Capítulo 2

Resultados relevantes conocidos

2.1 Introducción

En el presente capítulo se presenta el *problema general de interpolación de Birkhoff* y se resumen brevemente los resultados relevantes conocidos acerca de la *interpolación algebraica de Birkhoff*, como introducción y para facilitar posteriores referencias.

La Sección 2.2 se inicia con la definición del *problema general de interpolación de Birkhoff* mediante *matrices de interpolación.* El planteamiento del problema general permite un tratamiento unificado del *problema algebraico clásico* (interpolación mediante polinomios de grado menor que n) y del *problema K-algebraico* (interpolación mediante polinomios lacunarios). Se introduce la *matriz de Vandermonde generalizada*, las definiciones de *regularidad* y los *polinomios anuladores.* Como casos particulares de la interpolación de Birkhoff, se presentan las matrices de interpolación asociadas a los problemas de interpolación de *Lagrange*, *Taylor* y *Abel.* La sección se cierra con la definición de las *secuencias* (maximales de unos) de una matriz de interpolación y de las matrices de interpolación *hermitianas* y *casi-hermitianas.*

En la Sección 2.3 se recogen los elementos más relevantes de la *interpolación algebraica de Birkhoff.* Se define el problema algebraico (Shoenberg, 1966 [83]) y se presenta la matriz de Vandermonde generalizada para este caso. Se introduce el *exceso total de grado* y su relación con el grado de $D(E,X)$ (determinante de la matriz de Vandermonde generalizada), así como la relación existente entre las transformaciones afines de nodos y el valor de $D(E,X)$. Se definen las matrices de interpolación *normales* (Sharma y Prasad, 1968 [84]), se formula la *condición de Pólya* (Pólya, 1931 [73]) y se enuncia el *Teorema de regularidad condicionada* (Ferguson, 1969 [36]), que establece la condición de Pólya como condición necesaria y suficiente de regularidad condicionada. Se define la *descomposición normal* de una matriz de interpolación (Sharma y Prasad, 1968 [84]), se formula la *condición de Birkhoff* (Birkhoff, 1906 [13]) y se enuncia el *Teorema de descomposición* (Atkinson y Sharma, 1969 [10]; Ferguson, 1969 [36]) que permite reducir el estudio de la regularidad a las matrices de interpolación de Birkhoff (indescomponibles). Se definen las *secuencias soportadas* y se enuncia el *Teorema de regularidad ordenada* (Atkinson y Sharma, 1969 [10]) que establece la regularidad ordenada de las matrices de interpolación de Pólya sin secuencias impares soportadas. La sección finaliza con los *teoremas de singularidad* (Lorentz y Zeller, 1971 [52]; Lorentz, 1972 [53]), que establecen condiciones suficientes de singularidad ordenada para matrices de interpolación de Birkhoff (indescomponibles).

En la Sección 2.4 se introduce una expresión en forma de determinante para el polinomio interpolador del problema algebraico de Birkhoff. Se trata de una formulación compacta, teóricamente muy manejable y sencilla de obtener; además, resulta especialmente adecuada para su extensión al problema de la interpolación K-algebraica. No hemos observado su uso en el contexto de la interpolación de Birkhoff, se conoce, no obstante, una expresión análoga para el problema de interpolación de Hermite-Sylvester (Ralston, 1986 [75] pág. 90).

Finalmente, en la Sección 2.5 se detalla como reducir un problema de interpolación algebraica de Birkhoff al intervalo $[0,1]$.

2.2 Problema de interpolación de Birkhoff

2.2.1 Definición del problema

Sea $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ un sistema de funciones $g_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ linealmente independientes, un *polinomio* p en el sistema $\mathcal{G}$ es una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{G}$, $p = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k$, $a_k \in \mathbb{R}$. El espacio vectorial $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R}) = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$, formado por todos los polinomios en el sistema $\mathcal{G}$, se denomina *espacio de interpolación*. En este trabajo, emplearemos únicamente polinomios con coeficientes reales.

Una *matriz de interpolación* es una matriz

$$E = (e_{ij})_{i=1,\, j=0}^{m\quad p}, \qquad m \geq 1,\ p \geq 0,$$

cuyos elementos toman únicamente los valores 0 y 1. Se representa por $|E|$ el número de unos de E. En general, E no puede tener filas nulas. Notemos que los índices de columna empiezan en 0 y que E tiene $p+1$ columnas.

Un *sistema de nodos* $X = (x_1, \ldots, x_m)$ es una m-pla formada por m puntos *distintos* de $[a, b]$. Un elemento $e_{ij} = 1$ en la matriz de interpolación indica que el problema de interpolación prescribe el valor de la derivada j-ésima en el nodo x_i.

Un *problema de interpolación de Birkhoff* está definido por una terna $(E, \mathcal{G}, X)$ y por un sistema de datos $C = (c_{ij} \in \mathbb{R} : e_{ij} = 1)$, donde E es una matriz de interpolación con m filas, $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R}) = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$ es un espacio de interpolación de dimensión $|E|$ y X es un sistema de m nodos. El problema consiste en determinar un polinomio $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R})$ que verifique las $|E|$ condiciones

$$D^{(j)} p(x_i) = c_{ij}, \qquad e_{ij} = 1 \tag{2.1}$$

Obviamente, supondremos que las funciones $g_j(x)$ del sistema $\mathcal{G}$ poseen derivadas hasta un orden adecuado para que las condiciones (2.1) tengan sentido.

