Capítulo 4

K-regularidad condicionada

4.1 Introducción

El principal objetivo de este capítulo es establecer una generalización de la condición de Pólya para la interpolación K-algebraica, que proporcione una condición necesaria y suficiente para la K-regularidad condicionada de una matriz de interpolación (Palacios y Rubió, 2003 [72]). A tal fin, se realiza un nuevo enfoque del problema que consiste en una relación de mayoración entre el sistema de órdenes de derivación y el sistema de grados. La *condición de Pólya generalizada* destaca por su sencillez conceptual y facilidad de uso, permitiendo sustituir el cálculo de las constantes de Pólya por una simple comparación de n-plas.

En la Sección 4.2 se establece la reformulación de la condición de Pólya basada en la mayoración del sistema de órdenes de derivación. La nueva formulación es aplicable a matrices de interpolación no normales y, sobre todo, permite realizar de forma simple la extensión al problema K-algebraico.

En la Sección 4.3 se define la *K-condición de Pólya* para un sistema de órdenes de derivación y para una matriz de interpolación.

En la Sección 4.4 se introduce la *unión creciente* de n-plas y se aborda el problema de extender y restringir adecuadamente un par de Pólya (Q, K), de forma que el par resultante sea de Pólya. Los resultados obtenidos permiten simplificar notablemente las demostraciones de K-regularidad.

En la Sección 4.5 se demuestra el *Teorema de K-regularidad condicionada* que establece la K-condición de Pólya como condición necesaria y suficiente para la K-regularidad condicionada de una matriz de interpolación.

Finalmente, en la Sección 4.6, se define y estudia el *sistema de grados de Pólya mínimo* K_E^*, menor sistema de grados respecto del cual la matriz de interpolación E verifica la condición de Pólya.

4.2 Condición de Pólya

4.2.1 Sistemas de órdenes de derivación de Pólya

En el problema de interpolación algebraica clásica, la condición de Pólya es condición necesaria y suficiente para la regularidad condicionada. En esta sección presentamos una reformulación de la condición de Pólya (para la interpolación algebraica clásica) que se basa en el *sistema de órdenes de derivación*: secuencia no decreciente de enteros que indica los órdenes de derivación involucrados en un problema de interpolación de Birkhoff. La siguiente definición introduce el concepto de sistema de órdenes de derivación de Pólya.

Definición 4.1 *Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ un sistema de órdenes de derivación. Decimos que Q verifica la condición de Pólya si se cumple*

$$q_j \leq j - 1, \quad \textit{para} \quad j = 1, \ldots, n \tag{4.1}$$

en tal caso, decimos que Q es un sistema de órdenes de derivación de Pólya.

Las n condiciones especificadas en (4.1) pueden resumirse en una única condición de mayoración uniforme entre n-plas

$$Q \leq (0, 1, \ldots, n-1) \tag{4.2}$$

A continuación definimos las *constantes de Pólya asociadas a un sistema de órdenes de derivación*; seguidamente, la Proposición 4.1 muestra como la definición de la condición de Pólya en la forma (4.2) es equivalente a una formulación basada en las constantes de Pólya del sistema de órdenes de derivación y que es formalmente análoga a la empleada para definir la condición de Pólya de matrices de interpolación normales.

Definición 4.2 *Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ un sistema de órdenes de derivación. Denominamos constantes de Pólya de Q a los enteros*

$$M_r(Q) = \mathrm{card}\{j : q_j \leq r - 1\}, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Proposición 4.1 *Un sistema de n órdenes de derivación Q verifica la condición de Pólya $Q \leq (0, 1, \ldots, n-1)$ si y sólo si sus constantes de Pólya cumplen*

$$M_r(Q) \geq r, \quad para \quad r = 1, \ldots, n \tag{4.3}$$

Demostración. Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ y supongamos que se cumple $M_j \geq j$, para $j = 1, \ldots, n$. Entonces, para cada j tenemos

$$q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_j \leq (j-1)$$

y, obviamente, $q_j \leq j-1$. Por lo tanto, Q es un sistema de órdenes de Pólya.

Recíprocamente, supongamos que Q es un sistema de órdenes de derivación de Pólya. Entonces, para cada j se cumple $q_j \leq (j-1)$ y, como es

$$q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_j,$$

obtenemos $M_j(Q) = \text{card}\{s : q_s \leq j-1\} \geq j$ para $j = 1, \ldots, n$. □

4.2.2 Condición de Pólya para matrices de interpolación

Dada una matriz de interpolación $E = (e_{ij})$ con m filas y n unos, la definición habitual de la condición de Pólya para E se hace a mediante sus constantes de Pólya:

$$M_j(E) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{j} e_{ik}, \quad j = 0, \ldots, n-1 \tag{4.4}$$

La matriz de interpolación E verifica la condición de Pólya si sus constantes de Pólya cumplen

$$M_j(E) \geq j+1 \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Dada la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vemos que sus constantes de Pólya (4.4) no están definidas más allá de la tercera columna (de índice $j = 2$). Para salvar este inconveniente, se hace necesario completar la matriz E con 4 columnas nulas (normalizar), resultando

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de interpolación E' contiene la misma información que E, pero ahora podemos calcular las constantes de Pólya

$$M_0 = 3, \quad M_1 = 5, \quad M_2 = 7, \quad M_3 = M_4 = M_5 = M_6 = 7,$$

y establecer, en la forma habitual, que E' es una matriz de Pólya.

