3,79 | 8,70 | 22,3 | 15,4 ± 5,60 | 5,05 | 22,8 |
| e_{\max} [%] | 1,76 ± 1,08 | 0,55 | 5,46 | 2,07 ± 0,69 | 1,07 | 3,65 |

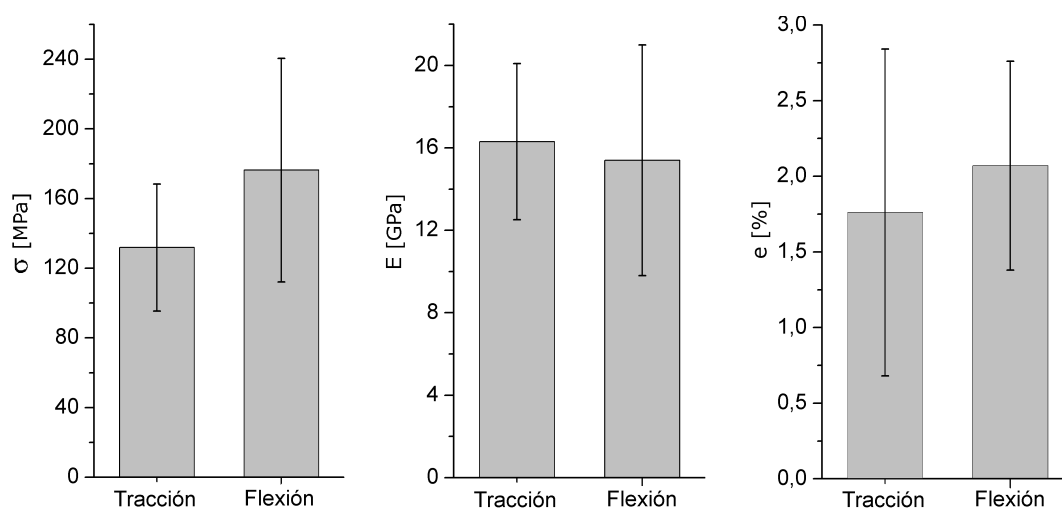


Figura 5.17. Comparativa de la tensión máxima (σ_{\max}), módulo elástico (E) y deformación máxima (e_{\max}) y barras de error entre los datos de tracción y flexión.

De la comparativa anterior se observa que la tensión máxima obtenida de los ensayos de flexión es un 33,7 % superior a los datos obtenidos de tracción. Nótese que esto mismo sucede en las investigaciones realizadas por otros autores, expuestas en las Tablas 5.2 y 5.9 para los ensayos de tracción y flexión respectivamente. Mientras las investigaciones de Kemper *et al.*,⁶⁸ Subit *et al.*¹³¹ y Katzenberger *et al.*⁶⁷ encuentran valores entre los 112 y 140 MPa de sus ensayos de microtracción de *coupons*, autores como Cormier *et al.*²⁷ o Kemper *et al.*⁶⁹ concluyen que los valores de la resistencia máxima en ensayos de flexión de tramos de costilla

va de los 153 a los 184 MPa, (Stain y Granik¹²⁸ presentan valores inferiores a los del resto de autores, cuyo promedio es de 106 MPa, por debajo incluso de datos de tracción). En los estudios mencionados las tensiones fueron determinadas por medio de cálculos de elasticidad lineal de vigas, mientras que en la presente investigación se ha utilizado la tensión de Navier, que tiene en cuenta tanto esfuerzos axiales como momentos flectores. Además, también la tensión cortante ha sido calculada, a diferencia de otros estudios de la literatura. La tensión cortante obtenida es del $6 \pm 0,6$ % de la tensión axial. Así mismo, el método de cálculo usado para las tensiones permite obtener los valores de las componentes de la tensión en cualquier punto de la costilla, únicamente conociendo sus características geométricas, la fuerza en cada instante y las posiciones de algunos puntos sobre la muestra a lo largo del ensayo. Véase también que, a pesar de haber recurrido al uso de un CT de una costilla genérica, cuyas características geométricas (área, momentos de inercia, espesor y distancias a las fibras superior e inferior) han sido reescaladas según el ratio de longitudes, ello permite proporcionar valores de tensión realistas y cercanos a los obtenidos en otros estudios.

Igual que sucede con los valores de tensión, la deformación promedio obtenida en los ensayos de flexión es superior a la de los resultados obtenidos en tracción, concretamente en un 17 %. Sin embargo, el módulo de Young muestra una tendencia opuesta, siendo un 5,5 % inferior en los ensayos de flexión. Mediante un test estadístico se determinó que ninguno de estos valores era significativo (el p -valor es $p > 0,30$ en ambos casos). Para la deformación, los estudios anteriormente mencionados de tracción exponen un rango de entre el 1,06 % y el 1,88 %, mientras que las investigaciones en las que se han desarrollado los ensayos de flexión, el rango se acota a valores entre 1,06 % y 1,44 %. Además, mientras que en la presente investigación se ha determinado la deformación en costillas completas mediante un procedimiento de procesado de imágenes y cálculos tensoriales, los estudios usados para la comparación de los datos a flexión determinan la deformación en tramos de costilla de unos 100 cm de longitud, recurriendo al uso de galgas para medir el valor de la deformación. Junto con ello, es necesario tener en cuenta que los ensayos aquí desarrollados se han llevado a cabo a velocidades cuasi-estáticas, a diferencia de las investigaciones de la literatura usadas en la comparación, donde utilizan altas velocidades de deformación que inducen la aparición de los efectos viscoelásticos del tejido óseo, más presentes a velocidades de ensayo elevadas.

Una ventaja que presenta este estudio es que la técnica aquí propuesta permite calcular las deformaciones desde el inicio del ensayo hasta la fractura macroscópica; sin embargo, se desconoce hasta qué estado de deformación (ya sea inicio de fisuración o propagación macroscópica) han sido calculadas las deformaciones máximas en el resto de estudios. De esta forma, no puede establecerse en qué tipo de ensayo la deformación suele ser superior. Lo mismo sucede con el módulo elástico, para el cual los valores de la literatura oscilan entre los 11,1 y 13,9 GPa en la sollicitación a tracción, pero entre los 11,5 y 20 GPa en los de flexión.

Por consiguiente, de la equiparación realizada se desprende que, considerando la proximidad de los valores de flexión obtenidos en esta investigación a los presentados en otros estudios, junto con la variabilidad de los resultados en ellos observados, el procedimiento de cálculo de las tensiones y deformaciones de los ensayos de flexión desarrollado en esta investigación basado en el procesado de imágenes y cálculo tensorial y, por ende, sin contacto con la muestra, proporciona valores de las propiedades mecánicas dentro o cerca de los rangos de la literatura. Esta conclusión viene reforzada por el estudio de la influencia de las variables antropométricas en las propiedades mecánicas, donde se observa que la tensión máxima del hueso cortical obtenida a flexión se ve reducida con la edad, igual que en los datos de tracción aquí presentados y en otros estudios.⁶⁷

Las tensiones y deformaciones de los ensayos de tracción y flexión han sido calculadas con el objetivo de ajustar el modelo constitutivo presentado en esta investigación y poder así verificar su aplicabilidad en la descripción del comportamiento del tejido óseo. Aunque el objetivo primario no es determinar el valor preciso de todos los parámetros, sino simplemente demostrar que el modelo constitutivo es adecuado para representar la evolución de las tensiones de la costilla humana a partir del estado de deformaciones para cualquier tipo de sollicitación, los valores de los parámetros constitutivos son útiles para establecer relaciones entre ellos y con las variables antropométricas y de composición, proporcionando nuevas cuestiones de investigación. El modelo ha sido ajustado tanto a los *coupons* sollicitados a tracción simple como a las costillas completas de los ensayos de flexión. De dichos ajustes se obtuvo la tupla de parámetros $\boldsymbol{\vartheta}^c = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \kappa_1, \varsigma_1, \rho_1)$ junto con β, N, r para los ensayos de tracción (donde se incluye la descomposición de $\rho_1 = \kappa_1 + \varsigma_1$) y la tupla $\boldsymbol{\vartheta}^f = (\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2, \nu, \kappa_1, \kappa_2, \varsigma_1, \varsigma_2)$ además de β, N, r correspondientes a los ensayos de flexión. Así, los únicos parámetros de flexión que no han podido determinarse específicamente a tracción son κ_2 y ς_2 debido a las simetrías presentes en este ensayo.

Los ajustes del modelo a los datos experimentales han mostrado ser muy satisfactorios, con un coeficiente de correlación de $r^2 > 0,999$ en todos los casos. En la Figura 5.18 se muestran las curvas tensión-deformación ($S_{xx} - E_{xx}$) longitudinales experimentales (línea punteada) y el modelo ajustado (línea sólida) para dos muestras de tracción y dos de flexión.

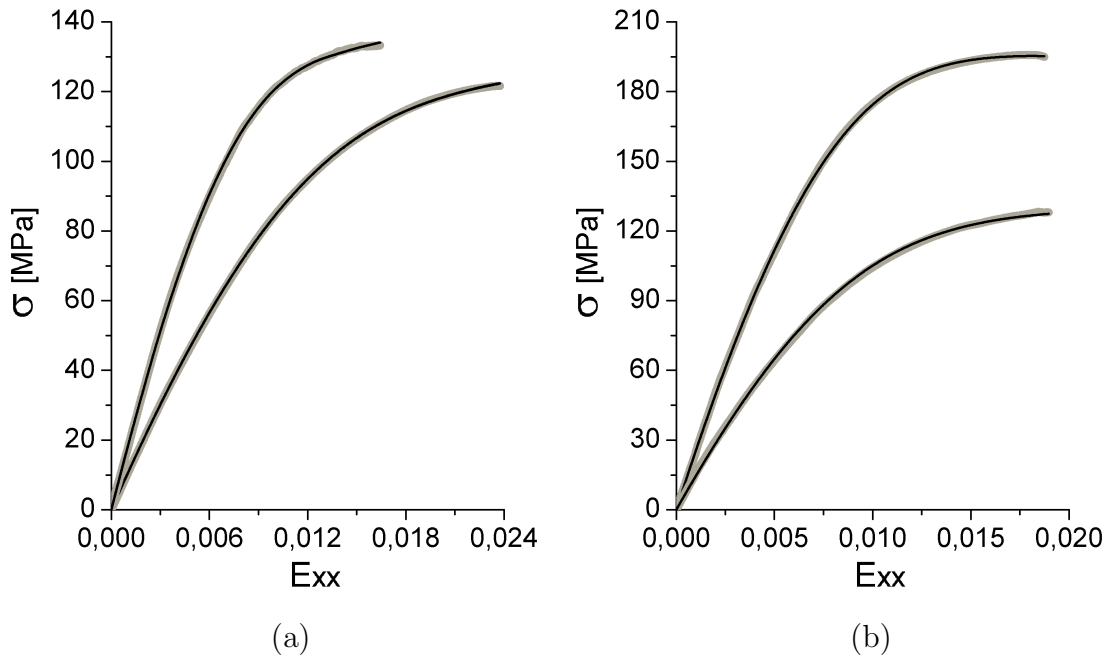


Figura 5.18. Curvas tensión-deformación ($S_{xx} - E_{xx}$) y ajuste del modelo para (a) las muestras 0004/12 y 0113/12 de tracción y (b) las muestras 0136/18R y 0182/18L de flexión.

Puede observarse en las gráficas que el modelo describe perfectamente el comportamiento de las curvas tensión-deformación, tanto de las muestras de tracción como de las muestras de flexión, independientemente de si las deformaciones o las tensiones son mayores o menores, así como del módulo elástico (inclinación del tramo inicial). Este modelo fue ajustado para todas las muestras de ambos tipos de ensayo y los parámetros promedio obtenidos se presentan en la Tabla 5.17. Dado que en los ensayos de tracción los parámetros κ_2 y ς_2 no han podido determinarse por separado, se ha proporcionado el valor de ρ_2 .

Véase que los parámetros $\alpha_1, \gamma_1, \beta, N$ y r obtenidos para los ensayos de tracción y flexión son de orden similar, habiéndose comprobado las diferencias no son estadística significativas.

Tabla 5.17. Parámetros promedio ajustados para los ensayos de tracción (T) y flexión (F) de costilla humana.

| | α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 |
|----------|-------------|------------------|--------------|------------------|
| T | 4428 ± 1333 | -271820 ± 154965 | -4616 ± 1363 | -137857 ± 140770 |
| F | 4168 ± 1204 | 62717 ± 122757 | -5891 ± 1704 | 11069 ± 796979 |

| | ν | β | κ_1 | ς_1 |
|----------|------------------|------------|-------------|---------------|
| T | -172842 ± 201758 | 2,01 ± 1,2 | 6652 ± 2401 | -5860 ± 2417 |
| F | 375559 ± 460020 | 1,57 ± 0,6 | 2732 ± 5277 | -2727 ± 5231 |

| | κ_2 | ς_2 | N | r |
|----------|-----------------|------------------|------------|------------|
| T | -25131 ± 28227 | | 3,08 ± 0,6 | 1,31 ± 0,2 |
| F | 260184 ± 299838 | -256622 ± 470912 | 3,01 ± 0,8 | 1,37 ± 0,4 |

En ambos tipos de ensayo, se ha obtenido valores de $\alpha_1 > 0$ y $\gamma_1 < 0$. Así mismo, si se consideran las desviaciones calculadas, κ_1 y ς_1 también presentan valores cercanos para ambas sollicitaciones. Mientras en los ensayos de tracción se cumple que $\kappa_1 > 0$ y $\varsigma_1 < 0$, en los ensayos de flexión estos signos no son siempre constantes, pero sí son opuestos en todas las muestras ajustadas. Esto sugiere que una comparación de los valores promedio calculados a partir del valor absoluto de los parámetros κ_1 y ς_1 pueda mostrar mayores similitudes en los resultados obtenidos en los ensayos de tracción y flexión. En la Figura 5.19 se representan los valores promedio y barras de error de los parámetros $\alpha_1, \gamma_1, \kappa_1$ y ς_1 para los ensayos de tracción (T) y flexión (F). Para facilitar la comparación de los valores, se ha utilizado el valor absoluto del promedio y la desviación de γ_1 y ς_1 .

De los gráficos de la figura se constata que los valores de $\alpha_1, \gamma_1, |\kappa_1|$ y $|\varsigma_1|$ para ambos ensayos son muy similares (en el caso de κ_1 y ς_1 cuando se comparan los promedios de los valores absolutos obtenidos). Además, para ambos gráficos se observa que los valores promedio de α_1 y γ_1 son parejos, así como los de κ_1 y ς_1 . De hecho, estos cuatro parámetros han mostrado ser importantes en la variabilidad del conjunto, tal y como se ha visto en los *Análisis de Componentes Principales* (ACP) de los parámetros.

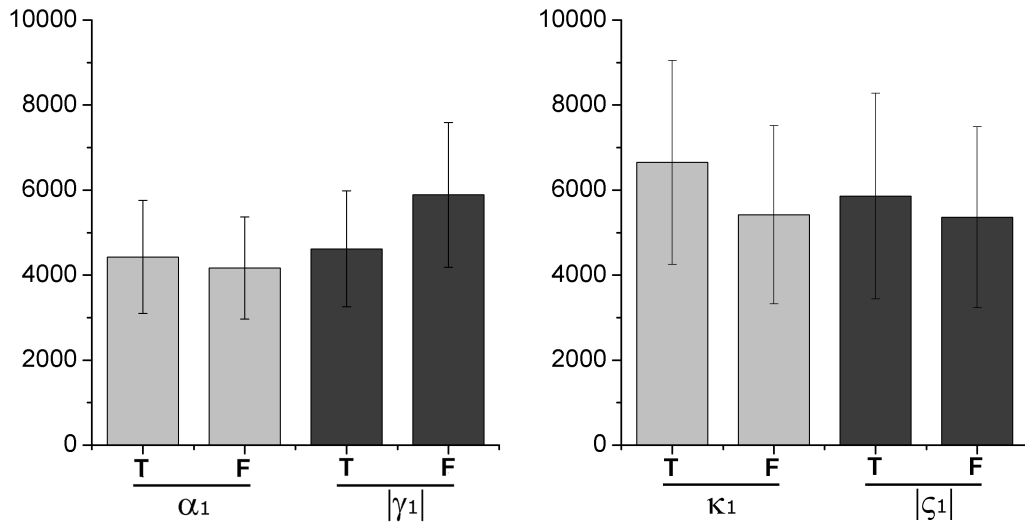


Figura 5.19. Valores promedio y barra de error para los parámetros $\alpha_1, |\gamma_1|$ y $|\kappa_1, |\zeta_1|$ obtenidos de los ensayos de tracción (T) y flexión (F), donde κ_1 y ζ_1 de los ensayos de flexión ha sido determinado a partir de los valores absolutos de los parámetros.

Del ACP realizado en ambos conjuntos de parámetros (tracción y flexión), se observa que únicamente los primeros cuatro Componentes Principales (CPs) describen más del 80 % de la variabilidad de la totalidad de parámetros (concretamente, el 80,5 % en tracción y el 87,6 % en flexión). Este análisis permite determinar qué parámetros son los que más participan en la descripción del conjunto de datos experimentales (tensiones y deformaciones) así como encontrar relaciones entre los propios parámetros. Posteriormente se ha utilizado el análisis de varianza ANOVA para mostrar las relaciones entre parámetros y estudiar la influencia de las variables relacionadas con las características antropométricas de los sujetos (edad y IMC). Además, en el caso de los ensayos de hueso cortical sometidos a tracción simple, también se ha podido indagar en la relación de los parámetros ajustados con variables de la composición (densidad, fracción mineral y fracción de agua) y la dimensión fractal.

En dos de los cuatro primeros componentes principales de ambas sollicitaciones se ha observado la contribución de α_1 y γ_1 y, por otro lado, de κ_1 y ζ_1 . La relación entre ambos pares de parámetros puede constatarse claramente en los gráficos de contribuciones de los respectivos ACPs de tracción (Figura 5.4) y flexión (Figura 5.13). En ambos gráficos queda patente que la pareja de parámetros formada por α_1 y γ_1 muestra contribuir de forma totalmente opuesta, de la misma forma que el par de parámetros κ_1 y ζ_1 .

De hecho, como se ha descrito anteriormente, siendo en todos los ensayos $\alpha_1 > 0$ y $\gamma_1 < 0$, los análisis de varianza han mostrado una estrecha relación entre ellos ($p < 0,0001$), tal que un aumento de α_1 supone un incremento en módulo de γ_1 (o equivalentemente, un decrecimiento de γ_1).

Por otro lado, la pareja formada por los parámetros κ_1 y ς_1 también directamente relacionados ($p < 0,0001$) muestran una tendencia similar, donde a medida que κ_1 crece, ς_1 también aumenta en signo opuesto. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, mientras que κ_1 ha mostrado ser positivo y ς_1 negativo en todos los ensayos de tracción, no ha sido así en los de flexión, donde en cierto número de costillas el signo de ambos parámetros ha sido intercambiado. A pesar de ello, la tendencia inversa entre ambos parámetros ha sido la misma. Nótese que, dada la forma en la que resulta el tensor de tensiones sin degradación $\bar{\mathbf{S}}$ tras la particularización de tracción y flexión, en ambos casos los parámetros $\alpha_1, \gamma_1, \kappa_1$ y ς_1 multiplican a términos lineales de la deformación (véanse las ecuaciones (4.51) y (4.85) y derivados para los casos de tracción y flexión respectivamente). Esto según la expresión de $\bar{\mathbf{S}}$ se cumpliría para cualquier sollicitación, lo cual significa que dadas las pequeñas deformaciones del hueso, los valores de estos parámetros son más significativos que el resto en el valor final de la tensión. Como se ha visto anteriormente, estos parámetros no solo están relacionados, sino que los valores de α_1 y κ_1 son próximos a γ_1 y ς_1 respectivamente.

Los parámetros κ_1 y ς_1 , además de parecer estar vinculados entre sí, a su vez han mostrado depender de ciertas variables relacionadas con la cantidad de mineral en la muestra. En concreto, de los estudios complementarios realizados con los *coupons* solicitados a tracción, se determinaron la densidad de cada espécimen (tanto la densidad original ρ como la densidad aparente o sin la fracción de agua ρ_s) y las fracciones presentes de mineral f_{min} , orgánica f_{org} y agua f_{agua} . Siendo la suma de las tres fracciones $f_{min} + f_{org} + f_{agua} = 1$, únicamente se ha analizado la influencia de la fracción mineral y la de agua.

Así, se ha observado que un aumento de la densidad del hueso cortical conlleva estadísticamente un incremento de κ_1 y ς_1 en módulo (es decir, respetando los signos anteriormente mencionados). Dado que la densidad mostró en dichos estudios complementarios influir en gran medida en la resistencia máxima y el módulo elástico del hueso, todo parece apuntar a que κ_1 y ς_1 aumentarían cuando las muestras exhiben mayores valores de ambas propiedades mecánicas. Estos dos parámetros también han mostrado una influencia de la fracción mineral f_{min} , lo cual parece indicar que, dado que esta fracción se ha relacionado con la densidad,

5.1. MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL

los parámetros ρ o f_{min} podrían explicar cierta variabilidad añadida que la otra variable no puede describir. Del mismo modo, se ha observado la influencia de la fracción de agua f_{agua} , aunque en menor medida.

A parte de las relaciones anteriores, hay otros parámetros que han mostrado estar correlacionados, como se expuso en las Tablas 5.6 y 5.14. No todas las relaciones encontradas han sido comunes en ambos ensayos; los parámetros correlacionados tanto en las sollicitaciones a tracción como a flexión se exponen en la Tabla 5.18, donde solo se han considerado aquellas correlaciones que han aparecido en ambos ensayos y siempre se ha mantenido el mayor p -valor (es decir, el menos significativo). En el caso de los parámetros κ_2 y ς_2 , los cuales se han determinado conjuntamente en los ensayos de tracción como $\rho_2 = \kappa_2 + \varsigma_2$, se han incluido únicamente las correlaciones que se observan en κ_2 o ς_2 y que también son significativas en ρ_2 .

Tabla 5.18. Matriz de p -valores de relaciones entre los parámetros de tracción y flexión.

| | α_1 | α_2 | γ_1 | γ_2 | ν | κ_1 | κ_2 | ς_1 | ς_2 | β | N | r |
|---------------|------------|------------|------------|------------|-------|------------|------------|---------------|---------------|---------|-----|-----|
| α_1 | × | | *** | | | | | | | | | * |
| α_2 | | × | | | *** | | * | | * | | | |
| γ_1 | *** | | × | | | | | | | | | * |
| γ_2 | | | | × | ** | | * | | * | | | |
| ν | | *** | | ** | × | | ** | | *** | | | |
| κ_1 | | | | | | × | | *** | | | | |
| κ_2 | | * | | * | ** | | × | | *** | | | |
| ς_1 | | | | | | *** | | × | | | | |
| ς_2 | | * | | * | *** | | *** | | × | | | |
| β | | | | | | | | | | × | | |
| N | | | | | | | | | | | × | |
| r | * | | * | | | | | | | | | × |

*** p -valor < 0,001 / **0,001 < p -valor < 0,01 / *0,01 < p -valor < 0,05

De la matriz de p -valores se constata que existen diferentes relaciones entre los parámetros $\boldsymbol{\vartheta} = (\alpha_i, \gamma_i, \nu, \kappa_i, \varsigma_i)$ presentes en la tensión sin degradación $\bar{\mathbf{S}}$, lo cual es un indicador de las simetrías dadas en las sollicitaciones aquí estudiadas. No obstante, los parámetros β, N, r introducidos en el modelo con degradación parecen ser principalmente independientes (a pesar de que alguno de ellos ha mostrado relaciones con otros parámetros en alguna de las dos sollicitaciones).

En lo que respecta a los parámetros de la tupla $\boldsymbol{\vartheta}$, se advierte que aparte de los parámetros $\alpha_1 \leftrightarrow \gamma_1$ y $\kappa_1 \leftrightarrow \varsigma_1$ también existe una relación entre $\kappa_2 \leftrightarrow \varsigma_2$ muy significativa ($p < 0,001$), además de que ν parece estar vinculado a $\alpha_2, \gamma_2, \kappa_2$ y ς_2 . Estas relaciones no han podido explicarse a partir de los resultados obtenidos, dado que cuanto menos en los ensayos de tracción, los parámetros κ_2 y ς_2 no han podido determinarse independientemente y se ha ajustado $\rho_2 = \kappa_2 + \varsigma_2$. A pesar de ello, α_2 sí ha mostrado tener relación con la dimensión fractal, un parámetro relacionado con la cantidad y distribución de zonas de densidad, que parece tener relación con las propiedades mecánicas y con la densidad del hueso cortical. No obstante, dado que la dimensión fractal únicamente fue obtenida para los *coupons* de tracción, la relación antes mencionada no ha podido corroborarse a partir de los ensayos de flexión.

Por otro lado, los parámetros β, N y r han mostrado resultados relevantes en esta investigación. Por un lado, β parece ser independiente del resto de parámetros,⁷ y en valor promedio ha resultado ser un parámetro semejante en los ensayos de tracción y flexión (Figura 5.20). Sin embargo, sí se ha observado un importante hallazgo, y es que β muestra una influencia estadísticamente significativa de la edad en ambos tipos de ensayo. De hecho, β es un parámetro introducido en el formalismo de la mecánica estadística y que interviene en la descripción del material, una vez excedido el régimen elástico del comportamiento. En el formalismo de la mecánica estadística, β describe como se distribuye la energía entre los diferentes microestados, por lo que en sistemas hidrostáticos β representa el papel de la temperatura absoluta y en ese tipo de sistemas $\beta = 1/\Theta$, siendo la temperatura absoluta Θ un importante factor iniciador de los procesos disipativos y relacionado con el desorden [entropía]. En este estudio, β no es la temperatura térmica, sino lo que en la literatura se denomina un parámetro de

⁷Aunque muestra cierta correlación con κ_1 y ς_1 en los ensayos a tracción, siendo parte de la contribución en el CP3, en los ensayos de flexión no ha mostrado relación alguna con el resto de parámetros, posiblemente debido al menor número de simetrías en una sollicitación a flexión.

“atemperación del desorden”, que también describe como se repartirá la energía entre los diferentes microestados y en este caso, está relacionado con el aumento de la entropía asociado a la acumulación de daño.¹³⁶ Así, la relación de β con la edad apunta a la conclusión de que los huesos de personas de más edad exhiben un mayor nivel de microfisuración inicial. Esta observación surge del hecho de que la edad asimismo ha mostrado ser un factor que reduce la resistencia máxima del hueso, así como su capacidad de deformación (esto se ha visto al inicio del presente apartado) y de esta forma, el parámetro β sería el que realmente describe la acumulación inicial de daño.

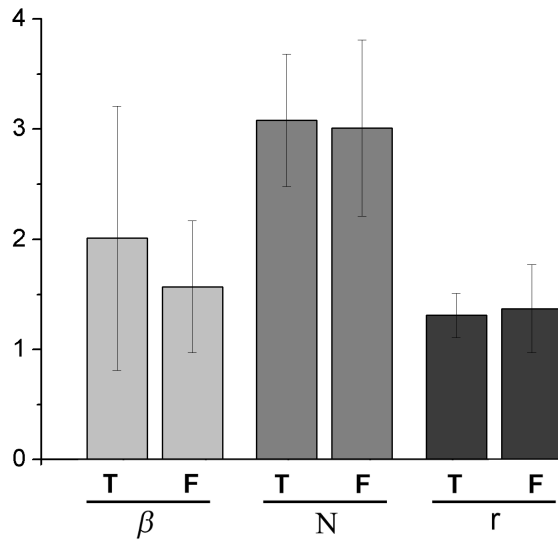


Figura 5.20. Valores promedio y barra de error para los parámetros β , N y r obtenidos de los ensayos de tracción (T) y flexión (F).

Así mismo, los parámetros N y r también han mostrado diferentes relaciones. Estos dos parámetros en conjunto constituyen la función $g_k = r^l$ con $k \leq N$ que define para cada longitud de fisura el número de sus posibles caminos. De un lado, N es el parámetro relacionado con las etapas de propagación que realiza la fisura en su avance, asociado a su vez con el tamaño de la red. En este estudio, la unidad básica es considerada la osteona y la red es un conjunto de osteonas, donde las microfisuras propagan principalmente por las interfases (hueso intersticial y líneas de cemento). Esto es consistente con lo observado en la literatura, donde se expone que la microfisuración se produce preferentemente entre osteonas, que actúan como barrera en la propagación, siendo la línea de cemento la interfase más débil que puede promover la separación de las osteonas del tejido intersticial.^{51,96,102,143}

Por otro lado, r es el parámetro que caracteriza el tipo de red, describiendo los posibles caminos que en cada nodo la fisura podría tomar. De esta forma, el número total de posibles caminos de la fisura depende, tanto de las direcciones posibles que puede seguir la fisura en cada etapa (r), como el posible número de etapas (limitado por N). El parámetro de red r ha sido calculado para tres redes ideales (ver sección 4.1.2), suponiendo que la fisura tiende a no retroceder en su camino; la ortogonal ($r = 2$), la triangular ($r = 3$) y la hexagonal ($r = \sqrt{2}$). De estos cálculos se dedujo que $\sqrt{2} \leq r \leq 3$. Dado que la microestructura del hueso es menos ideal que las tres redes regulares estudiadas, se ha supuesto que $1,15 \leq r \leq 3$, donde el valor mínimo elegido ha sido 1,15 para asegurar que, en cualquier caso, el número de caminos posibles de la fisura en su avance a medida que se incrementa. Así mismo, en lo que a N respecta se espera que su valor sea, como mucho, el número de osteonas máximo que tienen cabida en el espesor cortical. Siendo el diámetro promedio de una osteona de aproximadamente 0,19 mm,⁹¹ y el espesor cortical promedio de 0,7 – 0,9 mm,^{79,93} se espera que el valor máximo de N sea de $N \approx 7$, a pesar de que la fractura macroscópica debería producirse antes.

En los resultados obtenidos (Tabla 5.17) se observa que, en promedio, los parámetros r y N son $3,01 \leq N \leq 3,08$ y $1,31 \leq r \leq 1,37$ siendo los valores obtenidos para los ensayos de flexión y tracción muy similares (Figura 5.20). Ello de nuevo corrobora la estabilidad del modelo al ajustar diferentes sollicitaciones. Por un lado, N parece tomar mayoritariamente un valor cercano a 3, mientras que r está por debajo del valor del parámetro de red obtenido para la red ortogonal $r < \sqrt{2}$, tomando también valores promedio muy próximos para ambos tipos de sollicitación (Figura 5.20). Por ende, esto parece mostrar que la microestructura del hueso cortical es más aleatoria que la red ideal ortogonal, tal que el número de caminos posibles en cada etapa es menor.

Además, r parece estar relacionado con los parámetros α_1 y γ_1 . La relación entre α_1 y r es opuesta, tal que un incremento de r conlleva una disminución de α_1 . Nótese que los parámetros α_1 y γ_1 están relacionados con la densidad del tejido (es decir, con la relación entre la fracción mineral y el resto) y, a su vez, el parámetro r muestra una relación con la fracción mineral f_{min} ; dado que la densidad y la fracción mineral han mostrado estar relacionadas en estudios complementarios, esto explica que la aparente correlación entre estos tres parámetros podría estar vinculada a la mejora de las propiedades mecánicas dada por un aumento de la densidad (y por tanto, del contenido mineral).

La influencia de la fracción mineral en r también ha sido observada en N , produciéndose en este parámetro un aumento de su valor con el incremento de mineral en el hueso cortical. Ello puede interpretarse como que cuanto mayor es la densidad del tejido óseo y su fracción mineral, más etapas de propagación realizará la fisura en su avance antes de la fractura macroscópica. Reuniendo los resultados de estos dos parámetros, se deduce que cuanto más mineral está presente en la muestra (con respecto al resto de fracciones), mayor número de caminos posibles puede tomar la fisura desde su nucleación y propagación hasta la fractura catastrófica. Esto se ve reflejado en la función $g = r^N$, donde el aumento de r y/o N supone un incremento de g , que aumenta el factor degradante de la tensión.

Por todo lo expuesto, del ACP y de la ANOVA se deduce que los parámetros más relevantes son siete: $\alpha_1, \gamma_1, \kappa_1, \varsigma_1, \beta, N$ y r . Sin embargo, κ_1 y γ_1 han mostrado ser menos estables que el resto, dado que sus signos en los ensayos de flexión no son constantes.

Algo interesante que analizar en variables o parámetros que muestran un rango de valores en los resultados, es la distribución a la cual se ajustan. Un ajuste de distribución permite describir el comportamiento de la variable, en cuanto al rango de valores más frecuente y el valor central de la muestra. Los ajustes de distribución se hicieron para los cinco parámetros $\alpha_1, \gamma_1, \beta, N$ y r .

Tras realizar un test inicial para conocer a qué distribución se ajustan mejor los datos, se ha observado que los valores de estos parámetros, tanto obtenidos de los ensayos de tracción como de flexión, se ajustan a una distribución logística, a excepción de β que no presenta una distribución clara. Una distribución logística es biparamétrica y viene descrita por:

$$F(x; \mu, s) = \frac{1}{1 + e^{-(x-\mu)/s}} \quad (5.1)$$

donde μ es el parámetro de localización y s es el parámetro de forma. Así, los cuatro parámetros constitutivos parecen distribuirse según una distribución logística para los resultados de tracción, flexión y ambos en conjunto. Los ajustes de α_1 y γ_1 se presentan en la Figura 5.21 y los de N y r en la Figura 5.22. Los parámetros obtenidos de los ajustes se exponen en la Tabla 5.19.

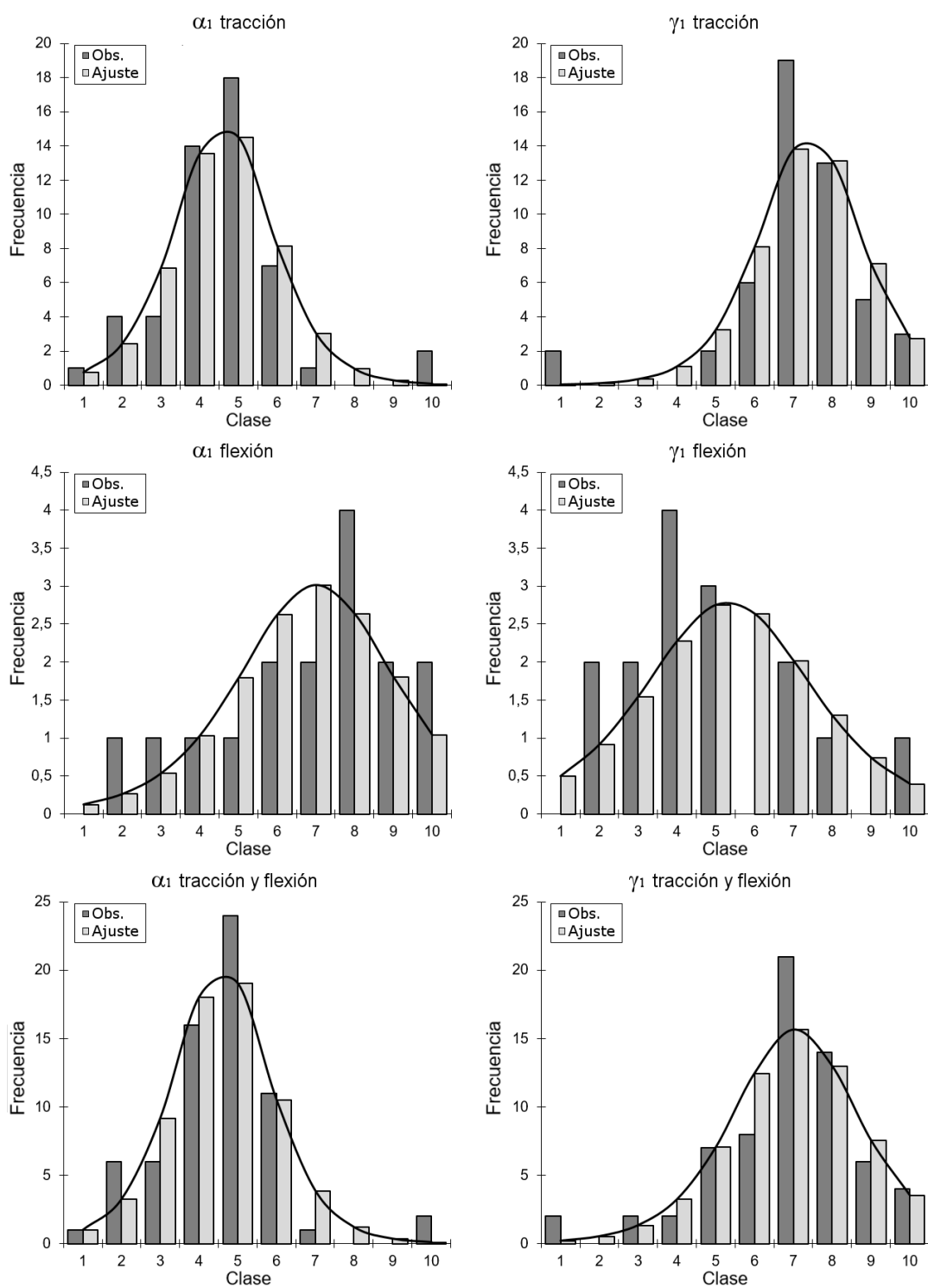


Figura 5.21. Distribución real de los parámetros α_1 y γ_1 (barras claras) y distribución logística ajustada (barra oscura y línea) obtenidos de los ensayos de tracción, flexión y ambos.