Ejemplo 2.2.1 *Matriz de interpolación. Problema de interpolación de Birkhoff.*

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

establece un problema de interpolación de tres nodos con $|E| = 4$ condiciones. Si tomamos el sistema de nodos $X = (0, 1/2, 1)$, el sistema de valores

$$c_{10} = 2, \quad c_{21} = 3, \quad c_{22} = 4, \quad c_{30} = 1,$$

y el espacio de interpolación $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, de polinomios de grado menor que 4, queda definido un problema de interpolación de Birkhoff que consiste en determinar un polinomio $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ que verifique

$$p(0) = 2, \quad p'(1/2) = 3, \quad p''(1/2) = 4, \quad p(1) = 1.$$

Este problema tiene como única solución el polinomio

$$p(x) = 2 - 11x + 26x^2 - 16x^3. \quad \square$$

2.2.2 Matriz de Vandermonde generalizada

Si expresamos $p(x)$ en la forma

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \, g_k(x),$$

las condiciones (2.1) conducen a un sistema de $|E|$ ecuaciones lineales en las incógnitas a_k, $k = 1, \ldots, |E|$. La matriz de coeficientes de este sistema lineal se denomina *matriz de Vandermonde generalizada* del par (E, X) respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$; esquemáticamente, puede representarse por

$$V(E,X) = \big(D^{(j)}g_1(x_i), \ldots, D^{(j)}g_n(x_i);\; e_{ij} = 1\big) \tag{2.2}$$

donde $D^{(j)}g_i(x_i)$ representa el valor de la derivada j-ésima de $g_i(x)$ en $x = x_i$. Representamos por $D(E, X)$ el determinante de la matriz de Vandermonde generalizada del par (E, X), esto es, $D(E, X) = \det[V(E, X)]$.

Cada una de las filas de $V(E, X)$ se corresponde con un elemento $e_{ij} = 1$ de la matriz de interpolación E. Obviamente, diferentes ordenaciones de los elementos $e_{ij} = 1$ dan lugar a distintas ordenaciones de las filas de $V(E, X)$. Una ordenación habitual consiste en disponer los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice; en este caso, las filas de $V(E, X)$ correspondientes a un mismo nodo x_i aparecen en posiciones consecutivas y según órdenes de derivación crecientes.

Observemos que la reordenación de las filas de $V(E, X)$ se corresponde con una reordenación de las ecuaciones (2.1) y es irrelevante para la existencia y unicidad de soluciones.

Ejemplo 2.2.2 *Matriz de Vandermonde generalizada.*
Dada la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema de nodos $X = (x_1, x_2, x_3)$, la matriz de Vandermonde generalizada del par (E, X) respecto del sistema de funciones $\mathcal{G} = (1, x, x^2/2!, x^3/3!)$ es

$$V(E,X) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2/2! & x_1^3/3! \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2/2! \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2/2! & x_3^3/3! \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.2.3 Definiciones de regularidad

Para un sistema de funciones $\mathcal{G}$, el *par* (E, X) es *regular* si las condiciones (2.1) determinan un único polinomio en $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R})$ para cualquier elección de los datos C; en caso contrario, el *par* (E, X) es *singular.* Si recurrimos a la matriz de Vandermonde generalizada, un par (E, X) es regular o singular según lo sea $V(E, X)$.

Una *matriz de interpolación* E es *regular* si el par (E, X) es regular para toda elección admisible del sistema de nodos X.

La *matriz de interpolación* E es *regular ordenada* si el par (E, X) es regular para toda elección admisible del sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ que verifique $x_1 < \cdots < x_m$.

Una matriz de interpolación E es *fuertemente singular* cuando el determinante $D(E, X)$ toma valores de distinto signo para dos sistemas admisibles de nodos X, X'. Cuando $D(E, X)$ se anula pero no cambia de signo, se dice que E es *débilmente singular.*

Una *matriz de interpolación* E es *condicionalmente regular* si el par (E, X) es regular para alguna elección del sistema de nodos X; en caso contrario, decimos que E es *totalmente singular.*

El problema de la regularidad de una matriz de interpolación E consiste en determinar si E es regular a partir de su *'geometría'*, esto es, basándose en la disposición de ceros y unos en la matriz.

Ejemplo 2.2.3 *Par* (E, X) *regular. Matriz de interpolación regular.*

Dada la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema de nodos $X = (0, 1/2, 1)$, la matriz de Vandermonde generalizada del par (E, X) respecto del sistema de funciones $\mathcal{G} = (1, x, x^2/2!, x^3/3!)$ es

$$V(E, X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix};$$

su determinante toma el valor $D(E, X) = 1/24$; por lo tanto, el par (E, X) es regular (respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$).

