Capítulo 7

Descomposición canónica

7.1 Introducción

En la interpolación algebraica de Birkhoff, las matrices de interpolación con columnas iniciales nulas son totalmente singulares; en contraste, en la interpolación K-algebraica, podemos encontrar matrices de interpolación que son K-regulares a pesar de tener columnas iniciales nulas. En particular, hemos visto en el capítulo anterior que al efectuar una descomposición

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2),$$

la matriz E_2 siempre tiene columnas iniciales nulas. La *estandarización* de un par (E, K) nos permite obtener un nuevo par $(\bar{E}, \bar{K})$ donde la matriz $\bar{E}$ carece de filas nulas y columnas iniciales y finales nulas. El estudio de la regularidad de (E, K) puede realizarse mediante su *forma estándar* $(\bar{E}, \bar{K})$.

La *descomposición estándar* combina la descomposición y la estandarización produciendo descomposiciones de la forma

$$(E, K) = (E_1, K_1) \oplus (E_2, K_2),$$

donde los pares componentes están en forma estándar. La *descomposición total* es la descomposición

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2) \perp \cdots \perp (E_r, K_r)$$

más fina posible; estandarizando los pares componentes, se obtiene la *descomposición canónica.*

Para (E, K) indescomponible y en forma estándar, es posible establecer condiciones suficientes de singularidad ordenada sobre intervalos de la forma

$[a, 0]$ y $[0, b]$ que generalizan las condiciones suficientes de singularidad ordenada de la interpolación algebraica (Lorentz y Zeller, 1971 [52]; Lorentz, 1972 [53]).

En la Sección 7.2 se define la *forma estándar* de un par (Q, K) y la forma estándar para matrices de interpolación.

En la Sección 7.3 se define la forma estándar de un par (E, K) y se demuestra el *Teorema de traslación de órdenes y grados* que nos permite estudiar la regularidad de un par (E, K) mediante su forma estándar.

La Sección 7.4 introduce el concepto de *descomposición estándar*, que se obtiene estandarizando los pares componentes. El *Teorema de descomposición estándar* nos permite reducir el estudio de la regularidad de un par (E, K) descomponible al estudio de la regularidad de sus componentes estándar.

La Sección 7.5 se ocupa de la *descomposición canónica*. En un primer apartado se construye la *descomposición total*: descomposición más fina posible de un par (E, K), y se extiende el teorema de descomposición a este caso; seguidamente, se define la descomposición canónica, que permite descomponer un par (E, K) en pares (E_i, K_j) indescomponibles y en forma estándar. El *Teorema de descomposición canónica* permite determinar la regularidad de un par (E, K) mediante la regularidad de sus componentes canónicas.

Finalmente, en la Sección 7.6 se demuestran los *teoremas de singularidad*, que presentan condiciones suficientes de singularidad ordenada para el problema K-algebraico. Estos teoremas son aplicables a pares (E, K) indescomponibles y en forma estándar, esto es, son aplicables a las componentes canónicas; por lo tanto, su ámbito natural de aplicación es en combinación con la descomposición canónica.

7.2 Forma estándar de un par (E, K)

En la interpolación algebraica clásica, la condición de Pólya exige que los unos de una matriz de interpolación E deben estar situados en columnas cuyos índices varíen entre 0 y $|E| - 1$; además, debe existir al menos un uno en la columna 0. Por lo tanto, en las matrices de interpolación consideradas en la interpolación algebraica clásica, nunca aparecen columnas iniciales nulas.

En la interpolación K-algebraica, la situación es radicalmente distinta. Así, por ejemplo, dado el sistema de grados

$$K = (5, 6, 7, 9, 10)$$

y la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resulta que E es K-condicionalmente regular, es más, E es K-regular ordenada sobre $[0, 1]$.

Por otra parte, las filas totalmente nulas y las columnas nulas posteriores a la última columna no nula en una matriz de interpolación E no aportan información alguna al problema de interpolación definido por E.

Teniendo en cuenta nuestra formulación de la K-condición de Pólya mediante el sistema de órdenes de derivación y el sistema de grados, podemos suprimir las columnas finales nulas, pues estas no desempeñan ningún papel en nuestro marco teórico. En cuanto a las filas nulas, hemos visto en el capítulo precedente que, cuando realizamos una descomposición

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)\,,$$

pueden aparecer filas nulas en las matrices componentes E_1, E_2. En el estudio de la regularidad del par (E, K), tales filas pueden suprimirse, aunque deben ser tenidas en cuenta a la hora de construir el polinomio interpolador.

En esta sección se define la *forma estándar* de un par de Pólya (E, K). En la forma estándar, la matriz de interpolación no tiene filas nulas, columnas iniciales nulas ni columnas finales nulas. El *Teorema de traslación de órdenes y grados* permite trasladar los problemas de regularidad de un par (E, K) a su forma estándar.

7.2.1 Par (Q, K) estándar

Dada una n-pla de enteros $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ y un entero r, empleamos la notación

$$Q - r = (q_1, \ldots, q_n) - r = (q_1 - r, \ldots, q_n - r)\,.$$

Proposición 7.1 *Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ un sistema de órdenes de derivación y r un entero. La n-pla de enteros $Q - r$ es un sistema de órdenes de derivación si y sólo si $r \le q_1$.*

Demostración. Los elementos de la n-pla $Q - r$ son enteros y para cualquier r entero se cumple $q_1 - r \le \cdots \le q_n - r$; por lo tanto, $Q - r$ es no decreciente.

Es inmediato que los elementos de $Q-r$ son no negativos si y sólo si $r \leq q_1$. $\square$

Proposición 7.2 *Sea $K=(k_1,\dots,k_n)$ un sistema de grados y r un entero. La n-pla $K-r$ es un sistema de grados si y sólo si $r \leq k_1$.*

Demostración. $K-r$ es una n-pla de enteros. Como se cumple $k_1 < \cdots < k_n$, obtenemos $k_1-r < \cdots < k_n-r$; por lo tanto $K-r$ es estrictamente creciente. Es inmediato que los elementos de $K-r$ son no negativos si y sólo si se cumple $r \leq k_1$. $\square$

Proposición 7.3 *Sea $Q=(q_1,\dots,q_n)$ un sistema de órdenes de derivación y K un sistema de grados tal que (Q,K) es un par de Pólya. Si r es un entero que verifica $r \leq q_1$, entonces $(Q-r, K-r)$ es un par de Pólya.*

Demostración. Sea $K=(k_1,\dots,k_n)$. Como (Q,K) es un par de Pólya, se cumple $r \leq q_1 \leq k_1$. Observando las dos proposiciones anteriores, obtenemos que $Q-r$ es un sistema de órdenes de derivación y $K-r$ es un sistema de grados. Por otra parte, como se cumple $q_j \leq k_j$ para $j=1,\dots,n$, obtenemos $q_j - r \leq k_j - r$ para $j=1,\dots,n$; por lo tanto, $(Q-r, K-r)$ es un par de Pólya. $\square$

Definición 7.1 *Sea $Q=(q_1,\dots,q_n)$ un sistema de órdenes de derivación y K un sistema de grados tal que (Q,K) es un par de Pólya. Denominamos forma estándar del par (Q,K) al par $\left(\bar{Q},\bar{K}\right)$ donde $\bar{Q}=Q-q_1$ y $\bar{K}=K-q_1$.*

Notemos que la forma estándar se ha definido únicamente en el caso de que (Q,K) es un par de Pólya. En este caso, las Proposiciones 7.1 y 7.2 nos aseguran la buena definición de la forma estándar; además, podemos asegurar que la forma estándar es un par de Pólya (Proposición 7.3).

Decimos que un par (Q,K) está en forma estándar cuando coincide con su forma estándar. Es evidente que ésto sucede si y sólo si $q_1=0$.

Ejemplo 7.2.1 *Forma estándar de un par (Q,K).*

Dado el sistema de órdenes de derivación

$$Q=(3,3,5,6,9)$$

y el sistema de grados

$$K=(4,5,7,9,11)\,,$$

es inmediato comprobar que el par (Q, K) es de Pólya. La forma estándar correspondiente es $\left(\bar{Q}, \bar{K}\right)$, donde

$$\bar{Q} = Q - q_1 = (3,3,5,6,9) - 3 = (0,0,2,3,6)\,,$$

$$\bar{K} = K - q_1 = (4,5,7,9,11) - 3 = (1,2,4,6,8)\,.$$

Observamos que la forma estándar $\left(\bar{Q}, \bar{K}\right)$ es un par de Pólya. $\square$

7.2.2 Forma estándar de una matriz de interpolación

Sea E una matriz de interpolación con m filas y c columnas. Decimos que una columna de E es una *columna inicial nula* si está formada únicamente por ceros y es anterior a la primera columna no nula de E. Análogamente, una columna de E es una *columna final nula* si está formada únicamente por ceros y es posterior a la última columna no nula.

Podemos precisar estos conceptos empleando el sistema de órdenes de derivación $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$. Si es $q_1 = 0$, E carece de columnas iniciales nulas. En el caso $q_1 > 0$, las q_1 primeras columnas de E (que corresponden a los índices $0, \ldots, q_1 - 1$) son las columnas iniciales nulas de E. Si es $q_n = c - 1$, entonces E carece de columnas finales nulas. Si es $q_n < c - 1$, entonces las últimas $c - q_n - 1$ columnas de E son las columnas finales nulas de E.

Definición 7.2 *Sea E una matriz de interpolación. Denominamos forma estándar de E a la matriz de interpolación $\bar{E}$ que resulta de suprimir en E las filas completamente nulas, las columnas iniciales nulas y las columnas finales nulas. Una matriz de interpolación está en forma estándar cuando coincide con su forma estándar.*

Es inmediato que una matriz de interpolación está en forma estándar cuando carece de filas nulas y de columnas iniciales y finales nulas. Si E es una matriz de interpolación con c columnas que carece de filas nulas y su sistema de órdenes de derivación es $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$, entonces E está en forma estándar si y sólo si $q_1 = 0$ y $q_n = c - 1$.

Ejemplo 7.2.2 *Forma estándar de una matriz de interpolación.*

La matriz de interpolación

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

está en forma estándar. Para la matriz de interpolación

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos la forma estándar

$$\bar{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El sistema de órdenes de derivación de E_2 es

$$Q(E_2) = (4, 5, 5, 5, 6, 6).$$

En este caso, el primer orden de derivación es $q_1 = 4$. Observamos que, tal como se indica en el comentario previo a la Definición 7.2, la matriz de interpolación E_2 tiene $q_1 = 4$ columnas iniciales nulas, que corresponden a los índices de columna $0, \ldots, q_1 - 1$. E_2 tiene $c = 9$ columnas, como es $q_6 = 6 < c$, E_2 tiene $c - q_6 - 1 = 2$ columnas finales nulas. La matriz de interpolación

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

posee una fila nula, carece de columnas iniciales nulas y tiene 4 columnas finales nulas; su forma estándar es

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

La siguiente proposición muestra como se ve afectado el sistema de órdenes derivación de una matriz de interpolación en la estandarización.