5.1. MODELO CONSTITUTIVO PARA HUESO CORTICAL

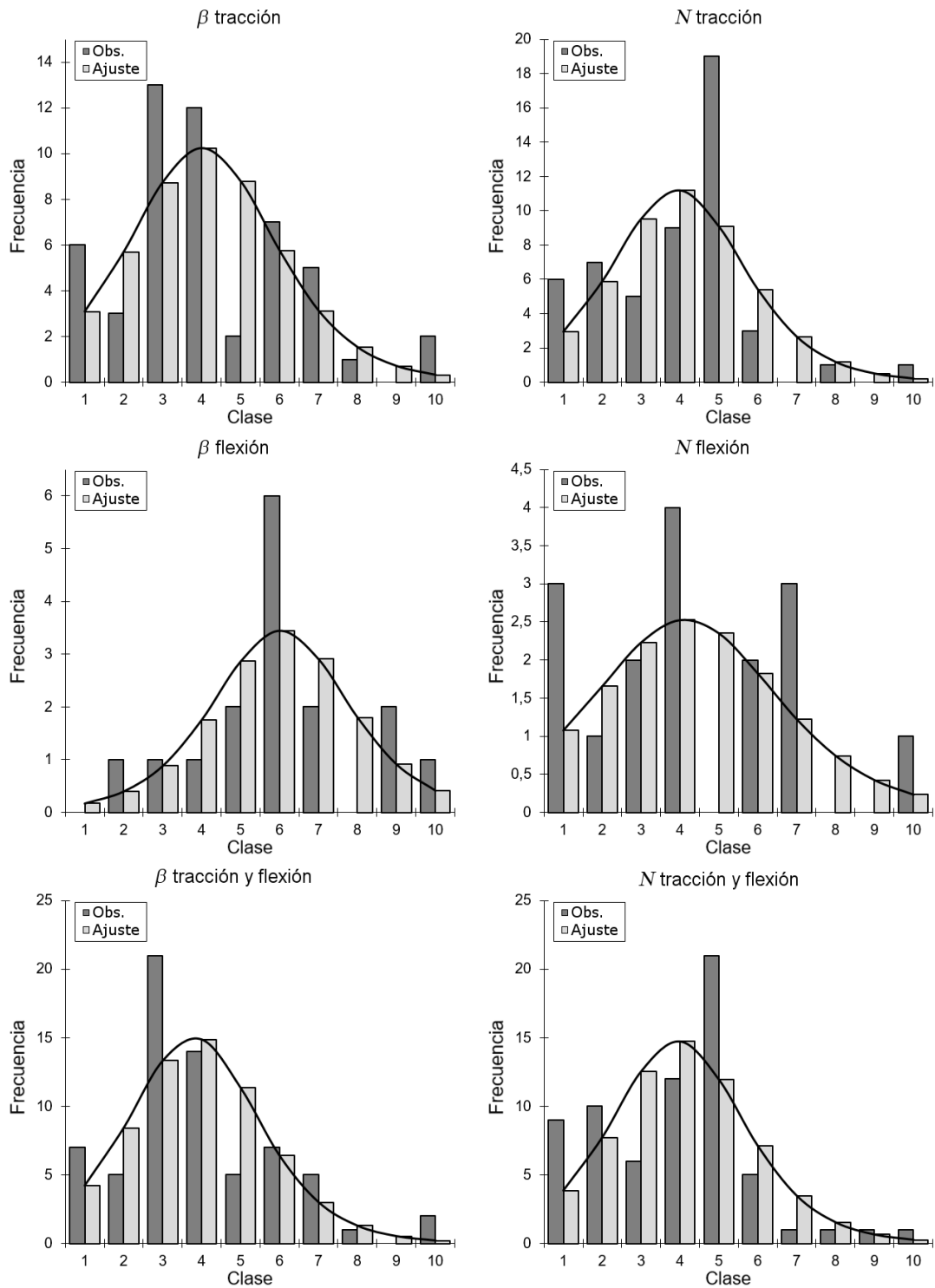


Figura 5.22. Distribución real de los parámetros β y N (barras claras) y distribución logística ajustada (barra oscura y línea) obtenidos de los ensayos de tracción, flexión y ambos.

Tabla 5.19. Propiedades mecánicas promedio obtenidas de los ensayos de tracción y flexión; tensión máxima (σ_{\max}), módulo elástico (E) y deformación axial máxima (e_{\max}).

| Parámetros | α_1 | | | γ_1 | | |
|------------|------------|---------|-------|------------|---------|-------|
| | Tracción | Flexión | Ambos | Tracción | Flexión | Ambos |
| μ | 4360 | 4188 | 4343 | -4534 | -5914 | -4827 |
| s | 659,4 | 643,0 | 656,5 | 671,7 | 909,1 | 830,5 |
| Parámetros | β | | | N | | |
| | Tracción | Flexión | Ambos | Tracción | Flexión | Ambos |
| μ | 1,92 | 1,53 | 1,80 | 3,08 | 3,03 | 3,08 |
| s | 0,674 | 0,316 | 0,601 | 0,352 | 0,446 | 0,352 |

De nuevo se observan semejanzas entre α_1 y γ_1 en los parámetros μ y s , tanto entre los ensayos de tracción y de flexión, como entre los propios parámetros. Esto indica, primero que no hay diferencia significativa entre los valores de α_1 y γ_1 obtenidos en los ensayos de tracción y flexión, manteniendo la misma distribución en ambos ensayos y observando que los parámetros obtenidos para el conjunto de ambas muestras se encuentran entre los de ambos ensayos; segundo, que los parámetros α_1 y γ_1 están realmente relacionados, dado que el parámetro μ muestra ser $\mu > 0$ para α_1 y $\mu < 0$ para γ_1 , ambos de módulos similares y siendo también s parecido. Igualmente β , N y r no difieren significativamente entre los ensayos de flexión y tracción⁸

5.1.4 Avance de la microsifuración y aumento de entropía

El inicio y propagación de la microfisuración en el hueso cortical está asociado con la pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación. La microfisuración, al fin y al cabo, es un proceso disipativo en el cual la energía introducida se invierte en producir cambios irreversibles en la microestructura del hueso. Como todo proceso irreversible, el inicio de la fisuración va necesariamente asociado a aumentos en la entropía, que deben estar reflejados en el modelo constitutivo propuesto. Así, un modelo constitutivo que trate de representar el comportamiento de un

⁸Los p -valores calculados para esos tres parámetros (0,178;0,682;0,430) son siempre bastante mayores a 0,05 por lo que no las pequeñas diferencias observadas no son significativas.

material debe ser consistente con las leyes termodinámicas, corroborando la irreversibilidad del modelo cuando se dan transiciones a nivel microestructural.

Para mostrar la consistencia termodinámica del modelo constitutivo propuesto, se ha calculado la variación de entropía por medio de las ecuaciones (4.27) y (4.28) para los *coupons* solicitados a tracción y las costillas completas ensayadas a flexión. En la Figura 5.23 se representa la tensión longitudinal S_{xx} predicha por el modelo y la variación de entropía ΔH definida a partir de los parámetros ajustados frente a la deformación longitudinal E_{xx} , para dos muestras de tracción y dos de flexión. Las cuatro muestras presentadas corresponden a las expuestas en los gráficos de la Figura 5.18 donde se ha representado el ajuste del modelo.

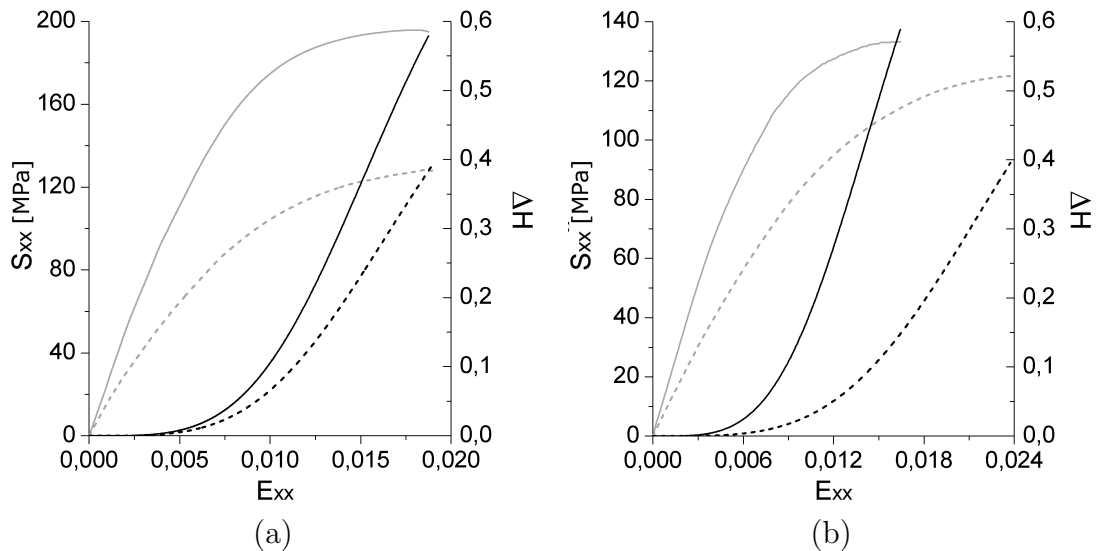


Figura 5.23. Tensión ajustada S_{xx} (línea gris) y variación de la entropía ΔH (línea negra) frente a la deformación E_{xx} para (a) los *coupons* 0004/12 (línea sólida) y 0113/12 (línea discontinua) solicitados a tracción y (b) las costillas 0182/18L (línea sólida) y 0136/18R (línea discontinua) ensayadas a tracción.

Como ya se introdujo en la sección 4.1.4, puede constatarse gráficamente que la mayor variación de entropía se da en el nivel de deformación en el cual la curva tensión-deformación pierde la linealidad. El cambio de pendiente de la curva se produce en el régimen no elástico en el que se desencadenan los procesos irreversibles, estos son, la propagación de las microfisuras en el material. De esta forma, queda patente que el modelo es capaz de representar adecuadamente el crecimiento exponencial de la variación de entropía con el incremento de deformación, una vez excedido el régimen elástico, tanto para los ensayos de tracción como los de flexión.

En el proceso de microfisuración, parte de la energía introducida en el material está dedicada a la propagación de las fisuras a través del material. La cantidad de energía invertida en estos procesos irreversibles puede determinarse por medio de la energía mecánica ΔW y la energía interna del sistema Δu donde, la primera puede obtenerse del área bajo la curva tensión-deformación y la segunda es la suma de la energía mecánica más la energía disipada $\Delta H/\beta$. De esta forma, el ratio r_e de energía invertida en los procesos reversibles con respecto a la energía total introducida en el sistema se calcula sencillamente como el cociente entre $\Delta H/\Delta u$ y, por tanto, el ratio de la energía dedicada a los procesos irreversibles respecto al total se define simplemente como $\bar{r}_e = 1 - r_e$, ver ecuaciones (4.32) y (4.33). La Figura 5.24 muestra la variación del ratio de energía invertida en los procesos reversibles r_e para las muestras de tracción y flexión.

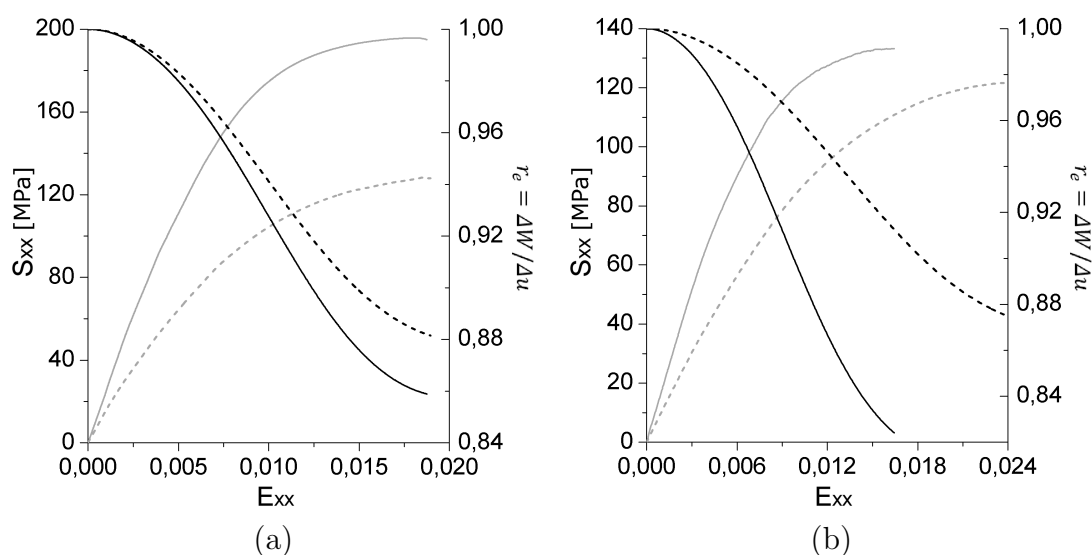


Figura 5.24. Tensión ajustada S_{xx} (línea gris) y variación del ratio de energía r_e dedicada a procesos reversibles (línea negra) frente a la deformación E_{xx} para (a) los *coupons* 0004/12 (línea sólida) y 0113/12 (línea discontinua) solicitados a tracción y (b) las costillas 0182/18L (línea sólida) y 0136/18R (línea discontinua) ensayadas a tracción.

Véase que inicialmente, en el tramo elástico la totalidad de la energía se dedica a la deformación elástica del material, es decir, no se producen aparentemente propagaciones de las fisuras del material. Sin embargo, una vez se excede el régimen elástico, el ratio de energía recuperable empieza a disminuir, presentando su caída más notable cuando la curva tensión-deformación pierde la linealidad. Una vez la tensión parece estabilizarse, la energía reversible varía en menor grado.

Por otro lado, en la Figura 5.24 se ha representado la variación de la energía dedicada a los procesos irreversibles para las muestras de tracción y flexión.

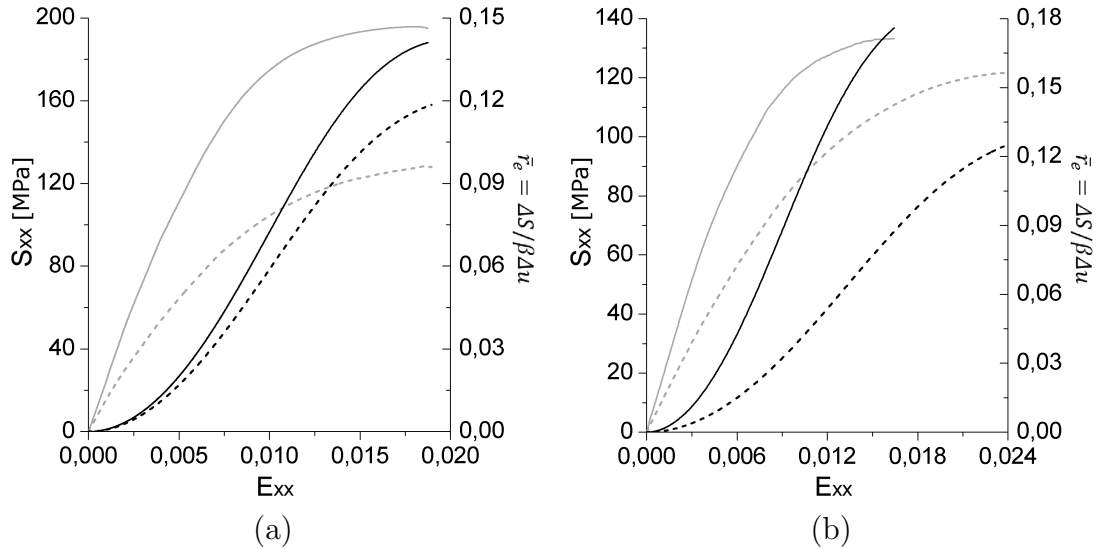


Figura 5.25. Tensión ajustada S_{xx} (línea gris) y variación del ratio de energía \bar{r}_e dedicada a procesos irreversibles (línea negra) frente a la deformación E_{xx} para (a) los *coupons* 0004/12 (línea sólida) y 0113/12 (línea discontinua) solicitados a tracción y (b) las costillas 0182/18L (línea sólida) y 0136/18R (línea discontinua) ensayadas a tracción.

Puede verse entonces que la mayoría de la energía invertida en los procesos irreversibles se da precisamente cuando la curva tensión-deformación pierde la linealidad, es decir, cuando se supera el rango elástico del comportamiento. Este punto es precisamente el inicio del incremento exponencial de la entropía, todo ello asociado a la propagación de las microfisuras en el material y por tanto, a la acumulación del daño en el hueso cortical. Así mismo, tanto en los ensayos de tracción como los de flexión se observa que cuanto mayor es la resistencia máxima de la muestra, más energía se invierte en los procesos disipativos de microfisuración.

Estos resultados corroboran la consistencia termodinámica del modelo constitutivo aquí propuesto, donde el inicio de la fisuración está directamente vinculado a un incremento exponencial de la entropía, así como un crecimiento notable de la energía invertida en los procesos irreversibles que, al fin y al cabo, son la propagación de las fisuras en el material.

5.2 Modelo estocástico de fractura mediante emisión acústica

En los ensayos de flexión de costilla completa se han instalado unos detectores de emisión acústica (EA), capaces de detectar la energía liberada en la costilla en forma de ondas elásticas, asociadas a la propagación de microfisuras que se produce a medida que se incrementa la sollicitación. Del mismo modo que se ha visto en la rotura de otros tejidos, se observan señales de EA esporádicas a medida que aumenta la fuerza aplicada y cuya frecuencia se va incrementando cerca de la rotura. En el punto de rotura se acumulan numerosas señales de EA y, cuando se grafica la tensión (o la deformación) de referencia frente al número de señales, se observa una asíntota vertical. Esta asíntota vertical es una especie de “efecto avalancha” en que muchos microdaños se encadenan unos a otros formando una fisura o rotura macroscópica.⁶³

A partir de estos datos, se ha propuesto un modelo matemático basado en la *teoría de la percolación* (ver sección 4.5), para predecir las señales detectadas de emisión acústica con el avance de las microfisuras en el material. Esta evolución microscópica del daño ha sido asociada al cambio de pendiente de la curva tensión-deformación una vez excedido el régimen elástico y a su vez, se ha mostrado que conlleva un incremento exponencial de la entropía del sistema. El modelo propuesto pretende entonces mostrar que, en el instante en que la entropía aumenta de forma más severa, es cuando deben producirse más emisiones acústicas, corroborando así que estas son consecuencia de la microfisuración. Los datos experimentales muestran el típico comportamiento de rotura acompañado de un crecimiento en forma de asíntota vertical para el número de señales de EA (*hits*). Existen varios modelos que pretenden predecir la existencia de una asíntota vertical y el incremento creciente del número de señales de EA. Uno de ellos es un modelo estocástico, inicialmente desarrollado para explicar la rotura macroscópica de tejido colaginoso, en concreto el esófago humano, en el estudio de Sanchez *et al.*¹²⁶ y fue posteriormente aplicado a vejiga porcina en García-Vilana *et al.*^{45,46} mostrando su aplicabilidad en tejidos blandos. En esta sección se modifica dicho modelo para adaptarlo a un tejido duro como es hueso y se examina que el resultado, donde se verá que el uso de ese tipo de modelos no parece adecuado para explicar la rotura macroscópica de tejido óseo, por lo que se constata la necesidad del desarrollo de un modelo específico para el hueso.

Por ello, el otro tipo de modelo que se usará finalmente en este estudio, consiste en recurrir a la teoría de la percolación, que predice que cerca de la rotura se produce una transición abrupta desde un tejido con integridad estructural a uno sin integridad estructural. Como la teoría de la percolación predice que esa transición obedece a una ley que presenta una asíntota vertical, asociada al número de señales de EA, la relación entre el comportamiento esperado y las predicciones teóricas son concordantes a priori. En las siguientes secciones se muestra que, además, las predicciones cuantitativas del modelo basado en la teoría de la percolación y los resultados experimentales encontrados, no solo concuerdan cualitativamente, sino que existe un buen acuerdo numérico entre teoría y resultados.

5.2.1 Estudios preliminares

Como se describió en el capítulo 2, en investigaciones previas ya se desarrolló un modelo matemático en esófago humano para relacionar las señales de emisión acústica asociadas a roturas de microfibras con la tensión asociada.¹²⁶ Dicho modelo, demostró ser aplicable a otro tipo de tejido colaginoso, la vejiga porcina, con rangos de deformación notoriamente mayores.^{45,46} El modelo desarrollado mostró representar adecuadamente la relación entre el número *hits* (señales de EA) y la tensión para ambos tejidos blandos.

Mientras que los tejidos blandos o colaginosos están constituidos por fibrillas de colágeno, la unidad básica de los tejidos duros [huesos] es la osteona. Cada fibrilla está constituida por moléculas de colágeno entrelazadas, mientras que cada osteona es básicamente una estructura principalmente mineral. Es de prever entonces que un modelo desarrollado en base al comportamiento observado de un tejido blando no sea aplicable a un tejido duro ya que, dadas las diferencias estructurales y de composición, se espera que las emisiones acústicas de fibras y osteonas exhiban un comportamiento diferente. Además, mientras el daño irreversible se produce en el colágeno por medio de la rotura de fibras, en el hueso se da por la nucleación y propagación de microfisuración.

Para comprobarlo, previamente al desarrollo del modelo aquí propuesto, se tomaron cuatro ensayos anteriores de hueso a flexión realizados con objeto de un estudio alternativo, cuyo objetivo era distinto al de esta investigación. Estos huesos fueron ensayados a flexión a tres puntos, sin ningún tipo de sujeción más que dos apoyos y con el uso de sensores de emisión acústica. Dos de los huesos cor-

responden a una tibia y un fémur de oveja (con 2 y 3 sensores respectivamente), y los otros dos huesos son una tibia y un fémur humanos (con 3 sensores cada uno). Los huesos humanos estuvieron almacenados en el IMLCFC largo tiempo en un entorno que simulaba el estado del esqueleto humano tras estar enterrado. Estos huesos se encontraban deshidratados tras el tratamiento, por lo que el comportamiento se esperaba que difiriera del que pueda tener un hueso fresco en las mismas condiciones de ensayo. Nótese que los cuatro huesos son planos y por ello la determinación de las deformaciones y tensiones es inmediata.

Para cada muestra se partía de los datos de fuerza y desplazamiento que, recurriendo a las dimensiones observadas en la literatura y al *motion tracking*, permitieron obtener las tensiones y deformaciones. Además, también se conocían el número de *hits* producido en cada segundo.

Los resultados gráficos de los ajustes del modelo colaginoso se exponen en las Figuras 5.26 y 5.27 para el fémur y tibia de oveja y las Figuras 5.28 y 5.29 para el fémur y tibia humanos secados. Puede observarse que, en tres de los cuatro huesos, la curva que describe el modelo de tejido colaginoso ajustado a los datos de *hits*-tensión no representa adecuadamente los *hits* experimentales obtenidos. De hecho, tanto la curva del modelo como los propios *hits* caen fuera del intervalo del 90 % de confianza del modelo. El único ajuste que se encuentra dentro del intervalo de confianza es el fémur de oveja; no obstante, nótese que la curva ajustada no representa adecuadamente el comportamiento de los *hits* y, además, el número de *hits* es muy bajo y prácticamente inexistente cuando se alcanza la tensión crítica donde suceden los procesos irreversibles.

Estos resultados muestran que los modelos estocásticos desarrollados para tejidos colaginosos no parecen explicar adecuadamente la rotura de los tejidos duros. Ese hecho justifica plenamente la necesidad de desarrollar un nuevo modelo alternativo explícitamente enfocado al tejido duro o hueso. Dado que el hueso cortical está formado por una red fija de osteonas los enlaces dentro de la cual pueden fracturarse según una determinada ley de probabilidad asociada a la tensión, parecía natural utilizar los resultados de la *teoría de la percolación* que parte de ese tipo de ideas. El modelo estocástico de fractura de hueso que se presenta aquí, basado en la percolación, relaciona la tensión de la muestra con el número de *hits* que en ella se producen en forma de emisión acústica, representando el proceso de microfisuración en el tejido duro. Como se verá, existe un buen acuerdo numérico entre la predicción y los resultados experimentales.

5.2. MODELO ESTOCÁSTICO DE FRACTURA MEDIANTE EMISIÓN ACÚSTICA

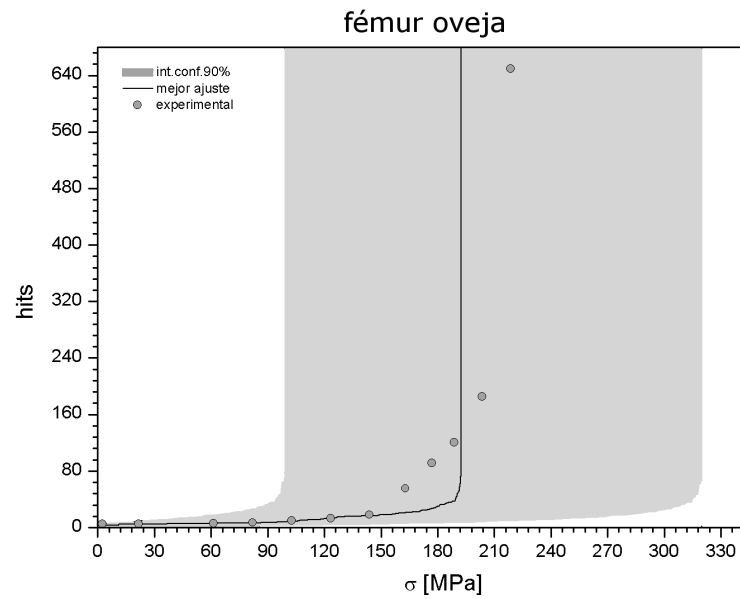


Figura 5.26. Tensión frente a número de *hits* experimentales (puntos) de fémur de oveja y modelo de tejido colaginoso ajustado (línea negra), con el intervalo de confianza del 90% (área sombreada).

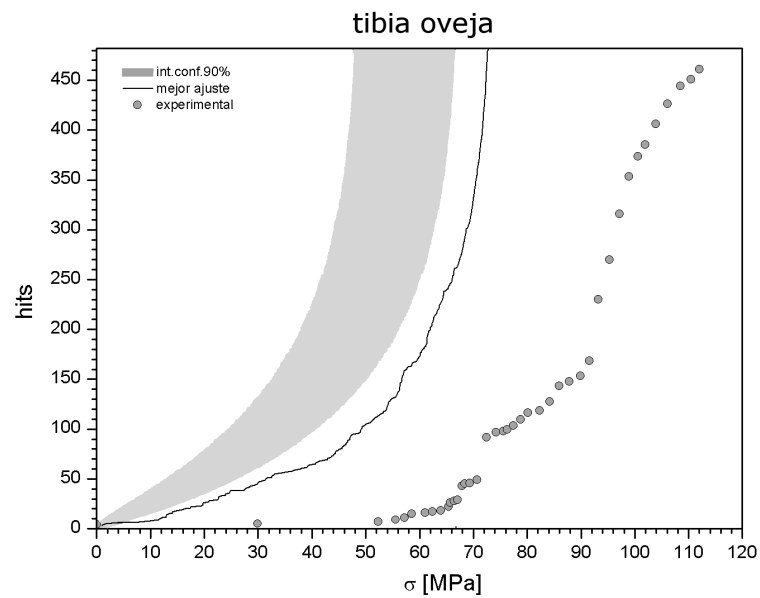


Figura 5.27. Tensión frente a número de *hits* detectados (puntos) de tibia de oveja y modelo de tejido colaginoso ajustado (línea negra), con el intervalo de confianza del 90% (área sombreada).

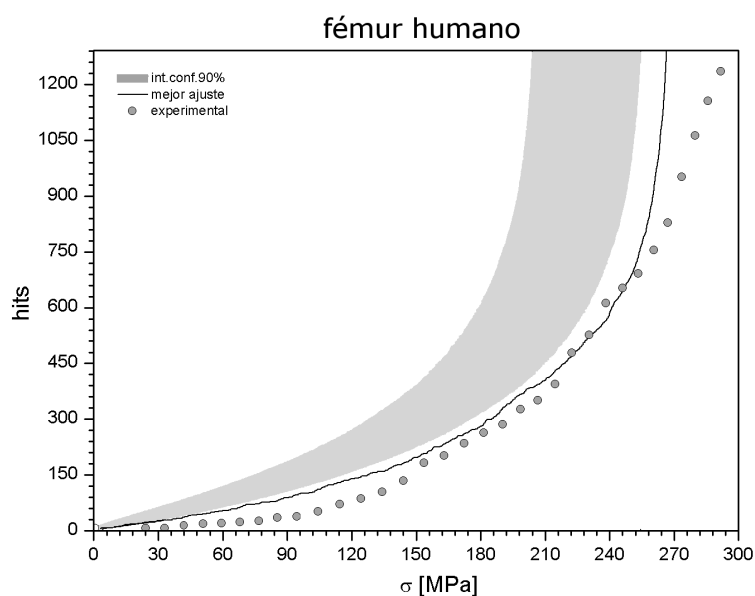


Figura 5.28. Tensión frente a número de *hits* detectados (puntos) de fémur humano seco y modelo de tejido colaginoso ajustado (línea negra), con el intervalo de confianza del 90% (área sombreada).

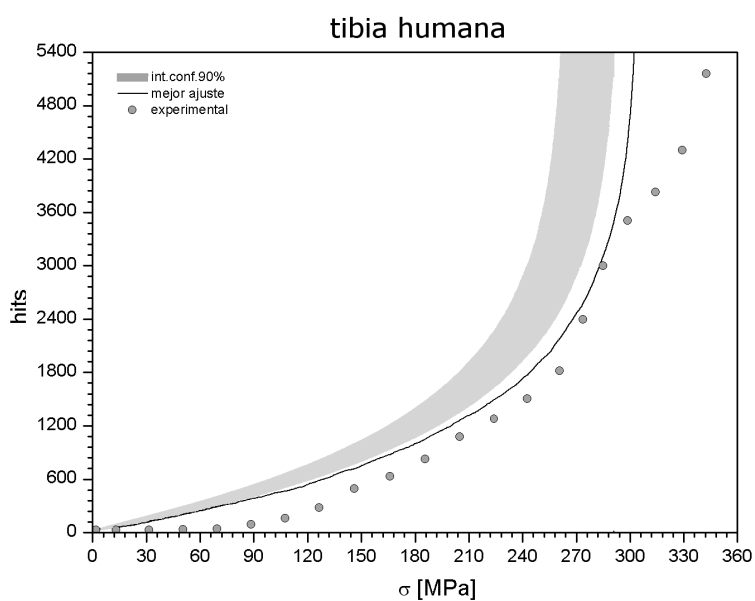


Figura 5.29. Tensión frente a número de *hits* detectados (puntos) de tibia humana seca y modelo de tejido colaginoso ajustado (línea negra), con el intervalo de confianza del 90% (área sombreada).

5.2.2 Curvas de hits frente a tensión corregida

El modelo propuesto de emisión acústica es un modelo basado en percolación dependiente, donde la probabilidad de rotura dentro de una línea de la retícula percolante viene dada por una distribución de Weibull (ver subsección 4.5.3). En esencia, la probabilidad $p(\sigma)$ de que una microfisura existente avance en una región de hueso donde la tensión principal es σ es creciente $dp/d\sigma > 0$. Es decir, cuanto mayor sea la tensión cerca de la microfisura más probable es que esta se alargue en la dirección de la tensión principal. Examinando las distribuciones de probabilidad para la resistencia final del tejido óseo se conjeturó que la distribución de Weibull podía representar adecuadamente la relación, es decir, que la relación:

$$p(\sigma; \sigma_0, \alpha) = 1 - e^{-(\sigma/\sigma_0)^\alpha} \quad (5.2)$$

sería cualitativamente adecuada. De estudios previos en la literatura,^{16,90,133} se verificó que la mayor parte de autores proporcionaban valores para el parámetro de forma $\alpha \approx 4$ por lo que en este estudio se tomó sencillamente $\alpha = 4$ para aproximar los datos, siendo este el valor límite entre los valores obtenidos para los materiales cerámicos y los biomateriales en la literatura. En cambio el parámetro de escala, σ_0 que se empleó es diferente para cada muestra y se calculó a partir de la asíntota vertical de cada costilla σ_∞ , usando la ecuación (4.97).

Usando los resultados de la sección 4.5.4 se llega a una expresión en la que el número de *hits* detectado a lo largo del ensayo crece con la tensión experimental corregida y, de acuerdo con los resultados de la teoría de la percolación, dicho crecimiento depende de tres parámetros: σ_∞, α y γ . El valor de σ_∞ se puede calcular observando el punto de rotura macroscópica para cada muestra, el valor de α se aproxima para todas las muestras por $\alpha = 4$ y el valor de γ se ajusta a partir de los datos experimentales por mínimos cuadrados.⁹

Más específicamente, la idea básica de la percolación es que el número de nodos de la red unidos por una fisura que forman parte de la fisura predominante (mayor componente conexo percolado) crece de manera proporcional a $|\tilde{p} - p_c|^{-\gamma}$, donde la probabilidad general de fisuración $\tilde{p} = p(\sigma; \sigma_0, \alpha) = \tilde{p}(\sigma; \sigma_\infty, \alpha)$ viene dada por la ecuación (5.2) que surge de suponer que una distribución de Weibull controla

⁹En un refinamiento más preciso podría considerarse una forma más exacta de calcular un valor de α para cada muestra, en lugar de usar un valor genérico; sin embargo, en una aproximación los resultados fueron adecuados con esa estimación uniforme para todas las muestras.

microscópicamente el proceso de fisuración, hecho que es acorde a la *teoría de materiales cerámicos*, mientras que p_c es el umbral crítico de percolación. La forma final de la expresión que se ajusta es:

$$N_{EA} = \frac{n_0}{|\tilde{p}(\sigma; \sigma_\infty, \alpha) - p_c|^\gamma} = \frac{n_0}{|(1 - p_c) - (1 - p_c)(\sigma/\sigma_\infty)^\alpha|^\gamma}$$

donde los parámetros ajustables son n_0 que es simplemente una constante de proporcionalidad, σ_∞ que es la extrapolación para al tensión de rotura y γ que es el más importante de todos. De acuerdo a la teoría de la percolación independiente, γ debería ser un parámetro constante que no dependiera del tipo de red para el caso de percolaciones ideales, siendo su valor cercano a $\gamma \approx 2,38$ para percolación bidimensional y $\gamma \approx 1,80$ para percolación tridimensional. En el caso presente tenemos una estructura tridimensional, pero tenemos percolación dependiente y aunque la tensión es plana, una vez empieza la fisuración se rompería la simetría del plano central. Por esas dos razones, en realidad, γ no va a ser constante, sino que se espera tenga cierta variación en el rango $1,80 \leq \gamma \leq 2,40$, como de hecho se acaba encontrando.