En este trabajo, las condiciones de Pólya para una matriz de interpolación no se apoyan en las constantes de Pólya, en su lugar se emplea la condición de mayoración (4.2) sobre el sistema de órdenes de derivación de la matriz. Este enfoque no requiere la normalización de la matriz de interpolación, para matrices de interpolación normales es equivalente al enfoque habitual y, además, admite una generalización sencilla al problema K-algebraico.

Definición 4.3 *Decimos que una matriz de interpolación E con n unos verifica la condición de Pólya si su sistema de órdenes de derivación $Q(E)$ verifica la condición de Pólya $Q(E) \leq (0, 1, \ldots, n-1)$.*

En la siguiente proposición vemos que la nueva definición de condición de Pólya es equivalente a la definición habitual cuando ésta última es aplicable.

Proposición 4.2 *Sea E una matriz de interpolación normal con n unos. E verifica las condiciones $M_j(E) \geq j+1$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, si y solo si se cumple $Q(E) \leq (0, 1, \ldots, n-1)$.*

Demostración. Sea m el número de filas de $E = (e_{ij})$. La constante de Pólya

$$M_j(E) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=0}^{j} e_{is}$$

cuenta el número de órdenes de derivación $\leq j$ especificados en la matriz E. Si observamos la definición de las constantes de Pólya de un sistema de órdenes de derivación $M_r(Q) = \operatorname{card}\{j : q_j \leq r-1\}$, está claro que se cumple $M_r(Q(E)) = M_{r-1}(E)$. Para matrices de interpolación normales, existen las constantes de Pólya $M_0(E)$, $M_1(E), \ldots,$ $M_{n-1}(E)$ y, obviamente, se verifica

$M_r(Q(E)) \geq r$ para $r = 1, \ldots, n$, si y sólo si se cumple $M_j(E) \geq j + 1$ para $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. Para completar la demostración, basta con observar la Proposición 4.1. $\square$

Si una matriz de interpolación E con n unos no es normal pero es normalizable, esto es, si E especifica únicamente órdenes de derivación inferiores a n, entonces la condición $Q(E) \leq (0, 1, \ldots, n - 1)$ implica que la matriz normalizada E' cumplirá la condición de Pólya

$$M_j(E') \geq j + 1 \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, n - 1.$$

Con la nueva formulación, podemos establecer la condición necesaria y suficiente de regularidad condicionada en los siguientes términos:

Proposición 4.3 *Una matriz de interpolación E es condicionalmente regular (para la interpolación algebraica clásica) si y sólo si su sistema de órdenes de derivación verifica la condición $Q(E) \leq (0, 1, \ldots, |E| - 1)$.*

Es interesante resaltar que la regularidad condicionada es una propiedad compatible con la equivalencia en órdenes de derivación. Si un sistema de órdenes de derivación Q verifica la condición de Pólya, entonces toda matriz de interpolación de clase Q es condicionalmente regular.

Ejemplo 4.2.1 *Clase condicionalmente regular.*

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tiene $n = 7$ unos, y su sistema de órdenes de derivación es

$$Q(E) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2).$$

Para ver si E cumple la condición de Pólya, basta con observar que se verifica

$$Q(E) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 2) \leq (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Por lo tanto, la matriz de interpolación E es condicionalmente regular.

Tomemos ahora el sistema de 8 órdenes de derivación

$$Q_1 = (0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3).$$

Como se verifica

$$Q_1 = (0,0,0,1,2,2,3,3) \leq (0,1,2,3,4,5,6,7)\,,$$

toda matriz de interpolación de clase Q_1 es condicionalmente regular. Las matrices

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

son de clase Q_1, ambas son condicionalmente regulares. E_1 es regular ordenada, pues carece de secuencias impares soportadas. E_2 es fuertemente singular, por ser indescomponible y tener una fila con exactamente una secuencia impar soportada. $\square$

4.3 K-condición de Pólya

La condición de Pólya (4.1) se extiende de forma natural a la interpolación K-algebraica.

Definición 4.4 *Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de grados. Decimos que un sistema de órdenes de derivación $Q = (q_1, \ldots, q_m)$ verifica la condición de Pólya respecto de K (o más brevemente, la K-condición de Pólya) si $m = n$ y se cumple $q_j \leq k_j$ para $j = 1, \ldots, n$. En ese caso, escribimos $Q \leq K$. Una matriz de interpolación E verifica la K-condición de Pólya si su sistema de órdenes de derivación $Q(E)$ verifica la K-condición de Pólya, esto es, $Q(E) \leq K$.*

Cuando el sistema de grados es $K = (0, 1, \ldots, n-1)$, la K-condición de Pólya se reduce a $Q(E) \leq (0, 1, \ldots, n-1)$. Según hemos visto en la sección anterior, la condición $Q(E) \leq (0, 1, \ldots, n-1)$ equivale a la condición de Pólya de la interpolación algebraica, por lo tanto, la K-condición de Pólya es una extensión de la condición de Pólya al problema K-algebraico.

Ejemplo 4.3.1 *K-condición de Pólya.*

El sistema de órdenes de derivación

$$Q = (0,0,1,3,5,11)$$

no verifica la condición de Pólya, pues es inmediato comprobar que se cumple

$$Q = (0,0,1,3,5,11) \not\leq (0,1,2,3,4,5)\,.$$

En el contexto de la interpolación algebraica de Birkhoff, toda matriz de interpolación de clase Q es totalmente singular.