Proposición 7.4 *Sea E una matriz de interpolación, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ y $\bar{E}$ la forma estándar de E. El sistema de órdenes de derivación de $\bar{E}$ verifica $Q(\bar{E}) = Q(E) - q_1$.*

Demostración. Sea E' la matriz que resulta de eliminar en E las posibles filas nulas y las columnas finales nulas. Esta claro que en E y E' especifican los mismos órdenes de derivación, por lo tanto, se cumple $Q(E) = Q(E')$. Para obtener la forma estándar $\bar{E}$ únicamente nos resta eliminar las columnas iniciales nulas. Si es $q_1 = 0$, entonces E' carece de columnas iniciales nulas y es $E' = \bar{E}$, de donde obtenemos $Q(\bar{E}) = Q(E) - 0 = Q(E) - q_1$. En el caso $q_1 > 0$, E' tiene q_1 columnas iniciales nulas, que suprimimos para obtener $\bar{E}$. Para cada orden de derivación q' especificado en E', obtenemos un orden de derivación $\bar{q} = q' - q_1$ en $\bar{E}$, especificado por un uno que ha pasado de la columna de índice q' en E' a la columna de índice $q' - q_1$ en $\bar{E}$. En definitiva, se cumple $Q(\bar{E}) = Q(E') - q_1 = Q(E) - q_1$. $\square$

Ejemplo 7.2.3 *Traslación del sistema de órdenes en la estandarización.*

Para la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema de órdenes de derivación $Q(E) = (3, 3, 4, 4)$. La forma estándar correspondiente es

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo sistema de órdenes de derivación es $Q(\bar{E}) = (0, 0, 1, 1)$. Observamos que el primer orden de derivación de E es $q_1 = 3$ y que se verifica

$$Q(\bar{E}) = Q(E) - q_1 = (3, 3, 4, 4) - 3 = (0, 0, 1, 1). \quad \square$$

7.3 Teorema de traslación de órdenes y grados

Definición 7.3 *Sea E una matriz de interpolación, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ y K un sistema de grados tal que el par (E, K) es de Pólya. Denominamos forma estándar del par (E, K) al par $(\bar{E}, \bar{K})$ donde $\bar{E}$ es la forma estándar de E y $\bar{K} = K - q_1$.*

Teorema 7.1 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de grados tal que el par (E, K) es de Pólya. El par (E, K) es regular (regular ordenado) en $[a, b]$ si y solo si su forma estándar $(\bar{E}, \bar{K})$ es regular (regular ordenada) en $[a, b]$.*

Demostración. Las columnas finales nulas de una matriz de interpolación no aportan condiciones al problema de interpolación; las filas nulas introducen unos nodos sobre los que no actúa condición alguna. Por lo tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que E carece de filas y de columnas finales nulas. Sea m el número de filas de E, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ y $K = (k_1, \ldots, k_n)$. Tomamos un sistema admisible de m nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$, ordenamos los elementos de la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ en la forma usual

$$\frac{x^{k_1}}{k_1!}, \frac{x^{k_2}}{k_2!}, \ldots, \frac{x^{k_n}}{k_n!},$$

y disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E en un determinado orden. La matriz de Vandermonde generalizada $V(E, K, X)$ es de la forma

$$V(E, K, X) = \left(\frac{x_i^{k_1 - j}}{(k_1 - j)!}, \ldots, \frac{x_i^{k_n - j}}{(k_n - j)!}; e_{ij} = 1 \right).$$

Para cada $s = 1, \ldots, n$, se cumple

$$k_s - j = k_s - q_1 + q_1 - j = (k_s - q_1) - (j - q_1).$$

Si observamos que los elementos del sistema de grados $\bar{K} = \left(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n\right)$ verifican $\bar{k}_s = k_s - q_1$ y que los elementos $\bar{e}_{it} = 1$ de $\bar{E}$ corresponde a los índices $(i, j - q_1)$ con $e_{ij} = 1$, obtenemos

$$V(E, K, X) = \left(\frac{x_i^{\bar{k}_1 - t}}{\left(\bar{k}_1 - t\right)!}, \ldots, \frac{x_i^{\bar{k}_n - t}}{\left(\bar{k}_n - t\right)!}; \bar{e}_{it} = 1 \right) = V\left(\bar{E}, \bar{K}, X\right).$$

Por lo tanto, los determinantes $D(E, K, X)$ y $D\left(\bar{E}, \bar{K}, X\right)$ se anulan para los mismos sistemas de nodos X. $\square$

Ejemplo 7.3.1 *Regularidad mediante traslación de órdenes y grados.*

Consideramos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su sistema de órdenes de derivación es $Q(E) = (4, 4, 4, 5)$. El sistema de grados $K_1 = (4, 6, 7, 8)$ mayora a $Q(E)$; por lo tanto, el par (E, K_1) es de Pólya. Si eliminamos las filas nulas y las columnas finales nulas de E, obtenemos

$$E' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente, el par (E, K_1) es regular si y sólo si el par (E', K_1) es regular. La forma estándar del par (E', K_1) es el par $\left(\bar{E}, \bar{K}_1\right)$ donde

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{K}_1 = K_1 - q_1 = (4, 6, 7, 8) - 4 = (0, 2, 3, 4)\,.$$

El par $\left(\bar{E}, \bar{K}_1\right)$ es un par de Pólya y, como se cumple $Q_1(\bar{E}) = (0) \subseteq \bar{K}_1$, E verifica la propiedad $\bar{K}_1$-inclusiva ordenada; vemos también que $\bar{E}$ carece de secuencias impares $\bar{K}_1$-soportadas, por lo tanto, $\bar{E}$ es $\bar{K}_1$-regular ordenada en $[0, 1]$. De hecho, $\bar{E}$ es una matriz hermitiana que verifica la propiedad inclusiva ordenada respecto de $\bar{K}_1$. Aplicando el Teorema 7.1, podemos afirmar que el par (E, K) es regular ordenado en $[0, 1]$.

Si tomamos un sistema de nodos $X = (x_1, x_2, x_3)$, la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$

$$\frac{x^4}{4!}, \frac{x^6}{6!}, \frac{x^7}{7!}, \frac{x^8}{8!}\,,$$

y disponemos los elementos $e'_{ij} = 1$ de E' según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice, obtenemos la matriz de Vandermonde generalizada

$$V(E', K, X) = \begin{pmatrix} 1 & x_1^2/2! & x_1^3/3! & x_1^4/4! \\ 1 & x_2^2/2! & x_2^3/3! & x_2^4/4! \\ 0 & x_2 & x_2^2/2! & x_2^3/3! \\ 1 & x_3^2/2! & x_3^3/3! & x_3^4/4! \end{pmatrix}.$$

Es inmediato comprobar que, tal como se afirma en la demostración del teorema anterior, la matriz de Vandermonde obtenida coincide con la matriz $V(\bar{E}, \bar{K}, X)$ (para una ordenación adecuada de la base de $\mathcal{P}_{\bar{K}}(\mathbb{R})$ y de los elementos $\bar{e}_{it} = 1$ de $\bar{E}$). $\square$

7.4 Teorema de descomposición estándar

En la *descomposición estándar*, combinamos los resultados del Teorema de descomposición con el Teorema de traslación de órdenes y grados. Esto nos va a permitir formular un teorema de descomposición que produce pares componentes más simples.

Definición 7.4 *Supongamos que el par* (E, K) *admite la descomposición*

$$(E, K) = (E_1', K_1') \perp (E_2', K_2').$$

Si (E_1, K_1) *y* (E_2, K_2) *son, respectivamente, los pares estándar correspondientes a* (E_1', K_1') *y* (E_2', K_2')*, decimos que* (E, K) *admite la descomposición estándar* (E_1, K_1) *y* (E_2, K_2) *y lo representamos por*

$$(E, K) = (E_1, K_1) \oplus (E_2, K_2).$$

Observemos que la Proposición 6.6 nos asegura que los pares componentes (E_1', K_1') y (E_2', K_2') son pares de Pólya y, por lo tanto, existen los correspondientes pares estándar (E_1, K_1) y (E_2, K_2).

Ejemplo 7.4.1 *Descomposición estándar.*

Consideramos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y el sistema de grados

$$K = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13)\,.$$

El sistema de órdenes de derivación de E es

$$Q(E) = (2, 2, 3, 3, 4, 7, 7, 9, 11, 11, 11).$$

En el Ejemplo 6.3.3, hemos visto que el par (E, K) es descomponible y que su sistema de índices de descomposición es $I(E, K) = (5, 8)$. Para el índice de descomposición $j_1 = 5$, podemos efectuar la descomposición

$$(E, K) = (E_1', K_1') \perp (E_2', K_2')$$

con

$$E_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1' = (2, 3, 4, 5, 6)\,,$$

$$E_2' = \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \end{array}\right), K_2' = (7,9,10,11,12,13)\,.$$

De ahí, resulta la descomposición estándar

$$(E,K) = (E_1,K_1) \oplus (E_2,K_2)\,,$$

donde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 1&0&0\\ 1&1&1 \end{pmatrix}, \quad K_1 = (0,1,2,3,4)\,,$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = (0,2,3,4,5,6)\,.$$

Para $j_2 = 8$, obtenemos la descomposición

$$(E,K) = \left(\bar{E}_1', \bar{K}_1'\right) \perp \left(\bar{E}_2', \bar{K}_2'\right)$$

con

$$\bar{E}_1' = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_1' = (2,3,4,5,6,7,9,10)\,.$$

$$\bar{E}_2' = \left(\begin{array}{cccccccccc|cc} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{array}\right), \bar{K}_2' = (11,12,13)\,,$$

resultando la descomposición estándar

$$(E,K) = \left(\bar{E}_1, \bar{K}_1\right) \oplus \left(\bar{E}_2, \bar{K}_2\right),$$

donde

$$\bar{E}_1 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_1 = (0,1,2,3,4,5,7,8)\,;$$

$$\bar{E}_2 = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_2 = (0,1,2)\,. \quad \square$$

Teorema de descomposición estándar

Teorema 7.2 *Supongamos que el par (E, K) admite la descomposición estándar*

$$(E, K) = (E_1, K_1) \oplus (E_2, K_2) .$$

El par (E, K) es regular (regular ordenado) en $[a, b]$ si y sólo si los pares componentes (E_1, K_1) y (E_2, K_2) son regulares (regulares ordenados) en $[a, b]$.