Los resultados experimentales de este *modelo estocástico basado en percolación* consisten en una muestra de $N_f = 15$ costillas completas ensayadas a flexión en las cuales se hicieron mediciones de emisión acústica, empleando tres sensores; uno central, cercano al punto de máxima tensión y dos salvaguardas en los extremos para poder descartar señales espurias o no correspondientes presuntamente a la microfisuración. Para cada una de las muestras se obtuvieron los parámetros σ_∞, α y γ . En la Figura 5.30 se exponen cuatro curvas representativas hits-tensión, mostrando el adecuado ajuste del modelo.

Véase en los gráficos que la mayor parte de *hits* se produce en valores de tensión elevados cerca de la rotura, apareciendo todos ellos, como mínimo a partir del 40-50 % de la tensión. Esto concuerda con los estudios de emisión acústica de la literatura en tejido óseo, en los que se ha observado que la mayor parte de las señales se concentra una vez excedido el régimen lineal y a niveles elevados de fuerza aplicada en tibias y fémures de canes y humanos.^{1,98} Los pocos *hits* que se presentan en el inicio de la curva se dan a incrementos de tensión notables, denotando un crecimiento paulatino del número de microfisuras que se producen en la muestra. Una vez alcanzado cierto nivel de tensión, se observa un aumento abrupto del *número de hits* detectados por los sensores de emisión acústica, indicando la gran acumulación de daño en la muestra, debida a los

5.2. MODELO ESTOCÁSTICO DE FRACTURA MEDIANTE EMISIÓN ACÚSTICA

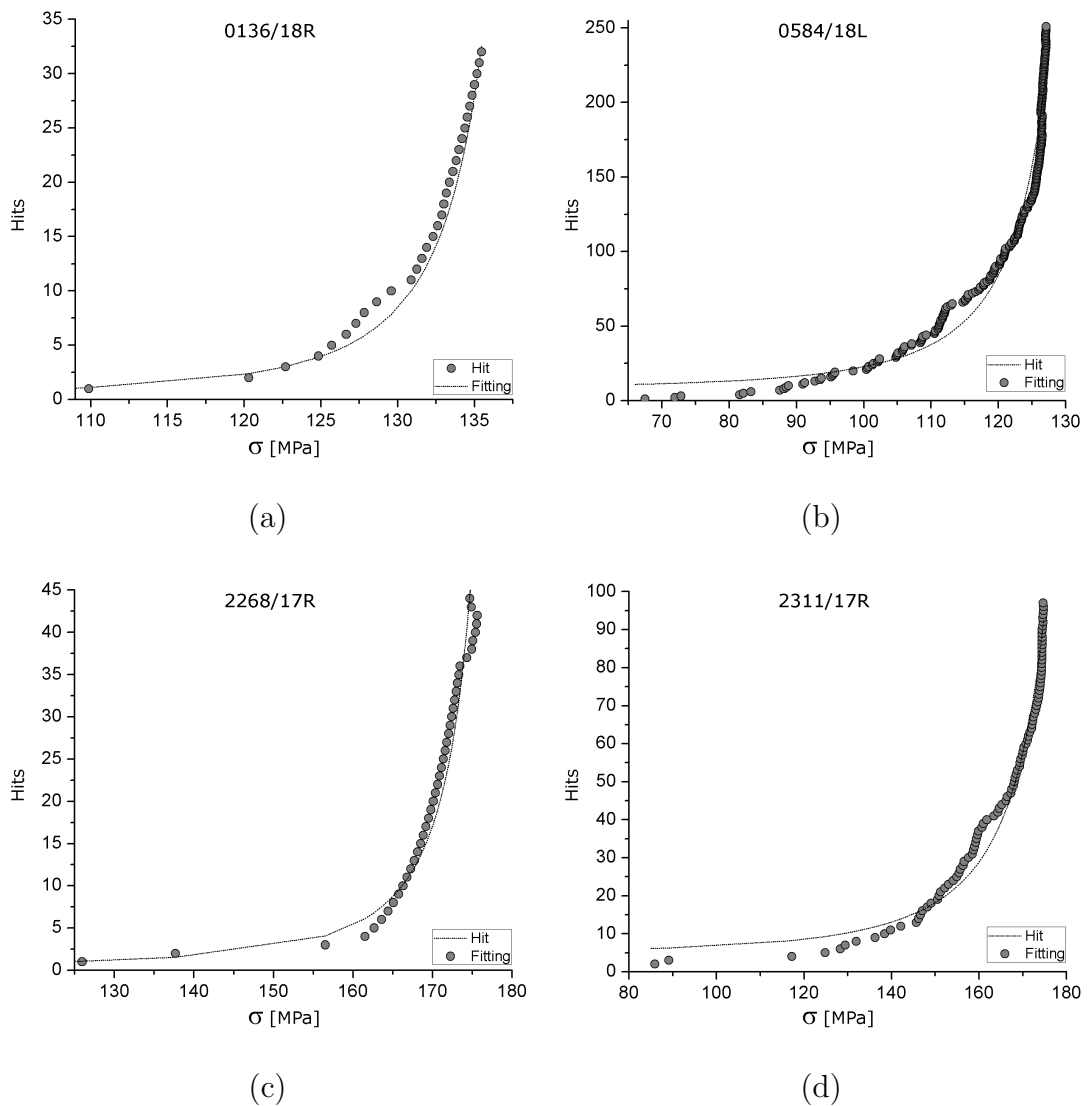


Figura 5.30. Curvas de número de *hits* frente a la tensión de cuatro muestras sometidas a flexión y ajuste del modelo propuesto.

múltiples microfallos que se producen en el material a altas tensiones. Así, puede verse que la mayoría de los *hits* se concentran en valores de tensión en los que se producen cambios irreversibles del material, justo cuando la curva tensión-deformación pierde la linealidad, lo cual ya se ha relacionado previamente con el aumento exponencial de la entropía. Esto permite relacionar los *hits* detectados en forma de ondas elásticas asociadas a la liberación de energía potencial elástica con la propagación de fisuras no perceptibles visualmente en el hueso cortical.

La evidencia mostrada en los gráficos, sugiere que el modelo estocástico representa cualitativamente bien el comportamiento asintótico observado en las curvas del número de *hits*, para distintos niveles de tensión. Por tanto, el modelo de *percolación dependiente de Weibull* presentado parece representar adecuadamente el comportamiento cerca de la fractura del tejido óseo cortical.

Además, el uso de distribuciones de Weibull está bien documentado para caracterizar las propiedades mecánicas de los materiales cerámicos en la literatura.¹⁶ De hecho, según nuestro modelo estocástico, la probabilidad de que un eslabón o enlace de la red esté fisurado puede estimarse recurriendo a una distribución de probabilidad de Weibull. Así, en el comportamiento cuasi-estático del tejido cortical hay muchas características que parecen indicar su relación con los materiales cerámicos. Esto es coherente, dado que las propiedades viscoelásticas del hueso cortical dadas por la fase colaginoso se manifiestan a elevadas velocidades de ensayo. El hecho de que un modelo tipo Weibull ajuste correctamente la curva de tensión frente a *hits* no hace más que verificar estas ideas previas.

Si bien algunos estudios han analizado la localización de los *hits* de emisión acústica con la carga aplicada en huesos planos como tibia o fémur, no se han establecido relaciones en la literatura por medio de modelos matemáticos que permitan predecir el número de eventos o emisiones en la muestra a partir del nivel de tensión. En este sentido, nótese que la carga o fuerza es una variable cuyo valor depende de la geometría, mientras que la tensión es una propiedad intrínseca del material.

El uso de un modelo matemático que relacione la tensión con las señales detectadas por la técnica de emisión acústica permite probar que, por un lado, las emisiones acústicas están relacionadas con el proceso de fisuración del hueso y por tanto, que la degradación del tejido cortical y la pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación viene dada precisamente por la propagación de fisuras en la microestructura; por otro lado, que el aumento exponencial de la entropía que refleja el modelo constitutivo, asociada a la fisuración, se corresponde con un incremento asintótico del número de *hits* detectados. De esta forma, puede corroborarse que la fisuración es la principal causante, cuanto menos a velocidades cuasi-estáticas, de la degradación y pérdida de integridad estructural del hueso cortical.

5.2.3 Estimación de los parámetros del modelo de percolación

En esta sección se presentan los valores numéricos de los parámetros del modelo estocástico de EA (Tabla 5.20). Como se dijo anteriormente para cada muestra se obtienen los valores de los parámetros: asíntota vertical de fallo (σ_∞), constante de proporcionalidad (n_0) y exponente crítico de percolación (γ), siendo el valor del parámetro de forma de la distribución de Weibull $\alpha = 4$ y el umbral de percolación $p_c = 1/2$ los valores fijados para este estudio.

Tabla 5.20. Parámetros obtenidos para los ajustes del modelo estocástico de emisión acústica basado en percolación de los ensayos a flexión.

| Muestra | σ_∞ | n_0 | γ | Muestra | σ_∞ | n_0 | γ |
|----------|-----------------|-------|----------|----------|-----------------|-------|----------|
| 0136/18L | 165 | 0,338 | 2,32 | 2268/17L | 185 | 0,712 | 1,89 |
| 0136/18R | 142 | 0,061 | 2,28 | 2268/17R | 183 | 0,128 | 2,07 |
| 0182/18L | 156 | 0,110 | 2,10 | 2273/17L | 168 | 1,045 | 1,95 |
| 0182/18R | 180 | 0,400 | 2,10 | 2273/17R | 180 | 0,600 | 1,89 |
| 0520/18L | 310 | 1,508 | 1,89 | 2275/17L | 189 | 0,530 | 1,80 |
| 0584/18L | 139 | 2,156 | 2,12 | 2311/17L | 191 | 1,472 | 1,91 |
| 2102/17L | 200 | 0,480 | 2,43 | 2311/17R | 198 | 2,400 | 1,80 |
| 2103/17L | 325 | 1,900 | 1,80 | | | | |

Por un lado, la asíntota vertical de fallo σ_∞ está relacionada con la tensión última para cada muestra, siendo su valor promedio $\sigma_\infty = 194 \pm 53$ MPa. Dado que el inicio de la microfisuración se produce a elevados niveles de tensión, se espera que el comienzo del comportamiento asintótico de la curva *hits*-tensión esté relacionado con la resistencia mecánica del hueso y muestre un comportamiento similar. Esto se ha verificado mediante un ANOVA con las variables antropométricas, donde se ha encontrado que σ_∞ tiene una estrecha relación con la edad ($p = 0,0002$), de la misma forma que la tensión máxima del hueso cortical. Así mismo, este parámetro ha mostrado tener relación con el *parámetro de atemperación del desorden* β ($p = 0,009$) del modelo constitutivo que, como se discutió en secciones previas, refleja la acumulación de daño de la muestra. El aumento del parámetro β también se vinculó al incremento de la edad, reflejando que los huesos de sujetos con mayor edad presentan mayor inicial, viéndose reducida su

resistencia máxima final del hueso. La influencia de la edad ha sido observada en otros estudios de emisión acústica, donde el número de señales parece incrementar con la edad.¹⁴⁴

Por otro lado, el parámetro n_0 ha sido definido como una constante de proporcionalidad que depende de la muestra en cuestión, cuyo valor promedio es $n_0 = 0,876 \pm 0,687$. Se constata así que este parámetro muestra tener una considerable variabilidad entre muestras, dado que la desviación es del orden del propio valor. Sin embargo, el ANOVA muestra que n_0 también disminuye significativamente con la edad ($p = 0,0160$). Cabe tener en cuenta que las costillas ensayadas a flexión rondan las edades de entre 26 y 62 años, donde solo cuatro de ellas están por debajo de los 45. Aun así, la influencia de la edad en los resultados es clara. Finalmente, el parámetro γ , también llamado *exponente crítico de percolación*, toma un valor promedio de $\gamma = 2,023 \pm 0,22$ manteniendo un valor muy constante entre las muestras y estando hacia la mitad del rango previsto $1,80 \leq \gamma \leq 2,40$. Esto a su vez corrobora la suposición inicial, en la que se advierte que γ es un parámetro independiente de la topología de la red.

Con todo lo descrito, el modelo matemático propuesto para la predicción de señales de emisión acústica con la tensión inducida en el hueso cortical, representa adecuadamente la aparición de eventos en el tejido óseo. El uso de distribuciones de Weibull para describir propiedades del hueso está bien documentado en la literatura,^{16,72,90,133} y ha mostrado ser adecuado para describir la probabilidad de fisuración en la red. El incremento de *hits* sucede de forma asintótica en niveles elevados de tensión, donde se producen los procesos irreversibles en la microestructura que incrementan exponencialmente la entropía. Algunos autores han estudiado la aparición de *hits* en el hueso cortical de tibias o fémures humanos, constatando la aparición de hits a valores de carga elevados.¹ No obstante, en dichas investigaciones no se establece una relación para predecir la aparición de dichos eventos acústicos con la tensión inducida en el material, que permitiría asociar la sucesión de señales con el daño acumulado en la muestra. Los resultados obtenidos en este estudio muestran que el aumento del desorden en el hueso cortical enunciado por el crecimiento de entropía, está directamente relacionado con la fisuración, detectada gracias a la técnica de emisión acústica. Así, el modelo estocástico propuesto es capaz de representar de forma apropiada la aleatoriedad de la fisuración del hueso cortical a medida que la tensión se incrementa. Este modelo podría ser aplicado a otros huesos distintos, mostrando su viabilidad para representar la fisuración del hueso cortical en otras geometrías óseas.

*What we know is a drop, what we
don't know is an ocean*

Isaac Newton (1643-1727)

6

Conclusiones

En esta memoria se ha presentado una propuesta de tesis doctoral cuyo objetivo principal es el desarrollo de un *modelo constitutivo no lineal con microfisuración e irreversibilidad*, ampliado con un *modelo estocástico de fractura* basado en emisión acústica. Ambos modelos teóricos constituyen modelos innovadores que amplían la clase de modelos y técnicas usadas de una forma esencialmente nueva. Además, el modelo ha podido ser verificado para explicar un amplio número de muestras de costilla humana bajo solicitaciones diferentes, mostrando que en todos los casos es capaz de representar las curvas tensión-deformación con una alta precisión.

El modelo constitutivo presentado, ha sido desarrollado en base a la mecánica estadística para tratar con la aleatoriedad de la fisuración de forma determinista, donde las configuraciones de la fisura en la microestructura del hueso cortical han sido definidas mediante una función desarrollada en base a la combinatoria, que considera la dificultad de propagación en la red de osteonas. Esta función a su vez, ha permitido deducir que la propagación de fisuras en el material es más compleja que la que se produce en redes ideales como la ortogonal, triangular o hexagonal, mostrando que hay caminos limitados y preferentes en la microestructura que una fisura puede tomar.

Además, la mecánica estadística ha manifestado ser una rama adecuada de la estadística para lidiar con procesos aleatorios de fisuración, donde el parámetro de atemperación del orden β ha definido precisamente la acumulación inicial de daño en el hueso cortical que, a su vez, ha mostrado ser dependiente de la edad de los sujetos. De esta forma, se ha observado que los huesos de personas con más edad, presentan un nivel mayor de defectos iniciales que aumentan la facilidad de propagación de las fisuras, reduciendo por tanto la resistencia del hueso cortical. Así mismo, algunos de los parámetros ajustados del modelo constitutivo a los ensayos de *coupons* de tracción han presentado una dependencia con factores relacionados con la microestructura. Entre estos resultados, los más relevantes muestran que la propagación de la fisuración a través del material parece ser más sencilla en huesos con un mayor contenido mineral y, por otro lado, dos de los parámetros más influyentes en la tensión obtenida por el modelo resultan depender de la densidad del hueso cortical. Estos resultados corroboran que la mineralización de la muestra es un factor importante en la propagación de microfisuras y, por tanto, en la resistencia del material. No solo eso, si no que la dimensión fractal, un parámetro que ha manifestado representar adecuadamente a la cantidad y distribución de zonas de baja densidad, parece también tener influencia en la tensión final por medio de uno de los parámetros introducidos en el modelo.

El modelo constitutivo propuesto ha mostrado ser consistente con las leyes termodinámicas, donde el incremento de la entropía se inicia principalmente en el instante en el que la curva tensión-deformación pierde la linealidad. Esto evidencia que el modelo es capaz de describir fielmente el aumento del desorden en la microestructura, dado por el inicio de procesos irreversibles directamente asociados a la microfisuración y, con ello, que el inicio del régimen no elástico del comportamiento del hueso viene principalmente marcado por la propagación de fisuras y acumulación de daño en el hueso cortical.

Por otro lado, el modelo estocástico de fractura basado en emisión acústica ha mostrado relacionar adecuadamente la tensión inducida en el hueso con la aparición de eventos en forma de ondas elásticas, vinculados a la liberación de energía en la propagación de las fisuras. Este modelo ha sido desarrollado mediante la teoría de percolación y recurriendo a distribuciones de Weibull para describir la probabilidad de fallos o fisuraciones en la red y representa cualitativamente bien el crecimiento de *hits* o señales acústicas a tensiones elevadas en la muestra, concentradas en una clara asíntota. El inicio de *hits* se produce en el

régimen no elástico de la curva tensión-deformación del hueso, en el momento en el que suceden los procesos irreversibles denotados por el incremento de entropía observada en el modelo constitutivo. No solo eso, si no que dos de los parámetros del modelo estocástico también están relacionados con la edad, de la misma forma que el parámetro de atemperación del desorden β del modelo constitutivo.

Además, tanto los ajustes del modelo constitutivo como los del modelo estocástico se han realizado en datos procedentes de ensayos de flexión, obtenidos de un innovador método propuesto en esta investigación. Este diseño experimental posibilita un movimiento libre de los extremos de la costilla, sin una fricción aparente. Así mismo, el procedimiento de cálculo posterior aquí planteado, basado en la Correlación Digital de Imágenes (DIC) y el uso de bases móviles y de expresiones de la rama de medios continuos, ha mostrado ser eficaz en la determinación de todas las deformaciones y tensiones a lo largo de la costilla, sin necesidad de averiguar previamente la zona de fractura. Este ensayo experimental, ha incorporado además los sensores para la detección de emisiones acústicas.

De esta forma, se concluye que ambos modelos propuestos en conjunto permiten describir el comportamiento mecánico del hueso cortical bajo cualquier tipo de sollicitación, incluyendo el régimen no elástico, que ha manifestado estar asociado a la fisuración del hueso, donde se inician los procesos irreversibles marcados por un claro incremento exponencial de la entropía y la liberación de energía elástica por parte del material, detectada por la emisión acústica. Estos modelos han mostrado representar adecuadamente tanto el comportamiento elástico del material como el inicio de la acumulación de daño y la aleatoriedad del proceso de fisuración hasta la fractura macroscópica de la costilla, así como relacionar la pérdida de linealidad de la curva tensión-deformación con la propagación de fisuras en el material, siendo este el mecanismo principal de daño en el hueso cortical.

6.1 Problemas planteados en el área de investigación

Los resultados de los estudios previos muestran el interés en conocer la influencia de las variables antropométricas en las características de la fractura y la geometría de la costilla humana, que afecta directamente en el fallo de la misma.^{7, 27, 67, 69, 129, 131} Además, existía una amplia variedad de modelos, pero solo algunos de ellos trataban en detalle tanto la consistencia termodinámica, como la generación de entropía y su relación con el avance de la microfisuración.^{97, 120} Así mismo, estos modelos usualmente no mostraron la eficiencia aplicada a datos experimentales y de distintas solicitaciones. Este es uno de los primeros estudios que analiza esas cuestiones empíricamente para una muestra de sujetos tan amplia. La amplitud de la muestra permitió encontrar que varios de los parámetros constitutivos del modelo tienen una relación significativa con la edad, el IMC o la microestructura del hueso cortical, descrita en este estudio por medio de la densidad y la fracción de mineral presente, así como la *Dimensión Fractal* (DF), calculable a partir de imágenes biomédicas.¹⁴²

Además, si bien la técnica de Emisión Acústica (EA) había sido probada en hueso en una pequeña parte de la bibliografía, estas investigaciones se han centrado en evaluar de forma cualitativa la relación de la captación de microfallos con la curva de fuerza-tiempo o de fatiga, o para realizar un seguimiento del fallo.^{3, 55, 130} Así, la mayor parte de ellos resultan eminentemente empíricos y no se habían enfocado en el desarrollo de un modelo teórico que permitiera explicar de alguna forma la respuesta mecánica observada y por otro lado, se habían basado en la fuerza resultante y no en magnitudes intrínsecas como la tensión o la deformación. Así, ningún estudio hasta la fecha ha desarrollado un modelo estocástico (no determinista) de fallo de la costilla humana completa aprovechando las cualidades de esta técnica. Ello justifica el objeto principal de esta tesis doctoral. Uno de los pocos modelos teóricos de fallo de tejidos biológicos que fue desarrollado previamente para tejidos colaginosos y en el que la autora de esta tesis había colaborado,^{45, 46, 115} era un modelo base que finalmente en este mismo estudio empírico expuso la necesidad de desarrollar un nuevo modelo para tejido duro que se adaptara y ajustara adecuadamente a los datos experimentales. Finalmente en esta tesis, usando un conjunto de ideas nuevas como es la teoría de la percolación, que solo había sido aplicada a hueso muy tangencialmente para estudiar otros aspectos, permitió desarrollar un modelo estocástico de fractura que encajara adecuadamente con los datos experimentales.

6.2 Contribuciones principales

En esta tesis doctoral se han alcanzado los siguientes objetivos originales que constituyen una novedad en el campo de estudio de esta área de conocimiento:

- **Metodología experimental.** Se ha desarrollado un tipo de ensayo a flexión compuesta, con una metodología totalmente nueva que permite ensayos de costillas completas. La técnica se basa en el rastreo del movimiento y la correlación digital de imágenes (CDI) que, como se ha visto, produce resultados precisos y comparables con los obtenidos de técnicas bien validadas como los ensayos de tracción simple con microprobetas de hueso cortical o *coupons*.
- **Obtención de propiedades mecánicas.** Se han obtenido las propiedades mecánicas de sujetos en ensayos de flexión con un procedimiento de cálculo posterior aplicado a los resultados de la correlación digital de imágenes que permite obtener las propiedades en cualquier punto sobre la costilla, sin necesidad de recurrir a ecuaciones de elasticidad lineal.
- **Influencia significativa de la antropometría en variables mecánicas.** Mediante un cuidadoso análisis estadístico que incluye el uso de ANOVA, ACP y análisis de regresión, se ha encontrado una clara influencia de la edad en la tensión máxima y deformación máxima de costillas sometidas a flexión, de la misma forma que otros estudios constataron para sollicitaciones de tracción de hueso cortical.
- **Influencia de la microestructura.** Se han obtenido parámetros referentes a la microestructura, tales como la densidad del hueso cortical y sus fracciones de mineral, agua y colágeno. La influencia de estos parámetros, junto con la dimensión fractal que describe la cantidad y distribución de zonas de baja densidad, ha mostrado ser influyente tanto en las propiedades mecánicas como en los parámetros del modelo. El estudio de la influencia de la dimensión fractal en las propiedades mecánicas ha dado lugar a la publicación de un artículo científico en el que la autora de esta tesis doctoral ha colaborado como segunda autora, citado en las publicaciones derivadas.

- **Modelo constitutivo no lineal propuesto.** Se ha desarrollado un modelo constitutivo no lineal con microfisuración e irreversibilidad, que ha mostrado representar el comportamiento mecánico del hueso cortical de costilla humana desde el inicio de sollicitación en el régimen lineal hasta la fractura macroscópica, incluyendo la propagación de fisuras en el rango no elástico. Este modelo ha sido creado en base a la mecánica de medios continuos, la mecánica estadística y la combinatoria y ha mostrado ser consistente termodinámicamente, exhibiendo el incremento de entropía en la aparición de los procesos irreversibles.
- **Modelo estocástico de fractura.** Se ha desarrollado un modelo estocástico de fractura basado en la emisión acústica, que ha descrito adecuadamente la liberación de energía elástica en forma de emisiones acústicas durante la fisuración, detectada por los sensores. Este innovador modelo, establece una relación entre la tensión de la muestra y la sucesión de emisiones acústicas, que han mostrado producirse principalmente en el instante de aumento de la entropía que ha sido previamente vinculado a la fisuración de la muestra.
- **Publicaciones derivadas.** En el transcurso de esta tesis doctoral, se han publicado tres artículos científicos;
 - (1) El primero de los artículos han surgido del estudio de modelos teóricos de fallo de tejidos colaginosos y ha sido publicado en dos partes:

[García Vilana, S., Martínez González, E., Sánchez Molina, D., Arregui Dalmases, C., Velázquez Ameijide, J., Llumà Fuentes, J., & Rebollo Soria, M. C. (2016). Aplicación de la emisión acústica como método para anticipar el fallo de tejidos colaginosos (1ª parte). *Revista de la Asociación Española de Ensayos No Destructivos*, (77), 28-34.]

[García Vilana, S., Martínez González, E., Sánchez Molina, D., Arregui Dalmases, C., Velázquez Ameijide, J., Llumà Fuentes, J., & Rebollo Soria, M. C. (2016). Aplicación de la emisión acústica como método para participar el fallo de tejidos colaginosos (2a parte). *Revista de la Asociación Española de Ensayos No Destructivos*, (77), 24-31.]
 - (2) El segundo artículo ha sido desarrollado en una investigación complementaria en la que se ha analizado la probabilidad de fractura de clavículas humanas bajo diferentes velocidades de sollicitación:

[Sánchez-Molina, D., García-Vilana, S., Velázquez-Ameijide, J., & Arregui-Dalmases, C. (2020). Probabilistic assessment for clavicle fracture under compression loading: rate-dependent behavior. *Biomedical Engineering: Applications, Basis and Communications*, 32(05), 2050040.]

(3) El tercer artículo ha estado vinculado a esta tesis doctoral, donde se ha analizado la influencia de la dimensión fractal en las propiedades mecánicas del hueso cortical:

[Velázquez-Ameijide, J., García-Vilana, S., Sánchez-Molina, D., Llumà, J., Martínez-González, E., Rebollo-Soria, M. C., & Arregui-Dalmases, C. (2020). Prediction of mechanical properties of human rib cortical bone using fractal dimension. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 1-11 (Q2)].

6.3 Limitaciones

- **Variabilidad en algunas propiedades.** Algunos de los parámetros del modelo constitutivo varían de manera un tanto azarosa y, aun los que son estables en signo, presentan cierta dispersión, por lo que muchas veces no pueden darse conclusiones generales. Sería necesario realizar un estudio más amplio o en distintas sollicitaciones.
- **Viscosidad y velocidad de los ensayos.** Debido a limitaciones con el equipo experimental no se conoce como varían las conclusiones bajo sollicitación dinámica y no se han examinado efectos viscoelásticos.
- **Nuevas sollicitaciones.** Debido a limitaciones con el equipo experimental no fue posible realizar ensayos de torsión o cizalladura, que podrían proporcionar más información sobre los parámetros del modelo.
- **Geometría de la costilla.** Debido a las limitaciones con el equipo experimental no fue posible realizar Tomografías Computarizadas de las costillas sometidas a ensayo, para conocer la geometría exacta de cada muestra.

6.4 Líneas futuras de trabajo

Entre las futuras líneas de trabajo, se propone:

- **Determinación de la geometría.** Un aspecto interesante sería la determinación exacta de la geometría de cada costilla sometida a flexión para recalcular las tensiones y deformaciones y analizar la influencia del uso de un CT genérico.
- **Nuevas solicitaciones.** Con el fin de definir de forma única cada uno de los parámetros, se plantea un futuro estudio de hueso cortical bajo distintas solicitaciones.
- **Estudios de emisión acústica.** Dado lo innovador del modelo estocástico de emisión acústica, hay distintos estudios que pueden hacerse, como el análisis de los tipos de señal y sus energías para estudiar su influencia con la estructura, o el ajuste del modelo a ensayos experimentales con otros tipos de hueso.
- **Análisis de la influencia de la localización y composición.** Otra propuesta de investigación futura es la determinación del contenido mineral a lo largo de la costilla y el cómputo de los parámetros en diferentes puntos para analizar la influencia de la región.

A

Anexo: Conceptos de mecánica de medios continuos

En este apéndice se presenta una extensión de conceptos relacionados con el álgebra tensorial y cálculos intermedios que se han utilizado en el desarrollo de la teoría de mecánica de medios continuos (A.1.1). Así mismo, se detalla paso a paso la obtención de los tensores de deformaciones y tensiones y las relaciones existentes entre ambos (A.2).

Seguidamente, se trata con los conceptos involucrados en el desarrollo de un modelo constitutivo, así como la relación entre teorías constitutivas y el desarrollo de las consideraciones termodinámicas generales, donde al final de las mismas se particularizan las leyes para el estudio aquí propuesto (A.3).

A.1 Tensores y mecánica de medios de continuos

En este apartado se exponen algunas de las propiedades básicas del álgebra tensorial utilizadas a lo largo de la teoría de la mecánica de medios continuos y el desarrollo de los cálculos que conciernen a esta investigación en la obtención de los tensores de tensión y deformación (A.1.1). Del mismo modo, se trata con el concepto de tensor métrico y su adaptación a coordenadas curvilíneas (A.1.2) y las definiciones de covariancia y contravariancia (A.1.3). En base a estos conceptos, finalmente se presenta el traspuesto métrico (A.1.4) y el cálculo diferencial con matrices donde se proporcionan algunos ejemplos de cálculo (A.1.5).

A.1.1 Álgebra tensorial

En esta sección se da un breve resumen al álgebra tensorial y la notación empleada en diversas fórmulas a largo de los capítulos expositivos. Como es conocido, el *principio de objetividad material* (o *principio de covariancia*) requiere que las expresiones que relacionan las magnitudes intrínsecas del material deformable vengán expresadas en términos de tensores y ecuaciones tensoriales, lo cual asegura que serán válidas para cualquier sistema de referencia.

Desde el punto de vista de la notación, los tensores de segundo orden o 2-tensores se denotarán por letras mayúsculas $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$, los vectores (1-tensores) se denotarán por letras minúsculas $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \dots$ y las constantes o escalares (0-tensores) como $\alpha, \beta, \gamma \dots$

► Producto ordinario:

Sea un tensor de segundo orden $\mathbf{A} = [A_b^a]_{b=1 \dots n}^{a=1 \dots n}$, que actúa como operador lineal sobre un vector $\mathbf{u} = (u^a)_{a=1 \dots n}$, se define la transformación lineal:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad v^a = \sum_{b=1}^n A_b^a u^b \quad (\text{A.1})$$

definiendo así una transformación lineal que asigna a cada vector \mathbf{u} un vector \mathbf{v} . Por otro lado, el producto entre dos tensores puede escribirse en notación indicial, de la forma:

$$(\mathbf{AB})_b^a = \sum_{c=1}^n A_c^a B_b^c \quad (\text{A.2})$$

Los productos directos entre tensores, vectores y constantes tienen, además, las siguientes propiedades:

- $\mathbf{A}(\alpha \mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v}$
- $(\alpha \mathbf{A})\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{u})$
- $(\mathbf{AB})\mathbf{u} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{u})$
- $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- $\mathbf{AA} = \mathbf{A}^2$

► **Producto tensorial:**

El producto tensorial, también conocido como díada $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, es no conmutativo y en componentes se escribe:

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{ab} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{e}^a, \mathbf{e}^b) = (\mathbf{u}(\mathbf{e}^a))(\mathbf{v}(\mathbf{e}^b)) = u^a v^b \quad (\text{A.3})$$

siendo $\{\mathbf{e}_i\}$ una base vectorial y $\{\mathbf{e}_*^i\}$ la base dual. Un tensor mixto de segundo orden se define:

$$\mathbf{A} = A_b^a \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_*^b \quad (\text{A.4})$$

Igualmente, pueden definirse tensores de segundo orden covariantes ($\mathbf{A}^b = A_{ab} \mathbf{e}_*^a \otimes \mathbf{e}_*^b$) o contravariantes ($\mathbf{A}^\dagger = A^{ab} \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b$), ver sección A.1.3 para una definición de covariancia y contravariancia.

En el caso de la matriz identidad, esta se escribe como:

$$\mathbf{I} = \delta_b^a \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_*^b = \mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_*^a \quad (\text{A.5})$$

Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{R}^n)^*$,¹

Las propiedades más relevantes del producto tensorial son:

¹Aquí $(\mathbb{R}^n)^*$ denota al espacio vectorial dual de \mathbb{R}^n , ver sección A.1.3.

- $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$
- $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u}(\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha})) = (\mathbf{v}(\boldsymbol{\alpha}))\mathbf{u}$
- $\mathbf{A}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v}$

► Traspuesto de un tensor de segundo orden:

La traspuesta $\mathbf{A}^T = [A_a^b]$ de un tensor $[\mathbf{A}] = A_b^a$ es un operador que intercambia las filas de dicha matriz por sus columnas. Las propiedades de las operaciones con tensores traspuestos son las siguientes:

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $(\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B})^T = \alpha\mathbf{A}^T + \beta\mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^T = \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}$

En la sección A.1.4 definiremos un concepto un poco más general llamado *traspuesto métrico* o simplemente *adjunto* que generaliza el concepto de traspuesto a sistemas de coordenadas curvilíneas (y espacios no euclídeos).

► Traza de un tensor [de segundo orden]:

La traza $\text{tr}\mathbf{A}$ de un tensor \mathbf{A} es un escalar obtenido de la suma de las componentes de su diagonal. La traza del tensor dado por el producto diádico de dos vectores y para un tensor \mathbf{A} se define:

$$\text{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_a v_b \quad (\text{A.6})$$

$$\text{tr}\mathbf{A} = \text{tr}(A_{ab}\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b) = A_{ab}\text{tr}(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b) = A_{ab}(\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b) = A_{ab}\delta_{ba} = A_{aa} \quad (\text{A.7})$$

Las propiedades de operaciones con la traza del tensor son:

- $\text{tr}\mathbf{A}^T = \text{tr}\mathbf{A}$
- $\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A})$
- $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}\mathbf{A} + \text{tr}\mathbf{B}$
- $\text{tr}(\alpha\mathbf{A}) = \alpha\text{tr}\mathbf{A}$

► **Contracción:**

La contracción [doble] (también conocida como doble producto punto) opera sumando, según la convención de Einstein, los índices iguales de dos tensores, proporcionando un escalar, tal que:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}^T) = \mathbf{B} : \mathbf{A} \quad (\text{A.8})$$

que en componentes se escribe $[\mathbf{A} : \mathbf{B}]_{ab} = A_{ab} B_{ab} = B_{ab} A_{ab}$.

Sus propiedades son:

- $\mathbf{I} : \mathbf{A} = \text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$
- $\mathbf{A} : (\mathbf{B} \mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{A} \mathbf{C}^T) : \mathbf{B}$
- $\mathbf{A} : (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) : \mathbf{A}$
- $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) : (\mathbf{w} \otimes \mathbf{x}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})$
- $(\mathbf{e}_a \otimes \mathbf{e}_b) : (\mathbf{e}_c \otimes \mathbf{e}_d) = (\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_c)(\mathbf{e}_b \cdot \mathbf{e}_d) = \delta_{ac} \delta_{bd}$

► **Determinante:**

El determinante $\det \mathbf{A}$ de un tensor de segundo orden \mathbf{A} proporciona un escalar como resultado. Las propiedades básicas del determinante son:

- $\det(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$
- $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$

► **Inversa de un tensor de segundo orden:**

La inversa \mathbf{A}^{-1} de un tensor \mathbf{A} existe, siempre y cuando el tensor es *no singular*, es decir, $\det \mathbf{A} \neq 0$, entonces:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{A})^{-1}}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{A.9})$$

donde $\text{adj}(\mathbf{A})$ es la adjunta del tensor \mathbf{A} .