Si tomamos el sistema de grados

$$K = (1, 3, 7, 9, 10, 11)\,,$$

Q cumple la K-condición de Pólya

$$Q = (0, 0, 1, 3, 5, 11) \leq (1, 3, 7, 9, 10, 11)\,.$$

Existe una infinidad de sistemas de grados respecto de los que Q cumple la condición de Pólya. El sistema de grados

$$K^* = (0, 1, 2, 3, 5, 11)$$

es el menor de todos ellos (con la mayoración uniforme de n-plas), en el sentido de que si Q verifica la K-condición de Pólya, entonces se cumple $K^* \leq K$. La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es de clase Q, por lo tanto verifica la condición de Pólya respecto de K y K^*. $\square$

La siguiente definición muestra como pueden extenderse las constantes de Pólya al problema K-algebraico. Es inmediato observar que en el caso $K = (0, 1, \ldots, n-1)$, se obtienen las constantes de Pólya de la Definición 4.2.

Definición 4.5 *Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de grados y $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ un sistema de órdenes de derivación. Denominamos constantes de Pólya de Q respecto de K (o más brevemente, K-constantes de Pólya de Q) a los enteros*

$$M_r(Q, K) = \operatorname{card}\{j : q_j \leq k_r\}, \quad r = 1, \ldots, n.$$

Las K-constantes de Pólya de una matriz de interpolación E son las K-constantes de Pólya de su sistema de órdenes de derivación $Q(E)$.

Proposición 4.4 *Sea K un sistema de n grados. Un sistema de n órdenes de derivación Q verifica la K-condición de Pólya si y sólo si las K-constantes de Pólya de Q cumplen $M_r(Q, K) \geq r$ para $r = 1, \ldots, n$.*

Demostración. Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$ y $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. Si para cada r se cumple $M_r(Q, K) \geq r$, obtenemos $q_1 \leq \cdots \leq q_r \leq k_r$, de donde resulta $Q \leq K$. Recíprocamente, supongamos que Q verifica la K-condición de Pólya. Entonces para cada r con $1 \leq r \leq n$, se cumple $q_r \leq k_r$. Como Q es no decreciente, obtenemos $q_1 \leq \cdots \leq q_r \leq k_r$ y, por lo tanto, $M_r(Q, K) \geq r$. □

Ejemplo 4.3.2 *K-constantes de Pólya y condición de Pólya.*

Consideramos el sistema de grados

$$K = (1, 3, 7, 9, 10, 11) .$$

Para el sistema de órdenes de derivación

$$Q = (0, 0, 1, 3, 5, 12) ,$$

obtenemos las K-constantes de Pólya

$$M_1(Q, K) = 2, \quad M_2(Q, K) = 4, \quad M_3(Q, K) = 5,$$

$$M_4(Q, K) = 5, \quad M_5(Q, K) = 5, \quad M_6(Q, K) = 5.$$

Observando el valor de la constante $M_6(Q, K)$, podemos afirmar que Q no cumple la K-condición de Pólya. Obviamente, para llegar a esta conclusión es mucho más simple observar que K no mayora (uniformemente) a Q. □

Las siguiente proposición relaciona la K-condición de Pólya con el K-exceso total de grado.

Proposición 4.5 *Sea K un sistema de n grados y Q un sistema de órdenes de derivación que verifica la K-condición de Pólya. Entonces: (i) Q tiene K-exceso total de grado, esto es $\rho_K(Q) \geq 0$. (ii) $\rho_K(Q) = 0$ si y sólo si $Q = K$.*

Demostración. Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$ y $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. El K-exceso total de grado de Q es

$$\rho_K(Q) = \sum_{i=1}^{n} (k_i - q_i) .$$

(i) Como $Q \leq K$, obtenemos $\rho_K(Q) = \Sigma\,(K - Q) \geq 0$. Observemos que el recíproco no es cierto. (ii) Si se cumple $Q = K$, es inmediato que $\rho_K(Q) = 0$. Recíprocamente, supongamos que se cumple $\rho_K(Q) = 0$. Como Q verifica la K-condición de Pólya, $\rho_K(Q)$ es suma de enteros no negativos, por lo tanto, debe ser $k_i - q_i = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. □

4.4 Extensiones y restricciones de Pólya

En las demostraciones de las propiedades de K-regularidad de una matriz de interpolación, recurrimos frecuentemente a la ampliación de la matriz de interpolación y del espacio de interpolación de forma que el problema resultante sea más manejable. Esto nos ha conducido a estudiar la extensión de los sistemas de órdenes de derivación, para ello, hemos definido una operación especial entre n-plas: la *unión creciente*, que ha resultado ser especialmente apta para este cometido.

Definición 4.6 *Dadas $Q = (q_1, \ldots, q_r)$ y $K = (k_1, \ldots, k_s)$, definimos la unión creciente de Q y K como la $(r+s)$-tupla que dispone de forma creciente a los enteros $q_1, \ldots, q_r, k_1, \ldots, k_s$. Representamos la unión creciente de Q y K por $Q \uplus K$. Decimos que Q y K son disjuntas cuando no tienen elementos comunes.*

La siguiente proposición establece condiciones para extender adecuadamente un par de Pólya (Q, K) de forma que el par resultante (Q', K') sea de Pólya.