Demostración. De la definición de descomposición estándar, resulta que el par (E, K) admite una descomposición

$$(E, K) = (E'_1, K'_1) \perp (E'_2, K'_2) ,$$

siendo el par (E_j, K_j) la forma estándar de (E'_j, K'_j), $j = 1, 2$. Según el Teorema de descomposición (Teorema 6.1), el par (E, K) es regular (regular ordenado) en $[a, b]$ si y sólo si los pares (E'_1, K'_1) y (E'_2, K'_2) son regulares (regulares ordenados). Finalmente, observando el Teorema de traslación de órdenes y grados (Teorema 7.1), vemos que los pares (E'_1, K'_1) y (E'_2, K'_2) son regulares (regulares ordenados) si y solo si los correspondientes pares estándar (E_1, K_1) y (E_2, K_2) son regulares (regulares ordenados). □

7.5 Descomposición canónica

7.5.1 Descomposición total

Al realizar la descomposición de un par (E, K) puede suceder que las componentes sean, a su vez, descomponibles. En tal caso, el proceso de descomposición continua dando lugar a descomposiciones con más de dos componentes. En esta sección construimos la *descomposición total* de un par (E, K), descomposición en la que los pares componentes resultantes son indescomponibles; posteriormente, extendemos el Teorema de descomposición a este caso.

Notación Con el fin de simplificar la definición, introducimos la siguiente notación. Dada una matriz de interpolación de m filas E, representamos por $E(r, \ldots, t)$ la submatriz de E formada por las columnas consecutivas de índices $r, r + 1, \ldots, t$. La notación $[\mathbf{0}_s|E(r, \ldots, t)]$ representa una matriz de m filas y $s + t - r + 2$ columnas, cuyas $s + 1$ primeras columnas son nulas (columnas de índices $0, \ldots, s$) y las restantes $(t - r + 1)$ columnas coinciden con las columnas de índices $r, r + 1, \ldots, t$, de la matriz E.

Ejemplo 7.5.1 *Notaciones* $E(r,\ldots,t)$ *y* $[\mathbf{0}_s|E(r,\ldots,t)]$.

Para la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la notación $E\,(0,\ldots,3)$ designa la submatriz formada por las cuatro primeras columnas de E, correspondientes a los índices $0,1,2,3$. Esto es,

$$E\,(0,\ldots,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $[\mathbf{0}_3|E\,(4,5)]$ está formada por un primer bloque nulo, con cuatro columnas (de índices 0, 1, 2, 3) y por un segundo bloque que coincide con la matriz formada con las columnas quinta y sexta de E, de índices 4 y 5. Esto es,

$$[\mathbf{0}_3|E\,(4,5)] = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \quad \square$$

Definición 7.5 *Sea* (E,K) *un par descomponible,* $I(E,K) = (i_1,\ldots,i_r)$ *su sistema de índices de descomposición,* $Q(E) = (q_1,\ldots,q_n)$ *y* $K = (k_1,\ldots,k_n)$. *La descomposición total del par* (E,K) *está formada por* $r+1$ *pares* (E_j,K_j), $j = 1,\ldots,r+1$, *definidos por*

$$E_1 = E(0,\ldots,q_{i_1}), K_1 = (k_1,\ldots,k_{i_1}).$$

$$E_j = \left[\ \mathbf{0}_{q_{i_{j-1}}} \ \Big|\ E(q_{i_{j-1}}+1,\ldots,q_{i_j})\ \right], \ K_j = \left(k_{i_{j-1}+1},\ldots,k_{i_j}\right);\ j = 2,\ldots,r.$$

$$E_{r+1} = \left[\ \mathbf{0}_{q_{i_r}} \ \big|\ E(q_{i_r}+1,\ldots,q_n)\ \right], \ K_{r+1} = (k_{i_r+1},\ldots,k_n).$$

Empleamos la notación

$$(E,K) = (E_1,K_1) \perp \cdots \perp (E_{r+1},K_{r+1})$$

para representar esta descomposición.

Hemos utilizado el mismo símbolo para representar la descomposición ordinaria y la descomposición total, evitaremos ambigüedades mencionando el carácter *total* de la descomposición cuando proceda. Notemos que el número de componentes de la descomposición total es igual al número de índices de descomposición más uno.

Ejemplo 7.5.2 *Descomposición total.*

Tomamos nuevamente la matriz de interpolación

$$E=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

y el sistema de grados

$$K=(2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13).$$

El sistema de órdenes de derivación de E es

$$Q\,(E)=(2,2,3,3,4,7,7,9,11,11,11).$$

En el Ejemplo 6.3.3, hemos obtenido que el sistema de índices de descomposición del par (E,K) es $I(E,K)=(5,8)$. La descomposición total de (E,K) tendrá, por lo tanto, 3 componentes

$$(E,K)=(E_1,K_1)\perp(E_2,K_2)\perp(E_3,K_3).$$

Para el primer índice de descomposición $i_1=5$, obtenemos $q_{i_1}=q_5=4$ y es

$$E_1=E(0,\ldots,q_{i_1})=E(0,\ldots,q_5)=E\,(0,\ldots,4)=\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix};$$

$$K_1=(k_1,\ldots,k_{i_1})=(k_1,\ldots,k_5)=(2,3,4,5,6).$$

Para el segundo índice de descomposición $i_2=8$, obtenemos $q_{i_2}=9$ y es

$$E_2=\left[\ \mathbf{0}_{q_{i_1}}\ \middle|\ E(q_{i_1}+1,\ldots,q_{i_2})\ \right]=\left[\ \mathbf{0}_4\ \middle|\ E(5,\ldots,9)\ \right],$$

$$E_2=\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$K_2=(k_{i_1+1},\ldots,k_{i_2})=(k_6,\ldots,k_8)=(7,9,10).$$

Finalmente, para (E_3,K_3), obtenemos

$$E_3=\left[\ \mathbf{0}_{q_{i_2}}\ \middle|\ E(q_{i_2}+1,\ldots,q_n)\ \right]=\left[\ \mathbf{0}_9\ \middle|\ E(10,\ldots,11)\ \right],$$

esto es

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

y

$$K_3 = (k_{i_2+1}, \ldots, k_n) = (k_9, \ldots, k_{11}) = (11, 12, 13)\,. \quad \square$$

El procedimiento para obtener la descomposición total puede parecer complejo si seguimos los detalles de la definición, no obstante, en la práctica es extremadamente simple. En efecto, basta con trazar líneas verticales en la matriz de interpolación detrás de las columnas de índices $q_{i_1}, \ldots, q_{i_r}$, donde $i_1, \ldots, i_r$, son los índices de descomposición. Se obtienen así una serie de bloques

$$\begin{aligned} E &= \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0, \ldots, q_{i_1} & q_{i_1}+1, \ldots, q_{i_2} & \cdots & q_{i_r}+1, \ldots, q_n \\ \hline \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline B_1 & B_2 & \cdots & B_{r+1} \\ \hline \end{array} \right). \end{aligned}$$

Para obtener E_i basta con tomar el bloque B_i, descartar los posteriores y sustituir los anteriores por matrices nulas. Para K, procedemos de forma análoga, marcando las posiciones correspondientes a $i_1, \ldots, i_r$,

$$E = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline k_1, \ldots, k_{i_1} & k_{i_1+1}, \ldots, k_{i_2} & \cdots & k_{i_r+1}, \ldots, k_n \\ \hline \end{array} \right),$$

de donde obtenemos directamente K_1, K_2, ..., K_{r+1}.

Ejemplo 7.5.3 *Obtención práctica de la descomposición total.*

Para el par (E, K) del ejemplo anterior, trazamos en E líneas verticales tras las columnas de índices $q_{i_1} = 4$ y $q_{i_2} = 9$, de donde resulta la estructura de bloques

$$E = \left(\begin{array}{|ccccc|ccccc|cc|} \hline 0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ \hline \end{array} \right),$$

a partir de la cual podemos obtener las matrices E_1, E_2 y E_3 de forma inmediata. Para el sistema de grados, marcamos líneas de división después de las posiciones $i_1 = 5$ y $i_2 = 8$

$$K = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2,3,4,5,6 & 7,9,10 & 11,12,13 \\ \hline \end{array} \right)$$

y obtenemos K_1, K_2 y K_3. $\square$

La siguiente proposición muestra que la denominación *descomposición total* es adecuada, estableciendo que los pares componentes de la descomposición total no admiten descomposición.

Proposición 7.5 *Si el par* (E, K) *admite descomposición total*

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp \cdots \perp (E_{r+1}, K_{r+1}),$$

entonces, los pares (E_j, K_j) *para* $j = 1, \dots, r+1$ *son indescomponibles.*

Demostración. Sea n el número de unos de E y $I(E, K) = (i_1, \dots, i_r)$ el sistema de índices de descomposición del par (E, K). La línea de demostración consiste en probar que si alguno de los pares (E_j, K_j) admite un índice de descomposición, entonces existe un índice de descomposición de (E, K) que no está en $I(E, K)$. Previamente, veamos la relación que existe entre $Q(E) = (q_1, \dots, q_n)$ y los sistemas de órdenes de derivación de las matrices E_j, que representamos por $Q(E_j) = \left(q_1^{(j)}, \dots, q_{n_j}^{(j)}\right)$, donde n_j es el número de unos de la matriz E_j. Si observamos la descomposición en bloques e E

$$\begin{aligned} E &= \left(\boxed{0, \dots, q_{i_1}} \boxed{q_{i_1}+1, \dots, q_{i_2}} \boxed{\cdots} \boxed{q_{i_r}+1, \dots, q_n} \right) \\ &= \left(\boxed{B_1} \boxed{B_2} \boxed{\cdots} \boxed{B_{r+1}} \right), \end{aligned}$$

y tenemos en cuenta que la matriz E_j contiene los unos presentes en el bloque B_j, es $Q(E_1) = (q_1, \dots, q_{i_1})$, $Q(E_j) = \left(q_{i_{j-1}+1}, \dots, q_{i_j}\right)$ para $j = 2, \dots, r$ y $Q(E_{r+1}) = (q_{i_r+1}, \dots, q_n)$. De ahí, resulta

$$\begin{cases} q_t^{(1)} = q_t, & \text{para} \quad t = 1, \dots, n_1; \quad n_1 = i_1, \\ q_t^{(j)} = q_{i_{j-1}+t}, & \text{para} \quad t = 1, \dots, n_j; \quad n_j = i_j - i_{j-1}; \quad j = 2, \dots, r, \\ q_t^{(r+1)} = q_{i_r+t}, & \text{para} \quad t = 1, \dots, n_{r+1}; \quad n_{r+1} = n - i_r. \end{cases}$$

Con la notación $K_j = \left(k_1^{(j)}, \dots, k_{n_j}^{(j)}\right)$ para los sistema de grados de los pares componentes, obtenemos una relación análoga entre los elementos de K y los de $K_1, \dots, K_{r+1}$

$$\begin{cases} k_t^{(1)} = k_t, & \text{para} \quad t = 1, \dots, n_1; \quad n_1 = i_1, \\ k_t^{(j)} = k_{i_{j-1}+t}, & \text{para} \quad t = 1, \dots, n_j; \quad n_j = i_j - i_{j-1}; \quad j = 2, \dots, r, \\ k_t^{(r+1)} = k_{i_r+t}, & \text{para} \quad t = 1, \dots, n_{r+1}; \quad n_{r+1} = n - i_r. \end{cases}$$

Supongamos que el par (E_1, K_1) admite descomposición. Entonces existe un índice t^*, con $1 \leq t^* < n_1$, tal que $q^{(1)}_{t^*+1} > k^{(1)}_{t^*}$. De ahí, obtenemos que se cumple $q_{t^*+1} > k_{t^*}$ con $1 \leq t^* < i_1$; esto es, el par (E, K) tendría un índice de descomposición estrictamente inferior a i_1.