La matriz inversa es una operación importante que cumple las siguientes propiedades:

- $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$
- $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = 1/\alpha\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-T}$
- $\mathbf{A}^{-2} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det\mathbf{A})^{-1}$

A.1.2 Tensor métrico y coordenadas curvilíneas

En el espacio euclídeo \mathbb{E}^3 , dada una curva $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ la distancia a lo largo de la misma se calcula a partir del teorema de Pitágoras:

$$\Delta\ell^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Si se dividen los dos miembros de la ecuación anterior por el incremento del parámetro Δt y se realiza el paso al límite para incrementos pequeños del parámetro t , el cociente de incrementos tiende a las derivadas respecto al parámetro:

$$\frac{d\ell}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Entonces, la longitud a lo largo de una curva puede expresarse en coordenadas cartesianas como:

$$\ell_t = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{A.10})$$

El cálculo anterior es más complejo si se utilizan coordenadas curvilíneas (y no cartesianas), ya que en ellas la expresión de las distancias es más complicada.

Si se considera entonces un sistema de coordenadas curvilíneas (u^1, u^2, u^3) se tiene:

$$\frac{du^i}{dt} = \frac{\partial u^i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u^i}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u^i}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Llamando ahora $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ a las coordenadas cartesianas, lo anterior se escribe de manera más compacta como:

$$\frac{du^i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} \rightarrow \dot{u}^i = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \dot{x}^j \quad (\text{A.11})$$

Así mismo, pueden encontrarse las ecuaciones inversas que dan $(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3)$, a partir de $(\dot{u}^1, \dot{u}^2, \dot{u}^3)$:

$$\frac{dx^j}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u^i} \frac{du^i}{dt} \rightarrow \dot{x}^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial u^i} \dot{u}^i \quad (\text{A.12})$$

Nótese que las ecuaciones (A.11) y (A.12) en realidad están definiendo cambios de coordenadas cuyas matrices jacobianas son inversas la una de la otra:

$$A_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^i}, \quad \bar{A}_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}, \quad \bar{\mathbf{A}} = (\bar{A}_j^i) = \mathbf{A}^{-1} = (A_i^j)^{-1} \quad (\text{A.13})$$

Volviendo entonces al caso del cálculo de distancias en coordenadas, usando el convenio de la suma de Einstein sobre índices repetidos (ver sección 2.2.1) y usando la ecuación (A.12), se obtiene:

$$\frac{d\ell}{dt} = \sqrt{\delta_{ab} \frac{dx^a}{dt} \frac{dx^b}{dt}} dt = \sqrt{\left(\delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^c} \frac{\partial x^b}{\partial u^d} \right) \frac{du^c}{dt} \frac{du^d}{dt}} dt \quad (\text{A.14})$$

Nótese que la expresión dentro del paréntesis:

$$g_{cd} = \delta_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial u^c} \frac{\partial x^b}{\partial u^d} \quad (\text{A.15})$$

desempeña un papel análogo a δ_{ab} cuando se utilizan coordenadas cartesianas. De hecho, g_{cd} es la expresión del *tensor métrico* en las coordenadas curvilíneas (u^1, u^2, u^3) . Obviamente, el mismo tensor métrico expresado en coordenadas cartesianas se reduce a δ_{ab} . Las coordenadas cartesianas son las únicas que se caracterizan por tener un tensor métrico constante en todo el espacio con componentes numéricamente idénticas a la identidad y esa característica es la que hace especial a las coordenadas cartesianas en el espacio euclídeo. Sobre superfi-

cias curvas o espacios métricos no euclídeos también es posible definir un tensor métrico, pero en esos espacios en general no será posible encontrar un conjunto de coordenadas cartesianas de tal manera que se tenga $g_{cd} = \delta_{cd}$ en todo el espacio.

A modo de ejemplo, calculemos el tensor métrico de un espacio euclídeo en coordenadas esféricas. Para ello consideramos las ecuaciones del cambio:

$$\begin{cases} x^1 = x = r \sin \theta \cos \phi \\ x^2 = y = r \sin \theta \sin \phi \\ x^3 = z = r \cos \theta \end{cases}$$

A partir de la cual podemos computar la matriz jacobiana:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Las componentes del tensor métrico en coordenadas esféricas son:

$$\begin{aligned} g_{rr} &= \delta_{11} \frac{\partial x^1}{\partial r} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \delta_{22} \frac{\partial x^2}{\partial r} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \delta_{33} \frac{\partial x^3}{\partial r} \frac{\partial x^3}{\partial r} = 1 \\ g_{\theta\theta} &= \delta_{11} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} + \delta_{22} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} + \delta_{33} \frac{\partial x^3}{\partial \theta} \frac{\partial x^3}{\partial \theta} = r^2 \\ g_{\phi\phi} &= \delta_{11} \frac{\partial x^1}{\partial \phi} \frac{\partial x^1}{\partial \phi} + \delta_{22} \frac{\partial x^2}{\partial \phi} \frac{\partial x^2}{\partial \phi} + \delta_{33} \frac{\partial x^3}{\partial \phi} \frac{\partial x^3}{\partial \phi} = r^2 \sin^2 \theta \\ g_{r\theta} = g_{\theta r} &= \delta_{11} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \delta_{22} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \delta_{33} \frac{\partial x^3}{\partial \theta} \frac{\partial x^3}{\partial r} = 0 \\ g_{r\phi} = g_{\phi r} &= \delta_{11} \frac{\partial x^1}{\partial \phi} \frac{\partial x^1}{\partial r} + \delta_{22} \frac{\partial x^2}{\partial \phi} \frac{\partial x^2}{\partial r} + \delta_{33} \frac{\partial x^3}{\partial \phi} \frac{\partial x^3}{\partial r} = 0 \\ g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} &= \delta_{11} \frac{\partial x^1}{\partial \theta} \frac{\partial x^1}{\partial \phi} + \delta_{22} \frac{\partial x^2}{\partial \theta} \frac{\partial x^2}{\partial \phi} + \delta_{33} \frac{\partial x^3}{\partial \theta} \frac{\partial x^3}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, cuando se calculan las longitudes de curvas en coordenadas esféricas, se usará la fórmula:

$$\ell_t = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{A.16})$$

El tensor métrico permite expresar tensores covariantes en términos de tensores contravariantes y viceversa (ver sección A.1.3), ya que el tensor se puede usar para definir un isomorfismo² de espacios vectoriales de tensores. De hecho, el tensor métrico es un tensor 2-covariante, por eso se colocan los dos índices que lo definen en la parte inferior, dadas sus leyes de transformación entre diferentes sistemas de coordenadas (la posición de los índices y la conveniencia de distinguir entre índices covariantes y contravariantes se discute en la sección siguiente).

A.1.3 Covariancia y Contravariancia

La covariancia y contravariancia son nociones muy utilizadas en los conocimientos matemáticos y de física teórica y, en términos generales, describen la forma en la que la descripción cuantitativa de una entidad cambia cuando se realiza un cambio de base.

Para ver la diferencia entre covariancia y contravariancia, definamos dos bases vectoriales en el espacio $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ y $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, puede expresarse un cambio de base de \mathbf{e} a $\bar{\mathbf{e}}$, como:

$$\mathbf{e}_i \mapsto \bar{\mathbf{e}}_i = \sum_{j=1}^n A_i^j \mathbf{e}_j \quad (\text{A.17})$$

siendo $\mathbf{A} = (A_j^i)$ un tensor de dimensiones $n \times n$ que transforma la base \mathbf{e} a $\bar{\mathbf{e}}$. Entonces, si consideramos un vector \mathbf{v} , dicho vector podrá expresarse en ambas bases, es decir:

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + \dots + v^n \mathbf{e}_n = \bar{v}^1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dots + \bar{v}^n \bar{\mathbf{e}}_n$$

²Dos espacios vectoriales se dice que son isomorfos cuando entre ellos hay definida una aplicación lineal biyectiva (inyectiva y sobreyectiva) es decir, que todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen particular distinta entre ellos en el conjunto de llegada, y que a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.

donde (v^1, \dots, v^n) y $(\bar{v}^1, \dots, \bar{v}^n)$ son las componentes del vector respecto a las dos bases. Por convención, las componentes de un vector ordinario se escriben como superíndice, mientras que la base se numera con subíndices, siendo así más sencillo reconocer el criterio de la suma sobre índices repetidos (cada índice sobre el que se suma tiene que aparecer arriba y abajo al mismo tiempo).

El problema que se plantea ahora es cómo calcular las componentes en una base, conocidos los valores numéricos de las componentes en otra base. Ese problema se denomina *fórmula del cambio de base*. La solución consiste en usar la fórmula:

$$v^j = \sum_i \bar{v}^i A_i^j \quad (\text{A.18})$$

Esta fórmula se puede demostrar fácilmente mediante la expresión (A.17):

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \bar{v}^i \bar{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^n \bar{v}^i \left(\sum_j A_i^j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \bar{v}^i A_i^j \right) \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n v^j \mathbf{e}_j$$

e identificando los coeficientes que multiplican a \mathbf{e}_j obtenemos la fórmula (A.18).

Por otro lado, supongamos un funcional lineal $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o *covector* (función que mapea un vector a un escalar). El conjunto de todos estos funcionales lineales o covectores forma un espacio vectorial \mathbb{R}^{n*} , llamado espacio vectorial dual de \mathbb{R}^n . Este espacio tiene también dimensión n y es isomorfo a \mathbb{R}^n . Como es un espacio vectorial diferente, definimos una *base vectorial dual* de $\{\mathbf{e}_k\}$ que escribiremos como $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_*^1, \dots, \mathbf{e}_*^n\}$ (por convención los índices se colocan ahora arriba, lo cual tendrá utilidad cuando se use el convenio de suma sobre índices repetidos). Así, un cierto covector $\alpha \in \mathbb{R}^{n*}$ se podrá expresar como combinación de esta base:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_*^i$$

Al igual que antes podemos considerar diferentes bases y nos podemos preguntar cómo se expresará α en otra base del espacio dual $\mathcal{B}^* = \{\bar{\mathbf{e}}_*^1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_*^n\}$ y qué relación habrá entre las componentes $\{\alpha_k\}$ en la base original y las componentes $\{\bar{\alpha}_k\}$ en la nueva base. Para hacer eso, definimos las bases duales de las bases ordinarias, de tal manera que se cumplan las relaciones:

$$\mathbf{e}_*^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i, \quad \bar{\mathbf{e}}_*^i(\bar{\mathbf{e}}_j) = \delta_j^i$$

Cuando una base del espacio ordinario y otra base del espacio dual cumplen lo anterior, se dice que las bases satisfacen el requisito de dualidad. Usualmente a la hora de considerar cualquier base, resulta útil partir automáticamente de la base dual, que es única, en el espacio vectorial dual. Equipados con esas relaciones ya es posible resolver el problema del cambio de base de covectores, cuya solución es:

$$\alpha_j = \sum_i \bar{\alpha}^i (A^{-1})_i^j \quad (\text{A.19})$$

Esto vuelve a ser sencillo de demostrar y para ello, consideremos al covector α actuando sobre un vector genérico \mathbf{v} . Entonces, es notable se tendrá $\alpha(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$, pero para que esta definición tenga sentido es preciso que, ya sea que se use la base $\{\mathbf{e}_*^k\}$ o la base $\{\bar{\mathbf{e}}_*^k\}$, se llegue al mismo número. Por tanto, necesitamos que el número:

$$\alpha(\mathbf{v}) = \sum_p \sum_q (\alpha_p \mathbf{e}_*^p)(v^q \mathbf{e}_q) = \sum_p \sum_q \alpha_p v^q \mathbf{e}_*^p(\mathbf{e}_q) = \sum_p \sum_q \alpha_p v^q \delta_q^p = \sum_p \alpha_p v^p$$

iguale al mismo número calculado empleando la otra base, que:

$$\alpha(\mathbf{v}) = \sum_p \sum_q (\bar{\alpha}_p \bar{\mathbf{e}}_*^p)(\bar{v}^q \bar{\mathbf{e}}_q) = \sum_p \sum_q \bar{\alpha}_p \bar{v}^q \bar{\mathbf{e}}_*^p(\bar{\mathbf{e}}_q) = \sum_p \sum_q \bar{\alpha}_p \bar{v}^q \delta_q^p = \sum_q \bar{\alpha}_q \bar{v}^q$$

Es decir, tenemos la condición:

$$\bar{\alpha}_q \bar{v}^q = \alpha_p v^p = \alpha_p (\bar{v}^q A_q^p) = (\alpha_p A_q^p) \bar{v}^q \Rightarrow \bar{\alpha}_q = \alpha_p A_q^p$$

donde en el desarrollo hemos usado la relación (A.18). Multiplicando a un lado y a otro por la matriz inversa tenemos $\alpha_p = \bar{\alpha}_q (A^{-1})_p^q$ que es otra forma de escribir la relación (A.19).

De forma más general, si se tiene un tensor de orden superior:

$$\mathbf{T} = T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}_*^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_*^{j_q}$$

Un tensor de ese tipo se denomina un tensor de tipo (p, q) [o p veces contravariante y q veces covariante]. Al cambiar de base o coordenadas, la ley de transformación será:

$$\bar{T}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{k_1}^{i_1} \dots A_{k_p}^{i_p} T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} (A^{-1})_{j_1}^{l_1} \dots (A^{-1})_{j_q}^{l_q} \quad (\text{A.20})$$

Comentarios adicionales sobre magnitudes tensoriales e invariantes

► **Utilidad de la colocación de los índices.** Puede verse que la posición del índice (arriba para contravariantes y abajo para covariantes) en una ecuación como (A.20) resulta útil para saber si en un cambio de base debe emplearse la matriz A_j^i o su inversa $(A^{-1})_i^j$. Además, puede observarse que la expresión de todo invariante formado a partir escalares, vectores, covectores o magnitudes tensoriales de orden superior puede escribirse como una expresión que, con el convenio de sumación, acaba teniendo el mismo número de índices arriba que abajo $C_{a_1 \dots a_m}^{a_1 \dots a_m}$. Es sencillo ver que para un objeto así, al tratar de cambiar de base, la ecuación (A.20) hace que las matrices A_j^i colocadas a la izquierda al multiplicarse por sus correspondientes inversas $(A^{-1})_i^j$ den las componentes de la identidad y, finamente, se tiene:

$$C_{a_1 \dots a_m}^{a_1 \dots a_m} = \bar{C}_{a_1 \dots a_m}^{a_1 \dots a_m}$$

y el escalar anterior es idéntico en todas las bases y por tanto un invariante.

► **Equivalencia de ciertas magnitudes tensoriales.** Cuando se trata con el problema definido sobre un espacio métrico en el que se conoce el tensor métrico, se puede definir un isomorfismo entre los tensores de tipo (p, q) y los de tipo (p', q') siempre y cuando $p + q = p' + q'$, por lo que al final lo importante de una magnitud es el orden total $p + q$ y no tanto cuantos índices se ponen como covariantes y contravariantes. Esto puede lograrse mediante el tensor métrico:

$$\tilde{T}_{aj_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} := g_{ab} T_{j_1 \dots j_q}^{bi_1 \dots i_p}$$

Como esa operación o su inversa se pueden repetir tantas veces como se quiera, es posible acabar encontrando un tensor de orden $p + q$ que tenga los índices arriba o abajo según conveniencia. En coordenadas curvilíneas hay que ser cuidadoso ya que numéricamente, las componentes de la versión totalmente covariante (todos los índices abajo) o totalmente contravariante (todos los índices arriba) no son iguales numéricamente. Sin embargo, si siempre se trabaja en coordenadas cartesianas, la distinción entre contravariancia y covariancia importa menos ya que la matriz $(A^{-1})_i^j$ coincide con la traspuesta de A_j^i . Además, como el isomorfismo definido por el tensor métrico para un tensor cualquiera $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \mapsto \delta_{ab} T_{j_1 \dots j_q}^{bi_1 \dots i_p}$ hace que tengamos la igualdad numérica de componentes $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots a \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \delta_{ab} T_{j_1 \dots j_q}^{bi_1 \dots i_p}$, es posible ser laxo con los índices y colocarlos

arbitrariamente arriba o abajo. Sin embargo, dicha práctica no es recomendable ya que cuando sea necesario traspasar las componentes a un sistema de coordenadas curvilíneas pueden aparecer ambigüedades.

► **La derivada y el diferencial como vectores y covectores.** Existe un paralelo formal entre los vectores ordinarios y la derivada respecto a las coordenadas y entre los covectores y el diferencial de una función o de las coordenadas. Formalmente el diferencial dx^i se comporta como un covector ya que:

$$d\bar{x}^j = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} dx^i$$

mientras que el operador derivada $\partial/\partial x^i$ se comporta como un vector ordinario, debido a que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

es decir, hay entidades que al cambiar de coordenadas se transforman de una manera y otras lo hacen de otra, siendo esa la esencia de la covariancia y la contravariancia. La observación clave está en que las matrices de cambio de base pueden expresarse como componentes de la matriz jacobiana o su inversa:

$$A_i^j = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}, \quad (A^{-1})_j^i = \bar{A}_j^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}$$

Como automáticamente la matriz jacobiana es inversa de la del cambio inverso, está garantizado que al cambiar numeradores y denominadores en las coordenadas se obtienen componentes de la matriz inversa.

A.1.4 Adjunto de un tensor (traspuesto métrico)

En la sección A.1.1 se definió el *traspuesto ordinario* de un tensor mixto de tipo (1,1). En esta sección, se define un traspuesto más general, el *traspuesto métrico* (o *adjunto*) que, cuando el tensor métrico es euclídeo $g_{ab} = \delta_{ab}$, coincide con el anterior. Cuando se trabaja en coordenadas curvilíneas o el tensor métrico no tiene la forma euclídea usual, este traspuesto métrico es más útil.

El traspuesto métrico de un tensor mixto de segundo orden se define a partir del producto escalar. Dados dos vectores, el producto escalar $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ se define como el escalar dado por:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g_{ab}v^a v^b \quad (\text{A.21})$$

El traspuesto métrico de un tensor \mathbf{A} se denota también como \mathbf{A}^T y es el único tensor de segundo orden que satisface:

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{w}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \quad (\text{A.22})$$

Eso implica que las componentes del tensor traspuesto son:

$$(\mathbf{A}^T)_b^a = \bar{A}_b^a = g_{b\beta} A_\alpha^\beta g^{a\alpha} \quad (\text{A.23})$$

Esta condición es fácil de demostrar ya que la ecuación (A.23) en componentes es:

$$g_{ab}v^a (A_d^b w^d) = g_{ad} (A^T)_c^a v^c w^d \Rightarrow g_{ab}v^a A_d^b = g_{ad} (A^T)_c^a v^c$$

donde \mathbf{w} es arbitrario y la primera igualdad debe cumplirse para cualesquiera componentes w^d . Multiplicando la última relación por la “matriz inversa” del tensor métrico g^{ab} definida a partir de la relación $g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a$ se llega a (A.23).

Cuando se usan *tensores mixtos* como el gradiente de deformación, el traspuesto métrico viene dado por la expresión:

$$(F^T)_a^A = \bar{F}_a^A = g_{ab} F_B^b G^{AB} \quad (\text{A.24})$$

donde g_{ab} y G_{AB} son los tensores métricos expresados en las coordenadas espaciales $\{x^a\}$ y materiales $\{X^A\}$ y G^{AB} es un tensor cuyas componentes forma la matriz inversa de las componentes G_{AB} .

A.1.5 Cálculo diferencial con matrices

El conjunto de matrices de $n \times n$, denotado como $\mathbb{M}_{n \times n}$ forma un espacio vectorial de dimensión n^2 . Sobre ese espacio vectorial se pueden definir *funciones matriciales* en cualquier otro espacio vectorial (tras definir una norma vectorial en ambos espacios, estos se convierten en *espacios vectoriales normados* y se puede definir sin problemas la noción de derivada y diferencial en dichos espacios). Esto resulta muy útil para definir las derivadas de las funciones matriciales mencionadas más arriba.

► **Método multiíndice**

Este método es conceptualmente el más sencillo, pero resulta más complejo que otros métodos como el de la aproximación lineal (ver sección siguiente). En lo que sigue se usará el convenio de suma de Einstein por el cual una expresión con índices covariantes y contravariantes repetidos será entendida como una suma. La idea base de este método conceptualmente muy simple se basa en comparar índices en expresiones en componentes y ver que las derivadas solo pueden ser diferentes de cero si está tratando con la misma componente. Esto da lugar a muchas deltas de Kronecker (que valdrán 0 o 1 según si cierto índice contravariante o covariante en la expresión coincide con los índices de la componente genérica respecto a la que se deriva). A continuación, se exponen algunos ejemplos.

1. **Traza de una matriz.** Es la función $\text{tr} : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathbf{A} \mapsto \text{tr}(\mathbf{A}) = A_k^k$ (suma de Einstein) y para calcular su derivada en la notación multiíndice se deriva la expresión en componentes respecto a una componente genérica:

$$\frac{dA_k^k}{dA_n^m} = \delta_m^k \delta_k^n = \delta_m^n$$

donde las deltas de Kronecker indican que la derivada debe ser cero si los dos índices covariantes o los dos índices contravariantes no coinciden. Es decir, la derivada de la traza es simplemente la identidad. Nótese que, por tanto, la derivada de un escalar (la traza) respecto a una matriz $d(\text{tr } \mathbf{A})/d\mathbf{A}$ debe ser una matriz (ya que el denominador es un objeto de dos índices; uno covariante y uno contravariante). Si se multiplica esta derivada por una matriz diferencial $\mathbf{H} = (H_n^m)$ se tiene que:

$$\frac{d \text{tr } \mathbf{A}}{d\mathbf{A}} \mathbf{H} = \delta_m^n H_n^m = H_m^m = \text{tr}(\mathbf{H}) \quad (\text{A.25})$$

2. **Función identidad.** Es la función $\mathbb{I} : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}$ definida por $\mathbf{A} \mapsto \mathbb{I}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Nótese que ahora sucede que $d\mathbb{I}(\mathbf{A})/d\mathbf{A}$ debe tener cuatro índices (2 de la matriz del denominador y dos de la matriz del numerador, de los cuales 2 de estos índices serán covariantes y dos contravariantes). Para calcular su derivada en la notación multiíndice se deriva la expresión en componentes respecto a una componente genérica:

$$\frac{dA_i^j}{dA_n^m} = \delta_m^j \delta_i^n$$

que efectivamente tiene cuatro índices libres. Multiplicando esta derivada por una matriz diferencial $\mathbf{H} = (H_n^m)$ se ve que efectivamente se comporta como la función identidad:

$$\frac{d\mathbb{I}(\mathbf{A})}{d\mathbf{A}}\mathbf{H} = \delta_m^j \delta_i^n H_n^m = H_n^j = \mathbf{H} \quad (\text{A.26})$$

3. Función cuadrática. Es la función $f : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}$ definida por $\mathbf{A} \mapsto f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2$. Esta función tendrá también cuatro índices como en caso anterior. Para calcular su derivada tenemos en cuenta que $(\mathbf{A}^2)_i^j = A_i^k A_k^j$:

$$\frac{d(A_i^k A_k^j)}{dA_n^m} = \frac{dA_i^k}{dA_n^m} A_k^j + A_i^k \frac{dA_k^j}{dA_n^m} = \delta_m^k \delta_i^k A_k^j + A_i^k \delta_m^j \delta_k^n = \delta_i^n A_m^j + A_i^m \delta_m^j$$

Multiplicando esto por una matriz diferencial, tenemos:

$$\frac{d(\mathbf{A}^2)}{d\mathbf{A}}\mathbf{H} = \mathbf{H}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{H} \quad (\text{A.27})$$

resultado coincidente con lo que encontramos en la sección siguiente A.1.5.

4. Función pseudocuadrática. Es la función $f : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{M}_{n \times n}$ definida por $\mathbf{A} \mapsto f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Para el cálculo, designaremos las componentes de la matriz traspuesta como $(\mathbf{A}^T)_i^j = \bar{A}_i^j$, un cálculo similar al del último ejemplo nos da:

$$\frac{d(\bar{A}_i^k A_k^j)}{dA_n^m} = \frac{d\bar{A}_i^k}{dA_n^m} A_k^j + \bar{A}_i^k \frac{dA_k^j}{dA_n^m} = \delta^{kn} \delta_{im} A_k^j + A_i^k \delta^{jn} \delta_{km} = \delta_{im} A_n^j + A_i^m \delta^{jn}$$

Multiplicando esto por una matriz diferencial $\mathbf{H} = (H_n^m)$ tenemos:

$$\frac{d(\mathbf{A}^2)}{d\mathbf{A}}\mathbf{H} = (\delta_{im} A_n^j + A_i^m \delta^{jn}) H_n^m = H_n^i A_n^j + A_i^m H_j^m = \mathbf{H}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{H} \quad (\text{A.28})$$

resultado coincidente con lo que encontramos en la sección siguiente A.1.5.

► Método de la aproximación lineal

El método multiíndice es conceptualmente muy simple porque se basa en comparar índices en expresiones en componentes, pero es engorroso. Un método mejor es el que proporciona la definición de derivada (el método se explica con mucho detalle en *Mathematical Elasticity* de P.G. Ciarlet (2008)²⁶).

Para una función diferenciable entre dos espacios vectoriales existe una aplicación

lineal que aproxima hasta términos lineales la función (esta aplicación lineal se denomina *aplicación lineal tangente* y equivale esencialmente a la derivada), es decir, para $f : \mathbb{M}_{n \times n} \rightarrow V$ diferenciable, existirá una aplicación lineal Λ_f , tal que:

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{H}) - f(\mathbf{A}) = \Lambda_f(\mathbf{H}) + o(\mathbf{H})$$

donde el resto $o(\mathbf{H})$ es una función de \mathbf{H} que cuando $\|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$ se hace arbitrariamente pequeña (tiende a cero más rápido que la norma de \mathbf{H}). Primero se repiten los ejemplos de la sección anterior:

1. **Traza de una matriz.** Queda claro por la linealidad de la traza que $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{H}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{H})$, por lo que trivialmente tenemos:

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{H}) - \text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{H}) = \Lambda_{\text{tr}}(\mathbf{H})$$

Este resultado coincide con (A.25), aunque por este método es mucho más rápido de obtener.

2. **Función identidad.** En este caso, trivialmente se tiene:

$$\mathbb{I}(\mathbf{A} + \mathbf{H}) - \mathbb{I}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} + \mathbf{H} - \mathbf{A} = \mathbf{H} = \Lambda_{\mathbb{I}}(\mathbf{H})$$

este último resultado coincide con la expresión (A.26) de la sección anterior.

3. **Función cuadrática.** Por cálculo directo se llega a que:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{H})^2 - \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A} + \mathbf{H}^2 - \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A} + o(\mathbf{H})$$

de donde se tiene trivialmente que $\Lambda_{\mathbf{A}^2}(\mathbf{H}) = \mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{H}\mathbf{A}$, resultado que coincide con la expresión (A.27).

4. **Función pseudocuadrática.** También por cálculo directo se encuentra que:

$$(\mathbf{A}^T + \mathbf{H}^T)(\mathbf{A} + \mathbf{H}) - \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{A} + o(\mathbf{H})$$

de donde se tiene que $\Lambda_{\mathbf{A}^T\mathbf{A}}(\mathbf{H}) = \mathbf{A}^T\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{A}$, resultado que coincide con la expresión (A.28).

A.2 Deformación de un sólido

Esta sección describe los diferentes tensores de deformación de una forma más exhaustiva, que pueden emplearse para definir la deformación geométrica. Así, se detalla la deducción de los diferentes tensores, sus propiedades y características paso a paso y se muestran las relaciones entre los tensores de deformación.

A.2.1 Tensor gradiente de deformaciones

Definamos una curva en la configuración material $\Gamma \subset \mathcal{B}$ que, tras la deformación del cuerpo, cambia de forma a $\gamma \subset \phi_t(\mathcal{B})$ (ver figura A.1). Si ξ describe la dirección tangente a la curva en coordenadas curvilíneas, es posible expresar la posición de las partículas que forman la curva, antes y después de la deformación, como:

$$\mathbf{X} = \Gamma(\xi) , \quad X^A = \Gamma^A(\xi) \quad (\text{A.29a})$$

$$\mathbf{x} = \gamma(\xi, t) , \quad x^a = \gamma^a(\xi, t) \quad (\text{A.29b})$$

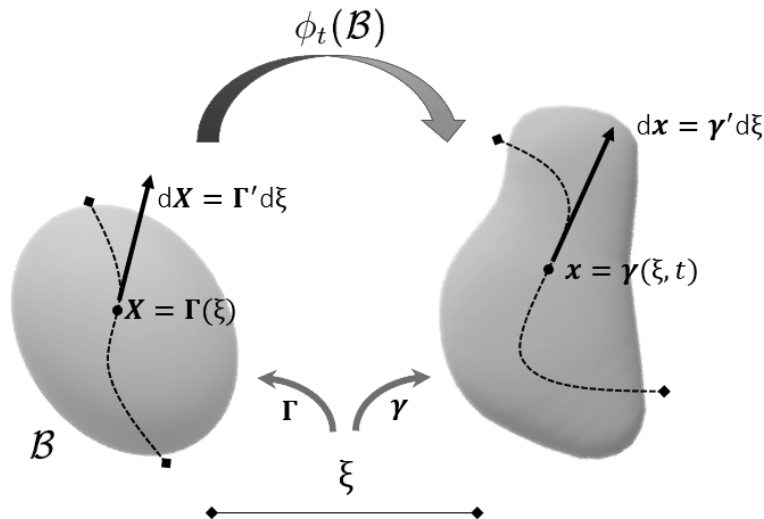


Figura A.1. Línea material de puntos que, en el sólido antes de la deformación es una curva definida por Γ , cuyos puntos se encuentran en las posiciones $\mathbf{X} = \Gamma(\xi)$ (y su vector tangente $d\mathbf{X}$) y, tras la deformación, la curva se define por γ y los puntos $\mathbf{x} = \gamma(\xi, t)$ (con el vector tangente $d\mathbf{x}$), donde ξ es la dirección tangente en coordenadas curvilíneas.

Ambas curvas pueden relacionarse mediante el vector movimiento para expresar la posición de un punto \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\gamma}(\xi, t) = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\Gamma}(\xi), t), \quad x^a = \gamma^a(\xi, t) = \phi^a(\Gamma^A(\xi), t) \quad (\text{A.30})$$

El vector tangente a ambas curvas puede encontrarse derivando (A.29):

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}}{\partial \xi} d\xi = \boldsymbol{\Gamma}' d\xi, \quad d\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \xi} d\xi = \boldsymbol{\gamma}' d\xi \quad (\text{A.31})$$

donde $d\mathbf{x}$ puede obtenerse derivando (A.30). Igualando las dos expresiones:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{X}} \boldsymbol{\Gamma}' d\xi = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad (\text{A.32})$$

Obteniendo así la expresión fundamental:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad dx^a = F^a_A dX^A \quad (\text{A.33})$$

El vector \mathbf{F} es, precisamente, el *tensor gradiente de deformación*, un tensor entre dos puntos, en distintas configuraciones, cuya definición es:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}, \quad F^a_A = \frac{\partial \phi^a(X)}{\partial X^A} = \frac{\partial x^a}{\partial X^A} \quad (\text{A.34})$$

Esta operación de transformación puede realizarse a la inversa, mediante el tensor gradiente de deformación inverso \mathbf{F}^{-1} , tal que:

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}, \quad (F^{-1})^A_a = \frac{\partial \phi_A^{-1}(x)}{\partial x^a} = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \quad (\text{A.35})$$

Así mismo, el tensor gradiente de deformación también se puede expresar en su forma traspuesta, en base a los tensores métricos (ver A.1.2), como:

$$(F^T(x))^A_a = \bar{F}^A_a = g_{ab}(x) F^b_B(X) G^{AB}(X) \quad (\text{A.36})$$

Reescribiendo (A.34) mediante la relación de \mathbf{x} con los desplazamientos $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$, puede expresarse \mathbf{F} en función del desplazamiento \mathbf{U} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial (\mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t))}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{A.37})$$

Usando el operador gradiente $\nabla = \partial(\bullet)/\partial\mathbf{X}$, \mathbf{F} puede redefinirse:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla U(\mathbf{X}, t), \quad F^a_A = \delta^a_A + \frac{\partial U^a}{\partial X^A} \quad (\text{A.38})$$

El tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} es invertible (no singular o no degenerado), que implica que su determinante $\det\mathbf{F} \neq 0$ y además, proporciona información sobre el tipo de deformación; si \mathbf{F} depende de \mathbf{X} la deformación es no homogénea, mientras que si no depende de la posición, la deformación del cuerpo será homogénea. En este último caso el tensor gradiente de deformación toma la forma de $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ y si además no hay movimiento, se cumple que $\mathbf{x} = \mathbf{X}$.

A.2.2 Tensores de deformación materiales

Consideremos dos puntos próximos \mathbf{X} e \mathbf{Y} del cuerpo \mathcal{B} en su configuración de referencia, separados una distancia $d\ell$ (ver figura A.2) y sea entonces $d\mathbf{X}$ el vector del punto \mathbf{X} a \mathbf{Y} . El punto \mathbf{Y} puede redefinirse entonces como $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} = \mathbf{X} + d\ell\mathbf{a}_0$, donde \mathbf{a}_0 es el vector unitario de \mathbf{X} a \mathbf{Y} ($|\mathbf{a}_0| = 1$).

Tras la deformación del cuerpo, los puntos $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}$ e $\mathbf{Y} \mapsto \mathbf{y}$ se encuentran en una nueva posición y a una nueva distancia y por consiguiente, el vector \mathbf{a}_0 cambia de dirección y módulo de la misma forma que el cuerpo se deforma. El vector resultante puede expresarse mediante \mathbf{F} , según:

$$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{a}_0 \quad (\text{A.39})$$

El vector $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}$ es el *vector estiramiento* y, al ser resultado de la deformación del vector unitario \mathbf{a}_0 , su módulo $\lambda = |\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}|$ proporciona información directa sobre la magnitud de este estiramiento. De hecho, λ se conoce como *ratio de estiramiento*, o directamente *estiramiento* y se trata de un escalar que corrige la distancia $d\ell$ previa a la deformación entre dos puntos del cuerpo \mathcal{B} , proporcionando así su longitud final. Ello puede demostrarse determinando la distancia entre dos puntos del cuerpo tras la deformación:

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x})} = \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{a}_0}} d\ell = \lambda d\ell \quad (\text{A.40})$$

tal que la distancia $d\ell$ entre dos puntos del cuerpo después de la deformación

cambia según un factor λ (excepto si $\lambda = 1$).³

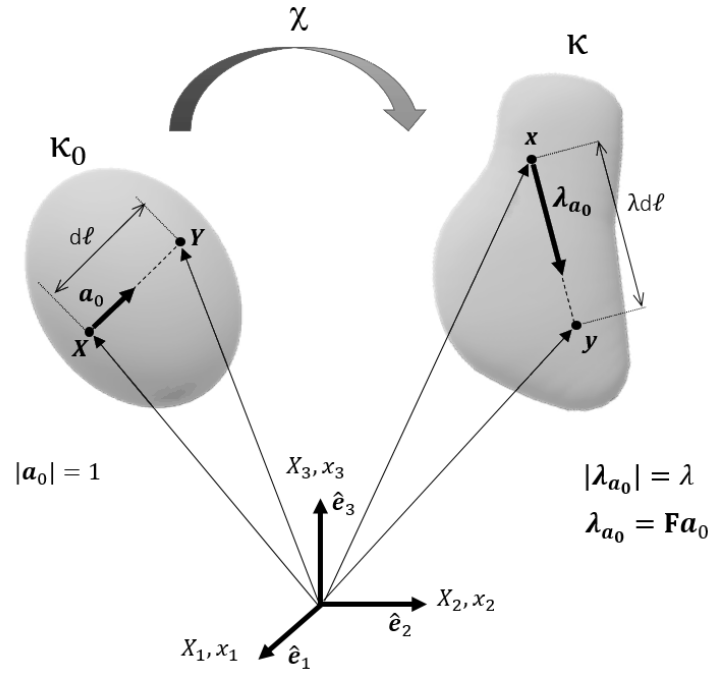


Figura A.2. Representación del vector \mathbf{a}_0 unitario descrito en coordenadas materiales, entre dos puntos \mathbf{X} e \mathbf{Y} en la configuración no deformada, separados una distancia $d\ell$ y su posición tras una deformación definida por \mathbf{F} , donde la distancia entre los puntos ha variado un ratio λ y el vector unitario ha cambiado de longitud y dirección a $\lambda\mathbf{a}_0$.