Proposición 4.6 *Sea K un sistema de grados, Q un sistema de órdenes de derivación, R un sistema de grados disjunto con K, $K' = K \uplus R$ y $Q' = Q \uplus R$. Si Q verifica la K-condición de Pólya, entonces Q' verifica la K'-condición de Pólya.*

Demostración. Notemos que K' está bien definido, pues K y R no tienen elementos comunes y veamos, en primer lugar, que la proposición es cierta cuando R tiene un sólo elemento. Sea

$$R = (r), \quad Q = (q_1, \ldots, q_n), \quad K = (k_1, \ldots, k_n),$$
$$Q' = \left(q'_1, \ldots, q'_n, q'_{n+1}\right), \quad K' = \left(k'_1, \ldots, k'_n, k'_{n+1}\right),$$
$$i_0 = \max_{1 \le i \le n} \{i : q_i \le r\}, \quad j_0 = \max_{1 \le j \le n} \{j : k_j \le r\}.$$

Supongamos, como primer caso, que se cumple $r < q_1$. En este caso obtendremos $r < q_1 \le k_1$, de donde resulta $Q' = (r, q_1, \ldots, q_n)$ y $K' = (r, k_1, \ldots, k_n)$. Por lo tanto, es $Q' \le K'$.

Como segundo caso, sea $q_1 \le r < k_1$. Entonces existe i_0 y j_0 no está definido. Consideramos dos subcasos: (i) $i_0 = n$ y (ii) $i_0 < n$.

En el subcaso (i) resulta $Q' = (q_1, \ldots, q_n, r)$ y $K' = (r, k_1, \ldots, k_n)$, de donde obtenemos $q'_i \le r \le k'_j$ para $j = 0, \ldots, n+1$ y, por lo tanto, $Q' \le K'$.

En el subcaso (ii), obtenemos

$$
\begin{array}{rcl}
K' & = & \left(\begin{array}{cccccccc} r, & k_1, & \ldots, & k_{i_0-1}, & k_{i_0}, & k_{i_0+1}, & \ldots, & k_n \end{array} \right), \\
Q' & = & \left(\begin{array}{cccccccc} q_1, & q_2 & \ldots, & q_{i_0}, & r, & q_{i_0+1}, & \ldots, & q_n \end{array} \right).
\end{array}
$$

Para $j = i_0 + 2, \ldots, n+1$, se cumple $q'_j = q_{j-1} \leq k_{j-1} = k'_j$, por verificar Q la K-condición de Pólya; para $j = 1, \ldots, i_0 + 1$, es $q'_j \leq r \leq k'_j$. En definitiva, se cumple $Q' \leq K'$.

Finalmente, como tercer caso, supongamos que se cumple $q_1 \leq k_1 \leq r$. En este caso los índices i_0 y j_0 están bien definidos. Consideramos tres subcasos: (iii) $i_0 < j_0$, (iv) $i_0 = j_0$ y (v) $i_0 > j_0$.

En el subcaso (iii) obtenemos $q_{i_0+1} > r$ y $k_{i_0+1} < r$, que está en contradicción con que Q cumpla la K-condición de Pólya, por lo tanto, este caso no sucede.

En el subcaso (iv), si se cumple $i_0 = j_0 = n$, tendremos $K' = (k_1, \ldots, k_n, r)$, $Q' = (q_1, \ldots, q_n, r)$, y si es $i_0 = j_0 < n$, resulta

$$
\begin{array}{rcl}
K' & = & \left(\begin{array}{ccccccc} k_1, & \ldots, & k_{i_0}, & r, & k_{i_0+1}, & \ldots, & k_n \end{array} \right), \\
Q' & = & \left(\begin{array}{ccccccc} q_1, & \ldots, & q_{i_0}, & r, & q_{i_0+1}, & \ldots, & q_n \end{array} \right).
\end{array}
$$

De donde obtenemos que K' mayora a Q'.

Finalmente, en el subcaso (v), se cumple $i_0 > j_0$ y tendremos

$$
\begin{array}{rl}
K' = & \left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc} k_1, & \ldots, & k_{j_0}, & r, & \ldots, & k_{i_0-1} & k_{i_0}, & k_{i_0+1} & \ldots, & k_n \end{array} \right), \\
\\
Q' = & \left(\begin{array}{ccc|ccc|cccc} q_1, & \ldots, & q_{j_0}, & q_{j_0+1}, & \ldots, & q_{i_0}, & r, & q_{i_0+1} & \ldots, & q_n \end{array} \right).
\end{array}
$$

En los bloques primero y último, es inmediato que K' mayora uniformemente a Q'; en el bloque central, se cumple

$$
q_{j_0+1} \leq \cdots \leq q_{i_0} \leq r < k_{j_0+1} < \cdots < k_{i_0-1}
$$

y, por lo tanto, cada orden de derivación está mayorado por su grado correspondiente.

