

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

TESIS DOCTORAL

**Estudio del comportamiento del suelo
en el rango de las pequeñas deformaciones y
desarrollo del modelo constitutivo EPHYSS**

Autor:

Javier Castellón López

Director:

Dr. Alberto Ledesma Villalba

Programa de Doctorado en Ingeniería del Terreno

Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental

Barcelona

Septiembre de 2019

A mi mujer, mis padres y mi hermano.

*“Somos las abejas de lo invisible. Con locura libamos la miel de lo visible,
para acumularla en la gran colmena de oro de lo Invisible”ⁱ*

ⁱRilke, R. M. (s/f). De la carta al traductor polaco de las Elegías de Duino. En: Rilke, R. M. (1980). *Elegías de Duino*. (Primera edición original en alemán: 1923, trad. J. M. Valverde). Barcelona, España: Lumen, 21.

Resumen

El comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones debe ser considerado en el análisis de problemas geotécnicos en los que se afecten elementos sensibles, lo cual es muy habitual en entornos urbanos. Sin embargo, varios de los ensayos que permiten determinar los parámetros del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones siguen sin estar suficientemente extendidos en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica, dificultando su estimación y su uso en modelos constitutivos. Hoy en día, el modelo constitutivo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis, basado en el modelo *Hardening Soil Small (HS-S)*, es prácticamente el único con un uso extendido en la práctica profesional que tiene en cuenta dicho comportamiento, mientras que el resto de modelos de este tipo suelen limitarse, dadas sus características, a un uso académico. A pesar de sus grandes ventajas, se han detectado aspectos del modelo *HS-SS* que pueden ser mejorados, así como algunas inconsistencias cuyos efectos pueden tener una influencia significativa en las simulaciones numéricas de problemas de contorno, por ser estos acumulativos.

En esta tesis se han analizado y clasificado 48 modelos constitutivos del suelo que tienen en cuenta el comportamiento del mismo en el rango de las pequeñas deformaciones, caracterizado por ser no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente. Para ello se han utilizado diferentes criterios de clasificación, algunos de ellos existentes y otros establecidos en este trabajo.

Se ha desarrollado un nuevo modelo constitutivo elastoplástico del suelo denominado *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)*, formado por los modelos *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)* y *Hardening Soil Modified (HS_{MOD})*. El modelo *EPHYSS* describe, por un lado, el comportamiento reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo a través del modelo *HQH*, que tiene en cuenta la anisotropía inducida en deformaciones, y, por otro lado, el comportamiento plástico del suelo a través del modelo *HS_{MOD}* de tipo *Cap-Cone*. Las variables de estado del modelo *EPHYSS* definen diferentes niveles de memoria a corto y largo plazo que lo dotan de robustez para la reproducción del comportamiento histerético del suelo. Entre ellas, el tensor de historia de deformaciones desviadoras y el valor máximo de la rigidez al corte correspondiente a la curva de degradación activa permiten reproducir infinitas curvas de degradación en función del nivel de reversión de las deformaciones, lo cual confiere gran versatilidad al modelo y adaptabilidad a los resultados experimentales. El código del modelo *EPHYSS*, proporcionado en su totalidad en esta tesis, se ha escrito en FORTRAN e implementado en Plaxis mediante el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)*.

Se ha realizado una verificación del modelo *EPHYSS*, así como una validación del mismo con diferentes ensayos experimentales, ensayos numéricos y problemas de contorno de obras en las que se ha realizado algún tipo de auscultación. Entre dichas obras se encuentra una gran excavación urbana en Barcelona, para cuyo análisis se han instalado extensómetros, se han realizado medidas topográficas de la superficie según el avance de la excavación y se ha complementado la campaña geotécnica del proyecto con ensayos de columna resonante. Se concluye que el modelo *EPHYSS* mejora significativamente la aproximación a las medidas experimentales respecto al modelo *HS-SS* en las simulaciones de los diferentes ensayos y problemas de contorno, especialmente en aquellos que presentan reversiones en las cargas desviadoras; resuelve las inconsistencias de este último; tiene un coste computacional razonable; proporciona flexibilidad en el uso de diferentes formulaciones plásticas; y requiere parámetros simples, la mayoría de ellos comunes a los del modelo *HS-SS*, lo cual lo distingue de otros modelos constitutivos complejos limitados habitualmente a un uso académico. Todo ello convierte al modelo *EPHYSS* en un modelo que puede ser utilizado para el análisis y el diseño en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica.

Resum

El comportament del sòl en el rang de les petites deformacions ha de ser considerat a l'anàlisi de problemes geotècnics en els que s'afectin elements sensibles, cosa que és molt habitual en entorns urbans. No obstant, diversos assaigs que permeten determinar els paràmetres del sòl en el rang de les petites deformacions segueixen sense estar suficientment estesos a la pràctica professional de l'enginyeria geotècnica, dificultant la seva estimació i el seu ús en models constitutius. Avui dia, el model constitutiu *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis, basat en el model *Hardening Soil Small (HS-S)*, és pràcticament l'únic amb un ús estès a la pràctica professional que té en compte aquest comportament, mentre que la resta de models d'aquest tipus normalment es limiten, donades les seves característiques, a un ús acadèmic. Tot i els seus grans avantatges, s'han detectat aspectes del model *HS-SS* que poden ser millorats, així com algunes inconsistències els efectes de les quals poden tenir una influència significativa a les simulacions numèriques de problemes de contorn, per ser acumulatives.

En aquesta tesi s'han analitzat i classificat 48 models constitutius del sòl que tenen en compte el seu comportament en el rang de les petites deformacions, caracteritzat per ser no lineal, histerètic i dependent de la història recent. Amb aquesta finalitat s'han utilitzat diferents criteris de classificació, alguns d'ells existents i altres establerts en el present treball.

S'ha desenvolupat un nou model constitutiu elastoplàstic del sòl anomenat *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)*, format pels models *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)* i *Hardening Soil Modified (HS_{MOD})*. El model *EPHYSS* descriu, per un costat, el comportament reversible no lineal, histerètic i dependent de la història recent del sòl mitjançant el model *HQH*, que té en compte l'anisotropia induïda en deformacions, i, per un altre costat, el comportament plàstic del sòl mitjançant el model *HS_{MOD}* de tipus *Cap-Cone*. Les variables d'estat del model *EPHYSS* defineixen diferents nivells de memòria a curt i llarg termini que el doten de robustesa per la reproducció del comportament histerètic del sòl. Entre elles, el tensor d'història de deformacions desviadores i el valor màxim de la rigidesa al tall corresponent a la corba de degradació activa permeten reproduir infinites corbes de degradació en funció del nivell de reversió de les deformacions, fet que confereix gran versatilitat al model i adaptabilitat als resultats experimentals. El codi del model *EPHYSS*, que es proporciona de forma íntegra en aquesta tesi, s'ha escrit en FORTRAN i s'ha implementat en Plaxis mitjançant el mòdul *User Defined Soil Model (UDSM)*.

S'ha realitzat una verificació del model *EPHYSS*, així com una validació del mateix amb diferents assaigs experimentals, assaigs numèrics i problemes de contorn d'obres en les que s'ha realitzat algun tipus d'auscultació. Entre aquestes obres es troba una gran excavació urbana a Barcelona, per l'anàlisi de la qual s'han instal·lat extensòmetres, s'han realitzat mesures topogràfiques de la superfície segons l'avanç de l'excavació i s'ha complementat la campanya geotècnica del projecte amb assaigs de columna ressonant. Es conclou que el model *EPHYSS* millora significativament l'aproximació a les mesures experimentals respecte del model *HS-SS* en les simulacions dels diferents assaigs i problemes de contorn, especialment en aquells que presenten reversions a les càrregues desviadores; resol les inconsistències d'aquest últim; té un cost computacional raonable; proporciona flexibilitat en l'ús de diferents formulacions plàstiques; i requereix paràmetres simples, la majoria d'ells comuns als del model *HS-SS*, cosa que el distingeix d'altres models constitutius complexos limitats habitualment a un ús acadèmic. Tot això converteix el model *EPHYSS* en un model que pot ser utilitzat per l'anàlisi i el disseny a la pràctica professional de l'enginyeria geotècnica.

Abstract

Soil behavior in the range of small strains should be considered in the analysis of geotechnical problems when sensitive elements are affected, which is very common in urban environments. However, some of the tests that allow to determinate soil parameters in the range of small strains are still not sufficiently extended in geotechnical engineering professional practice, hindering its estimation and use in constitutive models. Nowadays, the constitutive model Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS) of Plaxis, based on the Hardening Soil Small (HS-S) model, is practically the only one with an extended use in the professional practice that considers such behavior, while the rest of this type of models are generally limited to an academic use given their characteristics. Despite its great advantages, some aspects of the HS-SS model that could be improved have been detected, as well as some inconsistencies whose effects can have a considerable influence on the numerical simulations of boundary problems, as these are cumulative.

This thesis analyzes and classifies 48 soil constitutive models that consider soil behavior in the range of small strains, characterized by being nonlinear, hysteretic and dependent on recent history. For this, different classification criteria have been used, some of them pre-existing and others established in this work.

A new elastoplastic soil constitutive model denominated Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS) has been developed, which is composed by the Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH) model and the Hardening Soil Modified (HS_{MOD}) model. The EPHYSS model describes, on the one hand, the nonlinear reversible, hysteretic and dependent on recent history soil behavior by using the HQH model, which considers the strain-induced anisotropy, and, on the other hand, the soil plastic behavior by using the Cap-Cone HS_{MOD} model. The EPHYSS model state variables define different short and long-term memory levels that provide it with robustness for the reproduction of soil hysteretic behavior. Among them, the deviatoric strain history tensor and the maximum value of the shear stiffness corresponding to the active degradation curve allow to reproduce infinite degradation curves according to the level of strain reversal, which confers great versatility to the model and adaptability to experimental results. The EPHYSS model code, entirely provided in this thesis, has been written in FORTRAN and implemented in Plaxis through the User Defined Soil Model (UDSM) modulus.

A verification of the EPHYSS model has been made, as well as a validation using different experimental tests, numerical tests and boundary value problems of works in which some type of monitoring has been performed. Among these works, there is a large urban excavation in Barcelona, for whose analysis extensometers have been installed, surface topographical measurements according to the excavation progress have been made, and the project geotechnical site investigation has been supplemented with resonant column tests. It is concluded that the EPHYSS model significantly improves the approximation to the experimental data with respect to the HS-SS model in the simulations of the different tests and boundary value problems, especially in those that present reversals in deviatoric loadings; resolves the inconsistencies of the latter; has a reasonable computational cost; provides flexibility in the use of different plastic formulations; and requires simple parameters, most of them common to those of the HS-SS model, which distinguishes it from other complex constitutive models that are usually limited to an academic use. All this makes the EPHYSS model a model that can be used for analysis and design in geotechnical engineering practice.

Agradecimientos

Siempre he concebido la práctica profesional, la investigación y la docencia como partes de un mismo todo. Consecuentemente, he procurado mantener un equilibrio entre dichas actividades, con todo y sus vicisitudes. Gracias a ello, durante los años como doctorando, he contado con el apoyo de personas, tanto en el ámbito profesional, como en el académico y el personal, a las cuales quiero dedicar estas palabras.

En primer lugar, quiero agradecer a mi director de tesis, Alberto Ledesma, sus consejos, soporte y ánimos durante el proceso de elaboración de este trabajo. Especialmente le agradezco la libertad que me ha dado en todo momento y la paciencia con la que ha recibido y atendido la gran cantidad de correos electrónicos que le he enviado, habiendo sido esta, debido a las apretadas agendas de ambos, nuestra principal vía de comunicación. Asimismo, agradezco a Christian Hoffman su valiosa ayuda y tiempo dedicado en la ejecución de la campaña experimental con motivo del análisis de la excavación de La Sagrera.

En segundo lugar, me gustaría agradecer a la empresa Infraes, especialmente a Jose María Arias, la flexibilidad que me ha dado para poder conciliar la actividad profesional con la de investigación y la de docencia en la universidad. Es en Infraes donde me he formado como ingeniero profesional, y estoy agradecido por haberlo hecho desarrollando y dirigiendo estudios, proyectos y asistencias técnicas de muy diversa índole que, como máxima, siempre han buscado resolver problemas complejos, novedosos y desafiantes. Sin duda, la experiencia adquirida en Infraes ha contribuido al enfoque de esta tesis.

En tercer lugar, a mi madre, Felisa, y a mi padre, Jose Antonio, les agradezco todo lo que han hecho, tanto por mí, dándome la oportunidad y las herramientas para crecer como persona, como por mi hermano, cuidando siempre de él con amor. Gracias por el apoyo incondicional que me han ofrecido desde el primer al último minuto que he dedicado a esta tesis, que tanto de mi tiempo libre ha exigido, aguardando pacientemente a que la terminara para poder compartir más momentos juntos. A mi hermano, Carlos, le quiero dar las gracias por transmitir siempre su alegría de forma desinteresada. Con ello logra cambiar el mundo para mejor.

Finalmente, a la persona que más quiero en este mundo, a mi mujer, Lili, le doy las gracias por todo lo compartido juntos. Es la persona que más de cerca ha vivido conmigo esta tesis, ofreciéndome siempre todo su apoyo y cariño, especialmente en los no pocos momentos difíciles, y ayudándome estoicamente con la revisión final, aportando sus conocimientos del ámbito literario y académico. Con estas palabras se cierra un capítulo de nuestras vidas y se abre el siguiente, el cual ya hemos empezado a escribir.

Índice

Resumen	v
Resum	vii
Abstract	ix
Agradecimientos	xi
Lista de figuras	xxi
Lista de tablas	xliii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Motivación	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Estructuración de la tesis	5
1.4. Publicaciones	8
Capítulo 2. Estado de la cuestión	
2.1. Naturaleza cinemática de la rigidez del suelo.....	9
2.2. El rango de las pequeñas deformaciones en problemas de ingeniería.....	11
2.3. Consideraciones micromecánicas	19
2.4. Anisotropía inherente y anisotropía inducida.....	21
2.5. Comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones	24
2.5.1. Consideraciones previas	24
2.5.2. Consideraciones sobre la rigidez.....	32
2.5.2.1. Módulo de rigidez volumétrico	32
2.5.2.2. Módulo de rigidez al corte	34
2.5.3. Consideraciones sobre el comportamiento histerético	48
2.5.3.1. Elementos constitutivos del comportamiento histerético.....	48
2.5.3.1.1. Criterios de reversión	50
2.5.3.1.2. Reglas de memoria	51

2.5.3.1.3. Efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación	53
2.5.3.1.4. Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo	56
2.6. Modelación constitutiva	57
2.6.1. Clasificación de modelos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones	61
2.6.2. Modelos incrementalmente lineales.....	63
2.6.2.1. Modelos elásticos	63
2.6.2.1.1. Modelo elástico lineal	64
2.6.2.1.1.1. Modelo elástico lineal anisótropo	64
2.6.2.1.1.2. Modelo elástico lineal isótropo	66
2.6.2.1.2. Modelos elásticos no lineales	67
2.6.2.1.2.1. Formulación algebraica	68
2.6.2.1.2.1.1. Modelos elásticos de Cauchy.....	68
2.6.2.1.2.1.2. Modelos pseudoelásticos	68
2.6.2.1.2.2. Formulación integral	71
2.6.2.1.2.2.1. Modelos hiperelásticos.....	71
2.6.2.1.2.3. Formulación diferencial	73
2.6.2.1.2.3.1. Modelos hipoeásticos <i>stricto sensu</i>	73
2.6.3. Modelos incrementalmente multilineales	74
2.6.3.1. Modelos histeréticos	74
2.6.3.1.1. Praelasticidad	75
2.6.3.1.1.1. Modelo de Hueckel y Nova (1979)	76
2.6.3.1.1.2. Modelo de Niemunis et al. (2011a)	80
2.6.3.1.2. Modelos histeréticos cuasi-hipoeásticos	83
2.6.3.1.2.1. Reglas de Masing generalizadas	85
2.6.3.1.2.2. Algunos modelos histeréticos cuasi-hipoeásticos	87
2.6.3.1.2.2.1. Modelo de Ramberg y Osgood (1943).....	87
2.6.3.1.2.2.2. Modelo de Kondner y Zelasco (1963).....	88
2.6.3.1.2.2.3. Modelo de Hansen (1963)	89
2.6.3.1.2.2.4. Modelo de Duncan y Chang (1970)	90
2.6.3.1.2.2.5. Modelo de Desai (1971).....	91
2.6.3.1.2.2.6. Modelo de Hardin y Drnevich (1972).....	91
2.6.3.1.2.2.7. Modelo Pyke (1979).....	92
2.6.3.1.2.2.8. Modelo de Jardine et al. (1986).....	93
2.6.3.1.2.2.9. Modelo de Prévost y Keane (1990).....	94
2.6.3.1.2.2.10. Modelo de Tatsuoka y Shibuya (1992)	95
2.6.3.1.2.2.11. Modelo de Matasovic y Vucetic (1993)	96
2.6.3.1.2.2.12. Modelo de Ishibashi y Zhang (1993).....	97
2.6.3.1.2.2.13. Modelo de Fahey y Carter (1993)	98
2.6.3.1.2.2.14. Modelo de Mayne (1994)	99
2.6.3.1.2.2.15. Modelo de Shibuya et al. (1997).....	100
2.6.3.1.2.2.16. Modelo de Bolton y Whittle (1999)	100
2.6.3.1.2.2.17. Modelo de Lee y Salgado (1999).....	100
2.6.3.1.2.2.18. Modelo de Lehane y Cosgrove (2000)	102
2.6.3.1.2.2.19. Modelo de Atkinson (2000)	102
2.6.3.1.2.2.20. Modelo de Darendeli y Stokoe (2001).....	103
2.6.3.1.2.2.21. Modelo de Dos Santos y Correia (2001)	104
2.6.3.1.2.2.22. Modelo <i>SSOM</i> de Benz (2007)	105
2.6.3.2. Modelos avanzados	114
2.6.3.2.1. Modelos elastoplásticos clásicos	114
2.6.3.2.1.1. Modelo <i>SDMCC</i> de Bolton et al. (1994).....	115

2.6.3.2.1.2.	Modelo <i>HS-S</i> de Benz (2007)	117
2.6.3.2.1.3.	Modelo <i>HS-SS</i> de Plaxis	127
2.6.3.2.1.4.	Modelo <i>FC+MCC</i> de Gryczmanski y Uliniarz (2008)	130
2.6.3.2.2.	Modelos de superficies imbricadas	131
2.6.3.2.2.1.	Modelos de Prévost (1977, 1978)	132
2.6.3.2.2.2.	Modelo de Simpson et al. (1979)	136
2.6.3.2.2.3.	Modelo de Puzrin y Burland (1998)	137
2.6.3.2.3.	Modelos de bloques	141
2.6.3.2.3.1.	Modelo de Simpson (1992)	142
2.6.3.2.4.	Modelos de plasticidad límite	144
2.6.3.2.4.1.	Modelo <i>MIT-E3</i> de Whittle (1987)	145
2.6.3.2.4.2.	Modelo <i>CASM-c</i> de Yu (1995)	153
2.6.3.2.4.3.	Modelo <i>NAHOS</i> de Gryczmanski et al. (1998)	156
2.6.3.2.4.4.	Modelo <i>MIT-S1</i> de Pestana y Whittle (1999)	159
2.6.3.2.4.5.	Modelo de Papadimitriou et al. (2001)	168
2.6.3.2.5.	Modelos de burbujas	173
2.6.3.2.5.1.	Modelo de Al-Tabbaa y Wood (1989)	174
2.6.3.2.5.2.	Modelo <i>3-SKH</i> de Stallebrass y Taylor (1997)	178
2.6.3.2.6.	Modelos multilaminados	185
2.6.3.2.6.1.	Modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger (2012)	186
2.6.4.	Modelos incrementalmente no lineales	194
2.6.4.1.	Modelos hipoplásticos	194
2.6.4.1.1.	Modelo de Niemunis y Herle (1997)	197
2.6.4.2.	Modelos híbridos	203
2.6.4.2.1.	Combinación hipoplasticidad y paraelasticidad	203

Capítulo 3. Modelo *HQH*

3.1.	Marco teórico del modelo <i>HQH</i>	206
3.2.	Dominios de deformación del modelo <i>HQH</i>	206
3.3.	Ecuación constitutiva general en el Dominio 1	207
3.3.1.	Módulo volumétrico elástico secante en el Dominio 1	208
3.3.2.	Módulo de corte aparente secante en el Dominio 1	209
3.3.3.	Deducción de la ecuación constitutiva incremental en el Dominio 1	212
3.4.	Ecuación constitutiva incremental en el Dominio 2	215
3.4.1.	Módulo volumétrico elástico tangente en el Dominio 2	215
3.4.2.	Módulo de corte aparente secante y módulo (hipo)elástico tangente en el Dominio 2	216
3.5.	Coefficiente de Poisson	217
3.6.	Variables de estado del modelo <i>HQH</i>	218
3.6.1.	Variable de estado \mathbf{h}	220
3.6.2.	Variable de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$	224
3.6.3.	Variables de estado \mathbf{e}^R y $\mathbf{e}^{e,R}$	231
3.6.4.	Variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e	233
3.6.5.	Variable de estado $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$	235
3.7.	Comportamiento histerético	236
3.7.1.	Criterio de reversión	236
3.7.1.1.	Valor del ángulo de reversión $\cos(\alpha^*) = (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^*$	237
3.7.2.	Reglas de memoria	238
3.7.2.1.	Cumplimiento de las Reglas de Masing generalizadas	239
3.7.3.	Efecto de las reversiones sobre la variable de degradación	241

3.7.4. Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo	241
3.7.5. Consistencia termodinámica y criterio de estabilidad	241
3.7.6. Parámetros del modelo <i>HQH</i>	243
3.7.7. Ejemplo ilustrativo de la evolución de las variables de estado del modelo <i>HQH</i> durante ciclos histeréticos.....	243

Capítulo 4. Implementación numérica del modelo *HS*

4.1. El modelo <i>HS</i>	248
4.1.1. Ideas básicas.....	248
4.1.2. Superficies de fluencia.....	249
4.1.2.1. Superficies tipo Cono f_s y superficie de Mohr-Coulomb f_{mc}	249
4.1.2.2. Superficie tipo Cap f_c	253
4.1.2.3. Superficies de Tracción Nula f_t	254
4.1.3. Potenciales plásticos y dilatancia	255
4.1.4. Variables de estado y leyes de endurecimiento	258
4.1.5. Comportamiento (hipo)elástico	261
4.1.6. Parámetros del modelo <i>HS</i>	261
4.1.7. Parámetros internos del modelo <i>HS</i> y algoritmo para obtenerlos.....	263
4.2. Integración local de las ecuaciones constitutivas elastoplásticas	264
4.2.1. Relaciones constitutivas en plasticidad infinitesimal en el modelo <i>HS</i>	265
4.2.2. <i>Return mapping</i> sobre las superficies de fluencia.....	266
4.2.3. Algoritmo <i>Backward Euler</i> Implícito.....	269
4.2.3.1. Sobre una superficie de fluencia	269
4.2.3.2. Sobre la intersección de dos superficies de fluencia	274
4.2.3.3. Sobre la intersección de tres superficies de fluencia	282
4.2.4. Consistencia del tensor de rigidez elastoplástico tangente	291
4.3. Estrategia para la selección de las superficies de fluencia activas en el modelo <i>HS</i>	293
4.4. Implementación del modelo <i>HS</i> con el módulo <i>UDSM</i> de Plaxis	299
4.4.1. Estructuración del código <i>HS</i> en subrutinas.....	300
4.4.1.1. Argumentos de las subrutinas principales.....	302
4.4.1.2. USER_MOD.f90	305
4.4.1.3. MYMODEL.f90.....	305
4.4.1.4. HS_PLAST.f90.....	308
4.4.1.5. MC_PLAST.f90.....	310
4.4.1.6. CAP_PLAST.f90.....	310
4.4.1.7. TRAC_PLAST.f90.....	312
4.4.1.8. HS_CAP_PLAST.f90	312
4.4.1.9. MC_CAP_PLAST.f90	313
4.4.1.10. HS_TRAC_PLAST.f90.....	314
4.4.1.11. MC_TRAC_PLAST.f90	315
4.4.1.12. MATRIZ6.f90.....	315
4.4.1.13. MATRIZ3.f90.....	315
4.4.1.14. USR_ADD.f90.....	316
4.4.1.15. USRLIB.f90	317
4.4.2. <i>Interface</i>	319
4.4.3. Metodología para la depuración del código.....	322
4.4.4. Compilación de las subrutinas.....	323
4.4.4.1. Lahey Fortran.....	324
4.4.4.2. Intel Fortran	325
4.4.5. Parámetros de cálculo avanzados de Plaxis	326
4.5. Validación del modelo <i>HS</i> implementado	327

Capítulo 5. Modelo *EPHYSS*

5.1. Modelo <i>EPHYSS</i>	335
5.2. Modelo <i>HS_{MOD}</i>	336
5.2.1. Modificación de las leyes de endurecimiento.....	336
5.2.2. Modificación de los criterios de dilatación.....	339
5.3. Parámetros del modelo <i>EPHYSS</i>	342
5.3.1. Determinación de los parámetros del modelo <i>EPHYSS</i>	343
5.3.1.1. Parámetros asociados al modelo <i>HQH</i>	343
5.3.1.2. Parámetros asociados al modelo <i>HS_{MOD}</i>	346
5.3.1.3. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i>	346
5.4. Implementación numérica del modelo <i>EPHYSS</i>	346
5.4.1. Tensión de prueba o trial	346
5.4.2. Paso de cálculo elástico	349
5.4.3. Paso de cálculo elastoplástico.....	350
5.4.4. Algoritmo numérico para el cálculo de $\sigma^{(n+1)}$ y $\chi^{(n+1)}$	351
5.4.5. Implementación numérica del modelo <i>EPHYSS</i> con el módulo <i>UDSM</i> de Plaxis	353
5.4.5.1. Nueva estructura de la subrutina MYMODEL2.f90 (Plaxis 2D v9) y MYMODEL4.f90 (Plaxis 2D 2011 y posteriores versiones).....	353
5.4.5.2. MATRIZ6_NL.f90.....	359
5.4.5.3. MATRIZ3_NL.f90.....	359
5.4.5.4. MODUL.f90	359
5.4.5.5. NORM.f90.....	360
5.4.5.6. <i>Interface</i>	360
5.4.5.7. Metodología para la depuración del código, compilación de las subrutinas y parámetros de cálculo avanzado	360
5.5. Coste computacional.....	361

Capítulo 6. Validación del modelo *EPHYSS* con ensayos y verificación del mismo

6.1. Tipo de suelos y parámetros utilizados en las simulaciones.....	363
6.1.1. Arenas	364
6.1.1.1. Arena de Hostun.....	364
6.1.1.2. Arena de Hochstetten	366
6.1.1.3. Arena de Ticino.....	367
6.1.2. Arcillas.....	368
6.1.2.1. Arcilla caolinita	368
6.1.2.2. Arcilla de Londres	369
6.2. Ensayos triaxiales	370
6.2.1. Ensayos triaxiales drenados en arena de Hostun densa	370
6.2.1.1. Fase de consolidación con carga y descarga isótropas	370
6.2.1.2. Fase desviadora	371
6.2.2. Ensayos triaxiales drenados con ciclo de carga/descarga/recarga en arena de Hostun densa	375
6.2.3. Ensayos triaxiales drenados en arena de Hostun suelta.....	377
6.2.3.1. Fase de consolidación isótropa con carga y descarga	377
6.2.3.2. Fase desviadora	377
6.2.4. Ensayos triaxiales no drenados en arena de Hostun densa	381
6.2.5. Ensayos triaxiales no drenados en arena de Hostun suelta.....	384
6.2.6. Ensayos triaxiales drenados en arcilla caolinita	387

6.2.7. Ensayos triaxiales con giros de tensiones en el plano desviador en arcilla de Londres	390
6.3. Ensayos edométricos.....	392
6.3.1. Ensayos edométricos en arena de Hostun densa.....	392
6.3.2. Ensayos edométricos en arena de Hostun suelta	393
6.4. Ensayos biaxiales	394
6.4.1. Ensayos biaxiales en arena de Hostun densa	394
6.4.2. Ensayos biaxiales en arena de Hostun suelta	399
6.4.3. Ensayos biaxiales numéricos con reversión de la deformación en arena de Hochstetten	403
6.4.4. Ensayos biaxiales numéricos con reversión de la deformación en arena de Ticino	407
6.5. Ensayos numéricos comparativos entre el modelo <i>HS-SS</i> y el modelo <i>EPHYSS</i>	413
6.5.1. Ensayos edométricos numéricos.....	413
6.5.2. Ensayos triaxiales numéricos.....	415

Capítulo 7. Validación del modelo *EPHYSS* con problemas de contorno

7.1. Reseteo de la historia de deformaciones	422
7.2. Tratamiento de materiales sobreconsolidados	422
7.3. Túnel Steinhaldenfeld en Stuttgart excavado con <i>NATM</i>	423
7.4. Segundo túnel de Heinenoord en Rotterdam excavado con escudo de bentonita	434
7.5. Excavación en Berlín entre pantallas ancladas	445
7.6. Excavación en Offenbach entre pantallas de pilotes apuntaladas.....	455
7.7. Ensayo con una zapata experimental en el <i>NGES</i> de la Universidad de Texas <i>A&M</i>	466

Capítulo 8. Estudio de la gran excavación urbana de La Sagrera en Barcelona

8.1. La futura estación intermodal de La Sagrera.....	477
8.2. Geología e hidrogeología en el ámbito de la futura estación	480
8.3. Unidades geotécnicas.....	484
8.4. Ensayos de campo y de laboratorio	484
8.4.1. Resultados de ensayos realizados en el vaso de excavación	486
8.4.2. Resultados de los ensayos de columna resonante para la determinación de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$ realizados en las unidades geotécnicas Qa1-Qa2 y PQ2.....	487
8.4.3. Estimación de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$ en las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, PI1 y PI2	492
8.5. Parámetros de los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	495
8.6. Fases de la excavación, medidas topográficas de la superficie y monitorización de los movimientos en el terreno mediante extensómetros	496
8.7. Modelos numéricos y simulaciones	502
8.8. Resultados de las simulaciones numéricas	509

Capítulo 9. Conclusiones y futuras líneas de investigación

9.1. Conclusiones.....	545
9.2. Futuras líneas de investigación	553

Referencias	555
Anejo I. Código del algoritmo iterativo para la determinación de los parámetros internos de los modelos <i>HS</i> y <i>EPHYSS</i>	581
Anejo II. Superficies de fluencia, potenciales plásticos y derivadas del modelo <i>HS</i>	625
Anejo III. Código de los modelos <i>HS</i> y <i>EPHYSS</i> implementados en Plaxis con el módulo <i>UDSM</i>	637
Anejo IV. Paper 1 previous note. “Small strains in soil constitutive modeling. State of the Art.”	831
Anejo V. Paper 2 previous note. “Development of a new soil constitutive model for small strains. The <i>EPHYSS</i> model.”	907
Anejo VI. Paper 3 previous note. “Application of the <i>EPHYSS</i> model in different boundary value problems and comparative analysis with the <i>HS-SS</i> model of Plaxis.”	957

Lista de figuras

Capítulo 1

1.01. Imagen obtenida mediante microscopio electrónico de barrido de muestras de suelo del sur de Wrocław (Polonia) (Strozyk, 2017). (a) Una arcilla limosa de Poznan del Mioplioceno expansiva, saturada y muy sobreconsolidada. (b) Un limo arcilloso del Pleistoceno cementado, parcialmente saturado, con una importante fracción arenosa y sobreconsolidado.1

Capítulo 2

2.01. (a) Zonas 1-4 (I-IV) en el espacio de tensiones. (b) Deformaciones plásticas axiales (ε_p) normalizadas por la deformación total axial máxima (ε_{max}) vs. deformación total (elástica y plástica) de corte ($\varepsilon_{s,max}$). Jardine (1992).11

2.02. (a) Zonas 1-4 (I-IV) para puntos situados sobre la recta K_0 en descarga (Jardine, 1992).
(b) Zonas 2-4 (II-IV) en ensayos triaxiales en una arcilla lacustre (Messerklinger, 2006).....11

2.03. Ensayos de campo mediante técnicas geofísicas (Cudny, 2013). (a) Ensayo cross-hole. (b) Ensayo down-hole. (c) Cono sísmico *CPTU* o dilatómetro sísmico *SDMT*. (d) Medida continua de las ondas de superficie CSWS. Las fuentes de vibraciones se identifican con (S) y los geófonos receptores con (R).13

2.04. *Esquemas de ensayos de laboratorio para la medida de la rigidez del suelo a pequeñas deformaciones (Cudny, 2013). (a) Aparato triaxial con medida local de los desplazamientos mediante transductores/LVDT. (b) Aparato triaxial con CE, SP y BE. (c) Columna resonante con BE. (d) Hollow cylinder con BE. (e) Aparato de doble corte simple con transductor. (f) Edómetro con BE. Se identifican como CE los elementos de medida de ondas sísmicas a compresión, como SP los elementos de medida de ondas sísmicas de corte y como BE los bender elements.....14*

2.05. Asientos tras la construcción de un túnel en Steinhaldenfeld con el *NATM* y simulaciones numéricas (Benz, 2007). (a) Simulaciones con los modelos *HS* de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999) y *HS-S* con superficie límite de Mohr-Coulomb (*HS-Small*[MC]) de Benz (2007). (b) Simulaciones con los modelos *HS* y *HS-S* con superficie límite de Matsuoka-Nakai (*HS-Small*[MN]) de Benz (2007).16

2.06. Asientos durante la construcción del túnel de St James's Park en Londres. (a) Simulaciones numéricas con un modelo elástico lineal con plasticidad perfecta y dos modelos no lineales isotropos, L4 (la curva de degradación de la rigidez sigue una función trigonométrica y la degradación de la rigidez volumétrica y de corte se da ya sea con la deformación volumétrica o con la deformación de corte) y J4 (la curva de degradación de la rigidez sigue una función logarítmica y la degradación de la rigidez volumétrica y de corte se da, respectivamente, con la deformación

volumétrica y con la deformación de corte) (Addenbrooke et al., 1997). (b) Simulaciones numéricas con un modelo elástico lineal con plasticidad perfecta y dos modelos no lineales, <i>Brick</i> y <i>SRD</i> (<i>Strain Rate Dependent</i>)- <i>Brick</i> (Clarke, 2009).....	16
2.07. Asientos durante la construcción de un túnel dentro del proyecto del <i>Metropolitan Rapid Transit Authority (MRTA)</i> en Bangkok y simulaciones numéricas con diferentes modelos elásticos y elastoplásticos con elasticidad lineal (entre ellos, el modelo <i>Cam Clay</i> Modificado (<i>MCC</i>) de Roscoe y Burland (1968) que considera una rigidez volumétrica no lineal y una rigidez al corte lineal, y el modelo de Von Mises con elasticidad lineal (<i>EVM</i>)) y con elasticidad no lineal (modelo <i>Cam Clay</i> Modificado con hiperplasticidad y endurecimiento cinemático (<i>KHMCC</i>)) (Likitlersuang, 2003). (a) Simulación con suelo homogéneo. (b) Simulación con dos capas de suelo diferenciadas.	17
2.08. Movimientos en el terreno durante una excavación entre pantallas en una arcilla del Rupeliano y simulaciones numéricas con los modelos <i>HS</i> de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), <i>HS-S</i> con superficie límite de Mohr-Coulomb (<i>HS-Small</i> [<i>MC</i>]) de Benz (2007) y <i>HS-S</i> con superficie límite de Matsuoka-Nakai (<i>HS-Small</i> [<i>MN</i>]) de Benz (2007), Benz (2007). (a) Cubeta de asientos en el trasdós de las pantallas. (b) Desplazamientos horizontales de la pantalla izquierda.	17
2.09. Movimientos en el terreno durante una excavación entre pantallas en el <i>Taipei Enterprise Center (TNEC)</i> (Aswin et al., 2010). (a) Simulaciones numéricas con el modelo <i>Cam Clay</i> modificado (<i>MCC</i>) de Roscoe y Burland (1968). (b) Simulaciones numéricas con el modelo <i>HS-S</i> (<i>HS Small</i>) de Benz (2007). (c) Simulaciones numéricas con el modelo <i>USC</i> (<i>Undrained Soft Clay</i>) de Hsieh et al. (2010).	18
2.10. Curva carga-desplazamiento bajo una cimentación experimental de 3x3m sobre arenas, realizada por la <i>Texas A&M University National Geotechnical Experimentation Site (NGES)</i> (Benz, 2007). Arriba: modelo <i>HS</i> de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999) (1a: $OCR = 1$. 1b: $OCR > 1$). Abajo <i>HS-S</i> con superficie límite de Mohr-Coulomb (<i>HS-Small</i> [<i>MC</i>]) de Benz (2007) (2a: $OCR = 1$. 2b: $OCR > 1$. 2c: $OCR > 1$ y rigidez máxima de corte incrementada).....	19
2.11. Ensayo 2D con <i>Discrete Element Method (DEM)</i> (Benz, 2007). (a) Distribución homogénea de las fuerzas en dirección y magnitud durante una carga isotrópica. (b) Distribución preferencial de fuerzas con formación de cadenas de contacto durante una carga desviadora. (c) Contactos prácticamente inalterados durante una carga isotrópica. (d) Numerosos contactos rotos durante una carga desviadora.	21
2.12. Tomografía sobre una muestra de partículas de vidrio de 1mm depositadas por gravedad (Abbireddy, 2008). (a) Sección horizontal. (b) Sección vertical.	23
2.13. Imágenes fotoelásticas de ensayos de corte simple cíclico y distribución de contactos (Matsuoka et al., 1988).	23
2.14. Algoritmos para la obtención del valor de las tensiones.	29
2.15. (a) Variación de v' o v_u con γ_{oct} en diferentes tipos de suelo (Yokota y Konno, 1980). (b) Variación de v' con ϵ_{oct} (Lehane y Cosgrove, 2000).....	31
2.16. Dependencia del módulo volumétrico aparente secante ($B \equiv K_s^{rap}$) con σ'_3/p_a en arcilla de alta plasticidad de Barind, según la expresión (2.15) (Mofiz et al., 2005).....	32
2.17. Ensayos en arcillas limosas (Gasparre, 2005). (a) Compresión isotrópica, $v - 1 = (1 + e_0)\epsilon_v$. (b) Compresión unidimensional.....	33
2.18. Rigidificación del módulo volumétrico en arenas de Nevada durante pequeños ciclos de carga y descarga en la rama de carga noval y durante la rama de descarga (Lade y Abelev (2005), extraído de la tesis de Benz (2007)).	34

2.19. Degradación del módulo de corte aparente en ensayos con arcillas con diferentes índices de plasticidad (Okur y Ansal, 2007).	35
2.20. Degradación del módulo de corte aparente en diversos ensayos con arenas (Oztoprak y Bolton, 2013).	35
2.21. Degradación del módulo de corte (Obrzud (2010), basado en Atkinson y Salfors (1991)).	36
2.22. (a) Influencia de p' en el valor de G_0 (Soga et al. (1995), extraído del trabajo de Potts y Zdravkovic (1999)). (b) Influencia de p' en la degradación de G (Wichtmann y Triantafyllidis, 2004).	37
2.23. Resultados de experimentos con columna resonante sobre arenas bien gradadas y arcillas reconstituidas (Bui, 2009).	38
2.24. (a) Curva de degradación del módulo de corte aparente para diferentes valores del IP (Okur y Ansal, 2007). (b) Valores del módulo de corte aparente para diferentes valores del IP y de la deformación de corte (Vucetic y Dobry, 1991).	38
2.25. $G_0 = G_0(R_0)$ en muestras reconstituidas de arcilla caolinita (Viggiani y Atkinson, 1995).	39
2.26. Envolturas de Gudehus en el espacio de Rendulic obtenidas con ensayos triaxiales drenados en una arcilla limosa de baja plasticidad reconstituida (Costanzo et al. (2006), extraído de la tesis de Masín (2006)). (a) Trayectoria de tensiones aplicadas. (b) Respuesta en deformaciones.	40
2.27. (a) Ensayo triaxial: trayectorias de tensiones en el plano $q/p' - \epsilon_s = 2/3(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ con diferentes ángulos $\tan(\theta_{q/p'}) = \Delta q/\Delta p'$ en arcilla de Londres reconstituida, con $OCR = 2$ y $p' = 200kPa$ (Richardson, 1988). (b) Ensayo de cilindro hueco: trayectorias de tensiones y deformaciones en el plano $R = \sigma'_1/\sigma'_2 - \gamma_{max}$, donde $\alpha = \alpha_\sigma$ es el ángulo de giro de las tensiones principales, en una arena de Ottawa con $p' = 300kPa$ y $Dr = 36\%$ (Sayao, 1989). (c) Ensayo biaxial: trayectorias de deformaciones y tensiones en los respectivos planos desviadores en una arcilla de Karlsruhe reconstituida (Topolnicki et al., 1990). (d) Ensayo triaxial verdadero: trayectoria de deformaciones en el plano desviador y gráfico tensión desviadora $\sqrt{s_{ij}s_{ij}} -$ deformación desviadora $\sqrt{\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}}$ en una arena de Leighton Buzzard con $Dr = 72\%$ (Sture et al., 1988).	43
2.28. Arriba: modelo 3-SKH de Stallebrass y Taylor (1997). (a) Superficies en el espacio de tensiones. (b) Curvas de degradación del módulo de corte tangente en ensayos triaxiales no drenados en caolín Speswhite con $p' = 300kPa$. Abajo: Modelo de bloques de Simpson (1992). (c) Analogía de bloques en el espacio de deformaciones. (d) Curva de degradación.	44
2.29. Ensayos triaxiales no drenados sobre arcilla de Londres reconstituida (Atkinson et al., 1990). (a) Trayectorias seguidas en los ensayos. (b) Efecto de la historia reciente de tensiones sobre la rigidez del suelo.	45
2.30. Ensayos triaxiales no drenados sobre arcilla de Londres (Clayton y Heymann, 2001). (a) Trayectorias tensionales seguidas. (b) Módulo longitudinal no drenado E_u en trayectorias BC y BE.	46
2.31. Curvas de degradación en ensayos triaxiales no drenados en arcilla de Londres ($G_{eq,tan} \equiv \dot{q}/3\dot{\epsilon}_q$, siendo \dot{q} el incremento de la tensión desviadora y $\dot{\epsilon}_s$ el incremento de la deformación total desviadora) (Gasparre et al., 2007). (a) Dentro de Y_2 (Zonas I o II según Jardine (1992)) permitiendo la fluencia. (b) Dentro de Y_2 (Zonas I o II) sin permitir la fluencia. (c) Sobrepassando y desplazando Y_2 (Zonas III o IV según Jardine (1992)), permitiendo o no la fluencia.	46

2.32. Efecto de los cambios de velocidad de deformación sobre la rigidez durante la fase desviadora de un ensayo triaxial no drenado sobre una muestra de arcilla de Londres intacta (Sorensen et al., 2007).	47
2.33. Factor de velocidad de deformación del módulo de corte (Vucetic et al. (2003), extraído de la tesis de Benz (2007)). (a) Dependencia con la velocidad de deformación y la amplitud de deformación. (b) Dependencia con el IP	47
2.34. (a) Ciclos de carga en ensayos triaxiales con arena suelta de Lubiatowo (Swidzinski, 2000). (b) Ensayo de consolidación sobre una arcilla azul de Boston (Whittle et al., 1994). (c) Ciclos de carga en ensayos triaxiales no drenados con $p' = 300kPa$ en una arcilla caolinita Speswhite (Stallebrass y Taylor, 1997). (d) Ciclos de carga en ensayos triaxiales drenados (Smith et al., 1992).	49
2.35. Efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación, dibujado sobre el gráfico de degradación del módulo de corte de arcilla de Londres, extraído de Atkinson et al. (1990).	54
2.36. Efecto de una reversión de 90° . (a) En el modelo $SSOM$ con deformación de la curva de degradación. (b) El modelo HQH desarrollado en el capítulo 3, sin deformación de la curva de degradación.	55
2.37. Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima según los dos criterios definidos, dibujado sobre el gráfico de degradación de arcilla de Londres extraído de Atkinson et al. (1990). (a) Recuperación continua o discontinua según el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente. (b) Recuperación total o parcial de la rigidez.	57
2.38. Representación esquemática del número de zonas tensoriales para diferentes tipos de modelos. (a) Incrementalmente lineales. (b) Incrementalmente multilineales. (c) Incrementalmente no lineales.	62
2.39. Diferentes tipos de no linealidad en modelos pseudoelásticos que respetan el criterio de estabilidad de Drucker (1951).	69
2.40. Representación esquemática del comportamiento del suelo en diferentes tipos de modelos. (a) Elástico no lineal. (b) Histerético. (c) Elastoplástico.	75
2.41. (a) Ciclo de carga según el modelo de Hueckel y Nova. (b) Ciclo de carga real, con salto en la deformación entre a y d al alcanzar el mismo nivel de tensión. Hueckel y Nova (1979).	75
2.42. Idealización del comportamiento histerético de tipo paraelástico (Hueckel y Nova, 1979).	76
2.43. Evolución $\bar{W}^{hist,L}$ ($\sigma \equiv \sigma'$) (Hueckel y Nova, 1979). (a) En paso sin reversión. (b) En paso con reversión.	79
2.44. Esquema de reactivación de un antiguo punto de reversión ($\bar{W}^{I,I+1} \equiv \bar{W}^{hist,I,I+1}$, $\sigma \equiv \sigma'$) (Hueckel y Nova, 1979).	79
2.45. Discontinuidad en la respuesta tensional al considerar $\bar{d} = \ \epsilon^{pe} - \epsilon^{peR}\ $ (Niemunis y Prada-Sarmiento, 2011).	81
2.46. Resolución de la problemática de discontinuidad con el nuevo criterio de distancia d_{AR1} (Niemunis y Prada-Sarmiento, 2011).	82
2.47. Esquemas de las Reglas de Masing Generalizadas extraído del trabajo de Vucetic (1990). (a) Regla N°1. (b) Regla N°2. (c) Regla N°3. (d) Regla N°4.	86
2.48. Ejemplos numéricos de curvas de degradación del módulo de corte en el modelo de Ramberg y Osgood, para diferentes valores de γ ($r \equiv \hat{r}$) (Ishihara, 1996).	88

2.49. Ajuste de parámetros del modelo hiperbólico de Kondner y Zelasco a partir de resultados experimentales ($E_i \equiv E'_i$) (Duncan y Wong, 1974).	89
2.50. Representación gráfica de la curva $\tau - \gamma$ del modelo de Pyke (1979), citado en Kantartzi (1993).	92
2.51. Curva de degradación de E_u ($E_u \equiv E_{s,u}^{ap}$, $A \equiv \bar{A}$, $B \equiv \bar{B}$, $C \equiv \bar{C}$, $\alpha \equiv \bar{\alpha}$, $\gamma \equiv \bar{\gamma}$) (Jardine et al., 1986).	94
2.52. (a) Parámetros $C_i(0)$ y $C_i(\infty)$. (b) Parámetros $C_i(X)$. Tatsuoka y Shibuya (1992).	96
2.53. (a) Comparación entre X e Y para ensayos drenados y no drenados en arena de Toyoura. (b) Simulación con el modelo de Tatsuoka y Shibuya (1992). Chiaro et al. (2011).	96
2.54. Comparación entre el modelo de Kondner y Zelasko (1963) (KZ) y Matasovic y Vucetic (1993) (MKZ) (Stewart et al., 2008). (a) Curva de carga $\tau - \gamma$. (b) Curva de degradación del módulo de corte G	97
2.55. Resultados de ensayos (Ishibashi y Zhang, 1993). (a) $\tilde{m}(\gamma = 0.1\%, IP)$, ($M \equiv \tilde{m}$). (b) $K(\gamma = 0.1\%, IP)$	98
2.56. (a) Curva de degradación de G_s^{ap} ($G \equiv G_s^{ap}$). (b) Curva de degradación de G_t^{ap} ($G_t \equiv G_t^{ap}$). Fahey y Carter (1993).	99
2.57. (a) Curvas de degradación del módulo aparente longitudinal según el modelo de Lee y Salgado. (b) Medidas y simulación con el modelo de Lee y Salgado con un criterio de plasticidad de Drucker-Prager. Lee et al. (2004).	101
2.58. Comparación entre modelos y datos experimentales (Benz, 2007). (a) Modelo de Hardin y Drnevich (1972). (b) Modelo de Dos Santos y Correia (2001).	104
2.59. Curvas de degradación (Benz, 2007). (a) Módulo de corte aparente secante. (b) Módulo de corte aparente tangente.	107
2.60. Simulaciones con el modelo $SSOM$ y análisis de la diferencia de rigideces entre la curva de carga noval y sucesivas descargas/recargas (gráficos elaborados por Benz (2007) a partir de los resultados de los ensayos realizados por Rivera y Bard, cuyos datos se extraen de Biarez y Hicher (1994)).	109
2.61. Representación gráfica de la detección de reversiones en el modelo $SSOM$. Castellón (2013).	111
2.62. Corrección de la rigidez en descarga (Castellón, 2013). (a) $G_t^{ap,corr} = G_t^{ap,(n)}$. (b) $G_t^{ap,corr} = G_s^{ap,(n-1)}$	113
2.63. Ensayos triaxiales realizados por Richardson (1988) y su simulación numérica con el modelo $SSOM$ (Benz, 2007). (a) Curvas de degradación elástica. (b) Trayectoria de tensiones seguidas en los ensayos.	113
2.64. Variaciones del módulo de corte según la deformación de corte en el modelo $SDMCC$ ($A \equiv A_G$, $B \equiv B_G$, $n_1 \equiv \check{n}_1$, $n \equiv \check{n}$, $m_1 \equiv \check{m}_1$, $m \equiv \check{m}$, $b \equiv \check{b}$) (Bolton et al., 1994).	116
2.65. (a) Resultados de ensayos triaxiales sobre arcillas sobreconsolidadas y simulaciones numéricas con el modelo $SDMMC$ y MCC . (b) Resultados de ensayos centrífugos y simulaciones numéricas con el modelo $SDMCC$ y MCC . Bolton et al. (1994).	117

2.66. Superficies de fluencia del modelo <i>HS</i> en el plano $p - q$ ($f^s \equiv f_s$ y $f^c \equiv f_c$) (Benz, 2007).	118
2.67. (a) Superficie de fluencia con el criterio de Matsuoka-Nakai del modelo <i>HS-S</i> en el espacio de Westergaard. (b) Ángulo de dilatancia movilizado vs. ángulo de fricción movilizado en el modelo <i>HS-S</i> . Benz (2007).	118
2.68. Resultados de ensayos edométricos y simulaciones numéricas con el modelo <i>HS-S</i> y <i>HS</i> (Benz, 2007). (a) Arena de Hostun densa. (b) Arena de Hostun suelta.....	122
2.69. Resultados experimentales de la fase desviadora de ensayos triaxiales drenados y simulaciones numéricas con los modelos <i>HS</i> , <i>HS-S</i> y <i>HS+SSOM</i> (Benz, 2007). (a) Arena de Hostun densa. (b) Arena de Hostun suelta. (c) Arcilla caolinita reconstituida. Izquierda: Curvas de carga-deformación y curvas de deformación volumétrica. Derecha: Curvas de degradación de G_s^{ap} ($G_{secant} \equiv G_s^{ap}$).....	123
2.70. Resultados de ensayos experimentales y simulación numérica con el modelo <i>HS-S</i> (Benz, 2007). (a) Curva de degradación del módulo de rigidez longitudinal aparente secante durante la carga noval y durante una descarga/recarga. (b) Ciclo de histéresis en un ensayo triaxial drenado en arena densa de Hostun.	124
2.71. Resultado de ensayos triaxiales con giros de la trayectoria de tensiones realizados por Richardson (1988) (Benz, 2007). (a) Simulación numérica con el modelo <i>HS</i> . (b) Simulación numérica con el modelo <i>HS-S</i> . Izquierda: Curvas de degradación elástica. Derecha: Trayectoria de tensiones seguidas en los ensayos.....	125
2.72. Resultados experimentales de ensayos triaxiales no drenados y simulaciones numéricas con los modelos <i>HS</i> y (Benz, 2007). (a) Arena densa de Hostun. (b) Arena suelta de Hostun.	126
2.73. Resultados de ensayos de compresión isótropa y simulaciones con los modelos <i>HS</i> y <i>HS-S</i> (Benz, 2007). (a) Arena densa de Hostun. (b) Arena suelta de Hostun.	126
2.74. Curva $q - \epsilon_{yy}$ en la fase desviadora de un ensayo triaxial numérico. Modelo <i>HS-SS</i> de Plaxis v9. Castellón (2013).	129
2.75. Curvas edométricas en ensayos numéricos con el modelo <i>HS-SS</i> de Plaxis v9. Detección de inconsistencias en régimen elastoplástico (Castellón, 2013).....	129
2.76 Curvas edométricas en ensayos numéricos con el modelo <i>HS-SS</i> de Plaxis v9. Detección de inconsistencias en régimen elástico y elastoplástico y dependencia con G_0 y $\gamma_{0,7}$ (Castellón, 2013).	130
2.77. Representación gráfica del modelo <i>FC+MCC</i> (Gryczmanski y Uliniarz, 2008).....	130
2.78. Comparación de la curva de degradación de los modelos <i>MCC</i> y <i>FC+MCC</i> . (Gryczmanski y Uliniarz, 2008).	131
2.79. Representación esquemática de un modelo con superficies imbricadas (Yu, 2006).....	132
2.80. Curva $q - \epsilon_1$ (Yu, 2006). (a) Experimental. (b) Obtenida con los modelos de superficies imbricadas.....	132
2.81. Superficies imbricadas correspondientes al modelo para condiciones no drenadas en el espacio $q - p'$ (Chen y Mizuno, 1990).....	134
2.82. Esquema con las reglas de endurecimiento del modelo de Prévost (Chen y Mizuno, 1990).	136
2.83. Movimientos durante la construcción de un aparcamiento al lado del <i>New Palace Yard</i> (Simpson et al., 1979).	137

2.84. (a) Concepto de <i>KYS</i> aplicado al modelo de Puzrin y Burland (1998) en el plano $q - p'$. (b) Zonas <i>LER</i> y <i>SSR</i> alrededor de un origen local en el plano $J - p'$. Potts y Zdravkovic (1999).	138
2.85. Proyección del estado actual de tensiones (p', J) sobre la región <i>SSR</i> (Potts y Zdravkovic, 1999).....	140
2.86. Modelo de bloques de Simpson (Simpson, 1992). (a) Esquema de la analogía del hombre arrastrando bloques atados por cuerdas inextensibles. (b) Curva de degradación de la rigidez del modelo.	141
2.87. Representación esquemática de la superficie de plasticidad límite (Potts y Zdravkovic, 1999).	144
2.88. Ensayos y simulaciones con el modelo <i>MIT-E3</i> en arcilla azul de Boston (Whittle et al., 1994).	147
2.89. Geometría de la superficie de plasticidad límite del modelo <i>MIT-E3</i> ($F \equiv f, \alpha \equiv \alpha', s_i \equiv s'_i$) (Potts y Zdravkovic, 1999).	148
2.90. Geometría de la superficie de plasticidad límite y del cono de estado crítico del modelo <i>MIT-E3</i> ($R_c \equiv r_c, R_x \equiv r_x$) (Potts y Zdravkovic, 1999).	149
2.91. Primera superficie de fluencia, superficie de carga y superficie de plasticidad límite del modelo <i>MIT-E3</i> ($F \equiv f, \alpha \equiv \alpha', \alpha_{0i} \equiv \alpha'_{0i}, \alpha_0 \equiv \alpha'_0$) (Potts y Zdravkovic, 1999).	151
2.92 (a) Superficies de fluencia del modelo <i>CASM-a</i> ($p'_{oj} = p'_o$) con $r=2.75$ ($r \equiv \bar{r}$) y diversos valores de n . (b) Esquema de la superficie de plasticidad límite y de la superficie de carga del modelo <i>CASM-c</i> . Wang (2005).	153
2.93. (a) Valores $\eta - \epsilon_q$ de los ensayos drenados en arena del río Fuji (Tatsuoka y Ishihara, 1974). (b) Simulación con modelo <i>CASM-c</i> (Khong, 2004).	155
2.94. (a) Valores $\epsilon_v - \eta$ de los ensayos drenados en arena del río Fuji (Tatsuoka y Ishihara, 1974). (b) Simulación con <i>CASM-c</i> (Khong, 2004).	155
2.95. Criterio de reversión y desplazamiento del centro elástico (Jastrzebska y Sternik, 2004).	157
2.96. (a) Superficie de plasticidad límite del modelo <i>NAHOS</i> ($F \equiv f, R \equiv \bar{R}$). (b) Reglas de mapeo del modelo <i>NAHOS</i> . Jastrzebska y Sternik (2004).	158
2.97. (a) Ensayo triaxial no drenado sobre una arcilla caolinita ligeramente sobreconsolidada y simulación con el modelo <i>NAHOS</i> . (b) Ensayo triaxial drenado sobre una arcilla caolinita ligeramente sobreconsolidada y simulación con el modelo <i>NAHOS</i> . Jastrzebska y Sternik (2004).	159
2.98. (a) Efecto de los parámetros D y $\gamma \tilde{r}$ ($r \equiv \tilde{r}$) sobre las deformaciones volumétricas. (b) Efecto del parámetro ω_s sobre el módulo de corte elástico. Pestana y Whittle (1999).	161
2.99. Superficie de fluencia del modelo <i>Cam Clay</i> modificado de Roscoe y Burland (1968), del modelo <i>MIT-E3</i> de Whittle (1993) y del modelo <i>MIT-S1</i> (Pestana y Whittle, 1999).	162
2.100. Superficie de carga y superficie de plasticidad límite en el modelo <i>MIT-S1</i> (Pestana y Whittle, 1999).	166
2.101. Efecto del parámetro h sobre ϵ_v^p durante la recarga dentro de un ciclo de carga/descarga/recarga (Pestana y Whittle, 1999).	167

2.102. Medidas de desplazamiento y simulación con el <i>MIT-S1</i> de la excavación realizada dentro del proyecto de construcción de un corredor multimodal subterráneo en el centro de Berlín (<i>VZB Project - Verkehrsanlagen im Zentralen Bereich</i>) (Nikolinakou et al., 2011).	167
2.103. Superficies del modelo (Papadimitriou et al., 2001).	169
2.104. Estimación analítica de la relación elástica entre tensión y deformación desviadora ($G_{max}^o \equiv G_0^{ref}$, $G_{min}^o \equiv G_{t,min}^{ref}$) (Papadimitriou et al., 2001).	171
2.105. Superficies del modelo y reglas de mapeo en el plano $\eta - p'$ ($s \equiv \xi$) (Papadimitriou et al., 2001).	173
2.106. (a) Resultados de ensayos con columnas resonantes en arena de Nevada y simulaciones. (b) Ensayos cíclicos triaxiales sobre arena de Nevada (arriba) y simulaciones (abajo). Papadimitriou et al. (2001).	173
2.107. Esquema conceptual del movimiento de la burbuja en un modelo de burbujas (Potts y Zdravkovic, 1999).	174
2.108. Representación esquemática de las superficies del modelo de Al-Tabbaa y Wood ($R \equiv \hat{R}$, $p'_0 \equiv p'_c$) (Potts y Zdravkovic, 1999).	175
2.109. Desplazamiento de la burbuja en el plano $J - p'$ (Potts y Zdravkovic, 1999).	177
2.110. Representación esquemática de las superficies del modelo <i>3-SKH</i> (Stallebrass y Taylor, 1997).	180
2.111. Desplazamiento de las burbujas f_1 y f_2 en el plano $J - p'$ (Potts y Zdravkovic, 1999).	182
2.112. (a) Resultados experimentales de la curva de degradación según la dirección del incremento de carga respecto al incremento anterior. (b) Simulación con el modelo <i>3-SKH</i> . Stallebrass y Taylor (1997).	184
2.113. Resultados experimentales de ensayos centrífugos para reproducir los desplazamientos generados por una cimentación superficial en una arcilla caolinita y simulaciones con el modelo <i>3-SKH</i> (Stallebrass y Taylor, 1997). (a) Curva carga-desplazamiento. (b) Asientos verticales.	184
2.114. Superficies de fluencia en cada plano del modelo multilaminado (Schädlich y Schweiger, 2012).	188
2.115. Curvas de degradación locales en cada plano (Schädlich y Schweiger, 2012).	190
2.116. (a) Curva de degradación de G_t^{ap} macroscópica (global) integrada sobre todos los planos, (b) Curvas de degradación de G_t^{ap} en cada plano. Schädlich y Schweiger (2012).	190
2.117. Representación esquemática de las curvas $q - \epsilon_1$ globales y contornos de ϵ_{deg} en el espacio de deformaciones de corte locales, para $\epsilon_{n,dev} = 0$ (Schädlich y Schweiger, 2012).	192
2.118. Resultados obtenidos de simulaciones con el modelo multilaminado (Schädlich y Schweiger, 2012). (a) Curva de degradación del ensayo biaxial. (b) Trayectorias tensionales de ensayos biaxiales. (c) Valores de G_t^{ap}/G_{ur} según el giro de la trayectoria de deformaciones totales y el valor previo de la deformación acumulada.	192
2.119. Curvas experimentales de tensión-deformación para un ciclo de carga en arena del río Ham (Kuwano y Jardine, 2002) y simulación numérica con el modelo multilaminado y (a) $\dot{\sigma}_h = 0$ y (b) $\dot{\sigma}_v = 0$ (Schädlich y Schweiger, 2012).	193

2.120. Resultados experimentales del ensayo de carga y descarga en gravas de Chiba (Jiang et al., 1997) y simulación numérica con el modelo multilaminado (Schädlich y Schweiger, 2012).	193
2.121. Interpretación gráfica de la ecuación constitutiva hipoplástica de los modelos de la primera generación (Tamagnini y Viggiani, 2002). (a) Círculo unitario en espacio de deformaciones. (b) Efecto de la parte lineal. (c) Efecto de la parte no lineal.	195
2.122. Exceso de acumulación de tensión y deformación durante ciclos (Niemunis y Herle, 1997). (a) Tensión ($\Delta T \equiv \Delta \sigma'$). (b) Deformación ($\Delta \varepsilon \equiv \Delta \epsilon$).....	196
2.123. Evolución de δ en un ciclo de deformación unidimensional ($R \equiv \tilde{R}$) (Niemunis y Herle, 1997).	198
2.124. Ejemplo de la evolución de δ_i y $\epsilon_i(\delta_i)$ en el caso bidimensional ($R \equiv \tilde{R}$) (Niemunis y Herle, 1997).	198
2.125. Diferentes deformaciones intergranulares δ con diferentes historias de deformación (Niemunis y Herle, 1997). Sólo la parte reciente de la trayectoria de deformación (flecha negra curvilínea) tiene influencia en δ . El punto (*) es común en las tres trayectorias.	198
2.126. Evolución de la variable de deformación intergranular δ ($R \equiv \tilde{R}$, $\beta_R \equiv \beta'_R$) (Niemunis y Herle, 1997).	199
2.127. Variación de la rigidez con m_T y m_R para $\rho = 1$ y $\rho = 0$ ($R \equiv \tilde{R}$) (Niemunis y Herle, 1997). Por simplicidad, se asume $\dot{\sigma}'(\mathbf{d}) \sim \mathbf{d}$	200
2.128. Ejemplo de curvas de degradación de la rigidez calculadas con el modelo hipoplástico con deformación intergranular (Niemunis y Herle, 1997).	201
2.129. Valores de G_t^{ap}/G_{ur} según el giro de la trayectoria de deformaciones total en el modelo de Niemunis y Herle (1997) para valores de $\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e) = \mathbf{1}$, $\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', e) = \mathbf{0}$, $m_R = 5$, $m_T = 2$ y valores de $\chi = 6.0$ (izquierda) y $\chi = 2.0$ (derecha) (Benz, 2007).	201
2.130. Ensayo edométrico numérico cíclico (Niemunis y Herle, 1997). (a) Modelo modificado por Niemunis y Herle. (b) Modelo hipoplástico de Wolffersdorff (1996).	202
2.131. Ensayo triaxial drenado numérico cíclico (Niemunis y Herle, 1997). (a) Modelo modificado por Niemunis y Herle. (b) Modelo hipoplástico de Wolffersdorff (1996).	202
2.132. Influencia de $\eta = q/p'$ sobre G_0 (Masín, 2006). (a) Según modelo de Niemunis y Herle (1997). (b) Según modelo de Masín (2006).	202
2.133. Influencia del cruce de la trayectoria tensional por $p' = 0$ kPa (Masín, 2006). (a) Según modelo de Niemunis y Herle (1997). (b) Según modelo de Masín (2006).	203
2.134. Peso w' para diferentes valores de β_R (Niemunis y Prada-Sarmiento, 2011).	204

Capítulo 3

3.01. Ciclos de deformación activos en el plano $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ($\varepsilon_i \equiv -\varepsilon_j$), tras reversiones en el modelo de Niemunis et al. (2011), donde el valor de $-p'$ utilizado para calcular $G(-p')$ en las trayectorias internas del círculo mayor, es el valor de $-p'$ correspondiente al centro de dicho círculo (Niemunis et al., 2011).	211
3.02. (a) Curva de degradación teórica en los modelos <i>SSOM</i> , <i>HS-S</i> y <i>HS-SS</i> con $-\sigma'_3 = p'_{ref}$ y $-\dot{\sigma}'_3 = 0$. (b) Rango de valores de G_s^{ap} en el modelo <i>HQH</i> , con $-p' = p'_{ref,2}$ y $\dot{p}' = 0$	212

3.03. Esquema del algoritmo iterativo del paso de cálculo elastoplástico $(n) \rightarrow (n + 1)$ cuando las variables que intervienen en dicho paso de cálculo dependen de $\Delta \epsilon^{e,(n+1)}$ y/o $\epsilon^{e,(n+1)}$	215
3.04. Gráfico $-\text{sign}(\hat{\mathbf{h}}: \mathbf{h}) \ \hat{\mathbf{h}}\ - \rho_\alpha - \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ para $w = 100$ y $\ \mathbf{h}^{ini}\ = 0$	221
3.05. Gráfico $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} - \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ (sin tener en cuenta el criterio de estabilidad).	226
3.06. (a) G_t^{ap} en ensayos triaxiales no drenados en arcilla de Londres reconstituida (Atkinson et al., 1990). (b) G_t^{ap} en ensayos triaxiales realizado por Richardson (1988) y simulaciones con el modelo SSOM (Benz, 2007).	227
3.07. (a) Valor de G_s^α y G_t^α en la curva $\tau^{AR} - Y$ relativa a un punto de reversión R . (b) Curvas $G_s^\alpha - Y$ y $G_t^\alpha - Y$	227
3.08. Efecto de reversiones de deformación con diferentes ángulos. (a) En el modelo SSOM. (b) En el modelo HQH.	228
3.09. Trayectorias de tensiones en ensayos triaxiales. (a) Plano desviador. (b) Plano de Cambridge $q' - (-p')$	230
3.10. Evolución de $\hat{\mathbf{h}}$ en función de $\cos(\alpha) = \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ y criterio de reversión	238
3.11. Aplicación del criterio de estabilidad tras una reversión en el punto R , suponiendo $\gamma_{oct}^{H,(n+1)} = 0$. (a) Cuando $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,CORR,(n+1)} = G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n+1)}$. (b) y (c) Cuando $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR,(n+1)} = (G_s^{(n+1)} (1 + \alpha(\gamma_{oct}^{H,(n+1)} / \xi \gamma_{0,7}))) (-p'^{(n)} / p'_{ref,2})^{-m_2} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n)}$	243
3.12. Ejemplo ilustrativo de la evolución de las variables de estado durante ciclos histeréticos (1/2).	244
3.13. Ejemplo ilustrativo de la evolución de las variables de estado durante ciclos histeréticos (2/2).	245

Capítulo 4

4.01. (a) Relación hiperbólica para la curva de carga noval $q - (-\epsilon_1)$ según el modelo de Kondner y Zelasko (1963). (b) Relación hiperbólica para la curva de carga noval $q - (-\epsilon_1)$ según el modelo Duncan y Chang (1970). Gráficos extraídos de la tesis de Benz (2007).	248
4.02. (a) Superficies de fluencia f_s para $\gamma^p = cte$ en el plano $q - p'$ ($p' > 0$ en los gráficos) (Benz, 2007). Curvas para una deformación de corte constante en ensayos triaxiales: (b) con arenas sueltas del Río Fuji (Ishihara et al., 1975), (c) con arenas densas del Río Fuji (Tatsuoka e Ishihara, 1974). Gráficos extraídos de la tesis de Benz (2007).	250
4.03. Representación de los módulos de rigidez E'_{50} , E'_i y $E'_{t,ur}$ ($E_{50} \equiv E'_{50}$, $E_i \equiv E'_i$, $E_{ur} \equiv E'_{t,ur}$) en la curva de carga noval $q - (-\epsilon_1)$ de un ensayo triaxial drenado (Plaxis, 2015).	250
4.04. Representación en el plano desviador de las superficies de fluencia f_s	252
4.05. (a) Representación de la superficie de fluencia tipo Cono f_s , la superficie de fluencia tipo Cap f_c y el criterio de rotura de Mohr-Coulomb en el plano $q - (-p)$, ($p' > 0$ en el gráfico y $f^c \equiv f_c$, $f^s \equiv f_s$). (b) Representación de la superficie de fluencia f_s en su valor límite (coincidente con el criterio de rotura de Mohr-Coulomb) y la superficie de fluencia tipo Cap f_c , en el espacio de tensiones principales ($\sigma'_i > 0$ en el gráfico). Gráficos extraídos de la tesis de Benz (2007).	253
4.06. Representación en el plano desviador de las superficies de fluencia f_c , $f_{aux,1}$ y $f_{aux,3}$	254

4.07. Representación en el plano desviador de las superficies de fluencia f_t .	255
4.08. (a) Valores de los ángulos de dilatancia según la formulación de Rowe (1962). (b) Valores de los ángulos de dilatancia en el modelo <i>HS</i> .	256
4.09. Curva edométrica y valor del E_{oed}^{ref} .	261
4.10. <i>Return Mapping</i> en el plano desviador sobre la superficie de fluencia tipo <i>Cap</i> con plasticidad asociada, para diferentes valores del pseudotiempo α .	268
4.11. Algoritmo <i>Backward Euler</i> Implícito para una superficie de fluencia f_k en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$.	275
4.12. Ejemplo de <i>Return Mapping</i> en el plano desviador sobre la intersección entre las superficies $f_{s,13}$ y $f_{s,23}$ que forman parte de la superficie de fluencia tipo Cono f_s del modelo <i>HS</i> .	276
4.13. Esquema con las Zona de Esquina Z_{ij} y las curvas de intersección Γ_{ij} entre las diferentes superficies de fluencia del modelo <i>HS</i> .	276
4.14. Representación de las curvas $\Gamma_{mc,ij mc,ik}$, $\Gamma_{mc,ij c,ik}$ y $\Gamma_{c,ij c,ik}$. Gráfico de las superficies de fluencia extraído de las tesis de Benz (2007). En el gráfico $\sigma'_i > 0$. ($\sigma_i \equiv \sigma'_i$).	276
4.15. Representación puntos de intersección $\mathcal{P}_{mc,ij mc,ik c}$ entre las superficies de fluencia f_{mc} y f_c en el espacio de tensiones principales. Gráfico de las superficies de fluencia extraído de las tesis de Benz (2007). (En el gráfico $\sigma'_i > 0$, $\sigma_i \equiv \sigma'_i$).	283
4.16. (a) Esquema de la estrategia propuesta por Tanev (2015). (b) Esquema de la estrategia de retorno sobre la superficie de Mohr-Coulomb en dos pasos cuando $f_s(\sigma'^{(tr)}, \chi^{pl}) > f_{mc}(\sigma'^{(tr)}, \chi^{pl})$.	295
4.17. Estrategia adoptada en la implementación del modelo <i>HS</i> .	296
4.18. Estrategia para la selección de las superficies de fluencia en el <i>Return Mapping</i> (1/2).	297
4.19. Estrategia para la selección de las superficies de fluencia en el <i>Return Mapping</i> (2/2).	298
4.20. Esquema del funcionamiento el del módulo <i>UDSM</i> de Plaxis en un problema de contorno.	299
4.21. Esquema del funcionamiento de las subrutinas implementadas en el módulo <i>UDSM</i> de Plaxis.	302
4.22. Selección del modelo <i>User-defined</i> en la pestaña General. (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.	320
4.23. Selección del archivo <i>DLL</i> , selección del modelo dentro del dicho archivo e introducción de los parámetros del modelo seleccionado. (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.	320
4.24. Introducción de los parámetros de la interfase del modelo seleccionado. (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.	320
4.25. Parámetros (a) hidráulicos, (b) térmicos y (c) determinación de las tensiones iniciales. Plaxis 2D 2015.	321
4.26. Ensayos triaxiales drenados con Plaxis 2D v9. (a) Curvas $q - (-\epsilon_1)$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.	329

4.27. Ensayos triaxiales drenados con Plaxis 2D 2015. (a) Curvas $q - (-\epsilon_1)$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	330
4.28. Ensayos triaxiales no drenados con Plaxis 2D v9. (a) Curvas $q - (-\epsilon_1)$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-p_w - (-\epsilon_1)$	331
4.29. Ensayos triaxiales no drenados con Plaxis 2D 2015. (a) Curvas $q - \epsilon_1$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-p_w - (-\epsilon_1)$	332
4.30. Curvas edométricas con Plaxis 2D v9. (a) Arena suelta. (b) Arena semidensa. (c) Arena densa.	333
4.31. Curvas edométricas con Plaxis 2D 2015. (a) Arena suelta. (b) Arena semidensa. (c) Arena densa.	334

Capítulo 5

5.01. Esquema de los modelos que componen el modelo <i>HS-SS</i> y el modelo <i>EPHYSS</i> desarrollado en este trabajo.	336
5.02. Esquema de los sectores en el plano $q - (-p')$ con diferentes valores de φ'_m y ψ_m en el modelo <i>HS_{MOD}</i>	341
5.03. Gráfico que muestra la variación del ángulo de dilatación movilizado con el ángulo de fricción movilizado para $\varphi' = 35^\circ$ y $\psi = 5^\circ$. (a) Parte plástica del modelo <i>HS-SS</i> que se encuentra en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015). (b) Modelo <i>HS_{MOD}</i>	342
5.04. Representación gráfica del incremento de tensión y deformación en régimen elástico no lineal.....	348
5.05. Esquema del algoritmo utilizado.	352
5.06. Selección del archivo <i>DLL</i> , selección del modelo dentro de dicho archivo e introducción de los parámetros del modelo <i>EPHYSS</i> . (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.	360

Capítulo 6

6.01. Carga y descarga isotrópica de un ensayo triaxial en arena de Hostun densa.....	370
6.02. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 100kPa$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	371
6.03. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300kPa$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	372
6.04. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 600kPa$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	373
6.05. Ensayo triaxial drenado con ciclo carga/descarga/recarga en una arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300kPa$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1)$	375
6.06. Ensayo triaxial drenado cíclico en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300kPa$. Arriba: $q - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	376
6.07. Carga y descarga isotrópica de un ensayo triaxial en arena de Hostun suelta.....	377

6.08. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 100\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	378
6.09. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 300\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	379
6.10. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 600\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	380
6.11. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$. Arriba $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$	381
6.12. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300\text{kPa}$. Arriba $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$	382
6.13. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 600\text{kPa}$. Arriba $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$	383
6.14. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$	384
6.15. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 300\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$	385
6.16. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 600\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$	386
6.17. Ensayo triaxial drenado en arcilla caolinita, $-\sigma'_3 = 100\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	387
6.18. Ensayo triaxial drenado en arcilla caolinita, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	388
6.19. Ensayo triaxial drenado en arcilla caolinita, $-\sigma'_3 = 600\text{kPa}$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$	389
6.20. Trayectorias seguidas en los ensayos triaxiales en arcilla de Londres reconstituida (Benz (2007), basado en Richardson (1988)). Según Richardson (1988), el valor de los incrementos de carga entre OC, OB y OD es de 90kPa y no de 100kPa.....	391
6.21. Ensayo triaxial en arcilla de Londres con giro de las tensiones de 0º, 90º y 180º. Curva $G_t - (-\epsilon_1)$	392
6.22. Ensayo edométrico en arena de Hostun densa.....	393
6.23. Ensayo edométrico en arena de Hostun suelta.....	394
6.24. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 100\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	395
6.25. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	396
6.26. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 400\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	397

6.27. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 800\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	398
6.28. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 100\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	399
6.29. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	400
6.30. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 400\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	401
6.31. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 800\text{kPa}$. Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$	402
6.32. Trayectoria de deformaciones en el ensayo biaxial numérico con arena de Hochstetten.....	403
6.33. Curvas de degradación de G_t^{ap} en el ensayo biaxial numérico con arena de Hochstetten tras las reversiones.	404
6.34. Trayectoria de deformaciones en el ensayo biaxial numérico con arena de Ticino.	407
6.35. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger (2012). En la figura se consideran deformaciones de signo contrario al resto de figuras. Schädlich y Schweiger (2012).	409
6.36. Valores de G_t^{ap}/G_{ur} según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β en el modelo de Niemunis y Herle (1997) para valores de $\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e) = \mathbf{1}$, $\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', e) = \mathbf{0}$, $m_R = 5$, $m_T = 2$ y valores de (a) $\chi = 6.0$ y (b) $\chi = 2$. Benz (2007).	409
6.37. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo HS-SS (se ha considerado interpolación lineal entre los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ calculados).	410
6.38. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo EPHYSS (se ha considerado una interpolación lineal entre los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ calculados).	410
6.39. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo EPHYSS (líneas continuas) y en el modelo HS-SS (líneas discontinuas) (se ha considerado una interpolación lineal entre los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ calculados).	411
6.40. Curva $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ ensayo ED-1 con los modelos EPHYSS y HS-SS, que introduce fases de consolidación.	414
6.41. Curva $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ ensayo ED-2 con los modelos EPHYSS y HS-SS, que introduce fases nulas.....	414
6.42. Curva $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ ensayo ED-3 con los modelos EPHYSS y HS-SS, que introduce pequeñas descargas/recargas.	415
6.43. Curvas $-p' - (-\epsilon_v)$ del ensayo ET-2 con los modelos EPHYSS y HS-SS, que introduce fases nulas.....	417
6.44. Curvas $-p' - (-\epsilon_v)$ del ensayo ET-3 con los modelos EPHYSS y HS-SS, que introduce pequeñas descargas/recargas.....	417

6.45. Curva fase desviadora del ensayo ET-2 con los modelos <i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i> , $-\sigma'_3 = 300kPa$, que introduce fases nulas.....	418
6.46. Curva fase desviadora del ensayo ET-3 con los modelos <i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i> , $-\sigma'_3 = 300kPa$, que introduce pequeñas descargas/recargas.....	418

Capítulo 7

7.01. Plano en planta del trazado del Túnel de Steinhaldenfeld y tramificación según el procedimiento constructivo utilizado (Möller, 2006).	423
7.02. (a) Geometría del túnel y zona mejorada mediante la instalación de bulones Möller (2006). Bulones de 5m según Möller (2006) y de 4m según Benz (2007). (b) Ejecución de los bulones en el interior del túnel (Benz, 2007).....	424
7.03. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico del Túnel de Steinhaldenfeld.	425
7.04. Curva asiento-confinamiento en el método de reducción de tensiones (β – <i>method</i>) (Möller, 2006).....	427
7.05. Medidas de la cubeta de asientos en el Túnel de Steinhaldenfeld y simulaciones para el <i>SET 1</i> y el <i>SET 2</i> con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	430
7.06. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el <i>SET 1</i> con el modelo <i>EPHYSS</i> . (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación. Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el <i>SET 1</i> con el modelo <i>HS-SS</i> . (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.	431
7.07. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el <i>SET 2</i> con el modelo <i>EPHYSS</i> . (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación. Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el <i>SET 2</i> con el modelo <i>HS-SS</i> . (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.	432
7.08. Desplazamientos verticales para el <i>SET 1</i> . (a) Modelo <i>EPHYSS</i> ($u_{y,max}=-0,028m$). (b) Modelo <i>HS-SS</i> ($u_{y,max}=-0,029m$).....	433
7.09. Desplazamientos verticales para el <i>SET 2</i> . (a) Modelo <i>EPHYSS</i> ($u_{y,max}=-0,027m$) y (b) Modelo <i>HS-SS</i> ($u_{y,max}=-0,028m$).....	433
7.10. Puntos plásticos para el <i>SET 1</i> . (a) Modelo <i>EPHYSS</i> . (b) Modelo <i>HS-SS</i>	433
7.11. Instrumentación interior del Segundo Túnel de Heinenoord (Bakker, 2000)	435
7.12. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico del Segundo Túnel de Heinenoord.....	436
7.13. Método de presión de lechada (<i>grout pressure method</i>) (Möller, 2006). (a) Aplicación de la presión de la lechada en el contorno de la excavación. (b) Control sobre la deformada del terreno para que no supere el valor del <i>gap</i>	437
7.14. Medidas de la cubeta de asientos en el Segundo Túnel de Heinenoord y simulaciones para el <i>SET 1</i> y el <i>SET 2</i> con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	440
7.15. Medidas de los desplazamientos horizontales que resultan de los inclinómetros instalados a diferentes distancias <i>x</i> del eje del Segundo Túnel de Heinenoord y simulaciones para el <i>SET 1</i> y <i>SET 2</i> con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> . (a) $x=6m$. (b) $x=10m$. (c) $x=16m$	441

7.16. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el SET 1 con el modelo EPHYSS. (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación. Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el SET 1 con el modelo HS-SS. (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.	442
7.17. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el SET 2 con el modelo EPHYSS. (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación. Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el SET 2 con el modelo HS-SS. (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.	443
7.18. Desplazamientos verticales u_y (arriba) y horizontales u_x (abajo) para el SET 1. (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,0318m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0094m$). (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,0317m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0096m$).	444
7.19. Desplazamientos verticales (arriba) y horizontales (abajo) para el SET 2. (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,0345m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0100m$). (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,0326m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0097m$).	444
7.20. Puntos plásticos para el SET 2. (a) Modelo EPHYSS. (b) Modelo HS-SS.	445
7.21. Geometría, posición del nivel freático, avances de la excavación, propiedades de los anclajes y fuerzas de tesado de los mismos (Schweiger, 2002).	446
7.22. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico de la excavación en Berlín.	447
7.23. Presiones de agua en el terreno. (a) Antes del rebaje del nivel freático en el interior de la excavación. (b) Después del rebaje del nivel freático en el interior de la excavación.	449
7.24. Asientos en el trasdós de la pantalla derecha en la fase final de la excavación resultantes de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS.	450
7.25. Medidas de los desplazamientos horizontales de la pantalla derecha y resultados de las simulaciones con los modelos EPHYSS, HS-SS e Hipoplástico con deformación integranular de Niemunis y Herle (1997), cuyos resultados se han obtenido de Schweiger (2002).	451
7.26. Momentos flectores en la pantalla derecha que resultan de la simulación con los modelos EPHYSS y HS-SS.	451
7.27. Levantamientos bajo la excavación en la fase final de la misma y a lo largo de un eje vertical situado a 10,0m de la pantalla de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS.	452
7.28. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo EPHYSS. (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación. Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo con el modelo HS-SS. (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.	453
7.29. Desplazamientos verticales (arriba) y horizontales (abajo). (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max,(+)}=0,0226m$, $u_{y,max,(-)}=-0,0224m$, $u_{x,max,(+)}\approx 0m$ y $u_{x,max,(-)}=-0,0349m$). (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max,(+)}=0,0282m$, $u_{y,max,(-)}=-0,0174m$, $u_{x,max,(+)}\approx 0m$ y $u_{x,max,(-)}=-0,0311m$).	454
7.30. Puntos plásticos. (a) Modelo EPHYSS. (b) Modelo HS-SS.	454
7.31. Geometría, nivel freático, avances de la excavación, puntales y elementos para la auscultación (Krajewski et al., 2001).	456
7.32. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico de la excavación en Offenbach. En la imagen se muestra el nivel freático rebajado.	456
7.33. Presiones de agua en el terreno. (a) Antes del rebaje del nivel freático. (b) Después del rebaje del nivel freático.	460

7.34. Medidas de los asientos en el trasdós de la pantalla izquierda y derecha en la fase final de la excavación y resultados de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	461
7.35. Medidas de los desplazamientos horizontales de la pantalla izquierda y resultados de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	461
7.36. Levantamientos bajo la excavación en su fase final y a lo largo de un eje vertical situado en el centro de la misma, resultantes de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	462
7.37. Momentos flectores de la pantalla izquierda resultantes de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	462
7.38. Valores medidos de las cargas en los puntales en la fase final de la excavación (Krajewski et al., 2001) y resultados de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	463
7.39. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo <i>EPHYSS</i> . (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación. Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo <i>HS-SS</i> . (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.	464
7.40. Desplazamientos verticales (arriba) y horizontales (abajo). (a) Modelo <i>EPHYSS</i> ($u_{y,max,+}=0,0896m$, $u_{y,max,-}=-0,0609m$, $u_{x,max,+}=0,0573m$ y $u_{x,max,-}=-0,0733m$). (b) Modelo <i>HS-SS</i> ($u_{y,max,+}=0,1478m$, $u_{y,max,-}=-0,0580m$, $u_{x,max,+}=0,0701m$ y $u_{x,max,-}=-0,0854m$). No se muestra el nivel freático para mejorar la visualización de los desplazamientos en la zona bajo la excavación.	465
7.41. Puntos plásticos. (a) Modelo <i>EPHYSS</i> . (b) Modelo <i>HS-SS</i>	466
7.42. (a) Planta con la situación y las dimensiones de las zapatas. (b) Geometría en alzado del experimento llevado a cabo y del terreno subyacente. Briaud y Gibbens (1997).	467
7.43. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico del ensayo con la zapata experimental “Norte” de 3x3m.....	467
7.44. Medidas de las curvas carga-desplazamiento de la zapata “Norte” de 3x3m y resultados de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para el <i>SET 1</i>	471
7.45. Medidas de las curvas carga-desplazamiento de la zapata “Norte” de 3x3m y resultados de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para el <i>SET 2</i>	472
7.46. Arriba: Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo <i>EPHYSS</i> para el <i>SET 1</i> . (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación (carga máxima). Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo <i>HS-SS</i> para el <i>SET 1</i> . (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación (carga máxima).	474
7.47. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo <i>EPHYSS</i> para el <i>SET 2</i> . (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación (carga máxima). Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo <i>HS-SS</i> para el <i>SET 2</i> . (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación (carga máxima).	475
7.48. Arriba: asientos bajo la zapata para el <i>SET 1</i> . (a) Modelo <i>EPHYSS</i> ($u_{y,max}=-0,103m$). (b) Modelo <i>HS-SS</i> ($u_{y,max}=-0,115m$). Abajo: asientos bajo la zapata para el <i>SET 2</i> . (a) Modelo <i>EPHYSS</i> ($u_{y,max}=-0,102m$). (b) Modelo <i>HS-SS</i> ($u_{y,max}=-0,105m$).	476
7.49. Puntos plásticos para el <i>SET 2</i> . (a) Modelo <i>EPHYSS</i> . (b) Modelo <i>HS-SS</i>	476

Capítulo 8

8.01. (a) Sección de la futura estación intermodal de La Sagrera (Alday Jover Arquitectos et al., 2017). (b) Infografía del entorno de la estación y el gran parque verde (Dortoka et al., 2011).	478
8.02. (a) Estado de la excavación en 2011 (Apunto Lapospo, 2011). (b) Estado de la excavación y ejecución de cimentaciones y estructuras en 2017 (Apunto Lapospo, 2017).	479
8.03. Perfiles geológicos transversales en la zona de excavación (Barcelona Sagrera Alta Velocidad, 2011).	481
8.04. Perfiles geológicos longitudinales en la zona de excavación (Barcelona Sagrera Alta Velocidad, 2011).	482
8.05. Perfiles geológicos de la zona de estudio. Las zonas grises de los estratos cuaternarios y pliocuaternarios con macrofrábrica se corresponden con materiales más groseros y las zonas blancas con materiales más finos (Vázquez-Suñé et al., 2011). (a) Perfil transversal. (b) Perfil longitudinal.	483
8.06. Obtención de muestras bloque del vaso de excavación (Hoffmann, 2019). (a) Estrato cuaternario formado por arcillas rojas y limos amarillos carbonatados. (b) Estrato Pliocuaternario con arcillas y limos próximos al estrato Pliocuaternario con gravas y arenas.....	484
8.07. Arriba: Tallado de muestras cilíndricas. Abajo a la izquierda: muestra cilíndrica tallada de la muestra bloque extraída del estrato Pliocuaternario arcillos-limoso. Abajo a la derecha: muestra cilíndrica tallada de la muestra bloque extraída del estrato Pliocuaternario granular-arenoso. Hoffmann (2019).	485
8.08. Equipo de columna resonante del Laboratorio del Departamento de Ingeniería del Terreno, Cartográfica y Geofísica de la UPC utilizado para los ensayos.	486
8.09. Resultados de los ensayos de columna resonante para diferentes confinamientos en las muestras M1-ATR, M2-ATR, M1-SE2, M2-SE2, M3-SE2, M4-SE2, M5-SE2 y M5-SE2 y ajuste de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$	488
8.10. Resultados de los ensayos de columna resonante para diferentes confinamientos en las muestras M7-SE2, M8-SE2, M9-SE2, M10-SE2, M11-SE2 y M12-SE2 y ajuste de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$	489
8.11. Resultados de los ensayos de columna resonante para diferentes confinamientos en las muestras M1-ESC, M2-ESC, M13-SE1, M13-SE1, M14-SE1, M16-SE1 y M17-SE1 y ajuste de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$	490
8.12. Fotografía aérea (Apunto Lapospo, 2011) con la situación de los extensómetros.	497
8.13. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº1, columna estratigráfica y selección de fases.	498
8.14. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº2, columna estratigráfica y selección de fases.	498
8.15. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº3, columna estratigráfica y selección de fases.	499
8.16. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº4, columna estratigráfica y selección de fases.	499
8.17. Visión tridimensional del vaso de excavación en las diferentes fases seleccionadas.	500
8.18. Planta con las secciones transversales y longitudinal.	501
8.19. Perfiles transversales del terreno en cada una de las fases de excavación seleccionadas.	501

8.20. Perfil longitudinal del terreno en cada una de las fases de excavación seleccionadas.	502
8.21. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº1. Dimensiones H=161m, V=63m.	504
8.22. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº2. Dimensiones H=161m, V=63m.	505
8.23. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº3. H=161m, V=63m.	506
8.24. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº4. H=160m, V=68m.	507
8.25. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección longitudinal por todos los extensómetros. H=500m, V=59m.	508
8.26. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección transversal correspondiente.....	510
8.27. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección transversal correspondiente.	510
8.28. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección longitudinal.....	511
8.29. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección longitudinal.....	511
8.30. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección transversal correspondiente.....	512
8.31. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección transversal correspondiente.	512
8.32. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección longitudinal.....	513
8.33. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección longitudinal.....	513
8.34. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección transversal correspondiente.....	514
8.35. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección transversal correspondiente.	514
8.36. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección longitudinal.....	515
8.37. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección longitudinal.....	515

8.38. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección transversal correspondiente.	516
8.39. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección transversal correspondiente.	516
8.40. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>EPHYSS</i> , en la sección longitudinal.	517
8.41. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo <i>HS-SS</i> , en la sección longitudinal.	517
8.42. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en el análisis drenado.	518
8.43. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.	519
8.44. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.	520
8.45. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en el análisis drenado.	521
8.46. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.	522
8.47. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.	523
8.48. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en el análisis drenado.	524
8.49. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.	525
8.50. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.	526
8.51. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en el análisis drenado.	527
8.52. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.	528
8.53. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.	529

8.54. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección longitudinal con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en el análisis drenado.	530
8.55. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección longitudinal con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.	531
8.56. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección longitudinal con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.....	532
8.57. Valores de los desplazamientos verticales u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).	533
8.58. Valores de los desplazamientos u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).	533
8.59. Valores de los desplazamientos u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).	534
8.60. Valores de los desplazamientos u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).	534
8.61. Valores de los desplazamientos u_y en la sección longitudinal con el modelo <i>EPHYSS</i> (izquierda) y con el modelo <i>HS-SS</i> (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).	535
8.62. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1, que resultan de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> (izquierda) y <i>HS-SS</i> (derecha)......	536
8.63. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2, que resultan de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> (izquierda) y <i>HS-SS</i> (derecha)......	537
8.64. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3, que resultan de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> (izquierda) y <i>HS-SS</i> (derecha)......	538
8.65. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4, que resultan de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> (izquierda) y <i>HS-SS</i> (derecha)......	539
8.66. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección	

longitudinal, que resultan de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> (izquierda) y <i>HS-SS</i> (derecha).....	540
8.67. Valor máximo del exceso positivo o negativo de presión de agua $(-\Delta p_w)_{max}$ en las fases de excavación seleccionadas para cada una de las secciones transversales y longitudinal que resultan de las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	541

Lista de tablas

Capítulo 2

2.01. Zonas tensoriales y valores de K^{lap} y G^{ap} para modelos incrementalmente lineales, multilineales y no lineales.	28
---	----

Capítulo 3

3.01. Variables de estado \mathbf{h} y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$	218
3.02. Variables de estado \mathbf{e}^R y $\mathbf{e}^{e,R}$	219
3.03. Variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e	219
3.04. Variables de estado $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$	219
3.05. Efecto de $\hat{\mathbf{h}}$: $\hat{\mathbf{e}}$ sobre las variables de estado y sobre G_s^{ap} (sin tener en cuenta el criterio de estabilidad)	238

Capítulo 4

4.01. Parámetros de rigidez del modelo HS	262
4.02. Parámetros de resistencia del modelo HS	262
4.03. Parámetros avanzados del modelo HS	262
4.04. Parámetros del proceso de cálculo con HS_plast	309
4.05. Parámetros del proceso de cálculo con MC_plast	310
4.06. Parámetros del proceso de cálculo con CAP_plast	311
4.07. Parámetros del proceso de cálculo con $TRAC_plast$	312
4.08. Parámetros del proceso de cálculo con HS_CAP_plast	312
4.09. Parámetros del proceso de cálculo con MC_CAP_plast	314
4.10. Parámetros del proceso de cálculo con HS_TRAC_plast	314
4.11. Parámetros del proceso de cálculo con MC_TRAC_plast	315

4.12. Parámetros del suelo utilizados en el modelo <i>HS</i> y parámetros internos ajustados con el algoritmo implementado para arenas suelta, semidensa y densa.	328
--	-----

Capítulo 6

6.01. Parámetros de los modelos <i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i> para la arena de Hostun suelta y densa.....	365
6.02. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para la arena de Hostun suelta y densa.	365
6.03. Parámetros de los modelos <i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i> para la arena de Hochstetten.	366
6.04. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para la arena de Hochstetten.....	366
6.05. Parámetros de los modelos <i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i> para la arena de Ticino.	367
6.06. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para la arena de Ticino.....	367
6.07. Parámetros de los modelos <i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i> para la arcilla caolinita reconstituida.....	368
6.08. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para la arcilla caolinita reconstituida.	368
6.09. Parámetros de los modelos <i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i> para la arcilla de Londres reconstituida.....	369
6.10. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para la arcilla de Londres reconstituida.	369
6.11. Trayectorias seguidas en los ensayos triaxiales y ángulos de giro en el plano de Cambridge.....	390
6.12. Valores de $-\Delta\epsilon_{xx}$ y $-\Delta\epsilon_{yy}$ durante los giros de deformación y valores del ángulo de giro de las deformaciones desviadoras α (según la expresión 6.01) y de las deformaciones totales β (según la expresión 6.02).....	408
6.13. Ensayo ED-1, ED-2 y ED-3. Trayectoria de tensiones con fases de consolidación (ED-1), fases neutras (ED-2) o pequeñas descargas/recargas (ED-3) que generan inconsistencias en la curva de carga noval y en la curva de descarga/recarga.	413
6.14. Ensayo ET-2 y ET-3. Trayectoria de tensiones en fase de consolidación isótropa y fase desviadora con fases neutras (ET-2) o pequeñas descargas/recargas (ET-3) que generan inconsistencias en la curva de carga noval y en la curva de descarga/recarga.	416

Capítulo 7

7.01. Valores de <i>OCR</i> según Möller (2006) y Benz (2007), y valores de K_0^{SC} según Möller (2006) para los diferentes materiales.	425
7.02. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para el SET 1.....	428
7.03. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para el SET 1.....	428
7.04. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para el SET 2.....	429
7.05. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para el SET 2.....	429

7.06. Parámetros del sostenimiento extraídos de la tesis de Benz (2007) y parámetro de la interacción suelo-estructura.	430
7.07. Valores de β y $p = \beta p_0$ utilizados en las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para el <i>SET 1</i> y el <i>SET 2</i>	430
7.08. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para el <i>SET 1</i> y el <i>SET 2</i>	438
7.09. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para el <i>SET 1</i> y el <i>SET 2</i>	438
7.10. Valores de p_{clave} utilizadas en las simulaciones con los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para el <i>SET 1</i> y el <i>SET 2</i>	439
7.11. Parámetros del sostenimiento extraídos de Benz (2007), aunque no son requeridos en el cálculo realizado.	439
7.12. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	448
7.13. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i>	448
7.14. Parámetros de las pantallas extraídos de la tesis de Benz (2007) y del trabajo de Schweiger (2002, 2007). Se asume un mismo valor de R_{inter} para todos los materiales (Schweiger, 2007).	449
7.15. Geometría y parámetros de los anclajes extraídos del trabajo de Schweiger (2002, 2007) y de la tesis de Benz (2007).	449
7.16. Valores de OCR y K_0^{SC} extraídos de Benz (2007) en los diferentes materiales.	457
7.17. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	458
7.18. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i>	458
7.19. Parámetros de las pantallas extraídos de la tesis de Benz (2007) y valor supuesto de R_{inter} , que se asume igual en todos los materiales.	459
7.20. Fases de excavación, fases de instalación de los puntales y propiedades de estos. Datos extraídos o calculados a partir de la información contenida en la tesis de Benz (2007).	459
7.21. Situación y valor de la carga generada por los edificios, extraídos de la tesis de Benz (2007).	459
7.22. Parámetros hidráulicos del suelo en base al modelo <i>Standard</i> de Plaxis, basado en la clasificación <i>Hydraulic Properties of European Soils (HYPRES)</i> . Ante la falta de datos, se asume un comportamiento isótropo $k_x = k_y$	459
7.23. Parámetros de bombeo para el rebaje del nivel freático.	460
7.24. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i>	469
7.25. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i>	469
7.26. Geometría de la zapata deducida a partir de Briaud y Gibbens (1997), parámetros del modelo constitutivo supuesto para la misma y peso específico del material.	470
7.27. Cargas aplicadas sobre la zapata extraídas del trabajo de Briaud y Gibbens (1997).	470

Capítulo 8

8.01. Unidades geotécnicas consideradas.	484
8.02. Resultados de ensayos en los materiales correspondientes a las diferentes unidades geotécnicas (Barcelona Sagrera Alta Velocidad, 2007).	486
8.03. Permeabilidades k_x y k_y de los materiales correspondientes a cada unidad geotécnica.	487
8.04. Pesos específicos de los materiales correspondientes a cada unidad geotécnica.	487
8.05. Resultados de los ensayos de columna resonante (ATR: Atrio. SE1: Salida de Emergencia 1. SE2: Salida de Emergencia 2. SE2-ESC: Escaleras lado mar de la Salida de Emergencia 2. Vert.: Muestra tallada verticalmente. Hor.: Muestra tallada horizontalmente. γ_n : Peso específico natural. γ_d : Peso específico seco. w : Humedad).	491
8.06. Valores de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$ para los materiales de las unidades geotécnicas Qa1-Qa2 y PQ2.	492
8.07. Valores de A' y B' en la expresión $G_0 = A'(N_{60})^{B'}$ [MPa] propuestos por diferentes autores.	493
8.08. Valores de G_0^{ref} obtenidos a partir de correlaciones con e y N_{60} propuestas por diferentes autores.	493
8.09. Valores de $\gamma_{0.7}$ obtenidos a partir de relaciones y correlaciones con G_0 , c' , ϕ' , $-\sigma'_1$ e IP propuestas por diferentes autores.	494
8.10. Valores de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$ estimados para los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, PI1 y PI2.	494
8.11. Pesos específicos y parámetros de los modelos <i>EPHYSS</i> y <i>HS-SS</i> para cada una de las unidades geotécnicas.	495
8.12. Parámetros internos del modelo <i>EPHYSS</i> para cada una de las unidades geotécnicas.	496
8.13. Fases seleccionadas y fechas de lectura de los extensómetros y del levantamiento de los perfiles topográficos.	500

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Los suelos, cuya génesis natural requiere cientos, miles o incluso millones de años, forman sistemas polifásicos complejos constituidos por partículas sólidas, líquidos, gases y subsistemas biológicos (figura 1.01). Asimismo, una pequeña masa de suelo puede contener millones de partículas con sus respectivas interfases. Dependiendo de su naturaleza y de las condiciones ambientales, estas fases pueden experimentar entre ellas mayores o menores niveles de interacción física, química y biológica.

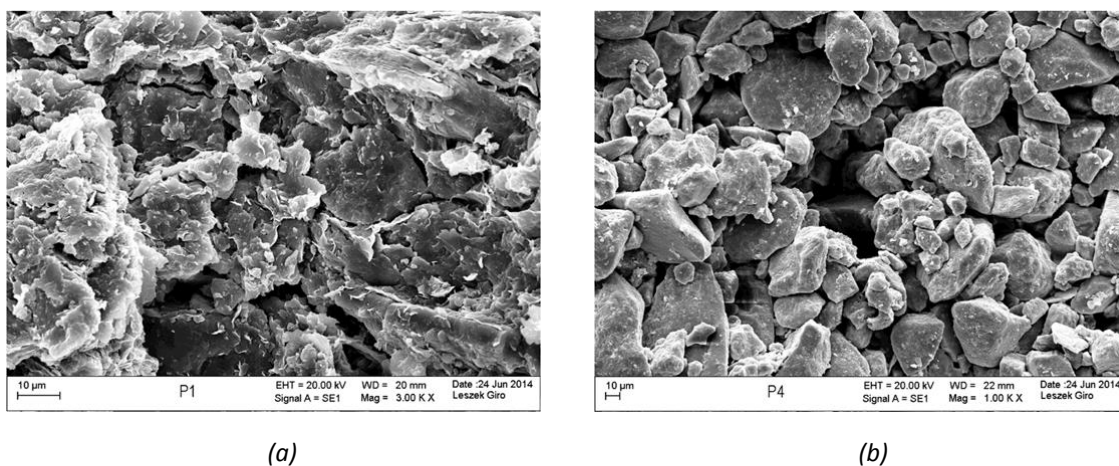


Figura 1.01. Imagen obtenida mediante microscopio electrónico de barrido de muestras de suelo del sur de Wrocław (Polonia) (Strozyk, 2017). (a) Una arcilla limosa de Poznań del Mioplioceno expansiva, saturada y muy sobreconsolidada. (b) Un limo arcilloso del Pleistoceno cementado, parcialmente saturado, con una importante fracción arenosa y sobreconsolidado.

Parece evidente, desde un punto de vista geotécnico, que la complejidad inherente a los suelos debe trasladarse necesariamente a las teorías que tratan de reproducir su comportamiento, entendido como la respuesta de estos ante acciones de diferente naturaleza. Es precisamente en el núcleo de estas teorías donde encontramos la modelación constitutiva de suelos, la cual se plantea, habitualmente y dadas las ventajas que ello proporciona, desde el marco teórico de los medios continuos, a pesar de la evidente naturaleza discontinua de estos materiales. Aunque hoy en día existen técnicas de cálculo

numérico capaces de considerar dicha discontinuidad constitutiva en problemas de contorno reducidos, por ejemplo, en ensayos numéricos, la capacidad de cálculo computacional actual invalida su uso en los problemas de contorno que deben resolverse en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica.

La mayoría de las obras en ingeniería civil requieren conexiones y vinculaciones con la superficie terrestre, las cuales deben ser diseñadas y dimensionadas de forma adecuada. Por diseño y dimensionamiento adecuados se entienden aquellos en base a los cuales los elementos de la obra, además de cumplir los condicionantes estéticos y funcionales iniciales, cumplen dos premisas básicas que son: (1) la capacidad de resistir aquellas acciones que con mayor o menor probabilidad deberán soportar a lo largo de su vida útil y (2) mantener durante dicho periodo de tiempo la estética y funcionalidad que les son propias. En este sentido, el nacimiento y desarrollo de la Geotecnia como ciencia durante el s.XX ha permitido dar respuestas a dichas premisas, en parte o totalidad, a través de diferentes soluciones y sistemas constructivos. Y si bien hoy en día se siguen utilizando, aunque de forma limitada, formulaciones analíticas y semiempíricas con este propósito, la recurrente complejidad litológica e hidrogeológica del subsuelo, la geometría de los elementos involucrados en los problemas a resolver, la variedad de acciones a considerar o la necesidad de recurrir a modelos constitutivos avanzados, han convertido los modelos numéricos en una herramienta fundamental tanto en la práctica profesional como en las actividades de investigación. Concretamente, la primera premisa mencionada ha condicionado profundamente la evolución de la Geotecnia, en lo que a modelación constitutiva se refiere, hasta los años 70 del s.XX, centrándose las principales investigaciones de esta ciencia en el desarrollo de las conocidas teorías de fluencia plástica aplicadas a suelos, y quedando la segunda premisa relegada a un plano secundario siendo hasta entonces muy extendido el uso de la teoría de la elasticidad lineal para el cálculo de las deformaciones reversibles en el suelo, a pesar de ser ampliamente conocido el comportamiento no lineal del mismo.

Como se ha dicho, este escenario cambió en los años 70 y ello fue motivado por: (1) las nuevas exigencias de las obras en ambientes urbanos, (2) la aparición de estructuras especialmente sensibles, (3) los avances en las técnicas de instrumentación y (4) los avances en las herramientas de análisis numérico y en la capacidad de cálculo de los ordenadores, circunstancias que motivaron el desarrollo de nuevos marcos teóricos y modelos constitutivos que trataban de explicar el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, caracterizado por ser reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente. El objetivo de estos modelos era predecir de forma más fiable los movimientos en el terreno generados por las diversas actuaciones que tienen lugar en el mismo. Por otro lado, desde un punto de vista conceptual, este nuevo paradigma supuso un nexo entre las teorías de dinámica y estática de suelos.

Al igual que en la temprana edad de otras ciencias, un mal del que ha adolecido la Geotecnia es la aparición de numerosos modelos constitutivos cuyo ámbito de aplicación es limitado, reduciéndose en ocasiones a la predicción del comportamiento de un material o grupo de materiales situados en el subsuelo de determinados emplazamientos, o a la predicción del comportamiento de uno o varios materiales en particular bajo ciertas condiciones de drenaje y de contorno. Los modelos constitutivos que tratan de reproducir el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones no han sido una excepción, existiendo de muy diversas tipologías y con un mayor o menor nivel de compatibilidad con los modelos de fluencia plástica, compatibilidad que se considera fundamental si se pretende disponer de modelos avanzados del suelo. No obstante, a menudo dichos modelos avanzados resultan de tal nivel de complejidad conceptual, necesidades computacionales y requisitos paramétricos

que precisan de complejos ensayos experimentales, que su uso se ha limitado al ámbito académico y, en ocasiones, a la resolución de problemáticas muy concretas. A lo anterior se suma un hándicap habitual en Geotecnia, que es el oscurantismo de los modelos numéricos avanzados implementados en programas comerciales de los cuales no se proporcionan versiones libres de su código, lo cual dificulta su contraste y validación.

Es posible afirmar que, hoy en día, prácticamente el único modelo que tiene en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones además de disponer de una formulación plástica avanzada, y que es ampliamente utilizado tanto en la práctica profesional como en el ámbito académico, es el modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis, basado en el modelo *Hardening Soil Small (HS-S)*, recientemente implementado en otros programas numéricos. El extendido uso del modelo *HS-SS* se debe, probablemente, a su claridad conceptual, al hecho de requerir únicamente dos parámetros adicionales respecto al modelo *Hardening Soil (HS)*, los cuales, además, son relativamente sencillos de estimar u obtener experimentalmente, y a su reducido coste computacional.

No obstante, y a pesar de las grandes ventajas que aporta el modelo *HS-SS*, este muestra ciertas limitaciones conceptuales en relación con: (1) el tratamiento del comportamiento no lineal en tensiones y deformaciones, (2) el comportamiento histerético, (3) el efecto de las reversiones de las deformaciones desviadoras sobre el módulo volumétrico elástico y (4) la consideración de la anisotropía inducida en deformaciones. Asimismo, el modelo *HS-SS* presenta ciertas inconsistencias numéricas en determinados tipos de cálculos, las cuales no son resolubles sin la definición de nuevas variables de estado y la introducción de ciclos iterativos adicionales en su algoritmo. Dichas inconsistencias pueden llegar a tener efectos significativos en las simulaciones de problemas de contorno, dado su carácter acumulativo.

Las mejoras en la potencia de cálculo de los ordenadores permiten, actualmente, implementar aspectos teóricos en los modelos constitutivos de suelos cuya consideración no era viable hace unos años. Este avance tecnológico ha sido determinante en el desarrollo del modelo constitutivo que se realiza en esta tesis.

1.2. Objetivos

Los objetivos que persigue esta tesis son los siguientes:

- 1) Analizar y resumir algunas de las características más importantes del comportamiento mecánico del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.
- 2) Estudiar e identificar elementos comunes y distintivos de los principales marcos teóricos y modelos constitutivos que permiten aproximar el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, con objeto de establecer criterios de clasificación generales y específicos de los mismos.

- 3) Describir, analizar y clasificar los principales modelos constitutivos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones en base a los criterios establecidos.
- 4) Desarrollar la formulación teórica de un nuevo modelo constitutivo elastoplástico avanzado (*Elastoplastic Hysteretic Small Strain, EPHYSS*), que:
 - a) Tenga en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.
 - b) Mejore la aproximación al comportamiento del suelo que proporciona el modelo *HS-SS* implementando en el programa geotécnico Plaxis en relación con:
 - i) El comportamiento no lineal en tensiones y deformaciones.
 - ii) El comportamiento histerético.
 - iii) El efecto de las reversiones de las deformaciones desviadoras sobre el módulo volumétrico elástico.
 - iv) La consideración de la anisotropía inducida en deformaciones.
 - c) Resuelva las inconsistencias numéricas del modelo *HS-SS*.
 - d) Sea fácilmente compatible con formulaciones plásticas habituales.
 - e) Requiera un reducido número de parámetros, que además tengan un significado físico claro y que su obtención o estimación sea viable en la práctica habitual de la ingeniería geotécnica.
 - f) Tenga un coste computacional razonable para un uso profesional.
 - g) Pueda utilizarse en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica.
- 5) Escribir el código numérico completo del modelo constitutivo *Hardening Soil (HS)* en FORTRAN, a partir de la formulación de la integración local de sus ecuaciones constitutivas, para su implementación en el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)* de Plaxis. A pesar de que el modelo *HS* se encuentra predefinido en Plaxis, es fundamental la consecución de este objetivo tanto por la necesidad de disponer de un código numérico del modelo *HS* para la posterior implementación numérica de la parte plástica del modelo *EPHYSS*, como por el carácter pedagógico del mismo, dada la inexistencia de documentación al respecto.
- 6) Escribir el código numérico completo del modelo constitutivo *EPHYSS* en FORTRAN, a partir de la formulación de la integración local de sus ecuaciones constitutivas, para su implementación en el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)* de Plaxis.
- 7) Verificar el modelo constitutivo *EPHYSS* y validarlo con ensayos de laboratorio, ensayos numéricos y problemas de contorno reales, además de comparar los resultados obtenidos con el mismo con los resultados obtenidos con el modelo *HS-SS* y otros modelos avanzados.

1.3. Estructuración de la tesis

La tesis se estructura de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se describe la motivación que ha dado lugar a este trabajo, los objetivos que se persiguen con el mismo, su estructuración y las publicaciones previstas.

En el capítulo 2 se describe el estado de la cuestión relativo al comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones y a su modelación constitutiva. Dicho capítulo empieza describiendo, en el apartado 2.1, la naturaleza cinemática de la rigidez del suelo en todo su rango de deformaciones. En el apartado 2.2 se justifica la necesidad de utilizar modelos constitutivos que tengan en cuenta el comportamiento del suelo a pequeñas deformaciones en problemas de ingeniería, se resume la evolución de las principales contribuciones en este ámbito, se indican los ensayos para la obtención de los parámetros del suelo que lo caracterizan en este nivel de deformación y se muestran ejemplos que ponen de manifiesto las ventajas de utilizar estos modelos constitutivos. En el apartado 2.3 se describe brevemente, desde un enfoque micromecánico, el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. En el apartado 2.4 se describe la importancia de considerar la anisotropía inherente e inducida en los modelos constitutivos. En el apartado 2.5 se detallan aspectos fundamentales del comportamiento del suelo a pequeñas deformaciones, describiendo: (1) los factores de los que depende la rigidez volumétrica y de corte del suelo y (2) los elementos constitutivos que caracterizan el comportamiento histerético del suelo y su dependencia con la historia reciente, estableciendo, en base a los mismos, un criterio de clasificación específico. Finalmente, en el apartado 2.6, se profundiza en conceptos de modelación constitutiva del suelo y se expone un potente método general de clasificación de modelos basado en el concepto de zonas tensoriales que se utiliza, junto con el criterio específico establecido en el apartado 2.5, para clasificar los principales modelos constitutivos del suelo que tienen en cuenta su comportamiento en el rango de las pequeñas deformaciones. De estos modelos se proporciona su formulación fundamental (profundizando en los aspectos que permiten reproducir el comportamiento del suelo a pequeñas deformaciones), ámbito de aplicación y ventajas e inconvenientes. Se ha tratado de dar un carácter pedagógico a este capítulo, especialmente en lo relativo al establecimiento de criterios de clasificación de modelos, puesto que, a pesar de la abundante información existente, esta suele proporcionarse de forma aislada e inconexa.

En el capítulo 3 se desarrolla el modelo constitutivo *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)* que permite reproducir el comportamiento reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. En el apartado 3.1 se expone el marco teórico utilizado. En el apartado 3.2 se presentan los dominios de deformación del modelo. En los apartados 3.3 y 3.4 se presentan las ecuaciones constitutivas en los dos dominios de deformación considerados. En el apartado 3.5 se detallan aspectos relacionados con el tratamiento del coeficiente de Poisson en el modelo. En el apartado 3.6 se explica y detalla la formulación de las variables de estado que considera el modelo. Finalmente, en el apartado 3.7 se explicita la formulación que permite al modelo reproducir el comportamiento histerético y dependiente de la historia reciente del suelo en base a los criterios establecidos en el capítulo 2.

En el capítulo 4 se detalla la formulación e implementación numérica del modelo *HS*. En el apartado 4.1 se explica y detalla la formulación del modelo *HS*, teniendo en cuenta sus diferentes versiones en el

programa geotécnico Plaxis. En el apartado 4.2 se detalla la integración local de las ecuaciones del modelo *HS*. En el apartado 4.3 se explica la estrategia para la selección de las superficies de fluencia activas. En el apartado 4.4 se muestra la forma en la que se ha implementado el modelo *HS* en el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)* de Plaxis, incluyendo detalles sobre la compilación de las subrutinas y la metodología utilizada para la depuración del código. Finalmente, en el apartado 4.5 se ha realizado una validación del modelo *HS* implementado a través de ensayos numéricos en los que se han comparado los resultados proporcionados por este con los resultados obtenidos con el modelo *Hardening Soil* predefinido en Plaxis, teniendo en cuenta las diferentes versiones existentes.

En el capítulo 5, y concretamente en los apartados 5.1 y 5.2 del mismo, se expone el desarrollo teórico del modelo *EPHYSS* como resultado de la unión del modelo *HQH* desarrollado en el capítulo 3 y el modelo *Hardening Soil Modified (HS_{MOD})* que resulta de incorporar, al modelo *HS* descrito en el capítulo 4, un conjunto de modificaciones que afectan sus leyes de endurecimiento y criterio de dilatación, dando lugar a un modelo equivalente al que describe la parte plástica del modelo *HS-SS* predefinido en Plaxis. De esta forma se logra que el modelo *EPHYSS* y *HS-SS* sean fácilmente comparables. En el apartado 5.3 se enumeran y explican los parámetros del suelo requeridos en el modelo *EPHYSS* y la forma de obtenerlos, así como expresiones para su estimación a partir de los parámetros del modelo *HS-SS*. En el apartado 5.4 se detalla la implementación numérica del modelo *EPHYSS*. Finalmente, en el apartado 5.5 se comentan aspectos relativos al coste computacional de dicho modelo.

En el capítulo 6 se realiza una verificación parcial y una validación del modelo *EPHYSS* a partir de los resultados de ensayos de laboratorio y ensayos numéricos recopilados de diversas tesis y artículos. Para ello se han realizado simulaciones numéricas de cada ensayo con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* y se han comparado entre sí y con los resultados experimentales. En el apartado 6.1 se proporcionan los parámetros utilizados en las simulaciones. En los apartados 6.2, 6.3 y 6.4 se realiza la verificación parcial y la validación del modelo *EPHYSS* con ensayos de laboratorio triaxiales, edométricos y biaxiales, respectivamente. Asimismo, en el apartado 6.4 se realiza la verificación parcial y la validación del modelo *EPHYSS* con ensayos biaxiales numéricos en los que se incluyen los resultados de un modelo hipoplástico con deformación intergranular y de un modelo multilaminado para pequeñas deformaciones. Finalmente, en el apartado 6.5 se han realizado y comparado simulaciones numéricas con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para estudiar las inconsistencias detectadas en el modelo *HS-SS* y mostrar como las resuelve el modelo *EPHYSS*.

En el capítulo 7 se realiza la validación del modelo *EPHYSS* con problemas de contorno de obras ejecutadas en las que se ha realizado algún tipo de auscultación, así como una comparación de los resultados que proporcionan los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*. Se han analizado diferentes tipologías de problemas de contorno con objeto de dar una visión amplia de las mejoras y de los elementos distintivos del modelo *EPHYSS* respecto al modelo *HS-SS*. En el apartado 7.1 se explica cómo realizar, en el modelo *EPHYSS*, el reseteo de la historia de deformaciones en el suelo tras la aplicación de las cargas preexistentes en el terreno. En el apartado 7.2 se indica cómo tratar los materiales sobreconsolidados con el modelo *EPHYSS*. En el apartado 7.3 se analiza un túnel excavado con el Nuevo Método Austríaco. En el apartado 7.4 se analiza un túnel excavado con tuneladora, concretamente con escudo de bentonita. En el apartado 7.5 se analiza una excavación profunda entre pantallas con tres líneas de anclajes. En el apartado 7.6 se analiza una excavación profunda entre pantallas de pilotes apuntaladas. Finalmente, en el apartado 7.7 se analiza un ensayo sobre una zapata experimental.

En el capítulo 8 se analiza una gran excavación urbana en Barcelona, dentro del proyecto de la futura estación intermodal de La Sagrera. En las simulaciones numéricas realizadas se utilizan los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, y se comparan los resultados obtenidos de ambos modelos entre ellos y con las medidas tomadas mediante extensómetros instalados en la obra. En el apartado 8.1 se proporcionan datos básicos sobre el proyecto de la futura estación y sobre la evolución de la excavación. En el apartado 8.2 se describe la geología e hidrogeología del ámbito de estudio. En el apartado 8.3 se indican las unidades geotécnicas consideradas en el subsuelo del vaso de excavación. En el apartado 8.4 se detallan los ensayos de campo y laboratorio realizados, así como los parámetros del suelo obtenidos. En dicho apartado se describe en detalle el proceso de realización de 20 ensayos de columna resonante para la obtención de los parámetros del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, los cuales se han hecho, con motivo de la presente investigación, sobre muestras cilíndricas talladas a partir de muestras bloque de alta calidad extraídas de diferentes unidades geotécnicas de la excavación. En el apartado 8.5 se proporcionan los parámetros del modelo *EPHYSS* y *HS-SS* utilizados en las simulaciones. En el apartado 8.6 se seleccionan las fases de excavación utilizadas en las simulaciones a partir de los análisis de las medidas tomadas con los cuatro extensómetros instalados en la obra y de los perfiles topográficos de la superficie del terreno durante el avance de la excavación. En el apartado 8.7 se describen los modelos numéricos utilizados y se detallan los tipos de análisis realizados. Finalmente, en el apartado 8.8 se comentan los resultados obtenidos.

En el capítulo 9 se resumen los principales puntos tratados en cada capítulo y se resumen las conclusiones que dan respuesta a los objetivos de la tesis planteados en el apartado 1.2 del presente capítulo. Asimismo, se proponen futuras líneas de investigación.

En el anejo 1 se adjunta el código en FORTRAN del algoritmo iterativo que permite calcular los parámetros internos de los modelos constitutivos *HS* y *EPHYSS*, tanto para sus implementaciones en Plaxis 2D v9 como en Plaxis 2D 2015 (compatible con Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores).

En el anejo 2 se detalla la formulación de las superficies de fluencia y potenciales plásticos del modelo *HS*, así como de sus derivadas.

En el anejo 3 se adjunta el código en FORTRAN de los modelos constitutivos *HS* y *EPHYSS*, tanto para sus implementaciones en Plaxis 2D v9 como en Plaxis 2D 2015 (compatible con Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores).

En el anejo 4 se adjunta el documento previo, redactado en inglés, al Artículo de investigación 1, en fase de desarrollo, descrito en el apartado 1.4 del presente capítulo.

En el anejo 5 se adjunta el documento previo, redactado en inglés, al Artículo de investigación 2, en fase de desarrollo, descrito en el apartado 1.4 del presente capítulo.

En el anejo 6 se adjunta el documento previo, redactado en inglés, al Artículo de investigación 3, en fase de desarrollo, descrito en el apartado 1.4 del presente capítulo.

1.4. Publicaciones

Actualmente se está trabajando en la redacción de tres artículos de investigación:

- Artículo 1: El primer artículo se basa en el documento previo "*Small strains in soil constitutive modeling. State of the art.*" que se adjunta en el anejo 4 y resume el estado de la cuestión de la modelación de suelos en el rango de las pequeñas deformaciones (capítulo 2), destacando especialmente los criterios y sistemas de clasificación utilizados e incorporando el modelo *EPHYSS*.
- Artículo 2: El segundo artículo se basa en el documento previo "*Development of a new soil constitutive model for small strains. The EPHYSS model.*" que se adjunta en el anejo 5 y resume el desarrollo teórico y numérico del modelo *EPHYSS* (capítulos 3, 4 y 5), su verificación parcial, su validación a partir de ensayos de laboratorio y de ensayos numéricos, y una comparativa con el modelo *HS-SS* (capítulo 6). Asimismo, se demuestra cómo el modelo *EPHYSS* es capaz de corregir las inconsistencias detectadas en el modelo *HS-SS* (capítulo 6).
- Artículo 3: El tercer artículo se basa en el documento previo "*Application of the EPHYSS model in different boundary value problems and comparative analysis with the HS-SS model of Plaxis.*" que se adjunta en el anejo 6 y resume la validación del modelo *EPHYSS* y un análisis comparativo con el modelo *HS-SS*, a partir de diferentes problemas de contorno extraídos de la literatura, incluyendo dos túneles, dos excavaciones profundas y una cimentación superficial (capítulo 7), así como su aplicación al estudio de la gran excavación urbana en La Sagrera, en Barcelona (capítulo 8).

Capítulo 2

Estado de la cuestión

El presente capítulo tiene por objeto resumir las principales características del comportamiento mecánico del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, así como hacer un recorrido por los diferentes marcos teóricos que han permitido reproducir numéricamente dicho comportamiento, destacando, en cada uno de ellos, los principales modelos constitutivos existentes, con sus ventajas e inconvenientes.

Los suelos forman sistemas polifásicos constituidos por partículas sólidas, líquidos, gases y subsistemas biológicos. Aunque en esencia sean medios discontinuos, tradicionalmente han sido tratados, desde un punto de vista teórico, constitutivo y numérico, como medios continuos. Hoy en día existen técnicas de cálculo numérico capaces de considerar la naturaleza discontinua de los suelos en problemas de contorno reducidos, no obstante, dadas sus limitaciones, estas suelen reservarse generalmente a un ámbito académico. Por ello, y para alcanzar los objetivos que se proponen en el presente trabajo, se considerará al suelo como un medio continuo, si bien se tendrán en cuenta características relevantes atribuibles a su naturaleza discontinua.

El criterio de signos utilizado en las expresiones del presente capítulo es el de tracciones negativas y compresiones positivas, incluida la presión del agua (contrario al criterio utilizado en Plaxis y en los siguientes capítulos). Asimismo, en todo momento se considera el marco teórico de las pequeñas deformaciones ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

2.1. Naturaleza cinemática de la rigidez del suelo

Según Clayton (2011), la rigidez de un cuerpo, entendida como su resistencia a deformarse cuando se le somete a una fuerza, depende de la forma del mismo, sus condiciones de contorno y la rigidez de los materiales que lo constituyen.

A partir de los experimentos realizados por Hardin y Drnevich (1972), Simpson et al. (1979), Jardine (1985) y Smith et al. (1992), Jardine (1992) desarrolló la idea previamente enunciada por Skinner (1975) y apoyada por un gran número de investigadores, para explicar el comportamiento de la rigidez de un suelo en función del rango de tensión y deformación en el que este se encuentre, en el marco de las

teorías de las *Kynematic Yield Surfaces* (KYS) y de la plasticidad. Jardine (1992) diferenció cuatro zonas alrededor de cualquier punto en el espacio de tensiones, que se desplazan y cambian de forma en función de las trayectorias de tensiones seguidas. En cada una de estas zonas, Jardine identificó un comportamiento característico del suelo, que relacionó con la naturaleza de las deformaciones que tienen lugar en ella (figura 2.01 y 2.02).

Zona I: Limitada exteriormente por Y_1 (figura 2.01a), el comportamiento del suelo en esta zona es reversible lineal (Hardin y Blandford, 1989; Burland, 1989; Jardine, 1992; Vucetic, 1994; Shibuya y Mitachi, 1994; Jamiolkowski et al., 1995; Shibuya et al., 1996; Clayton y Heymann, 2001; Santagata et al., 2005).

Algunos investigadores, como Clayton (2011), indican que un comportamiento puramente elástico lineal del suelo no se da en ningún rango de deformaciones, si bien esta se trata de una aproximación suficiente y adecuada desde un punto de vista práctico.

Asimismo, Hueckel y Nova (1979) afirman que las deformaciones irreversibles en el suelo ocurren en todo proceso de carga noval.

La Zona I de Jardine puede ser muy pequeña (Tatsuoka et al., 1990; Bressani, 1990 y Smith, 1992), especialmente en suelos no cementados y normalmente consolidados (Bowden y Tabor, 1964; Johnson, 1985).

Zona II: Limitada interiormente por Y_1 y exteriormente por Y_2 (figura 2.01a), el comportamiento del suelo en esta zona es reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente (Simpson et al., 1979; Hueckel y Nova, 1979; Jardine, 1985, 1992, 1995; Richardson, 1988; Burland, 1989; Atkinson et al., 1990; Simpson, 1992; Vucetic, 1994; Atkinson, 2000; Clayton y Heymann, 2001; Viggiani, 2005; Gasparre et al., 2007)

Zona III: Limitada interiormente por Y_2 y exteriormente por Y_3 (figura 2.01a), el comportamiento del suelo en esta zona muestra un primer grado de irreversibilidad (deformaciones plásticas), que depende del índice de sobreconsolidación del suelo OCR (Jardine, 1992; Mitchell y Soga, 2005), donde $OCR = \sigma'_{v,max}/\sigma'_v$, siendo $\sigma'_{v,max}$ la máxima tensión vertical efectiva histórica y σ'_v la tensión vertical efectiva actual.

Como se puede ver en la figura 2.01b, si $OCR > 1$, las deformaciones plásticas tienden a incrementar linealmente con la deformación en esta zona, mientras que si $OCR = 1$, tienden a hacerlo de forma no lineal con la deformación.

Zona IV: Limitada interiormente por Y_3 (figura 2.01a), el comportamiento del suelo en esta zona muestra un elevado grado de irreversibilidad (Jardine, 1992; Mitchell y Soga, 2005).

Las deformaciones plásticas en esta zona incrementan siempre de forma no lineal con la deformación (figura 2.01b).

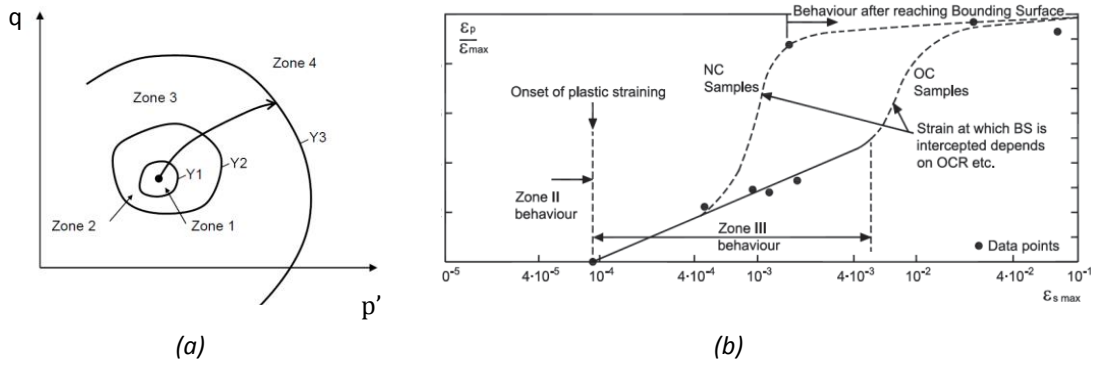


Figura 2.01. (a) Zonas 1-4 (I-IV) en el espacio de tensiones. (b) Deformaciones plásticas axiales (ϵ_p) normalizadas por la deformación total axial máxima (ϵ_{max}) vs. deformación total (elástica y plástica) de corte ($\epsilon_{s,max}$). Jardine (1992).

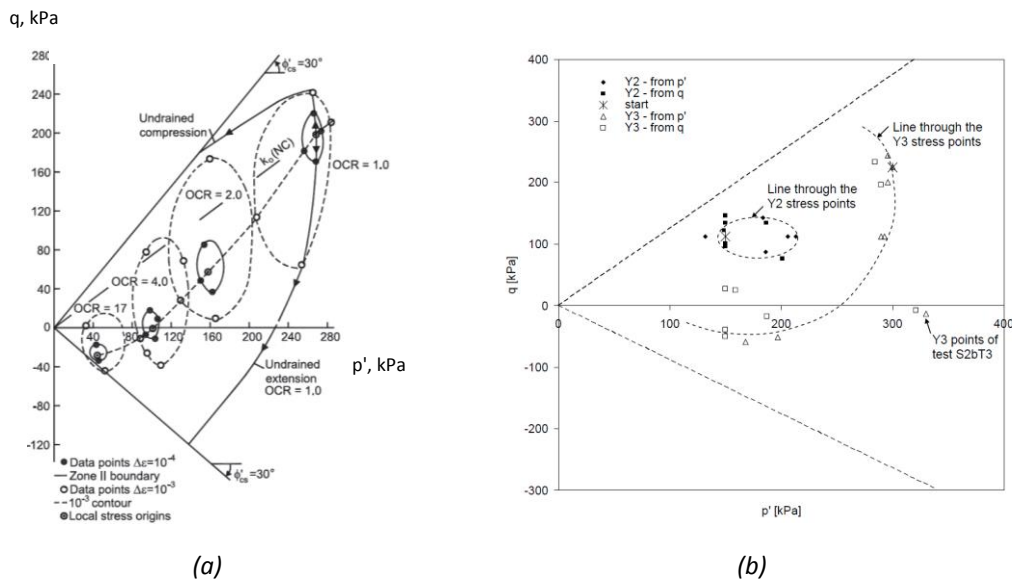


Figura 2.02. (a) Zonas 1-4 (I-IV) para puntos situados sobre la recta K_0 en descarga (Jardine, 1992). (b) Zonas 2-4 (II-IV) en ensayos triaxiales en una arcilla lacustre (Messerklinger, 2006).

2.2. El rango de las pequeñas deformaciones en problemas de ingeniería

Tal como indica Clayton (2011), la aplicación de la mecánica de suelos a los nuevos problemas que enfrentaban los ingenieros civiles a inicios del s.XX se centraba en la prevención del colapso, lo cual parece lógico dados los antecedentes del s.XIX, en el que pocos ingenieros realizaban análisis de sus diseños antes de empezar la construcción de los mismos debido a la falta de información en la cual basar dichos diseños (Bell, 1989). No obstante, esta concepción cambió en los años 70, siendo algunos de los motivos que impulsaron este cambio los siguientes (Clayton, 2011):

- Un buen conocimiento de la mayoría de mecanismos de falla en el terreno.
- La necesidad de construir nuevas estructuras en áreas urbanas consolidadas y de calcular los desplazamientos inducidos por las mismas en el terreno, con objeto de conocer la afección que dichos desplazamientos pudieran tener sobre elementos próximos y actuar en consecuencia.
- La necesidad de construir estructuras especialmente sensibles, como plantas nucleares.
- Los avances en las herramientas de análisis numérico y en la capacidad de cálculo de los ordenadores (Zienkiewicz et al., 1968; Simpson, 1981; Britto y Gunn, 1987; Potts, 2003).

Tal como indica Jardine et al. (1991), durante los años 70 se observó cómo las rigideces del suelo obtenidas en ensayos de laboratorio convencionales no coincidían con las rigideces obtenidas en ensayos de campo, siendo habitual que las segundas fueran un orden de magnitud superior a las primeras. Asimismo, las rigideces obtenidas en campo se aproximaban a las obtenidas en ensayos de tipo dinámico, lo cual permitió unificar las diferentes teorías que, hasta el momento, trataban de explicar el valor del módulo de corte del suelo. Estos hechos pusieron en duda la utilidad de los ensayos convencionales para evaluar la rigidez del terreno (Cole y Burland, 1972; St. John, 1975; Burland et al., 1979; Simpson et al., 1979; Clayton et al., 1991). Posteriormente se demostró que estas diferencias en las rigideces provenían, entre otros, de deficiencias en las técnicas de medida de la deformación en los ensayos de laboratorio convencionales y también de la alteración de las muestras durante su proceso de extracción (Jardine et al., 1984). Asimismo, Burland (1989) pone de manifiesto cómo, durante los años posteriores, medidas de los desplazamientos del terreno en diversas obras de Londres, nuevas técnicas de instrumentación en ensayos de laboratorio y avances en las técnicas de análisis numérico, ayudaron a mejorar el entendimiento del comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, en el cual la rigidez juega un papel fundamental.

Estas averiguaciones promovieron el desarrollo de nuevas técnicas de instrumentación aplicadas a problemas geotécnicos de tipo cuasi-estático, puesto que algunas de ellas ya se utilizaban normalmente en el estudio de problemas de tipo dinámico. Elhakim (2005), Clayton (2011) y Cudny (2013) clasifican estas técnicas de la siguiente manera:

- Ensayos en campo de tipo dinámico (figura 2.03):
 - *Cross-hole* (p.ej.: Hoar y Stokoe, 1978).
 - *Down-hole* (p.ej.: Woods, 1978; Campanella et al., 1994; Clayton y Heyman, 1999).
 - Análisis espectral de ondas superficiales *SASW* (p.ej.: Rix y Leipski, 1991; Stokoe et al., 1994).
 - *Continuous Surface Wave System CSWS* (p.ej.: Matthews et al., 1996).
 - *Suspension logger* (p.ej.: Nigbor e Imai, 1994).
 - Cono sísmico *CPTU* (p.ej.: Robertson et al., 1986).
 - Dilatómetro sísmico *SDMT* (p.ej.: Hepton, 1988).
- Ensayos de laboratorio (figura 2.04):
 - *Columna resonante* (p.ej.: Hardin y Drnevich, 1972).
 - *Hollow cylinder* (p.ej.: Teachavorasinskun et al., 1991; Jamiolkowski et al., 1995).
 - *Bender elements* y dispositivos de medición de ondas sísmicas de compresión y corte (p.ej.: Shirley, 1978; Shirley y Hampton, 1978):

- En edómetros (p.ej.: Yun y Santamarina, 2005; Schultheiss, 1981; Dyvik y Olsen, 1989; Thomann y Hryciw, 1990; Jamiolkowski et al., 1995).
- En aparatos de corte simple (p.ej.: Dyvik y Olsen, 1989).
- En aparatos triaxiales (p.ej.: Schultheiss, 1981; Bates, 1989; Wichtmann, 2005).
- En columnas resonantes (p.ej.: Bennell et al., 1984; Dyvik y Madshus, 1985; Ferreira et al., 2006).
- En aparatos dobles de corte simple (p.ej.: Lanzo et al., 1997).
- En muestras no confinadas, inmediatamente tras su extracción (p.ej.: Hight et al., 2003; Landon et al., 2007).
- Aparatos triaxiales con medidas internas de la deformación (p.ej.: Jardine et al., 1984; Clayton y Heymann, 2001).

No obstante, a pesar de los refinamientos en las técnicas utilizadas en ensayos de laboratorio, los resultados que estos proporcionan siguen difiriendo de aquellos obtenidos en ensayos *in situ*. Clayton (2011) explica estas diferencias de la siguiente manera:

- Los ensayos de campo se aplican sobre grandes masas de terreno en estado natural, geoméricamente limitadas por el ámbito objeto de estudio y por el rango de profundidades analizables con cada método.
- Los ensayos de laboratorio se aplican sobre una pequeña muestra de suelo extraída del terreno. Dicha muestra puede alterarse durante el proceso de extracción o durante la realización del ensayo.

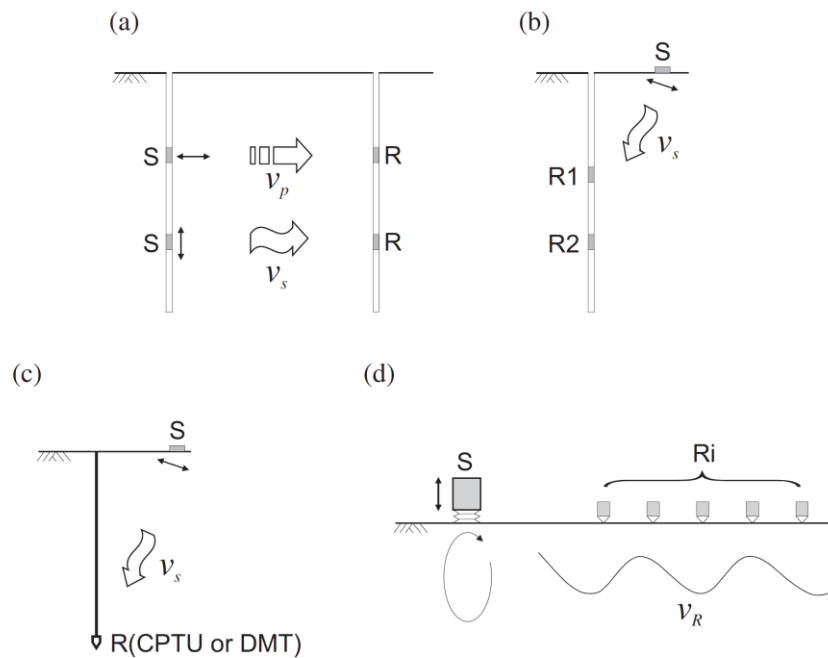


Figura 2.03. Ensayos de campo mediante técnicas geofísicas (Cudny, 2013). (a) Ensayo cross-hole. (b) Ensayo down-hole. (c) Cono sísmico CPTU o dilatómetro sísmico SDMT. (d) Medida continua de las ondas de superficie CSWS. Las fuentes de vibraciones se identifican con (S) y los geófonos receptores con (R).

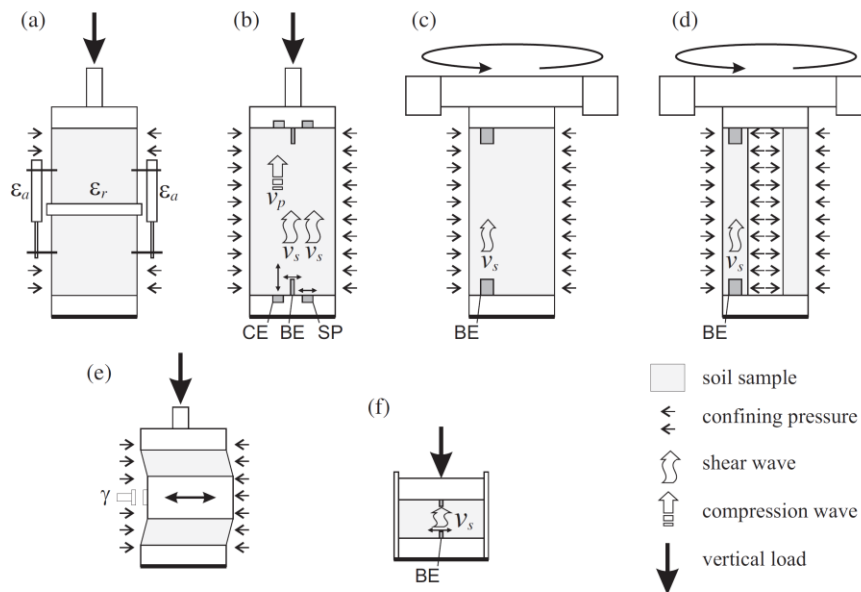


Figura 2.04. Esquemas de ensayos de laboratorio para la medida de la rigidez del suelo a pequeñas deformaciones (Cudny, 2013). (a) Aparato triaxial con medida local de los desplazamientos mediante transductores/LVDT. (b) Aparato triaxial con CE, SP y BE. (c) Columna resonante con BE. (d) Hollow cylinder con BE. (e) Aparato de doble corte simple con transductor. (f) Edómetro con BE. Se identifican como CE los elementos de medida de ondas sísmicas a compresión, como SP los elementos de medida de ondas sísmicas de corte y como BE los bender elements.

Asimismo, debe tenerse en cuenta que los ensayos de campo mencionados proporcionan valores de la rigidez únicamente a muy pequeñas deformaciones (módulos sísmicos), mientras que los ensayos de laboratorio pueden hacerlo para un mayor rango de deformaciones.

Jardine et al. (1986) demostraron que el comportamiento no lineal del suelo tiene un claro efecto en la interacción suelo-estructura, así como en la distribución de las tensiones y en el campo de desplazamientos del terreno. Por otro lado, Mair y Taylor (1993) demostraron que tener en cuenta la no linealidad elástica en el rango de las pequeñas deformaciones en modelos elastoplásticos mejora notablemente la aproximación de las presiones de agua generadas en el terreno respecto a las obtenidas con modelos que consideran la elasticidad lineal.

Actualmente, múltiples problemas de ingeniería, especialmente los relacionados con obras en ámbitos urbanos, requieren cálculos precisos de los desplazamientos del terreno. Generalmente, en este tipo de problemas sólo una pequeña parte del terreno se ve sometida a deformaciones intermedias o grandes, mientras que la mayor parte del mismo se ve sometido a pequeñas o muy pequeñas deformaciones. La extensión de las masas de suelo que experimentan pequeñas o muy pequeñas deformaciones suele ser tan grande, que su contribución a los desplazamientos del terreno normalmente es significativa. Cobra vital importancia, por tanto, simular correctamente el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, correspondiente a las Zonas I y II de Jardine (1992). Por otro lado, todo modelo constitutivo completo debe poder ser capaz de simular también el comportamiento del suelo en el rango de las deformaciones intermedias y grandes, próximas a rotura, correspondientes a las Zonas III y IV de Jardine.

Existen numerosos modelos constitutivos avanzados capaces de simular el comportamiento del suelo en todo el rango de deformaciones, si bien el uso de muchos de ellos se reduce a un ámbito académico. Según Tamagnini y Viggiani (2002), ello se debe a:

- Su complejo formalismo.
- El uso de un elevado número de parámetros difíciles de obtener experimentalmente.
- El uso de un elevado número de variables de estado difíciles de inicializar.
- Las dificultades asociadas con la formulación de algoritmos precisos, eficientes y robustos para la implementación numérica de las ecuaciones (si bien ha habido avances importantes durante los últimos años en relación con este punto).

Además, tal como indica Gudehus (2011), muchos de estos modelos no se encuentran implementados en programas comerciales ni tampoco se proporcionan versiones libres de sus respectivos códigos, dificultando aún más su contraste y validación.

Algunos de estos modelos avanzados, no obstante, sí han conseguido extenderse al ámbito de la ingeniería aplicada. Entre ellos destaca el conocido modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* implementado en el programa comercial para cálculos geotécnicos Plaxis, y basado en el modelo *Hardening Soil Small (HS-S)* de Benz (2007), recientemente implementado en otros programas numéricos, que a su vez se basa en el modelo *Small Strain Overlay Model (SSOM)* de Benz (2007) y en el modelo *Hardening Soil (HS)* de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999).

El uso tan extendido del modelo *HS-SS* posiblemente se deba a su claridad conceptual y al hecho de que se apoya en el conocido modelo plástico *HS*, también implementado en Plaxis utilizado habitualmente en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica. No obstante, no debe olvidarse que el modelo *HS-SS* es de un modelo elastoplástico avanzado que requiere de profundos conocimientos geotécnicos a nivel teórico, numérico y aplicado, para su correcto uso.

La necesidad de tener en cuenta el comportamiento del terreno en el rango de las pequeñas deformaciones queda clara en las siguientes simulaciones numéricas de algunos problemas habituales en geotecnia, en las que se han utilizado modelos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en dicho rango de deformaciones y otros modelos que no.

En las figuras 2.05, 2.06 y 2.07 se muestran medidas y simulaciones numéricas de los asentamientos del terreno durante la construcción de varios túneles urbanos (Gunn (1992) muestra la necesidad de considerar el efecto de la no linealidad constitutiva en el rango de las pequeñas deformaciones en las simulaciones de excavación de túneles con objeto de aproximar la cubeta de asentamientos en superficie).

En las figuras 2.08 y 2.09 se muestran medidas y simulaciones numéricas de los desplazamientos en el terreno generados durante excavaciones profundas entre pantallas en ámbitos urbanos.

En la figura 2.10 se muestran medidas y simulaciones numéricas de la curva carga-desplazamiento de una cimentación superficial experimental.

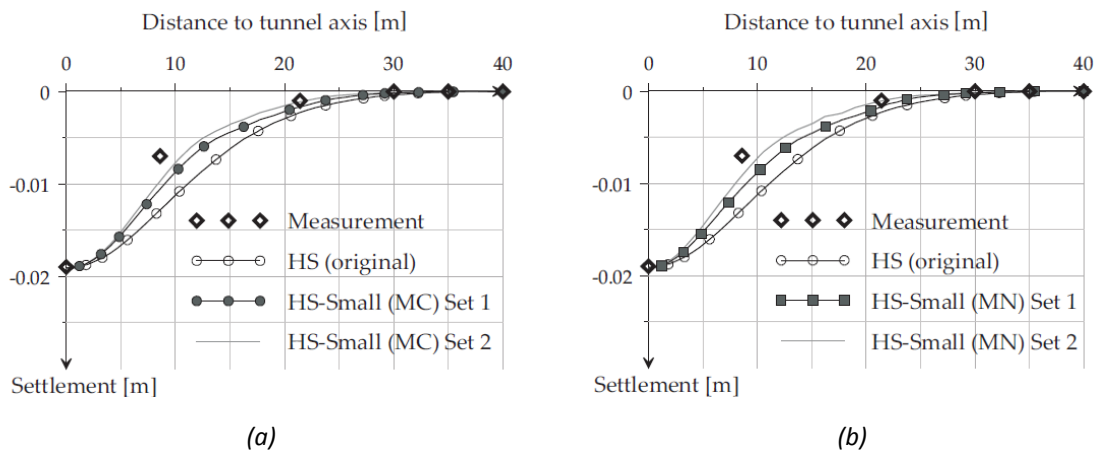


Figura 2.05. Asientos tras la construcción de un túnel en Steinhaldenfeld con el NATM y simulaciones numéricas (Benz, 2007). (a) Simulaciones con los modelos HS de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999) y HS-S con superficie límite de Mohr-Coulomb (HS-Small[MC]) de Benz (2007). (b) Simulaciones con los modelos HS y HS-S con superficie límite de Matsuoka-Nakai (HS-Small[MN]) de Benz (2007).

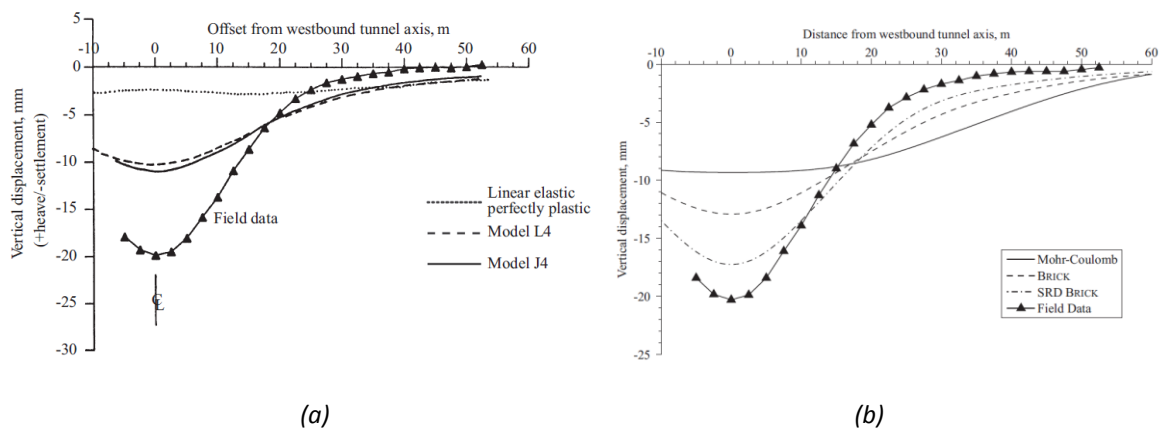


Figura 2.06. Asientos durante la construcción del túnel de St James's Park en Londres. (a) Simulaciones numéricas con un modelo elástico lineal con plasticidad perfecta y dos modelos no lineales isótropos, L4 (la curva de degradación de la rigidez sigue una función trigonométrica y la degradación de la rigidez volumétrica y de corte se da ya sea con la deformación volumétrica o con la deformación de corte) y J4 (la curva de degradación de la rigidez sigue una función logarítmica y la degradación de la rigidez volumétrica y de corte se da, respectivamente, con la deformación volumétrica y con la deformación de corte) (Addenbrooke et al., 1997). (b) Simulaciones numéricas con un modelo elástico lineal con plasticidad perfecta y dos modelos no lineales, Brick y SRD (Strain Rate Dependent)-Brick (Clarke, 2009).

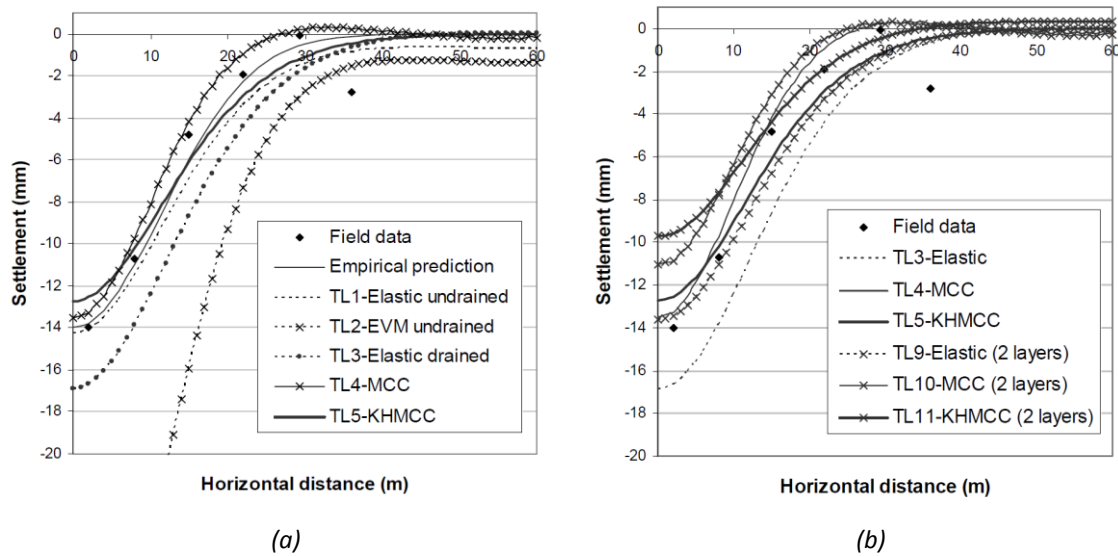


Figura 2.07. Asientos durante la construcción de un túnel dentro del proyecto del Metropolitan Rapid Transit Authority (MRTA) en Bangkok y simulaciones numéricas con diferentes modelos elásticos y elastoplásticos con elasticidad lineal (entre ellos, el modelo Cam Clay Modificado (MCC) de Roscoe y Burland (1968) que considera una rigidez volumétrica no lineal y una rigidez al corte lineal, y el modelo de Von Mises con elasticidad lineal (EVM)) y con elasticidad no lineal (modelo Cam Clay Modificado con hiperplasticidad y endurecimiento cinemático (KHMCC)) (Likitlersuang, 2003). (a) Simulación con suelo homogéneo. (b) Simulación con dos capas de suelo diferenciadas.

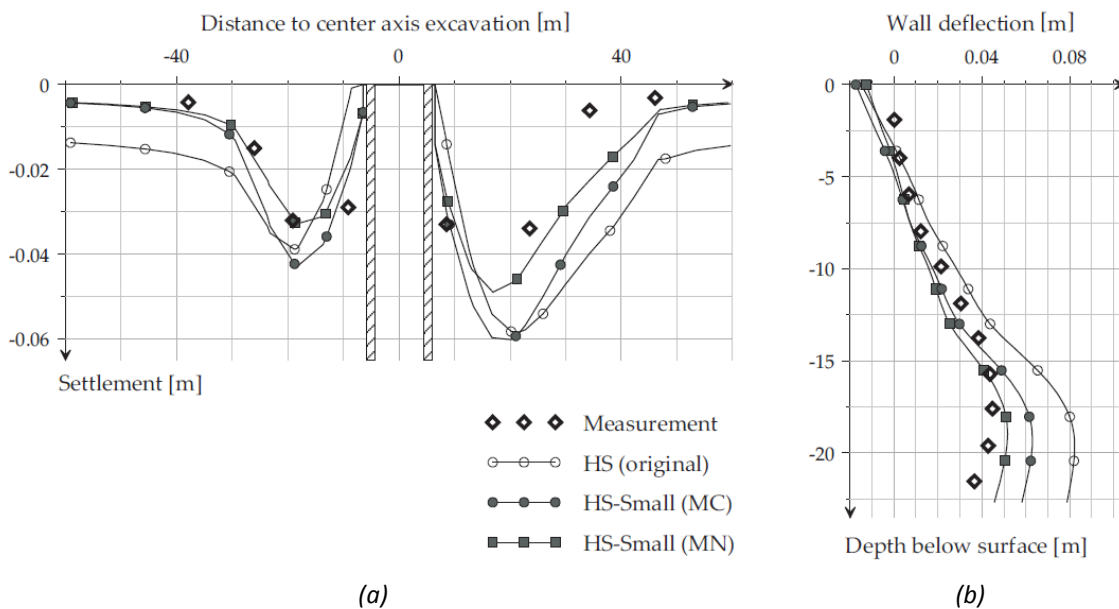
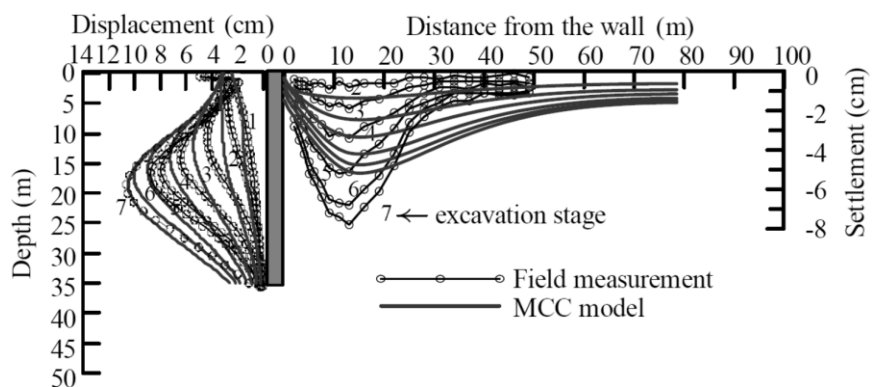
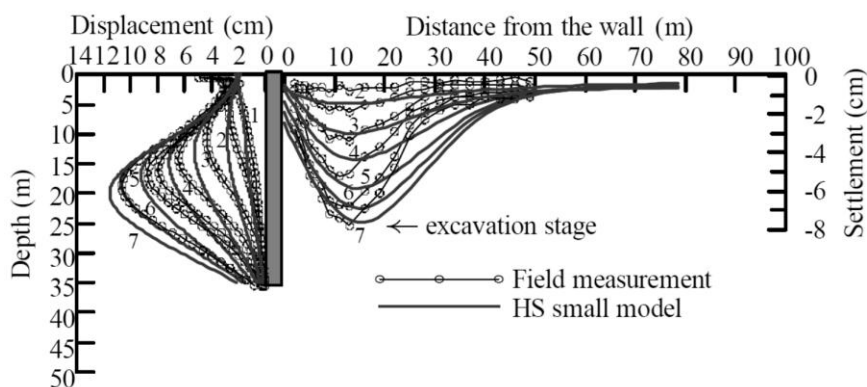


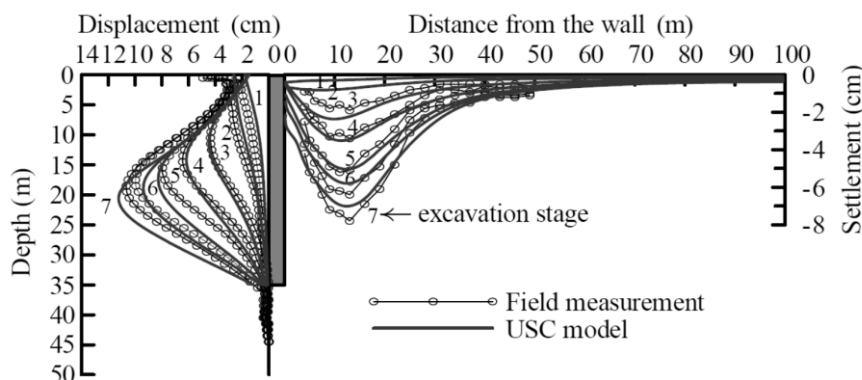
Figura 2.08. Movimientos en el terreno durante una excavación entre pantallas en una arcilla del Rupeliano y simulaciones numéricas con los modelos HS de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), HS-S con superficie límite de Mohr-Coulomb (HS-Small[MC]) de Benz (2007) y HS-S con superficie límite de Matsuoka-Nakai (HS-Small[MN]) de Benz (2007), Benz (2007). (a) Cubeta de asientos en el trasdós de las pantallas. (b) Desplazamientos horizontales de la pantalla izquierda.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.09. Movimientos en el terreno durante una excavación entre pantallas en el Taipei Enterprise Center (TNEC) (Aswin et al., 2010). (a) Simulaciones numéricas con el modelo Cam Clay modificado (MCC) de Roscoe y Burland (1968). (b) Simulaciones numéricas con el modelo HS-S (HS Small) de Benz (2007). (c) Simulaciones numéricas con el modelo USC (Undrained Soft Clay) de Hsieh et al. (2010).

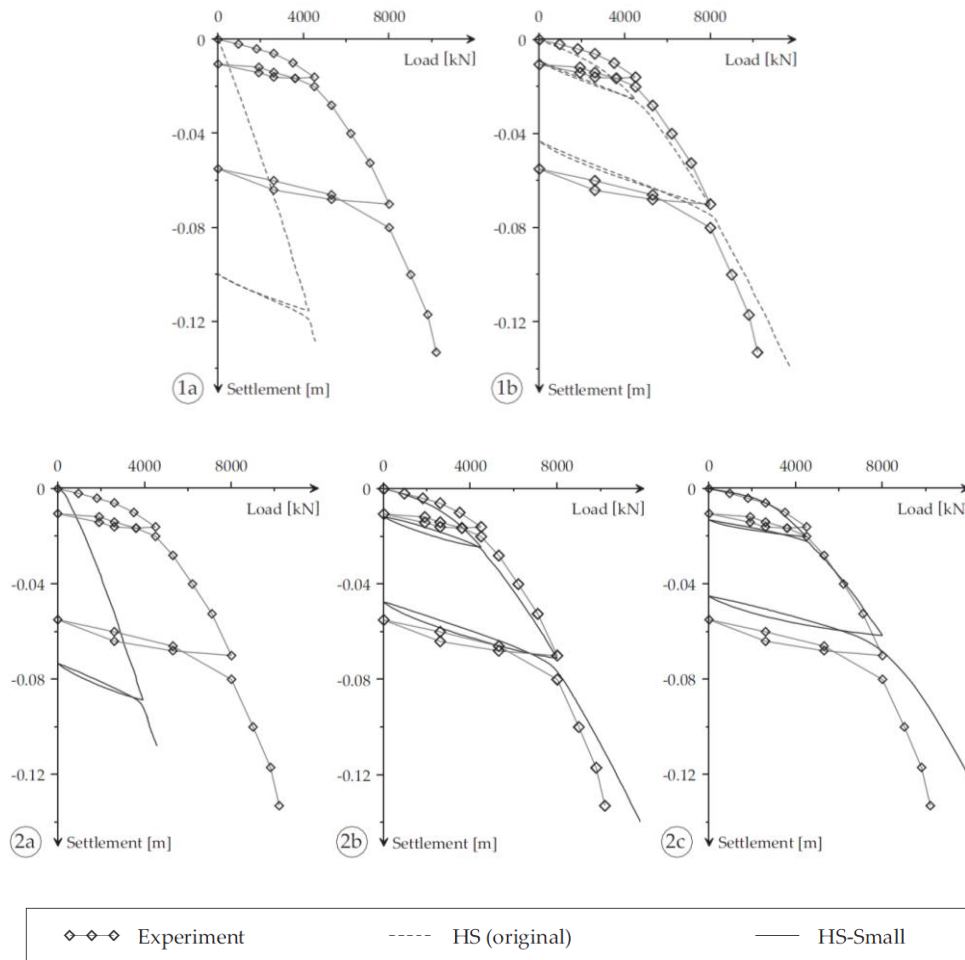


Figura 2.10. Curva carga-desplazamiento bajo una cimentación experimental de 3x3m sobre arenas, realizada por la Texas A&M University National Geotechnical Experimentation Site (NGES) (Benz, 2007).
 Arriba: modelo HS de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999) (1a: $OCR = 1$. 1b: $OCR > 1$).
 Abajo HS-S con superficie límite de Mohr-Coulomb (HS-Small[MC]) de Benz (2007)
 (2a: $OCR = 1$. 2b: $OCR > 1$. 2c: $OCR > 1$ y rigidez máxima de corte incrementada).

2.3. Consideraciones micromecánicas

Tal como apunta Benz (2007), el comportamiento mecánico del suelo debe explicarse a partir de la interacción de las diferentes fases que lo componen y de las acciones existentes. No obstante, la rigidez del terreno en el rango de las pequeñas deformaciones puede ser explicada, de forma suficiente y a nivel cualitativo, desde un punto de vista exclusivamente micromecánico.

Asumiendo como aproximación que la rigidez del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones depende únicamente de las fuerzas de contacto entre granos o agregaciones del suelo (Israelachvili, 1992), Benz (2007) explica que esta sólo puede variar con cambios en dichas fuerzas. Con una ley friccional entre partículas del tipo Coulomb, Benz explica la influencia de la amplitud de deformación sobre la rigidez de la siguiente manera:

- 1) Inicialmente existe un número de contactos J entre las partículas del suelo en un volumen representativo V . El tensor de rigidez global se puede calcular como $E_{ijkl} = (1/V) \sum_{c=1}^J l_i^c k_{jl}^c l_k^c$ donde l_i^c es la distancia entre el centro de la partícula i -ésima y el centro de la partícula con la que mantiene el contacto c -ésimo y $k_{jl}^c = k_n^c n_j^c n_l^c + k_s^c s_j^c s_l^c + k_t^c t_j^c t_l^c$ es el tensor de rigidez del contacto c -ésimo en el sistema global de coordenadas, siendo k_n^c , k_s^c y k_t^c las rigideces de las partículas en los contactos según las direcciones normal (\mathbf{n}^c) y tangenciales (\mathbf{s}^c y \mathbf{t}^c), respectivamente.
- 2) El valor de la amplitud de la deformación desviadora que mantiene en contacto a la mayoría de granos es la correspondiente a la Zona I descrita por Jardine (1992), donde el comportamiento del suelo se considera reversible lineal.
- 3) Un mayor valor de la amplitud de la deformación desviadora produce el deslizamiento de un determinado número de granos, lo cual, con la ley friccional supuesta, hace que el valor de los tensores de rigidez k_{jl}^c se reduzca, generando a su vez una reducción del valor del tensor de rigidez global E_{ijkl} . Este comportamiento se puede asociar a la Zona II de Jardine (1992), donde el comportamiento macromecánico del suelo es no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente. No obstante, tal como indica Cudny (2013), no está claro el mecanismo micromecánico a través del cual el suelo disipa energía durante ciclos de carga, aspecto fundamental en el comportamiento histerético del mismo.
- 4) Una reversión en la deformación llevaría el estado de los granos a la situación anterior, recuperando el valor inicial de los tensores k_{jl}^c y, por tanto, también el de E_{ijkl} .

En base a las anteriores consideraciones, Benz (2007) explica el efecto de un estado de carga isótropa y de un estado de carga desviadora sobre la rigidez del suelo (figura 2.11). Para ello, recurre a una simulación numérica 2D mediante *Discrete Element Method (DEM)*. En dicha simulación se asume, por un lado, que las partículas del suelo son rígidas e irrompibles y, por otro lado, una ley del tipo Hertz-Mindlin para los contactos entre partículas. Asimismo, la simulación considera una pequeña componente de cementación entre partículas cuyo objetivo es permitir analizar la evolución de los contactos. En las figuras 2.11a y 2.11b, las fuerzas de contacto entre partículas se representan con líneas de grosor proporcional a la fuerza y con dirección según la misma, y en las figuras 2.11c y 2.11d, los contactos inalterados entre partículas se representan con pequeñas líneas negras que se orientan tangencialmente a los contactos.

Como se puede ver, tras la fase de consolidación isótropa (figura 2.11a), una variación en la carga desviadora (figura 2.11b) genera cadenas de fuerzas preferenciales y altera significativamente el número de contactos (figura 2.11d), es decir, modifica la fábrica del suelo, lo cual da lugar a una notable reducción de la rigidez. Por otro lado, una variación en la carga isótropa genera un efecto de escala en las fuerzas de contacto (figura 2.11a) y mantiene prácticamente inalterado el número de contactos del ensamblado (figura 2.11c).

Según Tobita (1997), cualquier tipo de comportamiento micromecánico del suelo (deslizamiento, giro, deformación o rotura de las partículas o agregados), da lugar a un comportamiento macromecánico de tipo incremental no lineal, por lo que cualquier modelo constitutivo continuo del suelo debería ser capaz

de reproducir este tipo de comportamiento. Este y otros aspectos se discuten en el apartado 2.6 del presente capítulo.

Finalmente, tal como apunta Gudehus (2011), las variables de estado necesarias que permiten describir el comportamiento del suelo cuando tienen lugar reversiones representan la fluctuación espacial de las cadenas de fuerzas internas entre partículas del suelo (figuras 2.11a y 2.11b), efecto al cual Gudehus denomina fuerza-rozamiento (*force-roughness*).

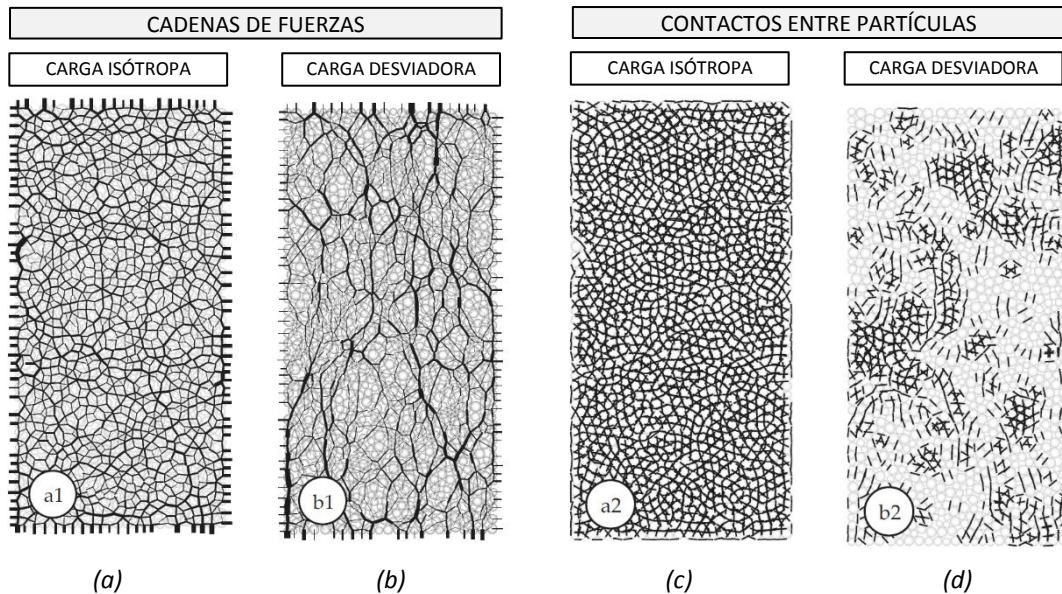


Figura 2.11. Ensayo 2D con Discrete Element Method (DEM) (Benz, 2007). (a) Distribución homogénea de las fuerzas en dirección y magnitud durante una carga isotrópica. (b) Distribución preferencial de fuerzas con formación de cadenas de contacto durante una carga desviadora. (c) Contactos prácticamente inalterados durante una carga isotrópica. (d) Numerosos contactos rotos durante una carga desviadora.

2.4. Anisotropía inherente y anisotropía inducida

Un material presenta anisotropía cuando sus propiedades mecánicas cambian según la orientación considerada. La mayoría de suelos naturales presentan anisotropía debido a sus procesos de formación. Tal como indica Minh (2006), la influencia de la anisotropía en el comportamiento del suelo empezó a cobrar importancia a partir de los años 70 (Bjerrum, 1973; Arthur et al., 1980; Saada y Townsend, 1981; Jamiolkowski et al., 1985) y desde entonces se han publicado múltiples investigaciones sobre la anisotropía en suelos basadas en ensayos experimentales (Saada y Puccini, 1987; Saada, 1988; Saada et al., 1993; Jardine et al., 1997; Tatsuoka et al., 1997; Jardine et al., 2001; Leroueil y Hight, 2003; Jardine et al., 2004). Cole y Burland (1972) demostraron que la anisotropía del suelo afecta de forma relevante a la rigidez del mismo

Siguiendo la definición de Casagrande y Carrillo (1944), suelen distinguirse dos componentes en la anisotropía de un material a pequeña escala: la anisotropía inherente y la anisotropía inducida. Según

Casagrande y Carrillo, la anisotropía inherente puede considerarse como una característica del suelo, independiente de las tensiones y deformaciones recientes, mientras que la anisotropía inducida se debe exclusivamente a las deformaciones generadas por las tensiones recientes.

Según Jovicic y Coop (1998) la anisotropía inherente depende de la actual estructura y fábrica del suelo (se entiende por fábrica del suelo la ordenación de las partículas, grupos de partículas y poros del suelo, y se entiende por estructura del suelo la suma de la fábrica y las fuerzas de equilibrio entre partículas). Tal como explica Minh (2006), un ejemplo de anisotropía inherente debido a la fábrica es la que se da en los suelos naturales con laminación. Otro ejemplo serían los sedimentos de suelos granulares con granos no esféricos, donde los ejes de dichos granos tienden a alinearse perpendicularmente a la dirección de deposición. Oda (1972a) y Shibuya (1985) demostraron la existencia de anisotropía inherente incluso en muestras formadas por bolas de vidrio esféricas depositadas por gravedad. Asimismo, Tatsuoka et al. (1979), Georgiannou et al. (1990), Vaid et al. (1990) y Chaudhary et al. (2002) comprobaron cómo ensayos sobre diversas muestras reconstituidas a partir de un mismo suelo granular, pero preparados de diferente forma (depositadas por gravedad en seco, depositadas por gravedad sumergidas, etc.), muestran diferentes grados de anisotropía inherente al someterlas a unas mismas trayectorias de tensiones. En la figura 2.12 se muestra un ejemplo de anisotropía inherente en un medio formado por partículas de vidrio planas, depositadas por gravedad.

Algunos de los factores que controlan la anisotropía inherente en suelos granulares son la forma y tamaño de los granos, la variación vertical en la granulometría del suelo y las acciones ambientales. En suelos cohesivos, por otro lado, las fuentes de la anisotropía inherente más comunes son los procesos fisicoquímicos de origen geológico y biológico que tiene lugar durante y tras la deposición, como el envejecimiento, la cementación, etc.

Jovicic y Coop (1998) consideran dos componentes de la anisotropía inducida:

- La anisotropía inducida en tensiones, que depende únicamente del estado actual de tensiones y es independiente de la historia del suelo.
- La anisotropía inducida en deformaciones, que depende de las tensiones y deformaciones históricas del suelo.

La anisotropía inducida en tensiones aparece cuando se aplica una carga sobre el suelo y esta depende exclusivamente del estado tensional actual. Tras la aplicación de dicha carga, los granos o agregaciones forman, inmediatamente, una fábrica anisótropa, incluso si inicialmente el suelo era isótropo. A medida que las cargas aplicadas cambian en magnitud o dirección, se generan nuevos contactos y se van acumulando deformaciones. Cambios en los contactos entre granos modifican las cadenas de fuerzas internas preferenciales entre partículas (Oda, 1972b; Drescher y De Josselin De Jong, 1972), tal como se observa en la figura 2.13.

Por otro lado, la anisotropía inducida en deformaciones incluye el efecto de la historia reciente del suelo. Este tipo de anisotropía se puede encontrar en procesos de deformación edométricos (como la sedimentación). Un resultado de estos procesos es que las superficies de fluencia plásticas tienden a alinearse con la recta de consolidación K_0 en el espacio de tensiones (Leroueil y Hight, 2003).

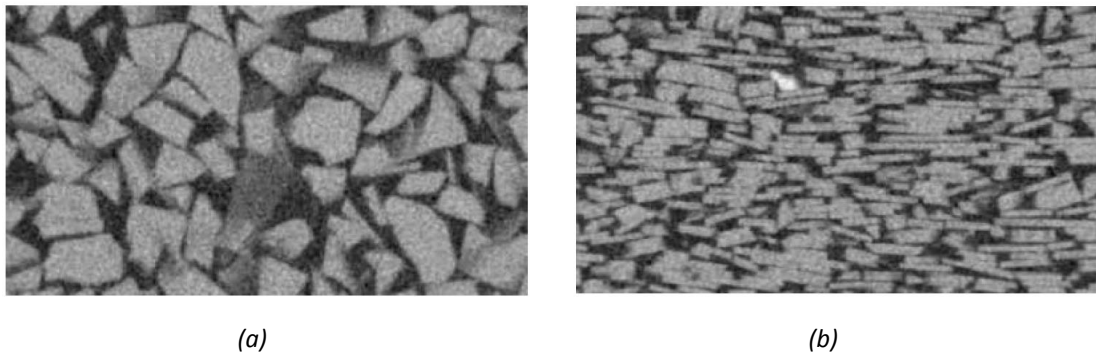


Figura 2.12. Tomografía sobre una muestra de partículas de vidrio de 1mm depositadas por gravedad (Abbireddy, 2008). (a) Sección horizontal. (b) Sección vertical.

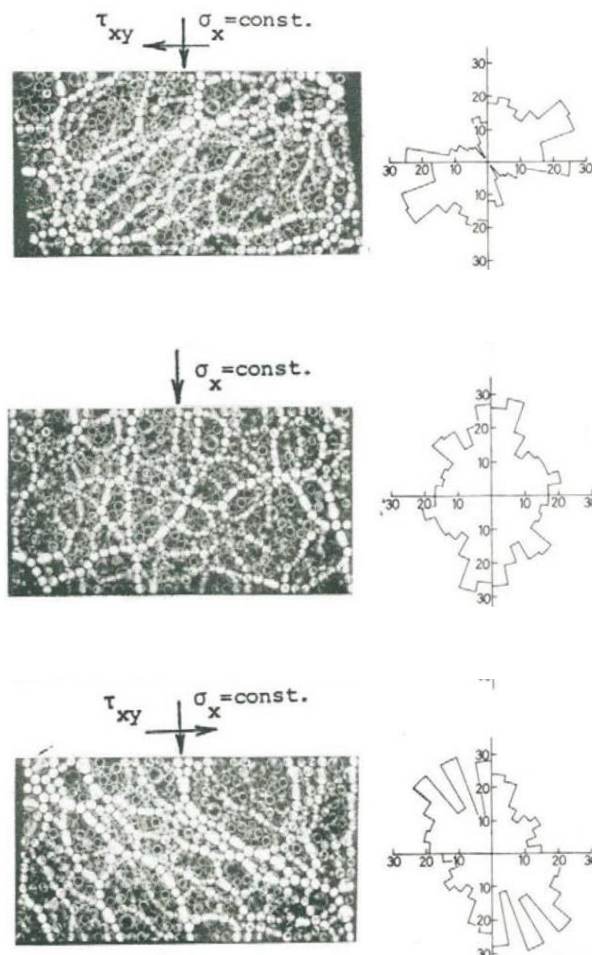


Figura 2.13. Imágenes fotoelásticas de ensayos de corte simple cíclico y distribución de contactos (Matsuoka et al., 1988).

Es habitual encontrar anisotropía inherente e inducida en la mayoría de suelos, si bien suele ser complejo separar la influencia de cada una de ellas en los resultados de los ensayos. Varias discrepancias en las simulaciones numéricas respecto a los resultados experimentales vienen, precisamente, del hecho de no considerar los efectos de la anisotropía. Piriyakul (2006) demuestra la necesidad de considerar la anisotropía inherente e inducida en el rango de las pequeñas deformaciones.

2.5. Comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones

2.5.1. Consideraciones previas

Jardine (1992) identifica el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones con las Zonas I y II descritas en el apartado 2.1 del presente capítulo. Cudny (2013) apunta que la Zona I suele corresponderse con deformaciones inferiores a 10^{-6} en arenas y 10^{-5} en arcillas, mientras que la Zona II lo hace con deformaciones dentro del intervalo 10^{-6} a 10^{-3} . Por otro lado, el rango de las deformaciones intermedias y grandes se identifica con las Zonas III y IV definidas por Jardine. Estas zonas suelen corresponderse con deformaciones superiores a 10^{-3} .

A continuación, se comentan algunos aspectos sobre el comportamiento del suelo en las Zonas I y II, y se exponen brevemente algunos de los modelos teóricos existentes que permiten reproducir dicho comportamiento. En los siguientes apartados del presente capítulo se desarrollan en mayor profundidad estos conceptos. Las Zonas III y IV quedan fuera del alcance del presente trabajo, si bien son consideradas en todos los modelos avanzados que tratan de reproducir el comportamiento del suelo en todo el rango de deformaciones y, por ello, se tendrán en cuenta en el modelo desarrollado en los capítulos 3 y 5.

Zona I de Jardine (1992)

El comportamiento del suelo en la Zona I puede ser aproximado por un modelo elástico lineal.

Poulos (1972), Simpson (1992), Simpson et al. (1996), Addenbrooke et al. (1997), Zwanenburg (2005) y Kung et al. (2007) apuntan la importancia de considerar la anisotropía del suelo cuando se utilizan modelos elásticos. No obstante, la dificultad de obtener experimentalmente los parámetros asociados a modelos anisótropos lleva, en múltiples ocasiones, a utilizar modelos elásticos lineales isótropos. Dichos modelos permiten caracterizar el comportamiento del suelo a través de dos parámetros que suelen tomarse entre los siguientes cuatro: K' (módulo de rigidez volumétrico elástico drenado), G (módulo de rigidez al corte elástico), E' (módulo de rigidez longitudinal elástico drenado) y ν' (coeficiente de Poisson drenado).

Las ecuaciones constitutivas total e incremental de un modelo elástico lineal isótropo son las siguientes:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 3K' \epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + 2G \mathbf{e}^e \quad (2.01)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 3K' \dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + 2G \dot{\mathbf{e}}^e \quad (2.02)$$

Donde σ' es el tensor de tensiones, $\dot{\sigma}'$ es el incremento del tensor de tensiones, ϵ^e es el tensor de deformaciones elásticas, $\dot{\epsilon}^e$ es el incremento del tensor de deformaciones elásticas, $\epsilon_{oct}^e = \epsilon_{ii}^e/3$ es la deformación volumétrica octaédrica elástica, $\dot{\epsilon}_{oct}^e = \dot{\epsilon}_{ii}^e/3$ es el incremento de la deformación volumétrica octaédrica elástica, $e^e = \epsilon^e - \epsilon_{oct}^e \mathbf{1}$ es el tensor de deformaciones desviadoras elásticas, $\dot{e}^e = \dot{\epsilon}^e - \dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1}$ es el incremento del tensor de deformaciones desviadoras elásticas, K' es el módulo volumétrico elástico lineal drenado y G es el módulo de corte elástico lineal.

Una formulación basada en los módulos de rigidez K' y G permite desacoplar de forma sencilla el comportamiento volumétrico del suelo ($\sigma'_{oct} = 3K'\epsilon_{oct}^e$) del comportamiento desviador del mismo ($s = 2Ge^e$). Tal como indican Potts y Zdravkovic (1999), a pesar de que el comportamiento del suelo no muestra este desacoplamiento en ningún rango de deformaciones, ni siquiera en el rango de las pequeñas deformaciones (Georgiannou et al, 1991), su consideración en Geotecnia es igualmente conveniente. Ello es debido al comportamiento claramente diferenciado del suelo cuando este es sometido a variaciones en las tensiones volumétricas respecto a cuando es sometido a variaciones en las tensiones de corte (por ejemplo, en la Zona II de Jardine, la rigidez volumétrica suele aumentar con la deformación volumétrica mientras que la rigidez al corte suele disminuir con la deformación de corte).

Por otro lado, Clayton (2011) apunta la conveniencia, desde un punto de vista numérico, de trabajar con los módulos de rigidez K' y G en vez de con E' y ν' , puesto que el módulo de rigidez al corte G permanece constante en análisis drenados y no drenados, cosa que no sucede con E' o ν' . Efectivamente, tal como indica Clayton, el aporte de la rigidez al corte del agua suele ser despreciable en rangos de deformación bajos.

Los módulos de rigidez elásticos en el rango de deformaciones propio de la Zona I se corresponden con los módulos de rigidez elásticos dinámicos $G = G_0$ y $K' = K'_0$. Dichos módulos se pueden calcular a partir de la densidad del suelo ρ_{soil} y la velocidad a la que se transmiten las ondas de corte S (v_s) y de compresión P (v_p) a través del mismo, según las siguientes expresiones.

$$G_0 = \rho_{soil} v_s^2 \tag{2.03}$$

$$K'_0 = \rho_{soil} \left(v_p^2 - \frac{4}{3} v_s^2 \right) \tag{2.04}$$

Zona II de Jardine (1992)

Para aproximar el comportamiento del suelo en la Zona II, es necesario utilizar modelos no lineales, histeréticos y que tengan en cuenta el efecto de la historia reciente sobre su rigidez. La rigidez del suelo en la Zona II varía de forma no lineal con la deformación. Una forma habitual de simular esta no linealidad es mediante el uso de módulos de rigidez elásticos no lineales. Dichos módulos dependen exclusivamente de las deformaciones elásticas ϵ^e o, de forma equivalente, de las tensiones efectivas σ' :

$$K'_s = K'_s(\epsilon^e) \quad G_s = G_s(\epsilon^e) \quad (2.05)$$

$$K'_t = K'_t(\epsilon^e) \quad G_t = G_t(\epsilon^e) \quad (2.06)$$

Donde K'_s y K'_t son, respectivamente, los módulos volumétricos elásticos secante y tangente drenados, y G_s y G_t son, respectivamente, los módulos de corte elástico secante y tangente.

No obstante, la medida experimental de la rigidez del suelo se realiza normalmente en ensayos en los que este se ve sometido a procesos de carga noval. Durante dichos procesos es habitual obtener valores de la rigidez inferiores a los obtenidos durante procesos de descarga o recarga. Según Hueckel y Nova (1979) esto se debe a que las deformaciones irreversibles ocurren en todo proceso de carga noval. En base a ello es posible definir un nuevo concepto de módulos de rigidez del suelo que, a diferencia de los de las expresiones (2.05) y (2.06), se calculan utilizando la deformación o el incremento de deformación total, y no el elástico. Los módulos de rigidez resultantes no se corresponden, por tanto, con los módulos de rigidez elásticos, sino con módulos de rigidez aparentes.

Según Gudehus (2011), cuando se trata de reproducir el comportamiento histerético del suelo, el estado de un elemento representativo del mismo (*Representative Soil Element, RSE*) no está suficientemente caracterizado por el índice de poros e y el tensor de tensiones efectivas σ' . En estos casos es necesario definir variables de estado ocultas χ^{hist} que no pueden ser observadas macroscópicamente. Es posible, asimismo, atribuir a dichas variables la no linealidad y la dependencia del comportamiento del suelo con su historia reciente. Las variables χ^{hist} representan la fluctuación espacial de las cadenas de fuerzas internas entre partículas del suelo, efecto al cual Gudehus denomina fuerza-rozamiento (*force-roughness*). Según Gudehus, el comportamiento del suelo tras una reversión y ante una posterior deformación monótona sugiere una adaptación gradual del estado interno del mismo (caracterizado por las mencionadas variables de estado ocultas) hasta que este depende exclusivamente del tensor de tensiones efectivas y del índice de poros, estado en el cual trayectorias de deformaciones proporcionales conducen a trayectorias de tensiones proporcionales, y que se considera dentro de la región *Swept-Out-Memory (SOM)* (Gudehus et al., 1977). Gudehus (2011) afirma que es por esto último por lo que la influencia del estado interno del suelo sobre su comportamiento sólo puede revelarse durante pequeñas deformaciones tras reversiones. Asimismo, según Gudehus (2011), las variables de estado χ^{hist} , dentro del conjunto de variables de estado χ , son, en general, de dos tipos: α (*back stress*) habitualmente utilizadas en modelos elastoplásticos o viscoelastoplásticos (dichos modelos tienden a infravalorar los efectos histeréticos del suelo), y δ (*internal strain*) habitualmente utilizadas en modelos hipoplásticos o viscohipoplásticos (dichos modelos tienden a sobrevalorar los efectos histeréticos del suelo). A pesar de que α y δ puedan ser tratadas formalmente como deformaciones y tensiones respectivamente, estas no pueden ser interpretadas físicamente como tales.

Los módulos de rigidez aparentes, en cada zona tensorial en la que están definidos, suelen depender de las deformaciones totales ϵ , de las tensiones efectivas σ' y de variables de estado χ^{hist} :

$$K_s^{ap} = K_s^{ap}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{hist}) \quad G_s^{ap} = G_s^{ap}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{hist}) \quad (2.07)$$

$$K_t^{ap} = K_t^{ap}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{hist}) \quad G_t^{ap} = G_t^{ap}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{hist}) \quad (2.08)$$

La definición de zona tensorial dada por Darve (1978, 1990) y Darve y Labanieh (1982), que se explica detalladamente en el apartado 2.6.1 del presente capítulo, se puede resumir de la siguiente manera:

- Considerando el suelo como un material simple, homogéneo (no viscoso) y asumiendo la hipótesis de pequeñas deformaciones, es posible expresar la ecuación constitutiva del mismo en forma diferencial como $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$, donde \mathbf{G} es una función tensorial, $\boldsymbol{\sigma}'$ es el tensor de tensiones efectivas, $\boldsymbol{\epsilon}$ es el tensor de deformaciones, $\boldsymbol{\chi}$ son las variables de estado y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ es el incremento del tensor de deformación total.
- La condición de material homogéneo permite reescribir la ecuación constitutiva como $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, donde \mathbf{E}'_t es el tensor de rigidez tangente y $\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} / \|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|$ es la dirección del incremento del tensor de deformación total.
- En base a lo anterior, se define una zona tensorial Z como la parte del espacio de incrementos de deformación total en el que la función tensorial \mathbf{G} es lineal con $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.
- En una determinada zona tensorial Z , por tanto, el tensor de rigidez tangente será independiente de $\boldsymbol{\eta}$, es decir, $\mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{E}'_t^Z(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi})$ para $\forall \boldsymbol{\eta} \in Z$.
- De lo anterior se deduce que la relación entre $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ en una determinada zona tensorial es incrementalmente lineal.
- Asimismo, una zona tensorial Z es un hipercono cuyo vértice se sitúa al inicio del espacio de incrementos de tensión.

En base al concepto de zona tensorial, Darve (1990) establece un criterio de clasificación de modelos constitutivos para materiales simples y homogéneos bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones. A su vez, las zonas tensoriales pueden relacionarse biyectivamente con la rigidez aparente del suelo y, por tanto, con los módulos de rigidez aparentes citados anteriormente. De esta manera, como ya se ha comentado, para cada zona tensorial Z se tendrá un valor de K_Z^{ap} y G_Z^{ap} . En la tabla 2.01 se resumen estas correspondencias.

Algunos modelos incrementalmente lineales (apartado 2.6.2 del presente capítulo) son capaces de reproducir la no linealidad del suelo en la Zona II, si bien no pueden reproducir el comportamiento histerético ni la dependencia de la rigidez con la historia reciente. Entre ellos se encuentran los modelos elásticos de Cauchy, los modelos pseudoelásticos, los modelos hiperelásticos o los modelos hipoelásticos *stricto sensu*.

Por otro lado, los modelos incrementalmente multilineales (apartado 2.6.3 del presente capítulo) sí permiten reproducir el comportamiento no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo, propios de la Zona II, además del comportamiento no lineal característico de la misma. Entre ellos, los más sencillos son los modelos histeréticos, como los paraelásticos y los aquí denominados “cuasi-hipoelásticos”. Existen también modelos incrementalmente multilineales denominados aquí “modelos avanzados”, capaces de reproducir el comportamiento del suelo en todo el rango de deformaciones (Zonas I, II, III y IV).

Entre ellos se encuentran algunos modelos elastoplásticos que utilizan la estructura de los modelos hysteréticos cuasi-hipoelásticos para describir el comportamiento elástico del suelo, o los modelos de superficies imbricadas, de bloques, de plasticidad límite, de burbujas o multilaminados.

Tipo de modelo	Número de zonas tensoriales asociadas a \mathbf{G} ($\#Z$)	Cantidad de valores de K_i^{ap} y G_i^{ap}
Modelos incrementalmente lineales	$\#Z = 1$	$i = 1$
Modelos incrementalmente multilineales	$1 < \#Z < \infty$	$1 < i < \infty$
Modelos incrementalmente no lineales	$\#Z \rightarrow \infty$	$i \rightarrow \infty$

Tabla 2.01. Zonas tensoriales y valores de K_i^{ap} y G_i^{ap} para modelos incrementalmente lineales, multilineales y no lineales.

Finalmente, los modelos incrementalmente no lineales (apartado 2.6.4 del presente capítulo), son capaces de reproducir el comportamiento del suelo en todo el rango de deformaciones (Zonas I, II, III y IV). Entre ellos, se encuentran los modelos hipoplásticos o algunos modelos híbridos, como los que combinan la hipoplasticidad con la paraelasticidad.

Entre los modelos incrementalmente multilineales destacan, por su interés práctico, los modelos hysteréticos cuasi-hipoelásticos, que han sido comúnmente utilizados en la práctica geotécnica para simular el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. Una metodología muy extendida para construir modelos hysteréticos cuasi-hipoelásticos es incorporar a modelos cuasi-hipoelásticos los elementos que permiten reproducir el comportamiento hysterético del suelo: criterios de reversión, reglas de memoria y el efecto que tienen las reversiones sobre las variables que controlan la degradación y la rigidez máxima del suelo. Los modelos cuasi-hipoelásticos simulan el comportamiento del suelo ante cargas monótonas y se asemejan a modelos hipoelásticos, aunque en vez de módulos de rigidez elásticos utilizan módulos de rigidez aparentes, y estos actúan sobre las deformaciones totales, y no elásticas, para la obtención de las tensiones.

Por otro lado, entre los modelos avanzados dentro de los modelos incrementalmente multilineales se encuentran, como se ha comentado previamente, los modelos elastoplásticos cuya parte elástica adopta la estructura de un modelo hysterético cuasi-hipoelástico. Según Jardine (1992) y Jardine et al. (1991), esta metodología semiempírica proporciona predicciones muy precisas gracias al amplio rango de deformaciones consideradas, si bien ello conlleva una pérdida de generalidad y una falta de consistencia del marco teórico en el que se sustenta. Efectivamente, se han identificado algunos elementos que muestran dicha falta de consistencia teórica:

- No es correcto aplicar las relaciones elásticas entre los pares de módulos elásticos habituales (K' , G , E' y ν') a los módulos de rigidez aparentes.
- Se están solapando los mecanismos de los modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos y de los modelos elastoplásticos que tratan de explicar la reducción de la rigidez del suelo durante los procesos de carga noval, en comparación con la rigidez en procesos de descarga o recarga.

A pesar de ello, desde un punto de vista numérico, utilizar los módulos de rigidez aparentes en vez de los módulos de rigidez elásticos dentro de un modelo elastoplástico, simplifica notablemente los algoritmos de cálculo (figura 2.14).

Algoritmo explícito para obtener las tensiones utilizando módulos de rigidez aparentes

- 1) Deformaciones iniciales: $\epsilon^{(n)}, \Delta\epsilon^{(n+1)}, \epsilon^{(n+1)} = \epsilon^{(n)} + \Delta\epsilon^{(n+1)}$
- 2) Cálculo de los módulos de rigidez: $K^{ap}(\epsilon^{(n)}, \epsilon^{(n+1)})$ y $G^{ap}(\epsilon^{(n)}, \epsilon^{(n+1)})$
- 3) Cálculo de las tensiones (régimen elástico o plástico): $\sigma'^{(n+1)}$
- 4) Nuevo paso de cálculo: *If* $n < n_{fin}$: $n = n + 1$ y **GOTO(1)**; *Elseif* $n = n_{fin}$, **END**

Algoritmo implícito para obtener las tensiones utilizando módulos de rigidez elásticos

- 1) Deformaciones iniciales: $\epsilon^{(n)}, \epsilon^{e,(n)}, \Delta\epsilon^{(n+1)}, \epsilon^{(n+1)} = \epsilon^{(n)} + \Delta\epsilon^{(n+1)}$
- 2) Hipótesis valor inicial deformación elástica: $\Delta\epsilon_{[0]}^{e,(n+1)} = \Delta\epsilon^{(n+1)}$,
 $\epsilon_{[0]}^{e,(n+1)} = \epsilon^{e,(n)} + \Delta\epsilon_{[0]}^{e,(n+1)}$
 - 2.1) Cálculo de los módulos de rigidez: $K'(\epsilon^{e,(n)}, \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)})$ y $G(\epsilon^{e,(n)}, \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)})$
 - 2.2) Cálculo de las tensiones (régimen elástico o plástico): $\sigma'_{[i]}^{(n+1)}$
 - 2.3) Actualización de las deformaciones elásticas: $\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}(\sigma'_{[i]}^{(n+1)})$
 - 2.4) Errores y criterio de convergencia:
 $\epsilon_{abs}^{e,(n+1)} = \|\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)} - \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\|$ y $\epsilon_{rel}^{e,(n+1)} = \epsilon_{abs}^{e,(n+1)} / \|\epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\|$
If $\epsilon_{abs}^{e,(n+1)} < TOL_{\epsilon_{abs}^e}$ y $\epsilon_{rel}^{e,(n+1)} < TOL_{\epsilon_{rel}^e}$, **GOTO(3)**;
Else $\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)} = f(\epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}, \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)})$, **GOTO(2.1)**
- 3) Nuevo paso de cálculo:
If $n < n_{fin}$: $n = n + 1$ y **GOTO(1)**;
Elseif $n = n_{fin}$, **END**

Figura 2.14. Algoritmos para la obtención del valor de las tensiones.

No obstante, y a pesar de las inconsistencias mencionadas, es habitual encontrar modelos elastoplásticos que utilizan módulos de rigidez aparentes para describir el comportamiento puramente elástico del suelo. En parte, ello es debido a que las curvas de degradación o rigidización de dichos módulos se obtienen experimentalmente a partir de las deformaciones totales en procesos de carga noval, y no a partir de las deformaciones elásticas en procesos de descarga o recarga.

Por otro lado, en cualquier modelo que utilice la teoría elástica (de forma consistente o no), debe tenerse en cuenta lo apuntado por Zytynski et al. (1978) en cuanto a la elección de los

módulos elásticos. Zytinski demostró que considerar valores constantes del coeficiente de Poisson en un modelo, para evitar valores negativos del mismo, implica que este no será conservativo y tendrá lugar la generación de energía en ciclos de carga cerrados.

Efectivamente, varios modelos incrementalmente multilineales que tienen en cuenta el comportamiento del terreno en el rango de las pequeñas deformaciones, como el de Papadimitriou et al. (2001), el de Wongsaroj (2005), el *SSOM* y *HS-S* de Benz (2007) o el *HS-SS* de Plaxis, basado en los anteriores, utilizan, como parámetros elásticos, el módulo de corte G y un valor constante del coeficiente de Poisson. En base a estos parámetros, dichos modelos calculan internamente el valor del módulo volumétrico drenado K' (expresión 2.09).

Otros modelos incrementalmente multilineales que tienen en cuenta el comportamiento del terreno en el rango de las pequeñas deformaciones, como el de Whittle (1987), el de Al-Tabbaa y Wood (1989), el de Yu (1995), el de Gryczmanski et al. (1998) o el de Gryczmanski y Uliniarz (2008), utilizan como parámetros elásticos el módulo volumétrico drenado K' y un valor constante del coeficiente de Poisson. En base a estos parámetros, dichos modelos calculan internamente el valor del módulo de corte G (expresión 2.10).

$$K' = \frac{2G(1 + \nu'_{cte})}{3(1 - 2\nu'_{cte})} = cte \cdot G \quad (2.09)$$

$$G = \frac{3K'(1 - 2\nu'_{cte})}{2(1 + \nu'_{cte})} = cte \cdot K' \quad (2.10)$$

De las expresiones anteriores se deduce que el hecho de adoptar un valor constante del coeficiente de Poisson implica la proporcionalidad $K' \propto G$, lo cual no responde, generalmente, a las observaciones experimentales en suelos en el rango de las pequeñas deformaciones.

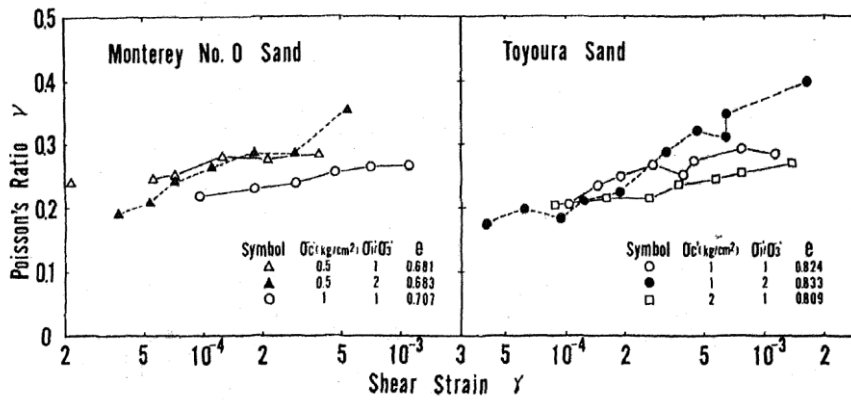
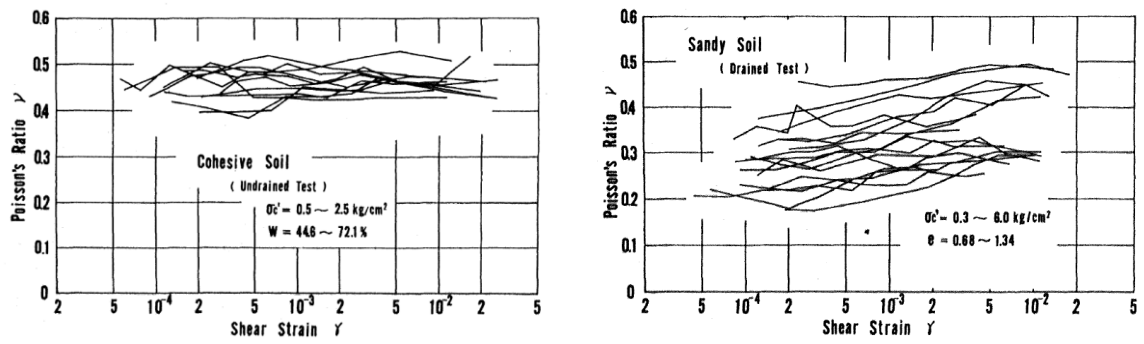
En la expresión (2.11) se proporciona la expresión del coeficiente de Poisson en función de los módulos de K' y G y en la expresión (2.12) las limitaciones termodinámicas elásticas y la condición $\nu' > 0$ que debe cumplirse en todos los suelos, en base a las observaciones experimentales. Por otro lado, en (2.13) se deduce la expresión de $\dot{\nu}'$ a partir de la expresión (2.11).

$$\nu' = \frac{3K' - 2G}{2(3K' + G)} \quad (2.11)$$

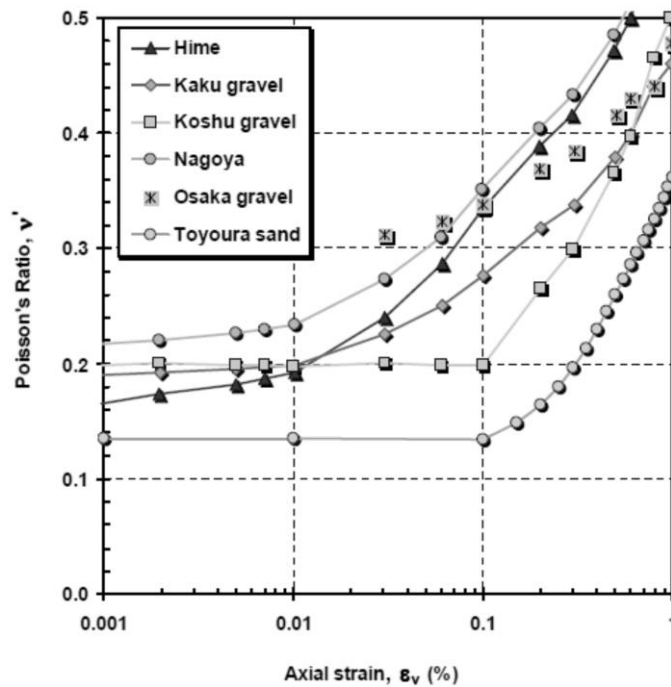
$$0 < \nu' < 0,50 \quad (2.12)$$

$$\dot{\nu}' = \frac{9G\dot{K}' - K'\dot{G}}{2(3K' + G)^2} \quad (2.13)$$

Tal como se expone en el apartado 2.5.2 del presente capítulo, experimentalmente se observa cómo, en el rango de las pequeñas deformaciones, el módulo volumétrico drenado K' generalmente tiende a rigidizar con la deformación volumétrica (figuras 2.16, 2.17 y 2.18), mientras que el módulo de corte G tiende a degradar con la deformación de corte octaédrica (figuras 2.19 y 2.20).



(a)



(b)

Figura 2.15. (a) Variación de v' o v_u con γ_{oct} en diferentes tipos de suelo (Yokota y Konno, 1980).
 (b) Variación de v' con ϵ_{oct} (Lehane y Cosgrove, 2000).

Considerar por un lado $G = G(\gamma_{oct})$ con $\dot{G}\dot{\gamma}_{oct} < 0$ (degradación de G con γ_{oct}), y por otro lado $K'(\epsilon_{oct})$, con $\dot{K}'\dot{\epsilon}_{oct} > 0$ (rigidización de K' con ϵ_{oct}), lleva a valores $\dot{\nu}' > 0$ si $\dot{G} < 0$ y $\dot{K}' > 0$, y a valores $\dot{\nu}' < 0$ si $\dot{G} > 0$ y $\dot{K}' < 0$. Efectivamente, esta variación en los valores de ν' es la observada en la figura 2.15 y la predicha en la expresión (2.13). Para que $\dot{\nu}' = 0$ ($\nu' = \nu'_{cte}$), según la expresión (2.13) debe cumplirse la siguiente condición, que es equivalente a las expresiones (2.09) y (2.10).

$$\frac{\dot{K}'}{K'} = \frac{\dot{G}}{G} \quad \rightarrow \quad K' = \left(\frac{K'_0}{G_0}\right) G = cte \cdot G \quad (2.14)$$

2.5.2. Consideraciones sobre la rigidez

2.5.2.1. Módulo de rigidez volumétrico

En relación con el módulo de rigidez volumétrico drenado, no es habitual distinguir entre valores a pequeñas, intermedias o grandes deformaciones, a diferencia de lo que ocurre con el módulo de rigidez al corte.

Duncan et al. (1980) propusieron la expresión (2.15) para calcular el módulo volumétrico aparente secante (figura 2.16). Dicha expresión se utiliza en el modelo histerético cuasi-hipoelástico de tipo hiperbólico de Duncan y Chang (1970) expuesto en el apartado 2.6.3.1.2.2.4 del presente capítulo.

$$K'_s{}^{ap} = K_b p_a \left(\frac{\sigma'_3}{p_a}\right)^m \quad (2.15)$$

Donde K_b es el valor de $K'_s{}^{ap}$ para $\sigma'_3 = p_a$, σ'_3 es la tensión efectiva horizontal (confinamiento), p_a es la presión atmosférica y m es un parámetro del suelo. Debe notarse que $K'_s{}^{ap}$ hace referencia al módulo volumétrico aparente secante.

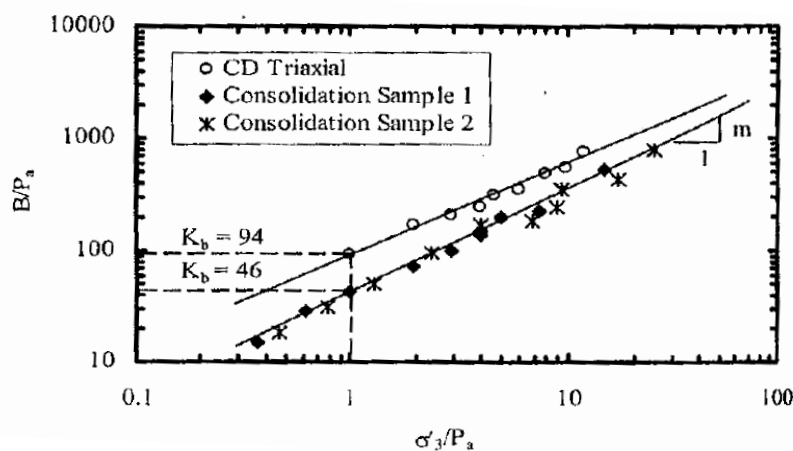


Figura 2.16. Dependencia del módulo volumétrico aparente secante ($B \equiv K'_s{}^{ap}$) con σ'_3/p_a en arcilla de alta plasticidad de Barind, según la expresión (2.15) (Mofiz et al., 2005).

El uso del confinamiento σ'_3 como variable en las expresiones de los módulos de rigidez fue y es una práctica habitual en muchos modelos hipoeásticos y cuasi-hipoeásticos. Ello es debido a que varios parámetros del suelo suelen ajustarse a curvas teóricas en base a los resultados obtenidos en la fase desviadora de ensayos triaxiales, en la que el confinamiento permanece constante ($\sigma'_3 = cte$), lo cual simplifica notablemente el ajuste. No obstante, el uso del confinamiento σ'_3 como variable en dichas expresiones dificulta la generalización de estos modelos a los casos de carga multiaxial. Por ello, se considera más apropiada la expresión (2.16) para K_s^{ap} .

$$K_s^{ap} = K_{s,ref}^{ap} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^m \quad (2.16)$$

Donde $K_{s,ref}^{ap}$ es el valor de K_s^{ap} para $p' = p'_{ref}$, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $p' = p'_{ref}$ es una presión de referencia y m es un parámetro del suelo.

Duncan et al. (1980) propusieron una expresión análoga a la (2.16) para el módulo longitudinal elástico tangente drenado $E'_{t,ur}$. A partir del valor de $E'_{t,ur}(-p')$ obtenido de dicha expresión y del coeficiente de Poisson drenado ν'_{ur} , es posible calcular el módulo volumétrico elástico tangente drenado $K'_{t,ur}(-p')$ según la expresión (2.17).

$$K'_{t,ur}(-p') = \frac{E'_{t,ur}(-p')}{3(1 - 2\nu'_{ur})} \quad (2.17)$$

Asimismo, Roscoe y Schofield (1963) y Roscoe y Burland (1968) propusieron la siguiente expresión del módulo volumétrico tangente elástico en sus modelos de estado crítico (figura 2.17).

$$K'_t = \frac{(1 + e)}{\kappa} p' \quad (2.18)$$

Donde e es el índice de poros, κ es la pendiente de las curvas de hinchamiento en el plano $v - \ln(p')$ y $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media.

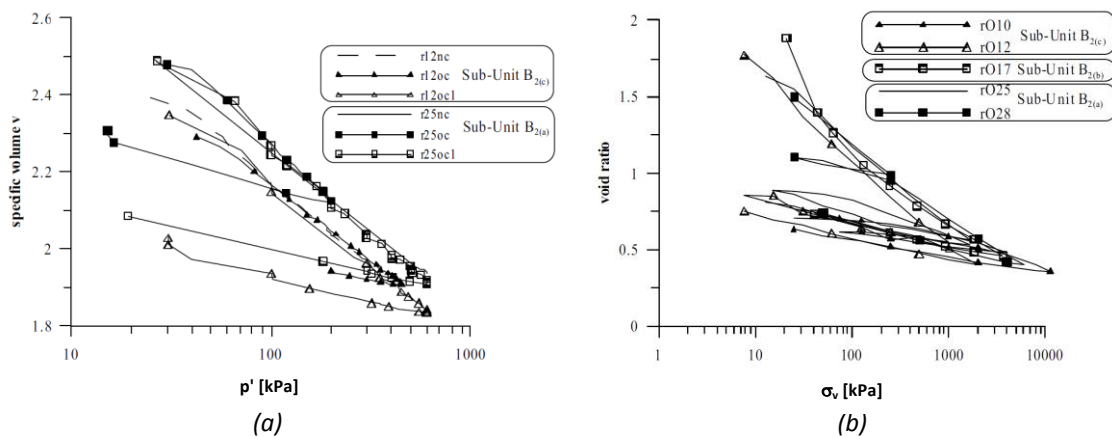


Figura 2.17. Ensayos en arcillas limosas (Gasparre, 2005).
 (a) Compresión isotrópica, $v - 1 = (1 + e_0)\epsilon_v$. (b) Compresión unidimensional.

Tal como expone Benz (2007), Lade y Abelev (2005) estudiaron la variación de la rigidez volumétrica durante procesos de carga y descarga isotrópicas en arenas debido a la introducción de pequeños ciclos de carga (figura 2.18), es decir, estudiaron el comportamiento histerético volumétrico del suelo. En la rama de carga noval, observaron que los ciclos daban lugar a un incremento importante de la rigidez volumétrica, lo cual no sucedía durante los ciclos en la rama de descarga, en los que apenas se observaron diferencias en el valor de la rigidez volumétrica.

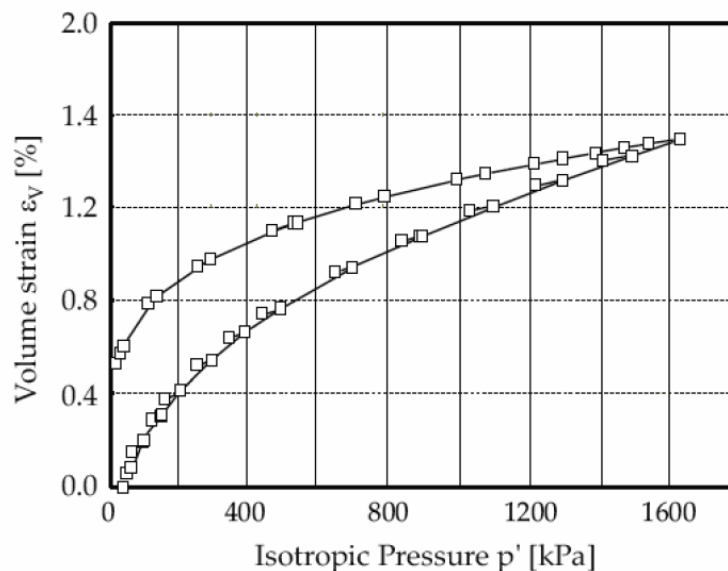


Figura 2.18. Rigidización del módulo volumétrico en arenas de Nevada durante pequeños ciclos de carga y descarga en la rama de carga noval y durante la rama de descarga (Lade y Abelev (2005), extraído de la tesis de Benz (2007)).

2.5.2.2. Módulo de rigidez al corte

Existen multitud de estudios sobre los parámetros que controlan el valor la rigidez al corte G . Los parámetros considerados más relevantes son: la deformación de corte (γ), la presión de confinamiento (p'), el índice de poros (e), el índice de plasticidad (IP), el índice de sobreconsolidación (OCR , R_0), la diagénesis, la historia reciente, la velocidad de carga y efectos de inercia y la anisotropía.

- **Deformación de corte (γ):** Existen numerosas evidencias experimentales que indican que el módulo de rigidez al corte G degrada con la deformación de corte. Para generalizar el concepto de deformación de corte a un estado multiaxial de tensiones y deformaciones, es habitual trabajar con la deformación de corte octaédrica. Numerosos modelos constitutivos tratan de reproducir esta dependencia de forma explícita o implícita.

A continuación, se muestran los resultados de diversos ensayos experimentales donde se evidencia la degradación del módulo de corte aparente con la deformación de corte total en arcillas con diferentes índices de plasticidad (figura 2.19) y en arenas (figura 2.20).

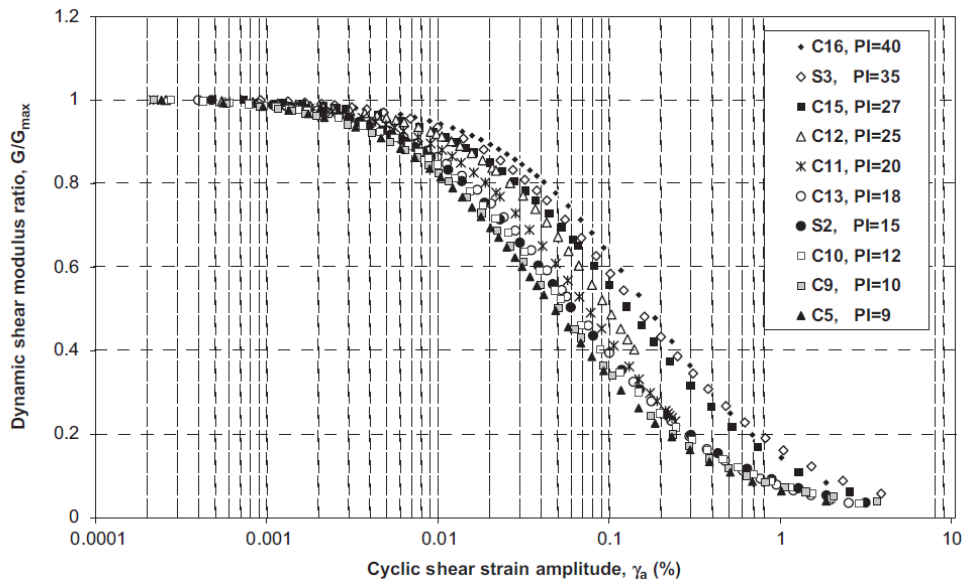


Figura 2.19. Degradación del módulo de corte aparente en ensayos con arcillas con diferentes índices de plasticidad (Okur y Ansal, 2007).

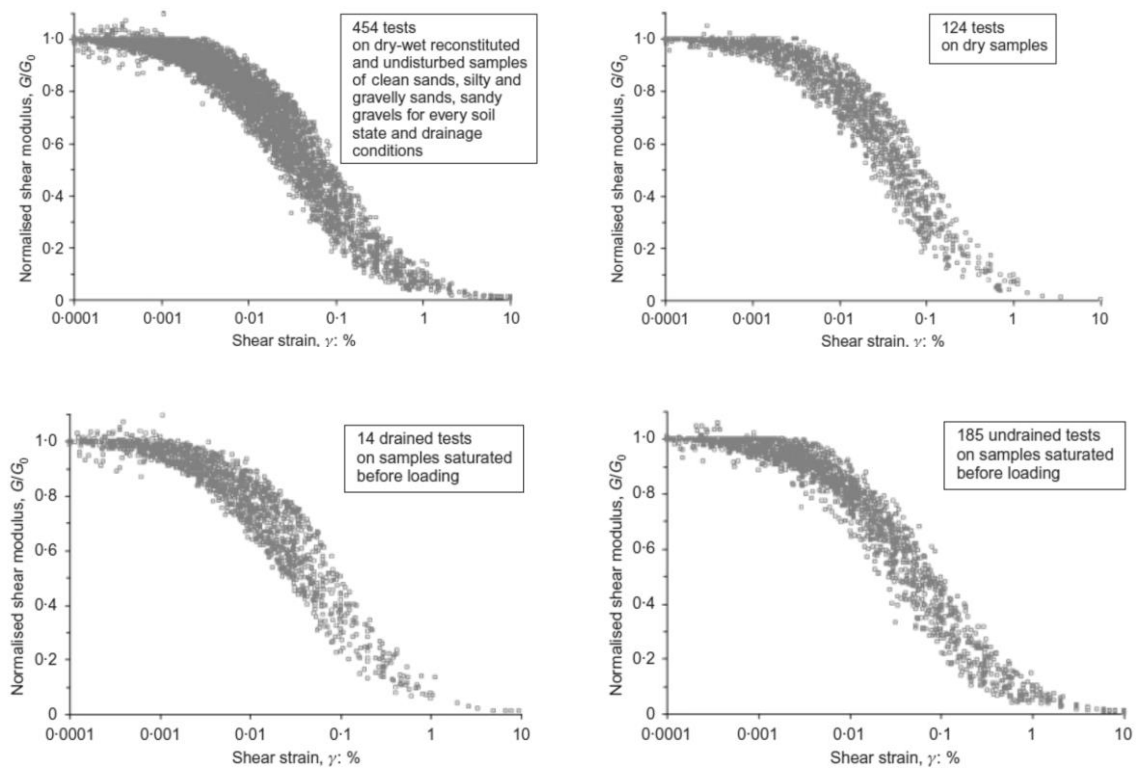


Figura 2.20. Degradación del módulo de corte aparente en diversos ensayos con arenas (Oztoprak y Bolton, 2013).

En la figura 2.21 se muestran las deformaciones típicas en diversos problemas geotécnicos y el correspondiente nivel de degradación del módulo de corte, así como algunos ensayos y métodos de auscultación según el rango de deformación que pretenda medirse.

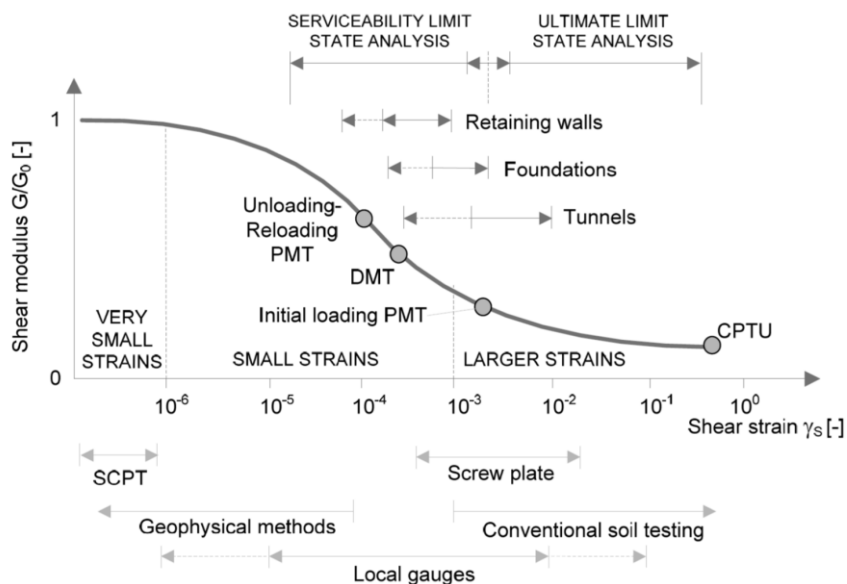


Figura 2.21. Degradación del módulo de corte (Obrzud (2010), basado en Atkinson y Salfors (1991)).

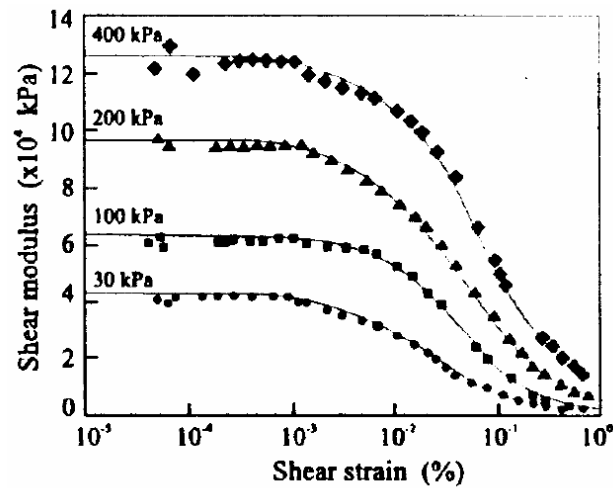
- **Presión de confinamiento (p'):** Experimentalmente se observa como el módulo de corte depende del grado de confinamiento.

Autores como Ohde (1951), Hardin (1961), Janbu (1963), Hardin y Richart Jr. (1963) o Hardin y Drnevich (1972), en base a observaciones experimentales, propusieron relaciones de proporcionalidad del tipo (2.19) entre el valor del módulo de corte máximo G_0 y la presión de confinamiento (figura 2.22).

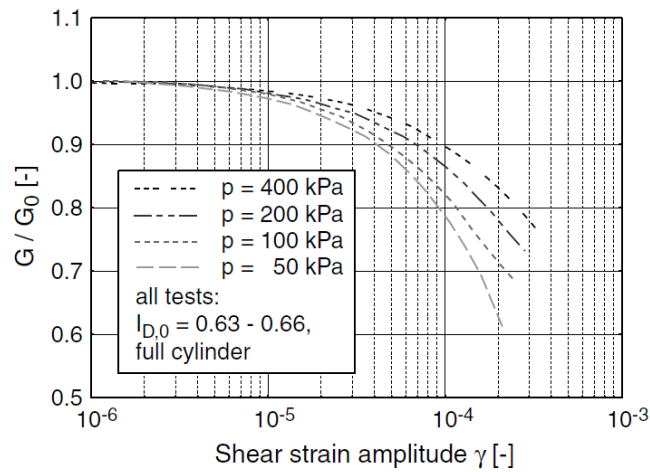
$$G_0 \propto (p')^m \quad (2.19)$$

Donde m es un parámetro del suelo. La introducción de la teoría de contacto Hertziana en partículas esféricas para el cálculo de G_0 da lugar a $m = 0,33$ (Duffy y Mindlin, 1957; Goddard, 1990). Experimentos en arenas proporcionan valores de $m = 0,4 - 0,60$ (Hardin y Black, 1966, 1968; McDowell y Bolton, 2001), mientras que en suelos cohesivos se suelen tomar valores de $m = 0,50 - 1,00$, siendo próximo a 0,50 en arcillas de baja plasticidad y a 1,0 en arcillas plásticas.

La mayoría de los modelos constitutivos que tratan de reproducir el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones tienen en cuenta la dependencia de G con la presión de confinamiento.



(a)



(b)

Figura 2.22. (a) Influencia de p' en el valor de G_0 (Soga et al. (1995), extraído del trabajo de Potts y Zdravkovic (1999)). (b) Influencia de p' en la degradación de G (Wichtmann y Triantafyllidis, 2004).

- **Índice de poros (e):** Hardin y Richart Jr. (1963) observaron la dependencia del módulo de corte máximo G_0 con el índice de poros a partir de experimentos con arenas de Ottawa y propusieron la expresión (2.20). Autores como Biarez y Hicher (1994) o Lo Presti y Jamiolkowski (1998) propusieron la expresión (2.21) para esta dependencia. Bui (2009), por otro lado, propuso la expresión (2.22), figura 2.23.

$$G_0 \propto \frac{(\hat{B} - e)^2}{1 + e} \quad (2.20)$$

$$G_0 \propto e^{-x} \quad (2.21)$$

$$G_0 \propto \frac{1}{(1 + e)^3} \quad (2.22)$$

Donde \hat{B} y x son parámetros del suelo. En Benz (2007) y en Obrzud y Truty (2018) se proporcionan los valores de \hat{B} y x de las expresiones (2.20) y (2.21), según diferentes autores para diferentes suelos.

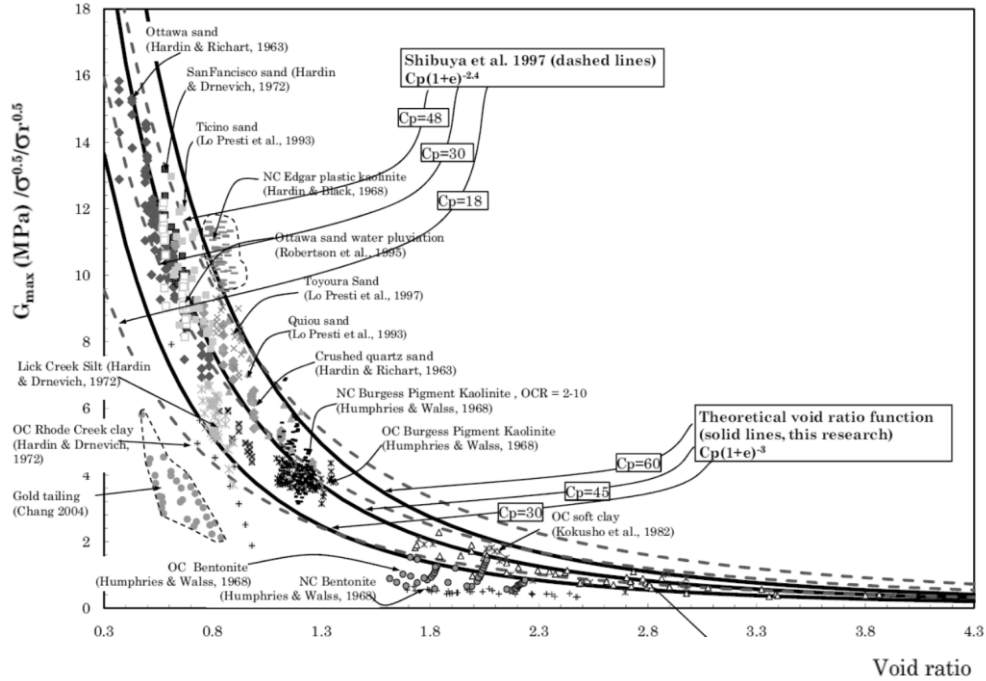


Figura 2.23. Resultados de experimentos con columna resonante sobre arenas bien gradadas y arcillas reconstituidas (Bui, 2009).

- **Índice de plasticidad (IP):** Experimentalmente se observa como mayores valores del índice de plasticidad en un suelo resultan en un desplazamiento de la curva de degradación del módulo de corte aparente hacia valores de la deformación de corte mayores (figura 2.24a). Vucetic y Dobry (1991) propusieron el gráfico de la figura 2.24b para cuantificar esta dependencia.

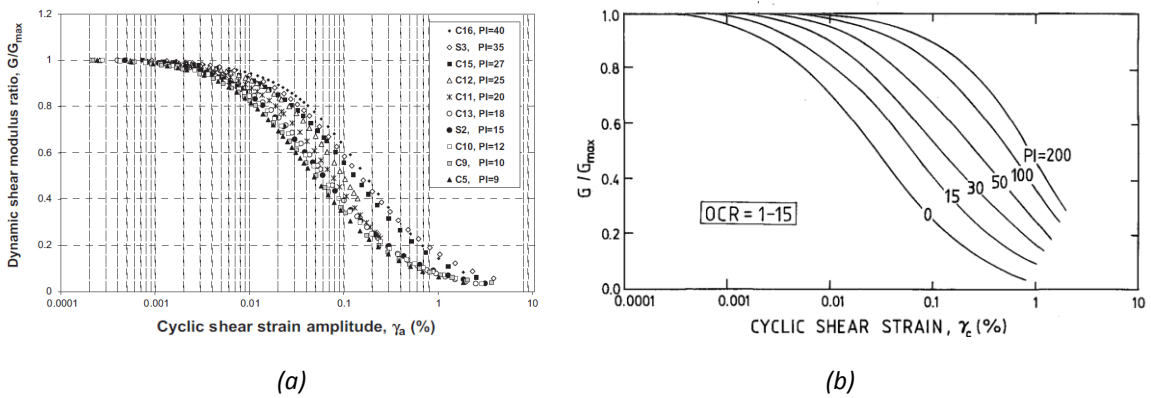


Figura 2.24. (a) Curva de degradación del módulo de corte aparente para diferentes valores del IP (Okur y Ansal, 2007). (b) Valores del módulo de corte aparente para diferentes valores del IP y de la deformación de corte (Vucetic y Dobry, 1991).

- Índice de sobreconsolidación (OCR, R_0):** Hardin y Black (1968) propusieron la correlación (2.23), basada en observaciones experimentales, entre el módulo de corte máximo G_0 y el índice de sobreconsolidación $OCR = \sigma'_{v,max}/\sigma'_v$ (siendo $\sigma'_{v,max}$ la máxima tensión vertical efectiva histórica y σ'_v la tensión vertical actual), donde \hat{k} es un parámetro del suelo.

$$G_0 \propto (OCR)^{\hat{k}} \tag{2.23}$$

Por otro lado, Houlsby y Wroth (1991), en base a los trabajos de Hardin y Black (1968) y Atkinson y Little (1988), propusieron la correlación (2.24) entre el módulo de corte máximo G_0 y el índice de sobreconsolidación $R_o = p'_{max}/p'$ (siendo p'_{max} la máxima presión media efectiva histórica y p' la presión media efectiva actual), donde \hat{k} es un parámetro del suelo (figura 2.25).

$$G_0 \propto (R_o)^{\hat{k}} \tag{2.24}$$

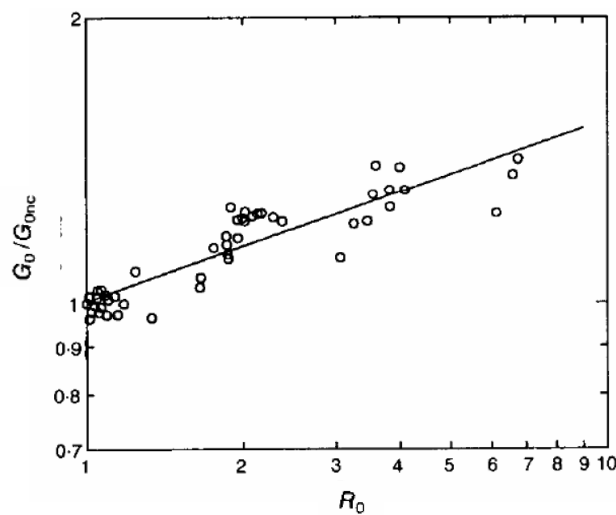


Figura 2.25. $G_0 = G_0(R_o)$ en muestras reconstituidas de arcilla caolinita (Viggiani y Atkinson, 1995).

- Diagénesis:** La diagénesis es el proceso físico-químico por el que un sedimento se transforma en una roca sedimentaria. Este proceso va alterando gradualmente la rigidez del suelo hasta alcanzar, en última instancia, la rigidez propia de una roca. Algunos de los principales procesos que alteran la rigidez del suelo son la cementación (Fernandez y Santamarina, 2001) y el envejecimiento (Lambe y Whitman, 1969; Bjerrum, 1973; Mesri et al., 1990; Schmertmann, 1991; Mitchell, 1993; Terzaghi et al., 1996), entendido como la alteración de propiedades mecánicas del suelo resultantes de una compresión secundaria bajo una carga externa constante.

Trhlíková et al. (2012) propuso la siguiente relación entre el módulo de rigidez de corte máximo G_0 y la cimentación:

$$G_0 \propto (s^*/s_f^*)^l \tag{2.25}$$

Donde s^* representa la estructura del suelo, s_f^* es un valor de referencia de s^* y l es un parámetro del suelo.

Por otro lado, Anderson y Stokoe (1978) propusieron la siguiente relación entre G_0 y el envejecimiento:

$$G_0(t) \propto G_0(t_p) \left(1 + N_{G,1} \log(t/t_p)\right) \quad (2.26)$$

Donde t es el tiempo, t_p es el tiempo requerido para finalizar la consolidación primaria y $N_{G,1}$ es un factor relacionado con el coeficiente de consolidación secundaria C_α ($N_{G,1} = \sqrt{C_\alpha}$ según Lo Presti et al. (1996)).

- **Historia reciente:** Atkinson et al. (1990) definieron el concepto de historia reciente como aquella correspondiente a la trayectoria tensodeformacional actual en relación con la trayectoria tensodeformacional previa, de la que se diferencia por un cambio en la dirección de la misma (reversión) o por un periodo de reposo extendido.

Como se ha comentado en el apartado 2.5.1. del presente capítulo, según Gudehus (2011), el comportamiento del suelo tras una reversión y ante una posterior deformación monótona, sugiere una adaptación gradual del estado interno del mismo hasta que este depende exclusivamente de σ' y del índice de poros e , y no de variables de estado ocultas. En dicho estado, considerado dentro de la región *Swept-Out-Memory (SOM)* (Gudehus et al., 1977), trayectorias de deformaciones proporcionales conducen a trayectorias de tensiones proporcionales. Gudehus (2011) afirma que es por esto último que la influencia del estado interno del suelo sobre su comportamiento sólo puede revelarse durante pequeñas deformaciones tras reversiones. En función de si dichas reversiones se producen en el espacio de tensiones o deformaciones, se tendrán diferentes respuestas del suelo, tal como se puede ver en las envolventes de respuesta de Gudehus (1979) de la figura 2.26.

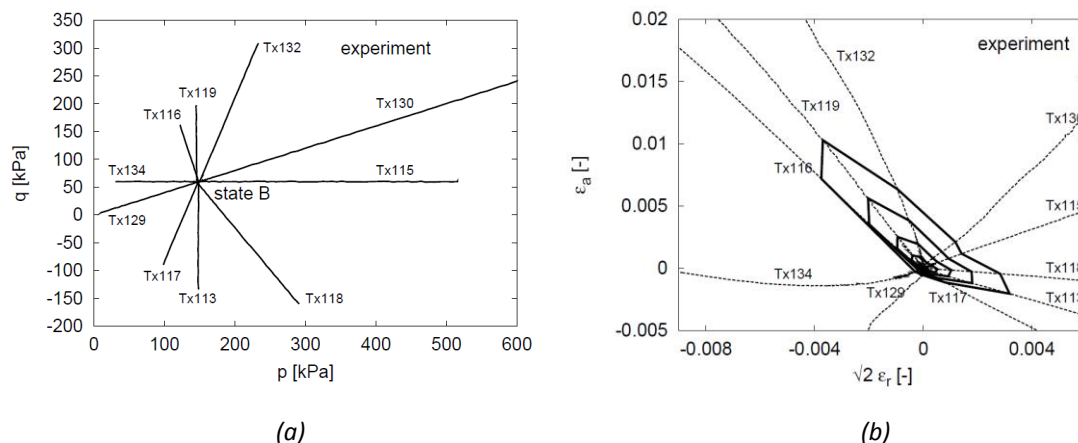


Figura 2.26. Envolventes de Gudehus en el espacio de Rendulic obtenidas con ensayos triaxiales drenados en una arcilla limosa de baja plasticidad reconstituida (Costanzo et al. (2006), extraído de la tesis de Masín (2006)). (a) Trayectoria de tensiones aplicadas. (b) Respuesta en deformaciones.

Las trayectorias de tensiones o deformaciones aplicadas en un determinado ensayo están limitadas por el mismo. A continuación, se indican algunos de estos ensayos (Sayao, 1989):

- Ensayos sin rotación de las tensiones principales ($\alpha_\sigma = cte$)
 - Ensayos triaxiales axisimétricos (Bishop y Henkel 1962; Bishop y Wesley, 1975). Control sobre $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 = \sigma'_3$ en compresión triaxial (ángulo de Lode de 0°) y sobre $\sigma'_1 = \sigma'_2 \geq \sigma'_3$ en extensión triaxial (ángulo de Lode de 30°).
 - Ensayos biaxiales con deformación plana (Cornforth, 1964; Campanella y Vaid, 1973). Con $\epsilon_2 = 0$ y control sobre σ'_1 y σ'_3 .
 - Ensayos triaxiales verdaderos (Kjellman, 1936; Ko y Scott, 1967; Pearce, 1971). Control sobre σ'_1, σ'_2 y σ'_3 .
 - Cilindro hueco triaxial (Kirkpatrick, 1957; Broms y Ratnam, 1963). Control sobre σ'_1, σ'_2 y σ'_3 .
- Ensayos con rotación de las tensiones principales ($\alpha_\sigma \neq cte$)
 - Ensayos triaxiales axisimétricos con torsión (Habib, 1953; Saada y Baah, 1967). Control sobre $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 = \sigma'_3$ o $\sigma'_1 = \sigma'_2 \geq \sigma'_3$ y $\sin^2(\alpha_\sigma) = b = (\sigma'_2 - \sigma'_3) / (\sigma'_1 - \sigma'_3)$.
 - Ensayos de corte simple (Kjellman, 1951; Roscoe, 1953; Budhu, 1984). Con $\epsilon_2 = \epsilon_x = 0, \epsilon_{xy} = 0, \tau_{xy} = 0$ y control sobre σ'_1, σ'_2 y σ'_3 .
 - Ensayos con célula de corte direccional (Arthur et al., 1977; Sture et al., 1987). Con $\epsilon_2 = \epsilon_z = 0$ y control sobre σ'_1, σ'_3 y α_σ .
 - Cilindro hueco con torsión (Broms y Casbarian, 1965; Hight, 1983; Sayao y Vaid, 1988). Con control sobre σ'_1, σ'_2 y σ'_3 y α_σ .

Donde σ'_{ij} son las componentes del tensor de tensiones efectivas, σ'_i son las tensiones principales efectivas, ϵ_{ij} son las componentes del tensor de deformaciones, ϵ_i son las deformaciones principales y α_σ es el ángulo de rotación de las tensiones principales.

Como se ha expuesto en el apartado 2.3 del presente capítulo, la deformación volumétrica refleja el efecto de cargas isotropas que tienden a incrementar el valor de las fuerzas de contacto entre partículas, mientras que la deformación desviadora generada por la carga desviadora modifica la dirección de dichas fuerzas y afecta considerablemente a la rigidez al corte del suelo.

Algunos trabajos destacables en los que se ha estudiado la historia reciente del suelo en relación con las cargas y deformaciones desviadoras son los realizados en ensayos triaxiales por Richardson (1988), en ensayos de cilindro hueco por Sayao (1989), en ensayos biaxiales por Topolnicki et al. (1990) y en ensayos triaxiales verdaderos por Sture et al. (1988), figura 2.27. No obstante, son pocos los tipos de ensayos referenciados en la lista anterior en los que, además, se han implementado métodos de medida adecuados para el rango de las pequeñas deformaciones (ver apartado 2.2 del presente capítulo).

Entre los ensayos en los que sí se han implementado este tipo de medidas destacan claramente los ensayos triaxiales con medida local de la deformación (por ejemplo, los realizados por

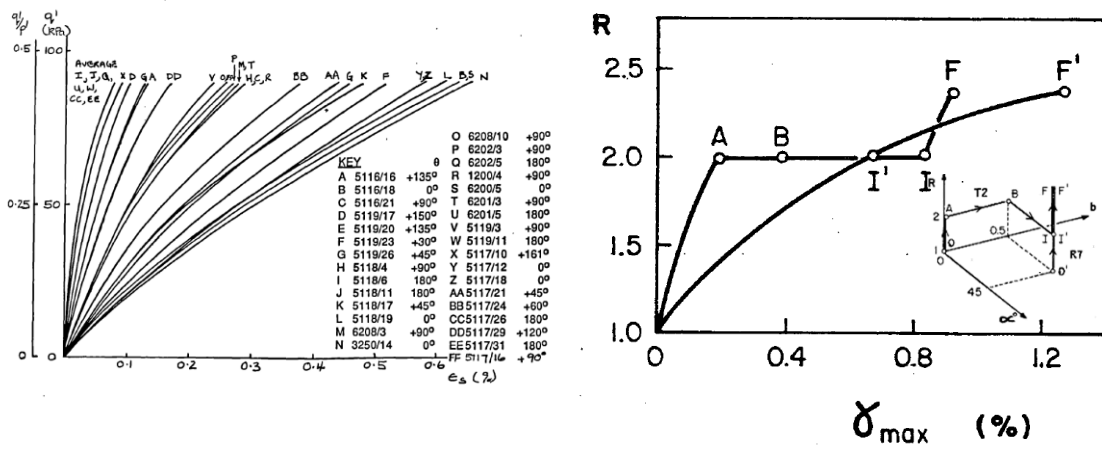
Richardson (1988) a pesar de las limitaciones que presentan en cuanto a las trayectorias posibles de tensiones y deformaciones) así como los ensayos de cilindro hueco realizados por Nishimura (2005) y Nishimura et al. (2008).

La incorporación en modelos constitutivos de suelos de los cambios de rigidez del mismo generados por cambios de dirección en la trayectoria de tensiones ha sido desarrollada por autores como Prévost (1977, 1978), Hueckel y Nova (1979), Whittle (1987), Richardson (1988), Al-Tabbaa y Wood (1989), Atkinson et al. (1990), Stallebrass (1990), Stallebrass y Taylor (1997) y Puzrin y Burland (1998), figura 2.28a y 2.28b.

Por otro lado, la incorporación en modelos constitutivos de suelos de los cambios de rigidez del mismo generados por cambios en la dirección de las deformaciones ha sido desarrollada por Simpson et al. (1979), Simpson (1992), Niemunis y Herle (1997), Benz (2007), Niemunis et al. (2011a, 2011b) y Schädlich y Schweiger (2012), figura 2.28c y 2.28d. Asimismo, el efecto de fluencia y relajación generados por periodos de reposo entre cargas ha sido estudiado en profundidad por Clayton y Heymann (2001), Gasparre (2005) y Gasparre et al. (2007).

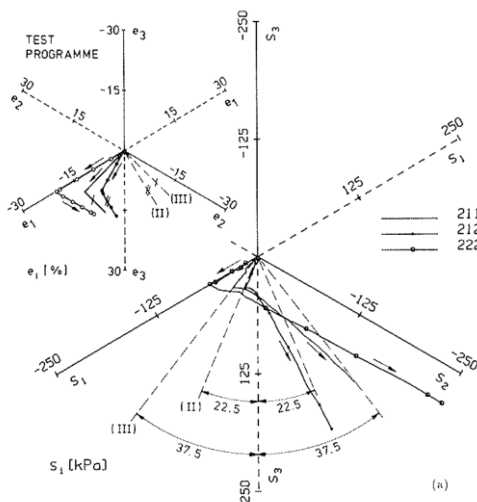
En el trabajo de Atkinson et al. (1990) se pueden ver los resultados de un conjunto de ensayos triaxiales sobre muestras reconstituidas sobreconsolidadas ($OCR = 2$) con arcilla de Londres (figura 2.29). Todas ellas se llevaron, inicialmente, a un mismo estado de tensiones (O en la figura 2.29a) utilizando trayectorias tensionales diferentes (PO y QO en la figura 2.29a). Tras un periodo de reposo de 3h fueron sometidas a una fase desviadora de $\Delta q = 90kPa$ con $p' = cte$ (OA en la figura 2.29a). Como se puede ver en la figura 2.29b, la rigidez del suelo durante la trayectoria OA depende del ángulo de dicha trayectoria respecto a las trayectorias previas (PQ y QO). A mayor ángulo entre trayectorias, mayor valor de la rigidez al corte G_0 al inicio de la nueva trayectoria. Estos ensayos se simulan con el modelo desarrollado en el presente trabajo y se analizan en detalle los resultados obtenidos en el apartado 6.2.7 del capítulo 6.

Clayton y Heymann (2001) realizaron ensayos sobre muestras naturales de arcilla de Londres, cuyas trayectorias pueden verse en la figura 2.30a. Tras finalizar la fase AB dejaron reposar las muestras durante un periodo de 6-12 días antes de iniciar las fases de extensión (BE) y compresión (BC) triaxial, permitiendo así la fluencia del suelo, lo cual no sucedía en los ensayos de Atkinson et al. (1990), en los que se dejaba únicamente un periodo de reposo de 3h. De este modo, Clayton y Heymann (2001) observaron como las deformaciones generadas por la fluencia reducían notablemente el efecto de la historia reciente del suelo sobre el valor G_0 (Richardson (1988) había observado un comportamiento similar en sus experimentos). No obstante, a pesar de esta atenuación del efecto del giro de trayectorias sobre el valor de G_0 , en la figura 2.30 se observa cómo, incluso permitiendo la fluencia del suelo, la historia de tensiones sigue teniendo cierto efecto sobre la forma de la curva de degradación.

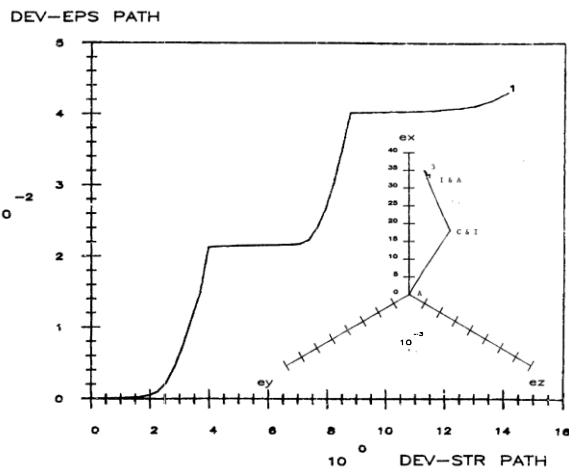


(a)

(b)



(c)



(d)

Figura 2.27. (a) Ensayo triaxial: trayectorias de tensiones en el plano $q/p' - \epsilon_s = 2/3(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ con diferentes ángulos $\tan(\theta_{q/p'}) = \Delta q/\Delta p'$ en arcilla de Londres reconstituida, con $OCR = 2$ y $p' = 200kPa$ (Richardson, 1988). (b) Ensayo de cilindro hueco: trayectorias de tensiones y deformaciones en el plano $R = \sigma'_1/\sigma'_2 - \gamma_{max}$, donde $\alpha = \alpha_\sigma$ es el ángulo de giro de las tensiones principales, en una arena de Ottawa con $p' = 300kPa$ y $Dr = 36\%$ (Sayao, 1989). (c) Ensayo biaxial: trayectorias de deformaciones y tensiones en los respectivos planos desviadores en una arcilla de Karlsruhe reconstituida (Topolnicki et al., 1990). (d) Ensayo triaxial verdadero: trayectoria de deformaciones en el plano desviador y gráfico tensión desviadora $\sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ - deformación desviadora $\sqrt{\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}}$ en una arena de Leighton Buzzard con $Dr = 72\%$ (Sture et al., 1988).

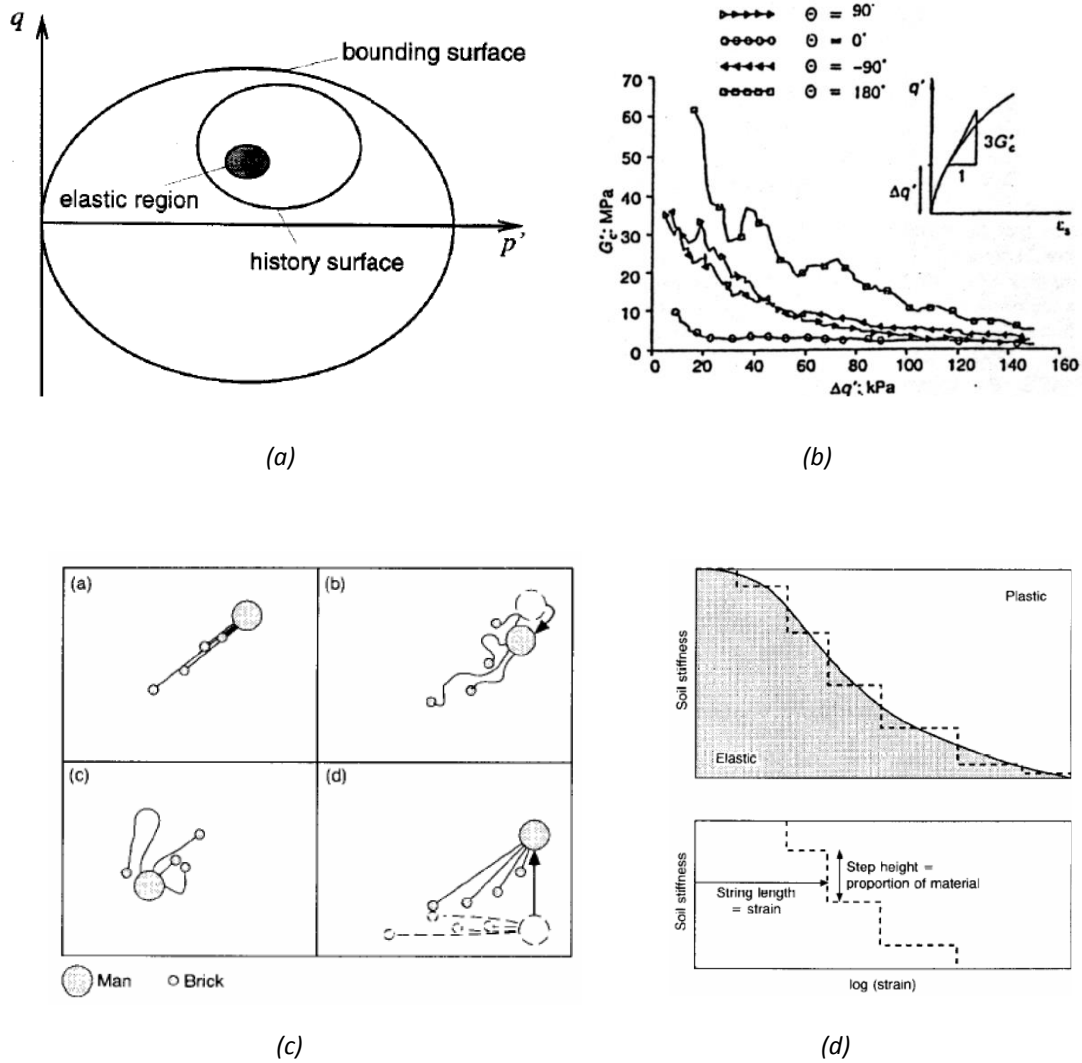


Figura 2.28. Arriba: modelo 3-SKH de Stallebrass y Taylor (1997).

(a) Superficies en el espacio de tensiones. (b) Curvas de degradación del módulo de corte tangente en ensayos triaxiales no drenados en caolín Speswhite con $p' = 300\text{kPa}$.

Abajo: Modelo de bloques de Simpson (1992).

(c) Analogía de bloques en el espacio de deformaciones. (d) Curva de degradación.

Gasparre (2005) estudió los efectos de las deformaciones por fluencia sobre el valor de la rigidez del suelo (a través del control de los tiempos de reposo de la muestra antes de aplicar nuevas trayectorias), así como los efectos de la magnitud del incremento de carga previo al giro de trayectorias, ampliando las investigaciones de Atkinson et al. (1990) y de Clayton y Heymann (2001). Gasparre et al. (2007) realizaron un conjunto de ensayos sobre muestras naturales de arcilla de Londres (figura 2.31), en las que se observó lo siguiente:

- Cuando el estado tensional en la historia reciente se mantiene dentro del contorno Y_2 (Zona I o II según Jardine (1992)).
 - Si se permite desarrollar deformaciones por fluencia, se reduce el efecto del giro de la trayectoria de tensiones sobre la rigidez a corte del suelo, figura 2.31a (tal como observaron Clayton y Heymann (2001)).
 - Si no se permite desarrollar deformaciones por fluencia, se tiene el mismo comportamiento observado por Atkinson (1990), es decir, una clara dependencia del valor de G_0 con el giro de trayectoria de tensiones, figura 2.31b.
- Cuando el estado tensional en la historia reciente tiende a superar y desplazar el contorno Y_2 (Zona III o IV según Jardine (1992)).
 - Se observa una clara dependencia de G_0 y, especialmente, de la forma de la curva de degradación, con el giro de la trayectoria de tensiones, independientemente de que se permita o no la fluencia antes de iniciar la trayectoria tensional posterior al giro realizado, figura 2.31c.

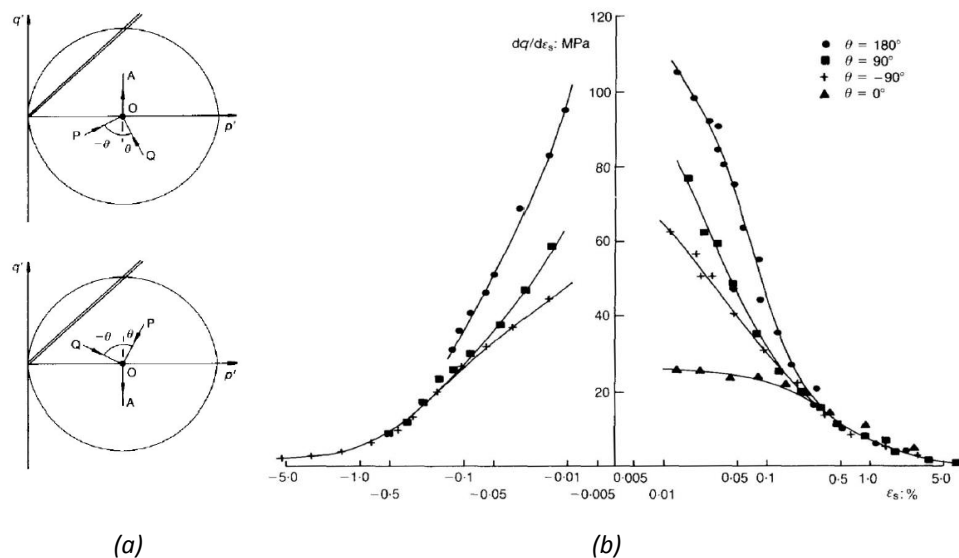


Figura 2.29. Ensayos triaxiales no drenados sobre arcilla de Londres reconstituida (Atkinson et al., 1990). (a) Trayectorias seguidas en los ensayos. (b) Efecto de la historia reciente de tensiones sobre la rigidez del suelo.

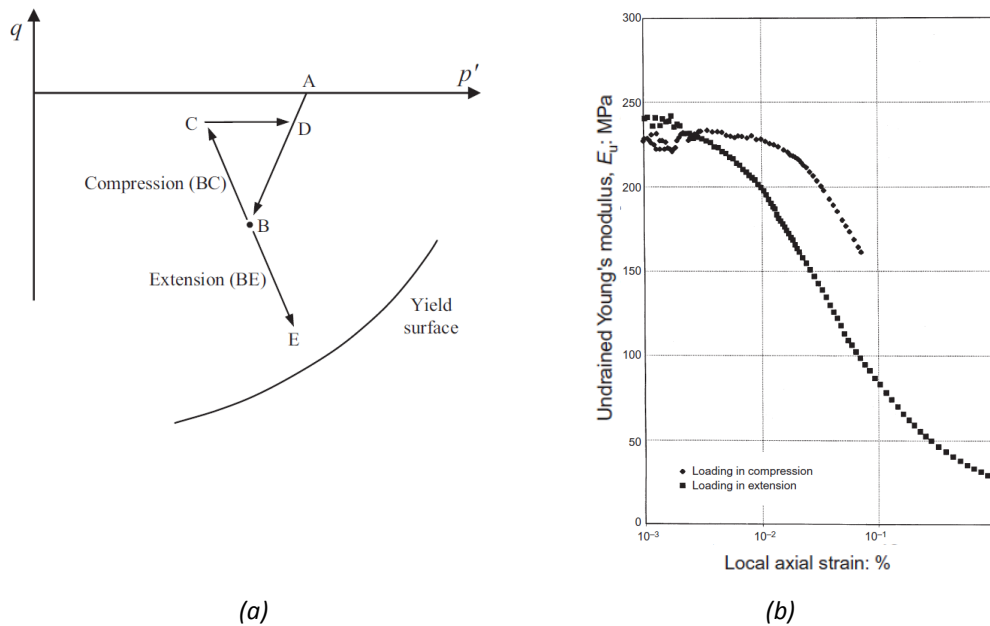


Figura 2.30. Ensayos triaxiales no drenados sobre arcilla de Londres (Clayton y Heymann, 2001). (a) Trayectorias tensionales seguidas. (b) Módulo longitudinal no drenado E_u en trayectorias BC y BE.

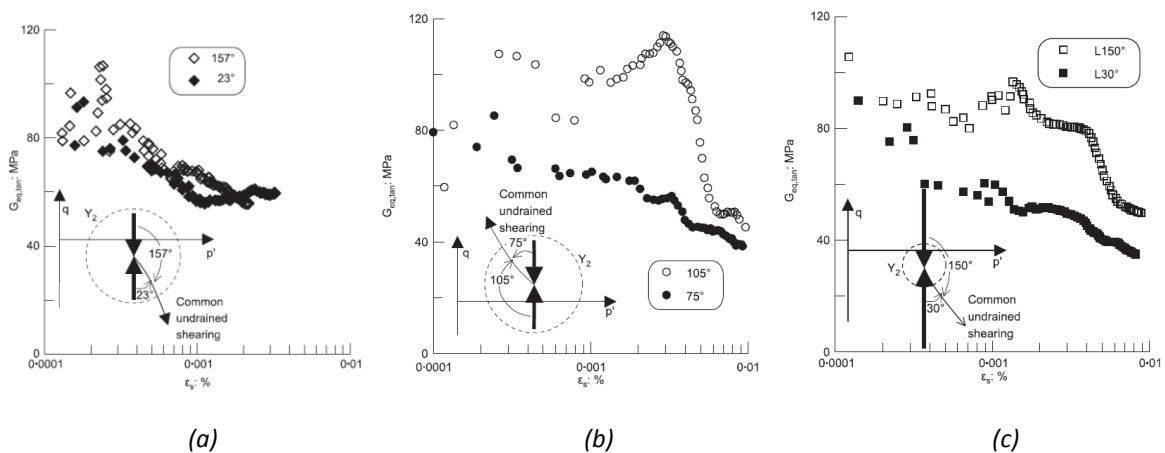


Figura 2.31. Curvas de degradación en ensayos triaxiales no drenados en arcilla de Londres ($G_{eq,tan} \equiv \dot{q}/3\dot{\epsilon}_s$, siendo \dot{q} el incremento de la tensión desviadora y $\dot{\epsilon}_s$ el incremento de la deformación total desviadora) (Gasparre et al., 2007). (a) Dentro de Y_2 (Zonas I o II según Jardine (1992)) permitiendo la fluencia. (b) Dentro de Y_2 (Zonas I o II) sin permitir la fluencia. (c) Sobrepasando y desplazando Y_2 (Zonas III o IV según Jardine (1992)), permitiendo o no la fluencia.

- **Velocidad de carga y efectos de inercia:** Existen numerosos ensayos experimentales sobre suelos plásticos que muestran la dependencia de la rigidez de estos con la velocidad en la que son deformados, efecto que se atribuye a la viscosidad y la plasticidad de los mismos. En arenas, generalmente, este efecto es muy pequeño o inexistente (Hicher, 1996).

Por otro lado, el efecto de la velocidad de carga es despreciable en el rango de las pequeñas deformaciones $\gamma < 0.001\%$ (Tatsuoka y Shibuya, 1992), e incrementa su relevancia para deformaciones medias $0.01\% < \gamma < 0.1\%$ (Sorensen et al., 2007), como se puede ver en la figura 2.32.

Yong y Japp (1967) definieron el factor de velocidad de deformación del módulo de corte (figura 2.33) de la siguiente manera:

$$\alpha_G = \frac{\Delta G}{\Delta(\log(\dot{\gamma}))} \tag{2.27}$$

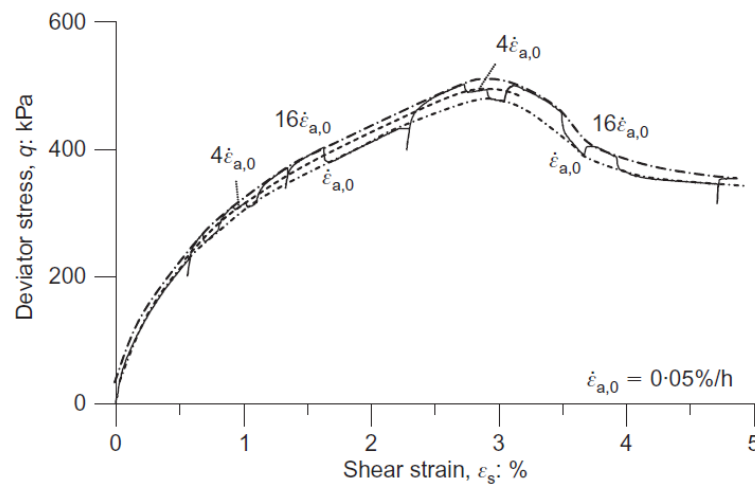


Figura 2.32. Efecto de los cambios de velocidad de deformación sobre la rigidez durante la fase desviadora de un ensayo triaxial no drenado sobre una muestra de arcilla de Londres intacta (Sorensen et al., 2007).

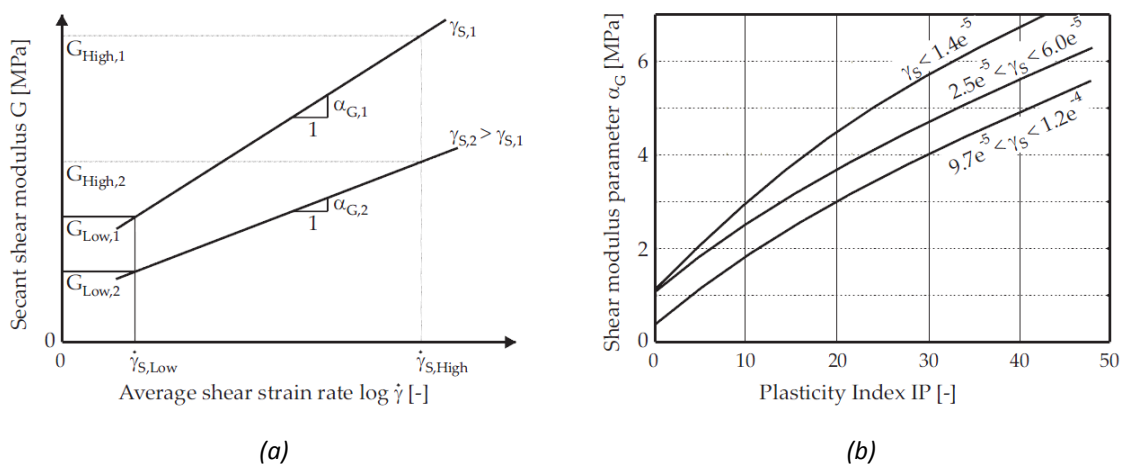


Figura 2.33. Factor de velocidad de deformación del módulo de corte (Vucetic et al. (2003), extraído de la tesis de Benz (2007)). (a) Dependencia con la velocidad de deformación y la amplitud de deformación. (b) Dependencia con el IP.

- **Correlaciones para el cálculo de G_0 :** Se han propuesto múltiples correlaciones para calcular el valor del módulo de corte máximo del suelo, varias de las cuales se pueden encontrar en Obrzud y Truty (2018). A continuación se proporcionan algunas expresiones para el cálculo de $G_{0(ij)}$ en un plano i según la dirección j , basadas en las relaciones comentadas anteriormente que, además, introducen el efecto de la anisotropía del suelo, expuesto brevemente en el apartado 2.4 del presente capítulo:

Hardin y Black (1968):

$$G_{0(ij)} = \hat{A} f(e) (OCR)^{\hat{k}} (p'_{ref})^{-m_{ij}} (p')^{m_{ij}} \quad (2.28)$$

Hardin y Blandford (1989):

$$G_{0(ij)} = S_{ij} f(e) (OCR)^{\hat{k}} (p'_{ref})^{(1-n_i-n_j)} (\sigma'_i)^{n_i} (\sigma'_j)^{n_j} \quad (2.29)$$

Rampello et al. (1997):

$$G_{0(ij)} = S_{ij} f(e) (OCR)^{\hat{k}} p' \bar{\beta}^{n/2} \quad (2.30)$$

Pennington (1999):

$$G_{0(ij)} = S_{ij} f(e) (OCR)^{\hat{k}} (p')^{n_{ij}} (p'_{ref})^{(1-n_{ij})} \bar{\beta}_{ij}^{n_{ij}/2} \quad (2.31)$$

Pennington (1999):

$$G_{0(ij)} = S_{ij} f(e) (OCR)^{\hat{k}} (p'_{ref})^{(1-n_i-n_j-n_k)} (\sigma'_i)^{n_i} (\sigma'_j)^{n_j} (\sigma'_k)^{n_k} \quad (2.32)$$

Donde \hat{A} es un parámetro del suelo, S_{ij} son parámetros adimensionales del suelo capaces de reflejar la anisotropía debida a la fábrica, $f(e)$ es una función del índice de poros (por ejemplo, según las expresiones 2.20, 2.21 o 2.22), OCR es el índice de sobreconsolidación del suelo, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3 \sigma'_{ii}$ es la presión media, p'_{ref} es una presión de referencia (generalmente $p'_{ref} = p_a$), $\bar{\beta} = (1 + \eta/3 - 2\eta^2/9)$, $\bar{\beta}_{vh} = \bar{\beta}_{hv} = (1 + \eta/3 - 2\eta^2/9)$ y $\bar{\beta}_{hh} = (1 - \eta/3)^2$ son funciones de la ratio tensional $\eta = q/p'$, $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora en un estado triaxial de tensiones, σ'_i , σ'_j y σ'_k son las tensiones principales que actúan, respectivamente, en los planos i , j y k , y \hat{k} , m_{ij} , n , n_i , n_j , n_k y n_{ij} son parámetros del suelo.

Por otro lado, algunas relaciones empíricas que resultan útiles para estimar el valor de G_0 a partir del valor N_{60} del ensayo *Standard Penetration Test (SPT)* del tipo $G_0 = A'(N_{60})^{B'}$, donde A' y B' son parámetros del suelo, son las dadas por Imai y Yoshimura (1970), Ohta et al. (1972), Ohsaki e Iwasaki (1973), Hara et al. (1974) o Imai y Tonouchi (1982).

2.5.3. Consideraciones sobre el comportamiento histerético

2.5.3.1. Elementos constitutivos del comportamiento histerético

Un elemento fundamental que deben considerar los modelos constitutivos para reproducir el comportamiento del suelo en la Zona II de Jardine (1992), juntamente con la no linealidad y la dependencia de la historia reciente, es la histéresis (figura 2.34).

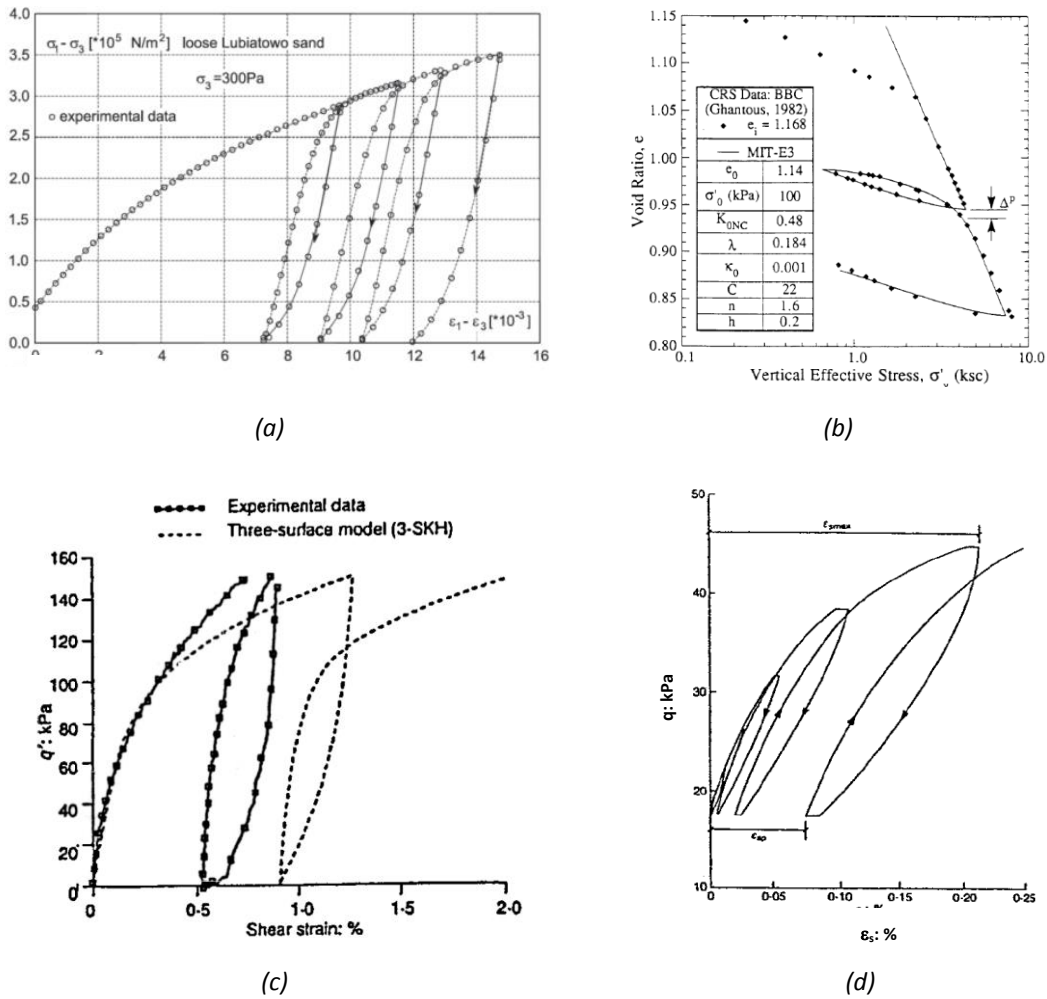


Figura 2.34. (a) Ciclos de carga en ensayos triaxiales con arena suelta de Lubiatowo (Swidzinski, 2000).
 (b) Ensayo de consolidación sobre una arcilla azul de Boston (Whittle et al., 1994).
 (c) Ciclos de carga en ensayos triaxiales no drenados con $p' = 300$ kPa en una arcilla caolinita Speswhite (Stallebrass y Taylor, 1997). (d) Ciclos de carga en ensayos triaxiales drenados (Smith et al., 1992).

El suelo es un material formado por partículas y, por tanto, experimentará disipación de energía durante ciclos de carga, que dará lugar un comportamiento de tipo histerético (Sellers, 1989). No obstante, tal como indica Cudny (2013), no está claro el mecanismo micromecánico a través del cual el suelo disipa energía durante dichos ciclos. Cudny apunta a dos posibles explicaciones:

- La energía disipada es el resultado de un proceso de fluencia local y fricción en los contactos entre partículas, que se ven sometidas a fuerzas normales y de corte, en cuyo caso, la energía absorbida por el suelo sería una función de la amplitud de la deformación (Iwasaki et al., 1978).
- La energía disipada es el resultado de un comportamiento de tipo viscoso debido a la presencia de fluido en los poros del suelo (Abbis, 1986).

Como indican Hueckel y Nova (1979) en su trabajo fundamental sobre el comportamiento histerético en suelos, los ciclos histeréticos se caracterizan por tener diferentes rigideces aparentes tras giros en las trayectorias de tensiones o deformaciones. Si se considera un comportamiento histerético perfecto, las

deformaciones sólo serían recuperables en caso de que se cerraran los ciclos que partieran desde un mismo punto de reversión. No obstante, según Hueckel y Nova, en la realidad no existen ciclos histeréticos perfectos, observándose generalmente:

- Cierta deformación permanente tras el cierre de los ciclos, que depende del número de estos.
- Efectos de tipo viscoso o endurecimiento/reblandecimiento cíclico (Eisenberg y Phillips, 1971; Valanis, 1972; Dafalias y Popov, 1975, 1976; Prévost, 1977; Cuellar, 1978).
- Dependencia de la rigidez en descargas/recargas con la magnitud de la deformación plástica acumulada, denominado acoplamiento elastoplástico (Bieniawski, 1971; Hueckel, 1976; Maier y Hueckel, 1979).

Como se ha comentado en el apartado 2.5.1 del presente capítulo, según Gudehus (2011), para reproducir el comportamiento histerético del suelo es necesario definir variables de estado ocultas χ^{hist} , dentro del conjunto de variables de estado χ , que no pueden ser observadas macroscópicamente. Es posible atribuir también a las mismas la no linealidad y la dependencia del comportamiento del suelo con su historia reciente. Dichas variables representan la fluctuación espacial de las cadenas de fuerzas internas entre partículas del suelo, efecto al cual Gudehus denomina fuerza-rozamiento (*force-roughness*).

Para introducir el comportamiento histerético en los modelos constitutivos de suelos, así como parte del efecto de la historia reciente en el suelo tal como se ha descrito en el apartado 2.5.2.2 del presente capítulo, es necesario distinguir y definir los siguientes conceptos en cada uno de ellos, que se relacionan directamente con las variables de estado mencionadas en el párrafo anterior:

1. Criterios de reversión
2. Reglas de memoria
3. Efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación
4. Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo

Como se ha comentado en el apartado 2.5.1 del presente capítulo, y como se expone en detalle en el apartado 2.6 del mismo, sólo los modelos incrementalmente multilineales o no lineales permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo.

2.5.3.1.1. Criterios de reversión

Los modelos que tienen en cuenta el comportamiento histerético del suelo utilizan criterios de reversión que permiten identificar puntos en los que se producen cambios de dirección en las trayectorias de tensiones o deformaciones, cuyo efecto induce cambios en la rigidez del suelo. Estos criterios pueden dividirse en lo que se ha denominado como “criterios de reversión extrínsecos o intrínsecos (a las ecuaciones constitutivas fundamentales de los modelos)”.

Criterios de reversión extrínsecos

En este caso, se definen uno o más criterios de carga y descarga que se añaden a las ecuaciones del modelo. Estos criterios normalmente se formulan en base a las tensiones, deformaciones o energía/potencia.

Un criterio sencillo para identificar puntos de reversión en modelos unidimensionales es el cambio de signo de los incrementos de tensiones, deformaciones o de la potencia tensional. No obstante, cuando se generalizan estos modelos al caso multiaxial, los criterios de reversión se pueden complicar notablemente.

Modelos como el de Yu (1995) o Gryczmanski et al. (1998) utilizan criterios de reversión extrínsecos que depende de las tensiones, mientras que modelos como el de Whittle (1987), Bolton et al. (1994), Pestana y Whittle (1999), Papadimitriou (2001) y Benz (2007), así como Ganendra (1994), utilizan criterios de reversión extrínsecos que depende de las deformaciones. Asimismo, algunos modelos, como el de Davis y Mullenger (1978) utilizan criterios de reversión extrínsecos que dependen de la potencia tensional.

Criterios de reversión intrínsecos

En este caso, los criterios de carga o descarga surgen naturalmente de las propias ecuaciones del modelo constitutivo.

Modelos como el de Prévost (1977, 1978), Simpson et al. (1979), Hueckel y Nova (1979), Al-Tabbaa y Wood (1989), Simpson (1992), Stallebrass y Taylor (1997), Niemunis y Herle (1997), Puzrin y Burland (1998), Niemunis et al. (2011) o Schädlich y Schweiger (2012) utilizan este tipo de criterios.

2.5.3.1.2. Reglas de memoria

Las reglas de memoria son aquellas que permiten a los modelos almacenar información de un determinado número de puntos de reversión activos, entendiendo por punto de reversión activo aquel que aparece en t_0 y que puede influir en el comportamiento del suelo para $t > t_0$. En función del número de puntos de reversión activos de los que se almacene información, se tendrá en cuenta toda o parte de la historia reciente del suelo. Las reglas de memoria se encargarían, por tanto, de definir parte de las variables de estado χ^{hist} .

Es posible distinguir tres tipos de modelos en función del número de puntos de reversión de los que almacenan información. Asimismo, los modelos que almacenan sólo parte de esta información podrán reproducir un determinado número finito de ciclos de carga simétrico sin incumplir el primer principio de la termodinámica

Almacenamiento de la información de un único punto de reversión activo

Estos modelos almacenan información del último punto de reversión activo y, por tanto, sólo consideran la historia entre dicho punto de reversión y el estado actual, ofreciendo importantes limitaciones para reproducir el comportamiento histerético del suelo y requiriendo poca memoria computacional para almacenar dicha información.

Algunos ejemplos de este tipo de modelos son el de Simpson et al. (1979), Whittle (1987), Al-Tabbaa y Wood (1989), Bolton et al. (1994), Yu (1995), Puzrin y Burland (1998), Gryczmanski et al. (1998), Pestana y Whittle (1999) y Papadimitriou et al. (2001).

Almacenamiento de la información de varios puntos de reversión activos

Estos modelos almacenan información de un determinado número de puntos reversión activos, por lo que podrán reproducir mejor el comportamiento histerético respecto a los anteriores y tendrán un mayor requerimiento de memoria computacional en relación con estos últimos. Estos modelos utilizan diferentes tipologías de variables de estado para almacenar información, como son, por ejemplo, la situación de las superficies de fluencia en los modelos multisuperficie o de burbujas. El efecto de los puntos de reversión sobre dichas variables depende del grado de reversión que tenga lugar en cada uno de ellos. En caso de que tenga lugar una reversión importante, es posible llegar a borrar el efecto sobre el estado tensodeformacional actual de puntos de reversión activos anteriores, aunque estos sean recientes.

Algunos ejemplos de este tipo de modelos son los de Prévost (1977,1978), Simpson (1992), Stallebrass y Taylor (1997), Niemunis y Herle (1997), y Benz (2007).

Puede almacenar información de todos los puntos de reversión activos

Estos modelos pueden almacenar información de todos los puntos de reversión activos, mejorando significativamente su capacidad para reproducir el comportamiento histerético del suelo, aunque por lo general requerirán un coste computacional elevado. No obstante, a efectos prácticos, este tipo de modelos acaban limitando el número de puntos de reversión de los que almacenan información. La cantidad máxima de puntos de reversión considerados dependerá del número de ciclos de carga que se prevean.

Algunos ejemplos de este tipo de modelos son el de Hueckel y Nova (1979), Niemunis et al. (2011a) y Schädlich y Schweiger (2012) y aquellos que cumplen en su totalidad las Reglas de Masing generalizadas (Masing, 1926; Pyke, 1979).

2.5.3.1.3. Efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación

Los modelos no lineales consideran la degradación de la rigidez de corte con la deformación (apartado 2.5.2.2 del presente capítulo). Los mecanismos que controlan esta degradación se identifican aquí con las variables $Y_i \geq 0$, que pueden considerarse como parte de las variables χ^{hist} , dentro del conjunto de variables de estado χ , que según Gudehus (2011) permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo.

Considerando lo anterior, es posible agrupar estos modelos en dos categorías: aquellos cuyas variables Y_i se reinician totalmente tras una reversión o aquellos en que estas lo pueden hacer total o parcialmente.

La variable que controla la degradación se reinicializa totalmente tras una reversión

Estos modelos consideran que las variables Y_i pasan a valer 0 tras una reversión (figura 2.35), es decir:

$$Y_i = Y_i^{R-} > 0 \rightarrow Y_i = Y_i^{R+} = 0 \quad \forall R \quad (2.33)$$

Donde Y_i^{R-} es el valor de Y_i antes de la reversión R y Y_i^{R+} es el valor de Y_i tras la reversión R .

Ello implica que en estos modelos se alcanza el valor máximo de la rigidez tras una reversión, lo cual no permite simular el comportamiento experimental del suelo descrito en Atkinson et al. (1990) (figura 2.29), Clayton y Heymann (2001) (figura 2.30), Gasparre (2005) o Gasparre et al. (2007) (figura 2.31). Algunos de los modelos que consideran este comportamiento de las variables de degradación son el de Hueckel y Nova (1979), Simpson et al. (1979), Whittle (1987), Al-Tabbaa y Wood (1989), Bolton et al. (1994), Yu (1995), Stallebrass y Taylor (1997), Gryczmanski et al. (1998), Puzrin y Burland (1998), Pestana y Whittle (1999), Papadimitriou et al. (2001), Niemunis et al. (2011a) y varios de los modelos que cumplen las Reglas de Masing generalizadas (Masing, 1926; Pyke, 1979).

La variable que controla la degradación se reinicializa total o parcialmente tras una reversión

Estos modelos consideran que las variables Y_i reducen su valor tras un proceso de degradación (figura 2.35), es decir

$$Y_i = Y_i^{R-} > 0 \rightarrow Y_i = Y_i^{R+} < Y_i^{R-} \quad \forall R \quad (2.34)$$

Donde Y_i^{R-} es el valor de Y_i antes de la reversión R y Y_i^{R+} es el valor de Y_i tras la reversión R .

En función de los valores Y_i^{R+} se obtienen diferentes valores de la rigidez tras una reversión. Este tipo de modelos permite simular el comportamiento experimental del suelo descrito en Atkinson et al. (1990) (figura 2.29), Clayton y Heymann (2001) (figura 2.30), Gasparre (2005) o Gasparre et al. (2007) (figura 2.31). Algunos de los modelos que consideran este

comportamiento en su variable de degradación son el de Prévost (1977, 1978), Simpson (1992), Niemunis y Herle (1997), Benz (2007) y Schädlich y Schweiger (2012).

En ensayos experimentales suele medirse la curva de degradación, tras una determinada reversión, imponiendo un valor $\gamma_i^{R+} = 0$, independientemente del grado de dicha reversión. Ello es debido, en parte, al desconocimiento real del valor de la variable γ_i tras la reversión, al tratarse γ_i , como parte de χ^{hist} , de variables de estado ocultas que representan la fluctuación espacial de las cadenas de fuerzas internas entre partículas del suelo (Gudehus, 2011). Para identificar y medir este tipo de variables sería necesario utilizar técnicas de monitorización de la deformación/fuerzas de contacto a nivel micromecánico.

Los modelos que consideran que las variables γ_i pueden reiniciarse parcialmente tras una reversión, son capaces de reproducir diferentes curvas de degradación para diferentes grados de reversión (figura 2.35).

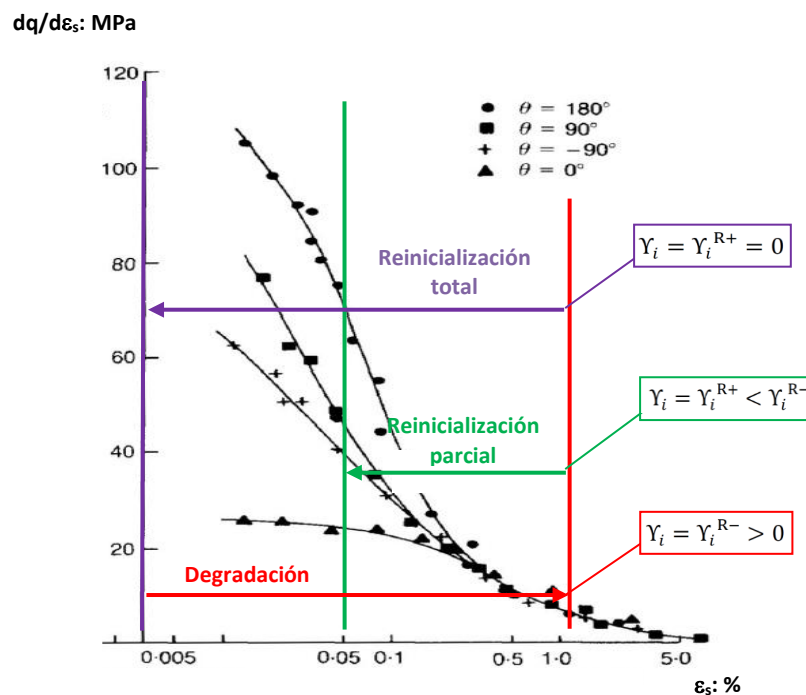


Figura 2.35. Efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación, dibujado sobre el gráfico de degradación del módulo de corte de arcilla de Londres, extraído de Atkinson et al. (1990).

- En caso de que la curva de degradación definida en un modelo sea única, es decir, sea definida a partir de un único valor del módulo de rigidez al corte máximo G_0 , las curvas de degradación experimentales correspondientes a reversiones parciales podrán reproducirse en las simulaciones mediante la deformación de un determinado tramo de dicha curva única, tal y como se muestra en la figura 2.36a.

- En caso de que se definan diferentes curvas de degradación en un modelo, a partir de diferentes valores del módulo de rigidez al corte máximo G_0^α , las curvas de degradación experimentales podrán reproducirse en las simulaciones sin deformación de las curvas teóricas y coincidirán con estas, tal como se muestra en la figura 2.36b. No obstante, por cuestiones prácticas, no es posible calibrar las curvas de degradación correspondientes a cada grado de reversión, por lo que dicha calibración se hará únicamente en un número finito de estas, sufriendo cierta deformación aquellas curvas interpoladas a partir de las calibradas. Esto último implicará que, a pesar de la mejora en la aproximación experimental, algunas de las curvas de degradación simuladas sí sufrirán deformaciones.

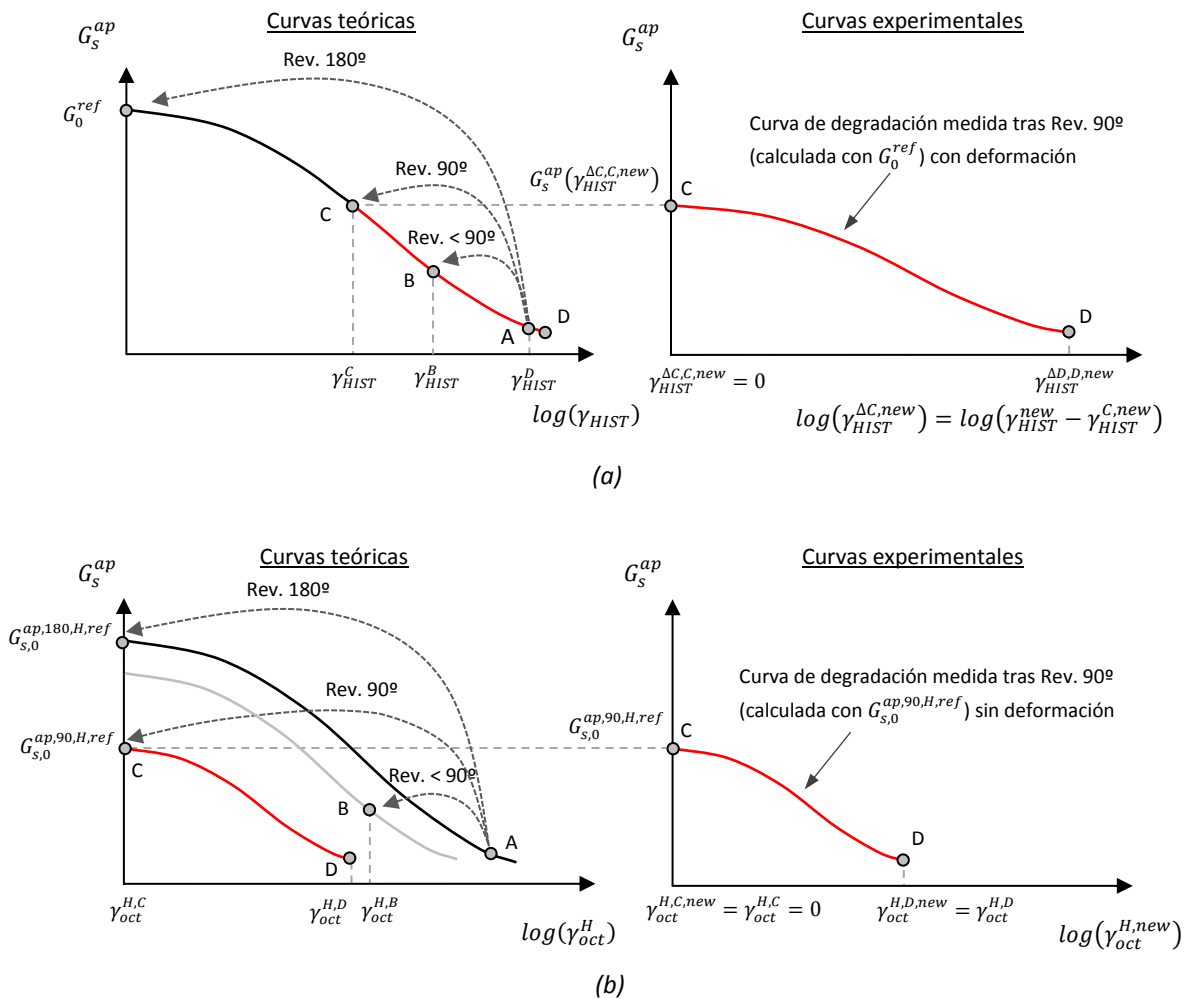


Figura 2.36. Efecto de una reversión de 90°.

(a) En el modelo SSOM con deformación de la curva de degradación.

(b) El modelo HQH desarrollado en el capítulo 3, sin deformación de la curva de degradación.

2.5.3.1.4. Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo

Los modelos no lineales consideran la degradación de la rigidez de corte con la deformación (apartado 2.5.2.2 del presente capítulo). Experimentalmente se observa como la magnitud de la recuperación de la rigidez al corte depende del grado de la reversión (ángulo de reversión), tal como se muestra en las figuras 2.29 y tal como se ha comentado en el apartado anterior. En este sentido, es posible realizar dos grandes clasificaciones de los modelos:

1. En función de si la recuperación de la rigidez del suelo tras una reversión es discontinua o continua con el giro de la trayectoria tensodeformacional reciente.
2. En función de si la reversión es siempre total tras una reversión o esta puede ser parcial o total tras la misma.

Introduciendo la segunda clasificación dentro de la primera, los modelos se clasifican como:

Recuperación de la rigidez de forma discontinua con el ángulo giro de la trayectoria tensodeformacional reciente

En este grupo se integran aquellos modelos en los que la recuperación de la rigidez del suelo se da de forma discontinua (escalonada) según el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente. Ello se debe a que las variables Y_i que controlan el proceso de degradación de la rigidez al corte sufren saltos finitos en su valor para ciertos valores de dicho giro (figura 2.37a). Estos modelos serán, por tanto, incrementalmente multilineales. A su vez, se distinguen, en este grupo, los modelos que consideran una recuperación total tras una reversión o bien una recuperación que puede ser parcial o total (figura 2.37b).

Modelos como el de Hueckel y Nova (1979), Simpson et al. (1979), Whittle (1987), Al-Tabbaa y Wood (1989), Bolton et al. (1994), Yu (1995), Stallebrass y Taylor (1997), Puzrin y Burland (1998), Gryczmanski et al. (1998), Pestana y Whittle (1999), Papadimitriou et al. (2001), Niemunis et al. (2011a) o todos aquellos que aplican en su totalidad las Reglas de Masing generalizadas, consideran una recuperación total de la rigidez tras una reversión y, por tanto, esta será discontinua con el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente. Por otro lado, modelos como el de Prévost (1977, 1978), Simpson (1992), Benz (2007) o Schädlich y Schweiger (2012) consideran una recuperación total o parcial tras una reversión que, además, será discontinua con el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente, si bien el número de superficies en el modelo de Prévost, el número de bloques en el modelo de Simpson o el número de planos en el modelo de Schädlich y Schweiger permite considerar, a efectos prácticos, una recuperación casi continua con dicho ángulo de giro.

Este tipo de modelos no siempre cumplen con la condición de continuidad de las zonas tensoriales descritas en el apartado 2.6 del presente capítulo.

Recuperación de la rigidez de forma continua con el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente

En este grupo se integran aquellos modelos en los que la recuperación de la rigidez del suelo se da de forma continua según el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente.

Ello se debe a que las variables Y_i que controlan el proceso de degradación de la rigidez al corte varían de forma continua con los valores de dicho giro (figura 2.37a). Estos modelos serán, por tanto, incrementalmente no lineales. En este caso, todos los modelos consideran que la recuperación de la rigidez puede ser parcial o total (figura 2.37b).

El modelo de Niemunis y Herle (1997) considera una recuperación parcial o total tras una reversión y la recuperación de la rigidez es continua con los valores del giro de la trayectoria de deformaciones.

Este tipo de modelos cumple con la condición de continuidad de las zonas tensoriales descritas en el apartado 2.6 del presente capítulo.

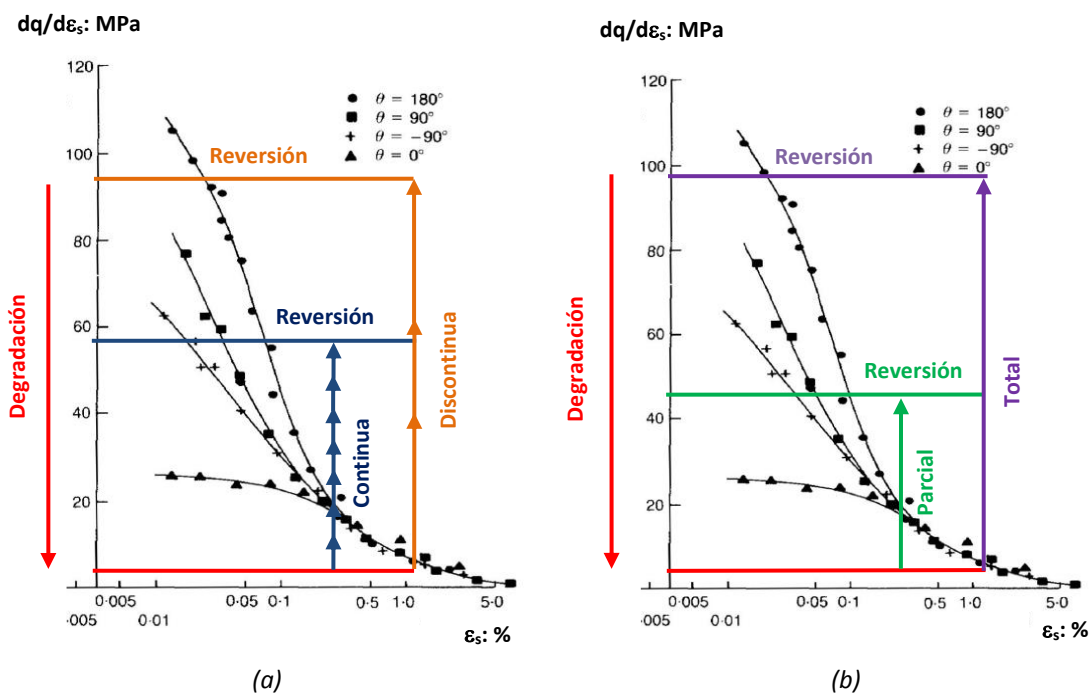


Figura 2.37. Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima según los dos criterios definidos, dibujado sobre el gráfico de degradación de arcilla de Londres extraído de Atkinson et al. (1990).
 (a) Recuperación continua o discontinua según el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente. (b) Recuperación total o parcial de la rigidez.

2.6. Modelación constitutiva

Tal como propone Popper (1959), los modelos teóricos pueden capturar parte de la realidad si son lógicamente consistentes y las hipótesis que utilizan no son refutadas por las observaciones.

Hoy en día existen varios marcos teóricos que tratan de explicar diferentes aspectos del comportamiento del suelo. Dentro de estos marcos teóricos se han desarrollado, durante las últimas

décadas, varios modelos constitutivos de suelos que tienen en cuenta el comportamiento mecánico del mismo en el rango de las pequeñas deformaciones.

En el presente apartado se analizan algunos de estos modelos y se destacan sus aportaciones más relevantes. Este análisis será fundamental para el desarrollo del modelo constitutivo propuesto en los capítulos 3 y 5.

La modelación constitutiva mecánica de los suelos se enmarca en los problemas mecánicos de medios continuos, conformados por un conjunto de ecuaciones generales de conservación y balance y una ecuación constitutiva particular.

En el presente trabajo se consideran:

- Materiales simples en el sentido de Truesdell y Noll (1965), que son aquellos en los que se puede determinar su comportamiento durante cualquier proceso de deformación, siempre que se conozca este en procesos de deformación homogéneos, es decir, siempre que el gradiente $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{X}, t)$ sea constante.
- Problemas de tipo cuasi-estático ($\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$).
- Materiales homogéneos (no viscosos).
- Condiciones isoterma ($T = T_0$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ y $r = 0$).
- Hipótesis de pequeñas deformaciones ($(\nabla\mathbf{u})^T \cdot \nabla\mathbf{u} \ll \nabla\mathbf{u}$).

Bajo estos supuestos, se considera el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, su frontera $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$, siendo Γ_N la frontera con condiciones de contorno tipo Dirichlet y Γ_D la frontera con condiciones de contorno tipo Neumann, y un punto $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \in \Omega \cup \Gamma$. Las ecuaciones del problema mecánico planteado son las siguientes:

1. Conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho_{soil}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.35)$$

2. Conservación del momento lineal:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \rho_{soil} \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (2.36)$$

3. Conservación del momento angular:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'^T \quad \text{en } \Omega \quad (2.37)$$

4. Tensor de deformaciones para pequeñas deformaciones:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \quad \text{en } \Omega \quad (2.38)$$

5. Ecuación de compatibilidad:

$$\nabla \times (\boldsymbol{\epsilon} \times \nabla) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (2.39)$$

6. Primer Principio de la Termodinámica:

$$\rho_{soil}\dot{u} = \nabla^S \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{en } \Omega \quad (2.40)$$

7. Segundo Principio de la Termodinámica:

$$\rho_{soil}\dot{S} + \frac{1}{T_0} \nabla^S \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{T_0} \rho_{soil}\dot{u} \geq 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.41)$$

8. Ecuación constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathcal{F}[\mathbf{F}(\tau)] \quad -\infty < \tau \leq t \quad \text{en } \Omega \quad (2.42)$$

9. Condiciones de contorno:

$$\boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{n}) \quad \text{en } \Gamma_N \quad (2.43)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o \quad \text{en } \Gamma_D \quad (2.44)$$

Donde $\nabla^S(\cdot) = 1/2(\nabla(\cdot) + \nabla^T(\cdot))$ es el operador gradiente simétrico, \mathbf{v} es la velocidad en $\mathbf{x} \in \Omega$, \mathbf{q} es el flujo de calor en $\mathbf{x} \in \Gamma$, \mathbf{b} es el vector de fuerzas másicas, r es una fuente de calor en $\mathbf{x} \in \Omega$, $\rho_{soil} = \rho_s(1 - n) + \rho_w n S r$ es la densidad del medio en $\mathbf{x} \in \Omega$ que depende de la densidad de las partículas sólidas ρ_s , la densidad del agua ρ_w , la porosidad n y el grado de saturación $S r$, $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - p_w \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ son, respectivamente, el tensor de tensiones efectivas y el tensor de deformaciones en $\mathbf{x} \in \Omega$, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones totales en $\mathbf{x} \in \Omega$, p_w es la presión de agua en $\mathbf{x} \in \Omega$, \mathbf{u} es el desplazamiento en $\mathbf{x} \in \Omega$, \dot{u} es la variación de energía interna en $\mathbf{x} \in \Omega$, \dot{S} es la variación de entropía total en $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathcal{F}[\cdot]$ es un funcional que relaciona la historia del gradiente de deformación $\mathbf{F}(\tau)$ entre $-\infty < \tau \leq t$ con la tensión $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ en $\mathbf{x} \in \Omega$, \mathbf{n} es la dirección normal al plano sobre el que actúa el vector de tracción $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ en $\mathbf{x} \in \Gamma_N$ y \mathbf{u}_o es el desplazamiento prescrito en $\mathbf{x} \in \Gamma_D$.

La consideración de un funcional \mathcal{F} , y no de una función, proviene de la necesidad de reproducir el comportamiento irreversible del suelo. En este tipo de comportamientos, conocer el estado de deformación $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ en un instante determinado t no permite conocer el estado tensional en dicho instante y viceversa (Darve y Servant, 2004). Asimismo, no cualquier funcional \mathcal{F} representará una relación constitutiva válida. La determinación de las restricciones que debe satisfacer una relación constitutiva es uno de los mayores problemas de la mecánica de materiales (Truesdell y Noll, 1965). Aunque dicho problema no está resuelto, sí se ha establecido un conjunto de axiomas que se considera que debe satisfacer cualquier relación constitutiva.

- **Axioma de causalidad:** La variable independiente en las leyes constitutivas de problemas mecánicos es la posición $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$, siendo \mathbf{X} la coordenada material y t el tiempo. El resto de variables del problema son las denominadas variables dependientes y se obtienen a partir de la variable independiente.
- **Axioma de determinismo:** La respuesta constitutiva en un punto \mathbf{x} en un instante t viene determinado por la historia del movimiento de todos los puntos del cuerpo.

- **Axioma de equipresencia:** Si una variable independiente interviene en una ecuación constitutiva, deberá aparecer en todas las ecuaciones constitutivas, a no ser que se demuestre lo contrario.
- **Axioma de vecindad:** Los valores de las variables independientes localizadas en puntos x' distantes a x , no afectan en forma apreciable a los valores de las variables constitutivas en el punto x . Los materiales “de gradiente continuo” son aquellos en los que, asumiendo x suficientemente suave para ser expandida en serie de Taylor, los términos de segundo orden o mayor de dicha serie son despreciables.
- **Axioma de memoria:** Los valores de la variable constitutiva independiente asociados a tiempos pasados y distantes del presente no afectan, en forma apreciable, a los valores de las variables constitutivas dependientes.
- **Axioma de objetividad:** Las ecuaciones constitutivas deben ser invariantes respecto movimientos de sólido rígido del sistema de referencia espacial, $x' = Q \cdot x + b$, con $Q \in SO(3)$ y $b \in \mathbb{R}^3$
- **Axioma de invariancia temporal:** Las ecuaciones constitutivas pueden ser invariantes a determinadas simetrías/transformaciones. En base a lo anterior, se definen materiales con hemitropía, isotropía y anisotropía.
- **Axioma de admisibilidad:** Las ecuaciones constitutivas deben ser consistentes con los principios básicos de la mecánica de medios continuos (conservación de la masa, balance del momento lineal, balance del momento angular y principios termodinámicos).

Tal como demuestran Owen y Williams (1969), un material no viscoso cuyo funcional constitutivo es diferenciable, necesariamente debe ser elástico, en cuyo caso, la relación entre tensión y deformación se puede expresar a través de la función tensorial $F(\cdot)$ de la siguiente manera:

$$\sigma' = F(\epsilon^e) \quad (2.45)$$

Donde σ' es el tensor de tensiones efectivas y ϵ^e es el tensor de deformaciones elásticas.

No obstante, si se pretende simular el comportamiento histerético del suelo, es necesario que los funcionales \mathcal{F} no sean diferenciales ni lineales, lo cual puede llegar a complicar significativamente el problema matemático asociado. Alternativamente, suele recurrirse a formulaciones de tipo incremental en las que el funcional \mathcal{F} se reduce a una función tensorial del tipo siguiente:

$$\dot{\sigma}' = G(\epsilon, \sigma', \chi, \dot{\epsilon}) \quad (2.46)$$

Donde $\dot{\sigma}'$ es el incremento del tensor de tensiones efectivas, χ es el conjunto de variables de estado y $\dot{\epsilon}$ es el incremento del tensor de deformaciones.

Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, se puede demostrar que la forma más general de expresar la ecuación constitutiva (2.46) con funciones isótropas de dos tensores simétricos de segundo orden es la siguiente, donde las funciones ψ_i dependen, en general, de σ' y ϵ :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}' = & \psi_1 \mathbf{1} + \psi_2 \sigma' + \psi_3 \sigma'^2 + \psi_4 \dot{\epsilon} + \psi_5 \dot{\epsilon}^2 + \psi_6 (\sigma' \cdot \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} \cdot \sigma') + \\ & \psi_7 (\sigma' \cdot \dot{\epsilon}^2 + \dot{\epsilon}^2 \cdot \sigma') + \psi_8 (\sigma'^2 \cdot \dot{\epsilon} + \dot{\epsilon} \cdot \sigma'^2) + \psi_9 (\sigma'^2 \cdot \dot{\epsilon}^2 + \dot{\epsilon}^2 \cdot \sigma'^2) \end{aligned} \quad (2.47)$$

En el caso de materiales de tipo no viscoso, como los considerados en el presente trabajo, la función tensorial \mathbf{G} es homogénea de grado uno en el término $\dot{\epsilon}$, de lo cual se desprende que $\mathbf{G}(\epsilon, \sigma', \chi, \lambda\dot{\epsilon}) = \lambda\mathbf{G}(\epsilon, \sigma', \chi, \dot{\epsilon})$ para $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$. Para ello, es necesario que en (2.47) $\psi_5 = \psi_7 = \psi_9 = 0$, ψ_4, ψ_6 y ψ_8 sean independientes de $\dot{\epsilon}$, y ψ_1, ψ_2 y ψ_3 dependan de $\dot{\epsilon}$ con potencia uno. Esta propiedad de homogeneidad de \mathbf{G} permite expresar la ecuación constitutiva (2.46) como:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_t(\epsilon, \sigma', \chi, \eta): \dot{\epsilon} \quad (2.48)$$

Donde \mathbf{E}'_t es el tensor de rigidez tangente de cuarto orden y $\eta = \dot{\epsilon}/\|\dot{\epsilon}\|$ es la dirección del incremento de deformación, siendo $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ la norma de Hilbert-Schmidt.

La dependencia del tensor \mathbf{E}'_t con η da lugar al concepto de zona tensorial definida por Darve (1978, 1990) y Darve y Labanieh (1982), que ya ha sido introducida previamente, y que resultará muy útil para clasificar los modelos analizados en el presente capítulo.

Se define una zona tensorial Z como la parte del espacio de incrementos de deformación en la que la función tensorial \mathbf{G} es lineal con $\dot{\epsilon}$. Ello implicará que en una determinada zona tensorial Z , el tensor de rigidez tangente será independiente de η , y la relación entre $\dot{\sigma}'$ y $\dot{\epsilon}$ será incrementalmente lineal, es decir, $\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'^Z_t(\epsilon, \sigma', \chi): \dot{\epsilon}$, donde:

$$\mathbf{E}'_t(\epsilon, \sigma', \chi, \eta) = \mathbf{E}'^Z_t(\epsilon, \sigma', \chi) \quad \forall \eta \in Z \quad (2.49)$$

Asimismo, si $\dot{\epsilon} \in Z$, entonces $\lambda\dot{\epsilon} \in Z$ para $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, de manera que una zona tensorial Z es un hipercono cuyo vértice se sitúa al inicio del espacio de incrementos de tensión. Diferentes zonas tensoriales conforman diferentes hiperconos adyacentes con el vértice en común.

Por otro lado, si $\mathbf{E}'^{Z_1}_t(\epsilon, \sigma', \chi)$ y $\mathbf{E}'^{Z_2}_t(\epsilon, \sigma', \chi)$ son los tensores de rigidez tangentes asociados, respectivamente, a las zonas tensoriales Z_1 y Z_2 , estos deben satisfacer la condición de continuidad para $\forall \dot{\epsilon} \in Z_1 \cap Z_2$

$$\mathbf{E}'^{Z_1}_t(\epsilon, \sigma', \chi): \dot{\epsilon} = \mathbf{E}'^{Z_2}_t(\epsilon, \sigma', \chi): \dot{\epsilon} \rightarrow \left(\mathbf{E}'^{Z_1}_t(\epsilon, \sigma', \chi) - \mathbf{E}'^{Z_2}_t(\epsilon, \sigma', \chi) \right): \dot{\epsilon} = \mathbf{0} \quad \forall \dot{\epsilon} \in Z_1 \cap Z_2 \quad (2.50)$$

La anterior condición de continuidad no permite, por tanto, cualquier elección de los tensores de rigidez tangentes en dos zonas tensoriales adyacentes.

2.6.1. Clasificación de modelos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones

En base a las anteriores definiciones, se puede establecer un criterio de clasificación de los modelos constitutivos de tipo incremental en función del número de zonas tensoriales asociadas a \mathbf{G} :

- Una zona tensorial asociada a \mathbf{G} : Modelo incrementalmente lineal
- Varias zonas tensoriales asociadas a \mathbf{G} : Modelo incrementalmente multilineal
- Infinitas zonas tensoriales asociadas a \mathbf{G} : Modelo incrementalmente no lineal

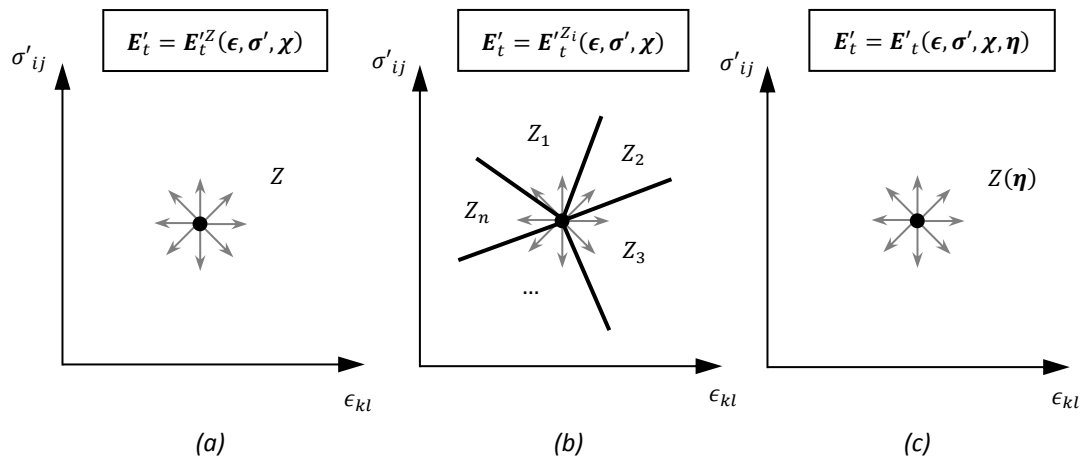


Figura 2.38. Representación esquemática del número de zonas tensoriales para diferentes tipos de modelos. (a) Incrementalmente lineales. (b) Incrementalmente multilineales. (c) Incrementalmente no lineales.

Siguiendo este criterio, se han clasificado los modelos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones (Zonas I y II de Jardine), analizados en el presente capítulo, de la siguiente manera:

Modelos incrementalmente lineales asociados a una zona tensorial (figura 2.38a)

En este grupo se encuentran los modelos elásticos, si bien tanto los modelos elásticos lineales como los modelos elásticos no lineales pseudoelásticos o elásticos de Cauchy, también pueden formularse de forma no incremental, es decir, según $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\epsilon}^e)$.

- Modelos elásticos lineales
 - Isótropos
 - Anisótropos
- Modelos elásticos no lineales
 - Formulación algebraica (modelos elásticos de Cauchy y pseudoelásticos)
 - Formulación integral (modelos hiperelásticos)
 - Formulación diferencial (modelos hipoelásticos *stricto sensu*)

Modelos incrementalmente multilineales asociados a varias zonas tensoriales (figura 2.38b)

- Modelos histeréticos
 - Praelasticidad
 - Modelos cuasi-hipoelásticos
 - Reglas de Masing generalizadas

- Modelos avanzados
 - Modelos elastoplásticos clásicos
 - Modelos de superficies imbricadas
 - Modelos de bloques
 - Modelos de plasticidad límite
 - Modelos de burbujas
 - Modelos multilaminados

Modelos incrementalmente no lineales asociados a infinitas zonas tensoriales (figura 2.38c)

- Modelos hipoplásticos
- Modelos híbridos (hipoplasticidad + paraelasticidad)

2.6.2. Modelos incrementalmente lineales

El número de zonas tensoriales $\#Z$ consideradas en los modelos incrementalmente lineales se reduce a una. Estos modelos son capaces de reproducir el comportamiento no lineal del suelo, pero no el comportamiento histerético y dependiente de la historia tensodeformacional del mismo.

2.6.2.1. Modelos elásticos

La elasticidad constituye uno de los pilares fundamentales de la mecánica de sólidos deformables. Tal como indica Clayton (2011), el nacimiento de la teoría elástica lineal es atribuido a Hooke (1676) en sus experimentos sobre cuerdas de acero. Posteriormente, a partir de los experimentos realizados por Bernoulli con cuerdas de laúd en 1687, Leibniz constató en 1690 que los datos apuntaban ya hacia la no linealidad elástica de estos materiales en el rango de las pequeñas deformaciones (Viggiani, 2000). Casi cuarenta años más tarde, Euler, alumno de Johann Bernoulli (hermano del Bernoulli citado anteriormente), publicó los resultados sobre sus primeros trabajos con materiales elásticos (Euler, 1728) tras aplicar dicha teoría a la propagación de las ondas acústicas en el aire (Euler, 1727). A principios del s.XIX, Young (Young, 1807) alumbró el concepto del módulo que lleva su nombre, si bien dicho concepto difiere de lo que hoy día se conoce como módulo de Young (Riccati, 1782). Tal como apunta Clayton (2011), la teoría elástica de Poisson-Cauchy fue desarrollada en 1848, y se basaba en un único parámetro, considerando que el conocido como coeficiente de Poisson debía adoptar un valor de 0,25 en cualquier material. Green (1828), por otro lado, identificó la necesidad de definir 21 constantes elásticas, que se reducían a dos para materiales isótropos. Posteriormente, varios investigadores confirmaron la teoría de Green. Para cuando se publicó el libro “Teoría de la Elasticidad” (Timoshenko y Goodier, 1951), esta se encontraba ya plenamente desarrollada.

Dos características fundamentales de este tipo de modelos son:

- La proporcionalidad entre tensiones efectivas σ' y deformaciones elásticas ϵ^e .
- La posibilidad de determinar el estado tensional $\sigma'(\mathbf{x}, t)$ en un determinado instante, únicamente a partir del estado de deformaciones elásticas $\epsilon^e(\mathbf{x}, t)$ en dicho instante, sin necesidad de conocer la historia previa.

2.6.2.1.1. Modelo elástico lineal

Los modelos elásticos lineales utilizan una función tensorial lineal $\mathbf{F}(\cdot)$ para la ecuación constitutiva del material.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \mathbf{E}': \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (2.51)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}'$ es el tensor de tensiones efectivas, $\boldsymbol{\epsilon}^e$ es el tensor de deformaciones elásticas y \mathbf{E}' es el tensor de rigidez elástico de cuarto orden, que se considera constante ($\dot{\mathbf{E}}' = \mathbf{0}$) y, por tanto, permite expresar la ecuación incremental constitutiva como sigue:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \dot{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \mathbf{E}': \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (2.52)$$

De la expresión anterior se deduce que, efectivamente, los modelos elásticos lineales son, a la vez, modelos incrementalmente lineales siguiendo el criterio de clasificación establecido en el apartado 2.6.1 del presente capítulo.

En general, el tensor \mathbf{E}' tiene $3^4=81$ componentes independientes que deben determinarse para caracterizar completamente el comportamiento del material y poder utilizar este modelo. No obstante, debido a la simetría de los tensores $\boldsymbol{\sigma}'$ y $\boldsymbol{\epsilon}^e$, y a la existencia de un potencial elástico $\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e)$ por consideraciones termodinámicas elásticas, tal que $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \partial\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e)/\partial\boldsymbol{\epsilon}^e$, estas 81 componentes independientes se reducen a 21.

2.6.2.1.1.1. Modelo elástico lineal anisótropo

La expresión más general de \mathbf{E}' para un material elástico lineal anisótropo general (21 componentes independientes en \mathbf{E}' , puesto que $E'_{ijkl} = E'_{klij}$), empleando la notación de Voigt, es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_{1111} & E'_{1122} & E'_{1133} & E'_{1112} & E'_{1113} & E'_{1123} \\ E'_{2211} & E'_{2222} & E'_{2233} & E'_{2212} & E'_{2213} & E'_{2223} \\ E'_{3311} & E'_{3322} & E'_{3333} & E'_{3312} & E'_{3313} & E'_{3323} \\ E'_{1211} & E'_{1222} & E'_{1233} & E'_{1212} & E'_{1213} & E'_{1223} \\ E'_{1311} & E'_{1322} & E'_{1333} & E'_{1312} & E'_{1313} & E'_{1323} \\ E'_{2311} & E'_{2322} & E'_{2333} & E'_{2312} & E'_{2313} & E'_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^e_{11} \\ \epsilon^e_{22} \\ \epsilon^e_{33} \\ \epsilon^e_{12} \\ \epsilon^e_{13} \\ \epsilon^e_{23} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

En materiales anisótropos, es habitual utilizar los siguientes parámetros elásticos de los que dependen las componentes E'_{ijkl} del tensor \mathbf{E}' :

- E'_{ij} Módulo longitudinal elástico drenado en el plano i según la dirección j
- ν'_{ij} Coeficiente de Poisson drenado en el plano i según la dirección j
- G_{ij} Módulo de corte elástico en el plano i según la dirección j

En caso de que las propiedades del material presenten tres planos de simetría, se dice que el material es ortótropo, y las componentes independientes se reducen de 21 a 9.

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_{1111} & E'_{1122} & E'_{1133} & & & \\ E'_{2211} & E'_{2222} & E'_{2233} & & & \\ E'_{3311} & E'_{3322} & E'_{3333} & & & \\ & & & E'_{1212} & 0 & 0 \\ & & & 0 & E'_{1313} & 0 \\ & & & 0 & 0 & E'_{2323} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^e_{11} \\ \epsilon^e_{22} \\ \epsilon^e_{33} \\ \epsilon^e_{12} \\ \epsilon^e_{13} \\ \epsilon^e_{23} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

La matriz del tensor de rigidez elástico de un material ortótropo, en función de los parámetros elásticos, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu'_{23}\nu'_{32}}{E'_{22}E'_{33}\Delta} & \frac{\nu'_{21} + \nu'_{31}\nu'_{23}}{E'_{22}E'_{33}\Delta} & \frac{\nu'_{31} + \nu'_{21}\nu'_{32}}{E'_{22}E'_{33}\Delta} & & & \\ \frac{\nu'_{12} + \nu'_{13}\nu'_{32}}{E'_{11}E'_{33}\Delta} & \frac{1 - \nu'_{31}\nu'_{13}}{E'_{11}E'_{33}\Delta} & \frac{\nu'_{32} + \nu'_{31}\nu'_{12}}{E'_{11}E'_{33}\Delta} & & & \\ \frac{\nu'_{13} + \nu'_{12}\nu'_{23}}{E'_{11}E'_{22}\Delta} & \frac{\nu'_{23} + \nu'_{13}\nu'_{21}}{E'_{11}E'_{22}\Delta} & \frac{1 + \nu'_{12}\nu'_{21}}{E'_{11}E'_{22}\Delta} & & & \\ & & & 2G_{12} & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2G_{13} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2G_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^e_{11} \\ \epsilon^e_{22} \\ \epsilon^e_{33} \\ \epsilon^e_{12} \\ \epsilon^e_{13} \\ \epsilon^e_{23} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Donde $\Delta = (1 - \nu'_{12}\nu'_{21} - \nu'_{23}\nu'_{32} - \nu'_{31}\nu'_{13} - 2\nu'_{12}\nu'_{23}\nu'_{31})/(E'_{11}E'_{22}E'_{33})$, y dada la simetría mayor de \mathbf{E}' se tiene $\nu'_{23}/E'_{22} = \nu'_{32}/E'_{33}$, $\nu'_{31}/E'_{33} = \nu'_{13}/E'_{11}$ y $\nu'_{12}/E'_{11} = \nu'_{21}/E'_{22}$. Asimismo, en las expresiones anteriores: $\nu'_{12} = -\epsilon^e_{22}/\epsilon^e_{11}$, $\nu'_{21} = -\epsilon^e_{11}/\epsilon^e_{22}$, $\nu'_{13} = -\epsilon^e_{33}/\epsilon^e_{11}$, $\nu'_{31} = -\epsilon^e_{11}/\epsilon^e_{33}$, $\nu'_{23} = -\epsilon^e_{33}/\epsilon^e_{22}$, $\nu'_{32} = -\epsilon^e_{22}/\epsilon^e_{33}$, $E'_{11} = \sigma'_{11}/\epsilon^e_{11}$, $E'_{22} = \sigma'_{22}/\epsilon^e_{22}$, $E'_{33} = \sigma'_{33}/\epsilon^e_{33}$, $G_{12} = \sigma'_{12}/2\epsilon^e_{12}$, $G_{13} = \sigma'_{13}/2\epsilon^e_{13}$ y $G_{23} = \sigma'_{23}/2\epsilon^e_{23}$.

En caso de que las propiedades del material presenten un eje de simetría, se dice que este posee isotropía transversal y las componentes independientes se reducen de 21 a 5. Suponiendo como eje de simetría el eje 3, se tiene la siguiente forma de \mathbf{E}' :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu'_{p3}\nu'_{3p}}{E'_p E'_{33} \Delta} & \frac{\nu'_p + \nu'_{3p}\nu'_{p3}}{E'_p E'_{33} \Delta} & \frac{\nu'_{3p} + \nu'_p\nu'_{3p}}{E'_p E'_{33} \Delta} & & & \\ \frac{\nu'_p + \nu'_{3p}\nu'_{p3}}{E'_p E'_{33} \Delta} & \frac{1 - \nu'_{3p}\nu'_{p3}}{E'_p E'_{33} \Delta} & \frac{\nu'_{3p} + \nu'_{3p}\nu'_p}{E'_p E'_{33} \Delta} & & & \\ \frac{\nu'_{p3} + \nu'_p\nu'_{p3}}{E_p'^2 \Delta} & \frac{\nu'_{p3}(1 + \nu'_p)}{E_p'^2 \Delta} & \frac{1 - \nu_p'^2}{E_p'^2 \Delta} & & & \\ & & & E'_p & & \\ & & & 1 + \nu'_p & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2G_{3p} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 2G_{3p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^e_{11} \\ \epsilon^e_{22} \\ \epsilon^e_{33} \\ \epsilon^e_{12} \\ \epsilon^e_{13} \\ \epsilon^e_{23} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Donde $\Delta = (1 + \nu'_p)(1 - \nu'_p - 2\nu'_{pz}\nu'_{zp})/(E_p'^2 E'_{33})$, y dada la simetría mayor de \mathbf{E}' se tiene $\nu'_{p3}/E'_p = \nu'_{3p}/E'_{33}$. Asimismo, deben tenerse en cuenta las relaciones entre parámetros que se discuten en Barden

(1970). Por otro lado, en las expresiones anteriores: $\nu'_p = -\epsilon'_{11}/\epsilon'_{22} = \epsilon'_{22}/\epsilon'_{11}$, $\nu'_{3p} = -\epsilon'_{11}/\epsilon'_{33} = -\epsilon'_{22}/\epsilon'_{33}$, $\nu'_{p3} = -\epsilon'_{33}/\epsilon'_{11} = -\epsilon'_{33}/\epsilon'_{22}$, $E'_p = \sigma'_{11}/\epsilon'_{11} = \sigma'_{22}/\epsilon'_{22}$, $E'_{33} = \sigma'_{33}/\epsilon'_{33}$ y $G_{3p} = \sigma'_{13}/2\epsilon'_{13} = \sigma'_{23}/2\epsilon'_{23}$.

Los modelos elásticos ortótropos raramente son utilizados. Contrariamente, los modelos elásticos o hipoplásticos que tienen en cuenta la anisotropía transversal del suelo, sí se han utilizado en la práctica geotecnica para reproducir el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones (Hardin y Blandford, 1989; Piriyaikul, 2006; Schädlich y Schweiger, 2012; Masín y Rott, 2013).

2.6.2.1.1.2. Modelo elástico lineal isótropo

En el caso que las propiedades del material presenten tres ejes de simetría, se dice que el material es isótropo y las componentes independientes se reducen de 21 a 2.

Existen diferentes combinaciones de pares de parámetros para describir el comportamiento de un medio elástico isótropo, generalmente los más utilizados en mecánica de suelos son: E' (módulo longitudinal elástico drenado), ν' (coeficiente de Poisson drenado), G (módulo de corte elástico) y K' (módulo volumétrico elástico drenado).

La matriz del tensor \mathbf{E} se puede expresar según (2.57) o tensorialmente según (2.58).

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K' + \frac{4}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & & & \\ K' - \frac{2}{3}G & K' + \frac{4}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & & & \\ K' - \frac{2}{3}G & K' - \frac{2}{3}G & K' + \frac{4}{3}G & & & \\ & & & [\mathbf{0}]_{3 \times 3} & & \\ & & & & 2G & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 2G & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon'_{11} \\ \epsilon'_{22} \\ \epsilon'_{33} \\ \epsilon'_{12} \\ \epsilon'_{13} \\ \epsilon'_{23} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

$$\mathbf{E}' = \left(K' - \frac{2}{3}G\right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathbb{I} \quad (2.58)$$

Donde en \mathbb{I} es el tensor de cuarto orden con componentes $(\mathbb{I})_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ y $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{e}^e = \boldsymbol{\epsilon}^e - \epsilon'_{oct}\mathbf{1}$, con $\epsilon'_{oct} = 1/3\epsilon'_{ii}$, la ley constitutiva se puede expresar de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{E}'(K', G): \boldsymbol{\epsilon}^e = 3K'\epsilon'_{oct}\mathbf{1} + 2G\mathbf{e}^e \quad (2.59)$$

Por otro lado, considerando $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct}\mathbf{1}$ con $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$, y teniendo en cuenta los invariantes $\tau_{oct} = \sqrt{1/3\mathbf{s}:\mathbf{s}}$ y $\gamma_{oct}^e = \sqrt{4/3\mathbf{e}^e:\mathbf{e}^e}$, es posible desacoplar el comportamiento volumétrico y desviador del suelo en la expresión (2.59) de la siguiente manera:

$$p' = \sigma'_{oct} = 3K' \epsilon_{oct}^e \quad (2.60)$$

$$s = 2G e^e \quad (2.61)$$

$$\tau_{oct} = G \gamma_{oct}^e \quad (2.62)$$

En base a las expresiones anteriores, se obtiene la siguiente matriz de rigidez elástica:

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{oct} \\ \tau_{oct} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K' & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{oct}^e \\ \gamma_{oct}^e \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

Los modelos elásticos lineales:

- Son modelos lineales.
- No distinguen entre rigidez en carga y en descarga/recarga y, por tanto, no pueden reproducir el comportamiento histerético del suelo.
- No tienen en cuenta el efecto de la historia reciente sobre la rigidez del suelo.
- Conforman la base teórica de los modelos elásticos no lineales y otros modelos avanzados.
- Conforman formulaciones muy simples desde un punto de vista conceptual y matemático.
- Los parámetros de los modelos son, en general, fáciles de obtener a partir de ensayos simples.
- En ciclos tensodeformacionales cerrados conservan los valores de la tensión y deformación (2.64).
- No generan energía en ciclos de tensión o deformación cerrados (2.64).

$$\oint_{\epsilon^e} \mathbf{E}': \dot{\epsilon}^e = 0 \quad \oint_{\sigma'} (\mathbf{E}')^{-1}: \dot{\sigma}' = 0 \quad \oint_{\epsilon^e} \sigma': \dot{\epsilon}^e = 0 \quad (2.64)$$

2.6.2.1.2. Modelos elásticos no lineales

Para ordenar los modelos elásticos no lineales se recurre a la clasificación propuesta por William (2002), basada en la estructura de la función tensorial $\mathbf{F}(\cdot)$ que relaciona la tensión con la deformación elástica.

- Formulación algebraica
 - Modelos elásticos de Cauchy
 - Modelos pseudo-elásticos
- Formulación integral
 - Modelos hiperelásticos
- Formulación diferencial
 - Modelos hipoelásticos *stricto sensu*

El término *stricto sensu* no se añade para destacar que los modelos hipoelásticos considerados en la formulación diferencial no son modelos elásticos propiamente dichos. Como se ha comentado previamente, una de las propiedades fundamentales de los modelos elásticos es la posibilidad de

determinar el estado tensional σ' en cualquier punto del medio continuo y en cualquier instante, conociendo únicamente el estado de deformaciones elásticas en dicho punto e instante, sin necesidad de conocer la historia tensodeformacional previa. Por el contrario, en los modelos hipoelásticos, el estado tensional en un punto e instante dados sí depende de dicha historia previa. A pesar de ello, los modelos hipoelásticos tradicionalmente se han considerado dentro del marco de los materiales elásticos, por lo que se ha respetado dicha clasificación en el presente trabajo.

Toda la formulación que se desarrolla a continuación está planteada en términos de la rigidez del suelo, si bien puede plantearse la misma con una formulación complementaria en términos de flexibilidad.

2.6.2.1.2.1. Formulación algebraica

2.6.2.1.2.1.1. Modelos elásticos de Cauchy

Los modelos elásticos de Cauchy utilizan una función tensorial $F(\cdot)$ no lineal para la ecuación constitutiva del material.

Utilizando funciones tensoriales isótropas simétricas de segundo orden y aplicando el teorema de Cayley-Hamilton sobre ϵ^e y σ' es posible expresar la ecuación constitutiva en los modelos elásticos de Cauchy de la siguiente forma:

$$\sigma' = F(\epsilon^e) = \phi_1(\epsilon^e)\mathbf{1} + \phi_2(\epsilon^e)\epsilon^e + \phi_3(\epsilon^e)\epsilon^{e2} \quad (2.65)$$

Donde $\epsilon^{e2} = \epsilon^e \cdot \epsilon^e$.

A priori, y dada la arbitrariedad en las funciones ϕ_i , este tipo de modelos pueden dar lugar a la generación de energía durante la aplicación de cargas cíclicas, incumpliendo así los principios termodinámicos.

La ecuación incremental constitutiva linealizada se expresa como sigue:

$$\dot{\sigma}' = \dot{F}(\epsilon^e) = \sum_{i=1}^3 \left(\left(\frac{\partial \phi_i(\epsilon^e)}{\partial \epsilon^e} : \dot{\epsilon}^e \right) \epsilon^{e^{i-1}} \right) + \phi_2(\epsilon^e)\dot{\epsilon}^e + 2\phi_3(\epsilon^e)\epsilon^e \cdot \dot{\epsilon}^e \quad (2.66)$$

2.6.2.1.2.1.2. Modelos pseudoelásticos

Los modelos pseudoelásticos son un caso particular de los modelos elásticos de Cauchy. En este caso, la no linealidad en $F(\cdot)$ se incorpora a través del tensor de rigidez elástico secante (figura 2.39).

$$\sigma' = F(\epsilon^e) = E'_S : \epsilon^e \quad (2.67)$$

Al igual que en los modelos elásticos lineales, si se considera un material isótropo, el tensor de rigidez elástico secante E'_S depende de dos parámetros, pudiéndose expresar en función del módulo volumétri-

co elástico secante drenado K'_s y del módulo de corte elástico secante G_s . Esta formulación lleva a los conocidos modelos $K - G$ no lineales.

$$\mathbf{E}'_s = \left(K'_s - \frac{2}{3} G_s \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G_s \mathbb{I} \quad (2.68)$$

La ley constitutiva queda, por tanto, de la siguiente forma, en función de la deformación volumétrica octaédrica elástica ϵ_{oct}^e y del tensor de deformaciones desviadoras elásticas \mathbf{e}^e :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s) : \boldsymbol{\epsilon}^e = 3K'_s \epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + 2G_s \mathbf{e}^e \quad (2.69)$$

Del mismo modo que se dedujo para la ecuación constitutiva de un material elástico lineal isótropo, también en este caso es posible desacoplar el comportamiento volumétrico y desviador, siempre que $G_s = G_s(\gamma_{oct}^e)$ y $K'_s = K'_s(\epsilon_{oct}^e)$.

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{oct} \\ \tau_{oct} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K'_s & 0 \\ 0 & G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{oct}^e \\ \gamma_{oct}^e \end{bmatrix} \quad (2.70)$$

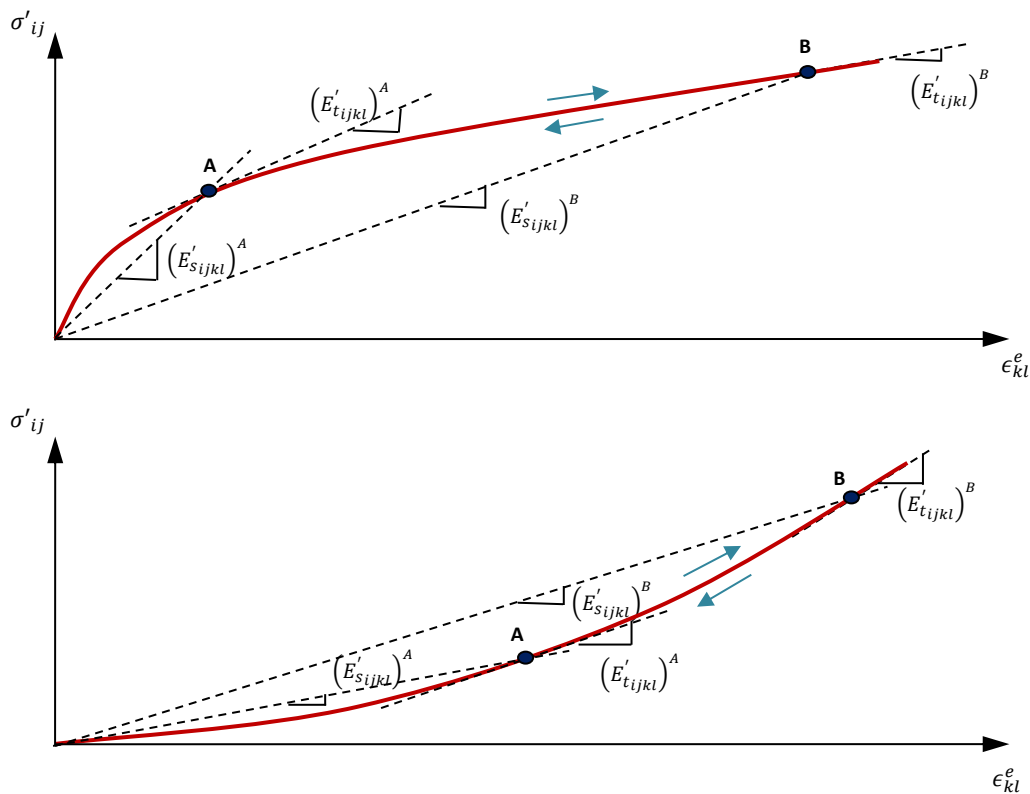


Figura 2.39. Diferentes tipos de no linealidad en modelos pseudoelásticos que respetan el criterio de estabilidad de Drucker (1951).

Cuando se considera la anisotropía transversal del suelo, se introduce en la formulación anterior el módulo de acoplamiento secante J_s tal que $\sigma'_{oct} = 3K'_s \epsilon_{oct}^e + J_s \gamma_{oct}^e$ y $\tau_{oct} = J_s \epsilon_{oct}^e + G_s \gamma_{oct}^e$.

La ecuación incremental constitutiva linealizada de los modelos pseudoelásticos es la siguiente:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_s : \dot{\epsilon}^e + \dot{\mathbf{E}}'_s : \epsilon^e \quad (2.71)$$

$$\dot{\mathbf{E}}'_s = \frac{\partial \mathbf{E}'_s}{\partial K'_s} \frac{\partial K'_s}{\partial \epsilon_{oct}^e} \dot{\epsilon}_{oct}^e + \frac{\partial \mathbf{E}'_s}{\partial G_s} \frac{\partial G_s}{\partial \gamma_{oct}^e} \dot{\gamma}_{oct}^e \quad (2.72)$$

La expresión (2.73) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_t : \dot{\epsilon}^e \quad (2.73)$$

Donde \mathbf{E}'_t es el denominado tensor elástico tangente (figura 2.39), y se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}'_t = \mathbf{E}'_s + (K'_t - K'_s) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{8(G_t - G_s)}{3 \gamma_{oct}^e{}^2} \mathbf{e}^e \otimes \mathbf{e}^e \quad (2.74)$$

En la expresión anterior K'_t y G_t son los módulos tangentes que, considerando $G_s = G_s(\gamma_{oct}^e)$ y $K'_s = K'_s(\epsilon_{oct}^e)$, se expresan como sigue:

$$K'_t = \frac{1}{3} \frac{d\sigma'_{oct}}{d\epsilon_{oct}^e} = K'_s + \epsilon_{oct}^e \frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \quad (2.75)$$

$$G_t = \frac{d\tau_{oct}}{d\gamma_{oct}^e} = G_s + \gamma_{oct}^e \frac{dG_s}{d\gamma_{oct}^e} \quad (2.76)$$

En base a lo anterior, y teniendo en cuenta que $\mathbf{e}^e : \dot{\epsilon}^e = 3/4 \gamma_{oct}^e \dot{\gamma}_{oct}^e$, la ecuación incremental constitutiva (2.74) queda de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}' = 3K'_t \dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + 2G_s \dot{\epsilon}^e + 2 \frac{(G_t - G_s)}{\gamma_{oct}^e} \dot{\gamma}_{oct}^e \mathbf{e}^e \quad (2.77)$$

Y en función de los incrementos de las tensiones octaédricas se expresa como:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}'_{oct} \\ \dot{\tau}_{oct} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K'_t & 0 \\ 0 & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{oct}^e \\ \dot{\gamma}_{oct}^e \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

Los modelos elásticos de Cauchy y los modelos pseudo-elásticos:

- Son modelos no lineales.
- No distinguen entre rigidez en carga y en descarga/recarga y, por tanto, no pueden reproducir el comportamiento histerético del suelo.
- No tienen en cuenta el efecto de la historia reciente sobre la rigidez del suelo.
- Conforman formulaciones simples desde un punto de vista conceptual y matemático.
- Los parámetros de los modelos son, en general, fáciles de obtener a partir de ensayos simples.
- En ciclos tensodeformacionales cerrados conservan la tensión y deformación (expresión 2.79).
- En función de la elección de los parámetros del suelo, pueden generar energía en ciclos de tensión o deformación cerrados, violando así los principios termodinámicos (expresión 2.79).

$$\oint_{\epsilon^e} \mathbf{E}'_t : \dot{\epsilon}^e = 0 \quad \oint_{\sigma'} (\mathbf{E}'_t)^{-1} : \dot{\sigma}' = 0 \quad \oint_{\epsilon^e} \sigma' : \dot{\epsilon}^e \neq 0 \quad (2.79)$$

Para que un modelo elástico de Cauchy o pseudoelástico de tipo $K - G$ sea conservativo, debe cumplir $G = G(\gamma_{oct}^e)$ o $G = G^*(\tau_{oct})$ y $K' = K'(\epsilon_{oct}^e)$ o $K' = K'^*(\sigma'_{oct})$, puesto que, bajo estas condiciones, la energía elástica W_{el} es independiente de la trayectoria seguida, cumpliéndose $W_{el} = 0$ en un ciclo cerrado.

$$W_{el} = \oint_{\epsilon^e} \sigma' : \dot{\epsilon}^e = \oint_{\gamma_{oct}^e} \left(\frac{3}{2} G_s(\gamma_{oct}^e) \gamma_{oct}^e \right) \dot{\gamma}_{oct}^e + \oint_{\epsilon_{oct}^e} (9K'_s(\epsilon_{oct}^e) \epsilon_{oct}^e) \dot{\epsilon}_{oct}^e = 0 \quad (2.80)$$

2.6.2.1.2.2. Formulación integral

2.6.2.1.2.2.1. Modelos hiperelásticos

Los modelos hiperelásticos definen un potencial de energía a partir del cual se deriva la expresión de $\mathbf{F}(\cdot)$ que conforma la ley constitutiva del material. A este potencial se le denomina energía de deformación elástica $\Psi = \Psi(\epsilon^e)$.

$$\sigma' = \mathbf{F}(\epsilon^e) = \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \epsilon^e} \quad (2.81)$$

A partir de la expresión (2.81), se comprueba que este tipo de modelos cumplen el primer principio de la termodinámica, no permitiendo, por tanto, generar energía en ciclos cerrados de tensiones o deformaciones.

$$\Psi(\epsilon^e) = \oint \sigma' : \dot{\epsilon}^e = \oint \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \epsilon^e} : \dot{\epsilon}^e = \oint \dot{\Psi}(\epsilon^e) = 0 \quad (2.82)$$

En el caso de materiales isótropos, el potencial $\Psi(\epsilon^e)$ depende de los invariantes de los tensores de tensiones y deformaciones.

A continuación, se deriva la expresión más general de $\mathbf{F}(\cdot)$ para materiales isótropos. Para ello, se definen los siguientes momentos invariantes del tensor de deformaciones y se calculan sus derivadas:

$$\hat{I}_i^{\epsilon^e} = \frac{1}{i} \text{tr}(\epsilon^{e i}) \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial \hat{I}_i^{\epsilon^e}}{\partial \epsilon^e} = \epsilon^{e i-1} \quad (2.84)$$

Utilizando la expresión (2.84) y la regla de la cadena sobre (2.81), se obtiene lo siguiente:

$$\sigma' = \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_1^{\epsilon^e}} \frac{\partial \hat{I}_1^{\epsilon^e}}{\partial \epsilon^e} + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_2^{\epsilon^e}} \frac{\partial \hat{I}_2^{\epsilon^e}}{\partial \epsilon^e} + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_3^{\epsilon^e}} \frac{\partial \hat{I}_3^{\epsilon^e}}{\partial \epsilon^e} = \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_1^{\epsilon^e}} \mathbf{1} + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_2^{\epsilon^e}} \epsilon^e + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_3^{\epsilon^e}} \epsilon^{e 2} \quad (2.85)$$

Y empleando la notación $\Psi_i(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \partial\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e)/\partial\hat{I}_i^{\epsilon^e}$, se tiene:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \Psi_1(\boldsymbol{\epsilon}^e)\mathbf{1} + \Psi_2(\boldsymbol{\epsilon}^e)\boldsymbol{\epsilon}^e + \Psi_3(\boldsymbol{\epsilon}^e)\boldsymbol{\epsilon}^{e2} \quad (2.86)$$

Como se puede ver, la expresión (2.86) tiene la misma forma que la expresión (2.65). No obstante, los coeficientes $\Psi_i(\boldsymbol{\epsilon}^e)$, a diferencia de $\phi_i(\boldsymbol{\epsilon}^e)$, satisfacen el teorema de Schwartz, que implica las siguientes condiciones de integrabilidad:

$$\frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e)}{\partial\hat{I}_i^{\epsilon^e}\partial\hat{I}_j^{\epsilon^e}} = \frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e)}{\partial\hat{I}_j^{\epsilon^e}\partial\hat{I}_i^{\epsilon^e}} \quad (2.87)$$

De (2.87) se deriva que los tensores de rigidez y flexibilidad elásticos tangentes tienen simetría mayor en los modelos hiperelásticos y se puede demostrar que ello es una condición necesaria para cumplir el primer principio de la termodinámica. Estas condiciones no tienen por qué cumplirse en los modelos elásticos de Cauchy o en los modelos pseudoelásticos.

Empleando la teoría hiperelástica, también es posible construir modelos $K - G$ hiperelásticos no lineales (William, 2002). Para ello, los potenciales elásticos se pueden expresar como suma de dos partes, una volumétrica, que se hace depender de ϵ_{oct}^e , y otra desviadora, que se hace depender de γ_{oct}^e .

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \Psi_{vol}(\epsilon_{oct}^e) + \Psi_{desv}(\gamma_{oct}^e) \quad (2.88)$$

La ecuación incremental constitutiva en los modelos hiperelásticos se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (2.89)$$

Donde \mathbf{E}'_t es el tensor de rigidez elástico tangente, que a partir de (2.81), puede calcularse como sigue:

$$\mathbf{E}'_t = \frac{\partial^2\Psi(\boldsymbol{\epsilon}^e)}{\partial\boldsymbol{\epsilon}^e \otimes \partial\boldsymbol{\epsilon}^e} \quad (2.90)$$

Diversos autores desarrollaron modelos hiperelásticos que tienen en cuenta la relación $G = G(p')$ (Loret, 1985; Houlsby, 1985; Borja et al., 1997; Sulem et al., 1999; Einav y Puzrin, 2004; Houlsby et al., 2005). Dichos modelos, en el caso de materiales isótropos, adoptan relaciones de la forma de la expresión (2.91), donde K'_t es el módulo volumétrico tangente, G_t es el módulo de corte tangente y J_t es el módulo de acoplamiento tangente.

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}'_{oct} \\ \dot{\tau}'_{oct} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K'_t & J_t \\ J_t & G_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}'_{oct} \\ \dot{\gamma}'_{oct} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Los modelos hiperelásticos:

- Son modelos no lineales.
- No distinguen entre rigidez en carga y en descarga/recarga y, por tanto, no pueden reproducir el comportamiento histerético del suelo.
- No tienen en cuenta el efecto de la historia reciente sobre la rigidez del suelo.

- Introducen un gran número de parámetros que, a menudo, son difíciles de obtener a partir de ensayos simples.
- En ciclos tensodeformacionales cerrados conservan la tensión y deformación (expresión 2.92).
- Satisfacen los requerimientos teóricos de continuidad, estabilidad, unicidad y el primer principio de la termodinámica (expresión 2.92).

$$\oint_{\epsilon^e} \mathbf{E}'_t : \dot{\epsilon}^e = 0 \quad \oint_{\sigma'} (\mathbf{E}'_t)^{-1} : \dot{\sigma}' = 0 \quad \oint_{\epsilon^e} \sigma' : \dot{\epsilon}^e = 0 \quad (2.92)$$

2.6.2.1.2.3. Formulación diferencial

2.6.2.1.2.3.1. Modelos hipoelásticos *stricto sensu*

Los modelos hipoelásticos incrementalmente lineales consideran la existencia de funciones tensoriales que relacionan los incrementos de tensión con las deformaciones, tensiones y los incrementos de deformación. Dichos modelos no definen directamente la función tensorial $\mathbf{F}(\cdot)$, sino que esta resulta de integrar la ecuación constitutiva incremental (2.93), dando lugar a la expresión (2.94).

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_t(\sigma') : \dot{\epsilon}^e \quad (2.93)$$

$$\sigma' = \int \dot{\sigma}' dt = \int \mathbf{E}'_t(\sigma') : \dot{\epsilon}^e dt \quad (2.94)$$

Donde $\mathbf{E}'_t(\sigma')$ es el tensor de rigidez tangente, que en su forma más general depende de 12 funciones C_i que a su vez dependen de los tres invariantes de σ' .

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_t(\sigma') = & C_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + C_2 \sigma' \otimes \mathbf{1} + C_3 \sigma'^2 \otimes \mathbf{1} + C_4 \mathbf{1} \otimes \sigma' + \\ & C_5 \sigma' \otimes \sigma' + C_6 \sigma'^2 \otimes \sigma' + C_7 \mathbf{1} \otimes \sigma'^2 + C_8 \sigma' \otimes \sigma'^2 + C_9 \sigma'^2 \otimes \sigma'^2 + \\ & C_{10} (\mathbf{1} \bar{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \mathbf{1}) + C_{11} (\sigma' \bar{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \sigma') + C_{12} (\sigma'^2 \bar{\otimes} \mathbf{1} + \mathbf{1} \underline{\otimes} \sigma'^2) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Donde $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik} B_{jl}$ y $(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il} B_{jk}$, siendo $(\mathbf{A})_{ij} = A_{ij}$ y $(\mathbf{B})_{ij} = B_{ij}$.

A diferencia de la formulación algebraica y de la formulación integral expuesta en los apartados anteriores, en la formulación hipoelástica sí se tiene en cuenta la historia reciente en la ley constitutiva del material. Es por ello que los modelos hipoelásticos *stricto sensu* no son modelos elásticos propiamente dichos.

Los modelos hipoelásticos incrementalmente lineales aquí expuestos dieron lugar a la aparición de los modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos del tipo incrementalmente multilinear, que se exponen en el apartado 2.6.3.1.2 del presente capítulo.

Los modelos hipoelásticos incrementalmente lineales (hipoelásticos *stricto sensu*):

- Son modelos no lineales.
- No distinguen entre rigidez en carga y en descarga/recarga y, por tanto, no consideran el comportamiento histerético del suelo. La extensión de estos modelos que dio lugar a la aparición de los modelos cuasi-hipoelásticos, enmarcados dentro de los modelos incrementalmente multilineales (apartado 2.6.3 del presente capítulo), sí permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo, puesto que introducen diferentes rigideces en función de si los procesos son de carga o descarga, y definen los criterios de reversión, las reglas de memoria y el efecto que tienen las reversiones sobre las variables que controlan la degradación de la rigidez y la rigidez máxima del suelo.
- Tienen en cuenta el efecto de la historia reciente sobre la rigidez del suelo.
- Conforman formulaciones simples desde un punto de vista conceptual y matemático.
- Los parámetros de los modelos son, en general, fáciles de obtener a partir de ensayos simples.
- En ciclos tensodeformacionales cerrados no conservan la tensión y deformación (expresión 2.96).
- En función de la elección de los parámetros del suelo pueden generar energía en ciclos de tensión o deformación cerrados, violando así los principios termodinámicos (expresión 2.96).
- Las simulaciones con este tipo de modelos deberían limitarse a las trayectorias de tensiones y deformaciones correspondientes a los ensayos con los que se obtuvieron los parámetros de los mismos.

$$\oint_{\epsilon^e} \mathbf{E}'_t : \dot{\epsilon}^e \neq 0 \quad \oint_{\sigma'} (\mathbf{E}'_t)^{-1} : \dot{\sigma}' \neq 0 \quad \oint_{\epsilon^e} \sigma' : \dot{\epsilon}^e \neq 0 \quad (2.96)$$

2.6.3. Modelos incrementalmente multilineales

El número de zonas tensoriales $\#Z$ consideradas en los modelos incrementalmente multilineales es un número finito mayor a uno. Estos modelos son capaces de reproducir el comportamiento no lineal, histerético y dependiente de la historia tensodeformacioal del suelo.

2.6.3.1. Modelos histeréticos

Los modelos histeréticos surgieron con el objetivo de simular el comportamiento histerético del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, originalmente en problemas de tipo dinámico.

Suponiendo que el comportamiento histerético del suelo fuera perfecto, las deformaciones en el mismo serían recuperables únicamente en el caso de que se cerraran los ciclos de tensión-deformación que partieran de un mismo punto de reversión. Este comportamiento se diferencia del comportamiento reversible de los modelos elásticos y del comportamiento irreversible de los modelos elastoplásticos, tal como se observa en la figura 2.40.

No obstante, por lo general, en la realidad no se observa un comportamiento histerético perfecto en el suelo. Efectivamente, Hueckel y Nova (1979) apuntan a los elementos descritos en el apartado 2.5.3.1

del presente capítulo, que distancian el comportamiento real del suelo de dicha idealización (figura 2.41).

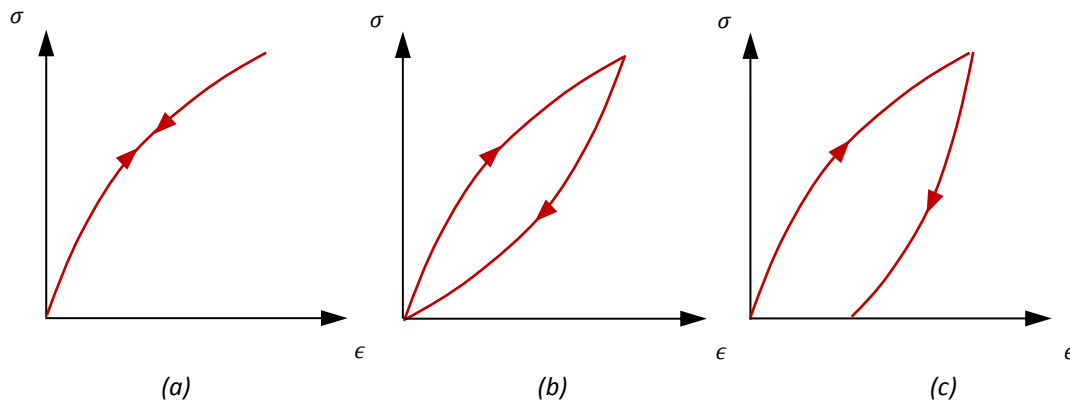


Figura 2.40. Representación esquemática del comportamiento del suelo en diferentes tipos de modelos. (a) Elástico no lineal. (b) Histerético. (c) Elastoplástico.

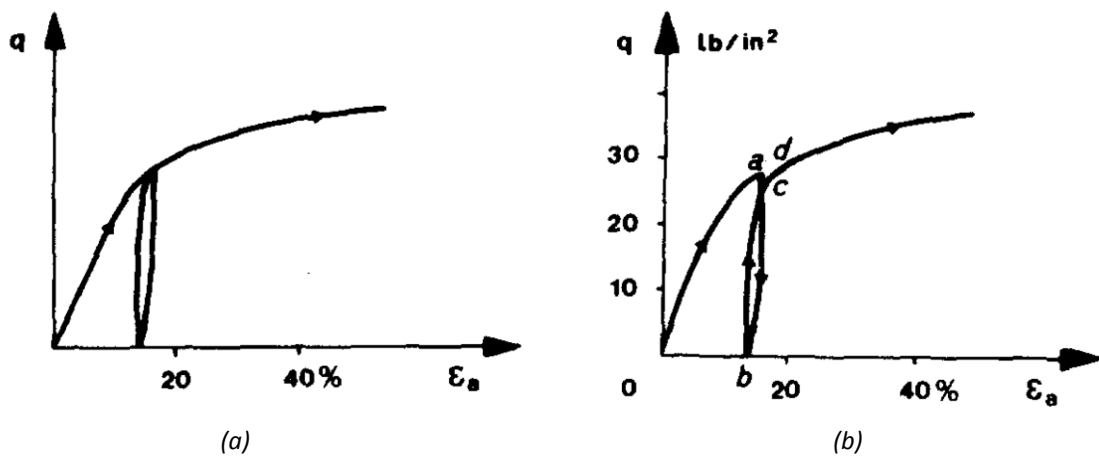


Figura 2.41. (a) Ciclo de carga según el modelo de Hueckel y Nova. (b) Ciclo de carga real, con salto en la deformación entre a y d al alcanzar el mismo nivel de tensión. Hueckel y Nova (1979).

2.6.3.1.1. Praelasticidad

Un tipo particular de histéresis es la denominada histéresis praelástica o praelasticidad, teoría que fue desarrollada por Hueckel y Nova (1979), resultando una de las fundamentales en este campo.

El término praelástico hace referencia, precisamente, al hecho de que la reversibilidad de las deformaciones está condicionada al cierre de los ciclos (figura 2.42).

Los modelos praelásticos consideran que la rigidez del suelo degrada en función de variables que dependen de las deformaciones praelásticas $\epsilon^{pe} = \epsilon^e + \epsilon^{mp}$, suma de las deformaciones elásticas ϵ^e

y las deformaciones microplásticas ϵ^{mp} , estas últimas reversibles sólo bajo la condición de cierre del correspondiente ciclo de tensión-deformación.

En este tipo de modelos, las variables que controlan la degradación del suelo dentro de los ciclos y las reglas de memoria consideradas para la generación o eliminación de ciclos se identifican con las variables de estado χ^{hist} que propone Gudehus (2011) para describir el comportamiento histerético del suelo.

La teoría paraelástica ha sido utilizada en diversos modelos, entre los que destacan los de Niemunis et al. (2011a, 2011b).

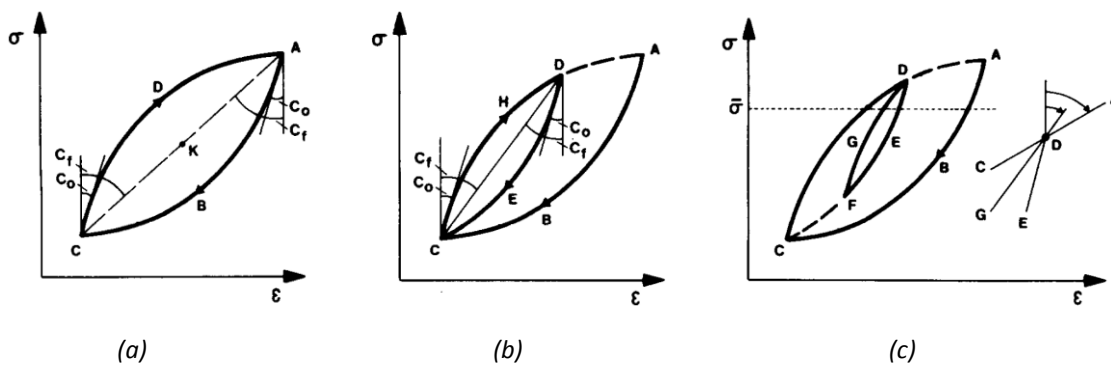


Figura 2.42. Idealización del comportamiento histerético de tipo paraelástico (Hueckel y Nova, 1979).

2.6.3.1.1.1. Modelo de Hueckel y Nova (1979)

El modelo paraelástico de Hueckel y Nova (1979) tiene por objeto reproducir el comportamiento histerético del suelo durante la aplicación de ciclos de carga y descarga, dentro de las superficies de fluencia, en condiciones estáticas.

En base a las observaciones hechas sobre ensayos en los que se realizaron ciclos de carga y descarga uniaxial, Hueckel y Nova extrajeron las siguientes conclusiones para el diseño conceptual del modelo:

- Es posible definir el comportamiento del material por tramos entre puntos de reversión.
- La respuesta del material depende de variables de estado (o de historia).
- La historia relativa a un determinado ciclo se elimina una vez se cierra dicho ciclo.
- La rigidez del material, partiendo de un punto de reversión (L), degrada de forma no lineal con la deformación. Esta no linealidad genera dos componentes en la deformación, medida desde el punto de reversión L : una componente elástica ($\Delta^L \epsilon^e$) y una componente microplástica ($\Delta^L \epsilon^{mp}$) asociada a la reordenación de las partículas del suelo. A la suma de ambas componentes se le llama deformación paraelástica ($\Delta^L \epsilon^{pe} = \Delta^L \epsilon^e + \Delta^L \epsilon^{mp}$).
- El modelo considera que la deformación paraelástica es reversible en un ciclo cerrado.
- Las variables de estado se almacenan en dos niveles de memoria distintos:

- Un primer nivel de memoria conserva los dos últimos puntos de reversión (L^{i+1}, L^i). El punto de reversión L^{i+1} se utiliza como punto de referencia en la ecuación constitutiva $\Delta^L \epsilon^{pe} = C \Delta^L \sigma'$, y el punto de reversión L^i sirve como límite para detectar el cierre del actual ciclo de carga, donde C es la rigidez secante y $\Delta^L \sigma'$ el incremento de tensión respecto el punto de reversión L .
- En el segundo nivel de memoria se almacenan, jerárquicamente, todos los puntos de reversión históricos activos $\{L^0, L^1, L^2, L^3, \dots\}$.
- Estos dos niveles de memoria se van actualizando continuamente. En el caso que aparezca un nuevo punto de reversión L^{i+2} dentro de un ciclo con los puntos (L^{i+1}, L^i) activos en el primer nivel de memoria, estos dos últimos se actualizarán a (L^{i+2}, L^{i+1}). En el caso de cerrar un ciclo con los puntos (L^{i+1}, L^i) en el primer nivel de memoria, estos dos puntos se actualizarán, sustituyéndose por los dos puntos inmediatamente anteriores, recuperados del segundo nivel de memoria (L^{i-1}, L^{i-2}).
- Los ciclos entre dos puntos de reversión son simétricos respecto a la recta que une dichos puntos. El valor de C en la expresión $\Delta^L \epsilon^{pe} = C \Delta^L \sigma'$ degrada en función de la distancia al último punto de reversión L , y no en función de la tensión o deformación total.

En base a lo anterior, Hueckel y Nova generalizan la ley constitutiva al caso multiaxial (se adapta la notación empleada por Hueckel y Nova al cálculo tensorial).

$$\Delta^L \epsilon^{pe} = \Delta^L \epsilon^e + \Delta^L \epsilon^{mp} = \mathbf{C}_0 : \Delta^L \sigma' + [\mathbf{C}_0 - \mathbf{C}(\chi^{hist,L})] : \Delta^L \sigma' = \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) : \Delta^L \sigma' \quad (2.97)$$

Donde $\Delta^L \epsilon^{pe} = \epsilon^{pe} - \epsilon^{peL}$ y $\Delta^L \sigma' = \sigma' - \sigma'^L$ son, respectivamente, los tensores de deformación paraelástica y de tensión efectiva relativos al último punto de reversión ($\epsilon^{peL}, \sigma'^L$), \mathbf{C}_0 es el tensor de rigidez secante máximo y $\mathbf{C}(\chi^{hist,L})$ es el tensor de rigidez secante relativo al último punto de reversión L , lo cual permite replicar la ley constitutiva partiendo de cualquier punto de reversión.

Según Hueckel y Nova, el tensor \mathbf{C} únicamente depende de $\chi^{hist,L}$, denominado parámetro de amplitud de la deformación. Dicho parámetro se trata de una medida de las deformaciones paraelásticas que se generan desde el punto de reversión L . Esta medida emplea la norma de Hilbert-Schmidt, que conserva la objetividad.

$$\chi^{hist,L} = \|\Delta^L \epsilon^{pe}\| = (\Delta^L \epsilon^{peT} : \Delta^L \epsilon^{pe})^{1/2} \quad (2.98)$$

A partir de (2.97), se calcula $\dot{\epsilon}^{pe}$, y a partir de (2.98) se calcula $\dot{\chi}^{hist}$:

$$\dot{\epsilon}^{pe} = \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) : \dot{\sigma}' + \frac{\partial \mathbf{C}(\chi^{hist,L})}{\partial \chi^{hist,L}} : \Delta^L \sigma' \dot{\chi}^{hist} \quad (2.99)$$

$$\dot{\chi}^{hist} = \frac{1}{\chi^{hist,L}} (\Delta^L \epsilon^{peT} : \dot{\epsilon}^{pe}) \geq 0 \quad (2.100)$$

Manipulando las expresiones anteriores, puede llegarse a la expresión $\dot{\epsilon}^{pe} = \mathbf{B} : \dot{\sigma}'$.

$$\dot{\epsilon}^{pe} = \mathbf{B} : \dot{\sigma}' = \left(\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{A}}{\chi^{hist,L} - \chi^{hist,L*}} \right) \cdot \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) \right) : \dot{\sigma}' \quad (2.101)$$

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{C}(\chi^{hist,L})}{\partial \chi^{hist,L}} : \Delta L \boldsymbol{\sigma}' \cdot \Delta L \boldsymbol{\sigma}'^T : \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) \quad (2.102)$$

$$\chi^{hist,L*} = \Delta L \boldsymbol{\epsilon}^{peT} : \frac{\partial \mathbf{C}(\chi^{hist,L})}{\partial \chi^{hist,L}} : \Delta L \boldsymbol{\sigma}' = \Delta L \boldsymbol{\sigma}'^T : \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) : \frac{\partial \mathbf{C}(\chi^{hist,L})}{\partial \chi^{hist,L}} : \Delta L \boldsymbol{\sigma}' \quad (2.103)$$

El criterio de reversión adoptado por Hueckel y Nova, en el caso multiaxial, se basa en la dirección del incremento de tensión. Los puntos de reversión se definen como aquellos que vulneran la desigualdad $(\chi^{hist,L} - \chi^{hist,L*}) \chi^{hist} = \Delta L \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) : \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) : \dot{\sigma}' \geq 0$. Para identificarlos, se define la superficie $\bar{W}^{hist,L}(\chi^{hist,L})$ y la función \mathcal{L} como:

$$\bar{W}^{hist,L}(\chi^{hist,L}) = \Delta L \boldsymbol{\sigma}'^T : \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) : \mathbf{C}(\chi^{hist,L}) : \Delta L \boldsymbol{\sigma}' - \Delta L \boldsymbol{\sigma}'^T : \mathbf{C}_0 : \mathbf{C}_0 : \Delta L \boldsymbol{\sigma}' \quad (2.104)$$

$$\mathcal{L}(\bar{W}^{hist,L}) = \frac{\partial \bar{W}^{hist,L}}{\partial \Delta L \boldsymbol{\sigma}'^T} : \dot{\sigma}' \quad (2.105)$$

Y se adopta el siguiente criterio (figura 2.43):

- Si $\mathcal{L}(\bar{W}^{hist,L}) \geq 0$, el ciclo histerético en el siguiente paso cálculo será el mismo que en el actual.
- Si $\mathcal{L}(\bar{W}^{hist,L}) < 0$, se inicia un nuevo ciclo en el presente paso de cálculo y, tras la reversión, el modelo considera $\chi^{hist,L} = 0$ y, por tanto, $\mathbf{C}(\chi^{hist,L}) = \mathbf{C}_0$.

A continuación, se presenta la formulación formal propuesta por Hueckel y Nova para las reglas de memoria.

$$\hat{\sigma}' = \sum_{K=1}^L [\boldsymbol{\sigma}'^K + (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'^K)(1 - H(\mathcal{L}^K))] \xi_K \zeta_K \quad (2.106)$$

$$\mathcal{L}^K = \begin{cases} \frac{\partial \bar{W}^{hist,K,K+1}}{\partial \Delta K \boldsymbol{\sigma}'^T} : \dot{\sigma}' & 1 \leq K \leq L - 1 \\ \frac{\partial \bar{W}^{hist,K}}{\partial \Delta K \boldsymbol{\sigma}'^T} : \dot{\sigma}' & K = L \end{cases} \quad (2.107)$$

$$\xi_K = \begin{cases} H(\bar{W}^{hist,K+1}) & 1 \leq K \leq L - 1 \\ H(\bar{W}^{hist,K}) & K = L \end{cases} \quad (2.108)$$

$$\zeta_K = \prod_{N=1}^{K-1} (1 - \xi_N) \quad (2.109)$$

Donde $\hat{\sigma}'$ es el tensor de tensiones efectivas correspondiente al último punto de reversión activo, σ' es el tensor de tensiones efectivas en el estado actual, σ'^K es el tensor de tensiones efectivas en el punto de reversión k -ésimo, $\hat{\sigma}'$ es el incremento actual del tensor de tensiones efectivas y $H(x)$ es la función de Heaviside, que cumple $H(x) = 1$ si $x \geq 0$ y $H(x) = 0$ si $x < 0$.