De esta forma, computando el cuadrado del estiramiento λ^2 , se llega a la expresión:⁴

$$\lambda^2 = \lambda_{\mathbf{a}_0} \cdot \lambda_{\mathbf{a}_0} = \mathbf{F}\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{a}_0 \quad (\text{A.41})$$

obteniendo el tensor de deformaciones derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad C^A_B = \bar{F}^A_a F^a_B = g_{ab} G^{AC} \frac{\partial \phi^b}{\partial X^C} \frac{\partial \phi^a}{\partial X^B} \quad (\text{A.42})$$

³Es trivial deducir que, si $\lambda > 1$ se ha alargado, si $\lambda < 1$ se ha reducido o si $\lambda = 1$ permanece constante. Ello depende de $\lambda_{\mathbf{a}_0}$ es mayor, menor o igual que el vector \mathbf{a}_0 .

⁴En la expresión (A.41) se ha utilizado la propiedad del producto de matrices $\mathbf{u} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{u}$.

El tensor de derecho de Cauchy-Green (o de Green) \mathbf{C} es objetivo y simétrico:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T = \mathbf{C}^T, \quad C_B^A = C_A^B \quad (\text{A.43})$$

Además, es un tensor definido positivo ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \mathbf{v} > 0 \forall \mathbf{u} \neq 0$) y, como puede observarse en la expresión (A.41), el tensor se ha obtenido a partir de los vectores materiales \mathbf{a}_0 y \mathbf{X} , hecho que corrobora que \mathbf{C} , como muestra su definición (A.43), es material. El tensor de deformaciones de Green toma el valor de $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ cuando no hay deformación y un valor distinto a la identidad cuando sí la hay. Calculando el inverso de \mathbf{C} se obtiene el *tensor de deformaciones de Piola* \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}, \quad B_B^A = C_A^B = (F^{-1})^A{}_a \bar{F}^a_B \quad (\text{A.44})$$

Finalmente, un tensor de deformaciones alternativo a los anteriores en coordenadas materiales, puede obtenerse computando el cambio de la distancia al cuadrado entre los dos puntos tras la deformación; siendo $d\ell^2 = d\ell \mathbf{a}_0 \cdot d\ell \mathbf{a}_0 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$ y usando (A.41), se obtiene:

$$\frac{1}{2} [(\lambda d\ell)^2 - d\ell^2] = \frac{1}{2} [d\ell^2 \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{a}_0 - d\ell^2] = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} \quad (\text{A.45})$$

donde \mathbf{E} es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), \quad E_B^A = \frac{1}{2} (\bar{F}^A{}_a F^a_B - \delta_B^A) \quad (\text{A.46})$$

este tensor es simétrico ($\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$) y proporciona una medida de la deformación en \mathbf{X} en la dirección de \mathbf{a}_0 . El tensor \mathbf{E} , a diferencia de \mathbf{C} toma un valor de 0 cuando no hay deformación y un valor distinto cuando la hay, lo que resulta un tanto más intuitivo que el tensor anterior. Nótese que se ha introducido un factor 1/2, proveniente de la teoría lineal. El tensor de deformación de Green-Lagrange se define a partir de los desplazamientos como:

$$E_B^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U^A}{\partial X^B} + \frac{\partial U^B}{\partial X^A} + \sum_C \frac{\partial U^C}{\partial X^A} \frac{\partial U^C}{\partial X^B} \right) \quad (\text{A.47})$$

A.2.3 Tensores de deformación espaciales

Definamos ahora, análogamente al apartado anterior, el cambio de longitudes respecto a la configuración actual (en coordenadas espaciales). Así, dados dos puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} en la configuración actual, tras la deformación ϕ se encuentran a una distancia $d\bar{\ell}$ entre ellos en la configuración deformada, cuya dirección viene definida por el vector unitario $\bar{\mathbf{a}}$ de \mathbf{x} a \mathbf{y} .

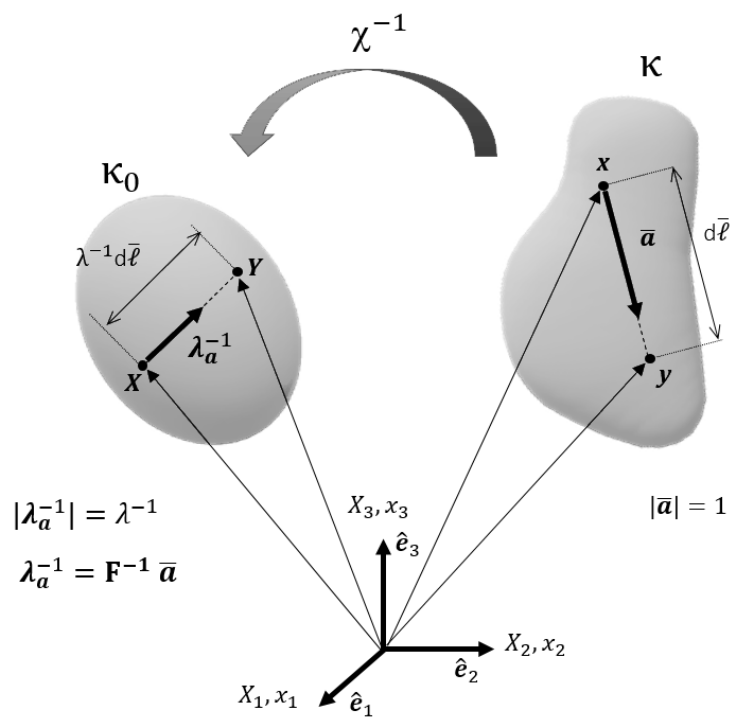


Figura A.3. Representación del vector $\bar{\mathbf{a}}$ unitario en la configuración deformada entre dos puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} , separados una distancia $d\bar{\ell}$ y su posiciones la configuración no deformada, donde la distancia entre los puntos se reescala en base al ratio inverso de estiramiento λ^{-1} y el vector unitario en esta configuración tiene distinta longitud y dirección, definidas por λ_a^{-1} .

Si recurrimos a la geometría descrita en coordenadas materiales de la sección anterior, el vector unitario \mathbf{a}_0 que definía la dirección de \mathbf{X} a \mathbf{Y} en la configuración material, tras una deformación \mathbf{F} cambió su longitud según el estiramiento λ pasando a ser, en la configuración espacial, el vector estiramiento $\lambda_a = \mathbf{F}\mathbf{a}_0$. Este vector estiramiento no es otra cosa que un vector [no unitario] de \mathbf{x} a \mathbf{y} , resultado de la deformación. Nótese entonces que el vector unitario $\bar{\mathbf{a}}$ es, así

mismo, un vector que va a lo largo de la misma dirección que $\lambda_{\mathbf{a}}$, entonces es sencillo reescribir la relación como:⁵

$$\mathbf{F}\mathbf{a}_0 = \lambda_{\mathbf{a}} = \lambda\bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.48})$$

Por tanto, pasando de la configuración deformada a la no deformada mediante la inversa de \mathbf{F} se obtiene el vector $\bar{\mathbf{a}}$ en la configuración no deformada, expresado en coordenadas espaciales como:

$$\lambda_{\mathbf{a}}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)\bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.49})$$

El vector $\lambda_{\bar{\mathbf{a}}}$ es así mismo un vector estiramiento que, en su forma inversa, es el vector en la dirección de \mathbf{X} a \mathbf{Y} y que tras la deformación dada por \mathbf{F} resulta en el vector unitario $\bar{\mathbf{a}}$. Con lo descrito, calculemos la distancia entre \mathbf{X} e \mathbf{Y} antes de la deformación, usando la formulación en coordenadas espaciales:

$$|\mathbf{Y} - \mathbf{X}| = \sqrt{(\mathbf{Y} - \mathbf{X}) \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{X})} = \sqrt{\lambda_{\bar{\mathbf{a}}}^{-1} \cdot \lambda_{\bar{\mathbf{a}}}^{-1}} d\bar{\ell} = \lambda^{-1}d\bar{\ell} \quad (\text{A.50})$$

siendo λ^{-1} el *ratio inverso de estiramiento* o *estiramiento inverso*. Calculando el cuadrado de λ^{-1} se obtiene:

$$\lambda^{-2} = \lambda_{\bar{\mathbf{a}}}^{-1} \cdot \lambda_{\bar{\mathbf{a}}}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}}\mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b}^{-1}\bar{\mathbf{a}} \quad (\text{A.51})$$

Llegando así al tensor de deformaciones izquierdo de Cauchy-Green o tensor de deformaciones de Finger, que se define:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^{\text{T}}, \quad b^a_b = F^A_a \bar{F}^a_B = g_{bc} G^{AB} \frac{\partial \phi^a}{\partial X^A} \frac{\partial \phi^c}{\partial X^B} \quad (\text{A.52})$$

El tensor \mathbf{b} es simétrico ($\mathbf{b} = \mathbf{b}^{\text{T}}$) y definido positivo. Además, puede calcularse de nuevo el cambio de la distancia al cuadrado entre los dos puntos:

$$\frac{1}{2} [d\bar{\ell}^2 - (\lambda^{-1}d\bar{\ell})^2] = \frac{1}{2} [d\bar{\ell}^2 - d\bar{\ell}^2 \bar{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{F}^{-\text{T}}\mathbf{F}^{-1}\bar{\mathbf{a}}] = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} d\mathbf{x} \quad (\text{A.53})$$

⁵Esto puede verificarse fácilmente, si se determina en la geometría descrita en coordenadas materiales la distancia entre los puntos \mathbf{x} e \mathbf{y} tras la deformación ($\mathbf{y} - \mathbf{x} = d\ell \mathbf{F}\mathbf{a}_0$) y su módulo ($|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \lambda d\ell$); calculando el vector unitario desde \mathbf{x} hasta \mathbf{y} , se obtiene el vector $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{F}\mathbf{a}_0/\lambda$.

De esta expresión se deduce el tensor de deformaciones de Euler-Almansi \mathbf{e} :

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) , \quad e^a_b = \frac{1}{2}(\delta^a_b - (\bar{F}^{-1})^a_B (F^{-1})^A_b) \quad (\text{A.54})$$

A.2.4 Relación entre tensores de deformación

Puede observarse en el apartado anterior cómo los tensores de deformación espaciales se obtienen de forma muy similar a los materiales, con operaciones parecidas, aunque descritas en una u otra configuración. Este hecho deja entrever que mediante operaciones de transformación de sistema de referencia puede relacionarse los tensores en ambas configuraciones y, de hecho, esto es posible, como se verá a continuación.

Dado un movimiento ϕ , para cada punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ existe una transformación ortogonal dada por la matriz de rotaciones \mathbf{R} que cumple $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ y $\det\mathbf{R} = 1$. Entonces, el *teorema de descomposición polar* establece que el tensor gradiente de deformaciones \mathbf{F} puede descomponerse en dos tensores que definen la rotación y el alargamiento, tal que:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} , \quad F^a_A = R^a_B U^B_A \quad (\text{A.55a})$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\mathbf{R} , \quad F^a_A = v^a_b R^b_A \quad (\text{A.55b})$$

Las expresión (A.55a) se denomina *descomposición polar por la izquierda* y (A.55b) *descomposición polar por la derecha*, donde \mathbf{U} y \mathbf{v} son el *tensor derecho [material] de alargamiento* y el *tensor izquierdo [espacial] de alargamiento* respectivamente. Ambos son simétricos, únicos y definidos positivos ($\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}^T$). Mientras el tensor de rotación expresa el cambio de orientación del cuerpo, el tensor de alargamiento define la variación de la forma.

Con estas descomposiciones es posible definir una relación entre los tensores de deformación de Green \mathbf{C} material y el de Finger \mathbf{b} espacial, los cuales expresan la misma deformación, aunque en bases diferentes. Para relacionar ambos tensores se recurre al teorema de raíces cuadradas (*square-root theorem*⁶⁰) que establece una relación entre los tensores de alargamiento y los tensores de deformación:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (\text{A.56a})$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{v}\mathbf{R}(\mathbf{v}\mathbf{R})^T = \mathbf{v}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{v}^T = \mathbf{v}\mathbf{v} = \mathbf{v}^2 \quad (\text{A.56b})$$

Finalmente, aislando el tensor \mathbf{v} de la igualdad de la ecuación (A.55.b) y reemplazando con las ecuaciones de (A.56), se llega a:

$$\mathbf{v} = \mathbf{RUR}^T \rightarrow \mathbf{v}^2 = \mathbf{RUR}^T \mathbf{RUR}^T = \mathbf{RU}^2 \mathbf{R}^T \rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{RCR}^T \quad (\text{A.57})$$

obteniendo así la relación entre los tensores de deformación \mathbf{C} y \mathbf{b} . Nótese que ambos tensores describen la misma deformación pero en las bases material y espacial respectivamente y se relacionan únicamente mediante el tensor de rotación \mathbf{R} que define la rotación del sistema de ejes material al espacial.

Existen otras relaciones que pueden establecerse entre los tensores de deformación, basadas en transformaciones por medio de las operaciones conocidas como *push-forward* ϕ_* para un cambio del tensor desde el sistema de referencia al deformado y *pull-back* $\phi_*^{-1} = \phi^*$ para el paso de la configuración deformada a la de referencia. Según si el tensor es covariante $(\bullet)^b$ o contravariante $(\bullet)^\sharp$ (ver A.1.3), estas operaciones se escriben:

$$\begin{aligned} \phi_*(\bullet)^b &= \mathbf{F}^{-T}(\bullet)^b \mathbf{F}^{-1}, & \phi^*(\bullet)^b &= \mathbf{F}^T(\bullet)^b \mathbf{F} \\ \phi_*(\bullet)^\sharp &= \mathbf{F}(\bullet)^\sharp \mathbf{F}^T, & \phi^*(\bullet)^\sharp &= \mathbf{F}^{-1}(\bullet)^\sharp \mathbf{F}^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

Entre los tensores de deformación expuestos anteriormente, \mathbf{E}^b , \mathbf{e}^b , \mathbf{B}^b y \mathbf{C}^b son covariantes y \mathbf{b}^\sharp contravariante.

Para demostrarlo, hagamos el *push-forward* del tensor métrico \mathbf{g} :

$$\phi^*(\mathbf{g}^b) = \mathbf{F}^T \mathbf{g}^b \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}^b, \quad g_{ab} \bar{F}_a^A F_B^a = C_B^A$$

obteniendo así el tensor derecho de Cauchy-Green. Operando de la misma forma con el tensor de deformaciones de Euler-Almansi:

$$\begin{aligned} \phi^*(\mathbf{e}^b) &= \mathbf{F}^T \mathbf{e}^b \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \left[\frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) \right] \mathbf{F} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{I} \mathbf{F} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - (\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}^T \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{E}^b \end{aligned}$$

obteniendo entonces el tensor de deformaciones de Green-Lagrange. Si por el contrario, se opera el *pull-back* de este tensor \mathbf{E}^b :

$$\begin{aligned}
\phi_*(\mathbf{E}^b) &= \mathbf{F}^{-T} \mathbf{e}^b \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \right] \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{I} \mathbf{F}^{-1}) = \\
&= \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F})^T \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^T - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \\
&= \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{e}^b
\end{aligned}$$

llegando al tensor de deformaciones de Euler-Almansi. Tanto el *pull-back* como el *push-forward* pueden operarse en otros tensores de deformación; las relaciones más conocidas son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^b &= \phi^*(\mathbf{g}) , & C_{AB}(X) &= g_{ab}(x) F^a_A(X) F^b_B(X) \\
\mathbf{c}^b &= \phi_*(\mathbf{G}) , & c_{ab}(x) &= G_{AB}(X) (F^{-1})^A_a(X) (F^{-1})^B_b(X) \\
\mathbf{B}^\dagger &= \phi^*(\mathbf{g}^\dagger) , & B^{AB}(X) &= g^{ab}(x) (F^{-1})^A_a(X) (F^{-1})^B_b(X) \\
\mathbf{b}^\dagger &= \phi_*(\mathbf{G}^\dagger) , & b^{ab}(x) &= G^{AB}(X) F^a_A(X) F^b_B(X) \\
\mathbf{E}^b &= \phi^*(\mathbf{e}^b) , & E^{AB}(x) &= e_{ab}(x) \bar{F}^a_A(X) F^b_B(X) \\
\mathbf{e}^b &= \phi_*(\mathbf{E}^b) , & e_{ab}(x) &= E_{AB}(X) (\bar{F}^{-1})^A_a(X) (F^{-1})^B_b(X)
\end{aligned} \tag{A.59}$$

A.3 Teoría constitutiva

En esta sección se introducen nociones generales importantes que deben tenerse en cuenta a la hora de construir un modelo constitutivo. En concreto, se trata con las relaciones entre tensores de deformaciones y tensores de tensiones. Estas nociones incluyen además de algunos conceptos generales importantes, como el concepto de objetividad (ver sección A.3.1) y algunas deducciones de consistencia termodinámica que todo medio continuo debe satisfacer (A.3.3).

A.3.1 Conceptos de objetividad

Uno de los criterios más importantes que debe satisfacer una ecuación constitutiva es el criterio de objetividad, que parte del principio físico fundamental que

establece que las propiedades de los materiales no están afectadas por la elección del observador, es decir, que éstas son independientes de la posición de la persona que las observa. De esta forma, el estado tensional del cuerpo y cualquier medida física debe ser invariable en relación con el cambio de observador.

Sean dos observadores O y O^+ , caracterizados por los ejes fijos de referencia $\{\mathbf{e}_a\}$ y $\{\mathbf{e}_a^*\}$ respectivamente, que se mueven relativamente entre ellos. Se definen entonces dos eventos caracterizados por una posición y un tiempo de inicio (\mathbf{x}_0, t_0) y (\mathbf{x}, t) . El primer observador O mide la distancia entre el par de puntos como $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ y el lapso de tiempo como $t - t_0$. Si se definen ambos eventos desde el punto de vista del segundo observador O^+ como (\mathbf{x}_0^+, t_0^+) y (\mathbf{x}^+, t^+) respectivamente, para cumplir el criterio de objetividad éste observador O^+ debe medir la misma distancia entre los puntos y el mismo lapso de tiempo que el observador O . Los vectores posición pueden representarse en cada una de las bases de los observadores como $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a \mathbf{e}_a$ y $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x}_a^+ \mathbf{e}_a^+$ respectivamente, así como el lapso de tiempo $\alpha = t_0^+ - t_0$ entre observadores. Por otro lado, el cambio de observador se describe en base a la rotación relativa entre las bases de referencia $\{\mathbf{e}_a\}$ y $\{\mathbf{e}_a^*\}$, que viene dada por la matriz ortogonal $\mathbf{Q}(t)$, tal que $\hat{\mathbf{e}}_a^+ = \mathbf{Q}(t)\hat{\mathbf{e}}_a$. Por tanto, la relación de la distancia entre puntos medida por los dos observadores se expresa como:

$$\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}_0^+ = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (\text{A.60})$$

respetando así el criterio de objetividad. De la misma forma, sea un vector \mathbf{u} que se transforma siguiendo la deducción anterior, la relación vendrá dada por:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{Q}(t)\mathbf{u} \quad (\text{A.61})$$

se dirá que este vector es objetivo y que, por tanto, ambos observadores O y O^+ moviéndose relativamente entre ellos observan las mismas coordenadas $u_a^+ = u_a$.

Hay tensores importantes que cumplen el criterio de objetividad, como se muestra a continuación. Considérese ahora que ambos observadores ven el mismo punto $\mathbf{X}^+ = \mathbf{X}$ en la configuración de referencia del cuerpo. La deformación para cada observador se definirá como:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}; \quad d\mathbf{x}^+ = \mathbf{F}^+d\mathbf{X} \quad (\text{A.62})$$

En base a la transformación (A.61), ambas expresiones pueden relacionarse:

$$d\mathbf{x}^+ = \mathbf{Q}d\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{F}^+d\mathbf{X} \quad (\text{A.63})$$

llegando entonces al tensor gradiente de deformaciones:

$$\mathbf{F}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{F} \quad (\text{A.64})$$

Así se observa que \mathbf{F} objetivo. Algunos de los tensores de deformación también cumplen con los criterios de objetividad:

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{F}^{+\text{T}}\mathbf{F}^+ = \mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{Q}^{\text{T}}\mathbf{Q}\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{F} = \mathbf{C} \quad (\text{A.65a})$$

$$\mathbf{E}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{+\text{T}}\mathbf{F}^+ - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{Q}^{\text{T}}\mathbf{Q}\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{F} - \mathbf{I}) = \mathbf{E} \quad (\text{A.65b})$$

$$\mathbf{b}^+ = \mathbf{F}^+\mathbf{F}^{+\text{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{F}\mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{Q}^{\text{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{b}\mathbf{Q}^{\text{T}} \quad (\text{A.65c})$$

En cuanto a los tensores de tensión, para el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ medido por un observador O^+ :

$$\mathbf{t}^+ = \boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{n}^+ \quad \rightarrow \quad \mathbf{Q}\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}\mathbf{n} \quad (\text{A.66})$$

expresión que en comparación con $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ desde el punto de vista del observador O muestra la objetividad del tensor $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}^+\mathbf{Q}^{\text{T}} \quad (\text{A.67})$$

De la misma forma, reescribiendo el tensor de tensiones de Piola $\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{\text{T}}$ se puede demostrar la objetividad de \mathbf{P} :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^+\mathbf{F}^{+\text{T}} &= J^+\boldsymbol{\sigma}^+ \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}^+(\mathbf{Q}\mathbf{F})^{\text{T}} = J\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^{\text{T}} \quad \rightarrow \\ &\rightarrow \quad \mathbf{P}^+(\mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{Q}^{\text{T}}) = \mathbf{Q}J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^{\text{T}} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(\mathbf{F}^{\text{T}}\mathbf{Q}^{\text{T}}) \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{P} \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Dado que el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} solo depende de coordenadas materiales, no varía por una deformación rígida impuesta, por lo que $\mathbf{S}^+ = \mathbf{S}$.

A.3.2 Relaciones entre ecuaciones constitutivas específicas

La ecuación constitutiva de un material puede obtenerse de forma general como la derivada de la *función densidad de energía de deformación* Ψ (SEDF), definida a partir del tensor gradiente de deformación \mathbf{F} , tal que:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad P^{aB} = g^{ab} \frac{\partial \Psi}{\partial F_B^b} \quad (\text{A.69})$$

siendo \mathbf{P} el *primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*. Dado que un aumento en la sollicitación debe reflejarse en un incremento en la energía almacenada en el sólido, la SEDF debe cumplir los siguientes requisitos:

- (1) $\Psi \geq 0$, es decir, debe ser positiva. Siendo $\Psi = 0$ sobre la configuración natural no deformada.
- (2) $\Psi(\mathbf{F}) \rightarrow \infty \forall \det \mathbf{F} \rightarrow 0$, lo cual indica que el material no puede ser deformado infinitamente.
- (3) $\Psi(\mathbf{F}) \rightarrow \infty \forall \det \mathbf{F} \rightarrow \infty$, es decir, que el material no puede ser comprimido hasta que su volumen sea nulo.

No obstante, en muchas ocasiones resulta de mayor interés expresar la función energía de deformación Ψ como función de otros tensores de deformación diferentes a \mathbf{F} , como es el caso del tensor de deformaciones de Green-Lagrange \mathbf{E} o de Cauchy-Green \mathbf{C} , dependiendo de la base en la cual se desea trabajar o el sistema de referencia en el que se obtienen los datos experimentales previos. Las funciones alternativas $\Psi(\mathbf{E})$ o $\Psi(\mathbf{C})$ pueden obtenerse a partir de las relaciones (A.43) y (A.46) que definen estos tensores a partir de \mathbf{F} .

La función energía de deformación debe ser invariante ante una rotación (indiferencia de observador), de tal forma que pueda ser determinada de la misma forma en bases o sistemas de referencia diferentes. Si se aplica una rotación \mathbf{R}^T dada por la matriz ortogonal \mathbf{R} al gradiente de deformaciones \mathbf{F} y recurriendo a la descomposición polar del gradiente de deformaciones $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ (A.55a), puede deducirse que:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{R}^T \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) = \Psi(\mathbf{U}) \quad (\text{A.70})$$

donde $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Esta deducción muestra que la función energía de deformación Ψ depende únicamente de la parte de \mathbf{F} que corresponde a la deformación \mathbf{U} y es independiente de su componente rotacional \mathbf{R} . Recuperando ahora la expresión (A.43) y considerando de nuevo la descomposición polar:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{I} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (\text{A.71})$$

donde $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$. Siendo $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ y $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I})/2$ se observa que ninguno de los tres tensores depende de la componente rotacional (solo de la deformación \mathbf{U}) y se deduce que la SEDF en sus tres formas es equivalente $\Psi_{\mathbf{F}}(\mathbf{F}) = \Psi_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}) = \Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E})$. Nótese que las funciones energía de deformación $\Psi_{\mathbf{F}}(\mathbf{F})$, $\Psi_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})$ y $\Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E})$ se denotan con subíndices debido a que, aunque proporcionan información equivalente, no son expresiones con la misma forma exacta, es decir, los parámetros, constantes o forma de las variables puede cambiar entre ambas funciones. Sin embargo, de ahora en adelante se obviarán los índices dado que se asume que toma diferentes formas según el tensor variable.

Así, la ecuación constitutiva de la expresión (A.69) se reescribe para las dos formas alternativas de Ψ como:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \frac{\partial (\mathbf{F}^T \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = 2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (\text{A.72a})$$

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial ((\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I})/2)}{\partial \mathbf{F}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{A.72b})$$

La expresión general (A.69) de la ecuación constitutiva puede reformularse también para otros tensores de tensión diferentes al de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} . Mediante la relación inversa de $\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$ de la definición (2.20) puede escribirse la expresión para el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \mathbf{F}^T, \quad \sigma_a^b = J^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial F_A^a} F_b^A \quad (\text{A.73})$$

Sin embargo resulta más interesante definir la ecuación constitutiva en base al segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} , especialmente en el caso que nos ocupa, dado que tanto éste como los tensores \mathbf{C} y \mathbf{E} están expresados en la base material, mientras que $\boldsymbol{\sigma}$ se define en la espacial y \mathbf{P} en ambas al mismo tiempo. Siendo $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S}$, pueden reescribirse las expresiones (A.72a) y (A.72b) de la forma:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{F}^{-1}2\mathbf{F} \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{A.74})$$

siendo $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I}$ y obteniendo así una ecuación constitutiva expresada en la configuración material. Como se ha mencionado, la función energía de deformación Ψ debe ser invariante ante una rotación y *el teorema de representación de invari-*

antes postula que, si una función de un tensor y resultado escalar es invariante ante una rotación, debe ser expresada en términos de los invariantes principales de su argumento; en este caso Ψ es la función escalar y \mathbf{C} o \mathbf{E} el argumento. Por ello, para \mathbf{C} la función energía de deformación tomará la forma de:

$$\Psi = \Psi[I_n(\mathbf{C})] \quad (\text{A.75})$$

y la ecuación constitutiva se calculará como:

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^n 2 \left[\frac{\partial \Psi}{\partial I_a} \frac{\partial I_a}{\partial \mathbf{C}} \right] \quad (\text{A.76})$$

El número de invariantes involucrados en la SEDF dependerá de la simetría del problema, es decir, será función del tipo de comportamiento del material. En materiales transversalmente isótropos, los cuales muestran el mismo comportamiento en todas las direcciones a lo largo de las cuales pueda solicitarse el material, basta con tres invariantes para poder determinar la función energía de deformación:

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}) , \quad I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}[(\text{tr}\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)] , \quad I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) \quad (\text{A.77})$$

Calculando las derivadas de estos tres invariantes I_a respecto al tensor de deformaciones \mathbf{C} , la ecuación constitutiva para un material isótropo es:

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (\text{A.78})$$

Para un material transversalmente isótropo como es el caso de la costilla humana, la dirección preferente del comportamiento viene dada por la alineación de las osteonas (unidad básica del hueso cortical que constituye el exterior de todo hueso largo). Esta alineación preferencialmente se produce en la dirección del eje baricéntrico del hueso, haciendo que el comportamiento mecánico en esa dirección axial difiera del observado en las direcciones radiales perpendiculares a este eje (plano de isotropía). La dirección del eje baricéntrico a lo largo del cual se alinean las osteonas viene dada por el vector unitario \mathbf{a} . El comportamiento diferente del material transversalmente isótropo debe verse reflejado en la ecuación constitutiva del material y ello se introduce mediante el uso de dos nuevos invariantes que alteran la respuesta únicamente cuando se trata de la dirección de alineación:

$$I_4(\mathbf{C}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C} \mathbf{a} , \quad I_5(\mathbf{C}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{C}^2 \mathbf{a} \quad (\text{A.79})$$

La función energía de deformación dependerá, por tanto, de cinco invariantes (los invariantes de un material isótropo y los propios de un material transversalmente isótropo) y, operando las derivadas pertinentes de la expresión (A.76), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{C} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{C} \otimes \mathbf{a}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Nótese que el hecho de que el material presente un comportamiento dispar en una de las direcciones con respecto al resto, se ve reflejado en los dos últimos términos de la ecuación constitutiva y ambos dependen del vector unitario que indica en que dirección se alinean las fibras.

En esta investigación y en otras situaciones la metodología empleada conlleva que las deformaciones sean obtenidas en la forma del tensor de deformaciones de Cauchy-Green \mathbf{E} en lugar de \mathbf{C} . Este cambio de tensor variable reescribe la tensión \mathbf{S} en la forma de la expresión (A.74), donde los invariantes son:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{E}) &= \text{tr}(\mathbf{E}) & I_4(\mathbf{E}, \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \mathbf{a} \\ I_2(\mathbf{E}) &= \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{E})^2 - \text{tr}(\mathbf{E}^2)] & I_5(\mathbf{E}, \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}^2 \mathbf{a} \\ I_3(\mathbf{E}) &= \det(\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Y la ecuación constitutiva se obtiene entonces derivando los invariantes de la función Ψ con respecto a \mathbf{E} siguiendo la expresión (A.74):

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{E}^{-1} + \dots \\ \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial I_4} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_5} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{E} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{E} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Véase que la forma de esta ecuación con la de la expresión (A.80) en función de \mathbf{C} es igual exceptuando la constante inicial; a pesar de que este resultado ya se obtiene automáticamente de la expresión (A.74), es fácilmente deducible si se aplica la regla de la cadena en la derivación de la función $\Psi(\mathbf{C})$ para introducir \mathbf{E} , donde:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{C} - \mathbf{I})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (\text{A.83})$$

anulando así la constante. Si bien las expresiones son prácticamente idénticas en los casos de utilizar los tensores \mathbf{C} o \mathbf{E} , las operaciones pueden ser más complejas usando el tensor de deformaciones de Green \mathbf{C} , dado que las componentes de este tensor dependen de las componentes de \mathbf{E} y algunas constantes que hacen que aparezcan más términos en el cálculo de la tensión \mathbf{S} .

A.3.3 Consideraciones termodinámicas

Los balances termodinámicos aportados en el capítulo teórico se han definido de forma particularizada al modelo que se propone. Esta sección describe las leyes termodinámicas de una forma más extensa y general, para posteriormente exponer las particularizaciones concretas a esta investigación.

Teorema de transporte de Reynolds

En el contexto termodinámico o en el desarrollo de ecuaciones constitutivas, es habitual expresar ciertas magnitudes físicas (como la masa) como una integral volumétrica o de superficie sobre una cierta región \mathcal{U} en su configuración espacial $\phi_t(\mathcal{U})$. No obstante, hay situaciones en las cuales resulta de interés definir la derivada temporal de dicha magnitud con el fin de conocer la tasa de cambio o dicho de otra forma, como varía a lo largo del tiempo, o definir balances (como se hará en la siguiente subsección) y para ello, se busca resolver la derivada temporal de una integral en el dominio en cuestión. El problema en este proceso es que la derivada y la integral no son conmutables cuando el dominio de integración es la región deformada $\phi_t(\mathcal{U})$, dado que esta depende del tiempo. Ello puede resolverse mediante el *teorema del transporte de Reynolds*, una generalización que permite operar derivadas de cantidades integradas mediante un cambio de coordenadas que hace independiente del tiempo la región de integración.

Consideremos inicialmente una función cualquiera $\Phi = \Phi(\mathbf{x}, t)$ que caracteriza cualquier cantidad física de una partícula por unidad de volumen y definamos la integral de volumen $I(t)$ que describa el estado del cuerpo en una región $\phi_t(\mathcal{U})$ deformada con volumen v :

$$I(t) = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \Phi(\mathbf{x}, t) dv \quad (\text{A.84})$$

El objetivo entonces es operar la derivada temporal de $I(t)$, pero la integral y la derivada no pueden conmutarse como se mencionó anteriormente, dado que la integración respecto a $\phi_t(\mathcal{U})$ depende del tiempo. Entonces, realizando un cambio de coordenadas por medio del mapeo $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ y de la relación de volúmenes $dv = J(\mathbf{X}, t)dV$, la derivada temporal de $I(t)$ se reescribe:

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \Phi(\mathbf{x}, t) dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \Phi(\phi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) dV \quad (\text{A.85})$$

Siendo ahora la región de integración \mathcal{U} independiente del tiempo, la derivada y la integral pueden conmutarse, lo cual resulta en:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \Phi(\mathbf{x}, t) dv &= \int_{\mathcal{U}} [\dot{\Phi}(\phi(\mathbf{X}, t), t) J(\mathbf{X}, t) + \Phi(\phi(\mathbf{X}, t), t) \dot{J}(\mathbf{X}, t)] dV \\ &= \int_{\mathcal{U}} \left[\dot{\Phi}(\mathbf{x}, t) + \Phi(\mathbf{x}, t) \frac{\dot{J}(\mathbf{X}, t)}{J(\mathbf{X}, t)} \right] dv \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

donde, en el último paso, el Jacobiano ha sido sacado como factor común, y se han reescrito las variables en la configuración actual. Finalmente, siendo $\dot{J}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t) \text{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, la derivada temporal de la integral $I(t)$ se escribe como:

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \Phi dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\dot{\Phi} + \Phi \text{div} \mathbf{v}) dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \text{div}(\Phi \mathbf{v}) \right) dv \quad (\text{A.87})$$

donde se han obviado los argumentos. Utilizando el teorema de divergencia:

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \Phi \text{div} \mathbf{v} dv = \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da \quad (\text{A.88})$$

Puede escribirse alternativamente la relación (A.87) como:

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \Phi dv = \int_{\partial \phi_t(\mathcal{U})} \Phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dv \quad (\text{A.89})$$

Relación conocida como el teorema de transporte de Reynolds. Si ahora, se considera una función del tipo $\Phi = \rho \psi$, donde ψ describiría una cantidad física por unidad de masa, entonces:

$$\dot{I}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \psi \, dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left(\overline{\dot{\rho} \psi} + \rho \psi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv \quad (\text{A.90})$$

En lo que al primer término de la integral respecta, usando la regla de la cadena:

$$\overline{\dot{\rho} \psi} = \dot{\rho} \psi + \rho \dot{\psi} = (-\rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \psi + \rho \dot{\psi} \quad (\text{A.91})$$

donde se ha reemplazado el equivalente de $\dot{\rho}$ de la relación:

$$\dot{\rho}(\mathbf{x}) + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (\text{A.92})$$

Sustituyendo (A.91) en (A.90), finalmente se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) \, dv \quad (\text{A.93})$$

Principios de balance de momentos

Sea $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ la velocidad en las configuraciones material y espacial respectivamente y $\rho_0(\mathbf{X})$ y $\rho(\mathbf{x}, t)$ las densidades en dichas configuraciones, el momento lineal o traslacional \mathbf{L} y angular o rotacional \mathbf{J} se definen:

$$\mathbf{L}(t) = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{U}} \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \, dV \quad (\text{A.94a})$$

$$\mathbf{J}(t) = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \, dV \quad (\text{A.94b})$$

Obviando ahora los argumentos de cada variable, la derivada temporal de ambos momentos nos permite obtener el balance del momento lineal y angular como:⁶

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \mathbf{v} \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \rho_0 \mathbf{V} \, dV = \mathbf{F}(t) \quad (\text{A.95a})$$

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \rho_0 \mathbf{V} \, dV = \mathbf{M}(t) \quad (\text{A.95b})$$

⁶Donde $D(\rho \mathbf{v})/Dt = \rho \dot{\mathbf{v}}$ dado que $\dot{\rho} = 0$ y $\overline{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = 0 + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}$.