Para completar la demostración por inducción, supongamos que la proposición es cierta para todo sistema de grados R con p elementos. Si $\bar{R} = (r_1, \ldots, r_p, r_{p+1})$ es un sistema de $p+1$ grados disjunto con K, entonces $\bar{R}_1 = (r_1, \ldots, r_p)$ es un sistema de p grados disjunto con K. Según la hipótesis de inducción $Q'_1 = Q \uplus \bar{R}_1$verifica la condición de Pólya respecto de $K'_1 = K \uplus \bar{R}_1$, por otra parte, $\bar{R}'_2 = (r_{p+1})$ es un sistema de un grado disjunto con K_1' y, por lo tanto, $Q_1' \uplus \bar{R}_2'$ verifica la condición de Pólya respecto de $K_1' \uplus \bar{R}_2'$. Finalmente, como se cumple

$$Q \uplus \bar{R} = Q_1' \uplus \bar{R}_2', \quad K \uplus \bar{R} = K_1' \uplus \bar{R}_2',$$

la proposición queda demostrada por inducción. □

Ejemplo 4.4.1 *Unión creciente, extensión compatible con la K-propiedad de Pólya.*

Dadas las n-plas

$$R = (0,5,6,8,10), \qquad S = (1,1,5,8),$$

su unión creciente es

$$R \uplus S = (0,1,1,5,5,6,8,8,10).$$

Consideramos el sistema de grados

$$K = (1,2,3,7,9,11,14)$$

y el sistema de órdenes de derivación

$$Q = (1,2,2,4,4,6,10).$$

R es un sistema de grados disjunto con K y Q verifica la K-propiedad de Pólya. Según la proposición anterior, $Q \uplus R$ verifica la propiedad de Pólya respecto de $K \uplus R$.

En efecto, si formamos las uniones crecientes, se obtiene

$$Q \uplus R = (0,1,2,2,4,4,5,6,6,8,10,10),$$

$$K \uplus R = (0,1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,14).$$

Es inmediato observar que $K \uplus R$ mayora uniformemente a $Q \uplus R$. □

La siguiente proposición muestra como se puede obtener un par de Pólya (Q, K) a partir de un par de Pólya (Q', K') mediante la eliminación de elementos comunes a Q' y K'.

Proposición 4.7 *Sea K un sistema de grados, Q un sistema de órdenes de derivación y R un sistema de grados disjunto con K. Si $Q' = Q \uplus R$ verifica la condición de Pólya respecto del sistema de grados $K' = K \uplus R$, entonces Q verifica la condición de Pólya respecto de K.*

Demostración. Como R está formado por enteros no negativos distintos y no tiene elementos comunes con K, $K \uplus R$ es efectivamente un sistema de grados. Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ y veamos que la proposición es cierta cuando R tiene un elemento, esto es, $R = (r)$. Definimos, como en la proposición anterior

$$i_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \{i : q_i \leq r\}, \quad j_0 = \max_{1 \leq j \leq n} \{j : k_j \leq r\}.$$

Supongamos, como primer caso, que q_1 y k_1 son mayores que r. Entonces, obtenemos $K' = (r, k_1, \ldots, k_n)$, $Q' = (r, q_1, \ldots, q_n)$. Si se cumple $Q' \leq K'$, es inmediato que $Q \leq K$.

En el caso $k_1 < r < q_1$, j_0 está definido y obtenemos

$$K' = (k_1, \ldots, k_{j_0}, r, k_{j_0+1}, \ldots, k_n), \quad Q' = (r, q_1, \ldots, q_n),$$

de donde resulta la contradicción $r \leq k_1 < r$; por lo tanto, este caso no sucede.

Como tercer caso, supongamos que se verifica $q_1 \leq r < k_1$. En este caso, i_0 está definido y obtenemos

$$\begin{array}{rl} K' = & \big(\; r, \; k_1, \; \ldots, \; k_{i_0-1}, \; k_{i_0}, \; \big| \; k_{i_0+1}, \; \ldots, \; k_n \; \big), \\[2ex] Q' = & \big(\; q_1, \; q_2, \; \ldots, \; q_{i_0}, \; r, \; \big| \; q_{i_0+1}, \; \ldots, \; q_n \; \big). \end{array}$$

Tenemos

$$q_1 \leq \cdots \leq q_{i_0} \leq r < k_1 < \cdots < k_{i_0}$$

y para $j = i_0 + 1, \ldots, n$, es inmediato que se cumple $q_j \leq k_j$, en definitiva, resulta $Q \leq K$.

Finalmente, consideremos el cuarto caso en que k_1 y q_1 no superan a r. Entonces i_0 y j_0 están bien definidos y distinguimos tres subcasos

$$\text{(i) } i_0 < j_0, \qquad \text{(ii) } i_0 = j_0, \qquad \text{(iii) } i_0 > j_0.$$

En el subcaso (i) es $i_0 < j_0$, de donde obtenemos

$$\begin{array}{rl} K' = & \big(\; k_1, \; \ldots, \; k_{i_0}, \; \big| \; k_{i_0+1}, \; \ldots, \; k_{j_0}, \; \big| \; r, \; \ldots, \; k_n \; \big), \\[2ex] Q' = & \big(\; q_1, \; \ldots, \; q_{i_0}, \; \big| \; r, \; \ldots, \; q_{j_0}, \; \big| \; q_{j_0+1}, \; \ldots, \; q_n \; \big) \end{array}$$

y de ahí resulta $r \leq k_{i_0+1} \leq k_{j_0} < r$, lo cual es una contradicción, por lo tanto, este caso no sucede.

En el subcaso (ii) es $i_0 = j_0$, entonces

$$K' = \left(k_1, \ \ldots\ , \ k_{i_0}, \middle| \quad r \quad \middle| k_{i_0+1}, \ \ldots\ , \ k_n \right),$$

$$Q' = \left(q_1, \ \ldots\ , \ q_{i_0}, \middle| \quad r \quad \middle| q_{i_0+1}, \ \ldots\ , \ q_n \right).$$

y es inmediato que $Q \leq K$.