Supongamos, como segundo caso, que un par (E_j, K_j), con $j = 2, \ldots, r$, admite descomposición. En este caso existe un índice t^*, con $1 \leq t^* < n_j$, tal que $q^{(j)}_{t^*+1} > k^{(j)}_{t^*}$. De ahí, obtenemos que se cumple $q_{i_{j-1}+t^*+1} > k_{i_{j-1}+t^*}$ con $1 \leq t^* < i_j - i_{j-1}$. En consecuencia, el par (E, K) tiene un índice de descomposición $i^* = i_{j-1} + t^*$. Como se cumple $i_{j-1} + 1 \leq i_{j-1} + t^* < i_j$, obtenemos $i_{j-1} < i^* < i_j$; por lo tanto, el índice de descomposición i^* no está en $I(E, K)$.

Finalmente, supongamos que el par (E_{r+1}, K_{r+1}) admite descomposición. Entonces existe un índice t^*, con $1 \leq t^* < n_{r+1}$, tal que $q^{(r+1)}_{t^*+1} > k^{(r+1)}_{t^*}$. De ahí, obtenemos que se cumple $q_{i_r+t^*+1} > k_{i_r+t^*}$ con $1 \leq t^* < n - i_r$. En consecuencia $i^* = i_r + t^*$ es un índice de descomposición de (E, K) que verifica $i^* > i_r$.

En resumen, vemos que todos los casos nos conducen a una contradicción, al aparecer un índice de descomposición de (E, K) que no está en $I(E, K)$, por lo tanto, ninguno de los pares componentes admite descomposición. □

Teorema de descomposición total

Teorema 7.3 *Supongamos que el par* (E, K) *admite la descomposición total*

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp \cdots \perp (E_{r+1}, K_{r+1}).$$

El par (E, K) *es regular (regular ordenado) en* $[a, b]$ *si y sólo si los pares componentes* (E_j, K_j), $j = 1, \ldots, r + 1$, *son regulares (regulares ordenados) en* $[a, b]$.

Demostración. Supongamos que (E, K) es regular en $[a, b]$ y sea r el número de índices de descomposición de (E, K). Procedemos por inducción sobre r. En el caso $r = 1$, obtenemos la descomposición total

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)$$

y, según el Teorema de descomposición (Teorema 6.1), la propiedad propuesta es cierta en este caso.

Supongamos que la propiedad es cierta para todo par de Pólya con r índices de descomposición y veamos que, entonces, también es cierta para todo par con $r+1$ índices de descomposición. Sea (E,K) un par de Pólya con $r+1$ índices de descomposición, representamos por $I(E,K)=(i_1,\ldots,i_r,i_{r+1})$ su sistema de índices de descomposición y sea

$$(E,K)=(E_1,K_1)\perp\cdots\perp(E_{r+1},K_{r+1})\perp(E_{r+2},K_{r+2})$$

su descomposición total. Realizamos la descomposición de (E,K) de índice i_{r+1}

$$(E,K)=(\bar{E}_1,\bar{K}_1)\perp(\bar{E}_2,\bar{K}_2).$$

Es sencillo comprobar que $(\bar{E}_2,\bar{K}_2)$ coincide con (E_{r+2},K_{r+2}). Si observamos la Proposición 6.6, vemos que $(\bar{E}_1,\bar{K}_1)$ es un par de Pólya y, dado que $\bar{E}_1$ está formada por las $q_{i_{r+1}}+1$ primeras columnas de E y $\bar{K}_1$ es una sistema de grados formado por los i_{r+1} primeros grados de K, resulta que es $I(\bar{E}_1,\bar{K}_1)=(i_1,\ldots,i_r)$ y que la descomposición total de $(\bar{E}_1,\bar{K}_1)$ es

$$(\bar{E}_1,\bar{K}_1)=(E_1,K_1)\perp\cdots\perp(E_{r+1},K_{r+1}).$$

Según el Teorema de descomposición, (E,K) es regular si y sólo si los pares $(\bar{E}_1,\bar{K}_1)$ y $(\bar{E}_2,\bar{K}_2)$ son regulares. Ahora bien, $(\bar{E}_2,\bar{K}_2)$ coincide con (E_{r+1},K_{r+1}) y, siendo $(\bar{E}_1,\bar{K}_1)$ un par de Pólya con r índices de descomposición, según la hipótesis de inducción, $(\bar{E}_1,\bar{K}_1)$ es regular si y sólo si los pares $(E_1,K_1),\ldots,(E_{r+1},K_{r+1})$ son regulares. En suma, la propiedad es cierta para todo par de Pólya con $r+1$ índices de descomposición. Para la regularidad ordenada, el razonamiento es del todo análogo. $\square$

La siguiente proposición muestra que los pares componentes de la descomposición total son de Pólya.

Proposición 7.6 *Si (E,K) admite la descomposición total*

$$(E,K)=(E_1,K_1)\perp\cdots\perp(E_{r+1},K_{r+1}),$$

entonces los pares (E_j,K_j), $j=1,\ldots,r+1$, son pares de Pólya.

Demostración. Procedemos por inducción sobre el número de índices de descomposición r. En el caso $r=1$, tenemos la descomposición

$$(E,K)=(E_1,K_1)\perp(E_2,K_2)$$

y, observando la Proposición 6.6, obtenemos que la propiedad es cierta en este caso. Supongamos que la propiedad es cierta para todo par de Pólya con r índices de descomposición. Sea (E,K) un par de Pólya con $r+1$

índices de descomposición, $I(E,K) = (i_1, \ldots, i_r, i_{r+1})$ su sistema de índices de descomposición y sea

$$(E,K) = (E_1,K_1) \perp \cdots \perp (E_{r+1},K_{r+1}) \perp (E_{r+2},K_{r+2})$$

su descomposición total. Procedemos de forma análoga a como se ha hecho en la demostración de la Proposición 7.3, realizando la descomposición de (E_1,K_1) de índice i_{r+1},

$$(E,K) = (\bar{E}_1,\bar{K}_1) \perp (\bar{E}_2,\bar{K}_2).$$

Según la Proposición 6.6, $(\bar{E}_1,\bar{K}_1)$ y $(\bar{E}_2,\bar{K}_2)$ son pares de Pólya. Además, $(\bar{E}_2,\bar{K}_2)$ coincide con (E_{r+2},K_{r+2}), $\bar{E}_1$ está formada por las $q_{i_{r+1}}+1$ primeras columnas de E y $\bar{K}_1$ es una sistema de grados formado por los i_{r+1} primeros grados de K. De ahí, resulta que $(\bar{E}_1,\bar{K}_1)$ es un par de Pólya con r índices de descomposición que admite la descomposición total

$$(\bar{E}_1,\bar{K}_1) = (E_1,K_1) \perp \cdots \perp (E_{r+1},K_{r+1})$$

y, por hipótesis de inducción, $(E_1,K_1), \ldots, (E_{r+1},K_{r+1})$, son pares de Pólya. En definitiva, la propiedad es cierta para todo par de Pólya con $r+1$ índices de descomposición. $\square$

7.5.2 Descomposición canónica

La *descomposición canónica* combina la descomposición total y la estandarización. En primer lugar, definimos la descomposición canónica y aclaramos algunas cuestiones técnicas, que nos aseguran la corrección de la definición establecida. A continuación, establecemos el *Teorema de descomposición canónica* que permite decidir la regularidad de un par de Pólya (E,K) a partir de la regularidad de sus componentes canónicas, que son pares indescomponibles en forma estándar.

Definición 7.6 *Sea (E,K) un par que admite la descomposición total*

$$(E,K) = (\bar{E}_1,\bar{K}_1) \perp \cdots \perp (\bar{E}_{r+1},\bar{K}_{r+1}).$$

La descomposición canónica de (E,K) está formada por los pares (E_j,K_j), $j = 1, \ldots, r+1$, donde cada (E_j,K_j) es el par estándar correspondiente al par $(\bar{E}_j,\bar{K}_j)$. Escribimos

$$(E,K) = (E_1,K_1) \oplus \cdots \oplus (E_{r+1},K_{r+1})$$

para indicar que los pares $(E_1,K_1), \ldots, (E_{r+1},K_{r+1})$, son la descomposición canónica de (E,K).

Representamos la descomposición canónica con la misma notación que utilizamos para la descomposición estándar. Teniendo en cuenta que la descomposición estándar ha sido definida únicamente para dos componentes, esta claro que toda descomposición de más de dos componentes representa una descomposición canónica. No obstante, evitaremos ambigüedades indicando explícitamente cuando una descomposición es canónica.

Por otra parte, observemos que la Proposición 7.6 nos asegura que los pares componentes de la descomposición total son pares de Pólya. Por lo tanto, en cada caso, el correspondiente par estándar está bien definido.

Finalmente, la siguiente proposición nos permite afirmar que los pares componentes de la descomposición canónica son indescomponibles.