En caso de que una trayectoria pase por un antiguo punto de reversión, caracterizado por la superficie $\bar{W}^{hist,K,K+1} = 0, K < L$, dicha superficie será reactivada para la ley constitutiva del siguiente ciclo (figura 2.44).

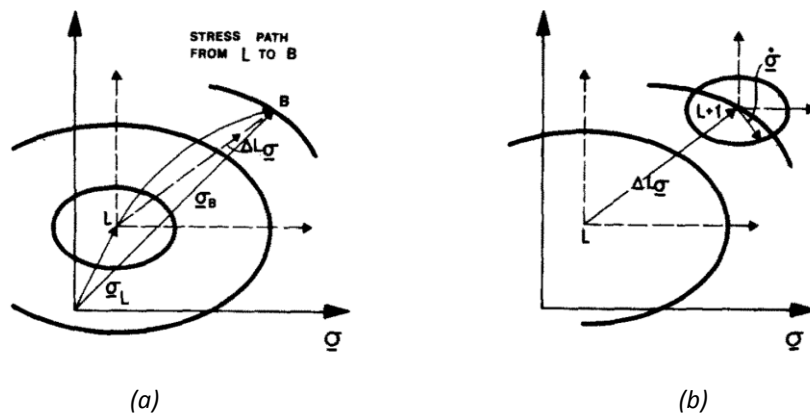


Figura 2.43. Evolución $\bar{W}^{hist,L}$ ($\sigma \equiv \sigma'$) (Hueckel y Nova, 1979).
 (a) En paso sin reversión. (b) En paso con reversión.

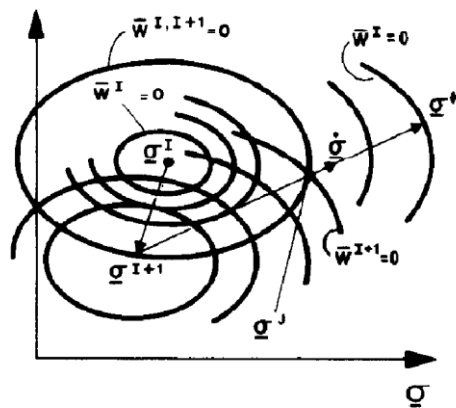


Figura 2.44. Esquema de reactivación de un antiguo punto de reversión ($\bar{W}^{I,I+1} \equiv \bar{W}^{hist,I,I+1}$, $\sigma \equiv \sigma'$) (Hueckel y Nova, 1979).

Cuando se reactiva un antiguo punto de reversión M , se recupera la rigidez/flexibilidad histórica de dicho punto, y debe considerarse un nuevo término en la expresión (2.97).

$$\Delta M \epsilon^{pe} = \bar{\Delta M} \epsilon_1^{pe} + \bar{\Delta M} \epsilon_2^{pe} \tag{2.110}$$

$$\bar{\Delta M} \epsilon_1^{pe} = C(\chi^{hist,M}) : \Delta M \sigma' \tag{2.111}$$

$$\overline{\Delta M} \epsilon_2^{pe} = \int_{t_\sigma^M}^{t_\sigma^*} \dot{\epsilon}^{pe} dt - \mathbf{C}(\chi^{hist,M}): (\boldsymbol{\sigma}'^* - \boldsymbol{\sigma}'^M) \quad (2.112)$$

$$\dot{\epsilon}^{pe} = \mathbf{B}(\Delta^M \boldsymbol{\sigma}, \chi^{hist,M}): \dot{\boldsymbol{\sigma}}' \quad (2.113)$$

En (2.110), el término $\overline{\Delta M} \epsilon_1^{pe}$ es la deformación paraelástica que el material hubiera experimentado si no hubieran existido otros puntos de reversión posteriores al M . El término $\overline{\Delta M} \epsilon_2^{pe}$ representa la deformación paraelástica acumulada debido a la historia que ha experimentado el material desde el punto de reversión M .

El criterio de reversión dado por el signo de \mathcal{L} , las reglas de memoria dadas por \mathcal{L}^K , ξ_K y ζ_K , las variables de degradación $\chi^{hist,L}$ y el retorno a la rigidez \mathbf{C}_0 tras una reversión, conforman el conjunto de elementos que definen el comportamiento histerético de este modelo.

A pesar de que algunos de los aspectos de este modelo pueden ser mejorados, tal como comentan Hueckel y Nova, este ha dado lugar a un marco teórico fundamental en el que se han sustentado diversos modelos desarrollados posteriormente.

2.6.3.1.1.2. Modelo de Niemunis et al. (2011a)

El modelo desarrollado por Niemunis et al. (2011a) se basa en el modelo paraelástico de Hueckel y Nova (1979) al que modifica ligeramente. Niemunis et al. (2011a) describen la ecuación constitutiva de Hueckel y Nova de la siguiente manera:

$$\Delta^L \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}'(\bar{f}, \bar{\chi}, \bar{d}): \Delta^L \boldsymbol{\epsilon}^{pe} \quad (2.114)$$

$$\mathbf{H}'(\bar{f}, \bar{\chi}, \bar{d}) = (1 - \bar{f} \bar{d}^{\bar{\chi}}) \mathbf{E}'_{max} \quad (2.115)$$

$$\mathbf{E}'_{max} = \bar{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \bar{\mu} \mathbb{I} \quad (2.116)$$

Donde $\Delta^L \boldsymbol{\epsilon}^{pe} = \boldsymbol{\epsilon}^{pe} - {}^L \boldsymbol{\epsilon}^{pe}$ y $\Delta^L \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}' - {}^L \boldsymbol{\sigma}'$ son, respectivamente, el tensor de deformaciones paraelásticas y el tensor de tensiones efectivas relativas al último punto de reversión (${}^L \boldsymbol{\epsilon}^{pe}$, ${}^L \boldsymbol{\sigma}'$), $\bar{d} = \|\Delta^L \boldsymbol{\epsilon}^{pe}\| = \|\boldsymbol{\epsilon}^{pe} - {}^L \boldsymbol{\epsilon}^{pe}\|$, \mathbf{E}'_{max} es el tensor de rigidez secante máximo caracterizado por los coeficientes de Lamé $\bar{\lambda}$ y $\bar{\mu}$, \bar{f} y $\bar{\chi}$ son parámetros del suelo, $(\mathbb{I})_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ y $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$.

Las expresiones anteriores difieren de las de Hueckel y Nova (1979) aunque conceptualmente son equivalentes. Concretamente, el tensor de rigidez secante $\mathbf{H}'(\bar{f}, \bar{\chi}, \bar{d})$ sustituye al tensor de rigidez secante $\mathbf{C}^{-1}(\chi^{hist,L})$ de la formulación original, donde $\mathbf{C}(\chi^{hist,L}) = \mathbf{C}_0 \cdot (\mathbf{1} + \chi^{hist,L} \boldsymbol{\Omega})$, y $\chi^{hist,L} = \|\Delta^L \boldsymbol{\epsilon}^{pe}\|$.

Como se puede ver, este modelo reduce el orden tensorial del término $(\mathbf{1} + \chi^{hist,L} \boldsymbol{\Omega})$ del modelo de Hueckel y Nova (1979), sustituyéndolo por $(1 - \bar{f} \bar{d}^{\bar{\chi}})$.

Por otro lado, de acuerdo con Niemunis et al. (2011a), utilizar la norma de Hilbert-Schmidt $\bar{d} = \|\Delta^L \epsilon^{pe}\| = \|\epsilon^{pe} - {}^L \epsilon^{pe}\|$ no es adecuado para definir el comportamiento del suelo durante los ciclos de carga. Asimismo, se demuestra que trabajar con la distancia euclídea \bar{d} (radio del círculo de carga), lleva a generar discontinuidades en las tensiones en función del signo de $d(\bar{d})/dt > 0$, cuando se aplica un mismo $\dot{\epsilon}$, lo cual no es consistente (figura 2.45).

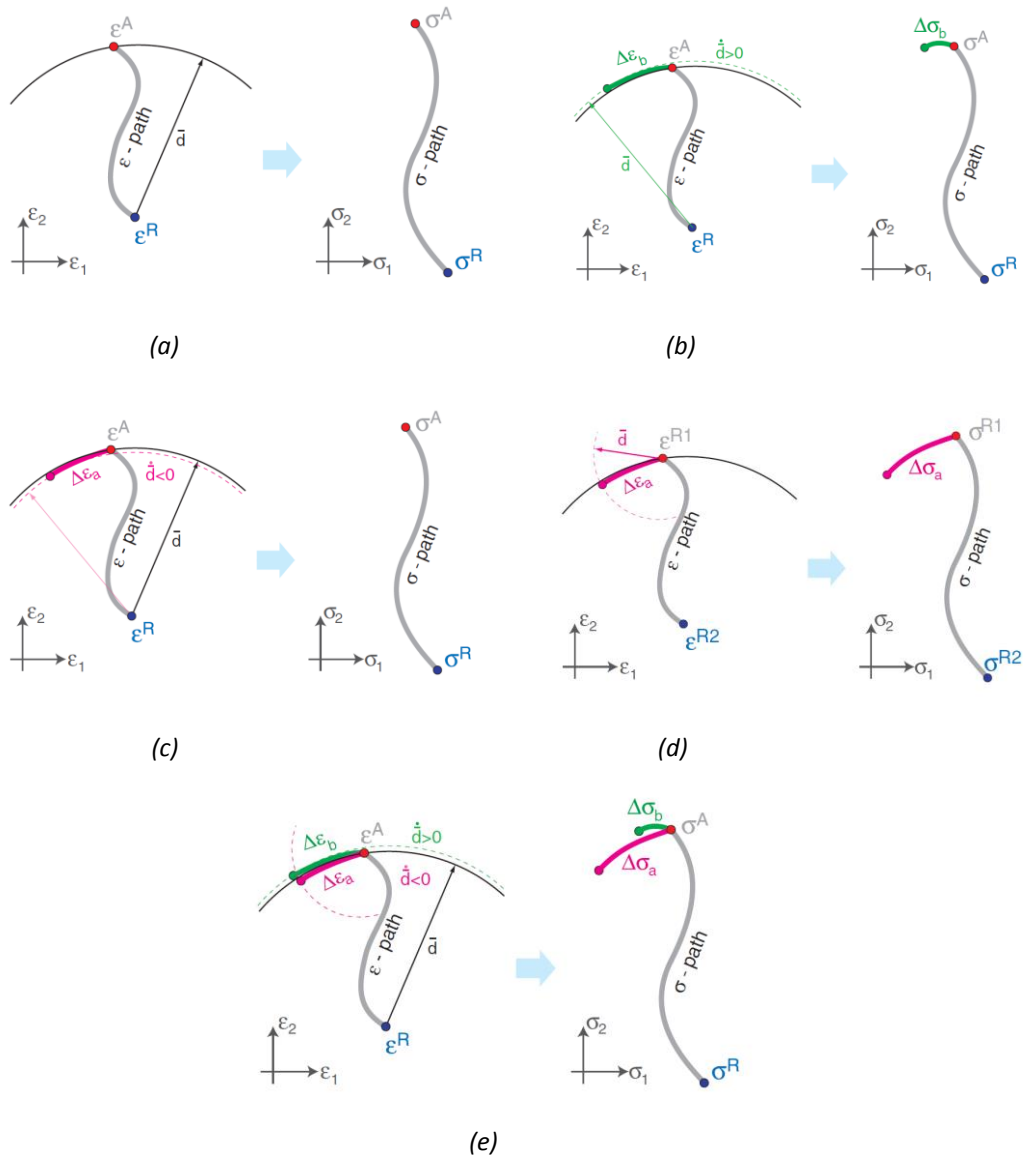


Figura 2.45. Discontinuidad en la respuesta tensional al considerar $\bar{d} = \|\epsilon^{pe} - \epsilon^{peR}\|$ (Niemunis y Prada-Sarmiento, 2011).

Para resolver esta problemática, el modelo de Niemunis et al. (2011a) propone una nueva definición para la distancia \bar{d} , identificada como d_{AR1} (figura 2.46). Esta nueva distancia considera el diámetro del círculo de carga y no su radio, y se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$d_{AR1} = - \frac{{}^{AR1}\epsilon^{pe} \cdot {}^{AR1}\epsilon^{pe}}{{}^{AR1}\epsilon^{pe} \cdot {}^{R1}\mathbf{N}} \quad (2.117)$$

Donde ${}^{R1}\mathbf{N}$ es la normal exterior al círculo de carga medido desde el último punto de reversión $R1 = \{\sigma^A, {}^{R1}\epsilon^{pe}, {}^{R1}\mathbf{N}\}$ y ${}^{AR1}\epsilon^{pe} = \epsilon^{pe} - {}^{R1}\epsilon^{pe}$ es la deformación medida desde el último punto de reversión $R1$.

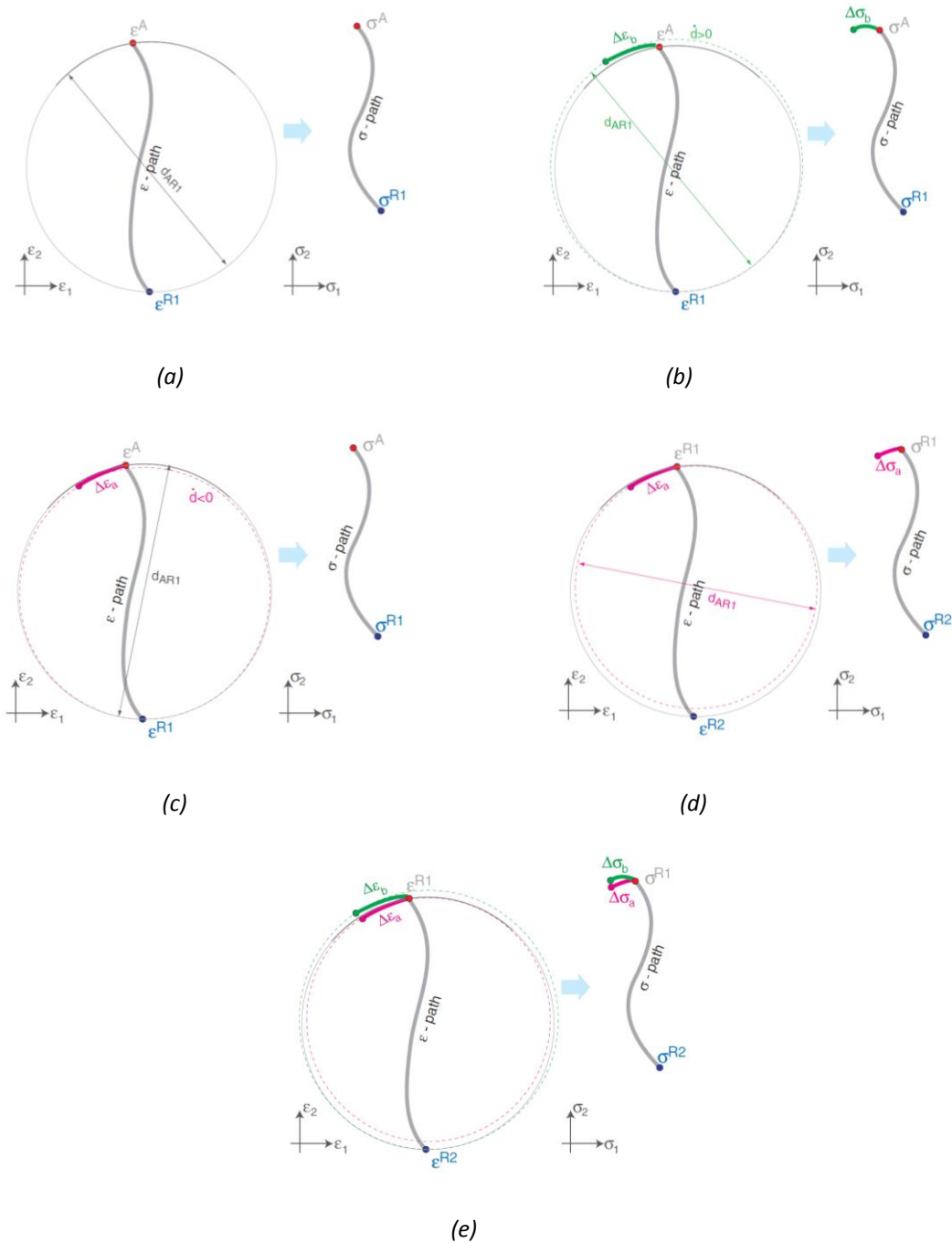


Figura 2.46. Resolución de la problemática de discontinuidad con el nuevo criterio de distancia d_{AR1} (Niemunis y Prada-Sarmiento, 2011).

En base a lo anterior, el modelo de Niemunis et al. (2011a) propone la siguiente ecuación constitutiva no lineal para el comportamiento histerético del suelo, donde ${}^{AR1}\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}' - {}^{R1}\boldsymbol{\sigma}'$.

$${}^{AR1}\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{H}(\bar{f}, \bar{\chi}, d_{AR1}): {}^{AR1}\boldsymbol{\epsilon}^{pe} = (1 - \bar{f}d_{AR1}^{\bar{\chi}})\mathbf{E}'_{max}: {}^{AR1}\boldsymbol{\epsilon}^{pe} \quad (2.118)$$

2.6.3.1.2. Modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos

Entre los modelos incrementalmente multilineales destacan, por su interés práctico, los modelos aquí denominados histeréticos cuasi-hipoelásticos, que han sido comúnmente utilizados para simular el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.

Una metodología muy extendida para construir modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos es incorporar a modelos cuasi-hipoelásticos los elementos que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo mediante las Reglas de Masing generalizadas (Masing, 1926; Pyke, 1979) expuestas en el apartado 2.6.3.1.2.1 del presente capítulo. Los modelos cuasi-hipoelásticos simulan el comportamiento del suelo ante cargas monótonas y se asemejan a modelos hipoelásticos, aunque en vez de módulos de rigidez elásticos utilizan módulos de rigidez aparentes y estos actúan sobre las deformaciones totales, y no elásticas, para la obtención de las tensiones. Siguiendo la clasificación de Sellers (1989), los modelos cuasi-hipoelásticos se pueden clasificar en dos tipos en función de cómo se definen los parámetros de los mismos:

- Se denominan modelos del tipo *variable parameter* (Duncan y Chang, 1970; Desai, 1971; Richard y Abbot, 1975) aquellos que proponen una relación entre tensión y deformación basada en funciones no lineales (hiperbólicas, elípticas, logarítmicas, *spline*, etc.). Los modelos del tipo *variable parameter* pueden reformularse, generalmente, como modelos del tipo *variable moduli*.
- Se denominan modelos del tipo *variable moduli* (Nelson y Baron, 1971; Nelson 1977; Sandler, 1976; Sandler y Baron, 1979) aquellos que proponen funciones no lineales para describir los módulos de rigidez volumétrico y de corte aparentes en una ecuación constitutiva con una estructura algebraica igual a la de un modelo elástico.

La ecuación constitutiva general e incremental de los modelos del tipo *variable moduli* suele adoptar la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 3K_s'^{ap}(p', \epsilon_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})\epsilon_{oct}\mathbf{1} + 2G_s'^{ap}(p', \gamma_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})\mathbf{e} \quad (2.119)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 3K_t'^{ap}(p', \epsilon_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})\dot{\epsilon}_{oct}\mathbf{1} + 2G_t'^{ap}(p', \gamma_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})\dot{\mathbf{e}} \quad (2.120)$$

Donde $K_s'^{ap} = K_s'^{ap}(p', \epsilon_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})$ y $K_t'^{ap} = K_t'^{ap}(p', \epsilon_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})$ son, respectivamente, las rigideces volumétricas aparentes secante y tangente, $G_s'^{ap} = G_s'^{ap}(p', \gamma_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})$ y $G_t'^{ap} = G_t'^{ap}(p', \gamma_{oct}, \boldsymbol{\chi}^{hist})$ son, respectivamente, las rigideces desviadoras aparentes secante y tangente, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $\epsilon_{oct} = 1/3\epsilon_{ii}$ es la deformación volumétrica octaédrica total, $\gamma_{oct} = \sqrt{4/3}\|\mathbf{e}\|$ es la deformación octaédrica desviadora total, siendo $\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct}\mathbf{1}$ el tensor desviador de deformaciones totales, $\dot{\epsilon}_{oct} = 1/3\dot{\epsilon}_{ii}$ es el incremento de la deformación volumétrica octaédrica total, $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\epsilon}_{oct}\mathbf{1}$

es el incremento del tensor de deformaciones desviadoras totales, y χ^{hist} son variables de estado que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo y a las que es posible atribuir también la dependencia del comportamiento del mismo con su historia reciente. En las expresiones anteriores debe tenerse en cuenta que los módulos de rigidez considerados son los módulos de rigidez aparentes, y los incrementos de deformación son los incrementos de deformación total. El valor de los módulos de rigidez aparentes propuestos en este tipo de modelos suele obtenerse mediante el ajuste de datos experimentales obtenidos en trayectorias de ensayos habituales a curvas teóricas (por ejemplo, en compresiones triaxiales drenadas o no drenadas o en compresiones isótropas).

Según lo expuesto por Tamagnini y Viggiani (2002), suele considerarse la siguiente descomposición de los módulos de rigidez secantes (más sencillos de obtener experimentalmente que los tangentes) en base a observaciones experimentales: $K'_s{}^{ap}(\sigma'_{oct}, \epsilon_{oct}, \chi^{hist}) = K'_{s0}{}^{ap}(p') f_{K'_s}{}^{ap}(\epsilon_{oct}, \chi^{hist})$ y $G_s{}^{ap}(\sigma'_{oct}, \gamma_{oct}, \chi^{hist}) = G_{s0}{}^{ap}(p') f_{G_s}{}^{ap}(\gamma_{oct}, \chi^{hist})$, donde $K'_{s0}{}^{ap}(p')$ y $G_{s0}{}^{ap}(p')$ son los valores máximos de los módulos de rigidez secantes aparentes, que dependen de presión media p' , y las funciones $f_{K'_s}{}^{ap}(\epsilon_{oct}, \chi^{hist})$ y $f_{G_s}{}^{ap}(\gamma_{oct}, \chi^{hist})$ son las funciones que controlan la degradación o rigidización de los módulos de rigidez secantes aparentes, que dependen, respectivamente, de la deformación volumétrica octaédrica secante, de la deformación octaédrica de corte secante y, ambas, de las variables de estado χ^{hist} .

Según Tamagnini y Viggiani (2002), la popularidad de los modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos proviene de su relativa simplicidad y fácil incorporación a códigos numéricos de elementos finitos para la resolución de problemas prácticos de ingeniería, como se puede ver en Jardine y Potts (1988) y St. John et al. (1993).

Nelson (1977), Pyke (1986) y Tamagnini y Viggiani (2002) apuntan algunos inconvenientes en relación con los modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos:

- Falta de continuidad durante procesos de carga neutral.
- Las funciones $f_{K'_s}{}^{ap}(\epsilon_{oct}, \chi^{hist})$ y $f_{G_s}{}^{ap}(\gamma_{oct}, \chi^{hist})$ se calibran a partir de ensayos con trayectorias tensodeformacionales concretas que puede resultar muy diferentes a las trayectorias seguidas por el suelo en aplicaciones prácticas.
- La ecuación constitutiva utilizada implica que los incrementos de tensiones y deformaciones son coaxiales, lo cual no siempre se corresponde con las observaciones experimentales (Frydman et al., 1995). No obstante, debe tenerse en cuenta que en los ensayos utilizados para calibrar estos modelos generalmente se cumplirá esta coaxialidad.
- Para reproducir el comportamiento histerético del suelo se introducen criterios de carga/descarga que pueden dar lugar a inestabilidades de tipo numérico.
- La dependencia de $G_{s0}{}^{ap}(p')$ implica que el módulo de corte depende de la deformación volumétrica según $G = G(\gamma_{oct}, \epsilon_{oct}, \chi^{hist})$, lo cual, en caso de no tener en cuenta el módulo de acoplamiento J (apartado 2.6.2.1.2.2 del presente capítulo), puede no ser termodinámica-mente consistente.

2.6.3.1.2.1. Reglas de Masing generalizadas

Una forma común y extendida de construir modelos histeréticos a partir de modelos que simulan el comportamiento no lineal del suelo ante cargas monótonas es mediante la aplicación de las Reglas de Masing originales y extendidas (Masing, 1926; Pyke, 1979), denominadas conjuntamente como Reglas de Masing generalizadas, a las que deberán sumarse los correspondientes criterios de carga/descarga.

Las reglas de Masing originales 1 y 2 (Masing, 1926) para cargas simétricas, junto con las Reglas de Masing extendidas 3 y 4 (Pyke, 1979) para cualquier tipo de carga, se enuncian a continuación y se esquematizan en la figura 2.47. Dichas reglas se formulan en un contexto de carga y deformación unidimensional, si bien la extensión al caso general puede efectuarse con un cambio apropiado en las variables. Para el caso expuesto, las reglas de Masing consideran que las variables de estado χ^{hist} , que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo, además de podérseles atribuir la no linealidad y la dependencia del comportamiento del mismo con su historia reciente, dentro de las variables de estado χ , se identifican con las deformaciones totales ϵ , si bien, como indica Gudehus (2011), a pesar de que estas variables χ^{hist} puedan ser tratadas formalmente como deformaciones, no pueden ser interpretadas físicamente como tales.

- 1) **Regla nº1:** Para la carga noval, la ley constitutiva tiene la forma:

$$\sigma' = F(\epsilon) \quad (2.121)$$

En general, esta relación considera la deformación total ϵ . Ello se debe a que en los ensayos utilizados para calibrar la función no lineal $F(\cdot)$, no se separan las componentes reversible e irreversible de la deformación.

- 2) **Regla nº2:** En una descarga o recarga, tras un punto de reversión R , la ley constitutiva considera un factor de escala de dos respecto a ley constitutiva para la carga noval, tomando como referencia el origen local dado por el punto de reversión (σ'^R, ϵ^R) :

$$\sigma' - \sigma'^R = 2F\left(\frac{\epsilon - \epsilon^R}{2}\right) \quad (2.122)$$

En general, esta relación también considera la deformación total ϵ , aunque en los modelos elastoplásticos, generalmente, esta coincidirá con la deformación elástica, al tratarse de una trayectoria de descarga o recarga. La Regla nº2 puede aplicarse también mediante la estrategia utilizada por Pyke (1979) o Hashiguchi (1993), como se hace en el modelo *SSOM*.

- 3) **Regla nº3:** Si las curvas de descarga o recarga intersecan a la curva de carga inicial, retoman dicha curva.
- 4) **Regla nº4:** Si las curvas de descarga o recarga intersecan una curva de descarga o recarga previa, retoman dicha curva.

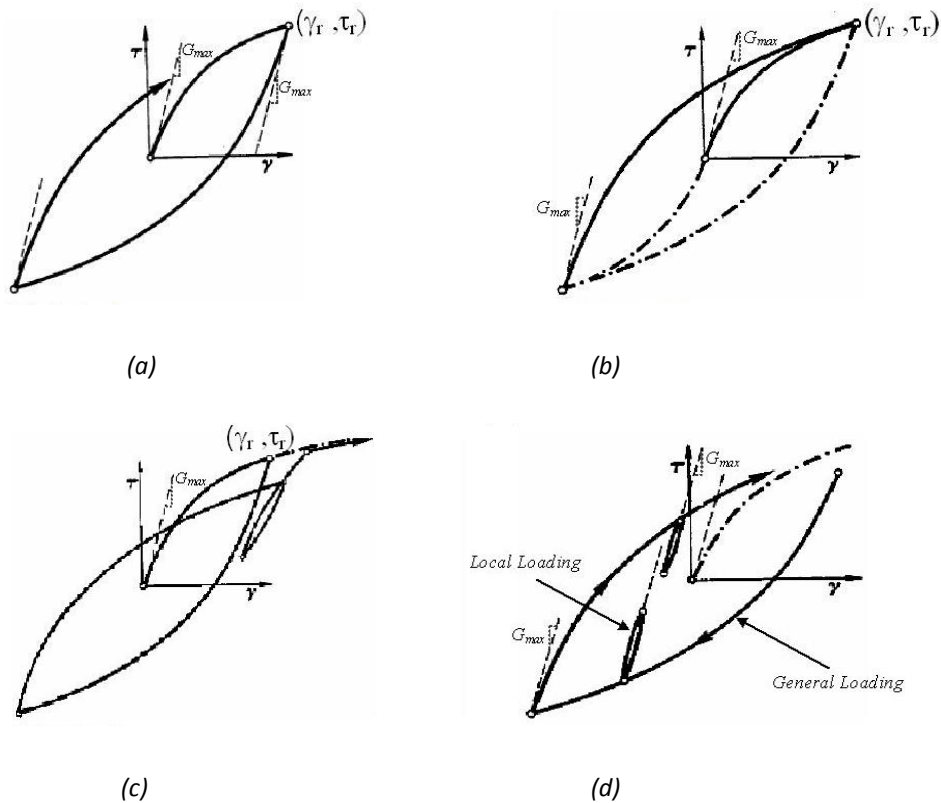


Figura 2.47. Esquemas de las Reglas de Masing Generalizadas extraído del trabajo de Vucetic (1990).

(a) Regla nº1. (b) Regla nº2. (c) Regla nº3. (d) Regla nº4.

En cuanto a los cuatro elementos constitutivos del comportamiento histerético en suelos, establecidos en el apartado 2.5.3.1 del presente capítulo, las Reglas de Masing generalizadas cumplen lo siguiente:

- 1) **Criterios de reversión:** El criterio de reversión debe definirse en la formulación del modelo no lineal propuesto y, en general, depende de las tensiones, de las deformaciones o de la energía/potencia.
- 2) **Reglas de memoria:** Los modelos deben almacenar determinada información, según cada caso, de todos los puntos de reversión históricos activos, entendiéndose por punto de reversión activo aquél cuyo ciclo de carga no ha sido cerrado. Ello debe permitir recuperar la trayectoria de curvas de descarga o recarga históricas cuando estas sean interceptadas.
- 3) **Efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación:** La variable de degradación se reinicializa totalmente tras una reversión.
- 4) **Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo:** La recuperación de la rigidez es total tras una reversión.

Las variables que permiten cumplir las Reglas de Masing generalizadas se identifican con las variables de estado χ^{hist} que propone Gudehus (2011) para describir el comportamiento histerético del suelo.

2.6.3.1.2.2. Algunos modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos

A continuación, se describen y analizan varios modelos clasificados en este trabajo como modelos histeréticos cuasi-hipoelásticos. Todos estos modelos pertenecen al subtipo denominado *variable parameter*, salvo el modelo *SSOM* (Benz, 2007), que pertenece al subtipo denominado *variable moduli*. No obstante, tal como se ha expuesto en el apartado 2.6.3.1.2 del presente capítulo, los modelos del tipo *variable parameter* pueden reformularse como modelos del tipo *variable moduli*, que es precisamente lo que se hará en el presente apartado, obteniendo así, los módulos de rigidez aparentes equivalentes en cada caso. En este tipo de modelos, las variables de estado que controlan el valor de los módulos de rigidez se identifican con las que propone Gudehus (2011) para describir el comportamiento histerético del suelo.

En todos los modelos del tipo *variable parameter* que se estudian en este apartado, es necesario definir un criterio de reversión, unas reglas de memoria y el efecto de las reversiones sobre la variable que controla la degradación y sobre la rigidez máxima del suelo, para que estos puedan reproducir el comportamiento histerético del mismo.

2.6.3.1.2.2.1. Modelo de Ramberg y Osgood (1943)

El modelo de Ramberg y Osgood (1943), inicialmente ideado para reproducir el comportamiento de metales bajo cargas cíclicas, parte de la siguiente ecuación constitutiva no lineal.

$$\frac{\gamma}{\gamma_y} = \frac{\tau}{\tau_y} \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_y} \right|^{\hat{r}-1} \right) \quad (2.123)$$

Donde γ y τ son, respectivamente, la deformación de corte total y la tensión de corte, tales que $\tau = G_s^{ap} \gamma$, siendo G_s^{ap} el módulo de corte aparente secante, γ_y y τ_y son, respectivamente, una deformación de corte total de referencia y una tensión de referencia, y α y \hat{r} son parámetros del material.

En caso de adoptar $\tau_y = \tau_f$, como proponen Idriss et al. (1978) y Hara (1980), donde τ_f es la resistencia del material a la tensión de corte, y $\gamma_y = \gamma_r$, siendo γ_r la deformación de corte total de referencia tal que $\tau_f = G_0 \gamma_r$, donde G_0 es el módulo de corte máximo, la expresión (2.123) quedaría de la siguiente manera.

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_f} \right|^{\hat{r}-1}} \quad (2.124)$$

A partir de la expresión anterior, el módulo de corte aparente secante G_s^{ap} puede expresarse como sigue (figura 2.48).

$$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \alpha \left| \frac{\tau}{\tau_f} \right|^{\hat{r}-1}} \quad (2.125)$$

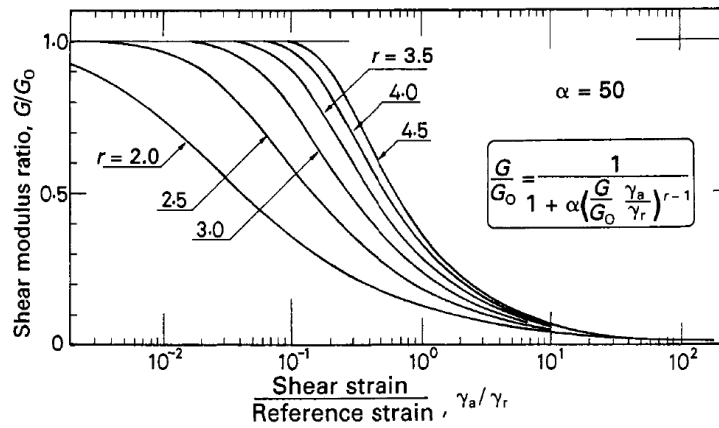


Figura 2.48. Ejemplos numéricos de curvas de degradación del módulo de corte en el modelo de Ramberg y Osgood, para diferentes valores de γ ($r \equiv \hat{\gamma}$) (Ishihara, 1996).

2.6.3.1.2.2.2. Modelo de Kondner y Zelasco (1963)

El conocido como modelo hiperbólico fue inicialmente desarrollado por Kondner (1963) y Kondner y Zelasko (1963). Posteriormente fue extensamente desarrollado por Duncan y Chang (1970). Este modelo, ideado para simular el comportamiento del suelo bajo cargas estáticas, considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal para un estado triaxial de tensiones.

$$q = \frac{\epsilon_1}{\tilde{a} + \tilde{b}\epsilon_1} \quad (2.126)$$

Donde $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora, ϵ_1 es la deformación axial total y \tilde{a} y \tilde{b} son dos parámetros del suelo que se relacionan con el módulo longitudinal inicial E'_i y con la tensión desviadora última asintótica q_{ult} , según las relaciones $\tilde{a} = 1/E'_i$ y $\tilde{b} = 1/q_{ult}$ (figura 2.49).

Janbu (1963) propuso la siguiente expresión para el módulo longitudinal inicial E'_i :

$$E'_i = K' p_a \left(\frac{\sigma'_3}{p_a} \right)^n \quad (2.127)$$

Donde $K' = E'_i$ para $\sigma'_3 = p_a$, σ'_3 es la tensión de confinamiento, p_a es la presión atmosférica y n es un parámetro del suelo.

A partir de la expresión (2.126) es posible deducir la expresión (2.128) del módulo longitudinal aparente secante $E_s'^{ap}$ y la expresión (2.129) del módulo longitudinal aparente tangente $E_t'^{ap}$.

$$E_s'^{ap} = \frac{1}{\tilde{a} + \tilde{b}\epsilon_1} \quad (2.128)$$

$$E_t'^{ap} = \frac{\tilde{a}}{(\tilde{a} + \tilde{b}\epsilon_1)^2} \quad (2.129)$$

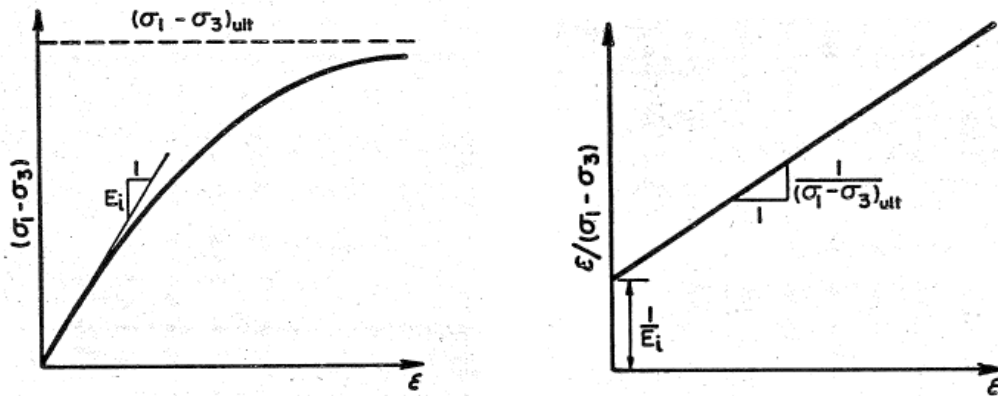


Figura 2.49. Ajuste de parámetros del modelo hiperbólico de Kondner y Zelasco a partir de resultados experimentales ($E_i \equiv E'_i$) (Duncan y Wong, 1974).

2.6.3.1.2.2.3. Modelo de Hansen (1963)

A diferencia del modelo de Kondner (1963) y Kondner y Zelasko (1963) en el que se propone una curva hiperbólica para describir la ecuación constitutiva no lineal, el modelo de Hansen (1963), ideado para reproducir el comportamiento del suelo bajo cargas estáticas, propone una curva no lineal de tipo parabólico para tal fin, que se expresa de la siguiente manera:

$$q = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{a' - b'\epsilon_1}} \tag{2.130}$$

Donde $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora, ϵ_1 es la deformación axial total y a' y b' son dos parámetros del suelo.

A partir de la expresión (2.130) es posible deducir la expresión (2.131) del módulo longitudinal aparente secante $E_s'^{ap}$ y la expresión (2.132) del módulo longitudinal aparente tangente $E_t'^{ap}$.

$$E_s'^{ap} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1(a' - b'\epsilon_1)}} \tag{2.131}$$

$$E_t'^{ap} = \frac{a'\epsilon_1}{2\sqrt{\epsilon_1(a' - b'\epsilon_1)^3}} \tag{2.132}$$

Este modelo se ideó para reproducir la curva carga-desplazamiento del terreno en cimentaciones superficiales.

Posteriormente se propuso una variante de la ecuación constitutiva de este modelo, que se detalla a continuación:

$$q = \frac{\sqrt{\epsilon_1}}{a' - b'\epsilon_1} \tag{2.133}$$

$$E_s'^{ap} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}(a' - b'\epsilon_1)} \quad (2.134)$$

$$E_t'^{ap} = \frac{a' + b'\epsilon_1}{2\sqrt{\epsilon_1}(a' - b'\epsilon_1)^2} \quad (2.135)$$

2.6.3.1.2.2.4. Modelo de Duncan y Chang (1970)

En base al modelo hiperbólico de Kondner (1963) y Kondner y Zelasko (1963), Duncan y Chang (1970) propusieron una modificación en la que introdujeron la resistencia del suelo. El modelo de Duncan y Chang propone la siguiente ecuación constitutiva no lineal.

$$q = \frac{\epsilon_1}{1/E_i' + \frac{R_f}{q_f}\epsilon_1} \quad (2.136)$$

Donde $q = \sigma_1' - \sigma_3'$ es la tensión desviadora, ϵ_1 es la deformación axial total, E_i' es el módulo longitudinal inicial según la expresión (2.127) dada por Janbu (1963), q_f es la resistencia del suelo a la tensión desviadora y R_f es la ratio entre la resistencia del suelo a la tensión desviadora y la tensión desviadora última asintótica según el modelo original de Kondner (1963). Según Duncan y Chang (1970), el valor de R_f oscila entre 0,75 y 1,0.

$$R_f = \frac{q_f}{q_{ult}} \quad (2.137)$$

El valor de q_f puede obtenerse a partir del criterio de resistencia de Mohr-Coulomb.

$$q_f = \frac{2c' \cos(\varphi') + 2\sigma_3' \sin(\varphi')}{1 - \sin(\varphi')} \quad (2.138)$$

Donde c' es la cohesión del suelo, φ' es el ángulo de fricción máximo del suelo y σ_3' es la tensión de confinamiento.

A partir de la expresión (2.136) es posible deducir la expresión (2.139) del módulo longitudinal aparente secante $E_s'^{ap}$ y la expresión (2.140) del módulo longitudinal aparente tangente $E_t'^{ap}$.

$$E_s'^{ap} = \frac{1}{1/E_i' + \frac{R_f}{q_f}\epsilon_1} \quad (2.139)$$

$$E_t'^{ap} = E_i' \left(1 - \frac{R_f}{q_f} q\right)^2 = K' p_a \left(\frac{\sigma_3'}{p_a}\right)^n \left(1 - \frac{R_f(1 - \sin(\varphi'))q}{2c' \cos(\varphi') + 2\sigma_3' \sin(\varphi')}\right)^2 \quad (2.140)$$

Kulhawy et al. (1969) propusieron la siguiente expresión del coeficiente de Poisson tangente ν_t' :

$$v'_t = \frac{G - F \ln \left(\frac{\sigma'_3}{p_a} \right)}{(1 - A)^2} \quad (2.141)$$

Donde $A = qD/E_t'^{ap}$ y D , F y G son parámetros del suelo.

Duncan et al. (1980) propusieron, por un lado, la expresión (2.15) para el módulo volumétrico aparente secante $K_s'^{ap}$ y, por otro lado, la siguiente expresión para el módulo longitudinal elástico en descarga y recarga E_{ur}' .

$$E_{ur}' = K_{ur}' p_a \left(\frac{\sigma'_3}{p_a} \right)^n \quad (2.142)$$

Donde $K_{ur}' = E_{ur}'$ para $\sigma'_3 = p_a$, σ'_3 es la tensión de confinamiento, p_a es la presión atmosférica y n es un parámetro del suelo.

Este modelo se ha aplicado con éxito para analizar problemas de excavaciones, terraplenes, presas y diversos problemas de interacción suelo-estructura (Duncan et al., 1980; Mana y Clough, 1981; Seed y Duncan, 1986).

2.6.3.1.2.2.5. Modelo de Desai (1971)

El modelo de Desai (1971) emplea funciones *spline* (Ahlberg et al., 1967) para ajustar datos experimentales con curvas no lineales que representan relaciones constitutivas. Concretamente, las funciones utilizadas por Desai para materiales de tipo granular son cúbicas.

La principal ventaja de una función *spline* es que los datos experimentales pueden aproximarse tanto como se quiera a las curvas teóricas. No obstante, las funciones *spline* implican un mayor coste computacional en relación con las curvas continuas y, por ello, han sido poco utilizadas en la modelación constitutiva de suelos.

2.6.3.1.2.2.6. Modelo de Hardin y Drnevich (1972)

El modelo de Hardin y Drnevich (1972), basado en los modelos hiperbólicos, proviene de los estudios de dinámica de suelos mediante ensayos de columna resonante y propone la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \gamma_h} \quad (2.143)$$

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} \left(1 + a'' e^{-b'' \frac{\gamma}{\gamma_r}} \right) \quad (2.144)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, γ_h es la deformación de corte total hiperbólica, G_0 es el módulo de corte máximo, γ_r es una deformación de corte total de referencia que se calcula como $\gamma_r = \tau_{max}/G_0$, siendo τ_{max} la tensión de corte máxima (equivalente a τ_f en la expresión 2.124 del modelo de Ramberg y Osgood (1943)), y a'' y b'' son parámetros del suelo.

A partir de las expresiones (2.143) y (2.144) es posible deducir la expresión del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} (2.145) y la expresión del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} (2.146).

$$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \gamma_h} \quad (2.145)$$

$$G_t^{ap} = \frac{G_0}{(1 + \gamma_h)^2} \left(1 + b'' \frac{\gamma}{\gamma_r} \left(\gamma_h - \frac{\gamma}{\gamma_r} \right) \right) \quad (2.146)$$

2.6.3.1.2.2.7. Modelo Pyke (1979)

El modelo de Pyke (1979), basado en los modelos hiperbólicos, propone la siguiente ecuación constitutiva no lineal (figura 2.50):

$$\tau - \tau_c = \left(\frac{G_0}{1 + \left| \frac{\gamma - \gamma_c}{\xi \gamma_r} \right|} \right) (\gamma - \gamma_c) \quad (2.147)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, τ_c y γ_c son la tensión y deformación de corte total en el último punto de reversión, γ_r es una deformación de corte total de referencia que se calcula como $\gamma_r = \tau_{max}/G_0$, siendo τ_{max} la tensión de corte máxima (equivalente a τ_f en la expresión 2.124 del modelo de Ramberg y Osgood (1943)), G_0 el módulo de corte máximo, y ξ es un parámetro del modelo que vale $\xi = 1$ para la carga noval y $\xi = 2$ para descargas/recargas.

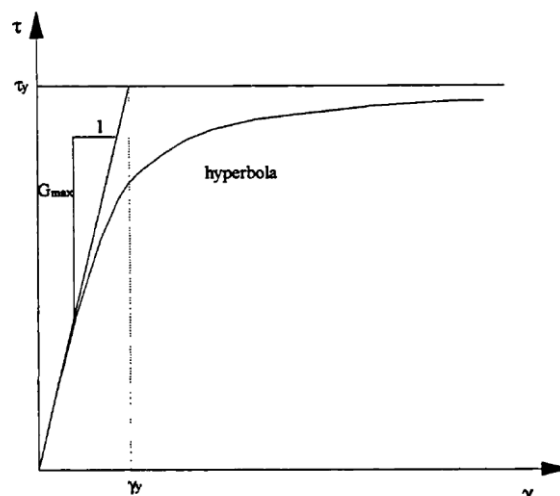


Figura 2.50. Representación gráfica de la curva $\tau - \gamma$ del modelo de Pyke (1979), extraído del trabajo de Kantartzi (1993).

A partir de la expresión (2.147) es posible deducir la expresión del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} (2.148) y la expresión del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} (2.149) suponiendo el punto de reversión $(\tau_c, \gamma_c) = (0,0)$ como origen local.

$$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \frac{\gamma}{\xi\gamma_r}} \quad (2.148)$$

$$G_t^{ap} = \frac{G_0}{\left(1 + \frac{\gamma}{\xi\gamma_r}\right)^2} \quad (2.149)$$

2.6.3.1.2.2.8. Modelo de Jardine et al. (1986)

El modelo desarrollado por Jardine et al. (1986) considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal para un material isótropo no drenado.

$$q = c_u \left(\bar{A} + \bar{B} \cos(\bar{\alpha}(C')^{\bar{\gamma}}) \right) \epsilon_1 \quad (2.150)$$

Donde $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora, c_u es la resistencia al corte no drenado, ϵ_1 es la deformación axial total, $C' = \log_{10}(\epsilon_1/\bar{C})$ y \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , $\bar{\alpha}$ y $\bar{\gamma}$ son parámetros del suelo.

A partir de la expresión (2.150) es posible deducir la expresión (2.151) del módulo longitudinal aparente secante no drenado $E_{s,u}^{ap}$ (cuya variación con la deformación se muestra en la figura 2.51), y la expresión (2.152) del módulo longitudinal aparente tangente $E_{t,u}^{ap}$.

$$E_{s,u}^{ap} = c_u \left(\bar{A} + \bar{B} \cos(\bar{\alpha}(C')^{\bar{\gamma}}) \right) \quad (2.151)$$

$$E_{t,u}^{ap} = c_u \left(\bar{A} + \bar{B} \cos(\bar{\alpha}(C')^{\bar{\gamma}}) - \frac{\bar{B}\bar{\alpha}\bar{\gamma}}{2,303} (C')^{\bar{\gamma}-1} \sin(\bar{\alpha}(C')^{\bar{\gamma}}) \right) \quad (2.152)$$

Las expresiones anteriores son válidas para $\epsilon_1 \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$, donde se asume $\nu = 0,49$. Asimismo, Jardine et al. (1991) extendieron el modelo para considerar la no linealidad en el módulo de corte aparente secante G_s^{ap} y en el módulo volumétrico aparente secante K_s^{ap} .

$$3 \frac{G_s^{ap}}{p'} = C_1 + C_2 \cos(\bar{\alpha}(C'_3)^{\bar{\gamma}}) \quad (2.153)$$

$$\frac{K_s^{ap}}{p'} = C_4 + C_5 \cos(\bar{\delta}(C'_6)^{\bar{\eta}}) \quad (2.154)$$

Donde $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $C'_3 = \log_{10}(\epsilon_s/\sqrt{3}C_3)$, $\epsilon_s = 2/3(\epsilon_1 - \epsilon_3)$ es la tensión desviadora total, $C'_6 = \log_{10}(|\epsilon_v|/C_6)$, $\epsilon_v = \epsilon_{ii}$ es la deformación volumétrica total, y $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}, \bar{\delta}$ y $\bar{\eta}$ son parámetros del suelo.

A partir de las expresiones (2.153) y (2.154) es posible deducir la expresión (2.155) del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} y la expresión (2.156) del módulo volumétrico aparente tangente K_t^{ap} del modelo extendido.

$$3 \frac{G_t^{ap}}{p'} = C_1 + C_2 \cos(\bar{\alpha}(C'_3)^{\bar{\gamma}}) - \frac{C_2 \bar{\alpha} \bar{\gamma}}{2,303} (C'_3)^{\bar{\gamma}-1} \sin(\bar{\alpha}(C'_3)^{\bar{\gamma}}) \quad (2.155)$$

$$\frac{K_t^{ap}}{p'} = C_4 + C_5 \cos(\bar{\delta}(C'_6)^{\bar{\eta}}) - \frac{C_5 \bar{\delta} \bar{\eta}}{2,303} (C'_6)^{\bar{\eta}-1} \sin(\bar{\delta}(C'_6)^{\bar{\eta}}) \quad (2.156)$$

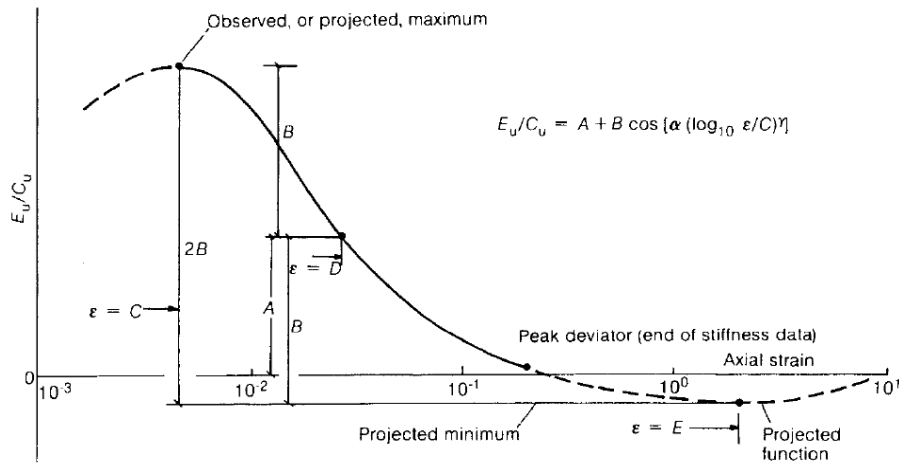


Figura 2.51. Curva de degradación de E_u ($E_u \equiv E_{s,u}^{ap}$, $A \equiv \bar{A}$, $B \equiv \bar{B}$, $C \equiv \bar{C}$, $\alpha \equiv \bar{\alpha}$, $\gamma \equiv \bar{\gamma}$) (Jardine et al., 1986).

El modelo de Jardine et al. (1986) proporciona buenos resultados en simulaciones de ensayos de compresión triaxial no drenados en arcillas de baja plasticidad ligeramente sobreconsolidadas. En condiciones drenadas, el modelo proporciona resultados menos satisfactorios.

2.6.3.1.2.2.9. Modelo de Prévost y Keane (1990)

El modelo de Prévost y Keane (1990) está basado en los modelos hiperbólicos y se ideó para reproducir el comportamiento del suelo bajo para cargas estáticas y dinámicas a pequeñas y grandes deformaciones. Este modelo propone la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = G_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 + G_0 \gamma} - \frac{\tau_1^2}{G_0^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau_1}{G_0} + \gamma_{max} \right)^2} \frac{1}{\gamma_{max}^{m'}} \frac{\gamma^{m'}}{m' + 1} \right) \gamma \quad (2.157)$$

$$m' \geq 4\gamma_{max} - 1 \quad (2.158)$$

$$\tau_1 = \frac{\gamma_1 G_0}{\gamma_{max}} \quad (2.159)$$

$$y_1 = \frac{y_{max} - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{y_{max}}{m' + 1}}}{\frac{m'}{m' + 1} - \gamma_{max}} \quad (2.160)$$

$$y_{max} = \frac{\tau_{max}}{G_0 \gamma_{max}} \quad (2.161)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte, τ_{max} es la tensión de corte máxima, γ_{max} es una deformación de corte total de referencia, G_0 el módulo de corte máximo y m' es un parámetro del suelo.

A partir de la expresión (2.157) es posible deducir la expresión (2.162) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} :

$$G_s^{ap} = G_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 + G_0 \gamma} - \frac{\tau_1^2}{G_0^2} \frac{1}{\left(\frac{\tau_1}{G_0} + \gamma_{max}\right)^2} \frac{1}{\gamma_{max}^{m'} m' + 1} \right) \quad (2.162)$$

2.6.3.1.2.2.10. Modelo de Tatsuoka y Shibuya (1992)

Tatsuoka y Shibuya (1991, 1992) proponen un modelo constitutivo no lineal cuyo rango de análisis de deformaciones, al igual que en el modelo de Prévost y Keane (1990), es ampliado respecto a algunos de los modelos hiperbólicos descritos anteriormente.

En principio, el modelo sólo es aplicable a arenas sometidas a compresión, en estados de deformación plana y con un confinamiento constante, si bien es posible extenderlo a otros tipos de terreno y a estados tensodeformacionales más generales tras las modificaciones apropiadas. La ecuación constitutiva no lineal del modelo es la siguiente:

$$Y = X \left(\frac{1}{C_1(X)} + \frac{X}{C_2(X)} \right)^{-1} \quad (2.163)$$

$$C_1(X) = \frac{C_1(X=0) + C_1(X \rightarrow \infty)}{2} + \frac{C_1(X=0) - C_1(X \rightarrow \infty)}{2} \cos \left(\pi \left(\left(\frac{\alpha'}{X} \right)^m + 1 \right)^{-1} \right) \quad (2.164)$$

$$C_2(X) = \frac{C_2(X=0) + C_2(X \rightarrow \infty)}{2} + \frac{C_2(X=0) - C_2(X \rightarrow \infty)}{2} \cos \left(\pi \left(\left(\frac{\beta'}{X} \right)^n + 1 \right)^{-1} \right) \quad (2.165)$$

Donde $Y = (\tau/p')/(\tau/p')_{max}$, τ es la tensión de corte, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$, $(\tau/p')_{max}$ es el valor máximo de la tensión de corte, $X = \gamma^p/\gamma_{ref}$, siendo γ^p la deformación de corte plástica, $\gamma_{ref} = (\tau/p')_{max}/(G_0/p'_0)$, donde G_0 es el módulo de corte máximo y p'_0 una presión de referencia, y $C_1(X=0)$, $C_1(X \rightarrow \infty)$, $C_2(X=0)$, $C_2(X \rightarrow \infty)$, m y n son parámetros del suelo (figura 2.52 y 2.53).

A pesar de resultar un modelo de cierta complejidad matemática y conceptual, los resultados obtenidos en los análisis de varios problemas de capacidad portante en estados de deformación plana en arenas

han resultado satisfactorios (Tatsuoka y Shibuya, 1991, 1992; Siddiquee, 1991; Siddiquee et al., 1991, 1992).

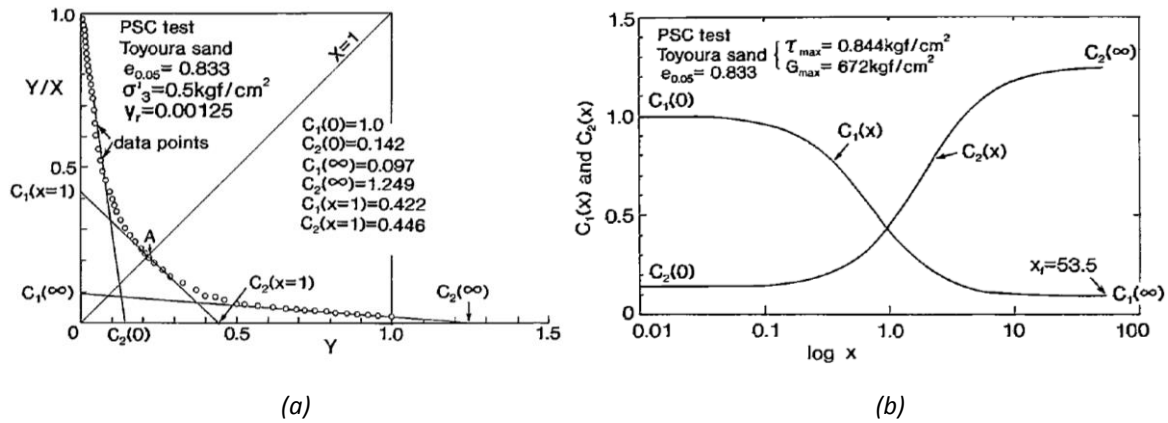


Figura 2.52. (a) Parámetros $C_i(0)$ y $C_i(\infty)$. (b) Parámetros $C_i(X)$. Tatsuoka y Shibuya (1992).

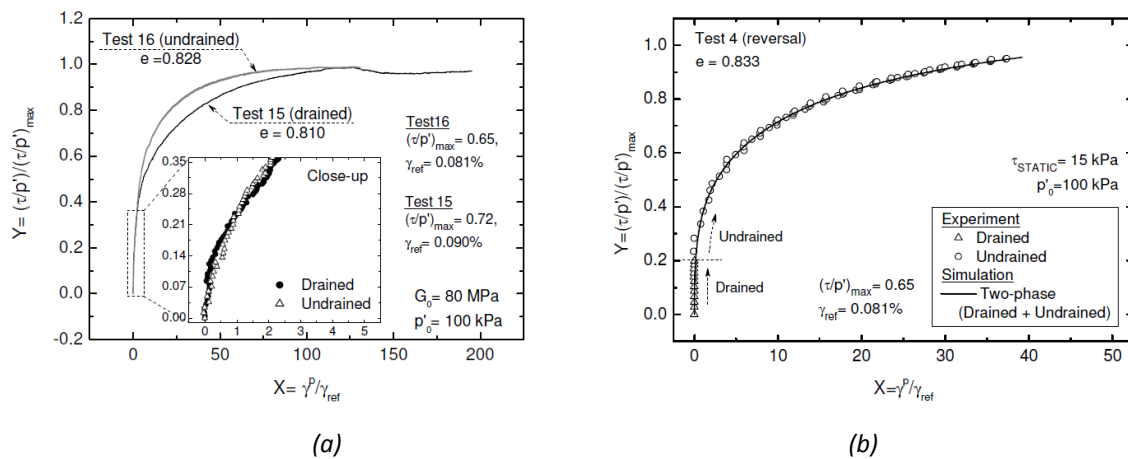


Figura 2.53. (a) Comparación entre X e Y para ensayos drenados y no drenados en arena de Toyoura. (b) Simulación con el modelo de Tatsuoka y Shibuya (1992). Chiaro et al. (2011).

2.6.3.1.2.2.11. Modelo de Matasovic y Vucetic (1993)

El modelo de Matasovic y Vucetic (1993), denominado *MKZ*, se basa en el modelo hiperbólico de Kondner y Zelasko (1963) y en los trabajos de Matasovic (1993). Este modelo considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \beta'' \gamma_h^{\dot{s}}} \quad (2.166)$$

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} \quad (2.167)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, G_0 es el módulo de corte máximo, γ_h es la deformación de corte total hiperbólica, γ_r es una deformación de corte total de referencia que se calcula como $\gamma_r = \tau_{max}/G_0$, siendo τ_{max} la tensión de corte máxima (equivalente a τ_f en la expresión 2.124 del modelo de Ramberg y Osgood (1943)), y β'' y \hat{s} parámetros del suelo (figura 2.54).

A partir de la expresión (2.166) es posible deducir la expresión (2.168) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} y la expresión (2.169) del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} .

$$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \beta'' \gamma_h^{\hat{s}}} \quad (2.168)$$

$$G_t^{ap} = \frac{G_0}{(1 + \beta'' \gamma_h^{\hat{s}})^2} (1 + \beta'' \gamma_h^{\hat{s}} (1 - \hat{s})) \quad (2.169)$$

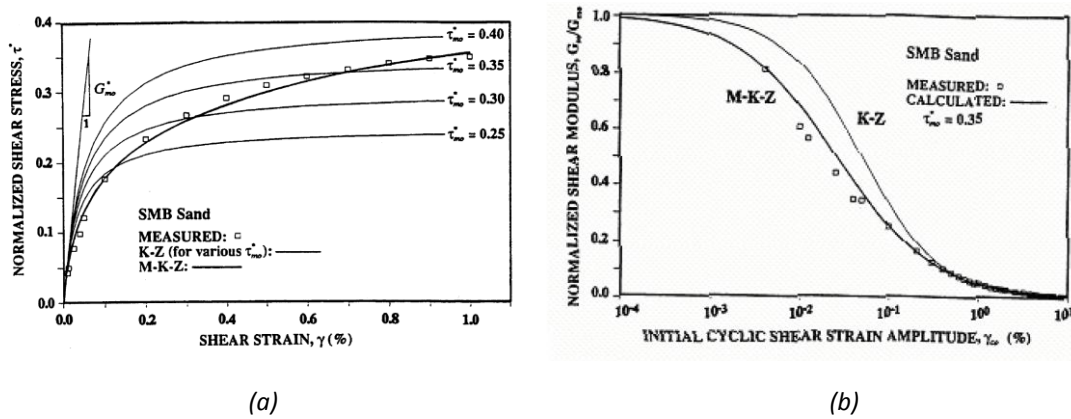


Figura 2.54. Comparación entre el modelo de Kondner y Zelasko (1963) (KZ) y Matasovic y Vucetic (1993) (MKZ) (Stewart et al., 2008).

(a) Curva de carga $\tau - \gamma$. (b) Curva de degradación del módulo de corte G .

2.6.3.1.2.2.12. Modelo de Ishibashi y Zhang (1993)

El modelo desarrollado por Ishibashi y Zhang (1993) para suelos plásticos, basado en las investigaciones de Hardin y Drnevich (1972), Iwasaki et al. (1978), Tatsuoka et al. (1979), Kokusho (1980), Kokusho et al. (1982), Ishibashi (1981) y Dobry y Vucetic (1987), considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = G_0 K(\gamma, IP) \sigma_0^{\tilde{m}(\gamma, IP)} \gamma \quad (2.170)$$

$$K(\gamma, IP) = 0,5 \left(1 + \tanh \left(\ln \left(\frac{0,000102 + n(IP)}{\gamma} \right) \right) \right)^{0,492} \quad (2.171)$$

$$\sigma_0' = \left(\frac{1 + 2K_0}{3} \right) \sigma_v' \quad (2.172)$$

$$\tilde{m}(\gamma, IP) = 0,272 \left(1 - \tanh \left(\ln \left(\frac{0,000556}{\gamma} \right) \right)^{0,4} \right) e^{-0,0145IP^{1,3}} \quad (2.173)$$

$$n(IP) = \begin{cases} 0 & si \quad IP = 0 \\ 3,37 \cdot 10^{-6} IP^{1,404} & si \quad 0 < IP \leq 15 \\ 7,00 \cdot 10^{-7} IP^{1,976} & si \quad 15 < IP \leq 70 \\ 2,70 \cdot 10^{-5} IP^{1,115} & si \quad IP > 70 \end{cases} \quad (2.174)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, G_0 es el módulo de corte máximo, IP es el índice de plasticidad del suelo, σ'_0 es la tensión de confinamiento, K_0 es el coeficiente de empuje al reposo y σ'_v es la tensión vertical (figura 2.55).

A partir de la expresión (2.170) es posible deducir la expresión (2.175) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} .

$$G_s^{ap} = G_0 K(\gamma, IP) \sigma'_0 m_0 \tilde{m}(\gamma, IP) \quad (2.175)$$

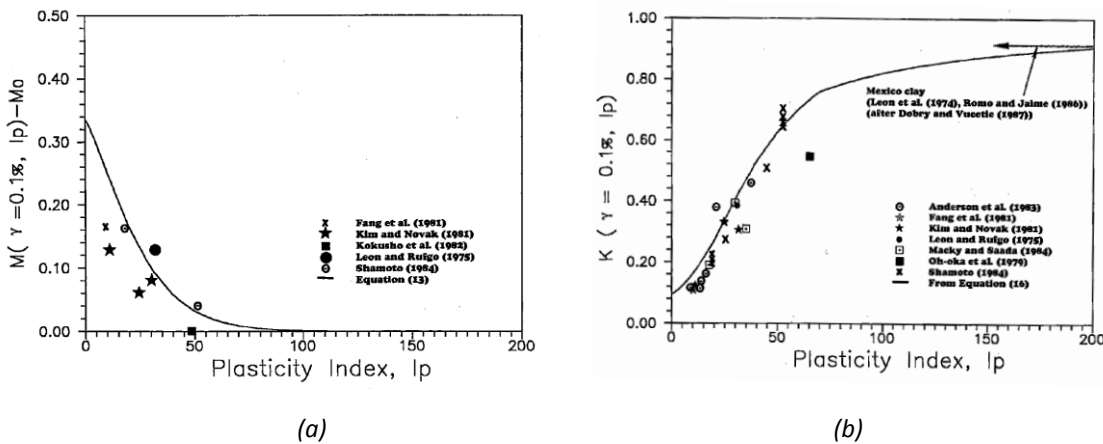


Figura 2.55. Resultados de ensayos (Ishibashi y Zhang, 1993).
 (a) $\tilde{m}(\gamma = 0.1\%, IP)$, ($M \equiv \tilde{m}$). (b) $K(\gamma = 0.1\%, IP)$.

2.6.3.1.2.2.13. Modelo de Fahey y Carter (1993)

El modelo para arenas desarrollado por Fahey y Carter (1993) considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = G_0 \left(1 - f \left(\frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^g \right) \gamma \quad (2.176)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte, G_0 es módulo de corte máximo, τ_{max} es la tensión de corte máximo (equivalente a τ_f en la expresión 2.124 del modelo de Ramberg y Osgood (1943)), y f y g son parámetros del suelo (figura 2.56).

A partir de la expresión (2.176) es posible deducir la expresión (2.177) del módulo de corte aparente secante G_s y la expresión (2.178) del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} .

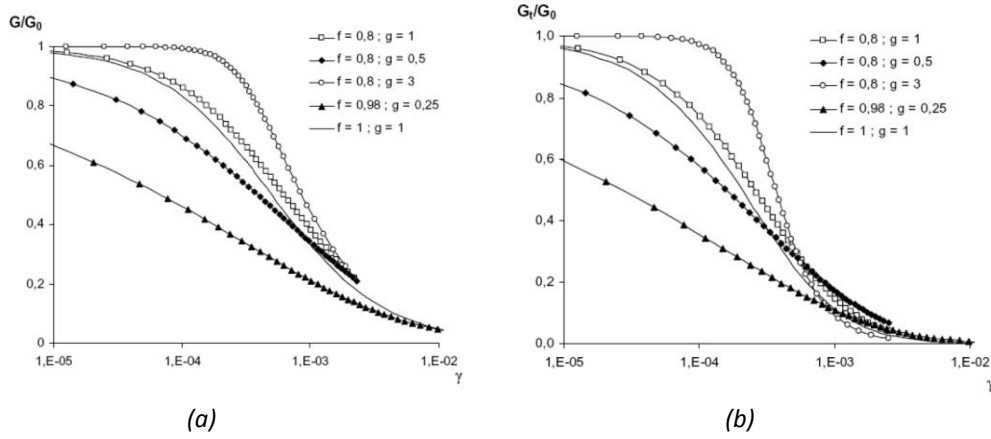


Figura 2.56. (a) Curva de degradación de G_s^{ap} ($G \equiv G_s^{ap}$). (b) Curva de degradación de G_t^{ap} ($G_t \equiv G_t^{ap}$).
Fahey y Carter (1993).

$$G_s^{ap} = G_0 \left(1 - f \left(\frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^g \right) \quad (2.177)$$

$$G_t^{ap} = \frac{G_0 \left(1 - f \left(\frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^g \right)^2}{1 - f(1 - g) \left(\frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^g} \quad (2.178)$$

2.6.3.1.2.2.14. Modelo de Mayne (1994)

El modelo desarrollado por Mayne (1994) considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = G_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^{\bar{m}} \gamma \quad (2.179)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, G_0 es módulo de corte máximo, τ_{max} es la tensión de corte máximo (equivalente a τ_f en la expresión 2.124 del modelo de Ramberg y Osgood (1943)), y \bar{m} es un parámetro del suelo.

A partir de la expresión (2.179) es posible deducir la expresión (2.180) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} .

$$G_s^{ap} = G_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^{\bar{m}} \quad (2.180)$$

El modelo de Mayne (1994) es equivalente al de Fahey y Carter (1993) para $\bar{m} = f = g = 1$.

2.6.3.1.2.2.15. Modelo de Shibuya et al. (1997)

El modelo desarrollado por Shibuya et al. (1997) se trata de un híbrido del modelo de Fahey y Carter (1993) y del modelo de Mayne (1994) y considera la siguiente ecuación incremental constitutiva no lineal:

$$\dot{q} = E'_{max} \left(1 - \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_{max}} \right)^{\bar{m}'} \right)^{\bar{n}'} \dot{\epsilon} \quad (2.181)$$

Donde $\dot{q} = \dot{\sigma}'_1 - \dot{\sigma}'_3$ es el incremento de la tensión desviadora, E'_{max} es el módulo longitudinal máximo, \dot{q}_{max} es el valor máximo del incremento de tensión desviadora en compresión triaxial, $\dot{\epsilon}$ es el incremento de la deformación longitudinal total y \bar{m}' y \bar{n}' son parámetros del suelo.

A partir de la expresión (2.181) es posible deducir la expresión del módulo longitudinal aparente tangente E'^{ap}_t (2.182).

$$E'^{ap}_t = E'_{max} \left(1 - \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_{max}} \right)^{\bar{m}'} \right)^{\bar{n}'} \quad (2.182)$$

2.6.3.1.2.2.16. Modelo de Bolton y Whittle (1999)

El modelo propuesto por Bolton y Whittle (1999), basado en trabajos previos como el de Gunn (1992) y Bolton et al. (1993), considera la siguiente ecuación incremental constitutiva no lineal:

$$\tau = \bar{\alpha}' \gamma^{\bar{\beta}'} \quad (2.183)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, y $\bar{\alpha}'$ y $\bar{\beta}'$ son parámetros del suelo.

A partir de la expresión (2.183) es posible deducir la expresión (2.184) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} y la expresión (2.185) del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} .

$$G_s^{ap} = \bar{\alpha}' \gamma^{\bar{\beta}'-1} \quad (2.184)$$

$$G_t^{ap} = \bar{\alpha}' \beta \gamma^{\bar{\beta}'-1} \quad (2.185)$$

Tal como exponen Bolton y Whittle (1999), el modelo proporciona una buena aproximación en la simulación de ensayos presiométricos.

2.6.3.1.2.2.17. Modelo de Lee y Salgado (1999)

El modelo desarrollado por Lee y Salgado (1999), y posteriormente por Lee y Salgado (2000, 2002), se trata de una generalización al caso multiaxial del modelo de Fahey y Carter (1993), y considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$G_s^{ap} = G_0 \left(1 - \hat{f} \left(\frac{\sqrt{J} - \sqrt{J_0}}{\sqrt{J_{max}} - \sqrt{J_0}} \right)^{\hat{g}} \right) \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^{n_g} \epsilon_q \quad (2.186)$$

Donde $J = \sqrt{1/2 \mathbf{s} : \mathbf{s}}$ es un invariante del tensor desviador de tensiones \mathbf{s} , siendo $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct} \mathbf{1}$, $\epsilon_q = \sqrt{\mathbf{e} : \mathbf{e}}$ es un invariante del tensor desviador de deformaciones totales $\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct} \mathbf{1}$, G_0 es módulo de corte máximo, J_0 es el valor inicial de J , J_{max} es el valor máximo de J , $p' = \sigma'_{oct} = 1/3 \sigma'_{ii}$ es la presión media, p'_0 es la presión media inicial, $\epsilon_{oct} = 1/3 \epsilon_{ii}$ es la deformación volumétrica octaédrica y \hat{f} , \hat{g} y n_g son parámetros del suelo (los resultados experimentales muestran que \hat{f} decrece y \hat{g} crece con el incremento de la densidad relativa D_R), figura 2.57.

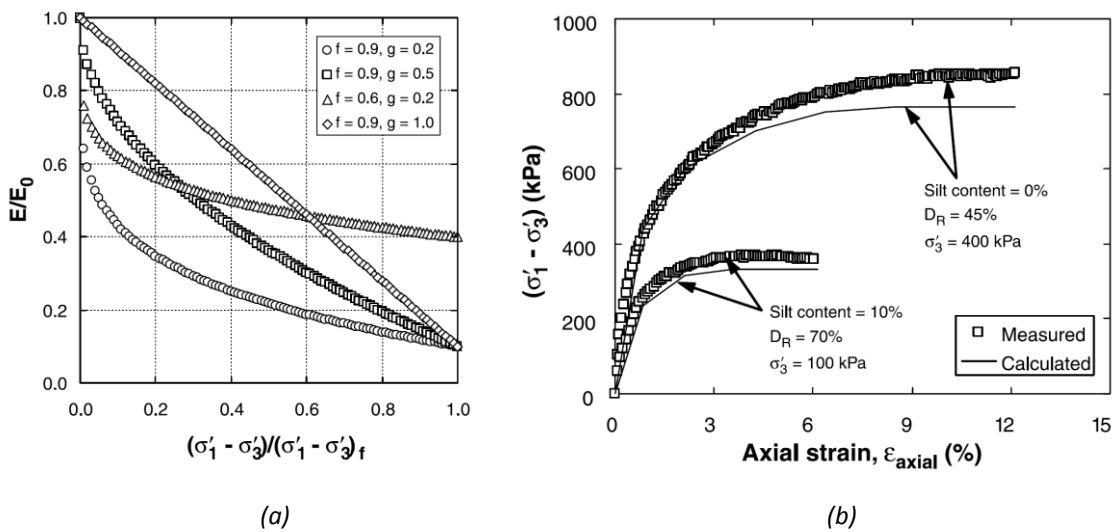


Figura 2.57. (a) Curvas de degradación del módulo aparente longitudinal según el modelo de Lee y Salgado. (b) Medidas y simulación con el modelo de Lee y Salgado con un criterio de plasticidad de Drucker-Prager. Lee et al. (2004).

A partir de la expresión (2.186) es posible deducir la expresión (2.187) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} y la expresión (2.188) del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} .

$$G_s^{ap} = G_0 \left(1 - \hat{f} \left(\frac{\sqrt{J} - \sqrt{J_0}}{\sqrt{J_{max}} - \sqrt{J_0}} \right)^{\hat{g}} \right) \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^{n_g} \quad (2.187)$$

$$G_t^{ap} = \frac{\left(\left(1 - \hat{f} \left(\frac{\sqrt{J} - \sqrt{J_0}}{\sqrt{J_{max}} - \sqrt{J_0}} \right)^{\hat{g}} \right) \right)^2}{1 - \hat{f}(1 - \hat{g}) \left(\frac{\sqrt{J} - \sqrt{J_0}}{\sqrt{J_{max}} - \sqrt{J_0}} \right)^{\hat{g}}} \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^{3n_g} \quad (2.188)$$

2.6.3.1.2.2.18. Modelo de Lehane y Cosgrove (2000)

El modelo desarrollado por Lehane y Cosgrove (2000) para el cálculo de asientos del terreno en cimentaciones sobre arenas, considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$q = \frac{E'_{max}}{1 + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_{th}}{\epsilon_r - \epsilon_{th}}\right)^{\hat{n}}} \epsilon_1 \quad (2.189)$$

Donde $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora, E'_{max} es el módulo longitudinal máximo, ϵ_1 es la deformación axial total, ϵ_{th} es el límite de la deformación longitudinal total que separa el comportamiento lineal del no lineal, ϵ_r es una deformación de referencia para $E'/E'_{max} = 0,5$ y \hat{n} es un parámetro del suelo.

A partir de la expresión (2.189) es posible deducir las expresiones (2.190) y (2.191) del módulo longitudinal aparente secante E'^{ap}_s .

$$E'^{ap}_s = \frac{E'_{max}}{1 + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_{th}}{\epsilon_r - \epsilon_{th}}\right)^{\hat{n}}} \quad si \quad \epsilon_1 \geq \epsilon_{th} \quad (2.190)$$

$$E'^{ap}_s = E'_{max} \quad si \quad \epsilon_1 < \epsilon_{th} \quad (2.191)$$

2.6.3.1.2.2.19. Modelo de Atkinson (2000)

El modelo desarrollado por Atkinson (2000), considera la siguiente ecuación incremental constitutiva no lineal:

$$\dot{q} = E'_{max} \left(\frac{1 - \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_1}\right)^{r'}}{1 - \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_{th}}\right)^{r'}} \right) \dot{\epsilon}_1 \quad (2.192)$$

Donde $\dot{q} = \dot{\sigma}'_1 - \dot{\sigma}'_3$ es el incremento de la tensión desviadora, E'_{max} es el módulo longitudinal máximo, $\dot{\epsilon}_1$ es el incremento de la deformación axial total, ϵ_{th} es el límite de la deformación longitudinal total que separa el comportamiento lineal del no lineal, ϵ_f es la deformación longitudinal en rotura y r' es un parámetro del suelo.

A partir de la expresión (2.192) es posible deducir las expresiones (2.193) y (2.194) del módulo longitudinal aparente tangente E'^{ap}_t .

$$E'^{ap}_t = E'_{max} \left(\frac{1 - \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_1}\right)^{r'}}{1 - \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_{th}}\right)^{r'}} \right) \quad si \quad \epsilon_1 \geq \epsilon_{th} \quad (2.193)$$

$$E'^{ap}_t = E'_{max} \quad si \quad \epsilon_1 < \epsilon_{th} \quad (2.194)$$

2.6.3.1.2.2.20. Modelo de Darendeli y Stokoe (2001)

El modelo de Darendeli y Stokoe (2001) se basa en el modelo hiperbólico de Hardin y Drnevich (1972), y considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \gamma_h^{\hat{a}}} \quad (2.195)$$

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\hat{\gamma}_r} \quad (2.196)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, G_0 es el módulo de corte máximo, γ_h es la deformación de corte total hiperbólica, \hat{a} es un parámetro de forma de la curva de degradación y $\hat{\gamma}_r$ es la deformación de corte γ para la cual el valor de $G_s^{ap}(\hat{\gamma}_r) = 0,50G_0$

Darendeli y Stokoe propusieron la siguiente expresión para $\hat{\gamma}_r$.

$$\hat{\gamma}_r = (\hat{\gamma}_r)_{ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^m \quad (2.197)$$

Donde $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, p'_{ref} es una presión de referencia, $(\hat{\gamma}_r)_{ref}$ es el valor de $\hat{\gamma}_r$ para $p' = p'_{ref}$ y m es un parámetro del suelo.

Asimismo, Darendeli y Stokoe aplicaron su modelo a problemas con suelos cohesivos. Posteriormente Menq (2003) lo aplicó a arenas y gravas y, a partir de estudios experimentales, propuso las siguientes expresiones para estimar $\hat{\gamma}_r$ y \hat{a} en suelos granulares.

$$\hat{\gamma}_r = 0,12C_u^{-0,6} \left(\frac{p'}{p_a} \right)^{0,5C_u^{-0,15}} \quad (2.198)$$

$$\hat{a} = 0,86 + 0,1 \log \left(\frac{p'}{p_a} \right) \quad (2.199)$$

Donde C_u es el coeficiente de uniformidad, p' es la presión media y p_a es la presión atmosférica.

A partir de la expresión (2.195) es posible deducir la expresión (2.200) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} y la expresión (2.201) del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} .

$$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \gamma_h^{\hat{a}}} \quad (2.200)$$

$$G_t^{ap} = \frac{G_0}{(1 + \gamma_h^{\hat{a}})^2} (1 + \gamma_h^{\hat{a}}(1 - \hat{a})) \quad (2.201)$$

2.6.3.1.2.2.21. Modelo de Dos Santos y Correia (2001)

El modelo de Dos Santos y Correia (2001) se basa en el modelo hiperbólico de Hardin y Drnevich (1972), y considera la siguiente ecuación constitutiva no lineal:

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + a \gamma_h} \quad (2.202)$$

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_{0.7}} \quad (2.203)$$

Donde τ es la tensión de corte, γ es la deformación de corte total, G_0 es el módulo de corte máximo, γ_h es la deformación de corte total hiperbólica, $a = 0,385$ (valor que Dos Santos y Correia obtuvieron por ajuste con mínimos cuadrados) y $\gamma_{0.7}$ es la deformación de corte total γ para la cual $G_s^{ap}(\gamma_{0.7}) = 0,722G_0$ (figura 2.58).

Vucetic y Dobry (1991) y Vucetic (1994) propusieron la relación empírica $\gamma_{0.7} = 0,0021I_p - 0,0055$ entre $\gamma_{0.7}$ y el índice de plasticidad (IP) para suelos cohesivos plásticos. Por otro lado, dado que $\gamma_{0.7} = a\tau_{max}/G_0$, si se relaciona τ_{max} con el criterio de rotura de Mohr-Coulomb (siendo c' la cohesión y ϕ' el ángulo de fricción máximo), se obtienen las siguientes expresiones de $\gamma_{0.7}$ para suelos normalmente consolidados (2.204) y sobreconsolidados (2.205).

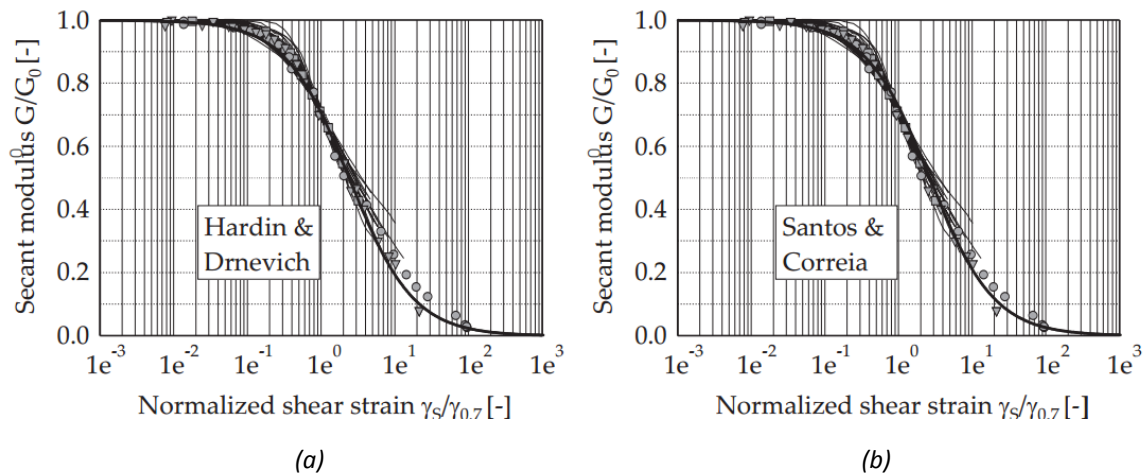


Figura 2.58. Comparación entre modelos y datos experimentales (Benz, 2007).
(a) Modelo de Hardin y Drnevich (1972). (b) Modelo de Dos Santos y Correia (2001).

$$\gamma_{0.7} = \frac{0,385}{4G_0} (2c'(1 + \cos(2\phi')) + \sigma'_1(1 + K_0)\sin(2\phi')) \quad (2.204)$$

$$\gamma_{0.7} = \frac{0,429}{4G_0} (2c'(1 + \cos(2\phi')) + \sigma'_1(1 + K_0)\sin(2\phi')) \quad (2.205)$$

A partir de la expresión (2.202) es posible deducir la expresión (2.206) del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} y la expresión (2.207) del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} .

$$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + a\gamma_h} \quad (2.206)$$

$$G_t^{ap} = \frac{G_0}{(1 + a\gamma_h)^2} \quad (2.207)$$

2.6.3.1.2.2.2. Modelo SSOM de Benz (2007)

El modelo *Small Strain Overlay Model (SSOM)* desarrollado por Benz (2007) conforma la base teórica de la parte elástica del modelo elastoplástico avanzado *HS-SS* de Plaxis (expuesto en el apartado 2.6.3.2.1.3 del presente capítulo). Benz (2007) clasifica el modelo *SSOM* dentro de los modelos paraelásticos (Hueckel y Nova, 1979), pero siguiendo el criterio de clasificación propuesto en el presente trabajo, el *SSOM* se trataría de un modelo histerético cuasi-hipoelástico del tipo *variable moduli*. Algunas de sus características son las siguientes:

- Es capaz de aproximar el comportamiento del terreno en el rango de las pequeñas deformaciones.
- Es capaz de combinarse con modelos plásticos utilizados en la práctica de la ingeniería geotécnica.
- Tiene un reducido coste computacional.
- Requiere pocos parámetros con un significado físico sencillo.

En cuanto a los elementos que permiten reproducir la no linealidad del suelo, el modelo *SSOM* parte de la expresión del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} propuesta por Dos Santos y Correia (2001) en la cual introduce la dependencia con el confinamiento:

$$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST}}{\xi \gamma_{0,7}} \right)} \quad (2.208)$$

$$G_0 = G_0^{ref} \left(\frac{\sigma'_3 + c' \cot(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot(\varphi')} \right)^m \quad (2.209)$$

$$\gamma_{HIST} = \sqrt{3} \frac{\|\dot{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{1})\|}{\|\dot{\mathbf{e}}\|} \quad (2.210)$$

Donde G_0 es módulo de corte máximo, γ_{HIST} es la variable que depende de la historia de deformaciones totales y controla la degradación de G_s^{ap} , $a = 0,385$, $\gamma_{0,7}$ es el valor de γ_{HIST} para el cual $G_s^{ap} = 0,722G_0$, ξ es un factor de escala que vale 1 o 2 en función de si el proceso es de carga noval, descarga o recarga, y en función de si el modelo *SSOM* se utiliza de forma independiente o bien se utiliza para describir la parte elástica de la deformación dentro de un modelo elastoplástico, σ'_3 es la tensión de confinamiento lateral, $G_0 = G_0^{ref}$ cuando $\sigma'_3 = p'_{ref}$, c' y φ' son la cohesión efectiva y ángulo de fricción

efectivo máximo del suelo respectivamente, m es un parámetro del suelo, $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\epsilon}_{oct} \mathbf{1}$ es el incremento del tensor de deformaciones desviadoras totales, $\dot{\epsilon}_{oct} = 1/3 \dot{\epsilon}_{ii}$ es el incremento de la deformación volumétrica octaédrica total, \mathbf{H} es un tensor que acumula la historia reciente de deformaciones desviadoras y $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ es la norma de Hilbert-Schmidt. El tensor de historia \mathbf{H} se identifica con las variables estado χ^{hist} que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo según Gudehus (2011), y a las cuales es posible atribuir la no linealidad y la dependencia del comportamiento del mismo con su historia reciente.

Debe notarse que en la expresión (2.208) se utiliza el módulo de corte aparente secante G_s^{ap} y no el módulo de corte elástico, puesto que la variable γ_{HIST} depende de la historia de deformaciones totales.

El modelo *SSOM* se trata de un modelo no conservativo en relación con la parte desviadora de la ecuación constitutiva, puesto que no está formulado en un marco hiperelástico y considera la dependencia $G_s^{ap} = G_s^{ap}(\gamma_{HIST}, \sigma'_3)$. Esta dependencia sirve únicamente para escalar el valor del módulo de rigidez máximo G_0 y no se tiene en cuenta en el desarrollo teórico de la formulación. En cualquier caso, el modelo *SSOM* no está concebido para simular problemas con cargas cíclicas, por lo que no ser termodinámicamente consistente no supone, a priori, un gran problema.

Al ser un modelo del tipo *variable moduli*, utiliza la ecuación constitutiva elástica y unos módulos de rigidez que dependen de forma no lineal con la tensión y deformación.

$$\mathbf{E}'_t = \frac{2G_t^{ap} \nu'_{ur}}{1 - 2\nu'_{ur}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G_t^{ap} \mathbb{I} \quad (2.211)$$

$$G_t^{ap} \approx \frac{d\tau_{oct}}{d\gamma_{HIST}} = \frac{dG_t^{ap}}{d\gamma_{HIST}} \gamma_{HIST} + G_t^{ap} = \frac{G_0}{\left(1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST}}{\xi \gamma_{0,7}}\right)\right)^2} \quad (2.212)$$

Donde \mathbf{E}'_t el tensor de rigidez tangente, G_t^{ap} es el módulo de rigidez al corte aparente tangente, ν'_{ur} es el coeficiente de Poisson drenado para medias y grandes deformaciones que se asume constante y $\tau_{oct} = \sqrt{1/3 \mathbf{s} : \mathbf{s}}$ es un invariante del tensor desviador de tensiones \mathbf{s} , con $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct} \mathbf{1}$ y $\sigma'_{oct} = 1/3 \sigma'_{ii}$.

A pesar de que la variable de estado (o de historia) γ_{HIST} , que controla el proceso de degradación, no coincide con la deformación octaédrica desviadora total γ_{oct} o elástica γ_{oct}^e con las que debería calcularse la tensión de corte ($\tau_{oct} = G_s^{ap} \gamma_{oct}$ si se considera el modelo *SSOM* como un modelo histerético cuasi-hipoelástico y $\tau_{oct} = G_s^{ap} \gamma_{oct}^e$ si se utiliza el modelo *SSOM*, con su estructura de modelo histerético cuasi-hipoelástico, para describir la parte elástica de un modelo elastoplástico) la expresión (2.212) asume, a efectos prácticos, la aproximación sin aparente justificación $\tau_{oct} \approx G_s^{ap} \gamma_{HIST}$, facilitando, de esta manera, la deducción matemática de G_t^{ap} .

Benz (2007) propone limitar inferiormente el valor de G_t^{ap} por el valor G_{ur} (figura 2.59), que representa el valor del módulo de corte tangente elástico a medias y grandes deformaciones, evitando que decaiga hasta un valor casi nulo. La deformación de corte correspondiente a este umbral se obtiene resolviendo la ecuación $G_{ur} = G_t^{ap}(\gamma_c)$, a partir de la expresión (2.212), resultando:

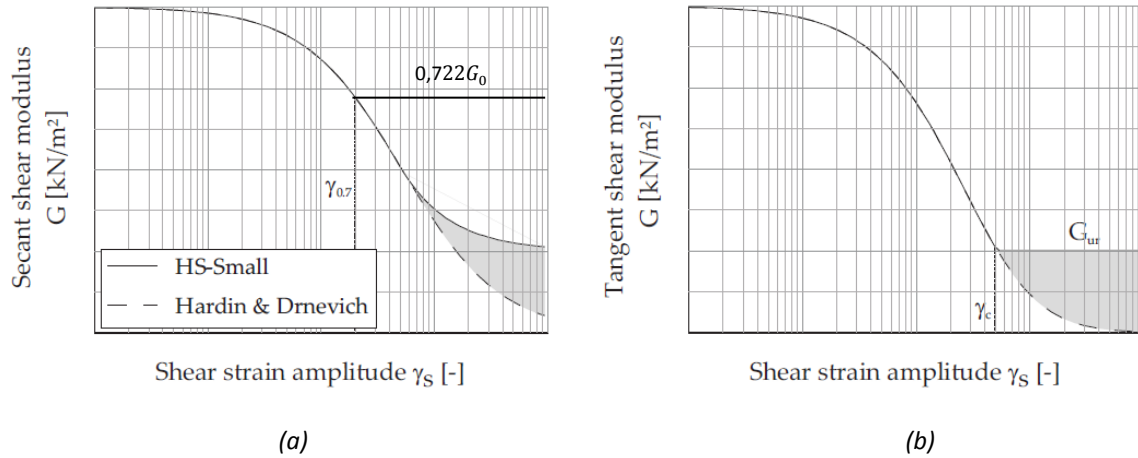


Figura 2.59. Curvas de degradación (Benz, 2007).
 (a) Módulo de corte aparente secante. (b) Módulo de corte aparente tangente.

$$\gamma_c = \frac{\xi \gamma_{0,7}}{a} \left(\sqrt{\frac{G_0}{G_{ur}}} - 1 \right) \quad (2.213)$$

Asimismo, el modelo *SSOM*, por el hecho de tratarse de un modelo histerético cuasi-hipoelástico de tipo *variable moduli* utiliza las relaciones elásticas con los módulos de rigidez aparentes, a pesar las inconsistencias teóricas que ello implica, tal como ya se ha apuntado en el apartado 2.5.1 del presente capítulo, entre ellas:

- El uso de relaciones elásticas entre módulos aparentes que dependen de las deformaciones totales y no de las elásticas.
- El solape entre los mecanismos del modelo *SSOM* y el modelo plástico con el que se combina (apartado 2.6.3.2.1.2 del presente capítulo) para tratar de explicar la reducción de la rigidez del suelo durante los procesos de carga noval, en comparación con la rigidez en procesos de descarga o recarga.

Asimismo, puesto que se adopta un valor constante del coeficiente de Poisson, el modelo tampoco no será conservativo en relación con el comportamiento volumétrico (Zytynski et al., 1978) y el módulo volumétrico aparente tangente $K_t'^{ap}$ degradará de forma proporcional a $G_t'^{ap}$, lo cual, en general, no se corresponde con las observaciones experimentales.

$$K_t'^{ap} = \frac{2G_t'^{ap}(\gamma_{HIST}, \sigma_3') (1 + \nu_{ur}')}{3(1 - 2\nu_{ur}')} \quad (2.214)$$

En cuanto a los elementos establecidos en el apartado 2.5.3.1 del presente capítulo que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo, el modelo *SSOM* considera lo siguiente:

- **Criterio de reversión:** El criterio utilizado para identificar puntos de reversión consiste en comprobar, en cada paso de cálculo, si el sentido de cada una de las tres direcciones principales

del incremento del tensor de deformaciones desviadoras totales $\dot{\epsilon}$ coincide con el sentido de las componentes de \mathbf{H} en esas mismas direcciones. En caso de que esto no sea así, se reinicia en \mathbf{H} la componente correspondiente a la dirección de la reversión, dando lugar a una rigidización del material. Se trata, por tanto, de un criterio de reversión discontinuo con el giro de la deformación.

- **Reglas de memoria:** Benz menciona la posibilidad de utilizar la estructura del modelo de Hueckel y Nova (1979). No obstante, el modelo *SSOM* está pensando para combinarse con modelos elastoplásticos, por lo que las reglas de memoria quedarían afectadas por la fluencia plástica, siendo necesario, en tal caso, un algoritmo iterativo. Es por ello por lo que se utiliza una estrategia alternativa cuando el modelo se combina con un modelo plástico, la cual se refleja en la manera en que el modelo *SSOM* cumple las Reglas de Masing generalizadas:
 - **Regla nº1:**
 - Cuando el modelo *SSOM* se utiliza como modelo en sí mismo, se adopta $\xi = 1$ (Hashiguchi, 1993) en los procesos de carga noval (figura 2.60).
 - Cuando el modelo *SSOM* se combina con un modelo plástico, dando lugar a un modelo elastoplástico, se adopta el valor $G_{max} = G_0$ y $\xi = 2$ tanto en la rama de carga noval como en las ramas de descarga/recarga. Con objeto de conservar el valor inicial de la rigidez G_0 y simular la degradación de la rigidez durante procesos de carga noval, se modifican las leyes de endurecimiento plástico utilizando la variable de estado G_m . Los detalles de esta modificación y la definición de la variable G_m pueden consultarse en el apartado 2.6.3.2.1.2 del presente capítulo.
 - **Regla nº2:** Para calcular G_t^{ap} durante procesos de descarga o recarga, se aplica un valor de $\xi = 2$ en todos los casos (Hashiguchi, 1993). En la figura 2.60 se muestra el uso de esta regla.
 - **Reglas nº3:**
 - Cuando el modelo *SSOM* se utiliza como modelo en sí mismo, se almacena el valor $G_{t,min}^{ap}$ histórico. Cuando $G_t^{ap} < G_{t,min}^{ap}$ se considera que el estado tensional está sobre la curva de carga noval y, por tanto, $\xi = 1$.
 - Cuando el modelo *SSOM* se utiliza para describir la parte elástica de la deformación en un modelo elastoplástico, esta regla se cumple teniendo en cuenta la limitación sobre el estado tensional que no permite sobrepasar las superficies de fluencia plásticas. Los detalles de esta modificación pueden consultarse en el apartado 2.6.3.2.1.2 del presente capítulo.
 - **Regla nº4:** El cumplimiento de esta regla es limitado, dada la propia estructura del tensor de historia \mathbf{H} , que se corresponde con la de un triple modelo de bloques de Simpson y la inexistencia de otras variables de historia. Esto implica que la capacidad del modelo *SSOM* para memorizar puntos de reversión es limitada, lo cual puede dar lugar al cruce de trayectorias en descarga o recarga bajo determinadas condiciones.

- **Efecto de las reversiones sobre las variables de degradación:** La variable de degradación γ_{HIST} se reinicializa total o parcialmente y de forma discontinua, en función del grado de reversión y el efecto que este tiene sobre el tensor de historia \mathbf{H} .
- **Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo:** La rigidez del suelo se reinicializa total o parcialmente y de forma discontinua, en función del grado de reversión y el efecto que este tiene sobre el tensor de historia \mathbf{H} . El modelo define, en cualquier caso, una única curva de degradación con un único valor de G_0 .

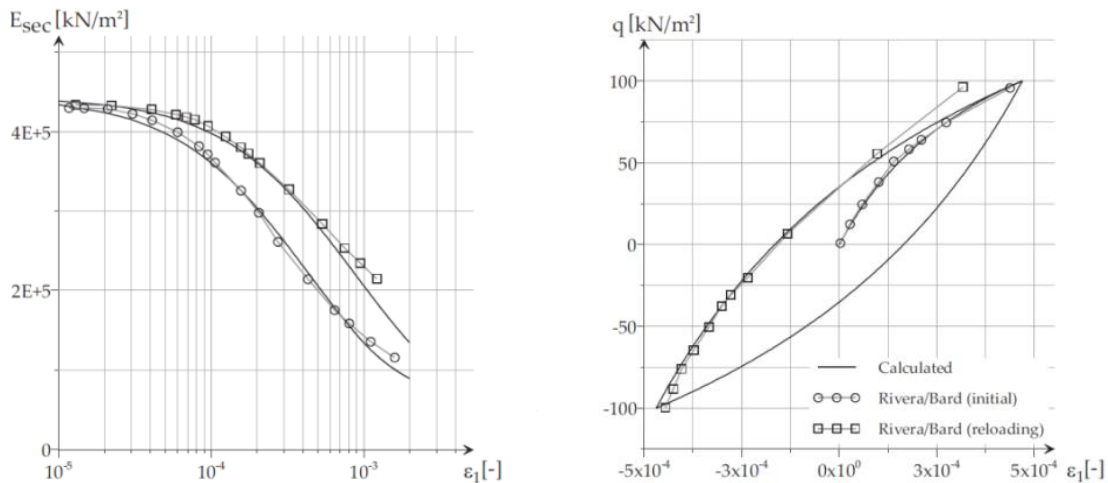


Figura 2.60. Simulaciones con el modelo SSOM y análisis de la diferencia de rigideces entre la curva de carga noval y sucesivas descargas/recargas (gráficos elaborados por Benz (2007) a partir de los resultados de los ensayos realizados por Rivera y Bard, cuyos datos se extraen de Biarez y Hicher (1994)).

Finalmente, en cuanto a los elementos que permiten reproducir la dependencia de la rigidez del suelo con su historia reciente, el modelo SSOM define el tensor de historia \mathbf{H} que almacena la historia reciente de las deformaciones desviadoras totales en tres direcciones. El modelo memoriza el último punto de reversión en cada una de las tres posibles direcciones de reversión, considerando, por tanto, tres modelos de bloques de Simpson independientes adoptando la analogía con dicho modelo (apartado 2.6.3.2.3. del presente capítulo).

A continuación, se resume la estructura del algoritmo del modelo SSOM para la actualización del tensor \mathbf{H} , para la actualización de las variables $G_{t,min}^{ap}$ o G_m , según el caso, y para el cálculo de G_t^{ap} . Para ello, se considera un incremento finito de deformación total $\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}$ en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$.

1) Diagonalización del tensor $\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}$

Al ser $\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}$ simétrico, existe una base ortogonal de vectores propios en la que $\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}$ diagonaliza. Se calculan los valores propios $\sigma(\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}) = \{\lambda_{s_1}^{(n)}, \lambda_{s_2}^{(n)}, \lambda_{s_3}^{(n)}\}$ y los vectores propios $S(\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}) = \{\mathbf{s}_1^{(n)}, \mathbf{s}_2^{(n)}, \mathbf{s}_3^{(n)}\}$ de $\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}$. A partir de las expresiones anteriores, y definiendo la matriz de cambio de base como $\mathbf{S}^{(n)} = \left(s_j^{(n)} \right)_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, siendo \mathbf{e}_i los vectores de la

base canónica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $\Delta e^{(n+1)}$ puede expresarse en la base ortonormal $S(\Delta e^{(n+1)})$ como $\Delta e_S^{(n+1)} = (\mathbf{S}^{(n)})^T \cdot \Delta e^{(n+1)} \cdot \mathbf{S}^{(n)} = (\lambda_{S_i}^{(n)} \delta_{ij}) \mathbf{s}_i^{(n)} \otimes \mathbf{s}_j^{(n)}$.

2) Cálculo de la variable de estado γ_{HIST}

El valor del módulo de corte tangente se aproxima como $G_t^{ap}(\gamma_{HIST}) \approx \Delta \tau(\gamma_{HIST}) / \Delta \gamma_{HIST}$. Para ello, se calculan dos valores de γ_{HIST} , que se definen como sigue:

$$\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)} = \sqrt{3} \frac{\|\Delta e_S^{(n+1)} \cdot (\mathbf{H}_{S,T}^{(n)} - \mathbf{1})\|}{\|\Delta e_S^{(n+1)}\|} = \sqrt{\frac{3 \sum_{j=1}^3 \left((H_{S,T}^{(n)})_{jj} - 1 \right)^2 (\lambda_{S_j}^{(n)})^2}{\sum_{j=1}^3 (\lambda_{S_j}^{(n)})^2}} \quad (2.215)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} &= \sqrt{3} \frac{\|\Delta e_S^{(n+1)} \cdot (\mathbf{H}_{S,T,\Delta e}^{(n)} - \mathbf{1})\|}{\|\Delta e_S^{(n+1)}\|} \\ &= \sqrt{\left(\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)} \right)^2 + \frac{3 \sum_{j=1}^3 \left[2 \left((H_{S,T,\Delta e}^{(n)})_{jj} - 1 \right) (\lambda_{S_j}^{(n)})^3 + (\lambda_{S_j}^{(n)})^4 \right]}{\sum_{j=1}^3 (\lambda_{S_j}^{(n)})^2}} \end{aligned} \quad (2.216)$$

El valor de $\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}$ se calcula con el tensor $\mathbf{H}_{S,T}^{(n)}$ según el código del SSOM facilitado en el Apéndice A de la tesis de Benz (2007) y utilizado en el modelo HS-SS, basado en el modelo SSOM, y no según el cuadro *Box 6.1* del capítulo 6 de la misma tesis, donde dicho valor se calcula con el tensor $\mathbf{H}_S^{(n)}$.

Los tensores $\mathbf{H}_{S,T}^{(n)}$ y $\mathbf{H}_{S,T,\Delta e}^{(n)}$ almacenan la historia de las deformaciones desviadoras:

$$\mathbf{H}_S^{(n)} = (\mathbf{S}^{(n)})^T \cdot (\mathbf{S}^{(n-1)} \cdot \mathbf{H}_{S,T,\Delta e}^{(n-1)} \cdot (\mathbf{S}^{(n-1)})^T) \cdot \mathbf{S}^{(n)} \quad (2.217)$$

$$\mathbf{H}_{S,T}^{(n)} = \mathbf{T}_S^{(n)} \cdot \mathbf{H}_S^{(n)} \cdot \mathbf{T}_S^{(n)} \quad (2.218)$$

$$\mathbf{H}_{S,T,\Delta e}^{(n)} = \mathbf{H}_{S,T}^{(n)} + (\mathbf{S}^{(n)})^T \cdot \Delta e_S^{(n+1)} \cdot \mathbf{S}^{(n)} \quad (2.219)$$

En (2.217), (2.218) y (2.219) el tensor $\mathbf{T}_S^{(n)}$ es el encargado de detectar las reversiones de deformación desviadora y modificar consecuentemente el valor de los componentes del tensor de historia \mathbf{H} en el paso de cálculo considerado (figura 2.61).

$$\mathbf{T}_S^{(n)} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{(H_S^{(n)})_{ij}}} \left(1 + u \left(\lambda_{S_i}^{(n)} \left((H_S^{(n)})_{ii} - 1 \right) \right) \left(\sqrt{(H_S^{(n)})_{ij}} - 1 \right) \right) \mathbf{s}_i^{(n)} \otimes \mathbf{s}_j^{(n)} \quad (2.220)$$

En (2.220) $u(x)$ es la función de Heaviside, según la cual $u(x) = 1$ si $x > 0$ y $u(x) = 0$ si $x < 0$.

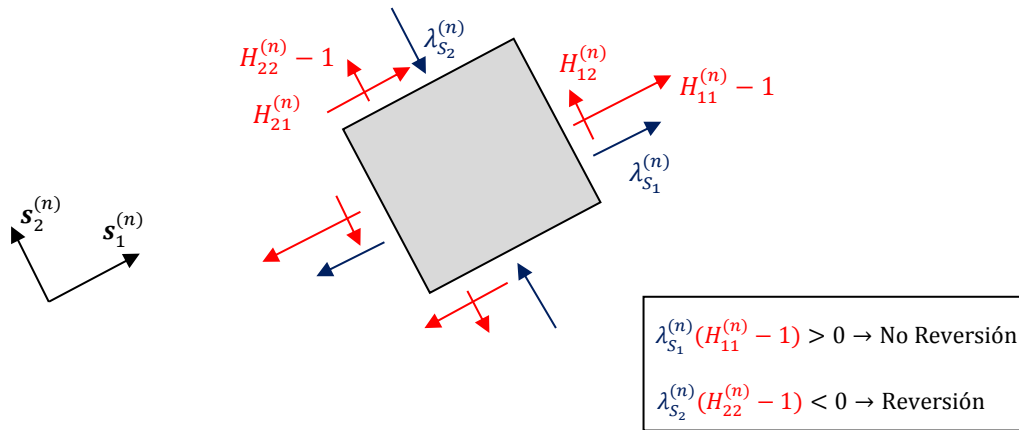


Figura 2.61. Representación gráfica de la detección de reversiones en el modelo SSOM. Castellón (2013).

El criterio de reversión del modelo SSOM es discontinuo con el giro de las deformaciones, puesto que depende del signo de $\lambda_{S_i}^{(n)} \left((H_S^{(n)})_{ii} - 1 \right)$, y considera lo siguiente:

- Si $\lambda_{S_i}^{(n)} \left((H_S^{(n)})_{ii} - 1 \right) > 0$, no se genera reversión de deformación desviadora en la componente según la dirección $\mathbf{s}_i^{(n)} \in S(\Delta \mathbf{e}^{(n+1)})$, y $(T_S^{(n)})_{ii} = 1$.
- Alternativamente, si $\lambda_{S_i}^{(n)} \left((H_S^{(n)})_{ii} - 1 \right) < 0$, se genera reversión de deformación desviadora según la componente en la dirección $\mathbf{s}_i^{(n)} \in S(\Delta \mathbf{e}^{(n+1)})$, y $(T_S^{(n)})_{ii} = (H_S^{(n)})_{ii}^{-1/2}$. Consecuentemente, al calcular $\mathbf{H}_{S,T}^{(n)} = \mathbf{T}_S^{(n)} \cdot \mathbf{H}_S^{(n)} \cdot \mathbf{T}_S^{(n)}$, se obtiene $(H_{S,T}^{(n)})_{ii} = 1$.

3) Cálculo del módulo de rigidez aparente tangente $G_t^{ap}(\gamma_{HIST})$

Se calcula a continuación el valor $G_t^{ap,(n)}(\gamma_{HIST}) \approx \Delta \tau^{(n)}(\gamma_{HIST}) / \Delta \gamma_{HIST}^{(n)}$ (nótese que no se está utilizando $\Delta \gamma_{oct}^{(n)}$ ni $\Delta \gamma_{oct}^{e,(n)}$ para el cálculo aproximado de $G_t^{ap,(n)}$). Para ello, se distinguen cuatro posibles casos, en función de los valores de $\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}$ y $\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)}$ dentro de la curva $G_t - \gamma_{HIST}$ considerada en el modelo.

Caso 1: Si $\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} \leq \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}$:

$$G_t^{ap,(n)} = \frac{G_0}{\left(1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST}^{(n)}}{\xi \gamma_{0,7}} \right) \right)^2} \quad (2.221)$$

A partir de las expresiones (2.215) y (2.216), se demuestra que $\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} \geq \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}$ en todo momento, con lo que en la desigualdad considerada por Benz (2007) en el Caso 1, sólo puede darse $\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} = \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_{HIST}^{(n)}$ (Castellón, 2013).

Caso 2: Si $\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)} \leq \gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} < \gamma_c$:

$$G_t^{ap,(n)} \approx \frac{\tau_{S,T,\Delta e}^{(n)} - \tau_{S,T}^{(n)}}{\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} - \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}} = \frac{\frac{G_0 \gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)}}{1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)}}{\xi \gamma_{0,7}} \right)} - \frac{G_0 \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}}{1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}}{\xi \gamma_{0,7}} \right)}}{\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} - \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}} \quad (2.222)$$

Caso 3: Si $\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)} < \gamma_c < \gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)}$:

$$G_t^{ap,(n)} \approx \frac{\tau_c^{(n)} - \tau_{S,T}^{(n)}}{\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} - \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}} + \frac{\tau_{S,T,ur}^{(n)} - \tau_{c,ur}^{(n)}}{\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} - \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}} =$$

$$\frac{\frac{G_0 \gamma_c}{1 + a \left(\frac{\gamma_c}{\xi \gamma_{0,7}} \right)} - \frac{G_0 \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}}{1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}}{\xi \gamma_{0,7}} \right)}}{\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} - \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}} + \frac{G_{ur} \gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} - G_{ur} \gamma_c}{\gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)} - \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)}} \quad (2.223)$$

Caso 4: Si $\gamma_c < \gamma_{HIST_{S,T}}^{(n)} < \gamma_{HIST_{S,T,\Delta e}}^{(n)}$:

$$G_t^{ap,(n)} = G_{ur} \quad (2.224)$$

Para el cálculo del tensor \mathbf{E}'_t se obtiene previamente el valor de G_t^{ap} considerando $\xi = 1$ para procesos de carga noval y $\xi = 2$ para procesos de descarga recarga cuando el modelo *SSOM* se utiliza como modelo por sí mismo, y $\xi = 2$ en todos los casos cuando el modelo *SSOM* se utiliza para describir la deformación elástica dentro de un modelo elastoplástico.

4) Actualización de la variable de estado G_m o $G_{t,min}^{ap}$

Cuando el modelo *SSOM* se utiliza como modelo en sí mismo, se actualiza el valor de $G_{t,min}^{ap,(n+1)}$ como $G_{t,min}^{ap,(n+1)} = \min \{ G_{t,min}^{ap,(n)}, G_t^{ap,(n+1)} \}$, con $\xi = 2$ si $G_{t,min}^{ap,(n+1)} < G_{t,min}^{ap,(n)}$ y $\xi = 1$ si $G_{t,min}^{ap,(n+1)} \geq G_{t,min}^{ap,(n)}$.

Cuando el modelo *SSOM* se utiliza para describir la deformación elástica dentro de un modelo elastoplástico, se actualiza la variable de estado G_m como $G_m = G_{t,min,\xi=1}^{ap,(n+1)} / G_{ur}^{(n)} = \min \{ G_{t,min,\xi=1}^{ap,(n)}, G_{t,\xi=1}^{ap,(n+1)} \} / G_{ur}^{(n)}$, que controla el factor h_i que modifica la ley de endurecimiento para cumplir la primera de las Reglas de Masing generalizadas.

5) Corrección termodinámica

El modelo *SSOM* realiza una corrección de la rigidez secante para atenuar los efectos del incumplimiento de los principios termodinámicos. Esta corrección se corresponde con el criterio

de estabilidad de Hill (1958) y consiste en adoptar $G_t^{ap,corr} = \max(G_t^{ap,(n)}, G_s^{ap,(n-1)})$, tal como se aprecia en la figura 2.62.

El modelo SSOM es capaz de proporcionar una buena aproximación del comportamiento del suelo, incluyendo el efecto de la historia reciente, el comportamiento histerético y la no linealidad a través de la degradación del módulo de corte del suelo (figura 2.63).

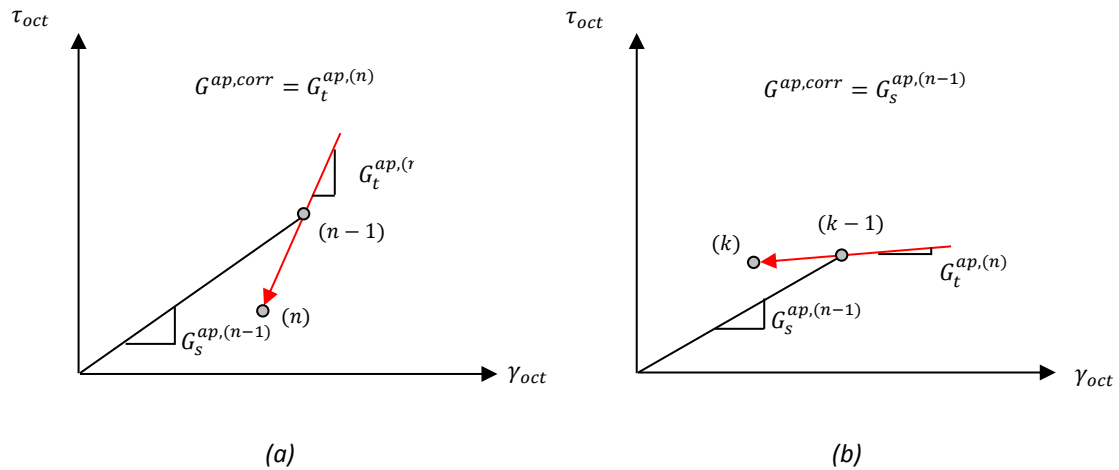


Figura 2.62. Corrección de la rigidez en descarga (Castellón, 2013).

(a) $G_t^{ap,corr} = G_t^{ap,(n)}$. (b) $G_t^{ap,corr} = G_s^{ap,(n-1)}$.

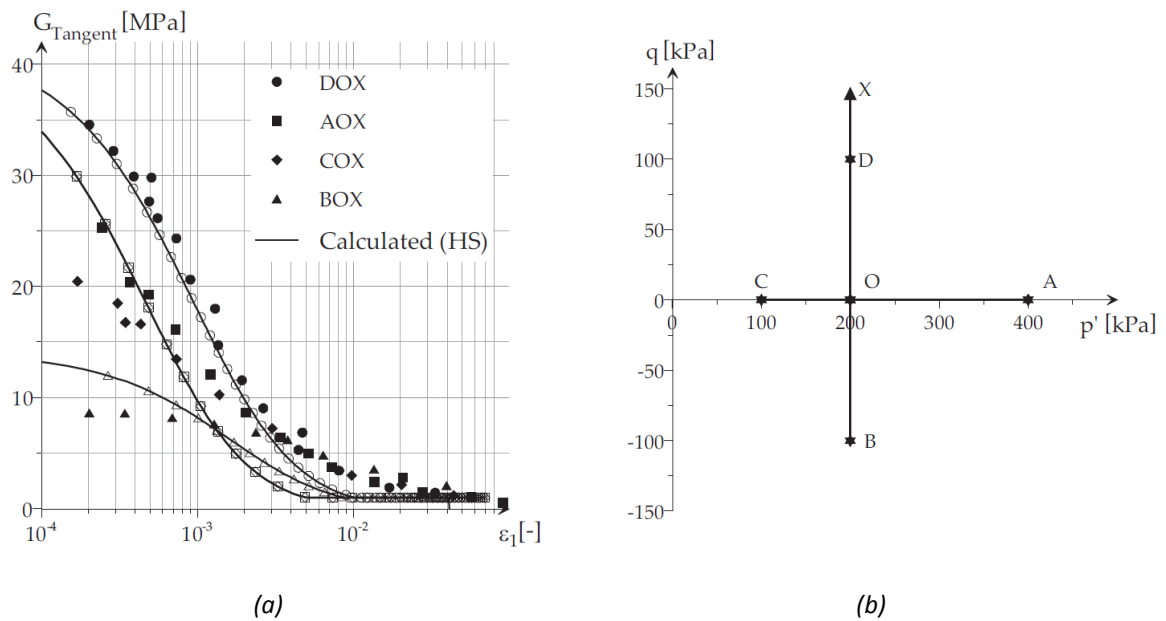


Figura 2.63. Ensayos triaxiales realizados por Richardson (1988) y su simulación numérica con el modelo SSOM (Benz, 2007). (a) Curvas de degradación elástica. (b) Trayectoria de tensiones seguidas en los ensayos.

2.6.3.2. Modelos avanzados

En el presente trabajo se denominan modelos avanzados aquellos modelos incrementalmente multilineales, capaces de reproducir el comportamiento del terreno en todo el rango de deformaciones (Zonas I, II, III y IV de Jardine (1992)).

2.6.3.2.1. Modelos elastoplásticos clásicos

Los modelos elastoplásticos clásicos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones añaden, al régimen elástico de la formulación clásica elastoplástica, el comportamiento no lineal, hysterético y dependiente de la historia, incorporando nuevas variables de estado que se identifican con las que Gudehus (2011) propone como imprescindibles para describir el comportamiento hysterético del suelo. Normalmente ello se logra adoptando la estructura de un modelo hysterético cuasi-hipoelástico para describir la componente elástica de la deformación dentro del modelo elastoplástico. Como ya se ha comentado, para calcular las tensiones en este caso, los módulos de rigidez aparentes se operan con las deformaciones elásticas y no con las totales. Según Jardine (1992) y Jardine et al. (1991), esta metodología semiempírica permite lograr predicciones muy precisas gracias al amplio rango de deformaciones consideradas, si bien su uso conlleva una pérdida de generalidad y una falta de consistencia del marco teórico en el que se sustenta. Algunos ejemplos de este tipo de modelos son el modelo *SDMCC* de Bolton et al. (1994), el modelo *HS-S* de Benz (2007), el modelo *HS-SS* implementando en Plaxis y basado en el anterior, o el modelo *FC+MCC* de Gryczmanski y Uliniarz (2008).

El número de zonas tensoriales $\#Z$ que presentan estos modelos dependerá del número de superficies de fluencia y sendas intersecciones en cada caso. Se cumplirá, en general, que $\#Z = 2$ en los modelos con una única superficie de fluencia y $\#Z > 2$ en los modelos con múltiples superficies de fluencia.

A continuación, y a modo de resumen, se exponen las ecuaciones básicas empleadas en los modelos elastoplásticos clásicos, generalizadas al caso de $k = 1 \dots q$ superficies de fluencia.

1. Superficies de fluencia: $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$ (2.225)

2. Potenciales plásticos: $g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$ (2.226)

3. Descomposición de deformaciones: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ (2.227)

4. Ecuación constitutiva dentro de las superficies: $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{el,hist}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ (2.228)

5. Descomposición deformaciones plásticas: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sum_{k=1}^q \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k^p$ (2.229)

6. Reglas de flujo: $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k^p = \dot{\lambda}_k \partial g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ (2.230)

7. Leyes de endurecimiento: $\dot{\boldsymbol{\chi}}_k^{pl} = \dot{\lambda}_k \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$ (2.231)

8. Condiciones de consistencia: $\dot{f}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$ (2.232)

$$\begin{aligned}
9. \text{ Condiciones Karush-Kuhn-Tucker:} \quad & \dot{\lambda}_k \geq 0, \\
& f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \leq 0 \\
& f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \dot{\lambda}_k = 0
\end{aligned} \tag{2.233}$$

Donde en las expresiones anteriores, $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$ es la k -ésima superficie de fluencia, $\boldsymbol{\chi}_k = (\boldsymbol{\chi}^{el,hist}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$ es el vector de variables de estado que contiene las variables de estado $\boldsymbol{\chi}^{el,hist}$ que controlan el comportamiento no lineal, hysterético y dependiente de la historia reciente y las variables de estado $\boldsymbol{\chi}_k^{pl}$ que controlan la forma, tamaño y posición de $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$, $g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$ es el potencial plástico asociado a la superficie de fluencia $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ es el incremento de deformación total, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ es el incremento de deformación elástica, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ es el incremento de deformación plástica, $\mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{el,hist}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ es una función tensorial, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k^p$ es el incremento de deformación plástica asociada a la superficie $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$, $\dot{\lambda}_k$ es el multiplicador plástico asociado a $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$ y $\mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$ es el módulo plástico generalizado que controla el endurecimiento de la superficie de fluencia $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$.

Las variables de estado $\boldsymbol{\chi}^{el,hist}$ se identifican con las que propone Gudehus (2011) para describir el comportamiento hysterético del suelo.

2.6.3.2.1.1. Modelo *SDMCC* de Bolton et al. (1994)

El modelo *Strain Dependent Modified Cam Clay (SDMCC)* de Bolton et al. (1994) incorpora la no linealidad elástica a la formulación elástica del modelo *Cam Clay* modificado (*MCC*) de Roscoe y Burland (1968), es decir, dentro de la superficie de fluencia $f = 0$.

$$f = q^2 + M^2 p' (p' - p'_c) \tag{2.234}$$

Donde $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3 \sigma'_{ii}$ es la presión media, p'_c es el radio del eje mayor de la superficie $f = 0$ y M es la pendiente de la recta de estado crítico.

El modelo *SDMCC* considera un modelo cuasi-hipoelástico del tipo *variable moduli* para describir el comportamiento elástico del suelo. Las ecuaciones constitutivas de dicho modelo son las siguientes:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}' \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_t^{ap} & 0 \\ 0 & 3G_t^{ap} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_v^e \\ \dot{\epsilon}_q^e \end{bmatrix} \tag{2.235}$$

Donde $\dot{q} = \dot{\sigma}'_1 - \dot{\sigma}'_3$ es el incremento de la tensión desviadora, $\dot{p}' = 1/3 \dot{\sigma}'_{ii}$ es el incremento de la presión media, K_t^{ap} es el módulo volumétrico aparente secante, G_t^{ap} es el módulo de corte aparente secante, $\dot{\epsilon}_v^e$ es el incremento de la deformación volumétrica elástica y $\dot{\epsilon}_q^e$ es el incremento de la deformación de corte elástica.

El modelo *SDMCC* introduce la no linealidad en el rango elástico mediante la dependencia del módulo de corte G_t^{ap} con la presión media p' , el grado de sobreconsolidación *OCR* y el incremento de deformación de corte ϵ_q desde el último punto de reversión.

Concretamente el modelo asume el valor $G_t^{ap} = G_{max}$ para $\epsilon_q < 10^{-5}$, valores $G_t^{ap} = G_t^{ap}(\epsilon_q)$ para $10^{-5} < \epsilon_q < 10^{-2}$, y los valores de rigidez resultantes de la formulación elastoplástica del modelo *Cam Clay* modificado para $\epsilon_q > 10^{-2}$ (figura 2.64).

$$G_{max} = A_G p'^{\tilde{n}_1} OCR^{\tilde{m}_1} \quad (2.236)$$

$$G_t^{ap}(\epsilon_q) = B_G p'^{\tilde{n}} OCR^{\tilde{m}} \epsilon_q^{\tilde{b}} \quad (2.237)$$

Donde $OCR = \sigma'_{v,max}/\sigma'_v$, $\sigma'_{v,max}$ es la tensión efectiva vertical máxima histórica, σ'_v es la tensión efectiva vertical, y A_G , B_G , \tilde{n}_1 , \tilde{n} , \tilde{m}_1 , \tilde{m} y \tilde{b} son parámetros del suelo.

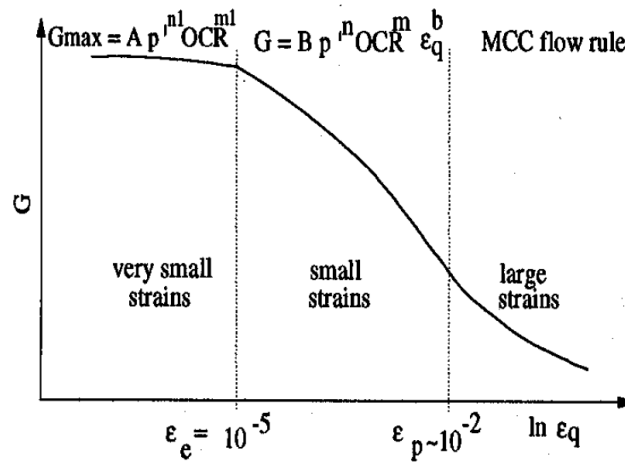


Figura 2.64. Variaciones del módulo de corte según la deformación de corte en el modelo *SDMCC*

($A \equiv A_G, B \equiv B_G, n_1 \equiv \tilde{n}_1, n \equiv \tilde{n}, m_1 \equiv \tilde{m}_1, m \equiv \tilde{m}, b \equiv \tilde{b}$) (Bolton et al., 1994).

Osman y Bolton (2005) propusieron incorporar la no linealidad al módulo volumétrico aparente secante K_t^{ap} , de un modo análogo a la formulación original para el módulo de corte.

$$K'_{max} = C_K p'^{\tilde{n}_3} OCR^{\tilde{m}_3} \quad (2.238)$$

$$K_t^{ap}(\epsilon_v) = D_K p'^{\tilde{n}_4} OCR^{\tilde{m}_4} \epsilon_v^{\tilde{b}_4} \quad (2.239)$$

Donde $\epsilon_v = 3\epsilon_{oct} = \epsilon_{ii}$ es la deformación volumétrica total y C_K , D_K , \tilde{n}_3 , \tilde{n}_4 , \tilde{m}_3 , \tilde{m}_4 y \tilde{b}_4 son parámetros del suelo.

Para identificar puntos de reversión, el modelo calcula el valor del giro del incremento del tensor de deformaciones en relación con el incremento de dicho tensor en el paso de cálculo anterior. Si dicho ángulo es superior a 90° , el modelo considera que existe una reversión (Messerklinger, 2006). Asimismo, el modelo almacena información únicamente del último punto de reversión y el comportamiento histerético se reproduce a través de las reglas de Masing originales (Masing, 1926), pero no extendidas. Por ello, el *SDMCC* podría incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados.

Mediante ensayos centrífugos en arcillas sobreconsolidadas, Bolton et al. (1994) estudiaron problemas de subsidencia de túneles con los modelos *SDMMC* y *MCC*. Algunos de los resultados obtenidos se pueden ver en la figura 2.65.

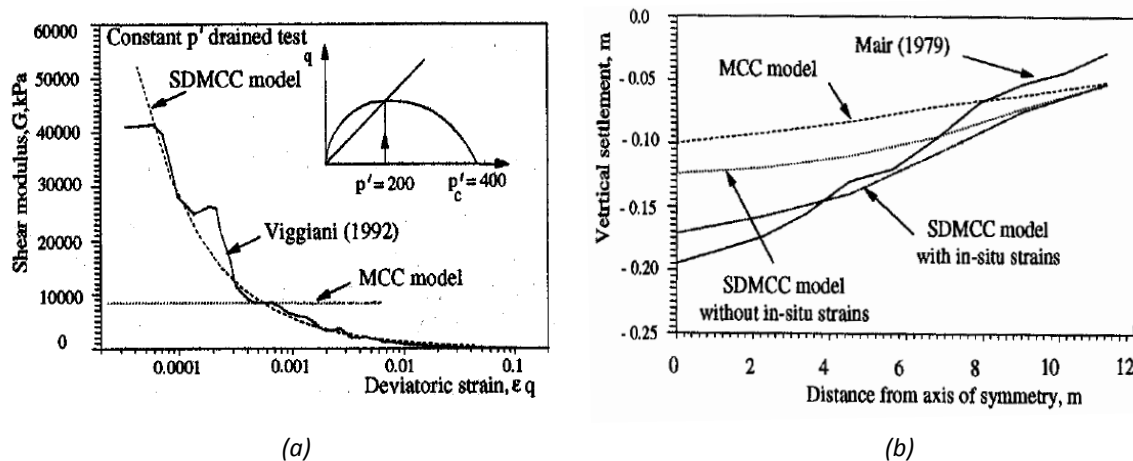


Figura 2.65. (a) Resultados de ensayos triaxiales sobre arcillas sobreconsolidadas y simulaciones numéricas con el modelo *SDMMC* y *MCC*. (b) Resultados de ensayos centrífugos y simulaciones numéricas con el modelo *SDMMC* y *MCC*. Bolton et al. (1994).

2.6.3.2.1.2. Modelo *HS-S* de Benz (2007)

El modelo *Hardening Soil Small (HS-S)* de Benz (2007) se trata de un modelo elastoplástico que añade, a la formulación elastoplástica del modelo *HS*, la formulación del modelo *SSOM*, descrito en el apartado 2.6.3.1.2.2.2. De esta manera, se construye un modelo elastoplástico avanzado que utiliza un modelo histerético cuasi-hipoelástico para describir el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.

El modelo *HS* de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999) pertenece a los denominados *Cap-Cone models*. Por un lado, considera una superficie de fluencia f_s que controla el comportamiento del suelo frente a cargas desviadoras (figura 2.66), y que queda limitada por la superficie de Mohr-Coulomb f_{mc} . Por otro lado, considera una superficie f_c que controla el comportamiento del suelo frente a cargas isotropas (figura 2.66). Sobre la superficie f_s se considera una regla de flujo con plasticidad no asociada, mientras que sobre la superficie f_c se considera una regla de flujo con plasticidad asociada. Se introduce una cuarta superficie denominada superficie de tracción nula f_t que limita la resistencia a tracción del suelo. La formulación del modelo *HS* puede consultarse en detalle en el capítulo 4 del presente trabajo.

En cuanto al comportamiento elastoplástico, el modelo *HS-S* conserva la formulación plástica del modelo *HS*, salvo en tres aspectos.

- Permite utilizar el criterio de rotura de Matsuoka y Nakai (1982) en f_s , además del de Mohr-Coulomb (figura 2.67a)

- Modifica la ley de dilatancia, combinando el criterio de Rowe (1962) con el de Li y Dafalias (2000), para mejorar la aproximación del comportamiento contractivo del suelo (figura 2.67b).
- Modifica la ley de endurecimiento para reproducir la rigidez del suelo a pequeñas deformaciones y su degradación durante procesos de carga noval (Regla de Masing extendida nº1).

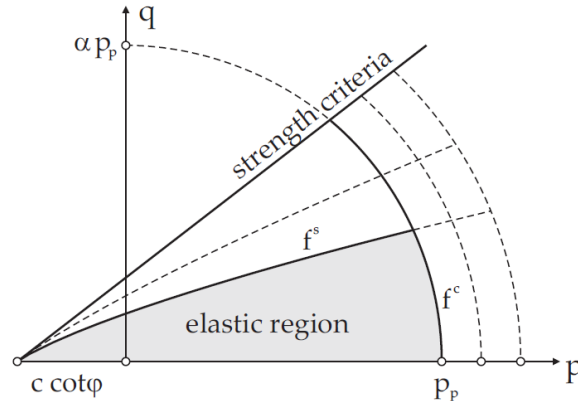


Figura 2.66. Superficies de fluencia del modelo HS en el plano $p - q$ ($f^s \equiv f_s$ y $f^c \equiv f_c$) (Benz, 2007).

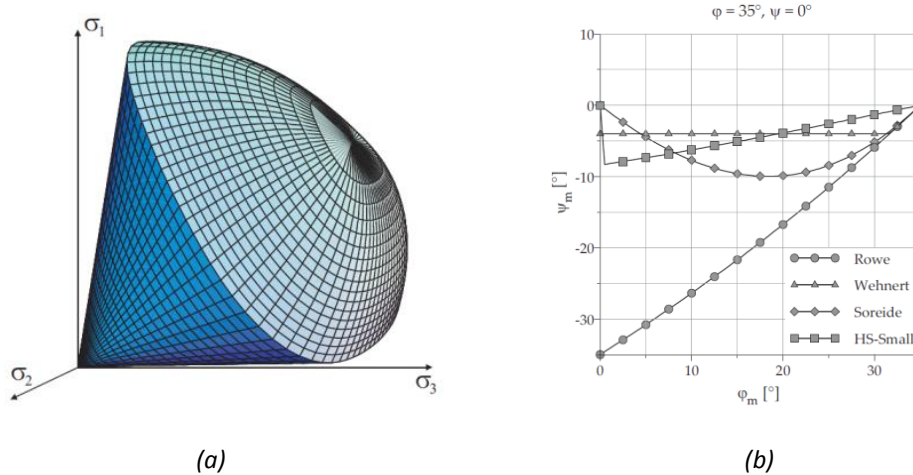


Figura 2.67. (a) Superficie de fluencia con el criterio de Matsuoka-Nakai del modelo HS-S en el espacio de Westergaard. (b) Ángulo de dilatancia movilizado vs. ángulo de fricción movilizado en el modelo HS-S. Benz (2007).

Como ya se ha comentado, Benz menciona la posibilidad de utilizar la estructura del modelo de Hueckel y Nova (1979) en el modelo HS-S para reproducir el comportamiento histerético del suelo. No obstante, el modelo SSOM está pensando para combinarse con modelos elastoplásticos, por lo que las reglas de memoria quedarían afectadas por la fluencia plástica, siendo necesario, en tal caso, un algoritmo iterativo. Es por ello por lo que el modelo HS-S utiliza una estrategia alternativa. Dicha estrategia permite cumplir la primera y segunda de las Reglas de Masing generalizadas.

- **Regla nº1:** Para reproducir la rigidez inicial del suelo a pequeñas deformaciones durante procesos de carga noval, caracterizada por el módulo de corte máximo G_0 , así como la velocidad con la que esta degrada durante este tipo de procesos, se modifican las leyes de endurecimiento (según las expresiones 2.258 y 2.259) a través del factor h_i .

$$h_i = (G_m)^{1 + \frac{E'_{t,ur}}{E'_i}} = (G_m)^{1 + \frac{E'^{ref}_{t,ur}}{E'^{ref}_i}} \quad (2.240)$$

$$G_m = \frac{G_{t,min,\xi=1}^{ap,new}}{G_{ur}} = \frac{\min \{ G_{t,min,\xi=1}^{ap,old}, G_{t,\xi=1}^{ap} \}}{G_{ur}} \quad (2.241)$$

$$G_{t,\xi=1}^{ap} \approx \frac{\Delta\tau_{\xi=1}}{\Delta\gamma_{HIST,\xi=1}} \quad (\text{expresiones 2.221 a 2.224}) \quad (2.242)$$

Donde $\Delta\tau_{\xi=1}$ es el incremento de la tensión de corte en el paso de cálculo considerado, calculado con $\xi = 1$, $\Delta\gamma_{HIST,\xi=1}$ es el incremento de la variable que depende de la historia de deformaciones totales (y no elásticas) y que controla la degradación de G_s^{ap} en el paso de cálculo considerado, calculado con $\xi = 1$, $a = 0,385$, ξ es un factor de escala que adopta valores de $\xi = 1$ para reproducir la degradación de la rigidez correspondiente a procesos de carga noval y valores de $\xi = 2$ para reproducir la degradación de la rigidez correspondiente a procesos de descarga/recarga, $\gamma_{0,7}$ es el valor de γ_{HIST} para el cual $G_s^{ap} = 0,722G_0$, G_{ur} es el valor mínimo de $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$, E'_i es el módulo elástico longitudinal inicial drenado (expresión 2.249), E'_{ur} es el módulo elástico longitudinal tangente drenado (expresión 2.250), E'^{ref}_i es el valor de E'_i para $\sigma'_3 = p'_{ref}$ y $E'^{ref}_{t,ur}$ es el valor de $E'_{t,ur}$ para $\sigma'_3 = p'_{ref}$.

El efecto del factor h_i es máximo cuando $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_0$ y se desvanece cuando $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_{ur}$. La evolución de $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$ sigue la curva de degradación del módulo de corte aparente tangente correspondiente a los procesos de carga noval, siendo esta inferior a la de los procesos de descarga o recarga elástica (figura 2.67). Para ello, en el cálculo de $h_i = h_i(G_m)$ se utiliza el valor $\xi = 1$ (expresión 2.242), siguiendo el criterio de Hashiguchi (1993).

- **Regla nº2:** El tensor de rigidez elástico tangente se calcula según $\mathbf{E}'_t = 2G_{t,\xi=2}^{ap}\nu'_{ur}/(1 - 2\nu'_{ur})\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + 2G_{t,\xi=2}^{ap}\mathbb{I}$, y en el cálculo del valor de $G_{t,\xi=2}^{ap}$, se considera un valor $\xi = 2$, tanto en procesos de carga noval como en procesos de descarga/recarga. Será precisamente el factor h_i el encargado de reproducir la rigidez inicial del suelo a pequeñas deformaciones y su degradación durante procesos de carga noval, compensando así el efecto introducido por $G_{t,\xi=2}^{ap}$ en \mathbf{E}'_t .
- **Regla nº3:** No se utiliza la estructura del modelo de Hueckel y Nova (1979). El modelo *HS-S* tiene en cuenta la restricción del estado tensional sobre las superficies de fluencia durante procesos de carga noval, para forzar así el cumplimiento de la tercera de las Reglas de Masing generalizadas.

- **Regla n°4:** No se utiliza, tampoco en este caso, la estructura del modelo de Hueckel y Nova (1979). El cumplimiento de esta regla es limitado, dada la propia estructura del tensor de historia \mathbf{H} , que se corresponde con la de un triple modelo de bloques de Simpson. El modelo $HS-S$, por tanto, podrá considerar un máximo de tres puntos de reversión históricos, lo cual implica el cruce de trayectorias en descarga o recarga bajo determinadas condiciones. Asimismo, las reversiones serán, en cualquier caso, discontinuas con el giro de las deformaciones, del mismo modo que sucede en el modelo $SSOM$ (Benz, 2007).

En las siguientes ecuaciones se proporciona la formulación plástica del modelo $HS-S$ utilizando el criterio de Morh-Coulomb como criterio de rotura.

Superficies de fluencia

$$f_{s,kl} = \frac{2q_a}{E'_i} \frac{(\sigma'_k - \sigma'_l)}{q_a - (\sigma'_k - \sigma'_l)} - \frac{2(\sigma'_k - \sigma'_l)}{E'_{t,ur}} - \gamma^p \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (2.243)$$

$$q_a = \frac{q_f}{R_f} = \frac{2\sin(\varphi')(\sigma'_3 + c' \cot(\varphi'))}{R_f(1 - \sin(\varphi'))} \quad (2.244)$$

$$f_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'}\right)^2 + (p')^2 - p_p^2 \quad (2.245)$$

$$\tilde{q} = \sigma'_1 + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)(\sigma'_2) - \frac{1}{\delta}(\sigma'_3) \quad (2.246)$$

$$\delta = \frac{3 - \sin(\varphi')}{3 + \sin(\varphi')} \quad (2.247)$$

$$f_{t,k} = \sigma'_{trac} - \sigma'_k \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.248)$$

$$E'_i = E_i^{ref} \left(\frac{\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (2.249)$$

$$E'_{t,ur} = E_{t,ur}^{ref} \left(\frac{\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (2.250)$$

Potenciales plásticos

$$g_{s,kl} = \frac{\sigma'_k - \sigma'_l}{2} - \left(\frac{\sigma'_k + \sigma'_l}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (2.251)$$

$$g_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'}\right)^2 + (p')^2 - p_p^2 \quad (2.252)$$

$$g_{t,k} = \sigma'_{trac} - \sigma'_k \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.253)$$

Mobilización de la dilatancia para las reglas de flujo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin(\psi_m) = \frac{1}{10} \left(M e^{\frac{1}{15} \ln\left(\frac{p'_{cv}}{p'}\right)} - \eta \right) & \text{si } \sin(\varphi'_m) \leq \sin(\varphi'_{cv}) \\ \sin(\psi_m) = \min \left(\frac{\sin(\varphi'_m) - \sin(\varphi'_{cv})}{1 - \sin(\varphi'_m)\sin(\varphi'_{cv})}, \sin(\psi) \right) & \text{si } \sin(\varphi'_m) > \sin(\varphi'_{cv}) \text{ y } \psi > 0 \\ \sin(\psi_m) = \sin\psi & \text{si } \sin(\varphi'_m) \geq \sin(\varphi'_{cv}) \text{ y } \psi \leq 0 \\ \sin(\psi_m) = 0 & \text{si } \sin(\varphi') = 0 \end{array} \right.$$

(2.254)

$$\sin(\varphi'_{cv}) = \frac{\sin(\varphi') - \sin(\psi)}{1 - \sin(\varphi')\sin(\psi)} \quad (2.255)$$

$$\frac{p'_{cv}}{p'} = \frac{\eta}{M} \frac{q_{cv}}{q} = \frac{\eta \sin(\varphi'_{cv})(1 - \sin(\varphi'_m))}{M \sin(\varphi'_m)(1 - \sin(\varphi'_{cv}))} \quad (2.256)$$

$$\sin(\varphi'_m) = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3 + 2c' \cot(\varphi')} \quad (2.257)$$

Leyes de endurecimiento

$$\dot{\gamma}^p = (\dot{\lambda}_{\gamma^p} h_{\gamma^p}) h_i = (\dot{\lambda}_{\gamma^p}) h_i \quad (2.258)$$

$$\dot{p}_p = (\dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p}) h_i = \left(\dot{\lambda}_{p_p} 2Hp' \left(\frac{\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \right) h_i \quad (2.259)$$

$$H = \frac{K'_{t,ur}{}^{ref}}{K'_{t,ur}/K'_c - 1} = \frac{E'_{t,ur}{}^{ref}}{(K'_{t,ur}/K'_c - 1)3(1 - 2\nu'_{ur})} \quad (2.260)$$

Donde $f_{s,kl}$ es la superficie de fluencia tipo Cono, f_c es la superficie de fluencia tipo Cap, $f_{t,kl}$ es la superficie de fluencia de tracción nula, $g_{s,kl}$ es el potencial plástico asociado a la superficie de fluencia $f_{s,kl}$, g_c es el potencial plástico asociado a la superficie de fluencia f_c , $g_{t,k}$ es el potencial plástico asociado a la superficie de fluencia $f_{t,k}$, q_a es la tensión desviadora asintótica, σ'_k con $k = 1,2,3$ son las tensiones principales, γ^p es la deformación de corte plástica que actúa como variable de endurecimiento de la superficie de fluencia $f_{s,kl}$, $R_f = q_f/q_a$, q_f es la tensión desviadora máxima, φ' es el ángulo fricción efectivo máximo, c' es la cohesión efectiva del suelo, p'_{cv} es el valor de la presión media en el estado crítico, α' es el parámetro que determina la forma de la superficie de fluencia f_c y que se relaciona con el valor del coeficiente de empuje al reposo durante la carga noval K_0^{NC} , $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la tensión media, p_p es la variable de endurecimiento de la superficie de fluencia f_c , σ'_{trac} es el valor de la tracción máxima soportada por el suelo, E_i^{ref} es el módulo de rigidez longitudinal inicial de referencia drenado para $\sigma'_3 = p'_{ref}$, p'_{ref} es una presión de referencia, E_{50}^{ref} es el valor del módulo de rigidez longitudinal secante de referencia drenado para $\sigma'_3 = p'_{ref}$ y para una tensión desviadora $q =$

$q_f/2$, m es un parámetro del suelo, $E'_{t,ur}{}^{ref}$ es el módulo elástico longitudinal tangente de referencia drenado para $\sigma'_3 = p'_{ref}$ a medias y grandes deformaciones, φ'_m es el ángulo de fricción efectivo movilizado, ψ_m es el ángulo de dilatación movilizado tal que $\sin(\psi_m) = \dot{\epsilon}_v^p / \dot{\gamma}^p$, siendo $\dot{\epsilon}_v^p$ el incremento de deformación volumétrica plástica y $\dot{\gamma}^p$ el incremento de deformación desviadora plástica que actúa como variable de endurecimiento de la superficie $f_{s,kl}$, ψ en ángulo de dilatación máximo, φ'_{cv} es el ángulo crítico a volumen constante, $\eta = q/p'$, $p'_{cv} = q_{cv}/M$ es el valor de la presión media en el estado crítico, q_{cv} es la tensión desviadora en el estado crítico, M es el valor de η para la recta de estado crítico, \dot{p}_p es el incremento de la variable de endurecimiento que controla el tamaño de la superficie de fluencia f^c , $\dot{\lambda}_{\gamma^p}$ es el multiplicador plástico asociado a $\dot{\gamma}^p$, $\dot{\lambda}_{p_p}$ es el multiplicador plástico asociado a \dot{p}_p , h_{γ^p} es el módulo plástico generalizado asociado a la superficie tipo Cono, h_{p_p} es el módulo plástico generalizado asociado a la superficie de fluencia tipo Cap, H es el módulo de endurecimiento plástico, $K'_{ur}{}^{ref}$ es el módulo volumétrico elástico tangente de referencia drenado para $\sigma'_3 = p'_{ref}$, $K'_{t,ur}/K'_c$ es un parámetro interno del modelo que relaciona el módulo volumétrico elástico $K'_{t,ur}$ con el módulo volumétrico aparente durante la carga noval K'_c , h_i es el factor que modifica la ley de endurecimiento original del modelo HS con objeto de controlar la rigidez a pequeñas deformaciones durante procesos de carga noval, $E'_{oed}{}^{ref}$ es el módulo de rigidez edométrico drenado para un valor de $\sigma'_1 = \sigma'_3/K_0^{NC} = p'_{ref}$ y ν'_{ur} es el coeficiente de Poisson drenado a medias y grandes deformaciones, que se asume constante.

Los parámetros $E'_i{}^{ref}$, α' y $K'_{t,ur}/K'_c$ son parámetros internos del modelo que se calculan mediante un algoritmo interno que reproduce un ensayo triaxial drenado y un ensayo edométrico. Dicho algoritmo se detalla en el apartado 4.1.7 del capítulo 4.

Benz verificó parcialmente el modelo HS-S y lo validó mediante ensayos de laboratorio y problemas de contorno reales, concretamente de túneles, excavaciones y cimentaciones superficiales. Dada la relevancia del modelo HS-S en este trabajo, se resumen, a continuación, algunas de estas validaciones y verificaciones. En el capítulo 6 se proporcionan más detalles de los ensayos que se muestran a continuación.

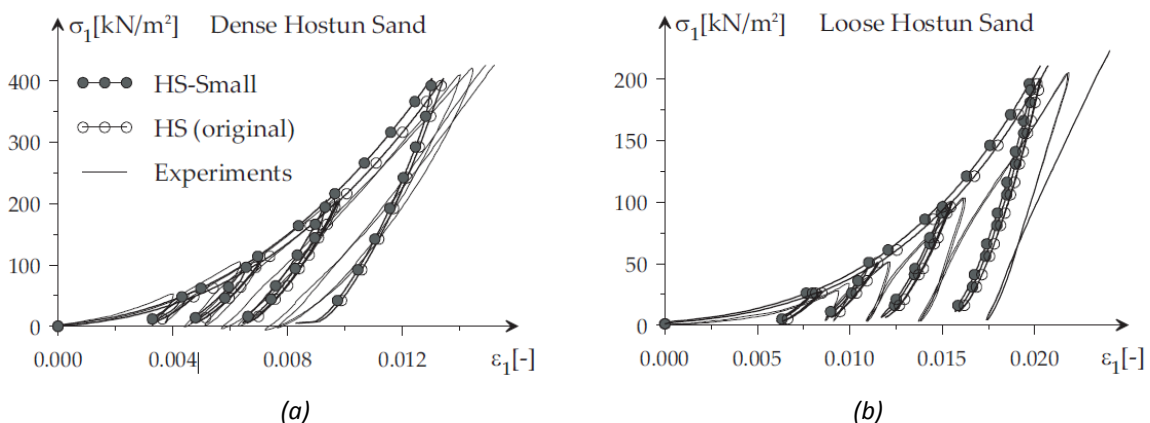


Figura 2.68. Resultados de ensayos edométricos y simulaciones numéricas con el modelo HS-S y HS (Benz, 2007). (a) Arena de Hostun densa. (b) Arena de Hostun suelta.

En la figura 2.68 se muestran los resultados de ensayos edométricos con arena de Hostun densa y suelta y las correspondientes simulaciones. Tanto el modelo *HS* como el modelo *HS-S* son capaces de simular bien estos ensayos. El modelo *HS-S* proporciona rigideces algo mayores que el modelo *HS*. También se puede observar como ninguno de los dos modelos es capaz de acumular la suficiente deformación plástica durante los ciclos de carga.

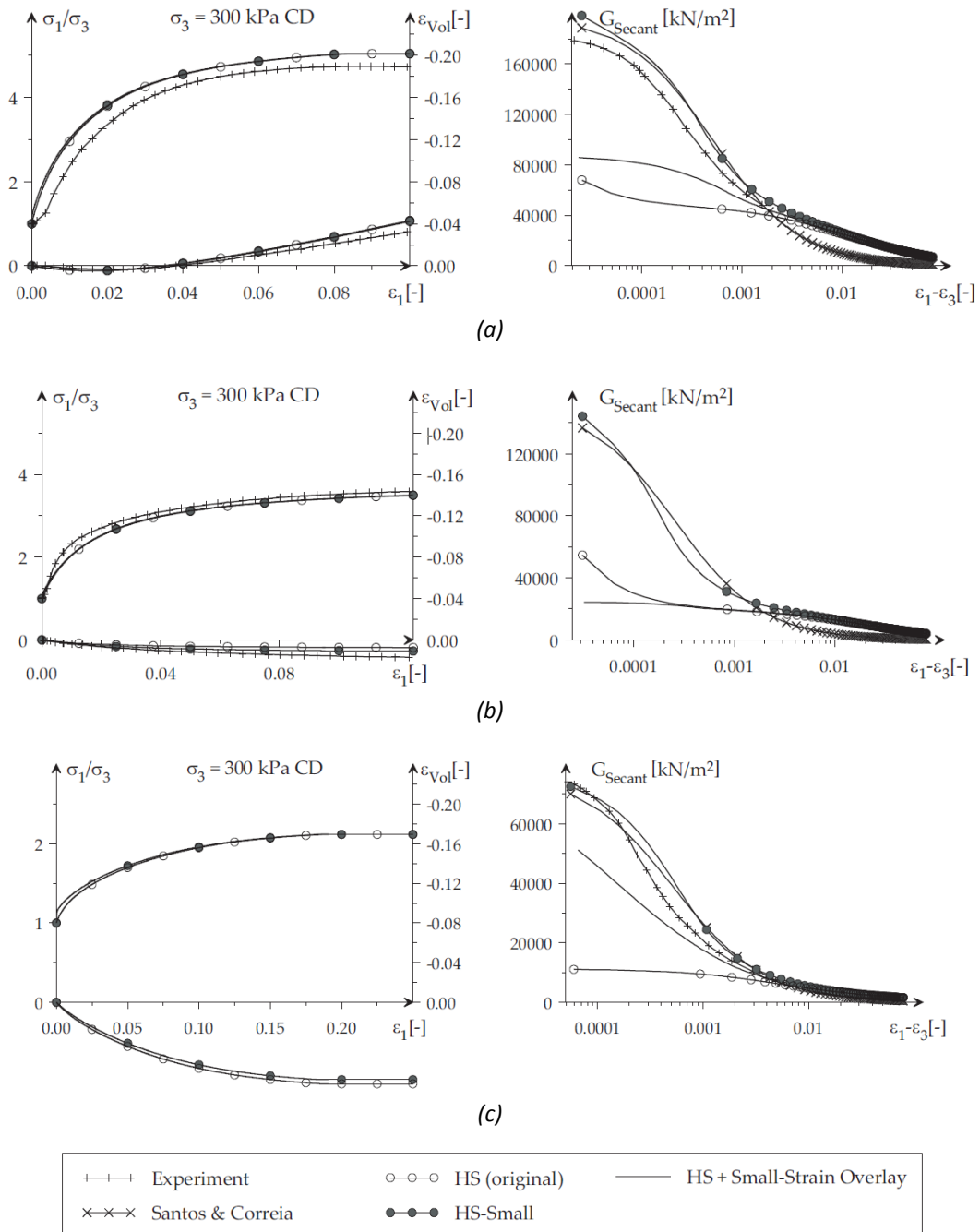


Figura 2.69. Resultados experimentales de la fase desviadora de ensayos triaxiales drenados y simulaciones numéricas con los modelos HS, HS-S y HS+SSOM (Benz, 2007). (a) Arena de Hostun densa. (b) Arena de Hostun suelta. (c) Arcilla caolinita reconstituida. Izquierda: Curvas de carga-deformación y curvas de deformación volumétrica. Derecha: Curvas de degradación de G_s^{ap} ($G_{secant} \equiv G_s^{ap}$).

En la figura 2.69 se muestran los resultados de los ensayos triaxiales drenados con arena de Hostun densa y suelta y con arcilla reconstituida, así como las correspondientes simulaciones. Tal como indica Benz, se puede ver como las curvas de degradación obtenidas con el modelo *HS-S* se ajustan bien a las curvas analíticas basadas en el modelo de Dos Santos y Correia (2001), lo cual constituye una verificación parcial del modelo *HS-S*. Asimismo, la combinación del modelo *SSOM* y *HS* (*HS + Small Strain-Overlay* en la figura 2.69), sin la modificación de las leyes de endurecimiento de este último, lleva a rigideces máximas demasiado pequeñas y, en consecuencia, a curvas de degradación muy tendidas. Ello es debido al efecto dominante de la plasticidad durante la carga noval. Asimismo, se puede ver como la modificación de la regla de flujo del modelo *HS-S* tiene un efecto despreciable en el comportamiento volumétrico del suelo durante los ensayos drenados.

Tal como se observa en la figura 2.70, el ciclo de histéresis calculado con el modelo *HS-S* permite reproducir bien los resultados de un ensayo triaxial drenado en arena de Hostun a pesar de no tratarse de un modelo con endurecimiento cinemático. Los ciclos calculados no son cerrados debido a la deformación plástica acumulada durante la carga entre $\epsilon_1 = -2,5 \cdot 10^{-4}$ y $\epsilon_1 = -4,5 \cdot 10^{-4}$, tras la descarga elástica.

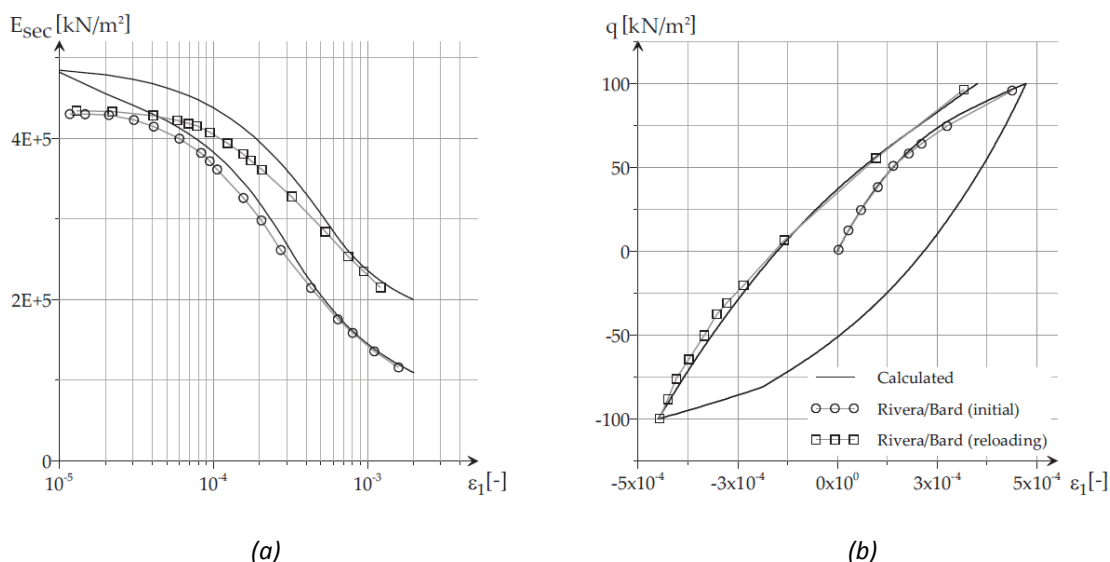


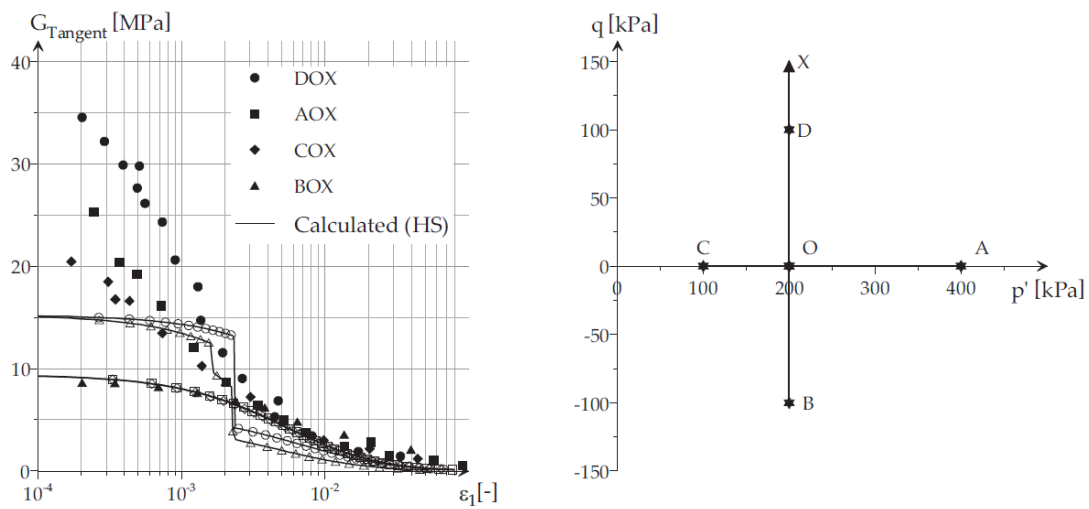
Figura 2.70. Resultados de ensayos experimentales y simulación numérica con el modelo *HS-S* (Benz, 2007). (a) Curva de degradación del módulo de rigidez longitudinal aparente secante durante la carga noval y durante una descarga/recarga. (b) Ciclo de histéresis en un ensayo triaxial drenado en arena densa de Hostun.

En la figura 2.71 se puede ver como los resultados que proporciona el modelo *HS-S* mejoran notablemente la aproximación al valor de la rigidez en el rango de las pequeñas deformaciones respecto al modelo *HS* en ensayos triaxiales con giros de la trayectoria de tensiones en el plano $q - p'$.

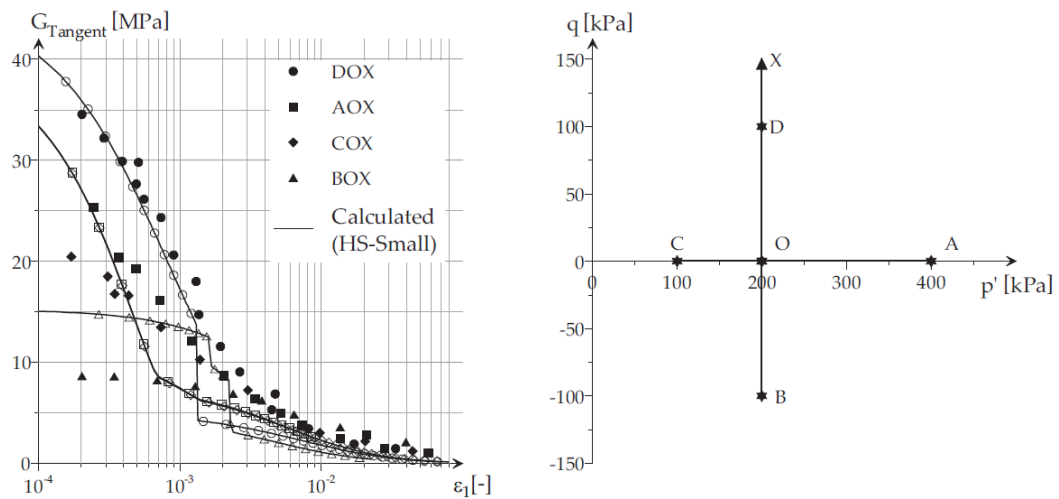
Tal como se ha comentado previamente, la modificación de la regla de flujo considerada en el modelo *HS-S* no altera prácticamente el comportamiento volumétrico del suelo durante ensayos drenados respecto al modelo *HS*. Esto sí sucede, no obstante, en el caso de ensayos no drenados. Como se puede

ver en la figura 2.72, en el caso de la arena densa, ninguno de los criterios de dilatancia utilizados en las simulaciones (el del modelo *HS* que utiliza el criterio de Rowe (1962); el del modelo *HS-S*, que combina el criterio de Rowe (1962) con el de Li y Dafalias (2000); el de Wehnert (2006), implementado en el modelo *HS-S*; o el de Soreide (1990), implementado en el modelo *HS-S*) es capaz de aproximar bien los resultados de los ensayos. En el caso de la arena suelta, no obstante, sí se puede ver como el criterio del modelo *HS-S* mejora la aproximación de los resultados respecto a los otros criterios.

Finalmente, Benz menciona que el modelo *HS-S* tiende a sobreestimar la rigidez del suelo durante cargas isotrópicas, tal como se observa en la figura 2.73.



(a)



(b)

Figura 2.71. Resultado de ensayos triaxiales con giros de la trayectoria de tensiones realizados por Richardson (1988) (Benz, 2007). (a) Simulación numérica con el modelo HS. (b) Simulación numérica con el modelo HS-S. Izquierda: Curvas de degradación. Derecha: Trayectoria de tensiones seguidas en los ensayos.

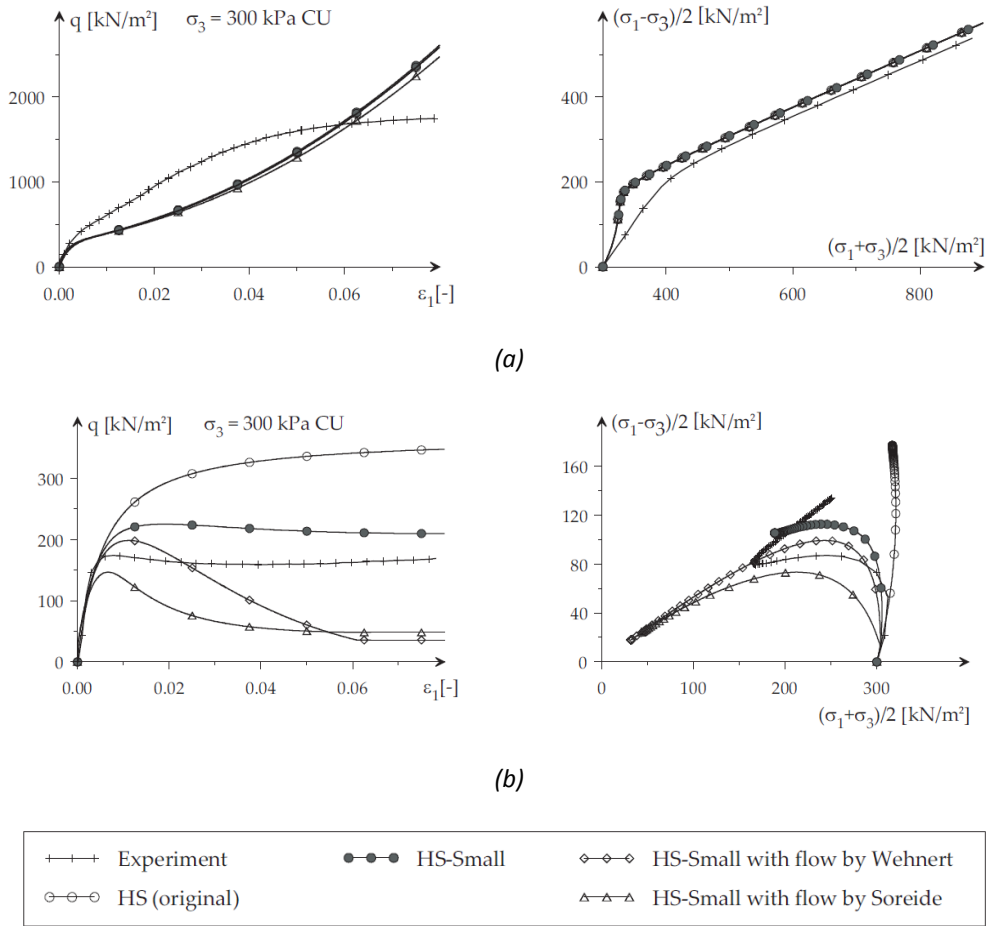


Figura 2.72. Resultados experimentales de ensayos triaxiales no drenados y simulaciones numéricas con los modelos HS y HS-S (Benz, 2007). (a) Arena densa de Hostun. (b) Arena suelta de Hostun.

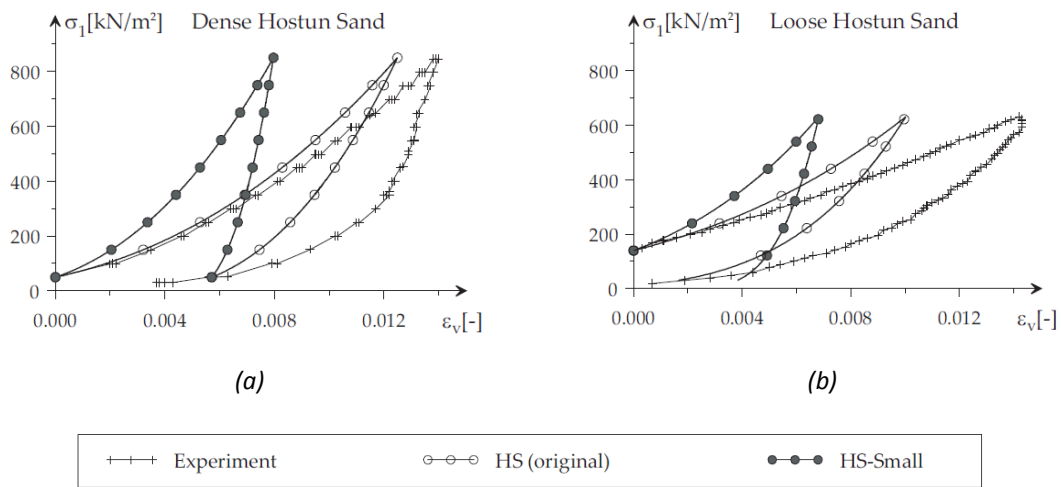


Figura 2.73. Resultados de ensayos de compresión isotrópica y simulaciones con los modelos HS y HS-S (Benz, 2007). (a) Arena densa de Hostun. (b) Arena suelta de Hostun.

En resumen, el modelo *HS-S* mejora las aproximaciones que proporciona el modelo *HS* original. En cuanto a las limitaciones del modelo *HS-S*, tal como indica Benz (2007), muchas de ellas son las heredadas del propio modelo *HS* mientras que otras surgen a partir de la combinación del modelo *SSOM* y *HS*, como la independencia de la formulación del *HS-S* respecto al índice de poros o la falta de leyes de endurecimiento de tipo cinemático. Por ello, Benz apunta a que el modelo *HS-S* no es adecuado para modelizar materiales con diferentes índices de poros mediante un único juego de parámetros, ni para reproducir el comportamiento del suelo ante cargas cíclicas. Asimismo, Benz comenta que debe tenerse especial cuidado en la simulación de ensayos no drenados con el modelo *HS-S*, al igual que sucede con el modelo *HS* original.

2.6.3.2.1.3. Modelo *HS-SS* de Plaxis

El modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* implementado en el programa comercial de elementos finitos Plaxis, se basa en el modelo *HS-S*, al cual añade ligeras modificaciones. Recientemente, el modelo *HS-SS* ha sido implementado en otros programas numéricos. El modelo *HS-SS* es uno de los pocos modelos constitutivos de suelos, comúnmente utilizado en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica, capaz de reproducir el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. Asimismo, el modelo *HS-SS* constituye una potente herramienta de cálculo para analizar múltiples problemas geotécnicos en los que el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones es especialmente relevante, como es la construcción de túneles urbanos o grandes excavaciones urbanas. Parte de este potencial radica en que dicho modelo únicamente requiere dos parámetros (G_0 y $\gamma_{0,7}$) adicionales al modelo *HS* original. Estos parámetros adicionales son sencillos de entender desde un punto de vista conceptual y relativamente fáciles de obtener experimentalmente o de estimar mediante correlaciones. No obstante, debe tenerse especial cuidado en su determinación, dada la sensibilidad de los resultados del modelo al valor de estos.

Los detalles de la formulación de las modificaciones que introduce el modelo *HS-SS* respecto al modelo *HS-S* se exponen en el capítulo 5 y se resumen brevemente a continuación.

Se considera la siguiente expresión de la dilatancia cuando $\sin(\varphi'_m) \leq \sin(\varphi'_{cv})$, teniendo en cuenta que, en este caso, $\sin(\varphi'_m) = \max\left(\frac{(\sigma'_1 - \sigma'_3)}{(\sigma'_1 + \sigma'_3 + 2c' \cot(\varphi'))}, \frac{\sigma'_1(1 - K_0^{NC})}{(\sigma'_1(1 + K_0^{NC}) + 2c' \cot(\varphi'))}\right)$:

$$\sin(\psi_m) = \frac{1}{10} \left(M e^{\frac{1}{15} \ln\left(\frac{\eta q}{M q_a}\right)} - \eta \right) \quad (2.261)$$

Donde $\eta = \max\left(\frac{q}{p'}, 3(1 - K_0^{NC})/(1 + 2K_0^{NC})\right)$, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, M es el valor de η para la recta de estado crítico, $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora y q_a es la tensión desviadora asintótica.

Por otro lado, en cuanto a las leyes de endurecimiento, se considera la dependencia de \dot{p}_p con p_p y no con σ'_3 como en el modelo *HS-S*:

1. Plaxis 2D v9

$$\dot{p}_p = \dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p} h_i = \dot{\lambda}_{p_p} \frac{2p' p'_{ref}}{\bar{\beta}'} \left(\frac{p_p}{p'_{ref}} \right)^m h_i \quad (2.262)$$

Se desconoce si la versión del modelo *HS-SS* en Plaxis 2D v9 utiliza la expresión (2.262), la (2.263) o la (2.259) del modelo *HS-S* para el cálculo de \dot{p}_p .

2. Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores

$$\dot{p}_p = \dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p} h_i = \dot{\lambda}_{p_p} 2Hp' \left(\frac{p_p + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m h_i \quad (2.263)$$

Donde en las expresiones anteriores, \dot{p}_p es el incremento de la variable de endurecimiento asociada a la superficie de fluencia tipo *Cap* f_c , $\dot{\lambda}_{p_p}$ es el multiplicador plástico asociado a \dot{p}_p , h_{p_p} es el módulo plástico generalizado asociado a la superficie de fluencia tipo *Cap*, h_i es un factor que controla la rigidez a pequeñas deformaciones durante procesos de carga noales, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la tensión media, $\bar{\beta}'$ es un parámetro interno que depende del módulo de rigidez edométrico drenado E'_{oed} , p_p es la variable de endurecimiento de la superficie de fluencia tipo *Cap* f_c , H es el módulo de endurecimiento plástico, c' es la cohesión efectiva del suelo, φ' es el ángulo de fricción efectivo del suelo, p'_{ref} es una presión de referencia y m es un parámetro del suelo.

A pesar de las importantes ventajas del modelo *HS-SS*, en una investigación previa (Castellón, 2013) se detectaron inconsistencias en los resultados de varios ensayos edométricos y triaxiales, que se resumen a continuación, y que no son resolubles sin la definición de nuevas variables de estado en el modelo y la modificación de su algoritmo.

- Oscilaciones no controladas de origen numérico.
 - Reversiones generadas por oscilaciones no controladas de origen numérico en la deformación, durante fases de consolidación.
 - Reversiones generadas por inversiones no controladas de la deformación, de origen numérico, durante fases de carga nula. Esta inconsistencia es advertida en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015), donde se indica que la misma deriva de los incrementos de deformación generados por los pequeños desequilibrios numéricos debidos a la tolerancia numérica considerada.
- Reversiones inducidas controladas.
 - Reversiones debidas a pequeñas descargas/recargas controladas durante trayectorias de carga o recarga/descarga.

En las figuras 2.74 y 2.75 se muestran algunos de los resultados en los que se observan dichas inconsistencias numéricas. Este análisis de inconsistencias, junto con el realizado en el modelo *SSOM* de Benz (2007), forman parte de la motivación del desarrollo del presente trabajo.

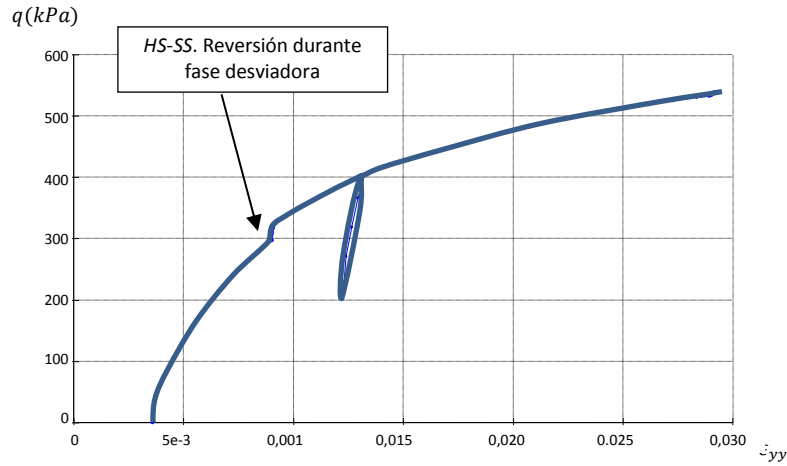


Figura 2.74. Curva $q - \epsilon_{yy}$ en la fase desviadora de un ensayo triaxial numérico. Modelo HS-SS de Plaxis v9. Castellón (2013).

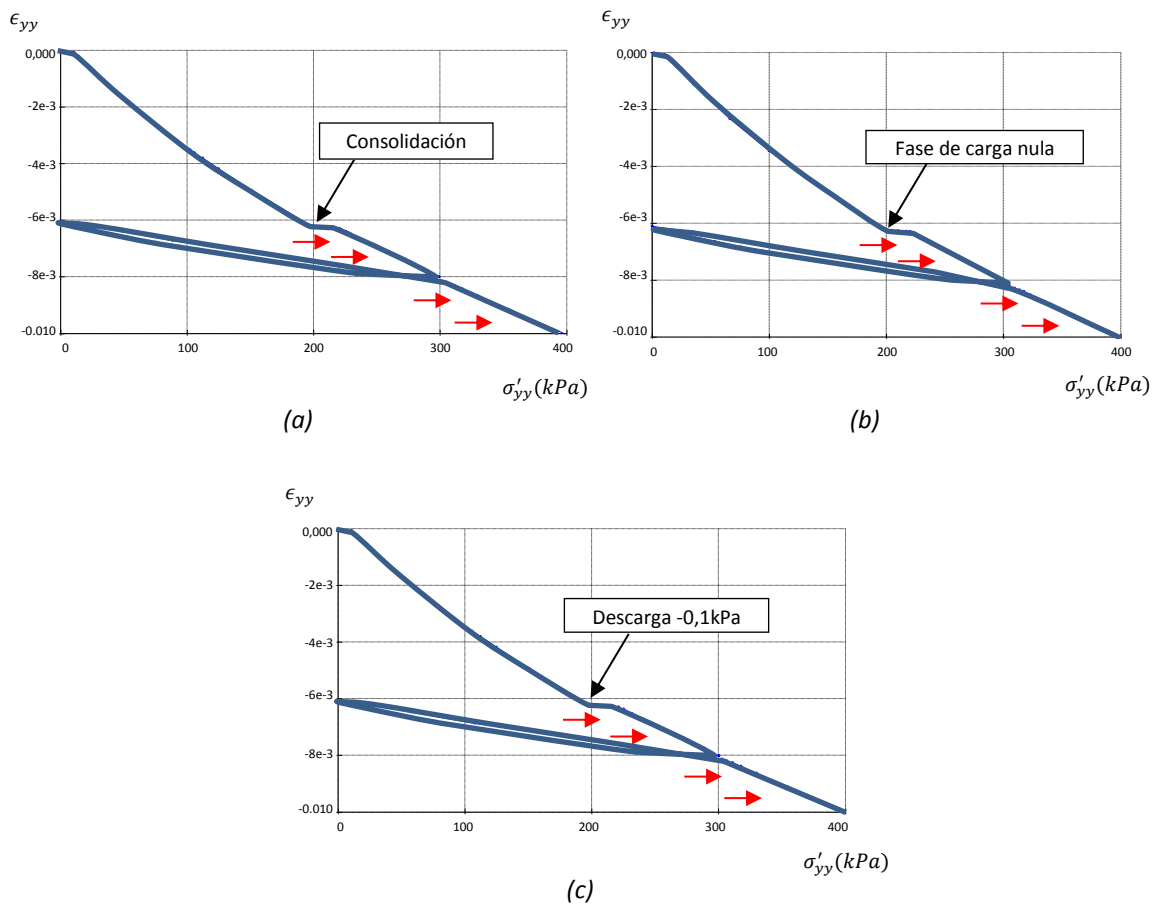


Figura 2.75. Curvas edométricas en ensayos numéricos con el modelo HS-SS de Plaxis v9. Detección de inconsistencias en régimen elastoplástico (Castellón, 2013).

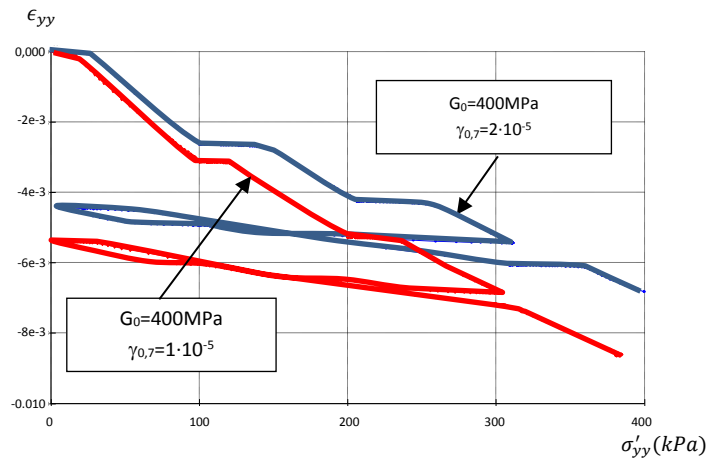


Figura 2.76. Curvas edométricas en ensayos numéricos con el modelo HS-SS de Plaxis v9. Detección de inconsistencias en régimen elástico y elastoplástico y dependencia con G_0 y $\gamma_{0,7}$ (Castellón, 2013).

En dichas investigaciones se estudia la influencia de las inconsistencias detectadas en la simulación de una gran excavación urbana durante las obras de construcción de la Estación Intermodal de la Sagrera, en Barcelona. En la simulación de las fases de la excavación, se estudiaron diferentes escenarios con diferentes condiciones de flujo para los distintos estratos de terreno. El estudio concluye que las inconsistencias numéricas detectadas en el modelo *HS-SS* pueden tener una influencia muy relevante en los resultados de las simulaciones numéricas, al ser acumulativas (Castellón, 2013).

2.6.3.2.1.4. Modelo *FC+MCC* de Gryczmanski y Uliniarz (2008)

El modelo *Fahey-Carter+Modified Cam Clay (FC+MCC)* de Gryczmanski y Uliniarz (2008) incorpora la no linealidad elástica a la formulación elástica del modelo *Cam Clay* modificado (*MCC*) de Roscoe y Burland (1968), de un modo similar al modelo *SDMCC* de Bolton et al. (1994), expuesto en el apartado 2.6.3.2.1.1.

En el caso del modelo *FC+MCC*, dicha no linealidad dentro de la superficie de fluencia se introduce mediante el modelo de Fahey y Carter (1993), descrito en el apartado 2.6.3.1.2.2.13.

Cuando el estado tensional se sitúa sobre la superficie de fluencia, se recupera la formulación original del modelo *MCC* (figura 2.77 y 2.78).

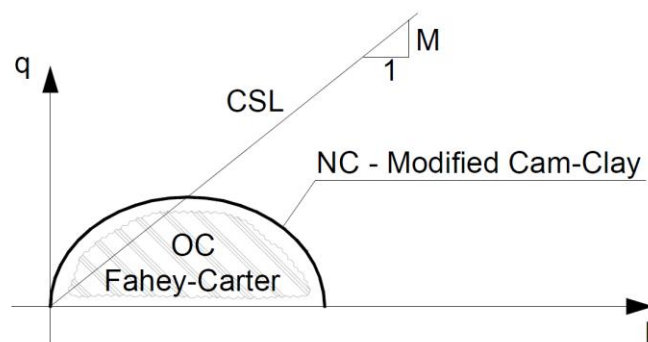


Figura 2.77. Representación gráfica del modelo FC+MCC (Gryczmanski y Uliniarz, 2008).

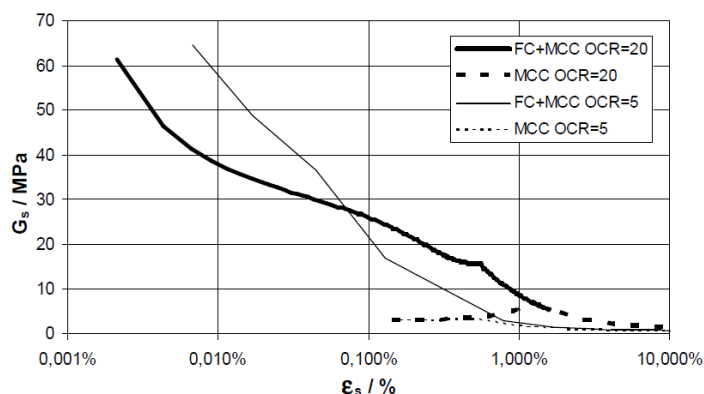


Figura 2.78. Comparación de la curva de degradación de los modelos MCC y FC+MCC. (Gryczmanski y Uliniarz, 2008).

2.6.3.2.2. Modelos de superficies imbricadas

Los modelos de superficies imbricadas con endurecimiento cinemático fueron desarrollados inicialmente por Iwan (1967) y Mróz (1967), basándose en los trabajos previos, como los de Duwez (1935) y Besseling (1958). Posteriormente Prévost (1977, 1978) extendió estos modelos y los aplicó al estudio de suelos.

Como su nombre indica, estos modelos consideran diversas superficies de fluencia imbricadas ($f^{(m)} = 0, m \geq 2$), generalmente en el espacio de tensiones (figura 2.79). Cada una de estas superficies se activa en el momento en que el estado tensional toca su contorno, dando lugar a un decremento finito en el módulo de endurecimiento plástico global, lo que a su vez genera mayores deformaciones plásticas (figura 2.79). De esta forma se logra una variación discontinua de la rigidez elastoplástica. Cuando se activan j superficies de fluencia imbricadas, y en función de la trayectoria que se siga, estas se desplazan manteniéndose en todo momento tangentes entre ellas en los puntos de contacto. El número, forma, tamaño y situación de las superficies imbricadas conforman las variables de estado χ^{hist} que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo (Gudehus, 2011) y el efecto de su historia reciente.

La aproximación al comportamiento del suelo que proporcionan estos modelos depende del número de superficies imbricadas consideradas, puesto que un mayor número de superficies implica una variación más continua de la rigidez. No obstante, si dicho número es elevado, puede resultar computacionalmente costoso emplear estos modelos. En base a esta limitación se crearon los modelos de plasticidad límite (apartado 2.6.3.2.4) y los modelos de burbujas (apartado 2.6.3.2.5).

Los modelos de superficies imbricadas tienen dos zonas tensoriales $\#Z$, según Tamagnini y Viggiani (2002).

Algunos ejemplos de los modelos de superficies imbricadas son el modelo de Mróz (1967), los modelos de Prévost (1977, 1978), descritos extensamente en Chen y Mizuno (1990) o Yu (2006) y utilizados en Prévost et al. (1981), el modelo de Simpson et al. (1979) o en el modelo de Puzrin y Burland (1998).

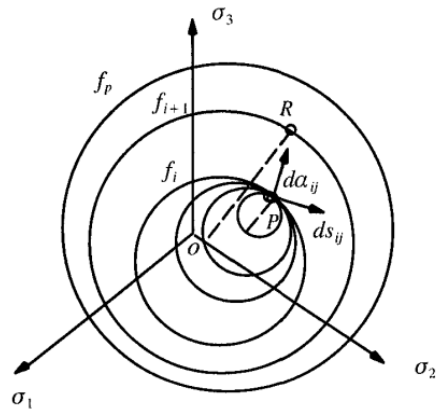


Figura 2.79. Representación esquemática de un modelo con superficies imbricadas (Yu, 2006).

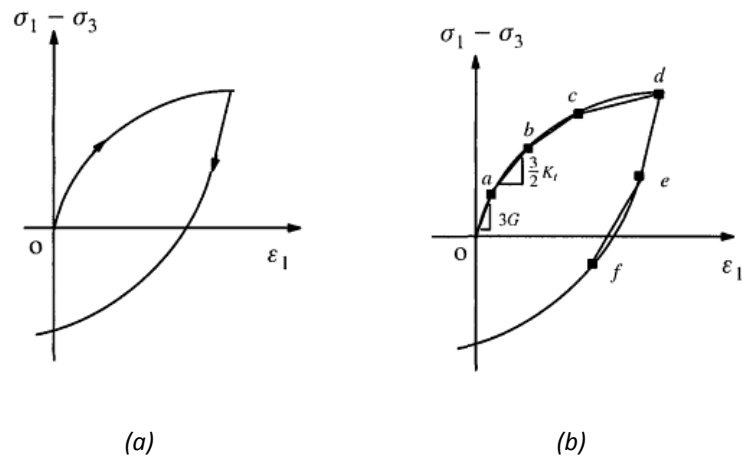


Figura 2.80. Curva $q - \epsilon_1$ (Yu, 2006). (a) Experimental.
(b) Obtenida con los modelos de superficies imbricadas.

2.6.3.2.2.1. Modelos de Prévost (1977, 1978)

Prévost (1977, 1978) desarrolló dos modelos anisótropos de superficies imbricadas basados en los modelos de Mróz (1967), uno para condiciones no drenadas del suelo y otro para condiciones drenadas.

El modelo para condiciones no drenadas adopta el criterio de von Mises para la formulación de las superficies imbricadas y considera una regla de flujo asociada. Por otro lado, el modelo para condiciones drenadas adopta el criterio de von Mises y el modelo *Cam Clay* modificado de Roscoe y Burland (1968) para la formulación de las superficies imbricadas y considera una regla de flujo asociada sobre la superficie tipo *Cam Clay* y no asociada sobre la superficie de von Mises.

Estos modelos asumen la descomposición de las deformaciones totales como suma de las deformaciones elásticas y plásticas. Asimismo, ambos asumen las reglas de Mróz (1967) según las cuales, una vez el estado tensional alcanza la superficie $f^{(j)} = 0$, todas las superficies $f^{(m)} = 0$, $m < j$ se mantienen tangentes en ese punto y se desplazan de forma conjunta a $f^{(j)} = 0$ y recurren al criterio de

Ziegler (1959) para la traslación de las superficies. Para el comportamiento elástico se considera un modelo elástico lineal, mientras que para el comportamiento elastoplástico se considera la formulación que se expone a continuación, según Chen y Mizuno (1990), convertida a notación compacta.

El modelo para condiciones no drenadas adopta las siguientes p superficies imbricadas $f^{(m)} = 0$, $m = 1 \dots p$:

$$f^{(m)} = \frac{3}{2}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m)}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m)}) - (k^{(m)})^2 = 0 \quad (2.264)$$

Donde $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct} \mathbf{1}$ es el tensor desviador de tensiones, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $k^{(m)}$ es una variable que refleja el tamaño de la superficie m -ésima ($k^{(l)} < k^{(r)}$ para $l < r$) y $\boldsymbol{\beta}^{(m)} = \boldsymbol{\alpha}^{(m)} - 1/3\alpha^{(m)}_{ii} \mathbf{1}$ es el centro de la superficie m -ésima en el plano desviador, siendo $\boldsymbol{\alpha}^{(m)}$ el centro de la superficie m -ésima en el espacio de tensiones.

En este caso, las reglas de Mróz (1967) se expresan de la siguiente manera:

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\beta}^{(0)}}{k^{(0)}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\beta}^{(1)}}{k^{(1)}} = \dots = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\beta}^{(m-1)}}{k^{(m-1)}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\beta}^{(m)}}{k^{(m)}} \quad (2.265)$$

Aplicando la condición de consistencia a $f^{(m)} = 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\dot{f}^{(m)} = \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \mathbf{s}} : \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial f^{(m)}}{\partial \boldsymbol{\beta}^{(m)}} : \dot{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} + \frac{\partial f^{(m)}}{\partial k^{(m)}} \dot{k}^{(m)} = 0 \quad (2.266)$$

Este modelo asume que $k^{(m)} = k^{(m)}(\xi'')$ y $H^{(m)} = H^{(m)}(\xi'')$, siendo $H^{(m)}$ el módulo plástico de la superficie m -ésima y ξ'' una variable que depende del incremento del tensor desviador de deformaciones plásticas $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \dot{\epsilon}^p_{oct} \mathbf{1}$, siendo $\dot{\epsilon}^p_{oct} = 1/3\dot{\epsilon}^p_{ii}$ el incremento de la deformación plástica octaédrica volumétrica.

$$\xi'' = \int \left(\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \right)^{1/2} \quad (2.267)$$

El criterio de Ziegler (1959) se expresa en este caso como $\dot{\boldsymbol{\beta}}^{(m)} = \dot{\boldsymbol{\mu}}^{(m)} \boldsymbol{\mu}^{(m)}$, siendo $\boldsymbol{\mu}^{(m)}$ el vector que une el punto del estado tensional actual sobre $f^{(m)}$ con el punto conjugado sobre $f^{(m+1)}$.

$$\boldsymbol{\mu}^{(m)} = \mathbf{s}^{(m+1)} - \mathbf{s}^{(m)} \quad (2.268)$$

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}^{(m)} = \frac{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m)}) : \dot{\mathbf{s}} - k^{(m)} \dot{k}^{(m)}}{k^{(m+1)} k^{(m)} - \frac{3}{2}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m+1)}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m)})} \quad (2.269)$$

El modelo para condiciones no drenadas ha sido utilizado por Prévost et al. (1981) en el análisis de la interacción suelo-estructura en ensayos centrífugos bajo cargas estáticas y dinámicas para simular estructuras *offshore* sometidas al oleaje. Los resultados obtenidos en dicho análisis se ajustan bien a los resultados experimentales.

Por otro lado, el modelo para condiciones drenadas adopta las siguientes p superficies imbricadas $f^{(m)} = 0, m = 1 \dots p$ (figura 2.81):

$$f^{(m)} = \frac{3}{2}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m)}) : (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m)}) + C^2 \left(\frac{1}{3}p' - \gamma^{(m)} \right)^2 - (k^{(m)})^2 = 0 \quad (2.270)$$

Donde $\gamma^{(m)} = 1/3\alpha_{ii}^{(m)}$ es el centro de la superficie $f^{(m)} = 0$ sobre la recta hidrostática, siendo $\alpha^{(m)}$ el centro de la superficie m -ésima en el espacio de tensiones, y C es un parámetro que habitualmente toma un valor de $3\sqrt{2}/2$.

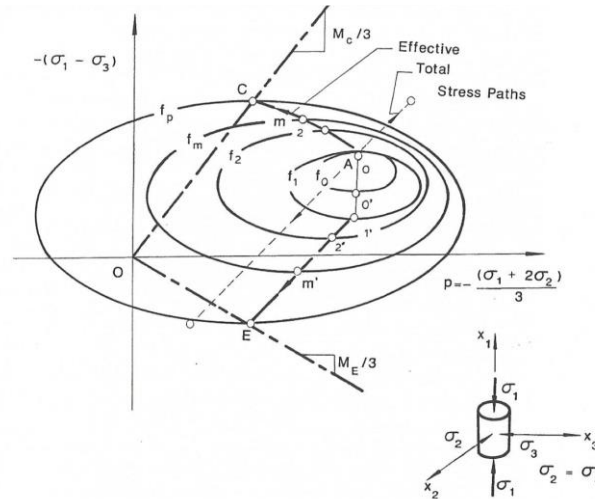


Figura 2.81. Superficies imbricadas correspondientes al modelo para condiciones no drenadas en el espacio $q - p'$ (Chen y Mizuno, 1990).

Las reglas de Mróz (1967) y el criterio de Ziegler (1959) se expresan de modo análogo al modelo para condiciones no drenadas.

El modelo para condiciones drenadas considera la siguiente descomposición de los gradientes de las superficies de fluencia $f^{(m)} = 0$ y potenciales plásticos $g^{(m)} = 0$:

$$\frac{\partial f^{(m)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}^{(m)} = \mathbf{Q}'^{(m)} + \mathbf{Q}''^{(m)} \mathbf{1} \quad (2.271)$$

$$\frac{\partial g^{(m)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}'^{(m)} + \mathbf{P}''^{(m)} \mathbf{1} \quad (2.272)$$

Donde $\mathbf{Q}'^{(m)}$ y $\mathbf{P}'^{(m)}$ son, respectivamente, las proyecciones de $\mathbf{Q}^{(m)} = \partial f^{(m)} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{P}^{(m)} = \partial g^{(m)} / \partial \boldsymbol{\sigma}$ sobre el plano desviador y $\mathbf{Q}''^{(m)}$ y $\mathbf{P}''^{(m)}$ son, respectivamente, las proyecciones de $\mathbf{Q}^{(m)}$ y $\mathbf{P}^{(m)}$ sobre la recta hidrostática. Teniendo en cuenta esta descomposición, se considera lo siguiente:

$$\mathbf{P}'^{(m)} = \mathbf{Q}'^{(m)} \quad (2.273)$$

$$\mathbf{P}''^{(m)} = \mathbf{Q}''^{(m)} + A_m (\mathbf{Q}'^{(m)} : \mathbf{Q}'^{(m)})^{1/2} \quad (2.274)$$

Donde $A_m = (\gamma^{(m)} - \gamma^{(p)})a_m$, siendo $\gamma^{(p)}$ el centro de la superficie $f^{(p)} = 0$, exterior a todas las demás ($p > m, \forall m$), sobre la recta hidrostática y a_m un parámetro del modelo.

En base a lo anterior es posible expresar las deformaciones plásticas en función del módulo de endurecimiento plástico de la siguiente manera:

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{H_m} (\mathbf{Q}'^{(m)} : \dot{\mathbf{s}} + Q''^{(m)} \dot{p}') (\mathbf{P}'^{(m)} + P''^{(m)} \mathbf{1}) \quad (2.275)$$

Cuando $\mathbf{Q}'^{(m)} = \mathbf{0}$, H_m actúa como módulo volumétrico plástico y se puede expresar como sigue:

$$H_m = Q''^{(m)} P''^{(m)} \frac{\partial p'}{\partial \epsilon_v^p} \quad (2.276)$$

Donde ϵ_v^p es la deformación volumétrica plástica.

Asimismo, cuando $Q''^{(m)} = 0$, H_m actúa como módulo de corte plástico y se puede expresar como sigue:

$$H_m = \frac{(\mathbf{P}'^{(m)} : \mathbf{P}'^{(m)})^{1/2}}{(\epsilon^p : \epsilon^p)^{1/2}} \mathbf{Q}'^{(m)} : \dot{\mathbf{s}} \quad (2.277)$$

Las reglas de endurecimiento para la superficie $f^{(p)} = 0$, exterior a todas las demás ($p > m, \forall m$), se expresan de la siguiente manera:

$$\dot{k}^{(p)} = \dot{k}^{(p)} (\epsilon_v^p) \quad (2.278)$$

$$\dot{\beta}^{(p)} = \dot{k}^{(p)} \mathbf{a} \quad (2.279)$$

$$\dot{\gamma}^{(p)} = \dot{k}^{(p)} b \quad (2.280)$$

Donde \mathbf{a} y b son parámetros del suelo.

Asimismo, el valor de H_p puede obtenerse de la condición de consistencia sobre $f^{(p)} = 0$, es decir, $\dot{f}^{(p)} = 0$.

Por otro lado, las reglas de endurecimiento para las superficies $f^{(m)} = 0$, $m = 1 \dots p - 1$, se expresan de la siguiente manera (figura 2.82):

$$\dot{k}^{(m)} = \dot{k}^{(m)} (\epsilon_v^p) \quad (2.281)$$

$$\dot{\beta}^{(m)} = \frac{\mathbf{Q}'^{(m)} : \mathbf{s} - 2k^{(m)} \dot{k}^{(m)} \frac{(\mathbf{Q}'^{(m)} : \mathbf{Q}'^{(m)})^{1/2}}{(\mathbf{Q}^{(m)} : \mathbf{Q}^{(m)})^{1/2}}}{\mathbf{Q}'^{(m)} : \boldsymbol{\mu}'} \quad (2.282)$$

$$\boldsymbol{\mu}' = \frac{k^{(m+1)}}{k^{(m)}} (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m)}) - (\mathbf{s} - \boldsymbol{\beta}^{(m+1)}) \quad (2.283)$$

$$\dot{\gamma}^{(m)} = \dot{p}' - 2k^{(m)}\dot{k}^{(m)} \frac{Q''^{(m)}}{(Q^{(m)}: Q^{(m)})^{1/2}} \quad (2.284)$$

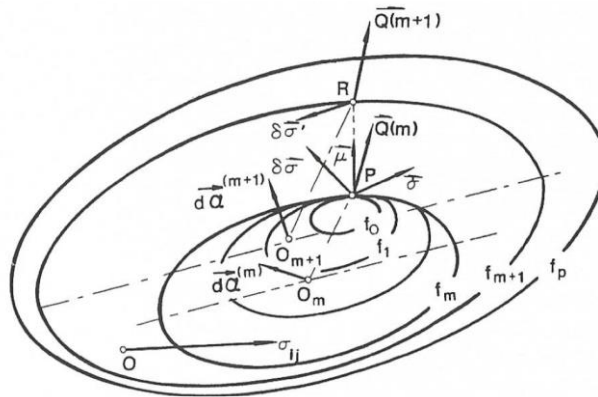


Figura 2.82. Esquema con las reglas de endurecimiento del modelo de Prévost (Chen y Mizuno, 1990).

Los modelos de Prévost consideran que aparecen puntos de reversión con recuperación total o parcial de la rigidez cuando el incremento tensional es tal, que da lugar a un despegue de las superficies imbricadas en los puntos de tangencia. Estos modelos almacenan información en varios puntos de reversión a través de la posición de las superficies imbricadas, hasta que estas son desplazadas de nuevo, lo cual permite tener en cuenta parcialmente la historia reciente del suelo. Por lo general, estos modelos pueden incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados.

2.6.3.2.2. Modelo de Simpson et al. (1979)

El modelo de Simpson et al. (1979), denominado Modelo LC, es un modelo no lineal elastoplástico ideado para simular el comportamiento de la arcilla de Londres a pequeñas, medias y grandes deformaciones.

Este modelo considera una superficie plástica con endurecimiento cinemático (*Kynematic Yield Surfaces, KYS*), dentro de la cual el comportamiento del suelo se considera elástico lineal. Cuando la trayectoria tensodeformacional del suelo alcanza el contorno de dicha superficie, se activarán las deformaciones plásticas, con lo que la rigidez se verá reducida, a la vez que la superficie KYS se desplazará siguiendo la trayectoria tensodeformacional. Si posteriormente aparece una reversión, el suelo recuperará la rigidez correspondiente al rango elástico.

El Modelo LC divide el rango de deformaciones del suelo en tres:

- Pequeñas deformaciones: el comportamiento del suelo es elástico lineal dentro de la KYS.
- Medias deformaciones: el comportamiento del suelo es elastoplástico con elasticidad anisótropa, si bien las deformaciones plásticas no están controladas por la regla de flujo plástico.

- **Grandes deformaciones:** el comportamiento del suelo es predominantemente plástico, con la siguiente regla de flujo plástico para un estado de deformación plana, basada en los modelos de estado crítico (Roscoe y Burland, 1968).

$$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_q^p} = F_0 \sin(\varphi') \left(1 - \frac{F}{F_0}\right) \quad (2.285)$$

Donde $\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de la deformación volumétrica plástica, $\dot{\epsilon}_q^p$ es el incremento de la deformación de corte plástica, $F_0 = F(\dot{\epsilon}_q^p = 0)$, φ' es el ángulo de fricción efectivo máximo del suelo, $F = \bar{t}/(\bar{s}\sin(\varphi') + c'\cos(\varphi'))$, siendo $\bar{t} = (\sigma'_1 + \sigma'_2)/2$ y $\bar{s} = (\sigma'_1 - \sigma'_2)$ las tensiones en el plano de Lambe y c' es la cohesión efectiva del suelo.

El Modelo LC es capaz de almacenar información del último punto de reversión a través de la posición de la superficie *KYS*, hasta que esta es desplazada de nuevo, lo cual permite tener en cuenta parcialmente la historia reciente. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados.

Tal como exponen Simpson et al. (1979), el Modelo LC permite simular varios ensayos de laboratorio y de campo con cierto éxito y es capaz de aproximar bien los desplazamientos generados por dos grandes excavaciones en arcilla de Londres (figura 2.83).

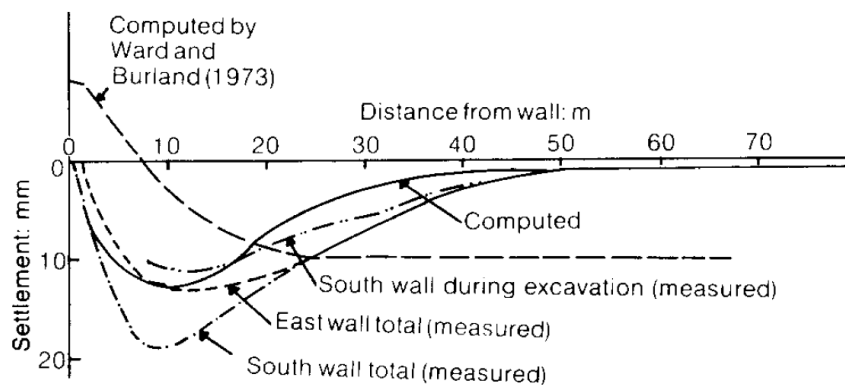


Figura 2.83. Movimientos durante la construcción de un aparcamiento al lado del New Palace Yard (Simpson et al., 1979).

2.6.3.2.2.3. Modelo de Puzrin y Burland (1998)

Puzrin y Burland (1998), tras estudiar y evaluar los modelos de Kondner (1963), Hardin y Drnevich (1972), Griffiths y Prevost (1990), Tatsuoka y Shibuya (1992) y Jardine et al. (1986), y basándose en los trabajos de Puzrin y Burland (1996), desarrollaron un modelo fundamentado en el marco teórico de los trabajos de Jardine (1992), distinguiendo tres zonas en el espacio de tensiones alrededor de cualquier origen local constituido por un punto de la trayectoria de tensiones, en las que el suelo tiene diferentes comportamientos.

Puzrin y Burland diferencian dos zonas dentro de la región de tensiones admisibles, delimitada por la superficie plástica: la *Small Strain Region (SSR)* y, en su interior, la *Linear Elastic Region (LER)*, figura 2.84. Ambas superficies se definen a partir de valores constantes del incremento de energía de deformación. Dentro de la *LER* se considera que el suelo tiene un comportamiento elástico lineal (al igual que en la Zona I de Jardine (1992)), mientras que en el espacio entre la *LER* y la *SSR*, se considera que el suelo tiene un comportamiento elástico no lineal e histerético (al igual que en la Zona II de Jardine (1992)). La dependencia con la historia reciente es una consecuencia natural de la estructura de los modelos de superficies imbricadas. Tanto la *LER* como la *SSR* se desplazan en el espacio de tensiones siguiendo la trayectoria tensional. Para ello se asumen las reglas de endurecimiento cinemático de Phillips (Phillips y Weng, 1975) para la *SSR*, manteniéndose la *LER* centrada en la *SSR*.

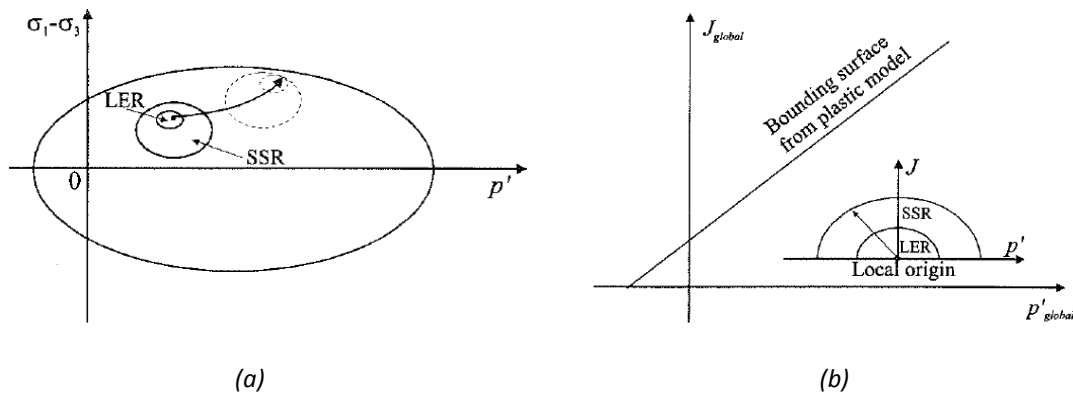


Figura 2.84. (a) Concepto de KYS aplicado al modelo de Puzrin y Burland (1998) en el plano $q - p'$.
(b) Zonas LER y SSR alrededor de un origen local en el plano $J - p'$. Potts y Zdravkovic (1999).

Addenbrooke et al. (1997) propusieron la generalización del modelo de Puzrin y Burland (1998) al caso multiaxial y lo implementaron numéricamente para analizar problemas de túneles. Dicha formulación se expone a continuación, tomada de Potts y Zdravkovic (1999).

Matemáticamente las regiones *LER* y *SSR* se describen de la siguiente manera:

$$F_{LER}(p', J) = 1 + n'^2 \left(\frac{J}{p'} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_{LER}}{p'} \right)^2 = 0 \quad (2.286)$$

$$F_{SSR}(p', J) = 1 + n'^2 \left(\frac{J}{p'} \right)^2 - \left(\frac{\alpha_{SSR}}{p'} \right)^2 = 0 \quad (2.287)$$

Dentro de la *LER* el comportamiento del suelo es elástico lineal y la rigidez se obtiene a partir del módulo volumétrico elástico y del módulo de corte elástico:

$$K_{LER} = K_{LER}^{ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^{\hat{\beta}} \quad (2.288)$$

$$G_{LER} = G_{LER}^{ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^{\hat{\gamma}} \quad (2.289)$$

Donde $F_{LER}(p', J) = 0$ delimita la LER, $F_{SSR}(p', J) = 0$ delimita la SSR, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $J = \sqrt{1/2\mathbf{s}:\mathbf{s}}$ es un invariante del tensor desviador de tensiones \mathbf{s} , siendo $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct}\mathbf{1}$, K_{LER} es el módulo volumétrico elástico dentro de la LER, $K_{LER}^{ref} = K_{LER}$ cuando $p' = p'_{ref}$, p'_{ref} es una presión de referencia, $\hat{\beta}$ es un parámetro del suelo, G_{LER} es el módulo de corte dentro de la LER, $G_{LER}^{ref} = G_{LER}$ cuando $p' = p'_{ref}$, $\hat{\gamma}$ es un parámetro del suelo, $n' = \sqrt{K_{LER}/G_{LER}}$, $a_{LER} = n'J_{LER}^u$ y $a_{SSR} = n'J_{SSR}^u$, siendo J_{LER}^u la tensión desviadora en la frontera de la LER y J_{SSR}^u la tensión desviadora en la frontera de la SSR, ambas obtenidas a partir de ensayos triaxiales no drenados.

Dentro de la SSR el comportamiento del suelo es no lineal e histerético, y se describe utilizando el módulo volumétrico elástico drenado K' y el módulo corte elástico G , los cuales se suponen que degradan, en el modelo, con la deformación volumétrica y de corte, respectivamente, siguiendo una curva logarítmica (Puzrin y Burland, 1996).

$$K' = K_{LER} \left(1 - \hat{\alpha} \left(\frac{(x_v - x_e)R'(\ln(1 + x_v - x_e))^{R' - 1}}{(1 + x_v - x_e)} + (\ln(1 + x_v - x_e))^{R'} \right) \right) \quad (2.290)$$

$$G = G_{LER} \left(1 - \hat{\alpha} \left(\frac{(x_D - x_e)R'(\ln(1 + x_D - x_e))^{R' - 1}}{(1 + x_D - x_e)} + (\ln(1 + x_D - x_e))^{R'} \right) \right) \quad (2.291)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{x_u - 1}{(x_u - x_e)(\ln(1 + x_u - x_e))^{R'}} \quad (2.292)$$

$$R' = \left(\frac{1 - x_e}{x_u - x_e} - b \right) \left(\frac{(1 + x_u - x_e)\ln(1 + x_u - x_e)}{x_u - 1} \right) \quad (2.293)$$

$$x_u = \frac{2K_{LER}u'}{a_{SSR}^2} \quad (2.294)$$

$$x_v = \frac{|\epsilon_v|K_{LER}}{p'_{SSR}} \quad (2.295)$$

$$x_D = \frac{|\epsilon_q|G_{LER}}{J_{SSR}} \quad (2.296)$$

$$x_e = \frac{a_{LER}}{a_{SSR}} \quad (2.297)$$

Donde $\epsilon_v = 3\epsilon_{oct} = \epsilon_{ii}$ es la deformación volumétrica total medida desde el último punto de reversión, $\epsilon_q = \sqrt{\mathbf{e}:\mathbf{e}}$ es un invariante del tensor desviador de deformaciones totales $\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct}\mathbf{1}$ medido desde el último punto de reversión, $\boldsymbol{\epsilon}$ es el tensor de deformaciones, p'_{SSR} y J_{SSR} son los valores de p' y J

proyectados sobre la frontera de la *SSR* (figura 2.85), $u' = 0,5\epsilon_{q,SSR}^u J_{SSR}^u$ es una medida de la energía incremental de deformación calculada a partir de los valores de la deformación de corte $\epsilon_{q,SSR}^u$ y tensión de corte J_{SSR}^u sobre la *SSR*, medidos en ensayos triaxiales no drenados y $b = G_{SSR}/G_{LER} = K_{SSR}/K_{LER}$, siendo K_{SSR} y G_{SSR} el módulo volumétrico y de corte elástico sobre la frontera de la *SSR*.

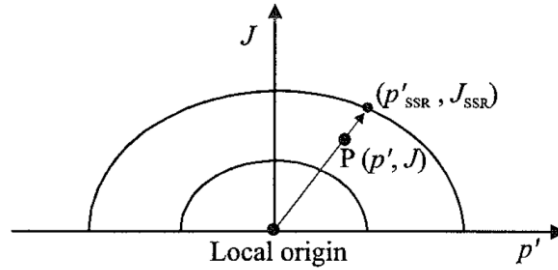


Figura 2.85. Proyección del estado actual de tensiones (p', J) sobre la región *SSR* (Potts y Zdravkovic, 1999).

El criterio utilizado para definir puntos de reversión es que la proyección del incremento de tensiones sobre la normal exterior a las superficies *LER* o *SSR* tenga signo negativo. Para identificar estos puntos de reversión se definen las siguientes variables:

$$\bar{p}' = \frac{p'}{p'_{SSR}} \quad (2.298)$$

$$\bar{J} = \frac{J}{J_{SSR}} \quad (2.299)$$

Cuando $\dot{\bar{p}}' < 0$ o $\dot{\bar{J}} < 0$, se considera que aparece un punto de reversión hasta que la *SSR* se desplace de nuevo. En el punto de reversión el modelo almacena los valores (p'_{rev}, J_{rev}) , que definen un nuevo origen local de las superficies *LER* y *SSR*, para lo cual Puzrin y Burland (1998) asumen un periodo de reposo tras la reversión. Asimismo, tras la reversión, se reinician los valores de la deformación volumétrica $\epsilon_v = 0$ y de la deformación desviadora $\epsilon_q = 0$ y, por tanto, la rigidez pasa a ser la correspondiente a la de la *LER*, es decir, la máxima. Fuera de la región *SSR* el modelo considera las rigideces $K = bK_{LER}$ y $G = bG_{LER}$.

$$\dot{\bar{p}}' = \frac{p'_{SSR}\dot{p}' + p'\dot{p}'_{SSR}}{p'^2_{SSR}} \quad (2.300)$$

$$\dot{\bar{J}} = \frac{J_{SSR}\dot{J} + J\dot{J}_{SSR}}{J^2_{SSR}} \quad (2.301)$$

Este modelo almacena información de la posición de las superficies *LER* y *SSR*, lo cual permitirá tener en cuenta, parcialmente, la historia reciente del suelo. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados.

Asimismo, el modelo proporciona buenas predicciones de diferentes trayectorias tensionales en ensayos triaxiales sobre arcilla de Boothkennar sin alterar.

Cabe mencionar que Puzrin et al. (2001) extendieron el modelo original de Puzrin y Burland, introduciendo el comportamiento plástico en una formulación termodinámicamente consistente.

2.6.3.2.3. Modelos de bloques

La mayoría de modelos elastoplásticos para suelos se formulan en el espacio de tensiones, si bien algunos han sido formulados en el espacio de deformaciones (Yingren et al., 1986; Simpson, 1992; Einav, 2004; Benz, 2007). Yoder e Iwan (1981) e Iwan y Chelvakumar (1988) destacan algunas de las ventajas de los modelos que se formulan en el espacio de deformaciones. A pesar de que muchos de ellos no han prosperado, el modelo de bloques de Simpson (1992) sí ha dado lugar a un marco teórico que posteriormente se ha aplicado con éxito en diversos modelos. Entre ellos se encuentran los modelos de Benz (2007), en los que se basa el modelo *HS-SS* implementado en Plaxis y recientemente en otros programas numéricos, el modelo de Clarke (2009) o el modelo de Ellison (2009). Para explicar el funcionamiento de los modelos de bloques, Simpson utiliza una analogía en la que considera que el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones se asemeja a una persona caminando a la que se le han atado un conjunto de bloques a los pies mediante cuerdas inextensibles. El movimiento de la persona representa la trayectoria de deformaciones impuesta y el movimiento de los bloques, las deformaciones plásticas. Cuando alguna de las cuerdas no está tensa, no se genera la parte de deformación plástica correspondiente a dicha cuerda. Pero cuando dicha cuerda se tensa, por estar la persona a una distancia igual a la de la longitud de la cuerda y en dirección de tesado de la misma, se activan las respectivas deformaciones plásticas, con la consecuente disminución de la rigidez elastoplástica del suelo (figura 2.86). El número y la situación de cada bloque conforman las variables de estado χ^{hist} que se identifican con las que Gudehus (2011) propone como imprescindibles para describir el comportamiento histerético del suelo y a las cuales se puede atribuir también la dependencia del comportamiento del mismo con su historia reciente.

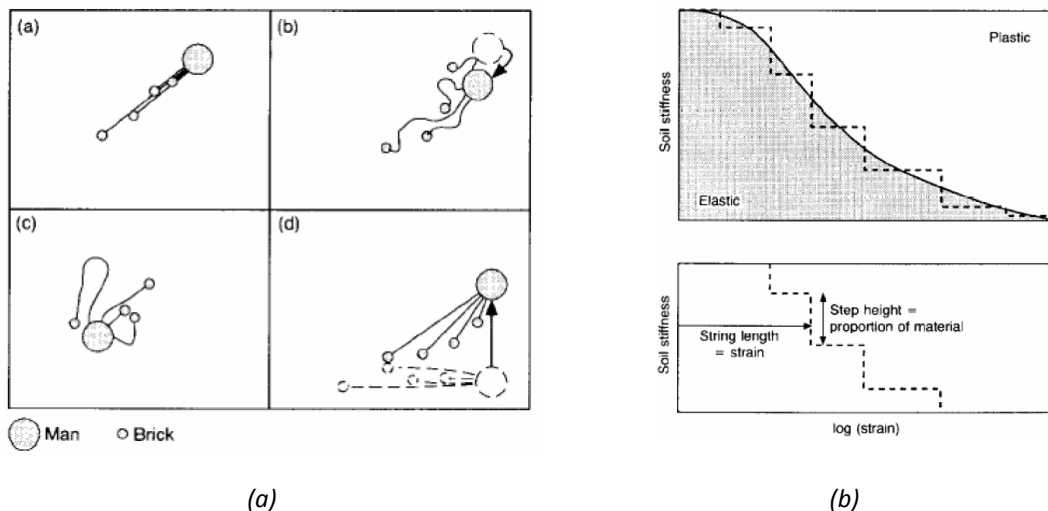


Figura 2.86. Modelo de bloques de Simpson (Simpson, 1992). (a) Esquema de la analogía del hombre arrastrando bloques atados por cuerdas inextensibles. (b) Curva de degradación de la rigidez del modelo.

Para explicar las ventajas de trabajar en el espacio de deformaciones, Ellison et al. (2010) exponen que, a pesar de la conexión entre tensión y deformación, los cambios en el comportamiento del suelo vienen determinados por los cambios micromecánicos en la fábrica del mismo, lo cual se refleja a nivel macroscópico como una acumulación de deformaciones. Asimismo, afirman que la anisotropía debida a la orientación de las partículas del suelo cambiará cuando se produzcan grandes deformaciones, aunque la tensión al principio y al final de dichas deformaciones sea la misma. Finalmente, recuerdan la conocida afirmación de Burland (1967) citada por Simpson (1992: 555) “la tensión es un concepto filosófico – la deformación es la realidad física”.

Ellison et al. (2010) concluyen que los modelos formulados en el espacio de deformaciones son más adecuados para explicar los mecanismos que gobiernan el comportamiento del suelo. Este planteamiento permite explicar de una forma relativamente simple las observaciones realizadas por Atkinson et al. (1990), Clayton y Heymann (2001) y Gasparre (2005), expuestas en el apartado 2.5.2.2.

Desde un punto de vista práctico, los modelos formulados en el espacio de deformaciones pueden implementarse fácilmente en modelos numéricos sin la necesidad de aislar, en cada paso de cálculo, la deformación como variable independiente (Iwan y Chelvakumar, 1988), tal como sí deben hacer los modelos formulados en el espacio de tensiones. Además, como demuestran Yoder e Iwan (1981), los modelos formulados en el espacio de deformaciones no tienen el problema de intersección de superficies, ni algunos de los problemas de inestabilidad que sí presentan los modelos formulados en el espacio de tensiones.

Los modelos de bloques consideran tantas zonas tensoriales como combinaciones posibles de bloques activos y no activos existan. Si se consideran n bloques, es posible calcular una cota superior del número máximo de zonas tensoriales como la suma de las posibles combinaciones con repetición de $1 \dots n$ bloques, más aquel caso en que ningún bloque esté activo, es decir, $\#Z = \sum_{i=0}^n n!/k! (n - k)!$.

2.6.3.2.3.1. Modelo de Simpson (1992)

El modelo original de bloques de Simpson (1992) se formula en el espacio de deformaciones considerando un estado de deformación plana. Para ello se utilizan las variables de deformación volumétrica $\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2$, la deformación desviadora $\epsilon_s = \epsilon_2 - \epsilon_1$ y la deformación de corte γ_{12} . Asimismo, se utilizan las tensiones en el plano de Lambe $s' = (\sigma'_1 + \sigma'_2)/2$, $t' = (\sigma'_1 - \sigma'_2)/2$ y la tensión tangencial τ_{12} .

El incremento de deformación plástica total $\dot{\epsilon}_p$ resulta de la suma de las deformaciones plásticas de cada bloque $\dot{\epsilon}^p = \sum \dot{\epsilon}_i^p$. Por otro lado, el incremento de deformación elástica se calcula como $\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p$, donde $\dot{\epsilon}$ es el incremento de deformación total.

Cuando las cuerdas de todos los bloques se encuentran sin tensión, el comportamiento del suelo es totalmente elástico. Mientras que cuando las cuerdas de todos los bloques se encuentran tensas, el comportamiento del suelo es totalmente plástico. El modelo requiere un número finito de bloques para definir la curva de degradación que, en cualquier caso, no será continua.

El comportamiento elástico del modelo viene determinado por las siguientes expresiones:

$$\dot{s}' = \frac{s \dot{\epsilon}_v^e}{\iota} \quad (2.302)$$

$$\dot{t}' = \frac{s' \dot{\gamma}_{12}^e (1 - 2\nu'_{cte})}{\iota} \quad (2.303)$$

Donde ι es un parámetro que determina la rigidez elástica del suelo y ν'_{cte} es el coeficiente de Poisson drenado del suelo, que se asume constante.

Este modelo introduce el efecto de la sobreconsolidación del suelo mediante el parámetro $\beta_{mod} = G_{max,OC}/G_{max,NC}$, siendo $G_{max,OC}$ y $G_{max,NC}$ los módulos de corte máximos en el suelo sobreconsolidado y normalmente consolidado, respectivamente, pudiéndose calcular β_{mod} de la siguiente manera:

$$\beta_{mod} = 1 + \beta \left(\epsilon_v - \epsilon_{v,0} - \lambda^* \ln \left(\frac{s'}{s'_0} \right) \right) \quad (2.304)$$

Donde β es un parámetro del suelo, λ^* es la pendiente de la recta de consolidación noval en el plano $\ln(e) - \ln(p')$, $\epsilon_{v,0}$ es la deformación volumétrica inicial y s'_0 es la tensión media inicial.

El modelo asume una mayor proporción de deformaciones volumétricas y de corte elásticas para mayores presiones medias. Estos incrementos en las deformaciones elásticas se pueden calcular como sigue:

$$\dot{\epsilon}_v^e = \left(\frac{\iota}{\lambda^*} \right) \dot{\epsilon}_v \quad (\text{si el suelo está NC}) \quad (2.305)$$

$$\dot{\epsilon}_v^e = \left(\frac{\iota}{\kappa^*} \right) \dot{\epsilon}_v \quad (\text{si el suelo está OC}) \quad (2.306)$$

$$\dot{\gamma}_{12}^e = \frac{t'}{s'} (1 - 2\nu'_{cte}) \dot{\epsilon}_v^e \quad (2.307)$$

Donde κ^* es la pendiente de la recta de hinchamiento en el plano $\ln(e) - \ln(p')$.

Asimismo, el modelo de Simpson es capaz de almacenar información de un número limitado de puntos de reversión que se relaciona con el número de bloques activos. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados

El modelo de Simpson predice bastante bien las trayectorias tensodeformacionales no drenadas, pero el grado de aproximación a las trayectorias drenadas no acaba de ser satisfactorio debido a que subestima la dilatancia. Los problemas con las trayectorias drenadas quedan parcialmente resueltos cuando se incorpora el efecto de la dilatancia en el modelo.

Por otro lado, es necesario destacar que tanto el modelo de Simpson como otros modelos basados en él, no son capaces de reproducir correctamente el estado crítico del suelo, con lo que es habitual utilizar este tipo de modelos únicamente en arcillas de elevada rigidez o bien extender su formulación.

2.6.3.2.4. Modelos de plasticidad límite

Los modelos de plasticidad límite fueron inicialmente desarrollados por Dafalias (1975), Krieg (1975), Dafalias y Popov (1975) y Dafalias y Herrmann (1982) con el objetivo de lograr una evolución continua de la rigidez elastoplástica, que se extiende al interior de la superficie de fluencia en el rango de las pequeñas deformaciones en estos modelos, y reducir así el coste computacional que tienen los modelos de superficies imbricadas.

Los modelos de plasticidad límite utilizan generalmente dos superficies: una superficie exterior, llamada superficie de plasticidad límite (*bounding surface*), y una superficie interior, llamada superficie de carga (*load surface*) (figura 2.87). Entre ambas superficies, a diferencia de los modelos de superficies imbricadas, que consideran n superficies que dan lugar a una variación discreta de la rigidez, los modelos de plasticidad límite consideran funciones continuas para representar el módulo de endurecimiento plástico, logrando variaciones continuas de la rigidez (lo que es equivalente a considerar $n \rightarrow \infty$ en los modelos de superficies imbricadas). La forma, situación y orientación de las dos superficies, junto con otra información almacenada en el último punto de reversión, conforman las variables de estado χ^{hist} que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo (Gudehus, 2011) y el efecto de su historia reciente.

La formulación de estos modelos se basa en la de los modelos elastoplásticos clásicos, aunque a diferencia de estos últimos, los modelos de plasticidad límite consideran deformaciones plásticas también durante procesos de carga dentro de la superficie de plasticidad límite ($OCR > 1$). Dichas deformaciones plásticas se hacen depender de la distancia entre el estado tensional actual localizado sobre la superficie de carga y el denominado punto imagen situado sobre la superficie de plasticidad límite, según las reglas de mapeo (*mapping rules*).

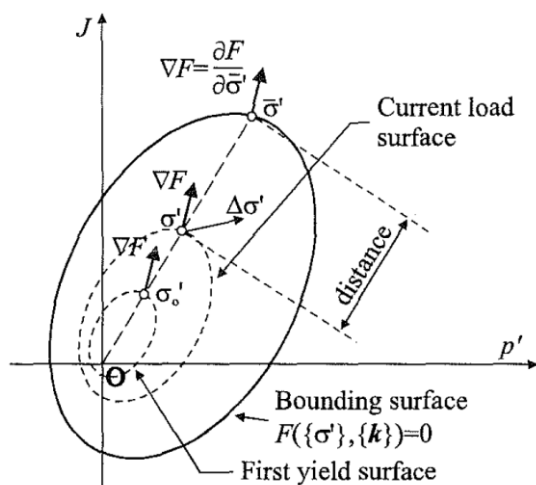


Figura 2.87. Representación esquemática de la superficie de plasticidad límite (Potts y Zdravkovic, 1999).

El número de zonas tensoriales $\#Z$ de estos modelos, tal como indica Tamagnini y Viggiani (2002), se reduce a dos cuando sólo hay una superficie de plasticidad límite y a más de dos en caso de que haya un mayor número de superficies de plasticidad límite (de modo similar al caso de los modelos elastoplásticos clásicos con las superficies de fluencia).

Algunos ejemplos de este tipo de modelos son el modelo *MIT-E3* de Whittle (1987), el modelo *CASM-c* de Yu (1995), el modelo *NAHOS* de Gryczmanski et al. (1998), el modelo *MIT-S1* de Pestana y Whittle (1999) o el modelo de Papadimitriou et al. (2001).

2.6.3.2.4.1. Modelo *MIT-E3* de Whittle (1987)

El modelo *MIT-E3*, basado en el modelo *MIT-E1* (Kavvas, 1982), fue inicialmente desarrollado por Whittle (1987) y posteriormente por Whittle (1993) y Whittle y Kavvas (1994). En Ganendra (1994) y Whittle (1995) se analizaron y discutieron discrepancias en las formulaciones previas del modelo y se propusieron alternativas a las mismas. A continuación, se describe la formulación del modelo a partir del trabajo de Potts y Zdravkovic (1999), convertida a notación compacta.

El modelo *MIT-E3* es capaz de reproducir el comportamiento elástico no lineal e histerético de suelos arcillosos normalmente consolidados y ligeramente sobreconsolidados, así como el comportamiento anisótropo plástico de los mismos. Puesto que la formulación plástica es anisótropa, no pueden utilizarse únicamente los invariantes de los tensores de tensión o deformación, por lo que se recurre a las siguientes variables transformadas:

$$\begin{array}{l} \Pi_{0,p} : \mathbb{R}^6 \\ \boldsymbol{\phi}_p \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Pi_{0,p}(\boldsymbol{\phi}_p) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\phi_p)_i \quad (2.308)$$

$$\begin{array}{l} \Pi_0 : \mathbb{R}^6 \\ \boldsymbol{\phi} \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Pi_0(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{i=1}^3 \phi_i \quad (2.309)$$

$$\begin{array}{l} \Pi_1 : \mathbb{R}^6 \\ \boldsymbol{\phi} \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Pi_1(\boldsymbol{\phi}) = (2\phi_2 - \phi_1 - \phi_3)/\sqrt{6} \quad (2.310)$$

$$\begin{array}{l} \Pi_2 : \mathbb{R}^6 \\ \boldsymbol{\phi} \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Pi_2(\boldsymbol{\phi}) = (2\phi_3 - \phi_1)/\sqrt{2} \quad (2.311)$$

$$\begin{array}{l} \Pi_3 : \mathbb{R}^6 \\ \boldsymbol{\phi} \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Pi_3(\boldsymbol{\phi}) = \sqrt{2}\phi_{12} \quad (2.312)$$

$$\begin{array}{l} \Pi_4 : \mathbb{R}^6 \\ \boldsymbol{\phi} \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Pi_4(\boldsymbol{\phi}) = \sqrt{2}\phi_{23} \quad (2.313)$$

$$\begin{array}{l} \Pi_5 : \mathbb{R}^6 \\ \boldsymbol{\phi} \end{array} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Pi_5(\boldsymbol{\phi}) = \sqrt{2}\phi_{31} \quad (2.314)$$

Donde $\phi_p \in \{\sigma'\}$, $\phi \in \{\sigma', \epsilon, \partial f/\partial\sigma', \partial g/\partial\sigma', \mathbf{b}\}$, siendo σ' el tensor de tensiones efectivas, ϵ el tensor de deformaciones, $\partial f/\partial\sigma'$ el gradiente de la superficie de plasticidad límite en el espacio de tensiones, $\partial g/\partial\sigma'$ el flujo plástico en el espacio de tensiones, \mathbf{b} un tensor que controla el grado de anisotropía, y $p' = \Pi_{0,p}(\sigma')$, $s'_i = (\mathbf{s}')_i = \Pi_i(\sigma')$, $\epsilon_v = \Pi_0(\epsilon)$, $E_i = (\mathbf{E})_i = \Pi_i(\epsilon)$, $Q = \Pi_0(\partial f/\partial\sigma')$, $P = \Pi_0(\partial g/\partial\sigma')$, $Q_i = (\mathbf{Q})_i = \Pi_i(\partial f/\partial\sigma')$, $P_i = (\mathbf{P})_i = \Pi_i(\partial g/\partial\sigma')$ y $b_i = (\mathbf{b})_i$, con $i = 1, \dots, 5$, son las variables transformadas del modelo MIT-E3.

La formulación de este modelo se fundamenta en la teoría clásica de los modelos elastoplásticos en cuanto a la descomposición de deformaciones, reglas de flujo y leyes de endurecimiento. Respecto al comportamiento elástico no lineal e histerético del suelo, el modelo MIT-E3 utiliza una formulación isótropa conceptualmente basada en el modelo de Hueckel y Nova (1979).

Se consideran las siguientes expresiones del módulo volumétrico elástico tangente drenado K'_t y del módulo de corte elástico tangente G_t . Se trata de módulos de rigidez elásticos, puesto que dependen de las tensiones y no de las deformaciones totales.

$$K'_t = \frac{vp'}{\kappa} \quad (2.315)$$

$$\kappa = \kappa_0(1 + \delta) \quad (2.316)$$

$$\delta = Cn(\ln(X) - \omega(X_s))^{n^*-1} \quad (2.317)$$

$$X = \begin{cases} \frac{p'}{p'_{rev}} & \text{si } p' \geq p'_{rev} \\ \frac{p'_{rev}}{p'} & \text{si } p' < p'_{rev} \end{cases} \quad (2.318)$$

$$X_s = ((\eta' - \eta'_{rev}):(\eta' - \eta'_{rev}))^{1/2} \quad (2.319)$$

$$G_t = \frac{3K'_t(1 - 2\nu'_{cte})}{2(1 + \nu'_{cte})} \quad (2.320)$$

Donde δ es una variable global que controla el proceso de degradación y recuperación de la rigidez, X y X_s son variables que miden la presión media y la tensión desviadora respecto al último punto de reversión, $v = 1 + e$, siendo e el índice de poros, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, κ_0 es la pendiente máxima de la curva de hinchamiento en el plano $v - \ln(p')$, κ es la pendiente de la curva de hinchamiento en el plano $v - \ln(p')$, $\eta' = \mathbf{s}'/p'$, $\eta'_{rev} = \mathbf{s}'_{rev}/p'_{rev}$ donde \mathbf{s}'_{rev} y p'_{rev} son los valores de las variables transformadas \mathbf{s}' y p' en el último punto de reversión, C , n^* y ω son parámetros del suelo y ν'_{cte} es el coeficiente de Poisson drenado, que se asume constante.

Como sucede en los modelos de plasticidad límite, el MIT-E3 considera que durante una descarga se experimentan únicamente deformaciones elásticas, mientras que en una recarga se suman a estas últimas las deformaciones plásticas generadas por la formulación de la plasticidad límite. Por ello, aparece una deformación no recuperable al final de un ciclo de carga (ΔP en la figura 2.88).

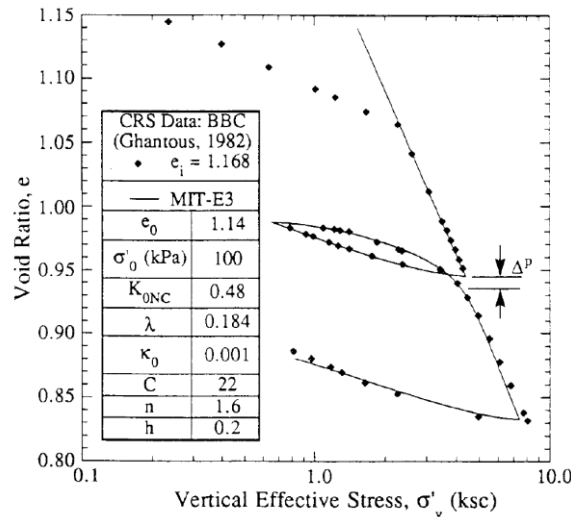


Figura 2.88. Ensayos y simulaciones con el modelo MIT-E3 en arcilla azul de Boston (Whittle et al., 1994).

El modelo *MIT-E3* almacena la información únicamente del último punto de reversión histórico. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados.

Para identificar los puntos de reversión, Ganendra (1994), basándose en los trabajos de Whittle (1993), utiliza el parámetro χ' (más robusto que el propuesto en la formulación original), denominado amplitud de deformación, que almacena la historia de deformaciones relativa al último punto de reversión. Cuando $\dot{\chi}' < 0$, el modelo considera que aparece un punto de reversión.

$$\chi' = \sqrt{9(\epsilon_v - \epsilon_{v,rev})^2 + (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{rev}):(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{rev})} \quad (2.321)$$

Donde $\epsilon_{v,rev}$ y \mathbf{E}_{rev} son los valores de ϵ_v y \mathbf{E} en el último punto de reversión.

En cuanto al comportamiento elastoplástico, el modelo *MIT-E3* considera un elipsoide en el espacio de tensiones como superficie de plasticidad límite. Dicho elipsoide, basado en la formulación del modelo *Cam Clay* modificado (Roscoe y Burland, 1968), se encuentra inclinado respecto al eje p' con objeto de modelizar la anisotropía del suelo. La orientación de dicho eje depende de los valores de $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b} + \mathbf{I}$ (figura 2.89), donde $\mathbf{I} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ en la notación de Voigt. El elipsoide que conforma la superficie de plasticidad límite evoluciona en tamaño y orientación en función de la trayectoria tensional seguida.

La expresión matemática de la superficie de plasticidad límite $f = 0$ es la siguiente:

$$f = (\mathbf{s}' - p'\mathbf{b}):(\mathbf{s}' - p'\mathbf{b}) - c^2 p'(2\alpha' - p') = 0 \quad (2.322)$$

Donde c es un parámetro que controla el tamaño de f en la dirección perpendicular al eje principal y α' es un parámetro que controla el tamaño de $f = 0$ en la dirección del eje principal.

El modelo propone las siguientes expresiones para las variables transformadas Q y \mathbf{Q} , relacionadas con la dirección del gradiente de la superficie de fluencia $f = 0$, sobre la superficie de plasticidad límite

$$Q = 2c^2(p' - \alpha') - 2(s' - p'b):\mathbf{b} \quad (2.323)$$

$$\mathbf{Q} = 2(s' - p'b) \quad (2.324)$$

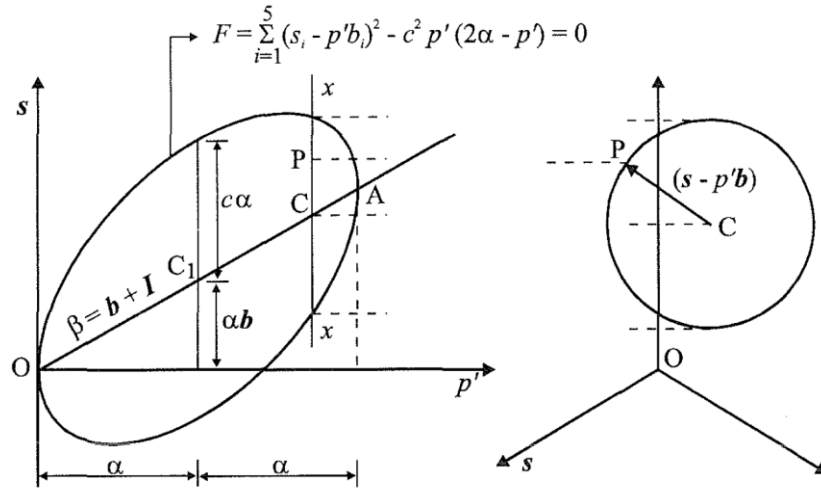


Figura 2.89. Geometría de la superficie de plasticidad límite del modelo MIT-E3 ($F \equiv f$, $\alpha \equiv \alpha'$, $s_i \equiv s'_i$) (Potts y Zdravkovic, 1999).

Por otro lado, el modelo considera una superficie de estado crítico h en forma de cono con el vértice en el origen del espacio de tensiones (figura 2.90).

$$h = \mathbf{s}':\mathbf{s}' - 2s'_1 p' \xi_1 + p'^2 (\xi_1^2 - k^2) = 0 \quad (2.325)$$

Donde ξ_1 es la componente $i = 1$ ($\xi_i = 0$ para $i \neq 1$) de ξ , y $\xi + \mathbf{I}$ es la dirección del eje del cono que conforma la superficie de estado crítico, que, en general, no coincide con la dirección del eje de la superficie de plasticidad límite $\beta = \mathbf{b} + \mathbf{I}$.

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(C_c - C_e) \quad (2.326)$$

$$k = \frac{1}{2}(C_c + C_e) \quad (2.327)$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{6 \sin(\varphi'_{TC})}{3 - \sin(\varphi'_{TC})} \right)} \quad (2.328)$$

$$C_e = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{6 \sin(\varphi'_{TE})}{3 + \sin(\varphi'_{TE})} \right)} \quad (2.329)$$

Donde φ'_{TC} es el ángulo de fricción efectivo correspondiente al estado crítico en compresión triaxial y φ'_{TE} es el ángulo de fricción efectivo correspondiente al estado crítico en extensión triaxial.

En un punto situado dentro de la superficie de plasticidad límite y dentro de la superficie de estado crítico se tendrá un comportamiento de tipo elástico en descarga y elastoplástico en carga. Para distinguir un caso de otro, se utiliza el siguiente criterio:

$$K'_t Q \dot{\epsilon}_v + 2G_t \mathbf{Q} : \dot{\mathbf{E}} \begin{cases} \geq 0 & \rightarrow \text{carga} \\ < 0 & \rightarrow \text{descarga} \end{cases} \quad (2.330)$$

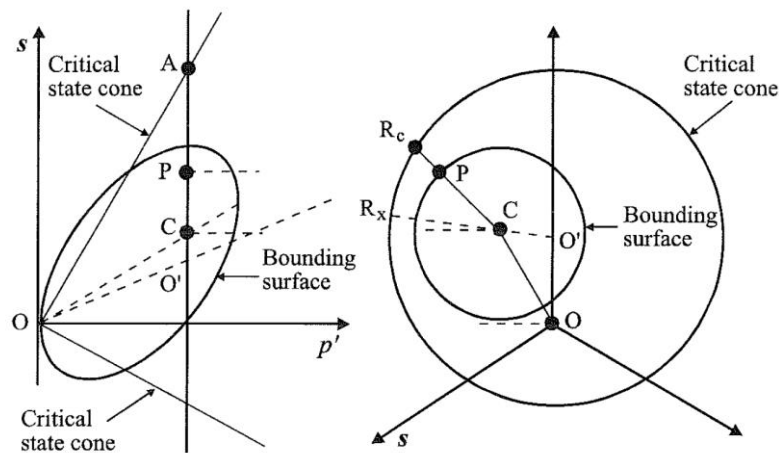


Figura 2.90. Geometría de la superficie de plasticidad límite y del cono de estado crítico del modelo MIT-E3 ($R_c \equiv r_c, R_x \equiv r_x$) (Potts y Zdravkovic, 1999).

La regla de flujo plástica del modelo MIT-E3 es no asociada. Dicha regla considera que, cuando se alcanza la superficie de estado crítico, el suelo sufre deformaciones plásticas desviadoras, pero no deformaciones plásticas volumétricas, endurecimiento o reblandecimiento. Por otro lado, si el suelo inicialmente ha sido cargado según la pendiente determinada por la recta de consolidación noval en condiciones edométricas (K_0^{NC}), posteriores cargas bajo las mismas condiciones no alteraran la pendiente determinada por K_0^{NC} .

Sobre la superficie de plasticidad límite, el modelo propone las siguientes expresiones para las variables transformadas P y \mathbf{P} , relacionadas con el gradiente del potencial plástico $g = 0$, cuya expresión no se explicita.

$$P = 2c^2 \alpha' r_c \quad (2.331)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} \left(\frac{1 + 2K_0^{NC}}{3(1 - K_0^{NC})} - \frac{K'_t \kappa}{2G_t \lambda} \right) c^2 (\mathbf{Q} + |r_c| \mathbf{s}') \quad (2.332)$$

Donde λ es la pendiente de la recta de consolidación noval en el plano $v - \ln(p')$, κ es la pendiente de la recta de hinchamiento en el plano $v - \ln(p')$, K_0^{NC} es el coeficiente de empuje al reposo durante la

carga noval, K'_t es el módulo volumétrico elástico tangente drenado, G_t es el módulo de corte elástico tangente y r_c es una medida de la proximidad entre el estado tensional actual y la superficie del cono de estado crítico (figura 2.90).

$$r_c = 1 + \frac{c^2(2\alpha' - p')}{(\mathbf{b} - \boldsymbol{\xi}) : \mathbf{Q}/2 - \sqrt{((\mathbf{b} - \boldsymbol{\xi}) : \mathbf{Q}/2)^2 + c^2(2\alpha' - p')p'(k^2 - (\mathbf{b} - \boldsymbol{\xi}) : (\mathbf{b} - \boldsymbol{\xi}))}} \quad (2.333)$$

Los incrementos $\dot{\epsilon}_v^p$ y $\dot{\mathbf{E}}^p$ se expresan de la siguiente manera en función de las variables transformadas P y \mathbf{P} .

$$\dot{\epsilon}_v^p = \Lambda P \quad (2.334)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^p = \Lambda \mathbf{P} \quad (2.335)$$

Donde Λ es el multiplicador plástico que se expresa como sigue:

$$\Lambda = \frac{K'_t Q \dot{\epsilon}_v + 2G_t \mathbf{Q} : \dot{\mathbf{E}}}{A + K'_t Q P + 2G_t \mathbf{Q} : \mathbf{P}} \quad (2.336)$$

En la expresión anterior, A es el módulo de endurecimiento plástico:

$$A = 2c^2 \frac{\kappa}{\lambda - \kappa} K'_t \left(\alpha P - S_l 2c^2 \alpha' \langle r_c \rangle \frac{\lambda}{\lambda - \kappa} \left(\frac{1 + 2K_0^{NC}}{3(1 - K_0^{NC})} - \frac{K'_t \kappa}{2G_t \lambda} \right) \mathbf{Q} : \mathbf{b} \right) \quad (2.337)$$

Donde S_l es un parámetro del modelo del que depende el reblandecimiento plástico y $\langle \cdot \rangle$ son los paréntesis de Macauley, con $\langle X \rangle = X$ si $X \geq 0$ y $\langle X \rangle = 0$ si $X < 0$.

Respecto a las leyes de endurecimiento sobre la superficie de plasticidad límite, el modelo considera una para el tamaño de la superficie de plasticidad límite ($\dot{\alpha}$) y otra para su orientación ($\dot{\mathbf{b}}$).

$$\dot{\alpha}' = \alpha' \zeta \dot{\epsilon}_v^p \quad (2.338)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \Psi_0 \langle r_x \rangle \frac{1}{\alpha'} (\dot{\mathbf{b}} - p' \mathbf{b}) \dot{\epsilon}_v^p \quad (2.339)$$

$$r_x = \frac{k - \sqrt{(\mathbf{b} - \boldsymbol{\xi}) : (\mathbf{b} - \boldsymbol{\xi})}}{k} \quad (2.340)$$

Donde $\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de deformación volumétrica plástica, α' y k son variables que se han descrito previamente, Ψ_0 es un parámetro del modelo que controla la velocidad de rotación de la superficie de plasticidad límite, r_x es una medida de la orientación relativa entre el eje de la superficie de plasticidad límite y el eje del cono de estado crítico (figura 2.90) y ζ es una variable que afecta a la velocidad con la que la superficie de plasticidad límite cambia de tamaño, y se expresa como sigue:

$$\zeta = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2c^2 p' P} A - \Psi_0 \langle r_x \rangle \frac{p'}{\alpha'} (2\alpha' - p') \right) \quad (2.341)$$

En un punto R situado dentro de la superficie de plasticidad límite se tendrá un comportamiento de tipo elástico en descarga y elastoplástico en carga. Para distinguir un caso de otro se utiliza el siguiente criterio:

$$K'_t Q^I \dot{\epsilon}_v + 2G'_t Q^I : \dot{\mathbf{E}} \begin{cases} \geq 0 & \rightarrow \text{carga} \\ < 0 & \rightarrow \text{descarga} \end{cases} \quad (2.342)$$

Donde Q^I y Q^I son las variables transformadas correspondientes al punto imagen I del punto R proyectado sobre la superficie de plasticidad límite, según las reglas de mapeo.

El modelo MIT-E3 distingue las siguientes superficies (figura 2.91):

- Primera superficie de fluencia:
Superficie homotética a la superficie de plasticidad límite que pasa por el punto donde aparecen las primeras deformaciones plásticas en una determinada trayectoria tensional, cuyo tamaño queda determinado por la variable α'_{oi} . Dicha superficie no cambia mientras la trayectoria tensional continúe generando deformaciones plásticas (carga).
- Superficie de carga:
Superficie homotética a la superficie de plasticidad límite que pasa por el punto que representa el estado tensional actual, cuyo tamaño queda determinado por la variable α'_o .
- Superficie de plasticidad límite:
Superficie de plasticidad límite definida por $f = 0$, cuyo tamaño queda determinado por la variable α' .

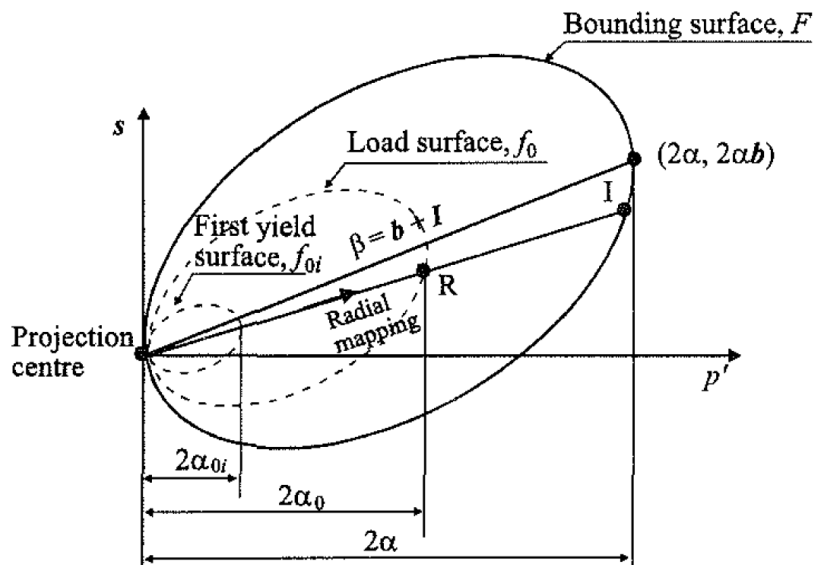


Figura 2.91. Primera superficie de fluencia, superficie de carga y superficie de plasticidad límite del modelo MIT-E3 ($F \equiv f, \alpha \equiv \alpha', \alpha_{oi} \equiv \alpha'_{oi}, \alpha_0 \equiv \alpha'_0$) (Potts y Zdravkovic, 1999).

Dentro de la superficie de plasticidad límite, en un estado de descarga según la expresión (2.342), el tamaño de la superficie de plasticidad límite varía según la siguiente expresión:

$$\dot{\alpha}' = \frac{v\alpha'}{\lambda} \dot{\epsilon}_v \quad (2.343)$$

Por otro lado, dentro de la superficie de plasticidad límite, en un estado de carga según la expresión (2.342), el módulo de endurecimiento plástico A y las variables transformadas P y \mathbf{P} relacionadas con el potencial plástico se expresan de la siguiente manera (reglas de mapeo):

$$P = P^I + g_1 P^0 \quad (2.344)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^I \quad (2.345)$$

$$A = A^I + g_2 A^0 \quad (2.346)$$

Donde el superíndice $(\cdot)^I$ indica que la variable se evalúa en el punto imagen I sobre la superficie de plasticidad límite, P^0 y A^0 son variables que dependen del estado tensional actual y del estado tensional del punto imagen, y g_1 y g_2 son las funciones de mapeo que describen la posición relativa de la primera superficie de fluencia, la superficie de carga y la superficie de plasticidad límite.

$$P^0 = -2c^2 \alpha' r_c - \boldsymbol{\eta}^I : \mathbf{Q}^I \quad (2.347)$$

$$A^0 = \frac{v}{\kappa_0} (\alpha' - \alpha'_0) \hat{h} \sqrt{\mathbf{Q}^I : \mathbf{Q}^I} \sqrt{\mathbf{P}^I : \mathbf{P}^I} \quad (2.348)$$

$$g_1 = \left(\frac{\alpha' - \alpha'_0}{\alpha'} \right)^{\tilde{\gamma}} \quad (2.349)$$

$$g_2 = \frac{\alpha' - \alpha'_0}{\alpha'_0 - \alpha'_{0i}} \quad (2.350)$$

Donde \hat{h} y $\tilde{\gamma}$ son parámetros del suelo.

Durante los procesos de carga dentro de la superficie de fluencia aparecen deformaciones plásticas a la vez que dicha superficie de fluencia cambia de tamaño y orientación. En este caso, todas las variables del modelo que controlan este proceso deben ser evaluadas en el punto imagen I (también el módulo volumétrico elástico K' , manteniéndose δ constante).

Whittle (1993) demostró la capacidad del modelo *MIT-E3* para reproducir el comportamiento de diferentes suelos arcillosos bajo condiciones de carga diversas. No obstante, se trata de un modelo que requiere 15 parámetros, siendo varios de ellos difíciles de obtener experimentalmente y con los que los ingenieros geotécnicos suelen estar poco familiarizados. Por ello, el *MIT-E3* suele limitarse a un uso académico, siendo poco utilizado en el ámbito profesional.

2.6.3.2.4.2. Modelo CASM-c de Yu (1995)

Los modelos unificados para arcillas y arenas *Clay and Sand Model CASM* desarrollados por Yu (1995, 1998) están basados en los modelos de estado crítico para arcillas (Roscoe y Schofield, 1963; Roscoe y Burland, 1968) y en los modelos para arenas que incluyen el concepto de parámetro de estado (Wroth y Basset, 1965; Been y Jefferies, 1985).

En particular, el modelo *CASM-c*, basado en los modelos *CASM-a* y *CASM-b*, recurre, por un lado, a los conceptos de plasticidad límite (Dafalias, 1975; Krieg, 1975; Dafalias y Popov, 1975; Dafalias y Herrmann 1982) y, por otro lado, a diferenciar las rigideces en carga y descarga con el fin de poder simular el comportamiento no lineal e histerético del suelo. El modelo *CASM-c* considera las mismas ecuaciones que el modelo *Cam Clay* modificado para describir el comportamiento elástico del suelo.

$$K'_t = \frac{vp'}{\kappa} \tag{2.351}$$

$$G_t = \frac{3K'_t(1 - 2v'_{cte})}{2(1 + v'_{cte})} \tag{2.352}$$

Donde K'_t y G_t son, respectivamente, el módulo volumétrico elástico tangente drenado y el módulo de corte elástico tangente, $v = 1 + e$, siendo e el índice de poros, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, κ es la pendiente de la recta de hinchamiento en el plano $v - \ln(p')$ y v'_{cte} es el coeficiente de Poisson drenado, que se asume constante.

La superficie de plasticidad límite $f_j = 0$ del modelo *CASM-c* (figura 2.92a) se expresa como sigue:

$$f_j = \left(\frac{q_j}{Mp'_j} \right)^n + \frac{\ln(p'_j/p'_c)}{\ln(\bar{r})} = 0 \tag{2.353}$$

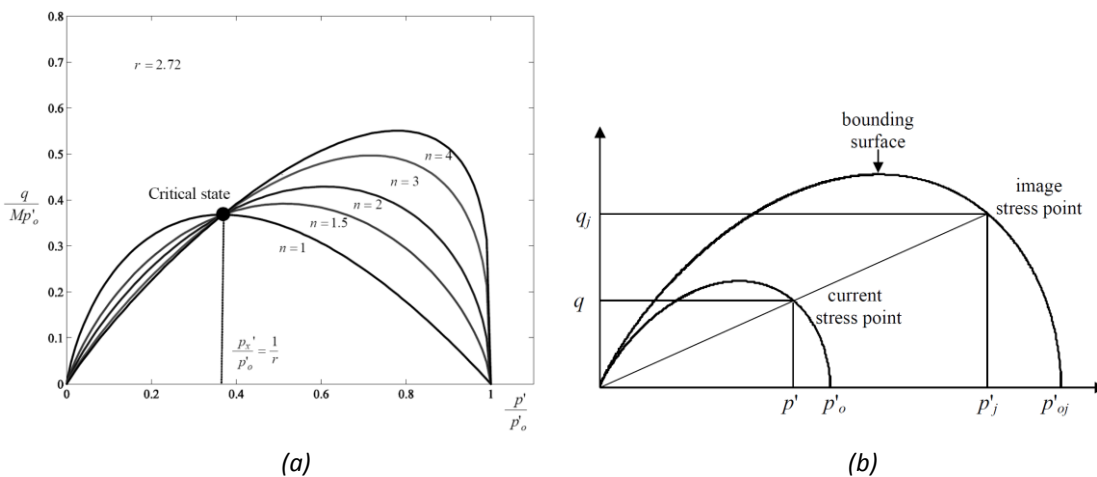


Figura 2.92. (a) Superficies de fluencia del modelo *CASM-a* ($p'_{oj} = p'_c$) con $r=2.75$ ($r \equiv \bar{r}$) y diversos valores de n . (b) Esquema de la superficie de plasticidad límite y de la superficie de carga del modelo *CASM-c*. Wang (2005).

Asimismo, y de modo similar al modelo *MIT-E3* descrito en el apartado anterior, en el modelo *CASM-c* se puede considerar la superficie de carga que pasa por el punto que representa el estado tensional actual en el plano $q - p'$ (figura 2.92b). Dicha superficie es homotética a la superficie de plasticidad límite y se puede expresar como sigue, si bien esta expresión no interviene explícitamente en la formulación del modelo.

$$f_{oj} = \left(\frac{q}{Mp'} \right)^n + \frac{\ln(p'/p'_c)}{\ln(\bar{r})} = 0 \quad (2.354)$$

En las expresiones anteriores, p'_j y q_j son, respectivamente, la presión media y la tensión desviadora en el punto imagen sobre la superficie de plasticidad límite (figura 2.92b), M es la pendiente de la recta de estado crítico, p'_c es el tamaño de la superficie de plasticidad límite en el eje p' , p'_o es el tamaño de la superficie de carga en el eje p' (presión de preconsolidación), n es un parámetro del suelo, \bar{r} es otro parámetro del suelo que depende del parámetro de estado $\xi_R = (\lambda - \kappa)\ln(\bar{r})$, donde λ y κ son, respectivamente, las pendientes de la recta de compresión noval y de hinchamiento en el plano $v - \ln(p')$.

El potencial plástico del modelo *CASM-c* se expresa de la siguiente manera:

$$g = 3M \ln\left(\frac{p'}{\beta}\right) + (3 + 2M) \ln\left(\frac{2q + 3p'}{p'}\right) - (3 - M) \ln\left(\frac{3p' - q}{p'}\right) = 0 \quad (2.355)$$

Donde β es un parámetro del modelo.

La ley de endurecimiento plástico se expresa como sigue:

$$\dot{p}'_c = \frac{vp'_c}{(\lambda - \kappa)} \dot{\epsilon}_v^p \quad (2.356)$$

Donde $\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de deformación volumétrica plástica.

El módulo de endurecimiento plástico H^{CN} del modelo *CASM-c*, durante la carga noval, se calcula de la siguiente forma:

$$H^{CN} = H_j + \frac{h(1 - \gamma^*)^{m^*}}{p' \gamma^*} \quad (2.357)$$

$$H_j = \frac{3v}{(\lambda - \kappa)\ln(\bar{r})} \left(\frac{3 + 2M}{3p'_j + 2q_j} - \frac{3 - M}{3p'_j + q_j} \right) \quad (2.358)$$

Donde H_j es el módulo de endurecimiento correspondiente al punto imagen del actual estado tensional, $\gamma^* = p'/p'_j$, p'_j y q_j son la presión media y la tensión desviadora en el punto imagen y h y m^* son dos parámetros del suelo.

El módulo de endurecimiento plástico durante una descarga H^{DE} se calcula de la siguiente forma:

$$H^{DE} = H_U \frac{1}{(1 - \gamma^*)} \tag{2.359}$$

Donde H_U es un parámetro del suelo.

Finalmente, el módulo de endurecimiento durante una recarga H^{RE} se calcula de la siguiente forma:

$$H^{RE} = H_j + H_R \frac{(1 - \gamma^*)}{\gamma^*} (1 + \epsilon_q^p)^{k^*} \tag{2.360}$$

Donde ϵ_q^p es la deformación de corte plástica del suelo y H_R y k^* son parámetros del suelo.

Cada uno de los módulos H^{CN} , H^{DE} y H^{RE} se corresponde con una zona tensorial diferente.

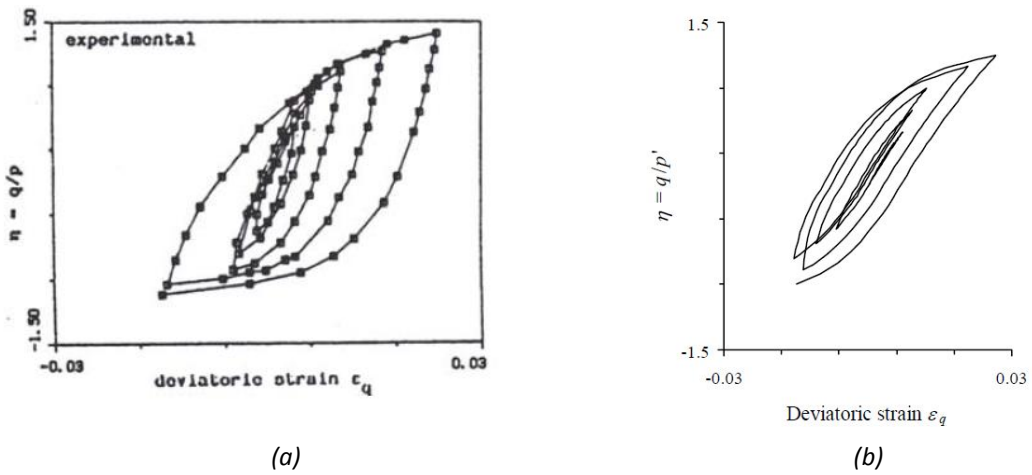


Figura 2.93. (a) Valores $\eta - \epsilon_q$ de los ensayos drenados en arena del río Fuji (Tatsuoka y Ishihara, 1974). (b) Simulación con modelo CASM-c (Khong, 2004).

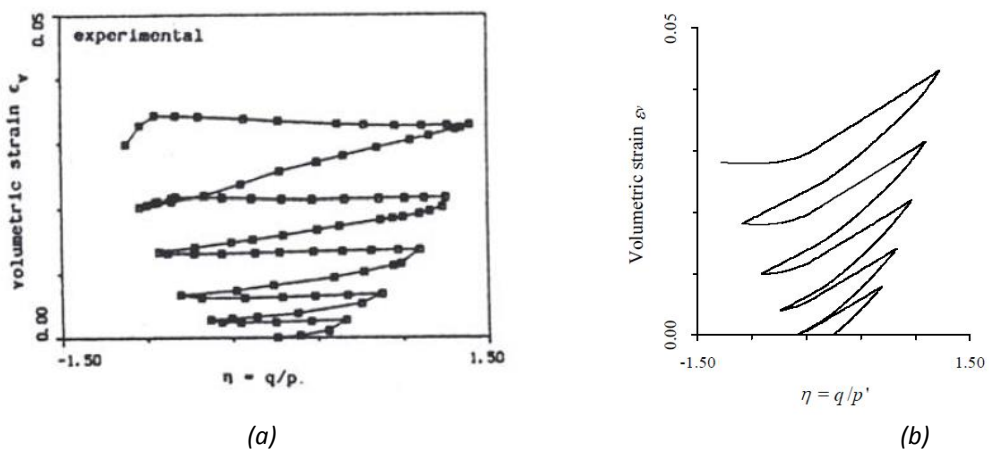


Figura 2.94. (a) Valores $\epsilon_v - \eta$ de los ensayos drenados en arena del río Fuji (Tatsuoka y Ishihara, 1974). (b) Simulación con CASM-c (Khong, 2004).

El modelo *CASM-c* almacena la información únicamente del último punto de reversión histórico. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados

Introduciendo tres parámetros más (H_R , H_U y k^*) al modelo *CASM-b*, el modelo *CASM-c*, con un total de 12 parámetros, es capaz de reproducir de forma bastante aproximada los resultados de ensayos triaxiales cíclicos (figura 2.93 y 2.94). No obstante, se trata de un modelo con cuyos parámetros los ingenieros geotécnicos suelen estar poco familiarizados, siendo su uso poco extendido en la práctica geotécnica.

2.6.3.2.4.3. Modelo *NAHOS* de Gryczmanski et al. (1998)

El modelo *NAHOS* de Gryczmanski et al. (1998), posteriormente desarrollado en los trabajos de Gryczmanski et al. (1999), Jastrzebska (2000, 2002) y Sternik (2003), permite reproducir el comportamiento no lineal e histerético de suelos cohesivos. Conceptualmente se basa en los modelos de estado crítico y en los modelos de plasticidad límite.

A partir de observaciones experimentales, Gryczmanski et al. (1998) concluyeron que las deformaciones plásticas en suelos cohesivos empiezan a aparecer a niveles de carga muy bajos. Por ello el comportamiento puramente elástico del suelo, en el modelo *NAHOS*, se reduce a un solo punto en el espacio de tensiones (y no a una región, como en los modelos elastoplásticos clásicos), lo cual coincide con las observaciones de Hueckel y Nova (1979). Dicho punto se denomina centro elástico σ'_s . El centro elástico en el modelo *NAHOS* sería equivalente a la primera superficie de fluencia del modelo *MIT-E3*, descrito previamente en el apartado 2.6.3.2.4.1.

Durante un proceso de carga sin reversiones, el centro elástico se mantiene fijo y la rigidez del suelo va degradando según la formulación de plasticidad límite. En el momento en que tiene un lugar una reversión, el centro elástico se desplaza al punto de reversión y se mantiene fijo hasta una nueva reversión.

En cuanto al comportamiento elástico, el modelo *NAHOS* utiliza la formulación isótropa basada en los modelos de estado crítico tipo *Cam Clay*.

El módulo volumétrico elástico tangente drenado K'_t se expresa como sigue:

$$K'_t = \frac{vp'}{\kappa} \quad (2.361)$$

Donde $v = 1 + e$, siendo e el índice de poros, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media y κ es la pendiente de la curva de hinchamiento en el plano $v - \ln(p')$.

Asimismo, se asume un coeficiente de Poisson drenado constante (v'_{cte}), de manera que es posible expresar el valor del módulo de corte elástico tangente G_t como sigue:

$$G_t = \frac{3K'_t(1 - 2\nu'_{cte})}{2(1 + \nu'_{cte})} \quad (2.362)$$

El modelo *NAHOS* considera reversiones en aquellos puntos donde aparecen giros de la trayectoria tensional de más de 90° y se identifican mediante el siguiente criterio (figura 2.95):

$$\Delta\sigma'^{(n)}: (\sigma'^{(n-1)} - \sigma'_S'^{(n-1)}) < 0 \quad (2.363)$$

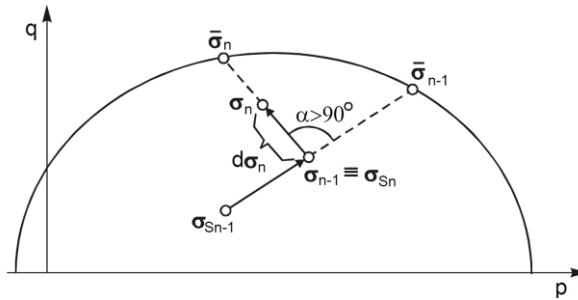


Figura 2.95. Criterio de reversión y desplazamiento del centro elástico (Jastrzebska y Sternik, 2004).

Donde $\Delta\sigma'^{(n)}$ es el incremento del tensor de tensiones en el paso de cálculo $(n - 1) \rightarrow (n)$, $\sigma'^{(n-1)}$ es el tensor de tensiones al final del paso de cálculo $(n - 2) \rightarrow (n - 1)$ y $\sigma'_S'^{(n-1)}$ es la situación del centro elástico al final del paso de cálculo $(n - 2) \rightarrow (n - 1)$.

Por tanto, el modelo *NAHOS* almacena información únicamente del último punto de reversión histórico. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados.

Tras una reversión, se aplica, a la posición del centro elástico, la homotecia $\sigma'_S = \hat{\sigma}'_S(p'_c/\hat{p}'_c)$, donde $\hat{\sigma}'_S$ y \hat{p}'_c son los valores de σ'_S y p'_c en el momento de la reversión, con el objetivo de que σ'_S permanezca, en todo momento, en el interior de la superficie de plasticidad límite, en caso de que esta sufra una contracción por reblandecimiento isótropo.

El modelo *NAHOS* considera la siguiente superficie de plasticidad límite propuesta por Dafalias y Herrmann (1980), figura 2.96a.

$$f = M^2(p'_j - p'_c) \left(p'_j + \frac{\bar{R} - 2}{\bar{R}} p'_c \right) + (\bar{R} - 1)^2 q_j^2 = 0 \quad (2.364)$$

Donde M es la pendiente de la recta de estados críticos, p'_j y q_j son, respectivamente, la presión media y la tensión desviadora en el punto imagen del estado tensional actual sobre la superficie de plasticidad límite, p'_c es el tamaño del eje mayor de la superficie de plasticidad límite (presión de consolidación) y \bar{R} es un parámetro del suelo que controla la forma de la superficie de plasticidad límite.

De modo similar al modelo *CASM-c*, expuesto en el apartado anterior, el modelo *NAHOS* no utiliza en su formulación la superficie de carga (figura 2.96b), siendo necesario, únicamente, el punto que representa

el estado tensional actual. No obstante, es posible representar dicha superficie considerando el parámetro homotético β , que se expresa como sigue (reglas de mapeo):

$$\bar{\sigma}' = \beta(\sigma' - \sigma'_s) + \sigma'_s \quad (2.365)$$

$$\beta = \frac{\hat{r}'_0}{\hat{r}'_0 - \hat{r}'} = \frac{\sqrt{(\bar{\sigma}' - \sigma'):(\bar{\sigma}' - \sigma')}}{\sqrt{(\sigma' - \sigma'_s):(\sigma' - \sigma'_s)}} \quad (2.366)$$

Donde σ' es el tensor de tensiones efectivas del estado tensional actual, $\bar{\sigma}'$ es el tensor de tensiones efectivas del punto imagen sobre la superficie de plasticidad límite, σ'_s es el tensor de tensiones efectivas del centro elástico, $\hat{r}'_0 = \sqrt{(\bar{\sigma}' - \sigma'_s):(\bar{\sigma}' - \sigma'_s)}$ y $\hat{r}' = \sqrt{(\sigma' - \sigma'_s):(\sigma' - \sigma'_s)}$.

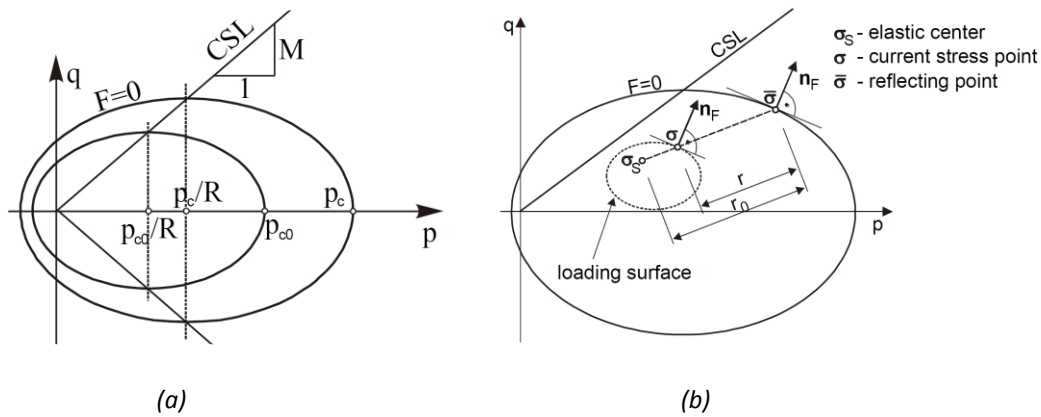


Figura 2.96. (a) Superficie de plasticidad límite del modelo NAHOS ($F \equiv f$, $R \equiv \bar{R}$).

(b) Reglas de mapeo del modelo NAHOS. Jastrzebska y Sternik (2004).

El módulo de endurecimiento plástico K_p , dentro de la superficie de plasticidad límite (reglas de mapeo), se expresa como sigue:

$$K_p = \bar{K}_p + \frac{v}{\lambda - \kappa} C^* \left(\frac{\hat{r}'}{\hat{r}'_0 - \hat{r}'} \right)^{\mu^*} \hat{f}' \quad (2.367)$$

$$\bar{K}_p = \frac{1}{\left(\frac{4}{3} M^4 \left(p'_j - \frac{1}{\bar{R}} p'_c \right)^2 + 6(\bar{R} - 1)^4 q_j^2 \right)} \frac{v}{\lambda - \kappa} \frac{4}{\bar{R}} M^4 p'_c \left(p'_j + (\bar{R} - 2) p'_c \right) \left(p'_j - \frac{1}{\bar{R}} p'_c \right) \quad (2.368)$$

$$\hat{f}' = \frac{1}{2} \left(a^* + \text{sign}(n_p) |n_p|^{\frac{1}{w}} \right) \quad (2.369)$$

Donde \bar{K}_p es el módulo de endurecimiento en el punto imagen sobre la superficie de plasticidad límite, λ es la pendiente de la recta de consolidación noval en el plano $v - \ln(p')$, \hat{f}' es un factor introducido por Kaliakin y Dafalias (1989) que reduce la tensión desviadora en estados muy sobreconsolidados, n_p

es un factor que varía desde $n_p = 1$ para $q/p' = 0$ en el lado húmedo, $n_p = 0$ para $q/p' = M$ y $n_p = 0$ para $q/p' = 0$ en el lado seco, y C^* , μ^* , α^* y w son parámetros del suelo.

En la figura 2.97 se muestran resultados de ensayos triaxiales no drenados en un caolín ligeramente sobreconsolidado (figura 2.97a) y ensayos triaxiales drenados en un caolín ligeramente sobreconsolidado (figura 2.97b) junto con sus respectivas simulaciones con el modelo *NAHOS*, según Jastrzebska y Sternik (2004).

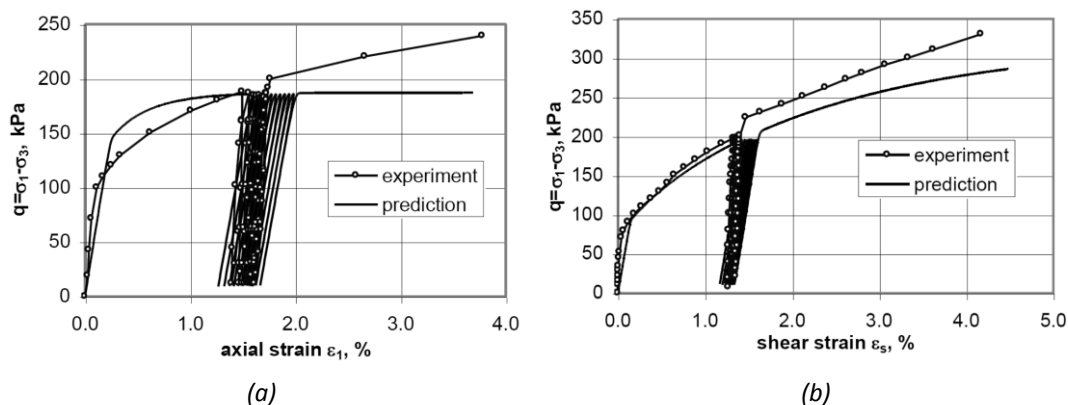


Figura 2.97. (a) Ensayo triaxial no drenado sobre una arcilla caolinita ligeramente sobreconsolidada y simulación con el modelo *NAHOS*. (b) Ensayo triaxial drenado sobre una arcilla caolinita ligeramente sobreconsolidada y simulación con el modelo *NAHOS*. Jastrzebska y Sternik (2004).

El modelo *NAHOS* proporciona una buena aproximación cualitativa a los resultados experimentales de ensayos con carga monótona y cíclica. No obstante, muestra cierto desvío en la previsión de la dilatancia en ensayos triaxiales drenados. Por otro lado, Gryczmanski et al. (1998) comentan la necesidad de introducir una ley elástica no lineal para mejorar las predicciones en el comportamiento cíclico del suelo.

Se trata de un modelo con cuyos parámetros los ingenieros geotécnicos suelen estar poco familiarizados, siendo su uso poco extendido en la práctica geotécnica.

2.6.3.2.4.4. Modelo *MIT-S1* de Pestana y Whittle (1999)

Basado en los trabajos de Whittle (1987), Whittle (1993), Whittle y Kavvas (1994) y Pestana (1994), Pestana y Whittle (1999) desarrollaron el modelo *MIT-S1* como una generalización para arcillas y arenas del modelo *MIT-E3*.

Algunas de las principales diferencias del modelo *MIT-S1* respecto al modelo *MIT-E3* son las siguientes:

- El modelo *MIT-S1* utiliza como superficie de plasticidad límite una extensión de la superficie utilizada en el modelo *MIT-E3*.
- La regla de endurecimiento que controla la situación del eje de la superficie de fluencia del modelo *MIT-S1* introduce la dependencia con las deformaciones de corte plásticas.

- El modelo *MIT-S1* introduce el índice de poros como una nueva variable independiente con objeto de reproducir el comportamiento contractivo/dilatante característico de las arenas a diferentes presiones de confinamiento.
- El modelo *MIT-S1* considera el criterio de rotura de Matsuoka y Nakai (1974) para la superficie de estado crítico.

El modelo *MIT-S1* se fundamenta en la formulación clásica de los modelos elastoplásticos en cuanto a la descomposición de deformaciones, reglas de flujo y leyes de endurecimiento. Respecto al comportamiento elástico no lineal e histerético del suelo, el modelo *MIT-S1* utiliza una formulación isótropa conceptualmente basada en el modelo de Hueckel y Nova (1979).

El *MIT-S1* considera las siguientes expresiones de los módulos de rigidez volumétrico drenado y de corte elásticos máximos, K'_0 y G_0 , tras una reversión:

$$\frac{K'_0}{p_a} = C_b \left(\frac{1+e}{e} \right) \left(\frac{p'}{p_a} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{K'_0}{2G_0} \bar{\boldsymbol{\eta}} : \bar{\boldsymbol{\eta}} \right)^{1/6} \quad (2.370)$$

$$\frac{2G_0}{K'_0} = 3 \left(\frac{1-2\nu'_0}{1+\nu'_0} \right) \quad (2.371)$$

Donde p_a es la presión atmosférica, e es el índice de poros, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $\bar{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{s}/p'$, $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct}\mathbf{1}$ es el tensor desviador de tensiones, ν'_0 es el coeficiente de Poisson drenado tras una reversión y C_b es un parámetro del suelo relacionado con la compresibilidad del mismo tras una reversión.

El modelo considera las siguientes expresiones del módulo volumétrico drenado y de corte elásticos tangentes K'_t y G_t :

$$\frac{K'_t}{p_a} = \frac{(1+e)p'}{e\rho_r p_a} \quad (2.372)$$

$$\rho_r = D(1 - \xi'^{\bar{r}}) + \frac{(1 + \omega_s \xi'_s)}{C_b \left(1 + \frac{K'_0}{2G_0} \bar{\boldsymbol{\eta}} : \bar{\boldsymbol{\eta}} \right)^{1/6}} \left(\frac{p'}{p_a} \right)^{2/3} \quad (2.373)$$

$$\frac{2G_t/K'_t}{2G_0/K'_0} = \begin{cases} \frac{1}{(1 + \omega \xi'_s)} & \text{si } p' < p'_{rev} \\ \frac{1}{(1 + \omega \xi'_s \xi'_t)} & \text{si } p' \geq p'_{rev} \end{cases} \quad (2.374)$$

$$\xi' = \begin{cases} \frac{p'}{p'_{rev}} & \text{si } p' \geq p'_{rev} \\ \frac{p'_{rev}}{p'} & \text{si } p' < p'_{rev} \end{cases} \quad (2.375)$$

$$\xi'_s = ((\bar{\eta} - \bar{\eta}_{rev}) : (\bar{\eta} - \bar{\eta}_{rev}))^{1/2} \quad (2.376)$$

Donde p'_{rev} y $\bar{\eta}_{rev}$ son los valores de p' y $\bar{\eta}$ en el último punto de reversión, ξ' y ξ'_s son variables que miden la presión media y la tensión desviadora respecto al último punto de reversión, ρ_r es la pendiente de la curva de recarga en el plano $\ln(e) - \ln(p')$, D y \tilde{r} son parámetros del suelo que controlan la no linealidad durante una descarga (figura 2.98a), ω_s es un parámetro del suelo que controla la no linealidad durante la aplicación de tensiones de corte (figura 2.98b) y ω es un parámetro del suelo que controla la no linealidad del coeficiente de Poisson.

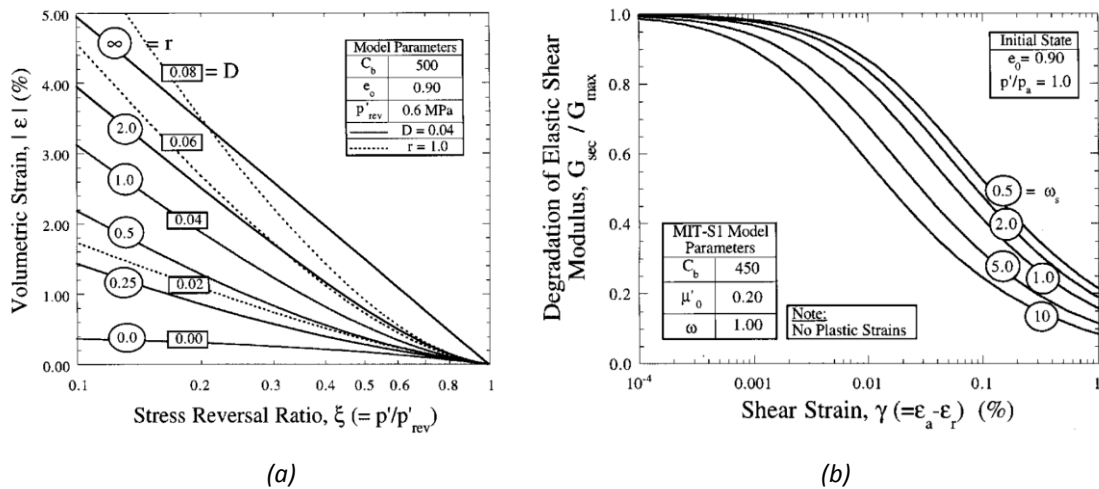


Figura 2.98. (a) Efecto de los parámetros D y \tilde{r} ($r \equiv \tilde{r}$) sobre las deformaciones volumétricas. (b) Efecto del parámetro ω_s sobre el módulo de corte elástico. Pestana y Whittle (1999).

Al igual que el modelo MIT-E3, el modelo MIT-S1 almacena información únicamente del último punto de reversión histórico. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados

Asimismo, al igual que el modelo MIT-E3, el modelo MIT-S1 considera que durante una descarga aparecen únicamente deformaciones elásticas, mientras que en una recarga se suman, a estas últimas, las deformaciones plásticas generadas por la formulación de la plasticidad límite.

El modelo MIT-S1 aplica el criterio original de Whittle (1987) para identificar puntos de reversión, que en el MIT-E3 Ganendra (1994) propuso sustituir por un criterio más robusto. El criterio de Whittle (1987) es el siguiente:

$$\chi'' \dot{\chi}'' = \begin{cases} \epsilon_v^{\Delta R} \dot{\epsilon}_v & \text{para } \dot{\epsilon}_v \neq 0 \\ e^{\Delta R} : \dot{e} & \text{para } \dot{\epsilon}_v = 0 \end{cases} = \begin{cases} \geq 0 & \rightarrow \text{carga} \\ < 0 & \rightarrow \text{descarga} \end{cases} \quad (2.377)$$

Donde χ'' es el parámetro de amplitud, $\dot{\chi}''$ es el incremento del parámetro de amplitud, $\epsilon_v = 3\epsilon_{oct} = \epsilon_{ii}$ es la deformación volumétrica total, $e = \epsilon - \epsilon_{oct} \mathbf{1}$ es el tensor desviador de deformaciones totales,

ϵ es el tensor de deformaciones, $\epsilon_v^{\Delta R} = \epsilon_v - \epsilon_{v,rev}$ es el incremento de deformación volumétrica total respecto al último punto de reversión, siendo $\epsilon_{v,rev}$ el valor de ϵ_v en el último punto de reversión, y $e^{\Delta R} = e - e_{rev}$ es el incremento de deformación desviadora respecto al último punto de reversión, siendo e_{rev} el valor de e en el último punto de reversión.

El modelo *MIT-S1* considera una lemniscata distorsionada como superficie de plasticidad límite en el espacio de tensiones. Dicha lemniscata se encuentra inclinada respecto al eje p' , con el objetivo de modelizar la anisotropía del suelo. La inclinación de dicho eje depende de los valores de \mathbf{b} . Esta lemniscata evoluciona en tamaño y situación en función de la trayectoria tensional seguida.

La expresión matemática de la superficie de plasticidad límite $f = 0$ es la siguiente (figura 2.99):

$$f = (p')^2 \left((\bar{\eta} - \mathbf{b}) : (\bar{\eta} - \mathbf{b}) - \zeta^2 \left(1 - \left(\frac{p'}{\alpha'} \right)^{\bar{m}} \right) \right) = 0 \quad (2.378)$$

$$\zeta^2 = c^2 + \mathbf{b} : \mathbf{b} - 2\bar{\eta} : \mathbf{b} \quad (2.379)$$

Donde c es una variable que controla la apertura de $f = 0$ en la dirección perpendicular al eje principal, \bar{m} es un parámetro que controla la forma de $f = 0$, α' es un parámetro que controla el tamaño de $f = 0$ en la dirección del eje principal y \mathbf{b} es un tensor que controla la orientación de $f = 0$.

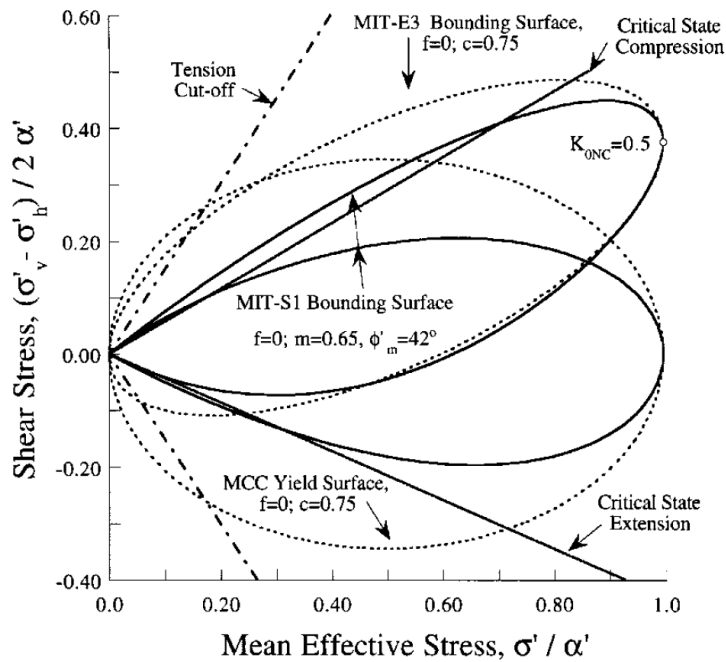


Figura 2.99. Superficie de fluencia del modelo Cam Clay modificado de Roscoe y Burland (1968), del modelo MIT-E3 de Whittle (1993) y del modelo MIT-S1 (Pestana y Whittle, 1999).

El valor de c se puede relacionar con el ángulo de fricción efectivo del suelo movilizado ϕ'_m (que limita el valor de $\bar{\eta}$) empleando el criterio de Matsuoka y Nakai (1974).

$$c^2 = c_a^2 + \left(3 - \frac{c_a^2}{2}\right) J_{3\eta} \quad (2.380)$$

$$c_a^2 = \frac{8\sin^2(\varphi'_m)}{3 + \sin^2(\varphi'_m)} \quad (2.381)$$

$$J_{3\eta} = \det(\mathbf{s})/p^3 \quad (2.382)$$

Sobre la superficie de plasticidad límite, el modelo propone las siguientes expresiones de la componente volumétrica $Q_p = \partial f / \partial p'$ y desviadora $\mathbf{Q}_s = \partial f / \partial \mathbf{s}$ del gradiente de la superficie de plasticidad límite.

$$Q_p = p' \left((\tilde{m}\zeta^2 + 2\bar{\boldsymbol{\eta}} : \mathbf{b}) \left(\frac{p'}{\alpha'}\right)^{\tilde{m}} - 2\bar{\boldsymbol{\eta}} : \bar{\boldsymbol{\eta}} + \left(9 - \frac{3c_a^2}{2}\right) \left(1 - \left(\frac{p'}{\alpha'}\right)^{\tilde{m}}\right) J_{3\eta} \right) \quad (2.383)$$

$$\mathbf{Q}_s = p' \left(2 \left(\bar{\boldsymbol{\eta}} - \left(\frac{p'}{\alpha'}\right)^{\tilde{m}} \mathbf{b} \right) - \left(3 - \frac{c_a^2}{2}\right) \left(1 - \left(\frac{p'}{\alpha'}\right)^{\tilde{m}}\right) \frac{\partial J_{3\eta}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) \quad (2.384)$$

El criterio de carga o descarga en un punto tensional situado sobre la superficie de fluencia es el siguiente:

$$K'_t Q_p \dot{\epsilon}_v + 2G_t \mathbf{Q}_s : \mathbf{e} \begin{cases} \geq 0 & \rightarrow \text{carga} \\ < 0 & \rightarrow \text{descarga} \end{cases} \quad (2.385)$$

Asimismo, el modelo considera la superficie de estado crítico basada en el criterio de Matsuoka y Nakai (1974).

$$h_f = k^2 - \bar{\boldsymbol{\eta}} : \bar{\boldsymbol{\eta}} \quad (2.386)$$

$$k^2 = k_a^2 + \left(3 - \frac{k_a^2}{2}\right) J_{3\eta} \quad (2.387)$$

$$k_a^2 = \frac{8\sin^2(\varphi'_{cs})}{3 + \sin^2(\varphi'_{cs})} \quad (2.388)$$

Donde φ'_{cs} es el ángulo de fricción efectivo correspondiente al estado crítico, que según el criterio de Matsuoka y Nakai es igual en compresión y extensión.

Al igual que en el modelo *MIT-E3*, la regla de flujo plástica del modelo *MIT-S1* es no asociada. Dicha regla considera que cuando se alcanza la superficie de estado crítico, el suelo sufre deformaciones plásticas desviadoras, pero no deformaciones plásticas volumétricas. Por otro lado, si el suelo inicialmente ha sido cargado según la pendiente determinada por la recta de consolidación noval en condiciones edométricas (K_0^{NC}), posteriores cargas bajo las mismas condiciones no alteran dicha pendiente.

Sobre la superficie de plasticidad límite, el modelo propone las siguientes expresiones de la componente volumétrica P_p y desviadora \mathbf{P}_s del flujo plástico:

$$P_p = \begin{cases} (k^2 - \bar{\eta} : \bar{\eta}) \left(\frac{p'}{\alpha'} \right) (1 - \delta_p)^{\tilde{m}} & \text{si } \bar{\eta} : \bar{\eta} \leq k^2 \\ (k^2 - \bar{\eta} : \bar{\eta}) \left(\frac{p'}{\alpha'} \right) & \text{si } \bar{\eta} : \bar{\eta} > k^2 \end{cases} \quad (2.389)$$

$$\mathbf{P}_s = x P_p \bar{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\zeta^2 \sqrt{(\bar{\boldsymbol{\eta}} : \bar{\boldsymbol{\eta}})}}{\alpha'} \mathbf{Q}_s \quad (2.390)$$

$$x = \left(\frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_r} \right) \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1 - 2K_0^{NC}}{1 - K_0^{NC}} \right) - \frac{2G_t}{K_t'} \left(\frac{\rho_r}{\rho_c} \right) \right) \quad (2.391)$$

Donde ρ_c es la pendiente de la curva de consolidación noval en el plano $\ln(p') - \ln(e)$ y δ_p representa la distancia relativa entre la superficie de plasticidad y la curva de compresión hidrostática.

Los incrementos de deformación volumétrica plástica $\dot{\epsilon}_v^p$ y los incrementos de deformación desviadora plástica $\dot{\epsilon}^p$ se expresan de la siguiente manera, en función de las variables P_p y \mathbf{P}_s .

$$\dot{\epsilon}_v^p = \Lambda P_p \quad (2.392)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \Lambda \mathbf{P}_s \quad (2.393)$$

Donde Λ es el multiplicador plástico, que se expresa de la siguiente manera:

$$\Lambda = \frac{\left(K_t' Q_p + \frac{\partial f}{\partial e} (1 + e) \right) \dot{\epsilon}_v^p + 2G_t \mathbf{Q}_s : \dot{\epsilon}}{A + K_t' Q_p P_p + 2G_t \mathbf{Q}_s : \mathbf{P}_s} \quad (2.394)$$

Siendo A el módulo de endurecimiento plástico.

Respecto a las leyes de endurecimiento de la superficie de plasticidad límite, el modelo considera una para el tamaño de la superficie de plasticidad límite ($\dot{\alpha}$) y otra para su orientación ($\dot{\mathbf{b}}$).

$$\dot{\alpha} = \alpha \left(\left(\frac{(1 + e)}{e(\rho_c - \rho_r)(1 - \delta_p^\theta)} \right) \left(\dot{\epsilon}_v^p + \delta_p^\theta \left(\frac{\mathbf{Q}_s : \dot{\epsilon}^p}{p'} \right) \right) - \frac{2\mathbf{b} : \dot{\mathbf{b}}}{(a^2 + \mathbf{b} : \mathbf{b})} \right) \quad (2.395)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \psi \frac{(1 + e)}{e\alpha'} \left(\frac{r_x}{\tilde{m}} \langle Q_p \dot{\epsilon}_v^p \rangle + r_y \sqrt{(\mathbf{Q}_s : \dot{\epsilon}^p)(\mathbf{Q}_s : \dot{\epsilon}^p)} \right) (\bar{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{b}) \quad (2.396)$$

Donde δ_b representa la distancia relativa entre la presión media actual y la curva de compresión hidrostática, ψ es un parámetro del suelo que controla la anisotropía inducida, $\langle \cdot \rangle$ son los paréntesis de Macauley, con $\langle X \rangle = X$ si $X \geq 0$ y $\langle X \rangle = 0$ si $X < 0$, r_x y r_y son variables que imponen límites en las direcciones principales de la anisotropía y θ es un parámetro del suelo.

$$\delta_p = 1 - \frac{\alpha'}{p_b'} \left(1 + \frac{\mathbf{b} : \mathbf{b}}{a^2} \right) \quad (2.397)$$

$$p'_b = p'_{ref} \left(\frac{1}{e}\right)^{1/\rho_c} \quad (2.398)$$

$$a^2 = \frac{24 \sin^2(\varphi'_{cs})}{(3 - \sin(\varphi'_{cs}))^2} \quad (2.399)$$

$$r_x = \frac{k^2 + \mathbf{b} : \mathbf{b} - 2\bar{\eta} : \mathbf{b}}{k_a^2} \quad (2.400)$$

$$r_y = (d^2 + \mathbf{b} : \mathbf{b} - 2\bar{\eta} : \mathbf{b}) \left(1 + \left(\frac{\alpha'}{p'} - 1\right) \delta_b^\theta\right) \quad (2.401)$$

$$d^2 = d_a^2 + \left(3 - \frac{d_a^2}{2}\right) J_{3\eta} \quad (2.402)$$

$$d_a^2 = \frac{2(1 - K_0^{NC})^2}{1 + K_0^{NC} + (K_0^{NC})^2} \quad (2.403)$$

$$\delta_b = 1 - \left(\frac{p'}{p'_b}\right) \quad (2.404)$$

Donde p'_{ref} es el valor de p' sobre la recta de compresión noval en el plano $\ln(e) - \ln(p')$ para el valor de e actual.

En un punto R situado dentro de la superficie de plasticidad límite se tendrá un comportamiento de tipo elástico en descarga y elastoplástico en carga. Para distinguir un caso de otro, se utiliza el siguiente criterio:

$$K'_t Q'_p \dot{\epsilon}_v + 2G_t \mathbf{Q}'_s : \dot{\mathbf{e}} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \geq 0 & \rightarrow \text{carga} \\ < 0 & \rightarrow \text{descarga} \end{array} \right. \quad (2.405)$$

Donde Q'_p y Q'_s son los valores de Q_p y Q_s correspondientes al punto imagen I del punto R proyectado sobre la superficie de plasticidad límite, según las reglas de mapeo.

El modelo *MIT-S1* distingue las siguientes superficies (figura 2.100):

- Primera superficie de fluencia:
Superficie homotética a la superficie de plasticidad límite que pasa por el punto donde aparecen las primeras deformaciones plásticas en una determinada trayectoria tensional, cuyo tamaño queda determinado por la variable α'_{oi} . Dicha superficie no cambia mientras la trayectoria tensional continúe generando deformaciones plásticas (carga).
- Superficie de carga:
Superficie homotética a la superficie de plasticidad límite que pasa por el punto que representa el estado tensional actual, cuyo tamaño queda determinado por la variable α'_o .
- Superficie de plasticidad límite:
Superficie de plasticidad límite definida por $f = 0$, cuyo tamaño queda determinado por la variable α' .

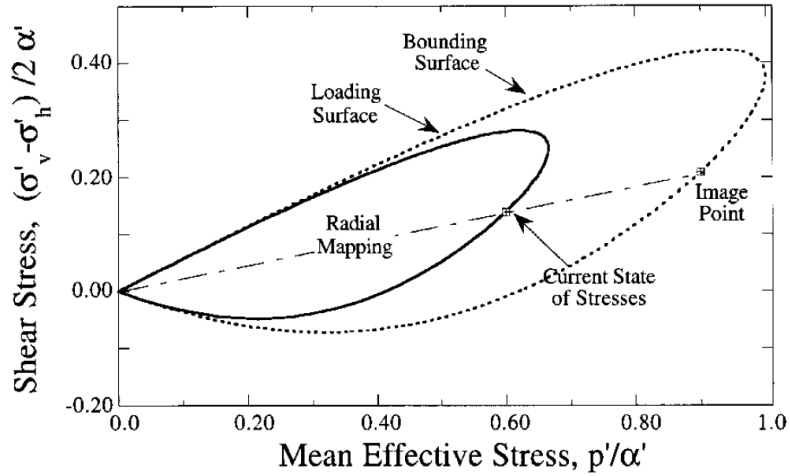


Figura 2.100. Superficie de carga y superficie de plasticidad límite en el modelo MIT-S1 (Pestana y Whittle, 1999).

Dentro de la superficie de plasticidad límite, en un estado de carga según la expresión (2.405), el módulo de endurecimiento plástico A y los potenciales plásticos P_p y P_s , se expresan de la siguiente manera (reglas de mapeo):

$$P_p = P_p^I (1 - g_1) + P_p^0 g_1 \quad (2.406)$$

$$P_s = P_s^I \quad (2.407)$$

$$A = \langle A^I \rangle + A^0 \frac{g_1}{1 - g_1} \left(1 - \frac{\bar{\eta} \cdot \bar{\eta}}{c^2} \right)^{1/2} \quad (2.408)$$

Donde el superíndice $(\cdot)^I$ indica que la variable se evalúa en el punto imagen I sobre la superficie de plasticidad límite, P_p^0 y A^0 son los valores de P_p y A en la primera superficie de fluencia y g_1 es una función de mapeo que describe la posición relativa de la primera superficie de fluencia, la superficie de carga y la superficie de plasticidad límite.

$$P_p^0 = -2\sqrt{(\bar{\eta} - \mathbf{b}) \cdot (\bar{\eta} - \mathbf{b})} \sqrt{\left(\frac{\mathbf{s}}{\alpha'}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{s}}{\alpha'}\right)} \quad (2.409)$$

$$A^0 = \left(\frac{\rho_c}{\rho_c - \rho_r} \right) \frac{\tilde{h}}{(1 - \delta_p^\theta)} K_0^I \sqrt{Q_s^I \cdot Q_s^I} \sqrt{P_s^I \cdot P_s^I} \quad (2.410)$$

$$g_1 = \frac{\alpha' - \alpha'_0}{\alpha'_0 - \alpha'_{0i}} \quad (2.411)$$

En las expresiones anteriores \tilde{h} es un parámetro del modelo que controla el grado de deformaciones plásticas durante una recarga dentro de la superficie de plasticidad límite (figura 2.101) y K_0^I es el valor del módulo volumétrico elástico máximo en el punto imagen.

Durante las trayectorias de carga dentro de la superficie de fluencia aparecen deformaciones plásticas a la vez que dicha superficie de fluencia cambia de tamaño y orientación. En este caso, todas las variables del modelo deben ser evaluadas en el punto imagen I .

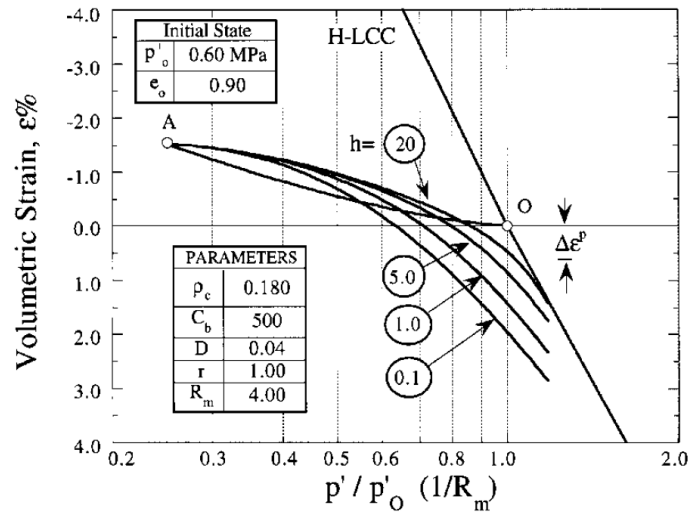


Figura 2.101. Efecto del parámetro h sobre ϵ_v^p durante la recarga dentro de un ciclo de carga/descarga/recarga (Pestana y Whittle, 1999).

El modelo MIT-S1 proporciona una formulación unificada para simular el comportamiento de arcillas y arenas. El modelo tiene en cuenta el comportamiento histerético no lineal y anisótropo del suelo, el comportamiento en estado crítico y el comportamiento contractivo/dilatante propio de las arenas.

En la figura 2.102 se muestran los desplazamientos del terreno obtenidos durante la excavación de 20m de profundidad del pozo adyacente a la estación Hauptbahnhof en Berlín (Nikolinakou et al., 2011). La excavación se hizo bajo el nivel freático, utilizando pantallas perimetrales ancladas. Para las simulaciones numéricas, se realizó una investigación exhaustiva de las diferentes capas del terreno.

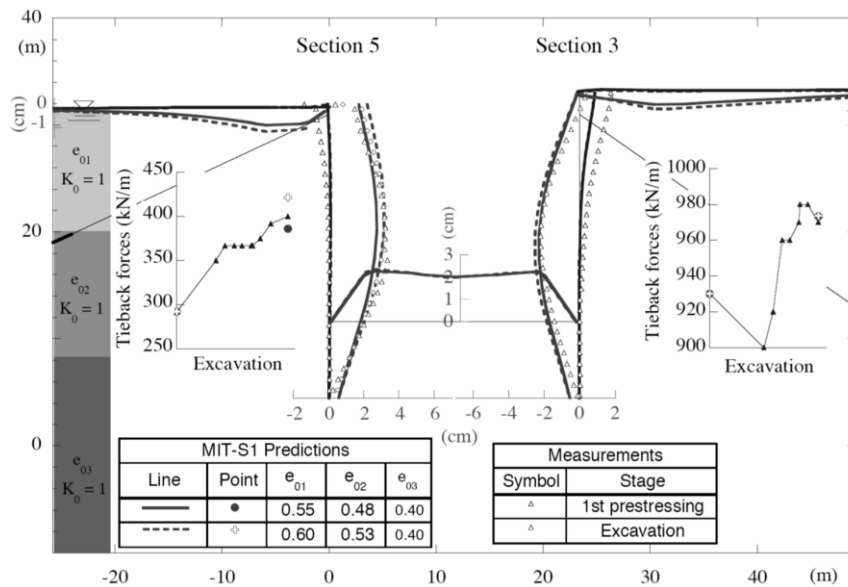


Figura 2.102. Medidas de desplazamiento y simulación con el MIT-S1 de la excavación realizada dentro del proyecto de construcción de un corredor multimodal subterráneo en el centro de Berlín (VZB Project - Verkehrsanlagen im Zentralen Bereich) (Nikolinakou et al., 2011).

A pesar del buen ajuste de resultados, el *MIT-S1* se trata de un modelo que requiere 16 parámetros, siendo varios de ellos difíciles de obtener experimentalmente y con los que los ingenieros geotécnicos suelen estar poco familiarizados. Por ello, el uso del *MIT-S1* suele limitarse al uso académico, siendo poco utilizado en el mundo profesional.

2.6.3.2.4.5. Modelo de Papadimitriou et al. (2001)

El modelo de Papadimitriou et al. (2001), basado en el modelo de Manzari y Dafalias (1997) y en la tesis de Papadimitriou (1999), permite simular el comportamiento de arenas. Para la formulación de este modelo se recurre al concepto de plasticidad con endurecimiento cinemático para el rango de deformaciones intermedias y grandes, al concepto de no linealidad con histerésis para el rango de pequeñas deformaciones basada en el modelo de Ramberg y Osgood (1943) y Hueckel y Nova (1979) y a los conceptos de parámetro de estado (Been y Jefferies, 1985) y efecto de la fábrica del suelo, especialmente durante fases en las que se aplican tensiones desviadoras.

A continuación, se exponen las ecuaciones del modelo para un estado triaxial de tensiones, aunque en el trabajo de Papadimitriou y Bouckovalas (2002) se desarrolla una formulación generalizada del mismo.

La superficie de fluencia $f = 0$ se expresa de la siguiente manera:

$$f = \eta - \check{\alpha} - \check{s}\check{m} = 0 \quad (2.412)$$

Donde $\eta = q/p'$, $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $\check{\alpha}$ es una variable que controla la situación del eje de la superficie de fluencia, \check{m} es un parámetro del suelo que controla la apertura de la misma (figura 2.103) y $\check{s} = +1$ si $\eta - \check{\alpha} \geq 0$ y $\check{s} = -1$ si $\eta - \check{\alpha} < 0$.

Asimismo, el modelo emplea tres tipos de superficies adicionales, que son: las de estados críticos, las de plasticidad límite y las de dilatancia. Los tres tipos de superficies tienen forma de cuña y se caracterizan por sus pendientes en el plano $q - p'$ para un estado de compresión triaxial (M_c^b para la superficie de plasticidad límite, M_c^c para la superficie de estados críticos y M_c^d para la superficie de dilatancia; a nivel de notación se emplea la generalización $M_c^{b,c,d}$) y para un estado de extensión triaxial (M_e^b para la superficie de plasticidad límite, M_e^c para la superficie de estados críticos y M_e^d para la superficie de dilatancia; a nivel de notación se emplea la generalización $M_e^{b,c,d}$).

Según Manzari y Dafalias (1997), M_c^c y M_e^c (es decir, $M_{c,e}^c$) son parámetros del modelo, pero M_c^b , M_c^d , M_e^b y M_e^d (es decir, $M_{c,e}^{b,d}$) se pueden calcular a partir de M_c^c y M_e^c y del parámetro de estado ψ (Been y Jefferies, 1985).

$$M_{c,e}^b = M_{c,e}^c + k_{c,e}^d \langle -\psi \rangle \quad (2.413)$$

$$M_{c,e}^d = M_c^c + k_{c,e}^d \psi \quad (2.414)$$

$$\psi = e - (e_{cs})_a + \lambda \ln \left(\frac{p'}{p_a} \right) \quad (2.415)$$

Donde k_c^d y k_e^d son parámetros del suelo, $\langle \cdot \rangle$ son los paréntesis de Macaulay, con $\langle X \rangle = X$ si $X \geq 0$ y $\langle X \rangle = 0$ si $X < 0$, e es el índice de poros, $(e_{CS})_a$ es el índice de poros para $p' = p_a$, p_a es la presión atmosférica y λ es la pendiente de la recta de consolidación noval en el plano $v - \ln(p')$.

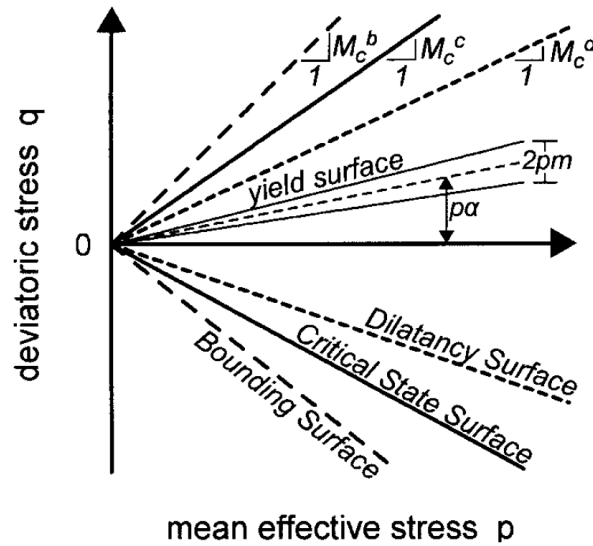


Figura 2.103. Superficies del modelo (Papadimitriou et al., 2001).

Según Papadimitriou et al. (2001), las expresiones (2.413) y (2.414) se consideran suficientes para los propósitos del modelo, a pesar de que existen otras relaciones que serían más adecuadas (Li et al., 1999; Li y Dafalias, 2000).

El comportamiento elástico del modelo viene determinado por las siguientes expresiones:

$$\dot{\epsilon}_q^e = \frac{\dot{q}}{3G_t} \tag{2.416}$$

$$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{\dot{p}'}{K_t'} \tag{2.417}$$

Donde $\dot{\epsilon}_q^e$ es el incremento de deformación de corte elástica, $\dot{\epsilon}_v^e$ es el incremento de deformación volumétrica elástica, G_t es el módulo de corte elástico tangente y K_t' es el módulo volumétrico elástico tangente drenado.

El modelo considera las siguientes expresiones de G_t y K_t' :

$$G_t = \frac{G_0}{1 + 2 \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \left(\frac{Q_t^R}{\xi \eta_1} \right)} \tag{2.418}$$

$$G_0 = \frac{B p_a}{0.3 + 0.7 e^2} \left(\frac{p'}{p_a} \right)^{0.5} \tag{2.419}$$

$$Q_r^{SR} = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{s}^R):(\mathbf{s} - \mathbf{s}^R)} \quad (2.420)$$

$$K_t' = \frac{2G_t(1 + \nu'_{cte})}{3(1 - 2\nu'_{cte})} \quad (2.421)$$

Donde $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma'_{oct}\mathbf{1}$ es el tensor desviador de tensiones, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, \mathbf{s}^R es el valor de \mathbf{s} del último punto de reversión, G_0 es el módulo de corte elástico máximo para el que se adopta la expresión de Hardin (1978), ξ es un parámetro del modelo que vale $\xi = 1$ para la carga noval y $\xi = 2$ para descargas y recargas, η_1 es un parámetro del suelo tal que $Q_r^R/\xi\eta_1 < 1$, a_1 y B son parámetros del suelo, e es el índice de poros, p_a es la presión atmosférica y ν'_{cte} es el coeficiente de Poisson drenado, que se asume constante.

Para el caso de un estado triaxial de tensiones, se tiene $Q_r^R = |\eta - \eta_R|$, donde $\eta = q/p'$ y η_R es el valor de η en el último punto de reversión

El modelo considera como puntos de reversión, en el caso de un estado triaxial de tensiones, aquellos que cumplen $\Delta\epsilon_q^{(n+1)}\Delta\epsilon_q^{(n)} < 0$ siendo $\Delta\epsilon_q^{(n+1)}$ el incremento de deformación desviadora total en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ y $\Delta\epsilon_q^{(n)}$ el incremento de deformación desviadora en el paso de cálculo $(n-1) \rightarrow (n)$. En el caso multiaxial, el criterio pasa a ser $\dot{Q}_e^R < 0$.

$$Q_e^R = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{e} - \mathbf{e}^R):(\mathbf{e} - \mathbf{e}^R)} \quad (2.422)$$

Donde $\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct}\mathbf{1}$ es el tensor desviador de deformaciones totales, $\epsilon_{oct} = 1/3\epsilon_{ii}$ es la deformación volumétrica octaédrica total y \mathbf{e}^R es el valor de \mathbf{e} en el último punto de reversión.

El modelo de Papadimitriou et al. (2001) almacena información únicamente del último punto de reversión histórico. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados

Asimismo, el modelo considera un valor mínimo de G_t , que se expresa como sigue (figura 2.104):

$$G_{t,min} = \frac{G_0}{1 + 2\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)} \quad (2.423)$$

Asumiendo un valor constante de $G_0(p' = p'_0) = G_0^{ref}$, es posible integrar analíticamente en la figura 2.104 obteniendo el siguiente valor del módulo de corte secante G_s :

$$G_s = \frac{G_0^{ref}}{1 + 2\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{\eta_c}{\xi\eta_1}\right)} \quad (2.424)$$

Donde $\eta_c = (G_s/p_0)\gamma$ y $\eta_1 = (G_0^{ref}/p_0)\gamma_1$, siendo γ_1 la deformación de corte umbral a partir de la cual se considera $G_{t,min}(p' = p_0) = G_{t,min}^{ref}$.

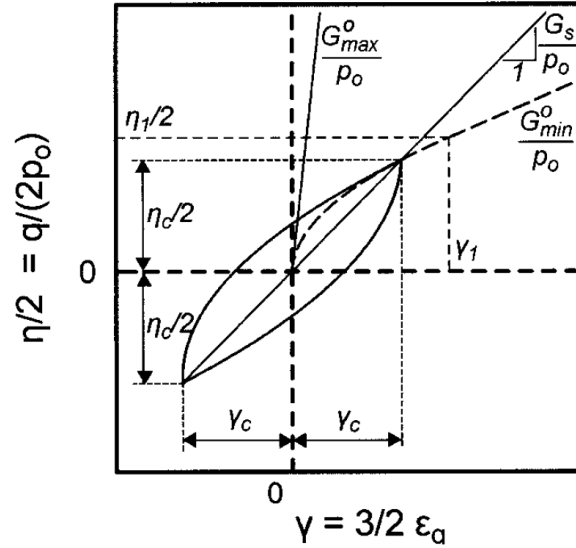


Figura 2.104. Estimación analítica de la relación elástica entre tensión y deformación desviadora ($G_{max}^o \equiv G_0^{ref}$, $G_{min}^o \equiv G_{t,min}^{ref}$, $p_0 \equiv p_0'$) (Papadimitriou et al., 2001).

Por otro lado, la formulación plástica del modelo se plantea de la siguiente manera:

$$\dot{\epsilon}_q^p = \check{s} \sqrt{\frac{2}{3}} \langle L \rangle \quad (2.425)$$

$$\dot{\epsilon}_v^p = D |\dot{\epsilon}_q^p| \quad (2.426)$$

Donde $\dot{\epsilon}_q^p$ es el incremento de deformación de corte plástica, $\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de deformación volumétrica plástica, \check{s} es una variable definida previamente, D es el coeficiente de dilatación y L es el índice de carga, que se expresa como sigue:

$$L = \check{s} \left(\frac{p'}{K_p} \right) \dot{\eta} \quad (2.427)$$

Donde K_p es el módulo plástico.

Asimismo, la ley de endurecimiento se expresa de la siguiente manera:

$$\dot{\check{\alpha}} = \check{s} \left(\frac{K_p}{p'} \right) \langle L \rangle \quad (2.428)$$

Es necesario definir las reglas de mapeo que permiten calcular los valores de K_p y D dentro de la superficie de plasticidad límite. Dichas reglas son las siguientes:

$$M^{c,b,d} = \xi(M_c^{b,c,d}\langle\xi\rangle + M_e^{b,c,d}\langle-\xi\rangle) \quad (2.429)$$

La distancia entre el estado de tensión actual y el punto conjugado se calcula como sigue (figura 2.105):

$$d^{c,b,d} = \xi(M^{c,b,d} - \eta) \quad (2.430)$$

A partir de la variable $d^{c,b,d}$, se calcula K_p y D en un punto interior a la superficie de plasticidad límite:

$$D = A_0 d^d \quad (2.431)$$

$$K_p = p' h_b h_f d^b \quad (2.432)$$

$$h_b = h'_0 \frac{|d^b|}{\langle d_{ref}^b - |d^b| \rangle} \quad (2.433)$$

$$d_{ref}^b = M_c^b + M_e^b - 2\tilde{m} \quad (2.434)$$

$$h_f = \frac{1 + F \langle \int \dot{\epsilon}_v^p(\%) \rangle^2}{1 - F \int_{R-1}^R \langle -\dot{\epsilon}_v^p(\%) \rangle} \quad (2.435)$$

Donde d^d es la distancia entre el estado tensional actual y la superficie de plasticidad límite, d^b es la distancia entre la superficie de dilatación y la superficie de plasticidad límite, h_f tiene en cuenta el efecto macroscópico de la fábrica del suelo durante la aplicación de una tensión desviadora y A_0 y h'_0 son parámetros del suelo.

El valor de F en la expresión (2.435) puede considerarse constante (Papadimitriou et al., 1999), si bien se adopta la siguiente expresión:

$$F = F_0 \left(\frac{p'_0}{p_a} \right)^{-X'} \langle \psi_0 \rangle \quad (2.436)$$

Donde F_0 y X' son parámetros del suelo y $\psi_0 = e_0 - (e_{CS})_a + \lambda \ln(p'_0/p_a)$.

El modelo de Papadimitriou et al. (2001) se ha contrastado con 15 ensayos de columna resonante y 32 ensayos triaxiales cíclicos con diferentes condiciones de drenaje (figura 2.106). En base a estos análisis, se concluye que dicho modelo proporciona una buena aproximación del comportamiento del terreno tanto a pequeñas como a grandes deformaciones. No obstante, a pesar del buen ajuste de resultados, se trata de un modelo que requiere 14 parámetros, siendo varios de ellos difíciles de obtener experimentalmente y con los que los ingenieros profesionales suelen estar poco familiarizados. Por ello, el uso de este modelo suele limitarse al ámbito académico, siendo poco utilizado en la práctica profesional.

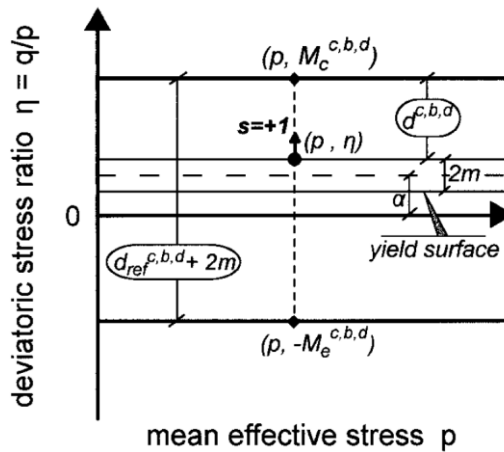


Figura 2.105. Superficies del modelo y reglas de mapeo en el plano $\eta - p'$ ($s \equiv \xi$, $m \equiv \tilde{m}$) (Papadimitriou et al., 2001).

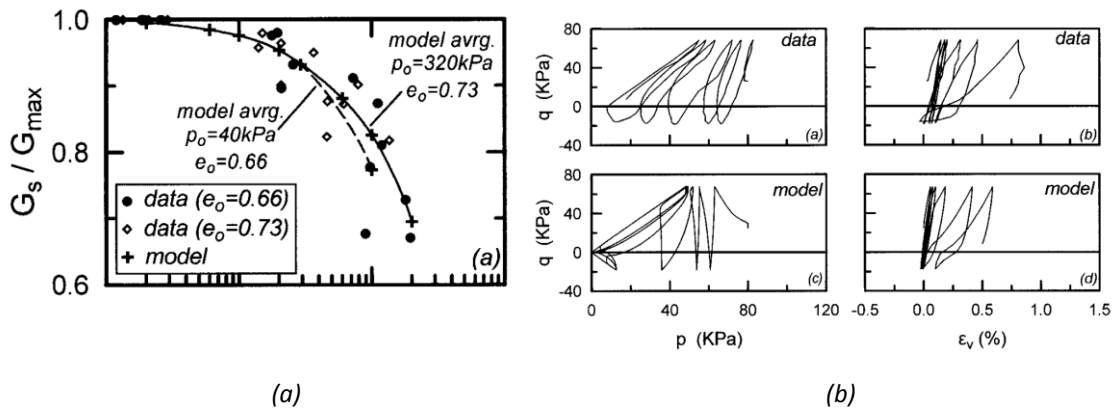


Figura 2.106. (a) Resultados de ensayos con columnas resonantes en arena de Nevada y simulaciones. (b) Ensayos cíclicos triaxiales sobre arena de Nevada (arriba) y simulaciones (abajo). Papadimitriou et al. (2001).

2.6.3.2.5. Modelos de burbujas

Los modelos de plasticidad límite descritos en el apartado 2.6.3.2.4 permiten reproducir el comportamiento de reblandecimiento o endurecimiento isotrópico plástico no lineal del suelo durante procesos de carga. Dichos modelos asumen que parte de las deformaciones correspondientes a estos procesos de carga son plásticas, incluso en el rango de las pequeñas deformaciones. Por otro lado, consideran que el comportamiento del suelo es elástico durante procesos de descarga, lo cual restringe el grado de acoplamiento entre el comportamiento volumétrico y desviador (Potts y Zdravkovic, 1999) y limita la capacidad del modelo para reproducir el comportamiento histerético del suelo a pequeñas deformaciones.

En base a las limitaciones anteriores se desarrollaron los modelos de burbujas (*bubble models*). Estos modelos se basan en los conceptos de plasticidad límite y en los conceptos de los modelos de superficies

imbricadas. Los modelos de burbujas incluyen una o varias superficies llamadas burbujas (figura 2.017), con endurecimiento cinemático, además de endurecimiento isotrópico, dentro de la superficie de plasticidad límite. El número, forma, tamaño y situación de las burbujas conforman las variables de estado χ^{hist} que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo (Gudehus, 2011) y el efecto de su historia reciente.

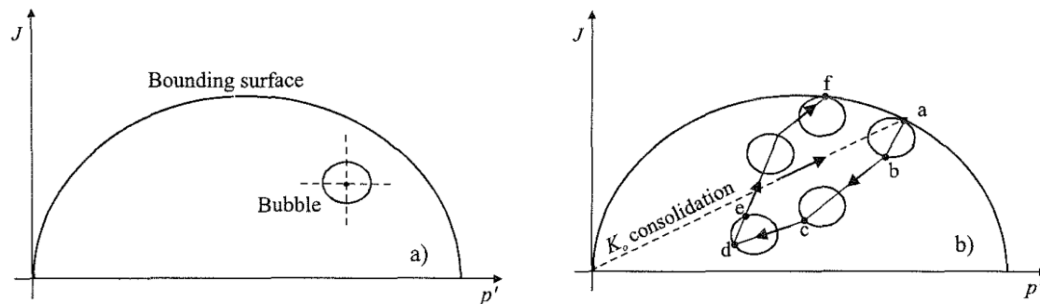


Figura 2.107. Esquema conceptual del movimiento de la burbuja en un modelo de burbujas (Potts y Zdravkovic, 1999).

Los modelos de burbujas deben incluir, aparte de las reglas de mapeo que controlan el módulo de endurecimiento plástico a medida que se desplazan las burbujas, unas reglas de traslación que controlan el desplazamiento de dichas burbujas (endurecimiento cinemático).

El número de zonas tensoriales $\#Z$ de estos modelos, al igual que en los modelos de superficies imbricadas, es de dos.

Existen numerosos modelos de burbujas, aunque entre ellos destaca el modelo de Al-Tabbaa y Wood (1989), que se basa, entre otros, en el modelo de Mróz et al. (1979) y Hashiguchi (1985) y que trabaja con una única burbuja dentro de la superficie de plasticidad límite. Posteriormente, Stallebrass y Taylor (1997) desarrollaron un modelo que trabaja con dos burbujas dentro de dicha superficie límite, siendo capaz de introducir en su formulación la dependencia de la rigidez con la historia reciente. Otros modelos de burbujas han introducido el efecto de la desestructuración del suelo (Wood, 1995; Baudet y Stallebrass, 2004) o la anisotropía del mismo (Rouainia y Wood, 2000).

2.6.3.2.5.1. Modelo de Al-Tabbaa y Wood (1989)

El modelo de Al-Tabbaa y Wood (1989) fue originalmente desarrollado por Al-Tabbaa (1987), y trata de reproducir el comportamiento no lineal en suelos ligeramente sobreconsolidados en el rango de las pequeñas deformaciones.

Este modelo considera una burbuja $f_1 = 0$ dentro de la superficie de plasticidad límite $f' = 0$. Ambas superficies se basan en la formulación del modelo *Cam Clay* modificado de Roscoe y Burland (1968).

El comportamiento en el interior de la burbuja $f_1 = 0$ es elástico. Dicho comportamiento elástico es el mismo que en el modelo *Cam Clay* modificado y se describe mediante los módulos volumétrico drenado y de corte elásticos tangentes, K'_t y G_t , que se expresan de la siguiente manera:

$$K'_t = \frac{p'}{\kappa^*} \tag{2.437}$$

$$G_t = \frac{3K'_t(1 - 2\nu'_{cte})}{2(1 + \nu'_{cte})} \tag{2.438}$$

Donde κ^* es la pendiente de la recta de hinchamiento en el plano $\ln(e) - \ln(p')$ (a diferencia del modelo *Cam Clay* modificado, donde se utiliza la pendiente de dicha recta en el plano $e - \ln(p')$, es decir, κ), y ν'_{cte} es el coeficiente de Poisson drenado, que se asume constante.

La superficie de plasticidad límite $f' = 0$, adopta la siguiente expresión:

$$f' = \left(p' - \frac{p'_0}{2}\right)^2 + \frac{J^2}{M_J^2} - \frac{p'_c{}^2}{4} = 0 \tag{2.439}$$

Donde $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, p'_c es el tamaño del eje mayor de la superficie límite en el eje $p' = 0$, $J = \sqrt{1/2\mathbf{s}:\mathbf{s}}$ es un invariante del tensor desviador de tensiones \mathbf{s} , siendo $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct}\mathbf{1}$, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media y M_J es la pendiente de la recta de estado crítico.

La superficie o burbuja $f_1 = 0$ que se desplaza por el interior de la superficie límite, sin intersecar en ningún momento con $f' = 0$, adopta la siguiente expresión.

$$f_1 = (p' - p'_\alpha)^2 + \left(\frac{J - J_\alpha}{M_J}\right)^2 - \hat{R}^2 \frac{p'_c{}^2}{4} = 0 \tag{2.440}$$

Donde p'_α y J_α son los valores de p' y J en el centro de la burbuja y \hat{R} es la ratio entre el tamaño de la burbuja y la superficie límite (figura 2.108).

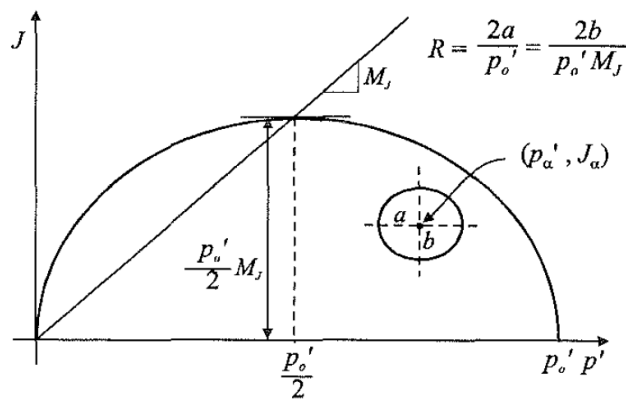


Figura 2.108. Representación esquemática de las superficies del modelo de Al-Tabbaa y Wood ($R \equiv \hat{R}$, $p'_0 \equiv p'_c$) (Potts y Zdravkovic, 1999).

La condición de consistencia sobre la burbuja, $\dot{f}_1 = 0$, implica:

$$(p' - p'_\alpha)(\dot{p}' - \dot{p}'_\alpha) + \frac{J - J_\alpha}{M_J^2} (\dot{J}' - \dot{J}_\alpha) - \frac{\hat{R}^2}{4} p'_c \dot{p}'_c = 0 \quad (2.441)$$

El valor de \dot{p}'_0 viene dado por la regla de endurecimiento de la superficie de plasticidad límite, que es la misma que la del modelo *Cam Clay* modificado.

$$\dot{p}'_c = \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\lambda^* - \kappa^*} p'_c \quad (2.442)$$

Donde $\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de la deformación volumétrica plástica y λ^* es la pendiente de la recta de carga noval en el plano $\ln(e) - \ln(p')$.

Por otro lado, los valores de \dot{p}'_α y \dot{J}_α en (2.441) determinan el desplazamiento de la burbuja. Dicho movimiento tiene dos componentes:

- La primera componente está asociada a la traslación de la burbuja en la dirección del vector \vec{r} tal como se indica en la figura 2.109 (endurecimiento cinemático). El vector \vec{r} une, en el plano $q - p'$, el punto de tensión actual situado sobre la burbuja $f_1 = 0$ (punto C en la figura 2.109) con el punto conjugado sobre la superficie límite $f' = 0$ (punto D en la figura 2.109). Dicho punto conjugado es el punto de la superficie de plasticidad límite con la misma normal exterior que el punto de tensión actual sobre la burbuja.
- La segunda componente está asociada al cambio de tamaño de la burbuja (endurecimiento isotrópico).

$$\vec{r} = \left[\frac{p' - p'_\alpha}{\hat{R}} - \left(p' - \frac{p'_c}{2} \right), \frac{J - J_\alpha}{\hat{R}} - J \right]^T \quad (2.443)$$

$$\dot{p}'_\alpha = \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} p'_\alpha + T \left(\frac{p' - p'_\alpha}{\hat{R}} - \left(p' - \frac{p'_c}{2} \right) \right) \quad (2.444)$$

$$\dot{J}_\alpha = \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} J_\alpha + T \left(\frac{J - J_\alpha}{\hat{R}} - J \right) \quad (2.445)$$

$$T = \frac{(p' - p'_\alpha) \left(\dot{p}' - \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} p' \right) + \frac{J - J_\alpha}{M_J^2} \left(\dot{J}' - \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} J \right)}{(p' - p'_\alpha) \left(\frac{p' - p'_\alpha}{\hat{R}} - \left(p' - \frac{p'_c}{2} \right) \right) + \frac{J - J_\alpha}{M_J^2} \left(\frac{J - J_\alpha}{\hat{R}} - J \right)} \quad (2.446)$$

Las reglas de flujo del modelo son las siguientes:

$$\dot{\epsilon}_v^p = \frac{1}{h} \left((p' - p'_\alpha)^2 \dot{p}' + (p' - p'_\alpha) \left(\frac{J - J_\alpha}{M_J^2} \right) \dot{J}' \right) \quad (2.447)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{h} \left((p' - p'_\alpha) \left(\frac{J - J_\alpha}{M_J^2} \right) \dot{p}' + \left(\frac{J - J_\alpha}{M_J^2} \right)^2 J \right) \quad (2.448)$$

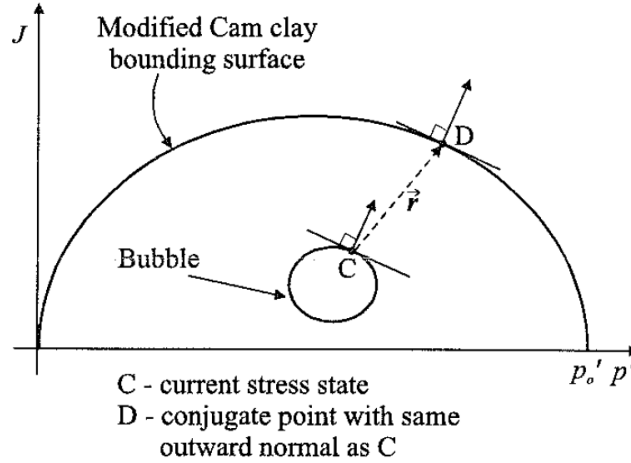


Figura 2.109. Desplazamiento de la burbuja en el plano $J - p'$ (Potts y Zdravkovic, 1999).

Donde $\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p}$ es un invariante del tensor de deformaciones plásticas $\dot{\epsilon}^p$ y h es el módulo de endurecimiento plástico que, en base a las reglas de mapeo, se expresa como:

$$h = h_o + h_b \quad (2.449)$$

En la expresión anterior h_o es el módulo de endurecimiento plástico cuando la burbuja es tangente a la superficie límite y h_b es un factor que se añade a h_o para evitar singularidades. Los valores de h_o y h_b se calculan como sigue:

$$h_o = \left(\frac{p' - p'_\alpha}{\lambda^* - \kappa^*} \right) \left(p'(p' - p'_\alpha) + \left(\frac{J - J_\alpha}{M_J^2} \right) J \right) \quad (2.450)$$

$$h_b = \left(\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} \right) \left(\frac{\hat{b}}{\hat{b}_{max}} \right)^{\hat{\psi}} p_0'^3 \quad (2.451)$$

Donde \hat{b} es la componente del vector \vec{r} de la figura 2.109 en la dirección normal a la superficie de la burbuja, \hat{b}_{max} es el valor máximo de \hat{b} y $\hat{\psi}$ es un parámetro del suelo.

$$\hat{b} = \frac{1}{\hat{R} \frac{p'_c}{2}} \left((p' - p'_\alpha) \left(\frac{p' - p'_\alpha}{\hat{R}} - \left(p' - \frac{p'_c}{2} \right) \right) + \left(\frac{J - J_\alpha}{M_J^2} \right) \left(\frac{J - J_\alpha}{\hat{R}} - J \right) \right) \quad (2.452)$$

$$\hat{b}_{max} = (1 - \hat{R}) p'_c \quad (2.453)$$

En cuanto a los puntos de reversión, el modelo de Al-Tabbaa y Wood los identifica de la siguiente manera: si el giro de la trayectoria tensional en el plano $q - p'$ forma un ángulo de $|\vartheta| > 90^\circ$ respecto a la normal a la burbuja, la rigidez pasa a ser la máxima para el nivel de confinamiento en el que se encuentre el suelo.

$$\mathbf{E}'_{p,t}{}^{(n-1)} \propto h^{(n-1)} \rightarrow \mathbf{E}'_{e,t}{}^{(n)} = \begin{bmatrix} p'^{(n)}/\kappa^* & 0 \\ 0 & \frac{3(p'^{(n)}/\kappa^*)(1 - 2\nu'_{cte})}{2(1 + \nu'_{cte})} \end{bmatrix} \quad (2.454)$$

Donde h es el módulo de endurecimiento plástico, κ^* es la pendiente de la recta de hinchamiento en el plano $\ln(e) - \ln(p')$, $\mathbf{E}'_{p,t}$ es la matriz del tensor plástico tangente que relaciona $[\dot{\epsilon}_v^p, \dot{\epsilon}_q^p]^T$ con $[\dot{p}', \dot{q}]^T$, $\mathbf{E}'_{e,t}$ es la matriz del tensor elástico tangente que relaciona $[\dot{\epsilon}_v^e, \dot{\epsilon}_q^e]^T$ con $[\dot{p}', \dot{q}]^T$, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora y $(n - 1) \rightarrow (n)$ es el paso de cálculo considerado en el que tiene lugar la reversión.

El modelo de Al-Tabbaa y Wood (1989) almacena información del último punto de reversión a través de la posición de la burbuja, hasta que esta es desplazada de nueva. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados

Este modelo es capaz de reproducir bastante bien los resultados obtenidos en ensayos edométricos y triaxiales cíclicos (con bajas frecuencias) sobre un caolín. Asimismo, requiere únicamente dos parámetros adicionales (\hat{R} y $\hat{\psi}$) respecto al modelo *Cam Clay* modificado (ν , λ^* , κ^* , M_J , y ν'_{cte}).

2.6.3.2.5.2. Modelo 3-SKH de Stallebrass y Taylor (1997)

El modelo *Three Surface Kinematic Hardening Model (3-SKH)* de Stallebrass y Taylor (1997) fue inicialmente desarrollado por Stallebrass (1990). Se trata de una extensión del modelo de Al-Tabbaa y Wood (1989), en la que se incorpora una nueva burbuja $f_1 = 0$ con endurecimiento cinemático, exterior a la burbuja $f_2 = 0$, dentro de la cual el comportamiento del suelo se considera elástico. Esta nueva burbuja $f_1 = 0$ tiene por objeto introducir la influencia de la historia reciente del suelo en la formulación del modelo.

El modelo considera, por tanto, dos burbujas dentro de la superficie de plasticidad límite. Asimismo, todas las superficies se basan en la formulación del modelo *Cam Clay* modificado de Roscoe y Burland (1968).

El comportamiento en el interior de la burbuja f_2 es elástico. Dicho comportamiento se describe mediante los módulos volumétrico drenado y de corte elásticos tangentes, K'_t y G_t .

El módulo de rigidez volumétrico elástico tangente se expresa de la siguiente forma:

$$K'_t = \frac{p'}{\kappa^*} \quad (2.455)$$

Donde κ^* es la pendiente de la recta de hinchamiento en el plano $\ln(e) - \ln(p')$ (a diferencia que en el modelo *Cam Clay* modificado, donde se utiliza la pendiente de dicha recta en el plano $e - \ln(p')$, es decir, κ).

Por otro lado, el módulo de corte elástico tangente G_t adopta la expresión dada por Viggiani (1992).

$$G_t = A \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^{\tilde{n}'} (R_o)^{\tilde{m}'} \quad (2.456)$$

Donde p'_{ref} es una presión de referencia, generalmente igual a 1kPa, $R_o = p'_{OC}/p'$ es el índice de sobreconsolidación del suelo (siendo p'_{OC} la máxima presión media histórica y p' la presión media actual) y A , \tilde{n}' y \tilde{m}' son parámetros del suelo.

Asumiendo un estado triaxial de tensiones, la superficie de plasticidad límite $f' = 0$ (figura 2.110), adopta la siguiente expresión:

$$f' = (p' - p'_0)^2 + \frac{q^2}{M^2} - p'_c{}^2 = 0 \quad (2.457)$$

Donde $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, p'_c es el tamaño del eje mayor de la superficie límite en el eje $p' = 0$, $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora y M es la pendiente de la recta de estado crítico.

La superficie o burbuja de historia $f_1 = 0$ (figura 2.110), que se desplaza por el interior de la superficie de plasticidad límite $f' = 0$, sin intersecarla en ningún momento, adopta la siguiente expresión:

$$f_1 = (p' - p'_a)^2 + \left(\frac{q - q_a}{M} \right)^2 - \hat{T}^2 p'_c{}^2 = 0 \quad (2.458)$$

Donde p'_a y q_a son los valores de p' y q en el centro de la burbuja y \hat{T} es la ratio entre el tamaño de la burbuja $f_1 = 0$ y la superficie límite $f' = 0$.

Por otro lado, la superficie o burbuja de primera fluencia $f_2 = 0$ (figura 2.110), que se desplaza por el interior de la burbuja de historia $f_1 = 0$, sin intersecarla en ningún momento, se formula también según el modelo *Cam Clay* modificado.

$$f_2 = (p' - p'_b)^2 + \left(\frac{q - q_b}{M} \right)^2 - \hat{T}^2 \hat{S}^2 p'_c{}^2 = 0 \quad (2.459)$$

Donde p'_b y q_b son los valores de p' y q en el centro de la burbuja y \hat{S} es la ratio entre el tamaño de la burbuja $f_2 = 0$ y la burbuja $f_1 = 0$.

La condición de consistencia sobre la burbuja de historia, $\dot{f}_1 = 0$, implica:

$$(p' - p'_a)(\dot{p}' - \dot{p}'_a) + \frac{q - q_a}{M^2} (\dot{q}' - \dot{q}'_a) - \hat{T}^2 p'_c{}^2 \dot{p}'_c = 0 \quad (2.460)$$

Asimismo, la condición de consistencia sobre la burbuja de primera fluencia, $\dot{f}_2 = 0$, implica:

$$(p' - p'_b)(\dot{p}' - \dot{p}'_b) + \frac{q - q_b}{M^2}(\dot{q}' - \dot{q}_b) - \hat{T}^2 \hat{S}^2 p_c'^2 \dot{p}'_c = 0 \quad (2.461)$$

El valor de \dot{p}'_c viene dado por la regla de endurecimiento de la superficie límite.

$$\dot{p}'_c = \frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\lambda^* - \kappa^*} p'_c \quad (2.462)$$

Donde $\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de la deformación volumétrica plástica y λ^* es la pendiente de la recta de carga noval en el plano $\ln(e) - \ln(p')$.

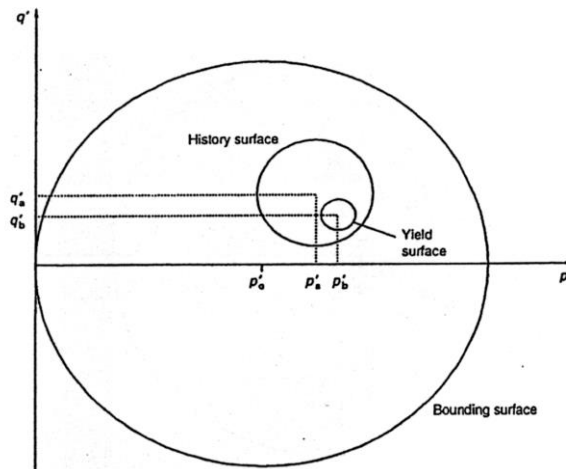


Figura 2.110. Representación esquemática de las superficies del modelo 3-SKH (Stallebrass y Taylor, 1997).

Por otro lado, los valores de \dot{p}'_a , \dot{q}_a , \dot{p}'_b , \dot{q}_b en (2.460) y (2.461) determinan el desplazamiento de las burbujas. Dichos movimientos tienen dos componentes.

- La primera componente está asociada a la traslación de las burbujas $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$ en las direcciones según los vectores, en el plano $q - p'$, $\vec{\beta}$ y $\vec{\gamma}$, respectivamente, como se puede ver en la figura 2.111 (endurecimiento cinemático). El vector $\vec{\gamma}$ une el punto de tensión actual situado sobre la burbuja $f_2 = 0$ (punto A en la figura 2.111) con el punto conjugado situado sobre la burbuja $f_1 = 0$ (punto B en la figura 2.111). Dicho punto conjugado es el punto de la burbuja $f_1 = 0$ con la misma normal exterior que el punto sobre la burbuja $f_2 = 0$. Por otro lado, el vector $\vec{\beta}$ une el punto conjugado situado sobre la burbuja f_2 (punto B en la figura 2.111) con el punto conjugado situado sobre la superficie límite $f' = 0$ (punto C en la figura 2.111). Dicho punto conjugado se obtiene con el mismo criterio que se acaba de exponer.
- La segunda componente está asociada al cambio de tamaño de las burbujas (endurecimiento isotrópico).

$$\vec{\beta} = \left[\frac{p' - p'_a}{\hat{T}} - (p' - p'_c), \frac{q - q_a}{\hat{T}} - q \right]^T \quad (2.463)$$

$$\vec{\gamma} = \left[\frac{p' - p'_b}{\hat{S}} - (p' - p'_a), \frac{q - q_a}{\hat{S}} - (q - q_a) \right]^T \quad (2.464)$$

$$\dot{p}'_a = \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} p'_a + W \left(\frac{p' - p'_a}{\hat{T}} - (p' - p'_c) \right) \quad (2.465)$$

$$\dot{q}_a = \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} q_a + W \left(\frac{q - q_a}{\hat{T}} - q \right) \quad (2.466)$$

$$\dot{p}'_b = \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} p'_b + Z \left(\frac{p' - p'_b}{\hat{S}} - (p' - p'_a) \right) \quad (2.467)$$

$$\dot{q}_b = \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} q_a + Z \left(\frac{q - q_a}{\hat{S}} - (q - q_a) \right) \quad (2.468)$$

$$W = \frac{(p' - p'_a) \left(\dot{p}' - \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} p' \right) + \frac{q - q_a}{M^2} \left(\dot{q} - \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} q \right)}{(p' - p'_a) \left(\frac{p' - p'_a}{\hat{T}} - (p' - p'_c) \right) + \frac{q - q_a}{M^2} \left(\frac{q - q_a}{\hat{T}} - q \right)} \quad (2.469)$$

$$Z = \frac{(p' - p'_b) \left(\dot{p}' - \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} p' \right) + \frac{q - q_b}{M^2} \left(\dot{q} - \frac{\dot{p}'_c}{p'_c} q \right)}{(p' - p'_b) \left(\frac{p' - p'_b}{\hat{S}} - (p' - p'_a) \right) + \frac{q - q_b}{M^2} \left(\frac{q - q_a}{\hat{S}} - (q - q_a) \right)} \quad (2.470)$$

Cuando la superficie de historia $f_1 = 0$ está en contacto con la superficie de plasticidad límite $f = 0$, se tiene la siguiente expresión para \dot{p}'_a y \dot{q}_a :

$$\dot{p}'_a = (1 - \hat{T})\dot{p}' + \hat{T}\dot{p}'_c \quad (2.471)$$

$$\dot{q}_a = (1 - \hat{T})\dot{q} \quad (2.472)$$

Por otro lado, cuando la superficie de primera fluencia $f_2 = 0$ está en contacto con la superficie de historia $f_1 = 0$, se tiene la siguiente expresión para \dot{p}'_b , \dot{q}_b :

$$\dot{p}'_b = (1 - \hat{S})\dot{p}' + \hat{S}\dot{p}'_a \quad (2.473)$$

$$\dot{q}_b = (1 - \hat{S})\dot{q} + \hat{S}\dot{q}_a \quad (2.474)$$

Las reglas de flujo plástico del modelo son las siguientes:

$$\dot{\epsilon}_v^p = \frac{1}{h} \left((p' - p'_b)^2 \dot{p}' + (p' - p'_b) \left(\frac{q - q_b}{M^2} \right) \dot{q} \right) \quad (2.475)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{h} \left((p' - p'_b) \left(\frac{q - q_b}{M^2} \right) \dot{p}' + \left(\frac{q - q_b}{M^2} \right)^2 \dot{q} \right) \quad (2.476)$$

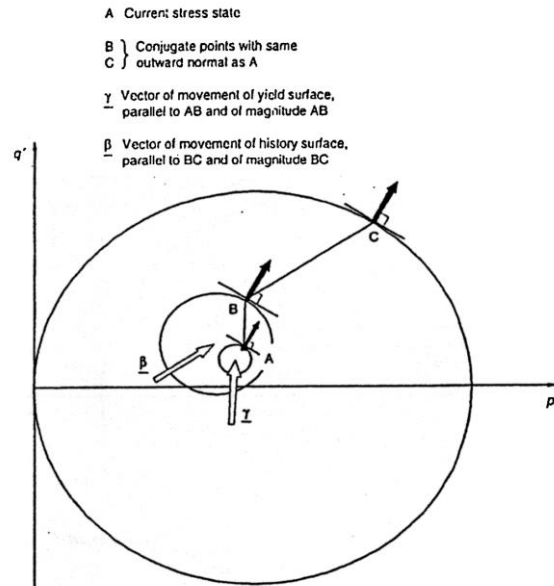


Figura 2.111. Desplazamiento de las burbujas f_1 y f_2 en el plano $J - p'$ (Potts y Zdravkovic, 1999).

Donde $\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\epsilon^p : \epsilon^p}$ es un invariante del tensor de deformaciones plásticas ϵ^p y h es el módulo de endurecimiento plástico, que a partir de las reglas de mapeo se expresa como sigue:

$$h = h_o + h_1 + h_2 \quad (2.477)$$

En la expresión anterior h_o es el módulo de endurecimiento plástico cuando la burbuja es tangente a la superficie límite, y h_1 y h_2 son funciones que permiten evitar las singularidades que se dan cuando sólo se considera $h = h_o$. Los valores de h_o , h_1 y h_2 se calculan de la siguiente manera:

$$h_o = \left(\frac{p' - p'_b}{\lambda^* - \kappa^*} \right) \left(p'(p' - p'_b) + \left(\frac{q - q_b}{M^2} \right) q \right) \quad (2.478)$$

$$h_1 = \left(\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} \right) \left(\frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_{1max}} \right)^{\hat{\psi}} p'_c{}^3 \hat{S}^2 \quad (2.479)$$

$$h_2 = \left(\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} \right) \left(\frac{\hat{T}\hat{b}_2}{\hat{b}_{2max}} \right)^{\hat{\psi}} p'_c{}^3 \quad (2.480)$$

En las expresiones anteriores \hat{b}_1 es la componente del vector $\vec{\beta}$ de la figura 2.111 en la dirección normal a la superficie de la burbuja $f_1 = 0$, \hat{b}_{1max} es el valor máximo de \hat{b}_1 , \hat{b}_2 es la componente del vector $\vec{\gamma}$ de la figura 2.111 en la dirección normal a la superficie de la burbuja $f_2 = 0$, \hat{b}_{2max} es el valor máximo de \hat{b}_2 y $\hat{\psi}$ es un parámetro del suelo.

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{\hat{T}p'_c} \left(\left(\frac{p' - p'_b}{\hat{S}} \right) \left(\frac{p' - p'_b}{\hat{T}\hat{S}} - \left(\frac{p' - p'_b}{\hat{S}} + p'_a - p'_c \right) \right) + \left(\frac{q - q_b}{\hat{S}M^2} \right) \left(\frac{q - q_b}{\hat{T}\hat{S}} - \left(\frac{q - q_b}{\hat{S}} + q_a \right) \right) \right) \quad (2.481)$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{\hat{T}\hat{S}p'_c} \left((p' - p'_b) \left(\frac{p' - p'_b}{\hat{S}} - (p' - p'_a) \right) + \left(\frac{q - q_b}{M^2} \right) \left(\frac{q - q_b}{\hat{S}} - (q - q_a) \right) \right) \quad (2.482)$$

$$\hat{b}_{1_{max}} = 2(1 - \hat{T})p'_c \quad (2.483)$$

$$\hat{b}_{2_{max}} = 2\hat{T}(1 - \hat{S})p'_c \quad (2.484)$$

En cuanto a los puntos de reversión, el modelo 3-SKH los identifica de la siguiente manera: si el giro de la trayectoria tensional en el plano $q - p'$ forma un ángulo de $|\vartheta| > 90^\circ$ respecto a la normal a una o dos burbujas, la rigidez pasa a ser la máxima para el nivel de confinamiento en el que se encuentre el suelo.

$$\mathbf{E}'_{p,t}{}^{(n-1)} \propto h^{(n-1)} \rightarrow \mathbf{E}'_{e,t}{}^{(n)} = \begin{bmatrix} p'^{(n)}/\kappa^* & 0 \\ 0 & 3G_0 \end{bmatrix} \quad (2.485)$$

Donde h es el módulo de endurecimiento plástico, κ^* es la pendiente de la recta de hinchamiento en el plano $\ln(e) - \ln(p')$, $\mathbf{E}'_{p,t}$ es la matriz del tensor plástico tangente que relaciona $[\dot{\epsilon}_v^p, \dot{\epsilon}_q^p]^T$ con $[\dot{p}', \dot{q}]^T$, $\mathbf{E}'_{e,t}$ es la matriz del tensor elástico tangente que relaciona $[\dot{\epsilon}_v^e, \dot{\epsilon}_q^e]^T$ con $[\dot{p}', \dot{q}]^T$, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $q = \sigma'_1 - \sigma'_3$ es la tensión desviadora, G_0 es el módulo de corte elástico tangente máximo según la expresión (2.456) y $(n - 1) \rightarrow (n)$ es el paso de cálculo considerado en el que tiene lugar la reversión.

El modelo de Stallebrass y Taylor (1997) almacena información de los últimos dos puntos de reversión a través de la posición de las burbujas, hasta que estas son desplazadas de nuevo, lo cual, además, permite tener en cuenta la historia reciente. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados.

En las figuras 2.112 y 2.113 se muestran algunos resultados obtenidos con el modelo.

Como se puede ver en las figuras 2.112 y 2.113, el modelo 3-SKH, en general, ofrece una buena aproximación a los resultados experimentales, teniendo en cuenta el rango de deformación con el que se está trabajando. No obstante, se observan algunas discrepancias entre resultados experimentales y simulaciones numéricas en trayectorias que se desarrollan del lado seco.

Stallebrass (1990) identificó algunas desviaciones entre los resultados experimentales y las simulaciones realizadas con el modelo 3-SKH original. Entre ellas, una caída de la rigidez acentuada a medida que la superficie de historia $f_1 = 0$ se aproxima a la superficie de plasticidad límite $f' = 0$ que no se observa en los resultados experimentales. Este problema puede resolverse modificando la expresión del módulo de endurecimiento plástico.

Tal como expone Messerklinger (2006), el modelo sobreestima el coeficiente de empuje al reposo K_0 durante compresiones edométricas debido a las elevadas deformaciones de corte plásticas dependientes de la regla de flujo asociada del modelo *Cam Clay* modificado. Esto último es especialmente relevante en cargas cíclicas, donde el modelo acumula demasiadas deformaciones de corte. McDowell y Hau (2003) resuelven este problema incorporando una regla de flujo no asociada en

el modelo 3-SKH. Otro planteamiento para resolver este problema es el propuesto por Masín (2003), en el que se considera una superficie de plasticidad límite inclinada para incorporar el efecto de la anisotropía.

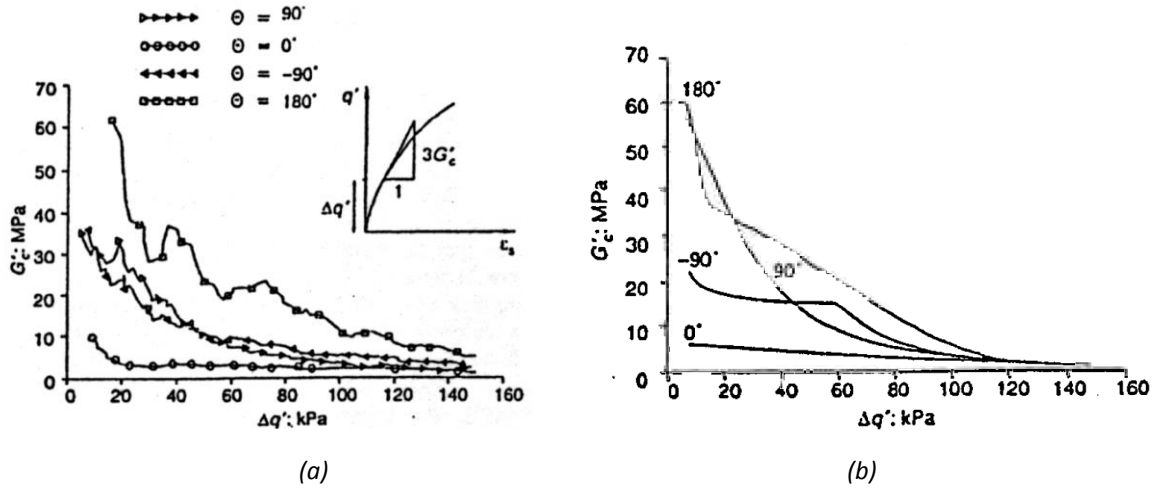


Figura 2.112. (a) Resultados experimentales de la curva de degradación según la dirección del incremento de carga respecto al incremento anterior. (b) Simulación con el modelo 3-SKH. Stallebrass y Taylor (1997).

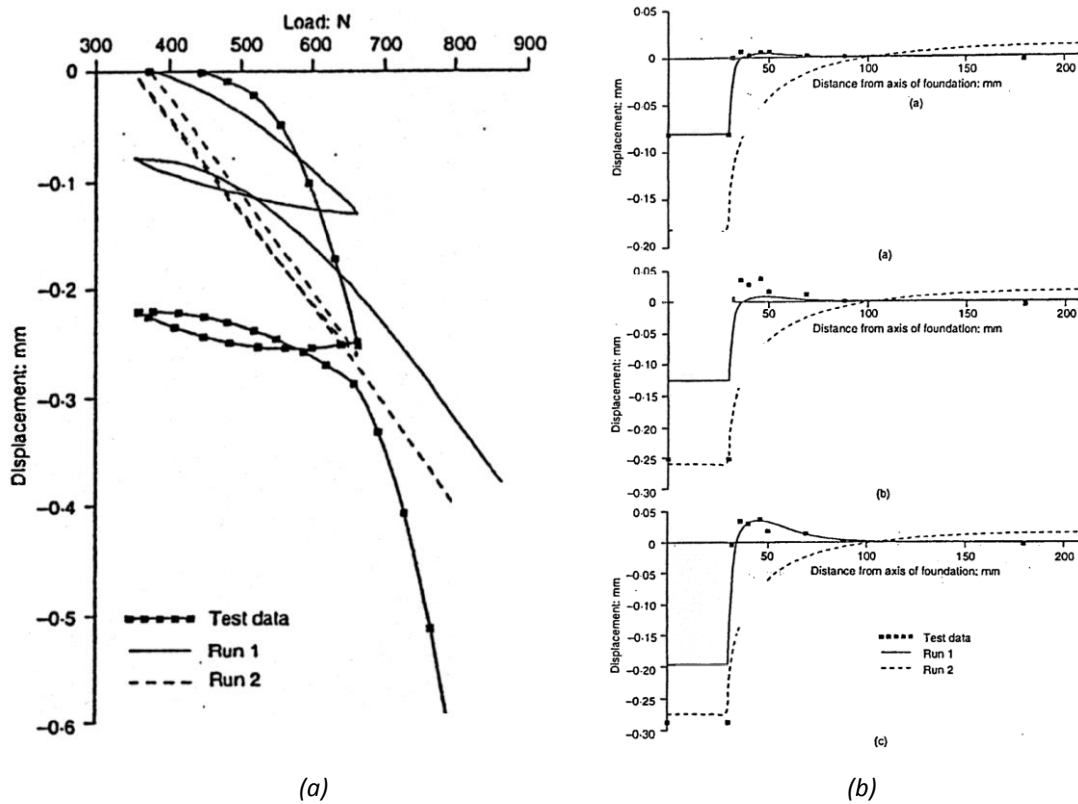


Figura 2.113. Resultados experimentales de ensayos centrífugos para reproducir los desplazamientos generados por una cimentación superficial en una arcilla caolinita y simulaciones con el modelo 3-SKH (Stallebrass y Taylor, 1997). (a) Curva carga-desplazamiento. (b) Asientos verticales.

Posteriores estudios han incluido en el modelo 3-SKH la dependencia de la deformación con el tiempo, la anisotropía y el efecto de la estructura del suelo.

2.6.3.2.6. Modelos multilaminados

El concepto de modelo multilaminado fue formulado inicialmente por Batdorf y Budiansky (1949). Zienkiewicz y Pande (1977) extendieron el concepto al análisis de juntas en rocas. Posteriormente Pande y Sharma (1983) y Sadrnejad y Pande (1989) extendieron estos modelos al análisis de suelos.

Los modelos multilaminados parten del concepto de que el estado tensodeformacional tridimensional en un punto del medio continuo (estado global) puede obtenerse como suma del estado tensional bidimensional sobre planos con diferentes orientaciones que pasan por dicho punto (estado local).

Las ecuaciones fundamentales de los modelos multilaminados, en cada plano, son las siguientes:

$$\dot{\sigma}'_i = (\mathbf{T}_i)^T \cdot \dot{\sigma}' \quad (2.486)$$

$$\dot{\epsilon}'_i = \mathbf{C}_i \cdot \dot{\sigma}'_i \quad (2.487)$$

$$\dot{\epsilon}_i = \dot{\epsilon}'_i + \dot{\epsilon}^p_i \quad (2.488)$$

$$\dot{\epsilon}^p_i = \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \dot{\sigma}'_i} \quad (2.489)$$

Donde $\dot{\sigma}'_i$ es el incremento del tensor de tensiones efectivas del plano i , \mathbf{T}_i es la matriz de transformación que relaciona la dirección del plano, a través de sus cosenos directores, con el sistema de referencia global, $\dot{\sigma}'$ es el incremento del tensor de tensiones global, $\dot{\epsilon}'_i$ es el incremento del tensor de deformaciones elásticas del plano i , \mathbf{C}_i es el tensor de flexibilidad elástico constitutivo en el plano i que relaciona $\dot{\sigma}'_i$ y $\dot{\epsilon}'_i$, $\dot{\epsilon}_i$ es el incremento del tensor de deformaciones totales del plano i , $\dot{\epsilon}^p_i$ es el incremento del tensor de deformaciones plásticas del plano i , λ_i es el multiplicador plástico asociado al plano i y $\partial g_i / \partial \dot{\sigma}'_i$ es el flujo plástico asociado al plano i .

El número de planos considerados en los modelos multilaminados no son infinitos, sino que se reducen a un número finito. Mediante la formulación adoptada en el modelo, estos son capaces de representar todas las orientaciones en el espacio, agrupadas por sectores.

Los incrementos de deformación globales, que se corresponden con un incremento de tensión global, se calculan a partir de la integración de las deformaciones locales en los planos, según las direcciones consideradas, a partir de las ecuaciones constitutivas locales en cada uno de ellos. Para la deducción de la expresión que relaciona estas magnitudes se utiliza el principio de los trabajos virtuales.

$$\delta W_{macro} = \frac{4}{3} V \dot{\sigma}' : \dot{\epsilon} = \int_{\partial V} \delta W_{micro} dS' = \int_{\partial V} \dot{\sigma}'_i : \dot{\epsilon}_i dS' \quad (2.490)$$

Donde δW_{macro} es el incremento de potencia global en una esfera de volumen V y δW_{micro} es el incremento de potencia local en los planos considerados.

Asumiendo $dS' \approx \Delta S' = (\sin\tilde{\alpha})(\sin\tilde{\beta})\Delta\tilde{\alpha}\Delta\tilde{\beta}$ donde $\Delta\tilde{\alpha}$ y $\Delta\tilde{\beta}$ son sectores esféricos finitos, se tiene lo siguiente:

$$\dot{\epsilon} = 3 \sum_i T_i \cdot \dot{\epsilon}_i \cdot w_i \quad (2.491)$$

$$w_i = \frac{(\sin\alpha)\Delta\tilde{\alpha}\Delta\tilde{\beta}}{4V} \quad (2.492)$$

Bazant y Oh (1985) y Ehret et al. (2010) demuestran que utilizar 33 planos en el cálculo de $\dot{\epsilon}$ ofrece unos resultados y un coste computacional aceptables.

En este tipo de modelos, las variables de estado que controlan el valor de los módulos de rigidez en cada plano y el número de planos considerado se identifican, junto con las variables que almacenan información en los puntos de reversión, con las que Gudehus (2011) propone como imprescindibles para describir el comportamiento histerético del suelo, y a las que es posible atribuir, también, la dependencia de su comportamiento con la historia reciente.

El número de zonas tensoriales $\#Z$ en los modelos multilaminados dependerá de la cantidad planos considerados. No obstante, generalmente este número es elevado, por lo que, a pesar de no tratarse de modelos incrementalmente no lineales, a efectos prácticos, se pueden considerar como tales.

Un modelo multilaminado avanzado que incluye el comportamiento histerético y no lineal en el rango de las pequeñas deformaciones, así como los efectos de la historia reciente, es el modelo de Schädlich y Schweiger (2012).

2.6.3.2.6.1. Modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger (2012)

El modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger (2012) considera el comportamiento elastoplástico del suelo mediante un modelo tipo *Cap-Cone*, que permite describir el comportamiento plástico en cada plano. Asimismo, introduce los conceptos de anisotropía transversal, dependencia de la rigidez con las tensiones, degradación de la rigidez elástica y dependencia de la historia de deformaciones para describir el comportamiento dentro de las superficies de fluencia y de la superficie límite.

Las expresiones de las superficies de fluencia asociadas a un plano se basan en el modelo de Wiltafsky (2003) y Wiltafsky et al. (2003) y son las siguientes (figura 2.114):

$$f_{cap} = \frac{(\sigma'_n)^2}{(\sigma'_{nc})^2} + \frac{\tau^2}{(M_{CP}\sigma'_{nc})^2} - 1 = 0 \quad (2.493)$$

$$f_{cone} = \tau + \sigma'_n \tan\varphi'_m - c' \frac{\tan(\varphi'_m)}{\tan(\varphi'_{max})} = 0 \quad (2.494)$$

$$f_{tens} = \sigma'_n - \sigma_t \quad (2.495)$$

Donde σ'_n es la tensión efectiva normal al plano, τ es la tensión tangencial al plano, σ'_{nc} es el valor de σ'_n para $\tau = 0$, M_{CP} es la ratio entre los ejes de f_{cap} , φ'_m es el ángulo de fricción efectivo movilizado del suelo, φ'_{max} es el valor máximo del ángulo de fricción efectivo, c' es la cohesión del suelo y $\sigma_t > 0$ es el valor de tracción máxima.

La ley de endurecimiento de f_{cap} es la siguiente:

$$\sigma'_{nc}{}^{(n+1)} = - \left(\left(-\sigma'_{nc}{}^{(n)} \right)^{1-m} + K \frac{(m-1)}{p'_{ref}{}^{m-1}} \dot{\epsilon}_n^p \right)^{\frac{1}{1-m}} \quad (2.496)$$

$$K = \frac{3}{p'_{ref} \left(\frac{1}{E'_{oed}{}^{ref}} + \frac{3(1-2\nu'_{cte})}{E'_{ur}{}^{ref}} \right)} \quad (2.497)$$

$$E'_{oed} = E'_{oed}{}^{ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^m \quad (2.498)$$

$$E'_{ur} = E'_{ur}{}^{ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^m \quad (2.499)$$

Donde $\sigma'_{nc}{}^{(n+1)}$ y $\sigma'_{nc}{}^{(n)}$ son, respectivamente, los valores de σ'_{nc} en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ y $(n-1) \rightarrow (n)$, $\dot{\epsilon}_n^p$ es el incremento de la deformación plástica normal al plano, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $E'_{oed}{}^{ref}$ es el módulo elástico edométrico drenado para la carga noval cuando $p' = p'_{ref}$, p'_{ref} es una presión de referencia, $E'_{ur}{}^{ref}$ es el módulo elástico longitudinal drenado para descargas y recargas cuando $p' = p'_{ref}$, m es un parámetro del suelo y ν'_{cte} es el coeficiente de Poisson drenado, que se asume constante.

La evolución de f_{cone} viene determinada por la evolución de φ'_m :

$$\tan(\varphi'_m) = \tan(\varphi'_i) + \left(\tan(\varphi'_{max}) - \tan(\varphi'_i) \right) \frac{\epsilon_{\gamma cone, pl}}{\frac{A_{mat}}{3} + \epsilon_{\gamma cone, pl}} \quad (2.500)$$

Donde φ'_i es el valor de φ'_m correspondiente a la tensión inicial, A_{mat} es un parámetro que controla la evolución de f_{cone} y $\epsilon_{\gamma cone, pl}$ es la deformación de corte plástica acumulada en el plano.

En cuanto al comportamiento elástico transversalmente anisótropo que considera el modelo, una condición necesaria para que este cumpla los principios termodinámicos es que se respete la restricción estática ($\dot{\sigma}'_i = (\mathbf{T}_i)^T \cdot \dot{\sigma}'$) y la restricción cinemática ($\dot{\epsilon}_i = (\mathbf{T}_i)^T \cdot \dot{\epsilon}$), para lo cual es necesario descomponer el tensor $\dot{\sigma}'_i$ y $\dot{\epsilon}_i$ de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}'_i = \left(\sigma'_{i,n,vol}, \sigma'_{i,n,dev}, \tau_{i,s1}, \tau_{i,s2}, \tau_{i,t1}, \tau_{i,t2} \right)^T \quad (2.501)$$

$$\epsilon_i = (\epsilon_{i,n,vol}, \epsilon_{i,n,dev}, \gamma_{i,s1}, \gamma_{i,s2}, \gamma_{i,t1}, \gamma_{i,t2})^T \quad (2.502)$$

Donde $\sigma'_{i,n,vol}$ es la tensión normal volumétrica efectiva del plano i , $\sigma'_{i,n,dev}$ es la tensión normal desviadora efectiva del plano i , $\tau_{i,s1}$ y $\tau_{i,t1}$ son las tensiones tangenciales en la dirección de s y t del plano i debidos a la tensión axial global, $\tau_{i,s2}$ y $\tau_{i,t2}$ son las tensiones tangenciales en la dirección de s y t del plano i debido a la tensión de corte global, $\epsilon_{i,n,vol}$ es la deformación normal volumétrica total del plano i , $\epsilon_{i,n,dev}$ es la deformación normal desviadora total del plano i , $\gamma_{i,s1}$ y $\gamma_{i,t1}$ son las deformaciones tangenciales totales en la dirección de s y t del plano i debidos a la tensión axial global y $\gamma_{i,s2}$ y $\gamma_{i,t2}$ son las deformaciones tangenciales totales en la dirección de s y t del plano i debido a la tensión de corte global.