Si tenemos en cuenta los resultados de la Subsección 2.3.3, relativos a la transformación de nodos, es sencillo comprobar que la matriz de interpolación E es regular (respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$). Tomemos $x_1 = 0$ y $x_3 = 1$, entonces la matriz de Vandermonde generalizada del par (E, X) respecto de $\mathcal{G}$ es

$$V(E,X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & x_2^2/2! \\ 0 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix},$$

y su determinante toma el valor

$$D(E,X) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Como este polinomio carece de raíces reales, la matriz de Vandermonde generalizada $V(E,X)$ es regular para cualquier elección del sistema de nodos. En consecuencia, la matriz de interpolación E es regular (para el espacio de interpolación $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$). $\square$

2.2.4 Polinomios anuladores

Un *anulador* del par (E, X) respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$ es un polinomio $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R})$ que es solución del problema homogéneo $D^{(j)}p(x_i) = 0$ para $e_{ij} = 1$. Si p es un anulador que no es idénticamente nulo, se dice que p es un *anulador no trivial*.

La existencia de anuladores no triviales es equivalente a la singularidad del par (E, X): *la matriz de interpolación E es regular (respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$) si y sólo si, para cualquier elección admisible del sistema de nodos X, el único anulador en $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R})$ del par (E, X) es el anulador trivial.*

2.2.5 Problemas de interpolación notables

La interpolación de Birkhoff es un marco teórico muy general que contiene como casos particulares un buen número de problemas de interpolación notables. De tales problemas toman su denominación algunos tipos matrices de interpolación.

Una *matriz de interpolación de Lagrange* está formada por n filas y una única columna ocupada completamente por unos. En este caso, las condiciones de interpolación son $p(x_i) = c_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Si E es una matriz de interpolación de Lagrange con n unos, el determinante $D(E, X)$ respecto del sistema de funciones $\mathcal{G} = (1, x, \dots, x^{n-1})$ es el *determinante de Vandermonde clásico*. Una matriz de Lagrange con n unos es regular en $[a, b]$ respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$ si y sólo si cada polinomio $p \in \mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R})$ no idénticamente nulo tiene a lo sumo $n-1$ ceros en $[a, b]$.

Una *matriz de interpolación de Taylor* está formada por una única fila que contiene una secuencia de n unos consecutivos desde la columna 0. El sistema de nodos contiene un único valor $X = (x)$ y las condiciones de interpolación son ahora $D^{(j)}p(x) = c_j$ para $j = 0, \dots, n-1$. El determinante $D(E, X)$ respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$ es el *Wronskiano* de $\mathcal{G}$ en x.

Una *matriz de interpolación de Abel* de orden n es una matriz cuadrada de dimensiones $n \times n$ con exactamente un 1 en cada fila y columna. El sistema de nodos X está formado por n valores distintos.

2.2.6 Secuencias y matrices hermitianas

Dada la matriz de interpolación $E = (e_{ij})$, los elementos

$$e_{i,j_k} = 1, \qquad k = 1, \dots, p,$$

forman una *secuencia* (maximal de unos) de E de *longitud* p si los índices j_k son consecutivos y los elementos e_{i,j_1-1} y e_{i,j_p+1}, en caso de existir, son nulos. La *secuencia* se dice *par o impar* según lo sea p. Los elementos e_{i,j_1} y e_{i,j_p} son, repectivamente, el *extremo inicial* y *final* de la secuencia. También se dice que la secuencia empieza en la columna j_1 y finaliza en la columna j_p.

Una *fila* de E es *hermitiana* si contiene una única secuencia que empieza en la columna 0. Una matriz de interpolación es *hermitiana* si todas sus filas son hermitianas. Las matrices de interpolación de Lagrange y de Taylor son hermitianas. Una matriz de m filas es *casi-hermitiana* si sus filas interiores $(1 < i < m)$ son hermitianas.

Ejemplo 2.2.4 *Matrices de interpolación.*

La matriz de interpolación

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de interpolación de Lagrange de cuatro nodos. La matriz

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de Taylor y

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

son matrices de Abel. Las matrices

$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

son hermitianas. Las matrices

$$E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

son casi-hermitianas. $\square$

2.3 Interpolación algebraica de Birkhoff

2.3.1 Definición

Un problema de interpolación de Birkhoff se dice *algebraico* cuando el espacio de interpolación es $\mathcal{P}_r(\mathbb{R})$ (espacio de polinomios de grado $\leq r$). Para una matriz de interpolación E con n unos, el espacio de polinomios que corresponde al problema de interpolación algebraico definido por E es $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, espacio de polinomios de grado menor que n.

Como base de $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ se toma habitualmente el sistema de polinomios

$$g_1(x) = 1,\ g_2(x) = \frac{x}{1!},\ \ldots,\ g_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Con el convenio $(1/r!) = 0$ cuando r es negativo, la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación algebraico definido por el par (E, X) (donde E es una matriz de interpolación con n unos) puede representarse esquemáticamente en la forma

$$V(E, X) = \left(\frac{x_i^{-j}}{(-j)!}, \frac{x_i^{1-j}}{(1-j)!}, \ldots, \frac{x_i^{n-j-1}}{(n-j-1)!};\ e_{ij} = 1 \right).$$

Observemos que para cada elemento $e_{ij} = 1$ con $j \geq 1$, son nulos los j primeros elementos en la correspondiente fila de $V(E, X)$. El Ejemplo 2.2.3 es un caso de problema algebraico de Birkhoff.