Siendo $\mathbf{F}(t)$ la fuerza resultante y $\mathbf{M}(t)$ el momento resultante. Sea el campo de tensiones de Cauchy $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ el conjunto de las fuerzas por unidad de área $\partial\phi_t(\mathcal{U})$ cuya normal es \mathbf{n} y $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ las fuerzas por unidad de volumen de la región \mathcal{U} no asociadas a las tracciones, la fuerza resultante $\mathbf{F}(t)$ y el momento resultante $\mathbf{M}(t)$ alrededor de un punto \mathbf{x}_0 son:

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{t} \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} \, dv \quad (\text{A.96a})$$

$$\mathbf{M}(t) = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{b} \, dv \quad (\text{A.96b})$$

Reemplazando ambas definiciones en las expresiones (A.95), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{t} \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} \, dv \quad (\text{A.97a})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{b} \, dv \quad (\text{A.97b})$$

Estos balances pueden expresarse de una forma más compacta si se opera la derivada de la integral del momento lineal y angular (término izquierdo de las ecuaciones (A.97)). La derivada y la integral del término derecho de ambas expresiones no puede conmutarse, dado que la región de integración $\phi_t(\mathcal{U})$ depende del tiempo; sin embargo recurriendo al teorema del transporte de Reynolds en la forma de la ecuación (A.93), ambas derivadas pueden expresarse como:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv \quad (\text{A.98a})$$

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{v} \times \rho \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv \quad (\text{A.98b})$$

Entonces los balances pueden escribirse finalmente como:

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{t} \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} \, dv \quad (\text{A.99a})$$

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} \, dv = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{r} \times \mathbf{b} \, dv \quad (\text{A.99b})$$

Estos balances se cumplen debido a la existencia del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ que es simétrico y permite expresar el campo de tensiones como $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$. Con esta relación, la integral de superficie de \mathbf{t} puede reescribirse como una integral de volumen usando el teorema de divergencia. Así, la ecuación (A.99a) nos permite llegar a la *primera ecuación de movimiento de Cauchy*:

$$\int_{\phi_t(\mathcal{U})} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho\dot{\mathbf{v}}) dv = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho\dot{\mathbf{v}} \quad (\text{A.100})$$

la expresión derecha de (A.100) representa la primera ecuación del movimiento de Cauchy en su forma local para un volumen arbitrario. Análogamente a las ecuaciones (A.95), los balances de momento lineal y angular pueden expresarse en la configuración material como:

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = \int_{\mathcal{U}} \rho_0 \dot{\mathbf{V}} dV = \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{T} dS + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{B} dV \quad (\text{A.101a})$$

$$\dot{\mathbf{J}}(t) = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \rho_0 \dot{\mathbf{V}} dV = \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{T} dS + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{B} dV \quad (\text{A.101b})$$

Así mismo, siendo $\operatorname{Div}\mathbf{P} = J\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t)\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, la primera ecuación del movimiento de Cauchy se reescribe en esta configuración de la forma:

$$\operatorname{Div}\mathbf{P} + \mathbf{B} = \rho_0 \dot{\mathbf{V}} \quad (\text{A.102})$$

Primer principio de la termodinámica

Sea un sistema termodinámico, el cual intercambia energía no mecánica (térmica) con el entorno en el que actúa un campo de tensiones \mathbf{t} por unidad de superficie y unas fuerzas por unidad de volumen \mathbf{b} no asociadas al campo de tensiones, el balance de energía de este sistema se expresa, de forma concisa como:

$$\frac{d}{dt}(T(t) + \mathcal{E}(t)) = P_m(t) + \mathcal{Q}(t) \quad (\text{A.103})$$

Este balance se traduce en que la tasa de cambio la energía cinética $T(t)$ y de la energía interna $\mathcal{E}(t)$ es debido a la potencia mecánica [externa] $P_m(t)$ relacionada con las fuerzas que actúan en el sistema más la potencia térmica $\mathcal{Q}(t)$ generada por las fuentes y flujos de calor. La potencia mecánica $P_m(t)$ se debe a las fuerzas que actúan sobre la región \mathcal{U} , tal que:

$$P_m = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} \, dV + \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} \, dA \quad (\text{A.104})$$

y la potencia térmica [no mecánica] $\mathcal{Q}(t)$ viene dada por los flujos de calor $h = -\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}$ por unidad de la superficie $\partial\phi_t(\mathcal{U})$ con vector unitario \mathbf{n} o entrada de calor a través del contorno de la región $\phi_t(\mathcal{U})$ y por las fuentes de calor $r = r(\mathbf{x}, t)$ por unidad de volumen [calor generado]:

$$\mathcal{Q}(t) = \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} h \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} r \, dv = \int_{\partial\mathcal{U}} H \, dA + \int_{\mathcal{U}} R \, dV \quad (\text{A.105})$$

Por otro lado, la energía cinética $T(t)$ del cuerpo que ocupa la región \mathcal{U} es:

$$T(t) = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \frac{\rho}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{U}} \frac{\rho_0}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \, dV \quad (\text{A.106})$$

donde $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ es la densidad del cuerpo y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ el campo de velocidades. Finalmente, la energía interna $\mathcal{E}(t)$ se expresa:

$$\mathcal{E}(t) = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} u(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{U}} U(\mathbf{X}, t) \, dV \quad (\text{A.107})$$

donde $u = u(\mathbf{x}, t)$ es la energía interna por unidad de volumen. Cuando la energía es puramente mecánica (es decir, $\mathcal{Q}=0$), la tasa de cambio de la energía interna es igual a la potencia interna, que describe la respuesta de la región \mathcal{U} ante las fuerzas aplicadas:

$$P_{int} = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dv = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, dV \quad (\text{A.108})$$

siendo \mathbf{d} el tensor velocidad de deformación, que surge de la descomposición del tensor gradiente de velocidades $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ en $\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$, donde \mathbf{d} es precisamente el tensor velocidad de deformación $d_{ij} = d_{ji}$ [simétrico] y \mathbf{w} el tensor velocidad de rotación $w_{ij} = -w_{ji}$ [antisimétrico]. Dado que $\boldsymbol{\sigma}$ es simétrico, entonces $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{w} = 0$ tal que $\mathbf{d} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$, llegando entonces, mediante un cambio a coordenadas materiales, a que $J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$ como se refleja en la expresión (A.108)₂.

Sin embargo, cuando se consideran los efectos mecánicos y térmicos el cambio de energía interna es la suma de la potencia interna y la potencia térmica:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = P_{int}(t) + \mathcal{Q}(t) \quad (\text{A.109})$$

Reuniendo las expresiones (A.104)-(A.107) y reemplazándolas en (A.103), el balance de energía se expresa:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(u)} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) dv = \int_{\phi_t(u)} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) dv + \int_{\partial\phi_t(u)} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + h) da \quad (\text{A.110a})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \left(\frac{\rho_0}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + U \right) dV = \int_{\mathcal{U}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{V} + R) dV + \int_{\partial\mathcal{U}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{V} + H) dA \quad (\text{A.110b})$$

Esta relación es precisamente la primera ley de la termodinámica en su forma global, en la configuración espacial y material respectivamente.

El flujo de calor $h = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ es la suma del calor neto entrante más la energía mecánica disipada en alterar la microestructura. En el caso que nos ocupa, asumiremos que no se generará una cantidad de calor importante durante la deformación del material ($r \approx 0$) y el flujo de calor dado por q_n será energía dedicada únicamente a la fisuración y alteración de la microestructura del tejido óseo. Sin embargo y de cara a las posteriores deducciones se mantendrá la expresión anterior, haciendo las simplificaciones oportunas al final de la sección.

La primera ley de la termodinámica (A.110) puede expresarse en su forma local, si se reformula la integral de superficie como una integral de volumen mediante el teorema de divergencia:

$$\int_{\partial\phi_t(u)} h da = - \int_{\partial\phi_t(u)} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da = - \int_{\phi_t(u)} \text{div} \mathbf{q} dv$$

Reemplazando en la potencia térmica $\mathcal{Q}(t)$ (A.105):

$$\mathcal{Q}(t) = \int_{\phi_t(u)} (-\text{div} \mathbf{q} + r) dv = \int_{\mathcal{U}} -(\text{div} \mathbf{Q} + R) dV \quad (\text{A.111})$$

y sustituyendo esta expresión en (A.109), junto con la energía interna (A.107) y la potencia interna (A.108), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(u)} u dv = \int_{\phi_t(u)} (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \text{div} \mathbf{q} + r) dv \quad (\text{A.112a})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} U dV = \int_{\mathcal{U}} (\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \text{div} \mathbf{Q} + R) dV \quad (\text{A.112b})$$

En la configuración material, la integral de la energía interna y la derivada tem-

poral pueden intercambiarse (dado que la región \mathcal{U} no depende del tiempo) y considerando un volumen arbitrario, se llega directamente a la forma local de la primera ley de la termodinámica:

$$\dot{U} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + R \quad (\text{A.113})$$

En la configuración espacial se precisa hacer un cambio de coordenadas para conmutar la derivada y la integral y tras una serie de operaciones se llega a la expresión:

$$\dot{u} + \operatorname{div} \mathbf{q} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + r \quad (\text{A.114})$$

Segundo principio de la termodinámica

Introduzcamos ahora la entropía, como medida del desorden del sistema asociada a procesos irreversibles:

$$\mathcal{H}(t) = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \eta(\mathbf{x}, t) \, dv = \int_{\mathcal{U}} \eta_0(\mathbf{X}, t) \, dv \quad (\text{A.115})$$

siendo $\mathcal{H}(t)$ la entropía total en la región \mathcal{U} sin deformar o $\phi_t(\mathcal{U})$ deformada, y $\eta_0(\mathbf{X}, t)$, $\eta(\mathbf{x}, t)$ la entropía por unidad de volumen (material o deformado, respectivamente), que se relaciona en ambas configuraciones como $\eta_0(\mathbf{X}, t) = J(\mathbf{X}, t)\eta(\mathbf{x}, t)$.

La entropía se introduce en el sistema debido a los flujos y fuentes no mecánicos [térmicos]:

$$\tilde{\mathcal{Q}} = - \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \frac{r}{\Theta} \, dv = - \int_{\partial\mathcal{U}} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \cdot \mathbf{N} \, dA + \int_{\mathcal{U}} \frac{R}{\Theta} \, dV \quad (\text{A.116})$$

donde $\tilde{\mathcal{Q}}$ se define como la entropía que se introduce en el sistema, que viene dada por las fuentes de entropía r/Θ por unidad de volumen y tiempo y los flujos de entropía \mathbf{q}/Θ por unidad de superficie. Como puede observarse, estas fuentes y flujos de entropía están relacionados con las fuentes y flujos no mecánicos definidos en el primer principio de la termodinámica, por medio de la temperatura absoluta Θ . En el caso particular de este estudio, no se consideran efectos térmicos importantes y por ello, no será la temperatura la involucrada en el cambio de desorden de la microestructura, sino un parámetro $1/\beta = \Theta$ análogo a esta temperatura termodinámica que estará relacionado con la distribución de la energía

entre los microestados posibles dadas unas microfisuras existentes. Mientras en un sistema termodinámico el aumento de temperatura supone que los microestados más energéticos tengan mayores probabilidades de ocupación, en nuestro caso será el parámetro $1/\beta$ el que defina estas probabilidades. Sin embargo, aquí se mantendrá el parámetro Θ en el desarrollo, sustituyendo al final de este apartado su relación con β .

La producción total de entropía $\Gamma(t)$, vendrá dada por la diferencia entre la tasa de cambio de la entropía \mathcal{H} en la región \mathcal{U} menos la entropía que se introduce en el sistema ($\Gamma(t) = \dot{\mathcal{H}}(t) - \tilde{\mathcal{Q}}(t)$), tal que:

$$\Gamma(t) = \frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \eta \, dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \frac{\mathbf{q}}{\Theta} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \frac{r}{\Theta} \, dv \geq 0 \quad (\text{A.117})$$

o en su forma material:

$$\Gamma(t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \eta_0 \, dV + \int_{\partial\mathcal{U}} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \cdot \mathbf{N} \, dA - \int_{\mathcal{U}} \frac{R}{\Theta} \, dV \geq 0 \quad (\text{A.118})$$

Llegando así a la segunda ley de la termodinámica en su forma global, también conocida como el principio de desigualdad de la entropía, que postula la irreversibilidad del proceso termodinámico $\Gamma(t) \geq 0$. este principio muestra la tendencia de un sistema real en el cual la entropía debe aumentar siempre a medida que se solicita el sistema, dado que se inicia la nucleación y propagación de fisuras con ausencia de regeneración.

Si recuperamos ahora la expresión material del principio de desigualdad, la integral de superficie puede reescribirse mediante el teorema de divergencia, como:

$$\int_{\partial\mathcal{U}} \frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \cdot \mathbf{N} \, dA = \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{Q}}{\Theta} \right) \, dV = \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta^2} [\mathbf{Q} \cdot \nabla \Theta] \, dV$$

que puede reemplazarse en el balance, donde la derivada temporal y la integral de η_0 pueden conmutarse dado que la región de integración \mathcal{U} no depende del tiempo:

$$\int_{\mathcal{U}} \left(\dot{\eta}_0 + \operatorname{div} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta^2} [\mathbf{Q} \cdot \nabla \Theta] - \frac{R}{\Theta} \right) \, dV \geq 0$$

y para un volumen arbitrario, entonces:

$$\dot{\eta}_0 + \operatorname{div} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta^2} [\mathbf{Q} \cdot \nabla \Theta] - \frac{R}{\Theta} \geq 0 \quad (\text{A.119})$$

Esta misma relación puede expresarse, en coordenadas espaciales, como:

$$\dot{\eta} + \operatorname{div} \mathbf{q} - \frac{1}{\Theta^2} [\mathbf{q} \cdot \nabla \Theta] - \frac{r}{\Theta} \geq 0 \quad (\text{A.120})$$

de las ecuaciones (A.113) y (A.114) puede aislarse la fuente de calor R y r , respectivamente, para introducir en las desigualdades de la entropía, tal que:

$$\Theta \dot{\eta}_0 - \dot{U} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \frac{1}{\Theta} [\mathbf{Q} \cdot \nabla \Theta] \geq 0 \quad (\text{A.121})$$

$$\Theta \dot{\eta} - \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \frac{1}{\Theta} [\mathbf{q} \cdot \nabla \Theta] \geq 0 \quad (\text{A.122})$$

Otra relación importante surge de la función de energía de deformación Ψ , ampliamente utilizada en el desarrollo de modelos constitutivos. La función Ψ está relacionada con la energía que almacena el material cuando es deformado y, cuando el material puede asumirse como hiperelástico y se recurren a variables térmicas, la función energía de deformación se define como función de energía libre de Helmholtz, que toma la forma de:

$$\psi = u - \Theta \eta, \quad \Psi = U - \Theta \eta_0 \quad (\text{A.123})$$

La función energía de deformación Ψ es la base de cualquier modelo constitutivo a desarrollar y por ello, es interesante expresar la desigualdad de la entropía en función de Ψ . Para ello, puede derivarse la expresión anterior, tal que:

$$\dot{\psi} = \dot{u} - \dot{\Theta} \eta - \Theta \dot{\eta} \quad \rightarrow \quad \Theta \dot{\eta} = \dot{u} - \dot{\psi} - \dot{\Theta} \eta$$

Reemplazando entonces esta forma en la ecuación (A.122), se obtiene la desigualdad reducida de la disipación:

$$\dot{\Theta} \eta + \dot{\psi} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \frac{1}{\Theta} [\mathbf{q} \cdot \nabla \Theta] \leq 0 \quad (\text{A.124})$$

y en su forma material:

$$\dot{\Theta}\eta_0 + \dot{\Psi} - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \frac{1}{\Theta} [\mathbf{Q} \cdot \nabla \Theta] \leq 0 \quad (\text{A.125})$$

Balances termodinámicos particularizados

Los principios termodinámicos expuestos en esta sección parten de la existencia de una transferencia de energía térmica [no mecánica] en forma de flujos y fuentes de calor, que a su vez están relacionados con la variación de la entropía del material. Sin embargo y dado que la entropía es una medida de desorden e irreversibilidad, su variación también se produce en sistemas en los cuales no necesariamente hay una fuente de calor o cambios térmicos sustanciales. Este es el caso que nos ocupa, en el cual un aumento de la sollicitación por encima de un nivel admisible supondrá la nucleación y propagación de microfisuras en el hueso, lo cual conlleva un incremento de la entropía que representa el desorden y la irreversibilidad de la microfisuración. Dado que el tejido óseo no se regenerará (no consideraremos regeneración por acción de las células óseas dado que no es un caso *in vivo* y, además en estos casos, la velocidad de regeneración es mucho menor a la de propagación) la microfisuración será un proceso irreversible y, por ello, la variación de la entropía debe ser $\Gamma(t) \geq 0$ necesariamente. Así, este aumento de entropía debe producirse a medida que se daña el hueso, a pesar de que las fuentes de calor no existan y de que no haya variaciones sustanciales de la temperatura. Esto obliga a replantear los balances anteriormente expuestos al caso particular que se trata en este estudio. Para ello supondremos que:

- No hay fuentes de calor que introduzcan una energía térmica sustancial $r \approx 0$, $R \approx 0$.
- Las magnitudes h y H definidas como flujos de calor, representarán en realidad flujos energéticos que están únicamente dedicados a la deformación irreversible del material, es decir, a la nucleación y propagación de microfisuras y la alteración de la microestructura.
- La temperatura absoluta será sustituida por $\Theta = 1/\beta$, donde $1/\beta$ será un parámetro análogo a la temperatura que en realidad representará la forma en la que la energía se distribuye entre los macroestados para las microfisuras existentes.

Con esto, el aumento de la entropía estará gobernado por el flujo disipativo de energía, es decir, por la existencia de una energía invertida en la nucleación y propagación de microfisuras.

Presentemos entonces las leyes termodinámicas particularizadas para este estudio. Anulando las fuentes de calor r y R , la primera ley de la termodinámica o balance de energía, se expresa como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \left(\frac{\rho}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + u \right) dv = \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} + h) da \quad (\text{A.126a})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \left(\frac{\rho_0}{2} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + U \right) dV = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{V} dV + \int_{\partial\mathcal{U}} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{V} + H) dA \quad (\text{A.126b})$$

Relación que postula que el cambio de energía cinética y energía interna es debido al campo de tensiones y otras fuerzas que actúan sobre la región \mathcal{U} más la energía H que promueve la propagación de microfisuras. De esta forma, la entropía que se introduce en el sistema depende de esta energía invertida en los procesos irreversibles, tal que:

$$\tilde{\mathcal{Q}} = - \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \beta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da = - \int_{\partial\mathcal{U}} \beta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dA \quad (\text{A.127})$$

donde β trata con la distribución de la energía en los microestados posibles. Así, el segundo principio de la termodinámica o desigualdad de la entropía es:

$$\frac{d}{dt} \int_{\phi_t(\mathcal{U})} \eta dv + \int_{\partial\phi_t(\mathcal{U})} \beta \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} da \geq 0 \quad (\text{A.128a})$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \eta_0 dV + \int_{\partial\mathcal{U}} \beta \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dA \geq 0 \quad (\text{A.128b})$$

o, en su forma local:

$$\left(\frac{\eta}{\beta} + \dot{\psi} \right) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \beta \left[\mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\beta} \right) \right] \leq 0 \quad (\text{A.129a})$$

$$\left(\frac{\eta_0}{\beta} + \dot{\Psi} \right) - \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} + \beta \left[\mathbf{Q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\beta} \right) \right] \leq 0 \quad (\text{A.129b})$$

ANEXO A. ANEXO: CONCEPTOS DE MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS

B

Anexo: Cálculos

Este apéndice recoge el detalle de algunos cálculos mencionados en el resto del capítulo y que no se detallaron en la exposición para no interrumpir el hilo argumental con cuestiones de cálculo que son más periféricas.

B.1 Desarrollo de la serie de potencias

El desarrollo en serie de potencias de sumatorios ha sido utilizado en la sección 4.1.3 para reescribir el sumatorio de la función de partición Z . Aquí se retoma el desarrollo del sumatorio cerrado para dicha función Z de la ecuación (4.17), definida como:

$$Z = \sum_{k=1}^N r^k e^{-\beta\psi_0 k} \quad (\text{B.1})$$

Para desarrollar la sumatoria cerrada desde $k = 1$ hasta N , definamos una función $\varphi = re^{-\beta\psi_0}$ tal que $\varphi^k = r^k e^{-\beta\psi_0 k}$:

$$Z = \sum_{k=1}^N \varphi^k \quad (\text{B.2})$$

Para un sumatorio desde 0 hasta N , este puede desarrollarse como una serie de potencias finita, que toma la forma de:

$$\sum_{k=0}^N \varphi^k = \frac{1 - \varphi^{N+1}}{1 - \varphi}$$

Así, para considerar el sumatorio desde $k = 1$, se considera el desarrollo anterior restándole el término inicial $k = 0$:

$$\sum_{k=1}^N \varphi^k = \sum_{k=0}^N \varphi^k - \varphi^0 = \sum_{k=0}^N \varphi^k - 1 = \frac{1 - \varphi^{N+1}}{1 - \varphi} - 1$$

Simplificando la expresión anterior:

$$\sum_{k=1}^N \varphi^k = \frac{1 - \varphi^{N+1}}{1 - \varphi} - 1 = \frac{1 - \varphi^{N+1} - 1 + \varphi}{1 - \varphi} = \varphi \frac{1 - \varphi^N}{1 - \varphi}$$

Reemplazando la función $\varphi = re^{-\beta\psi_0}$, se llega a la expresión (4.17):

$$Z = \sum_{k=1}^N (re^{-\beta\psi_0})^k = re^{-\beta\psi_0} \frac{1 - (re^{-\beta\psi_0})^N}{1 - re^{-\beta\psi_0}} \quad (\text{B.3})$$

o equivalentemente:

$$Z = \sum_{k=1}^N r^k e^{-\beta\psi_0 k} = re^{-\beta\psi_0} \frac{1 - r^N e^{-\beta\psi_0 N}}{1 - re^{-\beta\psi_0}} \quad (\text{B.4})$$

B.2 Particularización del modelo constitutivo

En esta sección se exponen los cálculos intermedios para la obtención del modelo constitutivo para la sollicitación de tracción simple y de flexión a tres puntos.

Para obtener el tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$, es necesario partir de

la función energía de deformación Ψ_0 , definida de forma general en la expresión (4.21):

$$\Psi_0(\mathbf{E}) = \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_1^3 + \gamma_1 I_2 + \gamma_2 I_1 I_2 + \nu I_3 + \kappa_1 I_4^2 + \kappa_2 I_4^3 + \varsigma_1 I_5 + \varsigma_2 I_4 I_5$$

Con esta función, el tensor de tensiones $\bar{\mathbf{S}}$, se obtiene derivando la función Ψ_0 respecto al tensor de deformaciones \mathbf{E} como indica la expresión (4.1):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \Psi_0(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} &= \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial \Psi_0}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial I_2} \mathbf{E} + I_3 \frac{\partial \Psi_0}{\partial I_3} \mathbf{E}^{-1} \\ &+ \frac{\partial \Psi_0}{\partial I_4} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial I_5} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{E} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{E} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned}$$

obteniendo la forma (4.23) de este tensor:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &= \left((2\alpha_1 + \gamma_1) I_1 + 3\alpha_2 I_1^2 + \gamma_2 (I_1^2 + I_2) \right) \mathbf{I} - (\gamma_1 + \gamma_2 I_1) \mathbf{E} + \nu \mathbf{A}_0 \dots \\ &\dots + (2\kappa_1 I_4 + 3\kappa_2 I_4^2 + \varsigma_2 I_5) \mathbf{A}_1 + (\varsigma_1 + \varsigma_2 I_4) \mathbf{A}_2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

donde $\mathbf{A}_0 = I_3 \mathbf{E}^{-1}$, $\mathbf{A}_1 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$ y $\mathbf{A}_2 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{E} \mathbf{a} + \mathbf{a} \mathbf{E} \otimes \mathbf{a}$.¹

Desarrollemos entonces los términos \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 ; siendo $I_3 = \det(\mathbf{E})$, el tensor \mathbf{A}_0 se expresa:

$$\mathbf{A}_0 = I_3 \mathbf{E}^{-1} = \det(\mathbf{E}) \frac{\text{adj}(\mathbf{E}^T)}{\det(\mathbf{E})} = \text{adj}(\mathbf{E}^T) \quad (\text{B.6})$$

Determinando la adjunta de \mathbf{E} :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} E_{yy}E_{zz} - E_{yz}^2 & E_{xz}E_{yz} - E_{xy}E_{zz} & E_{xy}E_{yz} - E_{xz}E_{yy} \\ E_{xz}E_{yz} - E_{xy}E_{zz} & E_{xx}E_{zz} - E_{xz}^2 & E_{xy}E_{xz} - E_{yz}E_{xx} \\ E_{xy}E_{yz} - E_{xz}E_{yy} & E_{xy}E_{xz} - E_{yz}E_{xx} & E_{xx}E_{yy} - E_{xy}^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Por otro lado, para un vector genérico $\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}}$ que define la dirección

¹Esta abreviación se ha hecho por conveniencia para expresar adecuadamente los cálculos posteriores particulares para cada sollicitación.

preferencial de alineación de las osteonas, el tensor $\mathbf{A}_1 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$ es:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

y, finalmente, el tensor $\mathbf{A}_2 = \mathbf{a} \otimes \mathbf{E}\mathbf{a} + \mathbf{a}\mathbf{E} \otimes \mathbf{a}$ es:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_x \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_x \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i & a_x \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i \\ a_y \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_y \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i & a_y \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i \\ a_z \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_z \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i & a_z \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_x \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_y \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_z \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i \\ a_x \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i & a_y \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i & a_z \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i \\ a_x \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i & a_y \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i & a_z \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

siendo $i = 1, 2, 3 = x, y, z$. Sumando ambas matrices:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2a_x \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_x \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i + a_y \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_x \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i + a_z \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i \\ a_x \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i + a_y \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & 2a_y \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i & a_y \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i + a_z \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i \\ a_x \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i + a_z \sum_{i=1}^3 E_{xi} a_i & a_y \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i + a_z \sum_{i=1}^3 E_{yi} a_i & 2a_z \sum_{i=1}^3 E_{zi} a_i \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Según el tipo de sollicitación, el tensor de deformaciones \mathbf{E} , así como el vector de dirección preferente \mathbf{a} tomarán una forma específica, hecho que a su vez repercutirá en los invariantes, la expresión de la función Ψ_0 y el tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$. La forma particular de los tensores \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 para cada sollicitación se dará en las subsecciones a continuación, expresando finalmente el tensor $\bar{\mathbf{S}}$.

B.2.1 Tracción simple

El tensor de deformaciones y el vector de alineación preferencial de las osteonas (según la base elegida en este estudio) en una sollicitación de tracción uniaxial

toma la forma general de:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{zz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y los invariantes son:

$$I_1(\mathbf{E}) = \text{tr}(\mathbf{E}) = E_{xx} + E_{yy} + E_{zz}$$

$$I_2(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}[(\text{tr}\mathbf{E})^2 - \text{tr}(\mathbf{E}^2)] = E_{xx}E_{yy} + E_{xx}E_{zz} + E_{yy}E_{zz}$$

$$I_3(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{E}) = E_{xx}E_{yy}E_{zz}$$

$$I_4(\mathbf{E}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}\mathbf{a} = E_{xx}$$

$$I_5(\mathbf{E}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{E}^2\mathbf{a} = E_{xx}^2$$

que deben ser reemplazados en la función energía de deformación sin fisuración Ψ_0 para obtener posteriormente la forma específica del tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$ (ecuación (B.5)).

Siendo las deformaciones $E_{yy} = E_{zz}$, la función energía de deformación sin fisuración Ψ_0^c para tracción simple es, como se mostró en la ecuación (4.50):

$$\begin{aligned} \Psi_0^c(\mathbf{E}) &= \alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + \alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^3 + \gamma_1(2E_{xx}E_{yy} + E_{yy}^2) + \dots \\ &\dots + \gamma_2(2E_{xx}^2E_{yy} + 5E_{xx}E_{yy}^2 + 2E_{yy}^3) + \nu(E_{xx}E_{yy}^2) + \dots \\ &\dots + \rho_1E_{xx}^2 + \rho_2E_{xx}^3 \end{aligned}$$

Particularizando entonces los tensores \mathbf{A}_0 , \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 en tracción simple para obtener el tensor de tensiones sin fisuración $\bar{\mathbf{S}}$:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} E_{yy}^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_{xx}E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{xx}E_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2E_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Que, reemplazado en la expresión (B.5):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} = & ((2\alpha_1 + \gamma_1)I_1 + (3\alpha_2 + \gamma_2)I_1^2 + \gamma_2 I_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \dots \\ & \dots - (\gamma_1 + \gamma_2 I_1) \begin{bmatrix} E_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{yy} \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} E_{yy}^2 & 0 & 0 \\ 0 & E_{xx}E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & E_{xx}E_{yy} \end{bmatrix} + \dots \\ & \dots + (2\kappa_1 I_4 + 3\kappa_2 I_4^2 + \varsigma_2 I_5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (\varsigma_1 + \varsigma_2 I_4) \begin{bmatrix} 2E_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

reemplazando los invariantes, las componentes no nulas de la tensión son:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xx}^c = & 2\alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy}) + 3\alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + 2\gamma_1 E_{yy} + \dots \\ & \dots + \gamma_2 E_{yy}(4E_{xx} + 5E_{yy}) + \nu E_{yy}^2 + 2\rho_1 E_{xx} + 3\rho_2 E_{xx}^2 \\ \bar{S}_{yy}^c = & \bar{S}_{zz}^c = 2\alpha_1(E_{xx} + 2E_{yy}) + 3\alpha_2(E_{xx} + 2E_{yy})^2 + \gamma_1(E_{xx} + E_{yy}) + \dots \\ & \dots + \gamma_2(E_{xx}^2 + 5E_{xx}E_{yy} + 3E_{yy}^2) + \nu E_{xx}E_{yy} = 0 \end{aligned}$$

B.3 Cálculo de los parámetros geométricos de un CT

Para describir la geometría del hueso cortical de costilla humana completa, se ha recurrido a una Tomografía Computarizada de una costilla humana genérica, realizada para estudios previos no vinculados con esta investigación. Sobre estos conjuntos de tomografías se han realizado mediciones para determinar los parámetros geométricos que intervienen en el cálculo de las tensiones y deformaciones en flexión. Cada conjunto de CTs está formado por una colección de imágenes de las secciones paralelas de la muestra que permiten una reconstrucción tridimensional de la misma (Figura B.1). Este conjunto fue procesado mediante el sub-package BoneJ[®] del software biomédico ImageJ[®], que incluye de una amplia gama de herramientas relacionadas la determinación de características geométricas del hueso.



Figura B.1. Reconstrucción tridimensional de una costilla humana completa a partir de las imágenes de la Tomografía Computarizada (CT).

Previamente al cálculo de los parámetros geométricos se aisló el hueso cortical del trabecular, dado que el tejido esponjoso o trabecular no será considerado en este estudio por su baja contribución de las propiedades mecánicas con respecto al hueso cortical. La discriminación del hueso cortical se hizo estableciendo un umbral de 600 Hounsfield (HU), dentro del rango de los valores utilizados en otros estudios. Tras ello, se utilizó módulo de cálculo de geometría de BoneJ[®] para determinar los parámetros geométricos de interés.

En la sección 4.2.1 se ha definido el sistema de ejes utilizado en esta investigación en el cual, la costilla se encuentra contenida en el plano definido por los ejes

XY , siendo X el eje longitudinal de la muestra (de extremo a extremo), Y el eje vertical y Z perpendicular al plano de la muestra y en dirección de la profundidad (Figura B.2). Este sistema de ejes se corresponde en el CT a los mostrados en la Figura B.3(a). Mediante el módulo de BoneJ[®], se determinó para cada sección la posición del centroide (x_G, y_G) sobre el plano de corte, el área A de la sección cortical, los momentos de inercia (I_{yy}, I_{zz}), producto de inercia (I_{yz}), el primer momento de área m_z , el espesor promedio, el calibre (diámetro máximo) en las direcciones $y z$ y la cuerda máxima (distancia máxima desde el centroide) en ambas direcciones.

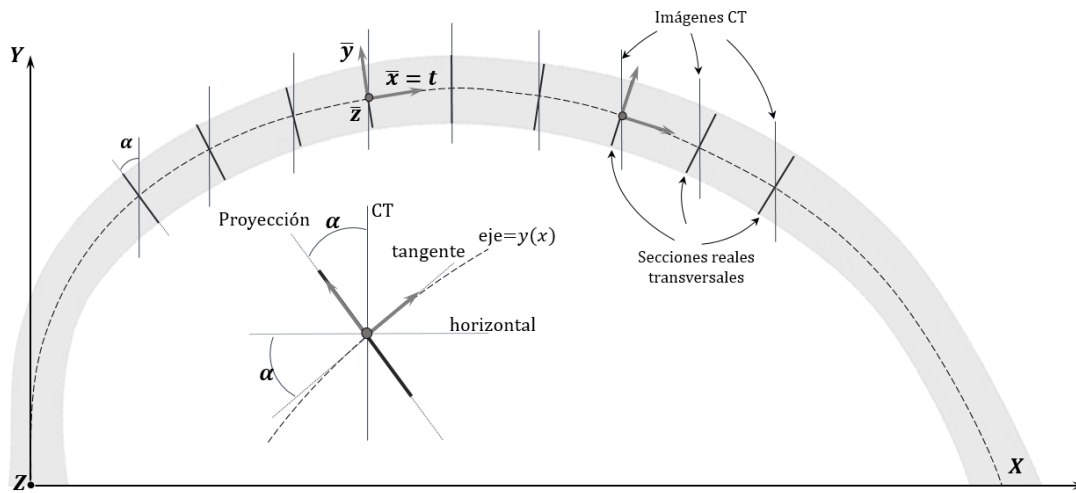


Figura B.2. Sistema de referencia usado en los cálculos de tensiones y deformaciones e impuesto en el CT (XYZ), donde las líneas verticales corresponden a las imágenes del CT y las perpendiculares al eje baricéntrico las secciones reales. El ángulo de proyección α se ha determinado ajustando un polinomio $y(x)$ del eje baricéntrico y se define como el ángulo comprendido entre la horizontal y la tangente.