Proposición 7.7 *Sea Q un sistema de órdenes de derivación K un sistema de grados tal que el par (Q, K) es de Pólya y sea $\left(\bar{Q}, \bar{K}\right)$ su forma estándar. El par (Q, K) es indescomponible si y sólo si $\left(\bar{Q}, \bar{K}\right)$ es indescomponible.*

Demostración. Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $\bar{Q} = (\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n)$, $\bar{K} = \left(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n\right)$. Para $j = 1 \ldots, n$, se cumple $\bar{q}_j = q_j - q_1$, $\bar{k}_j = k_j - q_1$; obviamente, es $q_{j+1} \leq k_j$ si y sólo si $\bar{q}_{j+1} \leq \bar{k}_j$. □

Proposición 7.8 *Si el par (E, K) admite la descomposición canónica*

$$(E, K) = (E_1, K_1) \oplus \cdots \oplus (E_{r+1}, K_{r+1}),$$

entonces, los pares (E_j, K_j) para $j = 1, \ldots, r+1$ son indescomponibles..

Demostración. El par (E, K) admite la descomposición total

$$(E, K) = (\bar{E}_1, \bar{K}_1) \perp \cdots \perp (\bar{E}_{r+1}, \bar{K}_{r+1}),$$

donde cada (E_j, K_j) es el par estándar correspondiente al par $(\bar{E}_j, \bar{K}_j)$. Según la Proposición 7.5, los pares $(\bar{E}_j, \bar{K}_j)$, $j = 1, \ldots, r+1$, son indescomponible y, observando la proposición anterior, los pares (E_j, K_j) son indescomponibles. □

Ejemplo 7.5.4 *Descomposición canónica.*

En el Ejemplo 7.5.2, hemos obtenido que la descomposición total del par (E, K), donde

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K = (2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13)\,,$$

está formada por los pares

$$\left(\bar{E}_1, \bar{K}_1\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (2,3,4,5,6)\right),$$

$$\left(\bar{E}_2, \bar{K}_2\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (7,9,10)\right),$$

$$\left(\bar{E}_3, \bar{K}_3\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (11,12,13)\right).$$

Una vez obtenida la forma estándar de estos pares, resulta la descomposición canónica

$$(E,K) = (E_1,K_1) \oplus (E_2,K_2) \oplus (E_3,K_3),$$

donde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1 = (0,1,2,3,4)\,;$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = (0,2,3)\,;$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = (0,1,2)\,. \quad \square$$

La descomposición canónica se ha definido mediante la descomposición total y la posterior normalización de los pares componentes. Este es el camino más natural para demostrar el teorema de descomposición, no obstante, es posible dar una definición directa de la descomposición canónica que nos permite una construcción más simple.

Sea (E,K) un par de Pólya descomponible, $I(E,K) = (i_1,\dots,i_r)$ su sistema de índices de descomposición, $Q(E) = (q_1,\dots,q_n)$ y $K = (k_1,\dots,k_n)$. Dados

$i < i'$, la notación $E(q_i, q_{i'})$ representa a la submatriz de E formada por sus columnas $q_i, q_{i+1}, \ldots, q_{i'}$. Consideremos las $r+1$ matrices de interpolación

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = E(q_1, q_{i_1}), \\ \bar{E}_j = E(q_{i_{j-1}+1}, q_{i_j}), \quad \text{para} \quad j = 2, \ldots, r, \\ \bar{E}_{r+1} = E(q_{i_r+1}, q_n) \end{cases} \tag{7.1}$$

y los $r+1$ sistemas de grados

$$\begin{cases} \bar{K}_1 = (k_1, \ldots, k_{i_1}), \\ \bar{K}_j = (k_{i_{j-1}+1}, \ldots, k_{i_j}), \quad \text{para} \quad j = 2, \ldots, r, \\ \bar{K}_{r+1} = (k_{i_r+1}, \ldots, k_n) \end{cases} \tag{7.2}$$

Si E_j es la forma estándar de la matriz $\bar{E}_j$, $K_1 = \bar{K}_1 - q_1$ y $K_j = \bar{K}_j - q_{i_{j-1}+1}$ para $j = 2, \ldots, r+1$; entonces, los pares (E_j, K_j), $j = 1, \ldots, r+1$, son las componentes canónicas de (E, K).

Ejemplo 7.5.5 *Definición directa de la descomposición canónica.*

Tomamos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y el sistema de grados

$$K = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13).$$

El sistema de órdenes de derivación de E es

$$Q(E) = (2, 2, 3, 3, 4, 7, 7, 9, 11, 11, 11).$$

En el Ejemplo 6.3.3, hemos obtenido que el sistema de índices de descomposición $I(E, K) = (5, 8)$. Por lo tanto, la descomposición canónica de (E, K) tiene 3 componentes

$$(E, K) = (E_1, K_1) \oplus (E_2, K_2) \oplus (E_3, K_3).$$

Observando (7.1) y (7.2) resulta

$$\bar{E}_1 = E(q_1, q_5) = E(2,4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{K}_1 = (k_1, k_5) = (2,3,4,5,6),$$

$$\bar{E}_2 = E(q_6, q_8) = E(7,9) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_2 = (k_6, k_8) = (7,9,10),$$

$$\bar{E}_3 = E(q_9, q_{11}) = E(11,11) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K}_1 = (k_9, k_{11}) = (11,12,13).$$

Finalmente, obtenemos las componentes canónicas

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1 = \bar{K}_1 - q_1 = \bar{K}_1 - 2 = (0,1,2,3,4)\,,$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \bar{K}_2 - q_6 = \bar{K}_2 - 7 = (0,2,3)\,,$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \bar{K}_3 - q_9 = \bar{K}_3 - 11 = (0,1,2)\,. \quad \square$$

Teorema de descomposición canónica

Teorema 7.4 *Sea (E,K) un par que admite la descomposición canónica*

$$(E,K) = (E_1, K_1) \oplus \cdots \oplus (E_{r+1}, K_{r+1}).$$

El par (E,K) es regular (regular ordenado) en $[a,b]$ si y sólo si los pares (E_j, K_j), $j = 1, \ldots, r+1$, son regulares (regulares ordenados) en $[a,b]$.

Demostración. El par (E,K) admite la descomposición total

$$(E,K) = (\bar{E}_1, \bar{K}_1) \perp \cdots \perp (\bar{E}_{r+1}, \bar{K}_{r+1}),$$

donde cada (E_j, K_j) es el par estándar correspondiente al par $(\bar{E}_j, \bar{K}_j)$. Según el Teorema de descomposición total (Teorema 7.3), el par (E, K) es regular (regular ordenado) en $[a, b]$ si y sólo si los pares componentes $(\bar{E}_j, \bar{K}_j)$, $j = 1, \ldots, r+1$, son regulares (regulares ordenados) en $[a, b]$. Por otra parte, según el Teorema de traslación de órdenes y grados (Teorema 7.1), cada $(\bar{E}_j, \bar{K}_j)$ es regular (regular ordenado) en $[a, b]$ si y sólo si el par estándar correspondiente (E_j, K_j) es regular (regular ordenado) en $[a, b]$. $\square$

Ejemplo 7.5.6 *Descomposición canónica y K-regularidad ordenada en* $[0, 1]$.

Tomemos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y el sistema de grados

$$K = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13).$$

El sistema de órdenes de derivación de E es

$$Q(E) = (2, 2, 3, 3, 4, 7, 8, 11, 11).$$

Como se cumple $Q(E) \leq K$, el par (E, K) es un par de Pólya. Para obtener los índices de descomposición del par (E, K), construimos la tabla de grados, órdenes e índices correspondiente al par $(Q(E), K)$ como en el Ejemplo 6.2.1

K	2	3	4	5	6	7	8	11	13
2	2	3	3	4	7	8	11	11	Q
$I(E, K)$	1	2	3	4	5	6	7	8	11
					$*$	$*$	$*$		

A la vista de la tabla, obtenemos $I(E, K) = (5, 6, 7)$, los órdenes de derivación correspondientes a los índices de descomposición son

$$q_{i_1} = q_5 = 4, \qquad q_{i_2} = q_6 = 7, \qquad q_{i_3} = q_7 = 8.$$

La descomposición canónica de (E, K) es de la forma

$$(E, K) = (E_1, K_1) \oplus (E_2, K_2) \oplus (E_3, K_3) \oplus (E_4, K_4),$$

donde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1 = (0, 1, 2, 3, 4);$$

$$E_2 = (1)\,, \qquad K_2 = (0);$$
$$E_3 = (1)\,, \qquad K_3 = (0);$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K_4 = (0, 2).$$

Los pares (E_1, K_1), (E_2, K_2) y (E_3, K_3) definen problemas algebraicos clásicos. E_1 es una matriz casi-hermitiana que verifica la condición de Pólya, E_2 y E_3 definen problemas de Lagrange. En cuanto a $(E_{4,}K_4)$, se trata de un problema K-algebraico de Lagrange que verifica la propiedad inclusiva ordenada respecto de K_4, por lo tanto, es regular en $[0, 1]$.

Como los pares componentes son regulares en [0,1], el Teorema de descomposición canónica nos asegura la K-regularidad de la matriz de interpolación E sobre $[0, 1]$. Podemos confirmar la regularidad del par (E, K) construyendo la matriz de Vandermonde generalizada $V(E, K, X)$ con el sistema de nodos

$$X = (x_1, x_2, x_3),\ 0 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 1.$$

Disponemos la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ según grados crecientes y los elementos $e_{ij} = 1$ según el orden lexicográfico creciente de los índices (i, j) con prevalencia del primer índice.

En el caso $x_1 = 0$, podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $x_3 = 1$ y $x_2 = x$ con $0 < x < 1$. Entonces, resulta

$$V(E,K,X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x & x^2/2 & x^3/3! & x^4/4! & x^5/5! & x^6/6! & x^9/9! & x^{11}/11! \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/5! & 1/6! & 1/9! & 1/11! \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/5! & 1/8! & 1/10! \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/7! & 1/9! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1/4! & 1/6! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

De ahí, obtenemos para el determinante

$$D(E,K,X) = \frac{1}{96}x^4 - \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{48}x^2 - \frac{1}{288} = \frac{1}{288}\,(3x+1)\,(x-1)^3\,.$$

En este caso, es sencillo observar que $D(E, K, X)$ no se anula para ningún valor de x en $(0, 1)$.