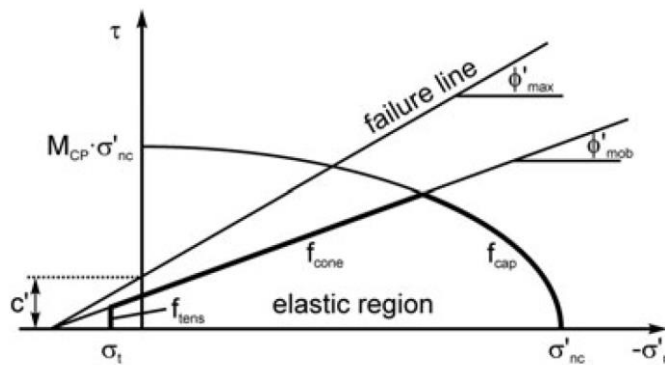


Figura 2.114. Superficies de fluencia en cada plano del modelo multilaminado (Schädlich y Schweiger, 2012).

El tensor de flexibilidad C_i que relaciona ϵ_i^e con σ'_i a través de la expresión (2.487), se puede expresar de la siguiente manera, teniendo en cuenta la descomposición espectral de $\sigma' = \sum \sigma'_r = \sum E'_r \sigma'_r$, y considerando, $\sigma'_{ir} = (T_i)^T \sigma'_r$, $\epsilon_{ir} = \lambda_r \sigma'_{ir}$, $\sigma'_i = \sum \sigma'_{ir}$ y $\epsilon_i = \sum \epsilon_{ir}$, $r = 1 \dots 4$:

$$C_i = (T_i)^T \left(\sum_{r=1}^4 (\lambda_r E'_r) \right) ((T_i)^T)^{-1} \quad (2.503)$$

$$\lambda_1 = \frac{1 + \nu'_p}{E'_p} \quad (2.504)$$

$$\lambda_2 = \frac{1 - \nu'_p}{2E'_p} + \frac{1}{2E'_{33}} - \sqrt{\left(\frac{1 - \nu'_p}{2E'_p} - \frac{1}{2E'_{33}} \right)^2 + \frac{2\nu'^2_{3p}}{E_p'^2}} \quad (2.505)$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \nu'_p}{2E'_p} + \frac{1}{2E'_{33}} + \sqrt{\left(\frac{1 - \nu'_p}{2E'_p} - \frac{1}{2E'_{33}} \right)^2 + \frac{2\nu'^2_{3p}}{E_p'^2}} \quad (2.506)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2G_{3p}} \quad (2.507)$$

Donde E'_p es el módulo elástico longitudinal drenado, $\nu'_p = -\epsilon_{11}/\epsilon_{22} = \epsilon_{22}/\epsilon_{11}$, $\nu'_{3p} = -\epsilon_{11}/\epsilon_{33} = -\epsilon_{22}/\epsilon_{33}$, $E'_p = \sigma'_{11}/\epsilon_{11} = \sigma'_{22}/\epsilon_{22}$, $E'_{33} = \sigma'_{33}/\epsilon_{33}$ y $G_{3p} = \sigma'_{13}/2\epsilon_{13} = \sigma'_{23}/2\epsilon_{23}$, siendo σ'_{ij} y ϵ_{ij} las componentes de los tensores de tensión efectiva y deformación total, respectivamente, y la expresión de E'_r para $r = 1 \dots 4$, se puede consultar en el trabajo de Schädlich y Schweiger (2012).

El modelo considera la siguiente dependencia de la rigidez con las tensiones:

$$E'_{p,0} = E'_{p,0,ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^m \quad (2.508)$$

$$E'_{33,0} = E'_{33,0,ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^m \quad (2.509)$$

$$G_{3p,0} = G_{3p,0,ref} \left(\frac{p'}{p'_{ref}} \right)^m \quad (2.510)$$

$$E'_{p,0,ref} = E'_{p,0,iso} \left(\frac{\sigma'_{11,0}}{p'_0} \right)^m = E'_{p,0,iso} \left(\frac{\sigma'_{22,0}}{p'_0} \right)^m \quad (2.511)$$

$$E'_{33,0,ref} = E'_{33,0,iso} \left(\frac{\sigma'_{33,0}}{p'_0} \right)^m \quad (2.512)$$

$$G_{3p,0,ref} = G_{3p,0,iso} \left(\frac{\sqrt{\sigma'_{33,0}\sigma'_{11,0}}}{p'_0} \right)^m = G_{3p,0,iso} \left(\frac{\sqrt{\sigma'_{33,0}\sigma'_{22,0}}}{p'_0} \right)^m \quad (2.513)$$

Donde $E'_{p,0}$, $E'_{33,0}$ y $G'_{3p,0}$ son los módulos elásticos iniciales, $p' = \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media efectiva, $E'_{p,0,iso}$ es el módulo longitudinal elástico inicial horizontal efectivo para un estado tensional isótropo, $E'_{33,0,iso}$ es el módulo longitudinal elástico inicial vertical efectivo para un estado tensional isótropo, $G_{3p,0,iso}$ es el módulo de corte elástico inicial para un estado tensional isótropo ($E'_{p,0,iso}$, $E'_{33,0,iso}$ y $G_{3p,0,iso}$ caracterizan la anisotropía inherente del suelo), $\sigma'_{11,0} = \sigma'_{22,0}$ es la tensión horizontal inicial efectiva, $\sigma'_{33,0}$ es la tensión vertical inicial efectiva, p'_0 es la presión media inicial efectiva, p'_{ref} es una presión de referencia y m es un parámetro del suelo.

Por otro lado, el modelo considera la degradación elástica de la rigidez en el rango de las pequeñas deformaciones. La figura 2.115 muestra las curvas de degradación consideradas en cada plano (nivel local).

En la figura 2.116a se muestra el efecto macroscópico de la degradación local en los planos, cuyas curvas locales se muestran en la figura 2.116b. En las expresiones (2.514) a (2.522) se proporciona la formulación matemática de las curvas de degradación locales de este modelo.

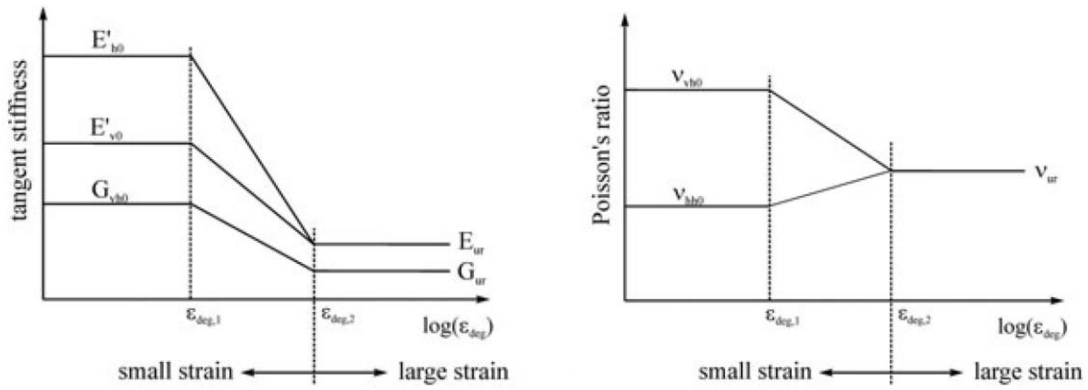


Figura 2.115. Curvas de degradación locales en cada plano (Schädlich y Schweiger, 2012).

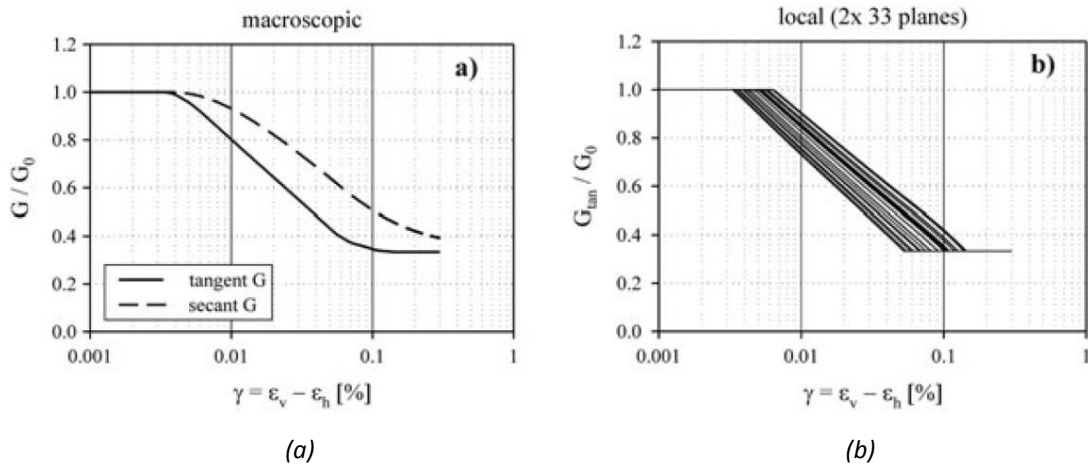


Figura 2.116. (a) Curva de degradación de G_t^{ap} macroscópica (global) integrada sobre todos los planos, (b) Curvas de degradación de G_t^{ap} en cada plano. Schädlich y Schweiger (2012).

Módulos elásticos longitudinales drenados:

$$E'_{ij} = E'_{0,ij} \quad \text{si } \epsilon_{deg} \leq \epsilon_{deg,1} \quad (2.514)$$

$$E'_{ij} = E'_{0,ij} - \frac{\epsilon_{deg} - \epsilon_{deg,1}}{\epsilon_{deg,2} - \epsilon_{deg,1}} (E'_{0,ij} - E'_{ur}) \quad \text{si } \epsilon_{deg,1} < \epsilon_{deg} < \epsilon_{deg,2} \quad (2.515)$$

$$E'_{ij} = E'_{ur} \quad \text{si } \epsilon_{deg} \geq \epsilon_{deg,2} \quad (2.516)$$

Módulos elásticos de corte:

$$G_{ij} = G_{0,ij} \quad \text{si } \epsilon_{deg} \leq \epsilon_{deg,1} \quad (2.517)$$

$$G_{ij} = G_{0,ij} - \frac{\epsilon_{deg} - \epsilon_{deg,1}}{\epsilon_{deg,2} - \epsilon_{deg,1}} (G_{0,ij} - G_{ur}) \quad \text{si } \epsilon_{deg,1} < \epsilon_{deg} < \epsilon_{deg,2} \quad (2.518)$$

$$G_{ij} = G_{ur} \quad \text{si } \epsilon_{deg} \geq \epsilon_{deg,2} \quad (2.519)$$

Coefficientes de Poisson:

$$v'_{ij} = v'_{0,ij} \quad \text{si } \epsilon_{deg} \leq \epsilon_{deg,1} \quad (2.520)$$

$$v'_{ij} = v'_{0,ij} - \frac{\epsilon_{deg} - \epsilon_{deg,1}}{\epsilon_{deg,2} - \epsilon_{deg,1}} (v'_{0,ij} - v'_{ur}) \quad \text{si } \epsilon_{deg,1} < \epsilon_{deg} < \epsilon_{deg,2} \quad (2.521)$$

$$v'_{ij} = v'_{ur} \quad \text{si } \epsilon_{deg} \geq \epsilon_{deg,2} \quad (2.522)$$

Donde E'_{ij} son los valores del módulo longitudinal elástico en el plano i según la dirección j , $E'_{0,ij}$ son los valores máximos del módulo longitudinal elástico drenado en el plano i según la dirección j , E'_{ur} es el valor del módulo longitudinal elástico drenado para medias y grandes deformaciones, G_{ij} son los valores del módulo de corte elástico en el plano i según la dirección j , $G_{0,ij}$ son los valores máximos del módulo de corte elástico en el plano i según la dirección j , G_{ur} es el valor del módulo de corte elástico para medias y grandes deformaciones, v'_{ij} son los valores del coeficiente de Poisson drenado en el plano i según la dirección j , $v'_{0,ij}$ son los valores máximos o mínimos del coeficiente de Poisson drenado en el plano i según la dirección j , v'_{ur} es el valor del coeficiente de Poisson drenado para medias y grandes deformaciones, $\epsilon_{deg,1}$ y $\epsilon_{deg,2}$ son los valores de ϵ_{deg} que se introducen como parámetros y determinan los puntos de cambio de comportamiento de la rigidez del suelo con la deformación y $(n) \rightarrow (n + 1)$ es el paso de cálculo.

El modelo de Schädlich y Schweiger (2012) introduce en su formulación el efecto de la histéresis y de la historia de deformación sobre la rigidez del suelo. Para ello, el modelo trabaja en el espacio de deformaciones desarrollando una formulación consistente con la formulación de la degradación elástica. El modelo identifica puntos de reversión en cada plano a partir de la variable ϵ_{deg} . Esta variable representa el radio de una esfera en el espacio de deformaciones, cuyo tamaño depende de la deformación que haya tenido lugar en el plano considerado desde el último punto de reversión. Cuando $\dot{\epsilon}_{deg} < 0$, se considera que aparece un punto de reversión asociado a dicho plano (figura 2.117). En este sentido, el modelo es equivalente a un modelo de bloques de Simpson (1992) con tantos bloques como planos de integración considerados.

$$\epsilon_{deg} = \sqrt{(\epsilon_{n,dev} - \epsilon_{n,dev,centre})^2 + (\gamma_s - \gamma_{s,centre})^2 + (\gamma_t - \gamma_{t,centre})^2} \quad (2.523)$$

Donde $\epsilon_{n,dev}$ es la deformación desviadora total debida a las tensiones normales al plano considerado, γ_s es la deformación de corte total en la dirección t del plano considerado, γ_s es la deformación de corte total en la dirección s del plano considerado, y $\epsilon_{n,dev,centre}$, $\gamma_{s,centre}$ y $\gamma_{t,centre}$ son los valores de $\epsilon_{n,dev}$, γ_s y γ_s en el último punto de reversión.

Este enfoque permite al modelo cumplir automáticamente las Reglas de Masing generalizadas. No obstante, el número de esferas de radios ϵ_{deg} que el modelo considera para almacenar la historia de deformaciones en los puntos de reversión suele limitarse en función del número máximo de ciclos que se prevea realizar durante la simulación, con objeto de reducir el coste computacional.

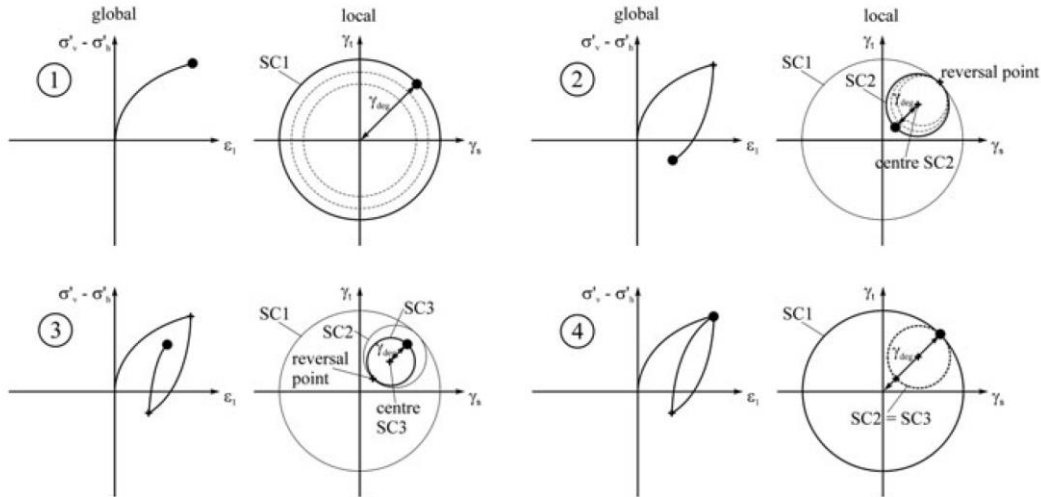


Figura 2.117. Representación esquemática de las curvas $q - \epsilon_1$ globales y contornos de ϵ_{deg} en el espacio de deformaciones de corte locales, para $\epsilon_{n,dev} = 0$ (Schädlich y Schweiger, 2012).

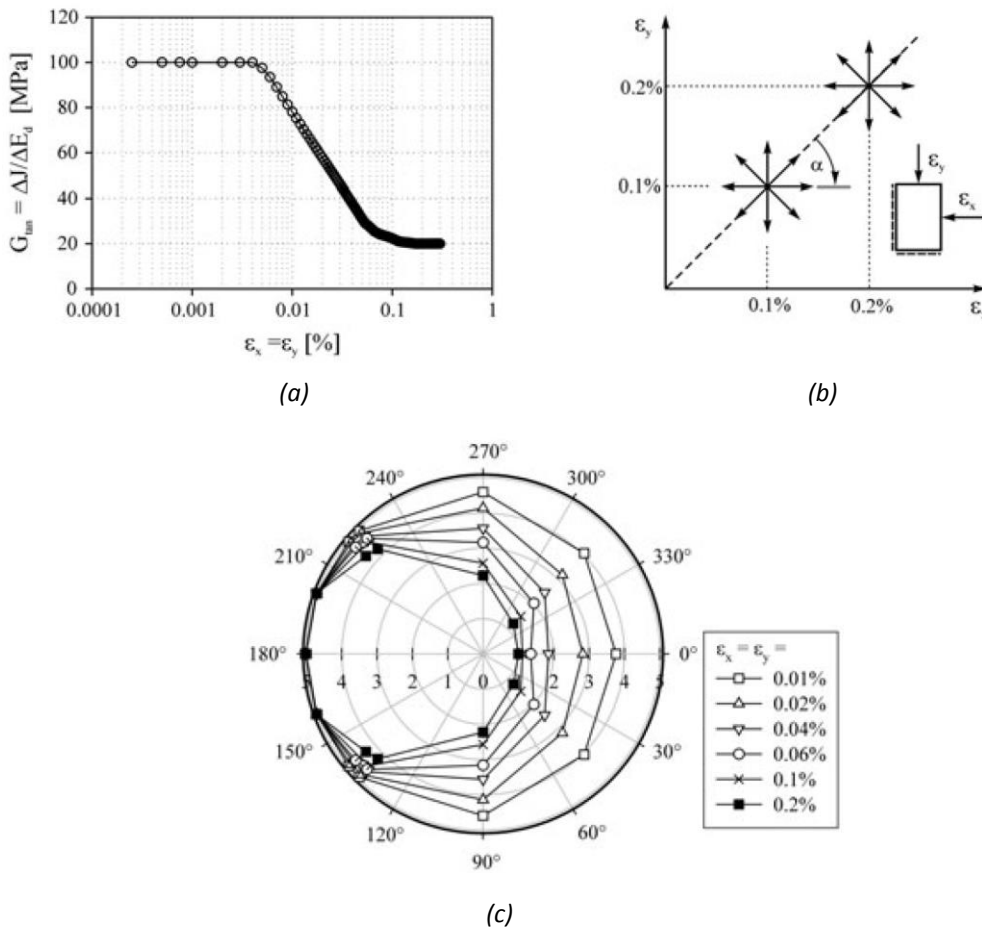


Figura 2.118. Resultados obtenidos de simulaciones con el modelo multilaminado (Schädlich y Schweiger, 2012). (a) Curva de degradación del ensayo biaxial. (b) Trayectorias tensionales de ensayos biaxiales. (c) Valores de G_t^{ap} / G_{ur} según el giro de la trayectoria de deformaciones totales y el valor previo de la deformación acumulada.

En la figura 2.118 se muestra la simulación numérica de un ensayo biaxial en el que se puede ver cómo el modelo considera la dependencia de la rigidez con el giro de la trayectoria tensodeformacional, siendo esta una consecuencia directa de la formulación del mismo. Tras una reversión parcial, la recuperación elástica no se da simultáneamente en todos los planos, lo cual se refleja macroscópicamente en valores intermedios de la rigidez entre el valor máximo y el mínimo. En este sentido, a diferencia del modelo de Niemunis y Herle (1997) descrito en el apartado 2.6.4.1.1 del presente capítulo, el modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger no requiere parámetros específicos para definir esta dependencia.

En las figuras 2.119 y 2.120 se muestran algunos ensayos y sus simulaciones numéricas realizadas con el modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger.

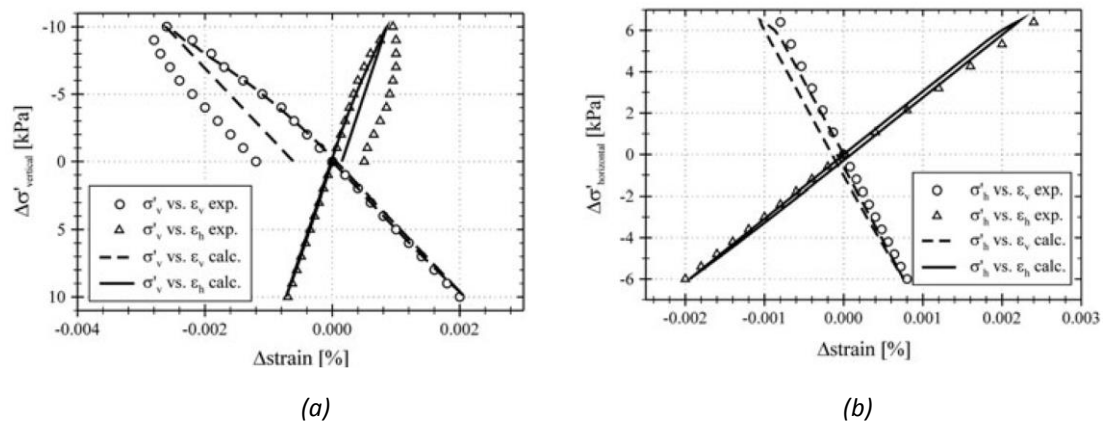


Figura 2.119. Curvas experimentales de tensión-deformación para un ciclo de carga en arena del río Ham (Kuwano y Jardine, 2002) y simulación numérica con el modelo multilaminado y (a) $\dot{\sigma}_h = 0$ y (b) $\dot{\sigma}_v = 0$ (Schädlich y Schweiger, 2012).

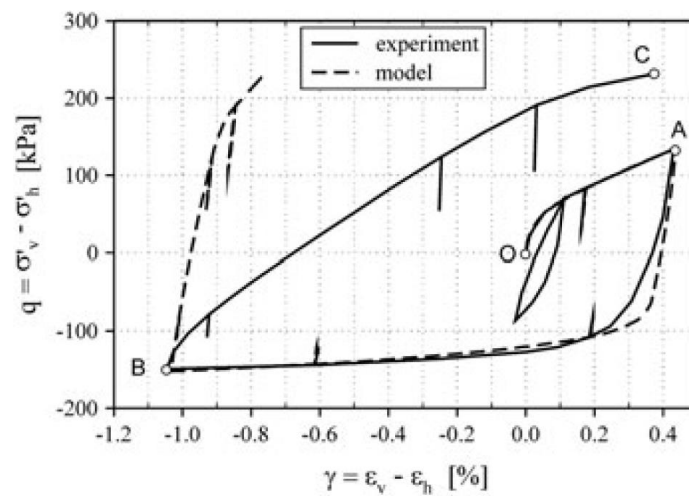


Figura 2.120. Resultados experimentales del ensayo de carga y descarga en gravas de Chiba (Jiang et al., 1997) y simulación numérica con el modelo multilaminado (Schädlich y Schweiger, 2012).

2.6.4. Modelos incrementalmente no lineales

Tal como indican Tamagnini y Viggiani (2002), los modelos incrementalmente no lineales surgieron de la generalización de la teoría hipoeelástica de Truesdell (1956) y del marco teórico de la elastoplasticidad. Las características más importantes de los modelos incrementalmente no lineales son:

- La ausencia de la descomposición explícita de los incrementos de deformación en una parte reversible y otra irreversible
- La continua dependencia no lineal del tensor de rigidez tangente con la dirección del incremento del tensor de deformaciones. Por ello, se considera que los modelos incrementalmente no lineales tienen un número infinito de zonas tensoriales $\#Z \rightarrow \infty$. En algunos casos, no obstante, como en los modelos hipoplásticos con deformación intergranular δ , la no linealidad incremental en el rango de las pequeñas deformaciones está vinculada al signo $\widehat{\delta} : \mathbf{d}$, no apareciendo el tensor de velocidad de deformación \mathbf{d} en la formulación de la rigidez tangente resultante para $\widehat{\delta} : \mathbf{d} > 0$ ni para $\widehat{\delta} : \mathbf{d} \leq 0$. Por ello, a efectos prácticos, dichos modelos pueden ser considerados conceptualmente más próximos a modelos multilineales que a modelos incrementalmente no lineales mientras describen el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.

La ecuación constitutiva más general de este tipo de modelos es la siguiente (Darve y Labanieh, 1982; Darve y Roguiez, 1999):

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{L}(\sigma', \mathbf{q}) : \mathbf{d} + \frac{1}{\|\mathbf{d}\|} \mathbf{Q}(\sigma', \mathbf{q}) :: [\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}] \quad (2.524)$$

Donde $\dot{\sigma}'$ es el incremento del tensor de tensiones, $\mathbf{d} = (1/2)(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$, $\mathbf{L}(\sigma', \mathbf{q})$ es un tensor de segundo orden lineal, $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ es la norma de Hilbert-Schmidt, $\mathbf{Q}(\sigma', \mathbf{q})$ es un tensor de sexto orden y $\mathbf{A} :: \mathbf{B} = A_{ijkl}B_{ijkl}$, siendo \mathbf{A} y \mathbf{B} tensores de cuarto orden.

Como se puede ver, la ecuación constitutiva hipoplástica consta de dos partes diferenciadas:

- Una parte lineal $\mathbf{L}(\sigma', \mathbf{q}) : \mathbf{d}$
- Una parte no lineal $(1/\|\mathbf{d}\|)\mathbf{Q}(\sigma', \mathbf{q}) :: [\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}]$

2.6.4.1. Modelos hipoplásticos

Los modelos hipoplásticos son un caso particular de los modelos incrementalmente no lineales. Concretamente, la teoría hipoplástica fue inicialmente desarrollada por Kolymbas (1977). Posteriormente se distinguieron dos formulaciones hipoplásticas: la denominada K-hipoplasticidad (Kolymbas y Wu, 1993) y la denominada CLoE hipoplasticidad (Chambon, 1989; Chambon et al., 1994). Más adelante, estas formulaciones fueron extendidas por Gudehus (1996), Bauer (1996), Wolffersdorff (1996), Niemunis y Herle (1997) o Herle y Kolymbas (2004), entre otros.

La primera generación de modelos hipoplásticos consideraban $L(\sigma', q) = L(\sigma')$ y $Q(\sigma', q) = N(\sigma') \otimes \mathbb{I}$, donde $\mathbb{I}_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ y $N(\sigma')$ es un tensor de segundo orden, es decir:

$$\dot{\sigma}' = L(\sigma') : d + N(\sigma') \|d\| \tag{2.525}$$

Utilizando las envolventes de Gudehus en el espacio de Rendulic, es posible descomponer el efecto de la parte lineal y no lineal de la anterior ecuación constitutiva (figura 2.121).

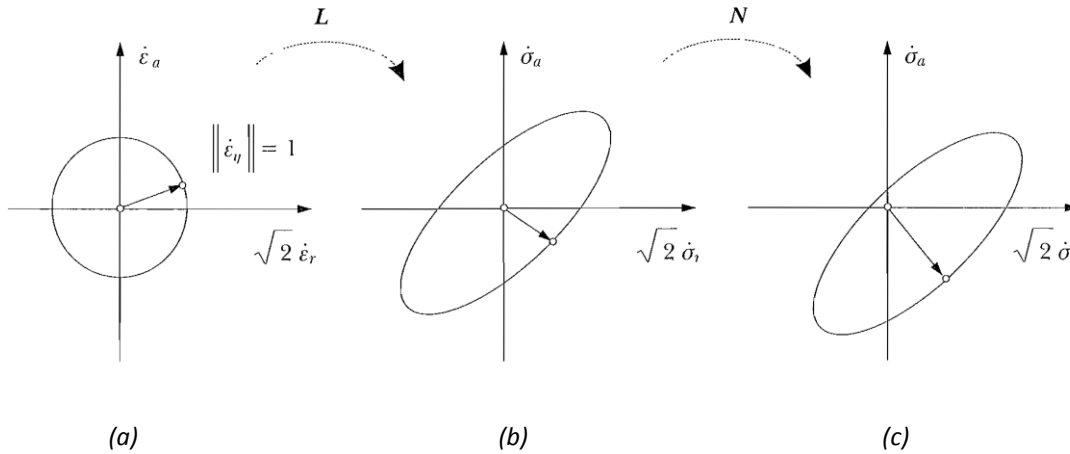


Figura 2.121. Interpretación gráfica de la ecuación constitutiva hipoplástica de los modelos de la primera generación (Tamagnini y Viggiani, 2002). (a) Círculo unitario en espacio de deformaciones. (b) Efecto de la parte lineal. (c) Efecto de la parte no lineal.

La hipoplasticidad ofrece un marco teórico para la descripción del comportamiento mecánico no lineal de materiales granulares, capaz de reproducir las deformaciones del suelo por reordenación de su esqueleto sólido. Asimismo, a diferencia de la teoría elastoplástica, en la teoría hipoplástica no es necesario definir superficies de fluencia ni reglas de flujo, puesto que estos se pueden derivar de la expresión (2.525).

Los modelos hipoplásticos clásicos tienen, no obstante, algunas limitaciones. Entre ellas, el requerimiento de un gran número de parámetros que limitan su uso práctico, así como el hecho de que no acaban de reproducir correctamente el comportamiento real del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones durante cargas cíclicas (efecto *ratcheting*, figura 2.122). Un ejemplo sencillo de esto último lo exponen Niemunis y Herle (1997) para el caso uniaxial, como se muestra a continuación. Particularizando la expresión (2.525) al caso uniaxial, se tiene $\dot{\sigma}' = Ld + N|d|$ para $0 < -N < L$. Se asume que los cambios de tensión e índice de poros durante un ciclo de tensión o deformación son pequeños y por ello los valores de L y N se mantienen constantes durante la aplicación de dicho ciclo. Se aplica un ciclo de deformación $\pm\Delta\epsilon = \pm d\Delta t$ y se calcula la tensión acumulada. Del mismo modo, se aplica un ciclo de tensión $\pm\Delta\sigma'$ y se calcula la deformación acumulada. En ambos casos se obtiene una tensión y deformación acumuladas superiores a las observadas experimentalmente.

$$\Delta\sigma'^{acumulada} = \Delta\sigma'^+ + \Delta\sigma'^- = L\Delta\epsilon + N|\Delta\epsilon| + L(-\Delta\epsilon) + N|-\Delta\epsilon| = 2N|\Delta\epsilon| \tag{2.526}$$

$$\Delta\epsilon^{acumulada} = \Delta\epsilon^+ + \Delta\epsilon^- = \frac{\Delta\sigma'}{(L+N)} + \frac{\Delta\sigma'}{(L-N)} = \frac{2N}{(L^2 - N^2)} \Delta\sigma' \quad (2.527)$$

Para resolver este problema se propusieron diversas estrategias, algunas de ellas expuestas por Tamagnini y Viggiani (2002):

- Incluir el índice de poros como variable de estado para obtener una formulación unificada para suelos con diferentes densidades y para incorporar el concepto de estado crítico (Gudehus, 1996; Bauer, 1996). En este caso, se considera $\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e)$ y $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', e) \otimes \mathbb{I}$ (expresión 2.528), donde $\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', e)$ es un tensor de segundo orden y e es el índice de poros. Una expresión de los tensores $\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e)$ y $\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', e)$ aparece en Woldffersdorff (1996) o Gudehus (1996), incluyendo los factores de barotropía y picnotropía.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e) : \mathbf{d} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', e) \|\mathbf{d}\| \quad (2.528)$$

- Introducir un tensor de estructura para tener en cuenta la anisotropía inherente del suelo (Wu, 1998).
- Introducir una variable interna dependiente de las deformaciones para modelizar el comportamiento cíclico del suelo (Niemunis y Herle, 1997).
- Combinar un modelo hipoplástico con un modelo paraelástico (modelo híbrido, Niemunis y Prada-Sarmiento, 2011).

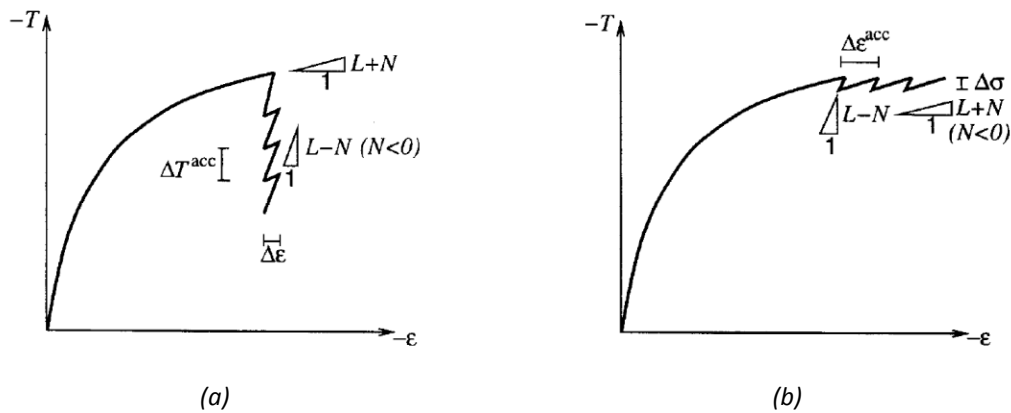


Figura 2.122. Exceso de acumulación de tensión y deformación durante ciclos (Niemunis y Herle, 1997).

(a) Tensión ($\Delta T \equiv \Delta \sigma'$). (b) Deformación ($\Delta \epsilon \equiv \Delta \epsilon$).

Tal como detalla Gudehus (2011), los modelos hipoplásticos clásicos deben incorporar nuevas variables de estado para describir el comportamiento histerético del suelo y a las que es posible atribuir, también, la dependencia de su comportamiento con la historia reciente.

Un modelo hipoplástico que considera el comportamiento del terreno en el rango de las pequeñas deformaciones es el modelo hipoplástico con deformación intergranular de Niemunis y Herle (1997).

2.6.4.1.1. Modelo de Niemunis y Herle (1997)

Niemunis y Herle (1997) desarrollaron un modelo hipoplástico capaz de reproducir el comportamiento del terreno en el rango de las pequeñas deformaciones, teniendo en cuenta el comportamiento histerético no lineal del mismo e incluyendo el efecto de la historia reciente de deformaciones sobre la rigidez.

Según Niemunis y Herle, la deformación en un material granular se compone de:

- La deformación de la interfase granular, que debe entenderse como una medida macroscópica de las microdeformaciones de la interfase entre partículas.
- La deformación por reordenación de los granos que conforman el esqueleto sólido.

Niemunis y Herle proponen una nueva variable δ a la que denominan deformación intergranular, que tiene como objetivo caracterizar la deformación de la interfase granular.

Para el caso uniaxial, la deformación intergranular se define de la siguiente manera:

$$\dot{\delta} = \begin{cases} (1 - |\delta|\tilde{R}^{-1})d & \text{si } \delta d > 0 \\ d & \text{si } \delta d \leq 0 \end{cases} \quad (2.529)$$

Donde \tilde{R} es una medida de la deformación intergranular máxima. En la figura 2.123 se muestra un esquema de la evolución de δ en un ciclo de deformación 1D.

Para el caso bidimensional, se tiene la siguiente expresión de $\dot{\delta}_i$, siendo $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2)^T$.

$$\dot{\delta}_i = \begin{cases} \left(d_i - \frac{(\delta_1 d_1 + \delta_2 d_2)}{\tilde{R} \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}} \right) \delta_i & \text{si } \delta_i d_i > 0 \\ d_i & \text{si } \delta_i d_i \leq 0 \end{cases} \quad (2.530)$$

Un ejemplo de la evolución de δ_i y $\epsilon_i(\delta_i)$ en el caso bidimensional se muestra en la figura 2.124.

Para la generalización al caso multiaxial, se considera un tensor $\boldsymbol{\delta}$ del que se define su magnitud normalizada como $\rho = \|\boldsymbol{\delta}\|/\tilde{R}$ y su dirección como $\hat{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\delta}/\|\boldsymbol{\delta}\|$ si $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$ y $\hat{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{0}$ si $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$. Se introduce un parámetro β'_R en la ley de evolución de $\boldsymbol{\delta}$ para controlar su tasa de variación.

El tensor $\boldsymbol{\delta}$ contempla la historia reciente de las deformaciones (figura 2.125), y es capaz de reproducir el efecto de la historia reciente del suelo observado en los ensayos biaxiales realizados por Topolnicki et al. (1990), en los que se aplican reversiones de la deformación desviadora con distintos ángulos.

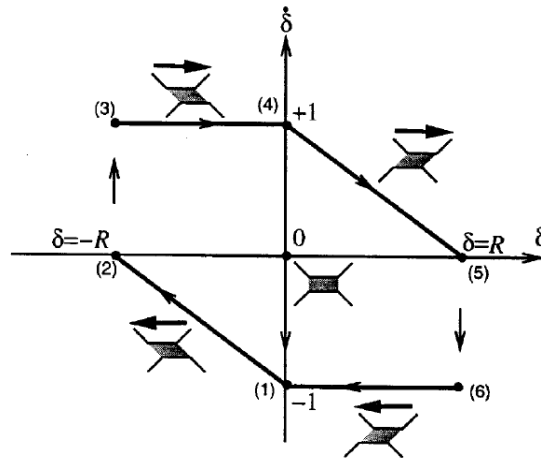


Figura 2.123. Evolución de δ en un ciclo de deformación unidimensional ($R \equiv \tilde{R}$) (Niemunis y Herle, 1997).

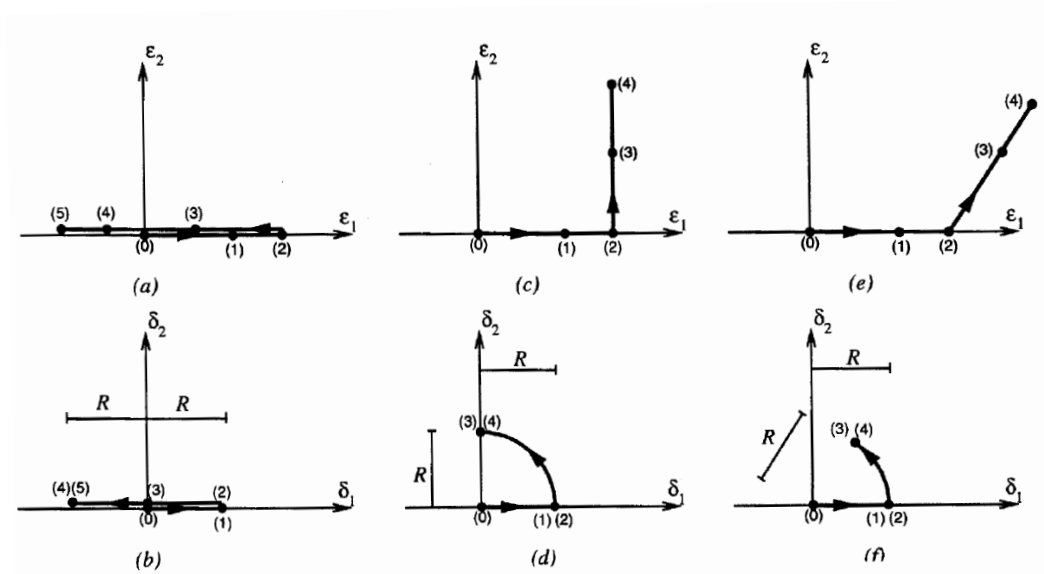


Figura 2.124. Ejemplo de la evolución de δ_i y $\epsilon_i(\delta_i)$ en el caso bidimensional ($R \equiv \tilde{R}$) (Niemunis y Herle, 1997).

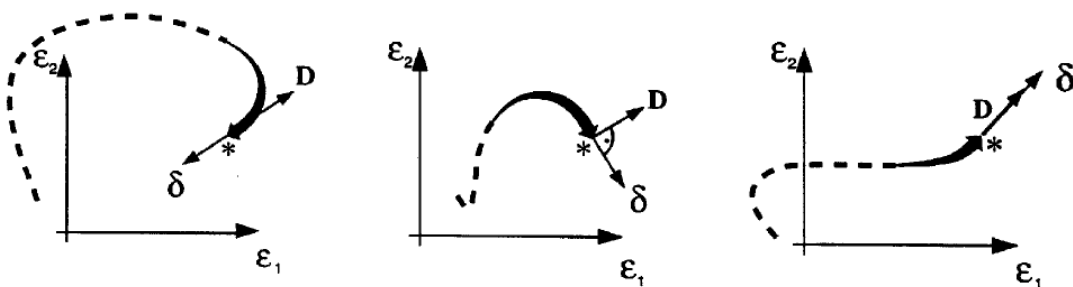


Figura 2.125. Diferentes deformaciones intergranulares δ con diferentes historias de deformación (Niemunis y Herle, 1997). Sólo la parte reciente de la trayectoria de deformación (flecha negra curvilínea) tiene influencia en δ . El punto (*) es común en las tres trayectorias.

En el caso multiaxial, se define $\hat{\delta}$ como sigue (figura 2.126):

$$\hat{\delta} = \begin{cases} (\mathbb{I} - \hat{\delta} \otimes \hat{\delta} \rho \beta'_R) : \mathbf{d} & \text{si } \hat{\delta} : \mathbf{d} > 0 \\ \mathbf{d} & \text{si } \hat{\delta} : \mathbf{d} \leq 0 \end{cases} \quad (2.531)$$

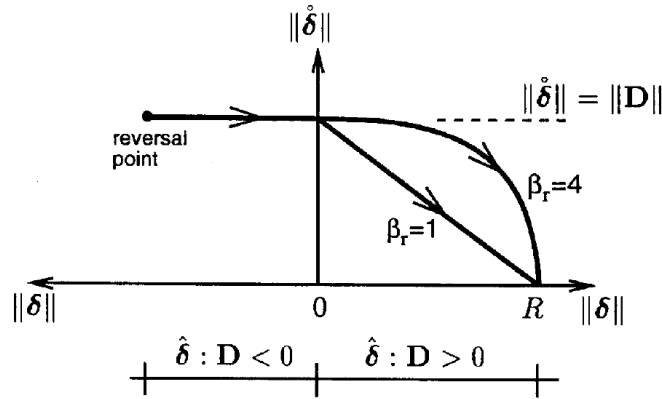


Figura 2.126. Evolución de la variable de deformación intergranular δ ($R \equiv \tilde{R}$, $\beta_R \equiv \beta'_R$) (Niemunis y Herle, 1997).

La ecuación constitutiva incremental propuesta por Niemunis y Herle en el caso multiaxial es la siguiente:

$$\dot{\sigma}^J = \mathbf{M} : \mathbf{d} \quad (2.532)$$

$$\mathbf{M} = [\rho^\chi m_T + (1 - \rho^\chi) m_R] \mathbf{L}(\sigma', e) + \begin{cases} \rho^\chi (1 - m_T) \mathbf{L}(\sigma', e) : \hat{\delta} \otimes \hat{\delta} + \rho^\chi \mathbf{N}(\sigma', e) \otimes \hat{\delta} & \hat{\delta} : \mathbf{d} > 0 \\ \rho^\chi (m_R - m_T) \mathbf{L}(\sigma', e) : \hat{\delta} \otimes \hat{\delta} & \hat{\delta} : \mathbf{d} \leq 0 \end{cases} \quad (2.533)$$

Donde \mathbf{M} es el tensor de rigidez tangente que relaciona los incrementos del tensor de tensiones de Jaumann $\dot{\sigma}^J = \dot{\sigma}' - \dot{\sigma}' \cdot \mathbf{W}^T - \mathbf{W} \cdot \dot{\sigma}'^T$ con los incrementos de velocidad de deformación $\mathbf{d} = (1/2)(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$ según la expresión $\dot{\sigma}^J = \mathbf{M} : \mathbf{d}$, siendo $\mathbf{W} = (1/2)(\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T)$, $\mathbf{L}(\sigma, e)$ y $\mathbf{N}(\sigma, e)$ son, respectivamente, tensores de cuarto y segundo orden (expresión 2.528) que dependen de la tensión y del índice de poros, m_R, m_T ($m_R > m_T > 1$) son parámetros del suelo que controlan el valor de la rigidez ante giros de δ de 90° y 180° respectivamente, y χ es un parámetro de interpolación entre $\rho = 1$ y $\rho = 0$. Niemunis y Herle (1997) proponen valores de $\chi = 1 - 10$. Por su parte, Cudmani (2010) propone valores de $\chi = 0,80 - 1,50$, $m_R = 2 - 7$ y $m_T = 2 - 7$.

De las expresiones (2.532) y (2.533) se deduce, para $\rho = 0$, que $\dot{\sigma}^J = m_R \mathbf{L}(\sigma', e) : \mathbf{d}$, mientras que para $\rho = 1$ se tienen los siguientes casos (figura 2.127):

- Cuando $\mathbf{d} \sim \hat{\delta}$ se tiene que $\mathbf{d} : \hat{\delta} = 1$ y, por tanto, $\mathbf{d} = \hat{\delta} \|\mathbf{d}\|$ y $\mathbf{N}(\sigma', e) \otimes \hat{\delta} : \mathbf{d} = \mathbf{N}(\sigma', e) \|\mathbf{d}\|$, con lo que se recupera la ecuación hipoplástica original $\dot{\sigma}^J = \mathbf{L}(\sigma', e) : \mathbf{d} + \mathbf{N}(\sigma', e) \|\mathbf{d}\|$.

- Cuando $\mathbf{d} \sim -\hat{\boldsymbol{\delta}}$ se tiene que $\mathbf{d}:\hat{\boldsymbol{\delta}} = 0$ y, por tanto, $\mathbf{d} = -\hat{\boldsymbol{\delta}}\|\mathbf{d}\|$ y $\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e):\hat{\boldsymbol{\delta}}\otimes\hat{\boldsymbol{\delta}}:\mathbf{d} = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e):\hat{\boldsymbol{\delta}}\|\mathbf{d}\| = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e):\mathbf{d}$, obteniéndose $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = m_R \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e):\mathbf{d}$.
- Cuando $\mathbf{d} \perp \hat{\boldsymbol{\delta}}$ se tiene que $\mathbf{d}:\hat{\boldsymbol{\delta}} = 0$ y, por tanto, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = m_T \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', e):\mathbf{d}$.

Para casos con $0 < \rho < 1$, el modelo interpola exponencialmente entre los valores $\rho = 1$ y $\rho = 0$, con el valor de χ .

Como se puede ver, el modelo recupera para $\|\boldsymbol{\delta}\| = \tilde{R}$ la expresión original (2.528), recuperando así la condición de modelo incrementalmente no lineal.

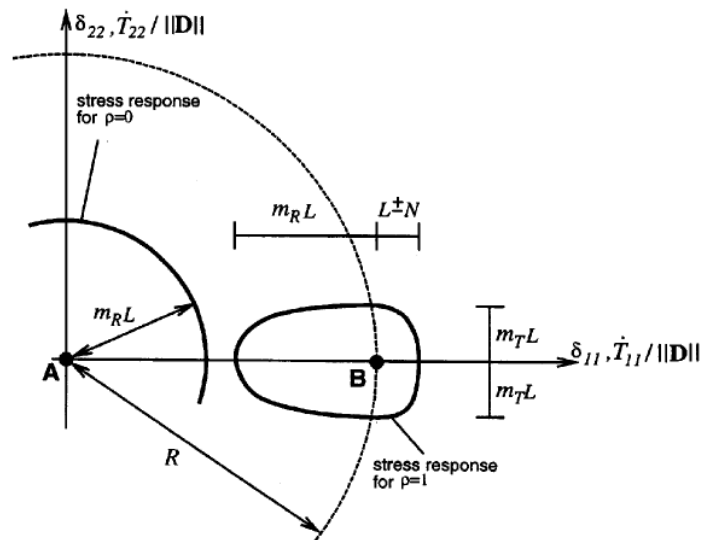


Figura 2.127. Variación de la rigidez con m_T y m_R para $\rho = 1$ y $\rho = 0$ ($R \equiv \tilde{R}$) (Niemunis y Herle, 1997). Por simplicidad, se asume $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J(\mathbf{d}) \sim \mathbf{d}$.

Este modelo identifica puntos de reversión a partir del ángulo entre el tensor $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ y el tensor \mathbf{d} . Tal como indican Tamagnini y Viggiani (2002), en los modelos hipoplásticos con variables de deformación intergranular, la no linealidad incremental de \mathbf{M} está vinculada al signo $\hat{\boldsymbol{\delta}}:\mathbf{d}$, por lo que puede considerarse que estos modelos tienen únicamente dos zonas tensoriales, siendo, conceptualmente, más próximos a los modelos incrementalmente multilineales que a los modelos incrementalmente no lineales verdaderos cuando describen el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.

El modelo de Niemunis y Herle almacena información en varios puntos de reversión históricos recientes dada la estructura de $\boldsymbol{\delta}$. Por lo general, este modelo puede incumplir los principios termodinámicos y generar energía en ciclos de carga cerrados

Asimismo, este modelo permite simular el comportamiento experimental del suelo descrito en Atkinson et al. (1990), Clayton y Heymann (2001), Gasparre (2005) o Gasparre et al. (2007) (figuras 2.29, 2.30 y 2.31) como se puede ver en la figura 2.128. Además, se trata del único modelo de todos los estudiados

en el presente capítulo que define explícitamente varias curvas de degradación a través de los parámetros m_R y m_T en función del grado de reversión.

En la figura 2.129 se muestra el valor de G_t/G_{ur} en función del giro de la trayectoria de deformaciones totales en el modelo de Niemunis y Herle (1997), según Benz (2007).

En las figuras 2.130 y 2.131 se puede ver como el modelo de Niemunis y Herle mejora la aproximación al comportamiento real del terreno respecto al modelo hipoplástico general.

Masín (2006) propuso algunas modificaciones en este modelo para resolver el efecto de $\eta = q/p'$ sobre G_0 y el efecto que tiene, sobre la curva de degradación, el hecho que la trayectoria tensional cruce el eje $p' = 0$ kPa (figuras 2.132 y 2.133)

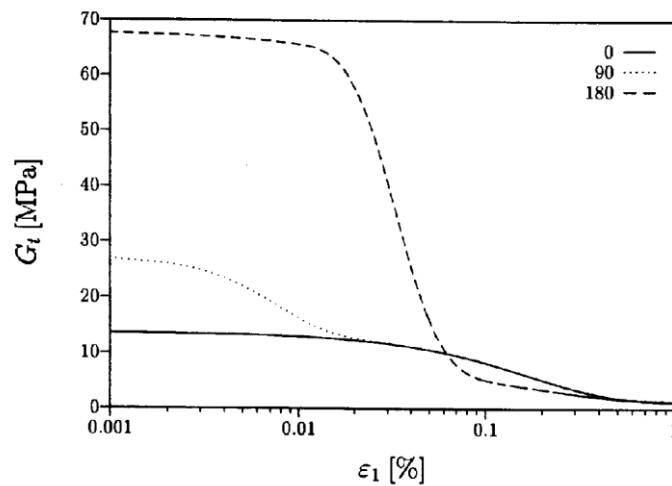


Figura 2.128. Ejemplo de curvas de degradación de la rigidez calculadas con el modelo hipoplástico con deformación intergranular (Niemunis y Herle, 1997).

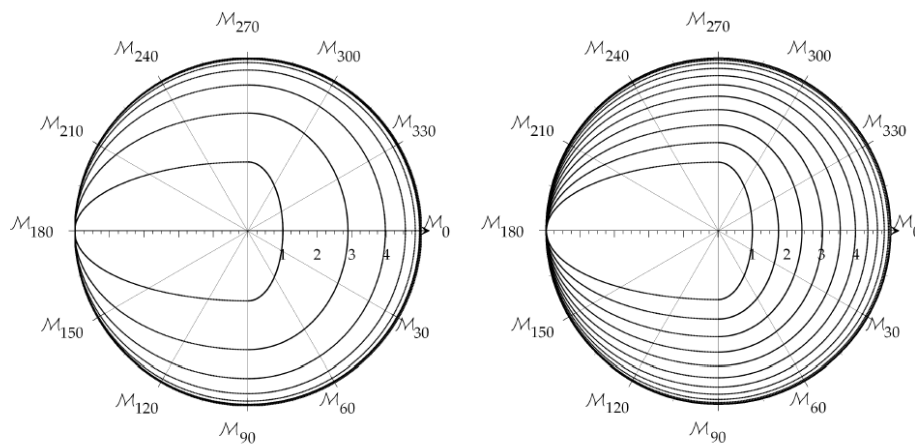


Figura 2.129. Valores de G_t^{ap}/G_{ur} según el giro de la trayectoria de deformaciones total en el modelo de Niemunis y Herle (1997) para valores de $L(\sigma', e) = 1$, $N(\sigma', e) = 0$, $m_R = 5$, $m_T = 2$ y valores de $\chi = 6,0$ (izquierda) y $\chi = 2,0$ (derecha) (Benz, 2007).

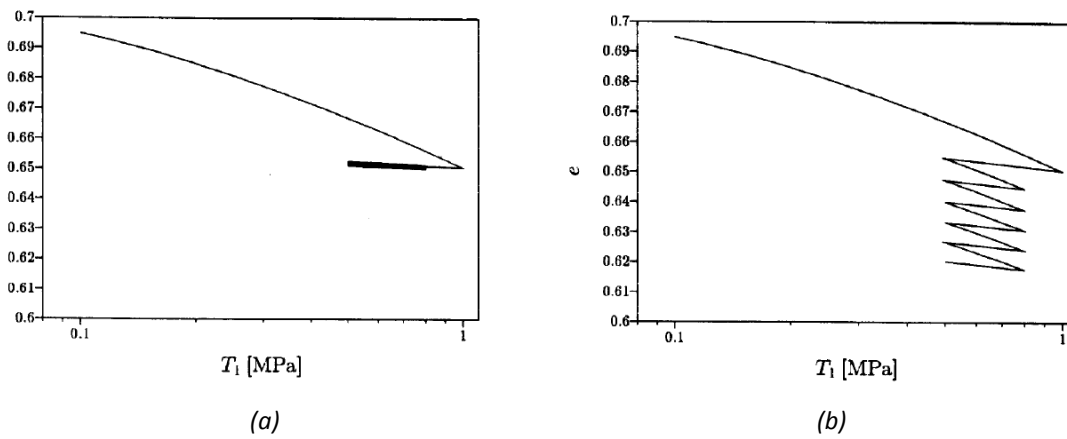


Figura 2.130. Ensayo edométrico numérico cíclico (Niemunis y Herle, 1997).
 (a) Modelo modificado por Niemunis y Herle. (b) Modelo hipoplástico de Wolffersdorff (1996).

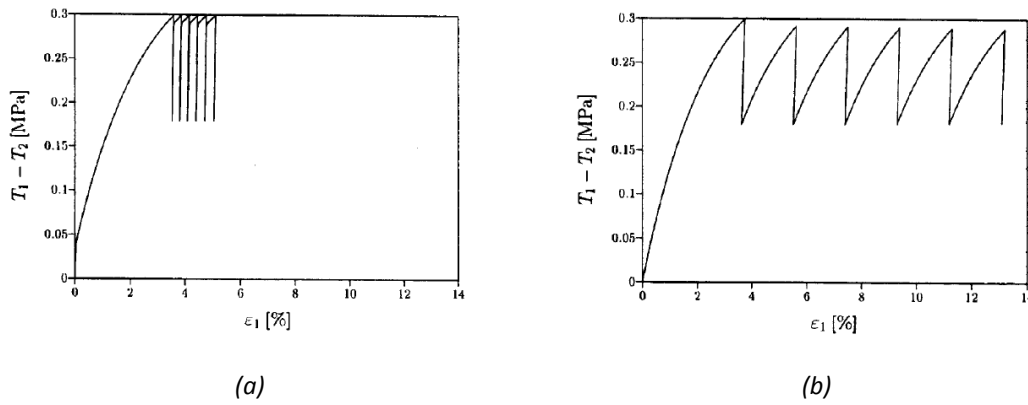


Figura 2.131. Ensayo triaxial drenado numérico cíclico (Niemunis y Herle, 1997).
 (a) Modelo modificado por Niemunis y Herle. (b) Modelo hipoplástico de Wolffersdorff (1996).

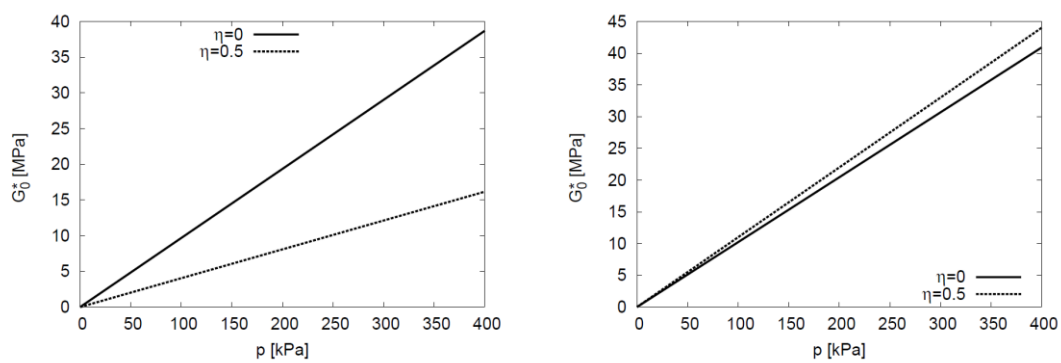


Figura 2.132. Influencia de $\eta = q/p'$ sobre G_0^* (Masín, 2006).
 (a) Según modelo de Niemunis y Herle (1997). (b) Según modelo de Masín (2006).

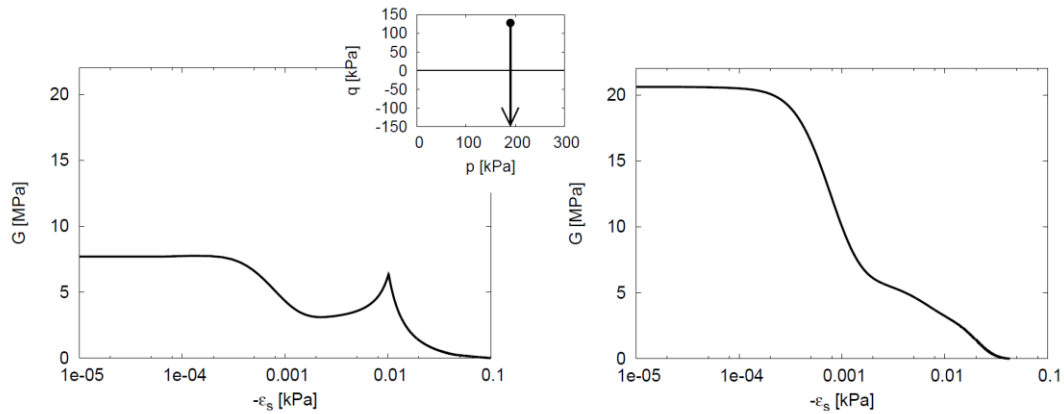


Figura 2.133. Influencia del cruce de la trayectoria tensional por $p' = 0$ kPa (Masín, 2006).
 (a) Según modelo de Niemunis y Herle (1997). (b) Según modelo de Masín (2006).

2.6.4.2. Modelos híbridos

Algunos modelos avanzados recientes combinan conceptos de los anteriores marcos teóricos. En este apartado se muestra brevemente el caso concreto de la combinación entre hipoplasticidad y paraelasticidad, desarrollada por Niemunis y Prada-Sarmiento (2011)

2.6.4.2.1. Combinación hipoplasticidad y paraelasticidad

Niemunis y Prada-Sarmiento (2011) proponen combinar el modelo paraelástico de Niemunis et al. (2011a, 2011b) (apartado 2.6.3.1.1.2) con un modelo hipoplástico.

La parte paraelástica del modelo híbrido resultante es capaz de reproducir correctamente el comportamiento histerético del terreno, mientras que la parte hipoplástica es capaz de reproducir correctamente las deformaciones no lineales del suelo debidas a la reordenación de su esqueleto sólido.

Niemunis y Prada-Sarmiento (2011) proponen la siguiente ecuación constitutiva para este modelo:

$$\dot{\sigma}' = \left(\mathbf{L}(\sigma', e) - \mathbf{H}'(\bar{f}, \bar{\chi}, d_L)(1 - w') \right) : \dot{\epsilon} + \mathbf{N}(\sigma', e) \|\dot{\epsilon}\| w' + \dot{\sigma}'^{PE} \quad (2.534)$$

$$w' = \left\langle \frac{d_{AR1} - d_0}{d_L - d_0} \right\rangle^{\beta_R} \quad (2.535)$$

$$d_{AR1} = - \frac{{}^{AR1}\epsilon : {}^{AR1}\epsilon}{{}^{AR1}\epsilon : \mathbf{N}R1} \quad (2.536)$$

Donde $\dot{\sigma}'$ es el incremento del tensor de tensiones, $\mathbf{L}(\sigma', e)$ y $\mathbf{N}(\sigma', e)$ son los tensores de la expresión hipoplástica (2.528), \mathbf{H}' es el tensor de rigidez de la parte paraelástica (modelo de Niemunis et al. (2011a, 2011b)), w' es el peso que pondera la parte paraelástica e hipoplástica en la formulación del

modelo (figura 2.134), $\langle \cdot \rangle$ son los paréntesis de Macauley, con $\langle X \rangle = X$ si $X \geq 0$ y $\langle X \rangle = 0$ si $X < 0$, $\dot{\sigma}^{IPE}$ es el incremento de tensión paelástica según el modelo de Niemunis et al. (2011a, 2011b), \mathbf{N}^{R1} es la normal exterior al círculo de carga medido desde el último punto de reversión $R1 = ({}^{R1}\epsilon, {}^{R1}\sigma')$, ${}^{AR1}\epsilon = \epsilon - {}^{R1}\epsilon$, ϵ es el tensor de deformaciones, ${}^{R1}\epsilon$ es el tensor de deformaciones en el último punto de reversión $R1$ y d_L , d_0 y β_R son parámetros del modelo.

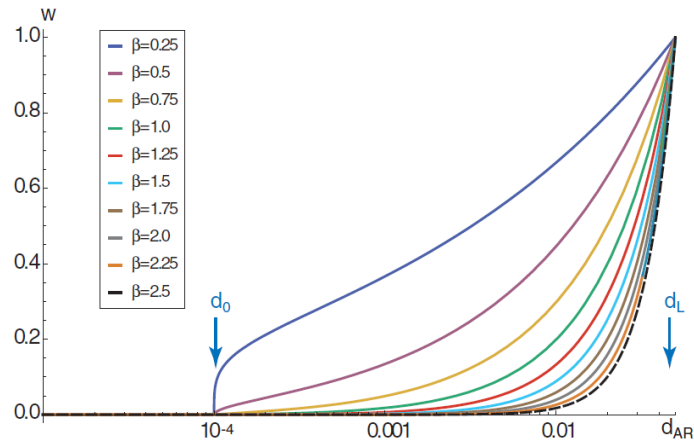


Figura 2.134. Peso w' para diferentes valores de β_R (Niemunis y Prada-Sarmiento, 2011).

Capítulo 3

Modelo *HQH*

En el presente capítulo se desarrolla, a nivel teórico, el modelo *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)*, según la nomenclatura empleada en el capítulo 2, que tiene por objeto:

- 1) Reproducir el comportamiento reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, tratando de mejorar la aproximación a dicho comportamiento proporcionada por el modelo *Small Strain Overlay Model (SSOM)* de Benz (2007) en relación a (1) el tratamiento del comportamiento no lineal en tensiones y deformaciones, (2) el comportamiento histerético (variables de estado, criterio de reversión, reglas de memoria y efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación y sobre las que controlan la rigidez máxima del suelo), (3) el efecto de las reversiones de las deformaciones desviadoras sobre el módulo volumétrico elástico, (4) la consideración de la anisotropía inducida en deformaciones y (5) la corrección de las inconsistencias del modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis (Castellón, 2013; Plaxis, 2015), una vez combinado el modelo *HQH* con un modelo plástico.
- 2) Proporcionar flexibilidad para combinarse fácilmente con modelos plásticos utilizados en la práctica habitual de la ingeniería geotécnica, dando lugar a modelos avanzados de tipo elastoplástico comparables con el modelo *HS-SS*. Este tipo de modelos son capaces de describir el comportamiento del suelo en cualquier rango de deformación (Zonas I, II, III y IV de Jardine (1992)).
- 3) Incrementar en lo mínimo posible el número de parámetros respecto a los requeridos en el modelo *SSOM*. Asimismo, todos los parámetros del modelo *HQH* deben tener un significado físico claro y su obtención o estimación debe ser viable en la práctica habitual de la ingeniería geotécnica.
- 4) Tener un coste computacional razonable para su uso en la práctica profesional.

En cuanto al convenio de signos utilizado en la formulación desarrollada en el presente capítulo, por congruencia con el criterio utilizado en Plaxis, se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión, incluida la del agua. Asimismo, en todo momento se considera el marco teórico de las pequeñas deformaciones ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

3.1. Marco teórico del modelo *HQH*

El modelo *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)* se clasifica dentro de los modelos que se han denominado, en el capítulo 2, modelos incrementalmente multilineales, aunque la dependencia indirecta de la rigidez de dicho modelo con la dirección del incremento del tensor de deformación desviadora $\hat{\mathbf{e}}$, permite considerarlo como un modelo incrementalmente no lineal cuando describe el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.

El modelo *HQH* se enmarca en el grupo de modelos histeréticos quasi-hipoelásticos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, es decir, en las Zonas I y II de Jardine (1992). En el capítulo 5 se combinará el modelo *HQH* con un modelo plástico, dando lugar a un modelo avanzado de tipo elastoplástico, según la nomenclatura utilizada en el capítulo 2, en el cual el modelo *HQH* se encargará de describir el comportamiento reversible del suelo, mientras que el modelo plástico hará lo propio con el comportamiento no reversible del mismo, correspondiente a las Zonas III y IV de Jardine (1992).

3.2. Dominios de deformación del modelo *HQH*

El modelo *HQH* distingue dos dominios de deformación en función del valor de las deformaciones desviadoras totales y considera una ecuación constitutiva diferente en cada uno de ellos.

Tal como se ha expuesto en los apartados 2.3, 2.4 y 2.5 del capítulo 2, la deformación volumétrica refleja fundamentalmente el efecto de cargas esféricas, que tienden a incrementar el valor de las fuerzas de contacto entre partículas, mientras que la deformación desviadora generada por las cargas desviadoras modifica la dirección de dichas fuerzas y afecta considerablemente la rigidez al corte del suelo. Basándose en lo anterior, el modelo *HQH* tiene en cuenta, por un lado, el efecto de las cargas y deformaciones volumétricas a través de la dependencia de K' y G con $-p'$, tanto en el Dominio 1 como en el Dominio 2 y, por otro lado, el efecto de las cargas y deformaciones desviadoras a través de la dependencia de G con $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ en el Dominio 1.

La frontera entre ambos dominios viene definida por el valor de la deformación $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^{\alpha}$, donde $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{oct} - \gamma_{oct}^R$, $\gamma_{oct} = \sqrt{4/3}\|\mathbf{e}\|$, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct}\mathbf{1}$, $\epsilon_{oct} = 1/3\epsilon_{ii}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ es el tensor de deformaciones totales, $\gamma_{oct}^R = \sqrt{4/3}\|\mathbf{e}^R\|$, \mathbf{e}^R es una variable de estado que almacena el valor del tensor de deformación desviadora total en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo, γ_{ur}^{α} es el valor de $\gamma_{oct}^{\Delta R}$ que cumple $G_t^{ap}(\gamma_{ur}^{\alpha}) = G_{t,ur}$, siendo G_t^{ap} el módulo de corte aparente tangente y $G_{t,ur}$ el valor mínimo de dicho módulo de corte en el Dominio 1, y $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ es la norma de Hilbert-Schmidt.

- **Dominio 1** ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$): La componente reversible de la deformación sigue un comportamiento no lineal con la deformación desviadora y con la presión media, histerético y dependiente de la historia reciente. En este dominio de deformación se tiene en cuenta la anisotropía inducida en deformaciones.

- **Dominio 2** ($\gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^{\alpha}$): La componente reversible de la deformación sigue un comportamiento lineal con la deformación desviadora, no lineal con la presión media, histerético y dependiente de la historia reciente.

En un proceso de degradación sin reversión en el que se cumpla $\dot{\gamma}_{oct}^H \approx \dot{\gamma}_{oct}^{\Delta R}$ y $\gamma_{oct}^H \approx \gamma_{oct}^{\Delta R}$, la ecuación constitutiva en la frontera de ambos dominios de deformación adoptará la misma expresión, $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}): \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$, asegurando, por tanto, su continuidad. Cuando no se cumplen las anteriores condiciones, pueden aparecer escalones en las curvas de degradación de la rigidez al corte, tal como se expone en el apartado 6.4.3 del capítulo 6, lo cual es debido a que el modelo evalúa la pertenencia a un dominio u otro mediante la deformación $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, mientras que la rigidez depende de la variable de estado γ_{oct}^H .

Asimismo, tal como se detalla en el capítulo 5, en función de la proximidad del estado tensodeformacional a alguna de las superficies de fluencia plásticas tras una reversión, podrán aparecer deformaciones no reversibles tanto en el Dominio 1 como en el Dominio 2, no representando estos dominios una frontera entre las Zonas I y II y las Zonas III y IV de Jardine.

Se entenderá por reversión cualquier giro en la trayectoria de deformaciones que dé lugar a una variación de la rigidez del suelo. En relación con las reversiones, tal como se explicará en detalle en el apartado 3.7 del presente capítulo, el modelo *HQH* distingue entre:

- Reversiones que afectan el valor de la rigidez G_s a través de las variables de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y \mathbf{h} . Ello tiene lugar cuando se cumple la condición $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \leq \cos(\alpha^*)$.
- Reversiones que afectan el valor de la rigidez γ , además, dan lugar a un punto de reversión que define el extremo de un nuevo ciclo de deformación. Ello tiene lugar cuando se cumplen las condiciones $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \leq (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\boldsymbol{\epsilon}})^* = \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^{\Delta R}:\hat{\boldsymbol{\epsilon}} \leq (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\boldsymbol{\epsilon}})^* = \cos(\alpha^*)$ simultáneamente, e implica una modificación del valor de las variables de estado $\mathbf{e}^{e,R}$, \mathbf{e}^R , \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e , además de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y \mathbf{h} .

El modelo *HQH* distingue claramente la región en la cual el estado del suelo depende de las variables de estado $\boldsymbol{\chi}^{el,hist}$ encargadas de definir el comportamiento no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente ($G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$, $\mathbf{e}^{e,R}$, \mathbf{e}^R , \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e), de su región complementaria, denominada *SOM* (*Swept-Out-Memory*) por Gudehus et al. (1977), en la cual el estado del suelo depende exclusivamente del tensor de tensiones y del índice de poros (aunque este último no se incorpora como variable de estado en el modelo *HQH*).

3.3. Ecuación constitutiva general en el Dominio 1

La ecuación constitutiva general del modelo *HQH* en el Dominio 1 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$), considerando un material inicialmente isótropo, es la siguiente:

$$(-p'\mathbf{1} + \mathbf{s}^{\Delta R}) - \boldsymbol{\sigma}'^{ini} = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}): (-\boldsymbol{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R}) \quad (3.01)$$

$$\mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}) = \left(\left(K'_s - \frac{2}{3} G_s^{ap} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 G_s^{ap} \mathbb{I} \right) \quad (3.02)$$

Donde $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$, $\mathbf{s}^{\Delta R} = \mathbf{s} - \mathbf{s}^R$, $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct}\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma}'$ es el tensor de tensiones, \mathbf{s}^R es el tensor de tensiones desviadoras en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo, $\boldsymbol{\sigma}'^{ini}$ es el tensor de tensiones en el estado inicial, $-\epsilon^e_{oct} = -1/3\epsilon^e_{ii}$, $\mathbf{e}^{e,\Delta R} = \mathbf{e}^e - \mathbf{e}^{e,R}$, $\mathbf{e}^e = \boldsymbol{\epsilon}^e - \epsilon^e_{oct}\mathbf{1}$, $\boldsymbol{\epsilon}^e$ es el tensor de deformaciones elásticas, $\mathbf{e}^{e,R}$ es una variable de estado que almacena el tensor de deformaciones desviadoras elásticas en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo, $\mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap})$ es el tensor de rigidez secante que adopta la estructura del tensor de rigidez de un modelo elástico isótropo y depende del módulo volumétrico elástico secante drenado K'_s y del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} , $(\mathbb{I})_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ y $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$.

La parte desviadora de la ecuación constitutiva (3.01) adopta una estructura similar a la del modelo de Hueckel y Nova (1979) o Niemunis et al. (2011a), expuestos, respectivamente, en los apartados 2.6.3.1.1.1 y 2.6.3.1.1.2 del capítulo 2.

Asimismo, debe tenerse en cuenta que las reversiones en el modelo *HQH* se definen en función del giro de las trayectorias de deformaciones desviadoras totales y afectan únicamente a la rigidez al corte del suelo y no a su rigidez volumétrica, salvo en aquellos casos en los que exista una variación de la deformación desviadora y se cumpla $v' = v'_{min}$ (ver apartado 3.5 del presente capítulo). Esta consideración distingue el modelo *HQH* de otros modelos, como el modelo *HS-SS*, que, según lo expuesto en el apartado 2.5.1 del capítulo 2, consideran $K' = K'(G, v')$, por lo que las reversiones que afectan el valor de G también afectarán el valor de K' .

3.3.1. Módulo volumétrico elástico secante en el Dominio 1

El modelo *HQH* adopta la expresión (3.03) para calcular el módulo volumétrico elástico secante K'_s en el Dominio 1 (y también en el Dominio 2), ampliamente aceptada y basada en los trabajos previos de Duncan y Chang (1970) y Duncan et al. (1980).

$$K'_s = K_s^{ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,1}} \right)^{m_1} \quad (3.03)$$

Donde, en la expresión anterior, K_s^{ref} es el valor de K'_s para $-p' = p'_{ref,1}$, $p'_{ref,1}$ es una presión de referencia, $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$ y m_1 es un parámetro del suelo que puede tomar valores entre 0,0 y 1,0. El parámetro m_1 es diferente al parámetro m que controla la evolución de los módulos de rigidez con el confinamiento en los modelos *Hardening Soil (HS)* de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), *Hardening Soil Small (HS-S)* de Benz (2007) y *HS-SS*. Ello es así tanto por el hecho de que m_1 afecta a $(-p'/p'_{ref,1})$ mientras que m afecta a $(-\sigma'_3/p'_{ref})$, como por las demostraciones de Kempfert y Gebreselassie (2006), en las que se deduce que dichos exponentes deben ser diferentes.

Tomando la parte volumétrica de la expresión (3.01), se tiene que $-p' - (-p'^{ini}) = -3K'_s \epsilon_{oct}^e$, donde p'^{ini} es el valor de la presión media inicial (por ejemplo, la presión *in situ* en el terreno) y $-\epsilon_{oct}^e = -1/3\epsilon_{ii}^e$. Sustituyendo esta expresión en la (3.03), se obtiene lo siguiente:

$$K'_s = K'_s{}^{ref} \left(\frac{-p'^{ini} - 3K'_s \epsilon_{oct}^e}{p'_{ref,1}} \right)^{m_1} \quad (3.04)$$

3.3.2. Módulo de corte aparente secante en el Dominio 1

El modelo *HQH* considera la degradación del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} con la deformación octaédrica desviadora total histórica en el Dominio 1. La formulación de dicha degradación se realiza en el espacio de deformaciones teniendo en cuenta lo expuesto en el apartado 2.6.3.2.3 del capítulo 2. Se adopta la expresión (3.05) para el cálculo del módulo de corte aparente secante en el Dominio 1. Dicha expresión está basada, si bien introduce nuevos elementos, en la expresión del módulo de corte aparente secante utilizada en el modelo *HS-SS* descrito en el apartado 2.6.3.2.1.3 del capítulo 2, que es la misma que la (2.208) utilizada en el modelo *SSOM* descrito en el apartado 2.6.3.1.2.2.22 del capítulo 2. A su vez, todas estas expresiones están basadas en la (2.203) y (2.206) de Dos Santos y Correia (2001), que modifican las expresiones originales (2.143) y (2.144) de Hardin y Drnevich (1972).

$$G_s^{ap} = \frac{G_{s,0}^{ap,\alpha}}{1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^H}{\xi \gamma_{0.7}} \right)} \quad (3.05)$$

$$G_{s,0}^{ap,\alpha} = G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} \quad (3.06)$$

$$\gamma_{oct}^H = \sqrt{\frac{4}{3}} \|\mathbf{h}\| \quad (3.07)$$

Donde, en las expresiones anteriores, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ es la variable de estado que almacena el valor del módulo de corte máximo correspondiente a la curva de degradación activa α para $-p' = p'_{ref,2}$ y su valor está comprendido entre el valor de la rigidez máxima tras giros de la deformación desviadora de $\alpha = 90^\circ$ ($G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$) y el valor de la rigidez máxima tras giros de la deformación desviadora de $\alpha = 180^\circ$ ($G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$), $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$, $p'_{ref,2}$ es una presión de referencia, m_2 es un parámetro del suelo (experimentos en arenas proporcionan valores de m_2 entre 0,40 y 0,60, según Hardin y Black (1966, 1968) y McDowell y Bolton (2001), y experimentos en suelos cohesivos aconsejan valores de m_2 entre 0,50 y 1,00), \mathbf{h} es la variable de estado que almacena el valor de las deformaciones desviadoras totales recientes, $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ es la norma de Hilbert-Schmidt, $a = 0,385$, $\gamma_{0.7}$ es el valor de γ_{oct}^H para el cual $G_s^{ap} = 0,722G_{s,0}^{ap,\alpha}$ en la curva de degradación activa α y ξ es un factor de escala que adopta el valor $\xi = 1$ para procesos de carga noval y $\xi = 2$ para procesos de descarga y recarga (Hashiguchi, 1993), aunque se adoptará una estrategia diferente (como se explican en el apartado 3.6.5 del presente capítulo).

Del mismo modo y por los mismos motivos que en el caso del módulo volumétrico elástico K'_s , también en el caso del módulo de corte G_s^{ap} el parámetro m_2 es diferente al parámetro m que controla la evolución de los módulos de rigidez con el confinamiento en los modelos *HS*, *HS-S* y *HS-SS*.

Tomando la parte volumétrica de la expresión (3.01), se tiene que $-p' - (-p'^{ini}) = -3K'_s \epsilon_{oct}^e$, donde p'^{ini} es el valor de la presión media inicial (por ejemplo, la presión *in situ* en el terreno) y $-\epsilon_{oct}^e = -1/3\epsilon_{ii}^e$. Sustituyendo esta expresión en la (3.06), se obtiene lo siguiente:

$$G_{s,0}^{ap,\alpha} = G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \left(\frac{-p'^{ini} - 3K'_s \epsilon_{oct}^e}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} \quad (3.08)$$

En relación con la expresión (3.06) del modelo *HQH*, cabe mencionar que el modelo paraelástico de Niemunis et al. (2011a), descrito brevemente en el apartado 2.6.3.1.1.2 del capítulo 2, considera que el módulo de corte G depende del valor de $-p'$ evaluado en el centro del mayor círculo de deformación histórico activo, por lo que, durante una o varias descargas o recargas elásticas dentro de dicho círculo, el valor del módulo de corte no variará con $-p'$. Esto se puede ver en la figura 3.01, en la que el valor del módulo G , dentro de círculo con centro en \mathbf{c} , depende del valor de $-p'$ correspondiente al centro del círculo mayor. Esta hipótesis parece adecuada para simular el comportamiento del suelo ante acciones dinámicas, en las que existen numerosos ciclos de deformación activos de reducida amplitud, imbricados los unos en los otros, puesto que se logra evitar la generación de energía en los mismos debido a la dependencia de G con $-p'$ adoptada. No obstante, considerar esta misma hipótesis en problemas en los que el suelo se ve sometido únicamente a acciones de tipo estático o cuasiestático, que son el tipo de acciones consideradas en el presente trabajo, puede llevar a infravalorar o sobrevalorar de forma significativa el valor de G_s^{ap} en descargas o recargas de cierta amplitud. Es por ello por lo que, para evaluar el módulo G_s^{ap} , el modelo *HQH* utiliza el valor de $-p'$ correspondiente a la trayectoria real seguida en cada paso de cálculo y no la correspondiente al centro del mayor círculo de deformación histórico.

Debe notarse que la variable de estado \mathbf{h} y, por tanto, la deformación octaédrica desviadora histórica $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ se calculan a partir de las deformaciones desviadoras totales recientes y no de las deformaciones desviadoras elásticas, por lo que el módulo de rigidez al corte G_s^{ap} se trata de un módulo de rigidez aparente. A pesar de las inconsistencias que ello pueda generar, detalladas en el apartado 2.5.1 del capítulo 2, se adopta este planteamiento por el hecho de que:

- Las curvas de degradación del módulo de rigidez al corte suelen obtenerse a partir de curvas experimentales en las que se utiliza como variable la deformación total.
- El modelo *HS-SS* que se comparará con el modelo avanzado de tipo elastoplástico desarrollado en el presente trabajo (*EPHYSS*), al igual que casi todos los modelos expuestos en el capítulo 2, utiliza también las deformaciones totales para el cálculo de sus variables de estado.

Como se puede ver, la variable $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ se asemeja a la variable $\gamma_{HIST}(\mathbf{H})$ de los modelos *SSOM*, *HS-S* y *HS-SS*, si bien $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ responde a una formulación matemática distinta. La formulación matemática de $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ se expone en profundidad en el apartado 3.6.1 del presente capítulo y, como se verá, para el cálculo de $\dot{\mathbf{h}}$ se recurre a la estructura algebraica del tensor de deformación intergranular del modelo hipoplástico de Niemunis y Herle (1997), a la cual se incorporan modificaciones relevantes. En este

sentido, la variable de estado \mathbf{h} se identifica con una variable de estado del tipo δ (*internal strain*) (Gudehus, 2011).

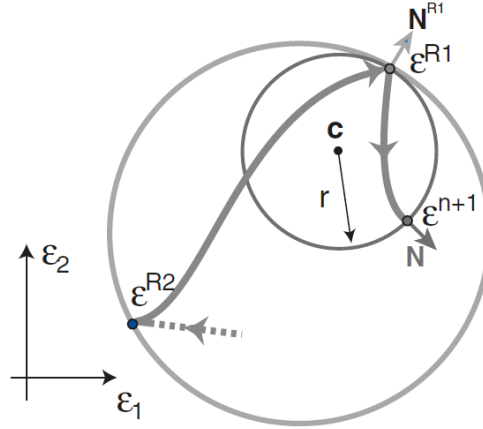


Figura 3.01. Ciclos de deformación activos en el plano $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ ($\varepsilon_i \equiv -\varepsilon_i$), tras reversiones en el modelo de Niemunis et al. (2011), donde el valor de $-p'$ utilizado para calcular $G(-p')$ en las trayectorias internas del círculo mayor, es el valor de $-p'$ correspondiente al centro de dicho círculo (Niemunis et al., 2011).

A diferencia de los modelos incrementalmente multilineales descritos en el apartado 2.6.3 del capítulo 2, como los modelos SSOM, HS-S o HS-SS, en los que el módulo de corte máximo G_0^{ref} permanece constante y da lugar a una única curva de degradación de G_s^{ap} para un mismo valor de $-p'$ (figura 3.02a), en el modelo HQH se considera que el valor máximo del módulo de corte correspondiente a la curva de degradación activa α es una variable de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ que, como γ_{oct}^H , depende de la historia de las deformaciones desviadoras totales recientes, dando lugar a un área de posibles valores de G_s^{ap} (figura 3.02b), lo cual confiere gran versatilidad al modelo y adaptabilidad a los resultados experimentales. La formulación de la variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ se expone en detalle en el apartado 3.6.2 del presente capítulo. El modelo HQH, por tanto, considera infinitas curvas de degradación de la rigidez de corte en función del nivel de reversión que experimenta el suelo, de un modo similar al modelo de Niemunis y Herle (1997).

A modo de resumen, el valor de las variables de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y del invariante $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$, tras una reversión, que aparecerá a partir de un ángulo de giro de la trayectoria de deformaciones recientes $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ (ver apartado 3.7.1.1 del presente capítulo), es la siguiente:

- 1) Tras una reversión con $\alpha^* < \alpha < 90^\circ$, el valor de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ se reducirá en función del valor del ángulo de reversión y de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, tomando valores comprendidos entre $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ y $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$. Asimismo, el valor de γ_{oct}^H se reducirá en función del valor del ángulo de reversión y de \mathbf{h} .
- 2) Tras una reversión con $\alpha = 90^\circ$, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ y $\gamma_{oct}^H = 0$.
- 3) Tras una reversión con $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} < G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y $\gamma_{oct}^H = 0$.
- 4) Tras una reversión con $\alpha = 180^\circ$, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y $\gamma_{oct}^H = 0$.

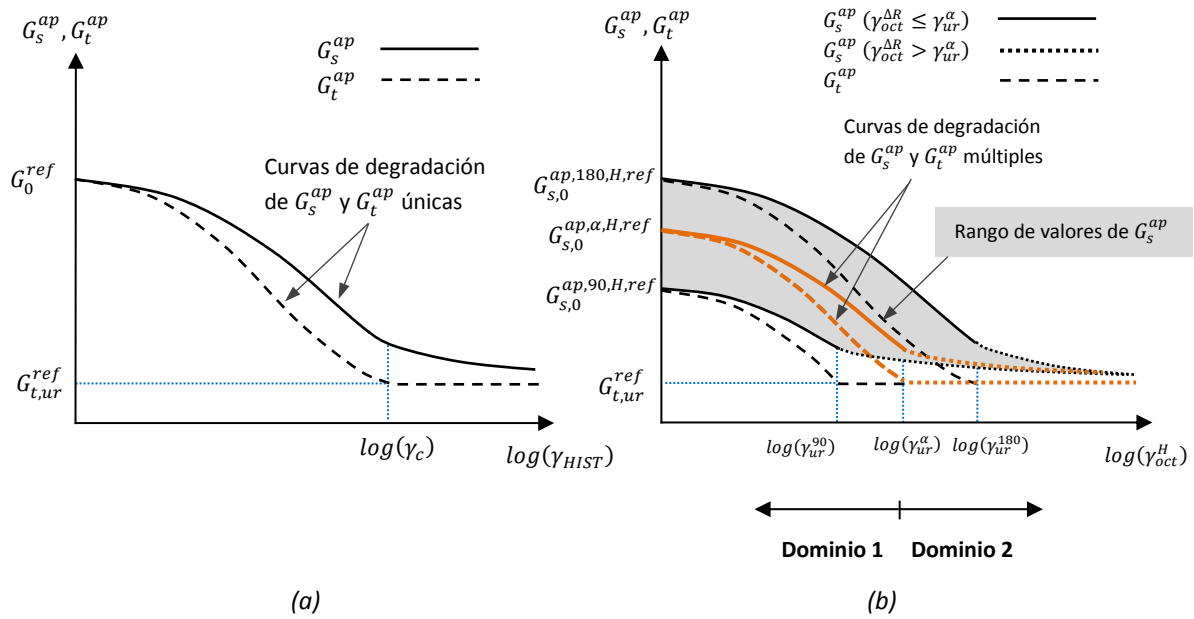


Figura 3.02. (a) Curva de degradación teórica en los modelos SSOM, HS-S y HS-SS con $-\dot{\sigma}'_3 = p'_{ref}$ y $-\dot{\sigma}'_3 = 0$. (b) Rango de valores de G_s^{ap} en el modelo HQH, con $-p' = p'_{ref,2}$ y $\dot{p}' = 0$.

Asimismo, se aplicará el criterio de estabilidad expuesto en el apartado 3.7.5 del presente capítulo, de manera que, tras una reversión en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, se cumplirá siempre que $G_s^{ap,(n+1)} \geq G_s^{ap,(n)}$.

Por otro lado, tal como se comentará en el apartado 3.7.1 del presente capítulo, una reversión dará lugar a un punto de reversión que generará un nuevo ciclo de deformación y afectará el valor de las variables de estado \mathbf{e}^R , $\mathbf{e}^{e,R}$, \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e cuando, además de cumplirse en un determinado paso de cálculo la condición $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \geq \cos(\alpha^*)$, se cumpla $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} \geq \cos(\alpha^*)$. En ese caso, se actualizará el valor de dichas variables según $\mathbf{e}^R = \mathbf{e}$ y $\mathbf{e}^{e,R} = \mathbf{e}^e$ y se memorizarán los valores de $\|\mathbf{h}\|$, $\|\mathbf{e}\|$ y $\|\mathbf{e}^e\|$ en las respectivas variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e .

3.3.3. Deducción de la ecuación constitutiva incremental en el Dominio 1

A partir de la expresión (3.01) se puede deducir la ecuación constitutiva incremental en el Dominio 1 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$). Para ello, se tendrá en cuenta $\dot{\mathbf{s}}^{\Delta R} = \dot{\mathbf{s}}$, $\dot{\sigma}'^{ini} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{e}}^{e,\Delta R} = \dot{\mathbf{e}}^e$ y $\dot{\sigma}' = -\dot{p}' \mathbf{1} + \dot{\mathbf{s}}$.

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}): (-\dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + \dot{\mathbf{e}}^e) + \dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G_s^{ap}): (-\dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R}) \quad (3.09)$$

$$\dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G_s^{ap}) = \frac{\partial \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap})}{\partial K'_s} \dot{K}'_s + \frac{\partial \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap})}{\partial G_s^{ap}} \dot{G}_s^{ap} \quad (3.10)$$

Donde en la expresión anterior, \dot{K}'_s es el incremento del módulo volumétrico elástico secante drenado, \dot{G}'_s^{ap} es el incremento del módulo de corte aparente secante y las derivadas $\partial \mathbf{E}'_s / \partial K'_s$ y $\partial \mathbf{E}'_s / \partial G'_s^{ap}$ se calculan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{E}'_s(K'_s, G'_s^{ap})}{\partial K'_s} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}'_s(K'_s, G'_s^{ap})}{\partial G'_s^{ap}} = 2 \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \quad (3.12)$$

Combinando la expresión (3.10) con las expresiones (3.11) y (3.12), se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}' = & \underbrace{\left(\left(K'_s - \frac{2}{3} G'_s^{ap} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 G'_s^{ap} \mathbb{I} \right)}_{\mathbf{E}'_s(K'_s, G'_s^{ap})} : (-\dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + \dot{e}^e) + \\ & + \underbrace{\left(\left(\dot{K}'_s - \frac{2}{3} \dot{G}'_s^{ap} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 \dot{G}'_s^{ap} \mathbb{I} \right)}_{\dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G'_s^{ap})} : (-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + e^{e, \Delta R}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

La segunda parte de la expresión (3.13) dará lugar a una anisotropía inducida con las deformaciones desviadoras elásticas. Asimismo, comparando la expresión (3.13) con la (3.10) se deduce que $\dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G'_s^{ap}) = \mathbf{E}'_s(\dot{K}'_s, \dot{G}'_s^{ap})$.

Para calcular \dot{K}'_s se realiza una derivación implícita de la expresión (3.04), obteniéndose lo siguiente:

$$\frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \dot{\epsilon}_{oct}^e = -\frac{3m_1 K_s'^{ref}}{p'_{ref,1}} \left(\frac{-p'^{ini} - 3K'_s \epsilon_{oct}^e}{p'_{ref,1}} \right)^{m_1-1} \left(\frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \dot{\epsilon}_{oct}^e \epsilon_{oct}^e + K'_s \dot{\epsilon}_{oct}^e \right) \quad (3.14)$$

Teniendo en cuenta que $-p' = -p'^{ini} - 3K'_s \epsilon_{oct}^e$, $\dot{K}'_s = \partial K'_s / \partial \epsilon_{oct}^e \dot{\epsilon}_{oct}^e$ y la propia expresión (3.04), se pueden reordenar los términos de (3.14) y obtener la siguiente expresión de \dot{K}'_s :

$$\dot{K}'_s = \left(\frac{K'_s}{\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e} \right) \dot{\epsilon}_{oct}^e \quad (3.15)$$

Dado que $sign(p') = sign(\epsilon_{oct}^e) = -1$ y $m_1 < 1$, se tendrá que $p' / 3m_1 K'_s < p' / 3K'_s < (p' - p'^{ini}) / 3K'_s = \epsilon_{oct}^e$ y, por tanto, $p' / 3m_1 K'_s - \epsilon_{oct}^e < 0$.

Para calcular \dot{G}'_s^{ap} se parte de las expresiones (3.05) y (3.08), resultando la expresión (3.16) y, a continuación, se calcula cada una de las derivadas que aparecen en esta última.

$$\dot{G}_s^{ap} = \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha}} \left(\frac{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha}}{\partial \epsilon_{oct}^e} \dot{\epsilon}_{oct}^e + \frac{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha}}{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}} \dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \right) + \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial \gamma_{oct}^H} \dot{\gamma}_{oct}^H \quad (3.16)$$

Donde $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y $\dot{\gamma}_{oct}^H$ son, respectivamente, los incrementos de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y γ_{oct}^H .

$$\frac{\partial G_s^{ap}}{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha}} = \frac{1}{1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^H}{\xi \gamma_{0,7}} \right)} = \frac{G_s^{ap}}{G_{s,0}^{ap,\alpha}} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha}}{\partial \epsilon_{oct}^e} = \frac{3m_2 G_{s,0}^{ap,\alpha}}{p'} \left(\frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \epsilon_{oct}^e + K'_s \right) \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha}}{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}} = \left(\frac{-p'}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} = \frac{G_{s,0}^{ap,\alpha}}{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial G_s}{\partial \gamma_{oct}^{e,H}} = -\frac{a}{\xi \gamma_{0,7}} \frac{(G_s^{ap})^2}{G_{s,0}^{ap,\alpha}} \quad (3.20)$$

Para el cálculo explícito de la expresión (3.18) se utiliza la expresión (3.15) teniendo en cuenta que $\dot{K}'_s = dK'_s/d\epsilon_{oct}^e \dot{\epsilon}_{oct}^e$, y se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial G_{s,0}^{ap,\alpha}}{\partial \epsilon_{oct}^e} = G_{s,0}^{ap,\alpha} \frac{3m_2 K'_s}{p'} \left(1 + \frac{\epsilon_{oct}^e}{\left(\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e \right)} \right) \quad (3.21)$$

Combinando las expresiones (3.16), (3.17), (3.19), (3.20) y (3.21) se obtiene la expresión de \dot{G}_s^{ap} :

$$\dot{G}_s^{ap} = G_s^{ap} \left(\frac{3m_2 K'_s}{p'} \left(1 + \frac{\epsilon_{oct}^e}{\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e} \right) \dot{\epsilon}_{oct}^e + \frac{\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}}{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}} - \frac{a}{\xi \gamma_{0,7}} \frac{G_s^{ap}}{G_{s,0}^{ap,\alpha}} \dot{\gamma}_{oct}^H \right) \quad (3.22)$$

Como se deduce de las expresiones (3.15) y (3.22), $\dot{K}'_s = \dot{K}'_s(\epsilon_{oct}^e, \dot{\epsilon}_{oct}^e, \dots)$ y $\dot{G}_s^{ap} = \dot{G}_s^{ap}(\epsilon_{oct}^e, \dot{\epsilon}_{oct}^e, \dots)$. Tal como se apuntaba en el apartado 2.5.1 del capítulo 2, la dependencia de los módulos de rigidez o de sus incrementos con las deformaciones elásticas, obliga, en los pasos de cálculo elastoplásticos, a introducir un nuevo ciclo iterativo en el algoritmo general (figura 3.03). En el caso del modelo *HQH*, el término $-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + e^{e,\Delta R}$ de la expresión (3.09) también obliga a implementar dicho ciclo iterativo.

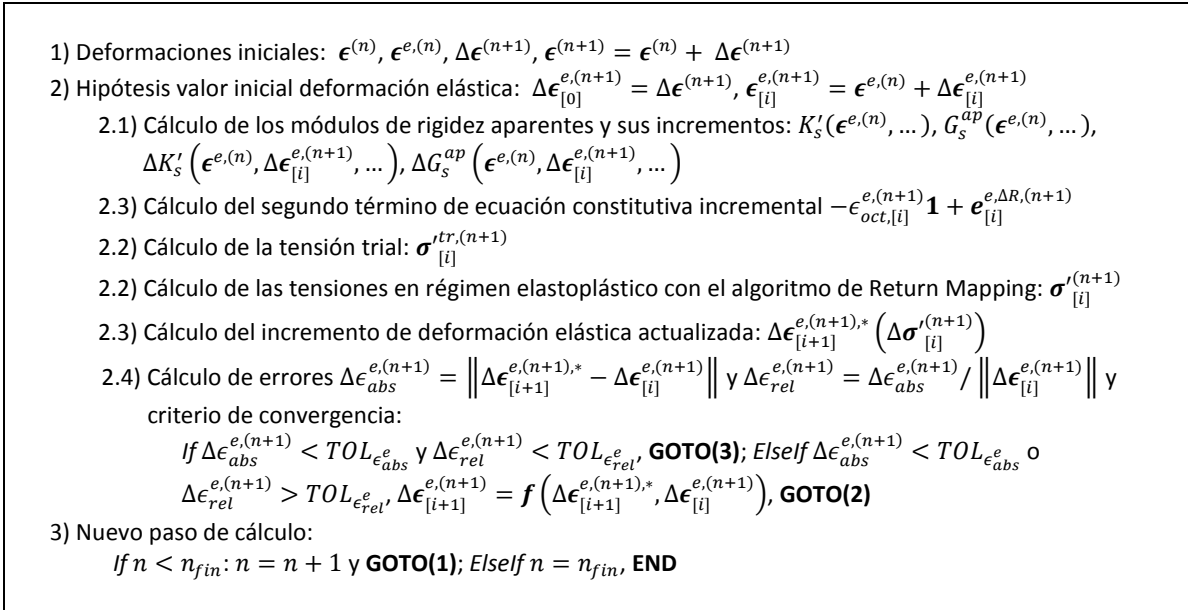


Figura 3.03. Esquema del algoritmo iterativo del paso de cálculo elastoplástico $(n) \rightarrow (n + 1)$ cuando las variables que intervienen en dicho paso de cálculo dependen de $\Delta\epsilon^{e,(n+1)}$ y/o $\epsilon^{e,(n+1)}$.

3.4. Ecuación constitutiva incremental en el Dominio 2

La ecuación constitutiva en el Dominio 2 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \geq \gamma_{ur}^{\alpha}$), considerando también un material isótropo, se expresa incrementalmente de la siguiente forma:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}): \dot{\epsilon}^e \quad (3.23)$$

$$\mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}) = \left(\left(K'_t - \frac{2}{3} G_{t,ur} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G_{t,ur} \mathbb{I} \right) \equiv \mathbf{E}'_s(K'_t, G_{t,ur}) \quad (3.24)$$

Donde σ' es el incremento del tensor de tensiones, $\dot{\epsilon}^e$ es el incremento del tensor de deformaciones elásticas y $\mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur})$ es el tensor de rigidez hipo(elástico) tangente que depende del módulo volumétrico elástico tangente K'_t y del valor mínimo del módulo de corte hipo(elástico) tangente $G_{t,ur}$. Como se puede ver, la estructura algebraica del tensor \mathbf{E}'_t coincide con la del tensor \mathbf{E}'_s .

3.4.1. Módulo volumétrico elástico tangente en el Dominio 2

La expresión del módulo volumétrico elástico tangente K'_t en el Dominio 2 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^{\alpha}$) es la misma que la considerada en el Dominio 1 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$). No se distinguen, por tanto, diferentes comportamientos volumétricos en los diferentes dominios de deformación. Tomando la componente volumétrica de la expresión (3.13), diferenciando la expresión (3.04) y teniendo en cuenta la parte esférica de la expresión (3.01), se puede expresar explícitamente el módulo volumétrico elástico tangente K'_t de la siguiente manera.

$$-p' = -3K'_s \dot{\epsilon}_{oct}^e - 3 \frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \dot{\epsilon}_{oct}^e \epsilon_{oct}^e = -3 \left(K'_s + \frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \epsilon_{oct}^e \right) \dot{\epsilon}_{oct}^e = -3K'_t \dot{\epsilon}_{oct}^e \quad (3.25)$$

$$K'_t = K'_s + \frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \epsilon_{oct}^e = K'_s \left(1 + \frac{\epsilon_{oct}^e}{\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e} \right) \quad (3.26)$$

Si se considera $-p'^{ini} = 0$, la expresión anterior se simplifica, resultando $K'_t = K'_s / (1 - m_1)$.

3.4.2. Módulo de corte aparente secante y módulo (hipo)elástico tangente en el Dominio 2

El módulo de corte aparente secante G_s^{ap} en el Dominio 2 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^\alpha$) no tiene una expresión análoga a la del mismo módulo en el Dominio 1, puesto que la expresión de este último está definida sólo para valores de $\gamma_{oct}^H \leq \gamma_{ur}^\alpha$. No obstante, sí es posible calcular el valor de G_s^{ap} en el Dominio 2 de forma indirecta (expresión 3.32), a través del valor mínimo de G_s^{ap} en el Dominio 1 y del valor del módulo de corte aparente tangente G_t^{ap} en el Dominio 2. En relación con este último, y de un modo similar a los modelos *SSOM*, *HS-S* y *HS-SS*, el modelo *HQH* considera un valor mínimo $G_{t,ur}$ a partir del nivel de deformación que se usa de frontera entre ambos dominios ($\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^\alpha$). En realidad $G_{t,ur}$ se trata de un módulo de corte (hipo)elástico tangente y se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$G_{t,ur} = G_{t,ur}^{ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} \quad (3.27)$$

Donde $G_{t,ur}^{ref}$ es el valor del módulo de corte (hipo)elástico tangente para $\gamma_{oct}^{\Delta R} \geq \gamma_{ur}^\alpha$ y $-p' = p'_{ref,2}$, $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$, $p'_{ref,2}$ es una presión de referencia y m_2 es un parámetro del suelo cuyo rango de valores se ha expuesto en el apartado 3.3.2 del presente capítulo.

El valor de $G_{t,ur}^{ref}$ en el modelo *HS-SS* se calcula a partir del módulo elástico longitudinal tangente de referencia $E'_{t,ur}^{ref}$ y del coeficiente de Poisson drenado ν'_{ur} , que se asume constante. Mientras que en el modelo *HQH*, cuando este se combina con el modelo *Hardening Soil Modified (HS_{MOD})* (ver capítulo 5), el valor de $G_{t,ur}^{ref}$ se calcula a partir de $E'_{t,ur}^{ref}$ (parámetro del modelo *HS_{MOD}*) y del módulo rigidez volumétrico elástico tangente de referencia $K_t^{ref} = K'_s / (1 - m_1)$, considerando $-p'^{ini} = 0$, de la siguiente manera:

$$G_{t,ur}^{ref} = \frac{3K_t^{ref} E'_{t,ur}^{ref}}{9K_t^{ref} - E'_{t,ur}^{ref}} \quad (3.28)$$

El hecho de que γ_{ur}^α coincida con el valor máximo de γ_{oct}^H permite utilizar la expresión de G_t^{ap} en el Dominio 1 para deducir el valor de $\gamma_{ur}^\alpha = \gamma_{ur}^\alpha(G_{t,ur})$. Es necesario, para ello, obtener previamente la expresión explícita de G_t^{ap} , lo cual, a diferencia de lo que sucede con K'_t , no es posible en el caso general, pero sí bajo ciertas restricciones en las trayectorias de deformación dentro del dominio elástico,

concretamente cuando $\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} = \widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}}^e \approx 1$ y previamente ha existido una reversión con $\alpha \geq 90^\circ$, cumpliéndose en tal caso $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H} = 0$, $\dot{\gamma}_{oct}^H \approx \dot{\gamma}_{oct}^{\Delta R} = \dot{\gamma}_{oct} = \dot{\gamma}_{oct}^{e,\Delta R} = \dot{\gamma}_{oct}^e$ y $\gamma_{oct}^H \approx \gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{oct}^{e,\Delta R}$. Bajo estos supuestos es posible aproximar G_t partiendo de la expresión $\tau_{oct}^{\Delta R} = G_s^{ap} \gamma_{oct}^{e,\Delta R}$, que resulta de tomar la parte desviadora de (3.01) y diferenciar la expresión (3.05), teniendo en cuenta que $\dot{\tau}_{oct}^{\Delta R} = \dot{\tau}_{oct}$:

$$\dot{\tau}_{oct} = 2G_s^{ap} \dot{\gamma}_{oct}^e + 2 \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial \gamma_{oct}^{e,\Delta R}} \gamma_{oct}^{e,\Delta R} \dot{\gamma}_{oct}^e = 2 \left(G_s^{ap} + \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial \gamma_{oct}^{e,\Delta R}} \gamma_{oct}^{e,\Delta R} \right) \dot{\gamma}_{oct}^e = 2G_t^{ap} \dot{\gamma}_{oct}^e \approx 2G_t^{ap} \dot{\gamma}_{oct}^H \quad (3.29)$$

$$G_t^{ap} = G_s^{ap} + \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial \gamma_{oct}^{e,\Delta R}} \gamma_{oct}^{e,\Delta R} \approx G_s^{ap} + \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial \gamma_{oct}^H} \gamma_{oct}^H = \frac{G_{s,0}^{ap,\alpha}}{\left(1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^H}{\xi \gamma_{0.7}} \right) \right)^2} \quad (3.30)$$

La expresión (3.30) es similar a la de los modelos *SSOM*, *HS-S* o *HS-SS*. Finalmente, para obtener el valor de γ_{ur}^α basta considerar, en la expresión (3.30), $G_t^{ap} = G_{t,ur}$ y $\gamma_{oct}^H = \gamma_{ur}^\alpha$ (donde, en general, se considerará $\xi = 2$ y, en adelante, se cometerá el abuso de lenguaje $\gamma_{ur}^\alpha \equiv \gamma_{ur}^{\alpha,\xi=2}$):

$$\gamma_{ur}^\alpha = \frac{\xi \gamma_{0.7}}{a} \left(\sqrt{\frac{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}}{G_{t,ur}^{ref}}} - 1 \right) \quad (3.31)$$

Como se indicaba al principio de este apartado, es posible calcular el valor de G_s^{ap} en el Dominio 2 como sigue:

$$G_s^{ap} \approx \frac{\tau}{\gamma_{oct}} = \frac{G_s^{ap}(\gamma_{ur}^\alpha) \gamma_{ur}^\alpha + G_{t,ur}(\gamma_{oct}^{\Delta R} - \gamma_{ur}^\alpha)}{\gamma_{oct}^{\Delta R}} \quad (3.32)$$

De la expresión anterior se deduce que el valor mínimo de G_s^{ap} , que se da para valores $\gamma_{oct}^{\Delta R} \gg \gamma_{ur}^\alpha$, coincide con $G_{t,ur}$.

3.5. Coeficiente de Poisson

El coeficiente de Poisson no será constante en ninguno de los dos dominios, puesto que depende del valor de los módulos de rigidez según $\nu'_s = \nu'_s(K'_s, G_s^{ap})$ en el Dominio 1 y según $\nu'_t = \nu'_t(K'_t, G_{t,ur})$ en el Dominio 2.

El valor de G_s^{ap} en el rango de las pequeñas deformaciones, correspondiente al Dominio 1, puede conducir a valores de ν' demasiado pequeños o incluso negativos y, por tanto, irreales. Para evitar esto es posible limitar el valor del módulo volumétrico $K'_s{}^{corr} = \max\{K'_s, 2/G_s^{ap}(1 + \nu'_{min})/3(1 - 2\nu'_{min})\}$ y obligar a que los valores del coeficiente de Poisson se mantengan en todo momento por encima de un umbral ν'_{min} cuando existan cargas desviadoras. El valor de ν'_{min} suele adoptar valores entre 0,05 y

0,20. En el Dominio 2 se tendrán generalmente valores de $v' > v'_{min}$, si bien es posible utilizar el mismo tipo de corrección aplicada en el Dominio 1 cuando existan cargas desviadoras $K_t^{corr} = \max\{K_t', 2G_{t,ur}(1 + v'_{min})/3(1 - 2v'_{min})\}$.

Como se puede ver, se asume $v'_{s,min} \approx v'_{t,min} \approx v'_{min}$, siendo $v'_{s,min}$ y $v'_{t,min}$ los valores mínimos de v'_s y v'_t , respectivamente.

3.6. Variables de estado del modelo *HQH*

El modelo *HQH* utiliza ocho variables de estado que pueden dividirse en cuatro grupos. Dichas variables se encargan de controlar el comportamiento reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo, tanto en el Dominio 1 como en el Dominio 2, así como de modificar las leyes de endurecimiento del modelo elastoplástico con el que se combine el modelo *HQH*.

Estas variables de estado proporcionan una estructura interna en capas de memoria a corto y largo plazo que dotan al modelo de robustez para reproducir diferentes características del comportamiento histerético del suelo.

Tal como apunta Gudehus (2011), las variables de estado $\chi^{el,hist}$ que definen el comportamiento histerético del suelo no pueden ser observadas macroscópicamente y representan la fluctuación espacial de las cadenas de fuerzas internas entre partículas del suelo, efecto al cual denomina fuerza-rozamiento (*force-roughness*). Según el Gudehus, el comportamiento del suelo tras una reversión y ante una posterior deformación monótona sugiere una adaptación gradual del estado interno del mismo, caracterizado por las mencionadas variables de estado ocultas, hasta que este dependa exclusivamente del tensor de tensiones y el índice de poros, estado en el cual trayectorias de deformaciones proporcionales conducen a trayectorias de tensiones proporcionales, y que se considera dentro de la región *SOM* (*Swept-Out-Memory*) (Gudehus et al., 1977), como se ha comentado previamente. Según Gudehus (2011), es por esto último que la influencia del estado interno del suelo sobre el comportamiento del mismo sólo puede revelarse durante pequeñas deformaciones tras reversiones.

En las tablas 3.01 a 3.04 se indican las variables de estado del modelo *HQH*.

Variables de estado que controlan el valor de G_s^{ap} (actúan como variables de memoria a corto plazo que se pueden reinicializar total o parcialmente tras una reversión)	
h	Tensor de historia de deformaciones desviadoras totales recientes, entendiendo por recientes aquellas deformaciones que aún no han sido borradas por los procesos de reversión.
$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$	Módulo de corte secante máximo correspondiente a la curva de degradación activa α .

Tabla 3.01. Variables de estado h y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$.

Variables que almacenan los tensores de deformación elástico y total del último punto de reversión que conforma el extremo del ciclo de deformación activo (actúan como variables de memoria a corto plazo que se reinician totalmente tras una reversión)	
e^R	Tensor de deformaciones totales en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo. Dicho punto de reversión viene definido por las condiciones $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
$e^{e,R}$	Tensor de deformaciones elásticas en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo. Dicho punto de reversión viene definido por las condiciones $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.

Tabla 3.02. Variables de estado e^R y $e^{e,R}$.

Variables que almacenan información sobre las deformaciones en todos los puntos de reversión que conforman el extremo de alguno de los ciclos de deformación activos y que controlan cuándo el suelo entra en la región SOM (conforman variables de memoria a largo plazo capaces de almacenar información de todas las reversiones históricas activas)	
H_{MEM}	Vector con los valores $\ \hat{\mathbf{h}}\ $ en los puntos de reversión R_i que conforman los extremos de ciclos de deformación activos definidos por las condiciones $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
E_{MEM}	Vector con los valores $\ \mathbf{e}\ $ en los puntos de reversión R_i que conforman los extremos de ciclos de deformación activos definidos por las condiciones $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
E_{MEM}^e	Vector con los valores $\ \mathbf{e}^e\ $ en los puntos de reversión R_i que conforman los extremos de ciclos de deformación activos definidos por las condiciones $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.

Tabla 3.03. Variables de estado H_{MEM} , E_{MEM} y E_{MEM}^e .

Variable que permite reproducir la rigidez máxima del suelo y su degradación durante procesos de carga noval cuando el modelo HQH forma parte de un modelo elastoplástico	
$G_{t,min,\xi=1}^{ap}$	Valor mínimo histórico del módulo de corte aparente tangente en los procesos de carga noval ($\xi = 1$).

Tabla 3.04. Variables de estado $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$.

3.6.1. Variable de estado \mathbf{h}

La variable de estado \mathbf{h} se trata de un tensor de historia que almacena el valor de las deformaciones desviadoras totales recientes, entendiendo por recientes aquellas deformaciones que aún no han sido borradas por posteriores procesos de reversión. Dicho tensor tiene en cuenta, por tanto, la trayectoria reciente de las deformaciones desviadoras y actúa como variable de memoria a corto plazo que se pueden reinicializar total o parcialmente tras una reversión.

A partir del tensor \mathbf{h} se puede calcular el invariante $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h}) \leq \gamma_{ur}^\alpha$ según la expresión (3.32), denominado deformación octaédrica desviadora histórica. La variable γ_{oct}^H almacena el valor de las deformaciones octaédricas desviadoras totales recientes.

$$\gamma_{oct}^H = \sqrt{\frac{4}{3}} \|\mathbf{h}\| \quad (3.32)$$

La formulación propuesta para el incremento del tensor de historia $\dot{\mathbf{h}}$ se basa en la del tensor de deformación intergranular $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ del modelo hipoplástico de Niemunis y Herle (1997), si bien se introducen modificaciones significativas. En el marco conceptual de Gudehus (2011), a pesar de que \mathbf{h} pueda ser tratado formalmente como un tensor de deformaciones, este no puede ser interpretado físicamente como tal.

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{cases} (\mathbb{I} - \hat{\mathbf{h}} \otimes \hat{\mathbf{h}} \rho_\alpha^w) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - (\mathbb{I} - \hat{\mathbf{h}} \otimes \hat{\boldsymbol{\epsilon}}) : \mathbf{h} & \text{si } \hat{\mathbf{h}} : \hat{\boldsymbol{\epsilon}} > 0 \\ \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{h} & \text{si } \hat{\mathbf{h}} : \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\rho_\alpha = \frac{\gamma_{oct}^H}{\gamma_{ur}^\alpha} \quad (3.34)$$

Donde $\hat{\mathbf{h}} : \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \cos(\alpha)$ es el ángulo de reversión, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|$ si $\|\mathbf{A}\| \neq 0$ y $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ si $\|\mathbf{A}\| = 0$, siendo $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ la norma de Hilbert-Schmidt, \mathbf{h} es el tensor de historia de las deformaciones desviadoras, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ es el incremento del tensor de deformaciones desviadoras totales, $\rho_\alpha \leq 1$ indica el nivel de degradación dentro de la curva de degradación activa α , γ_{ur}^α es el umbral de $\gamma_{oct}^{\Delta R}$ a partir del cual $G_t = G_{t,ur}$ (ver apartado 3.4.2 del presente capítulo) y, a la vez, es el valor máximo de γ_{oct}^H , w es un parámetro de forma de la función potencial de ρ_α que controla la velocidad con la que evoluciona $\dot{\mathbf{h}}$ (se adoptan valores $w \geq 100$ para tener $\dot{\mathbf{h}} \approx \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ en procesos de degradación sin reversiones, cumpliéndose $\rho_\alpha^w \rightarrow 0$ si $\rho_\alpha < 1$ y $\rho_\alpha^w \rightarrow 1$ si $\rho_\alpha \approx 1$) y $(\mathbb{I})_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$.

El tensor \mathbf{h} se calcula de la siguiente manera:

$$\mathbf{h}(\mathbf{e}^*) = \mathbf{h}(\mathbf{e}_0) + \int_{\mathbf{e}_0}^{\mathbf{e}^*} \dot{\mathbf{h}} dt \approx \mathbf{h}(\mathbf{e}_0) + \sum_{\mathbf{e}=\mathbf{e}_0}^{\mathbf{e}=\mathbf{e}^*} \Delta \mathbf{h} \quad (3.35)$$

A partir de las expresiones (3.32) y (3.33) se pueden calcular los valores de γ_{oct}^H , que cumplirán lo siguiente cuando tengan lugar reversiones:

- 1) Tras una reversión con $\alpha^* < \alpha < 90^\circ$, el valor de γ_{oct}^H se reducirá en función del valor del ángulo de reversión y de \mathbf{h} .
- 2) Tras una reversión con $\alpha = 90^\circ$, $\gamma_{oct}^H = 0$.
- 3) Tras una reversión con $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\gamma_{oct}^H = 0$.
- 4) Tras una reversión con $\alpha = 180^\circ$, $\gamma_{oct}^H = 0$.

En la figura 3.04 se muestra cómo varía el valor de $-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h})\|\dot{\mathbf{h}}\|$ con ρ_α y $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}}$ para $w = 100$.

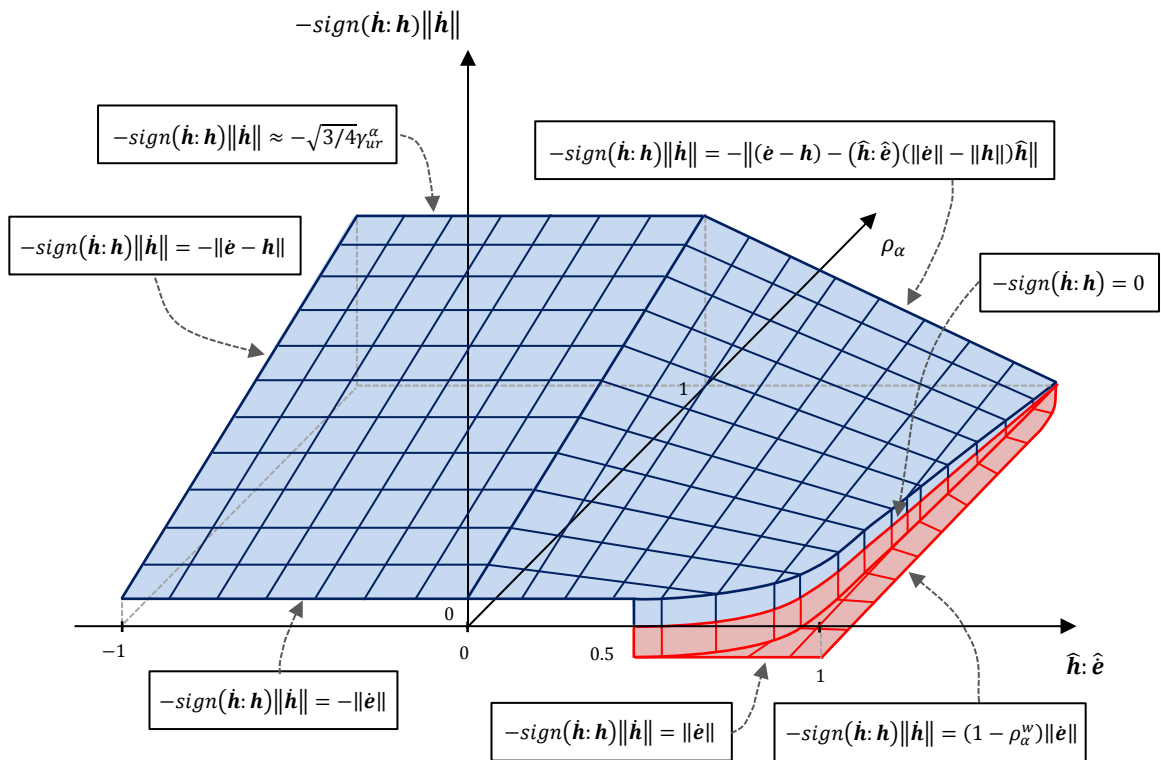


Figura 3.04. Gráfico $-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h})\|\dot{\mathbf{h}}\| - \rho_\alpha - \hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}}$ para $w = 100$ y $\|\mathbf{h}^{ini}\| = 0$

El valor de $-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h})$ indica si $\|\mathbf{h}^{(n+1)}\|$ es mayor que $\|\mathbf{h}^{(n)}\|$ al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, lo cual sucede cuando $-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h}) < 0$ o si $\|\mathbf{h}^{(n+1)}\|$ es menor que $\|\mathbf{h}^{(n)}\|$ al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, lo cual sucede cuando $-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h}) > 0$.

$$-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h}) = -\frac{\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h}}{\|\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h}\|} \quad (3.36)$$

Suponiendo un valor del parámetro $w = 100$, la variación de $-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h})\|\dot{\mathbf{h}}\|$ viene dada por un plano inclinado en el espacio $-sign(\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h})\|\dot{\mathbf{h}}\| - \rho_\alpha - \hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}}$ cuando $(\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}}, \rho_\alpha) \in [-1,0] \times [0,1]$ y por una

superficie alabeada cuando $(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}, \rho_\alpha) \in (0,1] \times [0,1]$. La superficie alabeada se encuentra dividida en dos partes separadas por el valor de $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*)$, en el cual se cumple $\dot{\mathbf{h}}: \mathbf{h} = \mathbf{0}$, según lo descrito en el apartado 3.7.1.1 del presente capítulo y, por tanto, $-\text{sign}(\dot{\mathbf{h}}: \mathbf{h}) = 0$. El escalón que aparece para el valor $(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^*$ surge como consecuencia del modo en el que se ha representado la dirección del tensor $\dot{\mathbf{h}}$ a través del valor de $-\text{sign}(\dot{\mathbf{h}}: \mathbf{h})$, que vale $-\text{sign}(\dot{\mathbf{h}}: \mathbf{h}) = -1$ para $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} < (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^*$ y $-\text{sign}(\dot{\mathbf{h}}: \mathbf{h}) = +1$ para $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} > (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^*$. Las partes sombreadas en rojo son aquellas en las que $-\text{sign}(\dot{\mathbf{h}}: \mathbf{h}) \|\dot{\mathbf{h}}\| > 0$, mientras que las partes sombreadas en azul son aquellas en las que $-\text{sign}(\dot{\mathbf{h}}: \mathbf{h}) \|\dot{\mathbf{h}}\| < 0$.

Cuando tiene lugar el cierre del ciclo de deformación activo entre los puntos de reversión activos $s - 1$ y s , siendo necesariamente $s \geq 2$, el tensor de historia \mathbf{h} se actualiza modificando su módulo pero manteniendo la dirección, de la siguiente manera:

$$\mathbf{h}^{(n+1)} = \left(\frac{\beta' (H_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)-1}}}{\|\mathbf{h}^{(n)}\|} \right) \mathbf{h}^{(n)} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} > \sqrt{4/3} E_{s^{(n)-1}}^{S^{(n)}} \\ |\gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)}| > \sqrt{4/3} |E_{s^{(n)-1}}^{S^{(n)}}| \end{cases} \quad (3.37)$$

Donde $(H_{MEM}^{(n)})_i$ y $(E_{MEM}^{(n)})_i$ son, respectivamente, las componente i -ésimas de las variables de estado $\mathbf{H}_{MEM}^{(n)}$ y $\mathbf{E}_{MEM}^{(n)}$ el inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ y se corresponden con los valores de los módulos $\|\mathbf{h}\|$ y $\|\mathbf{e}\|$ en el punto de reversión i -ésimo, $E_{s^{(n)-1}}^{S^{(n)}} = (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}} - (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)-1}}$, $\gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)}$ es la deformación octaédrica desviadora respecto al último punto de reversión que conforma el extremo del ciclo de deformación activo al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ y β' es un factor que vale $\beta' = 2$ si $s = 2$ y $\beta' = 1$ si $s > 2$.

Esta actualización del tensor de historia \mathbf{h} permite recuperar, con un coste computacional razonable, el valor de la variable $\gamma_{oct}^{H, (n+1)} = \sqrt{4/3} \|\mathbf{h}^{(n+1)}\|$ correspondiente al ciclo inmediatamente superior al que se cierra.

Como se detallará en el apartado 3.7.1 del presente capítulo, se considera que existirá una reversión en las deformaciones desviadoras totales que afectará el valor del tensor de historia \mathbf{h} y, por tanto, el valor de γ_{oct}^H , siempre que se cumpla $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$. No obstante, para que estas reversiones den lugar a un punto de reversión del que nacerá un nuevo ciclo de deformación y, por tanto, afecten el valor de las variables de estado \mathbf{e}^e , $\mathbf{e}^{e,R}$, \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e , será necesario que, además, se cumpla la condición $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.

Por otro lado, para poder comparar la estructura del incremento del tensor de historia $\dot{\mathbf{h}}$ con el incremento del tensor de deformación intergranular $\dot{\delta}$ del modelo de Niemunis y Herle (1997), expuesta en el apartado 2.6.4.1.1, se proporciona, a continuación, la expresión de este último:

$$\dot{\delta} = \begin{cases} (\mathbb{I} - \hat{\delta} \otimes \hat{\delta} \rho^{\beta_r'}) : \mathbf{d} & \text{si } \hat{\delta}: \mathbf{d} > 0 \\ \mathbf{d} & \text{si } \hat{\delta}: \mathbf{d} \leq 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

Donde $\rho = \|\delta\|/\tilde{R} < 1$, \tilde{R} es el valor de la deformación intergranular máxima, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|$ si $\|\mathbf{A}\| \neq 0$ y $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ si $\|\mathbf{A}\| = 0$, siendo $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ la norma de Hilbert-Schmidt, β'_r es un parámetro del suelo y \mathbf{d} es el tensor tasa de deformación ($\dot{\epsilon} \approx \mathbf{d}$).

El tensor de deformación intergranular δ del modelo hipoplástico de Niemunis y Herle (1997) controla el valor de los componentes del tensor de rigidez \mathbf{M} de dicho modelo y actúa en un determinado rango de deformación $\|\delta\| \leq \tilde{R}$. Una vez alcanzado el valor $\|\delta\| = \tilde{R}$, el modelo recupera la ecuación hipoplástica $\dot{\sigma}' = \mathbf{L}(\sigma', e): \mathbf{d} + \mathbf{N}(\sigma', e)\|\mathbf{d}\|$. Desde un punto de vista micromecánico, el parámetro \tilde{R} limita superiormente el rango de deformaciones en el que las partículas del suelo se deforman mientras mantienen prácticamente todos los contactos iniciales, dando lugar a un comportamiento reversible. Cuando la deformación supera el valor de \tilde{R} , las partículas de suelo no sólo se deforman, sino que deslizan y rotan, generando, a nivel macroscópico, una degradación de la rigidez con la deformación.

De un modo similar, la deformación octaédrica desviadora histórica $\gamma_{oct}^H = \gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ del modelo *HQH* controla el valor de las componentes del tensor de rigidez secante \mathbf{E}'_s y también actúa en un determinado rango de deformación $\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^\alpha$ (Dominio 1). Una vez alcanzado el valor $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^\alpha$, el modelo recupera la ecuación $\dot{\sigma}' = 3K'_t(-\dot{\epsilon}_{oct}^e)\mathbf{1} + 2G_{t,ur}\dot{e}^e$, donde K'_t y $G_{t,ur}$ dependen de la presión media (Dominio 2). La deformación γ_{ur}^α limita superiormente el rango de deformaciones en el que se desarrolla el régimen no lineal del suelo con la deformación. Dicho rango contempla diferentes comportamientos entre las partículas del suelo a nivel micromecánico: inicialmente sólo se considera la deformación en los puntos de contacto entre partículas y, posteriormente, se tiene en cuenta también el deslizamiento y giro de las mismas. Cuando la deformación desviadora octaédrica total supera el valor de γ_{ur}^α , la estructura del suelo (fábrica y fuerzas entre partículas), se mantiene estable hasta la aparición de los mecanismos micromecánicos que dan lugar a las deformaciones plásticas.

Comparando la expresión del tensor $\hat{\mathbf{h}}$ del modelo *HQH* con la del tensor $\hat{\delta}$ del modelo hipoplástico de Niemunis y Herle (1997), se observa lo siguiente:

- El tensor $\hat{\delta}$ del modelo de Niemunis y Herle (1997) depende de la tasa de deformación total \mathbf{d} .

El tensor $\hat{\mathbf{h}}$ del modelo *HQH* depende del incremento del tensor de deformaciones desviadoras totales \dot{e} , de forma similar al tensor \mathbf{H} en los modelos *SSOM*, *HS-S* o *HS-SS*.

- En el modelo de Niemunis y Herle (1997), la medida de la reversión la da el coseno del ángulo entre el tensor de deformación intergranular y la tasa de la deformación total $\hat{\delta}: \mathbf{d}$.

En el modelo *HQH*, la medida de la reversión la da el coseno del ángulo entre el tensor de historia y el incremento del tensor de deformaciones desviadoras totales $\hat{\mathbf{h}}: \hat{e} = \cos(\alpha)$.

- En el modelo de Niemunis y Herle (1997), el tensor $\hat{\delta}$ varía proporcionalmente a \mathbf{d} cuando aparece una reversión con ángulo mayor o igual a 90° (es decir, cuando $\hat{\delta}: \mathbf{d} \leq 0$), mientras que para reversiones con ángulos comprendidos entre 90° y 0° (es decir, cuando $\hat{\delta}: \mathbf{d} > 0$), se considera que el tensor $\hat{\delta}$ varía según un valor comprendido entre \mathbf{d} y $\mathbf{0}$, interpolado lineal o no linealmente dependiendo del valor del exponente β'_r que afecta el término ρ .

En el modelo *HQH*, el tensor $\dot{\mathbf{h}}$ varía proporcionalmente a $(\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{h})$ cuando aparece una reversión con ángulo mayor o igual a 90° (es decir, cuando $\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} \leq 0$), logrando así que, tras la aplicación del incremento de deformación $\dot{\mathbf{e}}$ en el actual paso de cálculo, resulte $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{e}}$. Para reversiones con ángulos comprendidos entre 90° y 0° (es decir, cuando $\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} > 0$), el tensor $\dot{\mathbf{h}}$ varía según un valor comprendido entre $(\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{h})$ y $\mathbf{0}$, interpolado lineal o no linealmente según el valor del exponente w que afecta el término ρ_α .

- El modelo de Niemunis y Herle (1997) considera $\delta = (\mathbb{I} - \widehat{\delta} \otimes \widehat{\delta} \rho^{\beta_r}) : \mathbf{d}$ cuando $\widehat{\delta} : \mathbf{d} > 0$, o desarrollando esta expresión, $\delta = \mathbf{d} - \rho^{\beta_r} (\widehat{\delta} : \mathbf{d}) \|\mathbf{d}\| \widehat{\delta}$.
 - En caso de que $\widehat{\delta} : \widehat{\mathbf{d}} = 1$, es decir, $\delta \parallel \mathbf{d}$, se tendrá $\delta = (1 - \rho^{\beta_r}) \|\mathbf{d}\| \widehat{\delta}$.
 - Si a lo anterior se suma que $\|\delta\| = \widetilde{R}$, es decir, $\rho = 1$, se tendrá $\delta = \mathbf{0}$.
 - Por otro lado, en caso de que $\rho = 0$, se tendrá $\delta = \mathbf{0}$ independientemente del valor de $\widehat{\delta} : \widehat{\mathbf{d}}$ y, por tanto, $\delta = \mathbf{d}$.

El modelo *HQH* considera $\dot{\mathbf{h}} = (\mathbb{I} - \widehat{\mathbf{h}} \otimes \widehat{\mathbf{h}} \rho_\alpha^w) : \dot{\mathbf{e}} - (\mathbb{I} - \widehat{\mathbf{h}} \otimes \widehat{\mathbf{e}}) : \mathbf{h}$ cuando $\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} > 0$, o desarrollando esta expresión, $\dot{\mathbf{h}} = (\dot{\mathbf{e}} - \mathbf{h}) - (\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}})(\rho_\alpha^w \|\dot{\mathbf{e}}\| - \|\mathbf{h}\|) \widehat{\mathbf{h}}$.

- En caso de que $\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} = 1$, es decir, $\mathbf{h} \parallel \dot{\mathbf{e}}$, se tendrá $\dot{\mathbf{h}} = (1 - \rho_\alpha^w) \|\dot{\mathbf{e}}\| \widehat{\mathbf{h}}$.
- Si a lo anterior se suma que $\gamma_{oct}^H = \gamma_{ur}^\alpha$, es decir, $\rho_\alpha = 1$, se tendrá $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$.
- Por otro lado, en caso de que $\rho_\alpha = 0$, se tendrá $\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{0}$ independientemente del valor de $\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}}$ y, por tanto, $\dot{\mathbf{h}} = \dot{\mathbf{e}}$.

3.6.2. Variable de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$

El efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo no se considera en la mayoría de modelos constitutivos descritos en el capítulo 2, salvo en el modelo de Niemunis y Herle (1997). En el modelo *HQH* se considera la variación de dicha rigidez con los giros en la trayectoria de deformaciones desviadoras a través de la variable de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, que almacena el valor del módulo de corte secante máximo correspondiente a la curva de degradación activa α para $-p' = p'_{ref,2}$ (figura 3.02b). Esta variable de estado actúa como variable de memoria a corto plazo que se pueden reinicializar total o parcialmente tras una reversión.

$$\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = \begin{cases} 0 & \text{si } (\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}})^* < \widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} \\ (G_{s,0}^{ap,90,H,ref} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref})((\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}})^* - \widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}}) & \text{si } 0 < \widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} \leq (\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}})^* \\ (G_{s,0}^{ap,90,H,ref} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}) + (G_{s,0}^{ap,90,H,ref} - G_{s,0}^{ap,180,H,ref}) (\widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}}) & \text{si } \widehat{\mathbf{h}}:\widehat{\mathbf{e}} \leq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Donde $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = \cos(\alpha)$ es el ángulo de reversión, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|$ si $\|\mathbf{A}\| \neq 0$ y $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ si $\|\mathbf{A}\| = 0$, siendo $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ la norma de Hilbert-Schmidt, \mathbf{h} es el tensor de historia de deformaciones desviadoras, $\hat{\mathbf{e}}$ es el incremento del tensor de deformaciones desviadoras totales, $(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^*$ es el valor del ángulo a partir del cual aparecen las reversiones, $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ es el módulo de corte secante máximo de la curva de degradación correspondiente a una reversión de 90° ($\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = 0$) para $-p' = p'_{ref,2}$ y $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ es el módulo de corte secante máximo de la curva de degradación correspondiente a una reversión de 180° ($\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = -1$) para $-p' = p'_{ref,2}$.

El valor de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ se calcula de la siguiente manera:

$$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}(e^*) = G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}(e_0) + \int_{e_0}^{e^*} \dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} dt \approx G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}(e_0) + \sum_{e=e_0}^{e=e^*} \Delta G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \quad (3.40)$$

El modelo *HQH* considera infinitas curvas de degradación del módulo de corte aparente secante y cada una de ellas queda caracterizada por el valor máximo de dicho módulo ($G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$), que depende, a su vez, del valor de $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$. A partir de la expresión (3.39) y (3.40) se pueden calcular los valores de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, que cumplirán lo siguiente cuando tengan lugar reversiones:

- 1) Tras una reversión con $\alpha^* < \alpha < 90^\circ$, el valor de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ se reducirá en función del valor del ángulo de reversión y de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, tomando valores comprendidos entre $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ y $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$.
- 2) Tras una reversión con $\alpha = 90^\circ$, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$.
- 3) Tras una reversión con $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} < G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$.
- 4) Tras una reversión con $\alpha = 180^\circ$, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$.

En cualquier caso, se aplicará el criterio de estabilidad de Hill (1958) descrito en el apartado 3.7.5 del presente capítulo, de manera que, tras una reversión, el valor de G_s^{ap} deberá ser siempre mayor o igual al valor de G_s^{ap} anterior a la reversión.

En la figura 3.05 se puede ver como el valor de $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ viene dado por un plano inclinado en el espacio $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} - \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ cuando $(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}, G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}) \in [-1,0] \times [G_{s,0}^{ap,90,H,ref}, G_{s,0}^{ap,180,H,ref}]$, por un paraboloide hiperbólico cuando $(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}, G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}) \in (0, (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^*) \times [G_{s,0}^{ap,90,H,ref}, G_{s,0}^{ap,180,H,ref}]$ y por un plano horizontal cuando $(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}, G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}) \in ((\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^*, 1] \times [G_{s,0}^{ap,90,H,ref}, G_{s,0}^{ap,180,H,ref}]$. Las partes sombreadas en rojo son aquellas en las que $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} > 0$, las sombreadas en azul son aquellas en las que $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < 0$ y las sombreadas en verde son aquellas en las que $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = 0$.

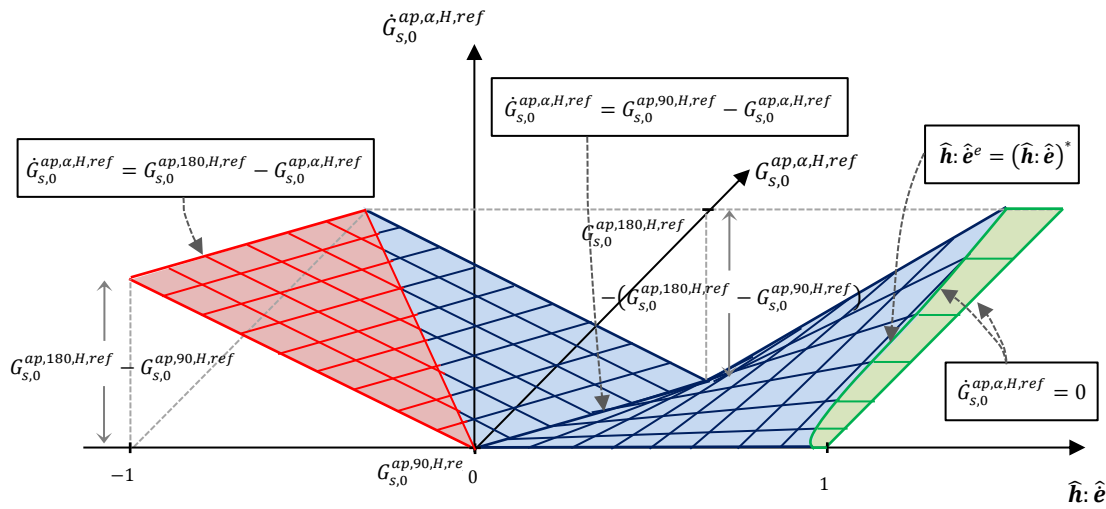


Figura 3.05. Gráfico $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} - \hat{h}: \hat{e}$ (sin tener en cuenta el criterio de estabilidad).

En relación con el concepto de reversión propuesto, este se expone con mayor detalle en el apartado 3.7.1 del presente capítulo.

La mayoría de los ensayos que miden la no linealidad en la rigidez al corte del suelo, lo hacen a través del valor del módulo de corte tangente (*figura 3.06*). A pesar de ello, muchos modelos que tratan de reproducir el comportamiento no lineal del suelo recurren a una formulación basada en el módulo de corte secante (a partir del cual es posible deducir el módulo de corte tangente de forma explícita o implícita). Debe tenerse en cuenta, no obstante, que por la propia definición del módulo de corte secante $G_s^\alpha(Y)$ y del módulo de corte tangente $G_t^\alpha(Y)$ para una determinada curva de degradación α , donde Y es la variable que mide la degradación de la rigidez al corte según la descripción dada en el apartado 2.5.3.1.3 del capítulo 2, se cumple que $G_t^\alpha(Y = 0) = G_s^\alpha(Y = 0) = G_0^\alpha$, es decir, que ambos módulos adoptan el mismo valor máximo cuando la variable de degradación vale cero (*figura 3.07*). De lo anterior se deduce que es posible construir modelos capaces de aproximar el comportamiento desviador no lineal del suelo utilizando una determinada ley de degradación del módulo de corte secante o tangente indistintamente, siempre que se utilice como parámetro el valor del módulo de corte máximo y, por supuesto, los parámetros restantes necesarios en cada caso.

En función del modelo considerado, tras un giro en la trayectoria de deformaciones desviadoras, la variable Y podrá reiniciarse totalmente o bien hacerlo total o parcialmente, tal como se ha descrito en el apartado 2.5.3.1.3 del capítulo 2. En los modelos de Prévost (1977, 1978), Simpson (1992), Niemunis y Herle (1997), Benz (2007), Schädlich y Schweiger (2012) y en el modelo *HS-SS* de Plaxis, así como en el modelo *HQH*, dicha variable se puede reiniciar total o parcialmente, es decir, $Y^{R+} \geq 0$ y, por tanto, $G_s^\alpha(Y^{R+}) \leq G_0^\alpha$ y $G_t^\alpha(Y^{R+}) \leq G_0^\alpha$.

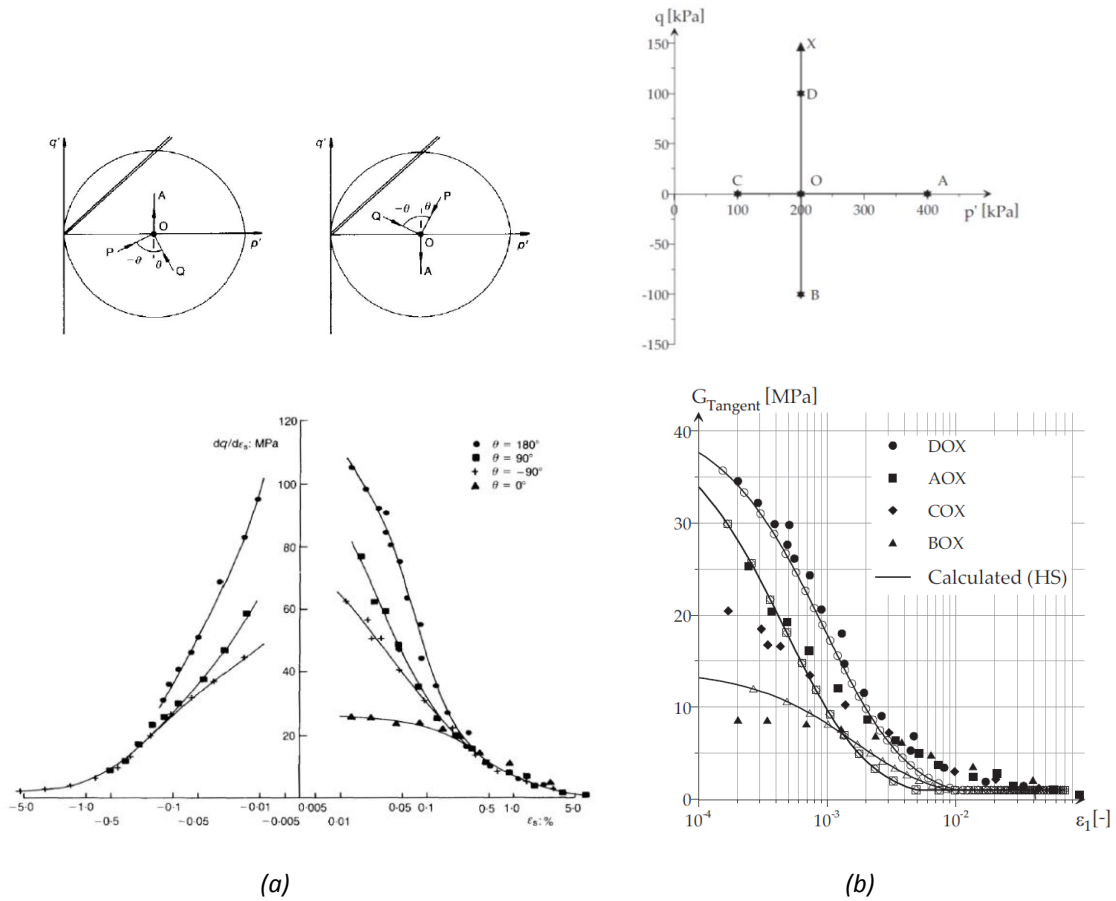


Figura 3.06. (a) G_t^{ap} en ensayos triaxiales no drenados en arcilla de Londres reconstituida (Atkinson et al., 1990). (b) G_t^{ap} en ensayos triaxiales realizado por Richardson (1988) y simulaciones con el modelo SSOM (Benz, 2007).

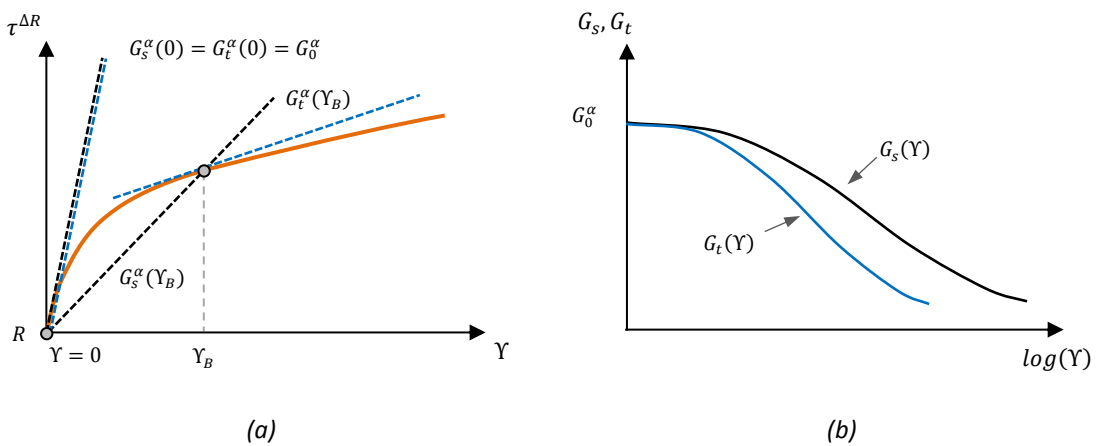


Figura 3.07. (a) Valor de G_s^α y G_t^α en la curva $\tau^{\Delta R} - \gamma$ relativa a un punto de reversión R . (b) Curvas $G_s^\alpha - \gamma$ y $G_t^\alpha - \gamma$.

Suponiendo que tiene lugar una reversión parcial de la deformación en un modelo cuya variable de degradación puede reinicializarse total o parcialmente, y en el caso en que la curva de degradación

definida por dicho modelo sea única, es decir, se defina a partir de un único valor del módulo de rigidez al corte máximo G_0 (como en el caso del modelo *SSOM*), las curvas de degradación experimentales podrán reproducirse en las simulaciones mediante la deformación de un tramo de la curva teórica, tal como se muestra en la figura 3.08a. Asimismo, suponiendo que tiene lugar la misma reversión parcial de la deformación en un modelo que considera diferentes curvas de degradación, es decir, en el que las curvas de degradación están definidas mediante diferentes valores del módulo de rigidez al corte máximo G_0^α (como en el caso del modelo *HQH*), las curvas de degradación experimentales, en general, podrán reproducirse, en las simulaciones, sin deformación de las curvas teóricas y, además, coincidirán con estas, tal como se muestra en la figura 3.08b. No obstante, por cuestiones prácticas, no es posible calibrar las curvas de degradación correspondientes a cada grado de reversión, de manera que esto deberá hacerse sólo en un número finito de estas.

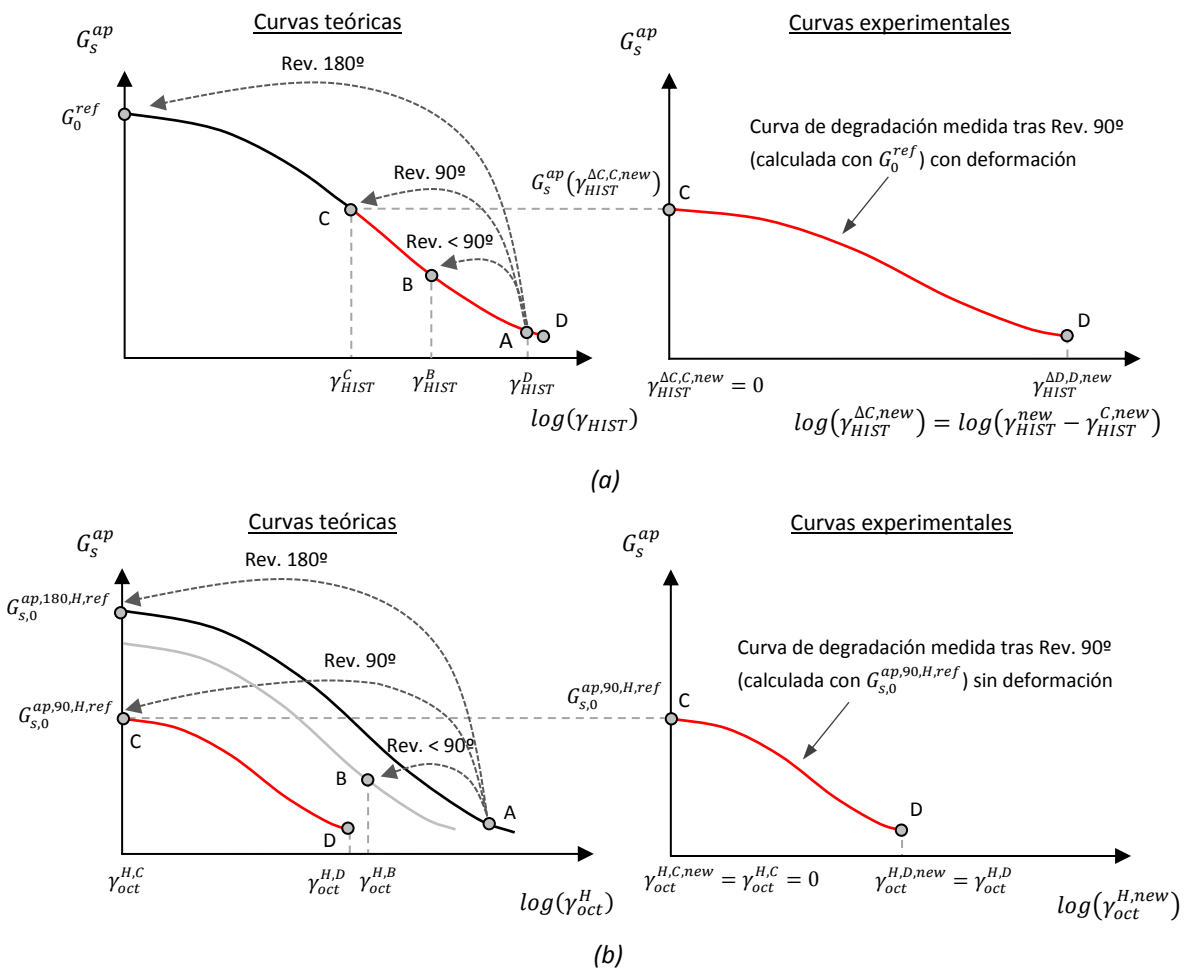


Figura 3.08. Efecto de reversiones de deformación con diferentes ángulos.
 (a) En el modelo *SSOM*. (b) En el modelo *HQH*.

En el modelo *HQH* la curva de degradación correspondiente a una reversión de la deformación de 180° se calibra con los dos parámetros $\gamma_{0.7}$ y $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, y la curva de degradación correspondiente a una reversión de la deformación de 90° se calibra con el parámetro $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ y se supone homotética a la

curva correspondiente a $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$. Ello implica que las curvas correspondientes a reversiones comprendidos entre α^* y 90° sí sufrirán cierta deformación.

En relación con los valores de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ y $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ es importante destacar que representan los módulos de corte aparente secante máximos resultantes tras cambios de dirección de 90° y 180° , respectivamente, en las trayectorias de deformaciones desviadoras. En la mayoría de estudios realizados que investigan el efecto de la historia tensodeformacional reciente sobre la rigidez del suelo, se utilizan ensayos triaxiales (Richardson, 1988; Atkinson et al., 1990; Smith et al., 1992; Stallebrass y Taylor, 1997; Jovicic, 1997) que miden el valor del módulo de corte y su degradación tras un giro de la trayectoria de tensiones en el plano $q - p'$, representado por el ángulo $\theta_{q/p'}$. Tras analizar los resultados de estos ensayos realizados por los autores citados, en diferentes tipos suelos, se han obtenido valores de $G^{\theta_{q/p'}=90^\circ} / G^{\theta_{q/p'}=180^\circ} = 0,30 - 0,69$, con un valor medio de 0,53. No obstante, al tratarse de ensayos triaxiales, las trayectorias de tensiones consideradas siempre se encontrarán en los planos de compresión o extensión triaxial del espacio de tensiones, teniendo en cuenta la ordenación $-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$ (figura 3.09), lo cual implica que las reversiones en el plano desviador únicamente podrán ser totales ($\alpha = 180^\circ$), permitiendo determinar el valor de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ a partir de $G^{\theta_{q/p'}=180^\circ}$, pero no el valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ a partir de $G^{\theta_{q/p'}=90^\circ}$. El valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ deberá obtenerse de ensayos con medida interna de la deformación en los que sea posible controlar el giro de las deformaciones desviadoras como, por ejemplo, ensayos biaxiales, triaxiales verdaderos o de cilindro hueco con torsión (ver punto *Historia tensodeformacional reciente* del apartado 2.5.2.2 del capítulo 2).

Con objeto de estimar el valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$, y ante la clara falta de datos experimentales en la literatura existente, se han revisado modelos que tienen en cuenta el rango de las pequeñas deformaciones en los que se utiliza como parámetro, o bien se puede calcular, el valor del módulo de rigidez tangente tras giros de las trayectorias de deformaciones desviadoras o totales de 90° (debe recordarse, en cualquier caso, que $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} \approx G_{t,0}^{ap,90,H,ref}$ para $Y^{R+} = 0$, tal como se ha expuesto anteriormente).

Las simulaciones revisadas corresponden a los modelos de Niemunis y Herle (1997) (descrito en el apartado 2.6.4.1.1 del capítulo 2) y Masin (2014) (basado parcialmente en el de Niemunis y Herle (1997)). Asimismo, se han revisado también simulaciones con los modelos de Schädlich y Schweiger (2012) (descrito en el apartado 2.6.3.2.6.1 del capítulo 2), Simpson et al. (1979) (descrito en apartado 2.6.3.2.2.2), Simpson (1992) (descrito en el apartado 2.6.3.2.3.1), Clarke (2009) y Ellison (2009), que también consideran, aunque de forma indirecta, la rigidización parcial del módulo de corte con giros de las deformaciones totales desviadoras de 90° .

En el caso de los modelos de Niemunis y Herle (1997) y Masin (2014), las reversiones dependen de los giros de las deformaciones totales, dando lugar a un acoplamiento entre la variación de las deformaciones volumétricas y la variación de la rigidez al corte. No obstante, es posible demostrar que si se cumple $\hat{\epsilon}^{\Delta R}: \hat{\epsilon} = 0$, se cumplirá $\hat{e}^{\Delta R}: \hat{e} = 0$ siempre que se tenga $\epsilon_{oct} \dot{\epsilon}_{oct} = 0$, siendo $\epsilon^{\Delta R} = \epsilon - \epsilon^R$, $e^{\Delta R} = e - e^R$, $\epsilon^R = \epsilon_{oct} \mathbf{1} + e^R$, $e = \epsilon - \epsilon_{oct} \mathbf{1}$, $-\epsilon_{oct} = -1/3 \epsilon_{ii}$, donde e^R es la variable de estado que almacena el tensor de deformaciones desviadoras totales en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo, ϵ es el tensor de deformaciones y $\hat{A} = A / \|A\|$ si $\|A\| \neq 0$ y $\hat{A} = \mathbf{0}$ si $\|A\| = 0$, siendo $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ la norma de Hilbert-Schmidt. Por ello, en estos

casos, para la estimación de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ en los modelos que proporcionan el valor del módulo de rigidez tangente tras giros de las trayectorias de deformaciones totales de 90° , se supondrá que se cumple la condición $\epsilon_{oct}\dot{\epsilon}_{oct} = 0$, es decir, que el suelo no experimenta deformaciones volumétricas o estas son pequeñas antes o inmediatamente después de la reversión de 90° .

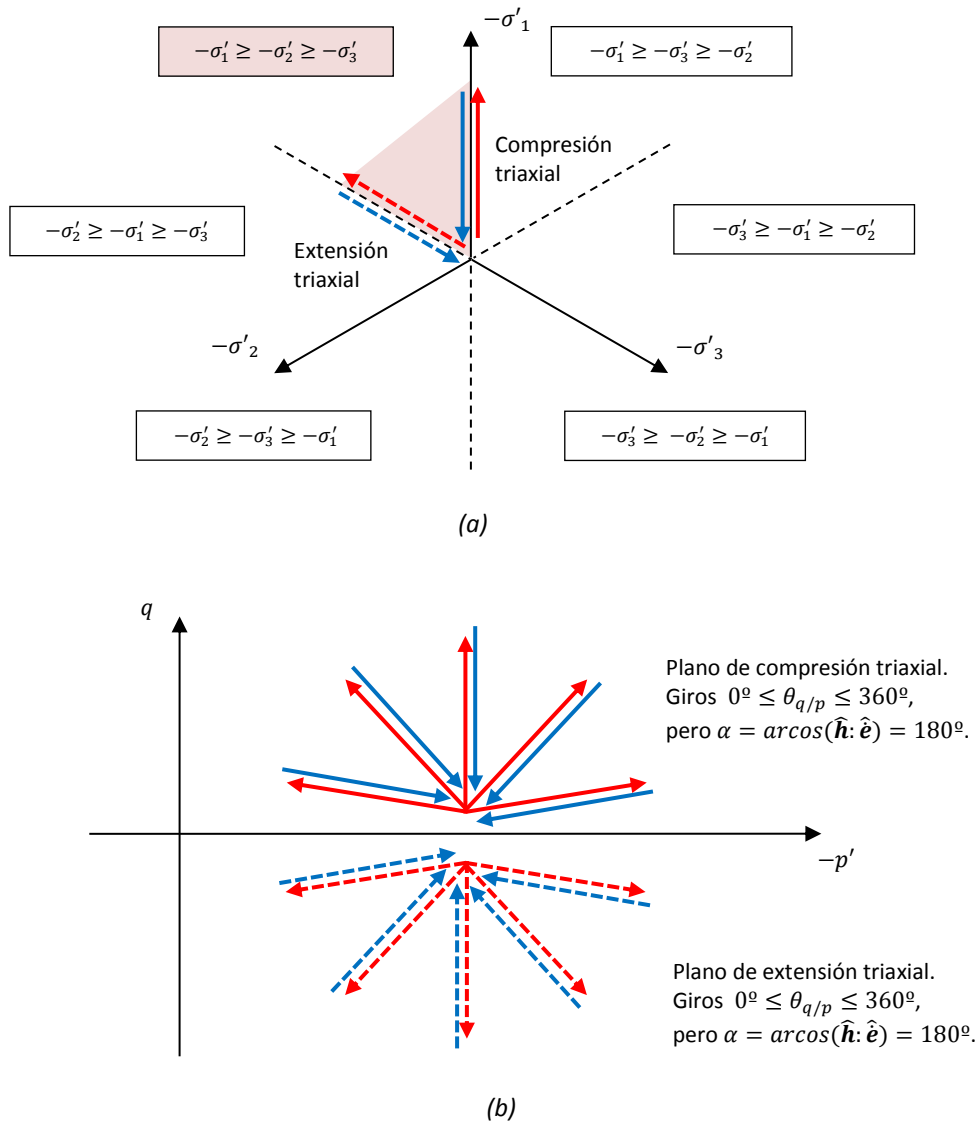


Figura 3.09. Trayectorias de tensiones en ensayos triaxiales.
 (a) Plano desviador. (b) Plano de Cambridge $q' - (-p')$.

Niemunis y Herle (1997) consideran un valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} / G_{s,0}^{ap,180,H,ref} = 0,40$ para arenas de Hochstetten y Ticino. Johannson y Konagai (2007), recurriendo al modelo de Niemunis y Herle, consideran un valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} / G_{s,0}^{ap,180,H,ref} = 0,40$ para arena de Toyoura. Por otro lado, Schädlich y Schweiger (2012) hacen referencia a Benz et al. (2009), que obtiene un valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} / G_{s,0}^{ap,180,H,ref} = 0,44$ en las simulaciones numéricas de ensayos de compresión biaxial utilizando el modelo multilaminado con los parámetros de arenas de Hochstetten y Ticino. Y por su

parte, Masin (2014) considera un valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} / G_{s,0}^{ap,180,H,ref} = 0,50$ para arcillas de Londres inalteradas. A pesar de que los datos disponibles son escasos, las relaciones anteriores permiten estimar el valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ a partir del de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ mediante la correlación empírica $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = \Lambda G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, tomando Λ valores de $0,40 - 0,44$ en arenas y de $0,50$ en arcillas.

3.6.3. Variables de estado e^R y $e^{e,R}$

La variable de estado e^R , que almacena el valor del tensor de deformaciones desviadoras totales en el último punto de reversión que conforma el extremo del ciclo de deformación activo, aparece, por un lado, en la expresión para el cálculo de $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, que permite conocer si la ecuación constitutiva incremental a aplicar es la correspondiente al Dominio 1 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$) o al Dominio 2 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^{\alpha}$) y, por otro lado, en la expresión para el cálculo de $e^{\Delta R}$, con el que, a su vez, se puede calcular el producto $\hat{e}^{\Delta R} : \Delta \hat{e}$, que identifica las reversiones en las que deben actualizarse las variables de estado e^R , $e^{e,R}$, H_{MEM} , E_{MEM} y E_{MEM}^e . Tanto e^R como $e^{e,R}$ actúan como variables de memoria a corto plazo que se reinician totalmente tras una reversión.

$$\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{oct} - \gamma_{oct}^R = \sqrt{4/3}(\|e\| - \|e^R\|) \quad (3.41)$$

$$e^{\Delta R} = e - e^R \quad (3.42)$$

Donde en la expresión (3.41) y (3.42), $e = \epsilon - \epsilon_{oct} \mathbf{1}$, $-\epsilon_{oct} = -1/3 \epsilon_{ii}$ y ϵ es el tensor de deformaciones totales.

Asimismo, la variable de estado $e^{e,R}$, que almacena el valor del tensor de deformaciones desviadoras elásticas en el último punto de reversión que conforma el extremo del ciclo de deformación activo, aparece en la parte desviadora de la ecuación constitutiva incremental elástica del Dominio 1 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$).

$$\dot{s} = 2G_s^{ap} \dot{e}^e + 2\dot{G}_s^{ap} (e^e - e^{e,R}) \quad (3.43)$$

Donde \dot{s} es el incremento del tensor desviador de tensiones $s = \sigma' - \sigma'_{oct} \mathbf{1}$, $-\sigma'_{oct} = -1/3 \sigma'_{ii}$, σ' es el tensor de tensiones efectivas, G_s^{ap} es el módulo de corte aparente secante según la expresión (3.05), \dot{e}^e es el incremento del tensor de deformaciones desviadoras elásticas, \dot{G}_s^{ap} es el incremento del módulo de corte aparente secante según la expresión (3.22) y e^e es el tensor de deformaciones elásticas desviadoras.

En el código numérico del modelo desarrollado, que se adjunta en el Anejo III, los tensores e y e^e se consideran también como variables de estado por cuestiones prácticas, si bien estos podrían obtenerse directamente de Plaxis.

Las variables de estado e^R y $e^{e,R}$ se actualizan según el siguiente esquema:

1. Tiene lugar una reversión que da lugar a un nuevo punto de reversión que conformará el extremo de un nuevo ciclo de deformación:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{R,(n+1)} &= \mathbf{e}^{(n)} \\ \mathbf{e}^{e,R,(n+1)} &= \mathbf{e}^{e,(n)} \end{aligned} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*,(n)}) \\ \hat{\mathbf{e}}^{\Delta R,(n)} : \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*,(n)}) \end{cases} \quad (3.44)$$

2. Tiene lugar el cierre del ciclo de deformación entre los puntos de reversión activos $s^{(n)} - 1$ y $s^{(n)}$, siendo $s^{(n)} \geq 2$ en tal caso:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{R,(n+1)} &= \left(\frac{\left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s^{(n)}-2}}{\|\mathbf{e}^{R,(n)}\|} \right) \mathbf{e}^{R,(n)} \\ \mathbf{e}^{e,R,(n+1)} &= \left(\frac{\left(E_{MEM}^{e,(n)} \right)_{s^{(n)}-2}}{\|\mathbf{e}^{e,R,(n)}\|} \right) \mathbf{e}^{e,R,(n)} \end{aligned} \quad \text{si} \quad \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} > \sqrt{4/3} \left(E_{s^{(n)}-1}^{s^{(n)}} \right) \\ \left| \gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} \right| > \sqrt{4/3} \left| \left(E_{s^{(n)}-1}^{s^{(n)}} \right) \right| \end{cases} \quad (3.45)$$

Cuando se cumpla $\left(E_{MEM}^{(n)} \right)_1 = 0$, se considerará $\mathbf{e}^{R,(n+1)} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{e}^{e,R,(n+1)} = \mathbf{0}$.

3. No tiene lugar una reversión que da lugar a un nuevo punto de reversión ni tiene lugar el cierre de ningún ciclo de deformación:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{R,(n+1)} &= \mathbf{e}^{R,(n)} \\ \mathbf{e}^{e,R,(n+1)} &= \mathbf{e}^{e,R,(n)} \end{aligned} \quad \text{si no se cumple (3.44) y (3.45)} \quad (3.46)$$

Donde $\boldsymbol{\epsilon}^{(n)} = \boldsymbol{\epsilon}^{(n)} - \epsilon_{oct}^{(n)} \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} = \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} - \epsilon_{oct}^{(n+1)} \mathbf{1}$, $-\epsilon_{oct}^{(n)} = -1/3\epsilon_{ii}^{(n)}$, $-\epsilon_{oct}^{(n+1)} = -1/3\epsilon_{ii}^{(n+1)}$, $\boldsymbol{\epsilon}^{(n)}$ y $\boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}$ son, respectivamente, los tensores de deformación al inicio y al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\mathbf{e}^{R,(n)}$ y $\mathbf{e}^{R,(n+1)}$ son, respectivamente, los valores de la variable de estado \mathbf{e}^R al inicio y final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\mathbf{e}^{e,R,(n)}$ y $\mathbf{e}^{e,R,(n+1)}$ son, respectivamente, los valores de la variable de estado $\mathbf{e}^{e,R}$ al inicio y final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\mathbf{h}^{(n)}$ es el tensor de historia al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\Delta \mathbf{e}^{(n+1)}$ es el incremento del tensor de deformaciones totales en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\mathbf{e}^{\Delta R,(n)} = \boldsymbol{\epsilon}^{(n)} - \mathbf{e}^{R,(n)}$, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|$ si $\|\mathbf{A}\| \neq 0$ y $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ si $\|\mathbf{A}\| = 0$, siendo $\|(\cdot)\| = \sqrt{(\cdot)_{ij}(\cdot)_{ij}}$ la norma de Hilbert-Schmidt, $(\hat{\mathbf{h}} : \Delta \hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^{*,(n)})$ es el valor del ángulo a partir del cual aparecen las reversiones, evaluado al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} = \gamma_{oct}^{(n+1)} - \gamma_{oct}^{R,(n)}$, $\gamma_{oct}^{(n+1)} = \sqrt{4/3}\|\mathbf{e}^{(n+1)}\|$, $\gamma_{oct}^{R,(n)} = \sqrt{4/3}\|\mathbf{e}^{R,(n)}\|$, $\left(E_{MEM}^{(n)} \right)_i$ es la componente i -ésima de la variable de estado $\mathbf{E}_{MEM}^{(n)}$ al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ y se corresponde con el valor del módulo $\|\mathbf{e}\|$ en el punto de reversión i -ésimo, $\left(E_{MEM}^{e,(n)} \right)_i$ es la componente i -ésima de la variable de estado $\mathbf{E}_{MEM}^{e,(n)}$ al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ y se corresponde con el valor del módulo $\|\mathbf{e}^e\|$ en el punto de reversión i -ésimo, $s^{(n)}$ es el número de puntos de reversión activos almacenados en las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, siendo $s^{(n)} \geq 2$ cuando se produce algún cierre de ciclo y $E_{s^{(n)}-1}^{s^{(n)}} = \left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s^{(n)}} - \left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s^{(n)}-1}$.

El primer ciclo en cerrarse será el correspondiente al menor ciclo de deformación activo. Los extremos de dicho ciclo, es decir, los puntos de reversión que lo definen se corresponden a su vez con los últimos dos valores de $\|\mathbf{h}\|$, $\|\mathbf{e}\|$ y $\|\mathbf{e}^e\|$, memorizados, respectivamente, en las variables de estado

\mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e . Dichos valores son los que se han identificado en la expresión (3.45) con las componentes $s - 1$ y s de dichas variables, siendo s el número de puntos de reversión activos. Asimismo, como se puede ver en la expresión (3.45), cuando tiene lugar un cierre de ciclo, las variables de estado \mathbf{e}^R y $\mathbf{e}^{e,R}$ se actualizan modificando su módulo, pero manteniendo la dirección, del mismo modo que se hace con el tensor \mathbf{h} en la expresión (3.37). Dicha actualización permite recuperar parcialmente las características de \mathbf{e}^R y $\mathbf{e}^{e,R}$ correspondientes al ciclo inmediatamente superior al que se está cerrando, con un coste computacional razonable.

3.6.4. Variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e

Las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} , $\mathbf{E}_{MEM}^e \in \mathbb{R}^{\bar{M}}$ almacenan, respectivamente, el valor de $\|\mathbf{h}\|$, $\|\mathbf{e}^R\|$ y $\|\mathbf{e}^{e,R}\|$ en los puntos de reversión que conforman el extremo de un ciclo de deformación, siempre que dichos ciclos de deformación se mantengan abiertos, siendo \bar{M} un parámetro interno del modelo que determina el número máximo de puntos de reversión en los que es posible memorizar $\|\mathbf{h}\|$, $\|\mathbf{e}^R\|$ y $\|\mathbf{e}^{e,R}\|$. Las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM}^e conforman variables de memoria a largo plazo capaces de almacenar información de todas las reversiones históricas activas (tantas como \bar{M}). Las componentes de \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e inicialmente valen todos cero y se actualizan según el siguiente esquema, similar al adoptado para las variables de estado del modelo de Hueckel y Nova (1979):

1. Tiene lugar una reversión que genera un nuevo punto de reversión que conformará el extremo de un nuevo ciclo de deformación:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left(H_{MEM}^{(n+1)} \right)_{1, \dots, s^{(n+1)}-1} = \left(H_{MEM}^{(n)} \right)_{1, \dots, s^{(n)}} \\
 & \left(E_{MEM}^{(n+1)} \right)_{1, \dots, s^{(n+1)}-1} = \left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{1, \dots, s^{(n)}} \\
 & \left(E_{MEM}^{e, (n+1)} \right)_{1, \dots, s^{(n+1)}-1} = \left(E_{MEM}^{e, (n)} \right)_{1, \dots, s^{(n)}} \\
 & \left(H_{MEM}^{(n+1)} \right)_{s^{(n+1)}} = \begin{cases} \min \left\{ \|\mathbf{h}^{(n)}\|, \gamma_{ur}^{\alpha, \xi=1, (n)} \right\} & \text{si } s^{(n+1)} = 1 \\ \|\mathbf{h}^{(n)}\| & \text{si } s^{(n+1)} > 1 \end{cases} \\
 & \left(E_{MEM}^{(n+1)} \right)_{s^{(n+1)}} = \|\mathbf{e}^{R, (n)}\| \\
 & \left(E_{MEM}^{e, (n+1)} \right)_{s^{(n+1)}} = \|\mathbf{e}^{e, R, (n)}\| \\
 & \left(H_{MEM}^{(n+1)} \right)_{s^{(n+1)+1, \dots, \bar{M}}} = 0 \\
 & \left(E_{MEM}^{(n+1)} \right)_{s^{(n+1)+1, \dots, \bar{M}}} = 0 \\
 & \left(E_{MEM}^{e, (n+1)} \right)_{s^{(n+1)+1, \dots, \bar{M}}} = 0
 \end{aligned} \right\} \text{si } \begin{cases} \hat{\mathbf{h}}^{(n)}: \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*, (n)}) \\ \hat{\mathbf{e}}^{\Delta R, (n)}: \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*, (n)}) \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

2. Tiene lugar el cierre del ciclo de deformación entre los puntos de reversión activos $s^{(n)} - 1$ y $s^{(n)}$, siendo $s^{(n)} \geq 2$ en tal caso:

$$\left. \begin{aligned}
(H_{MEM}^{(n+1)})_{1,\dots,s^{(n+1)}} &= (H_{MEM}^{(n)})_{1,\dots,s^{(n)}-2} \\
(E_{MEM}^{(n+1)})_{1,\dots,s^{(n+1)}} &= (E_{MEM}^{(n)})_{1,\dots,s^{(n)}-2} \\
(E_{MEM}^{e,(n+1)})_{1,\dots,s^{(n+1)}} &= (E_{MEM}^{e,(n)})_{1,\dots,s^{(n)}-2} \\
(H_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1,\dots,\bar{M}} &= 0 \\
(E_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1,\dots,\bar{M}} &= 0 \\
(E_{MEM}^{e,(n+1)})_{s^{(n+1)}+1,\dots,\bar{M}} &= 0
\end{aligned} \right\} \text{ si } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} > \sqrt{4/3} (E_{s^{(n)}-1}^{s^{(n)}}) \\ |\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}| > \sqrt{4/3} |(E_{s^{(n)}-1}^{s^{(n)}})| \end{cases} \quad (3.48)$$

Donde $E_{s^{(n)}-1}^{s^{(n)}} = (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}} - (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}-1}$.

3. No tiene lugar una reversión que genera un nuevo punto de reversión ni tiene lugar el cierre de ningún ciclo de deformación:

$$\left. \begin{aligned}
(H_{MEM}^{(n+1)})_{1,\dots,s^{(n+1)}} &= (H_{MEM}^{(n)})_{1,\dots,s^{(n)}} \\
(E_{MEM}^{(n+1)})_{1,\dots,s^{(n+1)}} &= (E_{MEM}^{(n)})_{1,\dots,s^{(n)}} \\
(E_{MEM}^{e,(n+1)})_{1,\dots,s^{(n+1)}} &= (E_{MEM}^{e,(n)})_{1,\dots,s^{(n)}} \\
(H_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1,\dots,\bar{M}} &= 0 \\
(E_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1,\dots,\bar{M}} &= 0 \\
(E_{MEM}^{e,(n+1)})_{s^{(n+1)}+1,\dots,\bar{M}} &= 0
\end{aligned} \right\} \text{ si no se cumple (3.47) y (3.48)} \quad (3.49)$$

Donde $s^{(n)}$ y $s^{(n+1)}$ son, respectivamente, el número de puntos de reversión que definen el extremo de un ciclo de deformación activo al inicio y al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\gamma_{ur}^{\alpha,\xi=1,(n)} = \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}(\xi=1) = \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}/2$ ($\gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \equiv \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}(\xi=2)$) y el resto de variables son las descritas anteriormente.

En relación con los valores de $s^{(n+1)}$ se tiene lo siguiente:

- $s^{(n+1)} = s^{(n)} + 1$ cuando tiene lugar una reversión que genera un punto de reversión que conformará el extremo de un nuevo ciclo de deformación.
- $s^{(n+1)} = s^{(n)} - 2$ cuando se cierra el ciclo de deformación comprendido entre los puntos de reversión correspondientes a las componentes $s^{(n)} - 1$ y $s^{(n)}$ de estas variables. En este caso se borrarán las componentes $j^{(n)}$ -ésimas de dichas variables que cumplan $j^{(n)} > s^{(n)} - 1$ y que se corresponden con los puntos de reversión que conforman los extremos de los ciclos de deformación activos imbricados en el ciclo que se cierra.
- $s^{(n+1)} = s^{(n)}$, cuando no tiene lugar una reversión ni un cierre de ciclo de deformación.

Asimismo, cuando $s = 0$ se considera que el estado tensodeformacional del suelo se encuentra en la región *SOM* (*Swept-Out-Memory*) definida por Gudehus et al. (1977), y este no depende de las variables de estado internas $(G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}, \gamma_{oct}^H(\mathbf{h}), \mathbf{e}^{e,R}, \mathbf{e}^R \mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}$ y $\mathbf{E}_{MEM}^e)$ destinadas a definir el comportamiento no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo, y cuando $s > 1$ el estado tensodeformacional del suelo se encuentra en la región complementaria a la *SOM* donde sí depende de dichas variables de estado. Debe tenerse en cuenta que las variables de memoria definidas $\mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}$ y \mathbf{E}_{MEM}^e no son capaces de reproducir correctamente el comportamiento histerético del suelo cuando tiene lugar un intercambio de deformaciones principales que dan lugar a un reinicio de $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)}$.

3.6.5. Variable de estado $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$

Como se ha apuntado previamente, la estructura interna del modelo *HQH* permite aplicar directamente la estrategia de Hashiguchi (1993). A pesar de ello, puesto que se pretende comparar el modelo *EPHYSS* (que resulta de combinar el modelo *HQH* con un modelo de plasticidad, concretamente con el modelo *HS_{MOD}*, descrito en el capítulo 5) con el modelo *HS-SS*, minimizando las diferencias ocasionados por sus respectivas formulaciones plásticas, se ha preferido utilizar en el modelo *HQH* la misma estrategia que en el modelo *HS-SS*, basada en la del modelo *HS-S* de Benz (2007). Dicha estrategia consiste en adoptar en todo momento un valor $\xi = 2$, correspondiente a procesos de descarga y recarga para calcular el valor del módulo G_s^{ap} , siendo otra variable de estado la encargada de modificar las leyes de endurecimiento del modelo *HS_{MOD}* para reproducir la rigidez inicial del suelo y su degradación en el rango de las pequeñas deformaciones durante procesos de carga noval.

El factor $h_i = h_i(G_{t,min,\xi=1}^{ap})$ será el encargado de modificar las leyes de endurecimiento del modelo *HS_{MOD}*. Dicho factor depende de la variable de estado $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$, que se actualiza como sigue:

$$G_{t,min,\xi=1}^{ap,(n+1)} = \min \{ G_{t,min,\xi=1}^{ap,(n)}, G_{t,\xi=1}^{ap,(n+1)} \} \quad (3.50)$$

$$G_{t,\xi=1}^{ap,(n+1)} \approx \frac{\Delta \tau_{oct,\xi=1}^{(n+1)}}{\Delta \gamma_{oct}^{(n+1)}} \quad (3.51)$$

$$\frac{\Delta \tau_{oct,\xi=1}^{(n+1)}}{\Delta \gamma_{oct}^{(n+1)}} = \begin{cases} \frac{G_{s,\xi=1}^{ap,(n+1)} |\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}| - G_{s,\xi=1}^{ap,(n)} |\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)}|}{|\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}| - |\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)}|} & \text{si } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \\ \gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \end{cases} \\ \frac{G_{s,\xi=1,ur}^{ap} \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} - G_{s,\xi=1}^{ap,(n)} |\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)}| + G_{t,ur}^{(n)} (|\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}| - \gamma_{ur}^{\alpha,(n)})}{|\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}| - |\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)}|} & \text{si } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \\ \gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} > \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \end{cases} \\ G_{t,ur}^{(n)} & \text{si } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} > \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \\ \gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} > \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \end{cases} \end{cases} \quad (3.52)$$

Donde en las expresiones anteriores $G_{s,\xi=1}^{ap,(n)} \approx \tau^{(n)}/\gamma^{(n)}$ y $G_{s,\xi=1}^{ap,(n+1)} \approx \tau^{(n+1)}/\gamma^{(n+1)}$ son, respectivamente, el valor de los módulos de corte secante aparente al inicio y al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ considerando $\xi = 1$, $\gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$ es el valor de $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}$ que delimita el Dominio 1 y 2 (y considera $\xi = 2$), $G_{s,\xi=1,ur}^{ap} = G_{s,\xi=1}^{ap}(\gamma_{ur}^{\alpha,(n)})$, $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)}$ y $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}$ son, respectivamente, los valores de $\gamma_{oct}^{\Delta R}$ al inicio y al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ y $G_{t,ur}^{(n)}$ es el módulo de corte tangente para $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} > \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$ al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$.

La variable de estado $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$ se identifica, de forma natural, con una variable de estado plástica del modelo *HS_{MOD}*, si bien no se considerará como tal en la deducción de la formulación elastoplástica del modelo *EPHYSS* y, por convención, se seguirá identificando con una variable de estado del modelo *HQH*.

3.7. Comportamiento histerético

El modelo *HQH* define un conjunto de variables de estado que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo. Según Gudehus (2011), estas variables son indispensables si se pretende tener en cuenta dicho comportamiento. Asimismo, tal como se ha explicado en el apartado 2.5.3 del capítulo 2, también deben definirse los siguientes conceptos que se relacionan directamente con las variables de estado mencionadas:

- Criterio de reversión
- Reglas de memoria
- Efecto de las reversiones sobre la variable de degradación
- Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo

3.7.1. Criterio de reversión

El criterio de reversión permite identificar aquellos puntos en los que se produce un cambio en la dirección de las tensiones o las deformaciones que induce modificaciones en la rigidez del suelo.

El criterio de reversión del modelo *HQH* es intrínseco, es decir, surge a partir de las propias ecuaciones del modelo y se formula en el espacio de deformaciones, lo cual es consistente con la filosofía de formular total o parcialmente el modelo constitutivo en dicho espacio, que, según Simpson (1992) y Benz et al. (2009), resulta más adecuado para explicar los mecanismos que gobiernan el comportamiento mecánico del suelo. Asimismo, el modelo *HQH* formula el criterio de reversión a partir del valor de las deformaciones desviadoras y no tiene en cuenta reversiones de carácter histórico generadas por deformaciones volumétricas, considerándose que la variación de la rigidez volumétrica entre descargas y recargas isotropas elásticas es despreciable (Lade y Abelev (2005), figura 2.18). Ello distingue el modelo *HQH*, siempre que se cumpla que $v' > v'_{min}$, de la mayoría de modelos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones y que consideran $K' = K'(G, v')$ o $G = G(K', v')$, en los que las reversiones que afectan el valor de G también afectan el valor de K' .

Asimismo, el modelo *HQH* distingue entre:

- Reversiones que afectan el valor de la rigidez G_s a través de las variables de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y \mathbf{h} . Ello tiene lugar cuando se cumple la condición $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
- Reversiones que afectan el valor de la rigidez γ , además, dan lugar a un punto de reversión que define el extremo de un nuevo ciclo de deformación. Ello tienen lugar cuando se cumplen las condiciones $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} \leq (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}:\hat{\mathbf{e}} \leq (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*)$ simultáneamente, e implica una modificación del valor de las variables de estado e^R , $e^{e,R}$, \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e , además de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ y \mathbf{h} .

La condición $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}:\hat{\mathbf{e}} \leq (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*)$ se impone para evitar la generación de múltiples puntos de reversión cuando $0 \leq \hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$, es decir, cuando \mathbf{h} decrece de forma continuada hasta adoptar un valor tal que se recupere la condición $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} \geq \cos(\alpha^*)$. Efectivamente, si se considera un incremento del tensor de deformación desviadora total $\Delta \mathbf{e}$ en un determinado paso de cálculo, que se aplica en N subincrementos de cálculo $\Delta \mathbf{e}_i = \Delta \mathbf{e}/N$, y se cumple que $\hat{\mathbf{h}}:\Delta \hat{\mathbf{e}}_1 \leq \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}:\Delta \hat{\mathbf{e}}_1 \leq \cos(\alpha^*)$, aparecerá un punto de reversión R^* que definirá el extremo de un nuevo ciclo de deformación. Tras dicha reversión se tendrá que $e^{\Delta R} = \mathbf{0}$. A efectos numéricos, cuando se cumpla $e^{\Delta R} = \mathbf{0}$, se considerará que $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}:\hat{\mathbf{e}} = 1$. Teniendo en cuenta esto, en los siguientes subincrementos de deformación y hasta aplicar el valor total de $\Delta \mathbf{e}$, se tendrá $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R^*}:\Delta \hat{\mathbf{e}}_i = 1$ para $i > 1$, no apareciendo nuevos puntos de reversión que afecten el valor de las variables e^R , $e^{e,R}$, \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e , aunque se pueda cumplir $\hat{\mathbf{h}}:\Delta \hat{\mathbf{e}}_i \leq \cos(\alpha^*)$ para $i > 1$, es decir, que aparezcan reversiones que modifiquen el valor de la rigidez del suelo.

3.7.1.1. Valor del ángulo de reversión $\cos(\alpha^*) = (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^*$

El modelo *HQH* considera que existe una reversión que afecta el valor de la rigidez G_s^{ap} cuando se cumple, en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, que $\|\mathbf{h}^{(n+1)}\| \leq \|\mathbf{h}^{(n)}\|$. De esta condición puede deducirse el valor mínimo de $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}}$, al que se denomina $\cos(\alpha^*) = (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^*$, que determina el umbral por debajo del cual tienen lugar las reversiones que afectan el valor de la rigidez.

El valor de $\cos(\alpha^*) = (\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^*$ se obtiene imponiendo la condición $d(\|\mathbf{h}\|) = \dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h} = 0$, que es equivalente a la condición $\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h} = 0$, tanto para el caso en que $\|\mathbf{h}\| > 0$, como para el caso en que $\|\mathbf{h}\| = 0$, es decir, cuando $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

$$(\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*) = \frac{1}{\frac{\|\dot{\mathbf{e}}\|}{\|\mathbf{h}\|}(1 - \rho_\alpha^w) + 1} \quad (3.53)$$

Geométricamente, la condición $\dot{\mathbf{h}}:\mathbf{h} = 0$ es equivalente a que los tensores $\dot{\mathbf{h}}$ y \mathbf{h} sean perpendiculares entre sí ($\dot{\mathbf{h}} \perp \mathbf{h}$) y, puesto que $\|\dot{\mathbf{h}}\| \ll \|\mathbf{h}\|$ en el entorno de α^* , ello, a su vez, equivale a que \mathbf{h} experimente un pequeño giro sin variar su módulo. En la figura 3.10 se muestra gráficamente la

evolución de $\hat{\mathbf{h}}$ de acuerdo con la expresión (3.33), y se indica el valor de $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ a partir del cual aparecen reversiones.

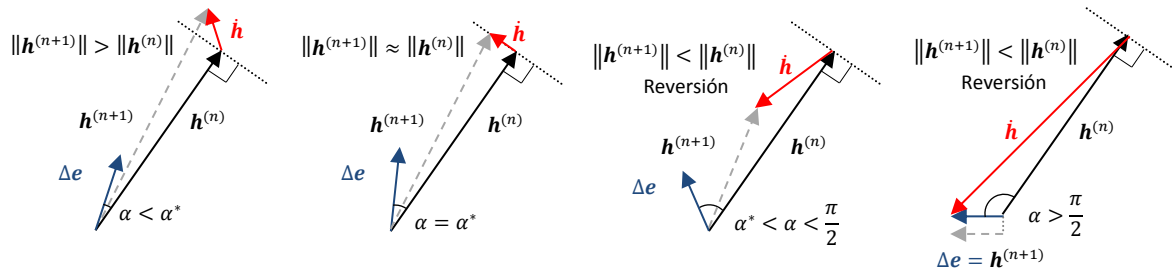


Figura 3.10. Evolución de $\hat{\mathbf{h}}$ en función de $\cos(\alpha) = \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ y criterio de reversión.

En la tabla 3.05 se describe el comportamiento de las variables de estado que controlan el valor del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} en función del valor que adopta $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ en un determinado paso de cálculo (figuras 3.04 y 3.05), sin tener en cuenta el criterio de estabilidad expuesto en el apartado 3.7.5 del presente capítulo.

	$\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$	\mathbf{h}	γ_{oct}^H	$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$	G_s^{ap}
NO REVERSIÓN	$\cos(\alpha^*) < \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} < 1$	Aumenta módulo Cambia dirección	$\gamma_{oct}^H \uparrow$	$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} =$	$G_s^{ap} \downarrow$
	$\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = \cos(\alpha^*)$	Mismo módulo Cambia dirección	$\gamma_{oct}^H =$	$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} =$	$G_s^{ap} =$
REVERSIÓN	$0 < \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} < \cos(\alpha^*)$	Reduce módulo Cambia dirección	$\gamma_{oct}^H \downarrow$	$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \downarrow$ $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} =$	$G_s^{ap} \uparrow$ $G_s^{ap} =$
	$\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = 0$	Reduce módulo Cambia dirección $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{e}}$	$\gamma_{oct}^H \downarrow$	$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \downarrow$ $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = (= G_{s,0}^{ap,90,H,ref})$	$G_s^{ap} \uparrow$ $G_s^{ap} =$
	$-1 < \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} < 0$	Reduce módulo Cambia dirección $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{e}}$	$\gamma_{oct}^H \downarrow$	$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \downarrow$ $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \uparrow$	$G_s^{ap} \uparrow$ $G_s^{ap} =$
	$\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = -1$	Reduce módulo Cambia dirección $\mathbf{h} = \dot{\mathbf{e}}$	$\gamma_{oct}^H \downarrow$	$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \uparrow$ $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = (= G_{s,0}^{ap,180,H,ref})$	$G_s^{ap} \uparrow$

Tabla 3.05. Efecto de $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ sobre las variables de estado y sobre G_s^{ap} (sin tener en cuenta el criterio de estabilidad).

3.7.2. Reglas de memoria

El modelo HQH cumple parcialmente las Reglas de Masing generalizadas (Masing, 1926; Pyke, 1979), siendo, por tanto, capaz de reproducir el comportamiento histerético del suelo. Dichas reglas se aplican

únicamente a la componente desviadora de la deformación, y no se considera el comportamiento histerético en la componente volumétrica.

Varios de los modelos no lineales expuestos en el capítulo 2 consideran el comportamiento histerético de la componente desviadora de la deformación del suelo de forma explícita o implícita. La mayoría de ellos son capaces de almacenar información de un único punto de reversión histórico, salvo los modelos de Prévost (1977, 1978), Hueckel y Nova (1979), Simpson (1992), Stallebrass y Taylor (1997), Niemunis y Herle (1997), Benz (2007), Niemunis y Prada-Sarmiento (2021), Niemunis et al. (2011a, 2011b) y Schädlich y Schweiger (2012), que, al igual que el modelo *HQH*, pueden almacenar información de un mayor número de puntos de reversión.

En el modelo *HQH*, el criterio utilizado para memorizar información en los puntos de reversión depende de las deformaciones desviadoras totales y no de las tensiones o de la energía. Según Schädlich y Schweiger (2012), ello es consistente con un planteamiento teórico en el que la degradación de la rigidez depende de la deformación.

3.7.2.1. Cumplimiento de las Reglas de Masing generalizadas

Combinado con un modelo plástico, el modelo *HQH* cumple parcialmente las Reglas de Masing generalizadas (Masing, 1969; Pyke, 1979), descritas en el apartado 2.6.3.1.2.1 del capítulo 2, de un modo similar a como lo hace el modelo *HS-S* y el modelo *HS-SS*, aunque ampliando significativamente la información sobre la historia reciente almacenada y mejorando el grado de cumplimiento de la Regla de Masing extendida nº4 respecto a estos últimos. Para el cumplimiento de las Reglas de Masing generalizadas nº1 y nº2, se aplica la misma estrategia utilizada en los modelos *HS-S* y *HS-SS*, y no la estrategia de Hashiguchi (1993) por los motivos expuestos en el apartado 3.6.5 del presente capítulo, a pesar de que la estructura interna del modelo *HQH* permite la aplicación de la misma de forma directa.

- **Regla nº1.** Para poder reproducir la rigidez inicial del suelo y su degradación en el rango de las pequeñas deformaciones, caracterizada por el módulo de corte máximo $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, durante procesos de carga noval, se modifican las leyes de endurecimiento del modelo plástico (*HS_{MOD}*) con el que se combina el modelo *HQH*, a través del factor h_i .

$$h_i = (G_m)^{1 + \frac{E_{t,ur}^{ref}}{E_i^{ref}}} \quad (3.54)$$

$$G_m = \frac{G_{t,min,\xi=1}^{ap}}{G_{t,ur}} \quad (3.55)$$

Donde en las expresiones anteriores, $E_{t,ur}^{ref}$ y E_i^{ref} son parámetros del modelo *HS_{MOD}* y se corresponden, respectivamente, con el módulo elástico longitudinal tangente de referencia a medias y grandes deformaciones y con el módulo de rigidez longitudinal inicial de referencia, $G_{t,ur}$ es el módulo de corte (hipo)elástico tangente para $\gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^{\alpha}$ y $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$ es la variable de estado que almacena el valor mínimo del módulo de corte aparente en los procesos de carga noval ($\xi = 1$).

- **Regla nº2.** Para el cálculo del incremento de tensiones a partir del incremento de deformaciones con la ecuación incremental constitutiva en el Dominio 1, se utilizan los valores de G_s^{ap} y \dot{G}_s^{ap} calculados con $\xi = 2$, tanto en procesos de carga noval como en procesos de descarga/recarga. Será precisamente el factor h_i que modifica las leyes de endurecimiento del modelo plástico con el que se combina el modelo *HQH*, el encargado de reproducir la rigidez inicial del suelo a pequeñas deformaciones y su degradación durante procesos de carga noval, compensando así el efecto introducido por G_s^{ap} y \dot{G}_s^{ap} al considerar un valor de $\xi = 2$.
- **Regla nº3:** Cuando el modelo *HQH* forma parte de un modelo elastoplástico, se tiene en cuenta la restricción del estado tensional sobre las superficies de fluencia, forzando de esta manera el cumplimiento de esta regla.
- **Regla nº4:** El modelo *HQH* sólo cumple parcialmente esta regla, aunque lo hace en mayor grado que el modelo *HS-S* o el modelo *HS-SS*, puesto que el modelo *HQH* aumenta sensiblemente la cantidad de información almacenada sobre la historia reciente de deformaciones en relación con estos dos modelos.

La historia reciente de las deformaciones desviadoras se almacena en el tensor de historia \mathbf{h} (que actúa, junto con $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, como variable de memoria a corto plazo que se puede resetear total o parcialmente tras una reversión), cuya estructura se basa en la del tensor δ de Niemunis y Herle (1997) y considera todas las reversiones posibles, en tanto que estas se dan de forma continua con el ángulo de giro de la trayectoria de deformaciones recientes $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$. Asimismo, en el modelo *HQH* la recuperación elástica tiene una menor dependencia del valor acumulado de la deformación. En los modelos *HS-S* y *HS-SS*, la historia reciente de las deformaciones desviadoras se almacena en el tensor de historia \mathbf{H} cuya estructura responde a un triple modelo de bloques de Simpson, las reversiones se dan de forma discontinua con el ángulo de giro de la trayectoria de deformaciones recientes, puesto que dependen del signo del producto de los autovalores de $\dot{\mathbf{e}}$ y de $\mathbf{H} - \mathbf{1}$ y, si estas no son totales, la recuperación elástica del módulo de corte asociada a las mismas tiene un nivel de dependencia elevado con el valor acumulado de las deformaciones (ver apartado 6.4.4 del capítulo 6). Por tanto, los modelos *HS-S* y *HS-SS* pueden almacenar información en \mathbf{H} de un máximo de tres reversiones recientes, mientras que el modelo *HQH*, puede almacenar información en \mathbf{h} de un número ilimitado de reversiones recientes, siempre y cuando no se borre su efecto.

Adicionalmente, el modelo *HQH* es capaz de memorizar toda la información de los tensores de deformación en el último punto de reversión que conforma el extremo del ciclo de deformación activo, cuando se cumplen las condiciones de reversión $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ y $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$, lo cual se hace a través de las variables de estado \mathbf{e}^R y $\mathbf{e}^{e,R}$ (que actúan también como variables de memoria a corto plazo que se resetean totalmente tras una reversión).

Asimismo, el modelo *HQH* es capaz de almacenar información parcial sobre las deformaciones en todos los puntos de reversión que configuran extremos de ciclos de deformación activos, a través de las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e (que conforman variables de memoria a largo plazo capaces de almacenar información de todas las reversiones históricas activas). Cuando se cierra un ciclo de deformación activo, el modelo *HQH* actualiza el valor de \mathbf{h} , \mathbf{e}^R y

$e^{e,R}$ con la información contenida, respectivamente, en las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e , lo cual permite recuperar, con un coste computacional razonable, las características de las variables de estado \mathbf{h} , e^R y $e^{e,R}$ correspondientes al ciclo inmediatamente superior al que se cierra.

3.7.3. Efecto de las reversiones sobre la variable de degradación

El efecto de las reversiones sobre la variable de degradación del suelo, es decir, sobre el invariante del tensor de historia $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$, se da de forma continua con el ángulo $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}}$ y se ha descrito ampliamente en el apartado 3.6.1 del presente capítulo.

- Cuando $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} > \cos(\alpha^*)$, no tiene lugar ninguna reversión y, por tanto, $\dot{\gamma}_{oct}^H > 0$ y $\gamma_{oct}^H > 0$.
- Cuando $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$, tiene lugar una reversión y se cumplirá $\dot{\gamma}_{oct}^H < 0$. En este caso, puede darse una de las siguientes situaciones:
 - $\gamma_{oct}^H > 0$ tras la reversión si $0 \leq \hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} < \cos(\alpha^*)$
 - $\gamma_{oct}^H = 0$ tras la reversión si $-1,0 \leq \hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} < 0$

3.7.4. Efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo

El efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo, es decir, sobre la variable de historia $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ correspondiente a la curva de degradación activa α , puede ser el de una reinicialización parcial o total de la rigidez y se ha descrito ampliamente en el apartado 3.6.2 del presente capítulo.

- Cuando $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} > \cos(\alpha^*)$, no tiene lugar ninguna reversión y, por tanto, $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = 0$
- Cuando $0 < \hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} < \cos(\alpha^*)$, tiene lugar una reversión y se cumplirá $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < 0$
- Cuando $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} \leq 0$, tiene lugar una reversión y se cumplirá $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} > 0$ o $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < 0$, en función del valor $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ anterior de dicha reversión, por ejemplo:
 - $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = 0$ si $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} = 0$ y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$
 - $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = -(G_{s,0}^{ap,180,H,ref} - G_{s,0}^{ap,90,H,ref})$ si $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} = 0$ y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$
 - $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,180,H,ref} - G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ si $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} = -1,0$ y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$
 - $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = 0$ si $\hat{\mathbf{h}}:\hat{\mathbf{e}} = -1,0$ y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$

3.7.5. Consistencia termodinámica y criterio de estabilidad

Tal como se deduce de las expresiones (3.04) y (3.26), se considera $K'_s = K'_s(-\epsilon_{oct}^e)$ y $K'_t = K'_t(-\epsilon_{oct}^e)$ en los dos dominios de deformación, donde K'_s y K'_t son módulos de rigidez elásticos secante y tangente, respectivamente, puesto que depende exclusivamente de $-\epsilon_{oct}^e$. Estas relaciones prueban que el modelo HQH es conservativo en cuanto al comportamiento volumétrico en el Dominio 1 y en el Dominio 2, siempre que se cumpla $\nu' > \nu'_{min}$, según lo expuesto en el apartado 3.5 del presente capítulo.

Asimismo, de las expresiones (3.05), (3.06), (3.07) y (3.27) se deduce $G_s^{ap} = G_s^{ap}(G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}, \gamma_{oct}^H, -\epsilon_{oct}^e)$ en el Dominio 1 y $G_{t,ur} = G_{t,ur}(-\epsilon_{oct}^e)$ en el Dominio 2, donde G_s^{ap} es un módulo de rigidez aparente y $G_{t,ur}$ es un módulo de rigidez (hipo)elástico, no siendo el modelo *HQH* conservativo en cuanto al comportamiento desviador en ninguno de los dos dominios.

El hecho de que el modelo *HQH* no sea conservativo, siempre que no se consideren las ecuaciones del problema térmico e hidráulico, es necesario si se pretende reproducir el comportamiento histerético del terreno. Como se ha expuesto en el apartado 2.5.3.1 del capítulo 2, el suelo es un material formado de partículas y, por tanto, experimentará disipación de energía durante ciclos de carga, que dará lugar, precisamente, a dicho comportamiento histerético (Sellers, 1989).

Por otro lado, para cumplir con el criterio de estabilidad de Hill (1958), se aplica la siguiente corrección sobre la variable $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, sustituyéndose por $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$, para que el valor de G_s^{ap} no pueda reducirse tras una reversión (se muestra un ejemplo de ello en la figura 3.11).

$$G_{s,0}^{ap,\alpha,(n+1)} = \left(G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n)} + \dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR} \right) \left(\frac{-p'(n)}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} \quad (3.57)$$

$$\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR} = \begin{cases} \dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} & \text{si } G_s^{ap,(n+1)} > G_s^{ap,(n)} \\ \frac{G_s^{ap,(n+1)} \left(1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^{H,(n+1)}}{\xi \gamma_{0,7}} \right) \right)}{\left(\frac{-p'(n)}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2}} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n)} & \text{si } G_s^{ap,(n+1)} \leq G_s^{ap,(n)} \end{cases} \quad (3.58)$$

El modelo memorizará, por tanto, la variable de estado corregida que almacena el módulo de corte secante máximo correspondiente a la curva de degradación activa α :

$$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}(e^*) \approx G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}(e_0) + \sum_{e=e_0}^{e=e^*} \Delta G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR} \quad (3.59)$$

Y en base a lo anterior, la expresión (3.22) que permite calcular el valor de \dot{G}_s^{ap} , se modifica de la siguiente manera:

$$\dot{G}_s^{ap} = G_s^{ap} \left(\frac{3m_2 K'_s}{p'} \left(1 + \frac{\epsilon_{oct}^e}{\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e} \right) \dot{\epsilon}_{oct}^e + \frac{\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}}{G_{s,0}^{ap,\alpha,ref,H}} - \frac{a}{\xi \gamma_{0,7}} \frac{G_s^{ap}}{G_{s,0}^{ap,\alpha}} \dot{\gamma}_{oct}^H \right) \quad (3.60)$$

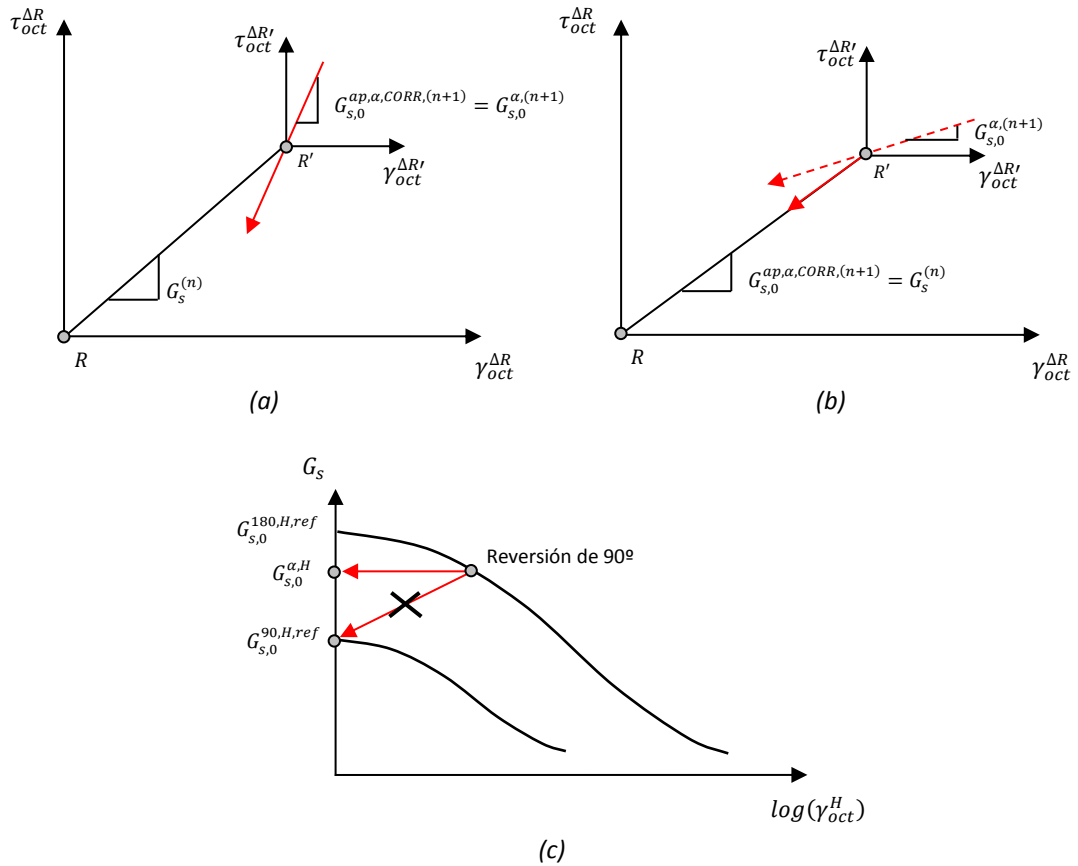


Figura 3.11. Aplicación del criterio de estabilidad tras una reversión en el punto R , suponiendo $\gamma_{oct}^{H,(n+1)} = 0$.

(a) Cuando $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,CORR,(n+1)} = G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n+1)}$. (b) y (c) cuando

$$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR,(n+1)} = \left(G_s^{(n+1)} \left(1 + a(\gamma_{oct}^{H,(n+1)} / \xi \gamma_{0,7}) \right) \right) (-p'^{(n)} / p'_{ref,2})^{-m_2} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n)}.$$

3.7.6. Parámetros del modelo *HQH*

Los parámetros del modelo *HQH* se explican en detalle en el capítulo 5, junto los del modelo *HS_{MOD}*, conformando la unión de ambos modelos el modelo *EPHYSS*.

3.7.7. Ejemplo ilustrativo de la evolución de las variables de estado del modelo *HQH* durante ciclos histeréticos

En las figuras 3.12 y 3.13 se muestra la evolución de las variables de estado del modelo *HQH* en un ejemplo en el que se sigue una trayectoria unidimensional con varios ciclos de deformación activos imbricados.

En el ejemplo se considera lo siguiente:

- Descargas y recargas en el dominio elástico.
- $\bar{M} = 5$, donde \bar{M} es el número máximo de puntos de reversión permitidos.
- Reversiones máximas en las que se cumple $\hat{\mathbf{h}}^{(n)}: \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} = -1$, de forma que tras una reversión se tendrá $\Delta G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n+1)} = 0$ y $\Delta \gamma_{oct}^{H,(n+1)} = -\gamma_{oct}^{H,(n)}$, es decir, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n+1)} = G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y $\gamma_{oct}^{H,(n+1)} = 0$.
- Entre las reversiones de la deformación y los cierres de ciclos de deformación, se considera $\hat{\mathbf{h}}^{(n)}: \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} = 1$ y, por tanto, una evolución monótona de \mathbf{h} , $\mathbf{e}^{\Delta R}$ y $\mathbf{e}^{e,\Delta R}$, y valores constantes de las componentes de las variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e .
- Un valor constante de $-p'$, lo que implica que $-\Delta \epsilon_{oct}^{e,(n+1)} = 0, \forall n$.
- Un valor $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_{t,ur}$, es decir, $G_m = 1$.
- Un valor $\sqrt{4/3} \|\mathbf{h}^{ini}\| = \gamma_{ur}^{180}$.

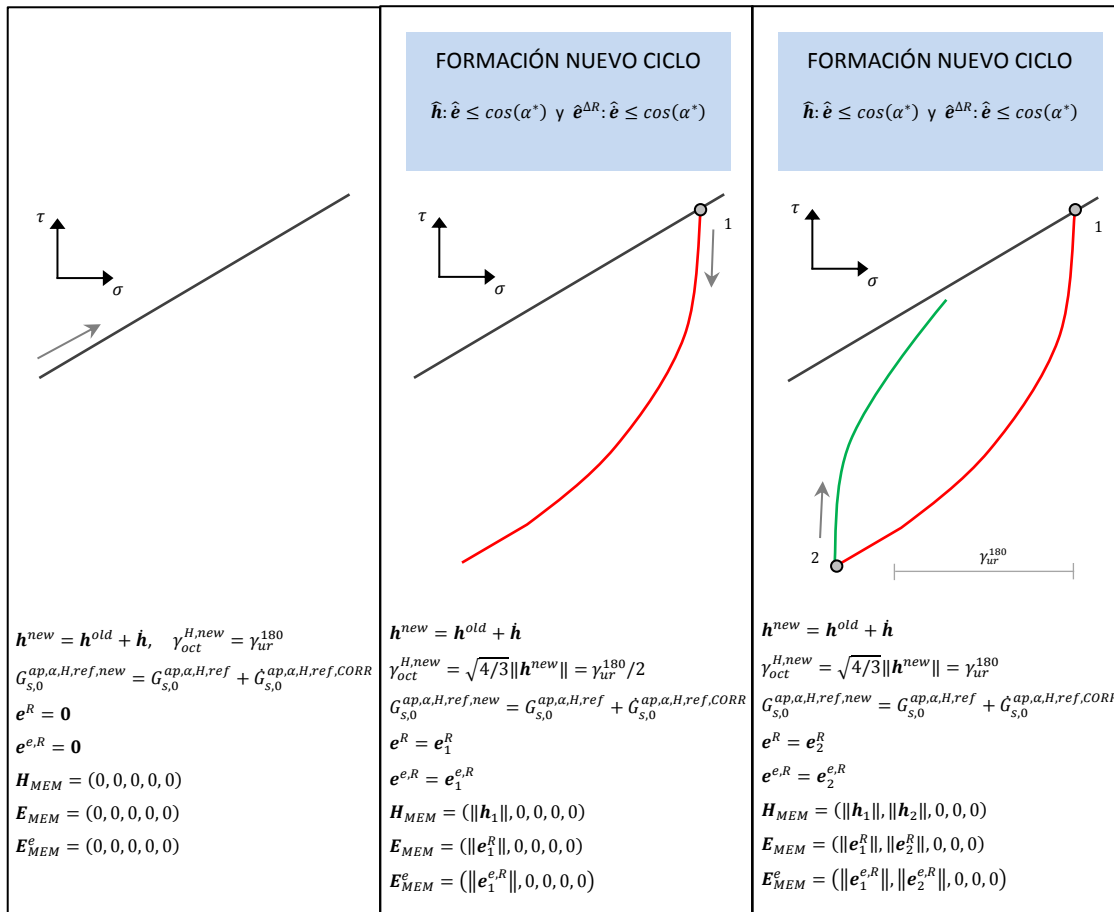


Figura 3.12. Ejemplo ilustrativo de la evolución de las variables de estado durante ciclos histeréticos (1/2).

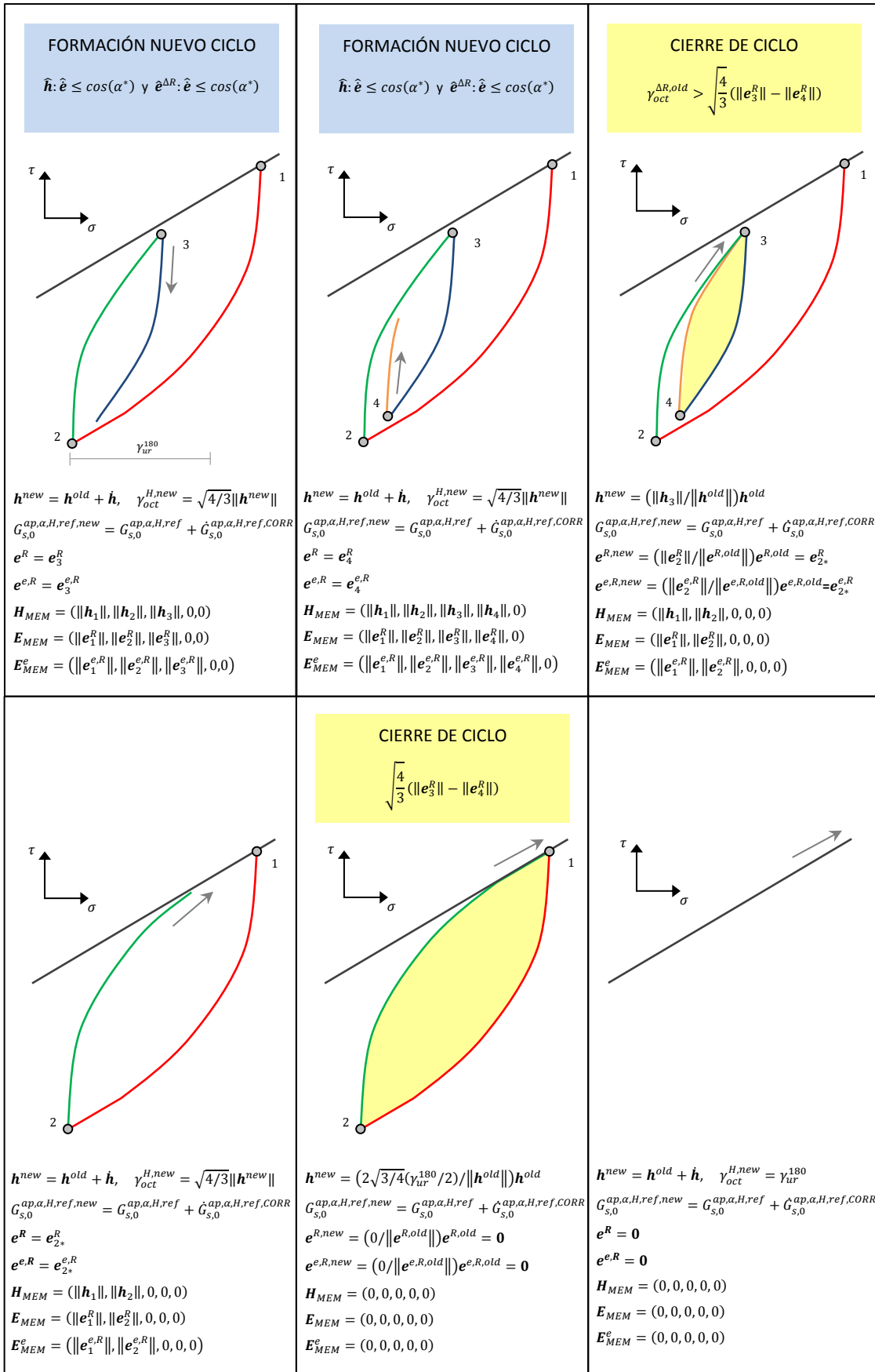


Figura 3.13. Ejemplo ilustrativo de la evolución de las variables de estado durante ciclos histeréticos (2/2).

Capítulo 4

Implementación numérica del modelo *HS*

El modelo constitutivo *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)* desarrollado en el capítulo 3 tiene en cuenta el comportamiento reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones (Zonas I y II de Jardine (1992)). El objetivo principal de dicho modelo es mejorar la aproximación al comportamiento del suelo que ofrecen otros modelos, como el *Small Strain Overlay Model (SSOM)* de Benz (2007), en el que se basa el modelo *Hardening Soil Small (HS-S)* de Benz (2007) y que da lugar al modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis, este último ampliamente utilizado en la práctica geotécnica y recientemente implementado en otros programas numéricos. Un modelo constitutivo completo, no obstante, debe ser capaz de simular el comportamiento del suelo en todo el rango de deformaciones, siendo necesario ampliar el dominio de análisis también a las Zonas III y IV de Jardine (1992). Por ello, el modelo *HQH* deberá combinarse con un modelo plástico y, puesto que uno de los objetivos de modelo resultante es tratar de mejorar la aproximación al comportamiento del suelo que proporciona el modelo *HS-SS*, es lógico que se utilice el mismo modelo que describe la parte plástica de este último, basado, a su vez, en el modelo *Hardening Soil* original (*HS*) de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), al cual se introduce un conjunto de modificaciones contempladas en el modelo *HS-S*, que afectan las leyes de endurecimiento y el criterio de dilatancia del primero. Para reproducir dicho modelo plástico, en primer lugar y en el presente capítulo se implementará y validará numéricamente el modelo *HS* de Plaxis, basado en el modelo *HS* original. En segundo lugar, en el capítulo 5 se desarrollará la manera en que se introducen las mencionadas modificaciones en el modelo *HS* implementado en el presente capítulo, dando lugar a un modelo plástico *Hardening Soil Modified (HS_{MOD})* equivalente a la parte plástica de los modelos *HS-S* y *HS-SS*. Finalmente, en el capítulo 5 también se describirá la combinación e implementación numérica el modelo *HS_{MOD}* con el modelo *HQH*, dando lugar así al modelo *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)*. Todas las implementaciones numéricas se hacen a través del módulo *User Define Soil Model (UDSM)* de Plaxis. Asimismo, se ha pretendido dar un carácter pedagógico de los conceptos desarrollados, dada la escasa literatura existente sobre la cuestión.

En cuanto al convenio de signos en la formulación desarrollada en este capítulo, por congruencia con el criterio utilizado en Plaxis, se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión, incluida la presión del agua. Asimismo, en todo momento se considera el marco teórico de las pequeñas deformaciones ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

4.1. El modelo *HS*

4.1.1. Ideas básicas

El modelo *Hardening Soil (HS)*, predefinido en Plaxis, se trata de un modelo incrementalmente multilineal elastoplástico de los denominados *Cap-Cone models*, que permite simular el comportamiento de diferentes tipos de suelos. Dicho modelo está basado en el modelo *Hardening Soil (HS)* de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), que a su vez se basa en el modelo de Vermeer (1978) y en algunas ideas desarrolladas previamente por Ohde (1951), Rowe (1962), Kondner (1963), Kondner y Zelasko (1963), Janbu (1963) y Duncan y Chang (1970).

El modelo *HS* dispone de cuatro superficies de fluencia, dos de las cuales consideran un endurecimiento isótropo, una de ellas por corte y la otra por compresión. El endurecimiento por corte es capaz de reproducir las deformaciones plásticas generadas por estados de carga desviadora, mientras que el endurecimiento por compresión permite reproducir las deformaciones generadas por estados de carga edométrica e isótropa.

El modelo *HS* es capaz de reproducir fenómenos macroscópicos básicos del suelo, como son las deformaciones irreversibles, la densificación debido a dichas deformaciones, la dependencia de la rigidez con las tensiones, la historia tensional a través de las variables de endurecimiento y la dilatancia.

Kondner y Zelasko (1963) propusieron una formulación de tipo hiperbólico para la curva de carga noval que relaciona la tensión desviadora con la deformación axial en ensayos triaxiales drenados (ver apartado 2.6.3.1.2.2.2 del capítulo 2) tal como se puede ver en la figura 4.01a. Posteriormente, Duncan y Chang (1970), basándose en esta formulación, introdujeron un límite superior a la tensión desviadora, dado por el criterio de plasticidad de Mohr-Coulomb (ver apartado 2.6.3.1.2.2.4 del capítulo 2), tal como se puede ver en la figura 4.01b. El modelo *HS* extiende parcialmente el modelo hipoeelástico de Duncan y Chang (1970) a una formulación elastoplástica.

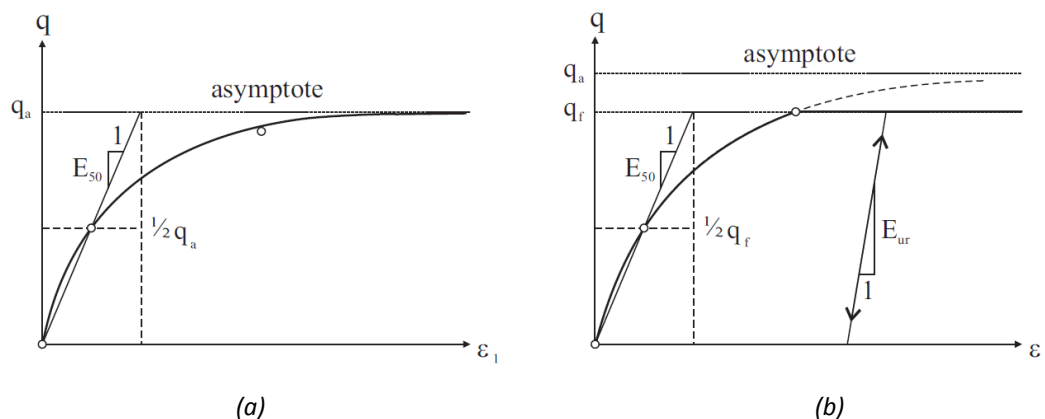


Figura 4.01. (a) Relación hiperbólica para la curva de carga noval $q - (-\epsilon_1)$ según el modelo de Kondner y Zelasko (1963). (b) Relación hiperbólica para la curva de carga noval $q - (-\epsilon_1)$ según el modelo Duncan y Chang (1970). Gráficos extraídos de la tesis de Benz (2007).

4.1.2. Superficies de fluencia

4.1.2.1. Superficies tipo Cono f_s y superficie de Mohr-Coulomb f_{mc}

En el modelo original de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), la superficie de fluencia que controla las deformaciones irreversibles bajo estados de carga desviadora se denomina superficie tipo Cono y se formula de la siguiente manera:

$$f_s = 2(-\epsilon_1) - 2(-\epsilon_1^e) - \gamma^p = \frac{q_a}{E'_{50}} \frac{q}{q_a - q} - \frac{2q}{E'_{t,ur}} - \gamma^p \quad (4.01)$$

$$q_a = \frac{q_f}{R_f} \quad (4.02)$$

$$q_f = \frac{2 \sin(\varphi')}{1 - \sin(\varphi')} (-\sigma'_3 + c' \cot(\varphi')) \quad (4.03)$$

Donde $-\epsilon_1 = (q_a/2E'_{50})q/(q_a - q)$ es la deformación axial total, $-\epsilon_1^e = q/E'_{t,ur}$ es la deformación axial elástica, $\gamma^p > 0$ es la deformación plástica desviadora que actúa como variable de estado, $q = -\sigma'_1 - (-\sigma'_3)$ es la tensión desviadora, $-\sigma'_i$ son las tensiones principales efectivas, q_a es la tensión desviadora última asintótica, q_f es la tensión desviadora límite dada por el criterio de plasticidad de Mohr-Coulomb, E'_{50} es el módulo de rigidez longitudinal secante drenado para una movilización del 50% de la tensión desviadora máxima q_f en un ensayo triaxial drenado bajo una presión de confinamiento $-\sigma'_3$ constante, $E'_{t,ur}$ es el módulo de rigidez longitudinal tangente drenado durante descargas y recargas elásticas, R_f es la ratio entre la tensión desviadora máxima q_f y la tensión desviadora última asintótica q_a , φ' es el ángulo de fricción efectivo del suelo y c' es la cohesión efectiva del suelo.

Una hipótesis habitual en suelos duros es suponer una deformación volumétrica plástica nula ($-\epsilon_v^p \approx 0$). Esta hipótesis es asumida en el modelo HS, lo cual da lugar a la equivalencia $\gamma^p = -\epsilon_1^p - (-\epsilon_2^p) - (-\epsilon_3^p) = -2\epsilon_1^p - (-\epsilon_v^p) \approx -2\epsilon_1^p |_{\epsilon_v^p \approx 0}$ entre la expresión (4.01) y la expresión (2.136) de Duncan y Chang (1970), donde $-\epsilon_i^p$ son las deformaciones plásticas principales y $-\epsilon_v^p = -\epsilon_1^p - \epsilon_2^p - \epsilon_3^p$ es la deformación volumétrica plástica.

Las superficies de fluencia para diferentes valores constantes de γ^p son curvas hiperbólicas en el espacio de tensiones $q - (-p')$ (figura 4.02a), y ello coincide con las observaciones realizadas por Tatsuoka e Ishihara (1974) e Ishihara et al. (1975) que se muestran en la figura 4.02b para arenas sueltas y en la figura 4.02c para arenas densas.

El modelo HS predefinido en Plaxis no utiliza el módulo E'_{50} de la expresión (4.01) en su formulación, sino que recurre, en su lugar, al módulo de rigidez longitudinal inicial drenado E'_i (figura 4.03). Ello se debe a la interacción que existe, y que se describe más adelante, entre la superficie de fluencia tipo Cono y la superficie de fluencia tipo Cap, cuando ambas se activan simultáneamente.

Experimentalmente es más sencillo obtener el valor del módulo de rigidez E'_{50} que el módulo E'_i y, por ello, el parámetro de rigidez que se introduce en el modelo como *input* es el módulo E'_{50} . Posteriormente

el modelo calcula el valor de E'_i mediante un algoritmo interno detallado en el apartado 4.1.7 del presente capítulo.

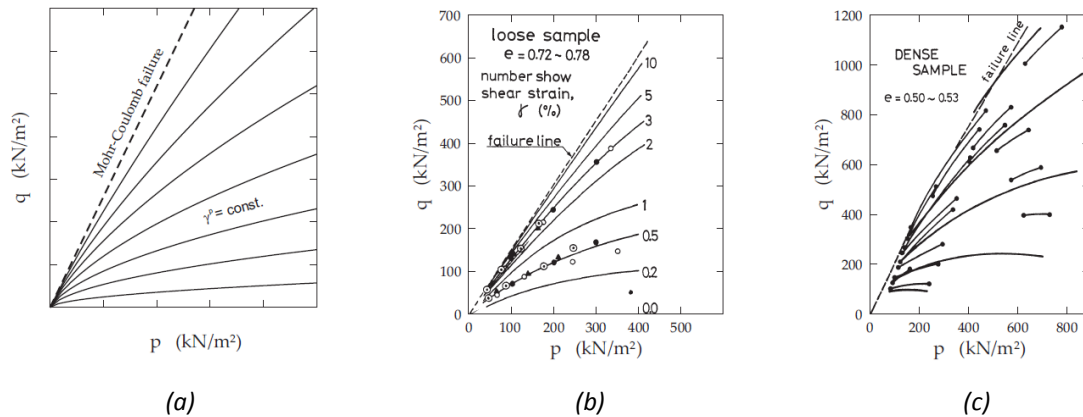


Figura 4.02. (a) Superficies de fluencia f_s para $\gamma^p = cte$ en el plano $q - p'$ ($p' > 0$ en los gráficos) (Benz, 2007). Curvas para una deformación de corte constante en ensayos triaxiales: (b) con arenas sueltas del Río Fuji (Ishihara et al., 1975), (c) con arenas densas del Río Fuji (Tatsuoka e Ishihara, 1974). Gráficos extraídos de la tesis de Benz (2007).

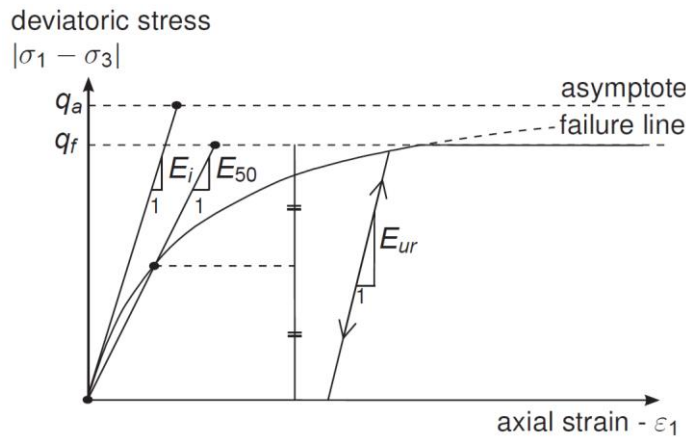


Figura 4.03. Representación de los módulos de rigidez E'_{50} , E'_i y $E'_{t,ur}$ ($E_{50} \equiv E'_{50}$, $E_i \equiv E'_i$, $E_{ur} \equiv E'_{t,ur}$) en la curva de carga noval $q - (-\epsilon_1)$ de un ensayo triaxial drenado (Plaxis, 2015).

Asumiendo plasticidad isotropa, la ordenación de las tensiones principales $-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$ y teniendo en cuenta que se utilizarán las Reglas de Koiter (Koiter, 1960) para el cálculo de la dirección del flujo plástico en las intersecciones entre superficies, la superficie tipo Cono f_s en el espacio de tensiones principales se expresa de la siguiente forma:

$$f_{s,13} = \frac{2q_a}{E'_i} \frac{(-\sigma'_1 - (-\sigma'_3))}{q_a - (-\sigma'_1 - (-\sigma'_3))} - \frac{2(-\sigma'_1 - (-\sigma'_3))}{E'_{t,ur}} - \gamma^p \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \tag{4.04}$$

$$f_{s,12} = \frac{2q_a}{E'_i} \frac{(-\sigma'_1 - (-\sigma'_2))}{q_a - (-\sigma'_1 - (-\sigma'_2))} - \frac{2(-\sigma'_1 - (-\sigma'_2))}{E'_{t,ur}} - \gamma^p \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2 \quad (4.05)$$

$$f_{s,23} = \frac{2q_a}{E'_i} \frac{(-\sigma'_2 - (-\sigma'_3))}{q_a - (-\sigma'_2 - (-\sigma'_3))} - \frac{2(-\sigma'_2 - (-\sigma'_3))}{E'_{t,ur}} - \gamma^p \quad -\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \quad (4.06)$$

Donde $-\sigma'_1$, $-\sigma'_2$ y $-\sigma'_3$ son las tensiones principales, q_a es la tensión desviadora última asintótica, E'_i es el módulo de rigidez longitudinal inicial, $E'_{t,ur}$ es el módulo de rigidez longitudinal tangente durante las descargas y recargas elásticas y γ^p es la deformación plástica desviadora que actúa como variable de estado.

Las superficies de fluencia de las expresiones anteriores, junto con sus simétricas respecto a la recta hidrostática, conforman la superficie tipo Cono completa en el espacio de tensiones principales.

Debe notarse que la variable de estado γ^p es la misma en las expresiones (4.04), (4.05) y (4.06). Ello implica que cuando dicha variable endurece, modificando así el tamaño de una o varias superficies plásticas activas, el resto de superficies no activas también sufrirán ese mismo endurecimiento.

Tal como se muestra en la figura 4.02a, la superficie de fluencia f_s puede endurecer hasta que la variable γ^p alcance el valor límite determinado por el criterio de resistencia de Mohr-Coulomb, lo cual sucede cuando $q = q_f$, siendo el valor de q_f el dado en la expresión (4.03). De cara a la implementación numérica del modelo HS, interesa expresar la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb (f_{mc}) en los mismos sectores del espacio de tensiones principales utilizados para la superficie de fluencia tipo Cono (f_s), lo cual se hace de la siguiente forma:

$$f_{mc,13} = \frac{1}{2}(-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)) + \frac{1}{2}(-\sigma'_1 + (-\sigma'_3))\sin(\varphi') - c' \cot(\varphi') \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \quad (4.07)$$

$$f_{mc,12} = \frac{1}{2}(-\sigma'_1 - (-\sigma'_2)) + \frac{1}{2}(-\sigma'_1 + (-\sigma'_2))\sin(\varphi') - c' \cot(\varphi') \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2 \quad (4.08)$$

$$f_{mc,23} = \frac{1}{2}(-\sigma'_2 - (-\sigma'_3)) + \frac{1}{2}(-\sigma'_2 + (-\sigma'_3))\sin(\varphi') - c' \cot(\varphi') \quad -\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \quad (4.09)$$

Donde φ' es el ángulo de fricción efectivo del suelo y c' es la cohesión efectiva del suelo.

En la figura 4.04 se muestran las superficies de fluencia tipo Cono y la envolvente de Mohr-Coulomb en el plano desviador. Las superficies en trazo continuo se corresponden con las expresiones (4.04) a (4.09), necesarias en la implementación de los algoritmos de integración local de las ecuaciones constitutivas y

la aplicación de las Reglas de Koiter (Koiter, 1960), mientras que las superficies en trazo discontinuo son sus expresiones simétricas, que no se requieren explícitamente en el algoritmo.

Además de la formulación hiperbólica propuesta para describir la curva de carga noval que relaciona la tensión desviadora y la deformación axial, el modelo HS también tiene en cuenta la dependencia de los módulos de rigidez E'_{50} , $E'_{t,ur}$ y E'_i con las tensiones siguiendo relaciones del tipo (2.19) de Ohde (1951), Janbu (1963) o Hardin y Richart (1963).

$$E'_{50} = E'^{ref}_{50} \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.10)$$

$$E'_{t,ur} = E'^{ref}_{t,ur} \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.11)$$

$$E'_i = E'^{ref}_i \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.12)$$

Donde E'^{ref}_{50} es el módulo de rigidez longitudinal secante drenado para una movilización del 50% de la tensión desviadora máxima q_f en un ensayo triaxial drenado bajo una presión de confinamiento $-\sigma'_3 = p'_{ref}$, $E'^{ref}_{t,ur}$ es el módulo de rigidez longitudinal tangente drenado para descargas y recargas elásticas para una presión de confinamiento $-\sigma'_3 = p'_{ref}$, E'^{ref}_i es el módulo de rigidez longitudinal inicial drenado para una presión de confinamiento $-\sigma'_3 = p'_{ref}$, φ' es el ángulo de fricción efectivo del suelo, c' es la cohesión efectiva del suelo, p'_{ref} es una presión de referencia, m es el factor que controla la dependencia de la rigidez con el confinamiento y suele adoptar un valor de 0,50 para arenas y de 1,0 para arcillas plásticas y suelos blandos, y $-\sigma'_3$ es la tensión principal menor que coincide con la presión efectiva de confinamiento.

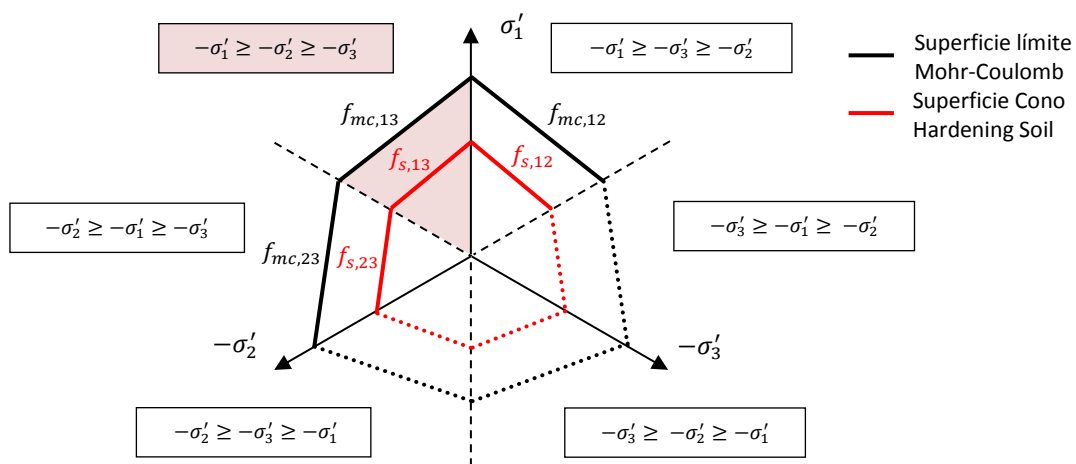


Figura 4.04. Representación en el plano desviador de las superficies de fluencia f_s .

4.1.2.2. Superficie tipo *Cap* f_c

El modelo HS considera una tercera superficie de fluencia, denominada superficie tipo *Cap*, que controla el comportamiento volumétrico plástico del suelo ante estados de tensiones isotrópicas y edométricas. Esta superficie permite cerrar la región elástica en la dirección de la recta hidrostática (figura 4.05).

$$f_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'}\right)^2 + (-p')^2 - p_p^2 \tag{4.13}$$

$$\tilde{q} = -\sigma'_1 + \left(\frac{1}{\delta} - 1\right)(-\sigma'_2) - \frac{1}{\delta}(-\sigma'_3) \tag{4.14}$$

$$\delta = \frac{3 - \sin(\varphi')}{3 + \sin(\varphi')} \tag{4.15}$$

Donde \tilde{q} es una medida de la tensión desviadora en un estado general de tensiones que cumple, para un estado de compresión triaxial $\tilde{q} = \sigma'_1 - (-\sigma'_3)$, y para un estado de extensión triaxial $\tilde{q} = \delta(-\sigma'_1 - (-\sigma'_3))$, $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, $p_p > 0$ es una variable de estado que controla el valor de la presión de preconsolidación y, por tanto, controla el tamaño de la superficie tipo *Cap*, y α' es un parámetro interno que controla la forma de dicha superficie, siendo el valor de \tilde{q} en la intersección de f_c con el plano $-p' = 0$ igual a $\tilde{q} = \alpha'p_p$. El valor de α' está relacionado con el valor del coeficiente de empuje al reposo en condiciones de carga noval K_0^{NC} , y su valor se calcula mediante el algoritmo iterativo que se describe en el apartado 4.1.7 del presente capítulo. El valor de K_0^{NC} se puede aproximar mediante la fórmula de Jaky (1944) como $K_0^{NC} = 1 - \sin(\varphi')$.

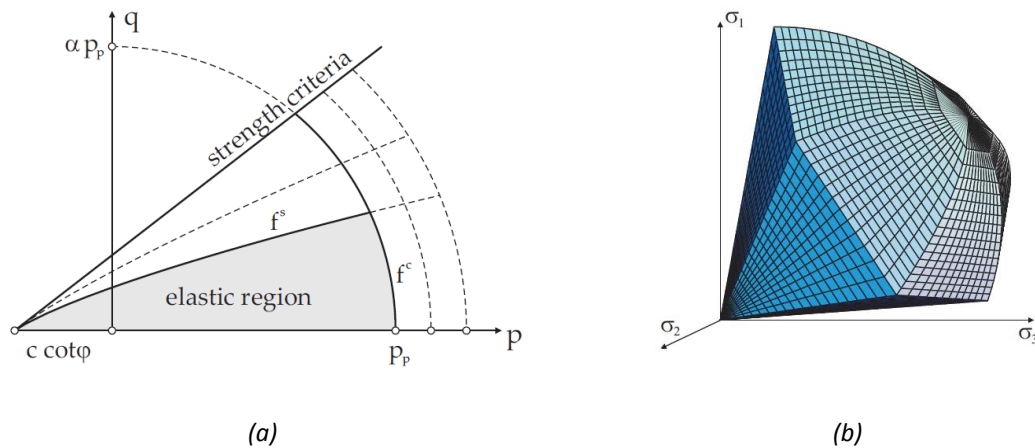


Figura 4.05. (a) Representación de la superficie de fluencia tipo Cono f_s , la superficie de fluencia tipo *Cap* f_c y el criterio de rotura de Mohr-Coulomb en el plano $q - (-p)$, ($p' > 0$ en el gráfico y $f^c \equiv f_c$, $f^s \equiv f_s$). (b) Representación de la superficie de fluencia f_s en su valor límite (coincidente con el criterio de rotura de Mohr-Coulomb) y la superficie de fluencia tipo *Cap* f_c , en el espacio de tensiones principales ($\sigma'_i > 0$ en el gráfico). Gráficos extraídos de la tesis de Benz (2007).

Con objeto de facilitar el uso de las Reglas de Koiter (Koiter, 1960) sobre la superficie de fluencia tipo *Cap* y asumiendo plasticidad isótropa y la ordenación de las tensiones principales $-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$, se han definido unas superficies de fluencia auxiliares (expresión 4.16, 4.17 y figura 4.06) para mantener el estado tensional en la región $-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$ tras el algoritmo de *Return Mapping*.

$$f_{aux,1} = -\sigma'_3 - (-\sigma'_2) \quad -\sigma'_3 \leq 0 \quad (4.16)$$

$$f_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \quad -\sigma'_1 \geq 0 \quad (4.17)$$

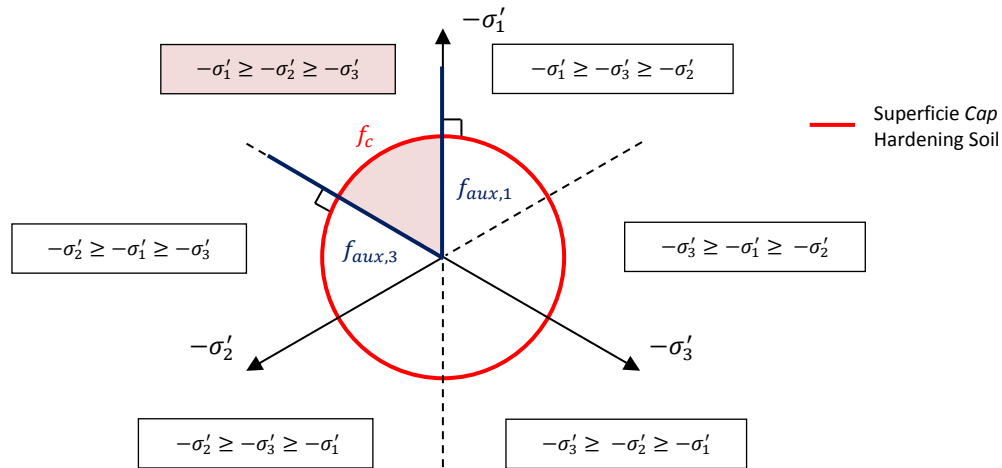


Figura 4.06. Representación en el plano desviador de las superficies de fluencia f_c , $f_{aux,1}$ y $f_{aux,3}$.

4.1.2.3. Superficies de Tracción Nula f_t

El modelo *HS* predefinido en Plaxis considera, aparte de la superficie tipo Cono, la superficie tipo *Cap* y la superficie límite de Mohr-Coulomb, una cuarta superficie f_t denominada superficie de Tracción Nula (figura 4.07), que tiene en cuenta la resistencia a tracción del suelo ($-\sigma'_3 = \sigma'_{trac} > 0$, siendo $-\sigma'_3$ la tensión principal menor), que normalmente suele ser nula o muy pequeña. Dicha superficie coincide con la superficie de Rankine habitualmente utilizada en la modelización de materiales de naturaleza cohesiva. Del mismo modo que se ha hecho con la superficie tipo *Cap*, se considera, también en este caso, la superficie de fluencia $f_{aux,3}$ de la expresión (4.17) para mantener el estado tensional en la región $-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$ tras el algoritmo de *Return Mapping*.

$$f_{t,3} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_3) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3\} \cup \{-\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3\} \quad (4.18)$$

$$f_{t,2} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_2) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2\} \cup \{-\sigma'_3 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2\} \quad (4.19)$$

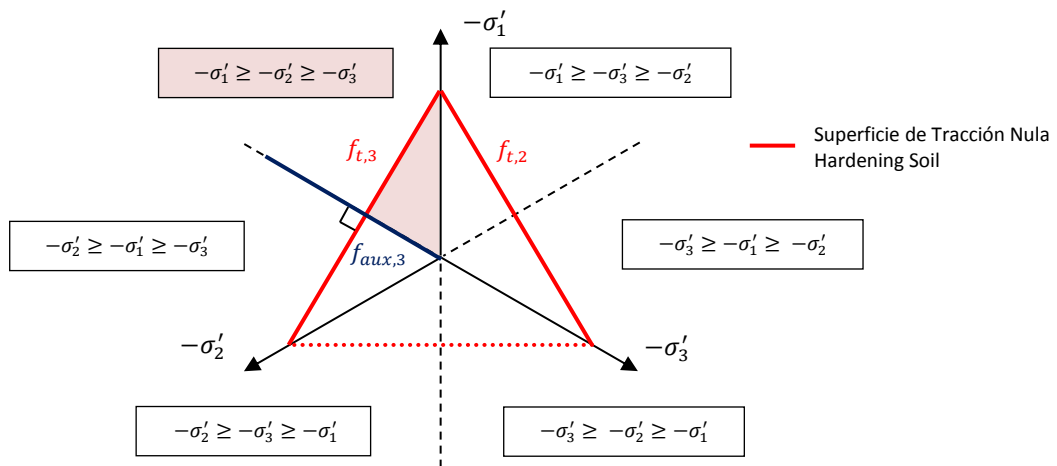


Figura 4.07. Representación en el plano desviador de las superficies de fluencia f_t .

4.1.3. Potenciales plásticos y dilatancia

En el contexto de la teoría elastoplástica, los modelos deben definir los potenciales plásticos asociados a cada una de las superficies de fluencia que encierran el dominio elástico.

Asumir la hipótesis de plasticidad asociada para la superficie de fluencia tipo Cono, que controla las deformaciones desviadoras plásticas y el endurecimiento por corte, sería poco realista en la mayoría de suelos. Es por ello que se considera la siguiente regla de flujo sobre dicha superficie:

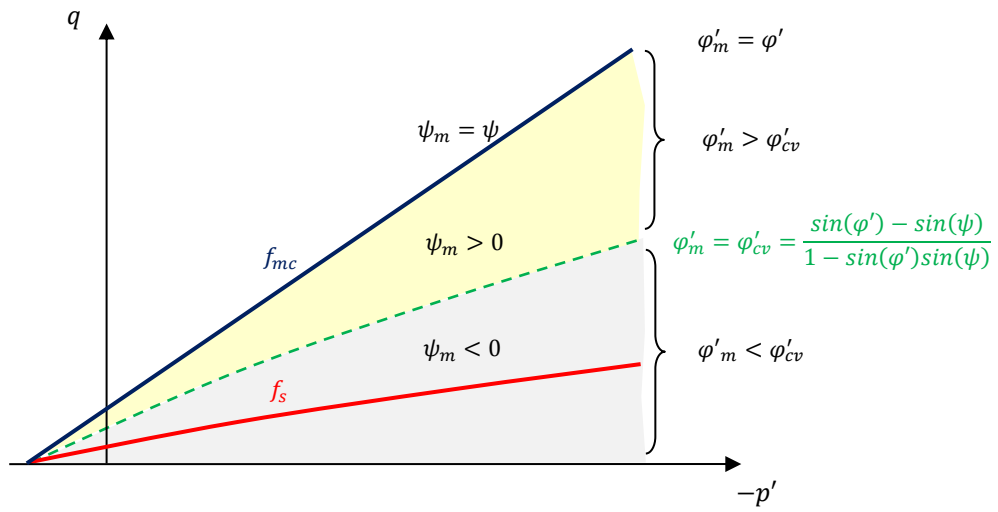
$$\frac{-\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\gamma}^p} = \sin(\psi_m) \tag{4.20}$$

Donde $-\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de la deformación volumétrica plástica, $\dot{\gamma}^p$ es el incremento de la deformación de corte plástica y ψ_m es el ángulo de dilatancia movilizado.

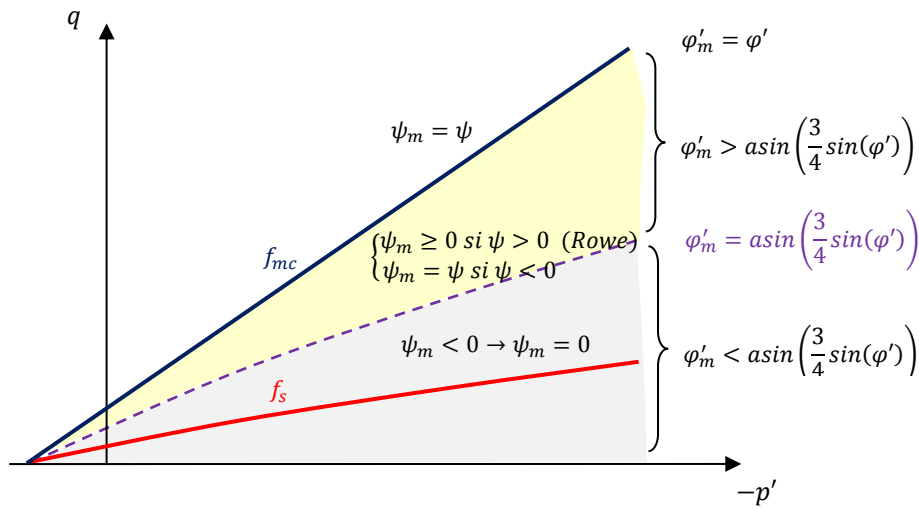
Para calcular el ángulo de dilatancia movilizado se recurre a una formulación basada en la teoría de Rowe (1962, 1971), a la que se introducen modificaciones.

Según la teoría de Rowe, el suelo tiene un comportamiento contractivo para estados tensionales desviadores que cumplen $\varphi'_m < \varphi'_{cv}$ y dilatante para estados tensionales desviadores que cumplen $\varphi'_m > \varphi'_{cv}$ (figura 4.08a), siendo φ'_m el ángulo de fricción efectivo movilizado y φ'_{cv} el ángulo de fricción efectivo sobre la recta de estados críticos. El valor de la dilatancia máxima se da para $\varphi'_m = \varphi'$, lo cual sucede sobre la superficie límite de Mohr-Coulomb.

Las modificaciones de la teoría de Rowe que se incorporan en el modelo HS predefinido en Plaxis afectan al comportamiento contractivo predicho por dicha formulación. Concretamente, cuando el criterio de Rowe proporciona valores negativos del ángulo de dilatancia movilizado ψ_m , lo cual sucede para valores pequeños de φ'_m , el modelo HS adopta un valor $\psi_m = 0$, cuando se cumpla $\psi > 0$, y $\psi_m = \psi$, cuando se cumpla $\psi < 0$ (figura 4.08b).



(a)



(b)

Figura 4.08. (a) Valores de los ángulos de dilatación según la formulación de Rowe (1962).
(b) Valores de los ángulos de dilatación en el modelo HS.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin(\psi_m) = 0 & \text{si } \sin(\varphi'_m) < \frac{3}{4} \sin(\varphi') \\ \sin(\psi_m) = \max\left(\frac{\sin(\varphi'_m) - \sin(\varphi'_{cv})}{1 - \sin(\varphi'_m)\sin(\varphi'_{cv})}, 0\right) & \text{si } \sin(\varphi'_m) \geq \frac{3}{4} \sin(\varphi') \text{ y } \psi > 0 \\ \sin(\psi_m) = \sin\psi & \text{si } \sin(\varphi'_m) \geq \frac{3}{4} \sin(\varphi') \text{ y } \psi \leq 0 \\ \sin(\psi_m) = 0 & \text{si } \sin(\varphi') = 0 \end{array} \right. \quad (4.21)$$

$$\sin(\varphi'_m) = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)}{-\sigma'_1 + (-\sigma'_3) + 2c' \cot(\varphi')} \quad (4.22)$$

$$\sin(\varphi'_{cv}) = \frac{\sin(\varphi') - \sin(\psi)}{1 - \sin(\varphi')\sin(\psi)} \quad (4.23)$$

Donde $-\sigma'_i$ son las tensiones principales, ψ_m es el ángulo de dilatación movilizado, φ'_m es el ángulo de fricción efectivo movilizado, ψ es el ángulo de dilatación del suelo, c' es la cohesión efectiva del suelo, φ' es el ángulo de fricción efectivo del suelo y φ'_{cv} es el ángulo de fricción efectivo a volumen constante del suelo.

La definición de las reglas de flujo para la superficie tipo Cono, dada en la expresión (4.20), es equivalente a definir las siguientes expresiones del potencial plástico asociado a dicha superficie.

$$g_{s,13} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \quad (4.24)$$

$$g_{s,12} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_2)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_2)}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2 \quad (4.25)$$

$$g_{s,23} = \frac{-\sigma'_2 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_2 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad -\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \quad (4.26)$$

Por otro lado, en la superficie de Mohr-Coulomb se asume también plasticidad no asociada y el potencial plástico se expresa como:

$$g_{mc,13} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi) \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \quad (4.27)$$

$$g_{mc,12} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_2)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_2)}{2} \right) \sin(\psi) \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2 \quad (4.28)$$

$$g_{mc,23} = \frac{-\sigma'_2 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_2 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi) \quad -\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \quad (4.29)$$

Finalmente, en cuanto a la superficie tipo Cap, la superficie de Tracción Nula y las superficies auxiliares, se asume plasticidad asociada en todas ellas, considerando, por tanto, potenciales plásticos iguales a las superficies de fluencia ($g_i = f_i$).

$$g_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'} \right)^2 + (-p')^2 - p_p^2 \quad (4.30)$$

$$g_{t,3} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_3) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3\} \cup \{-\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3\} \quad (4.31)$$

$$g_{t,2} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_2) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2\} \cup \{-\sigma'_3 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2\} \quad (4.32)$$

$$g_{aux,1} = -\sigma'_3 - (-\sigma'_2) \quad -\sigma'_3 \leq 0 \quad (4.33)$$

$$g_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \quad -\sigma'_1 \geq 0 \quad (4.34)$$

Donde \tilde{q} es una medida de la tensión desviadora para un estado general de tensiones (expresión 4.14), $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, p_p es la variable de estado que controla el tamaño de la superficie tipo *Cap*, α' es el parámetro interno que controla la forma de dicha superficie y σ'_{trac} es el valor de la tracción máxima que el suelo puede soportar.

4.1.4. Variables de estado y leyes de endurecimiento

El modelo *HS* considera dos variables de estado asociadas el régimen plástico:

- La deformación plástica desviadora $\gamma^p > 0$ controla el tamaño de la superficie de fluencia tipo Cono f_s .
- La tensión de preconsolidación $p_p > 0$ controla el tamaño de la superficie de fluencia tipo *Cap* f_c .

La ley de endurecimiento que controla la evolución de γ^p se puede formular de la siguiente manera:

$$\dot{\gamma}^p = \dot{\lambda}_{\gamma^p} h_{\gamma^p} = \dot{\lambda}_{\gamma^p} \quad (4.31)$$

Donde $\dot{\lambda}_{\gamma^p}$ es el multiplicador plástico asociado a g_s y $h_{\gamma^p} = 1$ es el módulo plástico generalizado que controla la evolución de γ^p .

En cuanto a la ley de endurecimiento que controla la evolución de p_p , la versión de Plaxis 2D v9, la versión de Plaxis 2D 2011 y posteriores y la formulación de Benz (2007), ofrecen ligeras diferencias.

En el caso de Plaxis 2D v9 se utiliza la siguiente expresión para determinar el valor de la deformación volumétrica plástica y la evolución de la misma.

$$-\epsilon_v^p = \frac{\bar{\beta}'}{1-m} \left(\frac{p_p}{p'_{ref}} \right)^{1-m} \quad (4.32)$$

$$-\dot{\epsilon}_v^p = \frac{\bar{\beta}'}{p'_{ref}} \left(\frac{p_p}{p'_{ref}} \right)^{-m} \dot{p}_p \quad (4.33)$$

Donde $\bar{\beta}'$ es un parámetro interno del modelo que se relaciona con el valor del módulo edométrico tangente drenado de referencia E'_{oed} y que controla la magnitud de las deformaciones plásticas que se originan sobre la superficie tipo *Cap*, dicho parámetro se calcula mediante el algoritmo interno detallado en el apartado 4.1.7 del presente capítulo, p_p es la variable de estado que controla el tamaño de la superficie tipo *Cap*, p'_{ref} es una presión de referencia y m es el factor que controla la dependencia de $-\epsilon_v^p$ con p_p .

En la formulación considerada en la versión de Plaxis 2D 2011 y posteriores, se utiliza la siguiente expresión para determinar el valor de la deformación volumétrica plástica y la evolución de la misma (la primera expresión se ha deducido a partir de la segunda).

$$-\epsilon_v^p = \frac{1}{H} \frac{(p'_{ref} + c' \cot g(\varphi'))}{1-m} \left(\frac{p_p + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^{1-m} \quad (4.34)$$

$$-\dot{\epsilon}_v^p = \frac{1}{H} \left(\frac{p_p + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^{-m} \dot{p}_p \quad (4.35)$$

Donde c' es la cohesión efectiva del suelo, φ' es el ángulo de fricción efectivo del suelo, p_p es la variable de estado que controla el tamaño de la superficie tipo *Cap*, p'_{ref} es una presión de referencia, m es el factor que controla la dependencia de $-\epsilon_v^p$ con p_p y H es el módulo de endurecimiento plástico que se puede calcular como sigue:

$$H = \frac{K'_{t,ur}{}^{ref}}{K'_{t,ur}/K'_c - 1} \quad (4.36)$$

Donde $K'_{t,ur}{}^{ref}$ es el módulo volumétrico elástico tangente de referencia para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$, $K'_{t,ur}$ es el módulo volumétrico elástico tangente y K'_c es el módulo volumétrico secante para la compresión isotrópica noval. El valor de $K'_{t,ur}/K'_c$ es un parámetro interno del modelo relacionado con el valor del módulo edométrico tangente drenado de referencia $E'_{oed}{}^{ref}$ para $-\sigma'_1 = p'_{ref}$ que controla la magnitud de las deformaciones plásticas que se originan sobre la superficie tipo *Cap* y que se calcula mediante el algoritmo interno detallado en el apartado 4.1.7 del presente capítulo.

El valor de $K'_{t,ur}{}^{ref}$ se puede calcular a partir del valor del módulo elástico longitudinal tangente de referencia $E'_{t,ur}{}^{ref}$ y del coeficiente de Poisson drenado ν'_{ur} de la siguiente manera:

$$K'_{t,ur}{}^{ref} = \frac{E'_{t,ur}{}^{ref}}{3(1 - 2\nu'_{ur})} \quad (4.37)$$

En la formulación considerada por Benz (2007) para el modelo *HS-S* se recurre a una expresión análoga a la (4.35), en la que se sustituye el valor de p_p por $-\sigma'_3$. Se trata de una formulación conceptualmente más consistente con el resto del modelo *HS* en lo referente a la dependencia tensional de las variables.

$$-\dot{\epsilon}_v^p = \frac{1}{H} \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^{-m} \dot{p}_p = \frac{1}{\hat{H}} \dot{p}_p \quad (4.38)$$

Donde \hat{H} es una nueva definición del módulo de endurecimiento plástico que incluye la dependencia tensional con $-\sigma'_3$, que puede deducirse considerando la dependencia $E'_{t,ur} = E'_{t,ur}(\hat{H}, -\sigma'_3)$ (expresión 4.12) en la relación lineal entre $K'_{t,ur}$ y $E'_{t,ur}$ (expresión 4.39) y la expresión del módulo volumétrico plástico a partir de los módulos volumétricos K'_c y $K'_{t,ur}$ (expresión 4.40):

$$K'_{t,ur} = \frac{E'_{t,ur}}{3(1 - 2\nu'_{ur})} = \frac{E'_{t,ur}{}^{ref}}{3(1 - 2\nu'_{ur})} \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.39)$$

$$\frac{1}{\hat{H}} = \frac{1}{K'_c} - \frac{1}{K'_{t,ur}} \quad (4.40)$$

Efectivamente, combinando las dos expresiones anteriores, se puede verificar la expresión (4.38) de la siguiente manera, siendo la formulación de \hat{H} consistente con el criterio de dependencia tensional del resto de las variables del modelo.

$$\hat{H} = \frac{K'_{t,ur}}{K'_{t,ur}/K'_c - 1} = \frac{K'^{ref}_{t,ur}}{K'_{t,ur}/K'_c - 1} \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m = H \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.41)$$

En base a todo lo anterior, la ley de endurecimiento de p_p se puede formular de la siguiente manera:

- 1) Plaxis 2D v9:

$$\dot{p}_p = \dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p} = \dot{\lambda}_{p_p} \frac{2(-p')p'_{ref}}{\bar{\beta}'} \left(\frac{p_p}{p'_{ref}} \right)^m \quad (4.42)$$

- 2) Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores:

$$\dot{p}_p = \dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p} = \dot{\lambda}_{p_p} 2H(-p') \left(\frac{p_p + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.43)$$

- 3) Benz (2007) para el modelo HS-S:

$$\dot{p}_p = \dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p} = \dot{\lambda}_{p_p} 2H(-p') \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.44)$$

Donde $\dot{\lambda}_{p_p}$ es el multiplicador plástico asociado al potencial plástico g_c , h_{p_p} es el módulo plástico generalizado que controla la evolución de p_p , $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$ es la presión media, H es el módulo de endurecimiento plástico que depende de $K'^{ref}_{t,ur}$ y $K'_{t,ur}/K'_c$, $K'^{ref}_{t,ur}$ es el módulo volumétrico elástico tangente de referencia para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$ y $\bar{\beta}'$ y $K'_{t,ur}/K'_c$ son parámetros internos, según el tipo de formulación adoptado, que se relacionan con el valor del módulo edométrico tangente de referencia E'^{ref}_{oed} y se calculan mediante el algoritmo interno detallado en el apartado 4.1.7 del presente capítulo.

De las expresiones (4.42) y (4.43) se puede deducir que $H = p'_{ref}/\bar{\beta}'$ cuando $c' = 0$. Asimismo, cuando $c' \neq 0$, la variable \dot{p}_p en la versión de Plaxis 2D 2011 y posteriores está menos influenciada por el valor de p_p respecto a la versión de Plaxis 2D v9.

El valor del módulo edométrico tangente (figura 4.09) se expresa como sigue:

$$E'_{oed} = E'^{ref}_{oed} \left(\frac{-\sigma'_1 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m = E'^{ref}_{oed} \left(\frac{-\sigma'_3/K_0^{NC} + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (4.45)$$

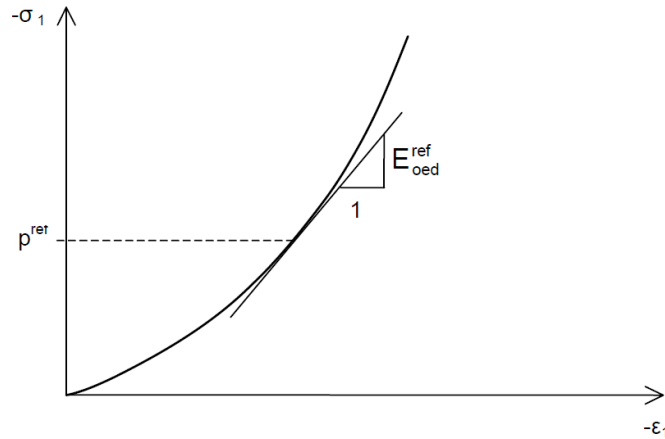


Figura 4.09. Curva edométrica y valor del E_{oed}^{ref} .

Donde E_{oed}^{ref} es el módulo edométrico tangente de referencia para $-\sigma'_1 = p'_{ref}$, $-\sigma'_1$ es la tensión principal mayor, $-\sigma'_3$ es la tensión principal menor que coincide con el confinamiento en un ensayo triaxial, K_0^{NC} es el coeficiente de empuje al reposo para estados de tensiones normalmente consolidados, p'_{ref} es una presión de referencia, c' es la cohesión efectiva del suelo, φ' es el ángulo de fricción efectivo del suelo y m es el coeficiente que controla la dependencia de la rigidez edométrica con la tensión.

4.1.5. Comportamiento (hipo)elástico

El modelo HS considera un modelo de tipo hipoelástico isótropo para describir el comportamiento del suelo en el dominio elástico, delimitado por las superficies de fluencia.

El tensor de rigidez tangente se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}'_t = \frac{E'_{t,ur}}{(1 - 2\nu'_{ur})(1 + \nu'_{ur})} (\nu'_{ur} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (1 - 2\nu'_{ur}) \mathbb{I}) \quad (4.46)$$

Donde \mathbb{I} y $\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ son los tensores de cuarto orden con componentes $(\mathbb{I})_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ y $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$, ν'_{ur} es el coeficiente de Poisson drenado y $E'_{t,ur}$ es el módulo elástico tangente longitudinal drenado que, según la expresión (4.11), depende del confinamiento según $E'_{t,ur} \sim (-\sigma'_3)^m$, siendo m el factor que controla la dependencia de la rigidez con la tensión.

4.1.6. Parámetros del modelo HS

A continuación, se resumen los parámetros que deben introducirse en el modelo HS (tablas 4.01 a 4.03).

La estructura algorítmica utilizada en la implementación del modelo obliga a introducir el índice de sobreconsolidación $OCR = (-\sigma'_{v,max})/(-\sigma'_v)$ como parámetro del suelo, donde $-\sigma'_{v,max}$ es la tensión

máxima vertical histórica y $-\sigma'_v$ es la tensión vertical actual. Cuando se utilice el índice OCR , este deberá aplicarse únicamente en la primera fase de cálculo (condición inicial). Para ello se aconseja definir dos conjuntos de parámetros para un mismo material: el primer set de parámetros, con el valor OCR que se considere conveniente, se aplicará exclusivamente en la primera fase de cálculo; y el segundo set de parámetros, que tendrá los mismos valores de parámetros considerados en el primer set, a excepción del valor de OCR , que será $OCR = 0$ a efectos numéricos, se aplicará en las siguientes fases de cálculo con objeto de no distorsionar el valor de $-p_p^{eq}$.

Parámetros de rigidez	Descripción	Unidades
E_{50}^{ref}	Módulo de rigidez longitudinal secante drenado para una movilización del 50% de la tensión desviadora máxima q_f en un ensayo triaxial drenado para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$	[kN/m ²]
E_{oed}^{ref}	Módulo edométrico tangente drenado de referencia en la carga noval para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$	[kN/ m ²]
$E_{t,ur}^{ref}$	Módulo de rigidez longitudinal tangente de referencia en descargas y recargas elásticas para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$	[kN/ m ²]
m	Coefficiente que controla la dependencia de la rigidez con la tensión	[-]

Tabla 4.01. Parámetros de rigidez del modelo HS.

Parámetros de resistencia	Descripción	Unidades
c'	Cohesión efectiva	[kN/ m ²]
φ'	Ángulo de fricción efectivo máximo	[deg]
ψ	Ángulo de dilatación máximo	[deg]

Tabla 4.02. Parámetros de resistencia del modelo HS.

Parámetros avanzados	Descripción	Unidades
ν'_{ur}	Coefficiente de Poisson drenado (por defecto $\nu'_{ur} = 0,2$)	[-]
p'_{ref}	Presión de referencia (por defecto $p'_{ref} = 100 \text{ kN/m}^2$)	[kN/ m ²]
K_0^{NC}	Coefficiente de empuje al reposo para estados de tensiones normalmente consolidados (por defecto $K_0^{NC} = 1 - \sin(\varphi')$)	[-]
R_f	Ratio q_f/q_a (por defecto $R_f = 0.9$)	[-]
σ'_{trac}	Valor del límite de tracción (por defecto $\sigma'_{trac} = 0 \text{ kN/m}^2$)	[kN/ m ²]

Tabla 4.03. Parámetros avanzados del modelo HS.

4.1.7. Parámetros internos del modelo HS y algoritmo para obtenerlos

El modelo HS considera tres parámetros internos E_i^{ref} , α' y $\bar{\beta}'$ o $K'_{t,ur}/K'_c$ según la versión de Plaxis considerada:

E_i^{ref}	Módulo de rigidez longitudinal inicial, que se relaciona con el valor de E'_{50} .
α'	Coefficiente que controla la forma de la superficie de fluencia tipo <i>Cap</i> y que se relaciona con el valor de K_0^{NC} .

En la versión de Plaxis 2D v9:

$\bar{\beta}'$	Coefficiente que se relaciona con el valor de E'_{oed} y que aparece en la formulación de la ley de endurecimiento de la expresión (4.42).
----------------	--

En la versión de Plaxis 2D 2011 y posteriores:

$K'_{t,ur}/K'_c$	Relación entre el módulo volumétrico elástico y el módulo volumétrico secante para la compresión isotrópica noval, que se relaciona con el valor de E'_{oed} y aparece en la formulación de la ley de endurecimiento de la expresión (4.43) a través del módulo H (expresión 4.36).
------------------	---

Plaxis calcula estos parámetros mediante un algoritmo interno. Dicho algoritmo no se encuentra detallado en ningún manual. A partir de De Santos (2015), se plantea el siguiente esquema para dicho algoritmo:

- 1) **Valores iniciales:** El algoritmo empieza las iteraciones partiendo de un valor inicial de la tríada de parámetros $(E_i^{ref}, \alpha', \bar{\beta}')_0$ o $(E_i^{ref}, \alpha', K'_{t,ur}/K'_c)_0$, según la versión del programa.
- 2) **Simulación de ensayo triaxial drenado:** Fijados los valores $(\alpha', \bar{\beta}')_0$ o $(\alpha', K'_{t,ur}/K'_c)_0$, se realiza una simulación numérica de un ensayo triaxial drenado, a nivel punto y a una presión de confinamiento $-\sigma'_3 = p'_{ref}$, para determinar el valor de E_i^{ref*} que permita reproducir la curva $q - (-\epsilon_1)$, en la que se obtiene una deformación $-\epsilon_{50} = q_f/2E'_{50} \pm tol_{\epsilon_{50}}$ para una carga desviadora de $q_f/2$. En dicha simulación se tienen en cuenta las deformaciones elásticas y las deformaciones plásticas asociadas a las superficies de fluencia tipo Cono f_s y tipo *Cap* f_c . La simulación se inicia con el valor $(E_i^{ref})_0$ y finaliza en la iteración k -ésima con $(E_i^{ref})_k = E_i^{ref*}$.
- 3) **Simulación de ensayo edométrico:** Una vez hallado el valor E_i^{ref*} para los valores $(\alpha', \bar{\beta}')_0$ o $(\alpha', K'_{t,ur}/K'_c)_0$, se procede a realizar la simulación de un ensayo edométrico con tensiones iniciales $-\sigma'_1 = p'_{ref}$ y $-\sigma'_3 = K_0^{NC} p'_{ref}$. En dicha simulación se realizan pequeños incrementos de carga vertical y se controla el valor de la deformación lateral. Si el valor absoluto de dicha deformación lateral es superior a la tolerancia admitida, se itera modificando K_0^{NC} hasta lograr

$-\epsilon_3 = 0 \pm tol_{\epsilon_3}$. Una vez determinado el valor $(K_0^{NC})_r = K_0^{NC*}$ que cumple esta condición, en la r -ésima iteración, se procede a calcular el valor de $(E_{oed}^{ref})_r = E_{oed}^{ref*}$.

- 4) **Criterio de aceptación:** En caso de que los valores de K_0^{NC*} y E_{oed}^{ref*} sean lo suficientemente próximos a los valores introducidos como parámetros K_0^{NC} y E_{oed}^{ref} se aceptan los parámetros $(E_i^{ref*}, (\alpha', \bar{\beta}')_0)$ o $(E_i^{ref*}, (\alpha', K'_{t,ur}/K'_c)_0)$. En caso de que dichos valores no sean lo suficientemente próximos, se procede a modificar los valores de los parámetros internos y se vuelve al paso 1 con una nueva tríada $(E_i^{ref}, \alpha', \bar{\beta}')_{i+1}$ o $(E_i^{ref}, \alpha', K'_{t,ur}/K'_c)_{i+1}$. En caso de que no sea posible aproximar suficientemente los valores de K_0^{NC} y E_{oed}^{ref} , se recomienda utilizar los valores de K_0^{NC} y E_{oed}^{ref} como parámetros de entrada.

En el anejo I se adjunta el código del algoritmo iterativo para determinar el valor de los parámetros internos del modelo *HS* implementado en Plaxis 2D v9 y Plaxis 2D 2015 (válido para la versión Plaxis 2D 2011 y posteriores).

4.2. Integración local de las ecuaciones constitutivas elastoplásticas

Para la implementación del modelo *HS* se ha utilizado el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)* de Plaxis, cuya estructuración interna se detalla en el apartado 4.4 del presente capítulo.

La integración de las ecuaciones constitutivas en cálculos con el Método de los Elementos Finitos se realiza sobre un conjunto de puntos de integración. En el código de Plaxis se utilizan elementos de tipo isoparamétrico y los puntos de integración se corresponden con los de la cuadratura de Gauss.

La estructuración de los cálculos para el problema elastoplástico en Plaxis es la siguiente:

- 1) Cálculo de la matriz de rigidez global.
- 2) Cálculo de los vectores de fuerzas externas e internas, y del vector de fuerzas no balanceadas.
- 3) Cálculo del incremento de desplazamientos en los nodos.
- 4) Cálculo del incremento de deformaciones en los nodos.
- 5) Cálculo de las tensiones mediante la **integración local de las ecuaciones constitutivas**.
- 6) Cálculo del nuevo vector de fuerzas internas.
- 7) Cálculo del error y actualización de las variables de estado o nueva iteración.

El proceso de hallar un estado tensional admisible y los correspondientes valores de las variables de estado en cada punto de integración es lo que se conoce con el nombre de integración local de las ecuaciones constitutivas. En los siguientes apartados se detallará el algoritmo que se ha utilizado para dicha integración, que se basa en el denominado *Implicit Closest Point Projection Algorithm*, que utiliza un esquema de integración del tipo *Backward Euler Elastic Predictor/Return Mapping Algorithm* dentro de los métodos de retorno radial, y que pertenece a la clase de algoritmos denominada *Generalized Midpoint Algorithms*, dentro de los métodos lineales multipaso, que se pueden encontrar ampliamente

descritos en Simo y Hughes (1998) o Simo (1998). Dicha formulación puede hallarse también en Jeremic y Sture (1997) o Benz (2007).

4.2.1. Relaciones constitutivas en plasticidad infinitesimal en el modelo HS

A continuación, se exponen las ecuaciones constitutivas en plasticidad infinitesimal que ya han sido enumeradas en el apartado 2.6.3.2.1 del capítulo 2. Estas ecuaciones permiten simular el comportamiento del suelo fuera del dominio elástico $\mathcal{D}_e = \{\boldsymbol{\sigma}' | f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k) < 0, k = 1 \dots q\}$. En la formulación se consideran $k = 1 \dots q$ superficies de fluencia.

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (4.47)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{el,hist}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}), = \mathbf{E}'_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (4.48)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sum_{k=1}^q \dot{\lambda}_k \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.49)$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_k^{pl} = \dot{\lambda}_k \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \quad (4.50)$$

Donde $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ son el incremento del tensor de deformaciones total, elástico y plástico respectivamente, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ es el incremento del tensor de tensiones efectivas, \mathbf{G} es una función tensorial que en el caso del modelo HS se representa como la contracción $\mathbf{E}'_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$, $\boldsymbol{\sigma}'$ es el tensor de tensiones efectivas, \mathbf{E}'_t el tensor de rigidez elástico tangente, $\dot{\lambda}_k$ es el incremento del multiplicador plástico asociado a la superficie de fluencia f_k , $\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ es el flujo plástico asociado a la superficie de fluencia f_k , $\dot{\boldsymbol{\chi}}_k^{pl}$ es el incremento de las variables de estado plásticas asociadas a la superficie de fluencia f_k y \mathbf{h}_k es el módulo plástico generalizado que controla el tipo de endurecimiento de la superficie de fluencia f_k .

La expresión (4.47) muestra la descomposición aditiva de la deformación total en su parte elástica y plástica, la expresión (4.48) muestra la relación de tipo hipoelástico entre incrementos de tensión y deformación considerada en el modelo HS, la expresión (4.49) muestra la regla de flujo, teniendo en cuenta las Reglas de Koiter (Koiter, 1960) cuando está activa más de una superficie de fluencia y, finalmente, en la expresión (4.50) se muestran las leyes de endurecimiento para las variables de estado. Tanto en la expresión (4.49) como en la (4.50) aparece el incremento del multiplicador plástico $\dot{\lambda}_k$ asociado a la superficie de fluencia k -ésima f_k . Para determinar su valor se recurre al criterio de carga y descarga reflejado en las siguientes condiciones de Karush-Kuhn-Tucker:

$$f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \leq 0 \quad (4.51)$$

$$\dot{\lambda}_k \geq 0 \quad (4.52)$$

$$f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \dot{\lambda}_k = 0 \quad (4.53)$$

Para un proceso de carga o descarga elástica, se tendrá $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \leq 0$ y $\dot{\lambda}_k = 0$, mientras que para un proceso de carga elastoplástica se tendrá $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$ y $\dot{\lambda}_k > 0$. En este último caso debe cumplirse,

en todo momento, que $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$, lo que lleva a plantear la condición de consistencia $\dot{f}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$ y que restringe las trayectorias de tensiones sobre la superficie de fluencia $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$.

$$\dot{f}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' + \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \dot{\boldsymbol{\chi}}_k^{pl} = 0 \quad (4.54)$$

Donde la operación * contrae todos los índices $\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) / \boldsymbol{\chi}_k^{pl}$ y $\dot{\boldsymbol{\chi}}_k^{pl}$.

Combinando la expresión (4.54) con las expresiones (4.47) a (4.50), es posible calcular el valor de $\dot{\lambda}_k$. Para ello, salvo en casos concretos y bajo determinadas condiciones, es necesario recurrir a esquemas numéricos.

4.2.2. Return mapping sobre las superficies de fluencia

En la estrategia de cálculo adoptada es necesario determinar el valor de la denominada tensión de prueba o tensión trial $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$ al inicio de cada paso de cálculo. Dicha tensión se calcula asumiendo un comportamiento totalmente elástico en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, es decir, suponiendo $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e,(n+1)} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}$

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} \quad (4.55)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$ es el tensor de tensiones trial, $\boldsymbol{\sigma}'^{(n)}$ es el tensor de tensiones en el paso de cálculo n -ésimo, $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}$ es el incremento del tensor de deformaciones en el paso de cálculo considerado $(n) \rightarrow (n+1)$ y $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$ es el tensor de rigidez elástico tangente correspondiente a la expresión (4.46).

Según Schanz et al. (1999), el tensor $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$ debe evaluarse:

- En el punto tensional correspondiente al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, cuando dicho paso es elastoplástico, es decir, cuando $\boldsymbol{\sigma}'_{[0]}^{(tr)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\sigma}'^{(n)}) : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} \notin \mathcal{D}_e$.
- En el punto tensional correspondiente al punto medio del incremento de tensión trial, cuando el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ es elástico, es decir, cuando $\boldsymbol{\sigma}'_{[0]}^{(tr)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\sigma}'^{(n)}) : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} \in \mathcal{D}_e$.

En base a las indicaciones dadas en Schanz et al. (1999), se ha considerado el siguiente procedimiento de cálculo:

- 1) Cuando se cumple la condición $f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[0]}^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)}) > TOL$, el proceso de carga es elastoplástico y el tensor de rigidez elástico tangente $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$ se evalúa en el punto tensional $\boldsymbol{\sigma}'^{(n)}$, correspondiente a la tensión al final del paso de cálculo anterior $(n-1) \rightarrow (n)$.

$$\mathbf{E}'_t^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\sigma}'^{(n)}) \quad (4.56)$$

- 2) Cuando se cumple la condición $f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[0]}^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)}) \leq TOL$, el proceso de carga es elástico y el tensor de rigidez elástico tangente $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$ se evalúa en el punto medio del incremento del tensor de tensiones trial, para lo cual es necesario construir el siguiente esquema iterativo:

$$\mathbf{E}'_{t,[0]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\sigma}'^{(n)}) \quad (4.57)$$

$$\mathbf{E}'_{t,[i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t\left(\boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \frac{1}{2}\mathbf{E}'_{t,[i-1]}^{(n+1)}:\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}\right) \quad (4.58)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(tr)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_{t,[i]}^{(n+1)}:\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} \quad (4.59)$$

Las iteraciones finalizan en la iteración $[i] = [M]$, adoptando $\mathbf{E}'_t^{(n+1)} = \mathbf{E}'_{t,[M]}^{(n+1)}$, cuando se cumple la siguiente condición:

$$\left\|\boldsymbol{\sigma}'_{[M]}^{(tr)} - \boldsymbol{\sigma}'_{[M-1]}^{(tr)}\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left(-(\sigma'_j)_{[M]}^{(tr)} - (-(\sigma'_j)_{[M-1]}^{(tr)})\right)^2} \leq TOL_{abs,\sigma} \quad (4.60)$$

Donde $-(\sigma'_j)_{[M]}^{(tr)}$ es la tensión principal j -ésima del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'_{[M]}^{(tr)}$, y $\|\cdot\|$ es la norma de Hilbert-Schmidt, que conserva la objetividad.

Asimismo, en dicho algoritmo es posible incorporar también una medida de error relativo como $\left\|\boldsymbol{\sigma}'_{[M]}^{(tr)} - \boldsymbol{\sigma}'_{[M-1]}^{(tr)}\right\| / \left\|\boldsymbol{\sigma}'_{[M-1]}^{(tr)}\right\| \leq TOL_{rel,\sigma}$, con $\left\|\boldsymbol{\sigma}'_{[M-1]}^{(tr)}\right\| \neq 0$.

No obstante, el uso del algoritmo anterior cuando $f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[0]}^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)}) \leq TOL$ da lugar a rigideces altas en las curvas de recarga elástica, en comparación con las obtenidas con el modelo HS predefinido en Plaxis. A falta de información específica sobre estos detalles en los manuales de Plaxis, se ha considerado, tanto en pasos de cálculo elásticos como elastoplásticos, $\mathbf{E}'_t^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\sigma}'^{(n)})$, dado el buen ajuste que ofrece de dichas curvas.

Tras calcular el tensor de rigidez elástico tangente $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$ y la tensión trial $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$, se procederá como sigue:

- En caso de que el tensor de tensiones trial pertenezca al dominio elástico $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} \in \mathcal{D}_e$, se actualizará el nuevo estado tensional según $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$.
- En caso de que el tensor de tensiones trial no pertenezca al dominio elástico $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} \notin \mathcal{D}_e$, será necesario aplicar los esquemas numéricos del *Return Mapping* para devolver el estado tensional a las correspondientes superficies de fluencia.

El *Return Mapping* puede entenderse como la proyección geométrica de la tensión trial sobre las superficies de fluencia según la dirección de los correspondientes flujos plásticos afectados por la métrica dada por $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$. El punto dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ en el que se deben evaluar

dichos flujos plásticos depende del esquema de integración adoptado. La clase de algoritmos conocidos como *Generalized Midpoint Algorithms* contemplan todos los posibles puntos dentro de dicho paso de cálculo.

$$\frac{\partial g_k^{(n+\alpha)}}{\partial \sigma'} = \frac{\partial g_k \left((1-\alpha)\sigma'^{(n)} + \alpha\sigma'^{(n+1)}, (1-\alpha)\chi_k^{pl,(n)} + \alpha\chi_k^{pl,(n+1)} \right)}{\partial \sigma'} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{h}_k^{(n+\alpha)} = \mathbf{h}_k \left((1-\alpha)\sigma'^{(n)} + \alpha\sigma'^{(n+1)}, (1-\alpha)\chi_k^{pl,(n)} + \alpha\chi_k^{pl,(n+1)} \right) \quad (4.62)$$

Donde $0 \leq \alpha \leq 1$ representa el pseudotiempo dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ en el cual se evalúan los flujos plásticos $\partial g_k^{(n+\alpha)} / \partial \sigma'$ y los módulos plásticos generalizados $\mathbf{h}_k^{(n+\alpha)}$ que controlan la evolución de las variables de estado.

Un valor de $\alpha = 0$ se corresponde con un esquema de tipo explícito (*Forward Euler Explícito*), que evalúa los flujos plásticos y los módulos plásticos generalizados al inicio del paso de cálculo. Un valor de $\alpha = 1$ se corresponde con un esquema de tipo implícito (*Backward Euler Implícito*). Y un valor de $\alpha = 1/2$ se corresponde con el esquema de tipo Crank-Nicholson.

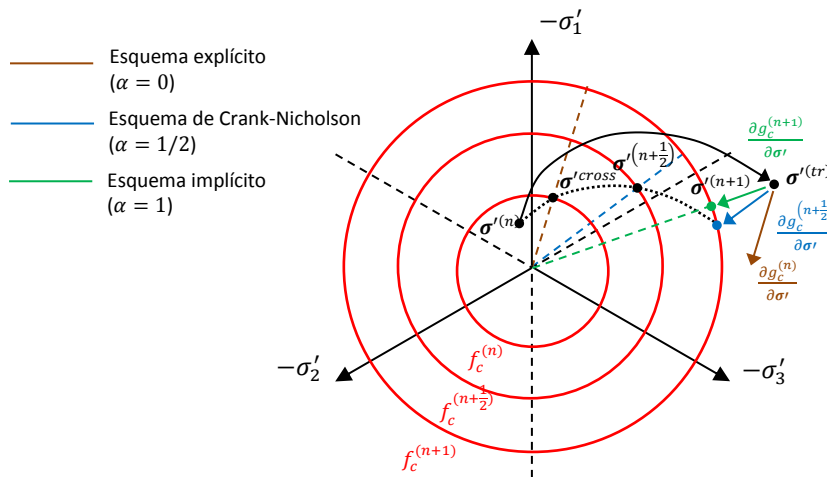


Figura 4.10. Return Mapping en el plano desviador sobre la superficie de fluencia tipo Cap con plasticidad asociada, para diferentes valores del pseudotiempo α .

En la figura 4.10 se muestran diferentes resultados según el tipo de esquema de integración. Como se puede ver, el esquema explícito puede no converger en caso de utilizar pasos de cálculo demasiado grandes. El esquema implícito y el de Crank-Nicholson convergen en el ejemplo dado y son incondicionalmente estables, si bien el esquema Implícito ($\alpha = 1$) tiene las siguientes ventajas adicionales:

- No es necesario calcular un estado tensional $\sigma'^{(n+\alpha)}$ correspondiente al punto de intersección con $f_c^{(n+\alpha)}$.
- Asume la existencia del estado tensional al final del paso de cálculo y, por ello, garantiza una solución.
- Permite la linearización y posterior obtención de un tensor elastoplástico tangente consistente, que asegura la convergencia cuadrática en las ecuaciones globales de equilibrio en caso de utilizar un esquema de tipo Newton-Raphson para resolver los sistemas.

En el algoritmo implementado en el modelo *UDSM* de Plaxis, se ha utilizado un esquema de tipo implícito (*Backward Euler elastic predictor/return mapping algorithm*), adoptando $\alpha = 1$. Dicho método se halla descrito en detalle en Jeremic y Sture (1997) para el caso de una superficie de fluencia.

4.2.3. Algoritmo *Backward Euler* Implícito

Antes de proceder a la deducción teórica del algoritmo *Backward Euler elastic predictor/return mapping algorithm*, es necesario transformar las variables del problema para utilizarlas en un espacio discreto.

$$\Delta\sigma'^{n+1} = \int_{\sigma'^{(n)}}^{\sigma'^{(n)} + \Delta\sigma'^{(n+1)}} \dot{\sigma}' dt = \int_{\epsilon^e(n)}^{\epsilon^e(n) + \Delta\epsilon^e(n+1)} \mathbf{E}'_t : \dot{\epsilon}^e dt \approx \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Delta\epsilon^e(n+1) \quad (4.63)$$

$$\Delta\epsilon^{(n+1)} = \int_{\epsilon^{(n)}}^{\epsilon^{(n)} + \Delta\epsilon^{(n+1)}} \dot{\epsilon} dt = \int_{\epsilon^e(n)}^{\epsilon^e(n) + \Delta\epsilon^e(n+1)} \dot{\epsilon}^e dt + \int_{\epsilon^p(n)}^{\epsilon^p(n) + \Delta\epsilon^p(n+1)} \dot{\epsilon}^p dt = \Delta\epsilon^e(n+1) + \Delta\epsilon^p(n+1) \quad (4.64)$$

$$\Delta\epsilon^p(n+1) = \int_0^{\lambda_k^{(n+1)}} \sum_{k=1}^q \dot{\lambda}_k \frac{\partial g_k(\sigma', \chi_k^{pl})}{\partial \sigma'} dt \approx \sum_{k=1}^q \lambda_k^{(n+1)} \frac{\partial g_k(\sigma'^{(n+1)}, \chi_k^{pl, (n+1)})}{\partial \sigma'} \quad (4.65)$$

Donde $\Delta\sigma'^{(n+1)}$ es el incremento del tensor de tensiones en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, $\Delta\epsilon^{(n+1)}$ es el incremento del tensor de deformaciones que, a su vez, se puede descomponer en la suma del incremento del tensor de deformaciones elásticas $\Delta\epsilon^e(n+1)$ y plásticas $\Delta\epsilon^p(n+1)$, $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$ es el tensor de rigidez elástico tangente según lo expuesto en el apartado 4.2.2 del presente capítulo, $\lambda_k^{(n+1)}$ es el multiplicador plástico y $\partial g_k(\sigma'^{(n+1)}, \chi_k^{pl, (n+1)}) / \partial \sigma'$ es el valor del flujo plástico asociado a la superficie de fluencia f_k al final del paso de cálculo considerado.

En el anejo II se encuentran las expresiones de las derivadas de las superficies de fluencia y potenciales plásticos particularizadas para el caso del modelo HS.

4.2.3.1. Sobre una superficie de fluencia

En este apartado se deduce el algoritmo *Backward Euler* Implícito para el caso de una única superficie de fluencia.

A partir de las expresiones (4.55), (4.63) y (4.64), se puede deducir lo siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : (\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p{}^{(n+1)}) = \underbrace{\boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}}_{\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}} - \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p{}^{(n+1)} \quad (4.66)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}$.

Y combinando las expresiones (4.65) y (4.66):

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} - \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.67)$$

Donde $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$ es el tensor de tensiones al final del paso de cálculo considerado ($n \rightarrow n+1$), $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$ es el tensor de tensiones trial, λ_k^{n+1} es el multiplicador plástico, $\mathbf{E}'_t{}^{(n+1)}$ es el tensor de rigidez (hipo)elástico tangente y $\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl, (n+1)}) / \partial \boldsymbol{\sigma}'$ es el valor del flujo plástico al final del paso de cálculo considerado.

Se define a continuación el tensor de tensiones residuales \mathbf{r} . Dicho tensor representa la diferencia entre el tensor de tensiones solución $\boldsymbol{\sigma}'$ y el tensor de tensiones predicho por el algoritmo *Backward Euler* Implícito $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$.

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}' - \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} - \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \quad (4.68)$$

Para calcular el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$ debe construirse un esquema iterativo que converja a $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ y, por tanto, a $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$. Para construir dicho esquema se expande la expresión (4.68) en serie de Taylor alrededor de $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$:

$$\mathbf{r}_{new}^{(n+1)} = \mathbf{r}_{old}^{(n+1)} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} \right|_{(n+1)} * \Delta \boldsymbol{\chi}_k^{pl, (n+1)} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda_k} \right|_{(n+1)} \Delta \lambda_k^{(n+1)} \quad (4.69)$$

Donde la operación * logra contraer todos los índices de $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} \right|_{(n+1)}$ y $\Delta \boldsymbol{\chi}_k^{pl, (n+1)}$, $\Delta \lambda_k^{(n+1)}$ es el incremento del multiplicador plástico, siendo $\lambda_k^{(n+1)} = \sum \Delta \lambda_k^{(n+1)}$ y mediante la expresión $(\cdot)|_{(n+1)}$ se designa la evaluación de (\cdot) en $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$ y $\boldsymbol{\chi}_k^{pl, (n+1)}$.

Se desarrolla, a continuación, cada uno de los términos de la expresión (4.69):

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} \quad (4.70)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\chi}_k} \right|_{(n+1)} * \Delta \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)} = \lambda_k^{(n+1)} \Delta \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}_t^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}) \quad (4.71)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda_k} \right|_{(n+1)} \Delta \lambda_k^{(n+1)} = \Delta \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.72)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $\Delta \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)} = \Delta \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})$, siendo $\mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})$ el módulo plástico generalizado asociado a la superficie de fluencia f_k en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$.

Obligando a que $\mathbf{r}_{new}^{(n+1)} = \mathbf{0}$, manipulando las expresiones anteriores y siendo necesario iterar para $[i] \geq [2]$ (el caso $[i] = [1]$ se expone más adelante), se deducen las siguientes expresiones:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)} = - \left(\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k,[i]}^{(n+1)} \right) : \boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} \quad (4.73)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{k,[i]}^{(n+1)} = \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) \quad (4.74)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} = \left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}_t^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^{-1} \quad (4.75)$$

Donde $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$, $\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)}$ es el tensor de tensiones residual según la expresión (4.81), $\boldsymbol{\Theta}_{k,[i]}^{(n+1)}$ es un tensor simétrico de segundo orden que tiene en cuenta la variación del potencial plástico con las tensiones y con las variables de estado y $\boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)}$ es un tensor de cuarto orden simétrico denominado tensor de rigidez ampliado.

El multiplicador plástico de las expresiones anteriores se calcula, en la iteración s -ésima, como sigue:

$$\lambda_{k,[s]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k,[1]}^{(n+1)} + \sum_{i=2}^s \Delta \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \quad (4.76)$$

El método de cálculo del valor de $\Delta \lambda_{k,[1]}^{(n+1)}$ se explica más adelante. Para obtener el valor de $\Delta \lambda_{k,[i]}^{(n+1)}$ con $[i] \geq [2]$, se expande la expresión de $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k)$ en serie de Taylor alrededor de $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$.

$$f_{k,new}^{(n+1)} = f_{k,old}^{(n+1)} + \left. \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \Delta \lambda_k^{(n+1)} \left. \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} \right|_{(n+1)} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) \quad (4.77)$$

Obligando a que $f_{k,new}^{(n+1)} = 0$, siendo $f_{k,old}^{(n+1)} = f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})$, combinando la expresión resultante con las expresiones (4.73) a (4.75) e iterando para $[i] \geq [2]$, se llega a la siguiente expresión:

$$f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) - (\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} + \Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t : \boldsymbol{\Theta}_{k,[i]}^{(n+1)}) : \boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$$

$$+ \Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) = 0$$
(4.78)

Y desarrollando los productos de la expresión anterior:

$$f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) - \mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$$

$$- \Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t : \boldsymbol{\Theta}_{k,[i]}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$$
(4.79)

$$+ \Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) = 0$$

Finalmente, es posible despejar $\Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)}$ de la expresión anterior para $[i] \geq [2]$, resultando lo siguiente:

$$\Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)} = \frac{f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) - \mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\mathbf{E}'_t : \boldsymbol{\Theta}_{k,[i]}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} - \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}$$
(4.80)

En la expresión (4.80) el tensor $\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)}$ para $[i] \geq [2]$, se calcula como sigue:

$$\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)} - \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} - \left(\sum_{m=1}^{i-1} \Delta\lambda_{k,[m]}^{(n+1)} \right) \mathbf{E}'_t : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} \right)$$
(4.81)

A partir de las expresiones anteriores, es posible calcular el valor actualizado del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)}$ y de las variables de estado plásticas $\boldsymbol{\chi}_{k,[s]}^{pl,(n+1)}$ en la iteración s -ésima:

$$\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} - \left(\sum_{i=2}^s \Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{E}'_t : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[s-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}$$
(4.82)

$$\boldsymbol{\chi}_{k,[s]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} + \Delta \boldsymbol{\chi}_{k,[1]}^{pl,(n+1)} + \left(\sum_{i=2}^s \Delta \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_k \left(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[s-1]}^{pl,(n+1)} \right) \quad (4.83)$$

Donde $\boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)}$ es el vector con las variables de estado plásticas al final del paso de cálculo anterior $(n-1) \rightarrow (n)$ y el tensor $\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)}$ y el vector $\Delta \boldsymbol{\chi}_{k,[1]}^{pl,(n+1)}$ se calculan como se explica más adelante.

La expresión (4.82) también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} - \sum_{i=2}^s \left(\left(\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k,[i]}^{(n+1)} \right) : \boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)} \right) \quad (4.84)$$

Para aplicar el esquema numérico anterior, es necesario calcular un punto inicial adecuado, es decir, los valores de $\Delta \lambda_{k,[1]}^{(n+1)}$, $\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)}$ y $\Delta \boldsymbol{\chi}_{k,[1]}^{pl,(n+1)}$. En general, el valor inicial no satisfará la condición $f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right) \leq TOL$, si bien proporcionará un valor suficientemente preciso como para continuar con el proceso de iteración de Newton-Raphson.

Una estrategia habitual para calcular dicho punto inicial consiste en utilizar la proyección normal al potencial plástico de la tensión trial, según la métrica dada por $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$, asumiendo que la relajación de tensiones iniciales es la producida únicamente por las deformaciones plásticas según la siguiente expresión:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} = -\Delta \lambda_{k,[1]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.85)$$

Para obtener el valor de $\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)}$ y $\Delta \boldsymbol{\chi}_{k,[1]}^{pl,(n)}$ se parte de la expresión (4.77), tomando $f_{k,old}^{(n+1)} = f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)$, siendo $\boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)}$ el tensor valor de las variables de estado plásticas al final del paso de cálculo anterior $(n-1) \rightarrow (n)$.

$$f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right) + \frac{\partial f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k,[1]}^{(n+1)} \frac{\partial f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right) = 0 \quad (4.86)$$

Combinando las expresiones anteriores, se obtiene el valor de $\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k,[1]}^{(n+1)}$ en la primera iteración:

$$\Delta \lambda_{k,[1]}^{(n+1)} = \frac{f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)}{\frac{\partial f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{\partial f_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)} \right)} \quad (4.87)$$

A partir de la expresión anterior se pueden calcular los tensores $\Delta\sigma'_{[1]}^{(n+1)}$ y $\Delta\chi_{k,[1]}^{pl,(n)}$ que deben introducirse en las expresiones (4.82) y (4.83), como sigue:

$$\Delta\sigma'_{[1]}^{(n+1)} = \sigma'_{[1]}^{(n+1)} - \sigma'^{(tr)} = -\Delta\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t : \frac{\partial g_k(\sigma'^{(tr)}, \chi_k^{pl,(n)})}{\partial \sigma'} \quad (4.88)$$

$$\Delta\chi_{k,[1]}^{(n)} = \chi_{k,[1]}^{pl,(n)} - \chi_k^{pl,(n)} = \Delta\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_k(\sigma'^{(tr)}, \chi_k^{pl,(n)}) \quad (4.89)$$

En la figura 4.11 se resume, en forma de diagrama de flujo, el algoritmo *Backward Euler* Implícito expuesto para una superficie de fluencia.

4.2.3.2. Sobre la intersección de dos superficies de fluencia

En el modelo *HS* tienen lugar varias intersecciones de dos superficies de fluencia (figuras 4.12, 4.13 y 4.14). Dichas intersecciones pueden darse entre superficies de fluencia correspondientes a diferentes mecanismos de generación de deformaciones plásticas (como, por ejemplo, la intersección entre la superficie de fluencia tipo Cono f_s y la superficie de fluencia tipo Cap f_c), o bien pueden darse entre las diferentes superficies necesarias para construir la superficie de fluencia correspondiente a un mismo mecanismo de generación de deformaciones plásticas (como, por ejemplo, la intersección entre las superficies $f_{mc,12}$, $f_{mc,13}$ y $f_{mc,23}$ que definen la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en los sectores del espacio de tensiones considerados).

La intersección entre dos superficies de fluencia f_i y f_j definirá una curva en el espacio de tensiones:

$$\Gamma_{ij}(\sigma') = \{\sigma' | f_i(\sigma', \chi_i^{pl}) = 0, f_j(\sigma', \chi_j^{pl}) = 0\} \quad (4.90)$$

Contigua a dicha curva y exterior al dominio elástico \mathcal{D}_e , se define la Zona de Esquina \mathcal{Z}_{ij} como el espacio en el que, al aplicar el *Return Mapping* sobre $f_i(\sigma', \chi_i^{pl})$, resultaría en un estado tensional σ'_i tal que $f_j(\sigma'_i, \chi_j^{pl}) > 0$, y al aplicar el *Return Mapping* sobre $f_j(\sigma', \chi_j^{pl})$, resultaría en un estado tensional σ'_j tal que $f_i(\sigma'_j, \chi_i^{pl}) > 0$.

En caso de que la tensión trial $\sigma'^{(tr)}$ se sitúa en la Zona de Esquina \mathcal{Z}_{ij} , será necesario aplicar el *Return Mapping* sobre ambas superficies simultáneamente (figura 4.12), para lo cual se aplican las Reglas de Koiter.

Las Reglas de Koiter (Koiter, 1960) consideran que la deformación plástica total en una intersección entre superficies $\mathcal{Z}_{k_1|k_2}$ se puede descomponer linealmente en la suma de las contribuciones de cada superficie f_{k_1} y f_{k_2} :

$$\Delta\epsilon^{p(n+1)} = \sum_{r=1}^2 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \quad (4.91)$$

1) Valor inicial variables $[i] = [0]$, $\Delta\lambda_{k,[0]}^{(n+1)} = 0$, $\lambda_{k,[0]}^{(n+1)} = 0$, $\mathcal{X}_{k,[0]}^{pl,(n+1)} = \mathcal{X}_k^{pl,(n)}$, $\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^{(n+1)}$, $\sigma'_{[0]}^{(n+1)} = \sigma'^{(n)}$

2) Cálculo del tensor de rigidez elástico tangente

$$\sigma'_{[0]}^{(tr)} = \sigma'^{(n)} + E'_t{}^{(n+1)}(\sigma'^{(n)}) : \Delta\epsilon^{(n+1)}, \text{ donde } E'_t{}^{(n+1)} = E'_t{}^{(n+1)} = E'_t(\sigma'^{(n)})$$

3) Cálculo del tensor de tensiones trial $\sigma'^{(tr)} = \sigma'^{(n)} + E_t{}^{(n+1)} : \Delta\epsilon^{(n+1)}$

4) Cálculo del valor de la superficie de fluencia y criterio de plasticidad $f_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})$

4.1) If $f_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)}) \leq TOL \rightarrow \Delta\epsilon^e{}^{(n+1)} = \Delta\epsilon^{(n+1)}$, $\Delta\epsilon^p{}^{(n+1)} = \mathbf{0}$, $\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(tr)}$,

$$\mathcal{X}_k^{pl,(n+1)} = \mathcal{X}_k^{pl,(n)} \rightarrow (\text{paso elástico}) \rightarrow \text{END}$$

4.2) Elseif $f_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)}) > TOL \rightarrow (\text{paso elastoplástico}) \rightarrow \text{GOTO}(5)$

5) Cálculo del punto inicial $[i] = [1]$

$$\Delta\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} = \frac{f_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})}{\frac{\partial f_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})}{\partial \sigma'} : E'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})}{\partial \sigma'} - \frac{\partial f_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})}{\partial \mathcal{X}_k^{pl}} : \mathbf{h}_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})}$$

$$\sigma'_{[1]}^{(n+1)} = \sigma'^{(tr)} - \Delta\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} E'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})}{\partial \sigma'}$$

$$\Delta\sigma'_{[1]}^{(n+1)} = -\Delta\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} E'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})}{\partial \sigma'}$$

$$\mathcal{X}_{k,[1]}^{pl,(n+1)} = \mathcal{X}_k^{pl,(n)} + \Delta\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})$$

$$\Delta\mathcal{X}_{k,[1]}^{(n+1)} = \Delta\lambda_{k,[1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_k(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_k^{pl,(n)})$$

$$f_k(\sigma'_{[1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[1]}^{pl,(n+1)})$$

6) Mientras $f_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) > TOL$ para $[i] \geq [2]$

6.1) Cálculo $\frac{\partial f_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'}$, $\frac{\partial g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'}$, $\frac{\partial^2 g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'}$, $\frac{\partial^2 g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma' \otimes \partial \mathcal{X}_k^{pl}}$,

$$\frac{\partial f_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \mathcal{X}_k^{pl}}, \mathbf{h}_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})$$

6.2) Cálculo $\Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)}$:

$$\Theta_{k,[i]}^{(n+1)} = \frac{\partial g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} + \left(\sum_{s=1}^i \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \right) \frac{\partial^2 g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma' \otimes \partial \mathcal{X}_k^{pl}} * \mathbf{h}_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})$$

$$\Xi_{k,[i]}^{(n+1)} = \left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \left(\sum_{s=1}^i \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \right) E'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} \right)^{-1}$$

$$r_{old,[i-1]}^{(n+1)} = \sigma'_{[i-1]}^{(n+1)} - \left(\sigma'^{(tr)} - \left(\sum_{s=1}^{i-1} \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \right) E'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \right)$$

$$\Delta\lambda_{k,[i]}^{(n+1)} = \frac{f_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)}) - r_{old,[i-1]}^{(n+1)} : \Xi_{k,[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'}}{E'_t{}^{(n+1)} : \Theta_{k,[i]}^{(n+1)} : \Xi_{k,[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} - \frac{\partial f_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \mathcal{X}_k^{pl}} : \mathbf{h}_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}$$

6.3) Cálculo de $\sigma'_{[i]}^{(n+1)}$ y $\mathcal{X}_{k,[i]}^{pl,(n+1)}$:

$$\sigma'_{[i]}^{(n+1)} = \sigma'^{(tr)} - \Delta\sigma'_{[1]}^{(n+1)} - \left(\sum_{q=2}^i \Delta\lambda_{k,[q]}^{(n+1)} \right) E'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'}$$

$$\mathcal{X}_{k,[i]}^{pl,(n+1)} = \mathcal{X}_k^{pl,(n)} + \Delta\mathcal{X}_{k,[1]}^{(n+1)} + \left(\sum_{q=2}^i \Delta\lambda_{k,[q]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_k(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i-1]}^{pl,(n+1)})$$

6.4) If $f_k(\sigma'_{[i]}^{(n+1)}, \mathcal{X}_{k,[i]}^{pl,(n+1)}) < TOL$, $\sigma'_{[i]}^{(n+1)} = \sigma'_{[i]}^{(n+1)}$, $\mathcal{X}_k^{pl,(n)} = \mathcal{X}_{k,[i]}^{pl,(n+1)} \rightarrow \text{END}$

6.5) Nueva iteración $[i] = [i + 1]$

Figura 4.11. Algoritmo Backward Euler Implícito para una superficie de fluencia f_k en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$.

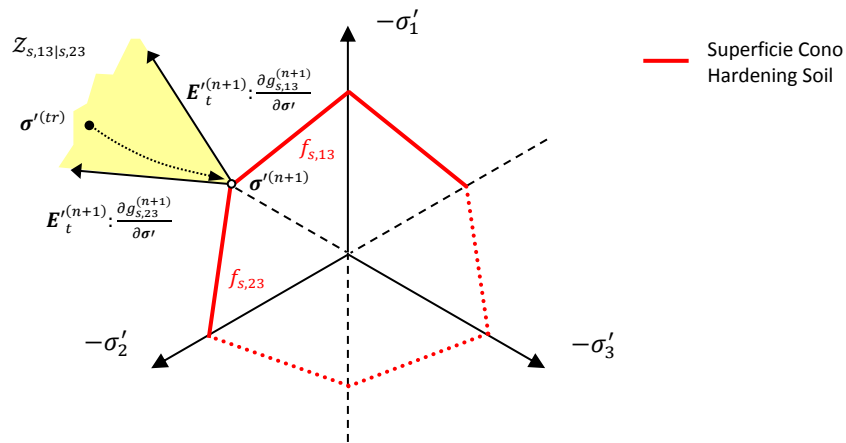


Figura 4.12. Ejemplo de Return Mapping en el plano desviador sobre la intersección entre las superficies $f_{s,13}$ y $f_{s,23}$ que forman parte de la superficie de fluencia tipo Cono f_s del modelo HS.

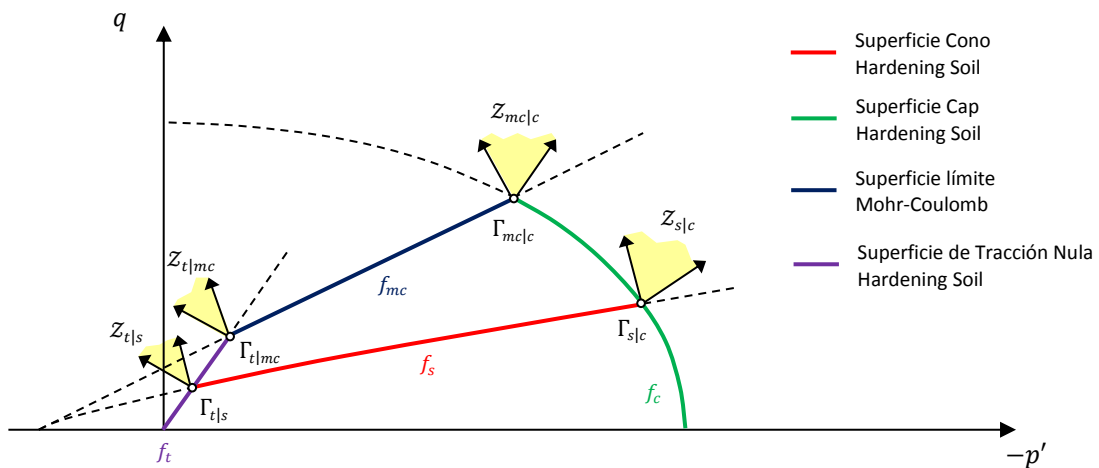


Figura 4.13. Esquema con las Zona de Esquina $Z_{i|j}$ y las curvas de intersección $\Gamma_{i|j}$ entre las diferentes superficies de fluencia del modelo HS.

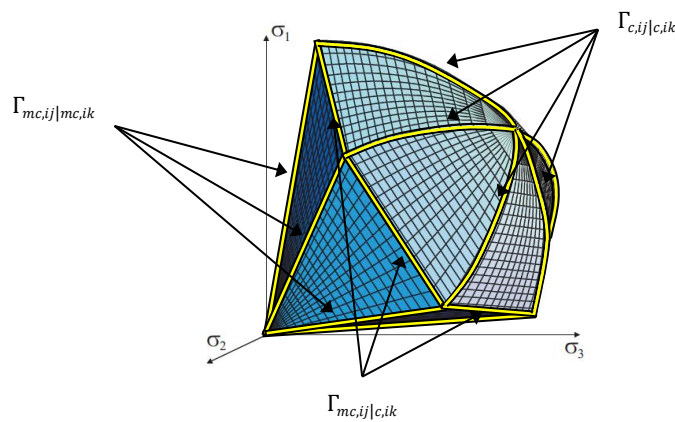


Figura 4.14. Representación de las curvas $\Gamma_{mc,ij|mc,ik}$, $\Gamma_{mc,ij|c,ik}$ y $\Gamma_{c,ij|c,ik}$. Gráfico de las superficies de fluencia extraído de la tesis de Benz (2007). En el gráfico $\sigma'_i > 0$. ($\sigma_i \equiv \sigma'_i$).

A partir de la expresión anterior, la tensión $\sigma'^{(n+1)}$ puede expresarse como sigue:

$$\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(tr)} - \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \right) \quad (4.92)$$

Del mismo modo que se ha hecho para el caso de una única superficie de fluencia (apartado 4.2.3.1 del presente capítulo), también aquí se define el tensor de tensiones residuales \mathbf{r} . De nuevo, dicho tensor representa la diferencia entre el tensor de tensiones solución σ' y el tensor de tensiones predicho por el algoritmo *Backward Euler* Implícito $\sigma'^{(n+1)}$.

$$\mathbf{r} = \sigma' - \left(\sigma'^{(tr)} - \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \right) \right) \quad (4.93)$$

Para hallar el valor del tensor de tensiones $\sigma'^{(n+1)}$, debe construirse un esquema iterativo que converja hacia $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ y $\sigma' = \sigma'^{(n+1)}$. Para construir dicho esquema se expande la expresión (4.93) en serie de Taylor alrededor de $\sigma'^{(n+1)}$:

$$\mathbf{r}_{new}^{(n+1)} = \mathbf{r}_{old}^{(n+1)} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma'} \right|_{(n+1)} : \Delta \sigma'^{(n+1)} + \sum_{r=1}^2 \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi_{k_r}^{pl}} \right|_{(n+1)} * \Delta \chi_{k_r}^{pl,(n+1)} + \sum_{r=1}^2 \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda_{k_r}} \right|_{(n+1)} \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \quad (4.94)$$

Donde, de nuevo, la operación $*$ es la que logra contraer todos los índices $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi_{k_r}^{pl}} \right|_{(n+1)}$ y $\Delta \chi_{k_r}^{pl,(n+1)}$, $\Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)}$ es el incremento del multiplicador plástico correspondiente a la superficie de fluencia f_{k_r} , siendo $\lambda_{k_r}^{(n+1)} = \sum \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)}$ y mediante la expresión $(\cdot)|_{(n+1)}$ se designa la evaluación de (\cdot) en $\sigma'^{(n+1)}$ y $\chi_{k_r}^{pl,(n+1)}$ con $r = 1, 2$.

Se desarrollan, a continuación, cada uno de los términos de la expresión (4.94):

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma'} \right|_{(n+1)} : \Delta \sigma'^{(n+1)} = \Delta \sigma'^{(n+1)} + \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial^2 g_{k_r}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} \right) : \Delta \sigma'^{n+1} \quad (4.95)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \chi_{k_r}^{pl}} \right|_{(n+1)} * \Delta \chi_{k_r}^{pl,(n+1)} = \sum_{r=1}^2 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_{k_r}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_{k_r}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_r}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)}) \quad (4.96)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda_{k_r}} \right|_{(n+1)} \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} = \sum_{r=1}^2 \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_r}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \quad (4.97)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $\Delta \chi_{k_r}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \mathbf{h}_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})$, siendo $\mathbf{h}_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})$ el módulo plástico generalizado asociado a la superficie de fluencia f_{k_r} en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$.

Obligando a que $\mathbf{r}_{new}^{(n+1)} = \mathbf{0}$, manipulando las expresiones anteriores y siendo necesario iterar para $[i] \geq [2]$ (el caso $[i] = [1]$ se expone más adelante), se deducen las siguientes expresiones:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)} = - \left(\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^2 \left(\Delta \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)} \right) \right) : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} \quad (4.98)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)} = \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \frac{\partial^2 g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)}) \quad (4.99)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} = \left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sum_{r=1}^2 \left(\lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \right)^{-1} \quad (4.100)$$

Donde $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$, $\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)}$ es el tensor de tensiones residual según la expresión (4.106), $\boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)}$ es un tensor simétrico de segundo orden que tiene en cuenta la variación del potencial plástico asociado a la superficie de fluencia f_{k_r} con las tensiones y con las variables de estado y $\boldsymbol{\Xi}_{k_r,[i]}^{(n+1)}$ es un tensor simétrico de cuarto orden llamado tensor de rigidez ampliado.

El multiplicador plástico r -ésimo en la iteración s -ésima se calcula como sigue:

$$\lambda_{k_r,[s]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_r,[1]}^{(n+1)} + \sum_{i=2}^s \Delta \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \quad (4.101)$$

El método de cálculo del valor de $\lambda_{k_r,[1]}^{(n+1)}$, con $r = 1, 2$, se explica más adelante y, para obtener el valor de $\Delta \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)}$ con $[i] \geq [2]$, se expande la expresión de $f_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k)$ en serie de Taylor alrededor de $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$.

$$f_{k_1,new}^{(n+1)} = f_{k_1,old}^{(n+1)} + \left. \frac{\partial f_{k_1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k_1}^{(n+1)} \left. \frac{\partial f_{k_1}}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl}} \right|_{(n+1)} * \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl,(n+1)}) \quad (4.102)$$

$$f_{k_2,new}^{(n+1)} = f_{k_2,old}^{(n+1)} + \left. \frac{\partial f_{k_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k_2}^{(n+1)} \left. \frac{\partial f_{k_2}}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl}} \right|_{(n+1)} * \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl,(n+1)}) \quad (4.103)$$

Obligando a que $f_{k_1, new}^{(n+1)} = 0$ y $f_{k_2, new}^{(n+1)} = 0$, siendo $f_{k_r, old}^{(n+1)} = f_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl, (n+1)})$ con $r = 1, 2$, combinando la expresión resultante con las expresiones (4.98) a (4.100) e iterando sobre $[i]$, se llega a las siguientes expresiones:

$$f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)}) - \left(\mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^2 (\Delta\lambda_{k_r, [i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_r, [i]}^{(n+1)}) \right) : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \Delta\lambda_{k_1, [i]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)}) = 0 \quad (4.104)$$

$$f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)}) - \left(\mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^2 (\Delta\lambda_{k_r, [i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_r, [i]}^{(n+1)}) \right) : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \Delta\lambda_{k_2, [i]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)}) = 0 \quad (4.105)$$

En la expresión (4.104) y (4.106), el tensor $\mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)}$ se calcula como sigue:

$$\mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)} - \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} + \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \sum_{r=1}^2 \left(\lambda_{k_r, [i-1]}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \right) \quad (4.106)$$

Y reordenando términos y reescribiendo las expresiones (4.104) y (4.105) en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_{k_1 k_1, [i]}^{(n+1)} & A_{k_1 k_2, [i]}^{(n+1)} \\ A_{k_2 k_1, [i]}^{(n+1)} & A_{k_2 k_2, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda_{k_1, [i]}^{(n+1)} \\ \Delta\lambda_{k_2, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k_1, [i]}^{(n+1)} \\ b_{k_2, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

Donde los términos $A_{k_r k_s, [i]}^{(n+1)}$ y $b_{k_r, [i]}^{(n+1)}$ de la ecuación matricial (4.107) se expresan, para $[i] \geq [2]$, como sigue:

$$A_{k_1 k_1, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_1, [i]}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)}) \quad (4.108)$$

$$A_{k_1 k_2, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_2, [i]}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.109)$$

$$A_{k_2 k_1, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_1, [i]}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.110)$$

$$A_{k_2 k_2, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} \cdot \boldsymbol{\Theta}_{k_2, [i]}^{(n+1)} \cdot \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} \cdot \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl}}} * \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)}) \quad (4.111)$$

$$b_{k_1, [i]}^{(n+1)} = f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)}) - \mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)} \cdot \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} \cdot \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\quad} \quad (4.112)$$

$$b_{k_2, [i]}^{(n+1)} = f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)}) - \mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)} \cdot \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} \cdot \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\quad} \quad (4.113)$$

A partir de la ecuación matricial de la expresión (4.107) se deducen fácilmente los valores de $\Delta \lambda_{k_1, [i]}^{(n+1)}$ y $\Delta \lambda_{k_2, [i]}^{(n+1)}$:

$$\begin{bmatrix} \Delta \lambda_{k_1, [i]}^{(n+1)} \\ \Delta \lambda_{k_2, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A}_{[i]}^{(n+1)})} \begin{bmatrix} A_{k_1 k_1, [i]}^{(n+1)} & -A_{k_1 k_2, [i]}^{(n+1)} \\ -A_{k_2 k_1, [i]}^{(n+1)} & A_{k_2 k_2, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k_1, [i]}^{(n+1)} \\ b_{k_2, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Donde $\mathbf{A}_{[i]}^{(n+1)}$ es la matriz 2x2 de la expresión (4.107) y $\det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_2} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^2 (\mathbf{A})_{\sigma(i), i}$, siendo σ una permutación, S_2 el conjunto de todas las permutaciones de (1,2) y $\text{sign}(\sigma) = +1$ si la permutación es par y $\text{sign}(\sigma) = -1$ si la permutación es impar.

Asimismo, a partir de las expresiones anteriores, es posible calcular el valor actualizado del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)}$ y de las variables de estado plásticas $\boldsymbol{\chi}_{k_1, [s]}^{pl, (n+1)}$ y $\boldsymbol{\chi}_{k_2, [s]}^{pl, (n+1)}$ en la iteración s -ésima.

$$\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} + \Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} - \sum_{r=1}^2 \left(\left(\sum_{i=1}^s \Delta \lambda_{k_r, [i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{E}'_t^{(n+1)} \cdot \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r, [s-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\quad} \right) \quad (4.115)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{k_1, [s]}^{pl, (n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)} + \Delta \boldsymbol{\chi}_{k_1, [1]}^{pl, (n+1)} + \left(\sum_{i=1}^s \Delta \lambda_{k_1, [i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [s-1]}^{pl, (n+1)}) \quad (4.116)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{k_2, [s]}^{pl, (n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)} + \Delta \boldsymbol{\chi}_{k_2, [1]}^{pl, (n+1)} + \left(\sum_{i=1}^s \Delta \lambda_{k_2, [i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [s-1]}^{pl, (n+1)}) \quad (4.117)$$

Donde $\boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl, (n)}$, con $r = 1, 2$, es vector de variables de estado plásticas correspondientes a la superficie de fluencia f_{k_r} al final del paso de cálculo anterior $(n-1) \rightarrow (n)$, y el tensor $\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)}$ y los vectores $\Delta \boldsymbol{\chi}_{k_1, [1]}^{pl, (n+1)}$ y $\Delta \boldsymbol{\chi}_{k_2, [1]}^{pl, (n+1)}$ se calculan como se explica más adelante.

La expresión (4.115) también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sigma'_{[s]}^{(n+1)} = \sigma'^{(tr)} - \sum_{i=1}^s \left(\left(r_{old,[i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^2 \left(\Delta \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)} \right) \right) : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} \right) \quad (4.118)$$

Para aplicar el esquema numérico anterior, también en el caso de dos superficies de fluencia, es necesario calcular un punto inicial adecuado, es decir, los valores de $\Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)}$, $\Delta \chi_{k_1,[1]}^{pl,(n+1)}$ y $\Delta \chi_{k_2,[1]}^{pl,(n+1)}$. En general, el valor inicial no satisfará la condición $f_{k_r}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_r}^{pl,(n)}) < TOL$ con $r = 1, 2$, si bien proporcionará un valor suficientemente preciso como para continuar con el proceso de iteración de Newton-Raphson.

Se utiliza la misma estrategia expuesta en el apartado anterior para una única superficie de fluencia, que consiste en obtener el primer punto utilizando la proyección normal al potencial plástico de la tensión trial según la métrica dada por $\mathbf{E}'_t{}^{(n+1)}$, asumiendo que la relajación de tensiones iniciales es producida únicamente por las deformaciones plásticas según la siguiente expresión.

$$\Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} = -\mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} \left(\sum_{i=1}^2 \Delta \lambda_{k_i,[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_i}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_i}^{pl,(n)})}{\partial \sigma'} \right) \quad (4.119)$$

Para obtener el valor de $\Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)}$, $\Delta \chi_{k_1,[1]}^{pl,(n+1)}$ y $\Delta \chi_{k_2,[1]}^{pl,(n+1)}$, se parte de las expresiones (4.102) y (4.103), tomando $f_{k_r,old}^{(n+1)} = f_{k_r}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_r}^{pl,(n)})$ con $r = 1, 2$, siendo $\chi_{k_r}^{pl,(n)}$ el valor de las variables de estado al final del paso de cálculo anterior $(n-1) \rightarrow (n)$.

$$\begin{aligned} & f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_1}^{pl,(n)}) + \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_1}^{pl,(n)})}{\partial \sigma'} : \Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} \\ & + \Delta \lambda_{k_1,[1]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_1}^{pl,(n)})}{\partial \chi_{k_1}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_1}^{pl,(n)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} & f_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_2}^{pl,(n+1)}) + \frac{\partial f_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_2}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} : \Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} \\ & + \Delta \lambda_{k_2,[1]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_2}^{pl,(n+1)})}{\partial \chi_{k_2}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_2}^{pl,(n+1)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.121)$$

Combinando las expresiones anteriores, se obtiene la ecuación matricial que permite obtener los multiplicadores plásticos en la primera iteración $\lambda_{k_1,[1]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_1,[1]}^{(n+1)}$ y $\lambda_{k_2,[1]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_2,[1]}^{(n+1)}$.

$$\begin{bmatrix} A_{k_1 k_1,[1]}^{(n+1)} & A_{k_1 k_2,[1]}^{(n+1)} \\ A_{k_2 k_1,[1]}^{(n+1)} & A_{k_2 k_2,[1]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_{k_1,[1]}^{(n+1)} \\ \Delta \lambda_{k_2,[1]}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k_1,[1]}^{(n+1)} \\ b_{k_2,[1]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

Donde los términos $A_{k_r k_s,[1]}^{(n+1)}$ y $b_{k_r,[1]}^{(n+1)}$ de la ecuación matricial (4.116) se expresan como sigue:

$$A_{k_1 k_1, [1]}^{(n+1)} = \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)}) \quad (4.123)$$

$$A_{k_1 k_2, [1]}^{(n+1)} = \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.124)$$

$$A_{k_2 k_1, [1]}^{(n+1)} = \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.125)$$

$$A_{k_2 k_2, [1]}^{(n+1)} = \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)}) \quad (4.126)$$

$$b_{k_1, [1]}^{(n+1)} = f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)}) \quad (4.127)$$

$$b_{k_2, [1]}^{(n+1)} = f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)}) \quad (4.128)$$

La solución de la ecuación matricial de la expresión (4.122) es la dada en la expresión (4.114) para $[i] = [1]$, $\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$ y $\boldsymbol{\chi}_{k_r, [i-1]}^{pl, (n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl, (n)}$ con $r = 1, 2$.

Una vez calculados los multiplicadores plásticos en la primera iteración $\Delta \lambda_{k_r, [1]}^{(n+1)}$ con $r = 1, 2$, es posible calcular el valor del tensor de tensiones y de las variables de estado al final dicha iteración:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} - \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} = \sum_{r=1}^2 \left(\Delta \lambda_{k_r, [1]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \quad (4.129)$$

$$\Delta \boldsymbol{\chi}_{k_1, [1]}^{pl, (n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_1, [1]}^{pl, (n+1)} - \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)} = \Delta \lambda_{k_1, [1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)}) \quad (4.130)$$

$$\Delta \boldsymbol{\chi}_{k_2, [1]}^{pl, (n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_2, [1]}^{pl, (n+1)} - \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)} = \Delta \lambda_{k_2, [1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)}) \quad (4.131)$$

4.2.3.3. Sobre la intersección de tres superficies de fluencia

En el modelo *HS* tienen lugar varias intersecciones de 3 superficies de fluencia o más. Cuando una de las curvas definidas por la intersección de dos superficie $\Gamma_{ij}(\boldsymbol{\sigma}') = \{\boldsymbol{\sigma}' | f_i(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_i^{pl}) = 0 \text{ y } f_j(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_j^{pl}) = 0\}$

intersecciona con una tercera superficie $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$, da lugar a un punto definido por la expresión (4.132) (basta 3 superficies para definir dicho punto). En el caso del modelo HS, los puntos de intersección se dan entre $f_{s,ij}$, $f_{s,ik}$ y $f_c(\mathcal{P}_{s,ij|s,ik|c})$, entre $f_{mc,ij}$, $f_{mc,ik}$ y $f_c(\mathcal{P}_{mc,ij|mc,ik|c})$, entre $f_{s,ij}$, $f_{s,ik}$ y $f_t(\mathcal{P}_{s,ij|s,ik|t})$, entre $f_{mc,ij}$, $f_{mc,ik}$ y $f_t(\mathcal{P}_{mc,ij|mc,ik|t})$ (figura 4.15), etc.

$$\mathcal{P}_{i|j|k}(\boldsymbol{\sigma}') = \{\boldsymbol{\sigma}' | f_i(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_i^{pl}) = 0, f_j(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_j^{pl}) = 0, f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0\} \quad (4.132)$$

Contigua a dicha curva se define la Zona de Esquina $\mathcal{Z}_{i|j|k}$ como el espacio en el que al aplicar el *Return Mapping* sobre $f_i(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_i^{pl})$ resultaría en un estado tensional $\boldsymbol{\sigma}'_i$ tal que $f_j(\boldsymbol{\sigma}'_i, \boldsymbol{\chi}_j^{pl}) > 0$ o $f_k(\boldsymbol{\sigma}'_i, \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) > 0$, al aplicar el *Return Mapping* sobre $f_j(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_j^{pl})$ resultaría en un estado tensional $\boldsymbol{\sigma}'_j$ tal que $f_i(\boldsymbol{\sigma}'_j, \boldsymbol{\chi}_i^{pl}) > 0$ o $f_k(\boldsymbol{\sigma}'_j, \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) > 0$, y al aplicar el *Return Mapping* sobre $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$ resultaría en un estado tensional $\boldsymbol{\sigma}'_k$ tal que $f_i(\boldsymbol{\sigma}'_k, \boldsymbol{\chi}_i^{pl}) > 0$ o $f_j(\boldsymbol{\sigma}'_k, \boldsymbol{\chi}_j^{pl}) > 0$.

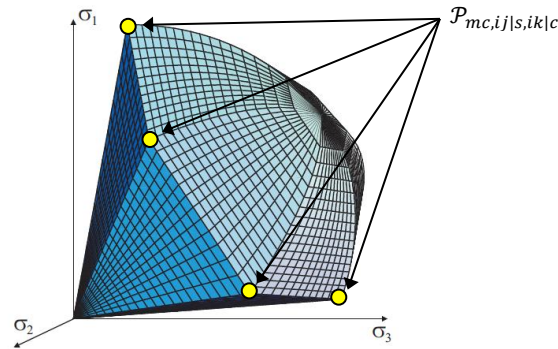


Figura 4.15. Representación puntos de intersección $\mathcal{P}_{mc,ij|mc,ik|c}$ entre las superficies de fluencia f_{mc} y f_c en el espacio de tensiones principales. Gráfico de las superficies de fluencia extraído de las tesis de Benz (2007). (En el gráfico $\sigma'_i > 0$, $\sigma_i \equiv \sigma'_i$).

En caso de que el tensor de tensiones trial $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$ se sitúe en la Zona de Esquina $\mathcal{Z}_{i|j|k}$, será necesario aplicar el *Return Mapping* sobre las tres superficies de fluencia simultáneamente, para lo cual se aplican las reglas de Koiter.

Siguiendo las Reglas de Koiter (Koiter, 1960) y, de un modo similar a como se ha hecho en el caso de la intersección de dos superficies de fluencia, la deformación plástica total se descompone linealmente en la suma de las contribuciones de cada una de las tres superficies de fluencia.

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{p(n+1)} = \sum_{r=1}^3 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.133)$$

A partir de la expresión anterior, la tensión $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$ puede expresarse como sigue:

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} - \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \left(\sum_{r=1}^3 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \quad (4.134)$$

Del mismo modo que se ha hecho en el caso de una única superficie (apartado 4.2.3.1 del presente capítulo) y dos superficies de fluencia (apartado 4.2.3.2 del presente capítulo), también ahora se define el tensor de tensiones residuales \mathbf{r} . De nuevo, dicho tensor representa la diferencia entre el tensor de tensiones solución $\boldsymbol{\sigma}'$ y el tensor de tensiones predicho por el algoritmo *Backward Euler* Implícito $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$.

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma}' - \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} - \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \left(\sum_{r=1}^3 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \right) \quad (4.135)$$

Para hallar el valor del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$, debe construirse un esquema iterativo que converja hacia $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$. Para construir dicho esquema se expande la expresión (4.135) en serie de Taylor alrededor de $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$:

$$\mathbf{r}_{new}^{(n+1)} = \mathbf{r}_{old}^{(n+1)} + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \sum_{r=1}^3 \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl}} \right|_{(n+1)} * \Delta \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)} + \sum_{r=1}^3 \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda_{k_r}} \right|_{(n+1)} \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \quad (4.136)$$

Donde, de nuevo, la operación $*$ es la que logra contraer todos los índices $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl}} \right|_{(n+1)}$ y $\Delta \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)}$, $\Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)}$ es el incremento del multiplicador plástico correspondiente a la superficie de fluencia f_{k_r} , siendo $\lambda_{k_r}^{(n+1)} = \sum \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)}$ y mediante la expresión $(\cdot)|_{(n+1)}$ se designa la evaluación de (\cdot) en $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$ y $\boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)}$ con $r = 1, 2, 3$.

Se desarrolla, a continuación, cada uno de los términos de la expresión (4.136):

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \left(\sum_{r=1}^3 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \frac{\partial^2 g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} \quad (4.137)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl}} \right|_{(n+1)} * \Delta \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)} = \sum_{r=1}^3 \lambda_{k_r}^{(n+1)} \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)}) \quad (4.138)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda_{k_r}} \right|_{(n+1)} \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} = \sum_{r=1}^3 \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.139)$$

Donde se ha tenido en cuenta que $\Delta \chi_{k_r}^{pl,(n+1)} = \Delta \lambda_{k_r}^{(n+1)} \mathbf{h}_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})$, siendo $\mathbf{h}_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl,(n+1)})$ el módulo plástico generalizado asociado a la superficie de fluencia f_{k_r} en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$.

Obligando a que $\mathbf{r}_{new}^{(n+1)} = \mathbf{0}$, manipulando las expresiones anteriores y siendo necesario iterar para $[i] \geq [2]$ (el caso $[i] = [1]$ se expone más adelante), se deducen las siguientes expresiones:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)} = - \left(\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^3 \left(\Delta \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)} \right) \right) : \boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} \quad (4.140)$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)} = \frac{\partial g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \frac{\partial^2 g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \chi_{k_r}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)}) \quad (4.141)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{[i]}^{(n+1)} = \left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \sum_{r=1}^3 \left(\lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_r,[i-1]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \right)^{-1} \quad (4.142)$$

Donde $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl}$, $\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)}$ es el tensor de tensiones residual según la expresión (4.150), $\boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)}$ es un tensor simétrico de segundo orden que tiene en cuenta la variación del potencial plástico asociado a la superficie de fluencia f_{k_r} con las tensiones y con las variables de estado y $\boldsymbol{\Xi}_{k,[i]}^{(n+1)}$ es un tensor de cuarto orden simétrico denominado tensor de rigidez ampliado.

$$\lambda_{k_r,[s]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_r,[1]}^{(n+1)} + \sum_{i=2}^s \Delta \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \quad (4.143)$$

El método de cálculo del valor de $\lambda_{k_r,[1]}^{(n+1)}$, con $r = 1, 2, 3$, se explica más adelante y, para obtener el valor de $\Delta \lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)}$ con $[i] \geq [2]$, se expande la expresión de $f_{k_r}(\boldsymbol{\sigma}', \chi_{k_r}^{pl})$ en serie de Taylor alrededor de $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$.

$$f_{k_1,new}^{(n+1)} = f_{k_1,old}^{(n+1)} + \frac{\partial f_{k_1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \Big|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k_1}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_1}}{\partial \chi_{k_1}^{pl}} \Big|_{(n+1)} * \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \chi_{k_1}^{pl,(n+1)}) \quad (4.144)$$

$$f_{k_2,new}^{(n+1)} = f_{k_2,old}^{(n+1)} + \frac{\partial f_{k_2}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \Big|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k_2}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_2}}{\partial \chi_{k_2}^{pl}} \Big|_{(n+1)} * \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \chi_{k_2}^{pl,(n+1)}) \quad (4.145)$$

$$f_{k_3,new}^{(n+1)} = f_{k_3,old}^{(n+1)} + \frac{\partial f_{k_3}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \Big|_{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} + \Delta \lambda_{k_3}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_3}}{\partial \chi_{k_3}^{pl}} \Big|_{(n+1)} * \mathbf{h}_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \chi_{k_3}^{pl,(n+1)}) \quad (4.146)$$

Obligando a que $f_{k_1, new}^{(n+1)} = 0$, $f_{k_2, new}^{(n+1)} = 0$ y $f_{k_3, new}^{(n+1)} = 0$, siendo $f_{k_r, old}^{(n+1)} = f_{k_1}(\sigma'^{(n+1)}, \chi_{k_r}^{pl, (n+1)})$ con $r = 1, 2, 3$, combinando la expresión resultante con las expresiones (4.140) a (4.142) e iterando para $[i] \geq [2]$, se llega a las siguientes expresiones:

$$f_{k_1}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_1, [i-1]}^{(n+1)}) - \left(r_{old, [i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^3 (\Delta\lambda_{k_r, [i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_r, [i]}^{(n+1)}) \right) : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \sigma'} \\ + \Delta\lambda_{k_1, [i]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \chi_{k_1}^{pl}} * h_{k_1}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)}) = 0 \quad (4.147)$$

$$f_{k_2}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_2, [i-1]}^{(n+1)}) - \left(r_{old, [i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^3 (\Delta\lambda_{k_r, [i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_r, [i]}^{(n+1)}) \right) : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \sigma'} \\ + \Delta\lambda_{k_2, [i]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_2}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \chi_{k_2}^{pl}} * h_{k_2}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)}) = 0 \quad (4.148)$$

$$f_{k_3}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_3, [i-1]}^{pl, (n+1)}) - \left(r_{old, [i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^3 (\Delta\lambda_{k_r, [i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_r, [i]}^{(n+1)}) \right) : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_3, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \sigma'} \\ + \Delta\lambda_{k_3, [i]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_3}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_3, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \chi_{k_3}^{pl}} * h_{k_3}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_3, [i-1]}^{pl, (n+1)}) = 0 \quad (4.149)$$

En las expresiones (4.147), (4.148) y (4.149), el tensor $r_{old, [i-1]}^{(n+1)}$ se calcula como sigue:

$$r_{old, [i-1]}^{(n+1)} = \sigma'_{[i-1]}^{(n+1)} - \left(\sigma'^{(tr)} + \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \sum_{r=1}^3 \left(\lambda_{k_r, [i-1]}^{(n+1)} \frac{\partial g_{k_r}(\sigma'_{[i-1]}^{(n+1)}, \chi_{k_r, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \sigma'} \right) \right) \quad (4.150)$$

Y reordenando términos y reescribiendo las expresiones (4.147), (4.148) y (4.149) en forma matricial, se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_{k_1 k_1, [i]}^{(n+1)} & A_{k_1 k_2, [i]}^{(n+1)} & A_{k_1 k_3, [i]}^{(n+1)} \\ A_{k_2 k_1, [i]}^{(n+1)} & A_{k_2 k_2, [i]}^{(n+1)} & A_{k_2 k_3, [i]}^{(n+1)} \\ A_{k_3 k_1, [i]}^{(n+1)} & A_{k_3 k_2, [i]}^{(n+1)} & A_{k_3 k_3, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda_{k_1, [i]}^{(n+1)} \\ \Delta\lambda_{k_2, [i]}^{(n+1)} \\ \Delta\lambda_{k_3, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k_1, [i]}^{(n+1)} \\ b_{k_2, [i]}^{(n+1)} \\ b_{k_3, [i]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

Donde los términos $A_{k_r k_s, [i]}^{(n+1)}$ y $b_{k_r, [i]}^{(n+1)}$ de la ecuación matricial (4.151) se expresan, para la iteración $[i] \geq [2]$, como sigue:

$$A_{k_1 k_1, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_1, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_1}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)}) \quad (4.152)$$

$$A_{k_1 k_2, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_2, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_1}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.153)$$

$$A_{k_1 k_3, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_3, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_1}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.154)$$

$$A_{k_2 k_1, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_1, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_2}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.155)$$

$$A_{k_2 k_2, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_2, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_2}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)}) \quad (4.156)$$

$$A_{k_2 k_3, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_3, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_2}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.157)$$

$$A_{k_3 k_1, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_1, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_3}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.158)$$

$$A_{k_3 k_2, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_2, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_3}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.159)$$

$$A_{k_3 k_3, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_3, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_3}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} - \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3, [i-1]}^{pl, (n+1)}) \quad (4.160)$$

$$b_{k_1, [i]}^{(n+1)} = f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1, [i-1]}^{pl, (n+1)}) - \mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_1}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.161)$$

$$b_{k_2, [i]}^{(n+1)} = f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2, [i-1]}^{pl, (n+1)}) - \mathbf{r}_{old, [i-1]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_2}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.162)$$

$$b_{k_3,[i]}^{(n+1)} = f_{k_3} \left(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3,[i-1]}^{pl,(n+1)} \right) - \mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} : \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3} \left(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3,[i-1]}^{pl,(n+1)} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.163)$$

A partir de la ecuación matricial (4.151) es posible obtener los valores de $\Delta\lambda_{k_1,[i]}^{(n+1)}$, $\Delta\lambda_{k_2,[i]}^{(n+1)}$ y $\Delta\lambda_{k_3,[i]}^{(n+1)}$.

Asimismo, a partir de las expresiones anteriores, es posible calcular el valor actualizado del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)}$ y de las variables de estado $\boldsymbol{\chi}_{k_1,[s]}^{pl,(n+1)}$, $\boldsymbol{\chi}_{k_2,[s]}^{pl,(n+1)}$ y $\boldsymbol{\chi}_{k_3,[s]}^{pl,(n+1)}$ en la iteración *s*-ésima.

$$\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} + \Delta\boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)} - \sum_{r=1}^3 \left(\left(\sum_{i=1}^s \Delta\lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_r} \left(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r,[s-1]}^{pl,(n+1)} \right)}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \right) \quad (4.164)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{k_1,[s]}^{pl,(n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl,(n)} + \Delta\boldsymbol{\chi}_{k_1,[1]}^{pl,(n+1)} + \left(\sum_{i=1}^s \Delta\lambda_{k_1,[i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_{k_1} \left(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1,[s-1]}^{pl,(n+1)} \right) \quad (4.165)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{k_2,[s]}^{pl,(n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl,(n)} + \Delta\boldsymbol{\chi}_{k_2,[1]}^{pl,(n+1)} + \left(\sum_{i=1}^s \Delta\lambda_{k_2,[i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_{k_2} \left(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2,[s-1]}^{pl,(n+1)} \right) \quad (4.166)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{k_3,[s]}^{pl,(n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl,(n)} + \Delta\boldsymbol{\chi}_{k_3,[1]}^{pl,(n+1)} + \left(\sum_{i=1}^s \Delta\lambda_{k_3,[i]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_{k_3} \left(\boldsymbol{\sigma}'_{[s-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3,[s-1]}^{pl,(n+1)} \right) \quad (4.167)$$

Donde $\boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n)}$, con $r = 1,2,3$, es el vector de variables de estado plásticas correspondientes a la superficie de fluencia f_{k_r} al final del paso de cálculo anterior $(n-1) \rightarrow (n)$, y el tensor $\Delta\boldsymbol{\sigma}'_{[1]}^{(n+1)}$ y los vectores $\Delta\boldsymbol{\chi}_{k_1,[1]}^{pl,(n+1)}$, $\Delta\boldsymbol{\chi}_{k_2,[1]}^{pl,(n+1)}$ y $\Delta\boldsymbol{\chi}_{k_3,[1]}^{pl,(n+1)}$ se calculan como se explica más adelante.

La expresión (4.164) también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sigma}'_{[s]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} - \sum_{i=1}^s \left(\left(\mathbf{r}_{old,[i-1]}^{(n+1)} + \sum_{r=1}^2 \left(\Delta\lambda_{k_r,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_{k_r,[i]}^{(n+1)} \right) \right) : \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{[i]}^{(n+1)} \right) \quad (4.168)$$

Para aplicar el esquema numérico anterior, también en el caso de tres superficies de fluencia es necesario calcular un punto inicial adecuado. En general, el valor inicial no satisfará la condición $f_{k_r} \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl,(n)} \right) < TOL$, con $r = 1,2,3$, si bien proporcionará un valor suficientemente preciso como para continuar con el proceso de iteración de Newton-Raphson.

Se utiliza la misma estrategia expuesta en los apartados anteriores para una y dos superficies de fluencia, que consiste en obtener el primer punto utilizando la proyección normal al potencial plástico de la tensión trial según la métrica dada por $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$, asumiendo que la relajación de tensiones es la producida únicamente por las deformaciones plásticas según la siguiente expresión:

$$\Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} = -\mathbf{E}'_t^{(n+1)} \left(\sum_{i=1}^3 \Delta \lambda_{k_i, [1]}^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_i}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_i}^{(n)})}{\partial \sigma'} \right) \quad (4.169)$$

Para obtener el valor de $\Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)}$, $\Delta \mathcal{X}_{k_1, [1]}^{pl, (n+1)}$, $\Delta \mathcal{X}_{k_2, [1]}^{pl, (n+1)}$ y $\Delta \mathcal{X}_{k_3, [1]}^{pl, (n+1)}$, se parte de las expresiones (4.144), (4.145) y (4.146), tomando $f_{k_r, old}^{(n+1)} = f_{k_r}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_r}^{pl, (n)})$ con $r = 1, 2, 3$, siendo $\mathcal{X}_{k_r}^{pl, (n)}$ el valor de las variables de estado al final del paso de cálculo anterior $(n-1) \rightarrow (n)$.

$$\begin{aligned} f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_1}^{pl, (n)}) + \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \sigma'} : \Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} \\ + \Delta \lambda_{k_1, [1]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \mathcal{X}_{k_1}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_1}^{pl, (n)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.170)$$

$$\begin{aligned} f_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_2}^{pl, (n)}) + \frac{\partial f_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \sigma'} : \Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} \\ + \Delta \lambda_{k_2, [1]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \mathcal{X}_{k_2}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_2}^{pl, (n)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$\begin{aligned} f_{k_3}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_3}^{pl, (n)}) + \frac{\partial f_{k_3}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_3}^{pl, (n)})}{\partial \sigma'} : \Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} \\ + \Delta \lambda_{k_3, [1]}^{(n+1)} \frac{\partial f_{k_3}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_3}^{pl, (n)})}{\partial \mathcal{X}_{k_3}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_3}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_3}^{pl, (n)}) = 0 \end{aligned} \quad (4.172)$$

Combinando las expresiones anteriores, se obtiene la ecuación matricial que permite obtener los multiplicadores plásticos en la primera iteración $\lambda_{k_1, [1]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_1, [1]}^{(n+1)}$, $\lambda_{k_2, [1]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_2, [1]}^{(n+1)}$ y $\lambda_{k_3, [1]}^{(n+1)} = \Delta \lambda_{k_3, [1]}^{(n+1)}$.

$$\begin{bmatrix} A_{k_1 k_1, [1]}^{(n+1)} & A_{k_1 k_2, [1]}^{(n+1)} & A_{k_1 k_3, [1]}^{(n+1)} \\ A_{k_2 k_1, [1]}^{(n+1)} & A_{k_2 k_2, [1]}^{(n+1)} & A_{k_2 k_3, [1]}^{(n+1)} \\ A_{k_3 k_1, [1]}^{(n+1)} & A_{k_3 k_2, [1]}^{(n+1)} & A_{k_3 k_3, [1]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \lambda_{k_1, [1]}^{(n+1)} \\ \Delta \lambda_{k_2, [1]}^{(n+1)} \\ \Delta \lambda_{k_3, [1]}^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{k_1, [1]}^{(n+1)} \\ b_{k_2, [1]}^{(n+1)} \\ b_{k_3, [1]}^{(n+1)} \end{bmatrix} \quad (4.173)$$

Donde los términos $A_{k_r k_s, [1]}^{(n+1)}$ y $b_{k_r, [1]}^{(n+1)}$ de la ecuación matricial (4.151) se expresan como sigue:

$$\begin{aligned} A_{k_1 k_1, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_1, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \sigma'} \\ - \frac{\partial f_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \mathcal{X}_{k_1}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \mathcal{X}_{k_1}^{pl, (n)}) \end{aligned} \quad (4.174)$$

$$A_{k_1 k_2, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_2, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.175)$$

$$A_{k_1 k_3, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_3, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.176)$$

$$A_{k_2 k_1, [i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_1, [i]}^{(n+1)} : \Xi_{[i]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{f_{k_2}, [i-1]}^{pl, (n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.177)$$

$$A_{k_2 k_2, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_2, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.178)$$

$$- \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})$$

$$A_{k_2 k_3, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_3, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.179)$$

$$A_{k_3 k_1, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_1, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.180)$$

$$A_{k_3 k_2, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_2, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.181)$$

$$A_{k_3 k_3, [1]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \Theta_{k_3, [1]}^{(n+1)} : \Xi_{[1]}^{(n+1)} : \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (4.182)$$

$$- \frac{\partial f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl, (n)})}{\partial \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl}} * \mathbf{h}_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl, (n)})$$

$$b_{k_1, [1]}^{(n+1)} = f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl, (n)}) \quad (4.183)$$

$$b_{k_2, [1]}^{(n+1)} = f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_2}^{pl, (n)}) \quad (4.184)$$

$$b_{k_3, [1]}^{(n+1)} = f_{k_3}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_3}^{pl, (n)}) \quad (4.185)$$

La solución de la ecuación matricial de la expresión (4.173) es la misma que la de la ecuación matricial (4.151) para $[i] = [1]$, $\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$ y $\boldsymbol{\chi}_{k_r, [i-1]}^{pl, (n+1)} = \boldsymbol{\chi}_{k_r}^{pl, (n)}$ con $r = 1, 2, 3$.

Una vez calculados los multiplicadores plásticos en la primera iteración $\Delta \lambda_{k_1, [1]}^{(n+1)}$, $\Delta \lambda_{k_2, [1]}^{(n+1)}$ y $\Delta \lambda_{k_3, [1]}^{(n+1)}$, es posible calcular el valor del tensor de tensiones y de las variables de estado al final dicha iteración:

$$\Delta \sigma'_{[1]}^{(n+1)} = \sigma'_{[1]}^{(n+1)} - \sigma'^{(tr)} = - \sum_{r=1}^3 \left((\Delta \lambda_{k_r, [1]}^{(n+1)}) \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_{k_r}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_r}^{pl, (n)})}{\partial \sigma'} \right) \quad (4.186)$$

$$\Delta p_{k_1, [1]}^{(n+1)} = \chi_{k_1, [1]}^{pl, (n+1)} - \chi_{k_1}^{pl, (n)} = \Delta \lambda_{k_1, [1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_{k_1}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_1}^{pl, (n)}) \quad (4.187)$$

$$\Delta \chi_{k_2, [1]}^{pl, (n+1)} = \chi_{k_2, [1]}^{pl, (n+1)} - \chi_{k_2}^{pl, (n)} = \Delta \lambda_{k_2, [1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_{k_2}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_2}^{pl, (n)}) \quad (4.188)$$

$$\Delta \chi_{k_3, [1]}^{pl, (n+1)} = \chi_{k_3, [1]}^{pl, (n+1)} - \chi_{k_3}^{pl, (n)} = \Delta \lambda_{k_3, [1]}^{(n+1)} \mathbf{h}_{k_3}(\sigma'^{(tr)}, \chi_{k_3}^{pl, (n)}) \quad (4.189)$$

4.2.4. Consistencia del tensor de rigidez elastoplástico tangente

Los algoritmos deducidos en los apartados anteriores se utilizan en el contexto de cálculos mediante el Método de los Elementos Finitos. En dichos cálculos suele ser habitual utilizar el método de Newton-Raphson como esquema iterativo para resolver las ecuaciones de equilibrio global. En tal caso, el uso del tensor de rigidez elastoplástico tangente derivado de las ecuaciones del medio continuo, resultaría en la pérdida de la convergencia cuadrática del método. No obstante, en dichos algoritmos se utiliza el tensor de rigidez elastoplástico tangente deducido a partir de la discretización de las ecuaciones, que es consistente, es decir, capaz de conservar el orden de convergencia del método de Newton-Raphson. La deducción de dicho tensor fue realizada originalmente por Hughes y Taylor (1978) para materiales viscoplásticos y, posteriormente, por Simo y Taylor (1985) y Runesson y Samuelsson (1985) para materiales elastoplásticos.

La expresión del tensor de rigidez elastoplástico tangente consistente puede obtenerse imponiendo la condición de consistencia a la forma discreta de las ecuaciones elastoplásticas. A continuación, se desarrolla esta formulación para el caso de una única superficie de fluencia f_k , siguiendo la propuesta de Jeremic y Sture (1997).

$$\Delta f_k|_{(n+1)} = \frac{\partial f_k}{\partial \sigma'} \Big|_{(n+1)} : \Delta \sigma'^{(n+1)} + \Delta \lambda_k^{(n+1)} \frac{\partial f_k}{\partial \chi_k^{pl}} \Big|_{(n+1)} * \mathbf{h}_k(\sigma'^{(n+1)}, \chi_k^{pl, (n+1)}) = 0 \quad (4.190)$$

Donde $\Delta \sigma'^{(n+1)}$ es el incremento del tensor de tensiones en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\Delta \lambda_k^{(n+1)}$ es el incremento del multiplicador plástico y \mathbf{h}_k es el módulo plástico generalizado asociado a la superficie de fluencia f_k .

Para obtener el valor de $\Delta \sigma'^{(n+1)}$, se parte de la siguiente expresión, equivalente a la (4.66):

$$\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(n)} + \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)} - \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'^{(n+1)}, \chi_k^{pl, (n+1)})}{\partial \sigma'} \quad (4.191)$$

A continuación, se desarrolla la expresión anterior en serie de Taylor para su linealización:

$$\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} &= \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} - \Delta \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \\
&\quad - \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} : \Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} \\
&\quad - \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} * \Delta \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}
\end{aligned} \tag{4.192}$$

Combinando las expresiones (4.190) y (4.192) se llega a la siguiente expresión de $\Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\Xi}_k^{(n+1)} : \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \left(\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} - \Delta \lambda_k^{(n+1)} \boldsymbol{\Theta}_k^{(n+1)} \right) \tag{4.193}$$

Donde los tensores $\boldsymbol{\Theta}_k^{(n+1)}$ y $\boldsymbol{\Xi}_k^{(n+1)}$ se expresan como:

$$\boldsymbol{\Theta}_k^{(n+1)} = \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} + \lambda_k^{(n+1)} \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\chi}_k} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}) \tag{4.194}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_k^{(n+1)} = \left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial^2 g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} \right)^{-1} \tag{4.195}$$

Se define a continuación el denominado "tensor de rigidez reducido" como:

$$\mathbf{R}_k^{(n+1)} = \boldsymbol{\Xi}_k^{(n+1)} : \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} \tag{4.196}$$

Combinando las expresiones (4.191), (4.193) y (4.196) se obtiene la expresión del incremento del multiplicador plástico $\Delta \lambda_k^{(n+1)}$. Se recuerda que el tensor de cuarto orden $\boldsymbol{\Xi}^{(n+1)}$, así como su inverso $(\boldsymbol{\Xi}^{(n+1)})^{-1}$, son simétricos.

$$\Delta \lambda_k^{(n+1)} = \frac{\frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{R}_k^{(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}}{\frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} : \mathbf{R}_k^{(n+1)} : \boldsymbol{\Theta}_k^{(n+1)} : - \left. \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\chi}_k} \right|_{(n+1)} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})} \tag{4.197}$$

Teniendo en cuenta las simetrías de los tensores, se obtiene finalmente la siguiente expresión del tensor de rigidez elastoplástico tangente consistente $\mathbf{E}'_{t,cons}{}^{ep,(n+1)}$.

$\mathbf{E}'_{t,cons}{}^{ep,(n+1)}$

$$= \mathbf{R}_k^{(n+1)} - \frac{\mathbf{R}_k^{(n+1)} : \Theta_k^{(n+1)} : \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}}{\frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} : \mathbf{R}_k^{(n+1)} : \Theta_k^{(n+1)} - \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} \Big|_{(n+1)} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}) \quad (4.198)$$

Dicho tensor permite expresar el valor del incremento del tensor de deformaciones cuando se activa el régimen elastoplástico, de la siguiente manera:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \mathbf{E}'_{t,cons}{}^{ep,(n+1)} : \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} \quad (4.199)$$

Debe notarse que es posible obtener la expresión del tensor de rigidez elastoplástico tangente continuo (no consistente) $\mathbf{E}'_t{}^{ep,(n+1)}$ tomando el límite $\lambda_k^{(n+1)} \rightarrow 0$, tal como explican Jeremic y Sture (1997).

$$\lim_{\lambda_k^{(n+1)} \rightarrow 0} (\Theta_k^{(n+1)}) = \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} \quad (4.200)$$

$$\lim_{\lambda_k^{(n+1)} \rightarrow 0} (\Xi_k^{(n+1)}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (4.201)$$

$$\lim_{\lambda_k^{(n+1)} \rightarrow 0} (\mathbf{R}_k^{(n+1)}) = \lim_{\lambda_k^{(n+1)} \rightarrow 0} (\mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Xi_k^{(n+1)}) = \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} \quad (4.202)$$

$$\lim_{\lambda_k^{(n+1)} \rightarrow 0} (\mathbf{E}'_{t,cons}{}^{ep,(n+1)}) = \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} - \mathbf{E}'_t{}^{p,(n+1)} \quad (4.203)$$

Donde el tensor $\mathbf{E}'_t{}^{p,(n+1)}$ adopta la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}'_t{}^{p,(n+1)} = \frac{\mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} : \frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} : \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)}}{\frac{\partial f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} : \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'}} - \frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{\chi}_k^{pl}} \Big|_{(n+1)} * \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})} \quad (4.204)$$

4.3. Estrategia para la selección de las superficies de fluencia activas en el modelo HS

Un problema importante en los cálculos elastoplásticos con multisuperficie es establecer una estrategia para determinar sobre qué superficie o superficies debe realizarse el *Return Mapping*, especialmente

cuando el estado tensional se encuentra próximo a $Z_{i|j}$ o $Z_{i|j|k}$ en la que deben aplicarse las Reglas de Koiter (Koiter, 1960).

Se consideran como estrategias robustas para la selección de superficies la propuesta por Simo y Hughes (1998) y la propuesta por Bonnier (2000).

- 1) La estrategia propuesta por Simo y Hughes (1998) realiza el *Return Mapping* simultáneamente sobre M superficies de fluencia cuando se cumplen, en estas, $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) > TOL$ con $k = 1, \dots, M$. Una vez se dispone de los multiplicadores plásticos λ_k asociados a cada superficie de fluencia, se comprueba el signo de los mismos. Si un conjunto $Q < M$ de estos multiplicadores resulta tener valores negativos $\lambda_k < 0$, $k = 1 \dots Q$, se reinicia el *Return Mapping* desactivando las superficies de fluencia asociadas a dichos multiplicadores. Este proceso se repetirá hasta tener $Q = 0$.
- 2) La estrategia propuesta por Bonnier (2000) es algo diferente a la anterior. Esta consiste en evaluar las superficies de fluencia de forma concatenada para incorporarlas, o no, en el *Return Mapping*. En esta estrategia primero se aplica el algoritmo de retorno sobre una única superficie de fluencia f_{k_1} , en la que se cumple $f_{k_1}(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl}) > TOL$ al final del paso de cálculo anterior. Una vez finalizado el *Return Mapping* sobre dicha superficie y actualizado el tensor de tensiones y las variables de estado plásticas $(\boldsymbol{\sigma}'_{k_1}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl})$, se comprueba la condición de fluencia de una segunda superficie de fluencia f_{k_2} , cuya intersección con la primera es posible. En caso de que se cumpla $f_{k_2}(\boldsymbol{\sigma}'_{k_1}, \boldsymbol{\chi}_{k_1}^{pl}) > TOL$, se realizará un nuevo *Return Mapping* simultáneamente sobre las dos superficies de fluencia f_{k_1} y f_{k_2} , partiendo de la tensión trial y de las variables de estado plásticas sin endurecer $(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$. Este proceso se repetirá con todas las posibles combinaciones entre superficies de fluencia que puedan interseccionarse.

En el desarrollo de la implementación del modelo HS en Plaxis se han utilizado las dos estrategias anteriores, llegando a la conclusión de que ambas son equivalentes en los cálculos realizados. El esquema numérico finalmente adoptado, que se expone más adelante, se basa en la estrategia de Bonnier (2000), a la cual incorpora un conjunto de modificaciones.

Por otro lado, es necesario tener presente que, en el modelo HS, el estado tensional al final de cada paso de cálculo no puede rebasar, en ningún caso, la superficie límite de Mohr-Coulomb f_{mc} ni la superficie de Tracción Nula f_t . No obstante, esto sí sucede en dos supuestos durante el proceso iterativo del *Return Mapping*:

- a) Cuando la tensión trial $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$ sobrepasa la superficie f_{mc} y/o f_t .

Cuando dicha tensión cae fuera de la superficie f_{mc} , Tanev (2015) propone desactivar la superficie tipo Cono f_s y/o tipo Cap f_c , y realizar el *Return Mapping* únicamente sobre la superficie f_{mc} , obteniéndose un valor $\boldsymbol{\sigma}'_{mc}$ del tensor de tensiones. Si posteriormente el estado tensional $\boldsymbol{\sigma}'_{mc}$ incumpliera el criterio de fluencia de la superficie tipo Cono $f_s(\boldsymbol{\sigma}'_{mc}, \boldsymbol{\chi}_s^{pl}) > TOL$, de la superficie tipo Cap $f_c(\boldsymbol{\sigma}'_{mc}, \boldsymbol{\chi}_c^{pl}) > TOL$ o de ambas, se realizaría el respectivo *Return Mapping* sobre las mismas (figura 4.16a).

b) Cuando se realiza el *Return Mapping* sobre la superficie tipo Cono f_s , obteniendo como resultado σ'_s y χ_s^{pl} , y dicha superficie ha endurecido lo suficiente como para sobrepasar la superficie f_{mc} o f_t (Caso 1). O bien cuando la superficie tipo Cono f_s supera, de partida, la superficie f_{mc} o f_t debido al valor de χ_s^{pl} (Caso 2). En estos dos casos se puede utilizar una de las siguientes estrategias:

- b.1) Tras finalizar el *Return Mapping* sobre f_s , realizar un nuevo *Return Mapping* sobre la superficie f_{mc} o f_t , partiendo de la tensión σ'_s y manteniendo el valor de las variables de estado χ_s^{pl} obtenidas tras el primer *Return Mapping* realizado (caso 1 y caso 2 en figura 4.16b).
- b.2) Realizar directamente el *Return Mapping* sobre la superficie f_{mc} o f_t , tomando como tensión inicial la tensión trial $\sigma'^{(tr)}$. En paralelo, calcular el valor χ_s^{pl} de las variables de estado plásticas de la superficie tipo Cono f_s en base a un hipotético *Return Mapping* sobre la superficie f_s , y almacenarlas para el próximo paso de cálculo.

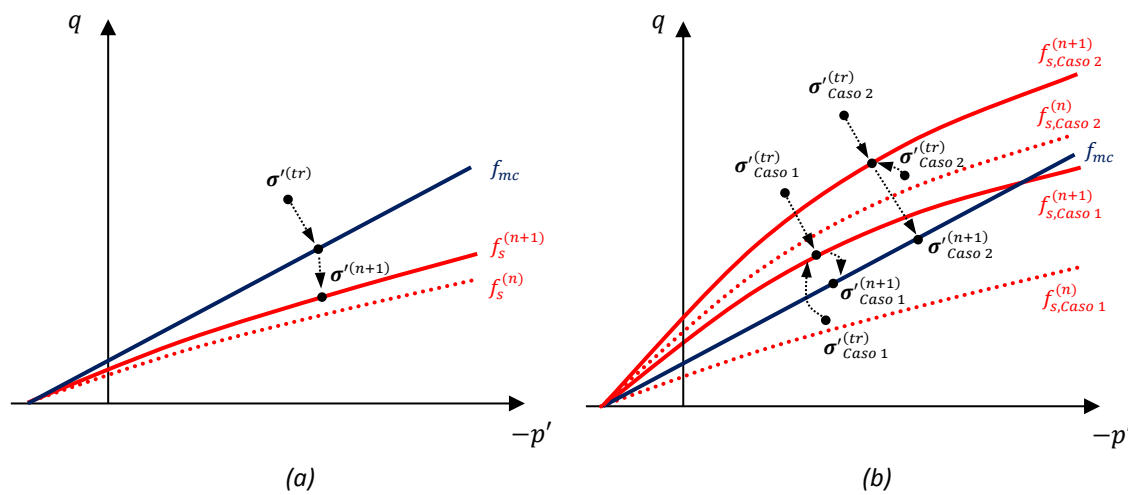


Figura 4.16. (a) Esquema de la estrategia propuesta por Tanev (2015).
 (b) Esquema de la estrategia de retorno sobre la superficie de Mohr-Coulomb en dos pasos cuando $f_s(\sigma'^{(tr)}, \chi_s^{pl}) > f_{mc}(\sigma'^{(tr)}, \chi_s^{pl})$.

Con objeto de reducir el coste computacional se ha adoptado, en los dos supuestos (a) y (b) anteriores, una estrategia basada en la de Bonnier (2000) y en el punto (b.2), que aprovecha la estructura de la estrategia de Bonnier, en la que siempre se realiza el *Return Mapping* sobre la superficie tipo Cono f_s antes que sobre la superficie de Mohr-Coulomb f_{mc} o de Tracción Nula f_t , evitando, así, incrementar el coste computacional y aprovechando los resultados de los cálculos previos.

Con objeto de aplicar la estrategia seleccionada, es necesario obtener el valor de la variable de endurecimiento de la superficie tipo Cono cuando $\sigma'^{(tr)}$ supera la superficie de Mohr-Coulomb, para lo cual se reformula parcialmente la expresión de f_s y $\partial f_s / \partial \sigma'$. Ello permite evaluar valores de la tensión

desviadora superiores a q_f durante el proceso iterativo del *Return Mapping*, siendo q_f el valor de la tensión desviadora máxima según el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb.

$$f_s(q) = f_s(q_f) \quad \text{si } q \geq q_f \quad (4.205)$$

$$\frac{\partial f_s}{\partial \sigma'}(q) = \frac{\partial f_s}{\partial \sigma'}(q_f) \quad \text{si } q \geq q_f \quad (4.206)$$

En el momento en que, durante el proceso iterativo del *Return Mapping*, la tensión desviadora cumpla $q < q_f$, se recupera la formulación original de la superficie tipo Cono f_s y sus derivadas $\partial f_s / \partial \sigma'$.

A modo de ejemplo, se muestran a continuación las expresiones de $f_{s,13}$ y $\partial f_{s,13} / \partial \sigma'_1$ ($-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$) cuando $-\sigma'_1 - (-\sigma'_3) > q_f$:

$$f_{s,13} = \frac{2q_a}{E'_i} \frac{q_f}{q_a - q_f} - \frac{2q_f}{E'_{t,ur}} - \gamma^p \quad \text{si } -\sigma'_1 - (-\sigma'_3) > q_f \quad (4.207)$$

$$\frac{\partial f_{s,13}}{\partial (-\sigma'_1)} = \frac{2}{E'_i} \left(\frac{q_a}{q_a - q_f} \right)^2 - \frac{2}{E'_{t,ur}} \quad \text{si } -\sigma'_1 - (-\sigma'_3) > q_f \quad (4.208)$$

Donde el valor de las variables q_a , q_f , E'_i , $E'_{t,ur}$, R_f , φ' , c' y γ^p se han descrito en el apartado 4.1 del presente capítulo.

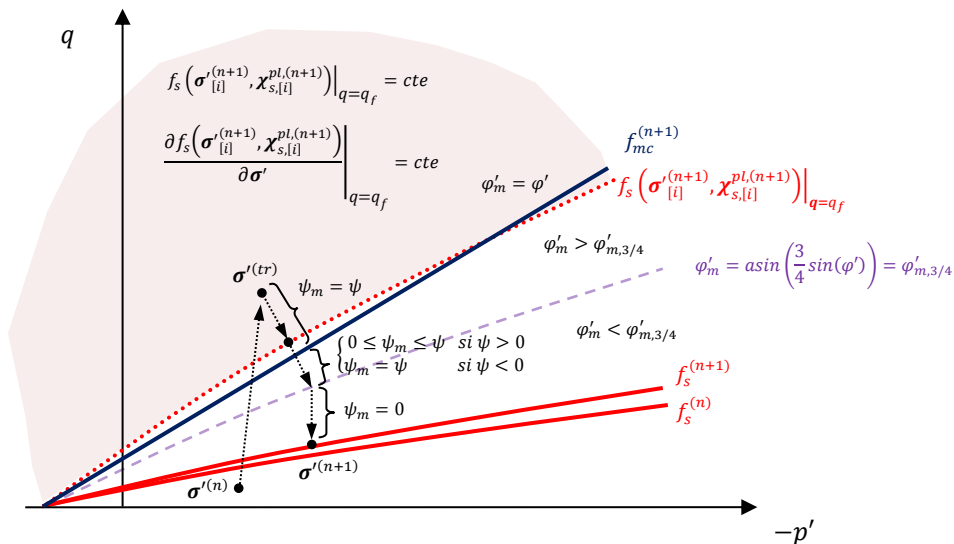


Figura 4.17. Estrategia adoptada en la implementación del modelo HS.

Asimismo, debe tenerse en cuenta que el potencial plástico correspondiente a la superficie de fluencia tipo Cono g_s (expresión 4.24 a 4.26) y a la superficie de Mohr-Coulomb g_{mc} (expresión 4.27 a 4.29) cumplen, cuando $q > q_f$, que $\psi_m = \psi$, siendo ψ_m el ángulo de dilatación movilizado y ψ el ángulo de dilatación introducido como parámetro en el modelo. Es por ello que las direcciones de los gradientes del potencial plástico durante el *Return Mapping* coinciden en la estrategia adoptada y en la estrategia

propuesta por Tanev (2015). No obstante, los valores de los multiplicadores plásticos difieren en ambas estrategias debido al hecho de que $f_s|_{q>q_f} \neq f_{mc}$ y $\partial f_s / \partial \sigma' |_{q>q_f} \neq \partial f_{mc} / \partial \sigma'$ (figura 4.17). Esto último implica que se requiera un número diferente de iteraciones en la estrategia de Tanev (2015) y en la estrategia propuesta, para llegar, en ambos casos, a la convergencia.