2.3.2 Exceso total de grado

Considerado como función de los nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$, el determinante $D(E, X)$ es un polinomio en las variables x_i. Desde esta óptica, la matriz de interpolación E es totalmente singular si y sólo si $D(E, X)$ es el polinomio idénticamente nulo.

Para una matriz de interpolación E con n unos, denominamos *exceso total de grado* al entero

$$\rho(E) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) - \sum_{e_{ij}=1} j.$$

Si $\rho(E) < 0$, entonces la matriz de interpolación E es *totalmente singular*. Si la matriz de interpolación E es *condicionalmente regular*, entonces se cumple $\rho(E) \geq 0$ y $D(E, X)$ es un polinomio homogéneo en las variables $x_1, \ldots, x_n$, de grado total $\rho(E)$.

2.3.3 Transformación afín de nodos

Para el sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $\alpha > 0$ y $c \in \mathbb{R}$, se define

$$\alpha\, X = (\alpha\, x_1, \ldots, \alpha\, x_m), \qquad X + c = (x_1 + c, \ldots, x_m + c).$$

El determinante $D(E, X)$ verifica las propiedades:

1. $D(E, \alpha\, X) = \alpha^{\rho(E)}\, D(E, X)$.

2. $D(E, X + c) = D(E, X)$.

Como consecuencia, las propiedades de regularidad de un par (E, X) no dependen del intervalo $[a, b]$. En el estudio de la regularidad ordenada del par (E, X) es lícito suponer que los nodos extremos x_1 y x_m toman valores fijos $\bar{x}_1 < \bar{x}_m$. Frecuentemente estos valores son 0 y 1.

2.3.4 Regularidad condicionada

Matrices normales

Una matriz de interpolación $E = (e_{ij})_{i=1,\ j=0}^{m\quad p}$ con m filas y $p+1$ columnas (con índices desde 0 hasta p) se denomina *normal* si tiene tantas columnas como unos, esto es, $|E| = p+1$.

El espacio de interpolación algebraica para una matriz de interpolación E con n unos es $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$. Si en E existe un elemento $e_{ij} = 1$ con $j > n-1$, entonces la fila correspondiente en $V(E, X)$ es nula y E es *totalmente singular*. Por ello, en cuestiones de regularidad, puede restringirse el estudio a matrices de interpolación cuyo índice máximo de columnas verifique $p \leq n-1$. Esto es, podemos restringir el estudio a las matrices de interpolación cuyo número de columnas no exceda al número de unos.

Cuando el número de columnas de una matriz de interpolación E verifica $p+1 < n$ ($p+1$ es el número de columnas y n el número de unos de E), siempre es posible completar la matriz E añadiendo al final columnas nulas hasta obtener una matriz E' con n columnas, que tiene unos en las mismas posiciones que E. Está claro que E' y E dan lugar al mismo sistema de condiciones de interpolación (2.1) y, por lo tanto, podemos emplear E' en el estudio de la regularidad de E.

Las matrices de interpolación de Taylor y de Abel definidas en la Subsección 2.2.5 son normales. En cambio, las matrices de interpolación de Lagrange se han definido como matrices formadas por una sola columna con n unos; para obtener la forma normal correspondiente, debemos completarlas añadiendo $n-1$ columnas de ceros.

Ejemplo 2.3.1 *Matrices normales.*

Para la matriz de interpolación de Lagrange

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene la forma normal

$$\bar{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forma normal de la matriz hermitiana

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es

$$\bar{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no es normalizable. $\square$

Condición de Pólya para matrices normales

Dada una matriz de interpolación E de dimensiones $m \times (p+1)$, el número de unos de la j-ésima columna es

$$m_j = \sum_{i=1}^{m} e_{ij}.$$

Se denominan *constantes de Pólya* de la matriz de interpolación E, a los números

$$M_r = \sum_{j=0}^{r} m_j, \qquad r = 0, \dots, p.$$

Dada una matriz de interpolación normal E con n unos, se dice que E verifica la *condición de Pólya* si se cumple

$$M_r \geq r+1, \qquad r = 0, \dots, n-1 \tag{2.3}$$

Observemos que la condición de Pólya, tal como se define en (2.3), carece de sentido para matrices de interpolación con menos de n columnas. Una *matriz de interpolación de Pólya* es una matriz de interpolación normal que verifica la condición de Pólya.

Teorema de regularidad condicionada

Dada una matriz de interpolación $E = (e_{ij})$ con n unos, si existe algún elemento $e_{ij} = 1$ con $j > n-1$, entonces E es totalmente singular; en caso contrario, podemos normalizar E. Para matrices de interpolación normales, la condición de Pólya permite caracterizar las matrices de interpolación condicionalmente regulares.