Sin embargo, la posición de las costillas en el CT no se corresponde a la descrita anteriormente, dado que la costilla no está contenida en el plano principal. Para ajustar su posición se realizó una rotación del eje baricéntrico tal que el eje en la posición final esté contenido en el plano XY . Una rotación tridimensional de un ángulo cualquiera puede descomponerse en tres rotaciones de ángulos θ, β y γ alrededor de los ejes X, Y, Z respectivamente. La rotación rígida de un cuerpo tridimensional puede operarse mediante una matriz de rotaciones, tal que dado un punto en la posición \mathbf{r} , este termina en la posición $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{R}\mathbf{r}$. Así, la matriz de rotaciones \mathbf{R} que define la rotación general del sólido, puede descomponerse en tres matrices de rotación, que representan las rotaciones alrededor de los ejes

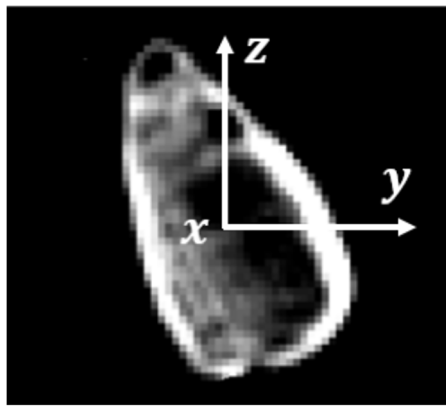
B.3. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS DE UN CT

X, Y, Z , tal que $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\theta, \beta, \gamma} = \mathbf{R}_{\gamma}^Z \mathbf{R}_{\beta}^Y \mathbf{R}_{\theta}^X$. Si esto se escribe en forma matricial, la matriz de rotaciones \mathbf{R} se determina de la forma:

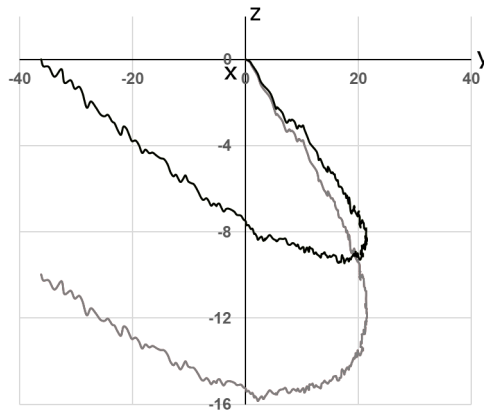
$$\mathbf{R}_{\theta, \beta, \gamma} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Para operar la rotación del eje baricéntrico, se situó el origen de coordenadas en el extremo posterior de la costilla (de la misma forma que se hizo en los cálculos de la tensión y la deformación, ver Figura B.2), siendo entonces la posición del extremo posterior $r_P = (0, 0, 0)$. Para conocer los ángulos de rotación se determinaron las posiciones de dos puntos cuyas posiciones finales tras la rotación son conocidas: por un lado, el extremo anterior de la muestra debe terminar contenido en el plano XY y sobre el eje X tal que $r_A = (x_A, y_A, z_A) \mapsto (L_x, 0, 0)$ siendo L_x la distancia de extremo a extremo y, por otro lado, el punto central superior de la curva de la costilla debe estar contenido en el plano XY , por tanto $r_C = (x_C, y_C, z_C) = (\bar{x}_C, \bar{y}_C, 0)$. Tanto L_x como \bar{x}_C y \bar{y}_C son conocidos, ya que pueden determinarse mediante los módulos de su posición respecto al sistema de ejes. Así, los ángulos θ, β y γ pueden encontrarse fácilmente mediante trigonometría y las consideraciones anteriores. Dado que las rotaciones se operaron respecto a una base fija, la rotación puede realizarse en cualquier orden alrededor de los ejes X, Y, Z . Por consideraciones prácticas, se operó primero la rotación \mathbf{R}_{β}^Y del ángulo β alrededor del eje Y , seguido de la rotación \mathbf{R}_{γ}^Z y finalmente \mathbf{R}_{θ}^X . Las tres rotaciones se muestran en la Figura B.3.

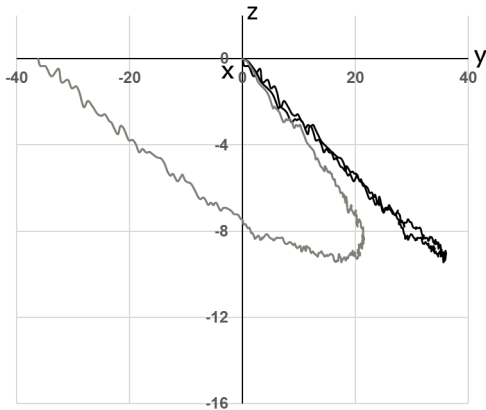
Véase entonces que las magnitudes geométricas determinadas mediante BoneJ[®] determinadas corresponden a las secciones transversales paralelas de la costilla (es decir, las imágenes del CT) y no las secciones perpendiculares al eje baricéntrico. Por este motivo, todos los parámetros geométricos obtenidos fueron proyectados desde las secciones transversales del CT a las perpendiculares al eje, obteniendo así los valores reales de cada parámetro. Para ello, se ajustó el eje baricéntrico mediante un polinomio $y(x)$ de quinto orden. La derivada $y'(x)$ del polinomio x se corresponde a pendiente de la línea tangente al eje baricéntrico en cada punto, es decir, proporciona la tangente del ángulo $\tan \alpha$ que forman la línea tangente al eje baricéntrico con la horizontal (Figura B.2). Nótese entonces que las proyecciones deben hacerse sobre las dimensiones verticales y ya que en la dirección de la profundidad de la costilla z estas permanecen constantes antes y



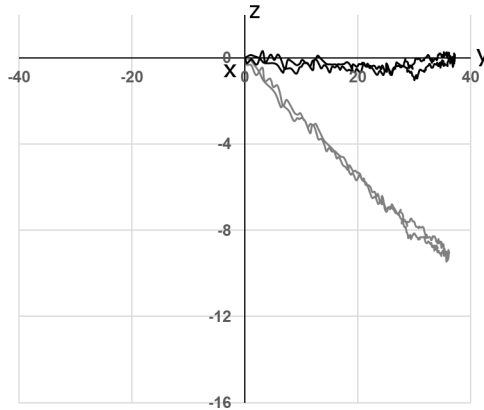
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura B.3. (a) Imagen del CT correspondiente a una sección central de la costilla humana y (b-d) representación del eje baricéntrico y rotaciones desde las posiciones previas (línea gris) a las finales (línea negra); (b) rotación alrededor del eje Y , donde el extremo anterior se encuentra finalmente en $z = 0$, (c) rotación alrededor de Z tal que la costilla se encuentra ahora en un plano y sus extremos se encuentran en $y = z = 0$ y (d) rotación alrededor de X quedando la costilla contenida en el plano XY .

después de la proyección. Así, las magnitudes reales se determinaron de la forma:

$$A = \bar{A} \cos \alpha$$

$$t = \bar{t}/2(1 + \cos \alpha)$$

$$I_n = I_{yy} \cos \alpha$$

$$I_b = I_{zz} \cos^3 \alpha$$

$$I_{nb} = I_{yz} \cos^2 \alpha$$

$$m_b = m_z \cos^2 \alpha$$

$$R_n = R_y \cos \alpha$$

$$R_b = R_z$$

B.4. DESCRIPCIÓN DEL EJE BARICÉNTRICO EN LA COSTILLA HUMANA COMPLETA

siendo $\bar{A}, \bar{t}, I_{yy}, I_{zz}, m_z, R_y, R_z$ las dimensiones del CT y $A, t, I_n, I_b, I_{nb}, m_b, R_n, R_b$ las dimensiones proyectadas y donde A es el área, t el espesor promedio, I_{ij} los momentos de inercia respecto a los ejes de la sección, m_z el momento parcial respecto al eje z , R_y la distancia a las fibras superior e inferior desde el centroide sobre el eje Z y R_z la distancia en profundidad desde el centroide sobre el eje Y (en las dimensiones proyectadas, $y \equiv \mathbf{n}$ y $z \equiv \mathbf{b}$). Así, se obtuvieron todas las dimensiones necesarias para el cálculo de tensiones y deformaciones del CT.

Finalmente, dado que las dimensiones de las costillas difieren unas de otras, se utilizó un reescalado para aproximar las dimensiones del CT a las de cada costilla utilizada en los estudios. Este reescalado se hizo mediante la relación de longitudes, es decir, se determinó el factor de reescalado f_{resc} como $f_{resc} = L_{x,real}/L_{x,CT}$, donde $L_{x,real}$ corresponde a la distancia entre los extremos del eje baricéntrico de la costilla ensayada en la dirección X y $L_{x,CT}$ es la misma distancia sobre el CT. Este factor se utilizó para redimensionar las dimensiones en los ejes X, Y, Z .

Este método a pesar de ser aproximado, ha permitido determinar las tensiones de las diferentes costillas ensayadas de una forma realista, obteniendo valores dentro de la literatura y además, estas propiedades han mostrado comportarse frente a parámetros tales como la edad o el IMC de la misma forma que se observó en los *coupons*. Esto se muestra en la sección 5.1.3 del capítulo de resultados.

B.4 Descripción del eje baricéntrico en la costilla humana completa

El eje baricéntrico juega un papel primordial en la determinación de las tensiones y deformaciones en la costilla humana completa. La geometría de la costilla es un tanto compleja y además su curvatura es variable a medida que se incrementa el nivel de sollicitación aplicado en la muestra.

Algunos estudios han caracterizado geoméricamente el eje baricéntrico mediante ajuste de círculos y semielipses⁷³ o espirales.⁵⁹ Aquí se propone un método más simple para definir el eje baricéntrico, basado en el ajuste de polinomios.

Cuando se trata con la costilla humana completa, incluyendo la zona del extremo posterior con la tuberosidad, el eje baricéntrico de la costilla no puede

describirse en base a un único arco o figura geométrica. Como puede observarse en la Figura B.4, la parte anterior forma un arco que retrocede a lo largo del eje horizontal para volver a avanzar en dirección a la zona posterior, mientras que seguidamente la geometría evoluciona formando un arco de elipse. Es por ello que en este estudio se propone el uso de dos polinomios para describir el eje baricéntrico de la costilla humana completa.

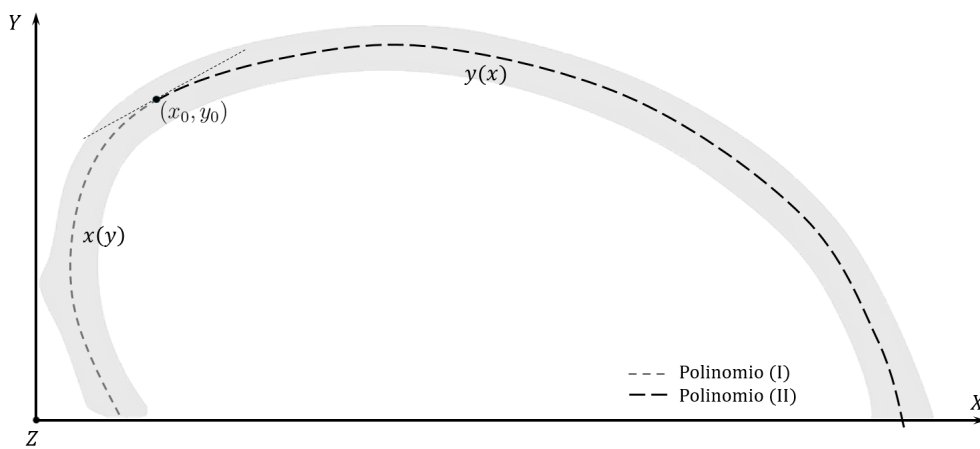


Figura B.4. Ajuste del eje baricéntrico de la costilla por medio de dos polinomios; un primer polinomio $x(y)$ ajusta el arco inicial y el segundo polinomio $y(x)$ del eje. Ambos polinomios se unen en el punto x_0, y_0 .

Sea el polinomio (I) el que se ajusta a la parte inicial (más semejante a media circunferencia) y el (II) a la parte final:

$$(I): x(y) = x_0 + a_1(y - y_0) + a_2(y - y_0)^2 + a_3(y - y_0)^3 + a_4(y - y_0)^4 + a_5(y - y_0)^5$$

$$(II): y(x) = y_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + b_4(x - x_0)^4 + b_5(x - x_0)^5$$

Se ha realizado un primer ajuste $y(x)$ de la muestra completa y se ha buscado el primer punto a partir del cual se ajusta el polinomio adecuadamente. Ese punto se elige como la transición entre los dos polinomios y sus coordenadas se definen como x_0, y_0 .

Partiendo del segundo polinomio, este puede expresarse de forma alternativa como:

$$\bar{y}(x) = K + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + B_4x^4 + B_5x^5$$

B.4. DESCRIPCIÓN DEL EJE BARICÉNTRICO EN LA COSTILLA HUMANA
COMPLETA

Expandiendo $y(x)$ e igualando cada coeficiente a $\bar{y}(x)$:

$$y(x) = \bar{y}(x) \left\{ \begin{array}{l} (x^0): K = y_0 - b_1x_0 + b_2x_0^2 - b_3x_0^3 + b_4x_0^4 - b_5x_0^5 \\ (x^1): B_1 = 5b_5x_0^4 - 4b_4x_0^3 + 3b_3x_0^2 - 2b_2x_0 + b_1 \\ (x^2): B_2 = -10b_5x_0^3 + 6b_4x_0^2 - 3b_3x_0 + b_2 \\ (x^3): B_3 = 10b_5x_0^2 - 4b_4x_0 + b_3 \\ (x^4): B_4 = -5b_5x_0 + b_4 \\ (x^5): B_5 = b_5 \end{array} \right.$$

Puede entonces imponerse el punto x_0 para el cual se conoce su correspondiente y_0 (este punto se corresponde a una posición de la costilla), pueden determinarse las constantes b_n de las expresiones anteriores. Para asegurar la continuidad en la transición de un polinomio al otro, debe cumplirse que $(x(y_0), y_0) = (x_0, y(x_0))$. Con ello se determina a_1 como:

$$\frac{dy(x_0)}{dx} = b_1 = \frac{1}{\frac{dx(y_0)}{dy}} = \frac{1}{a_1}$$

Así, se ajusta el polinomio (I) estableciendo los límites ajustados de x_0 , y_0 y $a_1 = 1/b_1$ y para el resto un intervalo $[-10,10]$, obteniendo así el resto de coeficientes a_n . Con ello puede encontrarse un polinomio de quinto grado que defina el eje baricéntrico formado por los centroides de todas las secciones transversales de la costilla humana.

En los ensayos desarrollados en esta investigación, las costillas recibidas del IMLCFC en ocasiones estaban seccionadas a alturas diferentes entre el extremo posterior y la tuberosidad y además presentaban una superficie irregular causa del corte. Por ello, el extremo posterior de la costilla fue seccionado a la altura de la tuberosidad para retirar la zona irregular. Dada la geometría final de la costilla tras el corte, el eje baricéntrico pudo ser ajustado mediante un único polinomio

$y(x)$ de quinto orden, de la forma:

$$y(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5$$

Este polinomio fue usado para representar al eje baricéntrico de cada muestra y se ajustó para cada instante de tiempo del ensayo, determinando los coeficientes p_i que mejor ajustan al eje para todas las configuraciones geométricas que se producen en la costilla a medida que se incrementa la sollicitación, desde el inicio hasta el final del ensayo a flexión. A partir del polinomio $y(x)$ para cada instante de tiempo, se determinó la curvatura en cada punto del eje y los ejes tangente, normal y la curvatura, como se describe en la sección 4.2.1, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{n} &= \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \hat{\mathbf{j}} \\ \chi(x) &= \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

B.5 Corrección de la tensión para emisión acústica

A medida que avanza la fisuración en el hueso cortical la sección resistente efectiva se afectada ya que la presencia de fisuras hace que no toda la sección sea isorresistente y el cómputo de la sección resistente únicamente a partir de la geometría está ignorando la pérdida de resistencia efectiva por fisuración. Dado que se está midiendo simultáneamente la emisión acústica y, por tanto, la energía dedicada a degradar la sección, es coherente construir una aproximación para ver como corregir la sección resistente a partir del daño microestructural detectado.

La posibilidad más sencilla es la que se usado en este trabajo, que consiste en asumir que a medida que la fisuración avanza debe reducirse la sección resistente

efectiva mediante una ecuación del tipo:

$$\frac{dA_{ef}}{dN} = \phi(A_{ef}, N) \quad (\text{B.12})$$

donde N es el número de hits (microdaños estructurales detectados). En principio podríamos pensar que el decremento es proporcional al área, así que cada *hit* de emisión acústica debería suponer una pérdida proporcional al área resistente anterior al *hit*. Por otra parte, si bien los primeros *hits* se refieren a daños microestructurales que disminuyen la sección a medida que avanza la microfisuración, la mayor parte de *hits* no corresponderán tanto a nuevas fisuras, sino a prolongación de fisuras preexistentes que presumiblemente no ocasionarían la misma pérdida de sección resistente que una fisura nueva. Una hipótesis plausible es por tanto una relación del tipo:

$$\frac{dA_{ef}}{dN} = a \frac{A_{ef}}{N^{1-g}} \quad (\text{B.13})$$

donde $g \leq 1$. La solución de esta ecuación es de la forma:

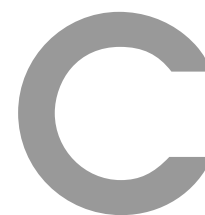
$$A_{ef} = A_0 e^{-(a/g)(N^g-1)} \quad (\text{B.14})$$

Por tanto, al ir disminuyendo esta área efectiva, la tensión corregida o efectiva deberá ser:

$$\sigma^* = \sigma_{nom} \frac{A_0}{A_{ef}} = \sigma e^{(a/g)(N^g-1)}$$

En las muestras empleadas se usó $0,002 \leq g \leq 0,03$, dependiendo de la muestra y el número de *hits*, pero conservando que siempre $a/g \approx 1$.

Respecto a las inercias, se ha asumido que cumplen que $I_{zz} = A_{ef}i_y^2$, $I_{yy} = A_{ef}i_z^2$ y $I_{yz} = A_{ef}i_{yz}^2$, tal que la fisuración por su propia naturaleza no afecta los radios de giro i_z, i_y, i_{yz} y por tanto la misma reducción que se da en el área resistente se da en los momentos. En todos los casos, las correcciones varían entre el 3% el 15% por tanto, en realidad no son cambios de gran importancia en cuanto a valor numérico.



Anexo: Metodologías y estudios complementarios

C.1 Prevenciones

Para la manipulación de muestras biológicas es necesario seguir un estricto protocolo que incluye los tratamientos médicos previos y los equipos de protección necesarios, como las precauciones para la manipulación de las muestras y la higienización del laboratorio. El Protocolo de actuación con material biológico ha sido previamente aprobado por supervisores de riesgos laborales de la *Universitat Politècnica de Catalunya* (UPC) y está basado en el "*Protocol for the Handling of Biological Material*", procedente del *Center for Applied Biomechanics* de la *University of Virginia* (UVA). Las personas que colaboraron manipulando material biológico en el laboratorio del *Grup de Recerca Aplicada a Biomecànica de l'Impacte* (GRABI) de la UPC, estudiaron dicho protocolo y superaron un examen correspondiente realizado por los responsables del laboratorio. Aquí se resumen los temas principales.

C.1.1 Prevenciones de salud del operario

Los investigadores que han participado en la manipulación de muestras biológicas, fueron previamente vacunados para lograr inmunidad frente a la triple vírica (SPR) (que incluye la inmunización contra el sarampión, la parotiditis y la rubéola), la hepatitis A, la hepatitis B y el tétanos.

En todos los casos, se han seguido las pautas y periodos de vacunación que el personal sanitario había recomendado y se han realizado analíticas de sangre al final del tratamiento para verificar que las vacunas habían proporcionado inmunidad buscada.

C.1.2 Obtención de muestras de material biológico

Todas las muestras ensayadas en esta investigación proceden del servicio de patología del *Institut de Medicina Legal i Ciències Forenses de Catalunya* (IMLCFC). La obtención del material biológico viene enmarcada en el Convenio Marco de Colaboración entre la UPC y el IMLCFC (A-00900/1). Como responsables de asegurar el cumplimiento y hacer el seguimiento de este convenio se encuentran el Dr. Carles Martí Fumadó por delegación del director del IMLCFC, y por delegación del Vicerrector de Investigación y Política Científica de la UPC el Dr. J. Velázquez Ameijide, profesor de la misma y codirector de esta investigación. Los sujetos de los cuales se obtuvieron las muestras fueron analizados previamente en las instalaciones del IMLCFC para asegurar la ausencia de enfermedades contagiosas que pudieran poner en peligro a cualquier usuario en contacto con el material biológico. Aun así, por precaución adicional, siempre se utilizaron los equipos de protección (EPI) que se describen en el siguiente apartado para evitar cualquier contagio potencial.

Toda investigación que use material biológico humano obtenido al amparo del convenio Marco de Colaboración UPC/IMLCFC (A-00900/1) antes citado, está sujeta a la aprobación de las comisiones de investigación y ética del IMLCFC, como es el caso de este proyecto.

Para asegurar este requisito debe cumplirse que (1) exista un interés científico para ambas instituciones, (2) se elabore un documento detallado donde se fijen los objetivos, alcance del proyecto y las personas de ambas instituciones involucradas en el mismo y (3) se implementen las medidas necesarias para garantizar

la confidencialidad de los datos sumariales, el secreto de las investigaciones y la protección de datos de carácter personal. Con la aprobación por ambas comisiones se da por hecho el marco legal de actuación para realizar las investigaciones propuestas.

C.1.3 Equipos de protección personal (EPIs)

Toda persona involucrada en la manipulación de material biológico carente de fluidos corporales debe portar siempre antes de entrar en el laboratorio de trabajo:

- Guantes de vinilo y guantes de látex encima de los anteriores
- Calzado adecuado (debe poder limpiarse con desinfectante antibacteriano)
- Bata de laboratorio
- Traje de protección o delantal plástico impermeable sobre la bata
- Manguitos de protección impermeables sobre la bata o traje
- Cinta aislante (cerrando todas las aberturas)
- Gorro de protección
- Mascarilla con filtro de protección para el polvo o residuos volátiles
- Máscara de protección que cubra toda la cara

C.1.4 Señalización

Todas las zonas de trabajo estaban señalizadas de forma adecuada. Únicamente los usuarios formados en la manipulación de material biológico y previamente autorizados pueden acceder a dichas áreas. Además, las puertas deben permanecer siempre cerradas y marcadas con el cartel correspondiente según riesgo biológico. Las señalizaciones de protocolo y riesgos instaladas en la zona de trabajo se muestran en la Figura C.1.



Figura C.1. Señalización de los equipos de seguridad obligatoria, riesgos en la zona de trabajo y delimitación de las zonas.

C.2 Fabricación de coupons

La fabricación de *coupons* resumida en la sección 3.2.1 y representada en la Figura 3.3 se describe en más detalle en este apartado.

Para fabricar los *coupons*, primero se corta el tramo anterior de la costilla, buscando que el cortical exterior del tramo sea lo más plano y recto posible con ayuda de un *coupon* de plástico. El tramo elegido se secciona con la ayuda de una sierra modelo SYJ-160 Low speed diamond saw de MIT-Corporation® equipada con un disco de diamante (Figura 3.3(a)).

A continuación, el tramo de costilla se fija a un soporte en forma de *T* de material polimérico diseñado específicamente para poder ser sujeto por el brazo de la sierra (Figura 3.3(b)). El tramo de costilla se adhiere por el lado interior mediante cianocrilato a la zona plana del soporte. De esta forma, el soporte polimérico se ancla al brazo de la sierra de corte y el tramo de costilla se alinea con el disco, de tal forma que tras el corte se obtenga una lámina del hueso cortical de la superficie exterior (Figura 3.3(c)). Durante el corte se utiliza una solución salina como lubricante, refrigerador y evacuador de restos óseos en forma de polvo.

El siguiente paso es el mecanizado, que permite obtener la forma de *coupon* a partir de las láminas de hueso cortical. Primero se realizan dos orificios por los cuales se insertan posteriormente los pasadores de las mordazas que se utilizarán

en el ensayo de tracción. Para ello se usa un taladro de mesa con un fresolín de 2 mm de diámetro y, en la bancada del taladro, se fija una plantilla de metacrilato con agujeros separados 20 mm entre ellos, que es la distancia exacta que debe haber entre los orificios de la muestra. Uno de los agujeros de la plantilla se alinea con el fresolín para ser usado como agujero de trabajo y se realiza el primer orificio en la muestra (Figura 3.3(d)). A continuación, se inserta un pasador a través del agujero realizado en la lámina de hueso y a su vez en uno de los agujeros de la plantilla adyacentes al orificio de trabajo, sujetando así la lámina y asegurando que el siguiente agujero operado se encuentra exactamente a 20 mm del anterior. Finalmente se realiza el segundo taladro, obteniendo así dos agujeros con una separación de 20 mm.

El mecanizado para la obtención de la geometría de *coupon* se efectúa con la ayuda de una plantilla de aluminio en la cual se han fijado pasadores situados a 20 mm de distancia entre ellos y cuyo contorno exterior tiene la forma del perfil de la probeta de microtracción (Figura fig:couponmanufacturing(e)). La lámina se coloca insertando los pasadores de la plantilla a través de sus orificios y se coloca la parte superior de la plantilla de aluminio, quedando la lámina entre las dos placas. El montaje se cierra por medio de dos mordazas de presión en los laterales, que sujetan las placas firmemente. Seguidamente, el exceso de hueso se elimina mediante una fresadora de sobremesa dotada de una fresa copiadora de 10 mm (Figura 3.3(f)). Al terminar, la plantilla se abre y la muestra se gira para mecanizar la otra mitad del *coupon*, siguiendo el mismo proceso.

Los *coupons* son finalmente retirados de la plantilla para proceder al pulido (Figura 3.3(g)). Para ello se utiliza un prisma de aluminio mecanizado con ranura de profundidad inferior a 0,5 mm, con dos agujeros en los que se han insertado dos tornillos de 2 mm (Figura 3.3(h)). El *coupon* se coloca dentro de la ranura, introduciendo sus orificios en los tornillos y regulando la altura de estos para que no sobresalgan del espesor del *coupon*. A continuación, se coloca un papel de desbaste P600 en una superficie y sobre éste se sitúa el prisma con la probeta en contacto con el papel. Finalmente, se procede a su pulido, tomando medidas del espesor de la muestra con un micrómetro y repitiendo el proceso hasta asegurar que el espesor de la longitud de referencia es constante.

Para conocer la sección de cada muestra y poder posteriormente calcular su tensión, se toman tres medidas del espesor mediante el micrómetro (Figura C.2(a)). Sin embargo, el ancho de la longitud de referencia no puede determinarse por este procedimiento dado que podría dañarse por el pequeño espesor. Esta

dimensión se toma realizando una fotografía en la que aparece, tanto la longitud de referencia de la muestra, como una escala de medición (por ejemplo, un pie de rey). Esta fotografía se introduce posteriormente en el software *GIMP*[®], equipado con una herramienta de medición de píxeles sobre la imagen (Figura C.2(b)). Con ello, se determina la relación entre píxeles de imagen y milímetros de la escala de medición de la fotografía. Posteriormente, se miden los píxeles del ancho de la muestra, que son convertidos a milímetros mediante la relación anterior, determinando así cuidadosamente la sección de cada *coupon*.

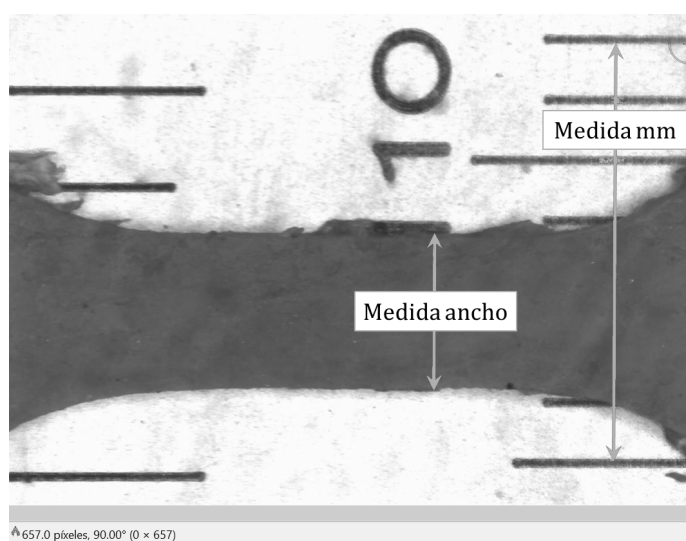


Figura C.2. Medición del ancho del *coupon* usando el software *GIMP*[®], en el que se determina la relación entre milímetros y píxeles y se mide el ancho de la muestra en píxeles, que son posteriormente convertidos a milímetros.

C.3 Influencia de la dimensión fractal en las propiedades mecánicas del hueso cortical

La influencia de la dimensión fractal (DF) en las propiedades mecánicas del hueso cortical de costilla humana fue estudiada en estudios complementarios.¹⁴² La dimensión fractal ha mostrado tener relación con las zonas de baja densidad, tal que huesos con mayor porosidad tienen valores más altos de DF. Aquí se expone un resumen de los principales resultados obtenidos en la investigación complementaria de la dimensión fractal (los detalles del procedimiento y resultados pueden ser consultados en Velázquez-Ameijide *et.al.* (2020)).¹⁴²

C.3. INFLUENCIA DE LA DIMENSIÓN FRACTAL EN LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HUESO CORTICAL

Para estudiar la variación de las propiedades mecánicas con la dimensión fractal, se partió de 51 *coupons* fabricados siguiendo el método descrito en este documento. Para todas estas muestras se determinó la dimensión fractal, siguiendo el método descrito en¹⁴² y expuesto en la sección 3.4. Los *coupons* fueron ensayados a tracción y la tensión y deformación fueron determinadas mediante Correlación Digital de Imágenes (DIC), como se describió en el apartado 3.3.1. De los resultados obtenidos se determinó la tensión máxima σ_{\max} , la deformación máxima e_{\max} , el módulo elástico E y el límite elástico $\sigma_{0,2}$. A partir de estos resultados y mediante regresiones lineales y no lineales, se estudió la influencia de la dimensión fractal en las propiedades mecánicas, junto con la edad. En la Tabla C.1 se muestran las regresiones lineales de las propiedades mecánicas con la edad y la dimensión fractal, con los p -valores de cada parámetro.

Tabla C.1. Regresiones lineales de la dimensión fractal y la edad en las propiedades mecánicas del hueso cortical de costilla humana.¹⁴²

| | α_i | β_i | γ_i | r |
|--|-----------------|------------------|----------------|------|
| $\sigma_{\max} = \alpha_1 + \beta_1 \text{edad} + \gamma_1 \text{DF}$ | 490,4 (<0,0001) | -0,813 (<0,0001) | -179,4 (0,004) | 0,56 |
| $\sigma_{0,2} = \alpha_2 + \beta_2 \text{edad} + \gamma_2 \text{DF}$ | 385,8 (<0,0001) | -0,437 (0,005) | -142,6 (0,004) | 0,48 |
| $E = \alpha_3 + \beta_3 \text{edad} + \gamma_3 \text{DF} \cdot \text{edad}$ | 16,6 (<0,0001) | 0,552 (0,032) | -0,318 (0,029) | 0,28 |
| $e_{\max} = \alpha_4 + \beta_4 \text{edad} + \gamma_4 \text{DF} \cdot \text{edad}$ | 2,893 (<0,0001) | - | -0,011 (0,004) | 0,34 |

Puede verse que la tensión máxima, el límite elástico, el módulo de Young y la deformación máxima decrecen con el aumento de la dimensión fractal DF (en el caso del módulo elástico y la deformación, es el producto de DF con la edad el que influye estadísticamente en los valores de estas propiedades). Estos resultados confirman que la dimensión fractal es una buena medida de la porosidad y/o las zonas de baja densidad, como se ha sugerido en otros estudios.^{76,135} De esta forma, un aumento de la dimensión fractal, que refleja el incremento de porosidad de la muestra, reduce significativamente las propiedades mecánicas del hueso cortical.

De hecho, diversos estudios han mostrado que el módulo elástico del hueso E sigue una ley potencial del tipo $E = C_1 \rho^\alpha$, donde $2,3 \leq \alpha \leq 3,1$. Por ello se recurrió al uso de regresiones no lineales, encontrando las relaciones:

$$E = E_0 s_1^{-DF} \rightarrow E = E_0 \cdot 3,031^{-DF}$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 s_2^{-DF} \rightarrow \sigma_{\max} = \sigma_0 \cdot 5,103^{-DF}$$

donde E_0 y σ_0 dependen linealmente de la dimensión fractal y la edad. De la misma forma que en las regresiones lineales, se corrobora la influencia de la dimensión fractal, donde un incremento de DF supone un decrecimiento de ambas propiedades mecánicas. Los coeficientes de correlación se ven incrementados notablemente al usar las regresiones no lineales (de 0,46 a 0,51 en la tensión y de 0,05 a 0,74 en el módulo elástico), lo cual indica que la relación de la dimensión fractal con las propiedades mecánicas sigue una ley potencial. Para más detalles sobre los resultados obtenidos en esta investigación complementaria puede consultarse la referencia.¹⁴²

C.4 Influencia del contenido mineral en las propiedades mecánicas del hueso cortical

Otra investigación complementaria a este estudio fue el análisis de la influencia de variables relacionadas con la microestructura del hueso cortical en las propiedades mecánicas. En estos análisis también se recuperaron los valores de dimensión fractal calculados en el estudio anterior. En este contexto, la literatura expone la existencia de una relación potencial entre la densidad y el módulo elástico, del tipo:

$$E = C\rho^n$$

siendo C una constante y n el exponente que toma un valor de $2,3 \leq n \leq 3$. Así mismo, la cantidad de mineral presente en la muestra también parece ser un factor influyente en las propiedades mecánicas.^{22,29,86,87} Por este motivo, en un estudio complementario se investigó la influencia de la densidad y el contenido mineral en las propiedades mecánicas. Así mismo, se ha considerado también la dimensión fractal, para analizar si ésta tiene relación con la densidad y otros parámetros.

Para ello, se parte de los *coupons* ensayados a tracción siguiendo el método descrito en 3.3.1, para los cuales se ha determinado previamente la dimensión fractal (DF) según el procedimiento expuesto en 3.4. Los *coupons* fueron posteriormente

C.4. INFLUENCIA DEL CONTENIDO MINERAL EN LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HUESO CORTICAL

sometidos a un proceso de calcinación, según el proceso de la 3.5.

Tras ello, se obtuvieron los valores de la densidad ρ de cada *coupon*, la densidad aparente ρ_s (o densidad de agua, determinada después del proceso de secado) y las fracciones presentes de mineral (f_{min}), orgánica (f_{org}) y de agua f_{agua} .

Los resultados fueron analizados por medio de regresiones lineales, estudiando así la influencia de los parámetros determinados en las propiedades mecánicas en base al p -valor obtenido. Las relaciones más importantes encontradas son las que se exponen en la Tabla C.2.

Tabla C.2. Regresiones lineales de la densidad ρ , la densidad aparente ρ_s , las fracciones mineral f_{min} , orgánica f_{org} y de agua f_{agua} y la dimensión fractal DF en las propiedades mecánicas del hueso cortical de costilla humana.

| | α_i | β_i | γ_i | r |
|--|-----------------|----------------|----------------|------|
| $\rho = \alpha_1 - \beta_1 DF + \gamma_1 f_{min}$ | 1,65 (<0,0001) | 0,342 (0,022) | 1,71 (<0,0001) | 0,56 |
| $\rho - \rho_s = \alpha_2 + \beta_2 f_{agua} - \gamma_2 (DF \cdot f_{agua})$ | 0,040 (<0,0001) | 2,40 (<0,0001) | 0,383 (0,02) | 0,96 |
| $DF = \alpha_3 - \beta_3 \rho$ | 2,26 (<0,0001) | 0,251 (0,009) | - | 0,35 |
| $\ln E = \alpha_4 + \beta_4 \ln \rho$ | 0,474 (0,049) | 2,318 (0,003) | - | 0,39 |
| $\ln E = \alpha_5 + \beta_5 \ln \rho_s$ | 0,69 (<0,0001) | 2,003 (0,001) | - | 0,43 |
| $E = \alpha_6 f_{min} - \beta_6 DF$ | 68,6 (<0,0001) | -13,7 (0,005) | - | 0,50 |
| $\ln \sigma_{max} = \alpha_7 + \beta_7 \ln \rho$ | 1,19 (0,0002) | 2,95 (0,003) | - | 0,39 |

Las tres primeras regresiones analizan las relaciones entre la densidad, la dimensión fractal y las fracciones relacionadas con el contenido mineral. De ellas se extrae que, por un lado, la densidad del hueso está directamente relacionada con la fracción de mineral pero, además, se ve reducida con la dimensión fractal. Esto de nuevo corrobora los resultados obtenidos del estudio de la influencia de DF en las propiedades mecánicas (C.3), donde se confirmó que la dimensión fractal es una buena representación de la porosidad y/o zonas de baja densidad. De esta forma, un aumento de DF relacionado con el incremento de la porosidad reduce la densidad de la muestra de forma significativa. Por otro lado, la segunda regresión muestra que la pérdida de densidad antes y después del proceso de secado no solo tiene que ver con la fracción de agua, que se habría evaporado tras someter a

las muestras a 100°C en una estufa, sino que además también tiene que ver en cierta forma con la dimensión fractal. Esto se podría explicar considerando que la fracción de agua que se evapora en el proceso de secado ocupa las zonas de porosidad, definidas por la dimensión fractal. De hecho, la dimensión fractal se reduce cuanto mayor es la densidad como muestra la tercera regresión y por tanto, un aumento de la masa con respecto al volumen del hueso cortical coherentemente reduce la cantidad de porosidad y zonas de baja densidad de la muestra, tal que DF decrece.