Como segundo caso, supongamos que es $0 < x_1$; entonces, la situación es algo más complicada, pues la invarianza por homotecia sólo nos autoriza a tomar $x_3 = 1$. Para simplificar la notación, sea $x_1 = y$ y $x_2 = x$. Un sistema admisible de nodos X es de la forma

$$X = (y, x, 1), \quad \text{con} \quad 0 < y < x < 1.$$

En este caso, obtenemos

$$V(E,K,X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & y & y^2/2 & y^3/3! & y^4/4! & y^5/5! & y^8/8! & y^{10}/10! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y^3/3! & y^5/5! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y^2/2! \\ 1 & x & x^2/2 & x^3/3! & x^4/4! & x^5/5! & x^6/6! & x^9/9! & x^{11}/11! \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/5! & 1/6! & 1/9! & 1/11! \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/5! & 1/8! & 1/10! \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/7! & 1/9! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1/4! & 1/6! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La expresión del determinante $D(E,K,X)$ como función de los nodos x e y es, en este caso, de una complejidad considerable

$$\begin{aligned} D(E,K,X) = \; & -\tfrac{1}{72}y^5 - \tfrac{1}{24}x^2y^5 + \tfrac{1}{72}x^3y^5 + \tfrac{1}{24}xy^5 - \tfrac{1}{12}xy^4 + \tfrac{1}{16}x^2y^4 + \\ & + \tfrac{1}{32}y^4 - \tfrac{1}{96}x^4y^4 + \tfrac{1}{24}x^2y^3 - \tfrac{1}{144}y^3 + \tfrac{1}{48}x^4y^3 - \tfrac{1}{18}x^3y^3 - \\ & - \tfrac{1}{36}y^2 - \tfrac{1}{12}x^2y^2 + \tfrac{1}{12}xy^2 + \tfrac{1}{36}x^3y^2 + \tfrac{1}{48}y + \tfrac{1}{24}x^3y - \tfrac{1}{48}x^4y - \\ & - \tfrac{1}{24}xy - \tfrac{1}{36}x^3 + \tfrac{1}{96}x^4 + \tfrac{1}{48}x^2 - \tfrac{1}{288}. \end{aligned}$$

Afortunadamente, $D(E,K,X)$ admite una factorización simple

$$D(E,K,X) = \frac{1}{288}(y+1)(y-1)^3(x-1)^3(4y-3x-1).$$

A primera vista, puede parecer que este resultado está en contradicción con la K-regularidad ordenada de E en $[0,1]$, pues observamos que el factor $4y-3x-1$ se anula para valores de x, y en el intervalo $(0,1)$. Si embargo, si tenemos en cuenta que la restricción impuesta sobre x, y es $0 < y < x < 1$, obtenemos

$$4y - 3x - 1 < 4x - 3x - 1 = x - 1 < 0.$$

Por lo tanto, $D(E,K,X)$ no se anula para ninguna elección admisible del sistema de nodos $X = (x_1, x_2, 1)$ con $x_1 > 0$. $\square$

7.6 Teoremas de singularidad

En la interpolación algebraica clásica, las matrices de interpolación indescomponibles son las matrices de Birkhoff (matrices normales que cumplen la condición fuerte de Pólya). Para este tipo de matrices, en algunos casos simples, pueden establecerse condiciones suficientes de singularidad. Así, vemos en el Teorema 2.4, que toda matriz de interpolación de Birkhoff con un *síngleton soportado* es fuertemente singular ordenada. El Teorema 2.5 permite decidir la singularidad ordenada con mayor generalidad: *una matriz de interpolación de Birkhoff que posee una fila con exactamente una secuencia impar soportada es fuertemente singular ordenada.* El objetivo de esta sección es extender estos teoremas al caso de la K-singularidad ordenada sobre intervalos de la forma $[0, b]$ y $[a, 0]$,

Si el par de interpolación (E, K) es indescomponible y el sistema de grados es $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$, entonces, la matriz E, una vez normalizada, es una matriz de Birkhoff (Proposición 6.3). La línea de demostración que seguimos para extender los Teoremas de singularidad a la interpolación K-algebraica consiste en extender adecuadamente el problema (E, K) para obtener un problema algebraico clásico, que nos va a permitir aplicar las *condiciones suficientes de singularidad* que ya conocemos (Teorema 2.4 y Teorema 2.5). Para ello necesitamos, previamente, garantizar que en el proceso de extensión se mantienen el cumplimiento de la condición fuerte de Pólya.

Proposición 7.9 *Dado un sistema de n órdenes de derivación Q y un sistema de n grados $K = (k_1, \ldots, k_n)$, sea $K' = (k'_1, \ldots, k'_r)$ un sistema de grados disjunto con K, $\bar{Q} = Q \uplus K'$ y $\bar{K} = K \uplus K'$. Si (Q, K) es un par indescomponible en forma estándar y $k'_r < k_n$, entonces el par $(\bar{Q}, \bar{K})$ es indescomponible.*

Demostración. Recordemos que $Q \uplus K'$ representa la unión creciente de n-plas, esto es, $Q \uplus K'$ es un $(n + r)$-pla que contiene los elementos de Q y K' formando una secuencia no decreciente.

Veamos, en primer lugar, que la proposición es cierta cuando K' tiene un sólo elemento. Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $K' = (t)$,

$$\bar{Q} = Q \uplus (t) = (\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_{n+1}), \quad \bar{K} = K \uplus (t) = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_{n+1}).$$

Observemos previamente que todo par indescomponible es un par de Pólya (Proposición 6.1) y, por lo tanto, puede ser puesto en forma estándar. Como el par (Q, K) está en forma estándar, se verifica $q_1 = 0$ y pueden suceder dos casos: (i) $q_1 \leq t \leq k_1$, (ii) $k_1 < t$.

En el primer caso, $q_1 \leq t \leq k_1$, sea $i_0 = \max\{i : q_i \leq t\}$. Entonces, obtenemos para $\bar{Q}$

$$\begin{cases} \bar{q}_j = q_j, & \text{para} \quad j = 1, \ldots, i_0, \\ \bar{q}_{i_0+1} = t, & \\ \bar{q}_j = q_{j-1}, & \text{para} \quad j = i_0 + 2, \ldots, n+1. \end{cases} \tag{7.3}$$

En cuanto a $\bar{K}$, se cumple

$$\begin{cases} \bar{k}_1 = t, & \\ \bar{k}_j = k_{j-1}, & \text{para} \quad j = 2, \ldots, n+1. \end{cases}$$

Veamos que, en este caso, el par $(\bar{Q}, \bar{K})$ es indescomponible. En efecto, para $j = 1, \ldots, i_0 - 1$, se cumple

$$\bar{q}_{j+1} = q_{j+1} \leq t \leq \bar{k}_j.$$

Si es $j = i_0$, obtenemos

$$\bar{q}_{i_0+1} = t \leq k_{i_0}.$$

Finalmente, para $j = i_0 + 1, \ldots, n$, resulta

$$\bar{q}_{j+1} = q_j \leq k_{j-1} = \bar{k}_j.$$

Notemos que el estudio del subcaso $j = i_0 + 1, \ldots, n$, sólo es aplicable cuando $i_0 < n$.

En el segundo caso, $k_1 < t$, sea i_0 como en el caso anterior y definimos el nuevo índice $j_0 = \max\{i : k_i \leq t\}$. Entonces $\bar{Q}$ es como en (7.3) y $\bar{K}$ es de la forma

$$\begin{cases} \bar{k}_j = k_j, & \text{para} \quad j = 1, \ldots, j_0, \\ \bar{k}_{j_0+1} = t, & \\ \bar{k}_j = k_{j-1}, & \text{para} \quad j = j_0 + 2, \ldots, n+1. \end{cases}$$

Veamos, en primer lugar, que debe cumplirse $j_0 < i_0$. En efecto, si fuera $j_0 = i_0$, como se cumple $j_0 < n$ (por hipótesis es $t < k_n$), tendríamos $i_0 = j_0 < n$. De ahí resulta $k_{j_0} \leq t < q_{j_0+1}$, que contradice el carácter indescomponible del par (Q, K). Por otra parte, si se cumpliera $j_0 > i_0$, tendríamos la contradicción $k_{j_0-1} \leq k_{j_0} \leq t < q_{i_0} \leq q_{j_0}$. Aceptemos, por lo tanto, que se cumple $j_0 < i_0$ y veamos que, también en este caso, el par $(\bar{Q}, \bar{K})$ es indescomponible. En efecto, para $j = 1, \ldots, j_0$, obtenemos

$$\bar{q}_{j+1} = q_{j+1} \leq k_j = \bar{k}_j,$$

para $j = j_0 + 1, \ldots, i_0 - 1$, es

$$\bar{q}_{j+1} = q_{j+1} \leq t = \bar{k}_{j_0+1} \leq \bar{k}_j,$$

para $j = i_0$, resulta

$$\bar{q}_{i_0+1} = t = \bar{k}_{j_0+1} \leq \bar{k}_{i_0},$$

y, finalmente, para $j = i_0 + 1, \ldots, n$, obtenemos

$$\bar{q}_{j+1} = q_j \leq k_{j-1} = \bar{k}_j.$$

Obviamente, el subcaso $j = j_0+1, \ldots, i_0-1$, sólo es aplicable si es $j_0 < i_0-1$ y el subcaso $j = i_0 + 1, \ldots, n$, sólo es aplicable cuando $i_0 < n$.

Para completar la demostración, procedemos por inducción sobre r. Hemos visto que la propiedad enunciada en la proposición es cierta cuando $r = 1$; supongamos que la propiedad es cierta para todo sistema de r grados K'_r $(r > 1)$ y sea $K'_{r+1} = (k'_1, \ldots, k'_r, k'_{r+1})$ un sistema de $r + 1$ grados disjunto con K y tal que $k'_{r+1} < k_n$.

Tomamos $K'_1 = (k'_{r+1})$ y vemos que se trata de un sistema de un grado, disjunto con K y tal que $k'_{r+1} < k_n$. Según la discusión precedente, el par $(\widehat{Q}, \widehat{K})$, donde $\widehat{Q} = Q \uplus (k'_{r+1})$ y $\widehat{K} = Q \uplus (k'_{r+1})$ es un par indescomponible, además, si $\widehat{Q} = (\hat{q}_1, \ldots, \hat{q}_{n+1})$, es $\hat{q}_1 = 0$. Por lo tanto, el par $(\widehat{Q}, \widehat{K})$ está en forma estándar.