Teorema 2.1 (Ferguson, 1969) *Sea E una matriz de interpolación normal. E es condicionalmente regular si y sólo si E verifica la condición de Pólya.*

Ejemplo 2.3.2 *Condición de Pólya.*

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es normal. Sus constantes de Pólya son

$$M_0 = 2, \quad M_1 = 3, \quad M_2 = 4, \quad M_3 = 5, \quad M_4 = M_5 = 6.$$

Vemos que E es una matriz de Pólya y por lo tanto es condicionalmente regular. □

2.3.5 Descomposición normal

Una matriz de interpolación normal E con m filas admite *descomposición normal* si puede descomponerse en dos bloques de m filas $E = (E_1|E_2)$ con E_1, E_2 matrices de interpolación normales. En tal caso, se escribe

$$E = E_1 \oplus E_2.$$

La descomposición normal más fina posible de una matriz normal

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_s,$$

se denomina *descomposición canónica*. Toda matriz de interpolación normal tiene una descomposición canónica única.

Una matriz normal es *indescomponible* si su descomposición canónica es la descomposición trivial $E = E$. Una matriz normal con un solo uno es obviamente indescomponible. Se dice que una matriz de interpolación normal E con $n > 1$ unos verifica la *condición de Birkhoff* (*condición fuerte de Pólya*) si sus constantes de Pólya cumplen

$$M_r > r + 1, \qquad r = 0, 1, \ldots, n-2 \tag{2.4}$$

Una *matriz de interpolación de Birkhoff* es una matriz normal que verifica (2.4). Para matrices de Pólya (matrices de interpolación normales que verifican la condición de Pólya) con $n > 1$ unos, la condición de Birkhoff caracteriza a las matrices de interpolación indescomponibles.

Ejemplo 2.3.3 *Descomposición normal. Condición de Birkhoff.*

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es normal y admite la descomposición canónica

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para la matriz de interpolación

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos las constantes de Pólya

$$M_0 = 2, \quad M_1 = 3, \quad M_2 = 4.$$

Vemos que E_1 cumple la condición de Birkhoff (2.4) y es, por lo tanto, indescomponible. $\square$

Teorema de descomposición

Sea E una matriz de interpolación de m filas que admite descomposición normal $E = E_1 \oplus E_2$ y $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de nodos para E. Se dice que un nodo x_i es *significante* para la componente normal E_j si la fila i de E_j contiene algún 1.

Si la matriz de interpolación E admite la descomposición normal $E = E_1 \oplus E_2$, entonces la matriz de Vandermonde generalizada del problema algebraico de Birkhoff definido por el par (E, X) presenta una estructura triangular superior por bloques (para una adecuada ordenación de sus filas) y se verifica

$$D(E, X) = \pm D(E_1, X_1)\ D(E_1, X_2),$$

donde X_1 y X_2 son los sistemas de nodos significantes para E_1 y E_2.

El *Teorema de descomposición* permite reducir el problema de la regularidad a las matrices indescomponibles.

Teorema 2.2 (Atkinson y Sharma, 1969; Ferguson, 1969) *Sea E una matriz de interpolación que admite la descomposición normal $E = E_1 \oplus E_2$. E es regular* (*regular ordenada*) *para la interpolación algebraica si y sólo si las componentes E_1, E_2 son regulares* (*regulares ordenadas*). *Si una de las componentes E_j es regular y la otra es débilmente singular ordenada, entonces E es débilmente singular ordenada. Si una de las componentes E_j es regular y la otra es fuertemente singular ordenada, entonces E es fuertemente singular ordenada.*

Ejemplo 2.3.4 *Teorema de descomposición.*

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

admite la descomposición canónica

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tenemos en cuenta que las matrices de interpolación hermitianas son regulares para la interpolación algebraica de Birkhoff, obtenemos que E es regular.

Si consideramos la matriz

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos la descomposición normal

$$\bar{E} = \bar{E}_1 \oplus \bar{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $\bar{E}_2$ es de Lagrange y es regular para la interpolación algebraica de Birkhoff. Por el contrario, de las condiciones suficientes de singularidad ordenada que veremos en la Sección 2.3.7, resulta que $\bar{E}_1$ es fuertemente singular ordenada. En consecuencia, E es fuertemente singular ordenada. □

2.3.6 Regularidad ordenada

Secuencias soportadas

Sea E una matriz de interpolación y $s = \left(e_{i,j_1}, \ldots, e_{i,j_p}\right)$ una secuencia (maximal de unos) de E. Se dice que s está *soportada* si existen elementos de E

$$e_{rj} = e_{r'j'} = 1 \quad \text{con} \quad r < i < r', \quad j < j_1 \quad \text{y} \quad j' < j_1.$$

De la condición $r < i < r'$, se deduce que no pueden estar soportadas las secuencias situadas en la fila primera o última; de la condición $j < j_1$, resulta que tampoco pueden estar soportadas aquellas secuencias que empiezan en la primera columna.

Teorema de Atkinson-Sharma

La secuencias soportadas permiten establecer una importante condición suficiente de regularidad ordenada.