En lo que a las propiedades mecánicas respecta, se ha analizado la influencia de la densidad por medio de una ley potencial como la expuesta en la literatura (la relación ha sido reescrita en forma logarítmica). De la primera de estas regresiones se deduce que $E = C_0\rho^2$, 32, donde el exponente de la ley potencial es muy cercano al rango de la literatura. Sin embargo, si en lugar de utilizar la densidad original de la muestra, se recurre a la densidad aparente ρ_s , entonces:

$$E = C_0\rho^2$$

donde el exponente n de la relación presentada en la literatura toma el valor de $n = 2$. Estos resultados pueden ser comparados con la *teoría de materiales cerámicos*, donde el módulo elástico de un material viene dado por la relación:

$$E = E_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha$$

siendo $\alpha = 2$. Véase entonces que el exponente encontrado en esta investigación se corresponde al de la teoría de materiales cerámicos cuando se utiliza la densidad aparente ρ_s , en la que la fracción de agua no está considerada y solo se incluyen las fracciones orgánica y mineral. De hecho, siendo el hueso cortical un material que exhibe bajas deformaciones y cuya porosidad estimada es del 10%, la fracción de agua presente (que no supera el 0,14), influye muy poco en la rigidez del hueso cortical, pero sí aumentan el valor de la densidad. Los resultados parecen indicar que, de hecho, el comportamiento de las propiedades mecánicas del hueso sin agua es, cuanto menos, muy similar a las de un material cerámico y que la densidad resulta ser un factor muy influyente en el módulo elástico y la resistencia del hueso.

Bibliografía

- [1] AGCAOGLU, S., AND AKKUS, O. Acoustic emission based monitoring of the microdamage evolution during fatigue of human cortical bone. *Journal of biomechanical engineering* 135(8) (2013), 081005.
- [2] AGGELIS, D., BLOM, J., DE SUTTER, S., VERBRUGGEN, S., STRANTZA, M., TYSMANS, T., AND NGUYEN, P. Fracture monitoring by acoustic emission: recent applications of parameter-based characterization. *9th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures FraMCoS-9* (2016).
- [3] AGGELIS, D. G., STRANTZA, M., LOUIS, O., BOULPAEP, F., POLYZOS, D., AND VAN HEMELRIJCK, D. Fracture of human femur tissue monitored by acoustic emission sensors. *Sensors* 15(3) (2015), 5803–5819.
- [4] AGNEW, A. M., MURACH, M. M., MISICKA, E., MOORHOUSE, K., BOLTE IV, J. H., AND KANG, Y. S. The effect of body size on adult human rib structural properties. *Proceedings of the International IRCOBI Conference* (2017), 728–736.
- [5] AGNEW, A. M., SCHAFMAN, M., MOORHOUSE, K., WHITE, S. E., AND KANG, Y. S. The effect of age on the structural properties of human ribs. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 41 (2015), 302–314.
- [6] AGNEW, A. M., SCHAFMAN, M., MOORHOUSE, K., WHITE, S. E., AND KANG, Y. S. The effect of age on the structural properties of human ribs. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 41 (2015), 302–314.

- [7] ALBERT, D. L., KANG, Y. S., AGNEW, A. M., AND KEMPER, A. R. A comparison of rib structural and material properties from matched whole rib bending and tension coupon tests. *IRCOBI Conference Proceedings* (2017), IRC-17-71.
- [8] ALLEN, M. R., HOCK, J. M., AND BURR, D. B. Periosteum: biology, regulation, and response to osteoporosis therapies. *Bone* 35(5) (2004), 1003–1012.
- [9] ANTMAN, S. S. *Nonlinear Problems of Elasticity*. Springer, 1995.
- [10] ATSUMI, N., TANAKA, E., IWAMOTO, M., AND HIRABAYASHI, S. Constitutive modeling of cortical bone considering anisotropic inelasticity and damage evolution. *Mechanical Engineering Journal* 4(4) (2017), 1–18.
- [11] B., A. Constitutive modeling the plastic deformation of bone-like materials. *International Journal of Solids and Structures* 92 (2016), 1–8.
- [12] BALDONEDO, J., FERNÁNDEZ, J. R., LÓPEZ-CAMPOS, J. A., AND SEGADÉ, A. Analysis of damage models for cortical bone. *Applied Sciences* 9(3) (2017), 2710–2722.
- [13] BALL, J. M. Constitutive inequalities and existence theorems in nonlinear elastostatics. In *Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium* (1977), vol. 1, pp. 187–241.
- [14] BARÓ, J., SHYU, P., PANG, S., JASIUK, I. M., VIVES, E., SALJE, E. K., AND PLANES, A. Avalanche criticality during compression of porcine cortical bone of different ages. *Physical Review E* 93(5) (2016), 053001.
- [15] BERROCAL, L. O. *Resistencia de materiales*. McGraw-Hill, 2007.
- [16] BERTALAN, Z., SHEKHAWAT, A., SETHNA, J. P., AND ZAPPERI, S. Fracture strength: stress concentration, extreme value statistics, and the fate of the weibull distribution. *Physical Review Applied* 2, 3 (2014), 034008.
- [17] BONAMY, D. Dynamics of cracks in disordered materials. *Comptes Rendus Physique* 18(5–6) (2017), 297–313.

- [18] BROADBENT, S. R., AND HAMMERSLEY, J. M. Percolation processes: I. crystals and mazes. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1957), vol. 53, Cambridge University Press, pp. 629–641.
- [19] CAEIRO, J. R., GONZÁLEZ, P., AND GUEDE, D. Biomecánica y hueso (y ii): ensayos en los distintos niveles jerárquicos del hueso y técnicas alternativas para la determinación de la resistencia ósea. *Revista de Osteoporosis y Metabolismo Mineral* 5(2) (2013), 99–108.
- [20] CARPINTERI, A., AND LACIDOGNA, G. *Earthquakes and Acoustic Emission: Selected Papers from the 11th International Conference on Fracture*. CRC Press, 2007.
- [21] CARPINTERI, A., LACIDOGNA, G., ACCORNERO, F., MPALASKAS, A. C., MATIKAS, T. E., AND AGGELIS, D. G. Influence of damage in the acoustic emission parameters. *Cement and Concrete composites* 44 (2013), 9–16.
- [22] CARTER, D. R., AND HAYES, W. C. The compressive behavior of bone as a two-phase porous structure. *The Journal of Bone & Joint Surgery* 59(7) (1977), 954–962.
- [23] CHARPAIL, E., TROSSEILLE, X., PETIT, P., LAPORTE, S., LAVASTE, F., AND VALLANCIEN, G. Characterization of pmhs ribs: a new test methodology. *Stapp Car Crash Journal* 49 (2005), 183–198.
- [24] CHAVES, C., AND KOILLER, B. Universality, thresholds and critical exponents in correlated percolation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 218, 3-4 (1995), 271–278.
- [25] CHRISTENSEN, K. Percolation theory. *Imperial College London* 1 (2002).
- [26] CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity: Volume I: three-dimensional elasticity*. North-Holland, 1988.
- [27] CORMIER, J. M., STITZEL, J. D., DUMA, S. M., AND MATSUOKA, F. Regional variation in the structural response and geometrical properties of human ribs. *Annual Proceedings/Association for the Advancement of Automotive Medicine* 49 (2005), 153.
- [28] COWIN, S. C. *Bone Mechanics handbook*. CRC press, 2001.

- [29] CURREY, J. Strain rate and mineral content in fracture models of bone. *Journal of Orthopaedic Research* 6(1) (1988), 32–38.
- [30] CURREY, J. Tensile yield in compact bone is determined by strain, post-yield behaviour by mineral content. *Journal of biomechanics* 37(4) (2004), 549–556.
- [31] DE TRÁFICO, D. G. *Las principales cifras de la siniestralidad vial España 2015*. Imprenta Nacional del Boletín Oficial del Estado, 2015.
- [32] DE TRÁFICO, D. G. *Las principales cifras de la siniestralidad vial España 2018*. Imprenta Nacional del Boletín Oficial del Estado, 2018.
- [33] DEMPSTER, W. T., AND LIDDICOAT, R. T. Compact bone as a non isotropic material. *Developmental Dynamics* 91(3) (1952), 331–362.
- [34] DESAIX, P., BETTS, J. G., JOHNSON, E., JOHNSON, J. E., KOROL, O., KRUSE, D. H., AND ... YOUNG, K. A. *Anatomy & Physiology*. OpenStax, 2018.
- [35] DOBLARÉ, M., GARCIA, J. M., AND GÓMEZ, M. J. Modelling bone tissue fracture and healing: a review. *Engineering Fracture Mechanics* 71(13-14) (2004), 1809–1840.
- [36] DOMINGUEZ, V. M., AND AGNEW, A. M. Examination of factors potentially influencing osteon size in the human rib. *The Anatomical Record* 299(3) (2016), 313–324.
- [37] DOOB, J. L. *Stochastic processes*. Wiley Publications in Statistics. New York, 1990.
- [38] DOUGHERTY, G., AND HENEGBRY, G. Fractal signature and lacunarity in the measurement of the texture of trabecular bone in clinical ct images. *Medical Engineering & Physics* 23, 6 (2001), 369–380.
- [39] DRAPACA, C. S., SIVALOGANATHAN, S., AND TENTI, G. Nonlinear constitutive laws in viscoelasticity. *Mathematics and mechanics of solids* 12(5) (2007), 475–501.
- [40] FATEMI, J., VAN KEULEN, F., AND ONCK, P. R. Generalized continuum theories: application to stress analysis in bone. *Meccanica* 37(4) (2002), 385–396.

- [41] FISCHER, R. A., ARMS, S. W., POPE, M. H., AND SELIGSON, D. Analysis of the effect of using two different strain rates on the acoustic emission in bone. *Journal of biomechanics* 19(2) (1986), 119–127.
- [42] FONDRK, M. T., BAHNIUK, E. H., AND DAVY, D. T. A damage model for nonlinear tensile behavior of cortical bone. *Journal of Biomechanical Engineering* 121 (1999), 533–541.
- [43] FRANKE, R. P., DORNER, P., SCHWALBE, H. J., AND ZIEGLER, B. Acoustic emission measurement system for the orthopedic diagnostics of the human femur and knee joint. *Journal of Acoustic Emission* 22 (2004), 236–242.
- [44] FRÉMOND, M., AND NEDJAR, B. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures* 33(8) (1996), 1083–1103.
- [45] GARCÍA VILANA, S., MARTÍNEZ GONZÁLEZ, E., SÁNCHEZ MOLINA, D., ARREGUI DALMASES, C., VELÁZQUEZ AMEIJIDE, J., LLUMÀ FUENTES, J., AND REBOLLO SORIA, M. C. Aplicación de la emisión acústica como método para anticipar el fallo de tejidos colaginosos (1^a parte). *Revista de la Asociación Española de Ensayos No Destructivos* 77 (2016), 28–34.
- [46] GARCÍA VILANA, S., MARTÍNEZ GONZÁLEZ, E., SÁNCHEZ MOLINA, D., ARREGUI DALMASES, C., VELÁZQUEZ AMEIJIDE, J., LLUMÀ FUENTES, J., AND REBOLLO SORIA, M. C. Aplicación de la emisión acústica como método para anticipar el fallo de tejidos colaginosos (2^a parte). *Revista de la Asociación Española de Ensayos No Destructivos* 77 (2016), 24–31.
- [47] GARCIA, D., ZYSSET, P. K., CHARLEBOIS, M., AND CURNIER, A. A three-dimensional elastic plastic damage constitutive law for bone tissue. *Biomechanics and modeling in mechanobiology* 8(2) (2009), 149–165.
- [48] GARCIA, D., ZYSSET, P. K., CHARLEBOIS, M., AND CURNIER, A. A 1d elastic plastic damage constitutive law for bone tissue. *Biomechanics and modeling in mechanobiology* 80(5) (2010), 543–555.
- [49] GAYZIK, F. S., MAO, M. Y., DANELSON, K. A., SLICE, D. E., AND STITZEL, J. D. Quantification of age-related shape change of the human rib cage through geometric morphometrics. *Journal of biomechanics*. *Revista*

- de la Asociación Española de Ensayos No Destructivos* 41(7) (2008), 1545–1554.
- [50] GIL MUR, F. J., AND VELÁZQUEZ AMEIJIDE, J. *Comportamiento mecánico de los tejidos biológicos y su composición. Fundamentos de Biomecánica en las lesiones por accidente de tráfico*. Editorial Tráfico Via, 2011.
- [51] GUO, X. E., LIANG, L. C., AND GOLDSTEIN, S. A. Micromechanics of osteonal cortical bone fracture. *Journal of Biomchanical Engineering* 120 (1998), 112–117.
- [52] GUTIÉRREZ, F. Q. *Tratado de anatomía humana*. Editorial Porrúa, 1975.
- [53] HAIRE, T. J., HODGSKINSON, R., GANNEY, P. S., AND LANGTON, C. M. A comparison of porosity, fabric and fractal dimension as predictors of the young's modulus of equine cancellous bone. *Medical engineering & physics* (1998), 588–593.
- [54] HALLDIN, A., ANDER, M., JACOBSSON, M., AND HANSSON, S. On a constitutive material model to capture time dependent behavior of cortical bone. *World Journal of Mechanics* 4(11) (2014), 348–361.
- [55] HANAGUD, S., CLINTON, R. G., CHOUINARD, M. D., BERG, E., AND NICHOLS, P. J. Soft tissues and acoustic emission based diagnostic tools. *In Ultrasonics Symposium* (1977), 242–246.
- [56] HANAGUD, S., CLINTON, R. G., AND LOPEZ, J. P. Acoustic emission in bone substance. *Proceedings of Biomechanics Symposium of the American Society of Mechanical Engineers, ASME* 74 (1973).
- [57] HARRAR, K., AND JENNANE, R. Trabecular texture analysis using fractal metrics for bone fragility assessment. *International Journal of Medical, Health, Biomedical, Bioengineering and Pharmaceutical Engineering* 9(9) (2015), 683–688.
- [58] HELGASON, B., PERILLI, E., SCHILEO, E., TADDEI, F., BRYNJOLFSSON, S., AND VICECONTI, M. Mathematical relationships between bone density and mechanical properties: a literature review. *Clinical biomechanics* 23(2) (2008), 135–146.

-
- [59] HOLCOMBE, S. A. WANG, S. C., AND GROTBORG, J. B. Modeling female and male rib geometry with logarithmic spirals. *Journal of biomechanics* 49(13) (2016), 2995–3003.
- [60] HOLZAPFEL, G. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, 2000.
- [61] HUANG, M., JIANG, L., LIAW, P. K., BROOKS, C. R., SEELEY, R., AND KLARSTROM, D. L. Using acoustic emission in fatigue and fracture materials research. *JOM* 50(11) (1998), 1–14.
- [62] JACOBSEN, J. L. High-precision percolation thresholds and potts-model critical manifolds from graph polynomials. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47, 13 (2014), 135001.
- [63] JOHANSEN, A., AND SORNETTE, D. Critical ruptures. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems* 18, 1 (2000), 163–181.
- [64] JOHNSON, G. R., AND HOLMQUIST, T. J. A computational constitutive model for brittle materials subjected to large strains, high strain rates and high pressures. *Shock wave and high-strain-rate phenomena in materials* (1992), 1075–1081.
- [65] JOHNSON, T. P., SOCRATE, S., AND BOYCE, M. C. A viscoelastic, viscoplastic model of cortical bone valid at low and high strain rates. *Acta Biomaterialia* 6 (2010), 4073–4080.
- [66] KATSAMENIS, O. L., JENKINS, T., AND THURNER, P. J. Toughness and damage susceptibility in human cortical bone is proportional to mechanical inhomogeneity at osteonal-level. *Bone* 76 (2015), 158–168.
- [67] KATZENBERGER, M. J., ALBERT, D. L., AGNEW, A. M., AND KEMPER, A. R. Effects of sex, age, and two loading rates on the tensile material properties of human rib cortical bone. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 102 (2020), 103410.
- [68] KEMPER, A. E. A. Material properties of human rib cortical bone from dynamic tension coupon testing. *Stapp Car Crash Journal* 49 (2005), 199.

- [69] KEMPER, A. R., McNALLY, C., PULLINS, C. A., FREEMAN, L. J., DUMA, S. M., AND ROUHANA, S. W. The biomechanics of human ribs: material and structural properties from dynamic tension and bending tests. *Stapp Car Crash Journal* 51 (2007), 235.
- [70] KENT, R., LEE, S. H., DARVISH, K., WANG, S., POSTER, C. S., LANGE, A. W., AND MATSUOKA, F. Structural and material changes in the aging thorax and their role in crash protection for older occupants. *Stapp Car Crash Journal* 49 (2005), 231–249.
- [71] KERRIGAN, J. R., SANCHEZ-MOLINA, D., NEGGERS, J., ARREGUI-DALMASES, C., VELAZQUEZ-AMEIJIDE, J., AND CRANDALL, J. R. Indentation response of human patella with elastic modulus correlation to localized fractal dimension and bone mineral density. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 33 (2014), 99–108.
- [72] KHANDAKER, M., AND EKWARO-OSIRE, S. Weibull analysis of fracture test data on bovine cortical bone: influence of orientation. *International journal of biomaterials* 2013 (2013).
- [73] KINDIG, M. W., AND KENT, R. W. Characterization of the centroidal geometry of human ribs. *Journal of Biomechanical Engineering* 135(11) (2013), 111007.
- [74] LENG, H., DONG, X. N., AND WANG, X. Progressive post-yield behavior of human cortical bone in compression for middle-aged and elderly groups. *Journal of biomechanics* 42(4) (2009), 491–497.
- [75] LEREBOURS, C., THOMAS, C. D. L., CLEMENT, J. G., BUENZLI, P. R., AND PIVONKA, P. The relationship between porosity and specific surface in human cortical bone is subject specific. *Journal of biomechanics* 72 (2015), 109–117.
- [76] LESPESSAILLES, E., GADOIS, C., KOUSIGNIAN, I., NEVEU, J. P., FARDELLONE, P., KOLTA, S., AND BENHAMOU, C. L. Clinical interest of bone texture analysis in osteoporosis: a case control multicenter study. *Osteoporosis international* 19(7) (2008), 1019–1028.
- [77] LESPESSAILLES, E., JULLIEN, A., EYNARD, E., HARBA, R., JACQUET, G., ILDEFONSE, J., OHLEY, W., AND BENHAMOU, C. Biomechanical

- properties of human os calcanei: relationships with bone density and fractal evaluation of bone microarchitecture. *Journal of biomechanics* 31(9) (1998), 817–824.
- [78] LI, S., DEMIRCI, E., AND SILBERSCHMIDT, V. V. Variability and anisotropy of mechanical behavior of cortical bone in tension and compression. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 21 (2013), 109–120.
- [79] LI, Z., KINDIG, M., KERRIGAN, J., UNTAROIU, C., SUBIT, D., AND CRANDALL, J. E. A. Rib fractures under anterior-posterior dynamic loads: experimental and finite-element study. *Journal of biomechanics* 43(2) (2010), 228–234.
- [80] LIN, J. C., GRAMPP, S., LINK, T., KOTHARI, M., NEWITT, D. C., FELSEBERG, D., AND MAJUMDAR, S. Fractal analysis of proximal femur radiographs: correlation with biomechanical properties and bone mineral density. *Osteoporosis international* 9(6) (1999), 516–524.
- [81] LIU, J.-P., LI, Y.-H., AND YANG, Y.-J. Study on characteristics of percolation in rock failure process via acoustic emission locating technique. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 12 (2010), 26.
- [82] LIU, Y., KERDOK, A. E., AND HOWE, R. D. A nonlinear finite element model of soft tissue indentation. *International Symposium on Medical Simulation* (2004), 67–76.
- [83] LOEHR, N. *Combinatorics*. Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [84] LUO, Q., LENG, H., ACUNA, R., DONG, X. N., RONG, Q., AND WANG, X. Constitutive relationship of tissue behavior with damage accumulation of human cortical bone. *Journal of Biomechanics* (2010), 2356–2361.
- [85] MARSDEN, J., AND HUGHES, T. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover books on mathematics. Dover Publ., 1983.
- [86] MARTIN, R. B., AND ISHIDA, J. The relative effects of collagen fiber orientation, porosity, density, and mineralization on bone strength. *Journal of biomechanics* 22(5) (1989), 419–426.

- [87] MCCALDEN, R. W., MCGEOUGH, J. A., AND BARKER, M. B. Age-related changes in the tensile properties of cortical bone. the relative importance of changes in porosity, mineralization, and microstructure. *The Journal of bone and joint surgery* 75(8) (1993), 1193–1205.
- [88] MCELHANEY, J. H. Dynamic response of bone and muscle tissue. *Journal of applied physiology* 21(4) (1966), 1231–1236.
- [89] MENDIZABAL, A. *Finite element simulation: tensile test of rib cortical bone (Doctoral dissertation)*. Sweden: Chalmers University of Technology, 2010.
- [90] MENIG, R., MEYERS, M., MEYERS, M., AND VECCHIO, K. Quasi-static and dynamic mechanical response of haliotis rufescens (abalone) shells. *Acta materialia* 48, 9 (2000), 2383–2398.
- [91] MIRZAALI, M. J., SCHWIEDRZIK, J. J., THAIWICHAI, S., BEST, J. P., MICHLER, J., ZYSSET, P. K., AND WOLFRAM, U. Mechanical properties of cortical bone and their relationships with age, gender, composition and microindentation properties in the elderly. *Bone* 92 (2016), 196–211.
- [92] MITTON, D., MINONZIO, J. G., TALMANT, M., ELLOUZ, R., RONGIERAS, F., LAUGIER, P., AND BRUYÈRE-GARNIER, K. Non-destructive assessment of human ribs mechanical properties using quantitative ultrasound. *Journal of biomechanics* 47(6) (2014), 1548–1553.
- [93] MOHR, M., ABRAMS, E., ENGEL, C., LONG, W. B., AND BOTTLANG, M. Geometry of human ribs pertinent to orthopedic chest-wall reconstruction. *Journal of biomechanics* 40(6) (2007), 1310–1317.
- [94] MOREO, P., GARCIA-AZNAR, J. M., AND DOBLARE, M. A coupled viscoplastic rate-dependent damage model for the simulation of fatigue failure of cement–bone interfaces. *International journal of plasticity* 23(12) (2007), 2058–2084.
- [95] MULLINS, L. P., BRUZZI, M. S., AND MCHUGH, P. E. Calibration of a constitutive model for the post-yield behaviour of cortical bone. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 2(5) (2009), 460–470.
- [96] NAJAFI, A. R., ARSHI, A. R., ESLAMI, M. R., FARIBORZ, S., AND MOEINZADEH, M. H. Micromechanics fracture in osteonal cortical bone:

- A study of the interactions between microcrack propagation, microstructure and the material properties. *Journal of biomechanics* 40(12) (2007), 2788–2795.
- [97] NATALI, A. N., CARNIEL, E. L., AND PAVAN, P. G. Constitutive modelling of inelastic behaviour of cortical bone. *Medical engineering & physics* 30(7) (2008), 905–912.
- [98] NETZ, P. The diaphyseal bone under torque: an experimental study on dogs. *Acta Orthopaedica Scandinavica* 50(176) (1979), 1–32.
- [99] NG, T. P., KOLOOR, S. S. R., DJUANSJAH, J. R. P., AND KADIR, M. A. Assessment of compressive failure process of cortical bone materials using damage-based model. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 66 (2017), 1–11.
- [100] NOLL, W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archive for rational Mechanics and Analysis* 2(1) (1958), 197–226.
- [101] NYMAN, J. S., LENG, H., DONG, X. N., AND WANG, X. Differences in the mechanical behavior of cortical bone between compression and tension when subjected to progressive loading. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 2(6) (2009), 613–619.
- [102] O'BRIEN, F. J., TAYLOR, D., AND LEE, T. C. The effect of bone microstructure on the initiation and growth of microcracks. *Journal of Orthopaedic Research* 23(2) (2005), 475–480.
- [103] ODGAARD, A. Three-dimensional methods for quantification of cancellous bone architecture. *Bone* 20(4) (1997), 315–328.
- [104] OSSI, Z., ABDOU, W., REUBEN, R. L., AND IBBETSON, R. J. Transmission of acoustic emission in bones, implants and dental materials. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine* 227(11) (2013), 1237–1245.
- [105] OTT, I., KIENZLER, R., AND SCHRÖDER, R. Aging in the cortical bone: a constitutive law and its application. *Archive of Applied Mechanics* 80(5) (2010), 527–541.

- [106] PATHRIA, R. K., AND BEALE, P. D. *Statistical mechanics*. Butterworth Heinemann, Oxford, UK, 1996.
- [107] PATTIN, C. A., CALER, W. E., AND CARTER, D. R. Cyclic mechanical property degradation during fatigue loading of cortical bone. *Journal of biomechanics* 29(1) (1996), 69–79.
- [108] PAWLIKOWSKI, M. Cortical bone tissue viscoelastic properties and its constitutive equation-preliminary studies. *Archive of Mechanical Engineering* 59(1) (2012), 31–52.
- [109] PEZOWICZ, C., AND GLOWACKI, M. The mechanical properties of human ribs in young adult. *Acta of Bioengineering and Biomechanics* 14(2) (2012), 53–60.
- [110] PFRETZSCHNER, H.-U. Microcracks and fossilization of haversian bone. *Neues Jahrbuch für Geologie und Paläontologie-Abhandlungen* (2000), 413–432.
- [111] REILLY, D. T., AND BURSTEIN, A. H. The elastic and ultimate properties of compact bone tissue. *Journal of biomechanics* 8(6) (1975), 393–405.
- [112] RHO, J. Y., FLAITZ, D., SWARNAKAR, V., AND ACHARYA, R. S. The characterization of broadband ultrasound attenuation and fractal analysis by biomechanical properties. *Bone* 20(5) (1997), 497–504.
- [113] RIGGS, B. L., WAHNER, H. W., DUNN, W. L., MAZESS, R. B., OFFORD, K. P., AND MELTON, L. Differential changes in bone mineral density of the appendicular and axial skeleton with aging: relationship to spinal osteoporosis. *The Journal of clinical investigation* 67(2) (1981), 328–335.
- [114] SAKHAEI-POUR, A., AND AGRAWAL, A. Integrating acoustic emission into percolation theory to predict permeability enhancement. *Journal of Petroleum Science and Engineering* 160 (2018), 152–159.
- [115] SANCHEZ-MOLINA, D., VELAZQUEZ-AMEIJIDE, J., ARREGUI-DALMASES, C., RODRÍGUEZ, D., QUINTANA, V., SHAFIEIAN, M., AND CRANDALL, J. A microcontinuum model for mechanical properties of esophageal tissue: experimental methodology and constitutive analysis. *Annals of biomedical engineering* 42, 1 (2014), 62–72.

-
- [116] SANCHEZ-MOLINA, D., VELAZQUEZ-AMEIJIDE, J., QUINTANA, V., ARREGUI-DALMASES, C., CRANDALL, J. R., SUBIT, D., AND KERRIGAN, J. R. Fractal dimension and mechanical properties of human cortical bone. *Medical engineering and physics* 35(5) (2013), 576–582.
- [117] SASAKI, N., YAMAMURA, H., AND MATSUSHIMA, N. Is there a relation between bone strength and percolation? *Journal of theoretical biology* 122, 1 (1986), 25–31.
- [118] SCHAFFLER, M. B., AND BURR, D. B. Stiffness of compact bone: effects of porosity and density. *Journal of biomechanics* 21(1) (1988), 13–16.
- [119] SCHWALBE, H. J., BAMFASTE, G., AND FRANKE, R. P. Non-destructive and non-invasive observation of friction and wear of human joints and of fracture initiation by acoustic emission. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine* 213(1) (1999), 41–48.
- [120] SCHWIEDRZIK, J. J., AND ZYSSET, P. K. An anisotropic elastic-viscoplastic damage model for bone tissue. *Biomechanics and modeling in mechanobiology* 12(2) (2013), 201–213.
- [121] SHEN, G., WU, Z., AND ZHANG, J. *Advances in acoustic emission technology. Proceedings of the World Conference on Acoustic Emission*. Springer, 2015.
- [122] SHI, X., CAO, L., REED, M. P., RUPP, J. D., HOFF, C. N., AND HU, J. A statistical human rib cage geometry model accounting for variations by age, sex, stature and body mass index. *Journal of biomechanics* 47(10) (2014), 2277–2285.
- [123] SHRIVASTAVA, S., AND PRAKASH, R. Assessment of bone condition by acoustic emission technique: A review. *Journal of Biomedical Science and Engineering* 2(3) (2009), 144–154.
- [124] SÁNCHEZ MOLINA, D. *A constitutive model of human esophagus tissue with application for the treatment of stenosis. PhD diss.* Universidad Politècnica de Catalunya, 2013.
- [125] SÁNCHEZ-MOLINA, D., GARCÍA-VILANA, S., VELÁZQUEZ-AMEIJIDE, J., AND ARREGUI-DALMASES, C. Probabilistic assessment for clavicle fracture

- under compression loading: rate-dependent behavior. *Biomedical Engineering: Applications, Basis and Communications* 32(5) (2015), 2050040.
- [126] SÁNCHEZ-MOLINA, D., MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E., VELÁZQUEZ-AMEIJIDE, J., LLUMÀ, J., SORIA, M. R., AND ARREGUI-DALMASES, C. A stochastic model for soft tissue failure using acoustic emission data. *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials* 51 (2015), 328–336.
- [127] STEIF, J. E. A mini course on percolation theory. *Jyväskylä lectures in mathematics*, 3 (2011).
- [128] STEIN, I. D., AND GRANIK, G. Rib structure and bending strength: an autopsy study. *Calcified tissue research* 20(1) (1976), 61–73.
- [129] STITZEL, J. D., CORMIER, J. M., BARRETTA, J. T., AND KENNEDY, E. A. Defining regional variation in the material properties of human rib cortical bone and its effect on fracture prediction. *Stapp car crash journal* 47 (2003), 243.
- [130] STRANTZA, M., POLYZOS, D., LOUIS, O., BOULPAEP, F., VAN HEMELRIJCK, D., AND AGGELIS, D. G. Damage characterization on human femur bone by means of ultrasonics and acoustic emission. *Journal of Physics: Conference Series* 628 (2015), 12–16.
- [131] SUBIT, D., DE DIOS, E. D. P., VELÁZQUEZ-AMEIJIDE, J., ARREGUI-DALMASES, C., AND CRANDALL, J. Tensile material properties of human rib cortical bone under quasi-static and dynamic failure loading and influence of the bone microstructure on failure characteristics. *arXiv preprint arXiv:1108.0390* (2011).
- [132] SWENDSEN, R. H. *An introduction to statistical mechanics and thermodynamics*. Oxford University Press, 2012.
- [133] TINSCHERT, J., ZWEZ, D., MARX, R., AND ANUSAVICE, K. Structural reliability of alumina-, feldspar-, leucite-, mica-and zirconia-based ceramics. *Journal of dentistry* 28, 7 (2000), 529–535.
- [134] TOMMASINI, S. M., WEARNE, S. L., HOF, P. R., AND JEPSEN, K. J. Percolation theory relates corticocancellous architecture to mechan-

- ical function in vertebrae of inbred mouse strains. *Bone* 42, 4 (2008), 743–750.
- [135] TOSONI, G. M., LURIE, A. G., COWAN, A. E., AND BURLESON, J. A. Pixel intensity and fractal analyses: detecting osteoporosis in perimenopausal and postmenopausal women by using digital panoramic images. *Oral Surgery, Oral Medicine, Oral Pathology, Oral Radiology, and Endodontology* 102(2) (2006), 235–241.
- [136] TOUSSAINT, R., AND PRIDE, S. Fracture of disordered solids in compression as a critical phenomenon: I statistical mechanics formalism. *arXiv preprint arXiv:0209124v1* (2018).
- [137] TOUSSAINT, R., AND PRIDE, S. R. Fracture of disordered solids in compression as a critical phenomenon. i. statistical mechanics formalism. *Physical Review E* 66(3) (2002), 036135.
- [138] TOUSSAINT, R., AND PRIDE, S. R. Interacting damage models mapped onto ising and percolation models. *Physical Review E* 71(4) (2005), 046127.
- [139] TÖYRÄ, J., KRÖGER, H., AND JURVELIN, J. S. Bone properties as estimated by mineral density, ultrasound attenuation, and velocity. *Bone* 25(6) (1999), 725–731.
- [140] TRUESDELL, C., AND NOLL, W. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004.
- [141] VELÁZQUEZ AMEIJIDE, J. *Modelo constitutivo para tejido óseo humano: propiedades mecánicas del hueso cortical de costilla*. PhD diss. Universidad Politécnica de Catalunya, 2015.
- [142] VELÁZQUEZ-AMEIJIDE, J., GARCÍA-VILANA, S., SÁNCHEZ-MOLINA, D., LLUMÀ, J., MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E., REBOLLO-SORIA, M. C., AND ARREGUI-DALMASES, C. Prediction of mechanical properties of human rib cortical bone using fractal dimension. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* (2020), 1–11.
- [143] WANG, M., ZIMMERMANN, E. A., RIEDEL, C., BUSSEB, B., LI, S., AND SILBERSCHMIDT, V. V. Effect of micro-morphology of cortical bone tissue on fracture toughness and crack propagation. *Procedia Structural Integrity* 6 (2017), 64–68.

- [144] WATANABE, Y., TAKAI, S., ARAI, Y., YOSHINO, N., AND HIRASAWA, Y. Prediction of mechanical properties of healing fractures using acoustic emission. *Journal of Orthopaedic Research* 19(4) (2001), 548–553.
- [145] WEGNER, J. L., AND HADDOW, J. B. *Elements of continuum mechanics and thermodynamics*. Cambridge University Press, 2009.
- [146] WIKIPEDIA. Percolation threshold. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Percolation_threshold&oldid=981122224, 2020. [Online; accessed 11-October-2020].
- [147] YANG, Q. D., COX, B. N., NALLA, R. K., AND RITCHIE, R. O. Fracture length scales in human cortical bone: the necessity of nonlinear fracture models. *Biomaterials* 27(9) (2006), 2095–2113.
- [148] YENI, Y. N., BROWN, C. U., AND NORMAN, T. L. Influence of bone composition and apparent density on fracture toughness of the human femur and tibia. *Bone* 22(1) (1998), 79–84.
- [149] YOGANANDAN, N., AND PINTAR, F. A. Biomechanics of human thoracic ribs. *Transactions-american society of mechanical engineers journal of biomechanical engineering* 120 (1998), 100–105.
- [150] ZHENG, Q. Theory of representations for tensor functions - a unified invariant approach to constitutive equations. *Applied Mechanics Reviews* 47(11) (1994), 545–587.
- [151] ZIOUPOS, P., KAFFY, C., AND CURREY, J. D. Tissue heterogeneity, composite architecture and fractal dimension effects in the fracture of ageing human bone. *International Journal of Fracture* 139(3-4) (2006), 407–424.
- [152] ZIOUPOS, P., WANG, X. T., AND CURREY, J. D. Experimental and theoretical quantification of the development of damage in fatigue tests of bone and antler. *Journal of biomechanics* 29(8) (1996), 989–1002.
- [153] ZYSSET, P., AND CURNIER, A. A 3d damage model for trabecular bone based on fabric tensors. *Journal of biomechanics* 29(12) (1996), 1549–1558.