Finalmente, en el subcaso (iii), suponemos que es $i_0 > j_0$. Entonces tendremos para K' y Q'

$$\left(k_1, \ \ldots\ , \ k_{j_0}, \middle| \quad r\ , \ \ldots\ , \ k_{i_0-1}, \ k_{i_0}, \quad \middle| k_{i_0+1}, \ \ldots\ , \ k_n \right),$$

$$\left(q_1, \ \ldots\ , \ q_{j_0}, \middle| \quad q_{j_0+1}, \ \ldots\ , \ q_{i_0}\ , \ r\ , \quad \middle| q_{i_0+1}, \ \ldots\ , \ q_n \right).$$

Está claro que se cumple $q_j \leq k_j$ para $j = 1, \ldots, j_0$ y para $j = i_0 + 1, \ldots, n$; en el bloque central, obtenemos

$$q_{j_0+1} \leq \cdots \leq q_{i_0} \leq r < k_{j_0+1} < \cdots < k_{i_0}.$$

Por lo tanto, también en este caso se verifica $Q \leq K$.

Para completar la demostración por inducción, supongamos que la proposición es cierta para todo sistema R con t grados que es disjunto con K y sea $\bar{R} = (r_1, \ldots, r_{t+1})$ un sistema de $t+1$ grados disjunto con K tal que $Q \uplus \bar{R}$ verifica la condición de Pólya respecto de $K \uplus \bar{R}$. Formamos

$$K_1 = K \uplus (r_1, \ldots, r_t), \qquad Q_1 = Q \uplus (r_1, \ldots, r_t)$$

y tomamos $\bar{R}_1 = (r_{t+1})$. $\bar{R}_1$ es un sistema de un grado disjunto con K_1 y $Q_1 \uplus \bar{R}_1$ verifica la condición de Pólya respecto de $K_1 \uplus \bar{R}_1$. Según hemos visto en la primera parte de la demostración, Q_1 verifica la condición de Pólya respecto de K_1 y, según la hipótesis de inducción, Q verifica la condición de Pólya respecto de K. $\square$

Ejemplo 4.4.2 *Aplicación de la Proposición 4.7.*

Una forma típica en la que usaremos la Proposición 4.7 es la siguiente. Consideremos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema de órdenes de derivación de E es

$$Q(E) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 7).$$

Si representamos por $Q_1(E)$ el sistema de órdenes de derivación que especifica la primera fila de E y $Q_c(E)$ el sistema de órdenes de derivación que especifican las filas restantes, obtenemos

$$Q_1(E) = (0, 2, 3, 5, 7)\,, \quad Q_c(E) = (0, 0, 1, 1, 3)\,.$$

Tomemos el sistema de grados

$$K = (0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12)\,.$$

Vemos que E cumple la propiedad de Pólya respecto de K. En efecto

$$Q(E) = (0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 7) \leq (0, 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12) = K.$$

Por otra parte, $Q_1(E)$ es una t-pla de enteros distintos contenida en K y podemos establecer la descomposición

$$K = K_c \uplus Q_1(E), \qquad K_c = (1, 9, 10, 11, 12)\,.$$

Como también se verifica $Q(E) = Q_c(E) \uplus Q_1(E)$, la Proposición 4.7 nos permite asegurar que la submatriz

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resultante de suprimir la primera fila en E, cumple la condición de Pólya respecto del sistema de grados K_c, formado a partir de K suprimiendo los grados que especifica $Q_1(E)$. $\Box$

4.5 Teorema de K-regularidad condicionada

En esta sección demostramos que la K-condición de Pólya es condición necesaria y suficiente para la K-regularidad condicionada de una matriz de interpolación (Palacios y Rubió, 2003 [72]).

Proposición 4.8 *Sea K un sistema de n grados, Q un sistema de n órdenes y E una matriz de interpolación de clase Q. Si Q no verifica la K-condición de Pólya, entonces E es totalmente K-singular.*

Demostración. Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. Como Q no verifica la K-condición de Pólya, existe un $r_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $q_{r_0} > k_{r_0}$.

En E obtendremos un elemento $e_{i,q_{r_0}} = 1$. Organizamos los $e_{ik} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i,k) con prevalencia del segundo índice. Con esa disposición, la matriz de Vandermonde generalizada $V(E,K,X)$ tiene la siguiente estructura triangular superior por bloques

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} x^{k_1}\cdots x^{k_{r_0-1}} & x^{k_{r_0}} & x^{k_{r_0+1}}\cdots x^{k_n}\end{array}\\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ e_{i,q_{r_0}} \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c|ccc}
 & & & * & * & \cdots & * \\
 & M_1 & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 & & & * & * & \cdots & * \\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \hline
0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & M_2 & \\
0 & \cdots & 0 & 0 & & &
\end{array}\right)
\end{array},
$$

donde M_1 es una matriz cuadrada de orden r_0-1 y M_2 es una matriz cuadrada de orden $n-r_0$. Para cualquier elección el sistema de nodos X, obtenemos $D(E,K,X) = 0$. $\square$

Teorema 4.1 *Sea K un sistema de n grados, Q un sistema de n órdenes de derivación y E una matriz de interpolación de clase Q. E es condicionalmente K-regular si y sólo si Q verifica la K-condición de Pólya.*

Demostración. En la proposición anterior se ha establecido la K-condición de Pólya como condición necesaria para la regularidad condicionada respecto de K, veamos ahora la suficiencia. Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ y $Q \leq K$. Si es $k_n = n-1$, estamos en un problema de interpolación algebraica clásica que verifica la condición de Pólya. Por lo tanto, E es condicionalmente regular respecto de K.