Teorema 2.3 (Atkinson y Sharma, 1969) *Sea E una matriz de interpolación de Pólya. Si E no contiene secuencias impares soportadas, entonces E es regular ordenada para la interpolación algebraica de Birkhoff.*

En el caso de las matrices de interpolación de dos filas, dado que tales matrices carecen de secuencias soportadas, la condición de Pólya permite caracterizar la regularidad ordenada: *una matriz de interpolación normal de dos filas es regular si y sólo si verifica la condición de Pólya.*

Para matrices casi-hermitianas, se puede obtener una caracterización análoga: *una matriz normal casi-hermitiana es regular ordenada si y sólo si verifica la condición de Pólya.*

Las matrices de interpolación hermitianas tampoco tienen secuencias soportadas, ahora bien, en este caso la situación es ligeramente distinta, pues las matrices hermitianas siempre verifican la condición de Pólya. Por lo tanto, las matrices de interpolación hermitianas son siempre regulares ordenadas (para la interpolación algebraica).

Teniendo en cuenta el Teorema de descomposición, es posible establecer una formulación algo más general del Teorema de Atkinson-Sharma. Sea E una matriz de interpolación normal y $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ su descomposición canónica. Se dice que una secuencia (maximal de unos) de E es una *secuencia impar esencialmente soportada* si está completamente incluida en una de las componentes canónicas E_j y está soportada en E_j.

Proposición 2.1 *Una matriz de Pólya sin secuencias impares esencialmente soportadas es regular ordenada para la interpolación algebraica.*

Ejemplo 2.3.5 *Secuencias soportadas y Teorema de Atkinson-Sharma.*

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene una única secuencia soportada, que es par. Como E es una matriz de Pólya, según el Teorema de Atkinson-Sharma, E es regular ordenada. Puede confirmarse este extremo tomando el sistema de nodos $X = (0, x, 1)$ y comprobando que el determinante $D(E, X)$ no se anula para ningún valor de x en el intervalo $(0,1)$. La matriz de Vandermonde generalizada es

$$V(E,X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2/2 & x^3/3! \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! \end{pmatrix},$$

de donde resulta

$$D(E,X) = \frac{1}{144}x^2\left(3 - 8x + 6x^2\right),$$

polinomio cuya única raíz real es $x = 0$.

Es bien conocido que las condiciones establecidas en el Teorema de Atkinson-Sharma son únicamente condiciones suficientes para la regularidad ordenada. La matriz de interpolación

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es un ejemplo clásico de matriz de interpolación indescomponible que es regular ordenada a pesar de poseer secuencias impares soportadas (ver [60], pág. 6). Si procedemos como en el ejemplo anterior, resulta la matriz de Vandermonde generalizada

$$V(E',X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & x^4/4! \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! & 1/5! \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/3! & 1/4! \end{pmatrix},$$

cuyo determinante toma el valor

$$D(E',X) = \frac{1}{1440}x\,(x-1)\left(15x^2 - 15x + 4\right).$$

Es inmediato comprobar que $D(E',X)$ no se anula para ningún valor de x en el intervalo $(0,1)$ y que, por lo tanto, la matriz de interpolación E' es regular ordenada para la interpolación algebraica.

Finalmente, consideremos la matriz de interpolación

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que $\bar{E}$ tiene una secuencia impar soportada en la segunda fila, sin embargo, la descomposición canónica de $\bar{E}$ es

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En definitiva, $\bar{E}$ no posee secuencias impares esencialmente soportadas y, en consecuencia, $\bar{E}$ es regular ordenada. □

2.3.7 Condiciones suficientes de singularidad

En algunos casos especialmente simples de secuencias impares soportadas, sí es posible afirmar la singularidad de las matrices de interpolación de Birkhoff (matrices de interpolación normales que verifican la condición (2.4)).

Un elemento $e_{ij} = 1$ de una matriz de interpolación E es un *síngleton* si los restantes elementos de la fila i de E son todos nulos. Los dos teoremas siguientes establecen condiciones suficientes de singularidad ordenada para *matrices de interpolación de Birkhoff.*

Teorema 2.4 (Lorentz y Zeller, 1971) *Sea E una matriz de interpolación de Birkhoff. Si E contiene un síngleton soportado, entonces E es fuertemente singular ordenada para la interpolación algebraica.*

Teorema 2.5 (Lorentz, 1972) *Sea E una matriz de interpolación de Birkhoff. Si E tiene alguna fila con exactamente una secuencia impar soportada* (*el resto de secuencias de esa fila, si las hay, son pares o no soportas*), *entonces E es fuertemente singular ordenada para la interpolación algebraica.*

Ejemplo 2.3.6 *Condiciones suficientes de singularidad.*

La matriz de interpolación

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene un síngleton soportado en la segunda fila. Sus constantes de Pólya son

$$M_0 = 2, \quad M_1 = 4, \quad M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 6.$$

Observamos que se cumple $M_j > j+1$, para $j = 0, 1, 2, 3, 4$, por lo tanto, E_1 es una matriz de interpolación de Birkhoff.