En base a todo lo descrito, se resume, a continuación, la estrategia utilizada para la selección de superficies de fluencia en el código implementado para el modelo HS, en forma de diagrama de flujo (figura 4.18 y 4.19).



Figura 4.18. Estrategia para la selección de las superficies de fluencia en el Return Mapping (1/2).

```

    IF  $(-\sigma'_2 < -\sigma'_3 \text{ .OR. } -\sigma'_1 < -\sigma'_2)$  THEN
        CALL MC_TRAC_plast (iArea = 2 o 3) !Return Mapping sobre  $\mathcal{P}_{mc,13|mc,12|t,3}$  o  $\mathcal{P}_{mc,13|mc,23|t,3}$  y  $\Delta\chi_c^{pl} = \mathbf{0}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} \neq \mathbf{0}$ ).
    END IF
END IF
END IF
END IF
END IF
fc,13new !Cálculo  $f_c^{new}$  en la tensión resultante del Return Mapping anterior.
IF ( $f_{c,13}^{new} \geq f_c^{TOL}$ ) THEN
    CALL CAP_plast (iArea = 1) !Return Mapping sobre  $f_c$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} = \mathbf{0}$ ).
    IF  $(-\sigma'_2 < -\sigma'_3 \text{ .OR. } -\sigma'_1 < -\sigma'_2)$  THEN
        CALL CAP_plast (iArea = 2 o 3) !Return Mapping sobre  $\Gamma_{c|aux,1}$  o  $\Gamma_{c|aux,3}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} = \mathbf{0}$ ).
    END IF
fs,13new !Cálculo  $f_{s,13}^{new}$  en la tensión resultante del Return Mapping anterior.
    IF ( $f_{s,13}^{new} \geq f_{s,13}^{TOL}$ ) THEN
        CALL HS_CAP_plast (iArea = 1) !Return Mapping sobre  $\Gamma_{s,13|c}$ ,  $\Delta\chi_s^{pl}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$ .
        IF  $(-\sigma'_2 < -\sigma'_3 \text{ .OR. } -\sigma'_1 < -\sigma'_2)$  THEN
            CALL HS_CAP_plast (iArea = 2 o 3) !Return Mapping sobre  $\mathcal{P}_{s,13|s,12|c}$  o  $\mathcal{P}_{s,13|s,23|c}$ ,  $\Delta\chi_s^{pl}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$ .
        END IF
fmc,13new !Cálculo  $f_{mc,13}^{new}$  en la tensión resultante del Return Mapping anterior.
        IF ( $f_{mc,13}^{new} \geq f_{mc,13}^{TOL}$ ) THEN
            !Almacenamiento  $\Delta\chi_s^{pl}$ 
            CALL MC_CAP_plast (iArea = 1) !Return Mapping sobre  $\Gamma_{mc,13|c}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} \neq \mathbf{0}$ ).
            IF  $(-\sigma'_2 < -\sigma'_3 \text{ .OR. } -\sigma'_1 < -\sigma'_2)$  THEN
                CALL MC_CAP_plast (iArea = 2 o 3) !Return Mapping sobre  $\mathcal{P}_{mc,13|mc,12|c}$  o  $\mathcal{P}_{mc,13|mc,23|c}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} \neq \mathbf{0}$ ).
            END IF
        END IF
    END IF
END IF
END IF
ELSE
    IF ( $f_c^{trial} \geq f_c^{TOL}$ ) THEN
        CALL CAP_plast (iArea = 1) !Return Mapping sobre  $f_c$  (partiendo de  $\sigma^{(tr)}$ ) y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} = \mathbf{0}$ ).
        IF  $(-\sigma'_2 < -\sigma'_3 \text{ .OR. } -\sigma'_1 < -\sigma'_2)$  THEN
            CALL CAP_plast (iArea = 2 o 3) !Return Mapping sobre  $\Gamma_{c|aux,1}$  o  $\Gamma_{c|aux,3}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} = \mathbf{0}$ ).
        END IF
fs,13new !Cálculo  $f_{s,13}^{new}$  en la tensión resultante del Return Mapping anterior.
        IF ( $f_{s,13}^{new} \geq f_{s,13}^{TOL}$ ) THEN
            CALL HS_CAP_plast (iArea = 1) !Return Mapping sobre  $\Gamma_{s,13|c}$ ,  $\Delta\chi_s^{pl}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$ .
            IF  $(-\sigma'_2 < -\sigma'_3 \text{ .OR. } -\sigma'_1 < -\sigma'_2)$  THEN
                CALL HS_CAP_plast (iArea = 2 o 3) !Return Mapping sobre  $\mathcal{P}_{s,13|s,12|c}$  o  $\mathcal{P}_{s,13|s,23|c}$ ,  $\Delta\chi_s^{pl}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$ .
            END IF
fmc,13new !Cálculo  $f_{mc,13}^{new}$  en la tensión resultante del Return Mapping anterior.
            IF ( $f_{mc,13}^{new} \geq f_{mc,13}^{TOL}$ ) THEN
                !Almacenamiento  $\Delta\chi_s^{pl}$ 
                CALL MC_CAP_plast (iArea = 1) !Return Mapping sobre  $\Gamma_{mc,13|s,13}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} \neq \mathbf{0}$ ).
                IF  $(-\sigma'_2 < -\sigma'_3 \text{ .OR. } -\sigma'_1 < -\sigma'_2)$  THEN
                    CALL MC_CAP_plast (iArea = 2 o 3) !Return Mapping sobre  $\mathcal{P}_{mc,13|mc,12|c}$  o  $\mathcal{P}_{mc,13|mc,23|c}$  y  $\Delta\chi_c^{pl}$  ( $\Delta\chi_s^{pl} \neq \mathbf{0}$ ).
                END IF
            END IF
        END IF
    END IF
    END IF
    END IF
    END IF
5) Comprobación de la esquina de tracción
    IF ( $p = (-\sigma'_1 + (-\sigma'_2) + (-\sigma'_3))/3 < -\sigma'_{trac}$ ) THEN
         $-\sigma'_i = -\sigma'_{trac} \quad i = 1,2,3$ 
         $\Delta\chi_s^{pl} = \mathbf{0}$ 
         $\Delta\chi_c^{pl} = \mathbf{0}$ 
    END IF

```

Figura 4.19. Estrategia para selección de las superficies de fluencia en el Return Mapping (2/2).

4.4. Implementación del modelo HS con el módulo UDSM de Plaxis

El software comercial Plaxis permite implementar modelos constitutivos definidos por los usuarios a través del módulo *User Defined Soil Model (UDSM)*. De esta forma se puede utilizar toda la infraestructura de un programa comercial de elementos finitos, como es el módulo de introducción de datos, el de preproceso, el de cálculo, el de postproceso o el de lectura de resultados.

Para poder utilizar el módulo *UDSM* es necesario escribir un conjunto de subrutinas siguiendo una determinada estructura definida en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015) y en los archivos descargables contenidos en *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012).

El código desarrollado para la implementación del modelo *HS* ha sido escrito en FORTRAN y compilado como *Dynamic Link Library (DLL)*, utilizando el compilador *Lahey Fortran* o el compilador *Intel Fortran*. Dicho código completo puede consultarse en el anejo III del presente trabajo. Cabe mencionar que a pesar de que el modelo *HS* se encuentra predefinido en Plaxis, su implementación numérica ha sido fundamental en el desarrollo de este trabajo, tanto para la posterior implementación de la parte plástica del modelo *EPHYSS* como por el carácter pedagógico que aporta disponer de dicho código y de los detalles sobre la metodología seguida en el proceso de implementación, dada la falta de documentación de detalle al respecto

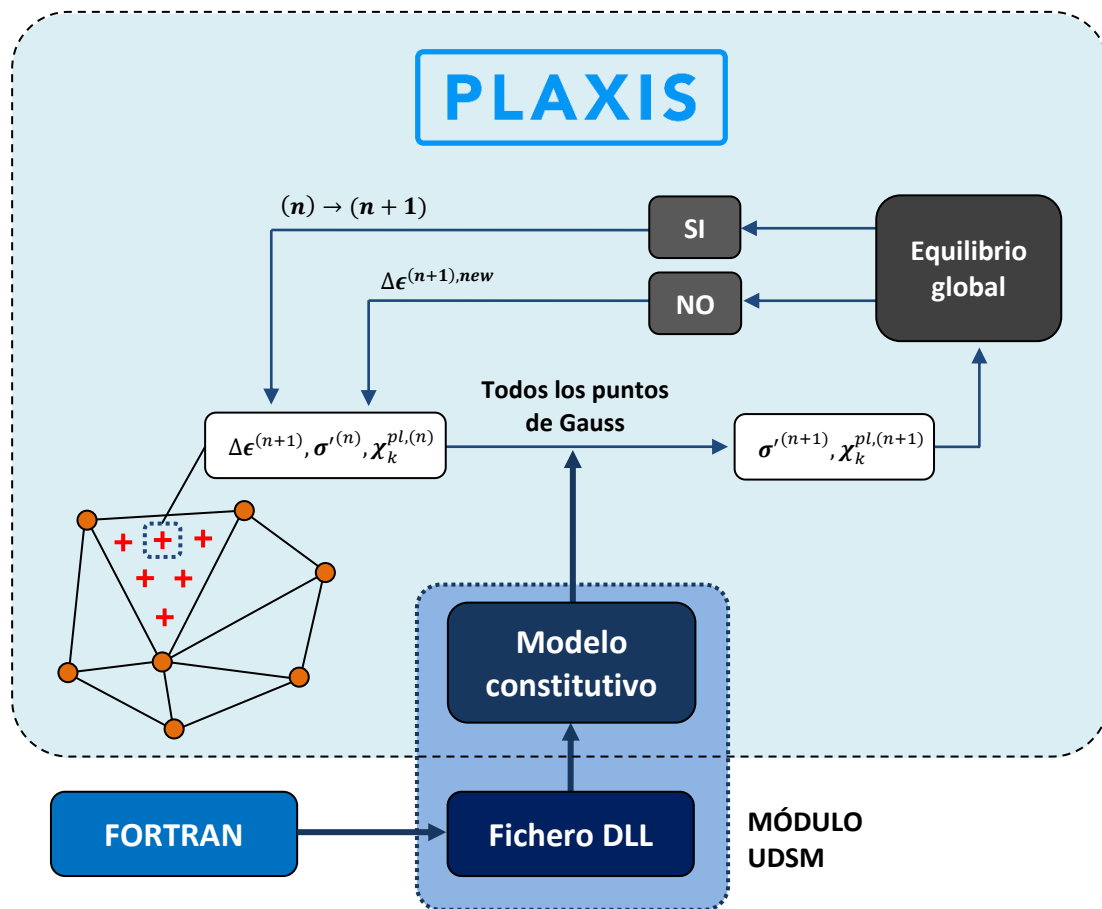


Figura 4.20. Esquema del funcionamiento del módulo UDSM de Plaxis en un problema de contorno.

Para que Plaxis pueda leer el fichero *DLL* generado, este debe copiarse en la correspondiente subcarpeta del directorio del programa.

- En el caso de la versión Plaxis 2D v9, el archivo *MODELOS_LF.dll*, compilado en 32 bits con *Lahey Fortran*, debe copiarse dentro de la subcarpeta Plaxis 2D del directorio de Plaxis.
- Para las versiones Plaxis 2D 2011 y posteriores, se copiará el archivo *MODELOS_LF.dll*, compilado en 32 bits con *Lahey Fortran*, o bien el archivo *MODELOS_IF.dll*, compilado en 32 bits con *Intel Fortran*, dentro de la subcarpeta *udsm* del directorio de Plaxis y, en caso de querer ejecutar los cálculos utilizando procesadores de 64 bits, también se copiará el archivo *MODELOS_IF64.dll*, compilado en 64 bits con *Intel Fortran*, dentro de la misma subcarpeta.

Tal como se describe en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015), para cada paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, el programa proporciona los valores de las tensiones $\sigma^{(n)}$ y de las variables de estado $\chi_k^{(n)}$ iniciales, así como del incremento del tensor de deformaciones $\Delta\epsilon^{(n+1)}$. A partir de estas variables iniciales en cada punto de Gauss, y leyendo el algoritmo de integración local de las ecuaciones del fichero *DLL*, Plaxis es capaz de calcular las tensiones y las variables de estado al final de dicho paso de cálculo. Posteriormente, Plaxis comprueba si se cumple el equilibrio global en la iteración considerada (figura 4.20).

4.4.1. Estructuración del código *HS* en subrutinas

El módulo *UDSM* de Plaxis a través del cual se implementan los modelos constitutivos, trabaja con subrutinas. Existen diversas maneras de organizar dichas subrutinas. En el presente trabajo se ha pretendido dar un carácter pedagógico a su estructuración.

Las dos subrutinas principales, basadas en las contenidas en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012), son:

- La subrutina *User_Mod* desde la cual se llama a las subrutinas que contienen los modelos implementados (hasta 10 modelos). Dentro de estas subrutinas se incluyen las líneas de código que permiten abrir el fichero para la depuración del código.
- La subrutina que incluye las líneas de código con cada uno de los modelos implementados *MyModel1*, *MyModel2*, etc. (hasta 10 modelos).

A parte de estas dos subrutinas principales, se definen también la siguientes, basadas en las que se pueden encontrar en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012):

- La subrutina *Usr_Add* que permite asignar un nombre a cada uno de los modelos implementados, así como un número, nombre y unidades a cada uno de los parámetros y variables de estado de cada modelo.
- La subrutina *Matriz6* que permite construir la matriz 6x6 con el valor de los componentes del tensor de rigidez.

- La subrutina *Matriz3* que permite construir la matriz 3x3 con el valor de los componentes del tensor de rigidez que debe operarse con el vector de tensiones principales una vez diagonalizado.
- La subrutina *Usrlib* que contiene, a su vez, un conjunto de subrutinas predefinidas con operaciones matemáticas concretas.
- Las subrutinas que contienen el *Return Mapping* sobre cada una de las superficies de fluencia, así como en las intersecciones dobles y triples de dichas superficies:
 - Subrutina *HS_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie de fluencia tipo Cono (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
 - Subrutina *CAP_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie de fluencia tipo Cap (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
 - Subrutina *MC_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie límite de Mohr-Coulomb (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
 - Subrutina *TRAC_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie de fluencia de Tracción Nula (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
 - Subrutina *HS_CAP_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie de fluencia tipo Cono con la superficie de fluencia tipo Cap (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
 - Subrutina *MC_CAP_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie límite de Mohr-Coulomb con la superficie de fluencia tipo Cap (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
 - Subrutina *HS_TRAC_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie de fluencia tipo Cono con la superficie de fluencia de Tracción Nula (incluyendo las intersecciones en el plano desviador)
 - Subrutina *MC_TRAC_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie límite de Mohr-Coulomb con la superficie de fluencia de Tracción Nula (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).

En la figura 4.21 se muestra, de forma esquemática, la estructuración utilizada con las subrutinas en el módulo *UDSM*.

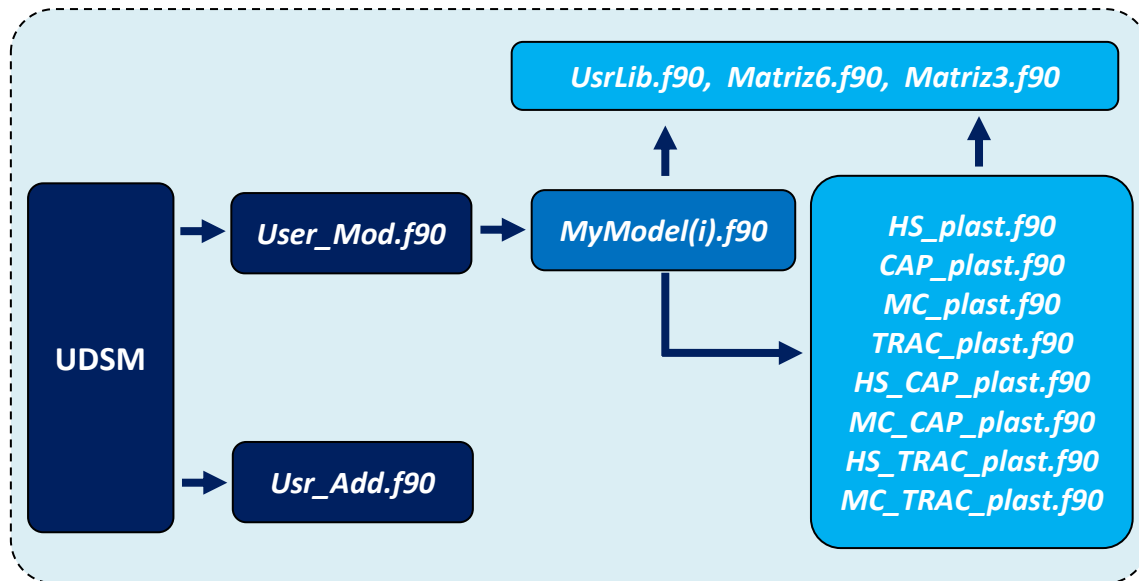


Figura 4.21. Esquema del funcionamiento de las subrutinas implementadas en el módulo UDSM de Plaxis.

4.4.1.1. Argumentos de las subrutinas principales

La principal subrutina en el módulo *UDSM* es la denominada *User_Mod* (basada en la subrutina *USRMOD.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012)), y tiene los siguientes argumentos:

User_Mod (*IDTask*, *iMod*, *IsUndr*, *iStep*, *iTer*, *iEl*, *Int*, *X*, *Y*, *Z*, *Time0*, *dTime*, *Props*, *Sig0*, *Swp0*, *StVar0*, *dEps*, *D*, *BulkW*, *Sig*, *Swp*, *StVar*, *ipl*, *nStat*, *NonSym*, *iStrsDep*, *iTimeDep*, *iTang*, *iPrjDir*, *iPrjLen*, *iAbort*)

En una misma subrutina *User_Mod* es posible definir varios modelos constitutivos (subrutinas *MyModel1*, *MyModel2*, etc., basadas en la subrutina *mymodel1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012)). Cada una de estas subrutinas tiene los siguientes argumentos:

MyModel1 (*IDTask*, *iMod*, *IsUndr*, *iStep*, *iTer*, *iEl*, *Int*, *X*, *Y*, *Z*, *Time0*, *dTime*, *Props*, *Sig0*, *Swp0*, *StVar0*, *dEps*, *D*, *BulkW*, *Sig*, *Swp*, *StVar*, *ipl*, *nStat*, *NonSym*, *iStrsDep*, *iTimeDep*, *iTang*, *iPrjDir*, *iPrjLen*, *iAbort*)

Todas las subrutinas del código han sido escritas en lenguaje FORTRAN libre, utilizando una declaración de variables implícita mediante la orden *Implicit Double Precision (A-H, O-Z)*. De esta forma, las variables cuya primera letra está comprendida entre la A y la H o entre la O y la Z toman valores reales de doble precisión (con 16 cifras significativas), y las variables cuya primera letra está comprendida entre la I y la N tomarán valores enteros.

El código implementado debe utilizar las variables predefinidas en Plaxis, que se describen en el Manual de Materiales del programa (Plaxis, 2015) y que se muestran a continuación. Según el orden de la siguiente lista, todas las variables entre *IDTask* y *dEps* (ambas incluidas), son proporcionadas por Plaxis al inicio de cada paso de cálculo (*Input Parameters*) y no deben ser modificadas (exceptuando el valor

de $StVar0$ en el primer paso de cálculo), mientras que las variables comprendidas entre $iTang$ e $iAbort$ (ambas incluidas) deben obtenerse a partir de los cálculos implementados (*Output Parameters*).

- $IDTask$ = Identificador de la tarea, que toma un valor de 1 a 6.
 1: Inicialización de las variables de estado.
 2: Cálculo de las tensiones y de las variables de estado.
 3: Cálculo de la matriz de rigidez efectiva.
 4: Número de variables de estado.
 5: Características de la matriz de rigidez.
 6: Cálculo de la matriz de rigidez elástica.
- $iMod$ = Número del modelo definido (UD). Hasta 10 modelos diferentes.
- $IsUndr$ = Parámetro que indica si deben considerarse condiciones drenadas ($IsUndr = 0$) o condiciones no drenadas ($IsUndr = 1$).
- $istep$ = Número de paso de cálculo actual.
- $iter$ = Número de iteración actual.
- Iel = Número de elemento actual.
- Int = Número de punto de Gauss actual.
- X, Y, Z = Coordenadas globales del punto de Gauss actual.
- $Time0$ = Tiempo al inicio del paso de cálculo actual.
- $dTime$ = Incremento de tiempo en el paso de cálculo actual.
- $Props$ = Matriz de $1 \times N$ ($N \leq 50$), que contiene los parámetros del modelo.
- $Sig0$ = Matriz de $1 \times N$ con los valores de las tensiones y otras variables en el punto de Gauss considerado, al inicio del paso de cálculo actual:
 Plaxis v9 ($N = 6$): $(\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}, \sigma'_{xy}, \sigma'_{yz}, \sigma'_{zx})$
 Plaxis 2D 2011 y posteriores versiones ($N = 12$):
 $(\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}, \sigma'_{xy}, \sigma'_{yz}, \sigma'_{zx}, p_{steady}, \Sigma Mstage^0, \Sigma Mstage, Sat, Sat^0, Suc, Suc^0, \Sigma Msf^0, \Sigma Msf, X_i, SatRes, Temp, UnfrozenW, 0)$.
 En cálculos 2D $\sigma'_{yz} = \sigma'_{zx} = 0$
- $Swp0$ = Presión de agua en el punto de Gauss considerado al inicio del paso de cálculo actual.
- $StVar0$ = Matriz de $1 \times nStat$ con los valores de las variables de estado en el punto de Gauss considerado al inicio del paso de cálculo actual.
- $dEps$ = Matriz de $1 \times N$ con los valores de los incrementos de deformación en el punto de tensión considerado y en el paso de cálculo actual:
 Plaxis v9 ($N = 6$): $(\Delta \epsilon_{xx}, \Delta \epsilon_{yy}, \Delta \epsilon_{zz}, \Delta \gamma_{xy}, \Delta \gamma_{yz}, \Delta \gamma_{zx})$

Plaxis 2D 2011 y posteriores versiones ($N = 12$):

$(\Delta\epsilon_{xx}, \Delta\epsilon_{yy}, \Delta\epsilon_{zz}, \Delta\gamma_{xy}, \Delta\gamma_{yz}, \Delta\gamma_{zx}, \epsilon_{xx}^0, \epsilon_{yy}^0, \epsilon_{zz}^0, \gamma_{xy}^0, \gamma_{yz}^0, \gamma_{zx}^0)$

En cálculos 2D $\Delta\gamma_{yz} = \Delta\gamma_{zx} = \gamma_{yz}^0 = \gamma_{zx}^0 = 0$.

<i>D</i>	=	Matriz 6x6 con los coeficientes del tensor de rigidez en el punto de Gauss considerado.
<i>BulkW</i>	=	Módulo volumétrico del agua en el punto de Gauss considerado (para el caso de condiciones no drenadas y consolidación).
<i>Sig</i>	=	Matriz de 1x6 con los valores de las tensiones en el punto de Gauss considerado al final del paso de cálculo actual $(\sigma'_{xx}, \sigma'_{yy}, \sigma'_{zz}, \sigma'_{xy}, \sigma'_{yz}, \sigma'_{zx})$.
<i>Swp</i>	=	Presión de agua en punto de Gauss considerado al final del paso de cálculo actual.
<i>StVar</i>	=	Matriz de $1 \times nStat$ con los valores de las variables de estado en el punto de Gauss considerado al final del paso de cálculo actual.
<i>ipl</i>	=	Indicador plástico: 0: Sin plasticidad (punto dentro del dominio elástico). 1: Punto sobre la superficie Mohr-Coulomb. 2: Punto sobre la superficie de Tracción Nula. 3: Punto sobre la superficie tipo <i>Cap</i> . 4: Punto sobre la superficie tipo <i>Cap</i> y tipo Cono. 5: Punto sobre la superficie tipo Cono.
<i>nStat</i>	=	Número de variables de estado (ilimitado).
<i>NonSym</i>	=	Parámetro que indica si la matriz de rigidez es simétrica (<i>NonSym</i> = 0) o no-simétrica (<i>NonSym</i> = 1).
<i>iStrsDep</i>	=	Parámetro que indica si la matriz de rigidez depende de las tensiones (<i>iStrsDep</i> = 1) o no (<i>iStrsDep</i> = 0).
<i>iTimeDep</i>	=	Parámetro que indica si la matriz de rigidez depende del tiempo (<i>iTimeDep</i> = 1) o no (<i>iTimeDep</i> = 0).
<i>iTang</i>	=	Parámetro que indica si la matriz de rigidez es la matriz de rigidez tangente y puede ser utilizada en el método iterativo de Newton-Raphson (<i>iTang</i> = 1) o no (<i>iTang</i> = 0).
<i>iPrjDir</i>	=	Directorio del proyecto (para la depuración del código).
<i>iPrjLen</i>	=	Longitud del nombre del directorio del proyecto (para la depuración del código).
<i>iAbort</i>	=	Parámetro que permite detener el cálculo cuando <i>iAbort</i> = 1.

4.4.1.2. USER_MOD.f90

La subrutina *User_Mod* (que se puede encontrar dentro del archivo *User_Mod.f90*), basada en la subrutina *USRMOD.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012), contiene las líneas de código relacionadas con los siguientes conceptos:

- 1) Declaraciones para la compilación del código. En el desarrollo del código se han utilizado dos compiladores diferentes:
 - a) INTEL VISUAL FORTRAN
 Para compilar en 32 bits (todas las versiones de Plaxis)
`!DEC$ ATTRIBUTES DLLExport, StdCall, Reference :: User_Mod`
 Para compilar en 64 bits (compatible con la versión Plaxis 2D 2011 y posteriores).
`!DEC$ ATTRIBUTES DLLExport :: User_Mod`
 - b) LAHEY FORTRAN
 Para compilar en 32 bits (todas las versiones de Plaxis):
`DLL_Export User_Mod`
- 2) Declaraciones para generar el archivo de depuración (*usdmex*, *usdmex1*, etc.). En dicho archivo se escribirán todos los valores de las variables que se consideren necesarios para estudiar los resultados de los cálculos.
- 3) Llamada a la subrutina principal del modelo implementado *MyModel1*, *MyModel2*, etc.
- 4) Órdenes para la compilación de las subrutinas: *Matriz6*, *Matriz3*, *MyModel1*, *MyModel2*, etc., *HS_plast*, *CAP_plast*, *MC_plast*, *TRAC_plast*, *HS_CAP_plast*, *MC_CAP_plast*, *HS_TRAC_plast*, *MC_TRAC_plast*.

4.4.1.3. MYMODEL.f90

Las subrutinas principales *MyModel1*, *MyModel2*, etc. (que se pueden encontrar, respectivamente, dentro de los archivos *Mymodel1.f90*, *Mymodel2.f90*, etc.), basadas en la subrutina *mymodel1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012), contienen las líneas de código de cada uno de los modelos implementados (hasta 10 modelos). Dichas subrutinas siguen una estructuración basada en 6 tareas que se identifican con el nombre *IDTask*. Dichas tareas se enumeran de la 1 a la 6, aunque Plaxis no las ejecute en este orden y algunas de ellas pueden ser llamadas en diversas ocasiones durante una misma iteración global.

En todas las tareas *IDTask* se han introducido líneas de código para la depuración de las correspondientes subrutinas. Para imprimir los valores de las variables en el archivo de salida *usdmex*, se utiliza la orden *write(1,*)* y las funciones de escritura de escalares enteros o reales, vectores o matrices contenidas en la librería *UsrLib.f90* (basada en la subrutina *USRLIB.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012)).

A continuación, se describe brevemente en qué consiste cada una de las tareas *IDTask*:

IDTask = 1 En la tarea *IDTask* = 1 se determina el valor inicial de las variables de estado iniciales.

En el caso del modelo *HS*, se ha definido la variable de deformación desviadora plástica acumulada $\gamma^p \equiv \gamma^p > 0$ como *StVar*(1), y la variable de presión de preconsolidación isótropa $-p_p \equiv -p_p < 0$ como *StVar*(2). Tras cargar el valor de los parámetros del modelo, se calculan los valores iniciales de las variables de estado:

$$StVar0(1) = \max(StVar0(1), 10^{-10}, \gamma^{p,eq})$$

$$StVar0(2) = \min(StVar0(2), -c' \cos(\varphi') / \sin(\varphi'), -1, -p_p^{eq})$$

$$p_p^{eq} = \sqrt{(p^{eq})^2 + (q^{eq}/\alpha')^2}$$

$$p'^{eq} = \max\left(1/3 (1 + 2K_0^{NC}) \left(-\sigma'_{yy}{}^{(n)}\right) OCR, 1/3 \left(-\sigma'_1{}^{(n)} - \sigma'_2{}^{(n)} - \sigma'_3{}^{(n)}\right)\right)$$

$$q^{eq} = \max\left((1 - K_0^{NC}) \left(-\sigma'_{yy}{}^{(n)}\right) OCR, -\sigma'_1{}^{(n)} - \left(-\sigma'_3{}^{(n)}\right)\right)$$

$$\gamma^{p,eq} = 2q_a/E'_i(q^{eq}/(q_a - q^{eq})) - 2q^{eq}/E'_{t,ur}$$

Donde $Prs_0(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n)} \geq Prs_0(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n)} \geq Prs_0(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n)}$ son las tensiones principales al final del paso de cálculo $(n-1) \rightarrow (n)$, $-\sigma'_{yy}{}^{(n)}$ es la tensión vertical al final del paso de cálculo $(n-1) \rightarrow (n)$, q_a , E'_i y $E'_{t,ur}$ son las variables descritas en el apartado 4.1.2.1 del presente capítulo y $OCR = (-\sigma'_{v,max})/(-\sigma'_v)$, siendo $-\sigma'_{v,max}$ la tensión máxima vertical histórica y $-\sigma'_v$ la tensión vertical actual.

Plaxis transmitirá automáticamente el valor final de las variables de estado calculadas, desde la variable *StVar* correspondiente al paso de cálculo actual, a la variable *StVar0* correspondiente al siguiente paso de cálculo. En el caso de que se definan diferentes fases de cálculo, el valor de las variables de estado se transmitirá del mismo modo.

Cuando se utilice el índice *OCR*, este deberá aplicarse únicamente en la primera fase de cálculo. Para ello, se aconseja definir dos conjuntos de parámetros para un mismo material: el primer *set* de parámetros, con el valor *OCR* que se considere conveniente, se aplicará exclusivamente en la primera fase de cálculo; y el segundo *set* de parámetros, que tendrá los mismos valores de parámetros considerados en el primer *set*, a excepción del valor de *OCR* que será $OCR = 0$ a efectos numéricos, se aplicará en las siguientes fases de cálculo con objeto de no distorsionar el valor de $-p_p^{eq}$.

IDTask = 2 En la tarea *IDTask* = 2 se calcula el valor de las tensiones y variables de estado en cada paso de cálculo mediante la integración local de las ecuaciones constitutivas. En el modelo *HS* implementado, esta tarea incluye los siguientes pasos:

- 1) Carga de los parámetros del modelo en el vector *Props*.
- 2) Cálculo de la presión de agua en los poros (*Swp*) en cálculos no drenados.

- 3) Cálculo del tensor de tensiones $Sig_E \equiv \sigma^{(tr)}$ a partir del valor del incremento de deformación $dEps \equiv \Delta \epsilon^{(n+1)}$. Para ello, se utiliza el valor del tensor de rigidez elástico tangente $D \equiv E'_t{}^{(n+1)}$ según se ha expuesto en el apartado 4.2.2 del presente capítulo. El cálculo de la matriz asociada a dicho tensor se hace a través de la subrutina *Matriz6*.
- 4) Diagonalización del tensor $\sigma^{(tr)}$ y obtención de las tensiones principales $Prs_E(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(tr)} \geq Prs_E(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(tr)} \geq Prs_E(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(tr)}$ y de los autovectores $S(1) \equiv v_1^{(tr)}$, $S(2) \equiv v_2^{(tr)}$ y $S(3) \equiv v_3^{(tr)}$.
- 5) Cálculo de los valores $f_{k,13}^{trial} = f_{k,13}(\sigma^{(tr)}, \chi_k^{pl})$, suponiendo $-\sigma'_1{}^{(tr)} \geq -\sigma'_2{}^{(tr)} \geq -\sigma'_3{}^{(tr)}$ (*iArea* = 1): *f13_hs*, *f13_mc*, *f13_cap* y *f13_trac*.
- 6) Cálculo del valor de las tolerancias $f_{k,13}^{TOL}$: *f13_hs_TOL*, *f13_mc_TOL*, *f13_cap_TOL* y *f13_trac_TOL*. Se utiliza un valor de la tolerancia relativa de $ttol = 10^{-12}$, teniendo en cuenta que $f13_i_TOL = ttol \cdot f13_i + ttol$.
- 7) Comprobación del tipo de paso de cálculo: elástico o elastoplástico.
- 8) En caso de que el paso de cálculo resulte elástico, se considera $Prs(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n+1)} = Prs_E(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(tr)} \geq Prs(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n+1)} = Prs_E(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(tr)} \geq Prs(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n+1)} = Prs_E(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(tr)}$, $StVar(1) \equiv \gamma^{p,(n+1)} = StVar0(1) \equiv \gamma^{p,(n)}$ y $StVar(2) \equiv -p_p^{(n+1)} = StVar0(2) \equiv -p_p^{(n)}$.
- 9) En caso de que el paso de cálculo no sea elástico, se aplica la estrategia para la selección de las superficies de fluencia sobre las que realizar el *Return Mapping* según las figuras 4.18 y 4.19, y se obtienen las tensiones resultantes $Prs(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n+1)} \geq Prs(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n+1)} \geq Prs(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n+1)}$. El algoritmo recurre, en este punto, a las subrutinas: *HS_plast*, *CAP_plast*, *MC_plast*, *TRAC_plast*, *HS_CAP_plast*, *MC_CAP_plast*, *HS_TRAC_plast*, *MC_TRAC_plast* y *Matriz3*.
- 10) Comprobación de que el estado tensional no se sitúa fuera de la esquina de tracción $-p' = (-\sigma'_1 + (-\sigma'_2) + (-\sigma'_3))/3 < -sigma_trac \equiv -\sigma'_{trac}$. En caso de que se cumpla esta condición, se considera $Prs(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n+1)} = Prs(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n+1)} = Prs(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n+1)} = -sigma_trac \equiv -\sigma'_{trac}$, $StVar(1) \equiv \gamma^{p,(n+1)} = StVar0(1) \equiv \gamma^{p,(n)}$ y $StVar(2) \equiv -p_p^{(n+1)} = StVar0(2) \equiv -p_p^{(n)}$.
- 11) Cálculo del tensor de tensiones $Sig \equiv \sigma^{(n+1)}$ a partir de los valores de las tensiones principales $Prs(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n+1)} \geq Prs(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n+1)} \geq Prs(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n+1)}$ y de los vectores propios $S(1) \equiv v_1^{(tr)}$, $S(2) \equiv v_2^{(tr)}$ y $S(3) \equiv v_3^{(tr)}$ correspondientes a $Sig_E \equiv \sigma^{(tr)}$, calculados previamente. Se supone que no hay rotación de las direcciones principales durante el *Return Mapping*.

- IDTask* = 3 En la tarea *IDTask* = 3 se calcula la matriz con las componentes del tensor de rigidez tangente. Para ello, se recurre a la subrutina *Matriz6*. En caso de que el comportamiento del suelo sea de tipo No Drenado (*IsUndr* = 1), se calcula, en esta tarea, el valor del módulo volumétrico del agua (*Bulk_W*), que se utiliza en el cálculo de las tensiones efectivas. Ello se hace considerando un valor del coeficiente de Poisson no drenado $\nu_u = 0,495$.
- IDTask* = 4 En la tarea *IDTask* = 4 se indica el número de variables de estado del modelo (*nStat*).
- IDTask* = 5 En la tarea *IDTask* = 5 se especifican las características de la matriz asociada al tensor de rigidez tangente.
- Matriz simétrica (*NonSym* = 0) que permite almacenar únicamente la mitad de los coeficientes, o matriz no simétrica (*NonSym* = 1) en la que deben almacenarse todos los coeficientes.
 - Matriz dependiente de las tensiones (*iStrsDep* = 1), en cuyo caso la matriz de rigidez global se calcula y descompone al inicio de cada paso de cálculo (método de Newton-Raphson modificado), o matriz no dependiente de las tensiones (*iStrsDep* = 0).
 - Matriz dependiente del tiempo (*iTimeDep* = 1), en cuyo caso la matriz de rigidez global se calcula y descompone cada vez que cambia el tiempo, o matriz no dependiente del tiempo (*iTimeDep* = 0)
 - Matriz de rigidez global tangente que se calcula y descompone en cada iteración de cada paso de cálculo y que será utilizada en un algoritmo iterativo de Newton-Raphson, en combinación con *iStrsDep* = 1 (*iTang* = 1), o no (*iTang* = 0).
- IDTask* = 6 En la tarea *IDTask* = 6 se calcula la matriz elástica con las componentes del tensor de rigidez elástico tangente mediante la subrutina *Matriz6*. En caso de que el comportamiento del suelo sea de tipo No Drenado (*IsUndr* = 1), se calcula, en esta tarea, el valor del módulo volumétrico del agua (*Bulk_W*), que se utiliza en el cálculo de las tensiones efectivas. Ello se hace considerando un valor del coeficiente de Poisson no drenado $\nu_u = 0,495$.

4.4.1.4. HS_PLAST.f90

La subrutina *HS_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *HS_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la superficie tipo Cono $f_{s,13}$ o sobre las curvas de intersección entre superficies $\Gamma_{s,13|s,12} = f_{s,13} \cap f_{s,12}$ o $\Gamma_{s,13|s,23} = f_{s,13} \cap f_{s,23}$.

En la tabla 4.04 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
<i>ipl</i>	Indicador plástico	5
<i>itmax</i>	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
<i>ttol</i>	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.04. Parámetros del proceso de cálculo con HS_{plast}.

Para evitar oscilaciones numéricas en el cálculo de los valores de $q_a^{(n+1)} = q_f^{(n+1)} / R_f$, $q_f^{(n+1)}$, $E_i^{(n+1)}$ y $E_{ur}^{(n+1)}$ en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, que aparecen en la expresión de *f13_hs* y sus derivadas, se utilizan los valores de la tensiones principales al final del paso de cálculo anterior $(n - 1) \rightarrow (n)$, es decir, $Prs_0(1) \equiv -\sigma_1^{(n)} \geq Prs_0(2) \equiv -\sigma_2^{(n)} \geq Prs_0(3) \equiv -\sigma_3^{(n)}$. Concretamente, estos valores se calculan como sigue:

$$q_f^{(n+1)} = \frac{\max\left(\left(c' \cot g(\varphi') + (-\sigma_3^{(n)})\right), (c' \cot g(\varphi') - \sigma'_{trac}), 1\right)}{\frac{2 \sin(\varphi')}{1 - \sin(\varphi')}} \quad (4.209)$$

$$E_i^{(n+1)} = E_i^{ref} \frac{\max\left(\left(c' \cos(\varphi') + (-\sigma_3^{(n)}) \sin(\varphi')\right), (c' \cos(\varphi')), 1\right)}{c' \cos(\varphi') + p'_{ref} \sin(\varphi')} \quad (4.210)$$

$$E_{t,ur}^{(n+1)} = E_{t,ur}^{ref} \frac{\max\left(\left(c' \cos(\varphi') + (-\sigma_3^{(n)}) \sin(\varphi')\right), (c' \cos(\varphi')), 1\right)}{c' \cos(\varphi') + p'_{ref} \sin(\varphi')} \quad (4.211)$$

Por otro lado, tal como se ha expuesto en el apartado 4.3 del presente capítulo, se modifica parcialmente la formulación de la superficie de fluencia tipo Cono f_s y de sus derivadas cuando $q \geq q_f$, con objeto de que estas funciones queden definidas en todo momento durante el *Return Mapping*.

Para calcular el valor del ángulo de dilatación movilizado en cada iteración $[i]$, dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, es necesario calcular previamente el valor del ángulo de fricción movilizado. En el modelo HS ello se hace de la siguiente manera:

$$\sin(\varphi'_{m,[i]}) = \min\left(\max\left(\frac{-\sigma_{1,[i]}^{(n+1)} - (-\sigma_{3,[i]}^{(n+1)})}{-\sigma_{1,[i]}^{(n+1)} + (-\sigma_{3,[i]}^{(n+1)}) - 2c' \cot g(\varphi')}, 0\right), \sin(\varphi')\right) \quad (4.212)$$

La actualización de la variable de estado $StVar(1) = \gamma^p$ en cada iteración $[i]$ dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, se hace según la expresión (4.213). Por otro lado, la variable de estado $StVar(2) = -p_p$ adopta el valor del paso de cálculo anterior $StVar(2) = StVar0(2)$ durante el *Return Mapping* sobre la superficie de fluencia tipo Cono.

$$\gamma_{[i]}^{p,(n+1)} = \max \left(\left(\gamma_{[i-1]}^{p,(n+1)} + \left(\sum_{q=1}^i \Delta \lambda_{s,[q]}^{(n+1)} \right) \mathbf{h}_s \left(\boldsymbol{\sigma}_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{s,[i-1]}^{(n+1)} \right) \right), \gamma_{[i-1]}^{p,(n+1)} \right) \quad (4.213)$$

Cuando el *Return Mapping* se hace sobre alguna de las curvas de intersección $\Gamma_{s,13|s,12}$ o $\Gamma_{s,13|s,23}$, se considera, en todo momento, el multiplicador plástico asociado a la superficie de fluencia $f_{s,13}$ para la actualización de la variable de estado γ^p . Se ha comprobado que considerar dicho multiplicador plástico, o el asociado a $f_{s,12}$ o $f_{s,23}$, es equivalente cerca de la convergencia.

4.4.1.5. MC_PLAST.f90

La subrutina *MC_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *MC_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la superficie límite de Mohr-Coulomb $f_{mc,13}$ o sobre las curvas de intersección entre superficies $\Gamma_{mc,13|mc,12} = f_{mc,13} \cap f_{mc,12}$ o $\Gamma_{mc,13|mc,23} = f_{mc,13} \cap f_{mc,23}$.

En la tabla 4.05 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
<i>ipl</i>	Indicador plástico	1
<i>itmax</i>	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
<i>ttol</i>	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.05. Parámetros del proceso de cálculo con *MC_plast*.

La variable de estado $StVar(1) = \gamma^p$ toma su valor del *Return Mapping* previo sobre la superficie tipo Cono (*HS_plast.f90*). Por otro lado, la variable de estado $StVar(2) = -p_p$ se mantiene constante durante el *Return Mapping* sobre la superficie límite de Mohr-Coulomb.

4.4.1.6. CAP_PLAST.f90

La subrutina *CAP_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *CAP_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la superficie tipo Cap f_c o sobre las curvas de intersección entre superficies $\Gamma_{c,13|aux,1} = f_{c,13} \cap f_{aux,1}$ o $\Gamma_{c,13|aux,3} = f_{c,13} \cap f_{aux,3}$.

En la tabla 4.06 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
<i>ipl</i>	Indicador plástico	3
<i>itmax</i>	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
<i>ttol</i>	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.06. Parámetros del proceso de cálculo con *CAP_plast*.

Para calcular el valor de $\mathbf{h}_c(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_c^{(n+1)})$ se utiliza la expresión (4.42) en la versión de Plaxis 2D v9 y la expresión (4.43) en la versión de Plaxis 2D 2011 y posteriores. Ambas expresiones utilizan la variable $-p_p$ en vez de $-\sigma'_3$ (expresión 4.44 según Benz (2007)) dentro del factor exponencial. Ello evita oscilaciones y divergencias numéricas durante el proceso iterativo.

En el caso de la versión de Plaxis 2D v9, \mathbf{h}_c se calcula como:

$$\mathbf{h}_c(\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{c,[i]}^{(n+1)}) = \frac{2\max(-p'_{[i]}^{(n+1)}, 1)p'_{ref}}{\bar{\beta}'}\left(\frac{\max\left(\left(p_{p,[i]}^{(n+1)}\right), 1\right)}{p'_{ref}}\right)^m \quad (4.214)$$

En el caso de la versión de Plaxis 2D 2011 y posteriores, \mathbf{h}_c se calcula como:

$$\mathbf{h}_c(\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{c,[i]}^{(n+1)}) = 2H\max(-p'_{[i]}^{(n+1)}, 1)\left(\frac{\max\left(\left(p_{p,[i]}^{(n+1)} + c' \cot g(\varphi')\right), 1\right)}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')}\right)^m \quad (4.215)$$

La variable de estado $StVar(1) = \gamma^p$ adopta el valor del paso de cálculo anterior $StVar(1) = StVar0(1)$ durante el *Return Mapping* sobre la superficie de fluencia tipo *Cap*, mientras que para la actualización de la variable de estado $StVar(2) = -p_p$, en cada iteración $[i]$ dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, se utiliza la siguiente expresión:

$$p_{p,[i]}^{(n+1)} = \max\left(\left(p_{p,[i-1]}^{(n+1)} + \left(\sum_{q=1}^i \Delta\lambda_{c,[q]}^{(n+1)}\right)\mathbf{h}_c(\boldsymbol{\sigma}'_{[i-1]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{c,[i-1]}^{(n+1)})\right), p_{p,[i-1]}^{(n+1)}\right) \quad (4.216)$$

Cuando en algún momento durante el proceso iterativo del *Return Mapping* sobre $\Gamma_{c,13|aux,1}$ o $\Gamma_{c,13|aux,3}$, en cálculos de tipo No Drenado ($IsUndr = 1$), se cumpla $-p_{[i]}^{(n+1)} = 1/3 \left(-\sigma'_{1,[i]}^{(n+1)} + \left(-\sigma'_{2,[i]}^{(n+1)}\right) + \left(-\sigma'_{3,[i]}^{(n+1)}\right)\right) < -\sigma'_{trac}$, se detendrá la subrutina, volviendo a los valores de la tensión trial $-\sigma'_1{}^{(tr)} \geq -\sigma'_2{}^{(tr)} \geq -\sigma'_3{}^{(tr)}$ y las variables de estado iniciales $\gamma^{p,(n)}$ y $p_p^{(n)}$, con objeto de evitar oscilaciones y divergencias numéricas.

4.4.1.7. TRAC_PLAST.f90

La subrutina *TRAC_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *TRAC_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la superficie de Tracción Nula $f_{t,3}$ o sobre las curvas de intersección entre superficies $\Gamma_{t,3|t,2} = f_{t,3} \cap f_{t,2}$ o $\Gamma_{t,3|aux,3} = f_{t,3} \cap f_{aux,3}$.

En la tabla 4.07 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
<i>ipl</i>	Indicador plástico	2
<i>itmax</i>	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
<i>ttol</i>	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.07. Parámetros del proceso de cálculo con *TRAC_plast*.

La variable de estado $StVar(1) = \gamma^p$ toma su valor del *Return Mapping* previo sobre la superficie tipo Cono (*HS_plast.f90*). Por otro lado, la variable de estado $StVar(2) = -p_p$ se mantiene constante durante el *Return Mapping* sobre la superficie límite de Tracción Nula.

4.4.1.8. HS_CAP_PLAST.f90

La subrutina *HS_CAP_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *HS_CAP_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la curva de intersección entre superficies $\Gamma_{s,13|c,13} = f_{s,13} \cap f_{c,13}$ o sobre los puntos de intersección entre superficies $\mathcal{P}_{s,13|s,12|c,13} = f_{s,13} \cap f_{s,12} \cap f_{c,13}$ o $\mathcal{P}_{s,13|s,23|c,13} = f_{s,13} \cap f_{s,23} \cap f_{c,13}$.

En la tabla 4.08 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
<i>ipl</i>	Indicador plástico	4
<i>itmax</i>	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
<i>ttol</i>	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.08. Parámetros del proceso de cálculo con *HS_CAP_plast*.

Para evitar oscilaciones numéricas en el cálculo de los valores de q_a , q_f , E'_i y E'_{ur} que aparecen en la expresión de f_{13_hs} y sus derivadas (ver apartado 4.4.1.4 del presente capítulo), se utilizan los valores de las tensiones principales al final del paso de cálculo anterior $(n - 1) \rightarrow (n)$, es decir, $Prs_0(1) = -\sigma'_1^{(n)} \geq Prs_0(2) = -\sigma'_2^{(n)} \geq Prs_0(3) = -\sigma'_3^{(n)}$.

Por otro lado, tal como se ha expuesto en el apartado 4.3 del presente capítulo, se modifica parcialmente la formulación de la superficie de fluencia tipo Cono f_s y de sus derivadas cuando $q \geq q_f$, con objeto de que estas funciones queden definidas en todo momento durante el *Return Mapping*.

Para calcular el valor del ángulo de dilatación movilizado en cada iteración $[i]$, dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, es necesario calcular previamente el valor del ángulo de fricción movilizado como se ha indicado en la expresión (4.212).

Para la actualización de las variables de estado $StVar(1) = \gamma^p$ y $StVar(2) = -p_p$ en cada iteración $[i]$ dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, se utilizan las expresiones (4.213) y (4.216).

Cuando en algún momento durante el proceso iterativo del *Return Mapping* sobre $\mathcal{P}_{s,13|s,12|c,13}$ o $\mathcal{P}_{s,13|s,23|c,13}$, en cálculos de tipo No Drenado ($IsUndr = 1$), se cumpla $-p_{[i]}^{(n+1)} = 1/3 \left(-\sigma'_{1,[i]}^{(n+1)} + \left(-\sigma'_{2,[i]}^{(n+1)} + \left(-\sigma'_{3,[i]}^{(n+1)} \right) \right) \right) < -\sigma'_{trac}$, se detendrá la subrutina, volviendo a los valores de la tensión trial $-\sigma'_1^{(tr)} \geq -\sigma'_2^{(tr)} \geq -\sigma'_3^{(tr)}$ y las variables de estado iniciales $\gamma^{p,(n)}$ y $p_p^{(n)}$, con objeto de evitar oscilaciones y divergencias numéricas.

Asimismo, cuando el *Return Mapping* se hace sobre los puntos de intersección entre superficies $\mathcal{P}_{s,13|s,12|c}$ o $\mathcal{P}_{s,13|s,23|c}$ se considera, en todo momento, el multiplicador plástico asociado a la superficie de fluencia $f_{s,13}$ para la actualización de la variable de estado γ^p . Se ha comprobado que considerar dicho multiplicador plástico, o el asociado a $f_{s,12}$ o $f_{s,23}$, es equivalente cerca de la convergencia.

4.4.1.9. MC_CAP_PLAST.f90

La subrutina *MC_CAP_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *MC_CAP_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la curva de intersección entre superficies $\Gamma_{mc,13|c,13} = f_{mc,13} \cap f_{c,13}$ o sobre los puntos de intersección entre superficies $\mathcal{P}_{mc,13|mc,12|c} = f_{mc,13} \cap f_{mc,12} \cap f_c$ o $\mathcal{P}_{mc,13|mc,23|c,13} = f_{mc,13} \cap f_{mc,23} \cap f_{c,13}$.

En la tabla 4.09 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

La variable de estado $StVar(1) = \gamma^p$ toma su valor del *Return Mapping* previo sobre la superficie tipo Cono y tipo Cap (*HS_plast.f90*). Por otro lado, en la actualización de la variable de estado $StVar(2) = -p_p$, en cada iteración $[i]$ dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, se utiliza la expresión (4.216).

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
ipl	Indicador plástico	1
$itmax$	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
$ttol$	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.09. Parámetros del proceso de cálculo con *MC_CAP_plast*.

4.4.1.10. HS_TRAC_PLAST.f90

La subrutina *HS_TRAC_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *HS_TRAC_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la curva de intersección entre superficies $\Gamma_{s,13|t,3} = f_{s,13} \cap f_{t,3}$ o sobre los puntos de intersección entre superficies $\mathcal{P}_{s,13|s,12|t,3} = f_{s,13} \cap f_{s,12} \cap f_{t,3}$ o $\mathcal{P}_{s,13|s,12|t,3} = f_{s,13} \cap f_{s,23} \cap f_{t,3}$.

En la tabla 4.10 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
ipl	Indicador plástico	2
$itmax$	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
$ttol$	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.10. Parámetros del proceso de cálculo con *HS_TRAC_plast*.

Por otro lado, tal como se ha expuesto en el apartado 4.3 del presente capítulo, se modifica parcialmente la formulación de la superficie de fluencia tipo Cono f_s y de sus derivadas cuando $q \geq q_f$, con objeto de que estas funciones queden definidas en todo momento durante el *Return Mapping*.

Para calcular el valor del ángulo de dilatancia movilizado en cada iteración $[i]$, dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, es necesario calcular previamente el valor del ángulo de fricción movilizado como se ha indicado en la expresión (4.212).

Asimismo, para la actualización de las variables de estado $StVar(1) = \gamma^p$ en cada iteración $[i]$, dentro del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n + 1)$, se utiliza la expresión (4.213). Por otro lado, la variable de estado $StVar(2) = -p_p$ adopta el valor del paso de cálculo anterior $StVar(2) = StVar0(2)$ durante el *Return Mapping* sobre la superficie tipo Cono y la superficie límite de Tracción Nula.

Cuando el *Return Mapping* se hace sobre la curva de intersección entre superficies $\Gamma_{s,13|c,13}$ o sobre los puntos de intersección entre superficies $\mathcal{P}_{s,13|c,13|aux,1}$ o $\mathcal{P}_{s,13|c,13|aux,1}$, se considera, en todo momento, el multiplicador plástico asociado a la superficie de fluencia $f_{s,13}$ para la actualización de la

variable de estado γ^p . Se ha comprobado que considerar dicho multiplicador plástico, o el asociado a $f_{s,12}$ o $f_{s,23}$ es equivalente cerca de la convergencia.

4.4.1.11. MC_TRAC_PLAST.f90

La subrutina *MC_TRAC_plast* (que se puede encontrar dentro del archivo *MC_TRAC_plast.f90*) permite realizar el *Return Mapping* sobre la curva de intersección entre superficies $\Gamma_{mc,13|t,3} = f_{mc,13} \cap f_{t,3}$ o sobre los puntos de intersección entre superficies $\mathcal{P}_{mc,13|mc,12|t,3} = f_{mc,13} \cap f_{mc,12} \cap f_{t,3}$ o $\mathcal{P}_{mc,13|mc,23|t,3} = f_{mc,13} \cap f_{mc,23} \cap f_{t,3}$.

En la tabla 4.11 se proporciona el valor de los parámetros utilizados en el proceso iterativo del *Return Mapping*.

Parámetro proceso iterativo	Descripción	Valor
<i>ipl</i>	Indicador plástico	1
<i>itmax</i>	Número máximo de iteraciones en el <i>Return Mapping</i>	100
<i>ttol</i>	Tolerancia durante las iteraciones del <i>Return Mapping</i>	10^{-12}

Tabla 4.11. Parámetros del proceso de cálculo con *MC_TRAC_plast*.

La variable de estado $StVar(1) = \gamma^p$ toma su valor del *Return Mapping* previo sobre la superficie tipo Cono y tipo *Cap* (en la subrutina *HS_CAP_plast.f90*). Por otro lado, la variable de estado $StVar(2) = -p_p$ adopta el valor del paso de cálculo anterior $StVar(2) = StVar0(2)$ durante el *Return Mapping* sobre las superficies límite de Mohr-Coulomb y la superficie límite de Tracción Nula.

4.4.1.12. MATRIZ6.f90

La subrutina *MATRIZ6* (que se puede encontrar dentro del archivo *MATRIZ6.f90*), basada en la subrutina *MYMODEL1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012), permite calcular las componentes de la matriz asociada al tensor de rigidez (hipo)elástico tangente. Como se ha comentado en el apartado 4.1.2.1 del presente capítulo, el modelo HS extiende la formulación del modelo hipoeelástico de Duncan y Chang (1970) y considera la dependencia de la rigidez elástica con la tensión según la expresión (4.11).

4.4.1.13. MATRIZ3.f90

La subrutina *MATRIZ3* (que se puede encontrar dentro del archivo *MATRIZ3.f90*), basada en la subrutina *MYMODEL1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012), permite calcular las componentes esféricas de la matriz asociada al tensor de rigidez elástico tangente. Se trata de la matriz

que se utiliza en el espacio de tensiones principales, una vez diagonalizado el tensor de tensiones. Al igual que en el caso de la *MATRIZ6*, también aquí se considera la dependencia de la rigidez elástica con la tensión según la expresión (4.11).

4.4.1.14. USR_ADD.f90

La subrutina *USR_ADD* (que se puede encontrar dentro del archivo *USR_ADD.f90*), tal como se detalla en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015), basada en la subrutina *USRADDDF.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012), permite definir las funciones de *Interface* que facilitan la introducción de los parámetros del modelo implementado mediante las herramientas de Plaxis.

Las funciones de interface se definen mediante las siguientes subrutinas contenidas en la subrutina *USR_ADD*:

<i>GetModelCount</i> (<i>nMod</i>)	Devuelve el valor del número de modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> a partir de un valor introducido (<i>nMod</i>).
<i>GetModelName</i> (<i>iMod</i> , <i>ModelName</i>)	Devuelve el nombre (<i>ModelName</i>) de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> .
<i>GetParamCount</i> (<i>iMod</i> , <i>nParam</i>)	Devuelve el número de parámetros (<i>nParam</i>) de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> .
<i>GetParamName</i> (<i>iMod</i> , <i>iParam</i> , <i>ParamName</i>)	Devuelve el nombre (<i>ParamName</i>) de los parámetros (<i>iParam</i>) de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> .
<i>GetParamUnit</i> (<i>iMod</i> , <i>iParam</i> , <i>Units</i>)	Devuelve las unidades (<i>Units</i>) de los parámetros (<i>iParam</i>) de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> .
<i>GetParamAndUnit</i> (<i>iMod</i> , <i>iParam</i> , <i>ParamName</i> , <i>Units</i>)	Devuelve el nombre (<i>ParamName</i>) y las unidades (<i>Units</i>) de los parámetros (<i>iParam</i>) de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> . Para especificar las unidades se utilizan las siguientes letras: <ul style="list-style-type: none"> • F : fuerza • L : longitud • T : tiempo <p>Asimismo, se utiliza el siguiente código para la fuente:</p> <ul style="list-style-type: none"> • ^ : superíndice • _ : subíndice • @ : caracteres tipo símbolo • # : final de superíndice o subíndice
<i>GetStateVarCount</i> (<i>iMod</i> , <i>nVar</i>)	Devuelve el número (<i>nVar</i>) de las variables de estado de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> .
<i>GetStateVarName</i> (<i>iMod</i> , <i>iVar</i> , <i>Name</i>)	Devuelve el nombre (<i>Name</i>) de las variables de estado (<i>iVar</i>) de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> .

<i>GetStateVarName</i> <i>AndUnit(iMod,iVar,</i> <i>Name, Unit)</i>	Devuelve el nombre (<i>Name</i>) y las unidades (<i>Unit</i>) de las variables de estado (<i>iVar</i>) de cada uno de los modelos (<i>iMod</i>) contenidos en el módulo <i>UDSM</i> .
---	---

4.4.1.15. USRLIB.f90

La subrutina *USRLIB* (que se puede encontrar dentro del archivo *USRLIB.f90*), contiene las siguientes subrutinas predefinidas en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012), y que se describen en los apéndices del Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015), así como otras subrutinas introducidas según las necesidades de cálculo.

<i>MZeroR(R,K)</i>	Resetea a cero las K componentes reales de un vector R de dimensión K.
<i>MZeroI(I,K)</i>	Resetea a cero las K componentes enteras de un vector I de dimensión K.
<i>SetRVaL(R,K,V)</i>	Reinicia según los valores de las K componentes reales del vector V las K componentes reales de un vector R.
<i>SetIVaL(I,K,IV)</i>	Reinicia según los valores de las K componentes enteras del vector V las K componentes enteras de un vector I.
<i>CopyRVec(R1,R2,K)</i>	Copia los valores de K componentes reales del vector R1 en R2.
<i>CopyIVec(I1,I2,K)</i>	Copia los valores de K componentes enteras del vector I1 en I2.
<i>IsOArr(A,N)</i>	Verifica si un vector IARR de N componentes reales contiene únicamente ceros.
<i>IsOIArr(IARR,N)</i>	Verifica si un vector IARR de N componentes enteras contiene únicamente ceros.
<i>MulVec(V,F,K)</i>	Multiplica las K componentes reales de un vector V por el escalar F.
<i>MatVec(xMat,IM,Vec,N,</i> <i>VecR)</i>	Multiplica la matriz xMat cuadrada, de IMxIM componentes reales, (siendo IM=N), por el vector Vec de N componentes reales.
<i>AddVec(Vec1,Vec2,R1,R2,</i> <i>N,VecR)</i>	Suma las N componentes reales de los vectores resultantes de multiplicar el vector Vec1 por el escalar R1 y el vector Vec2 por el escalar R2. $VecR = R1 \cdot Vec1 + R2 \cdot Vec2$
<i>DInProd(A,B,N,RES)</i>	Calcula el productor interno de dos vectores A y B de N componentes reales.

<i>MatMat(xMat1,ld1, xMat2,ld2,nR1,nC2,nC1, xMatR,ldR)</i>	Multiplica la matriz xMat1 de $ld1 \times nC1$ componentes reales, siendo $ld1=nR1=ldR$, por la matriz xMat2 de $ld2 \times nC2$ componentes reales. $xMatR_{ij} = xMat1_{ik} \cdot xMat2_{kj}$
<i>MatMatSq(n, xMat1, xMat2, xMatR)</i>	Multiplica las matrices cuadradas xMat1 y xMat2 de n componentes reales. $xMatR_{ij} = xMat1_{ik} \cdot xMat2_{kj}$
<i>MatInvPiv(Aorig,B,N)</i>	Calcula la inversa de una matriz cuadrada Aorig de $N \times N$ componentes reales mediante pivote en filas.
<i>PrnSig(IOpt,S,xN1,xN2, xN3,S1,S2,S3,P,Q)</i>	Calcula los autovalores $S1 \leq S2 \leq S3$ y/o autovectores xN1, xN2 y xN3, así como dos de los invariantes P (tensión isotropa) y Q (tensión desviadora) del tensor de tensiones S de 3×3 componentes reales en notación de Voigt (componentes XX, YY, ZZ, XY, YZ, ZX). En caso de que IOpt=0 se calculan únicamente los autovalores y, en de caso que IOpt=1, se calculan los autovalores y autovectores. Para el cálculo se recurre a las subrutinas Eig_3 y Eig3a.
<i>Eig_3(iOpt,St,xN1,xN2, xN3,S1,S2,S3,P,Q)</i>	Calcula los autovalores $S1 \leq S2 \leq S3$, autovectores xN1, xN2 y xN3 y dos invariantes P y Q de una matriz St de 3×3 componentes reales.
<i>Eig_3a(iOpt,St,S1,S2,S3,P, Q)</i>	Calcula los autovalores $S1 \leq S2 \leq S3$ y dos invariantes P y Q de una matriz St de 3×3 componentes reales.
<i>CarSig(S1,S2,S3,xN1,xN2, xN3,SNew)</i>	Calcula las tensiones cartesianas a partir de los autovalores $S1 \leq S2 \leq S3$ y autovectores xN1, xN2 y xN3.
<i>CrossProd(xN1,xN2,xN3)</i>	Calcula el producto cruzado de dos vectores xN1 y xN2 de componentes reales.
<i>LEqual(A,B,Eps)</i>	Identifica si dos valores son similares, con una tolerancia relativa de 10^{-5} .
<i>ArcSin(X,ie)</i>	Calcula el arcoseno del valor X.
<i>Setveclen(xn,n,xl)</i>	Multiplica las n componentes reales de un vector xN para normalizar su longitud según el valor xl.
<i>WriIVl(io, C, I)</i>	Escribe el valor entero I, identificándolo con el nombre "C", cuando io>0.
<i>WriVal(io, C, I)</i>	Escribe el valor real I, identificándolo con el nombre "C", cuando io>0.
<i>WriIVc(io, C, iV, n)</i>	Escribe el vector iV de n componentes enteras, identificándolo con el nombre "C", cuando io>0.
<i>WriVec(io, C, V, n)</i>	Escribe el vector V de n componentes reales, identificándolo con el nombre "C", cuando io>0.

<i>WriVec5(io, C, V, n)</i>	Escribe el vector V de n componentes reales, identificándolo con el nombre "C", con un máximo de 5 valores por línea, cuando io>0.
<i>WriMat(io, C, V, nd, nr, nc)</i>	Escribe la matriz V de nr x nr componentes, siendo (nr=nd) reales, identificándolo con el nombre "C", cuando io>0.

4.4.2. Interface

La introducción de los parámetros del modelo HS implementado se hace a través de la *Interface* de Plaxis, de forma similar a cómo se introducen los parámetros en los modelos predefinidos. Ello se hace, dentro del programa de introducción de datos *Input*, y tras seleccionar la opción *Material Model*, mediante el desplegable en el que deberá seleccionarse la opción *User-defined model* en la versión Plaxis 2D v9 o la opción *User-defined* en la versión Plaxis 2D 2011 y posteriores.

En función de la versión de Plaxis utilizada, las pestañas que aparecerán a continuación diferirán ligeramente en formato y contenido.

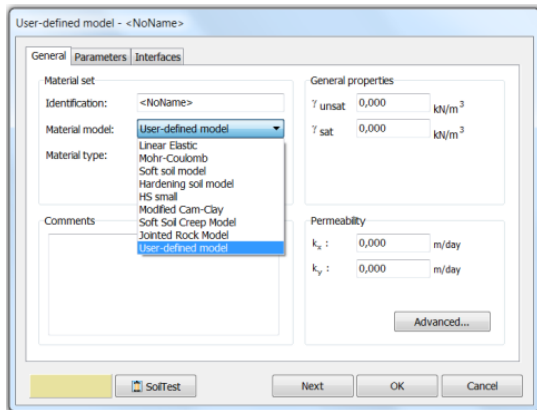
- Plaxis 2D v9: *General, Parameters e Interfaces.*
- Plaxis 2D 2011 y posteriores: *General, Parameters, Groundwater, Thermal, Interfaces e Initial.*

En la figura 4.22 se muestran las ventanas que se visualizan durante el proceso de selección del modelo *User-defined* dentro de la pestaña *General* en las diferentes versiones de Plaxis. En dicha pestaña debe seleccionarse el archivo *DLL (Dynamic Link Library)* que se desee cargar. Ello se hace en el desplegable *Available DLL's* en la versión Plaxis 2D v9 y en el desplegable *DLL file* en la versión Plaxis 2D 2011 y posteriores.

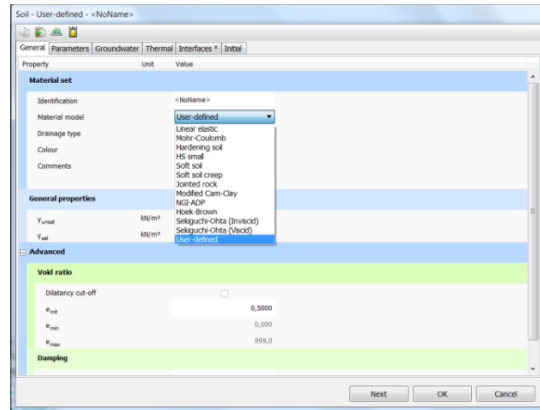
Una vez seleccionado el archivo *DLL*, debe elegirse el modelo que se desee utilizar entre los contenidos en el fichero *DLL* especificado. Ello se hace en el desplegable *Model in DLL* tanto en la versión Plaxis 2D v9 como en la versión Plaxis 2D 2011 y posteriores.

En la figura 4.23 se muestra la pestaña *Parameters* en diferentes versiones de Plaxis. En dicha pestaña aparecerá una tabla con el nombre de los parámetros definidos previamente en el código del modelo implementado, así como sus unidades. En esta tabla deberá introducirse el valor numérico de cada parámetro para que Plaxis pueda leerlo y aplicarlo en el programa de cálculo.

En la figura 4.24 se muestra la pestaña *Interfaces* en diferentes versiones de Plaxis. En esta pestaña deben introducirse los parámetros para simular el comportamiento de las interfases del modelo geométrico.

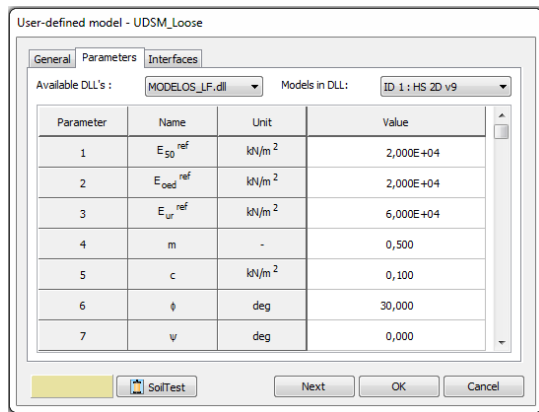


(a)

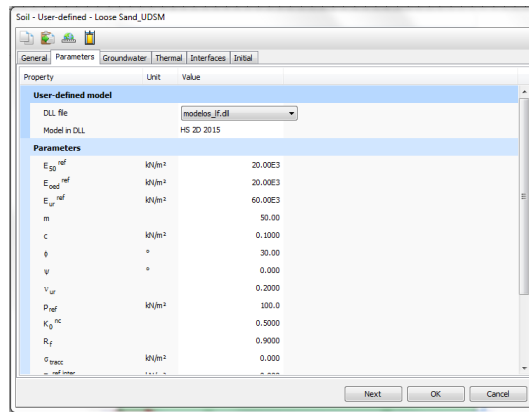


(b)

Figura 4.22. Selección del modelo User-defined en la pestaña General. (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.

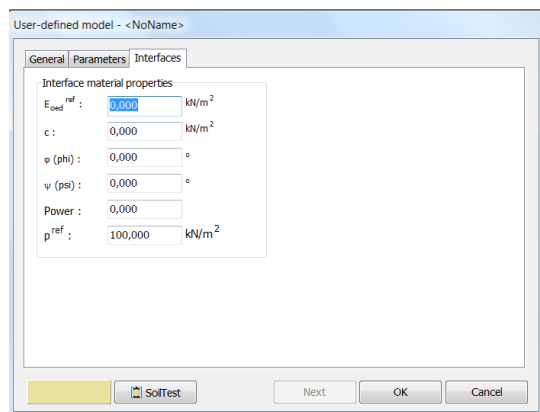


(a)

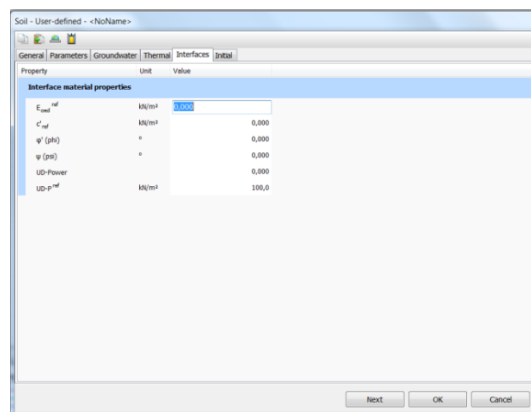


(b)

Figura 4.23. Selección del archivo DLL, selección del modelo dentro del dicho archivo e introducción de los parámetros del modelo seleccionado. (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.

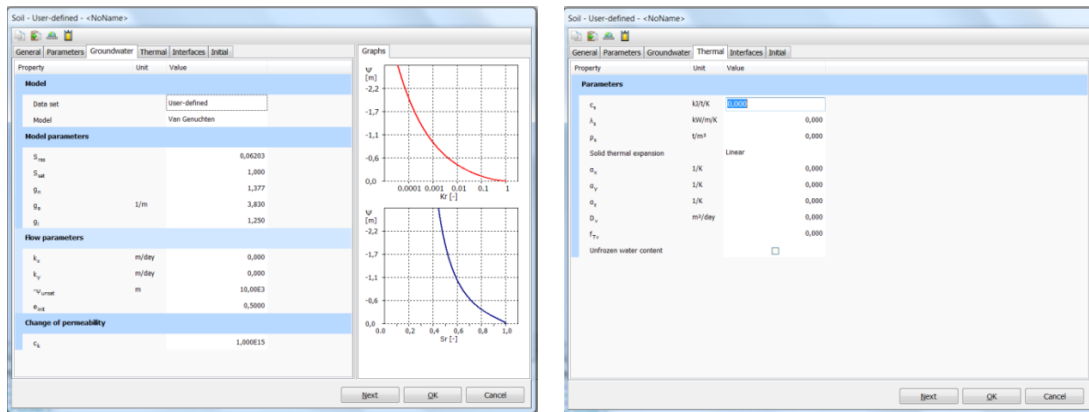


(a)



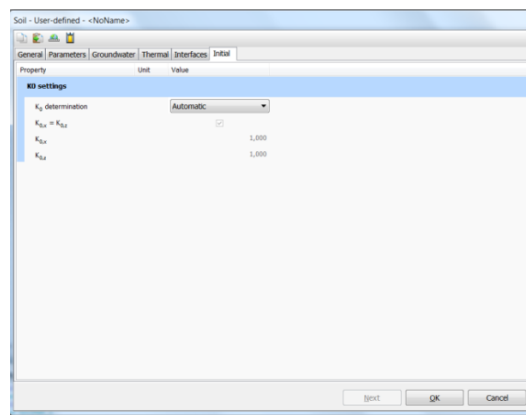
(b)

Figura 4.24. Introducción de los parámetros de la interfase del modelo seleccionado. (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.



(a)

(b)



(c)

Figura 4.25. Parámetros (a) hidráulicos, (b) térmicos y (c) determinación de las tensiones iniciales. Plaxis 2D 2015.

Tal como se indica en los manuales de Plaxis (Plaxis, 2015), cuando se utiliza un modelo implementado mediante el módulo *UDSM* no se recurre al parámetro R_{inter} para simular dicho comportamiento, sino que se utiliza el denominado módulo edométrico de la interfase $E_{oed}^{inter} = E_{oed}^{inter,ref} (\sigma' / UD_p_{ref})^{UD_Power}$ y los parámetros resistentes c'_{inter} , ϕ'_{inter} y ψ_{inter} .

El parámetro E_{oed}^{inter} permite simular el desplazamiento normal y el deslizamiento elástico en la interfase, lo cual se hace tomando un valor del coeficiente de Poisson $\nu_i = 0,45$ y un valor del espesor virtual t_i , que se introduce en el modelo geométrico. Los valores de la rigidez normal y tangencial al plano de la interfase se pueden calcular, respectivamente, como $K_n^{inter} = E_{oed}^{inter} / t_i$ y $K_t^{inter} = G_i / t_i$, donde $G_i = R_{inter}^2 G_{suelo}$ y $E_{oed}^{inter} = 2G_i(1 - \nu_i) / (1 - 2\nu_i) = 11G_i$.

Los parámetros c'_{inter} , ϕ'_{inter} y ψ_{inter} se pueden calcular como $c'_{inter} = R_{inter} c'$, $\tan(\phi'_{inter}) = R_{inter} \tan(\phi')$ y $\psi_{inter} = 0$, y permiten simular la reducción de resistencia de la interfase.

Finalmente, en las versiones recientes de Plaxis (por ejemplo, en la versión de Plaxis 2D 2015), también es posible introducir los parámetros que permiten simular el comportamiento hidráulico y térmico del suelo, así como los parámetros que permiten controlar el valor de las tensiones iniciales, contemplándose la posibilidad de introducir anisotropía inherente en el suelo (figura 4.25).

4.4.3. Metodología para la depuración del código

Para depurar el código del modelo HS implementado, se ha utilizado la metodología propuesta en los archivos contenidos en *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012) y que se describe en los Manuales de Materiales del programa (Plaxis, 2015).

La depuración del código se ha llevado a cabo utilizando la versión Plaxis 2D v9. De forma similar, es posible depurar el código utilizando la versión de Plaxis 2D 2011 o posteriores, variando ligeramente la metodología utilizada.

Para crear y abrir el archivo de depuración se utiliza la declaración DATA. En el archivo resultante, se podrán escribir los valores de cualquier variable que intervenga en el proceso de cálculo. Ello podrá hacerse en cualquier fase de cálculo, paso de cálculo o iteración, tanto en las iteraciones del proceso global del cálculo como en las iteraciones de las subrutinas del *Return Mapping* para la integración local de las ecuaciones constitutivas en cada punto Gauss.

El archivo de depuración se denominará *udsmex*, *udsmex1*, *udsmex2*, etc. y se almacenará en el directorio .DTA del correspondiente cálculo. La ruta de dicho directorio se tomará de la variable *iPrjDir*, que contiene los números ASCII con los caracteres del nombre del mismo, cuya extensión se indica en la variable *iPrjLen*, con un valor máximo de 255.

En cada fase de cálculo el archivo de depuración se borrará y se volverá a crear con la información de los cálculos de la nueva fase. Si se desea disponer de los archivos correspondientes a las diferentes fases de cálculo, bastará modificar el nombre de cada uno de ellos una vez finalizada la fase correspondiente. En la versión de Plaxis 2D 2011 y posteriores esto último no será necesario, ya que los archivos de depuración se almacenarán, en cada fase, con el nombre *data.udsmex.rXX*, siendo XX el número de la fase correspondiente.

A continuación, se muestra el código FORTRAN incluido en la subrutina *User_Mod* (basada en la subrutina *USRMOD.for* de Plaxis (2012)) que permite crear y abrir el archivo de depuración:

```

Character*255 PrjDir, Dbg_Name
Data iounit / 0 /
Save iounit
If (iounit.Eq.0) Then
  PrjDir=''
  Do i=1,iPrjLen
    PrjDir(i:i) = Char(iPrjDir(i))
  End Do
  Dbg_Name=PrjDir(:iPrjLen)//'udsmex'
  nErr=0

```

```

1  Continue
   Open(Unit= 1, File= Dbg_Name, iostat=ios)
   If (ios.Eq.0) Close(Unit=1, Status='delete', iostat=ios)
   If (ios.Ne.0) Then
     ! in case of error try ...udsmex1 or uds mex2 or ..
     nErr=nErr+1
     dbg_name=PrjDir(:iPrjLen)//'udsmex'//char(48+nErr)
     If (nErr.Lt.10) Goto 1
   End If
   Open(Unit= 1, File=Dbg_Name, blocksize=4096)
   Write(1,*)'File 1 opened'
   iounit = 1
   End If

```

Para escribir el valor de las variables utilizadas en el archivo de depuración se utilizarán las subrutinas de escritura predefinidas en la librería *USRLIB.f90* (basada en *USRLIB.for* de Plaxis (2012)) descritas en el apartado 4.4.1.15 del presente capítulo y, en caso de que se quiera escribir un texto particular, se utilizará la declaración *write(1,*)* de FORTRAN.

4.4.4. Compilación de las subrutinas

La compilación de las subrutinas se puede hacer con diferentes compiladores. Se ha trabajado con los siguientes:

- INTEL PARALLEL STUDIO XE 2016:
 - Intel Compiler 16.0 IA-32 Visual Studio 2013 (para compilar en 32 bits)
 - Intel Compiler 16.0 Intel(R) 64 Visual Studio 2013 (para compilar en 64 bits)
- LAHEY-FUJITSU FORTRAN EXPRESS V7.3
 - LF Console Prompt (para compilar en 32 bits)

Para poder utilizar el compilador de INTEL se adquirió una licencia de estudiante, mientras que, para poder utilizar el compilador de LAHEY-FUJITSU se compró una licencia a través de la universidad.

Debido a la problemática surgida al intentar compilar el código para la versión Plaxis 2D v9 mediante el compilador de INTEL, se optó por utilizar el compilador de LAHEY-FUJITSU. En la versión Plaxis 2D v9 únicamente es posible utilizar archivos compilados en 32 bits para los cálculos, con lo que utilizar uno u otro compilador no supone ninguna diferencia.

Una vez implementado y depurado el código, se ha compilado para la versión Plaxis 2D 2011 (compatible con versiones posteriores) con el compilador de LAHEY-FUJITSU.

4.4.4.1. Lahey Fortran

Para compilar el código con LAHEY-FUJITSU FORTRAN EXPRESS V7.3 se ejecuta el archivo *lfcomp.bat* en la consola LF Console Prompt. Dicho archivo contiene las siguientes líneas de código basadas en Plaxis (2012):

```
echo DLL_Export User_Mod
lf95 -c usrlib.f90
lib /out:lfusrlib.lib usrlib.obj
lf95 -win -dll User_Mod.f90 Usr_Add.f90 -lib lfusrlib.lib -ml bd -out:MODELOS_LF.dll
```

Para poder realizar correctamente la compilación del código, es necesario añadir las siguientes declaraciones en las subrutinas indicadas:

User_Mod

Dll_Export User_Mod

Esta subrutina, a su vez, incluye las siguientes:

```
include 'Matriz6.f90'
include 'Matriz3.f90'
include 'mymodel1.f90'
include 'HS_plast.f90'
include 'MC_plast.f90'
include 'TRAC_plast.f90'
include 'CAP_plast.f90'
include 'HS_CAP_plast.f90'
include 'MC_CAP_plast.f90'
include 'HS_TRAC_plast.f90'
include 'MC_TRAC_plast.f90'
```

GetModelCount

Dll_Export GetModelCount

GetModelName

Dll_Export GetModelName

GetParamCount

Dll_Export GetParamCount

GetParamName

Dll_Export GetParamName

GetParamUnit

Dll_Export GetParamUnit

GetParamAndUnit

Dll_Export GetParamAndUnit

GetStateVarCount

Dll_Export GetStateVarCount

GetStateVarName

Dll_Export GetStateVarName

GetStateVarNameAndUnit

Dll_Export GetStateVarNameAndUnit

4.4.4.2. Intel Fortran

Para compilar el código con INTEL PARALLEL STUDIO XE 2016 se ejecuta el archivo *ifcomp32.bat* en la consola Intel Compiler 16.0 IA-32 Visual Studio 2013 y el archivo *ifcomp64.bat* en la consola Intel Compiler 16.0 Intel(R) 64 Visual Studio 2013.

El archivo *ifcomp32.bat* contiene las siguientes líneas de código, basadas en Plaxis (2012):

```
ifort @comp_rel User_Mod32.f90 UsrAddDF.f90 usrlib.f90 /dll /exe:MODELO_IF
```

El archivo *ifcomp64.bat* contiene las siguientes líneas de código, basadas en Plaxis (2012):

```
ifort @comp_rel User_Mod64.f90 usrlib.f90 /dll /exe:MODELO_IF64
```

El archivo *comp_rel*, que se invoca en las órdenes de compilación, contiene los siguientes comandos basados en Plaxis (2012):

```
/real_size:64
/fpconstant
/O2
/static
/assume:noaccuracy_sensitive
/assume:byterecl
/assume:buffered_io
/notraceback
/debug:none
/check:none
/heap-arrays:1
/fpp
/recursive
```

Como se puede ver en las órdenes de compilación anteriores, cuando se utiliza el compilador de INTEL, se renombran y modifican las subrutinas *User_Mod* y *Usr_Add*. Concretamente, la subrutina *User_Mod* se pasa a llamar *User_Mod32* (para la compilación en 32 bits) y *User_Mod64* (para la compilación en 64 bits), y la subrutina *Usr_Add* se pasa a llamar *Usradddf* (para la compilación en 32 bits).

<i>User_Mod32</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, reference :: User_Mod</i>
<i>User_Mod64</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport :: User_Mod</i>
<i>GetModelCount</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetModelCount</i>
<i>GetModelName</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetModelName</i>

<i>GetParamCount</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetModelCount</i>
<i>GetParamName</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetModelName</i>
<i>GetParamUnit</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetParamUnit</i>
<i>GetParamAndUnit</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetParamAndUnit</i>
<i>GetStateVarCount</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetStateVarCount</i>
<i>GetStateVarName</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetStateVarName</i>
<i>GetStateVarNameAndUnit</i>	<i>!DEC\$ ATTRIBUTES DLLEExport, StdCall, Referente :: GetStateVarNameAndUnit</i>

4.4.5. Parámetros de cálculo avanzados de Plaxis

En las simulaciones realizadas para validar el modelo *HS* implementado, ha sido necesario modificar, según cada caso, los parámetros de cálculo avanzado contemplados en Plaxis con objeto de controlar la convergencia numérica.

Algunos de dichos parámetros, que aparecen ampliamente descritos en los Manuales de Plaxis (Plaxis, 2015), son los siguientes:

<i>Additional Steps</i>	Número de pasos de cálculo adicionales. Cuando se toma un valor pequeño del error tolerado (ver <i>Tolerated Error</i>) suele ser necesario introducir pasos de cálculo adicionales.
<i>Tolerated Error</i>	Valor directamente relacionado con el error de equilibrio tolerado en los cálculos, tanto global como localmente.
<i>Max load fraction per step</i>	Factor que controla el tamaño de los pasos de cálculo en relación a la carga total aplicada en una determinada fase.
<i>Over Relaxation</i>	Parámetro utilizado para reducir el número de iteraciones y, en consecuencia, acelerar la velocidad de cálculo. El factor de sobre-relajación (<i>over relaxation</i>) permite introducir una sobreestimación deliberada del error de equilibrio, suponiendo que, en caso de compensar exactamente la fuerza no balanceada en el siguiente paso de cálculo, aún se estará lejos de las condiciones de equilibrio.
<i>Maximun Iterations</i>	Número máximo de iteraciones permitidas en cada paso de cálculo (hasta 100). Cuando se toma un valor pequeño del error tolerado (ver

	<i>Tolerated Error</i>) suele ser necesario un valor alto del número de iteraciones máximas.
<i>Desired Minimum</i>	En caso de que el número de iteraciones necesarias para la convergencia en un determinado paso de cálculo esté por debajo del valor <i>Desired Minimum</i> , se considerará que el incremento de carga en dicho paso de cálculo es demasiado pequeño y se multiplicará por dos.
<i>Desired Maximum</i>	En caso de que el número de iteraciones necesarias para la convergencia en un determinado paso de cálculo esté por encima del valor <i>Desired Maximum</i> , se considerará que el incremento de carga en dicho paso de cálculo es demasiado grande y se dividirá por dos.
<i>Arc-length Control</i>	Procedimiento para obtener cargas de colapso fiables en problemas con control de carga.

4.5. Validación del modelo HS implementado

Con objeto de validar el modelo HS implementado, se han realizado simulaciones numéricas de ensayos triaxiales drenados y no drenados y ensayos edométricos con arena suelta, semidensa y densa, siguiendo el apartado "*Application of advanced soil models*" de los manuales de materiales de Plaxis (Plaxis, 2015). Posteriormente, se ha analizado el grado de aproximación de las curvas resultantes con esas mismas curvas obtenidas utilizando el modelo HS predefinido en Plaxis.

Tanto los parámetros del suelo propios del modelo HS, como los parámetros internos obtenidos mediante el algoritmo descrito en el apartado 4.1.7 del presente capítulo, es decir, E_i^{ref} , α' y $\bar{\beta}'$ en el caso de Plaxis 2D v9, y E_i^{ref} , α' y $K'_{t,ur}/K'_c$ en el caso de Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores, así como los correspondientes valores de E_{oed}^{ref*} y K_0^{NC*} , para cada tipo de arena ensayada numéricamente, se muestran en la tabla 4.12. Se ha considerado un valor $OCR = 1$ en todos los casos.

Tal como se puede ver en la tabla 4.12, el valor de E_i^{ref} es, en algunos casos, ligeramente superior al de E_{ur}^{ref} . Ello puede dar lugar a valores negativos de la superficie de fluencia tipo Cono f_s durante la carga noval, especialmente para valores bajos de la carga desviadora q , lo cual implicaría la inactivación de dicha superficie. Esta pequeña inconsistencia, que también se observa en los parámetros de la arcilla caolinita que se utilizan para validar el modelo HS-S (Benz, 2007), es consecuencia de la búsqueda de un valor de E_i^{ref} que permita cumplir la condición del algoritmo interno descrito en el apartado 4.1.7 del presente capítulo, según la cual $-\epsilon_{50} = q_f/2E'_{50} \pm tol_{\epsilon_{50}}$ para una carga desviadora de $q_f/2$.

En las figuras 4.26 y 4.27 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas de los ensayos triaxiales drenados en arena suelta, semidensa y densa, utilizando el modelo HS implementado (tonos oscuros) y el modelo HS predefinido en Plaxis (tonos claros), en Plaxis 2D v9 y en Plaxis 2D 2015, respectivamente.

En las figuras 4.28 y 4.29 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas de los ensayos triaxiales no drenados en arena suelta, semidensa y densa, utilizando el modelo HS implementado

(tonos oscuros) y el modelo HS predefinido en Plaxis (tonos claros), en Plaxis 2D v9 y en Plaxis 2D 2015, respectivamente.

En las figuras 4.30 y 4.31 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas de los ensayos edométricos en arena suelta, semidensa y densa, utilizando el modelo HS implementado (tonos oscuros) y el modelo HS predefinido en Plaxis (tonos claros), en Plaxis 2D v9 y en Plaxis 2D 2015, respectivamente

Como se puede ver, tanto en las simulaciones con Plaxis 2D v9 como con Plaxis 2D 2015, en general, el modelo implementado es capaz de aproximar bien las curvas del modelo HS predefinido.

Parámetro	Arena suelta	Arena semidensa	Arena densa	Unidades
E_{50}^{ref}	20.000	30.000	40.000	[kN/m ²]
$E_{t,ur}^{ref}$	60.000	90.000	120.000	[kN/m ²]
E_{oed}^{ref}	20.000	30.000	40.000	[kN/m ²]
c'	0,0	0,0	0,0	[kN/ m ²]
φ'	30	35	40	[deg]
ψ	0	5	10	[deg]
ν'_{ur}	0,2	0,2	0,2	[-]
p'_{ref}	100	100	100	[kN/ m ²]
m	0,5	0,5	0,5	[-]
K_0^{NC}	0,50	0,43	0,36	[-]
R_f	0,90	0,90	0,90	[-]
σ'_{trac}	0,0	0,0	0,0	[kN/ m ²]
E_i^{ref}	60.705	90.745	115.664	[kN/ m ²]
α'	1,70	2,16	4,41	[-]
$\bar{\beta}'(*)$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$1,90 \cdot 10^{-3}$	$1,41 \cdot 10^{-3}$	[-]
$K'_{t,ur}/K'_c(**)$	1,833	1,950	1,940	[-]
E_{oed}^{ref*}	19.980	28.733	39.670	[kN/ m ²]
K_0^{NC*}	0,503	0,436	0,359	[-]

(*) Plaxis 2D v9

(**) Plaxis 2D 2011 y posteriores

Tabla 4.12. Parámetros del suelo utilizados en el modelo HS y parámetros internos ajustados con el algoritmo implementado para arena suelta, semidensa y densa.

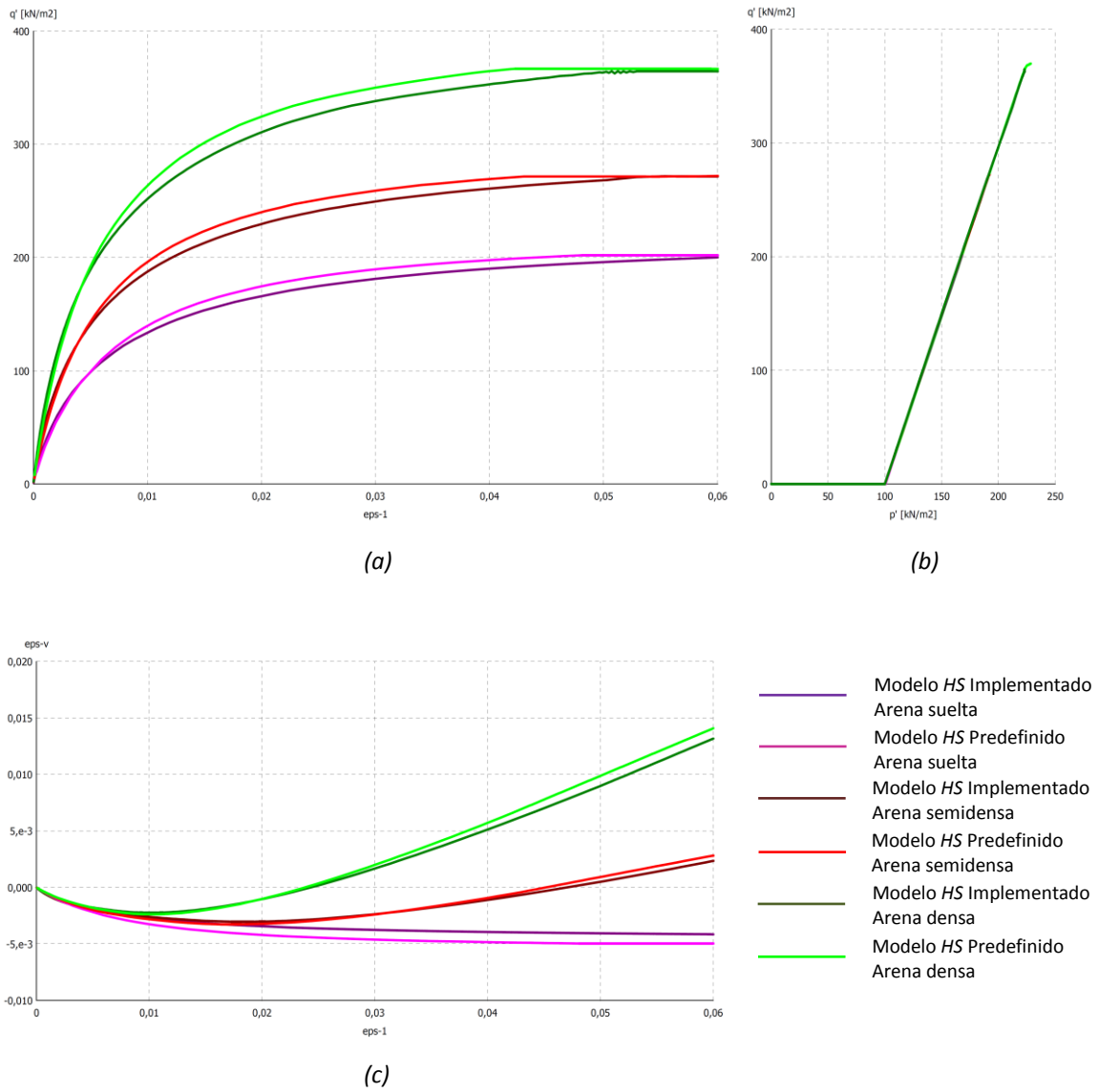


Figura 4.26. Ensayos triaxiales drenados con Plaxis 2D v9.
 (a) Curvas $q - (-\epsilon_1)$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

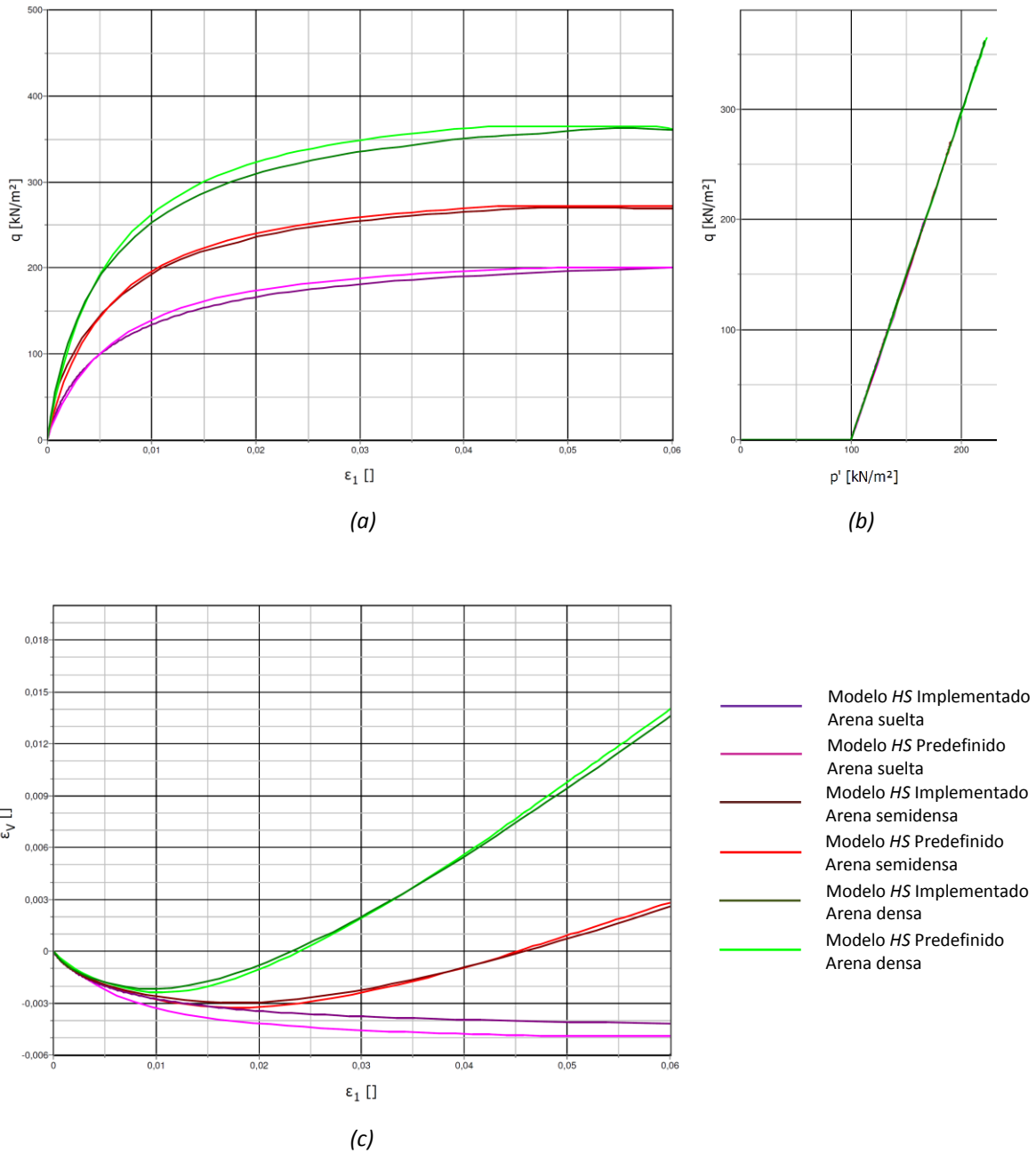


Figura 4.27. Ensayos triaxiales drenados con Plaxis 2D 2015.
 (a) Curvas $q - (-\epsilon_1)$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

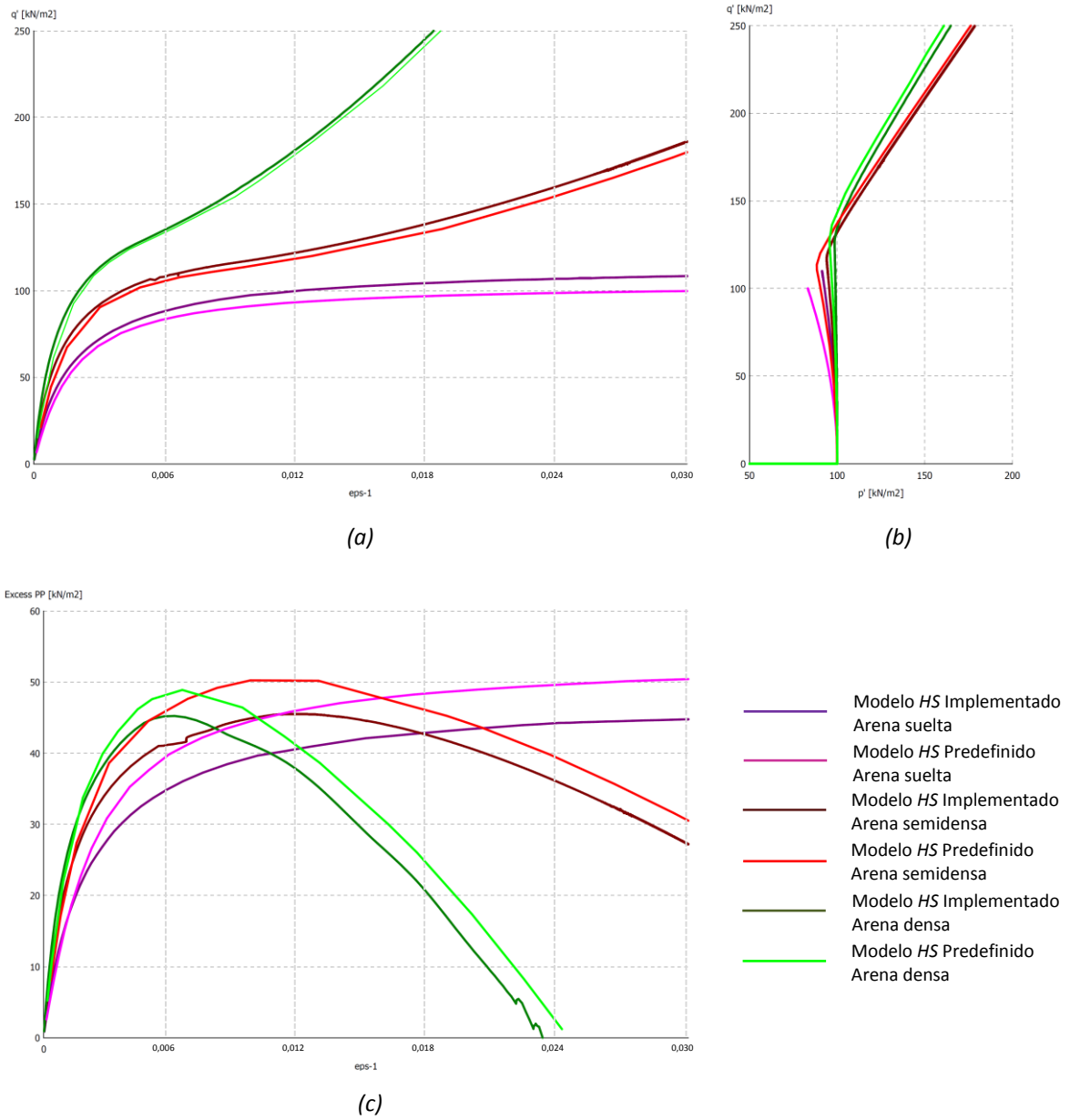


Figura 4.28. Ensayos triaxiales no drenados con Plaxis 2D v9.
 (a) Curvas $q - (-\epsilon_1)$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-p_w - (-\epsilon_1)$.

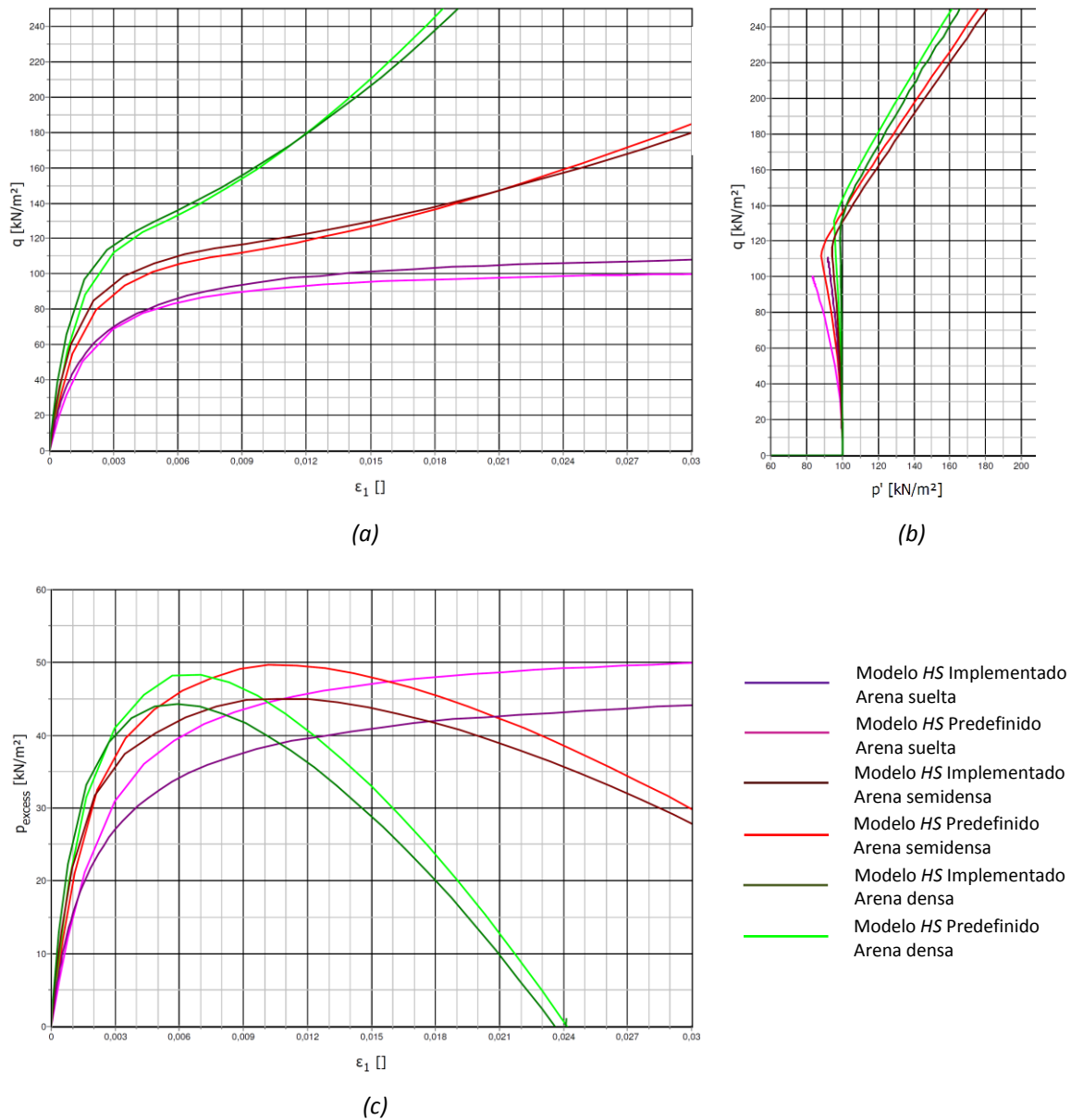
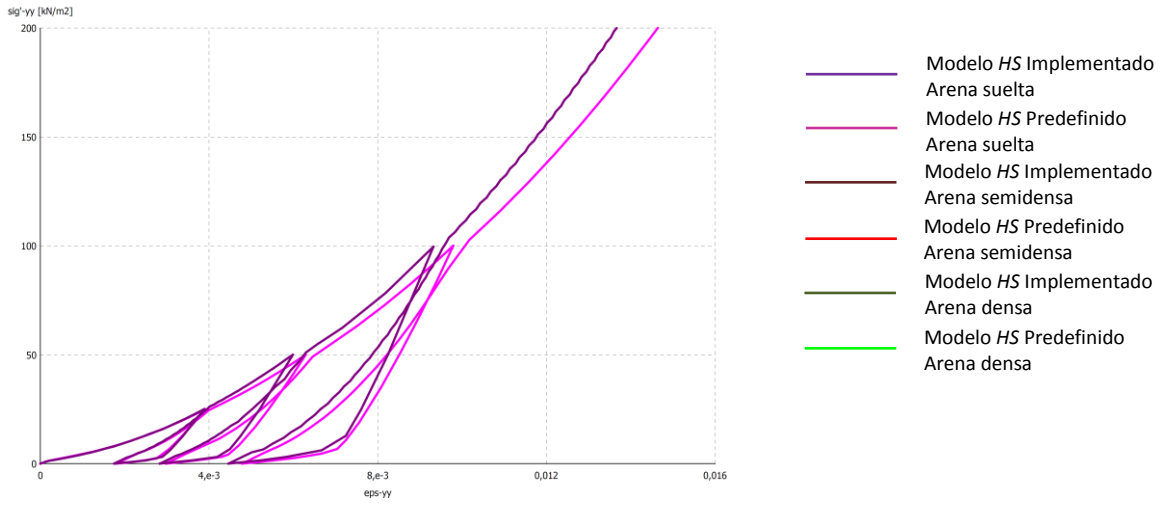
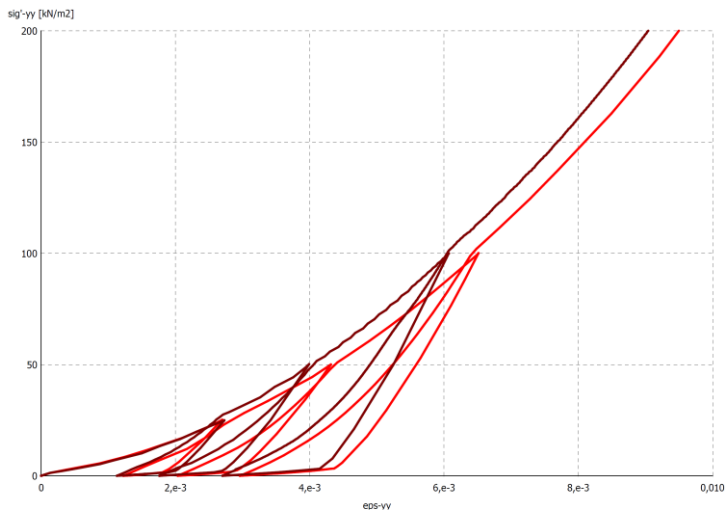


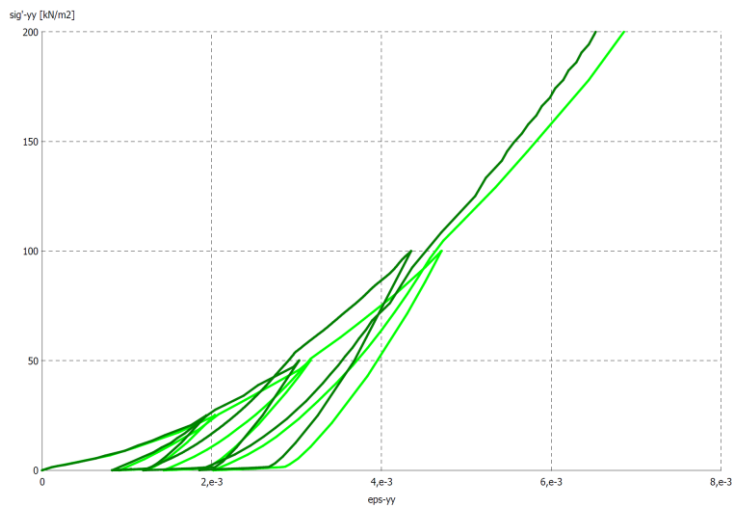
Figura 4.29. Ensayos triaxiales no drenados con Plaxis 2D 2015.
 (a) Curvas $q - (-\epsilon_1)$. (b) Curvas $q - (-p')$. (c) Curvas $-p_w - (-\epsilon_1)$.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.30. Curvas edométricas con Plaxis 2D v9. (a) Arena suelta. (b) Arena semidensa. (c) Arena densa.

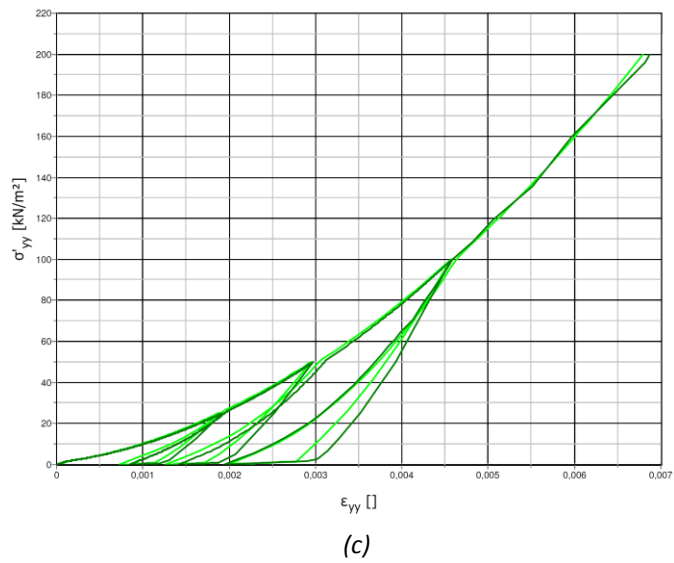
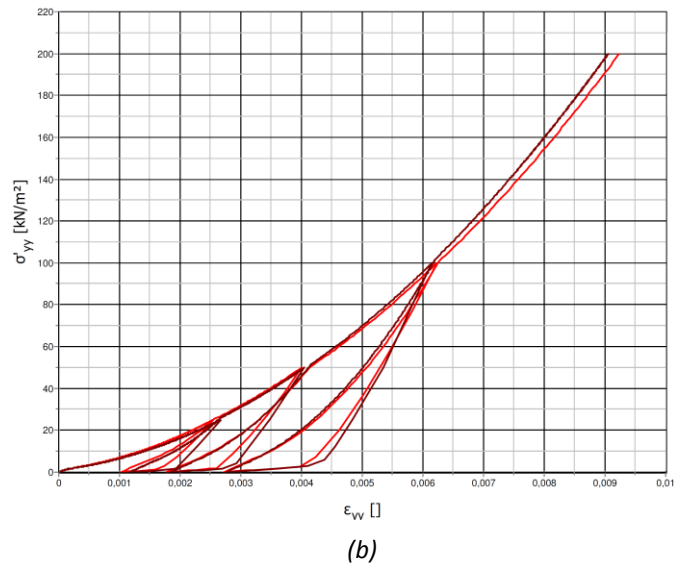
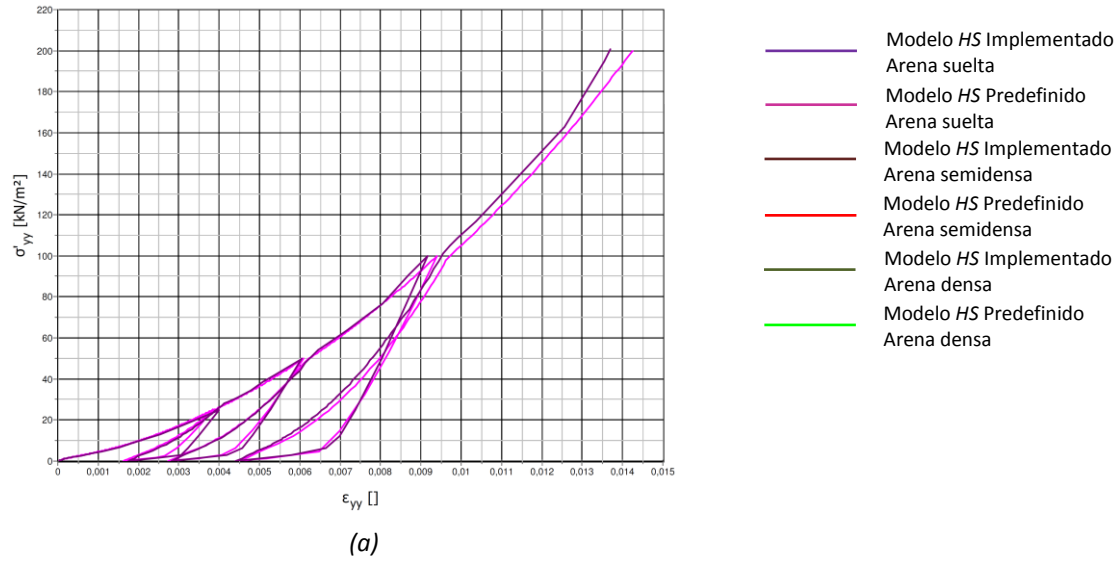


Figura 4.31. Curvas edométricas con Plaxis 2D 2015. (a) Arena suelta. (b) Arena semidensa. (c) Arena densa.

Capítulo 5

Modelo *EPHYSS*

En este capítulo se expone, desde un punto de vista teórico y numérico, la combinación del modelo *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)* desarrollado en el capítulo 3, con el modelo *Hardening Soil Modified (HS_{MOD})*, que resulta de aplicar un conjunto de modificaciones al modelo *Hardening Soil (HS)* implementado en el capítulo 4, dando lugar al modelo avanzado *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)*.

En cuanto al convenio de signos en la formulación desarrollada en este capítulo, por congruencia con el criterio utilizado en Plaxis, se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión, incluida la presión del agua. Asimismo, en todo momento se considera el marco teórico de las pequeñas deformaciones ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

5.1. Modelo *EPHYSS*

El modelo *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)* se puede clasificar como un modelo incrementalmente multilineal avanzado de tipo elastoplástico, según la clasificación considerada en el apartado 2.6.1 del capítulo 2, si bien la dependencia indirecta de la rigidez del mismo con la dirección del incremento del tensor de deformación desviadora $\hat{\epsilon}$ permite considerarlo como un modelo incrementalmente no lineal cuando describe el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. Concretamente, el modelo *EPHYSS* nace de la combinación del modelo *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)* desarrollado en el capítulo 3 y del modelo *HS_{MOD}* descrito en el apartado 5.2 del presente capítulo.

El modelo *HQH* tiene por objeto reproducir el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, correspondiente a las Zonas I y II de Jardine (1992), mientras que el modelo *HS_{MOD}* tiene por objeto reproducir el comportamiento del suelo propio de las Zonas III y IV de Jardine (1992). El modelo *HQH*, por tanto, se utilizará para describir la parte elástica del comportamiento del suelo y el modelo *HS_{MOD}* para describir la parte plástica del mismo.

El principal objetivo del modelo *EPHYSS* es tratar de mejorar la aproximación al comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones que proporciona el modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis, basado en el modelo *Hardening Soil Small (HS-S)* de Benz (2007) y recientemente implementado en otros programas numéricos, así como corregir las inconsistencias

numéricas detectadas en dicho modelo (Castellón, 2013), siendo advertidas alguna de ellas en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015), tal como se expone en el apartado 2.6.3.2.1.3 del capítulo 2. Del mismo modo que la parte elástica del modelo *HS-SS*, que es capaz de simular el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, está basada en el modelo *Small Strain Overlay Model (SSOM)* de Benz (2007), en el modelo *EPHYSS*, dicha parte está basada en el modelo *HQH* desarrollado en el capítulo 3 (figura 5.01). En relación con el comportamiento plástico, ambos modelos recurren a una versión modificada del modelo *HS* de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), a cuya formulación incorporan un conjunto de modificaciones basadas en la parte plástica del modelo *HS-S* de Benz (2007). De cara a la comparación entre ambos modelos, se pretenden minimizar las diferencias generadas por las formulaciones plásticas de los mismos.

En los siguientes apartados se expone cómo se construye el modelo *HS_{MOD}* a partir del modelo *HS* implementado en el capítulo 4 y cómo se combinan e implementan numéricamente los modelos *HQH* y *HS_{MOD}*, dando lugar al modelo *EPHYSS*.

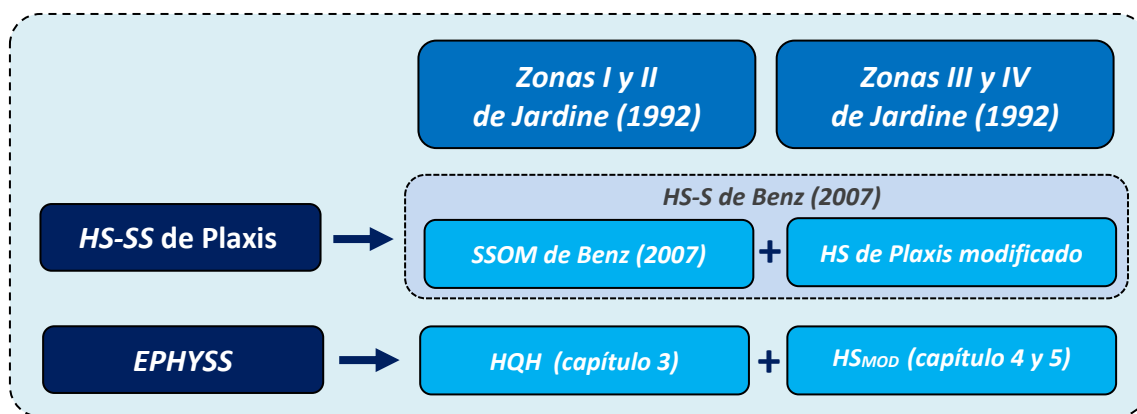


Figura 5.01. Esquema de los modelos que componen el modelo *HS-SS* y el modelo *EPHYSS* desarrollado en este trabajo.

5.2. Modelo *HS_{MOD}*

El modelo *HS_{MOD}* resulta de incorporar un conjunto de modificaciones al modelo *HS* implementado en el capítulo 4. Dichas modificaciones afectan a las leyes de endurecimiento y a los criterios de dilatación del modelo *HS*, y se basan en la parte plástica del modelo *HS-S* y del modelo *HS-SS*.

5.2.1. Modificación de las leyes de endurecimiento

Los modelos que tienen en cuenta el comportamiento histerético del suelo pueden adoptar diversas estrategias para reproducir los ciclos de carga/descarga/recarga del suelo. En el apartado 2.6.3.1 del capítulo 2 se han expuesto algunas de estas estrategias. Concretamente, la formulación del modelo *EPHYSS* permite cumplir las reglas de Masing generalizadas (Masing, 1926; Pyke, 1979), siendo el cumplimiento de la cuarta regla parcial.

Tanto el modelo *HS-SS* de Plaxis como el modelo *EPHYSS*, utilizan la misma estrategia para cumplir la primera y segunda de las Reglas de Masing generalizadas, consistente en la modificación de las leyes de endurecimiento del modelo *HS*. No obstante, cabe destacar que el modelo *EPHYSS* dispone de una estructura interna que le permite aplicar directamente el criterio de Hashiguchi (1993) para el cumplimiento de estas reglas (ver apartado 3.6.5 del capítulo 5), lo cual no sucede con el modelo *HS-SS*. La modificación de las leyes de endurecimiento en ambos modelos, en función la versión de los mismos, es la siguiente:

$$\dot{\gamma}^p = (\dot{\lambda}_{\gamma^p} h_{\gamma^p}) h_i = (\dot{\lambda}_{\gamma^p}) h_i \quad (5.01)$$

1. Plaxis 2D v9

$$\dot{p}_p = \dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p} h_i = \dot{\lambda}_{p_p} \frac{2(-p') p'_{ref}}{\bar{\beta}'} \left(\frac{p_p}{p'_{ref}} \right)^m h_i \quad (5.02)$$

Cabe mencionar que se desconoce si la versión del modelo *HS-SS* en Plaxis 2D v9 utiliza la expresión (5.02), la (5.03) o la basada en el modelo *HS-S*.

2. Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores

$$\dot{p}_p = \dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p} h_i = \dot{\lambda}_{p_p} 2H(-p') \left(\frac{p_p + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m h_i \quad (5.03)$$

Donde en las expresiones anteriores, $\dot{\gamma}^p$ es el incremento de la deformación de corte plástica que actúa como variable de estado asociada a la superficie de fluencia tipo Cono f_s , \dot{p}_p es el incremento de la presión de preconsolidación que actúa como variable de estado asociada a la superficie de fluencia tipo *Cap* f_c , $\dot{\lambda}_{\gamma^p}$ es el multiplicador plástico asociado a $\dot{\gamma}^p$, $\dot{\lambda}_{p_p}$ es el multiplicador plástico asociado a \dot{p}_p , h_{γ^p} es el módulo plástico generalizado asociado a la superficie tipo Cono, h_{p_p} es el módulo plástico generalizado asociado a la superficie tipo *Cap*, $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$ es la tensión media, $\bar{\beta}'$ es un parámetro interno que depende del módulo de rigidez edométrico E'_{oed} , p_p es la presión de preconsolidación que actúa como variable de estado de f_c , H es el módulo de endurecimiento plástico, c' es la cohesión efectiva del suelo, φ' es el ángulo de fricción efectivo máximo del suelo, p'_{ref} es una presión de referencia, m es un parámetro del suelo que se adopta valores entre 0,0 y 1,0 y h_i es el factor que modifica la ley de endurecimiento original del modelo *HS*.

El factor h_i tiene por objeto (1) reproducir la rigidez inicial del suelo a pequeñas deformaciones durante procesos de carga noval, caracterizada por el módulo de corte máximo, y (2) reproducir la degradación del módulo de corte con la deformación de corte, caracterizada por ser mayor que en los procesos de descarga o recarga.

$$h_i = (G_m)^{1 + \frac{E'_{t,ur}}{E'_{ref}}} \quad (5.04)$$

$$G_m = \frac{G_{t,min,\xi=1}^{ap}}{G_{t,ur}} \quad (5.05)$$

En la expresión anterior, $E_{t,ur}^{ref}$ y E_i^{ref} son parámetros del modelo *HS* implementado en el capítulo 4, y se corresponden, respectivamente, con el módulo elástico longitudinal tangente drenado a medias y grandes deformaciones para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$ y con el módulo de rigidez longitudinal inicial drenado para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$, siendo p'_{ref} una presión de referencia, $G_{t,ur}$ es el módulo de corte tangente para $\gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^{\alpha}$ y $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$ es la variable de estado que almacena el valor mínimo del módulo de corte aparente en los procesos de carga noval (considerando $\xi = 1$) y que adopta la expresión (3.50) del capítulo 3.

El efecto del factor h_i es máximo cuando $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_{t,max}^{ap}$ y se desvanece cuando $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_{t,ur}$. La evolución de $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$ sigue la curva de degradación del módulo de corte aparente tangente correspondiente a los procesos de carga noval, siendo esta inferior a la de los procesos de descarga o recarga elástica. Para ello, en el cálculo de $h_i = h_i(G_m)$ se utiliza el valor $\xi = 1$ siguiendo el criterio de Hashiguchi (1993).

Durante procesos de carga noval, el módulo de corte secante y tangente aparente no se calcularán mediante las expresiones (3.05), (3.27), (3.30) o (3.32) del capítulo 2, sino que se aproximarán como $G_s^{ap} \approx \tau/\gamma$ y $G_t^{ap} \approx \Delta\tau/\Delta\gamma$ a partir de los valores τ , γ , $\Delta\tau$ y $\Delta\gamma$ calculados, para tener en cuenta la reducción de la rigidez debida a h_i

Para el cálculo del incremento de tensiones a partir del incremento de deformaciones con la ecuación incremental constitutiva en el Dominio 1, se utilizan los valores de G_s^{ap} y \dot{G}_s^{ap} con $\xi = 2$, tanto en procesos de carga noval como en procesos de descarga/recarga. Será precisamente el factor h_i el encargado de reproducir la rigidez inicial del suelo a pequeñas deformaciones y su degradación durante procesos de carga noval, compensando, así, el efecto introducido por G_s^{ap} y \dot{G}_s^{ap} al considerar un valor de $\xi = 2$.

Por otro lado, el módulo plástico H que aparece en la expresión (5.03) se calcula, en el modelo *HS_{MOD}*, de forma diferente a como se hace en el modelo *HS* implementado en el capítulo 4, en el modelo *HS-S* o en el modelo *HS-SS*. El valor de H en el modelo *HS_{MOD}* depende de $K'_{t,ur} = K'_t = K'_s / (1 - m_1)$ según la expresión (5.06), siendo K'_s y m_1 parámetros del modelo *HQH*, mientras que en el caso del modelo *HS* el parámetro $K'_{t,ur}$ responde a la expresión 4.37.

$$H = \frac{K'_{t,ur}}{K'_{t,ur}/K'_c - 1} \quad (5.06)$$

En la expresión anterior, $K'_{t,ur}/K'_c$ se trata del mismo parámetro interno relacionado con el parámetro E_{oed}^{ref} que aparece en las versiones de los modelos *HS* y *HS-SS* de Plaxis 2D 2011 y posteriores, y en el modelo *HS-S*.

5.2.2. Modificación de los criterios de dilatancia

El modelo HS_{MOD} , al igual que la parte plástica del modelo $HS-SS$, basada a su vez en la parte plástica del modelo $HS-S$, modifica parcialmente el criterio de dilatancia respecto al utilizado en el modelo HS . La formulación del modelo HS considera un valor del ángulo de dilatancia movilizado igual a cero cuando los ángulos de fricción movilizados son pequeños o bien cuando dicho ángulo, calculado mediante la formulación de Rowe (1962), es negativo (expresión (4.21) del capítulo 4). Dicha formulación puede dar lugar a deformaciones plásticas volumétricas demasiado pequeñas cuando los ángulos de fricción movilizados son pequeños. Por ello, basándose en la propuesta de Benz (2007), el modelo $HS-SS$ recurre a la formulación de Li y Dafalias (2000) siempre que el ángulo de dilatancia movilizado, en cualquiera de los supuestos de la expresión (4.21), resulte negativo, es decir, cuando el comportamiento del suelo sea contractivo. No se considerará la formulación de Li y Dafalias cuando el comportamiento del suelo sea dilatante, debido a que la simplificación que se lleva a cabo en dicha formulación, con objeto de evitar un incremento del número de parámetros del modelo, no sería correcta.

Li y Dafalias (2000) consideran, en el marco teórico del estado crítico, que el ángulo de dilatancia es un parámetro de estado del suelo. Los autores proponen la siguiente expresión para el cálculo de dicho ángulo:

$$D = \frac{d_0}{M} (M e^{\bar{m}\psi} - \eta) \quad (5.07)$$

Donde $D = -\dot{\epsilon}_v^p / \dot{\gamma}^p$, $-\dot{\epsilon}_v^p$ es el incremento de la deformación volumétrica plástica, $\dot{\gamma}^p$ es el incremento de la deformación desviadora plástica, d_0 y \bar{m} son dos parámetros del suelo, $\eta = q/p'$, $q = -\sigma'_1 - (-\sigma'_3)$, $-p' = -\sigma'_{oct} = -1/3\sigma'_{ii}$, σ' es el tensor de tensiones efectivas, M es el valor de η correspondiente al estado crítico, $\psi = e - (e_{cv})_a + \lambda \ln(-p'/p_a)$ es el parámetro de estado definido por Been y Jefferies (1985) que mide la diferencia entre el índice de poros actual e y el índice de poros crítico a volumen constante $(e_{cv})_a$ cuando $-p' = p_a$ y λ es la pendiente de la recta de consolidación noval en el plano $v - \ln p'$, siendo $v = 1 + e$.

Tal como expone Benz (2007), aplicar directamente la formulación original de Li y Dafalias (2000) requeriría de cuatro parámetros adicionales (d_0 , \bar{m} , $(e_{cv})_a$ y λ), lo cual contradice dos de los principios básicos del modelo $HS-S$, $HS-SS$ y también del modelo EPHYSS, que consisten en minimizar el número de parámetros necesarios y que estos sean sencillos de obtener experimentalmente o de estimar.

Por ello Benz propone simplificar la formulación de Li y Dafalias (2000) de la siguiente manera:

- 1) Calcular el parámetro de estado ψ asumiendo un índice de poros constante.
- 2) Considerar los siguientes valores por defecto de dos de los parámetros: $\bar{m}\lambda = -1/15$ y $d_0 = M/10$. Según Benz, estos valores son adecuados siempre y cuando el comportamiento del suelo sea contractivo. Para el caso en que dicho comportamiento sea dilatante, debe recuperarse la formulación original de Rowe (1962).

En base a lo anterior, la expresión (5.07) quedaría de la siguiente manera:

$$D = \frac{1}{10} \left(M e^{\frac{1}{15} \ln \left(\frac{p'_{cv}}{-p'} \right)} - \eta \right) \quad (5.08)$$

$$\frac{p'_{cv}}{p'} = \frac{\eta q_{cv}}{q M} = \frac{\eta \sin(\varphi'_{cv})(1 - \sin(\varphi'_m))}{M \sin(\varphi'_m)(1 - \sin(\varphi'_{cv}))} \quad (5.09)$$

Donde $p' = -1/3\sigma'_{ii}$, $q = -\sigma'_1 - (-\sigma'_3)$, σ' es el tensor de tensiones efectivas, $\eta = q/(-p')$, $p'_{cv} = q_{cv}/M$ es el valor de la presión media sobre la recta de estado crítico, q_{cv} es la tensión desviadora sobre la recta de estado crítico, M es el valor de η sobre la recta de estado crítico, φ'_m es el ángulo de fricción efectivo movilizado y φ'_{cv} es el ángulo de fricción crítico efectivo a volumen constante, cuyas expresiones pueden encontrarse en el apartado 2.6.3.2.1.2 del capítulo 2.

El modelo *HS-SS* utiliza una variante de la expresión (5.08) para el cálculo del ángulo de dilatación movilizado ψ_m en las diferentes versiones del programa (obsérvese el uso de q/q_a en la expresión 5.10 en sustitución de q_{cv}/q en la expresión 5.09):

$$\sin(\psi_m) = \frac{1}{10} \left(M e^{\frac{1}{15} \ln \left(\frac{\eta q}{M q_a} \right)} - \eta \right) \quad (5.10)$$

1. Plaxis 2D v9

$$\eta = \frac{q}{-p'} \quad (5.11)$$

2. Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores

$$\eta = \max \left\{ \frac{q}{-p'}, \frac{(1 - K_0^{NC})}{\frac{1}{3}(1 + 2K_0^{NC})} \right\} \quad (5.12)$$

Donde, en las expresiones anteriores, $q_a = q_f/R_f$, q_f es la tensión desviadora límite dada por el criterio de plasticidad de Mohr-Coulomb, R_f es la ratio entre la tensión desviadora máxima q_f y la tensión desviadora última asintótica q_a , K_0^{NC} es el coeficiente de empuje al reposo durante la carga noval y el resto de parámetros y variables son los descritos en los párrafos anteriores.

En base a estas consideraciones, el modelo *HS_{MOD}* utiliza la siguiente expresión para el ángulo de dilatación movilizado (figura 5.02):

$$\begin{aligned} \sin(\psi_m) &= \frac{1}{10} \left(-M_{comp} e^{\frac{1}{15} \ln \left(\frac{\eta \sin(\varphi'_m)(1 - \sin(\varphi'_{cv}))}{M_{comp} \sin(\varphi'_{cv})(1 - \sin(\varphi'_m))} \right)} + \eta \right) & si & \quad \sin(\varphi'_m) \leq \sin(\varphi'_{cv}) \\ \sin(\psi_m) &= \min \left(\frac{\sin(\varphi'_m) - \sin(\varphi'_{cv})}{1 - \sin(\varphi'_m)\sin(\varphi'_{cv})}, \sin(\psi) \right) & si & \quad \sin(\varphi'_m) > \sin(\varphi'_{cv}) \text{ y } \psi > 0 \\ \sin(\psi_m) &= \sin(\psi) & si & \quad \sin(\varphi'_m) \geq \sin(\varphi'_{cv}) \text{ y } \psi \leq 0 \\ \sin(\psi_m) &= 0 & si & \quad \sin(\varphi') = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\sin(\varphi'_m) = \max\left(\frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)}{-\sigma'_1 + (-\sigma'_3) + 2c' \cot(\varphi')}, \frac{-\sigma'_1(1 - K_0^{NC})}{-\sigma'_1(1 + K_0^{NC}) + 2c' \cot(\varphi')}\right) \quad (5.14)$$

$$M_{comp} = \frac{6 \sin \varphi'_{cv}}{3 - \sin \varphi'_{cv}} \quad (5.15)$$

$$\eta = \max\left\{\frac{q}{-p'}, \frac{1}{3}(1 + 2K_0^{NC})\right\} \quad (5.16)$$

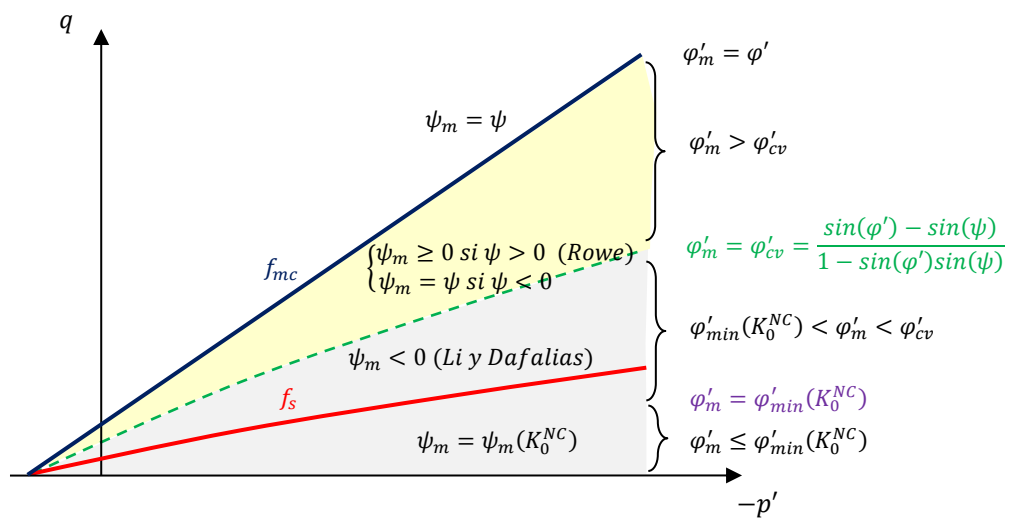


Figura 5.02. Esquema de los sectores en el plano $q - (-p')$ con diferentes valores de φ'_m y ψ_m en el modelo HS_{MOD} .

Como se puede ver, el modelo HS_{MOD} adopta una formulación equivalente a la de la parte plástica del modelo HS_{SS} . En dicha formulación se sustituye la variable q_a en la expresión (5.10) por q_f en la expresión (5.13), se considera $M = M_{comp}$, donde M_{comp} es la pendiente de la recta de estado crítico derivada del criterio de Mohr-Coulomb en compresión con $c' = 0$ y, del mismo modo que se considera un valor mínimo de $\eta_{min}(K_0^{NC}) < \eta < M_{comp}$ según las expresiones (5.12) y (5.16), en la formulación del modelo HS_{MOD} se considera, también, un valor mínimo de $\varphi'_{min}(K_0^{NC}) < \varphi'_m < \varphi'$, según la expresión (5.14), lo cual no se indica para el modelo HS_{SS} (Plaxis, 2015).

En la figura 5.03 se muestra cómo el modelo HS_{MOD} es capaz de aproximar muy bien la evolución del ángulo de dilatación movilizado ψ_m en función del ángulo de fricción movilizado φ'_m considerada en el modelo HS_{SS} .

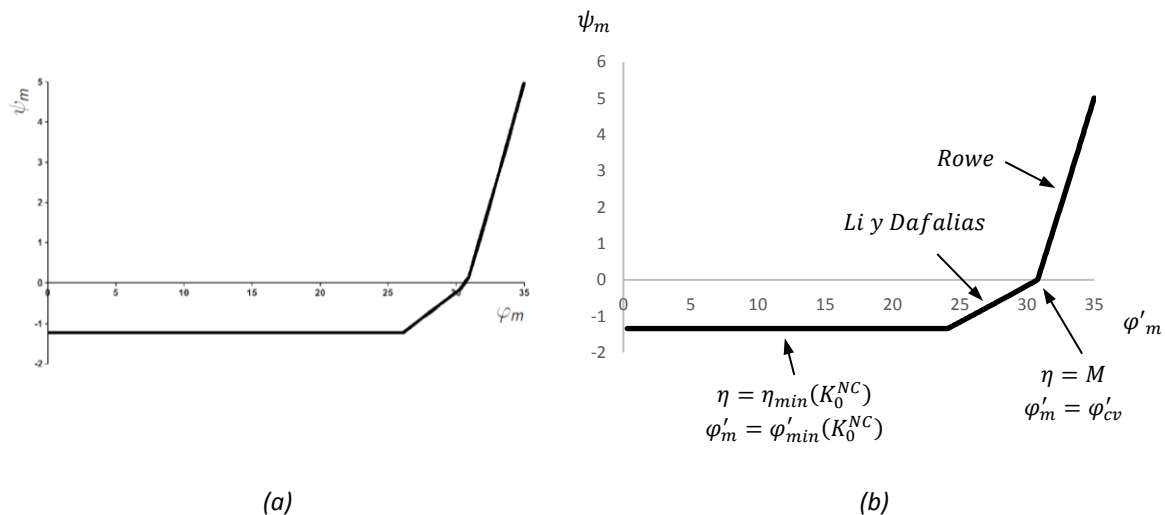


Figura 5.03. Gráfico que muestra la variación del ángulo de dilatación movilizado con el ángulo de fricción movilizado para $\varphi' = 35^\circ$ y $\psi = 5^\circ$. (a) Parte plástica del modelo HS-SS que se encuentra en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015). (b) Modelo HS_{MOD}.

5.3. Parámetros del modelo EPHYSS

A continuación, se enumeran y describen los parámetros del modelo EPHYSS.

Parámetros asociados al modelo HQH (parte elástica del modelo EPHYSS)

K_s^{iref}	[kN/m ²]	Valor del módulo volumétrico elástico secante drenado para $-p' = p'_{ref,1}$.
$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	[kN/m ²]	Módulo de corte secante máximo de la curva de degradación correspondiente a una reversión de 180° ($\hat{\mathbf{n}}: \hat{\mathbf{e}}^e = -1$) para $-p' = p'_{ref,2}$.
$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	[kN/m ²]	Módulo de corte secante máximo de la curva de degradación correspondiente a una reversión de 90° ($\hat{\mathbf{n}}: \hat{\mathbf{e}}^e = 0$) para $-p' = p'_{ref,2}$.
$\gamma_{0.7}$	[-]	Valor de γ_{oct}^H para el cual se cumple $G_s^{ap} = 0,722G_{s,0}^{ap,\alpha}$.
m_1	[-]	Factor que controla la dependencia de K'_s con $-p'$ y que adopta valores entre 0,00 y 1,00.
m_2	[-]	Factor que controla la dependencia de G_s y $G_{t,ur}$ con $-p'$ y que suele adoptar valores entre 0,040 y 0,60 para arenas y entre 0,50 y 1,00 para arcillas.
$p'_{ref,1}$	[kN/m ²]	Presión de referencia en la expresión de K'_s .
$p'_{ref,2}$	[kN/m ²]	Presión de referencia en la expresión de G_s y $G_{t,ur}$.
ν'_{min}	[-]	Valor mínimo del coeficiente de Poisson drenado que suele adoptar valores entre 0,05 y 0,20.

Parámetros asociados al modelo HS_{MOD} (parte plástica del modelo EPHYSS)

E_{50}^{iref}	[kN/m ²]	Módulo de rigidez longitudinal secante drenado para una movilización del 50% de q_f en un ensayo triaxial drenado para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
E_{oed}^{iref}	[kN/m ²]	Módulo edométrico tangente drenado en carga noval para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
$E_{t,ur}^{iref}$	[kN/m ²]	Módulo de rigidez longitudinal tangente drenado en descargas y recargas elásticas para $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
m	[-]	Coefficiente que controla la dependencia de E'_{50} , E'_{oed} , $E'_{t,ur}$ y E'_i con la tensión.
p'_{ref}	[kN/m ²]	Presión de referencia en las expresiones de E'_{50} , E'_{oed} , $E'_{t,ur}$, E'_i y \tilde{H} .
c'	[kN/m ²]	Cohesión efectiva.
ϕ'	[deg]	Ángulo de fricción efectivo máximo.
ψ	[deg]	Ángulo de dilatancia máximo.
K_0^{NC}	[-]	Coefficiente de empuje al reposo para estados de tensiones normalmente consolidados (por defecto $K_0^{NC} = 1 - \sin(\phi')$).
R_f	[-]	Ratio q_f/q_a (por defecto $R_f = 0,9$).
σ'_{trac}	[kN/m ²]	Valor del límite de tracción (por defecto $\sigma'_{trac} = 0 \text{ kN/m}^2$).

La estructura algorítmica utilizada en la implementación del modelo obliga a introducir, como parámetro del suelo, el índice de sobreconsolidación $OCR = (-\sigma'_{v,max})/(-\sigma'_v)$ como parámetro del suelo, donde $-\sigma'_{v,max}$ es la tensión máxima vertical histórica y $-\sigma'_v$ es la tensión vertical actual. Cuando se utilice el índice OCR , este deberá aplicarse únicamente en la primera fase de cálculo (condición inicial). Para ello se aconseja definir dos conjuntos de parámetros para un mismo material: el primer *set* de parámetros, con el valor OCR que se considere conveniente, se aplicará exclusivamente en la primera fase de cálculo; y el segundo *set* de parámetros, que tendrá los mismos valores de parámetros considerados en el primer *set*, a excepción del valor de OCR , que será $OCR = 0$ a efectos numéricos, se aplicará en las siguientes fases de cálculo con objeto de no distorsionar el valor de $-p_p^{eq}$.

Se define el parámetro *Reini_Stiff* que adoptará un valor de 1 cuando se quiera resetear la historia de deformaciones del suelo en una determinada fase de cálculo, reiniciando el valor de las variables de historia elásticas $\chi^{el,hist}$ al inicio de dicha fase. En caso contrario, *Reini_Stiff* adoptará un valor de 0. Generalmente, cuando *Reini_Stiff* = 1, se resetearán también los desplazamientos del terreno mediante la *Interface* de Plaxis.

5.3.1. Determinación de los parámetros del modelo EPHYSS**5.3.1.1. Parámetros asociados al modelo HQH**

El valor de los parámetros K_s^{iref} , $p'_{ref,1}$ y m_1 puede obtenerse a partir de descargas y recargas realizadas en la fase de consolidación isótropa de ensayos triaxiales, mientras que el valor de los parámetros

$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, $\gamma_{0,7}$, $p'_{ref,2}$, m_2 y ν'_{min} puede obtenerse a partir de los ensayos enumerados en el apartado 2.2 del capítulo 2 (habitualmente el valor de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ se obtiene a partir ensayos de campo o ensayos de columna resonante y el valor de $\gamma_{0,7}$ se obtiene a partir de ensayos de columna resonante y de ensayos triaxiales con medidas internas de la deformación).

Respecto al valor del parámetro $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$, este debe obtenerse a partir de ensayos con medida interna de la deformación en los que sea posible controlar el giro de las deformaciones desviadoras, como, por ejemplo, en ensayos biaxiales, triaxiales verdaderos o de cilindro hueco con torsión. No obstante, tal como se ha comentado en el apartado 3.6.2 del capítulo 3, se puede estimar el valor de $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ a partir del de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ mediante la relación $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = \Lambda G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, tomando Λ valores de 0,40 – 0,44 en arenas y de 0,50 en arcillas.

Debe tenerse en cuenta que el modelo HS-SS considera un mismo valor del parámetro m que controla la evolución de los módulos de rigidez con $-\sigma'_3$ o $-\sigma'_1$: $E'_{50} \sim (-\sigma'_3)^m$, $E'_{t,ur} \sim (-\sigma'_3)^m$, $E'_i \sim (-\sigma'_3)^m$, $E'_{oed} \sim (-\sigma'_1)^m$ y $G_0 \sim (-\sigma'_3)^m$. No obstante, Kempfert y Gebreselassie (2006) demuestran que dichos exponentes deben cumplir $m(G_0) < m(E'_{50}) < m(E'_{t,ur})$. En este caso, el modelo EPHYSS, a diferencia del modelo HS-SS, define dos parámetros, m_1 y m_2 , que controlan, respectivamente, la evolución de los módulos K'_s y G_s^{ap} con la presión media $-p'$ y no con el confinamiento $-\sigma'_3$, como sucede en el modelo HS-SS, lo cual evita las oscilaciones aleatorias de la rigidez que aparecen durante trayectorias con rotación de tensiones, como las que tienen lugar en las proximidades de un túnel durante su excavación. En relación a los módulos de rigidez utilizados en las expresiones de las superficies de fluencia, el modelo EPHYSS conserva la formulación del modelo HS-SS, es decir: $E'_{50} \sim (-\sigma'_3)^m$, $E'_{t,ur} \sim (-\sigma'_3)^m$, $E'_i \sim (-\sigma'_3)^m$, $E'_{oed} \sim (-\sigma'_1)^m$.

En caso de no disponer de los resultados de los ensayos para la determinación de los parámetros asociados al modelo HQH, es posible estimar el valor de los parámetros K_s^{iref} , $p'_{ref,1}$, m_1 , $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, $p'_{ref,2}$, m_2 y ν'_{min} a partir del valor de los parámetros G_0^{ref} , $E'_{t,ur}{}^{ref}$, ν'_{ur} , m , p'_{ref} , c' y ϕ' del modelo HS-SS.

El valor de los parámetros K_s^{iref} , $p'_{ref,1}$, m_1 y ν'_{min} se estima a partir del valor de los parámetros $E'_{t,ur}{}^{ref}$, ν'_{ur} , m y p'_{ref} de la siguiente manera:

$$K_s^{iref} \approx \frac{1}{3} \frac{E'_{t,ur}{}^{ref} (1 - m_1)}{(1 - 2\nu'_{ur})} \quad (5.17)$$

$$p'_{ref,1} \approx p'_{ref} \quad (5.18)$$

$$m_1 \approx m \quad (5.19)$$

$$\nu'_{min} \approx \nu'_{ur} \quad (5.20)$$

Y el valor de los parámetros $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, $p'_{ref,2}$ y m_2 se estima a partir del valor de los parámetros G_0^{ref} , m y p'_{ref} de la siguiente manera:

$$G_{s,0}^{ap,180,H,ref} \approx G_0^{ref} \quad (5.21)$$

$$p'_{ref,2} \approx p'_{ref} \quad (5.22)$$

$$m_2 \approx m \quad (5.23)$$

El valor y la denominación de $\gamma_{0,7}$ es común en los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

La aproximación anterior se considera, en general, suficiente para reproducir las rigideces en ensayos numéricos ante la falta de más datos. No obstante, el hecho de que K'_s y G_s^{ap} en el modelo *EPHYSS* varíen con $(-p')^{m_1}$ y $(-p')^{m_2}$ respectivamente, mientras que $E'_{t,ur}$ y G_0 en el modelo *HS-SS* lo hagan con $(-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi'))^m$, lleva a plantear un conjunto de transformaciones basadas en las propuestas por Obrzud y Truty (2018) para problemas de contorno, con objeto de ajustar el valor de los parámetros K_s^{ref} y $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* a partir de los parámetros del modelo *HS-SS*, de manera que se reproduzca un perfil inicial de rigideces volumétrica y de corte con la profundidad similar en ambos modelos.

En este caso, el valor de K_s^{ref} es aquél que minimiza la función no lineal $J_1 = J_1(K_s^{ref})$, tomando valores $(-\sigma'_3)_i$ y $(-p')_i = (1/3)(1 + 2K_0^{NC})(-\sigma'_3)_i$, con $i = 1 \dots n$:

$$J_1(K_s^{ref}) = \sum_{i=1}^n \left(K_s^{ref} \left(\frac{(-p')_i}{p'_{ref,1}} \right)^{m_1} - \frac{1}{3} \frac{E_{t,ur}^{ref}(1 - m_1)}{(1 - 2\nu'_{ur})} \left(\frac{(-\sigma'_3)_i + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \right)^2 \quad (5.24)$$

De igual forma, el valor de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ es aquél que minimiza la función no lineal $J_2 = J_2(G_{s,0}^{ap,180,H,ref})$, tomando valores $(-\sigma'_3)_i$ y $(-p')_i = (1/3)(1 + 2K_0^{NC})(-\sigma'_3)_i$, con $i = 1 \dots n$:

$$J_2(G_{s,0}^{ap,180,H,ref}) = \sum_{i=1}^n \left(G_{s,0}^{ap,180,H,ref} \left(\frac{(-p')_i}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} - G_0^{ref} \left(\frac{(-\sigma'_3)_i + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \right)^2 \quad (5.25)$$

De las expresiones anteriores se deduce, cuando $c' = 0$, que $K_s^{ref} = (1/3) \left(E_{t,ur}^{ref} (1 - m_1) / (1 - 2\nu'_{ur}) \right) \left(3K_0^{NC} / (1 + 2K_0^{NC}) \right)^m$ y $G_{s,0}^{ap,180,H,ref} = G_0^{ref} \left(3K_0^{NC} / (1 + 2K_0^{NC}) \right)^m$.

El anterior proceso puede hacerse a la inversa para ajustar el valor del parámetro G_0^{ref} del modelo *HS-SS* a partir del valor del parámetro $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* mediante la función $J'_2 = J'_2(G_0^{ref})$, también con objeto de reproducir un perfil inicial similar de la rigidez al corte con la profundidad. No se aconseja, no obstante, ajustar el valor de los parámetros $E_{t,ur}^{ref}$ y ν'_{ur} del modelo *HS-SS* a partir del valor del parámetro K_s^{ref} del modelo *EPHYSS*, puesto que ambos parámetros aparecen en la formulación plástica del mismo, que no conviene modificar.

5.3.1.2. Parámetros asociados al modelo HS_{MOD}

Los parámetros asociados al modelos HS_{MOD} son los mismos que los asociados a la parte plástica de los modelos HS , $HS-S$ o $HS-SS$. La determinación de dichos parámetros a partir de ensayos, o bien su estimación a partir de correlaciones empíricas, es ampliamente conocida y puede encontrarse, por ejemplo, en Surarak et al. (2012) o en Obrzud y Truty (2018).

5.3.1.3. Parámetros internos del modelo EPHYSS

En relación con los parámetros internos E_i^{ref} , α' y $\bar{\beta}'$ (Plaxis 2D v9), o E_i^{ref} , α' y $K'_{t,ur}/K'_c$ (Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores), se obtienen de la misma forma que en el modelo HS implementado en el capítulo 4, que se describe en el apartado 4.1.7 de dicho capítulo. En este caso, no obstante, es necesario introducir en el algoritmo de cálculo de los parámetros internos las ecuaciones del modelo HQH para describir la parte elástica del suelo, así como el factor h_i que modifica las leyes de endurecimiento y la formulación de la ley de dilatación considerada. En el anejo I se adjuntan los respectivos códigos.

5.4. Implementación numérica del modelo EPHYSS

Para la implementación numérica del modelo EPHYSS se sigue un esquema análogo al descrito en el apartado 4.2 del capítulo 4 para el modelo HS .

5.4.1. Tensión de prueba o trial

Las ecuaciones constitutivas incrementales del modelo EPHYSS en el Dominio 1 y 2 son las siguientes:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}): \dot{\epsilon}^e + \mathbf{E}'_s(\dot{K}'_s, \dot{G}_s^{ap}): (-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R}) \quad \text{si} \quad \gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^\alpha \quad (\text{Dominio 1}) \quad (5.26)$$

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}): \dot{\epsilon}^e \quad \text{si} \quad \gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^\alpha \quad (\text{Dominio 2}) \quad (5.27)$$

Donde $\dot{\sigma}'$ es el incremento del tensor de tensiones, $\dot{\epsilon}^e$ es el incremento del tensor de deformaciones elásticas, $\mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap})$ es el tensor de rigidez secante que depende del módulo volumétrico elástico secante K'_s y del módulo de corte aparente secante G_s^{ap} que, a su vez, dependen de las variables de estado elásticas que permiten reproducir el comportamiento no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente $\chi^{el,hist} = (\mathbf{h}, G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}, \mathbf{e}^R, \mathbf{e}^{e,R}, \mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}^e, G_{t,min,\xi=1}^{ap})$, $\mathbf{E}'_s(\dot{K}'_s, \dot{G}_s^{ap}) = \dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G_s^{ap})$ es el incremento del tensor de rigidez secante que depende del incremento del módulo volumétrico elástico secante \dot{K}'_s y del incremento del módulo de corte aparente secante \dot{G}_s^{ap} , $\mathbf{e}^{e,\Delta R} = \mathbf{e}^e - \mathbf{e}^{e,R}$, $\mathbf{e}^e = \epsilon^e - \epsilon_{oct}^e \mathbf{1}$, $-\epsilon_{oct}^e = -1/3 \epsilon_{ii}^e$, ϵ^e es el tensor de deformaciones elásticas, $\mathbf{e}^{e,R}$ es una variable de estado que almacena el tensor de deformaciones desviadoras elásticas en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo y $\mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur})$ es el tensor de

rigidez hipo(elástico) tangente que depende del módulo volumétrico elástico tangente K'_t y del valor mínimo del módulo de corte hipo(elástico) tangente $G_{t,ur}$. Las expresiones de todas estas variables pueden consultarse en el capítulo 3.

La no linealidad en tensiones y deformaciones del modelo *EPHYSS* da lugar a la aparición del término $\dot{\mathbf{E}}'_s$: $(-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R})$ en la ecuación constitutiva incremental correspondiente al Dominio 1 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^\alpha$), que genera una anisotropía inducida en deformaciones. Dicho término no aparece en el caso de modelos lineales (en los que $\dot{\mathbf{E}}'_s = \mathbf{0}$) y se desprecia o se considera sólo parcialmente en varios modelos con no linealidad en tensiones y/o en deformaciones, como sucede en los modelos *HS*, *HS-S* y *HS-SS*.

En trayectorias dentro del dominio elástico que cumplan $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \approx 1$, se tendrá $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H} = 0$, $\dot{\gamma}_{oct}^H \approx \dot{\gamma}_{oct}^{\Delta R} = \dot{\gamma}_{oct} = \dot{\gamma}_{oct}^{e,\Delta R} = \dot{\gamma}_{oct}^e \gamma$, en aquellos en los que previamente ha existido una reversión con $\alpha \geq 90^\circ$, también se tendrá $\dot{\gamma}_{oct}^H \approx \dot{\gamma}_{oct}^{\Delta R} = \dot{\gamma}_{oct}^{e,\Delta R}$. Bajo estos supuestos, se puede demostrar que las ecuaciones constitutivas de los dos dominios de deformación colapsan en una misma cuando $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^\alpha$.

Combinando las expresiones (5.26) y (5.27) con las expresiones (4.47) y (4.49) del capítulo 4, se obtienen las expresiones correspondientes al retorno de tensiones sobre las superficies de fluencia plásticas activas $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$, con $k = 1 \dots q$, en el Dominio 1 (5.28) y en el Dominio 2 (5.29):

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}): \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{E}'_s(\dot{K}'_s, \dot{G}_s^{ap}): (-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R}) - \sum_{k=1}^q \dot{\lambda}_k \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}): \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.28)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}): \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \sum_{k=1}^q \dot{\lambda}_k \mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}): \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.29)$$

Donde $\dot{\lambda}_k$ es el incremento del multiplicador plástico asociado a la superficie de fluencia f_k , g_k es el potencial plástico asociado a la superficie de fluencia f_k y $\boldsymbol{\chi}^{pl} = (\chi_{f_s}^{pl}, \chi_{f_c}^{pl}) = (\gamma^p, -p_p)$ es un vector que contiene las variables de estado plásticas asociadas a las superficies de fluencia f_k .

Discretizando las expresiones anteriores y utilizando lo expuesto en los apartados 4.2.2 y 4.2.3 del capítulo 4, se llega a las siguientes expresiones del tensor de tensiones al final del paso de cálculo (n) \rightarrow ($n + 1$) en el Dominio 1 (5.30) y en el Dominio 2 (5.31):

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_s^{(n+1)}: \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} + \Delta \mathbf{E}'_s^{(n+1)}: (-\epsilon_{oct}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R,(n+1)}) - \sum_{k=1}^q \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_s^{(n+1)}: \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.30)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_t^{(n+1)}: \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} - \sum_{k=1}^q \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)}: \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.31)$$

Donde $\sigma'^{(n)}$ y $\sigma'^{(n+1)}$ son, respectivamente, el tensor de tensiones al inicio y al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\Delta\epsilon^{(n+1)}$ es el incremento del tensor de deformaciones totales en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\mathbf{E}'_s{}^{(n+1)}$ es el tensor de rigidez secante en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\mathbf{E}'_t{}^{(n+1)}$ es el tensor de rigidez tangente, $\Delta\mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_s(\Delta K'_s{}^{(n+1)}, \Delta G_s^{ap,(n+1)})$ es el incremento del tensor de rigidez secante en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\Delta K'_s{}^{(n+1)}$ y $\Delta G_s^{ap,(n+1)}$ son, respectivamente, el incremento del módulo volumétrico elástico secante y el incremento del módulo de corte aparente secante en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, que dependen de las variables de estado elásticas $\chi^{el,hist,(n)}$, $\lambda_k^{(n+1)}$ es el multiplicador plástico asociado a la k -ésima superficie de fluencia en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $-\epsilon_{oct}^{e,(n+1)} = -1/3\epsilon_{ii}^{e,(n+1)}$, $\mathbf{e}^{e,\Delta R,(n+1)} = \mathbf{e}^{e,(n+1)} - \mathbf{e}^{e,R,(n)}$, $\mathbf{e}^{e,(n+1)} = \epsilon^{e,(n+1)} - \epsilon_{oct}^{e,(n+1)}\mathbf{1}$, $\epsilon^{e,(n+1)}$ es el tensor de deformaciones elásticas al final del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$, $\mathbf{e}^{e,R,(n)}$ es la variable de estado elástica que almacena el tensor de deformación desviadora elástica en el último punto de reversión R que conforma el extremo del ciclo de deformación activo y $\partial g_k(\sigma'^{(n+1)}, \chi_k^{pl,(n+1)})/\partial \sigma'$ es el flujo plástico asociado a la k -ésima superficie de fluencia al final del paso de cálculo considerado.

De (5.24) y (5.25) se deducen las expresiones de la tensión trial en el Dominio 1 (5.32) y en el Dominio 2 (5.33).

$$\sigma'^{(tr,NL)} = \sigma'^{(n)} + \mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} : \Delta\epsilon^{(n+1)} + \Delta\mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} : \left(-\epsilon_{oct}^{e,(n+1)}\mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R,(n+1)} \right) \quad (5.32)$$

$$\sigma'^{(tr)} = \sigma'^{(n)} + \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Delta\epsilon^{(n+1)} \quad (5.33)$$

En la figura 5.04 se muestra la interpretación geométrica de la expresión (5.32), suponiendo que el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ es elástico, es decir, $\Delta\epsilon^{(n+1)} = \Delta\epsilon^{e,(n+1)}$, $\Delta\epsilon^p{}^{(n+1)} = \mathbf{0}$ y $\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(tr,NL)}$, y suponiendo que $\mathbf{e}^{e,R,(n)} = \mathbf{0}$ y, por tanto, $-\epsilon_{oct}^{e,(n+1)}\mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R,(n+1)} = -\epsilon_{oct}^{e,(n+1)}\mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,(n+1)} \equiv \epsilon^{e,(n+1)}$.

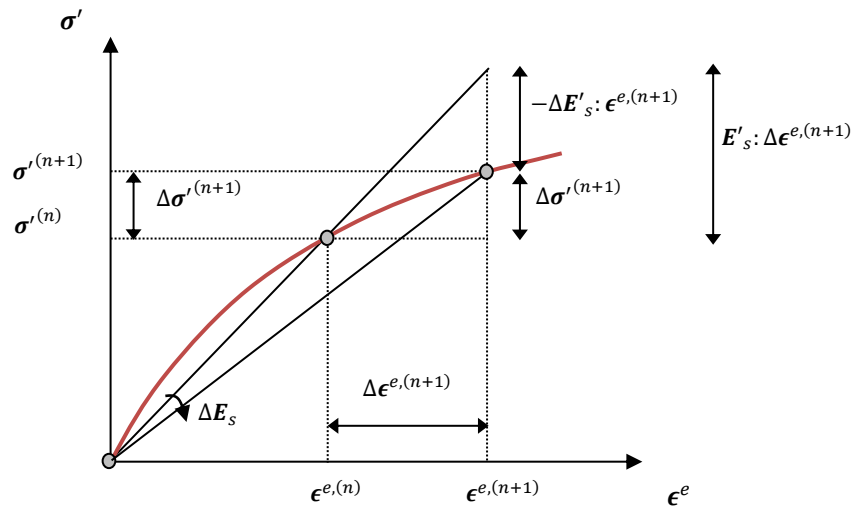


Figura 5.04. Representación gráfica del incremento de tensión y deformación en régimen elástico no lineal.

Sustituyendo la expresión (5.32) en la (5.30) y la (5.33) en la (5.31), se obtienen las expresiones del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$ al final del paso de cálculo considerado en el Dominio 1 (5.34) y en el Dominio 2 (5.35).

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)} - \sum_{k=1}^q \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_s^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.34)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)} - \sum_{k=1}^q \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.35)$$

El valor de las componentes de los tensores $\Delta \mathbf{E}'_s^{(n+1)} = \mathbf{E}'_s(\Delta K'_s^{(n+1)}, \Delta G_s^{ap,(n+1)})$ y $(-\epsilon_{oct}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R,(n+1)})$ que aparecen en la expresión (5.32) correspondiente al Dominio 1, dependen del valor del incremento del tensor de deformaciones elásticas $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e,(n+1)}$, lo cual obliga a añadir un ciclo iterativo dentro del algoritmo general en el Dominio 1, tal como ya se había apuntado en el apartado 3.3.3 del capítulo 3.

Los tensores $\mathbf{E}'_s^{(n+1)}$ y $\mathbf{E}'_t^{(n+1)}$ utilizados en las expresiones anteriores se evalúan al inicio del paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ siguiendo un esquema explícito según las expresiones $\mathbf{E}'_s^{(n+1)} = \mathbf{E}'_s(K'_s^{(n)}, G_s^{ap,(n)})$ y $\mathbf{E}'_t^{(n+1)} = \mathbf{E}'_t(K'_t^{(n)}, G_{t,ur}^{(n)})$, del mismo modo que se hace en el algoritmo de *Return Mapping* desarrollado en el capítulo 4 para el modelo *HS* (ver apartado 4.2.2 del capítulo 4). No obstante, cuando tiene lugar una reversión de deformación que genera un punto de reversión *R* que conformará el extremo de un nuevo ciclo de deformación, se considera que el estado de deformación se sitúa en el Dominio 1 y se utilizará el tensor $\mathbf{E}'_s^{(n+1)}$ según la expresión $\mathbf{E}'_s^{(n+1)} = \mathbf{E}'_s(K'_s^{(n+1)}, G_s^{ap,(n+1)})$, que tiene en cuenta la afección de la reversión al módulo de corte aparente secante $G_s^{ap,(n+1)}$, con objeto de evitar distorsiones al inicio de los ciclos de deformación, a pesar de que $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}$ se haya calculado con $\mathbf{E}'_s(K'_s^{(n)}, G_s^{ap,(n)})$ o $\mathbf{E}'_t(K'_t^{(n)}, G_{t,ur}^{(n)})$.

5.4.2. Paso de cálculo elástico

Si en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ el régimen es elástico, se cumplirá que $f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}) \leq TOL$ o $f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}) \leq TOL$, según el caso, para todas las superficies de fluencia. Cuando esto sucede, las deformaciones plásticas son nulas $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{p,(n+1)} = \mathbf{0} (\forall k, k = 1 \dots q, \lambda_k^{(n+1)} = 0)$ y el incremento de deformación elástica coincide con el incremento de deformación total $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^{e,(n+1)} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)}$.

En este caso, se pueden calcular los valores de las componentes de los tensores $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}$ o $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$, según el caso, de forma explícita al inicio del paso de cálculo considerado. Asimismo, es posible calcular el tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}$ y las variables de estado plásticas $\boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}$, al final de dicho paso de cálculo, como $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}$ o $\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$, según el caso, y $\boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)} = \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n)}$, y las variables de estado

elásticas $\chi^{el,hist,(n+1)} = (\mathbf{h}^{(n+1)}, G_{s,0}^{\alpha,H,(n+1)}, \mathbf{e}^{R,(n+1)}, \mathbf{e}^{e,R,(n+1)}, \mathbf{H}_{MEM}^{(n+1)}, \mathbf{E}_{MEM}^{(n+1)}, \mathbf{E}_{MEM}^{e,(n+1)}, G_{t,min,\xi=1}^{ap,(n+1)})$ se actualizarán según los criterios descritos en el apartado 3.6 del capítulo 3.

5.4.3. Paso de cálculo elastoplástico

Si en el paso de cálculo $(n) \rightarrow (n+1)$ el régimen es elastoplástico, se cumplirá que $f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}) > TOL$ o $f_k(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl,(n+1)}) > TOL$, según el caso, en una o más de las superficies de fluencia. Cuando esto sucede, aparecen deformaciones plásticas $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{p,(n+1)}$ ($\exists k, k = 1 \dots q, \lambda_k^{(n+1)} > 0$) asociada a las superficies de fluencia activas.

En este caso, el tensor de tensiones trial $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}$ correspondiente al Dominio 1 depende del incremento del tensor de deformaciones elásticas $\Delta\boldsymbol{\epsilon}^{e,(n+1)}$ y no puede calcularse de forma explícita al inicio del paso de cálculo considerado, siendo necesario hacerlo de forma implícita iterando sobre $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{[i]}^{e,(n+1)}$. Ello permitirá, en cada iteración, calcular los tensores $\Delta\mathbf{E}'_{s,[i]}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_s(\Delta K_{s,[i]}^{(n+1)}, \Delta G_{s,[i]}^{ap,(n+1)})$, $(-\epsilon_{oct,[i]}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + \mathbf{e}_{[i]}^{e,\Delta R,(n+1)})$ y $\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(tr,NL)}$ (expresión 5.36) y aplicar el algoritmo de *Return Mapping*, expuesto en el capítulo 4, para obtener el tensor $\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)}$ (expresión 5.37).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(tr,NL)} &= \boldsymbol{\sigma}'^{(n)} + \mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} : \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} \\ &\quad + \mathbf{E}'_s(\Delta K_{s,[i]}^{(n+1)}, \Delta G_{s,[i]}^{ap,(n+1)}) : (-\epsilon_{oct,[i]}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + \mathbf{e}_{[i]}^{e,\Delta R,(n+1)}) \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)} = \boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(tr,NL)} - \sum_{k=1}^q \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i]}^{pl,(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.37)$$

A partir del tensor $\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)}$, se calculará el tensor de deformaciones elásticas $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{[i+1]}^{e,(n+1)}$:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{[i+1]}^{e,(n+1)} = \Delta\boldsymbol{\epsilon}^{(n+1)} - \sum_{k=1}^q \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \frac{\partial g_k(\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)}, \boldsymbol{\chi}_{k,[i]}^{(n+1)})}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} \quad (5.38)$$

Alternativamente, se puede utilizar la siguiente formulación para el cálculo de $\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{[i+1]}^{e,(n+1)}$:

$$\Delta\boldsymbol{\epsilon}_{[i+1]}^{e,(n+1)} = (\mathbf{E}'_s{}^{(n+1)})^{-1} \left(\Delta\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)} - \Delta\mathbf{E}'_{s,[i]}{}^{(n+1)} : (-\epsilon_{oct,[i]}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + \mathbf{e}_{[i]}^{e,\Delta R,(n+1)}) \right) \quad (5.39)$$

El esquema iterativo para el cálculo de $\boldsymbol{\sigma}'_{[i]}^{(n+1)}$ se aplicará hasta el cumplimiento de los siguientes criterios de convergencia:

$$\Delta\epsilon_{abs}^{e,(n+1)} = \left\| \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{[i+1]}^{e,(n+1)} - \Delta\boldsymbol{\epsilon}_{[i]}^{e,(n+1)} \right\| = \sqrt{\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 (\Delta\epsilon_{mn,[i+1]}^{e,(n+1)} - \Delta\epsilon_{mn,[i]}^{e,(n+1)})^2} \leq TOL_{\Delta\epsilon,abs} \quad (5.40)$$

$$\Delta\epsilon_{rel}^{e,(n+1)} = \frac{\Delta\epsilon_{abs}^{e,(n+1)}}{\|\Delta\epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\|} = \frac{\Delta\epsilon_{abs}^{e,(n+1)}}{\sqrt{\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 (\Delta\epsilon_{mn}^{e,(n+1)})^2}} \leq TOL_{\Delta\epsilon,rel} \quad (5.41)$$

En caso de cumplirse lo anterior, se habrá llegado a la convergencia y se tendrá $\Delta\epsilon^{e,(n+1)} = \Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$, $\sigma'^{(n+1)} = \sigma'_{[i]}^{(n+1)}$ y $\chi_k^{pl,(n+1)} = \chi_{k,[i]}^{pl,(n+1)}$. Mientras no se cumpla esto, se considerará $[i] \rightarrow [i + 1]$ y se continuará con el proceso iterativo hasta la convergencia, actualizando el valor de $\Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$ de la siguiente manera:

$$\Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1),new} = f\left(\Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}, \Delta\epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)} + \Delta\epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\right) \quad (5.42)$$

Por otro lado, el tensor de tensiones trial $\sigma'^{(tr)}$ correspondiente al Dominio 2 no depende del valor de $\Delta\epsilon^{e,(n+1)}$, y se podrá aplicar directamente el algoritmo de *Return Mapping* sobre $\sigma'^{(tr)}$ (expresión 5.43).

$$\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(tr,NL)} - \sum_{k=1}^q \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'^{(n+1)}, \chi_k^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \quad (5.43)$$

Finalmente, las variables de estado elásticas $\chi^{el,hist,(n+1)} = (\mathbf{h}^{(n+1)}, G_{s,0}^{\alpha,H,(n+1)}, \mathbf{e}^{R,(n+1)}, \mathbf{e}^{e,R,(n+1)}, \mathbf{H}_{MEM}^{(n+1)}, \mathbf{E}_{MEM}^{(n+1)}, \mathbf{E}_{MEM}^{e,(n+1)}, G_{t,min,\xi=1}^{ap,(n+1)})$ se actualizarán según los criterios descritos en el apartado 3.6 del capítulo 3.

5.4.4. Algoritmo numérico para el cálculo de $\sigma'^{(n+1)}$ y $\chi^{(n+1)}$

En la figura 5.05 se muestra el esquema del algoritmo numérico aplicado para el cálculo de $\sigma'^{(n+1)}$ y $\chi^{(n+1)}$.

- 1) **Valor inicial de las variables de estado** $\chi^{(n)} = (\chi^{el,hist(n)}, \chi_k^{pl(n)})$:
 - 1.1) Asociadas al comportamiento elástico no lineal, histérico y dependiente de la historia reciente:

$$\chi^{el,hist(n)} = (\mathbf{h}^{(n)}, G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref(n)}, \mathbf{H}_{MEM}^{(n)}, \mathbf{E}_{MEM}^{(n)}, \mathbf{E}_{MEM}^{e,(n)}, G_{t,min,\xi=1}^{ap,(n)})$$
 - 1.2) Asociadas al comportamiento plástico: $\chi_k^{pl(n)}$ (donde $\chi_{f_s}^{pl(n)} = \gamma^{p,(n)}$ y $\chi_{f_c}^{pl(n)} = -p_p^{(n)}$)
- 2) **Valor del incremento de deformación total en el paso de cálculo** $(n) \rightarrow (n+1): \Delta \epsilon^{(n+1)}$
- 3) **Criterio de reversión**: $\cos(\alpha^{*(n)}) \cdot \widehat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)}) \cdot \widehat{\epsilon}^{\Delta R,(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)})$
- 4) **Determinación del Dominio de deformación y de la existencia o no de reversión**:
 - 4.1) If $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$ y $\widehat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)}) \rightarrow$ Dominio 1 \rightarrow **GOTO(5)**
 - 4.2) Elseif $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} > \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$ y $\widehat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)}) \rightarrow$ Dominio 2 \rightarrow **GOTO(6.3)**
 - 4.3) Elseif $\widehat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} > \cos(\alpha^{*(n)}) \rightarrow$ Dominio 1 \rightarrow **GOTO(6.2)**
- 5) **Cálculo de** $\Delta K_{s,[0]}^{r(n+1)}, \Delta G_{s,[0]}^{ap,(n+1)}$ con $\Delta \epsilon_{oct,[0]}^{e,(n+1)} = \Delta \epsilon_{oct}^{(n+1)} \rightarrow$ **GOTO(6.1)**
- 6) **Cálculo de** $\mathbf{E}'_s^{r(n+1)}$ y de $\Delta \mathbf{E}'_{s,[0]}^{r(n+1)}$, o $\mathbf{E}'_t^{r(n+1)}$:
 - 6.1) Dominio 1: $\mathbf{E}'_s^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap,(n)})$ y $\Delta \mathbf{E}'_{s,[0]}^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_s(\Delta K'_{s,[0]}^{r(n+1)}, \Delta G_{s,[0]}^{ap,(n+1)}) \rightarrow$ **GOTO(7.1)**
 - 6.2) Dominio 1: $\mathbf{E}'_s^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap,(n+1)})$ y $\Delta \mathbf{E}'_{s,[0]}^{r(n+1)} = \mathbf{0} \rightarrow$ **GOTO(7.1)**
 - 6.3) Dominio 2: $\mathbf{E}'_t^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}^{(n)}) \rightarrow$ **GOTO(7.2)**
- 7) **Cálculo de la tensión trial inicial**:
 - 7.1) Dominio 1: $\sigma'_{[0]}^{(tr,NL)} = \sigma^{(n)} + \mathbf{E}'_s^{r(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)} + \Delta \mathbf{E}'_{s,[0]}^{r(n+1)} : (-\epsilon_{oct,[0]}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + e^{\Delta R,(n+1)}) \rightarrow$ **GOTO(8)**
 - 7.2) Dominio 2: $\sigma'_{[0]}^{(tr)} = \sigma^{(n)} + \mathbf{E}'_t^{r(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)} \rightarrow$ **GOTO(8)**
- 8) **Cálculo del valor de las superficies de fluencia** $f_k(\sigma'_{[0]}^{(tr,NL)}, \chi_k^{pl(n)})$ y **criterio de plasticidad**:
 - 8.1) If $\forall k, f_k(\sigma'_{[0]}^{(tr,NL)}, \chi_k^{pl(n)}) \leq \text{TO}L_{f_k} \rightarrow$ paso elástico $\rightarrow \Delta \epsilon^{e,(n+1)} = \Delta \epsilon_{[0]}^{e,(n+1)}, \Delta \epsilon^{p,(n+1)} = \mathbf{0} \rightarrow$
 $\rightarrow \sigma^{(n+1)} = \sigma'_{[0]}^{(tr,NL)}, \chi_k^{pl(n+1)} = \chi_k^{pl(n)} \rightarrow$ **GOTO(10)**
 - 8.2) Elseif $\exists k, f_k(\sigma'_{[0]}^{(tr,NL)}, \chi_k^{pl(n)}) > \text{TO}L_{f_k} \rightarrow$ paso elastoplástico $\rightarrow [i] \rightarrow [i+1] \rightarrow$ **GOTO(9)**
- 9) **Return Mapping y proceso iterativo sobre** $\Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}$:
 - 9.1) Tipo de régimen elástico:
 - 9.1.1) If $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$ y $\widehat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)}) \rightarrow$ Dominio 1 \rightarrow **GOTO(9.2)**
 - 9.1.2) Elseif $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} > \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$ y $\widehat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)}) \rightarrow$ Dominio 2 \rightarrow **GOTO(9.3.3)**
 - 9.1.3) Elseif $\widehat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \widehat{\epsilon}^{(n+1)} > \cos(\alpha^{*(n)}) \rightarrow$ Dominio 1 \rightarrow **GOTO(9.3.2)**
 - 9.2) Cálculo de $\Delta K_{s,[i]}^{r(n+1)}, \Delta G_{s,[i]}^{ap,(n+1)}$ con $\Delta \epsilon_{oct,[i]}^{e,(n+1)} \rightarrow$ **GOTO(9.3.1)**
 - 9.3) Cálculo de $\mathbf{E}'_s^{r(n+1)}$ y de $\Delta \mathbf{E}'_{s,[i]}^{r(n+1)}$, o $\mathbf{E}'_t^{r(n+1)}$
 - 9.3.1) Dominio 1: $\mathbf{E}'_s^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap,(n)})$ y $\Delta \mathbf{E}'_{s,[i]}^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_s(\Delta K'_{s,[i]}^{r(n+1)}, \Delta G_{s,[i]}^{ap,(n+1)}) \rightarrow$ **GOTO(9.4.1)**
 - 9.3.2) Dominio 1: $\mathbf{E}'_s^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap,(n+1)})$ y $\Delta \mathbf{E}'_{s,[i]}^{r(n+1)} = \mathbf{0} \rightarrow$ **GOTO(9.4.1)**
 - 9.3.3) Dominio 2: $\mathbf{E}'_t^{r(n+1)} = \mathbf{E}'_t(K'_t, G_{t,ur}^{(n)}) \rightarrow$ **GOTO(9.4.2)**
 - 9.4) Cálculo de la tensión trial:
 - 9.4.1) Dominio 1: $\sigma'_{[i]}^{(tr,NL)} = \sigma^{(n)} + \mathbf{E}'_s^{r(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)} + \Delta \mathbf{E}'_{s,[i]}^{r(n+1)} : (-\epsilon_{oct}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + e^{\Delta R,(n+1)}) \rightarrow$ **GOTO(9.5)**
 - 9.4.2) Dominio 2: $\sigma'_{[0]}^{(tr)} = \sigma^{(n)} + \mathbf{E}'_t^{r(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)} \rightarrow$ **GOTO(9.5)**
 - 9.5) Algoritmo de *Return Mapping* (según capítulo 4)
 - 9.6) Cálculo de la tensión $\sigma^{(n+1)}$:
 - 9.6.1) Dominio 1: $\sigma'_{[i]}^{(n+1)} = \sigma'_{[i]}^{(tr,NL)} - \sum_{k=1}^q \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_s^{r(n+1)} : \partial g_k(\sigma'_{[i]}^{(n+1)}, \chi_k^{pl(n+1)}) / \partial \sigma' \rightarrow$ **GOTO(9.7)**
 - 9.6.2) Dominio 2: $\sigma'_{[0]}^{(n+1)} = \sigma'_{[0]}^{(tr)} - \sum_{k=1}^q \lambda_{k,[0]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_t^{r(n+1)} : \partial g_k(\sigma'_{[0]}^{(n+1)}, \chi_k^{pl(n+1)}) / \partial \sigma' \rightarrow$ **GOTO(10)**
 - 9.7) Cálculo de $\Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)*} = (\mathbf{E}'_s^{r(n+1)})^{-1} (\Delta \sigma'_{[i]}^{(n+1)} - \Delta \mathbf{E}'_{s,[i]}^{r(n+1)} : (-\epsilon_{oct}^{e,(n)} \mathbf{1} + e^{\Delta R,(n)}))$
 - 9.8) Errores $\Delta \epsilon_{abs}^{e,(n+1)} = \|\Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)*} - \Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\|$ y $\Delta \epsilon_{rel}^{e,(n+1)} = \Delta \epsilon_{abs}^{e,(n+1)} / \|\Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\|$ y **criterio de convergencia**:
 - 9.8.1) If $\Delta \epsilon_{abs}^{e,(n+1)} \leq \text{TO}L_{\Delta \epsilon,abs}$ y $\Delta \epsilon_{rel}^{e,(n+1)} \leq \text{TO}L_{\Delta \epsilon,rel} \rightarrow \Delta \epsilon^{e,(n+1)} = \Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)*} \rightarrow$
 $\rightarrow \sigma^{(n+1)} = \sigma'_{[i]}^{(n+1)}, \chi_k^{pl(n+1)} = \chi_k^{pl(n+1)} \rightarrow$ **GOTO(10)**
 - 9.8.2) Elseif $\Delta \epsilon_{abs}^{e,(n+1)} > \text{TO}L_{\Delta \epsilon,abs}$ o $\Delta \epsilon_{rel}^{e,(n+1)} > \text{TO}L_{\Delta \epsilon,rel} \rightarrow \Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)} = f(\Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)*}, \Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}),$
 $[i] \rightarrow [i+1] \rightarrow$ **GOTO(9.2)**
- 10) **Actualización de variables de estado**: $\chi^{el,hist,(n+1)}$
- 11) **Comprobación paso de cálculo**:
 - 11.1) If $n < n_{fin}$, $(n) \rightarrow (n+1)$, **GOTO(1)**
 - 11.2) Elseif $n = n_{fin}$, **END**

Figura 5.05. Esquema del algoritmo utilizado.

5.4.5. Implementación numérica del modelo *EPHYSS* con el módulo *UDSM* de Plaxis

El modelo *EPHYSS* se ha implementado numéricamente en FORTRAN utilizando el módulo *User Defined Soil Model* de Plaxis (Plaxis, 2012) descrito en el apartado 4.4 del capítulo 4.

El modelo *EPHYSS* aprovecha las mismas subrutinas que el modelo *HS* implementado en el capítulo 4, así como su estructuración, adaptándolas convenientemente para incorporar el modelo *HQH* y las modificaciones del modelo *HS* descritas en el apartado 5.2 del presente capítulo. Estas subrutinas son: *User_Mod*, *MyModel*, *HS_plast*, *MC_plast*, *CAP_plast*, *TRAC_plast*, *HS_CAP_plast*, *MC_CAP_plast*, *HS_TRAC_plast*, *MC_TRAC_plast*, *Usr_Add* y *Usrlib*.

Al conjunto de subrutinas anteriores, se añaden cuatro nuevas:

- La subrutina *Matriz6_NL* que permite construir la matriz 6x6 con el valor de los componentes del tensor de rigidez E y de su incremento dE
- La subrutina *Matriz3_NL* que permite construir la matriz 3x3 con el valor de los componentes del tensor de rigidez E y de su incremento dE , que debe aplicarse sobre el vector de tensiones principales, una vez diagonalizado el tensor de tensiones.
- La subrutina *modul* que permite calcular el módulo de un vector o tensor.
- La subrutina *norm* que permite calcular el vector o tensor normalizado de un vector o tensor, siempre y cuando su módulo sea no nulo.

El código desarrollado para la implementación del modelo *EPHYSS* se ha compilado como *Dynamic Link Library (DLL)* utilizando el compilador *Lahey Fortran* o el compilador *Intel Fortran*. Dicho código completo puede consultarse en el anejo III del presente trabajo.

5.4.5.1. Nueva estructura de la subrutina *MYMODEL2.f90* (Plaxis 2D v9) y *MYMODEL4.f90* (Plaxis 2D 2011 y posteriores versiones)

Como ya se ha comentado en el apartado 4.4.1.3 del capítulo 4, las subrutinas principales *MyModel1*, *MyModel2*, etc. (que se pueden encontrar dentro de los archivos *Mymodel1.f90*, *Mymodel2.f90*, etc.) contienen las líneas de código de cada uno de los modelos implementados (hasta 10 modelos). Dichas subrutinas siguen una estructuración basada en 6 tareas que se identifican con el nombre *IDTask*. Dichas tareas se enumeran de la 1 a la 6, aunque Plaxis no las ejecute en este orden, y algunas de ellas pueden ser llamadas en diversas ocasiones durante una misma iteración global.

A continuación, se describe brevemente en qué consiste cada una de las tareas *IDTask* particularizándolas para el caso del modelo *EPHYSS*:

$IDTask = 1$ En la tarea $IDTask = 1$ se determina el valor de las variables de estado iniciales.

En el caso del modelo EPHYSS, se han definido las siguientes variables:

- $StVar(1)$: deformación desviadora plástica acumulada $gamma_p \equiv \gamma^p > 0$.
- $StVar(2)$: presión de preconsolidación isotrópica $-p_p \equiv -p_p < 0$.
- $StVar(3)$: valor módulo de corte máximo correspondiente a la curva de degradación activa α , $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} < G_{s0_ap_alfa_H_ref} \equiv G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$.
- $StVar(4)$ a $StVar(9)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ en notación de Voigt del tensor de historia de las deformaciones desviadoras $xh_T \equiv \mathbf{h}$.
- $StVar(10)$ a $StVar(15)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ en notación de Voigt del tensor de deformaciones totales ϵ , $eps(i) \equiv \epsilon_i$.
- $StVar(16)$ a $StVar(21)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ en notación de Voigt del tensor de deformaciones elásticas ϵ^e , $eps_e(i) \equiv \epsilon_i^e$.
- $StVar(22)$ a $StVar(27)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ en notación de Voigt del tensor de deformaciones desviadoras totales respecto al último punto de reversión R que define el extremo del ciclo de deformación activo \mathbf{e}^R , $eps_R_dev(1) \equiv e_i^R$.
- $StVar(28)$ a $StVar(33)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ en notación de Voigt del tensor de deformaciones desviadoras elásticas respecto al último punto de reversión R que define el extremo del ciclo de deformación activo $\mathbf{e}^{e,R}$, $eps_e_R_dev(1) \equiv e_i^{e,R}$.
- $StVar(34)$ a $StVar(39)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ del vector que almacena el valor de $\|\mathbf{h}\|$ en cada uno de los puntos de reversión R_i que define el extremo de los ciclos de deformación activos \mathbf{H}_{MEM} , $xH_M(i) \equiv H_{MEM,i}$.
- $StVar(40)$ a $StVar(45)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ del vector que almacena el valor de $\|\mathbf{e}^R\|$ en cada uno de los puntos de reversión R_i que define el extremo de los ciclos de deformación activos \mathbf{E}_{MEM} , $xE_M(i) \equiv E_{MEM,i}$.
- $StVar(46)$ a $StVar(51)$: Componentes $i = 1 \dots 6$ del vector que almacena el valor de $\|\mathbf{e}^{e,R}\|$ en cada uno de los puntos de reversión R_i que define el extremo de los ciclos de deformación activos \mathbf{E}_{MEM}^e , $xE_e_M(i) \equiv E_{MEM,i}^e$.
- $StVar(52)$: Valor mínimo histórico del módulo de corte aparente tangente en los procesos de carga noval, $Gmin \equiv G_{t,min,\xi=1}^{ap}$.

El resto de variables de historia no son requeridas para el cálculo y se definen únicamente para una rápida visualización de los resultados.

En las variables de estado H_{MEM} , E_{MEM} y E_{MEM}^e se ha considerado un valor de $\bar{M} = 6$, siendo \bar{M} el número máximo de puntos de reversión en los que el modelo es capaz de almacenar información. Este valor puede ser mayor o menor en función del número de ciclos de descarga/recarga estimado en las trayectorias de deformación del suelo del problema que se esté analizando.

Tras cargar el valor de los parámetros del modelo, se calculan los valores iniciales de las variables de estado como sigue:

$$\begin{aligned}
 StVar0(1) &= \max(StVar0(1), 10^{-10}, \gamma^{p,eq}) \\
 StVar0(2) &= \min(StVar0(2), -c' \cos(\varphi') / \sin(\varphi'), -1, -p_p^{eq}) \\
 p_p^{eq} &= \sqrt{(p^{eq})^2 + (q^{eq} / \alpha')^2} \\
 p^{eq} &= \max\left(1/3 (1 + 2K_0^{NC}) (-\sigma'_{yy})^{(n)} OCR, 1/3 (-\sigma'_1)^{(n)} - \sigma'_2)^{(n)} - \sigma'_3)^{(n)}\right) \\
 q^{eq} &= \max\left((1 - K_0^{NC}) (-\sigma'_{yy})^{(n)} OCR, -\sigma'_1)^{(n)} - (-\sigma'_3)^{(n)}\right) \\
 \gamma^{p,eq} &= 2q_a / E'_i (q^{eq} / (q_a - q^{eq})) - 2q^{eq} / E'_{t,ur} \\
 StVar0(3) &= \begin{cases} G_{s,0}^{ap,180,H,ref} & \text{si } StVar0(3) < 1 \text{ o } Reini_Stiff = 1 \\ StVar0(3) & \text{si } StVar0(3) \geq 1 \end{cases} \\
 StVar0(i) &= \begin{cases} StVar0(i) & \text{si } Reini_Stiff = 0 \\ 0 & \text{si } Reini_Stiff = 1 \end{cases} \quad i = 1 \dots 33 \\
 StVar0(i) &= \begin{cases} \max(StVar0(i), 0) & \text{si } Reini_Stiff = 0 \\ 0 & \text{si } Reini_Stiff = 1 \end{cases} \quad i = 34 \dots 51 \\
 StVar0(52) &= \begin{cases} G_{s,0}^{ap,180,H,ref} & \text{si } StVar0(53) < 1 \text{ o } Reini_Stiff = 1 \\ StVar0(52) & \text{si } StVar0(53) \geq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donde $Prs_0(1) = -\sigma'_1)^{(n)} \geq Prs_0(2) = -\sigma'_2)^{(n)} \geq Prs_0(3) = -\sigma'_3)^{(n)}$ son las tensiones principales al final del paso de cálculo $(n - 1) \rightarrow (n)$, $-\sigma'_{yy})^{(n)}$ es la tensión vertical al final del paso de cálculo $(n - 1) \rightarrow (n)$, q_a , E'_i y $E'_{t,ur}$ son las variables descritas en el apartado 4.1.2.1 del capítulo 4 y $OCR = (-\sigma'_{v,max}) / (-\sigma'_v)$, siendo $-\sigma'_{v,max}$ la tensión máxima vertical histórica y $-\sigma'_v$ la tensión vertical actual.

Plaxis transmitirá automáticamente el valor final de las variables de estado calculadas, desde la variable $StVar$ correspondiente al paso de cálculo actual, a la variable $StVar0$ correspondiente al siguiente paso de cálculo. En el caso de que se definan diferentes fases de cálculo, el valor de las variables de estado se transmitirá del mismo modo.

Cuando se utilice el índice OCR , este deberá aplicarse únicamente en la primera fase de cálculo. Para ello, se aconseja definir dos conjuntos de parámetros para un mismo material: el primer set de parámetros, con el valor OCR que se considere conveniente, se aplicará exclusivamente en la primera fase de cálculo; y el segundo set de parámetros, que tendrá los mismos valores de parámetros considerados en

el primer *set*, a excepción del valor de *OCR* que será $OCR = 0$ a efectos numéricos, se aplicará en las siguientes fases de cálculo, con objeto de no distorsionar el valor de $-p_p^{eq}$.

Se define el parámetro *Reini_Stiff* que adoptará un valor de 1 cuando se quiera resetear la historia de deformaciones del suelo en una determinada fase de cálculo, reiniciando el valor de las variables de historia elásticas $\chi^{el,hist}$ al inicio de dicha fase. En caso contrario, *Reini_Stiff* adoptará un valor de 0. Generalmente, cuando *Reini_Stiff* = 1, se resetearán también los desplazamientos del terreno mediante la *Interface* de Plaxis.

IDTask = 2

En la tarea *IDTask* = 2 se calcula el valor de las tensiones en cada paso de cálculo mediante la integración local de las ecuaciones constitutivas. En el modelo EPHYSS la tarea incluye los siguientes pasos:

- 1) Carga de los parámetros del modelo en el vector *Props*.
- 2) Cálculo de la presión de agua en los poros (*Swp*) en cálculos no drenados.
- 3) Determinación del dominio de deformación al que corresponde el paso de cálculo:

$$gamma_oct_DR \equiv \gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} \leq gamma_alfa_ur \equiv \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \text{ (Dominio 1)}$$

$$gamma_oct_DR \equiv \gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} > gamma_alfa_ur \equiv \gamma_{ur}^{\alpha,(n)} \text{ (Dominio 2)}$$
- 4) Cálculo de los productos $xh_T_norm_d_eps_dev_norm \equiv \hat{\mathbf{h}}^{(n)} : \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)}$ y $eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm \equiv \hat{\mathbf{e}}^{\Delta R,(n)} : \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)}$ para conocer si en el paso de cálculo actual existe reversión y si dicha reversión afectará el valor de las variables de estado $eps_R \equiv \mathbf{e}^{R,(n)}$, $eps_e_R \equiv \mathbf{e}^{e,R,(n)}$, $xH_M \equiv \mathbf{H}_{MEM}^{(n)}$, $xE_M \equiv \mathbf{E}_{MEM}^{(n)}$, $xE_e_M \equiv \mathbf{E}_{MEM}^{e,(n)}$.
- 5) Cálculo del incremento de las variables de estado $d_xH_T \equiv \Delta \mathbf{h}^{(n+1)}$ y $d_Gs0_ap_alfa_H_ref_CORR \equiv \Delta G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR,(n+1)}$.
- 6) Actualización de $Gmin \equiv G_{t,min,\xi=1}^{ap}$.
- 7) Cálculo de los módulos de rigidez. Se considerará $xK \equiv K'_s{}^{(n)}$ y $G \equiv G_s^{ap,(n)}$ o $xK \equiv K'_t{}^{(n)}$ y $G \equiv G_{t,ur}^{(n)}$ salvo en el caso de que tenga lugar una reversión que implique la creación de un punto de reversión que defina el extremo de un nuevo ciclo de deformación, en el que se considerará $xK \equiv K'_s{}^{(n+1)}$ y $G \equiv G_s^{ap,(n+1)}$. En todos los casos se considerará una presión mínima de $-p' = 0,1p'_{ref,1}$ o $-p' = 0,1p'_{ref,2}$ para el cálculo de xK y G , respectivamente, con objeto de evitar matrices de rigidez casi singulares.
- 8) En caso de encontrarse en el Dominio 1, se abre un ciclo iterativo sobre $d_eps_e \equiv \Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$ para el cálculo de $d_Ks \equiv \Delta K'_{s,[i]}{}^{(n+1)}$, $d_Gs_ap \equiv G_{s,[i]}^{ap,(n+1)}$ y $eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct \equiv \left(-\epsilon_{oct,[i]}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + \mathbf{e}_{[i]}^{e,\Delta R,(n+1)} \right)$.

- 9) Cálculo de los tensores $D \equiv \mathbf{E}'_s^{(n+1)}$ y $dD \equiv \Delta \mathbf{E}'_s^{(n+1)}$ considerando $d_{Ks} \equiv \Delta K'_{s,[0]}^{(n+1)}$, $d_{Gs_ap} \equiv G_{s,[0]}^{ap,(n+1)}$ y $eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct \equiv \left(-\epsilon_{oct,[0]}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + \mathbf{e}_{[0]}^{e,\Delta R,(n+1)} \right)$, o $D \equiv \mathbf{E}'_t^{(n+1)}$, según el caso. El cálculo de la matriz asociada a dichos tensores se hace a través de las subrutinas *Matriz6_NL* y *Matriz3_NL*. Asimismo, en este punto se impondrá la condición $v' \geq v'_{min}$.
- 10) Cálculo del tensor de tensiones trial $Sig_E \equiv \boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}$ o $Sig_E \equiv \boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$, según el caso.
- 11) Diagonalización del tensor $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}$ o $\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}$, según el caso, y obtención de las tensiones principales $Prs_E(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(tr,NL)} \geq Prs_E(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(tr,NL)} \geq Prs_E(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(tr,NL)}$ o $Prs_E(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(tr)} \geq Prs_E(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(tr)} \geq Prs_E(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(tr)}$ y de los autovectores $S(1) \equiv \mathbf{v}_1^{(tr,NL)}$, $S(2) \equiv \mathbf{v}_2^{(tr,NL)}$ y $S(3) \equiv \mathbf{v}_3^{(tr,NL)}$ o $S(1) \equiv \mathbf{v}_1^{(tr)}$, $S(2) \equiv \mathbf{v}_2^{(tr)}$ y $S(3) \equiv \mathbf{v}_3^{(tr)}$, según el caso.
- 12) Cálculo de los valores $f_{k,13}^{trial,NL} \equiv f_{k,13} \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr,NL)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl} \right)$ o $f_{k,13}^{trial} \equiv f_{k,13} \left(\boldsymbol{\sigma}'^{(tr)}, \boldsymbol{\chi}_k^{pl} \right)$, según el caso, suponiendo $-\sigma'_1{}^{(tr,NL)} \geq -\sigma'_2{}^{(tr,NL)} \geq -\sigma'_3{}^{(tr,NL)}$ o $-\sigma'_1{}^{(tr)} \geq -\sigma'_2{}^{(tr)} \geq -\sigma'_3{}^{(tr)}$ ($iArea = 1$): $f13_hs$, $f13_mc$, $f13_cap$ y $f13_trac$.
- 13) Cálculo del valor de las tolerancias $f_{k,13}^{TOL}$: $f13_hs_TOL$, $f13_mc_TOL$, $f13_cap_TOL$ y $f13_trac_TOL$. Se utiliza un valor de la tolerancia relativa de $ttol = 10^{-12}$, teniendo en cuenta que $f13_i_TOL = ttol \cdot f13_i + ttol$.
- 14) Comprobación del tipo de paso de cálculo: elástico o elastoplástico.
- 15) En caso de que el paso de cálculo resulte elástico, se considerará: $d_eps_e \equiv \Delta \epsilon_{[0]}^{e,(n+1)}$, $Prs(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n+1)} = Prs_E(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(tr,NL)} \geq Prs(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n+1)} = Prs_E(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(tr,NL)} \geq Prs(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n+1)} = Prs_E(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(tr,NL)}$ o $Prs(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n+1)} = Prs_E(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(tr)} \geq Prs(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n+1)} = Prs_E(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(tr)} \geq Prs(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n+1)} = Prs_E(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(tr)}$, según el caso, y $StVar(1) \equiv \gamma^{p,(n+1)} = StVar0(1) \equiv \gamma^{p,(n)}$ y $StVar(2) \equiv -p_p^{(n+1)} = StVar0(2) \equiv -p_p^{(n)}$.
- 16) En caso de que el paso de cálculo no sea elástico y la deformación corresponda al Dominio 1, se continúa el ciclo iterativo sobre $d_eps_e \equiv \Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$ hasta convergencia y se aplica, en cada iteración, la estrategia para la selección de las superficies de fluencia sobre las que realizar el *Return Mapping*. En caso de que el paso de cálculo no sea elástico y la deformación corresponda al Dominio 2, se aplica directamente el *Return Mapping* sobre la tensión trial inicial. Finalmente se obtienen las tensiones $Prs(1) \equiv -\sigma'_1{}^{(n+1)} \geq Prs(2) \equiv -\sigma'_2{}^{(n+1)} \geq Prs(3) \equiv -\sigma'_3{}^{(n+1)}$ y se actualizan de las variables de estado plásticas $StVar(1) \equiv \gamma^{p,(n+1)}$ y

$StVar(2) \equiv -p_p^{(n+1)}$. El algoritmo recurre, en este punto, a las subrutinas: HS_plast , CAP_plast , MC_plast , $TRAC_plast$, HS_CAP_plast , MC_CAP_plast , HS_TRAC_plast , MC_TRAC_plast .

17) Comprobación de que el estado tensional no se sitúa fuera de la esquina de tracción $-p' = (-\sigma'_1 + (-\sigma'_2) + (-\sigma'_3))/3 < -sigma_trac \equiv -\sigma'_{trac}$. En caso de que se cumpla esta condición, se considera $Prs(1) \equiv -\sigma'_1^{(n+1)} = Prs(2) \equiv -\sigma'_2^{(n+1)} = Prs(3) \equiv -\sigma'_3^{(n+1)} = -sigma_trac \equiv -\sigma'_{trac}$ y $StVar(1) \equiv \gamma^{p,(n+1)} = StVar0(1) \equiv \gamma^{p,(n)}$ y $StVar(2) \equiv -p_p^{(n+1)} = StVar0(2) \equiv -p_p^{(n)}$.

18) Cálculo del tensor de tensiones $Sig \equiv \sigma'^{(n+1)}$ a partir de los valores de las tensiones principales $Prs(1) \equiv -\sigma'_1^{(n+1)} \geq Prs(2) \equiv -\sigma'_2^{(n+1)} \geq Prs(3) \equiv -\sigma'_3^{(n+1)}$ y de los vectores propios $S(1) \equiv v_1^{(tr,NL)}$, $S(2) \equiv v_2^{(tr,NL)}$ y $S(3) \equiv v_3^{(tr,NL)}$ o $S(1) \equiv v_1^{(tr)}$, $S(2) \equiv v_2^{(tr)}$ y $S(3) \equiv v_3^{(tr)}$ correspondientes a $Sig_E \equiv \sigma'^{(tr,NL)}$ o $Sig_E \equiv \sigma'^{(tr)}$, según el caso, calculados previamente. Se supone que no hay rotación de las direcciones principales durante el *Return Mapping*.

19) Actualización de variables de estado $StVar(i)$, $i = 3 \dots 51$.

20) Comprobación de cierre de ciclos y actualización de variables de estado $StVar(i)$, $i = 4 \dots 51$.

$IDTask = 3$ En la tarea $IDTask = 3$ se calcula la matriz con las componentes del tensor de rigidez en el Dominio correspondiente, en función del valor de $gamma_oct_DR \equiv \gamma_{oct}^{\Delta R,(n)}$ y $gamma_alfa_ur \equiv \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$ (considerando $dD \equiv \Delta E'_s{}^{(n+1)} \approx \mathbf{0}$, dado que aún no se conoce el valor de $dEps \equiv \Delta \epsilon^{(n+1)}$). Para ello, se recurre a la subrutina *Matriz6_NL*. En caso de que el comportamiento del suelo sea de tipo no drenado ($IsUndr = 1$), se calcula, en esta tarea, el valor del módulo volumétrico del agua ($Bulk_W$), que se utiliza en el cálculo de las tensiones efectivas. Ello se hace considerando un valor del coeficiente de Poisson no drenado $\nu_u = 0,495$.

$IDTask = 4$ En la tarea $IDTask = 4$ se indica el número de variables de estado del modelo ($nStat$).

$IDTask = 5$ En la tarea $IDTask = 5$ se especifican las características de la matriz asociada al tensor de rigidez tangente.

- Matriz simétrica ($NonSym = 0$) que permite almacenar únicamente la mitad de los coeficientes, o matriz no simétrica ($NonSym = 1$) en la que deben almacenarse todos los coeficientes.
- Matriz dependiente de las tensiones ($iStrsDep = 1$), en cuyo caso, la matriz de rigidez global se calcula y descompone al inicio de cada paso de cálculo (método de Newton-Raphson modificado), o matriz no dependiente de las tensiones ($iStrsDep = 0$).

- Matriz dependiente del tiempo ($iTimeDep = 1$), en cuyo caso, la matriz de rigidez global se calcula y descompone cada vez que cambia el tiempo, o matriz no dependiente del tiempo ($iTimeDep = 0$).
- Matriz de rigidez global tangente que se calcula y descompone en cada iteración de cada paso de cálculo y que será utilizada en un algoritmo iterativo de Newton-Raphson, en combinación con $iStrsDep = 1$ ($iTang = 1$), o no ($iTang = 0$).

$IDTask = 6$ En la tarea $IDTask = 6$ se calcula la matriz elástica con las componentes del tensor de rigidez en el Dominio correspondiente, en función del valor de $gamma_oct_DR \equiv \gamma_{oct}^{\Delta R, (n)}$ y $gamma_alfa_ur \equiv \gamma_{ur}^{\alpha, (n)}$ (considerando $dD \equiv \Delta \mathbf{E}_s^{(n+1)} \approx \mathbf{0}$, dado que aún no se conoce el valor de $dEps \equiv \Delta \epsilon^{(n+1)}$). Para ello, se recurre a la subrutina *Matriz6_NL*. En caso de que el comportamiento del suelo sea de tipo No Drenado ($IsUndr = 1$), se calcula, en esta tarea, el valor del módulo volumétrico del agua ($Bulk_W$), que se utiliza en el cálculo de las tensiones efectivas. Ello se hace considerando un valor del coeficiente de Poisson no drenado $\nu_u = 0,495$.

5.4.5.2. MATRIZ6_NL.f90

La subrutina *MATRIZ6_NL* (que se puede encontrar dentro del archivo *MATRIZ6_NL.f90*) permite calcular las componentes de la matriz asociada al tensor de rigidez secante o tangente y al incremento de dicho tensor, respectivamente, a partir del valor de los módulos de rigidez volumétrico y de corte o de sus incrementos.

5.4.5.3. MATRIZ3_NL.f90

La subrutina *MATRIZ3_NL* (que se puede encontrar dentro del archivo *MATRIZ3_NL.f90*) permite calcular las componentes esféricas de la matriz asociada al tensor de rigidez secante o tangente y al incremento de dicho tensor, respectivamente, a partir del valor de los módulos de rigidez volumétrico y de corte o de sus incrementos. Se trata de la matriz que se utiliza en el espacio de tensiones principales, una vez diagonalizado el tensor de tensiones.

5.4.5.4. MODUL.f90

La subrutina *MODUL* (que se puede encontrar dentro del archivo *MODUL.f90*) permite calcular el módulo de un vector o tensor.

5.4.5.5. NORM.f90

La subrutina *NORM* (que se puede encontrar dentro del archivo *NORM.f90*) permite calcular el vector o tensor normalizado de un determinado vector o tensor, siempre y cuando su módulo no sea nulo, en cuyo caso el vector o tensor normalizado tendrá todas sus componentes nulas.

5.4.5.6. Interface

La introducción de los parámetros del modelo *EPHYSS*, al igual que el modelo *HS* implementado en el capítulo 4, se hace a través de la *Interface* de Plaxis, tal como se describe en detalle en el apartado 4.4.2 del capítulo 4.

En la figura 5.06 se muestra la pestaña *Parameters* en diferentes versiones de Plaxis. En dicha pestaña aparecerá una tabla con el nombre de los parámetros definidos previamente en el código del modelo implementado, así como sus unidades. En esta tabla deberá introducirse el valor numérico de cada parámetro para que Plaxis pueda leerlo y aplicarlo en el programa de cálculo.

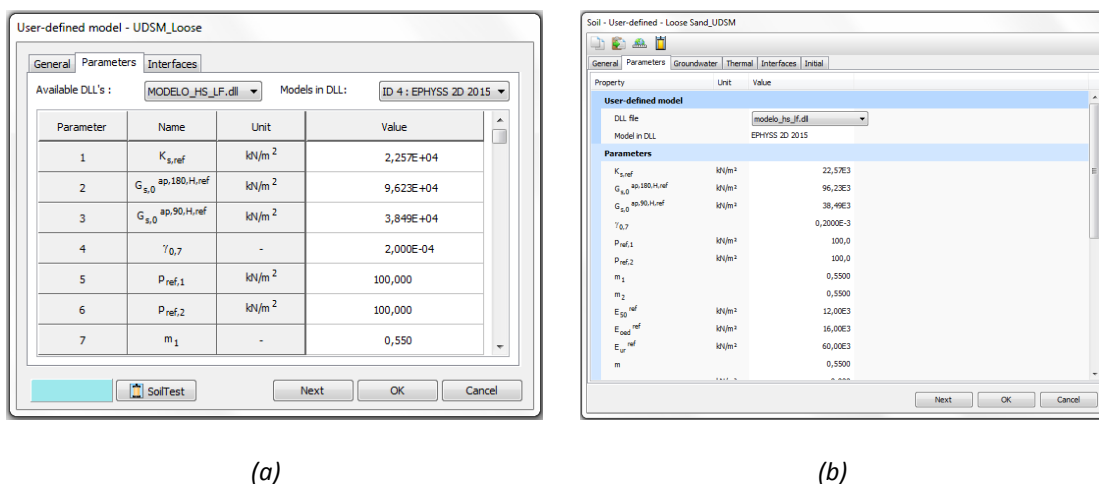


Figura 5.06. Selección del archivo DLL, selección del modelo dentro de dicho archivo e introducción de los parámetros del modelo EPHYSS. (a) Plaxis 2D v9. (b) Plaxis 2D 2015.

5.4.5.7. Metodología para la depuración del código, compilación de las subrutinas y parámetros de cálculo avanzado

La metodología para la depuración del código, el procedimiento para la compilación de las subrutinas del mismo y la descripción de los parámetros avanzados que utiliza Plaxis en los cálculos, son los mismos que los descritos, respectivamente, en los apartados 4.4.3, 4.4.4 y 4.4.5 del capítulo 4.

5.5. Coste computacional

El coste computacional en el modelo *EPHYSS* se incrementa ligeramente respecto al del modelo *HS-SS*, lo cual implica un mayor tiempo de cálculo. No obstante, debe tenerse en cuenta lo siguiente: (1) el código de *EPHYSS* no ha sido optimizado para minimizar el número de operaciones realizadas y (2) mientras la asignación de memoria RAM a los cálculos con *EPHYSS* es de 2GB, por utilizar un compilador de 32 bits, esta es de 8GB en el modelo *HS-SS*, que utiliza el procesador de 64 bits, lo cual es significativo en determinados problemas de contornos.

En cualquier caso, los tiempos de cálculo medidos en las simulaciones con *EPHYSS* de los problemas de contorno analizados en los capítulos 7 y 8, utilizando un procesador convencional, concretamente un Intel®Core™ i7-4910MQ de 4 núcleos y 2,90GHz (3,80 GHz en función turbo) y 16GB de RAM, entran perfectamente dentro de los parámetros admisibles de un programa de cálculo geotécnico comercial.

Capítulo 6

Validación del modelo *EPHYSS* con ensayos y verificación del mismo

En el presente capítulo se realiza una verificación parcial del modelo *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)*, así como una validación del mismo a partir de los datos experimentales procedentes de ensayos de laboratorio recopilados de diversas tesis y artículos. La validación de un modelo consiste en comprobar si el grado de aproximación de los resultados de las simulaciones numéricas a los resultados experimentales es suficiente, mientras que su verificación consiste en comprobar si el modelo numérico es capaz de representar con precisión el modelo físico subyacente. La verificación parcial realizada consiste en comparar las curvas de degradación de G_s^{ap} aparente obtenidas en las simulaciones numéricas con las curvas teóricas derivadas de la expresión (3.05).

Las simulaciones se han realizado con el programa Plaxis 2D 2015 utilizando, por un lado, el modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis mediante el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)* de Plaxis (se utiliza el modelo correspondiente a la subrutina *Mymodel4.f90*, anejo III) y, por otro lado, el modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* predefinido en Plaxis. En el estudio de las inconsistencias del modelo *HS-SS* se ha utilizado también Plaxis 2D 2018.

En dichas simulaciones se han utilizado elementos isoparamétricos de 15 nodos y, en cuanto al convenio de signos en la formulación desarrollada en este capítulo, por congruencia con el criterio utilizado en Plaxis, se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión, incluida la presión del agua. Asimismo, en todo momento se considera el marco teórico de las pequeñas deformaciones ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

6.1. Tipo de suelos y parámetros utilizados en las simulaciones

Como indica Benz (2007), las particularidades del comportamiento constitutivo en el rango de las pequeñas deformaciones se consideran propias de diversos tipos de geomateriales, como son las arcillas, limos, arenas y gravas (Tatsuoka et al., 2001). Dicho comportamiento se observa durante procesos de carga de tipo estático y dinámico (Burland, 1989), así como en condiciones drenadas y no drenadas (Lo Presti et al., 1996). Es por ello que se ha considerado relevante utilizar diferentes materiales y condiciones de drenaje para la validación y verificación del modelo *EPHYSS*.

Tal como se ha descrito en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5, al no disponer de los resultados de los ensayos necesarios para la determinación de algunos de los parámetros del modelo *EPHYSS*, estos han sido estimados a partir de los parámetros del modelo *HS-SS*, sin necesidad, en este caso, de ajustar los parámetros del modelo *EPHYSS* para reproducir un mismo perfil inicial de rigideces, al despreciarse el peso propio del suelo en los ensayos. Asimismo, se han indicado los valores de los parámetros internos E_i^{ref} , α' y $K'_{t,ur}/K'_c$ del modelo *EPHYSS* utilizados para cada tipo de suelo y calculados con el algoritmo detallado en el anejo I, mientras que en el caso del modelo *HS-SS*, se desconoce el valor de dichos parámetros internos al no ser proporcionados por Plaxis.

6.1.1. Arenas

6.1.1.1. Arena de Hostun

Los parámetros de la arena de Hostun (Ródano-Alpes, Francia) y los resultados de los ensayos realizados con la misma, se han tomado de Benz (2007), que a su vez los ha tomado de Desrues et al. (2000) y Biarez y Hicher (1994). Los parámetros utilizados por Benz (2007) en el modelo *Hardening Soil Small (HS-S)* de Benz (2007) difieren ligeramente de los utilizados en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015) para la validación del modelo *HS-SS*, basado en el primero. Ello es debido a las pequeñas diferencias existentes entre ambos modelos (ver apartados 2.6.3.2.1.2 y 2.6.3.2.1.3 del capítulo 2). Aun así, los gráficos que se muestran en el Manual de Materiales de Plaxis (Plaxis, 2015) se corresponden, aparentemente, con los de Benz (2007), motivo por el cual se han utilizado los parámetros de este último en las simulaciones realizadas con el modelo *HS-SS*. Según Benz (2007), la arena utilizada en los ensayos tiene un diámetro de grano medio $D_{50} = 0,35\text{mm}$ y un coeficiente de uniformidad $U = D_{60}/D_{30} = 1,70$. Asimismo, los valores del índice de poros de dicha arena, respectivamente para un estado denso y suelto, según Desrues et al. (2000), son $e = 0,85 - 0,92$ y $e = 0,63 - 0,68$. Los parámetros del modelo *EPHYSS* y del *HS-SS* para la arena de Hostun se detallan en las tablas 6.01 y 6.02.

	Parámetros	Arena suelta de Hostun	Arena densa de Hostun	Unidades	
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0001	0,0002	[-]
	HS-SS	G_0^{ref}	70.000	112.500	[kN/m ²]
		ν'_{ur}	0,25	0,25	[-]
	EPHYSS	K_s^{ref}	8.300	22.500	[kN/m ²]
		m_1	0,75	0,55	[-]
		$p'_{ref,1}$	100	100	[kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	70.000	112.500	[kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	28.000	45.000	[kN/m ²]
		m_2	0,75	0,55	[-]
		$p'_{ref,2}$	100	100	[kN/m ²]
ν'_{min}		0,20	0,20	[-]	
COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	E_{50}^{ref}	12.000	30.000	[kN/m ²]
		$E_{t,ur}^{ref}$	60.000	90.000	[kN/m ²]
		E_{oed}^{ref}	16.000	30.000	[kN/m ²]
		c'	0,10	0,0	[kN/ m ²]
		φ'	34	42	[deg]
		ψ	0	16	[deg]
		p'_{ref}	100	100	[kN/ m ²]
		m	0,75	0,55	[-]
		K_0^{NC}	0,44	0,40	[-]
		R_f	0,90	0,90	[-]
		σ'_{trac}	0	0	[kN/ m ²]

Tabla 6.01. Parámetros de los modelos EPHYSS y HS-SS para la arena de Hostun suelta y densa.

	Parámetros internos	Arena suelta de Hostun	Arena densa de Hostun	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	E_i^{ref}	38.416	84.166	[kN/ m ²]
	α'	2,73	2,28	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	2,40	2,04	[-]

Tabla 6.02. Parámetros internos del modelo EPHYSS para la arena de Hostun suelta y densa.

6.1.1.2. Arena de Hochstetten

Los parámetros utilizados en las simulaciones con arena de Hochstetten (Karlsruhe, Alemania) se han extraído de Niemunis y Herle (1997). Los parámetros relativos al comportamiento plástico se han estimado a partir de la información disponible, aunque estos son poco relevantes, puesto que en las simulaciones realizadas únicamente se estudia el rango elástico. Los parámetros del modelo *EPHYSS* y del modelo *HS-SS* para la arena de Hochstetten se detallan en las tablas 6.03 y 6.04.

		Parámetros	Arena de Hochstetten	Unidades	
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>	$\gamma_{0,7}$	0,000055	[-]	
	<i>HS-SS</i>	G_0^{ref}	68.000	[kN/m ²]	
		ν'_{ur}	0,20	[-]	
	<i>EPHYSS</i>	K_s^{ref}	5.000	[kN/m ²]	
		m_1	0,50	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	68.000	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	27.000	[kN/m ²]	
		m_2	0,50	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	[-]	
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO		E_{50}^{ref}	6.000	[kN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	18.000	[kN/m ²]
		E_{oed}^{ref}	6.000	[kN/m ²]	
		c'	0,0	[kN/ m ²]	
		ϕ'	33	[deg]	
<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>		ψ	0	[deg]	
		p'_{ref}	100	[kN/ m ²]	
		m	0,50	[-]	
		K_0^{NC}	0,45	[-]	
		R_f	0,90	[-]	
		σ'_{trac}	0,0	[kN/ m ²]	

Tabla 6.03. Parámetros de los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para la arena de Hochstetten.

		Parámetros internos	Arena de Hochstetten	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS <i>EPHYSS</i>		E_i^{ref}	17.149	[kN/ m ²]
		α'	2,40	[-]
		$K'_{t,ur}/K'_c$	2,00	[-]

Tabla 6.04. Parámetros internos del modelo *EPHYSS* para la arena de Hochstetten.

6.1.1.3. Arena de Ticino

Los parámetros utilizados para simular los ensayos con la arena de Ticino (Italia) se han extraído de Schädlich y Schweiger (2012). Los parámetros relativos al comportamiento plástico se han estimado a partir de la información disponible, aunque estos son poco relevantes, puesto que en las simulaciones realizadas únicamente se estudia el rango elástico. Los parámetros del modelo *EPHYSS* y del modelo *HS-SS* para la arena de Ticino se detallan en las tablas 6.05 y 6.06.

		Parámetros	Arena de Ticino	Unidades
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>	$\gamma_{0,7}$	0,00013	[-]
	<i>HS-SS</i>	G_0^{ref}	100.000	[kN/m ²]
		ν'_{ur}	0,20	[-]
	<i>EPHYSS</i>	K_s^{ref}	13.335	[kN/m ²]
		m_1	0,50	[-]
		$p'_{ref,1}$	100	[kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	100.000	[kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	40.000	[kN/m ²]
		m_2	0,50	[-]
		$p'_{ref,2}$	100	[kN/m ²]
		ν'_{min}	0,20	[-]
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>	E_{50}^{ref}	16.000
$E_{t,ur}^{ref}$			48.000	[kN/m ²]
E_{oed}^{ref}			16.000	[kN/m ²]
c'			0,0	[kN/ m ²]
ϕ'			33	[deg]
ψ			0	[deg]
p'_{ref}			100	[kN/ m ²]
m			0,50	[-]
K_0^{NC}			0,50	[-]
R_f			0,90	[-]
σ'_{trac}			0,0	[kN/ m ²]

Tabla 6.05. Parámetros de los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para la arena de Ticino.

		Parámetros internos	Arena de Ticino	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS <i>EPHYSS</i>		E_i^{ref}	45.504	[kN/ m ²]
		α'	1,75	[-]
		$K'_{t,ur}/K'_c$	1,93	[-]

Tabla 6.06. Parámetros internos del modelo *EPHYSS* para la arena de Ticino.

6.1.2. Arcillas

6.1.2.1. Arcilla caolinita

Los parámetros de la arcilla caolinita reconstituida y los resultados de los ensayos realizados con la misma, se han tomado de Benz (2007), que a su vez los ha tomado de Biarez y Hicher (1994). Dicha arcilla posee un índice de plasticidad $IP = 30$, un límite líquido $w_l = 70$ y un índice de sobreconsolidación $OCR = 1,0$. Los parámetros del modelo *EPHYSS* y del modelo *HS-SS* para la arcilla caolinita se detallan en las tablas 6.07 y 6.08.

	Parámetros	Arcilla caolinita reconstituida	Unidades
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>	$\gamma_{0,7}$	0,0002 [-]
	<i>HS-SS</i>	G_0^{ref}	33.333 [kN/m ²]
		ν'_{ur}	0,20 [-]
	<i>EPHYSS</i>	K_s^{iref}	1.277 [kN/m ²]
		m_1	0,80 [-]
		$p'_{ref,1}$	100 [kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	33.333 [kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	16.667 [kN/m ²]
		m_2	0,80 [-]
		$p'_{ref,2}$	100 [kN/m ²]
ν'_{min}		0,20 [-]	
COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>	E_{50}^{iref}	2.150 [kN/m ²]
		$E_{t,ur}^{iref}$	11.500 [kN/m ²]
		E_{oed}^{iref}	1.050 [kN/m ²]
		c'	0,0 [kN/ m ²]
		φ'	20 [deg]
		ψ	0 [deg]
		p'_{ref}	100 [kN/ m ²]
		m	0,80 [-]
		K_0^{NC}	0,50 [-]
		R_f	0,90 [-]
σ'_{trac}	0,0 [kN/ m ²]		

Tabla 6.07. Parámetros de los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para la arcilla caolinita reconstituida.

	Parámetros internos	Arcilla caolinita reconstituida	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS <i>EPHYSS</i>	E_i^{ref}	45.504	[kN/ m ²]
	α'	1,75	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	1,93	[-]

Tabla 6.08. Parámetros internos del modelo *EPHYSS* para la arcilla caolinita reconstituida.

6.1.2.2. Arcilla de Londres

Los parámetros de la arcilla Londres reconstituida y los resultados de los ensayos realizados con la misma, se han tomado de Benz (2007), que a su vez los ha tomado de Richardson (1988). La arcilla utilizada posee un índice de plasticidad $IP = 43$ y un límite líquido $w_l = 70$. Asimismo, las probetas ensayadas tienen un contenido de agua del 42% y un índice de sobreconsolidación $OCR = 2,0$. Los parámetros del modelo *EPHYSS* y del modelo *HS-SS* para la arcilla de Londres se detallan en las tablas 6.09 y 6.10.

		Parámetros	Arcilla de Londres	Unidades
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>	$\gamma_{0,7}$	0,00055	[-]
	<i>HS-SS</i>	G_0^{ref}	26.000	[kN/m ²]
		ν'_{ur}	0,20	[-]
	<i>EPHYSS</i>	K_s^{ref}	2.333	[kN/m ²]
		m_1	0,80	[-]
		$p'_{ref,1}$	100	[kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	26.000	[kN/m ²]
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	13.000	[kN/m ²]
		m_2	0,80	[-]
		$p'_{ref,2}$	100	[kN/m ²]
		ν'_{min}	0,20	[-]
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	<i>HS-SS</i> y <i>EPHYSS</i>	E_{50}^{ref}	7.000
$E_{t,ur}^{ref}$			21.000	[kN/m ²]
E_{oed}^{ref}			7.000	[kN/m ²]
c'			0,0	[kN/ m ²]
ϕ'			20	[deg]
ψ			0	[deg]
p'_{ref}			100	[kN/ m ²]
m			0,80	[-]
K_0^{NC}			0,66	[-]
R_f			0,90	[-]
σ'_{trac}			0,0	[kN/ m ²]

Tabla 6.09. Parámetros de los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para la arcilla de Londres reconstituida.

		Parámetros internos	Arcilla de Londres reconstituida	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS <i>EPHYSS</i>		E_i^{ref}	23.597	[kN/ m ²]
		α'	0,635	[-]
		$K'_{t,ur}/K'_c$	1,35	[-]

Tabla 6.10. Parámetros internos del modelo *EPHYSS* para la arcilla de Londres reconstituida.

6.2. Ensayos triaxiales

Se han realizado simulaciones numéricas de ensayos triaxiales drenados en arena suelta y densa de Hostun, con presiones de confinamiento de $-\sigma'_3 = 100kPa$, $-\sigma'_3 = 300kPa$ y $-\sigma'_3 = 600kPa$ y ensayos triaxiales no drenados en arena suelta y densa de Hostun con presiones de confinamiento $-\sigma'_3 = 200kPa$, $-\sigma'_3 = 300kPa$ y $-\sigma'_3 = 600kPa$. Se han realizado, asimismo, simulaciones numéricas de ensayos triaxiales drenados en arcilla caolinita reconstituida con presiones de confinamiento $-\sigma'_3 = 100kPa$, $-\sigma'_3 = 300kPa$ y $-\sigma'_3 = 600kPa$. Finalmente, se han realizado simulaciones numéricas de ensayos triaxiales con giros de tensiones en el plano desviador en arcilla de Londres. Los resultados experimentales de los ensayos se han extraído de Benz (2007), basados a su vez en los de Richardson (1988), Biarez y Hicher (1994) y Desrues et al. (2000).

6.2.1. Ensayos triaxiales drenados en arena de Hostun densa

6.2.1.1. Fase de consolidación con carga y descarga isotrópicas

En la figura 6.01 se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de los ensayos de carga y descarga durante la fase de consolidación de un ensayo triaxial en arena de Hostun densa. Como se puede ver, el modelo *EPHYSS* predice un comportamiento similar al predicho por el modelo *HS-SS*. La diferencia entre ambos modelos radica en que el modelo *EPHYSS* considera valores de K' y G independientes siempre que se cumpla $v' > v'_{min}$, mientras que en el modelo *HS-SS* el módulo volumétrico depende linealmente del módulo corte según $K' = (2/3)G(1 + v'_{ur})/(1 - 2v'_{ur})$. Tanto el modelo *EPHYSS* como el modelo *HS-SS* proporcionan rigideces volumétricas superiores a las obtenidas en los ensayos. No obstante, el modelo *EPHYSS* es capaz de mejorar notablemente la aproximación a las curvas experimentales reduciendo el valor de v'_{min} , si bien ello conduciría a errores importantes en la predicción de desplazamientos horizontales en problemas de contorno. En cualquier caso, tal como apunta Benz (2007), puesto que en la mayoría de problemas de contorno no son habituales las cargas, descargas o recargas isotrópicas puras, este efecto no se considera una limitación importante.

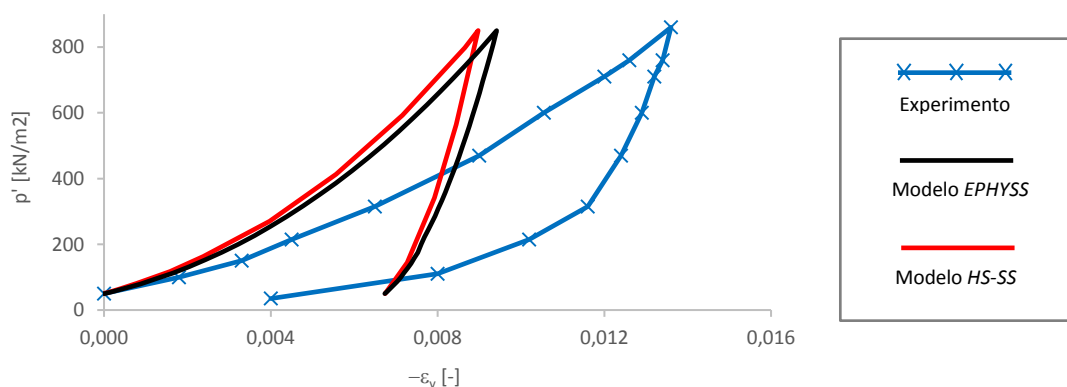


Figura 6.01. Carga y descarga isotrópica de un ensayo triaxial en arena de Hostun densa.

6.2.1.2. Fase desviadora

En las siguientes figuras se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de las fases desviadoras de ensayos triaxiales drenados en arena de Hostun densa con confinamientos de $-\sigma'_3 = 100kPa$ (figura 6.02), $-\sigma'_3 = 300kPa$ (figura 6.03) y $-\sigma'_3 = 600kPa$ (figura 6.04).

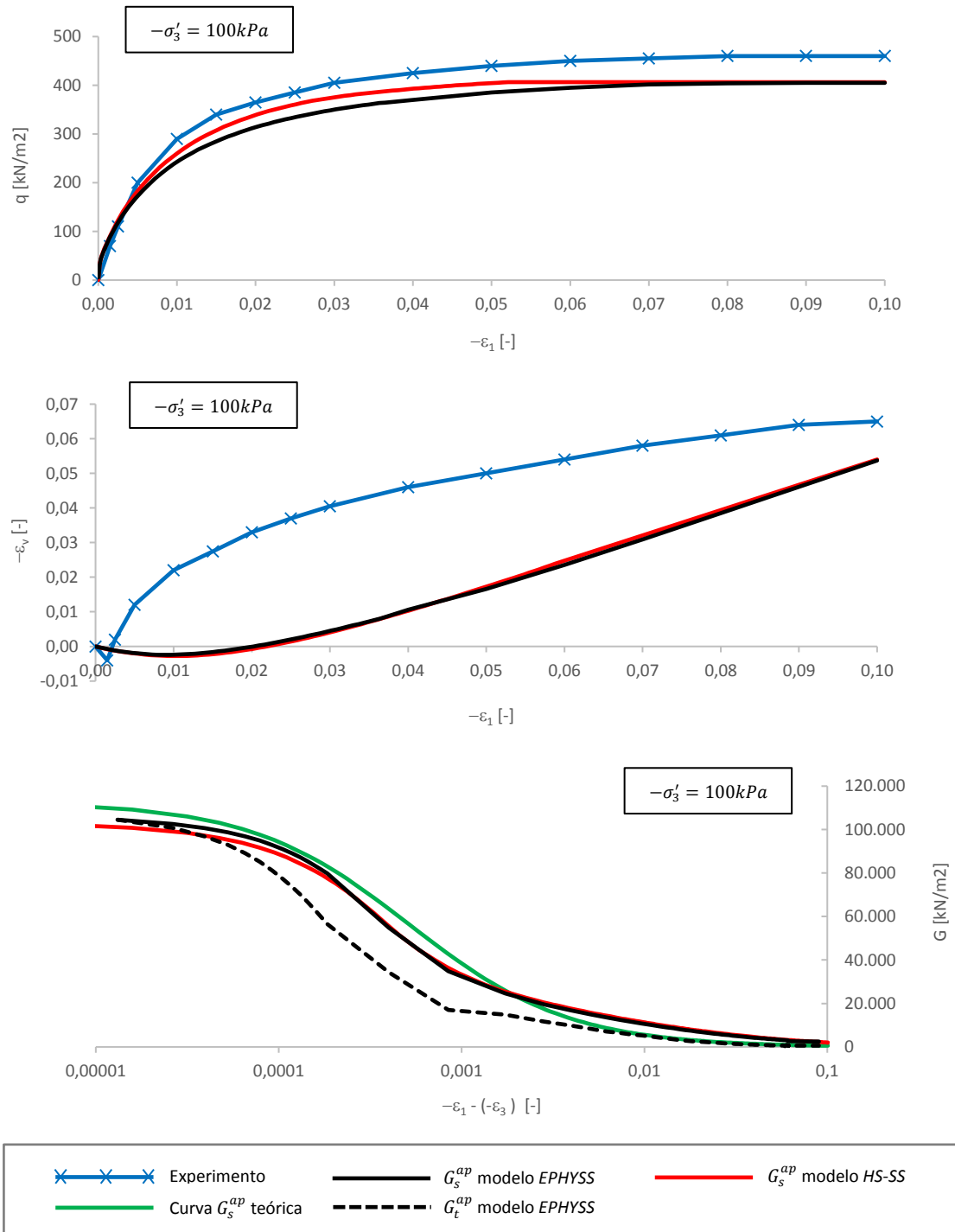


Figura 6.02. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 100kPa$.
Arriba: $q(-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

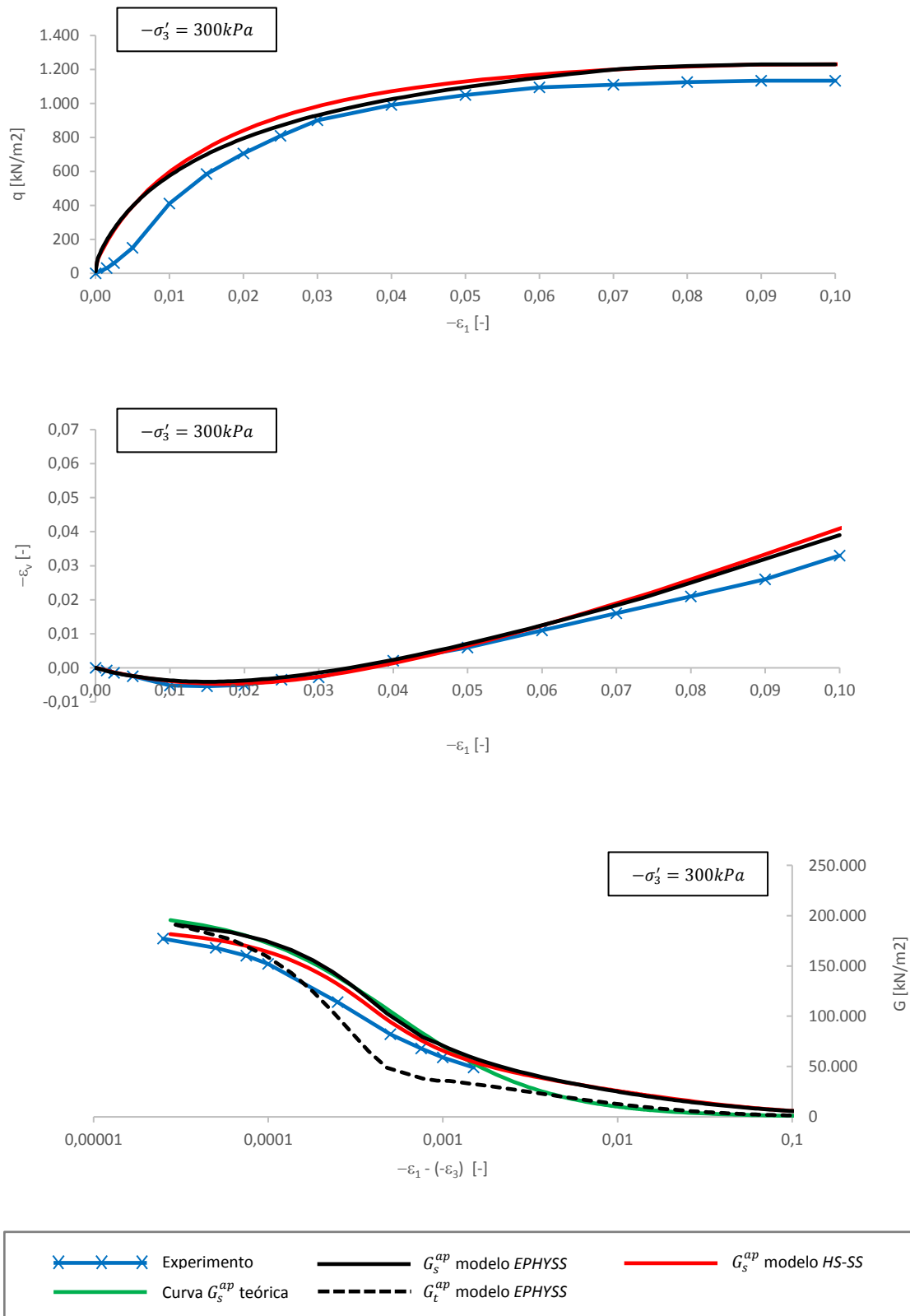


Figura 6.03. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300\text{kPa}$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

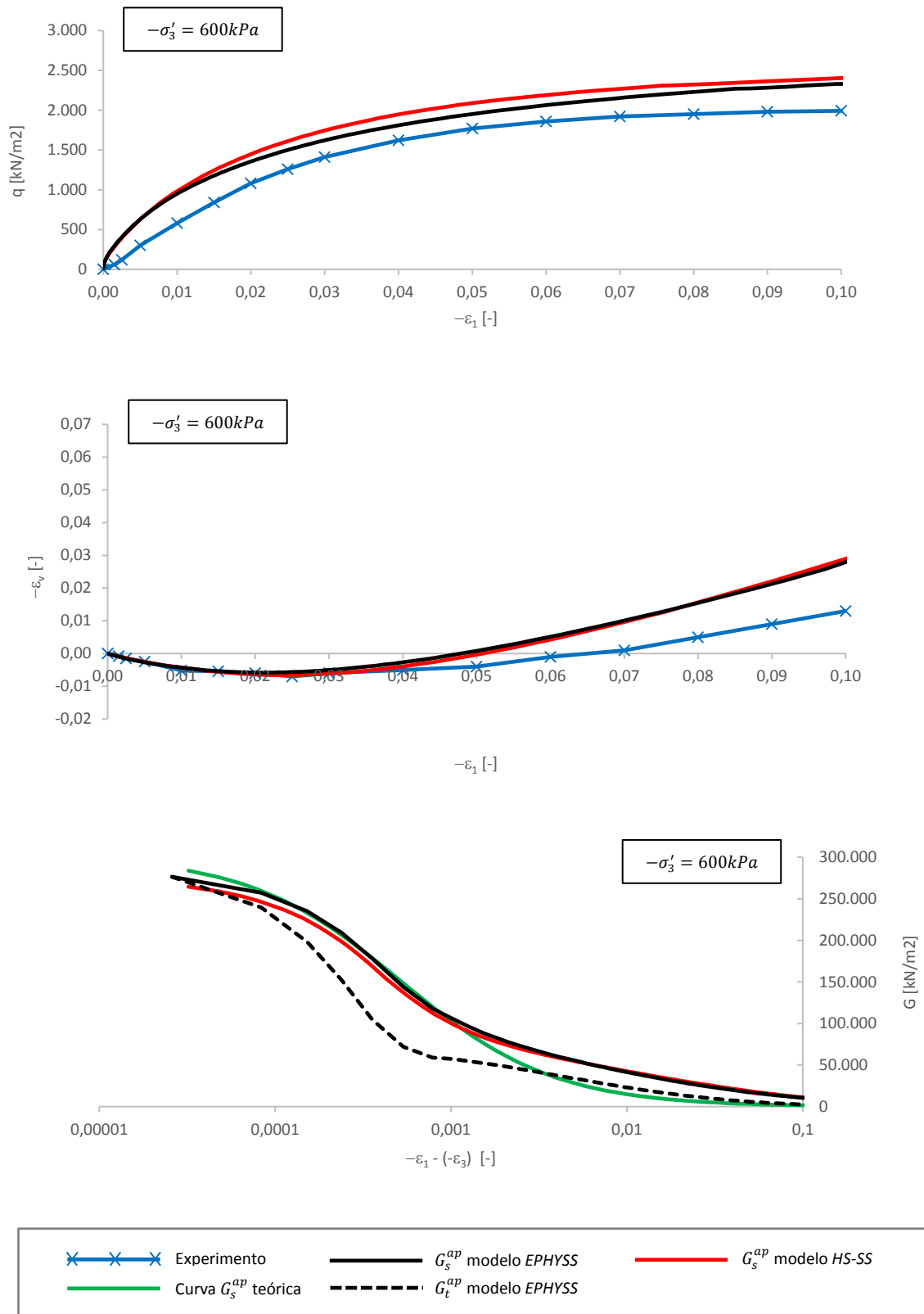


Figura 6.04. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 600\text{kPa}$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

El modelo *EPHYSS* y el modelo *HS-SS* predicen resultados similares. En la figura 6.02 (central) se aprecia cómo ninguno de los dos modelos es capaz de reproducir correctamente el comportamiento dilatante con $-\sigma'_3 = 100kPa$, mientras que para el caso con $-\sigma'_3 = 300kPa$ y $-\sigma'_3 = 600kPa$, ambos modelos son capaces de aproximar bien dicho comportamiento, como se puede ver en la figuras 6.03 (central) y 6.04 (central).

Las principales diferencias entre los resultados obtenidos con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* se explican de la siguiente manera:

1. Los módulos de rigidez del modelo *EPHYSS* dependen de $-p'$, mientras que los módulos de rigidez del modelo *HS-SS* dependen de $(-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi'))$. Puesto que en la fase desviadora de un ensayo triaxial existe un incremento de la presión media de valor $-\Delta p = 1/3\Delta q$, el modelo *EPHYSS* proporciona valores de $G_s^{ap} = G_s^{ap}(-p')$ ligeramente superiores a los que proporciona el modelo *HS-SS*, que considera $G_s^{ap} = G_s^{ap}(-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi'))$, y $-\sigma'_3 = cte$ durante la aplicación de dicha carga desviadora.
2. El punto anterior implica que ambos modelos consideran diferentes valores de los parámetros internos E_i^{ref} , α' y $K'_{t,ur}/K'_c$, lo cual afecta al comportamiento plástico.
3. Asimismo, los diferentes valores del parámetro interno E_i^{ref} dan lugar a diferentes valores del factor h_i , lo cual modifica las leyes de endurecimiento en ambos modelos y se ve reflejado en las diferentes curvas de G_s^{ap} obtenidas.
4. El modelo *EPHYSS* considera valores de K' y G independientes siempre que se cumpla $v' > v'_{min}$, mientras que en el modelo *HS-SS* el módulo volumétrico depende linealmente del módulo de corte según $K' = K'(G, v'_{ur})$.
5. Las pequeñas diferencias en las reglas de dilatancia entre ambos modelos.

En la figura 6.02 (abajo), 6.03 (abajo) y 6.04 (abajo) se observa, en general, un buen ajuste de las curvas de degradación de G_s^{ap} proporcionadas por el modelo *EPHYSS* a la curva de G_s^{ap} teórica según la expresión (3.05), si bien se distinguen algunas diferencias que se explican de la siguiente manera:

1. Como indica Benz (2007) para el modelo *HS-S*, por el efecto que introduce el factor h_i (considerado también en la formulación de los modelos *HS-SS* y *EPHYSS*) sobre las curvas de degradación del módulo de corte en presencia de deformaciones plásticas. Si el comportamiento del suelo fuera puramente elástico, no existirían deformaciones plásticas y ambas curvas serían coincidentes. Según Benz (2007), aunque generalmente este efecto es pequeño, sería posible mejorar la aproximación de la curva numérica a la teórica ajustando el factor h_i dentro del algoritmo iterativo para la obtención de los parámetros internos del modelo.
2. Cuando $\gamma_{oct}^H \geq \gamma_{ur}^\alpha$ o cuando $\gamma_{HIST} \geq \gamma_c$, el valor de G_s^{ap} se ve afectado por la condición $G_t^{ap} = G_{t,ur}$ en ambos modelos (las variables γ_{oct}^H y γ_{ur}^α son las descritas en los apartados 3.3.2. y 3.4.2 del capítulo 3, mientras que las variables γ_{HIST} y γ_c son las descritas en el apartado 2.6.3.1.2.2.22 del capítulo 2).

6.2.2. Ensayos triaxiales drenados con ciclo de carga/descarga/recarga en arena de Hostun densa

En la figura 6.05 se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de un ensayo triaxial drenado con ciclo de carga/descarga/recarga en arena de Hostun densa con $-\sigma'_3 = 300kPa$.

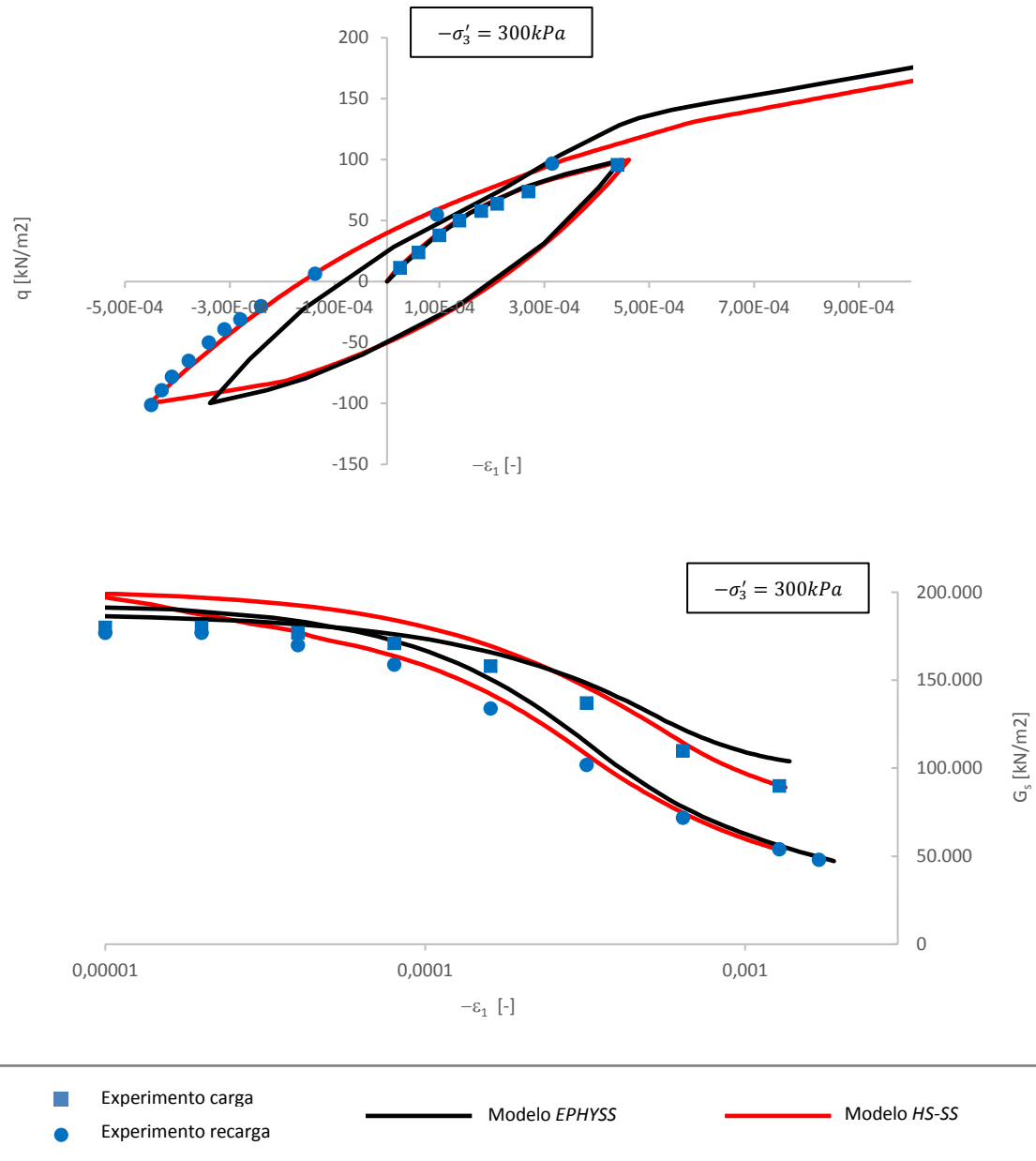


Figura 6.05. Ensayo triaxial drenado con ciclo carga/descarga/recarga en una arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300kPa$. Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1)$.

Como se puede ver en la figura 6.05 (abajo), ambos modelos sobreestiman ligeramente el módulo de corte máximo debido a la elección del parámetro $G_0^{ref} \equiv G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$. Asimismo, el cruce de las curvas

de degradación del modelo *EPHYSS* en el rango de deformaciones $-\epsilon_1 = 10^{-5} - 10^{-4}$, es debido a mayor valor de $-p'$ durante la curva de carga noval respecto al valor de $-p'$ durante la curva de recarga, lo cual se explica por la variación de $-\Delta p' = 1/3\Delta q'$ propia de la fase desviadora de un ensayo triaxial, tal como se ha expuesto en el apartado 6.2.1.2 del presente capítulo.

El modelo *EPHYSS* predice valores de $-\epsilon_1$ inferiores a los predichos por el modelo *HS-SS* durante la recarga. Ello se explica por los mismos motivos expuestos en el apartado 6.2.1.2 del presente capítulo, que modifican ligeramente la rigidez en la rama plástica previa a la recarga. Dichas diferencias son el principal motivo por el cual la curva de recarga en el modelo *EPHYSS* se aleja de los valores predichos por el modelo *HS-SS* y también de los resultados experimentales.

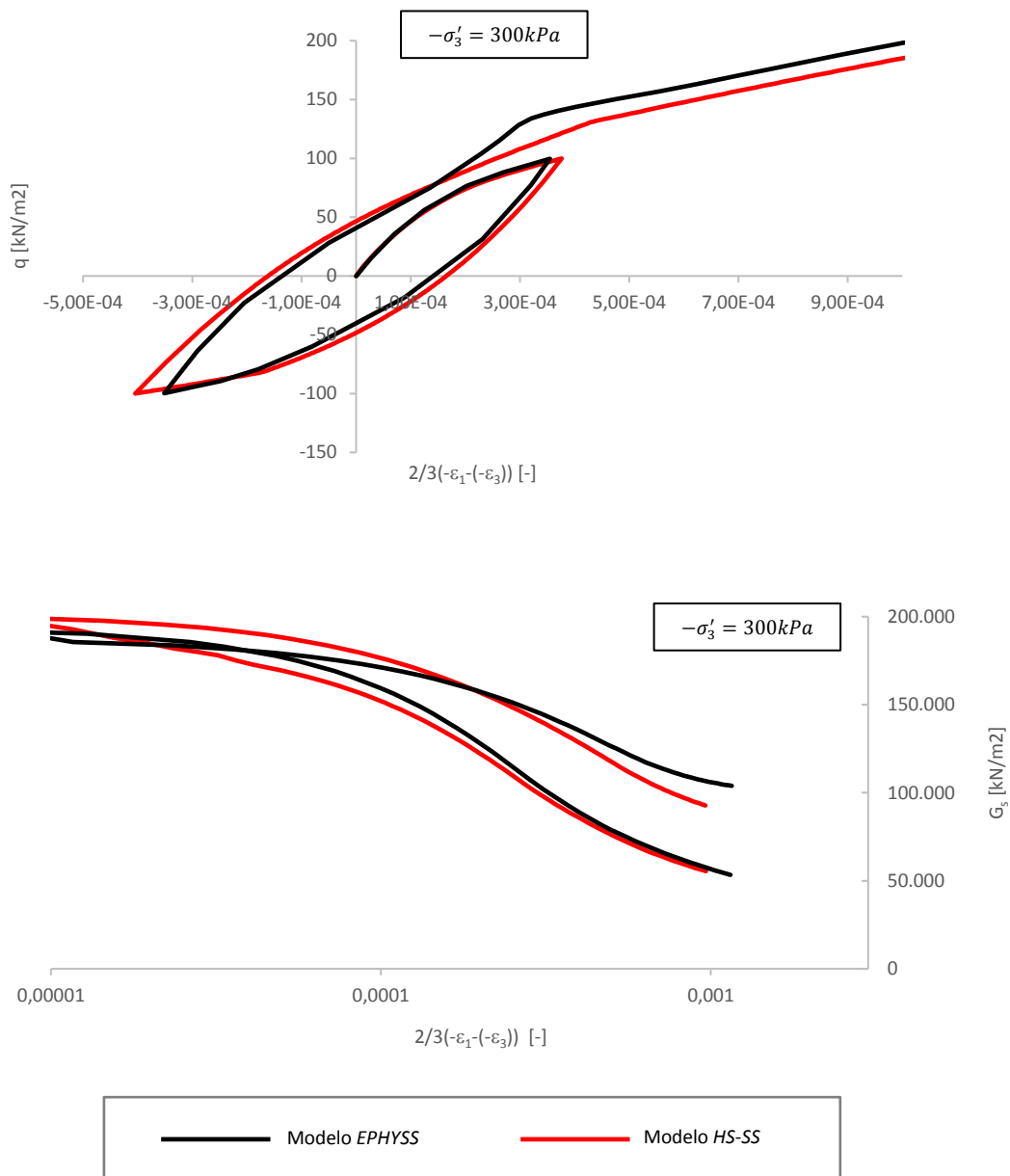


Figura 6.06. Ensayo triaxial drenado cíclico en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300kPa$.

Arriba: $q - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$. Abajo: $G - (\epsilon_1 - \epsilon_3)$.

No obstante, las diferencias entre ambos modelos se ven atenuadas tanto en la curva $q - \gamma_{oct}$ (figura 6.06 arriba), siendo $\gamma_{oct} = 2/3(-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$ en un ensayo triaxial, como en la curva de degradación de $G_s^{ap} - \gamma_{oct}$ (figura 6.06 abajo). Ello es debido a que los valores de $-\epsilon_3$ obtenidos con el modelo *EPHYSS* son inferiores, de forma proporcional, a los resultantes del modelo *HS-SS*, lo cual se debe, a su vez, al hecho de que el coeficiente de Poisson drenado considerado en el modelo *EPHYSS* cumple $\nu'_{min} \leq \nu' \leq \nu'_{ur}$, dado los parámetros adoptados, mientras que en el modelo *HS-SS* se cumple $\nu' = \nu'_{ur}$.

6.2.3. Ensayos triaxiales drenados en arena de Hostun suelta

6.2.3.1. Fase de consolidación isótropa con carga y descarga

En la figura 6.07 se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de la carga y descarga efectuada durante la fase de consolidación de un ensayo triaxial en arena de Hostun suelta.

Las consideraciones relativas a las simulaciones de carga y descarga isótropa de la figura 6.07 son las mismas que las consideradas en el apartado 6.2.1.1

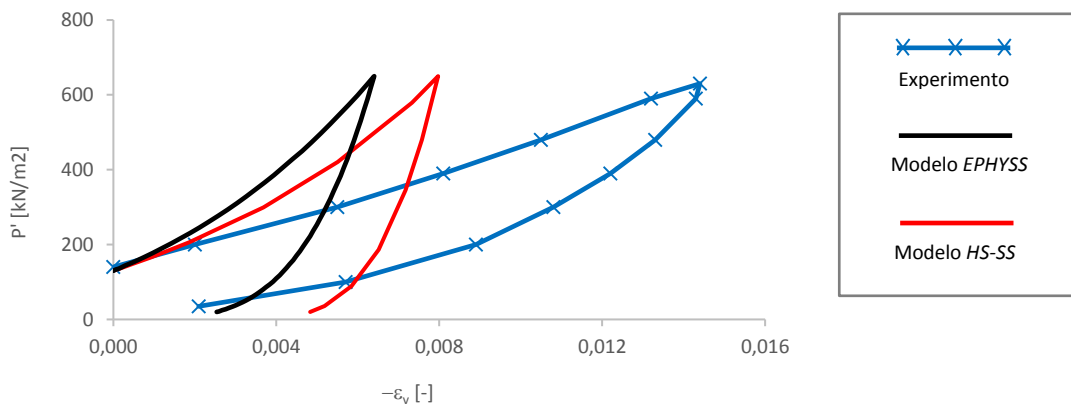


Figura 6.07. Carga y descarga isótropa de un ensayo triaxial en arena de Hostun suelta.

6.2.3.2. Fase desviadora

En las siguientes figuras se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de las fases desviadoras de ensayos triaxiales drenados en arena de Hostun suelta para confinamientos de $-\sigma'_3 = 100kPa$ (figura 6.08), $-\sigma'_3 = 300kPa$ (figura 6.09) y $-\sigma'_3 = 600kPa$ (figura 6.10).

Como se puede ver, el modelo *EPHYSS* y el modelo *HS-SS* predicen resultados similares y aproximan bastante bien los resultados experimentales. Las principales diferencias entre ambos modelos se explican según lo expuesto en el apartado 6.2.1.2.

En el caso de la arena suelta, se puede ver cómo la curva de degradación de G_s^{ap} de ambos modelos difiere de la curva teórica dada por la expresión (3.05). Estas diferencias son debidas al efecto que tiene

el factor h_i que, a su vez, depende del parámetro interno E_i^{ref} , en la rigidez del suelo durante la carga noval.

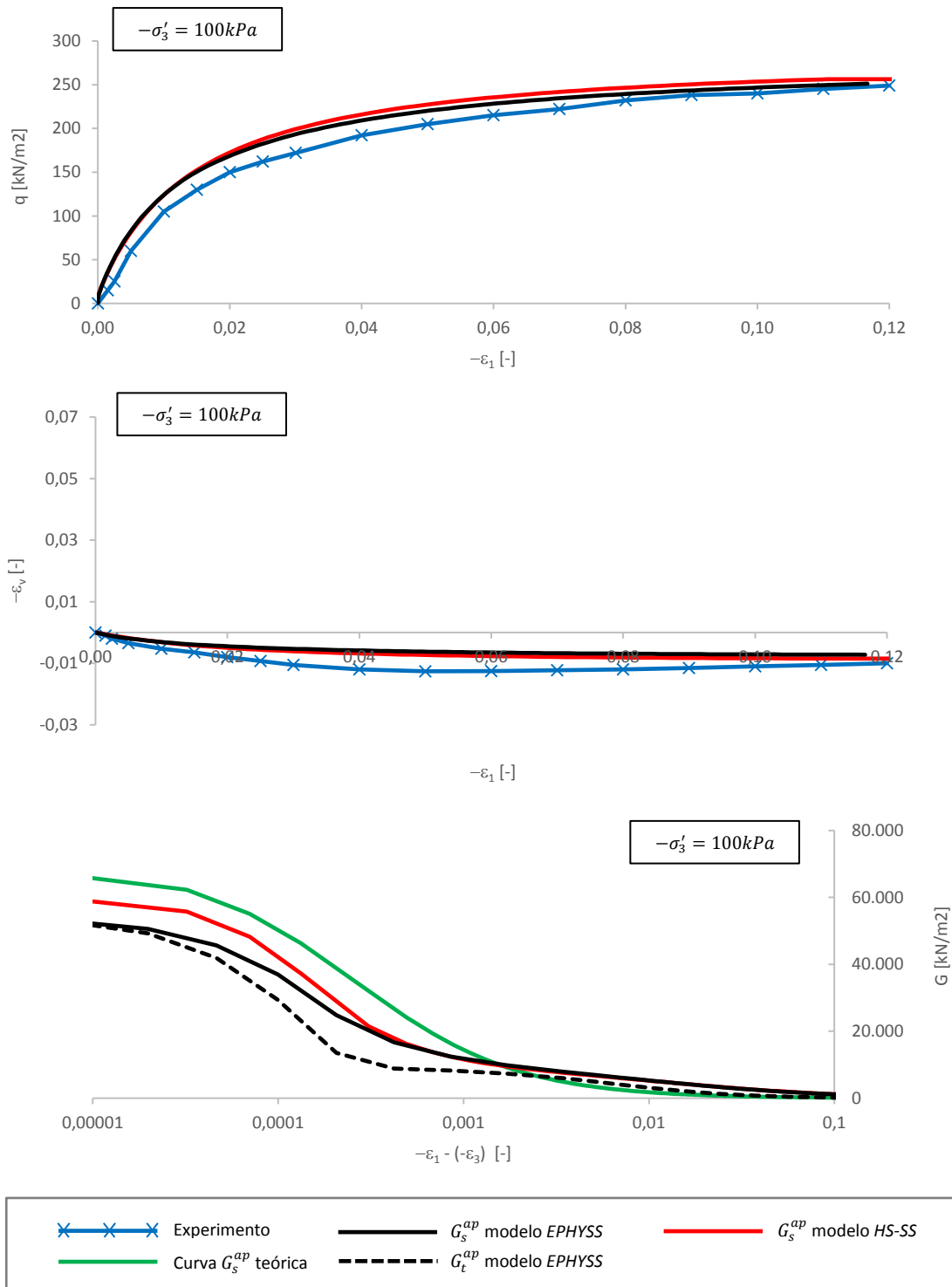


Figura 6.08. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 100 \text{ kPa}$.

Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

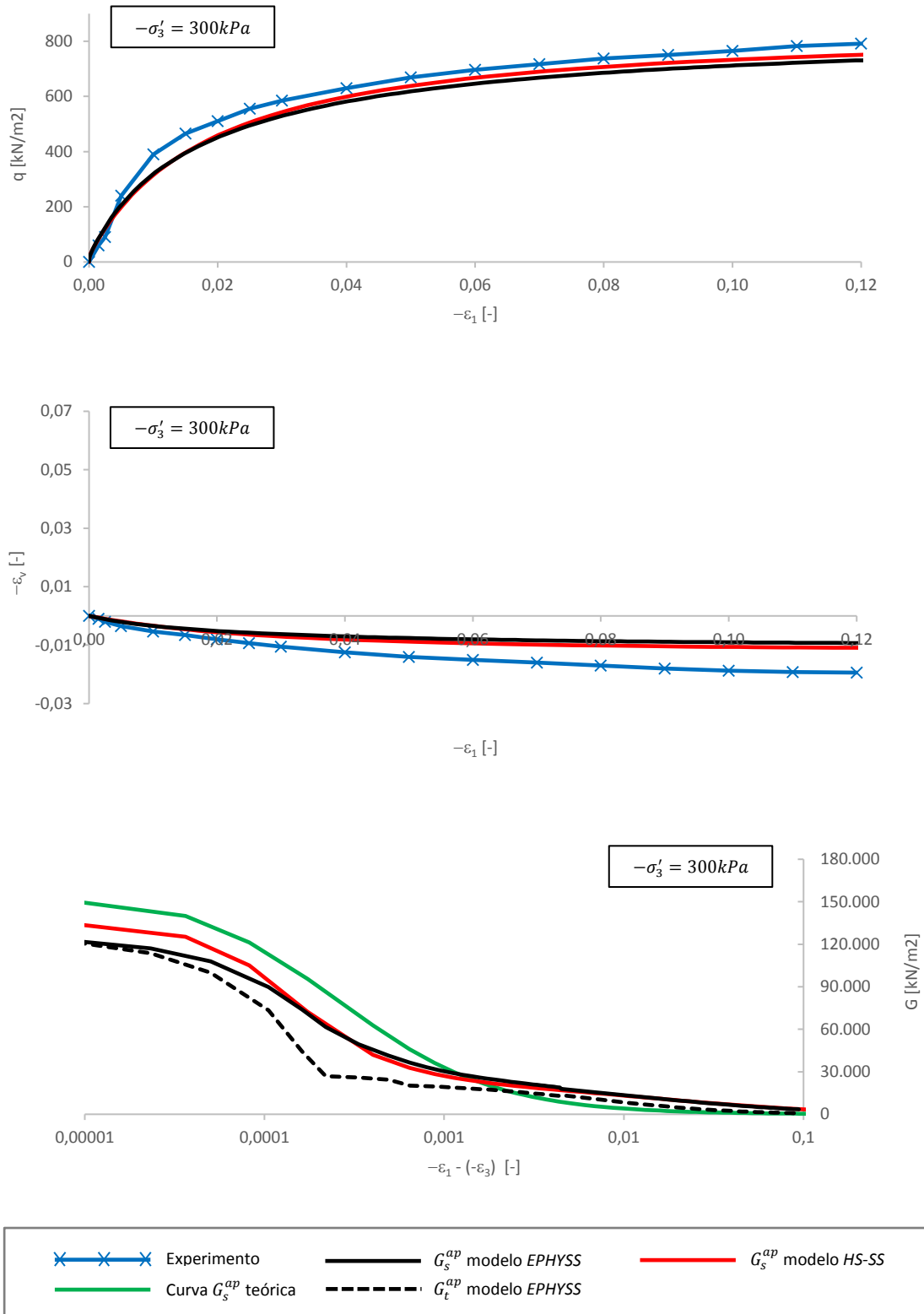


Figura 6.09. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 300 \text{ kPa}$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

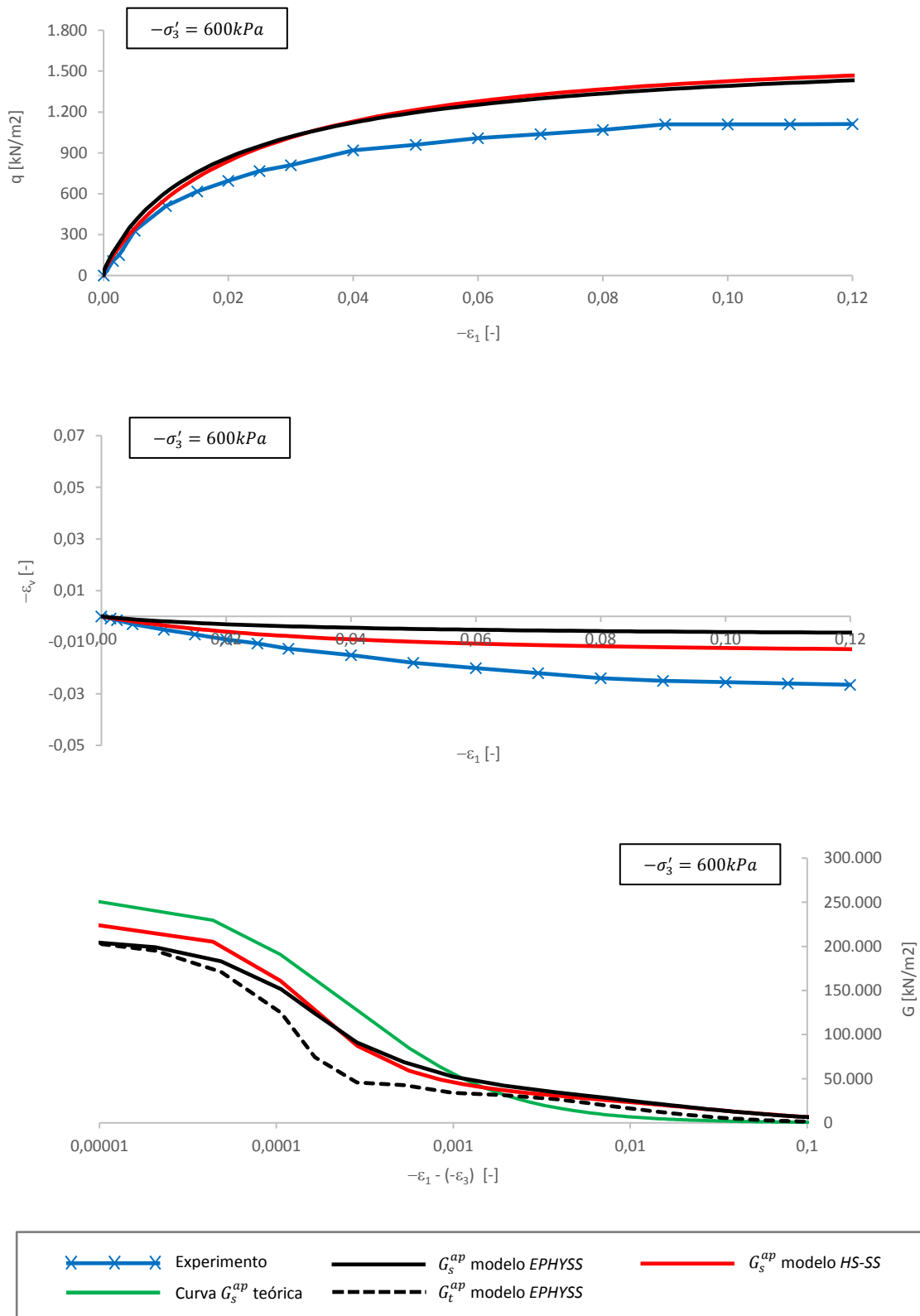


Figura 6.10. Ensayo triaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 600kPa$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

6.2.4. Ensayos triaxiales no drenados en arena de Hostun densa

En las siguientes figuras se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de las fases desviadoras de ensayos triaxiales no drenados en arena de Hostun densa para confinamientos de $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$ (figura 6.11), $-\sigma'_3 = 300\text{kPa}$ (figura 6.12) y $-\sigma'_3 = 600\text{kPa}$ (figura 6.13).

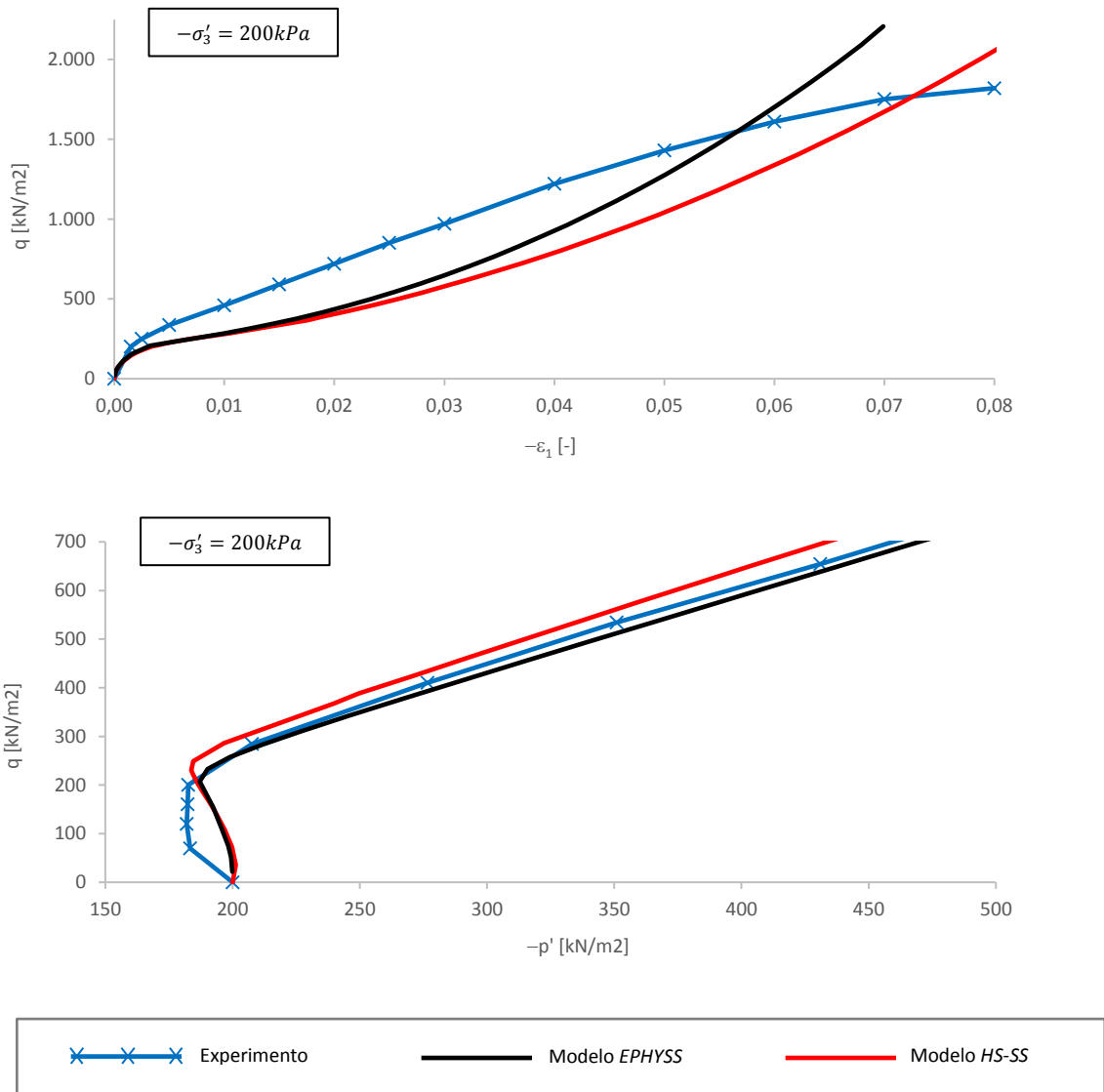


Figura 6.11. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$.

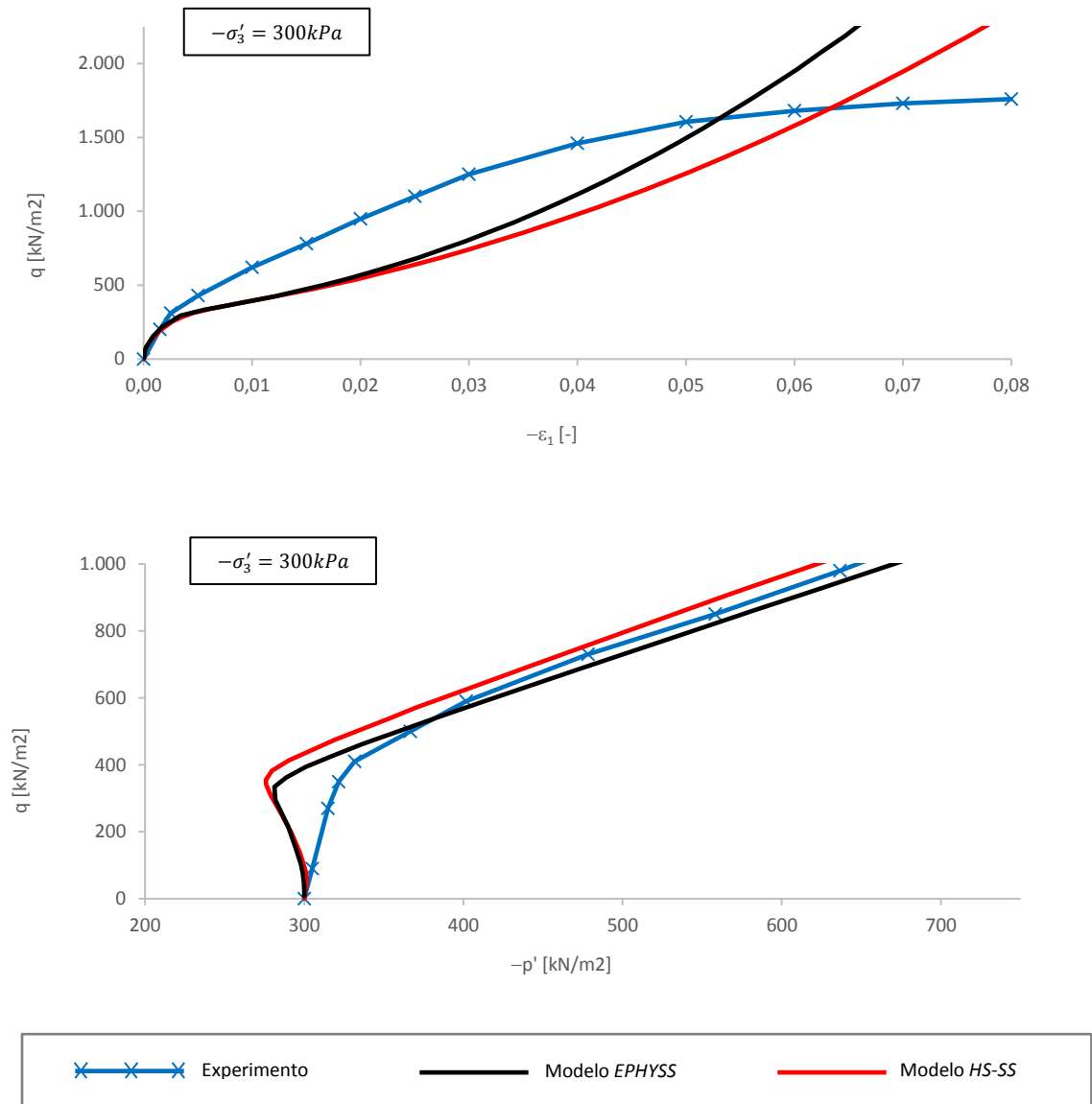


Figura 6.12. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 300 \text{ kPa}$.
Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$.

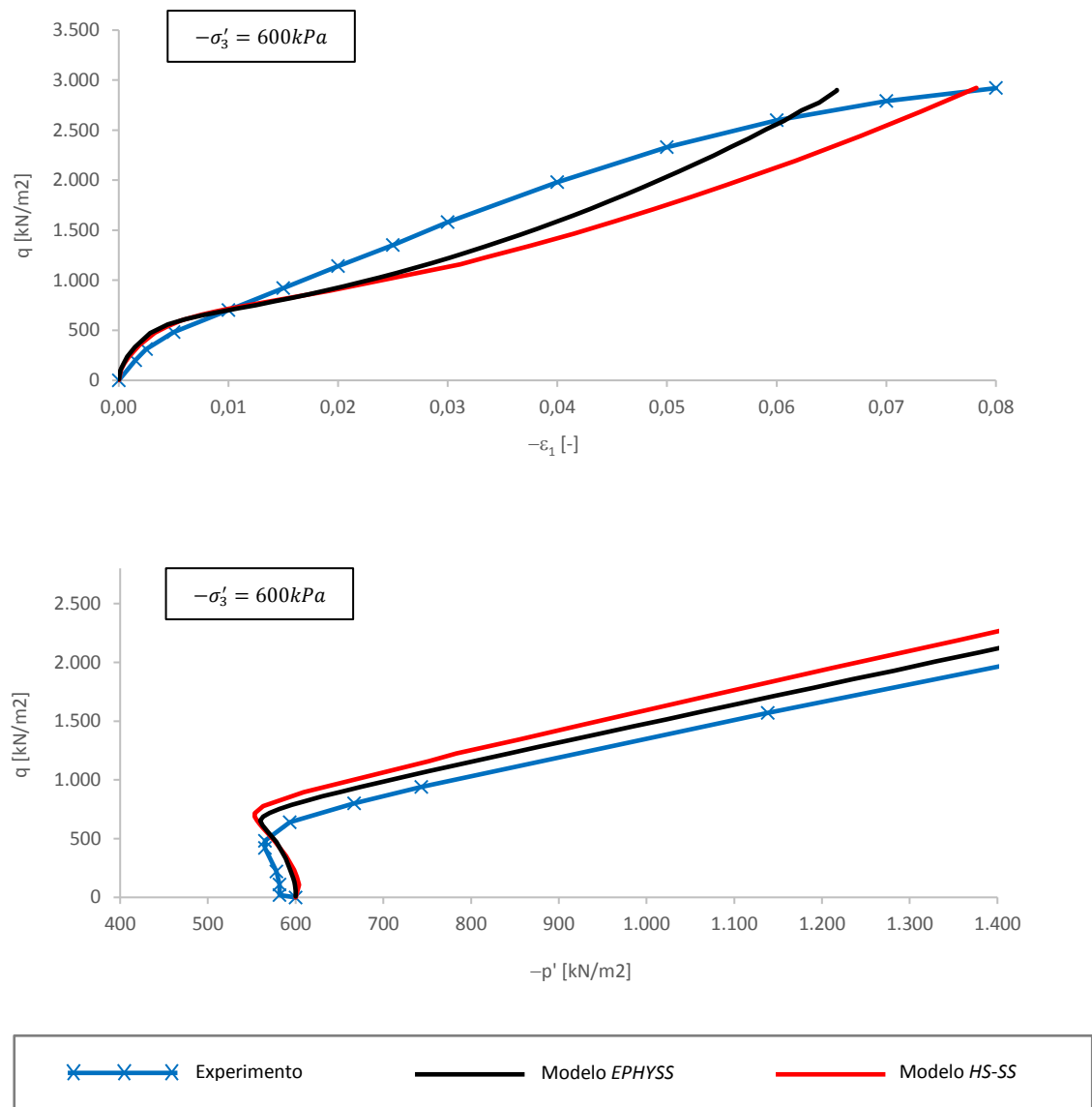


Figura 6.13. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 600 \text{ kPa}$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$.

Como puede verse, tanto el modelo *EPHYSS* como el modelo *HS-SS* presentan ciertas limitaciones en la aproximación de los valores $q - (-\epsilon_1)$ experimentales de los ensayos triaxiales con arena de Hostun densa (figuras 6.11 arriba, 6.12 arriba y 6.13 arriba), mientras que sí son capaces de aproximar bastante bien los valores $q - (-p')$ (figuras 6.11 abajo, 6.12 abajo y 6.13 abajo). Se observan resultados similares en el modelo *HS-S* de Benz (2007), en el que se basa el modelo *HS-SS*, y, según Benz (2007), ello se debe a que la formulación adoptada para la dilatación no tiene en cuenta el índice de poros del material como variable de estado. Puesto que los modelos *HS-SS* y *EPHYSS* adoptan una formulación de la dilatación similar a la del modelo *HS-S* de Benz (2007), los resultados asociados a dicha formulación son similares.

6.2.5. Ensayos triaxiales no drenados en arena de Hostun suelta

En las siguientes figuras se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de las fases desviadoras de ensayos triaxiales no drenados en arcilla caolinita reconstituida suelta para confinamientos de $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$ (figura 6.14), $-\sigma'_3 = 300\text{kPa}$ (figura 6.15) y $-\sigma'_3 = 600\text{kPa}$ (figura 6.16).

Los resultados predichos por el modelo *EPHYSS* y por el modelo *HS-SS* son similares y, a diferencia de los resultados de las simulaciones con arena de Hostun densa mostrados y comentados en el apartado 6.2.4, los resultados de las simulaciones de ambos modelos en el caso de arena de Hostun suelta, aproximan bastante bien los resultados experimentales.

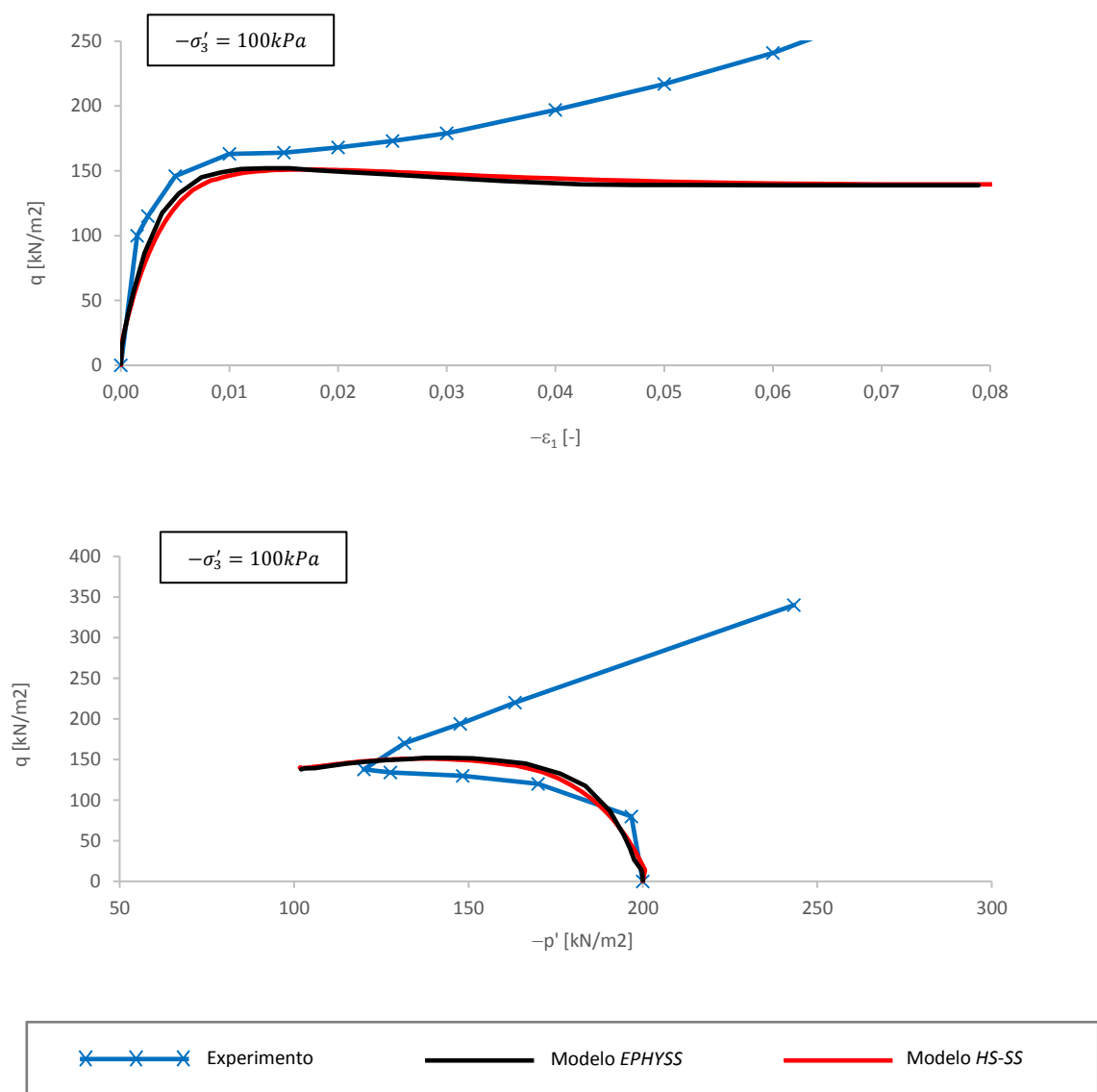


Figura 6.14. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$.
Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$.

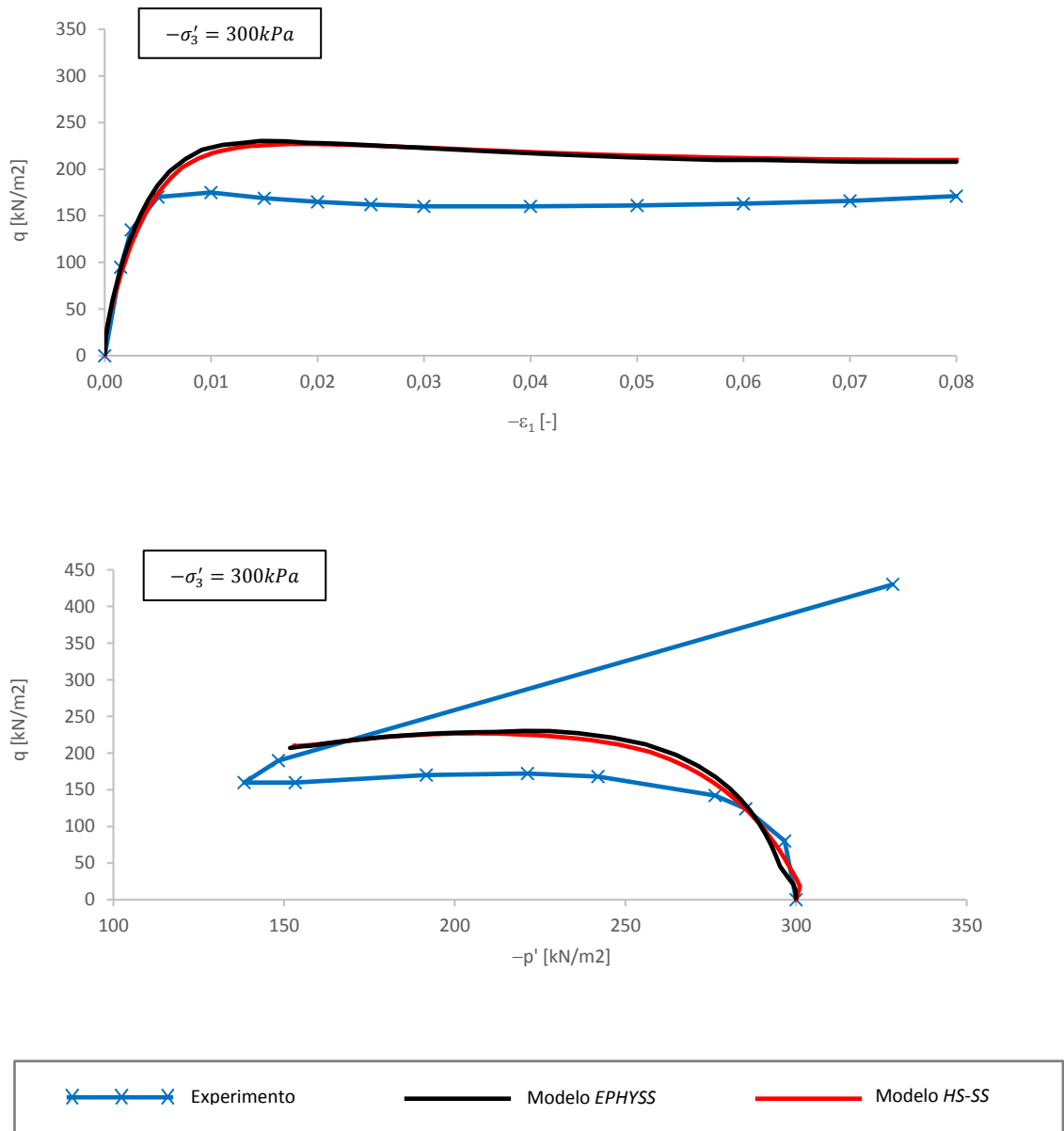


Figura 6.15. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 300 \text{ kPa}$.
Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$.

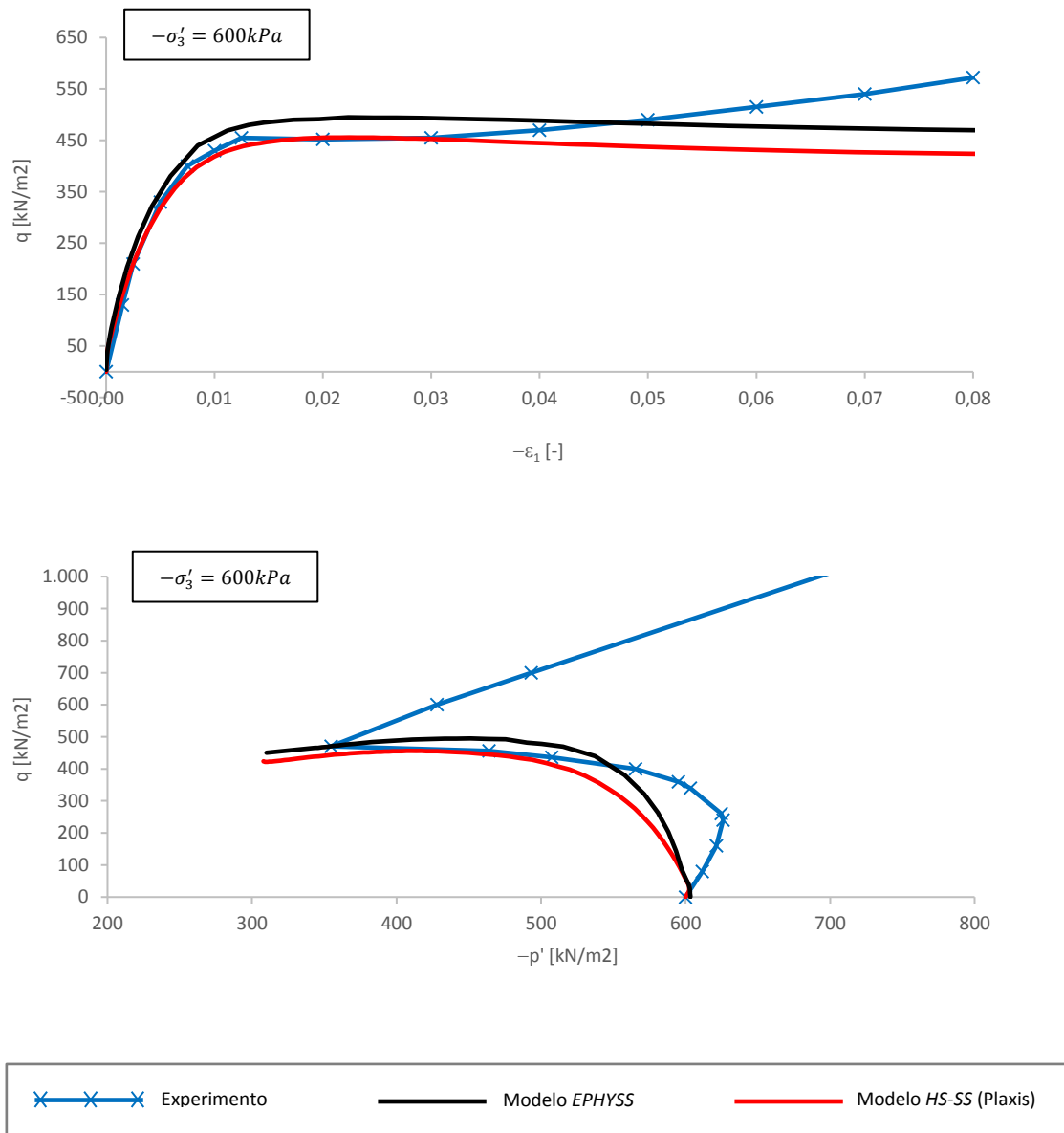


Figura 6.16. Ensayo triaxial no drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma_3' = 600 \text{ kPa}$.
Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Abajo: $q - (-p')$.

6.2.6. Ensayos triaxiales drenados en arcilla caolinita

En las siguientes figuras se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de las fases desviadoras de ensayos triaxiales drenados en arena de Hostun suelta para confinamientos de $-\sigma'_3 = 100kPa$ (figura 6.17), $-\sigma'_3 = 300kPa$ (figura 6.18) y $-\sigma'_3 = 600kPa$ (figura 6.19).

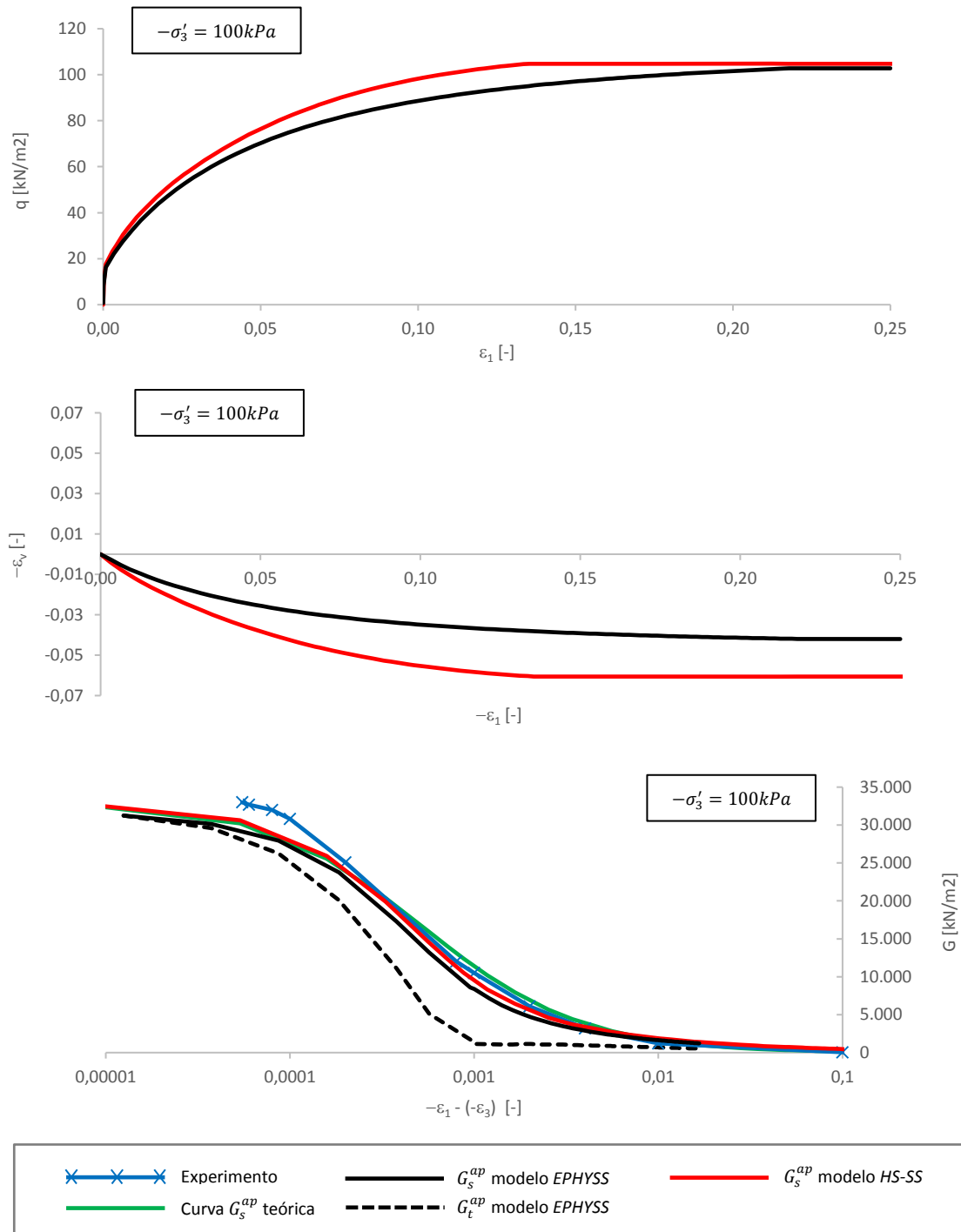


Figura 6.17. Ensayo triaxial drenado en arcilla caolinita, $-\sigma'_3 = 100kPa$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

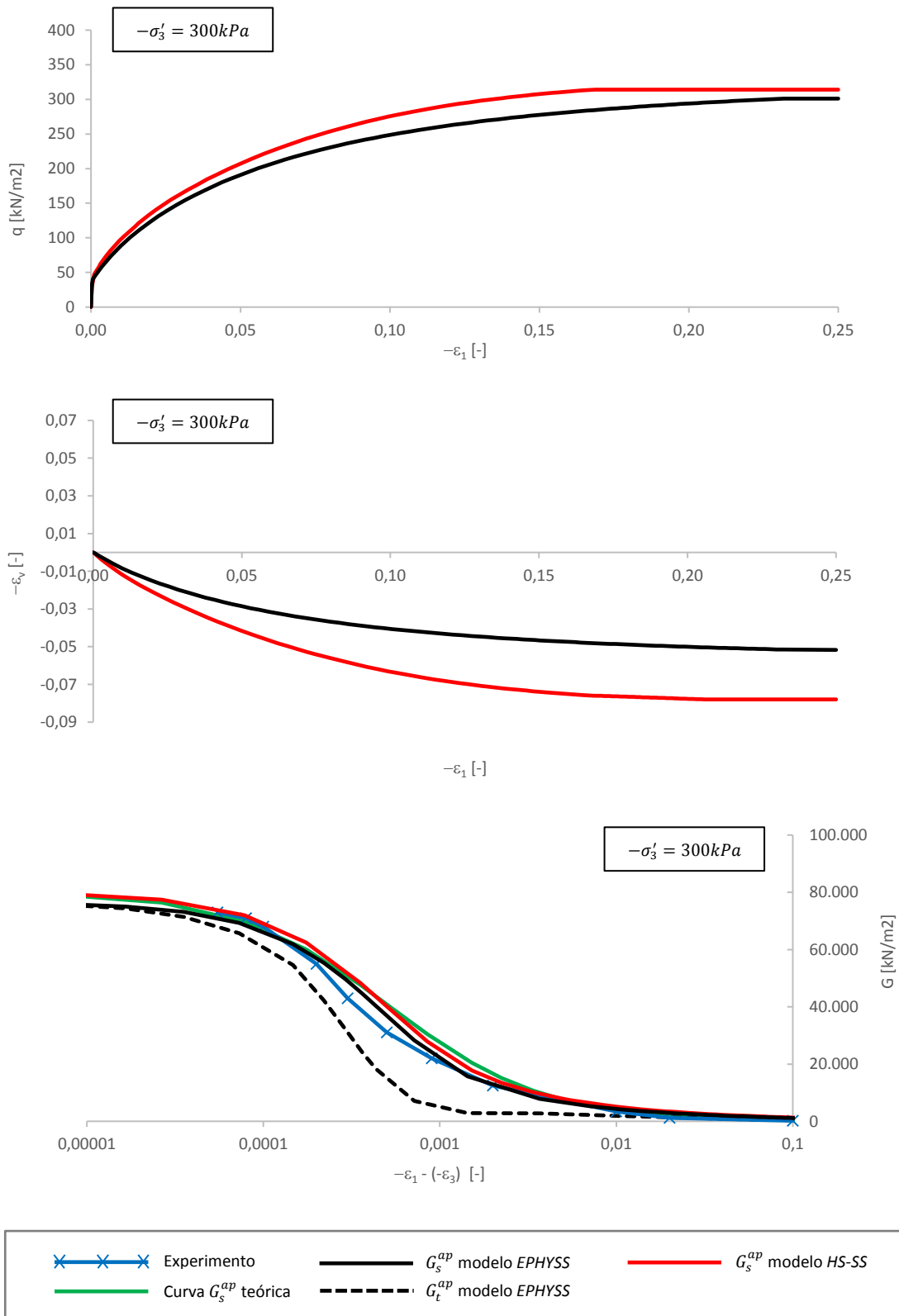


Figura 6.18. Ensayo triaxial drenado en arcilla caolinita, $-\sigma'_3 = 200 \text{ kPa}$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

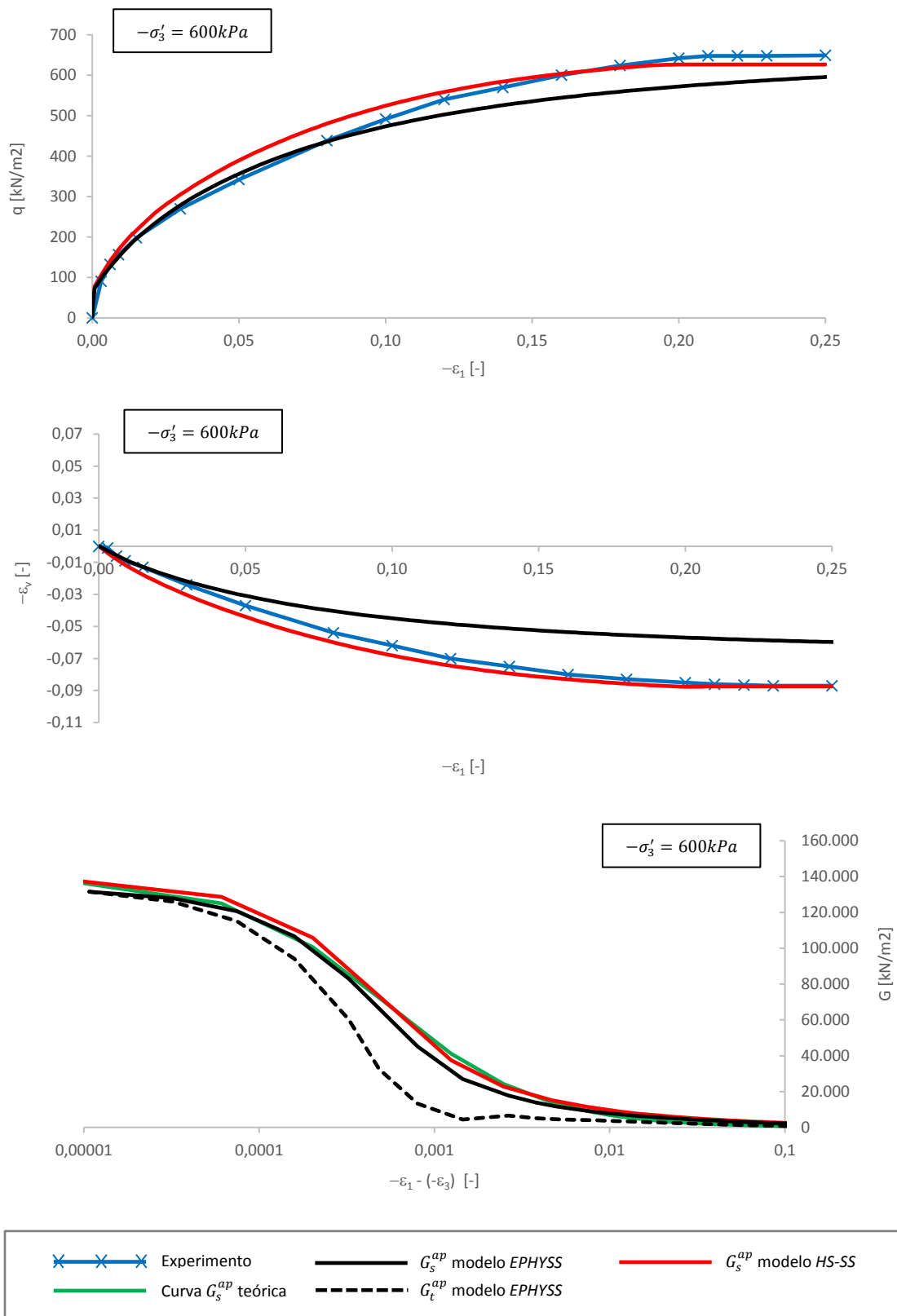


Figura 6.19. Ensayo triaxial drenado en arcilla caolinita, $-\sigma'_3 = 600 \text{ kPa}$.
 Arriba: $q - (-\epsilon_1)$. Medio: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$. Abajo: $G - (-\epsilon_1 - (-\epsilon_3))$.

Los resultados numéricos obtenidos con ambos modelos aproximan bastante bien los resultados experimentales.

El modelo *EPHYSS* proporciona resistencias al corte y deformaciones volumétricas inferiores a las que resultan con el modelo *HS-SS* en todos los casos. Únicamente se dispone de las curvas experimentales $q - (-\epsilon_1)$ y $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$ para un confinamiento de $-\sigma'_3 = 600 \text{ kPa}$ (figura 6.19) y, en dicha curva, se puede ver cómo el modelo *EPHYSS* aproxima mejor los resultados experimentales en el rango de deformaciones $0 \leq -\epsilon_1 \leq 0,025$, mientras que el modelo *HS-SS* aproxima mejor los resultados experimentales en el rango de deformaciones $-\epsilon_1 > 0,025$.

6.2.7. Ensayos triaxiales con giros de tensiones en el plano desviador en arcilla de Londres

En el experimento realizado por Richardson (1988) mostrado en las figuras 6.20 y 6.21, cuatro muestras de arcilla de Londres reconstituida se consolidan hasta el punto *A* y, posteriormente, son llevadas hasta el punto *O* ($OCR = 2$). Una vez en el punto *O*, sobre cada una de las muestras se aplica una trayectoria de tensiones siguiendo diferentes ángulos $\theta_{q/p'}$ en el plano de Cambridge $q - (-p')$, según se detalla en la tabla 6.11.

Es necesario recordar que en este tipo de ensayos no tiene lugar ningún giro del ángulo de las deformaciones α desviadoras, salvo en el caso de la trayectoria $A - OCOX$, donde dicho ángulo es $\alpha = 180^\circ$ (ver apartado 3.6.2 del capítulo 3).

Trayectoria	Ángulo de giro en el plano triaxial $\theta_{q/p'}$
$A - OBOX$	0°
$A - OAOX$	90°
$A - OCOX$	90°
$A - ODOX$	180°

Tabla 6.11. Trayectorias seguidas en los ensayos triaxiales y ángulos de giro en el plano de Cambridge.

Los resultados predichos por el modelo *EPHYSS* y por el modelo *HS-SS* son muy parecidos, lo cual es lógico, puesto que el giro de las deformaciones desviadoras es de $\alpha = 180^\circ$ para la trayectoria $A - OCOX$ y de $\alpha = 0^\circ$ para el resto, de manera que la única curva de degradación activa en el modelo *EPHYSS* es la correspondiente a $G_{s,0}^{ap,180,H}$, que se corresponde con la considerada en el modelo *HS-SS* (G_0^{ref}). Asimismo, ambos modelos predicen bastante bien los resultados experimentales.

Tanto en el modelo *EPHYSS* como en el modelo *HS-SS* sucede lo siguiente:

- 1) En la trayectoria $A - ODOX$ la superficie de fluencia tipo Cono se activa durante la carga desviadora OD . Posteriormente, el estado tensional regresa al punto *O* y, en el momento de iniciar la carga OX , tiene lugar un giro de tensiones y deformaciones de 180° . Asimismo,

durante la carga desviadora *OX*, el comportamiento del suelo es elástico hasta que se alcanza de nuevo la superficie de fluencia tipo Cono en el punto *D*. En el tramo con comportamiento elástico *OD*, el módulo G_t^{ap} es el correspondiente a la rama elástica, es decir, $G_t^{ap} = \Delta q / 3\Delta\gamma_s^e$, donde $\Delta q = -\Delta\sigma'_1 - (-\Delta\sigma'_3)$ y $\Delta\gamma_s^e = 2/3(-\Delta\epsilon_1^e - (-\Delta\epsilon_3^e))$, siendo $\Delta\sigma'_i$ el incremento de la tensión principal *i*-ésima y $-\Delta\epsilon_i^e$ el incremento de la deformación elástica *i*-ésima. Una vez rebasado el punto *D*, se reactivan los mecanismos de plasticidad y se recupera el módulo G_t^{ap} correspondiente a la rama elastoplástica, es decir, $G_t^{ap} = \Delta q / 3\Delta\gamma_s$, donde $\Delta\gamma_s = 2/3(-\Delta\epsilon_1 - (-\Delta\epsilon_3))$, siendo $-\Delta\epsilon_i$ el incremento de la deformación total *i*-ésima

- 2) En la trayectoria *A – OBOX* se observa el mismo comportamiento descrito en el punto anterior, aunque en este caso no existe ningún giro de tensiones al pasar por el punto *O*, de manera que el módulo de rigidez G_t^{ap} es menor que en el caso de la trayectoria *A – ODOX*. Por otro lado, en el caso de la trayectoria *A – OBOX*, la superficie de fluencia tipo Cono se sitúa en valores $q > \overline{OD}$ dentro de la zona de compresión triaxial, debido a la forma asimétrica de dicha superficie en el plano desviador y a que, previamente, durante la extensión triaxial, se había alcanzado un valor $q = \overline{OB} = \overline{OD}$. Es precisamente por ello que la caída de la rigidez para la trayectoria *A – OBOX* se produce para valores de $-\epsilon_1$ superiores a los de la trayectoria *A – ODOX*.
- 3) Tanto en la trayectoria *A – OAOX* como en la trayectoria *A – OCOX*, la superficie de fluencia tipo Cono no se activa hasta que se inicia el tramo de trayectoria *OX*, de manera que el módulo de rigidez G_t^{ap} medido en dicho tramo es el correspondiente a la rama de carga noval y, por tanto, el elastoplástico. Ello explica por qué el valor de G_t^{ap} es inferior al correspondiente a la rama elástica, es decir, al valor de G_t^{ap} en el tramo *OX* antes de llegar al punto *D* de la trayectoria *A – ODOX*. Como indica Benz (2007) para el modelo *HS-S*, siendo extensible al modelo *EPHYSS* y *HS-SS*, el hecho de que la formulación del modelo no dependa del índice de poros como variable de estado hace que la única variable distinta en las trayectorias *A – OAOX* y *A – OCOX* sea el valor de la variable de endurecimiento de la superficie tipo *Cap p_p* que, en el caso de trayectoria con $-p' = cte$ (trayectoria *OX*), tiene un efecto despreciable.

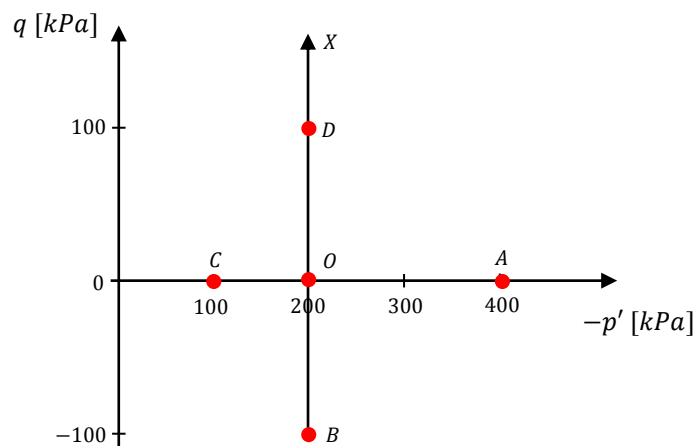


Figura 6.20. Trayectorias seguidas en los ensayos triaxiales en arcilla de Londres reconstituida (Benz (2007), basado en Richardson (1988)). Según Richardson (1988), el valor de los incrementos de carga entre *OC*, *OB* y *OD* es de 90kPa y no de 100kPa.

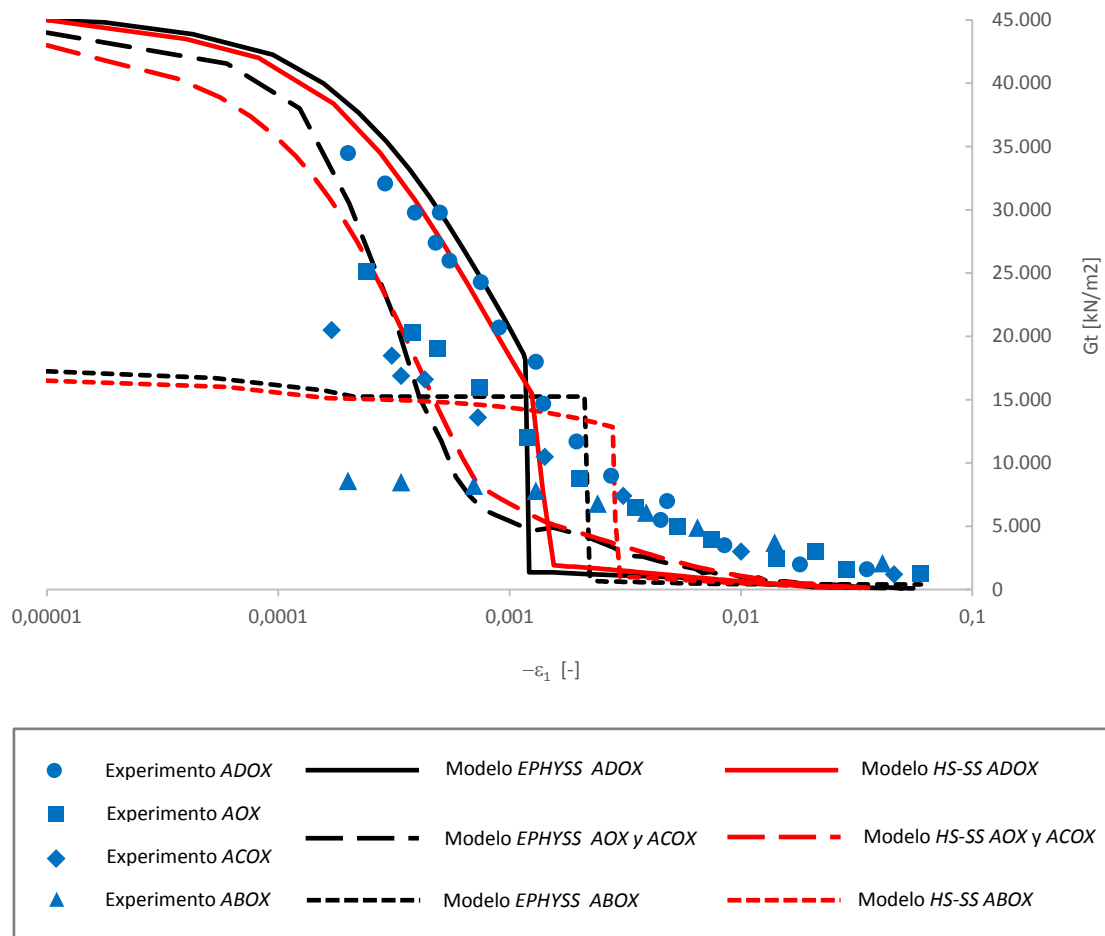


Figura 6.21. Ensayo triaxial en arcilla de Londres con giro de las tensiones de 0° , 90° y 180° . Curva $G_t - (-\epsilon_1)$.

6.3. Ensayos edométricos

Se han realizado simulaciones de ensayos edométricos en arena de Hostun densa y suelta. Los datos experimentales se han extraído de Benz (2007), basados a su vez en los de Biarez y Hicher (1994) y en los de Desrues et al. (2000).

6.3.1. Ensayos edométricos en arena de Hostun densa

En la figura 6.22 se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas del ensayo edométrico realizado en arena de Hostun densa.

Los resultados predichos por el modelo *EPHYSS* y por el modelo *HS-SS* para la arena de Hostun densa son muy similares.

Ambos modelos proporcionan una buena aproximación de los resultados experimentales, si bien las rigideces que resultan durante la carga noval y durante las descargas y recargas elásticas son superiores a las medidas en los ensayos. La rigidez elastoplástica durante la carga noval se relaciona directamente con el valor del parámetro interno $K'_{t,ur}/K_c$, mientras que la rigidez elástica durante las descargas y recargas elásticas se puede calcular como $M' = K' + 4/3G$, siendo M' el módulo edométrico, K' el módulo volumétrico y G el módulo de corte.

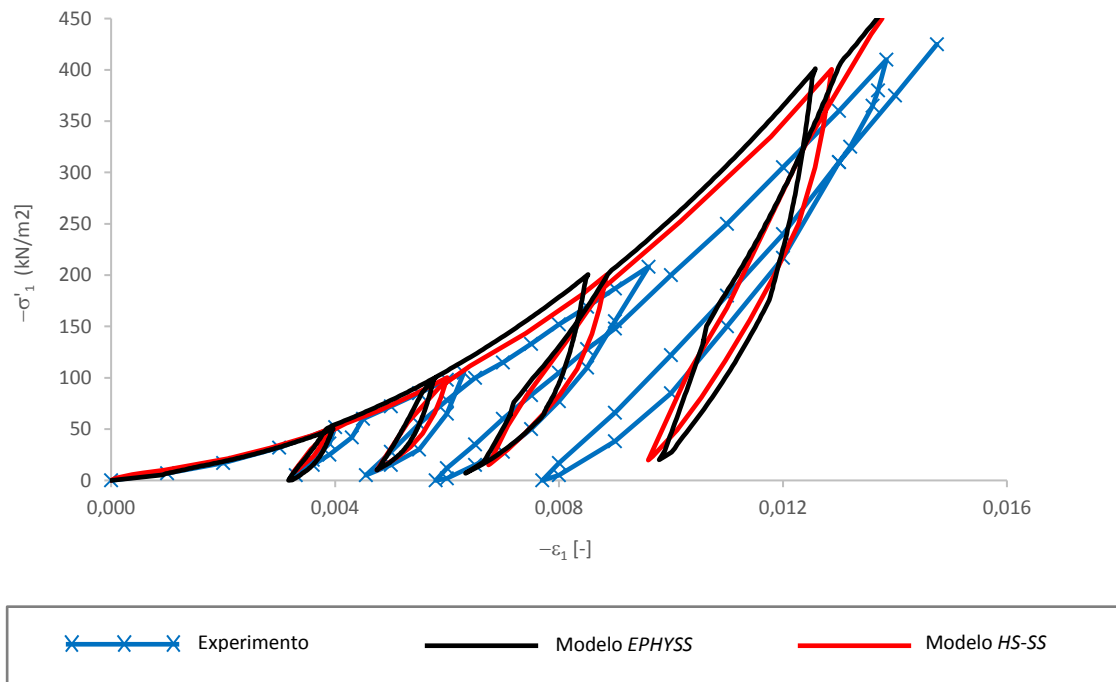


Figura 6.22. Ensayo edométrico en arena de Hostun densa.

6.3.2. Ensayos edométricos en arena de Hostun suelta

En la figura 6.23 se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas del ensayo edométrico realizado en arena de Hostun suelta.

Los resultados predichos por el modelo *EPHYSS* y por el modelo *HS-SS* para la arena de Hostun suelta son muy similares.

Asimismo, en el caso de la arena suelta, ambos modelos predicen muy bien los resultados experimentales.

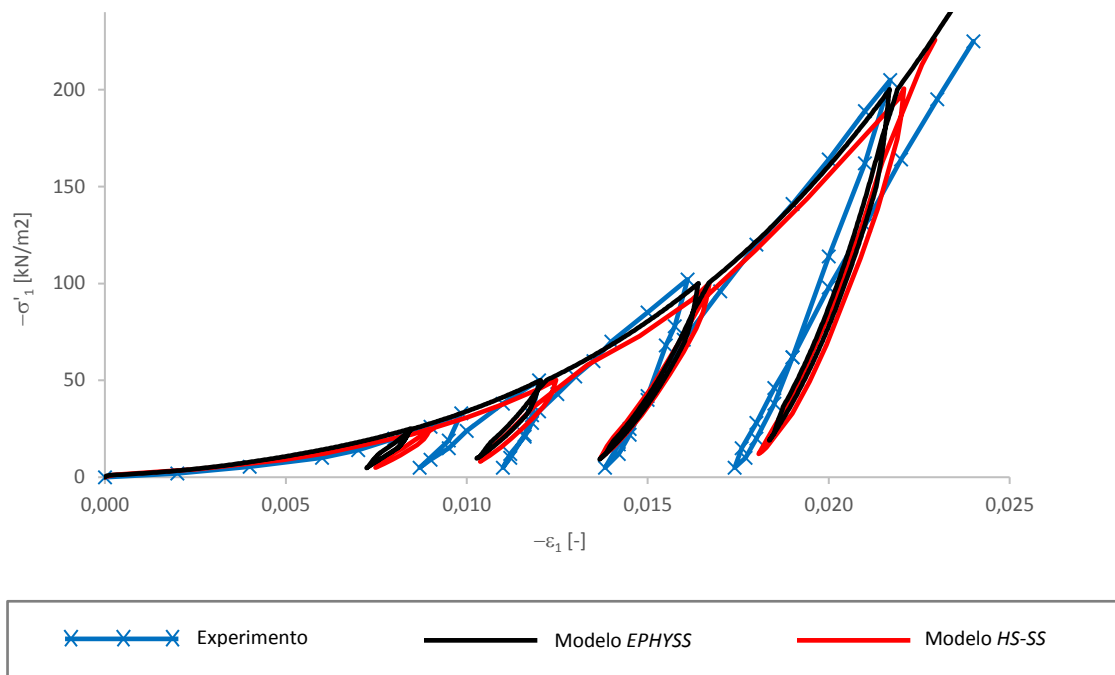


Figura 6.23. Ensayo edométrico en arena de Hostun suelta.

6.4. Ensayos biaxiales

Se han realizado simulaciones numéricas de ensayos biaxiales drenados en arena de Hostun suelta y densa con presiones de confinamiento $-\sigma'_3 = 100\text{kPa}$, $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$, $-\sigma'_3 = 400\text{kPa}$ y $-\sigma'_3 = 800\text{kPa}$. Los datos experimentales se han extraído de Benz (2007), basados a su vez en los de Biarez y Hicher (1994) y en los de Desrues et al. (2000). Asimismo, se han realizado simulaciones numéricas de ensayos biaxiales con giros en la trayectoria de deformaciones en arena de Hochstetten y en arena de Ticino, comparando los resultados obtenidos con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* entre sí y con los de los modelos de Niemunis y Herle (1997) (apartado 2.6.4.1.1 del capítulo 2) y de Schädlich y Schweiger (2012) (apartado 2.6.3.2.6.1 del capítulo 2).

6.4.1. Ensayos biaxiales en arena de Hostun densa

En las siguientes figuras se muestran los resultados experimentales y las simulaciones numéricas de la fase desviadora de ensayos biaxiales drenados en arena de Hostun densa con confinamientos de $-\sigma'_3 = 100\text{kPa}$ (figura 6.224), $-\sigma'_3 = 200\text{kPa}$ (figura 6.25), $-\sigma'_3 = 400\text{kPa}$ (figura 6.26) y $-\sigma'_3 = 800\text{kPa}$ (figura 6.27).

Ambos modelos predicen resultados similares y las pequeñas diferencias entre los dos se explican según lo expuesto en el apartado 6.2.1.2, con las particularidades de un ensayo biaxial. Asimismo, ambos modelos aproximan razonablemente bien los resultados experimentales, aunque infravaloran la resistencia al corte de la arena, especialmente para niveles bajos de confinamiento. En las figuras 6.24 (abajo), 6.25 (abajo), 6.26 (abajo) y 6.27 (abajo) se aprecia como el grado de aproximación del modelo

EPHYSS a las curvas $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$ experimentales mejora ligeramente respecto a la del modelo *HS-SS*. Finalmente, se puede ver cómo ninguno de los dos modelos es capaz de reproducir el fenómeno de localización observado en los ensayos experimentales, puesto que las formulaciones consideradas no contemplan dicho fenómeno.

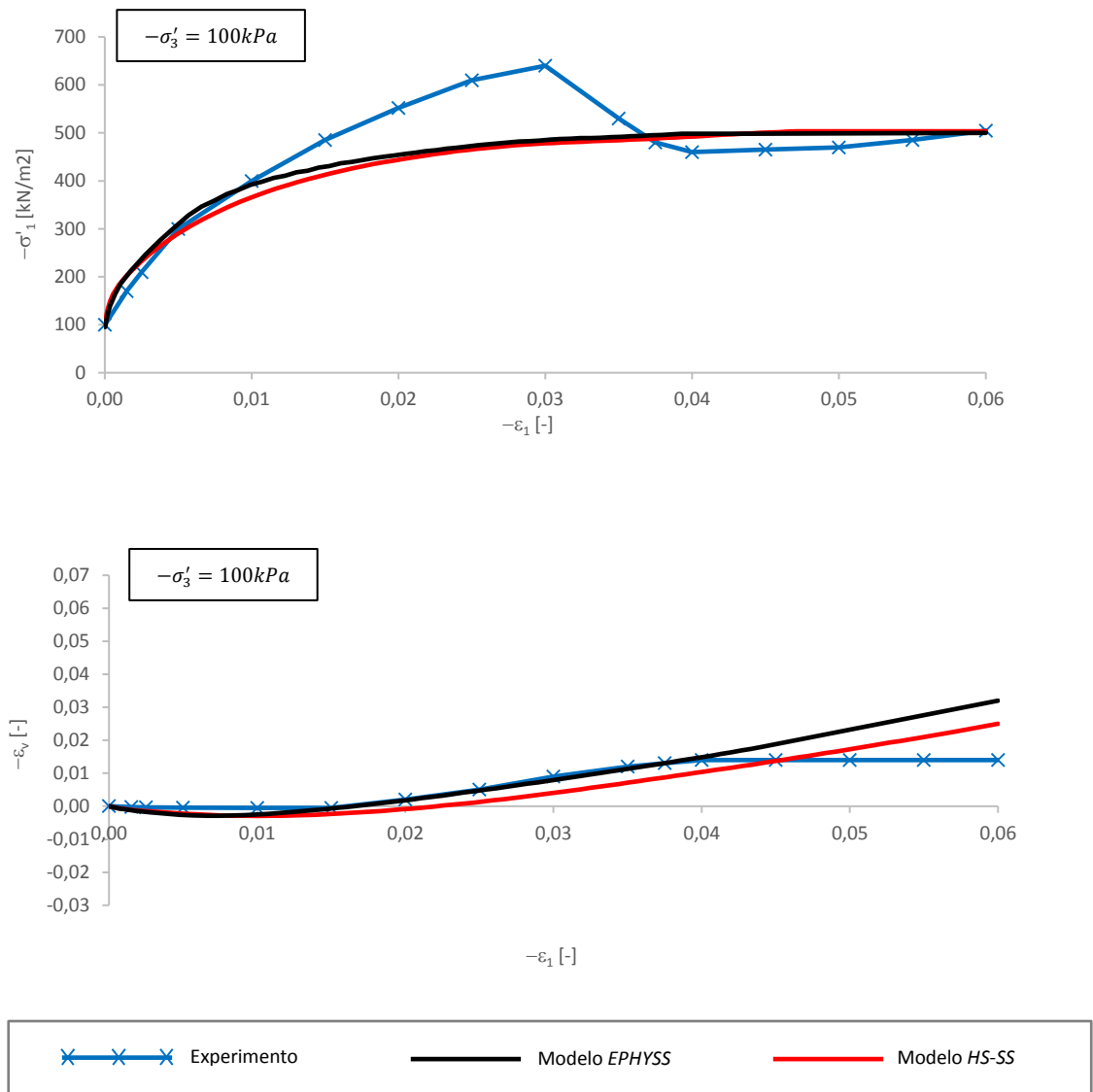


Figura 6.24. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 100 \text{ kPa}$.
 Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

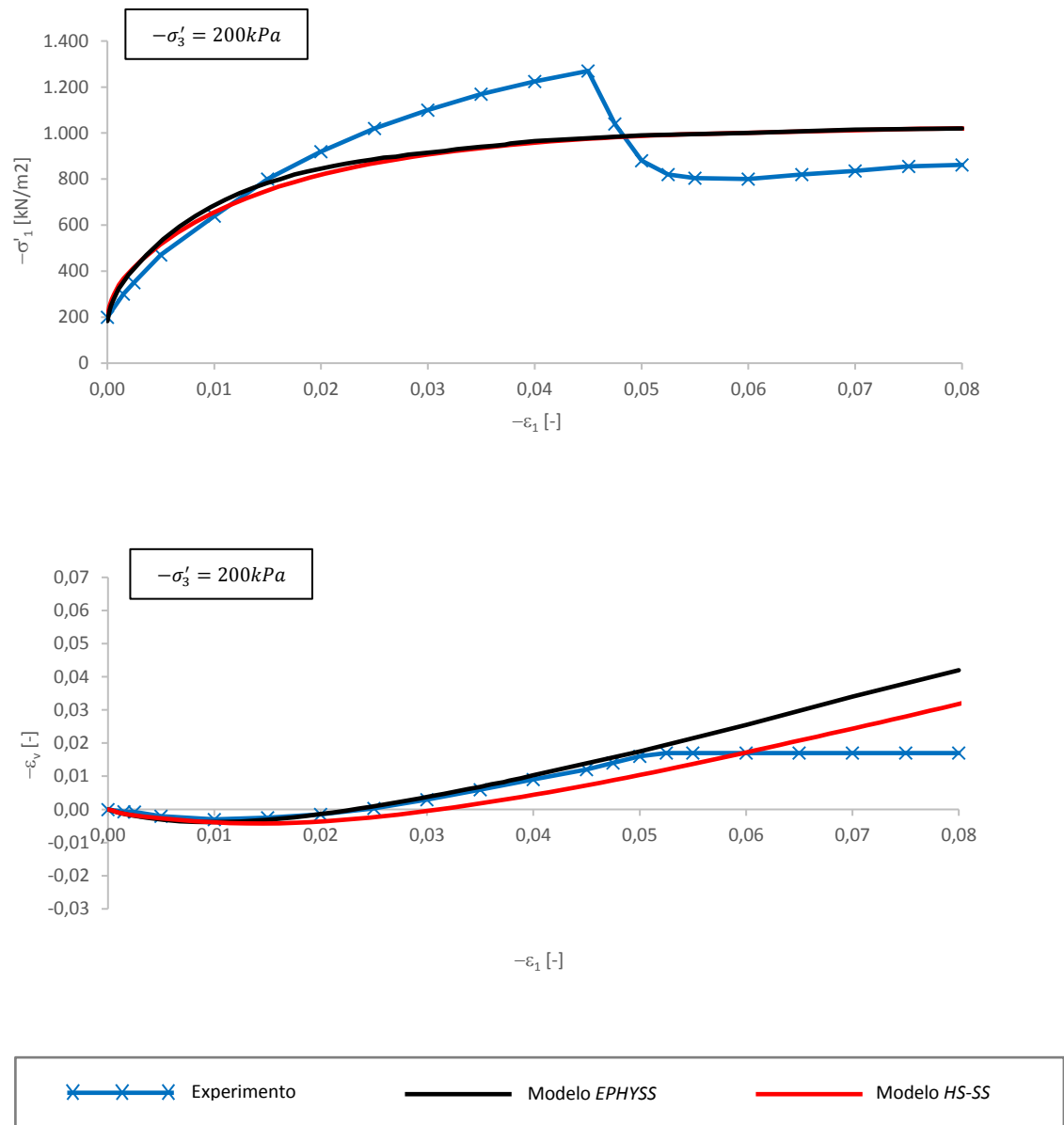


Figura 6.25. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 200 \text{ kPa}$.
Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

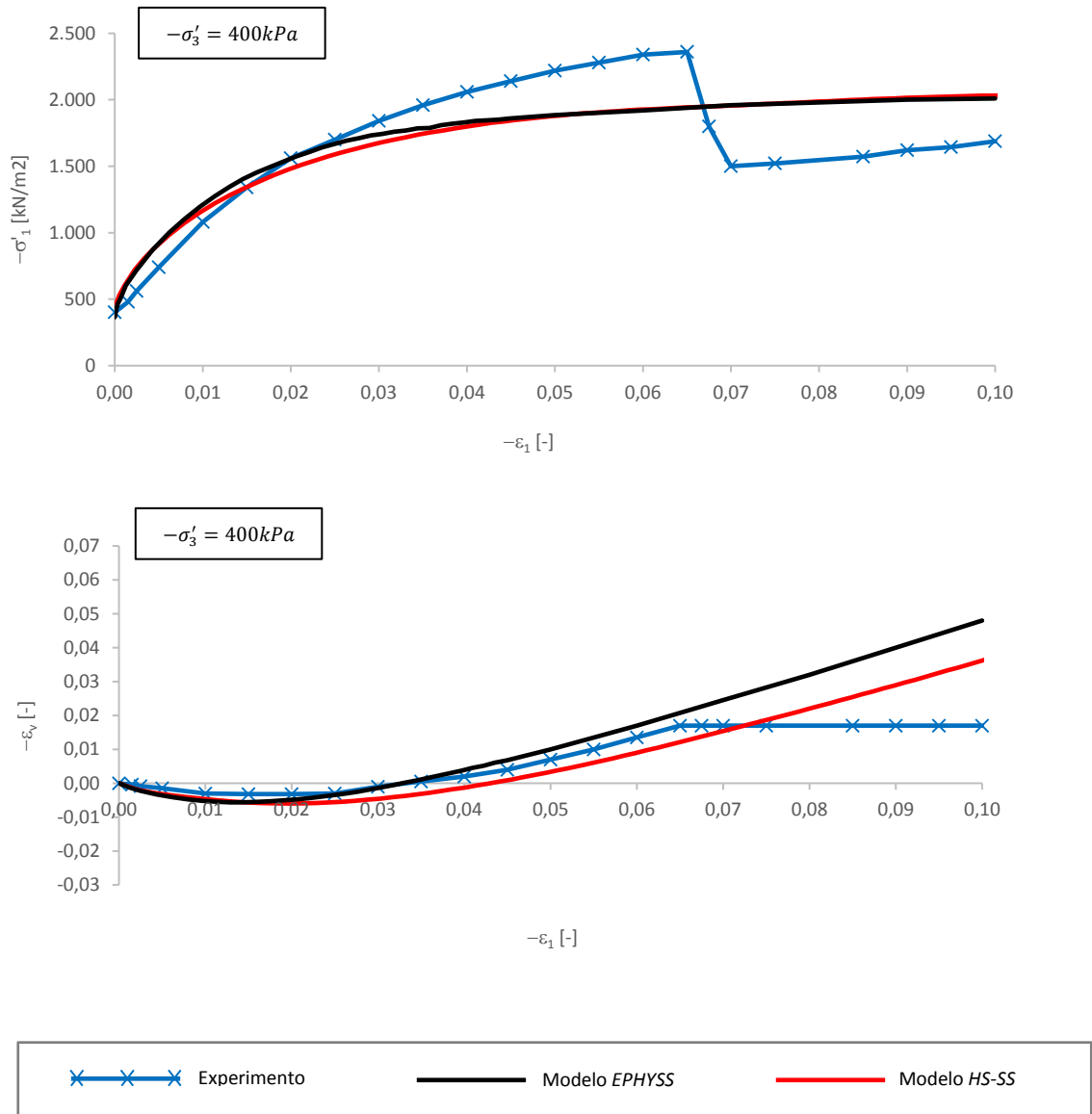


Figura 6.26. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 400 kPa$.
 Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

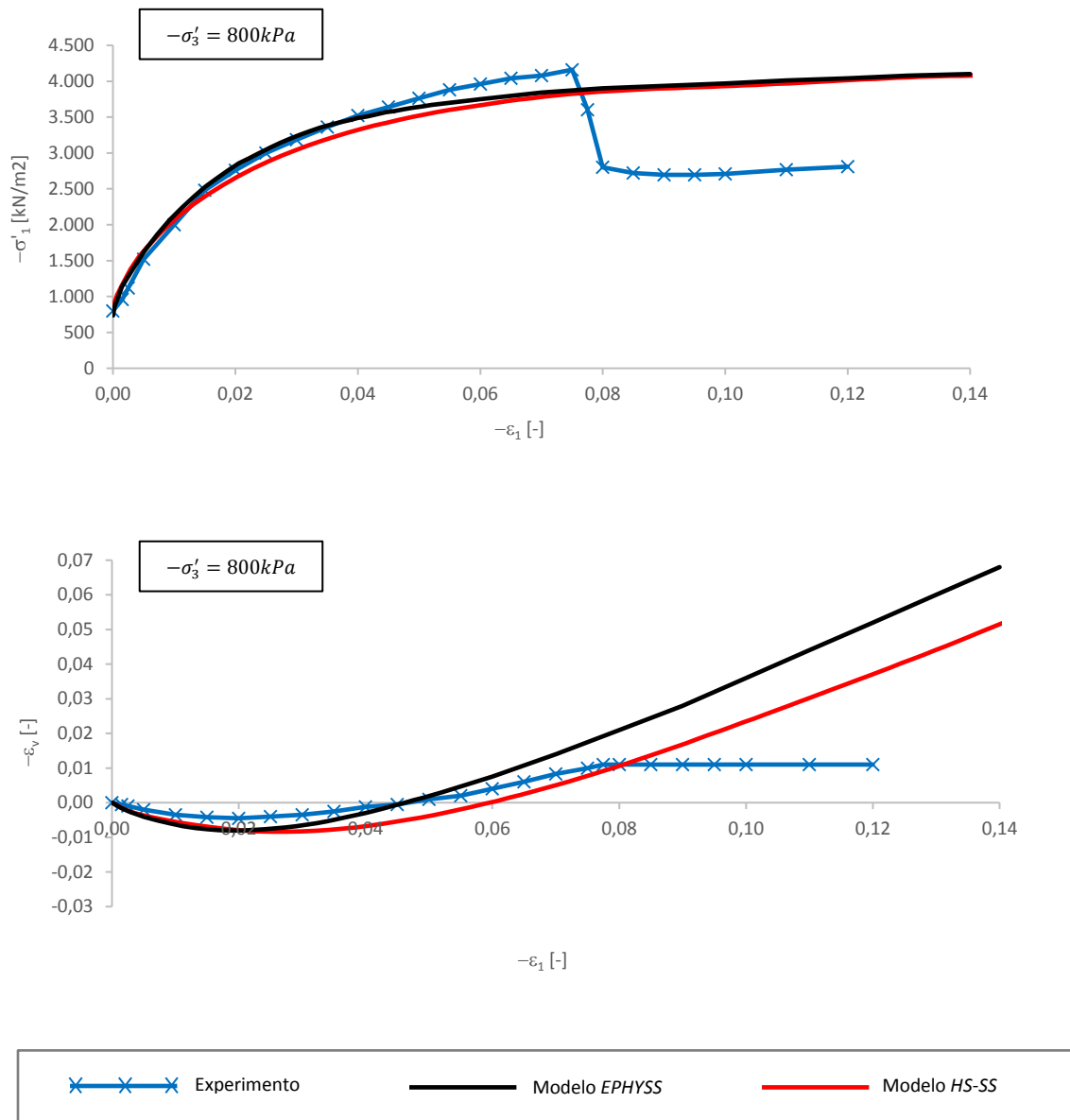


Figura 6.27. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun densa, $-\sigma'_3 = 800 \text{ kPa}$.
Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

6.4.2. Ensayos biaxiales en arena de Hostun suelta

En las siguientes figuras se muestran los resultados experimentales y las simulaciones de la fase desviadora de ensayos biaxiales drenados en arena de Hostun densas con confinamientos de $-\sigma'_3 = 100kPa$ (figura 6.28), $-\sigma'_3 = 200kPa$ (figura 6.29), $-\sigma'_3 = 400kPa$ (figura 6.30) y $-\sigma'_3 = 800kPa$ (figura 6.31).

Tanto el modelo *EPHYSS* como el modelo *HS-SS* proporcionan un buen nivel de aproximación de los resultados experimentales, especialmente en el rango de las pequeñas deformaciones. Ambos modelos predicen resultados similares en el rango de las pequeñas deformaciones, mientras que, en el rango de deformaciones medias y grandes, existen ciertas diferencias en las curvas $(-\sigma'_1) - \epsilon_1$, siendo el modelo *HS-SS* el que proporciona una mejor aproximación a los resultados experimentales.

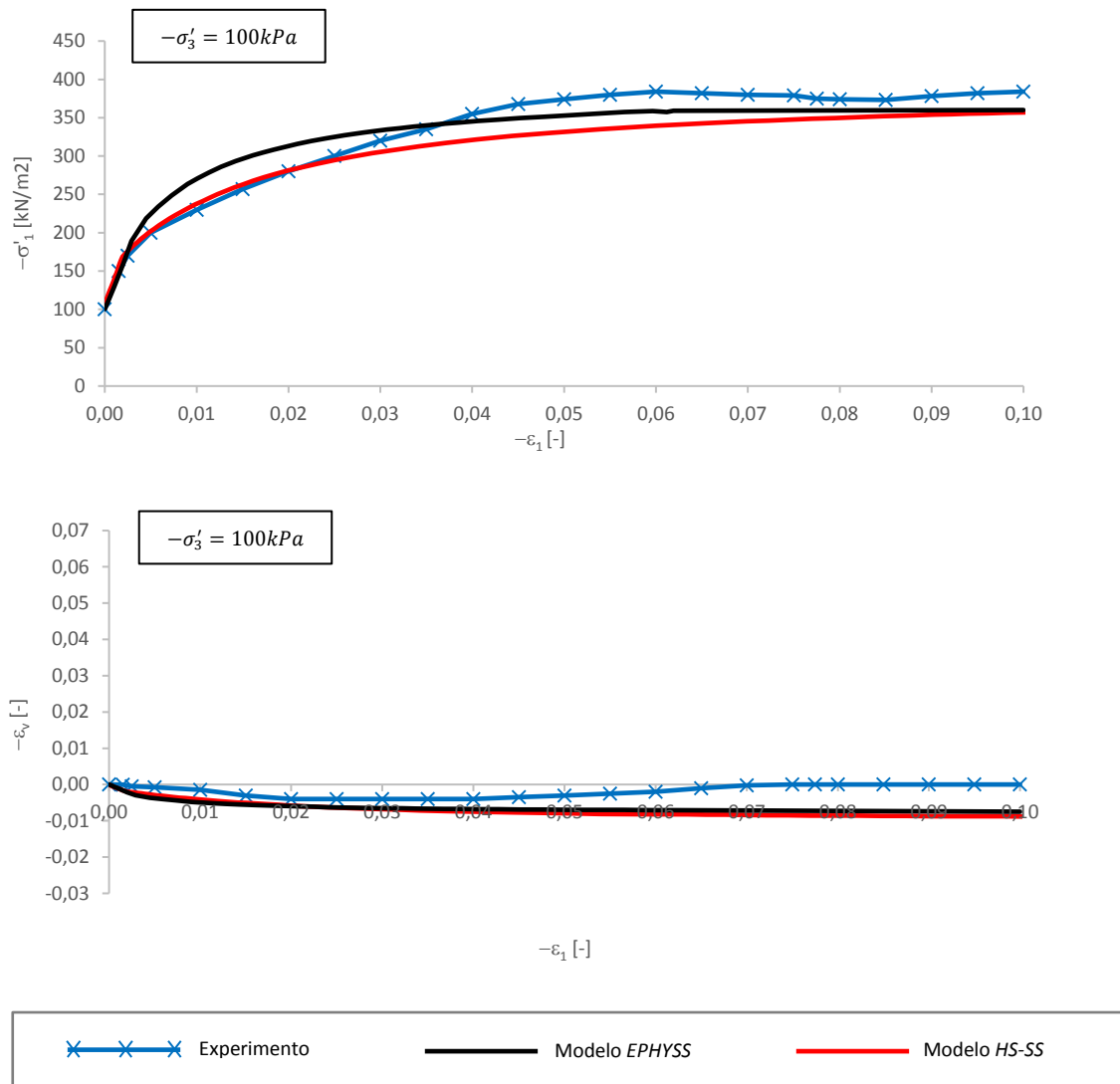


Figura 6.28. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 100kPa$.
 Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

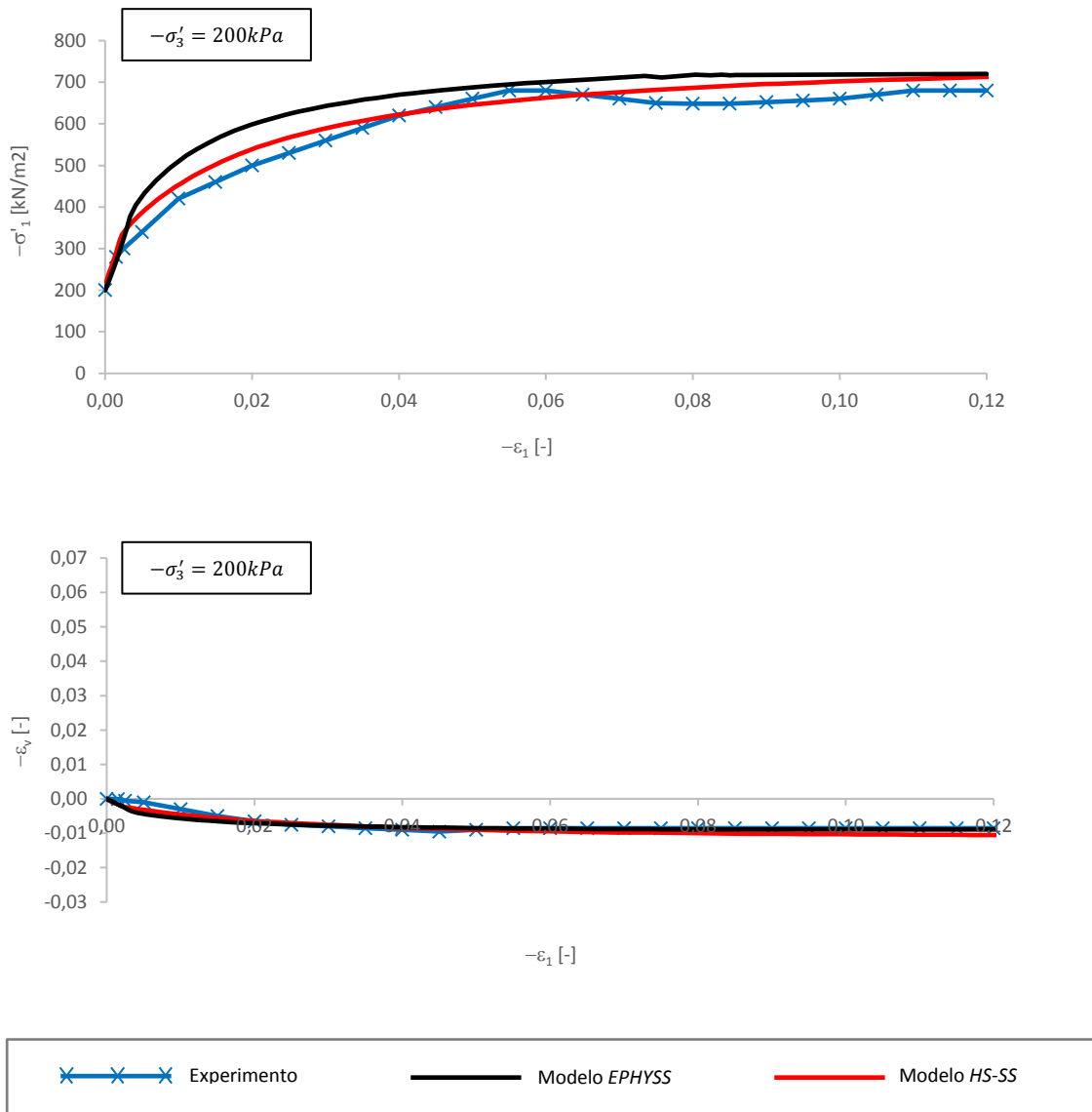


Figura 6.29. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 200 \text{ kPa}$.
 Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

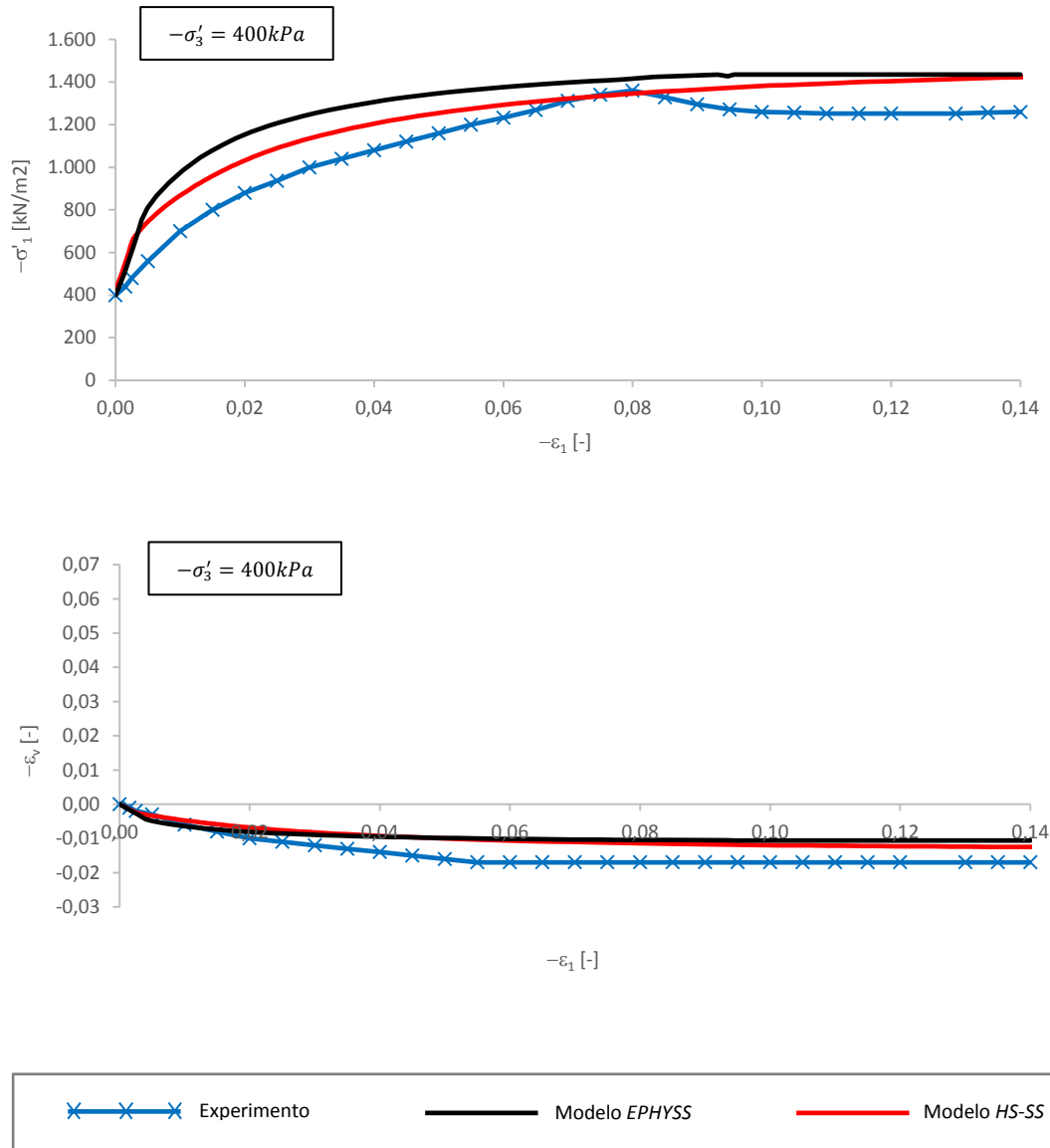


Figura 6.30. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 400 kPa$.
 Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

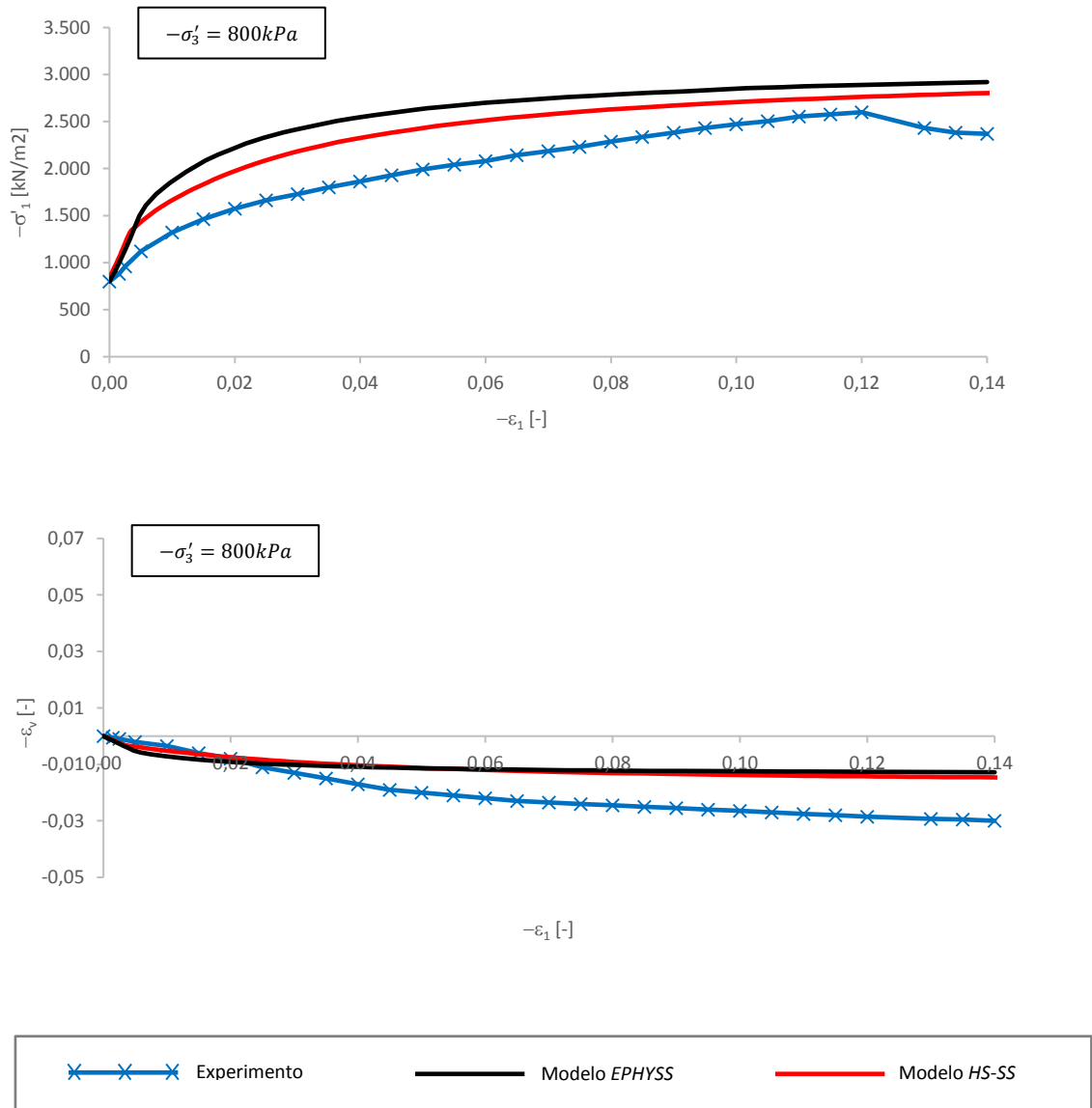


Figura 6.31. Ensayo biaxial drenado en arena de Hostun suelta, $-\sigma'_3 = 800 kPa$.
 Arriba: $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$. Abajo: $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$.

6.4.3. Ensayos biaxiales numéricos con reversión de la deformación en arena de Hochstetten

Se realiza un ensayo biaxial con reversión de la deformación en arena de Hochstetten. Como se puede ver en la figura 6.32, en primer lugar, se realiza una carga biaxial (OA) con idénticos incrementos de deformación en ambas direcciones hasta alcanzar valores de $-\sigma'_{xx} = -\sigma'_{yy} = 150kN/m^2$. Posteriormente, se realiza una descarga biaxial (AO') con idénticos decrementos de deformación en ambas direcciones. A continuación, se realiza de nuevo una carga biaxial ($O'B$) con idénticos incrementos de deformación en ambas direcciones, alcanzándose un valor de $-\sigma'_{xx} = -\sigma'_{yy} = 100kN/m^2$ en B con un incremento de deformación desde O' de $-\Delta\epsilon_{xx} = -\Delta\epsilon_{yy} = 0,0005$. Finalmente, en B se realizan los giros en las trayectorias de deformaciones totales de $\beta = 0^\circ$ (sin reversión), $\beta = 90^\circ$ (reversión de una dirección de la deformación) y $\beta = 180^\circ$ (reversión de ambas direcciones de la deformación).

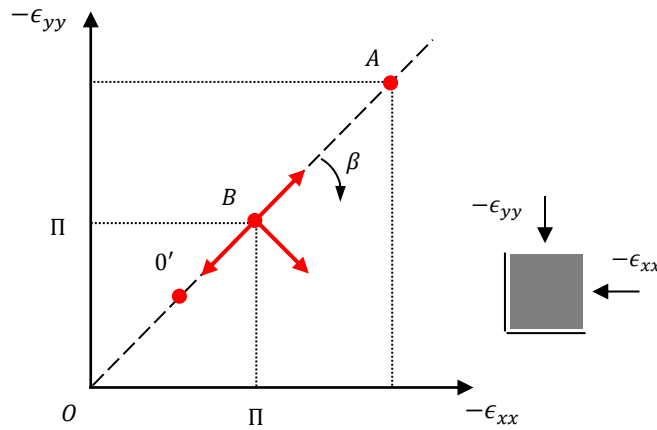


Figura 6.32. Trayectoria de deformaciones en el ensayo biaxial numérico con arena de Hochstetten.

$$\begin{cases} \beta = \frac{\pi}{4} - \operatorname{atan}\left(\frac{-\Delta\epsilon_{yy}}{-\Delta\epsilon_{xx}}\right) & \text{si } 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{3}{4}\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{-\Delta\epsilon_{xx}}{-\Delta\epsilon_{yy}}\right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \end{cases} \quad (6.01)$$

Se puede demostrar que un giro de valor β en los incrementos de las deformaciones totales se corresponde con un giro de valor α en los incrementos de las deformaciones desviadoras, que se puede expresar, en función de los incrementos de deformación totales $-\Delta\epsilon_{xx}$ y $-\Delta\epsilon_{yy}$, de la siguiente manera, teniendo en cuenta que $-\Delta\epsilon_{zz} = 0$:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} - \operatorname{atan}\left(\frac{-\Delta\epsilon_{yy} - 1/3\left((-\Delta\epsilon_{xx}) + (-\Delta\epsilon_{yy})\right)}{(-\Delta\epsilon_{xx}) - 1/3\left((-\Delta\epsilon_{xx}) + (-\Delta\epsilon_{yy})\right)}\right) & \text{si } 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{3}{4}\pi + \operatorname{atan}\left(\frac{(-\Delta\epsilon_{xx}) - 1/3\left((-\Delta\epsilon_{xx}) + (-\Delta\epsilon_{yy})\right)}{-\Delta\epsilon_{yy} - 1/3\left((-\Delta\epsilon_{xx}) + (-\Delta\epsilon_{yy})\right)}\right) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \end{cases} \quad (6.02)$$

Asimismo, en las trayectorias consideradas, se demuestra que $\alpha = \beta$ para ángulos de $\beta = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ y $\beta = 180^\circ$, puesto que, cuando $\beta = 0^\circ$ y $\beta = 180^\circ$ se cumple que $-\Delta\epsilon_{yy} = -\Delta\epsilon_{xx}$, y cuando $\beta = 90^\circ$ se cumple que $-\Delta\epsilon_{oct} = -1/3(\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy} + \Delta\epsilon_{zz}) = 0$, existiendo, en tal caso, un incremento de deformación desviadora pura. Como se puede ver en la tabla 6.12 del apartado 6.4.4 del presente capítulo, para valores de ángulos intermedios de α , no se cumple la igualdad $\alpha = \beta$ al no cumplirse ninguna de las dos condiciones anteriores.

Como se ha comentado en el apartado 2.5.2.2 del capítulo 2 y en el apartado 3.6.2 del capítulo 3, la falta de datos experimentales con medidas de la rigidez al corte en el rango de las pequeñas deformaciones tras reversiones de deformación menores a 180° , obliga a comparar los resultados predichos por el modelo *EPHYSS* con otros modelos avanzados que tienen en cuenta este mismo comportamiento de la rigidez del suelo. En la figura 6.33 se muestran las curvas de degradación del módulo de corte tangente aparente G_t^{ap} en las simulaciones realizadas con los modelos: (1) hipoplástico con deformación intergranular de Niemunis y Herle (1997), según Benz (2007), en verde, (2) *HS-SS*, en rojo, y (3) *EPHYSS*, en negro. Asimismo, se añaden las curvas teóricas de degradación de G_t^{ap} según el modelo *EPHYSS* en línea gris discontinua a modo de verificación del mismo.

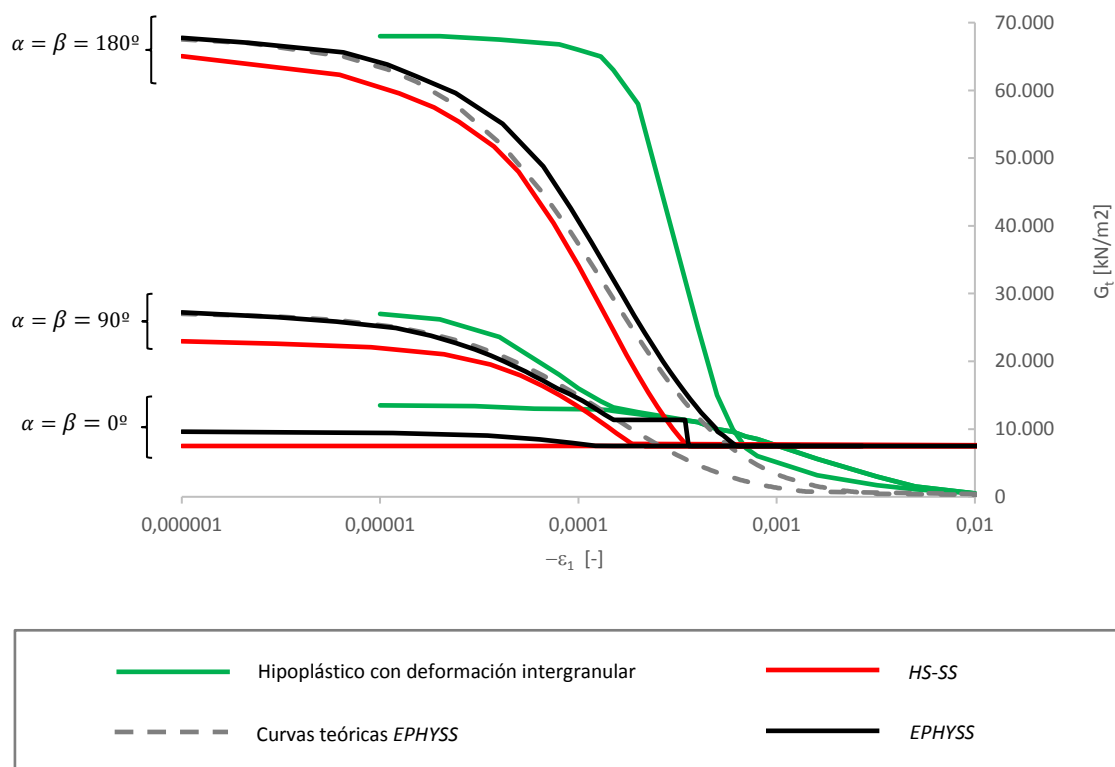


Figura 6.33. Curvas de degradación de G_t^{ap} en el ensayo biaxial numérico con arena de Hochstetten tras las reversiones.

En la figura 6.33 se aprecia cómo los tres modelos son capaces de reproducir la rigidización al corte del suelo inducida por los giros de las deformaciones, si bien existen ciertas diferencias en los resultados obtenidos con cada uno de ellos.

- 1) Cuando no existe reversión de la deformación ($\alpha = \beta = 0^\circ$), la rigidez al corte no varía y el valor máximo del módulo de corte al inicio de la curva de degradación deformada que resulta de reiniciar el valor de $-\epsilon_1$ en B es el valor remanente de $G_t^{ap}(\xi = 2)$ tras la trayectoria $O'B$ en los tres modelos. Los valores máximos de G_t^{ap} y la forma de las curvas de degradación son diferentes en los tres modelos debido a los diferentes valores de G_t^{ap} en el punto B . No obstante, estas diferencias son menores en los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* al compartir los dos una formulación similar de G_s^{ap} y, por tanto, deformar la curva original para $\alpha = 0^\circ$ de un modo similar.
- 2) Cuando tiene lugar un giro de la deformación de $\alpha = \beta = 90^\circ$, generado por una reversión en $-\epsilon_{yy}$, mientras se mantiene el mismo valor de $-\Delta\epsilon_{xx}$:
 - a) En el modelo *EPHYSS* las variables de estado adoptan los valores $\gamma_{oct}^H = 0$, puesto que se reinicializa el tensor de historia \mathbf{h} , y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = 27.000 \text{ kN/m}^2$, dando lugar a un valor de $G_t^{ap}(\xi = 2) = 27.000 \text{ kN/m}^2$ según las expresiones del capítulo 3, siendo este el valor máximo del módulo de corte en la curva de degradación sin deformar que resulta de reiniciar el valor de $-\epsilon_1$ en B (en el gráfico se tiene un valor de $G_t^{ap} = 27.200 \text{ kN/m}^2$ para $-\epsilon_1 = 1 \cdot 10^{-6}$ debido a la corrección considerada en el valor de $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$, según lo descrito en el apartado 3.7.5 del capítulo 3).
 - b) En el modelo *HS-SS* se reinician las componentes H_{yy} y H_{zz} del tensor de historia \mathbf{H} , dando lugar a los valores $\gamma_{HIST}^i = 2,078 \cdot 10^{-4}$ y $\gamma_{HIST}^{i+1} = 2,115 \cdot 10^{-4}$ según las expresiones (2.215) y (2.216), y, por tanto, a un valor de $G_t^{ap}(\xi = 2) = 22.600 \text{ kN/m}^2$ según las expresiones (2.222) a (2.224), siendo este el valor máximo del módulo de corte en la curva de degradación deformada que resulta de reiniciar el valor de la deformación $-\epsilon_1$ en B .
 - c) En el modelo hipoplástico con deformación intergranular de Niemunis y Herle (1997) se reinicializa totalmente el tensor de deformación intergranular δ y $\mathbf{M} = m_T \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e})$: \mathbf{d} , según las expresiones (2.532) y (2.533) del capítulo 2, dando lugar a un valor de $G_t^{ap} = 27.000 \text{ kN/m}^2$.