Supongamos que es $k_n \geq n$ y sea $K^* = (k_1^*, \ldots, k_r^*)$ el sistema de grados formado por los elementos de $K_{k_n} = (0, 1, \ldots, k_n)$ que no están en K. K^* tiene $r = k_n - n + 1$ elementos y, obviamente, es disjunto con K. Formamos una matriz de interpolación

$$
E^* = \left(\frac{F_1}{\bar{E}}\right),
$$

donde F_1 es una fila de longitud k_n+1 que tiene unos en los lugares especificados por K^* y $\bar{E}$ es una matriz con el mismo número de filas que E y k_n+1 columnas que tiene unos en las mismas posiciones que E. La construcción de $\bar{E}$ es posible, pues la matriz E verifica la K-condición de Pólya y, por lo tanto, todos sus unos se encuentran en las columnas $0, \ldots, k_n$.

Observamos que E^* es una matriz de interpolación con $k_n + 1$ unos cuyo sistema de órdenes de derivación es $Q\,(E^*) = Q \uplus K^*$. Como Q verifica la K-condición de Pólya, según la Proposición 4.6, resulta que $Q\,(E^*)$ verifica la condición de Pólya respecto de $K \uplus K^* = (0, 1, \ldots, k_n)$, esto es, la condición de Pólya del problema algebraico clásico. Por lo tanto, E^* es condicionalmente regular (en la interpolación algebraica clásica).

Sea m el número de filas de E, podemos determinar un sistema de $m+1$ nodos $X^* = (y, x_1, \ldots, x_m)$ tal que el (E^*, X^*) sea un problema de interpolación algebraica regular. Como la regularidad de problemas de interpolación algebraica no se ve afectada por transformaciones afines de los nodos, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, $y = 0$. Organizamos la base de $\mathcal{P}_{k_n}(\mathbb{R})$ en la forma

$$\left(\frac{x^{k_1^*}}{k_1^*!}, \ldots, \frac{x^{k_r^*}}{k_r^*!}, \frac{x^{k_1}}{k_1!}, \ldots, \frac{x^{k_n}}{k_n!}\right)$$

y los elementos $e_{ij}^* = 1$ de E^* según el orden lexicográfico creciente de los índices (i, j) con prevalencia del primer índice. Con esa disposición, la matriz de Vandermonde generalizada $V(E^*, X^*)$ presenta la siguiente estructura triangular inferior por bloques

$$V(E^*, X^*) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r\times n} \\ \hline M & V(E, K, X) \end{array}\right),$$

donde I_r es la matriz unitaria de orden r, M es una matriz con n filas y r columnas y $V(E, K, X)$ es la matriz de Vandermonde generalizada del problema (E, K, X), con $X = (x_1, \ldots, x_m)$ (para una disposición adecuada de la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ y de los elementos $e_{ij} = 1$ de E). Dada la estructura de $V(E^*, X^*)$, obtenemos $D(E, K, X) = D(E^*, X^*) \neq 0$ $\square$

Proposición 4.9 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación de m filas que verifica la K-condición de Pólya y $X = (x_1, \ldots, x_m)$. El determinante de la matriz de Vandermonde generalizada $D(E, K, X)$ es un polinomio homogéneo en las variables $x_1, \ldots, x_m$, de grado total $\rho_K(E)$.*

Demostración. Según el Teorema 4.1, cuando E verifica la K-condición de Pólya, el determinante $D(E, K, X)$ no es idénticamente nulo. En la demostración de la Proposición 3.4, hemos visto que, cuando no es idénticamente nulo, el determinante $D(E, K, X)$ es un polinomio homogéneo en las variables $x_1, \dots, x_m$, de grado total $\rho_K(E) = \Sigma(K - Q)$. $\square$

4.6 Sistema de grados de Pólya mínimo

Dada una matriz de interpolación E, siempre es posible obtener un sistema de grados K respecto del cual E verifica la condición de Pólya. En efecto, si $Q(E) = (q_1, \dots, q_n)$ es el sistema de órdenes de derivación de E, nos vale cualquier sistema de grados $K = (k_1, \dots, k_n)$ que verifique $k_1 \geq q_n$. En esta sección vemos que el conjunto de los sistemas de grados K, respecto de los que E verifica la condición de Pólya, tiene un elemento mínimo (respecto de la mayoración uniforme de n-plas).

Definición 4.7 *Sea $Q = (q_1, \dots, q_n)$ un sistema de órdenes de derivación. Definimos la n-pla $K_Q^* = (k_1^*, \dots, k_n^*)$ como sigue*

$$K_Q^* = \begin{cases} k_1^* = q_1, \\ k_j^* = \max\{k_{j-1}^* + 1, q_j\} \quad \textit{para} \quad j = 2, \dots, n. \end{cases}$$

Denominamos a K_Q^* el sistema de grados de Pólya mínimo correspondiente a Q. Si E es una matriz de interpolación y $Q(E)$ su sistema de órdenes de derivación, el sistema de grados de Pólya mínimo de E es $K_{Q(E)}^*$; lo representamos por K_E^*.