Como E_1 tiene un síngleton soportado en la segunda fila, según el Teorema 2.4, E_1 es una matriz de interpolación fuertemente singular ordenada para la interpolación algebraica. Podemos verificar esa afirmación tomando el sistema de nodos

$$X = (0, x, 1), \quad \text{con} \quad 0 < x < 1.$$

Si ordenamos los elementos $e_{ij} = 1$ de E_1 según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice, obtenemos la matriz de Vandermonde generalizada

$$V(E_1, X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2/2! & x^3/3! \\ 1 & 1 & 1/2! & 1/3! & 1/4! & 1/5! \\ 0 & 1 & 1 & 1/2! & 1/3! & 1/4! \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2! & 1/3! \end{pmatrix}.$$

Su determinante es el polinomio

$$D(E_1, X) = -\frac{1}{864}x^3 + \frac{1}{480}x^2 - \frac{1}{960}x + \frac{1}{8640},$$

que se anula para

$$x = 1, \qquad x = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6}, \qquad x = \frac{2}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6},$$

y podemos obtener valores x', x'' en el intervalo $(0, 1)$ tales que el determinante $D(E_1, X)$ tome valores de signo contrario.

La matriz de interpolación

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es una matriz de Birkhoff que en su fila 2 tiene una única secuencia impar soportada. Según el Teorema 2.5, E_2 es fuertemente singular ordenada. Si procedemos como en el caso anterior, obtenemos la matriz de Vandermonde generalizada

$$V(E_2, X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & x^2/2! & x^3/3! & x^4/4! \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2/2! & x^3/3! \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2/2! \\ 0 & 1 & 1 & 1/2! & 1/3! & 1/4! \end{pmatrix},$$

cuyo determinante toma el valor

$$D(E_2, X) = \frac{1}{24} - \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

El polinomio $D(E_2, X)$ tiene una única raíz real $x = \frac{1}{2}$. También en este caso existen sistemas admisibles de nodos en los que $D(E_2, X)$ toma valores de signo contrario, lo que nos permite confirmar la singularidad fuerte de E_2.

Es importante destacar que la matriz de interpolación E debe ser una matriz de Birkhoff para que los teoremas 2.4 y 2.5 sean aplicables. En efecto, la matriz de interpolación

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tiene singletons soportados en las filas 2 y 3, sin embargo, E_3 es regular. $\square$

2.4 Expresión del polinomio interpolador en forma de determinante

En esta sección presentamos una expresión en forma de determinante del polinomio solución del problema de interpolación algebraica de Birkhoff. Esta formulación nos permite construir de forma sencilla el polinomio interpolador para problemas de pequeña dimensión. Otra propiedad destacable es que permite una generalización inmediata al problema de interpolación K-algebraica. Puede encontrarse una formulación análoga para el caso particular del problema de interpolación de Hermite-Sylvester en [75] (Ralston 1986, pág. 90).

Proposición 2.2 *Sea $E = (e_{ij})$ una matriz de interpolación regular con n unos. El polinomio $p(x)$ que soluciona el problema algebraico de Birkhoff, definido por el par (E, X) y los valores $C = (c_{ij} : e_{ij} = 1)$, queda determinado implícitamente por la ecuación*

$$\left| \begin{array}{c|c} 1 \quad \dfrac{x}{1!} \quad \cdots \quad \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} & p(x) \\ \hline V(E,X) & \mathbf{C} \end{array} \right| = 0 \tag{2.5}$$

donde $\mathbf{C}$ *es una columna con los valores de* C *ordenados de forma coherente con la ordenación adoptada para las filas de la matriz de Vandermonde generalizada* $V(E, X)$*.*

Demostración. Si desarrollamos el determinante en (2.5) por la primera fila y despejamos $p(x)$, se obtiene que $p\,(x) \in \mathcal{P}_{n-1}\,(\mathbb{R})$. Fijemos un elemento $e_{ij} = 1$ de E, como las filas después de la primera son constantes, cuando calculamos la derivada j-ésima de (2.5) respecto de x para $x = x_i$, resulta

$$\left|\begin{array}{c|c} \left[D^{(j)}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{x}{1!} & \cdots & \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}\end{pmatrix}\right]_{x=x_i} & D^{(j)}p(x_i) \\ \hline V(E,X) & \mathbf{C} \end{array}\right| = 0 \qquad (2.6)$$

La ecuación (2.6) es una ecuación de primer grado en $D^{(j)}p(x_i)$. Al colocar el valor c_{ij} en la posición de $D^{(j)}p(x_i)$, la ecuación se cumple al producirse una duplicación de filas; por lo tanto, obtenemos $D^{(j)}p(x_i) = c_{ij}$. $\square$

Ejemplo 2.4.1 *Expresión del polinomio interpolador en forma de determinante.*

Consideremos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el sistema de nodos $X = (1, 2, 4)$ y el sistema de valores C

$$c_{10} = 0,\ c_{11} = 2,\ c_{21} = 2,\ c_{22} = 4,\ c_{30} = 6,$$

donde c_{ij} especifica el valor correspondiente a $D^{(j)}p\,(x_i)$. Si organizamos los $e_{ij} = 1$ según el orden lexicográfico de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice, la matriz de Vandermonde generalizada del par (E, X) es

$$V(E,X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & 1/24 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 8 & 32/3 & 32/3 \end{pmatrix}.$$

Como $D(E,X) = 9/16$, el problema (E,X) es regular (de hecho, la matriz E es regular). Existe, por lo tanto, un único polinomio $p(x)$ de grado inferior a 5 que es solución del problema (E,X,C). Podemos expresar $p(x)$ implícitamente en la forma