Los valores máximos de G_t^{ap} son similares en el modelo *EPHYSS* y en el modelo hipoplástico con deformación intergranular, mientras que dicho valor es diferente en el modelo *HS-SS*. Ello es debido a que el valor del parámetro correspondiente al módulo de corte máximo para giros de la deformación de 90° es común en los modelos *EPHYSS* e hipoplástico con deformación intergranular, pero no existe como tal en el modelo *HS-SS*, que reproduce el incremento de la rigidez correspondiente a dicho giro únicamente mediante la reducción de la variable de historia γ_{HIST} . Asimismo, la forma de las curvas de degradación es diferente en los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* a pesar de utilizar una formulación parecida, puesto que el modelo *HS-SS* deforma la curva original para $\alpha = 90^\circ$, mientras que el modelo *EPHYSS* no lo hace. Finalmente, se considera relevante destacar que la forma de las curvas de degradación del modelo hipoplástico con deformación intergranular y el modelo *EPHYSS* tienen elementos similares, como el escalón de la rigidez que se observa en el mismo rango de deformaciones. Ello se explica porque los dos modelos adoptan una estructura algebraica parecida para los respectivos tensores de historia, es decir, el tensor de \mathbf{h} en el modelo *EPHYSS* y el tensor de deformación intergranular δ en el modelo hipoplástico con deformación intergranular. En el caso del modelo

EPHYSS, el mencionado escalón, que aparece en el intervalo de deformación $1,5 \cdot 10^{-4} \leq -\epsilon_1 \leq 4,0 \cdot 10^{-4}$ de la curva de degradación para un giro de deformación de $\alpha = \beta = 90^\circ$ (figura 6.33), es producido por el hecho de que la variable $\gamma_{oct}^H = \sqrt{4/3} \|\mathbf{h}\|$ alcanza su valor máximo $\gamma_{oct}^H = \gamma_{ur}^\alpha$ antes de que lo haga la variable $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, que es la variable utilizada para determinar el dominio de deformación en cada paso de cálculo, donde las variables γ_{oct}^H , γ_{ur}^α y $\gamma_{oct}^{\Delta R}$ son las descritas en el capítulo 3. Como se ha comentado en el apartado 3.2 del capítulo 3, el hecho de que la variable γ_{oct}^H evolucione más rápidamente que $\gamma_{oct}^{\Delta R}$ es debido a que, tras el giro de las deformaciones desviadoras, las variaciones de $\|\mathbf{e}\|$ y, por tanto, de $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, son pequeñas hasta el momento en que el tensor \mathbf{e} adopta la nueva dirección de la trayectoria de deformaciones, momento en el que $\|\mathbf{e}\|$ y, por tanto, $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, varían de la misma forma que $\|\mathbf{h}\|$ y γ_{oct}^H . En resumen, este efecto se debe a que la pertenencia a un dominio u otro en el modelo *EPHYSS* se evalúa mediante la deformación $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, mientras que la rigidez depende de la variable de estado γ_{oct}^H .

- 3) Cuando tiene lugar un giro de la deformación de $\alpha = \beta = 180^\circ$, generado por una reversión en $-\epsilon_{yy}$ y en $-\epsilon_{xx}$:
 - a) En el modelo *EPHYSS* las variables de estado adoptan los valores $\gamma_{oct}^H = 0$, puesto que se reinicializa el tensor de historia \mathbf{h} y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = 68.000 \text{ kN/m}^2$, dando lugar a un valor de $G_t^{ap}(\xi = 2) = 68.000 \text{ kN/m}^2$, según las expresiones del capítulo 3, siendo este el valor máximo del módulo de corte en la curva de degradación sin deformar que resulta de reiniciar el valor de $-\epsilon_1$ en B (en el gráfico se tiene un valor de $G_t^{ap} = 67.800 \text{ kN/m}^2$ puesto que el nivel de deformación es $-\epsilon_1 = 1 \cdot 10^{-6}$).
 - b) En el modelo *HS-SS* se reinician las componentes H_{xx} , H_{yy} y H_{zz} del tensor de historia \mathbf{H} , dando lugar a los valores $\gamma_{HIST}^i = 0$ y $\gamma_{HIST}^{i+1} = 1,658 \cdot 10^{-6}$ según las expresiones (2.215) y (2.216), y, por tanto, a un valor de $G_t^{ap}(\xi = 2) = 64.600 \text{ kN/m}^2$ según las expresiones (2.222) a (2.224), siendo este el valor máximo del módulo de corte en la curva de degradación sin deformar que resulta de reiniciar el valor de la deformación $-\epsilon_1$ en B (en el gráfico se tiene un valor de $G_t^{ap} = 62.300 \text{ kN/m}^2$ puesto que el nivel de deformación es $-\epsilon_1 = 1 \cdot 10^{-6}$).
 - c) En el modelo hipoplástico con deformación interganular de Niemunis y Herle (1997) se reinicializa totalmente el tensor de deformación interganular $\boldsymbol{\delta}$ y $\mathbf{M} = m_R \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e})$: \mathbf{d} , según las expresiones (2.532) y (2.533) del capítulo 2, dando lugar a un valor a un valor de $G_t^{ap} = 68.000 \text{ kN/m}^2$.

Los valores máximos de G_t^{ap} son similares en los tres modelos debido a que el valor del parámetro correspondiente al módulo de corte máximo es común en todos ellos. Asimismo, la forma de las curvas de degradación de G_t^{ap} de los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* son similares entre ellas debido a que ambos utilizan una formulación parecida de G_s^{ap} , basada en las expresiones (2.203) y (2.206) de Dos Santos y Correia (2001). Por otro lado, la forma de la curva para el caso del modelo de Niemunis y Herle (1997) es notablemente diferente al utilizar una formulación distinta.

Las curvas de degradación numéricas del modelo *EPHYSS* se aproximan bastante bien a las curvas de degradación teóricas del mismo, si bien estas últimas se han obtenido con la expresión (3.30), lo cual no es del todo correcto, debiéndose calcular G_t^{ap} como $G_t^{ap} = \Delta\tau/\Delta\gamma_{oct}$ tras la aplicación de las expresiones (3.09), (3.15), (3.22), (3.23), (3.26) y (3.30) de forma incremental.

6.4.4. Ensayos biaxiales numéricos con reversión de la deformación en arena de Ticino

Se realiza un ensayo biaxial con reversión de la deformación en arena de Ticino. Como se puede ver en la figura 6.34, en primer lugar, se realiza una carga biaxial (OA) con idénticos incrementos de deformación en ambas direcciones, hasta alcanzar valores de $-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy} = 0,0165$. Posteriormente, se realiza una descarga biaxial (AO') con idénticos decrementos de deformación en ambas direcciones hasta alcanzar valores de $-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy} = 0,01425$. A continuación, se realiza de nuevo una carga biaxial ($O'B$) con idénticos incrementos de deformación en ambas direcciones, alcanzándose un valor de $-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy} = \Pi$ en B , siendo $\Pi = 0,01\%$, $\Pi = 0,02\%$, $\Pi = 0,04\%$, $\Pi = 0,06\%$, $\Pi = 0,10\%$ y $\Pi = 0,20\%$. Finalmente, en B se realizan los giros en las trayectorias de deformaciones totales de $\beta = 0^\circ$, $\beta = 22,5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\beta = 67,5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\beta = 112,5^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\beta = 157,5^\circ$ y $\beta = 180^\circ$.

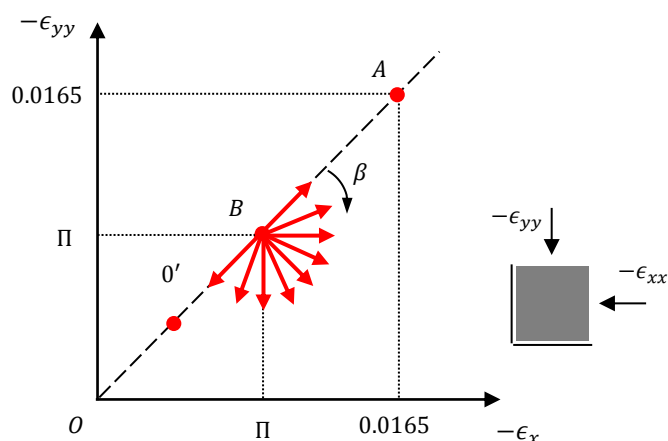


Figura 6.34. Trayectoria de deformaciones en el ensayo biaxial numérico con arena de Ticino.

Como se ha comentado en el apartado 2.5.2.2 del capítulo 2, en el apartado 3.6.2. del capítulo 3 y en el apartado 6.4.3 del presente capítulo, la falta de datos experimentales con medidas de la rigidez al corte en el rango de las pequeñas deformaciones tras reversiones de deformación menores a 180° obliga a comparar los resultados predichos por el modelo *EPHYSS* con otros modelos avanzados que tienen en cuenta este mismo comportamiento de la rigidez del suelo. En las siguientes figuras se muestran los gráficos circulares $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ para diferentes valores de Π en los modelos: (1) multilaminado para pequeñas deformaciones de Schädlich y Schweiger (2012) (figura 6.35), según Benz (2007), (2) hipoplástico con deformación intergranular de Niemunis y Herle (1997) (figura 6.36), según Benz (2007), (3) *HS-SS* (figura 6.37) y (4) *EPHYSS* (figura 6.38). En la figura 6.39 se puede ver una superposición de los resultados obtenidos con los modelos *HS-SS* y *EPHYSS*.

En la tabla 6.12 se proporcionan los valores de los incrementos de las deformaciones totales $-\Delta\epsilon_{xx}$ y $-\Delta\epsilon_{yy}$, así como los valores del ángulo de giro de la trayectoria de deformaciones desviadoras recientes α y totales β según las expresiones (6.01) y (6.02), respectivamente.

$-\Delta\epsilon_{xx}$ [-]	$-\Delta\epsilon_{yy}$ [-]	α [deg]	β [deg]
0,000100	0,000100	0,0	0,0
0,000277	0,000115	51,2	22,5
0,000141	0,000000	71,6	45,0
0,000277	-0,000115	82,1	67,5
0,000100	-0,000100	90,0	90,0
0,000115	-0,000277	97,9	112,5
0,000000	-0,000141	108,4	135,0
-0,000115	-0,000277	128,8	157,5
-0,000100	-0,000100	180,0	180,0

Tabla 6.12. Valores de $-\Delta\epsilon_{xx}$ y $-\Delta\epsilon_{yy}$ durante los giros de deformación y valores del ángulo de giro de las deformaciones desviadoras α (según la expresión 6.01) y de las deformaciones totales β (según la expresión 6.02).

Las curvas $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ dadas por Benz (2007) del modelo de Niemunis y Herle (1997) no se corresponden con los valores de Π indicados en el párrafo anterior, sino que se corresponden con valores de $\rho = 0$ hasta $\rho = 1$ en intervalos de 0,10, considerando valores $\chi = 6,0$ (figura 6.36a) y $\chi = 2,0$ (figura 6.36b), donde los parámetros ρ y χ son los expuestos en el apartado 2.6.4.1.1 del capítulo 2.

En el siguiente análisis de las curvas $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ se consideran los valores de ρ y χ equivalentes a Π .

En primer lugar, se observan claras diferencias en la forma de las curvas $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ que resultan de los modelos de Schädlich y Schweiger (2012) y Niemunis y Herle (1997).

- 1) Para $0^\circ \leq \beta < 75^\circ$, ambos modelos proporcionan valores similares de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para cualquier nivel de deformación.
- 2) Para $75^\circ \leq \beta < 180^\circ$, el modelo de Schädlich y Schweiger (2012) proporciona valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ superiores a los que proporciona el modelo de Niemunis y Herle (1997), especialmente para $\Pi > 0,01\%$. Ello significa que la recuperación elástica en el modelo de Schädlich y Schweiger (2012) depende en menor medida del valor acumulado de la deformación que en el modelo de Niemunis y Herle (1997). No obstante, ambos modelos proporcionan valores $G_t^{ap}/G_{t,ur} > 2$ para $\beta = 90^\circ$.
- 3) Para $\beta = 180^\circ$, ambos modelos proporcionan valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur} = 5$.

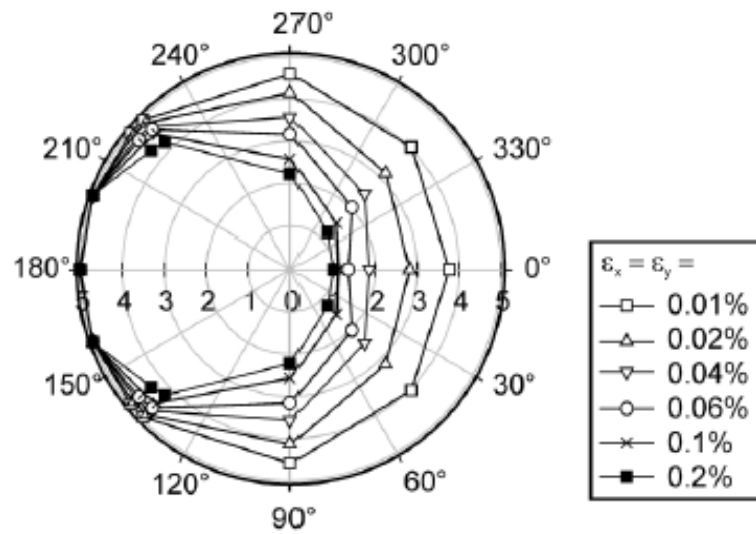


Figura 6.35. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger (2012). En la figura se consideran deformaciones de signo contrario al resto de figuras. Schädlich y Schweiger (2012).

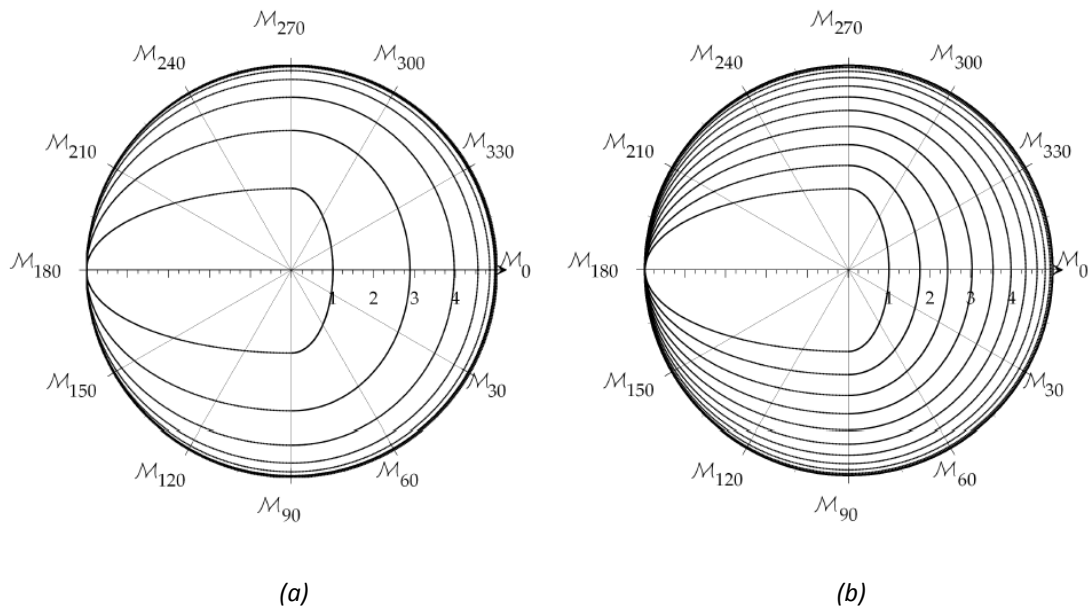


Figura 6.36. Valores de G_t^{ap} / G_{ur} según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β en el modelo de Niemunis y Herle (1997) para valores de $L(\sigma', e) = \mathbf{1}$, $N(\sigma', e) = \mathbf{0}$, $m_R = 5$, $m_T = 2$ y valores de (a) $\chi = 6.0$ y (b) $\chi = 2$. Benz (2007).

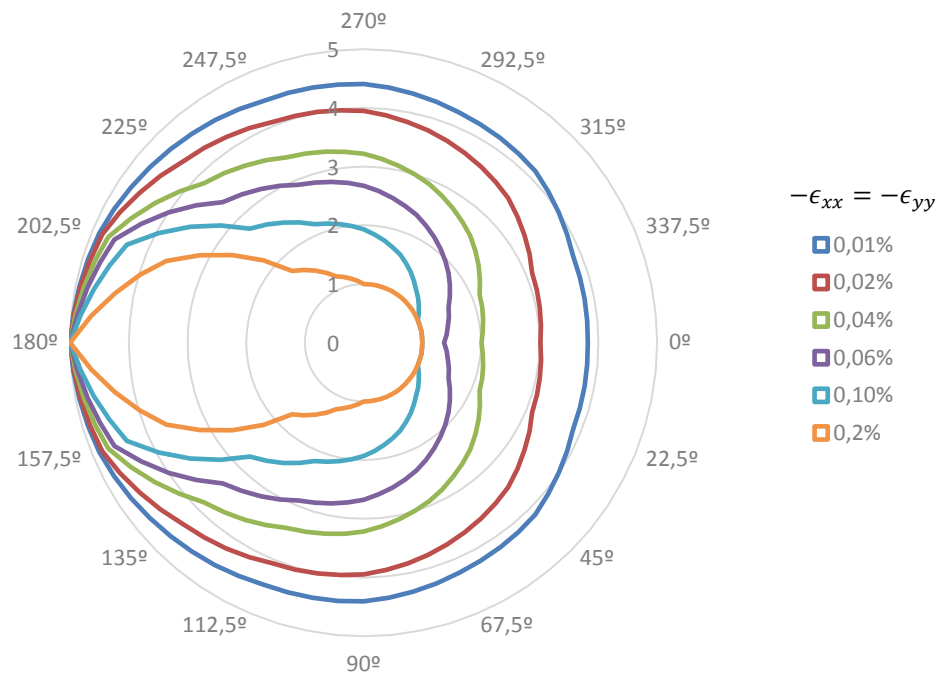


Figura 6.37. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo HS-SS (se ha considerado interpolación lineal entre los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ calculados).

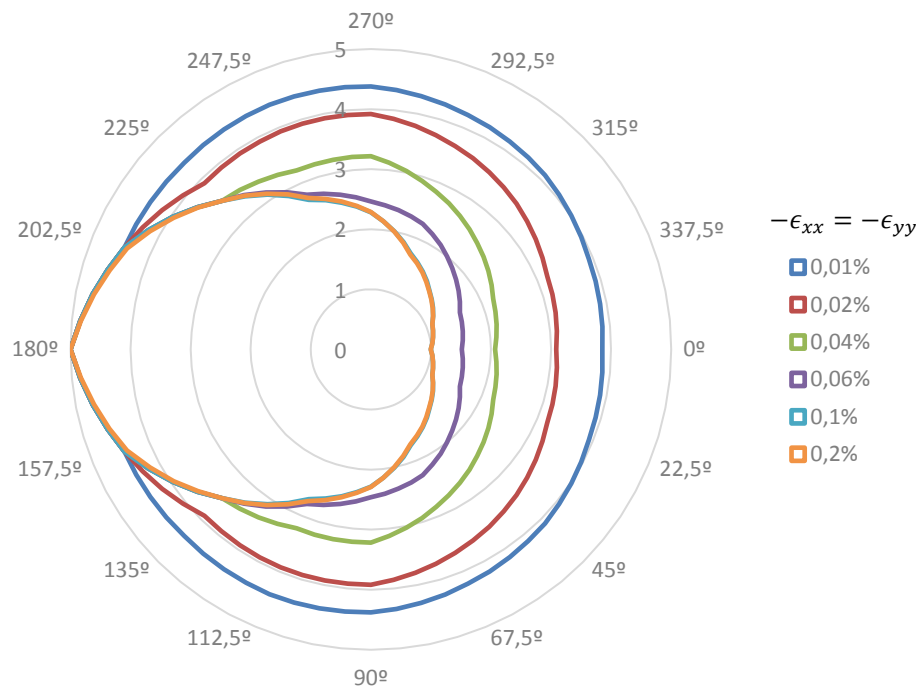


Figura 6.38. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo EPHYSS (se ha considerado una interpolación lineal entre los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ calculados).

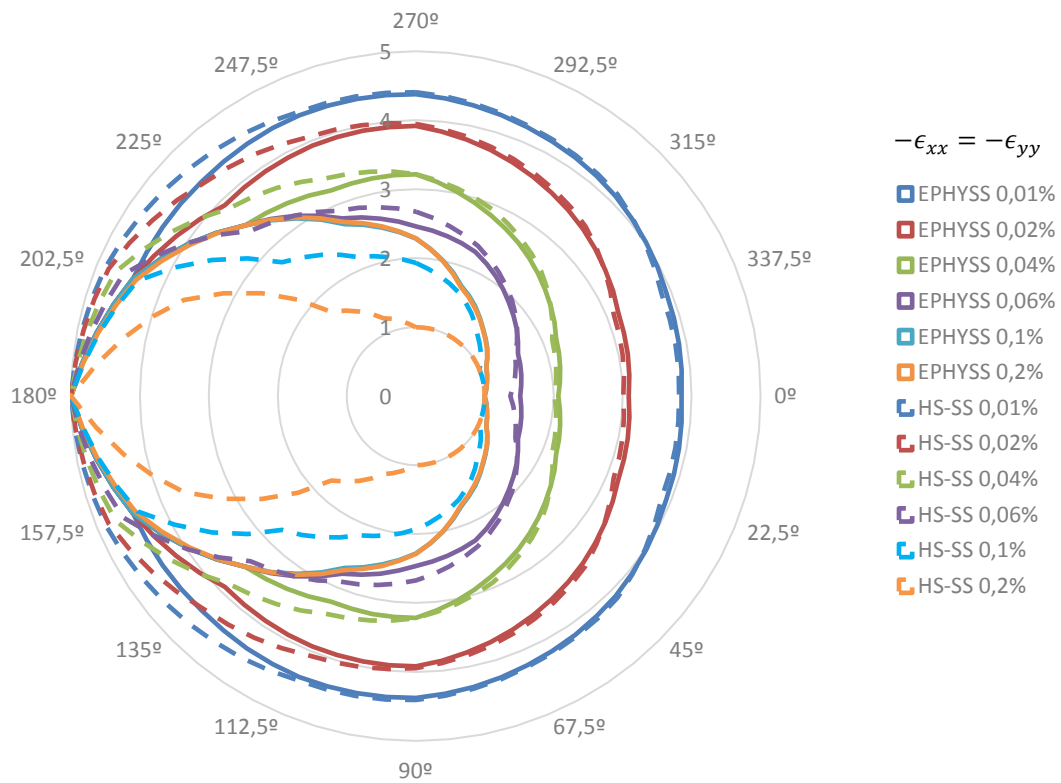


Figura 6.39. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ según el giro de la trayectoria de deformaciones totales β y la deformación inicial Π en el modelo EPHYSS (líneas continuas) y en el modelo HS-SS (líneas discontinuas) (se ha considerado una interpolación lineal entre los valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ calculados).

La recuperación de la rigidez elástica en el modelo HS-SS tiene lugar cuando se reinicializa alguna de las componentes del tensor de historia \mathbf{H} . A partir de las simulaciones realizadas se comprueba que para $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ y $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ se reinicializa la componente H_{yy} de \mathbf{H} , para $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ y $90^\circ \leq \beta < 180^\circ$ se reinicializan las componentes H_{yy} y H_{zz} de \mathbf{H} , y para $\alpha = 180^\circ$ y $\beta = 180^\circ$ se reinicializan todas las componentes de \mathbf{H} (H_{xx} , H_{yy} y H_{zz}). Los resultados obtenidos muestran claramente el funcionamiento del triple modelo de bloques de Simpson considerado en el modelo *Small Strain Overlay Model (SSOM)* de Benz (2007) en el que se basa la parte elástica no lineal del modelo HS-SS, tal como se ha indicado previamente en el apartado 2.6.3.1.2.2.22 del capítulo 2.

A diferencia del modelo HS-SS, en el modelo EPHYSS la recuperación de la rigidez elástica del suelo se produce de forma continua con el ángulo de giro de la trayectoria de deformaciones desviadoras recientes, a partir de un valor mínimo de dicho ángulo $(\hat{\mathbf{h}} : \hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*)$.

En relación con los valores $G_t^{ap} / G_{t,ur} - \beta$ proporcionados por los modelos HS-SS y EPHYSS, se tiene lo siguiente:

- 1) $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$: Los modelos HS-SS y EPHYSS proporcionan, en general, similares valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$, con el matiz de que para $0^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$, el modelo HS-SS ofrece valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$

ligeramente inferiores a los que ofrece el modelo *EPHYSS*. Asimismo, los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ de los modelos *HS-SS* y *EPHYSS* son similares a los del modelo de Schädlich y Schweiger (2012) para $\Pi \leq 0,04\%$. Para $\Pi > 0,04\%$, el modelo *EPHYSS* sigue proporcionando valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ similares a los proporcionados por el modelo de Schädlich y Schweiger (2012). Mientras que el modelo *HS-SS*, para $0,04\% \leq \Pi \leq 0,10\%$, proporciona valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ similares a los proporcionados por el modelo de Niemunis y Herle (1997) y, cuando $\Pi = 0,20\%$, proporciona valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur} = 1$ muy inferiores a los obtenidos con el resto de modelos, lo que implica que los giros de deformación no producen un incremento de la rigidez del suelo. Esto último es debido al elevado valor de la deformación $-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy} = \Pi = 0,20\%$ antes de producirse el giro de deformaciones, lo cual, a su vez, da lugar a valores elevados de las componentes de \mathbf{H} y, por tanto, de γ_{HIST} , ($\gamma_{HIST} \gg \gamma_c$, donde γ_c se calcula según la expresión 2.213). Tras el giro de deformaciones, se reinicializa la componente H_{yy} del tensor \mathbf{H} , pero no la componente H_{xx} , que conserva el valor previo a dicho giro, el cual es suficientemente elevado como para proporcionar valores de γ_{HIST}^i y γ_{HIST}^{i+1} según las expresiones (2.215) y (2.216), que siguen siendo superiores a γ_c , no produciéndose, por tanto, ningún incremento de la rigidez.

- 2) $90^\circ \leq \beta < 120^\circ$: Los valores $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ del modelo *EPHYSS* se aproximan a los del modelo de Niemunis y Herle (1997) para $\Pi < 0,04\%$, y a los del modelo de Schädlich y Schweiger (2012) para $\Pi > 0,10\%$. Por otro lado, los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ del modelo *HS-SS* se aproximan más a los del modelo de Schädlich y Schweiger (2012) para $\Pi < 0,04\%$, a los del modelo Niemunis y Herle (1997) para $0,06\% < \Pi \leq 0,10\%$ y a ninguno de los dos anteriores para $\Pi > 0,20\%$, por el mismo motivo que se expuesto en el punto 1.
- 3) $120^\circ \leq \beta < 180^\circ$: Los valores $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ proporcionados por el modelo *EPHYSS* son inferiores a los del modelo de Niemunis y Herle (1997) para $\Pi < 0,04\%$ y superiores para $\Pi > 0,04\%$, mientras que estos mismos valores son inferiores a los proporcionados por el modelo de Schädlich y Schweiger (2012) para todos los niveles de deformación. Asimismo, los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ proporcionados por el modelo *HS-SS* son similares a los proporcionados por el modelo Niemunis y Herle (1997) para $\Pi \leq 0,06\%$, superiores para $\Pi = 0,10\%$, inferiores para $\Pi = 0,20\%$, e inferiores a los proporcionados por el modelo Schädlich y Schweiger (2012) para todos los niveles de deformación.
- 4) Para $\beta = 180^\circ$, tanto el modelo *HS-SS* como el modelo *EPHYSS* proporcionan valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur} = 5$, del mismo modo que sucede con los modelos de Niemunis y Herle (1997) y Schädlich y Schweiger (2012).

A modo de resumen, los cuatro modelos son capaces de reproducir en mayor o menor medida la recuperación de la rigidez elástica al corte del suelo tras un giro parcial o total de la trayectoria de deformaciones. No obstante, el modelo *HS-SS* no es capaz de reproducir dicha recuperación elástica tras un giro parcial cuando el valor de la deformación acumulada Π previa al mismo es elevado ($\gamma_{HIST} \gg \gamma_c$). Esto último no sucede en ninguno de los otros tres modelos, donde la recuperación elástica del suelo depende menos del valor de la deformación acumulada Π , siendo una ventaja añadida en el modelo *EPHYSS* el uso de parámetros muy similares a los del modelo *HS-SS* y el hecho de ofrecerse a ser más fácilmente utilizable en la práctica de la ingeniería geotécnica que los modelos de Niemunis y Herle (1997) o Schädlich y Schweiger (2012).

6.5. Ensayos numéricos comparativos entre el modelo *HS-SS* y el modelo *EPHYSS*

Finalmente, se realiza un conjunto de simulaciones numéricas de ensayos triaxiales y edométricos con objeto de demostrar que la formulación del modelo *EPHYSS* permite corregir las inconsistencias detectadas en el modelo *HS-SS* (Castellón, 2013), tal como se ha indicado en el apartado 2.6.3.2.1.3 del capítulo 2. Las inconsistencias que resultan de la existencia de fases nulas se advierten en el Manual de Materiales de Plaxis (2015). En todos los ensayos se utilizarán los parámetros correspondientes a la arena suelta de Hostun, incorporando los valores de los coeficientes de permeabilidad $k_x = k_y = 1\text{m/día}$. Las simulaciones con el modelo *HS-SS* se han hecho, en este caso, con Plaxis 2D 2015 y Plaxis 2D 2018, obteniéndose los mismos resultados con ambos.

6.5.1. Ensayos edométricos numéricos

En la tabla 6.13 se detallan las trayectorias de tensiones aplicadas en los ensayos edométricos numéricos realizados, que se muestran en las figuras 6.40, 6.41 y 6.42.

	FASE	Condiciones drenaje	$-\Delta\sigma'$ [kPa]	$-\Delta u_w$ [kPa]	$-\sigma'$ [kPa]	Δ Tiempo [día]
1	Carga	Drenada	+40	0	40	0
2	Carga (ED-1)	No drenada	0	+10	40	0
	Carga (ED-2 y ED-3)	Drenada	+10	0	50	0
3	Consolidación (ED-1)	Consolidación	+10	-10	50	1
	Fase nula (ED-2)	Drenada	0	0	50	0
	Pequeña descarga (ED-3)	Drenada	-0,1	0	49,9	0
4	Carga (ED1 y ED-2)	Drenada	+50	0	100	0
	Carga (ED-3)	Drenada	+50,1	0	100	0
5	Descarga	Drenada	-40	0	60	0
6	Descarga (ED-1)	No drenada	0	-10	60	0
	Descarga (ED-2 y ED-3)	Drenada	-10	0	50	0
7	Consolidación (ED-1)	Consolidación	-10	+10	50	1
	Fase nula (ED-2)	Drenada	0	0	50	0
	Pequeña recarga (ED-3)	Drenada	+0,1	0	50,1	0
8	Descarga (ED1 y ED-2)	Drenada	-40	0	10	0
	Descarga (ED-3)	Drenada	-40,1	0	10	0

Tabla 6.13. Ensayo ED-1, ED-2 y ED-3. Trayectoria de tensiones con fases de consolidación (ED-1), fases neutras (ED-2) o pequeñas descargas/recargas (ED-3) que generan inconsistencias en la curva de carga noval y en la curva de descarga/recarga.

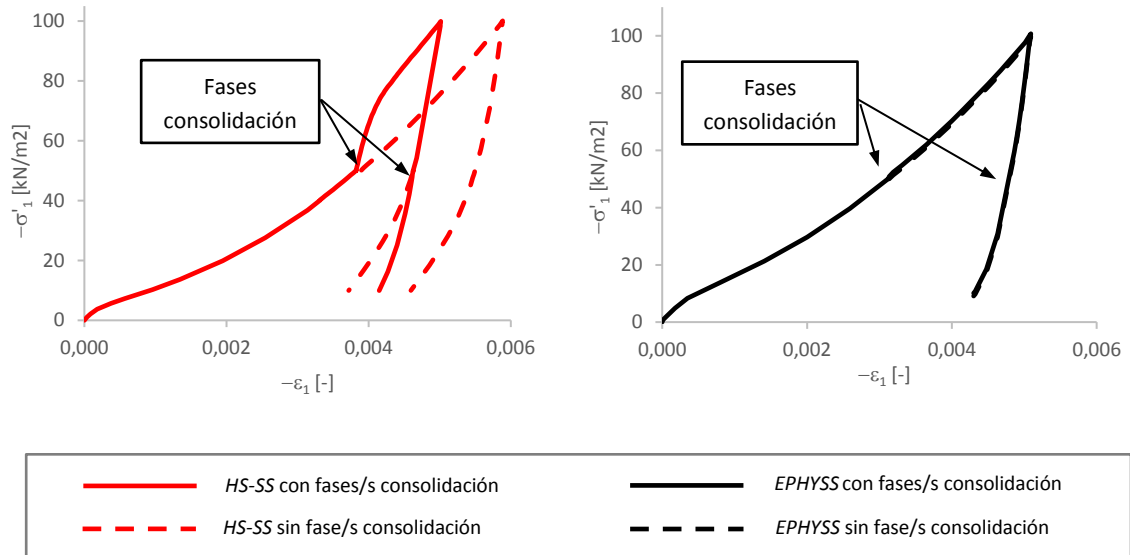


Figura 6.40. Curva $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ ensayo ED-1 con los modelos EPHYSS y HS-SS, que introduce fases de consolidación.

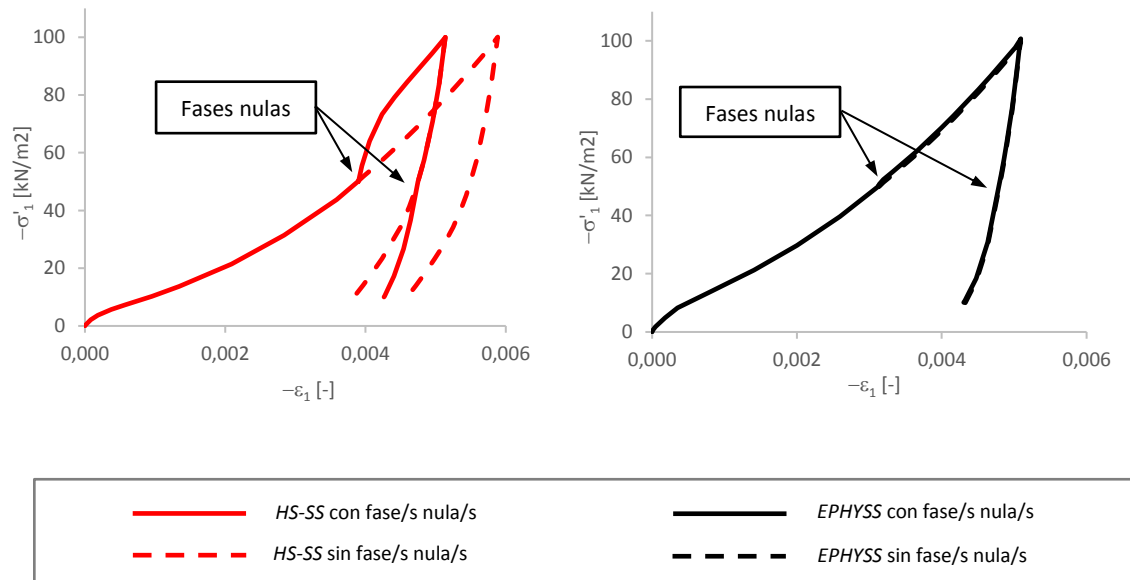


Figura 6.41. Curva $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ ensayo ED-2 con los modelos EPHYSS y HS-SS, que introduce fases nulas.

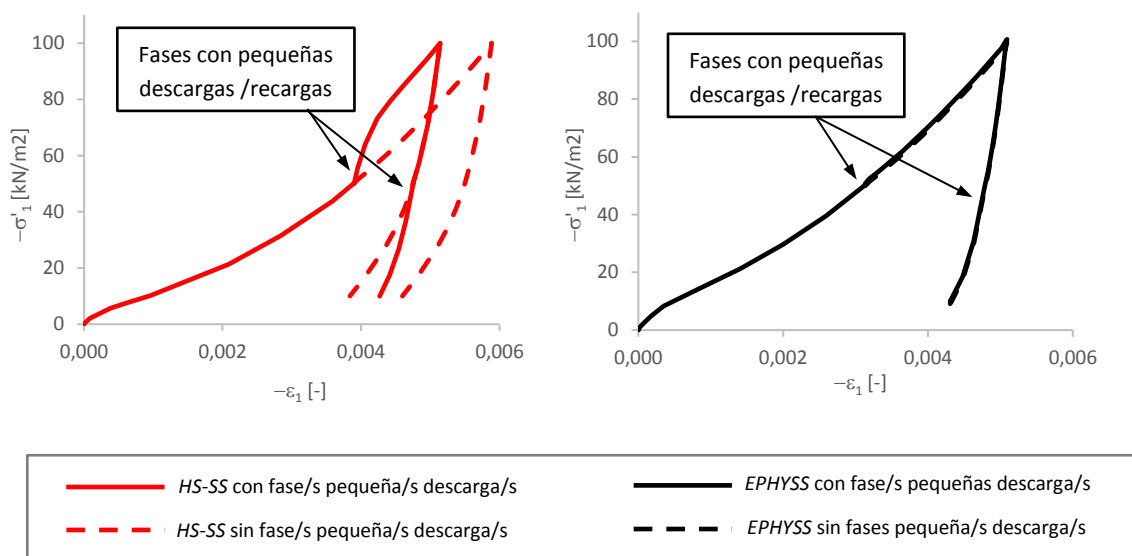


Figura 6.42. Curva $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ ensayo ED-3 con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, que introduce pequeñas descargas/recargas.

En las simulaciones con el modelo *HS-SS* se observan, en todos los casos, las mismas inconsistencias relacionadas con variaciones de la rigidez durante fases de consolidación, fases nulas y fases con pequeñas descargas, que dan lugar a desviaciones en las curvas $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ tanto en la rama elastoplástica como en la rama elástica (figuras 6.39 izquierda, 6.40 izquierda y 6.41 izquierda). En todos estos casos se ha detectado la reinicialización de todas las componentes del tensor de historia \mathbf{H} . Como se ha demostrado en el apartado 2.6.3.2.1.3 del capítulo 2, estos efectos pueden llegar a tener una influencia muy relevante en los resultados de las simulaciones numéricas de problemas de contorno, al ser acumulativos.

Por otro lado, en las simulaciones con el modelo *EPHYSS* apenas se observan variaciones de la rigidez que dan lugar a la desviación de las curvas edométricas (figuras 6.39 derecha, 6.40 derecha y 6.41 derecha). Ello es debido a que el modelo *EPHYSS*, a pesar de sufrir en las simulaciones con fases de consolidación, fases nulas y fases con pequeñas descargas, reversiones similares a las que se observan en el modelo *HS-SS* (dando lugar, en este caso, a una reinicialización del tensor de historia \mathbf{h}), es capaz de corregir su efecto en las posteriores fases de cálculo gracias a la introducción de las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e que acumulan la suficiente información de la historia reciente del suelo para recuperar la rigidez histórica correspondiente a una determinada rama de carga/descarga/recarga previa, a pesar de los posibles ciclos imbricados en la misma.

6.5.2. Ensayos triaxiales numéricos

En la tabla 6.14 se detallan las trayectorias de tensiones aplicadas en los ensayos triaxiales numéricos realizados, que se muestran en las figuras 6.43, 6.44, 6.45 y 6.46.

La disipación de presiones durante las fases de consolidación en un ensayo triaxial genera un giro en las deformaciones desviadoras respecto a las fases previas, lo cual es debido a las condiciones de contorno del drenaje y a las condiciones axisimétricas propias del ensayo. Es por ello que, en este caso, tanto en el modelo *HS-SS* como en el modelo *EPHYSS*, siempre tendrá lugar cierta rigidización del suelo, lo cual no permite analizar las posibles inconsistencias generadas durante las fases de consolidación y, en consecuencia, no se analiza este caso.

	FASE	Condiciones drenaje	$-\Delta p'$ [kPa]	Δq [kPa]	$-p'$ [kPa]	q [kPa]	Δ Tiempo [día]
Consolidación isotrópica	1 Carga isotrópica	Drenada	+50	0	50	0	0
	2 Fase nula (ET-2)	Drenada	0	0	50	0	0
	Pequeña descarga (ET-3)	Drenada	-0,1	0	49,9	0	0
	3 Carga (ET-2)	Drenada	+50	0	100	0	0
	Carga (ET-3)	Drenada	+50,1	0	100	0	0
	4 Descarga isotrópica	Drenada	-50	0	50	0	0
	5 Fase nula (ET-2)	Drenada	0	0	50	0	0
Pequeña recarga (ET-3)	Drenada	+0,1	0	50,1	0	0	
6 Descarga (ET-2)	Drenada	-40	0	10	0	0	
Descarga (ET-3)	Drenada	-40,1	0	10	0	0	
7 Carga isotrópica	Drenada	+90	0	100	0	0	
Fase desviadora	8 Carga desviadora (ET-2 y ET-3)	Drenada	+66,7	+200	166,67	200	0
	9 Fase nula (ET-2)	Drenada	0	0	166,67	200	0
	Pequeña descarga (ET-3)	Drenada	-0,67	-2	166	198	0
	10 Carga (ET-2)	Drenada	+33,3	100	200	300	0
	Carga (ET-3)	Drenada	+34	102	200	300	0
	11 Descarga desviadora (ET-2 y ET-3)	Drenada	-33,3	-100	166,67	200	0
	12 Fase nula (ET-2)	Drenada	0	0	166,67	200	0
Pequeña recarga (ET-3)	Drenada	+0,03	+0,1	166,7	200,1	0	
13 Descarga (ET-2)	Drenada	-30	-90	136,67	110	0	
Descarga (ET-3)	Drenada	-30,03	-90,1	136,67	110	0	

Tabla 6.14. Ensayo ET-2 y ET-3. Trayectoria de tensiones en fase de consolidación isotrópica y fase desviadora con fases neutras (ET-2) o pequeñas descargas (ET-3) que general inconsistencias en la curva de carga noval y en la curva de descarga/recarga.

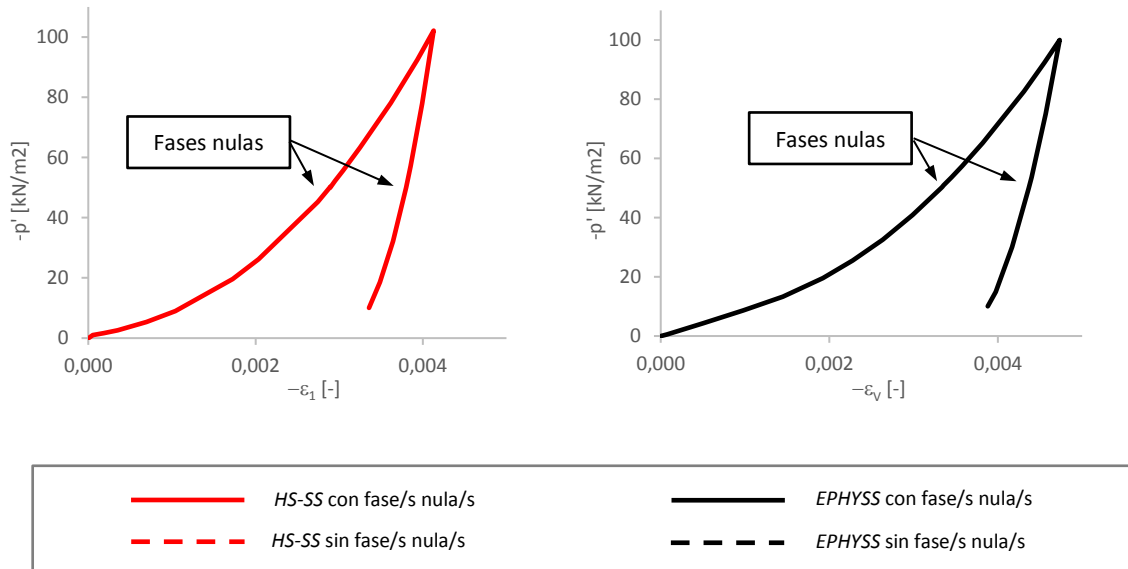


Figura 6.43. Curvas $-p' - (-\epsilon_v)$ del ensayo ET-2 con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, que introduce fases nulas.

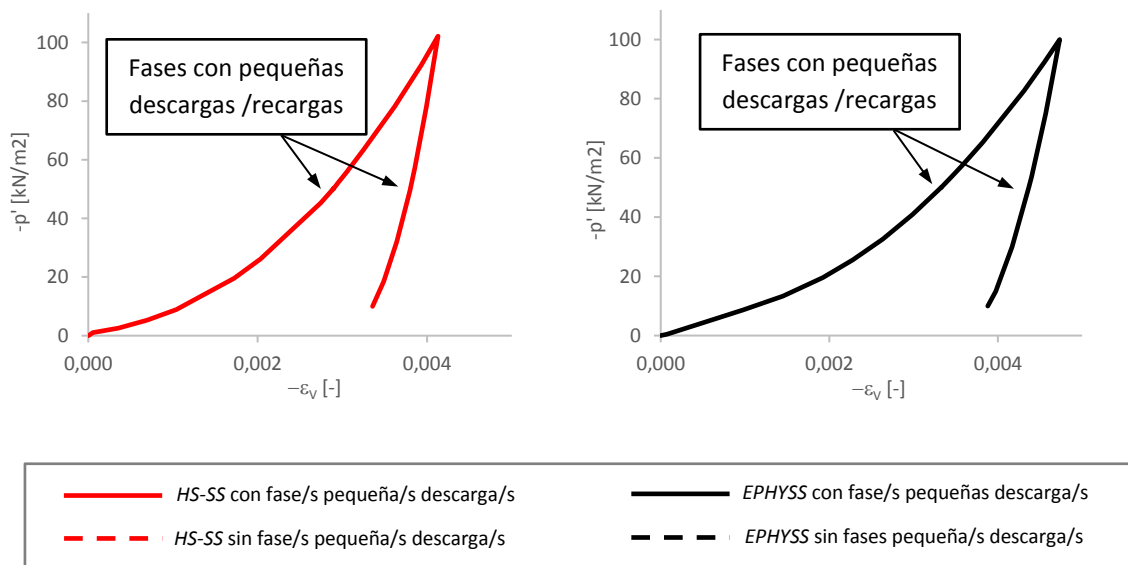


Figura 6.44. Curvas $-p' - (-\epsilon_v)$ del ensayo ET-3 con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, que introduce pequeñas descargas/recargas.

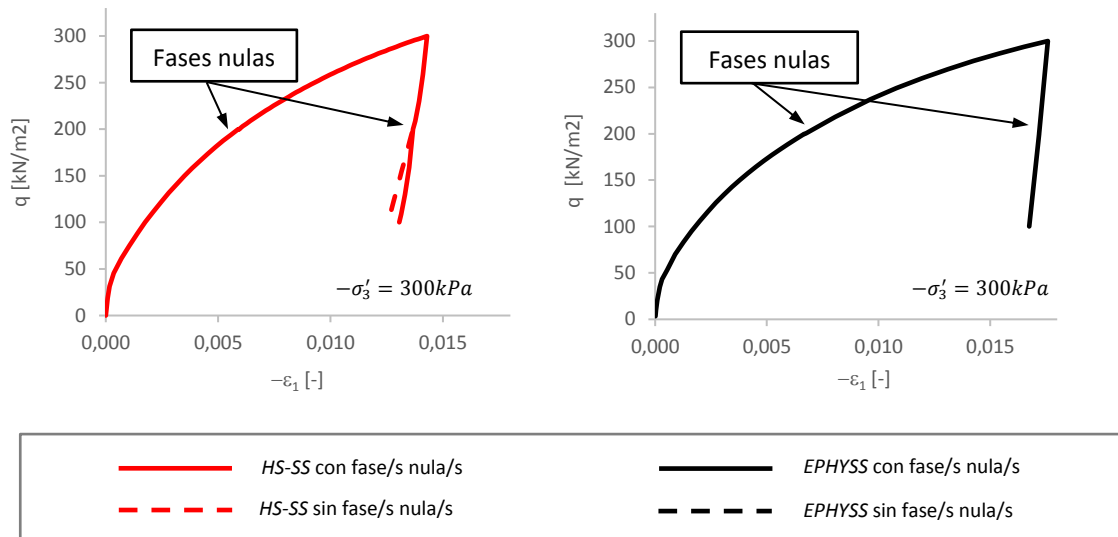


Figura 6.45. Curva fase desviadora del ensayo ET-2 con los modelos EPHYSS y HS-SS, $-\sigma_3' = 300kPa$, que introduce fases nulas.

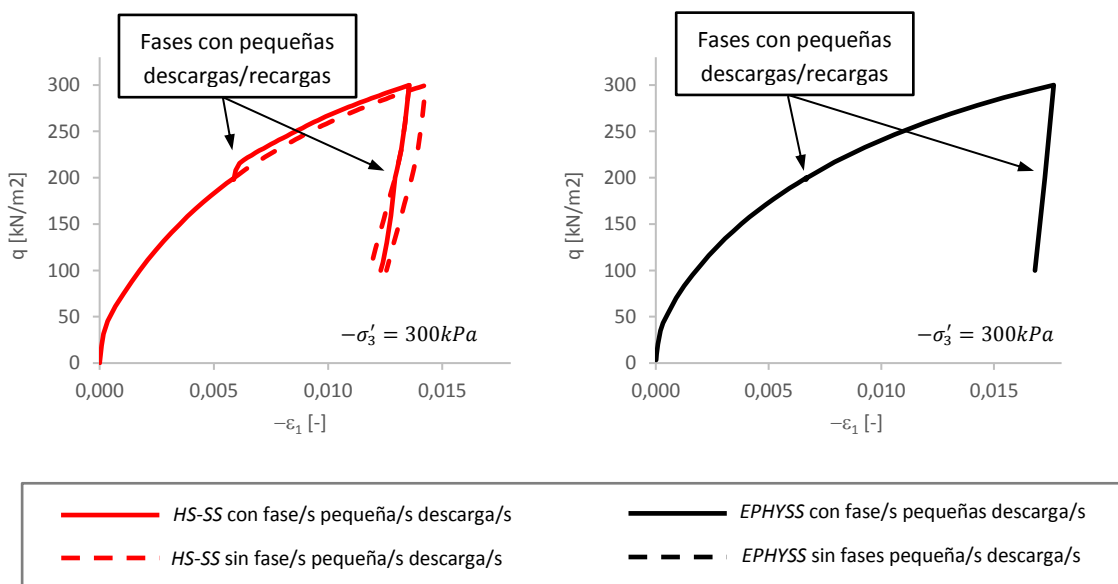


Figura 6.46. Curva fase desviadora del ensayo ET-3 con los modelos EPHYSS y HS-SS, $-\sigma_3' = 300kPa$, que introduce pequeñas descargas/recargas.

Como se puede ver en las figuras 6.43 y 6.44 durante la carga y descarga isótropa de los ensayos triaxiales numéricos realizados, las fases nulas y pequeñas descargas/recargas isótropas no producen variaciones de la rigidez volumétrica del suelo en ninguno de los dos modelos.

En relación con las fases desviadoras de los ensayos triaxiales numéricos realizados:

Modelo HS-SS

- 1) No se observan variaciones de la rigidez cuando se introducen fases nulas durante las cargas noales (figura 6.45 izquierda). Efectivamente, se comprueba que en estos casos no se reinicia ninguna de las componentes del tensor de historia \mathbf{H} .
- 2) Se observan variaciones de la rigidez que dan lugar a desviaciones en las curvas $q - (-\epsilon_1)$ cuando se introducen fases nulas durante la rama de descarga (figura 6.45 izquierda). Se comprueba que esta variación de la rigidez es debida a la reinicialización de todas las componentes del tensor de historia \mathbf{H} .
- 3) Se observan variaciones de la rigidez que dan lugar a desviaciones en las curvas $q - (-\epsilon_1)$ cuando se introducen pequeñas descargas/recargas tanto en la rama de carga noal como en la rama de descarga (figura 6.46 izquierda). Se comprueba que esta variación de la rigidez es debida a la reinicialización de todas las componentes del tensor de historia \mathbf{H} .

Modelo EPHYSS

1. No se observan variaciones de la rigidez en ningún caso (figuras 6.45 izquierda y 6.46 izquierda). Como se ha comentado en el apartado anterior, ello es debido a que el modelo *EPHYSS* es capaz de corregir el efecto de las inconsistencias generadas en las simulaciones con fases nulas y fases con pequeñas descargas gracias a la introducción de las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} Y \mathbf{E}_{MEM}^e , que acumulan la suficiente información de la historia reciente del suelo para recuperar la rigidez histórica correspondiente a una determinada rama de carga/descarga/recarga previa, a pesar de los posibles ciclos imbricados en la misma.

Capítulo 7

Validación del modelo *EPHYSS* con problemas de contorno

En el presente capítulo se valida el modelo *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)* a través de la simulación de diferentes problemas de contorno analizados por Benz (2007) de obras ejecutadas en las que se realiza algún tipo de monitorización. Asimismo, los resultados obtenidos de las simulaciones con el modelo *EPHYSS* se comparan con los resultados obtenidos de las mismas simulaciones con el modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis.

Al tratarse de diferentes problemas de contorno, estos ofrecen, en conjunto, una visión bastante amplia de las mejoras y elementos distintivos del modelo *EPHYSS* respecto al modelo *HS-SS*. Los problemas de contorno analizados son los siguientes:

- Túnel Steinhaldenfeld, al noreste de la ciudad de Stuttgart (Alemania), excavado con el Nuevo Método Austríaco (*NATM* por sus siglas en inglés), entre 2002 y 2004.
- Segundo túnel de Heinoord, al sur de la ciudad de Rotterdam (Holanda), excavado con tuneladora, concretamente con escudo de bentonita (*slurry shield*), entre 1996 y 1998.
- Excavación profunda entre pantallas con tres líneas de anclajes en la ciudad de Berlín (Alemania).
- Excavación profunda entre pantallas de pilotes apuntaladas en la ciudad de Offenbach (Alemania) en 1992.
- Ensayo sobre una zapata experimental realizado en el *Texas A&M University National Geotechnical Experimentation Site (NGES)* en 1997.

Las simulaciones se han realizado con el programa Plaxis 2D 2015 utilizando, por un lado, el modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis mediante el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)* de Plaxis (se utiliza el modelo correspondiente a la subrutina *Mymodel4.f90*, anejo III) y, por otro lado, el modelo *HS-SS* predefinido en Plaxis. En dichas simulaciones se han utilizado elementos isoparamétricos de 15 nodos y, en cuanto al convenio de signos utilizado, por congruencia con el criterio utilizado en Plaxis, se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión, incluida la presión del agua. Asimismo, en todo momento se considera el marco teórico de las pequeñas deformaciones ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

Dado que en todos los problemas de contorno analizados se carece de los resultados de los ensayos para la determinación de algunos de los parámetros de modelo *EPHYSS*, estos se han estimado a partir de los parámetros del modelo *HS-SS*, tal como se ha descrito en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5.

Asimismo, es necesario mencionar que en los cuatro primeros problemas de contorno analizados se considera la hipótesis de deformación plana, si bien los parámetros de los diferentes tipos de suelos utilizados en las simulaciones se han obtenido, en general, a partir de ensayos con simetría axial o de ajustes mediante *backanalysis* de ensayos con simetría axial.

7.1. Reseteo de la historia de deformaciones

En el apartado 2.5.2.2 del capítulo 2 se muestra, a partir de las investigaciones de Atkinson et al. (1990), Clayton y Heymann (2001) y Gasparre et al. (2007), la manera en que la historia reciente del suelo modifica su rigidez en el rango de las pequeñas deformaciones. No obstante, tal como apunta Benz (2007), cuando, tras la historia de formación de un suelo, tienen lugar procesos de relajación de tensiones por efectos viscosos o bien por procesos de tipo diagenéticos, como la cimentación y el envejecimiento, el efecto de la historia previa de deformaciones en el suelo queda borrado o atenuado. Por ello, en la mayoría de problemas de contorno es habitual que la historia de deformaciones parta de cero, lo cual es equivalente a considerar $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ y $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_0$ en el modelo *HS-SS* y $\mathbf{h} = \mathbf{0}$, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,180}$, $\mathbf{e}^R = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}^{e,R} = \mathbf{0}$, $\mathbf{H}_{MEM} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}_{MEM} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E}_{MEM}^e = \mathbf{0}$ y $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_{s,0}^{ap,180}$ en el modelo *EPHYSS*.

Este efecto de borrado o atenuación de la historia previa de las deformaciones puede lograrse numéricamente mediante la activación y posterior desactivación de una pequeña carga ficticia en los modelos, sin que dicha carga tenga efectos significativos en el comportamiento plástico del suelo. No obstante, tratando de emular la opción de *Reset displacements to zero* y *Reset Small Strain* de la *Interface* de Plaxis que reinicia los desplazamientos y la historia de deformaciones del suelo en una determinada fase de cálculo, se ha introducido en el modelo *EPHYSS* el factor *Reini_Stiff* (ver apartado 5.4.5.1 del capítulo 5) que adoptará un valor de 1 cuando sea necesario resetear la historia de deformaciones en una determinada fase de cálculo y un valor de 0 cuando ello no sea necesario. Generalmente, cuando *Reini_Stiff* = 1, se resetearán también los desplazamientos del terreno mediante la *Interface* de Plaxis.

7.2. Tratamiento de materiales sobreconsolidados

Es muy habitual encontrar materiales sobreconsolidados en la práctica habitual de la ingeniería geotécnica. El efecto de dicha sobreconsolidación sobre el comportamiento del terreno es importante y afecta notablemente el valor de la rigidez al corte del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, tal como se ha explicado en el apartado 2.5.2.2 del capítulo 2.

El módulo *UDSM* de Plaxis presenta ciertas limitaciones a la hora de incorporar la sobreconsolidación de un material, ya sea a través del índice $OCR = (-\sigma'_{v,max})/(-\sigma'_v)$ (*Over-Consolidation Ratio*) o del índice $POP = |(-\sigma'_{v,max}) - (-\sigma'_v)|$ (*Pre-Overburden Pressure*), donde $-\sigma'_{v,max}$ es la tensión máxima vertical

histórica y $-\sigma'_v$ la tensión vertical actual. Por ello, y con objeto de introducir en los modelos numéricos tanto el valor del índice *OCR* (ver apartado 5.4.5.1 del capítulo 5) o, alternativamente el valor del índice *POP*, como el valor del coeficiente K_0^{SC} de cada material, se procede de la siguiente manera:

- 1) Cuando un material A_i está sobreconsolidado, se define un material A_i^1 con los parámetros del material A_i y los valores $OCR = 1$ y $K_0^{SC} = K_0^{NC}$, y un material A_i^2 , con los parámetros del material A_i y los valores correctos de OCR y K_0^{SC} .
- 2) En la fase inicial de cálculo se considera, en los clústeres correspondientes a cada material sobreconsolidado A_i , el material A_i^2 y se selecciona un cálculo tipo K_0 – *procedure* de Plaxis.
- 3) En las posteriores fases de cálculo se considera, en los clústeres correspondientes a cada material sobreconsolidado A_i , el material A_i^1 .

Cuando no exista sobreconsolidación en el suelo, se utilizará, en la fase inicial, el cálculo tipo *Gravity loading* de Plaxis con pasos de cálculo pequeños para evitar errores groseros en el movimiento de las superficies de fluencia durante el *Return Mapping* de dicha fase.

7.3. Túnel Steinhaldenfeld en Stuttgart excavado con *NATM*

Tal como detalla Möller (2006), el túnel urbano de Steinhaldenfeld, situado al noreste de Stuttgart (Alemania) y construido entre 2002 y 2005, se desarrolla entre la estación Hauptfriedhof y la estación Steinhaldenfeld, y tiene una longitud total de 1.160m, de los cuales 940m se ejecutaron utilizando el Nuevo Método Austríaco (*NATM*), mientras que dos tramos de 110m cada uno se ejecutaron con el sistema *cut&cover* (figura 7.01). El proceso de excavación del tramo central de 940m se realizó en dos fases. En una primera fase se excavó y ejecutó el sostenimiento de la parte superior del túnel (hastiales y bóveda) en toda su longitud, y en una segunda fase se excavó y ejecutó la contrabóveda. En el presente estudio se analiza una sección de la primera fase de excavación correspondiente al tramo de 940m.

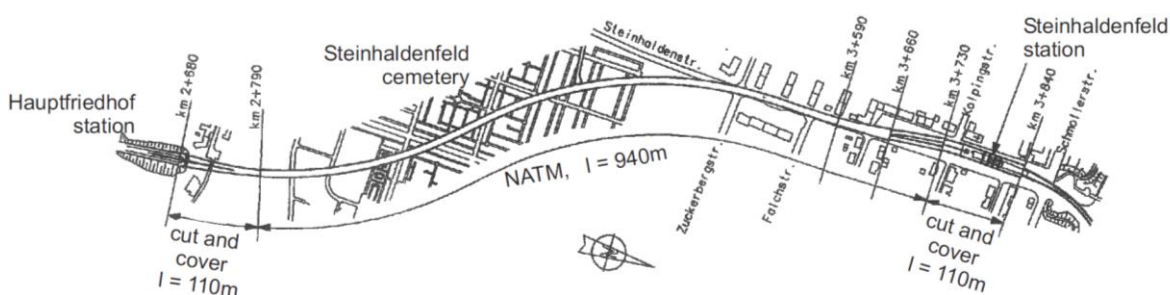


Figura 7.01. Plano en planta del trazado del Túnel de Steinhaldenfeld y tramificación según el procedimiento constructivo utilizado (Möller, 2006).

El terreno en el que se excava el túnel está constituido por un primer estrato de rellenos de 5,0m de espesor, seguido de un estrato de margas del Keuper de 15,5m de espesor, consideradas como un suelo residual o bien como una roca blanda alterada y, finalmente, un estrato de caliza lacustre. Tanto las

margas del Keuper como las calizas lacustres se encuentran sobreconsolidadas. El tipo de terreno en el que se realiza la excavación permite considerar un comportamiento de tipo drenado y no se dispone de información sobre la situación del nivel freático.

En la corona circundante al túnel, salvo en la zona de la contrabóveda, se ha realizado una mejora del terreno durante la excavación de la primera fase consistente en la instalación de bulones, lo cual, de acuerdo con Möller (2006) y Benz (2007), se puede simular numéricamente mediante un incremento de la cohesión efectiva $\Delta c' = 25 \text{ kPa}$ en la zona mejorada (figura 7.02).

Durante la construcción del túnel se midieron los asentos en la superficie.

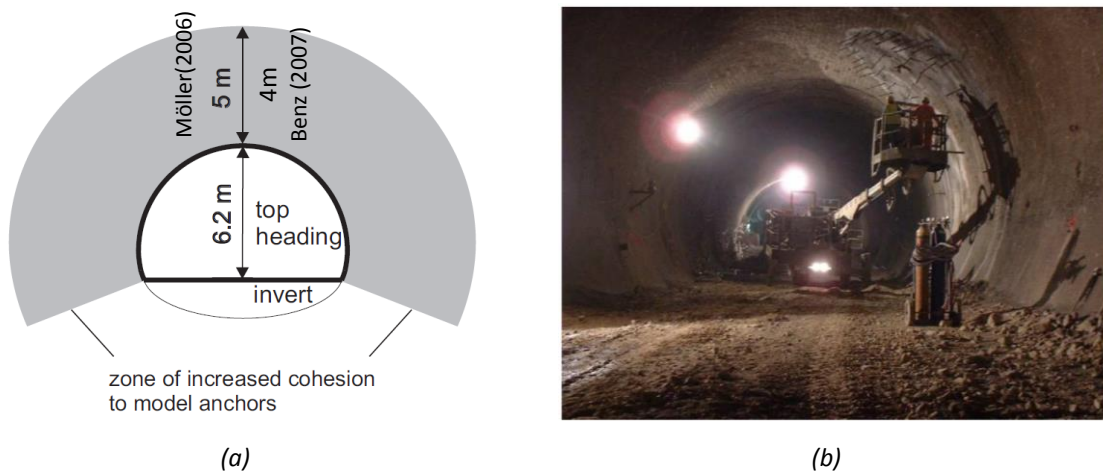


Figura 7.02. (a) Geometría del túnel y zona mejorada mediante la instalación de bulones (Möller, 2006). Bulones de 5m según Möller (2006) y de 4m según Benz (2007). (b) Ejecución de los bulones en el interior del túnel (Benz, 2007).

Se ha realizado el análisis 2D en una sección del túnel, considerando la hipótesis de deformación plana, con las limitaciones que ello implica.

La geometría del modelo numérico es la que se muestra en la figura 7.03 y contempla la existencia de un plano de simetría vertical en el eje del túnel. Por otro lado, tal como apunta Benz (2007), la elevada rigidez de la caliza lacustre, diez veces superior a las margas del Keuper según Möller (2006), permite situar el contorno horizontal inferior fijo de la malla a una distancia relativamente pequeña del plano inferior de excavación del túnel.

Los valores de los parámetros del terreno se han tomado de las tesis de Möller (2006) y de Benz (2007). Ambos autores indican que estos han sido estimados a partir de los resultados de los ensayos realizados por Möller et al. (2004) y Horning y Buchmaier (2005), y a partir de correlaciones específicas para suelos que se detallan en Möller (2006), las cuales añaden cierta incertidumbre por aplicarse, en este caso, sobre suelos residuales o rocas blandas alteradas.

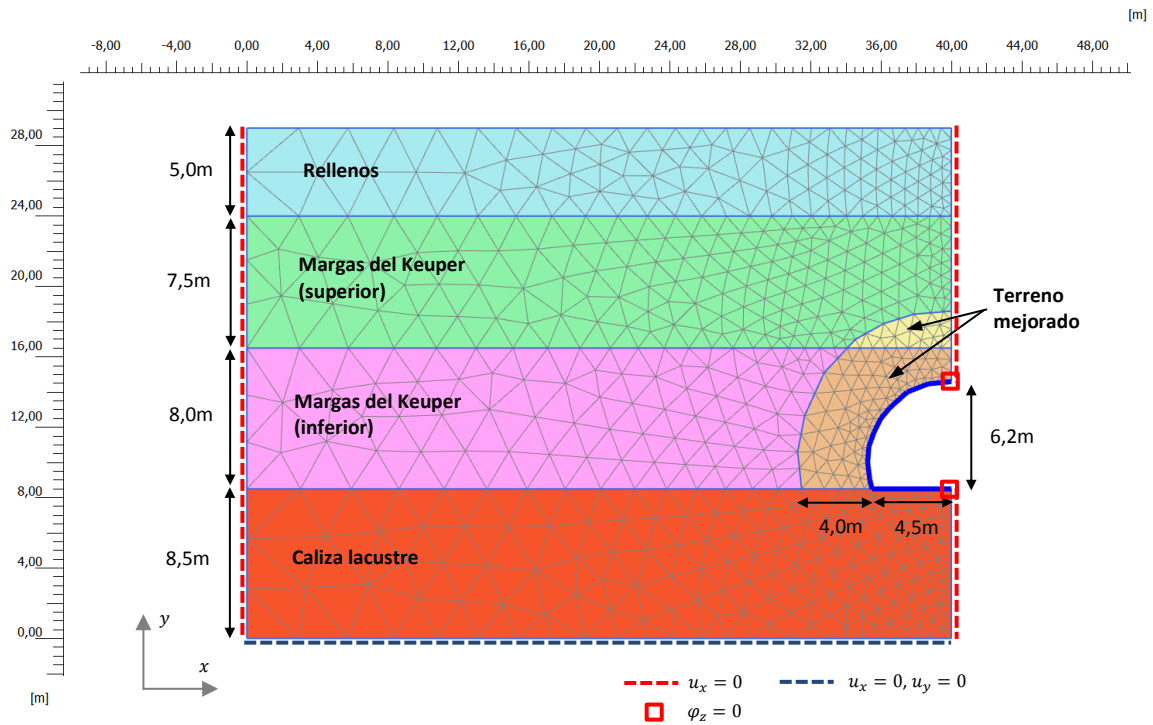


Figura 7.03. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico del Túnel de Steinhaldenfeld.

En la tabla 7.01 se proporcionan los valores de OCR y K_0^{SC} considerados en cada uno de los estratos del terreno. Los valores de K_0^{SC} se han obtenido de Möller (2006), puesto que no se indican en Benz (2007).

	Rellenos	Margas del Keuper (superior)	Margas del Keuper (inferior)	Caliza lacustre	Unidades
Índice sobreconsolidación OCR	1,0	2,0	2,0	2,0	[-]
Coeficiente empuje K_0^{SC}	-	0,90	0,90	0,60	[-]

Tabla 7.01. Valores de OCR según Möller (2006) y Benz (2007), y valores de K_0^{SC} según Möller (2006) para los diferentes materiales.

Asimismo, Benz (2007) proporciona dos juegos o SETS de parámetros para los materiales (SET 1 y SET 2), distinguiéndose el SET 1 del SET 2 por considerar el segundo un valor de la rigidez al corte máximo del suelo un 40% superior a la del primero. Los parámetros del SET 2 de Benz (2007) aproximan bien los parámetros del suelo considerados en Möller (2006).

En la tabla 7.02 se proporcionan los pesos específicos y los valores de los parámetros del SET 1 de cada material correspondientes al modelo EPHYSS y al modelo HS-SS. Para la obtención de los valores de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y K_s^{ref} del modelo EPHYSS se aplica, en cada material y en el rango de tensiones dado por

la envolvente de las fases del problema de contorno, la formulación de mínimos cuadrados expuesta en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5 con objeto de reproducir un perfil de rigideces inicial en el terreno similar al obtenido con el modelo *HS-SS* y de que las variaciones de dichas rigideces en ambos modelos debidas al cambio de tensiones en el suelo sean lo más parecidas entre sí. Este proceso podría hacerse a la inversa, siendo el valor de G_0^{ref} del modelo *HS-SS* el que se ajusta a partir del valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS*, desaconsejándose, en este caso, el ajuste de los valores $E'_{t,ur}{}^{ref}$ y ν'_{ur} del modelo *HS-SS* al aparecer ambos en la formulación plástica del mismo. Por otro lado, en la tabla 7.03 se proporcionan los valores de los parámetros internos del *SET 1* para cada material correspondientes al modelo *EPHYSS*, desconociéndose el valor de estos mismos en el caso del modelo *HS-SS*, al no ser proporcionados por Plaxis. En las tablas 7.04 y 7.05 se hace lo propio con los parámetros del *SET 2*. Por otro lado, en la tabla 7.06 se proporcionan los parámetros correspondientes al sostenimiento según Benz (2007). El sostenimiento se simula con elementos tipo *plate* (ver Plaxis (2015) para conocer los detalles de este tipo de elementos). La interacción suelo-estructura se simula mediante una *interface* rígida, considerando un valor de $R_{inter} = 1,0$ en todos los materiales, según lo descrito en el apartado 4.4.2 del capítulo 4.

Tras la fase de cálculo en la que se determinan las tensiones *in situ* en el terreno, se ha realizado tanto un reseteo de la historia de deformaciones del suelo con ambos modelos, adoptando un valor $Reini_Stiff = 1$ en el modelo *EPHYSS*, como un reseteo de los desplazamientos en el mismo a través de la *Interface* de Plaxis.

El método utilizado para simular la excavación del túnel ha sido el método de reducción de tensiones (*stress reduction method*) conocido como $\beta - method$ o $\lambda - method$ y habitualmente utilizado y aceptado en la simulación 2D de túneles con frente abierto, dadas las ventajas que ofrece en la práctica en comparación con las complejas simulaciones paso a paso en 3D. Los detalles de dicho método se pueden consultar en Möller (2006), aunque a continuación se resumen, de manera simplificada, las dos fases que considera para simular la excavación de un túnel (figura 7.04):

- **Fase 1:** En esta primera fase se simula la relajación del terreno anterior a la instalación del sostenimiento a través de una presión $p = \beta p_0$ aplicada en el contorno de la excavación, donde p_0 es la presión inicial del terreno en el contorno de dicha excavación y β es un factor que adopta valores entre 0 y 1.
- **Fase 2:** En esta segunda fase se simula la instalación del sostenimiento mediante la activación de los correspondientes elementos tipo *plate* y la presión aplicada $p = \beta p_0$ pasa a repartirse ahora entre el propio sostenimiento y el terreno, apareciendo, en esta fase, tensiones tangenciales en el contorno de la excavación.

En la tesis de Möller (2006) se exponen estudios previos que tratan de estimar el valor de β y se realiza, asimismo, un estudio paramétrico con objeto de estudiar los principales factores de los que depende, calibrando los resultados de simulaciones 2D con simulaciones paso a paso en 3D. En dicho estudio se concluye que es necesario considerar tres valores diferentes de β en función de si se pretende ajustar la cubeta de asientos, los momentos flectores del sostenimiento o las fuerzas normales al mismo. Asimismo, el estudio también concluye que el factor β depende de la geometría del túnel, de los estratos del suelo y de los modelos constitutivos utilizados.

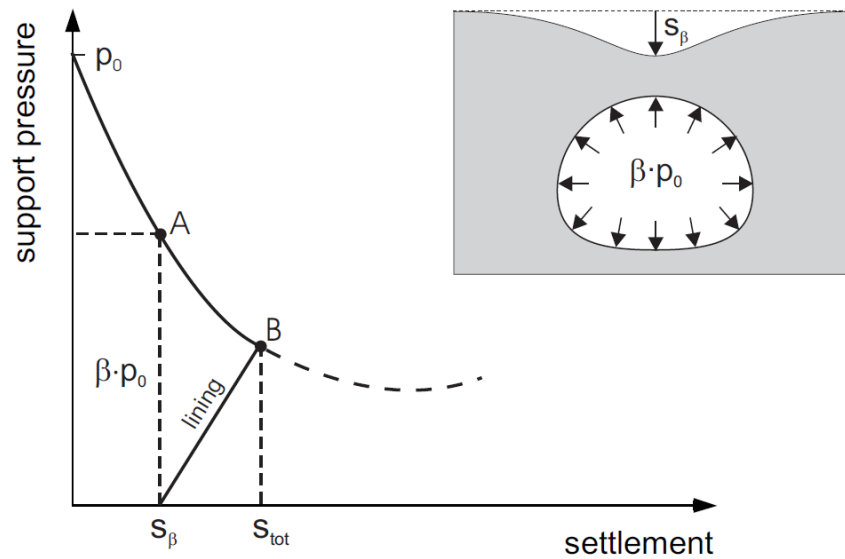


Figura 7.04. Curva asiento-confinamiento en el método de reducción de tensiones (β – method) (Möller, 2006).

En las simulaciones 2D realizadas para comparar los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* se ha aplicado el mismo criterio utilizado en Benz (2007), en el que el factor β se ajusta para que el asiento máximo calculado en la superficie coincida, en cada caso, con el asiento máximo medido. En la tabla 7.07 se muestran los valores de β resultantes, que coinciden, en el modelo *HS-SS*, para el *SET 1* y *SET 2*, con los obtenidos por Benz (2007) y Möller (2006).

En la figura 7.05 se muestran las medidas de la cubeta de asientos y los resultados de las simulaciones con el *SET 1* y *SET 2*. En dicha figura se puede ver cómo el modelo *EPHYSS* mejora la aproximación a los valores medidos si se compara con el modelo *HS-SS*. Asimismo, cuando se utilizan los parámetros correspondientes al *SET 2* se obtienen cubetas de asientos más concentradas en torno al eje del túnel en ambos modelos.

	SET 1	Rellenos	Margas Keuper (sup.)	Margas del Keuper (inf.)	Caliza lacustre	Unidades		
Pesos específicos	γ_{sat}	—	—	—	—	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	20,0	24,0	23,0	23,0			
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0002	0,0002	0,0002	0,00005	[-]	
	HS-SS	G_0^{ref}	50.000	166.667	80.000	1.000.000	[kN/m ²]	
		ν'_{ur}	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	8.378	28.229	13.259	167.017	[kN/m ²]	
		m_1	0,50	0,40	0,40	0,30	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,re}$	52.210	142.678	66.962	766.897	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	26.105	71.339	33.481	383.449	[kN/m ²]	
		m_2	0,50	0,40	0,40	0,30	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	E_{50}^{ref}	10.000	33.000	16.000	190.000	[kN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	30.000	100.000	48.000	575.000	[kN/m ²]
			E_{oed}^{ref}	10.000	33.000	16.000	190.000	[kN/m ²]
			c'	10	25	25	200	[kN/ m ²]
$c' + \Delta c'$			-	50	50	-		
φ'			25	25	25	35	[deg]	
ψ			0	0	0	0	[deg]	
p'_{ref}			100	100	100	100	[kN/ m ²]	
m		0,50	0,40	0,40	0,30	[-]		
K_0^{NC}		0,58	0,58	0,58	0,43	[-]		
R_f		0,90	0,90	0,90	0,90	[-]		
σ'_{trac}		0	0	0	0	[kN/ m ²]		

Tabla 7.02. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos EPHYSS y HS-SS para el SET 1.

	SET 1	Rellenos	Margas Keuper (sup.)	Margas del Keuper (inf.)	Caliza lacustre	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	E_i^{ref}	29.453	93.089	48.840	620.820	[kN/ m ²]
	$E_i^{ref}(c' + \Delta c')$	-	105.804	51.891	-	
	α'	1,32	1,41	1,40	2,08	[-]
	$\alpha'(c' + \Delta c')$	-	1,13	1,30	-	
	$K'_{t,ur}/K'_c$	1,82	1,80	1,82	1,95	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c(c' + \Delta c')$	-	1,67	1,80	-	

Tabla 7.03. Parámetros internos del modelo EPHYSS para el SET 1.

	SET 2	Rellenos	Margas Keuper (sup.)	Margas del Keuper (inf.)	Caliza lacustre	Unidades		
Pesos específicos	γ_{sat}	—	—	—	—	[kN/m3]		
	γ_{unsat}	20,0	24,0	23,0	23,0			
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0002	0,0002	0,0002	0,00005	[-]	
	HS-SS	G_0^{ref}	70.000	233.333	112.000	1.400.000	[kN/m2]	
		ν'_{ur}	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	8.378	28.229	13.259	167.017	[kN/m2]	
		m_1	0,50	0,40	0,40	0,30	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	[kN/m2]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,re}$	73.085	206.485	95.789	1.073.656	[kN/m2]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	36.548	103.243	47.895	536.828	[kN/m2]	
		m_2	0,50	0,40	0,40	0,30	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	[kN/m2]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$E'_{50}{}^{ref}$	10.000	33.000	16.000	190.000	[kN/m2]
			$E'_{t,ur}{}^{ref}$	30.000	100.000	48.000	575.000	[kN/m2]
			$E'_{oed}{}^{ref}$	10.000	33.000	16.000	190.000	[kN/m2]
HS-SS y EPHYSS		c'	10	25	25	200	[kN/ m ²]	
		$c' + \Delta c'$	-	50	50	-		
		ϕ'	25	25	25	35	[deg]	
		ψ	0	0	0	0	[deg]	
		p'_{ref}	100	100	100	100	[kN/ m ²]	
		m	0,50	0,40	0,40	0,30	[-]	
		K_0^{NC}	0,58	0,58	0,58	0,43	[-]	
		R_f	0,90	0,90	0,90	0,90	[-]	
		σ'_{trac}	0	0	0	0	[kN/ m ²]	

Tabla 7.04. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos EPHYSS y HS-SS para el SET 2.

	SET 2	Rellenos	Margas Keuper (sup.)	Margas del Keuper (inf.)	Caliza lacustre	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	$E'_i{}^{ref}$	26.586	68.866	45.008	587.400	[kN/ m ²]
	$E'_i{}^{ref}(c' + \Delta c')$	-	83.608	48.400	-	
	α'	1,50	2,05	1,54	2,22	[-]
	$\alpha'(c' + \Delta c')$	-	1,73	1,46	-	
	$K'_{t,ur}/K'_c$	1,93	1,99	1,91	1,98	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c(c' + \Delta c')$	-	2,02	1,94	-	

Tabla 7.05. Parámetros internos del modelo EPHYSS para el SET 2.

	d [m]	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]	R_{inter} [-]
Sostenimiento	0,25	15	$3,75 \cdot 10^6$	$1,95 \cdot 10^4$	6,0	0,20	1,0

Tabla 7.06. Parámetros del sostenimiento extraídos de la tesis de Benz (2007) y parámetro de la interacción suelo-estructura.

SET	Modelo	β [-]	$p = \beta p_0$ [kN/m ²]	p_0 [kN/m ²]
SET 1	HS-SS	0,309	118,5	383,5
	EPHYSS	0,257	98,5	
SET 2	HS-SS	0,274	105,1	
	EPHYSS	0,245	94,0	

Tabla 7.07. Valores de β y $p = \beta p_0$ utilizados en las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para el SET 1 y el SET 2

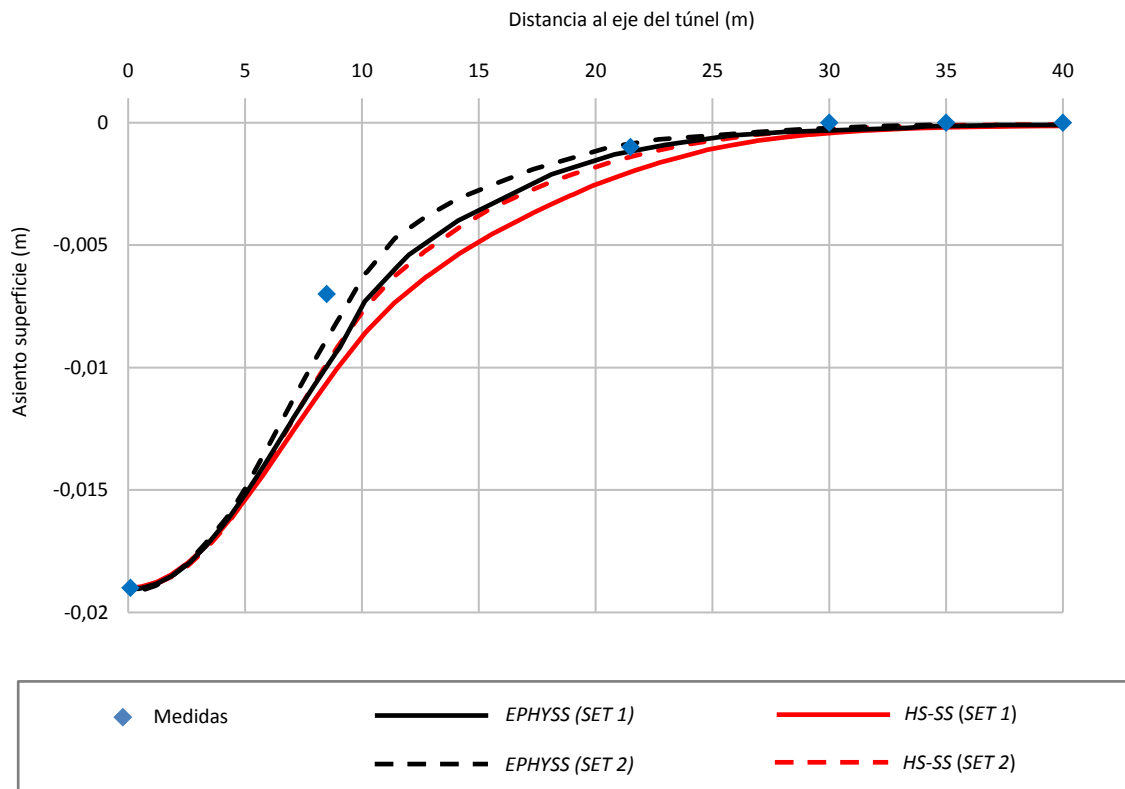


Figura 7.05. Medidas de la cubeta de asientos en el Túnel de Steinhaldenfeld y simulaciones para el SET 1 y el SET 2 con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

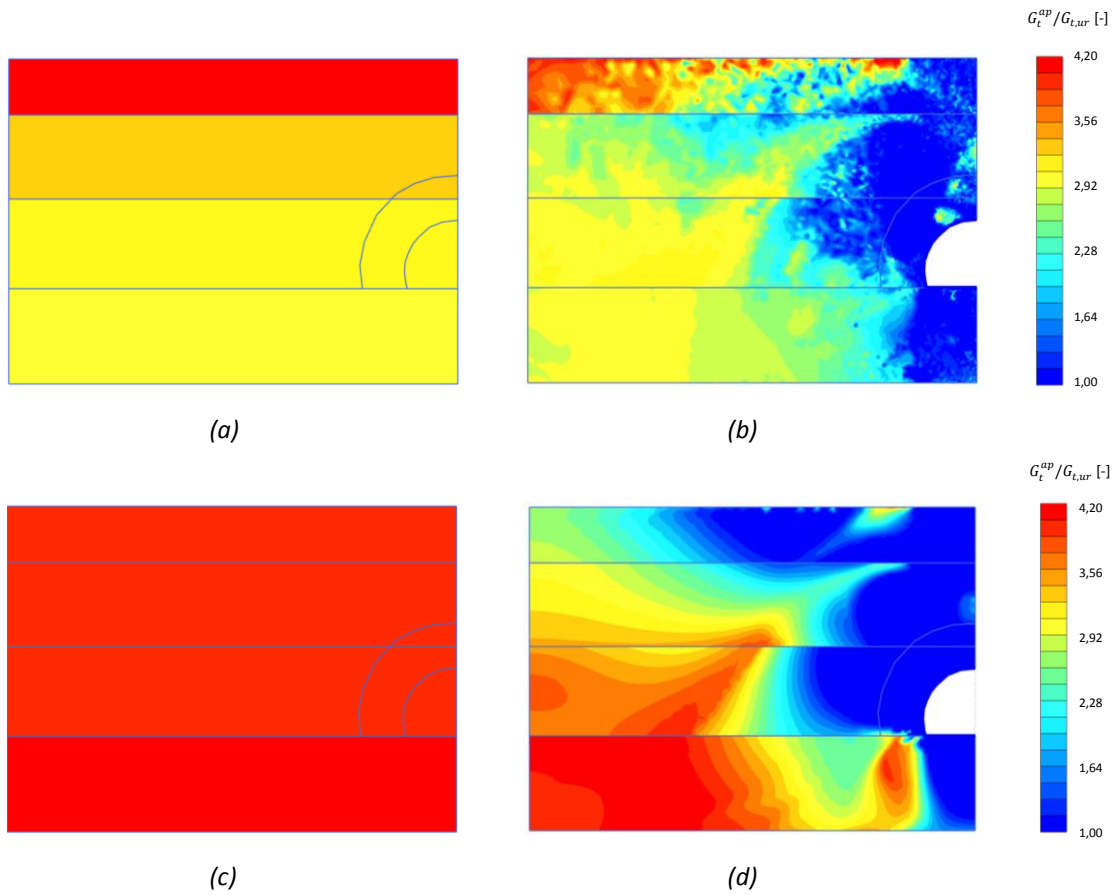


Figura 7.06. Arriba: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ para el SET 1 con el modelo *EPHYSS*.
 (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación.
 Abajo: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ para el SET 1 con el modelo *HS-SS*.
 (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.

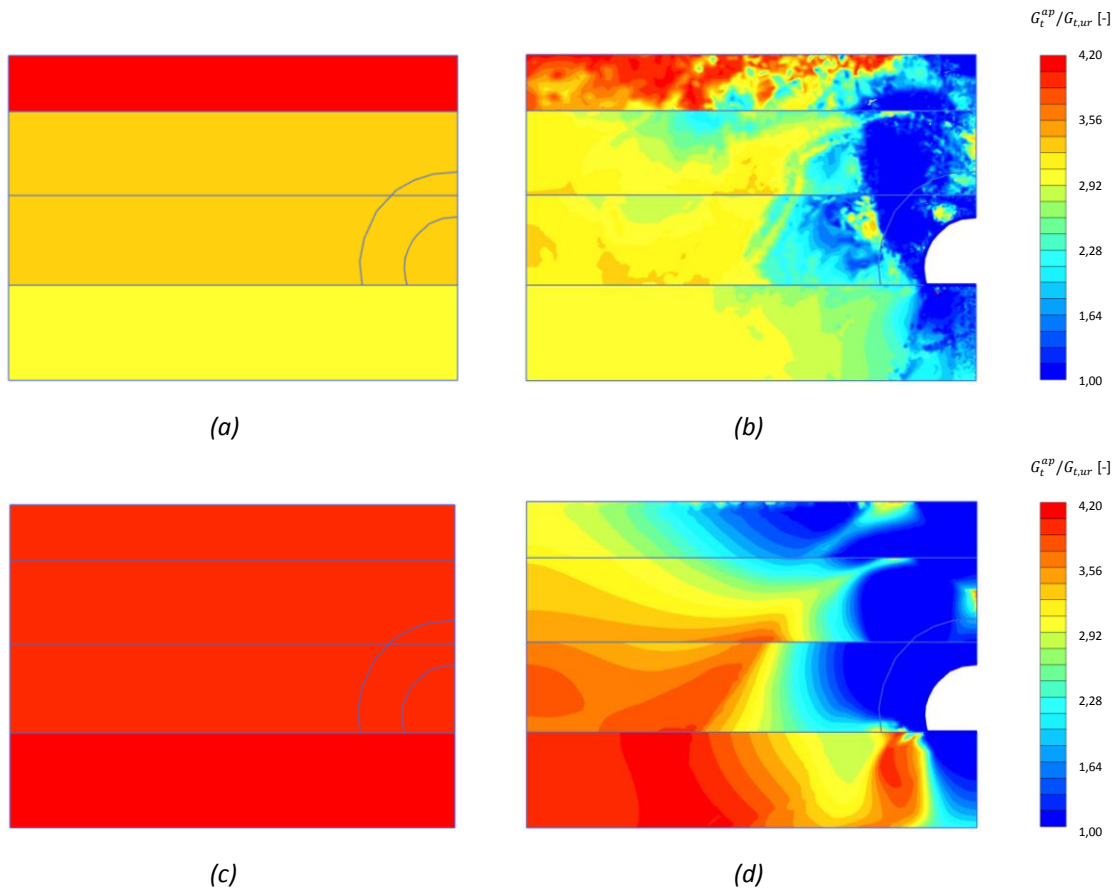


Figura 7.07. Arriba: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ para el SET 2 con el modelo *EPHYSS*.
 (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación.
 Abajo: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ para el SET 2 con el modelo *HS-SS*.
 (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.

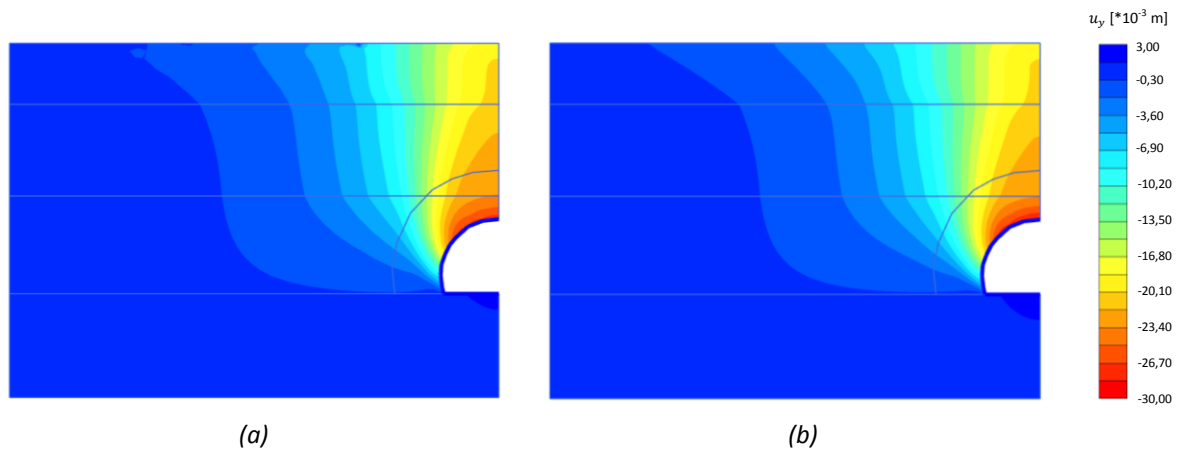


Figura 7.08. Desplazamientos verticales para el SET 1.
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,028m$). (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,029m$).

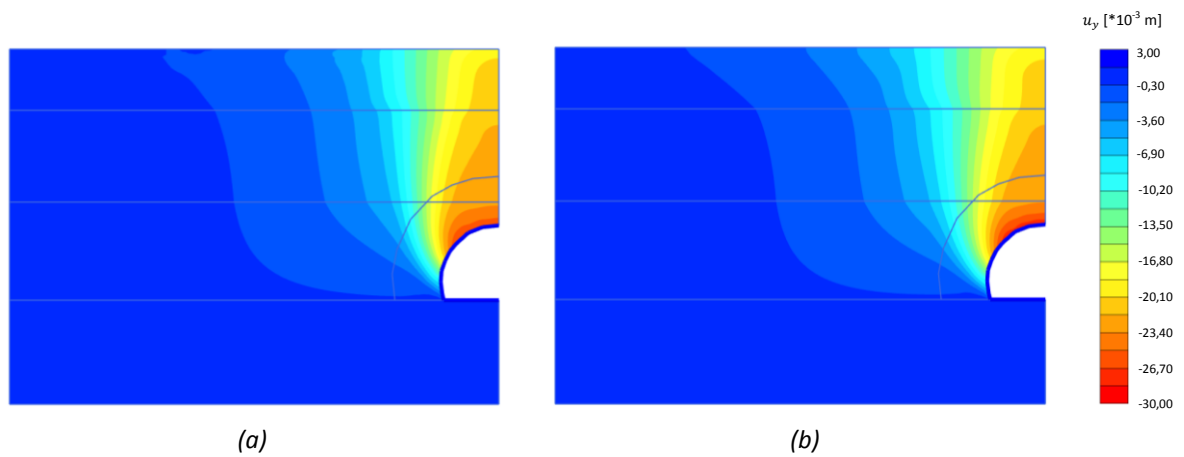
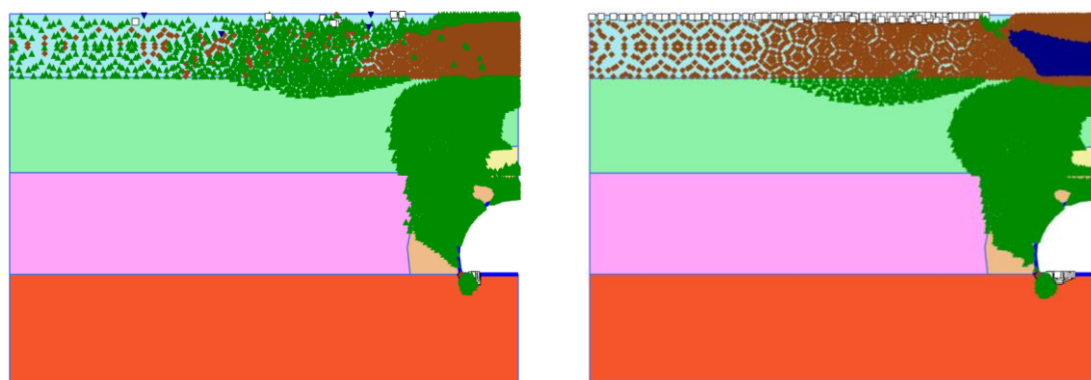


Figura 7.09. Desplazamientos verticales para el SET 2.
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,027m$) y (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,028m$).



■ Sobre superficie Mohr-Coulomb	▼ Sobre superficie Cap	◆ Sobre superficie Cap y Cono
▲ Sobre superficie Cono	□ Sobre superficie tracción nula	

Figura 7.10. Puntos plásticos para el SET 1. (a) Modelo EPHYSS. (b) Modelo HS-SS.

En las figuras 7.06 y 7.07 se muestran los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para el *SET 1* y el *SET 2*, respectivamente, donde G_t^{ap} es el módulo de corte tangente aparente del suelo y $G_{t,ur}$ es su módulo de corte (hipo)elástico tangente mínimo. Debe tenerse en cuenta el efecto que genera, en los gráficos de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$, la diferencia entre el valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* y el valor G_0^{ref} del modelo *HS-SS*, y la diferencia entre el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, K_s^{ref}, m_1)$ del modelo *EPHYSS* y el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, \nu_{ur}')$ del modelo *HS-SS*, debidas ambas al ajuste comentado anteriormente con objeto de tener un perfil de rigideces inicial en el terreno parecido en las dos simulaciones y variaciones de estas similares con el nivel de tensiones. Para facilitar la comparación, en las figuras se proporcionan los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ correspondientes a la fase inicial de la simulación. Tanto en la figura 7.06 como en la figura 7.07 se observan las diferencias en las distribuciones de los valores de la rigidez al corte entre ambos modelos. En comparación con el modelo *HS-SS*, el modelo *EPHYSS* concentra las zonas con máxima degradación elástica en áreas menores y próximas al túnel, tanto en el *SET 1* como en el *SET 2*, a la vez que proporciona zonas significativamente mayores con poca o nula degradación. Asimismo, se puede ver cómo las áreas con máxima degradación elástica cambian poco de la simulación con el *SET 1* a la simulación con el *SET 2* en el caso del modelo *HS-SS*, mientras que estas se reducen considerablemente en el caso del modelo *EPHYSS*, especialmente sobre la clave del túnel y bajo la solera del mismo. La geometría en herradura de la sección y la heterogeneidad del terreno parecen incrementar las diferencias mencionadas en los valores de la rigidez de ambos modelos si estas se comparan con los resultados obtenidos en el problema de contorno de túnel circular y terreno homogéneo que se estudia en el siguiente apartado (Segundo Túnel de Heinoord).

En las figuras 7.08 y 7.09 se muestra la similitud en la distribución de los desplazamientos verticales en el terreno en ambos modelos, para el *SET 1* (figura 7.08) y el *SET 2* (figura 7.09).

Finalmente, en la figura 7.10 se puede ver la enorme similitud en el comportamiento plástico entre ambos modelos, lo cual es lógico teniendo en cuenta que los dos cuentan con una formulación plástica muy parecida.

7.4. Segundo túnel de Heinoord en Rotterdam excavado con escudo de bentonita

Tal como describe Möller (2006), el Túnel de Heinoord, situado al sur de Rotterdam (Holanda) y construido entre 1997 y 1998, consiste en dos tubos excavados con tuneladora, concretamente con escudo de bentonita (*slurry shield*), cada uno de los cuales tiene una longitud total de 1.350m, un diámetro exterior de 8,3m y pasan bajo el río Oude Maas. La excavación del Segundo Túnel de Heinoord se trata de uno de los primeros proyectos pilotos de monitorización de túneles excavados con escudo de bentonita en Holanda.

El terreno en el que se excava el túnel está constituido por un primer estrato de rellenos de 4,0m de espesor, seguido de dos estratos de arenas de 19,25m de espesor, que pueden simularse como un mismo material, y un estrato final de arcillas con zonas de arenas. El tipo de terreno en el que se realiza la excavación permite considerar un comportamiento de tipo drenado y el nivel freático se sitúa a 1,5m de profundidad.

Durante la construcción del túnel se midieron los asentamientos en la superficie y se instalaron inclinómetros a diferentes distancias de su eje para medir los desplazamientos horizontales del terreno. Asimismo, se instrumentó el propio túnel con prismas topográficos y sensores de cuerda vibrante (figura 7.11).

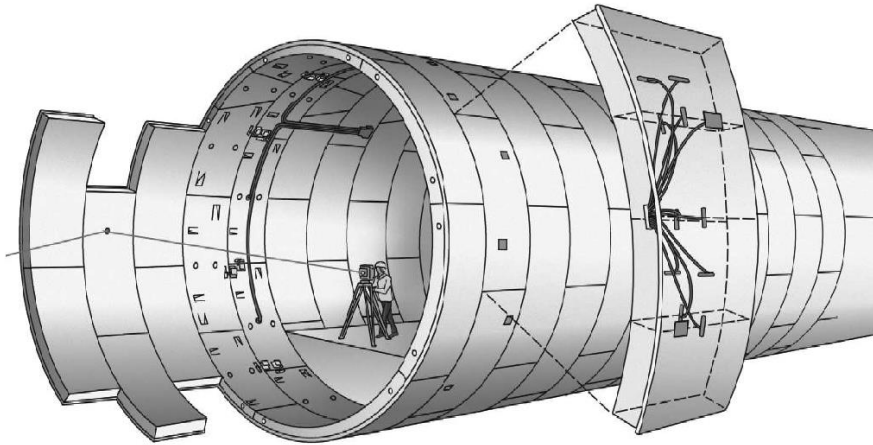


Figura 7.11. Instrumentación interior del Segundo Túnel de Heinenoord (Bakker, 2000).

Se ha realizado el análisis 2D en una sección del túnel, considerando la hipótesis de deformación plana con las limitaciones que ello implica.

La geometría del modelo numérico es la que se muestra en la figura 7.12 y contempla la existencia de un plano de simetría vertical en el eje del túnel.

Los valores de los parámetros del terreno se han tomado de Möller (2006) y Benz (2007). Ambos autores estiman dichos parámetros partir de los resultados de los ensayos realizados por Bakker (2000), así como a partir de las correlaciones específicas para suelos que detalla Möller (2006).

Los diferentes estratos que constituyen el terreno se encuentran normalmente consolidados, por lo que se adopta un valor de $OCR = 1$ en todos ellos.

Asimismo, Benz (2007) proporciona dos juegos o *SETS* de parámetros para los materiales (*SET 1* y *SET 2*), distinguiéndose el *SET 1* del *SET 2* por considerar el segundo un valor de la rigidez al corte máxima del suelo un 40% superior a la del primero. No obstante, analizando los parámetros proporcionados por Benz (2007) y Möller (2006), se llega a la conclusión de que, en el *SET 2*, el único material en el que debe incrementarse la rigidez al corte máxima del suelo son las arenas. Es solo en este caso en el que los parámetros del *SET 2* de Benz (2007) aproximan bien los parámetros considerados por Möller (2006) y se obtienen cubetas de asentamientos similares a las calculadas por ambos autores utilizando el modelo *HS-SS*. Por otro lado, debe mencionarse que se han utilizado los valores de $\gamma_{0,7}$ proporcionados por Möller (2006) y no los de Benz (2007), puesto que utilizando estos últimos no es posible reproducir la cubeta de asentamientos calculados por ambos autores.

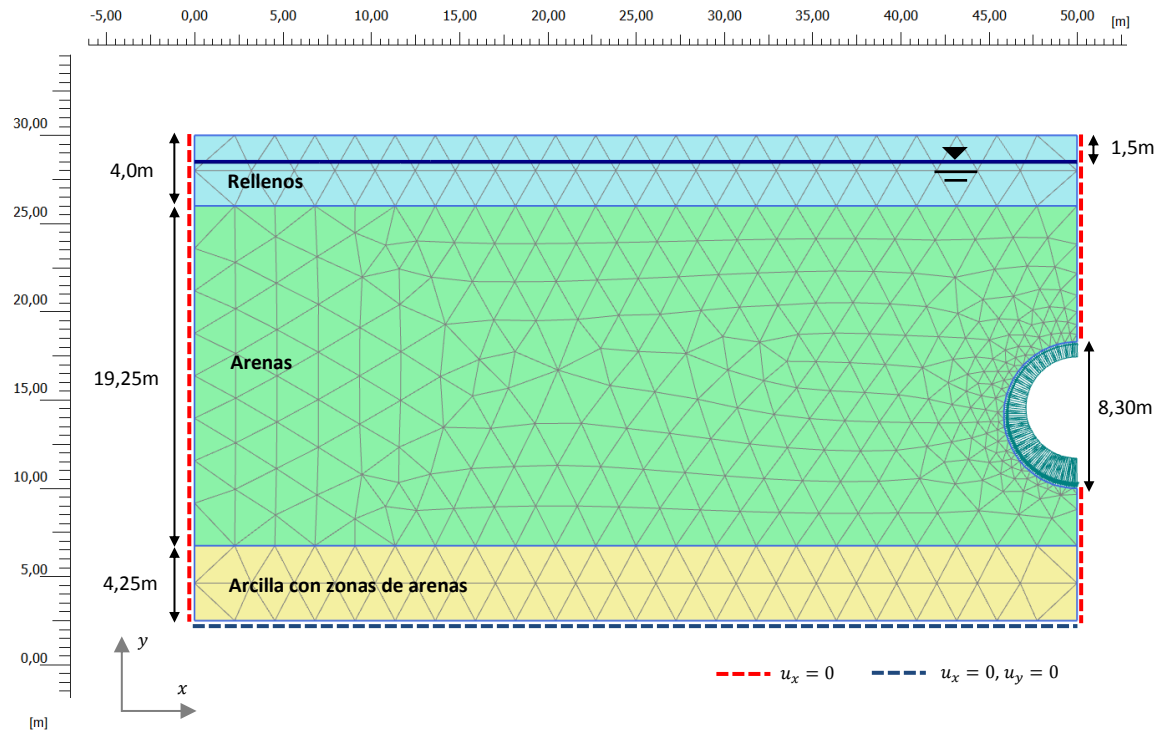


Figura 7.12. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico del Segundo Túnel de Heinenoord.

En la tabla 7.08 se proporcionan los pesos específicos y los valores de los parámetros del *SET 1* y del *SET 2* de cada material correspondientes al modelo *EPHYSS* y al modelo *HS-SS*. Para la obtención de los valores de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y K_s^{ref} del modelo *EPHYSS* se aplica, en cada material y en el rango de tensiones dado por la envolvente de las fases del problema de contorno, la formulación de mínimos cuadrados expuesta en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5, con objeto de reproducir un perfil de rigideces inicial en el terreno similar al obtenido con el modelo *HS-SS* y de que las variaciones de dichas rigideces en ambos modelos debidas al cambio de tensiones en el suelo sean lo más parecidas entre sí. Este proceso podría hacerse a la inversa, siendo el valor de G_0^{ref} del modelo *HS-SS* el que se ajusta a partir del valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS*, desaconsejándose, en este caso, el ajuste de los valores $E_{t,ur}^{ref}$ y ν_{ur}' del modelo *HS-SS* al aparecer ambos en la formulación plástica del mismo. Por otro lado, en la tabla 7.09 se proporcionan los valores de los parámetros internos del *SET 1* y del *SET 2* para cada material correspondientes al modelo *EPHYSS*, desconociéndose el valor de estos mismos en el caso del modelo *HS-SS*, al no ser proporcionados por Plaxis.

Tras la fase de cálculo en la que se determinan las tensiones *in situ* en el terreno, se ha realizado tanto un reseteo de la historia de deformaciones del suelo con ambos modelos, adoptando un valor $Reini_Stiff = 1$ en el modelo *EPHYSS*, como un reseteo de los desplazamientos en el mismo a través de la *Interface* de Plaxis.

En este caso la excavación del túnel se ha simulado mediante el método de presión de lechada (*grout pressure method*), habitualmente utilizado y aceptado en la simulación 2D de túneles excavados con escudos, dadas las ventajas prácticas que ofrece en comparación con las complejas simulaciones paso a

paso en 3D. Los detalles de dicho método se pueden consultar en Möller (2006). A modo de resumen, el método de presión de lechada sustituye las tensiones originales del terreno en el contorno de la excavación por una presión de lechada (figura 7.13a) y controla, en paralelo, que el hueco formado en el trasdós del sostenimiento (*gap*) no supere la holgura máxima permitida (figura 7.13b) que, en el caso calculado en el presente apartado, es de 20cm en clave. A diferencia del método β – *method* expuesto en el apartado anterior, en este caso, la distribución de presiones generada por la lechada puede diferir notablemente de la distribución de tensiones original en el terreno.

En las simulaciones 2D realizadas para comparar los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* se ha aplicado el mismo criterio utilizado en Benz (2007), en el que el valor de la presión de lechada en la clave de la excavación p_{clave} se ajusta para que el asiento máximo en la superficie coincida, en cada caso, con las medidas realizadas. En la tabla 7.10 se muestran los valores de p_{clave} resultantes, que son muy similares, para cada *SET*, en ambos modelos.

Por otro lado, en la tabla 7.11 se proporcionan los parámetros correspondientes al sostenimiento (Benz, 2007). No obstante, se ha adoptado la misma simplificación considerada en Möller (2006) para simular la excavación, en la que no se tiene en cuenta la interacción lechada-terreno-sostenimiento y en la que se aplica, en el contorno de la excavación, la presión de la lechada además de controlar la deformación del terreno para evitar que esta exceda el valor del *gap*.

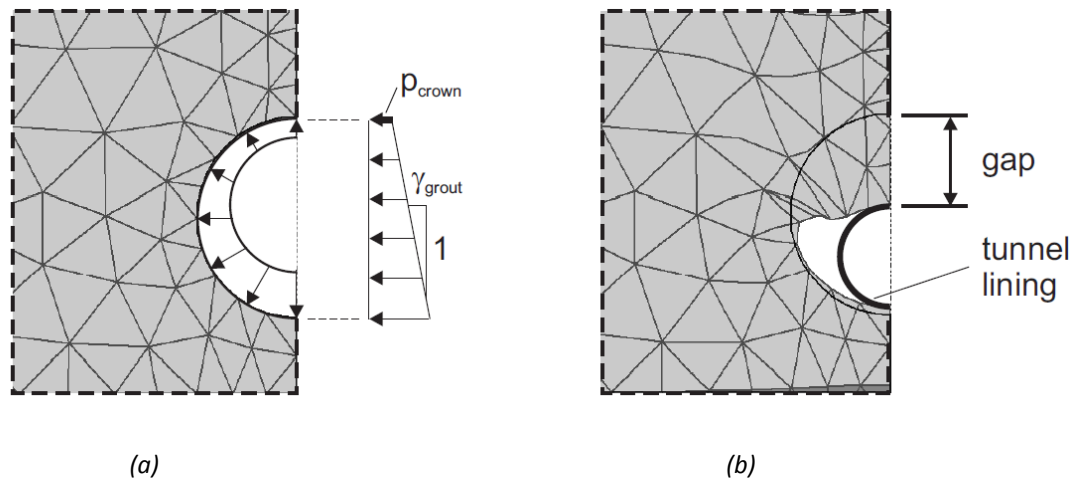


Figura 7.13. Método de presión de lechada (grout pressure method) (Möller, 2006).
 (a) Aplicación de la presión de la lechada en el contorno de la excavación.
 (b) Control sobre la deformada del terreno para que no supere el valor del *gap*.

		Rellenos SET 1 y SET 2	Arenas SET 1	Arenas SET 2	Arcillas con zonas de arenas SET 1 y SET 2	Unidades		
Pesos específicos	γ_{sat}	17,5	–	–	–	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	17,5	20,0	20,0	20,0			
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	[-]	
		HS-SS	G_0^{ref}	52.500	100.000	140.000	87.500	[kN/m ²]
	ν'_{ur}		0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	10.674	24.290	24.290	1.435	[kN/m ²]	
		m_1	0,50	0,50	0,50	0,90	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	48.493	83.280	116.591	64.891	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	24.247	36.643	51.300	32.446	[kN/m ²]	
		m_2	0,50	0,50	0,50	0,90	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
		COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	E_{50}^{ref}	14.000	35.000	35.000	12.000
	$E_{t,ur}^{ref}$			42.000	105.000	105.000	35.000	[kN/m ²]
E_{oed}^{ref}	14.000			35.000	35.000	7.000	[kN/m ²]	
c'	3			0	0	7	[kN/ m ²]	
φ'	27			35	35	31	[deg]	
ψ	0			0	0	0	[deg]	
p'_{ref}	100			100	100	100	[kN/ m ²]	
m	0,50			0,50	0,50	0,90	[-]	
K_0^{NC}	0,55			0,43	0,43	0,48	[-]	
R_f	0,90			0,90	0,90	0,90	[-]	
σ'_{trac}	0	0	0	0	[kN/ m ²]			

Tabla 7.08. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos EPHYSS y HS-SS para el SET 1 y el SET 2.

		Rellenos SET 1 y SET 2	Arenas SET 1	Arenas SET 2	Arcillas con zonas de arenas SET 1 y SET 2	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	E_i^{ref}	39.010	97.786	86.604	32.527	[kN/ m ²]
	α'	1,52	2,65	3,27	1,78	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	1,84	1,90	1,91	2,45	[-]

Tabla 7.09. Parámetros internos del modelo EPHYSS para el SET 1 y el SET 2.

Parámetros	Modelo	p_{clave} [kN/m ²]	$\gamma_{lechada}$ [kN/m ³]
SET 1	HS-SS	-127,0	15,0
	EPHYSS	-126,5	
SET 2	HS-SS	-123,4	
	EPHYSS	-124,7	

Tabla 7.10. Valores de p_{clave} utilizadas en las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para el SET 1 y SET 2.

	d [m]	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]
Sostenimiento	0,25	15	$3,75 \cdot 10^6$	$1,95 \cdot 10^4$	6	0,20

Tabla 7.11. Parámetros del sostenimiento extraídos de Benz (2007), aunque no son requeridos en el cálculo realizado.

En la figura 7.14 se muestran las medidas de la cubeta de asientos, así como los resultados de las simulaciones para el SET 1 y SET 2, y en la figura 7.15 se muestran las medidas de los desplazamientos horizontales en el terreno que resultan de los inclinómetros instalados a 6m, 10m y 16m del eje del túnel, así como los resultados de las simulaciones para el SET 1 y el SET 2. En las dos figuras se puede ver cómo ambos modelos ofrecen resultados similares que aproximan bien las medidas de campo (salvo en el caso de la figura 7.15a), especialmente cuando se utilizan los parámetros correspondientes al SET 2.

Por otro lado, en las figuras 7.16 y 7.17 se muestran los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* para el SET 1 y el SET 2, respectivamente, donde G_t^{ap} es el módulo de corte tangente aparente del suelo y $G_{t,ur}$ es su módulo de corte (hipo)elástico tangente mínimo. Debe tenerse en cuenta el efecto que genera, en los gráficos de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$, la diferencia entre el valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* y el valor G_0^{ref} del modelo *HS-SS*, y la diferencia entre el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, K_s^{ref}, m_1)$ del modelo *EPHYSS* y el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E'_{t,ur}, \nu'_{ur})$ del modelo *HS-SS*, debidas ambas al ajuste comentado anteriormente con objeto de tener un perfil de rigideces inicial en el terreno parecido en las dos simulaciones y variaciones de estas similares con el nivel de tensiones. Para facilitar la comparación, en las figuras se proporcionan los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ correspondientes a la fase inicial de la simulación. En dichas figuras se pueden ver las diferencias en las distribuciones de los valores de la rigidez al corte en ambos modelos. La geometría circular del Segundo Túnel de Heinoord y la homogeneidad del terreno circundante al mismo parecen contribuir a que las diferencias en las rigideces del suelo obtenidas con ambos modelos sean menores que las observadas en el caso del Túnel de Steinhaldenfeld analizado en el apartado anterior. En este caso se observa cómo las áreas de transición entre la máxima y la mínima rigidez al corte del suelo son similares en ambos modelos.

Lo anterior da lugar a que la magnitud de los desplazamientos verticales y horizontales en el terreno en ambos modelos sea muy similar, especialmente en el *SET 1*, tal como se puede ver en las figuras 7.18 y 7.19.

Finalmente, en la figura 7.20 se puede ver la similitud en el comportamiento plástico entre ambos modelos, lo cual es lógico teniendo en cuenta que los dos tienen una formulación plástica muy parecida.

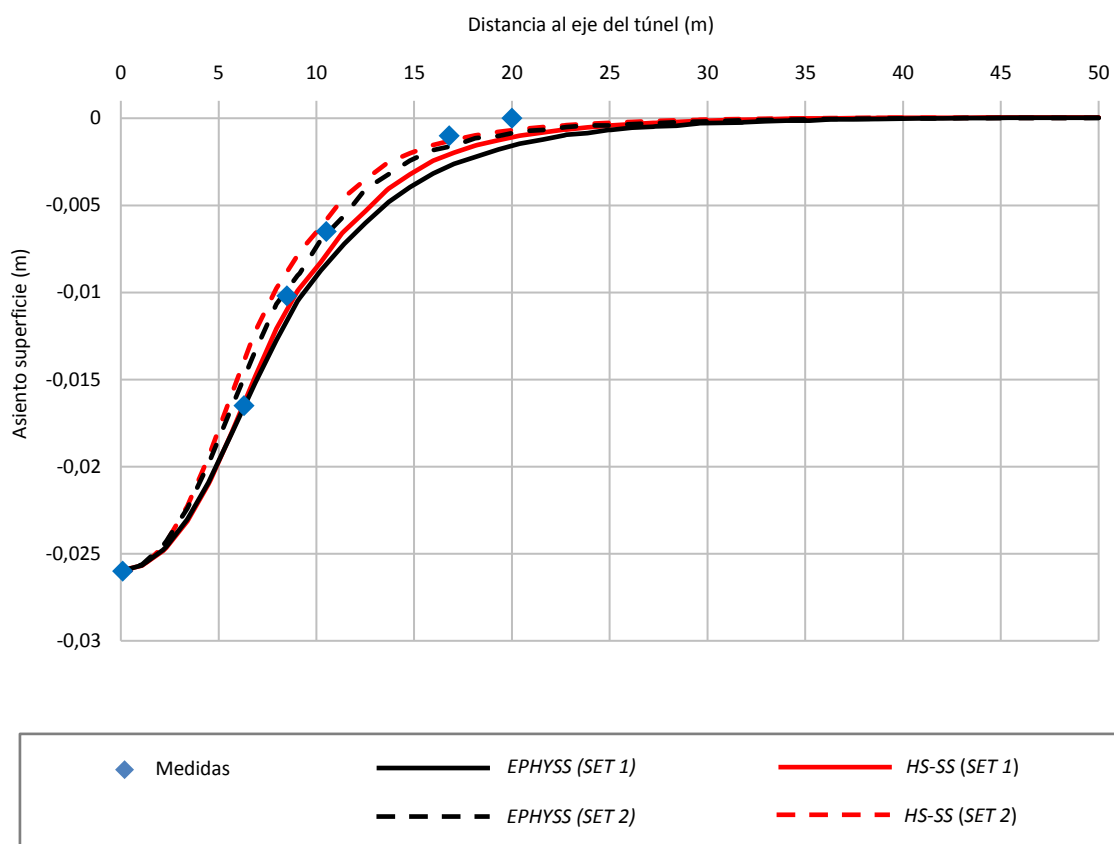


Figura 7.14. Medidas de la cubeta de asentamientos en el Segundo Túnel de Heinenoord y simulaciones para el SET 1 y el SET 2 con los modelos EPHYSS y HS-SS.

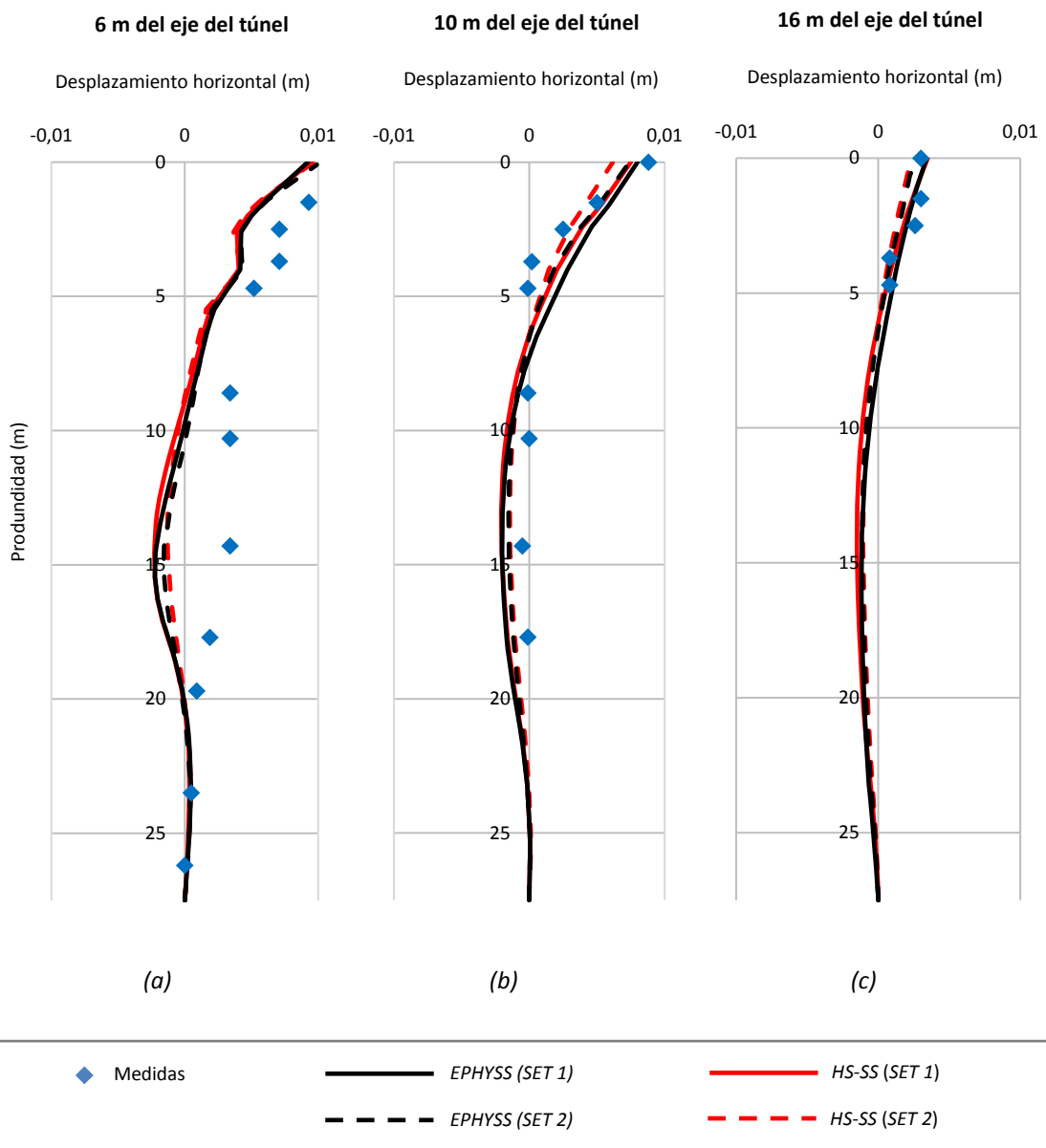


Figura 7.15. Medidas de los desplazamientos horizontales que resultan de los inclinómetros instalados a diferentes distancias x del eje del Segundo Túnel de Heinenoord y simulaciones para el SET 1 y SET 2 con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*. (a) $x=6m$. (b) $x=10m$. (c) $x=16m$.

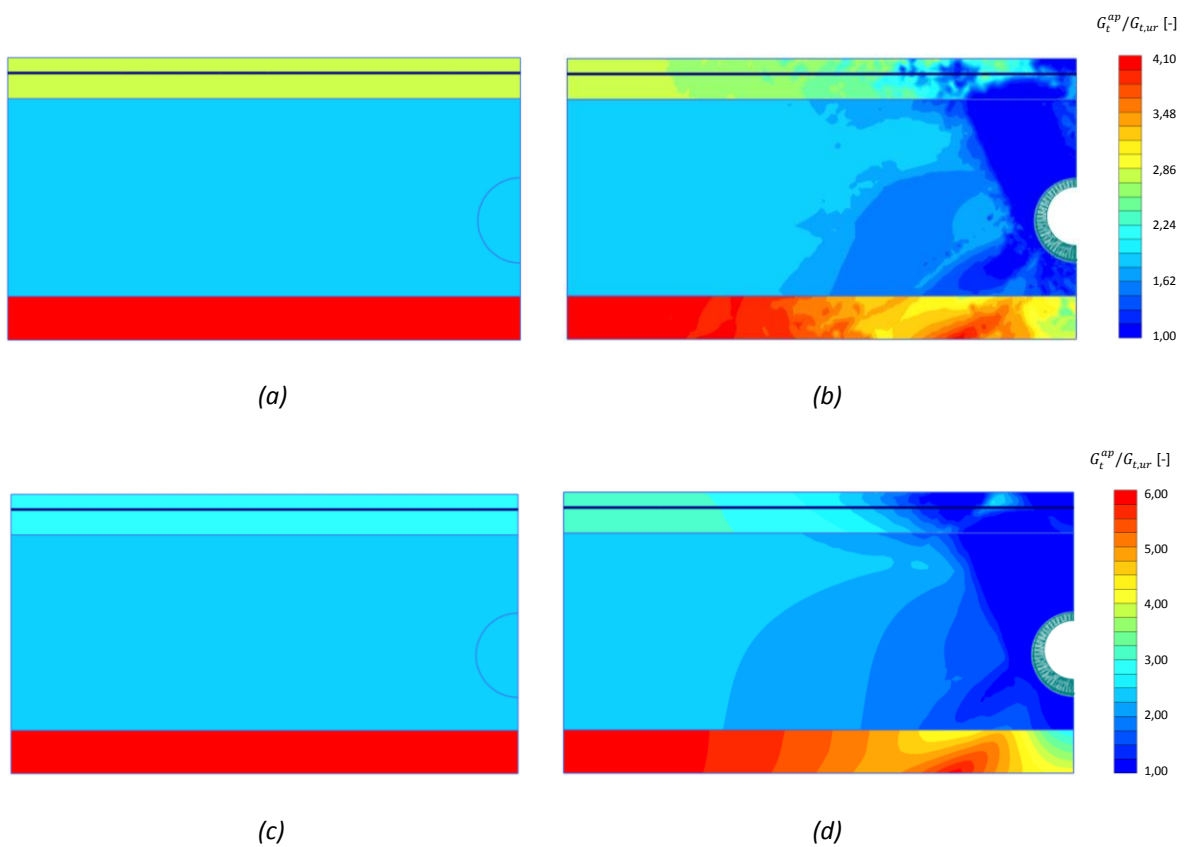


Figura 7.16. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el SET 1 con el modelo EPHYSS.

(a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación.

Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el SET 1 con el modelo HS-SS.

(c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.

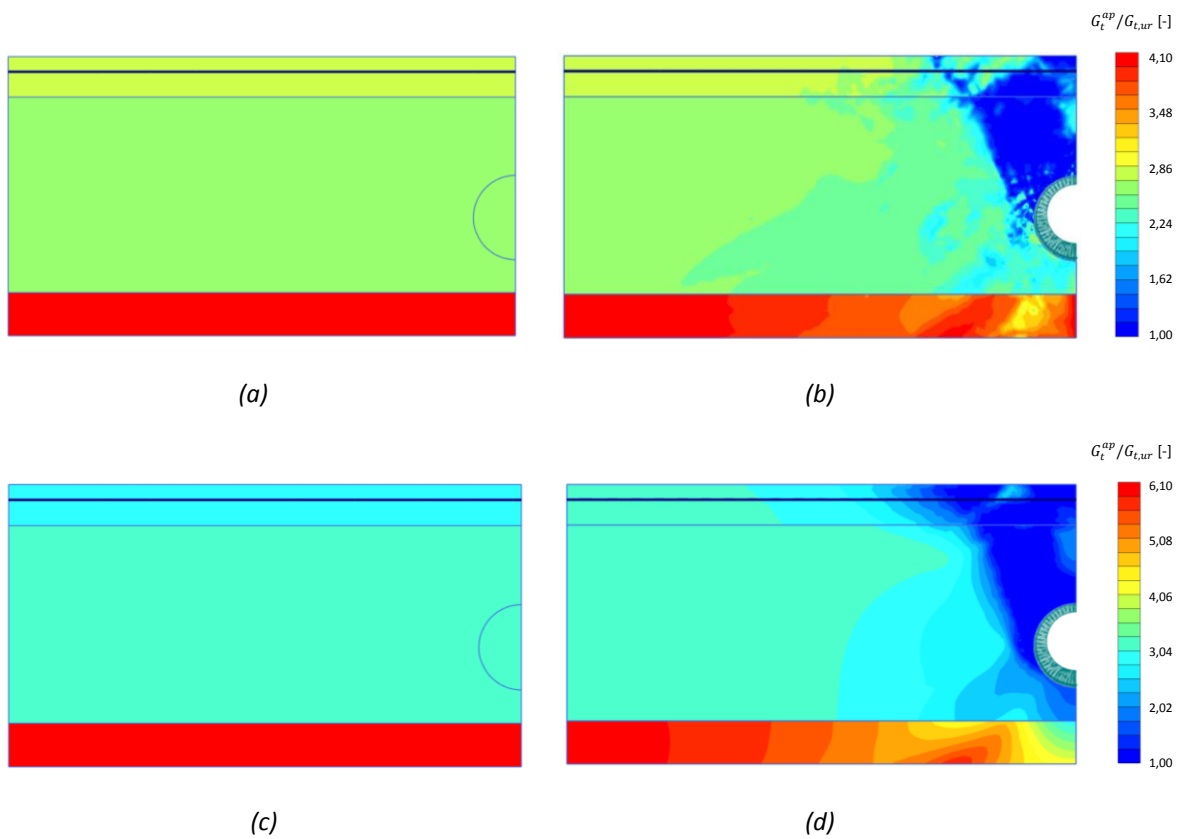


Figura 7.17. Arriba: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ para el SET 2 con el modelo *EPHYSS*.
 (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación.
 Abajo: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ para el SET 2 con el modelo *HS-SS*.
 (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.

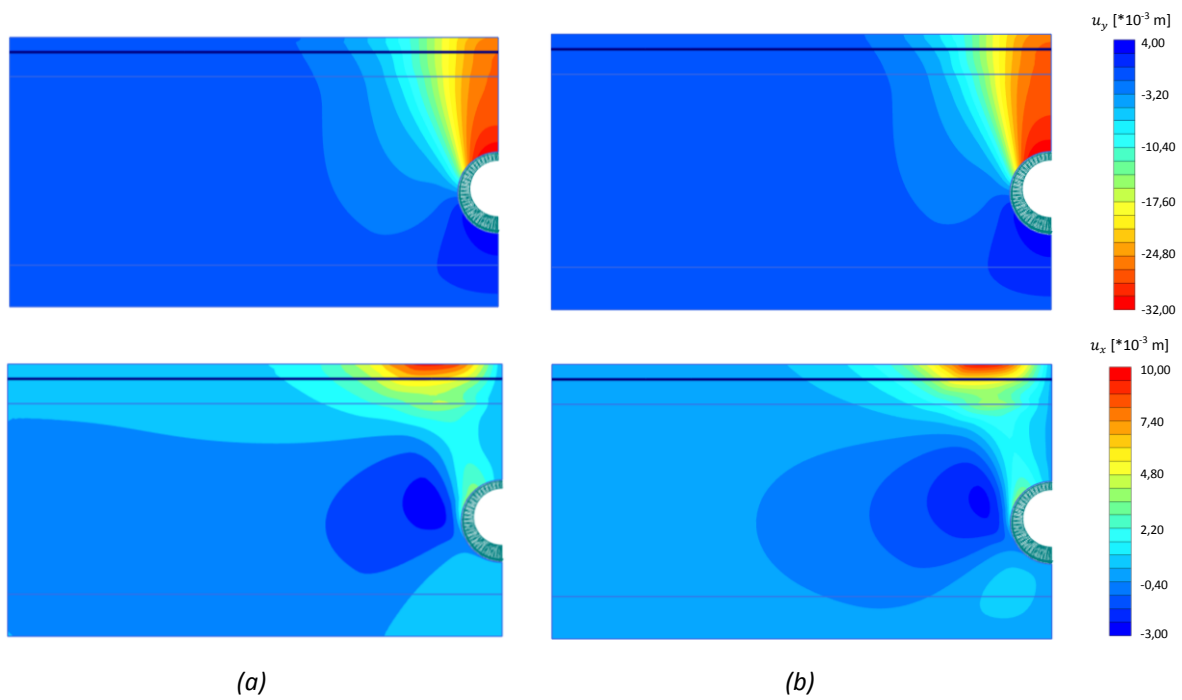


Figura 7.18. Desplazamientos verticales u_y (arriba) y horizontales u_x (abajo) para el SET 1.
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,0318m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0094m$).
 (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,0317m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0096m$).

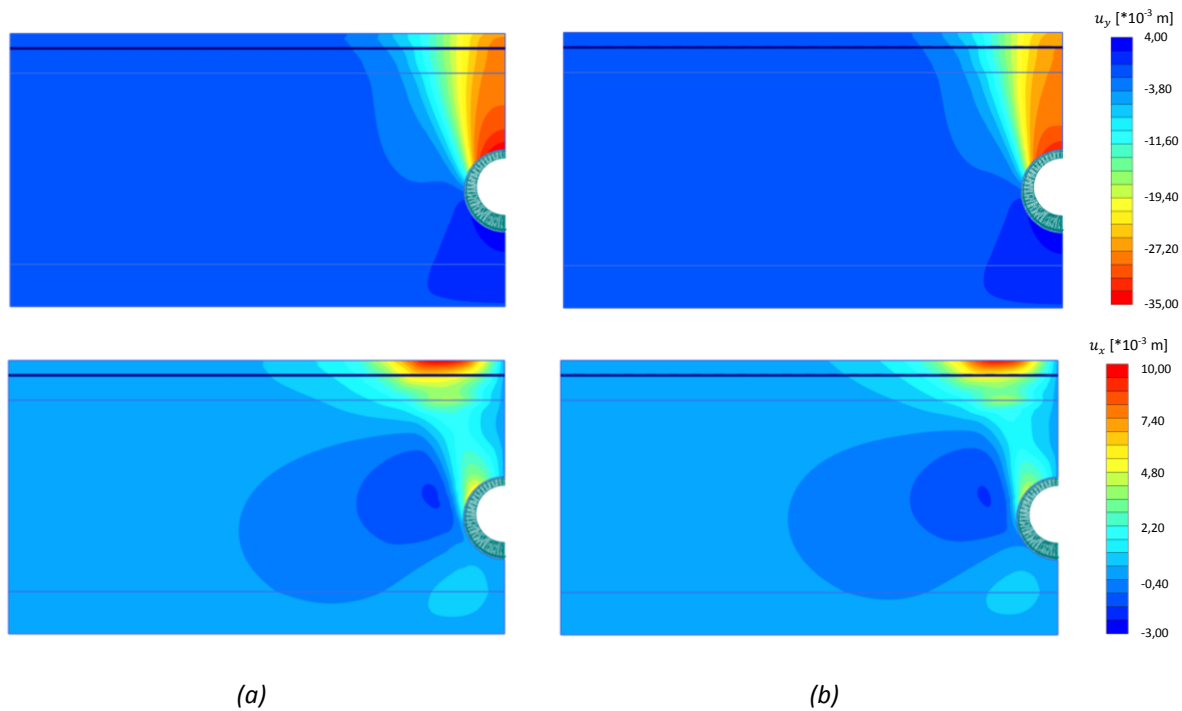


Figura 7.19. Desplazamientos verticales (arriba) y horizontales (abajo) para el SET 2.
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,0345m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0100m$).
 (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,0326m > -0,20m$ y $u_{x,max}=0,0097m$).

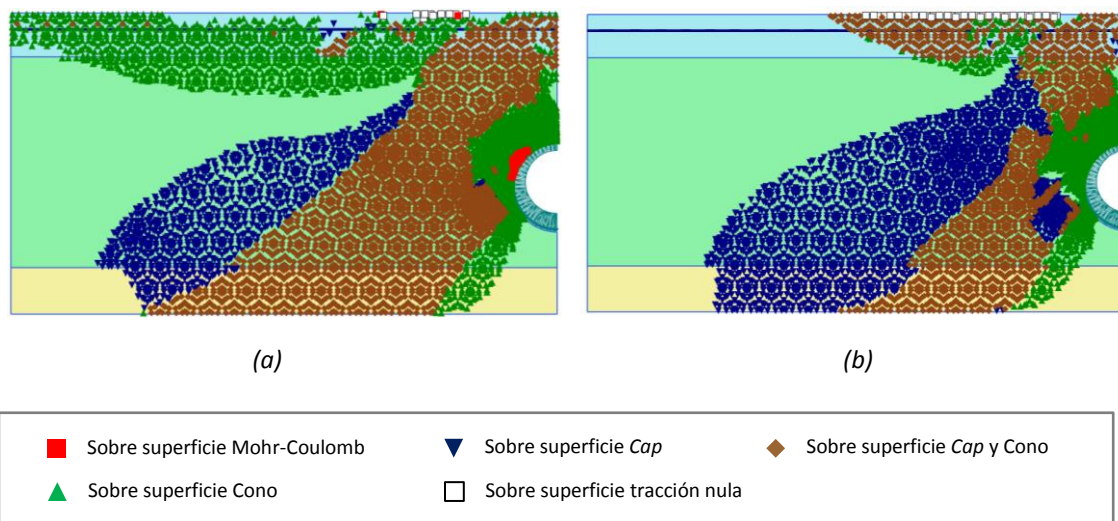


Figura 7.20. Puntos plásticos para el SET 2. (a) Modelo *EPHYSS*. (b) Modelo *HS-SS*.

7.5. Excavación en Berlín entre pantallas ancladas

Schweiger (2002) resume el estudio de evaluación comparativa (*benchmarking*) desarrollado por el grupo de trabajo “AK 1.6 Numerical Methods in Geotechnics” de la *DGGT* (*German Society for Geotechnics*) relativo al análisis numérico de una excavación en Berlín de 16,8m de profundidad entre pantallas ancladas.

El terreno en el que se realiza la excavación se compone de dos estratos de arenas, siendo el superior de 20,0m de espesor y el inferior de más de 80,0m de espesor. Tal como apunta Benz (2007), en las simulaciones realizadas por Schweiger (2007), el estrato inferior se divide, a su vez, en dos substratos a los que se asignan diferentes parámetros con objeto de reproducir el comportamiento de la arena en el rango de las pequeñas deformaciones debido, precisamente, a la falta de consideración de este tipo de comportamiento en el modelo *Harding Soil* utilizado por Schweiger. Puesto que los modelos constitutivos utilizados en las simulaciones que aquí se realizan sí tienen en cuenta el comportamiento del suelo en dicho rango de deformaciones, el estrato de arena inferior se simulará con un único conjunto de parámetros, del mismo modo que lo hace Benz (2007). El terreno en el que se realiza la excavación permite considerar un comportamiento de tipo drenado y el nivel freático se sitúa a 3,0m de profundidad, si bien será rebajado dentro de la excavación hasta los 17,9m de profundidad.

Durante la excavación se midieron los desplazamientos en las pantallas con inclinómetros.

La figura 7.21 muestra la geometría y los datos principales para poder construir el modelo numérico.

Todas las simulaciones recogidas por Schweiger (2002) consideran un mismo conjunto de hipótesis que se detallan en dicho documento y que se resumen a continuación:

- Se adopta la hipótesis de deformación plana (análisis 2D).
- No se considera la influencia de la construcción de las pantallas sobre el suelo.

- Las pantallas se simulan como elementos estructurales tipo viga continua.
- Se tiene en cuenta la interacción suelo-estructura.
- Se adopta la geometría indicada en la figura 7.21.
- Se considera, dentro de la excavación, una barrera hidráulica situada en la cota -30,0m con las mismas propiedades que la arena circundante.
- Se considera la geometría y propiedades de los anclajes (longitud libre, zona de anclaje e interdistancias), así como las cargas de tesado de los mismos, indicadas en la figura 7.21.
- La reducción del nivel freático en el interior de la excavación hasta la cota -17,9m se hace en una única fase.
- Las fases de excavación son las indicadas en la figura 7.21.

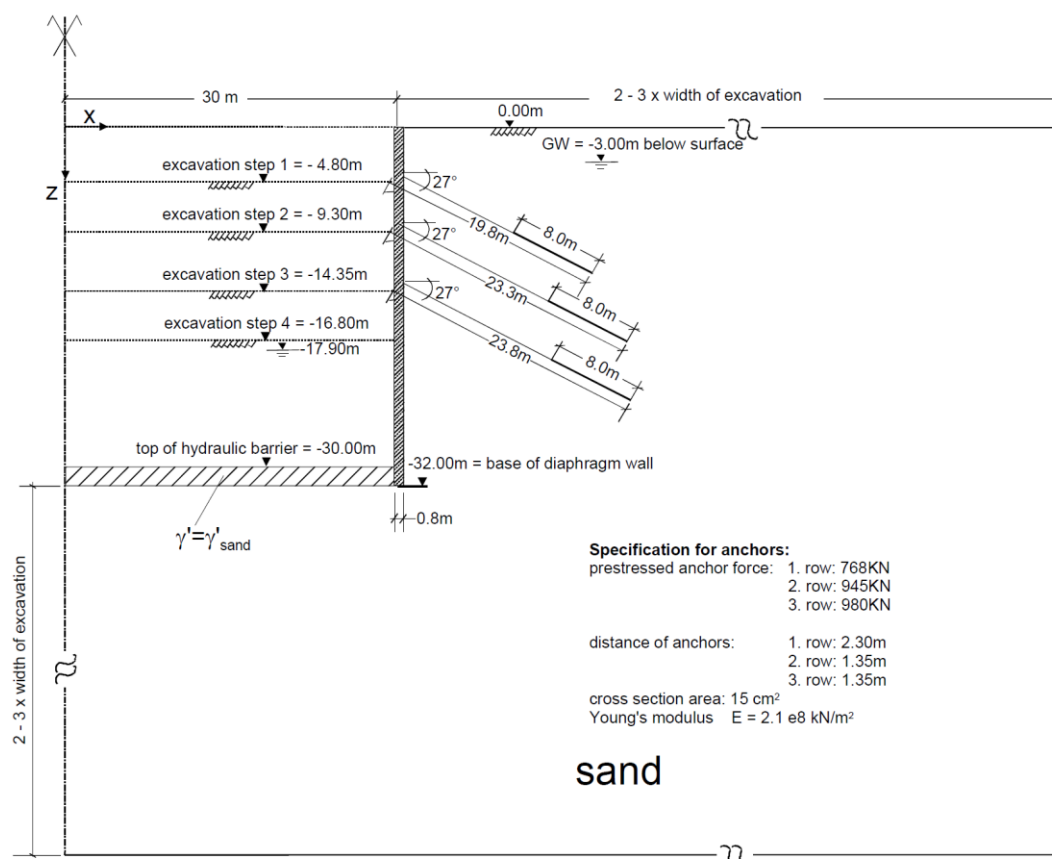


Figura 7.21. Geometría, posición del nivel freático, avances de la excavación, propiedades de los anclajes y fuerzas de tesado de los mismos (Schweiger, 2002).

La geometría del modelo numérico es la que se muestra en la figura 7.22 y contempla la existencia de un plano de simetría vertical en el centro de la excavación.

Los valores de los parámetros del terreno se han obtenido de Benz (2007) y de Schweiger (2002), y estos han sido tomados, a su vez, de la literatura existente, de ensayos edométricos realizados sobre muestras de arena densa y suelta, y de ensayos triaxiales realizados sobre muestras de arena densa.

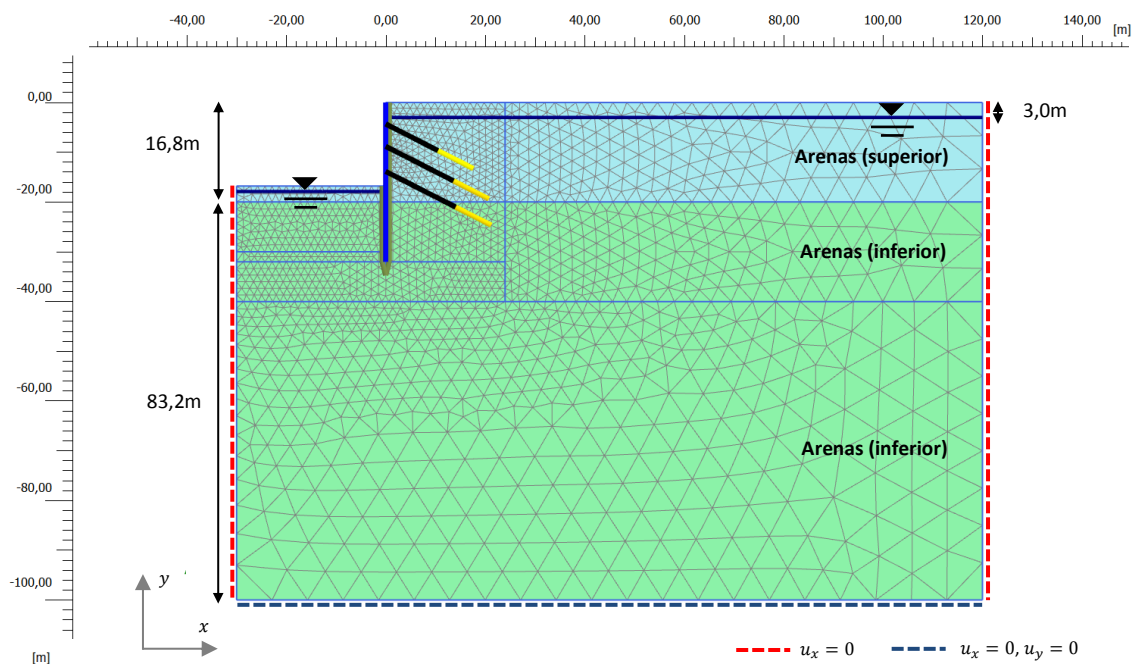


Figura 7.22. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico de la excavación en Berlín.

Los diferentes estratos que constituyen el terreno se encuentran normalmente consolidados, por lo que se adopta un valor de $OCR = 1$ en todos ellos.

En la tabla 7.12 se proporcionan los pesos específicos del suelo y los valores de los parámetros de cada material correspondientes al modelo *EPHYSS* y al modelo *HS-SS*. Para la obtención de los valores de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y K_s^{ref} del modelo *EPHYSS* se aplica, en cada material y en el rango de tensiones dado por la envolvente de las fases del problema de contorno, la formulación de mínimos cuadrados expuesta en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5, con objeto de reproducir un perfil de rigideces inicial en el terreno similar al obtenido con el modelo *HS-SS* y de que las variaciones de dichas rigideces en ambos modelos debidas al cambio de tensiones en el suelo sean lo más parecidas entre sí. Este proceso podría hacerse a la inversa, siendo el valor de G_0^{ref} del modelo *HS-SS* el que se ajusta a partir del valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS*, desaconsejándose, en este caso, el ajuste de los valores $E_{t,ur}^{ref}$ y ν_{ur}' del modelo *HS-SS* al aparecer ambos en la formulación plástica del mismo. Por otro lado, en la tabla 7.13 se proporcionan los valores de los parámetros internos para cada material correspondientes al modelo *EPHYSS*, desconociéndose el valor de estos mismos en el caso del modelo *HS-SS* al no ser proporcionados por Plaxis. Asimismo, en las tablas 7.14 y 7.15 se proporcionan los parámetros correspondientes a las pantallas, *interfaces* y anclajes. Las pantallas se han simulado con elementos tipo *plate*, mientras que los anclajes se han simulado con elementos tipo *anchor* en su longitud libre y con elementos tipo *geogrid* en la longitud de anclaje, los parámetros de los cuales se toman de Schweiger (2007) (ver Plaxis (2015) para conocer los detalles de este tipo de elementos). La interacción suelo-estructura se simula mediante una *interface* sobre la que se considera una reducción de la rigidez y resistencia mediante el parámetro R_{inter} de la forma descrita en el apartado 4.4.2 del capítulo 4 y que se asume de igual valor para todos

los materiales (Schweiger, 2007). Asimismo, la cabeza de los anclajes se sitúa, en las tres filas, a 0,50m por encima del plano de trabajo de la correspondiente fase de excavación (Schweiger, 2002).

		Arenas (superior)	Arenas (inferior)	Unidades		
Pesos específicos	γ_{sat}	20,0	20,0	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	19,0	19,0			
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0002	0,0002	[-]	
	HS-SS	G_0^{ref}	168.750	281.250	[kN/m ²]	
		ν'_{ur}	0,20	0,20	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	37.015	58.867	[kN/m ²]	
		m_1	0,55	0,55	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	139.051	220.816	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	55.620	88.327	[kN/m ²]	
		m_2	0,55	0,55	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	[-]	
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	E_{50}^{ref}	45.000	75.000	[kN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	180.000	300.000	[kN/m ²]
			E_{oed}^{ref}	45.000	75.000	[kN/m ²]
c'			1	1	[kN/ m ²]	
φ'			35	38	[deg]	
ψ			5	6	[deg]	
p'_{ref}			100	100	[kN/ m ²]	
m			0,55	0,55	[-]	
K_0^{NC}			0,43	0,38	[-]	
R_f			0,90	0,90	[-]	
σ'_{trac}			0	0	[kN/ m ²]	

Tabla 7.12. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos EPHYSS y HS-SS.

		Arenas (superior)	Arenas (inferior)	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	E_i^{ref}	141.663	228.003	[kN/ m ²]
	α'	2,65	3,81	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	2,45	2,48	[-]

Tabla 7.13. Parámetros internos del modelo EPHYSS.

	d [m]	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]	R_{inter} [-]	Condiciones hidráulicas
Pantallas continuas	0,80	30	$2,40 \cdot 10^7$	$1,28 \cdot 10^6$	7,5	0,15	0,80	Impermeable

Tabla 7.14. Parámetros de las pantallas extraídos de la tesis de Benz (2007) y del trabajo de Schweiger (2002, 2007). Se asume un mismo valor de R_{inter} para todos los materiales (Schweiger, 2007).

Fila	Interdistancia anclajes [m]	Longitud libre [m]	Longitud anclaje [m]	Ángulo [deg]	EA tendón [kN]	EA grout anclaje [kN/m]	Fuerza tesado [kN]
1	2,30	11,80	8,00	27	$3,15 \cdot 10^5$	$4,92 \cdot 10^5$	768
2	1,35	15,30	8,00	27	$3,15 \cdot 10^5$	$8,38 \cdot 10^5$	945
3	1,35	15,80	8,00	27	$3,15 \cdot 10^5$	$8,38 \cdot 10^5$	980

Tabla 7.15. Geometría y parámetros de los anclajes extraídos del trabajo de Schweiger (2002, 2007) y de la tesis de Benz (2007).

Tras la fase de cálculo en la que se determinan las tensiones *in situ* en el terreno, se ha realizado tanto un reseteo de la historia de deformaciones del suelo con ambos modelos, adoptando un valor $Reini_Stiff = 1$ en el modelo *EPHYSS*, como un reseteo de los desplazamientos en el mismo a través de la *Interface* de Plaxis.

El rebaje del nivel freático dentro de la excavación, limitado por la barrera hidráulica a -30,0m, se realiza en una única fase de cálculo una vez terminada la construcción de las pantallas. Las presiones de agua resultantes tras dicho rebaje son las hidrostáticas dentro de la excavación, tomando como referencia el nivel rebajado situado a la cota -17,9m, y las hidrostáticas fuera de la excavación, tomando como referencia el nivel freático original situado la cota -3,0m. En la figura 7.23 se muestran las presiones de agua antes y después del rebaje del nivel freático en la excavación.

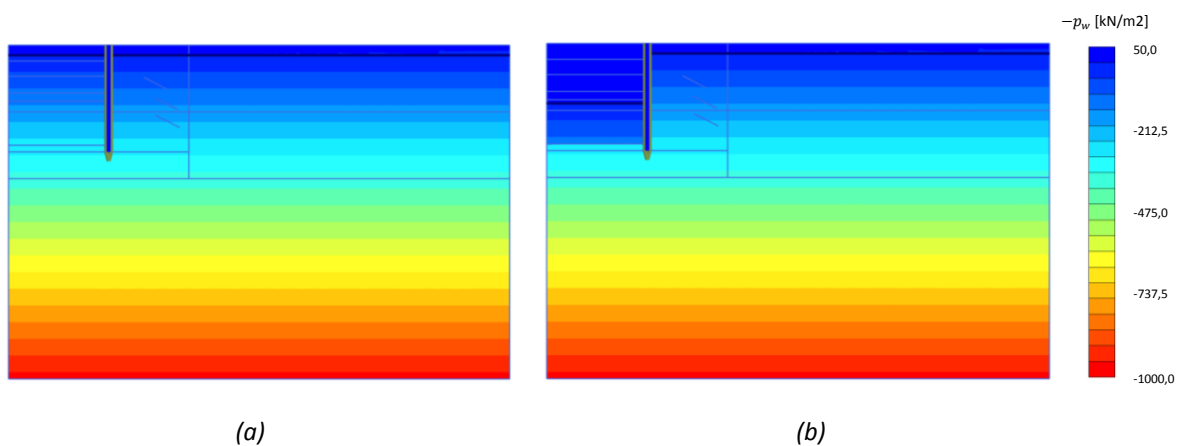


Figura 7.23. Presiones de agua en el terreno.
 (a) Antes del rebaje del nivel freático en el interior de la excavación.
 (b) Después del rebaje del nivel freático en el interior de la excavación.

En la figura 7.24 se muestran los asientos en el trasdós de la pantalla derecha en la fase final de la excavación resultantes de las simulaciones. En la figura 7.25 se muestran las medidas de los desplazamientos horizontales de la pantalla derecha que resultan de los inclinómetros y de la estimación del desplazamiento absoluto en la base de la misma (Schweiger, 2002) así como los resultados de las simulaciones. En la figura 7.26 se muestran los momentos flectores de la pantalla en la fase final de la excavación resultantes de las simulaciones. Y en la figura 7.27 se muestran los levantamientos bajo la excavación a lo largo de un eje situado a una distancia de 10,0m de la pantalla derecha resultantes de las simulaciones.

En la figura 7.24 se puede ver cómo el modelo *EPHYSS* proporciona asientos superiores a los proporcionados por el modelo *HS-SS*, siendo la diferencia de 4,7mm en el trasdós de la pantalla. La falta de medidas no permite una evaluación completa de los resultados.

La figura 7.25 muestra cómo los desplazamientos obtenidos en las simulaciones con el modelo *EPHYSS* mejoran los obtenidos en las simulaciones con el modelo *HS-SS*. Por otro lado, los resultados obtenidos con el modelo hipoplástico con deformación intergranular de Niemunis y Herle (1997), según los gráficos proporcionados por Schweiger (2002), no consigue aproximar bien los valores medidos.

En la figura 7.26, se puede ver cómo ambos modelos proporcionan valores prácticamente idénticos de los momentos flectores de la pantalla, siendo los del modelo *EPHYSS* ligeramente inferiores en las zonas de máximo momento. La falta de medidas no permite una evaluación completa de los resultados.

En la figura 7.27 se muestra como el modelo *EPHYSS* predice levantamientos similares a los predichos por el modelo *HS-SS* entre la cota -30,0 m y -100,0 m e inferiores entre la cota -16,8 m y -30,0 m. La falta de medidas, una vez más, no permite una evaluación completa de los resultados.

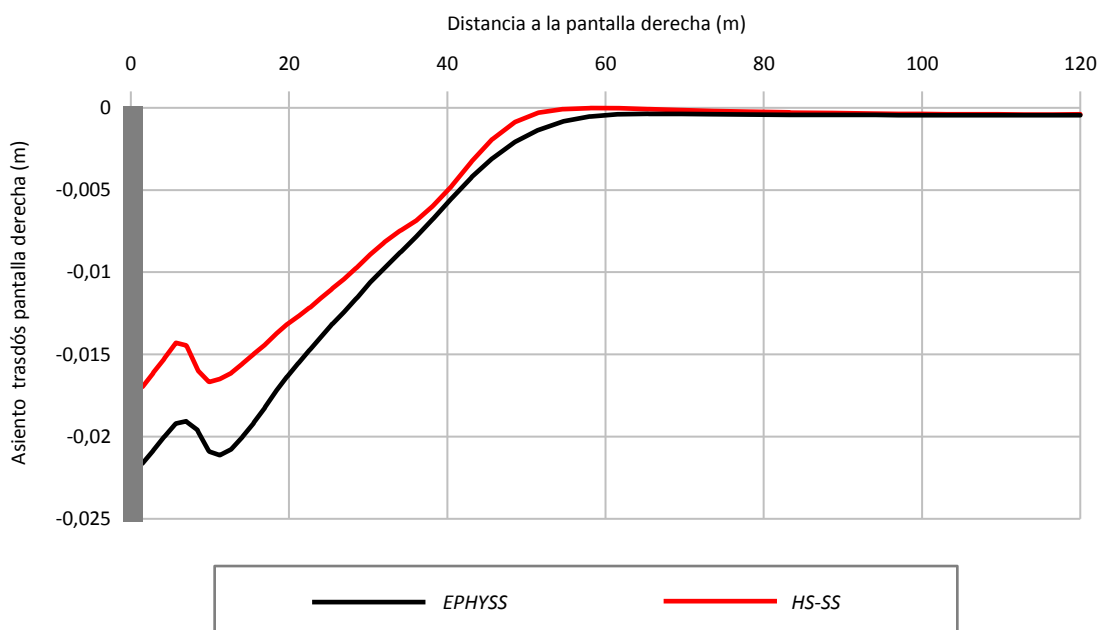


Figura 7.24. Asientos en el trasdós de la pantalla derecha en la fase final de la excavación resultantes de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

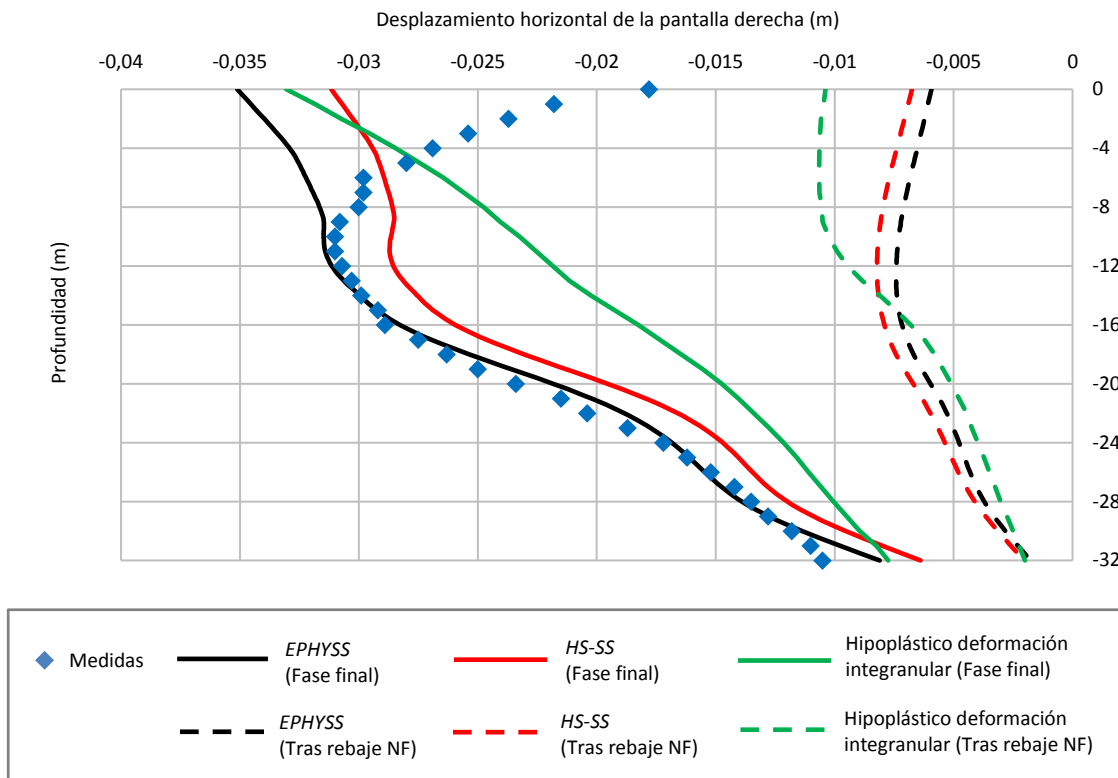


Figura 7.25. Medidas de los desplazamientos horizontales de la pantalla derecha y resultados de las simulaciones con los modelos EPHYSS, HS-SS e Hipoplástico con deformación integranular de Niemunis y Herle (1997), cuyos resultados se han obtenido de Schweiger (2002).

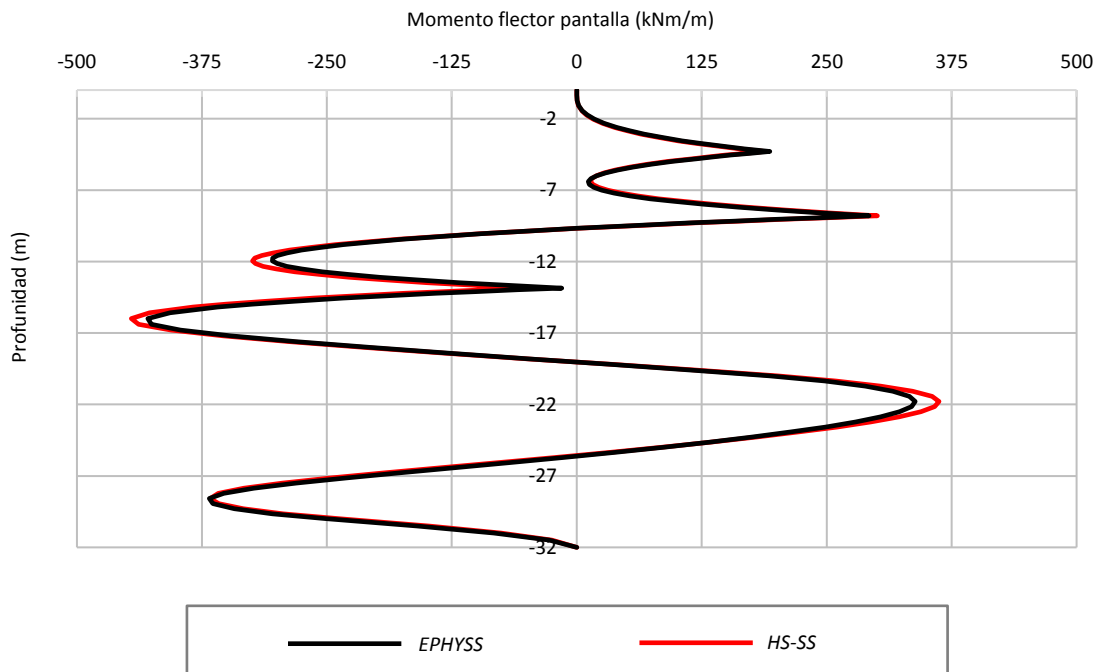


Figura 7.26. Momentos flectores en la pantalla derecha que resultan de la simulación con los modelos EPHYSS y HS-SS.

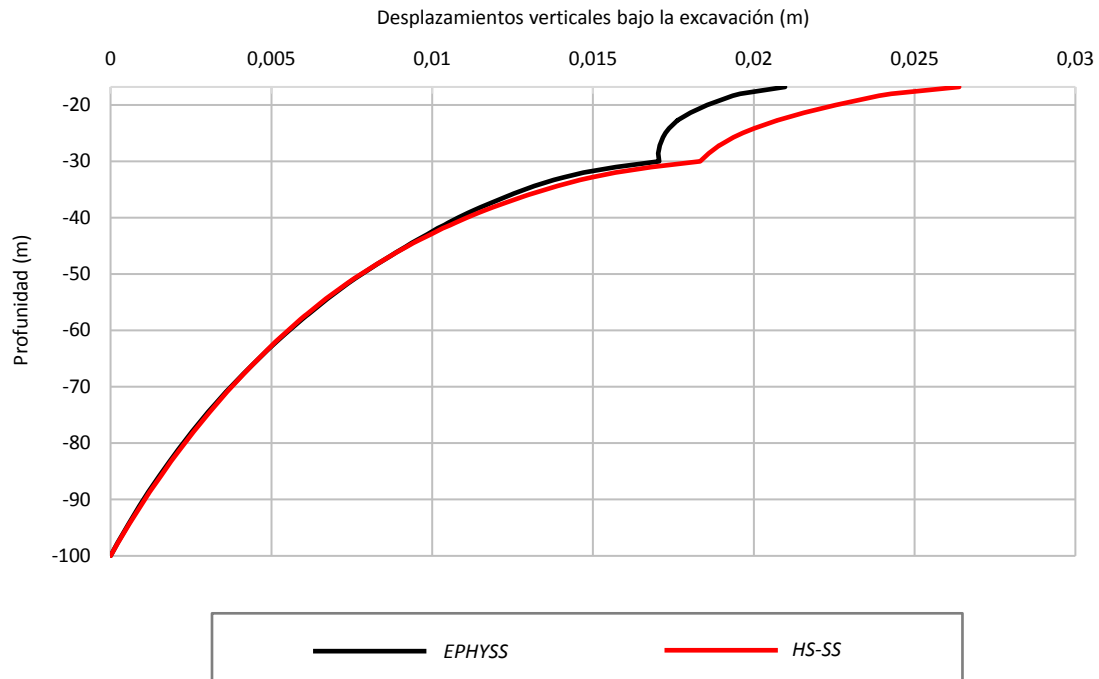


Figura 7.27. Levantamientos bajo la excavación en la fase final de la misma y a lo largo de un eje vertical situado a 10,0m de la pantalla que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

En la figura 7.28 se muestran los valores $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, donde G_t^{ap} es el módulo de corte tangente aparente del suelo y $G_{t,ur}$ es su módulo de corte (hipo)elástico tangente mínimo. Debe tenerse en cuenta el efecto que genera, en los gráficos de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$, la diferencia entre el valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* y el valor G_0^{ref} del modelo *HS-SS*, y la diferencia entre el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, K_s^{ref}, m_1)$ del modelo *EPHYSS* y el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, \nu_{ur}')$ del modelo *HS-SS*, debidas ambas al ajuste comentado anteriormente con objeto de tener un perfil de rigideces inicial en el terreno parecido en las dos simulaciones y variaciones de estas similares con el nivel de tensiones. Para facilitar la comparación, en la figura 7.28 se proporcionan los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ correspondientes a la fase inicial de la simulación. En dicha figura pueden verse las diferencias en la distribución de los valores de la rigidez al corte en cada modelo. En este caso, el modelo *EPHYSS* proporciona zonas de degradación máxima con áreas mayores a las proporcionados por el modelo *HS-SS*. Se observa también cómo, en la zona próxima al contorno horizontal inferior del dominio de análisis, bajo la excavación, el modelo *EPHYSS* proporciona rigideces inferiores a las proporcionadas por el modelo *HS-SS*.

Asimismo, en este problema de contorno, a diferencia de los anteriores, aparecen reversiones parciales de la deformación debido a la instalación de los anclajes. Ello permite estudiar cómo los modelos constitutivos tratan dichas reversiones en términos de incrementos de rigidez. Concretamente, se ha podido comprobar cómo la acumulación de deformación de corte en determinadas zonas durante las fases de excavación, seguidas de fases con giro parcial de las deformaciones, no da lugar a la rigidización del suelo en el modelo *HS-SS* si dicha deformación de corte previa a los giros es elevada, mientras que

en el modelo *EPHYSS* sí tiene lugar dicha rigidización del suelo. Este comportamiento se ha expuesto en detalle en el apartado 6.4.4. del capítulo 6.

Estas diferencias en las rigideces se traducen, a su vez, en las diferencias de movimientos tanto del terreno como de la pantalla anclada que se han mostrado en las figuras 7.24, 7.25 y 7.27, y que se pueden ver en la figura 7.29 en todo el dominio de análisis.

Finalmente, en la figura 7.30 se puede ver la similitud en el comportamiento plástico de ambos modelos, lo cual es lógico teniendo en cuenta que los dos cuentan con una formulación plástica muy parecida.

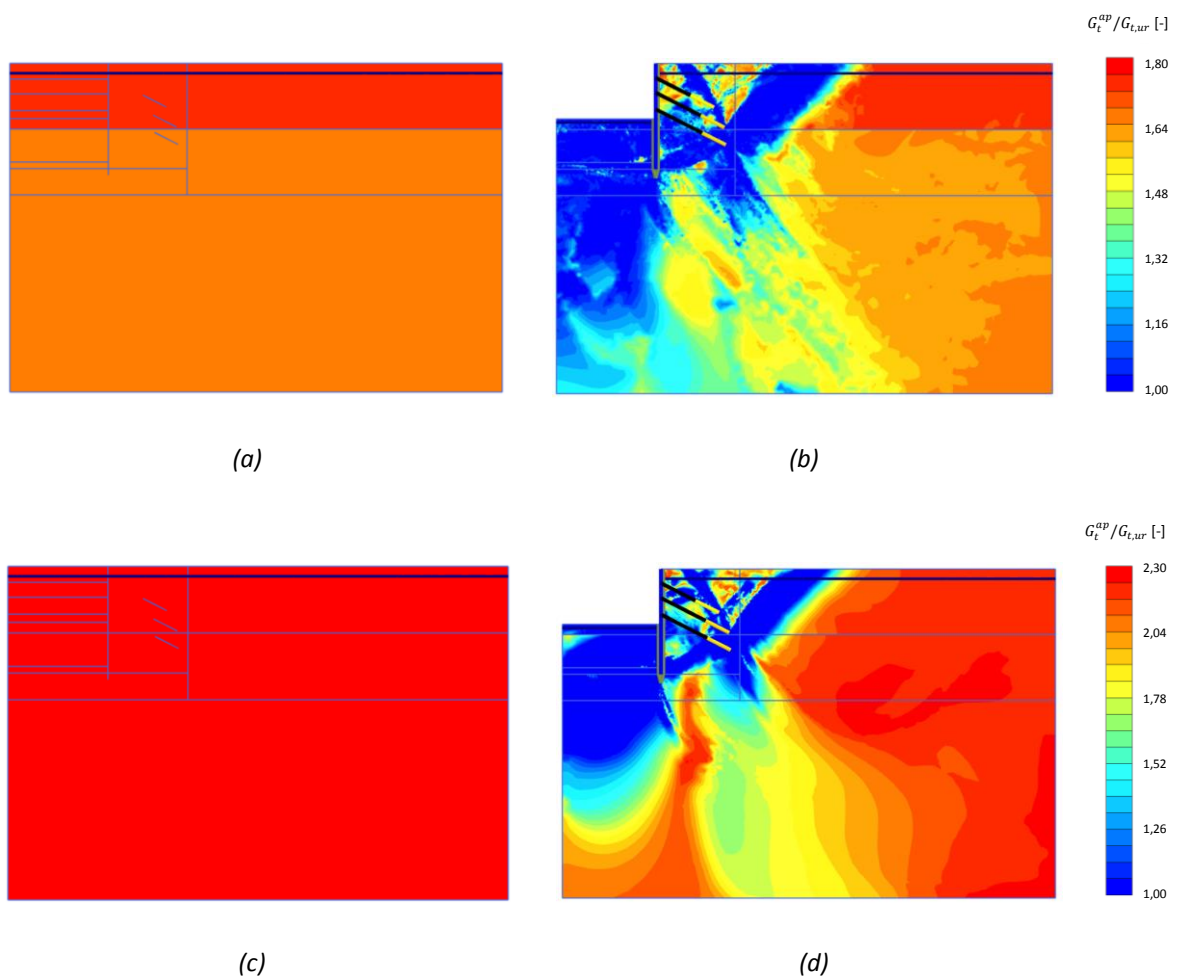


Figura 7.28. Arriba: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ con el modelo *EPHYSS*.
 (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación.
 Abajo: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ con el modelo con el modelo HS-SS.
 (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.

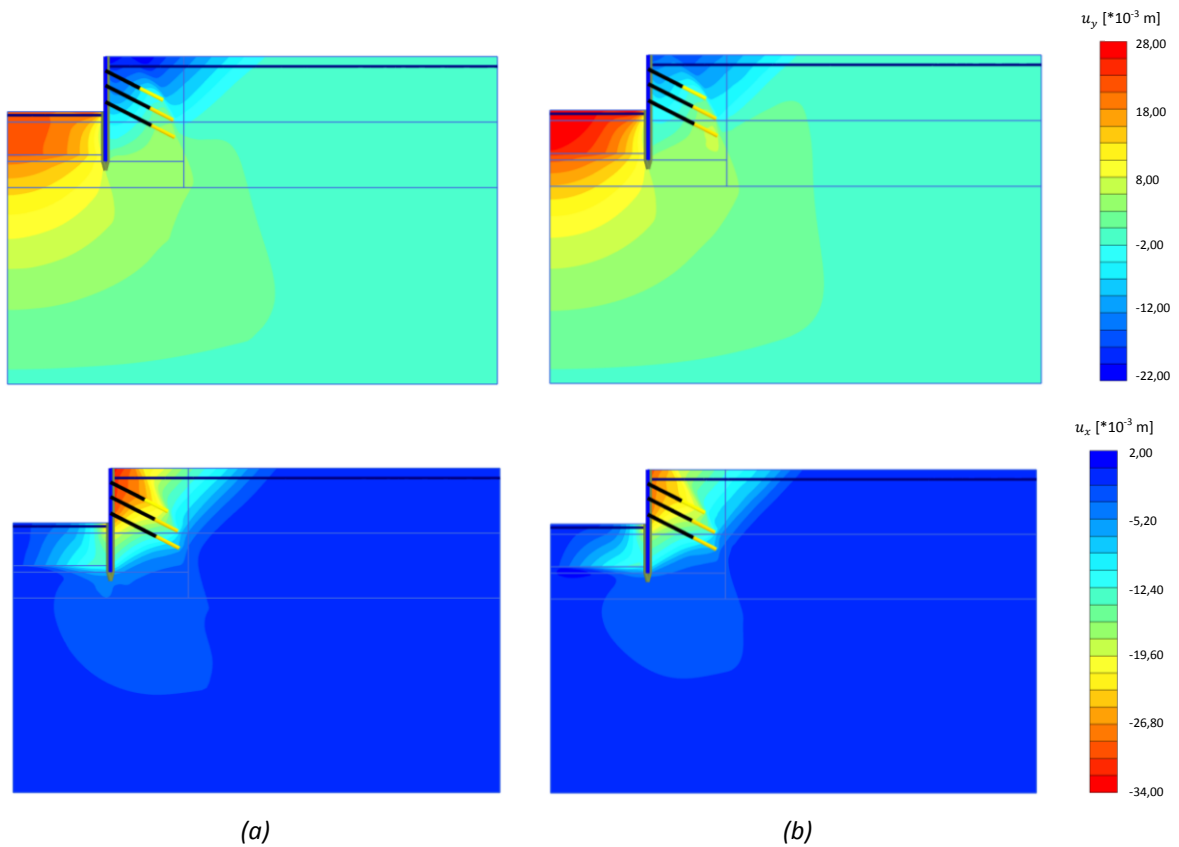


Figura 7.29. Desplazamientos verticales (arriba) y horizontales (abajo).
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max,+}=0,0226m$, $u_{y,max,-}=-0,0224m$, $u_{x,max,+}\approx 0m$ y $u_{x,max,-}=-0,0349m$).
 (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max,+}=0,0282m$, $u_{y,max,-}=-0,0174m$, $u_{x,max,+}\approx 0m$ y $u_{x,max,-}=-0,0311m$).

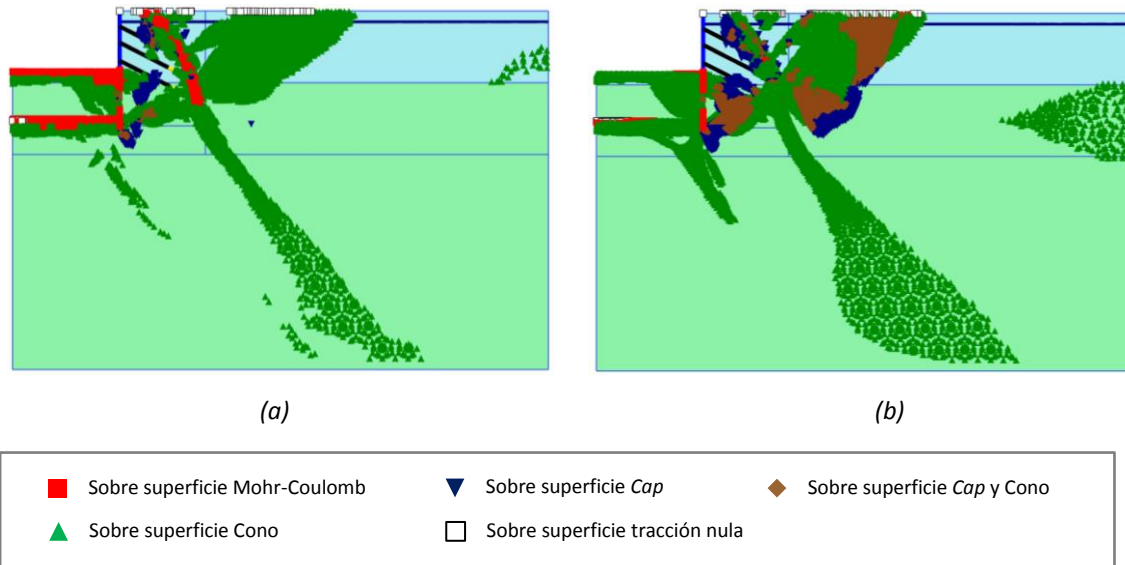


Figura 7.30. Puntos plásticos. (a) Modelo EPHYSS. (b) Modelo HS-SS.

Los resultados obtenidos con el modelo *EPHYSS* en comparación con los del modelo *HS-SS*, en relación con los movimientos del terreno y los esfuerzos en la pantalla, pueden tener, en el problema estudiado, una clara repercusión (1) en procesos de control durante la ejecución de la obra y (2) en procesos de optimización mediante técnicas de *backanalysis* si se utilizan las medidas de los desplazamientos en el terreno o en la estructura.

7.6. Excavación en Offenbach entre pantallas de pilotes apuntaladas

Krajewski et al. (2001) describe el proceso de construcción de un túnel de 3,5km de longitud en la ciudad de Offenbach (Alemania), próxima a Frankfurt, en el que se realiza una excavación de 19,3m de profundidad, mediante la técnica de *cut&cover*, entre pantallas de pilotes apuntaladas.

El terreno en el que se realiza la excavación se compone de un primer estrato de 4,0m de arenas y gravas del Cuaternario, seguido de un segundo estrato de mayor potencia de arcillas terciarias sobreconsolidadas del Rupeliense. El nivel freático se sitúa a 2,8m de profundidad.

Tal como indican Krajewski y Reul (2004), antes de iniciar la excavación se realiza un bombeo de fondo para rebajar el nivel freático, permitiendo excavar en seco.

En ambos lados de la excavación existen edificaciones muy próximas a las pantallas, por lo que se instrumentó la excavación y el entorno de la misma para su monitorización. Durante la excavación se midieron las deformaciones de las pantallas de pilotes con inclinómetros, los asientos en superficie con topografía convencional y las cargas en los puntales con células de carga.

La figura 7.31 muestra la geometría y los datos principales para poder construir el modelo numérico.

Se ha realizado el análisis 2D en una sección de la excavación, considerando la hipótesis de deformación plana con las limitaciones que ello implica.

La geometría del modelo numérico es la que se muestra en la figura 7.32.

Los valores de los parámetros del terreno se han tomado de Benz (2007), obtenidos, a su vez, de la literatura existente y de ensayos edométricos, ensayos de compresión simple y ensayos de corte directo. Asimismo, los parámetros del suelo relativos al comportamiento del mismo en el rango de las pequeñas deformaciones han sido estimados por Benz (2007) a partir de correlaciones específicas para suelos, dada la falta de ensayos particulares.

En la tabla 7.16 se proporcionan los valores de OCR y K_0^{SC} considerados en cada uno de los estratos, a partir de la información contenida en la tesis de Benz (2007). Benz calcula los valores de K_0^{SC} a partir de los valores de OCR mediante la fórmula $K_0^{SC} = (1 - \text{sen}(\varphi'))(OCR)^{\text{sen}(\varphi')}$ de Mayne y Kulhawy (1982).

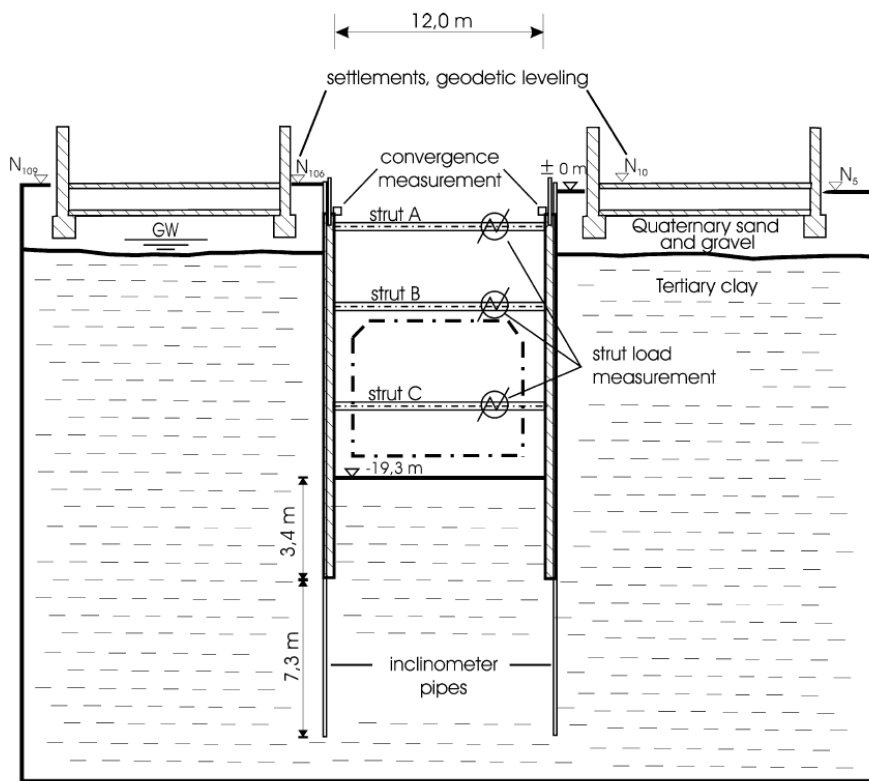


Figura 7.31. Geometría, nivel freático, avances de la excavación, puntales y elementos para la auscultación (Krajewski et al., 2001).

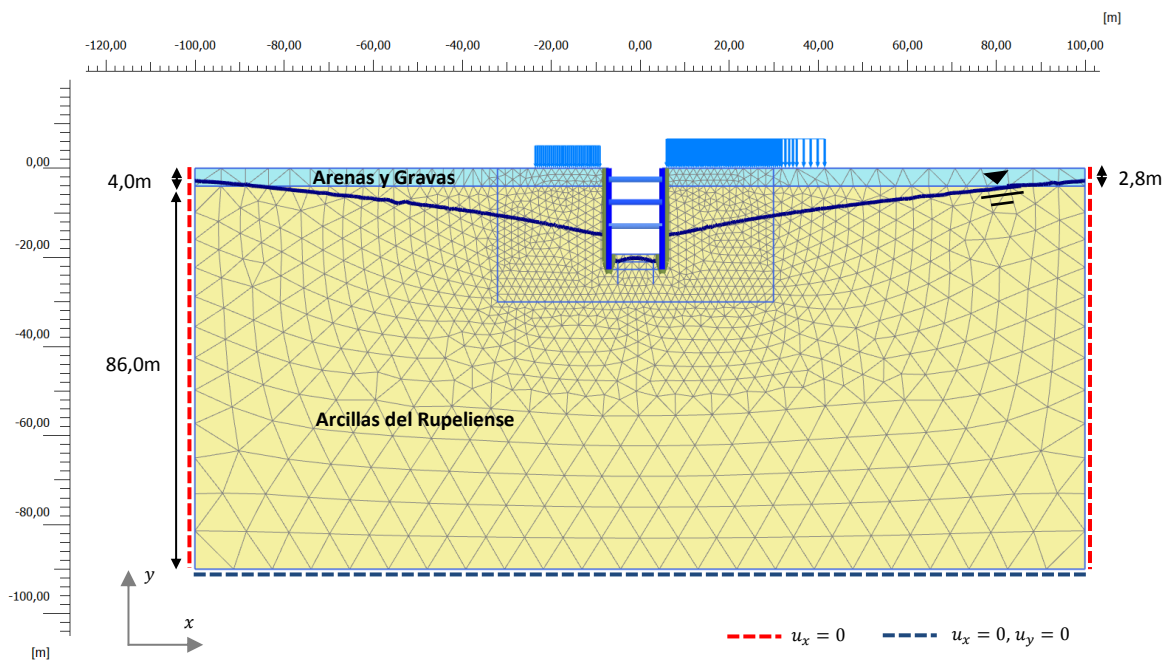


Figura 7.32. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico de la excavación en Offenbach. En la imagen se muestra el nivel freático rebajado.

En la tabla 7.17 se proporcionan los pesos específicos y los valores de los parámetros de cada material correspondientes al modelo EPHYSS y al modelo HS-SS. Para la obtención de los valores de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y K_s^{ref} del modelo EPHYSS se aplica, en cada material y en el rango de tensiones dado por la envolvente de las fases del problema de contorno, la formulación de mínimos cuadrados expuesta en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5, con objeto de reproducir un perfil de rigideces inicial en el terreno similar al obtenido con el modelo HS-SS y de que las variaciones de dichas rigideces en ambos modelos debidas al cambio de tensiones en el suelo sean lo más parecidas entre sí. Este proceso podría hacerse a la inversa, siendo el valor de G_0^{ref} del modelo HS-SS el que se ajusta a partir del valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo EPHYSS, desaconsejándose, en este caso, el ajuste de los valores $E_{t,ur}^{ref}$ y v_{ur}' del modelo HS-SS al aparecer ambos en la formulación plástica del mismo. Por otro lado, en la tabla 7.18 se proporcionan los valores de los parámetros internos para cada material correspondientes al modelo EPHYSS, desconociéndose el valor de estos mismos en el caso del modelo HS-SS, al no ser proporcionados por el Plaxis.

	Arenas y gravas	Arcilla Rupeliense	Unidades
Índice sobreconsolidación OCR	1,00	2,80	[-]
Coefficiente empuje K_0^{SC}	-	0,95	[-]

Tabla 7.16. Valores de OCR y K_0^{SC} extraídos de Benz (2007) en los diferentes materiales.

En las tablas 7.19, 7.20, 7.21, 7.22 y 7.23 se proporcionan, respectivamente, los parámetros correspondientes a las pantallas de pilotes e *interfaces*, fases de excavación e instalación de puntales, situación y cargas generadas por los edificios, parámetros hidráulicos del suelo supuestos y, finalmente, parámetros del bombeo para el rebaje del nivel freático previo a la excavación. Las pantallas y los puntales se han simulado con elementos tipo *plate* (ver Plaxis (2015) para conocer los detalles de este tipo de elementos). Los pilotes de las pantallas tienen un diámetro “d” y una interdistancia entre ejes “s”. Asimismo, los puntales tienen interdistancias entre ejes “t”. Las fases de excavación e instalación de los puntales consideradas en Benz (2007) se han obtenido de forma indirecta mediante *backanalysis* a partir del ajuste de los desplazamientos horizontales de las pantallas calculados por Benz (2007), utilizando el modelo HS-SS. La interacción suelo-estructura en las pantallas se simula mediante una *interface* en la que se supone, dada la falta de datos, un valor de 0,67 del factor R_{inter} de reducción de la rigidez y resistencia de la misma, según lo descrito en el apartado 4.4.2 del capítulo 4. En relación con la interacción suelo-estructura en los edificios, no se considera ninguna, introduciéndose directamente la carga transmitida por los mismos en el modelo. Finalmente, ante la falta de datos, el rebaje del nivel freático dentro de la excavación se ha simulado mediante un cálculo hidráulico desacoplado y en una única fase, bombeando agua desde pozos situados bajo el plano final de la excavación, asegurando que el nivel freático quede por debajo de dicho plano mientras se excava.

Tras la fase de cálculo en la que se determinan las tensiones *in situ* en el terreno y aplicada la carga de los edificios, se realiza tanto un reseteo de la historia de deformaciones del suelo con ambos modelos, adoptando un valor $Reini_Stiff = 1$ en el modelo EPHYSS, como un reseteo de los desplazamientos en el mismo a través de la *Interface* de Plaxis. Posteriormente se simula la ejecución de las pantallas y se realiza el rebaje del nivel freático, prosiguiendo con la simulación de las fases de excavación.

		Arenas y gravas	Arcillas del Rupeliense	Unidades		
Pesos específicos	γ_{sat}	20,0	20,0	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	18,0	19,0			
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,00015	0,00025	[-]	
	HS-SS	G_0^{ref}	75.000	90.000	[kN/m ²]	
		ν'_{ur}	0,20	0,15	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	13.944	4.843	[kN/m ²]	
		m_1	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	62.889	61.321	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	27.671	30.661	[kN/m ²]	
		m_2	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,15	[-]	
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	E_{50}^{ref}	20.000	15.000	[kN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	60.000	50.000	[kN/m ²]
E_{oed}^{ref}			20.000	15.000	[kN/m ²]	
c'			1	25	[kN/ m ²]	
φ'			32	20	[deg]	
ψ			2	0	[deg]	
p'_{ref}			100	100	[kN/ m ²]	
m			0,50	0,70	[-]	
K_0^{NC}			0,43	0,66	[-]	
R_f			0,90	0,90	[-]	
	σ'_{trac}	0	0	[kN/ m ²]		

Tabla 7.17. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos EPHYSS y HS-SS.

		Arenas y gravas	Arcillas del Rupeliense	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	E_i^{ref}	55.615	51.722	[kN/ m ²]
	α'	4,05	0,95	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	1,97	1,52	[-]

Tabla 7.18. Parámetros internos del modelo EPHYSS.

	d [m]	s [m]	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]	R_{inter} [-]
Pantallas pilotes	0,90	1,20	30	$2,40 \cdot 10^7$	$1,28 \cdot 10^6$	7,5	0,15	0,67

Tabla 7.19. Parámetros de las pantallas extraídos de la tesis de Benz (2007) y valor supuesto de R_{inter} , que se asume igual en todos los materiales.

Fase	Fila puntal	t [m]	Cota relativa excavación [m]	Cota relativa puntal [m]	Perfil	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]
A	-	-	-2,5	-	-	-	-	-	-	-
B	1	2,45	-2,5	-2,5	IPB 340	210	$1,47 \cdot 10^6$	$3,14 \cdot 10^4$	0	0,30
C	-	-	-4,7	-	-	-	-	-	-	-
D	-	-	-11,0	-	-	-	-	-	-	-
E	2	1,95	-11,0	-7,6	IPB 360	210	$1,95 \cdot 10^6$	$4,65 \cdot 10^4$	0	0,30
F	-	-	-17,0	-	-	-	-	-	-	-
G	3	1,80	-17,0	-13,0	IPB 360	210	$2,11 \cdot 10^6$	$5,04 \cdot 10^4$	0	0,30
H	-	-	-19,3	-	-	-	-	-	-	-

Tabla 7.20. Fases de excavación, fases de instalación de los puntales y propiedades de estos. Datos extraídos o calculados a partir de la información contenida en la tesis de Benz (2007).

Edificio	Distancia a pantalla más próxima del punto inicial de la carga [m]	Distancia a pantalla más próxima del punto final de la carga [m]	Carga [kN/m ²]
Izquierdo	2,0	16,5	30
Derecho	1,0	36,5	39

Tabla 7.21. Situación y valor de la carga generada por los edificios, extraídos de la tesis de Benz (2007).

Material	Tipo	<2 μ m [%]	2 μ m-50 μ m [%]	>50 μ m [%]	k [m/día]
Arenas y gravas	Coarse	10	13	77	0,60
Arcillas del Rupeliense	Very fine	74	11	15	0,10

Tabla 7.22. Parámetros hidráulicos del suelo en base al modelo Standard de Plaxis, basado en la clasificación Hydraulic Properties of European Soils (HYPRES). Ante la falta de datos, se asume un comportamiento isótropo $k_x = k_y$.

Pozo	Distancia del pozo a la pantalla más próxima [m]	Cota superior relativa pozo [m]	Cota inferior relativa pozo [m]	Q [m ³ /día/m]	h _{min} [m]
Izquierdo	2,0m	-21,0	-26,0	1,25	-26
Derecho	2,0m	-21,0	-26,0	1,25	-26

Tabla 7.23. Parámetros de bombeo para el rebaje del nivel freático.

En la figura 7.33 se muestran las presiones de agua antes y después del rebaje del nivel freático.

En la figura 7.34 se muestran las medidas de los asentamientos en el trasdós de la pantalla izquierda y derecha en la fase final de la excavación, así como los resultados de las simulaciones. En la figura 7.35 se muestran las medidas de los desplazamientos horizontales de la pantalla izquierda que resultan de los inclinómetros, así como los resultados de las simulaciones. En la figura 7.36 se muestran los levantamientos bajo la excavación a lo largo de un eje situado en el centro de misma que resultan de las simulaciones. Y en la figura 7.37 se muestran los momentos flectores de la pantalla izquierda en la fase final de la excavación que resultan de las simulaciones.

En la figura 7.34 se puede ver cómo el modelo *EPHYSS* concentra la cubeta de asentamientos en zonas próximas a las pantallas en relación con el modelo *HS-SS* y mejora ligeramente la aproximación de dichos asentamientos en las zonas mencionadas.

En la figura 7.35 se puede ver cómo los desplazamientos horizontales de la pantalla izquierda obtenidos de la simulación con el modelo *EPHYSS* aproximan bien los valores medidos y mejoran los resultados de la simulación con el modelo *HS-SS*.

En la figura 7.36 se aprecia cómo el modelo *EPHYSS* predice levantamientos sensiblemente inferiores a los predichos por el modelo *HS-SS*, de forma similar al caso de la excavación en Berlín analizada en el apartado anterior. La falta de medidas no permite una evaluación completa de los resultados.

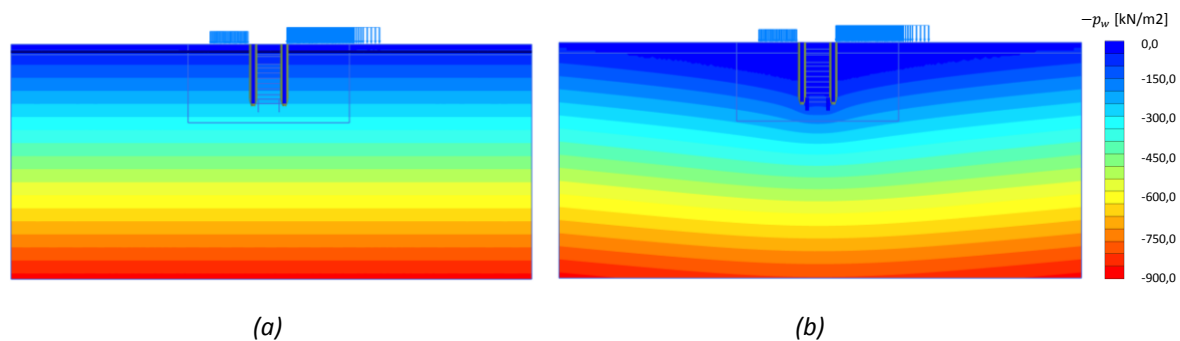


Figura 7.33. Presiones de agua en el terreno.
(a) Antes del rebaje del nivel freático. (b) Después del rebaje del nivel freático.

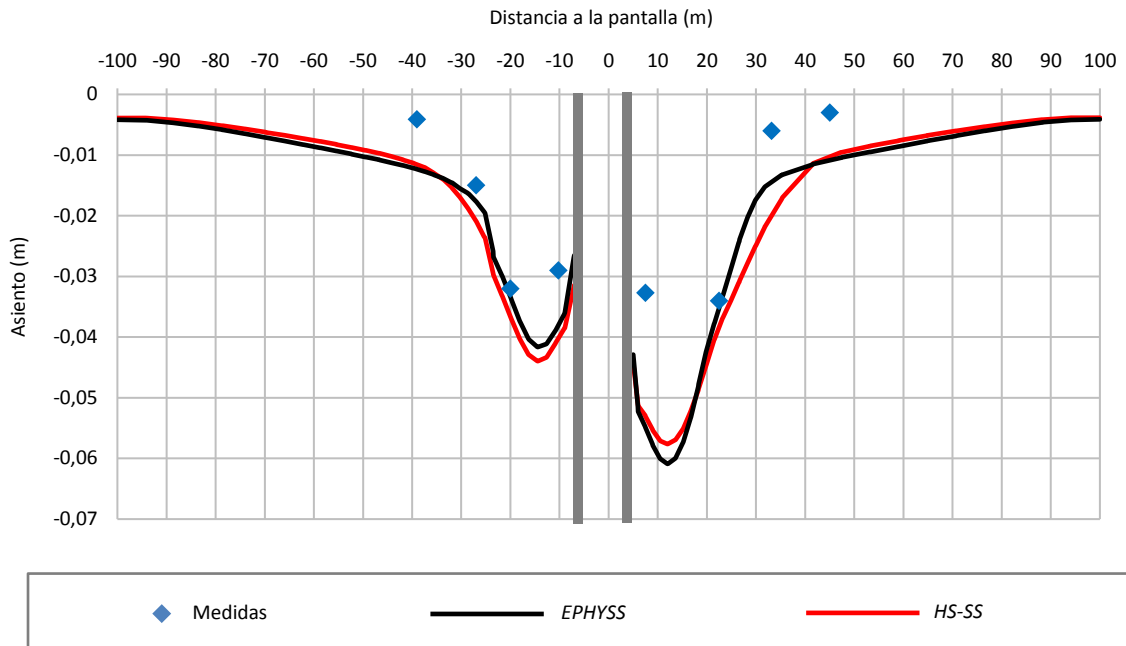


Figura 7.34. Medidas de los asentamientos en el trasdós de la pantalla izquierda y derecha en la fase final de la excavación y resultados de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS.

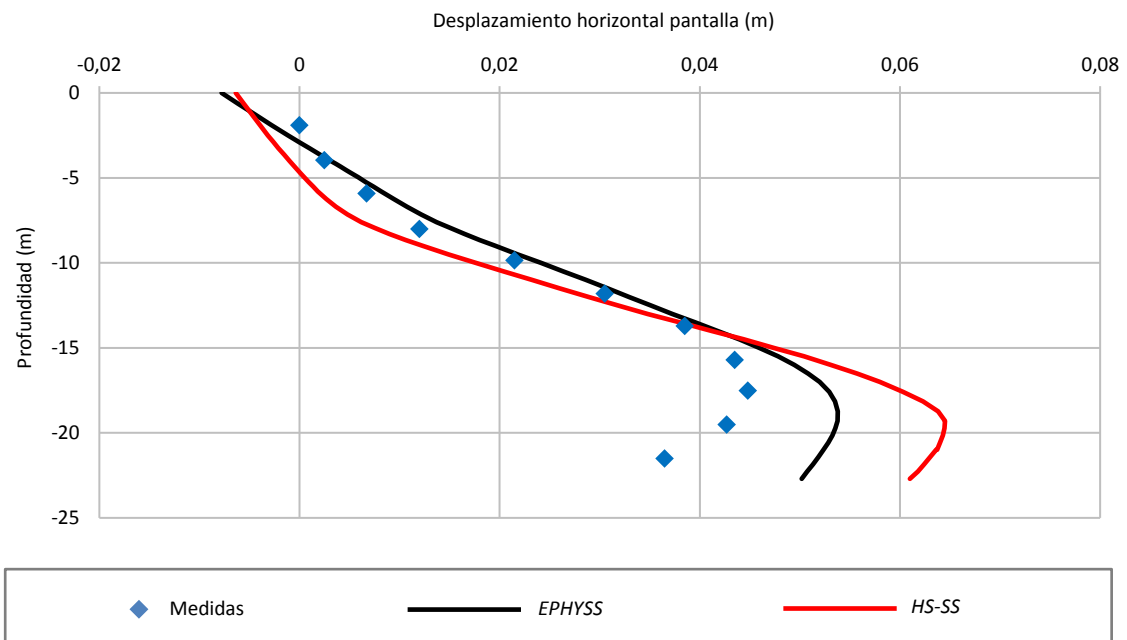


Figura 7.35. Medidas de los desplazamientos horizontales de la pantalla izquierda y resultados de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS.

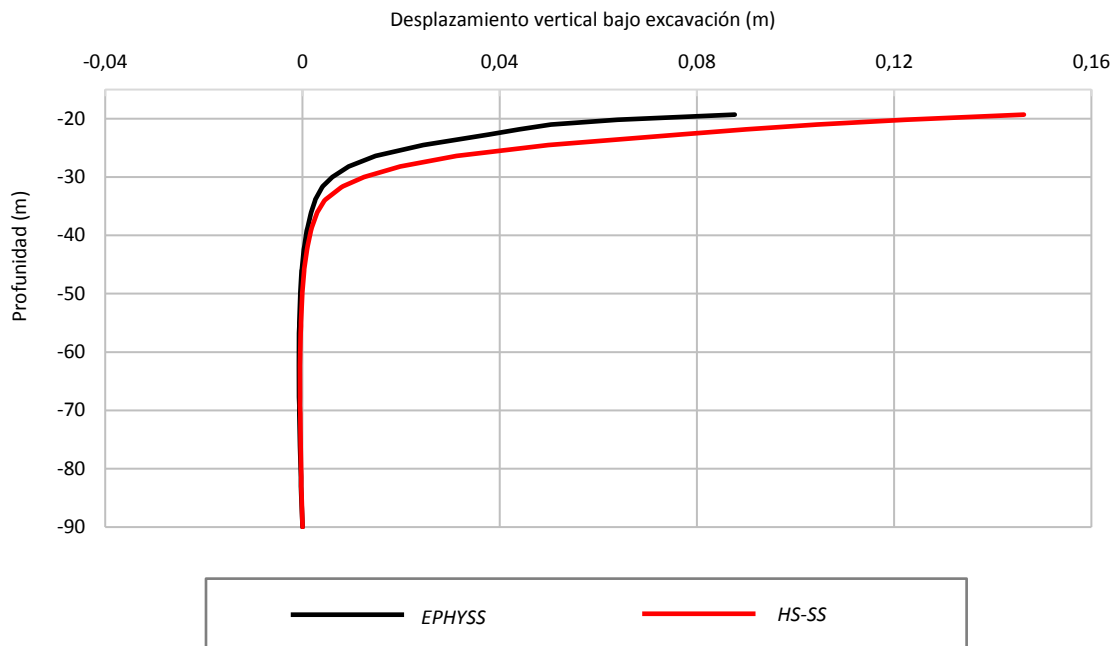


Figura 7.36. Levantamientos bajo la excavación en su fase final y a lo largo de un eje vertical situado en el centro de la misma, resultantes de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS.

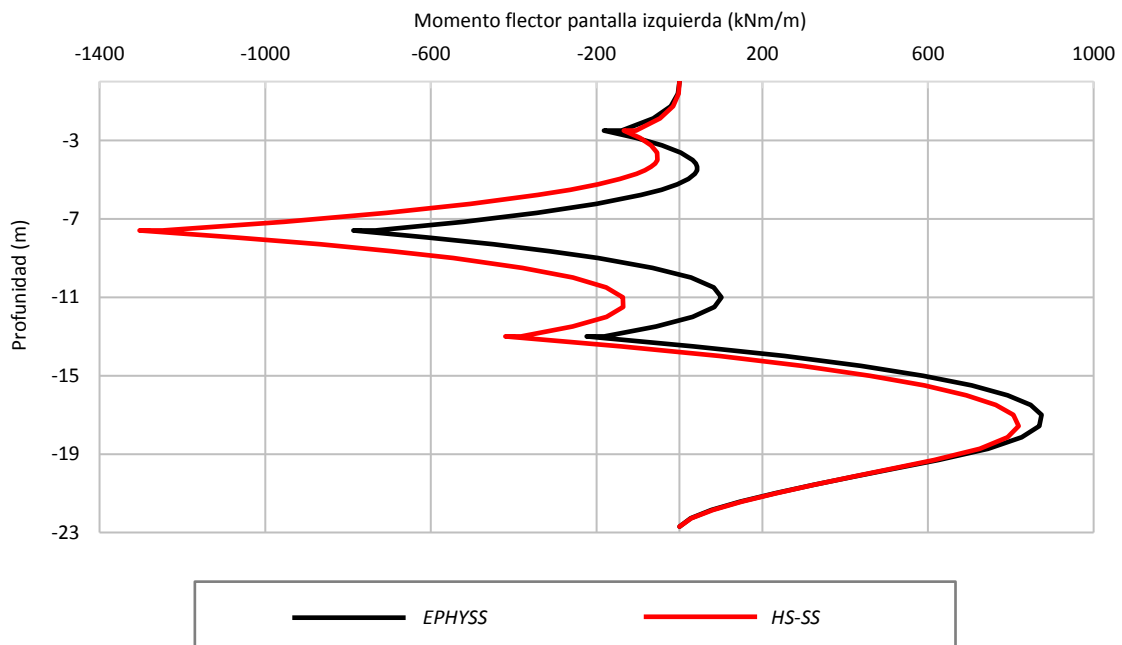


Figura 7.37. Momentos flectores de la pantalla izquierda resultantes de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS.

En la figura 7.37 se puede ver cómo ambos modelos proporcionan momentos flectores similares en la pantalla izquierda entre las cotas relativas +0,0m y -3,0m y entre las cotas relativas -18,0m y -22,0m. Entre las cotas relativas -13,5 y -18,0m, el modelo *EPHYSS* proporciona momentos flectores positivos ligeramente superiores a los proporcionados por el modelo *HS-SS*, mientras que, entre las cotas relativas -3,0m y -13,5m, es el modelo *HS-SS* el que proporciona momentos flectores negativos notablemente superiores (en valor absoluto) a los proporcionados por el modelo *EPHYSS*. Asimismo, se observa cómo estas diferencias dan lugar a que en determinadas zonas exista una inversión del signo del momento. No obstante, la falta de medidas no permite una evaluación completa de los resultados.

En la figura 7.38 se puede ver, en la fase final de la excavación, el valor de las cargas de los puntales medidas y el valor de las mismas que resultan de las simulaciones con en los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, siendo las desviaciones de -22,1% y -51,5%, respectivamente, en el primer nivel de puntales, de -14,6% y 14,5% en el segundo nivel de puntales y de -31,8% y -27,6% en el tercer nivel de puntales.

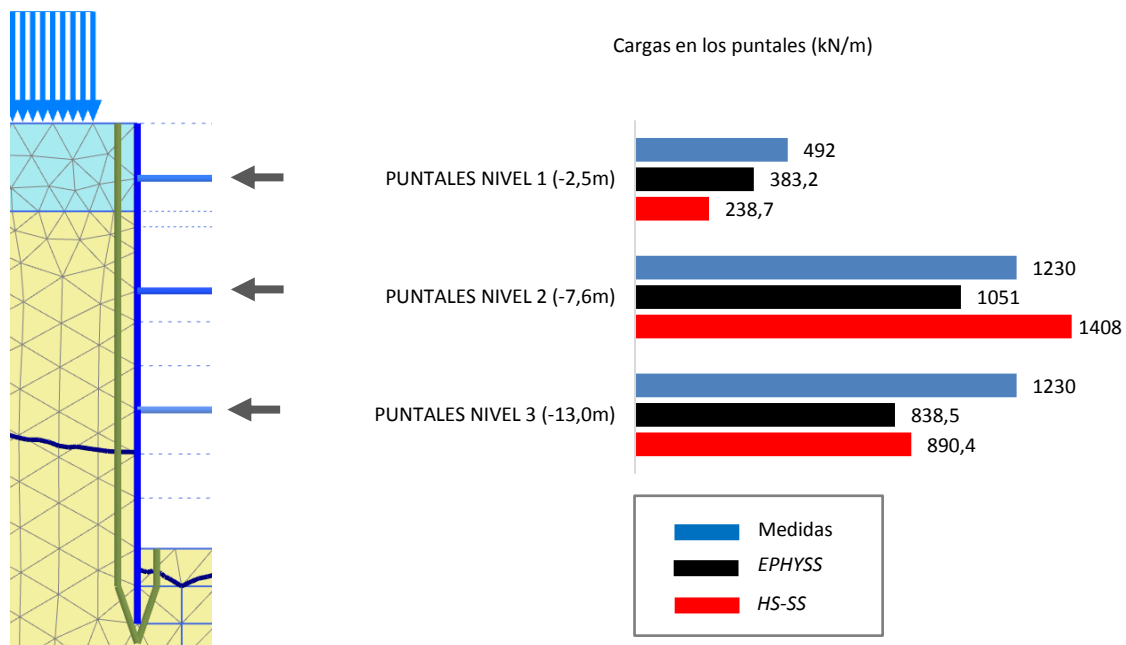


Figura 7.38. Valores medidos de las cargas en los puntales en la fase final de la excavación (Krajewski et al., 2001) y resultados de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

Por otro lado, en la figura 7.39 se muestran los valores $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, donde G_t^{ap} es el módulo de corte tangente aparente del suelo y $G_{t,ur}$ es su módulo de corte (hipo)elástico tangente mínimo. Debe tenerse en cuenta el efecto que genera, en los gráficos de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$, la diferencia entre el valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* y el valor G_0^{ref} del modelo *HS-SS*, y la diferencia entre el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, K_s^{ref}, m_1)$ del modelo *EPHYSS* y el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, \nu_{ur}')$ del modelo *HS-SS*, debidas ambas al ajuste comentado anteriormente con objeto de tener un perfil de rigideces inicial en el terreno parecido en las dos simulaciones y variaciones de estas similares con el nivel de tensiones. Para facilitar la comparación, en las figuras se proporcionan

los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ correspondientes a la fase inicial de la simulación. En la figura 7.39 se pueden ver las diferencias en la distribución de los valores de la rigidez al corte en cada modelo. En este caso se puede ver cómo la forma de la zona con máxima degradación presenta ciertas diferencias entre ambos modelos, a pesar de tener áreas similares. Asimismo, el modelo *EPHYSS* proporciona rigideces menores a las proporcionadas por el modelo *HS-SS* en la zona situada entre las cotas relativas +0,0m y -45,0m, y mayores entre las cotas relativas -45,0m y -90,0m.

Lo anterior se traduce en las diferencias de movimientos tanto del terreno como de las pantallas apuntaladas que se muestran en las figuras 7.34, y 7.35 y 7.36. En la figura 7.40 se puede ver dicho efecto sobre los desplazamientos verticales y horizontales en todo el dominio de análisis.

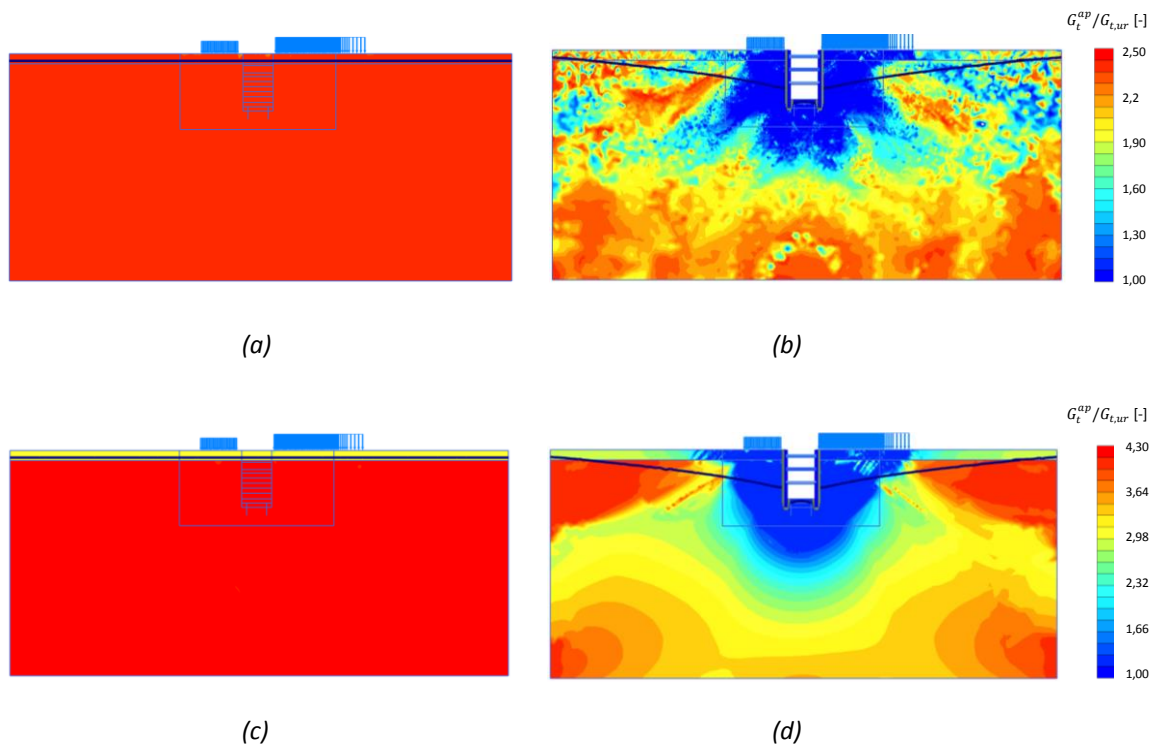
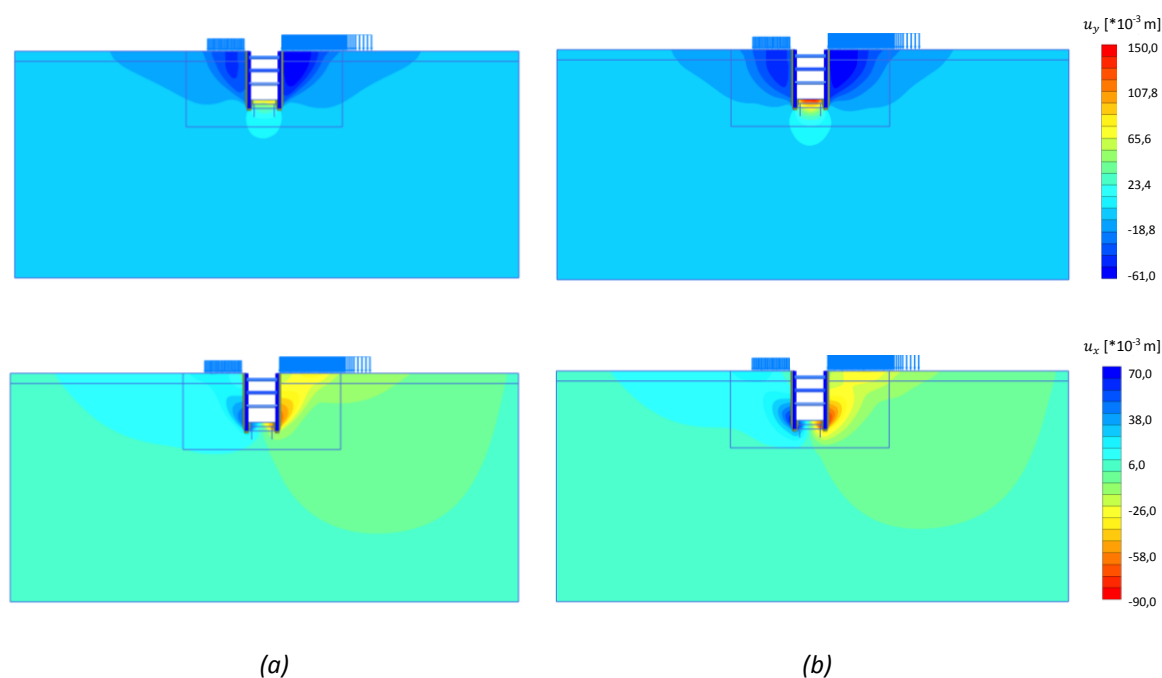


Figura 7.39. Arriba: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo *EPHYSS*.
 (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final simulación.
 Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo *HS-SS*.
 (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final simulación.



*Figura 7.40. Desplazamientos verticales (arriba) y horizontales (abajo).
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max,(+)}=0,0896m$, $u_{y,max,(-)}=-0,0609m$, $u_{x,max,(+)}=0,0573m$ y $u_{x,max,(-)}=-0,0733m$).
 (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max,(+)}=0,1478m$, $u_{y,max,(-)}=-0,0580m$, $u_{x,max,(+)}=0,0701m$ y $u_{x,max,(-)}=-0,0854m$).
 No se muestra el nivel freático para mejorar la visualización de los desplazamientos en la zona bajo la excavación.*

De forma similar al caso de la excavación en Berlín estudiado en el apartado anterior, también en este caso los resultados obtenidos con el modelo *EPHYSS*, en comparación con los del modelo *HS-SS*, en relación con los movimientos del terreno y con los esfuerzos de la estructura, pueden tener una clara repercusión (1) en el dimensionamiento de las pantallas y puntales en fase proyectual, siendo relevante, en este caso, la reducción del momento flector en un tramo de pantalla de considerable longitud, (2) en los procesos de control durante la ejecución de la obra o (3) en los procesos de optimización mediante técnicas de *backanalysis*, tanto si se miden desplazamientos en el terreno, la desplazamientos y esfuerzos en las pantallas, o las cargas en los puntales.

Finalmente, en la figura 7.41 se puede ver cierta similitud en el comportamiento plástico de ambos modelos, lo cual es lógico teniendo en cuenta que los dos cuentan con una formulación plástica muy parecida, no obstante, a diferencia de los problemas analizados en apartados anteriores, en este caso, las diferencias existentes entre ambos modelos en relación a la distribución y magnitud de la rigidez al corte en el terreno son suficientemente grandes como para que la redistribución tensional afecte notablemente el tamaño del área plástica próxima a la excavación, siendo mayor en el caso del modelo *HS-SS*.

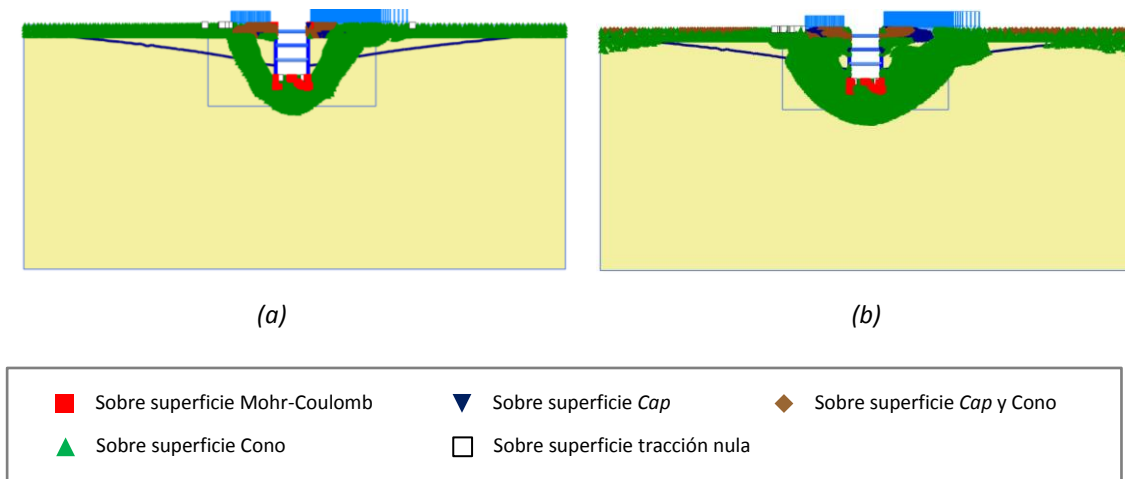


Figura 7.41. Puntos plásticos. (a) Modelo *EPHYSS*. (b) Modelo *HS-SS*.

7.7. Ensayo con una zapata experimental en el *NGES* de la Universidad de Texas A&M

Briaud y Gibbens (1997) describen el proyecto llevado a cabo en el *Texas A&M University National Geotechnical Experimentation Site (NGES)*, que consistió en ensayar 5 zapatas experimentales de diferentes dimensiones (figura 7.42a). Al igual que en la tesis de Benz (2007), se simulará exclusivamente el ensayo realizado en la zapata “Norte” de 3x3m.

El terreno en el que se realiza el experimento se compone de un primer estrato de arenas sobreconsolidadas de unos 11m de espesor, seguido de un segundo estrato de arcillas duras que se extiende, por lo menos, hasta una profundidad de 33m. El estrato de arenas se puede dividir, a su vez en tres substratos: el primero de 3,5m de espesor con arenas finas limosas con densidad media-alta, el segundo de 3,5m de espesor con arenas limosas con acillas y gravas, y el tercero de 4m de espesor con arenas limosas/arcillas con arenas de densidad media-alta con gravas. En las simulaciones realizadas por Benz (2007) se ha considerado un dominio de 15,0m de profundidad en el que no se han tenido en cuenta las arcillas situadas a una profundidad de -11,0m. El terreno permite considerar un comportamiento de tipo drenado y el nivel freático se sitúa a 4,9m de profundidad.

Las reacciones de los gatos que aplican la carga sobre las zapatas se transmiten a profundidades próximas a los 20m, correspondientes al estrato de arcilla dura fuera del área de influencia del bulbo de presiones de las zapatas (figura 7.42b).

Durante el experimento se midió la fuerza aplicada sobre las zapatas mediante células de carga y el desplazamiento de las mismas con *LVDT*'s. Asimismo, se instalaron varios extensómetros e inclinómetros en las proximidades de las zapatas para medir los movimientos verticales y horizontales en el terreno.

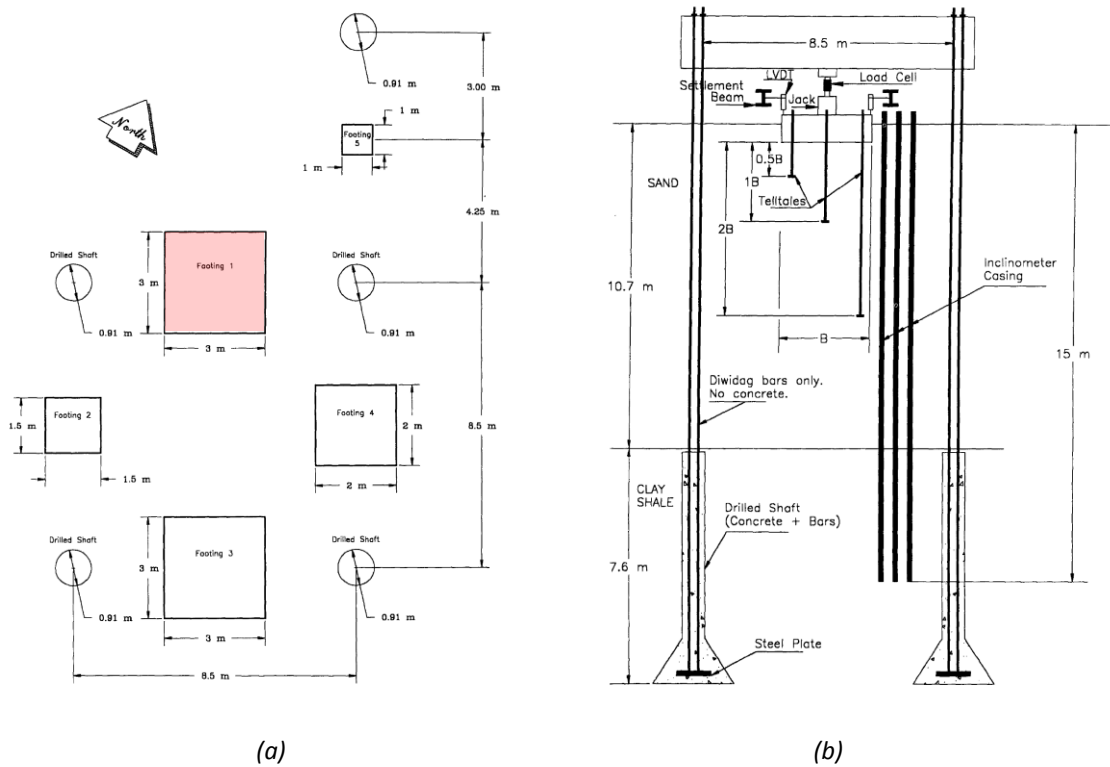


Figura 7.42. (a) Planta con la situación y las dimensiones de las zapatas. (b) Geometría en alzado del experimento llevado a cabo y del terreno subyacente. Briaud y Gibbens (1997).

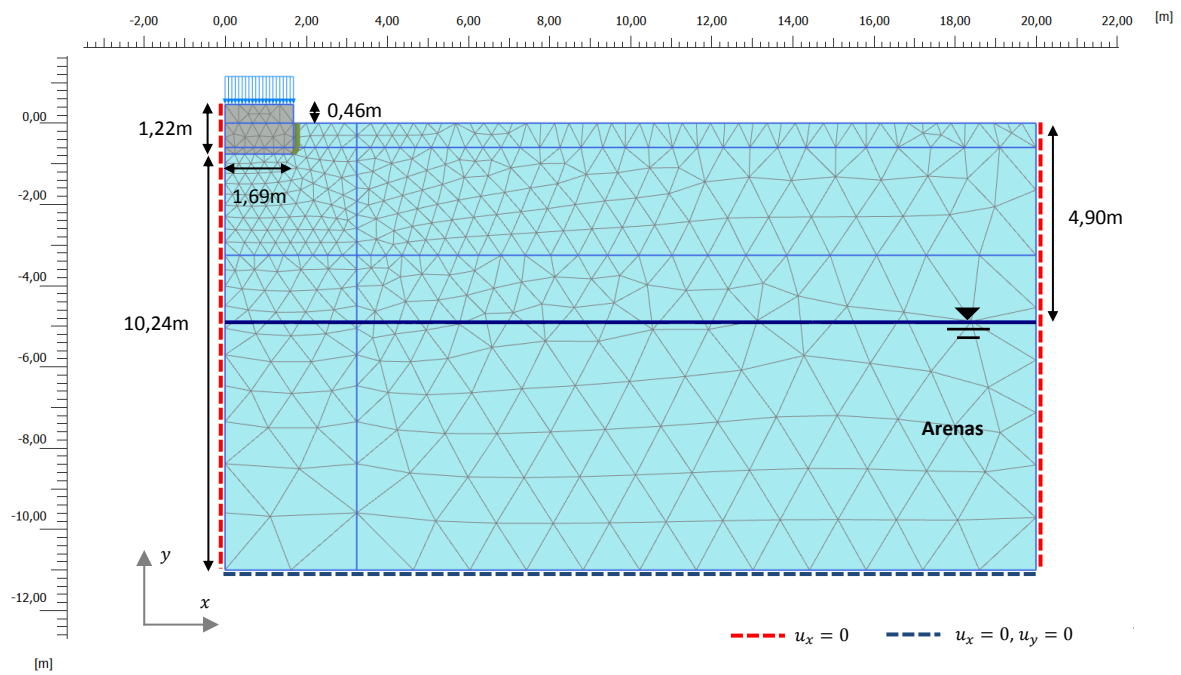


Figura 7.43. Geometría, materiales, condiciones de contorno y malla del modelo numérico del ensayo con la zapata experimental "Norte" de 3x3m.

La geometría del modelo numérico es la que se muestra en la figura 7.43. Se consideran condiciones axisimétricas para aproximar la geometría 3D del problema. Se adopta una forma circular de la zapata con un radio equivalente $R_{eq} = B\pi^{-1/2}$ que resulta de igualar el área real de la zapata $A = B^2$, siendo B el lado de la misma, con el área de una zapata hipotética circular $A_{eq} = \pi R_{eq}^2$. Tomando un valor de $B = 3,0m$ se obtiene un valor de $R_{eq} = 1,69m$. Asimismo, el contorno inferior del dominio se sitúa en la cota a la cual afloran las arcillas duras.

Para la determinación de los parámetros del terreno se realizaron varios ensayos de laboratorio y de campo cuyos resultados se pueden consultar en el reporte de Briaud y Gibbens (1997), entre ellos, varios ensayos de columna resonante y ensayos triaxiales cuyas gráficas se muestran en la tesis de Benz (2007). Al igual que en esta última, se consideran dos juegos o *SETS* de parámetros para las arenas (*SET 1* y *SET 2*). El *SET 1* prescinde de los resultados obtenidos en los ensayos de campo y únicamente considera los proporcionados por los ensayos de laboratorio, mientras que el *SET 2* incrementa la rigidez máxima al corte del suelo un 40% respecto al *SET 1*, aproximándose a la rigidez medida en los ensayos de campo.

Tal como describen Briaud y Gibbens (1997), las arenas se encuentran ligeramente sobreconsolidadas por efecto de la desecación de los finos que contienen y por la excavación de aproximadamente 1m de cobertura. Dada la falta de datos en relación con dicho nivel de sobreconsolidación, se ha realizado una estimación del mismo. Para ello, se ha considerado que la sobreconsolidación puede reproducirse, en este caso, mediante la aplicación y retirada de una carga superficial previa a la realización de los ensayos, tal como hace Benz (2007), aunque no proporciona el valor de dicha carga. Partiendo de esta hipótesis, se ha calculado, utilizando el modelo *HS-SS* y el *SET 1*, la magnitud de la mencionada carga mediante el ajuste de las curvas obtenidas en Benz (2007), resultando un valor de 300kPa.

En la tabla 7.24 se proporcionan los pesos específicos y los valores de los parámetros del *SET 1* y el *SET 2* correspondientes al modelo *EPHYSS* y al modelo *HS-SS*. Para la obtención de los valores de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y K_s^{irref} del modelo *EPHYSS* se aplica, en cada material y en el rango de tensiones dado por la envolvente de las fases del problema de contorno, la formulación de mínimos cuadrados expuesta en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5, con objeto de reproducir un perfil de rigideces inicial en el terreno similar al obtenido con el modelo *HS-SS* y de que las variaciones de dichas rigideces en ambos modelos debidas al cambio de tensiones en el suelo sean lo más parecidas entre sí. Este proceso podría hacerse a la inversa, siendo el valor de G_0^{ref} del modelo *HS-SS* el que se ajusta a partir del valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS*, desaconsejándose, en este caso, el ajuste de los valores $E'_{t,ur}{}^{ref}$ y ν'_{ur} del modelo *HS-SS* al aparecer ambos en la formulación plástica del mismo. Por otro lado, en la tabla 7.25 se proporcionan los valores de los parámetros de ambos *SETS* correspondientes al modelo *EPHYSS*, desconociéndose estos valores en el caso del modelo *HS-SS*, al no ser proporcionados por Plaxis.

Por otro lado, en la tabla 7.26 se proporcionan los parámetros correspondientes a la zapata, que se simula con elementos de medio continuo y un modelo constitutivo elástico lineal, así como los parámetros de la *interface* entre el plano vertical de la zapata y el terreno. La interacción suelo-estructura se simula mediante una *interface* sobre la que se considera una reducción de la rigidez y resistencia mediante el parámetro R_{inter} de la forma descrita en el apartado 4.4.2 del capítulo 4.

En la tabla 7.27 se proporcionan los valores de la carga aplicada sobre la zapata.

		Arenas SET 1	Arenas SET 2	Unidades		
Pesos específicos	γ_{sat}	20,0	20,0	[kN/m3]		
	γ_{unsat}	18,0	18,0			
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0002	0,0002	[-]	
	HS-SS	G_0^{ref}	108.333	151.667	[kN/m2]	
		ν'_{ur}	0,20	0,20	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	20.552	20.552	[kN/m2]	
		m_1	0,50	0,50	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	[kN/m2]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	89.059	124.683	[kN/m2]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	39.186	54.861	[kN/m2]	
		m_2	0,50	0,50	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	[kN/m2]	
		ν'_{min}	0,20	0,10	[-]	
		COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	E_{50}^{ref}	16.000	16.000
	$E_{t,ur}^{ref}$			90.000	90.000	[kN/m2]
E_{oed}^{ref}	22.000			22.000	[kN/m2]	
c'	0			0	[kN/ m ²]	
φ'	37			37	[deg]	
ψ	1,5			1,5	[deg]	
p'_{ref}	100			100	[kN/ m ²]	
m	0,50			0,50	[-]	
K_0^{NC}	0,41			0,41	[-]	
R_f	0,90			0,90	[-]	
σ'_{trac}	0			0	[kN/ m ²]	

Tabla 7.24. Pesos específicos y parámetros de cada material en los modelos EPHYSS y HS-SS.

		Arenas SET 1	Arenas SET 2	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	E_i^{ref}	50.872	47.939	[kN/ m ²]
	α'	6,50	16,60	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	2,55	2,52	[-]

Tabla 7.25. Parámetros internos del modelo EPHYSS.

	Dimensiones [m]x[m]x[m]	Profundidad embebida [m]	Modelo constitutivo	E [GPa]	ν [-]	γ_{unsat} [kN/m ³]	R_{inter} [-]
Zapata "Norte" 3x3m	3x3x1,76	0,76	Elástico lineal	30	0,20	25	0,67

Tabla 7.26. Geometría de la zapata deducida a partir del trabajo de Briaud y Gibbens (1997), parámetros del modelo constitutivo supuesto para la misma y peso específico del material.

Fase	Carga distribuida q [kN/m ²]	Carga total Q [kN]
A	-501,5	-4.500
B	0	0
C	-891,6	-8.000
D	0	0
E	-1.114,5	-10.000

Tabla 7.27. Cargas aplicadas sobre la zapata extraídas de Briaud y Gibbens (1997).

Tras la fase de cálculo en la que se determinan las tensiones *in situ* en el terreno y la fase en la que se aplica y retira la carga de 300kPa con la que se reproduce la sobreconsolidación de las arenas, se ha realizado tanto un reseteo de la historia de deformaciones del suelo en ambos modelos, adoptando un valor $Reini_Stiff = 1$ en el modelo *EPHYSS*, como un reseteo de los desplazamientos también en ambos modelos.

En las figuras 7.44 y 7.45 se muestran las medidas de las curvas de carga-desplazamiento de la zapata y los resultados de las simulaciones para el *SET 1* (figura 7.44) y el *SET 2* (figura 7.45) con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

En la figura 7.44, correspondiente al *SET 1*, se puede ver como ambos modelos predicen una curva de carga noval parecida, que aproxima bastante bien los valores medidos. No obstante, en el primer tramo de dicha curva, entre los valores de carga de 0 kN y 4.500 kN, ambos modelos muestran una rigidez inferior a la medida. En relación con las curvas de descarga/recarga, el modelo *EPHYSS* presenta rigideces más próximas a las medidas en comparación con el modelo *HS-SS*, si bien los ciclos calculados con el modelo *EPHYSS* son menos abiertos que los calculados con el modelo *HS-SS* y que los medidos.

Por otro lado, en la figura 7.45, correspondiente al *SET 2*, se puede ver cómo el incremento de la rigidez del suelo en ambos modelos permite ajustar bien la pendiente de la curva de carga noval en el tramo comprendido entre los valores carga de 0 kN y 4.500 kN, siendo la aproximación del modelo *EPHYSS* mejor que la del modelo *HS-SS*. En relación con las curvas de descarga/recarga, el modelo *EPHYSS*, del mismo modo que sucede con el *SET 1*, presenta rigideces más próximas a las medidas en comparación con el modelo *HS-SS*, si bien, de nuevo, los ciclos calculados con el modelo *EPHYSS* son menos abiertos que los calculados con el modelo *HS-SS* y que los medidos.

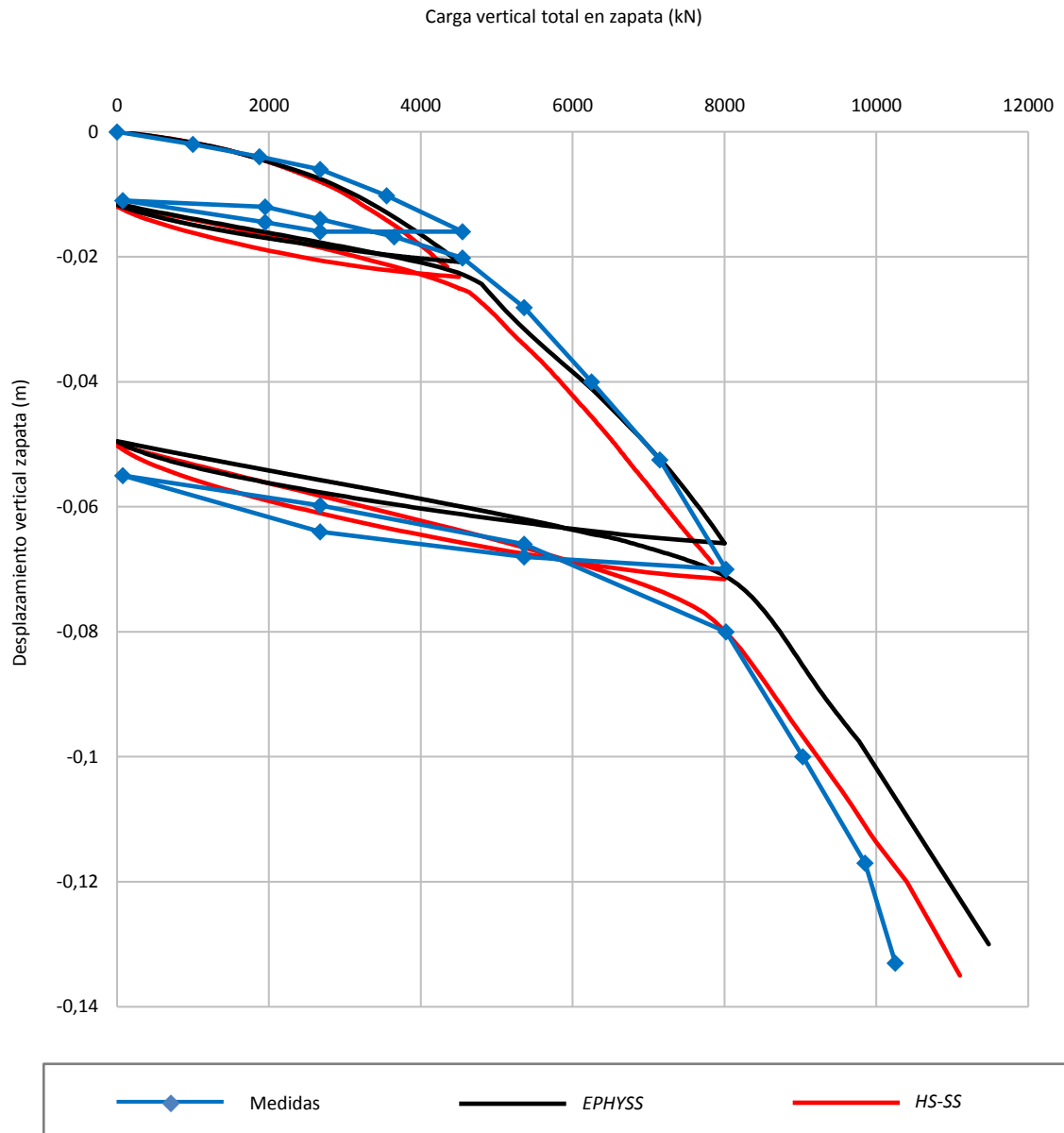


Figura 7.44. Medidas de las curvas carga-desplazamiento de la zapata "Norte" de 3x3m y resultados de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS para el SET 1.

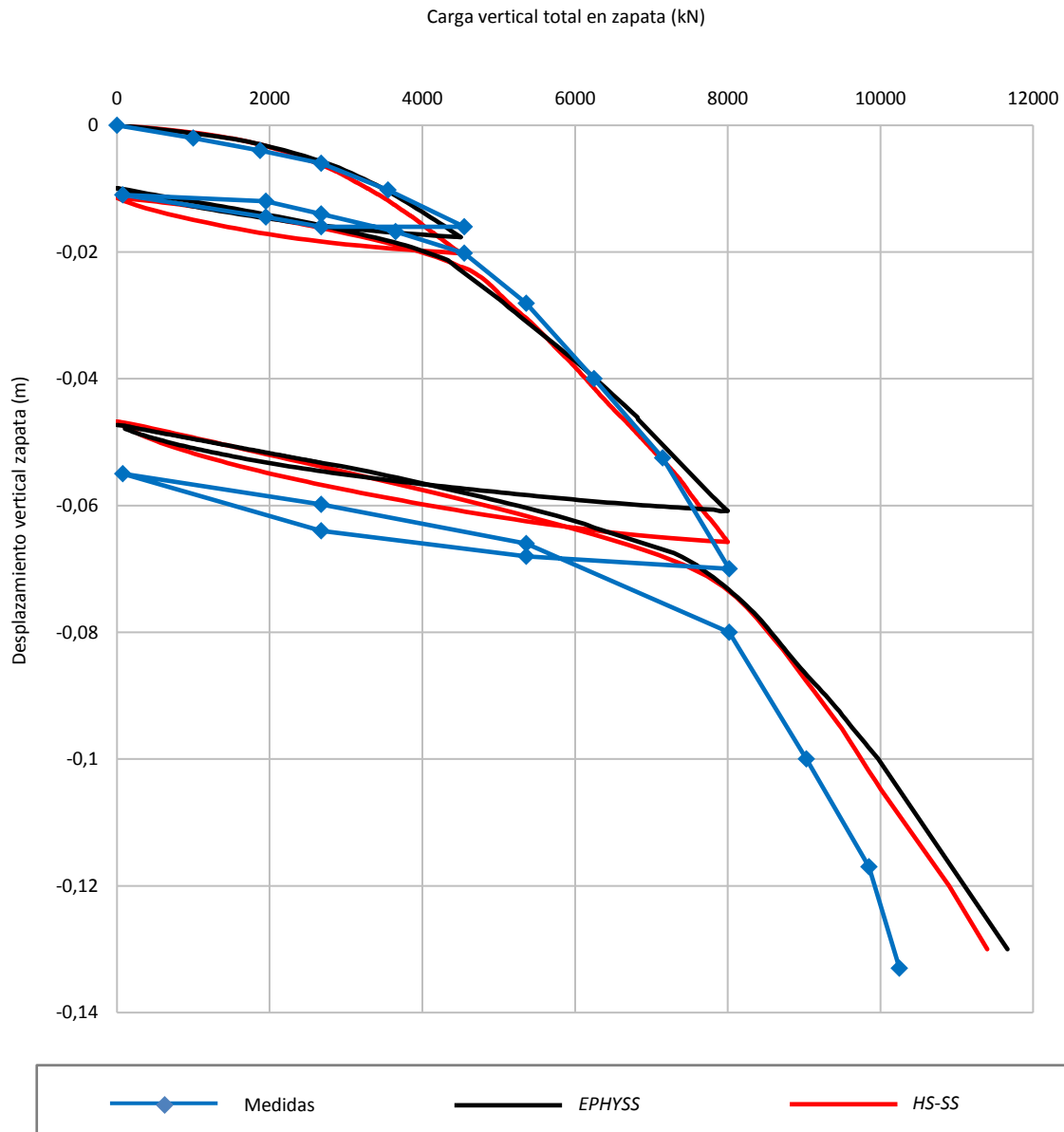


Figura 7.45. Medidas de las curvas carga-desplazamiento de la zapata "Norte" de 3x3m y resultados de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS para el SET 2.

Por otro lado, en las figuras 7.46 y 7.47 se muestran los valores $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ para el *SET 1* y el *SET 2* que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*, donde G_t^{ap} es el módulo de corte aparente del suelo y $G_{t,ur}$ es su módulo de corte (hipo)elástico tangente mínimo. Debe tenerse en cuenta el efecto que genera, en los gráficos de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$, la diferencia entre el valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* y el valor G_0^{ref} del modelo *HS-SS*, y la diferencia entre el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E'_{t,ur}, K_s^{ref}, m_1)$ del modelo *EPHYSS* y el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E'_{t,ur}, \nu'_{ur})$ del modelo *HS-SS*, debidas ambas al ajuste comentado anteriormente con objeto de tener un perfil de rigideces inicial en el terreno parecido en las dos simulaciones y variaciones de estas similares con el nivel de tensiones. Para facilitar la comparación, en las figuras se proporcionan los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ correspondientes a la fase inicial de la simulación. En las figuras 7.46 y 7.47 se pueden ver las diferencias en la distribución de los valores de la rigidez al corte en cada modelo, si bien, en este caso, dichas diferencias son pequeñas en comparación con las observadas en otros problemas de contorno analizados en apartados anteriores.

Estas pequeñas diferencias en las rigideces se traducen, a su vez, en las pequeñas diferencias de movimientos en el terreno bajo la zapata, tal como se puede ver en la figura 7.48 para el *SET 1* (figura 7.48a y 7.48b) y el *SET 2* (figura 7.48c y 7.48d), respectivamente, con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*. Para cada *SET* de materiales, ambos modelos proporcionan resultados bastante similares.

Por otro lado, los valores de los asientos medidos bajo la cimentación con extensómetros indican que el terreno no sufre desplazamientos verticales a profundidades bajo la zapata superiores a $2B = 6m$. Como se puede ver en la figura 7.48, todas las simulaciones cumplen, en mayor o menor medida, esta observación experimental, siendo la simulación con el modelo *EPHYSS* para el *SET 2* la que mejor lo hace.

Finalmente, en la figura 7.49 se puede ver la similitud en el comportamiento plástico entre ambos modelos, lo cual es lógico teniendo en cuenta que los dos cuentan con una formulación plástica muy parecida.

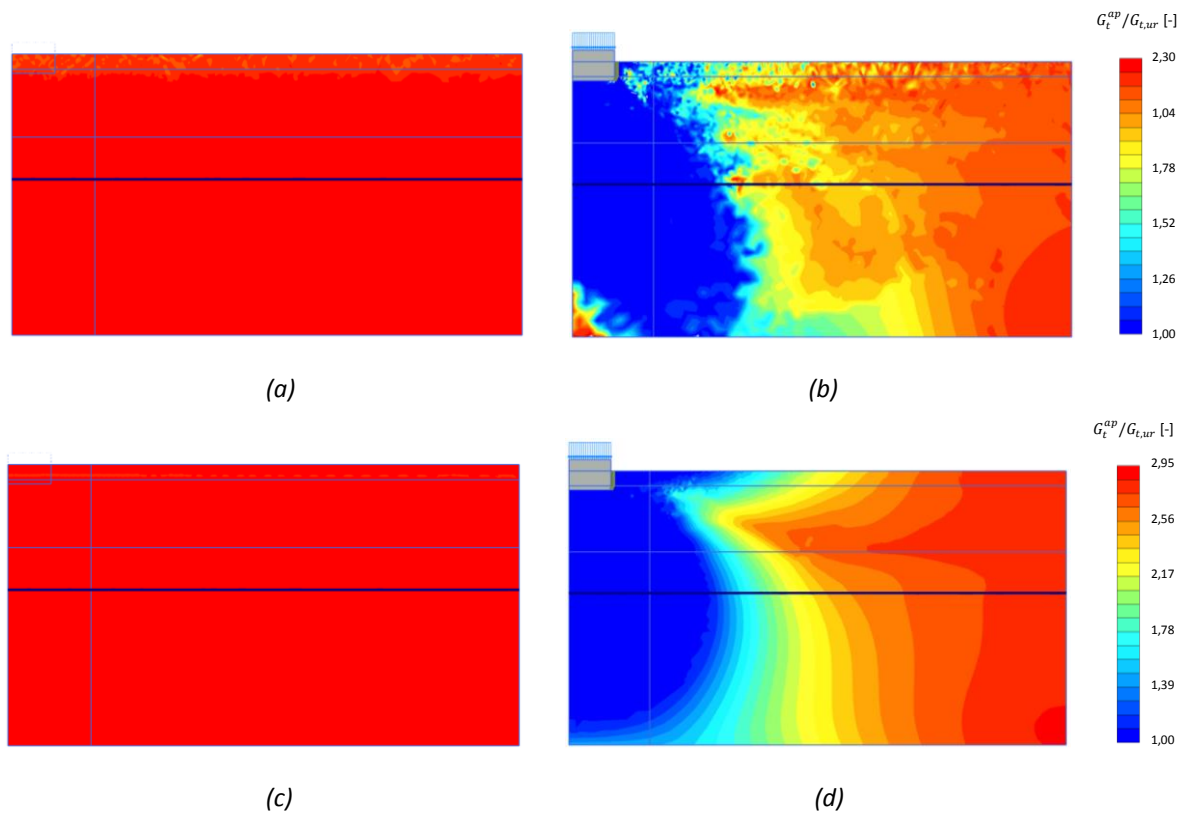


Figura 7.46. Arriba: Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo *EPHYSS* para el SET 1. (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final de la simulación (carga máxima).
 Abajo: valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ con el modelo HS-SS para el SET 1. (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final de la simulación (carga máxima).

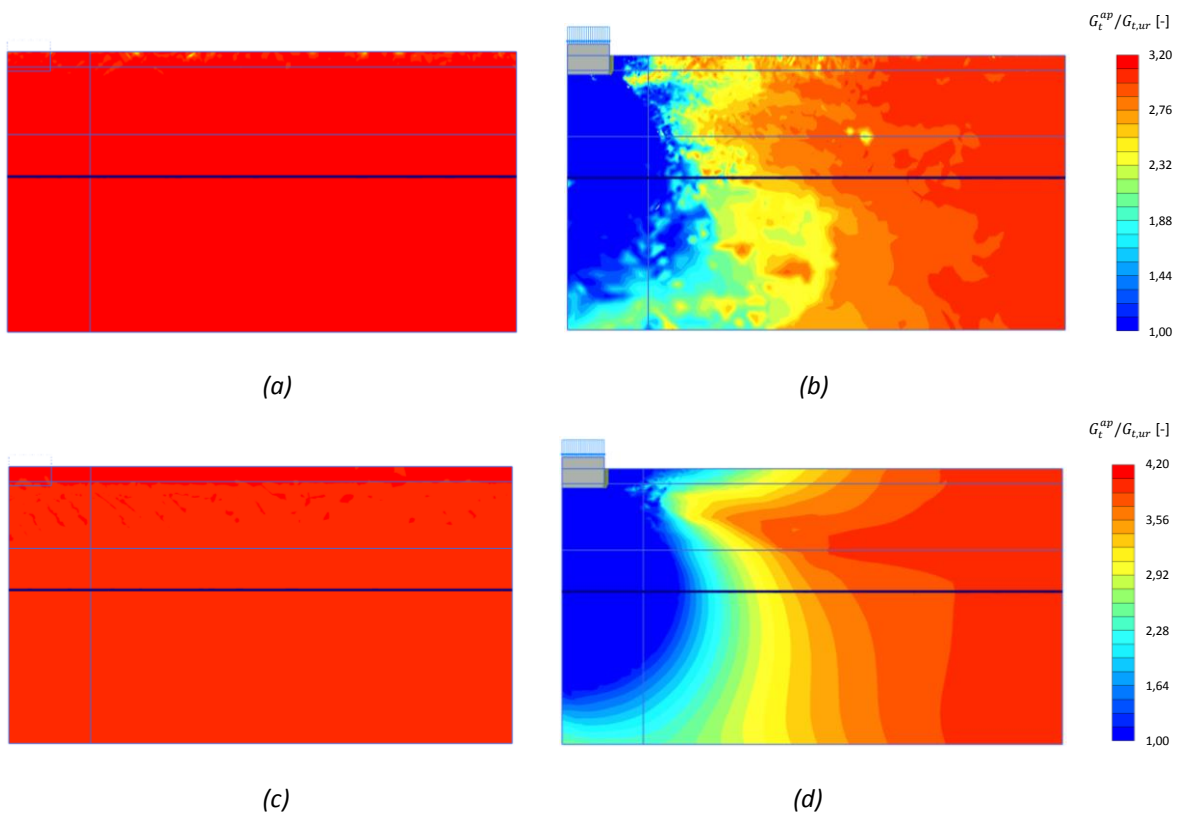


Figura 7.47. Arriba: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ con el modelo *EPHYSS* para el SET 2. (a) Fase inicial simulación. (b) Fase final de la simulación (carga máxima).
 Abajo: valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ con el modelo HS-SS para el SET 2. (c) Fase inicial simulación. (d) Fase final de la simulación (carga máxima).

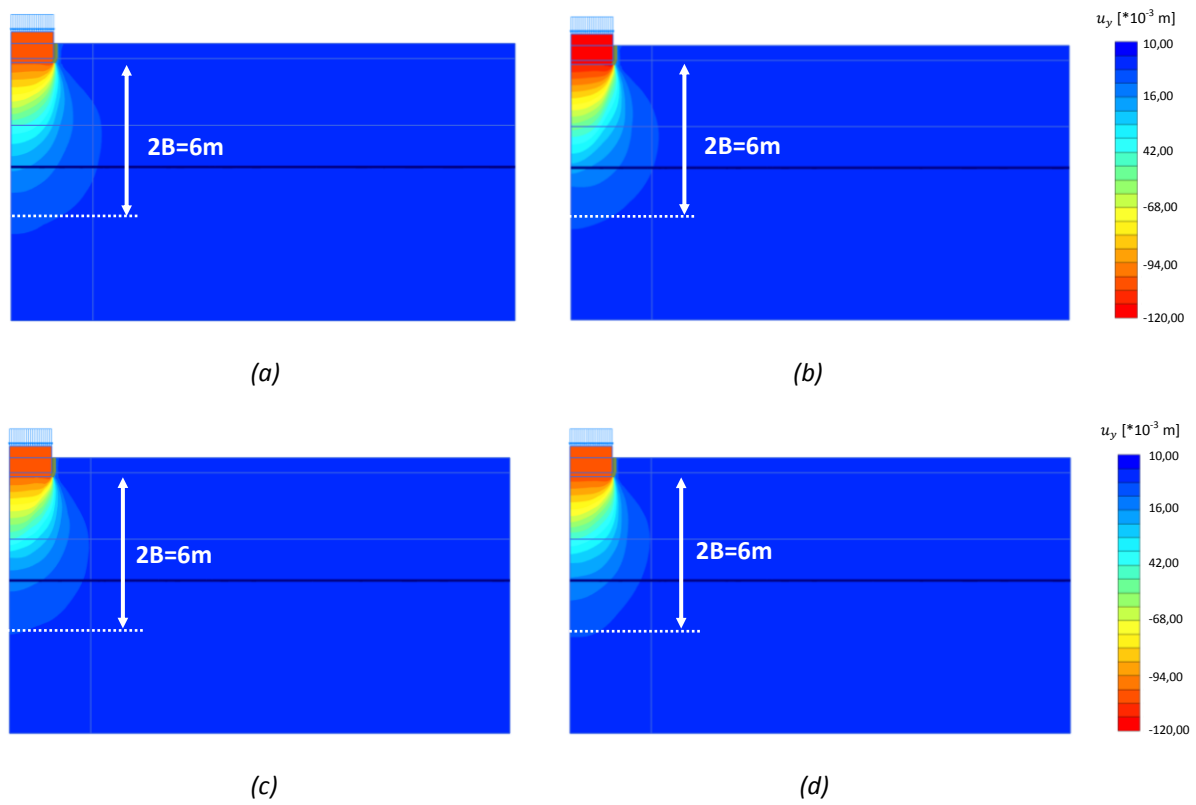


Figura 7.48. Arriba: asientos bajo la zapata para el SET 1.
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,103m$). (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,115m$).
 Abajo: asientos bajo la zapata para el SET 2.
 (a) Modelo EPHYSS ($u_{y,max}=-0,102m$). (b) Modelo HS-SS ($u_{y,max}=-0,105m$).

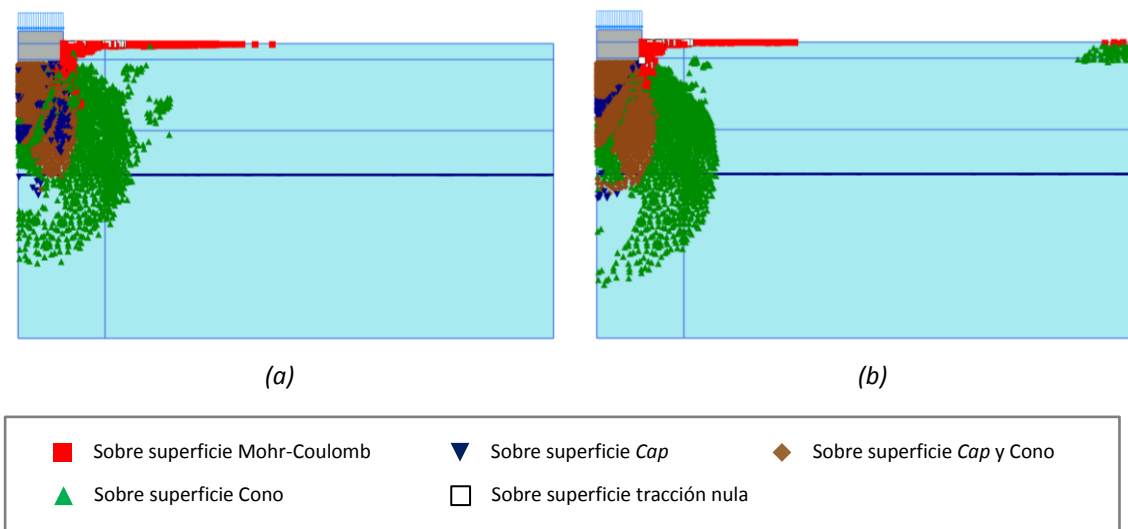


Figura 7.49. Puntos plásticos para el SET 2. (a) Modelo EPHYSS. (b) Modelo HS-SS.

Capítulo 8

Estudio de la gran excavación urbana de La Sagrera en Barcelona

En el presente capítulo se estudia una gran excavación urbana correspondiente a las obras de ejecución de la futura estación intermodal de La Sagrera en Barcelona. Para realizar dicho análisis se hacen simulaciones numéricas con los modelos constitutivos *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)* y *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis, cuyos parámetros se ajustan a partir de ensayos de campo y de laboratorio. Los resultados obtenidos con ambos modelos se comparan entre sí y con las medidas de los movimientos del terreno tomadas con extensómetros durante la excavación. Las simulaciones numéricas del presente capítulo se realizan con el programa Plaxis 2D 2015, en el cual se ha implementado el modelo *EPHYSS* con el módulo *User Defined Soil Model (UDSM)* de Plaxis (se utiliza el modelo correspondiente a la subrutina *Mymodel4.f90*, anejo III). En estas simulaciones se han utilizado elementos isoparamétricos de 15 nodos y, en cuanto al convenio de signos utilizado, por congruencia con el criterio utilizado en Plaxis, se consideran positivas las tensiones de tracción y negativas las de compresión, incluida la presión del agua. Asimismo, en todo momento se considera el marco teórico de las pequeñas deformaciones ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

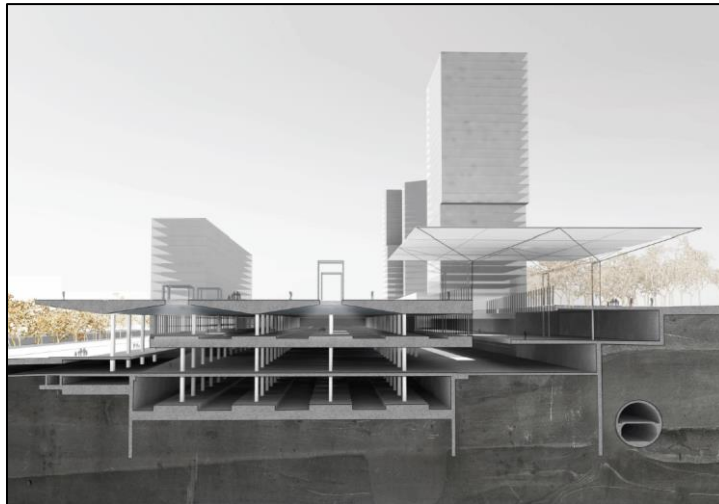
8.1. La futura estación intermodal de La Sagrera

La futura estación intermodal de La Sagrera, con un presupuesto de ejecución de 2.250M€, conformará un importante nodo intermodal en la red de transporte público local, nacional y europeo. El diseño de la estación prevé un tráfico de 100 millones de viajeros/año, y está previsto que lleguen a la misma los servicios de Alta Velocidad Española (AVE) y de *Train à Grande Vitesse (TGV)*, trenes de corta, media y larga distancia, metro, autobuses urbanos e interurbanos, taxis y la red de bicicletas públicas de Barcelona, además del transporte privado que accederá a la estación por las autopistas, las rondas y la red viaria local.

Según el proyecto original, la estación intermodal de la Sagrera se concibe como un gran corredor semienterrado, donde los andenes, viales, aparcamientos y zona de intercambio se sitúan en diferentes niveles (figura 8.01a). No obstante, debe tenerse en cuenta que la evolución de la obra, así como los cambios en las condiciones socioeconómicas de los últimos años, han dado lugar a modificaciones

sustanciales respecto a la solución original de proyecto, si bien dichos cambios no son relevantes para el propósito del presente estudio.

Por otro lado, con motivo de la construcción de esta estación, la ciudad de Barcelona sufrirá una importante transformación urbana, dotando al entorno de la futura estación de nueva vivienda, nueva actividad económica y comercial, y un gran parque verde de 40.000m², con nuevos equipamientos y servicios públicos (figura 8.01b).



(a)



(b)

Figura 8.01. (a) Sección de la futura estación intermodal de La Sagrera (Alday Jover Arquitectos et al., 2017).

(b) Infografía del entorno de la estación y el gran parque verde (Dortoka et al., 2011).

Las dimensiones de la excavación que se ha realizado para la construcción de la estación han sido de 650m de largo, 35 a 80m de ancho y 20m de profundidad. Se prevé que las estructuras de los andenes, aparcamiento y accesos a la estación transmitan las cargas al terreno a través de una gran losa de fondo de hasta 4m de canto. En la figura 8.02a se muestra el estado de la excavación en 2011 y en la figura 8.02b parte del estado de las obras en 2017.



(a)



(b)

Figura 8.02. (a) Estado de la excavación en 2011 (Apunto Lapospo, 2011).
(b) Estado de la excavación y ejecución de cimentaciones y estructuras en 2017 (Apunto Lapospo, 2017).

8.2. Geología e hidrogeología en el ámbito de la futura estación

La geología correspondiente a la zona en la que se ubicará la futura estación de La Sagrera se describe en el proyecto original y se complementa con posteriores campañas de reconocimiento citadas en el informe de Vázquez-Suñé et al. (2011). En dicho informe se describe la estratigrafía y geometría sedimentaria de la zona de proyecto, de base a techo, de la siguiente manera:

- Margas/limolitas grises o azules compactas, con un nivel de alteración en el techo de color verdoso o amarillento y de pocos metros de espesor, correspondientes al sustrato Plioceno.
- Sucesión de arenas limosas más o menos arcósicas grises – verdosas o amarillentas, gravas poco redondeadas con elementos metamórficos, matriz arcillosa y niveles limosos arcillosos con una tonalidad verde, beige y amarillo. En algunos sondeos aparecen materiales arenosos atribuidos al Plioceno superior.
- Una sucesión de arcillas rojizas y marronosas con intercalaciones de arenas y niveles de gravas angulosas con abundante matriz arcillosa. Intercalado en este conjunto se encuentran diversos niveles carbonatados, en forma de nódulos y/o costras bien definidas, que corresponden a facies de coluviones, materiales torrenciales y, en algún caso, aluviales, sobre los que se desarrollan suelos que corresponden a la sedimentación reciente (cuaternarios) procedentes de Collserola.

Vázquez-Suñé et al. (2011) comentan la complejidad de la relación geométrica entre los materiales cuaternarios y el sustrato Plioceno en el llano de Barcelona, e identifican, en el ámbito de la excavación, fallas de desgarre, fallas miocenas extensionales y fallas post-miocenas, lo cual, según los autores, da lugar a una compartimentación del sustrato precuaternario que divide la zona del vaso de excavación en dos dominios, uno al noreste, constituido por un sustrato plioceno arenoso, y otro al suroeste, constituido por un sustrato plioceno margoso.

En las figuras 8.03 y 8.04 se muestran, respectivamente, los perfiles geológicos transversales y longitudinales del proyecto original en el ámbito del vaso de excavación. Por otro lado, en la figura 8.05 se muestra el estudio de los estratos realizado por Vázquez-Suñé et al. (2011), distinguiendo la macrofábrica en los materiales cuaternarios.

Finalmente, la hidrogeología del terreno se describe también en profundidad en dicho informe. Para la caracterización hidrogeológica del subsuelo de la futura estación, Vázquez-Suñé et al. (2011) calibraron las transmisividades de las diferentes capas del terreno a partir de (a) la información disponible en los antecedentes históricos, (b) la información de las diferentes campañas geotécnicas realizadas durante el proyecto y con posterioridad al mismo y (c) los resultados obtenidos en el análisis de los ensayos de bombeo realizados en marzo de 2011. A partir de dichas transmisividades, se han establecido, en el presente capítulo, las permeabilidades de los diferentes materiales. Dada la naturaleza del suelo en cuestión, se ha considerado la anisotropía de la permeabilidad adoptando valores de $k_y = 0,1k_x$ en todos los materiales, siendo k_x la permeabilidad del suelo en dirección horizontal y k_y la permeabilidad del suelo en dirección vertical.

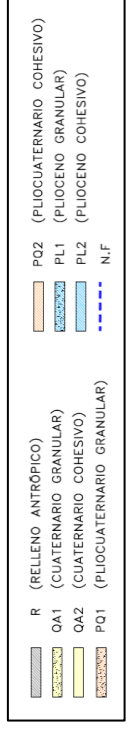
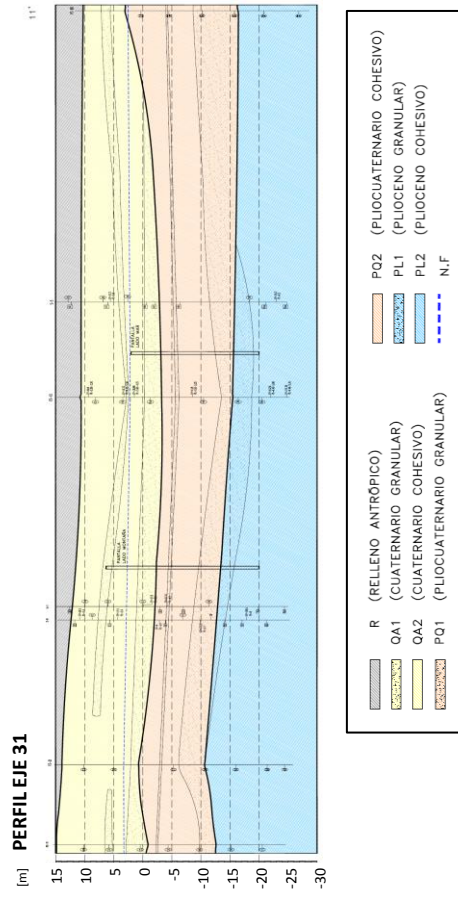
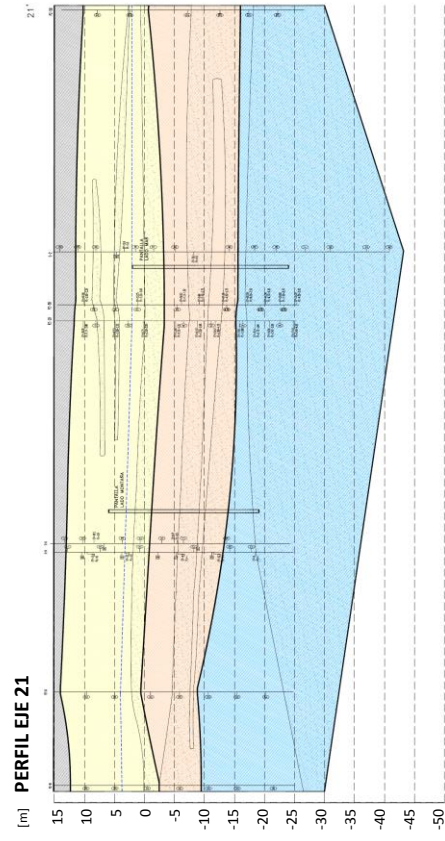
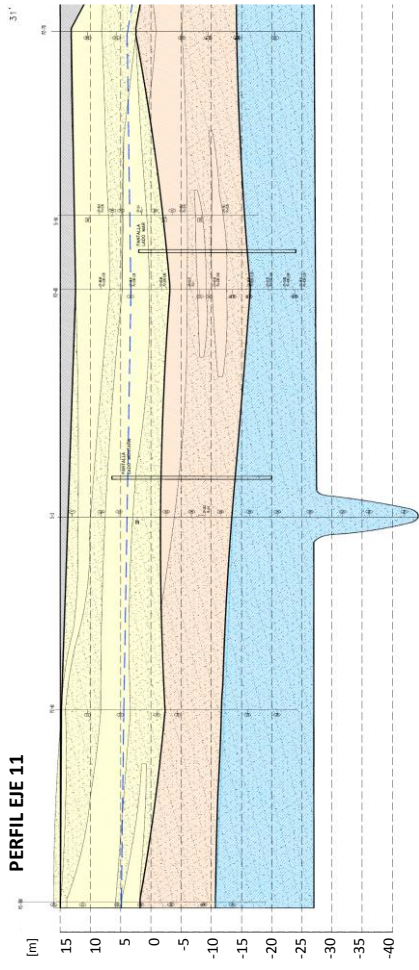
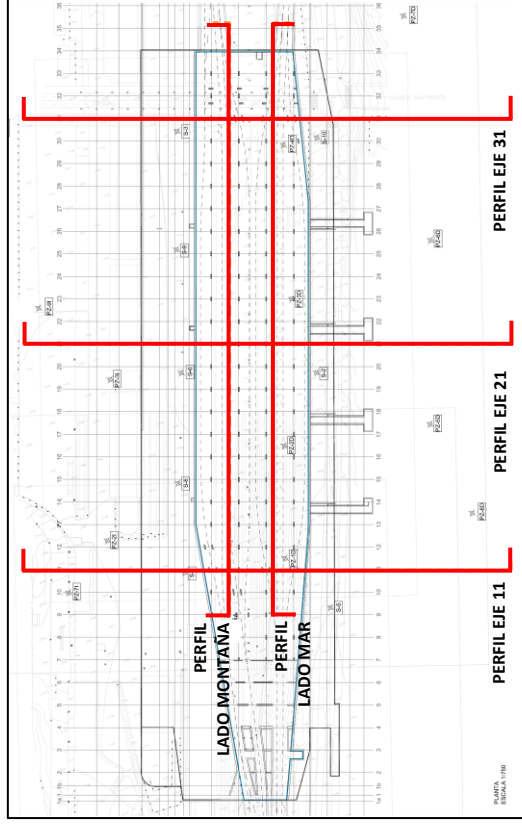
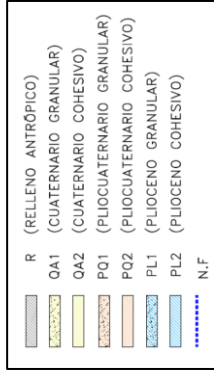


Figura 8.03. Perfiles geológicos transversales en la zona de excavación (Barcelona Sagrera Alta Velocidad, 2011).



PERFIL LADO MONTAÑA

PERFIL LADO MAR

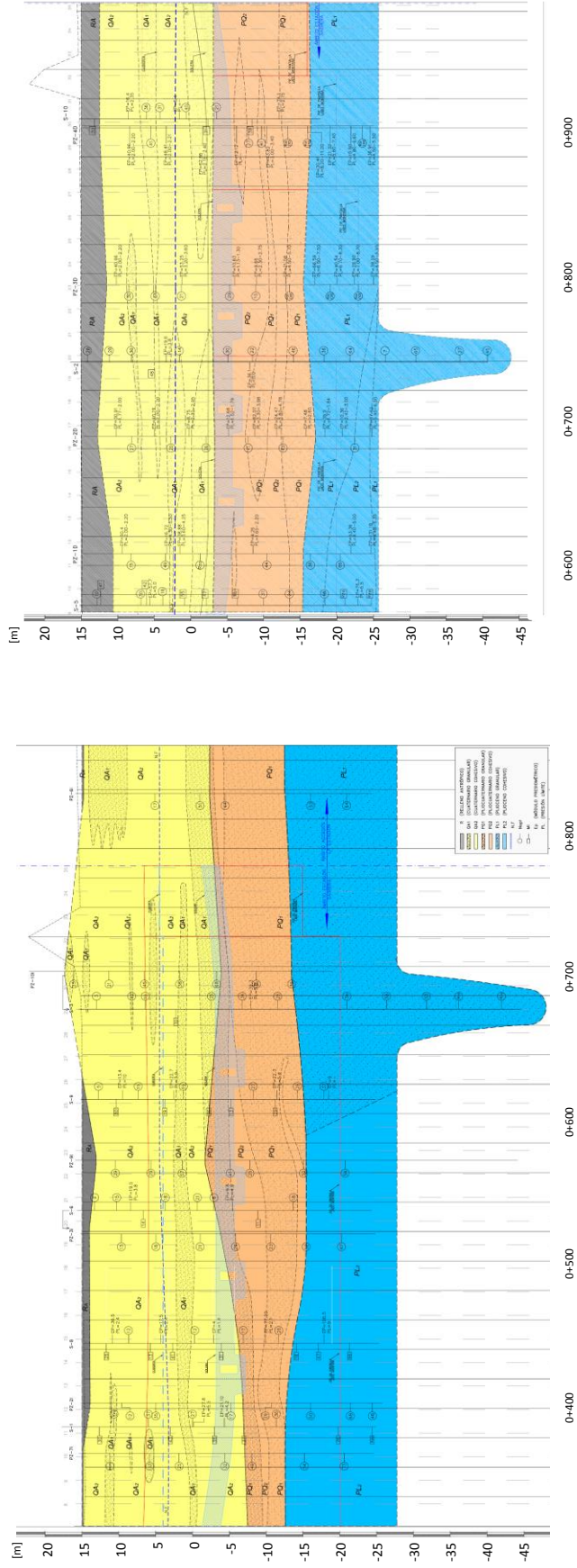
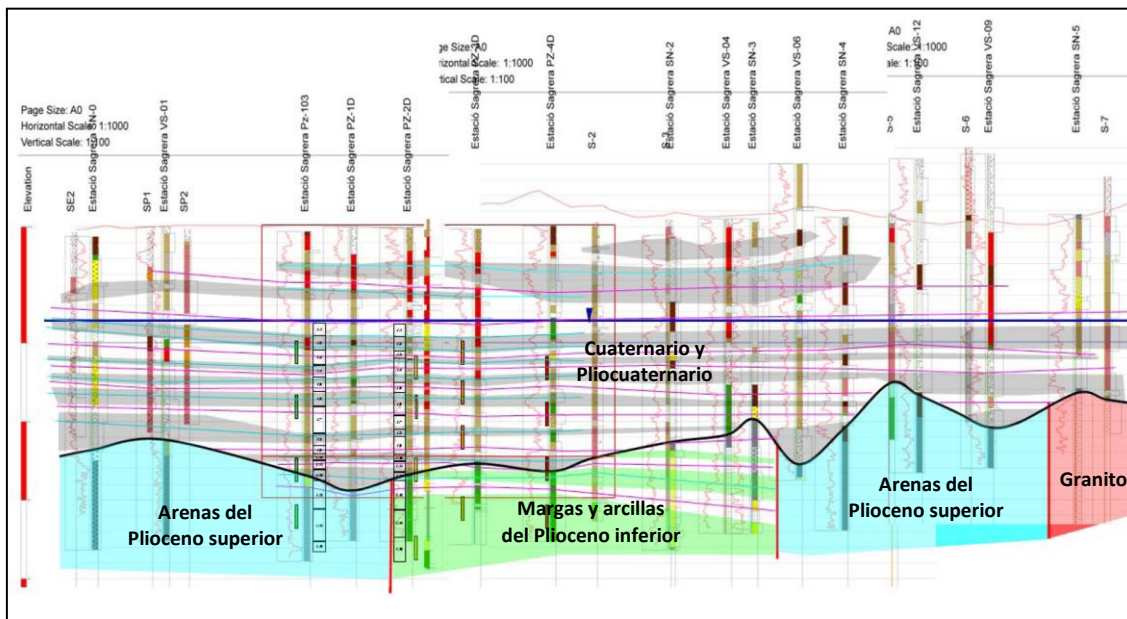
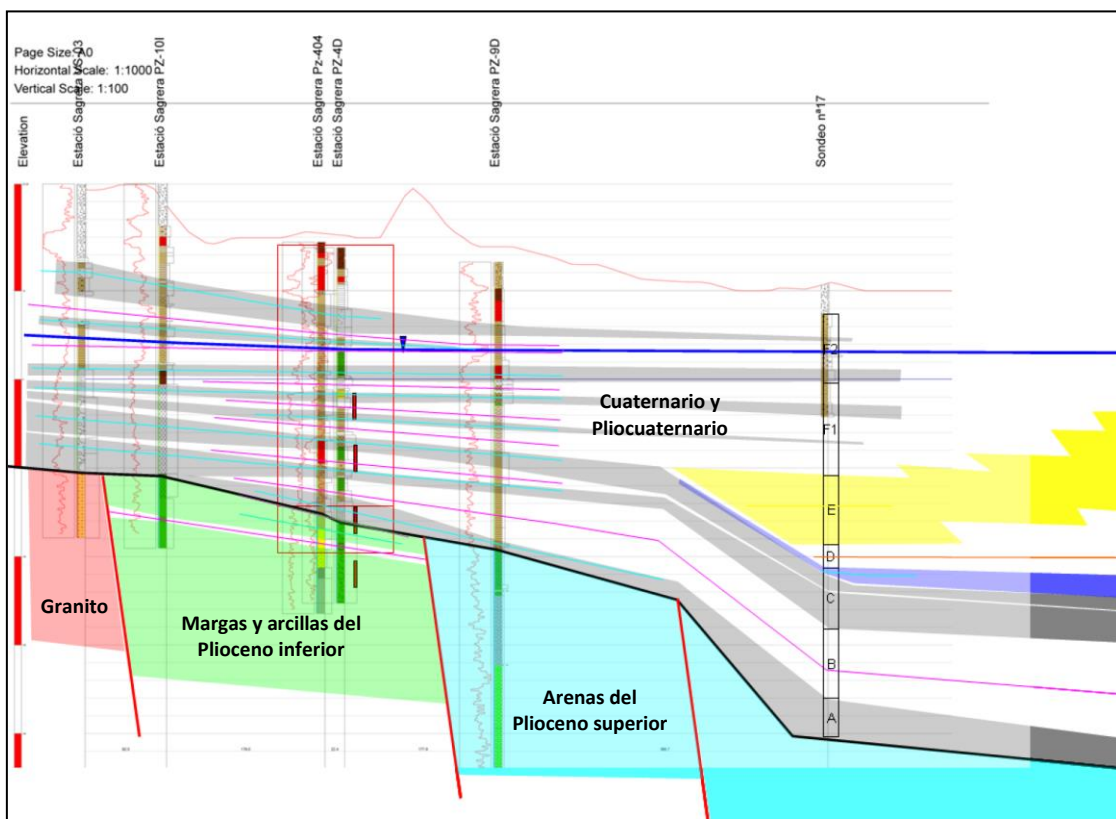


Figura 8.04. Perfiles geológicos longitudinales en la zona de excavación (Barcelona Sagrera Alta Velocidad, 2011).



(a)



(b)

Figura 8.05. Perfiles geológicos de la zona de estudio. Las zonas grises de los estratos cuaternarios y pliocuaternarios con macrofrábrica se corresponden con materiales más groseros y las zonas blancas con materiales más finos (Vázquez-Suñé et al., 2011). (a) Perfil transversal. (b) Perfil longitudinal.

8.3. Unidades geotécnicas

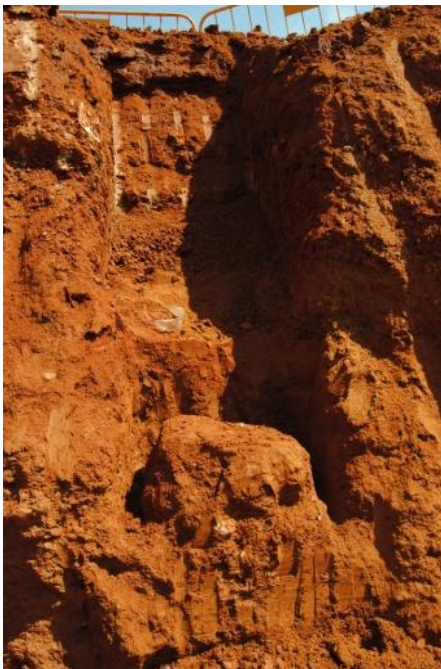
En la tabla 8.01 se muestran las unidades geotécnicas consideradas a partir de la información disponible.

Rellenos	Relleno Antrópico	Ra	
Cuaternario	Arcillas rojas y limos amarillos carbonatados	Qa1 y Qa2	
	Gravas y arenas	Qa3	
Pliocuatnario	Arenas y gravas	PQ1	
	Arcillas y limos	PQ2	
Plioceno	Arenas con niveles de arcillas, limos y margas verdosas	PI1	
	Arcillas margosas gris azuladas	PI2	

Tabla 8.01. Unidades geotécnicas consideradas.

8.4. Ensayos de campo y de laboratorio

La magnitud de la actuación ha requerido de una gran campaña de ensayos de campo y de laboratorio que se encuentran descritos en el proyecto de construcción y en los documentos elaborados durante la ejecución de la obra.



(a)



(b)

Figura 8.06. Obtención de muestras bloque del vaso de excavación (Hoffmann, 2019).

(a) Estrato cuaternario formado por arcillas rojas y limos amarillos carbonatados.

(b) Estrato Pliocuatnario con arcillas y limos próximos al estrato Pliocuatnario con gravas y arenas.

Se han realizado múltiples ensayos de campo y de laboratorio sobre muestras inalteradas, entre ellos: ensayos presiométricos, *Standard Penetration Test (SPT)*, ensayos de bombeo, análisis granulométricos por tamizado y por sedimentación, determinación de densidades, límites de Atterberg y humedad natural, ensayos de compresión simple, ensayos de corte directo del tipo CD, CU y UU, ensayos edométricos y análisis químicos del terreno y del agua freática. Asimismo, con motivo de la presente investigación, se tomaron cuatro muestras bloque de alta calidad en el vaso de excavación entre 2013 y 2015, con objeto de realizar ensayos de columna resonante para determinar los parámetros del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. De las cuatro muestras bloques, una de ellas se sitúa en el estrato cuaternario formado por arcillas rojas y limos amarillos carbonatados (figura 8.06a) y las tres restantes en el estrato Pliocuatnario con arcillas y limos, con mayor o menor proximidad al estrato Pliocuatnario con gravas y arenas (figura 8.06b). A partir de las 4 muestras bloques, se obtuvieron un total de 20 muestras cilíndricas, 13 de ellas talladas en dirección vertical y 7 en dirección horizontal (figura 8.07). Los ensayos de columna resonante se realizaron en el Laboratorio del Departamento de Ingeniería del Terreno, Cartográfica y Geofísica de la UPC (figura 8.08) utilizando diferentes presiones de confinamiento.



Figura 8.07. Arriba: Tallado de muestras cilíndricas. Abajo a la izquierda: muestra cilíndrica tallada de la muestra bloque extraída del estrato Pliocuatnario arcillosos-limoso.

Abajo a la derecha: muestra cilíndrica tallada de la muestra bloque extraída del estrato Pliocuatnario granular-arenoso. Hoffmann (2019).

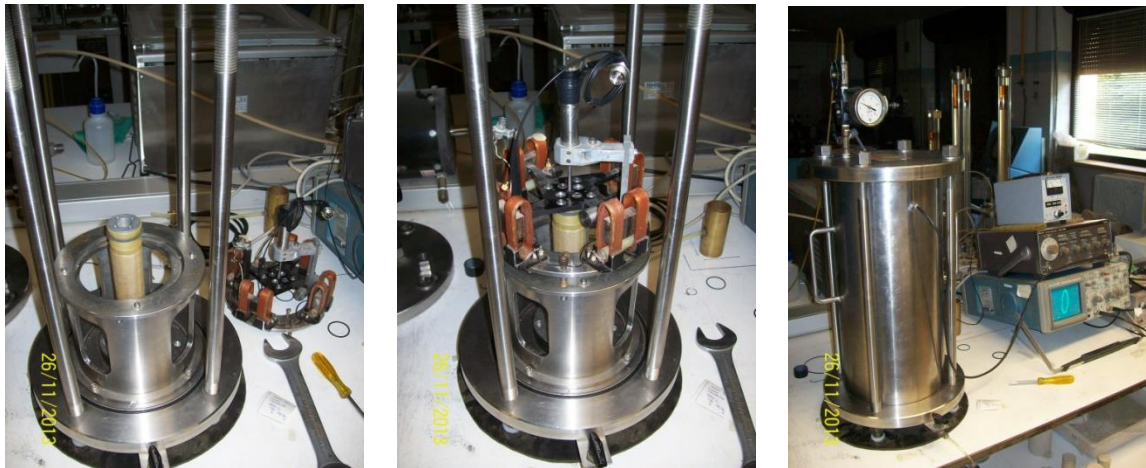


Figura 8.08. Equipo de columna resonante del Laboratorio del Departamento de Ingeniería del Terreno, Cartográfica y Geofísica de la UPC utilizado para los ensayos.

8.4.1. Resultados de ensayos realizados en el vaso de excavación

En la tabla 8.02 se proporcionan los resultados de los principales ensayos realizados en el vaso de excavación, a excepción de los ensayos de columna resonante, que se detallan en el apartado 8.4.2 del presente capítulo.

		Ra	Qa1	Qa2	Qa3	PQ1	PQ2	PI1	PI2	Unidades
Granulometría	gravas	29	22	11	43	38	12	12	0	[%]
	arenas	42	18	10	31	44	28	35	8	[%]
	finos	29	60	79	25	18	60	53	92	[%]
PT #200 -75µm-		-	60	79	31	22	60	29	91	[%]
Límites de Attemberg	LL	28	34	30	31	30	35	50	45	[%]
	IP	7	17	14	14	11	16	28	18	[%]
USCS (ASTM D2487)		-	CL	CL	SC	SC	CL	SC-SM	CL-ML	-
Humedad		-	16,0	-	9,8	8,2	19,0	11,5	16,7	[%]
Peso específico seco		-	18	17	19	19	18	17	18	[kN/m3]
Peso específico natural		20	21	20	21	21	21	21	21	[kN/m3]
φ'		26	28	24	35	38	30	38	25	[°]
c'		10	30	20	0	5	30	20-50	70	[kN/m2]
c_u		-	150	75	-	-	75	150	250	[kN/m2]
q_u		-	300	150	-	-	150	300	500	[kN/m2]
N_{60}		5	20	15	30-40	30-40	20	40-60	40	-
\bar{E}_{pres}		-	25	25	30	25	26	31	62	[kN/m2]
$E_{t,ur}/\bar{E}_{pres}$		-	3,3	3,3	4,6	3	2,8	3,1	2,3	[-]

Tabla 8.02. Resultados de ensayos en los materiales correspondientes a las diferentes unidades geotécnicas (Barcelona Sagrera Alta Velocidad, 2007).

En la tabla 8.02, PT #200 es el % de peso que pasa a través del tamiz #200 de 0,075mm, LL es el límite líquido, IP es el índice de plasticidad, $USCS$ (*Unified Soil Classification System*) es el sistema unificado de clasificación de suelos recogido en la norma ASTM D2487, ϕ' es ángulo de fricción máximo del suelo, c' es la cohesión efectiva del suelo, c_u es la resistencia al corte no drenado del suelo, q_u es la resistencia a la compresión uniaxial no drenada del suelo, N_{60} es el valor corregido que resulta del ensayo SPT (*Standard Penetration Test*), \bar{E}_{pres} es el valor medio del módulo presiométrico que resulta del ensayo presiométrico y $E_{t,ur}/\bar{E}_{pres}$ es la relación estimada entre el módulo longitudinal tangente en descarga $E_{t,ur}$ y \bar{E}_{pres} .

En la tabla 8.03 se proporcionan las permeabilidades calculadas a partir de las transmisividades ajustadas por Vázquez-Suñé et al. (2011) para reproducir numéricamente los niveles piezométricos durante los ensayos de bombeo realizados.

Finalmente, en la tabla 8.04 se proporcionan los valores de los pesos específicos de cada material.

Todos los estratos se encuentran normalmente consolidados, de manera que se tiene $OCR = 1$.

	Ra	Qa1	Qa2	Qa3	PQ1	PQ2	PI1	PI2	Unidades
k_x	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	11	17	$1,0 \cdot 10^{-1}$	1,40	$8,0 \cdot 10^{-3}$	[m/día]	
k_y	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	1,1	1,7	$1,0 \cdot 10^{-2}$	0,14	$8,0 \cdot 10^{-4}$	[m/día]	

Tabla 8.03. Permeabilidades k_x y k_y de los materiales correspondientes a cada unidad geotécnica.

	Ra	Qa1	Qa2	Qa3	PQ1	PQ2	PI1	PI2	Unidades
γ_{unsat}	18	19	19,5	19	19	18,5	18,5	[m/día]	
γ_{sat}	20	21	21,5	21	21	20,5	20,5	[m/día]	

Tabla 8.04. Pesos específicos de los materiales correspondientes a cada unidad geotécnica.

8.4.2. Resultados de los ensayos de columna resonante para la determinación de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$ realizados en las unidades geotécnicas Qa1-Qa2 y PQ2

A partir de los ensayos de columna resonante realizados en los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Qa1-Qa2 y PQ2 a diferentes niveles de confinamiento (100kPa, 200kPa y 300kPa), se ha procedido al ajuste mediante mínimos cuadrados de los valores de G_0^{ref} (siendo $G_{s,0}^{ap,180,H,ref} \equiv G_0^{ref}$) y $\gamma_{0.7}$. En las figuras 8.09, 8.10 y 8.11 se muestran dichos ajustes para cada una de las muestras ensayadas. En la tabla 8.05 se resumen los resultados obtenidos y en la tabla 8.06 se proporcionan los valores de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$ para los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Qa1-Qa2 y PQ1 a partir de los resultados obtenidos.

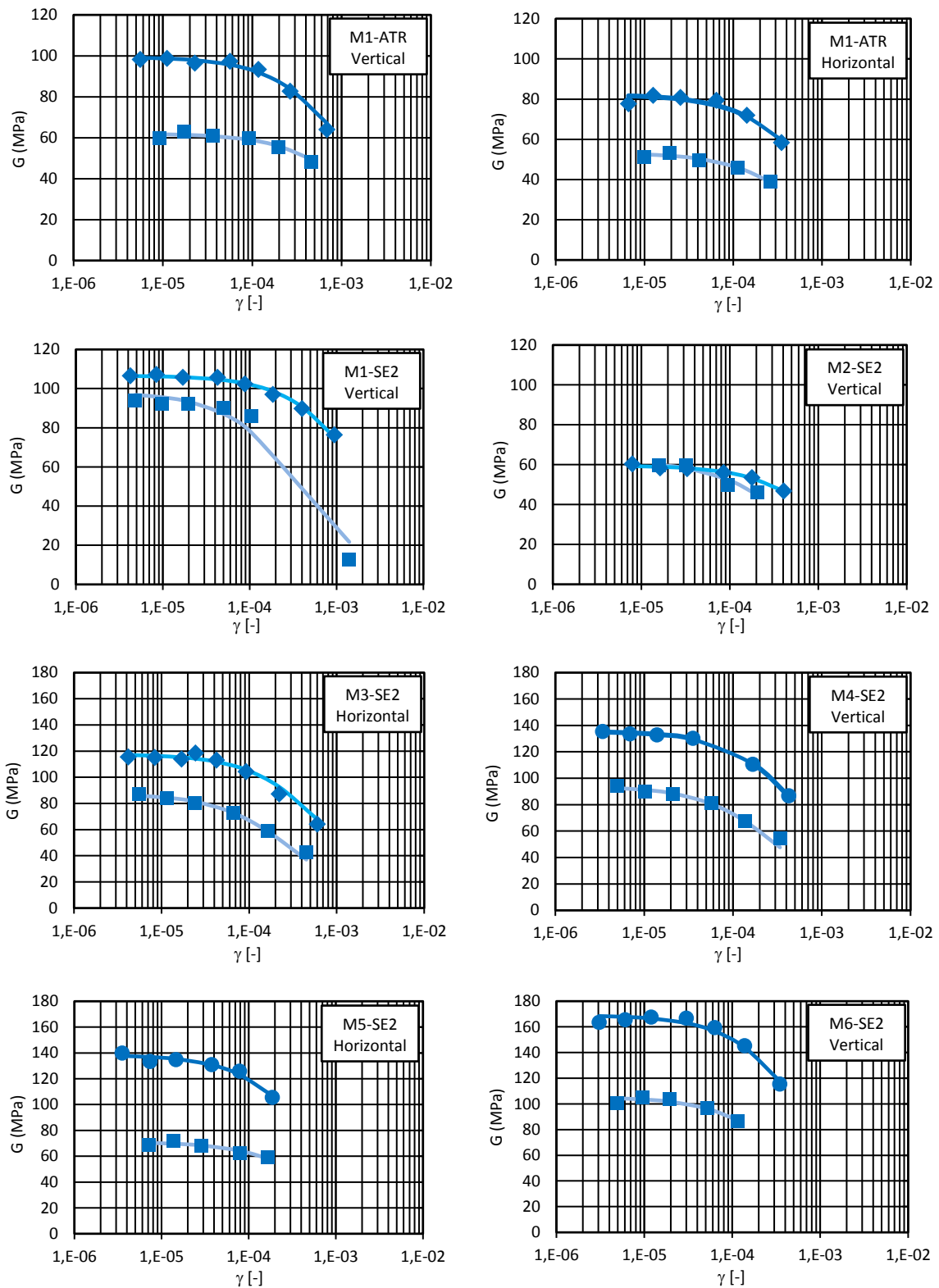


Figura 8.09. Resultados de los ensayos de columna resonante para diferentes confinamientos en las muestras M1-ATR, M2-ATR, M1-SE2, M2-SE2, M3-SE2, M4-SE2, M5-SE2 y M5-SE2 y ajuste de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$.

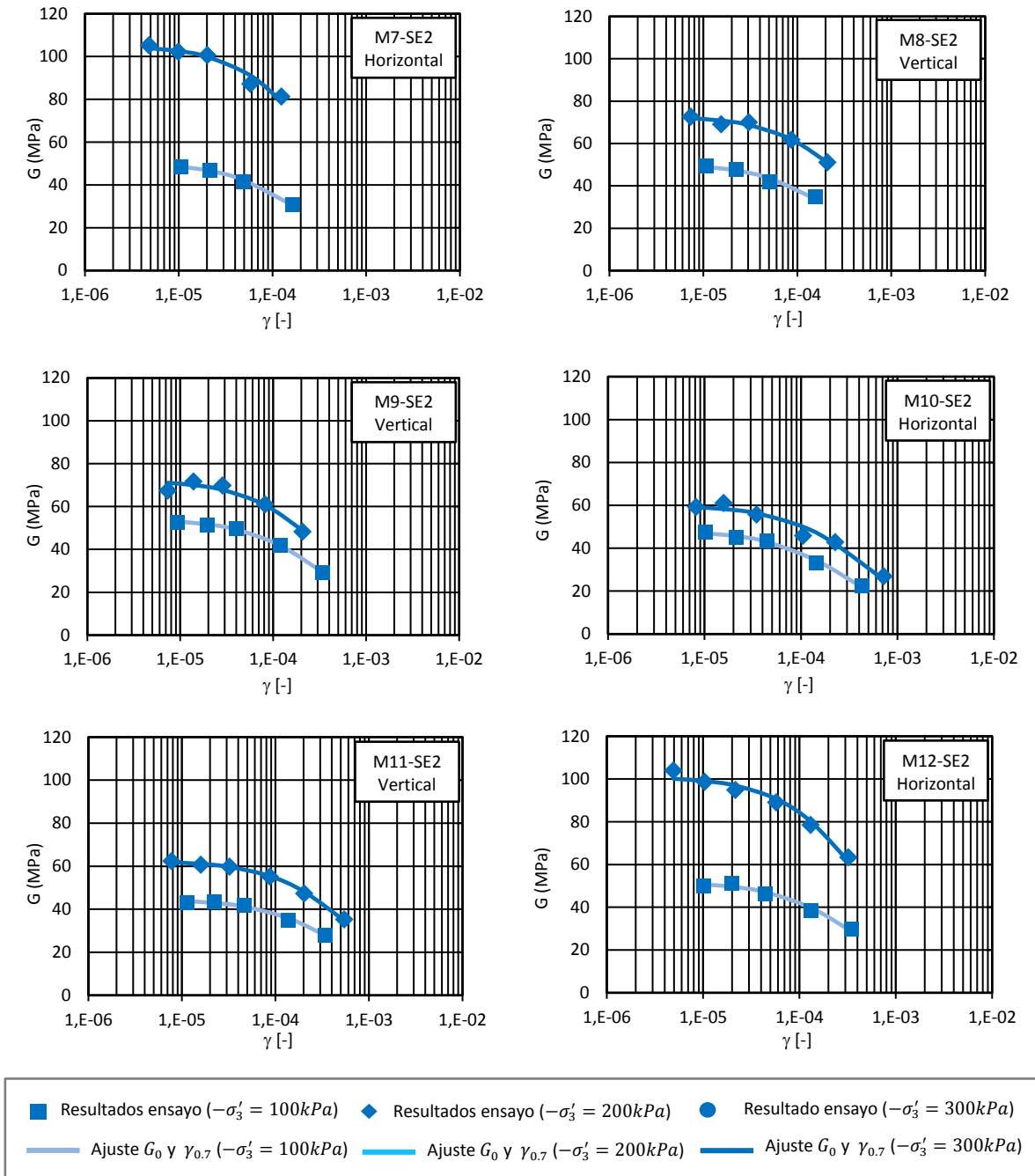
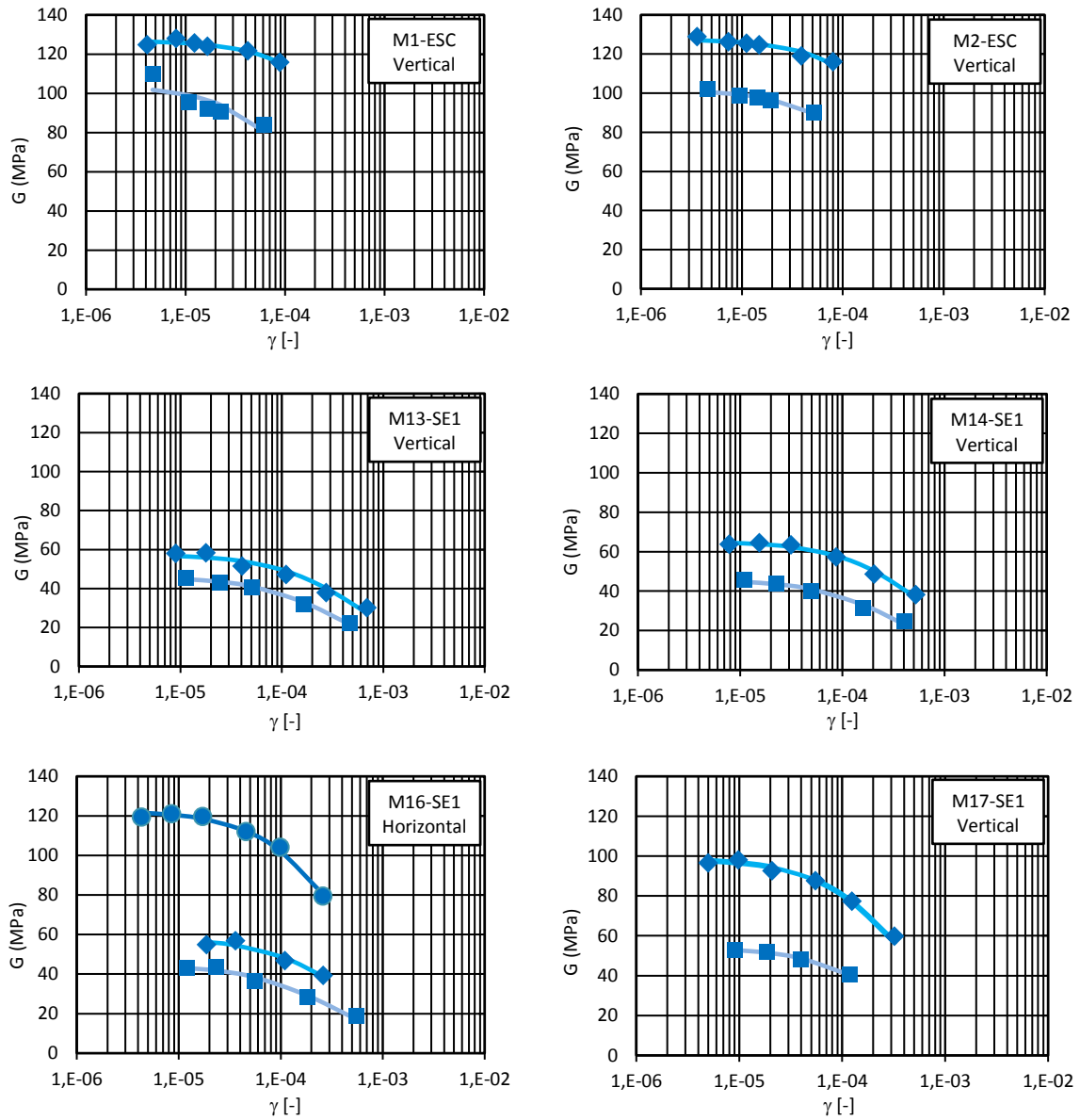


Figura 8.10. Resultados de los ensayos de columna resonante para diferentes confinamientos en las muestras M7-SE2, M8-SE2, M9-SE2, M10-SE2, M11-SE2 y M12-SE2 y ajuste de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$.



■ Resultados ensayo ($-\sigma'_3 = 100kPa$)
 ◆ Resultados ensayo ($-\sigma'_3 = 200kPa$)
 ● Resultado ensayo ($-\sigma'_3 = 300kPa$)
— Ajuste G_0 y $\gamma_{0.7}$ ($-\sigma'_3 = 100kPa$)
 — Ajuste G_0 y $\gamma_{0.7}$ ($-\sigma'_3 = 200kPa$)
 — Ajuste G_0 y $\gamma_{0.7}$ ($-\sigma'_3 = 300kPa$)

Figura 8.11. Resultados de los ensayos de columna resonante para diferentes confinamientos en las muestras M1-ESC, M2-ESC, M13-SE1, M13-SE1, M14-SE1, M16-SE1 y M17-SE1 y ajuste de G_0^{ref} y $\gamma_{0.7}$.

Nº MUESTRA	ORIENTACIÓN	DESCRIPCIÓN	SITUACIÓN	COTA	UNIDAD GEOTÉCNICA	G ₀ (MPa)			γ _{0,7} (-)			γ _n inicial (kN/m ³)	γ _d inicial (kN/m ³)	w inicial (-)	γ _n final (kN/m ³)	γ _d final (kN/m ³)	w final (-)
						100	200	300	Confinamiento (kPa)	100	200						
M1-ATR	Vert.	-	ATRIO	-5m	PQ2	62,0	-	99,4	6,99·10 ⁻⁴	-	5,48·10 ⁻⁴	19,2	-	-	-	-	
M2-ATR	Hor.	-	ATRIO	-5m	PQ2	53,2	-	82,2	2,75·10 ⁻⁴	3,58·10 ⁻⁴	-	19,2	-	-	-	-	
M1	Vert.	-	SE2	-5m/-7m	PQ2	97,9	106,6	-	1,54·10 ⁻⁴	8,74·10 ⁻⁴	-	-	0,243	19,92	16,56	0,203	
M2	Vert.	Muestra con carbonatos, se usa sierra de corte	SE2	-5m/-7m	PQ2	61,6	59,6	-	2,12·10 ⁻⁴	5,71·10 ⁻⁴	-	-	0,182	20,04	16,80	0,193	
M3	Hor.	Limo arenoso, difícil de tallar, se desgrana tipo turrón	SE2	-5m/-7m	PQ2	87,3	117,6	-	1,28·10 ⁻⁴	3,16·10 ⁻⁴	-	21,1	18,1	0,163	21,03	18,02	0,167
M4	Vert.	Material más granular con carbonatos	SE2	-5m/-7m	PQ2 prox. PQ1	93,8	-	135,6	1,35·10 ⁻⁴	-	2,88·10 ⁻⁴	20,1	18,2	0,107	20,08	17,28	0,162
M5	Hor.	-	SE2	-7m	PQ2	71,0	-	138,4	2,92·10 ⁻⁴	-	2,43·10 ⁻⁴	20,2	-	-	-	-	
M6	Vert.	-	SE2	-5m/-7m	PQ2	105,3	-	169,0	2,15·10 ⁻⁴	-	3,06·10 ⁻⁴	20,3	16,6	0,225	20,29	17,68	0,148
M7	Hor.	Base del bloque tallado deteriorada, posible degradación	SE2	-5m/-7m	PQ2	50,6	-	105,3	9,57·10 ⁻⁵	-	1,45·10 ⁻⁴	20,4	-	20,36	17,36	0,172	
M8	Vert.	Muestra tallada de porción más arenosa	SE2	-5m/-7m	PQ2 prox. PQ1	50,7	-	73,1	1,20·10 ⁻⁴	-	1,86·10 ⁻⁴	-	0,154	19,44	16,46	0,181	
M9	Vert.	-	SE2	-5m/-7m	PQ2	54,2	-	72,3	1,55·10 ⁻⁴	-	1,65·10 ⁻⁴	20,6	17,3	0,188	20,45	17,33	0,180
M10	Hor.	Muestra tallada de porción más arenosa	SE2	-5m/-7m	PQ2 prox. PQ1	48,4	-	60,0	1,35·10 ⁻⁴	-	2,02·10 ⁻⁴	-	-	20,79	17,69	0,176	
M11	Vert.	Muestra tallada de porción más arenosa	SE2	-5m/-7m	PQ2 prox. PQ1	44,6	-	62,5	2,17·10 ⁻⁴	-	2,61·10 ⁻⁴	20,6	17,5	0,178	20,54	17,25	0,191
M12	Hor.	Muestra tallada de porción más arenosa	SE2	-5m/-7m	PQ2 prox. PQ1	51,9	-	101,1	1,66·10 ⁻⁴	-	1,93·10 ⁻⁴	20,1	17,0	0,178	20,03	17,03	0,176
M1-ESC	Vert.	-	SE2-ESC	+0m	Qa1-Qa2	104,0	127,0	-	8,10·10 ⁻⁵	3,59·10 ⁻⁴	-	25,7	22,0	0,169	22,12	19,05	0,162
M2-ESC	Vert.	-	SE2-ESC	+0m	Qa1-Qa2	101,8	127,7	-	1,45·10 ⁻⁴	2,75·10 ⁻⁴	-	19,7	16,8	0,173	19,56	16,84	0,162
M13	Vert.	-	SE1	-5m/-7m	PQ2	46,0	57,5	-	1,59·10 ⁻⁴	2,43·10 ⁻⁴	-	20,3	17,9	0,134	20,27	17,18	0,179
M14	Vert.	-	SE1	-5m/-7m	PQ2	45,9	65,3	-	1,58·10 ⁻⁴	2,62·10 ⁻⁴	-	21,0	-	20,75	17,25	0,203	
M16	Hor.	Muestra tallada en la interfase granular cohesiva del estrato	SE1	-5m/-7m	PQ2 prox. PQ1	44,6	58,3	122,6	1,33·10 ⁻⁴	2,00·10 ⁻⁴	1,90·10 ⁻⁴	20,0	-	-	-	-	
M17	Vert.	Muestra tallada en la interfase granular cohesiva del estrato	SE1	-5m/-7m	PQ2 prox. PQ1	54,3	98,8	-	1,32·10 ⁻⁴	1,69·10 ⁻⁴	-	19,4	-	-	-	-	

Tabla 8.05. Resultados de los ensayos de columna resonante (ATR: Atrio. SE1: Salida de Emergencia 1. SE2: Salida de Emergencia 2. SE2-ESC: Escaleras lado mar de la Salida de Emergencia 2. Vert.: Muestra tallada verticalmente. Hor.: Muestra tallada horizontalmente. γ_n: Peso específico natural. γ_d: Peso específico seco. w : Humedad).

	Qa1-Qa2	PQ2	Unidades
G_0^{ref}	103,0	100,0	[MN/m ²]
$\gamma_{0,7}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$	$2,00 \cdot 10^{-4}$	[-]

Tabla 8.06. Valores de G_0^{ref} y $\gamma_{0,7}$ para los materiales de las unidades geotécnicas Qa1-Qa2 y PQ2.

8.4.3. Estimación de G_0^{ref} y $\gamma_{0,7}$ en las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, PI1 y PI2

No se disponen de ensayos para la determinación de los valores de los parámetros G_0^{ref} (siendo $G_{s,0}^{ap,180,H,ref} \equiv G_0^{ref}$) y $\gamma_{0,7}$ de los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, PI1 y PI2, y, por ello, estos se estiman a partir de correlaciones con los resultados de los ensayos indicados en el apartado 8.4.1 del presente capítulo.

Se ha utilizado la expresión (2.28) de Hardin y Black (1968) considerando la función $f(e)$ de la expresión (2.20), dada por Hardin y Richart Jr. (1963), con $\hat{B} = 2,97$, resultando la siguiente relación:

$$G_0 = 33 \frac{(2,97 - e)^2}{1 + e} \left(\frac{-p'}{p'_{ref}} \right)^{0,50} \quad (8.01)$$

Donde G_0 es el módulo máximo del suelo en MPa, e es el índice de poros, $-p' = -1/3\sigma'_{ii}$, $-\sigma'_{ii}$ son las tensiones efectivas principales y p'_{ref} es una presión de referencia.

El valor de e se puede obtener de la siguiente relación:

$$e = \frac{w \gamma_s}{S_r \gamma_w} \quad (8.02)$$

Donde w es la humedad del suelo, γ_s es el peso específico de las partículas sólidas, γ_w es peso específico del agua y S_r el grado de saturación del suelo. Es habitual considerar $\gamma_s/\gamma_w \approx 2,65$. Asimismo, para materiales situados bajo el nivel freático, se puede considerar $S_r \approx 1,0$.

Por otro lado, se han utilizado las correlaciones empíricas del tipo $G_0 = A'(N_{60})^{B'}$ comentadas en el apartado 2.5.2.2 del capítulo 2, donde G_0 es el módulo máximo del suelo en MN/m², N_{60} es el valor de golpes corregido que resulta del ensayo SPT, y A' y B' son parámetros del suelo. Concretamente se han utilizado las expresiones de Hara et al. (1974) para depósitos terciarios y las expresiones de Ohsaki e Iwasaki (1973) para todo tipo de suelos, suelos cohesivos y suelos granulares (tabla 8.07). Se ha podido comprobar que la expresión de Ohsaki e Iwasaki (1973) para suelos cohesivos arroja valores de $G_0 = 105 \text{ MN/m}^2$ para los materiales correspondientes a la unidad geotécnica Qa1-Qa2 y $G_0 = 115 \text{ MN/m}^2$ para los materiales correspondientes a la unidad geotécnica PQ2, aproximando bien los valores obtenidos con los ensayos de columna resonante (tabla 8.06).

Las anteriores relaciones empíricas consideran, de forma implícita, el efecto de p' sobre G_0 . Dicho efecto depende de la presión a la cual se realizan los ensayos para la determinación de N_{60} , e , w y S_r . No obstante, la alteración de las condiciones tensionales en el suelo cuando se realiza el ensayo *SPT* y la alteración de la muestra extraída para la determinación de e , w y S_r llevan a que, en general, el valor del G_0 obtenido mediante las citadas correlaciones sea inferior al real, por lo que una corrección mediante el factor $(-p'/p'_{ref})^m$ podría conducir a un error mayor al cometido en caso de no considerar dicha corrección. Ante la falta de más datos, y en base a las profundidades en las que se evalúa G_0 , se considerará $G_0 \approx G_0^{ref}$, siendo $p'_{ref} = 100kPa$.

En la tabla 8.08 se proporcionan los valores de G_0^{ref} obtenidos a partir de las correlaciones anteriores en los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, Pl1 y Pl2. Se ha supuesto un valor de $S_r \approx 0,75$ para el material correspondiente a Qa3 situado por encima del nivel freático.

Autores		A'	B'
Hara et al. (1974)	Depósitos terciarios	15,49	0,668
	Todo tipo de suelos	11,94	0,780
Ohsaki e Iwasaki (1973)	Suelos cohesivos	13,73	0,710
	Suelos granulares	6,38	0,94

Tabla 8.07. Valores de A' y B' en la expresión $G_0 = A'(N_{60})^{B'}$ [MPa] propuestos por diferentes autores.

			Ra	Qa3	PQ1	Pl1	Pl2	Unidades
w			-	9,8	8,2	17,0	16,7	[%]
S_r			-	0,75	1,0	1,0	1,0	[-]
e			-	0,346	0,217	0,451	0,443	[-]
N_{60}			5	30-35	30-40	40-60	40	[-]
G_0^{ref}	Hardin y Black (1968)	Varios tipos de suelos	-	168,7	205,4	179,7	146,1	
	Hara et al. (1974)	Depósitos terciarios	-	-	-	182,1	-	[MN/m2]
	Ohsaki e Iwasaki (1973)	Todo tipo de suelos	41,9	-	-	-	-	
		Suelos cohesivos	-	-	-	-	188,4	
		Suelos granulares	-	168,1	204,4	-	-	

Tabla 8.08. Valores de G_0^{ref} obtenidos a partir de correlaciones con e y N_{60} propuestas por diferentes autores.

Para estimar el valor de $\gamma_{0,7}$ se ha utilizado:

- En el caso de suelos cohesivos, la correlación empírica dada por el ábaco de Vucetic y Dobry (1991) que relaciona el índice de plasticidad IP con la deformación de corte γ y el módulo de corte máximo G_0 , que se puede consultar en la figura 2.24 del capítulo 2.

- En el caso de suelos granulares, la expresión (2.204) del modelo de Dos Santos y Correia (2001) para suelos normalmente consolidados, que resulta de combinar la expresión $\gamma_{0,7} = \alpha\tau_{max}/G_0$ con el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. El hecho de considerar $G_0 \approx G_0^{ref}$, como se ha explicado anteriormente, permite aplicar directamente dicho valor en la expresión de cálculo de $\gamma_{0,7}$. Asimismo, puesto que ninguno de los modelos numéricos utilizados (EPHYSS y HS-SS) considera la dependencia de $\gamma_{0,7}$ con $-p'$, se adopta el valor de la tensión principal mayor $-\sigma'_1$ para cada material en la expresión (2.204), correspondiente al punto medio de las profundidades de los estratos en los que se presenta dicho material.

En la tabla 8.09 se proporcionan los valores de $\gamma_{0,7}$ obtenidos, a partir de las relaciones y correlaciones anteriores, en los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, PI1 y PI2.

	Ra	Qa3	PQ1	PI1	PI2	Unidades
G_0	41,9	168,7	205,4	182,1	188,4	[MN/m ²]
c'	5	1	1	20	70	[kN/m ²]
φ'	28	34	38	35	26	[°]
$-\sigma'_1$	100	178	374	570	560	[kN/m ²]
IP	7	14	11	28	18	[%]
$\gamma_{0,7}$	$\gamma_{0,7} = \alpha\tau_{max}/G_0$ expresión (2.204) capítulo 2					[-]
	Vucetic y Dobry (1991)	$1,50 \cdot 10^{-4}$	-	-	$3,00 \cdot 10^{-4}$	$2,20 \cdot 10^{-4}$

Tabla 8.09. Valores de $\gamma_{0,7}$ obtenidos a partir de relaciones y correlaciones con G_0 , c' , φ' , $-\sigma'_1$ e IP propuestas por diferentes autores.

En base a los resultados obtenidos, se establecen los valores de G_0^{ref} y $\gamma_{0,7}$ indicados en la tabla 8.10 para los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, PI1 y PI2. El valor de $\gamma_{0,7}$ estimado en la tabla 8.09 para el material de la unidad geotécnica PI1 proporciona desplazamientos verticales en las simulaciones numéricas con los modelos EPHYSS y HS-SS significativamente menores a los medidos. Se ha comprobado que un valor de $\gamma_{0,7} = 4 \cdot 10^{-5}$ maximiza la aproximación de dichos desplazamientos de forma simultánea en ambos modelos.

	Ra	Qa3	PQ1	PI1	PI2	Unidades
G_0^{ref}	41,9	168,7	205,4	182,1	188,4	[kN/m ²]
$\gamma_{0,7}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	$1,58 \cdot 10^{-4}$	$2,76 \cdot 10^{-4}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$2,20 \cdot 10^{-4}$	[kN/m ²]

Tabla 8.10. Valores de G_0^{ref} y $\gamma_{0,7}$ estimados para los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas Ra, Qa3, PQ1, PI1 y PI2.

8.5. Parámetros de los modelos EPHYSS y HS-SS

En la tabla 8.11 se proporcionan los pesos específicos del suelo y los valores de los parámetros de los modelos EPHYSS y HS-SS para cada una de las unidades geotécnicas. Por otro lado, en la tabla 8.12 se proporcionan los valores de los parámetros internos del modelo EPHYSS de cada una de las unidades geotécnicas, desconociéndose el valor de estos mismos en el caso del modelo HS-SS, al no ser proporcionados por el programa.

		Ra	Qa1-Qa2	Qa3	PQ1	PQ2	PI1	PI2	Unidades		
Pesos específicos	γ_{sat}	18	19	19,5	19	19	18,5	18,5	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	20	21	21,5	21	21	20,5	20,5			
COMPORTAMIENTO ELÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$	$1,58 \cdot 10^{-4}$	$2,76 \cdot 10^{-4}$	$2,00 \cdot 10^{-4}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$2,20 \cdot 10^{-4}$	[-]	
		HS-SS	G_0^{ref}	41,9	103,0	168,7	205,4	100,0	182,1	188,4	[MN/m ²]
	ν'_{ur}		0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]
	EPHYSS	K_s^{ref}	14,6	11,4	156,8	17,0	8,9	20,4	9,5	[MN/m ²]	
		m_1	0,50	0,60	0,50	0,50	0,65	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	100	100	100	[MN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	38,5	87,7	141,6	167,5	76,4	143,5	115,6	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	16,9	43,9	62,3	73,7	38,2	63,2	57,8	[kN/m ²]	
		m_2	0,50	0,60	0,50	0,50	0,65	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	100	100	100	[N/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]
	COMPORTAMIENTO PLÁSTICO	HS-SS y EPHYSS	E_{50}^{ref}	19,0	20,0	24,0	25,0	20,0	31,0	31,0	[MN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	57,0	60,0	72,0	75,0	60,0	93,0	93,0	[MN/m ²]
			E_{oed}^{ref}	15,2	16,0	19,2	20,0	16,0	24,8	24,8	[MN/m ²]
c'			5	30	1	1	30	20	70	[kN/ m ²]	
φ'			28	29	34	38	29	35	25	[deg]	
ψ			0	0	0	0	0	0	0	[deg]	
p'_{ref}			100	100	100	100	100	100	100	[kN/ m ²]	
m			0,50	0,60	0,50	0,50	0,65	0,50	0,70	[-]	
K_0^{NC}			0,53	0,52	0,44	0,40	0,52	0,43	0,56	[-]	
R_f			0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	[-]	
σ'_{trac}	0	0	0	0	0	0	0	[kN/ m ²]			

Tabla 8.11. Pesos específicos y parámetros de los modelos EPHYSS y HS-SS para cada una de las unidades geotécnicas.

		Ra	Qa1-Qa2	Qa3	PQ1	PQ2	PI1	PI2	Unidades
PARÁMETROS INTERNOS EPHYSS	E_i^{ref}	60,3	64,7	64,9	56,6	63,6	97,4	109,3	[MN/ m ²]
	α'	1,53	1,34	2,42	3,30	1,35	1,93	1,17	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	2,19	1,90	2,32	2,34	1,83	2,05	1,68	[-]

Tabla 8.12. Parámetros internos del modelo EPHYSS para cada una de las unidades geotécnicas.

Para la obtención de los valores de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y K_s^{ref} del modelo EPHYSS se ha aplicado, en los materiales de cada unidad geotécnica, y en el rango de tensiones dado por la envolvente de las fases del problema de contorno, la formulación de mínimos cuadrados expuesta en el apartado 5.3.1.1 del capítulo 5, con objeto de conseguir un perfil de rigideces inicial en el terreno con el modelo EPHYSS similar al obtenido con el modelo HS-SS, y que sus variaciones debidas al cambio de tensiones en el suelo sean lo más similares posible entre sí. Este proceso también podría hacerse a la inversa, siendo el valor de G_0^{ref} del modelo HS-SS el que se ajustara a partir del valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo EPHYSS, desaconsejándose, en este caso, el ajuste de los valores $E'_{t,ur}$ y ν'_{ur} del modelo HS-SS al aparecer ambos en la formulación plástica del mismo.

8.6. Fases de la excavación, medidas topográficas de la superficie y monitorización de los movimientos en el terreno mediante extensómetros

Con objeto de optimizar el diseño de la gran losa de cimentación de las estructuras de la estación mediante el ajuste de los valores del coeficiente de balasto utilizados en los cálculos del proyecto original, se instalaron 4 extensómetros de 60m de profundidad cada uno, a lo largo del eje longitudinal de la excavación (figura 8.12).

Con estos extensómetros se ha podido medir la respuesta del terreno durante las diferentes fases de excavación. Asimismo, las medidas de los extensómetros se han tomado de forma simultánea al levantamiento topográfico de los perfiles transversales de la excavación en los que se sitúa cada uno de dichos extensómetros.

Considerando el elevado número de mediciones realizadas, se ha optado por escoger las correspondientes a las fases de excavación más relevantes (figuras 8.13 a 8.16).

En la tabla 8.13 se proporcionan las fases seleccionadas y las fechas de lectura de los extensómetros. Por otro lado, en la figura 8.17 se muestra la geometría tridimensional del vaso de excavación en cada una de las fases seleccionadas. Finalmente, en la figura 8.18 se muestra la situación en planta de las secciones transversales que contienen a cada uno de los extensómetros y la sección longitudinal que los contiene a todos ellos, y en las figuras 8.19 y 8.20 se muestran, respectivamente, los perfiles del terreno, transversales y longitudinal, en las fases de excavación seleccionadas.



Figura 8.12. Fotografía aérea (Apunto Lapospo, 2011) con la situación de los extensómetros.

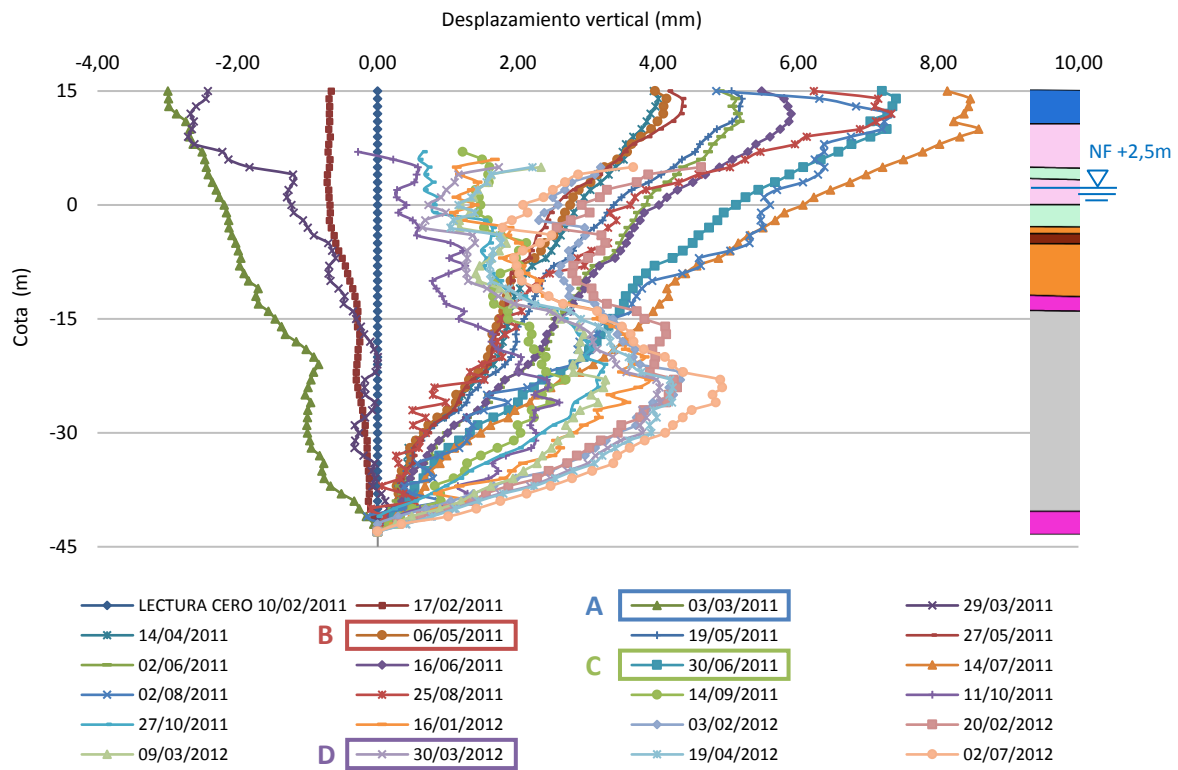


Figura 8.13. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº1, columna estratigráfica y selección de fases.

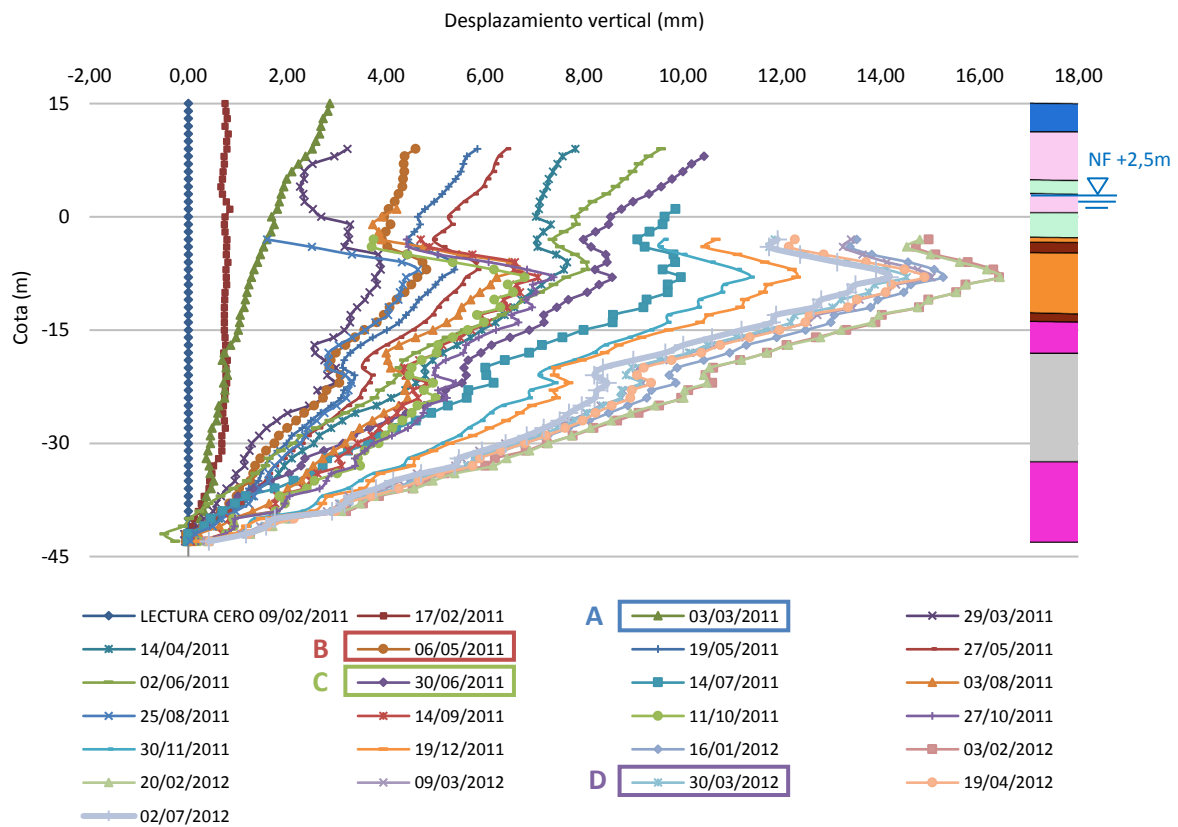


Figura 8.14. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº2, columna estratigráfica y selección de fases.

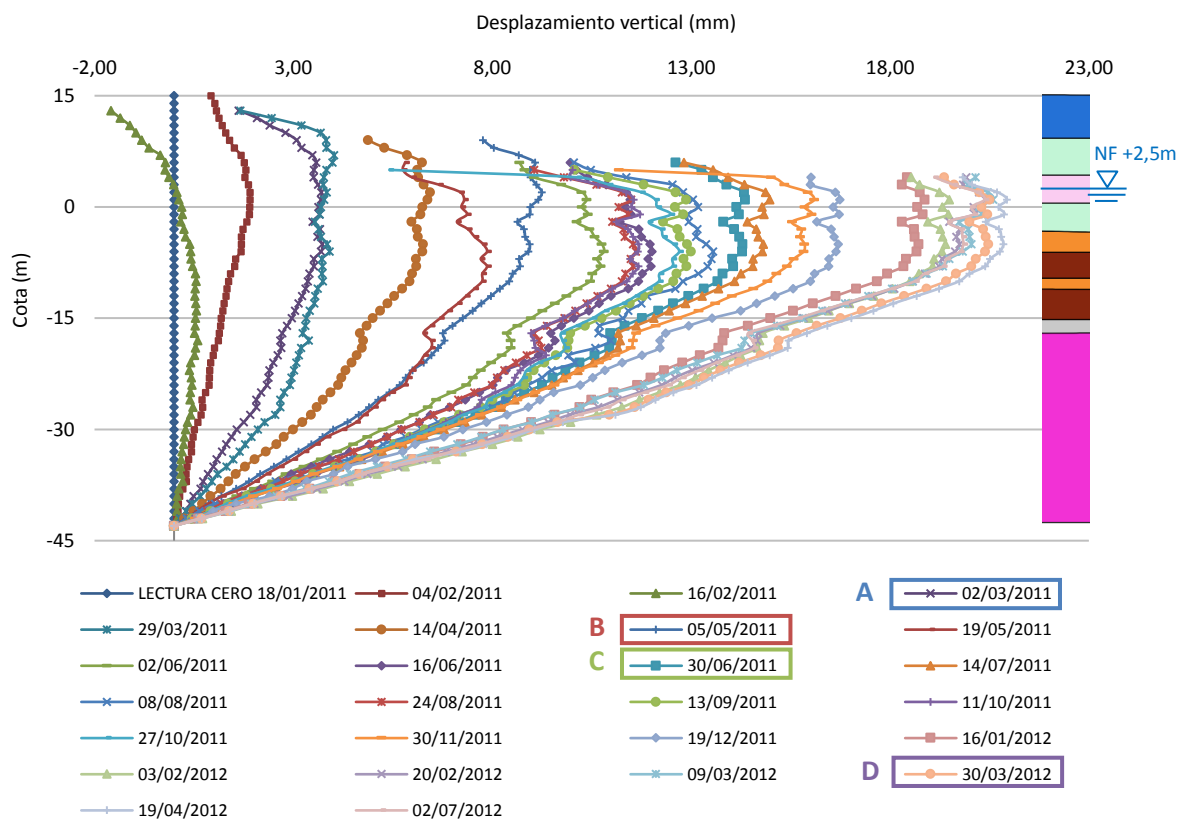


Figura 8.15. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº3, columna estratigráfica y selección de fases.

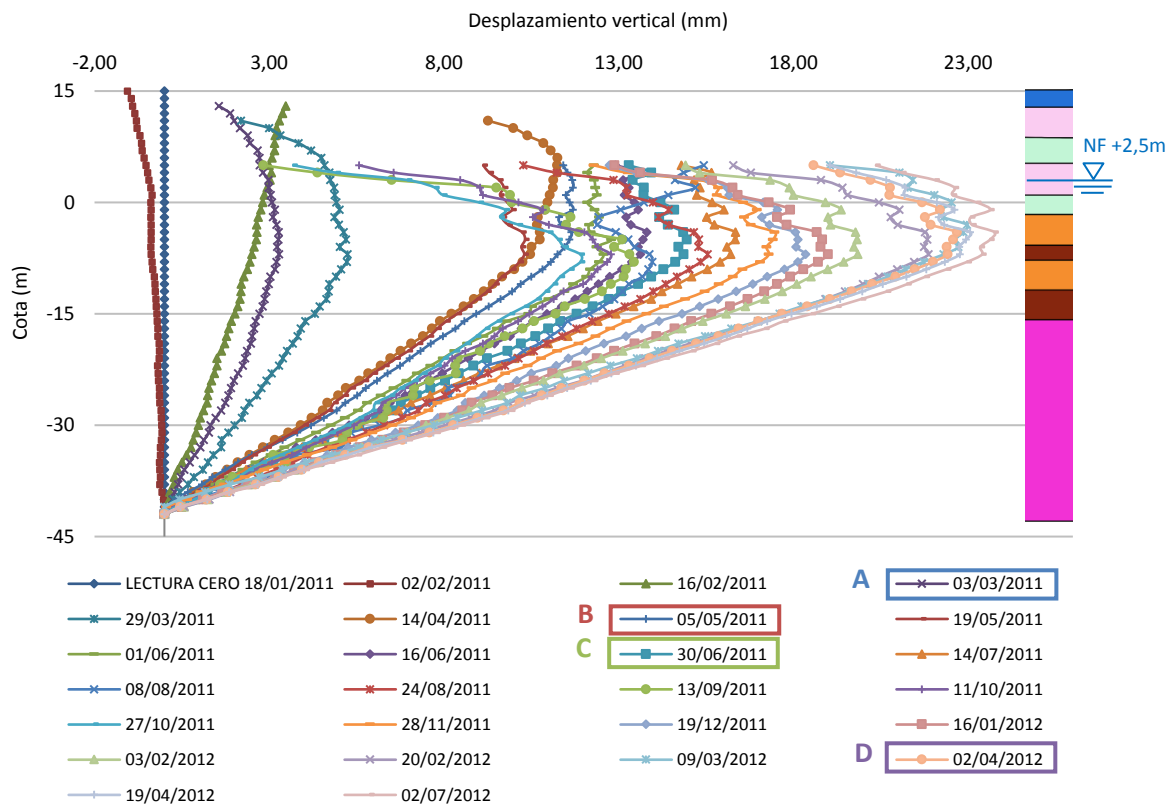


Figura 8.16. Desplazamientos acumulados en el Ext. nº4, columna estratigráfica y selección de fases.

FASE	FASE 0	FASE A	FASE B	FASE C	FASE D
LECTURA	ESTADO INICIAL	03/03/2011 02/03/2011	06/05/2011 05/05/2011	30/06/2011	30/03/2012 02/04/2012

Tabla 8.13. Fases seleccionadas y fechas de lectura de los extensómetros y del levantamiento de los perfiles topográficos.

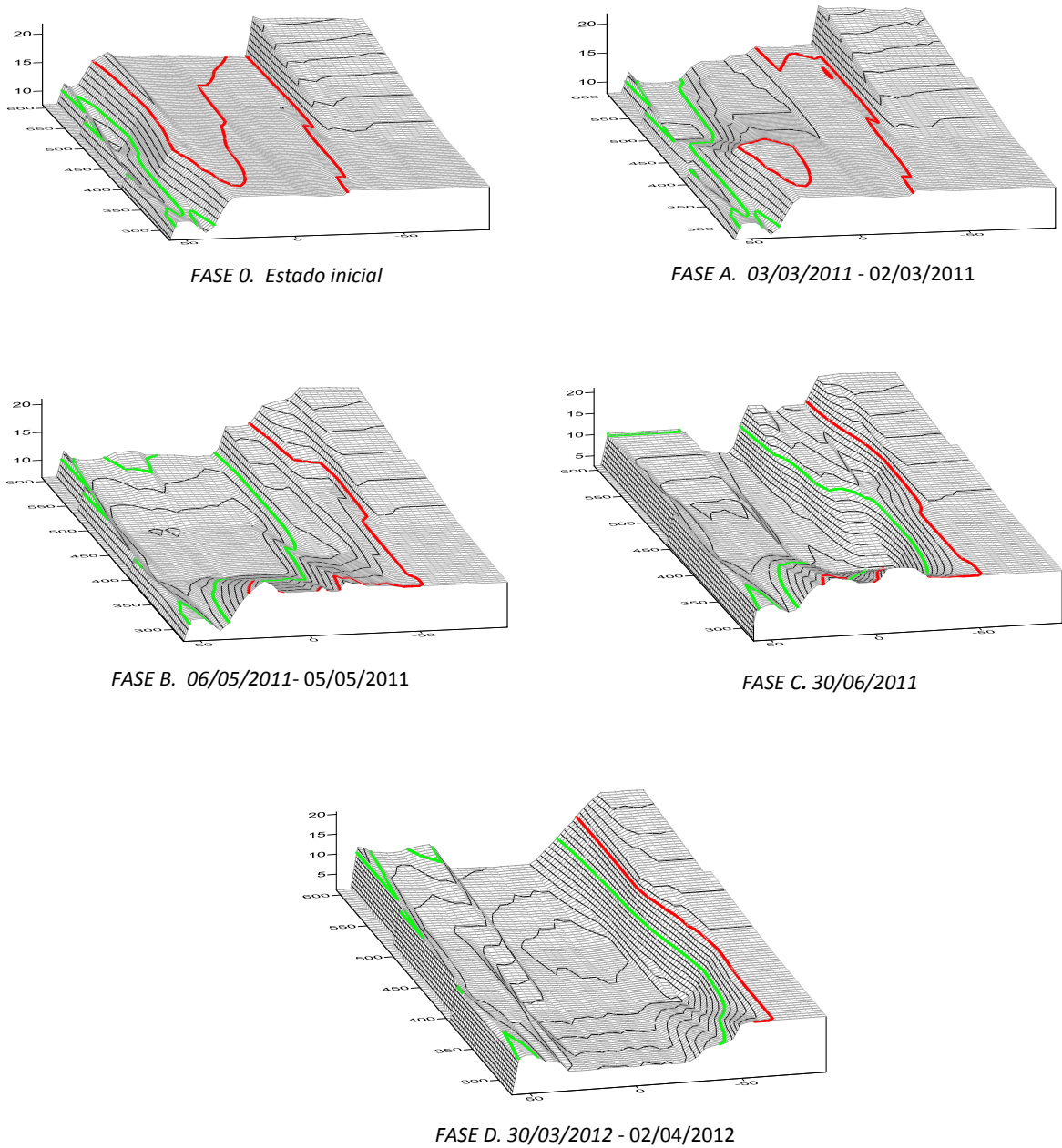


Figura 8.17. Visión tridimensional del vaso de excavación en las diferentes fases seleccionadas.

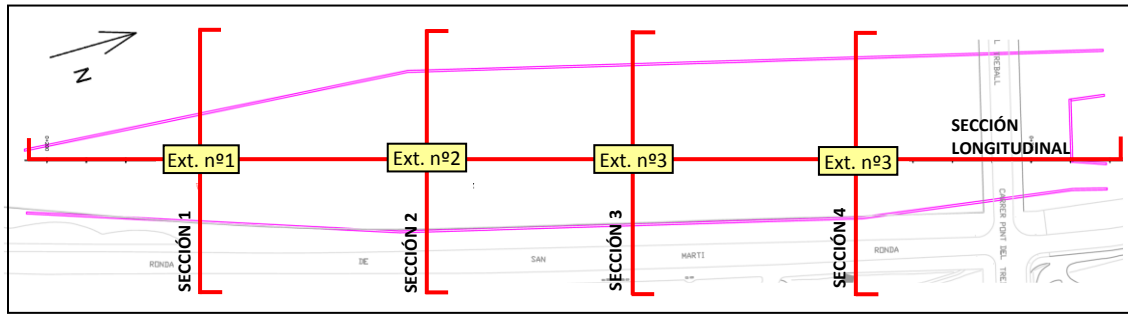


Figura 8.18. Planta con las secciones transversales y longitudinal.

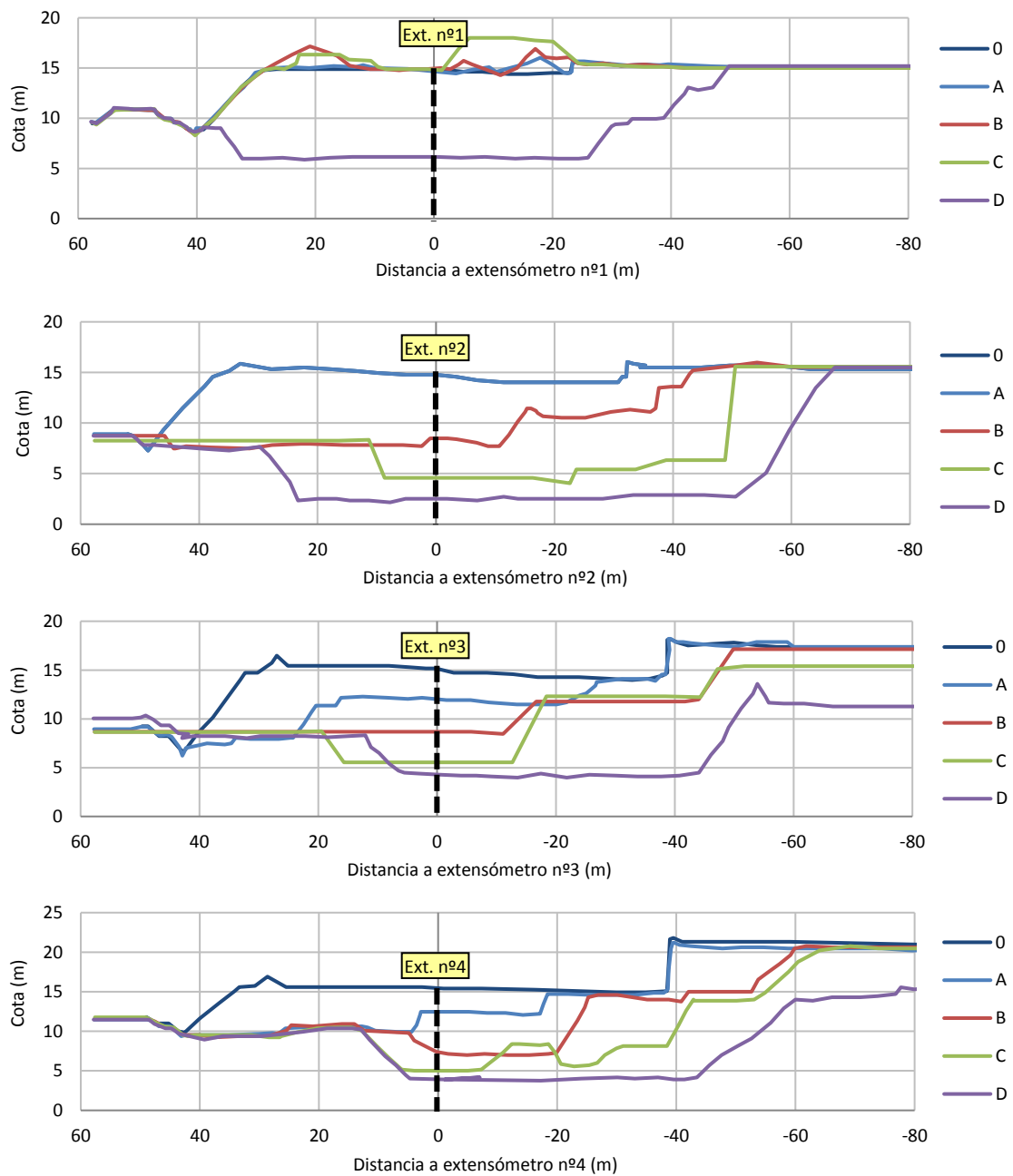


Figura 8.19. Perfiles transversales del terreno en cada una de las fases de excavación seleccionadas.

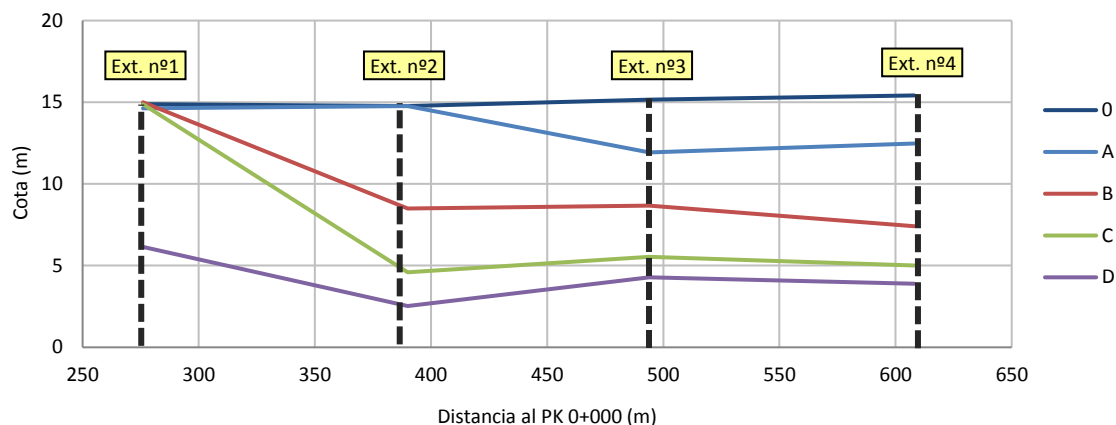


Figura 8.20. Perfil longitudinal del terreno en cada una de las fases de excavación seleccionadas.

8.7. Modelos numéricos y simulaciones

En base a la geometría de la excavación y a las fases seleccionadas, se ha realizado un total de cinco modelos numéricos 2D, correspondientes, respectivamente, a las secciones transversales y a la sección longitudinal de los perfiles de las figuras 8.19 y 8.20. El objeto de analizar secciones de la excavación perpendiculares entre sí es estudiar el posible efecto 3D de la excavación.

La geometría de los modelos analizados, en cada una de las fases de cálculo, se muestra en las figuras 8.21 a 8.25.

Dado que ninguno de los materiales presenta sobreconsolidación, en la Fase 0 de las simulaciones con el modelo *EPHYSS* se utiliza el cálculo tipo *Gravity loading* de Plaxis con pasos de cálculo pequeños para evitar errores groseros en el movimiento de las superficies de fluencia durante el *Return Mapping* de dicha fase. Se aplica el mismo tamaño de paso de cálculo en las simulaciones con el modelo *HS-SS*.

En relación con las condiciones iniciales, tras la Fase 0 en las simulaciones con el modelo *EPHYSS*, se realiza tanto un reseteo de la historia de deformaciones del suelo, adoptando un valor $Reini_Stiff = 1$, como un reseteo de los desplazamientos en el mismo a través de la *Interface* de Plaxis, lo cual se hace definiendo una fase intermedia entre la Fase 0 y la Fase A, que no se indica en las figuras 8.21 a 8.25. De forma equivalente, en el modelo *HS-SS* se resetea la historia de deformaciones y los desplazamientos del suelo, respectivamente, a través de las opciones "*Reset Small Strain*" y "*Reset displacements to zero*" de la *Interface* de Plaxis.

Los acopios de materiales durante la obra se han simulado como cargas equivalentes cuya extensión y magnitud se indican en las figuras 8.21 a 8.25.

Los contornos horizontales inferiores del dominio de cada modelo se han situado a la profundidad máxima de los extensómetros, logrando así que el origen de las medidas de los desplazamientos coincida con el de las simulaciones.

Asimismo, se ha realizado un análisis del efecto que genera, por un lado, la ampliación del dominio de cálculo en dirección horizontal, y por otro, el refinamiento de la malla cálculo. De dicho análisis se concluye que tanto la geometría como el tamaño de malla adoptados son adecuados, no produciéndose cambios significativos al considerar un dominio mayor o una malla más fina.

El nivel freático se encuentra a la cota absoluta +2,5m. En ninguna fase de excavación analizada se ha llegado a dicha cota. Nótese que en la Fase D del extensómetro nº 2, no ha sido posible medir los desplazamientos en los primeros 5m bajo la superficie.

Se han realizado dos tipos de análisis:

- 1) **Análisis drenado:** Condiciones drenadas ($-\Delta p_w = 0$, donde $-\Delta p_w$ es el incremento de la presión de agua) para los materiales correspondientes a todas las unidades geotécnicas.
- 2) **Análisis no drenado-consolidado:**
 - a) En los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas menos permeables, que según las permeabilidades de la tabla 8.3 son Ra, Qa1-Qa2, PQ2 y PI2, se ha considerado, en cada fase de excavación, una primera subfase con condiciones no drenadas ($-\Delta \epsilon_v = 0$, donde $-\Delta \epsilon_v = -1/3 \Delta \epsilon_{ii}$ y $-\Delta \epsilon_{ii}$ son los incrementos de deformación principales), seguida de una segunda subfase de consolidación ($-\Delta p_w \rightarrow 0$), cuyo tiempo de duración se corresponde al periodo entre las respectivas fases de excavación (concretamente 64 días entre la Fase A y la Fase B, 55 días entre la Fase B y la Fase C y 274 días entre la Fase C y la Fase D). Tras la aplicación de la carga no drenada en la Fase D, no se considera ninguna fase de consolidación posterior. Asimismo, en las subfases de carga no drenada se ha considerado, en los materiales situados bajo el nivel freático y, por tanto, saturados, un límite de la tensión de cavitación del agua de 100 kN/m². Los materiales situados por encima del nivel freático se encuentran parcialmente saturados y el valor de la tensión de cavitación del agua será notablemente superior a los 100 kN/m². No obstante, de cara a simplificar el problema, se ha supuesto dichos materiales como secos, es decir, $S_r \approx 0$ y, por tanto, no se generan presiones de agua en los mismos durante la subfase de carga no drenada.
 - b) En los materiales correspondientes a las unidades geotécnicas más permeables, que según las permeabilidades de la tabla 8.3 son Qa3, PQ1 y PI1, se ha considerado condiciones drenadas ($-\Delta p_w = 0$) en las dos subfases de cada fase de cálculo descritas en el punto (a).

En las simulaciones con el modelo *EPHYSS* ha sido necesario modificar los valores de algunos de los parámetros avanzados descritos en el apartado 4.4.5 del capítulo 4 respecto a los que vienen por defecto en Plaxis. Una vez establecidos los valores de dichos parámetros, se han aplicado estos mismos en las simulaciones con el modelo *HS-SS*.

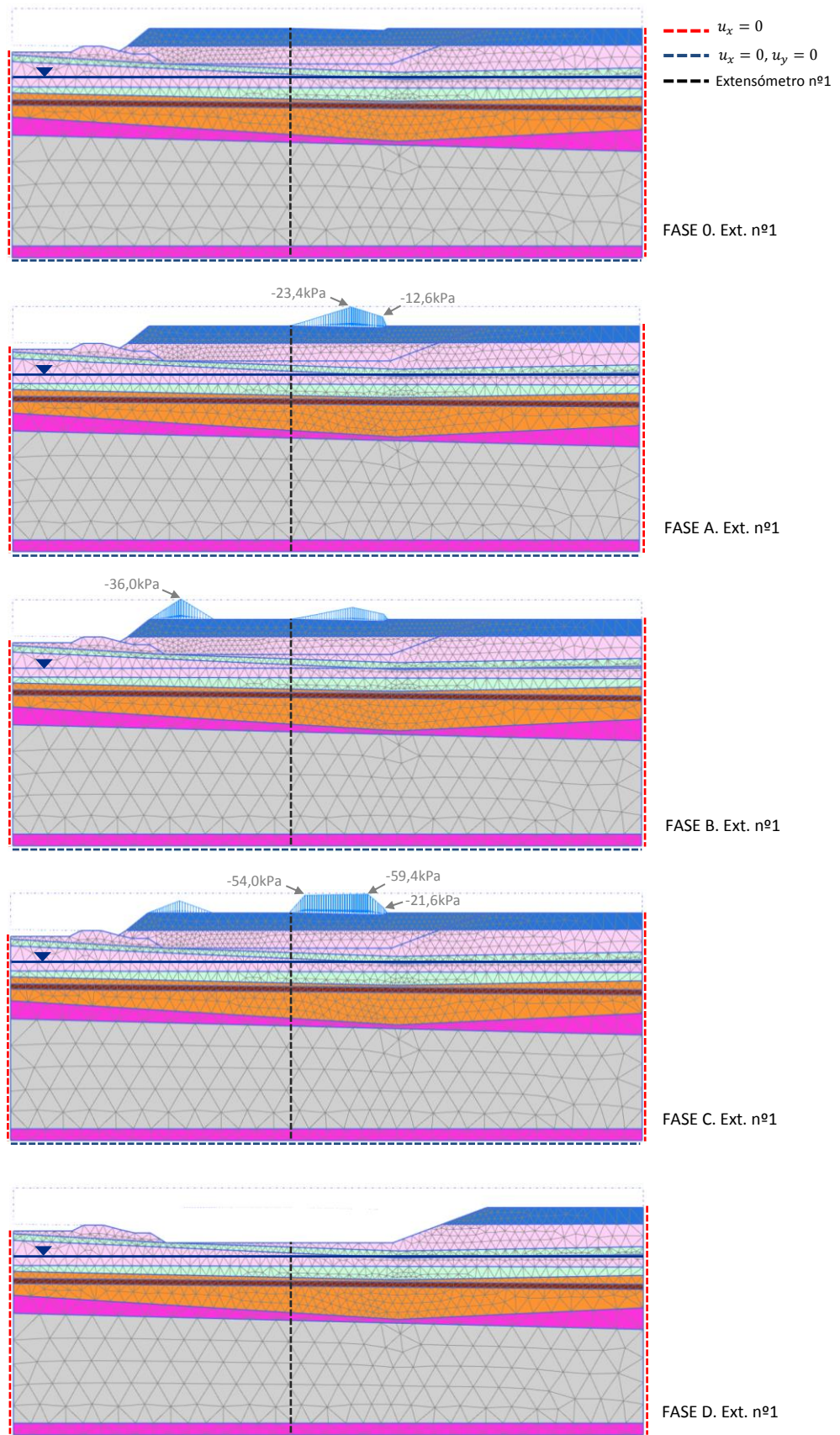


Figura 8.21. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº1. Dimensiones $H=161m$, $V=63m$.

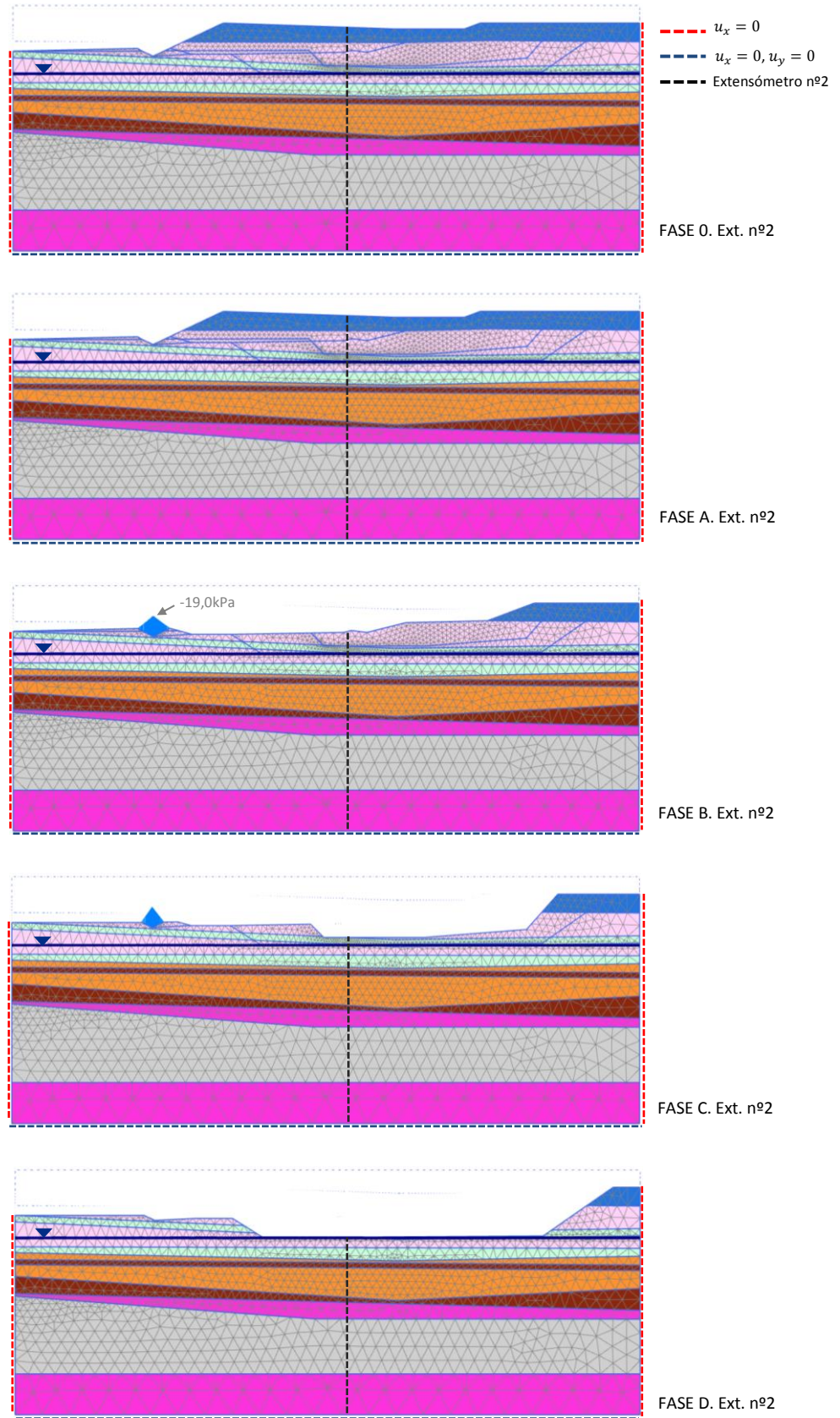


Figura 8.22. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº2. Dimensiones $H=161m$, $V=63m$.

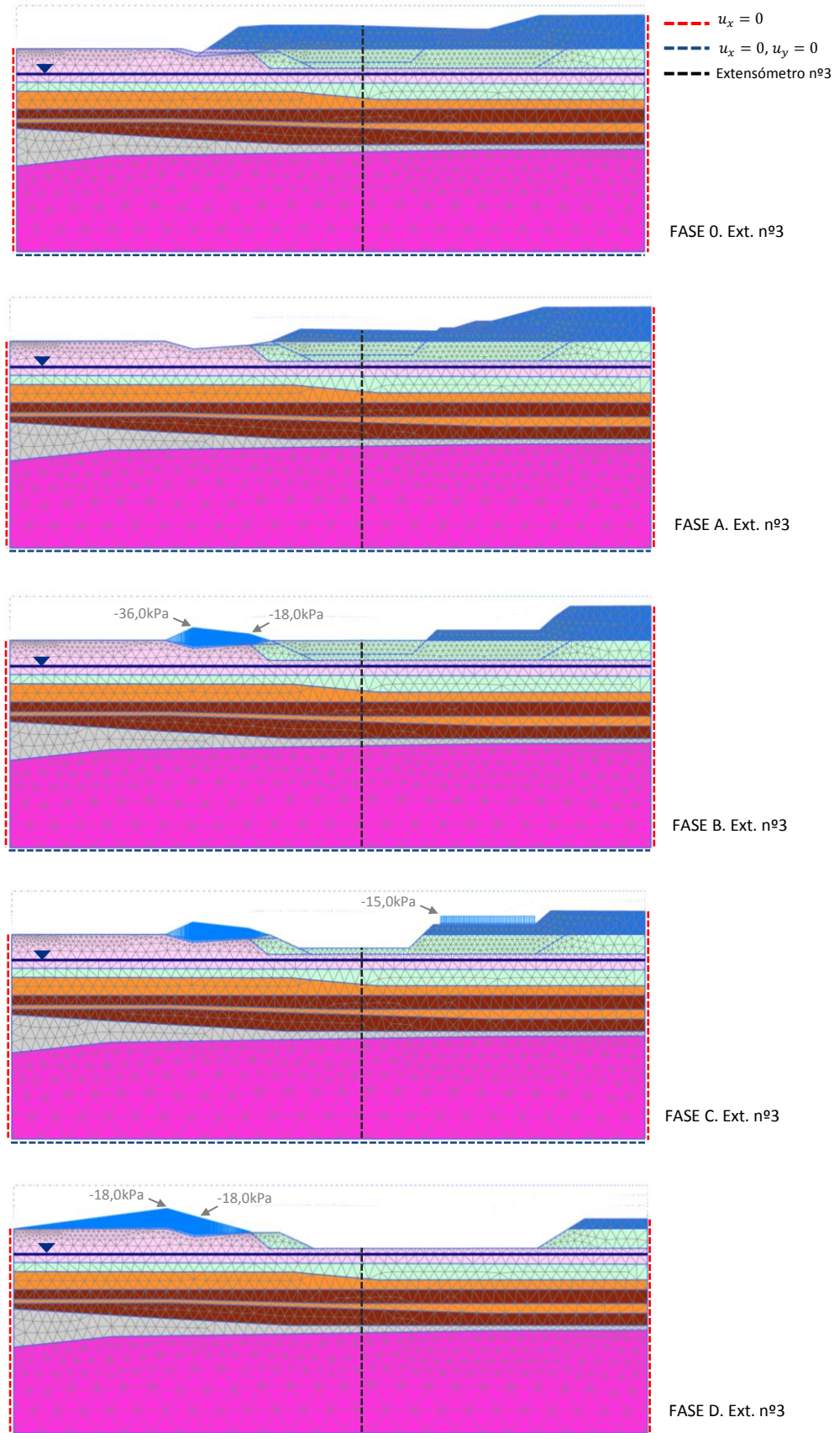


Figura 8.23. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº3. $H=161m$, $V=63m$.

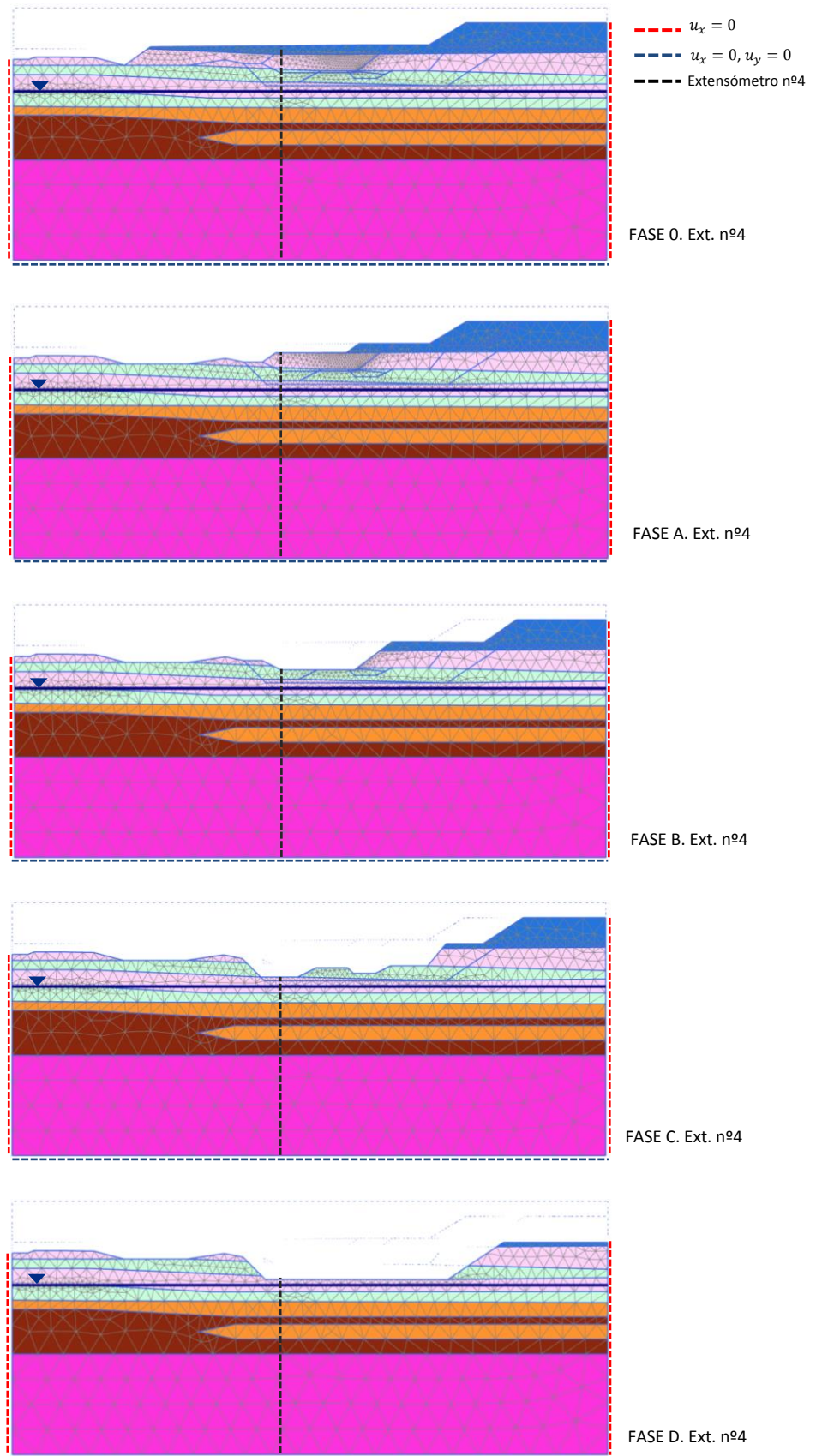


Figura 8.24. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección transversal por el Ext. nº4. $H=160m$, $V=68m$.