Consideramos ahora el sistema de r grados $K'_2 = (k'_1, \ldots, k'_r)$. Vemos que K'_2 es disjunto con $\widehat{K}$ y si es $\widehat{K} = (\hat{k}_1, \ldots, \hat{k}_{n+1})$, se verifica $k'_r \leq k_n = \hat{k}_{n+1}$. Por lo tanto, podemos aplicar la hipótesis de inducción y obtenemos que el par $(\bar{Q}, \bar{K})$, con $\bar{Q} = \widehat{Q} \uplus K'_2$ y $\bar{K} = \widehat{K} \uplus K'_2$, es indescomponible. Ahora bien, es inmediato comprobar que se cumple $\bar{Q} = \widehat{Q} \uplus K'_2 = Q \uplus K'$ y $\bar{K} = \widehat{K} \uplus K'_2 = K \uplus K'$. En consecuencia, la propiedad es cierta para todo $r > 1$. $\square$

Ejemplo 7.6.1 *Extensiones indescomponibles.*

Consideremos el sistema de órdenes de derivación

$$Q = (0, 1, 3, 3, 3, 6, 8)$$

y el sistema de grados

$$K = (1, 3, 4, 5, 6, 10, 11).$$

Si formamos la tabla de órdenes y grados

K	1	3	4	5	6	10	11
0	1	3	3	3	6	8	Q

resulta claro que el par (Q, K) es indescomponible. Además, como $q_1 = 0$, el par (Q, K) está en forma estándar.

Tomamos el sistema de 4 grados $K' = (0, 2, 8, 9)$ que es disjunto con K y que cumple $k'_4 = 9 < k_7$. Según la proposición anterior, el par $(\bar{Q}, \bar{K})$, con

$$\bar{Q} = (0, 1, 3, 3, 3, 6, 8) \uplus (0, 2, 8, 9) = (0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 6, 8, 8, 9),$$

$$\bar{K} = (1, 3, 4, 5, 6, 10, 11) \uplus (0, 2, 8, 9) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11),$$

es un par indescomponible. Podemos verificar esta afirmación mediante la correspondiente tabla de órdenes y grados

$\bar{K}$	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11
0	0	1	2	3	3	3	6	8	8	9	$\bar{Q}$

Es interesante observar que, si el par (Q, K) no está en forma estándar, entonces no ya no es posible garantizar el carácter indescomponible de la extensión. En efecto, tomemos el sistema de órdenes

$$Q_1 = (2, 3, 5, 5, 5, 8, 10)$$

y el sistema de grados

$$K_1 = (3, 5, 6, 7, 8, 12, 13).$$

La tabla

K_1	3	5	6	7	8	12	13
2	3	5	5	5	8	10	Q_1

,

nos permite apreciar que el par (Q_1, K_1) es indescomponible. Tomamos el sistema de 2 grados $K'_1 = (0, 1)$, que es disjunto con K_1 y verifica $k'_2 = 1 < 13$. Construimos el sistema de órdenes

$$\bar{Q}_1 = Q_1 \uplus (0, 1) = (0, 1, 2, 3, 5, 5, 5, 8, 10)$$

y el sistema de grados

$$\bar{K}_1 = K_1 \uplus (0,1) = (0,1,3,5,6,7,8,12,13).$$

En la tabla de órdenes y grados

$\bar{K}_1$	0	1	3	5	6	7	8	12	13
0	1	2	3	5	5	5	8	10	$\bar{Q}_1$
$I(\bar{Q}_1, \bar{K}_1)$	1	2	3	4	5	6	7	8	
	*	*							

observamos que el par $(\bar{Q}_1, \bar{K}_1)$ tiene dos índices de descomposición. □

Teorema 7.5 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de grados tales que el par (E, K) es indescomponible y está en forma estándar. Si la matriz E tiene un síngleton K-soportado, entonces E es K-singular ordenada en* $[0,1]$.

Demostración. Sea $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$, $K = (k_1, \ldots, k_n)$ y m el número de filas de E. El par (E, K) está en forma estándar y, como es indescomponible, (E, K) es un par de Pólya (Proposición 6.1); por lo tanto, podemos afirmar que se cumple $q_1 = 0$ y que el número de columnas de E es inferior a $k_n + 1$. Si se cumple $k_n = n - 1$, entonces el sistema de grados K es de la forma $(0, \ldots, n-1)$ y el par (E, K) define un problema algebraico clásico. En este caso, la matriz E, una vez normalizada es una matriz de Birkhoff (Proposición 6.3) con un síngleton soportado y, según el Teorema 2.4, E es fuertemente singular ordenada en $[0,1]$.

Supongamos que se cumple $k_n > n-1$. Sea K' el sistema de grados formado por los elementos de $K_{k_n} = (0, \ldots, k_n)$ que no están en K. Podemos escribir $K' = (k'_1, \ldots, k'_r)$ con $r = k_n - n + 1$. Formamos una matriz de interpolación de $m+1$ filas y $k_n + 1$ columnas con la estructura

$$\widehat{E} = \left(\frac{F}{\bar{E}} \right),$$

donde F es una fila de longitud $k_n + 1$ que tiene unos en las posiciones indicadas por K' y $\bar{E}$ es una matriz de m filas y k_n+1 columnas que tiene unos en las mismas posiciones que E. $\widehat{E}$ es una matriz de interpolación normal con k_n+1 unos cuyo sistema de órdenes de derivación es $Q(\widehat{E}) = Q(E) \uplus K'$; por otra parte, vemos que se cumple $K_{k_n} = K \uplus K'$.

Como el par (E, K) es un par indescomponible en forma estándar, K' es un sistema de grados disjunto con K y $k'_r < k_n$, podemos aplicar la Proposición 7.9, para obtener que el par $(\widehat{E}, K_{k_n})$ es indescomponible. Ahora bien, como el sistema de grados es $K_{k_n} = (0, 1, \ldots, k_n)$, el par $(\widehat{E}, K_{k_n})$ define un problema algebraico clásico cuyo espacio de interpolación es $\mathcal{P}_{k_n}(\mathbb{R})$. Siendo $(\widehat{E}, K_{k_n})$ indescomponible, la matriz $\widehat{E}$ es una matriz de Birkhoff (Proposición 6.3).

Veamos ahora que la matriz $\widehat{E}$ tiene un síngleton soportado. En efecto, sabemos que la matriz E tiene un síngleton K-soportado. Si el síngleton está soportado en E, entonces $\widehat{E}$ posee un síngleton soportado, pues la estructura de E permanece inalterada en la submatriz $\bar{E}$. Si el síngleton está K-soportado pero no está soportado, entonces existe un elemento $\hat{e}_{ij} = 1$ con $1 < j < m + 1$ que es el único elemento no nulo de la fila j de $\widehat{E}$ y existen también en $\widehat{E}$ elementos

$$\hat{e}_{1,k'_1} = 1 \quad \text{con} \quad k'_1 < j; \quad \hat{e}_{i',j'} = 1 \quad \text{con} \quad i' < i, \ j' > j.$$

Por lo tanto, $\widehat{E}$ tiene un síngleton soportado. Aplicando ahora el Teorema 2.4 a la matriz de Birkhoff $\widehat{E}$, resulta que el par $(\widehat{E}, K_{k_n})$ es singular ordenado sobre el intervalo $[0, 1]$. Tomamos el sistema de $m + 1$ nodos

$$X' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{m+1}), \qquad 0 = x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_{m+1} = 1,$$

organizamos la base de $\mathcal{P}_{K_{k_n}}(\mathbb{R})$ en la forma

$$\frac{x^{k'_1}}{k'_1!}, \ldots, \frac{x^{k'_r}}{k'_r!}; \qquad \frac{x^{k_1}}{k_1!}, \ldots, \frac{x^{k_n}}{k_n!},$$

y disponemos los elementos $\hat{e}_{ij} = 1$ de $\widehat{E}$ según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice. Con esa disposición, la matriz de Vandermonde generalizada $V(\widehat{E}, K_{k_n}, X')$ tiene la siguiente estructura triangular inferior por bloques

$$V(\widehat{E}, K_{k_n}, X') = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r\times n} \\ \hline M & V(E, K, X) \end{array}\right),$$

donde I_r es la matriz unidad de dimensión r, $\mathbf{0}_{r\times n}$ es una matriz nula de dimensiones $r \times n$, M es una con n filas y r columnas y $V(E, K, X)$ es la matriz de Vandermonde generalizada del par (E, K) para un ordenación adecuada de la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ y de los elementos $e_{ij} = 1$ de E y para el sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ con $x_i = x'_{i+1}$, $i = 1, \ldots, m$.

Es inmediato que se cumple $D(\widehat{E}, K_{k_n}, X') = D(E, K, X)$ y, teniendo en cuenta que existe un sistema de nodos admisible X' tal que $D(\widehat{E}, K_{k_n}, X')$ se anula, resulta que E es K-singular ordenada en $[0, 1]$. $\square$

Teorema 7.6 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de grados tales que el par (E, K) es indescomponible y está en forma estándar. Si la matriz E tiene una fila que contiene exactamente una secuencia impar K-soportada (las restantes secuencias de esa fila, de existir, son pares o no están K-soportadas), entonces E es K-singular ordenada en $[0, 1]$.*

Demostración. Es análoga a la demostración del Teorema 7.5. Con las mismas notaciones empleadas en esa demostración, si la matriz de interpolación E tiene un fila con exactamente una secuencia impar K-soportada, entonces la matriz de interpolación $\widehat{E}$ tiene un fila con exactamente una secuencia impar soportada. Apoyándonos en el Teorema 2.5, resulta que la matriz de interpolación de Birkhoff $\widehat{E}$ es singular ordenada en $[0, 1]$ y, en consecuencia, E es K-singular ordenada en $[0, 1]$. $\square$

Ejemplo 7.6.2 *Condición suficiente de K-singularidad ordenada en $[0, 1]$.*

Consideremos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y el sistema de grados

$$K = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13)\,.$$

En principio, los teoremas de singularidad obtenidos no son aplicables a este caso. Sin embargo, es importante observar que las condiciones suficientes de singularidad obtenidas son aplicables a los pares indescomponibles en forma estándar, por lo tanto, su forma natural de aplicación es después de haber realizado la descomposición canónica. En el Ejemplo 7.5.4, hemos que obtenido que el par (E, K) admite la descomposición canónica

$$(E, K) = (E_1, K_1) \oplus (E_2, K_2) \oplus (E_3, K_3),$$

donde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad K_1 = (0,1,2,3,4)\,;$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = (0,2,3)\,;$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = (0,1,2)\,.$$

El par (E_1, K_1) define un problema algebraico clásico y la matriz E_1 es una matriz de Pólya casi-hermitiana, por lo tanto, el par (E_1, K_1) es regular ordenado en $[0,1]$.

El par (E_3, K_3) define un problema de interpolación de Lagrange clásico, por lo tanto, también (E_3, K_3) es regular en $[0,1]$. Finalmente, para el par (E_2, K_2), obtenemos el sistema de grados K', formado por los grados inferiores al máximo grado de K que no están en K, esto es, $K' = (1)$.