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2/2 & x^3/3! & x^4/4! & p\,(x) \\ \hline 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & 1/24 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 4/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 & 32/3 & 32/3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Si calculamos el determinante y despejamos $p(x)$, resulta

$$p(x) = -\frac{2}{3}x^4 + \frac{52}{9}x^3 - \frac{50}{3}x^2 + \frac{62}{3}x - \frac{82}{9}.$$

Es inmediato comprobar que el polinomio obtenido verifica

$$p\,(1) = 0,\ p'\,(1) = 2,\ p'\,(2) = 2,\ p''\,(2) = 4,\ p\,(4) = 6. \qquad \square$$

2.5 Interpolador y transformación afín de nodos

Según se ha visto en la Subsección 2.3.3, en la interpolación algebraica de Birkhoff la existencia y unicidad del polinomio interpolador no se ve afectado por las transformaciones afines de nodos, aunque, claro está, el polinomio interpolador sí resulta afectado por la transformación. La siguiente proposición establece como puede reducirse la interpolación algebraica de Birkhoff sobre un intervalo arbitrario $[a,b]$ al intervalo $[0,1]$.

Proposición 2.3 *Sea $E = (e_{ij})$ una matriz de interpolación regular ordenada. Mediante la transformación afín $Y = \frac{1}{b-a}(X-a)$, el problema de interpolación (E,X) en $[a,b]$ con valores $C = (c_{ij} : e_{ij} = 1)$ puede reducirse a un problema de interpolación (E,Y) en el intervalo $[0,1]$ con valores $\bar{C}$ que verifiquen $\bar{c}_{ij} = (b-a)^j c_{ij}$ para $e_{ij} = 1$. Si $q(y)$ es la solución del problema de interpolación algebraica de Birkhoff $(E,Y,\bar{C})$, entonces el polinomio $p(x) = q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ es la solución del problema (E,X,C).*

Demostración. Sea n el número de unos de E y $q(y)$ un polinomio en y de grado $< n$. Con la sustitución $y = (x-a)/(b-a)$, se obtiene un polinomio en x de grado $< n$. Por otra parte, para cada elemento $e_{ij} = 1$ de E, resulta

$$D_x^{(j)} p\,(x_i) = D_y^{(j)} q\,(y_i) \left(\frac{1}{b-a}\right)^j = \bar{c}_{ij} \left(\frac{1}{b-a}\right)^j = c_{ij}. \quad \square$$

Ejemplo 2.5.1 *Transporte de problemas de interpolación a* $[0,1]$.
Consideremos el problema de interpolación del Ejemplo 2.4.1, definido por la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el sistema de nodos $X = (1,2,4)$ y el sistema de valores C

$$c_{10} = 0, \quad c_{11} = 2, \quad c_{21} = 2, \quad c_{22} = 4, \quad c_{30} = 6.$$

Mediante la transformación afín $Y = \frac{1}{4-1}\,(X-1)$, obtenemos el sistema de nodos $Y = (0, 1/3, 1)$. Los valores $\bar{c}_{ij}$ se obtienen a partir de los valores c_{ij} mediante la relación $\bar{c}_{ij} = (4-1)^j\, c_{ij}$ para $e_{ij} = 1$. Es decir,

$$\bar{c}_{10} = 0, \quad \bar{c}_{11} = 6, \quad \bar{c}_{21} = 6, \quad \bar{c}_{22} = 36, \quad \bar{c}_{30} = 6.$$

El nuevo problema de interpolación $\left(E, Y, \bar{C}\right)$ tiene los nodos en $[0,1]$, la matriz de Vandermonde generalizada es

$$V(E,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/18 & 1/162 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/18 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & 1/24 \end{pmatrix},$$

y para el determinante obtenemos $D(E,Y) = 1/1296$.

Podemos observar que el exceso total de grado de la matriz de interpolación E es $\rho(E) = 6$ y que, tal como se afirma en la Sección 2.3.3, se verifica

$$D(E,Y) = \left(\frac{1}{4-1}\right)^6 D(E,X) = \frac{1}{3^6} \cdot \frac{9}{16} = \frac{1}{1296}\,.$$

El polinomio $q(y)$ que soluciona el problema de interpolación $\left(E, Y, \bar{C}\right)$ queda determinado por

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & y & y^2/2! & y^3/3! & y^4/4! & q(y) \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/18 & 1/162 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/18 & 36 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/6 & 1/24 & 6 \end{array}\right| = 0.$$

Calculando el determinante y despejando $q(y)$, resulta

$$q(y) = -54y^4 + 84y^3 - 30y^2 + 6y.$$

Finalmente, para obtener el polinomio $p(x)$ que es solución del problema de interpolación original (E, X, C), basta con efectuar en $q(y)$ el cambio de variable $y = (x-1)/3$, resultando

$$p(x) = q\left(\frac{x-1}{3}\right) = -\frac{2}{3}x^4 + \frac{52}{9}x^3 - \frac{50}{3}x^2 + \frac{62}{3}x - \frac{82}{9}\,. \quad \square$$