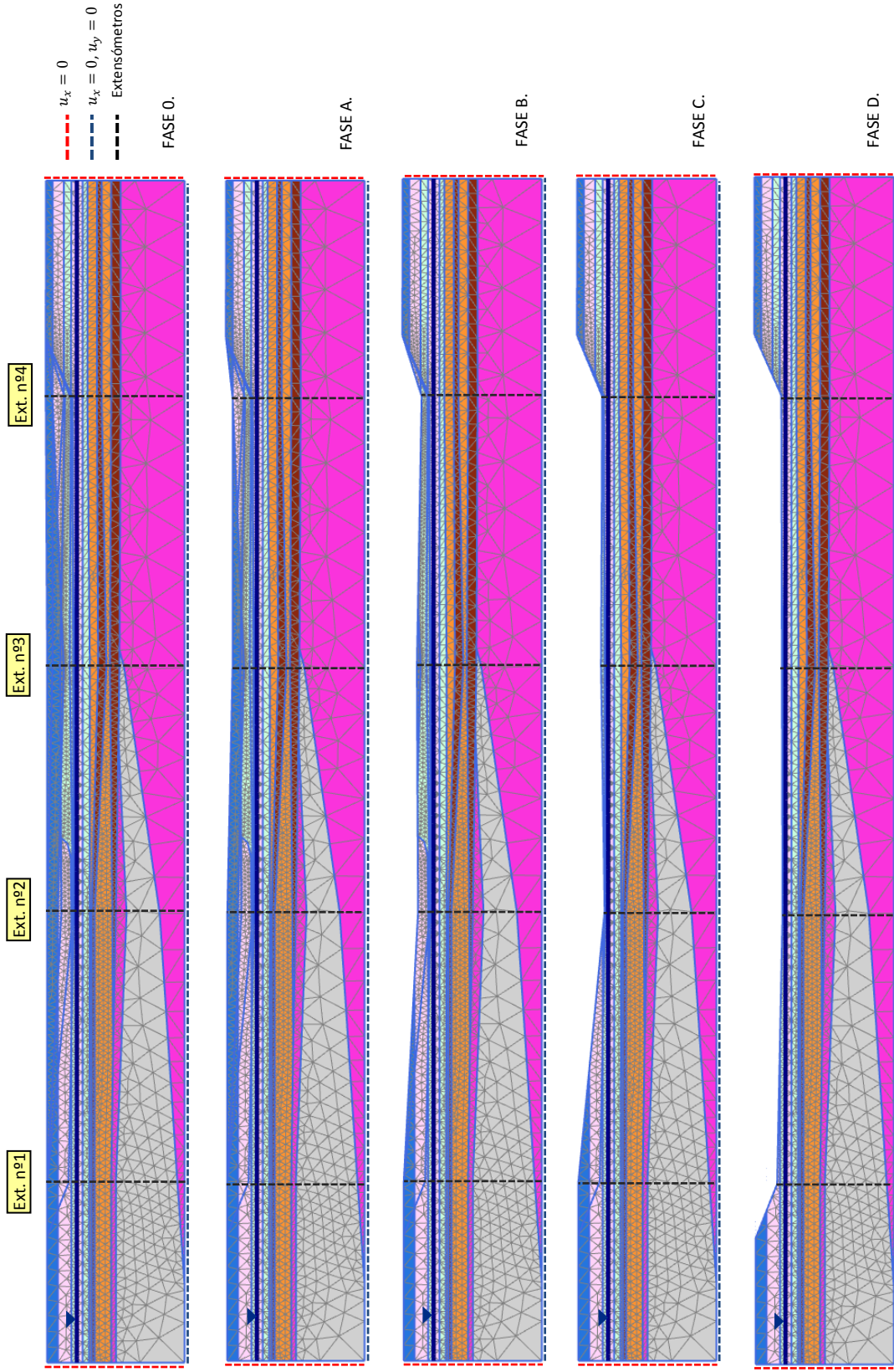


Figura 8.25. Geometría, cargas, materiales, nivel freático, condiciones de contorno, malla y fases de excavación del modelo numérico correspondiente a la sección longitudinal por todos los extensómetros. $H=500\text{m}$, $V=59\text{m}$.

8.8. Resultados de las simulaciones numéricas

En las figuras 8.26, 8.30, 8.34 y 8.38 y en las figuras 8.27, 8.31, 8.35 y 8.39 se muestran las medidas de los extensómetros nº1 a nº4, así como los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas del análisis drenado y del análisis no drenado-consolidado de las secciones transversales en las que se han utilizado, respectivamente, los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

En las figuras 8.28, 8.32, 8.36 y 8.40 y en las figuras 8.29, 8.33, 8.37 y 8.41 se muestran las medidas de los extensómetros nº1 a nº4, así como los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas del análisis drenado y del análisis no drenado-consolidado de la sección longitudinal en las que se han utilizado, respectivamente, los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

En las figuras 8.42, 8.45, 8.48, 8.51 y 8.54, en las figuras 8.43, 8.46, 8.49, 8.52 y 8.55 y en las figuras 8.44, 8.47, 8.50, 8.53 y 8.56, se muestran los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* de las diferentes secciones transversales y longitudinal, para los análisis drenados, para las fases no drenadas de los análisis no drenados-consolidados y para las fases de consolidación de los análisis no drenados-consolidados, respectivamente, donde G_t^{ap} es el módulo de corte tangente aparente del suelo y $G_{t,ur}$ es su módulo de corte (hipo)elástico tangente mínimo. Debe tenerse en cuenta el efecto que genera, en los gráficos de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$, la diferencia entre el valor $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* y el valor G_0^{ref} del modelo *HS-SS*, y la diferencia entre el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E'_{t,ur}, K_s^{ref}, m_1)$ del modelo *EPHYSS* y el valor $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E'_{t,ur}, \nu'_{ur})$ del modelo *HS-SS*, debidas ambas al ajuste descrito en el apartado 8.5 con objeto de tener un perfil de rigideces inicial en el terreno parecido en las simulaciones con los dos modelos, así como variaciones de estas similares con el nivel de tensiones. Para facilitar la comparación, en las figuras se proporcionan los valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ correspondientes a la fase inicial de la simulación.

En las figuras 8.57 a 8.61 se muestra el valor de los desplazamientos verticales que resultan de las simulaciones en las secciones transversales y en la sección longitudinal con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* en la Fase D del análisis drenado y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado.

Finalmente, en las figuras 8.62 a 8.66 y en la figura 8.67 se muestra, respectivamente, la distribución del valor del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ y el valor máximo de dicho exceso $(-\Delta p_w)_{max}$ en las subfases con carga no drenada de las fases de excavación seleccionadas en las secciones transversales y longitudinal, que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.

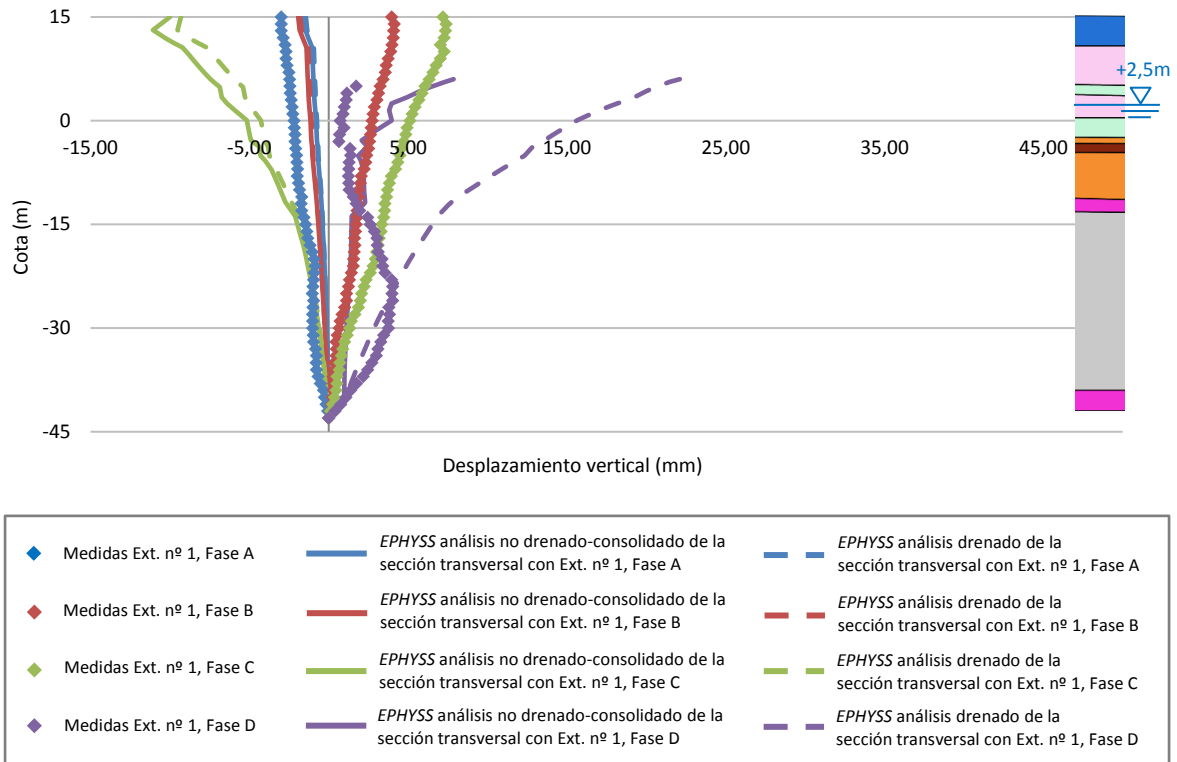


Figura 8.26. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección transversal correspondiente.

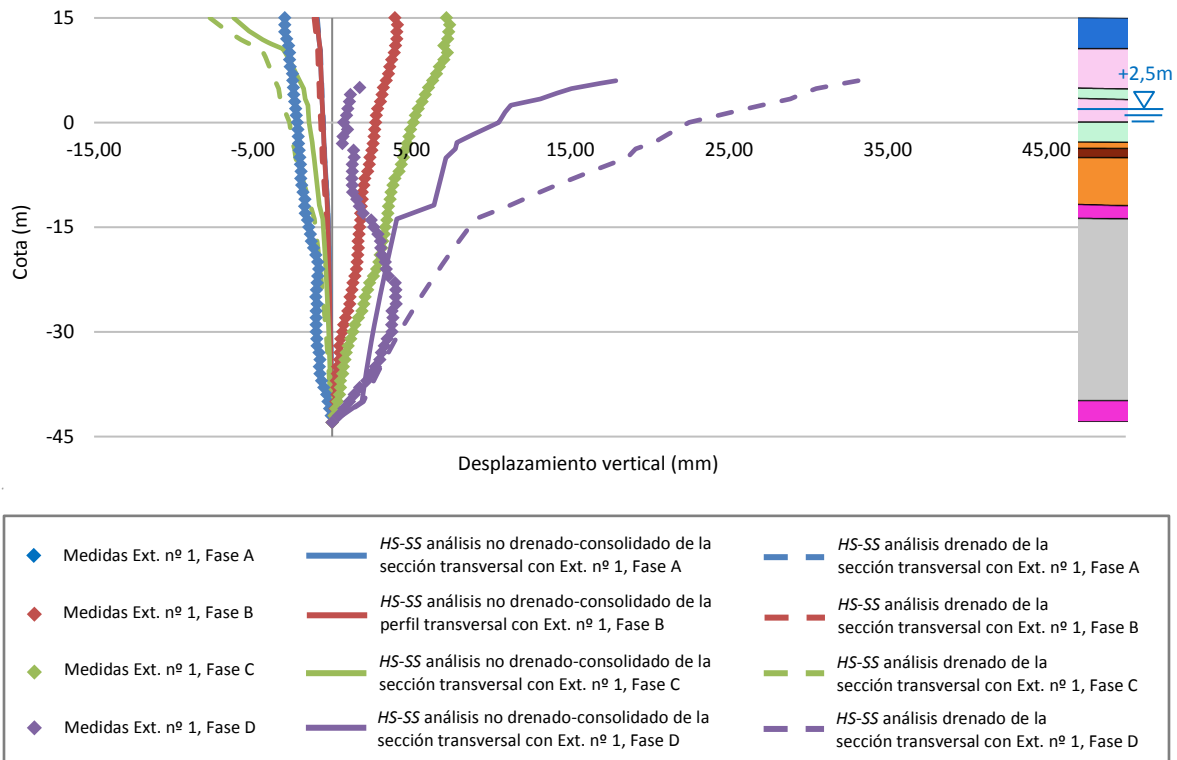


Figura 8.27. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección transversal correspondiente.

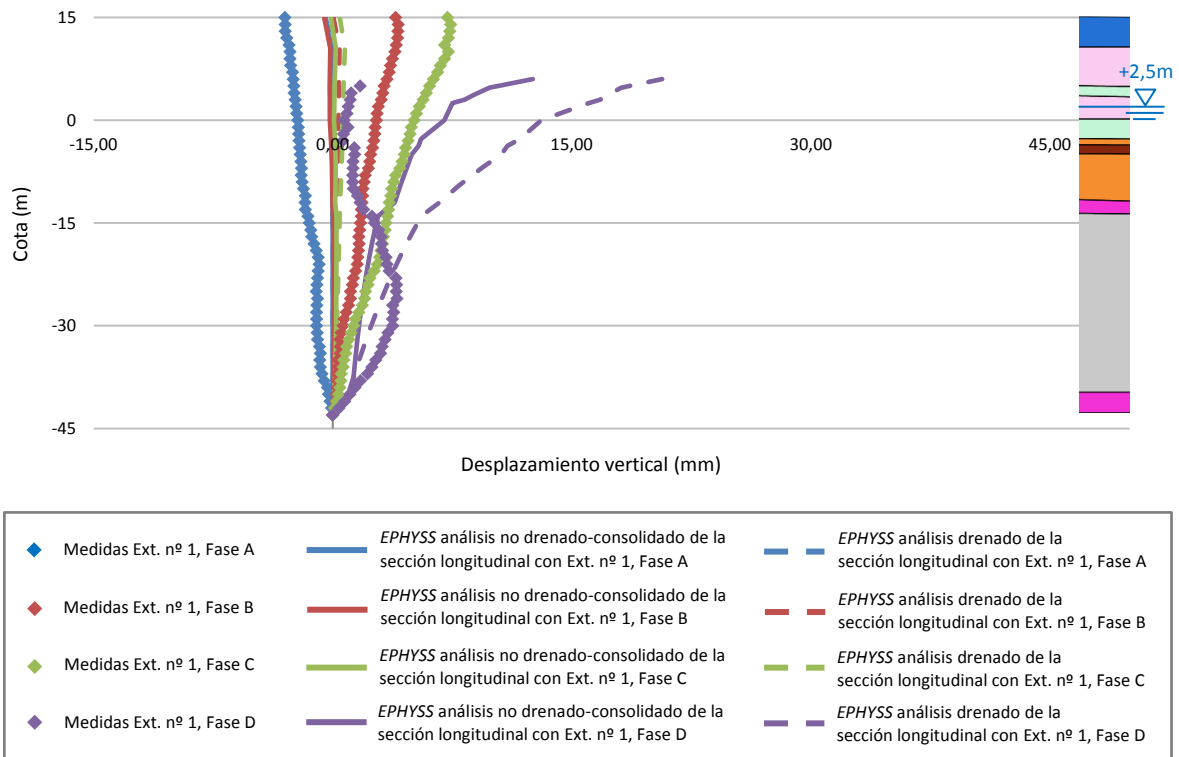


Figura 8.28. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección longitudinal.

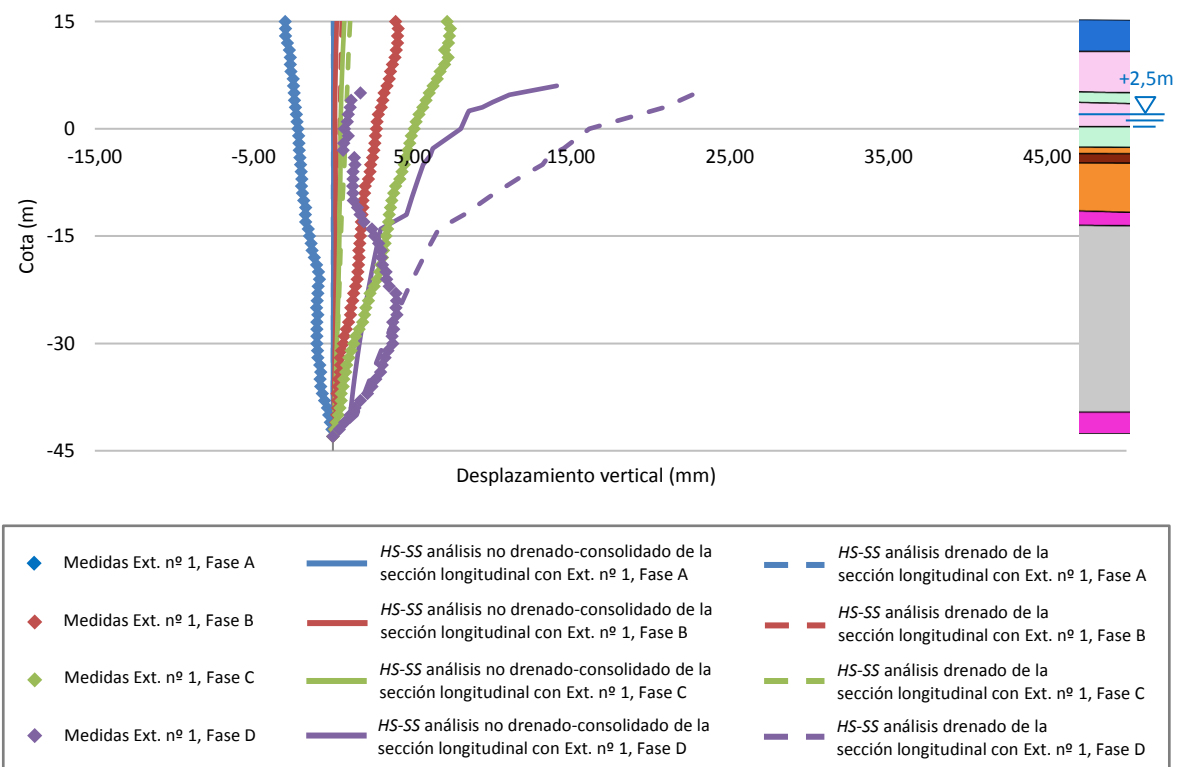


Figura 8.29. Medidas del extensómetro nº 1 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección longitudinal.

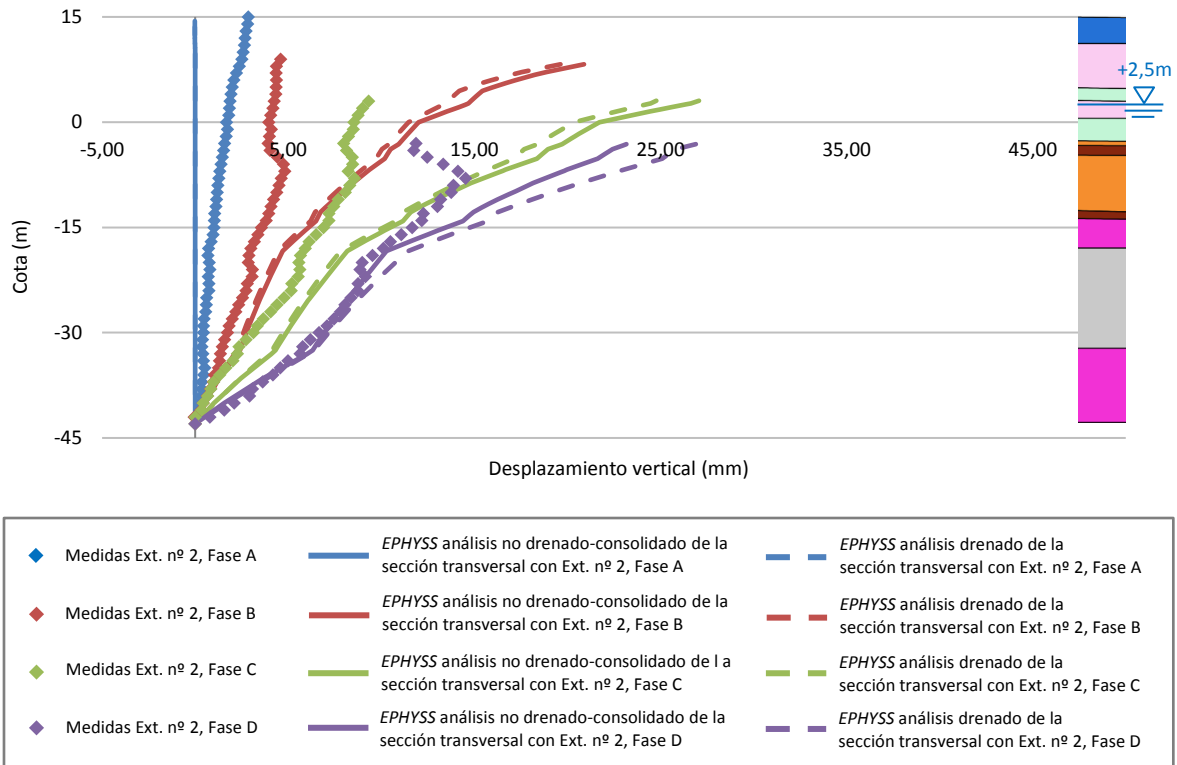


Figura 8.30. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección transversal correspondiente.

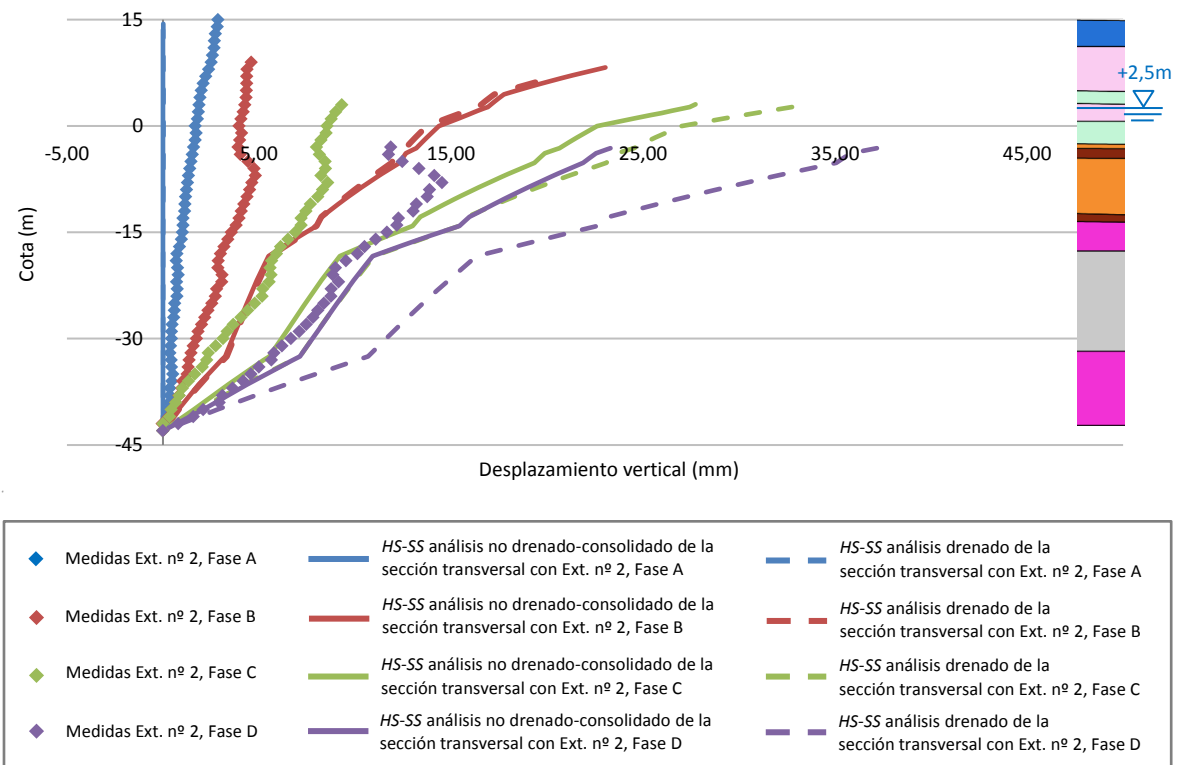


Figura 8.31. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección transversal correspondiente.

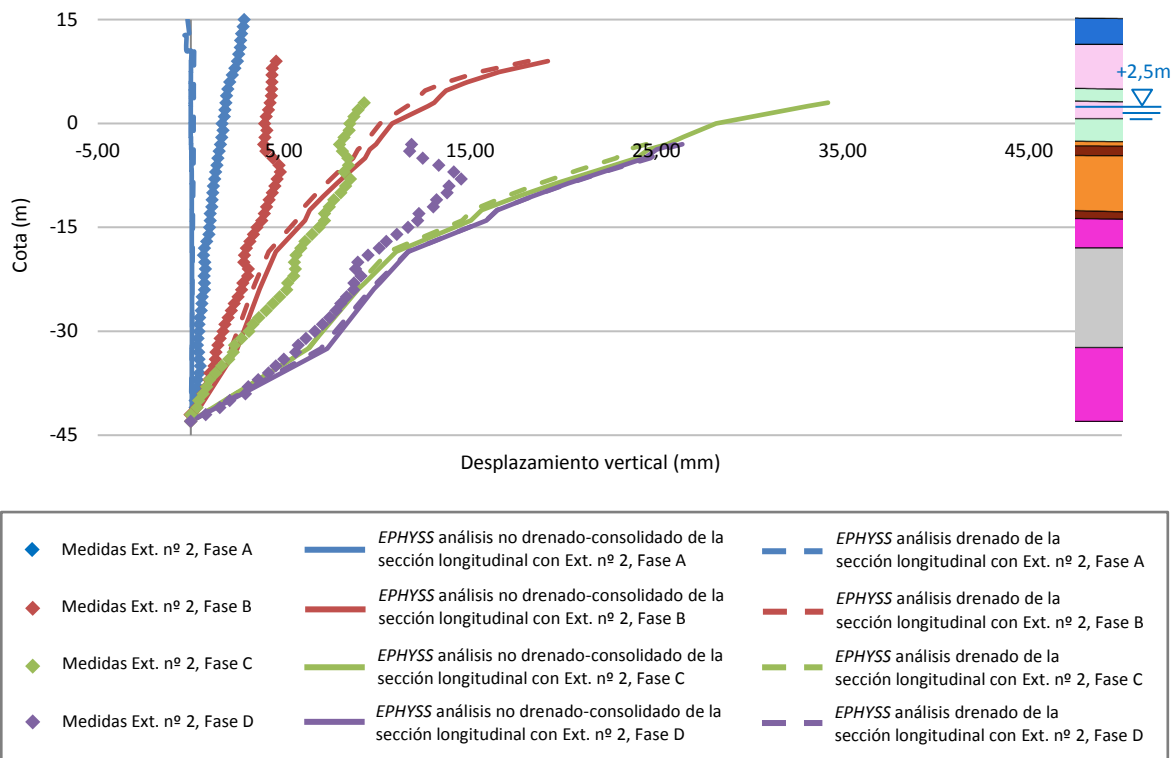


Figura 8.32. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección longitudinal.

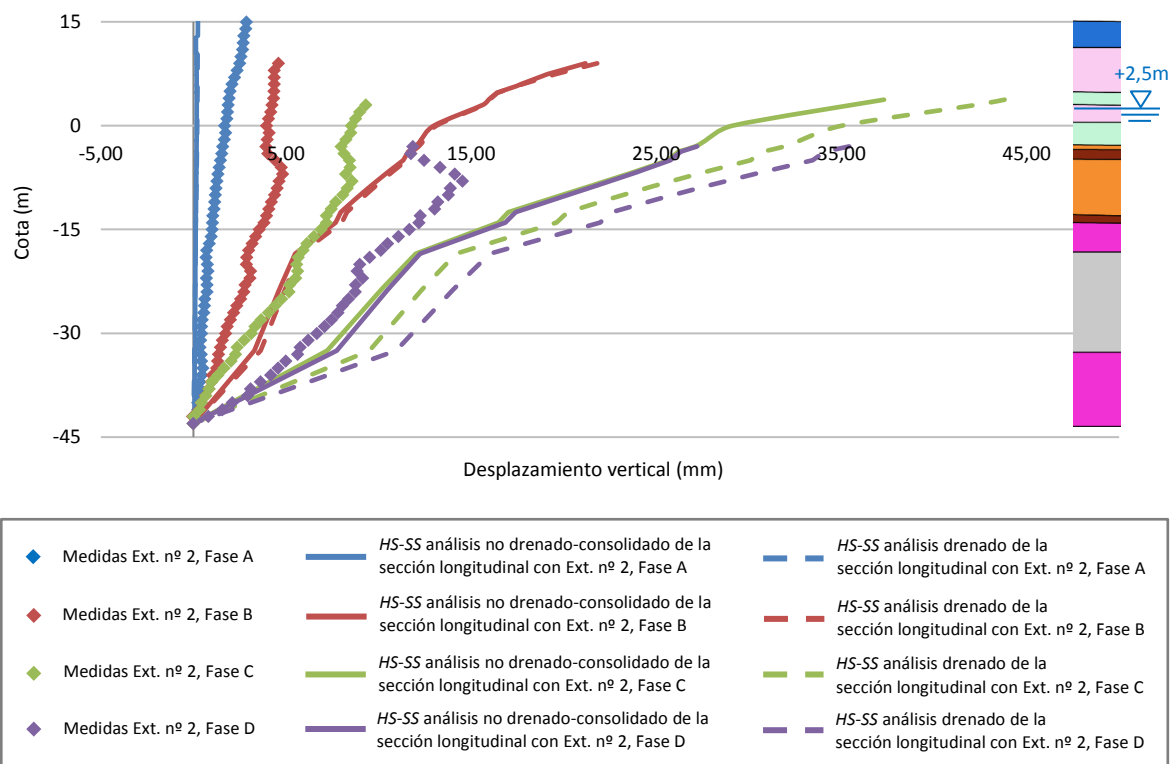


Figura 8.33. Medidas del extensómetro nº 2 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección longitudinal.

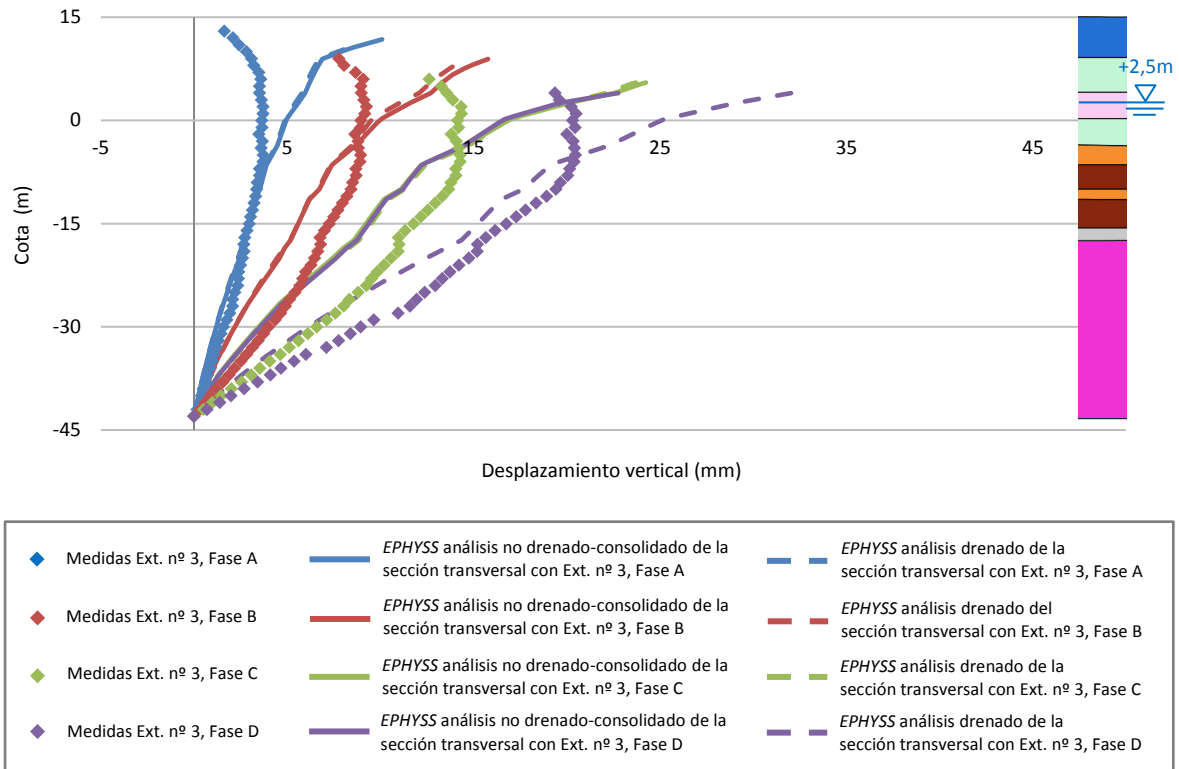


Figura 8.34. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección transversal correspondiente.

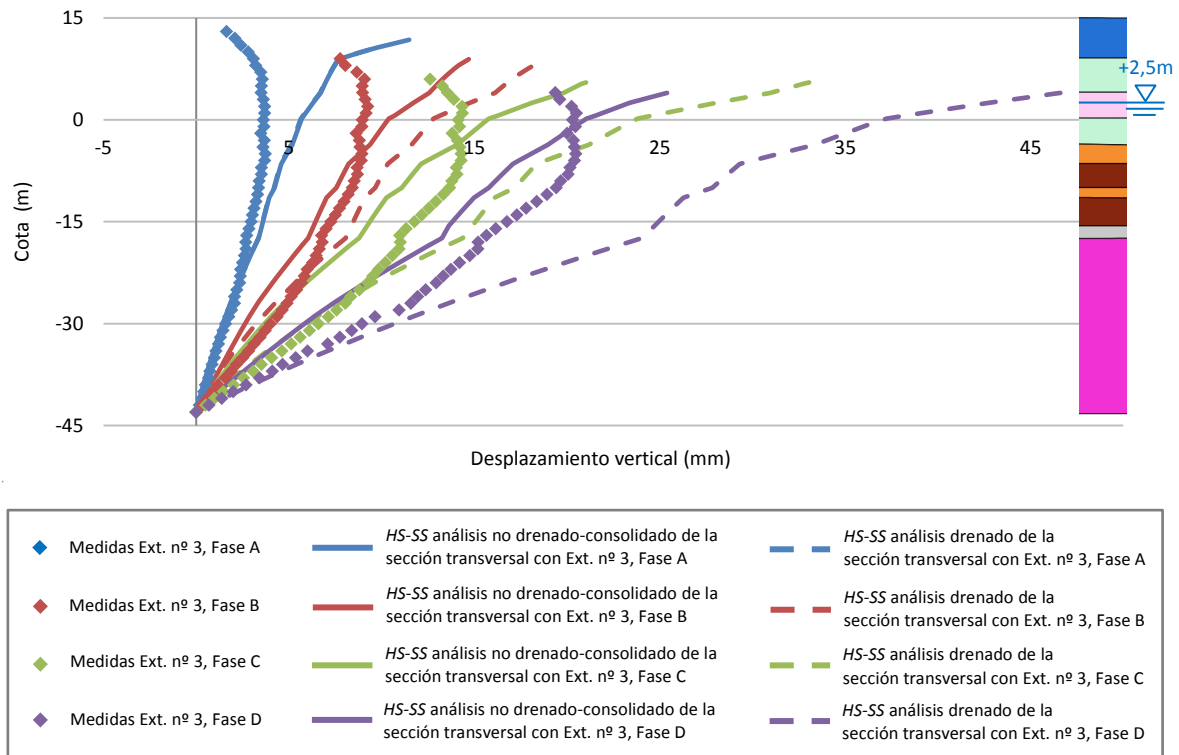


Figura 8.35. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección transversal correspondiente.

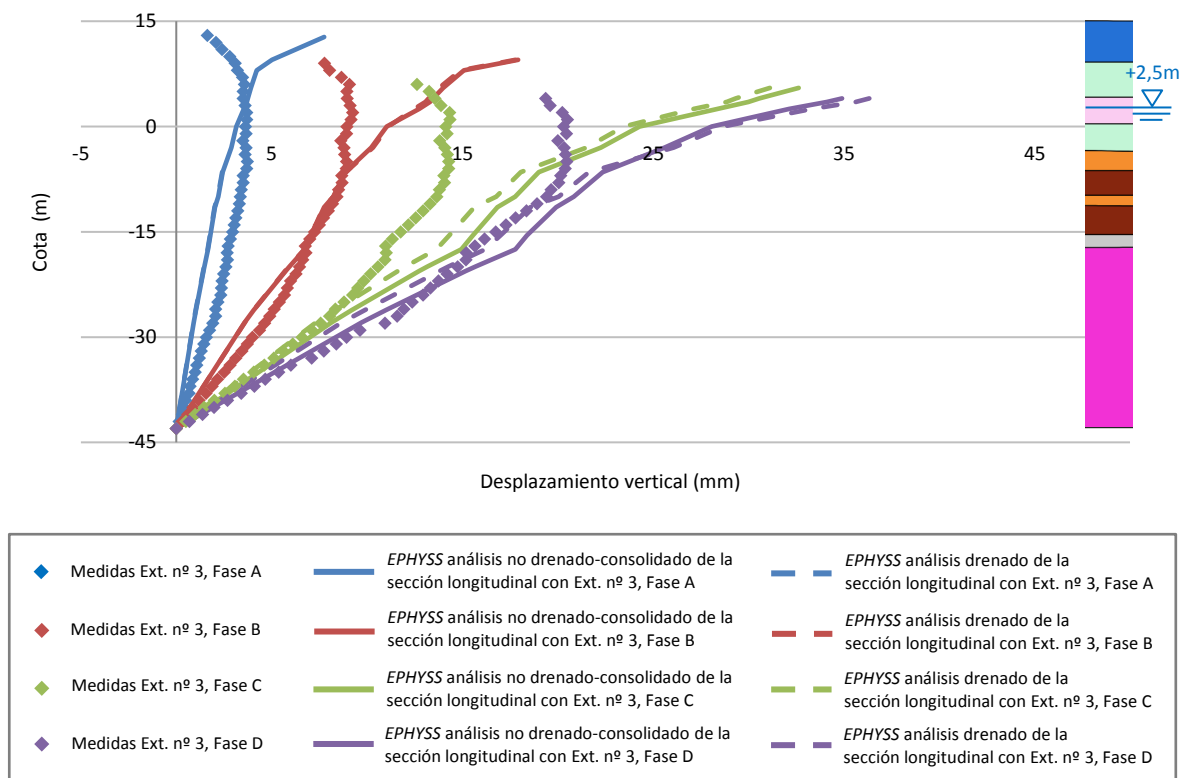


Figura 8.36. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección longitudinal.

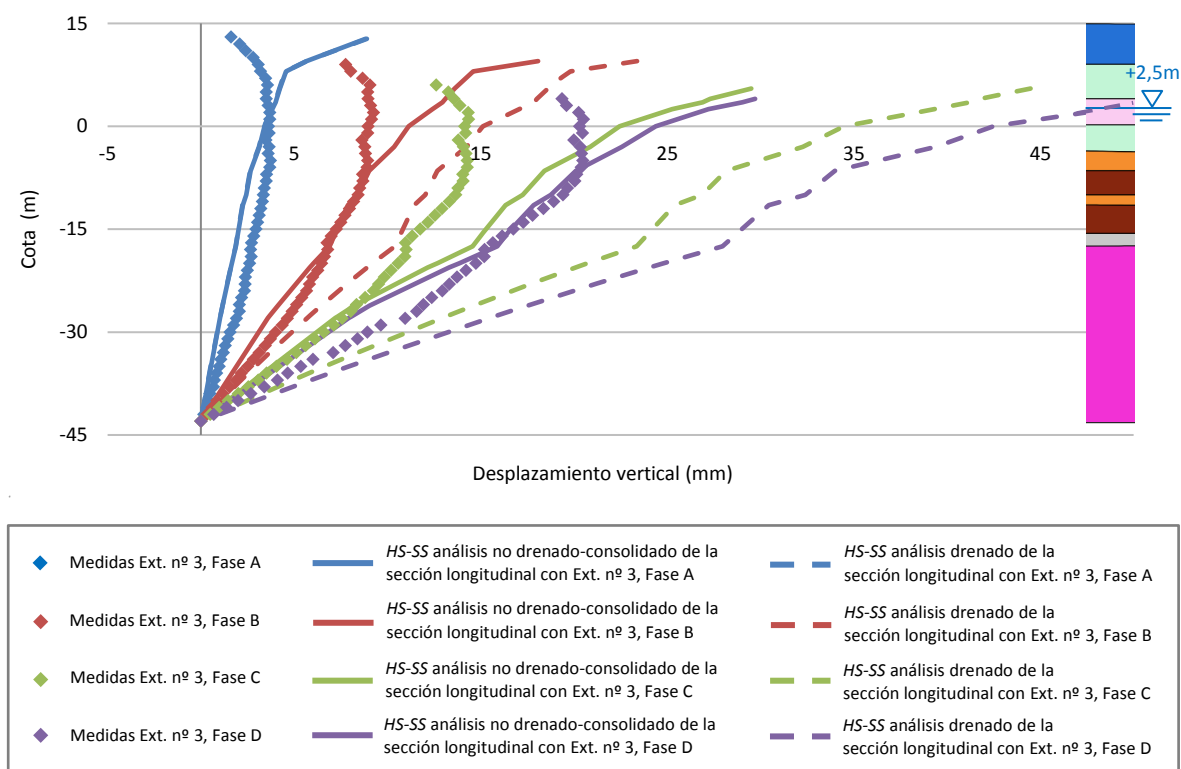
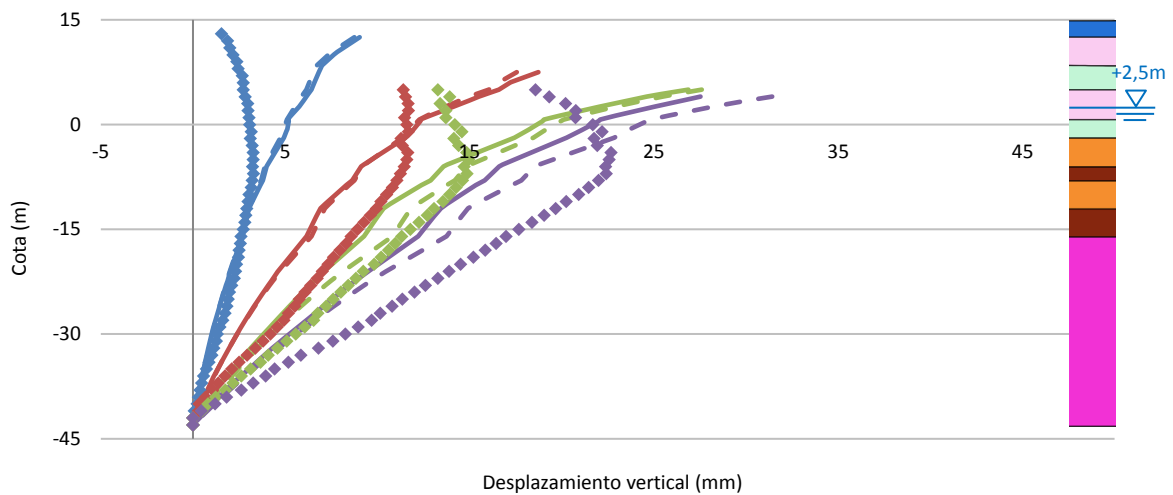
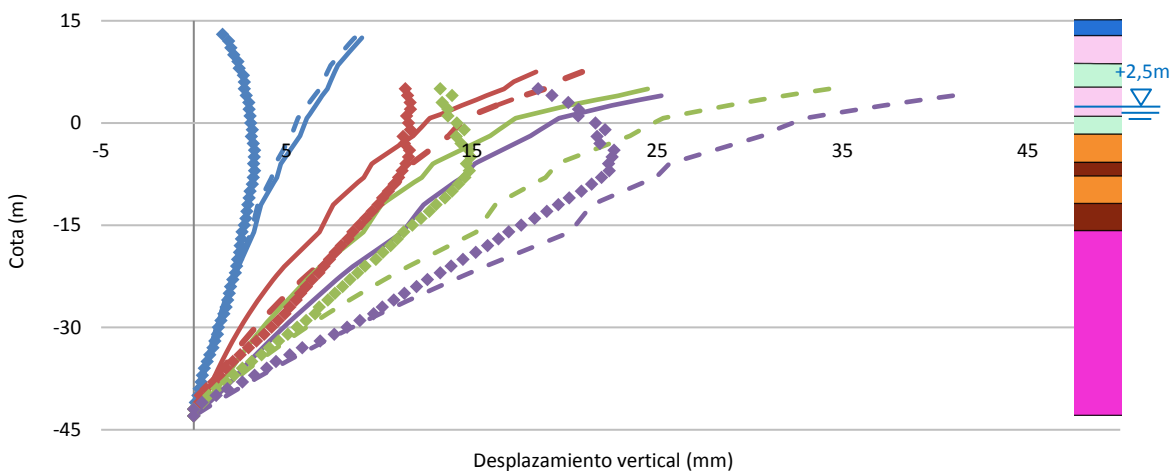


Figura 8.37. Medidas del extensómetro nº 3 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección longitudinal.



◆ Medidas Ext. nº 4, Fase A	— EPHYSS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase A	— EPHYSS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase A
◆ Medidas Ext. nº 4, Fase B	— EPHYSS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase B	— EPHYSS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase B
◆ Medidas Ext. nº 4, Fase C	— EPHYSS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase C	— EPHYSS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase C
◆ Medidas Ext. nº 4, Fase D	— EPHYSS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase D	— EPHYSS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase D

Figura 8.38. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección transversal correspondiente.



◆ Medidas Ext. nº 4, Fase A	— HS-SS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase A	— HS-SS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase A
◆ Medidas Ext. nº 4, Fase B	— HS-SS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase B	— HS-SS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase B
◆ Medidas Ext. nº 4, Fase C	— HS-SS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase C	— HS-SS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase C
◆ Medidas Ext. nº 4, Fase D	— HS-SS análisis no drenado-consolidado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase D	— HS-SS análisis drenado de la sección transversal con Ext. nº 4, Fase D

Figura 8.39. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección transversal correspondiente.

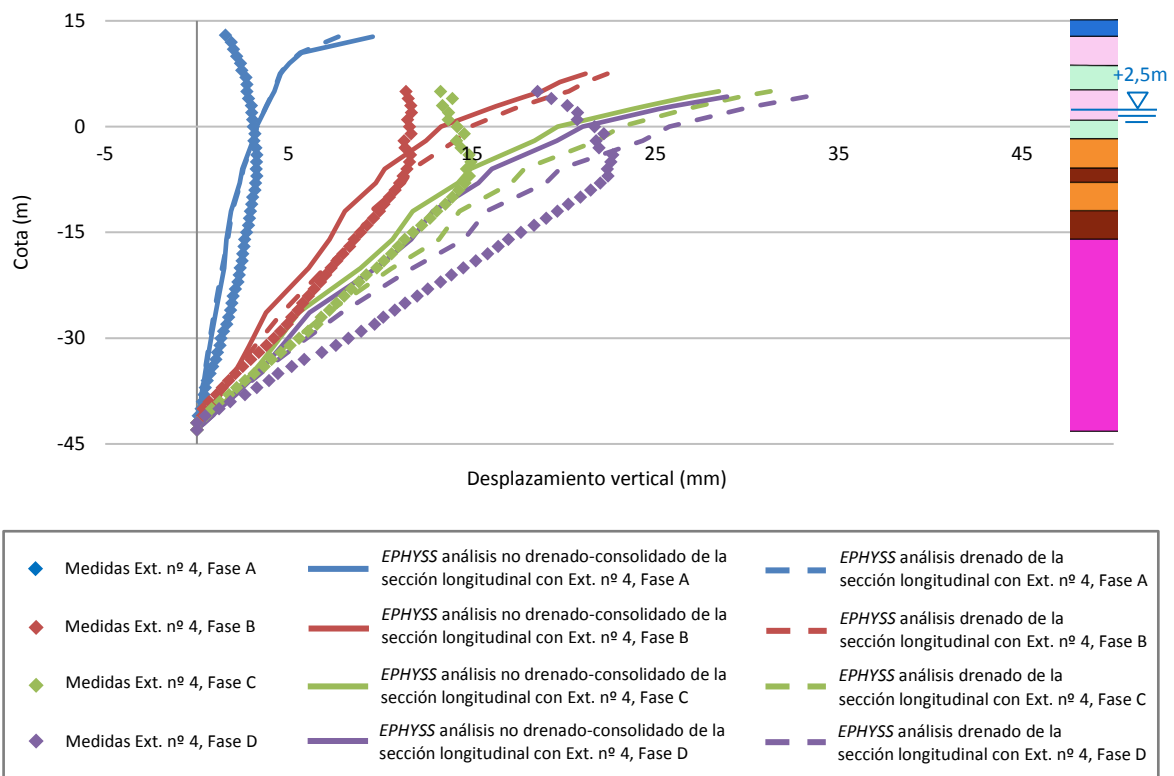


Figura 8.40. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo EPHYSS, en la sección longitudinal.

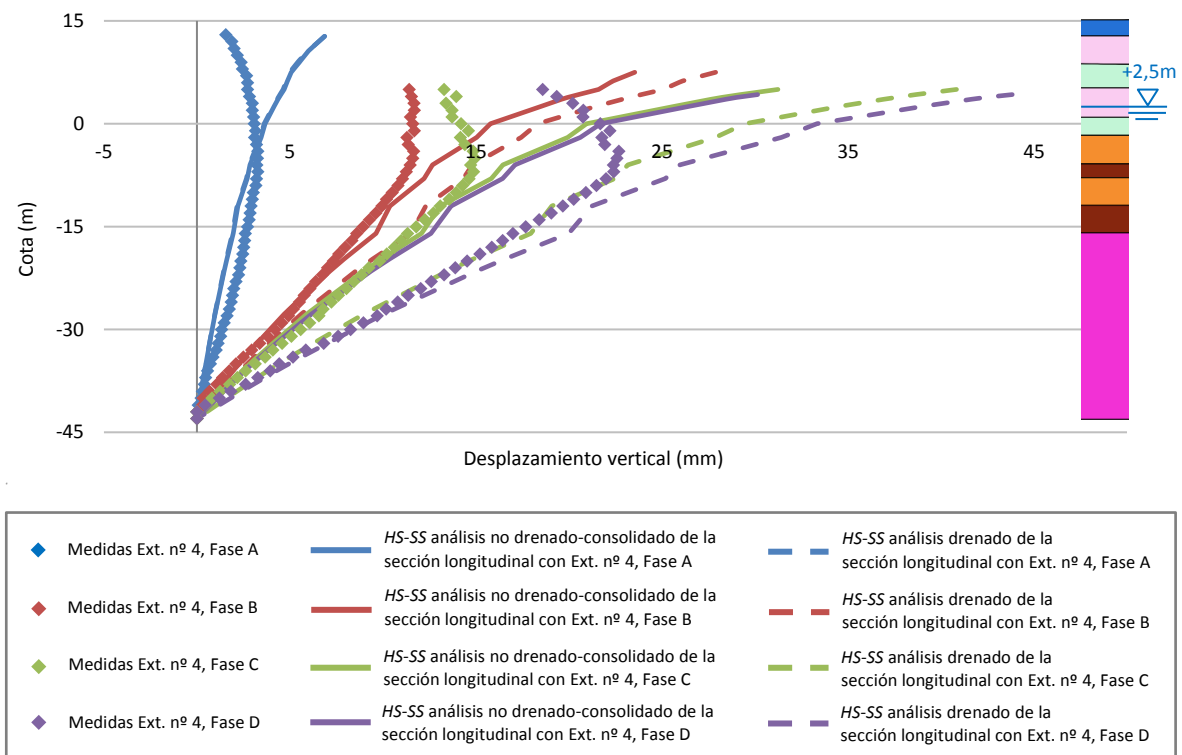


Figura 8.41. Medidas del extensómetro nº 4 y simulaciones numéricas drenadas y no drenadas-consolidadas, con el modelo HS-SS, en la sección longitudinal.

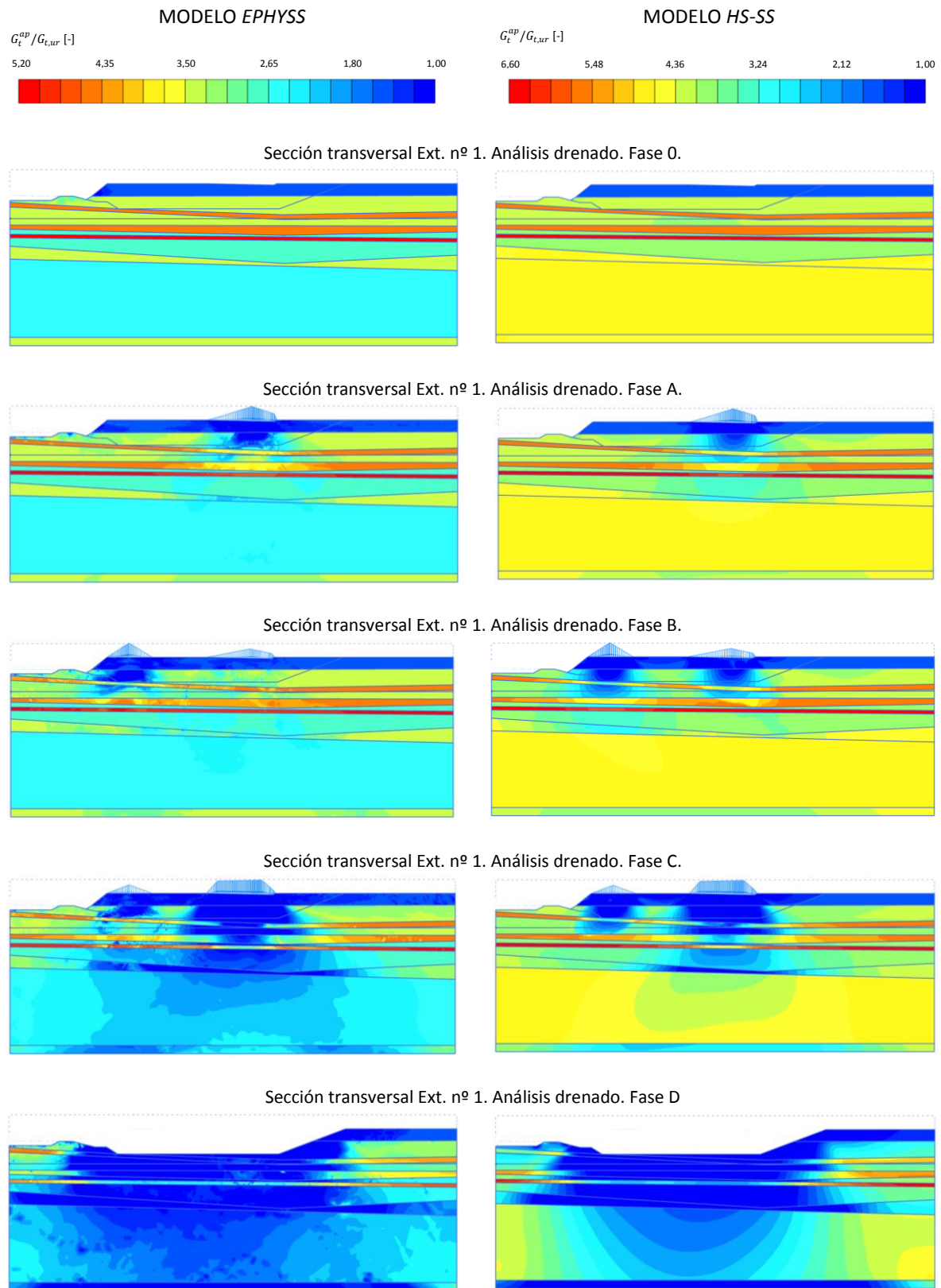


Figura 8.42. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en el análisis drenado.

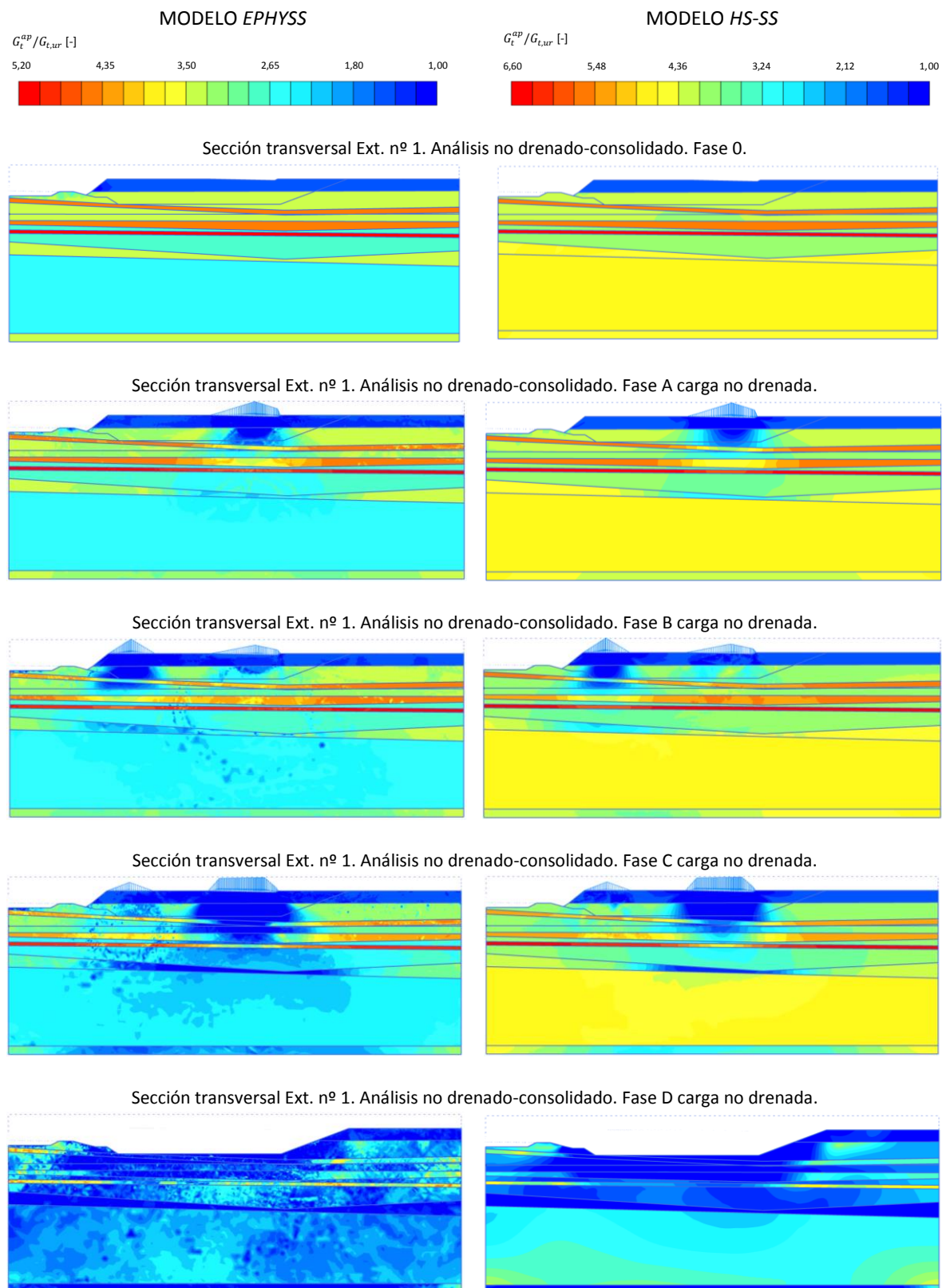


Figura 8.43. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.

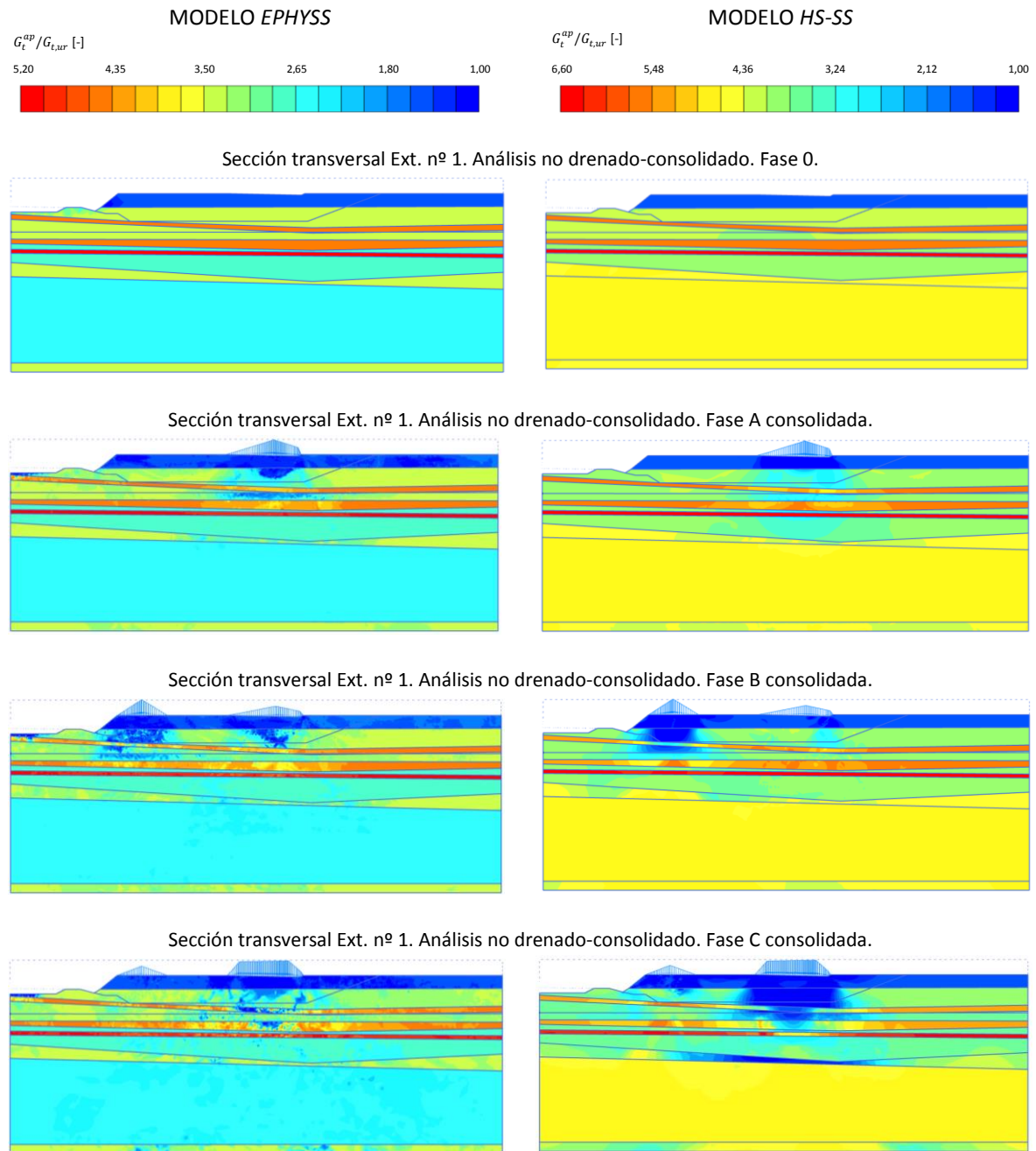


Figura 8.44. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.

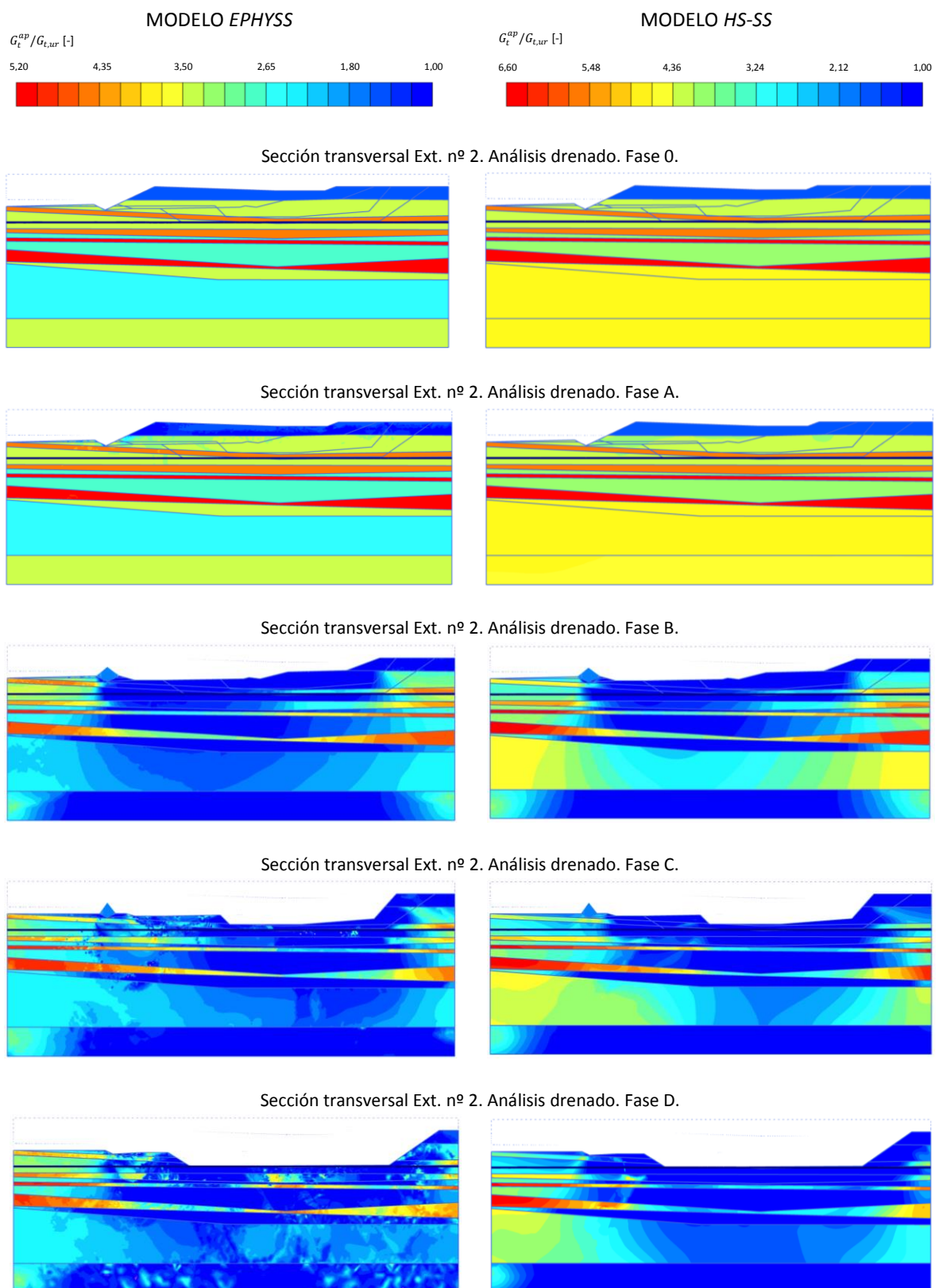


Figura 8.45. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en el análisis drenado.

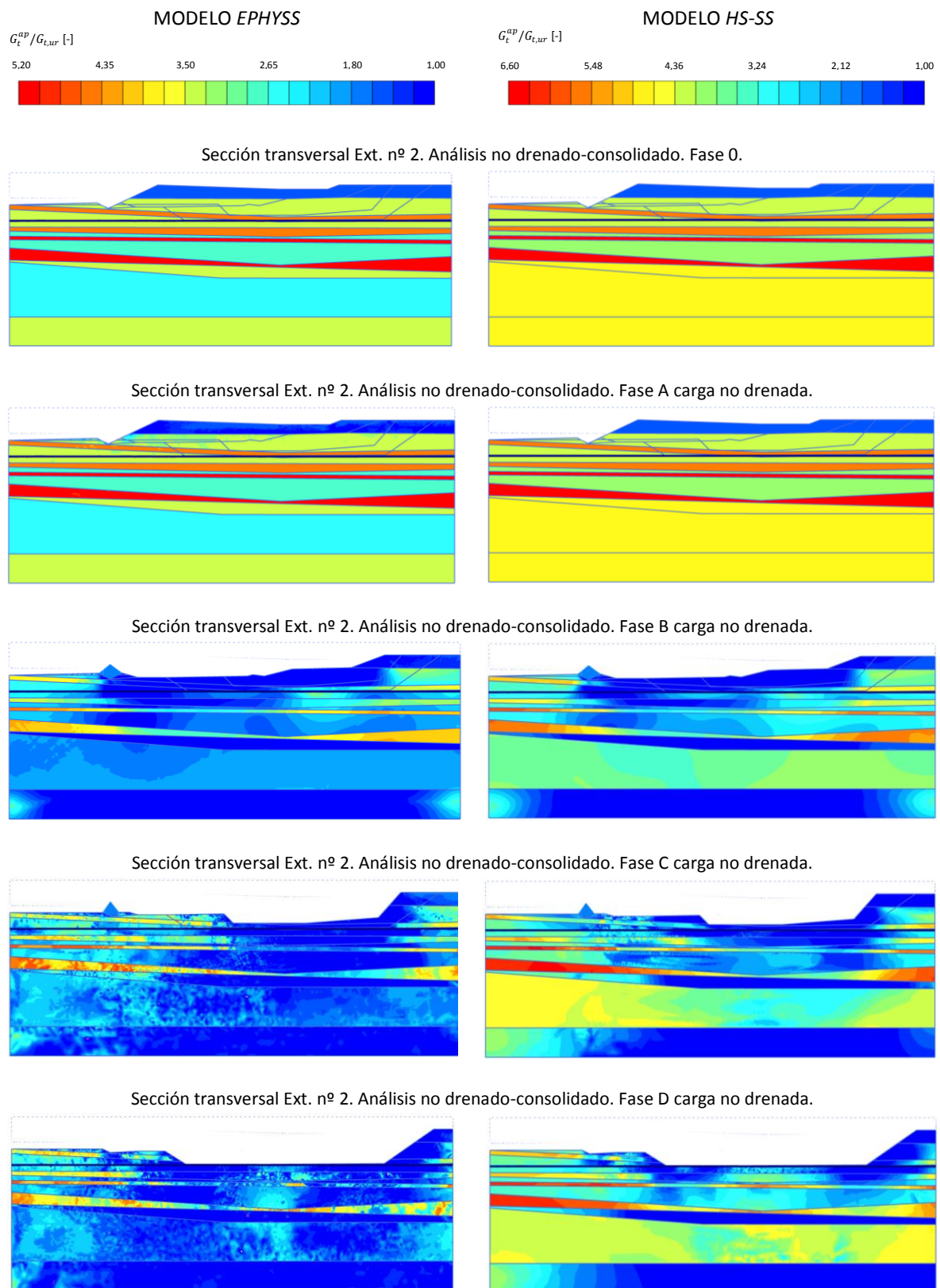


Figura 8.46. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.

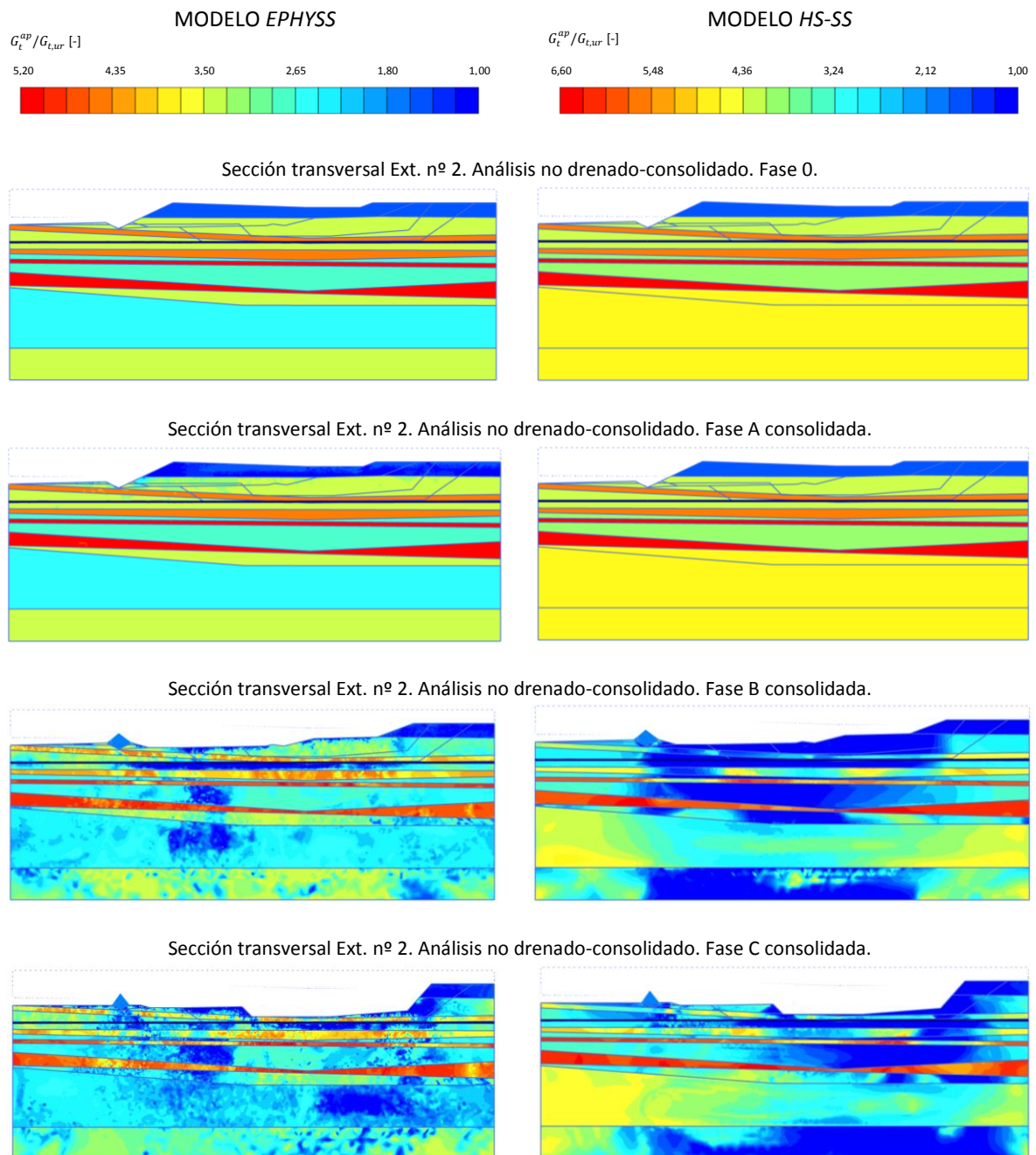


Figura 8.47. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.

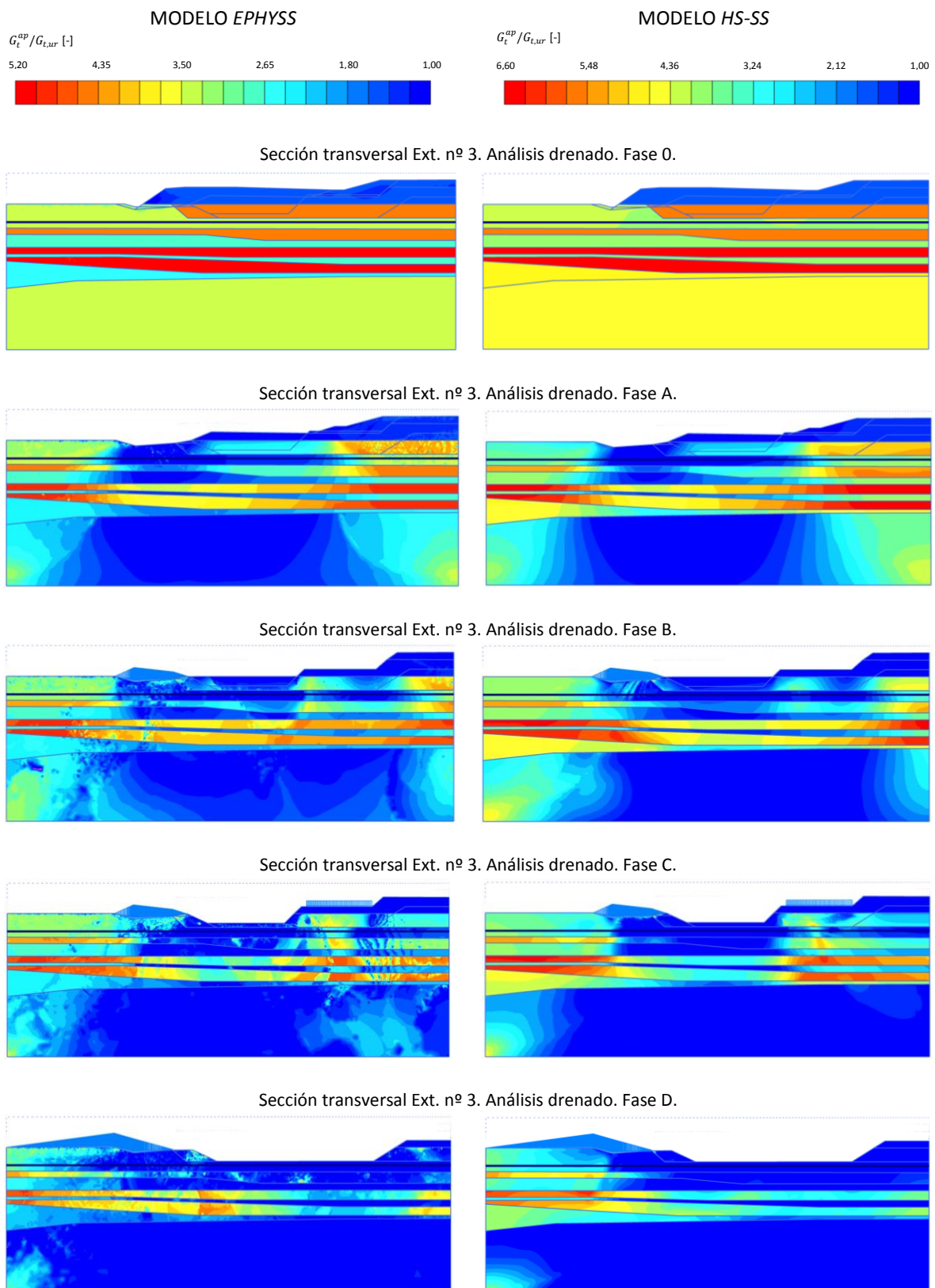


Figura 8.48. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en el análisis drenado.

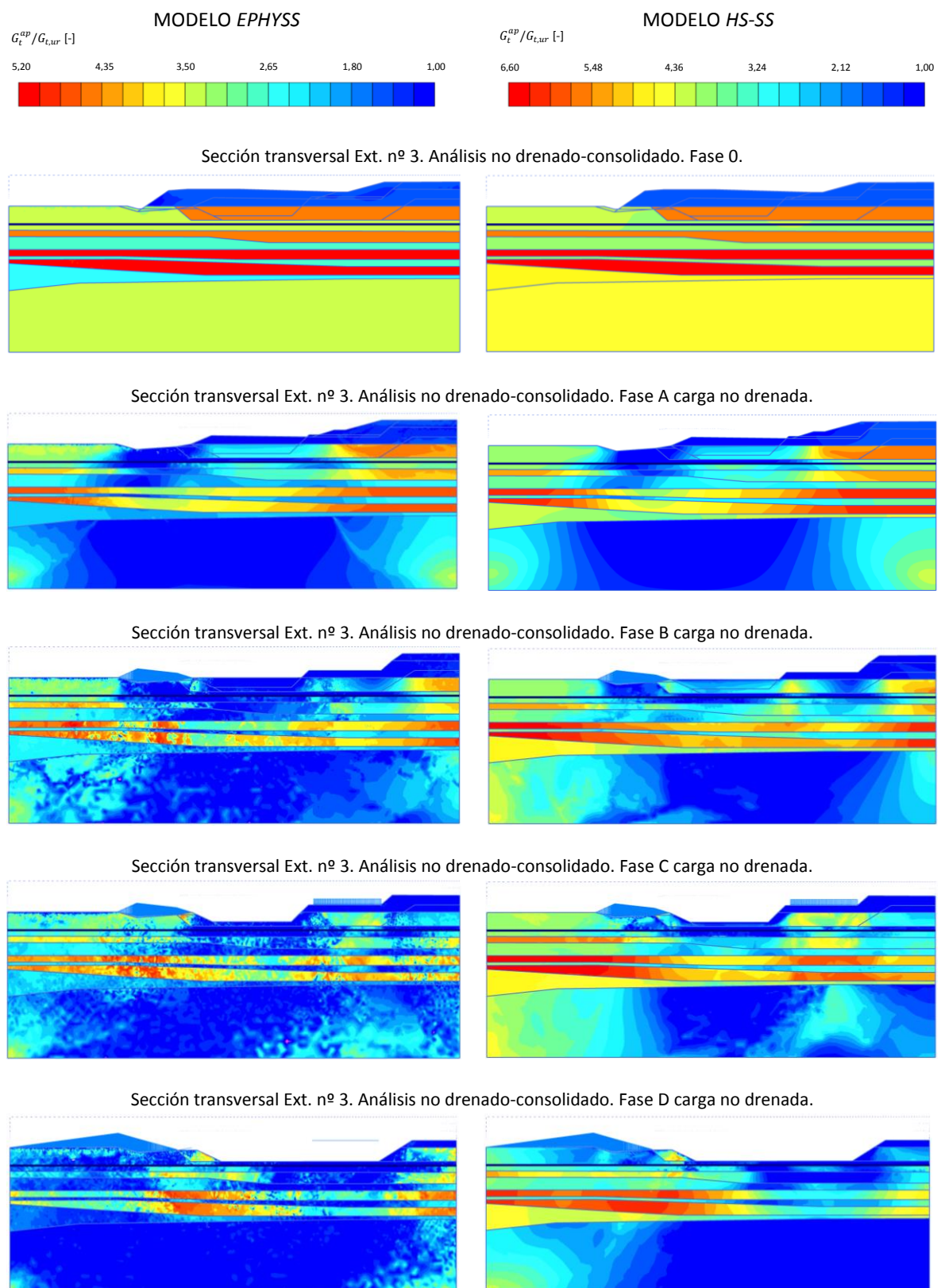


Figura 8.49. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.

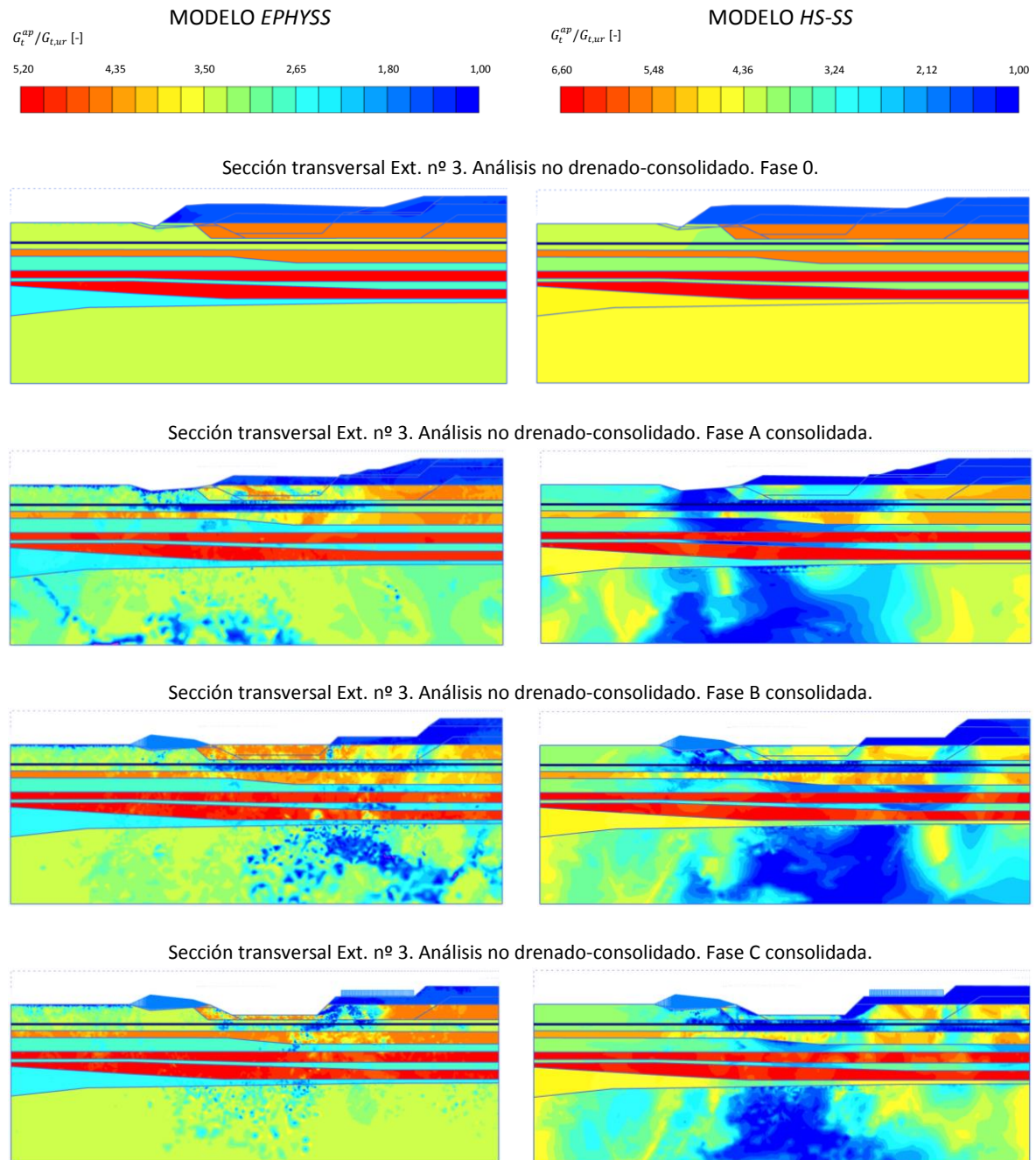


Figura 8.50. Valores de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.

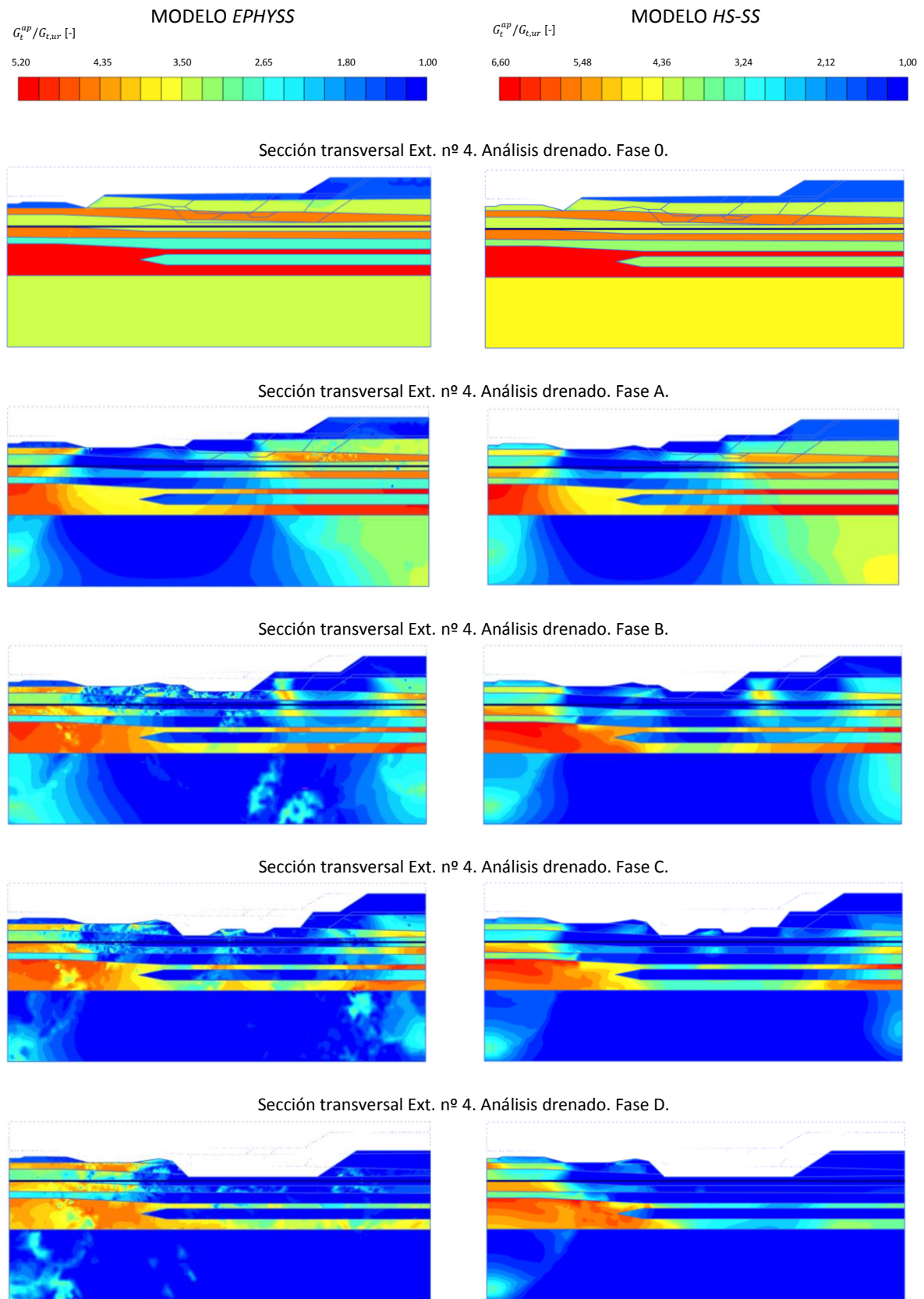


Figura 8.51. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en el análisis drenado.

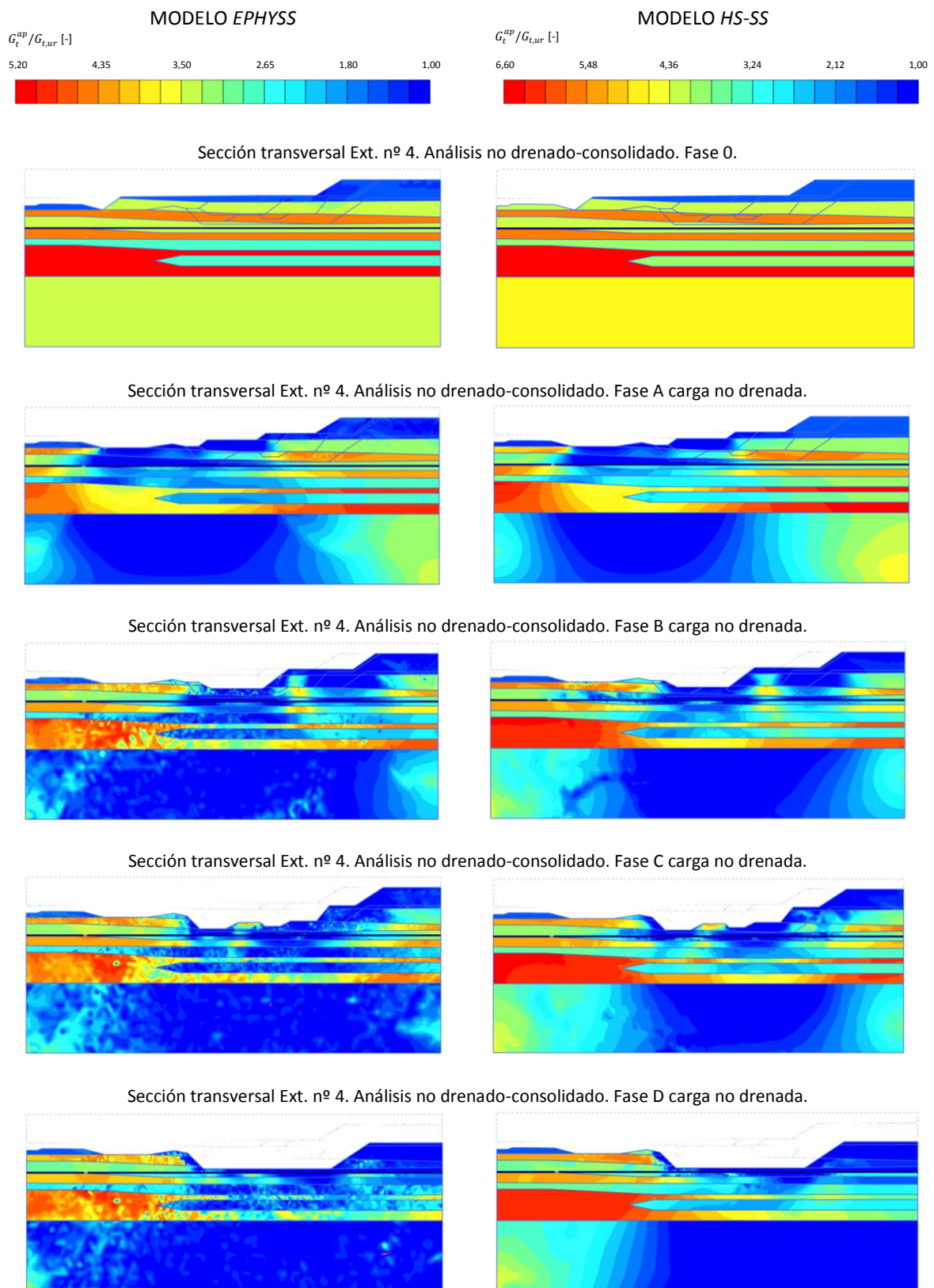


Figura 8.52. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.

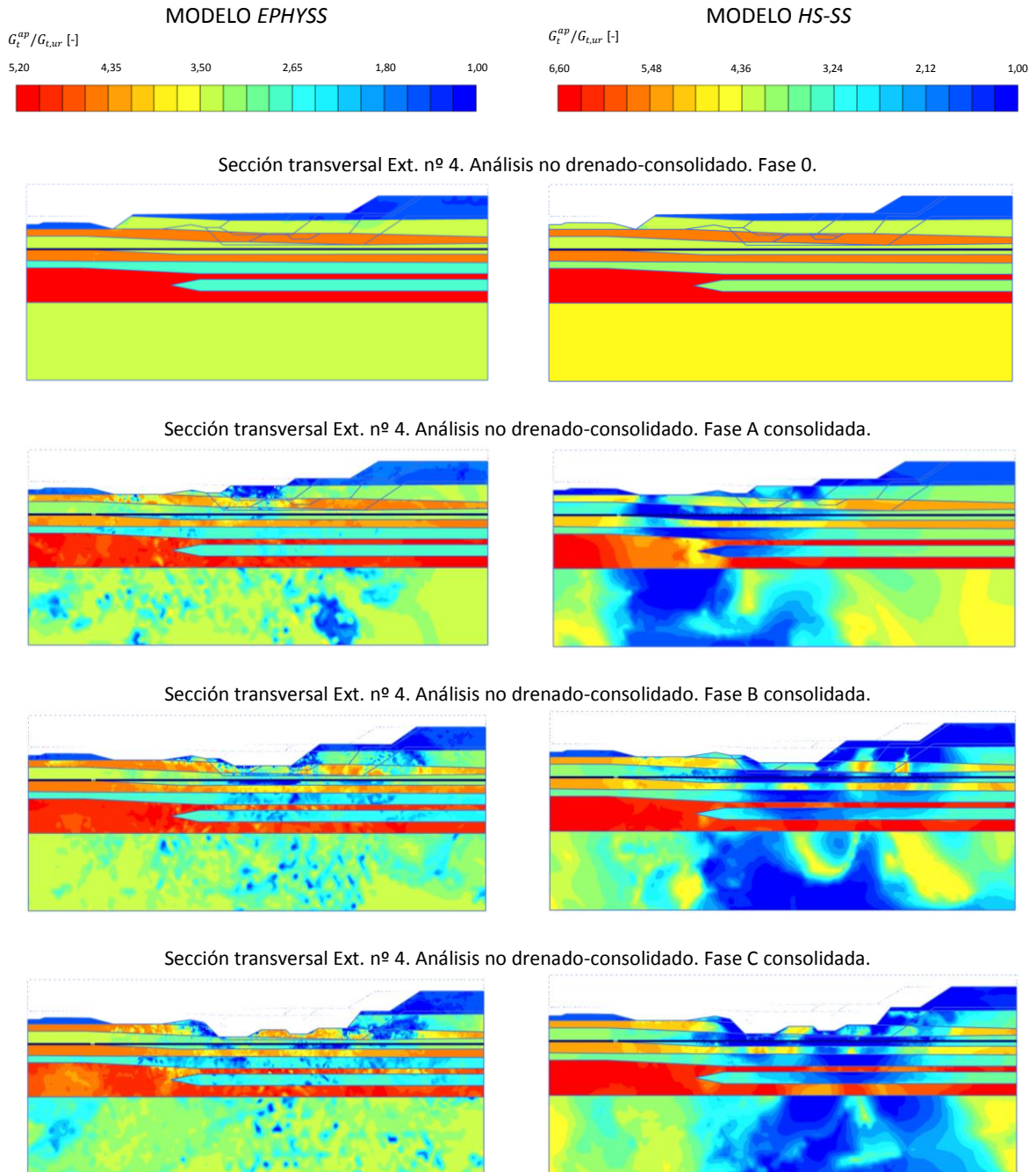


Figura 8.53. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.

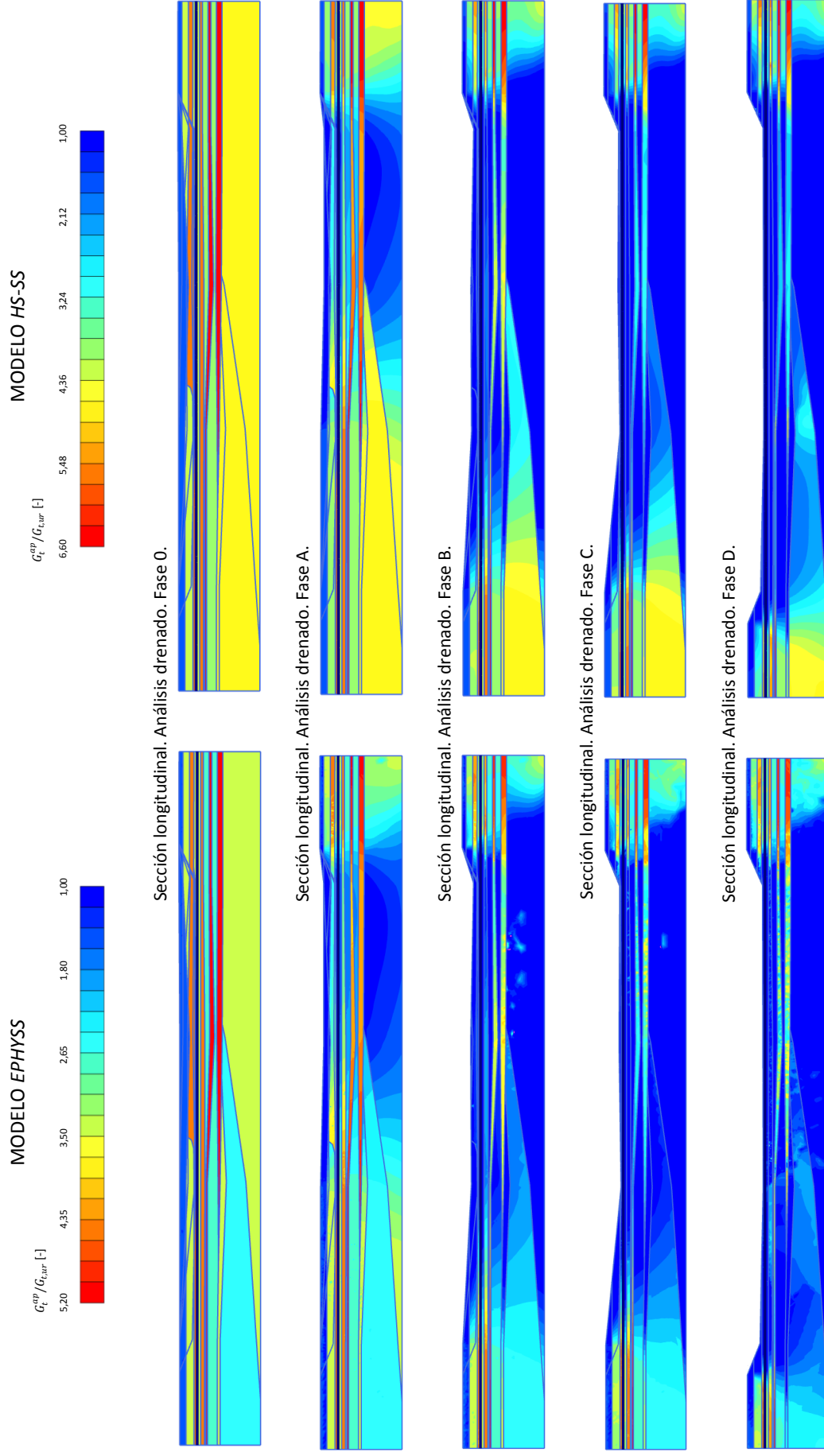


Figura 8.54. Valores de $G_t^{sp} / G_{t,ur}$ en la sección longitudinal con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en el análisis drenado.

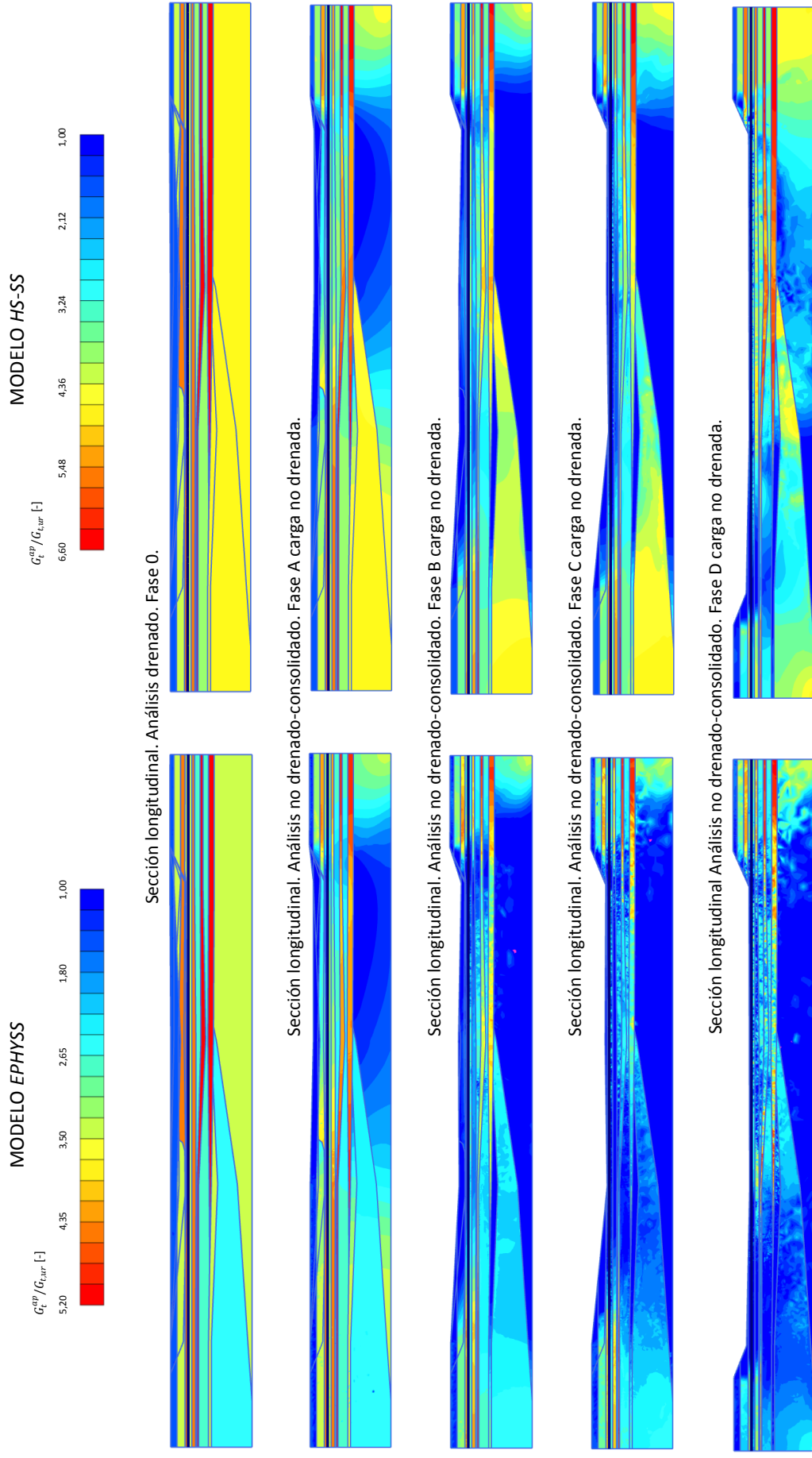


Figura 8.55. Valores de $G_t^{ep} / G_{t,ur} [-]$ en la sección longitudinal con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de carga no drenada del análisis no drenado-consolidado.

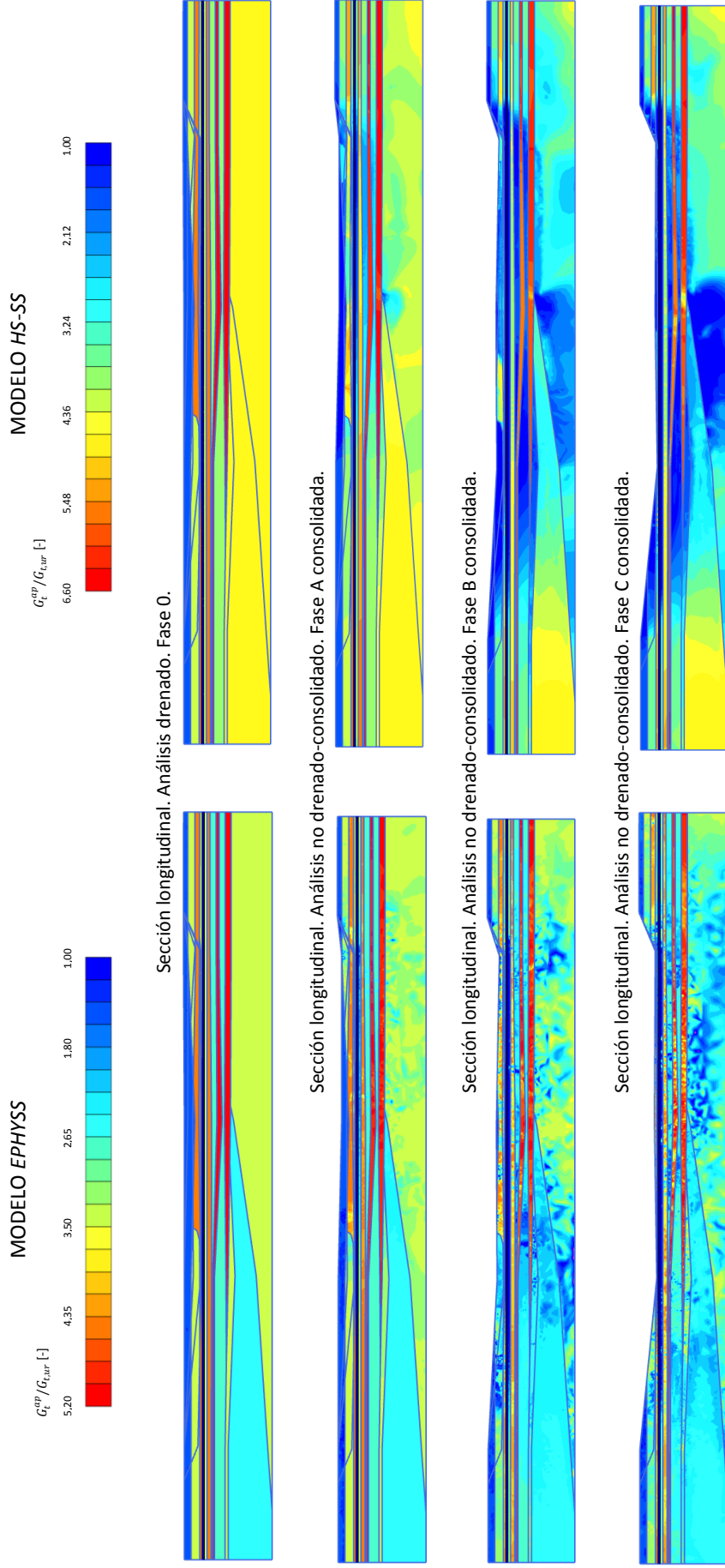


Figura 8.56. Valores de $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ en la sección longitudinal con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en las subfases de consolidación del análisis no drenado-consolidado.

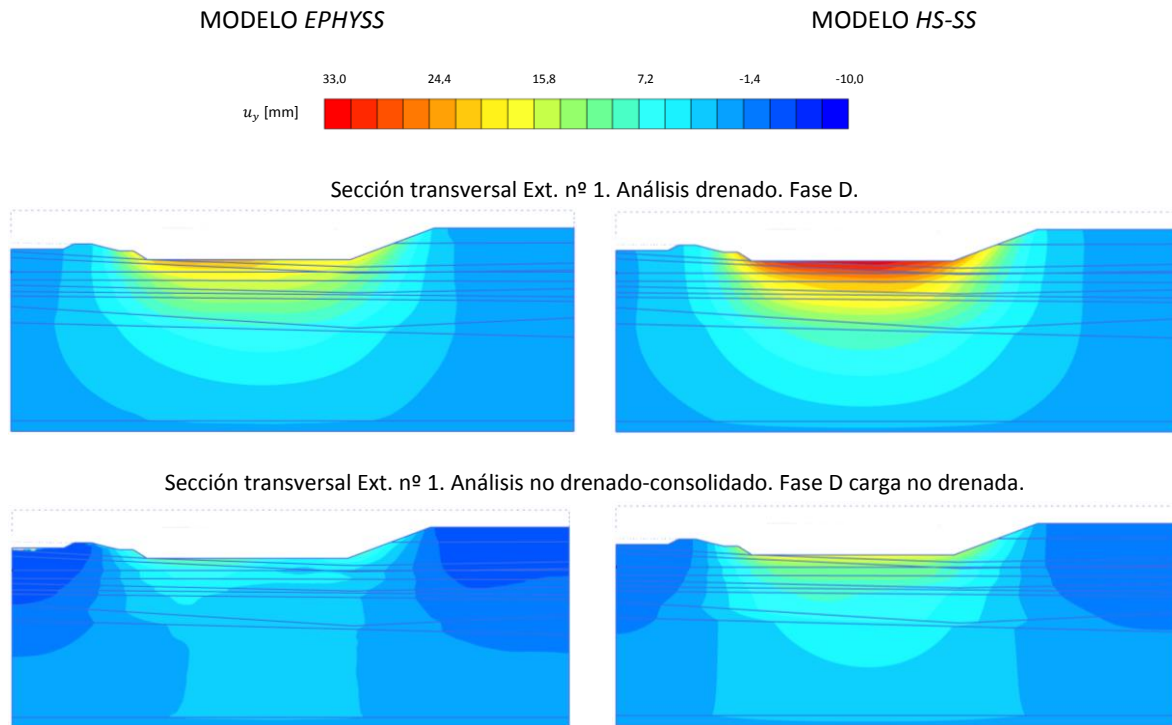


Figura 8.57. Valores de los desplazamientos verticales u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).

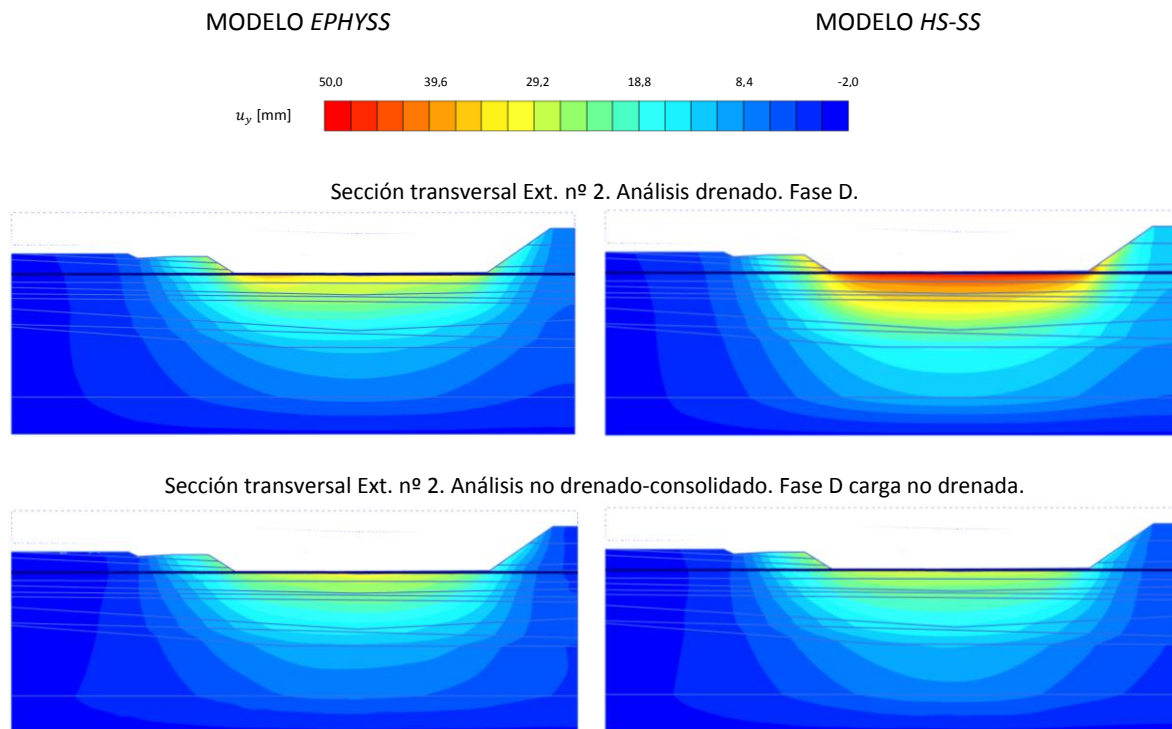


Figura 8.58. Valores de los desplazamientos u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).

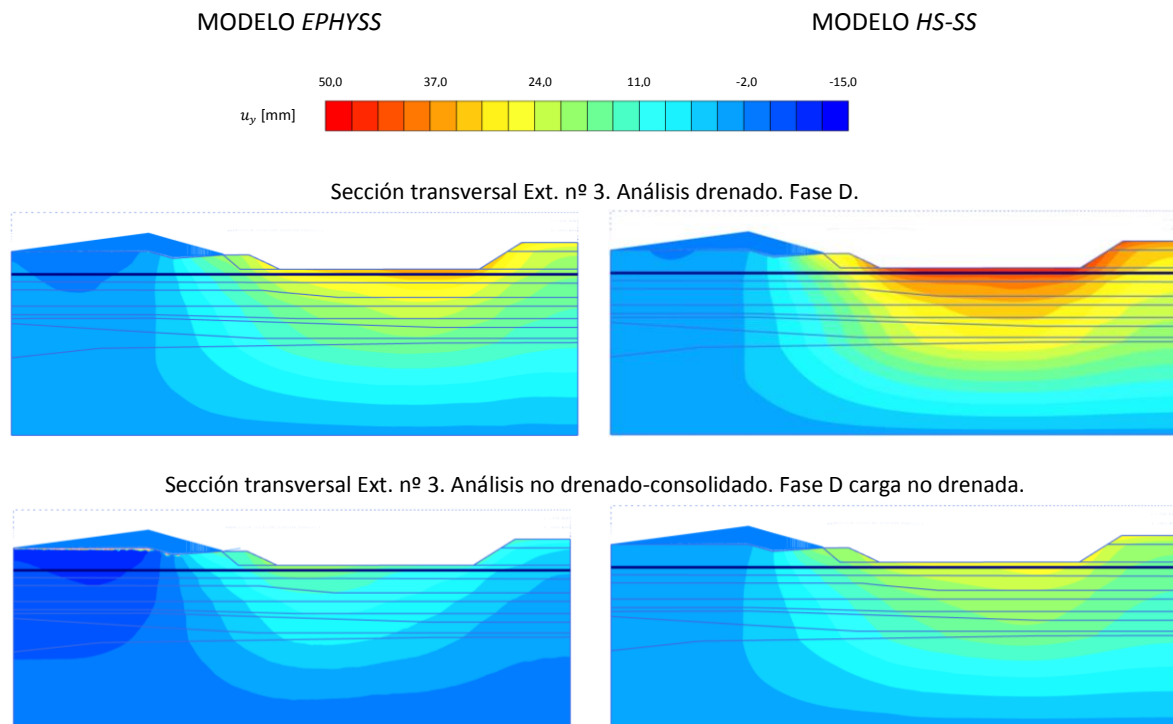


Figura 8.59. Valores de los desplazamientos u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).

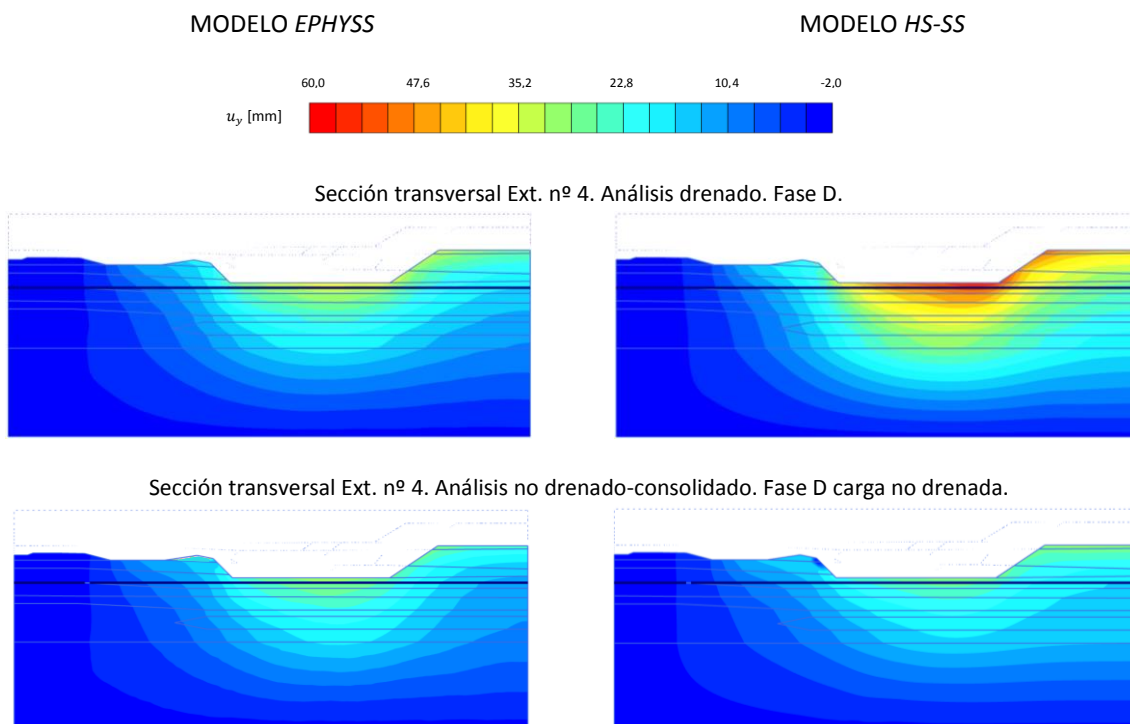


Figura 8.60. Valores de los desplazamientos u_y en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4 con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).

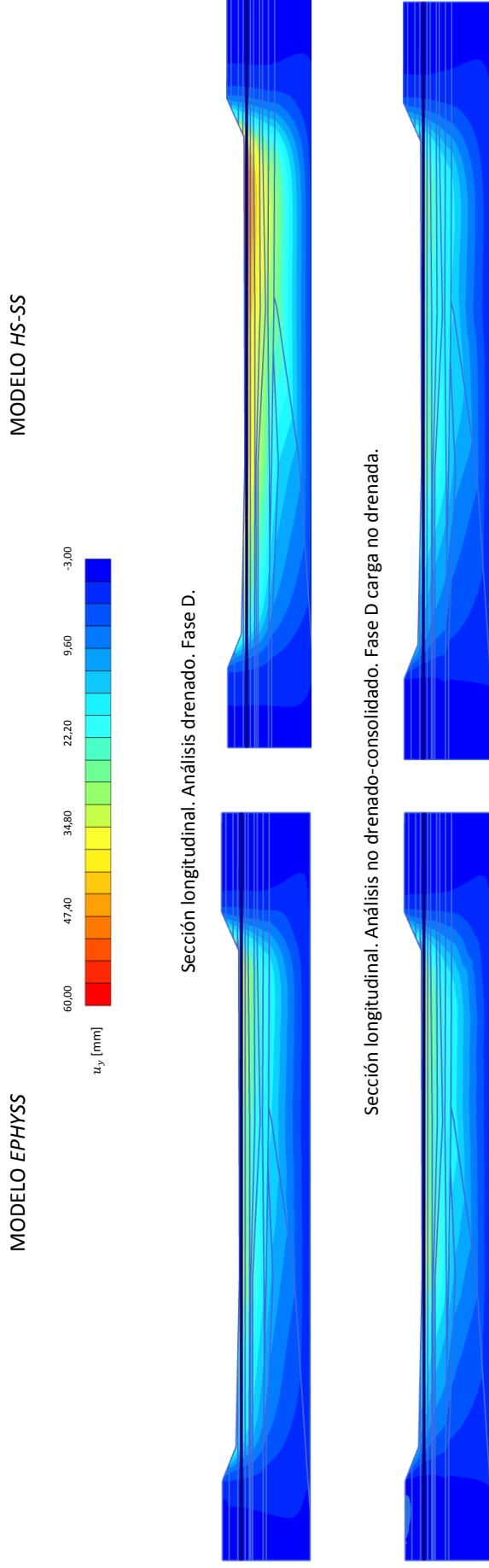


Figura 8.61. Valores de los desplazamientos u_y en la sección longitudinal con el modelo EPHYSS (izquierda) y con el modelo HS-SS (derecha) en la Fase D del análisis drenado (arriba) y en la Fase D no consolidada del análisis no drenado-consolidado (abajo).

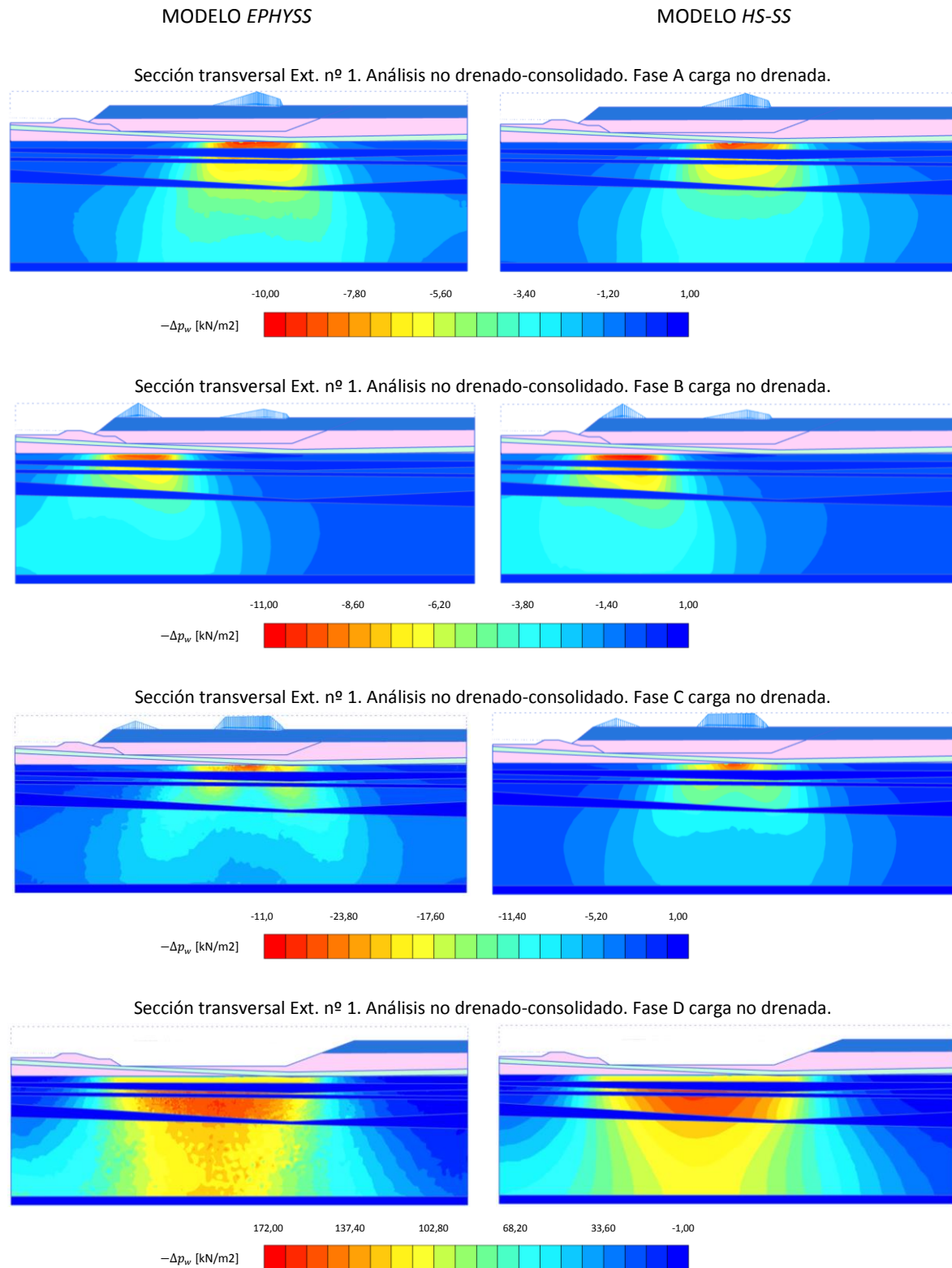
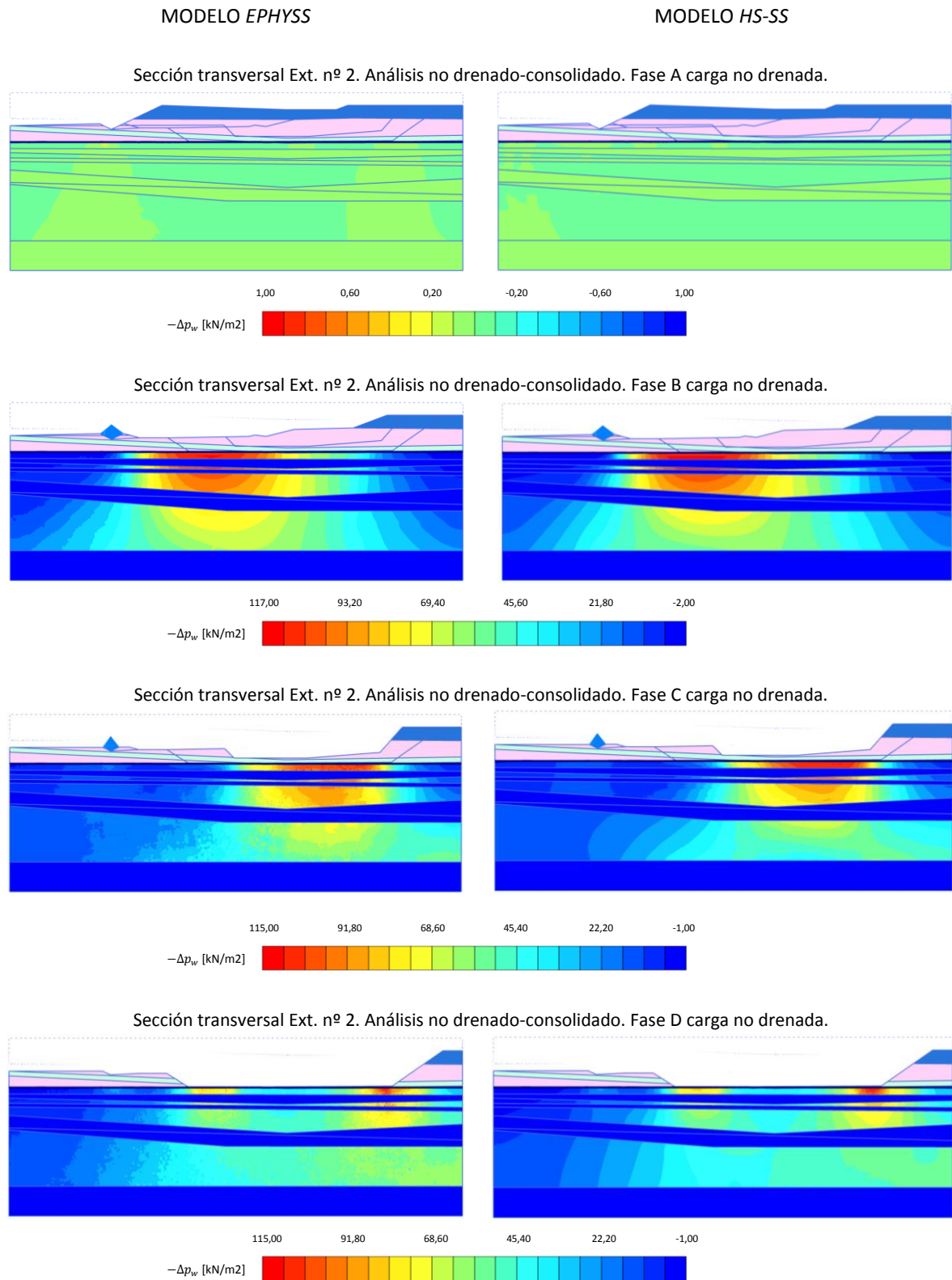


Figura 8.62. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 1, que resultan de las simulaciones con los modelos EPHYSS (izquierda) y HS-SS (derecha).



*Figura 8.63. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 2, que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* (izquierda) y *HS-SS* (derecha).*

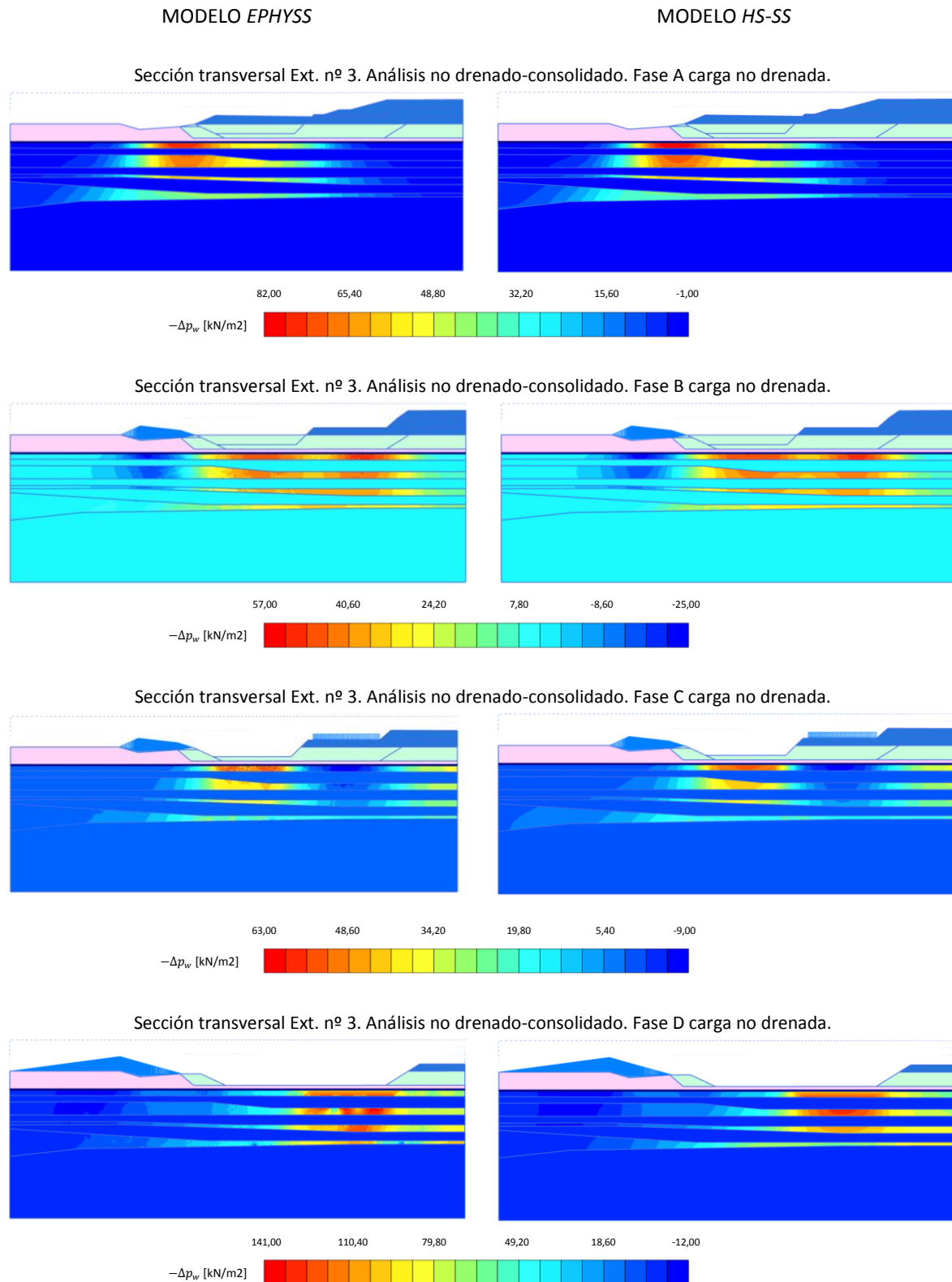


Figura 8.64. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 3, que resultan de las simulaciones con los modelos *EPHYSS* (izquierda) y *HS-SS* (derecha).

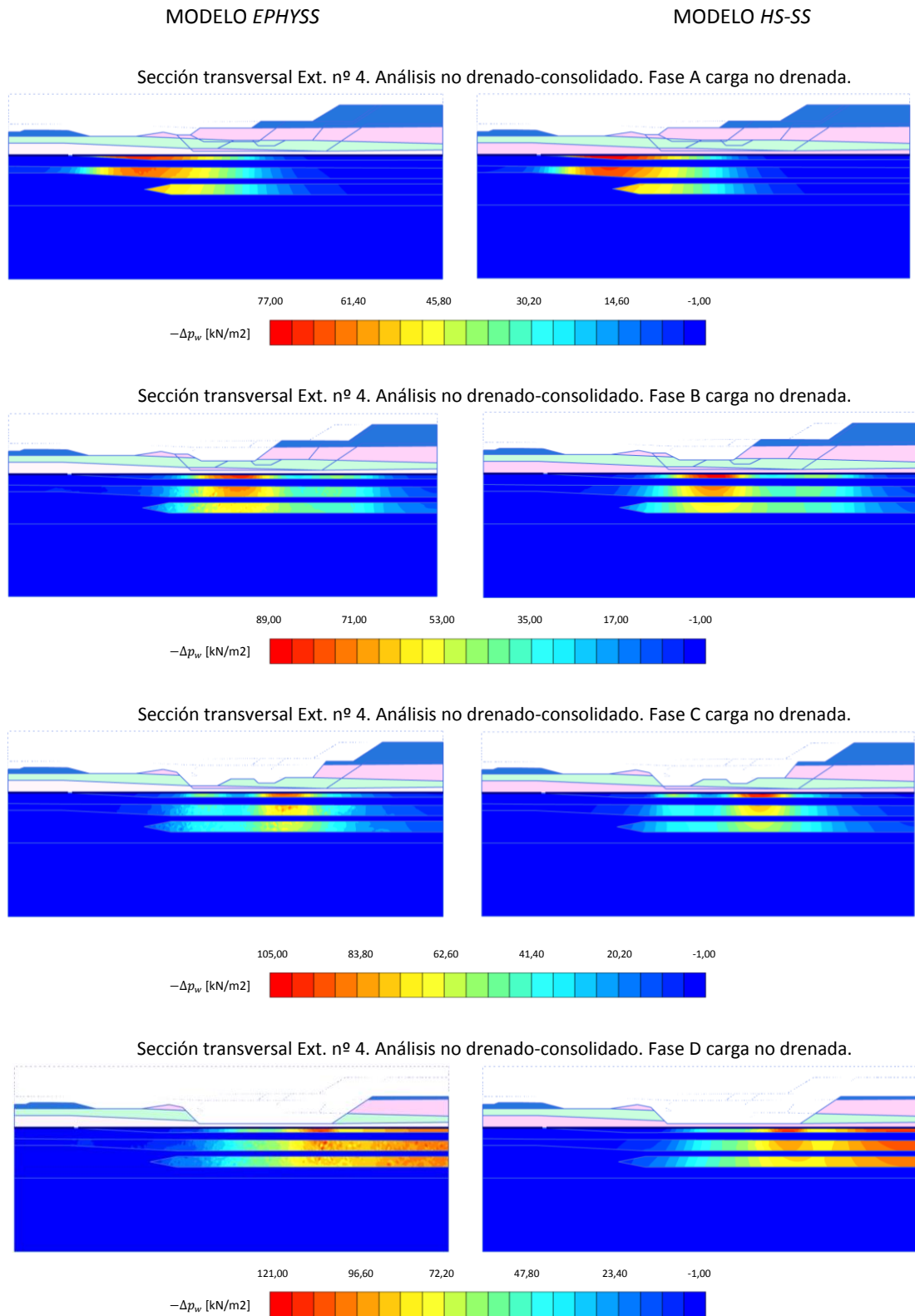


Figura 8.65. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección transversal correspondiente al extensómetro nº 4, que resultan de las simulaciones con los modelos EPHYSS (izquierda) y HS-SS (derecha).

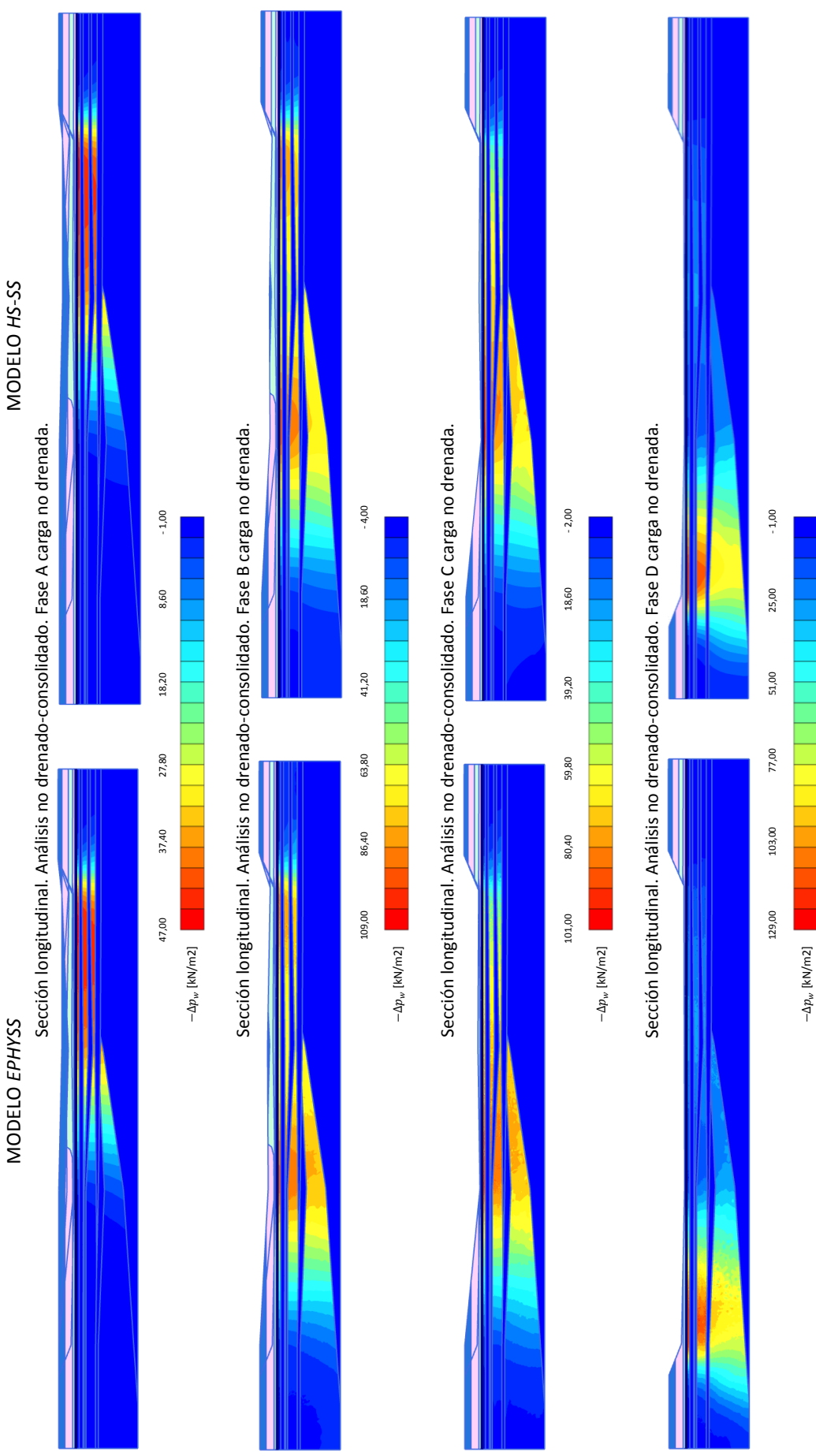


Figura 8.66. Distribución del exceso de presión de agua $-\Delta p_w$ en las fases con carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados de las fases de excavación seleccionadas en la sección longitudinal, que resultan de las simulaciones con los modelos EPHYSS (izquierda) y HS-SS (derecha).

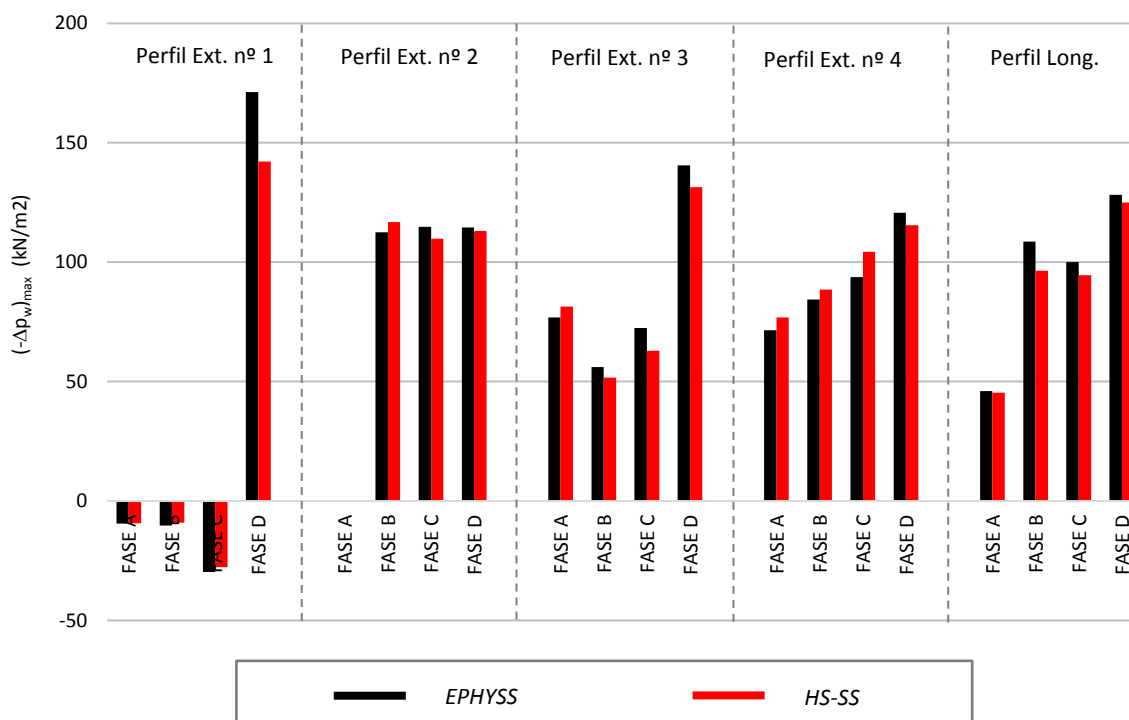


Figura 8.67. Valor máximo del exceso positivo o negativo de presión de agua $(-\Delta p_w)_{max}$ en las fases de excavación seleccionadas para cada una de las secciones transversales y longitudinal que resultan de las simulaciones con los modelos EPHYSS y HS-SS.

Un primer análisis de las figuras 8.26 a 8.41 permite afirmar que las simulaciones de la excavación realizadas con el modelo *EPHYSS* o *HS-SS* no son capaces de reproducir la parte superior de los perfiles de desplazamientos medidos con los extensómetros, en la cual se aprecia una notable reducción de los levantamientos. Este comportamiento se puede explicar por el secado progresivo del terreno próximo al nivel freático a medida que avanza la excavación, lo cual genera incrementos paulatinos de la succión en la zona parcialmente saturada del suelo y, por tanto, una retracción del mismo (Castellón, 2013). Según las simulaciones realizadas con el modelo *Barcelona Basic Model (BBM)*, el valor de estos desplazamientos por retracción puede ser del orden de 5mm, aproximándose así a las observaciones (Castellón, 2013).

Salvando lo anterior, se concluye lo siguiente de la información contenida en las figuras 8.26 a 8.41:

- Figuras 8.26 a 8.29: no es posible aproximar bien los desplazamientos medidos en el extensómetro nº1 a partir de las simulaciones con el modelo *EPHYSS* o con el modelo *HS-SS*, siendo incluso los desplazamientos calculados de signo contrario a los medidos.
- Figuras 8.30 a 8.33: los resultados de las simulaciones con el modelo *EPHYSS* mejoran significativamente la aproximación a las medidas del extensómetro nº2 en las diferentes fases de cálculo, si se comparan con los resultados de las simulaciones con el modelo *HS-SS*, tanto en la sección transversal como en la longitudinal. Concretamente, la simulación con el modelo *EPHYSS* en la sección transversal (figura 8.30), es la que mejor resultados proporciona.

- Figuras 8.34 a 8.37: los resultados de las simulaciones con el modelo *EPHYSS* aproximan bastante bien las medidas del extensómetro nº3 en las diferentes fases de cálculo, especialmente en la sección transversal del análisis drenado. Por otro lado, las simulaciones con el modelo *HS-SS* aproximan mejor o peor dichas medidas en función de si en una determinada fase de cálculo se consideran los resultados de la sección transversal o longitudinal del análisis drenado o no drenado-consolidado, no existiendo ninguna simulación de las fases de cálculo con dicho modelo que mejore, en todas ellas, los resultados del modelo *EPHYSS*.
- Figuras 8.38 a 8.41: los resultados de las simulaciones con el modelo *EPHYSS* aproximan bien las medidas del extensómetro nº4 en las diferentes fases de cálculo, muy especialmente en la sección transversal del análisis drenado. Por otro lado, las simulaciones con el modelo *HS-SS* aproximan mejor o peor dichas medidas en función de si, en una determinada fase de cálculo, se consideran los resultados de la sección transversal o longitudinal del análisis drenado o no drenado-consolidado, no existiendo ninguna simulación de las fases de cálculo con dicho modelo que mejore, en todas ellas, los resultados del modelo *EPHYSS*.

Se concluye, por tanto, que el uso del modelo *EPHYSS* permite mejorar la aproximación a las medidas tomadas con los extensómetros respecto a los valores calculados con el modelo *HS-SS*.

En los resultados de las simulaciones con el modelo *HS-SS* correspondientes a las secciones transversales y longitudinal de los extensómetros nº2 (figuras 8.31 y 8.33), nº3 (figuras 8.35 y 8.37) y nº4 (figuras 8.39 y 8.41), se puede ver el efecto de las inconsistencias generadas por las fases de consolidación en el análisis no drenado-consolidado, las cuales dan lugar a desplazamientos notablemente inferiores a los obtenidos en las correspondientes fases drenadas debido al reseteo de las componentes del tensor de historia \mathbf{H} . Como ya se ha explicado en el apartado 6.5 del capítulo 6, este problema se resuelve en el modelo *EPHYSS* mediante la definición de nuevas variables de estado. El efecto de dichas inconsistencias en el modelo *HS-SS* es especialmente evidente en los resultados de las simulaciones de las fases B y C de los extensómetros nº3 y nº4. Por otro lado, nótese que parte de la diferencia entre el perfil de desplazamientos de los análisis drenados y no drenados-consolidados correspondientes a la fase D, tanto en el modelo *HS-SS* como en el modelo *EPHYSS*, se debe a que, en dicha fase, no se ha realizado consolidación alguna tras la aplicación de la correspondiente carga no drenada. Estas inconsistencias en las fases de consolidación de las simulaciones con el modelo *HS-SS* se detectan también en los gráficos $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ de las figuras 8.44, 8.47, 8.50, 8.53 y 8.56 correspondientes a la fase de consolidación del análisis no drenado-consolidado, cuando se comparan con las figuras 8.43, 8.46, 8.49, 8.52 y 8.55, correspondientes a las respectivas fases de carga no drenada. Se puede ver claramente cómo tanto en el modelo *EPHYSS* como en el modelo *HS-SS* tienen lugar reversiones numéricas durante la fase de consolidación que dan lugar a una rigidización del suelo. No obstante, a diferencia del modelo *HS-SS*, en el que dichas reinicializaciones tiene un efecto en la historia posterior del suelo (como se puede ver si se analiza en detalle la concatenación de fases de cálculo en el análisis no drenado-consolidado, especialmente en la sección correspondiente al extensómetro nº2 y en la sección longitudinal), en el modelo *EPHYSS* este efecto no se acumula ni tiene repercusiones en fases posteriores. Ello es debido a que el modelo *EPHYSS*, a pesar de sufrir reversiones similares a las que se observan en el modelo *HS-SS* (dando lugar, en este caso, a una reinicialización del tensor de historia \mathbf{h}), es capaz de corregir su efecto en las posteriores fases de cálculo gracias a la introducción de las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e , que acumulan la suficiente información de la historia reciente del suelo para recuperar la rigidez

histórica correspondiente a una determinada rama de carga/descarga/recarga previa, a pesar de los posibles ciclos imbricados en la misma.

Cabe mencionar que los valores $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ que resultan de las simulaciones en los análisis drenados y en la fase no drenada de los análisis no drenados-consolidados son similares para cada uno de los modelos. Esta similitud es debida a que, tanto en el modelo *EPHYSS* como en el modelo *HS-SS*, el comportamiento del suelo en ambos modelos frente a las tensiones de corte en régimen elástico no depende de las presiones de agua, salvo por la relación de $G_s^{ap}(-p')$ en el primero y $G_s^{ap}(-\sigma'_3)$ en el segundo, donde $-p = -1/3\sigma'_{ii}$, $-\sigma'_{ii}$ son las tensiones efectivas principales y $-\sigma'_3$ es la tensión efectiva principal menor.

Las diferencias en las zonas de rigidez máxima y mínima de las figuras 8.42 a 8.56, así como en las zonas de transición, dan cuenta del efecto de considerar una dependencia de la rigidez con el giro de las deformaciones desviadoras continua en el modelo *EPHYSS* y discontinua en el modelo *HS-SS*.

De las figuras 8.57 a 8.61 se concluye que, en general, las simulaciones de los análisis drenados con el modelo *HS-SS* proporciona levantamientos significativamente mayores a los que proporcionan las simulaciones con el modelo *EPHYSS*, mientras que las simulaciones de los análisis no drenados consolidados proporcionan, aparentemente, resultados algo más parecidos en ambos modelos, especialmente en las secciones transversales correspondientes a los extensómetros n°2 y n°4, y en la sección longitudinal. Si bien debe tenerse siempre presente en este caso el efecto generado por las inconsistencias en el modelo *HS-SS* durante las fases de consolidación.

Finalmente, en las figuras 8.62 a 8.66 y en la figura 8.67 se puede ver cómo, tanto las distribuciones de los excesos de presión de agua generados en las diferentes fases de carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados, como el máximo valor de dichos excesos positivos o negativos, son muy similares en las simulaciones realizadas con ambos modelos. Las pequeñas diferencias existentes se pueden atribuir al comportamiento no lineal de K'_s con $-p'$ según la relación (3.03) y, por tanto, con $-\epsilon_{oct}^e$ según la relación (3.04), donde $-p' = -1/3\sigma'_{ii}$, $-\sigma'_{ii}$ son las tensiones efectivas principales $-\epsilon_{oct}^e = -1/3\epsilon_{ii}^e$ y $-\epsilon_{ii}^e$ son las deformaciones elásticas principales.

Capítulo 9

Conclusiones y futuras líneas de investigación

En el presente capítulo se resumen las conclusiones que resultan de los trabajos desarrollados y que dan respuesta a los objetivos planteados en el capítulo 1. Asimismo, se plantean posibles futuras líneas de investigación que han surgido a partir de la investigación realizada.

9.1. Conclusiones

El comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones debe ser considerado en el análisis de problemas geotécnicos en los que se afecten elementos sensibles, lo cual es muy habitual en entornos urbanos. Generalmente, en este tipo de problemas, sólo una pequeña parte del terreno se ve sometida a deformaciones intermedias o grandes, mientras que la mayor parte del mismo se ve sometida a pequeñas o muy pequeñas deformaciones. La extensión de las masas de suelo que experimentan pequeñas o muy pequeñas deformaciones suele ser tan grande que su contribución a los desplazamientos del terreno normalmente es significativa.

Varias circunstancias durante los años 70 del s.XX motivaron el desarrollo de nuevos marcos teóricos y modelos constitutivos que trataban de explicar el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, caracterizado por ser reversible no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente. No obstante, hoy en día, varios de los ensayos que permiten medir los parámetros del suelo en dicho rango de deformaciones, especialmente aquellos capaces de medir las curvas de degradación de la rigidez al corte, siguen sin estar suficientemente extendidos en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica, dificultando tanto la estimación de dichos parámetros, como el uso de este tipo de modelos constitutivos.

El marco teórico de Jardine (1992), basado en las teorías de las *Kynematic Yield Surfaces* (KYS) y de la plasticidad, permite explicar el comportamiento de la rigidez del suelo en función del rango de tensión y deformación en el que este se encuentre, dando lugar a cuatro zonas diferenciadas (Zonas I a IV). Dicho marco teórico ha resultado de gran utilidad en el capítulo 2 para la identificación de las estrategias que permiten reproducir el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, utilizadas en los diferentes modelos constitutivos analizados. Asimismo, para establecer una clasificación general

de dichos modelos, se ha recurrido al concepto de zona tensorial (Darve, 1978, 1990; Darve y Labanieh, 1982), agrupándose, dentro de los modelos incrementalmente lineales con una sola zona tensorial, los modelos elásticos lineales y no lineales (modelos elásticos de Cauchy, hiperelásticos e hipoeásticos *stricto sensu*); dentro de los modelos incrementalmente multilineales con varias zonas tensoriales, los modelos histeréticos (modelos paraelásticos y cuasi-hipoeásticos) y los modelos avanzados (modelos elastoplásticos clásicos, modelos de superficies imbricadas, modelos de bloques, modelos de plasticidad límite, modelos de burbujas y modelos multilaminados); y dentro de los modelos incrementalmente no lineales con infinitas zonas tensoriales, los modelos hipoplásticos e híbridos. Por otro lado, se han establecido cuatro elementos que se consideran fundamentales para la caracterización del comportamiento histerético del suelo y que han dado lugar a un criterio específico de clasificación de los modelos estudiados. Dichos elementos son los siguientes: (1) el criterio de reversión que puede ser extrínseco o intrínseco, (2) las reglas de memoria que permiten almacenar información en uno, en varios o en todos los puntos de reversión activos, (3) el efecto de las reversiones sobre las variables que controlan la degradación que puede ser el de una reinicialización total o parcial y (4) el efecto de las reversiones sobre la rigidez máxima del suelo, donde la recuperación de la misma puede darse de forma continua o discontinua con el ángulo de giro de la trayectoria tensodeformacional reciente, y ser total o parcial.

Utilizando el criterio de clasificación basado en las zonas tensoriales y el criterio específico de clasificación anterior, se han analizado y clasificado, en el capítulo 2, un total de 48 modelos constitutivos que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. El estudio de estos modelos se ha centrado en describir y explicar las relaciones constitutivas que permiten reproducir el comportamiento no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo. Se ha analizado con especial detenimiento un grupo de modelos cuyo estudio ha resultado fundamental para el planteamiento del modelo desarrollado en los capítulos 3, 4 y 5. Entre dichos modelos se encuentran los modelos *Small Strain Overlay Model (SSOM)* y *Hardening Soil Small (HS-S)* de Benz (2007), basado este último en el primero y en el modelo *Hardening Soil (HS)* de Schanz (1998) y Schanz et al. (1999), el modelo *Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS)* de Plaxis y versiones equivalentes en otros programas numéricos, basado en los anteriores, el modelo de Hueckel y Nova (1979), el modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger (2012) y el modelo hipoplástico con deformación intergranular de Niemunis y Herle (1997), además de las Reglas de Masing generalizadas (Masing, 1926; Pyke, 1979). Concretamente, el modelo *HS-SS* es, hoy en día, prácticamente el único modelo con un uso extendido en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica que tiene en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, limitándose generalmente el resto de modelos de este tipo a un uso académico, dadas sus características. No obstante, a pesar de las grandes ventajas que proporciona el modelo *HS-SS*, se han detectado en él aspectos que pueden ser mejorados, así como algunas inconsistencias cuyos efectos pueden tener una influencia significativa en las simulaciones numéricas de problemas de contorno, por ser estos acumulativos (Castellón, 2013; Plaxis, 2015). Cabe destacar que el hecho de no disponer de los códigos numéricos de la mayoría de los modelos analizados complica y limita su contraste y validación, idea que es compartida por Gudehus (2011) y que ha motivado que en el presente trabajo se proporcione el código numérico completo del modelo desarrollado.

En los capítulos 3, 4 y 5 se ha desarrollado teórica y numéricamente el modelo constitutivo *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)*. Dicho modelo se puede clasificar, siguiendo el criterio de clasificación basado en las zonas tensoriales descrito en el capítulo 2, como un modelo elastoplástico avanzado

incrementalmente multilineal, si bien la dependencia indirecta de la rigidez con la dirección del incremento del tensor de deformación desviadora $\hat{\mathbf{e}}$ que contempla, permite considerarlo como un modelo incrementalmente no lineal cuando describe el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones. El modelo *EPHYSS* es capaz de reproducir el comportamiento del suelo en las Zonas I, II, III y IV de Jardine (1992). Dicho modelo está compuesto: (1) por el modelo *Hysteretic Quasi-Hypoelastic (HQH)*, desarrollado en el capítulo 3, que reproduce el comportamiento elástico lineal y no lineal, histerético y dependiente de la historia reciente del suelo, correspondiente a las Zonas I y II, además de tener en cuenta la anisotropía inducida en deformaciones, y (2) por el modelo *Hardening Soil Modified (HS_{MOD})* de tipo *Cap-Cone*, descrito en los capítulos 4 y 5, que reproduce el comportamiento plástico del suelo, propio de las Zonas III y IV, y que está basado en el modelo *HS* y en las mismas modificaciones que introduce, en este último, el modelo *HS-S*.

La parte reversible del modelo *EPHYSS* considera dos dominios de deformación limitados por el valor $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^{\alpha}$. La formulación del módulo volumétrico elástico es común en ambos dominios, mientras que la del módulo de corte secante aparente no lo es. En el Dominio 1 se considera una ley de degradación del módulo de corte basada en la expresión de Dos Santos y Correia (2001), que a su vez se basa en la de Hardin y Drnevich (1972), mientras que en el Dominio 2 se considera un valor mínimo de dicho módulo. El valor del coeficiente de Poisson es, a diferencia de la mayoría de los modelos analizados en el capítulo 2, variable en ambos dominios y siempre mayor que ν'_{min} . Asimismo, el modelo *EPHYSS* considera 10 variables de estado, de las cuales 8 se corresponden con la parte reversible del mismo (modelo *HQH*) y 2 con la parte plástica (modelo *HS_{MOD}*). Las variables de estado correspondientes a la parte reversible del modelo *EPHYSS* se identifican con el tipo de variables de estado ocultas citadas por Gudehus (2011), que permiten reproducir el comportamiento histerético del suelo y a las que se puede atribuir la no linealidad y la dependencia del comportamiento del mismo con su historia reciente. Entre ellas, se encuentra el tensor de historia de las deformaciones desviadoras totales \mathbf{h} , que constituye una variable de estado del tipo *internal strain* (Gudehus, 2011) que adopta una estructura parecida a la del tensor de deformación intergranular del modelo hipoplástico de Niemunis y Herle (1997), y el valor máximo de la rigidez al corte correspondiente a la curva de degradación activa $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, que constituye otra variable de estado que, junto con \mathbf{h} , permite reproducir infinitas curvas de degradación del suelo en función del nivel de reversión de las deformaciones desviadoras, lo cual confiere gran versatilidad al modelo y adaptabilidad a los resultados experimentales. El resto de variables de estado correspondientes a la parte reversible del modelo *EPHYSS* (\mathbf{e}^R , $\mathbf{e}^{e,R}$, \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e) permiten considerar la anisotropía inducida en deformaciones y dotan al modelo de una estructura de capas de memoria similar a la propuesta por Hueckel y Nova (1979), que permite identificar y controlar el comportamiento del suelo en función de si su estado tensodeformacional se encuentra dentro de la región *SOM (Swept-Out-Memory)* (Gudehus et al., 1977), donde no depende de estas variables de estado, o fuera de la misma, donde sí depende de ellas. Concretamente \mathbf{h} , $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, \mathbf{e}^R y $\mathbf{e}^{e,R}$ conforman variables de memoria a corto plazo de las cuales \mathbf{h} y $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ pueden reinicializarse total o parcialmente tras una reversión y \mathbf{e}^R y $\mathbf{e}^{e,R}$ lo hacen siempre totalmente, mientras que \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e conforman variables de memoria a largo plazo capaces de almacenar información de todas las reversiones históricas activas. Todas estas variables de estado dotan al modelo *EPHYSS* de robustez para la reproducción del comportamiento histerético del suelo y permiten aplicar directamente la estrategia de Hashiguchi (1993) para las reglas de memoria, si bien en el presente trabajo se ha utilizado la misma estrategia implementada en el modelo *HS-SS* con objeto de minimizar las diferencias generadas por las formulaciones plásticas de ambos modelos.

En relación con los elementos constitutivos del comportamiento histerético del suelo establecidos en el capítulo 2 que, como ya se ha mencionado, conforman un criterio específico de clasificación de modelos constitutivos, la parte reversible del modelo *EPHYSS*: (1) considera un criterio de reversión intrínseco basado en el giro de las deformaciones desviadoras, según el cual las reversiones afectan únicamente a la rigidez al corte del suelo y no a su rigidez volumétrica, a diferencia del modelo *HS-SS*, siempre que se cumpla $v' > v'_{min}$, (2) cumple las Reglas de Masing generalizadas (Masing, 1926; Pyke, 1979) nº1, nº2, nº3 y parcialmente la nº4, aunque esta última en mayor grado que el modelo *HS-SS*, puesto que aumenta, respecto a este último, la cantidad de información almacenada sobre la historia reciente de las deformaciones, (3) define la variable de estado \mathbf{h} que controla la degradación de la rigidez y que puede reinicializarse total o parcialmente tras una reversión y (4) define la variable de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ que, a diferencia del modelo *HS-SS*, permite reproducir la recuperación total o parcial de la rigidez máxima del suelo y hacerlo de forma continua con el valor del ángulo de giro de la trayectoria reciente de deformaciones desviadoras $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$. Cabe añadir que el modelo *EPHYSS* cumple el criterio de estabilidad de Hill (1958) mediante la introducción de una corrección en la variable de estado $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, que se transforma en $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$.

El modelo *EPHYSS* requiere 20 parámetros, de los cuales 12 son compartidos con el modelo *HS-SS*, 7 se pueden deducir fácilmente a partir de los parámetros del modelo *HS-SS* en caso de que no se disponga de resultados de ensayos específicos para su determinación, y el valor del parámetro $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ se puede estimar a partir de $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ mediante la correlación empírica $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = \Lambda G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, tomando Λ valores de 0,40 – 0,44 en arenas y de 0,50 en arcillas, siempre y cuando no se disponga de resultados de ensayos con medida interna de la deformación en los que sea posible controlar el giro de las deformaciones desviadoras como, por ejemplo, ensayos biaxiales, triaxiales verdaderos o de cilindro hueco con torsión.

En el capítulo 5 se ha implementado el modelo *EPHYSS* con el módulo *UDSM* de Plaxis en las versiones Plaxis v9 y Plaxis 2D 2011 (válido para versiones posteriores), siendo las versiones Plaxis 2D 2015 y Plaxis 2D 2018 las utilizadas en las simulaciones con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* de los capítulos 6, 7 y 8. Para la implementación del modelo *EPHYSS* se ha recurrido a un esquema análogo al utilizado en la implementación del modelo *HS* del capítulo 4. Cabe mencionar que a pesar de que el modelo *HS* se encuentra predefinido en Plaxis, su implementación numérica ha sido fundamental en el desarrollo de este trabajo, tanto para la posterior implementación del modelo *EPHYSS* como por el carácter pedagógico que aporta disponer de dicho código y de los detalles sobre la metodología seguida en el proceso de implementación, dada la falta de documentación de detalle al respecto. Para la integración local de las ecuaciones constitutivas se recurre al denominado *Implicit Closest Point Projection Algorithm*, que utiliza un esquema de integración del tipo *Backward Euler Elastic Predictor/Return Mapping Algorithm* dentro de los métodos de retorno radial, perteneciente a la clase de algoritmos denominada *Generalized Midpoint Algorithms* dentro de los métodos lineales multipaso, y se añaden algoritmos iterativos imbricados para la parte elástica. Asimismo, para el retorno sobre la intersección de dos o tres superficies de fluencia se utilizan las Reglas de Koiter (Koiter, 1960), y para la selección de superficies se aplica la estrategia de Bonnier (2000), a la cual se incorporan ciertas modificaciones. El código numérico de los modelos constitutivos *HS* y *EPHYSS*, así como el código numérico de los algoritmos para la obtención de los parámetros internos de ambos modelos, se proporcionan íntegramente en los anejos de este trabajo.

En el capítulo 6 se realiza una verificación parcial del modelo *EPHYSS*, así como una validación del mismo y un análisis comparativo con el modelo *HS-SS* a partir de los resultados experimentales de ensayos edométricos con cargas/descargas/recargas, ensayos triaxiales convencionales con carga monótona, ensayos triaxiales cíclicos, ensayos triaxiales con giros de tensiones en el plano desviador y ensayos biaxiales con carga monótona, recopilados de diversas tesis y artículos. En dichos ensayos se consideran diferentes materiales, niveles de confinamiento y condiciones de drenaje. Asimismo, se han simulado ensayos biaxiales numéricos en distintas arenas con diferentes ángulos de giro de la trayectoria de deformaciones desviadoras recientes, de los cuales se dispone de resultados de simulaciones con otros modelos constitutivos avanzados que tienen en cuenta el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones.

Tanto en las simulaciones con el modelo *EPHYSS* como con el modelo *HS-SS* se obtiene, en general y salvo en casos concretos, una muy buena aproximación a los resultados de los ensayos experimentales. No obstante, en las simulaciones de la fase de consolidación de los ensayos triaxiales convencionales, ambos modelos proporcionan rigideces volumétricas superiores a las medidas debido a la dependencia de K' con G y v' (bien en todo el rango de deformaciones en el modelo *HS-SS*, bien cuando $v' = v'_{min}$ en el modelo *EPHYSS*). Ello podría solventarse en el modelo *EPHYSS* reduciendo el valor de v'_{min} a cambio de desvirtuar las deformaciones resultantes en el suelo durante la aplicación de cargas desviadoras, lo cual no es recomendable. Por otro lado, en los ensayos triaxiales convencionales con arenas densas en condiciones no drenadas, ambos modelos presentan ciertas limitaciones para reproducir las curvas $q - (-\epsilon_1)$ medidas, debido a que las leyes de dilatancia de estos no tienen en cuenta el índice de poros del suelo como una variable de estado, tal como apunta Benz (2007) para el modelo *HS-S* en el que se basa la formulación plástica de los modelos *HS-SS* y *EPHYSS*, siendo, no obstante, satisfactoria la reproducción de las curvas $q - (-p')$ medidas en estos mismos ensayos. Finalmente, se puede ver cómo ninguno de los dos modelos es capaz de reproducir el fenómeno de localización observado en los ensayos biaxiales, puesto que las formulaciones consideradas no contemplan dicho fenómeno.

A partir del análisis comparativo entre los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* realizado en el capítulo 6, se concluye que, en general, el modelo *EPHYSS* proporciona resultados similares a los del modelo *HS-SS* ante cargas monótonas o cuando la reversión de la deformación en el suelo es total ($\alpha = 180^\circ$), y diferentes, en mayor o menor medida, cuando esta es parcial ($\alpha < 180^\circ$). En todos los casos, no obstante, se han detectado diferencias en los resultados obtenidos con ambos modelos que se explican de la siguiente manera: (1) los módulos de rigidez del modelo *EPHYSS* dependen de $-p'$, mientras que los módulos de rigidez del modelo *HS-SS* dependen de $(-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi'))$, lo cual genera diferencias en los valores de los mismos en función de la trayectoria de tensiones o deformaciones seguidas, (2) lo anterior implica que ambos modelos consideran diferentes valores de los parámetros internos E_i^{ref} , α' y $K'_{t,ur}/K'_c$, lo cual afecta al comportamiento plástico del modelo, (3) los diferentes valores del parámetro interno E_i^{ref} dan lugar a diferentes valores del factor h_i , lo cual modifica las leyes de endurecimiento en ambos modelos y ello se ve reflejado en las diferentes curvas de G_s^{ap} obtenidas, (4) el modelo *EPHYSS* considera valores de K' y G independientes siempre que se cumpla $v' > v'_{min}$, mientras que, en el modelo *HS-SS*, el módulo volumétrico depende linealmente del módulo de corte según $K' = K'(G, v'_{ur})$ y (5) las pequeñas diferencias en las reglas de dilatancia existentes entre ambos modelos.

El estudio de casos con reversiones parciales de la deformación ($\alpha < 180^\circ$) se ha hecho en ensayos biaxiales numéricos en los que se comparan los resultados de las simulaciones con el modelo *EPHYSS*, el

modelo *HS-SS*, el modelo hipoplástico con deformación intergranular de Niemunis y Herle (1997) y el modelo multilaminado de Schädlich y Schweiger (2012). De dicho estudio se concluye que los cuatro modelos son capaces de reproducir, en mayor o menor medida, la recuperación de la rigidez elástica al corte del suelo tras un giro parcial de la trayectoria reciente de deformaciones, si bien el modelo *HS-SS* no es capaz de reproducir dicha recuperación cuando el valor de la deformación acumulada previa a un giro parcial es elevado ($\gamma_{HIST} \gg \gamma_c$). Esto último no sucede en ninguno de los otros tres modelos avanzados, donde la recuperación elástica del suelo depende menos del valor acumulado de la deformación, siendo ello una ventaja en el modelo *EPHYSS*, por ser un modelo que se ofrece más fácilmente para ser utilizado en la práctica profesional que el de Niemunis y Herle (1997) o el de Schädlich y Schweiger (2012).

Finalmente, en el capítulo 6 se concluye, a partir de simulaciones de ensayos numéricos edométricos y triaxiales en los que se han introducido fases de consolidación, fases nulas o fases con pequeñas descargas, que el modelo *EPHYSS* es capaz de corregir el efecto de las inconsistencias detectadas en el modelo *HS-SS* (Castellón, 2013; Plaxis, 2015), y detalladas en dicho capítulo. En el modelo *HS-SS* se ha detectado, en todos los casos analizados en los que existe carga desviadora, la reinicialización de todas las componentes del tensor de historia \mathbf{H} , cuyo efecto se arrastra a fases posteriores, siendo, por tanto, acumulativo. Mientras que el modelo *EPHYSS*, a pesar de sufrir estas mismas reversiones, que dan lugar a una reinicialización del tensor de historia \mathbf{h} , es capaz de corregir su efecto en las posteriores fases de cálculo gracias a la introducción de las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e , que acumulan la suficiente información de la historia reciente del suelo para recuperar la rigidez histórica correspondiente a una determinada rama de carga/descarga/recarga previa, a pesar de los posibles ciclos imbricados en la misma.

En el capítulo 7 se realiza una validación del modelo *EPHYSS*, así como un análisis comparativo del mismo con el modelo *HS-SS*, a partir de las simulaciones de problemas de contornos correspondientes a obras ejecutadas en las que se ha realizado algún tipo de auscultación. Se han seleccionado problemas de diferente tipología con objeto de ofrecer una visión amplia de las mejoras y de los elementos distintivos del modelo *EPHYSS* respecto al modelo *HS-SS*. Concretamente, se han simulado los mismos problemas analizados en la tesis de Benz (2007) a partir de la información contenida en la misma y en las fuentes originales: un túnel excavado en mina, un túnel perforado con tuneladora, una excavación profunda entre pantallas ancladas, una excavación profunda entre pantallas de pilotes apuntaladas y un ensayo sobre una zapata experimental. Para simular los problemas de contorno ha sido necesario implementar estrategias numéricas en el modelo *EPHYSS* que permitieran resetear la historia de deformaciones en el suelo e introducir materiales sobreconsolidados. Asimismo, con objeto de comparar los resultados obtenidos con ambos modelos, ha sido necesario ajustar los parámetros $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y K_s^{ref} del modelo *EPHYSS* a partir de los parámetros del modelo *HS-SS* aplicando, en cada unidad geotécnica y en el rango de tensiones dado por la envolvente de las fases de cada problema de contorno, un ajuste con mínimos cuadrados para lograr un perfil de rigideces inicial en el terreno similar al obtenido con el modelo *HS-SS* y que las variaciones de dichas rigideces debidas al cambio de tensiones en el suelo sean lo más parecidas entre sí. Este proceso puede hacerse a la inversa, siendo el parámetro G_0^{ref} del modelo *HS-SS* el que se ajusta a partir del parámetro $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ del modelo *EPHYSS*, desaconsejándose, en este caso, el ajuste de los parámetros $E_{t,ur}^{ref}$ y ν_{ur}' del modelo *HS-SS* al aparecer ambos en la formulación plástica del mismo.

Los resultados obtenidos en las simulaciones con el modelo *EPHYSS* mejoran la aproximación a las medidas tomadas en obra respecto a los resultados obtenidos con el modelo *HS-SS*. Dichas mejoras se dan en cuatro de los cinco problemas de contorno analizados y no son apreciables en el restante, obteniéndose, en este último, resultados equivalentes con ambos modelos. Estas mejoras son notorias en las excavaciones profundas y en el túnel excavado en mina y más discretas en la zapata experimental. Asimismo, los resultados en el caso del túnel excavado con tuneladora son muy similares en las simulaciones con ambos modelos debido a la geometría circular del mismo y a la homogeneidad del terreno circundante, que proporcionan valores relativos de $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ muy parecidos en los dos.

En general, se observan cubetas de asientos más concentradas en las simulaciones con el modelo *EPHYSS* respecto a las obtenidas con el modelo *HS-SS*, tanto en el túnel excavado en mina como en las excavaciones profundas. Ello es debido a que el modelo *EPHYSS* tiende a concentrar las zonas con máxima degradación elástica en áreas menores y próximas a la actuación, a la vez que proporciona zonas significativamente mayores con poca o nula degradación. También se observa, en general, cómo el modelo *EPHYSS* predice levantamientos del terreno en las excavaciones profundas sensiblemente inferiores a los predichos por el modelo *HS-SS*, si bien no se dispone de datos para una evaluación de dichos resultados. Asimismo, el valor de los momentos flectores en las pantallas de las excavaciones que se obtienen en las simulaciones numéricas con ambos modelos es muy similar en la excavación anclada y ligeramente inferior en la simulación con el modelo *EPHYSS* de la excavación apuntalada, aunque de nuevo no se dispone de datos para una evaluación de dichos resultados. En relación con los valores de las cargas en los puntales en la fase final de la excavación apuntalada, los desvíos respecto a las cargas medidas son, en promedio, superiores en el modelo *HS-SS* respecto a los obtenidos con el modelo *HS-SS*. En base a todas estas observaciones se deduce que los resultados de las simulaciones de las excavaciones profundas con el modelo *EPHYSS*, en comparación con los del modelo *HS-SS*, pueden tener una clara repercusión en: (1) el dimensionamiento de las pantallas, puntales y anclajes en fase proyectual, (2) los procesos de control durante la ejecución de la obra y (3) los procesos de optimización mediante técnicas de *backanalysis*, tanto si se miden los desplazamientos en el terreno, los desplazamientos y esfuerzos en las pantallas o las cargas en los puntales. En relación con el problema de la zapata experimental, las simulaciones con el modelo *EPHYSS* proporcionan rigideces más próximas a las medidas en el ensayo al compararse con las simulaciones realizadas con el modelo *HS-SS*, si bien los ciclos calculados con el modelo *EPHYSS* son menos abiertos que los calculados con el modelo *HS-SS* y que los medidos. Finalmente, en todos los problemas analizados se puede ver la enorme similitud en el comportamiento plástico entre ambos modelos, lo cual es lógico teniendo en cuenta que la formulación plástica es similar en los dos. No obstante, en el caso de la excavación apuntalada, sí se aprecian ciertas diferencias en el comportamiento plástico del suelo, las cuales son debidas a la redistribución plástica generada por una diferencia más acusada en los valores de la rigidez del suelo que resultan de las simulaciones con ambos modelos.

En el capítulo 8 se estudia una gran excavación urbana, correspondiente a las obras de ejecución de la futura estación intermodal de La Sagrera, en Barcelona. Se ha realizado un estudio de la geología y la hidrogeología del subsuelo del ámbito de la excavación y se ha establecido un conjunto de unidades geotécnicas con sus respectivas geometrías. Los parámetros del suelo se han obtenido a partir de: (1) los resultados de los ensayos realizados durante el proyecto de la estación y correlaciones empíricas y (2) 20 ensayos de columna resonante realizados, con motivo de esta investigación, en muestras cilíndricas talladas a partir de muestras bloque de alta calidad correspondientes a dos de las unidades geotécnicas identificadas. Las fases de excavación utilizadas en las simulaciones numéricas se han

seleccionado a partir del análisis conjunto de las medidas tomadas con cuatro extensómetros de 60m de profundidad instalados en el vaso de la excavación y de las medidas de los perfiles topográficos de la superficie del terreno realizados durante el avance de la misma. Se han realizado simulaciones numéricas de la excavación en cuatro secciones transversales que contienen, cada una de ellas, uno de los cuatro extensómetros instalados en la obra, y en una sección longitudinal que los contiene a todos ellos. Se han utilizado los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* en dichas simulaciones y se han comparado los resultados obtenidos tanto entre ellos como con las medidas realizadas. En el estudio llevado a cabo se han realizado dos tipos de análisis: (1) un análisis drenado con condiciones drenadas en todas las unidades geotécnicas y (2) un análisis no drenado-consolidado en el que se ha definido una primera fase con condiciones no drenadas en las unidades geotécnicas menos permeables y condiciones drenadas en las más permeables, y una segunda fase de consolidación con los tiempos de excavación correspondientes.

De los resultados de las simulaciones de la excavación de La Sagrera con los modelos *EPHYSS* y *HS-SS* se concluye que ninguno de los dos es capaz de reproducir la parte superior de los perfiles de desplazamientos verticales medidos con los extensómetros, en la cual se aprecia una notable reducción de los levantamientos. Este comportamiento se puede explicar por el secado progresivo del terreno próximo al nivel freático a medida que avanza la excavación, lo cual genera incrementos paulatinos de la succión en la zona parcialmente saturada del suelo y, por tanto, una retracción del mismo (Castellón, 2013). Salvando lo anterior, se concluye que, en general, las simulaciones con el modelo *EPHYSS* mejoran significativamente la aproximación a las medidas de los extensómetros en las diferentes fases de cálculo si se comparan con los resultados de las simulaciones obtenidos con el modelo *HS-SS*, tanto en las secciones transversales como en la sección longitudinal, especialmente en los extensómetros nº2, nº3 y nº4. Se concluye, asimismo, que no existe ninguna simulación con el modelo *HS-SS* que mejore simultáneamente en todas las fases de cálculo de alguna de las secciones analizadas los resultados obtenidos con el modelo *EPHYSS*. Por otro lado, en los resultados relativos a los extensómetros nº2, nº3 y nº4 de las simulaciones con el modelo *HS-SS*, tanto en las secciones transversales como en la sección longitudinal, se puede ver claramente el efecto de las inconsistencias generadas por las fases de consolidación en el análisis no drenado-consolidado con dicho modelo, las cuales dan lugar a desplazamientos notablemente inferiores a los obtenidos en las correspondientes fases drenadas. Dichas inconsistencias se detectan también en los gráficos $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ correspondientes a la fase de consolidación del análisis no drenado-consolidado de las simulaciones con el modelo *HS-SS*, cuando se comparan con los gráficos $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ de las respectivas fases de carga no drenada. El modelo *EPHYSS* es capaz de corregir el efecto de estas inconsistencias gracias a las variables de estado \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} y \mathbf{E}_{MEM}^e . En relación con los valores $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ que resultan de las simulaciones en los análisis drenados y en la fase no drenada de los análisis no drenados-consolidados, se concluye que son similares para un mismo modelo, lo cual se explica porque el comportamiento del suelo en ambos modelos frente a las tensiones de corte en régimen elástico no depende de las presiones de agua, salvo por la relación de $G_s^{ap}(-p')$ en el modelo *EPHYSS* y $G_s^{ap}(-\sigma'_3)$ en el modelo *HS-SS*. Finalmente, se puede ver que tanto las distribuciones de los excesos de presión de agua generados en las diferentes fases de carga no drenada de los análisis no drenados-consolidados, como el máximo valor positivo y negativo de dichos excesos son muy similares en ambos modelos y las pequeñas diferencias existentes se pueden atribuir principalmente al comportamiento no lineal de K'_s con $-p'$.

El coste computacional en el modelo *EPHYSS* se incrementa ligeramente respecto al del modelo *HS-SS*, lo cual implica un mayor tiempo de cálculo. No obstante, debe tenerse en cuenta lo siguiente: (1) el código de *EPHYSS* no ha sido optimizado para minimizar el número de operaciones realizadas y (2) mientras la asignación máxima de memoria RAM en los cálculos con *EPHYSS* es de 2GB, por utilizar un compilador de 32 bits, esta es de hasta 8GB en el modelo *HS-SS*, que utiliza el procesador de 64 bits, lo cual es significativo en problemas de contornos con un número elevado de elementos. En cualquier caso, los tiempos de cálculo medidos en las simulaciones con *EPHYSS* de los ensayos y problemas de contorno analizados en los capítulos 6, 7 y 8, utilizando un procesador convencional, entran perfectamente dentro de los tiempos de cálculo admisibles de un programa de cálculo geotécnico comercial.

Se concluye que, en general, el modelo *EPHYSS* mejora significativamente la aproximación a las medidas experimentales respecto el modelo *HS-SS*, especialmente en aquellos casos que presentan reversiones en las cargas desviadoras; resuelve las inconsistencias de este último con un coste computacional razonable; proporciona flexibilidad en el uso de diferentes formulaciones plásticas; y requiere parámetros simples, la mayoría de ellos comunes a los del modelo *HS-SS*, lo cual lo distingue de otros modelos constitutivos complejos que se han limitado a un uso académico. Todo ello convierte al modelo *EPHYSS* en un modelo que puede ser utilizado para el análisis y diseño en la práctica profesional de la ingeniería geotécnica.

9.2. Futuras líneas de investigación

A continuación, se plantean posibles futuras líneas de investigación que han surgido durante el desarrollo del presente trabajo.

- Realizar mediciones del valor del parámetro $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* en diferentes materiales mediante ensayos con medida interna de la deformación de tipo biaxial, triaxial verdadero o de cilindro hueco con torsión con objeto de calibrar la correlación $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = \Lambda G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ con una mayor significación estadística.
- Realizar mediciones del valor del parámetro $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ del modelo *EPHYSS* en los materiales de las unidades geotécnicas del subsuelo en el que se ha realizado la excavación de La Sagrera y analizar: (1) si se aproximan a los valores estimados en el capítulo 8 y (2) el efecto que los valores resultantes pueden tener en las simulaciones numéricas. Ello también se puede hacer en los materiales de las unidades geotécnicas identificadas en los problemas de contorno analizados en el capítulo 7, así como en las arenas de Hochstetten y Ticino, cuyos parámetros se han utilizado en el capítulo 6.
- Realizar mediciones del valor de los parámetros K_s^{ref} , m_1 , m_2 y v'_{min} del modelo *EPHYSS* en los materiales de las unidades geotécnicas del subsuelo en el que se ha realizado la excavación de La Sagrera, para estudiar las posibles diferencias respecto a las aproximaciones de los mismos obtenidas a partir de los parámetros $E_{t,ur}^{ref}$, m y v'_{ur} del modelo *HS-SS* y comprobar si se cumplen las observaciones de Kempfert y Gebreselassie (2006) descritas en los capítulos 3 y 5. También en este caso ello se puede hacer en los materiales de los problemas de contorno del capítulo 7 y en las arenas de Hochstetten y Ticino, cuyos parámetros se utilizan en el capítulo 6.

- Realizar ensayos de campo o de laboratorio para determinar los valores de los parámetros $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ y $\gamma_{0,7}$ del modelo *EPHYSS* en los materiales de las unidades geotécnicas de la excavación de la Sagrera en las que estos no han podido ser determinados durante la ejecución de la obra, especialmente en la unidad PI1.
- Generalizar, en la formulación de la parte plástica del modelo *EPHYSS* (modelo *HS_{MOD}*), la dependencia tensional de E'_{50} , $E'_{t,ur}$, E'_i , \hat{H} , y E'_{oed} con $-p'$ y no con $(-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi'))$, logrando una coherencia con la dependencia tensional de G_s^{ap} y K'_s correspondientes a la parte elástica (modelo *HQH*).
- Aplicar directamente las Reglas de Hashiguchi (1993) al modelo *EPHYSS* y realizar simulaciones de ensayos y problemas de contorno para comparar los resultados obtenidos con los del modelo *HS-SS* y con los del modelo *EPHYSS* implementado en este trabajo. Aunque el modelo *EPHYSS* dispone de una estructura interna que permite la aplicación directa de dichas reglas, en este trabajo se ha utilizado la variable de estado $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$ para este propósito, con objeto de minimizar las diferencias generadas por las formulaciones plásticas de los modelos *EPHYSS* y *HS-SS*.
- Optimizar los algoritmos del código numérico del modelo *EPHYSS* para minimizar el número de operaciones necesarias y reducir así el tiempo de cálculo.
- Analizar la posibilidad de caracterizar la curva de degradación correspondiente a $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ con un parámetro $\gamma_{0,7}^{90}$, manteniendo el ajuste de la curva correspondiente a $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ con el parámetro $\gamma_{0,7}^{180} \equiv \gamma_{0,7}$.
- Incorporar la dependencia de $\gamma_{0,7}$ con $-p'$ (Darendeli y Stokoe, 2001; Wichtmann y Triantafyllidis, 2004) al modelo *EPHYSS*.
- Combinar el modelo *HQH* con otros modelos plásticos y analizar problemas de contorno comparando los resultados obtenidos de los modelos resultantes con los obtenidos en modelos que también utilicen dicha formulación plástica e incorporen el comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones, siempre y cuando se cuente con los códigos numéricos de estos y se puedan utilizar en un programa específico. Se propone utilizar como modelo plástico el modelo de estado crítico *Cam Clay* modificado (*MCC*) de Roscoe y Burland (1968) y comparar los resultados obtenidos con los modelos *MIT-E3* de Whittle (1987), de Al-Tabbaa y Wood (1989), *SDMCC* de Bolton et al. (1994), *CASM-c* de Yu (1995), *3-SKH* de Stallebrass y Taylor (1997), *NAHOS* de Gryczmanski et al. (1998) o *FC+MCC* de Gryczmanski y Uliniarz (2008),
- Introducir el índice de poros como variable de estado en la ley de dilatancia original de Li y Dafalias (2000) y los parámetros necesarios correspondientes, sin necesidad de utilizar las simplificaciones expuestas en capítulo 5. Comparar los resultados obtenidos a partir de esta modificación con los obtenidos de la simulación con el modelo *EPHYSS* implementado en este trabajo, especialmente en los ensayos triaxiales no drenados con arenas.
- Incorporar al modelo *EPHYSS* las ecuaciones que permitan reproducir el comportamiento no saturado del suelo.

Referencias

- Abbireddy, C. O. R. (2008). *Particle form and its impact on packing and shear behavior of particulate materials*. Tesis doctoral no publicada. Southampton, Inglaterra: University of Southampton.
- Abbiss, C. P. (1986). The effects of damping on the interpretation of geophysical measurements. *Géotechnique*, 36(4), 565-580. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1986.36.4.565>.
- Addenbrooke, T. I., Potts, D. M. y Puzrin, A. M. (1997). The influence of pre-failure soil stiffness on the numerical analysis of tunnel construction. *Géotechnique*, 47(3), 693-712. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.3.693>.
- Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., y Walsh, J. L. (1967). *Theory of Splines and Their Applications*. Nueva York, EEUU: Academic Press.
- Alday Jover Arquitectos, RCR Arquitectes y West 8 (2017). Maqueta Estación de la Sagrera [infografía] En: Barcelona Sagrera Alta Velocidad. *Memoria 2017* [en línea] disponible en: <http://www.barcelonasagrera.com/wp-content/uploads/2018/08/memoria-2017.pdf>, 17. [consulta: 16 junio 2019].
- Al-Tabbaa, A. (1987). *Permeability and stress-strain response of speswhite kaolin*. Tesis doctoral no publicada. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University.
- Al-Tabbaa, A. y Wood, D.M. (1989) *An experimentally based "bubble" model for clay*. En: Pietruszczak, S. y Pande, G.N. (eds.) *Proceedings of the Third International Conference (NUMOG III), Numerical Models in Geomechanics*. Celebrada el 8-11 mayo 1989 en las Cascadas del Niágara, Canadá. Londres; Nueva York: Elsevier Applied Science. 5, 91-99.
- Anderson, D.G. y Stokoe, K.H. (1978). Shear modulus: A time-dependent soil property. *Dynamic Geotechnical Testing*. ASTM STP 654. American Society for Testing and Materials, 66-90.
- Apunto Lapospo (2011). Sin título [fotografía] En: Barcelona Sagrera Alta Velocidad. *Memoria 2011* [en línea] disponible en: <http://www.barcelonasagrera.com/wp-content/uploads/2015/04/1362.pdf>, 5. [consulta: 16 junio 2019].
- Apunto Lapospo (2017). Sin título [fotografía] En: Barcelona Sagrera Alta Velocidad. *Memoria 2017* [en línea] disponible en <http://www.barcelonasagrera.com/wp-content/uploads/2018/08/memoria-2017.pdf>, 49. [consulta: 16 junio 2019].
- Arthur, J.R.F., Chua, K.S. y Dunstan, T. (1977). Induced anisotropy in a sand. *Géotechnique*, 27(1), 13-30.
- Arthur, J.R.F., Chua, K.S., Dunstan, T. y Rodriguez, J. I. (1980). Principal stress rotation: a missing parameter. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 106(4), 419-433.
- Aswin, L., Ou, C-Y. y Hsieh, P-G. (2010). Evaluation of clay constitutive models for analysis of deep excavation under undrained conditions. *Journal of GeoEngineering*, 5(1), 9-20.
- Atkinson, J.H. (2000). Non-linear soil stiffness in routine design. *Géotechnique*, 50(5), 487-508. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.5.487>.

- Atkinson, J. y Little, J.A. (1988). Undrained triaxial strength and stress-strain characteristics of a glacial till soil. *Canadian Geotechnical Journal*, 25(3), 428-439. DOI: <https://doi.org/10.1139/t88-048>.
- Atkinson, J.H., Richardson, D. y Stallebrass, S.E. (1990). Effect of recent stress history on the stiffness of overconsolidated soil. *Géotechnique*, 40(4), 531-540. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1990.40.4.531>.
- Atkinson, J. y Sallfors, G. (1991). Experimental determination of soil properties. En: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 26-30 mayo 1991 en Florencia, Italia. Róterdam; Brookfield: A.A. Balkema. 3, 915-956.
- Bakker, K.J. (2000). *Soil Retaining Structures, Development of Models for Structural Analysis*. Tesis doctoral no publicada. Delft, Países Bajos: Technische Universiteit Delft.
- Barcelona Sagrera Alta Velocidad (2007). *Anejo nº6 de geotecnia del proyecto "L.A.V. Madrid – Zaragoza – Barcelona – Frontera Francesa. Tramo: La Sagrera – Nudo de la Trinidad. Proyecto de Construcción de la estructura de la Estación de La Sagrera"*. Documento no publicado.
- Barcelona Sagrera Alta Velocidad (2011). *Documento de trabajo de la dirección de las obras del proyecto "L.A.V. Madrid – Zaragoza – Barcelona – Frontera Francesa. Tramo: La Sagrera – Nudo de la Trinidad. Proyecto de Construcción de la estructura de la Estación de La Sagrera"*. Documento no publicado.
- Barden, L. (1970). Discussion: Stress and displacements in a cross-anisotropic soil. *Géotechnique*, 20(4), 456–458. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1970.20.4.456>.
- Batdorf, S.B., Budiansky, B. (1949). *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*. NACA Technical Note (1871). Virginia, EEUU: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Bates, C. R. (1989). Dynamic soil property measurements during triaxial testing. *Géotechnique*, 39 (4), 721-726. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1989.39.4.721>.
- Baudet, B. y Stallebrass, S. (2004). A constitutive model for structured clays. *Géotechnique*, 54 (4), 269-278. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2004.54.4.269>.
- Bauer, E. (1996). Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soils and Foundations*, 36 (1), 13–36.
- Bazant, Z.P. y Oh, B.H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics*, 11(4), 559–582.
- Been, K. y Jefferies, M.G. (1985). A state parameter for sands. *Géotechnique*, 35(2), pp. 99-112. <https://doi.org/10.1680/geot.1985.35.2.99>.
- Bell, J. (1989). Experimental solid mechanics in the nineteenth century. The 1989 William Murray Lecture. *Experimental Mechanics*, 29(2) 57–165. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02321369>.
- Bennell, J. D., Taylor Smith, D. y Davis, A. M. (1984). Resonant column testing of marine sediments. *Oceanography International*. Brighton, Inglaterra. 84.
- Benz, T. (2007). *Small-Strain Stiffness of Soils and its Numerical Consequences*. Tesis doctoral no publicada. Stuttgart, Alemania: Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- Benz, T., Vermeer P.A. y Schwab, R. (2009) A small-strain overlay model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 33(1), 25-44.
- Besseling, J.F. (1958). A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain hardening, creep recovery and secondary creep. *Journal of Applied Mechanics*, 25(1), 529-536.
- Biarez, J. y Hicher, P.-Y. (1994). *Elementary Mechanics of Soil Behaviour: Saturated Remoulded Soils*. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema.
- Bieniawski, Z. T. (1971). Deformational behavior of fractured rock under multiaxial compression. En: Te'eni, M. (ed.). *International Conference Structure, Solid Mechanics and Engineering Materials*. Celebrada el 21-25 abril 1969 en la Universidad de Southampton. Londres, Inglaterra: Wiley-Interscience, 589-598.

- Bishop, A.W. y Henkel, D.J. (1962). *The measurement of soil properties in the triaxial test*. Segunda edición. Londres, Inglaterra: Edward Arnold Ltd.
- Bishop, A.W. y Wesley, L.D. (1975). A hydraulic triaxial apparatus for controlled stress path testing. *Géotechnique*, 25(4), 657-670. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1975.25.4.657>.
- Bjerrum, L. (1973). Problems of soil mechanics and construction on soft clays and structurally unstable soils (collapsible, expansive and others). En: *Eighth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 6-11 agosto 1973 en Moscú, Rusia. 3, 111-159.
- Bolton, M. D., Sun, H. W. y Britto, A. M. (1993). Finite element analyses of bridge abutments of firm clay. *Computers and Geotechnics*, 15(4), 221-245.
- Bolton, M.D., Dasari, G.R. y Britto, A.M. (1994). Putting small strain non-linearity into the Modified Cam Clay model. En: Siriwardane, H. J. y Zaman, M. M. (eds.) *Eighth International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics*. Celebrada el 22-28 mayo 1994 en Virginia, Estados Unidos. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema. 537-542.
- Bolton, M.D. y Whittle, R.W. (1999). A non-linear elastic/perfectly plastic analysis for plane strain undrained expansion tests. *Géotechnique*, 49(1), 133-141.
- Bonnier, P.G. (2000). Implementational aspects of constitutive modeling. En: *Soft Clay Modelling For Engineering Practice Workshop*. Trondheim, Noruega: Norwegian University of Science and Technology, 1.
- Borja, R.I., Tamagnini, C. y Amorosi, A. (1997). Coupling Plasticity and Energy-Conserving Elasticity Models for Clays. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(10), 948-957.
- Bowden, F. P. y Tabor, D. (1964). *The Friction and Lubrication of Solids. Part II*. Londres, Inglaterra: Oxford University Press.
- Bressani, L. A. (1990). *Experimental Properties of Bonded Soils*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Briaud, J.K. y Gibbens, R. (1997). *Large scale load test and data base of spread footings on sand*. Report No. FHWA-RD-97-068. Virginia, EEUU: Departamento de Transporte de Estados Unidos.
- Britto, A. M. y Gunn, M. J. (1987). *Critical state soil mechanics via finite elements*. Chichester, Inglaterra: Ellis Horwood Limited.
- Broms, B.B. y Ratnam, M.V. (1963). Shear strength of an anisotropically consolidated clay. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(6), 1-26.
- Broms, B.B. y Casbarian, A.O. (1965). Effects of rotation of the principal stress axes and of the intermediate principal stress on the shear strength. En: *Proceedings of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 8-15 septiembre 1965 en Montreal, Canadá. Toronto, Canadá: University of Toronto Press, 1, 179-183.
- Budhu, M. (1984). Nonuniformities imposed by simple shear apparatus. *Canadian Geotechnical Journal*, 21(2), pp. 125-137. DOI: <https://doi.org/10.1139/t84-010>.
- Bui, M. T. (2009). *Influence of some particle characteristics on the small strain response of granular materials*. Tesis doctoral no publicada. Southampton, Inglaterra: University of Southampton.
- Burland, J.B. (1989). Ninth Laurits Bjerrum Memorial Lecture: "Small is beautiful"—the stiffness of soils at small strains. *Canadian Geotechnical Journal*, 26(4), 499-516. DOI: <https://doi.org/10.1139/t89-064>.
- Burland, J.B., Simpson, B. y St. John, H.D. (1979). Movements around excavations in London Clay. En: *Proceedings of the Seventh European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, The measurement, selection and use of design parameters in geotechnical engineering. Brighton, Inglaterra: British Geotechnical Society, 1, 13-29.
- Campanella, R.G. y Vaid, Y.P. (1973). Influence of stress path on the plane strain behaviour of a sensitive clay. En: *Proceedings of the Eight International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 6-11 agosto 1973 en Moscú, USSR. Moscú: Papers Subcommittee, 1.1, 85-92.

- Campanella, R.G., Stewart, W.P., Roy, D. y Davies, M.P. (1994). Low strain dynamic characteristics of soils with the downhole seismic piezocone penetrometer. En: Ebelhar, R., Drnevich, V. y Kutter, B. (eds.) *STP1213-EB Dynamic Geotechnical Testing II*, 73-87. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP13207S>.
- Casagrande, A. y Carillo, H. (1944). Shear failure on anisotropic materials. En: *Contribution to Soil Mechanics 1941-1953*. Boston, EEUU: Boston Society of Civil Engineers, 31(2), 74-87.
- Castellón, J. (2013). *Análisis teórico, numérico y experimental del comportamiento de suelos en el rango de las pequeñas deformaciones*. Tesis de máster no publicada. Barcelona, España: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Clarke, S. D. (2009). *Enhancement of the Brick constitutive model to incorporate viscous soil behaviour*. Tesis doctoral no publicada. Sheffield, Inglaterra: University of Sheffield.
- Clayton, C. R. I. (2011). Stiffness at small strain: research and practice. *Géotechnique*, 61(1), 5–37. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2011.61.1.5>.
- Clayton, C. R. I., Edwards, A. y Webb, M. J. (1991). Displacement within the London Clay during construction. En: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Deformation of soils and displacements of structures. Celebrada el 26-30 mayo 1991 en Florencia, Italia. Róterdam; Brookfield: A. A. Balkema, 2, 791-796.
- Clayton, C. R. I. y Heymann, G. (1999). Stiffness of geomaterials from small strain triaxial and field geophysical tests. En: Jamiolkowski, M., Lancellotta, R. y Presti, D. Lo (Eds.) *Second International Conference on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Turín, Italia: A.A. Balkema, 1, 65-71.
- Clayton, C. R. I. y Heymann, G. (2001). Stiffness of Geomaterials at very small strains. *Géotechnique*, 51(3), 245–255. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2001.51.3.245>.
- Cole, K. W. y Burland, J. B. (1972). Observations of retaining wall movements associated with a large excavation. En: *Fifth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Structures Subjected to Lateral Forces. Celebrada el 10-13 abril 1972 en Madrid, España. Madrid, España: Sociedad Española de Mecánica del Suelo e Ingeniería Geotécnica. 1, 442-453.
- Cornforth, D.H. (1964). Some experiments on the influence of strain conditions on the strength of sand. *Géotechnique*, 14(2), 143-167. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1964.14.2.143>.
- Costanzo, D., Viggiani, G. y Tamagnini, C. (2006). Directional response of a reconstituted fine grained soil. Part I: Experimental investigation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(13), 1283-1301. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.526>.
- Cudmani, R. (2010). *Fundamental aspects of soil response and soil-structure interaction during strong earthquakes*. Monografía en preparación, según Gudehus (2011).
- Cudny, M. (2013). *Some aspects of the constitutive modelling of natural fine grained soils*. Tesis doctoral no publicada. Gdansk, Polonia: Politechnika Gdanska.
- Cuellar, V. (1978). Intrinsic time theory applied to the behavior of dry sand under earthquake type of loading. En: Gudehus, G., Borm, G. W. y Prange, B. (eds.) *Proceedings of an International Symposium and a NATO Advanced Study Institute of Soil and Rock Mechanics*, Dynamical Methods in Soil and Rock Mechanics. Celebrado el 5-16 septiembre 1977 en Karlsruhe, Alemania. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema.
- Chambon, R. (1989). Une classe de loi de comportement incrémentalement non linéaire pour les sols non visqueux: résolution de quelques problèmes de cohérence. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 308(II), 1571-1576.
- Chambon, R., Desrues, J. J. M., Hammad, W. y Charlier, R. (1994). CLoE, a new rate-type constitutive model for geomaterials: theoretical basis and implementation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18(4), 253-278. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610180404>.
- Chaudhary, S. K., Kuwano, J., Hashimoto, S., Hayano, Y., Nakamura, Y. (2002). Effects of initial fabric and shearing direction on cyclic deformation characteristics of sand. *Soils and Foundations*, 42(1), 147–157. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf.42.147>.

- Chen, W.F. y Mizuno, E. (1990). *Nonlinear analysis in soil mechanics. Theory and implementation*. Ámsterdam, Países Bajos: Elsevier Science Publishers.
- Chiaro, G., De Silva, L., Kiyota, T. y Koseki, J. (2011). An elasto-plastic model to describe the undrained cyclic behavior of saturated sand with initial static shear. En: Chung, C.-K. , Kim, H.-K. , Lee, J.-S., Jung, Y.-H., Kim, D.-S. (eds.) *Proceedings of the Fifth International Symposium on Deformation Characteristics of Geomaterials*. Celebrado el 1-3 septiembre 2011 en Seúl, Corea del Sur. IOS Press, 2, 1026-1033.
- Dafalias, Y.F. (1975). *On cyclic and anisotropic plasticity: (i) A general model including material behaviour under stress reversal, (ii) Anisotropic hardening for initially orthotropic materials*. Tesis doctoral no publicada. Berkeley, California, EEUU: University of California.
- Dafalias, Y.F. y Popov, E.P. (1975). A model of nonlinearly hardening materials for complex loadings. *Acta Mechanica*, 21(3), 173-192.
- Dafalias, Y.F. y Popov, E.P. (1976). Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. *Journal Applied Mechanics*, 43(4), 645-651. DOI: 10.1115/1.3423948.
- Dafalias, Y.F. y Herrmann, L.R. (1980). A bounding surface soil plasticity model. En: G.N. Pande y O.C. Zienkiewicz (eds.) *International Symposium on Soils Under Cyclic and Transient Loading*. Soils Under Cyclic and Transient Loading. Celebrado el 7-11 enero 1980 en Swansea, Reino Unido. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema, 1, 335-345.
- Dafalias, Y.F. y Herrmann, L.R. (1982). Bounding surface formulation of soil plasticity. En: Pande, G.N. y Zienkiewicz, O.C. (eds.) *Soil Mechanics, Transient and Cyclic Loads*, Constructive Relations and Numerical Treatment. Chichester, Inglaterra: John Wiley and Sons, 253-282.
- Darendeli, M.B. y Stokoe (2001). *Development of a new family of normalized modulus reduction and material damping curves*. Tesis doctoral no publicada. Austin, EEUU: The University of Texas.
- Darve, F. (1978). *Une formulation incrémentale nonlineaire de lois rhéologiques; application aux sols*. Tesis doctoral no publicada. Grenoble, Francia: Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- Darve, F. (1990). The expression of rheological laws in incremental form and the main classes of constitutive equations. En: *Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling*. Ed. por Darve, F. Londres, Inglaterra: Elsevier.
- Darve, F. y Labanieh, S. (1982). Incremental constitutive law for sands and clays, simulations of monotonic and cyclic tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 6(2), 243-275. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610060209>.
- Darve, F. y Roguiez, X. (1999). Constitutive relations for soils: new challenges. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 4, 9-35.
- Darve, F. y Servant, G. (2004). Fundamentals of constitutive equations for geomaterials. En: *Degradations and Instabilities in Geomaterials*. Ed. por Darve, F. y Vardoulakis, I. Nueva York, EEUU: Springer Wiem Publication. 1-34.
- Davis, R. O. y Mullenger, G. (1978). A rate-type constitutive model for soil with a critical state. *International Journal for Numerical Analytical Methods in Geomechanics*, 2(3), 255-282. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610020306>.
- De Santos, C. (2015). *Backanalysis methodology based on multiple optimization techniques for geotechnical problems*. Tesis doctoral no publicada. Barcelona, España: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Desai, C. S. (1971). Nonlinear Analyses Using Spline Functions. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 97(10), pp 1461-1480.
- Desrues, J., Vermeer, P.A. y Zweschper, B. (2000). *Database for test on Hostun RF Sand*. Institutsbericht 13. Stuttgart, Alemania: Universität Stuttgart.

- Dobry, R., y Vucetic, M. (1987). Dynamic properties and seismic response of soft clay deposits. En: Mendoza, M. y Montañez, L (eds.) *Proceedings of the International Symposium on Geotechnical Engineering of Soft Soils*. Celebrado el 3-14 agosto 1987 en la Ciudad de México, México. Ciudad de México, México: Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica, 2, 51-87.
- Dortoka, Barcelona Regional, BOPBAA y TAEC (2011). Sin título [infografía] En: Barcelona Sagrera Alta Velocidad. *Memoria 2011* [en línea] disponible en: <<http://www.barcelonasagrera.com/wp-content/uploads/2015/04/1362.pdf>>, 6. [consulta: 16 junio 2019].
- Dos Santos, J.A. y Correia, A.G. (2001). Reference threshold shear strain of soil. Its application to obtain an unique strain-dependent shear modulus curve for soil. *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. Celebrada el 27-31 agosto 2001 en Estambul, Turquía. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema.
- Drescher, A. y De Josselin De Jong, G. (1972). Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(5), 337–340. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(72\)90029-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(72)90029-4).
- Drucker, D.C. (1951). A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. En: *First U.S. National Congress on Applied Mechanics*. Celebrado el 11-16 junio 1951 en el Illinois Institute of Technology. Chicago, Illinois: American Society of Mechanical Engineers, 487-491.
- Duffy, J. y Mindlin, R.D. (1957). Stress-strain relations and vibrations of granular medium. *Journal of Applied Mechanics*, 24, 585-593.
- Duncan, J.M. y Chang, C.Y. (1970). Non-linear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 96(5), 1629-1953.
- Duncan, J.M, y Wong, K.S. (1974). *Hyperbolic Stress-Strain Parameters for Non-Linear Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Soil Masses*. Report No. TE-74-3. Berkeley, California, EEUU: National Science Foundation, University of California.
- Duncan, J.M., Byrne, P., Wong, K.S. y Mabry, P. (1980). *Strength, Stress-Strain and Bulk Modulus Parameters for Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Soil Masses*. Report No. UCB/GT/80-01. Berkeley, California, EEUU: Office of Research Services, University of California, 20-49.
- Duwez, P. (1935). On the plasticity of crystals. *Physical Review (American Physical Society)*, 47(6), 494-501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.494>.
- Dyvik, R. y Madshus, C. (1985). Lab measurements of Gmax using bender elements. En: *ASCE Convention on Advances in the Art of Testing Soils Under Cyclic Conditions*. Celebrada el 24 octubre 1985 en Detroit, EEUU. Nueva York, EEUU: American Society of Civil Engineers, 186-196.
- Dyvik, R. y Olsen, T. S. (1989). Gmax measured in oedometer and DSS tests using bender elements. En: *Proceedings of the Twelfth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 13-18 agosto 1989 en Río de Janeiro, Brasil. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 1, 39–42.
- Ehret, A., Itskov, M., y Schmid, H. (2010). Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations - A comparative study. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(2), 189–206.
- Einav, I. (2004). Thermomechanical relations between stress-space and strain-space models. *Géotechnique*, 54(5), 315-318. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2004.54.5.315>.
- Einav, I. y Puzrin, A.M. (2004). Pressure-Dependent Elasticity and Energy Conservation in Elastoplastic Models for Soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130(1), 81–92. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2004\)130:1\(81\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2004)130:1(81)).
- Eisenberg, M. A. y Phillips, A. (1971). A theory of plasticity with non-coincident yield and loading surfaces. *Acta Mechanica*, 11(3-4), 247-260. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01176559>.
- Elhakim, A.F. (2005). *Evaluation of shallow foundation displacements using small-strain stiffness*. Tesis doctoral no publicada. Atlanta, EEUU: Georgia Institute of Technology.

- Ellison, K.C. (2009). *Constitutive modeling of London Clay*. Informe de primer año de doctorado. Cambridge, Inglaterra: University of Cambridge.
- Ellison, K.C., Soga, K. y Simpson, B. (2010). An examination of strain space versus stress space for the formulation of elastoplastic constitutive models. En: Benz, T. y Nordal, S. (eds.) *7th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, NUMGE 2010. Celebrada el 2-4 junio 2010 en la Norwegian University of Science and Technology (NTNU) en Trondheim, Noruega. Londres, Inglaterra: Taylor & Francis Group, 33-38.
- Euler, L. (1727). *Dissertatio physica de sono (Physical dissertation on sound)* [en línea]. Disponible en The Euler Archive < <http://eulerarchive.maa.org/>> [consulta: 29 julio 2019].
- Euler, L. (1728). *Solutio problematis de inveniendae curva, quam format lamina utcuque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata (Solution to the problem of finding curves which are formed by an elastic strip when a force is applied to a single point)* [en línea]. Disponible en The Euler Archive < <http://eulerarchive.maa.org/>> [consulta: 29 julio 2019].
- Fahey, M. and Carter, J.P. (1993). A finite element study of the pressuremeter test in sand using a nonlinear elastic plastic model. *Canadian Geotechnical Journal*, 30(2), 348-362. DOI: <https://doi.org/10.1139/t93-029>.
- Fernandez, A.L. y Santamarina, J.C. (2001). Effect of cementation on the small-strain parameters of sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 38(1), 191-199. DOI: <https://doi.org/10.1139/t00-081>.
- Ferreira, C., da Fonseca, A. V. y Santos, J. A. (2006). Comparison of simultaneous bender elements and resonant column tests on Porto residual soil. En: Ling H.I., Callisto L., Leshchinsky D., Koseki J. (eds.) *Geotechnical symposium on soil stress-strain behavior: measurement, modeling and analysis*. Celebrado el 16-17 marzo 2006 en Roma, Italia. Dordrecht, Países Bajos: Springer-Verlag, 146, 523-535.
- Frydman, S., Talesnick, M. y Puzrin, A. (1995). Colinearity of stresses, strains and strain increments during shearing of soft clay. *Journal of Geotechnical Engineering*, 121(2), 174-184. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1995\)121:2\(174\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1995)121:2(174)).
- Ganendra D. (1994). *Finite element analysis of laterally loaded piles*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Gasparre, A. (2005). *Advanced laboratory characterisation of London clay*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Gasparre, A., Nishimura, S., Minh, N. A., Coop, M. R. y Jardine, R. J. (2007). The stiffness of natural London Clay. *Géotechnique*, 57(1), 33-47. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2007.57.1.33>.
- Georgiannou, V. N., Burland, J. B. y Hight, D. W. (1990). The undrained behaviour of clayey sands in triaxial compression and extension. *Géotechnique*, 40(3), 431-449. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1990.40.3.431>.
- Georgiannou, V. N., Rampello, S. y Silvestri, F. (1991). Static and dynamic measurements of undrained stiffness on natural overconsolidated clays. En: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Deformation of soils and displacements of structures. Celebrada el 26-30 mayo 1991 en Florencia, Italia. Róterdam; Brookfield: A.A. Balkema, 1, 91-95.
- Goddard, J.D. (1990). Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical and Physical Sciences*, 430(1878), 105-131. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1990.0083>.
- Green, G. (1828). *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*. Nottingham, Inglaterra: T. Wheelhouse (*Impr.*)
- Griffiths, D.V. y Prévost, J.H. (1990). Stress-strain curve generation from simple triaxial parameters. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14(8), 587-594. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610140805>.
- Gryczmanski, M., Jastrzebska, M. y Sternik, K. (1998). *Single surface elasto-plastic model for clays with strongly nonlinear anisotropic hardening rule – calibration and numerical implementation*.

- Internal Report No. BK-254/RB- 7/98. Gliwice, Polonia: Geotechnical Dept., Silesian University of Technology.
- Gryczmanski, M. Jastrzebska, M. and Sternik, J. (1999). *Single surface elasto-plastic model for clays with strongly nonlinear anisotropic hardening NAHOS 1- verification and application in geotechnical problems*. Internal Report No. BK-237/RB-7/99. Gliwice, Polonia: Geotechnical Dept., Silesian University of Technology.
- Gryczmanski, M. y Uliniarz, R. (2008). A simple critical state model with small strain nonlinearity for overconsolidated soils. *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, 12, 49-60.
- Gudehus, G. (1979). A comparison of some constitutive laws for soils under radially symmetric loading and unloading. En: W. Wittke (Ed.) *3rd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*. Celebrada en abril 1979 en Aachen, Alemania. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 1309-1324.
- Gudehus, G. (1996). A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils and Foundations*, 36(1), 1–12. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf.36.1>.
- Gudehus, G. (2011). *Physical soil mechanics*. Heidelberg, Alemania: Springer-Verlag.
- Gudehus, G., Goldscheider, M. y Winter, H. (1977). *Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods: Some sources of errors and bounds of accuracy*. Rotterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 121-150.
- Gunn, M. J. (1992). The prediction of surface settlement profiles due to tunneling. En: Houlsby, G. T. y Schofield, A. N. (eds.) *Proceedings of the Wroth Memorial Symposium*, Predictive soil mechanics. Celebrada el 27-29 julio 1992 en St Catherine's College. Londres, Inglaterra: Thomas Telford, 304-316.
- Habib, P. (1953). Influence of the variation of the average principal stress upon the shearing strength of soils. En: *Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 16-17 agosto 1953 en Suiza. Zurich, Suiza: Comité Organizador ICOSOMEF, 1, 131-136.
- Hansen, J. B. (1963). Discussion of Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(4), 241-242.
- Hara, A. (1980). *Dynamic deformation characteristics of soils and seismic response analyses of the ground*. Disertación presentada a la Universidad de Tokio.
- Hara, A., Ohta, T., Niwa, M., Tanaka, S. y Banno, T. (1974). Shear modulus and shear strength of cohesive soils. *Soils and Foundations*, 14(3), 1-12. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.14.3_1.
- Hardin, B. O. (1961). *Study of Elastic Wave Propagation and Damping in Granular Materials*. Tesis doctoral no publicada. Gainesville, Florida, EEUU: University of Florida.
- Hardin, B. O. (1978). The nature of stress-strain behavior for soils. *ASCE Special Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. Pasadena, California, EEUU, 3–90.
- Hardin, B.O. y Richart Jr., F.E. (1963). Elastic wave velocities in granular soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(1), 33-66.
- Hardin, B.O. y Black, W.L. (1966). Sand stiffness under various triaxial stresses. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 92(2), 27-42.
- Hardin, B.O. y Black, W.L. (1968). Vibration modulus of normally consolidated clays. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 94(2), 353-370.
- Hardin, B.O. y Drnevich, V.P. (1972). Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 98(6), 603-624.
- Hardin, B.O. y Blandford, G., (1989). Elasticity of Particulate Materials. *Journal of Geotechnical Engineering*, 115(6), 788–805.
- Hashiguchi, K. (1985). Two and three surface models of plasticity. En: Kawamoto, T. y Ichikawa, Y. (eds.) *Proceedings of the Fifth International Conference on numerical methods in geomechanics*. Celebrada el 1-5 abril 1985 en Nagoya, Japón. Róterdam; Boston: A. A. Balkema, 125-134.

- Hashiguchi, K. (1993). Fundamental requirements and formulations of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity. *International Journal of Plasticity*, 9(5), 525-549. DOI: [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(93\)90018-L](https://doi.org/10.1016/0749-6419(93)90018-L).
- Hepton, P. (1988). Shear wave velocity measurements during penetration testing. *Penetration Testing in the UK, ICE*. Londres, Inglaterra: Thomas Telford. 35, 275-278.
- Herle, I. y Kolymbas, D. (2004). Hypoplasticity for soils with low friction angles. *Computers and Geotechnics*, 31(5), 365–373. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2004.04.002>.
- Hicher, P.-Y. (1996). Elastic properties of soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, 122(8), 641-648. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1996\)122:8\(641\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1996)122:8(641)).
- Hight, D.W. (1983). *Laboratory investigations of Seabed clays*. Tesis Doctoral. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Hight, D. W., McMillan, F., Powell, J. J. M., Jardine, R. J. y Allenou, C. P. (2003). Some characteristics of London clay. En: *International workshop on characterization and engineering properties of natural soils*. Celebrado el 2-4 diciembre 2004 en Singapur. CRC Press, 2, 851–907.
- Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(3), 236–249. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2).
- Hoar, R.J. y Stokoe, K.H. (1978). Generation and measurement of shear waves *in situ*. En: *Dynamic Geotechnical Testing*, Ed. por Silver, M. y Tiedemann, D. West Conshohocken, Pensilvania: ASTM International. 3-29. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP35669S>.
- Hoffmann, C. (2019) *Datos Small Strain* [correo electrónico] a Ledesma, A. y Castellón, J. [10 junio 2019].
- Hooke, R. (1676). *A description of helioscopes and some other instruments made by Robert Hooke, Fellow of the Royal Society*. Londres, Inglaterra: T.R., John Martyn (*Impr.*).
- Horning, E.D. y Buchmaier, R.F. (2005). Laboratory and field tests investigating the stress strain behaviour of weathered Keuper Mudstone. En: Bilsel, H. y Nalbantoglu, Z. (eds.) *International Conference on Problematic Soils*. Celebrada el 25-27 mayo 2005 en Famagusta, Chipre del Norte. Eastern Mediterranean University, 1, 389-396.
- Houlsby, G.T., (1985). The use of a variable shear modulus in elastic-plastic models for clays. *Computers and Geotechnics*, 1, 3–13. DOI: [https://doi.org/10.1016/0266-352X\(85\)90012-6](https://doi.org/10.1016/0266-352X(85)90012-6).
- Houlsby, G.T. y Wroth, C.P. (1991). The variation of shear modulus of a clay with pressure and overconsolidation ratio. *Soils and Foundations*, 31(3), 138-143. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.31.3_138.
- Houlsby, G.T., Amorosi, A. y Rojas, E. (2005). Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Géotechnique*, 55(5), 383-392. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.5.383>
- Hsieh, P. G., Ou, C. Y., y Lim, A. (2010). Use of the total stress undrained model to the analysis of deep excavation. En: L., John y L., Meei-Ling (Eds.) *Proceedings of the 17th Southeast Asian Geotechnical Conference*. Celebrada el 10-13 mayo 2010 en Taipei, Taiwan. Taiwan Geotechnical Society/Association of Geotechnical Societies in Southeast Asia/Southeast Asian Geotechnical Society, 227-230.
- Hueckel, T. (1976). Coupling of elastic and plastic deformations of bulk solids. *Meccanica*, 11(4), 227-235.
- Hueckel, T. y Nova, R. (1979). Some hysteresis effects of behaviour of geologic media. *International Journal of Solids and Structures*, 15(8), 625-642. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90076-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90076-3).
- Hughes, T.J.R. y Taylor, R.L. (1978). Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/visco-plastic finite element analysis. *Computer and Structures*, 8(2), 169-173. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(78\)90019-6](https://doi.org/10.1016/0045-7949(78)90019-6).

- Idriss, I.M., Dorby, R. y Singh, R.D. (1978). Nonlinear behaviour of soft clays during cyclic loading. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 104(12), 1427-1447.
- Imai, T. y Yoshimura, Y. (1970). Elastic wave velocity and soil properties in soft soil. *Tsuchi-to-Kiso*, 18(1), 17-22.
- Imai, T. y Tonouchi, K. (1982). Correlation of N-value with S-wave velocity and shear modulus. En: Verruijt, A, Beringen, F. L. y de Leeuw, E. H. (eds.) *Proceedings of the second European Symposium on Penetration Testing (ESOPT II)*. Celebrado el 24-27 mayo 1982 en Ámsterdam. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 57-72.
- Ishibashi, I. (1981). Dynamic soil properties. En: *Joint US/PRC Microzonation Workshop*. Celebrado el 11-16 septiembre 1981 en Harbin, China. Academia Sinica, 16, 1-21.
- Ishibashi, I. y Zhang, X. (1993). Unified dynamic shear moduli and damping ratios of sand and clay. *Soils and Foundations*, 33(1), 182-191. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.33.182>.
- Ishihara, K. (1996). *Soil Behaviour in Earthquake Geotechnics*. Nueva York, EEUU: Oxford University Press.
- Ishihara, K., Tatsuoka, F. y Yasuda, S. (1975). Undrained deformation and liquefaction of sand under cyclic stresses. *Soils and Foundations*, 15(1), 29-44.
- Israelachvili, J.N. (1992). *Intermolecular and surface forces*. EEUU: Academic Press.
- Iwan, W. D. (1967) On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 34(3), 612-617. <https://doi.org/10.1115/1.3607751>.
- Iwan, W.D. y Chelvakumar, K. (1988). Strain-space constitutive model for clay soils. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(9), 1454-1472. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:9\(1454\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:9(1454)).
- Iwasaki, T., Tatsuoka, F. y Takagi, Y. (1978). Shear modulus of sands under torsional shear loading. *Soil and Foundations*, 18(1), 39-56. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.18.39>.
- Jaky, J. (1944). The coefficient of earth pressure at rest. *Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineers*, 78(22), 355-358.
- Jamiolkowski, M., Ladd, C. C., Germaine, J. T. y Lancellotta, R. (1985). New developments in field and laboratory testing of soils - A State-of-the-Art Report. En: Comité de Publicaciones del XI ICSMFE (ed.) *Eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 12-16 agosto 1985 en San Francisco, EEUU. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 1, 57-153.
- Jamiolkowski, M., Lancellotta, R. y Lo Presti, D. C. F. (1995). Remarks on the stiffness at small strains of six Italian clays. En: Shibuya, S., Mitachi, T. y Miura, S. (eds.) *Proceedings of the First International Conference on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Celebrada el 12-14 septiembre 1994 en Sapporo, Japón. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema, 817-836.
- Janbu, N. (1963). Soil Compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. En: *Proceedings of the European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Problems of Settlements and Compressibility of Soils. Celebrada en 1963 en Wiesbaden, Alemania. 1, 19-25.
- Jardine, R. J. (1985). *Investigations of pile-soil behaviour with special reference to the foundations of offshore structures*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Jardine, R. J. (1992). Some observations on the kinematic nature of soil stiffness. *Soil and Foundations*, 32(2), 111-124. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.32.2_111.
- Jardine, R. J. (1995). One prespective of the pre-failure deformation characteristics of some geomaterials. En: Shibuya, S., Mitachi, T. y Miura, S. (eds.) *Proceedings of the First International*

- Conference on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials. Celebrada el 12-14 septiembre 1994 en Sapporo, Japón. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema. 855-885.
- Jardine, R.J., Symes, M.J., y Burland, J.B. (1984). The measurement of soil stiffness in the triaxial apparatus. *Géotechnique*, 34(3), 323-340. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1984.34.3.323>.
- Jardine, R.J., Potts, D.M., Fourie, A.B. y Burland, J.B. (1986). Studies of the Influence of Non-Linear Stress Strain Characteristics in Soil-Structure Interaction. *Géotechnique*, 36(3), 377-396. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1986.36.3.377>.
- Jardine, R. J. y Potts, D. M. (1988). Hutton tension leg platform foundations: prediction of driven pile behaviour. *Géotechnique*, 38(2), 231-252. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1988.38.2.231>.
- Jardine, R.J., Potts, D.M., St. John, H.D. y Hight, D.W. (1991). Some practical applications of a non-linear ground model. En: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 26-30 mayo 1991 en Florencia, Italia. Róterdam; Brookfield: A.A. Balkema, 1, 223 - 228.
- Jardine, R. J., Zdravkovic, L. y Porovic, E. (1997). Anisotropic consolidation including principal stress rotation: experiments, results and practical applications. En: Simão, P. (ed.) *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 6-12 septiembre 1997 en Hamburgo, Alemania. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 4. 2165–2168.
- Jardine, R. J., Kuwano, R., Zdravkovic, L. y Thorton, C. (2001). Some fundamental aspects of the prefailure behaviour of granular soils. En: Jamiolkowski, M., Lancellotta, R., Lo Presti, D. C. F. (eds.). *Proceedings of the Second International Symposium on Pre-Failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Celebrada el 28-30 septiembre 1999 en Torino, Italia. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema, 2, 1077-1111.
- Jardine, R. J., Gens, A., Hight, D. W. y Coop, M. R. (2004). Developments in understanding soil behavior. En: Jardine, R. J., Potts, D. M., Higgins, K. G. (eds.). *Advances in geotechnical engineering. The Skempton conference*, Proceedings of a three day conference on advances in geotechnical engineering. Celebrada el 29-31 marzo 2004 en la Royal Geographical Society. Londres, Inglaterra: Thomas Telford, 1, 101–206.
- Jastrzebska, M. (2000). Calibrage d'un modèle d'argile à une surface au renforcement anisotrope non lineaire. En: *Comptes-rendues du XII-ème Colloque Franco-Polonais de Mécanique de Sols et des Roches Appliquée*. Celebrado el 3-4 julio 2000 en Paris. Wrocław University of Technology, 1.
- Jastrzebska, M. (2002). *Calibration and verification of a single surface elasto-plastic model for soil with strongly nonlinear anisotropic hardening law*. Tesis doctoral no publicada. Gliwice, Polonia: Silesian University of Technology.
- Jastrzebska, M. y Sternik, K. (2004). Application of elastoplastic model with anisotropic hardening to analysis of cyclic loading of cohesive soil. En: Triantafyllidis, T. (ed.) *Proceedings of the International Conference on Cyclic behavior of soils and liquefaction phenomena*. Celebrada el 31 marzo-2 abril 2004 en Bochum, Alemania. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 41-46.
- Jeremic, B. y Sture, S. (1997). Implicit integration in elastoplastic geotechnics. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 2(2), 165-183. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199704\)2:2<165::AID-CFM31>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199704)2:2<165::AID-CFM31>3.0.CO;2-3).
- Jiang, G.L., Tatsuoka, F., Flora, A. y Koseki, J. (1997). Inherent and stress-state-induced anisotropy in very small strain stiffness of a sandy gravel. *Géotechnique*, 47(3), 509-521. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.3.509>.
- Johannson, J. y Konagai, K. (2007). Fault induced permanent ground deformations: Experimental verification of wet and dry soil, numerical findings' relation to field observations of tunnel damage and implications for design. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(10), 938-956.

- Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731>.
- Jovicic, V. (1997). *The measurement and interpretation of small strain stiffness of soils*. Tesis doctoral sin publicar. Londres, Inglaterra: City University London.
- Jovicic, V. y Coop, M. (1998). The measurement of stiffness anisotropy in clays with bender element tests in the triaxial apparatus. *Geotechnical Testing Journal*, 21(1), 3–10. DOI: <https://doi.org/10.1520/GTJ10419J>.
- Kaliakin, V.N. y Dafalias, Y.F. (1989). Simplifications to the bounding surface model for cohesive soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 13(1), 91-100. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610130108>.
- Kantartzi, C. (1993). *Ground movements during diaphragm wall installation in clays*. Tesis doctoral sin publicar. Londres, Inglaterra: Queen Mary University of London.
- Kavvas, M. (1982). *Nonlinear consolidation around driven piles in clays*. Tesis doctoral sin publicar. Cambridge, Massachusetts, EEUU: Massachusetts Institute of Technology.
- Kempfert, H. y Gebreselassie, B. (2006). *Excavations and foundations in soft soils*. Heidelberg, Alemania: Springer-Verlag.
- Khong, C.D. (2004). *Development and numerical evaluation of unified critical state models*. Tesis doctoral sin publicar. Nottingham, Inglaterra: University of Nottingham.
- Kirkpatrick, W.M. (1957). The condition of failure for sands. En: *Proceedings of the Fourth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 12-24 agosto 1957 en Londres, Inglaterra. Butterworths Scientific Publications, 1, 172-178.
- Kjellman, W. (1936). Report on an apparatus for consummate investigation of the mechanical properties of Soils. En: *Proceedings of the First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 22-26 junio 1936 en la Universidad de Harvard. Cambridge, EEUU: Graduate School of Engineering, Harvard University, 2, 16-20.
- Kjellman, W. (1951). Testing the shear strength of clay in Sweden. *Géotechnique*, 2(3), 225-232. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1951.2.3.225>.
- Ko, H.-Y. y Scott, R.F. (1967). A new soil testing apparatus. *Géotechnique*, 17(1), 40-57. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1967.17.1.40>.
- Koiter, W.T. (1960). General theorems for elastic-plastic solids. En: *Progress in Solid Mechanics, Volume 1*. Ed. por Sneddon, I.N. y Hill, R. Amsterdam, Países Bajos: North-Holland Publishing Co. 165-221.
- Kokusho, T. (1980). Cyclic triaxial test of dynamic soil properties for wide strain range. *Soils and Foundations*, 20(2), 45-60. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.20.2_45.
- Kokusho, T., Yoshida, Y. y Esashi, Y. (1982). Dynamic properties of soft clay for wide strain range. *Soils and Foundations*, 22(4), 1-18. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.22.4_1.
- Kolymbas, D. (1977). A rate-dependent constitutive equation for soils. *Mechanics Research Communications*, 4(6), 367-372. DOI: [https://doi.org/10.1016/0093-6413\(77\)90056-8](https://doi.org/10.1016/0093-6413(77)90056-8).
- Kolymbas, D. y Wu, W. (1993). Introduction to hypoplasticity. En: *Modern Approaches to Plasticity*. Ed. por Kolymbas D. Ámsterdam, Países Bajos: Elsevier. 213-223.
- Kondner, R.L. (1963). Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(1), 115-144.
- Kondner, R.L. y Zelasko, J.S. (1963). A hyperbolic stress-strain formulation of sands. En: *Proceedings of the Second Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada en 1963 en San Paulo, Brasil. Associação Brasileira de Mecânica dos Solos, 1, 289-324.
- Krajewski, W., Edelman, L. y Plamitzer, R. (2001). Ability and limits of numerical methods for the design of deep construction pits. *Computer and Geotechnics*, 28(6-7), 425-444. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(01\)00008-8](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(01)00008-8).
- Krajewski, W. y Reul, O. (2004). Deep excavation in stiff clay: comparison between numerical analyses and in-situ-measurements. En: Pande, G. N. y Pietruszczak, S. (eds.) *Ninth International*

- Symposium on Numerical Models in Geomechanics (NUMOG IX)*. Celebrada el 25-27 agosto 2004 en Ottawa, Canadá. Leiden; Londres: A. A. Balkema.
- Krieg, R.D. (1975). A practical two-surface plasticity theory. *Journal of Applied Mechanics*, 42(3), 641-646. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3423656>.
- Kulhawy, F. H., Duncan, J. M. y Seed, H. B. (1969). *Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Embankments During Construction*. Contract Report S-69-8 for U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, under contract DACW39-68-C-0078. Berkeley, California: College of Engineering, Office of Research Services, University of California.
- Kung, G. T.-C., Hsiao, E. C.-L. y Juang, C. H. (2007). Evaluation of a simplified small-strain soil model for analysis of excavation-induced movements. *Canadian Geotechnical Journal*, 44(6), 726-736. DOI: <https://doi.org/10.1139/t07-014>.
- Kuwano, R. y Jardine, R.J. (2002). On the applicability of cross-anisotropic elasticity to granular materials at very small strains. *Géotechnique*, 52(10), 727-749. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2002.52.10.727>.
- Lade, P. V. y Abelev, A. V. (2005). Characterization of cross-anisotropic soil deposits from isotropic compression test. *Soils and Foundations*, 45(5), 89-102. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf.45.5_89
- Lambe, T.W. y Whitman, R.V. (1969). *Soil Mechanics*. Nueva York, EEUU: John Wiley & Sons.
- Landon, M. M., DeGroot, D. J. y Sheahan, T. C. (2007). Nondestructive sample quality assessment of a soft clay using shear wave velocity. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 133(4), 424-432. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2007\)133:4\(424\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2007)133:4(424)).
- Lanzo, G., Vucetic, M. y Doroudian, M. (1997). Reduction of shear modulus at small strains in simple shear. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(11), 1035-1042. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1997\)123:11\(1035\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(1997)123:11(1035)).
- Lee, J.H., y Salgado, R. (1999). Determination of pile base resistance in sands. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(8), 673-683. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1999\)125:8\(673\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(1999)125:8(673)).
- Lee, J. y Salgado, R. (2000). Analysis of calibration chamber plate load tests. *Canadian Geotechnical Journal*, 37(1), 14-25. DOI: <https://doi.org/10.1139/t99-061>.
- Lee, J. y Salgado, R. (2002). Estimation of footing settlement in sand. *International Journal of Geomechanics*, 2(1), 1-28.
- Lee, J., Salgado, R. y Carraro, A.H. (2004). Stiffness degradation and shear strength of silty sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 41(5), 831-843. DOI: <https://doi.org/10.1139/t04-034>.
- Lehane, B. y Cosgrove, E. (2000). Applying triaxial compression stiffness data to settlement prediction of shallow foundations on cohesionless soil. *Geotechnical Engineering-Institute of Civil Engineers*, 143(4), 191-200. DOI: <https://doi.org/10.1680/geng.2000.143.4.191>.
- Leroueil, S. y Hight, D. W. (2003). Behaviour and properties of natural soils and soft rocks. En: *Characterisation and engineering properties of natural soils*. Ed. por Tan, T. S., Phoon, K. K., Hight, D. W., Leroueil, S. Singapur: A.A. Balkema, 1, 29-254.
- Li, X.-S., Dafalias, Y. F., y Wang, Z.-L. (1999). State-dependent dilatancy in critical-state constitutive modelling of sand. *Canadian Geotechnical Journal*, 36(4), 599-611. DOI: <https://doi.org/10.1139/t99-029>.
- Li, X.S. y Dafalias, Y. F. (2000). Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*, 50(4), 449-460. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.4.449>.
- Likitlersuang, S. (2003). *A hyperplasticity model for clay behaviour: an application to Bangkok clay*. Tesis doctoral no publicada. Oxford, Inglaterra: University of Oxford.

- Lo Presti, D.C.F., Jamiolkowski, M., Pallara, O. y Cavallaro, A. (1996). Rate and creep effect on the stiffness of soils. En: *Measuring and Modeling Time Dependent Soil Behaviour*. Ed. por Sheahan, T.C. y Kalialin, V.N. Nueva York, EEUU: Geotechnical Special Publication, ASCE. 61, 166-180.
- Lo Presti, D.C.F. y Jamiolkowski, M. (1998). Discussion: Estimate of elastic shear modulus in Holocene soil deposits. *Soils and Foundations*, 38(1), 263-265.
- Loret, B. (1985). On the choice of elastic parameters for sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9(3), 285-292. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610090308>.
- Maier, G. y Hueckel, T. (1979). Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 16(2), 77-92. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(79\)91445-1](https://doi.org/10.1016/0148-9062(79)91445-1).
- Mair, R.K. y Taylor, R.N. (1993). Prediction of clay behavior around tunnels using plasticity solutions. En: Housby, G. T. y Schofield, A. N. (eds.) *Proceedings of the Wroth Memorial Symposium, Predictive soil mechanics*. Celebrada el 27-29 julio 1992 en St Catherine's College. Londres, Inglaterra: Thomas Telford. 449-463.
- Mana A.I. y Clough, G.W. (1981). Prediction of movements for braced cuts in clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 107(6), 759-777.
- Manzari, M. T. y Dafalias, Y. F. (1997). A critical state two-surface plasticity model for sands. *Géotechnique*, 47(2), 255-272. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.2.255>.
- Masín, D. (2003). A kinematic hardening critical state model for anisotropic clays. En: Università degli Studi di Napoli Federico II. Dipartimento di Ingegneria Geotecnica (ed.) *Conference on Constitutive Modelling an Analysis of Boundary Value Problems in Geotechnical Engineering*. Celebrada el 22-24 abril 2003 en Nápoles, Italia. Benevento, Hevelius.
- Masín, D. (2006). *Hypoplastic model for fined-grained soils*. Tesis doctoral no publicada. Praga, República Checa: Charles University.
- Masín, D. (2014). Clay hypoplasticity model including stiffness anisotropy. *Géotechnique*, 64(3), 232-238. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.13.P.065>.
- Masín, D y Rott, J. (2013). Small strain stiffness anisotropy of natural sedimentary clays: review and a model. *Acta Geotechnica*, 9(2), 299-312.
- Masing, G. (1926). Residual stress and hardening the brass. En: Meissner, E. (ed.) *Second International Congress of Applied Mechanics*. Celebrado el 12-17 septiembre 1926 en Zurich, Suiza. 12-17.
- Matasovic, N. (1993). *Seismic response of composite horizontally-layered soil deposits*. Tesis doctoral no publicada. Los Angeles, California, EEUU: University of California.
- Matasovic, N. y M. Vucetic (1993). Cyclic Characterization of Liquefiable Sands. *Journal of Geotechnical Engineering*, 119(11), 1805-1822. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1993\)119:11\(1805\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1993)119:11(1805)).
- Matsuoka, H. y Nakai, T. (1974). Stress-deformational and strength characteristics of soil under three different principal stresses. En: *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, 232, 59-70. DOI: https://doi.org/10.2208/jscej1969.1974.232_59.
- Matsuoka, H. y Nakai, T. (1982). A new failure criterion for soils in three dimensional stresses. En: Vermeer, P. A. y Luger, H. J. (ed.) *Proceedings of International Union of Theoretical and Applied Mechanics Symposium, Deformation and failure of granular materials*. Celebrado el 31 agosto - 3 septiembre 1982 en Delft. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 253-263.
- Matsuoka, H., Sakakibara, K, y Suzuki, Y. (1988). A constitutive model for granular materials evaluating principal stress rotation. En: Satake, M. y Jenkins, J. T. (eds.) *Proceedings of the U.S./Japan Seminar on the Micromechanics of Granular Materials, Studies in Applied Mechanics*. Celebrado el 26-30 octubre 1987 en Sendai-Zao, Japón. Ámsterdam, Países Bajos: Elsevier. 20, 287-296. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-70523-5.50040-0>.

- Matthews, M. C., Hope, V. S. y Clayton, C. R. I. (1996). The use of surface waves in the determination of ground stiffness profiles. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Geotechnical Engineering*, 119(2), 84-95. DOI: <https://doi.org/10.1680/igeng.1996.28168>.
- Mayne, P.W. (1994). CPT-based prediction of footing response. En: *Predicted and Measured Behavior of Five Spread Footings on Sand*. Ed. por Gibbens, R. M. y Briaud J. L. Nueva York, EEUU: American Society of Civil Engineers, 41, 214-217.
- Mayne, P.W. y Kulhawy, F.H. (1982). K_0 -OCR relationships in soil. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 108(6), 851-872.
- McDowell, G.R. y Bolton, M.D. (2001). Micro mechanics of elastic soil. *Soils and Foundations*, 41(6), 147-152. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf.41.6_147.
- McDowell, G.R. y Hau, K.W. (2003). A simple non-associated three surface kinematic hardening model. *Géotechnique*, 53(4), 433-437. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2003.53.4.433>.
- Menq, F. (2003). *Dynamic properties of sandy and gravelly soils*. Tesis doctoral no publicada. Austin, EEUU: The University of Texas.
- Mesri, G., Feng, T.W. y Benak, J.M. (1990). Post-densification penetration resistance of clean sands. *Journal of Geotechnical Engineering*, 116(7), 1095-1115. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1990\)116:7\(1095\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1990)116:7(1095)).
- Messerklinger, S. (2006). *Non-linearity and small strain behavior in lacustrine clay*. Tesis doctoral no publicada. Zurich, Suiza: ETH Zurich. DOI: <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005194474>.
- Minh, N.A. (2006). *An investigation of the anisotropic stress-strain-strength characteristics of an Eocene clay*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Mitchell, J.K. (1993). *Fundamentals of Soil Behaviour*. Segunda edición. Nueva Jersey, EEUU: John Wiley & Sons.
- Mitchell, J.K. y Soga, K. (2005) *Fundamentals of Soil Behaviour*. 3ª ed. Nueva Jersey, EEUU: John Wiley & Sons.
- Mofiz, S.A., Sobhan, M.A., Sarker, D.C., Rahman, M.M: y Awall, M.R. (2005). Effective stress nonlinear model parameters and simulation of stress-strain for expansive soil. En: Bilsel, H. y Nalbantoglu, Z. (eds.) *International Conference on Problematic Soils*. Celebrada el 25-27 mayo 2005 en Famagusta, Chipre del Norte. Eastern Mediterranean University.
- Möller, S. (2006). *Tunnel induced settlements and structural forces in linings*. Tesis doctoral no publicada. Stuttgart, Alemania: Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- Möller, S., Lehmann, T. y Rogowski, E. (2004). Dreidimensionale Finite-Element-Berechnung der Setzungsmulde am Beispiel des Steinhaldenfeldtunnels in Stuttgart. En: *Kolloquium Bauen in Bolden und Fels*. Ostfildern, Alemania: Technische Akademie Esslingen, 275-282.
- Mróz, Z. (1967). On the description of anisotropic workhardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(3), 163-175. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90030-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90030-0).
- Mróz, Z., Norris, V.A. y Zienkiewicz, O.C. (1979). Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils. *Géotechnique*, 29(1), 1-34. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.1>.
- Nelson, I. (1977). Constitutive Models for use in Numerical Computations. En: *Proceedings of the Plastic and Long Term Effect, DMSR*. Celebrada el 1977 en Karlsruhe, Alemania. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema. 2, 45-97.
- Nelson, I. y Baron, M. L. (1971). Application of variable moduli models to soil behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 7(4), 399-417. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90111-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90111-9).

- Niemunis, A. y Herle, I. (1997). Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 2(4), 279-299. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199710\)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199710)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8).
- Niemunis, A. y Prada-Sarmiento, L.F. (2011). *Paraelasticity – a constitutive model for soils under small strains*. Seminario. Karlsruhe, Alemania: Institute for Soil and Rock Mechanics-IBF.
- Niemunis, A., Prada-Sarmiento, L.F. y Grandas-Tavera, C.E. (2011a). Paraelasticity. *Acta Geotechnica*, 6(2), 67-80. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11440-011-0137-4>.
- Niemunis, A., Prada-Sarmiento, L.F. y Grandas-Tavera, C.E. (2011b). Extended paraelasticity and its application to a boundary value problem. *Acta Geotechnica*, 6(2), 81-92. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11440-011-0138-3>.
- Nigbor, R.L. e Imai, T. (1994). The suspension P-S velocity logging method. En: Publications Committee XIII ICSMFE (ed.) *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 5-10 enero 1994 en Nueva Delhi. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema, 6, 57-61.
- Nikolinakou, M.A., Whittle, A.J., Stavros, S. y Schran, U. (2011). Prediction and interpretation of the performance of a deep excavation in Berlin sand. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 137(11), 1047-1061. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000518](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000518).
- Nishimura, S. (2005). *Laboratory study on anisotropy of natural London Clay*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Nishimura, S., Jardine, R. y Brosse, A. (2008). Simple shear testing of London Clay in hollow cylinder apparatus. En: Burns, S. E., Mayne, P. W. y Santamarina, J. C. (eds.) *Proceedings from the Fourth International Symposium, Deformation Characteristics of Geomaterials*. Celebrado el 22-24 septiembre 2008 en Atlanta. Ámsterdam, Países Bajos; Fairfax, EEUU: IOS Press.
- Obrzud, R. (2010). On the use of the Hardening Soil Small Strain model in geotechnical practice. *Numerics in Geotechnics and Structures*. Ed. por Zimmermann, Th., Truty, A. y Podles, K. Lausana, Suiza: Elmepress International.
- Obrzud, R. y Truty, A. (2018). *The hardening soil model – A practical guidebook*. ZSoil.PC 100701 report. Switzerland: Zace Services Ltd.
- Oda, M. (1972a). Initial fabrics and their relations to the mechanical properties of granular material. *Soils and Foundations*, 12(1), 17-36. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1960.12.17>.
- Oda, M., (1972b). The mechanics of fabric changes during compressional deformation of sand. *Soils and Foundations*, 12(2), 1–18. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.12.1>.
- Ohde, J. (1951). Grundbaumechanik. *Hütte III (Bautechnik)* Berlín, Alemania: W. Ernst & Sohn, 27, 886-945.
- Ohsaki, Y. e Iwasaki, R. (1973). On dynamic shear moduli and Poisson's ratio of soil deposits. *Soils and Foundations*, 13(4), 61-73. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.13.4_61.
- Ohta, T., Hara, A., Niwa, M. y Sakano, T. (1972). Elastic moduli of soil deposits estimated by N-values. En: *Proceedings of the 7th annual conference*. The Japanese Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering, 265-268.
- Okur, D.V. y Ansal, A. (2007). Stiffness degradation of natural fine grained soils during cyclic loading. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(9), 843-854. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2007.01.005>.
- Osman, A. S. y Bolton, M. D. (2005). Simple plasticity-based prediction of the undrained settlement of shallow circular foundations on clay. *Géotechnique*, 55(6), 435–447. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.6.435>.

- Owen, D. R. y Williams, W. O. (1969). On the time derivatives of equilibrated response functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 33(4), 288-306. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247688>.
- Oztoprak, S. y Bolton, M.D. (2013). Stiffness of sands through a laboratory test database. *Géotechnique*, 63(1), 54-70. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.10.P.078>.
- Pande, G.N., y Sharma, K.G. (1983). Multilaminate model of clays—a numerical evaluation of the influence of rotation of the principal stress axes. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 7(4), 397-418. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610070404>.
- Papadimitriou, A. G. (1999). *Elastoplastic modeling of monotonic and dynamic behavior of soils*. Tesis doctoral no publicada. Atenas, Grecia: National Technical University of Athens.
- Papadimitriou, A.G., Bouckovalas, G.D. y Dafalias, Y.F. (2001). Plasticity model for sand under small and large cyclic strains. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 127(11), 973-983. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2001\)127:11\(973\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2001)127:11(973)).
- Papadimitriou, A.G. y Bouckovalas, G.D. (2002). Plasticity model for sand under small and large cyclic strains: a multiaxial formulation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22(3), 191-204. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(02\)00009-X](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(02)00009-X).
- Pearce, J.A. (1971). A new triaxial apparatus. En: *On Stress-Strain behavior of Soils: Roscoe Memorial Symposium*. Ed. por Parry, R. H. G. Cambridge, Inglaterra: Foulis and Co., 330-339.
- Pennington, D. S. (1999). *The anisotropic small strain stiffness of Cambridge Gault clay*. Tesis doctoral no publicada. Bristol, Inglaterra: University of Bristol.
- Pestana, J.M (1994). *A unified constitutive model for clays and sands*. Tesis doctoral no publicada. Cambridge, Massachusetts, EEUU: Massachusetts Institute of Technology.
- Pestana, J.M. y Whittle, A.J. (1999). Formulation of a unified constitutive model for clays and sands. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23(12), 1215-1243. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199910\)23:12<1215::AID-NAG29>3.0.CO;2-F](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9853(199910)23:12<1215::AID-NAG29>3.0.CO;2-F).
- Phillips, A. y Weng, G. J. (1975). An analytical study of an experimentally verified hardening law. *Journal of Applied Mechanics*. 42(2), 375-378. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3423584>.
- Piriyakul, K. (2006). *Anisotropic stress-strain behaviour of Belgium Boom Clay in the small strain region*. Tesis doctoral no publicada. Gante, Bélgica: Ghent University.
- Plaxis (2012). *udsm_examples_2012.zip* En: *Plaxis User Defined Soil Models* [en línea]. Disponible en <<https://www.plaxis.com/support/models/plaxis-user-defined-soil-models/>> [consulta: años 2015 a 2018].
- Plaxis (2015). *Material Models Manual* [en línea]. Disponible en <<http://plaxis.us/updater/Plaxis%203D/2015.2.21300.12285/files/manuals/english/3D-3-Material-Models.pdf>> [consulta: años 2015 a 2019].
- Popper, K.R. (1959). *The logic of scientific discovery*. Londres, Inglaterra: Hutchinson.
- Potts, D.M. (2003). Numerical analysis: a virtual dream or practical reality? *Géotechnique*, 53(6), 535-573. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2003.53.6.535>.
- Potts, D.M. y Zdravkovic, L. (1999). *Finite element analysis in geotechnical engineering. Theory*. Londres, Inglaterra: Thomas Telford.
- Poulos, H. G. (1972). Difficulties in prediction of horizontal deformations of foundations. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 98(8), 843-848.
- Prévost, J.H. (1977). Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behavior. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1(2), 195-216. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610010206>.
- Prévost, J.H. (1978). Plasticity theory for soil stress-strain behavior. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 104(5), 1177-1194.

- Prévost, J.H., Cuny, B., Hughes, T.J.R. y Scott, R.F. (1981). Offshore gravity structures: Analysis. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 107(2), 143-165.
- Prévost, J.H. y Keane, C.M. (1990). Shear stress-strain curve generation from simple material parameters. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 116(8), 1250-1254. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)07339410\(1990\)116:8\(1255\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)07339410(1990)116:8(1255)).
- Puzrin, A.M. y Burland, J.B. (1996). A logarithmic stress-strain function for rocks and soils. *Géotechnique*, 46(1), 157-164. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1996.46.1.157>.
- Puzrin, A.M. y Burland, J.B. (1998). Nonlinear model of small strain behaviour of soils. *Géotechnique*, 48(2), 217-233. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1998.48.2.217>.
- Puzrin, A.M., Houlsby, G.T. y Burland, J.B. (2001). Thermomechanical formulation of a small-strain model for overconsolidated clays. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457(2006), 425-440. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0673>.
- Pyke, R. (1979). Nonlinear soil models for irregular cyclic loadings. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 105(6), 715-726.
- Pyke, R. (1986). The use of linear elastic and piecewise linear models in finite element analyses. En: *Geomechanical Modelling in Engineering Practice*. Ed. por Dungar, R. y Studer, J. A. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkelma.
- Ramberg, W. y Osgood, W.R. (1943). *Description of stress-strain curves by three parameters*. Report No. NACA-TN-902. Washington, DC, EEUU: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Rampello, S., Viggiani, G. M. B. y Amorosi, A. (1997). Small-strain stiffness of reconstituted clay compressed along constant triaxial effective stress ratio paths. *Géotechnique*, 47(3), 475-489. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.3.475>.
- Riccati, G. (1782). Delle vibrazioni sonore dei cilindri. *Memorie di Matematica e fisica della Società italiana*. 1, 444-525.
- Richard, R. M. y Abbott, B. J. (1975). Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 101(4), 511-515.
- Richardson, D. (1988). *Investigations of threshold effects in soil deformations*. Tesis doctoral sin publicar. Londres, Inglaterra: City University London.
- Rix, G. J. y E. A. Leipski (1991). Accuracy and Resolution of Surface Wave Inversion. En: *Recent Advances in Instrumentation, Data Acquisition and Testing in Soil Dynamics*. Nueva York, EEUU: American Society of Civil Engineers. 17-32.
- Robertson, P.K., Campanella, R.G., Gillespie, D. y Rice, A. (1986). Seismic CPT to measure *in situ* shear wave velocity. *Journal of Geotechnical Engineering*, 112(8), 781-803. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1986\)112:8\(791\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1986)112:8(791)).
- Roscoe, K. H. (1953). An apparatus for application of simple shear to soil samples. En: *Proceedings of the Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 16-17 agosto 1953 en Zurich. Suiza: Organizing Committee, ICOSOMEF, 1, 186-191.
- Roscoe, K.H. y Schofield, A.N. (1963). Mechanical behaviour of an idealised 'wet' clay. En: *Second European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 1963 en Wiesbaden, Alemania. 1, 47-54.
- Roscoe, K.H. y Burland, J.B. (1968). On the generalized stress-strain behaviour of "wet" clay. En: *Engineering Plasticity*. Ed. por Heyman, J. y Leckie, F.A. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press. 535-609.
- Rouainia, M. y Wood, D. M. (2000). A kinematic hardening constitutive model for natural clays with loss of structure. *Géotechnique*, 50(2), 153-164. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.2.153>.

- Rowe, P.W. (1962). The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 269(1339), 500-527. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0193>.
- Rowe, P.W. (1971). Theoretical meaning and observed values of deformation parameters for soil. En: Parry, R. H. G. (eds.) *Roscoe Memorial Symposium on Stress-Strain Behavior of Soils*. Celebrada el 29-31 marzo 1971 en la Cambridge University. Londres, Inglaterra: Henley-on-Thames, G.T. Foulis, 143-194.
- Runesson, K. y Samuelsson, A. (1985). Aspects on numerical techniques in small deformation plasticity. En: *Numeta 85. Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications*. Ed. por Middleton, J. y Pande, G. N. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema, 1, 337-347.
- Saada, A. S. (1988). State of the Art Paper: Hollow cylinder torsional devices: their advantages and limitations. *STP977-EB Advanced Triaxial Testing of Soil and Rock*. Ed. por Donaghe, R., Chaney, R. y Silver, M. West Conshohocken, Pensilvania: ASTM International. 766-789. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP29113S>.
- Saada, A.S. y Baah, A.K. (1967). Deformation and failure of a cross anisotropic clay under combined stress. En: *Proceedings of the Third Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*. Celebrada el 8-15 julio 1967 en Caracas, Venezuela. Caracas: Sociedad Venezolana de Mecánica del Suelo e Ingeniería de Fundaciones, 67-88.
- Saada, A. S. y Townsend, F. (1981). State of the Art: Laboratory Strength Testing of Soils. En: *STP740-EB Laboratory Shear Strength of Soil*. Ed. por Young, R. y Townsend, F. West Conshohocken, Pensilvania: ASTM International. 7-77. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP28744S>. [consulta: 20 octubre 2018].
- Saada, A. S. y Puccini, P. (1987). The development of a database using the Case hollow cylinder apparatus. En: Saada, A. S., Bianchini, G. (eds.) *Proceedings of the International Workshop, Constitutive equations for granular non-cohesive soils*. Celebrado el 22-24 julio 1987 en Cleveland. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 33-40.
- Saada, A. S., Bianchini, G. y Puccini, P. (1993). The mechanical properties of anisotropic granular soils. En: *Failure criteria in structured media*. Ed. por Boehler, J. P. Filadelfia, Pensilvania: A. A. Balkema, 453-462.
- Sadrnejad, S.A. y Pande, G.N. (1989). A multi-laminate model for sand. En: Pietruszczak, S. y Pande, G.N. (eds.) *Proceedings of the Third International Conference (NUMOG III), Numerical Models in Geomechanics*. Celebrada el 8-11 mayo 1989 en las Cascadas del Niágara, Canadá. Londres; Nueva York: Elsevier Applied Science, 17-27.
- Sandler, I. S. (1976). The Cap Model for Static and Dynamic Problems. En: *The Seventeenth U.S. Symposium on Rock Mechanics*. Celebrado el 25-27 agosto 1976 en Utah, EEUU. American Rock Mechanics Association, 1A2-1.
- Sandler, I. S. y Baron, M. L. (1979). Recent development in the constitutive modeling of geological materials. En: *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*. Celebrada el 2-6 abril 1979 en Aachen, Alemania. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 363-376.
- Santagata, M., Geremaine, J. T. y Ladd, C. C. (2005). Factors affecting the initial stiffness of cohesive soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(4), 430-441. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2005\)131:4\(430\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:4(430)).
- Sayao, A. (1989). *Behaviour of sand under general stress paths in the hollow cylinder torsional device*. Tesis doctoral no publicada. Vancouver, Canadá: The University of British Columbia.
- Sayao, A. y Vaid, Y.P. (1988). A critical assessment of stress distribution on hollow cylinder test specimens. En: *Soil Mechanics Series Nº. 123*. Vancouver, Canadá: Dept. of Civil Engineering, University of British Columbia.
- Schädlich, B. y Schweiger, H.F. (2012). A multilaminate constitutive model accounting for anisotropic small strain stiffness. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(10), 1337-1362. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2089>.

- Schanz, T. (1998). *Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien*. Tesis de habilitación, Comunicación 45 del Instituto de Ingeniería Geotécnica. Stuttgart, Alemania: Universität Stuttgart.
- Schanz, T., Vermeer, P.A. y Bonnier, P.G. (1999). The hardening soil model: Formulation and verification. En: *Beyond 2000 in Computational Geotechnics - 10 Years of PLAXIS*. Ed. por Brinkgreve, Ronald B.J. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema, 281-296.
- Schmertmann, J.H. (1991). The mechanical aging of soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(9), 1288-1330. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1991\)117:9\(1288\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1991)117:9(1288)).
- Schultheiss, P. J. (1981). Simultaneous measurement of P and S wave velocities during conventional laboratory soil testing procedures. *Marine Geotechnology*, 4(4), 343-367. DOI: <https://doi.org/10.1080/10641198109379831>.
- Schweiger, H.F. (2002). *Benchmarking in Geotechnics 1*. Graz, Austria: Computational Geotechnics Group, Institute for Soil Mechanics and Foundation Engineering, Graz University of Technology.
- Schweiger, H.F. (2007). *Modelling issues for numerical analysis of deep excavations*. Graz, Austria: Computational Geotechnics Group, Institute for Soil Mechanics and Foundation Engineering, Graz University of Technology.
- Seed, R.B. y Duncan, J.M. (1986). FE analysis: compaction-induced stresses and deformations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 112(1), 23-43. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1986\)112:1\(23\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1986)112:1(23)).
- Sellers, E. J. (1989). *Constitutive modelling of the behaviour of clays under cyclic loading*. Tesis de máster no publicada. Ciudad del Cabo, Sudáfrica: University of Cape Town.
- Shibuya, S. (1985). *Undrained behaviour of granular materials under principal stress rotation*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Shibuya, S. y Mitachi, T. (1994). Small strain shear modulus of clay sedimentation in a state of normal consolidation. *Soils and Foundations*, 34(4), 67-77. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.34.4_67.
- Shibuya, S., Mitachi, T., Hosomi, A. y Hwang, S.C. (1996). Strain rate effects on stress-strain behaviour of clay as observed in monotonic and cyclic triaxial tests. En: *Measuring and Modeling Time Dependent Soil Behaviour*. Ed. por Sheahan, T.C. y Kalialin, V.N. Nueva York, EEUU: Geotechnical Special Publication, ASCE, 61, 214-227.
- Shibuya, S., Mitachi, T., Fukuda, F. y Hosomi, A. (1997). Modeling of strain-rate dependent deformation of clay at small strains. En: Simão, P. (ed.) *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 6-12 septiembre 1997 en Hamburgo, Alemania. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 1, 409-412.
- Shirley, D. J. (1978). An improved shear wave transducer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(5), 1643-1645. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.381866>.
- Shirley, D. J. y Hampton, L. D. (1978). Shear wave measurements in laboratory sediments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(2), 607-613. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.381760>.
- Siddiquee, M.S.A. (1991). *Finite element analysis of settlement and bearing capacity of footing on sand*. Tesis de master no publicada. Tokyo, Japón: The University of Tokyo.
- Siddiquee, M.S.A., Tanaka, T. y Tatsuoka, F. (1991). A FEM simulation of model footing tests on sands. En: Kogakkai, D. (ed.) *Proceedings of the Twenty-sixth Japan National Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada en Nagano, Japón. 1309-1312.
- Siddiquee, M.S.A., Tanaka, T. y Tatsuoka, F. (1992). A numerical simulation of bearing capacity of footing on sand. En: Kogakkai, D. (ed.) *Proceedings of the Twenty-seventh Japan National Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1413-1416.
- Simo, J.C. (1998). Numerical Analysis of Classical Plasticity. En: *Handbook for Numerical Analysis, Volume 4*. Ed. por Ciarlet, P. G. and Lions, J. J. Ámsterdam, Países Bajos: Elsevier.

- Simo, J.C. y Taylor, R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48(1), 101-118. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(85\)90070-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90070-2).
- Simo, J.C. y Hughes, T.J.R. (1998). *Computational Inelasticity*. Nueva York, EEUU: Springer-Verlag.
- Simpson, B. (1981). Finite elements in design: with particular reference to deep basements in London Clay. En: *Finite elements in geotechnical engineering*. Ed. por Naylor, D.J. y Pande, G.N. Swansea, Reino Unido: Pineridge Press, 213-242.
- Simpson, B. (1992). Retaining structures: displacement and design. *Géotechnique*, 42(4), 541-576. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1992.42.4.541>.
- Simpson, B., O'Riordan, N. J. y Croft, D. D. (1979). A computer model for the analysis of ground movements in London clay. *Géotechnique*, 29(2), 149-175. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.2.149>.
- Simpson, B., Atkinson, J. H. y Jovicic, V. (1996). The influence of anisotropy on calculations of ground settlements above tunnels. En: *Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground*. Ed. por Mair, R. J. y Taylor, R. N. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema, 591-594.
- Skinner, A.F. (1975). *The effect of high pore water pressures on the mechanical behavior of sediments*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Smith, P. R. (1992). *Properties of high compressibility clays with special reference to construction on soft ground*. Tesis doctoral no publicada. Londres, Inglaterra: University of London (Imperial College London).
- Smith, P.R., Jardine, R.J. y Hight, D.W. (1992). The yield of Bothkennar clay. *Géotechnique*, 42(2), 257-274. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1992.42.2.257>.
- Soga, K., Nakagawa, K. y Mitchell, J.K. (1995). Measurement of stiffness degradation characteristics of clays using a torsional shear device. En: Ishihara, K., Kogakai, J., International Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering. TC4, Earthquake Geotechnical Engineering (eds.) *Proceedings of the First International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering*. Celebrada el 14-16 noviembre 1995 en Tokyo. Róterdam; Brookfield: A. A. Balkema, 107-112.
- Soreide, O.K. (2003). *Mixed hardening models for frictional soils*. Tesis doctoral no publicada. Trondheim, Noruega: Norwegian University of Science and Technology (NTNU).
- Sorensen, K. K., Baudet, B. A. y Simpson, B. (2007). Influence of structure on the time-dependent behaviour of a stiff sedimentary clay. *Géotechnique*, 57(1), 113-124. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2007.57.1.113>.
- St. John, H. D. (1975). *Field and theoretical studies of the behavior of ground around deep excavations in London Clay*. Tesis doctoral no publicada. Cambridge, Inglaterra: University of Cambridge.
- St. John, H. D., Potts, D. M., Jardine, R. J. and Higgins, K. G. (1993). Prediction and performance of ground response due to construction of a deep basement at 60 Victoria Embankment. En: Houlsby, G. T. y Schofield, A. N. (eds.) *Proceedings of the Wroth Memorial Symposium*, Predictive soil mechanics. Celebrada el 27-29 julio 1992 en St Catherine's College. Londres, Inglaterra: Thomas Telford.
- Stallebrass, S.E. (1990). *Modelling the effect of recent stress history on the deformation of overconsolidated soils*. Tesis doctoral sin publicar. Londres, Inglaterra: City University London.
- Stallebrass, S.E. y Taylor, R.N. (1997). The development and evaluation of a constitutive model for the prediction of ground movements in overconsolidated clay. *Géotechnique*, 47(2), 235-253. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.2.235>.
- Sternik, K. (2003). *Analysis of effectiveness and numerical implementation of single surface elasto-plastic model for soil with strongly nonlinear anisotropic hardening law*. Tesis doctoral no publicada. Gliwice, Polonia: Silesian University of Technology.
- Stewart, J.P., Kwok, A.O., Hashash, Y., Matasovic, N., Pyke, R., Wang, Z. y Yang, Z. (2008). *Benchmarking of Nonlinear Geotechnical Ground Response Analysis Procedures*. PEER Report 2008/04. Pacific

- Earthquake Engineering Research Center; College of Engineering; University of California, Berkeley.
- Stokoe, K.H., Wright, S.G., Bay, J.A. y Roesset, J.M. (1994). Characterization of geotechnical sites by SASW method. En: Publications Committee XIII ICSMFE (ed.) *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 5-10 enero 1994 en Nueva Delhi. Róterdam, Países Bajos: A.A. Balkema. 1, 15-25.
- Strozyk, J. (2017). The Laboratory Study of Shear Strength of the Overconsolidated and Quasi - Overconsolidated Fine - Grained Soil. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 95-022055. DOI: <https://doi.org/10.1088/1755-1315/95/2/022055>.
- Sture, S., Budiman, J., Ontuna, A. y Ko, H. (1987). Directional shear cell experiments on a dry cohesionless soil. *Geotechnical Testing Journal*, 10(2), 71-79. DOI: <https://doi.org/10.1520/GTJ10935J>.
- Sture, S., Alawi, M. y Ko, H. (1988). True triaxial and directional shear cell experiments on dry sand. Contract Report GL-88-1. Boulder, Colorado, EEUU: Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado at Boulder.
- Sulem, J., Vardoulakis, I., Papamichos, E., Oulahna, A. y Tronvoll, J. (1999). Elastoplastic modelling of Red Wildmoor sandstone. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 4(3), 215–245. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199905\)4:3<215::AID-CFM61>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199905)4:3<215::AID-CFM61>3.0.CO;2-8).
- Surarak, C., Likitlersuang, S., Wanatowski, D., Balasubramaniam, A., Oh, E. y Guan H. (2012). Stiffness and strength parameters for hardening soil model of soft and stiff Bangkok clays. *Soils and Foundations*, 52(4), 682-697. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2012.07.009>.
- Swidzinski, W. (2000). Determination of elastic moduli of sands from triaxial compression test. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 47(1-4), 51-73.
- Tamagnini, C. y Viggiani, G. (2002). On the incremental non-linearity of soils. Part I: theoretical aspects. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 36(1), 44-61.
- Tanev, T. (2015). On the formulation and implementation of a double hardening constitutive model for soils. En: *Fifteenth International Multidisciplinary Scientific GeoConference*. Celebrada el 18-24 junio 2015 en Albena, Bulgaria. 2, 487-494. DOI: <https://doi.org/10.5593/SGEM2015/B12/S2.065>.
- Tatsuoka, F. e Ishihara, K. (1974). Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction. *Soils and Foundations*, 14(3), 51-65. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.14.3_51.
- Tatsuoka, F., Iwasaki, T., Yoshida, S., Fukushima, S., Sudo, H. (1979). Shear modulus and damping by drained tests on clean sand specimens reconstituted by various methods. *Soils and Foundations*, 19(1), 39–54. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.19.39>.
- Tatsuoka, F., Shibuya, S., Teachavorasinskun, S. y Park, C.-S. (1990). Discussion: An experimental and theoretical comparison between static and dynamic torsional soil tests, by M. D. Bolton and J. M. R. Wilson. *Géotechnique*, 40(4), 659-664. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1990.40.4.659>.
- Tatsuoka, F. y Shibuya, S. (1991). Modelling of non-linear stress-strain relations of soils and rocks - Part 2, New equation. En: *Seisan-Kenkyu*, 43(10), 435-437.
- Tatsuoka, F. y Shibuya, S. (1992). Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests. En: *Proceedings of the Ninth Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 9-13 diciembre 1991 en Bangkok, Tailandia. Southeast Asian Geotechnical Society, 2, 101–170.
- Tatsuoka, F., Jardine, R. J., Lo Presti, D., Di Benedetto, H. y Kodaka, T. (1997). Characterizing the pre-failure deformation properties of geomaterials. En: *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada el 6-12 septiembre 1997 en Hamburgo. A. A. Balkema, 4, 2129–2164.
- Tatsuoka, F., Shibuya, S. y Kuwano, R. (2001). Recent advances in stress-strain testing of geomaterials in the laboratory – background and history of TC-29 for 1994-2001. En: *Advanced Laboratory Testing of Geomaterials*. Ed. por Tatsuoka, F., Shibuya, S. y Kuwano, R. Taylor & Francis, 1-12.
- Teachavorasinskun, S., Shibuya, S. y Tatsuoka, F. (1991). Stiffness of sands in monotonic and cyclic torsional simple shear. *Geotechnical Engineering Congress*. ASCE, 2(27), 863-878.

- Terzaghi, K., Peck, R.B. y Mesri, G. (1996). *Soil Mechanics in Engineering Practice*. Tercera edición. Nueva York: EEUU: John Wiley & Sons.
- Thomann, T. y Hryciw, R. (1990). Laboratory measurements of small strain shear modulus under K0 conditions. *Geotechnical Testing Journal*, 13(2), 97–105. DOI: <https://doi.org/10.1520/GTJ10700J>.
- Timoshenko, S. y Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. Nueva York, EEUU: McGraw-Hill.
- Tobita, Y. (1997). Importance of incremental nonlinearity in the deformation of granular materials. En: Fleck, N. A. y Cocks A. C. F. (eds.) *IUTAM Symposium on Mechanics of Granular and Porous Materials*. Celebrado el 15-17 julio 1996 en Cambridge, Reino Unido. Springer-Verlag, 139-50.
- Topolnicki, M., Gudehus, G. y Mazurkiewicz, B.K. (1990). Observed stress-strain behavior of remoulded saturated clay under plane strain conditions. *Géotechnique*, 40(2), 155-187. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1990.40.2.155>.
- Trhlíková, J., Bohac, J. y Masín, D. (2012). Small-strain behaviour of cemented soils. *Géotechnique*. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.9.P.100>.
- Truesdell, C. (1956). Hypo-elastic shear. *Journal of Applied Physics*, 27, 441-447. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1722399>.
- Truesdell, C. A. y Noll, W. (1965). *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Berlin, Heidelberg, Nueva York: Springer-Verlag.
- Vaid, Y. P., Sayao, A., Hou, E. y Negussey, D. (1990). Generalized stress–path–dependent soil behavior with a new hollow cylinder torsional apparatus. *Canadian Geotechnical Journal*, 27(5), 601–616. DOI: <https://doi.org/10.1139/t90-075>.
- Valanis, K. C. (1972). Observed plastic behavior of metals vis-à-vis the endochronic theory of plasticity. En: *Foundations of Plasticity*. Ed. por Sawczuk, A. Leyden, Países Bajos: Noordhoff International Publishing.
- Vázquez-Suñé, E., Pujades, E., Escorcía, J. y Jurado, A. (2011). *Informe técnico: Evaluación de efecto barrera, efecto dren y caudales de drenaje durante la excavación del recinto de la estación de La Sagrera*. Barcelona, Cataluña, España: Grup de Hidrologia Subterrànea, IDÈA (CSIC)-UPC.
- Vermeer, P.A. (1978). A double hardening model for sand. *Géotechnique*, 28(4), 413-433. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1978.28.4.413>.
- Viggiani, G. (1992). *Small strain shear stiffness of fine grained soils*. Tesis doctoral sin publicar. Londres, Inglaterra: City University London.
- Viggiani, G. (2000). Does engineering need science? En: *Constitutive Modelling of Granular Materials*. Ed. por Kolymbas, D. Heidelberg, Alemania: Springer-Verlag, 31.
- Viggiani, G. (2005). A key issue in Small Strain Modeling: capturing the dependence of soil response on the direction of loading. [Power Point]. *Workshop on Nonlinear Modeling of Geotechnical Problems: From Theory to Practice*. Disponible en: <https://www.ce.jhu.edu/rajah/My%20Web%20Page/nsf%20workshop%202005/Presentations/Session%203/viggiani.pdf>. [consulta 06 abril 2015].
- Viggiani, G. y Atkinson, J.H. (1995). Stiffness of fine-grained soil at very small strains. *Géotechnique*, 45(2), 249-265. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1995.45.2.249>.
- Vucetic, M. (1990). Normalized behavior of clay under irregular cyclic loading. *Canadian Geotechnical Journal*, 27(1), 29-46. DOI: <https://doi.org/10.1139/t90-004>.
- Vucetic, M. (1994). Cyclic threshold shear strains in soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(12), 2208-2228. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1994\)120:12\(2208\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:12(2208)).
- Vucetic, M. y Dobry, R. (1991). Effect of soil plasticity on cyclic response. *Journal of Geotechnical Engineering*. 177(1), 89-107. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1991\)177:1\(89\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1991)177:1(89)).

- Vucetic, M., Tabata, K. y Matesic, L. (2003). Effect of average straining rate on shear modulus at small cyclic strains. En: *Deformation Characteristics of Geomaterials*. Ed. por Di Benedetto, T. Doanh, H. Geoffroy y C. Sauzéat. Lisse; Abingdon; Exton; Tokyo: A.A. Balkema. 321-328.
- Wang, J. (2005). *The stress-strain and strength characteristics of Portaway Sand*. Tesis doctoral no publicada. Nottingham, Inglaterra: University of Nottingham.
- Wehnert, M. (2006). *Ein Beitrag zur drainierten und undrainierten Analyse in der Geotechnik*. Tesis doctoral no publicada. Stuttgart, Alemania: Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- Whittle, A.J. (1987). *A constitutive model for overconsolidated clays with application to the cyclic loading of friction piles*. Tesis doctoral no publicada. Cambridge, Massachusetts, EEUU: Massachusetts Institute of Technology.
- Whittle, A.J. (1993). Evaluation of a constitutive model for overconsolidated clays. *Géotechnique*, 43(2), 289-313. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1993.43.2.289>.
- Whittle, A. J. (1995). Discussion: Evaluation of constitutive model for overconsolidated clays. *Géotechnique*, 45(1), 169-173. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1995.45.1.169>.
- Whittle, A.J. y Kavvas, M.J. (1994). Formulation of MIT-E3 Constitutive Model for Overconsolidated Clays. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(1), 173-198. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1994\)120:1\(173\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:1(173)).
- Whittle, A.J., DeGroot, D.J., Ladd, C.C. y Seah, T.-H. (1994). Model prediction of anisotropic behavior of Boston Blue Clay. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(1). 199-224. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1994\)120:1\(199\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:1(199)).
- Wichtmann, T. (2005). *Explicit accumulation model for non-cohesive soils under cyclic loading*. Tesis doctoral no publicada. Bochum, Alemania: Ruhr-Universität Bochum.
- Wichtmann, T. y Triantafyllidis, T. (2004). Influence of a cyclic and dynamic loading history on dynamic properties of dry sand. Part I: cyclic and dynamic torsional prestraining. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24(2), 127-147. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2003.10.004>.
- Witafsky, C. (2003). *A multilaminate model for normally consolidated clay*. Tesis doctoral no publicada. Graz, Austria: Graz University of Technology.
- Witafsky, C., Koskinen, M. y Schweiger, H.F. (2003). An advanced constitutive model for normally consolidated clays based on multilaminate framework. En: *Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*. Boston; Oxford: Elsevier, 751-754. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-008044046-0.50184-6>.
- William, K. J., (2002). Constitutive models for engineering materials. En: *Encyclopedia of Physical Science and Technology*. Ed. por Meyers, R. Academic Press. 603-633.
- Wolffersdorff, P.A. von (1996). A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 1(3), 251-271. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199607\)1:3<251::AID-CFM13>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199607)1:3<251::AID-CFM13>3.0.CO;2-3).
- Wongsaroj, J. (2005). *Three-dimensional finite element analysis of short and long-term ground response to open-face tunnelling in stiff clay*. Tesis doctoral no publicada. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University.
- Wood, D. M. (1995). Kinematic hardening model for structured soil. En: Pande, G. N. y Pietruszczak, S. (eds.). *Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (NUMOG V)*. Celebrada el 6-8 septiembre 1995 en Davos, Suiza. Róterdam, Países Bajos: A. A. Balkema. 83-88.
- Woods, R.D. (1978). Measurement of dynamic soil properties. En: *Proceedings of the ASCE Geotechnical Engineering Division Specialty Conference, Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. Celebrada el 19-21 junio 1978 en Pasadena, California. Nueva York, American Society of Civil Engineers, 1, 91-178.

- Wroth, C.P. y Bassett, R. H. (1965). A stress-strain relationship for the shearing behaviour of sand. *Géotechnique*, 15(1), 32-56. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1965.15.1.32>.
- Wu, W. (1998). Rational approach to anisotropy of sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(11), 921-940. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199811\)22:11<921::AID-NAG948>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9853(199811)22:11<921::AID-NAG948>3.0.CO;2-J).
- Yingren, Z., Jian, C. y Zhenhong, X. (1986). Strain space formulation of the elasto-plastic theory and its finite element implementation. *Computers and Geotechnics*, 2(6), 373-388. DOI: [https://doi.org/10.1016/0266-352X\(86\)90031-5](https://doi.org/10.1016/0266-352X(86)90031-5).
- Yoder, P.J. e Iwan, W.D. (1981). On the formulation of strain-space plasticity with multiple loading surfaces. *Journal of Applied Mechanics*, 48(4), 773-778. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3157732>.
- Yokota, K. y Konno, M. (1980). Dynamic Poisson's Ratio of soil. En: *Proceedings of the Seventh World Conference Earthquake Engineering*. Celebrada el 8-13 septiembre 1980 en Estambul, Turquía. Ankara, Turquía: Kelaynak, 3, 475-478.
- Yong, R.N. y Japp, R.D. (1967). A flow law for clays in dynamic compression. En: *Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*. Albuquerque, Nuevo México, EEUU: University of New Mexico Press, 183-188.
- Young, T. (1807). *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts* [en línea]. Londres, Inglaterra: J. Johnson (*Impr.*). Disponible en Biodiversity Heritage Library. DOI: <https://doi.org/10.5962/bhl.title.22458>.
- Yu, H.S. (1995). *A unified critical state model for clay and sand*. Civil Engineering Research Report No. 112.08.1995. Callaghan, Australia: University of Newcastle, NSW 2308.
- Yu, H.S. (1998). CASM: A unified state parameter model for clay and sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(8), 621-653. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199808\)22:8<621::AID-NAG937>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9853(199808)22:8<621::AID-NAG937>3.0.CO;2-8).
- Yu, H.S. (2006). *Plasticity and geotechnics*. Nueva York, EEUU: Springer-Verlag.
- Yun, T. S. y Santamarina, J. C. (2005). Decementation, softening, and collapse: changes in small-strain shear stiffness in K0 loading. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(3), 350-358. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2005\)131:3\(350\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:3(350)).
- Ziegler, H. (1959). A modification of Prager's hardening rule. *Quarterly of Applied Mathematics*, 17(1), 55-65.
- Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. y King, I.P. (1968). Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material. *Géotechnique*, 18(1), 56-66. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1968.18.1.56>.
- Zienkiewicz, O.C. y Pande, G.N. (1977). Time-dependent multilaminate model of rocks—a numerical study of deformation and failure of rock masses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1(3), 219–247. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610010302>.
- Zwanenburg, C. (2005). *The influence of anisotropy on the consolidation behavior of peat*. Tesis doctoral no publicada. Delft, Países Bajos: Delft University of Technology.
- Zytnyński, M., Radolph, M.F., Nova, R. y Wroth, C.P. (1978). On modeling the unloading-reloading behavior of soils. *International Journal for Numerical Methods in Geomechanics*, 2(1), 87-93. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610020107>.

Anejo I

Código del algoritmo iterativo para la determinación de los parámetros internos de los modelos *HS* y *EPHYSS*

En el presente anejo se exponen el código del algoritmo iterativo en FORTRAN descrito en el apartado 4.1.7 del capítulo 4 y el 5.3.1.3 del capítulo 5, que permite calcular los parámetros internos de los modelos *Hardening Soil (HS)* y *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)*, concretamente en el:

- Modelo *HS* implementado en Plaxis 2D v9.
- Modelo *HS* implementado en Plaxis 2D 2015 (válido para Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores).
- Modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis 2D v9.
- Modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis 2D 2015 (válido para Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores).

Dichos parámetros internos son E_i^{ref} , α' y $\bar{\beta}'$ en el caso de Plaxis 2D v9 y E_i^{ref} , α' y $K'_{t,ur}/K'_c$ en el caso de Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores.

Los códigos adjuntos han sido compilados en 32 bits con INTEL PARALLEL STUDIO XE 2016.

Las subrutinas para la determinación de los parámetros internos del modelo *HS*, implementado en Plaxis 2D v9 y Plaxis 2D 2015 (válidas para Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores), son las siguientes:

- La subrutina *Iterative* que contiene el código que ejecuta los ensayos numéricos triaxial y edométrico para el cálculo de los parámetros internos del modelo *HS*.
- La subrutina *HS_CAP_plast* que permite realizar el *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie tipo Cono con la superficie tipo *Cap*.

- La subrutina *Matriz6_it* que permite construir la matriz 6x6 con el valor de los componentes de E .
- La subrutina *Matriz3_it* que permite construir la matriz 3x3 con el valor de los componentes de E que puede aplicarse sobre el vector de tensiones principales, una vez diagonalizado el tensor de tensiones.
- La subrutina *Usrlib* que contiene un conjunto de subrutinas predefinidas con operaciones matemáticas concretas. El código de varias de dichas subrutinas está disponible en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012).

Las subrutinas para la determinación de los parámetros internos del modelo *EPHYSS*, implementado en Plaxis 2D v9 y Plaxis 2D 2015 (válidas para Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores), son las siguientes:

- La subrutina *Iterative* que contiene el código que ejecuta los ensayos numéricos triaxial y edométrico para el cálculo de los parámetros internos del modelo *EPHYSS*.
- La subrutina *HS_CAP_plast* que permite realizar el *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie tipo Cono con la superficie tipo *Cap*.
- La subrutina *Matriz6_NL_it* que permite construir la matriz 6x6 con el valor de los componentes de E y dE .
- La subrutina *Matriz3_NL_it* que permite construir la matriz 3x3 con el valor de los componentes de E y dE que puede aplicarse sobre el vector de tensiones principales, una vez diagonalizado el tensor de tensiones.
- La subrutina *modul* que permite calcular el módulo de un vector o tensor.
- La subrutina *norm* que permite calcular el vector o tensor normalizado de un vector o tensor, siempre y cuando su módulo sea no nulo.
- La subrutina *Usrlib* que contiene un conjunto de subrutinas predefinidas con operaciones matemáticas concretas. El código de varias de dichas subrutinas está disponible en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012).

Las subrutinas *modul*, *norm* y *Usrlib* se detallan en el Anejo III.

En el texto adjunto se prescinde de los espacios previos a las líneas de código que deben respetarse en FORTRAN, así como a la estructuración en cascada. Asimismo, algunos saltos de línea no se corresponden con los saltos de línea del código original y son producto de la transcripción realizada.

**Código del algoritmo iterativo para la determinación
de los parámetros internos del modelo *HS*
implementado en Plaxis 2D v9 y Plaxis 2D 2015**

Subrutina Iterative

Program Iterative

Implicit Double Precision (A-H, 0-Z)

Dimension Props(15), Sig0(6), StVar0(2), dEps(6), D(6,6), &
Sig(6), StVar(2), Eps(6), D_inv(6,6), Sig_E(6)

Dimension dSig(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3), &
Prs_E(3), Prs(3), Prs_0(3), StVar0_2(2), dSig_real(6)

```
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
io = 0
ttol = 1d-12
nStatV = 2
frac = 0.01d0
aaa = 1d0
ideb = 1d0
```

```
!Selección versión Plaxis
!Plaxis 2D v9: n_version = 1
!Plaxis 2D 2015: n_version = 2
n_version=2
```

```
!Parámetros
E50_ref = 4000d0
Eoed_ref = 4000d0
Eur_ref = 12000d0
xm = 0.5d0
c = 0.0d0
phi = 40d0*Rad
psi = 10d0*Rad
xNu_ur = 0.20d0
p_ref = 100d0
xK0_nc = 0.3600
R_f = 0.9d0
sigma_trac = 0d0
Ei_ref_inter = 11600d0
alfa = 4.141d0
If (n_version .EQ. 1) Then
beta = 0.00141d0
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xKtmKc = 2.52d0
End If
```

```
VALOR_CARGA_EDOMETRO = 500d0 !Puede variar en función de las cargas esperadas
xINCREMENTO_CARGA = 0.1d0
TENSION_INICIAL = 1d0
resolucion_triaxial = 0.001d0
resolucion_edometro = 0.0001d0
```

```
Props(1) = E50_ref
Props(2) = Eoed_ref
Props(3) = Eur_ref
Props(4) = xm
Props(5) = c
Props(6) = phi
Props(7) = psi
Props(8) = xNu_ur
Props(9) = p_ref
Props(10) = xK0_nc
Props(11) = R_f
Props(12) = sigma_trac
Props(13) = Ei_ref_inter
Props(14) = alfa
If (n_version .EQ. 1) Then
Props(15) = beta
Else If (n_version .EQ. 2) Then
Props(15) = xKtmKc
End If
```

```
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! TRIAXIAL !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```
icont = 0
```

```
100 Continue
```

```
icont = icont + 1
```

```
If (icont .GT. 100) Then
```

```
frac = 0.001
```

```
icont = 0
```

```
End If
```

```
delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
```

```
!Tensiones cartesianas iniciales
```

```
Sig(1) = 100d0
```

```
Sig(2) = 100d0
```

```
Sig(3) = 100d0
```

```
Sig(4) = 0d0
```

```
Sig(5) = 0d0
```

```
Sig(6) = 0d0
```

```

!Deformaciones iniciales
Eps(1) = 0d0
Eps(2) = 0d0
Eps(3) = 0d0
Eps(4) = 0d0
Eps(5) = 0d0
Eps(6) = 0d0

qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+p_ref, max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qf_0 = qf

!Variables de estado iniciales
gamma_p = 1d-9
p_p = 100d0

StVar(1) = gamma_p
StVar(2) = p_p

!Tensiones principales iniciales
Prs(1) = 100d0
Prs(2) = 100d0
Prs(3) = 100d0

Do while (Sig(1)-Sig(3) .LT. qf_0/(2d0))

Prs_0(1) = Sig(1)
Prs_0(2) = Sig(2)
Prs_0(3) = Sig(3)

!Incremento tensional con Sig(3)=100kPa
dSig(1) = xINCREMENTO_CARGA
dSig(2) = 100d0-Sig(2)
dSig(3) = 100d0-Sig(3)
dSig(4) = 0d0
dSig(5) = 0d0
dSig(6) = 0d0

!Cálculo de la matriz elástica
Call Matriz6_it(Props, Prs_0, D, n_version)

!Cálculo deformaciones a partir de tensiones
Call MatInvPiv(D, D_inv, 6)
Call MatVec(D_inv, 6, dSig, 6, dEps)
Call AddVec(Eps, dEps, 1d0, 1d0, 6, Eps)

!Actualización variables de estado
StVar0(1) = StVar(1)

StVar0(2) = StVar(2)
gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = StVar0(2)

!Cálculo tensión de prueba
Call AddVec(Sig, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)

!Tensión de prueba en direcciones principales
iOpt = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
Prs_E(1) = S3
Prs_E(2) = S2
Prs_E(3) = S1

!Algoritmo de Return mapping
iArea = 2
Call HS_CAP_plast(iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0, StVar, ip1, Prs_0,
n_version)

!Cálculo de tensiones en coordenadas cartesianas
Sig(1) = Prs(1)
Sig(2) = Prs(2)
Sig(3) = Prs(3)
Sig(4) = 0d0
Sig(5) = 0d0
Sig(6) = 0d0

End do

!Ajuste de Ei_ref_inter
If (Eps(1) .GT. (qf_0/((2d0)*E50_ref))*(1d0+resolucion_tri axial)) Then
If (aaa .LT. 0d0) Then
frac = 0.99d0*frac
End If
Ei_ref_inter = Ei_ref_inter*(1d0+frac)
Props(13) = Ei_ref_inter
aaa = 1d0
write(*,*) 'subo Ei_ref_inter', Ei_ref_inter
GOTO 100
End If

If (Eps(1) .LT. (qf_0/((2d0)*E50_ref))*(1d0-resolucion_tri axial)) Then
If (aaa .GT. 0d0) Then
frac = 0.99d0*frac
End If
Ei_ref_inter = Ei_ref_inter*(1d0-frac)
Props(13) = Ei_ref_inter
aaa = -1d0
write(*,*) 'bajo Ei_ref_inter', Ei_ref_inter
GOTO 100

```



```

Call MatInvPiv(D, D_inv, 6)

!Cálculo de incremento de deformaciones
Call MatVec(D_inv, 6, dSig, 6, dEps)

!Cálculo de las deformaciones
Call AddVec(Eps, dEps, 1d0, 1d0, 6, Eps)

!Cálculo de la tensión de prueba
Call AddVec(Sig0, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)

!Actualización de variables de estado
StVar0(1) = StVar(1)
StVar0(2) = StVar(2)

gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = StVar0(2)

!Cálculo de la tensión de prueba en direcciones principales
iOpt = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
Prs_E(1) = S3
Prs_E(2) = S2
Prs_E(3) = S1
p_E = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

!Algoritmo de Return mapping
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
Call HS_CAP_plast(iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0, StVar, ip1, Prs_0,
n_version)
!Se vuelve a las tensiones en coordenadas cartesianas
!Prs: tracción negativa, compresión positiva
S3 = Prs(1)
S2 = Prs(2)
S1 = Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)
!Cálculo del incremento de tensión real en coordenadas cartesianas
dSig_real(1) = Sig(1)-Sig0(1)
dSig_real(2) = Sig(2)-Sig0(2)
dSig_real(3) = Sig(3)-Sig0(3)
dSig_real(4) = Sig(4)-Sig0(4)
dSig_real(5) = Sig(5)-Sig0(5)
dSig_real(6) = Sig(6)-Sig0(6)

End do

!Ajuste de xK0_nc_inter
If (Eps(3) .GT. abs(Eps(1))*(resolucion_edometro)) Then
If (aaa .LT. 0d0) Then
frac = max(0.8d0*frac, 1d-7)
End If
xK0_nc_inter = xK0_nc_inter*(1d0-frac)
Props(10) = xK0_nc_inter
aaa = 1d0
Eoed_ref_inter =
(dSig_real(1)/dEps(1))/(((Sig(3)/xK0_nc_inter)*sin(phi)+c*cos(phi))/(p_ref*sin
(phi)+c*cos(phi)))***xm
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(1)', dSig_Real(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps(1)', dEps(1))
Call WriVal(ideb, 'xK0_nc_inter', xK0_nc_inter)
Call WriVal(ideb, 'Eoed_ref_inter', Eoed_ref_inter)
Eps_3 = Eps(3)
write(*,*) 'bajo k0_nc_inter', xK0_nc_inter
GOTO 200
End If

If (Eps(3) .LT. -abs(Eps(1))*(resolucion_edometro)) Then
If (aaa .GT. 0d0) Then
frac = max(0.8d0*frac, 1d-7)
End If
xK0_nc_inter = xK0_nc_inter*(1d0+frac)
Props(10) = xK0_nc_inter
aaa = -1d0
Eoed_ref_inter =
(dSig_real(1)/dEps(1))/(((Sig(3)/xK0_nc_inter)*sin(phi)+c*cos(phi))/(p_ref*sin
(phi)+c*cos(phi)))***xm
Call WriVal(ideb, 'dSig_real', dSig_real(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps(1)', dEps(1))
Call WriVal(ideb, 'xK0_nc_inter', xK0_nc_inter)
Call WriVal(ideb, 'Eoed_ref_inter', Eoed_ref_inter)
Eps_3 = Eps(3)
write(*,*) 'subo k0_nc_inter', xK0_nc_inter
GOTO 200
End If

!Cálculo de Eoed_ref_inter
Eoed_ref_inter =
(dSig_real(1)/dEps(1))/(((Sig(3)/xK0_nc_inter)*sin(phi)+c*cos(phi))/(p_ref*sin
(phi)+c*cos(phi)))***xm
write(*,*) 'Ei_ref_inter', Ei_ref_inter
If (n_version .EQ. 1) Then
write(*,*) 'beta', beta
Else If (n_version .EQ. 2) Then
write(*,*) 'xktmkc', xktmkc
End If
write(*,*) 'alfa', alfa
write(*,*) 'xK0_nc_inter', xK0_nc_inter
write(*,*) 'Eoed_ref_inter', Eoed_ref_inter

```

```
End ! Iterative
```

```
include 'usrlib.f90'
include 'HS_CAP_plast.f90'
include 'Matriz3_it.f90'
include 'Matriz6_it.f90'
```

Subrutina HS_CAP

```
!C*****
!Subroutine HS_CAP_plast(iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0, StVar, iPl, Prs_0,
n_version)
!C*****
!Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie HS
! Tensión de compresión positiva!
!
! I/O Tipo
! iArea I I 1 : Superficie f13_hs Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! 2 : Eje entre f13_hs y f12_hs Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! 3 : Eje entre f13_hs y f23_hs Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
!
! Local:
! f13_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f12_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! f23_hs : superficie HS para Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! xLam13_hs : multiplicador plástico f13_hs
! xLam12_hs : multiplicador plástico f12_hs
! xLam23_hs : multiplicador plástico f23_hs
! xLam_cap : multiplicador plástico f_cap
! D : matriz elástica
! df13_hsmoS(3) : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dS
! df12_hsmoS(3) : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dS
! df23_hsmoS(3) : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dS
! df_capmOS(3) : Primera derivada función de fluencia f_cap/dS
! df13_hsmOq : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dq
! df12_hsmOq : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dq
! df23_hsmOq : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dq
! df_capmOq : Primera derivada función de fluencia f_cap/dq
! dg13_hsmOS(3) : Segunda derivada potencial plástico g13_hs/dS
! dg12_hsmOS(3) : Segunda derivada potencial plástico g12_hs/dS
! dg23_hsmOS(3) : Segunda derivada potencial plástico g23_hs/dS
! dg_capmOS(3) : Segunda derivada potencial plástico g_cap/dS
! d2g13_hsmOS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g13_hs/dS2
! d2g12_hsmOS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g12_hs/dS2
! d2g23_hsmOS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g23_hs/dS2
! d2g_capmOS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g_cap/dS2
! d2g13_hsmOSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g13_hs
! d2g12_hsmOSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g12_hs
! d2g23_hsmOSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g23_hs
! d2g_capmOSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g_cap
! D_dgi_j : Producto de D por dgi_j_hs/dS
```

```

! D_dgij_2 : Producto de D por d2gij_hs/dS2
! HH_dfij : Producto de D por dfij_hs/dS
! thetaij : Operación dgij_hs/dS+d2gij_hs/dS2*Lamij_hs*xh_hs
! D_thetaij : Productor de D por thetaij
! HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_hs*D_gij_2

Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_res3(3), Prs_0(3)
Dimension Prs_2sup(3), Prs_3sup(3), r(3), dPrs(3), dPrs_1(3), dPrs_2(3),
dPrs_3(3)
Dimension Props(15)
Dimension StVar0(2), StVar(2)
Dimension df13_hsmS(3), df12_hsmS(3), df23_hsmS(3), df23_hsmS(3), df_capmS(3)
Dimension dg13_hsmS(3), dg12_hsmS(3), dg23_hsmS(3), dg_capmS(3)
Dimension d2g13_hsmS2(3,3), d2g12_hsmS2(3,3), d2g23_hsmS2(3,3),
d2g_capmS2(3,3)
Dimension d2g13_hsmSdq(3), d2g12_hsmSdq(3), d2g23_hsmSdq(3),
d2g_capmSdq(3)
Dimension D_dg13(3), D_dg12(3), D_dg23(3), D_dgcap(3)
Dimension D_dg13_2(3,3), D_dg12_2(3,3), D_dg23_2(3,3), D_dgcap_2(3,3)
Dimension HH_df13(3), HH_df12(3), HH_df23(3), HH_dfcap(3)
Dimension thetai3(3), thetai2(3), thetai3(3), thetai3(3), thetai3(3)
Dimension D_theta13(3), D_theta12(3), D_theta23(3), D_theta23(3), D_theta23(3)
Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3), xMat(3,3), xMat_inv(3,3),
f_b(3), d_lam(3)

Call MZeroR(Prs_res1, 3)
Call MZeroR(Prs_res2, 3)
Call MZeroR(Prs_res3, 3)
Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
Call MZeroR(Prs_3sup, 3)
Call MZeroR(dPrs, 3)
Call MZeroR(dPrs_1, 3)
Call MZeroR(dPrs_2, 3)
Call MZeroR(dPrs_3, 3)

Call MZeroR(df13_hsmS, 3)
Call MZeroR(dg13_hsmS, 3)
Call MZeroR(d2g13_hsmS2, 9)
Call MZeroR(d2g13_hsmSdq, 3)

Call MZeroR(df12_hsmS, 3)
Call MZeroR(dg12_hsmS, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmSdq, 3)

Call MZeroR(df23_hsmS, 3)
Call MZeroR(dg23_hsmS, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmSdq, 3)

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

E50_ref = Props(1)

```

```

Call MZeroR(df_capmS, 3)
Call MZeroR(dg_capmS, 3)
Call MZeroR(d2g_capmS2, 9)
Call MZeroR(d2g_capmSdq, 3)

```

```

Call MZeroR(D_dg13_2, 9)
Call MZeroR(D_dg12_2, 9)
Call MZeroR(D_dg23_2, 9)
Call MZeroR(D_dgcap_2, 9)

```

```

Call MZeroR(D_dg13, 3)
Call MZeroR(D_dg12, 3)
Call MZeroR(D_dg23, 3)
Call MZeroR(D_dgcap, 3)

```

```

Call MZeroR(HH_df13, 3)
Call MZeroR(HH_df12, 3)
Call MZeroR(HH_df23, 3)
Call MZeroR(HH_dfcap, 3)

```

```

Call MZeroR(theta13, 3)
Call MZeroR(theta12, 3)
Call MZeroR(theta23, 3)
Call MZeroR(theta23, 3)

```

```

Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)
Call MZeroR(D_thetacap, 3)

```

```

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)
Call MZeroR(xMat, 9)
Call MZeroR(xMat_inv, 9)
Call MZeroR(f_b, 3)
Call MZeroR(d_lam, 3)

```

```

ipl = 4
it = 0
itmax = 150
ttol = 1d-6
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0

```

```

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

```

```

E50_ref = Props(1)

```

```

Eoed_ref      = Props(2)
Eur_ref       = Props(3)
xm            = Props(4)
c             = Props(5)
phi          = Props(6)
psi          = Props(7)
xNu_ur       = Props(8)
p_ref        = Props(9)
xK0_nc       = Props(10)
R_f          = Props(11)
sigma_trac   = Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa         = Props(14)
If (n_version .EQ. 1) Then
beta         = Props(15)
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xktmKc      = Props(15)
End If

delta        = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))

gamma_p_E   = StVar0(1)
p_p_E       = StVar0(2)

dXLam13_hs = 0d0
dXLam12_hs = 0d0
dXLam23_hs = 0d0
dXLam_cap  = 0d0

xLam13_hs = 0d0
xLam12_hs = 0d0
xLam23_hs = 0d0
xLam_cap  = 0d0

!Construcción matriz D
If (abs(Prs_0(3)) .GT. 0.01d0) Then
Call Matriz3_it(Props, Prs_0, D, n_version)
Else
Call Matriz3_it(Props, Prs_E, D, n_version)
End If

Call WriMat(ideb, 'D3', D, 3, 3, 3)

Select Case (IArea)
Case (1) !NO APLICACION
Case (2) ! 2 : Eje entre f13_hs, f12_hs y f_cap (Prs(1) > Prs(2) = Prs(3))
df13_hsmD(2) = 0d0
df13_hsmD(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df_cap/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3)) .LT. qf) Then
f_cap_TOL = ttol*abs(f12_hs)+ttol
f12_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f13_hs_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol
!Cálculo tolerancia f13_hs, f12_hs y f_cap en Prs_E
f_cap      = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0
p          = (Prs_E(1)+(delta-id0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3))
           = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
q_m        = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0
End If

f12_hs     = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
f12_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs     = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f12_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs     = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
End If

f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

!write(1,*) ' q > qf '
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

If (Prs_E(1)-Prs_E(3)) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

!Cálculo el valor de f13_hs, f12_hs y f_cap en Prs_E
!STARTING POINT
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf   = qf1*qf2
qa   = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50   = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei    = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur   = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs_E(1)-Prs_E(3)) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs     = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

!Cálculo tolerancia f13_hs, f12_hs y f_cap en Prs_E
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f12_hs_TOL = ttol*abs(f12_hs)+ttol
f_cap_TOL  = ttol*abs(f_cap)+ttol
!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df_cap/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3)) .LT. qf) Then
df13_hsmD(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmD(2) = 0d0

```

```

df13_hsmS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmS(2) = 0d0
df13_hsmS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
df12_hsmS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))**2d0)-2d0/Eur
df12_hsmS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))**2d0)+2d0/Eur
df12_hsmS(3) = 0d0
Else
df12_hsmS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df12_hsmS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
df12_hsmS(3) = 0d0
End If

df_capmS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

!Cálculo df13_hs/dq, df12_hs/dq y df_cap/ds en Prs_E (q1=gamma_p -para f13_hs y f12_hs, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df12_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p_E

!Cálculo h en Prs_E (dq=dLam1*h1 -para f13_hs y f12_hs - y dq2=dLam2*h2)
xh_hs = 1d0
If (n_version .EQ. 1) Then
xh_cap = (2d0*p*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xks = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xks/(xksmkC-1d0)
xh_cap =
2d0*xh**p*(max(p_p_E*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
End If

!Cálculo dg13_hs/dS, dg12_hs/dS y dg_cap/ds en Prs_E
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0))*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0))*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then

```

```

psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If

dg13_hsmS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmS(2) = 0d0
dg13_hsmS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg12_hsmS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg12_hsmS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg12_hsmS(3) = 0d0

dg_capmS(1) = df_capmS(1)
dg_capmS(2) = df_capmS(2)
dg_capmS(3) = df_capmS(3)

!Cálculo d2g13_hs/ds2, d2g12_hs/ds2 y d2g_cap/ds2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmS2, 9)

d2g_capmS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmS2(2,1) = d2g_capmS2(1,2)
d2g_capmS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmS2(3,1) = d2g_capmS2(1,3)
d2g_capmS2(3,2) = d2g_capmS2(2,3)
d2g_capmS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MathMat(D, 3, dg13_hsmS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
Call MathMat(D, 3, dg12_hsmS, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call DinProd(df13_hsmS, D_dg12, 3, df13_D_dg12)
xOmega12 = df13_D_dg12
Call MathMat(D, 3, dg_capmS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_hsmS, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega13 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df12_hsmS, D_dg13, 3, df12_D_dg13)
xOmega21 = df12_D_dg13
Call DinProd(df12_hsmS, D_dg12, 3, df12_D_dg12)

```



```

xOmega22 = df12_D_dg12-df12_hsmdq*xh_hs
Call DinProd(df12_hsmDS, D_dgcap,3, df12_D_dgcap)
xOmega23 = df12_D_dgcap
Call DinProd(df_capmDS, D_dg13,3, dfcap_D_dg13)
xOmega31 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capmDS, D_dg12,3, dfcap_D_dg12)
xOmega32 = dfcap_D_dg12
Call DinProd(df_capmDS, D_dgcap,3, dfcap_D_dgcap)
xOmega33 = dfcap_D_dgcap-df_capmqd*xh_cap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_hs, dxLam12_hs y dxLam_cap
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_hs
f_b(2) = f12_hs
f_b(3) = f_cap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MathMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam12_hs = dxLam12_hs
xLam_cap = dxLam_cap

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

!Cálculo valor de f13_hs, f12_hs y f_cap con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_p_ref*sin(phi))

```

```

E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(2))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(aifa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
abs(f12_hs) .GT. f12_hs_TOL) .OR. &
abs(f_cap) .GT. f_cap_TOL) .AND. &
it .LE. itmax)

!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df_cap/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-
Prs(3))))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))+2d0)/Eur
End If

```

```

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-(Prs(1)--Prs(2))))**2d0) -
2d0/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-(Prs(1)-
Prs(2))))**2d0)+2d0/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
Else
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
End If

df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

!Cálculo df13_hs/dq, df12_hs/dq y df_cap/dq en Prs (q1=gamma_p -para f13_hs y
f12_hs-, q2=p_p)
df13_hsmDq = -1d0
df12_hsmDq = -1d0
df_capmDq = -2d0*p_p

!Cálculo h en Prs (dq=dLam1*h1 -para f13_hs y f12_hs- y dq2=dLam2*h2)
xh_hs = 1d0
If (n_version .EQ. 1) Then
xh_cap = (2d0*p_p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xks = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur))
xH = xks/(xksmKc-1d0)
xh_cap =
2d0*xH*p*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
End If

!Cálculo dg13_hs/dS, dg12_hs/dS y dg_cap/dS en Prs
sin_phi_m = min(max(Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3) -
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi)
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If

dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0

```

```

dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg12_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg12_hsmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg12_hsmDS(3) = 0d0

dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g12_hs/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmDS2, 9)

d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+(1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg12_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g12_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg12_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g_capmDS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dgcap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_2 + xLam12_hs*D_dg12_2 + xLam_cap*D_dgcap_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13)
Call AddVec(dg12_hsmDS, d2g12_hsmDSdq, 1d0, xLam12_hs*xh_hs, 3, theta12)
Call AddVec(dg_capmDS, d2g_capmDSdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, thetacap)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df12_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df12, 3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmDS, 3, 3, 1, 3, HH_dfcap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta12, 3, 3, 1, 3, D_theta12, 3)
Call MatMat(D, 3, thetacap, 3, 3, 1, 3, D_thetacap, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
Call DinProd(D_thetacap, HH_df12, 3, D_thetacap_HH_df12)
Call DinProd(D_theta13, HH_df12, 3, D_theta13_HH_df12)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
Call DinProd(D_thetacap, HH_df12, 3, D_thetacap_HH_df12)
Call DinProd(D_theta13, HH_df12, 3, D_theta13_HH_df12)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
Call DinProd(D_thetacap, HH_df12, 3, D_thetacap_HH_df12)

```

```

Call DinProd(D_theta12, HH_dfcap, 3, D_theta12_HH_dfcap)
Call DinProd(D_theta12_HH_dfcap, HH_dfcap, 3, D_theta12_HH_dfcap)
xOmega11 = D_theta12_HH_dfcap - df13_hsmdq*hh_hs
xOmega12 = D_theta12_HH_dfcap
xOmega13 = D_theta12_HH_dfcap
xOmega21 = D_theta13_HH_dfcap
xOmega22 = D_theta12_HH_dfcap - df12_hsmdq*hh_hs
xOmega23 = D_theta12_HH_dfcap
xOmega31 = D_theta13_HH_dfcap
xOmega32 = D_theta12_HH_dfcap
xOmega33 = D_theta12_HH_dfcap - df_capdq*hh_cap
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmdq, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmdq, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call MatMat(D, 3, dg_capdq, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_dfcap, r, 3, r_HH_dfcap)
Call DinProd(HH_dfcap, r, 3, r_HH_dfcap)
Call DinProd(HH_dfcap, r, 3, r_HH_dfcap)
xOmegaf13 = f13_hs - r_HH_dfcap
xOmegaf12 = f12_hs - r_HH_dfcap
xOmegafcap = f_cap - r_HH_dfcap

```

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam12_hs

```

xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaf13
f_b(2) = xOmegaf12
f_b(3) = xOmegafcap
Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

```

```

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

```

```

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam12_hs = xLam12_hs + dxLam12_hs
xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap

```

```

!Actualizo variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta12, -dxLam13_hs, -dxLam12_hs, 3, dPrs_1)
Call AddVec(dPrs_1, D_theta12, 1d0, -dxLam_cap, 3, dPrs_2)
Call AddVec(r, dPrs_2, -1d0, 1d0, 3, dPrs_3)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

```

!Calculo el valor de f13_hs, f12_hs y f_cap en (k+1) en Prs

```

qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))!0J0, Prs(3) debe ser mayor que c*cos(phi)/sin(phi) para que
E sean reales
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf3 = qf1*qf2
qa = qf/R_cf
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1.0d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

```

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then

```

f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

```

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then

```

f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

```

```

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

```

```
f_cap = (q_m**2d0)/(aifa**2d0)+p**2d0-p**2d0
```

!Actualización iteración

```
it = it+1
```

```

End do
!Actualización variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = max(p_p, p_p_E)

If (xLam13_hs .GT. (-1d0)**ttoi .AND. &
xLam12_hs .GT. (-1d0)**ttoi .AND. &
xLam_cap .GT. (-1d0)**ttoi .AND. &
it .LE. itmax) Then
  !write(1,*)'Return mapping OK!'
Else
  !write(1,*)'Numerical problem'
End If

Case (3) !NO APLICA

Case Default
  !write(1,*) 'inconnect iArea in HS_plast'
Stop
End Select

End ! HS_CAP_plast

```

Subrutina Matriz6_it

```

!C*****
Subroutine Matriz6_it(Prps, Prs, D6, n_version)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension Prps(15), Prs(3), D6(6,6)
Call MZeroR(D6, 36)
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)
psi = Props(7)
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
If (n_version .EQ. 1) Then
  beta = Props(15)
Else If (n_version .EQ. 2) Then
  xktmkc = Props(15)
End If
!Parámetros y variables de estado
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs(3))*sin(phi), 1.0d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
G = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))
!Construcción matriz D
F1 = 2d0*G*(1d0-xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
F2 = 2d0*G*(xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
Do i=1,3
  Do j=1,3
    D6(i,j) = F2
  End Do
  D6(i,i) = F1
  D6(i+3,i+3) = G
End Do
End !Matriz

```

Subrutina *Matriz3_it*

```

!C*****
Subroutine Matriz3_it(Prps, Prs, D3, n_version)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension Prps(15), Prs(3), D3(3,3)
Call MZeroR(D3, 9)
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
!Parámetros y variables de estado
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)
psi = Props(7)
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
If (n_version .EQ. 1) Then
beta = Props(15)
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xktmKc = Props(15)
End If
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs(3))*sin(phi), 1.0d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
G = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))
!Construcción matriz D
F1 = 2d0*G*(1d0-xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
F2 = 2d0*G*(xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
Do i=1,3
Do j=1,3
D3(i,j) = F2
End Do
D3(i,i) = F1
End Do
End !Matriz

```


**Código del algoritmo iterativo para la determinación
de los parámetros internos del modelo *EPHYSS*
implementado en Plaxis 2D v9 y Plaxis 2D 2015**

Subrutina Iterative

Program Iterative

Implicit Double Precision (A-H, 0-Z)

```
Dimension Props(22), Sig0(6), StVar0(28), dEps(6), D(6,6), &
Sig(6), StVar(28), Eps(6), D_inv(6,6), Sig_E(6), &
D3(3,3), dD(6,6)
```

```
Dimension dSig(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3), &
Prs_E(3), Prs_0(3), StVar0_2(2), dSig_real(6), dSig1(6), dSig2(6),
dSig3(6), DifSig(6), DifSig2(6)
```

```
Dimension xh_T(6), d_xh_T(6), xh_T_norm(6), xh_T_new(6)
Dimension eps_e_R(6), eps_e_R_dev(6), eps_R_dev(6), eps_e_DR(6),
eps_e_DR_new_dev(6), eps_DR_dev(6), eps_DR_dev_norm(6)
Dimension eps_dev(6), eps_dev_new(6), eps_e(6), eps_e_dev(6), eps_e_aux(6),
eps_e_new(6), eps_e_new_dev(6)
Dimension d_eps_e(6), d_eps_dev(6), d_eps_dev_norm(6), d_eps_dev_aux(6)
Dimension d_eps_e_aux1(6), d_eps_e_aux2(6), d_eps_e_aux3(6),
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(6)
```

```
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
io = 0
ttol = 1d-12
frac = 0.01d0
aaa = 1d0
ideb = 1d0
```

!Selección versión Plaxis

```
!Plaxis 2D v9: n_version = 1
!Plaxis 2D 2015: n_version = 2
n_version=2
```

!Parámetros

```
xKs_ref = 20552d0
Gs0_ap_180_H_ref = 124683d0
Gs0_ap_90_H_ref = 54861d0
gamma_07 = 2.0d-4
p1_ref = 100.0d0
p2_ref = 100.0d0
xm1 = 0.50d0
xm2 = 0.50d0
E50_ref = 16000d0
Eoed_ref = 22000d0
```

```
Eur_ref = 90000d0
xNu_min = 0.20d0
xm = 0.50d0
p_ref = 100d0
c = 0d0
phi = 37d0*Rad
psi = 1.5d0*Rad
xk0_nc = 0.41d0
R_f = 0.90d0
sigma_trac = 0d0
Ei_ref_inter = 50000d0
alfa = 16.6d0
If (n_version .EQ. 1) Then
beta = 0.00141d0
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xKtmKc = 2.52d0
End If
```

```
VALOR CARGA EDOMETRO = 500d0 !Puede variar en función de las cargas esperadas
xINCREMENTO_CARGA = 0.1d0
TENSION_INICIAL = 1d0
resolucion_tri axial = 0.001d0
resolucion_edometro = 0.0001d0
```

```
Props(1) = xKs_ref
Props(2) = Gs0_ap_180_H_ref
Props(3) = Gs0_ap_90_H_ref
Props(4) = gamma_07
Props(5) = p1_ref
Props(6) = p2_ref
Props(7) = xm1
Props(8) = xm2
Props(9) = E50_ref
Props(10) = Eoed_ref
Props(11) = Eur_ref
Props(12) = xm
Props(13) = p_ref
Props(14) = c
Props(15) = phi
Props(16) = psi
Props(17) = xK0_nc
Props(18) = R_f
Props(19) = sigma_trac
Props(20) = Ei_ref_inter
Props(21) = alfa
If (n_version .EQ. 1) Then
Props(22) = beta
Else If (n_version .EQ. 2) Then
Props(22) = xKtmKc
End If
```

```

w          = 100d0
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! TRIAXIAL !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
icont      = 0
100 Continue
icont      = icont + 1
If (icont .GT. 100) Then
frac = 0.001
icont = 0
End If
delta     = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
!Tensiones cartesianas iniciales
Sig(1)   = 100d0
Sig(2)   = 100d0
Sig(3)   = 100d0
Sig(4)   = 0d0
Sig(5)   = 0d0
Sig(6)   = 0d0
!Deformaciones iniciales
Eps(1)   = 0d0
Eps(2)   = 0d0
Eps(3)   = 0d0
Eps(4)   = 0d0
Eps(5)   = 0d0
Eps(6)   = 0d0
qf1      = max(c*cos(phi)/sin(phi)+p_ref, max(c*cos(phi)/sin(phi) -
sigma_trac, 0d0))
qf2      = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf       = qf1*qf2
qf_0     = qf
!Variables de estado iniciales
gamma_p  = 1d-9
p_p      = 100d0
Gs0_ap_alfa_H = Gs0_ap_180_H_ref
xh_T(1)  = 0d0
xh_T(2)  = 0d0
xh_T(3)  = 0d0
xh_T(4)  = 0d0
xh_T(5)  = 0d0
xh_T(6)  = 0d0
eps_e(1) = 0d0
eps_e(2) = 0d0
eps_e(3) = 0d0
eps_e(4) = 0d0
eps_e(5) = 0d0
eps_e(6) = 0d0
eps_R_dev(1) = 0d0
eps_R_dev(2) = 0d0
eps_R_dev(3) = 0d0
eps_R_dev(4) = 0d0
eps_R_dev(5) = 0d0
eps_R_dev(6) = 0d0
eps_e_R_dev(1) = 0d0
eps_e_R_dev(2) = 0d0
eps_e_R_dev(3) = 0d0
eps_e_R_dev(4) = 0d0
eps_e_R_dev(5) = 0d0
eps_e_R_dev(6) = 0d0
Gmin     = Gs0_ap_180_H_ref
StVar(1) = gamma_p
StVar(2) = p_p
StVar(3) = Gs0_ap_alfa_H
StVar(4) = xh_T(1)
StVar(5) = xh_T(2)
StVar(6) = xh_T(3)
StVar(7) = xh_T(4)
StVar(8) = xh_T(5)
StVar(9) = xh_T(6)
StVar(10) = eps_e(1)
StVar(11) = eps_e(2)
StVar(12) = eps_e(3)
StVar(13) = eps_e(4)
StVar(14) = eps_e(5)
StVar(15) = eps_e(6)
StVar(16) = eps_R_dev(1)
StVar(17) = eps_R_dev(2)
StVar(18) = eps_R_dev(3)
StVar(19) = eps_R_dev(4)
StVar(20) = eps_R_dev(5)

```

```

StVar(21) = eps_R_dev(6)
StVar(22) = eps_e_R_dev(1)
StVar(23) = eps_e_R_dev(2)
StVar(24) = eps_e_R_dev(3)
StVar(25) = eps_e_R_dev(4)
StVar(26) = eps_e_R_dev(5)
StVar(27) = eps_e_R_dev(6)
StVar(28) = Gmin

!Tensiones principales iniciales
Prs(1) = 100d0
Prs(2) = 100d0
Prs(3) = 100d0

!Valor dEps en primer paso
dEps(1) = 0d0
dEps(2) = 0d0
dEps(3) = 0d0
dEps(4) = 0d0
dEps(5) = 0d0
dEps(6) = 0d0

Do while (Sig(1)-Sig(3) .LT. qf_0/(2d0))

Sig(1) = Sig(1)
Sig(2) = Sig(2)
Sig(3) = Sig(3)
Sig(4) = Sig(4)
Sig(5) = Sig(5)
Sig(6) = Sig(6)

StVar(1) = StVar(1)
StVar(2) = StVar(2)
StVar(3) = StVar(3)
StVar(4) = StVar(4)
StVar(5) = StVar(5)
StVar(6) = StVar(6)
StVar(7) = StVar(7)
StVar(8) = StVar(8)
StVar(9) = StVar(9)
StVar(10) = StVar(10)
StVar(11) = StVar(11)
StVar(12) = StVar(12)
StVar(13) = StVar(13)
StVar(14) = StVar(14)
StVar(15) = StVar(15)
StVar(16) = StVar(16)
StVar(17) = StVar(17)
StVar(18) = StVar(18)

StVar(19) = StVar(19)
StVar(20) = StVar(20)
StVar(21) = StVar(21)
StVar(22) = StVar(22)
StVar(23) = StVar(23)
StVar(24) = StVar(24)
StVar(25) = StVar(25)
StVar(26) = StVar(26)
StVar(27) = StVar(27)
StVar(28) = StVar(28)

gamma_p_E = StVar(1)
p_p_E = StVar(2)
Gs0_ap_alfa_H = StVar(3)
xh_T(1) = StVar(4)
xh_T(2) = StVar(5)
xh_T(3) = StVar(6)
xh_T(4) = StVar(7)
xh_T(5) = StVar(8)
xh_T(6) = StVar(9)
eps_e(1) = StVar(10)
eps_e(2) = StVar(11)
eps_e(3) = StVar(12)
eps_e(4) = StVar(13)
eps_e(5) = StVar(14)
eps_e(6) = StVar(15)
eps_R_dev(1) = StVar(16)
eps_R_dev(2) = StVar(17)
eps_R_dev(3) = StVar(18)
eps_R_dev(4) = StVar(19)
eps_R_dev(5) = StVar(20)
eps_R_dev(6) = StVar(21)
eps_e_R_dev(1) = StVar(22)
eps_e_R_dev(2) = StVar(23)
eps_e_R_dev(3) = StVar(24)
eps_e_R_dev(4) = StVar(25)
eps_e_R_dev(5) = StVar(26)
eps_e_R_dev(6) = StVar(27)
Gmin = StVar(28)

!Tensión de prueba en direcciones principales
iOpt = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig0, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
Prs_0(1) = S3
Prs_0(2) = S2
Prs_0(3) = S1
p_0 = (Sig(1)+Sig(2)+Sig(3))/3d0

!Incremento tensional con Sig(3)=100kPa
dSig(1) = xINCREMENTO_CARGA

```

```

dSig(2) = 100d0-Sig(2)
dSig(3) = 100d0-Sig(3)
dSig(4) = 0d0
dSig(5) = 0d0
dSig(6) = 0d0

!Cálculo de la matriz elástica (utilizando dEps paso anterior)

!Cálculo módulo dEps
Call modul(dEps, dEps_mod)

!Cálculo d_eps_dev
d_eps_oct = (dEps(1)+dEps(2)+dEps(3))/3d0
d_eps_dev(1) = dEps(1)-d_eps_oct
d_eps_dev(2) = dEps(2)-d_eps_oct
d_eps_dev(3) = dEps(3)-d_eps_oct
d_eps_dev(4) = dEps(4)
d_eps_dev(5) = dEps(5)
d_eps_dev(6) = dEps(6)

!Cálculo de ||d_eps_dev||=d_eps_dev_mod y d_eps_dev_norm
Call modul(d_eps_dev, d_eps_dev_mod)
Call norm(d_eps_dev, d_eps_dev_norm)

!Cálculo eps_dev
eps_oct = (eps(1)+eps(2)+eps(3))/3d0
eps_dev(1) = eps(1)-eps_oct
eps_dev(2) = eps(2)-eps_oct
eps_dev(3) = eps(3)-eps_oct
eps_dev(4) = eps(4)
eps_dev(5) = eps(5)
eps_dev(6) = eps(6)

!Cálculo eps_e_dev
eps_e_oct = (eps_e(1)+eps_e(2)+eps_e(3))/3d0
eps_e_dev(1) = eps_e(1)-eps_e_oct
eps_e_dev(2) = eps_e(2)-eps_e_oct
eps_e_dev(3) = eps_e(3)-eps_e_oct
eps_e_dev(4) = eps_e(4)
eps_e_dev(5) = eps_e(5)
eps_e_dev(6) = eps_e(6)

!Cálculo eps_e_R_dev_mod
Call modul(eps_e_R_dev, eps_e_R_dev_mod)

!Cálculo eps_dev(n+1)
eps_dev_new(1) = eps_dev(1)+d_eps_dev(1)
eps_dev_new(2) = eps_dev(2)+d_eps_dev(2)
eps_dev_new(3) = eps_dev(3)+d_eps_dev(3)
eps_dev_new(4) = eps_dev(4)+d_eps_dev(4)

eps_dev_new(5) = eps_dev(5)+d_eps_dev(5)
eps_dev_new(6) = eps_dev(6)+d_eps_dev(6)

!Cálculo Gamma_oct(n)
Call modul(eps_dev, eps_dev_mod)
gamma_oct = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_mod

!Cálculo Gamma_oct_R(n)
Call modul(eps_R_dev, eps_R_dev_mod)
gamma_oct_R = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_R_dev_mod

!Para posterior cálculo de actualización de variables

!Cálculo Gamma_oct(n+1)
Call modul(eps_dev_new, eps_dev_new_mod)
gamma_oct_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_new_mod

!Cálculo d_Gamma_oct = Gamma_oct(n+1)-Gamma_oct(n)
d_gamma_oct = (gamma_oct_new - gamma_oct)

!Cálculo Gamma_oct_DR(n)
gamma_oct_DR = (gamma_oct-gamma_oct_R)

!Cálculo Gamma_oct_DR(n+1)
gamma_oct_DR_new = (gamma_oct_new-gamma_oct_R)

!Cálculo d_Gamma_oct_DR = Gamma_oct_DR(n+1)-Gamma_oct_DR(n)
d_gamma_oct_DR = (gamma_oct_DR_new - gamma_oct_DR)

!Cálculo eps_DR_dev(n+1)
eps_DR_dev(1) = eps_dev(1)-eps_R_dev(1)
eps_DR_dev(2) = eps_dev(2)-eps_R_dev(2)
eps_DR_dev(3) = eps_dev(3)-eps_R_dev(3)
eps_DR_dev(4) = eps_dev(4)-eps_R_dev(4)
eps_DR_dev(5) = eps_dev(5)-eps_R_dev(5)
eps_DR_dev(6) = eps_dev(6)-eps_R_dev(6)

!Cálculo eps_DR_dev_mod y eps_DR_dev_norm
Call modul(eps_DR_dev, eps_DR_dev_mod)
Call norm(eps_DR_dev, eps_DR_dev_norm)

!Cálculo factor eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm =
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm+d_eps_dev_norm(i)*eps_DR_dev_norm(i)
End Do

!Actualización de xi
xi1 = 1d0 !Para cálculo de Gm
xi2 = 2d0 !Para cálculo rigidez en carga/descarga/descarga

```

```

!Cálculo de ||xh_T(n)||=xh_T_mod y xh_T_norm
Call modul(xh_T, xh_T_mod)
Call norm(xh_T, xh_T_norm)

!Cálculo gamma_alfa_ur(n)
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xkt_ref*Eur_ref/(9d0*xkt_ref-Eur_ref)
gamma_alfa_ur = (x12*gamma_07/0.385d0)*(((Gs0_ap_alfa_H/Gt_ur_ref)**0.5d0)-1d0)

!Cálculo Gs0_ap_alfa(n)
Gs0_ap_alfa = Gs0_ap_alfa_H*(max(p_0,0.1d0*p2_ref)/p2_ref)**xm2

!Cálculo gamma_oct_H
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)

!Cálculo de Gt_ur(n)
Gt_ur = Gt_ur_ref*(max(p_0,0.1d0*p2_ref)/p2_ref)**xm2

!Cálculo ro_alfa(n)
ro_alfa = gamma_oct_H/gamma_alfa_ur

!Cálculo cos_beta_alfa_rev(n)
If (xh_T_mod .LT. 1d-10) Then
cos_beta_alfa_rev = 0d0
Else
cos_beta_alfa_rev = 1d0/((d_eps_dev_mod/xh_T_mod)**(1d0-ro_alfa**w)+1d0)
End If

!Cálculo factor xh_T_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
xh_T_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
xh_T_norm_d_eps_dev_norm =
xh_T_norm_d_eps_dev_norm+xh_T_norm(i)*d_eps_dev_norm(i)
End Do

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H(n)
d_Gs0_ap_alfa_H = 0d0

!Cálculo d_xh_T(n)
Do i=1,6
d_xh_T(i) = 0d0
End Do

If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. 0d0) Then
Do i=1,6
d_xh_T(i) = d_eps_dev(i)-xh_T(i)-
xh_T_norm_d_eps_dev_norm*(ro_alfa**w)*d_eps_dev_mod-xh_T_mod*xh_T_norm(i)
If (abs(d_xh_T(i)) .LT. 1d-10) Then
d_xh_T(i) = 0d0

```

```

End If

!Cálculo xh_T_new y ||xh_T_new|| !Cuando d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2
entonces d_xh_T(i) = 0d0
xh_T_new(1) = xh_T(1) + d_xh_T(1)
xh_T_new(2) = xh_T(2) + d_xh_T(2)
xh_T_new(3) = xh_T(3) + d_xh_T(3)
xh_T_new(4) = xh_T(4) + d_xh_T(4)
xh_T_new(5) = xh_T(5) + d_xh_T(5)
xh_T_new(6) = xh_T(6) + d_xh_T(6)
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)

gamma_oct_H_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_new_mod

!Corrección módulo de x_H_I (aunque no debería ser necesario)
If (gamma_oct_H_new .GT. gamma_alfa_ur) Then
Do i=1,6
xh_T_new(i) = xh_T_new(i)*(gamma_alfa_ur/((4d0/3d0)**0.5d0))/xh_T_new_mod
End Do
End If
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)

!Cálculo d_gamma_oct_H(n+1)
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)
gamma_oct_H_new = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_new_mod, gamma_alfa_ur)
d_gamma_oct_H = gamma_oct_H_new-gamma_oct_H

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H_CORR(n) !Gs no puede decreder tras una reversión
d_Gs0_ap_alfa_H_CORR = d_Gs0_ap_alfa_H

!Actualización Gmin (xi1=1) (i=1) y Cálculo Gt (xi2=2) (i=2)
Do i=1,2
If (i .EQ. 1) Then
xi = xi1
Else If (i .EQ. 2) Then
xi = xi2
End If

If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_beta_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
((abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .LT.
gamma_alfa_ur))) Then
If ((gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR) .LT. 1d-12) Then
Gt_ap_ref = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))**2d0
Else
G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi*gamma_07))
G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
Gt_ap_ref = abs((G_A*gamma_oct_DR_new-G_B*gamma_oct_DR)/(gamma_oct_DR_new-
gamma_oct_DR))

```

```

End If
Else If ((xh_I_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_beta_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
((abs(gamma_oct_DR) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GT.
gamma_alfa_ur) .OR. &
((abs(gamma_oct_DR_new) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR) .GT.
gamma_alfa_ur)))) Then
  G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(xi*gamma_07))
  G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
  Gt_ap_ref1 = (G_A*gamma_alfa_ur -
  G_B*abs(gamma_oct_DR))/abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)
  Gt_ap_ref2 = (Gt_ur_ref*abs(gamma_oct_DR_new) -
  gamma_alfa_ur)/abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)
  Gt_ap_ref = Gt_ap_ref1 + Gt_ap_ref2
Else If (((xh_I_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_beta_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(abs(gamma_oct_DR) .GE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GE.
gamma_alfa_ur) ) Then
  Gt_ap_ref = Gt_ur_ref
End If

If (Gt_ap_ref .GT. Gs0_ap_180_H_ref) Then
  Gt_ap_ref = Gs0_ap_180_H_ref
Else If (Gt_ap_ref .LT. Gt_ur_ref) Then
  Gt_ap_ref = Gt_ur_ref
End If

If (i .EQ. 1) Then
  Gmin = min(Gmin, Gt_ap_ref)
  StVar(28) = Gmin
  Gm = min(Gmin/Gt_ur_ref, 10d0)
  If (Gm .LT. 1d0) Then
    Gm = 1d0
  End If
End If
If (i .EQ. 2) Then
  Gt = Gt_ap_ref*(max(p_0,0.1d0*p2_ref)/p2_ref)**xm2
End If
End Do

!Cálculo Gs_ap(n)/Gt_ur(n)
If (abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) Then
  G = Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi2*gamma_07))
  Gs = G
  xKs = xKs_ref*((max(p_0,0.1d0*p1_ref)/p1_ref)**xm1)
  xK = xKs
Else
  G = Gt_ur
  Gs =
  ((Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(xi2*gamma_07)))*gamma_alfa_ur+Gt_ur*
  (abs(gamma_oct_DR)-gamma_alfa_ur))/abs(gamma_oct_DR)

```

```

xKs = xKs_ref*((max(p_0,0.1d0*p1_ref)/p1_ref)**xm1)
xKt = xKs*(1d0+eps_e_oct/((p_0)/(3d0*xmi*xKs)))-eps_e_oct))
End If

!Cálculo matrices elásticas
xK = max(xK,(2d0/3d0)*G*(1d0+xNu_min)/(1d0-2d0*xNu_min))
Call Matriz6_NL_it(D, xK, G)
Call Matriz3_NL_it(D3, xK, G)

!Cálculo tensión de prueba
Call AddVec(Sig0, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)

!Tensión de prueba en direcciones principales
iOpt = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
Prs_E(1) = S3
Prs_E(2) = S2
Prs_E(3) = S1

!Algoritmo de Return mapping
iArea = 2
Call HS_CAP_pLast(iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, Gm,
n_version)

!Se vuelve a las tensiones en coordenadas cartesianas
!Prs: tracción negativa, compresión positiva
S3 = Prs(1)
S2 = Prs(2)
S1 = Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)

Call AddVec(Sig, Sig0, 1d0, -1d0, 6, Difsig)

d_eps_e_aux1(1) = dEps(1)
d_eps_e_aux1(2) = dEps(2)
d_eps_e_aux1(3) = dEps(3)
d_eps_e_aux1(4) = dEps(4)
d_eps_e_aux1(5) = dEps(5)
d_eps_e_aux1(6) = dEps(6)

error_d_eps_e_aux = 1d0
iterations = 1
Do while (error_d_eps_e_aux .GT. 1d-12)
  d_eps_e_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0

```

```

!Cálculo d_Ks(n) cuando gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur
d_Ks = xks*d_eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xks))-eps_e_oct)

!Cálculo d_Gs_ap(n) cuando gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur
d_Gs_ap = Gs*(((3d0*xm2*xks/p_0)*(1d0+eps_e_oct)/((p_0)/(3d0*xm1*xks))-
eps_e_oct))*d_eps_e_oct+(d_Gs0_ap_alfa_H_CORR/Gs0_ap_alfa_H)-
(0.385d0*Gs*d_gamma_oct_H/(xi2*gamma_07*Gs0_ap_alfa))

!Cálculo de incremento del tensor de rigidez
Call Matriz6_NL_it(dD, d_Ks, d_Gs_ap)

d_eps_e_aux1_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0

!Cálculo eps_e_DR_new_dev
eps_e_DR_new_dev(1) = eps_e_dev(1)+(d_eps_e_aux1(1)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(1)
eps_e_DR_new_dev(2) = eps_e_dev(2)+(d_eps_e_aux1(2)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(2)
eps_e_DR_new_dev(3) = eps_e_dev(3)+(d_eps_e_aux1(3)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(3)
eps_e_DR_new_dev(4) = eps_e_dev(4)+d_eps_e_aux1(4)-eps_e_R_dev(4)
eps_e_DR_new_dev(5) = eps_e_dev(5)+d_eps_e_aux1(5)-eps_e_R_dev(5)
eps_e_DR_new_dev(6) = eps_e_dev(6)+d_eps_e_aux1(6)-eps_e_R_dev(6)

!Cálculo eps_e_dev_DR_eps_e_oct
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(1) =
eps_e_DR_new_dev(1)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(2) =
eps_e_DR_new_dev(2)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(3) =
eps_e_DR_new_dev(3)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(4) = eps_e_DR_new_dev(4)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(5) = eps_e_DR_new_dev(5)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(6) = eps_e_DR_new_dev(6)

!Cálculo Sig_E_NL
If (abs(gamma_oct_DR) .GT. gamma_alfa_ur) Then
dSig2(1) = 0d0
dSig2(2) = 0d0
dSig2(3) = 0d0
dSig2(4) = 0d0
dSig2(5) = 0d0
dSig2(6) = 0d0
Else
!Deben utilizarse deformaciones elásticas, no totales
Call MatVec(dD, 6, eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct, 6, dSig2)
End If

Call AddVec(DifSig, dSig2, 1d0, -1d0, 6, DifSig2)

```

```

Call MatInvPiv(D, D_inv, 6, DifSig2, 6, d_eps_e)
Call MatVec(D_inv, 6, DifSig2, 6, d_eps_e)
d_eps_e_aux2(1) = d_eps_e(1)
d_eps_e_aux2(2) = d_eps_e(2)
d_eps_e_aux2(3) = d_eps_e(3)
d_eps_e_aux2(4) = d_eps_e(4)
d_eps_e_aux2(5) = d_eps_e(5)
d_eps_e_aux2(6) = d_eps_e(6)

d_eps_e_aux3(1) = d_eps_e_aux2(1)-d_eps_e_aux1(1)
d_eps_e_aux3(2) = d_eps_e_aux2(2)-d_eps_e_aux1(2)
d_eps_e_aux3(3) = d_eps_e_aux2(3)-d_eps_e_aux1(3)
d_eps_e_aux3(4) = d_eps_e_aux2(4)-d_eps_e_aux1(4)
d_eps_e_aux3(5) = d_eps_e_aux2(5)-d_eps_e_aux1(5)
d_eps_e_aux3(6) = d_eps_e_aux2(6)-d_eps_e_aux1(6)

Call modu1(d_eps_e_aux3, error_d_eps_e_aux)

d_eps_e_aux1(1) = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux2(1))/2d0
d_eps_e_aux1(2) = (d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux2(2))/2d0
d_eps_e_aux1(3) = (d_eps_e_aux1(3)+d_eps_e_aux2(3))/2d0
d_eps_e_aux1(4) = (d_eps_e_aux1(4)+d_eps_e_aux2(4))/2d0
d_eps_e_aux1(5) = (d_eps_e_aux1(5)+d_eps_e_aux2(5))/2d0
d_eps_e_aux1(6) = (d_eps_e_aux1(6)+d_eps_e_aux2(6))/2d0

If (abs(gamma_oct_DR) .GT. gamma_alfa_ur .OR. (iterations .GT. 20)) Then
error_d_eps_e_aux = 0d0
End If

iterations = iterations + 1

End Do

!Cálculo deformaciones a partir de tensiones
Call AddVec(dSig, dSig2, 1d0, -1d0, 6, dSig3)
Call MatVec(D_inv, 6, dSig3, 6, dEps)
Call AddVec(Eps, dEps, 1d0, 1d0, 6, Eps)

!Actualización variables de estado

StVar(3) = max(min(StVar0(3) + d_Gs0_ap_alfa_H_CORR, Gs0_ap_180_H_ref),
Gs0_ap_90_H_ref)

StVar(4) = StVar0(4)+d_xh_T(1)
StVar(5) = StVar0(5)+d_xh_T(2)
StVar(6) = StVar0(6)+d_xh_T(3)
StVar(7) = StVar0(7)+d_xh_T(4)
StVar(8) = StVar0(8)+d_xh_T(5)
StVar(9) = StVar0(9)+d_xh_T(6)

```

```

StVar(10) = eps_e(1)+d_eps_e(1)
StVar(11) = eps_e(2)+d_eps_e(2)
StVar(12) = eps_e(3)+d_eps_e(3)
StVar(13) = eps_e(4)+d_eps_e(4)
StVar(14) = eps_e(5)+d_eps_e(5)
StVar(15) = eps_e(6)+d_eps_e(6)

StVar(16) = StVar0(16)
StVar(17) = StVar0(17)
StVar(18) = StVar0(18)
StVar(19) = StVar0(19)
StVar(20) = StVar0(20)
StVar(21) = StVar0(21)
StVar(22) = StVar0(22)
StVar(23) = StVar0(23)
StVar(24) = StVar0(24)
StVar(25) = StVar0(25)
StVar(26) = StVar0(26)
StVar(27) = StVar0(27)

End do

!Ajuste de Ei_ref_inter
If (Eps(1) .GT. (qf_0/((2d0)*E50_ref))*(1d0+resolucion_triaxial)) Then
If (aaa .LT. 0d0) Then
frac = 0.99d0*frac
End If
Ei_ref_inter = Ei_ref_inter*(1d0+frac)
aaa = 1d0
write(*,*) 'subo Ei_ref_inter', Ei_ref_inter
GOTO 100
End If

If (Eps(1) .LT. (qf_0/((2d0)*E50_ref))*(1d0-resolucion_triaxial)) Then
If (aaa .GT. 0d0) Then
frac = 0.99d0*frac
End If
Ei_ref_inter = Ei_ref_inter*(1d0-frac)
aaa = -1d0
write(*,*) 'bajo Ei_ref_inter', Ei_ref_inter
GOTO 100
End If

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! EDÓMETRO !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

!Actualización vector de propiedades
Props(20) = Ei_ref_inter
delta      = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))

xk0_nc_inter = xk0_nc
Eps_3        = 0d0
Eoed_ref_inter = Eoed_ref
frac         = 0.005d0
aaa         = 1d0
icont       = 0

200 Continue

icont = icont + 1

If (icont .GT. 60) Then
frac = 0.001
icont = 0
End If

!Tensiones cartesianas iniciales
Sig(1) = TENSION_INICIAL
Sig(2) = xk0_nc_inter*TENSION_INICIAL
Sig(3) = xk0_nc_inter*TENSION_INICIAL
Sig(4) = 0d0
Sig(5) = 0d0
Sig(6) = 0d0

!Deformaciones iniciales
Eps(1) = 0d0
Eps(2) = 0d0
Eps(3) = 0d0
Eps(4) = 0d0
Eps(5) = 0d0
Eps(6) = 0d0

!Tensiones iniciales en direcciones principales
Prs_0(1) = TENSION_INICIAL
Prs_0(2) = xk0_nc_inter*TENSION_INICIAL
Prs_0(3) = xk0_nc_inter*TENSION_INICIAL

Prs(1) = TENSION_INICIAL

!Cálculo de superficies de fluencia
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1.0d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

```



```

If (Prs_0(1)-Prs_0(3) .LT. 1.00d0*qr_E) Then
f13_hs_fac1 = (Prs_0(1)-Prs_0(3))/abs(qa-(Prs_0(1)-Prs_0(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_0(1)-Prs_0(3))/Eur
gamma_p = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2
Else
f13_hs_fac1 = 1.00d0*qr_E/abs(qa-1.00d0*qr_E)
f13_hs_fac2 = 2d0*1.00d0*qr_E/Eur
gamma_p = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2
End If

delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
q_m = Prs_0(1)+(delta-1d0)*Prs_0(2)-delta*Prs_0(3)
p_p = ((q_m**2d0)/(alfa**2d0)+(p**2d0))*0.5d0

G0_ap_alfa_H = G0_ap_180_H_ref
xh_T(1) = 0d0
xh_T(2) = 0d0
xh_T(3) = 0d0
xh_T(4) = 0d0
xh_T(5) = 0d0
xh_T(6) = 0d0

eps_e(1) = 0d0
eps_e(2) = 0d0
eps_e(3) = 0d0
eps_e(4) = 0d0
eps_e(5) = 0d0
eps_e(6) = 0d0

eps_R_dev(1) = 0d0
eps_R_dev(2) = 0d0
eps_R_dev(3) = 0d0
eps_R_dev(4) = 0d0
eps_R_dev(5) = 0d0
eps_R_dev(6) = 0d0

eps_e_R_dev(1) = 0d0
eps_e_R_dev(2) = 0d0
eps_e_R_dev(3) = 0d0
eps_e_R_dev(4) = 0d0
eps_e_R_dev(5) = 0d0
eps_e_R_dev(6) = 0d0

Gmin = G0_ap_180_H_ref

StVar(1) = gamma_p
StVar(2) = p_p

StVar(3) = G0_ap_alfa_H
StVar(4) = xh_T(1)
StVar(5) = xh_T(2)
StVar(6) = xh_T(3)
StVar(7) = xh_T(4)
StVar(8) = xh_T(5)
StVar(9) = xh_T(6)

StVar(10) = eps_e(1)
StVar(11) = eps_e(2)
StVar(12) = eps_e(3)
StVar(13) = eps_e(4)
StVar(14) = eps_e(5)
StVar(15) = eps_e(6)

StVar(16) = eps_R_dev(1)
StVar(17) = eps_R_dev(2)
StVar(18) = eps_R_dev(3)
StVar(19) = eps_R_dev(4)
StVar(20) = eps_R_dev(5)
StVar(21) = eps_R_dev(6)

StVar(22) = eps_e_R_dev(1)
StVar(23) = eps_e_R_dev(2)
StVar(24) = eps_e_R_dev(3)
StVar(25) = eps_e_R_dev(4)
StVar(26) = eps_e_R_dev(5)
StVar(27) = eps_e_R_dev(6)

StVar(28) = Gmin

IValor dEps en primer paso
dEps(1) = 0d0
dEps(2) = 0d0
dEps(3) = 0d0
dEps(4) = 0d0
dEps(5) = 0d0
dEps(6) = 0d0

Do while (Prs(1) .LT. VALOR_CARGA_EDOMETRO)
Sig0(1) = Sig(1)
Sig0(2) = Sig(2)
Sig0(3) = Sig(3)
Sig0(4) = Sig(4)
Sig0(5) = Sig(5)
Sig0(6) = Sig(6)

Prs_0(1) = Sig0(1)
Prs_0(2) = Sig0(2)

```

```

Prs_0(3) = Sig0(3)
StVar0(1) = StVar0(21)
StVar0(2) = StVar0(22)
StVar0(3) = StVar0(23)
StVar0(4) = StVar0(24)
StVar0(5) = StVar0(25)
StVar0(6) = StVar0(26)
StVar0(7) = StVar0(27)
StVar0(8) = StVar0(28)
StVar0(9) = (Sig0(1)+Sig0(2)+Sig0(3))/3d0
StVar0(10)
StVar0(11)
StVar0(12)
StVar0(13)
StVar0(14)
StVar0(15)
StVar0(16)
StVar0(17)
StVar0(18)
StVar0(19)
StVar0(20)
StVar0(21)
StVar0(22)
StVar0(23)
StVar0(24)
StVar0(25)
StVar0(26)
StVar0(27)
StVar0(28)

Gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = StVar0(2)
Gs0_ap_aifa_H = StVar0(3)
xh_T(1) = StVar0(4)
xh_T(2) = StVar0(5)
xh_T(3) = StVar0(6)
xh_T(4) = StVar0(7)
xh_T(5) = StVar0(8)
xh_T(6) = StVar0(9)
eps_e(1) = StVar0(10)
eps_e(2) = StVar0(11)
eps_e(3) = StVar0(12)
eps_e(4) = StVar0(13)
eps_e(5) = StVar0(14)
eps_e(6) = StVar0(15)
eps_R_dev(1) = StVar0(16)
eps_R_dev(2) = StVar0(17)
eps_R_dev(3) = StVar0(18)
eps_R_dev(4) = StVar0(19)
eps_R_dev(5) = StVar0(20)

eps_R_dev(6) = StVar0(21)
eps_e_R_dev(1) = StVar0(22)
eps_e_R_dev(2) = StVar0(23)
eps_e_R_dev(3) = StVar0(24)
eps_e_R_dev(4) = StVar0(25)
eps_e_R_dev(5) = StVar0(26)
eps_e_R_dev(6) = StVar0(27)
Gmin = StVar0(28)

p_0 = (Sig0(1)+Sig0(2)+Sig0(3))/3d0

!Incremento de tensiones cartesianas
dSig(1) = XINCREMENTO_CARGA
dSig(2) = xk0_nc_inter*(Sig0(1)+dSig(1))-Sig0(2)
dSig(3) = xk0_nc_inter*(Sig0(1)+dSig(1))-Sig0(3)
dSig(4) = 0d0
dSig(5) = 0d0
dSig(6) = 0d0

!Cálculo de la matriz elástica y de la matriz de flexibilidad
!Cálculo módulo dEps
Call modul(dEps, dEps_mod)

!Cálculo d_eps_dev
d_eps_oct = (dEps(1)+dEps(2)+dEps(3))/3d0
d_eps_dev(1) = dEps(1)-d_eps_oct
d_eps_dev(2) = dEps(2)-d_eps_oct
d_eps_dev(3) = dEps(3)-d_eps_oct
d_eps_dev(4) = dEps(4)
d_eps_dev(5) = dEps(5)
d_eps_dev(6) = dEps(6)

!Cálculo de ||d_eps_dev||=d_eps_dev_mod y d_eps_dev_norm
Call modul(d_eps_dev, d_eps_dev_mod)
Call norm(d_eps_dev, d_eps_dev_norm)

!Cálculo eps_dev
eps_oct = (eps(1)+eps(2)+eps(3))/3d0
eps_dev(1) = eps(1)-eps_oct
eps_dev(2) = eps(2)-eps_oct
eps_dev(3) = eps(3)-eps_oct
eps_dev(4) = eps(4)
eps_dev(5) = eps(5)
eps_dev(6) = eps(6)

!Cálculo eps_e_dev
eps_e_oct = (eps_e(1)+eps_e(2)+eps_e(3))/3d0
eps_e_dev(1) = eps_e(1)-eps_e_oct
eps_e_dev(2) = eps_e(2)-eps_e_oct

```

```

eps_e_dev(3) = eps_e(3)-eps_e_oct
eps_e_dev(4) = eps_e(4)
eps_e_dev(5) = eps_e(5)
eps_e_dev(6) = eps_e(6)

!Cálculo eps_e_R_dev_mod
Call modul(eps_e_R_dev, eps_e_R_dev_mod)

!Cálculo eps_dev(n+1)
eps_dev_new(1) = eps_dev(1)+d_eps_dev(1)
eps_dev_new(2) = eps_dev(2)+d_eps_dev(2)
eps_dev_new(3) = eps_dev(3)+d_eps_dev(3)
eps_dev_new(4) = eps_dev(4)+d_eps_dev(4)
eps_dev_new(5) = eps_dev(5)+d_eps_dev(5)
eps_dev_new(6) = eps_dev(6)+d_eps_dev(6)

!Cálculo Gamma_oct(n)
Call modul(eps_dev, eps_dev_mod)
gamma_oct = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_mod

!Cálculo Gamma_oct_R(n)
Call modul(eps_R_dev, eps_R_dev_mod)
gamma_oct_R = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_R_dev_mod
eps_R_new_dev_mod = eps_R_dev_mod !Para posterior cálculo de actualización de
variables

!Cálculo Gamma_oct(n+1)
Call modul(eps_dev_new, eps_dev_new_mod)
gamma_oct_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_new_mod

!Cálculo d_Gamma_oct = Gamma_oct(n+1)-Gamma_oct(n)
d_gamma_oct = (gamma_oct_new - gamma_oct)

!Cálculo Gamma_oct_DR(n)
gamma_oct_DR = (gamma_oct-gamma_oct_R)

!Cálculo Gamma_oct_DR(n+1)
gamma_oct_DR_new = (gamma_oct_new-gamma_oct_R)

!Cálculo d_Gamma_oct_DR = Gamma_oct_DR(n+1)-Gamma_oct_DR(n)
d_gamma_oct_DR = (gamma_oct_DR_new - gamma_oct_DR)

!Cálculo eps_DR_dev(n+1)
eps_DR_dev(1) = eps_dev(1)-eps_R_dev(1)
eps_DR_dev(2) = eps_dev(2)-eps_R_dev(2)
eps_DR_dev(3) = eps_dev(3)-eps_R_dev(3)
eps_DR_dev(4) = eps_dev(4)-eps_R_dev(4)
eps_DR_dev(5) = eps_dev(5)-eps_R_dev(5)
eps_DR_dev(6) = eps_dev(6)-eps_R_dev(6)

!Cálculo eps_DR_dev_mod y eps_DR_dev_norm
Call modul(eps_DR_dev, eps_DR_dev_mod)
Call norm(eps_DR_dev, eps_DR_dev_norm)

!Cálculo factor eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm =
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm+d_eps_dev_norm(i)*eps_DR_dev_norm(i)
End Do

!Actualización de xi
xi1 = 1d0 !Para cálculo de Gm
xi2 = 2d0 !Para cálculo rigidez en carga/descarga/descarga

!Cálculo de |xh_T(n)|=xh_T_mod y xh_T_norm
Call modul(xh_T, xh_T_mod)
Call norm(xh_T, xh_T_norm)

!Cálculo gamma_alfa_ur(n)
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xkt_ref*Eur_ref/(9d0*xkt_ref-Eur_ref)
gamma_alfa_ur = (xi2*gamma_07/0.385d0)*(((Gs0_ap_alfa_H/Gt_ur_ref)**0.5d0)-
1d0)

!Cálculo Gs0_ap_alfa(n)
Gs0_ap_alfa = Gs0_ap_alfa_H*(max(p_0,0,1d0*p2_ref)/p2_ref)**xm2

!Cálculo gamma_oct_H
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)

!Cálculo de Gt_ur(n)
Gt_ur = Gt_ur_ref*(max(p_0,0,1d0*p2_ref)/p2_ref)**xm2

!Cálculo ro_alfa(n)
ro_alfa = gamma_oct_H/gamma_alfa_ur

!Cálculo cos_beta_alfa_rev(n)
If (xh_T_mod.LT. 1d-10) Then
cos_beta_alfa_rev = 0d0
Else
cos_beta_alfa_rev = 1d0/((d_eps_dev_mod/xh_T_mod)*(1d0-ro_alfa**w)+1d0)
End If

!Cálculo factor xh_T_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
xh_T_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
xh_T_norm_d_eps_dev_norm =
xh_T_norm_d_eps_dev_norm+xh_T_norm(i)*d_eps_dev_norm(i)
End Do

```

```

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H(n)
d_Gs0_ap_alfa_H = 0d0

!Cálculo d_xh_T(n)
Do i=1,6
d_xh_T(i) = 0d0
End Do

If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. 0d0) Then
Do i=1,6
d_xh_T(i) = d_eps_dev(i)-xh_T(i)-
xh_T_norm_d_eps_dev_norm*(ro_alfa**w)*d_eps_dev_mod-xh_T_mod*xh_T_norm(i)
If (abs(d_xh_T(i)) .LT. 1d-10) Then
d_xh_T(i) = 0d0
End If
End Do

!Cálculo xh_T_new y ||xh_T_new|| !Cuando d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2
entonces d_xh_T(i) = 0d0
xh_T_new(1) = xh_T(1) + d_xh_T(1)
xh_T_new(2) = xh_T(2) + d_xh_T(2)
xh_T_new(3) = xh_T(3) + d_xh_T(3)
xh_T_new(4) = xh_T(4) + d_xh_T(4)
xh_T_new(5) = xh_T(5) + d_xh_T(5)
xh_T_new(6) = xh_T(6) + d_xh_T(6)
Call modu1(xh_T_new, xh_T_new_mod)

gamma_oct_H_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_new_mod

!Corrección módulo de x_H_T (aunque no debería ser necesario)
If (gamma_oct_H_new .GT. gamma_alfa_ur) Then
Do i=1,6
xh_T_new(i) = xh_T_new(i)*(gamma_alfa_ur/((4d0/3d0)**0.5d0))/xh_T_new_mod
End Do
End If
Call modu1(xh_T_new, xh_T_new_mod)

!Cálculo d_gamma_oct_H(n+1)
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)
gamma_oct_H_new = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_new_mod, gamma_alfa_ur)
d_gamma_oct_H = gamma_oct_H_new-gamma_oct_H

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H_CORR(n)
d_Gs0_ap_alfa_H_CORR = d_Gs0_ap_alfa_H

!Actualización Gmin (xi1=1) (i=1) y Cálculo Gt (xi2=2) (i=2)
Do i=1,2
If (i .EQ. 1) Then
x1 = x12
Else If (i .EQ. 2) Then
x1 = x12
End If

If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_beta_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .LT.
gamma_alfa_ur)) Then
Gt_ap_ref = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))**2d0
Else
G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi*gamma_07))
G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
Gt_ap_ref = abs((G_A*gamma_oct_DR_new-G_B*gamma_oct_DR)/(gamma_oct_DR_new-
gamma_oct_DR))
End If
Else If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_beta_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
((abs(gamma_oct_DR) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GT.
gamma_alfa_ur)) .OR. &
(abs(gamma_oct_DR_new) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR) .GT.
gamma_alfa_ur))) Then
G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(xi*gamma_07))
G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
Gt_ap_ref1 = (G_A*gamma_alfa_ur-
G_B*abs(gamma_oct_DR))/abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)
Gt_ap_ref2 = (Gt_ur_ref*abs(gamma_oct_DR_new)-
gamma_alfa_ur)/(abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)
Gt_ap_ref = Gt_ap_ref1 + Gt_ap_ref2
Else If (((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_beta_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(abs(gamma_oct_DR) .GE. gamma_alfa_ur)) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GE.
gamma_alfa_ur) ) Then
Gt_ap_ref = Gt_ur_ref
End If

If (Gt_ap_ref .GT. Gs0_ap_180_H_ref) Then
Gt_ap_ref = Gs0_ap_180_H_ref
Else If (Gt_ap_ref .LT. Gt_ur_ref) Then
Gt_ap_ref = Gt_ur_ref
End If

If (i .EQ. 1) Then
Gmin = min(Gmin, Gt_ap_ref)
StVar(28) = Gmin
Gm = min(Gmin/Gt_ur_ref, 10d0)
If (Gm .LT. 1d0) Then
Gm = 1d0
End If
End If
If (i .EQ. 2) Then
Gt = Gt_ap_ref*(max(p_0,0.1d0*p2_ref)/p2_ref)**xm2
End If

```

```

End Do
!Cálculo Gs_ap(n)/Gt_ur(n)
If (abs(gamma_oct_DR) < .LT. gamma_alfa_ur) Then
  G = Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi2*gamma_07))
  Gs = G
  xK = xKs_ref*((max(p_0,0.1d0*p1_ref)/p1_ref)**xm1)
Else
  G = Gt_ur
  Gs =
  ((Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(xi2*gamma_07)))*gamma_alfa_ur+Gt_ur*
  (abs(gamma_oct_DR)-gamma_alfa_ur))/abs(gamma_oct_DR)
  xKt = xKs_ref*((max(p_0,0.1d0*p1_ref)/p1_ref)**xm1)
  xK = xKt*(1d0+eps_e_oct/((p_0)/(3d0*xm1*xKs)))-eps_e_oct)
End If

!Cálculo matrices elásticas
xK = max(xK,(2d0/3d0)*G*(1d0+xNu_min)/(1d0-2d0*xNu_min))
Call Matriz6_NL_it(D, xK, G)
Call Matriz3_NL_it(D3, xK, G)

!Cálculo tensión de prueba
Call AddVec(Sig0, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)

!Tensión de prueba en direcciones principales
iOpt = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
Prs_E(1) = S3
Prs_E(2) = S2
Prs_E(3) = S1

!Algoritmo de Return mapping
iArea = 2
Call HS_CAP_plast(iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, Gm,
n_version)

!Se vuelve a las tensiones en coordenadas cartesianas
!Prs: tracción negativa, compresión positiva
S3 = Prs(1)
S2 = Prs(2)
S1 = Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)

Call AddVec(Sig, Sig0, 1d0, -1d0, 6, DifSig)
d_eps_e_aux1(1) = dEps(1)
d_eps_e_aux1(2) = dEps(2)
d_eps_e_aux1(3) = dEps(3)
d_eps_e_aux1(4) = dEps(4)
d_eps_e_aux1(5) = dEps(5)
d_eps_e_aux1(6) = dEps(6)

d_eps_e_aux1(5) = dEps(5)
d_eps_e_aux1(6) = dEps(6)

error_d_eps_e_aux = 1d0
iterations = 1

Do while (error_d_eps_e_aux > .GT. 1d-12)
  d_eps_e_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0

!Cálculo d_Ks(n) cuando gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur
d_Ks = xKs*d_eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs)))-eps_e_oct)

!Cálculo d_Gs_ap(n) cuando gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur
d_Gs_ap = Gs*((3d0*xm2*xKs/p_0)*(1d0+eps_e_oct/((p_0)/(3d0*xm1*xKs)))-
eps_e_oct))*d_eps_e_oct+(d_Gs0_ap_alfa_H_CORR/Gs0_ap_alfa_H)-
(0.385d0*Gs*d_gamma_oct_H/(xi2*gamma_07*Gs0_ap_alfa))

!Cálculo de incremento del tensor de rigidez
Call Matriz6_NL_it(dD, d_Ks, d_Gs_ap)

d_eps_e_aux1_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0

!Cálculo eps_e_DR_new_dev
eps_e_DR_new_dev(1) = eps_e_dev(1)+(d_eps_e_aux1(1)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(1)
eps_e_DR_new_dev(2) = eps_e_dev(2)+(d_eps_e_aux1(2)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(2)
eps_e_DR_new_dev(3) = eps_e_dev(3)+(d_eps_e_aux1(3)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(3)
eps_e_DR_new_dev(4) = eps_e_dev(4)+d_eps_e_aux1(4)-eps_e_R_dev(4)
eps_e_DR_new_dev(5) = eps_e_dev(5)+d_eps_e_aux1(5)-eps_e_R_dev(5)
eps_e_DR_new_dev(6) = eps_e_dev(6)+d_eps_e_aux1(6)-eps_e_R_dev(6)

!Cálculo eps_e_dev_DR_eps_e_oct
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(1) =
eps_e_DR_new_dev(1)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(2) =
eps_e_DR_new_dev(2)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(3) =
eps_e_DR_new_dev(3)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(4) = eps_e_DR_new_dev(4)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(5) = eps_e_DR_new_dev(5)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(6) = eps_e_DR_new_dev(6)

!Cálculo Sig_E_NL
If (abs(gamma_oct_DR) > .GT. gamma_alfa_ur) Then
  dSig2(1) = 0d0
  dSig2(2) = 0d0

```

```

dSig2(3) = 0d0
dSig2(4) = 0d0
dSig2(5) = 0d0
dSig2(6) = 0d0
Else
!Deben utilizarse deformaciones elásticas, no totales
Call MatVec(DD, 6, eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct, 6, dSig2)
End If

Call AddVec(DifSig, dSig2, 1d0, -1d0, 6, DifSig2)
Call MatInvPiv(D, D_inv, 6)
Call MatVec(D_inv, 6, DifSig2, 6, d_eps_e)

d_eps_e_aux2(1) = d_eps_e(1)
d_eps_e_aux2(2) = d_eps_e(2)
d_eps_e_aux2(3) = d_eps_e(3)
d_eps_e_aux2(4) = d_eps_e(4)
d_eps_e_aux2(5) = d_eps_e(5)
d_eps_e_aux2(6) = d_eps_e(6)

d_eps_e_aux3(1) = d_eps_e_aux2(1)-d_eps_e_aux1(1)
d_eps_e_aux3(2) = d_eps_e_aux2(2)-d_eps_e_aux1(2)
d_eps_e_aux3(3) = d_eps_e_aux2(3)-d_eps_e_aux1(3)
d_eps_e_aux3(4) = d_eps_e_aux2(4)-d_eps_e_aux1(4)
d_eps_e_aux3(5) = d_eps_e_aux2(5)-d_eps_e_aux1(5)
d_eps_e_aux3(6) = d_eps_e_aux2(6)-d_eps_e_aux1(6)

Call modul(d_eps_e_aux3, error_d_eps_e_aux)

d_eps_e_aux1(1) = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux2(1))/2d0
d_eps_e_aux1(2) = (d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux2(2))/2d0
d_eps_e_aux1(3) = (d_eps_e_aux1(3)+d_eps_e_aux2(3))/2d0
d_eps_e_aux1(4) = (d_eps_e_aux1(4)+d_eps_e_aux2(4))/2d0
d_eps_e_aux1(5) = (d_eps_e_aux1(5)+d_eps_e_aux2(5))/2d0
d_eps_e_aux1(6) = (d_eps_e_aux1(6)+d_eps_e_aux2(6))/2d0

If ((abs(gamma_oct_DR) .GT. gamma_alfa_ur) .OR. (iterations .GT. 20)) Then
error_d_eps_e_aux = 0d0
End If

iterations = iterations + 1

End Do

!Cálculo deformaciones a partir de tensiones
Call AddVec(dSig, dSig2, 1d0, -1d0, 6, dSig3)
Call MatVec(D_inv, 6, dSig3, 6, dEps)
Call AddVec(Eps, dEps, 1d0, 1d0, 6, Eps)

!Actualización variables de estado

StVar(3) = max(min(StVar0(3) + d_Gs0_ap_alfa_H_CORR, Gs0_ap_180_H_ref),
Gs0_ap_90_H_ref)

StVar(4) = StVar0(4)+d_xh_T(1)
StVar(5) = StVar0(5)+d_xh_T(2)
StVar(6) = StVar0(6)+d_xh_T(3)
StVar(7) = StVar0(7)+d_xh_T(4)
StVar(8) = StVar0(8)+d_xh_T(5)
StVar(9) = StVar0(9)+d_xh_T(6)

StVar(10) = eps_e(1)+d_eps_e(1)
StVar(11) = eps_e(2)+d_eps_e(2)
StVar(12) = eps_e(3)+d_eps_e(3)
StVar(13) = eps_e(4)+d_eps_e(4)
StVar(14) = eps_e(5)+d_eps_e(5)
StVar(15) = eps_e(6)+d_eps_e(6)

StVar(16) = StVar0(16)
StVar(17) = StVar0(17)
StVar(18) = StVar0(18)
StVar(19) = StVar0(19)
StVar(20) = StVar0(20)
StVar(21) = StVar0(21)
StVar(22) = StVar0(22)
StVar(23) = StVar0(23)
StVar(24) = StVar0(24)
StVar(25) = StVar0(25)
StVar(26) = StVar0(26)
StVar(27) = StVar0(27)

End do

!Cálculo del incremento de tensión real en coordenadas cartesianas
dSig_real(1) = Sig(1)-Sig0(1)
dSig_real(2) = Sig(2)-Sig0(2)
dSig_real(3) = Sig(3)-Sig0(3)
dSig_real(4) = Sig(4)-Sig0(4)
dSig_real(5) = Sig(5)-Sig0(5)
dSig_real(6) = Sig(6)-Sig0(6)

!Ajuste de xK0_nc_inter
If (Eps(3) .GE. abs(Eps(1))*(resolucion_edometro)) Then
If (aaa .LT. 0d0) Then
frac = max(0.8d0*frac, 1d-7)
End If
xK0_nc_inter = xK0_nc_inter*(1d0-frac)
Props(17) = xK0_nc_inter
aaa = 1d0

```

```

Eoed_ref_inter =
(dSig_real(1)/dEps(1))/(((Sig(3)/xk0_nc_inter)*sin(phi)+c*cos(phi))/(p_ref*sin
(phi)+c*cos(phi)))**xm
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(1)', dSig_Real(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps(1)', dEps(1))
Call WriVal(ideb, 'xk0_nc_inter', xk0_nc_inter)
Call WriVal(ideb, 'Eoed_ref_inter', Eoed_ref_inter)
Eps_3 = Eps(3)
write(*,*) 'bajo k0_nc_inter', xk0_nc_inter
GOTO 200
End If

If (Eps(3) .LT. -abs(Eps(1))*(resolucion_edometro)) Then
If (aaa .GT. 0d0) Then
frac = max(0.8d0*frac, 1d-7)
End If
xk0_nc_inter = xk0_nc_inter*(1d0+frac)
Props(17) = xk0_nc_inter
aaa = -1d0
Eoed_ref_inter =
(dSig_real(1)/dEps(1))/(((Sig(3)/xk0_nc_inter)*sin(phi)+c*cos(phi))/(p_ref*sin
(phi)+c*cos(phi)))**xm
Call WriVal(ideb, 'dSig_real', dSig_real(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps(1)', dEps(1))
Call WriVal(ideb, 'xk0_nc_inter', xk0_nc_inter)
Call WriVal(ideb, 'Eoed_ref_inter', Eoed_ref_inter)
Eps_3 = Eps(3)
write(*,*) 'subo k0_nc_inter', xk0_nc_inter
GOTO 200
End If

!Cálculo de Eoed_ref_inter
Eoed_ref_inter =
(dSig_real(1)/dEps(1))/(((Sig(3)/xk0_nc_inter)*sin(phi)+c*cos(phi))/(p_ref*sin
(phi)+c*cos(phi)))**xm
write(*,*) 'Ei_ref_inter', Ei_ref_inter
write(*,*) 'xktmkc', xktmkc
write(*,*) 'alfa', alfa
write(*,*) 'xk0_nc_inter', xk0_nc_inter
write(*,*) 'Eoed_ref_inter', Eoed_ref_inter

End ! Iterative

include 'usrlib.f90'
include 'HS_CAP_plast.f90'
include 'Matriz3_NL_it.f90'
include 'Matriz6_NL_it.f90'
include 'modul.f90'
include 'norm.f90'

```

Subrutina HS_CAP

```

|C*****
|Subroutine HS_CAP_plast(iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0, StVar, ip1, Prs_0,
|D, Gm, n version)
|C*****
|Implicit Double Precision (A-H,I,O-Z)
|
| Rutina para el Returning Map en superficie HS
| Tensión de compresión positiva!
|
| I/O Tipo
|
| iArea I I 1 : Superficie f13_hs Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
| 2 : Eje entre f13_hs y f12_hs Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
| 3 : Eje entre f13_hs y f23_hs Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
|
| Local:
| f13_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
| f12_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
| f23_hs : superficie HS para Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
| xLam13_hs : multiplicador plástico f13_hs
| xLam12_hs : multiplicador plástico f12_hs
| xLam23_hs : multiplicador plástico f23_hs
| xLam_cap : multiplicador plástico f_cap
| D : matriz elástica
| df13_hsmSdS(3) : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dS
| df12_hsmSdS(3) : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dS
| df23_hsmSdS(3) : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dS
| df_capmSdS(3) : Primera derivada función de fluencia f_cap/dS
| df13_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dq
| df12_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dq
| df23_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dq
| df_capmdq : Primera derivada función de fluencia f_cap/dq
| dg13_hsmSdS(3) : Segunda derivada potencial plástico g13_hs/dS
| dg12_hsmSdS(3) : Segunda derivada potencial plástico g12_hs/dS
| dg23_hsmSdS(3) : Segunda derivada potencial plástico g23_hs/dS
| dg_capmSdS(3) : Segunda derivada potencial plástico g_cap/dS
| d2g13_hsmSdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g13_hs/dS2
| d2g12_hsmSdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g12_hs/dS2
| d2g23_hsmSdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g23_hs/dS2
| d2g_capmSdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g_cap/dS2
| d2g13_hsmSdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g13_hs
| d2g12_hsmSdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g12_hs
| d2g23_hsmSdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g23_hs
| d2g_capmSdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g_cap
| D_dgij : Producto de D por dgij_hs/dS
| HH_dfij : Producto de D por dfij_hs/dS
| thetaij : Operación dgij_hs/dS+d2gij_hs/dS2*xLamij_hs*xh_hs
| D_thetaij : Productor de D por thetaij
| HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_hs*D_dgij_2
|
| Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_res3(3), Prs_0(3)
| Dimension Prs_2sup(3), Prs_3sup(3), r(3), dPrs(3), dPrs_1(3), dPrs_2(3),
| dPrs_3(3)
| Dimension Props(22)
| Dimension StVar0(28), StVar(28)
| Dimension df13_hsmSdS(3), df12_hsmSdS(3), df23_hsmSdS(3), df_capmSdS(3)
| Dimension dg13_hsmSdS(3), dg12_hsmSdS(3), dg23_hsmSdS(3), dg_capmSdS(3)
| Dimension d2g13_hsmSdS2(3,3), d2g12_hsmSdS2(3,3), d2g23_hsmSdS2(3,3),
| d2g_capmSdS2(3,3)
| Dimension d2g13_hsmSdSdq(3), d2g12_hsmSdSdq(3), d2g23_hsmSdSdq(3),
| d2g_capmSdSdq(3)
| Dimension D_dg13(3), D_dg12(3), D_dg23(3), D_dgcap(3)
| Dimension D_dg13_2(3,3), D_dg12_2(3,3), D_dg23_2(3,3), D_dgcap_2(3,3)
| Dimension HH_df13(3), HH_df12(3), HH_df23(3), HH_dfcap(3)
| Dimension thetai3(3), thetai2(3), thetai3(3), thetacap(3)
| Dimension D_theta13(3), D_theta12(3), D_theta23(3), D_thetacap(3)
| Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3), xMat(3,3), xMat_inv(3,3),
| f_b(3), d_lam(3)
|
| Call MZeroR(Prs_res1, 3)
| Call MZeroR(Prs_res2, 3)
| Call MZeroR(Prs_res3, 3)
| Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
| Call MZeroR(Prs_3sup, 3)
| Call MZeroR(dPrs, 3)
| Call MZeroR(dPrs_1, 3)
| Call MZeroR(dPrs_2, 3)
| Call MZeroR(dPrs_3, 3)
|
| Call MZeroR(df13_hsmSdS, 3)
| Call MZeroR(dg13_hsmSdS, 3)
| Call MZeroR(d2g13_hsmSdS2, 9)
| Call MZeroR(d2g13_hsmSdSdq, 3)
|
| Call MZeroR(df12_hsmSdS, 3)
| Call MZeroR(dg12_hsmSdS, 3)
| Call MZeroR(d2g12_hsmSdS2, 9)
| Call MZeroR(d2g12_hsmSdSdq, 3)
|
| Call MZeroR(df23_hsmSdS, 3)
| Call MZeroR(dg23_hsmSdS, 3)
| Call MZeroR(d2g23_hsmSdS2, 9)
| Call MZeroR(d2g23_hsmSdSdq, 3)

```



```

Call MZeroR(df_capmdS, 3)
Call MZeroR(dg_capmdS, 3)
Call MZeroR(d2g_capmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)

Call MZeroR(D_dg13_2, 9)
Call MZeroR(D_dg12_2, 9)
Call MZeroR(D_dg23_2, 9)
Call MZeroR(D_dgcap_2, 9)

Call MZeroR(D_dg13, 3)
Call MZeroR(D_dg12, 3)
Call MZeroR(D_dg23, 3)
Call MZeroR(D_dgcap, 3)

Call MZeroR(HH_df13, 3)
Call MZeroR(HH_df12, 3)
Call MZeroR(HH_df23, 3)
Call MZeroR(HH_dfcap, 3)

Call MZeroR(theta13, 3)
Call MZeroR(theta12, 3)
Call MZeroR(theta23, 3)
Call MZeroR(thetacap, 3)

Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)
Call MZeroR(D_thetacap, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)
Call MZeroR(xMat, 9)
Call MZeroR(xMat_inv, 9)
Call MZeroR(f_b, 3)
Call MZeroR(d_lam, 3)

ip1 = 4
it = 0
itmax = 150
ttol = 1d-6
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

xKs_ref = Props(1)

Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)
psi = Props(16)
xK0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
If (n_version .EQ. 1) Then
beta = Props(22)
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xKtmKc = Props(22)
End If

w = 100d0

delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))

gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = StVar0(2)

xh_i = Gm**(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)

dXLam13_hs = 0d0
dXLam12_hs = 0d0
dXLam23_hs = 0d0
dXLam_cap = 0d0

xLam13_hs = 0d0
xLam12_hs = 0d0
xLam23_hs = 0d0
xLam_cap = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) !NO APLICIA

Case (2) ! 2 : Eje entre f13_hs, f12_hs y f_cap (Prs(1) > Prs(2) = Prs(3))

```

```

!STARTING POINT
!Cálculo e1 valor de f13_hs, f12_hs y f_cap en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(2))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
End If

q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

!Cálculo tolerancia f13_hs, f12_hs y f_cap en Prs_E
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f12_hs_TOL = ttol*abs(f12_hs)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol

!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df_cap/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(3) = 0d0
Else
df13_hsmDS(1) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(3) = 0d0
End If

!Cálculo df12_hs/dS, df12_hs/dq y df_cap/dS en Prs_E (q1=gamma_p -para f13_hs
y f12_hs-, q2=p_p)
df12_hsmDq(1) = -1d0
df12_hsmDq(2) = -1d0
df12_hsmDq(3) = -2d0*p_p_E

!Cálculo h en Prs_E (dq=dLam1*h1 -para f13_hs y f12_hs- y dq2=dLam2*h2)
xh_hs = 1d0*xh_i
If (n_version .EQ. 1) Then
xh_cap = ((2d0*p_p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xkt_ref = xks_ref*(1d0)/(1d0-xm1)
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap =
(2d0*xH*max(p,1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(p
hi)))**xm)*xh_i
End If

!Cálculo dgi3_hs/dS, dgi2_hs/dS y dg_cap/dS en Prs_E
sin_phi_m = min(max(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1))*xk0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1))*xk0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xm_ext = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)

```

```

eta
= max(min(max(q/p,0d0), xM_ext), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0**xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
  If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
    sin_psi_m = 0d0
  Else
    sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_ext*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m** (1d0-
sin_phi_cv)/(xM_ext*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
  sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
  psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
  sin_psi_m = 0d0
End If

d2g13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
d2g13_hsmDS(2) = 0d0
d2g13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

d2g12_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
d2g12_hsmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
d2g12_hsmDS(3) = 0d0

d2g_capmDS(1) = df_capmDS(1)
d2g_capmDS(2) = df_capmDS(2)
d2g_capmDS(3) = df_capmDS(3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g12_hs/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmDS2, 9)

d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos

Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_d2g13, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_d2g13, 3, df13_D_d2g13)
xOmega11 = df13_D_d2g13-df13_hsmDS*dh_hs
Call MatMat(D, 3, d2g12_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_d2g12, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_d2g12, 3, df13_D_d2g12)
xOmega12 = df13_D_d2g12
Call MatMat(D, 3, d2g_capmDS, 3, 3, 1, 3, D_d2gcap, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_d2gcap, 3, df13_D_d2gcap)
xOmega13 = df13_D_d2gcap
Call DinProd(df12_hsmDS, D_d2g13, 3, df12_D_d2g13)
xOmega21 = df12_D_d2g13
Call DinProd(df12_hsmDS, D_d2g12, 3, df12_D_d2g12)
xOmega22 = df12_D_d2g12-df12_hsmDS*dh_hs
Call DinProd(df12_hsmDS, D_d2gcap, 3, df12_D_d2gcap)
xOmega23 = df12_D_d2gcap
Call DinProd(df_capmDS, D_d2g13, 3, dfcap_D_d2g13)
xOmega31 = dfcap_D_d2g13
Call DinProd(df_capmDS, D_d2g12, 3, dfcap_D_d2g12)
xOmega32 = dfcap_D_d2g12
Call DinProd(df_capmDS, D_d2gcap, 3, dfcap_D_d2gcap)
xOmega33 = dfcap_D_d2gcap-df_capmDS*dh_cap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_hs, dxLam12_hs y dxLam_cap
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_hs
f_b(2) = f12_hs
f_b(3) = f_cap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam12_hs = dxLam12_hs
xLam_cap = dxLam_cap

!Actualización variables
Call AddVec(D_d2g13, D_d2g12, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_d2gcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_3sup)

```

```

Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam1_cap*xh_cap, p_p_E)

!Cálculo valor de f13_hs, f12_hs y f_cap con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

!EULER BACKWARD
Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL .OR. &
abs(f12_hs) .GT. f12_hs_TOL) .OR. &
abs(f_cap) .GT. f_cap_TOL) .AND. &
it .LE. itmax)

```

```

!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df_cap/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmds(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmds(2) = 0d0
df13_hsmds(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-
Prs(3)))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmds(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df13_hsmds(2) = 0d0
df13_hsmds(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
df12_hsmds(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))**2d0)-
2d0/Eur
df12_hsmds(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-
Prs(2)))))**2d0)+2d0/Eur
df12_hsmds(3) = 0d0
Else
df12_hsmds(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df12_hsmds(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
df12_hsmds(3) = 0d0
End If

df_capmds(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmds(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmds(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

!Cálculo df13_hs/dq, df12_hs/dq y df_cap/dq en Prs (q1=gamma_p -para f13_hs y
f12_hs-, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df12_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p

!Cálculo h en Prs (dq=dLam1*h1 y dq2=dLam2*h2)
xh_hs = 1d0*xh_i
If (n_version .EQ. 1) Then
xh_cap = ((2d0*p_p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (n_version .EQ. 2) Then
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap =
(2d0*xH*max(p,1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)
))**xm)*xh_i
End If

```



```

xOmegaFacp = f_cap - r_HH_dfcap
Call WriVec(ideb, 'r', r, 3)

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam12_hs
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaF13
f_b(2) = xOmegaF12
f_b(3) = xOmegaFacp

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam12_hs = xLam12_hs + dxLam12_hs
xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap

!Actualizo variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta12, -dxLam13_hs, -dxLam12_hs, 3, dPrs_1)
Call AddVec(dPrs_1, D_thetaCap, Id0, -dxLam_cap, 3, dPrs_2)
Call AddVec(r, dPrs_2, -Id0, Id0, 3, dPrs_3)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, Id0, Id0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

!Calculo el valor de f13_hs, f12_hs y f_cap en (k+1) en Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, Id0))!0J0, Prs(3) debe ser mayor que c*cos(phi)/sin(phi) para que
E sean reales
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1.0d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
!write(1,*) ' q > qf '
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

!Actualización iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = max(p_p, p_p_E)

YIf (xLam13_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam12_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam_cap .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
it .LE. itmax) Then
!write(1,*)'Return mapping Ok!'
Else
!write(1,*)'Numerical problem'
End If

Case (3) !NO APLICA

Case Default
!write(1,*) ' incorrect iArea in HS_plast'
Stop

```

End Select

End ! HS_CAP_plast

Subrutina *Matriz6_NL_it*

```
!C*****
Subroutine Matriz6_NL_it(D6, xKs, Gs)
!C*****
  Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

  Dimension D6(6,6)

  Call MZeroR(D6, 36)

  !Construcción matriz D
  Do i=1,3
    Do j=1,3
      D6(i,j) = xKs-(2d0/3d0)*Gs
    End Do
    D6(i,i) = xKs+(4d0/3d0)*Gs
    D6(i+3,i+3) = Gs
  End Do

  End !Matriz6_it
```

Subrutina *Matriz3_NL_it*

```
!C*****
Subroutine Matriz3_NL_it(D3, xKs, Gs)
!C*****
  Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

  Dimension D3(3,3)

  Call MZeroR(D3, 9)

  !Construcción matriz D
  Do i=1,3
    Do j=1,3
      D3(i,j) = xKs-(2d0/3d0)*Gs
    End Do
    D3(i,i) = xKs+(4d0/3d0)*Gs
  End Do

  End !Matriz3_it
```


Anejo II

Superficies de fluencia, potenciales plásticos y derivadas del modelo

HS

1. Superficie de fluencia tipo Cono

1.1. Superficie de fluencia tipo Cono

$$f_{s,13} = \frac{2q_a}{E_i} \frac{(-\sigma'_1 - (-\sigma'_3))}{q_a - (-\sigma'_1 - (-\sigma'_3))} - \frac{2(-\sigma'_1 - (-\sigma'_3))}{E_{ur}} - \gamma^p \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \quad (I.01)$$

$$f_{s,12} = \frac{2q_a}{E_i} \frac{(-\sigma'_1 - (-\sigma'_2))}{q_a - (-\sigma'_1 - (-\sigma'_2))} - \frac{2(-\sigma'_1 - (-\sigma'_2))}{E_{ur}} - \gamma^p \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2 \quad (I.02)$$

$$f_{s,23} = \frac{2q_a}{E_i} \frac{(-\sigma'_2 - (-\sigma'_3))}{q_a - (-\sigma'_2 - (-\sigma'_3))} - \frac{2(-\sigma'_2 - (-\sigma'_3))}{E_{ur}} - \gamma^p \quad -\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \quad (I.03)$$

1.2. Derivada de la superficie de fluencia tipo Cono

$$\frac{\partial f_{s,13}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{s,13}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{s,13}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{s,13}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \left(\frac{2q_a^2}{E_i} \frac{1}{(q_a - (-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)))^2} - \frac{2}{E_{ur}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (I.04)$$

$$\frac{\partial f_{s,12}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{s,12}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{s,12}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{s,12}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \left(\frac{2q_a^2}{E_i} \frac{1}{(q_a - (-\sigma'_1 - (-\sigma'_2)))^2} - \frac{2}{E_{ur}} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I.05)$$

$$\frac{\partial f_{s,23}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{s,23}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{s,23}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{s,23}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \left(\frac{2q_a^2}{E_i} \frac{1}{(q_a - (-\sigma'_2 - (-\sigma'_3)))^2} - \frac{2}{E_{ur}} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.06)$$

$$\frac{\partial f_{s,13}}{\partial \chi_k} = \frac{\partial f_{s,13}}{\partial \gamma^p} = -1 \quad (1.07)$$

$$\frac{\partial f_{s,12}}{\partial \chi_k} = \frac{\partial f_{s,12}}{\partial \gamma^p} = -1 \quad (1.08)$$

$$\frac{\partial f_{s,23}}{\partial \chi_k} = \frac{\partial f_{s,23}}{\partial \gamma^p} = -1 \quad (1.09)$$

1.3. Potencial plástico de la superficie de fluencia tipo Cono

$$g_{s,13} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \quad (1.10)$$

$$g_{s,12} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_2)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_2)}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2 \quad (1.11)$$

$$g_{s,23} = \frac{-\sigma'_2 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_2 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad -\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \quad (1.12)$$

1.4. Flujo plástico de la superficie de fluencia tipo Cono

$$\frac{\partial g_{s,13}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{s,13}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{s,13}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{s,13}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\psi_m) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial g_{s,12}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{s,12}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{s,12}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{s,12}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\psi_m) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

2. Superficie límite de Mohr-Coulomb

2.1. Superficie límite de Mohr-Coulomb

$$f_{mc,13} = \frac{1}{2}(-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)) + \frac{1}{2}(-\sigma'_1 + (-\sigma'_3))\sin(\varphi') - c'\cot(\varphi') \quad (1.22)$$

$$-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$$

$$f_{mc,12} = \frac{1}{2}(-\sigma'_1 - (-\sigma'_2)) + \frac{1}{2}(-\sigma'_1 + (-\sigma'_2))\sin(\varphi') - c'\cot(\varphi') \quad (1.23)$$

$$-\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2$$

$$f_{mc,23} = \frac{1}{2}(-\sigma'_2 - (-\sigma'_3)) + \frac{1}{2}(-\sigma'_2 + (-\sigma'_3))\sin(\varphi') - c'\cot(\varphi') \quad (1.24)$$

$$-\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3$$

2.2. Derivada de la superficie límite de Mohr-Coulomb

$$\frac{\partial f_{mc,13}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\varphi') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial f_{mc,12}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{mc,12}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{mc,12}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{mc,12}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\varphi') \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial f_{mc,23}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{mc,23}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{mc,23}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{mc,23}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\varphi') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial f_{mc,13}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial f_{mc,12}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial f_{mc,23}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.30)$$

2.3. Potencial plástico de la superficie límite de Mohr-Coulomb

$$g_{mc,13} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi) \quad (I.31)$$

$$-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$$

$$g_{mc,12} = \frac{-\sigma'_1 - (-\sigma'_2)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_1 + (-\sigma'_2)}{2} \right) \sin(\psi) \quad (I.32)$$

$$-\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2$$

$$g_{mc,23} = \frac{-\sigma'_2 - (-\sigma'_3)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_2 + (-\sigma'_3)}{2} \right) \sin(\psi) \quad (I.33)$$

$$-\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3$$

2.4. Flujo plástico de la superficie límite de Mohr-Coulomb

$$\frac{\partial g_{mc,13}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\psi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (I.34)$$

$$\frac{\partial g_{mc,12}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{mc,12}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{mc,12}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{mc,12}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\psi) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (I.35)$$

$$\frac{\partial g_{mc,23}}{\partial \boldsymbol{\sigma}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{mc,23}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{mc,23}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{mc,23}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sin(\psi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (I.36)$$

$$\frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial \boldsymbol{\sigma}' \otimes \partial \boldsymbol{\sigma}'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_1) \partial (-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_1) \partial (-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_1) \partial (-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_2) \partial (-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_2) \partial (-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_2) \partial (-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_3) \partial (-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_3) \partial (-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial (-\sigma'_3) \partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.37)$$

$$\frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,13}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,12}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

$$\frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{mc,23}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

3. Superficie de fluencia tipo *Cap*

3.1. Superficie de fluencia tipo *Cap*

$$f_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'}\right)^2 + (-p')^2 - p_p^2 \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \quad (1.43)$$

$$f_{aux,1} = -\sigma'_3 - (-\sigma'_2) \quad -\sigma'_3 \leq 0 \quad (1.44)$$

$$f_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \quad -\sigma'_1 \geq 0 \quad (1.45)$$

3.2. Derivada de la superficie de fluencia tipo *Cap*

$$\frac{\partial f_c}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_c}{\partial(-p')} \frac{\partial p'}{\partial(-\sigma'_1)} + \frac{\partial f_c}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_c}{\partial(-p')} \frac{\partial p'}{\partial(-\sigma'_2)} + \frac{\partial f_c}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_c}{\partial(-p')} \frac{\partial p'}{\partial(-\sigma'_3)} + \frac{\partial f_c}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = 2 \frac{\tilde{q}}{\alpha'^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta - 1 \\ -\delta \end{pmatrix} + \frac{2}{3} p' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$\frac{\partial f_{aux,1}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial f_{aux,3}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

$$\frac{\partial f_c}{\partial \chi_k} = \frac{\partial f_c}{\partial p_p} = -2p_p \quad (1.49)$$

$$\frac{\partial f_{aux,1}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.50)$$

$$\frac{\partial f_{aux,3}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.51)$$

3.3. Potencial plástico de la superficie de fluencia tipo *Cap*

$$g_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'}\right)^2 + (-p')^2 - p_p^2 \quad -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3 \quad (1.52)$$

$$g_{aux,1} = -\sigma'_3 - (-\sigma'_2) \quad -\sigma'_3 \leq 0 \quad (1.53)$$

$$g_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \quad -\sigma'_1 \geq 0 \quad (1.54)$$

3.4. Flujo plástico de la superficie de fluencia tipo *Cap*

$$\frac{\partial g_c}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_c}{\partial(-p')} \frac{\partial p'}{\partial(-\sigma'_1)} + \frac{\partial f_c}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_c}{\partial(-p')} \frac{\partial p'}{\partial(-\sigma'_2)} + \frac{\partial f_c}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_c}{\partial(-p')} \frac{\partial p'}{\partial(-\sigma'_3)} + \frac{\partial f_c}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = 2 \frac{\tilde{q}}{\alpha'^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \delta - 1 \\ -\delta \end{pmatrix} + \frac{2}{3} p' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial g_{aux,1}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial g_{aux,3}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g_c}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \dots = \\ &= \frac{2}{\alpha'^2} \begin{pmatrix} 1 & \delta - 1 & -\delta \\ \delta - 1 & (\delta - 1)^2 & -\delta(\delta - 1) \\ -\delta & -\delta(\delta - 1) & \delta^2 \end{pmatrix} + \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

$$\frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial^2 g_c}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \frac{\partial^2 g_c}{\partial \sigma' \otimes \partial p_p} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_1)\partial p_p} \\ \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_2)\partial p_p} \\ \frac{\partial^2 g_c}{\partial(-\sigma'_3)\partial p_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,1}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.63)$$

4. Superficie de fluencia de Tracción Nula

4.1. Superficie de fluencia de Tracción Nula

$$f_{t,3} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_3) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3\} \cup \{-\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3\} \quad (1.64)$$

$$f_{t,2} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_2) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2\} \cup \{-\sigma'_3 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2\} \quad (1.65)$$

$$f_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \quad -\sigma'_1 \geq 0 \quad (1.66)$$

4.2. Derivada de la superficie de fluencia de Tracción Nula

$$\frac{\partial f_{t,3}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{t,3}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{t,3}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{t,3}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

$$\frac{\partial f_{t,2}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{t,2}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{t,2}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{t,2}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.68)$$

$$\frac{\partial f_{aux,3}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial f_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial f_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.69)$$

$$\frac{\partial f_{t,3}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.70)$$

$$\frac{\partial f_{t,2}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.71)$$

$$\frac{\partial f_{aux,3}}{\partial \chi_k} = 0 \quad (1.72)$$

4.3. Potencial plástico de la superficie de fluencia de Tracción Nula

$$g_{t,3} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_3) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3\} \cup \{-\sigma'_2 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_3\} \quad (1.73)$$

$$g_{t,2} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_2) \quad \{-\sigma'_1 \geq -\sigma'_3 \geq -\sigma'_2\} \cup \{-\sigma'_3 \geq -\sigma'_1 \geq -\sigma'_2\} \quad (1.74)$$

$$g_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \quad -\sigma'_1 \geq 0 \quad (1.75)$$

4.4. Flujo plástico de la superficie de fluencia de Tracción Nula

$$\frac{\partial g_{t,3}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1.76)$$

$$\frac{\partial g_{t,2}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{t,2}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{t,2}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{t,2}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial g_{aux,3}}{\partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{aux,3}}{\partial (-\sigma'_1)} \\ \frac{\partial g_{aux,3}}{\partial (-\sigma'_2)} \\ \frac{\partial g_{aux,3}}{\partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

$$\frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_1) \partial (-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_1) \partial (-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_1) \partial (-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_2) \partial (-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_2) \partial (-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_2) \partial (-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_3) \partial (-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_3) \partial (-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial (-\sigma'_3) \partial (-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

$$\frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial \sigma' \otimes \partial \sigma'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial(-\sigma'_3)} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_1)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_2)} & \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial(-\sigma'_3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.81)$$

$$\frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{t,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

$$\frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{t,2}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

$$\frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial \sigma' \otimes \partial \chi_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_1)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_2)\partial\chi} \\ \frac{\partial^2 g_{aux,3}}{\partial(-\sigma'_3)\partial\chi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.84)$$

Anejo III

Código de los modelos *HS* y *EPHYSS* implementados en Plaxis con el módulo *UDSM*

En el presente anejo se expone el código de los modelos constitutivos *Hardening Soil (HS)* y *Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS)* en FORTRAN, según se lo expuesto en el capítulo 4 y 5. Concretamente se proporcionan los códigos del:

- Modelo *HS* implementado en Plaxis 2D v9.
- Modelo *HS* implementado en Plaxis 2D 2015 (válido para Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores).
- Modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis 2D v9.
- Modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis 2D 2015 (válido para Plaxis 2D 2011 y versiones posteriores).