Proposición 4.10 *Sea Q un sistema de órdenes de derivación y K_Q^* su sistema de grados de Pólya mínimo. K_Q^* es un sistema de grados y Q verifica la K_Q^*-condición de Pólya.*

Demostración. Sea $Q = (q_1, \dots, q_n)$ y $K_Q^* = (k_1^*, \dots, k_n^*)$. Como los q_j son enteros no negativos, los elementos de K_Q^* también son enteros no negativos. Además, se cumple $k_j^* \geq k_{j-1}^* + 1$ para $j = 2, \dots, n$, por lo tanto, K_Q^* es un sistema de grados. Veamos ahora que Q verifica la K_Q^*-condición de Pólya. Para $j = 1$, se cumple $q_1 = k_1^*$ y, para $j = 2, \dots, n$, es $k_j^* = \max\{k_{j-1}^* + 1, q_j\}$, de donde obtenemos $k_j^* \geq q_j$. Por lo tanto, se cumple $Q \leq K_Q^*$. $\square$

Proposición 4.11 *Sea Q un sistema de n órdenes de derivación, K_Q^* su sistema de grados de Pólya mínimo y K un sistema de n grados. Q verifica la K-condición de Pólya si y sólo si K mayora uniformemente a K_Q^*.*

Demostración. Supongamos que se cumple $K \geq K_Q^*$. Según hemos visto en la proposición anterior, Q verifica la condición de Pólya respecto de K_Q^*. Por lo tanto, obtenemos $Q \leq K_Q^* \leq K$ y Q verifica la K-condición de Pólya.

Veamos ahora que si K no mayora uniformemente a K_Q^*, entonces Q no verifica la K-condición de Pólya. Supongamos, pues, que K no mayora a K_Q^*. Entonces existe un *primer* índice j_0 en $\{1, \ldots, n\}$ tal que $k_{j_0} < k_{j_0}^*$. Consideramos dos casos: (i) $j_0 = 1$ y (ii) $j_0 > 1$. En el caso (i) es $j_0 = 1$. Se cumple $k_1 < k_1^* = q_1$ y Q no verifica la K-condición de Pólya. En el caso (ii) es $j_0 > 1$ y se cumple $k_{j_0}^* = \max\{k_{j_0-1}^* + 1, q_{j_0}\}$. Si fuera $k_{j_0}^* = k_{j_0-1}^* + 1$, tendríamos $k_{j_0} < k_{j_0-1}^* + 1$ y de ahí $k_{j_0-1} \leq k_{j_0} - 1 < k_{j_0-1}^*$, que contradice la definición de j_0; en consecuencia, debe ser $k_{j_0}^* = q_{j_0}$, de donde obtenemos $k_{j_0} < k_{j_0}^* = q_{j_0}$. Por lo tanto, en este segundo caso, Q tampoco verifica la K-condición de Pólya. $\square$

Ejemplo 4.6.1 *Sistema de grados de Pólya mínimo.*

Para la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema de órdenes de derivación

$$Q(E) = (1, 1, 1, 5, 6, 6, 9, 10, 10).$$

Si seguimos la Definición 4.7, resulta

$$\begin{aligned}
k_1^* &= q_1 = 1, \\
k_2^* &= \max\{k_1^* + 1, q_2\} = \max\{2, 1\} = 2, \\
k_3^* &= \max\{k_2^* + 1, q_3\} = \max\{3, 1\} = 3, \\
k_4^* &= \max\{k_3^* + 1, q_4\} = \max\{4, 5\} = 5, \\
k_5^* &= \max\{k_4^* + 1, q_5\} = \max\{6, 6\} = 6, \\
k_6^* &= \max\{k_5^* + 1, q_6\} = \max\{7, 6\} = 7, \\
k_7^* &= \max\{k_6^* + 1, q_7\} = \max\{8, 9\} = 9, \\
k_8^* &= \max\{k_7^* + 1, q_8\} = \max\{10, 10\} = 10, \\
k_9^* &= \max\{k_8^* + 1, q_9\} = \max\{11, 10\} = 11.
\end{aligned}$$

El sistema de grados de Pólya mínimo para E es

$$K_E^* = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11).$$

Podemos obtener K_E^* de forma sencilla a partir de la tabla

K_E^*									
$Q(E)$	1	1	1	5	6	6	9	10	10

Para ello, basta con completar los grados de izquierda a derecha, colocando en cada casilla el menor entero que supera al grado situado a su izquierda y supera o iguala al orden de derivación situado debajo. En nuestro caso obtenemos

K_E^*	1	2	3	5	6	7	9	10	11
$Q(E)$	1	1	1	5	6	6	9	10	10

También podemos obtener el sistema de grados de Pólya mínimo realizando la *fusión de las filas* de la matriz de interpolación (ver [60], pág. 26). Para la matriz E, obtenemos la siguiente fila de fusión

$$F^* = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1)\,.$$

Si consideramos F^* como una matriz de interpolación, su sistema de órdenes de derivación es $Q(F^*) = (1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11) = K_E^*$. $\square$

Proposición 4.12 *Una matriz de interpolación E con n unos verifica la condición de Pólya si y sólo si $K_E^* = (0, 1, \dots, n-1)$.*

Demostración. E verifica la condición de Pólya si y sólo si E verifica la K-condición de Pólya respecto del sistema de grados $K_{n-1} = (0, 1, \dots n-1)$. Teniendo en cuenta la Proposición 4.11, E verifica la condición de Pólya si y sólo si $K_E^* \leq K_{n-1}$. Ahora bien, para todo sistema de n grados K se cumple $K_{n-1} \leq K$, por lo tanto, la condición $K_E^* \leq K_{n-1}$ equivale a $K_E^* = K_{n-1}$. $\square$