El par (E_2, K_2) es un par indescomponible en forma estándar y tiene un síngleton K-soportado en la primera fila, por lo tanto, según el Teorema 7.5, (E_2, K_2) es singular ordenado en $[0,1]$. Finalmente, como consecuencia del Teorema de descomposición canónica (Teorema 7.4), obtenemos que el par (E, K) es singular ordenado en $[0,1]$.

Veamos a continuación que el estudio del determinante $D(E, K, X)$ nos permite confirmar el resultado obtenido para (E, X). Tomamos un sistema de 4 nodos $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, y supongamos, en primer lugar, que se cumple

$$x_1 = 0, x_2 = x, x_3 = y,\ x_4 = 1 \quad \text{con} \quad 0 < x < y < 1.$$

Si ordenamos la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ según grados crecientes y disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice, obtenemos la matriz de Vandermonde generalizada $V(E,K,X)$

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & x & x^2/2 & x^3/3! & x^4/4! & x^5/5! & x^7/7! & x^8/8! & x^9/9! & x^{10}/10! & x^{11}/11!\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2/2\\
1 & y & y^2/2 & y^3/3! & y^4/4! & y^5/5! & y^7/7! & y^8/8! & y^9/9! & y^{10}/10! & y^{11}/11!\\
0 & 1 & y & y^2/2! & y^3/3! & y^4/4! & y^6/6! & y^7/7! & y^8/8! & y^9/9! & y^{10}/10!\\
0 & 0 & 1 & y & y^2/2 & y^3/3! & y^5/5! & y^6/6! & y^7/7! & y^8/8! & y^9/9!\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y^2/2 & y^3/3! & y^4/4! & y^5/5! & y^6/6!\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & y^2/2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/5! & 1/6!
\end{pmatrix}$$

El valor del determinante, como función de los nodos x, y, es

$$\begin{aligned}
D(E,K,X) = \; & \tfrac{1}{1728}y^8x - \tfrac{1}{1728}y^7x^2 - \tfrac{1}{1728}y^{11}x + \tfrac{1}{1728}y^{10}x^2 - \tfrac{11}{1728}y^4x^5 + \\
& + \tfrac{1}{576}y^3x^6 + \tfrac{11}{1728}y^7x^5 - \tfrac{1}{576}y^6x^6 - \tfrac{1}{288}y^6x^3 + \tfrac{7}{864}y^5x^4 + \\
& + \tfrac{1}{288}y^9x^3 - \tfrac{7}{864}y^8x^4.
\end{aligned}$$

Afortunadamente, $D(E,K,X)$ admite una factorización sencilla (de hecho, siempre que (E,K) admita una descomposición canónica sencilla, el determinante admitirá una factorización sencilla)

$$D(E,K,X) = -\frac{1}{1728}xy^3\left(y-1\right)\left(y^2+y+1\right)\left(3x+y\right)\left(x-y\right)^4,$$

que nos permite afirmar que $D(E,K,X)$ no se anula para ninguna elección admisible de los valores de x e y. En el caso de que ninguno de los nodos sea nulo, la situación se complica notablemente. Tomamos

$$x_1 = t,\ x_2 = x,\ x_3 = y,\ x_4 = 1 \quad \text{con} \quad 0 < t < x < y < 1.$$

Para este caso, obtenemos la matriz de Vandermonde generalizada

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & t & t^2/2 & t^3/3! & t^4/4! & t^6/6! & t^7/7! & t^8/8! & t^9/9! & t^{10}/10! \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & t^2/2 & t^3/3! & t^4/4! \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & t^2/2! \\
1 & x & x^2/2 & x^3/3! & x^4/4! & x^5/5! & x^7/7! & x^8/8! & x^9/9! & x^{10}/10! & x^{11}/11! \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 \\
1 & y & y^2/2 & y^3/3! & y^4/4! & y^5/5! & y^7/7! & y^8/8! & y^9/9! & y^{10}/10! & y^{11}/11! \\
0 & 1 & y & y^2/2! & y^3/3! & y^4/4! & y^6/6! & y^7/7! & y^8/8! & y^9/9! & y^{10}/10! \\
0 & 0 & 1 & y & y^2/2 & y^3/3! & y^5/5! & y^6/6! & y^7/7! & y^8/8! & y^9/9! \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y^2/2 & y^3/3! & y^4/4! & y^5/5! & y^6/6! \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & y^2/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/5! & 1/6!
\end{pmatrix}$$

La expresión del determinante $D(E, K, X)$ como función de los nodos t, x, y, es bastante complicada, pero admite la factorización

$$\frac{1}{1728}\,(1-y)\,(x-y)^4\left(3ty+3t-y^2-y-1\right)(t-y)^3\,(t-x)\,(4t-y-3x)\,.$$

En principio, los únicos factores que podrían anularse, para valores admisibles de los nodos, son $(3ty+3t-y^2-y-1)$ y $(4t-y-3x)$. Si suponemos nulo el factor $(4t-y-3x)$, resulta $y = 4t-3x$. Teniendo en cuenta la condición $t < x$, obtenemos $y < 4x-3x = x$; por lo tanto, este factor no se anula para ninguna elección admisible de los valores de los nodos. Si suponemos nulo el factor $(3ty+3t-y^2-y-1)$, obtenemos la relación

$$t = \frac{1+y^2+y}{3y+3}.$$

Imponiendo la condición $t < y < 1$, obtenemos

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} < y < 1$$

y, por lo tanto, existe una infinidad de elecciones admisibles para los nodos. En particular, si tomamos $y = 1/2$, resulta $t = 7/18$; podemos completar el sistema de nodos con $x = (t+y)/2$, que nos proporciona $x = 11/16$. Para el sistema de nodos $X = (7/18, 1/2, 11/16, 1)$, el determinante $D(E, K, X)$ es, tal como adelantaba la teoría desarrollada, nulo. $\square$

Es interesante observar que los teoremas de K-singularidad (Teorema 7.5 y Teorema 7.6) no son ciertos para pares (E, K) indescomponibles que *no están en forma estándar*. El siguiente ejemplo presenta un caso muy simple que ilustra esta circunstancia.

Ejemplo 7.6.3 *Condición suficiente de singularidad y pares (E, K) no estándar.*

Consideremos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y el sistema de grados $K = (1, 2, 3)$. El sistema de órdenes de derivación de E es $Q(E) = (1, 1, 2)$. Observando la tabla de órdenes y grados

K	1	2	3
1	1	2	$Q(E)$

vemos que el par (E, K) es indescomponible. El elemento $e_{12} = 1$ de E es un síngleton, está claro que e_{12} está soportado inferiormente por los elementos e_{21} y e_{31}. Si formamos el sistema de grados K' que contiene los grados inferiores a $k_3 = 3$ que no están en K, se obtiene $K' = (0)$. El grado $k_1^* = 0$ soporta a e_{12}, por lo tanto, la matriz de interpolación E tiene un síngleton K-soportado.

Consideramos el sistema de nodos $X = (x, y, t)$ con $0 \leq x < y < t \leq 1$. Podemos hacer, sin pérdida de generalidad, $t = 1$; tendremos entonces la restricción $0 \leq x < y < 1$. La matriz de Vandermonde generalizada de la terna (E, K, X) es

$$V(E, K, X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 1 & y & y^2/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix},$$

y su determinante toma el valor

$$D(E, K, X) = x + \frac{1}{2}y^2 - x\,y - \frac{1}{2}.$$

Si exigimos la condición $D(E, K, X) = 0$, se obtiene $x = (1 + y)/2$. Ahora bien, como se verifica $y < 1$, resulta

$$y = \frac{2y}{2} < \frac{1 + y}{2} = x.$$

Por lo tanto, la matriz de interpolación E es K-regular ordenada sobre el intervalo $[0, 1]$.

Observemos que el Teorema de K-regularidad ordenada (Teorema 5.1) no es aplicable al par (E, K) pues E tiene una secuencia impar K-soportada;

no obstante, si nos apoyamos en la forma estándar $(\bar{E}, \bar{K})$, podemos deducir la regularidad del par (E, K) sin recurrir al determinante $D(E, K, X)$. La forma estándar del par (E, K) es

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = (0, 1, 2).$$

Vemos que $\bar{E}$ carece de secuencias impares $\bar{K}$-soportadas, por lo tanto, según la condición suficiente de K-regularidad ordenada ($\bar{E}$ también verifica la $\bar{K}$-condición de Pólya y la propiedad inclusiva ordenada), podemos afirmar que el par $(\bar{E}, \bar{K})$ es regular ordenado en $[0, 1]$. Podríamos haber llegado a esta misma conclusión observando que el par $(\bar{E}, \bar{K})$ define un problema de interpolación algebraica clásica y que la matriz $\bar{E}$ es una matriz casi-hermitiana que (una vez normalizada) verifica la condición de Pólya. Una vez establecida la regularidad ordenada de $(\bar{E}, \bar{K})$, el Teorema de traslación de órdenes y grados, nos asegura la regularidad de (E, K). $\square$

La Proposición 3.7 nos permite extender de forma inmediata la condición suficiente de singularidad a los intervalos de la forma $[0, b]$.

Proposición 7.10 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de grados tales que el par (E, K) es indescomponible y está en forma estándar. Si la matriz E tiene una fila que contiene exactamente una secuencia impar K-soportada (las restantes secuencias de esa fila, de existir, son pares o no están K-soportadas), entonces E es K-singular ordenada en $[0, b]$.*

Demostración. Es inmediata a partir del Teorema 7.6 y de la Proposición 3.7. $\square$

Para intervalos de la forma $[a, 0]$, la Proposición 3.8, nos permite enunciar la siguiente condición suficiente de singularidad ordenada.

Proposición 7.11 *Sea E una matriz de interpolación, K un sistema de grados tales que el par (E, K) es indescomponible y está en forma estándar y $\widehat{E}$ la matriz de interpolación que se obtiene invirtiendo el orden de las filas en E. Si la matriz $\widehat{E}$ tiene una fila que contiene exactamente una secuencia impar K-soportada (las restantes secuencias de esa fila, de existir, son pares o no están K-soportadas), entonces E es K-singular ordenada en $[a, 0]$.*

Demostración. Como E y $\widehat{E}$ tienen el mismo sistema de órdenes de derivación, el par $(\widehat{E}, K)$ es indescomponible y está en forma estándar. Según el Teorema 7.6, $\widehat{E}$ es K-singular ordenada en $[0, 1]$ y, observando la Proposición 3.8, obtenemos que E es K-singular ordenada en $[a, 0]$. $\square$