Los códigos adjuntos han sido compilados como *Dynamic Link Library (DLL)*, en 32 bits con LAHEY-FUJITSU FORTRAN EXPRESS V7.3.

Las subrutinas implementadas en dichos modelos son las siguientes, y se basan en las subrutinas contenidas en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012):

- La subrutina *User_Mod* desde la que se llama a las subrutinas que contienen los modelos implementados.
- La subrutina *MyModel1* incluye el código del modelo *HS* implementado en Plaxis 2D v9.
- La subrutina *MyModel2* incluye el código del modelo *HS* implementado en Plaxis 2D 2015.
- La subrutina *MyModel3* incluye el código del modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis 2D v9.
- La subrutina *MyModel4* incluye el código del modelo *EPHYSS* implementado en Plaxis 2D 2015.
- Las subrutinas que contienen el algoritmo de *Return Mapping* sobre cada una de las superficies de fluencia, así como en las intersecciones dobles y triples de dichas superficies, son las siguientes:
 - *HS_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie tipo Cono e intersecciones.

- *CAP_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie tipo *Cap* e intersecciones.
- *MC_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie de Mohr-Coulomb e intersecciones.
- *TRAC_plast*: *Return Mapping* sobre la superficie Tracción Nula e intersecciones.
- *HS_CAP_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie tipo Cono con la superficie tipo *Cap* e intersecciones (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
- *MC_CAP_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie de Mohr-Coulomb con la superficie tipo *Cap* e intersecciones (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
- *HS_TRAC_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie tipo Cono y la superficie tipo *Cap* e intersecciones (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
- *MC_TRAC_plast*: *Return Mapping* sobre la intersección de la superficie de Mohr-Coulomb y la superficie de Tracción Nula e intersecciones (incluyendo las intersecciones en el plano desviador).
- La subrutina *Usr_Add* permite asignar un nombre a cada uno de los modelos implementados, así como un número, nombre y unidades a los parámetros y variables de dichos modelos. El código básico de dicha subrutina está disponible en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012).
- La subrutina *Matriz6* permite construir la matriz 6x6 con el valor de los componentes de \mathbf{E} en el modelo *HS*.
- La subrutina *Matriz3* permite construir la matriz 3x3 con el valor de los componentes de \mathbf{E} , operable con el vector de tensiones principales una vez diagonalizado el tensor de tensiones, en el modelo *HS*.
- La subrutina *Matriz6_NL* permite construir la matriz 6x6 con el valor de los componentes de \mathbf{E} y $d\mathbf{E}$ en el modelo *EPHYSS*.
- La subrutina *Matriz3_NL* permite construir la matriz 3x3 con el valor de los componentes de \mathbf{E} y $d\mathbf{E}$, operable con el vector de tensiones principales una vez diagonalizado el tensor de tensiones, en el modelo *EPHYSS*.
- La subrutina *modul* permite calcular el módulo de un vector o tensor.
- La subrutina *norm* permite calcular el vector o tensor normalizado de un vector o tensor, siempre y cuando su módulo sea no nulo.
- La subrutina *Usrlib* contiene un conjunto de subrutinas predefinidas con operaciones matemáticas concretas. El código de varias de dichas subrutinas está disponible en el archivo *udsm_examples_2012.zip* (Plaxis, 2012).

En el texto adjunto se prescinde de los espacios previos a las líneas de código que deben respetarse en FORTRAN, así como a la estructuración en cascada. Asimismo, algunos saltos de línea no se corresponden con los saltos de línea del código original y son producto de la transcripción realizada.

**Código de los modelos *HS* y *EPHYSS*
implementados en Plaxis con el módulo *UDSM***

Subrutina User_mod

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *USRMOD.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

Subroutine User_Mod ( IDTask, iMod, IsUndr, &
  iStep, iTer, iEL, Int, &
  X, Y, Z, &
  Time0, dTime, &
  Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
  dEps, D, BulkW, &
  Sig, Swp, StVar, ip1, &
  nStat, NonSym, istrsDep, iTimeDep, iTang, &
  iPrjDir, iPrjLen, iAbort )
!
! User Defined Soil Model
! Ejemplo: iMod=1 : Hardening Soil Model
!
! Número de tarea IDTask 1 : Inicializar variables
!           2 : Calcular tensiones
!           3 : Calcular la matriz de rigidez
!           4 : Número de variables de estado
!           5 : Preguntar propiedades de la matriz
!           6 : Calcular la matriz de rigidez elástica del
material
!
! Argumentos:
! I/O Type
! IDTask I I : Ver arriba
! iMod I I : Número de modelo (1..10)
! IsUndr I I : =1 para no drenado, =0 en otro caso
! iStep I I : Número de paso global
! iter I I : Número de iteración global
! iel I I : Número de elemento global
! Int I I : Número de punto de integración global
! X I R : Posición X del punto de integración
! Y I R : Posición Y del punto de integración
! Z I R : Posición Z del punto de integración
! Time0 I R : Tiempo al inicio del paso de cálculo
! dTime I R : Incremento de tiempo
! Props I R : Lista con los parámetros del modelo
! Sig0 I R() : Tensiones al inicio del paso de cálculo
! Swp0 I R : Exceso de presión de poros al inicio del paso de
cálculo

```

```

! StVar0 I R() : Variable de estado al inicio del paso de cálculo
! dEps I R() : Incremento de deformación
! D I/O R() : Matriz de rigidez del material
! BulkW I/O R : Módulo volumétrico del agua (sólo caso no drenado)
! Sig 0 R() : Tensión resultante
! Swp 0 R : Exceso de presión de agua resultante
! StVar 0 R() : Valores de las variables de estado al final del paso
!           ide cálculo
! ip1 0 I : Indicador plástico
! nStat 0 I : Número de variables de estado
! NonSym 0 I : Matriz D no simétrica
! istrsDep 0 I : =1 para matriz D dependiente de las tesiones
! iTimeDep 0 I : =1 para matriz D dependiente del tiempo
! iAbort 0 I : =1 para detener proceso de cálculo
!
Implicit Double Precision (A-H, 0-Z)
!
Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6), &
Sig(*), StVar(*), iPrjDir(*)
Character*255 PrjDir, Dbg_Name
Data iounit / 0 /
Save iounit
!
! La siguiente línea debe utilizarse para la compilación del DLL
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, STDCALL, REFERENCE :: User_Mod
! activar para compilador INTEL (32 bits) (subrutina User_Mod32)
!
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT:: User_Mod
! activar para compilador INTEL (64 bits) (subrutina User_Mod64)
DLL_Export User_Mod
! activar para compilador LAHEY-FUJITSU (32 bits)
!
! Posibilidad de debugging
If (iounit.Eq.0) Then
PrjDir= ' '
Do i=1,iPrjLen
PrjDir(i:i) = Char(iPrjDir(i))
End Do
Dbg_Name=PrjDir(:iPrjLen)//'udsmex'
nErr=0
1 Continue
Open(Unit= 1, File= Dbg_Name, iostat=ios)
If (ios.Eq.0) Close(Unit=1, Status='delete', iostat=ios)
If (ios.Ne.0) Then
!
! en caso de error intentar ...udsmex1 or udsmex2 or ..
!

```

```

nErr=nErr+1
dbg_name=PrjDir(:iPrjLen)//'udsmex'//char(48+nErr)
If (nErr.Lt.10) Goto 1
End If

Open(Unit= 1, File=Dbg_Name, blocksize=4096)
Write(1,*)'File 1 opened'
iounit = 1
End If

Select Case (iMod)
Case (1)
!MODELO HS 2D V9
Call MyModel1( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, &
X, Y, Z, Time0, dTime, &
Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ip1, &
nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
iAbort )
Case (2)
!MODELO EPHYSS 2D V9
Call MyModel2( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, &
X, Y, Z, Time0, dTime, &
Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ip1, &
nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
iAbort )
Case (3)
!MODELO HS 2D 2011
Call MyModel3( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, &
X, Y, Z, Time0, dTime, &
Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ip1, &
nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
iAbort )
Case (4)
!MODELO EPHYSS 2D 2011
Call MyModel4( IDTask, iMod, IsUndr, iStep, iTer, iEl, Int, &
X, Y, Z, Time0, dTime, &
Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
dEps, D, BulkW, Sig, Swp, StVar, ip1, &
nStat, NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
iAbort )

Case Default
Write(1,*) 'invalid model number in UserMod', iMod
Write(1,*) 'IDTask: ',IDTask
Stop 'invalid model number in UserMod'
iAbort=1
Return
End Select ! iMod

If (IDTask .EQ. 5 .AND. iel+int .EQ. 2) Then
Write(1,*) 'nStat : ',nStat
Write(1,*) 'NonSym : ',NonSym
Write(1,*) 'StrsDep : ',iStrsDep
Write(1,*) 'TimeDep : ',iTimeDep
Write(1,*) 'Tangent : ',iTang
End If

Return
End ! User_Mod

include 'Matriz6.f90'
include 'Matriz6_NL.f90'
include 'Matriz3.f90'
include 'Matriz3_NL.f90'
include 'mymodel1.f90'
include 'mymodel2.f90'
include 'mymodel3.f90'
include 'mymodel4.f90'
include 'HS_plast.f90'
include 'MC_plast.f90'
include 'TRAC_plast.f90'
include 'CAP_plast.f90'
include 'HS_CAP_plast.f90'
include 'MC_CAP_plast.f90'
include 'HS_TRAC_plast.f90'
include 'MC_TRAC_plast.f90'
include 'norm.f90'
include 'modul.f90'

```

Subrutina *MyModel1*

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *MYMODEL1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

Subroutine MyModel1 ( IDTask, iMod, iSUndr, &
iStep, iTer, iEL, Int, &
X, Y, Z, &
Time0, dTime, &
Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
dEps, D, BulkW, &
Sig, Swp, StVar, ip1, &
nStat, &
NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
iAbort )
!
! Número de tarea IDTask 1 : Inicializar variables
!
! 2 : Calcular tensiones
!
! 3 : Calcular la matriz de rigidez
!
! 4 : Número de variables de estado
!
! 5 : Preguntar propiedades de la matriz
!
! 6 : Calcular la matriz de rigidez elástica del
!material
!
! Argumentos:
! I/O Type
! IDTask I I : Ver arriba
! iMod I I : Número de modelo (1..10)
! iSUndr I I : =1 para no drenado, =0 en otro caso
! iStep I I : Número de paso global
! iter I I : Número de iteración global
! iel I I : Número de elemento global
! Int I I : Número de punto de integración global
! X I R : Posición X del punto de integración
! Y I R : Posición Y del punto de integración
! Z I R : Posición Z del punto de integración
! Time0 I R : Tiempo al inicio del paso de cálculo
! dTime I R : Incremento de tiempo
! Props I R() : Lista con los parámetros del modelo
! Sig0 I R() : Tensiones al inicio del paso de cálculo
! Swp0 I R : Exceso de presión de poros al inicio del paso de
!cálculo
! StVar0 I R() : Variable de estado al inicio del paso de cálculo
! dEps I R() : Incremento de deformación
!
! --- Variables locales
!Prs_E : Tensiones principales trial (compresión positiva)
!Prs : Tensiones principales al final del paso de cálculo (compresión
!positiva)
!Si : Tensiones principales trial (compresión negativa)
!xN(1) : Autovectores de SigE (xx-yy-zz) = Prs_E (1-2-3)
!
Dimension dSig(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3), xN10(3), xN20(3),
xN30(3), &
xN1_med(3), xN2_med(3), xN3_med(3), Prs_E(3), Prs_0(3), Prs_2(3), &
Prs_med(3), StVar0_2(2), Sig_E(6), DifSig(6), dEps_e1(6), dEps_p1(6)
!
i_model = 1
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
io = 0
ttol = 1d-10
nStatV = 2
num_EL = 11!Número de elemento en debugging
num_GAUSS = 4 !Número de elemento en debugging
ideb = 1 !para debugging
!Contenido de Props()
! I/O Type
! 1: G I R Módulo de corte
! 2: nu I R Coeficiente de Poisson
! 3: E50_ref I R Rigidez triaxial secante (superficie cono)
! 4: Eoed_ref I R Rigidez edométrica tangente (superficie cap)
! 5: Eur_ref I R Rigidez en descarga/recarga
! 6: xm I R Potencia de la dependencia tensional
! 7: c I R Cohesión efectiva
!
Implicit Double Precision (A-H, O-Z)
!
Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6), D3(3,3), DinV(6,6),
D_med(6,6), &
Sig(*), Sig_med(6), StVar(*)
!
! --- Variables locales
!Prs_E : Tensiones principales trial (compresión positiva)
!Prs : Tensiones principales al final del paso de cálculo (compresión
!positiva)
!Si : Tensiones principales trial (compresión negativa)
!xN(1) : Autovectores de SigE (xx-yy-zz) = Prs_E (1-2-3)
!
Dimension dSig(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3), xN10(3), xN20(3),
xN30(3), &
xN1_med(3), xN2_med(3), xN3_med(3), Prs_E(3), Prs_0(3), Prs_2(3), &
Prs_med(3), StVar0_2(2), Sig_E(6), DifSig(6), dEps_e1(6), dEps_p1(6)
!
i_model = 1
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
io = 0
ttol = 1d-10
nStatV = 2
num_EL = 11!Número de elemento en debugging
num_GAUSS = 4 !Número de elemento en debugging
ideb = 1 !para debugging
!Contenido de Props()
! I/O Type
! 1: G I R Módulo de corte
! 2: nu I R Coeficiente de Poisson
! 3: E50_ref I R Rigidez triaxial secante (superficie cono)
! 4: Eoed_ref I R Rigidez edométrica tangente (superficie cap)
! 5: Eur_ref I R Rigidez en descarga/recarga
! 6: xm I R Potencia de la dependencia tensional
! 7: c I R Cohesión efectiva
!

```

```

! 8: phi I R Ángulo de fricción efectivo
! 9: psi I R Ángulo de dilatación
! 10: xnu_ur I R Coeficiente de poisson en descarga/recarga
! 11: p_ref I R Presión de referencia para la rigidez
! 12: xk0_nc I R K0 (normalmente consolidado)
! 13: R_f I R Ratio de rotura
! 14: Sigma_trac I R Máxima tensión de tracción (aplica sobre Prs,
! tracción +, compresión -)
! 15: Ei_ref_inter I R Módulo de rigidez inicial (parámetro interno)
! 16: alfa I R Parámetro que controla la forma de la
! superficie tipo cap (parámetro interno)
! 17: beta I R Parámetro que controla la evolución de la
! variable p_p (parámetro interno)
! Prs_E I R(3) : Tensiones principales del predictor elástico
! S1 >= S2 >= S3
! Prs 0 R(3) : Tensiones principales resultantes
! ip1 0 I : Indicador de punto plástico
! ! 1 : Superficie límite de Coulomb (MC_plast)
! ! 2 : Superficie de tracción (vértice)
! ! 3 : Punto plástico en CAP (CAP_plast)
! ! 4 : Punto plástico en HS_CAP (HS_CAP_plast)
! ! 5 : Punto plástico en HS (HS_plast)

!Contenido de StVar0
! I/O Type
! 1: gamma_p I/O R Variable de endurecimiento HS
! 2: p_p I/O R Variable de endurecimiento CAP

If (IDTask .EQ. 1) Then !Inicialización de variables
!Parámetros y variables de estado
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
psi = Props(6)*Rad
xNu_ur = Props(7)*Rad
p_ref = Props(8)
xk0_nc = Props(9)
R_f = Props(10)
sigma_trac = Props(11)
Ei_ref_inter = -Props(12)
alfa = Props(13)
beta = Props(14)
OCR = Props(15)
!Cálculo variables en primer paso de cálculo

p_eq = max((1d0/3d0)*(1d0+2d0*xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (1d0/3d0)*((-
Sig0(1))+(-Sig0(2))+(-Sig0(3))))
q_eq = max((1d0-xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (-Sig0(1))-(-Sig0(3)))
p_p_eq = ((p_eq**2d0)+(q_eq/alfa)**2d0)**0.50d0
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)-Sig0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)-Sig0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E0 = E0_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
gamma_p_eq = (2d0*q_eq/E1)*qa/(qa-q_eq)-2d0*q_eq/Eur
!Variables de endurecimiento
StVar0(1) = max(StVar0(1), max(1d-10, gamma_p_eq))
StVar0(2) = min(min(StVar0(2), min((-1d0)*c*cos(phi)/sin(phi), -1d0)), -
p_p_eq)
Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatV) !Copia de StVar0 en StVar
End If ! IDTask = 1

If (IDTask .EQ. 2) Then !Cálculo de tensiones
Write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEI:', iEI, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriiVl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
!Parámetros y variables de estado
Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatV) !Copia de StVar0 en StVar
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
psi = Props(6)*Rad
xNu_ur = Props(7)*Rad
p_ref = Props(8)
xk0_nc = Props(9)
R_f = Props(10)
sigma_trac = -Props(11)
Ei_ref_inter = -Props(12)
alfa = Props(13)

```

```

beta          = Props(15)
gamma_p_E    = StVar0(1)
p_p_E        = (-1d0)*StVar0(2)

Gm = 1d0

Call WriVal(ideb, 'gamma_p_E', gamma_p_E)
Call WriVal(ideb, 'p_p_E', p_p_E)

!Caso no drenado
If (IsUndr .EQ. 1) Then
  dEpsV      = dEps(1)+dEps(2)+dEps(3)
  dSwp       = BulkW*dEpsV
  Swp        = Swp0+dSwp
Else
  Swp        = Swp0
End If

iOpt        = 0
Call PrnSig(iOpt, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1)    = S10*(-1d0)
Prs_0(2)    = S20*(-1d0)
Prs_0(3)    = S30*(-1d0)

Call WriVec(ideb, 'Prs_0', Prs_0, 3)
Call WriMat(ideb, 'D6', D, 6, 6, 6)
Call WriVal(ideb, 'BulkW', BulkW)

!Paso de cálculo elástico
Call MatVec(D, 6, dEps, 6, dSig)
Call AddVec(Sig0, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)

Call WriVec(ideb, 'dEps', dEps, 6)
Call WriVec(ideb, 'Sig0', Sig0, 6)
Call WriVec(ideb, 'dSig', dSig, 6)
Call WriVec(ideb, 'Sig_E', Sig_E, 6)

iOpt        = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
!Sig_E      : compresión negativa (S1<S2<S3)
!Prs, Prs_E : compresión positiva (S1>S2>S3)
Prs_E(1)    = S1*(-1d0)
Prs_E(2)    = S2*(-1d0)
Prs_E(3)    = S3*(-1d0)
p_E         = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

Call WriVec(ideb, 'Prs_E', Prs_E, 3)

!Construcción matriz D
If (abs(Prs_0(3)) .GT. 0.01d0) Then
  Call Matriz3(Props, Prs_0, D3, i_model)
Else
  Call Matriz3(Props, Prs_E, D3, i_model)
End If
Call WriMat(ideb, 'D3', D3, 3, 3, 3)

Dq          = (Prs_E(1)-Prs_E(3))-(Prs_0(1)-Prs_0(3))
Dp          = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0-
  (Prs_0(1)+Prs_0(2)+Prs_0(3))/3d0
Dpmdq      = Dp/Dq

Call WriVal(ideb, 'Dq', Dq)
Call WriVal(ideb, 'Dp', Dp)
Call WriVal(ideb, 'Dp/Dq', Dpmdq)

!Cálculo superficies de fluencia f13_hs, f13_mc y f_cap en Prs_E

!Cálculo f13_hs en Prs_E
qf1         = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
  sigma_trac, 0d0))
qf2         = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf_E        = qf1*qf2
qa          = qf_E/R_f
E_fac1      = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2      = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50         = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1          = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur         = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf_E) Then
  f13_hs_fac1 = (Prs_E(1)-Prs_E(3))/abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3)))
  f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
  f13_hs      = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
  f13_hs      = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

!Cálculo f13_mc en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
f13_mc_E    = f13_mc

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

```

```

!Cálculo f_cap en Prs_E
delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+(p**2d0)-(p_p_E**2d0)

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Cálculo f_trac en Prs_E
f13_trac = sigma_trac-Prs_E(3)

Call WriVal(ideb, 'f13_trac', f13_trac)

!Cálculo tolerancias
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol
f13_trac_TOL = ttol*abs(f13_trac)+ttol

!Comprobación si el paso de cálculo es elástico
If (f13_hs.LT.f13_hs_TOL.AND. &
f13_mc.LT.f13_mc_TOL.AND. &
f13_trac.LT.f13_trac_TOL.AND. &
f_cap.LT.f_cap_TOL) Then
write(1,*) "PASO DE CALCULO ELÁSTICO, DENTRO DE f13_hs, f13_mc, f_cap y
f13_trac"

!Cálculo de D en el punto inicial
Call Matriz6(Props, Prs_0, D, i_model)
Prs(1) = Prs_E(1)
Prs(2) = Prs_E(2)
Prs(3) = Prs_E(3)
ip1 = 0
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
GOTO 800

!Cálculo de D en el punto medio
!Call Matriz6(Props, Prs_0, D_med)
!xdif_med = 1
!Prs(1) = Prs_E(1)
!Prs(2) = Prs_E(2)
!Prs(3) = Prs_E(3)
!Do While (xdif_med.GT. 0.00001d0)
!Prs_E(1) = Prs(1)
!Prs_E(2) = Prs(2)
!Prs_E(3) = Prs(3)
!Call MulVec(dEps, 1d0/2d0, 6)
!Call MatVec(D_med, 6, dEps, 6, dSig_med)
!Call AddVec(Sig0, dSig_med, 1d0, 1d0, 6, Sig_med)

!iOpt = 0
!Call PrrSig(iOpt, Sig_med, xN1_med, xN2_med, xN3_med, S1_med, S2_med, S3_med,
P_med, Q_med)
!Prs_med(1) = S1_med*(-1d0)
!Prs_med(2) = S2_med*(-1d0)
!Prs_med(3) = S3_med*(-1d0)
!E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_med(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
!E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref**sin(phi))
!Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
!G = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))
!F1 = 2d0*G*(1d0-xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
!F2 = 2d0*G*(xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
!Do i=1,3
! Do j=1,3
! D_med(i,j) = F2
! End Do
! D_med(i,i) = F1
! D_med(i+3,i+3) = G
!End Do
!Call MulVec(dEps, 2d0, 6)
!Call MatVec(D_med, 6, dEps, 6, dSig)
!Call AddVec(Sig0, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig)
!iOpt = 0
!Call PrrSig(iOpt, Sig, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
!Prs(1) = S1*(-1d0)
!Prs(2) = S2*(-1d0)
!Prs(3) = S3*(-1d0)
!xdif_med = ((Prs(1)-Prs_E(1))**2d0+(Prs(2)-Prs_E(2))**2d0+(Prs(3)-
Prs_E(3))**2d0)**0.5d0
!End Do
!ip1 = 0
!StVar(1) = StVar0(1)
!StVar(2) = StVar0(2)
!GOTO 800
End If

!Comprobación si Prs_E está fuera de f13_hs
If (f13_hs.GE.f13_hs_TOL.OR. &
f13_mc.GE.f13_mc_TOL.OR. &
f13_trac.GE.f13_trac_TOL) Then
If (f13_hs.GE.f13_hs_TOL) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs"
!Cálculo Prs en superficies de HS, endurecimiento de gamma_p y p_p=0
iArea=1 !Cálculo en plano f13_hs
Call HS_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, ip1, Prs_0, Isundr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS', Prs, 3)
If (Prs(2).LT.Prss(3)) Then

```

```

write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, ISUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
End If
If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tienen
endurecimiento) y conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc"
Call TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_trac, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f12, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan HS
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf  = qf1*qf2
qa  = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi)
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50    = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei     = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur    = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/Ei)**f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs      = 1d0
End If
If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y TRAC (esta
última no tiene endurecimiento)

```

```

iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac"
Call HS_TRAC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_TRAC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc     = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC y TRAC (no
tiene endurecimiento) conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f13_trac"
Call MC_TRAC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)

!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC', Prs, 3)

End If

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs (de HS o MC) superan CAP
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies CAP, endureciendo
p_p y conservando gamma_p=0
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap"
iArea = 1
Call CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP', Prs, 3)
If (abs(Prs(1)-Prs(3)) .GT. 0.1d0) Then
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Compruebo si las nuevas tensiones Prs superan f13_hs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))

```



```

f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs      = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

!Mixed Return HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y P_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If

If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If

If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
Else
!Comprobación si Prs_E está fuera de CAP
q_m      = Prs_E(1)+(delta-1)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p        = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap    = (q_m**2d0)/(aIfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!Calculo Prs en superficie CAP endureciendo p_p y conservando gamma_p=0
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap"
iArea = 1
Call CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP', Prs, 3)
If (abs(Prs(1)-Prs(3)) .GT. 0.1d0) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If

If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If

```

```

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan HS
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Return Mapping mixto HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y p_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Return Mapping mixto HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y p_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If

If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If

If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If

p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (p .LT. (-1d0)*sigma_trac) Then !si p<-sigma_trac quiere decir que se ha
hecho Return Mapping en cono complementario
Prs(1) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(2) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(3) = (-1d0)*sigma_trac
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
iPl=2
End If

800 Continue

Write(1,*) "Las tensiones ppales al final de este paso de cálculo son Prs="
Call WriVec(1, 'Prs', Prs, 3)

```

```

Call WriVal(ideb, 'gamma_p_E', StVar0(1))
Call WriVal(ideb, 'gamma_p', StVar(1))
Call WriVal(ideb, 'p_p_E', (-1d0)*StVar0(2))
Call WriVal(ideb, 'p_p', (-1d0)*StVar(2))

!Se vuelve a las tensiones en coordenadas cartesianas
!Prs: tracción negativa, compresión positiva
S1 = (-1d0)*Prs(1)
S2 = (-1d0)*Prs(2)
S3 = (-1d0)*Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)
!Sig: tracción positiva, compresión negativa

DifSig(1) = Sig(1)-Sig0(1)
DifSig(2) = Sig(2)-Sig0(2)
DifSig(3) = Sig(3)-Sig0(3)
DifSig(4) = Sig(4)-Sig0(4)
DifSig(5) = Sig(5)-Sig0(5)
DifSig(6) = Sig(6)-Sig0(6)

Call MatInvPiv(D, DinV, 6)
Call MatVec(Dinv, 6, DifSig, 6, dEps_el)
Call AddVec(dEps, dEps_el, 1d0, -1d0, 6, dEps_pl)
write(1,*)
Call WriVal(ideb, 'dEps(1)', dEps(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps_el(1)', dEps_el(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps_pl(1)', dEps_pl(1))
write(1,*)
Call WriVal(ideb, 'dEps(2)', dEps(2))
Call WriVal(ideb, 'dEps_el(2)', dEps_el(2))
Call WriVal(ideb, 'dEps_pl(2)', dEps_pl(2))
write(1,*)
Call WriVal(ideb, 'dEps(3)', dEps(3))
Call WriVal(ideb, 'dEps_el(3)', dEps_el(3))
Call WriVal(ideb, 'dEps_pl(3)', dEps_pl(3))
write(1,*)
Call WriVal(ideb, 'dEps_vol', dEps(1)+dEps(2)+dEps(3))
Call WriVal(ideb, 'dEps_vol_el', dEps_el(1)+dEps_el(2)+dEps_el(3))
Call WriVal(ideb, 'dEps_vol_pl', dEps_pl(1)+dEps_pl(2)+dEps_pl(3))
write(1,*)
Call WriVec(1, 'Prs_0', Prs_0, 3)
Call WriVec(1, 'Prs', Prs, 3)
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(el)(2)', -DifSig(2))
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(el)(1)', -DifSig(1))
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(el)(3)', -DifSig(3))

End If ! IDTask = 2

If (IDTask .EQ. 3 .OR. &
IDTask .EQ. 6 ) Then ! Cálculo de la matriz D
!Parámetros
E50_ref = Props(1)
E0ed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
beta = Props(15)

!Construcción matriz D
iOpt = 0
Call PrnSig(iOpt, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1) = S10*(-1d0)
Prs_0(2) = S20*(-1d0)
Prs_0(3) = S30*(-1d0)
BulkW = 0
If (ISUndr .EQ. 1) Then
! BulkW = ...
E_fac1 = max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), max(c*cos(phi)-
sigma_trac*sin(phi), 0d0))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
G = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))
xNu_U = 0.495d0
Fac = (1d0+xNu_U)/(1d0-2d0*xNu_U)-(1d0+xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
Fac = 2d0*G/3d0*Fac
BulkW = Fac
End If
Call Matriz6(Props, Prs_0, D, i_model)

End If ! IDTask = 3, 6

If (IDTask .EQ. 4) Then !Número de variables de estado
nStat = nStatV
End If ! IDTask = 4

```

```

If (IDTask .Eq. 5) Then !Tipo de matriz
  NonSym = 0 ! 1 para matrices D no simétricas
  iStrsDep = 1 ! 1 para matrices D que dependen de las tensiones
  iTang = 0 ! 1 para matrices D tangentes
  iTimeDep = 0 ! 1 para matrices D que dependen del tiempo
End If ! IDTask = 5
End ! MyModel11

```

Subrutina *MyModel12*

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *MYMODEL11.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

Subroutine MyModel12 ( IDTask, iMod, IsUndr, &
  iStep, iTer, iEL, Int, &
  X, Y, Z, &
  Time0, dTime, &
  Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
  dEps, D, BulkW, &
  Sig, Swp, StVar, ip1, &
  nStat, &
  NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
  iAbort )
! Número de tarea IDTask 1 : Inicializar variables
! 2 : Calcular tensiones
! 3 : Calcular la matriz de rigidez
! 4 : Número de variables de estado
! 5 : Preguntar propiedades de la matriz
! 6 : Calcular la matriz de rigidez elástica del
! material
! Argumentos:
! I/O Type
! IDTask I I : Ver arriba
! iMod I I : Número de modelo (1..10)
! IsUndr I I : =1 para no drenado, =0 en otro caso
! iStep I I : Número de paso global
! iter I I : Número de iteración global
! iel I I : Número de elemento global
! Int I I : Número de punto de integración global
! X I R : Posición X del punto de integración
! Y I R : Posición Y del punto de integración
! Z I R : Posición Z del punto de integración
! Time0 I R : Tiempo al inicio del paso de cálculo
! dTime I R : Incremento de tiempo
! Props I R() : Lista con los parámetros del modelo
! Sig0 I R() : Tensiones al inicio del paso de cálculo
! Swp0 I R : Exceso de presión de poros al inicio del paso de
! cálculo
! StVar0 I R() : Variable de estado al inicio del paso de cálculo
! dEps I R() : Incremento de deformación

```

```

! D I/O R() : Matriz de rigidez del material
! BulkW I/O R : Módulo volumétrico del agua (sólo caso no drenado)
! Sig 0 R() : Tensión resultante
! Swp 0 R : Exceso de presión de agua resultante
! StVar 0 R() : Valores de las variables de estado al final del paso
! ide cálculo
! ip1 0 I : Indicador plástico
! nStat 0 I : Número de variables de estado
! NonSym 0 I : Matriz D no simétrica
! iStrDep 0 I : =1 para matriz D dependiente de las tensiones
! iTimeDep 0 I : =1 para matriz D dependiente del tiempo
! iAbort 0 I : =1 para detener proceso de cálculo
!
Implicit Double Precision (A-H, 0-Z)
Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6), D3(3,3), Dinv(6,6),
dD(6,6), D_new(6,6), Dinv_new(6,6), &
Sig(*), Sig_med(6), StVar(*), D_med(6,6)
!--- Variables locales
!Prs_E : Tensiones principales trial (compresion positiva)
!Prs : Tensiones principales al final del paso de cálculo (compresión
!positiva)
!Si : Tensiones principales trial (compresion negativa)
!xN(1) : Autovectores de SigE (xx-yy-zz) = Prs_E (1-2-3)
Dimension dSig(6), dSig1(6), dSig2(6), dSig_med(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3),
xN10(3), xN20(3), xN30(3), &
xN1_med(3), xN2_med(3), xN3_med(3), Prs_E(3), Prs_0(3), Prs_2(3), &
Sig_E(6), Sig2(6), DifSig(6), DifSig2(6), dEps_el(6), dEps_pl(6),
Sig_dev_aux(6), Eps_dev_aux(6), Sig_dev_aux_0(6), Eps_dev_aux_0(6),
Prs_med(3)
Dimension xh_I(6), d_xh_I(6), xh_I_norm(6), xh_I_new(6)
Dimension eps_e_R_dev(6), eps_R_dev(6), eps_e_DR(6), eps_DR_dev(6),
eps_DR_dev_norm(6)
Dimension eps(6), eps_dev(6), eps_dev_new(6), eps_e(6), eps_e_dev(6),
eps_e_DR_dev(6), eps_e_DR_dev_dev(6), eps_e_new(6), eps_e_dev(6)
Dimension d_eps_e(6), d_eps_dev(6), d_eps_dev_norm(6), d_eps_dev_aux(6),
d_eps_e_aux1(6), d_eps_e_aux2(6), d_eps_e_aux3(6)
Dimension xH_M(6), xE_M(6), xE_e_M(6) !en proceso iterativo
i_model = 2
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
io = 0
ttol = 1d-10
nStatV = 62
num_EL = 11 ! número de elemento en debugging
num_GAUSS = 4 ! número de elemento en debugging

```

```

If ((!IE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
ideb = 1 !para debugging
ideb2 = 1 !para debugging
Else
ideb = -1
ideb2 = -1
End If
!Contenido de Props()
! 1: xKs_ref I R
! 1: Gs0_ap_180_H_ref I R
! 3: Gs0_ap_90_H_ref I R
! 4: gamma_07 I R
! 5: p1_ref I R
! 6: p2_ref I R
! 7: xm1 I R
! 8: xm2 I R
! 9: E50_ref I R
! 10: Eoed_ref I R
! 11: Eur_ref I R
! 12: xm I R
! 13: p_ref I R
! 14: c I R
! 15: phi I R
! 16: psi I R
! 17: xK0_nc I R
! 18: R_f I R
! 19: sigma_trac I R
! 20: Ei_ref_inter I R
! 21: alfa I R
! 22: beta I R
! 23: xNu_min I R
! 24: OCR I R
! 25: Reini_Stiff I R
Módulo volumétrico elástico secante
Módulo de corte máximo aparente secante
!para una reversión de 180º
Módulo de corte máximo aparente secante
!para una reversión de 90º
Valor de la deformación de corte
!octaédrica para G=0,722Gs0_ap_180_H_ref
Presión de referencia para la rigidez
!volumétrica
Presión de referencia para la rigidez de
!corte
Potencia de la dependencia tensional de la
!rigidez volumétrica
Potencia de la dependencia tensional de la
!rigidez de corte
Rigidez triaxial secante (superficie cono)
Rigidez edométrica tangente (superficie
!cap)
Rigidez en descarga/recarga
Potencia de la dependencia tensional de
!E50, Eoed, Et,ur y Ei
Presión de referencia para E50, Eoed, Et,ur,
!Ei y H
Cohesión efectiva
Ángulo de fricción efectivo
Ángulo de dilatación
K0 (normalmente consolidado)
Ratio de rotura
Máxima tensión de tracción (aplica sobre
!Prs, tracción +, compresión -)
Módulo de rigidez inicial (parámetro
!interno)
Parámetro que controla la forma de la
!superficie tipo cap (parámetro interno)
Parámetro que controla la evolución de la
!variable p.p (parámetro interno)
Valor mínimo del coeficiente de Poisson
!(parámetro avanzado)
Índice de sobreconsolidación
Cuando =1, se reinician las variables de

```

```

! Historia reciente
! Prs_E      I      R(3) : Tensiones principales del predictor
!           Ielástico S1 >= S2 >= S3
! Prs       0      R(3) : Tensiones principales resultantes
! ip1      0      I      : Indicador de punto plástico
!           1 : Superficie límite de Coulomb
!           2 : Superficie de tracción (vértice)
!           3 : Punto plástico en CAP
!           4 : Punto plástico en HS_CAP
!           5 : Punto plástico en HS
! Contenido de StVar0
!           I/O Type
! 1:      gamma_p      I/O R      Variable de endurecimiento HS
! 2:      p_p          I/O R      Variable de endurecimiento CAP
! 3:      Gs0_ap,alfa,H I/O R      Valor de la rigidez máxima para la
!           I/O R      !curva de degradación activa alfa
! 4-9:    xh_T         I/O R      Tensor de historia de deformaciones
!           I/O R      !desviadoras totales
! 10-15:  eps         I/O R      Tensor de deformaciones totales
! 16-21:  eps_e       I/O R      Tensor de deformaciones elásticas
! 22-27:  eps_R,dev   I/O R      Tensor de deformaciones totales
!           I/O R      !desviadoras en el último punto de
!           I/O R      !reversión R que da lugar a un nuevo
!           I/O R      !ciclo
! 28-33:  eps_e_R,dev I/O R      Tensor de deformaciones elásticas
!           I/O R      !desviadoras en el último punto de
!           I/O R      !reversión R que da lugar a un nuevo
!           I/O R      !ciclo
! 34-39:  xH_M        I/O R      Vector que almacena el valor de
!           I/O R      !||xh_T||=xh_T_mod en los puntos de
!           I/O R      !reversión R que dan lugar a nuevos
!           I/O R      !ciclos
! 40-45:  xE_M        I/O R      Vector que almacena el valor de
!           I/O R      !||eps_dev||=eps_dev_mod en los puntos
!           I/O R      !de reversión R que dan lugar a nuevos
!           I/O R      !ciclos
! 46-51:  xE_e_M      I/O R      Vector que almacena el valor de
!           I/O R      !||eps_e_dev||=eps_e_dev_mod en los
!           I/O R      !puntos de reversión R que dan lugar a
!           I/O R      !nuevos ciclos
! 52:      Gmin       I/O R      Valor mínimo histórico del módulo de
!           I/O R      !corte secante aparente con xi=1
! El resto de variables de historia no son requeridas en el cálculo, y
! únicamente se definen para visualizar los resultados
! 53:      Gs,ap,ref - Gt,ap,ref
!           I/O R      !secante (si se está en Dominio 1) o
!           I/O R      !del módulo de corte tangente (si se
!           I/O R      !está en el Dominio 2)
! 54:      Gs,ap,ref,(un/re)load
!           I/O R      !Módulo de corte secante aparente en
!           I/O R      !descarga/recarga
!           I/O R      !Módulo de corte tangente aparente en
!           I/O R      !descarga/recarga
! 55:      Gt,ap,ref,(un/re)load
!           I/O R      !Módulo de corte tangente aparente en
!           I/O R      !descarga/recarga
! 56:      Gt,ap,ref,load
!           I/O R      !carga noval
! 57:      Gt,ap,ref,load
!           I/O R      !Módulo de corte tangente aparente en
!           I/O R      !carga noval
! 58:      gamma_oct_H
!           I/O R      Deformación desviadora octaédrica
!           I/O R      !histórica
! 59:      gamma_oct_DR
!           I/O R      !gamma_oct_H=((4/3)^0.5)*xh_T_mod
!           I/O R      Deformación desviadora total respecto
!           I/O R      !al último punto de reversión
! 60:      hTnorm:depsdevnorm
!           I/O R      !gamma_oct_DR = gamma_oct - gamma_oct_R
!           I/O R      Contracción de los tensores
!           I/O R      !normalizados xh_T_norm y
!           I/O R      !d_eps_dev_norm, igual al valor de
!           I/O R      !cos_alfa
! 61:      cos_alfa_rev
!           I/O R      Valor de hTnorm:depsdevnorm = cos_alfa
!           I/O R      !a partir del cual se producen
!           I/O R      !reversiones en la curva de degradación
!           I/O R      !actual
! 62:      Gmin
!           I/O R      Relación entre Gmin y Gt_ur_ref
! If (IDTask .EQ. 1) Then !Inicialización de variables
! If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
!   write(1,*)
!   write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEl:', iEl, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
!   write(1,*) 'iTer:', iTer
!   Call WriIvl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
!   write(1,*)
! End If
! xks_ref = Props(1)
! Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
! Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
! gamma_07 = Props(4)
! p1_ref = Props(5)
! p2_ref = Props(6)
! xm1 = Props(7)
! xm2 = Props(8)
! E50_ref = Props(9)
! Eoed_ref = Props(10)
! Eur_ref = Props(11)
! xm = Props(12)
! p_ref = Props(13)
! c = Props(14)
! phi = Props(15)*Rad

```

```

psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
beta = Props(22)
xNu_min = Props(23)
OCR = Props(24)
Reini_Stiff = Props(25)

w = 100d0

!Cálculo variables en primer paso de cálculo
p_eq = max((1d0/3d0)*(1d0+2d0*xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (1d0/3d0)*((-Sig0(1))+(-Sig0(2))+(-Sig0(3))))
q_eq = max((1d0-xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (-Sig0(1))-(-Sig0(3)))
p_p_eq = ((p_eq**2d0)+(q_eq/alfa)**2d0)**0.50d0

qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)-Sig0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)-Sig0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

gamma_p_eq = (2d0*q_eq/Ei)*qa/(qa-q_eq)-2d0*q_eq/Eur

!Variables de endurecimiento
StVar0(1) = max(StVar0(1), max(1d-10, gamma_p_eq))
StVar0(2) = min(min(StVar0(2), min((-1d0)*c*cos(phi)/sin(phi), -1d0)), -p_p_eq)

!Valor Gs0 ap_alfa_H
If (StVar0(3) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(3) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(3) = StVar0(3)
End If

!Tensor h
StVar0(4) = StVar0(4)
StVar0(5) = StVar0(5)
StVar0(6) = StVar0(6)
StVar0(7) = StVar0(7)
StVar0(8) = StVar0(8)

StVar0(9) = StVar0(9)
If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(4) = 0d0
StVar0(5) = 0d0
StVar0(6) = 0d0
StVar0(7) = 0d0
StVar0(8) = 0d0
End If

!Tensor eps
StVar0(10) = StVar0(10)
StVar0(11) = StVar0(11)
StVar0(12) = StVar0(12)
StVar0(13) = StVar0(13)
StVar0(14) = StVar0(14)
StVar0(15) = StVar0(15)
If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(10) = 0d0
StVar0(11) = 0d0
StVar0(12) = 0d0
StVar0(13) = 0d0
StVar0(14) = 0d0
StVar0(15) = 0d0
End If

!Tensor eps_e
StVar0(16) = StVar0(16)
StVar0(17) = StVar0(17)
StVar0(18) = StVar0(18)
StVar0(19) = StVar0(19)
StVar0(20) = StVar0(20)
StVar0(21) = StVar0(21)
If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(16) = 0d0
StVar0(17) = 0d0
StVar0(18) = 0d0
StVar0(19) = 0d0
StVar0(20) = 0d0
StVar0(21) = 0d0
End If

!Tensor eps_R_dev
StVar0(22) = StVar0(22)
StVar0(23) = StVar0(23)
StVar0(24) = StVar0(24)
StVar0(25) = StVar0(25)

```

```

StVar0(26) = StVar0(26)
StVar0(27) = StVar0(27)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(22) = 0d0
StVar0(23) = 0d0
StVar0(24) = 0d0
StVar0(25) = 0d0
StVar0(26) = 0d0
StVar0(27) = 0d0
End If

!Tensor eps_e_R_dev
StVar0(28) = StVar0(28)
StVar0(29) = StVar0(29)
StVar0(30) = StVar0(30)
StVar0(31) = StVar0(31)
StVar0(32) = StVar0(32)
StVar0(33) = StVar0(33)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(28) = 0d0
StVar0(29) = 0d0
StVar0(30) = 0d0
StVar0(31) = 0d0
StVar0(32) = 0d0
StVar0(33) = 0d0
End If

!Variable H con M=6
StVar0(34) = max(StVar0(34), 0d0)
StVar0(35) = max(StVar0(35), 0d0)
StVar0(36) = max(StVar0(36), 0d0)
StVar0(37) = max(StVar0(37), 0d0)
StVar0(38) = max(StVar0(38), 0d0)
StVar0(39) = max(StVar0(39), 0d0)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(34) = 0d0
StVar0(35) = 0d0
StVar0(36) = 0d0
StVar0(37) = 0d0
StVar0(38) = 0d0
StVar0(39) = 0d0
End If

!Variable E con M=6
StVar0(40) = max(StVar0(40), 0d0)
StVar0(41) = max(StVar0(41), 0d0)
StVar0(42) = max(StVar0(42), 0d0)

StVar0(43) = max(StVar0(43), 0d0)
StVar0(44) = max(StVar0(44), 0d0)
StVar0(45) = max(StVar0(45), 0d0)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(40) = 0d0
StVar0(41) = 0d0
StVar0(42) = 0d0
StVar0(43) = 0d0
StVar0(44) = 0d0
StVar0(45) = 0d0
End If

!Variable E_e con M=6
StVar0(46) = max(StVar0(46), 0d0)
StVar0(47) = max(StVar0(47), 0d0)
StVar0(48) = max(StVar0(48), 0d0)
StVar0(49) = max(StVar0(49), 0d0)
StVar0(50) = max(StVar0(50), 0d0)
StVar0(51) = max(StVar0(51), 0d0)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(46) = 0d0
StVar0(47) = 0d0
StVar0(48) = 0d0
StVar0(49) = 0d0
StVar0(50) = 0d0
StVar0(51) = 0d0
End If

!Valor Gmin
If ((StVar0(52) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) Then
StVar0(52) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(52) = StVar0(52)
End If

!Valor Gs,ap,ref - Gt,ap,ref
If ((StVar0(53) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) Then
StVar0(53) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(53) = StVar0(53)
End If

!Valor Gs,ap,ref,(un/re)load
If ((StVar0(54) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) Then
StVar0(54) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(54) = StVar0(54)
End If

```



```

!Valor Gt,ap,ref,(un/re)load
If ((StVar0(55) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) Then
StVar0(55) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(55) = StVar0(55)
End If

!Valor Gs,ap,ref,load
If ((StVar0(56) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) Then
StVar0(56) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(56) = StVar0(56)
End If

!Valor Gt,ap,ref,load
If ((StVar0(57) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) Then
StVar0(57) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(57) = StVar0(57)
End If

!Valor de gamma_oct_H
StVar0(58) = StVar0(58)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(58) = 0d0
End If

!Valor de gamma_oct_DR
StVar0(59) = StVar0(59)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(59) = 0d0
End If

!Valor de hTnorm:depsdevnorm
StVar0(60) = StVar0(60)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(60) = 1d0
End If

!Valor de cos_alifa_rev
StVar0(61) = StVar0(61)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(61) = 1d0
End If

!Valor de Gm
StVar0(62) = StVar0(62)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
xKt_ref = xKs_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xKt_ref*Eur_ref/(9d0*xKt_ref-Eur_ref)
StVar0(62) = Gs0_ap_180_H_ref/Gt_ur_ref
End If

Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatV) !Copia de StVar0 en StVar

End If ! IDTask = 1

If (IDTask .EQ. 2) Then !Cálculo de tensiones
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
Write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEL:', iEL, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriteIvl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If

!Parámetros y variables de estado
Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatV) !Copia de StVar0 en StVar
xKs_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xK0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
beta = Props(22) !Versión Plaxis 2D v9

```

```

xNu_min = Props(23)
w = 100d0
!Variables de estado
gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = (-1d0)*StVar0(2)
Gs0_ap_alfa_H = max(min(StVar0(3), Gs0_ap_180_H_ref), Gs0_ap_90_H_ref)
xh_I(1) = StVar0(4)
xh_I(2) = StVar0(5)
xh_I(3) = StVar0(6)
xh_I(4) = StVar0(7)
xh_I(5) = StVar0(8)
xh_I(6) = StVar0(9)
eps(1) = StVar0(10)
eps(2) = StVar0(11)
eps(3) = StVar0(12)
eps(4) = StVar0(13)
eps(5) = StVar0(14)
eps(6) = StVar0(15)
eps_e(1) = StVar0(16)
eps_e(2) = StVar0(17)
eps_e(3) = StVar0(18)
eps_e(4) = StVar0(19)
eps_e(5) = StVar0(20)
eps_e(6) = StVar0(21)
eps_R_dev(1) = StVar0(22)
eps_R_dev(2) = StVar0(23)
eps_R_dev(3) = StVar0(24)
eps_R_dev(4) = StVar0(25)
eps_R_dev(5) = StVar0(26)
eps_R_dev(6) = StVar0(27)
eps_e_R_dev(1) = StVar0(28)
eps_e_R_dev(2) = StVar0(29)
eps_e_R_dev(3) = StVar0(30)
eps_e_R_dev(4) = StVar0(31)
eps_e_R_dev(5) = StVar0(32)
eps_e_R_dev(6) = StVar0(33)
xH_M(1) = StVar0(34)
xH_M(2) = StVar0(35)
xH_M(3) = StVar0(36)
xH_M(4) = StVar0(37)
xH_M(5) = StVar0(38)

xH_M(6) = StVar0(39)
xE_M(1) = StVar0(40)
xE_M(2) = StVar0(41)
xE_M(3) = StVar0(42)
xE_M(4) = StVar0(43)
xE_M(5) = StVar0(44)
xE_M(6) = StVar0(45)
xE_e_M(1) = StVar0(46)
xE_e_M(2) = StVar0(47)
xE_e_M(3) = StVar0(48)
xE_e_M(4) = StVar0(49)
xE_e_M(5) = StVar0(50)
xE_e_M(6) = StVar0(51)
Gmin = StVar0(52)
!Caso no drenado
If (ISUndr .EQ. 1) Then
dEpsV = dEps(1)+dEps(2)+dEps(3)
dSwp = BuikW*dEpsV
Swp = Swp0+dSwp
Else
Swp = Swp0
End If
iOpt = 0
Call PrnSig(iOpt, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1) = S10*(-1d0)
Prs_0(2) = S20*(-1d0)
Prs_0(3) = S30*(-1d0)
p_0 = max((Prs_0(1)+Prs_0(2)+Prs_0(3))/3d0, 1d0)
Call WriVec(ideb, 'Prs_0', Prs_0, 3)
!Cálculo módulo dEps
Call modul(dEps, dEps_mod)
!Cálculo d_eps_dev
d_eps_oct = (dEps(1)+dEps(2)+dEps(3))/3d0
d_eps_dev(1) = dEps(1)-d_eps_oct
d_eps_dev(2) = dEps(2)-d_eps_oct
d_eps_dev(3) = dEps(3)-d_eps_oct
d_eps_dev(4) = dEps(4)
d_eps_dev(5) = dEps(5)
d_eps_dev(6) = dEps(6)
!Cálculo de ||d_eps_dev||=d_eps_dev_mod y d_eps_dev_norm
Call modul(d_eps_dev, d_eps_dev_mod)

```

```

Call norm(d_eps_dev, d_eps_dev_norm)

!Cálculo eps_dev
eps_oct = (eps(1)+eps(2)+eps(3))/3d0
eps_dev(1) = eps(1)-eps_oct
eps_dev(2) = eps(2)-eps_oct
eps_dev(3) = eps(3)-eps_oct
eps_dev(4) = eps(4)
eps_dev(5) = eps(5)
eps_dev(6) = eps(6)
Call modul(eps_e_dev, eps_e_dev_mod)

!Cálculo eps_e_dev
Call modul(eps_e, eps_e_mod)
eps_e_oct = (eps_e(1)+eps_e(2)+eps_e(3))/3d0
eps_e_dev(1) = eps_e(1)-eps_e_oct
eps_e_dev(2) = eps_e(2)-eps_e_oct
eps_e_dev(3) = eps_e(3)-eps_e_oct
eps_e_dev(4) = eps_e(4)
eps_e_dev(5) = eps_e(5)
eps_e_dev(6) = eps_e(6)

!Cálculo eps_e_R_dev_mod
Call modul(eps_e_R_dev, eps_e_R_dev_mod)
Call modul(eps_e_R_dev, eps_e_R_new_dev_mod) !Para posterior cálculo de
actualización de variables

!Cálculo eps_dev(n+1)
eps_dev_new(1) = eps_dev(1)+d_eps_dev(1)
eps_dev_new(2) = eps_dev(2)+d_eps_dev(2)
eps_dev_new(3) = eps_dev(3)+d_eps_dev(3)
eps_dev_new(4) = eps_dev(4)+d_eps_dev(4)
eps_dev_new(5) = eps_dev(5)+d_eps_dev(5)
eps_dev_new(6) = eps_dev(6)+d_eps_dev(6)

!Cálculo Gamma_oct(n)
Call modul(eps_dev, eps_dev_mod)
gamma_oct = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_mod

!Cálculo Gamma_oct_R(n)
Call modul(eps_R_dev, eps_R_dev_mod)
gamma_oct_R = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_R_dev_mod
eps_R_new_dev_mod = eps_R_dev_mod !Para posterior cálculo de actualización de
variables

!Cálculo Gamma_oct(n+1)
Call modul(eps_dev_new, eps_dev_new_mod)
gamma_oct_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_new_mod

!Cálculo Gamma_oct_DR(n)
gamma_oct_DR = (gamma_oct-gamma_oct_R)

!Cálculo Gamma_oct_DR(n+1)
gamma_oct_DR_new = (gamma_oct_new-gamma_oct_R)
!Cálculo eps_DR_dev(n+1)
eps_DR_dev(1) = eps_dev(1)-eps_R_dev(1)
eps_DR_dev(2) = eps_dev(2)-eps_R_dev(2)
eps_DR_dev(3) = eps_dev(3)-eps_R_dev(3)
eps_DR_dev(4) = eps_dev(4)-eps_R_dev(4)
eps_DR_dev(5) = eps_dev(5)-eps_R_dev(5)
eps_DR_dev(6) = eps_dev(6)-eps_R_dev(6)

!Cálculo eps_DR_dev_mod y eps_DR_dev_norm
Call modul(eps_DR_dev, eps_DR_dev_mod)
Call norm(eps_DR_dev, eps_DR_dev_norm)

!Cálculo factor eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm =
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm+d_eps_dev_norm(i)*eps_DR_dev_norm(i)
End Do

If (((d_eps_dev_mod.LT. dEps_mod*1d-2) .OR. (iTer .EQ. 0)) .OR.
(d_eps_dev_mod.LT. 1d-12)) .OR. (eps_DR_dev_mod.LT. 1d-8)) Then
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm = 1d0
End If

!Actualización de xi
xi1 = 1d0 !Para cálculo de Gm
xi2 = 2d0 !Para cálculo rigidez en carga/descarga/descarga

!Cálculo de ||xh_T(n)||=xh_T_mod y xh_T_norm
Call modul(xh_T, xh_T_mod)
Call norm(xh_T, xh_T_norm)

!Cálculo gamma_alfa_ur(n)
xkt_ref = xKs_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xkt_ref*Eur_ref/(9d0*xkt_ref-Eur_ref)
gamma_alfa_ur = (xi2*gamma_07/0.385d0)*(((Gs0_ap_alfa_H/Gt_ur_ref)**0.5d0) -
1d0)

!Cálculo Gs0_ap_alfa(n)
Gs0_ap_alfa = Gs0_ap_alfa_H*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2

!Cálculo gamma_oct_H
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)

```

```

!Cálculo de Gt_ur(n)
Gt_ur = Gt_ur_ref*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2

!Cálculo ro_alfa(n)
ro_alfa = gamma_oct_H/gamma_alfa_ur

!Cálculo cos_alfa_rev(n)
If (xh_T_mod.LT. 1d-10) Then
cos_alfa_rev = 0d0
Else
cos_alfa_rev = 1d0/((d_eps_dev_mod/xh_T_mod)*(1d0-ro_alfa**w)+1d0)
End If

!Cálculo factor xh_T_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
xh_T_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
xh_T_norm_d_eps_dev_norm =
xh_T_norm_d_eps_dev_norm+xh_T_norm(i)*d_eps_dev_norm(i)
End Do

If (((d_eps_dev_mod.LT. dEps_mod*1d-2) .OR. (iTer.EQ. 0)) .OR.
(d_eps_dev_mod.LT. 1d-12)) Then
xh_T_norm_d_eps_dev_norm = 1d0
End If

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H(n)
d_Gs0_ap_alfa_H = 0d0
If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LE. 1d0) .AND. (xh_T_norm_d_eps_dev_norm.GT.
(cos_alfa_rev-1d-2))) Then
d_Gs0_ap_alfa_H = 0d0
Else If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LE. (cos_alfa_rev-1d-2)) .AND.
(xh_T_norm_d_eps_dev_norm.GT. 0d0)) Then
d_Gs0_ap_alfa_H = (Gs0_ap_90_H_ref-Gs0_ap_alfa_H)*(cos_alfa_rev-
xh_T_norm_d_eps_dev_norm)
Else If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LE. 0d0) Then
d_Gs0_ap_alfa_H = (Gs0_ap_90_H_ref-Gs0_ap_alfa_H)+(Gs0_ap_90_H_ref-
Gs0_ap_180_H_ref)*xh_T_norm_d_eps_dev_norm
End If

Call WriVal(ideb, 'd_Gs0_ap_alfa_H', d_Gs0_ap_alfa_H)

!Cálculo d_xh_T(n)
Do i=1,6
d_xh_T(i) = 0d0
End Do

If (((xh_T_norm_d_eps_dev_norm.GT. 0d0) .AND. (d_eps_dev_mod.GT.
dEps_mod*1d-2)) .AND. (d_eps_dev_mod.GT. 1d-12)) Then
Do i=1,6
d_xh_T(i) = 0d0
End Do

```

```

d_xh_T(i) = d_eps_dev(i)-xh_T(i)-
xh_T_norm_d_eps_dev_norm*(ro_alfa**w)*d_eps_dev_mod-xh_T_mod*xh_T_norm(i)
If (abs(d_xh_T(i)).LT. 1d-10) Then
d_xh_T(i) = 0d0
End If
Else If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LE. 0d0) Then
Do i=1,6
d_xh_T(i) = d_eps_dev(i)-xh_T(i)
If (abs(d_xh_T(i)).LT. 1d-10) Then
d_xh_T(i) = 0d0
End Do
End Do
End If

!Cálculo xh_T_new y ||xh_T_new|| !Cuando d_eps_dev_mod.GT. dEps_mod*1d-2
entonces d_xh_T(i) = 0d0
xh_T_new(1) = xh_T(1) + d_xh_T(1)
xh_T_new(2) = xh_T(2) + d_xh_T(2)
xh_T_new(3) = xh_T(3) + d_xh_T(3)
xh_T_new(4) = xh_T(4) + d_xh_T(4)
xh_T_new(5) = xh_T(5) + d_xh_T(5)
xh_T_new(6) = xh_T(6) + d_xh_T(6)
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)

gamma_oct_H_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_new_mod

If (gamma_oct_H_new.GT. gamma_alfa_ur) Then
Do i=1,6
xh_T_new(i) = xh_T_new(i)*(gamma_alfa_ur/((4d0/3d0)**0.5d0))/xh_T_new_mod
d_xh_T(i) = xh_T_new(i)-xh_T(i)
End Do
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)
gamma_oct_H_new = gamma_alfa_ur
End If
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)

!Cálculo d_gamma_oct_H(n+1)
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)
gamma_oct_H_new = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_new_mod, gamma_alfa_ur)
d_gamma_oct_H = gamma_oct_H_new-gamma_oct_H

StVar(58) = gamma_oct_H_new
StVar(59) = gamma_oct_DR_new
StVar(60) = xh_T_norm_d_eps_dev_norm
StVar(61) = cos_alfa_rev

```

```

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2)/(1d0+0.3
(debe subir por la curva Gs0_ap_alfa_H o cambiar de curva reduciendo
Gs0_ap_alfa_H y gamma_oct_H de manera que Gs(n+1)>Gs)
d_Gs0_ap_alfa_H_CORR = d_Gs0_ap_alfa_H
If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) Then
Gs_ap_prueba =
((Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H)*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2)/(1d0+0.3
85d0*gamma_oct_H_new/(xi2*gamma_07))
Call WriVal(ideb, 'd_Gs0_ap_alfa_H', d_Gs0_ap_alfa_H)
Gs_ap = Gs0_ap_alfa_H/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi2*gamma_07))
If (Gs_ap_prueba .LT. (Gs_ap - 1d-1)) Then
d_Gs0_ap_alfa_H_CORR =
max(Gs_ap*(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi2*gamma_07)))/((max(p_0,p2_ref*0.1d0)
/p2_ref)**xm2), Gs0_ap_90_H_ref)-Gs0_ap_alfa_H !Aislar d_Gs0_ap_alfa_H de
expresión anterior
End If
End If

!Actualización Gmin (xi1=1) (i=1) y Cálculo Gt (xi2=2) (i=2)
!Debe tenerse en cuenta que, en caso de que no haya reversión, gamma_oct_H es
aproximadamente igual a gamma_oct_DR (para valores altos del parámetro w).
Do i=1,2
If (i .EQ. 1) Then
xi = xi1
Else If (i .EQ. 2) Then
xi = xi2
End If
If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(eps_DR_dev_mod .GT. 1d-8)) Then
Gt_ap_ref =
(Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H_CORR)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi*gamma_07
)**2d0)
If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LE. 0d0) Then
Gt_ap_ref = Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H_CORR
End If
If (i .EQ. 2) Then
Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 1', Gt_ap_ref)
End If
Else If (((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .LT.
gamma_alfa_ur))) .AND. &
(d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2)) .AND. (d_eps_dev_mod .GT. 1d-12)) Then
G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi*gamma_07))
G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
Gt_ap_ref = min(abs((G_A*gamma_oct_DR_new-
G_B*gamma_oct_DR)/(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)), StVar0(55))
If (i .EQ. 2) Then
Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 2', Gt_ap_ref)
End If

```

```

Else If (((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(abs(gamma_oct_DR) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GT.
gamma_alfa_ur)) .OR. &
(abs(gamma_oct_DR_new) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR) .GT.
gamma_alfa_ur))) .AND. (d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2)) .AND.
(d_eps_dev_mod .GT. 1d-12)) Then
G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(xi*gamma_07))
G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
Gt_ap_ref1 = (G_A*gamma_alfa_ur-
G_B*abs(gamma_oct_DR))/abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR) !gamma_oct_DR aprox.
= gamma_alfa_ur
Gt_ap_ref2 = (Gt_ap_ref*(abs(gamma_oct_DR_new)-
gamma_alfa_ur))/abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)
Gt_ap_ref = min(Gt_ap_ref1 + Gt_ap_ref2, StVar0(55))
If (i .EQ. 2) Then
Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 3', Gt_ap_ref)
End If
Else If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(abs(gamma_oct_DR) .GE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GE.
gamma_alfa_ur)) .OR. (gamma_oct_H .GT. gamma_alfa_ur)) Then
Gt_ap_ref = Gt_ap_ref
If (i .EQ. 2) Then
Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 4', Gt_ap_ref)
End If
Else
Gt_ap_ref = StVar0(55)
End If
If (i .EQ. 2) Then
Gt_ap_ref = StVar0(55)
End If
If (i .EQ. 2) Then
Call WriVal(ideb, 'StVar0(55)', Gt_ap_ref)
End If
End If
If (Gt_ap_ref .GT. Gs0_ap_180_H_ref) Then
Gt_ap_ref = Gs0_ap_180_H_ref
Else If (Gt_ap_ref .LT. Gt_ur_ref) Then
Gt_ap_ref = Gt_ur_ref
End If
If (i .EQ. 1) Then
Gmin = min(Gmin, Gt_ap_ref)
StVar(52) = Gmin
Gm = min(Gmin/Gt_ur_ref, 10d0)
StVar(62) = Gm
If (Gm .LT. 1d0) Then
Gm = 1d0
End If
End If
If (i .EQ. 2) Then
StVar(55) = Gt_ap_ref
Gt = Gt_ap_ref*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2
Call WriVal(ideb, 'Gt', Gt)

```

```

End If
End Do

!Régimen no lineal (npi=0) o lineal (npi=1)
If ((abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) .OR.
  (eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
  (eps_DR_dev_mod .GT. 1d-8)) Then
  npi = 0
Else
  npi = 1
End If

!Cálculo Gs,ap(n)/Gt,ur(n) y Ks(n)/Kt(n)
If (abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) Then
  G = G0,ap,alfa/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(x12*gamma_07))
  Gs,aux_e1 = G
  Gold = Gs,aux_e1
  xKs = xKs_ref((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
  xKold = xKs
  If (((Iter .EQ. 0) .OR. (d_eps_dev_mod .LT. dEps_mod*1d-2)) .OR.
    (d_eps_dev_mod .LT. 1d-12)) .OR. (p_0 .LT. 1d0)) Then
    If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
      xK = xKs*(1d0+eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct))
      G = Gt
    Else
      xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
      G = Gt
    End If
  End If
  Call WriVal(ideb, 'Gs_ap APLICADO con gamma_oct_H/(x12*gamma_07)')
  Gs,aux_e1 = G
  Gold = Gs,aux_e1
  xKs = xKs_ref((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
  xKold = xKs
  If (((Iter .EQ. 0) .OR. (d_eps_dev_mod .LT. dEps_mod*1d-2)) .OR.
    (d_eps_dev_mod .LT. 1d-12)) .OR. (p_0 .LT. 1d0)) Then
    If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
      xK = xKs*(1d0+eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct))
      G = Gt
    Else
      xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
      G = Gt
    End If
  End If
  Call WriVal(ideb, 'Gs_ap APLICADO con gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur', G)
  Call WriVal(ideb, 'xKs APLICADO con gamma_alfa_ur', xK)
Else
  G = Gt,ur
  Gs,aux_e1 =
  ((G0,ap,alfa/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(x12*gamma_07)))*gamma_alfa_ur+Gt,ur*
  (abs(gamma_oct_DR)-gamma_alfa_ur))/abs(gamma_oct_DR)
  Gold = Gs,aux_e1
  xKs = xKs_ref((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
  xKold = xKs
  If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
    xK = xKs*(1d0+eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct))
  Else
    xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
  End If
  Call WriVal(ideb, 'Gt APLICADO con gamma_oct_DR .GT. gamma_alfa_ur', G)
  Call WriVal(ideb, 'xKt APLICADO con gamma_oct_DR .GT. gamma_alfa_ur', xK)
End If

If (((eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
  (eps_DR_dev_mod .GT. 1d-8)) .AND. (iStep .EQ. 1)) Then

```

```

G = Gt
Gs =
  ((G0,ap,alfa_H+d_G0,ap,alfa_H_CORR)*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2)/(1d
  0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(x12*gamma_07))
Gs,aux_e1 = Gs
Gold = G0,ap,alfa/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(x12*gamma_07))
xKs = xKs_ref((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
xKold = xKs
If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
  xK = xKs*(1d0+eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct))
Else
  xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
End If
Call WriVal(ideb, 'Gs_ap APLICADO con gamma_oct_H_new tras reversión', G)
End If

StVar(53) = G*((max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**(-1d0*xm2))
StVar(54) = Gs,aux_e1*((max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**(-1d0*xm2))

d_eps_e_aux1(1) = dEps(1)
d_eps_e_aux1(2) = dEps(2)
d_eps_e_aux1(3) = dEps(3)
d_eps_e_aux1(4) = dEps(4)
d_eps_e_aux1(5) = dEps(5)
d_eps_e_aux1(6) = dEps(6)

error_d_eps_e_aux = 1d0
error_d_eps_e_aux_re1 = 1d0

iterations = 1

Do while ((error_d_eps_e_aux .GT. max(dEps_mod*1d-2, 1d-8)) .AND.
  (error_d_eps_e_aux_re1 .GT. 1d-3))

  d_eps_e_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0
  !Cálculo d_Ks(n) cuando gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur
  If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .LT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
    d_Ks = 0d0
  Else
    d_Ks = xKold*d_eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKold))-eps_e_oct)
  End If

  !Cálculo d_Gs,ap(n) cuando gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur
  If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .LT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
    d_Gs,ap = 0d0
  Else
    d_Gs,ap = Gold*(((3d0*xm2*xKold/(-p_0))*(1d0+eps_e_oct/((-
    p_0)/(3d0*xm1*xKold))-

```

```

eps_e_oct)))*d_eps_e_oct+(d_Gs0_ap_alfa_H_CORR/Gs0_ap_alfa_H)-
(0.385d0*g_0ld*d_gamma_oct_H/(x12*gamma_07*Gs0_ap_alfa))
End If

!Cálculo matrices elásticas
If (((d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2) .AND. (d_eps_dev_mod .GT. 1d-12)) .OR.
(d_eps_oct*eps_oct .LT. 0d0)) Then !Para evitar modificar rigidéz durante
cargas/descargas isotropas
xK = max(xK,(2d0/3d0)*G*(1d0+xNu_min)/(1d0-2d0*xNu_min))
End If
Call Matriz6_NL(D, xK, G)
Call Matriz3_NL(D3, xK, G)
Call Matriz6_NL(dD, d_Ks, d_Gs_ap)

d_eps_e_aux1_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0

!Cálculo eps_e_DR_new_dev
eps_e_DR_new_dev(1) = eps_e_dev(1)+(d_eps_e_aux1(1)-d_eps_e_aux1_oct) -
eps_e_R_dev(1)
eps_e_DR_new_dev(2) = eps_e_dev(2)+(d_eps_e_aux1(2)-d_eps_e_aux1_oct) -
eps_e_R_dev(2)
eps_e_DR_new_dev(3) = eps_e_dev(3)+(d_eps_e_aux1(3)-d_eps_e_aux1_oct) -
eps_e_R_dev(3)
eps_e_DR_new_dev(4) = eps_e_dev(4)+d_eps_e_aux1(4) -eps_e_R_dev(4)
eps_e_DR_new_dev(5) = eps_e_dev(5)+d_eps_e_aux1(5) -eps_e_R_dev(5)
eps_e_DR_new_dev(6) = eps_e_dev(6)+d_eps_e_aux1(6) -eps_e_R_dev(6)

!Cálculo eps_e_dev_DR_eps_e_oct
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(1) =
eps_e_DR_new_dev(1)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(2) =
eps_e_DR_new_dev(2)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(3) =
eps_e_DR_new_dev(3)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(4) = eps_e_DR_new_dev(4)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(5) = eps_e_DR_new_dev(5)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(6) = eps_e_DR_new_dev(6)

!Cálculo Sig_E_NL
Call MatVec(D, 6, dEps, 6, dSig1)
If ((((((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND. &
(eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)))) .OR. &
(iTer .EQ. 0)) .OR. (d_eps_dev_mod .LT. dEps_mod*1d-2)) .OR. (d_eps_dev_mod
.LT. 1d-12)) .OR. &
(abs(gamma_oct_DR) .GT. gamma_alfa_ur)) .OR. (p_0 .LT. 1d0)) Then
dSig2(1) = 0d0
dSig2(2) = 0d0
dSig2(3) = 0d0
dSig2(4) = 0d0
dSig2(5) = 0d0

```

```

dSig2(6) = 0d0
Else
!Deben utilizarse deformaciones elásticas, no totales
Call MatVec(dD, 6, eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct, 6, dSig2)
End If
Call AddVec(dSig1, dSig2, 1d0, 1d0, 6, dSig3)
Call AddVec(Sig0, dSig3, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)

If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (npi .EQ. 0) Then
write(1,*) "ELÁSTICO NO LINEAL, npi=", npi
Else If (npi .EQ. 1) Then
write(1,*) "ELÁSTICO LINEAL, npi=", npi
End If
End If

iOpt = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
!Sig_E : compresión negativa (S1<S2<S3)
!Prs, Prs_E: compresión positiva (S1>S2>S3)
Prs_E(1) = S1*(-1d0)
Prs_E(2) = S2*(-1d0)
Prs_E(3) = S3*(-1d0)
P_E = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

Call WriVec(ideb, 'Prs_E', Prs_E, 3)

!Cálculo superficies de fluencia f13_hs, f13_mc y f_cap en Prs_E

!Cálculo f13_hs en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

xh_i = Gm**(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf_E) Then
f13_hs_fac1 = (Prs_E(1)-Prs_E(3))/abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)**f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

```

```

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

!Cálculo f13_mc en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc     = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
f13_mc_E   = f13_mc

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

!Cálculo f_cap en Prs_E
delta      = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
q_m       = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p         = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap     = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+(p**2d0)-(p_p_E**2d0)

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Cálculo f_trac en Prs_E
f13_trac = sigma_trac-Prs_E(3)

Call WriVal(ideb, 'f13_trac', f13_trac)

!Cálculo tolerancias
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f_cap_TOL  = ttol*abs(f_cap)+ttol+0.001d0
f13_trac_TOL = ttol*abs(f13_trac)+ttol

!Comprobación si el paso de cálculo es elástico
If (f13_hs.LT.f13_hs_TOL.AND. &
    f13_mc.LT.f13_mc_TOL.AND. &
    f13_trac.LT.f13_trac_TOL.AND. &
    f_cap.LT.f_cap_TOL) Then
  write(1,*) "PASO DE CÁLCULO ELÁSTICO, DENTRO DE f13_hs, f13_mc, f_cap y
  f13_trac"
  If (npi.EQ. 0) Then
    write(1,*) "PASO ELÁSTICO NO LINEAL, npi=", npi
  Else If (npi.EQ. 1) Then
    write(1,*) "PASO ELÁSTICO LINEAL, npi=", npi
  End If
  End If
  ip1 = 0
  !Actualización tensiones
  Prs(1) = Prs_E(1)
  Prs(2) = Prs_E(2)
  Prs(3) = Prs_E(3)
  !Actualización eps_e
  d_eps_e(1) = dEps(1)
  d_eps_e(2) = dEps(2)
  d_eps_e(3) = dEps(3)
  d_eps_e(4) = dEps(4)
  d_eps_e(5) = dEps(5)
  d_eps_e(6) = dEps(6)
  error_d_eps_e_aux = 0d0
  !Actualización variables de historia plásticas
  StVar(1) = StVar0(1)
  StVar(2) = StVar0(2)
  !Salida del ciclo sobre eps_e
  GOTO 700
End If

!Comprobación si Prs_E está fuera de f13_hs
If (f13_hs.GE.f13_hs_TOL.OR. &
    f13_mc.GE.f13_mc_TOL.OR. &
    f13_trac.GE.f13_trac_TOL) Then
  If (f13_hs.GE.f13_hs_TOL) Then
    If ((iEL.EQ.num_EL).AND.(Int.EQ.num_GAUSS)) Then
      write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs"
    End If
    !Cálculo Prs en superficies de HS, endurecimiento de gamma_p y p_p=0
    iArea=1 !Cálculo en plano f13_hs
    Call HS_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
    StVar, ip1, Prs_0, Isundr, D3, Gm, i_model)
    !Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
    Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS', Prs, 3)
    If (Prs(2).LT.Prs(3)) Then
      If ((iEL.EQ.num_EL).AND.(Int.EQ.num_GAUSS)) Then
        write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=2"
      End If
      iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
    End If
    If (Prs(1).LT.Prs(2)) Then
      If ((iEL.EQ.num_EL).AND.(Int.EQ.num_GAUSS)) Then
        write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=3"
      End If
      iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
    End If
    Call HS_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
    StVar, ip1, Prs_0, Isundr, D3, Gm, i_model)
    Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS, AREA 2,3', Prs, 3)
  End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc     = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

```



```

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
End If

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tienen
endurecimiento) y conservando gamma_p
iArea = 1
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc"
End If
Call MC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f12, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call TRAC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan HS
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)**f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y TRAC (esta
última no tiene endurecimiento)
iArea = 1
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac"
End If
Call HS_TRAC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)

```

```

!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
  If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac, AREA=2"
  End If
  iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
  If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac, AREA=3"
  End If
  iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
  Call HS_TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
  StVar0, StVar, ip1, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
  Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc     = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC y TRAC (no
  tienen endurecimiento) conservando gamma_p
  iArea = 1
  Call MC_TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
  StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
  Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC', Prs, 3)
  If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
    iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
  End If
  If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
    If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
      write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f13_trac"
    End If
    Call MC_TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
    StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
    !Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
    Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC', Prs, 3)
  End If
  iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
  Call HS_TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
  StVar0, StVar, ip1, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
  Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan f13_hs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))

```

```

Call MC_TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If
!Comprobación si las nuevas tensiones Prs (de HS o MC) superan CAP
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies CAP, endureciendo
  p_p y conservando gamma_p=0
  If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap"
  End If
  iArea = 1
  Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
  StVar, ip1, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
  Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP', Prs, 3)
  If (abs(Prs(1)-Prs(3)) .GT. 0.1d0) Then
    If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
      If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
        write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=2"
      End If
      iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
    End If
    If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
      If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
        write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=3"
      End If
      iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
    End If
    If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
      Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
      StVar, ip1, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
      Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
    End If
  End If
!Compruebo si las nuevas tensiones Prs superan f13_hs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))

```

```

qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Mixed Return HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y p_p
iArea = 1
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
End If

Call MC_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=3"
End If
Call HS_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, ip1, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, ip1, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si Prs_E está fuera de CAP
q_m = Prs_E(1)+(delta-1)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!Calculo Prs en superficie CAP endureciendo p_p y conservando gamma_p=0
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then

```

```

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!Return Mapping mixto MC-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tiene
endurecimiento) y CAP, endureciendo p_p y conservando gamma_p
iArea = 1
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
End If

Call MC_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If
Else
!Comprobación si Prs_E está fuera de CAP
q_m = Prs_E(1)+(delta-1)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!Calculo Prs en superficie CAP endureciendo p_p y conservando gamma_p=0
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then

```

```

write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap"
End If
iArea = 1
Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar0, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP', Prs, 3)
If (abs(Prs(1)-Prs(3)) >= 0.1d0) Then
If (Prs(2) < .LT. Prs(3)) Then
If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) < .LT. Prs(2)) Then
If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar0, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan HS
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) < .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)**f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

If (f13_hs < .GE. f13_hs_TOL) Then
!Return Mapping mixto HS-CAP

```

```

!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y P_p
iArea = 1
If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
End If
Call HS_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) < .LT. Prs(3)) Then
If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) < .LT. Prs(2)) Then
If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc < .GE. f13_mc_TOL) Then
!Return Mapping mixto MC-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tiene
endurecimiento) y CAP endureciendo p_p y conservando gamma_p
iArea = 1
If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
End If
Call MC_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC', Prs, 3)

```

```

If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_pIast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, ip1, Prs_0, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (p .LT. (-1d0)*sigma_trac) Then !Si p<-sigma_trac quiere decir que se ha
hecho Return Mapping en cono complementario
Prs(1) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(2) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(3) = (-1d0)*sigma_trac
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
ip1=2
End If

sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0),(Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(1)*xk0_nc-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then

psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If

S1 = (-1d0)*Prs(1)
S2 = (-1d0)*Prs(2)
S3 = (-1d0)*Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)

Call AddVec(Sig, Sig0, 1d0, -1d0, 6, DifsSig)
Call AddVec(DifsSig, dSig2, 1d0, -1d0, 6, DifsSig2)
Call MatInvPiv(D, DinV, 6)
Call MatVec(Dinv, 6, DifsSig2, 6, d_eps_e)

d_eps_e_aux2(1) = d_eps_e(1)
d_eps_e_aux2(2) = d_eps_e(2)
d_eps_e_aux2(3) = d_eps_e(3)
d_eps_e_aux2(4) = d_eps_e(4)
d_eps_e_aux2(5) = d_eps_e(5)
d_eps_e_aux2(6) = d_eps_e(6)

d_eps_e_aux3(1) = d_eps_e_aux2(1)-d_eps_e_aux1(1)
d_eps_e_aux3(2) = d_eps_e_aux2(2)-d_eps_e_aux1(2)
d_eps_e_aux3(3) = d_eps_e_aux2(3)-d_eps_e_aux1(3)
d_eps_e_aux3(4) = d_eps_e_aux2(4)-d_eps_e_aux1(4)
d_eps_e_aux3(5) = d_eps_e_aux2(5)-d_eps_e_aux1(5)
d_eps_e_aux3(6) = d_eps_e_aux2(6)-d_eps_e_aux1(6)

Call modu1(d_eps_e_aux3, error_d_eps_e_aux)

Call modu1(d_eps_e_aux1, d_eps_e_aux1_mod)
error_d_eps_e_aux_re1 = error_d_eps_e_aux/d_eps_e_aux1_mod

d_eps_e_aux1(1) = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux2(1))/2d0
d_eps_e_aux1(2) = (d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux2(2))/2d0
d_eps_e_aux1(3) = (d_eps_e_aux1(3)+d_eps_e_aux2(3))/2d0
d_eps_e_aux1(4) = (d_eps_e_aux1(4)+d_eps_e_aux2(4))/2d0
d_eps_e_aux1(5) = (d_eps_e_aux1(5)+d_eps_e_aux2(5))/2d0
d_eps_e_aux1(6) = (d_eps_e_aux1(6)+d_eps_e_aux2(6))/2d0

If ((((((xh_I_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND. &
(eps_DR_dev_norm d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) .OR. &
(iTer .EQ. 0)) .OR. (d_eps_dev_mod .LT. dEps_mod*1d-2))) .OR. (d_eps_dev_mod
.LT. 1d-12)) .OR. &
(abs(gamma_oct_DR) .GT. gamma_alfa_ur)) .OR. (iterations .GT. 20)) .OR. (p_0
.LT. 1d0)) Then
error_d_eps_e_aux = 0d0
error_d_eps_e_aux_re1 = 0d0

```

```

StVar(22) = eps_dev(1)
StVar(23) = eps_dev(2)
StVar(24) = eps_dev(3)
StVar(25) = eps_dev(4)
StVar(26) = eps_dev(5)
StVar(27) = eps_dev(6)
Call modul(eps_dev, eps_R_new_dev_mod) !Si existe reversión, se toma
eps_R_new_dev_mod=eps_dev y no eps_R_dev
End If

!eps_e_R_dev(n+1)
If (((eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) .AND. &
(eps_DR_dev_mod .GT. 1d-8)) Then
StVar(28) = eps_e_dev(1)
StVar(29) = eps_e_dev(2)
StVar(30) = eps_e_dev(3)
StVar(31) = eps_e_dev(4)
StVar(32) = eps_e_dev(5)
StVar(33) = eps_e_dev(6)
Call modul(eps_e_dev, eps_e_R_new_dev_mod) !Si existe reversión, se toma
eps_e_R_new_dev_mod=eps_e_dev y no eps_e_R_dev
End If

!xH_M, xE_M y xE_M
If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) Then
iii = 0
Do i=1,6
If (iii .EQ. 0) Then
If (abs(xH_M(i)) .LT. 1d-10) Then
If (i .EQ. 1) Then
gamma_alfa_ur = gamma_alfa_ur/2d0 !En carga noval logro reducción rigidez con
hi, y para gamma_alfa_ur/2 se debe lograr Gt_ur.
!Por ello, xh_T_mod debe compararse con gamma_alfa_ur/2 (no gamma_alfa_ur)
End If
StVar(33+i) = min(xh_T_mod, gamma_alfa_ur/((4d0/3d0)**0.5d0))
StVar(39+i) = eps_dev_mod !Se define nuevo ciclo. Cuando se cierre, se
recuperará modulo eps_dev_mod anterior que define ciclo previo
StVar(45+i) = eps_e_dev_mod !Se define nuevo ciclo. Cuando se cierre, se
recuperará modulo eps_e_dev_mod anterior que define ciclo previo
iii = 1
End If
End If
End Do
End If

!Comprobación cierre ciclos y actualización xh_T, eps_R_dev y eps_e_R_dev
If (((abs(xE_M(1)) .GE. 1d-10) .AND. (d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2)) .AND.
(d_eps_dev_mod .GT. 1d-12)) Then

```

```

End If
iterations = iterations + 1
End Do
700 Continue
If ((iIter .GT. 0) .AND. (iStep .GE. 1)) Then

!Actualización
StVar(10) = StVar0(10)+dEps(1)
StVar(11) = StVar0(11)+dEps(2)
StVar(12) = StVar0(12)+dEps(3)
StVar(13) = StVar0(13)+dEps(4)
StVar(14) = StVar0(14)+dEps(5)
StVar(15) = StVar0(15)+dEps(6)

!Actualización eps_e(n+1)
StVar(16) = StVar0(16)+d_eps_e(1)
StVar(17) = StVar0(17)+d_eps_e(2)
StVar(18) = StVar0(18)+d_eps_e(3)
StVar(19) = StVar0(19)+d_eps_e(4)
StVar(20) = StVar0(20)+d_eps_e(5)
StVar(21) = StVar0(21)+d_eps_e(6)

!Actualización variables de historia elásticas Gs0_ap_alfa_H y xh_T
!Gs0_ap_90_H_ref
StVar(3) = max(min(StVar0(3) + d_Gs0_ap_alfa_H CORR, Gs0_ap_180_H_ref),
Gs0_ap_90_H_ref)

!xh_T
StVar(4) = StVar0(4)+d_xh_T(1)
StVar(5) = StVar0(5)+d_xh_T(2)
StVar(6) = StVar0(6)+d_xh_T(3)
StVar(7) = StVar0(7)+d_xh_T(4)
StVar(8) = StVar0(8)+d_xh_T(5)
StVar(9) = StVar0(9)+d_xh_T(6)
!xh_T_new_mod calculado anteriormente

!Actualización variables de memoria
!eps_R_dev(n+1)
If (((eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) .AND. &
(eps_DR_dev_mod .GT. 1d-8)) Then
If ((!E1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
Write(1,*) "SE INICIA NUEVO CICLO"
End If

```

```

mmm = 0
Do i=1,5
  If (mmm.EQ. 0) Then
    If (((gamma_oct_DR_new .GE. -((4d0/3d0)**0.5d0)*(StVar0(39+i)-StVar0(39+i+1))))
      .AND. &
      (abs(gamma_oct_DR_new) .GE. abs(((4d0/3d0)**0.5d0)*(StVar0(39+i)-
      StVar0(39+i+1)))) .AND. (abs(StVar0(39+i+1)) .GT. 1d-10)) Then
    If ((iEL.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
      Write(1,*) "TIENE LUGAR UN CIERRE DE CICLO. (xE_M(i-
      1)>gamma_oct_DR_new>xE_M(i), con xE_M(i)>1d-10)"
    End If
    !Actualizo xH_T
    If (xH_T_new_mod .GT. 1d-10) Then
      StVar(4) = (StVar0(33+i)/xH_T_new_mod)*StVar(4)
      StVar(5) = (StVar0(33+i)/xH_T_new_mod)*StVar(5)
      StVar(6) = (StVar0(33+i)/xH_T_new_mod)*StVar(6)
      StVar(7) = (StVar0(33+i)/xH_T_new_mod)*StVar(7)
      StVar(8) = (StVar0(33+i)/xH_T_new_mod)*StVar(8)
      StVar(9) = (StVar0(33+i)/xH_T_new_mod)*StVar(9)
    Else
      StVar(4) = 0d0
      StVar(5) = 0d0
      StVar(6) = 0d0
      StVar(7) = 0d0
      StVar(8) = 0d0
      StVar(9) = 0d0
    End If
    !Actualizo eps_R_dev
    If ((eps_R_new_dev_mod .GT. 1d-10) .AND. (i .GT. 1)) Then
      StVar(22) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(22)
      StVar(23) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(23)
      StVar(24) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(24)
      StVar(25) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(25)
      StVar(26) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(26)
      StVar(27) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(27)
    Else
      StVar(22) = 0d0
      StVar(23) = 0d0
      StVar(24) = 0d0
      StVar(25) = 0d0
      StVar(26) = 0d0
      StVar(27) = 0d0
    End If
    !Actualizo eps_e_R_dev
    If ((eps_e_R_new_dev_mod .GT. 1d-10) .AND. (i .GT. 1)) Then
      StVar(28) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(28)
      StVar(29) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(29)
      StVar(30) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(30)
      StVar(31) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(31)
      StVar(32) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(32)
    Else
      StVar(28) = 0d0
      StVar(29) = 0d0
      StVar(30) = 0d0
      StVar(31) = 0d0
      StVar(32) = 0d0
    End If
    StVar(33) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(33)
  Else
    StVar(28) = 0d0
    StVar(29) = 0d0
    StVar(30) = 0d0
    StVar(31) = 0d0
    StVar(32) = 0d0
    StVar(33) = 0d0
  End If
  Do j=1,6
    StVar(33+j) = 0d0
    StVar(39+j) = 0d0
    StVar(45+j) = 0d0
  End Do
  mmm = 1
Else
  If ((iEL.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "NO TIENE LUGAR UN CIERRE DE CICLO DE xE_M(i) con i<=2"
  End If
End If
End If
End Do
End If
End If
End Do
End If

If (abs(StVar(34)) .LT. 1d-10) Then
  StVar(22) = 0d0
  StVar(23) = 0d0
  StVar(24) = 0d0
  StVar(25) = 0d0
  StVar(26) = 0d0
  StVar(27) = 0d0
  StVar(28) = 0d0
  StVar(29) = 0d0
  StVar(30) = 0d0
  StVar(31) = 0d0
  StVar(32) = 0d0
  StVar(33) = 0d0
End If

Do i=1,6
  xH_M(i) = StVar(33+i)
  xE_M(i) = StVar(39+i)
  xE_e_M(i) = StVar(45+i)
End Do

Call WriVec(ideb, 'xH_M(n+1)', xH_M, 6)
Call WriVec(ideb, 'xE_M(n+1)', xE_M, 6)
Call WriVec(ideb, 'xE_e_M(n+1)', xE_e_M, 6)
Else

```

```

Do i=3,51
  StVar(i) = StVar0(i)
End Do

End If

If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
  Write(1,*) "Las tensiones ppales al final de este paso de cálculo son Prs="
End If
Call WriVec(ideb, 'Prs', Prs, 3)

!Se vuelve a las tensiones en coordenadas cartesianas
!Prs: tracción negativa, compresión positiva
S1 = (-1d0)*Prs(1)
S2 = (-1d0)*Prs(2)
S3 = (-1d0)*Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)
!Sig: tracción positiva, compresión negativa

Sig_oct_0 = (Sig0(1)+Sig0(2)+Sig0(3))/3d0
Sig_dev_aux_0(1) = Sig0(1)-Sig_oct_0
Sig_dev_aux_0(2) = Sig0(2)-Sig_oct_0
Sig_dev_aux_0(3) = Sig0(3)-Sig_oct_0
Sig_dev_aux_0(4) = Sig0(4)
Sig_dev_aux_0(5) = Sig0(5)
Sig_dev_aux_0(6) = Sig0(6)
tau_0 = 0d0
Do i=1,6
  tau_0 = tau_0 + Sig_dev_aux_0(i)*Sig_dev_aux_0(i)
End Do
tau_0 = ((1d0/3d0)*tau_0)**0.50d0

Eps_oct_0 = (StVar0(10)+StVar0(11)+StVar0(12))/3d0
Eps_dev_aux_0(1) = StVar0(10)-Eps_oct_0
Eps_dev_aux_0(2) = StVar0(11)-Eps_oct_0
Eps_dev_aux_0(3) = StVar0(12)-Eps_oct_0
Eps_dev_aux_0(4) = StVar0(13)
Eps_dev_aux_0(5) = StVar0(14)
Eps_dev_aux_0(6) = StVar0(15)
gamma_0 = 0d0
Do i=1,6
  gamma_0 = gamma_0 + Eps_dev_aux_0(i)*Eps_dev_aux_0(i)
End Do
gamma_0 = ((4d0/3d0)*gamma_0)**0.50d0

If (gamma_0 .GT. 1d-7) Then
  StVar(56) = tau/gamma
Else
  StVar(56) = StVar0(56)
End If

If (abs(gamma-gamma_0) .GT. 1d-10) Then
  StVar(57) = (abs(tau-tau_0))/(abs(gamma-gamma_0))
Else
  StVar(57) = StVar0(57)
End If

End If ! IDTask = 2

If (IDTask .EQ. 3 .OR. &
  IDTask .EQ. 6 ) Then ! Cálculo de la matriz D
  If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*)
  Write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEL:', iEL, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
  'iTer:', iTer
  Call WriIvl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
  write(1,*)
End If

Bulkw = 0d0

```



```

xKs_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
beta = Props(22)
xNu_min = Props(23)

w = 100d0

Gs0_ap_alfa_H = StVar0(3)

xh_T(1) = StVar0(4)
xh_T(2) = StVar0(5)
xh_T(3) = StVar0(6)
xh_T(4) = StVar0(7)
xh_T(5) = StVar0(8)
xh_T(6) = StVar0(9)

eps(1) = StVar0(10)
eps(2) = StVar0(11)
eps(3) = StVar0(12)
eps(4) = StVar0(13)
eps(5) = StVar0(14)
eps(6) = StVar0(15)

eps_e(1) = StVar0(16)
eps_e(2) = StVar0(17)
eps_e(3) = StVar0(18)
eps_e(4) = StVar0(19)
eps_e(5) = StVar0(20)
eps_e(6) = StVar0(21)

eps_R_dev(1) = StVar0(22)

eps_R_dev(2) = StVar0(23)
eps_R_dev(3) = StVar0(24)
eps_R_dev(4) = StVar0(25)
eps_R_dev(5) = StVar0(26)
eps_R_dev(6) = StVar0(27)

eps_e_R_dev(1) = StVar0(28)
eps_e_R_dev(2) = StVar0(29)
eps_e_R_dev(3) = StVar0(30)
eps_e_R_dev(4) = StVar0(31)
eps_e_R_dev(5) = StVar0(32)
eps_e_R_dev(6) = StVar0(33)

xH_M(1) = StVar0(34)
xH_M(2) = StVar0(35)
xH_M(3) = StVar0(36)
xH_M(4) = StVar0(37)
xH_M(5) = StVar0(38)
xH_M(6) = StVar0(39)

xE_M(1) = StVar0(40)
xE_M(2) = StVar0(41)
xE_M(3) = StVar0(42)
xE_M(4) = StVar0(43)
xE_M(5) = StVar0(44)
xE_M(6) = StVar0(45)

xE_e_M(1) = StVar0(46)
xE_e_M(2) = StVar0(47)
xE_e_M(3) = StVar0(48)
xE_e_M(4) = StVar0(49)
xE_e_M(5) = StVar0(50)
xE_e_M(6) = StVar0(51)

Gmin = StVar0(52)

Gt_ap_ref = StVar0(55)

iOpt = 0
Call PrnSig(iOpt, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1) = S10*(-1d0)
Prs_0(2) = S20*(-1d0)
Prs_0(3) = S30*(-1d0)
p_0 = max((Prs_0(1)+Prs_0(2)+Prs_0(3))/3d0, 1d0)

Call WriVec(ideb, 'Prs_0', Prs_0, 3)

!Cálculo eps_dev
eps_oct = (eps(1)+eps(2)+eps(3))/3d0
eps_dev(1) = eps(1)-eps_oct

```

!Versión Plaxis 2D v9

```

eps_dev(2) = eps(2) - eps_oct
eps_dev(3) = eps(3) - eps_oct
eps_dev(4) = eps(4)
eps_dev(5) = eps(5)
eps_dev(6) = eps(6)
Call modu1(eps_e_dev, eps_e_dev_mod)

!Cálculo eps_e_dev
eps_e_oct = (eps_e(1)+eps_e(2)+eps_e(3))/3d0
eps_e_dev(1) = eps_e(1) - eps_e_oct
eps_e_dev(2) = eps_e(2) - eps_e_oct
eps_e_dev(3) = eps_e(3) - eps_e_oct
eps_e_dev(4) = eps_e(4)
eps_e_dev(5) = eps_e(5)
eps_e_dev(6) = eps_e(6)

!Cálculo Gamma_oct(n)
Call modu1(eps_dev, eps_dev_mod)
gamma_oct = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_mod

!Cálculo Gamma_oct_R(n)
Call modu1(eps_R_dev, eps_R_dev_mod)
gamma_oct_R = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_R_dev_mod

!Cálculo Gamma_oct_DR(n)
gamma_oct_DR = (gamma_oct - gamma_oct_R)

!Cálculo de |xh_T(n)| = xh_T_mod
Call modu1(xh_T, xh_T_mod)

!xi1 y xi2
xi1 = 1d0
xi2 = 2d0

!Cálculo gamma_alfa_ur(n)
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xkt_ref*Eur_ref/(9d0*xkt_ref-Eur_ref)
gamma_alfa_ur = (xi2*gamma_07/0.385d0)*((Gs0_ap_alfa_H/Gt_ur_ref)**0.5d0) - 1d0

!Cálculo Gs_ap(n)
Gs0_ap_alfa = Gs0_ap_alfa_H*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)

!Cálculo de Gt_ur
Gt_ur = Gt_ur_ref*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2

!Cálculo Gt_ap(n) y kt(n)
If (abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) Then

```

```

G = StVar0(55)*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2 xks =
xks_ref*((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
If (abs((((-p_0)/(3d0*xm1*xks))-eps_e_oct) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
xk = xks*(1d0+eps_e_oct/(((-p_0)/(3d0*xm1*xks)))-eps_e_oct)
Else
xk = xks*(1d0/(1d0-xm1))
End If
Else
G = Gt_ur
xks = xks_ref*((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
If (abs((((-p_0)/(3d0*xm1*xks))-eps_e_oct) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
xk = xks*(1d0+eps_e_oct/(((-p_0)/(3d0*xm1*xks)))-eps_e_oct)
Else
xk = xks*(1d0/(1d0-xm1))
End If
End If

xk = max(xk,(2d0/3d0)*G*(1d0+xNu_min)/(1d0-2d0*xNu_min))
Call Matriz6_NL(D, xk, G)

If (IsUndr .EQ. 1) Then
! BulKW = ....S
xNu_U = 0.495d0
xKu = 2d0*G*(1d0+xNu_U)/(3d0*(1d0-2d0*xNu_U))
Fac = xKu - xK
BulKW = Fac
End If

Call WriMat(ideb, 'D6 en Task3,6' , D , 6, 6, 6)

End If ! IDTask = 3, 6

If (IDTask .EQ. 4) Then !Número de variables de estado
If ((iEl .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
Write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEl:', iEl, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriIVl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If

nStat = nStatV
End If ! IDTask = 4

```

```

If (IDTask .Eq. 5) Then !Tipo de matriz
If ((iel .Eq. num_EL) .AND. (Int .Eq. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEL:', iEL, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriIv1(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If

NonSym = 0 ! 1 para matrices D no simétricas
iStrsDep = 1 ! 1 para matrices D que dependen de las tensiones
iTang = 0 ! 1 para matrices D tangentes
iTimeDep = 0 ! 1 para matrices D que dependen del tiempo

End If ! IDTask = 5
End ! MyModel12

```

Subrutina MyModel13

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *MYMODEL1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

Subroutine MyModel13 ( IDTask, iMod, IsUndr, &
iStep, iTer, iEL, Int, &
X, Y, Z, &
Time0, dTime, &
Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
dEps, D, BulkW, &
Sig, Swp, StVar, ip1, &
nStat, &
NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
iAbort )
! Número de tarea IDTask 1 : Inicializar variables
! 2 : Calcular tensiones
! 3 : Calcular la matriz de rigidez
! 4 : Número de variables de estado
! 5 : Preguntar propiedades de la matriz
! 6 : Calcular la matriz de rigidez elástica del
! material

! Argumentos:
! I/O Type
! IDTask I I : Ver arriba
! iMod I I : Número de modelo (1..10)
! IsUndr I I : =1 para no drenado, =0 en otro caso
! iStep I I : Número de paso global
! iter I I : Número de iteración global
! iel I I : Número de elemento global
! Int I I : Número de punto de integración global
! X I R : Posición X del punto de integración
! Y I R : Posición Y del punto de integración
! Z I R : Posición Z del punto de integración
! Time0 I R : Tiempo al inicio del paso de cálculo
! dTime I R : Incremento de tiempo
! Props I R() : Lista con los parámetros del modelo
! Sig0 I R() : Tensiones al inicio del paso de cálculo
! Swp0 I R : Exceso de presión de poros al inicio del paso de
! cálculo
! StVar0 I R() : Variable de estado al inicio del paso de cálculo
! dEps I R() : Incremento de deformación

```

```

! D I/O R() : Matriz de rigidez del material
! BulkW I/O R : Módulo volumétrico del agua (sólo caso no drenado)
! Sig 0 R() : Tensión resultante
! Swp 0 R() : Exceso de presión de agua resultante
! StVar 0 R() : Valores de las variables de estado al final del paso
! ip1 0 I : Indicador plástico
! nStat 0 I : Número de variables de estado
! NonSym 0 I : Matriz D no simétrica
! iStrDep 0 I : =1 para matriz D dependiente de las tensiones
! iTimeDep 0 I : =1 para matriz D dependiente del tiempo
! iAbort 0 I : =1 para detener proceso de cálculo

Implicit Double Precision (A-H, 0-Z)

Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D3(3,3), Dinv(6,6),
D_med(6,6), &
Sig(*), Sig_med(6), StVar(*)

!--- Variables locales
!Prs_E : Tensiones principales trial (compresión positiva)
!Prs : Tensiones principales al final del paso de cálculo (compresión
positiva)
!S1 : Tensiones principales trial (compresión negativa)
!xN(1) : Autovectores de SigE (xx-yy-zz) = Prs_E (1-2-3)

Dimension dSig(6), dSig_med(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3), xN10(3), xN20(3),
xN30(3), &
xN1_med(3), xN2_med(3), xN3_med(3), Prs_E(3), Prs_0(3), Prs_2(3), &
Prs_med(3), StVar_2(2), Sig_E(6), DifSig(6), dEps_e1(6), dEps_p1(6)

i_model = 3
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
io = 0
ttol = 1d-10
nStatV = 2
num_EL = 11 número de elemento en debugging
num_GAUSS = 4 número de elemento en debugging
ideb = 1 para debugging

!Contenido de Props()
! 1: G I/O Type Módulo de corte
! 2: nu I/O R Coeficiente de Poisson
! 3: E50_ref I/O R Rigidez triaxial secante (superficie cono)
! 4: Eoed_ref I/O R Rigidez edométrica tangente (superficie cap)
! 5: Eur_ref I/O R Rigidez en descarga/recarga
! 6: xm I/O R Potencia de la dependencia tensional
! 7: c I/O R Cohesión efectiva

! 8: phi I R Ángulo de fricción efectivo
! 9: psi I R Ángulo de dilatancia
! 10: xnu_ur I R Coeficiente de poisson en descarga/recarga
! 11: p_ref I R Presión de referencia para la rigidez
! 12: xK0_nc I R K0 (normalmente consolidado)
! 13: R_f I R Ratio de rotura
! 14: Sigma_trac I R Máxima tensión de tracción (aplica sobre Prs,
!tracción +, compresión -)
! 15: Ei_ref_inter I R Módulo de rigidez inicial (parámetro interno)
! 16: alfa I R Parámetro que controla la forma de la
!superficie tipo cap (parámetro interno)
! 17: xKtmKc I R Parámetro que controla la evolución de la
!variable p_p (parámetro interno)

! Prs_E I R(3) : Tensiones principales del predictor elástico
!S1 >= S2 >= S3
! Prs 0 R(3) : Tensiones principales resultantes
! ip1 0 I : Indicador de punto plástico
! 1 : Superficie limite de Coulomb (MC_plast)
! 2 : Superficie de tracción (vértice)
! 3 : Punto plástico en CAP (CAP_plast)
! 4 : Punto plástico en HS_CAP (HS_CAP_plast)
! 5 : Punto plástico en HS (HS_plast)

!Contenido de StVar0
! I/O Type
! 1: gamma_p I/O R Variable de endurecimiento HS
! 2: p_p I/O R Variable de endurecimiento CAP

If (IDTask .EQ. 1) Then !Inicialización de variables

!Parámetros y variables de estado
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xK0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xKtmKc = Props(15)
OCR = Props(16)

```

```

!Cálculo variables en primer paso de cálculo
p_eq = max((1d0/3d0)*(1d0+2d0*xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (1d0/3d0)*((-
Sig0(1))+(-Sig0(2))+(-Sig0(3)))
q_eq = max((1d0-xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (-Sig0(1))-(-Sig0(3)))
p_p_eq = ((p_eq**2d0)+(q_eq/alfa)**2d0)**0.5d0d0
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)-Sig0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)-Sig0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

gamma_p_eq = (2d0*q_eq/Ei)*qa/(qa-q_eq)-2d0*q_eq/Eur

!Variables de endurecimiento
StVar0(1) = max(StVar0(1), max(1d-10, gamma_p_eq))
StVar0(2) = min(min(StVar0(2), min((-1d0)*c*cos(phi)/sin(phi), -1d0)), -
p_p_eq)

Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatv) !Copia de StVar0 en StVar

End If ! IDTask = 1

If (IDTask .EQ. 2) Then !Cálculo de tensiones
Write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEI:', iEI, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriIv1(ideb, 'ISundr', ISundr)

!Parámetros y variables de estado
Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatv) !Copia de StVar0 en StVar
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)

aIfa = Props(14)
xktmkc = Props(15)
gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = (-1d0)*StVar0(2)
Gm = 1d0

Call WriVal(ideb, 'gamma_p_E', gamma_p_E)
Call WriVal(ideb, 'p_p_E', p_p_E)

!Caso no drenado
If (ISundr .EQ. 1) Then
dEpsv = dEps(1)+dEps(2)+dEps(3)
dSwp = BulkW*dEpsv
Swp = Swp0+dSwp
Else
Swp = Swp0
End If

iOpt = 0
Call PmSig(iOpt, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1) = S10*(-1d0)
Prs_0(2) = S20*(-1d0)
Prs_0(3) = S30*(-1d0)

Call WriVec(ideb, 'Prs_0', Prs_0, 3)
Call WriMat(ideb, 'D6', D, 6, 6, 6)
Call WriVal(ideb, 'BulkW', BulkW)

!Paso de cálculo elástico
Call MatVec(D, 6, dEps, 6, dSig)
Call AddVec(Sig0, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)

Call WriVec(ideb, 'dEps', dEps, 6)
Call WriVec(ideb, 'Sig0', Sig0, 6)
Call WriVec(ideb, 'dSig', dSig, 6)
Call WriVec(ideb, 'Sig_E', Sig_E, 6)

iOpt = 1
Call PmSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
!Sig_E : compresión negativa (S1<S2<S3)
!Prs, Prs_E: compresión positiva (S1>S2>S3)
Prs_E(1) = S1*(-1d0)
Prs_E(2) = S2*(-1d0)
Prs_E(3) = S3*(-1d0)
p_E = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

Call WriVec(ideb, 'Prs_E', Prs_E, 3)

```

```

!Construcción matriz D
If (abs(Prs_0(3)) > GT. 0.01d0) Then
Call Matriz3(Props, Prs_0, D3, i_model)
Else
Call Matriz3(Props, Prs_E, D3, i_model)
End If
Call WriMat(ideb, 'D3', D, 3, 3, 3)

Dq = (Prs_E(1)-Prs_E(3))-(Prs_0(1)-Prs_0(3))
Dp = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0-
Dpmdq = Dp/Dq

Call WriVal(ideb, 'Dq', Dq)
Call WriVal(ideb, 'Dp', Dp)
Call WriVal(ideb, 'Dp/Dq', Dpmdq)

!Cálculo superficies de fluencia f13_hs, f13_mc y f_cap en Prs_E

!Cálculo f13_hs en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) < LT. qf_E) Then
f13_hs_fac1 = (Prs_E(1)-Prs_E(3))/abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

!Cálculo f13_mc en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
f13_mc_E = f13_mc

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

!Cálculo f_cap en Prs_E
delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
q_m = (Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3))
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+(p**2d0)-(p_p_E**2d0)

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)
!Cálculo f_trac en Prs_E
f13_trac = sigma_trac-Prs_E(3)

Call WriVal(ideb, 'f13_trac', f13_trac)

!Cálculo tolerancias
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol
f13_trac_TOL = ttol*abs(f13_trac)+ttol

!Call WriVal(ideb, 'f13_hs_TOL', f13_hs_TOL)
!Call WriVal(ideb, 'f13_mc_TOL', f13_mc_TOL)
!Call WriVal(ideb, 'f_cap_TOL', f_cap_TOL)
!Call WriVal(ideb, 'f13_trac_TOL', f13_trac_TOL)

Call WriVal(ideb, 'Prs_E(1)-Prs_E(3)', Prs_E(1)-Prs_E(3))
Call WriVal(ideb, 'qf', qf_E)
Call WriVal(ideb, 'qa', qa)
Call WriVal(ideb, 'qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))', qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3)))
Call WriVal(ideb, 'E1', E1)
Call WriVal(ideb, 'Eur', Eur)
Call WriVal(ideb, 'alfa', alfa)
Call WriVal(ideb, 'beta', beta)
Call WriVal(ideb, 'xH', xH)
Call WriVal(ideb, 'delta', delta)
Call WriVal(ideb, 'q_m', q_m)
Call WriVal(ideb, 'p', p)
Call WriVal(ideb, 'gamma_p_E', gamma_p_E)
Call WriVal(ideb, 'p_p_E', p_p_E)

!Comprobación si el paso de cálculo es elástico
If (f13_hs < LT. f13_hs_TOL .AND. &
f13_mc < LT. f13_mc_TOL .AND. &
f13_trac < LT. f13_trac_TOL .AND. &
f_cap < LT. f_cap_TOL) Then
write(1,*) 'PASO DE CALCULO ELÁSTICO, DENTRO DE f13_hs, f13_mc, f_cap y
f13_trac'
!Cálculo de D en el punto inicial
Call Matriz6(Props, Prs_0, D, i_model)
Prs(1) = Prs_E(1)
Prs(2) = Prs_E(2)
Prs(3) = Prs_E(3)

```

```

iPl = 0
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
GOTO 800
!Cálculo de D en el punto medio
!Call Matriz6(Props, Prs_0, D_med)
!xdif_med = 1
!Prs(1) = Prs_E(1)
!Prs(2) = Prs_E(2)
!Prs(3) = Prs_E(3)
!Do While (xdif_med.GT. 0.00001d0)
!Prs_E(1) = Prs(1)
!Prs_E(2) = Prs(2)
!Prs_E(3) = Prs(3)
!Call MulVec(dEps, 1d0/2d0, 6)
!Call MatVec(D_med, 6, dEps, 6, dSig_med)
!Call AddVec(Sig0, dSig_med, 1d0, 1d0, 6, Sig_med)
!iopt = 0
!Call PrnSig(iopt, Sig_med, xN1_med, xN2_med, xN3_med, S1_med, S2_med, S3_med,
P_med, Q_med)
!Prs_med(1) = S1_med*(-1d0)
!Prs_med(2) = S2_med*(-1d0)
!Prs_med(3) = S3_med*(-1d0)
!E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_med(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
!E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
!Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
!G = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))
!F1 = 2d0*G*(1d0-xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
!F2 = 2d0*G*(xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
!Do i=1,3
! Do j=1,3
! D_med(i,j) = F2
! End Do
! D_med(i,i) = F1
! D_med(i+3,i+3) = G
!End Do
!Call MulVec(dEps, 2d0, 6)
!Call MatVec(D_med, 6, dEps, 6, dSig)
!Call AddVec(Sig0, dSig, 1d0, 1d0, 6, Sig)
!iopt = 0
!Call PrnSig(iopt, Sig, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
!Prs(1) = S1*(-1d0)
!Prs(2) = S2*(-1d0)
!Prs(3) = S3*(-1d0)
!xdif_med = ((Prs(1)-Prs_E(1))**2d0+(Prs(2)-Prs_E(2))**2d0+(Prs(3)-
Prs_E(3))**2d0)**0.5d0
!End Do
!iPl = 0
!StVar(1) = StVar0(1)
!StVar(2) = StVar0(2)
!GOTO 800
!Comprobación si Prs_E está fuera de f13_hs
If (f13_hs.GE. f13_hs_TOL .OR. &
f13_mc.GE. f13_mc_TOL .OR. &
f13_trac.GE. f13_trac_TOL) Then
If (f13_hs.GE. f13_hs_TOL) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs"
!Cálculo Prs en superficies de HS, endurecimiento de gamma_p y p_p=0
iArea=1 !Cálculo en plano f13_hs
Call HS_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, ISundr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, ISundr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
End If
If (f13_mc.GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tienen
endurecimiento) y conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc"
Call MC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc, AREA=2"

```

```

iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_plast(iEI, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan TRAC
f13_trac = sigma_trac-Prs(3)

Call WriVal(ideb, 'f13_trac', f13_trac)

If (f13_trac .GE. f13_trac_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies TRAC (no tienen
endurecimiento) y conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_trac"
Call HS_TRAC_plast(iEI, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f13_trac, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_TRAC_plast(iEI, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc
= f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC y TRAC (no
tienen endurecimiento) conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f13_trac"

```



```

Call MC_TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f13_trac, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_TRAC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs (de HS o MC) superan CAP
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies CAP, endureciendo
p_p y conservando gamma_p=0
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap"
iArea = 1
Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP', Prs, 3)
If (abs(Prs(1)-Prs(3)) .GT. 0.1d0) Then
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

```

```

End If

!Compruebo si las nuevas tensiones Prs superan f13_hs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Mixed Return HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y p_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
Call HS_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

```

```

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!Return Mapping mixto MC-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tiene
endurecimiento) y CAP, endureciendo p_p y conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC y CAP', Prs, 3)
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If

If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan HS
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 0d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf  = qf1*qf2
qa  = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50    = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1     = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur    = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs      = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Return Mapping mixto HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y p_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
Call HS_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"

```

```

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!Return Mapping mixto MC-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tiene
endurecimiento) y CAP, endureciendo p_p y conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC y CAP', Prs, 3)
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If

If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC y CAP', Prs, 3)
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If

If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If

Else

!Comprobación si Prs_E está fuera de CAP
q_m = Prs_E(1)+(delta-1)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p    = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!Cálculo Prs en superficie CAP endureciendo p_p y conservando gamma_p=0
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap"
iArea = 1
Call CAP_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP', Prs, 3)
If (abs(Prs(1)-Prs(3)) .GT. 0.1d0) Then

```

```

iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!Return Mapping mixto MC-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tiene
endurecimiento) y CAP endureciendo p_p y conservando gamma_p
iArea = 1
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
Call MC_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If

p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

```

```

If (p .LT. (-1d0)*sigma_trac) Then !Si p<-sigma_trac quiere decir que se ha
hecho
!Return Mapping en cono complementario
Prs(1) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(2) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(3) = (-1d0)*sigma_trac
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
iPl=2
End If

800 Continue

Write(1,*) "Las tensiones ppales al final de este paso de cálculo son Prs="
Call WriVec(1, 'Prs', Prs, 3)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p_E', StVar0(1))
Call WriVal(ideb, 'gamma_p', StVar(1))
Call WriVal(ideb, 'p_p_E', (-1d0)*StVar0(2))
Call WriVal(ideb, 'p_p', (-1d0)*StVar(2))

!Se vuelve a las tensiones en coordenadas cartesianas
!Prs: tracción negativa, compresión positiva
S1 = (-1d0)*Prs(1)
S2 = (-1d0)*Prs(2)
S3 = (-1d0)*Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)
!Sig: tracción positiva, compresión negativa

DifSig(1) = Sig(1)-Sig0(1)
DifSig(2) = Sig(2)-Sig0(2)
DifSig(3) = Sig(3)-Sig0(3)
DifSig(4) = Sig(4)-Sig0(4)
DifSig(5) = Sig(5)-Sig0(5)
DifSig(6) = Sig(6)-Sig0(6)

Call MatInvPiv(D, Dinv, 6)
Call MatVec(Dinv, 6, DifSig, 6, dEps_el)
Call AddVec(dEps, dEps_el, id0, -id0, 6, dEps_pl)
write(1,*) -----
Call WriVal(ideb, 'dEps(1)', dEps(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps_el(1)', dEps_el(1))
Call WriVal(ideb, 'dEps_pl(1)', dEps_pl(1))
write(1,*) -----
Call WriVal(ideb, 'dEps(2)', dEps(2))
Call WriVal(ideb, 'dEps_el(2)', dEps_el(2))
Call WriVal(ideb, 'dEps_pl(2)', dEps_pl(2))
write(1,*) -----
Call WriVal(ideb, 'dEps(3)', dEps(3))
Call WriVal(ideb, 'dEps_el(3)', dEps_el(3))

```

```

Call WriVal(ideb, 'dEps_pl(3)', dEps_pl(3))
write(1,*) '-----'
Call WriVal(ideb, 'dEps_vol', dEps(1)+dEps(2)+dEps(3))
Call WriVal(ideb, 'dEps_vol_e1', dEps_e1(1)+dEps_e1(2)+dEps_e1(3))
Call WriVal(ideb, 'dEps_vol_pl', dEps_pl(1)+dEps_pl(2)+dEps_pl(3))
write(1,*) '-----'
Call WriVec(1, 'Prs_0', Prs_0, 3)
Call WriVec(1, 'Prs', Prs, 3)
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(e1)(2)', -DifSig(2))
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(e1)(1)', -DifSig(1))
Call WriVal(ideb, 'dSig_real(e1)(3)', -DifSig(3))

End If ! IDTask = 2

If (IDTask .Eq. 3 .OR. &
IDTask .Eq. 6 ) Then ! Cálculo de la matriz D

!Parámetros
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xQ_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmKc = Props(15)

!Construcción matriz D
iOpt = 0
Call PrnSig(iOpt, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1) = S10*(-1d0)
Prs_0(2) = S20*(-1d0)
Prs_0(3) = S30*(-1d0)
BulkW = 0
If (ISUndr .Eq. 1) Then
! BulkW = ...
E_fac1 = max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), max(c*cos(phi)-
sigma_trac*sin(phi), 0d0))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
G = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))
xNu_U = 0.495d0

```

```

Fac = (1d0+xNu_U)/(1d0-2d0*xNu_U) - (1d0+xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
Fac = 2d0*G/3d0*Fac
BulkW = Fac
End If
Call Matriz6(Props, Prs_0, D, i_model)

End If ! IDTask = 3, 6

If (IDTask .Eq. 4) Then !Número de variables de estado
nStat = nStatV
End If ! IDTask = 4

If (IDTask .Eq. 5) Then !Tipo de matriz
NonSym = 0 ! 1 para matrices D no simétricas
iStrsDep = 1 ! 1 para matrices D que dependen de las tensiones
iTang = 0 ! 1 para matrices D tangentes
iTimeDep = 0 ! 1 para matrices D que dependen del tiempo

End If ! IDTask = 5
End ! MyModel3

```

Subrutina *MyModel4*

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *MYMODEL1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

Subroutine MyModel4 ( IDTask, iMod, iSUndr, &
  iStep, iTer, iEL, Int, &
  X, Y, Z, &
  Time0, dTime, &
  Props, Sig0, Swp0, StVar0, &
  dEps, D, BulkW, &
  Sig, Swp, StVar, ip1, &
  nStat, &
  NonSym, iStrsDep, iTimeDep, iTang, &
  iAbort )
!
! Número de tarea IDTask 1 : Inicializar variables
!
! 2 : Calcular tensiones
!
! 3 : Calcular la matriz de rigidez
!
! 4 : Número de variables de estado
!
! 5 : Preguntar propiedades de la matriz
!
! 6 : Calcular la matriz de rigidez elástica del
!       !material
!
! Argumentos:
! I/O   Type
! IDTask I   I   : Ver arriba
! iMod   I   I   : Número de modelo (1..10)
! iSUndr I   I   : =1 para no drenado, =0 en otro caso
! iStep  I   I   : Número de paso global
! iter   I   I   : Número de iteración global
! iel    I   I   : Número de elemento global
! Int    I   I   : Número de punto de integración global
! X      I   R   : Posición X del punto de integración
! Y      I   R   : Posición Y del punto de integración
! Z      I   R   : Posición Z del punto de integración
! Time0  I   R   : Tiempo al inicio del paso de cálculo
! dTime  I   R   : Incremento de tiempo
! Props  I   R()  : Lista con los parámetros del modelo
! Sig0   I   R()  : Tensiones al inicio del paso de cálculo
! Swp0   I   R   : Exceso de presión de poros al inicio del paso de
!                   !cálculo
! StVar0 I   R()  : Variable de estado al inicio del paso de cálculo
! dEps   I   R()  : Incremento de deformación
!
! --- Variables locales
!Prs_E : Tensiones principales trial (compresión positiva)
!Prs    : Tensiones principales al final del paso de cálculo (compresión
positiva)
!Si     : Tensiones principales trial (compresión negativa)
!XN(i)  : Autovectores de SigE (xx-yy-zz) = Prs_E (1-2-3)
!
Dimension dSig(6), dSig1(6), dSig2(6), dSig_med(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3),
xN10(3), xN20(3), xN30(3), &
xN1_med(3), xN2_med(3), xN3_med(3), Prs_E(3), Prs(3), Prs_0(3), Prs_2(3), &
xSig_E(6), Sig2(6), DifSig(6), DifSig2(6), dEps_e1(6), dEps_pl(6),
Sig_dev_aux(6), Eps_dev_aux(6), Sig_dev_aux_0(6), Eps_dev_aux_0(6)
!Prs_med(3),
!
Dimension xH_T(6), d_xH_T(6), xH_T_norm(6), xH_T_new(6)
Dimension eps_e_R_dev(6), eps_R_dev(6), eps_e_DR(6), eps_DR_dev(6),
eps_DR_dev_norm(6)
Dimension eps(6), eps_dev(6), eps_dev_new(6), eps_e(6), eps_e_dev(6),
eps_e_DR_new_dev(6), eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(6)
Dimension d_eps_e(6), d_eps_dev(6), d_eps_dev_norm(6), d_eps_dev_aux(6),
d_eps_e_aux1(6), d_eps_e_aux2(6), d_eps_e_aux3(6)
Dimension xH_M(6), xE_M(6), xE_M(6) !en proceso iterativo
!
! i_model = 4
! pi      = 3.1415926535d0
! Rad     = pi/180d0
! io      = 0
! ttol    = 1d-10
! nStatV  = 62
! num_EL  = 11!número de elemento en debugging
!
! Dimension Props(*), Sig0(*), StVar0(*), dEps(*), D(6,6), D3(3,3), Dinv(6,6),
dD(6,6), D_new(6,6), Dinv_new (6,6), &
Sig(*), Sig_med(6), StVar(*)
!D_med(6,6)
!
! --- Variables locales
!Prs_E : Tensiones principales trial (compresión positiva)
!Prs    : Tensiones principales al final del paso de cálculo (compresión
positiva)
!Si     : Tensiones principales trial (compresión negativa)
!XN(i)  : Autovectores de SigE (xx-yy-zz) = Prs_E (1-2-3)
!
! Dimension dSig(6), dSig1(6), dSig2(6), dSig_med(6), xN1(3), xN2(3), xN3(3),
xN10(3), xN20(3), xN30(3), &
xN1_med(3), xN2_med(3), xN3_med(3), Prs_E(3), Prs(3), Prs_0(3), Prs_2(3), &
xSig_E(6), Sig2(6), DifSig(6), DifSig2(6), dEps_e1(6), dEps_pl(6),
Sig_dev_aux(6), Eps_dev_aux(6), Sig_dev_aux_0(6), Eps_dev_aux_0(6)
!Prs_med(3),
!
! Dimension xH_T(6), d_xH_T(6), xH_T_norm(6), xH_T_new(6)
! Dimension eps_e_R_dev(6), eps_R_dev(6), eps_e_DR(6), eps_DR_dev(6),
! eps_DR_dev_norm(6)
! Dimension eps(6), eps_dev(6), eps_dev_new(6), eps_e(6), eps_e_dev(6),
! eps_e_DR_new_dev(6), eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(6)
! Dimension d_eps_e(6), d_eps_dev(6), d_eps_dev_norm(6), d_eps_dev_aux(6),
! d_eps_e_aux1(6), d_eps_e_aux2(6), d_eps_e_aux3(6)
! Dimension xH_M(6), xE_M(6), xE_M(6) !en proceso iterativo
!
! i_model = 4
! pi      = 3.1415926535d0
! Rad     = pi/180d0
! io      = 0
! ttol    = 1d-10
! nStatV  = 62
! num_EL  = 11!número de elemento en debugging
!

```

```

num_GAUSS = 4 ! número de elemento en debugging
If ((!E1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
  ideb = 1 ! para debugging
  ideb2 = 1
Else
  ideb = -1
  ideb2 = -1
End If

!Contenido de Props()
! I/O Type
! 1: xKs_ref I R Módulo volumétrico elástico secante
! 1: Gs0_ap_180_H_ref I R Módulo de corte máximo aparente para una
!reversión de 180º
! 3: Gs0_ap_90_H_ref I R Módulo de corte máximo aparente para una
!reversión de 90º
! 4: gamma_07 I R Valor de la deformación de corte
!octaédrica para G=0,722Gs0_ap_180_H_ref
! 5: p1_ref I R Presión de referencia para la rigidez
!volumétrica
! 6: p2_ref I R Presión de referencia para la rigidez de
!corte
! 7: xm1 I R Potencia de la dependencia tensional de la
!rigidez volumétrica
! 8: xm2 I R Potencia de la dependencia tensional de la
!rigidez de corte
! 9: E50_ref I R Rigidez triaxial secante (superficie cono)
! 10: Eoed_ref I R Rigidez edométrica tangente (superficie
!cap)
! 11: Eur_ref I R Rigidez en descarga/recarga
! 12: xm I R Potencia de la dependencia tensional de
!E50, Eoed, Et,ur y Ei
! 13: p_ref I R Presión de referencia para E50, Eoed, Et,ur,
!Ei y H
! 14: c I R Cohesión efectiva
! 15: phi I R Ángulo de fricción efectivo
! 16: psi I R Ángulo de dilatación
! 17: xK0_nc I R K0 (normalmente consolidado)
! 18: R_f I R Ratio de rotura
! 19: sigma_trac I R Máxima tensión de tracción (aplica sobre
!Prs, tracción +, compresión -)
! 20: Ei_ref_inter I R Módulo de rigidez inicial (parámetro
!interno)
! 21: aifa I R Parámetro que controla la forma de la
!superficie tipo cap (parámetro interno)
! 22: beta I R Parámetro que controla la evolución de la
!variable p_p (parámetro interno)
! 23: xNu_min I R Valor mínimo del coeficiente de Poisson

! 24: OCR I R ! (parámetro avanzado)
! 25: Reini_Stiff I R Índice de sobreconsolidación
! Cuando =1, se reinician las variables de
! historia elástica

! Prs_E I R(3) : Tensiones principales del predictor
!elástico S1 >= S2 >= S3
! Prs O R(3) : Tensiones principales resultantes
! ip1 O I : Indicador de punto plástico
! 1 : Superficie límite de Coulomb
! 2 : Superficie de tracción (vértice)
! 3 : Punto plástico en CAP
! 4 : Punto plástico en HS_CAP
! 5 : Punto plástico en HS

!Contenido de StVar0
! I/O Type
! 1: gamma_p I/O R Variable de endurecimiento HS
! 2: p_p I/O R Variable de endurecimiento CAP
! 3: Gs0_ap,alfa,H I/O R Valor de la rigidez máxima para la
!curva de degradación activa alfa
! 4-9: xh_T I/O R Tensor de historia de deformaciones
!desviadoras totales
! 10-15: eps I/O R Tensor de deformaciones totales
! 16-21: eps_e I/O R Tensor de deformaciones elásticas
! 22-27: eps_R,dev I/O R Tensor de deformaciones totales
!desviadoras en el último punto de
!reversión R que da lugar a un nuevo
!ciclo
! 28-33: eps_e_R,dev I/O R Tensor de deformaciones elásticas
!desviadoras en el último punto de
!reversión R que da lugar a un nuevo
!ciclo
! 34-39: xH_M I/O R Vector que almacena el valor de
!||xh_T||=xh_T_mod en los puntos de
!reversión R que dan lugar a nuevos
!ciclos
! 40-45: xE_M I/O R Vector que almacena el valor de
!||eps_dev||=eps_dev_mod en los puntos
!de reversión R que dan lugar a nuevos
!ciclos
! 46-51: xE_e_M I/O R Vector que almacena el valor de
!||eps_e_dev||=eps_e_dev_mod en los
!puntos de reversión R que dan lugar a
!nuevos ciclos
! 52: Gmin I/O R Valor mínimo histórico del módulo de
!corte secante aparente con xi=1

!El resto de variables de historia no son requeridas en el cálculo, y
!únicamente se definen para visualizar los resultados
!53: Gs,ap,ref - Gt,ap,ref Valor actual del módulo de corte

```

```

!secante (si se está en Dominio 1) o
!del módulo de corte tangente (si se
!está en el Dominio 2)
!Módulo de corte secante aparente en
!descarga/recarga
!Módulo de corte tangente aparente en
!descarga/recarga
!Módulo de corte secante aparente en
!carga noval
!Módulo de corte tangente aparente en
!carga noval
!Deformación desviadora octaédrica
!histórica
!gamma_oct_H=((4/3)^0.5)*xh_T_mod
!Deformación desviadora total respecto
!al último punto de reversión
!gamma_oct_DR = gamma_oct - gamma_oct_R
!Contracción de los tensores
!normalizados xh_I_norm y
!d_eps_dev_norm, igual al valor de
!cos_alfa
!Valor de hNorm:depsdevnorm = cos_alfa
!a partir del cual se producen
!reversiones en la curva de degradación
!actual
!Relación entre Gmin y Gt_ur_ref

!54: Gs,ap,ref,(un/re)load
!55: Gt,ap,ref,(un/re)load
!56: Gt,ap,ref,load
!57: Gt,ap,ref,load
!58: gamma_oct_H
!59: gamma_oct_DR
!60: hThnorm:depsdevnorm
!61: cos_alfa_rev
!62: Gm

If (IDTask .EQ. 1) Then !Inicialización de variables
If ((!iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iE1:', iE1, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriIvl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E0_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)

!Cálculo variables en primer paso de cálculo
p_eq = max((1d0/3d0)*(1d0+2d0*xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (1d0/3d0)*((-
Sig0(1))+(-Sig0(2))+(-Sig0(3))))
q_eq = max((1d0-xk0_nc)*(-Sig0(2))*OCR, (-Sig0(1))-(-Sig0(3)))
p_p_eq = ((p_eq**2d0)+(q_eq/alfa)**2d0)**0.5d0d0
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)-Sig0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)-Sig0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

gamma_p_eq = (2d0*q_eq/Ei)*qa/(qa-q_eq)-2d0*q_eq/Eur

!Variables de endurecimiento
StVar0(1) = max(StVar0(1), max(1d-8, gamma_p_eq))
StVar0(2) = min(min(StVar0(2), min((-1d0)*c*cos(phi)/sin(phi), -10d0)), -
p_p_eq)

!Valor Gs0_ap_alfa_H
If ((StVar0(3) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) Then
StVar0(3) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(3) = StVar0(3)
End If

!Tensor h
StVar0(4) = StVar0(4)

```

```

StVar0(5) = StVar0(5)
StVar0(6) = StVar0(6)
StVar0(7) = StVar0(7)
StVar0(8) = StVar0(8)
StVar0(9) = StVar0(9)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(4) = 0d0
StVar0(5) = 0d0
StVar0(6) = 0d0
StVar0(7) = 0d0
StVar0(8) = 0d0
StVar0(9) = 0d0
End if

!Tensor eps
StVar0(10) = StVar0(10)
StVar0(11) = StVar0(11)
StVar0(12) = StVar0(12)
StVar0(13) = StVar0(13)
StVar0(14) = StVar0(14)
StVar0(15) = StVar0(15)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(10) = 0d0
StVar0(11) = 0d0
StVar0(12) = 0d0
StVar0(13) = 0d0
StVar0(14) = 0d0
StVar0(15) = 0d0
End if

!Tensor eps_e
StVar0(16) = StVar0(16)
StVar0(17) = StVar0(17)
StVar0(18) = StVar0(18)
StVar0(19) = StVar0(19)
StVar0(20) = StVar0(20)
StVar0(21) = StVar0(21)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(16) = 0d0
StVar0(17) = 0d0
StVar0(18) = 0d0
StVar0(19) = 0d0
StVar0(20) = 0d0
StVar0(21) = 0d0
End if

StVar0(5) = StVar0(5)
StVar0(6) = StVar0(6)
StVar0(7) = StVar0(7)
StVar0(8) = StVar0(8)
StVar0(9) = StVar0(9)

!Tensor eps_R_dev
StVar0(22) = StVar0(22)
StVar0(23) = StVar0(23)
StVar0(24) = StVar0(24)
StVar0(25) = StVar0(25)
StVar0(26) = StVar0(26)
StVar0(27) = StVar0(27)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(22) = 0d0
StVar0(23) = 0d0
StVar0(24) = 0d0
StVar0(25) = 0d0
StVar0(26) = 0d0
StVar0(27) = 0d0
End if

!Tensor eps_e_R_dev
StVar0(28) = StVar0(28)
StVar0(29) = StVar0(29)
StVar0(30) = StVar0(30)
StVar0(31) = StVar0(31)
StVar0(32) = StVar0(32)
StVar0(33) = StVar0(33)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(28) = 0d0
StVar0(29) = 0d0
StVar0(30) = 0d0
StVar0(31) = 0d0
StVar0(32) = 0d0
StVar0(33) = 0d0
End if

!Variable H con M=6
StVar0(34) = max(StVar0(34), 0d0)
StVar0(35) = max(StVar0(35), 0d0)
StVar0(36) = max(StVar0(36), 0d0)
StVar0(37) = max(StVar0(37), 0d0)
StVar0(38) = max(StVar0(38), 0d0)
StVar0(39) = max(StVar0(39), 0d0)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(34) = 0d0
StVar0(35) = 0d0
StVar0(36) = 0d0
StVar0(37) = 0d0
StVar0(38) = 0d0
StVar0(39) = 0d0
End if

```



```

!Variable E con M=6
StVar0(40) = max(StVar0(40), 0d0)
StVar0(41) = max(StVar0(41), 0d0)
StVar0(42) = max(StVar0(42), 0d0)
StVar0(43) = max(StVar0(43), 0d0)
StVar0(44) = max(StVar0(44), 0d0)
StVar0(45) = max(StVar0(45), 0d0)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(40) = 0d0
StVar0(41) = 0d0
StVar0(42) = 0d0
StVar0(43) = 0d0
StVar0(44) = 0d0
StVar0(45) = 0d0
End if

!Variable E_e con M=6
StVar0(46) = max(StVar0(46), 0d0)
StVar0(47) = max(StVar0(47), 0d0)
StVar0(48) = max(StVar0(48), 0d0)
StVar0(49) = max(StVar0(49), 0d0)
StVar0(50) = max(StVar0(50), 0d0)
StVar0(51) = max(StVar0(51), 0d0)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(46) = 0d0
StVar0(47) = 0d0
StVar0(48) = 0d0
StVar0(49) = 0d0
StVar0(50) = 0d0
StVar0(51) = 0d0
End if

!Valor Gmin
If ((StVar0(52) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) THEN
StVar0(52) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(52) = StVar0(52)
End If

!Valor Gs,ap,ref - Gt,ap,ref
If ((StVar0(53) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) THEN
StVar0(53) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(53) = StVar0(53)
End If

!Valor Gs,ap,ref,(un/re)load
If ((StVar0(54) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) THEN
StVar0(54) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(54) = StVar0(54)
End If

!Valor Gt,ap,ref,(un/re)load
If ((StVar0(55) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) THEN
StVar0(55) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(55) = StVar0(55)
End If

!Valor Gs,ap,ref,load
If ((StVar0(56) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) THEN
StVar0(56) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(56) = StVar0(56)
End If

!Valor Gt,ap,ref,load
If ((StVar0(57) .LT. 1d0) .OR. (Reini_Stiff .EQ. 1)) THEN
StVar0(57) = Gs0_ap_180_H_ref
Else
StVar0(57) = StVar0(57)
End If

!Valor de gamma_oct_H
StVar0(58) = StVar0(58)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(58) = 0d0
End if

!Valor de gamma_oct_DR
StVar0(59) = StVar0(59)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(59) = 0d0
End if

!Valor de hTnorm:depsdevnorm
StVar0(60) = StVar0(60)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) THEN
StVar0(60) = 1d0
End if

!Valor de cos_alfa_rev
StVar0(61) = StVar0(61)

```

```

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
StVar0(61) = 1d0
End If

!Valor de Gm
StVar0(62) = StVar0(62)

If (Reini_Stiff .EQ. 1) Then
xKt_ref = xKs_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xKt_ref**Eur_ref/(9d0*xKt_ref-Eur_ref)
StVar0(62) = Gs0_ap_180_H_ref/Gt_ur_ref
End If

Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatV) !Copia de StVar0 en StVar
End If ! IDTask = 1

If (IDTask .EQ. 2) Then !Cálculo de tensiones

If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
Write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEL:', iEL, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iIter:', iIter
Call WriteIvl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If

!Parámetros y variables de estado
Call CopyRVec(StVar0, StVar, nStatV) !Copia de StVar0 en StVar
xKs_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xK0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)

sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xKtmKc = Props(22) !Versión Plaxis 2D 2011 y posteriores
xNu_min = Props(23)

w = 100d0
!Variables de estado
gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = (-1d0)*StVar0(2)
Gs0_ap_alfa_H = max(min(StVar0(3), Gs0_ap_180_H_ref), Gs0_ap_90_H_ref)
xh_T(1) = StVar0(4)
xh_T(2) = StVar0(5)
xh_T(3) = StVar0(6)
xh_T(4) = StVar0(7)
xh_T(5) = StVar0(8)
xh_T(6) = StVar0(9)

eps(1) = StVar0(10)
eps(2) = StVar0(11)
eps(3) = StVar0(12)
eps(4) = StVar0(13)
eps(5) = StVar0(14)
eps(6) = StVar0(15)

eps_e(1) = StVar0(16)
eps_e(2) = StVar0(17)
eps_e(3) = StVar0(18)
eps_e(4) = StVar0(19)
eps_e(5) = StVar0(20)
eps_e(6) = StVar0(21)

eps_R_dev(1) = StVar0(22)
eps_R_dev(2) = StVar0(23)
eps_R_dev(3) = StVar0(24)
eps_R_dev(4) = StVar0(25)
eps_R_dev(5) = StVar0(26)
eps_R_dev(6) = StVar0(27)

eps_e_R_dev(1) = StVar0(28)
eps_e_R_dev(2) = StVar0(29)
eps_e_R_dev(3) = StVar0(30)
eps_e_R_dev(4) = StVar0(31)
eps_e_R_dev(5) = StVar0(32)
eps_e_R_dev(6) = StVar0(33)

xH_M(1) = StVar0(34)
xH_M(2) = StVar0(35)

```

```

xH_M(3) = StVar0(36)
xH_M(4) = StVar0(37)
xH_M(5) = StVar0(38)
xH_M(6) = StVar0(39)

xE_M(1) = StVar0(40)
xE_M(2) = StVar0(41)
xE_M(3) = StVar0(42)
xE_M(4) = StVar0(43)
xE_M(5) = StVar0(44)
xE_M(6) = StVar0(45)

xE_e_M(1) = StVar0(46)
xE_e_M(2) = StVar0(47)
xE_e_M(3) = StVar0(48)
xE_e_M(4) = StVar0(49)
xE_e_M(5) = StVar0(50)
xE_e_M(6) = StVar0(51)

Gmin = StVar0(52)

!Caso no drenado
If (IsUndr = EQ. 1) Then
dEpsV = dEps(1)+dEps(2)+dEps(3)
dSwp = BulkW*dEpsV
Else
Swp = Swp0+dSwp
End If

iOpt = 0
Call PrnSig(iOpt, Sig0, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1) = S10*(-1d0)
Prs_0(2) = S20*(-1d0)
Prs_0(3) = S30*(-1d0)
p_0 = max((Prs_0(1)+Prs_0(2)+Prs_0(3))/3d0, 1d0)

Call WriVec(ideb, 'Prs_0', Prs_0, 3)

!Cálculo módulo dEps
Call modul(dEps, dEps_mod)

!Cálculo d_eps_dev
d_eps_oct = (dEps(1)+dEps(2)+dEps(3))/3d0
d_eps_dev(1) = dEps(1)-d_eps_oct
d_eps_dev(2) = dEps(2)-d_eps_oct
d_eps_dev(3) = dEps(3)-d_eps_oct
d_eps_dev(4) = dEps(4)
d_eps_dev(5) = dEps(5)
d_eps_dev(6) = dEps(6)

!Cálculo de |d_eps_dev||=d_eps_dev_mod y d_eps_dev_norm
Call modul(d_eps_dev, d_eps_dev_mod)
Call norm(d_eps_dev, d_eps_dev_norm)

!Cálculo eps_dev
eps_oct = (eps(1)+eps(2)+eps(3))/3d0
eps_dev(1) = eps(1)-eps_oct
eps_dev(2) = eps(2)-eps_oct
eps_dev(3) = eps(3)-eps_oct
eps_dev(4) = eps(4)
eps_dev(5) = eps(5)
eps_dev(6) = eps(6)
Call modul(eps_e_dev, eps_e_dev_mod)

!Cálculo eps_e_dev
Call modul(eps_e, eps_e_mod)
eps_e_oct = (eps_e(1)+eps_e(2)+eps_e(3))/3d0
eps_e_dev(1) = eps_e(1)-eps_e_oct
eps_e_dev(2) = eps_e(2)-eps_e_oct
eps_e_dev(3) = eps_e(3)-eps_e_oct
eps_e_dev(4) = eps_e(4)
eps_e_dev(5) = eps_e(5)
eps_e_dev(6) = eps_e(6)

!Cálculo eps_e_R_dev_mod
Call modul(eps_e_R_dev, eps_e_R_dev_mod)
Call modul(eps_e_R_dev, eps_e_R_new_dev_mod) !Para posterior cálculo de
actualización de variables

!Cálculo eps_dev(n+1)
eps_dev_new(1) = eps_dev(1)+d_eps_dev(1)
eps_dev_new(2) = eps_dev(2)+d_eps_dev(2)
eps_dev_new(3) = eps_dev(3)+d_eps_dev(3)
eps_dev_new(4) = eps_dev(4)+d_eps_dev(4)
eps_dev_new(5) = eps_dev(5)+d_eps_dev(5)
eps_dev_new(6) = eps_dev(6)+d_eps_dev(6)

!Cálculo Gamma_oct(n)
Call modul(eps_dev, eps_dev_mod)
gamma_oct = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_mod

!Cálculo Gamma_oct_R(n)
Call modul(eps_R_dev, eps_R_dev_mod)
gamma_oct_R = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_R_dev_mod
!Para posterior cálculo de actualización de
variables

!Cálculo Gamma_oct(n+1)
Call modul(eps_dev_new, eps_dev_new_mod)
gamma_oct_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_new_mod

```

```

!Cálculo Gamma_oct_DR(n)
gamma_oct_DR = (gamma_oct-gamma_oct_R)

!Cálculo Gamma_oct_DR(n+1)
gamma_oct_DR_new = (gamma_oct_new-gamma_oct_R)
!Cálculo eps_DR_dev(n+1)
eps_DR_dev(1) = eps_dev(1)-eps_R_dev(1)
eps_DR_dev(2) = eps_dev(2)-eps_R_dev(2)
eps_DR_dev(3) = eps_dev(3)-eps_R_dev(3)
eps_DR_dev(4) = eps_dev(4)-eps_R_dev(4)
eps_DR_dev(5) = eps_dev(5)-eps_R_dev(5)
eps_DR_dev(6) = eps_dev(6)-eps_R_dev(6)

!Cálculo eps_DR_dev_mod y eps_DR_dev_norm
Call modul(eps_DR_dev, eps_DR_dev_mod)
Call norm(eps_DR_dev, eps_DR_dev_norm)

!Cálculo factor eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm =
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm+d_eps_dev_norm(i)*eps_DR_dev_norm(i)
End Do

If (((d_eps_dev_mod .LT. dEps_mod*1d-2) .OR. (iIter .EQ. 0)) .OR.
(d_eps_dev_mod .LT. 1d-12)) Then
eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm = 1d0
End If

!Actualización de xi
xi1 = 1d0 !Para cálculo de Gm
xi2 = 2d0 !Para cálculo rigidez en carga/descarga/descarga

!Cálculo de ||xh_I(n)||=xh_T_mod y xh_I_norm
Call modul(xh_T, xh_T_mod)
Call norm(xh_T, xh_I_norm)

!Cálculo gamma_alfa_ur(n)
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xkt_ref*Eur_ref/(9d0*xkt_ref-Eur_ref)
gamma_alfa_ur = (xi2*gamma_0770.385d0)*(((Gs0_ap_alfa_H/Gt_ur_ref)**0.5d0)-
1d0)

!Cálculo Gs0_ap_alfa(n)
Gs0_ap_alfa = Gs0_ap_alfa_H*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2

!Cálculo gamma_oct_H
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)

!Cálculo de Gt_ur(n)
Gt_ur = Gt_ur_ref*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2

!Cálculo ro_alfa(n)
ro_alfa = gamma_oct_H/gamma_alfa_ur

!Cálculo cos_alfa_rev(n)
If (xh_T_mod .LT. 1d-10) Then
cos_alfa_rev = 0d0
Else
cos_alfa_rev = 1d0/(((d_eps_dev_mod/xh_T_mod)*(1d0-ro_alfa**w)+1d0)
End If

!Cálculo factor xh_I_norm_d_eps_dev_norm para criterio de reversión
xh_I_norm_d_eps_dev_norm = 0d0
Do i=1,6
xh_I_norm_d_eps_dev_norm =
xh_I_norm_d_eps_dev_norm+xh_I_norm(i)*d_eps_dev_norm(i)
End Do

If (((d_eps_dev_mod .LT. dEps_mod*1d-2) .OR. (iIter .EQ. 0)) .OR.
(d_eps_dev_mod .LT. 1d-12)) Then
xh_I_norm_d_eps_dev_norm = 1d0
End If

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H(n)
d_Gs0_ap_alfa_H = 0d0
If ((xh_I_norm_d_eps_dev_norm .LE. 1d0) .AND. (xh_I_norm_d_eps_dev_norm .GT.
(cos_alfa_rev - 1d-2))) Then
d_Gs0_ap_alfa_H = 0d0
Else If ((xh_I_norm_d_eps_dev_norm .LE. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(xh_I_norm_d_eps_dev_norm .GT. 0d0)) Then
d_Gs0_ap_alfa_H = (Gs0_ap_90_H_ref-Gs0_ap_alfa_H)*(cos_alfa_rev-
xh_I_norm_d_eps_dev_norm)
Else If (xh_I_norm_d_eps_dev_norm .LE. 0d0) Then
d_Gs0_ap_alfa_H = (Gs0_ap_90_H_ref-Gs0_ap_alfa_H)+(Gs0_ap_90_H_ref-
Gs0_ap_180_H_ref)*xh_I_norm_d_eps_dev_norm
End If

Call WriVal(ideb, 'd_Gs0_ap_alfa_H', d_Gs0_ap_alfa_H)

!Cálculo d_xh_I(n)
Do i=1,6
d_xh_I(i) = 0d0
End Do

If (((xh_I_norm_d_eps_dev_norm .GT. 0d0) .AND. (d_eps_dev_mod .GT.
dEps_mod*1d-2)) .AND. (d_eps_dev_mod .GT. 1d-12)) Then
Do i=1,6

```

```

d_xh_T(i) = d_eps_dev(i)-xh_T(i)-
xh_T_norm d_eps_dev_norm*(ro_alfa**w)*d_eps_dev_mod-xh_T_mod*xh_T_norm(i)
If (abs(d_xh_T(i)) .LT. 1d-10) Then
d_xh_T(i) = 0d0
End If
End Do
Else If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LE. 0d0) Then
Do i=1,6
d_xh_T(i) = d_eps_dev(i)-xh_T(i)
If (abs(d_xh_T(i)) .LT. 1d-10) Then
d_xh_T(i) = 0d0
End If
End Do
End If
!Cálculo xh_T_new y ||xh_T_new|| !Cuando d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2
entonces d_xh_T(i) = 0d0
xh_T_new(1) = xh_T(1) + d_xh_T(1)
xh_T_new(2) = xh_T(2) + d_xh_T(2)
xh_T_new(3) = xh_T(3) + d_xh_T(3)
xh_T_new(4) = xh_T(4) + d_xh_T(4)
xh_T_new(5) = xh_T(5) + d_xh_T(5)
xh_T_new(6) = xh_T(6) + d_xh_T(6)
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)

gamma_oct_H_new = ((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_new_mod

If (gamma_oct_H_new .GT. gamma_alfa_ur) Then
Do i=1,6
xh_T_new(i) = xh_T_new(i)*(gamma_alfa_ur/((4d0/3d0)**0.5d0))/xh_T_new_mod
d_xh_T(i) = xh_T_new(i)-xh_T(i)
End Do
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)
gamma_oct_H_new = gamma_alfa_ur
End If
Call modul(xh_T_new, xh_T_new_mod)

!Cálculo d_gamma_oct_H(n+1)
gamma_oct_H = gamma_oct_H_new
gamma_oct_H_new = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)
d_gamma_oct_H = gamma_oct_H_new-gamma_oct_H

StVar(58) = gamma_oct_H_new
StVar(59) = gamma_oct_DR_new
StVar(60) = xh_T_norm_d_eps_dev_norm
StVar(61) = cos_alfa_rev

```

```

!Cálculo d_Gs0_ap_alfa_H_CORR(n) !Gs_ap no puede decrecer tras una reversión
(debe subir por la curva Gs0_ap_alfa_H o cambiar de curva reduciendo
Gs0_ap_alfa_H y gamma_oct_H de manera que Gs(n+1)>Gs)
d_Gs0_ap_alfa_H_CORR = d_Gs0_ap_alfa_H
If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) Then
Gs_ap_prueba =
((Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H)*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2)/(1d0+0.3
85d0*gamma_oct_H_new/(xi2*gamma_07))
Call WriVal(ideb, 'd_Gs0_ap_alfa_H', d_Gs0_ap_alfa_H)
Gs_ap = Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi2*gamma_07))
If (Gs_ap_prueba .LT. (Gs_ap - 1d-1)) Then
d_Gs0_ap_alfa_H_CORR =
max(Gs_ap*(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi2*gamma_07)))/((max(p_0,p2_ref*0.1d0)
/p2_ref)**xm2), Gs0_ap_90_H_ref) -Gs0_ap_alfa_H !Aislar d_Gs0_ap_alfa_H de
expresión anterior
End If
End If

!Actualización Gmin (xi1=1) (i=1) y Cálculo Gt (xi2=2) (i=2)
!Debe tenerse en cuenta que, en caso de que no haya reversión, gamma_oct_H es
aproximadamente igual a gamma_oct_DR (para valores altos del parámetro w).
Do i=1,2
If (i .EQ. 1) Then
xi = xi1
Else If (i .EQ. 2) Then
xi = xi2
End If
If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(eps_DR_dev_mod .GT. 1d-8)) Then
Gt_ap_ref =
(Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H_CORR)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi*gamma_07
)**2d0)
If (xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LE. 0d0) Then
Gt_ap_ref = Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H_CORR
End If
If (i .EQ. 2) Then
Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 1', Gt_ap_ref)
End If
Else If (((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .LT.
gamma_alfa_ur))) .AND. &
(d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2)) .AND. (d_eps_dev_mod .GT. 1d-12)) Then
G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(xi*gamma_07))
G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
Gt_ap_ref = min(abs((G_A*gamma_oct_DR_new-
G_B*gamma_oct_DR)/(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)), StVar0(55))
If (i .EQ. 2) Then
Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 2', Gt_ap_ref)
End If

```

```

Else If (((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
((abs(gamma_oct_DR) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GT.
gamma_alfa_ur) .OR. &
(abs(gamma_oct_DR_new) .LE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR) .GT.
gamma_alfa_ur))) .AND. (d_eps_dev_mod .GT. dEps_mod*1d-2)) .AND.
(d_eps_dev_mod .GT. 1d-12)) Then
  G_A = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(xi*gamma_07))
  G_B = (Gs0_ap_alfa_H)/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi*gamma_07))
  Gt_ap_ref1 = (G_A*gamma_alfa_ur-
  G_B*abs(gamma_oct_DR))/abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR) ! gamma_oct_DR aprox.
  gamma_alfa_ur
  Gt_ap_ref2 = (Gt_ur_ref*(abs(gamma_oct_DR_new)-
  gamma_alfa_ur))/abs(gamma_oct_DR_new-gamma_oct_DR)
  Gt_ap_ref = min(Gt_ap_ref1 + Gt_ap_ref2, StVar0(55))
  If (i .EQ. 2) Then
    Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 3', Gt_ap_ref)
  End If
Else If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .GE. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(((abs(gamma_oct_DR) .GE. gamma_alfa_ur) .AND. (abs(gamma_oct_DR_new) .GE.
gamma_alfa_ur) .OR. (gamma_oct_H .GT. gamma_alfa_ur))) Then
  Gt_ap_ref = Gt_ur_ref
  If (i .EQ. 2) Then
    Call WriVal(ideb, 'Gt_ap_ref - caso 4', Gt_ap_ref)
  End If
Else
  If (i .EQ. 2) Then
    Gt_ap_ref = StVar0(55)
  End If
  If (i .EQ. 2) Then
    Call WriVal(ideb, 'StVar0(55)', Gt_ap_ref)
  End If
End If
If (Gt_ap_ref .GT. Gs0_ap_180_H_ref) Then
  Gt_ap_ref = Gs0_ap_180_H_ref
Else If (Gt_ap_ref .LT. Gt_ur_ref) Then
  Gt_ap_ref = Gt_ur_ref
End If
If (i .EQ. 1) Then
  Gmin = min(Gmin, Gt_ap_ref)
  Gmin = max(Gmin, Gt_ur_ref)
StVar(52) = Gmin
Gm = min(Gmin/Gt_ur_ref, 10d0)
If (Gm .LT. 1d0) Then
  Gm = 1d0
End If
StVar(62) = min(max(Gt_ap_ref/Gt_ur_ref, 1d0), Gs0_ap_180_H_ref/Gt_ur_ref)
End If
If (i .EQ. 2) Then
  StVar(55) = max(Gt_ap_ref, Gt_ur_ref)
  Gt
  = Gt_ap_ref*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2

```

```

Call WriVal(ideb, 'Gt', Gt)
End If
End Do

!régimen no lineal (npi=0) o lineal (npi=1)
If ((abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) .OR.
((eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(eps_DR_dev_mod .GT. 1d-8))) Then
  npi = 0
Else
  npi = 1
End If

!Cálculo Gs_ap(n)/Gt_ur(n) y Ks(n)/Kt(n)
If (abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) Then
  G = Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(xi2*gamma_07))
  Gs_aux_e1 = G
  G_old = Gs_aux_e1
  xKs = xKs_ref*((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
  xK_old = xKs
  xK = xKs
  If (((iIter .EQ. 0) .OR. (d_eps_dev_mod .LT. dEps_mod*1d-2)) .OR.
  (d_eps_dev_mod .LT. 1d-12)) .OR. (p_0 .LT. 1d0)) .OR. (IsUndr .EQ. 1)) .OR.
  (Prs_0(3) .LT. 1d0)) Then
    If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
      xK = xKs*(1d0+eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct))
    G = Gt
  Else
    xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
  G = Gt
  End If
End If
Call WriVal(ideb, 'Gs_ap APLICADO con gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur', G)
Call WriVal(ideb, 'xKs APLICADO con gamma_oct_DR .LE. gamma_alfa_ur', xK)
Else
  G = Gt_ur
  Gs_aux_e1 =
  ((Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_alfa_ur/(xi2*gamma_07))))*gamma_alfa_ur+Gt_ur*
  (abs(gamma_oct_DR)-gamma_alfa_ur)/abs(gamma_oct_DR)
  G_old = Gs_aux_e1
  xKs = xKs_ref*((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
  xK_old = xKs
  If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
    xK = xKs*(1d0+eps_e_oct/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct))
  Else
    xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
  End If
Call WriVal(ideb, 'Gt APLICADO con gamma_oct_DR .GT. gamma_alfa_ur', G)
Call WriVal(ideb, 'xKt APLICADO con gamma_oct_DR .GT. gamma_alfa_ur', xK)
End If

```

```

If (((eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(eps_DR_dev_mod.GT. 1d-8)) .AND. (iStep.EQ. 1)) Then
G = Gt
Gs =
((Gs0_ap_alfa_H+d_Gs0_ap_alfa_H_CORR)*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2)/(1d
0+0.385d0*gamma_oct_H_new/(x12*gamma_07))
Gs_aux_e1 = Gs
G_old = Gs0_ap_alfa/(1d0+0.385d0*gamma_oct_H/(x12*gamma_07))
xK = xKs_ref*((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
xK_old = xKs
If (abs((((-p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)).GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
xK = xKs*(1d0+eps_e_oct/(((-p_0)/(3d0*xm1*xKs)))-eps_e_oct)
Else
xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
End If
Call WriVal(ideb, 'Gs_ap APLICADO con gamma_oct_H_new tras reversión', G)
End If

StVar(53) = G*((max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**((-1d0*xm2))
StVar(54) = Gs_aux_e1*((max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**((-1d0*xm2))

d_eps_e_aux1(1) = dEps(1)
d_eps_e_aux1(2) = dEps(2)
d_eps_e_aux1(3) = dEps(3)
d_eps_e_aux1(4) = dEps(4)
d_eps_e_aux1(5) = dEps(5)
d_eps_e_aux1(6) = dEps(6)

error_d_eps_e_aux = 1d0
error_d_eps_e_aux_re1 = 1d0

iterations = 1

Do while ((error_d_eps_e_aux.GT. max(dEps_mod*1d-2, 1d-8)) .AND.
(error_d_eps_e_aux_re1.GT. 1d-3))

d_eps_e_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0

!Cálculo d_Ks(n) cuando gamma_oct_DR.LE. gamma_alfa_ur
If (abs((((-p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)).LT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
d_Ks = 0d0
Else
d_Ks = xK_old*d_eps_e_oct/(((-p_0)/(3d0*xm1*xK_old))-eps_e_oct)
End If

!Cálculo d_Gs_ap(n) cuando gamma_oct_DR.LE. gamma_alfa_ur
If (abs((((-p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)).LT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
d_Gs_ap = 0d0
Else

```

```

d_Gs_ap = G_old*(((3d0*xm2*xK_old/((-p_0)))*(1d0+eps_e_oct)/(((
p_0)/(3d0*xm1*xK_old))-
eps_e_oct))*d_eps_e_oct+(d_Gs0_ap_alfa_H_CORR/Gs0_ap_alfa_H)-
(0.385d0*G_old*d_gamma_oct_H/(x12*gamma_07*Gs0_ap_alfa)))
End If

!Cálculo matrices elásticas
If (((d_eps_dev_mod.GT. dEps_mod*1d-2) .AND. (d_eps_dev_mod.GT. 1d-12)) .OR.
(d_eps_oct*eps_oct.LT. 0d0)) Then !Para evitar modificar rigidez durante
cargas/descargas isotropas
xK = max(xK,(2d0/3d0)*G*(1d0+xNu_min)/(1d0-2d0*xNu_min))
End If
Call Matriz6_NL(D, xK, G)
Call Matriz3_NL(D3, xK, G)

Call Matriz6_NL(dD, d_Ks, d_Gs_ap)

d_eps_e_aux1_oct = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux1(3))/3d0

!Cálculo eps_e_DR_new_dev
eps_e_DR_new_dev(1) = eps_e_dev(1)+(d_eps_e_aux1(1)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(1)
eps_e_DR_new_dev(2) = eps_e_dev(2)+(d_eps_e_aux1(2)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(2)
eps_e_DR_new_dev(3) = eps_e_dev(3)+(d_eps_e_aux1(3)-d_eps_e_aux1_oct)-
eps_e_R_dev(3)
eps_e_DR_new_dev(4) = eps_e_dev(4)+d_eps_e_aux1(4)-eps_e_R_dev(4)
eps_e_DR_new_dev(5) = eps_e_dev(5)+d_eps_e_aux1(5)-eps_e_R_dev(5)
eps_e_DR_new_dev(6) = eps_e_dev(6)+d_eps_e_aux1(6)-eps_e_R_dev(6)

!Cálculo eps_e_dev_DR_eps_e_oct
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(1) =
eps_e_DR_new_dev(1)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(2) =
eps_e_DR_new_dev(2)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(3) =
eps_e_DR_new_dev(3)+(eps_e_oct+d_eps_e_aux1_oct)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(4) = eps_e_DR_new_dev(4)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(5) = eps_e_DR_new_dev(5)
eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct(6) = eps_e_DR_new_dev(6)

!Cálculo Sig_E_NL
Call MatVec(D, 6, dEps, 6, dSig1)
If (((((((((xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND. &
(eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)))) .OR. &
(iTer.EQ. 0)) .OR. (d_eps_dev_mod.LT. dEps_mod*1d-2)) .OR. (d_eps_dev_mod
.LT. 1d-12)) .OR. &
(abs(gamma_oct_DR).GT. gamma_alfa_ur)) .OR. (p_0.LT. 1d0)) .OR. (Islndr.EQ.
1)) .OR. (Prs_0(3).LT. 1d0)) Then
dSig2(1) = 0d0

```

```

dSig2(2) = 0d0
dSig2(3) = 0d0
dSig2(4) = 0d0
dSig2(5) = 0d0
dSig2(6) = 0d0
Else
!Deben utilizarse deformaciones elásticas, no totales
Call MatVec(dD, 6, eps_e_DR_new_dev_eps_e_new_oct, 6, dSig2)
End If
Call AddVec(dSig1, dSig2, 1d0, 1d0, 6, dSig3)
Call AddVec(Sig0, dSig3, 1d0, 1d0, 6, Sig_E)
If ((!E1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (npi .EQ. 0) Then
write(1,*) "ELÁSTICO NO LINEAL, npi=", npi
Else If (npi .EQ. 1) Then
write(1,*) "ELÁSTICO LINEAL, npi=", npi
End If
End If

iOpt = 1
Call PrnSig(iOpt, Sig_E, xN1, xN2, xN3, S1, S2, S3, P, Q)
!Sig_E : compresión negativa (S1<S2<S3)
!Prs, Prs_E : compresión positiva (S1>S2>S3)
Prs_E(1) = S1*(-1d0)
Prs_E(2) = S2*(-1d0)
Prs_E(3) = S3*(-1d0)
p_E = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

Call WriVec(ideb, 'Prs_E', Prs_E, 3)

!Cálculo superficies de fluencia f13_hs, f13_mc y f_cap en Prs_E

!Cálculo f13_hs en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf_E = qf1*qf2
qa = qf_E/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

xh_i = Gm**(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf_E) Then
f13_hs_fac1 = (Prs_E(1)-Prs_E(3))/abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E

Else
f13_hs = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

!Cálculo f13_mc en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

!Cálculo f_cap en Prs_E
delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+(p**2d0)-(p_p_E**2d0)

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Cálculo f_trac en Prs_E
f13_trac = sigma_trac-Prs_E(3)

Call WriVal(ideb, 'f13_trac', f13_trac)

!Cálculo tolerancias
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol+0.001d0
f13_trac_TOL = ttol*abs(f13_trac)+ttol

!Comprobación si el paso de cálculo es elástico
If (f13_hs .LT. f13_hs_TOL .AND. &
f13_mc .LT. f13_mc_TOL .AND. &
f13_trac .LT. f13_trac_TOL .AND. &
f_cap .LT. f_cap_TOL) Then
If ((!E1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PASO DE CÁLCULO ELÁSTICO, DENTRO DE f13_hs, f13_mc, f_cap y
f13_trac"
f13_trac = 0
write(1,*) "PASO ELÁSTICO NO LINEAL, npi=", npi
Else If (npi .EQ. 1) Then
write(1,*) "PASO ELÁSTICO LINEAL, npi=", npi
End If
End If

iPl = 0
!Actualización tensiones
Prs(1) = Prs_E(1)
Prs(2) = Prs_E(2)

```



```

Prs(3) = Prs_E(3)
!Actualización eps_e
d_eps_e(1) = dEps(1)
d_eps_e(2) = dEps(2)
d_eps_e(3) = dEps(3)
d_eps_e(4) = dEps(4)
d_eps_e(5) = dEps(5)
d_eps_e(6) = dEps(6)
error_d_eps_e_aux = 0d0
!Actualización variables de historia plásticas
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
!Salida del ciclo sobre eps_e
GOTO 700
End If

!Comprobación si Prs_E está fuera de f13_hs
If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL .OR. &
f13_mc .GE. f13_mc_tol .OR. &
f13_trac .GE. f13_trac_tol) Then
  If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
    If ((!EL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
      write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs"
    End If
    !Cálculo Prs en superficies de HS, endurecimiento de gamma_p y p_p=0
    iArea=1 !Cálculo en plano f13_hs
    Call HS_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
    StVar, iPl, Prs_0, ISUndr, D3, Gm, i_model)
    !Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
    Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS', Prs, 3)
  If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
  If ((!EL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=2"
  End If
  iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
  End If
  If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
  If ((!EL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs, AREA=3"
  End If
  iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
  End If
  Call HS_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
  StVar, iPl, Prs_0, ISUndr, D3, Gm, i_model)
  Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

Prs(3) = Prs_E(3)
!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
End If

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tienen
endurecimiento) y conservando gamma_p
iArea = 1
If ((!EL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
  write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc"
End If
Call MC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
  If ((!EL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc, AREA=2"
  End If
  iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
  End If
  If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
  If ((!EL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc, AREA=3"
  End If
  iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
  End If
  Call MC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
  StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
  Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan TRAC
f13_trac = sigma_trac-Prs(3)
Call WriVal(ideb, 'f13_trac', f13_trac)

If (f13_trac .GE. f13_trac_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies TRAC (no tienen
endurecimiento) y conservando gamma_p
iArea = 1

```

```

If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_trac"
End If
Call HS_TRAC_plast(iEI1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_trac, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_trac, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_TRAC_plast(iEI1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC y TRAC (no
tienen endurecimiento) conservando gamma_p
iArea = 1
If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f13_trac"
End If
Call MC_TRAC_plast(iEI1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f13_trac, AREA=3"
End If

```

```

If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_trac"
End If
Call TRAC_plast(iEI1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN TRAC', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_trac, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iEI1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f12, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call TRAC_plast(iEI1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, ip1, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan HS
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y TRAC (esta
última no tiene endurecimiento)
iArea = 1

```

```

End If
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_TRAC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y TRAC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If
!Comprobación si las nuevas tensiones Prs (de HS o MC) superan CAP
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

If (f_cap .GE. f_cap_TOL) Then
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies CAP, endureciendo
p_p y conservando gamma_p=0
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap"
End If
iArea = 1
Call CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP', Prs, 3)
If (abs(Prs(1)-Prs(3)) .GT. 0.1d0) Then
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=2"
iArea = 2 !Tr. Compresion (estoy en eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (estoy en eje S1=S2)
End If
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs, StVar0,
StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
!Compruebo si las nuevas tensiones Prs superan f13_hs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Mixed Return HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y p_p
iArea = 1
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
End If
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)

```

```

Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS Y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc >E. f13_mc_TOL) Then
!Return Mapping máxto MC-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tiene
endurecimiento) y CAP, endureciendo p_p y conservando gamma_p
iArea = 1
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
End If

Call MC_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, ISUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) <L. Prs(3)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) <L. Prs(2)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, ISUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC Y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) <L. Prs(3)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) <L. Prs(2)) Then
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, ISUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If

!Comprobación si las nuevas tensiones Prs superan HS
qf1      = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2      = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf3      = qf1*qf2
qa       = qf/R_f
E_fac1  = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2  = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50     = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1      = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur      = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) <L. qf) Then
f13_hs_fac1 = (Prs(1)-Prs(3))/abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs      = 1d0
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

```

```

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Return Mapping mixto HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y P_p
iArea = 1
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
End If
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call MC_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN MC, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (p .LT. (-1d0)*sigma_trac) Then !Si p<-sigma_trac quiere decir que se ha
hecho
!Return Mapping en cono complementario
Prs(1) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(2) = (-1d0)*sigma_trac
Prs(3) = (-1d0)*sigma_trac
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
iPl=2
End If

S1 = (-1d0)*Prs(1)
S2 = (-1d0)*Prs(2)
S3 = (-1d0)*Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)

Call AddVec(Sig, Sig0, 1d0, -1d0, 6, DifSig)
Call AddVec(DifSig, dSig2, 1d0, -1d0, 6, DifSig2)
Call MatInvPiv(D, Din, 6)
Call MatVec(Dinv, 6, DifSig2, 6, d_eps_e)

d_eps_e_aux2(1) = d_eps_e(1)
d_eps_e_aux2(2) = d_eps_e(2)
d_eps_e_aux2(3) = d_eps_e(3)
d_eps_e_aux2(4) = d_eps_e(4)

```

```

If (f13_hs .GE. f13_hs_TOL) Then
!Return Mapping mixto HS-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies HS y CAP
endureciendo gamma_p y P_p
iArea = 1
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap"
End If
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
!Comprobación cambios en el orden de las tensiones principales
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP', Prs, 3)
If (Prs(2) .LT. Prs(3)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=2"
End If
iArea = 2 !Tr. Compresion (eje S2=S3)
End If
If (Prs(1) .LT. Prs(2)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_hs y f_cap, AREA=3"
End If
iArea = 3 !Tr. Extension (eje S1=S2)
End If
If (iArea .NE. 1) Then !Return Mapping en eje
Call HS_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D3, Gm, i_model)
Call WriVec(ideb, 'Prs TRAS RETURN MAPPING EN HS y CAP, AREA 2,3', Prs, 3)
End If
End If
End If
End If

!Comprobación si nuevas tensiones Prs superan MC
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

If (f13_mc .GE. f13_mc_TOL) Then
!Return Mapping mixto MC-CAP
!No sirve Prs anterior
!Nuevo Return Mapping partiendo de Prs_E sobre superficies MC (no tiene
endurecimiento) y CAP endureciendo p_p y conservando gamma_p
iArea = 1
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) "PUNTO FUERA DE f13_mc y f_cap"
End If
Call MC_CAP_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D3, Gm, i_model)

```

```

d_eps_e_aux2(5) = d_eps_e(5)
d_eps_e_aux2(6) = d_eps_e(6)

d_eps_e_aux3(1) = d_eps_e_aux2(1)-d_eps_e_aux1(1)
d_eps_e_aux3(2) = d_eps_e_aux2(2)-d_eps_e_aux1(2)
d_eps_e_aux3(3) = d_eps_e_aux2(3)-d_eps_e_aux1(3)
d_eps_e_aux3(4) = d_eps_e_aux2(4)-d_eps_e_aux1(4)
d_eps_e_aux3(5) = d_eps_e_aux2(5)-d_eps_e_aux1(5)
d_eps_e_aux3(6) = d_eps_e_aux2(6)-d_eps_e_aux1(6)

Call modul(d_eps_e_aux3, error_d_eps_e_aux)

Call modul(d_eps_e_aux1, d_eps_e_aux1_mod)
error_d_eps_e_aux_re1 = error_d_eps_e_aux/d_eps_e_aux1_mod

d_eps_e_aux1(1) = (d_eps_e_aux1(1)+d_eps_e_aux2(1))/2d0
d_eps_e_aux1(2) = (d_eps_e_aux1(2)+d_eps_e_aux2(2))/2d0
d_eps_e_aux1(3) = (d_eps_e_aux1(3)+d_eps_e_aux2(3))/2d0
d_eps_e_aux1(4) = (d_eps_e_aux1(4)+d_eps_e_aux2(4))/2d0
d_eps_e_aux1(5) = (d_eps_e_aux1(5)+d_eps_e_aux2(5))/2d0
d_eps_e_aux1(6) = (d_eps_e_aux1(6)+d_eps_e_aux2(6))/2d0

If (((((((((xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND. &
(eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) .OR. &
(!Ter.EQ. 0)) .OR. (d_eps_dev_mod.LT. dEps_mod*1d-2)) .OR. (d_eps_dev_mod
.LT. 1d-12)) .OR. &
(abs(gamma_oct_DR).GT. gamma_alfa_ur)) .OR. (iterations.GT. 20)) .OR. (p_0
.LT. 1d0)) .OR. (!sUndr.EQ. 1)) .OR. (Prs_0(3).LT. 1d0)) Then
error_d_eps_e_aux = 0d0
error_d_eps_e_aux_re1 = 0d0
End If

iterations = iterations + 1

End Do

700 Continue

If (!iTer.GT. 0) .AND. (iStep.GE. 1)) Then

!Actualización
StVar(10) = StVar0(10)+dEps(1)
StVar(11) = StVar0(11)+dEps(2)
StVar(12) = StVar0(12)+dEps(3)
StVar(13) = StVar0(13)+dEps(4)
StVar(14) = StVar0(14)+dEps(5)
StVar(15) = StVar0(15)+dEps(6)

!Actualización eps_e(n+1)
StVar(16) = StVar0(16)+d_eps_e(1)

StVar(17) = StVar0(17)+d_eps_e(2)
StVar(18) = StVar0(18)+d_eps_e(3)
StVar(19) = StVar0(19)+d_eps_e(4)
StVar(20) = StVar0(20)+d_eps_e(5)
StVar(21) = StVar0(21)+d_eps_e(6)

!Actualización variables de historia elásticas Gs0_ap_alfa_H y xh_T
!Gs0_ap_alfa_H
Gs0_ap_90_H_ref = max(min(StVar0(3) + d_Gs0_ap_alfa_H_CORR, Gs0_ap_180_H_ref),
!xh_T
!xh_T_new_mod calculado anteriormente
!Actualización variables de memoria
!eps_R_dev(n+1)
If (((eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) .AND. &
(eps_DR_dev_mod.GT. 1d-8)) Then
If (!iEL.EQ. num_EL) .AND. (Int.EQ. num_GAUSS)) Then
Write(1,*) "SE INICIA NUEVO CICLO"
End If
StVar(22) = eps_dev(1)
StVar(23) = eps_dev(2)
StVar(24) = eps_dev(3)
StVar(25) = eps_dev(4)
StVar(26) = eps_dev(5)
StVar(27) = eps_dev(6)
Call modul(eps_dev, eps_R_new_dev_mod) !Si existe reversión, se toma
eps_R_new_dev_mod=eps_dev y no eps_R_dev
End If

!eps_e_R_dev(n+1)
If (((eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(xh_T_norm_d_eps_dev_norm.LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) .AND. &
(eps_DR_dev_mod.GT. 1d-8)) Then
StVar(28) = eps_e_dev(1)
StVar(29) = eps_e_dev(2)
StVar(30) = eps_e_dev(3)
StVar(31) = eps_e_dev(4)
StVar(32) = eps_e_dev(5)
StVar(33) = eps_e_dev(6)

```

```

Call modul(eps_e_dev, eps_e_R_new_dev_mod) !Si existe reversión, se toma
eps_e_R_new_dev_mod=eps_e_dev y no eps_e_R_dev
End If

!xH_M, xE_M y xE_e_M
If ((xh_T_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2)) .AND.
(eps_DR_dev_norm_d_eps_dev_norm .LT. (cos_alfa_rev - 1d-2))) Then
  iiii = 0
  Do i=1,6
    If (iiii .EQ. 0) Then
      If (abs(xH_M(i)) .LT. 1d-10) Then
        If (i .EQ. 1) Then
          gamma_alfa_ur = gamma_alfa_ur/2d0 !En carga noval logro reducción rigidez con
          hi, y para gamma_alfa_ur/2 se debe lograr Gt_ur.
          !Por ello, xh_T_mod debe compararse con gamma_alfa_ur/2 (no gamma_alfa_ur)
        End If
        StVar(33+i) = min(xh_T_mod, gamma_alfa_ur/((4d0/3d0)**0.5d0))
        StVar(39+i) = eps_dev_mod !Se define nuevo ciclo. Cuando se cierre, se
        recuperará modulo eps_dev_mod anterior que define ciclo previo
        StVar(45+i) = eps_e_dev_mod !Se define nuevo ciclo. Cuando se cierre, se
        recuperará modulo eps_e_dev_mod anterior que define ciclo previo
        iiii = 1
      End If
    End If
  End Do
End If
!Actualizo eps_e_R_dev
If ((eps_R_new_dev_mod .GT. 1d-10) .AND. (i .GT. 1)) Then
  StVar(22) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(22)
  StVar(23) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(23)
  StVar(24) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(24)
  StVar(25) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(25)
  StVar(26) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(26)
  StVar(27) = (StVar0(39+i-1)/eps_R_new_dev_mod)*StVar(27)
Else
  StVar(22) = 0d0
  StVar(23) = 0d0
  StVar(24) = 0d0
  StVar(25) = 0d0
  StVar(26) = 0d0
  StVar(27) = 0d0
End If
!Actualizo eps_e_R_dev
If ((eps_e_R_new_dev_mod .GT. 1d-10) .AND. (i .GT. 1)) Then
  StVar(28) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(28)
  StVar(29) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(29)
  StVar(30) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(30)
  StVar(31) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(31)
  StVar(32) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(32)
  StVar(33) = (StVar0(45+i-1)/eps_e_R_new_dev_mod)*StVar(33)
Else
  StVar(28) = 0d0
  StVar(29) = 0d0
  StVar(30) = 0d0
  StVar(31) = 0d0
  StVar(32) = 0d0
  StVar(33) = 0d0
End If
Do j=i,6
  StVar(33+j) = 0d0
  StVar(39+j) = 0d0
  StVar(45+j) = 0d0
End Do
mmmm = 1
Else
  If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) "NO TIENE LUGAR UN CIERRE DE CICLO DE xE_M(i) con i<=2"
  End If
End If

```

```

End If
End Do
End If

If (abs(StVar(34)) < .LT. 1d-10) Then
StVar(22) = 0d0
StVar(23) = 0d0
StVar(24) = 0d0
StVar(25) = 0d0
StVar(26) = 0d0
StVar(27) = 0d0
StVar(28) = 0d0
StVar(29) = 0d0
StVar(30) = 0d0
StVar(31) = 0d0
StVar(32) = 0d0
StVar(33) = 0d0
End If

Do i=1,6
xH_M(i) = StVar(33+i)
xE_M(i) = StVar(39+i)
xE_e_M(i) = StVar(45+i)
End Do

Call WriVec(ideb, 'xH_M(n+1)', xH_M, 6)
Call WriVec(ideb, 'xE_M(n+1)', xE_M, 6)
Call WriVec(ideb, 'xE_e_M(n+1)', xE_e_M, 6)

Else

Do i=3,51
StVar(i) = StVar0(i)
End Do

End If

If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
Write(1,*) "Las tensiones ppales al final de este paso de cálculo son Prs="
End If

Call WriVec(ideb, 'Prs', Prs, 3)

!Se vuelve a las tensiones en coordenadas cartesianas
!Prs: tracción negativa, compresión positiva
S1 = (-1d0)*Prs(1)
S2 = (-1d0)*Prs(2)
S3 = (-1d0)*Prs(3)
Call CarSig(S1, S2, S3, xN1, xN2, xN3, Sig)
!Sig: tracción positiva, compresión negativa

```

```

Sig_oct_0 = (Sig0(1)+Sig0(2)+Sig0(3))/3d0
Sig_dev_aux_0(1) = Sig0(1)-Sig_oct_0
Sig_dev_aux_0(2) = Sig0(2)-Sig_oct_0
Sig_dev_aux_0(3) = Sig0(3)-Sig_oct_0
Sig_dev_aux_0(4) = Sig0(4)
Sig_dev_aux_0(5) = Sig0(5)
Sig_dev_aux_0(6) = Sig0(6)
tau_0 = 0d0
Do i=1,6
tau_0 = tau_0 + Sig_dev_aux_0(i)*Sig_dev_aux_0(i)
End Do
tau_0 = ((1d0/3d0)*tau_0)**0.50d0

Eps_oct_0 = (StVar0(10)+StVar0(11)+StVar0(12))/3d0
Eps_dev_aux_0(1) = StVar0(10)-Eps_oct_0
Eps_dev_aux_0(2) = StVar0(11)-Eps_oct_0
Eps_dev_aux_0(3) = StVar0(12)-Eps_oct_0
Eps_dev_aux_0(4) = StVar0(13)
Eps_dev_aux_0(5) = StVar0(14)
Eps_dev_aux_0(6) = StVar0(15)
gamma_0 = 0d0
Do i=1,6
gamma_0 = gamma_0 + Eps_dev_aux_0(i)*Eps_dev_aux_0(i)
End Do
gamma_0 = ((4d0/3d0)*gamma_0)**0.50d0

Sig_oct = (Sig(1)+Sig(2)+Sig(3))/3d0
Sig_dev_aux(1) = Sig(1)-Sig_oct
Sig_dev_aux(2) = Sig(2)-Sig_oct
Sig_dev_aux(3) = Sig(3)-Sig_oct
Sig_dev_aux(4) = Sig(4)
Sig_dev_aux(5) = Sig(5)
Sig_dev_aux(6) = Sig(6)
tau = 0d0
Do i=1,6
tau = tau + Sig_dev_aux(i)*Sig_dev_aux(i)
End Do
tau = ((1d0/3d0)*tau)**0.50d0

Eps_oct = (StVar(10)+StVar(11)+StVar(12))/3d0
Eps_dev_aux(1) = StVar(10)-Eps_oct
Eps_dev_aux(2) = StVar(11)-Eps_oct
Eps_dev_aux(3) = StVar(12)-Eps_oct
Eps_dev_aux(4) = StVar(13)
Eps_dev_aux(5) = StVar(14)
Eps_dev_aux(6) = StVar(15)
gamma = 0d0
Do i=1,6
gamma = gamma + Eps_dev_aux(i)*Eps_dev_aux(i)
End Do

```



```

gamma = ((4d0/3d0)*gamma)**0.50d0
If (gamma. GT. 1d-7) Then
StVar(56) = tau/gamma
Else
StVar(56) = StVar0(56)
End If

If (abs(gamma-gamma_0). GT. 1d-10) Then
StVar(57) = (abs(tau-tau_0))/(abs(gamma-gamma_0))
Else
StVar(57) = StVar0(57)
End If

End If ! IDTask = 2

If (IDTask .EQ. 3 .OR. &
IDTask .EQ. 6 ) Then ! Cálculo de la matriz D
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
Write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEL:', iEL, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriIv1(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If

BulkW = 0d0
xKs_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E00_ref = Props(9)
E0d_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xK0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)

sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xKtmKc = Props(22)
xNu_min = Props(23)
W = 100d0
Gs0_ap_alfa_H = StVar0(3)
xh_I(1) = StVar0(4)
xh_I(2) = StVar0(5)
xh_I(3) = StVar0(6)
xh_I(4) = StVar0(7)
xh_I(5) = StVar0(8)
xh_I(6) = StVar0(9)
eps(1) = StVar0(10)
eps(2) = StVar0(11)
eps(3) = StVar0(12)
eps(4) = StVar0(13)
eps(5) = StVar0(14)
eps(6) = StVar0(15)
eps_e(1) = StVar0(16)
eps_e(2) = StVar0(17)
eps_e(3) = StVar0(18)
eps_e(4) = StVar0(19)
eps_e(5) = StVar0(20)
eps_e(6) = StVar0(21)
eps_R_dev(1) = StVar0(22)
eps_R_dev(2) = StVar0(23)
eps_R_dev(3) = StVar0(24)
eps_R_dev(4) = StVar0(25)
eps_R_dev(5) = StVar0(26)
eps_R_dev(6) = StVar0(27)
eps_e_R_dev(1) = StVar0(28)
eps_e_R_dev(2) = StVar0(29)
eps_e_R_dev(3) = StVar0(30)
eps_e_R_dev(4) = StVar0(31)
eps_e_R_dev(5) = StVar0(32)
eps_e_R_dev(6) = StVar0(33)
xH_M(1) = StVar0(34)
xH_M(2) = StVar0(35)
xH_M(3) = StVar0(36)
xH_M(4) = StVar0(37)
xH_M(5) = StVar0(38)
!Versión Plaxis 2D 2011 y posteriores

```

```

xH_M(6) = StVar0(39)
xE_M(1) = StVar0(40)
xE_M(2) = StVar0(41)
xE_M(3) = StVar0(42)
xE_M(4) = StVar0(43)
xE_M(5) = StVar0(44)
xE_M(6) = StVar0(45)

xE_e_M(1) = StVar0(46)
xE_e_M(2) = StVar0(47)
xE_e_M(3) = StVar0(48)
xE_e_M(4) = StVar0(49)
xE_e_M(5) = StVar0(50)
xE_e_M(6) = StVar0(51)

Gmin = StVar0(52)
Gt_ap_ref = StVar0(55)

iOpt = 0
Call PrnSig(iOpt, Sig0, xN10, xN20, xN30, S10, S20, S30, P0, Q0)
Prs_0(1) = S10*(-1d0)
Prs_0(2) = S20*(-1d0)
Prs_0(3) = S30*(-1d0)
p_0 = max((Prs_0(1)+Prs_0(2)+Prs_0(3))/3d0, 1d0)

Call WriVec(ideb, 'Prs_0', Prs_0, 3)

!Cálculo eps_dev
eps_oct = (eps(1)+eps(2)+eps(3))/3d0
eps_dev(1) = eps(1)-eps_oct
eps_dev(2) = eps(2)-eps_oct
eps_dev(3) = eps(3)-eps_oct
eps_dev(4) = eps(4)
eps_dev(5) = eps(5)
eps_dev(6) = eps(6)
Call modul(eps_e_dev, eps_e_dev_mod)

!Cálculo eps_e_dev
eps_e_oct = (eps_e(1)+eps_e(2)+eps_e(3))/3d0
eps_e_dev(1) = eps_e(1)-eps_e_oct
eps_e_dev(2) = eps_e(2)-eps_e_oct
eps_e_dev(3) = eps_e(3)-eps_e_oct
eps_e_dev(4) = eps_e(4)
eps_e_dev(5) = eps_e(5)
eps_e_dev(6) = eps_e(6)

!Cálculo Gamma_oct(n)
Call modul(eps_dev, eps_dev_mod)

gamma_oct = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_dev_mod
!Cálculo Gamma_oct_R(n)
Call modul(eps_R_dev, eps_R_dev_mod)
gamma_oct_R = ((4d0/3d0)**0.5d0)*eps_R_dev_mod
!Cálculo Gamma_oct_DR(n)
gamma_oct_DR = (gamma_oct-gamma_oct_R)

!Cálculo de |xh_T(n)||=xh_T_mod
Call modul(xh_T, xh_T_mod)
!xi1 y xi2
xi1 = 1d0
xi2 = 2d0

!Cálculo gamma_alfa_ur(n)
xKt_ref = xKs_ref*(1d0/(1d0-xm1))
Gt_ur_ref = 3d0*xKt_ref*Eur_ref/(9d0*xKt_ref-Eur_ref)
gamma_alfa_ur = (xi2*gamma_07/0.385d0)*(((Gs0_ap_alfa_H/Gt_ur_ref)**0.5d0)-1d0)

!Cálculo Gs_ap(n)
Gs0_ap_alfa = Gs0_ap_alfa_H*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2
gamma_oct_H = min(((4d0/3d0)**0.5d0)*xh_T_mod, gamma_alfa_ur)

!Cálculo de Gt_ur
Gt_ur = Gt_ur_ref*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2

!Cálculo Gt_ap(n) y Kt(n)
If (abs(gamma_oct_DR) .LT. gamma_alfa_ur) Then
G = StVar0(55)*(max(p_0,p2_ref*0.1d0)/p2_ref)**xm2
xKs = xKs_ref*((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
xK = xKs*(1d0+eps_e_oct)/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)
Else
xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
End If
Else
G = Gt_ur
xKs = xKs_ref*((max(p_0,p1_ref*0.1d0)/p1_ref)**xm1)
If (abs(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct) .GT. 0.1d0*abs(eps_e_oct)) Then
xK = xKs*(1d0+eps_e_oct)/(((p_0)/(3d0*xm1*xKs))-eps_e_oct)
Else
xK = xKs*(1d0/(1d0-xm1))
End If
End If

xK = max(xK,(2d0/3d0)*G*(1d0+xNu_min)/(1d0-2d0*xNu_min))
Call Matriz6_NL(D, xK, G)

```

```

If (IsUndr .EQ. 1) Then
! BulkW = ...S
xNu_U = 0.495d0
xKu = 2d0*G*(1d0+xNu_U)/(3d0*(1d0-2d0*xNu_U))
Fac = xKu - xK
BulkW = Fac
End If

Call WriMat(ideb, 'D6 en Task3,6', D, 6, 6, 6)

End If ! IDTask = 3, 6

If (IDTask .EQ. 4) Then !Número de variables de estado
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEL:', iEL, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriIvl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If

nStat = nStatv
End If ! IDTask = 4

If (IDTask .EQ. 5) Then !Tipo de matriz
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)
write(1,*) 'IDTask:', IDTask, 'iEL:', iEL, 'Int:', Int, 'iStep:', iStep,
'iTer:', iTer
Call WriIvl(ideb, 'IsUndr', IsUndr)
write(1,*)
End If

NonSym = 0 ! 1 para matrices D no simétricas
iStrsDep = 1 ! 1 para matrices D que dependen de las tensiones
iTang = 0 ! 1 para matrices D tangentes
iTimeDep = 0 ! 1 para matrices D que dependen del tiempo

End If ! IDTask = 5

End ! MyModel4

```

Subrutina HS_plast

```

!C*****
Subroutine HS_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D, Gm, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie HS
! Tensión de compresión positiva (Prs_E(1) >= Prs_E(2) >= Prs_E(3))
!
! I/O Tipo
! iArea I I 1 : Superficie f13_hs Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! I I 2 : Eje entre f13_hs y f12_hs Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! I I 3 : Eje entre f13_hs y f23_hs Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
!
! Local:
! f13_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f12_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f23_hs : superficie HS para Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! xLam13_hs : multiplicador plástico f13_hs
! xLam12_hs : multiplicador plástico f12_hs
! xLam23_hs : multiplicador plástico f23_hs
! D : matriz elástica
! df13_hsmoS(3) : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dS
! df12_hsmoS(3) : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dS
! df23_hsmoS(3) : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dS
! df13_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dq
! df12_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dq
! df23_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dq
! dg13_hsmoS(3) : Primera derivada potencial plástico g13_hs/dS
! dg12_hsmoS(3) : Primera derivada potencial plástico g12_hs/dS
! dg23_hsmoS(3) : Primera derivada potencial plástico g23_hs/dS
! d2g13_hsmoS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g13_hs/dS2
! d2g12_hsmoS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g12_hs/dS2
! d2g23_hsmoS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g23_hs/dS2
! d2g13_hsmoSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g13_hs
! d2g12_hsmoSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g12_hs
! d2g23_hsmoSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g23_hs
! D_dgij : Producto de D por dgij_hs/dS
! D_dgij_2 : Producto de D por d2gij_hs/dS2
! HH_dfij : Producto de D por dfij_hs/dS
! thetaij : Operación dgij_hs/dS+d2gij_hs/dS2*xLamij_hs*xh_hs
! D_thetaij : Productor de D por thetaij
! HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_hs*D_dgij_2
!

```

```

Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res(3), Prs_0(3), dPrs(3), dPrs_1(3),
dPrs_2(3)
Dimension Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_2sup(3), r(3)
Dimension Props(*)
Dimension StVar0(*), StVar(*)
Dimension df13_hsmDS(3), df12_hsmDS(3), df23_hsmDS(3)
Dimension dg13_hsmDS(3), dg12_hsmDS(3), dg23_hsmDS(3)
Dimension d2g13_hsmDS2(3,3), d2g12_hsmDS2(3,3), d2g23_hsmDS2(3,3)
Dimension d2g13_hsmDSdq(3), d2g12_hsmDSdq(3), d2g23_hsmDSdq(3)
Dimension D_dg13(3), D_dg12(3), D_dg23(3)
Dimension D_dg13_2(3,3), D_dg12_2(3,3), D_dg23_2(3,3)
Dimension HH_df13(3), HH_df12(3), HH_df23(3)
Dimension theta13(3), theta12(3), theta23(3)
Dimension D_theta13(3), D_theta12(3), D_theta23(3)
Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3)

Call MZeroR(Prs_res1, 3)
Call MZeroR(Prs_res2, 3)
Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
Call MZeroR(dPrs, 3)
Call MZeroR(dPrs_1, 3)
Call MZeroR(dPrs_2, 3)

Call MZeroR(df13_hsmDS, 3)
Call MZeroR(dg13_hsmDS, 3)
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)

Call MZeroR(df12_hsmDS, 3)
Call MZeroR(dg12_hsmDS, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmDSdq, 3)

Call MZeroR(D_dg13_2, 9)
Call MZeroR(D_dg12_2, 9)
Call MZeroR(D_dg23_2, 9)

Call MZeroR(D_dg13, 3)
Call MZeroR(D_dg12, 3)
Call MZeroR(D_dg23, 3)

Call MZeroR(HH_df13, 3)
Call MZeroR(HH_df12, 3)
Call MZeroR(HH_df23, 3)

Call MZeroR(theta13, 3)
Call MZeroR(theta12, 3)
Call MZeroR(theta23, 3)

Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)

Call MZeroR(HH_inv, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)

Call MZeroR(d_eps_p_aux, 3)

ipl = 5
it = 0
itmax = 100
ttol = 1d-12
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
ideb = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model .EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xK0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
beta = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 2) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D V9
xKs_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)

```

```

xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
beta = Props(22)
xNu_min = Props(23)
Else If (i_model .EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xTmKc = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 4) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)

R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xTmKc = Props(22)
xNu_min = Props(23)
End If
If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
w = 100d0
End If
delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
gamma_p_E = StVar0(1)
xh_i = Gm*(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)
dXLam13_hs = 0d0
dXLam12_hs = 0d0
dXLam23_hs = 0d0
xLam13_hs = 0d0
xLam12_hs = 0d0
xLam23_hs = 0d0
Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Superficie f13_hs
ideb = -1
!STARTING POINT
!Cálculo el valor de f13_hs en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then

```

```

f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If
!Cálculo tolerancia de f13_hs
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttoi
Call WriVec(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If
Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
!Cálculo df13_hs/dq en Prs_E (q=gamma_p)
df13_hsmdq = -1d0
!Cálculo h en Prs_E (dq=dgamma_p=dlam_hs*h_hs)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
xh_hs = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHVSS
xh_hs = 1d0*xh_i
End If
!Cálculo dg13_hs/dS en Prs_E
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = psi
sin_psi_cv = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHVSS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xk0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xk0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If (sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
sin_psi_m = psi
sin_psi_cv = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
!Cálculo d2g13_hs/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
!Cálculo d2g13_hs/dSdq en Prs_E

```

```

Call MZeroR(d2g13_hsmoSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmoS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmoS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
dxLam13_hs = f13_hs/(df13_D_dg13-df13_hsmoS*qh_hs)
xLam13_hs = dxLam13_hs

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)

!Actualización variables
Call AddVec(Prs_E, D_dg13, 1d0, -xLam13_hs, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*qh_hs, gamma_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)

Call WriVec(ideb, 'Prs en primera iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f13_hs con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((IE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

!EULER BACKWARD
Do while ((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .AND. (it .LE. itmax))
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

!Cálculo df13_hs/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmoS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmoS(2) = 0d0
df13_hsmoS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-Prs(1)-
Prs(3))))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmoS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmoS(2) = 0d0
df13_hsmoS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmoS', df13_hsmoS, 3)

!Cálculo df13_hs/dg en Prs (q=gamma_p)
df13_hsmdq = -1d0

!Cálculo h en Prs (dq=dgamma_p-dlam_hs*h_hs)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
xh_hs = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
xh_hs = 1d0*xh_i
End If

!Cálculo dgi3_hs/dS en Prs
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
sin_psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If

```

```

Else If ((i_model1 .EQ. 2) .OR. (i_model1 .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYS5
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3)))/(Prs(1)+Prs(3)-
2d0*c*cos(phi))/sin(phi)),0d0),(Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(1)*xk0_nc-
2d0*c*cos(phi))/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0
dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

Call WriVec(ideb, 'dg13_hsmDS', dg13_hsmDS, 3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df13,3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13,3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)

```

```

Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call AddVec(Prs_E, D_dg13, 1d0, -xLam13_hs, 3, Prs_res)
Call AddVec(Prs, Prs_res, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(r, HH_df13, 3, r_HH_df13)
dxLam13_hs = (f13_hs-r_HH_df13)/(D_theta13_HH_df13-df13_hsmdq*xh_hs)
xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs

!Actualización variables
Call AddVec(r, D_theta13, -1d0, -dxLam13_hs, 3, dPrs_1)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_1, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)

Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f13_hs en (k+1)
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call Wriivl(ideb, 'it', it)

!Actualización iteración
it = it+1

```



```

End do
!Actualización variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((!IE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLami3_hs .GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. it .LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (2) ! 2 : Eje entre f13_hs y f12_hs

If ((!IE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
ideb = -1
End If

!STARTING POINT

!Cálculo valor de f13_hs y f12_hs en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E0 = E0_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
End If

If ((!IE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)' q > qf '
End If

f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

End do

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(2))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f12_hs', f12_hs)

!Cálculo tolerancia f13_hs y f12_hs en Prs_E
f13_hs_TOL = ttoi1*abs(f13_hs)+ttoi
f12_hs_TOL = ttoi1*abs(f12_hs)+ttoi

!Cálculo df13_hs/dS y df12_hs/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))**2d0)-
2d0/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))**2d0)-
2d0/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
Else
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
End If

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_hsmDS', df12_hsmDS, 3)

!Cálculo df13_hs/dq y df12_hs/dq en Prs_E (q=gamma_p)
df13_hsmdq = -1d0
df12_hsmdq = -1d0

```

```

!Cálculo h en Prs_E (dq=dgamma_p=dlam_hs*h_hs)
If ((i_model.EQ. 1) .OR. (i_model.EQ. 3)) Then
  !MODELO HS
  xh_hs
  Else If ((i_model.EQ. 2) .OR. (i_model.EQ. 4)) Then
    !MODELO EPHYS
    xh_hs = 1d0*xh_i
  End If

!Cálculo d2g13_hs/dS y d2g12_hs/dS en Prs_E
If ((i_model.EQ. 1) .OR. (i_model.EQ. 3)) Then
  !Modelo HS
  sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
  sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*sin(psi))
  If (sin_phi_m.LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
    sin_psi_m = 0d0
  ElseIf ((sin_phi_m.GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi.GT. 0d0)) Then
    sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
  ElseIf ((sin_phi_m.GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi.LE. 0d0)) Then
    psi_m = psi
  sin_psi_m = sin(psi_m)
  ElseIf (phi.EQ. 0d0) Then
    sin_psi_m = 0d0
  End If

Else If ((i_model.EQ. 2) .OR. (i_model.EQ. 4)) Then
  !Modelo EPHYS
  sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xK0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xK0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
  sin(phi))
  sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*sin(psi))
  xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
  eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xK0_nc)/(1d0+2d0*xK0_nc))
  If (sin_phi_m.LT. sin_phi_cv) Then
    If ((sin_phi_m.LT. 1d-10) .OR. (abs(eta).LT. 1d-10)) Then
      sin_psi_m = 0d0
    Else
      sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
    End If
  ElseIf ((sin_phi_m.GE. sin_phi_cv) .AND. (psi.GT. 0d0)) Then
    sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
  ElseIf ((sin_phi_m.GE. sin_phi_cv) .AND. (psi.LE. 0d0)) Then
    psi_m = psi
  sin_psi_m = sin(psi_m)
  ElseIf (phi.EQ. 0d0) Then
    sin_psi_m = 0d0
  End If

!Cálculo h en Prs_E (dq=dgamma_p=dlam_hs*h_hs)
If ((i_model.EQ. 1) .OR. (i_model.EQ. 3)) Then
  !MODELO HS
  xh_hs
  Else If ((i_model.EQ. 2) .OR. (i_model.EQ. 4)) Then
    !MODELO EPHYS
    xh_hs = 1d0*xh_i
  End If

!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2g12_hs/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq y d2g12_hs/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmS, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmS,D_dg13,3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmS, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call DinProd(df13_hsmS, D_dg12,3, df13_D_dg12)
xOmega12 = df13_D_dg12
Call DinProd(df12_hsmS, D_dg13,3, df12_D_dg13)
xOmega21 = df12_D_dg13
Call DinProd(df12_hsmS, D_dg12,3, df12_D_dg12)
xOmega22 = df12_D_dg12-df12_hsmdq*xh_hs

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam12_hs
dxLam13_hs = (f13_hs*xOmega22-f12_hs*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam12_hs = (f12_hs*xOmega11-f13_hs*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam12_hs = dxLam12_hs

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_hs', dxLam12_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_hs', xLam12_hs)
End If

```

```

!Actualización variables
Call AddVec(D dg13, D dg12, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs durante primera iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f13_hs y f12_hs con la nueva Prs
sigma_trac, 1d0))
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f12_hs', f12_hs)

!EULER BACKWARD
Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
(abs(f12_hs) .GT. f12_hs_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_hs/dS y df12_hs/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-
Prs(3)))))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))**2d0)-
2d0/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-
Prs(2)))))**2d0+2d0/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
Else
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
End If

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_hsmDS', df12_hsmDS, 3)

!Cálculo df13_hs/dq y df12_hs/dq en Prs (q=gamma_p)
df13_hsmdq = -1d0
df12_hsmdq = -1d0

!Cálculo h en Prs (dq=dgamma_p=dLam_hs*h_hs)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
xh_hs = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
xh_hs = 1d0*xh_i
End If

!Cálculo dg13_hs/dS y dg12_hs/dS en Prs
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then

```

```

!Modelo HS
sin_phi_m
= min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3)) -
2d0*c*cos(phi))/sin(phi),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv
= (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m
= min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3)) -
2d0*c*cos(phi))/sin(phi),0d0), (Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(3)) -
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv
= (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xM_comp
= 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta
= max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

dgl3_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dgl3_hsmDS(2) = 0d0
dgl3_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dgl2_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dgl2_hsmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dgl2_hsmDS(3) = 0d0
dgl2_hsmDS(4) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dgl2_hsmDS(5) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dgl2_hsmDS(6) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dgl2_hsmDS(7) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dgl2_hsmDS(8) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dgl2_hsmDS(9) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2g12_hs/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmDS, 9)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS, 3, 3, 3, 3, D_dgl3_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g12_hsmDS, 3, 3, 3, 3, D_dgl2_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dgl3_2 + xLam12_hs*D_dgl2_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dgl3_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13)
Call AddVec(dgl2_hsmDS, d2g12_hsmDSdq, 1d0, xLam12_hs*xh_hs, 3, theta12)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df12_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df12, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta12, 3, 3, 1, 3, D_theta12, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
Call DinProd(D_theta13, HH_df12, 3, D_theta13_HH_df12)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_hsmdq*xh_hs
xOmega12 = D_theta12_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df12
xOmega22 = D_theta12_HH_df12-df12_hsmdq*xh_hs

Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dgl3, 3)
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dgl2, 3)
Call AddVec(D_dgl3, D_dgl2, -xLam13_hs,-xLam12_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df12, r, 3, r_HH_df12)
xOmegaf13 = f13_hs - r_HH_df13
xOmegaf12 = f12_hs - r_HH_df12

!Resolución del sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam12_hs
dxLam13_hs = (xOmegaf13*xOmega22-xOmegaf12*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam12_hs = (xOmegaf12*xOmega21-xOmegaf13*xOmega22)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam12_hs = xLam12_hs + dxLam12_hs

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_hs', dxLam12_hs)

```

```

Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_hs', xLam12_hs)

!Actualización variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta12, -dXLam13_hs, -dXLam12_hs, 3, dPrs_1)
Call AddVec(r, dPrs_1, -1d0, 1d0, 3, dPrs_2)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_2, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f13_hs y f12_hs en (k+1) en Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
write(1,*) 'q > qf'
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf))
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f12_hs', f12_hs)

!Actualización iteración
it = it+1
End do

!Actualización variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam12_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*) 'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*) 'Numerical problem'
End If
End If

Case (3) ! 3 : Eje entre f13_hs y f23_hs

!STARTING POINT
!Cálculo valor de f13_hs y f23_hs en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
write(1,*) 'q > qf'
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf))

```

```

f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

If (Prs_E(2)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs_E(2)-Prs_E(3))/((abs(qa-(Prs_E(2)-Prs_E(3))))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(2)-Prs_E(3))/Eur
f23_hs      = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f23_hs      = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p_E
End If

!Cálculo tolerancia f13_hs y df23_hs/dS en Prs_E
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f23_hs_TOL = ttol*abs(f23_hs)+ttol

!Cálculo df13_hs/dS y df23_hs/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0) -
2d0/Eur
df13_hsmdS(2) = 0d0
df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1) -
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0) -2d0/Eur
df13_hsmdS(2) = 0d0
df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

If (Prs_E(2)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df23_hsmdS(1) = 0d0
df23_hsmdS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(2)-Prs_E(3))))**2d0) -
2d0/Eur
df23_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(2) -
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df23_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0) -2d0/Eur
df23_hsmdS(2) = 0d0
df23_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

!Cálculo df13_hs/dq y df23_hs/dq en Prs_E (q-gamma_p)
df13_hsmdq = -1d0
df23_hsmdq = -1d0

!Cálculo h en Prs_E (dq=qgamma_p=dLlam_hs*h_hs)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then

```

```

!MODELO HS
xh_hs      = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
xh_hs      = 1d0*xh_i
End If

!Cálculo dg13_hs/dS y dg12_hs/dS en Prs_E
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)) -
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max(max((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)) -
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xk0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xk0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xM_comp   = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta       = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

```

```

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0
dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg23_hsmDS(1) = 0d0
dg23_hsmDS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg23_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2g23_hs/dS2
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmDS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq y d2g23_hs/dSdq
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg23_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dg23, 3, df13_D_dg23)
xOmega12 = df13_D_dg23
Call DinProd(df23_hsmDS, D_dg13, 3, df23_D_dg13)
xOmega21 = df23_D_dg13
Call DinProd(df23_hsmDS, D_dg23, 3, df23_D_dg23)
xOmega22 = df23_D_dg23-df23_hsmdq*xh_hs

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam23_hs
dxLam13_hs = (f13_hs*xOmega22-f23_hs*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam23_hs = (f23_hs*xOmega11-f13_hs*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam23_hs = dxLam23_hs

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dg23, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

!Cálculo valor de f13_hs y f23_hs con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi)))

```

```

qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs(2)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(2)-Prs(3)))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs(2)-Prs(3))/Eur
f23_hs = (2d0*qa/E1)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
Else
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f23_hs = (2d0*qa/E1)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
End If

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
(abs(f23_hs) .GT. f23_hs_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_hs/dS y df23_hs/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-(Prs(1)-
Prs(3)))))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/E1)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0

```

```

df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

If (Prs(2)-Prs(3)).LT. qf) Then
df23_hsmDS(1) = 0d0
df23_hsmDS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(2)-Prs(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df23_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(2)-
Prs(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df23_hsmDS(1) = 0d0
df23_hsmDS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df23_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

!Cálculo df13_hs/dq y df23_hs/dq en Prs (q=gamma_p)
df13_hsmdq = -1d0
df23_hsmdq = -1d0

!Cálculo h en Prs (dq=dgamma_p=dLam_hs*h_hs)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
IMODELO HS
xh_hs = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
IMODELO EPHYSS
xh_hs = 1d0*xh_i
End If

!Cálculo dg13_hs/dS y dg23_hs/dS en Prs
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3)))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
sin_psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If

!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3)))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), (Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
End If

df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

If (sin_phi_m .LT. qf) Then
If (sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
sin_psi_m = psi
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0
dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg23_hsmDS(1) = 0d0
dg23_hsmDS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg23_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2g23_hs/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmDS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq y d2g23_hs/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)

Call MatMat(D, 3, d2g23_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg23_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_2 + xLam23_hs*D_dg23_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13)
Call AddVec(dg23_hsmDS, d2g23_hsmDSdq, 1d0, xLam23_hs*xh_hs, 3, theta23)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df23_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df23, 3)

```



```

Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta23, 3, 3, 1, 3, D_theta23, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df13, 3, D_theta23_HH_df13)
Call DinProd(D_theta13, HH_df23, 3, D_theta13_HH_df23)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_hsmdq*xh_hs
xOmega12 = D_theta23_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df23
xOmega22 = D_theta23_HH_df23-df23_hsmdq*xh_hs

Call MatMat(D, 3, dg13_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg23_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dg23, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df23, r, 3, r_HH_df23)
xOmegaF13 = f13_hs - r_HH_df13
xOmegaF23 = f23_hs - r_HH_df23

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam23_hs
dxLam13_hs = (xOmegaF13*xOmega22-xOmegaF23*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam23_hs = (xOmegaF23*xOmega11-xOmegaF13*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam23_hs = xLam23_hs + dxLam23_hs

!Actualización variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta23, -dxLam13_hs, -dxLam23_hs, 3, dPrs_1)
Call AddVec(r, dPrs_1, -1d0, 1d0, 3, dPrs_2)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_2, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

!Cálculo el valor de f13_hs y f23_hs en (k+1) en Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)

p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If
If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs(2)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(2)-Prs(3))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs(2)-Prs(3))/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
Else
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
End If
!Actualización iteración
it = it+1
End do

!Actualización variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam23_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*) 'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*) 'Numerical problem'
End If
End If

Case Default
write(1,*) ' incorrect iArea in HS_plast'
Stop
End Select

End ! HS_plast

```

Subrutina CAP_plast

```

!C*****[C*****]
Subroutine CAP_plast(iel, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D, Gm, i_model)
!C*****[C*****]
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie CAP
! Tensión de compresión positiva!
!
! I/O Tipo
! iArea I I 1 : Superficie f_cap Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! 2 : Eje entre f_cap y f1_aux Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! 3 : Eje entre f_cap y f3_aux Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
!
! Local:
! f_cap : Superficie CAP Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f1_aux : Superficie aux 1 Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! f3_aux : Superficie aux 3 Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! xLam_cap : multiplicador plástico f_cap
! D : matriz elástica
! df_capmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f_cap/dS
! df1_auxmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f1_aux/dS
! df3_auxmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f3_aux/dS
! df_capmdq : Primera derivada función de fluencia f_cap/dq
! df1_auxmdq : Primera derivada función de fluencia f1_aux/dq
! df3_auxmdq : Primera derivada función de fluencia f3_aux/dq
! dg_capmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g_cap/dS
! dg1_auxmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g1_aux/dS
! dg3_auxmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g3_aux/dS
! d2g_capmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g_cap/dS2
! d2g1_auxmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g1_aux/dS2
! d2g3_auxmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g3_aux/dS2
! d2g_capmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g_cap
! d2g1_auxmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g1_aux
! d2g3_auxmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g3_aux
! D_dgij : Producto de D por dgij_hs/dS
! D_dgij_2 : Producto de D por d2gij_hs/dS2
! HH_dfij : Producto de D por dfij_hs/dS
! thetaij : Operación dgij_hs/dS+d2gij_hs/dS2*xLamij_hs*xh_hs
! D_thetaij : Productor de D por thetaij
! HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_hs*D_dgij_2
!
! Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res(3), Prs_0(3), dPrs(3), dPrs_1(3),
dPrs_2(3)
! Dimension Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_2sup(3), r(3)

```

```

! Dimension Props(*)
! Dimension StVar0(*), StVar(*)
! Dimension df_capmdS(3), df3_auxmdS(3), df1_auxmdS(3)
! Dimension dg_capmdS(3), dg3_auxmdS(3), dg1_auxmdS(3)
! Dimension d2g_capmdS2(3,3), d2g3_auxmdS2(3,3), d2g1_auxmdS2(3,3)
! Dimension d2g_capmdSdq(3), d2g3_auxmdSdq(3), d2g1_auxmdSdq(3)
! Dimension D_dg_cap(3), D_dg3_aux(3), D_dg1_aux(3)
! Dimension D_dg_cap_2(3,3), D_dg3_aux_2(3,3), D_dg1_aux_2(3,3)
! Dimension HH_df_cap(3), HH_df3_aux(3), HH_df1_aux(3)
! Dimension theta_cap(3), theta3_aux(3), theta1_aux(3)
! Dimension D_theta_cap(3), D_theta3_aux(3), D_theta1_aux(3)
! Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3)
!
! Call MZeroR(Prs_res, 3)
! Call MZeroR(Prs_res1, 3)
! Call MZeroR(Prs_res2, 3)
! Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
! Call MZeroR(dPrs, 3)
! Call MZeroR(dPrs_1, 3)
! Call MZeroR(dPrs_2, 3)
!
! Call MZeroR(df_capmdS, 3)
! Call MZeroR(dg_capmdS, 3)
! Call MZeroR(d2g_capmdS2, 9)
! Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)
!
! Call MZeroR(df3_auxmdS, 3)
! Call MZeroR(dg3_auxmdS, 3)
! Call MZeroR(d2g3_auxmdS2, 9)
! Call MZeroR(d2g3_auxmdSdq, 3)
!
! Call MZeroR(df1_auxmdS, 3)
! Call MZeroR(dg1_auxmdS, 3)
! Call MZeroR(d2g1_auxmdS2, 9)
! Call MZeroR(d2g1_auxmdSdq, 3)
!
! Call MZeroR(D_dg_cap, 3)
! Call MZeroR(D_dg3_aux, 3)
! Call MZeroR(D_dg1_aux, 3)
!
! Call MZeroR(D_dg_cap_2, 9)
! Call MZeroR(D_dg3_aux_2, 9)
! Call MZeroR(D_dg1_aux_2, 9)
!
! Call MZeroR(HH_df_cap, 3)
! Call MZeroR(HH_df3_aux, 3)
! Call MZeroR(HH_df1_aux, 3)
!
! Call MZeroR(theta_cap, 3)
! Call MZeroR(theta3_aux, 3)

```

```

Call MZeroR(theta1_aux, 3)
Call MZeroR(D_theta_cap, 3)
Call MZeroR(D_theta3_aux, 3)
Call MZeroR(D_theta1_aux, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)

Call MzeroR(d_eps_p_aux, 3)
    ip1 = 3
    it = 0
    itmax = 100
    ttol = 1d-12
    pi = 3.1415926535d0
    Rad = pi/180d0
    ideb = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model.EQ. 1) Then !HS VERSION 2D V9
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
beta = Props(15)
Else If (i_model.EQ. 2) Then !EPHYSS VERSION 2D V9
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E0_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
psi = Props(15)*Rad
phi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)

Else If (i_model.EQ. 3) Then !HS VERSION 2D 2011 y posteriores
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmKc = Props(15)
Else If (i_model.EQ. 4) Then !EPHYSS VERSION 2D 2011 y posteriores
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E0_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)

```

```

Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xKtmKc = Props(22)
xNu_min = Props(23)
End If

If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
w = 100d0
End If

delta = (3d0*sin(phi))/(3d0-sin(phi))
p_p_E = (-1d0)*StVar0(2)
xh_i = Gm**(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)
dXLam_cap = 0d0
dXLam3_aux = 0d0
dXLam13 = 0d0
xLam_cap = 0d0
xLam3_aux = 0d0
xLam13 = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Superficie f_cap
!STARTING POINT
!Cálculo parámetros de CAP en Prs_E (variables)
q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
If (q_m .LT. 1d-3) Then
q_m = 0d0
End If
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

Call WriVal(ideb, 'q_m', q_m)
Call WriVal(ideb, 'p', p)
Call WriVal(ideb, 'alfa', alfa)

!Cálculo el valor de f_cap en Prs_E
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

!Cálculo tolerancia de f_cap
f_cap_TOL = ttoi*abs(f_cap)+ttoi

!Cálculo df_cap/dS en Prs_E
df_capmdS(1) = 2d0*(q_m)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p
df_capmdS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0))/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p

```

```

df_capmdS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df_capmdS', df_capmdS, 3)

!Cálculo df_cap/dq en Prs_E (q=p_p)
df_capmdq = -2d0*p_p_E

Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs_E (dq=dp_p=diam_cap*h_cap)
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posterior
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xKtmKc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model .EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posterior
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xKtmKc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_
i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg_cap/dS en Prs_E
dg_capmdS(1) = df_capmdS(1)
dg_capmdS(2) = df_capmdS(2)
dg_capmdS(3) = df_capmdS(3)

!Cálculo d2g_cap/dS2 en Prs_E
d2g_capmdS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,1) = d2g_capmdS2(1,2)
d2g_capmdS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(3,1) = d2g_capmdS2(1,3)
d2g_capmdS2(3,2) = d2g_capmdS2(2,3)
d2g_capmdS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

```

```

!Cálculo d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, dg_capmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg_cap, 3)
Call DinProd(df_capmdS, D_dg_cap, 3, df_cap_D_dg_cap)
xLam_cap = f_cap/(df_cap_D_dg_cap-df_capmdq*xh_cap)
xLam_cap = dxLam_cap

!Actualización variables
Call AddrVec(Prs_E, D_dg_cap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)
Call WriVec(ideb, 'p_p', p_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs tras primera iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f_cap con la nueva Prs
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
If (q_m .LT. 1d-3) Then
  q_m = 0d0
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (ISUndr .EQ. 1 .AND. p .LT. -1d0*sigma_trac ) Then
Prs(1) = Prs_E(1)
Prs(2) = Prs_E(2)
Prs(3) = Prs_E(3)
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
Return
End If

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0
!EULER BACKWARD

Do while ((abs(f_cap) .GT. f_cap_TOL) .AND. (it .LE. itmax))

Call WriVal(ideb, 'q_m', q_m)
Call WriVal(ideb, 'p', p)

!Cálculo df_cap/dS en Prs
df_capmdS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmdS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmdS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df_capmdS', df_capmdS, 3)

!Cálculo d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, d2g_capmdS, 3, 3, 3, 3, D_dg_cap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam_cap*D_dg_cap_2

!Cálculo df_cap/dq en Prs (q=p_p)
df_capmdq = -2d0*p_p

Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs (dq=dp_p=dLam_cap*h_cap)
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
  xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model .EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
  xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model .EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
  xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
  xH = xkt/(xktmkc-1d0)
  xh_cap = 2d0*xH*max(p, 1d0)*(max(p_p+c*cos(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model .EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
  xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
  xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
  xh_cap = (2d0*xH*max(p, 1d0)*(max(p_p+c*cos(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg13_hs/dS en Prs
dg_capmdS(1) = df_capmdS(1)
dg_capmdS(2) = df_capmdS(2)
dg_capmdS(3) = df_capmdS(3)

!Cálculo d2g_cap/dS2 en Prs
d2g_capmdS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,1) = d2g_capmdS2(1,2)
d2g_capmdS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(3,1) = d2g_capmdS2(1,3)
d2g_capmdS2(3,2) = d2g_capmdS2(2,3)
d2g_capmdS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g_cap/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, d2g_capmdS, 3, 3, 3, 3, D_dg_cap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam_cap*D_dg_cap_2

```

```

Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg_capmDS, d2g_capmDSdd, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, theta_cap)
Call MatMat(HH, 3, df_capmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df_cap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta_cap, 3, 3, 1, 3, D_theta_cap, 3)
Call DinProd(D_theta_cap, HH_df_cap, 3, D_theta_cap_HH_df_cap)
Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg_cap, 3)
Call AddVec(Prs_E, D_dg_cap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_res)
Call AddVec(Prs, Prs_res, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(r, HH_df_cap, 3, r_HH_df_cap)
dxLam_cap = (f_cap-r_HH_df_cap)/(D_theta_cap_HH_df_cap-df_capmdq*xh_cap)
xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap

Call WriMat(ideb, 'D3', D, 3, 3, 3)
Call WriVec(ideb, 'r', r, 3)
Call WriVec(ideb, 'HH_df_cap', HH_df_cap, 3)
Call WriVec(ideb, 'D_theta_cap = D_dg_cap', D_theta_cap, 3)
Call WriVal(ideb, 'D_theta_cap_HH_df_cap', D_theta_cap_HH_df_cap)
Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)
Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)
Call WriVal(ideb, 'r_HH_df_cap', r_HH_df_cap)
Call WriVal(ideb, 'f_cap-r_HH_df_cap', f_cap-r_HH_df_cap)
Call WriVal(ideb, 'D_theta_cap_HH_df_cap-df_capmdq*xh_cap',
D_theta_cap_HH_df_cap-df_capmdq*xh_cap)

!Actualización variables
Call AddVec(r, D_theta_cap, -1d0, -dxLam_cap, 3, dPrs_1)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_1, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo valor de f_cap en (k+1)
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
If (q_m .LT. 1d-3) Then
  q_m = 0d0
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Actualización iteración
it = it+1

Call WriIvl(ideb, 'it', it)

```

```

End do

!Actualización variables de estado
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_E)

If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int.EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam_cap.GT. (-1d0)*ttol .AND. it.LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (2) ! 2 : Eje entre f_cap y f1_aux

!STARTING POINT

!Cálculo parámetros de CAP en Prs_E (variables)
q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
If (q_m .LT. 1d-3) Then
  q_m = 0d0
End If
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

Call WriVal(ideb, 'q_m', q_m)
Call WriVal(ideb, 'p', p)
Call WriVal(ideb, 'alfa', alfa)

!Cálculo el valor de f_cap y f1_aux
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0
f1_aux = Prs_E(3) - Prs_E(2)

!Cálculo tolerancia de f_cap y f1_aux
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol
f1_aux_TOL = ttol*abs(f1_aux)+ttol

!Cálculo df_cap/dS y df1_aux/dS en Prs_E
df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

df1_auxmDS(1) = 0d0
df1_auxmDS(2) = -1d0
df1_auxmDS(3) = 1d0

Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

```

```

!Cálculo df_cap/dq y df1_aux/dq en Prs_E (q=p_p)
df_capmdq = -2d0*p_p_E
df1_auxmdq = 0d0

Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs_E (dq=dp_p=dLam_cap*h_cap)
xh_1_aux = 0d0
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posterior
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E*c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref*c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posterior
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E*c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref*c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_
i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg_cap/dS y dg1_aux/dS en Prs_E
dg_capmdS(1) = df_capmdS(1)
dg_capmdS(2) = df_capmdS(2)
dg_capmdS(3) = df_capmdS(3)

dg1_auxmdS(1) = 0d0
dg1_auxmdS(2) = -1d0
dg1_auxmdS(3) = 1d0

!Cálculo d2g_cap/dS2 y d2g1_aux/dS2 en Prs_E
d2g_capmdS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,1) = d2g_capmdS2(1,2)
d2g_capmdS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(3,1) = d2g_capmdS2(1,3)
d2g_capmdS2(3,2) = d2g_capmdS2(1,3)
d2g_capmdS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

```

```

Call MZeroR(d2g1_auxmdS2, 9)
!Cálculo d2g_cap/dSdq y d2g1_aux/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g1_auxmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, dg_capmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg_cap, 3)
Call DinProd(df_capmdS, D_dg_cap, 3, df_cap_D_dg_cap)
xOmega11 = df_cap_D_dg_cap-df_capmdq*xh_cap
Call MatMat(D, 3, dg1_auxmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg1_aux, 3)
Call DinProd(df_capmdS, D_dg1_aux, 3, df_cap_D_dg1_aux)
xOmega3_aux = df_cap_D_dg1_aux
Call DinProd(df1_auxmdS, D_dg_cap, 3, df1_aux_D_dg_cap)
xOmega21 = df1_aux_D_dg_cap
Call DinProd(df1_auxmdS, D_dg1_aux, 3, df1_aux_D_dg1_aux)
xOmega22 = df1_aux_D_dg1_aux-df1_auxmdq*xh_1_aux

!Resolución sistema y cálculo dxLam_cap y dxLam1_aux
dxLam_cap = (f_cap*xOmega22-f1_aux*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)
dxLam1_aux = (f1_aux*xOmega11-f_cap*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)

xLam_cap = dxLam_cap
xLam1_aux = dxLam1_aux

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg_cap, D_dg1_aux, -xLam_cap, -xLam1_aux, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)
Call WriVec(ideb, 'p_p', p_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs tras primera iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f_cap con la nueva Prs
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
If (q_m.LT. 1d-3) Then
q_m = 0d0
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0
f1_aux = Prs(3) - Prs(2)
!EULER BACKWARD
Do while (((abs(f_cap) .GT. f_cap_TOL) .OR. &

```

```

(abs(f1_aux).GT. f1_aux_TOL)) .AND. &
(it.LE.itmax))

Call WriVal(ideb, 'q_m', q_m)
Call WriVal(ideb, 'p', p)

!Cálculo df_cap/dS y df1_aux/dS en Prs_E
df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

df1_auxmDS(1) = 0d0
df1_auxmDS(2) = -1d0
df1_auxmDS(3) = 1d0

Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

!Cálculo df_cap/dq y df1_aux/dq en Prs_E (q=p_p)
df_capmdq = -2d0*p_p
df1_auxmdq = 0d0

Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs (dq=dp_p=dLam_cap*h_cap)
xh_1_aux = 0d0
!f(i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
!Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xht = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
!Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg_cap/dS y dg1_aux/dS en Prs_E
dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)

```

```

dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)

dg1_auxmDS(1) = 0d0
dg1_auxmDS(2) = -1d0
dg1_auxmDS(3) = 1d0

!Cálculo d2g_cap/dS2 y d2g1_aux/dS2 en Prs_E
d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

Call MZeroR(d2g1_auxmDS2, 9)

!Cálculo d2g_cap/dSdq y d2g1_aux/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g1_auxmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, d2g_capmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg_cap_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g1_auxmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg1_aux_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam_cap*D_dg_cap_2 + xLam1_aux*D_dg1_aux_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg_capmDS, d2g_capmDSdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, theta_cap)
Call AddVec(dg1_auxmDS, d2g1_auxmDSdq, 1d0, xLam1_aux*xh_1_aux, 3, theta1_aux)
Call MatMat(HH, 3, df_capmDS, 3, 1, 3, HH_df_cap, 3)
Call MatMat(HH, 3, df1_auxmDS, 3, 1, 3, HH_df1_aux, 3)
Call MatMat(D, 3, theta_cap, 3, 1, 3, D_theta1_aux, 3)
Call DinProd(D_theta1_aux, HH_df_cap, 3, D_theta1_aux, 3)
Call DinProd(D_theta1_aux, HH_df1_aux, 3, D_theta1_aux, 3)
Call DinProd(D_theta1_aux, HH_df1_aux, 3, D_theta1_aux, 3)
xOmega11 = D_theta1_aux*HH_df_cap-df_capmdq*xh_cap
xOmega3_aux = D_theta1_aux*HH_df1_aux
xOmega21 = D_theta1_aux*HH_df1_aux
xOmega22 = D_theta1_aux*HH_df1_aux-df1_auxmdq*xh_1_aux

Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 1, 3, D_dg_cap, 3)
Call MatMat(D, 3, dg1_auxmDS, 3, 1, 3, D_dg1_aux, 3)
Call AddVec(D_dg_cap, D_dg1_aux, -xLam_cap, -xLam1_aux, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df_cap, r, 3, r_HH_df_cap)
Call DinProd(HH_df1_aux, r, 3, r_HH_df1_aux)

```



```

xOmega_f_cap = f_cap - r_HH_df_cap
xOmega_f1_aux = f1_aux - r_HH_df1_aux

!Resolución del sistema y cálculo dxLam13_trac y dxLam1_aux_trac
dxLam_cap = (xOmega_f_cap*xOmega22-
xOmega_f1_aux*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22-xOmega3_aux*xOmega21)
dxLam1_aux = (xOmega_f1_aux*xOmega11-xOmega_f_cap*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)

xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap
xLam1_aux = xLam1_aux + dxLam1_aux

!Actualización variables
Call AddVec(D_theta_cap, D_theta1_aux, -dxLam_cap, -dxLam1_aux, 3, dPrs_1)
Call AddVec(r, dPrs_1, -1d0, 1d0, 3, dPrs_2)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_2, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo valor de f_cap en (k+1)
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
If (q_m .LT. 1d-3) Then
  q_m = 0d0
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
If (IsUndef .EQ. 1 .AND. p .LT. -1d0*sigma_trac ) Then
  Prs(1) = Prs_E(1)
  Prs(2) = Prs_E(2)
  Prs(3) = Prs_E(3)
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
Return
End If
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0
f1_aux = Prs(3) - Prs(2)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Actualización iteración
it = it+1
Call WriIv(ideb, 'it', it)
End do

```

```

!Actualización variables de estado
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_E)

If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
  If (xLam_cap .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
  xLam1_aux .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
  it .LE. itmax) Then
    write(1,*)'Return Mapping Ok!'
  Else
    write(1,*)'Numerical problem'
  End If
End If

Case (3) ! 3 : Eje entre f_cap y f3_aux

!STARTING POINT

!Cálculo parámetros de CAP en Prs_E (variables)
q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
If (q_m .LT. 1d-3) Then
  q_m = 0d0
End If
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

!Cálculo el valor de f_cap y f3_aux
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0
f3_aux = Prs_E(2) - Prs_E(1)

!Cálculo tolerancia de f_cap y f3_aux
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol
f3_aux_TOL = ttol*abs(f3_aux)+ttol

!Cálculo df_cap/dS y df3_aux/dS en Prs_E
df_capmS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

df3_auxmS(1) = -1d0
df3_auxmS(2) = 1d0
df3_auxmS(3) = 0d0

Call WriVec(ideb, 'df_capmS', df_capmS, 3)

!Cálculo df_cap/dq y df3_aux/dq en Prs_E (q=p_p)
df_capmq = -2d0*p_p_E
df3_auxmq = 0d0

Call WriVal(ideb, 'df_capmq', df_capmq)

```

```

!Cálculo h en Prs_E (dq=dp_p=d1lam_cap*h_cap)
xh_3_aux = 0d0
!Plaxis 2D V9
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/(p_ref)**xm)
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/(p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posterior
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posterior
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_
i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg_cap/dS y dg3_aux/dS en Prs_E
dg_capmS(1) = df_capmS(1)
dg_capmS(2) = df_capmS(2)
dg_capmS(3) = df_capmS(3)

dg3_auxmS(1) = -1d0
dg3_auxmS(2) = 1d0
dg3_auxmS(3) = 0d0

!Cálculo d2g_cap/dS2 y d2g3_aux/dS2 en Prs_E
d2g_capmS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmS2(2,1) = d2g_capmS2(1,2)
d2g_capmS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmS2(3,1) = d2g_capmS2(1,3)
d2g_capmS2(3,2) = d2g_capmS2(2,3)
d2g_capmS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

Call MZeroR(d2g3_auxmSdq, 9)

!Cálculo d2g_cap/dSdq y d2g3_aux/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g3_auxmSdq, 3)

```

```

Call MZeroR(d2g3_auxmSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, dg_capmS, 3, 3, 1, 3, D_dg_cap, 3)
Call DinProd(df_capmS, D_dg_cap, 3, df_cap_D_dg_cap)
xOmega11 = df_cap_D_dg_cap-df_capmq*xh_cap
Call MatMat(D, 3, dg3_auxmS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_aux, 3)
Call DinProd(df_capmS, D_dg3_aux, 3, df_cap_D_dg3_aux)
xOmega3_aux = df_cap_D_dg3_aux
Call DinProd(df3_auxmS, D_dg3_aux, 3, df3_aux_D_dg3_aux)
xOmega21 = df3_aux_D_dg3_aux
Call DinProd(df3_auxmS, D_dg3_aux, 3, df3_aux_D_dg3_aux)
xOmega22 = df3_aux_D_dg3_aux-df3_auxmq*xh_3_aux

!Resolución sistema y cálculo dxLam_cap y dxLam3_aux
dxLam_cap = (f_cap*xOmega22-f3_aux*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)
dxLam3_aux = (f3_aux*xOmega11-f_cap*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)

xLam_cap = dxLam_cap
xLam3_aux = dxLam3_aux

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg_cap, D_dg3_aux, -xLam_cap, -xLam3_aux, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

!Cálculo el valor de f_cap con la nueva Prs
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
If (q_m.LT. 1d-3) Then
q_m = 0d0
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0
f3_aux = Prs(2) - Prs(1)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f_cap).GT. f_cap_TOL).OR. &
(abs(f3_aux).GT. f3_aux_TOL)).AND. &
(it.LE. itmax))

Call WriVal(ideb, 'q_m', q_m)
Call WriVal(ideb, 'p', p)

!Cálculo df_cap/dS y df3_aux/dS en Prs_E
df_capmS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

```

```

df3_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df3_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

df3_auxmDS(1) = -1d0
df3_auxmDS(2) = 1d0
df3_auxmDS(3) = 0d0

Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

!Cálculo df_cap/dq y df3_aux/dq en Prs_E (q=p_p)
df_capmdq = -2d0*p_p
df3_auxmdq = 0d0

Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs (dq=dp_p=dLam_cap*h_cap)
xh_3_aux = 0d0
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p*c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
1d0)*(max(p_p*c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg_cap/dS y dg3_aux/dS en Prs_E
dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)

dg3_auxmDS(1) = -1d0
dg3_auxmDS(2) = 1d0
dg3_auxmDS(3) = 0d0

!Cálculo d2g_cap/dS2 y d2g3_aux/dS2 en Prs_E
d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0)/(a1fa**2d0)+1d0/9d0
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(a1fa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*delta/(a1fa**2d0)-1d0/9d0
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(a1fa**2d0)+1d0/9d0
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(a1fa**2d0)-1d0/9d0
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(a1fa**2d0)+1d0/9d0)

Call MZeroR(d2g3_auxmDS2, 9)

!Cálculo d2g_cap/dSdq y d2g3_aux/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_auxmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, d2g_capmDS2, 3, 3, 3, 3, D dg_cap_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_auxmDS2, 3, 3, 3, 3, D dg3_aux_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam_cap*D dg_cap_2 + xLam3_aux*D dg3_aux_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg_capmDS, d2g_capmDSdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, theta_cap)
Call AddVec(dg3_auxmDS, d2g3_auxmDSdq, 1d0, xLam3_aux*xh_3_aux, 3, theta3_aux)
Call MatMat(HH, 3, df_capmDS, 3, 1, 3, HH_df_cap, 3)
Call MatMat(HH, 3, df3_auxmDS, 3, 1, 3, HH_df3_aux, 3)
Call MatMat(D, 3, theta3_aux, 3, 1, 3, D_theta3_cap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta3_aux, 3, 1, 3, D_theta3_aux, 3)
Call DinProd(D_theta3_cap, HH_df_cap, 3, D_theta3_cap_HH_df_cap)
Call DinProd(D_theta3_aux, HH_df3_aux, 3, D_theta3_aux_HH_df3_cap)
Call DinProd(D_theta3_cap, HH_df3_aux, 3, D_theta3_cap_HH_df3_aux)
Call DinProd(D_theta3_aux, HH_df3_aux, 3, D_theta3_aux_HH_df3_aux)
xOmega11 = D_theta3_cap_HH_df3_cap-df_capmdq*xh_cap
xOmega3_aux = D_theta3_aux_HH_df3_cap
xOmega21 = D_theta3_cap_HH_df3_aux
xOmega22 = D_theta3_aux_HH_df3_aux-df3_auxmdq*xh_3_aux

Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 1, 3, D dg_cap, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_auxmDS, 3, 1, 3, D dg3_aux, 3)
Call AddVec(D dg_cap, D dg3_aux, -xLam_cap, -xLam3_aux, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df3_cap, r, 3, r_HH_df3_cap)
Call DinProd(HH_df3_aux, r, 3, r_HH_df3_aux)
xOmega_f_cap = f_cap - r_HH_df3_cap
xOmega_f3_aux = f3_aux - r_HH_df3_aux

!Resolución del sistema y cálculo dxLam13_trac y dxLam3_aux_trac
dxLam_cap = (xOmega_f_cap*xOmega22-
xOmega_f3_aux*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22-xOmega3_aux*xOmega21)
dxLam3_aux = (xOmega_f3_aux*xOmega11-xOmega_f_cap*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)

```

```

xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap
xLam3_aux = xLam3_aux + dxLam3_aux

!Actualización variables
Call AddVec(D_theta_cap, D_theta3_aux, -dxLam_cap, -dxLam3_aux, 3, dPrs_1)
Call AddVec(r, dPrs_1, -1d0, 1d0, 3, dPrs_2)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_2, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo valor de f_cap en (k+1)
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
If (q_m .LT. 1d-3) Then
  q_m = 0d0
End If
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (IsUndr .EQ. 1 .AND. p .LT. -1d0*sigma_trac ) Then
Prs(1) = Prs_E(1)
Prs(2) = Prs_E(2)
Prs(3) = Prs_E(3)
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
Return
End If

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0
f3_aux = Prs(2) - Prs(1)

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Actualización iteración
it = it+1

Call WriIvl(ideb, 'it', it)

End do

!Actualización variables de estado
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_E)

If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam_cap .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &

```

```

xLam3_aux .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case Default
write(1,*) ' incorrect iArea in CAP_plast'
Stop
End Select

End ! CAP_plast

```

Subrutina MC_plast

```

!C*****
Subroutine MC_plast(iEl, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie MC
! Tension de compresion positiva (Prs_E(1) >= Prs_E(2) >= Prs_E(3))
!
! I/O Tipo
! iArea I I 1 : Superficie f13_mc Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! I I 2 : Eje entre f13_mc y f12_mc Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! I I 3 : Eje entre f13_mc y f23_mc Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
!
! Local:
! f13_mc : superficie MC para Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f12_mc : superficie MC para Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! f23_mc : superficie MC para Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! xLam13_mc : multiplicador plástico f13_mc
! xLam12_mc : multiplicador plástico f12_mc
! xLam23_mc : multiplicador plástico f23_mc
! D : matriz elástica
! df13_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f13_mc/dS
! df12_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f12_mc/dS
! df23_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f23_mc/dS
! df13_mcmdq : Primera derivada función de fluencia f13_mc/dq
! df12_mcmdq : Primera derivada función de fluencia f12_mc/dq
! df23_mcmdq : Primera derivada función de fluencia f23_mc/dq
! dg13_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g13_mc/dS
! dg12_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g12_mc/dS
! dg23_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g23_mc/dS
! d2g13_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g13_mc/dS2
! d2g12_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g12_mc/dS2
! d2g23_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g23_mc/dS2
! d2g13_mcmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g13_mc
! d2g12_mcmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g12_mc
! d2g23_mcmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g23_mc
! D_dgij : Producto de D por dgij_hs/dS
! D_dgij_2 : Producto de D por d2gij_hs/dS2
! HH_dgij : Producto de D por dfij_hs/dS
! thetaij : Operación dgij_hs/dS+d2gij_hs/dS2*xLamij_hs*xh_hs
! D_thetaij : Productor de D por thetaij
! HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_hs*D_dgij_2
!

```

```

Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res(3), Prs_0(3), dPrs(3), dPrs_1(3),
dPrs_2(3)
Dimension Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_2sup(3), r(3)
Dimension Props(*)
Dimension StVar0(*), StVar(*)
Dimension df13_mcmdS(3), df12_mcmdS(3), df23_mcmdS(3)
Dimension dg13_mcmdS(3), dg12_mcmdS(3), dg23_mcmdS(3)
Dimension d2g13_mcmdS2(3,3), d2g12_mcmdS2(3,3), d2g23_mcmdS2(3,3)
Dimension d2g13_mcmdSdq(3), d2g12_mcmdSdq(3), d2g23_mcmdSdq(3)
Dimension D_dg13(3), D_dg12(3), D_dg23(3)
Dimension D_dg13_2(3,3), D_dg12_2(3,3), D_dg23_2(3,3)
Dimension HH_df13(3), HH_df12(3), HH_df23(3)
Dimension thetai3(3), thetai2(3), thetai1(3)
Dimension D_theta13(3), D_theta12(3), D_theta23(3)
Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3)

Call MZeroR(Prs_res1, 3)
Call MZeroR(Prs_res2, 3)
Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
Call MZeroR(dPrs, 3)
Call MZeroR(dPrs_1, 3)
Call MZeroR(dPrs_2, 3)

Call MZeroR(df13_mcmdS, 3)
Call MZeroR(dg13_mcmdS, 3)
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)

Call MZeroR(df12_mcmdS, 3)
Call MZeroR(dg12_mcmdS, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmdSdq, 3)

Call MZeroR(df23_mcmdS, 3)
Call MZeroR(dg23_mcmdS, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcmdSdq, 3)

Call MZeroR(D_dg13_2, 9)
Call MZeroR(D_dg12_2, 9)
Call MZeroR(D_dg23_2, 9)

Call MZeroR(D_dg13, 3)
Call MZeroR(D_dg12, 3)
Call MZeroR(D_dg23, 3)

Call MZeroR(HH_df13, 3)
Call MZeroR(HH_df12, 3)
Call MZeroR(HH_df23, 3)

```

```

Call MZeroR(theta13, 3)
Call MZeroR(theta12, 3)
Call MZeroR(theta23, 3)

Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)

Call MZeroR(d_eps_p_aux, 3)

ipl = 1
it = 0
itmax = 100
ttol = 1d-12
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
ideb = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model.EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
p_ur = Props(8)
xk0_nc = Props(9)
R_f = Props(10)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
beta = Props(15)
Else If (i_model.EQ. 2) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D V9
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = -Props(12)
xm1 = Props(13)
xm2 = Props(14)
E50_ref = Props(15)
Eoed_ref = Props(1)
Eur_ref = Props(2)
xm = Props(3)
p_ref = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)
xk0_nc = Props(8)

Else If (i_model.EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E50_ref = Props(1)
Eur_ref = Props(2)
xm = Props(3)
c = Props(4)
phi = Props(5)
psi = Props(6)*Rad
xNu_ur = Props(7)*Rad
p_ur = Props(8)
xk0_nc = Props(9)
R_f = Props(10)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmkc = Props(15)
Else If (i_model.EQ. 4) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)

```

```

R_f          = Props(18)
sigma_trac  = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
a1fa       = Props(21)
xktmKc    = Props(22)
xNu_min   = Props(23)
End If

If ((i_model1 .EQ. 2) .OR. (i_model1 .EQ. 4)) Then
w          = 100d0
End If

dxLam13_mc = 0d0
dxLam12_mc = 0d0
dxLam23_mc = 0d0

xLam13_mc = 0d0
xLam12_mc = 0d0
xLam23_mc = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Superficie f13_hs
!STARTING POINT
!Cálculo el valor de f13_mc en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

!Cálculo tolerancia de f13_mc
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttoi

!Cálculo df13_mc/dS en Prs_E
df13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcnds(2) = 0d0
df13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

Call WriVec(ideb, 'df13_mcnds', df13_mcnds, 3)

!Cálculo df13_mc/dq en Prs_E
df13_mcmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E
xh_mc      = 0d0

!Cálculo dg13_mc/dS en Prs_E
dg13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
dg13_mcnds(2) = 0d0
dg13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

Call WriVec(ideb, 'dg13_mcnds', dg13_mcnds, 3)

!Cálculo d2g13_mc/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcnds2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdsdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, dg13_mcnds, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_mcnds, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
dxLam13_mc = f13_mc/(df13_D_dg13-df13_mcmdq*xh_mc)
xLam13_mc = dxLam13_mc

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)

!Actualización variables
Call AddVec(Prs_E, D_dg13, 1d0, -xLam13_mc, 3, Prs)

Call WriVec(ideb, 'Prs en primera iteración', Prs, 3)

!calculo el valor de f13_mc con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

!EULER BACKWARD

Do while ((abs(f13_mc) .GT. f13_mc_TOL) .AND. (it .LE. itmax))

!Cálculo df13_mc/dS en Prs
df13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcnds(2) = 0d0
df13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

Call WriVec(ideb, 'df13_mcnds', df13_mcnds, 3)

!Cálculo df13_mc/dq en Prs
df13_mcmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs
xh_mc      = 0d0

```

```

!Cálculo dgi3_mc/dS en Prs
dgi3_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dgi3_mcmds(2) = 0d0
dgi3_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

Call WriVec(ideb, 'dgi3_mcmds', dgi3_mcmds, 3)

!Cálculo d2gi3_mc/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2gi3_mcmds2, 9)

!Cálculo d2gi3_mc/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2gi3_mcmdsSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2gi3_mcmds2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dgi3_mcmds, d2gi3_mcmdsSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13)
Call MatMat(HH, 3, dgi3_mcmds, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call MatMat(D, 3, dgi3_mcmds, 3, 3, 1, 3, D_dgi3, 3)
Call AddVec(Prs_E, D_dgi3, 1d0, -xLam13_mc, 3, Prs_res)
Call AddVec(Prs, Prs_res, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(r, HH_df13, 3, r_HH_df13)
dXLam13_mc = (f13_mc-r_HH_df13)/(D_theta13_HH_df13-df13_mcmdq*xh_mc)
xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc

Call WriVal(ideb, 'dXLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)

!Actualización variables
Call AddVec(r, D_theta13, -1d0, -dxLam13_mc, 3, dPrs_1)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_1, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)

Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo valor de f13_mc en (k+1)
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

```

```

!Actualización variables de estado
StVar(2) = StVar0(2)

If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*ttol .AND. it .LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (2) ! 2 : Eje entre f13_mc y f12_mc

!STARTING POINT
!Cálculo valor de f13_mc y f12_mc en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f12_mc', f12_mc)

!Cálculo tolerancia f13_mc y f12_mc en Prs_E
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f12_mc_TOL = ttol*abs(f12_mc)+ttol

!Cálculo df13_mc/dS y df12_mc/dS en Prs_E
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0
df13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmds(3) = 0d0

Call WriVec(ideb, 'df13_mcmds', df13_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_mcmds', df12_mcmds, 3)

!Cálculo df13_mc/dq y df12_hs/dq en Prs_E
df13_mcmdq = 0d0
df12_mcmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E
xh_mc = 0d0

```



```

!Cálculo d2g13_mc/dS y d2g12_mc/dS
d2g13_mcmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
d2g13_mcmDS(2) = 0d0
d2g13_mcmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

d2g12_mcmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
d2g12_mcmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))
d2g12_mcmDS(3) = 0d0

Call WriVec(ideb, 'd2g13_mcmDS', d2g13_mcmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'd2g12_mcmDS', d2g12_mcmDS, 3)

!Cálculo d2g13_mc/dS2 y d2g12_mc/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmDS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2g12_hs/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmDSd2, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmDSd2, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_mcmDS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_mcmDq*xh_mc
Call MatMat(D, 3, dg12_mcmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call DinProd(df12_mcmDS, D_dg12, 3, df12_D_dg12)
xOmega12 = df12_D_dg12
Call DinProd(df12_mcmDS, D_dg12, 3, df12_D_dg12)
xOmega21 = df12_D_dg12
Call DinProd(df12_mcmDS, D_dg12, 3, df12_D_dg12)
xOmega22 = df12_D_dg12-df12_mcmDq*xh_mc

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc y dxLam12_mc
dxLam13_mc = (f13_mc*xOmega22-f12_mc*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)
dxLam12_mc = (f12_mc*xOmega11-f13_mc*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam12_mc = dxLam12_mc

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_mc', dxLam12_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_mc', xLam12_mc)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_mc, -xLam12_mc, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

Call WriVec(ideb, 'Prs durante primera iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f13_mc y f12_mc con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f12_mc', f12_mc)

!EULER BACKWARD
Do while (((abs(f13_mc).GT. f13_mc_TOL) .OR. &
(abs(f12_mc).GT. f12_mc_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_mc/dS y df12_mc/dS en Prs
df13_mcmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmDS(2) = 0d0
df13_mcmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df12_mcmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df12_mcmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmDS(3) = 0d0

Call WriVec(ideb, 'df13_mcmDS', df13_mcmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_mcmDS', df12_mcmDS, 3)

!Cálculo df13_mc/dq y df12_mc/dq en Prs
df13_mcmDq = 0d0
df12_mcmDq = 0d0

!Cálculo h en Prs
xh_mc = 0d0

!Cálculo dg13_mc/dS y dg12_mc/dS en Prs
dg13_mcmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmDS(2) = 0d0
dg13_mcmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg12_mcmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg12_mcmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))
dg12_mcmDS(3) = 0d0

Call WriVec(ideb, 'dg13_mcmDS', dg13_mcmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg12_mcmDS', dg12_mcmDS, 3)

```

```

!Cálculo d2g13_mc/ds2 y d2g12_mc/ds2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmdS2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq y d2g12_mc/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g12_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg12_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_2 + xLam12_mc*D_dg12_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmdS, d2g13_mcmdSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13)
Call AddVec(dg12_mcmdS, d2g12_mcmdSdq, 1d0, xLam12_mc*xh_mc, 3, theta12)
Call MatMat(HH, 3, df13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df13,3)
Call MatMat(HH, 3, df12_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df12,3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13,3)
Call MatMat(D, 3, theta12, 3, 3, 1, 3, D_theta12,3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df12)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_mcmdq*xh_mc
xOmega12 = D_theta12_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df12
xOmega22 = D_theta12_HH_df12-df12_mcmdq*xh_mc

Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg12_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_mc, -xLam12_mc, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df12, r, 3, r_HH_df12)
xOmegaF13 = f13_mc - r_HH_df13
xOmegaF12 = f12_mc - r_HH_df12

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc y dxLam12_mc
dxLam13_mc = (xOmegaF13*xOmega22-xOmegaF12*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam12_mc = (xOmegaF12*xOmega11-xOmegaF13*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam12_mc = xLam12_mc + dxLam12_mc

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_mc', dxLam12_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)

```

```

Call WriVal(ideb, 'xLam12_mc', xLam12_mc)
!Actualización variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta12, -dxLam13_mc, -dxLam12_mc, 3, dPrs_1)
Call AddVec(r, dPrs_1, -1d0, 1d0, 3, dPrs_2)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_2, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)

Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f13_mc y f12_mc en (k+1) en Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f12_mc', f12_mc)

!Actualización iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado
StVar(2) = StVar0(2)

If ((!E1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. &
xLam12_mc.GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. &
it.LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (3) ! 3 : Eje entre f13_mc y f23_mc

!STARTING POINT
!Cálculo valor de f13_mc y f23_mc en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

```

```

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(2)-Prs_E(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(2)+Prs_E(3))*sin(phi)
f23_mc      = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

!Cálculo tolerancia f13_mc y f23_mc en Prs_E
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f23_mc_TOL = ttol*abs(f23_mc)+ttol

!Cálculo df13_mc/dS y df23_mc/dS en Prs_E
df13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcnds(2) = 0d0
df13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df23_mcnds(1) = 0d0
df23_mcnds(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df23_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

!Cálculo df13_mc/dq y df23_hs/dq en Prs_E
df13_mcmdq = 0d0
df23_mcmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E
xh_mc      = 0d0

!Cálculo dg13_mc/dS y dg23_mc/dS
dg13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcnds(2) = 0d0
dg13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg23_mcnds(1) = 0d0
dg23_mcnds(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg23_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

!Cálculo d2g13_mc/dS2 y d2g23_mc/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcnds2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcnds2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq y d2g23_hs/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdsdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdsdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_mcnds, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_mcnds, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_mcmdq*xh_mc
Call MatMat(D, 3, dg23_mcnds, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call DinProd(df13_mcnds, D_dg23, 3, df13_D_dg23)
xOmega12 = df13_D_dg23
Call DinProd(df23_mcnds, D_dg13, 3, df23_D_dg13)

```

```

xOmega21 = df23_D_dg13
Call DinProd(df23_mcnds, D_dg23, 3, df23_D_dg23)
xOmega22 = df23_D_dg23-df23_mcmdq*xh_mc

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc y dxLam23_mc
dxLam13_mc = (f13_mc*xOmega22-f23_mc*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)
dxLam23_mc = (f12_mc*xOmega11-f23_mc*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam23_mc = dxLam23_mc

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dg23, -xLam13_mc, -xLam23_mc, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f13_mc y f23_mc con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(2)-Prs(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(2)+Prs(3))*sin(phi)
f23_mc      = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_mc).GT. f13_mc_TOL).OR. &
(abs(f23_mc).GT. f23_mc_TOL)).AND. &
(it.LE. itmax))

!Cálculo df13_mc/dS y df23_mc/dS en Prs
df13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcnds(2) = 0d0
df13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df23_mcnds(1) = 0d0
df23_mcnds(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df23_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

!Cálculo df13_mc/dq y df23_mc/dq en Prs
df13_mcmdq = 0d0
df23_mcmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs
xh_mc      = 0d0

!Cálculo dg13_mc/dS y dg23_mc/dS en Prs
dg13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))

```

```

dg13_mcmdS(2) = 0d0
dg13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg23_mcmdS(1) = 0d0
dg23_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg23_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

!Cálculo d2g13_mc/dS2 y d2g23_mc/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcmdS2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq y d2g23_mc/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmdS2, 3, 3, 3, D dg13_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g23_mcmdS2, 3, 3, 3, D dg23_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D dg13_2 + xLam23_mc*D dg23_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmdS, d2g13_mcmdSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13)
Call AddVec(dg23_mcmdS, d2g23_mcmdSdq, 1d0, xLam23_mc*xh_mc, 3, theta23)
Call MatMat(HH, 3, df13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df23, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta23, 3, 3, 1, 3, D_theta23, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
Call DinProd(D_theta13, HH_df23, 3, D_theta13_HH_df23)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_mcmdq*xh_mc
xOmega12 = D_theta23_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df23
xOmega22 = D_theta23_HH_df23-df23_mcmdq*xh_mc

Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D dg23, 3)
Call AddVec(D dg13, D dg23, -xLam13_mc, -xLam23_mc, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df23, r, 3, r_HH_df23)
xOmegaF13 = f13_mc - r_HH_df13
xOmegaF23 = f23_mc - r_HH_df23

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc y dxLam23_mc
dxLam13_mc = (xOmegaF13*xOmega22-xOmegaF23*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam23_mc = (xOmegaF23*xOmega11-xOmegaF13*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

```

```

xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam23_mc = xLam23_mc + dxLam23_mc

!Actualización variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta23, -dxLam13_mc, -dxLam23_mc, 3, dPrs_1)
Call AddVec(r, dPrs_1, -1d0, 1d0, 3, dPrs_2)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_2, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo valor de f13_mc y f23_mc en (k+1) en Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(2)-Prs(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(2)+Prs(3))*sin(phi)
f23_mc = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

!Actualización iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado
StVar(2) = StVar0(2)

If (iE1.EQ. num_EL).AND. (Int .EQ. num_GAUSS) Then
If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*ttol .AND. &
xLam23_mc.GT. (-1d0)*ttol .AND. &
it.LE. itmax) Then
write(1,*)"Return Mapping Ok!"
Else
write(1,*)"Numerical problem"
End If
End If

Case Default
write(1,*)" incorrect iArea in MC_plast"
Stop
End Select

End ! MC_plast

```

Subrutina TRAC_plast

```

!C*****
Subroutine TRAC_plast(iEL, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie TRAC
! Tensión de compresión positiva (Prs_E(1) >= Prs_E(2) >= Prs_E(3))
!
! I/O Tipo
! I I 1 : Superficie f3_trac Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! I I 2 : Eje entre f3_trac y f2_trac
! Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
!
! I I 3 : Eje entre f3_trac y f3_aux Prs_E(1) = Prs_E(2)
!
! Local:
! f3_trac : superficie TRAC para
! Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f2_trac : superficie TRAC para
! Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! f3_aux : superficie auxiliar 3
! Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! xLam3_trac : multiplicador plástico f3_trac
! xLam2_trac : multiplicador plástico f2_trac
! xLam3_aux : multiplicador plástico f3_aux
! D : matriz elástica
! df3_tracmds(3) : Primera derivada función de fluencia f3_trac/ds
! df2_tracmds(3) : Primera derivada función de fluencia f2_trac/ds
! df3_auxmds(3) : Primera derivada función de fluencia f3_aux/ds
! df3_tracmdq : Primera derivada función de fluencia f3_trac/dq
! df2_tracmdq : Primera derivada función de fluencia f2_trac/dq
! df3_auxmdq : Primera derivada función de fluencia f3_aux/dq
! dg3_tracmds(3) : Primera derivada potencial plástico g3_trac/ds
! dg2_tracmds(3) : Primera derivada potencial plástico g2_trac/ds
! dg3_auxmds(3) : Primera derivada potencial plástico g3_aux/ds
! d2g3_tracmds2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g3_trac/ds2
! d2g2_tracmds2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g2_trac/ds2
! d2g3_auxmds2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g3_aux/ds2
! d2g3_tracmdsdq(3) : Derivada ds y dq del potencial plástico g3_trac
! d2g2_tracmdsdq(3) : Derivada ds y dq del potencial plástico g2_trac
! d2g3_auxmdsdq(3) : Derivada ds y dq del potencial plástico g3_aux
! D_dgij : Producto de D por dgij_trac/ds
! D_dgij_2 : Producto de D por d2gij_trac/ds2
! HH_dfij : Producto de D por dfij_trac/ds
! thetaij : Operación dgij_trac/ds+d2gij_trac/ds2*xLamij_trac*xH_trac
!
! D_thetaij : Productor de D por thetaij
! HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_trac*D_gij_2
!
Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res(3), Prs_0(3)
Dimension Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_2sup(3), r(3)
Dimension Props(*)
Dimension StVar0(*), StVar(*)
Dimension df3_tracmds(3), df2_tracmds(3), df3_auxmds(3)
Dimension dg3_tracmds(3), dg2_tracmds(3), dg3_auxmds(3)
Dimension d2g3_tracmds2(3,3), d2g2_tracmds2(3,3), d2g3_auxmds2(3,3)
Dimension d2g3_tracmdsdq(3), d2g2_tracmdsdq(3), d2g3_auxmdsdq(3)
Dimension D_dg3_trac(3), D_dg2_trac(3), D_dg3_aux(3)
Dimension D_dg3_trac_2(3,3), D_dg2_trac_2(3,3), D_dg3_aux_2(3,3)
Dimension HH_df3_trac(3), HH_df2_trac(3), HH_df3_aux(3)
Dimension thetaij(3), thetai2_trac(3), thetai3_aux(3)
Dimension D_theta3_trac(3), D_theta2_trac(3), D_theta3_aux(3)
Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3)

Call MZeroR(Prs_res1, 3)
Call MZeroR(Prs_res2, 3)
Call MZeroR(Prs_2sup, 3)

Call MZeroR(df3_tracmds, 3)
Call MZeroR(dg3_tracmds, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmds2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmdsdq, 3)

Call MZeroR(df2_tracmds, 3)
Call MZeroR(dg2_tracmds, 3)
Call MZeroR(d2g2_tracmds2, 9)
Call MZeroR(d2g2_tracmdsdq, 3)

Call MZeroR(D_dg3_trac_2, 9)
Call MZeroR(D_dg2_trac_2, 9)
Call MZeroR(D_dg3_aux_2, 9)

Call MZeroR(D_dg3_trac, 3)
Call MZeroR(D_dg2_trac, 3)
Call MZeroR(D_dg3_aux, 3)

Call MZeroR(HH_df3_trac, 3)
Call MZeroR(HH_df2_trac, 3)
Call MZeroR(HH_df3_aux, 3)

Call MZeroR(theta3_trac, 3)

```

```

Call MZeroR(theta2_trac, 3)
Call MZeroR(theta3_aux, 3)

Call MZeroR(D_theta3_trac, 3)
Call MZeroR(D_theta2_trac, 3)
Call MZeroR(D_theta3_aux, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)

Call MZeroR(d_eps_e_aux, 3)

ip1      = 2
it       = 0
itmax   = 100
ttol    = 1d-12
pi      = 3.1415926535d0
Rad     = pi/180d0
ideb    = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model.EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E0_ref   = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref  = Props(3)
xm       = Props(4)
c        = Props(5)
phi      = Props(6)*Rad
psi      = Props(7)*Rad
xNu_ur  = Props(8)
p_ref   = Props(9)
xk0_nc  = Props(10)
R_f     = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa    = Props(14)
xktmKc  = Props(15)
Else If (i_model.EQ. 2) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D V9
xKS_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref  = Props(5)
p2_ref  = Props(6)
xm1     = Props(7)
xm2     = Props(8)
E0_ref  = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm      = Props(12)
p_ref  = Props(13)
c      = Props(14)
phi    = Props(15)*Rad
psi    = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f    = Props(18)

Else If (i_model.EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E0_ref   = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref  = Props(11)
xm       = Props(12)
p_ref   = Props(13)
c        = Props(14)
phi      = Props(15)*Rad
psi      = Props(16)*Rad
xk0_nc  = Props(17)
R_f     = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa    = Props(21)
beta    = Props(22)
xNu_min = Props(23)
Else If (i_model.EQ. 4) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E0_ref   = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref  = Props(3)
xm       = Props(4)
c        = Props(5)
phi      = Props(6)*Rad
psi      = Props(7)*Rad
xNu_ur  = Props(8)
p_ref   = Props(9)
xk0_nc  = Props(10)
R_f     = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa    = Props(14)
xktmKc  = Props(15)
Else If (i_model.EQ. 4) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
xKS_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref  = Props(5)
p2_ref  = Props(6)
xm1     = Props(7)
xm2     = Props(8)
E0_ref  = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm      = Props(12)
p_ref  = Props(13)
c      = Props(14)
phi    = Props(15)*Rad
psi    = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f    = Props(18)

```

```

sigma_trac      = -Props(19)
Ei_ref_inter    = Props(20)
alfa            = Props(21)
xktmkc         = Props(22)
xNu_min        = Props(23)
End If

If ((i_model1.EQ. 2) .OR. (i_model1.EQ. 4)) Then
W               = 100d0
End If

dXLam3_trac = 0d0
dXLam2_trac = 0d0
dXLam3_aux  = 0d0

xLam3_trac = 0d0
xLam2_trac = 0d0
xLam3_aux  = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Superficie f3_trac

!STARTING POINT
!Cálculo el valor de f3_trac en Prs_E
f3_trac      = sigma_trac - Prs_E(3)

!Cálculo tolerancia de f3_trac
f3_trac_TOL = ttol*abs(f3_trac)+ttol

!Cálculo df3_trac/dS en Prs_E
df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo df3_trac/dq en Prs_E
df3_tracmdq      = 0d0
!Cálculo h en Prs_E
xh_trac          = 0d0
!Cálculo dg3_trac/dS en Prs_E
dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0
dg3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo d2g3_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)

!Cálculo d2g3_trac/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
dXLam3_trac = f3_trac/(df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmdq*xh_trac)
xLam3_trac = dxLam3_trac

Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
dXLam3_trac = f3_trac/(df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmdq*xh_trac)
xLam3_trac = dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(Prs_E, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f3_trac con la nueva Prs
f3_trac      = sigma_trac - Prs(3)

!EULER BACKWARD

Do while ((abs(f3_trac) .GT. f3_trac_TOL) .AND. (it .LE. itmax))

!Cálculo df3_trac/dS en Prs
df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo df3_trac/dq en Prs
df3_tracmdq      = 0d0

!Cálculo h en Prs
xh_trac          = 0d0

!Cálculo dg3_trac/dS en Prs
dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0
dg3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo d2g3_trac/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)

!Cálculo d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)

```

```

Call AddVec(dg3_tracmDS, d2g3_tracmDSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_trac, 3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta3_trac, 3)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac*HH_df3_trac)
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call AddVec(Prs_E, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_res)
Call AddVec(Prs, Prs_res, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(r, HH_df3_trac, 3, r_HH_df3_trac)
dxLam3_trac = (f3_trac-r_HH_df3_trac)/(D_theta3_trac*HH_df3_trac-
df3_tracmdq*xh_trac)
xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(Prs_E, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs)

!Cálculo valor de f3_trac en (k+1)
f3_trac = sigma_trac - Prs(3)

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado
StVar(2) = StVar0(2)

If ((.iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam3_trac .GT. (-1d0)*tto1 .AND. it .LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (2) ! 2 : Eje entre f3_trac y f2_trac

!STARTING POINT

!Cálculo valor de f3_trac y f2_trac en Prs_E
f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)
f2_trac = sigma_trac - Prs_E(2)

!Cálculo tolerancia f3_trac y f2_trac en Prs_E
f3_trac_TOL = tto1*abs(f3_trac)+tto1
f2_trac_TOL = tto1*abs(f2_trac)+tto1

```

```

!Cálculo df3_trac/dS y df2_trac/dS en Prs_E
df3_tracmDS(1) = 0d0
df3_tracmDS(2) = 0d0
df3_tracmDS(3) = -1d0

df2_tracmDS(1) = 0d0
df2_tracmDS(2) = -1d0
df2_tracmDS(3) = 0d0

!Cálculo df3_trac/dq y df2_trac/dq en Prs_E (q=gamma_p)
df3_tracmdq = 0d0
df2_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E (dq=dgamma_p=dLam_trac*h_trac)
xh_trac = 0d0

!Cálculo dg3_trac/dS y dg2_trac/dS en Prs_E
dg3_tracmDS(1) = 0d0
dg3_tracmDS(2) = 0d0
dg3_tracmDS(3) = -1d0

dg2_tracmDS(1) = 0d0
dg2_tracmDS(2) = -1d0
dg2_tracmDS(3) = 0d0

!Cálculo d2g3_trac/dS2 y d2g2_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g3_tracmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g2_tracmDS2, 9)

!Cálculo d2g3_trac/dSdq y d2g2_trac/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g3_tracmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g2_tracmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call DinProd(df3_tracmDS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_trac)
xOmega11 = df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmdq*xh_trac
Call MatMat(D, 3, dg2_tracmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg2_trac, 3)
Call DinProd(df3_tracmDS, D_dg2_trac, 3, df3_trac_D_dg2_trac)
xOmega3_aux = df3_trac_D_dg2_trac
Call DinProd(df2_tracmDS, D_dg3_trac, 3, df2_trac_D_dg3_trac)
xOmega21 = df2_trac_D_dg3_trac
Call DinProd(df2_tracmDS, D_dg2_trac, 3, df2_trac_D_dg2_trac)
xOmega22 = df2_trac_D_dg2_trac-df2_tracmdq*xh_trac

!Resolución sistema y cálculo dxLam3_trac y dxLam2_trac
dxLam3_trac = (f3_trac*xOmega22-f2_trac*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)
dxLam2_trac = (f2_trac*xOmega11-f3_trac*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)

```



```

xLam3_trac = dxLam3_trac
xLam2_trac = dxLam2_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg3_trac, D_dg2_trac, -xLam3_trac, -xLam2_trac, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f3_trac y f2_trac con la nueva Prs
f3_trac = sigma_trac - Prs(3)
f2_trac = sigma_trac - Prs(2)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f3_trac) .GT. f3_trac_TOL) .OR. &
(abs(f2_trac) .GT. f2_trac_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df3_trac/ds y df2_trac/ds en Prs
df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

df2_tracmdS(1) = 0d0
df2_tracmdS(2) = -1d0
df2_tracmdS(3) = 0d0

!Cálculo df3_trac/dq y df2_trac/dq en Prs (q=gamma_p)
df3_tracmdq = 0d0
df2_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs (dq=dgamma_p=dlam_trac*h_trac)
xh_trac = 0d0

!Cálculo dg3_trac/ds y dg2_trac/ds en Prs
dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0
dg3_tracmdS(3) = -1d0

dg2_tracmdS(1) = 0d0
dg2_tracmdS(2) = -1d0
dg2_tracmdS(3) = 0d0

!Cálculo d2g3_trac/ds2 y d2g2_trac/ds2 en Prs
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g2_tracmdS2, 9)

!Cálculo d2g3_trac/dSdq y d2g2_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g2_tracmdSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores piásticos
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g2_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg2_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam3_trac*D_dg3_trac_2 + xLam2_trac*D_dg2_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg3_tracmdS, d2g3_tracmdSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call AddVec(dg2_tracmdS, d2g2_tracmdSdq, 1d0, xLam2_trac*xh_trac, 3,
theta2_trac)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_trac,3)
Call MatMat(HH, 3, df2_tracmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df2_trac,3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta3_trac,3)
Call MatMat(D, 3, theta2_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta2_trac,3)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta2_trac, HH_df2_trac, 3, D_theta2_trac_HH_df2_trac)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df2_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df2_trac)
Call DinProd(D_theta2_trac, HH_df2_trac, 3, D_theta2_trac_HH_df2_trac)
xOmega11 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_tracmdq*xh_trac
xOmega3_aux = D_theta2_trac_HH_df3_trac
xOmega21 = D_theta3_trac_HH_df2_trac
xOmega22 = D_theta2_trac_HH_df2_trac-df2_tracmdq*xh_trac

Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call MatMat(D, 3, dg2_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg2_trac, 3)
Call AddVec(D_dg3_trac, D_dg2_trac, -xLam3_trac, -xLam2_trac, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
Call DinProd(HH_df2_trac, r, 3, r_HH_df2_trac)
xOmegaf3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac
xOmegaf2_trac = f2_trac - r_HH_df2_trac
!Resolución del sistema y cálculo dxLam3_trac y dxLam2_trac
dxLam3_trac = (xOmegaf3_trac*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22 - xOmega3_aux*xOmega21)
dxLam2_trac = (xOmegaf2_trac*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22 - xOmega3_aux*xOmega21)
xOmegaf3_trac = xOmega21/(xOmega11*xOmega22 - xOmega3_aux*xOmega21)

xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac
xLam2_trac = xLam2_trac + dxLam2_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg3_trac, D_dg2_trac, -xLam3_trac, -xLam2_trac, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f3_trac y f2_trac en (k+1) en Prs
f3_trac = sigma_trac - Prs(3)
f2_trac = sigma_trac - Prs(2)

!Actualización iteración

```

```

it = it+1
End do
!Actualización variables de estado
StVar(2) = StVar(2)

If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam3_trac .GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. &
xLam2_trac .GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. &
it.LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (3) ! 1 : Eje entre f3_trac y f3_aux
!STARTING POINT

!Cálculo valor de f3_trac y f3_aux en Prs_E
f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)
f3_aux = Prs_E(2) - Prs_E(1)

!Cálculo tolerancia f3_trac y f3_aux en Prs_E
f3_trac_TOL = ttoi1*abs(f3_trac)+ttoi
f3_aux_TOL = ttoi1*abs(f3_aux)+ttoi

!Cálculo df3_trac/dS y df3_aux/dS en Prs_E
df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

df3_auxmdS(1) = -1d0
df3_auxmdS(2) = 1d0
df3_auxmdS(3) = 0d0

!Cálculo df3_trac/dq y df3_aux/dq en Prs_E (q=gamma_p)
df3_tracmdq = 0d0
df3_auxmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E (dq=dgamma_p=diam_trac*h_trac)
xh_trac = 0d0
xh = 0d0

!Cálculo dg3_trac/dS y dg3_aux/dS en Prs_E
dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0

```

```

dg3_tracmdS(3) = -1d0

dg3_auxmdS(1) = -1d0
dg3_auxmdS(2) = 1d0
dg3_auxmdS(3) = 0d0

!Cálculo d2g3_trac/dS2 y d2g3_aux/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_auxmdS2, 9)

!Cálculo d2g3_trac/dSdq y d2g3_aux/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_auxmdSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call DinProd(df3_tracmdS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_trac)
xOmega11 = df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmdq*xh_trac
Call MatMat(D, 3, dg3_auxmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_aux, 3)
Call DinProd(df3_tracmdS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_aux)
xOmega3_aux = df3_trac_D_dg3_aux
Call DinProd(df3_auxmdS, D_dg3_trac, 3, df3_aux_D_dg3_trac)
xOmega21 = df3_aux_D_dg3_trac
Call DinProd(df3_auxmdS, D_dg3_aux, 3, df3_aux_D_dg3_aux)
xOmega22 = df3_aux_D_dg3_aux-df3_auxmdq*xh

!Resolución sistema y cálculo dxLam3_trac y dxLam2_trac
dxLam3_trac = (f3_trac*xOmega22-f3_aux*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22-
dxLam3_aux*xOmega21)
dxLam3_aux = (f3_aux*xOmega11-f3_trac*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega3_aux*xOmega21)

xLam3_trac = dxLam3_trac
xLam3_aux = dxLam3_aux

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg3_trac, D_dg3_aux, -xLam3_trac, -xLam3_aux, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo e1 valor de f3_trac y f2_trac con la nueva Prs
f3_trac = sigma_trac - Prs(3)
f3_aux = Prs(2) - Prs(1)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f3_trac) .GT. f3_trac_TOL) .OR. &
(abs(f3_aux) .GT. f3_aux_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

```

```

!Cálculo df3_trac/ds y df3_aux/ds en Prs
df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

df3_auxmdS(1) = -1d0
df3_auxmdS(2) = 1d0
df3_auxmdS(3) = 0d0

!Cálculo df3_trac/dq y df3_aux/dq en Prs (q=gamma_p)
df3_tracmdq = 0d0
df3_auxmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs (dq=dgamma_p=dLam_trac*h_trac)
xh_trac = 0d0
xh = 0d0

!Cálculo dg3_trac/ds y dg3_aux/ds en Prs
dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0
dg3_tracmdS(3) = -1d0

dg3_auxmdS(1) = -1d0
dg3_auxmdS(2) = 1d0
dg3_auxmdS(3) = 0d0

!Cálculo d2g3_trac/ds2 y d2g3_aux/ds2 en Prs
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_auxmdS2, 9)

!Cálculo d2g3_trac/dSdq y d2g3_aux/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_auxmdSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_auxmdS2, 3, 3, 3, D_dg3_aux_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam3_trac*D_dg3_trac_2 + xLam3_aux*D_dg3_aux_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg3_tracmdS, d2g3_tracmdSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call AddVec(dg3_auxmdS, d2g3_auxmdSdq, 1d0, xLam3_aux*xh, 3, theta3_aux)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_trac,3)
Call MatMat(HH, 3, df3_auxmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_aux,3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta3_trac,3)
Call MatMat(D, 3, theta3_aux, 3, 3, 1, 3, D_theta3_aux,3)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta3_aux, HH_df3_trac, 3, D_theta3_aux_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_aux, 3, D_theta3_trac_HH_df3_aux)
Call DinProd(D_theta3_aux, HH_df3_aux, 3, D_theta3_aux_HH_df3_aux)

xOmega11 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_tracmdq*xh_trac
xOmega3_aux = D_theta3_aux_HH_df3_trac
xOmega21 = D_theta3_trac_HH_df3_aux
xOmega22 = D_theta3_aux_HH_df3_aux-df3_auxmdq*xh

Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_auxmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_aux, 3)
Call AddVec(D_dg3_trac, D_dg3_aux, -xLam3_trac, -xLam3_aux, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
Call DinProd(HH_df3_aux, r, 3, r_HH_df3_aux)
xOmegaF3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac
xOmegaF3_aux = f3_aux - r_HH_df3_aux

!Resolución del sistema y cálculo dxiLam3_trac y dxLam3_aux
dxLam3_trac = (xOmegaF3_trac*xOmega22-
xOmegaF3_aux*xOmega3_aux)/(xOmega11*xOmega22-xOmega3_aux*xOmega21)
dxLam3_aux = (xOmegaF3_aux*xOmega11-
xOmegaF3_trac*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-xOmega3_aux*xOmega21)

xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac
xLam3_aux = xLam3_aux + dxLam3_aux

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg3_trac, D_dg3_aux, -xLam3_trac, -xLam3_aux, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f3_trac y f3_aux en (k+1) en Prs
f3_trac = sigma_trac - Prs(3)
f3_aux = Prs(2) - Prs(1)

!Actualización iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado
StVar(2) = StVar0(2)

If ((!E1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam3_trac .GT. (-1d0)*ttoi .AND. &
xLam3_aux .GT. (-1d0)*ttoi .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*) 'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*) 'Numerical problem'
End If
End If

```

```

Case Default
write(1,*) ' incorrect iArea in TRAC_plast'
Stop
End Select

End ! trac_plast

```

Subrutina HS_CAP_plast

```

!C*****
Subroutine HS_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, IsUndr, D, Gm, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie HS
! Tensión de compresión positiva!
!
! I/O Tipo
! IArea I I 1 : Eje entre f13_hs y f_cap Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! 2 : Punto f13_hs, f12_hs y f_cap
!Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! 3 : Punto f13_hs, f23_hs y f_cap
!Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
!
! Local:
! f13_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f12_hs : superficie HS para Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! f23_hs : superficie HS para Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f_cap : superficie CAP
! xLam13_hs : multiplicador plástico f13_hs
! xLam12_hs : multiplicador plástico f12_hs
! xLam23_hs : multiplicador plástico f23_hs
! xLam_cap : multiplicador plástico f_cap
! D : matriz elástica
! df13_hsmndS(3) : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dS
! df12_hsmndS(3) : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dS
! df23_hsmndS(3) : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dS
! df_capndS(3) : Primera derivada función de fluencia f_cap/dS
! df13_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f13_hs/dq
! df12_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f12_hs/dq
! df23_hsmdq : Primera derivada función de fluencia f23_hs/dq
! df_capndq : Primera derivada función de fluencia f_cap/dq
! dg13_hsmndS(3) : Primera derivada potencial plástico g13_hs/dS
! dg12_hsmndS(3) : Primera derivada potencial plástico g12_hs/dS
! dg23_hsmndS(3) : Primera derivada potencial plástico g23_hs/dS
! dg_capndS(3) : Primera derivada potencial plástico g_cap/dS
! d2g13_hsmndS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g13_hs/dS2
! d2g12_hsmndS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g12_hs/dS2
! d2g23_hsmndS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g23_hs/dS2
! d2g_capndS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g_cap/dS2
! d2g13_hsmndSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g13_hs
! d2g12_hsmndSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g12_hs
! d2g23_hsmndSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g23_hs
!

```

```

! d2g_capmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g_cap
! D_dgij : Producto de D por dgij_hs/dS
! D_dgij_2 : Producto de D por d2gij_hs/dS2
! HH_dfij : Producto de D por dfij_hs/dS
! thetaij : Operación dgij_hs/dS+d2gij_hs/dS2*xLamij_hs*xh_hs
! D_thetaij : Productor de D por thetaij
! HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_hs*D_gij_2

Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_res3(3), Prs_0(3)
Dimension Prs_2sup(3), Prs_3sup(3), r(3), dPrs(3), dPrs_1(3), dPrs_2(3),
dPrs_3(3)
Dimension Props(*)
Dimension StVar0(*), StVar(*)
Dimension df13_hsmoS(3), df12_hsmoS(3), df23_hsmoS(3), df_capmdS(3)
Dimension dg13_hsmoS(3), dg12_hsmoS(3), dg23_hsmoS(3), dg_capmdS(3)
Dimension d2g13_hsmoS2(3,3), d2g12_hsmoS2(3,3), d2g23_hsmoS2(3,3),
d2g_capmdS2(3,3)
Dimension d2g13_hsmoSdq(3), d2g12_hsmoSdq(3), d2g23_hsmoSdq(3),
d2g_capmdSdq(3)
Dimension D_dg13(3), D_dg12(3), D_dg23(3), D_dgcap(3)
Dimension D_dg13_2(3,3), D_dg12_2(3,3), D_dg23_2(3,3), D_dgcap_2(3,3)
Dimension HH_df13(3), HH_df12(3), HH_df23(3), HH_dfcap(3)
Dimension thetai3(3), thetai2(3), thetai3(3), thetacap(3)
Dimension D_theta13(3), D_theta12(3), D_theta23(3), D_thetacap(3)
Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3), xMat(3,3), xMat_inv(3,3),
f_b(3), d_lam(3)

Call MZeroR(Prs_res1, 3)
Call MZeroR(Prs_res2, 3)
Call MZeroR(Prs_res3, 3)
Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
Call MZeroR(Prs_3sup, 3)
Call MZeroR(dPrs, 3)
Call MZeroR(dPrs_1, 3)
Call MZeroR(dPrs_2, 3)
Call MZeroR(dPrs_3, 3)

Call MZeroR(df13_hsmoS, 3)
Call MZeroR(dg13_hsmoS, 3)
Call MZeroR(d2g13_hsmoS2, 9)
Call MZeroR(d2g13_hsmoSdq, 3)

Call MZeroR(df12_hsmoS, 3)
Call MZeroR(dg12_hsmoS, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmoS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmoSdq, 3)

Call MZeroR(df23_hsmoS, 3)
Call MZeroR(dg23_hsmoS, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmoS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmoSdq, 3)

Call MZeroR(d_f_b, 3)
Call MZeroR(d_lam, 3)

Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)
Call MZeroR(D_thetacap, 3)

Call MZeroR(HH_df13, 3)
Call MZeroR(HH_df12, 3)
Call MZeroR(HH_df23, 3)
Call MZeroR(HH_dfcap, 3)

Call MZeroR(theta13, 3)
Call MZeroR(theta12, 3)
Call MZeroR(theta23, 3)
Call MZeroR(thetacap, 3)

Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)
Call MZeroR(D_thetacap, 3)

Call MZeroR(Unity, 9)
Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)
Call MZeroR(D_thetacap, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)
Call MZeroR(xMat, 9)
Call MZeroR(xMat_inv, 9)
Call MZeroR(f_b, 3)
Call MZeroR(d_lam, 3)

Call MZeroR(d_eps_p_aux, 3)

ipl = 4
it = 0
itmax = 100
ttol = 1d-12
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
ideb = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)

```

```

Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model .EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmkc = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 2) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D V9
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xktmkc = Props(22)
xNu_min = Props(23)
Else If (i_model .EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)

phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmkc = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 4) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xktmkc = Props(22)
xNu_min = Props(23)
End If

If (i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4) Then
w = 100d0
End If

delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
gamma_p_E = StVar0(1)
p_p_E = (-1d0)*StVar0(2)
xh_i = Gm**(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)

dxLam13_hs = 0d0
dxLam12_hs = 0d0
dxLam23_hs = 0d0
dxLam_cap = 0d0

```

```

xLam13_hs = 0d0
xLam12_hs = 0d0
xLam23_hs = 0d0
xLam_cap = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Eje entre f13_hs y f_cap
!STARTING POINT
ideb = -1

!Cálculo valor de f13_hs y f_cap en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

!Cálculo tolerancia de f13_hs y f_cap
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)

```

```

Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)
!Cálculo df13_hs/dS y df_cap/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmds(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmds(2) = 0d0
df13_hsmds(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmds(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmds(2) = 0d0
df13_hsmds(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

df_capmds(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmds(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmds(3) = 2d0*(-q_m*(delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmds', df13_hsmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmds', df_capmds, 3)

!Cálculo df13_hs/dg en Prs_E (q1=gamma_p, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p_E

!Cálculo h en Prs_E (dq1=dgamma_p=dLam1*h1, dq2=dp_p=dLam2*h2)
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0*xh_i
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)
Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmKc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0))/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0*xh_i
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmKc-1d0)

```

```

xh_cap      = (2d0*xh**max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi))**xm)*xh
i
End If

!Cálculo dg13_hs/ds y dg_cap/ds en Prs_E
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m  = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-sin(phi))*sin(psi)
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If

Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHVSS
sin_phi_m  = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xK0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xK0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-sin(phi))*sin(psi)
xM_comp   = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta       = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xK0_nc)/(1d0+2d0*xK0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
dxLam13_hs = (f13_hs*xOmega22-f_cap*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam_cap = (f_cap*xOmega11-f13_hs*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam_cap = dxLam_cap

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega12 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df_capmDS, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
xOmega21 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capmDS, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
xOmega22 = dfcap_D_dgcap-df_capmdq*xh_cap

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam_cap
dxLam13_hs = (f13_hs*xOmega22-f_cap*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam_cap = (f_cap*xOmega11-f13_hs*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam_cap = dxLam_cap

```

```
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)
```

```
dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0
dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
```

```
dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)
```

```
Call WriVec(ideb, 'dg13_hsmDS', dg13_hsmDS, 3)
```

```
Call WriVec(ideb, 'dg_capmDS', dg_capmDS, 3)
```

```
!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2gcap/dS2 en Prs_E
```

```
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
```

```
d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
```

```
!Cálculo d2g13_hs/dSdq en Prs_E
```

```
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
```

```
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)
```

```
!Cálculo de los multiplicadores plásticos
```

```
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
```

```
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
```

```
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
```

```
Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
```

```
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
```

```
xOmega12 = df13_D_dgcap
```

```
Call DinProd(df_capmDS, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
```

```
xOmega21 = dfcap_D_dg13
```

```
Call DinProd(df_capmDS, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
```

```
xOmega22 = dfcap_D_dgcap-df_capmdq*xh_cap
```

```
!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam_cap
```

```
dxLam13_hs = (f13_hs*xOmega22-f_cap*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
```

```
xOmega12*xOmega21)
```

```
dxLam_cap = (f_cap*xOmega11-f13_hs*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
```

```
xOmega12*xOmega21)
```

```
xLam13_hs = dxLam13_hs
```

```
xLam_cap = dxLam_cap
```



```

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

!Actualizo variables
Call AddVec(D_dg13, D_dgcap, -xLam13_hs, -xLam_cap, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)
Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)

!Cálculo valor de f13_hs y f_cap con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriVec(ideb, 'Prs en primera iteración', Prs, 3)

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

```

```

!EULER BACKWARD
Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
(abs(f_cap) .GT. f_cap_TOL) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_hs/dS y df_cap/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-
Prs(3))))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = (2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

!Cálculo df13_hs/dq en Prs (q1=gamma_p, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p

Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs (dq=dLam1*h1 y dq2=dLam2*h2)
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model .EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0*xh_i
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model .EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0
xh_cap = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xkt = xkt/(xktmkc-1d0)
xh = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model .EQ. 4) Then

```

```

!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0*xh_i
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p+p*c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi))))**xm)*xh_i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg13_hs/ds y dg_cap/ds en Prs
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3)) -
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xm_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xm_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xm_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xm_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If

```

```

sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

dg13_hsmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmds(2) = 0d0
dg13_hsmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg_capmds(1) = df_capmds(1)
dg_capmds(2) = df_capmds(2)
dg_capmds(3) = df_capmds(3)

Call WriVec(ideb, 'dg13_hsmds', dg13_hsmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg_capmds', dg_capmds, 3)

!Cálculo d2g13_hs/ds2 y d2g_cap/ds2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmds2, 9)

d2g_capmds2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmds2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmds2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmds2(2,1) = d2g_capmds2(1,2)
d2g_capmds2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmds2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmds2(3,1) = d2g_capmds2(1,3)
d2g_capmds2(3,2) = d2g_capmds2(2,3)
d2g_capmds2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dsdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmdsdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmds2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g_capmds2, 3, 3, 3, 3, D_dgcap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_2 + xLam_cap*D_dgcap_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmds, d2g13_hsmdsdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13)
Call AddVec(dg_capmds, d2g_capmdsdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, theta13)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmds, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmds, 3, 3, 1, 3, HH_dfcap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta13, HH_dfcap, 3, D_theta13_HH_dfcap)
Call DinProd(D_theta13, HH_dfcap, 3, D_theta13_HH_dfcap)

```



```

ideb = -1
If ((!E1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
ideb = -1
ideb3= -1
End If
!STARTING POINT
!Cálculo el valor de f13_hs, f12_hs y f_cap en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
If ((!E1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(2))/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
End If

q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f12_hs', f12_hs)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Cálculo tolerancia f13_hs, f12_hs y f_cap en Prs_E
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f12_hs_TOL = ttol*abs(f12_hs)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol

!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df_cap/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -(2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -(2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))**2d0)-
2d0/Eur
df12_hsmDS(2) = -(2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(2))))**2d0)+2d0/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
Else
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df12_hsmDS(2) = -(2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
df12_hsmDS(3) = 0d0
End If

df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_hsmDS', df12_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

!Cálculo df13_hs/dq, df12_hs/dq y df_cap/dS en Prs_E (q1=gamma_p -para f13_hs
y f12_hs-, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df12_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p_E

Call WriVal(ideb, 'df13_hsmdq', df13_hsmdq)
Call WriVal(ideb, 'df12_hsmdq', df12_hsmdq)

```

```

Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs_E (dq=d1am1*h1 -para f13_hs y f12_hs- y dq2=d1am2*h2)
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0*xh_i
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0*xh_i
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_hs', xh_hs)
Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg13_hs/dS, dg12_hs/dS y dg_cap/dS en Prs_E
If ((i_model.EQ. 1) .OR. (i_model.EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_psi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi.EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model.EQ. 2) .OR. (i_model.EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_psi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0),(Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xk0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xk0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xm_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xm_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xm_comp*exp((1d0/15d0)*Log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xm_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi.EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb3, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb3, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb3, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

dg13_hsmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmds(2) = 0d0
dg13_hsmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg12_hsmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg12_hsmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg12_hsmds(3) = 0d0

dg_capmds(1) = df_capmds(1)
dg_capmds(2) = df_capmds(2)
dg_capmds(3) = df_capmds(3)

Call WriVec(ideb, 'dg13_hsmds', dg13_hsmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg12_hsmds', dg12_hsmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg_capmds', dg_capmds, 3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g12_hs/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmds2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmds2, 9)

d2g_capmds2(1,1) = 2d0*(1d0/(aifa**2d0)+1d0/9d0)

```

```

d2g_capmdS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,3) = -2d0*(delta/alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,1) = d2g_capmdS2(1,2)
d2g_capmdS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(3,1) = d2g_capmdS2(1,3)
d2g_capmdS2(3,2) = d2g_capmdS2(2,3)
d2g_capmdS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)
!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmdS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call DinProd(df13_hsmdS, D_dg12, 3, df13_D_dg12)
xOmega12 = df13_D_dg12
Call MatMat(D, 3, dg_capmdS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_hsmdS, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega13 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df12_hsmdS, D_dg13, 3, df12_D_dg13)
xOmega21 = df12_D_dg13
Call DinProd(df12_hsmdS, D_dg12, 3, df12_D_dg12)
xOmega22 = df12_D_dg12-df12_hsmdq*xh_hs
Call DinProd(df12_hsmdS, D_dgcap, 3, df12_D_dgcap)
xOmega23 = df12_D_dgcap
Call DinProd(df_capmdS, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
xOmega31 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capmdS, D_dg12, 3, dfcap_D_dg12)
xOmega32 = dfcap_D_dg12
Call DinProd(df_capmdS, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
xOmega33 = dfcap_D_dgcap-df_capmdq*xh_cap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_hs, dxLam12_hs y dxLam_cap
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_hs
f_b(2) = f12_hs
f_b(3) = f_cap

d2g_capmdS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,3) = -2d0*(delta/alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,1) = d2g_capmdS2(1,2)
d2g_capmdS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(3,1) = d2g_capmdS2(1,3)
d2g_capmdS2(3,2) = d2g_capmdS2(2,3)
d2g_capmdS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)
!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmdS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call DinProd(df13_hsmdS, D_dg12, 3, df13_D_dg12)
xOmega12 = df13_D_dg12
Call MatMat(D, 3, dg_capmdS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_hsmdS, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega13 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df12_hsmdS, D_dg13, 3, df12_D_dg13)
xOmega21 = df12_D_dg13
Call DinProd(df12_hsmdS, D_dg12, 3, df12_D_dg12)
xOmega22 = df12_D_dg12-df12_hsmdq*xh_hs
Call DinProd(df12_hsmdS, D_dgcap, 3, df12_D_dgcap)
xOmega23 = df12_D_dgcap
Call DinProd(df_capmdS, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
xOmega31 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capmdS, D_dg12, 3, dfcap_D_dg12)
xOmega32 = dfcap_D_dg12
Call DinProd(df_capmdS, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
xOmega33 = dfcap_D_dgcap-df_capmdq*xh_cap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_hs, dxLam12_hs y dxLam_cap
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_hs
f_b(2) = f12_hs
f_b(3) = f_cap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam12_hs = dxLam12_hs
xLam_cap = dxLam_cap

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_hs', dxLam12_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_hs', xLam12_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)
Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)

!Cálculo valor de f13_hs, f12_hs y f_cap con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi))-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)**f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur

```

```

f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f12_hs', f12_hs)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

Call WriVec(ideb, 'Prs en primera iteración', Prs, 3)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
(abs(f12_hs) .GT. f12_hs_TOL)) .OR. &
(abs(f_cap) .GT. f_cap_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df_cap/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)-
Prs(3)))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))+2d0)/Eur
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-
2d0/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)-Prs(1)-Prs(2)))**2d0-
Prs(2)))**2d0+2d0/Eur

```

```

df12_hsmDS(3) = 0d0
Else
df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_hsmDS', df12_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

!Cálculo df13_hs/dq, df12_hs/dq y df_cap/dq en Prs (q1=gamma_p -para f13_hs y
f12_hs-, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df12_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p

Call WriVal(ideb, 'df13_hsmdq', df13_hsmdq)
Call WriVal(ideb, 'df12_hsmdq', df12_hsmdq)
Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs (dq=diam1*h1 y dq2=diam2*h2)
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model .EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0*xh_i
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)
Else If (i_model .EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model .EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0*xh_i
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)
End If

```

```

Call WriVal(ideb, 'xh_hs', xh_hs)
Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg13_hs/dS, dg12_hs/dS y dg_cap/dS en Prs
If ((i_modelo .EQ. 1) .OR. (i_modelo .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-sin(phi))*sin(psi))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_modelo .EQ. 2) .OR. (i_modelo .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi))), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-sin(phi))*sin(psi))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

d2g13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
d2g13_hsmDS(2) = 0d0
d2g13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

d2g12_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
d2g12_hsmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
d2g12_hsmDS(3) = 0d0

dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)

Call WriVec(ideb, 'd2g13_hsmDS', d2g13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'd2g12_hsmDS', d2g12_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg_capmDS', dg_capmDS, 3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g12_hs/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmDS2, 9)

d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g12_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg12_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g_capmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dgcap_2, 3)
HH_inv = Unity + xlam13_hs*D_dg13_2 + xlam12_hs*D_dg12_2 + xlam_cap*D_dgcap_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(d2g13_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xlam13_hs*xh_hs, 3, theta13)
Call AddVec(d2g12_hsmDS, d2g12_hsmDSdq, 1d0, xlam12_hs*xh_hs, 3, theta12)
Call AddVec(dg_capmDS, d2g_capmDSdq, 1d0, xlam_cap*xh_cap, 3, theta12)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df12_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df12, 3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmDS, 3, 3, 1, 3, HH_dfcap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta12, 3, 3, 1, 3, D_theta12, 3)

```



```

Call MatMat(D, 3, thetacap, 3, 3, 1, 3, D_thetacap, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta12, HH_df13, 3, D_theta12_HH_df13)
Call DinProd(D_thetacap, HH_df13, 3, D_thetacap_HH_df13)
Call DinProd(D_theta13, HH_df12, 3, D_theta13_HH_df12)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
Call DinProd(D_thetacap, HH_df12, 3, D_thetacap_HH_df12)
Call DinProd(D_theta13, HH_dfcap, 3, D_theta13_HH_dfcap)
Call DinProd(D_theta12, HH_dfcap, 3, D_theta12_HH_dfcap)
Call DinProd(D_thetacap, HH_dfcap, 3, D_thetacap_HH_dfcap)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_hsmdq*xh_hs
xOmega12 = D_theta12_HH_df13
xOmega13 = D_thetacap_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df12
xOmega22 = D_theta12_HH_df12-df12_hsmdq*xh_hs
xOmega23 = D_thetacap_HH_df12
xOmega31 = D_theta13_HH_dfcap
xOmega32 = D_theta12_HH_dfcap
xOmega33 = D_thetacap_HH_dfcap-df_dfcap-df_capmq*xh_cap
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call MatMat(D, 3, dg_capmdS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df12, r, 3, r_HH_df12)
Call DinProd(HH_dfcap, r, 3, r_HH_dfcap)
xOmega_f13 = f13_hs - r_HH_df13
xOmega_f12 = f12_hs - r_HH_df12
xOmega_fcap = f_cap - r_HH_dfcap

Call WriVec(ideb, 'r', r, 3)

!Resolución sistema y calculo dxLam13_hs y dxLam12_hs
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmega_f13
f_b(2) = xOmega_f12
f_b(3) = xOmega_fcap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)

Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam12_hs = xLam12_hs + dxLam12_hs
xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_hs', dxLam12_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_hs', xLam12_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

!Actualizo variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta12, -dxLam13_hs, -dxLam12_hs, 3, dPrs_1)
Call AddVec(dPrs_1, D_thetacap, 1d0, -dxLam_cap, 3, dPrs_2)
Call AddVec(r, dPrs_2, -1d0, 1d0, 3, dPrs_3)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_3, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)
Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)

!calculo el valor de f13_hs, f12_hs y f_cap en (k+1) en Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/abs(qa-qf)

```

```

f13_hs_fac2 = 2d0*qr/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(2))))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs      = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f12_hs_fac2 = 2d0*qr/Eur
f12_hs      = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m      = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
q        = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p        = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap    = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f12_hs', f12_hs)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

Call WriiVl(ideb, 'it', it)

Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

If (IsUindr .EQ. 1 .AND. p .LT. -1d0*sigma_trac ) Then
Prs(1) = Prs_E(1)
Prs(2) = Prs_E(2)
Prs(3) = Prs_E(3)
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
Return
End If

!Actualización iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_E)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_hs', xLam12_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

If ((!IE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then

```

```

If (xLam13_hs .GT. (-1d0)**tto1 .AND. &
xLam12_hs .GT. (-1d0)**tto1 .AND. &
xLam_cap .GT. (-1d0)**tto1 .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (3) ! 3 : Punto f13_hs, f23_hs y f_cap
!STARTING POINT'

!Cálculo valor de f13_hs, f23_hs y f_cap en Prs_E
qf1      = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2      = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf       = qf1*qf2
qa       = qf/R_f
E_fac1   = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2   = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50      = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei       = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur      = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
If ((!IE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*)' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qr/Eur
f13_hs      = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

If (Prs_E(2)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs_E(2)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(2)-Prs_E(3))))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(2)-Prs_E(3))/Eur
f23_hs      = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qr/Eur
f23_hs      = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p_E
End If

q_m      = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)

```

```

q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

!Cálculo tolerancia f13_hs, f23_hs y f_cap en Prs_E
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f23_hs_TOL = ttol*abs(f23_hs)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol

!Cálculo df13_hs/dS, df23_hs/dS y df_cap/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

If (Prs_E(2)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df23_hsmDS(1) = 0d0
df23_hsmDS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(2)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df23_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(2)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = 0d0
df13_hsmDS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

!Cálculo df13_hs/dq, df23_hs/dq y df_cap/dq en Prs_E (q1=gamma_p -para f13_hs
y f23_hs-, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df23_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p_E

!Cálculo h en Prs_E (dq1=dgamma_p=d1am1*h1, dq2=dp_p=d1am2*h2)
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9

```

```

xh_hs = 1d0
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model .EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0*xh_i
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model .EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0
xh_cap = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model .EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0*xh_i
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_
i
End If

!Cálculo dg13_hs/dS, dg23_hs/dS y dg_cap/dS en Prs_E
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_psi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1))*xk0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1))*xk0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xm_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xm_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then

```

```

If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
  sin_psi_m = 0d0
Else
  sin_psi_m = (1d0/1d00)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
  sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
  sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv), sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
  psi_m = psi
  sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
  sin_psi_m = 0d0
End If
End If

Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)

dg13_hsmS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmS(2) = 0d0
dg13_hsmS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg23_hsmS(1) = 0d0
dg23_hsmS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg23_hsmS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg_capmS(1) = df_capmS(1)
dg_capmS(2) = df_capmS(2)
dg_capmS(3) = df_capmS(3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g23_hs/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmS2, 9)

d2g_capmS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmS2(2,1) = d2g_capmS2(1,2)
d2g_capmS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmS2(3,1) = d2g_capmS2(1,3)
d2g_capmS2(3,2) = d2g_capmS2(2,3)
d2g_capmS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g23_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores piásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_hsmS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_hsmdq*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg23_hsmS, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call DinProd(df13_hsmS, D_dg23, 3, df13_D_dg23)
xOmega12 = df13_D_dg23
Call MatMat(D, 3, dg_capmS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_hsmS, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega13 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df23_hsmS, D_dg13, 3, df23_D_dg13)
xOmega21 = df23_D_dg13
Call DinProd(df23_hsmS, D_dg23, 3, df23_D_dg23)
xOmega22 = df23_D_dg23-df23_hsmdq*xh_hs
Call DinProd(df23_hsmS, D_dgcap, 3, df23_D_dgcap)
xOmega23 = df23_D_dgcap
Call DinProd(df_capmS, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
xOmega31 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capmS, D_dg23, 3, dfcap_D_dg23)
xOmega32 = dfcap_D_dg23
Call DinProd(df_capmS, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
xOmega33 = dfcap_D_dgcap-df_capmdq*xh_cap

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs, dxLam23_hs y dxLam_cap
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_hs
f_b(2) = f23_hs
f_b(3) = f_cap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam23_hs = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam23_hs = dxLam23_hs
xLam_cap = dxLam_cap

!Actualización variables

```

```

Call AddVec(D_dg13, D_dg23, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

!Cálculo valor de f13_hs, f23_hs y f_cap con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((!E1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs(2)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(2)-Prs(3)))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs(2)-Prs(3))/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((!E1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p**2d0

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
(abs(f23_hs) .GT. f23_hs_TOL)) .OR. &
(it .LE. itmax))
!Cálculo df13_hs/dS, df23_hs/dS y df_cap/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-
Prs(3)))))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
df23_hsmDS(1) = 0d0
df23_hsmDS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(2)-Prs(3)))))**2d0)-
2d0/Eur
df23_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(2)-
Prs(3)))))**2d0+2d0/Eur
Else
df23_hsmDS(1) = 0d0
df23_hsmDS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df23_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
End If

df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(a1fa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

!Cálculo df13_hs/dq, df23_hs/dq y df_cap/dq en Prs (q1=gamma_p -para f13_hs y
f23_hs-, q2=p_p)
df13_hsmdq = -1d0
df23_hsmdq = -1d0
df_capmdq = -2d0*p_p

!Cálculo h en Prs (dq=d1am1*h1 y dq2=d1am2*h2)
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_hs = 1d0*xh_i
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)
Else If (i_model .EQ. 3) Then

```

```

!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0
= Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p,p+c*cos(phi))/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi))/sin(phi))**xm
!MODELO EPHVSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xh_hs = 1d0*xh_i
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = 2d0*xH*max(p,
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p,p+c*cos(phi))/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi))/sin(phi))**xm)*xh_i
End If

!Cálculo dg13_hs/dS, dg23_hs/dS y dg_cap/dS en Prs
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3)) -
2d0*c*cos(phi))/sin(phi),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHVSS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3)) -
2d0*c*cos(phi))/sin(phi),0d0), (Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(3)) -
2d0*c*cos(phi))/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xm_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xm_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If (sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xm_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xm_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then

```

```

psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_m', sin_phi_m)
Call WriVal(ideb, 'sin_phi_cv', sin_phi_cv)
Call WriVal(ideb, 'sin_psi_m', sin_psi_m)
dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0
dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg23_hsmDS(1) = 0d0
dg23_hsmDS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg23_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)
!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g23_hs/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmDS2, 9)
d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g23_hs/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)
!Cálculo del multiplicador plástico
Call MathMat(D, 3, d2g13_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
Call MathMat(D, 3, d2g23_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg23_2, 3)
Call MathMat(D, 3, d2g_capmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dgcap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_2 + xLam23_hs*D_dg23_2 + xLam_cap*D_dgcap_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13)
Call AddVec(dg23_hsmDS, d2g23_hsmDSdq, 1d0, xLam23_hs*xh_hs, 3, theta23)
Call AddVec(dg_capmDS, d2g_capmDSdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, thetaacap)

```

```

Call MatMat(HH, 3, df13_hsmndS, 3, 3, 1, 3, HH_df13,3)
Call MatMat(HH, 3, df23_hsmndS, 3, 3, 1, 3, HH_df23,3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmndS, 3, 3, 1, 3, HH_dficap,3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13,3)
Call MatMat(D, 3, theta23, 3, 3, 1, 3, D_theta23,3)
Call MatMat(D, 3, thetacap, 3, 3, 1, 3, D_thetacap,3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
Call DinProd(D_thetacap, HH_dficap, 3, D_thetacap_HH_dficap)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
Call DinProd(D_thetacap, HH_dficap, 3, D_thetacap_HH_dficap)
Call DinProd(D_theta13_HH_df13-df13_hsmndq*xh_hs
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_hsmndq*xh_hs
xOmega12 = D_theta23_HH_df23
xOmega13 = D_thetacap_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df23
xOmega22 = D_theta23_HH_df23-df23_hsmndq*xh_hs
xOmega23 = D_thetacap_HH_df23
xOmega31 = D_theta13_HH_dficap
xOmega32 = D_theta23_HH_dficap
xOmega33 = D_thetacap_HH_dficap-df_ccapmndq*xh_cap
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmndS, 3, 3, 1, 3, D_dg13,3)
Call MatMat(D, 3, dg23_hsmndS, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call MatMat(D, 3, dg_capmndS, 3, 3, 1, 3, D_dgicap, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dg23, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dgicap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df23, r, 3, r_HH_df23)
Call DinProd(HH_dficap, r, 3, r_HH_dficap)
xOmegaF13 = f13_hs - r_HH_df13
xOmegaF23 = f23_hs - r_HH_df23
xOmegaFcap = f_cap - r_HH_dficap

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam23_hs
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaF13
f_b(2) = xOmegaF23

Call MatMat(HH, 3, df13_hsmndS, 3, 3, 1, 3, HH_df13,3)
Call MatMat(HH, 3, df23_hsmndS, 3, 3, 1, 3, HH_df23,3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmndS, 3, 3, 1, 3, HH_dficap,3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13,3)
Call MatMat(D, 3, theta23, 3, 3, 1, 3, D_theta23,3)
Call MatMat(D, 3, thetacap, 3, 3, 1, 3, D_thetacap,3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
Call DinProd(D_thetacap, HH_dficap, 3, D_thetacap_HH_dficap)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
Call DinProd(D_thetacap, HH_dficap, 3, D_thetacap_HH_dficap)
Call DinProd(D_theta13_HH_df13-df13_hsmndq*xh_hs
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_hsmndq*xh_hs
xOmega12 = D_theta23_HH_df23
xOmega13 = D_thetacap_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df23
xOmega22 = D_theta23_HH_df23-df23_hsmndq*xh_hs
xOmega23 = D_thetacap_HH_df23
xOmega31 = D_theta13_HH_dficap
xOmega32 = D_theta23_HH_dficap
xOmega33 = D_thetacap_HH_dficap-df_ccapmndq*xh_cap
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmndS, 3, 3, 1, 3, D_dg13,3)
Call MatMat(D, 3, dg23_hsmndS, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call MatMat(D, 3, dg_capmndS, 3, 3, 1, 3, D_dgicap, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dg23, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dgicap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df23, r, 3, r_HH_df23)
Call DinProd(HH_dficap, r, 3, r_HH_dficap)
xOmegaF13 = f13_hs - r_HH_df13
xOmegaF23 = f23_hs - r_HH_df23
xOmegaFcap = f_cap - r_HH_dficap

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam23_hs
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaF13
f_b(2) = xOmegaF23

Call AddVec(D_theta13, D_theta23, -dxLam13_hs, -dxLam23_hs, 3, dPrs_1)
Call AddVec(dPrs_1, D_thetacap, 1d0, -dxLam_cap, 3, dPrs_2)
Call AddVec(r, dPrs_2, -1d0, 1d0, 3, dPrs_3)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_3, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

!Cálculo valor de f13_hs, f23_hs y f_cap en (k+1) en Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs(2)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(2)-Prs(3))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs(2)-Prs(3))/Eur

```

```

f23_hs      = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
Else
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f23_hs      = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
End If

q_m        = Prs(1)+(deita-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
q          = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p          = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap     = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriIvl(ideb, 'it', it)

If (IsUndr .EQ. 1 .AND. p .LT. -1d0*sigma_trac ) Then
Prs(1) = Prs_E(1)
Prs(2) = Prs_E(2)
Prs(3) = Prs_E(3)
StVar(1) = StVar0(1)
StVar(2) = StVar0(2)
Return
End If

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

!Actualizo variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam23_hs', xLam23_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

If ((iEL .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_hs .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
xLam23_hs .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
xLam_cap .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case Default
write(1,*) ' incorrect iArea in HS_plast'

```


Subrutina MC_CAP_plast

```

!C*****
Subroutine MC_CAP_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E, Prs,
StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D, Gm, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie MC
! Tension de compresion positiva!
!
! I/O Tipo
! iArea I I 1 : Eje entre f13_mc y f_cap Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! 2 : Punto f13_mc, f12_mc y f_cap
! Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! 3 : Punto f13_mc, f23_mc y f_cap
! Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
!
! Local:
! f13_mc : superficie MC para Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f12_mc : superficie MC para Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! f23_mc : superficie MC para Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f_cap : superficie CAP
! xLam13_mc : multiplicador plástico f13_mc
! xLam12_mc : multiplicador plástico f12_mc
! xLam23_mc : multiplicador plástico f23_mc
! xLam_cap : multiplicador plástico f_cap
! D : matriz elástica
! df13_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f13_mc/dS
! df12_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f12_mc/dS
! df23_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f23_mc/dS
! df_capmD(3) : Primera derivada función de fluencia f_cap/dS
! df13_mcmdq : Primera derivada función de fluencia f13_mc/dq
! df12_mcmdq : Primera derivada función de fluencia f12_mc/dq
! df23_mcmdq : Primera derivada función de fluencia f23_mc/dq
! df_capmdq : Primera derivada función de fluencia f_cap/dq
! dg13_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g13_mc/dS
! dg12_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g12_mc/dS
! dg23_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g23_mc/dS
! dg_capmD(3) : Primera derivada potencial plástico g_cap/dS
! d2g13_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g13_mc/dS2
! d2g12_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g12_mc/dS2
! d2g23_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g23_mc/dS2
! d2g_capmD2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g_cap/dS2
! d2g13_mcmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g13_mc
! d2g12_mcmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g12_mc
! d2g23_mcmdSdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g23_mc
!
! d2g_capmDdq(3) : Derivada dS y dq del potencial plástico g_cap
! D_dgij : Producto de D por dgij_hs/dS
! D_dgij_2 : Producto de D por d2gij_hs/dS2
! HH_dfij : Producto de D por dfij_hs/dS
! thetaij : Operación dgij_hs/dS+d2gij_hs/dS2*xLamij_hs*xh_hs
! D_thetaij : Productor de D por thetaij
! HH : Inversa de la matriz Unity+xLamij_hs*D_dgij_2
!
Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_res3(3), Prs_0(3),
xN10(3), xN20(3), xN30(3)
Dimension Prs_2sup(3), Prs_3sup(3), r(3), dPrs(3), dPrs_1(3), dPrs_2(3),
dPrs_3(3)
Dimension Props(*)
Dimension StVar0(*), StVar(*)
Dimension df13_mcmdS(3), df12_mcmdS(3), df23_mcmdS(3), df_capmD(3)
Dimension dg13_mcmdS(3), dg12_mcmdS(3), dg23_mcmdS(3), dg_capmD(3)
Dimension d2g13_mcmdS2(3,3), d2g12_mcmdS2(3,3), d2g23_mcmdS2(3,3),
d2g_capmD2(3,3)
Dimension d2g13_mcmdSdq(3), d2g12_mcmdSdq(3), d2g23_mcmdSdq(3),
d2g_capmDdq(3)
Dimension D_dg13(3), D_dg12(3), D_dg23(3), D_dgcap(3)
Dimension D_dg13_2(3,3), D_dg12_2(3,3), D_dg23_2(3,3), D_dgcap_2(3,3)
Dimension HH_df13(3), HH_df12(3), HH_df23(3), HH_dfcap(3)
Dimension thetai3(3), thetai2(3), thetai3(3), thetai3(3), thetai3(3)
Dimension D_theta13(3), D_theta12(3), D_theta23(3), D_theta3(3)
Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH(3,3), HH_inv(3,3), xMat(3,3), xMat_inv(3,3),
f_b(3), d_lam(3)
Call MZeroR(Prs_res1, 3)
Call MZeroR(Prs_res2, 3)
Call MZeroR(Prs_res3, 3)
Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
Call MZeroR(Prs_3sup, 3)
Call MZeroR(dPrs, 3)
Call MZeroR(dPrs_1, 3)
Call MZeroR(dPrs_2, 3)
Call MZeroR(dPrs_3, 3)
Call MZeroR(df13_mcmdS, 3)
Call MZeroR(dg13_mcmdS, 3)
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(df12_mcmdS, 3)
Call MZeroR(dg12_mcmdS, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(df23_mcmdS, 3)
Call MZeroR(dg23_mcmdS, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdS2, 9)

```

```

Call MZeroR(d2g23_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(df_capmdS, 3)
Call MZeroR(dg_capmdS, 3)
Call MZeroR(d2g_capmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)

Call MZeroR(D_dg13_2, 9)
Call MZeroR(D_dg12_2, 9)
Call MZeroR(D_dg23_2, 9)
Call MZeroR(D_dgcap_2, 9)

Call MZeroR(D_dg13, 3)
Call MZeroR(D_dg12, 3)
Call MZeroR(D_dg23, 3)
Call MZeroR(D_dgcap, 3)

Call MZeroR(HH_df13, 3)
Call MZeroR(HH_df12, 3)
Call MZeroR(HH_df23, 3)
Call MZeroR(HH_dfcap, 3)

Call MZeroR(theta13, 3)
Call MZeroR(theta12, 3)
Call MZeroR(theta23, 3)
Call MZeroR(thetacap, 3)

Call MZeroR(D_theta13, 3)
Call MZeroR(D_theta12, 3)
Call MZeroR(D_theta23, 3)
Call MZeroR(D_thetacap, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)
Call MZeroR(xMat, 9)
Call MZeroR(xMat_inv, 9)
Call MZeroR(f_b, 3)
Call MZeroR(d_lam, 3)

Call MZeroR(d_eps_p_aux, 3)

ip1 = 1
it = 0
itmax = 100
ttol = 1d-8
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
ideb = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)

Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model .EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
psi = Props(6)*Rad
xNu_ur = Props(7)*Rad
p_ref = Props(8)
xk0_nc = Props(9)
R_f = Props(10)
sigma_trac = Props(11)
Ei_ref_inter = -Props(12)
alfa = Props(13)
beta = Props(14)
Else If (i_model .EQ. 2) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D V9
xKS_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = Props(19)
Ei_ref_inter = -Props(20)
alfa = Props(21)
beta = Props(22)
xNu_min = Props(23)
Else If (i_model .EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)

```

```

phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xK0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmKc = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 4) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
  xks_ref = Props(1)
  Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
  Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
  gamma_07 = Props(4)
  p1_ref = Props(5)
  p2_ref = Props(6)
  xm1 = Props(7)
  xm2 = Props(8)
  E50_ref = Props(9)
  Eoed_ref = Props(10)
  Eur_ref = Props(11)
  xm = Props(12)
  p_ref = Props(13)
  c = Props(14)
  phi = Props(15)*Rad
  psi = Props(16)*Rad
  xK0_nc = Props(17)
  R_f = Props(18)
  sigma_trac = -Props(19)
  Ei_ref_inter = Props(20)
  alfa = Props(21)
  xktmKc = Props(22)
  xNu_min = Props(23)
End If
If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
  w = 100d0
End If
delta = (3d0+sin(phi))/(3d0-sin(phi))
p_p_E = (-1d0)*StVar0(2)
xh_i = Gm**(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)
dxLam13_mc = 0d0
dxLam12_mc = 0d0
dxLam23_mc = 0d0
dxLam_cap = 0d0

xLam13_mc = 0d0
xLam12_mc = 0d0
xLam23_mc = 0d0
xLam_cap = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Eje entre f13_mc y f_cap (Sig1 > Sig2 > Sig3)
!STARTING POINT
!Cálculo el valor de f13_mc y f_cap en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)
Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
!Cálculo tolerancia de f13_mc y f_cap
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttoi
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttoi
!Cálculo df13_mc/dS y df_cap/dS en Prs_E
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0
df13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
Call WriVec(ideb, 'df13_mcmds', df13_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)
!Cálculo df13_mc/dq y df_cap/dq en Prs_E (q1=0, q2=p_p)
df13_mcmdq = 0d0
df_capmdq = -2d0*p_p_E
Call WriVal(ideb, 'df13_mcmdq', df13_mcmdq)
Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)
!Cálculo h en Prs_E (dq1=0, dq2=dp_p=dLam2*h2)
xh_mc = 0d0
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9

```

```

xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS PLaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)**xh_i
Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS PLaxis 2D 2011 y posteriores
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p, 1d0)*(max(p_p_E*c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS PLaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p, 1d0)*(max(p_p_E*c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)**xh_i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_mc', xh_mc)
Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)
Call WriVal(ideb, 'xH', xH)

!Cálculo dg13_mc/dS y dg_cap/dS en Prs_E
dg13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmds(2) = 0d0
dg13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)

Call WriVec(ideb, 'dg13_mcmds', dg13_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg_capmDS', dg_capmDS, 3)

!Cálculo d2g13_mc/dS2 y d2gcap/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmds2, 9)
d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdsSdq, 3)

```

```

Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmds, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_mcmds, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_mcmdq*xh_mc
Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_mcmds, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega12 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df_capmDS, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
xOmega21 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capmDS, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
xOmega22 = dfcap_D_dgcap-df_capmdq*xh_cap

Call WriMat(ideb, 'D', D, 3, 3, 3)
Call WriVec(ideb, 'D_dg13_mc', D_dg13, 3)
Call WriVec(ideb, 'D_dgcap', D_dgcap, 3)

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc y dxLam_cap
dxLam13_mc = (f13_mc*xOmega22-f_cap*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam_cap = (f_cap*xOmega11-f13_mc*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam_cap = dxLam_cap

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dgcap, -xLam13_mc, -xLam_cap, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVec(ideb, 'Prs en primera iteración', Prs, 3)
Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)

!Cálculo valor de f13_mc y f_cap con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

```

```

Call WriVal(ideb, 'q_m', q_m)
Call WriVal(ideb, 'p', p)

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_mc).GT. f13_mc_TOL) .OR. &
(abs(f_cap).GT. f_cap_TOL)) .AND. &
(it.LE. itmax))

Call WriVal(ideb, 'Prs(1)-Prs(3)', Prs(1)-Prs(3))

!Cálculo df13_mc/dS y df_cap/dS en Prs
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0
df13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df_capmds(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmds(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmds(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df13_mcmds', df13_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmds', df_capmds, 3)

!Cálculo df13_mc/dq en Prs (q1=0, q2=p_p)
df13_mcmdq = 0d0
df_capmdq = -2d0*p_p

Call WriVal(ideb, 'df13_mcmdq', df13_mcmdq)
Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs (dq=0 y dq2=d1am2*h2)
xh_mc = 0d0
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xh = xkt/(xktmc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi))/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))

```

```

xH = xkt_ref/(xktmc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi))/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_i
End If

Call WriVal(ideb, 'xh_mc', xh_mc)
Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)
Call WriVal(ideb, 'xH', xH)

!Cálculo dgi3_mc/dS y dg_cap/dS en Prs
dgi3_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dgi3_mcmds(2) = 0d0
dgi3_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg_capmds(1) = df_capmds(1)
dg_capmds(2) = df_capmds(2)
dg_capmds(3) = df_capmds(3)

Call WriVec(ideb, 'dgi3_mcmds', dgi3_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg_capmds', dg_capmds, 3)

!Cálculo d2g13_mc/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmds2, 9)

d2g_capmds2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmds2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmds2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmds2(2,1) = d2g_capmds2(1,2)
d2g_capmds2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmds2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmds2(3,1) = d2g_capmds2(1,3)
d2g_capmds2(3,2) = d2g_capmds2(2,3)
d2g_capmds2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdsSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmdsdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmds2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g_capmds2, 3, 3, 3, 3, D_dgcap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_2 + xLam_cap*D_dgcap_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmds, d2g13_mcmdsSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13)
Call AddVec(dg_capmds, d2g_capmdsSdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, theta13)
Call MatMat(HH, 3, df13_mcmds, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmds, 3, 3, 1, 3, HH_dfcap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)

```

```

Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta13, HH_dfcap, 3, D_theta13_HH_dfcap)
Call DinProd(D_theta13, HH_dfcap, 3, D_theta13_HH_dfcap)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_mcmdq*xh_mc
xOmega12 = D_theta13_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_dfcap
xOmega22 = D_theta13_HH_dfcap-df_capmndq*xh_cap

Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg_capmndS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dgcap, -xLam13_mc, -xLam_cap, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_dfcap, r, 3, r_HH_dfcap)
xOmegaf13 = f13_mc - r_HH_df13
xOmegafcap = f_cap - r_HH_dfcap

Call WriMat(ideb, 'D', D, 3, 3, 3)
Call WriVec(ideb, 'D_dg13_mc', D_dg13, 3)
Call WriVec(ideb, 'D_dgcap', D_dgcap, 3)

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc y dxLam_cap
dxLam13_mc = (xOmegaf13*xOmega22-xOmegafcap*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam_cap = (xOmegafcap*xOmega11-xOmegaf13*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)
Call WriVal(ideb, 'xOmega22', xOmega22)
Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

!Actualizo variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta13, -dxLam13_mc, -dxLam_cap, 3, dPrs_1)
Call AddVec(r, dPrs_1, -1d0, 1d0, 3, dPrs_2)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_2, 3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_e + xLam_cap*xh_cap, p_p_e)

Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)
Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

```

```

!Cálculo el valor de f13_mc en (k+1)
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado (se conserva StVar(1) del Return Mapping
sobre HS)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_e)

If ((iE1.EQ. num_EL).AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam_cap.GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
it.LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (2) ! 2 : Punto f13_mc, f12_mc y f_cap

!STARTING POINT

!Cálculo el valor de f13_mc, f12_mc y f_cap en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

q_m = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_e**2d0

```

```

Call WriVal(ideb, 'Prs_E(1)-Prs_E(3)', Prs_E(1)-Prs_E(3))

!Cálculo tolerancia f13_mc, f12_mc y f_cap en Prs_E
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f12_mc_TOL = ttol*abs(f12_mc)+ttol
f_cap_TOL = ttol*abs(f_cap)+ttol

!Cálculo df13_mc/dS, df12_mc/dS y df_cap/dS en Prs_E
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0
df13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmds(3) = 0d0

df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df13_mcmds', df13_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_mcmds', df12_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

!Cálculo df13_mc/dq, df12_mc/dq y df_cap/dq en Prs_E (q1=0 -para f13_mc y
f12_mc-, q2=p_p)
df13_mcmdq = 0d0
df12_mcmdq = 0d0
df_capmDq = -2d0*p_p_E

Call WriVal(ideb, 'df13_mcmdq', df13_mcmdq)
Call WriVal(ideb, 'df12_mcmdq', df12_mcmdq)
Call WriVal(ideb, 'df_capmDq', df_capmDq)

!Cálculo h en Prs_E (dq=0 -para f13_mc y f12_mc- y dq2=d1am2*h2)
xh_mc = 0d0
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_p_ref)**xm
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_p_ref)**xm)*xh_i
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p, 1d0)*(max(p_p_Erc*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)

```

```

xh_cap = (2d0*xH*max(p, 1d0)*(max(p_p_Erc*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_
i
End If
Call WriVal(ideb, 'xh_mc', xh_mc)
Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg13_mc/dS, dg12_mc/dS y dg_cap/dS en Prs_E
dg13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmds(2) = 0d0
dg13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))
dg12_mcmds(3) = 0d0

dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)

Call WriVec(ideb, 'dg13_mcmds', dg13_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg12_mcmds', dg12_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg_capmDS', dg_capmDS, 3)

!Cálculo d2g13_mc/dS2, d2g12_mc/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmds2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmds2, 9)

d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g12_mc/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdsSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdsSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmds, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_mcmds, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_mcmdq*xh_mc
Call MatMat(D, 3, dg12_mcmds, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call DinProd(df12_mcmds, D_dg12, 3, df12_D_dg12)

```

```

xOmega12 = df13_D_dg12
Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_mcmds, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega13 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df12_mcmds, D_dg13, 3, df12_D_dg13)
xOmega21 = df12_D_dg13
Call DinProd(df12_mcmds, D_dg12, 3, df12_D_dg12)
xOmega22 = df12_D_dg12-df12_mcmdq*xh_mc
Call DinProd(df12_mcmds, D_dgcap, 3, df12_D_dgcap)
xOmega23 = df12_D_dgcap
Call DinProd(df_capmDS, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
xOmega31 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capmDS, D_dg12, 3, dfcap_D_dg12)
xOmega32 = dfcap_D_dg12
Call DinProd(df_capmDS, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
xOmega33 = dfcap_D_dgcap-df_capmdq*xh_cap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc, dxLam12_mc y dxLam_cap
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_mc
f_b(2) = f12_mc
f_b(3) = f_cap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam12_mc = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam12_mc = dxLam12_mc
xLam_cap = dxLam_cap

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_mc', dxLam12_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_mc', xLam12_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_mc, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)
Call WriVec(ideb, 'Prs durante primera iteración', Prs, 3)

Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)

!Cálculo el valor de f13_mc, f12_mc y f_cap con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f12_mc', f12_mc)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_mc).GT. f13_mc_TOL).OR. &
(abs(f12_mc).GT. f12_mc_TOL)).OR. &
(abs(f_cap).GT. f_cap_TOL)).AND. &
(it.LE. itmax))
Call WriVal(ideb, 'Prs(1)-Prs(3)', Prs(1)-Prs(3))

!Cálculo df13_mc/dS, df12_mc/dS y df_cap/dS en Prs
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0
df13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmds(3) = 0d0
df_capmDS(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capmDS(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

Call WriVec(ideb, 'df13_mcmds', df13_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df12_mcmds', df12_mcmds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df_capmDS', df_capmDS, 3)

```



```

!Cálculo df13_mc/dq, df12_mc/dq y df_cap/dq en Prs (q1=0 -para f13_mc y
f12_mc-, q2=p_p)
df13_mcmdq = 0d0
df12_mcmdq = 0d0
df_capmdq = -2d0*p_p

Call WriVal(ideb, 'df13_mcmdq', df13_mcmdq)
Call WriVal(ideb, 'df12_mcmdq', df12_mcmdq)
Call WriVal(ideb, 'df_capmdq', df_capmdq)

!Cálculo h en Prs (dq=0-para f13_mc y f12_mc- y dq2=d1am2*h2)
xh_mc = 0d0
If (i_model.EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model.EQ. 2) Then
!MODELO EPHYS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model.EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model.EQ. 4) Then
!MODELO EPHYS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_i
End If
Call WriVal(ideb, 'xh_mc', xh_mc)
Call WriVal(ideb, 'xh_cap', xh_cap)

!Cálculo dg13_mc/dS, dg12_mc/dS y dg_cap/dS en Prs
dg13_mcmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmdS(3) = 0d0
dg13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))
dg12_mcmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg12_mcmdS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))
dg12_mcmdS(3) = 0d0
dg_capmdS(1) = df_capmdS(1)
dg_capmdS(2) = df_capmdS(2)
dg_capmdS(3) = df_capmdS(3)
Call WriVec(ideb, 'dg13_mcmdS', dg13_mcmdS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg12_mcmdS', dg12_mcmdS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg_capmdS', dg_capmdS, 3)

!Cálculo d2g13_mc/dS2, d2g12_mc/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmdS2, 9)

d2g_capmdS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,1) = d2g_capmdS2(1,2)
d2g_capmdS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmdS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmdS2(3,1) = d2g_capmdS2(1,3)
d2g_capmdS2(3,2) = d2g_capmdS2(2,3)
d2g_capmdS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g12_mc/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g12_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg12_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g_capmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dgcap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_2 + xLam12_mc*D_dg12_2 + xLam_cap*D_dgcap_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmdS, d2g13_mcmdSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13)
Call AddVec(dg12_mcmdS, d2g12_mcmdSdq, 1d0, xLam12_mc*xh_mc, 3, theta12)
Call AddVec(dg_capmdS, d2g_capmdSdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, thetacap)
Call MatMat(HH, 3, df13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df12_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df12, 3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmdS, 3, 3, 1, 3, HH_dfcap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta12, 3, 1, 3, D_theta12, 3)
Call MatMat(D, 3, thetacap, 3, 1, 3, D_thetacap, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta12, HH_df12, 3, D_theta12_HH_df12)
Call DinProd(D_theta13, HH_dfcap, 3, D_theta13_HH_dfcap)
Call DinProd(D_theta12, HH_dfcap, 3, D_theta12_HH_dfcap)
Call DinProd(D_thetacap, HH_dfcap, 3, D_thetacap_HH_dfcap)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_mcmdq*xh_mc
xOmega12 = D_theta12_HH_df12
xOmega13 = D_thetacap_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df12
xOmega22 = D_theta12_HH_dfcap-df12_mcmdq*xh_mc
xOmega23 = D_thetacap_HH_dfcap

```

```

xOmega31 = D_theta13_HH_dficap
xOmega32 = D_theta12_HH_dficap
xOmega33 = D_theta12_HH_dficap-df_capmq*xh_cap
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg12_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg12, 3)
Call MatMat(D, 3, dg_capmdS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call AddVec(D_dg13, D_dg12, -xLam13_mc, -xLam12_mc, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df12, r, 3, r_HH_df12)
Call DinProd(HH_dficap, r, 3, r_HH_dficap)
xOmegaf13 = f13_mc - r_HH_df13
xOmegaf12 = f12_mc - r_HH_df12
xOmegafcap = f_cap - r_HH_dficap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc y dxLam12_mc
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaf13
f_b(2) = xOmegaf12
f_b(3) = xOmegafcap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam12_mc = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam12_mc = xLam12_mc + dxLam12_mc
xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam12_mc', dxLam12_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam_cap', dxLam_cap)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_mc', xLam12_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

!Actualización variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta12, -dxLam13_mc, -dxLam12_mc, 3, dPrs_1)
Call AddVec(dPrs_1, D_theta12, 1d0, -dxLam_cap, 3, dPrs_2)
Call AddVec(r, dPrs_2, -1d0, 1d0, 3, dPrs_3)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'p_p', p_p)

Call WriVec(ideb, 'Prs durante iteración', Prs, 3)

!Cálculo el valor de f13_mc, f12_mc y f_cap en (k+1) en Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap = (q_m**2d0)/(aifa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

Call WriVal(ideb, 'f13_mc', f13_mc)
Call WriVal(ideb, 'f12_mc', f12_mc)
Call WriVal(ideb, 'f_cap', f_cap)

Call WriIvl(ideb, 'it', it)

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado (se conserva StVar(1) del Return Mapping
sobre HS)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_E)

Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam12_mc', xLam12_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam_cap', xLam_cap)

If (iE1.EQ. num_EL).AND. (Int.EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*tto1).AND. &
xLam12_mc.GT. (-1d0)*tto1).AND. &
xLam_cap.GT. (-1d0)*tto1).AND. &
it.LE. itmax) Then

```

```

write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (3) ! 3 : Punto f13_mc, f23_mc y f_cap
!STARTING POINT
!Cálculo valor de f13_mc, f23_mc y f_cap en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(2)-Prs_E(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(2)+Prs_E(3))*sin(phi)
f23_mc      = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

q_m        = Prs_E(1)+(delta-1d0)*Prs_E(2)-delta*Prs_E(3)
p          = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

f_cap      = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p_E**2d0

!Cálculo tolerancia f13_mc, f23_mc y f_cap en Prs_E
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f23_mc_TOL = ttol*abs(f23_mc)+ttol
f_cap_TOL  = ttol*abs(f_cap)+ttol

!Cálculo df13_mc/dS, df23_mc/dS y df_cap/dS en Prs_E
df13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcnds(2) = 0d0
df13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df23_mcnds(1) = 0d0
df23_mcnds(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df23_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df_capnds(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capnds(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capnds(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

!Cálculo df13_mc/dq, df23_mc/dq y df_cap/dq en Prs_E (q1=0 -para f13_mc y
f23_mc-, q2=p_p)
df13_mcmdq = 0d0
df23_mcmdq = 0d0
df_capmdq  = -2d0*p_p_E

!Cálculo h en Prs_E (dq=01 -para f13_mc y f23_mc- y dq2=d1am2*h2)
xh_mc      = 0d0

```

```

If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9
xh_cap     = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model .EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_cap     = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p_E, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model .EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt        = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH         = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap     = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model .EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref    = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH         = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
xh_cap     = (2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p_E+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_i
End If

!Cálculo dgi3_mc/dS, dg23_mc/dS y dg_cap/dS en Prs_E
dgi3_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dgi3_mcnds(2) = 0d0
dgi3_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg23_mcnds(1) = 0d0
dg23_mcnds(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg23_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg_capnds(1) = df_capnds(1)
dg_capnds(2) = df_capnds(2)
dg_capnds(3) = df_capnds(3)

!Cálculo d2g13_mc/dS2, d2g23_mc/dS2 y d2g_cap/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcnds2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcnds2, 9)
d2g_capnds2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capnds2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capnds2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capnds2(2,1) = d2g_capnds2(1,2)
d2g_capnds2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capnds2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capnds2(3,1) = d2g_capnds2(1,3)
d2g_capnds2(3,2) = d2g_capnds2(2,3)
d2g_capnds2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g23_mc/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdsdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdsdq, 3)

```

```

Call MZeroR(d2g_capm5dq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call DinProd(df13_mcmdS, D_dg13, 3, df13_D_dg13)
xOmega11 = df13_D_dg13-df13_mcmdq*xh_mc
Call MatMat(D, 3, dg23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call DinProd(df13_mcmdS, D_dg23, 3, df13_D_dg23)
xOmega12 = df13_D_dg23
Call MatMat(D, 3, dg_capm5, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call DinProd(df13_mcmdS, D_dgcap, 3, df13_D_dgcap)
xOmega13 = df13_D_dgcap
Call DinProd(df23_mcmdS, D_dg13, 3, df23_D_dg13)
xOmega21 = df23_D_dg13
Call DinProd(df23_mcmdS, D_dg23, 3, df23_D_dg23)
xOmega22 = df23_D_dg23-df23_mcmdq*xh_mc
Call DinProd(df23_mcmdS, D_dgcap, 3, df23_D_dgcap)
xOmega23 = df23_D_dgcap
Call DinProd(df_capm5, D_dg13, 3, dfcap_D_dg13)
xOmega31 = dfcap_D_dg13
Call DinProd(df_capm5, D_dg23, 3, dfcap_D_dg23)
xOmega32 = dfcap_D_dg23
Call DinProd(df_capm5, D_dgcap, 3, dfcap_D_dgcap)
xOmega33 = dfcap_D_dgcap-df_capm5q*xh_cap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc, dxLam23_mc y dxLam_cap
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_mc
f_b(2) = f23_mc
f_b(3) = f_cap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam23_mc = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam23_mc = dxLam23_mc
xLam_cap = dxLam_cap

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13, D_dg23, -xLam13_mc, -xLam23_mc, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

!Cálculo el valor de f13_mc, f23_mc y f_cap con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(2)-Prs(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(2)+Prs(3))*sin(phi)
f23_mc = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

q_m = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

f_cap = (q_m**2d0)/(alfa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_mc) .GT. f13_mc_TOL) .OR. &
(abs(f23_mc) .GT. f23_mc_TOL)) .OR. &
(abs(f_cap) .GT. f_cap_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_mc/dS, df23_mc/dS y df_cap/dS en Prs
df13_mcmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmdS(2) = 0d0
df13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df23_mcmdS(1) = 0d0
df23_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df23_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df_capm5(1) = 2d0*(q_m/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capm5(2) = 2d0*(q_m*(delta-1d0)/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)
df_capm5(3) = 2d0*(-q_m*delta/(alfa**2d0)+(1d0/3d0)*p)

!Cálculo df13_mc/dq, df23_mc/dq y df_cap/dq en Prs (q1=0 -para f13_mc y
f23_mc-, q2=p_p)
df13_mcmdq = 0d0
df23_mcmdq = 0d0
df_capm5dq = -2d0*p_p

!Cálculo h en Prs (dq=0 -para f13_mc y f23_mc- y dq2=dLam2*h2)
xh_mc = 0d0
If (i_model .EQ. 1) Then
!MODELO HS Plaxis 2D V9

```

```

xh_cap = (2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm
Else If (i_model .EQ. 2) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D V9
xh_cap = ((2d0*max(p,1d0)*p_ref/beta)*(max(p_p, 1d0)/p_ref)**xm)*xh_i
Else If (i_model .EQ. 3) Then
!MODELO HS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt = Eur_ref/((3d0*(1d0-2d0*xNu_ur)))
xH = xkt/(xktmkc-1d0)
xh_cap = 2d0*xH*max(p,
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm
Else If (i_model .EQ. 4) Then
!MODELO EPHYSS Plaxis 2D 2011 y posteriores
xkt_ref = xks_ref*(1d0/(1d0-xm1))
xH = xkt_ref/(xktmkc-1d0)
1d0)*(max(p_p+c*cos(phi)/sin(phi),1d0)/(p_ref+c*cos(phi)/sin(phi)))**xm)*xh_i
End If

!Cálculo dg13_mc/ds, dg23_mc/ds y dg_cap/ds en Prs
dg13_mcmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmdS(2) = 0d0
dg13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg23_mcmdS(1) = 0d0
dg23_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg23_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg_capmDS(1) = df_capmDS(1)
dg_capmDS(2) = df_capmDS(2)
dg_capmDS(3) = df_capmDS(3)

!Cálculo d2g13_mc/ds2, d2g23_mc/ds2 y d2g_cap/ds2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcmdS2, 9)

d2g_capmDS2(1,1) = 2d0*(1d0/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,2) = 2d0*((delta-1d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(1,3) = -2d0*(delta/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,1) = d2g_capmDS2(1,2)
d2g_capmDS2(2,2) = 2d0*((delta-1d0)**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)
d2g_capmDS2(2,3) = -2d0*((delta-1d0)*delta)/(alfa**2d0)-1d0/9d0)
d2g_capmDS2(3,1) = d2g_capmDS2(1,3)
d2g_capmDS2(3,2) = d2g_capmDS2(2,3)
d2g_capmDS2(3,3) = 2d0*((delta**2d0)/(alfa**2d0)+1d0/9d0)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g23_mc/dSdq y d2g_cap/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g_capmDSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg13_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g23_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg23_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g_capmDS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dgcap_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_2 + xLam23_mc*D_dg23_2 + xLam_cap*D_dgcap_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmdS, d2g13_mcmdSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13)
Call AddVec(dg23_mcmdS, d2g23_mcmdSdq, 1d0, xLam23_mc*xh_mc, 3, theta23)
Call AddVec(dg_capmDS, d2g_capmDSdq, 1d0, xLam_cap*xh_cap, 3, thetacap)
Call MatMat(HH, 3, df13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df13, 3)
Call MatMat(HH, 3, df23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df23, 3)
Call MatMat(HH, 3, df_capmDS, 3, 3, 1, 3, HH_dfcap, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13, 3, 3, 1, 3, D_theta13, 3)
Call MatMat(D, 3, theta23, 3, 3, 1, 3, D_theta23, 3)
Call MatMat(D, 3, thetacap, 3, 3, 1, 3, D_thetacap, 3)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
Call DinProd(D_theta13, HH_df23, 3, D_theta13_HH_df23)
Call DinProd(D_theta23, HH_df13, 3, D_theta23_HH_df13)
Call DinProd(D_theta13, HH_df23, 3, D_theta13_HH_df23)
Call DinProd(D_theta23, HH_df13, 3, D_theta23_HH_df13)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
Call DinProd(D_theta13, HH_df23, 3, D_theta13_HH_df23)
Call DinProd(D_theta23, HH_df13, 3, D_theta23_HH_df13)
Call DinProd(D_theta13, HH_df13, 3, D_theta13_HH_df13)
Call DinProd(D_theta23, HH_df23, 3, D_theta23_HH_df23)
xOmega11 = D_theta13_HH_df13-df13_mcmdq*xh_mc
xOmega12 = D_theta23_HH_df13
xOmega13 = D_thetacap_HH_df13
xOmega21 = D_theta13_HH_df23
xOmega22 = D_theta23_HH_df23-df23_mcmdq*xh_mc
xOmega23 = D_thetacap_HH_df23
xOmega31 = D_theta13_HH_dfcap
xOmega32 = D_theta23_HH_dfcap
xOmega33 = D_thetacap_HH_dfcap-df_capmDq*xh_cap
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13, 3)
Call MatMat(D, 3, dg23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg23, 3)
Call MatMat(D, 3, dg_capmDS, 3, 3, 1, 3, D_dgcap, 3)
Call AddVec(Prs_res1, D_dg23, -xLam13_mc, -xLam23_mc, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dgcap, 1d0, -xLam_cap, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13, r, 3, r_HH_df13)
Call DinProd(HH_df23, r, 3, r_HH_df23)
Call DinProd(HH_dfcap, r, 3, r_HH_dfcap)
xOmegaf13 = f13_mc - r_HH_df13
xOmegaf23 = f23_mc - r_HH_df23
xOmegafcap = f_cap - r_HH_dfcap

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc y dxLam23_mc
xMat(1,1) = xOmega11

```

```

xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaF13
f_b(2) = xOmegaF23
f_b(3) = xOmegaFCap

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam23_mc = d_lam(2)
dxLam_cap = d_lam(3)

xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam23_mc = xLam23_mc + dxLam23_mc
xLam_cap = xLam_cap + dxLam_cap

!Actualización variables
Call AddVec(D_theta13, D_theta23, -dxLam13_mc, -dxLam23_mc, 3, dPrs_1)
Call AddVec(dPrs_1, D_thetaCap, 1d0, -dxLam_cap, 3, dPrs_2)
Call AddVec(r, dPrs_2, -1d0, 1d0, 3, dPrs_3)
Call MatMat(HH, 3, dPrs_3, 3, 1, 3, dPrs, 3)
Call AddVec(Prs, dPrs, 1d0, 1d0, 3, Prs)
p_p = max(p_p_E + xLam_cap*xh_cap, p_p_E)

!Cálculo valor de f13_mc, f23_mc y f_cap en (k+1) en Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(2)-Prs(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(2)+Prs(3))*sin(phi)
f23_mc      = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

q_m      = Prs(1)+(delta-1d0)*Prs(2)-delta*Prs(3)
p        = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
f_cap    = (q_m**2d0)/(a1fa**2d0)+p**2d0-p_p**2d0

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

```

```

!Actualización variables de estado (se conserva StVar(1) del Return Mapping
sobre HS)
StVar(2) = min((-1d0)*p_p, (-1d0)*p_p_E)

If ((iE1.EQ. num_EL).AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
  If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
      xLam23_mc.GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
      xLam_cap.GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
      it.LE. itmax) Then
    write(1,*)'Return Mapping Ok!'
  Else
    write(1,*)'Numerical problem'
  End If
End If

Case Default
write(1,*) ' incorrect iArea in MC_CAP_plast'
Stop
End Select

End ! MC_CAP_plast

```



```

Call MZeroR(dg12_hsmdS, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmdSdq, 3)

Call MZeroR(df23_hsmdS, 3)
Call MZeroR(dg23_hsmdS, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmdSdq, 3)

Call MZeroR(df3_tracmdS, 3)
Call MZeroR(dg3_tracmdS, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

Call MZeroR(D_dg13_hs_2, 9)
Call MZeroR(D_dg12_hs_2, 9)
Call MZeroR(D_dg23_hs_2, 9)

Call MZeroR(D_dg3_trac_2, 9)

Call MZeroR(D_dg13_hs, 3)
Call MZeroR(D_dg12_hs, 3)
Call MZeroR(D_dg23_hs, 3)

Call MZeroR(D_dg3_trac, 3)

Call MZeroR(HH_df13_hs, 3)
Call MZeroR(HH_df12_hs, 3)
Call MZeroR(HH_df23_hs, 3)

Call MZeroR(HH_df3_trac, 3)

Call MZeroR(theta13_hs, 3)
Call MZeroR(theta12_hs, 3)
Call MZeroR(theta23_hs, 3)

Call MZeroR(theta3_trac, 3)

Call MZeroR(D_theta13_hs, 3)
Call MZeroR(D_theta12_hs, 3)
Call MZeroR(D_theta23_hs, 3)

Call MZeroR(D_theta3_trac, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)
Call MZeroR(xMat, 9)
Call MZeroR(xMat_inv, 9)
Call MZeroR(f_b, 3)
Call MZeroR(d_lam, 3)

Call MZeroR(d_eps_p_aux, 3)

ipl = 2
it = 0
itmax = 100
ttol = 1d-12
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
ideb = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model .EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xK0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
beta = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 2) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D V9
xKs_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E0_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xK0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)

```



```

sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
beta = Props(22)
xNu_min = Props(23)
Else If (i_model .EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmkc = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 4) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xktmkc = Props(22)
xNu_min = Props(23)
End If

If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
w = 100d0
End If

gamma_p_E = StVar0(1)
xh_i = Gm**(1d0+Eur_ref/Ei_ref_inter)
dXLam13_hs = 0d0
dXLam12_hs = 0d0
dXLam23_hs = 0d0
dXLam3_trac = 0d0

xLam13_hs = 0d0
xLam12_hs = 0d0
xLam23_hs = 0d0
xLam3_trac = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Eje entre f13_hs y f3_trac
!STARTING POINT
!Calculo el valor de f13_hs y f3_trac en Prs.E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)

```

```

!Cálculo tolerancia de f13_hs y f3_trac
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f3_trac_TOL = ttol*abs(f3_trac)+ttol

!Cálculo df13_hs/dS y df3_trac/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

df3_tracmDS(1) = 0d0
df3_tracmDS(2) = 0d0
df3_tracmDS(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df3_tracmDS', df3_tracmDS, 3)

!Cálculo df13_hs/dq y df3_trac/dq en Prs_E (q1=0, q2=0)
df13_hsmdq = -1d0
df3_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E (dq1=0, dq2=0)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
xh_hs = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
xh_hs = 1d0*xh_i
End If
xh_trac = 0d0

!Cálculo dgi3_hs/dS y dg3_trac/dS en Prs_E
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi

```

```

sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xK0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xK0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xK0_nc)/(1d0+2d0*xK0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

dgi3_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dgi3_hsmDS(2) = 0d0
dgi3_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg3_tracmDS(1) = 0d0
dg3_tracmDS(2) = 0d0
dg3_tracmDS(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'dgi3_hsmDS', dgi3_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg3_tracmDS', dg3_tracmDS, 3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmDS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmDSdq, 3)

```

```

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg13_hs, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dg13_hs, 3, 1, 3, df13_hs_D_dg13_hs)
xOmega11 = df13_hs_D_dg13_hs-df13_hsmdq*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call DinProd(df13_hsmDS, D_dg3_trac, 3, df13_hs_D_dg3_trac)
xOmega12 = df13_hs_D_dg3_trac
Call DinProd(df3_tracmDS, D_dg13_hs, 3, df3_trac_D_dg13_hs)
xOmega21 = df3_trac_D_dg13_hs
Call DinProd(df3_tracmDS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_trac)
xOmega22 = df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmq*xh_trac

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam3_trac
dxLam13_hs = (f13_hs*xOmega22-f3_trac*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam3_trac = (f3_trac*xOmega11-f13_hs*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam3_trac = dxLam3_trac

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam3_trac', dxLam3_trac)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam3_trac', xLam3_trac)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg3_trac, -xLam13_hs, -xLam3_trac, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)

!Cálculo valor de f13_hs y f3_trac con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3))*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))

```

```

f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

f3_trac = sigma_trac - Prs(3)
!EULER BACKWARD
Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
(abs(f3_trac) .GT. f3_trac_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))
!Cálculo df13_hs/dS y df3_trac/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-
Prs(3))))**2d0+2d0/Eur
Else
df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)-2d0)/Eur
df13_hsmDS(2) = 0d0
df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf)**2d0)+2d0)/Eur
End If

df3_tracmDS(1) = 0d0
df3_tracmDS(2) = 0d0
df3_tracmDS(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'df13_hsmDS', df13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df3_tracmDS', df3_tracmDS, 3)

!Cálculo df13_hs/dq y df3_trac/dq en Prs (q1=0, q2=0)
df13_hsmdq = -1d0
df3_tracmq = 0d0

!Cálculo h en Prs (dq=0 y dq2=0)
If ((i_model1 .EQ. 1) .OR. (i_model1 .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
xh_hs = 1d0
Else If ((i_model1 .EQ. 2) .OR. (i_model1 .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
xh_hs = 1d0*xh_i

```

```

End If
xh_trac = 0d0

!Cálculo dg13_hs/dS y dg3_trac/dS en Prs
If ((i_model1.EQ. 1) .OR. (i_model1.EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model1.EQ. 2) .OR. (i_model1.EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0),(Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0
dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg3_tracmDS(1) = 0d0

```

```

dg3_tracmDS(2) = 0d0
dg3_tracmDS(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'dg13_hsmDS', dg13_hsmDS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg3_tracmDS', dg3_tracmDS, 3)

!Cálculo d2g13_hs/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmDS2, 9)
!Cálculo d2g13_hs/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmDSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg13_hs_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmDS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_hs_2 + xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13_hs)
Call AddVec(dg3_tracmDS, d2g3_tracmDSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, 3, HH_df13_hs,3)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, 3, HH_df3_trac,3)
Call MatMat(D, 3, theta13_hs, 3, 3, 1, 3, 3, D_theta13_hs,3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, 3, D_theta3_trac,3)
Call DinProd(D, theta13_hs, HH_df13_hs, 3, D_theta13_hs_HH_df13_hs)
Call DinProd(D, theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D, theta13_hs, HH_df3_trac, 3, D_theta13_hs_HH_df3_trac)
Call DinProd(D, theta3_trac, HH_df13_hs, 3, D_theta3_trac_HH_df13_hs)
xOmega11 = D_theta13_hs_HH_df13_hs-df13_hsmdq*xh_hs
xOmega12 = D_theta3_trac_HH_df13_hs
xOmega21 = D_theta13_hs_HH_df3_trac
xOmega22 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_tracmDq*xh_trac

Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, 3, D_dg13_hs, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, 3, D_dg3_trac, 3)
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg3_trac, -xLam13_hs, -xLam3_trac, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13_hs, r, 3, r_HH_df13_hs)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
xOmegaF13_hs = f13_hs - r_HH_df13_hs
xOmegaF3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs y dxLam3_trac
dxLam13_hs = (xOmegaF13_hs*xOmega22-
xOmegaF3_trac*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)
dxLam3_trac = (xOmegaF3_trac*xOmega11-
xOmegaF13_hs*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)

```

```

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_hs', dxLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'dxLam3_trac', dxLam3_trac)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_hs', xLam13_hs)
Call WriVal(ideb, 'xLam3_trac', xLam3_trac)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg3_trac, -xLam13_hs, -xLam3_trac, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*x1_hs, gamma_p_E)

Call WriVal(ideb, 'gamma_p', gamma_p)

!Cálculo el valor de f13_hs en (k+1)
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

f3_trac = sigma_trac - Prs(3)

!Actualización iteración
it = it+1

Call WriIv(ideb, 'it', it)

```

```

End do

!Actualización variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = StVar0(2)

Call WriVal(ideb, 'f13_hs', f13_hs)
Call WriVal(ideb, 'f3_trac', f3_trac)

If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_hs .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
xLam3_trac .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*) 'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*) 'Numerical problem'
End If
End If

Case (2) ! 2 : Punto f13_hs, f12_hs y f3_trac

!STARTING POINT

!Cálculo el valor de f13_hs, f12_hs y f3_trac en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi)/(1d0-sin(phi)))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
E1 = E1_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-Prs_E(1)-Prs_E(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/E1)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

```

```

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(2))/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f12_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p_E
End If

f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)

!Cálculo tolerancia f13_hs, f12_hs y f3_trac en Prs_E
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f12_hs_TOL = ttol*abs(f12_hs)+ttol
f3_trac_TOL = ttol*abs(f3_trac)+ttol

!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df3_trac/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0) -
2d0/Eur
df13_hsmdS(2) = 0d0
df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df13_hsmdS(2) = 0d0
df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))+2d0)/Eur
End If

If (Prs_E(1)-Prs_E(2) .LT. qf) Then
df12_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(2))))**2d0) -
2d0/Eur
df12_hsmdS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-
Prs_E(2))))**2d0)+2d0/Eur
df12_hsmdS(3) = 0d0
Else
df12_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)-2d0/Eur
df12_hsmdS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))+2d0)/Eur
df12_hsmdS(3) = 0d0
End If

df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo df13_hs/dq, df12_hs/dq y df3_trac/dq en Prs_E (q1=0 -para f13_hs y
f12_hs-, q2=0)
df13_hsmdq = -1d0
df12_hsmdq = -1d0

```

```

df3_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E (dq=0 -para f13_hs y f12_hs- y dq2=0)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
  xh_hs = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
  xh_hs = 1d0*xh_i
End If
xh_trac = 0d0

!Cálculo dg13_hs/dS, dg12_hs/dS y dg3_trac/dS en Prs_E
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
  sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
  sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*sin(psi))
  If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
    sin_psi_m = 0d0
  Else If ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
    sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
  Else If ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
    psi_m = psi
    sin_psi_m = sin(psi_m)
  Else If (psi .EQ. 0d0) Then
    sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
  sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3)))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3)-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xk0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xk0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
  sin(phi))
  sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*sin(psi))
  xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
  eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
  If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
  If (sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
    sin_psi_m = 0d0
  Else
    sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
  Else If ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
    sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
  Else If ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
    psi_m = psi
    sin_psi_m = sin(psi_m)

```

```

ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

dg13_hsmoS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmoS(2) = 0d0
dg13_hsmoS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg12_hsmoS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg12_hsmoS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg12_hsmoS(3) = 0d0

dg3_tracmoS(1) = 0d0
dg3_tracmoS(2) = 0d0
dg3_tracmoS(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g12_hs/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmoS, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmoS, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmoS, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmoSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmoSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmoSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmoS, D_dg13_hs, 3, 1, 3, D_dg13_hs, 3)
Call DinProd(df13_hsmoS, D_dg13_hs, 3, df13_hs_D_dg13_hs)
xOmega11 = df13_hs_D_dg13_hs-df13_hsmoS*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmoS, 3, 3, 1, 3, D_dg12_hs, 3)
Call DinProd(df12_hsmoS, D_dg12_hs, 3, df12_hs_D_dg12_hs)
xOmega12 = df12_hs_D_dg12_hs
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmoS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call DinProd(df13_hsmoS, D_dg3_trac, 3, df13_hs_D_dg3_trac)
xOmega13 = df13_hs_D_dg3_trac
Call DinProd(df12_hsmoS, D_dg12_hs, 3, df12_hs_D_dg13_hs)
xOmega21 = df12_hs_D_dg13_hs
Call DinProd(df12_hsmoS, D_dg12_hs, 3, df12_hs_D_dg12_hs)
xOmega22 = df12_hs_D_dg12_hs-df12_hsmoS*xh_hs
Call DinProd(df12_hsmoS, D_dg3_trac, 3, df12_hs_D_dg3_trac)
xOmega23 = df12_hs_D_dg3_trac
Call DinProd(df3_tracmoS, D_dg13_hs, 3, df3_trac_D_dg13_hs)
xOmega31 = df3_trac_D_dg13_hs
Call DinProd(df3_tracmoS, D_dg12_hs, 3, df3_trac_D_dg12_hs)
xOmega32 = df3_trac_D_dg12_hs
Call DinProd(df3_tracmoS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_trac)
xOmega33 = df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmoS*xh_trac

!Resolución sistema y calculo dxLam13_hs, dxLam12_hs y dxLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_hs
f_b(2) = f12_hs
f_b(3) = f3_trac

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam12_hs = dxLam12_hs
xLam3_trac = dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg12_hs, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

!Cálculo el valor de f13_hs, f12_hs y f3_trac con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p

```

```

Else
  If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
    write(1,*) ' q > qf '
  End If
  f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
  f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
  f13_hs      = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
  f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-Prs(1)-Prs(2))))
  f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
  f12_hs      = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
  f12_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
  f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
  f12_hs      = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
End If

f3_trac      = sigma_trac - Prs(3)
!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
  (abs(f12_hs) .GT. f12_hs_TOL)) .OR. &
  (abs(f3_trac) .GT. f3_trac_TOL)) .AND. &
  (it .LE. itmax))

!Cálculo df13_hs/dS, df12_hs/dS y df3_trac/dS en Prs
If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
  df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-Prs(3))))**2d0)-
  2d0/Eur
  df13_hsmDS(2) = 0d0
  df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-
  Prs(3))))**2d0)+2d0/Eur
Else
  df13_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))-2d0)/Eur
  df13_hsmDS(2) = 0d0
  df13_hsmDS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))+2d0)/Eur
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
  df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-Prs(2))))**2d0)-
  2d0/Eur
  df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-Prs(1)-
  Prs(2))))**2d0)+2d0/Eur
  df12_hsmDS(3) = 0d0
Else
  df12_hsmDS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))-2d0)/Eur
  df12_hsmDS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))+2d0)/Eur

df12_hsmDS(3) = 0d0
End If

df12_hsmDS(3) = 0d0
End If

df3_tracmDS(1) = 0d0
df3_tracmDS(2) = 0d0
df3_tracmDS(3) = -1d0

!Cálculo df13_hs/dq, df12_hs/dq y df3_trac/dq en Prs (q1=0 -para f13_hs y
f12_hs-, q2=0)
df13_hsmdq      = -1d0
df12_hsmdq      = -1d0
df3_tracmdq     = 0d0

!Cálculo h en Prs (dq=0-para f13_hs y f12_hs- y dq2=0)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
  xh_hs          = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
  xh_hs          = 1d0*xh_i
End If
xh_trac         = 0d0

!Cálculo dgi3_hs/dS, dg12_hs/dS y dg3_trac/dS en Prs
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
  sin_phi_m      = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
  2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
  sin_phi_cv      = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
  If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
    sin_psi_m     = 0d0
  ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
    sin_psi_m     = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
  ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
    sin_psi_m     = psi
  ElseIf (psi_m = sin(psi_m))
  ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
    sin_psi_m     = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!ModeloEPHYSS
  sin_phi_m      = min(max((Prs(1)-Prs(3))/(Prs(1)+Prs(3))-
  2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs(1)-Prs(1)*Xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(1)*Xk0_nc-
  2d0*c*cos(phi)/sin(phi)), sin(phi))
  sin_phi_cv      = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
  xM_comp         = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
  eta             = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
  xk0_nc)/(1d0+2d0*Xk0_nc))
  If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
    If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then

```



```

sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv), sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

dg13_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmDS(2) = 0d0
dg13_hsmDS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg12_hsmDS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg12_hsmDS(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)
dg12_hsmDS(3) = 0d0

dg3_tracmDS(1) = 0d0
dg3_tracmDS(2) = 0d0
dg3_tracmDS(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g12_hs/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_hsmDS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmDS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g12_hs/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_hsmDSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmDSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador pláístico
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_hs_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g12_hsmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg12_hs_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmDS2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_hs_2 + xLam12_hs*D_dg12_hs_2 +
xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmDS, d2g13_hsmDSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13_hs)
Call AddVec(dg12_hsmDS, d2g12_hsmDSdq, 1d0, xLam12_hs*xh_hs, 3, theta12_hs)
Call AddVec(dg3_tracmDS, d2g3_tracmDSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df13_hs,3)
Call MatMat(HH, 3, df12_hsmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df12_hs,3)

```

```

Call MatMat(HH, 3, df3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_trac,3)
Call MatMat(D, 3, theta13_hs, 3, 3, 1, 3, D_theta13_hs,3)
Call MatMat(D, 3, theta12_hs, 3, 3, 1, 3, D_theta12_hs,3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta3_trac,3)
Call DinProd(D_theta13_hs, HH_df13_hs, 3, D_theta13_hs_HH_df13_hs)
Call DinProd(D_theta12_hs, HH_df12_hs, 3, D_theta12_hs_HH_df12_hs)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta13_hs, HH_df12_hs, 3, D_theta13_hs_HH_df12_hs)
Call DinProd(D_theta12_hs, HH_df13_hs, 3, D_theta12_hs_HH_df13_hs)
Call DinProd(D_theta13_hs, HH_df12_hs, 3, D_theta13_hs_HH_df12_hs)
Call DinProd(D_theta12_hs, HH_df13_hs, 3, D_theta12_hs_HH_df13_hs)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta13_hs, HH_df13_hs-df13_hsmdq*xh_hs
xOmega11 = D_theta13_hs_HH_df13_hs-df13_hsmdq*xh_hs
xOmega12 = D_theta12_hs_HH_df13_hs
xOmega13 = D_theta3_trac_HH_df13_hs
xOmega21 = D_theta13_hs_HH_df12_hs
xOmega22 = D_theta12_hs_HH_df12_hs-df12_hsmdq*xh_hs
xOmega23 = D_theta3_trac_HH_df12_hs
xOmega31 = D_theta13_hs_HH_df3_trac
xOmega32 = D_theta12_hs_HH_df3_trac
xOmega33 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_tracmDq*xh_trac
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg13_hs,3)
Call MatMat(D, 3, dg12_hsmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg12_hs, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg12_hs, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13_hs, r, 3, r_HH_df13_hs)
Call DinProd(HH_df12_hs, r, 3, r_HH_df12_hs)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
xOmegaf13_hs = f13_hs - r_HH_df13_hs
xOmegaf12_hs = f12_hs - r_HH_df12_hs
xOmegaf3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac

!Resolución sistema y calculo dxLam13_hs, dxLam12_hs y dxLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaf13_hs
f_b(2) = xOmegaf12_hs
f_b(3) = xOmegaf3_trac

```

```

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam12_hs = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam12_hs = xLam12_hs + dxLam12_hs
xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg12_hs, -xLam13_hs, -xLam12_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

!Cálculo el valor de f13_hs, f12_hs y f3_trac en (k+1) en Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((!E1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf !
End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(1)-Prs(2) .LT. qf) Then
f12_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(2))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(2)))))
f12_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(2))/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p
Else
f12_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f12_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f12_hs = (2d0*qa/Ei)*f12_hs_fac1-f12_hs_fac2-gamma_p

```

```

End If
f3_trac = sigma_trac - Prs(3)

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

!Actualizo variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((!E1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam12_hs .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam3_trac .GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*) 'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*) 'Numerical problem'
End If
End If

Case (3) ! 1 : Eje entre f13_hs y f3_trac

!STARTING POINT#

!Cálculo el valor de f13_hs, f23_hs y f3_trac en Prs_E
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs_E(1)-Prs_E(3), 0d0)
p = (Prs_E(1)+Prs_E(2)+Prs_E(3))/3d0

If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(1)-Prs_E(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
Else
If ((!E1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf !

```

```

End If
f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p_E
End If

If (Prs_E(2)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs_E(2)-Prs_E(3))/(abs(qa-(Prs_E(2)-Prs_E(3))))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(2)-Prs_E(3))/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p_E
Else
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p_E
End If

f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)

!Cálculo tolerancia f13_hs, f23_hs y f3_trac en Prs_E
f13_hs_TOL = ttol*abs(f13_hs)+ttol
f23_hs_TOL = ttol*abs(f23_hs)+ttol
f3_trac_TOL = ttol*abs(f3_trac)+ttol

!Cálculo df13_hs/dS, df23_hs/dS y df3_trac/dS en Prs_E
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(1)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df13_hsmdS(2) = 0d0
df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)/Eur
Prs_E(3))**2d0)+2d0)/Eur
Else
df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)/Eur
df13_hsmdS(2) = 0d0
df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0)/Eur
End If

If (Prs_E(2)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
df23_hsmdS(1) = 0d0
df23_hsmdS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(2)-Prs_E(3))))**2d0)-
2d0/Eur
df23_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs_E(2)-
Prs_E(3)))**2d0)+2d0)/Eur
Else
df23_hsmdS(1) = 0d0
df23_hsmdS(2) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)/Eur
df23_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0)/Eur
End If

df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo df13_hs/dq, df23_hs/dq y df3_trac/dq en Prs_E (q1=0 -para f13_hs y
f23_hs-, q2=0)
df13_hsmdq = -1d0
df23_hsmdq = -1d0
df3_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E (dq=0 -para f13_hs y f23_hs- y dq2=0)
If ((i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!MODELO HS
xh_hs = 1d0
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!MODELO EPHYSS
xh_hs = 1d0*xh_i
End If
xh_trac = 0d0

!Cálculo dg13_hs/dS, dg23_hs/dS y dg3_trac/dS en Prs_E
If (i_model .EQ. 1) .OR. (i_model .EQ. 3)) Then
!Modelo HS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*sin(psi))
If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
sin_psi_m = 0d0
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = max((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0)*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
sin_psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
Else If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max((Prs_E(1)-Prs_E(3))/(Prs_E(1)+Prs_E(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)),0d0), (Prs_E(1)-
Prs_E(1)*xk0_nc)/(Prs_E(1)+Prs_E(1)*xk0_nc-2d0*c*cos(phi)/sin(phi))),
sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*sin(psi))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If (sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)

```

```

End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

dgl3_hsmoS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dgl3_hsmoS(2) = 0d0
dgl3_hsmoS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg23_hsmoS(1) = 0d0
dg23_hsmoS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg23_hsmoS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg3_tracmoS(1) = 0d0
dg3_tracmoS(2) = 0d0
dg3_tracmoS(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_hs/dS2, d2g23_hs/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmoS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmoS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmoS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g23_hs/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_hsmoSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmoSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmoSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dgl3_hsmoS, 3, 3, 1, 3, D_dgl3_hs, 3)
Call DinProd(df13_hsmoS, D_dgl3_hs, 3, df13_hs_D_dgl3_hs)
xOmega11 = df13_hs_D_dgl3_hs-df13_hsmoS*xh_hs
Call MatMat(D, 3, dg23_hsmoS, 3, 3, 1, 3, D_dg23_hs, 3)
Call DinProd(df13_hsmoS, D_dg23_hs, 3, df13_hs_D_dg23_hs)
xOmega12 = df13_hs_D_dg23_hs
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmoS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call DinProd(df13_hsmoS, D_dg3_trac, 3, df13_hs_D_dg3_trac)
xOmega13 = df13_hs_D_dg3_trac
Call DinProd(df23_hsmoS, D_dgl3_hs, 3, df23_hs_D_dgl3_hs)
xOmega21 = df23_hs_D_dgl3_hs
Call DinProd(df23_hsmoS, D_dg23_hs, 3, df23_hs_D_dg23_hs)
xOmega22 = df23_hs_D_dg23_hs-df23_hsmoS*xh_hs
Call DinProd(df23_hsmoS, D_dg3_trac, 3, df23_hs_D_dg3_trac)
xOmega23 = df23_hs_D_dg3_trac
Call DinProd(df3_tracmoS, D_dgl3_hs, 3, df3_trac_D_dgl3_hs)

```

```

xOmega31 = df3_trac_D_dgl3_hs
Call DinProd(df3_tracmoS, D_dg23_hs, 3, df3_trac_D_dg23_hs)
xOmega32 = df3_trac_D_dg23_hs
Call DinProd(df3_tracmoS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_trac)
xOmega33 = df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmS*xh_trac

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_hs, dxLam23_hs y dxLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_hs
f_b(2) = f23_hs
f_b(3) = f3_trac

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam23_hs = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_hs = dxLam13_hs
xLam23_hs = dxLam23_hs
xLam3_trac = dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dgl3_hs, D_dg23_hs, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

!Cálculo el valor de f13_hs, f23_hs y f3_trac con la nueva Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, 1d0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)

```

```

p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0
If (Prs_E(1)-Prs_E(3) .LT. qf) Then
  f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(3))))))
  f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
  f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
  write(1,*) ' q > qf '
  End If
  f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
  f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
  f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
  f23_hs_fac1 = ((Prs_E(2)-Prs_E(3))/((abs(qa-(Prs_E(2)-Prs_E(3))))))
  f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs_E(2)-Prs_E(3))/Eur
  f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
Else
  f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
  f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
  f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
End If

f3_trac = sigma_trac - Prs(3)
!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_hs) .GT. f13_hs_TOL) .OR. &
(abs(f23_hs) .GT. f23_hs_TOL)) .OR. &
(abs(f3_trac) .GT. f3_trac_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))
  !Cálculo df13_hs/dS, df23_hs/dS y df3_trac/dS en Prs
  If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
    df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-Prs(3))))**2d0)-
    2d0/Eur
    df13_hsmdS(2) = 0d0
    df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(1)-
    Prs(3))))**2d0)+2d0/Eur
  Else
    df13_hsmdS(1) = ((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))-2d0)/Eur
    df13_hsmdS(2) = 0d0
    df13_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
  End If

  If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
    df23_hsmdS(1) = 0d0
    df23_hsmdS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(2)-Prs(3))))**2d0)-
    2d0/Eur
    df23_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-(Prs(2)-Prs(3))))**2d0)-
    2d0/Eur
  Else
    df23_hsmdS(1) = 0d0
    df23_hsmdS(2) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))-2d0)/Eur
    df23_hsmdS(3) = -((2d0*(qa**2d0))/Ei)/((abs(qa-qf))**2d0)+2d0/Eur
  End If

  !Cálculo h en Prs (dq=0-para f13_hs y f23_hs- y dq2=0)
  If ((i_model1 .EQ. 1) .OR. (i_model1 .EQ. 3)) Then
    !MODELO HS
    xh_hs = 1d0
  Else If ((i_model1 .EQ. 2) .OR. (i_model1 .EQ. 4)) Then
    !MODELO EPHYSS
    xh_hs = 1d0*xh_i
  End If
  xh_trac = 0d0

  !Cálculo dg13_hs/dS, dg23_hs/dS y dg3_trac/dS en Prs
  If ((i_model1 .EQ. 1) .OR. (i_model1 .EQ. 3)) Then
    !Modelo HS
    sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3)))/(Prs(1)+Prs(3))-
    2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0), sin(phi))
    sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*(sin(psi)))
    If (sin_phi_m .LT. (3d0/4d0)*sin(phi)) Then
      sin_psi_m = 0d0
    ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0))*sin(phi)) .AND. (psi .GT. 0d0) Then
      sin_psi_m = max((sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),0d0)
    ElseIf ((sin_phi_m .GE. (3d0/4d0))*sin(phi)) .AND. (psi .LE. 0d0) Then
      sin_psi_m = psi
    sin_psi_m = sin(psi_m)
  ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
    sin_psi_m = 0d0
  Else If ((i_model1 .EQ. 2) .OR. (i_model1 .EQ. 4)) Then

```

```

!Modelo EPHYSS
sin_phi_m = min(max((Prs(1)-Prs(3)))/(Prs(1)+Prs(3))-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi),0d0),(Prs(1)-Prs(1)*xk0_nc)/(Prs(1)+Prs(1)*xk0_nc-
2d0*c*cos(phi)/sin(phi)), sin(phi))
sin_phi_cv = (sin(phi)-sin(psi))/(1d0-(sin(phi))*sin(psi))
xM_comp = 6d0*sin_phi_cv/(3d0-sin_phi_cv)
eta = max(min(max(q/p,0d0), xM_comp), 3d0*(1d0-
xk0_nc)/(1d0+2d0*xk0_nc))
If (sin_phi_m .LT. sin_phi_cv) Then
If ((sin_phi_m .LT. 1d-10) .OR. (abs(eta) .LT. 1d-10)) Then
sin_psi_m = 0d0
Else
sin_psi_m = (1d0/10d0)*(-xM_comp*exp((1d0/15d0)*log(eta*sin_phi_m*(1d0-
sin_phi_cv)/(xM_comp*sin_phi_cv*(1d0-sin_phi_m))))+eta)
End If
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .GT. 0d0)) Then
sin_psi_m = min((sin_phi_m-sin_phi_cv)/(1d0-sin_phi_m*sin_phi_cv),sin(psi))
ElseIf ((sin_phi_m .GE. sin_phi_cv) .AND. (psi .LE. 0d0)) Then
psi_m = psi
sin_psi_m = sin(psi_m)
ElseIf (phi .EQ. 0d0) Then
sin_psi_m = 0d0
End If
End If

dg13_hsmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg13_hsmdS(2) = 0d0
dg13_hsmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg23_hsmdS(1) = 0d0
dg23_hsmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin_psi_m)
dg23_hsmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin_psi_m)

dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0
dg3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_hs/ds2, d2g23_hs/ds2 y d2g3_trac/ds2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_hsmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)

!Cálculo d2g13_hs/dSdq, d2g23_hs/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_hsmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_hsmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_hsmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_hs_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g23_hsmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg23_hs_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)

Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
xLam3_inv = Unity + xLam13_hs*D_dg13_hs_2 + xLam23_hs*D_dg23_hs_2 +
xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_hsmdS, d2g13_hsmdSdq, 1d0, xLam13_hs*xh_hs, 3, theta13_hs)
Call AddVec(dg23_hsmdS, d2g23_hsmdSdq, 1d0, xLam23_hs*xh_hs, 3, theta23_hs)
Call AddVec(dg3_tracmdS, d2g3_tracmdSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call MatMat(HH, 3, df13_hsmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df13_hs,3)
Call MatMat(HH, 3, df23_hsmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df23_hs,3)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_trac,3)
Call MatMat(D, 3, theta13_hs, 3, 3, 1, 3, D_theta13_hs,3)
Call MatMat(D, 3, theta23_hs, 3, 3, 1, 3, D_theta23_hs,3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta3_trac,3)
Call DinProd(D_theta13_hs, HH_df13_hs, 3, D_theta13_hs_HH_df13_hs)
Call DinProd(D_theta23_hs, HH_df13_hs, 3, D_theta23_hs_HH_df13_hs)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df13_hs, 3, D_theta3_trac_HH_df13_hs)
Call DinProd(D_theta13_hs, HH_df23_hs, 3, D_theta13_hs_HH_df23_hs)
Call DinProd(D_theta23_hs, HH_df23_hs, 3, D_theta23_hs_HH_df23_hs)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df23_hs, 3, D_theta3_trac_HH_df23_hs)
Call DinProd(D_theta13_hs, HH_df3_trac, 3, D_theta13_hs_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta23_hs, HH_df3_trac, 3, D_theta23_hs_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
xOmega11 = D_theta13_hs_HH_df13_hs-df13_hsmdq*xh_hs
xOmega12 = D_theta23_hs_HH_df13_hs
xOmega13 = D_theta3_trac_HH_df13_hs
xOmega21 = D_theta13_hs_HH_df23_hs
xOmega22 = D_theta23_hs_HH_df23_hs-df23_hsmdq*xh_hs
xOmega23 = D_theta3_trac_HH_df23_hs
xOmega31 = D_theta13_hs_HH_df3_trac
xOmega32 = D_theta23_hs_HH_df3_trac
xOmega33 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_tracmdq*xh_trac
Call MatMat(D, 3, dg13_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13_hs,3)
Call MatMat(D, 3, dg23_hsmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg23_hs, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg23_hs, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13_hs, r, 3, r_HH_df13_hs)
Call DinProd(HH_df23_hs, r, 3, r_HH_df23_hs)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
xOmegaf13_hs = f13_hs - r_HH_df13_hs
xOmegaf23_hs = f23_hs - r_HH_df23_hs
xOmegaf3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac

!Resolución sistema y cálculo dXLam13_hs, dXLam23_hs y dXLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13

```

```

xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmefaf13_hs
f_b(2) = xOmefaf23_hs
f_b(3) = xOmefaf3_trac

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_hs = d_lam(1)
dxLam23_hs = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_hs = xLam13_hs + dxLam13_hs
xLam23_hs = xLam23_hs + dxLam23_hs
xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_hs, D_dg23_hs, -xLam13_hs, -xLam23_hs, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, Id0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, Id0, Id0, 3, Prs)
gamma_p = max(gamma_p_E + xLam13_hs*xh_hs, gamma_p_E)

!Cálculo el valor de f13_hs, f23_hs y f3_trac en (k+1) en Prs
qf1 = max(c*cos(phi)/sin(phi)+Prs_0(3), max(c*cos(phi)/sin(phi)-
sigma_trac, Id0))
qf2 = (2d0*sin(phi))/(1d0-sin(phi))
qf = qf1*qf2
qa = qf/R_f
E_fac1 = max(max(c*cos(phi)+Prs_0(3)*sin(phi), Id0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
E50 = E50_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
Ei = Ei_ref_inter*(E_fac1/E_fac2)**xm
Eur = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm

q = max(Prs(1)-Prs(3), 0d0)
p = (Prs(1)+Prs(2)+Prs(3))/3d0

If (Prs(1)-Prs(3) .LT. qf) Then
f13_hs_fac1 = ((Prs(1)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(1)-Prs(3)))))
f13_hs_fac2 = 2d0*(Prs(1)-Prs(3))/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
Else
If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
write(1,*) ' q > qf '
End If

```

```

f13_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f13_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f13_hs = (2d0*qa/Ei)*f13_hs_fac1-f13_hs_fac2-gamma_p
End If

If (Prs(2)-Prs(3) .LT. qf) Then
f23_hs_fac1 = ((Prs(2)-Prs(3))/(abs(qa-(Prs(2)-Prs(3)))))
f23_hs_fac2 = 2d0*(Prs(2)-Prs(3))/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
Else
f23_hs_fac1 = qf/(abs(qa-qf))
f23_hs_fac2 = 2d0*qf/Eur
f23_hs = (2d0*qa/Ei)*f23_hs_fac1-f23_hs_fac2-gamma_p
End If

f3_trac = sigma_trac - Prs(3)

!Actualizo iteración
it = it+1
End do

!Actualizo variables de estado
StVar(1) = max(gamma_p, gamma_p_E)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((iE1 .EQ. num_EL) .AND. (Int .EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_hs .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
xLam23_hs .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
xLam3_trac .GT. (-1d0)*ttol .AND. &
it .LE. itmax) Then
write(1,*) 'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*) 'Numerical problem'
End If
End If

Case Default
! write(1,*) ' incorrect iArea in HS_TRAC_plast '
Stop
End Select

End ! MC_TRAC_plast

```

Subrutina MC_TRAC_plast

```

!C*****
Subroutine MC_TRAC_plast(iE1, Int, num_EL, num_GAUSS, iArea, Props, Prs_E,
Prs, StVar0, StVar, iPl, Prs_0, D, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!
! Rutina para el Returning Map en superficie MC y TRAC
! Tensión de compresión positiva!
!
! I/O Tipo
! iArea I I 1 : Eje entre f13_mc y f3_trac
!           2 : Punto f13_mc, f12_mc y f3_trac
!           3 : Punto f13_mc, f23_mc y f3_trac
!           !Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
!
! Local:
! f13_mc      : superficie MC para
!              !Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f12_mc      : superficie MC para
!              !Prs_E(1) > Prs_E(2) = Prs_E(3)
! f23_mc      : superficie MC para
!              !Prs_E(1) = Prs_E(2) > Prs_E(3)
! f3_trac     : superficie TRAC para
!              !Prs_E(1) > Prs_E(2) > Prs_E(3)
! xLam13_mc   : multiplicador plástico f13_mc
! xLam12_mc   : multiplicador plástico f12_mc
! xLam23_mc   : multiplicador plástico f23_mc
! xLam3_trac  : multiplicador plástico f3_trac
! D           : matriz elástica
! df13_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f13_mc/dS
! df12_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f12_mc/dS
! df23_mcmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f23_mc/dS
! df3_tracmdS(3) : Primera derivada función de fluencia f3_trac/dS
! df13_mcmdq   : Primera derivada función de fluencia f13_mc/dq
! df12_mcmdq   : Primera derivada función de fluencia f12_mc/dq
! df23_mcmdq   : Primera derivada función de fluencia f23_mc/dq
! df3_tracmdq  : Primera derivada función de fluencia f3_trac/dq
! dg13_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g13_mc/dS
! dg12_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g12_mc/dS
! dg23_mcmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g23_mc/dS
! dg3_tracmdS(3) : Primera derivada potencial plástico g3_trac/dS
! d2g13_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g13_mc/dS2
! d2g12_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g12_mc/dS2
! d2g23_mcmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g23_mc/dS2
! d2g3_tracmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g3_trac/dS2
!
! d2g3_tracmdS2(3,3) : Segunda derivada potencial plástico g3_trac/dS2
! d2g23_mcmdS2(3,3) / : Segunda derivada potencial plástico g23_mc/dS2
! d2g13_mcmdSdq(3)   : Derivada dS y dq del potencial plástico g13_mc
! d2g12_mcmdSdq(3)   : Derivada dS y dq del potencial plástico g12_mc
! d2g23_mdSdq(3)     : Derivada dS y dq del potencial plástico g23_mc
! d2g3_tracmdSdq(3)  : Derivada dS y dq del potencial plástico g3_trac
! D_dgij            : Producto de D por dgij/dS
! D_dgij_2          : Producto de D por d2gij/dS2
! HH_dfij           : Producto de D por dfij/dS
! thetaij           : Operación dgij/dS+d2gij/dS2*xLamij*xh
! D_thetaij         : Producto de D por thetaij
! HH                : Inversa de la matriz Unity+xLamij*D_gij_2
!
Dimension Prs_E(3), Prs(3), Prs_res1(3), Prs_res2(3), Prs_res3(3), Prs_0(3)
Dimension Prs_2sup(3), Prs_3sup(3), r(3)
Dimension Props(*)
Dimension StVar0(*), StVar(*)
Dimension df13_mcmdS(3), df12_mcmdS(3), df23_mcmdS(3)
Dimension df3_tracmdS(3)
Dimension dg13_mcmdS(3), dg12_mcmdS(3), dg23_mcmdS(3)
Dimension dg3_tracmdS(3)
Dimension d2g13_mcmdS2(3,3), d2g12_mcmdS2(3,3), d2g23_mcmdS2(3,3)
Dimension d2g3_tracmdS2(3,3)
Dimension d2g13_mcmdSdq(3), d2g12_mcmdSdq(3), d2g23_mcmdSdq(3)
Dimension d2g3_tracmdSdq(3)
Dimension D_dg13_mc(3), D_dg12_mc(3), D_dg23_mc(3)
Dimension D_dg3_trac(3)
Dimension D_dg13_mc_2(3,3), D_dg12_mc_2(3,3), D_dg23_mc_2(3,3)
Dimension D_dg3_trac_2(3,3)
Dimension HH_df13_mc(3), HH_df12_mc(3), HH_df23_mc(3)
Dimension HH_df3_trac(3)
Dimension thetai3_mc(3), thetai2_mc(3), thetai3_trac(3)
Dimension D_theta13_mc(3), D_theta12_mc(3), D_theta23_mc(3)
Dimension D_theta3_trac(3)
Dimension Unity(3,3), D(3,3), HH_inv(3,3), xMat(3,3), xMat_inv(3,3),
f_b(3), d_lam(3)
Call MZeroR(Prs_res1, 3)
Call MZeroR(Prs_res2, 3)
Call MZeroR(Prs_res3, 3)
Call MZeroR(Prs_2sup, 3)
Call MZeroR(Prs_3sup, 3)
Call MZeroR(df13_mcmdS, 3)
Call MZeroR(dg13_mcmdS, 3)
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(df12_mcmdS, 3)

```



```

Call MZeroR(dg12_mcmds, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdsS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmdsSdq, 3)

Call MZeroR(df23_mcmds, 3)
Call MZeroR(dg23_mcmdsS, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdsS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcmdsSdq, 3)

Call MZeroR(df3_tracmds, 3)
Call MZeroR(dg3_tracmds, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmdsS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmdsSdq, 3)

Call MZeroR(D_dg13_mc_2, 9)
Call MZeroR(D_dg12_mc_2, 9)
Call MZeroR(D_dg23_mc_2, 9)

Call MZeroR(D_dg3_trac_2, 9)

Call MZeroR(D_dg13_mc, 3)
Call MZeroR(D_dg12_mc, 3)
Call MZeroR(D_dg23_mc, 3)

Call MZeroR(D_dg3_trac, 3)

Call MZeroR(HH_df13_mc, 3)
Call MZeroR(HH_df12_mc, 3)
Call MZeroR(HH_df23_mc, 3)

Call MZeroR(HH_df3_trac, 3)

Call MZeroR(theta13_mc, 3)
Call MZeroR(theta12_mc, 3)
Call MZeroR(theta23_mc, 3)

Call MZeroR(theta3_trac, 3)

Call MZeroR(D_theta13_mc, 3)
Call MZeroR(D_theta12_mc, 3)
Call MZeroR(D_theta23_mc, 3)

Call MZeroR(D_theta3_trac, 3)

Call MZeroR(HH, 3)
Call MZeroR(HH_inv, 3)
Call MZeroR(xMat, 9)
Call MZeroR(xMat_inv, 9)
Call MZeroR(f_b, 3)
Call MZeroR(d_lam, 3)

Call MZeroR(d_eps_p_aux, 3)

ipl = 1
it = 0
itmax = 100
ttol = 1d-12
pi = 3.1415926535d0
Rad = pi/180d0
ideb = -1 !para debugging

Call MZeroR(Unity, 9)
Unity(1,1) = 1d0
Unity(2,2) = 1d0
Unity(3,3) = 1d0

If (i_model .EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
beta = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 2) Then !EPHYSS VERSIÓN 2D V9
xks_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)

```

```

R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
beta = Props(22)
xNu_min = Props(23)
Else If (i_model .EQ. 3) Then
E50_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm = Props(4)
c = Props(5)
phi = Props(6)*Rad
psi = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa = Props(14)
xktmKc = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 4) Then
xKS_ref = Props(1)
Gs0_ap_180_H_ref = Props(2)
Gs0_ap_90_H_ref = Props(3)
gamma_07 = Props(4)
p1_ref = Props(5)
p2_ref = Props(6)
xm1 = Props(7)
xm2 = Props(8)
E50_ref = Props(9)
Eoed_ref = Props(10)
Eur_ref = Props(11)
xm = Props(12)
p_ref = Props(13)
c = Props(14)
phi = Props(15)*Rad
psi = Props(16)*Rad
xk0_nc = Props(17)
R_f = Props(18)
sigma_trac = -Props(19)
Ei_ref_inter = Props(20)
alfa = Props(21)
xktmKc = Props(22)
xNu_min = Props(23)
End If

If ((i_model .EQ. 2) .OR. (i_model .EQ. 4)) Then
w = 100d0

! IHS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
dxLam13_mc = 0d0
dxLam12_mc = 0d0
dxLam23_mc = 0d0
dxLam3_trac = 0d0
dxLam12_trac = 0d0
dxLam23_trac = 0d0

xLam13_mc = 0d0
xLam12_mc = 0d0
xLam23_mc = 0d0
xLam3_trac = 0d0
xLam12_trac = 0d0
xLam23_trac = 0d0

Select Case (IArea)
Case (1) ! 1 : Eje entre f13_mc y f3_trac
!STARTING POINT
!Cálculo el valor de f13_mc y f3_trac en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)

!Cálculo tolerancia de f13_mc y f3_trac
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f3_trac_TOL = ttol*abs(f3_trac)+ttol

!Cálculo df13_mc/dS y df3_trac/dS en Prs_E
df13_mcnds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcnds(2) = 0d0
df13_mcnds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df3_tracnds(1) = 0d0
df3_tracnds(2) = 0d0
df3_tracnds(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'df13_mcnds', df13_mcnds, 3)
Call WriVec(ideb, 'df3_tracnds', df3_tracnds, 3)

!Cálculo df13_mc/dq y df3_trac/dq en Prs_E (q1=0, q2=0)
df13_mcmdq = 0d0
df3_tracmdq = 0d0

```

```

!Cálculo h en Prs_E (dq1=0, dq2=0)
xh_mc = 0d0
xh_trac = 0d0

!Cálculo dgi3_mc/dS y dg3_trac/dS en Prs_E
dgi3_mc/dS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dgi3_mc/dS(2) = 0d0
dgi3_mc/dS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg3_trac/dS(1) = 0d0
dg3_trac/dS(2) = 0d0
dg3_trac/dS(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'dgi3_mc/dS', dgi3_mc/dS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg3_trac/dS', dg3_trac/dS, 3)

!Cálculo d2gi3_mc/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2gi3_mc/dS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_trac/dS2, 9)

!Cálculo d2gi3_mc/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2gi3_mc/dSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_trac/dSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dgi3_mc/dS, 3, 1, 3, D_dgi3_mc, 3)
Call DinProd(df13_mc/dS, D_dgi3_mc, 3, df13_mc_D_dgi3_mc)
xOmega11 = df13_mc_D_dgi3_mc-df13_mc/dq*xh_mc
Call MatMat(D, 3, dg3_trac/dS, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call DinProd(df13_mc/dS, D_dg3_trac, 3, df13_mc_D_dg3_trac)
xOmega12 = df13_mc_D_dg3_trac
Call DinProd(df3_trac/dS, D_dgi3_mc, 3, df3_trac_D_dgi3_mc)
xOmega21 = df3_trac_D_dgi3_mc
Call DinProd(df3_trac/dS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_trac)
xOmega22 = df3_trac_D_dg3_trac-df3_trac/dq*xh_trac

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc y dxLam3_trac
dxLam13_mc = (f13_mc*xOmega22-f3_trac*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)
dxLam3_trac = (f3_trac*xOmega11-f13_mc*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-
xOmega12*xOmega21)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam3_trac = dxLam3_trac

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam3_trac', dxLam3_trac)
Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam3_trac', xLam3_trac)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dgi3_mc, D_dg3_trac, -xLam13_mc, -xLam3_trac, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo valor de f13_mc y f3_trac con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f3_trac = sigma_trac - Prs(3)

!EULER BACKWARD

Do while ((abs(f13_mc).GT. f13_mc_TOL) .OR. &
(abs(f3_trac).GT. f3_trac_TOL)) .AND. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_mc/dS y df3_trac/dS en Prs
df13_mc/dS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mc/dS(2) = 0d0
df13_mc/dS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df3_trac/dS(1) = 0d0
df3_trac/dS(2) = 0d0
df3_trac/dS(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'df13_mc/dS', df13_mc/dS, 3)
Call WriVec(ideb, 'df3_trac/dS', df3_trac/dS, 3)

!Cálculo df13_mc/dq y df3_trac/dq en Prs (q1=0, q2=0)
df13_mc/dq = 0d0
df3_trac/dq = 0d0

!Cálculo h en Prs (dq=0 y dq2=0)
xh_mc = 0d0
xh_trac = 0d0

!Cálculo dgi3_mc/dS y dg3_trac/dS en Prs
dgi3_mc/dS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dgi3_mc/dS(2) = 0d0
dgi3_mc/dS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg3_trac/dS(1) = 0d0
dg3_trac/dS(2) = 0d0
dg3_trac/dS(3) = -1d0

Call WriVec(ideb, 'dgi3_mc/dS', dgi3_mc/dS, 3)
Call WriVec(ideb, 'dg3_trac/dS', dg3_trac/dS, 3)

```

```

!Cálculo d2g13_mc/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_mc_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_mc_2 + xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmdS, d2g13_mcmdSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13_mc)
Call AddVec(dg3_tracmdS, d2g3_tracmdSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3, theta3_trac)

Call MatMat(HH, 3, df13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df13_mc, 3)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_trac, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13_mc, 3, 3, 1, 3, D_theta13_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta3_trac, 3)
Call DinProd(D_theta13_mc, HH_df13_mc, 3, D_theta13_mc_HH_df13_mc)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta13_mc, HH_df3_trac, 3, D_theta13_mc_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
xOmega11 = D_theta13_mc_HH_df13_mc-df13_mcmdq*xh_mc
xOmega12 = D_theta3_trac_HH_df13_mc
xOmega21 = D_theta13_mc_HH_df3_trac
xOmega22 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_tracmdq*xh_trac

Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call AddVec(D_dg13_mc, D_dg3_trac, -xLam13_mc, -xLam3_trac, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res1, 1d0, 1d0, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs, Prs_res2, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13_mc, r, 3, r_HH_df13_mc)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
xOmegaf13_mc = f13_mc - r_HH_df13_mc
xOmegaf3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc y dxLam3_trac
dxLam13_mc = (xOmegaf13_mc*xOmega22-
xOmegaf3_trac*xOmega12)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)
dxLam3_trac = (xOmegaf3_trac*xOmega11-
xOmegaf13_mc*xOmega21)/(xOmega11*xOmega22-xOmega12*xOmega21)

xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac

Call WriVal(ideb, 'dxLam13_mc', dxLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'dxLam3_trac', dxLam3_trac)

Call WriVal(ideb, 'xLam13_mc', xLam13_mc)
Call WriVal(ideb, 'xLam3_trac', xLam3_trac)

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_mc, D_dg3_trac, -xLam13_mc, -xLam3_trac, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_2sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f13_mc en (k+1)
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)
f3_trac = sigma_trac - Prs(3)

Call WriIvl(ideb, 'it', it)

!Actualización iteración
it = it+1
End do

!Actualización variables de estado (se conserva StVar(1) del Return Mapping
sobre HS)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((!E1.EQ. num_EL) .AND. (Int.EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
xLam3_trac.GT. (-1d0)*tto1 .AND. &
it.LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (2) ! 2 : Punto f13_mc, f12_mc y f3_trac

!STARTING POINT

!Cálculo el valor de f13_mc, f12_mc y f3_trac en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)

```

```

!Cálculo tolerancia f13_mc, f12_mc y f3_trac en Prs_E
f13_mc_TOL = ttol*abs(f13_mc)+ttol
f12_mc_TOL = ttol*abs(f12_mc)+ttol
f3_trac_TOL = ttol*abs(f3_trac)+ttol

!Cálculo df13_mc/ds, df12_mc/ds y df3_trac/ds en Prs_E
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0
df13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmds(3) = 0d0

df3_tracmDS(1) = 0d0
df3_tracmDS(2) = 0d0
df3_tracmDS(3) = -1d0

!Cálculo df13_mc/dq, df12_mc/dq y df3_trac/dq en Prs_E (q1=0 -para f13_mc y
f12_mc-, q2=0)
df13_mcmdq = 0d0
df12_mcmdq = 0d0
df3_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E (dq=0 -para f13_mc y f12_mc- y dq2=0)
xh_mc = 0d0
xh_trac = 0d0

!Cálculo dg13_mc/ds, dg12_mc/ds y dg3_trac/ds en Prs_E
dg13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmds(2) = 0d0
dg13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))
dg12_mcmds(3) = 0d0

dg3_tracmDS(1) = 0d0
dg3_tracmDS(2) = 0d0
dg3_tracmDS(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g12_mc/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdsS2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmdsS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmDS2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g12_mc/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdsSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdsSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmDSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmds, 3, 3, 1, 3, D dg13_mc, 3)
Call DinProd(df13_mcmdsS, D dg13_mc, 3, df13_mc_D dg13_mc)
xOmega11 = df13_mc_D dg13_mc-df13_mcmdsq*xh_mc
Call MatMat(D, 3, dg12_mcmds, 3, 3, 1, 3, D dg12_mc, 3)
Call DinProd(df12_mcmdsS, D dg12_mc, 3, df13_mc_D dg12_mc)
xOmega12 = df13_mc_D dg12_mc
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, D dg3_trac, 3)
Call DinProd(df13_mcmdsS, D dg3_trac, 3, df13_mc_D dg3_trac)
xOmega13 = df13_mc_D dg3_trac
Call DinProd(df12_mcmdsS, D dg13_mc, 3, df12_mc_D dg13_mc)
xOmega21 = df12_mc_D dg13_mc
Call DinProd(df12_mcmdsS, D dg12_mc, 3, df12_mc_D dg12_mc)
xOmega22 = df12_mc_D dg12_mc-df12_mcmdsq*xh_mc
Call DinProd(df12_mcmdsS, D dg3_trac, 3, df12_mc_D dg3_trac)
xOmega23 = df12_mc_D dg3_trac
Call DinProd(df3_tracmDS, D dg13_mc, 3, df3_trac_D dg13_mc)
xOmega31 = df3_trac_D dg13_mc
Call DinProd(df3_tracmDS, D dg12_mc, 3, df3_trac_D dg12_mc)
xOmega32 = df3_trac_D dg12_mc
Call DinProd(df3_tracmDS, D dg3_trac, 3, df3_trac_D dg3_trac)
xOmega33 = df3_trac_D dg3_trac-df3_tracmDq*xh_trac

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc, dxLam12_mc y dxLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_mc
f_b(2) = f12_mc
f_b(3) = f3_trac

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam12_mc = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam12_mc = dxLam12_mc
xLam3_trac = dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D dg13_mc, D dg12_mc, -xLam13_mc, -xLam12_mc, 3, Prs_2sup)

```

```

Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f13_mc, f12_mc y f3_trac con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(2))*sin(phi)
f12_mc      = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

f3_trac     = sigma_trac - Prs(3)

!EULER BACKWARD
Do while (((abs(f13_mc) .GT. f13_mc_TOL) .OR. &
(abs(f12_mc) .GT. f12_mc_TOL)) .OR. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_mc/dS, df12_mc/dS y df3_trac/dS en Prs
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0
df13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df12_mcmds(3) = 0d0

df3_tracmnds(1) = 0d0
df3_tracmnds(2) = 0d0
df3_tracmnds(3) = -1d0

!Cálculo df13_mc/dq, df12_mc/dq y df3_trac/dq en Prs (q1=0 -para f13_mc y
f12_mc-, q2=0)
df13_mcmdq = 0d0
df12_mcmdq = 0d0
df3_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs (dq=0-para f13_mc y f12_mc- y dq2=0)
xh_mc      = 0d0
xh_trac    = 0d0

!Cálculo dg13_mc/dS, dg12_mc/dS y dg3_trac/dS en Prs
dg13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmds(2) = 0d0
dg13_mcmds(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg12_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))

```

```

dg12_mcmds(2) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))
dg12_mcmds(3) = 0d0

dg3_tracmnds(1) = 0d0
dg3_tracmnds(2) = 0d0
dg3_tracmnds(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_mc/dS2, d2g12_mc/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmds2, 9)
Call MZeroR(d2g12_mcmds2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmnds2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g12_mc/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdsSdq, 3)
Call MZeroR(d2g12_mcmdsSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmndsSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmds2, 3, 3, 3, 3, D_dg13_mc_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g12_mcmds2, 3, 3, 3, 3, D_dg12_mc_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmnds2, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_mc_2 + xLam12_mc*D_dg12_mc_2 +
xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmdsS, d2g13_mcmdsSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13_mc)
Call AddVec(dg12_mcmdsS, d2g12_mcmdsSdq, 1d0, xLam12_mc*xh_mc, 3, theta12_mc)
Call AddVec(dg3_tracmndsS, d2g3_tracmndsSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call MatMat(HH, 3, df13_mcmdsS, 3, 3, 1, 3, HH_df13_mc,3)
Call MatMat(HH, 3, df12_mcmdsS, 3, 3, 1, 3, HH_df12_mc,3)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmndsS, 3, 3, 1, 3, HH_df3_trac,3)
Call MatMat(D, 3, theta13_mc, 3, 3, 1, 3, D_theta13_mc,3)
Call MatMat(D, 3, theta12_mc, 3, 3, 1, 3, D_theta12_mc,3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, D_theta3_trac,3)
Call DinProd(D_theta13_mc, HH_df13_mc, 3, D_theta13_mc_HH_df13_mc)
Call DinProd(D_theta12_mc, HH_df12_mc, 3, D_theta12_mc_HH_df12_mc)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta13_mc, HH_df13_mc, 3, D_theta13_trac_HH_df13_mc)
Call DinProd(D_theta12_mc, HH_df12_mc, 3, D_theta12_trac_HH_df12_mc)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta13_mc, HH_df13_mc, 3, D_theta13_trac_HH_df13_trac)
xOmega11 = D_theta13_mc_HH_df13_mc-df13_mcmds*q*xh_mc
xOmega12 = D_theta12_mc_HH_df12_mc
xOmega21 = D_theta13_mc_HH_df12_mc
xOmega22 = D_theta12_mc_HH_df12_mc-df12_mcmds*q*xh_mc
xOmega23 = D_theta3_trac_HH_df12_mc
xOmega31 = D_theta13_mc_HH_df13_trac

```

```

xOmega32 = D_theta12_mc_HH_df3_trac
xOmega33 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_trac*dq*xh_trac
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmds, 3, 3, 1, 3, D_dg13_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, dg12_mcmds, 3, 3, 1, 3, D_dg12_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmDS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call AddVec(D_dg13_mc, D_dg12_mc, -xLam13_mc, -xLam12_mc, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_res2)
Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13_mc, r, 3, r_HH_df13_mc)
Call DinProd(HH_df12_mc, r, 3, r_HH_df12_mc)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
xOmegaf13_mc = f13_mc - r_HH_df13_mc
xOmegaf12_mc = f12_mc - r_HH_df12_mc
xOmegaf3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac

!Resolución sistema y calculo dxLam13_mc, dxLam12_mc y dxLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaf13_mc
f_b(2) = xOmegaf12_mc
f_b(3) = xOmegaf3_trac

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam12_mc = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam12_mc = xLam12_mc + dxLam12_mc
xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_mc, D_dg12_mc, -xLam13_mc, -xLam12_mc, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f13_mc, f12_mc y f3_trac en (k+1) en Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f12_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(2))
f12_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(2))*sin(phi)
f12_mc = f12_mc_fac1-f12_mc_fac2-c*cos(phi)

f3_trac = sigma_trac - Prs(3)

!Actualizo iteración
it = it+1
End do

!Actualización variables de estado (se conserva StVar(1) del Return Mapping
sobre HS)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((iE1.EQ. num_EL) .AND. (Int.EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_mc.GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. &
xLam12_mc.GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. &
xLam3_trac.GT. (-1d0)*ttoi1 .AND. &
it.LE. itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case (3) ! 3 : Punto f13_mc y f23_mc y f3_trac

!STARTING POINT

!Cálculo el valor de f13_mc, f23_mc y f3_trac en Prs_E
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)-Prs_E(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(1)+Prs_E(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs_E(2)-Prs_E(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs_E(2)+Prs_E(3))*sin(phi)
f23_mc = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

f3_trac = sigma_trac - Prs_E(3)

!Cálculo tolerancia f13_mc, f23_mc y f3_trac en Prs_E
f13_mc_TOL = ttoi1*abs(f13_mc)+ttoi1
f23_mc_TOL = ttoi1*abs(f23_mc)+ttoi1
f3_trac_TOL = ttoi1*abs(f3_trac)+ttoi1

!Cálculo df13_mc/dS, df23_mc/dS y df3_trac/dS en Prs_E
df13_mcmds(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmds(2) = 0d0

```

```

df13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))
df23_mcmdS(1) = 0d0
df23_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df23_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo df13_mc/dq, df23_mc/dq y df3_trac/dq en Prs_E (q1=0 -para f13_mc y
f23_mc-, q2=0)
df13_mcmdq = 0d0
df23_mcmdq = 0d0
df3_tracmdq = 0d0

!Cálculo h en Prs_E (dq=0 -para f13_mc y f23_mc- y dq2=0)
xh_mc = 0d0
xh_trac = 0d0

!Cálculo dg13_mc/dS, dg23_mc/dS y dg3_trac/dS en Prs_E
dg13_mcmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmdS(2) = 0d0
dg13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg23_mcmdS(1) = 0d0
dg23_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg23_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0
dg3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_mc/dS2, d2g23_mc/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g23_mc/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs_E
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

!Cálculo de los multiplicadores plásticos
Call MathMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg13_mc, 3)
Call DinProd(df13_mcmdS, D_dg13_mc, 3, df13_mc_D_dg13_mc)
xOmega11 = df13_mc_D_dg13_mc-df13_mcmdq*xh_mc
Call MathMat(D, 3, dg23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg23_mc, 3)
Call DinProd(df13_mcmdS, D_dg23_mc, 3, df13_mc_D_dg23_mc)
xOmega12 = df13_mc_D_dg23_mc
Call MathMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, D_dg3_trac, 3)
Call DinProd(df13_mcmdS, D_dg3_trac, 3, df13_mc_D_dg3_trac)
xOmega13 = df13_mc_D_dg3_trac
Call DinProd(df23_mcmdS, D_dg3_trac, 3, df23_mc_D_dg3_trac)
xOmega21 = df23_mc_D_dg13_mc
Call DinProd(df23_mcmdS, D_dg23_mc, 3, df23_mc_D_dg23_mc)
xOmega22 = df23_mc_D_dg23_mc-df23_mcmdq*xh_mc
Call DinProd(df23_mcmdS, D_dg3_trac, 3, df23_mc_D_dg3_trac)
xOmega23 = df23_mc_D_dg3_trac
Call DinProd(df3_tracmdS, D_dg13_mc, 3, df3_trac_D_dg13_mc)
xOmega31 = df3_trac_D_dg13_mc
Call DinProd(df3_tracmdS, D_dg23_mc, 3, df3_trac_D_dg23_mc)
xOmega32 = df3_trac_D_dg23_mc
Call DinProd(df3_tracmdS, D_dg3_trac, 3, df3_trac_D_dg3_trac)
xOmega33 = df3_trac_D_dg3_trac-df3_tracmdq*xh_trac

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc, dxLam23_mc y dxLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = f13_mc
f_b(2) = f23_mc
f_b(3) = f3_trac

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam23_mc = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_mc = dxLam13_mc
xLam23_mc = dxLam23_mc
xLam3_trac = dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_mc, D_dg23_mc, -xLam13_mc, -xLam23_mc, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f13_mc, f23_mc y f3_trac con la nueva Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

```



```

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(2)-Prs(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(2)+Prs(3))*sin(phi)
f23_mc      = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

f3_trac     = sigma_trac - Prs(3)

!EULER BACKWARD

Do while (((abs(f13_mc).GT. f13_mc_TOL) .OR. &
(abs(f23_mc).GT. f23_mc_TOL)) .OR. &
(it .LE. itmax))

!Cálculo df13_mc/dS, df23_mc/dS y df3_trac/dS en Prs
df13_mcmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df13_mcmdS(2) = 0d0
df13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df23_mcmdS(1) = 0d0
df23_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(phi))
df23_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(phi))

df3_tracmdS(1) = 0d0
df3_tracmdS(2) = 0d0
df3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo df13_mc/dq, df23_mc/dq y df3_trac/dq en Prs (q1=0 -para f13_mc y
f23_mc-, q2=0)
df13_mcmdq      = 0d0
df23_mcmdq      = 0d0
df3_tracmdq     = 0d0

!Cálculo h en Prs (dq=0-para f13_mc y f23_mc- y dq2=0)
xh_mc           = 0d0
xh_trac         = 0d0

!Cálculo dg13_mc/dS, dg23_mc/dS y dg3_trac/dS en Prs
dg13_mcmdS(1) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg13_mcmdS(2) = 0d0
dg13_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg23_mcmdS(1) = 0d0
dg23_mcmdS(2) = (1d0/2d0)*(1d0-sin(psi))
dg23_mcmdS(3) = -(1d0/2d0)*(1d0+sin(psi))

dg3_tracmdS(1) = 0d0
dg3_tracmdS(2) = 0d0
dg3_tracmdS(3) = -1d0

!Cálculo d2g13_mc/dS2, d2g23_mc/dS2 y d2g3_trac/dS2 en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g23_mcmdS2, 9)
Call MZeroR(d2g3_tracmdS2, 9)

!Cálculo d2g13_mc/dSdq, d2g23_mc/dSdq y d2g3_trac/dSdq en Prs
Call MZeroR(d2g13_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g23_mcmdSdq, 3)
Call MZeroR(d2g3_tracmdSdq, 3)

!Cálculo del multiplicador plástico
Call MatMat(D, 3, d2g13_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg13_mc_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g23_mcmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg23_mc_2, 3)
Call MatMat(D, 3, d2g3_tracmdS2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, D_dg3_trac_2, 3)
HH_inv = Unity + xLam13_mc*D_dg13_mc_2 + xLam23_mc*D_dg23_mc_2 +
xLam3_trac*D_dg3_trac_2
Call MatInvPiv(HH_inv, HH, 3)
Call AddVec(dg13_mcmdS, d2g13_mcmdSdq, 1d0, xLam13_mc*xh_mc, 3, theta13_mc)
Call AddVec(dg23_mcmdS, d2g23_mcmdSdq, 1d0, xLam23_mc*xh_mc, 3, theta23_mc)
Call AddVec(dg3_tracmdS, d2g3_tracmdSdq, 1d0, xLam3_trac*xh_trac, 3,
theta3_trac)
Call MatMat(HH, 3, df13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, 3, HH_df13_mc, 3)
Call MatMat(HH, 3, df23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, 3, HH_df23_mc, 3)
Call MatMat(HH, 3, df3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, 3, HH_df3_trac, 3)
Call MatMat(D, 3, theta13_mc, 3, 3, 1, 3, 3, D_theta13_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, theta23_mc, 3, 3, 1, 3, 3, D_theta23_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, theta3_trac, 3, 3, 1, 3, 3, D_theta3_trac, 3)
Call DinProd(D_theta13_mc, HH_df13_mc, 3, D_theta13_mc_HH_df13_mc)
Call DinProd(D_theta23_mc, HH_df23_mc, 3, D_theta23_mc_HH_df23_mc)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
Call DinProd(D_theta13_mc, HH_df13_mc, 3, D_theta13_mc_HH_df13_mc)
Call DinProd(D_theta23_mc, HH_df23_mc, 3, D_theta23_mc_HH_df23_mc)
Call DinProd(D_theta3_trac, HH_df3_trac, 3, D_theta3_trac_HH_df3_trac)
xOmega11 = D_theta13_mc_HH_df13_mc-df13_mcmdq*xh_mc
xOmega12 = D_theta23_mc_HH_df23_mc
xOmega13 = D_theta3_trac_HH_df3_trac
xOmega21 = D_theta13_mc_HH_df23_mc
xOmega22 = D_theta23_mc_HH_df3_trac-df23_mcmdq*xh_mc
xOmega31 = D_theta13_mc_HH_df3_trac
xOmega32 = D_theta23_mc_HH_df3_trac
xOmega33 = D_theta3_trac_HH_df3_trac-df3_tracmdq*xh_trac
Call MatMat(D, 3, dg13_mcmdS, 3, 3, 1, 3, 3, D_dg13_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, dg23_mcmdS, 3, 3, 1, 3, 3, D_dg23_mc, 3)
Call MatMat(D, 3, dg3_tracmdS, 3, 3, 1, 3, 3, D_dg3_trac, 3)
Call AddVec(D_dg13_mc, D_dg23_mc, -xLam13_mc, -xLam23_mc, 3, Prs_res1)
Call AddVec(Prs_res1, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_res2)

```

```

Call AddVec(Prs_E, Prs_res2, 1d0, 1d0, 3, Prs_res3)
Call AddVec(Prs, Prs_res3, 1d0, -1d0, 3, r)
Call DinProd(HH_df13_mc, r, 3, r_HH_df13_mc)
Call DinProd(HH_df23_mc, r, 3, r_HH_df23_mc)
Call DinProd(HH_df3_trac, r, 3, r_HH_df3_trac)
xOmegaf13_mc = f13_mc - r_HH_df13_mc
xOmegaf23_mc = f23_mc - r_HH_df23_mc
xOmegaf3_trac = f3_trac - r_HH_df3_trac

!Resolución sistema y cálculo dxLam13_mc, dxLam23_mc y dxLam3_trac
xMat(1,1) = xOmega11
xMat(1,2) = xOmega12
xMat(1,3) = xOmega13
xMat(2,1) = xOmega21
xMat(2,2) = xOmega22
xMat(2,3) = xOmega23
xMat(3,1) = xOmega31
xMat(3,2) = xOmega32
xMat(3,3) = xOmega33
f_b(1) = xOmegaf13_mc
f_b(2) = xOmegaf23_mc
f_b(3) = xOmegaf3_trac

Call MatInvPiv(xMat, xMat_inv, 3)
Call MatMat(xMat_inv, 3, f_b, 3, 1, 3, d_lam, 3)

dxLam13_mc = d_lam(1)
dxLam23_mc = d_lam(2)
dxLam3_trac = d_lam(3)

xLam13_mc = xLam13_mc + dxLam13_mc
xLam23_mc = xLam23_mc + dxLam23_mc
xLam3_trac = xLam3_trac + dxLam3_trac

!Actualización variables
Call AddVec(D_dg13_mc, D_dg23_mc, -xLam13_mc, -xLam23_mc, 3, Prs_2sup)
Call AddVec(Prs_2sup, D_dg3_trac, 1d0, -xLam3_trac, 3, Prs_3sup)
Call AddVec(Prs_E, Prs_3sup, 1d0, 1d0, 3, Prs)

!Cálculo el valor de f13_mc, f23_mc y f3_trac en (k+1) en Prs
f13_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(1)-Prs(3))
f13_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(1)+Prs(3))*sin(phi)
f13_mc      = f13_mc_fac1-f13_mc_fac2-c*cos(phi)

f23_mc_fac1 = (1d0/2d0)*(Prs(2)-Prs(3))
f23_mc_fac2 = (1d0/2d0)*(Prs(2)+Prs(3))*sin(phi)
f23_mc      = f23_mc_fac1-f23_mc_fac2-c*cos(phi)

f3_trac     = sigma_trac - Prs(3)

```

```

!Actualizo iteración
it = it+1

End do

!Actualización variables de estado (se conserva StVar(1) del Return Mapping
sobre HS)
StVar(2) = StVar0(2)

If ((!IE1.EQ. num_EL).AND.(Int.EQ. num_GAUSS)) Then
If (xLam13_mc.GT.(-1d0)*tto1.AND.&
xLam23_mc.GT.(-1d0)*tto1.AND.&
xLam3_trac.GT.(-1d0)*tto1.AND.&
it.LE.itmax) Then
write(1,*)'Return Mapping Ok!'
Else
write(1,*)'Numerical problem'
End If
End If

Case Default
write(1,*)' incorrect iArea in MC_TRAC_plast'
Stop
End Select

End ! MC_TRAC_plast

```

Subrutina Matriz6

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *MYMODEL1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

!C*****
Subroutine Matriz6(Props, Prns, D6, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

Dimension Props(*), Prns(3), D6(6,6)

Call MZeroR(D6, 36)

pi      = 3.1415926535d0
Rad     = pi/180d0

!Parámetros y variables de estado

If (i_model .EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm      = Props(4)
c       = Props(5)
phi     = Props(6)*Rad
psi     = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref  = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f    = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa   = Props(14)
beta   = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm      = Props(4)
c       = Props(5)
phi     = Props(6)*Rad
psi     = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)

p_ref  = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f    = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa   = Props(14)
beta   = Props(15)

E_ref1 = max(max(c*cos(phi)+Prns(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
Eur     = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
G       = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))

!Construcción matriz D
F1      = 2d0*G*(1d0-xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
F2      = 2d0*G*(xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
Do i=1,3
Do j=1,3
D6(i,j) = F2
End Do
D6(i,i) = F1
D6(i+3,i+3) = G
End Do

End !Matriz6

```

```

p_ref  = Props(9)
xk0_nc = Props(10)
R_f    = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa   = Props(14)
xksmkc = Props(15)
End If

```

Subrutina Matriz3

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *MYMODEL1.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

!C*****
Subroutine Matriz3(Prps, Prs, D3, i_model)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

Dimension Prps(17), Prs(3), D3(3,3)

Call MZeroR(D3, 9)

pi      = 3.1415926535d0
Rad     = pi/180d0
ideb    = 1

!Parámetros y variables de estado

If (i_model .EQ. 1) Then !HS VERSIÓN 2D V9
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm      = Props(4)
c       = Props(5)
phi     = Props(6)*Rad
psi     = Props(7)*Rad
xNu_ur = Props(8)
p_ref  = Props(9)
xK0_nc = Props(10)
R_f    = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa   = Props(14)
beta   = Props(15)
Else If (i_model .EQ. 3) Then !HS VERSIÓN 2D 2011 y posteriores
E0_ref = Props(1)
Eoed_ref = Props(2)
Eur_ref = Props(3)
xm      = Props(4)
c       = Props(5)
phi     = Props(6)*Rad
psi     = Props(7)*Rad

```

```

xNu_ur = Props(8)
p_ref  = Props(9)
xK0_nc = Props(10)
R_f    = Props(11)
sigma_trac = -Props(12)
Ei_ref_inter = Props(13)
alfa   = Props(14)
xKsmKc = Props(15)
End If

E_fac1 = max(c*cos(phi)+Prs(3)*sin(phi), 1d0), c*cos(phi))
E_fac2 = (c*cos(phi)+p_ref*sin(phi))
Eur     = Eur_ref*(E_fac1/E_fac2)**xm
G       = Eur/(2d0*(1d0+xNu_ur))

!Construcción matriz D
F1      = 2d0*G*(1d0-xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
F2      = 2d0*G*(xNu_ur)/(1d0-2d0*xNu_ur)
Do i=1,3
Do j=1,3
D3(i,j) = F2
End Do
D3(i,i) = F1
End Do

End !Matriz3

```

Subrutina *Matriz6_NL*

```

!C*****
Subroutine Matriz6_NL(D6, xKs, Gs)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

Dimension D6(6,6)

Call MZeroR(D6, 36)

!Construcción matriz D
Do i=1,3
Do j=1,3
D6(i,j) = xKs-(2d0/3d0)*Gs
End Do
D6(i,i) = xKs+(4d0/3d0)*Gs
D6(i+3,i+3) = Gs
End Do

End !Matriz6

```

Subrutina *Matriz3_NL*

```

!C*****
Subroutine Matriz3_NL(D3, xKs, Gs)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

Dimension D3(3,3)

Call MZeroR(D3, 9)

!Construcción matriz D
Do i=1,3
Do j=1,3
D3(i,j) = xKs-(2d0/3d0)*Gs
End Do
D3(i,i) = xKs+(4d0/3d0)*Gs
End Do

End !Matriz3

```

Subrutina *modul*

```
!C*****
Subroutine modul(A, B)
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

Dimension A(6)

!Rutina para el cálculo del módulo de un tensor (1x6)
!Cálculo del módulo
  A_mod = 0d0
  Do i=1,6
    A_mod = A_mod+A(i)*A(i)
  End Do
  B = A_mod**0.5d0

Return
End !End Modul
```

Subrutina *norm*

```
!C*****
Subroutine norm(A, B)
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)

Dimension A(6), B(6)

Call MZeroR(B, 6)

!Rutina para el cálculo de un tensor normal (1x6)
!Cálculo del módulo
  A_mod = 0d0
  Do i=1,6
    A_mod = A_mod+A(i)*A(i)
  End Do
  A_mod = A_mod**0.5d0

!Cálculo tensor normal
  If (A_mod .GT. 1d-10) Then
    Do i=1,6
      B(i) = A(i)/A_mod
    End Do
  Else
    Do i=1,6
      B(i) = 0d0
    End Do
  End If

Return
End !End Norm
```

Subrutina *usr_add*

[Parte del código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *USRADDF* for del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis 2D (2012)]

```

! Subroutines in this file:
! Exported:
! Subroutine GetModelCount( nMod )
! Subroutine GetModelName ( iMod , ModelName )
! Subroutine GetParamCount( iMod , nParam )
! Subroutine GetParamName ( iMod , iParam, ParamName )
! Subroutine GetParamUnit ( iMod , iParam, Units )
! Subroutine GetStateVarCount( iMod , nVar )
! Subroutine GetStateVarName ( iMod , iVar, Name )
! Subroutine GetStateVarUnit ( iMod , iVar, Unit )
! Local:
! Subroutine GetParamAndUnit( iMod , iParam, ParamName, Units )
! Subroutine GetStateVarNameAndUnit( iMod , iVar, Name, Unit )

Subroutine GetModelCount(nMod)
! Return the maximum model number (iMod) in this DLL
!
Integer (Kind=4) nMod
Dll_Export GetModelCount
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, STDCALL, REFERENTE :: GetModelCount !Plaxis 2D
2011 y posteriores versiones.
nMod = 4 ! Maximum model number (iMod) in current DLL
Return
End ! GetModelCount

Subroutine GetModelName( iMod , ModelName )
! Return the name of the different models
!
Integer iMod
Character (Len= * ) ModelName
Character (Len=255) tName
Dll_Export GetModelName
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, STDCALL, REFERENTE :: GetModelName !Plaxis 2D
2011 y posteriores versiones.
Select Case (iMod)
Case (1)
Subroutine GetParamAndUnit( iMod , iParam, ParamName, Units )
! Return the number of parameters of the different models
!
Dll_Export GetParamCount
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, STDCALL, REFERENTE :: GetParamCount !Plaxis 2D
2011 y posteriores versiones.
Select Case (iMod)
Case ( 1 )
nParam = 16
Case ( 2 )
nParam = 25
Case ( 3 )
nParam = 16
Case ( 4 )
nParam = 25
Case Default
nParam = 0
End Select
Return
End ! GetParamCount

Subroutine GetParamName( iMod , iParam, ParamName )
! Return the parameters name of the different models
!
Character (Len=255) ParamName, Units
Dll_Export GetParamName
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, STDCALL, REFERENTE :: GetParamName !Plaxis 2D
2011 y posteriores versiones.
Call GetParamAndUnit(iMod,iParam,ParamName,Units)
Return
End

Subroutine GetParamUnit( iMod , iParam, Units )

```

```

tName = 'HS 2D v9'
Case (2)
tName = 'EPHYSS 2D v9'
Case (3)
tName = 'HS 2D 2015'
Case (4)
tName = 'EPHYSS 2D 2015'
Case Default
tName = 'not in DLL'
End Select
LT = Len_Trim(tName)
ModelName= Char(Lt) // tName(1:Lt)
Return
End ! GetModelName

Subroutine GetParamCount( iMod , nParam )
! Return the number of parameters of the different models
!
Dll_Export GetParamCount
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, STDCALL, REFERENTE :: GetParamCount !Plaxis 2D
2011 y posteriores versiones.
Select Case (iMod)
Case ( 1 )
nParam = 16
Case ( 2 )
nParam = 25
Case ( 3 )
nParam = 16
Case ( 4 )
nParam = 25
Case Default
nParam = 0
End Select
Return
End ! GetParamCount

Subroutine GetParamName( iMod , iParam, ParamName )
! Return the parameters name of the different models
!
Character (Len=255) ParamName, Units
Dll_Export GetParamName
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, STDCALL, REFERENTE :: GetParamName !Plaxis 2D
2011 y posteriores versiones.
Call GetParamAndUnit(iMod,iParam,ParamName,Units)
Return
End

Subroutine GetParamUnit( iMod , iParam, Units )

```

```

! ! Return the units of the different parameters of the different models
! !
Character (Len=255) ParamName, Units
DLL_Export GetParamUnit
! IDEC& ATTRIBUTES DLLEXPOR, StdCall, Referente :: GetParamUnit !Plaxis 2D
2011 y posteriores versiones.
Call GetParamAndUnit(iMod,iParam,ParamName,Units)
Return
End

Subroutine GetParamAndUnit( iMod , iParam, ParamName, Units )
! ! Return the parameters name and units of the different models
! !
! Units: use F for force unit
! L for length unit
! T for time unit
!
Character (Len=255) ParamName, Units, tName
Select Case (iMod)
Case (1)
Select Case (iParam)
Case (1) ParamName = 'E_50#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (2) ParamName = 'F/L^2#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (3) ParamName = 'E_oed#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (4) ParamName = 'E_ur#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (5) ParamName = 'm' ; Units = '-'
Case (6) ParamName = 'c' ; Units = 'F/L^2#'
Case (7) ParamName = '@f#' ; Units = 'deg'
Case (8) ParamName = '@y#' ; Units = 'deg'
ParamName = '@n#_ur#' ; Units = '-'
Case (9) ParamName = 'p_ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (10) ParamName = 'K_0#^nc#' ; Units = '-'
Case (11) ParamName = 'R_f#' ; Units = '-'
Case (12) ParamName = '@s#_tracc#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (13) ParamName = 'E_i#^ref,inter#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (14)
ParamName = 'aIfa#' ; Units = '-'
Case (15) ParamName = 'beta#' ; Units = '-'
Case (16) ParamName = 'OCR' ; Units = '-'
Case Default ParamName = '???' ; Units = '???'
End Select
Case (2)
Select Case (iParam)
Case (1) ParamName = 'K_s,ref' ; Units = 'F/L^2#'
Case (2) ParamName = 'G_s,0#^ap,180,H,ref' ; Units = 'F/L^2#'
Case (3) ParamName = 'G_s,0#^ap,90,H,ref' ; Units = 'F/L^2#'
Case (4) ParamName = '@g_0,7#' ; Units = '-'
Case (5) ParamName = 'p_ref,1#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (6) ParamName = 'p_ref,2#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (7) ParamName = 'm_1#' ; Units = '-'
Case (8) ParamName = 'm_2#' ; Units = '-'
Case (9) ParamName = 'E_50#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (10) ParamName = 'E_oed#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (11) ParamName = 'E_ur#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (12) ParamName = 'm#' ; Units = '-'
Case (13) ParamName = 'p_ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (14) ParamName = 'c' ; Units = 'F/L^2#'
Case (15) ParamName = '@f#' ; Units = 'deg'
Case (16) ParamName = '@y#' ; Units = 'deg'
Case (17) ParamName = 'K_0#^nc#' ; Units = '-'
Case (18) ParamName = 'R_f#' ; Units = '-'
Case (19) ParamName = '@s#_tracc#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (20) ParamName = 'E_i#^ref,inter#' ; Units = 'F/L^2#'

```



```

Case (21) ParamName = 'alfa#' ; Units = '-'
Case (22) ParamName = 'beta#' ; Units = '-'
Case (23) ParamName = '@n#_min#' ; Units = '-'
Case (24) ParamName = 'OCR' ; Units = '-'
Case (25) ParamName = 'Reini_Stiff' ; Units = '-'
Case Default ParamName = '???' ; Units = '???'
End Select
Case (3) Select Case (iParam)
Case (1) ParamName = 'E_50#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (2) ParamName = 'E_oed#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (3) ParamName = 'E_ur#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (4) ParamName = 'm' ; Units = '-'
Case (5) ParamName = 'c' ; Units = 'F/L^2#'
Case (6) ParamName = '@f#' ; Units = 'deg'
Case (7) ParamName = '@y#' ; Units = 'deg'
Case (8) ParamName = '@n#_ur#' ; Units = '-'
Case (9) ParamName = 'p_ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (10) ParamName = 'K_0#^nc#' ; Units = '-'
Case (11) ParamName = 'R_f#' ; Units = '-'
Case (12) ParamName = '@s#_tracc#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (13) ParamName = 'E_i#^ref,inter#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (14) ParamName = 'alfa#' ; Units = '-'
Case (15) ParamName = 'K_t#/K_c#' ; Units = '-'
Case (16) ParamName = 'OCR' ; Units = '-'
Case Default ParamName = '???' ; Units = '???'
End Select
Case (4) Select Case (iParam)
Case (1) ParamName = 'K_s,ref' ; Units = 'F/L^2#'
Case (2) ParamName = 'G_s,0#^ap,180,H,ref' ; Units = 'F/L^2#'
Case (3) ParamName = 'G_s,0#^ap,90,H,ref' ; Units = 'F/L^2#'
Case (4) ParamName = '@g_0,7#' ; Units = '-'
Case (5) ParamName = 'p_ref,1#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (6) ParamName = 'p_ref,2#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (7) ParamName = 'm_1#' ; Units = '-'
Case (8) ParamName = 'm_2#' ; Units = '-'
Case (9) ParamName = 'E_50#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (10) ParamName = 'E_oed#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (11) ParamName = 'E_ur#^ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (12) ParamName = 'm#' ; Units = '-'
Case (13) ParamName = 'p_ref#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (14) ParamName = 'c' ; Units = 'F/L^2#'
Case (15) ParamName = '@f#' ; Units = 'deg'
Case (16) ParamName = '@y#' ; Units = 'deg'
Case (17) ParamName = 'K_0#^nc#' ; Units = '-'
Case (18) ParamName = 'R_f#' ; Units = '-'
Case (19) ParamName = '@s#_tracc#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (20) ParamName = 'E_i#^ref,inter#' ; Units = 'F/L^2#'
Case (21) ParamName = 'alfa#' ; Units = '-'
Case (22) ParamName = 'K_t#/K_c#' ; Units = '-'
Case (23) ParamName = '@n#_min#' ; Units = '-'
Case (24) ParamName = 'OCR' ; Units = '-'

```

```

Case (25)
ParamName = 'Reini_Stiff' ; Units = '-'
Case Default
ParamName = '???' ; Units = '???'
End Select
Case Default
! model not in DLL ; Units = 'N/A'
ParamName = 'N/A'
End Select
tName = ParamName
LT = Len_Trim(tName)
ParamName= Char(Lt) // tName(1:Lt)
tName = Units
LT = Len_Trim(tName)
Units = Char(Lt) // tName(1:Lt)
Return
End ! GetParamAndUnit

Subroutine GetStateVarCount( iMod , nVar )
! Return the number of state variables of the different models
!
DLL_export GetStateVarCount
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, StdCall, Referente :: GetStateVarCount !Plaxis
2D 2011 y posteriores versiones.
Select Case (iMod)
Case (1)
nVar = 2
Case (2)
nVar = 62
Case (3)
nVar = 2
Case (4)
nVar = 62
Case Default
nVar = 0
End Select
Return
End

Subroutine GetStateVarName( iMod , iVar, Name )
! Return the name of the different state variables
! of the different models
!
Character (Len=255) Name, Unit
DLL_export GetStateVarName
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, StdCall, Referente :: GetStateVarName !Plaxis
2D 2011 y posteriores versiones.
Call GetStateVarNameAndUnit( iMod , iVar, Name, Unit )
End

Subroutine GetStateVarNameAndUnit( iMod , iVar, Name, Unit )
! Return the units of the different state variables of the different models
!
Character (Len=255) Name, Unit
DLL_export GetStateVarUnit
! IDEC$ ATTRIBUTES DLLEXPORT, StdCall, Referente :: GetStateVarUnit !Plaxis
2D 2011 y posteriores versiones.
Call GetStateVarNameAndUnit( iMod , iVar, Name, Unit )
End

Subroutine GetStateVarNameAndUnit( iMod , iVar, Name, Unit )
! Return the name and unit of the different state variables of the different
models
!
Character (Len=255) Name, Unit, tName
Select Case (iMod)
Case (1)
Name = 'gamma_p' ; Unit = '-'
Case (1)
Name = 'p_p' ; Unit = 'F/L^2#'
Case Default
Name= 'N/A' ; Unit = '?'
End Select
Case (2)
Select Case (iVar)
Case (1)
Name = 'gamma_p' ; Unit = '-'
Case (2)
Name = 'p_p' ; Unit = 'F/L^2#'
Case (3)
Name = 'Gs0_ap,alfa,H' ; Unit = 'F/L^2#'
!Tensor h
Case (4)
Name = 'xh_T(1)' ; Unit = '-'
Case (5)
Name = 'xh_T(2)' ; Unit = '-'
Case (6)
Name = 'xh_T(3)' ; Unit = '-'
Case (7)
Name = 'xh_T(4)' ; Unit = '-'
Case (8)
Name = 'xh_T(5)' ; Unit = '-'
Case (9)

```



```

Case (54)
Name = 'Gs,ap,ref,(un/re)load'
; Unit = 'F/L^2#'
Case (55)
Name = 'Gt,ap,ref,(un/re)load'
; Unit = 'F/L^2#'
!Variables Gs_ap_ref y Gt_ap_ref régimen elastoplástico
Case (56)
Name = 'Gs,ap,ref,load'
; Unit = 'F/L^2#'
Case (57)
Name = 'Gt,ap,ref,load'
; Unit = 'F/L^2#'
Case (58)
Name = 'gamma_oct_H'
; Unit = '-'
Case (59)
Name = 'gamma_oct_DR'
; Unit = '-'
Case (60)
Name = 'hTnorm:depsdevnorm'
; Unit = '-'
Case (61)
Name = 'cos_alfa_rev'
; Unit = '-'
Case (62)
Name = 'Gm'
; Unit = '-'
Case Default
Name='N/A'
End Select
Case (3)
Select Case (iVar)
Case (1)
Name = 'gamma_p'
; Unit = '-'
Case (2)
Name = 'p_p'
; Unit = 'F/L^2#'
Case Default
Name='N/A'
End Select
Case (4)
Select Case (iVar)
Case (1)
Name = 'gamma_p'
; Unit = '-'
Case (2)
Name = 'p_p'
; Unit = 'F/L^2#'
Case (3)
Name = 'Gs0_ap,alfa,H'
!Tensor h
Case (4)
Name = 'xh_T(1)'
; Unit = '-'
Case (5)
Name = 'xh_T(2)'
; Unit = '-'
Case (6)
Name = 'xh_T(3)'
; Unit = '-'
Case (7)
Name = 'xh_T(4)'
; Unit = '-'
Case (8)
Name = 'xh_T(5)'
; Unit = '-'
Case (9)
Name = 'xh_T(6)'
!Tensor eps
Case (10)
Name = 'eps(1)'
; Unit = '-'
Case (11)
Name = 'eps(2)'
; Unit = '-'
Case (12)
Name = 'eps(3)'
; Unit = '-'
Case (13)
Name = 'eps(4)'
; Unit = '-'
Case (14)
Name = 'eps(5)'
; Unit = '-'
Case (15)
Name = 'eps(6)'
; Unit = '-'
!Tensor eps_e
Case (16)
Name = 'eps_e(1)'
; Unit = '-'
Case (17)
Name = 'eps_e(2)'
; Unit = '-'
Case (18)
Name = 'eps_e(3)'
; Unit = '-'
Case (19)
Name = 'eps_e(4)'
; Unit = '-'
Case (20)
Name = 'eps_e(5)'
; Unit = '-'
Case (21)
Name = 'eps_e(6)'
; Unit = '-'
!Tensor eps_R_dev
Case (22)
Name = 'eps_R,dev(1)'
; Unit = '-'
Case (23)
Name = 'eps_R,dev(2)'
; Unit = '-'
Case (24)
Name = 'eps_R,dev(3)'
; Unit = '-'
Case (25)
Name = 'eps_R,dev(4)'
; Unit = '-'
Case (26)
Name = 'eps_R,dev(5)'
; Unit = '-'
Case (27)
Name = 'eps_R,dev(6)'
; Unit = '-'
!Tensor eps_e_R
Case (28)
Name = 'eps_e,R,dev(1)'
; Unit = '-'
Case (29)
Name = 'eps_e,R,dev(2)'
; Unit = '-'
Case (30)
Name = 'eps_e,R,dev(3)'
; Unit = '-'
Case (31)
Name = 'eps_e,R,dev(4)'
; Unit = '-'

```

```

Case (32)
Name = 'eps_e,R,dev(5)'
; Unit = '-.'
Case (33)
Name = 'eps_e,R,dev(6)'
; Unit = '-.'
!Variable H (M=6)
Case (34)
Name = 'xH_M(1)'
; Unit = '-.'
Case (35)
Name = 'xH_M(2)'
; Unit = '-.'
Case (36)
Name = 'xH_M(3)'
; Unit = '-.'
Case (37)
Name = 'xH_M(4)'
; Unit = '-.'
Case (38)
Name = 'xH_M(5)'
; Unit = '-.'
Case (39)
Name = 'xH_M(6)'
; Unit = '-.'
!Variable E (M=6)
Case (40)
Name = 'xE_M(1)'
; Unit = '-.'
Case (41)
Name = 'xE_M(2)'
; Unit = '-.'
Case (42)
Name = 'xE_M(3)'
; Unit = '-.'
Case (43)
Name = 'xE_M(4)'
; Unit = '-.'
Case (44)
Name = 'xE_M(5)'
; Unit = '-.'
Case (45)
Name = 'xE_M(6)'
; Unit = '-.'
!Variable E_e (M=6)
Case (46)
Name = 'xE_e,M(1)'
; Unit = '-.'
Case (47)
Name = 'xE_e,M(2)'
; Unit = '-.'
Case (48)
Name = 'xE_e,M(3)'
; Unit = '-.'
Case (49)
Name = 'xE_e,M(4)'
; Unit = '-.'
Case (50)
Name = 'xE_e,M(5)'
; Unit = '-.'
Case (51)
Name = 'xE_e,M(6)'
; Unit = '-.'
!Variable Gmin
Case (52)
Name = 'Gmin'
; Unit = 'F/L^2#'
!Variable Gs_ap_ref - Gt_ap_ref aplicada
Case (53)
Name = 'Gs,ap,ref - Gt,ap,ref'
; Unit = 'F/L^2#'
!Variables Gs_ap_ref y Gt_ap_ref régimen elástico
Case (54)
Name = 'Gs,ap,ref,(un/re)load'
; Unit = 'F/L^2#'
Case (55)
Name = 'Gt,ap,ref,(un/re)load'
; Unit = 'F/L^2#'
!Variables Gs_ap_ref y Gt_ap_ref régimen elastoplástico
Case (56)
Name = 'Gs,ap,ref,load'
; Unit = 'F/L^2#'
Case (57)
Name = 'Gt,ap,ref,load'
; Unit = 'F/L^2#'
Case (58)
Name = 'gamma_oct_H'
; Unit = '-.'
Case (59)
Name = 'gamma_oct_DR'
; Unit = '-.'
Case (60)
Name = 'hTnorm:depsdevnorm'
; Unit = '-.'
Case (61)
Name = 'cos_alfa_rev'
; Unit = '-.'
Case (62)
Name = 'Gm'
; Unit = '-.'
Case Default
Name='N/A'
End Select
Case Default
Name='N/A'
End Select
tName = Name
LT = Len_Trim(tName)
Name = Char(Lt) // tName(1:Lt)
tName = Unit
LT = Len_Trim(tName)
Unit = Char(Lt) // tName(1:Lt)
Return
End

```

Subrutina *usrlib*

[El código de esta subrutina se basa en el código contenido en el fichero *USRLIB.for* del archivo *udsm_examples_2012.zip* que se puede encontrar en Plaxis (2012)]

```

Subroutine MZEROR(R,K)
!C
!C*****
!C Function: To make a real array R with dimension K to zero
!C
!C*****
!C Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!C Dimension R(*)

Do J=1,K
R(J)=0.0D0
End Do

Return
End

Subroutine MZEROI(I,K)
!C
!C*****
!C Function: To make an integre array I with Dimension K to zero
!C
!C*****
!C Dimension I(*)

Do J=1,K
I(J)=0
End Do

Return
End

Subroutine SETVAL(R,K,V)
!C
!C*****
!C Function: To fill a real array R with Dimension K with value V
!C
!C*****

Subroutine SETVAL(I,K,IV)
!C
!C*****
!C Function: To fill an integer array I with Dimension K with value IV
!C
!C*****

!C Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!C Dimension I(*)

Do J=1,K
I(J)=IV
End Do

Return
End

Subroutine COPYVEC(I1,I2,K)
!C
!C*****
!C Function: To copy an integer array I1 with Dimension K to I2
!C
!C*****

!C Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!C Dimension I1(*),I2(*)

Do J=1,K
I2(J)=I1(J)
End Do

Return
End

Subroutine COPYRVEC(R1,R2,K)
!C
!C*****
!C Function: To copy a real array R1 with Dimension K to R2
!C
!C*****

```

```

!C*****
!C      Function: To copy a Double array R1 with Dimension K to R2
!C
!C*****
!C      Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!C      Dimension R1(*),R2(*)
!C
Do J=1,K
R2(J)=R1(J)
End Do
Return
End

Logical Function IS0ARR(A,N)
!C*****
!C      Function : To check whether a real array contains only zero values.
!C      When an array contains only zero's is might not need to be
!C      written to the XXX file.
!C      exit Function when first non-zero value occurred or when
!C      all elements are checked and are zero.
!C
!C      Input: A : array to be checked
!C      N : number of elements in array that should be checked
!C
!C      Output : .TRUE. when all elements are 0
!C      .FALSE. when at least one element is not zero
!C
!C      Called by : Subroutine TOBXX
!C*****
!C      Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
!C      Dimension IARR(*)
!C
IS0IARR=.False.
Do I=1,N
If ( IARR(I) .Ne. 0 ) Return
End Do
IS0IARR=.True.
Return
End
Subroutine MulVec(V,F,K)
!C*****
!C      Function: To multiply a real vector V with dimension K by F
!C
!C*****
!C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
!C      DIMENSION V(*)
!C
Do J=1,K
V(J)=F*V(J)
End Do
Return
End
!C      i Subroutine MulVec
!C*****
Subroutine MatVec(xMat,IM,Vec,N,VecR)
!C*****
!C      Calculate VecR = xMat*Vec
!C
!C      xMat : (Square) Matrix (IM,*)
!C      Vec : Vector
!C      N : Number of rows/columns
!C      VecR : Resulting vector
!C*****
!C*****
!C      Function : To check whether a integer array contains only zero values.
!C      Similar to IS0ARR
!C*****

```

```

Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension xMat(IM,*),Vec(*),VecR(*)
!C*****
Do I=1,N
X=0
Do J=1,N
X=X+xMat(I,J)*Vec(J)
End Do
VecR(I)=X
End Do
Return
End ! Subroutine MatVec
!C*****
Subroutine AddVec(Vec1,Vec2,R1,R2,N,VecR)
!C*****
!C Calculate VecR( ) = R1*Vec1()+R2*Vec2( )
!C
!C I Vec1,
!C I Vec2 : Vectors
!C I R1,R2 : Multipliers
!C I N : Number of rows
!C O VecR : Resulting vector
!C
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension Vec1(*),Vec2(*),VecR(*)
!C*****
Do I=1,N
X=R1*Vec1(I)+R2*Vec2(I)
VecR(I)=X
End Do
Return
End ! Subroutine AddVec
!C
!C*****
Subroutine DinProd(A,B,N,RES)
!C*****
!C Returns the Inproduct of two vectors
!C
!C I A,B : Two vectors
!C I N : Used length of vectors
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension A(*),B(*)
!C*****
X = 0

```

```

Do I=1,N
X = X + A(I)*B(I)
End Do
RES = X
Return
End ! Function DinProd
!C*****
Subroutine MatMat(xMat1,Id1,xMat2,Id2,nR1,nC2,nC1,xMatR,IdR)
!C*****
!C Calculate xMatR = xMat1*xMat2
!C
!C I xMat1 : Matrix (Id1,*)
!C I xMat2 : Matrix (Id2,*)
!C I nR1 : Number of rows in resulting matrix (= No rows in xMat1)
!C I nC2 : Number of columns in resulting matrix (= No cols in xMat2)
!C I nC1 : Number of columns in matrix xMat1
!C = Number rows in matrix xMat2
!C O xMatR : Resulting matrix (IdR,*)
!C
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension xMat1(Id1,*),xMat2(Id2,*),xMatR(IdR,*)
!C*****
Do I=1,nR1
Do J=1,nC2
X=0
Do K=1,nC1
X=X+xMat1(I,K)*xMat2(K,J)
End Do
xMatR(I,J)=X
End Do
End Do
Return
End ! Subroutine MatMat
!C*****
Subroutine MatMatSq(n, xMat1, xMat2, xMatR)
!C*****
!C Calculate xMatR = xMat1*xMat2 for square matrices, size n
!C
!C I n : Dimension of matrices
!C I xMat1 : Matrix (n,*)
!C I xMat2 : Matrix (n,*)
!C O xMatR : Resulting matrix (n,*)
!C
!C*****

```



```

!C*****
Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
Dimension xMat1(n,*),xMat2(n,*),xMatR(n,*)
!C*****

Do I=1,n
Do J=1,n
X=0
Do K=1,n
X=X+xMat1(I,K)*xMat2(K,J)
End Do
xMatR(I,J)=X
End Do
End Do

Return
End ! Subroutine MatMatSq

!C*****
Subroutine WriVal ( io, C, V )
!C*****
!C Write (Double) value to file unit io (when io>0)
!C
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
Character C*(*)
!C*****
If (io.Le.0) Return
Write(io,*) C,V
! Format( A,3x, 1x,1p,e12.5)
Return
End
Subroutine WriIV1 ( io, C, I )
!C*****
!C Write (integer) value to file unit io (when io>0)
!C
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
Character C*(*)
!C*****
If (io.Le.0) Return
Write(io,*) C,I
! Format( A,3x, 1x,16)
Return
End

!C*****
Subroutine WriIVc ( io, C, iv, n )
!C*****
!C Write (integer) vector to file unit io (when io>0)
!C
!C*****
Character C*(*)
Dimension iv(*)
!C*****
If (io.Le.0) Return
Write(io,*) C
Write(io,1) (iv(i),i=1,n)
! Format( ( 2(3x,5i4) ) )
Return
End
Subroutine WriVec ( io, C, V, n )
!C*****
!C Write (Double) vector to file unit io (when io>0)
!C
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
Character C*(*)
Dimension V(*)
!C*****
If (io.Le.0) Return
If (Len_Trim(C).Le.6) Then
Write(io,2) C,( V(i),i=1,n)
Else
Write(io,*) C
Write(io,1) ( V(i),i=1,n)
End If
! Format( ( 2(1x, 3(1x,1p,e10.3) ) ) )
! Format( A, ( T7, 2(1x, 3(1x,1p,e10.3) ) ) )
Return
End
Subroutine WriVec5( io, C, V, n )
!C*****
!C Write (Double) vector to file unit io (when io>0)
!C
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
Character C*(*)
!C*****
If (io.Le.0) Return
Write(io,*) C,I
! Format( A,3x, 1x,16)
Return
End

```

```

Dimension V(*)
If (io.Le.0) Return
Write(io,*) C
Write(io,1) ( V(i),i=1,n)
1 Format( 5(1x,1p,e12.5) )
Return
End
!C*****
Subroutine WriMat ( io, C, V, nd, nr, nc )
!C*****
!C
!C Write (Double) matrix to file unit io (when io>0)
!C 6 values per line
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Character C*(*)
Dimension V(nd,*)

If (io.Le.0) Return

Write(io,*) C
Do j=1,nr
Write(io,1) j, ( V(j,i),i=1,nc)
End Do
1 Format(14, ( T7,2(1x, 3(1x,1p,e10.3) ) ) )
Return
End
!C*****
Subroutine MatInvPiv(Aorig,B,N)
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension Aorig(n,*), B(n,*),A(:,:)
Allocate :: A
Allocate ( A(n,n) ) ! No error checking !!
Call CopyRVec(Aorig, A, n*n )
Call MZeroR(B,n*n)
Do i=1,n
B(i,i) = 1d0
End Do
Do I=1,n
T=A(I,I)
iPiv=i
Do j=i+1,n
If ( Abs(A(j,i) .Gt. Abs(A(iPiv,i)) ) iPiv=j
End Do
If (iPiv.Ne.i) Then
Do j=1,n
x = A( i ,j)
A( i ,j) = A(iPiv,j)
A(iPiv,j) = x
B( i ,j) = B( i ,j)
B(iPiv,j) = x
End Do
T=A(I,I)
End If
Do J=1,n
A(I,J)=A(I,J)/T
B(I,J)=B(I,J)/T
End Do
Do K=1,n
If (K.Ne.I) Then
T=A(K,I)
Do J=1,n
A(K,J)=A(K,J)-T*A(I,J)
B(K,J)=B(K,J)-T*B(I,J)
End Do
End If
End Do
DeAllocate ( A )
Return
End ! MatinvPiv
!C*****
Subroutine PmSig(IOpt,S,xN1,xN2,xN3,S1,S2,S3,P,Q)
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension S(*),xN1(*),xN2(*),xN3(*)
If (iOpt.Eq.1) Then
Call Eig_3(0,S,xN1,xN2,xN3,S1,S2,S3,P,Q) ! with Eigenvectors
Else
Call Eig_3a(0,S,S1,S2,S3,P,Q) ! no Eigenvectors
End If
Return
End
!C*****
Subroutine Eig_3(iOpt,St,xN1,xN2,xN3,S1,S2,S3,P,Q)
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension St(6),A(3,3),V(3,3), &
xN1(3),xN2(3),xN3(3)
!
! Get Eigenvalues/Eigenvectors for 3*3 matrix
! Wim Bomhof 15/11/'01
! PGB : adaption to Principal stress calculation
!
! Applied on principal stresses, directions
! Stress vector St(): XX, YY, ZZ, XY, YZ, ZX

```

```

!
A(1,1) = St(1) ! xx
A(1,2) = St(4) ! xy = yx
A(1,3) = St(6) ! zx = xz

A(2,1) = St(4) ! xy = yx
A(2,2) = St(2) ! yy
A(2,3) = St(5) ! zy = yz

A(3,1) = St(6) ! zx = xz
A(3,2) = St(5) ! zy = yz
A(3,3) = St(3) ! zz

! Set V to unity matrix
V(1,1) = 1
V(2,1) = 0
V(3,1) = 0

V(1,2) = 0
V(2,2) = 1
V(3,2) = 0

V(1,3) = 0
V(2,3) = 0
V(3,3) = 1

abs_max_s=0d0
Do i=1,3
Do j=1,3
if (abs(a(i,j)) .Gt. abs_max_s) abs_max_s=abs(a(i,j))
End Do
End Do
To1 = 1d-20 * abs_max_s
it = 0
itmax = 50
Do While ( it.Lt.itMax .And. &
abs(a(1,2))+abs(a(2,3))+abs(a(1,3)) .Gt. To1 )
it=it+1
Do k=1,3
If (k .Eq. 1) Then
ip=1
iq=2
Else If (k .Eq.2) Then
ip=2
iq=3
Else
ip=1
iq=3
End If
Q = Sqrt( ( (S1-S2)**2d0 + (S2-S3)**2d0 + (S3-S1)**2d0 ) / 2d0 )
! principal values on diagonal of a
S1 = a(1,1)
S2 = a(2,2)
S3 = a(3,3)
! Derived invariants
P = (S1+S2+S3)/3d0
Q = Sqrt( ( (S1-S2)**2d0 + (S2-S3)**2d0 + (S3-S1)**2d0 ) / 2d0 )

If (a(ip,iq) .Ne. 0.0) Then
tau=(a(iq,iq)-a(ip,ip))/(2.0d0*a(ip,iq))
If (tau .Ge. 0.0d0) Then
sign_tau=1.0d0
Else
sign_tau=-1.0d0
End If
t=sign_tau/(abs(tau)+sqrt(1.0d0+tau*tau))
c=1.0d0/sqrt(1.0d0+t*t)
s=t*c
a1p=c*a(1,ip)-s*a(1,iq)
a2p=c*a(2,ip)-s*a(2,iq)
a3p=c*a(3,ip)-s*a(3,iq)
a(1,iq)=s*a(1,ip)+c*a(1,iq)
a(2,iq)=s*a(2,ip)+c*a(2,iq)
a(3,iq)=s*a(3,ip)+c*a(3,iq)
a(1,ip)=a1p
a(2,ip)=a2p
a(3,ip)=a3p

v1p=c*v(1,ip)-s*v(1,iq)
v2p=c*v(2,ip)-s*v(2,iq)
v3p=c*v(3,ip)-s*v(3,iq)
v(1,iq)=s*v(1,ip)+c*v(1,iq)
v(2,iq)=s*v(2,ip)+c*v(2,iq)
v(3,iq)=s*v(3,ip)+c*v(3,iq)
v(1,ip)=v1p
v(2,ip)=v2p
v(3,ip)=v3p

ap1=c*a(ip,1)-s*a(iq,1)
ap2=c*a(ip,2)-s*a(iq,2)
ap3=c*a(ip,3)-s*a(iq,3)
a(iq,1)=s*a(ip,1)+c*a(iq,1)
a(iq,2)=s*a(ip,2)+c*a(iq,2)
a(iq,3)=s*a(ip,3)+c*a(iq,3)
a(ip,1)=ap1
a(ip,2)=ap2
a(ip,3)=ap3
End If ! a(ip,iq)<>0
End Do ! k
End Do ! While
! principal values on diagonal of a
S1 = a(1,1)
S2 = a(2,2)
S3 = a(3,3)
! Derived invariants
P = (S1+S2+S3)/3d0
Q = Sqrt( ( (S1-S2)**2d0 + (S2-S3)**2d0 + (S3-S1)**2d0 ) / 2d0 )

```

```

! Sort eigenvalues S1 <= S2 <= S3
is1 = 1
is2 = 2
is3 = 3
if (s1.Gt.s2) Then
t = s2
s2 = s1
s1 = t
it = is2
is2 = is1
is1 = it
End If
if (s2.Gt.s3) Then
t = s3
s3 = s2
s2 = t
it = is3
is3 = is2
is2 = it
End If
if (s1.Gt.s2) Then
t = s2
s2 = s1
s1 = t
it = is2
is2 = is1
is1 = it
End If
Do i=1,3
xN1(i) = v(i,is1) ! first column
xN2(i) = v(i,is2) ! second column
xN3(i) = v(i,is3) ! third column
End Do
Return
End ! Eig_3

Subroutine Eig_3a(iOpt,St,S1,S2,S3,P,Q) ! xN1,xN2,xN3,
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension St(6),A(3,3) ! V(3,3),xN1(3),xN2(3),xN3(3)
!
! Get Eigenvalues ( no Eigenvectors) for 3*3 matrix
! Wim Bomhof 15/11/01
!
! Applied on principal stresses, directions
! Stress vector XX, YY, ZZ, XY, YZ, ZX
!
A(1,1) = St(1) ! xx
A(1,2) = St(4) ! xy = yx
A(1,3) = St(6) ! zx = xz

```

```

A(2,1) = St(4) ! xy = yx
A(2,2) = St(2) ! yy
A(2,3) = St(5) ! zy = yz

A(3,1) = St(6) ! zx = xz
A(3,2) = St(5) ! zy = yz
A(3,3) = St(3) ! zz

abs_max_s=0.0d0
Do i=1,3
Do j=1,3
if (abs(a(i,j)) .Gt. abs_max_s) abs_max_s=abs(a(i,j))
End Do
End Do
To1 = 1d-20 * abs_max_s
If (iOpt.Eq.1) To1 = 1d-50*abs_max_s
it=0
itmax = 50
Do While ( it.Lt.itmax .And.&
abs(a(1,2))+abs(a(2,3))+abs(a(1,3)) .Gt. To1 )
it=it+1
Do k=1,3
If (k .Eq. 1) Then
ip=1
iq=2
Else If (k .Eq.2) Then
ip=2
iq=3
Else
ip=1
iq=3
End If
If (a(ip,iq) .Ne. 0.0d0) Then
tau=(a(iq,iq)-a(ip,ip))/(2.0d0*a(ip,iq))
If (tau .Ge. 0.0d0) Then
sign_tau=1.0d0
Else
sign_tau=-1.0d0
End If
t=sign_tau/(abs(tau)+sqrt(1.0d0+tau*tau))
c=1.0d0/sqrt(1.0d0+t*t)
s=t*c
aip=c*a(1,ip)-s*a(1,iq)
a2p=c*a(2,ip)-s*a(2,iq)
a3p=c*a(3,ip)-s*a(3,iq)
a(1,iq)=s*a(1,ip)+c*a(1,iq)
a(2,iq)=s*a(2,ip)+c*a(2,iq)
a(3,iq)=s*a(3,ip)+c*a(3,iq)
a(1,ip)=aip

```

```

a(2,ip)=a2p
a(3,ip)=a3p

ap1=c*a(ip,1)-s*a(ip,1)
ap2=c*a(ip,2)-s*a(ip,2)
ap3=c*a(ip,3)-s*a(ip,3)
a(ip,1)=s*a(ip,1)+c*a(ip,1)
a(ip,2)=s*a(ip,2)+c*a(ip,2)
a(ip,3)=s*a(ip,3)+c*a(ip,3)
a(ip,1)=ap1
a(ip,2)=ap2
a(ip,3)=ap3
End If ! a(ip,ip)<>0
End Do ! k
End Do ! While
! principal values on diagonal of a
S1 = a(1,1)
S2 = a(2,2)
S3 = a(3,3)
! Derived invariants
P = (S1+S2+S3)/3d0
Q = Sqrt( ( S1-S2)**2d0 + (S2-S3)**2d0 + (S3-S1)**2d0 ) / 2d0 )

If (s1.Gt.s2) Then
t = s2
s2 = s1
s1 = t
End If
If (s2.Gt.s3) Then
t = s3
s3 = s2
s2 = t
End If
If (s1.Gt.s2) Then
t = s2
s2 = s1
s1 = t
End If
Return
End ! Eig_3a

!C
!C*****
!C Logical Function LEqual(A,B,Eps)
!C*****
!C Returns .TRUE. when two real values are (almost) equal,
!C .FALSE. otherwise
!C
!C I A,B : Two real values to be compared

!C I Eps : Toleration (Magnitude ~ = 1E-5)
!C*****
!C Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
!C*****
LEqual =.True.
If (A .Eq. B) Return
If (Dabs(A-B) .Lt. 0.5D0*Eps*( Dabs(A) + Dabs(B) + Eps ) )Return
LEqual =.False.
Return
End ! function LEqual
!C
!C*****
!C Subroutine CrossProd(xN1,xN2,xN3)
!C*****
!C Returns cross product of xN1 and xN2
!C
!C I xN1,xN2 : Two basic vectors
!C O xN3 : Resulting vector
!C*****
!C Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
!C Dimension xN1(*),xN2(*),xN3(*)
!C*****
xN3(1) = xN1(2)*xN2(3) - xN1(3)*xN2(2)
xN3(2) = xN1(3)*xN2(1) - xN1(1)*xN2(3)
xN3(3) = xN1(1)*xN2(2) - xN1(2)*xN2(1)
Return
End ! Subroutine CrossProd
!C
!C*****
!C Double Precision Function ArcSin(X,ie)
!C*****
!C Returns the Arc Sine of X
!C
!C I X : Input value
!C
!C Note : In stead of using default routine DASIN we use this one
!C because 'X' can be slightly beyond 1 and this will give
!C a RTE using DASIN(X)
!C
!C*****
!C Implicit Double Precision (A-H,0-Z)
!C*****
!C Ie=0
S = (1-X*X)
! If (S .Lt. -1E-10) Ie=1
! If (S .Lt. -1E-10) Write(*,1) X,S
! If (S .Lt. -1E-10) Write(2,1) X,S

```

```

1 Format(' ArcSin(',1x,1p,e13.5e3,'), S = ',1x,1p,e13.5e3)
If (S.LT.0) S = 0
S = DSQRT(S)
ArcSin = DATan2(X,S)
Return
End ! function ArcSin
!C*****
Subroutine CarSig(S1,S2,S3,xN1,xN2,xN3,SNew)
!C*****
!C Returns the Cartesian stresses using the principal stresses S1..S3
!C and the principal directions
!C I S1..S3 : Principal stresses
!C I xN1..xN3 : Principal directions (xNi for Si)
!C
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension xN1(*),xN2(*),xN3(*),SNew(*)
Dimension SM(3,3),T(3,3),TT(3,3),STT(3,3)
!C*****
!C
!C**** Fill transformation (rotation) matrix
!C
Do I=1,3
T(I,1) = xN1(I)
T(I,2) = xN2(I)
T(I,3) = xN3(I)
TT(1,I) = T(I,1)
TT(2,I) = T(I,2)
TT(3,I) = T(I,3)
End Do
! Call MatTranspose(T,3,TT,3,3,3)

Call MZeroR(SM,9)
SM(1,1) = S1
SM(2,2) = S2
SM(3,3) = S3
!C
!C**** SMnew = T*SM*TT
!C
Call MatMat(SM,3, TT,3,3,3,3,STT,3)
Call MatMat(T,3,STT,3,3,3,3,SM,3)
! Call MatMatSq(3,SM,TT,STT) ! STT = SM*TT
! Call MatMatSq(3, T,STT,SM) ! SM = T*STT
!C
!C**** Extract cartesian stress vector from stress matrix
!C
Do I=1,3
SNew(I) = SM(I,I)
End Do
SNew(4) = SM(2,1)
SNew(5) = SM(3,2)
SNew(6) = SM(3,1)

Return
End ! Subroutine CarSig
!C*****
Subroutine setvecLen(xn,n,x1)
!C*****
Implicit Double Precision (A-H,O-Z)
Dimension xn(*)
x=0
do i=1,n
x=x+xn(i)**2
end do
if (x.Ne.0) Then
f=x1/sqrt(x)
do i=1,3
xn(i)=xn(i)*f
end do
end if
return
end ! setvecLen
!C*****
!C End Of file
!C*****

```

Anejo IV

Paper 1 previous note

Small strains in soil constitutive modeling. State of the art.

1. Introduction

The determination of soil failure mechanisms has profoundly conditioned the evolution of Geotechnics, as far as constitutive modeling is concerned, until the 70s of the 20th century, focusing the main investigations in the development of the well-known soil plasticity theory. Regarding the calculation of soil deformations, the use of linear elasticity up to that moment was very widespread and gave place to very inaccurate predictions of soil displacements. Since then, several circumstances have motivated the development of new theoretical frameworks and constitutive models that have tried to explain soil behavior in the range of small strains, characterized by being nonlinear reversible, hysteretic and dependent on recent history. The objective of these models is to predict, more reliably, the movements of the soil generated by different actions that take place in it, which is especially important in urban areas.

As in the early age of other sciences, a harm that Geotechnics has suffered is the appearance of numerous constitutive models whose scope of application is very limited. The constitutive models that try to reproduce soil behavior in the range of small strains have not been an exception, and exist very different typologies with a greater or lesser level of compatibility with plastic models, which are fundamental to build advanced soil models. However, such advanced models usually result from a level of conceptual complexity, computational needs and parametric requirements that entail complex experimental tests, whose use has been limited to an academic field and, sometimes, to the resolution of very specific problems. Other habitual handicap in Geotechnics is the obscurantism of numerical codes, mainly of advanced models implemented in commercial software.

This note reviews the state of the art of soil behavior in the range of small strains and its constitutive modeling. For this, fundamental aspects of this behavior are detailed, describing the factors on which nonlinear volumetric and shear stiffness depend, and the constitutive elements that characterize the hysteretic soil behavior and its dependence on recent history, establishing, based on them, specific classification criteria. Likewise, concepts of soil constitutive modeling are deeply explored and a powerful general method for model classification based on the concept of tensorial zones is used, together with the aforementioned classification criteria, to classify the main constitutive soil models that consider its behavior in the range of small strains. Fundamental formulation of these models is provided, as well as their scope of application, advantages and disadvantages.

Improvements in computing power allow to implement theoretical aspects in soil constitutive models whose consideration was not viable a few years ago. In this sense, the *Elastoplastic Hysteretic Small Strain* model (EPHYSS) is introduced and some of its advantages are shown.

2. Kinematic nature of soil stiffness

According to Clayton (2011), the stiffness of a body, understood as its resistance to deformation under applied force, depends on its shape, its boundary conditions and the stiffness of its constitutive materials.

From the experiments carried out by Hardin and Drnevich (1972), Simpson et al. (1979), Jardine (1985) and Smith et al. (1992), Jardine (1992) developed the idea previously stated by Skinner (1975) and supported by a large number of researchers, to explain soil stiffness behavior depending on the range of stress and strain to which it is subjected, within the framework of the theories of KYS and plasticity. Jardine (1992) differentiated four zones around any point in stress space, which move and change shape according to the stress trajectories followed. In each of these zones, Jardine identified a characteristic behavior of the soil, which was related to the nature of the strains that take place in them (Figure 1).

- Zone I: Externally limited by Y_1 (Figure 1a), soil behavior in this area is linear reversible (Hardin and Blandford, 1989; Burland, 1989; Jardine, 1992; Vucetic, 1994; Shibuya and Mitachi, 1994; Jamiolkowski et al., 1995; Shibuya et al., 1996; Clayton and Heymann, 2001; Santagata et al., 2005). Some researchers, such as Clayton (2011), indicate that a purely linear elastic behavior does not occur in any range of deformations, although it is a sufficient approximation from a practical point of view. Likewise, Hueckel and Nova (1979) affirm that irreversible deformations occur in all noval loading processes. Zone I of Jardine can be very small (Tatsuoka et al., 1990; Bressani, 1990; Smith, 1992), especially in uncemented and normally consolidated soils (Bowden and Tabor, 1964; Johnson, 1985).
- Zone II: Internally limited by Y_1 and externally by Y_2 (Figure 1a), soil behavior in this zone is nonlinear reversible, hysteretic and dependent on recent history (Simpson et al., 1979; Hueckel and Nova, 1979; Jardine, 1985, 1992, 1995; Richardson, 1988; Burland, 1989; Atkinson et al., 1990; Simpson, 1992; Vucetic, 1994; Atkinson, 2000; Clayton and Heymann, 2001; Viggiani, 2005; Gasparre et al., 2007).
- Zone III: Internally limited by Y_2 and externally by Y_3 (Figure 1a), soil behavior in this zone shows a first degree of irreversibility (plastic deformations), which depends on the OCR (Jardine, 1992; Mitchell and Soga, 2005). As can be seen in Figure 1b, if $OCR > 1$, plastic strains in this zone tend to increase linearly with the strain, while if $OCR = 1$, they tend to do it in a nonlinear way.
- Zone IV: Internally limited by Y_3 (Figure 1a), soil behavior in this area shows a high degree of irreversibility (Jardine, 1992; Mitchell and Soga, 2005). The plastic strains in this zone always increase in a nonlinear way with the strain (Figure 1b).

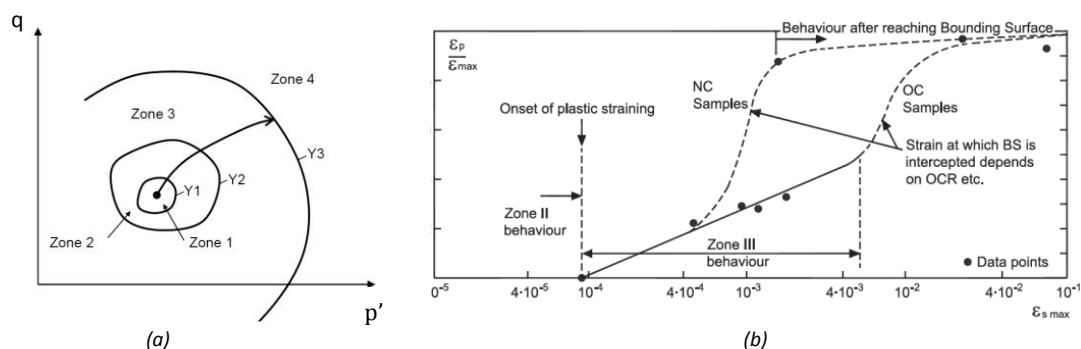


Figure 1. (a) Zones 1-4 (I-IV) in the stress space. (b) Axial plastic strains (ϵ_p) normalized by the maximum axial total strain (ϵ_{max}) vs. total shear strain (elastic and plastic) ($\epsilon_{s,max}$). Jardine (1992).

3. The range of small strains in engineering practice

As indicated by Clayton (2011), the application of soil mechanics to the new problems faced by civil engineers at the beginning of the 20th century focused on the prevention of collapse, which seems logical given the background of the 19th century, in which only a few engineers used to analyze their designs before starting their construction because of the lack of information in which to base them (Bell, 1989). This conception changed in the 70s (Clayton, 2011) due, among other reasons, to: (1) a good knowledge of most soil failure mechanisms, (2) the need to build new structures in consolidated urban areas and calculate the displacements induced by them in the soil, in order to know the effect that

such displacements could have on nearby elements and act accordingly, (3) the need to build especially sensitive structures, such as nuclear plants and (4) the advances in numerical analysis tools and in computing power (Zienkiewicz et al., 1968; Simpson, 1981; Britto and Gunn, 1987; Potts, 2003). As Jardine et al. (1991) indicate, in those same years, it was observed how the soil stiffness obtained in conventional laboratory tests did not coincide with the stiffness obtained in field tests, being usual that the latter were an order of magnitude higher than the former. Furthermore, the stiffness obtained in the field were close to those obtained in dynamic tests, which later allowed unifying the theories that tried to explain, until that moment, the value of the soil shear modulus. These facts casted doubt on the usefulness of conventional tests to assess soil stiffness (Cole and Burland, 1972; St. John, 1975; Burland et al., 1979; Simpson et al., 1979; Clayton et al., 1991). Subsequently, it was shown that these differences came, among others, from deficiencies in strain measurement techniques in conventional laboratory tests and from the alteration of the samples during their extraction process (Jardine et al., 1984). In this context, Burland (1989) showed how, during the subsequent years, measures of soil displacements in various London works, new instrumentation techniques in laboratory tests and advances in numerical analysis techniques, helped to improve the understanding of soil behavior in the range of small strains, in which stiffness plays a fundamental role. In most civil works, only a small part of the soil is subjected to intermediate or large strains, while most of it is subjected to small or very small strains, being the extent of these last masses of soil so large, that its contribution to soil displacements is usually significant. These findings promoted the development of new instrumentation techniques for field and laboratory tests, which Elhakim (2005), Clayton (2011) and Cudny (2013) classify as follows:

- Dynamic field tests:
 - Cross-hole (e.g.: Hoar and Stokoe, 1978).
 - Down-hole (e.g.: Woods, 1978; Campanella et al., 1994; Clayton and Heyman, 1999).
 - Spectral Analysis of Surface Wave SASW (e.g.: Rix and Leipski, 1991; Stokoe et al., 1994).
 - Continuous Surface Wave System CSWS (e.g.: Matthews et al., 1996).
 - Suspension logger (e.g.: Nigbor e Imai, 1994).
 - Seismic cone CPTU (e.g.: Robertson et al., 1986).
 - Seismic dilatometer SDMT (e.g.: Hepton, 1988).
- Laboratory tests:
 - Resonant column (e.g.: Hardin and Drnevich, 1972).
 - Hollow cylinder (e.g.: Teachavorasinskun et al., 1991; Jamiolkowski et al., 1995).
 - *Bender elements* and compression and shear seismic wave measuring devices (e.g.: Shirley, 1978; Shirley and Hampton, 1978):
 - In edometers (e.g.: Yun and Santamarina, 2005; Schultheiss, 1981; Dyvik and Olsen, 1989; Thomann and Hryciw, 1990; Jamiolkowski et al., 1995).
 - In direct simple shear apparatus (e.g.: Dyvik and Olsen, 1989).
 - In triaxial apparatus (e.g.: Schultheiss, 1981; Bates, 1989; Wichtmann, 2005).
 - In resonant column apparatus (e.g.: Bennell et al., 1984; Dyvik and Madshus, 1985; Ferreira et al., 2006).
 - In double simple shear apparatus (e.g.: Lanzo et al., 1997).
 - In unconfined samples, immediately after their extraction (e.g.: Hight et al., 2003; Landon et al., 2007).
 - Triaxial devices with internal strain measurements (e.g.: Jardine et al., 1984; Clayton and Heymann, 2001).

Jardine et al. (1986) showed that considering the nonlinear soil behavior has a clear effect on soil-structure interaction, as well as on the distribution of stresses and soil displacements. On the other hand, Mair and Taylor (1993) showed that considering elastic nonlinearity in the range of small strains in elastoplastic models markedly improved the approximation of the water pressures generated in the soil with respect to those obtained with models that considered linear elasticity.

There are numerous advanced constitutive models capable of simulating soil behavior in the whole strain range (Zones I, II, III and IV of Jardine, 1992), which is essential for a complete analysis of geotechnical problems, although the use of many of them is reduced to an academic purpose. According to Tamagnini and Viggiani (2002), this is due to: (1) its complex formalism, (2) the use of a large number of parameters which are difficult to obtain experimentally, (3) the use

of a large number of state variables which are difficult to initialize and (4) the difficulties associated with the formulation of precise, efficient and robust algorithms for the numerical implementation of equations (although there have been significant advances in recent years in relation to this point). However, some of these advanced models have managed to extend to the professional practice. Among them, outstands the well-known Hardening soil model with Small Strain Stiffness (HS-SS), implemented in Plaxis and based on the Hardening Soil Small model (HS-S) of Benz (2007), recently implemented in other numerical software, which in turn is based on the Small Strain Overlay Model (SSOM) of Benz (2007) and on the Hardening Soil (HS) model of Schanz (1998) and Schanz et al. (1999). The widespread use of the HS-SS model is possibly due to its conceptual clarity and to the fact that it relies on the well-known HS plastic model, also implemented in Plaxis and used in geotechnical engineering practice. Despite its great advantages, some aspects of the HS-SS model could be improved, and some inconsistencies whose effects can have a considerable influence on the numerical simulations of boundary value problems, as these are cumulative, should be corrected. *Figures 2 to 4* show the need to consider soil behavior in the range of small strains in different geotechnical problems.

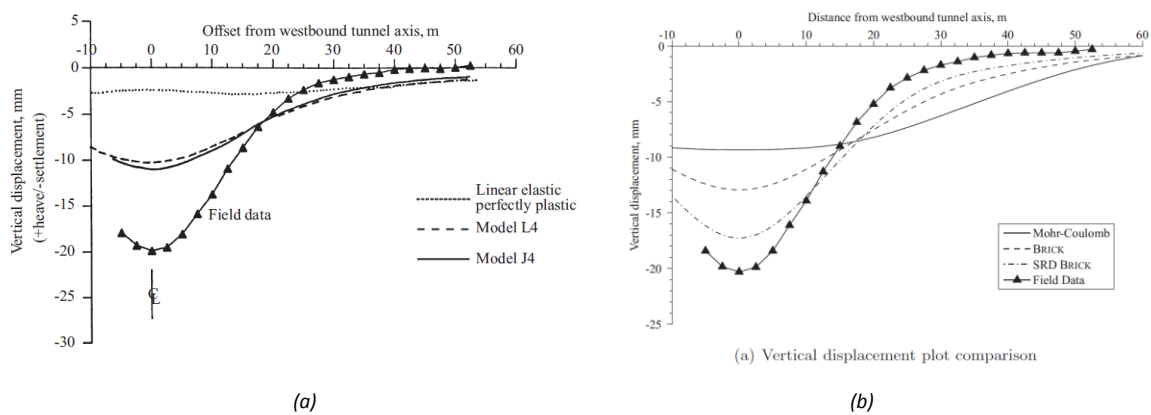


Figure 2. Surface settlements during the construction of the St James's Park tunnel in London. (a) Numerical simulations with a linear elastic model with perfect plasticity and two nonlinear isotropic models, L4 (the stiffness degradation curve follows a trigonometric function and forces shear and bulk moduli reduction together if there is only shear or only volumetric strain) and J4 (the stiffness degradation curve follows a logarithmic function and allows only shear stiffness reduction on shear straining with no volumetric strain and bulk stiffness reduction on volumetric straining with no shear strain) (Addenbrooke et al., 1997). (b) Numerical simulations with a linear elastic model with perfect plasticity and two nonlinear models, Brick and SRD-Brick (Clarke, 2009).

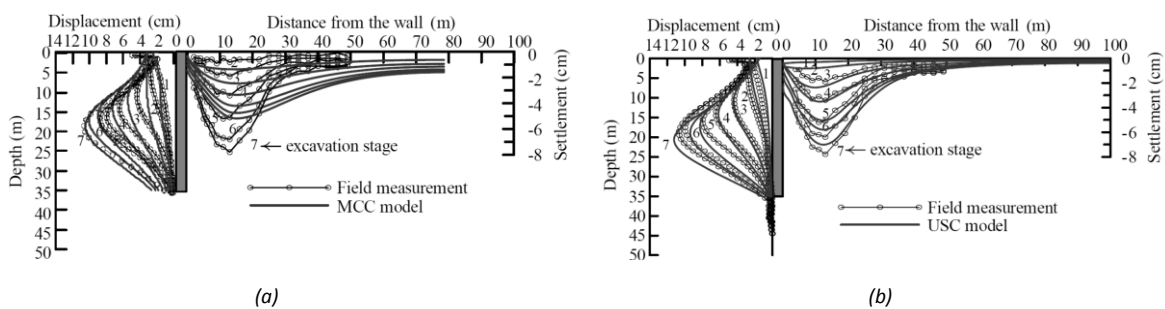


Figure 3. Displacements in the soil during an excavation between diaphragm walls in the Taipei Enterprise Center (TNEC) (Aswin et al., 2010). (a) Numerical simulations with the MCC model of. (b) Numerical simulations with the USC model.

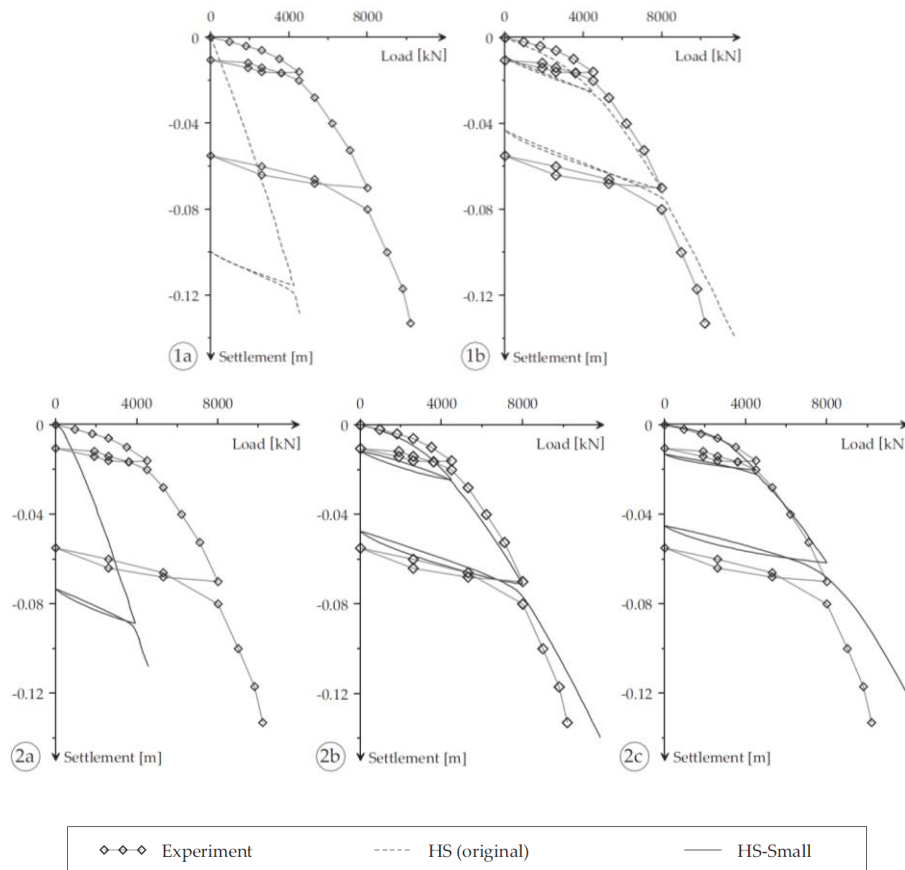


Figure 4. Load-displacement curve under an experimental spread footing of 3x3m on sand, conducted by the Texas A&M University National Geotechnical Experimentation Site (NGES) (Benz, 2007). Above: HS model (1a: OCR = 1. 1b: OCR > 1). Bottom: HS-S[MC] (2a: OCR = 1. 2b: OCR > 1. 2c: OCR > 1 and increased maximum shear stiffness).

4. Micromechanical considerations

As Benz (2007) points out, the mechanical soil behavior must be explained by the interaction of the different phases that compose it and the internal and external actions on it. However, soil stiffness in the range of small strains can be explained, sufficiently and qualitatively, from an exclusively micromechanical point of view. Assuming as an approximation that soil stiffness in the range of small strains depends solely on the contact forces between grains or soil aggregations (Israelachvili, 1992), Benz explains that it can only vary with changes in such forces. Considering a frictional law between particles of the Coulomb type, Benz explains the influence of the amplitude of deformation on the stiffness as follows:

1. Initially there are N contacts between the soil particles in a representative volume V . The global stiffness tensor can be calculated as $E_{ijkl} = (1/V) \sum_{c=1}^N l_i^c k_{jl}^c l_k^c$.
2. The value of the amplitude of the deviatoric strain that keeps most grains in contact is that corresponding to Zone I of Jardine (1992), where soil behavior is considered linear reversible.
3. A greater value of the amplitude of deviatoric strain causes the sliding of a certain number of grains, which, with the assumed frictional law, causes the value of the stiffness tensors k_{jl}^c to be reduced, generating, in turn, a reduction in the value of the global stiffness tensor E_{ijkl} . This behavior can be associated with the Zone II of Jardine (1992), where the macromechanical soil behavior is nonlinear, hysteretic and dependent on recent history. However, as Cudny (2013) indicates, the micromechanical mechanism through which the soil dissipates energy during loading cycles, which is a fundamental aspect of its hysteretic behavior, is not clear.
4. A reversal in the strain would take the state of the grains to the previous situation, recovering the initial value of the tensors k_{jl}^c and, therefore, also that of E_{ijkl} .

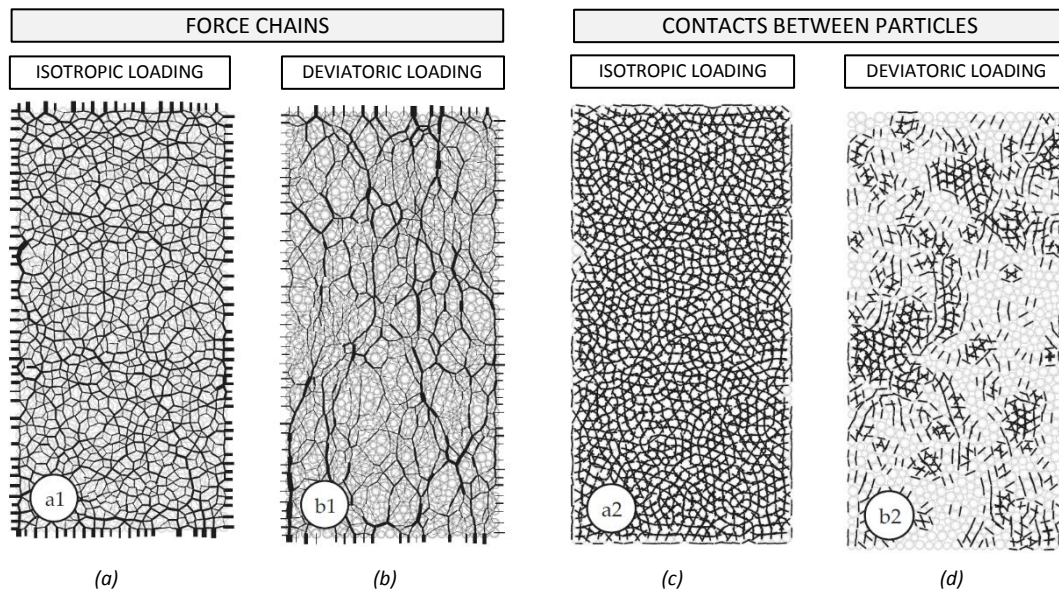


Figure 5. 2D test with DEM (Benz, 2007). (a) Homogeneous distribution of forces in direction and magnitude during an isotropic loading. (b) Preferential distribution of forces with contact chain formation during a deviatoric loading. (c) Practically unaltered contacts during an isotropic loading. (d) Numerous broken contacts during a deviatoric loading.

Based on the above considerations, Benz explains the effect of an isotropic loading state and a deviatoric loading state on soil stiffness (Figure 5). To do this, Benz uses a 2D DEM numerical simulation. In this simulation it is assumed, on the one hand, that soil particles are stiff and unbreakable, and on the other hand, a law of the Hertz-Mindlin type for contacts between particles. Furthermore, the simulation considers a small bond between particles whose objective is to allow analyzing the evolution of the contacts. In Figures 5a and 5b, the contact forces between particles are represented with lines of thickness proportional to the force and with direction according to it, and in Figures 5c and 5d, the unaltered contacts between particles are represented with small black lines that are oriented tangentially to the contacts. As can be seen, after the isotropic consolidation phase (Figure 5a), a variation in the deviatoric loading (Figure 5b) generates chains of preferential forces and significantly alters the number of contacts (Figure 5d), that is, it modifies the soil fabric, which results in a stiffness reduction. On the other hand, a variation in the isotropic loading generates a scaling effect on the contact forces (Figure 5a) and keeps the number of contacts in the assembly practically unchanged (Figure 5c).

According to Tobita (1997), any type of soil micromechanical behavior (slide, rotation, deformation or breakage of the particles or aggregates) give place to a nonlinear incremental type of macromechanical behavior, therefore, any constitutive model that considers the soil as a continuous medium should be able to reproduce this behavior. Otherwise, according to Gudehus (2011), the necessary state variables χ^{hist} , which allow describing soil behavior when reversals take place, represent the spatial fluctuation of the chains of internal forces between soil particles (Figures 5a and 5b), effect which Gudehus denominate force-roughness.

5. Inherent anisotropy and induced anisotropy

A material presents anisotropy when its mechanical properties change according to the orientation. Most natural soils present anisotropy due to their formation processes. As Minh (2006) indicates, the influence of anisotropy on soil behavior began to gain importance from the 1970s (Bjerrum, 1973; Arthur et al., 1980; Saada and Townsend, 1981; Jamiolkowski et al., 1985) and since then multiple investigations on soil anisotropy based on experimental tests have been published (Saada and Puccini, 1987; Saada, 1988; Saada et al., 1993; Jardine et al., 1997; Tatsuoka et al., 1997; Jardine et al., 2001; Leroueil and Hight, 2003; Jardine et al., 2004). Cole and Burland (1972) demonstrated that soil anisotropy significantly affects its stiffness.

Following the definition of Casagrande and Carrillo (1944), two components are often distinguished in the anisotropy of a material at small-scale: inherent anisotropy and induced anisotropy. Casagrande and Carrillo explain that inherent anisotropy can be considered as a property of the soil, while induced anisotropy is due exclusively to strain arising from recent and current applied stress.

According to Jovicic and Coop (1998) the inherent anisotropy depends on the current soil structure and fabric. Some of the factors that control inherent anisotropy in granular soils are the shape and size of the grains, the vertical variation of grain-size distribution and the environmental actions. In cohesive soils, conversely, the most common sources of inherent anisotropy are the physicochemical processes with a geological or biological origin that take place during and after deposition, such as aging, cementations, etc. Likewise, Jovicic and Coop (1998) consider two components of induced anisotropy: (1) strain-induced anisotropy, which depends solely on the current state of stress and is independent of soil history and (2) stress-induced anisotropy, which depends on the stress and historical strains of the soil. Stress-induced anisotropy appears when a load is applied on the soil and this depends exclusively on the current stress state. After the application of this load, the grains or aggregations form, immediately, an anisotropic fabric, even if initially the soil was isotropic. As the applied load change in magnitude or direction, new contacts are generated, and deformations accumulated. Changes in contacts between grains modify the chains of preferential internal forces between particles (Oda, 1972; Drescher and De Josselin De Jong, 1972). On the other hand, strain-induced anisotropy includes the effect of recent soil history. This type of anisotropy can be found in oedometric deformation processes (such as sedimentation). One result of these processes is that plastic yield surfaces tend to align with the consolidation line K_0 in the stress space (Leroueil and Hight, 2003).

It is common to find inherent and induced anisotropy in most soils, although it is often complex to separate the influence of each of them on the test results. Several discrepancies in numerical simulations regarding experimental results come precisely from the fact of not considering the effects of anisotropy. Piriyaikul (2006) demonstrates the need to consider inherent and induced anisotropy in the range of small strains.

6. Soil behavior in the range of small strains

6.1. Previous considerations

Jardine (1992) identifies soil behavior in the range of small strains with Zones I and II. Cudny (2013) points out that Zone I usually corresponds to strains of less than 10^{-6} in sands and 10^{-5} in clays, while Zone II does so with strains within the interval 10^{-6} to 10^{-3} . On the other hand, the range of intermediate and large strains is identified with Zones III and IV defined by Jardine. These zones usually correspond to strains greater than 10^{-3} .

6.1.1. Zone I of Jardine (1992)

Soil behavior in Zone I can be approximated by a linear elastic model. Poulos (1972), Simpson (1992), Simpson et al. (1996), Addenbrooke et al. (1997), Zwanenburg (2005) and Kung et al. (2007) point out the importance of considering soil anisotropy when elastic models are used. Nevertheless, the difficulty to obtain the parameters associated with anisotropic models leads, on multiple occasions, to use isotropic linear elastic models. These models allow characterizing soil behavior through two parameters that are usually taken between K' , G , E' and ν' . The total and incremental constitutive equations of an isotropic linear elastic model are the following:

$$\boldsymbol{\sigma}' = 3K'\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + 2G\mathbf{e}^e \quad (01)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 3K'\dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + 2G\dot{\mathbf{e}}^e \quad (02)$$

The elastic stiffness moduli in the range of strains characteristic of Zone I correspond to the dynamic elastic stiffness type: $G = G_0$ and $K' = K'_0$. These can be calculated from the soil density ρ_{soil} and the speed at which the shear waves S (v_s) and compression waves P (v_p) are transmitted through it, according to the following expressions:

$$G_0 = \rho_{soil} v_s^2 \quad (03)$$

$$K'_0 = \rho_{soil} \left(v_p^2 - \frac{4}{3} v_s^2 \right) \quad (04)$$

6.1.2. Zone II of Jardine (1992)

To approximate soil behavior in Zone II, it is necessary to use nonlinear hysteretic models that consider the effect of recent history on its stiffness. A common way to simulate this nonlinearity is by using nonlinear elastic stiffness moduli. Such moduli depend exclusively on the elastic strain ϵ^e or, equivalently, on the effective stress σ' :

$$K'_s = K'_s(\epsilon^e) \quad G_s = G_s(\epsilon^e) \quad (05)$$

$$K'_t = K'_t(\epsilon^e) \quad G_t = G_t(\epsilon^e) \quad (06)$$

However, the experimental measurement of soil stiffness is normally conducted in tests in which it is subjected to noval loading processes. During such processes, it is usual to obtain stiffness values lower than those obtained during unloading or reloading processes. According to Hueckel and Nova (1979), this is due to the fact that irreversible strains occur in every process of noval loading. Based on this, it is possible to define the concept of apparent stiffness moduli of the soil, which, unlike those of the expressions (05) and (06), are calculated using the total strain or the increase of total strain and not the elastic ones.

According to Gudehus (2011), when it comes to reproducing the hysteretic soil behavior, the state of a RSE is not sufficiently characterized by the void ratio e and the stress tensor σ' . In these cases, it is necessary to define hidden state variables χ^{hist} that cannot be observed macroscopically. It is also possible to attribute to these variables the nonlinearity and the soil behavior dependence on its recent history. The variables χ^{hist} represent the spatial fluctuation of the chains of internal forces between soil particles, an effect that Gudehus calls force-roughness. According to Gudehus, soil behavior after a reversal and before a subsequent monotonous strain trajectory suggests a gradual adaptation of its internal state (characterized by the mentioned hidden state variables) until it depends exclusively on the stress tensor and the void ratio, state in which proportional strain trajectories lead to proportional stress trajectories, which means that it is inside the SOM region (Gudehus et al., 1977). Gudehus (2011) states that it is for this last reason that the influence of the internal state of the soil on its behavior can only be revealed during small strains after reversals. Furthermore, according to Gudehus (2011), the state variables χ^{hist} , within the set of state variables χ , are, in general, of two types: α (back stress) normally in elastoplastic or viscoelastoplastic models (these models tend to underestimate the hysteretic effects of the soil) and δ (internal strain) normally in hypoplastic or viscohypoplastic models (these models tend to overestimate the hysteretic effects of the soil). Although α and δ can be formally treated as strains and stresses respectively, they cannot be interpreted physically as such.

The apparent stiffness moduli, in each tensor zone in which they are defined, usually depend on the total strain ϵ , the effective stress σ' and the state variables χ^{hist} :

$$K_s'^{ap} = K_s'^{ap}(\epsilon, \sigma', \chi^{hist}) \quad G_s^{ap} = G_s^{ap}(\epsilon, \sigma', \chi^{hist}) \quad (07)$$

$$K_t'^{ap} = K_t'^{ap}(\epsilon, \sigma', \chi^{hist}) \quad G_t^{ap} = G_t^{ap}(\epsilon, \sigma', \chi^{hist}) \quad (08)$$

From a numerical point of view, using the apparent stiffness moduli instead of the elastic ones within an elastoplastic model significantly simplifies the calculation algorithms (Figure 6), although such use in elastoplastic models can lead to theoretical inconsistencies.

Based on the concept of tensor zone (Darve, 1978; Darve and Labanieh, 1982), Darve (1990) establishes a criterion of classification of constitutive models for simple and homogeneous materials, under the hypothesis of small strains. In turn, the tensor zones can be bijectively related to the apparent stiffness of the soil and, therefore, to the aforementioned apparent stiffness moduli. In this way, for each tensor zone Z a value of $K_Z'^{ap}$ and G_Z^{ap} will be obtained. Table 1 summarizes these correspondences.

Incrementally linear models are capable of reproducing the nonlinearity of the soil in Zone II, although they cannot reproduce the hysteretic behavior or the stiffness dependence on recent history. Among them are the elastic models of Cauchy, the pseudoelastic models, the hyperelastic models or the hypoelastic models *stricto sensu*.

The incrementally multilinear models do allow reproducing the nonlinear, hysteretic and dependent on recent history soil behavior, characteristic of Zone II. Among them, the simplest are the hysteretic models, such as paraelastic and the here called "quasi-hypoelastic". Other incrementally multilinear models are the ones here called "advanced models", capable of reproducing soil behavior in the entire range of deformations (Zones I, II, III and IV). Among the advanced models, there are some elastoplastic models that use the structure of quasi-hypoelastic hysteretic models to describe the

elastic soil behavior, as well as multisurfaces models, brick models, bounding surface plasticity models, bubble models or multilaminated models.

Finally, the incrementally nonlinear models are capable of reproducing soil behavior in the entire range of deformations (Zones I, II, III and IV). Among them are the hypoplastic models or some hybrid models, such as those that combine hypoplasticity with paelasticity.

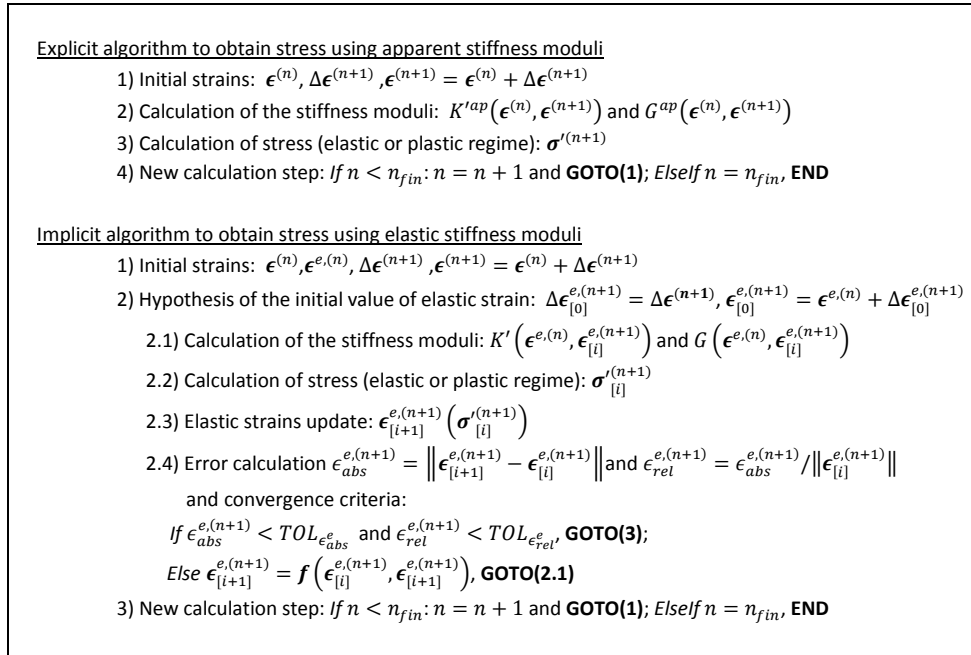


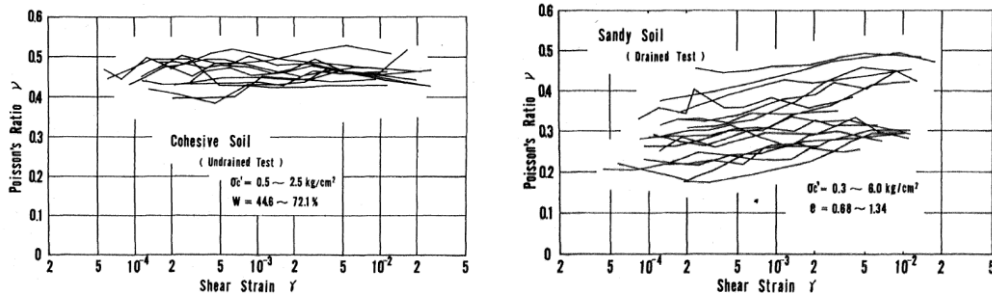
Figure 6. Algorithms for obtaining the value of stress.

Type of model	Number of tensor zones associated to \mathbf{G} (#Z)	Amount of values of K_i^{ap} and G_i^{ap}
Incrementally linear models	#Z = 1	$i = 1$
Incrementally multilinear models	$1 < \#Z < \infty$	$1 < i < \infty$
Incrementally nonlinear models	#Z $\rightarrow \infty$	$i \rightarrow \infty$

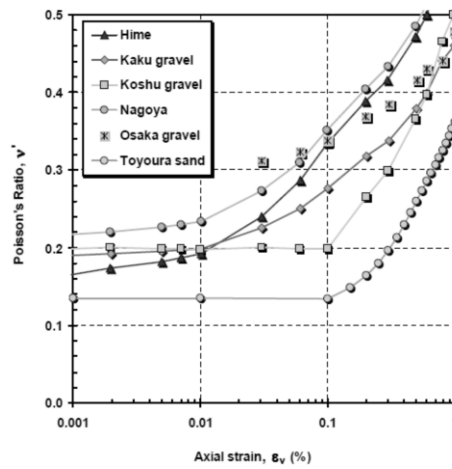
Table 1. Tensor zones and amount of values of K^{ap} and G^{ap} for incrementally linear, multilinear and nonlinear models.

In any model that uses elastic theory, it should be considered what is pointed out by Zytynski et al. (1978) regarding to the choice of elastic moduli. They showed that considering constant values of drained Poisson’s ratio in a model to avoid negative values implies that this will not be conservative and the generation of energy in closed loading cycles will take place. In fact, several incrementally multilinear models that consider soil behavior in the range of small strains, such as those of Papadimitriou et al. (2001), Wongsaroj (2005), SSOM and HS-S of Benz (2007) or HS-SS of Plaxis, use as elastic parameters the shear modulus G and a constant value of the drained Poisson’s ratio. Based on these parameters, such models internally calculate the value of drained volumetric modulus K' (expression 09 left). Other incremental multilinear models that consider soil behavior in the range of small strains, such as those of Whittle (1987), Al-Tabbaa and Wood (1989), Yu (1995), Gryczmanski et al. (1998) or Gryczmanski and Uliniarz (2008), use the drained volumetric modulus K' and a constant value of the drained Poisson’s ratio as elastic parameters. Based on these parameters, such models internally calculate the value of the shear modulus G (expression 09 right).

$$K' = \frac{2G(1 + v'_{cte})}{3(1 - 2v'_{cte})} = cte \cdot G \qquad G = \frac{3K'(1 - 2v'_{cte})}{2(1 + v'_{cte})} = cte \cdot K' \qquad (09)$$



(a)



(b)

Figure 7. (a) Variation of v' or v_u with γ_{oct} in cohesive and sandy soils (Yokota and Konno, 1980).
(b) Variation of v' with ϵ_{oct} in different sandy soils (Lehane and Cosgrove, 2000).

From the previous expressions it follows that the fact of adopting a constant value of drained Poisson's ratio implies the proportionality $K' \propto G$, which generally does not respond to experimental observations in the range of small strains. The expression of Poisson's ratio according to the moduli of K' and G is given in the expression (10), as well as the elastic thermodynamic limitations and the condition $v' > 0$ that must be complied in all soils, based on the experimental observations. On the other hand, in the expression (11), \dot{v}' is deduced from the expression (10).

$$0 < v' = \frac{3K' - 2G}{2(3K' + G)} < 0,50 \qquad (10)$$

$$\dot{v}' = \frac{9 G \dot{K}' - K' \dot{G}}{2(3K' + G)^2} \qquad (11)$$

Experimentally, it is observed how, in the range of small strains, the drained volumetric modulus K' does tend to stiffen with the volumetric deformation (Figures 8, 9 and 10), while the shear modulus G tends to degrade with the octahedral shear strain (Figures 11 and 12). Considering on the one hand $G = G(\gamma_{oct})$, with $\dot{G}\dot{\gamma}_{oct} < 0$ (degradation of G with γ_{oct}), and on the other hand $K'(\epsilon_{oct})$, with $\dot{K}'\dot{\epsilon}_{oct} > 0$ (stiffening of K' with ϵ_{oct}), leads to values $\dot{v}' > 0$ if $\dot{G} < 0$ and $\dot{K}' > 0$, and values $\dot{v}' < 0$ if $\dot{G} > 0$ and $\dot{K}' < 0$. In fact, this variation in the values of v' is that observed in Figure 7 and the one predicted in the expression (11). For $\dot{v}' = 0$ ($v' = v'_{cte}$), according to the expression (11), $\dot{K}'/K' = \dot{G}/G$ must be complied, that is $K' = (K'_0/G_0)G = cte \cdot G$, which is equivalent to the expressions (09).

6.2. Considerations about stiffness

6.2.1. Volumetric stiffness modulus

In relation to the drained volumetric stiffness modulus, it is not usual to distinguish between values at small, intermediate or large strains, unlike what happens with the shear stiffness modulus. Duncan et al. (1980) proposed the expression (12) to calculate the apparent volumetric secant modulus (*Figure 8*). This expression is used in the hyperbolic quasi-hypoelastic hysteretic model of Duncan and Chang (1970).

$$K_s^{iap} = K_b p_a \left(\frac{\sigma_3'}{p_a} \right)^m \quad (12)$$

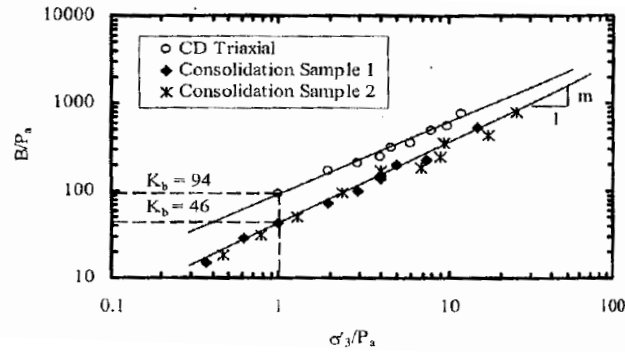


Figure 8. Dependence of the apparent secant volumetric modulus ($B \equiv K_s^{iap}$) on σ_3'/p_a in high plasticity clays from Barind, according to the expression (12) (Mofiz et al., 2005).

The use of the confinement σ_3' as a variable in the expressions of the stiffness moduli was and is a common practice in many hypoelastic and quasi-hypoelastic models. This is because many models soil parameters usually adjust to theoretical curves based on the results obtained in the deviatoric phase of triaxial tests, in which the confinement remains constant ($\sigma_3' = cte$), which notably simplifies the adjustment. However, the use of the σ_3' as a variable in these expressions makes it difficult to generalize these models to cases of multiaxial loading states. Therefore, the expression (13) for K_s^{iap} is considered more appropriate.

$$K_s^{iap} = K_s^{iap,ref} \left(\frac{p'}{p_{ref}'} \right)^m \quad (13)$$

Duncan et al. (1980) proposed an expression analogous to (13) for the drained tangent elastic longitudinal modulus $E'_{t,ur}(-p')$, from which it is possible to calculate the drained tangent elastic volumetric modulus $K'_{t,ur}(-p') = E'_{t,ur}(-p') / (3(1 - 2\nu'_{ur}))$.

Likewise, Roscoe and Schofield (1963) and Roscoe and Burland (1968) proposed the following expression for the elastic tangent volumetric modulus in their critical state models (*Figure 9*).

$$K'_t = \frac{(1 + e)}{\kappa} p' \quad (14)$$

As explained by Benz (2007), Lade and Abelev (2005) studied the variation of volumetric stiffness during isotropic loading and unloading processes in sands due to the introduction of small loading cycles (*Figure 10*), that is, they studied the hysteretic volumetric soil behavior. In the branch of noval loading, they observed that the cycles gave place to a significant increase in volumetric stiffness, which did not happen during the cycles in the unloading branch, in which any differences in the value of such stiffness were hardly observed.

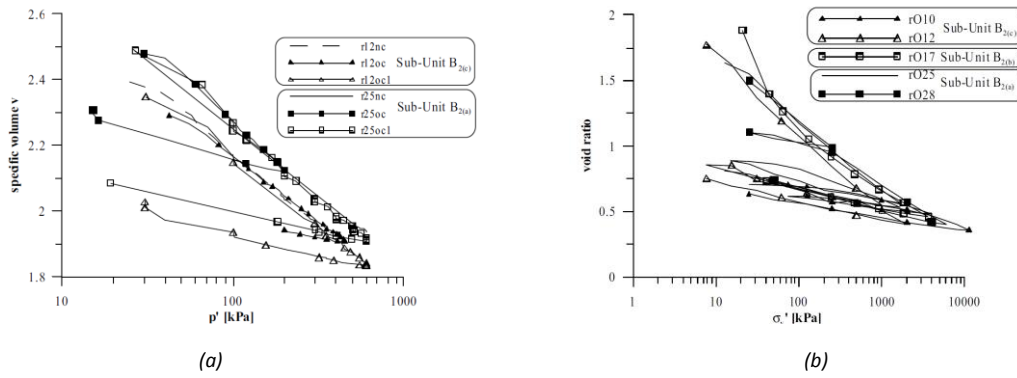


Figure 9. Tests in silty clays (Gasparre, 2005). (a) Isotropic compression, $v - 1 = (1 + e_0)\epsilon_v$. (b) One-dimensional compression.

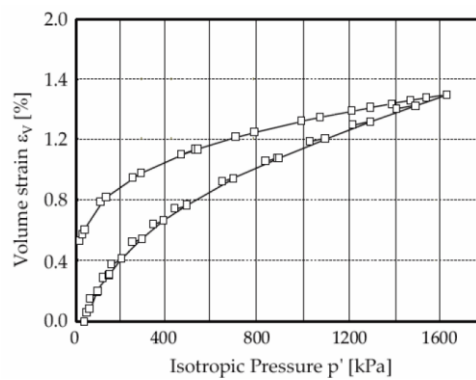


Figure 10. Stiffening of the volumetric modulus in sands of Nevada during small loading and unloading cycles in the branch of noval loading and during the unloading branch (Lade and Abelev (2005), extracted from the thesis of Benz (2007)).

6.2.2. Shear stiffness modulus

There are many studies on the parameters that control the value of shear stiffness G . The parameters considered most relevant are: shear stiffness (γ), confining pressure (p'), void ratio (e), plasticity index (PI), overconsolidation ratio (OCR , R_0), diagenesis, recent history, loading rate and anisotropy.

- **Shear stiffness (γ):** There are many evidences that indicate that shear stiffness modulus G degrades with shear strain. To generalize the concept of shear strain to a multiaxial state of stress and strain, it is usual to work with the octahedral shear strain. The results of diverse experimental tests where the degradation of the apparent shear modulus with the total shear strain in clays and sands are shown, respectively, in Figures 11 and 12.

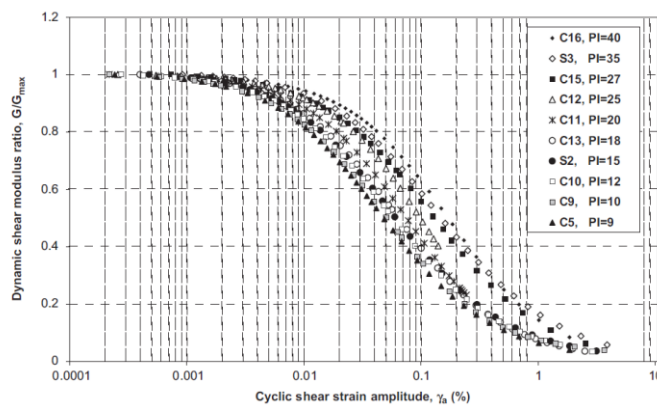


Figure 11. Degradation of the apparent shear modulus in clay tests with different plasticity index (Okur and Ansal, 2007).

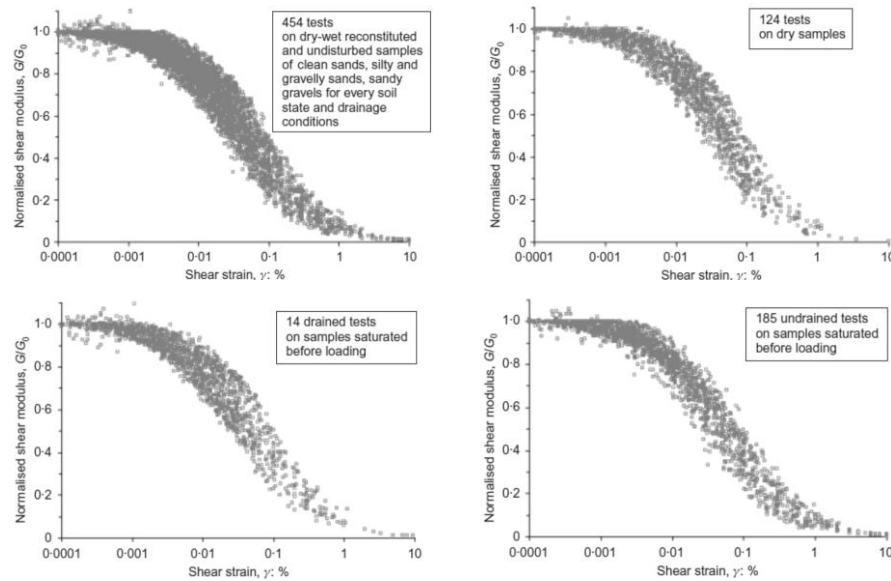


Figure 12. Degradation of the apparent shear modulus in diverse sand tests (Oztoprak and Bolton, 2013).

- Confining pressure (p'):** It is experimentally observed how the shear modulus depends on the confinement degree. Authors such as Ohde (1951), Hardin (1961), Janbu (1963), Hardin and Richart Jr. (1963) or Hardin and Drnevich (1972), based on experimental observations, proposed relations as $G_0 \propto (p')^m$ between the value of maximum shear modulus G_0 and confining pressure (Figure 13). The introduction of the Hertzian contact theory in spherical particles for the calculation of G_0 results in $m = 0,33$ (Duffy and Mindlin, 1957; Goddard, 1990). Experiments in sands provide values of $m = 0,4 - 0,60$ (Hardin and Black, 1966, 1968; McDowell and Bolton, 2001), while in cohesive soils, values of $m = 0,50 - 1,00$ are usually taken, being close to 0,50 in of low plasticity clays and to 1,00 in high plasticity clays.

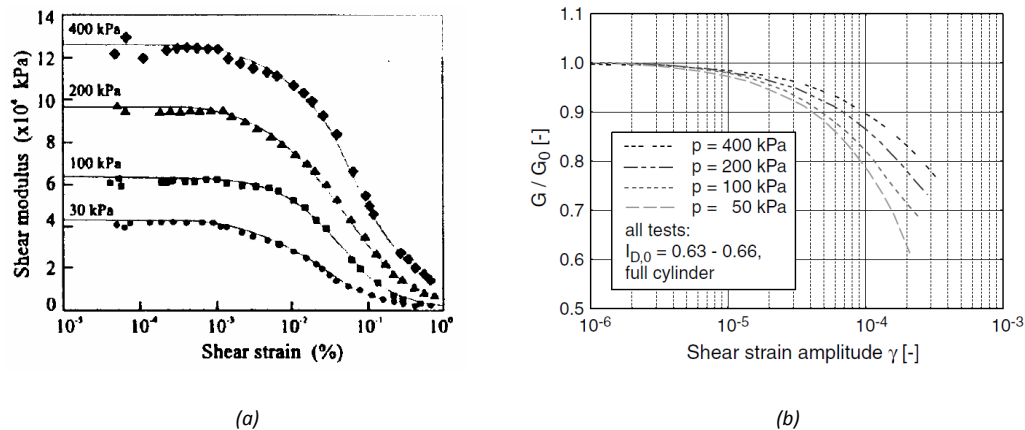


Figure 13. (a) Influence of p' on the value of G_0 (Soga et al. (1995), extracted from the work of Potts and Zdravkovic (1999)). (b) Influence of p' in the degradation of G (Wichtmann and Triantafyllidis, 2004).

- Void ratio (e):** Hardin and Richart (1963) observed the dependence of the maximum shear modulus G_0 on the void ratio from experiments with Ottawa sands, and proposed expressions like $G_0 \propto (\hat{B} - e)^2 / (1 + e)$. Authors such as Biarez and Hicher (1994) or Lo Presti and Jamiolkowski (1998) proposed expressions as $G_0 \propto e^{-x}$, and Bui (2009) proposed expressions as $G_0 \propto 1 / (1 + e)^3$ (Figure 14).

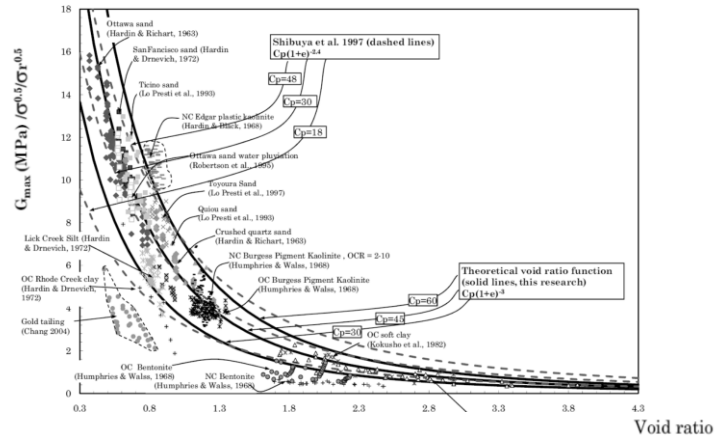


Figure 14. Results of experiments with resonant column on well graded sands and reconstituted clays (Bui, 2009).

- Plasticity Index (PI):** It is experimentally observed how higher values of the plasticity index in a soil result in a shift of the degradation curve of the apparent shear modulus towards higher shear deformation values (Figure 15a). Vucetic and Dobry (1991) proposed the schemes in Figure 15b for this dependence.

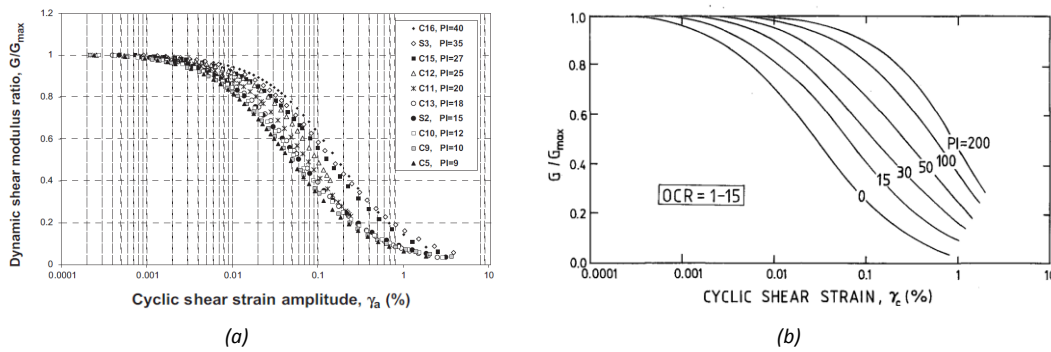


Figure 15. (a) Degradation curve of the apparent shear modulus for different PI values (Okur and Ansal, 2007). (b) Values of the apparent shear modulus for different PI values and the shear strain (Vucetic and Dobry, 1991).

- Overconsolidation ratio (OCR, R₀):** Hardin and Black (1968) proposed correlations like $G_0 \propto (OCR)^k$, based on experimental observations between the maximum shear modulus G_0 and the overconsolidation ratio OCR . On the other hand, Hously and Wroth (1991), based on the works of Hardin and Black (1968) and Atkinson and Little (1988), proposed correlations as $G_0 \propto (R_0)^k$ between the maximum shear modulus G_0 and the overconsolidation ratio R_0 (Figure 16).

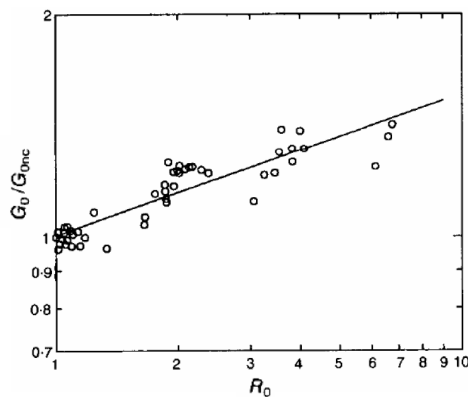


Figure 16. $G_0 = G_0(R_0)$ in reconstituted samples of kaolinite clay (Viggiani and Atkinson, 1995).

- **Diagenesis:** The diagenesis is the physicochemical process by which a sediment is transformed into a sedimentary rock. This process gradually alters the stiffness of the soil until it ultimately reaches the stiffness of a rock. Some of the main processes that alter soil stiffness are cementation (Fernandez and Santamarina, 2001) and aging (Lambe and Whitman, 1969; Bjerrum, 1973; Mesri et al., 1990; Schmertmann, 1991; Mitchell, 1993; Terzaghi et al., 1996), understood as the alteration of mechanical properties of the soil resulting from secondary compression under a constant external loading. Trhliková et al. (2012) proposed a relation between the maximum shear stiffness modulus G_0 and the fabric as $G_0 \propto (s^*/s_f^*)^l$. On the other hand, Anderson and Stokoe (1978) proposed a relation between G_0 and the aging like $G_0(t) \propto G_0(t_p) \left(1 + N_{G,1} \log(t/t_p)\right)$.
- **Recent history:** Atkinson et al. (1990) defined the concept of recent history as that corresponding to recent stress or strain trajectory in relation with the previous one, from which it is differentiated by a change in its direction (reversal) or by an extended period of rest. As previously commented, according to Gudehus (2011), soil behavior after a reversal and before a subsequent monotonous strain suggests a gradual adaptation of its internal state until it exclusively depends on σ' and e . In such state, that it is inside the SOM region (Gudehus et al., 1977), proportional strain trajectories lead to proportional stress trajectories. Gudehus (2011) affirm that it is for the latter that the influence of the internal state of the soil over its behavior can only be revealed during small strains after reversals. The studies of soil recent history require the use of tests with different stress or strain trajectories. Some of these tests (Sayao, 1989) are indicated below:
 - Tests without rotation of the principal stresses ($\alpha_\sigma = cte$).
 - Axisymmetric triaxial tests (Bishop and Henkel 1962; Bishop and Wesley, 1975). Control over $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 = \sigma'_3$ in triaxial compression (Lode angle is equal to 0°) and over $\sigma'_1 = \sigma'_2 \geq \sigma'_3$ in triaxial extension (Lode angle is equal to 30°).
 - Biaxial tests with plane strain (Cornforth, 1964; Campanella and Vaid, 1973). With $\epsilon_2 = 0$ and control over σ'_1 and σ'_3 .
 - True triaxial tests (Kjellman, 1936; Ko and Scott, 1967; Pearce, 1971). Control over σ'_1 , σ'_2 and σ'_3 .
 - Triaxial hollow cylinder (Kirkpatrick, 1957; Broms and Ratnam, 1963). Control over σ'_1 , σ'_2 and σ'_3 .
 - Tests with rotation of the principal stresses ($\alpha_\sigma \neq cte$).
 - Axisymmetric triaxial tests with torsion (Habib, 1953; Saada and Baah, 1967). Control over $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 = \sigma'_3$ o $\sigma'_1 = \sigma'_2 \geq \sigma'_3$ and $\sin^2(\alpha_\sigma) = b = (\sigma'_2 - \sigma'_3)/(\sigma'_1 - \sigma'_3)$.
 - Simple shear tests (Kjellman, 1951; Roscoe, 1953; Budhu, 1984). With $\epsilon_2 = \epsilon_x = 0$, $\epsilon_{xy} = 0$, $\tau_{xy} = 0$ and control over σ'_1 , σ'_2 and σ'_3 .
 - Tests with directional shear cell (Arthur et al., 1977; Sture et al., 1987). With $\epsilon_2 = \epsilon_z = 0$ and control over σ'_1 , σ'_3 and α_σ .
 - Hollow cylinder with torsion (Broms and Casbarian, 1965; Hight, 1983; Sayao and Vaid, 1988). With control over σ'_1 , σ'_2 and σ'_3 and α_σ .

Volumetric strain reflects the effect of isotropic loadings that tend to increase the value of the contact forces between particles, while deviatoric strain generated by the deviatoric loading modifies the direction of such forces and considerably affects the stiffness of the soil. Some notable works in which soil recent history has been studied in relation to deviatoric loadings and deviatoric strains are those carried out in triaxial tests by Richardson (1988), in hollow cylinder tests by Sayao (1989), in biaxial tests by Topolnicki et al. (1990) and in true triaxial tests by Sture et al. (1988), *Figure 17*. Nevertheless, there are few tests in which, in addition, suitable measurement methods have been implemented for the range of small strains. Among the tests in which these types of measures do have been implemented clearly highlight the triaxial tests with local strain measurement (e.g., the triaxial tests conducted by Richardson (1988), despite the limitations they present in terms of the possible trajectories of stress and strain) as well as the hollow cylinder tests carried out by Nishimura (2005) and Nishimura et al. (2008).

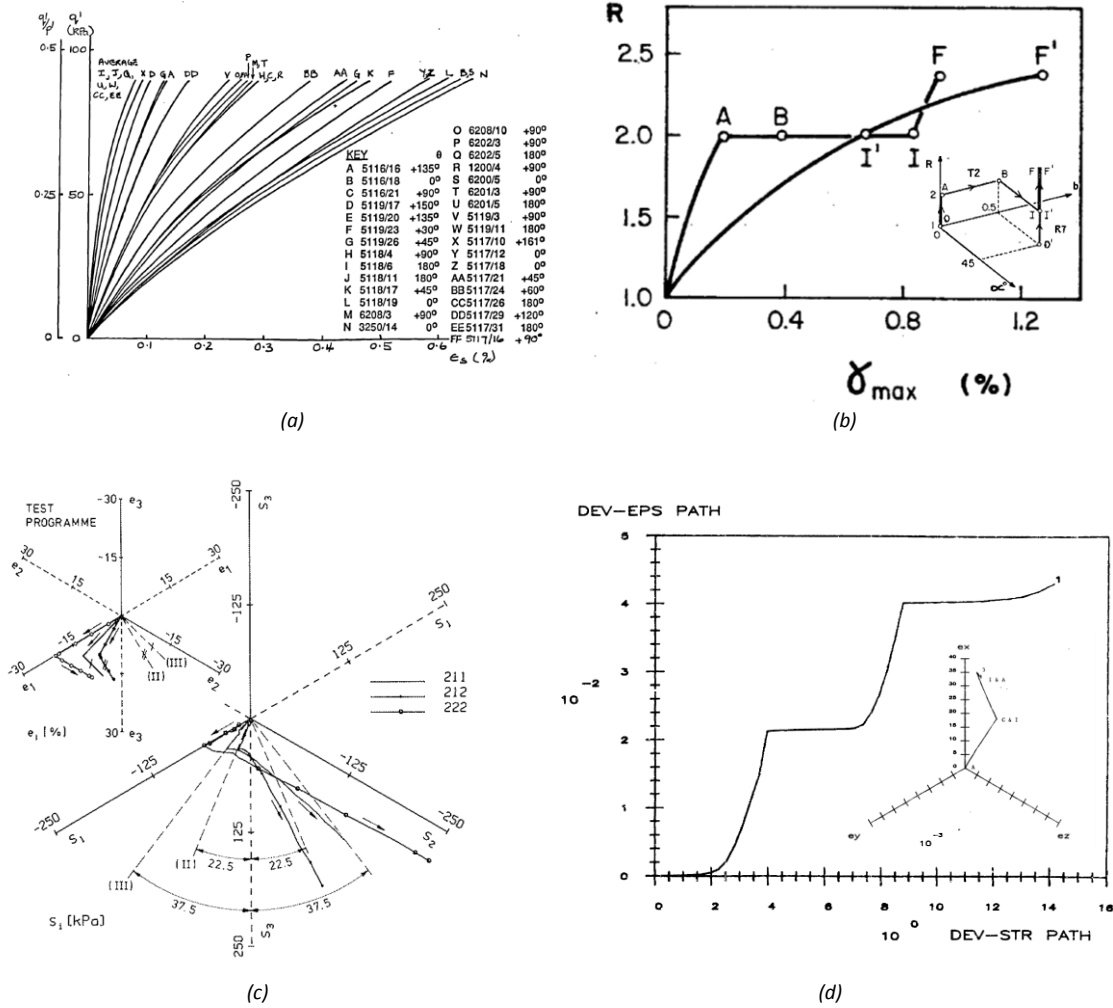


Figure 17. (a) Triaxial test: stress trajectories in $q/p' - \epsilon_s$ space with different angles $\tan(\theta_{q/p'}) = \Delta q/\Delta p'$ in reconstituted London clay, with $OCR = 2$ and $p' = 200kPa$ (Richardson, 1988). (b) Hollow cylinder test: stress and strain trajectories in $R = \sigma'_1/\sigma'_2 - \gamma_{max}$ space, where $\alpha = \alpha_\sigma$ is the rotation angle of the principal stress, in Ottawa sand with $p' = 300kPa$ and $Dr = 36\%$ (Sayao, 1989). (c) Biaxial test: stress and strain trajectories in the respective deviatoric planes in reconstituted Karlsruhe clay (Topolnicki et al., 1990). (d) True triaxial test: strain trajectory in the deviatoric plane and deviatoric stress $\sqrt{s_{ij}s_{ij}} -$ deviatoric strain $\sqrt{\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ij}}$ space in a Leighton Buzzard sand with $Dr = 72\%$ (Sture et al., 1988).

The work of Atkinson et al. (1990) shows the results of a set of triaxial tests on reconstituted overconsolidated samples ($OCR = 2$) with London clay (Figure 18). All of them were initially brought to the same stress state (O in Figure 18a) using different stress trajectories (PO and QO in Figure 18a). After a rest period of 3 hours, they were subjected to a deviatoric phase of $\Delta q = 90kPa$ with $p' = cte$ (OA in Figure 18a). As can be seen in Figure 18b, the stiffness of the soil during the OA trajectory depends on the angle of such trajectory with respect to the previous trajectories (PQ and QO). The wider the angle between trajectories, the higher the value of the shear stiffness G_0 at the beginning of the new trajectory.

Clayton and Heymann (2001) conducted tests on natural samples of London clay, whose trajectories can be seen in Figure 19a. After completing the AB phase, they allowed the samples to rest for a period of 6-12 days before starting the triaxial extension (BE) and compression (BC) phases, thus allowing the soil yielding, which did not happen in the tests of Atkinson et al. (1990), in which only a rest period of 3 hours was left. Thus, Clayton and Heymann (2001) observed how plastic deformations significantly reduced the effect of soil recent history on the G_0 value (Richardson (1988) had observed similar behavior in their experiments). Nevertheless, despite this attenuation of the trajectory rotation effect on the G_0 value, Figure 19 shows how, even allowing soil yielding, the stress history still has some effect on the shape of the degradation curve.

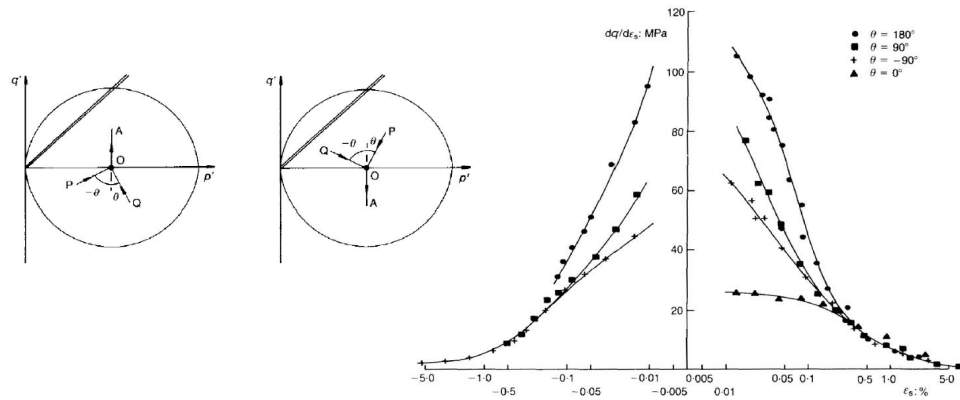


Figure 18. Undrained triaxial tests on reconstituted London clay (Atkinson et al., 1990). (a) Trajectories followed in the tests. (b) Effect of stress recent history on soil stiffness.

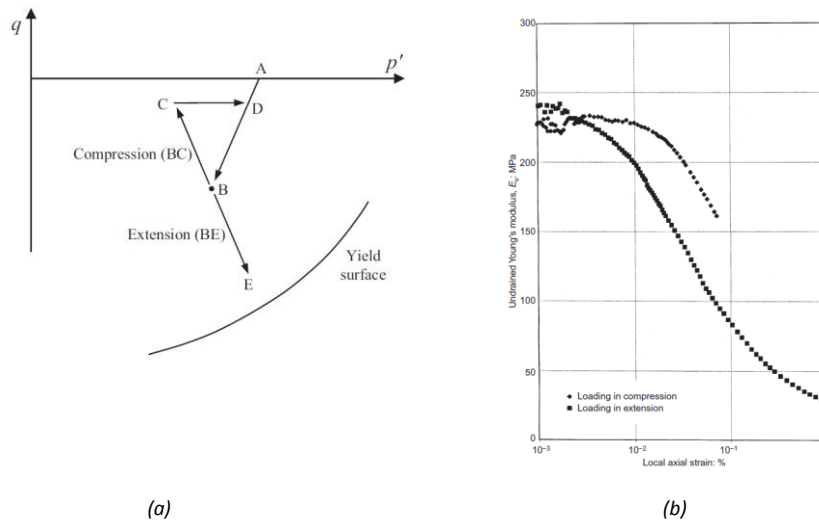


Figure 19. Undrained triaxial tests on London clay (Clayton and Heymann, 2001). (a) Stress trajectories followed. (b) Undrained longitudinal modulus E_u in trajectories BC and BE.

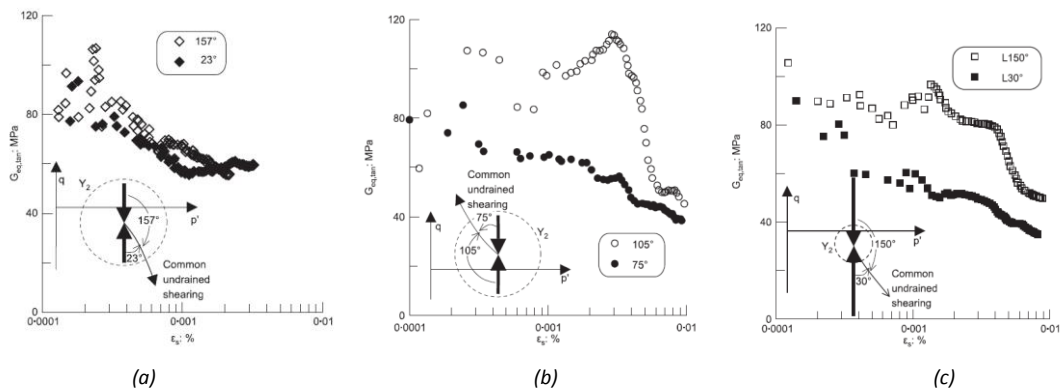


Figure 20. Degradation curves in undrained triaxial tests in London clay ($G_{eq,tan} \equiv G_t^{ap} = \dot{q}/3\dot{\varepsilon}_v$), (Gasparre et al., 2007). (a) Within Y_2 (Zones I or II according to Jardine (1992)), allowing plastic strains. (b) Within Y_2 (Zones I or II) without allowing plastic strains. (c) Overcoming and displacing Y_2 (Zones III or IV according to Jardine (1992)), allowing or not plastic strains.

Gasparre (2005) studied the effects of plastic deformations on the value of soil stiffness (through the control of resting times of the sample before applying new loads), as well as the effects of the loading magnitude prior to the rotation of stress trajectories, extending the research of Atkinson et al. (1990) and Clayton and Heymann (2001). Gasparre et al. (2007) conducted a set of tests on natural samples of London clay (Figure 20), in which the following was observed:

- 1) When stress state in recent history remains within the contour Y_2 (Zone I or II according to Jardine (1992)).
 - If plastic deformations are allowed, the effect of stress trajectory rotation on the shear stiffness of the soil is reduced, Figure 20 (as observed by Clayton and Heymann (2001)).
 - If plastic strains are not allowed, the same behavior observed by Atkinson et al. (1990) is obtained, that is, a clear dependence of the G_0 value on the stress trajectory rotation, Figure 20b.
 - 2) When stress state in recent history tends to overcome and displace the contour Y_2 (Zone III or IV according to Jardine (1992)).
 - There is a clear dependence on G_0 and, especially, on the shape of the degradation curve, with the stress trajectory rotation, regardless of whether plastic strains are allowed or not before starting the stress trajectory after the rotation conducted, Figure 20c.
- **Strain rate and inertia effects:** There are numerous experimental tests on plastic soils that show the dependence of their stiffness on the strain rate, an effect attributed to their viscosity and plasticity. In sands, generally, this effect is very small or non-existent (Hicher, 1996). On the other hand, this effect is negligible in the range of small strains $\gamma < 0.001\%$ (Tatsuoka and Shibuya, 1992), and increases its relevance for larger strains $0.01\% < \gamma < 0.1\%$ (Sorensen et al., 2007), as can be seen in Figure 21. Yong and Japp (1967) defined the strain rate shear modulus parameter (Figure 22) as $\alpha_G = \Delta G / \Delta(\log(\dot{\gamma}))$.

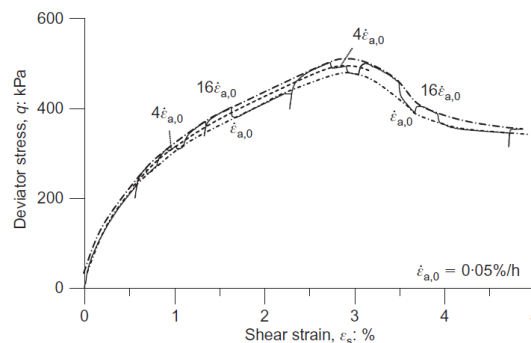


Figure 21. The effect of strain rate on stiffness during the deviatoric phase of an undrained triaxial test on an intact sample of London clay (Sorensen et al., 2007).

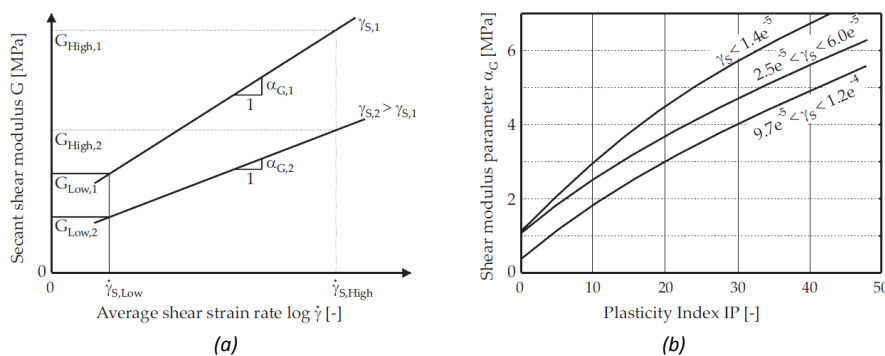


Figure 22. Strain rate shear modulus parameter (Vucetic et al. (2003), extracted from the thesis of Benz (2007)). (a) Dependence on strain rate and strain amplitude. (b) Dependence on the PI value.

- Correlations for the calculation of G_0 :** Multiple correlations have been proposed to calculate the soil maximum shear modulus value, several of which can be found in the work of Obrzud and Truty (2018). Below are some expressions for the calculation of $G_{0(ij)}$ in a plane i according to the direction j , based on the relations discussed above, which also introduce the effect of soil anisotropy:

$$\text{Hardin and Black (1968): } G_{0(ij)} = \hat{A}f(e)(OCR)^{\hat{k}}(p'_{ref})^{-m_{ij}}(p')^{m_{ij}} \quad (15)$$

$$\text{Hardin and Blandford (1989): } G_{0(ij)} = S_{ij}f(e)(OCR)^{\hat{k}}(p'_{ref})^{(1-n_i-n_j)}(\sigma'_i)^{n_i}(\sigma'_j)^{n_j} \quad (16)$$

$$\text{Rampello et al. (1997): } G_{0(ij)} = S_{ij}f(e)(OCR)^{\hat{k}}p'\bar{\beta}^{n/2} \quad (17)$$

$$\text{Pennington (1999): } G_{0(ij)} = S_{ij}f(e)(OCR)^{\hat{k}}(p')^{n_{ij}}(p'_{ref})^{(1-n_{ij})}\bar{\beta}_{ij}^{n_{ij}/2} \quad (18)$$

$$\text{Pennington (1999): } G_{0(ij)} = S_{ij}f(e)(OCR)^{\hat{k}}(p'_{ref})^{(1-n_i-n_j-n_k)}(\sigma'_i)^{n_i}(\sigma'_j)^{n_j}(\sigma'_k)^{n_k} \quad (19)$$

6.3. Considerations on the hysteretic behavior

6.3.1. Constitutive elements of the hysteretic behavior

A fundamental element that should be considered by the constitutive models to reproduce soil behavior in Zone II of Jardine (1992), along with the nonlinearity and dependence on recent history, is hysteresis (Figure 23). Only incrementally multilinear or nonlinear models allow reproducing the hysteretic behavior of the soil.

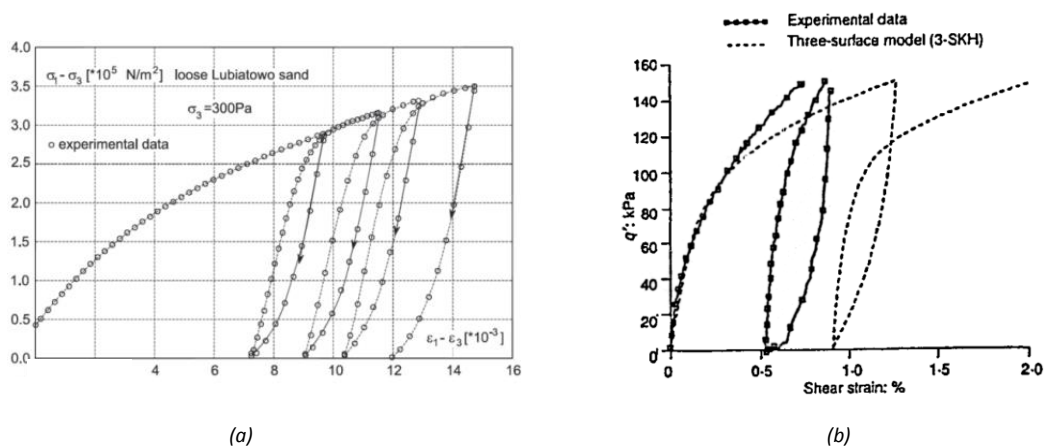


Figure 23. (a) Loading cycles in triaxial tests in a loose Lubiatowo sand (Swidzinski, 2000).
 (b) Loading cycles in undrained triaxial tests in a Speswhite kaolinite clay with $p' = 300\text{kPa}$ (Stallebrass and Taylor, 1997).

The soil is a material formed by particles and, therefore, will experience energy dissipation during loading cycles, which will result in a hysteretic behavior (Sellers, 1989). Nevertheless, as Cudny (2013) indicates, the micromechanical mechanism through which the soil dissipates energy during such cycles is not clear. Cudny points out to two possible explanations: (1) the dissipated energy is the result of a process of local yield and friction in the contacts between particles, which are subjected to normal and shear forces, in which case, the energy absorbed by the soil would be a function of the deformation amplitude (Iwasaki et al., 1978) and (2) the dissipated energy is the result of a viscous behavior due to the presence of fluid in the soil pores (Abbis, 1986).

As Hueckel and Nova (1979) indicate in their fundamental work on hysteretic behavior in soils, hysteretic cycles are characterized by having different apparent stiffness after rotations in stress or strain trajectories. On the other hand, if a perfect hysteretic behavior is considered, the deformations would only be recoverable if the cycles starting from the same reversal point were closed. Nevertheless, according to Hueckel and Nova, there are no perfect hysteretic cycles, generally observing:

- Certain permanent strain after the closing of the cycles, which depends on the number of these.
- Viscous effects or cyclic hardening/softening (Eisenberg and Phillips, 1971; Valanis, 1972; Dafalias and Popov, 1975, 1976; Prévost, 1977; Cuellar, 1978).
- Dependence of the stiffness in unloadings/reloadings on the magnitude of the accumulated plastic strain, denominated elastoplastic coupling (Bieniawski, 1971; Hueckel, 1976; Maier and Hueckel, 1979).

To reproduce the hysteretic soil behavior, it is necessary to define hidden state variables χ^{hist} (Gudehus, 2011), within the set of state variables χ , which cannot be observed macroscopically. It is also possible to attribute to them the nonlinearity and the soil behavior dependence on its recent history. These variables represent the spatial fluctuation of internal forces chains between soil particles, an effect that Gudehus calls force-roughness.

In order to introduce the hysteretic behavior in the constitutive models of soils, as well as part of the effect of recent history on the soil, it is necessary to distinguish and define the following concepts in each of them, which are directly related to the state variables χ^{hist} : (1) reversal criteria, (2) memory rules, (3) effect of reversals on the variables that control degradation and (4) effect of reversals on maximum soil stiffness.

6.3.1.1. Reversal criteria

The models that consider the hysteretic behavior of the soil use reversal criteria that allow the identification of points where changes of direction occur in the stress or strain trajectories, whose effect induces changes in soil stiffness. These criteria can be divided as follows:

Extrinsic Reversal Criteria

In this case, one or more loading and unloading criteria are defined and added to the model equations. These criteria are usually formulated based on stress, strain or energy/power.

Intrinsic Reversal Criteria

In this case, the loading or unloading criteria arise naturally from the own equations of the constitutive model.

6.3.1.2. Memory rules

Memory rules are those that allow models to store information of a certain number of active reversal points, where an active reversal point is the one that appears in t_0 and can influence the soil behavior for $t > t_0$. Depending on the number of active reversal points from which information is stored, all or part of the recent history of the soil will be considered. Furthermore, the models that store only part of this information may reproduce a certain finite number of symmetric loading cycles without transgressing the First Principle of Thermodynamics. It is possible to distinguish three types of models based on the number of reversal points from which information is stored.

Information storage from a single active reversal point

These models store information of the last active reversal point and, therefore, only consider the history between such reversal point and the current state, offering important limitations to reproduce hysteretic behavior and requiring little computational memory to store such information.

Information storage of several active reversal points

These models store information of a certain number of active reversal points, so they can better reproduce the hysteretic behavior with respect to the previous ones and, therefore, they will have a greater computational memory requirement. Likewise, these models use different typologies of state variables to store information, such as, for example, the situation of yield surfaces in multisurface or bubble models, or state variables in diverse elastoplastic and hypoplastic models. The effect of reversals on these variables depends on the rotation angle of reversal that takes place, and it may be the case that an important reversal erases the effect of previous active reversal points, although these are recent.

Information storage of all active reversal points

These models are able to store information of all the active reversal points, significantly improving their capability to reproduce the hysteretic soil behavior, although they will generally require a high computational

cost. Nevertheless, for practical purposes, this type of models ends up limiting the number of reversal points from which they store information. The maximum number of reversal points considered will depend on the number of expected loading cycles.

6.3.1.3 Effect of the reversals on the variables that control degradation

The nonlinear models consider the shear stiffness degradation with deformations. The mechanisms that control this degradation are identified here with the variables $Y_i \geq 0$, which can be considered as part of the variables χ^{hist} . These models can be grouped in two categories:

The variable that controls the degradation is totally reinitialized after a reversal

These models consider that the variables Y_i adopt a value of 0 after a reversal (Figure 24), that is, $Y_i = Y_i^{R-} > 0 \rightarrow Y_i = Y_i^{R+} = 0, \forall R$. This implies that in these models the maximum value of stiffness is reached after a reversal, which does not allow simulating the experimental soil behavior described in the work of Atkinson et al. (1990) (Figure 18), Clayton and Heymann (2001) (Figure 19), Gasparre (2005) or Gasparre et al. (2007) (Figure 20).

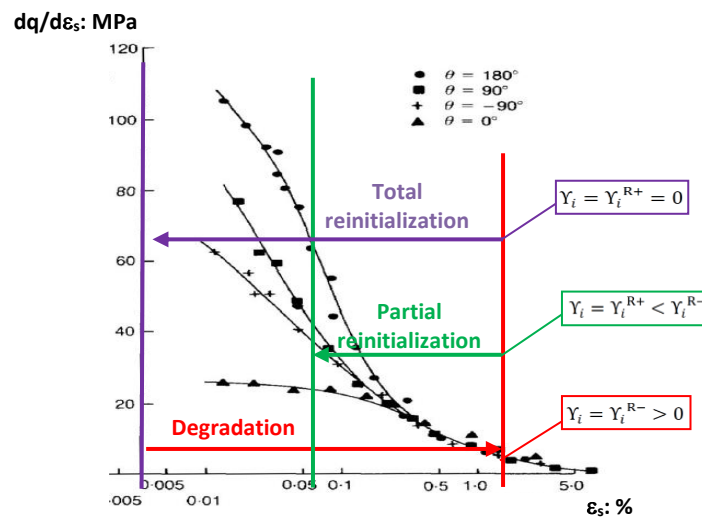


Figure 24. Effect of reversals on the variables that control degradation, drawn on the graphic of the shear modulus degradation of a London clay, extracted from the work of Atkinson et al. (1990).

The variable that controls the degradation is totally or partially reinitialized after a reversal

These models consider that the variables Y_i reduce their value after a degradation process (Figure 24), that is, $Y_i = Y_i^{R-} > 0 \rightarrow Y_i = Y_i^{R+} < Y_i^{R-}, \forall R$. Depending on the values Y_i^{R+} different stiffness values are obtained after a reversal. This type of models allows simulating the experimental soil behavior described by Atkinson et al. (1990) (Figure 18), Clayton and Heymann (2001) (Figure 19), Gasparre (2005) or Gasparre et al. (2007) (Figure 20). In experimental tests the degradation curve is usually measured, after a determined reversal, imposing a value $Y_i^{R+} = 0$, regardless of the level of such reversal. This is due, partly, to the real ignorance of the variable Y_i value after the reversal. To identify and measure this type of variables it would be necessary to use monitoring techniques that quantify contact strain/forces at a micromechanical level. The models which consider that the variables Y_i can be partially reinitialized after a reversal, are capable of reproducing different degradation curves for diverse reversal rotation angles (Figure 25).

- In case that the degradation curve defined in a model is unique, that is, it is defined from a unique value of the maximum shear stiffness modulus G_0 , the experimental degradation curves corresponding to partial reversals could be reproduced in the simulations through the deformation of a determined section of such unique curve, as shown in Figure 25a.

- In case that different degradation curves are defined in a model, from different values of the maximum shear stiffness modulus G_0^α , experimental degradation curves will be reproduced in the simulations without deformation of the theoretical curves and will coincide with them, as shown in *Figure 25b*. Nevertheless, for practical matters, it is not possible to calibrate the degradation curves corresponding to each reversal degree, therefore, such calibration will only be done in a finite number of these, and those curves interpolated from the calibrated ones will experience some deformation.

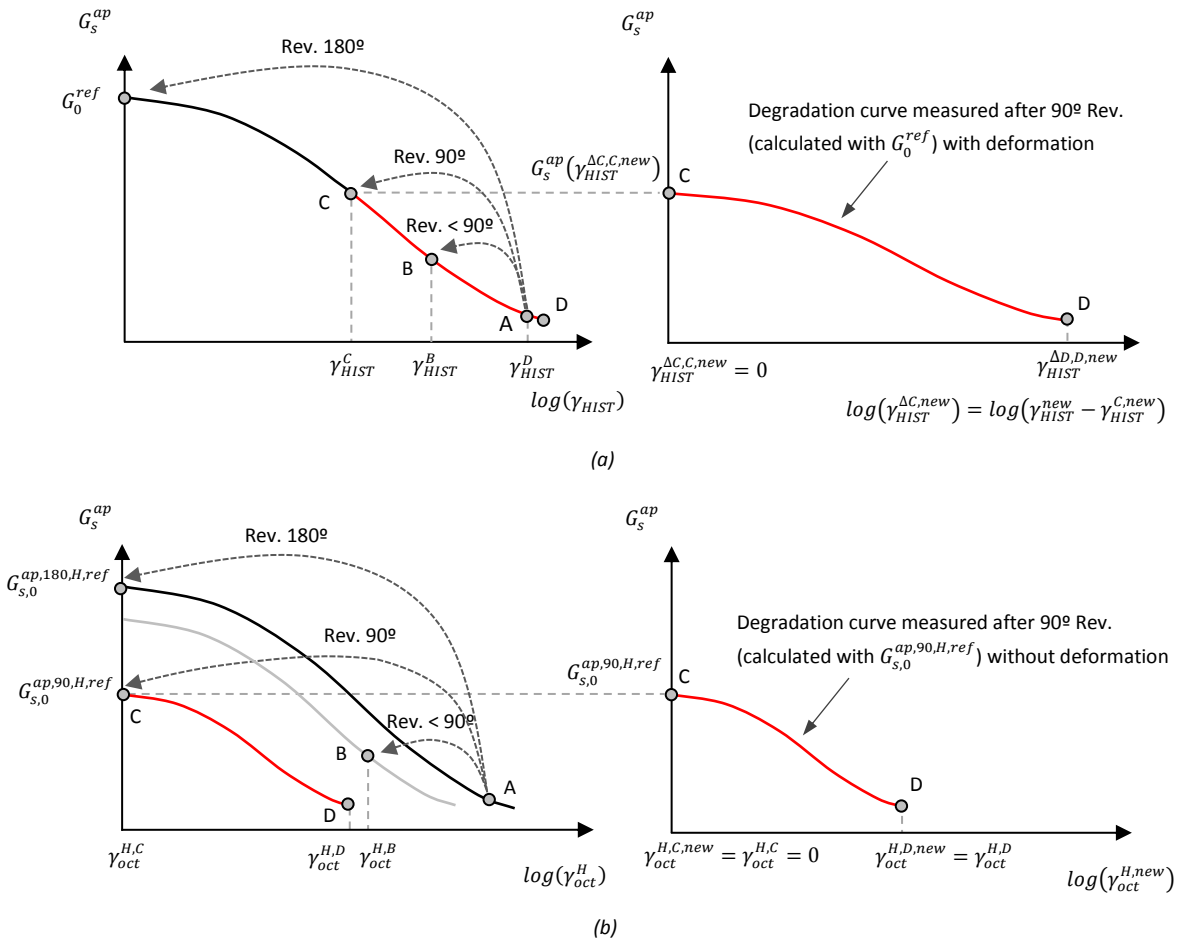


Figure 25. Effect of a 90° reversal. (a) In the SSOM model with deformation of the degradation curve. (b) In the HQH model without deformation of the degradation curve.

6.3.1.4. Effect of the reversals on maximum soil stiffness

Nonlinear models consider the shear stiffness degradation with the deformations. Experimentally, it is observed how the magnitude of shear stiffness recovery depends on the stress/strain reversal rotation angle, as it is shown in *Figure 26*. In this sense, it is possible to classify the models following two different criteria: (1) depending on whether the soil stiffness recovery is continuous or discontinuous with the rotation of stress/strain recent trajectory and (2) depending on whether such recovery is always total after a reversal or it can be partial or total after it. Introducing the second criterion within the first, the models can be classified as follows:

Discontinuous recovery of stiffness with the rotation angle of stress/strain recent trajectory

This group integrates those models in which the recovery of soil stiffness occurs discontinuously (staggered) according to the rotation angle of the stress/strain recent trajectory. This is because the variables Υ_i that control the degradation process of shear stiffness experience finite jumps in their value for certain values of such rotation (*Figure 26a*). These models will be, therefore, incrementally multilinear. In turn, the models that

consider a total recovery after a reversal or a recovery that can be partial or total are distinguished in this group (Figure 26b). This type of models does not comply the condition of continuity of the tensorial zones.

Continuous recovery of stiffness with the rotation angle of stress/strain recent trajectory

This group integrates those models in which the recovery of soil stiffness occurs continuously according to the rotation angle of the stress/strain recent trajectory. This is because the variables Υ_i that control the degradation process of the shear stiffness vary continuously with the values of such rotation (Figure 26a). These models will therefore be incrementally nonlinear. In both cases, the recovery of stiffness is continuous with the rotation of the strain trajectory. This type of models complies the condition of continuity of the tensorial zones.

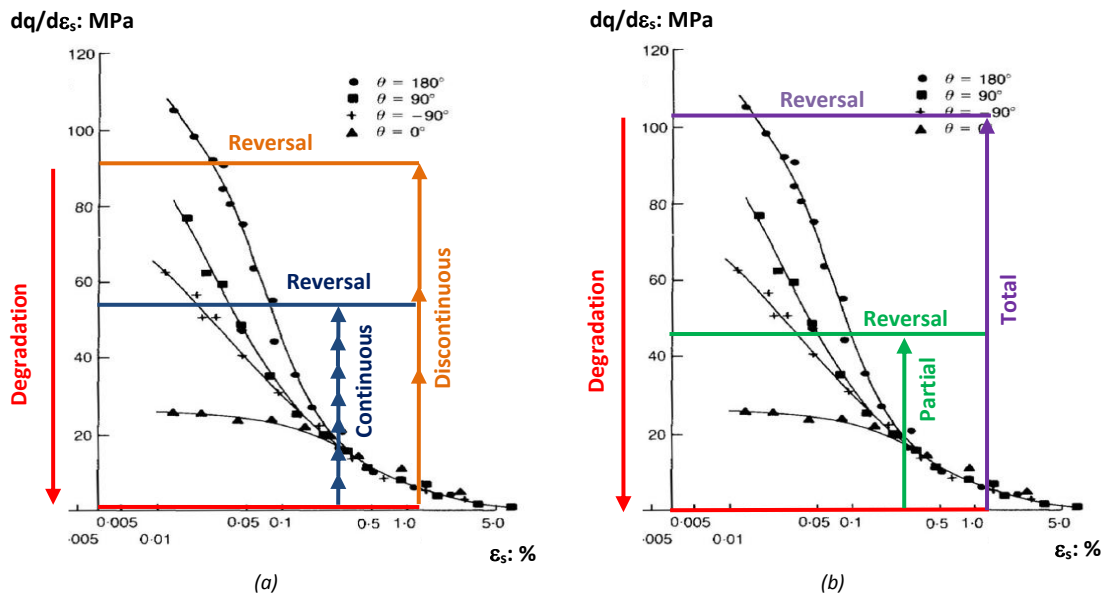


Figure 26. Effect of reversals on maximum stiffness according to the two defined criteria, drawn on the London clay degradation graph extracted from the work of Atkinson et al. (1990). (a) Continuous or discontinuous recovery according to the rotation angle of the recent trajectory of stress/strain. (b) Total or partial/total recovery of stiffness.

7. Constitutive modeling

As proposed by Popper (1959), theoretical models can capture part of reality if they are logically consistent and the hypotheses they use are not refuted by observations. Nowadays, there are several theoretical frameworks that try to explain different aspects of soil behavior. Within these theoretical frameworks, several constitutive soil models that consider the mechanical behavior of the soil in the range of small strains have been developed over the last decades.

Mechanical constitutive modeling of soils can be framed in continuous mechanics problems, which consist of a set of general conservation and balance equations and a particular constitutive equation.

Hereinafter, the following will be considered: (1) simple materials in the sense of Truesdell and Noll (1965), which are those in which their behavior can be determined during any strain process, provided that this is known in homogeneous strain processes, that is, as long as the gradient $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{X}, t)$ is constant, (2) quasi-static problems ($\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$), (3) homogeneous (non-viscous) materials, (4) isothermal conditions ($T = T_0$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ and $r = 0$) and (5) small strains hypothesis ($(\nabla\mathbf{u})^T \cdot \nabla\mathbf{u} \ll \nabla\mathbf{u}$). Under these assumptions, the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, its boundary $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D = \partial\Omega$ and a point $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \in \Omega \cup \Gamma$ are considered. The equations of the mechanical problem proposed are the following:

$$1. \text{ Mass conservation: } \quad \partial\rho_{soil}/\partial t + \nabla \cdot (\rho_{soil}\mathbf{v}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (20)$$

$$2. \text{ Linear momentum conservation: } \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \rho_{soil}\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (21)$$

$$3. \text{ Angular momentum conservation: } \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'^T \quad \text{in } \Omega \quad (22)$$

$$4. \text{ Strain tensor for small strains: } \boldsymbol{\epsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \quad (23)$$

$$5. \text{ Compatibility equation: } \nabla \times (\boldsymbol{\epsilon} \times \nabla) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (24)$$

$$6. \text{ First Thermodynamic Principle: } \rho_{soil} \dot{\mathbf{u}} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma}' \quad \text{in } \Omega \quad (25)$$

$$7. \text{ Second Thermodynamic Principle: } \rho_{soil} \dot{S} + (1/T_0) \nabla^S \dot{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma}' - (1/T_0) \rho_{soil} \dot{\mathbf{u}} \geq 0 \quad \text{in } \Omega \quad (26)$$

$$8. \text{ Constitutive equation: } \boldsymbol{\sigma}'(t) = \mathcal{F}[\mathbf{F}(\tau)] \quad -\infty < \tau \leq t \quad \text{in } \Omega \quad (27)$$

$$9. \text{ Boundary conditions: } \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}(\mathbf{n}) & \text{in } \Gamma_N \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_o & \text{in } \Gamma_D \end{aligned} \quad (28)$$

The consideration of a functional \mathcal{F} , and not a function, comes from the need to reproduce the irreversible behavior of the soil. In this type of behavior, knowing the state of deformation $\boldsymbol{\epsilon}(t)$ in a given instant t does not allow us to know the stress state at that instant and vice versa (Darve and Servant, 2004). Furthermore, not any functional \mathcal{F} will represent a valid constitutive relation. The determination of the restrictions that a constitutive relation must satisfy is one of the biggest problems in mechanics (Truesdell and Noll, 1965). Although this problem is not solved, a set of axioms that is considered to satisfy any constitutive relationship has been established and is detailed in Truesdell and Noll (1965).

As Owen and Williams (1969) demonstrate, a non-viscous material whose constitutive functional is differentiable must necessarily be elastic, in which case, the relation between stress and strain can be expressed through the tensorial function $\mathbf{F}(\cdot)$ as $\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\epsilon}^e)$. However, if it is intended to simulate the hysteretic soil behavior, it is necessary that the functional \mathcal{F} are not differential nor linear, which can significantly complicate the associated mathematical problem. Alternatively, it is common to resort to incremental type formulations in which the functional \mathcal{F} is reduced to a tensorial function of the type $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$. Using the Cayley-Hamilton theorem, it can be demonstrated that the most general way to express this constitutive equation with isotropic functions of two symmetric second-order tensors is $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \psi_1 \mathbf{1} + \psi_2 \boldsymbol{\sigma}' + \psi_3 \boldsymbol{\sigma}'^2 + \psi_4 \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \psi_5 \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2 + \psi_6 (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma}') + \psi_7 (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2 + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}') + \psi_8 (\boldsymbol{\sigma}'^2 \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \boldsymbol{\sigma}'^2) + \psi_9 (\boldsymbol{\sigma}'^2 \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2 + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^2 \cdot \boldsymbol{\sigma}'^2)$, where the functions ψ_i depend, in general, on $\boldsymbol{\sigma}'$ and $\boldsymbol{\epsilon}$. In the case of non-viscous type materials, the tensorial function \mathbf{G} is homogeneous grade one in the term of $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, from what follows that $\mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \lambda \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \lambda \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$ for $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$. For that purpose, it is necessary that $\psi_5 = \psi_7 = \psi_9 = 0$, ψ_4 , ψ_6 and ψ_8 are independent from $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, and ψ_1 , ψ_2 and ψ_3 dependent on $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ with a power of one. This property of homogeneity of \mathbf{G} allows expressing the constitutive equation as $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. The dependence of the tensor \mathbf{E}' on $\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}/\|\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\|$ gives place to the tensorial zone concept defined by Darve (1978, 1990) and Darve and Labanieh (1982), which has been previously introduced and will be very useful to classify the analyzed models. A tensorial zone Z is defined as the part of strain increments space in which the tensorial function \mathbf{G} is linear with $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. This will imply that in a certain tensorial zone Z , the tangent stiffness tensor will be independent from $\boldsymbol{\eta}$, and the relation between $\dot{\boldsymbol{\sigma}}'$ and $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ will be incrementally linear, that is, $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_t^Z(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, where $\mathbf{E}'_t(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{E}'_t^Z(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}), \forall \boldsymbol{\eta} \in Z$. Similarly, if $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \in Z$, then $\lambda \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \in Z$ for $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, so that a tensorial zone Z will be a hypercone whose vertex is situated at the beginning of the space of stress increments. Different tensorial zones conform different hypercones adjacent with the vertex in common. Furthermore, if $\mathbf{E}'_t^{Z_1}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi})$ and $\mathbf{E}'_t^{Z_2}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi})$ are the associated tangent stiffness tensors, respectively, to the tensorial zones Z_1 and Z_2 , these must satisfy the continuity condition for $\forall \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \in Z_1 \cap Z_2$, that is, $\mathbf{E}'_t^{Z_1}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{E}'_t^{Z_2}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ and, therefore, $(\mathbf{E}'_t^{Z_1}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}) - \mathbf{E}'_t^{Z_2}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi})) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{0}$. This condition of continuity does not allow the election of any tangent stiffness tensors in two adjacent tensorial zones.

7.1. Classification of models that consider the soil behavior in the range of small strains

The tensorial zone criterion has been used to classify the models that consider the soil behavior in the range of small strains (Zones I and II of Jardine (1992)), as follows:

Incrementally linear models associated to one tensorial zone (Figure 27a)

- Linear elastic models
 - Isotropic
 - Anisotropic
- Nonlinear elastic models
 - Algebraic formulation (elastic models of Cauchy and pseudoelastic models)
 - Integral formulation (hyperelastic models)
 - Differential formulation (hypoelastic models *stricto sensu*)

Incrementally multilinear models associated to several tensorial zones (Figure 27b)

- Hysteretic models
 - Praelasticity
 - Quasi-hypoelastic models
 - Generalized Masing rules
- Advanced models
 - Classic elastoplastic models
 - Multisurface models
 - Brick models
 - Bounding plasticity models
 - Bubble models
 - Multilaminated models

Incrementally nonlinear models associated to infinite tensorial zones (Figure 27c)

- Hypoplastic models
- Hybrid models (hypoplasticity + praelasticity)

In the set of incrementally linear models are the elastic models, although both linear elastic models and nonlinear elastic models can also be formulated non-incrementally, that is, according to $\sigma' = F(\epsilon^e)$.

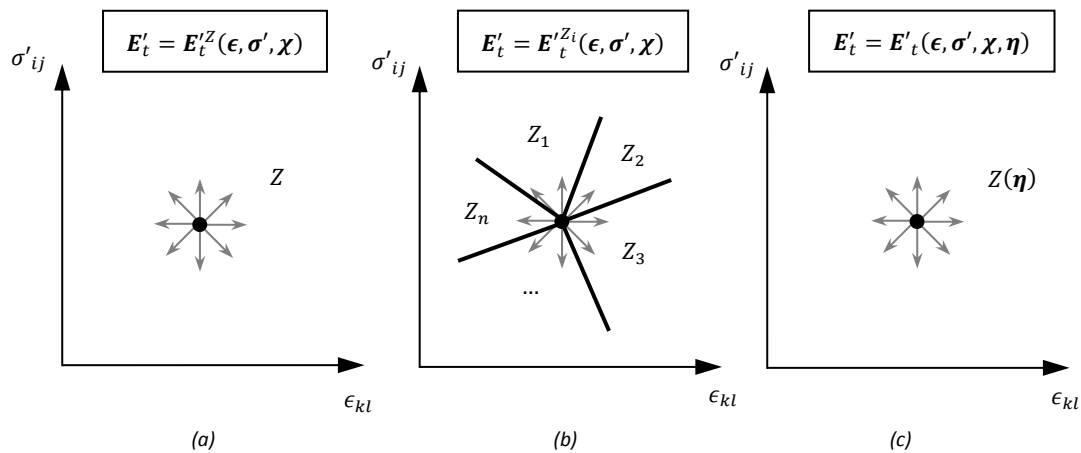


Figure 27. Schematic representation of the tensorial zones for diverse types of models.

(a) Incrementally linear (b) Incrementally multilinear. (c) Incrementally nonlinear.

7.1.2 Incrementally linear models

The number of tensorial zones $\#Z$ considered in the incrementally linear models is reduced to one. These models can reproduce the nonlinear soil behavior, but not the hysteretic and dependent on recent history behavior.

7.1.2.1. Elastic models

Elasticity constitutes one of the fundamental pillars of mechanics of deformable solids. As indicated by Clayton (2011), the birth of linear elastic theory is attributed to Hooke (1676) in his experiments on steel strings. Subsequently, from the experiments conducted by Bernoulli with lute strings in 1687, Leibniz proved in 1690 that the data pointed to the elastic nonlinearity of these materials in the range of small strains (Viggiani, 2000). Almost forty years later, Euler, student of Johann Bernoulli (brother of the Bernoulli mentioned above), published the results on his first works with elastic materials (Euler, 1728) after applying such theory to the propagation of acoustic waves in the air (Euler, 1727). At the beginning of 19th century, Young (1807) illuminated the concept of the modulus that bears his name, although this concept differs from what is now known as Young modulus (Riccati, 1782). As Clayton (2011) points out, the Poisson-Cauchy elastic theory was developed in 1848, and was based on a single parameter, considering that the one known as the Poisson's ratio should adopt a value of 0,25 in any material. Green (1828), on the other hand, identified the need to define 21 elastic constants, which were reduced to two for isotropic materials. Subsequently, several researchers confirmed the theory of Green. By the time the book "Theory of Elasticity" (Timoshenko and Goodier, 1951) was published, elasticity was already fully developed.

Two fundamental characteristics of these type of models are: (1) the proportionality between effective stress σ' and elastic strains ϵ^e and (2) the possibility of determining the stress state $\sigma'(\mathbf{x}, t)$ at any point of the continuum medium and at any instant, only from the state of elastic strains $\epsilon^e(\mathbf{x}, t)$ in such point and instant, without the need to know the previous history.

7.1.2.1.1. Linear elastic model

Linear elastic models use a linear tensorial function $\mathbf{F}(\cdot)$ for the total constitutive equation.

$$\sigma' = \mathbf{F}(\epsilon^e) = \mathbf{E}': \epsilon^e \quad (30)$$

Since the elastic stiffness tensor \mathbf{E}' is constant ($\dot{\mathbf{E}}' = \mathbf{0}$), allows expressing the incremental constitutive equation as follows:

$$\dot{\sigma}' = \dot{\mathbf{F}}(\epsilon^e) = \mathbf{E}': \dot{\epsilon}^e \quad (31)$$

In general, the tensor \mathbf{E}' has $3^4=81$ independent components that must be determined to fully characterize the behavior of the material and be able to use this model. Nevertheless, due to the symmetry of the tensors σ' and ϵ^e , and to the existence of an elastic potential $\Psi(\epsilon^e)$ for elastic thermodynamic considerations, such as $\sigma' = \mathbf{F}(\epsilon^e) = \partial\Psi(\epsilon^e)/\partial\epsilon^e$, these 81 independent components are reduced to 21.

7.1.2.1.1.1. Anisotropic linear elastic model

The most general expression of \mathbf{E}' for a general anisotropic linear elastic material has 21 independent components. In anisotropic materials, it is common to use E'_{ij} , ν'_{ij} o G_{ij} as elastic parameters. In case the material properties present three planes of symmetry, the material is said to be orthotropic, and the independent components are reduced from 21 to 9. And if the properties of the material have an axis of symmetry, it is said that it has transversal isotropy and the independent components are reduced from 21 to 5. Orthotropic elastic models are rarely used. In contrast, elastic or hypoplastic models that consider soil transversal anisotropy have been used in geotechnical practice to reproduce soil behavior in the range of small strains (Hardin and Blandford, 1989; Piriyakul, 2006; Schädlich and Schweiger, 2012; Masín and Rott, 2013).

7.1.2.1.1.2. Isotropic linear elastic model

In case the material properties present three symmetry axes, the material is said to be isotropic and the independent components are reduced from 21 to 2. The constitutive equation of an isotropic linear elastic model can be expressed as follows:

$$\sigma' = \mathbf{E}': \epsilon^e = \left(\left(K' - \frac{2}{3}G \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G\mathbf{II} \right) : \epsilon^e = 3K'\epsilon'_{oct}\mathbf{1} + 2G\mathbf{e}^e \quad (32)$$

On the other hand, considering $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct} \mathbf{1}$ with $p' = \sigma'_{oct} = 1/3 \sigma'_{ii}$ and the invariants $\tau_{oct} = \sqrt{1/3} \|\mathbf{s}\|$ and $\gamma_{oct}^e = \sqrt{4/3} \|\mathbf{e}^e\|$ it is possible to decouple the volumetric and deviatoric behavior of the soil in the expression (32), remaining the expressions $\sigma'_{oct} = 3K' \epsilon_{oct}^e$ and $\tau_{oct} = G \gamma_{oct}^e$.

Linear elastic models:

- Are linear models.
- Do not distinguish between stiffness in loading and unloading /reloading and, therefore, cannot reproduce the hysteretic behavior of the soil.
- Do not consider the effect of recent history on soil stiffness.
- Constitute the theoretical base of nonlinear elastic models and other advanced models.
- Constitute very simple formulations from a conceptual and mathematical point of view.
- The parameters of the models are, in general, easy to obtain from simple tests.
- In closed tensodeformational cycles, they conserve the values of stress and strain, $\oint_{\epsilon^e} \mathbf{E}': \dot{\epsilon}^e = 0$ and $\oint_{\boldsymbol{\sigma}'} (\mathbf{E}')^{-1}: \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 0$.
- Do not generate energy in closed stress or strain cycles, $\oint_{\epsilon^e} \boldsymbol{\sigma}': \dot{\epsilon}^e = 0$.

7.1.2.2. Nonlinear elastic models

The classification proposed by William (2002), based on the structure of the tensorial function $\mathbf{F}(\cdot)$ that relates stress to elastic strain, is used to organize the nonlinear elastic models.

- Algebraic formulation
 - Cauchy elastic models
 - Pseudoelastic models
- Integral formulation
 - Hyperelastic models
- Differential formulation
 - Hypoelastic models *stricto sensu*

The hypoelastic models *stricto sensu* are not elastic models *per se*. As previously commented, one of the fundamental properties of the elastic models is the possibility to determine the stress state $\boldsymbol{\sigma}'$ at any point of the continuum medium and at any instant, only knowing the elastic deformation state in such point and instant, without the need of knowing the previous history. On the contrary, in hypoelastic models, the stress state at a given point and instant does depend on such previous history. Despite this, the hypoelastic models have been traditionally considered within the framework of elastic materials, therefore, such classification has been respected in this work.

7.1.2.2.1. Algebraic formulation

7.1.2.2.1.1. Cauchy elastic models

Cauchy elastic models use a nonlinear tensorial function $\mathbf{F}(\cdot)$ for the constitutive equation of the material. Using second-order symmetric isotropic tensorial functions and applying the Cayley-Hamilton theorem on $\boldsymbol{\epsilon}^e$ and $\boldsymbol{\sigma}'$ it is possible to express the constitutive equation in the Cauchy elastic models as follows:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \phi_1(\boldsymbol{\epsilon}^e) \mathbf{1} + \phi_2(\boldsymbol{\epsilon}^e) \boldsymbol{\epsilon}^e + \phi_3(\boldsymbol{\epsilon}^e) \boldsymbol{\epsilon}^{e2} \quad (33)$$

A priori, and given the arbitrariness in the functions ϕ_i , this type of models can give place to the generation of energy during the application of cyclic loadings, thus transgressing the thermodynamic principles.

The linearized constitutive incremental equation is expressed as follows:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \dot{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \sum_{i=1}^3 \left(\left(\frac{\partial \phi_i(\boldsymbol{\epsilon}^e)}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \right) \boldsymbol{\epsilon}^{e i-1} \right) + \phi_2(\boldsymbol{\epsilon}^e) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + 2\phi_3(\boldsymbol{\epsilon}^e) \boldsymbol{\epsilon}^e \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (34)$$

7.1.2.2.1.2. Pseudoelastic models

Pseudoelastic models are a particular case of Cauchy elastic models. In this case, the nonlinearity in $\mathbf{F}(\cdot)$ is incorporated through the secant elastic stiffness tensor. As with linear elastic models, if an isotropic material is considered, the secant elastic stiffness tensor \mathbf{E}'_s depends on two parameters, being able to be expressed according to the drained secant elastic volumetric modulus K'_s and to the secant elastic shear modulus G_s , which leads to the known $K - G$ nonlinear models formulation.

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{F}(\boldsymbol{\epsilon}^e) = \mathbf{E}'_s : \boldsymbol{\epsilon}^e = \left(\left(K'_s - \frac{2}{3} G_s \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2G_s \mathbb{I} \right) : \boldsymbol{\epsilon}^e = 3K'_s \epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + 2G_s \mathbf{e}^e \quad (35)$$

In the same way that it was deduced for the constitutive equation of an isotropic linear elastic material, it is also possible in this case to decouple the volumetric and deviatoric behavior from the expression (35), provided that $G_s = G_s(\gamma_{oct}^e)$ and $K'_s = K'_s(\epsilon_{oct}^e)$, leaving the expressions $\sigma'_{oct} = 3K'_s(\epsilon_{oct}^e)\epsilon_{oct}^e$ and $\tau_{oct} = G_s(\gamma_{oct}^e)\gamma_{oct}^e$. In case of considering transversal anisotropy, it is necessary to introduce the secant coupling modulus J_s into the previous formulation resulting $\sigma'_{oct} = 3K'_s\epsilon_{oct}^e + J_s\gamma_{oct}^e$ and $\tau_{oct} = J_s\epsilon_{oct}^e + G_s\gamma_{oct}^e$.

The linearized constitutive incremental equation of the pseudoelastic models is the following:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_s : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\mathbf{E}}'_s : \boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{E}'_s : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \left(\frac{\partial \mathbf{E}'_s}{\partial K'_s} \frac{\partial K'_s}{\partial \epsilon_{oct}^e} \dot{\epsilon}_{oct}^e + \frac{\partial \mathbf{E}'_s}{\partial G_s} \frac{\partial G_s}{\partial \gamma_{oct}^e} \dot{\gamma}_{oct}^e \right) : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (36)$$

The above expression can be rewritten as $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{E}'_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$, where \mathbf{E}'_t can be expressed as follows:

$$\mathbf{E}'_t = \mathbf{E}'_s + (K'_t - K'_s) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \frac{8(G_t - G_s)}{3\gamma_{oct}^e{}^2} \mathbf{e}^e \otimes \mathbf{e}^e \quad (37)$$

In the previous expression K'_t and G_t are the tangent moduli, which, considering $G_s = G_s(\gamma_{oct}^e)$ and $K'_s = K'_s(\epsilon_{oct}^e)$, are expressed as follows:

$$K'_t = \frac{1}{3} \frac{d\sigma'_{oct}}{d\epsilon_{oct}^e} = K'_s + \epsilon_{oct}^e \frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \quad (38)$$

$$G_t = \frac{d\tau_{oct}}{d\gamma_{oct}^e} = G_s + \gamma_{oct}^e \frac{dG_s}{d\gamma_{oct}^e} \quad (39)$$

Based on the above and considering that $\mathbf{e}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = 3/4 \gamma_{oct}^e \dot{\gamma}_{oct}^e$, the constitutive incremental equation (36) remains as in the expression (40), which is possible to express decoupled as $\dot{\sigma}'_{oct} = 3K'_t(\epsilon_{oct}^e)\dot{\epsilon}_{oct}^e$ and $\dot{\tau}_{oct} = G_t(\gamma_{oct}^e)\dot{\gamma}_{oct}^e$.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 3K'_t \dot{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + 2G_s \dot{\mathbf{e}}^e + 2 \frac{(G_t - G_s)}{\gamma_{oct}^e} \dot{\gamma}_{oct}^e \mathbf{e}^e \quad (40)$$

Cauchy elastic models and the pseudoelastic models:

- Are nonlinear models.
- Do not distinguish between stiffness in loading and unloading /reloading and, therefore, cannot reproduce the hysteretic behavior of the soil.
- Do not consider the effect of recent history on soil stiffness.
- Constitute simple formulations from a conceptual and mathematical point of view.
- The parameters of the models are, in general, easy to obtain from simple tests.
- In stress/strain closed cycles, they conserve stress and strain, $\oint_{\epsilon^e} \mathbf{E}'_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = 0$ and $\oint_{\sigma'} (\mathbf{E}'_t)^{-1} : \dot{\boldsymbol{\sigma}}' = 0$.
- Depending on the selection of soil parameters, they can generate energy in stress/strain closed cycles, thus transgressing the thermodynamic principles, $\oint_{\epsilon^e} \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e \neq 0$. In order to an elastic model of Cauchy or a $K - G$ pseudoelastic model to be conservative, must comply with $G = G(\gamma_{oct}^e)$ or $G = G^*(\tau_{oct})$ and $K' = K'(\epsilon_{oct}^e)$ or

$K' = K'^*(\sigma'_{oct})$, since, under these conditions, the elastic energy W_{el} is independent from the followed trajectory, complying with $W_{el} = 0$ in a closed cycle $W_{el} = \oint_{\gamma_{oct}^e} (3/2G_s(\gamma_{oct}^e)\gamma_{oct}^e)\dot{\gamma}_{oct}^e + \oint_{\epsilon_{oct}^e} (9K'_s(\epsilon_{oct}^e)\epsilon_{oct}^e)\dot{\epsilon}_{oct}^e = 0$.

7.1.2.2.2. Integral formulation

7.1.2.2.2.1. Hyperelastic models

The hyperelastic models define an energy potential from which the expression of $F(\cdot)$ is derived. This potential is called elastic strain energy $\Psi = \Psi(\epsilon^e)$. In the case of isotropic materials, $\Psi(\epsilon^e)$ depends on the invariants of σ' and ϵ^e .

$$\sigma' = F(\epsilon^e) = \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \epsilon^e} \quad (41)$$

From the expression (41), it is verified that this type of models complies with the First Principle of Thermodynamics, thus not allowing energy to be generated in stress/strain closed cycles.

$$\Psi(\epsilon^e) = \oint \sigma' : \dot{\epsilon}^e = \oint \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \epsilon^e} : \dot{\epsilon}^e = \oint \dot{\Psi}(\epsilon^e) = 0 \quad (42)$$

Hereunder, the most general expression of $F(\cdot)$ for isotropic materials is derived. For that purpose, the strain tensor invariant moments $\hat{I}_i^{\epsilon^e} = (1/i)tr(\epsilon^{e i})$ are defined. Using the chain rule, the following is obtained:

$$\sigma' = \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_1^{\epsilon^e}} \frac{\partial \hat{I}_1^{\epsilon^e}}{\partial \epsilon^e} + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_2^{\epsilon^e}} \frac{\partial \hat{I}_2^{\epsilon^e}}{\partial \epsilon^e} + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_3^{\epsilon^e}} \frac{\partial \hat{I}_3^{\epsilon^e}}{\partial \epsilon^e} = \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_1^{\epsilon^e}} \mathbf{1} + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_2^{\epsilon^e}} \epsilon^e + \frac{\partial \Psi(\epsilon^e)}{\partial \hat{I}_3^{\epsilon^e}} \epsilon^{e2} \quad (43)$$

And using the notation $\Psi_i(\epsilon^e) = \partial \Psi(\epsilon^e) / \partial \hat{I}_i^{\epsilon^e}$, expression (44) is obtained:

$$\sigma' = \Psi_1(\epsilon^e) \mathbf{1} + \Psi_2(\epsilon^e) \epsilon^e + \Psi_3(\epsilon^e) \epsilon^{e2} \quad (44)$$

As can be seen, the expression (44) has the same form as the expression (33). Nevertheless, the coefficients $\Psi_i(\epsilon^e)$, unlike $\phi_i(\epsilon^e)$, satisfy the theorem of Schwartz, which implies the integrability conditions $\partial^2 \Psi(\epsilon^e) / \partial \hat{I}_i^{\epsilon^e} \partial \hat{I}_j^{\epsilon^e} = \partial^2 \Psi(\epsilon^e) / \partial \hat{I}_j^{\epsilon^e} \partial \hat{I}_i^{\epsilon^e}$, from which it follows that the tangent elastic stiffness and flexibility tensors have greater symmetry in hyperelastic models and it can be demonstrated that this is a necessary condition to comply with the First Principle of Thermodynamics. These conditions do not have to be complied in the elastic models of Cauchy or in pseudo-elastic models.

The constitutive incremental equation in the hyperelastic models is expressed as follows:

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_t : \dot{\epsilon}^e = \frac{\partial^2 \Psi(\epsilon^e)}{\partial \epsilon^e \otimes \partial \epsilon^e} : \dot{\epsilon}^e \quad (45)$$

Several authors developed hyperelastic models that consider the relation $G = G(p')$ (Loret, 1985; Houlsby, 1985; Borja et al., 1997; Sulem et al., 1999; Einav and Puzrin, 2004; Houlsby et al., 2005). Such models, in the case of isotropic materials, adopt the following decoupled form $\dot{\sigma}'_{oct} = 3K'_t \dot{\epsilon}_{oct}^e + J_t \dot{\gamma}_{oct}^e$ and $\dot{\tau}_{oct} = G_t \dot{\gamma}_{oct}^e + J_t \dot{\epsilon}_{oct}^e$.

The hyperelastic models:

- Are nonlinear models.
- Do not distinguish between stiffness in loading and unloading /reloading and, therefore, cannot reproduce the hysteretic behavior of the soil.
- Do not consider the effect of recent history on soil stiffness.
- Introduce a great number of parameters, which are often difficult to obtain from simple tests.
- In stress/strain closed cycles, they conserve stress and strain, $\oint_{\epsilon^e} \mathbf{E}'_t : \dot{\epsilon}^e = 0$ and $\oint_{\sigma'} (\mathbf{E}'_t)^{-1} : \dot{\sigma}' = 0$.

- Satisfy the theoretical requirements of continuity, stability, uniqueness and the First Principle of Thermodynamics, $\oint_{\epsilon^e} \sigma': \dot{\epsilon}^e = 0$.

7.1.2.2.3. Differential formulation

7.1.2.2.3.1. Hypoelastic *stricto sensu* models

Incrementally linear hypoelastic *stricto sensu* models consider the existence of tensorial functions that relate the stress increments with total strains, total stresses and strain increments. Such models do not directly define the tensorial function $F(\cdot)$, but this results from integrating the incremental constitutive equation (46), giving place to the expression (47).

$$\dot{\sigma}' = E'_t(\sigma') : \dot{\epsilon}^e \quad (46)$$

$$\sigma' = \int \dot{\sigma}' dt = \int E'_t(\sigma') : \dot{\epsilon}^e dt \quad (47)$$

Where $E'_t(\sigma')$, in its most general form, depends on 12 functions C_i , which in turn depend on the three invariants of σ' , as $E'_t(\sigma') = C_1 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + C_2 \sigma' \otimes \mathbf{1} + C_3 \sigma'^2 \otimes \mathbf{1} + C_4 \mathbf{1} \otimes \sigma' + C_5 \sigma' \otimes \sigma' + C_6 \sigma'^2 \otimes \sigma' + C_7 \mathbf{1} \otimes \sigma'^2 + C_8 \sigma' \otimes \sigma'^2 + C_9 \sigma'^2 \otimes \sigma'^2 + C_{10}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + C_{11}(\sigma' \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma') + C_{12}(\sigma'^2 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma'^2)$.

Unlike the algebraic formulation and the integral formulation exposed in the previous sections, the recent history in the constitutive law of the material is considered in the hypoelastic formulation. That is why hypoelastic models *stricto sensu* are not elastic models *per se*.

The incrementally linear hypoelastic models (hypoelastic *stricto sensu*):

- Are nonlinear models.
- Do not distinguish between stiffness in loading and unloading /reloading and, therefore, cannot reproduce the hysteretic behavior of the soil.
- The extension of these models gave place to the appearance of quasi-hypoelastic models, framed within the incrementally multilinear models. Quasi-hypoelastic models do allow the hysteretic behavior of the soil to be reproduced, since they introduce different stiffness depending on whether the processes are of loading or unloading type, and define the reversal criteria, the memory rules and the effect that reversals have on the variables which control the degradation of stiffness and on the maximum soil stiffness.
- Consider the effect of recent history on soil stiffness.
- Constitute simple formulations from a conceptual and mathematical point of view.
- The parameters of the models are, in general, easy to obtain from simple tests.
- In stress/strain closed cycles, they do not conserve the values of stress and strain, $\oint_{\epsilon^e} E'_t : \dot{\epsilon}^e \neq 0$ and $\oint_{\sigma'} (E'_t)^{-1} : \dot{\sigma}' \neq 0$.
- Depending on the selection of soil parameters, they can generate energy in stress/strain closed cycles, thus transgressing the thermodynamic principles, $\oint_{\epsilon^e} \sigma' : \dot{\epsilon}^e \neq 0$.
- Simulations with these types of models should be limited to the stress and strain trajectories corresponding to the tests with which their parameters were obtained.

7.2. Incrementally multilinear models

The number of tensorial zones $\#Z$ considered in the incrementally multilinear models is a finite number greater than one. These models are capable of reproducing nonlinear, hysteretic and dependent on recent history soil behavior.

7.2.1. Hysteretic models

Hysteretic models emerged with the aim of simulating hysteretic soil behavior in the range of small strains originally in dynamic problems. Assuming that the hysteretic behavior of the soil was perfect, deformations in it would be recoverable only if the stress/strain cycles that started from the same reversal point were closed. This behavior differs from the reversible behavior of elastic models and the irreversible behavior of elastoplastic models, as can be seen in *Figure 28*.

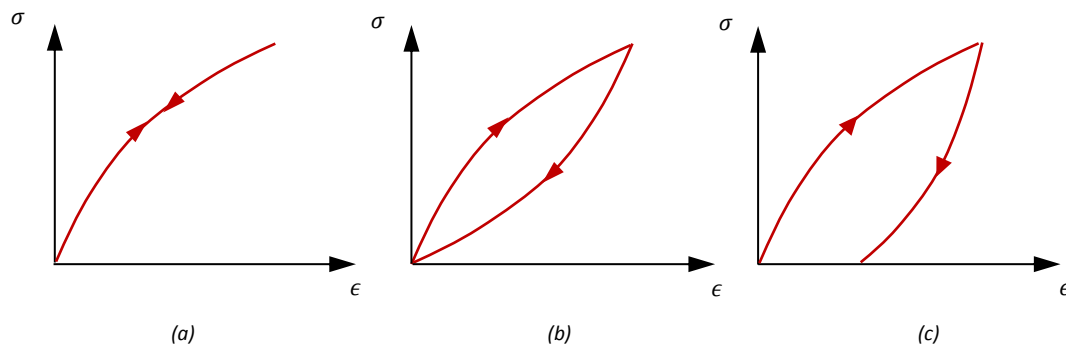


Figure 28. Schematic representation of soil behavior in different types of models.
 (a) Nonlinear elastic. (b) Hysteretic. (c) Elastoplastic.

Nevertheless, reality does not show a perfect hysteretic soil behavior. Indeed, Hueckel and Nova (1979) point to the elements described in section 6.3.1 that distance the real soil behavior from such idealization (Figure 29):

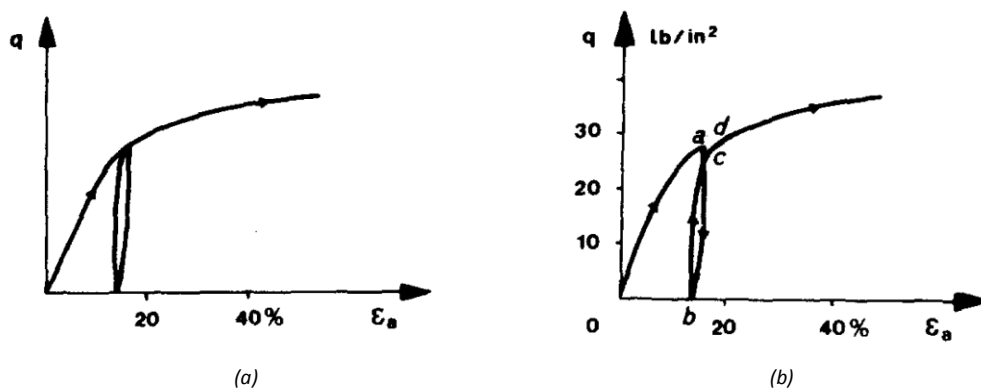


Figure 29. (a) Loading cycle according to the model of Hueckel and Nova. (b) Real loading cycle with jump in the strain between a and d when reaching the same level of stress. Hueckel and Nova (1979).

7.2.1.1. Praelasticity

A particular type of hysteresis is the so-called praelastic hysteresis or praelasticity, a theory that was developed by Hueckel and Nova (1979), being one of the fundamentals in this field. The term praelastic refers precisely to the fact that strains reversibility is conditioned to the closure of the cycles (Figure 30). The praelastic models consider that soil stiffness degrades as a function of variables that depend on the praelastic strains $\epsilon^{pe} = \epsilon^e + \epsilon^{mp}$, sum of the elastic strains ϵ^e and the microplastic strains ϵ^{mp} , the latter reversible only under the condition of the corresponding stress/strain cycle closure.

Table 2 analyzes the stiffness formulation, the treatment of hysteretic behavior and general aspects of some praelastic hysteretic models.

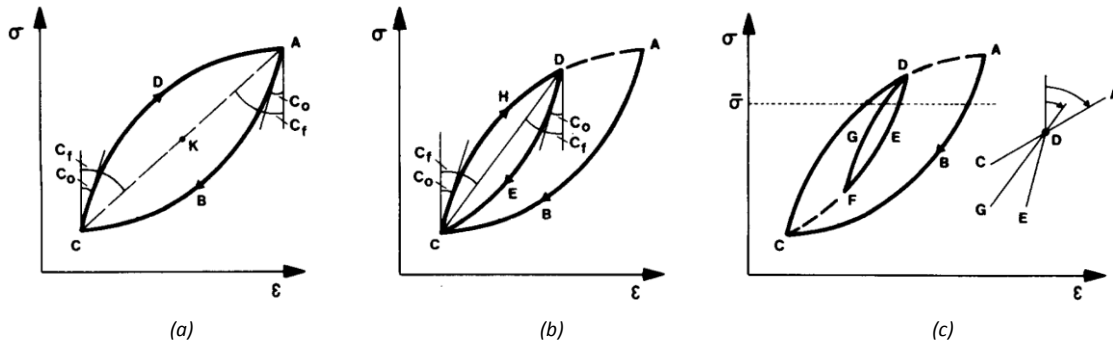


Figure 30. Idealization of the hysteretic behavior of paraelastic models (Hueckel and Nova, 1979).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Hueckel and Nova (1979)	$\Delta L \epsilon^{pe} = C(\chi^{hist,L}): \Delta L \sigma'$ $\Delta L \epsilon^{pe} = \epsilon^{pe} - \epsilon^{peL}$ $\Delta L \sigma' = \sigma' - \sigma'^L$ $C(\chi^{hist,L}) = C_0 \cdot (1 + \chi^{hist,L} \Omega)$ $\chi^{hist,L} = (\Delta L \epsilon^{peT} : \Delta L \epsilon^{pe})^{1/2}$	<ol style="list-style-type: none"> Reversal criterion: intrinsic, $\Delta L \sigma': C(\chi^{hist,L}): C(\chi^{hist,L}): \sigma' \geq 0$. Memory rules: can store information of all reversal points using two levels of memory (1st for the constitutive equation and 2nd for recent history). Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous recovery of stiffness with the rotation angle of the recent stress/strain trajectory. 	Introduces the concept of paraelasticity. The model proposes a fundamental theoretical framework in which several subsequent models have been based.
Niemunis et al. (2011a, 2011b)	$H'(\bar{f}, \bar{\chi}, d_{AR1}) = (1 - \bar{f} d_{AR1}^{\bar{\chi}}) E'_{max}$ $d_{AR1} = - \frac{AR1 e: AR1 e}{AR1 e: N^{R1}}$ $AR1 e = \epsilon^{pe} - R1 \epsilon^{pe}$ <p>$R1 N$ normal exterior to the loading circle from the last reversal point $R1$</p> $E'_{max} = \bar{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\bar{\mu} \mathbb{I}$	<ol style="list-style-type: none"> Reversal criterion: intrinsic, $d_{AR1}^{n+1} < d_{AR1}^n$. Memory rules: can store information of all reversal points using two levels of memory (1st for the constitutive equation and 2nd for recent history). Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous recovery of stiffness with the rotation angle of the recent stress/strain trajectory. 	Based on the model of Hueckel and Nova (1979). $H' \approx C^{-1}$. Modifies the norm d_{AR1} with which the distance to the last reversal point is measured in order to avoid discontinuities (this norm considers the diameter of the loading circle instead of its radius).

Table 2. Paraelastic hysteretic models.

7.2.1.2. Quasi-hypoelastic hysteretic models

Among the incrementally multilinear models stand out the models here denominated quasi-hypoelastic hysteretic, which have been normally used to simulate soil behavior in the range of small strains. A widespread methodology to build quasi-hypoelastic hysteretic models is to incorporate the elements that allow reproducing the hysteretic behavior of the soil into quasi-hypoelastic models, for example, through the generalized Masing Rules (Masing, 1926; Pyke, 1979). Quasi-hypoelastic models simulate soil behavior during monotonous loadings and resemble hypoelastic models, although instead of elastic stiffness moduli they use apparent stiffness moduli which act on total, non-elastic, strains. Following the classification of Sellers (1989), quasi-hypoelastic models can be classified into two types depending on how their parameters are defined:

- Variable parameter models (Duncan and Chang, 1970; Desai, 1971; Richard and Abbot, 1975) are those that propose a relation between stress and strain based on nonlinear functions (hyperbolic, elliptical, logarithmic, spline, etc.). Variable parameter models can generally be reformulated as variable moduli models.

- Variable moduli models (Nelson and Baron, 1971; Nelson 1977; Sandler, 1976; Sandler and Baron, 1979) are those that propose nonlinear functions to describe apparent volumetric and shear stiffness moduli in a constitutive equation with an algebraic structure equal to that of an elastic model.

The general constitutive equation of the variable moduli models usually adopts the following expression:

$$\sigma' = 3K_s'^{ap}(p', \epsilon_{oct}, \chi^{hist})\epsilon_{oct}\mathbf{1} + 2G_s'^{ap}(p', \gamma_{oct}, \chi^{hist})e \quad (48)$$

$$\dot{\sigma}' = 3K_t'^{ap}(p', \epsilon_{oct}, \chi^{hist})\dot{\epsilon}_{oct}\mathbf{1} + 2G_t'^{ap}(p', \gamma_{oct}, \chi^{hist})\dot{e} \quad (49)$$

According to the expressed by Tamagnini and Viggiani (2002), the following decomposition of secant stiffness modulus is usually considered based on experimental observations: $K_s'^{ap}(\sigma'_{oct}, \epsilon_{oct}, \chi^{hist}) = K_{s0}'^{ap}(p')f_{K_s'^{ap}}(\epsilon_{oct}, \chi^{hist})$ and $G_s'^{ap}(\sigma'_{oct}, \gamma_{oct}, \chi^{hist}) = G_{s0}'^{ap}(p')f_{G_s'^{ap}}(\gamma_{oct}, \chi^{hist})$. Furthermore, according to Tamagnini and Viggiani (2002), the popularity of quasi-hypoelastic hysteretic models come from its relative simplicity and easy incorporation into finite element numerical codes for solving practical engineering problems, as can be seen in the work of Jardine and Potts (1988) and St. John et al. (1993). Nelson (1977), Pyke (1986) and Tamagnini and Viggiani (2002) point out some disadvantages in relation to the quasi-hypoelastic hysteretic models:

- Lack of continuity during neutral loading processes.
- Functions $f_{K_s'^{ap}}(\epsilon_{oct}, \chi^{hist})$ and $f_{G_s'^{ap}}(\gamma_{oct}, \chi^{hist})$ are calibrated from tests with concrete stress or strain trajectories that can be very different from trajectories followed by the soil in practical applications.
- The used constitutive equation implies that stress and strain increases are coaxial, which does not always correspond to experimental observations (Frydman et al., 1995). Nevertheless, it should be considered that in the tests used to calibrate these models this coaxiality will generally be complied.
- To reproduce the hysteretic behavior of the soil, loading/unloading criteria that can lead to numerical instabilities are introduced.
- The dependence of $G_{s0}'^{ap}(p')$ implies that the shear modulus depends on the volumetric strain, $G = G(\gamma_{oct}, \epsilon_{oct}, \chi^{hist})$ which, in case of not considering the coupling modulus J , may not be thermodynamically consistent.

7.2.1.2.1. Generalized Masing rules

A common and widespread way to build hysteretic models from models that simulate the nonlinear behavior of the soil during monotonous loadings is through the application of the original and extended Masing Rules (Masing, 1926; Pyke, 1979), jointly denominated as generalized Masing rules, to which the corresponding loading/unloading criteria must be added. Such rules are formulated in a one-dimensional stress or strain context, although the extension to multiaxial states can be made with an appropriate change in the variables. For the case exposed, the Masing rules consider that the state variables χ^{hist} are identified with the total strains ϵ , although, as Gudehus (2011) indicates, despite these variables χ^{hist} can be formally treated as strains, they cannot be physically interpreted as such. The original Masing rules 1 and 2 (Masing, 1926) for symmetric loadings, along with the extended Masing rules 3 and 4 (Pyke, 1979) are the following:

1. **Rule No. 1:** For the noval loading, the constitutive law adopts the expression $\sigma' = F(\epsilon)$. In general, this relation considers the total strain ϵ . This is because in the tests used to calibrate the nonlinear function $F(\cdot)$ the reversible and irreversible strain components are not separated.
2. **Rule No. 2:** In a loading or unloading, after a reversal point R , the constitutive law considers a two-scale factor in regard to the constitutive law for the noval loading, taking as reference the local origin given by the reversal point (σ'^R, ϵ^R) , as $\sigma' - \sigma'^R = 2F((\epsilon - \epsilon^R)/2)$. In general, this relation also considers the total strain ϵ , although in elastoplastic models, this will generally coincide with elastic strain, as this law is activated within elastic domain. Rule No. 2 can also be applied through the strategy used by Pyke (1979) or Hashiguchi (1993).
3. **Rule No. 3:** If the unloading or reloading curves intersect the initial loading curve, they resume such curve.
4. **Rule No. 4:** If the unloading or reloading curves intersect a previous unloading or reloading curve, they resume such curve.

7.2.1.2.2. Some quasi-hypoelastic hysteretic models

Some models that are classified as quasi-hypoelastic hysteretic models are described and analyzed hereafter. They all are variable parameter models, except for the SSOM model (Benz, 2007) and the HQH model (Castellón, 2019), which are variable moduli models. Nevertheless, practically all of them can be reformulated as variable moduli models, which allows obtaining the equivalent apparent stiffness moduli in each case. In these type of models, the state variables that control the value of the stiffness moduli are identified with those proposed by Gudehus (2011) to describe the hysteretic behavior of the soil. In all the models studied in this section, excluding the SSOM and HQH models, it is necessary to define *ad hoc* components that allow reproducing hysteretic soil behavior (see section 6.3), for example, through the generalized Masing Rules.

Tables 3, 4 and 5 analyze the small strain stiffness formulation and general aspects of some quasi-hypoelastic hysteretic models.

Model	Small Strain Stiffness	Comments
Ramberg and Osgood (1943)	$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \alpha \left \frac{\tau}{\tau_f} \right ^{\bar{r}-1}}$	Expression resulting from the modification of the Ramberg and Osgood (1943) one according to Idriss et al. (1978) and Hara (1980), which assumes $\tau_y = \tau_f = G_0 \gamma_r$. Numerical examples in Ishihara (1996).
Kondner and Zelasco (1963)	$E'_s{}^{ap} = \frac{1}{\bar{a} + \bar{b}\epsilon_1}$	Hyperbolic model initially developed by Kondner (1963). $\bar{a} = 1/E'_i$ and $\bar{b} = 1/q_{ult}$ are considered (example of parameter setting can be found in Duncan and Wrong (1974)). Janbu (1963) proposed an expression for E'_i .
Hansen (1963)	$E'_s{}^{ap} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_1(a' - b'\epsilon)}}$	Parabolic model conceived to reproduce soil behavior under spread footings subjected to static loadings.
Duncan and Chang (1970)	$E'_s{}^{ap} = \frac{1}{1/E'_i + \frac{R_f}{q_f}\epsilon_1}$	Hyperbolic model based on the model of Kondner (1963) and Kondner and Zelasco (1963). It introduces the factor R_f that takes values between 0,75 and 1,0. q_f can be estimated with the Mohr-Coulomb criterion. The expression of Janbu (1963) is considered for E'_i . Duncan et al. (1980) proposed an expression for $K'_s{}^{ap}$ and $E'_{t,ur}$. Kulhawy et al. (1969) proposed an expression for v'_i . The model has been successfully applied in diverse problems (Duncan et al. 1980; Mana and Clough, 1981; Seed and Duncan, 1986).
Desai (1971)	Spline functions	Spline functions (Ahlberg et al. 1967) are used to set experimental data with nonlinear curves that represent constitutive relations. Desai (1971) use cubic functions. Despite the precision in curve fitting, the computational cost is high.
Hardin and Drnevich (1972)	$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \gamma_h}$ $\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r} \left(1 + a'' e^{-b'' \frac{\gamma}{\gamma_r}} \right)$	Hyperbolic model based on tests with resonant column.
Pyke (1979)	$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \left \frac{\gamma - \gamma_c}{\xi \gamma_r} \right }$	Hyperbolic model.
Jardine et al. (1986)	$E_{s,u}^{ap} = c_u \left(\bar{A} + \bar{B} \cos \left(\bar{\alpha} \left(\log_{10} \left(\frac{\epsilon_1}{\bar{C}} \right) \right)^{\bar{\gamma}} \right) \right)$	Model for undrained isotropic materials. The model is valid for $\epsilon \in [\epsilon_{min}, \epsilon_{max}]$, and assumes $\nu = 0,49$. It provides satisfactory results in simulations of triaxial compression tests in slightly overconsolidated low plasticity clays under undrained conditions.
Prévost and Keane (1990)	$G_s^{ap} = G_0 \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 + G_0 \gamma} - Q \right)$ $Q = \frac{\tau_1^2 / G_0^2}{(\tau_1 / G_0 + \gamma_{max})^2} \frac{1}{\gamma_{max}^{m'}} \frac{\gamma^{m'}}{m' + 1}$	Hyperbolic model to reproduce soil behavior subjected to static and dynamic loadings, under small and large deformations.

Table 3. Quasi-hypoelastic models (1/3).

Model	Small Strain Stiffness	Comments
Jardine et al. (1991)	$3 \frac{G_s^{ap}}{p'} = C_1 + C_2 \cos \left(\bar{\alpha} \left(\log_{10} \left(\frac{\epsilon_s}{\sqrt{3} C_3} \right) \right)^{\bar{\gamma}} \right)$ $\frac{K'_s{}^{ap}}{p'} = C_4 + C_5 \cos \left(\bar{\delta} \left(\log_{10} \left(\frac{ \epsilon_v }{C_6} \right) \right)^{\bar{\eta}} \right)$	Extension of the model of Jardine et al. (1986).
Tatsuoka and Shibuya (1992)	$Y = \frac{X}{\frac{1}{C_1(X)} + \frac{X}{C_2(X)}}$ $C_i(X) = A_i + B_i \cos \left(\pi \left(\left(\frac{\theta'_t}{X} \right)^{d_i} + 1 \right)^{-1} \right)$	Hyperbolic model for small, medium and large deformations. It is applicable to sands under compression, constant confinement and plane strain conditions. Applications in Chiaro et al. (2011). The results obtained in the analysis of several problems of bearing capacity in sands under plane strain conditions have been satisfactory (Tatsuoka and Shibuya 1991, 1992, Siddiquee, 1991; Siddiquee et al., 1991, 1992).
Matasovic and Vucetic (1993)	$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \beta'' \gamma_h^{\bar{s}}}$ $\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r}$	Based on the hyperbolic model of Kondner and Zelasko (1963) and in the work of Matasovic (1993). Comparison with the model of Kondner and Zelasko (1963) is done in the work of Stewart et al. (2008).
Ishibashi and Zhang (1993)	$G_s^{ap} = G_0 K(\gamma, Pl) \sigma'_0 (\sigma'_v, K_0)^{\bar{m}(\gamma, Pl)}$	Model for plastic soils based on the research of Hardin and Drnevich (1972), Iwasaki et al. (1978), Tatsuoka et al. (1979), Kokusho (1980), Kokusho et al. (1982), Ishibashi (1981) and Dobry and Vucetic (1987).
Fahey and Carter (1993)	$G_s^{ap} = G_0 \left(1 - f \left(\frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^g \right)$	Model for sands.
Mayne (1994)	$G_s^{ap} = G_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_{max}} \right)^{\bar{m}}$	The model of Mayne (1994) is equivalent to that of Fahey and Carter (1993) for $\bar{m} = f = g = 1$.
Shibuya et al. (1997)	$E'_t{}^{ap} = E'_{max} \left(1 - \left(\frac{\dot{q}}{\dot{q}_{max}} \right)^{\bar{m}'} \right)^{\bar{n}'}$	Hybrid model of those of Fahey and Carter (1993) and Mayne (1994).
Bolton and Whittle (1999)	$G_s^{ap} = \bar{\alpha}' \gamma^{\bar{\beta}' - 1}$	Based on previous works such as those of Gunn (1992) or Bolton et al. (1993). The model provides a good approximation in the simulation of presuremeter tests (Bolton and Whittle, 1999).
Lee and Salgado (1999)	$G_s^{ap} = G_0 \left(1 - \hat{f} \left(\frac{\sqrt{J} - \sqrt{J_0}}{\sqrt{J_{max}} - \sqrt{J_0}} \right)^{\hat{g}} \right) \left(\frac{p'}{p'_0} \right)^{n_g}$	Subsequently developed by Lee and Salgado (2000, 2002), it is a generalization to the multiaxial case of the model of Fahey and Carter (1993). Simulations can be found in the work of Lee et al. (2004).
Lehane and Cosgrove (2000)	$E'_s{}^{ap} = \frac{E'_{max}}{1 + \left(\frac{\epsilon - \epsilon_{th}}{\epsilon_r - \epsilon_{th}} \right)^{\bar{n}}}$ if $\epsilon_1 \geq \epsilon_{th}$ $E'_s{}^{ap} = E'_{max}$ if $\epsilon_1 < \epsilon_{th}$	Hyperbolic model for the calculation of settlements in spread footings on sands.
Atkinson (2000)	$E'_t{}^{ap} = E'_{max} \left(\frac{1 - \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon} \right)^{r'}}{1 - \left(\frac{\epsilon_f}{\epsilon_{th}} \right)^{r'}} \right)$ if $\epsilon_1 \geq \epsilon_{th}$ $E'_t{}^{ap} = E'_{max}$ if $\epsilon_1 < \epsilon_{th}$	-
Darendeli and Stokoe (2001)	$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + \gamma_h^{\hat{a}}}$ $\gamma_h = \gamma / \hat{\gamma}_r$	Based on the model of Hardin and Drnevich (1972). Darendeli and Stokoe (2001) proposed an expression for γ_h . They applied their model to problems with cohesive soils. Subsequently, Menq (2003) proposed expressions for $\hat{\gamma}_r$ and \hat{a} in granular soils and applied the model to problems with sands and gravels.
Dos Santos and Correia (2001)	$G_s^{ap} = \frac{G_0}{1 + a \gamma_h}$ $\gamma_h = \gamma / \gamma_{0.7}$	Based on the hyperbolic model of Hardin and Drnevich (1972). Vucetic and Dobry (1991) and Vucetic (1994) proposed $\gamma_{0.7} = 0,0021 I_p - 0,0055$. The value of the parameter a has been selected through a least square adjustment.

Table 4. Quasi-hypoelastic models (2/3).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
SSOM (Benz, 2007)	$\gamma_{HIST} = \sqrt{3} \frac{\ \dot{\mathbf{e}} \cdot (\mathbf{H} - \mathbf{1})\ }{\ \dot{\mathbf{e}}\ }$	<p>1. Reversal criterion: extrinsic, $\lambda_{s_i}((H_s)_{ii} - 1) < 0$.</p> <p>2. Memory rules: stores information of a limited number of reversal points (\mathbf{H} acts like a Simpson triple brick model) which allows complying the generalized Masing Rules No. 1, No. 2, No. 3 and, partially, No. 4. The state variable \mathbf{H} is totally reinitialized after a total reversal and partially reinitialized after a partial one. When the SSOM model is used by itself, $\xi = 1$ for noval loading and $\xi = 2$ for unloading/reloading (Hashiguchi, 1993). When the SSOM model is combined with an elastoplastic model, $\xi = 2$ always and a factor $h_i(G_m)$ that modifies hardening laws is used.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total or partial reinitialization after reversals.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.</p>	<p>It uses the expression of G_s^{ap} proposed by Dos Santos and Correia (2001) to which introduces the dependence on the confinement. The value of G_t is limited inferiorly by $G_{ur} = G_t(\gamma_c)$. It considers a single degradation curve. As well, it considers two state variables (\mathbf{H} and G_m), being G_m used when the SSOM model is combined with a plastic model. For the deduction of G_t, the relation $\tau_{oct} \approx G_s^{ap} \gamma_{HIST}$ is assumed instead of $\tau_{oct} \approx G_s^{ap} \gamma_{oct}$. It is not conservative as long it assumes $v'_{ur} = cte$ (Zytnski et al., 1978). A thermodynamic correction is applied on G_t^{ap}. It can be combined with several plastic models. The required parameters are few and simple.</p>
	$G_s^{ap} = G_0 \left(1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST}}{\xi \gamma_{0,7}} \right) \right)^{-1}$		
	$G_t^{ap} = G_0 \left(1 + a \left(\frac{\gamma_{HIST}}{\xi \gamma_{0,7}} \right) \right)^{-2}$		
	$G_0 = G_0^{ref} \left(\frac{\sigma'_3 + c' \cot \varphi'}{p'_{ref} + c' \cot \varphi'} \right)^m$		
	$K_t^{rap} = \frac{2G_t^{ap}(1 + v'_{ur})}{3(1 - 2v'_{ur})}$		
	$\text{if } \gamma_{HIST} > \gamma_c$		
	$G_{t,ur} = G_{t,ur}^{ref} \left(\frac{\sigma'_3 + c' \cot \varphi'}{p'_{ref} + c' \cot \varphi'} \right)^m$		
	$K_t^{rap} = \frac{2G_{t,ur}(1 + v'_{ur})}{3(1 - 2v'_{ur})}$		
HQH (Castellón, 2019)	$\text{if } \gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$	<p>1. Reversal criterion: intrinsic. Considers reversals that affects stiffness when $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$, and reversals that as well affects memory variable when $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.</p> <p>2. Memory rules: stores recent information in \mathbf{h}, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, \mathbf{e}^R, $\mathbf{e}^{e,R}$, that constitute short-term memory variables. \mathbf{h} and $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ can be totally or partially reinitialized after a reversal. \mathbf{e}^R and $\mathbf{e}^{e,R}$ are totally reinitialized after a reversal. Likewise, the information of all active reversal points is stored in \mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e that constitute long-term memory variables, which allows complying the generalized Masing Rules No. 1, No. 2, No. 3 and, partially, No. 4, although to a greater extent than in the SSOM model. When the HQH model is used by itself, $\xi = 1$ for noval loading and $\xi = 2$ for unloading/reloading (Hashiguchi, 1993). When the HQH model is combined with an elastoplastic model, $\xi = 2$ always and defines the factor $h_i(G_m)$ that modifies the hardening laws.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total or partial reinitialization after reversals.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: continuous stiffness recovery.</p>	<p>It uses the expression of G_s^{ap} proposed by Dos Santos and Correia (2001), to which introduces the dependence on the mean pressure. The value of G_t is limited inferiorly by $G_{ur} = G_t(\gamma_{ur}^{\alpha})$. It considers infinite degradation curves of the shear modulus, which provides the model with versatility and great adaptability to experimental results. As well, it considers 8 state variables (\mathbf{h}, $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, \mathbf{e}^R, $\mathbf{e}^{e,R}$, \mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}^e and G_m), being G_m used when is combined with a plastic model, which can be replaced by the application of the criterion of Hashiguchi (1993) taking advantage of the memory layers structure of the model, based on that of the model of Hueckel and Nova (1979). The state variable \mathbf{h} is based on the structure of the integranular strain tensor of the model of Niemunis and Herle (1997). The HQH model considers strain-induced anisotropy. It is not conservative, even though it considers a variable drained Poisson's ratio as long as $v' \geq v'_{min}$. A thermodynamic correction is applied on $\hat{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$. It can be combined with several plastic models. The parameters that require are few and simple.</p>
	$G_s^{ap} = G_{s,0}^{ap,\alpha} \left(1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^H}{\xi \gamma_{0,7}} \right) \right)^{-1}$		
	$G_{s,0}^{ap,\alpha} = G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2}$		
	$\gamma_{oct}^H = \sqrt{4/3} \ \mathbf{h}\ $		
	$K'_s = K_s^{ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,1}} \right)^{m_1}$		
	$v' \geq v'_{min}$		
	$\hat{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \rightarrow \hat{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$		
$\text{if } \gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^{\alpha}$			
	$G_{t,ur} = G_{t,ur}^{ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2}$		
	$K'_t = K'_s \left(1 + \frac{\epsilon_{oct}^e}{3m_1 K'_s - \epsilon_{oct}^e} \right)$		
	$v' \geq v'_{min}$		

Table 5. Quasi-hypoeleastic models (3/3).

7.2.1. Advanced models

The advanced models are those incrementally multilinear models that are capable of reproducing soil behavior in the entire strain range (Zones I, II, III and IV of Jardine (1992)).

7.2.1.1. Classic elastoplastic models

Classic elastoplastic models that consider soil behavior in the range of small strains add, to the elastic regime of the classic elastoplastic formulation, the nonlinear, hysteretic and dependent on history behavior of the soil through the incorporation of new state variables $\chi^{el,hist}$. This is normally attained by adopting the structure of a quasi-hypoelastic hysteretic model to describe the elastic formulation of the elastoplastic model. In this case, to calculate the stress, the apparent stiffness moduli are operated with the elastic strains and not with the total ones. According to Jardine (1992) and Jardine et al. (1991), this semiempirical methodology allows attaining very precise predictions thanks to the wide range of deformations considered, although its use entails a loss of generality and a lack of consistency of the theoretical framework on which it is underpinned. Among others, these assumptions lead to the following: (1) it is not correct to apply the elastic relations to the apparent stiffness moduli and (2) the mechanisms of the quasi-hypoelastic hysteretic models and the elastoplastic models that try to explain the reduction of soil stiffness during the noval loading processes, in comparison with the stiffness in unloading or reloading processes, are being overlapped. The basic equations used in classic elastoplastic models, generalized to the case of $k = 1 \dots q$ yield surfaces, are the following: (1) yield surfaces $f_k(\sigma', \chi_k^{pl}) = 0$, (2) plastic potentials $g_k(\sigma', \chi_k^{pl}) = 0$, (3) strains decomposition $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$, (4) constitutive equation within yield surfaces $\dot{\sigma}' = G(\epsilon, \sigma', \chi^{el,hist}, \dot{\epsilon})$, (5) plastic strains decomposition $\dot{\epsilon}^p = \sum_{k=1}^q \dot{\epsilon}_k^p$, (6) flow rules $\dot{\epsilon}_k^p = \dot{\lambda}_k \partial g_k(\sigma', \chi_k^{pl}) / \partial \sigma'$, (7) hardening laws $\dot{\chi}_k^{pl} = \dot{\lambda}_k h_k(\sigma', \chi_k^{pl})$, (8) consistency conditions $\dot{f}_k(\sigma', \chi_k^{pl}) = 0$ and (9) Karush-Kuhn-Tucker conditions $\dot{\lambda}_k \geq 0, f_k(\sigma', \chi_k^{pl}) \leq 0$ and $f_k(\sigma', \chi_k^{pl}) \dot{\lambda}_k = 0$.

The number of tensorial zones #Z that present these models will depend on the number of yield surfaces and the intersections in each case. In general, it will be complied that #Z = 2 in models with a single yield surface and #Z > 2 in models with multiple yield surfaces.

Tables 6 and 7 analyze small strain stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of some elastoplastic models that consider soil behavior in the range of small strains.

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
SDMCC (Bolton et al., 1994)	$G_{max} = A_G p^{n_1} OCR^{m_1}$ $G_t^{ap}(\epsilon_q) = B_G p^{n_2} OCR^{m_2} \epsilon_q^{b_3}$ $K_{max} = C_K p^{n_3} OCR^{m_3}$ $K_t^{ap}(\epsilon_v) = D_K p^{n_4} OCR^{m_4} \epsilon_v^{b_4}$ The plastic part is described with the MCC model.	1. Reversal criterion: extrinsic $\Delta \epsilon^{(n)}: \Delta \epsilon^{(n+1)} < 0$. 2. Memory rules: stores information of the last reversal point and applies the original Masing Rules (Masing, 1926). 3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals. 4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.	In the elastic zone, it is assumed $G_t^{ap} = G_{max}$ for $\epsilon_q < 10^{-5}$, and $G_t^{ap} = G_t^{ap}(\epsilon_q)$ for $10^{-5} < \epsilon_q < 10^{-2}$. The elastoplastic formulation of the MCC is assumed when $\epsilon_q > 10^{-2}$. Osman and Bolton (2005) introduced the nonlinearity of the elastic volumetric modulus K_t^{ap} . SDMCC model improves the approximations of surface settlements in centrifuge tests with overconsolidated clays in comparison with the MCC model.
HS-S of Benz (2007)	Same elastic formulation as the SSOM model. The plastic part is described with HS model in which some modifications are applied.	Idem SSOM.	The HS-S model adds, to the elastic formulation of the SSOM, the plastic formulation of the HS model on which it makes two modifications: (1) it replaces the dilatancy criterion of Rowe (1962) with that of Li and Dafalias (2000) to describe the contractive behavior of the soil and (2) modifies the hardening laws and introduces the factor $h_i = (G_m)^{1+E_{t,ur}^i/E_i^i}$. HS-S model significantly improves the approach to soil behavior provided by the HS model, although it has certain limitations (Benz, 2007).

Table 6. Elastoplastic models that consider soil behavior in the range of small strains (1/2).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
<i>HS-SS</i> implemented in Plaxis	Same elastic formulation as the SSOM model.	Idem SSOM.	The HS-SS model implemented in Plaxis (and recently in other numerical software) is based on the HS-S model. It is one of the few models widely used in geotechnical practice that considers soil behavior in the range of small deformations. Despite its great advantages, some aspects of the HS-SS model could be improved, and some inconsistencies whose effects can have a considerable influence on the numerical simulations of boundary value problems, as these are cumulative, should be corrected (Castellón, 2013; Plaxis, 2015). It uses known and relatively easy to obtain/estimate parameters.
<i>FC+MCC</i> (Gryczmanski and Uliniarz, 2008)	Elastic formulation of the model of Fahey and Carter (1993) within the yield surface of the MCC model.	Not defined.	The FC+MCC model incorporates elastic nonlinearity to the elastic formulation of the MCC model through the model of Fahey and Carter (1993). It is a nonconservative model as long as $v'_{ur} = cte$ and $K_t^{ap} = K_t^{ap}(G_t^{ap}, v'_{ur})$ (Zytynski et al., 1978).
<i>EPHYSS</i> (Castellón, 2019)		Idem <i>HQH</i> model.	The EPHYSS model adds, to the elastic formulation of the <i>HQH</i> model, the plastic formulation of the <i>HS</i> model on which it makes two modifications: (1) it replaces the dilatancy criteria of Rowe (1962) with that of Li and Dafalias (2000) to describe the contractive behavior of the soil and (2) it modifies the hardening laws and introduces the factor $h_i = (G_m)^{1+E'_{t,ur}/E'_i}$. It improves the approach to the soil behavior in the range of small strains with respect to the <i>HS-SS</i> model (Castellón, 2019) and corrects the numerical inconsistencies detected in it (Castellón, 2013, 2019; Plaxis, 2015). It uses known and relatively easy to obtain/estimate parameters.

Table 7. Elastoplastic models that consider soil behavior in the range of small strains (2/2).

7.2.1.2. Multisurface models

The multisurface models with kinematic hardening were initially developed by Iwan (1967) and Mróz (1967), based on previous works, as those of Duwez (1935) and Besseling (1958). Subsequently, Prévost (1977, 1978) extended these models and applied them to soil mechanics. These models consider diverse nested yield surfaces ($f^{(m)} = 0$, $m \geq 2$), generally in the stress space (Figure 31a). Each of these surfaces is activated at the moment when the stress state touches its contour, giving place to a finite decrement in the global plastic hardening modulus, which, at the same time, generates greater plastic strains (Figure 31b).

In this way, a discontinuous variation of elastoplastic stiffness is attained. When j nested yield surfaces are activated, and depending on the followed trajectory, they are displaced keeping their tangent at the contact points. The number, form, size and situation of the nested surfaces constitute the state variables χ^{hist} . The approximation to the soil behavior that these models provide depends on the number of nested yield surfaces considered, since a greater number of surfaces implies a softer variation in stiffness. However, if this number is high, it can be computationally expensive to use these models. Based on this limitation, bounding surface plasticity models and bubble models were created.

The multisurface models have two tensorial zones #Z, according to Tamagnini and Viggiani (2002).

Tables 8 and 9 analyze small strain stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of some multisurface models.

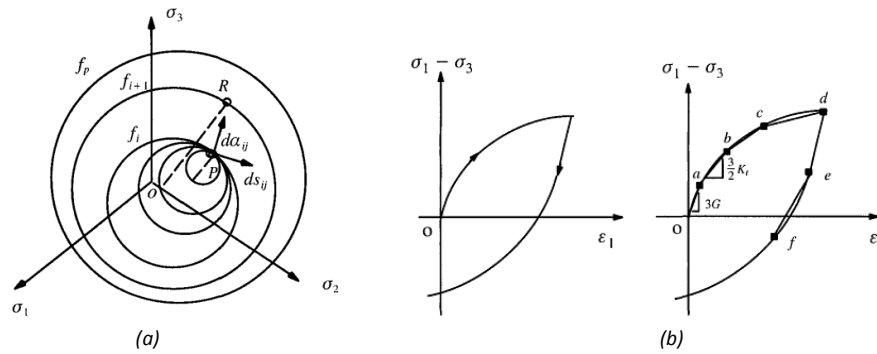


Figure 31. (a) Schematic representation of a multisurface model. (b) Experimental curve $q - \epsilon_1$ (left) and curve $q - \epsilon_1$ resulting from multisurface model (right). (Yu, 2006)

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Prévost (1977, 1978)	Linear elastic model within $f^{(m)} = 0$, $m = 1 \dots p$	<ol style="list-style-type: none"> Reversal criterion: intrinsic. When the stress trajectory leads to the take-off of nested yield surfaces. Memory rules: stores information of several reversal points based on the number of surfaces that take off. This information defines surfaces position until they are displaced again. Effect of reversals on degradation variables: total or partial reinitialization after reversals, depending on the number of surfaces that remain in contact. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery. If a large number of surfaces is considered, for practical purposes, it can be considered an almost continuous recovery. 	Anisotropic models based on the models of Mróz (1967), one for undrained conditions (Von Mises surface with associated flow rule) and another for drained conditions (Von Mises surface with non-associated flow rule and MCC surface, with associated flow rule). The undrained model has been used by Prevost et al. (1981) for the analysis of soil-structure interaction in centrifuge tests under static and dynamic loadings to simulate offshore structures subjected to waves, providing good results.
	<u>Hardening surfaces modulus in model for undrained conditions.</u>		
	$H^{(m)} = H^{(m)}(\xi'')$		
	$\xi'' = \int \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p\right)^{1/2}$		
Simpson et al. (1979)	<u>Hardening surfaces modulus in model for drained conditions.</u>	<ol style="list-style-type: none"> Reversal criterion: intrinsic. When strain trajectory is directed towards the interior of the KYS. Memory rules: stores information of the last reversal point. This information defines the position of the KYS until it is displaced again. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery. 	The KYS is defined in strain space. It allows simulating diverse laboratory and field tests with a relative success. It is able to approximate well the displacements generated by two large excavations in London clay.
	$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{H^{(m)}} AB$		
	$A = Q^{(m)} : \dot{s} + Q''^{(m)} \dot{p}'$		
	$B = P^{(m)} + P''^{(m)} \mathbf{1}$		
	<u>Small Strains:</u> Linear elastic behavior within KYS (which is assumed to be circular).		
	<u>Intermediate strains:</u> Elastoplastic behavior with anisotropic elasticity over the KYS and during its displacement. Strains not controlled by the plastic flow rule.		
	<u>Large strains:</u> Elastoplastic behavior. Strains controlled by the plastic flow rule.		

Table 8. Multisurface models (1/2).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Puzrin and Burland (1998)	<p><u>Within LER (linear elasticity):</u></p> $F_{LER} = 1 + n'^2(J/p')^2 - (a_{LER}/p')^2$ $K'_{LER} = K'_{LER}{}^{ref} (p'/p'_{ref})^{\hat{\beta}}$ $G_{LER} = G_{LER}{}^{ref} (p'/p'_{ref})^{\hat{\gamma}}$ <p><u>Within SSR and outside LER (nonlinear elasticity):</u></p> $F_{SSR} = 1 + n'^2(J/p')^2 - (a_{SSR}/p')^2$ $K' = K_{LER}(1 - \hat{\alpha}A_1)$ $G = G_{LER}(1 - \hat{\alpha}A_2)$ $A_1 = \frac{(x_v - x_e)R'(\ln a_1)^{R'-1}}{a_1} + (\ln a_1)^{R'}$ $A_2 = \frac{(x_D - x_e)R'(\ln a_2)^{R'-1}}{a_2} + (\ln a_2)^{R'}$ $a_1 = 1 + x_v - x_e$ $a_2 = 1 + x_D - x_e$	<p>1. Reversal criterion: intrinsic, $\dot{p}' < 0$ or $\dot{\gamma} < 0$.</p> <p>2. Memory rules: stores information of the last reversal point. This information defines the position of the LER and the SSR until the SSR is displaced again, which simultaneously cause LER displacement.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.</p>	<p>Puzrin and Burland (1998), after studying and evaluating the models of Kondner (1963), Hardin and Drnevich (1972), Griffiths and Prevost (1990), Tatsuoka and Shibuya (1992) and Jardine et al. (1986), and based on the works of Puzrin and Burland (1996), developed a model based on the theoretical framework of the work of Jardine (1992), distinguishing, in the stress space, three zones where the soil has different behaviors around any local origin constituted by a point of the stress trajectory. Addenbroke et al. (1997) proposed the generalization of the model of Puzrin and Burland to the multiaxial case and implemented it to analyze tunnel problems. Puzrin et al. (2001) extended the original model of Puzrin and Burland (1998), introducing the plastic behavior in a thermodynamically consistent formulation. The model provides good predictions of different stress trajectories in triaxial tests on unaltered Boothkennar clay.</p>

Table 9. Multisurface models (2/2).

7.2.1.3. Brick models

Most of the elastoplastic models for soils are formulated in the stress space, although some have been formulated in the strain space (Yingren et al., 1986; Simpson, 1992; Einav, 2004; Benz, 2007). Yoder and Iwan (1981), and Iwan and Chelvakumar (1988) highlight some of the advantages of the models that are formulated in the strain space. Although many of them have not prospered, the brick model of Simpson (1992) has given place to a theoretical framework that has subsequently been successfully applied to various models. Among them are the models of Benz (2007), on which the HS-SS model is based, the model of Clarke (2009) or the model of Ellison (2009).

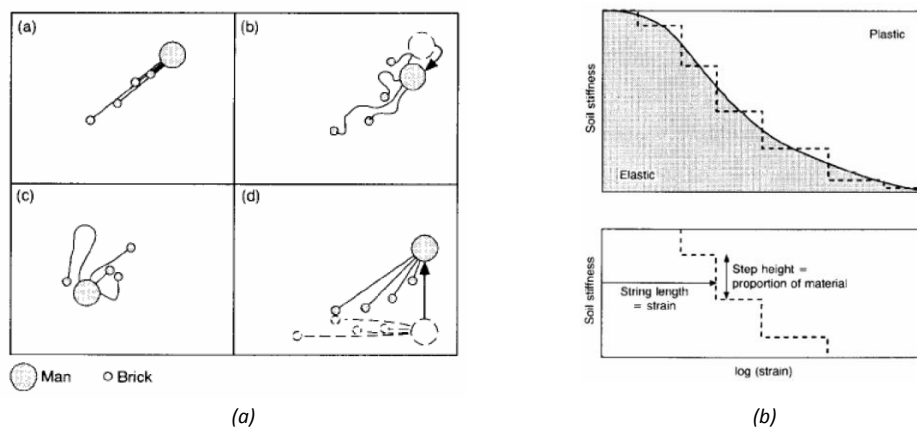


Figure 32. Brick model of Simpson (Simpson, 1992). (a) Scheme of the analogy of man dragging bricks tied by inextensible strings. (b) Degradation curve of the model.

To explain how the brick models works, Simpson (1992) uses an analogy in which he considers that soil behavior in the range of small strains resembles a person walking to whom a set of bricks have been attached to the feet by inextensible strings. The movement of the person represents the imposed strains trajectory and the movement of the bricks, the plastic strains. When any of the strings is not tensioned, the part of the plastic strain corresponding to such string is not generated. But when such string is tensioned, as the person is at a distance equal to that of the length of the string and in its direction of stretching, the respective plastic strains are activated, with the consequent decrease in the elastoplastic stiffness of the soil (*Figure 32*). The number and situation of the bricks constitute the state variables χ^{hist} .

To explain the advantages of working in the strain space, Ellison et al. (2010) state that, despite the connection between stress and strain, the changes in soil behavior are determined by micromechanical changes in its fabric, which is reflected at the macroscopic level as an accumulation of strains. Furthermore, they affirm that the anisotropy due to the orientation of the soil particles changes when large strains occur, even if the stress is the same at the beginning and at the end of these strains. Finally, they remember the well-known statement of Burland (1967) cited by Simpson (1992: 555): "stress is a philosophical concept—deformation is the physical reality". Ellison et al. (2010) conclude that the models formulated in the strain space are more suitable to explain the mechanisms that govern soil behavior. This approach allows explaining, in a relatively simple way, the observations made by Atkinson et al. (1990), Clayton and Heymann (2001), Gasparre (2005) and Gasparre et al. (2007). From a practical point of view, the models formulated in the strain space can be easily implemented in numerical models without the need to isolate, in each calculation step, the strain as an independent variable (Iwan and Chelvakumar, 1988), just as the models formulated in the stress space should do. In addition, as Yoder and Iwan (1981) demonstrate, the models formulated in the strain space do not have the problem of surface intersection, nor some of the instability problems that the models formulated in the stress space do.

Brick models consider as many tensorial zones as possible combinations of active and non-active bricks exist. If n bricks are considered, the maximum number of tensorial zones can be calculated as the sum of the possible combinations with repetition of 1 ... n bricks, plus the case in which no brick is active, that is, $\#Z = \sum_{i=0}^n n!/k! (n - k)!$.

Table 10 analyzes stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of some brick models.

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Simpson (1992)	Elastic stiffness when all bricks are deactivated. Reduction of stiffness due to the appearance of plastic strains associated with each of the active bricks ($\dot{\epsilon}^p = \sum \dot{\epsilon}_i^p$).	<p>1. Reversal criterion: intrinsic. When strain trajectory deactivates some of the active bricks.</p> <p>2. Memory rules: stores information of several reversal points based on the number and position of the bricks.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total or partial reinitialization after reversals depending on the position of the bricks.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery. If a large number of bricks are considered, for practical purposes, it can be considered an almost continuous recovery.</p>	The original model is formulated in the strain space, considering a plane strain state. A finite number of bricks is required to define the degradation curve. This model introduces the effect of soil overconsolidation through the parameter β_{mod} . A higher proportion of volumetric and elastic shear strains is assumed for higher mean pressure. It reproduces well the undrained trajectories, and worse the drained trajectories, unless the effect of dilatation is introduced. It does not reproduce the critical state, therefore it should be used in clays of high stiffness or its formulation should be extended.

Table 10. Brick models.

7.2.1.4. Bounding surface plasticity models

Bounding surface plasticity models were initially developed by Dafalias (1975), Krieg (1975), Dafalias and Popov (1975), and Dafalias and Herrmann (1982) with the aim of attaining a continuous evolution of the elastoplastic stiffness, which is extended to the interior of the yield surface in the range of small strains in these models, and of reducing, therefore, the computational cost of the multisurface models. Bounding surface plasticity models generally use two surfaces: an exterior surface, denominated bounding surface, and an interior surface, denominated current loading surface (*Figure 33*).

Between both surfaces, unlike the multisurface models, which consider n surfaces that give place to a discrete variation in stiffness, bounding surface plasticity models consider continuous functions to represent the plastic hardening modulus, obtaining continuous variations on stiffness (which is equivalent to consider $n \rightarrow \infty$ in multisurface models). The form, situation and orientation of both surfaces, along with other information stored at the last reversal point, constitute the state variables χ^{hist} .

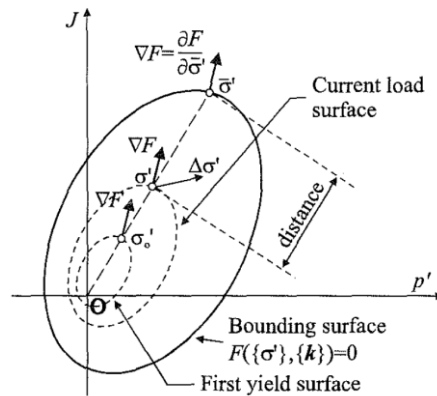


Figure 33. Schematic representation of the bounding surface plasticity (Potts and Zdravkovic, 1999).

The formulation of these models is based on that of the classic elastoplastic models, although unlike the latter, the bounding surface plasticity models consider plastic strains also during loading processes within the bounding surface ($OCR > 1$). Such plastic strains are made to depend on the distance between the current stress state, located on the current loading surface and the denominated image point located on the bounding surface plasticity, according to the mapping rules.

The number of #Z tensorial zones of these models, as indicated by Tamagnini and Viggiani (2002), is reduced to two when there is only one bounding surface and more than two in case there is a greater number of bounding surfaces (similar to the case of classic elastoplastic models with yield surfaces).

Tables 11, 12 and 13 analyze small strain stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of some bounding surface plasticity models.

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
MIT-E3 (Whittle, 1987)	$K'_t = \frac{vp'}{\kappa_0(1 + \delta)}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reversal criterion: extrinsic, $\chi' < 0$ (Ganendra, 1994). 2. Memory rules: stores information of the last reversal point ($\epsilon_{v,rev}$, E_{rev}), which also determine the size of the first yield surface. 3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals. 4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery. 	Based on the MIT-E1 model (Kavvasdas, 1982), MIT-E3 was initially developed by Whittle (1987), and subsequently by Whittle (1993), and Whittle and Kavvasdas (1994). In the works of Ganendra (1994) and Whittle (1995) discrepancies were analyzed in the previous formulations of the model and some alternative formulations were proposed. Several applications are found in the work of Whittle et al. (1994). It is not conservative as long as it assumes $v'_{cte} = cte$ (Zytynski et al., 1978). Whittle (1993) demonstrated the capacity of the MIT-E3 model to reproduce the behavior of different clay soils under diverse loading conditions. Nevertheless, this model requires parameters difficult to obtain experimentally and with which geotechnical engineers are unfamiliar.
	$G_t = \frac{3K'_t(1 - 2v'_{cte})}{2(1 + v'_{cte})}$		
	$\delta = Cn(\ln X - \omega X_s)^{n^*-1}$		
	$X = \begin{cases} p'/p'_{rev} & \text{if } p' \geq p'_{rev} \\ p'_{rev}/p' & \text{if } p' < p'_{rev} \end{cases}$		
	$X_s = \ \eta' - \eta'_{rev}\ $		
	<u>Unloading criterion:</u> $K'_t Q \dot{\epsilon}_v + 2G_t Q : \dot{E} < 0$ $K'_t Q^I \dot{\epsilon}_v + 2G_t Q^I : \dot{E} < 0$		

Table 11. Bounding surface plasticity models (1/3).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments	
CASM-c (Yu, 1995)	$K'_t = \frac{vp'}{\kappa}$ $G_t = \frac{3K'_t(1 - 2v'_{cte})}{2(1 + v'_{cte})}$	<p>1. Reversal criterion: extrinsic, elastic unloading.</p> <p>2. Memory rules: stores information of the last reversal point, which also determines the size of the first yield surface.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.</p>	<p>The unified models for clays and sands CASM (Yu, 1995, 1998), are based on the critical state models for clays (Roscoe and Schofield, 1963; Roscoe and Burland, 1968) and on the models for sands that include the concept of state parameter (Wroth and Basset, 1965; Been and Jefferies, 1985). The CASM-c model, based on the CASM-a and CASM-b models, resorts, on the one hand, to the concepts of bounding plasticity and, on the other hand, to differentiate loading and unloading stiffness in order to simulate nonlinear and hysteretic behavior of the soil. The CASM-c model considers the same equations as the modified MCC model to describe the elastic behavior of the soil. It is not conservative as long as it assumes $v'_{cte} = cte$ (Zytnyski et al., 1978). Introducing three more parameters to the CASM-b model, the CASM-c model is capable of reproducing well the results of drained and undrained cyclic triaxial test. Simulations concerning tests conducted by Tatsuoka and Ishihara (1974) can be found in the work of Khong (2004). The model presents parameters with which geotechnical engineers are unfamiliar.</p>	
	<p><u>Plastic modulus in noval loading:</u></p> $H = H_j + \frac{h(1 - \gamma^*)^{m^*}}{p'} \frac{1}{\gamma^*}$ $H_j = \frac{3v}{(\lambda - \kappa) \ln \bar{r}} (A_j - B_j)$ $A_j = \frac{3 + 2M}{3p'_j + 2q_j}$ $B_j = \frac{3 - M}{3p'_j + q_j}$			<p>Subsequently developed in the works of Gryczmanski et al. (1999), Jastrzebska (2000, 2002) and Sternik (2003), the NAHOS model allows reproducing the nonlinear and hysteretic behavior of cohesive soils. It is based on Cam Clay and bounding plasticity models. Purely elastic soil behavior is reduced to a single point in the stress space, which agree with the observations of Hueckel and Nova (1979). It is not conservative as long as it assumes $v'_{cte} = cte$ (Zytnyski et al., 1978). Results of drained and undrained triaxial tests in slightly overconsolidated kaolinite clay and simulations can be found in the work of Jastrzebska and Sternik (2004). It provides a good qualitative approach to the experimental results of tests with monotonous and cyclic loading. It shows a certain deviation in the prediction of the dilatation in drained triaxial tests. Gryczmanski et al. (1998) comment on the need to introduce a nonlinear elastic law to improve the predictions of the cyclic behavior of the soil. The model presents parameters with which geotechnical engineers are often unfamiliar.</p>
	<p><u>Plastic modulus in unloading:</u></p> $H = H_u \frac{1}{(1 - \gamma^*)}$			
	<p><u>Plastic modulus in reloading:</u></p> $H = H_j + H_R \frac{(1 - \gamma^*)}{\gamma^*} (1 + \epsilon_q^p)^{k^*}$			
	<p><u>Plastic modulus:</u></p> $K_p = \bar{K}_p + \frac{v}{\lambda - \kappa} C^* \left(\frac{\hat{p}'}{\hat{p}'_0 - \hat{p}'} \right)^{\mu^*} \hat{p}'$			
<p>NAHOS (Gryczmanski et al., 1998)</p>				

Table 12. Bounding surface plasticity models (2/3).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
MIT-S1 (Pestana and Whittle, 1999)	$\frac{K'_0}{p_a} = C_b \left(\frac{1+e}{e} \right) \left(\frac{p'}{p_a} \right)^{1/3} \left(1 + \frac{K'_0}{2G_0} \bar{\eta} \cdot \bar{\eta} \right)^{1/6}$	<p>1. Reversal criterion: extrinsic, $\dot{\chi}''\chi'' < 0$.</p> <p>2. Memory rules: stores information of the last reversal point ($\epsilon_{v,rev}$, e_{rev}), which also determines the size of the first yield surface.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.</p>	<p>Based on the works of Whittle (1987), Whittle (1993), Whittle and Kavvas (1994) and Pestana (1994), Pestana and Whittle (1999) developed the MIT-S1 model as a generalization for clays and sands of the MIT-E3 model. It introduces the void ratio as a new independent variable with the aim of reproducing the characteristic contractive/dilating behavior of sands at different confinement pressures. It considers the hysteretic, nonlinear and anisotropic behavior of the soil, critical state behavior of clays and the contractive/dilating behavior proper of the sands. Despite the good results, it is a model that requires parameters difficult to obtain experimentally and with which geotechnical engineers are unfamiliar, so its use is mainly academic. Examples of excavation simulations can be consulted in the work of Nikolinakou et al. (2011).</p>
	$\frac{2G_0}{K'_0} = 3 \left(\frac{1-2\nu'_0}{1+\nu'_0} \right)$		
	$\frac{K'_t}{p_a} = \frac{(1+e)p'}{e\rho_r p_a}$		
	$\rho_r = D_{\xi'} + \frac{(1+\omega_s \xi'_s)}{C_b \left(1 + \frac{K'_0}{2G_0} \bar{\eta} \cdot \bar{\eta} \right)^{1/6}} \left(\frac{p'}{p_a} \right)^{2/3}$		
	$D_{\xi'} = D(1 - \xi'^r)$		
	$\frac{2G_t/K'_t}{2G_0/K'_0} = \begin{cases} (1 + \omega \xi'_s)^{-1} & \text{if } p' < p'_{rev} \\ (1 + \omega \xi'_s)^{-1} & \text{if } p \geq p'_{rev} \end{cases}$		
	$\xi' = \begin{cases} p'/p'_{rev} & \text{if } p' \geq p'_{rev} \\ p'_{rev}/p' & \text{if } p' < p'_{rev} \end{cases}$		
	$\xi'_s = \ \bar{\eta} - \bar{\eta}_{rev}\ $		
	<p><u>Unloading criterion:</u></p>		
	$K'_t Q_p \dot{\epsilon}_v + 2G_t Q_s : \dot{e} < 0$		
$K'_t Q_p^l \dot{\epsilon}_v + 2G_t Q_s^l : \dot{e} < 0$			
Papadimitriou et al. (2001)	$G_t = \frac{G_0}{1 + 2 \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right) \left(\frac{Q_r^R}{\xi \eta_1} \right)}$	<p>1. Reversal criterion: extrinsic, $\dot{Q}_e^R < 0$.</p> <p>2. Memory rules: stores information of the last reversal point.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.</p>	<p>Based on the model of Manzari and Dafalias (1997) and in the thesis of Papadimitriou (1999), this model allows simulating sands behavior. It uses concepts of plasticity with kinematic hardening, the concept of nonlinearity with hysteresis for the range of small strains based on the models of Ramberg and Osgood (1943) and Hueckel and Nova (1979), the concept of state parameter (Been and Jefferies, 1985) and the effect of the soil fabric, especially during phases in which deviatoric stress are applied. Papadimitriou and Bouckovalas (2002) developed a generalized formulation of this model. It adopts the expression of Hardin (1978) for the calculation of G_0. It is not conservative as long as it considers $\nu'_{cte} = cte$ (Zytynski et al., 1978). It provides good approach of soil behavior of both small and large strains based on 15 resonant column tests and 32 cyclic triaxial tests. It is a model that requires parameters difficult to obtain experimentally and with which geotechnical engineers are unfamiliar.</p>
	$K_t = \frac{2G_t(1 + \nu'_{cte})}{3(1 - 2\nu'_{cte})}$		
	$G_0 = \frac{B p_a}{0.3 + 0.7 e^2} \left(\frac{p'}{p_a} \right)^{0.5}$		
	$Q_r^R = \sqrt{\frac{3}{2} (s - s^R) : (s - s^R)}$		
	$G_{t,min} = \frac{G_0}{1 + 2 \left(\frac{1}{a_1} - 1 \right)}$		
	<p><u>Plastic modulus:</u></p>		
$K_p = p' h_b h_f d^b$			

Table 13. Bounding surface plasticity models (3/3).

7.2.1.5. Bubble models

Bubble models were developed to solve some of the limitations posed by the bounding surface plasticity models. The latter allow reproducing the nonlinear plastic isotropic hardening or softening behavior of the soil during loading processes and assume that part of the deformations corresponding to these loading processes are plastic, even in the range of small strains. Conversely, these models consider that soil behavior is elastic during unloading processes, which restricts the degree of coupling between volumetric and deviatoric behavior (Potts and Zdravkovic, 1999) and limits their ability to reproduce the hysteretic soil behavior in small strains. Bubble models are based on the concepts of bounding surface plasticity models and multisurface models. Bubble models include one or more surfaces, called bubbles (Figure 34), with kinematic hardening, in addition to isotropic hardening, within the bounding plasticity surface. The number, shape, size and situation of the bubbles constitute the state variables χ^{hist} . Likewise, bubble models must include, apart from the mapping rules that control the plastic hardening modulus as the bubbles move, translation rules that control the movement of such bubbles.

The number of tensorial zones #Z of these models, as in multisurface models, is two.

Tables 14 and 15 analyze small strain stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of some bubble models.

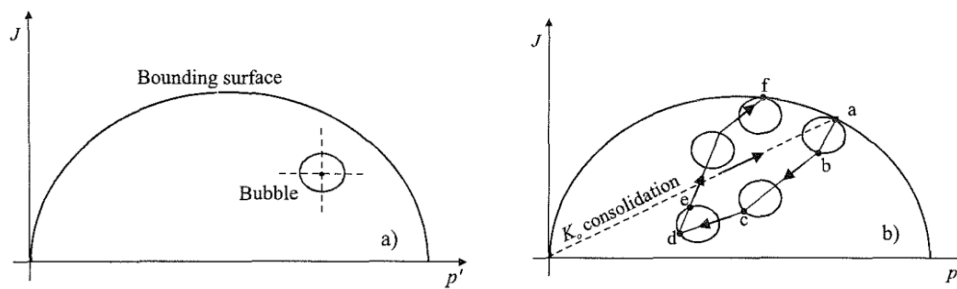


Figure 34. Conceptual scheme of the bubble movement of a bubble model (Potts and Zdravkovic, 1999).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Al-Tabbaa and Wood (1989)	<u>Elastic behavior:</u>		
	$f_1 < 0$		
	$K'_t = \frac{p'}{\kappa^*}$		
	$G_t = \frac{3K'_t(1 - 2v'_{cte})}{2(1 + v'_{cte})}$		
	<u>Plastic strains:</u>		
	$f_1 = 0, \quad f' = 0$		
	$h = h_o + h_b$		
	$h_o = \left(\frac{p' - p'_a}{\lambda^* - \kappa^*}\right) \left(p'(p' - p'_a) + \left(\frac{J - J_a}{M_J^2}\right) J\right)$		
	$h_b = \left(\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*}\right) \left(\frac{\hat{b}}{\hat{b}_{max}}\right)^{\hat{\psi}} p'_c{}^3$		
		<p>1. Reversal criterion: intrinsic. When stress trajectory is directed towards the bubbles interior.</p> <p>2. Memory rules: stores information of the last reversal point. This information defines the bubble position until it is displaced again.</p> <p>3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals.</p> <p>4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.</p>	Originally developed by Al-Tabbaa (1987). This model intends to reproduce the nonlinear behavior of slightly overconsolidated soils in the range of small strains. It considers a bubble $f_1 = 0$ within the bounding plasticity surface $f' = 0$. Both surfaces are based on the formulation of the MCC model. It is not conservative as long as it considers $v'_{cte} = cte$ (Zytynski et al., 1978). It is capable of reproducing well the results obtained in low frequencies cyclic oedometric and triaxial tests on kaolin. It requires only two additional parameters (\hat{R} and $\hat{\psi}$) with respect to the MCC model ($v, \lambda^*, \kappa^*, M_J$, and v'_{cte}).

Table 14. Bubble models (1/2).

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
3-SKH (Stallebrass and Taylor, 1997)	Elastic behavior:	1. Reversal criterion: intrinsic. When trajectory is directed towards the bubbles interior. 2. Memory rules: stores information of the two last reversal points. This information defines the bubbles position until they are displaced again. 3. Effect of reversals on degradation variables: total reinitialization after reversals. 4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery.	Initially developed by Stallebrass (1990). It is an extension of the model of Al-Tabbaa and Wood (1989), in which a new bubble $f_1 = 0$ is introduced, with kinematic hardening, exterior to the bubble $f_2 = 0$, within which soil behavior is considered elastic. This new bubble $f_1 = 0$ aims to introduce the influence of the soil history in the model formulation. For the tangent elastic shear modulus G_t , the expression given by Viggiani (1992) is adopted. The three surfaces are based on the formulation of the MCC model. In general, it offers a good approximation to experimental results, except for trajectories on the dry side. Messerklinger (2006) identifies some contradictions in the predictions of the model, which are resolved by McDowell and Hau (2003) or Masín (2003). Subsequent studies have included dependence on strain over time, anisotropy and the effect of soil structure.
	$f_2 < 0$		
	$K'_t = \frac{p'}{\kappa^*}$		
	$G_t = A \left(\frac{p'}{p_{ref}} \right)^{\bar{n}'} (R_0)^{\bar{m}'}$		
	Plastic strains:		
$f_1 = 0, f_2 = 0, f' = 0$			
$h = h_o + h_1 + h_2$			
$h_o = \left(\frac{p' - p'_b}{\lambda^* - \kappa^*} \right) (p'(p' - p'_b) + \left(\frac{q - q_b}{M^2} \right) q)$			
$h_1 = \left(\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} \right) \left(\frac{\hat{b}_1}{\hat{b}_{1max}} \right)^{\hat{\psi}} p'_c{}^3 \hat{S}^2$			
$h_2 = \left(\frac{1}{\lambda^* - \kappa^*} \right) \left(\frac{\hat{r}\hat{b}_2}{\hat{b}_{2max}} \right)^{\hat{\psi}} p'_c{}^3$			

Table 15. Bubble models (1/2).

Other bubble models have introduced the effect of soil destructuration (Wood, 1995; Baudet and Stallebrass, 2004) or soil anisotropy (Rouainia and Wood, 2000).

7.2.1.6. Multilaminated models

The concept of multilaminated model was initially formulated by Batdorf and Budiansky (1949). Zienkiewicz and Pande (1977) extended the concept to the analysis of joints in rocks. Subsequently, Pande and Sharma (1983) and Sadrejad and Pande (1989) extended these models to soil mechanics. Multilaminated models are based on the concept that the three-dimensional stress or strain state at a point of the continuum medium (global state) can be obtained as the sum of the two-dimensional stress or strain state on different i planes with different orientations that pass through such point (local state). For that purpose, a set of fundamental equations are established in each plane: $\sigma'_i = (\mathbf{T}_i)^T \cdot \sigma$, $\epsilon'_i = \mathbf{C}_i \cdot \sigma'_i$, $\epsilon_i = \epsilon_i^e + \epsilon_i^p$, $\epsilon_i^p = \lambda_i \partial g_i / \partial \sigma'_i$. The number of planes considered in multilaminated models is reduced to a finite number and, through the formulation adopted in the model, they are able to represent all orientations in space, grouped by sectors. Bazant and Oh (1985) and Ehret et al. (2010) demonstrate that using 33 planes in the calculation of $\dot{\epsilon}$ offers acceptable results and an acceptable computational cost. Global strain increments, which correspond to an increment in global stress, are calculated from the integration of local strains into the planes, according to the directions considered, from the local constitutive equations in each of them. For the deduction of the expression that relates these magnitudes, the principle of virtual works is used $\delta W_{macro} = (4/3)V\sigma' : \dot{\epsilon} = \int_{\partial V} \delta W_{micro} dS' = \int_{\partial V} \sigma'_i : \epsilon'_i dS'$ and assuming $dS' \approx \Delta S' = (\sin \tilde{\alpha})(\sin \tilde{\beta}) \Delta \tilde{\alpha} \Delta \tilde{\beta}$ where $\Delta \tilde{\alpha}$ and $\Delta \tilde{\beta}$ are finite spherical sectors, $\dot{\epsilon} = 3 \sum_i (\mathbf{T}_i \cdot \epsilon'_i) w_i$ and $w_i = (\sin \tilde{\alpha}) \Delta \tilde{\alpha} \Delta \tilde{\beta} / (4V)$ are complied. In this type of models, the state variables that control the value of stiffness modulus in each plane, the number of considered planes and variables that store information at reversion points are identified with the state variables χ^{hist} .

The number of tensorial zones #Z in multilaminated models will depend on the amount of planes considered. Nevertheless, this number is generally high; therefore, despite not being incrementally nonlinear models, for practical purposes, it can be considered that the stiffness of this type of models does depend continuously on the increases in the total strain tensor $\dot{\epsilon}$.

Table 16 analyzes small strain stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of a multilaminated model that considers soil behavior in the range of small strains.

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Schädlich and Schweiger (2012)	$\mathbf{C}_i = (\mathbf{T}_i)^T \sum_{m=1}^4 (\lambda_m \mathbf{E}'_m) ((\mathbf{T}_i)^T)^{-1}$ $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i(\sigma'_{mn}, \epsilon_{deg})$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Reversal criterion: intrinsic, $\dot{\epsilon}_{deg} < 0$. 2. Memory rules: it can store information of all reversal points through $\epsilon_{n,dev,centre}$, $\gamma_{s,centre}$ and $\gamma_{t,centre}$, which allows complying the generalized Masing Rules. 3. Effect of reversals on degradation variables: total or partial reinitialization after reversals, depending on the number of affected planes. 4. Effect of reversals on soil stiffness: discontinuous stiffness recovery. For practical purposes it can be considered an almost continuous recovery. 	This model considers the elastoplastic behavior of the soil using a Cap-Cone type model (based on the model of Wiltafsky (2003) and Wiltafsky et al. (2003)), which allows describing plastic behavior in each plane. It introduces the concepts of transverse anisotropy, dependence on stiffness with stress, degradation of elastic stiffness with the strain ϵ_{deg} and dependence on strains history to describe the behavior within yield surfaces.

Table 16. Multilaminated models that consider soil behavior in the range of small strains.

7.3. Incrementally nonlinear models

As indicated by Tamagnini and Viggiani (2002), incrementally nonlinear models emerged from the generalization of the hypoelastic theory of Truesdell (1956) and from the theoretical framework of elastoplasticity. The most important characteristics of incrementally nonlinear models are: (1) the absence of explicit decomposition of strain increases in reversible and irreversible parts and (2) the continuous nonlinear dependence of the tangent stiffness tensor on the direction of the increment strain tensor. The most general constitutive equation of this type of models is the following (Darve and Labanieh, 1982; Darve and Roguiez, 1999) and it is composed of a linear part $\mathbf{L}(\sigma', \mathbf{q}): \mathbf{d}$ and a nonlinear part $\|\mathbf{d}\|^{-1} \mathbf{Q}(\sigma', \mathbf{q}) :: [\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}]$.

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{L}(\sigma', \mathbf{q}): \mathbf{d} + \|\mathbf{d}\|^{-1} \mathbf{Q}(\sigma', \mathbf{q}) :: [\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}] \quad (50)$$

It is considered that incrementally nonlinear models have an infinite number of tensorial zones $\#Z \rightarrow \infty$. In some cases, nevertheless, as in hypoplastic models with intergranular strain δ , the incremental nonlinearity in the range of small strains is linked to the sign $\hat{\delta}: \mathbf{d}$, not appearing the strain rate tensor \mathbf{d} in the resulting tangent stiffness formulation for $\hat{\delta}: \mathbf{d} > 0$ nor for $\hat{\delta}: \mathbf{d} \leq 0$. Therefore, for practical purposes, such models can be considered conceptually closer to multilinear models than to incrementally nonlinear models when describing soil behavior in the range of small strains.

7.3.1. Hypoplastic models

Hypoplastic models represent a particular case of incrementally nonlinear models. Specifically, hypoplastic theory was initially developed by Kolymbas (1977). Subsequently, two hypoplastic formulations were distinguished: K-hypoplasticity (Kolymbas and Wu, 1993) and *CLoE* hypoplasticity (Chambon, 1989; Chambon et al., 1994). Afterward, these formulations were extended by Gudehus (1996), Bauer (1996), Wolffersdorff (1996), Niemunis and Herle (1997) or Herle and Kolymbas (2004), among others. The first generation of hypoplastic models considered $\mathbf{L}(\sigma', \mathbf{q}) = \mathbf{L}(\sigma')$ and $\mathbf{Q}(\sigma', \mathbf{q}) = \mathbf{N}(\sigma') \otimes \mathbb{I}$, that is, $\dot{\sigma}' = \mathbf{L}(\sigma'): \mathbf{d} + \mathbf{N}(\sigma') \|\mathbf{d}\|$. Using the envelopes of Gudehus in the Rendulic space, it is possible to decompose the effect of the linear and nonlinear part of the previous constitutive equation (Figure 35).

Hypoplasticity offers a theoretical framework for describing the nonlinear mechanical behavior of granular materials, capable of reproducing soil strains by reordering their solid skeleton. Furthermore, unlike elastoplastic theory, in hypoplastic theory it is not necessary to define yield surfaces nor flow rules, since these can be derived from the expression (50).

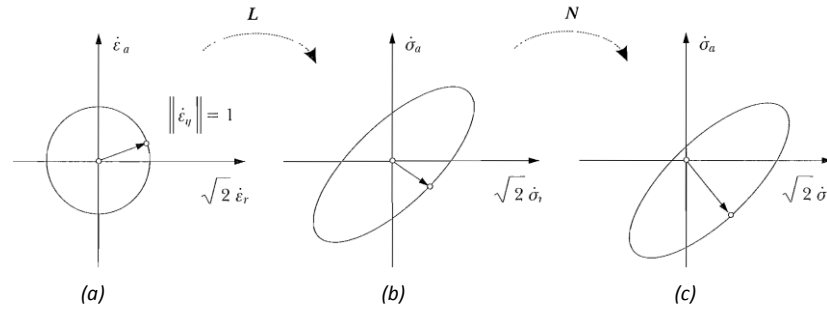


Figure 35. Graphical interpretation of the hypoplastic constitutive equation (Tamagnini and Viggiani, 2002).
 (a) Unitary circle in strain space. (b) Effect of the linear part. (c) Effect of the nonlinear part.

Nevertheless, classic hypoplastic models have some limitations. Among them, the requirement of a large number of parameters that limit their practical use, as well as the fact that they are not able to reproduce correctly the real soil behavior in the range of small strains during cyclic loadings (ratcheting effect). As Gudehus (2011) details, classic hypoplastic models must incorporate new state variables to describe the hysteretic soil behavior and to which it is also possible to attribute the dependence of their behavior on recent history. To solve this problem, diverse strategies have been proposed, some of them exposed by Tamagnini and Viggiani (2002):

- Include the void ratio as a state variable to obtain a unified formulation for soils with different densities and to incorporate the concept of critical state (Gudehus, 1996; Bauer, 1996). In this case, $L(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = L(\boldsymbol{\sigma}', e)$ and $Q(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{q}) = N(\boldsymbol{\sigma}', e) \otimes \mathbb{I}$ are considered. An expression of the tensors $L(\boldsymbol{\sigma}', e)$ and $N(\boldsymbol{\sigma}', e)$ appears in the work of Woldffersdorff (1996) or Gudehus (1996), including the barotropy and picnotropy factors.
- Introduce a structure tensor to consider the inherent soil anisotropy (Wu, 1998).
- Introduce an internal variable dependent on strains for modelling the cyclic soil behavior (Niemunis and Herle, 1997).
- Combine a hypoplastic model with a paraelastic one (hybrid model, Niemunis and Prada-Sarmiento (2011)).

Table 17 analyzes small strain stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of an hypoplastic model that considers soil behavior in the range of small strains.

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Niemunis and Herle (1997)	$\mathbf{M} = AL(\boldsymbol{\sigma}', e) + \mathbf{B}$	1. Reversal criterion: intrinsic, $\hat{\boldsymbol{\delta}}: \mathbf{d} \leq 0$. 2. Memory rules: stores information of several reversal points given the structure of $\hat{\boldsymbol{\delta}}$. The state variable $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ constitute a short-term memory variable that is reinitialized after a total reversal, but not after a partial reversal. 3. Effect of reversals on degradation variables: total or partial reinitialization after reversal. 4. Effect of reversals on soil stiffness: continuous stiffness recovery with the angle $\hat{\boldsymbol{\delta}}: \mathbf{d}$.	According to Niemunis and Herle (1997), the strain in a granular material is composed of the granular interface strain, which should be understood as a macroscopic measure of the microdeformations of the interface between particles, and the strain by the reordering of the grains that constitute the solid skeleton. The intergranular strain tensor $\hat{\boldsymbol{\delta}}$, which aims to characterize the strain of the granular interface, predominantly in the range of small strains, is defined. This model allows considering different degradation curves based on the rotation of the strain trajectory which provides versatility to the model and adaptability to experimental results. Partially resolves the effect of excessive stress or strain accumulation during cycles. It requires parameters that are unusual in practice. Masín (2006) proposed some modifications in this model to resolve the effect of $\eta = q/p'$ on G_0 and the effect that the axis $p' = 0$ have on the degradation curve when it is crossed by stress trajectory.
	$A = \rho^x m_T + (1 - \rho^x) m_R$		
	$\rho = \ \hat{\boldsymbol{\delta}}\ /\tilde{R}$		
	<u>If $\hat{\boldsymbol{\delta}}: \mathbf{d} > 0$:</u>		
	$\mathbf{B} = L(\boldsymbol{\sigma}', e): \hat{\boldsymbol{\delta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\delta}} + \rho^x N(\boldsymbol{\sigma}', e) \otimes \hat{\boldsymbol{\delta}}$		
	$\hat{\boldsymbol{\delta}} = (\mathbb{I} - \hat{\boldsymbol{\delta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\delta}} \rho^{\beta'}): \mathbf{d}$		
<u>If $\hat{\boldsymbol{\delta}}: \mathbf{d} \leq 0$:</u>			
	$\mathbf{B} = DL(\boldsymbol{\sigma}', e): \hat{\boldsymbol{\delta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\delta}}$		
	$C = \rho^x (1 - m_T)$		
	$D = \rho^x (m_R - m_T)$		
	$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{d}$		

Tabla 17. Hypoplastic models that consider soil behavior in the range of small strains.

7.3.2. Hybrid models

Some recent advanced models combine concepts from previous theoretical frameworks. This section briefly shows the specific case of the combination between hypoplasticity and paraelasticity, proposed by Niemunis and Prada-Sarmiento (2011).

Table 18 analyzes small strain stiffness formulation, hysteretic behavior treatment and general aspects of a hybrid model that considers soil behavior in the range of small strains.

Model	Small Strain Stiffness	Hysteretic Behavior	Comments
Niemunis and Prada-Sarmiento (2011)	$\dot{\sigma}' = \mathbf{A} : \dot{\epsilon} + \mathbf{N}(\sigma', e) \ \dot{\epsilon}\ w' + \dot{\sigma}'^{PE}$		
	$\mathbf{A} = \mathbf{L}(\sigma', e) - \mathbf{H}'(\bar{f}, \bar{\chi}, d_L)(1 - w')$		The paraelastic part of this hybrid model is capable of correctly reproducing soil hysteretic behavior, while the hypoplastic part is capable of correctly reproducing soil nonlinear strains due to the reorganization of its solid skeleton.
	$w' = \left(\frac{d_{AR1} - d_0}{d_L - d_0}\right)^{\beta_R}$	Not defined.	
	$d_{AR1} = -\frac{AR1 \mathbf{e} : AR1 \mathbf{e}}{AR1 \mathbf{e} : NR1}$		

Table 18. Hybrid models that consider soil behavior in the range of small strains.

8. Conclusions

Soil behavior in the range of small strains should be considered in the analysis of geotechnical problems when sensitive elements are affected, which is very common in urban environments. Generally, in these types of problems, only a small part of the soil is subjected to intermediate or large strains, while most of it is subjected to small or very small strains. The extent of soil masses that experience small or very small deformations is usually so large that their contribution to soil displacements is usually significant.

Several circumstances during the 70s of the 20th century motivated the development of new theoretical frameworks and constitutive models that tried to explain the soil behavior in the range of small strains, characterized by being nonlinear reversible, hysteretic and dependent on recent history. Nevertheless, nowadays, several of the tests that allow measuring soil parameters in such range of strains, especially those capable of measuring the curves of shear stiffness degradation, are still not sufficiently extended in engineering professional practice, making it difficult to estimate these parameters (resorting to the use of empirical correlations on multiple occasions) as well as the use of this type of constitutive models.

The theoretical framework of Jardine (1992), based on the theories of KYS and plasticity, allows explaining the behavior of soil stiffness according to the range of stress and strain to which it is subjected, giving place to four differentiated zones (Zones I to IV). This theoretical framework has been very useful to identify the strategies to reproduce soil behavior in the range of small strains used in the different constitutive models that have been analyzed. Furthermore, in order to classify these constitutive models, the concept of tensorial zone (Darve, 1978, 1990; Darve and Labanieh, 1982) has been used, grouping (1) within the incrementally linear models with a single tensorial zone, the linear and the nonlinear elastic models (Cauchy elastic models, hyperelastic models and hypoelastic models *stricto sensu*), (2) within the incrementally multilinear models with several tensorial zones, the hysteretic models (paraelastic and quasi-hypoelastic models) and the advanced models (classic elastoplastic models, multisurface models, brick models, bounding surface plasticity models, bubble models and multilaminated models) and (3) within the incrementally nonlinear models with infinite tensorial zones, the hypoplastic and the hybrid models.

Furthermore, there have been established four elements considered fundamental for the characterization of soil hysteretic behavior and which have given place to a model classification subcriterion. These elements are: (1) reversal criterion, which can be extrinsic or intrinsic, (2) memory rules, which allow storing information of one, several or all active reversal points, (3) the effect of reversals on the variables that control the degradation, which can be totally or partially

reinitialized after a reversal and (4) the effect of reversals on maximum soil stiffness, where the stiffness recovery can occur continuously or discontinuously with the rotation angle of the recent stress/strain trajectory, and be total or partial.

Using the previous classification criterion and subcriterion, a total of 50 constitutive models that consider soil behavior in the range of small strains have been analyzed and classified. The study of these models has focused on describing and explaining the constitutive relations that allow the reproduction of nonlinear reversible, hysteretic and dependent on recent history behavior of the soil, as well as their advantages, inconveniences and applications. It should be noted that the fact of not having the numerical codes of most of these models complicates and limits their study, idea shared by Gudehus (2011).

Among the analyzed models are the HQH and the EPHYSS models (Castellón, 2019) which, along with those whose study has been fundamental for their development, have been studied and explained with special attention. Those models are the SSOM and the HS-S models of Benz (2007), the latter based on the first and on the HS model of Schanz (1998) and Schanz et al. (1999), the well-known HS-SS model of Plaxis (or equivalent versions in other numerical software), based on the previous ones, the model of Hueckel and Nova (1979), the multilaminated model of Schädlich and Schweiger (2012) and the hypoplastic model with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997), in addition to the generalized Masing Rules (Masing, 1926; Pyke, 1979) which can be applied to different nonlinear models to incorporate hysteretic behavior.

The HS-SS model is, nowadays, practically the only model with an extended use in the common practice of geotechnical engineering that considers soil behavior in the range of small strains, generally limiting the rest of such models to an academic use, given their characteristics. Despite its great advantages, some aspects of the HS-SS model could be improved, and some inconsistencies whose effects can have a considerable influence on the numerical simulations of boundary value problems, as these are cumulative, should be corrected (Castellón, 2013, 2019; Plaxis, 2015). The EPHYSS model significantly improves the approach to experimental data with respect to the HS-SS model, especially in those cases that present reversals in deviatoric loadings; resolves the inconsistencies of the latter; has a reasonable computational cost; provides flexibility in the use of different plastic formulations; and requires simple parameters, most of them common to those of the HS-SS model, which distinguishes it from some other complex constitutive models which have been limited to an academic use. All this makes *EPHYSS* a model that can be used for analysis and design in geotechnical professional practice.

LIST OF SYMBOLS AND ABBREVIATIONS

a	Parameter whose value is $a = 0,385$ according to Dos Santos and Correia (2001).
a'	Soil parameter in the model of Hansen (1963).
a''	Soil parameter in the model of Hardin and Drnevich (1972).
\hat{a}	Soil parameter in the model of Darendeli and Stokoe (2001).
a^*	Soil parameter in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
\tilde{a}	$= 1/E'_i$ soil parameter in the model of Kondner and Zelasco (1963).
a_{LER}	$= n'J_{LER}^u$
a_{SSR}	$= n'J_{SSR}^u$
a_1	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
A	Soil parameter in the expression of Viggiani (1992) used for the calculation of G_i in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
\bar{A}	Soil parameter in the model of Jardine et al. (1986).
\hat{A}	Soil parameter in the expressions that relate G_0 with e , OCR and p' .
A_i	Functions of soil parameters $C_1(X = 0)$, $C_1(X \rightarrow \infty)$, $C_2(X = 0)$, $C_2(X \rightarrow \infty)$ in the model of Tatsuoka and Shibuya (1992).
b	$= G_{SSR}/G_{LER} = K_{SSR}/K_{LER}$
b'	Soil parameter in the model of Hansen (1963).
b''	Soil parameter in the model of Hardin and Drnevich (1972).
\hat{b}	$= \frac{1}{\bar{R}p'_c/2} \left((p' - p'_\alpha) \left(\frac{(p' - p'_\alpha)}{\bar{R}} - \left(p' - \frac{p'_c}{2} \right) \right) + \left(\frac{1 - J_\alpha}{M_j^2} \right) \left(\frac{J - J_\alpha}{\bar{R}} - J \right) \right)$
\tilde{b}	$= 1/q_{ult}$ soil parameter in the model of Kondner and Zelasco (1963).

\hat{b}_{max}	$= (1 - \hat{R})p'_c$
\hat{b}_1	$= \left(\frac{1}{\hat{r}p'_c} \left(\left(\frac{p'_c - p'_b}{\hat{s}} \right) \left(\frac{p'_c - p'_b}{\hat{r}\hat{s}} - \left(\frac{p'_c - p'_b}{\hat{s}} + p'_a - p'_c \right) \right) + \left(\frac{q - q_b}{\hat{s}M^2} \right) \left(\left(\frac{q - q_b}{\hat{r}\hat{s}} \right) - \left(\frac{q - q_b}{\hat{s}} + q_a \right) \right) \right) \right)$
\hat{b}_2	$= \frac{1}{\hat{r}\hat{s}p'_c} \left((p'_c - p'_b) \left(\frac{p'_c - p'_b}{\hat{s}} - (p'_c - p'_a) \right) + \left(\frac{q - q_b}{M^2} \right) \left(\frac{q - q_b}{\hat{s}} - (q - q_a) \right) \right)$
\hat{b}_{1max}	$2(1 - \hat{T})p'_c$
\hat{b}_{2max}	$2\hat{T}(1 - \hat{S})p'_c$
B	Soil parameter in the expression of Hardin (1978) for the calculation of G_0 used in the model of Papadimitriou et al. (2001).
\bar{B}	Soil parameter in the model of Jardine et al. (1986).
\hat{B}	Soil parameter in the expressions that relate G_0 with e .
B_i	Functions of soil parameters $C_1(X = 0)$, $C_1(X \rightarrow \infty)$, $C_2(X = 0)$, $C_2(X \rightarrow \infty)$ in the model of Tatsuoka and Shibuya (1992).
\mathbf{b}	External mass force vector.
\mathbf{b}	Tensor that controls the anisotropy degree (surface inclination of bounding plasticity) in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
c'	Effective cohesion.
c_a	$= \sqrt{8\sin^2(\varphi'_m)/(3 + \sin^2(\varphi'_m))}$
c_u	Undrained shear resistance.
C	Soil parameter in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
C^*	Soil parameter in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
\bar{C}	Soil parameter in the model of Jardine et al. (1986).
C_b	Soil parameter in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999) related to soil compressibility after a reversal.
C_i	$i = 1 \dots 6$, soil parameters in the model of Jardine et al. (1991).
$C_i(X)$	$i = 1, 2$ soil parameters in the model of Tatsuoka and Shibuya (1992).
C_α	Secondary consolidation coefficient.
\mathbf{C}	Flexibility tensor in the model of Hueckel and Nova (1979).
\mathbf{C}_i	Constitutive elastic flexibility tensor in the plane i that relates $\hat{\sigma}'_i$ and $\hat{\epsilon}'_i$ in multilaminated models.
\mathbf{C}_0	Maximum flexibility tensor in the model of Hueckel and Nova (1979).
$\cos(\alpha^*)$	$= (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{e}})^*$
d_{AR1}	Distance that considers the loading circle diameter and not its radius in the model of Niemunis et al. (2011a, 2011b).
d_i	$i = 1, 2$ soil parameters in the model of Tatsuoka and Shibuya (1992).
d_L	Soil parameter in the model of Niemunis and Prada-Sarmiento (2011).
d_0	Soil parameter in the model of Niemunis and Prada-Sarmiento (2011).
d^b	$= \xi(M^b - \eta)$
d^c	$= \xi(M^c - \eta)$
d^d	$= \xi(M^d - \eta)$
d^b_{ref}	$= M^b_c + M^b_e - 2\tilde{m}$
D	Soil parameter that controls nonlinearity during an unloading in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
\mathbf{d}	Strain rate tensor ($\dot{\epsilon} \approx \mathbf{d} = (1/2)(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$).
e	Void ratio.
e_{ij}	Components of the deviatoric strains tensor \mathbf{e} .
e_0	Initial void ratio.
$(e_{CS})_a$	Void ratio on the critical state line for $p' = p_a$.
\mathbf{e}	$= \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct}\mathbf{1}$
\mathbf{e}^e	$= \boldsymbol{\epsilon}^e - \epsilon^e_{oct}\mathbf{1}$
$\mathbf{e}^{e,R}$	State variable that stores the elastic deviatoric strain tensor at the last reversal point R that conforms the endpoint of the active strain cycle.
$\mathbf{e}^{e,\Delta R}$	$= \mathbf{e}^e - \mathbf{e}^{e,R}$
\mathbf{e}^p	$= \boldsymbol{\epsilon}^p - \epsilon^p_{oct}\mathbf{1}$
\mathbf{e}^R	State variable that stores the total deviatoric strain tensor value at the last reversal point R that conforms the endpoint of the active strain cycle.
$\mathbf{e}^{\Delta R}$	$= \mathbf{e} - \mathbf{e}^R$
E_{ijkl}	$= (1/V) \sum_{c=1}^J l^c_i k^c_j l^c_k$
E_u	Undrained elastic longitudinal modulus.
$E_{s,u}$	Undrained secant elastic longitudinal modulus.
E'_i	Initial drained longitudinal modulus.
E'_{ij}	Drained elastic longitudinal modulus according to the plane i and the direction j .

E'_{ijkl}	\mathbf{E}' tensor components.
$E'_{t,ur}$	Drained tangent longitudinal stiffness modulus during unloadings and reloadings.
\mathbf{E}	Transformed variable $E_i = (\mathbf{E})_i = \Pi_i(\epsilon)$ in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
\mathbf{E}'	Elastic stiffness tensor.
\mathbf{E}'_n	Eigenvector of the spectral decomposition of σ' .
\mathbf{E}_{MEM}	Vector with the values $\ e\ $ in the reversal points R_i that conforms the endpoints of the active strain cycles defined by the conditions $\hat{h}: \hat{e} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{e}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{e} \leq \cos(\alpha^*)$.
\mathbf{E}_{rev}	Value of $E_i = (\mathbf{E})_i = \Pi_i(\epsilon)$ in the last reversal point in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
\mathbf{E}'_{max}	Maximum stiffness tensor.
\mathbf{E}'_t	Tangent stiffness tensor.
\mathbf{E}_{MEM}^e	Vector with the values $\ e^e\ $ in the reversal points R_i that conforms the endpoints of the active strain cycles defined by the conditions $\hat{h}: \hat{e} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{e}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{e} \leq \cos(\alpha^*)$.
\mathbf{E}'_t^Z	Tangent stiffness tensor corresponding to the tensorial zone Z .
f	Soil parameter in the model of Fahey and Carter (1993).
$f(e)$	Function that represents the dependence of G_0 on e .
f'	$= 0$ equation that defines the bounding plasticity surface in the model of Al-Tabbaa and Wood (1989) and in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
\bar{f}	Soil parameter in the model of Niemunis et al (2011a, 2011b).
\hat{f}	Soil parameter in the model of Lee and Salgado (1999).
\hat{f}'	$= 1/2 (\alpha^* + \text{sign}(n_p) n_p ^{1/w})$
$f_{G_s^{ap}}$	Function that introduces the dependence on ϵ_{oct} and χ^{hist} in G_s^{ap} .
f_k	$k - th$ yield surface.
$f_{K'_s^{ap}}$	Function that introduces the dependence on ϵ_{oct} and χ^{hist} in K'_s^{ap} .
f_1	$= 0$ equation that defines the bubble within which an elastic soil behavior is considered in the model of Al-Tabbaa and Wood (1989) and a dependent behavior on recent history is considered in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
f_2	$= 0$ equation that defines the bubble within which an elastic soil behavior is considered in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
$f^{(m)}$	Yield surfaces in multisurface models.
F	$= F_0 (p'_0/p'_a)^{-X'} \langle \psi_0 \rangle$
F_0	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
\mathbf{F}	$= \nabla \varphi(\mathbf{X}, t)$ deformation gradient tensor.
\mathbf{F}	Second order tensor function.
g	Soil parameter in the model of Fahey and Carter (1993).
\hat{g}	Soil parameter in the model of Lee and Salgado (1999).
g_i	Plastic potential associated to the plane i .
g_k	Plastic potential associated to the yield surface f_k .
G	Linear elastic shear modulus.
G_{ij}	Drained elastic shear modulus according to the plane i and the direction j .
G_{LER}	$= G_{LER}^{ref} (p'/p'_{ref})^{\bar{\nu}}$ shear stiffness within the LER.
G_m	$= G_{t,min,\xi=1} / G_{t,ur}$
G_s	Secant elastic shear modulus.
G_t	Tangent elastic shear modulus.
$G_{t,min}$	Minimum value of G_t .
G_0	Maximum shear modulus.
G_0^{ref}	Maximum apparent shear modulus for $p' = p'_{ref}$.
G^{ap}	Apparent shear modulus.
G_{LER}^{ref}	Value of G_{LER} when $p' = p'_{ref}$.
G_s^{ap}	Secant apparent shear modulus.
$G_{s,0}^{ap}$	Maximum value of K'_s^{ap} which depends on p' .
$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$	Maximum value of the secant apparent shear stiffness modulus for the active degradation curve α for $-p' = p'_{ref,2}$.
$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$	Rate of the variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ corrected with the stability criterion.
$G_{t,ur}$	Minimum value of the tangent apparent shear modulus.
G_t^{ap}	Tangent apparent shear modulus.
$G_{t,ur}^{ref}$	Value of $G_{t,ur}$ for $-p' = p'_{ref,2}$.
G_z^{ap}	Apparent shear modulus associated to the tensorial zone Z .
\mathbf{G}	Tensorial function that relates σ' with ϵ , σ' , χ and $\dot{\epsilon}$.

h	Soil parameter in the CASM-c model of Yu (1995).
h_b	$= h'_0 d^b / \langle d_{ref}^b - d^b \rangle$.
h_f	$= (1 + F(\int \dot{\epsilon}_v^p(\%)^2)) / (1 - F \int_{R-1}^R \langle -\dot{\epsilon}_v^p(\%) \rangle)$ factor that consider the macroscopic effect of soil fabric during deviatoric stress trajectory in the model of Papadimitriou et al. (2001).
h_i	Factor that modifies hardening laws in the models HS-S, HS-SS and EPHYSS.
h'_0	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
\mathbf{h}	Recent total deviatoric strain history tensor in the HQH and EPHYSS models.
\mathbf{h}_k	Generalized plastic modulus associated to the yield surface f_k .
H_R	Soil parameter in the CASM-c model of Yu (1995).
H_U	Soil parameter in the CASM-c model of Yu (1995).
$H^{(m)}$	Hardening modulus of the yield surface $f^{(m)}$.
$(H_S)_{ii}$	$ii - th$ component of \mathbf{H}
\mathbf{H}	Recent total deviatoric strains history tensors in the SSOM, HS-S and HS-SS models.
\mathbf{H}'	Stiffness tensor in the model of Niemunis et al. (2011a, 2011b) and in the model of Niemunis and Prada-Sarmiento (2011).
\mathbf{H}_{MEM}	Vector with the values $\ \mathbf{h}\ $ in the reversal points R_i that conform the endpoints of active strain cycles defined by the conditions $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
\hat{I}_i^e	Invariant moments of the elastic strain tensor.
J	$= \sqrt{1/2} \ \mathbf{s}\ $
\bar{J}	$= J/J_{SSR}$
J_{max}	Maximum value of J .
J_s	Secant coupling modulus.
J_t	Tangent coupling modulus.
J_{SSR}	Deviatoric stress on the SSR.
J_0	Initial value of J .
$J_{3\eta}$	$= \det(\mathbf{s})/p^3$
J_α	Value of J in the center of the bubble f' in the model of Al-Tabbaa and Wood (1989).
J_{LER}^u	Deviatoric stress in the LER boundary obtained from triaxial tests.
J_{SSR}^u	Deviatoric stress in the SSR boundary obtained from triaxial tests.
\hat{k}	Soil parameter in the expressions that relate G_0 with OCR .
k^*	Soil parameter in the CASM-c model of Yu (1995).
k_{jl}^c	$= k_n^c n_j^c n_i^c + k_s^c s_j^c s_i^c + k_t^c t_j^c t_i^c$ is the stiffness tensor of the $c - th$ contact in the global coordinate system.
k_q^c	Particles stiffness in the contacts according to the directions $q \in \{n, s, t\}$, where $n \rightarrow \mathbf{n}^c$ is the normal direction and $s \rightarrow \mathbf{s}^c$ and $t \rightarrow \mathbf{t}^c$ the tangential.
k_c^d	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
k_e^d	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
K'	Drained elastic volumetric modulus.
$K(\gamma, PI)$	$= 0,5 \left(1 + \tanh \left(\ln \left((0,000102 + n(PI)/\gamma \right) \right)^{0,492} \right)$
K_b	Value of $K_s'^{app}$ for $\sigma'_s = p_a$ in the expression proposed by Duncan et al. (1980).
K_{LER}	$= K_{LER}^{ref} (p'/p'_{ref})^{\beta}$ volumetric stiffness within the LER.
K_P	Plastic hardening modulus.
K'_s	Drained secant elastic volumetric modulus.
K'_t	Drained tangent elastic volumetric modulus.
$K'_{L,ur}$	Drained linear elastic volumetric modulus in unloadings or reloadings.
K_0	Coefficient of lateral earth pressure.
K'_0	Maximum drained elastic volumetric modulus.
K'^{app}	Drained apparent volumetric modulus.
K_{LER}^{ref}	Value of K_{LER} when $p' = p'_{ref}$.
$K_s'^{app}$	Drained secant apparent volumetric modulus.
$K_{s,ref}'^{app}$	Value of $K_s'^{app}$ for $p' = p'_{ref}$.
$K_{s0}'^{app}$	Maximum value of $K_s'^{app}$ which depends on p' .
$K_Z'^{app}$	Apparent volumetric modulus associated to the tensorial zone Z .
\bar{K}_P	$= \left((4/3)M^4 (p'_j - (1/\bar{R})p'_c)^2 + 6(\bar{R} - 1)^4 q_j^2 \right)^{-1} v/(\lambda - \kappa) (4/\bar{R})M^4 p'_c (p'_j + (\bar{R} - 2)p'_c) (p'_j - (1/\bar{R})p'_c)$
l	Soil parameter in the expression that relates G_0 with s^* .
l_i^c	Distance between the center of the $i - th$ particle and the center of the particle with which it maintains the $c - th$ contact.

$L(\sigma')$	Second-order linear tensor in the first generation of hypoplastic models.
$L(\sigma', e)$	Second-order linear tensor in the hypoplastic model (Woldffersdorff, 1996; Gudehus, 1996).
$L(\sigma', q)$	Second-order linear tensor in hypoplastic models.
m	Soil parameter that controls stiffness dependence on stress.
m'	Soil parameter in the model of Prévost and Keane (1990) that must comply $m' \geq 4\gamma_{max} - 1$
m^*	Soil parameter in the CASM-c model of Yu (1995).
\bar{m}	Soil parameter in the model of Mayne (1994).
\tilde{m}	Soil parameter that controls the shape of the bounding plasticity surface in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
\bar{m}'	Soil parameter in the model of Shibuya et al. (1997).
\tilde{m}'	Soil parameter in the expression of Viggiani (1992) used for the calculation of G_t in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
$\tilde{m}(\gamma, PI)$	$= 0,272 \left(1 - \tanh(\ln(0,000556/\gamma))^{0,4} \right) e^{-0,0145PI^{1,3}}$
m_{ij}	Soil parameter that controls the dependence of $G_{0(ij)}$ on p'/p'_{ref} in the expression of Hardin and Black (1968).
m_R	Soil parameter that controls stiffness value before a rotation of the strain trajectory of 180° in the model of Niemunis and Herle (1997).
m_T	Soil parameter that controls stiffness value before a rotation of the strain trajectory of 90° in the model of Niemunis and Herle (1997).
m_1	Soil parameter that controls the dependence of K'_s on $-p'$.
m_2	Soil parameter that controls the dependence of G_s and $G_{t,ur}$ on $-p'$.
M	Slope of the critical state line in the plane $q - p'$.
M_J	Slope of the critical state line in the plane $J - p'$.
M^c	$= \xi(M_c^b(\xi) + M_e^b(-\xi))$
M^b	$= \xi(M_c^c(\xi) + M_e^c(-\xi))$
M^d	$= \xi(M_c^d(\xi) + M_e^d(-\xi))$
M_c^b	$= M_c^c + k_e^d(-\psi)$
M_c^c	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
M_e^b	$= M_e^c + k_e^d(-\psi)$
M_e^c	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
M_e^d	$= M_e^c + k_e^d\psi$
M_e^d	$= M_e^c + k_e^d\psi$
\mathbf{M}	Tangent stiffness tensor in the hypoplastic model with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997).
n	Soil porosity.
n	Soil parameter in the expression that relate G_0 with η .
$n(PI)$	$= \begin{cases} 0 & si & PI = 0 \\ 3,37 \cdot 10^{-6} PI^{1,404} & si & 0 < PI \leq 15 \\ 7,00 \cdot 10^{-7} PI^{1,976} & si & 15 < PI \leq 70 \\ 2,70 \cdot 10^{-5} PI^{1,115} & si & PI > 70 \end{cases}$
n'	$= \sqrt{K_{LER}/G_{LER}}$
n^*	Soil parameter in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
\hat{n}	Soil parameter in the model of Lehane and Cosgrove (2000).
\bar{n}'	Soil parameter in the model of Shibuya et al. (1997).
\tilde{n}'	Soil parameter in the expression of Viggiani (1992) used for the calculation of G_t in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
n_g	Soil parameter in the model of Lee and Salgado (1999).
n_i	Soil parameter in the expression that relates G_0 with σ'_i/p'_{ref} and p'_{ref} .
n_{ij}	Soil parameter in the expression that relates G_0 with p'/p'_{ref} , p'_{ref} and $\bar{\beta}_{ij}$.
n_p	Factor of NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998) which varies from $n_p = 1$ to $q/p' = 0$ on the wet side, $n_p = 0$ to $q/p' = M$ and $n_p = 0$ to $q/p' = 0$ on the dry side.
n_{fin}	Last calculation step.
n_j^c	$j - th$ component of the vector \mathbf{n}^c .
\mathbf{n}^c	Normal vector to the plane perpendicular to the direction of the $c - th$ contact between particles.
$N_{G,1}$	Factor related to the secondary consolidation coefficient C_α ($N_{G,1} = \sqrt{C_\alpha}$ according to Lo Presti et al. (1996)).
$\mathbf{N}(\sigma')$	Second-order tensor in the first generation of hypoplastic models.
$R^1\mathbf{N}$	Normal exterior to the loading circle from the last reversal point $R1$.
OCR	$= \sigma'_{v,max}/\sigma'_v$
p'	$= \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$
\bar{p}'	$= p'/p'_{SSR}$
p_a	Atmospheric pressure.

p_w	Water pressure.
p'_a	Value of p' in the center of the f_1 of the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
p'_b	Value of p' in the center of the bubble f_2 of the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
p'_c	Size of the major axis of the bounding plasticity surface (consolidation pressure) in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998), CASCM-c model of Yu (1995) and bubble models of Al-Tabbaa and Wood (1989) and Stallebrass and Taylor (1997).
p'_j	Mean pressure in the image point on the bounding plasticity surface in the models NAHOS of Gryczmanski et al. (1998) and CASCM-c of Yu (1995).
p'_{max}	Maximum historic effective mean pressure.
p'_{ref}	Reference pressure.
$p'_{ref,1}$	Reference pressure in the expression of K'_s .
$p'_{ref,2}$	Reference pressure in the expressions of G_s^{ap} and $G_{t,ur}$.
p'_{rev}	Transformed variable $p' = \Pi_{0,p}(\sigma')$ on the last reversal point in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
p'_α	Values of p' in the center of the bubble f_1 in the model of Al-Tabbaa and Wood (1989).
p'_0	Initial mean pressure.
$P''^{(m)}$	Projection of $\mathbf{P}^{(m)} = \partial g^{(m)} / \partial \sigma$ on the hydrostatic axis.
$\mathbf{P}'^{(m)}$	Projection of $\mathbf{P}^{(m)} = \partial g^{(m)} / \partial \sigma$ on the deviatoric plane.
PI	Plasticity index.
q	$= \sigma'_1 - \sigma'_3$
q_a	Value of q in the center of the bubble f_1 of the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
q_b	Value of q in the center of the bubble f_2 of the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
q_f	Deviatoric soil strength.
q_j	Deviatoric stress in the image point on the bounding plasticity surface in the models NAHOS of Gryczmanski et al. (1998) and CASCM-c of Yu (1995).
\dot{q}_{max}	Maximum value of the deviatoric stress increment in triaxial compression.
q_{ult}	Maximum deviatoric stress.
q	Heat flow through the boundary domain.
Q	$= 2c^2(p' - \alpha') - 2(s' - p'\mathbf{b}) : \mathbf{b}$
Q_p	$= p' \left((\tilde{m}\zeta^2 + 2\tilde{\eta} : \mathbf{b})(p'/\alpha')^{\tilde{m}} - 2\tilde{\eta} : \tilde{\eta} + (9 - (3/2)c_a^2)(1 - (p'/\alpha')^{\tilde{m}})J_{3\tilde{\eta}} \right)$
Q^I	Value of Q in the image point I on the bounding plasticity surface.
Q_p^I	Value of Q_p in the image point I on the bounding plasticity surface.
Q_e^R	$= \sqrt{3/2} \ \mathbf{e} - \mathbf{e}^R\ $
Q	$= 2(s' - p'\mathbf{b})$
$Q(\sigma', q)$	Sixth order tensor in hypoplastic models.
Q_s	$= p' \left(2(\tilde{\eta} - (p'/\alpha')^{\tilde{m}}\mathbf{b}) - (3 - (1/2)c_a^2)(1 - (p'/\alpha')^{\tilde{m}}) \partial J_{3\tilde{\eta}} / \partial \tilde{\eta} \right)$
Q^I	Value of Q in the image point I on the bounding plasticity surface.
$Q^{(m)}$	Projection of $Q^{(m)} = \partial f^{(m)} / \partial \sigma$ on the deviatoric plane.
$Q''^{(m)}$	Projection of $Q^{(m)} = \partial f^{(m)} / \partial \sigma$ on the hydrostatic axis.
Q_s^I	Value of Q_s in the image point I on the bounding plasticity surface.
r	Heat source within the domain.
r'	Soil parameter in the model of Atkinson (2000).
\bar{r}	Soil parameter in the CASM-c model of Yu (1995).
\hat{r}	Soil parameter in the model of Ramberg and Osgood (1943).
\tilde{r}	Soil parameter that controls nonlinearity during an unloading in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
\hat{r}'	$= \ \tilde{\sigma}' - \sigma'\ $
\hat{r}'_0	$= \ \tilde{\sigma}' - \sigma'_s\ $
R	Reversal point.
R'	$= \left((1 - x_e)/(x_u - x_e) - b \right) \left((1 + x_u - x_e) \ln(1 + x_u - x_e) / (x_u - 1) \right)$
\bar{R}	Soil parameter in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
\hat{R}	Ratio between the sizes of the bubble f_1 and the bounding plasticity surface f' in the model of Al-Tabbaa and Wood (1989).
\tilde{R}	Parameter with the maximum value of $\ \delta\ $ in the model of Niemunis and Herle (1997).
R_f	$= q_f / q_{ult}$
R_o	$= p'_{max} / p'$
s	Entropy in $\mathbf{x} \in \Omega$.
s'	$= (\sigma'_1 + \sigma'_2) / 2$
\hat{s}	Soil parameter in the model of Matasovic and Vucetic (1993).
\check{s}	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001) which adopts values $\check{s} = +1$ if $\eta - \check{\alpha} \geq 0$ and $\check{s} = -1$ if $\eta - \check{\alpha} < 0$.

s^*	Parameter that represents the soil structure.
s'_0	Initial value of s' .
s_f^*	Reference value of s^* .
s_{ij}	Components of the tensor \mathbf{s} .
s_j^c	$j - th$ component of the vector \mathbf{s}^c .
\mathbf{s}	$= \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct} \mathbf{1}$
s'	Transformed variable $s_i = (\mathbf{s})_i = \Pi_i(\boldsymbol{\sigma}')$.
s'_{rev}	Value of s' in the last reversal point.
\mathbf{s}^c	Tangential vector to the plane perpendicular to the $c - th$ contact direction between particles.
\mathbf{s}^R	Effective stress tensor in the reversal point R .
S	Entropy.
S'	Surface of V .
\hat{S}	Ratio between the sizes of the bubbles f_2 and f_1 in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
S_{ij}	Dimensionless soil parameters in the expressions that relate $G_{0(ij)}$ with e , OCR and σ'_i .
Sr	Soil saturation degree.
t	Variable that represents time.
t	$= (\sigma'_1 + \sigma'_2)/2$
t_p	Time required to finalize primary consolidation.
t_0	Time in which a reversal appears.
t_j^c	$j - th$ component of the vector \mathbf{t}^c .
$\mathbf{t}(\mathbf{n})$	Traction vector in $\mathbf{x} \in \Gamma_N$ according to the normal direction \mathbf{n} .
\mathbf{t}^c	Tangential vector to the plane perpendicular to the $c - th$ contact direction between particles.
T	Temperature in $\mathbf{x} \in \Omega$.
\hat{T}	Ratio between the size of the bubble f_1 and the bounding plasticity surface f' in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
T_0	Constant value of the temperature.
\mathbf{T}_i	Transformation matrix that relates the plane direction, through its direction cosines, with the global reference system in multilaminated models.
$TOL_{\epsilon_{abs}^e}$	Absolute error tolerance $\epsilon_{abs}^{e,(n+1)}$ considered for the convergence of $\Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$.
$TOL_{\epsilon_{rel}^e}$	Relative error tolerance $\epsilon_{rel}^{e,(n+1)}$ considered for the convergence of $\Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$.
u	Internal energy in $\mathbf{x} \in \Omega$.
u'	$= 0,5\epsilon_{q,SSR}^u J_{SSR}^u$ is a measure of the strain incremental energy.
\mathbf{u}	Displacement of $\mathbf{x} \in \Omega$.
\mathbf{u}_o	Imposed displacement of $\mathbf{x} \in \Gamma_D$.
v	$= 1 + (1 + e_0)\epsilon_v$
v_p	Compression waves velocity.
v_s	Shear waves velocity.
\mathbf{v}	Velocity of $\mathbf{x} \in \Omega$.
$\dot{\mathbf{v}}$	Acceleration of $\mathbf{x} \in \Omega$.
V	Representative volume.
w	Soil parameter in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
w'	Soil parameter in the model of Niemunis and Prada-Sarmiento (2011).
W_{el}	Elastic energy.
W_{macro}	Global power in a sphere of volume V .
W_{micro}	Local power in the considered planes.
x	Soil parameter in the expressions that relate G_0 with e .
x_D	$= \epsilon_q G_{LER} / J_{SSR}$
x_e	$= a_{LER} / a_{SSR}$
x_u	$= 2K_{LER} u' / a_{SSR}^2$
x_v	$= \epsilon_v K_{LER} / p'_{SSR}$
\mathbf{x}	$= \varphi(\mathbf{X}, t)$ position of point $\mathbf{X} \in \Omega$ in the current configuration.
X	$= \gamma^p / \gamma_{ref}$ in the model of Tatsuoka and Shibuya (1992).
X'	Soil parameter in the model of Papadimitriou et al. (2001).
\mathbf{X}	$\mathbf{X} \in \Omega$ point of the initial configuration.
γ_{max}	$= \tau_{max} / G_0 \gamma_{max}$
γ_1	$= (\gamma_{max} - 1/2 + \sqrt{1/4 - \gamma_{max}/(m' + 1)}) / (m' / (m' + 1) - \gamma_{max})$
Y	$= (\tau/p') / (\tau/p')_{max}$
Y_1	Contour in the stress space that externally limits Zone I of Jardine (1992).
Y_2	Contour in the stress space that externally limits Zone II of Jardine (1992).

Y_3	Contour in the stress space that externally limits Zone III of Jardine (1992).
Z	Tensorial zone.
α	Soil parameter in the model of Ramberg and Osgood (1943).
α'	Soil parameter in the models MIT-E3 of Whittle (1987) and MIT-S1 of Pestana and Whittle (1999).
α^*	Value $\alpha^* = \arccos(\hat{\mathbf{n}}:\hat{\mathbf{e}})^*$ from which a reversal that modified soil stiffness appears in the HQH and EPHYSS model.
$\bar{\alpha}$	Soil parameter in the model of Jardine et al. (1986).
$\hat{\alpha}$	$= (x_u - 1) / ((x_u - x_e)(\ln(1 + x_u - x_e))^{R'})$
$\tilde{\alpha}$	Angular coordinate in multilaminated models.
$\bar{\alpha}'$	Soil parameter in the model of Bolton and Whittle (1999).
α_G	Strain rate shear modulus parameter according to Yong and Japp (1967).
α_σ	Rotation angle of principal stresses.
α	State variable χ of the <i>back stress</i> type.
β	Soil parameter in the model of Simpson (1992).
β''	Soil parameter in the model of Matasovic and Vucetic (1993).
$\bar{\beta}$	$= (1 + \eta/3 - 2\eta^2/9)$
$\hat{\beta}$	Soil parameter in the model of Puzrin and Burland (1998).
$\tilde{\beta}$	Angular coordinate in multilaminated models.
$\bar{\beta}'$	Soil parameter in the model of Bolton and Whittle (1999).
β_{mod}	$= 1 + \beta (\epsilon_v - \epsilon_{v,0} - \lambda^* \ln(s'/s'_0))$
β_R	Soil parameter in the model of Niemunis and Prada-Sarmiento (2011).
β'_R	Soil parameter in the model of Niemunis and Herle (1997).
$\bar{\beta}_{ii}$	$= (1 - \eta/3)^2$
$\bar{\beta}_{ij}$	$= \bar{\beta}_{ji} = (1 + \eta/3 - 2\eta^2/9)$
γ	Total shear strain.
γ^*	$= p'/p'_i$
$\bar{\gamma}$	Soil parameter in the model of Jardine et al. (1986).
$\hat{\gamma}$	Soil parameter in the model of Puzrin and Burland (1998).
γ_c	$= \xi \gamma_{0,7} / \alpha \left(\sqrt{G_0^{ref} / G_{t,ur}^{ref}} - 1 \right)$
γ_h	Hyperbolic shear strain.
γ_{HIST}	History variable that controls the degradation of G_s^{ap} in the models SSOM, HS-S and HS-SS.
γ_{max}	Maximum or reference shear strain.
γ_{oct}	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{e} \ $
γ_r	Shear strain that complies $\tau_f = G_0 \gamma_r$.
γ_{ref}	$= (\tau/p')_{max} / (G_0/p'_0)$
γ_s	Total shear strain in the \mathbf{s} direction of the considered plane.
$\gamma_{s,centre}$	Value of γ_s in the last reversal point.
γ_t	Total shear strain in the \mathbf{t} direction of the considered plane.
$\gamma_{t,centre}$	Value of γ_t in the last reversal point.
γ_y	Total reference shear strain that is taken equal to γ_r .
$\gamma_{0,7}$	Shear strain value in the model of Dos Santos and Correia (2001) for which $G_s^{ap}(\gamma_{0,7}) = 0,722G_0$
γ_1	Threshold shear strain in the model of Papadimitriou et al. (2001) from which $G_t = G_{t,min}$ is considered.
$\hat{\gamma}_r$	Shear strain in the model of Darendeli and Stokoe (2001) which complies $G_s^{ap}(\hat{\gamma}_r) = 0,50G_0$.
γ^p	Plastic shear strain.
γ_{oct}^e	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{e}^e \ $
γ_{oct}^H	History variable that controls the degradation of G_s^{ap} in the HQH and EPHYSS models.
γ_{oct}^R	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{e}^R \ $
γ_{ur}^α	$= \xi \gamma_{0,7} / \alpha \left(\sqrt{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} / G_{t,ur}^{ref}} - 1 \right)$
$\gamma_{oct}^{\Delta R}$	$= \gamma_{oct} - \gamma_{oct}^R$
Γ	$= \Gamma_N \cup \Gamma_D$ boundary of domain Ω on which the problem to be solved is defined.
Γ_D	Part of the domain boundary with Dirichlet conditions.
Γ_N	Part of the domain boundary with Neumann conditions.
$\bar{\delta}$	Soil parameter in the model of Jardine et al. (1991).
δ	State variable χ of the internal strain type and intergranular strain tensor in the case of the model of Niemunis and Herle (1997).
ϵ	Strain in 1D.
ϵ_α	Total axial strain.

ϵ_{deg}	$= \sqrt{(\epsilon_{n,dev} - \epsilon_{n,dev,centre})^2 + (\gamma_s - \gamma_{s,centre})^2 + (\gamma_t - \gamma_{t,centre})^2}$
ϵ_i	Principal strains.
ϵ_{ij}	Strain tensor components.
$\epsilon_{n,dev}$	Total deviatoric strain due to the normal stress to the considered plane.
$\epsilon_{n,dev,centre}$	Value of $\epsilon_{n,dev}$ in the last reversal point.
ϵ_{oct}	$= 1/3\epsilon_{ii}$
ϵ_q	$= \ \mathbf{e}\ $
ϵ_s	$= 2/3(\epsilon_1 - \epsilon_3)$
ϵ_{th}	Total limit longitudinal strain that separates linear behavior from nonlinear.
ϵ_v	$= \epsilon_{oct} = 1/3\epsilon_{ii}$
$\epsilon_{v,0}$	Initial value of ϵ_v .
$\epsilon_{v,rev}$	Value of ϵ_v in the last reversal point.
ϵ^R	Total strain in reversal point R.
$\epsilon_{abs}^{e,(n+1)}$	Absolute error of $\Delta\epsilon^{e,(n+1)}$ during the iterative process.
ϵ_{ii}^e	$i - th$ principal strain of the elastic strain tensor.
ϵ_{oct}^e	$= 1/3\epsilon_{ii}^e$
$\epsilon_{rel}^{e,(n+1)}$	Relative error of $\Delta\epsilon^{e,(n+1)}$ during the iterative process.
ϵ_{oct}^p	$= 1/3\epsilon_{ii}^p$
ϵ_q^p	Plastic shear strain.
$\epsilon_{q,SSR}^u$	Shear strain value on the SSR surface.
$\epsilon_v^{\Delta R}$	$= \epsilon_v - \epsilon_{v,rev}$
ϵ	Total strain tensor.
ϵ_i	Total strain tensor of the plane i .
ϵ^e	Elastic strain tensor.
ϵ^{mp}	Microplastic strain tensor.
ϵ^p	Plastic strain tensor.
ϵ^{pe}	$= \epsilon^e + \epsilon^{mp}$ paraelastic strain tensor.
ϵ^{peL}	Paraelastic strain in the reversal point L .
$\Delta L \epsilon^{pe}$	$= \epsilon^{pe} - \epsilon^{peL}$
$R1 \epsilon^{pe}$	Value of ϵ^{pe} in the last reversal point $R1$.
ϵ_i^e	Elastic strain tensor of the plane i .
ϵ_i^p	Plastic strain tensor of the plane i .
ϵ_k^p	Plastic strain tensor associated to the yield surface f_k .
$\epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}$	Elastic strain tensor in the $i - th$ iteration at the end of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
ζ	$= \sqrt{c^2 + \mathbf{b} : \mathbf{b} - 2\bar{\eta} : \mathbf{b}}$
η	$= q/p'$
$\bar{\eta}$	Soil parameter in the model of Jardine et al. (1991).
η_1	$= (G_0^{ref}/p'_0)\gamma_1$
η	$= \dot{\epsilon}/\ \dot{\epsilon}\ $
η'	$= s'/p'$ in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
$\bar{\eta}$	$= s'/p'$ in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
η'_{rev}	$= s'_{rev}/p'_{rev}$ in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
$\bar{\eta}_{rev}$	$= s'_{rev}/p'_{rev}$ in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
κ	Slope of the swelling line in the plane $v - \ln(p')$.
κ^*	Slope of the swelling line in the plane $\ln(e) - \ln(p')$.
κ_0	Maximum slope of the swelling curve in the plane $v - \ln(p')$.
λ	Slope of the noval consolidation line in the plane $\ln(e) - \ln(p')$.
$\bar{\lambda}$	Lambda coefficient of Lamé.
λ^*	Slope of the noval consolidation line in the plane $v - \ln(p')$.
$\dot{\lambda}_i$	Plastic multiplier associated to the plane i in multilaminated models.
$\dot{\lambda}_k$	Plastic multiplier associated to the yield surface f_k .
λ_m	Eigenvalue of the spectral decomposition of σ' .
λ_{S_i}	$i - th$ eigenvalue of \mathbf{e} in the SSOM, HS-S and HS-SS models
$\bar{\mu}$	Mu coefficient of Lamé.
μ^*	Soil parameter in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
ν'_{cte}	Drained Poisson's ratio of constant value.
ν'_{ij}	Drained Poisson's ratio according to the plane i and the direction j .
ν'_{min}	Minimum value of drained Poisson's ratio.

v'_t	Tangent drained Poisson's ratio.
v'_{ur}	Drained Poisson's ratio in reversible unloading/reloading processes.
v'_0	Maximum drained Poisson's ratio.
ξ	Scale factor that controls the shape of the degradation curve of G_s^{ap} . A value of $\xi = 2$ is considered for the calculation of G_s^{ap} and $\xi = 1$ for the calculation of $G_{s,\xi=1}^{ap}$.
ξ'	Variable that measures the main pressure with respect to the last reversal point in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
ξ'_s	Variable that measures the deviatoric stress with respect to the last reversal point in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
Π_i	Functions to calculate the transformed variables, $\Pi_0(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{i=1}^3 \phi_i$, $\Pi_1(\boldsymbol{\phi}) = (2\phi_2 - \phi_1 - \phi_3)/\sqrt{6}$, $\Pi_2(\boldsymbol{\phi}) = (2\phi_3 - \phi_1)/\sqrt{2}$, $\Pi_3(\boldsymbol{\phi}) = \sqrt{2}\phi_{12}$, $\Pi_4(\boldsymbol{\phi}) = \sqrt{2}\phi_{23}$, $\Pi_5(\boldsymbol{\phi}) = \sqrt{2}\phi_{31}$ in the MIT-E3 model of Whittle (1987).
$\Pi_{0,p}(\boldsymbol{\phi}_p)$	$= 1/3 \sum_{i=1}^3 (\phi_p)_i$
ρ	$= \ \boldsymbol{\delta}\ /\bar{R}$
ρ_s	Density of solid particles.
ρ_{soil}	$= \rho_s(1 - n) + \rho_w n$.
ρ_w	Water density.
σ'_h	Effective horizontal stress.
σ'_i	Effective $i - th$ principal stress.
σ'_{ij}	Effective stress tensor components.
σ'_{oct}	$= 1/3 \sigma'_{ii}$
σ'_v	Effective vertical stress.
$\sigma'_{v,max}$	Maximum historic effective vertical stress.
σ'_0	$= \sigma'_v(1 + 2K_0)/3$
σ'^R	Effective stress in the reversal point R .
$\boldsymbol{\sigma}$	Total stress tensor.
$\boldsymbol{\sigma}'$	$= \boldsymbol{\sigma} - p_w \mathbf{1}$ is the effective stress tensor.
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}'$	Effective stress tensor of the image point on the bounding plasticity surface in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
$\boldsymbol{\sigma}'_i$	Increase of the effective stress tensor of the plane i in the multilaminated models.
$\boldsymbol{\sigma}'_S$	Elastic centre in the NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
$\boldsymbol{\sigma}'^L$	Effective stress tensor in the reversal point L .
$\Delta^L \boldsymbol{\sigma}'$	$= \boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}'^L$
$\boldsymbol{\sigma}'^{(n+1)}_{[i]}$	Tensor in the $i - th$ iteration at the end of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
τ_f	Shear strength
τ_{max}	Maximum shear stress.
τ_{oct}	$= \sqrt{1/3} \ \boldsymbol{s}\ $
τ_y	Reference stress that is taken equal to τ_f .
τ_1	$= \gamma_1 G_0 / \gamma_{max}$
v	$= 1 + e$
ϑ'_i	$i = 1, 2$ soil parameters in the model of Tatsuoka and Shibuya (1992).
Y_i	Variables that control soil stiffness degradation.
Y_i^{R-}	Variables that control soil stiffness degradation before a reversal.
Y_i^{R+}	Variables that control soil stiffness degradation after a reversal.
ϕ_i	Symmetric isotropic tensor functions that relate $\boldsymbol{\sigma}'$ with $\boldsymbol{\epsilon}^e$ in Cauchy elastic models.
φ'	Maximum effective friction angle.
φ'_m	Mobilized friction angle.
χ	Parameter of the model of Niemunis and Herle (1997).
χ'	$= \sqrt{9(\dot{\epsilon}_v - \dot{\epsilon}_{v,rev})^2 + (\mathbf{E} - \mathbf{E}_{rev}):(\mathbf{E} - \mathbf{E}_{rev})}$
$\dot{\chi}'' \chi''$	$= \begin{cases} \Delta^1 \dot{\epsilon}_v \dot{\epsilon}_v & \text{for } \dot{\epsilon}_v \neq 0 \\ \Delta^1 \mathbf{e} : \dot{\mathbf{e}} & \text{for } \dot{\epsilon}_v = 0 \end{cases} = \begin{cases} \geq 0 & \rightarrow \text{load} \\ < 0 & \rightarrow \text{unload} \end{cases}$
$\bar{\chi}$	Soil parameter in the model of Niemunis et al. (2011a, 2011b).
$\chi^{hist,L}$	History variable that controls the degradation of \mathbf{C} in the model of Hueckel and Nova (1979).
$\boldsymbol{\chi}$	State variables.
$\boldsymbol{\chi}^{hist}$	State variables responsible for describing nonlinear, hysteretic and dependent on recent history behavior of the soil.
$\boldsymbol{\chi}^{el,hist}$	State variable $\boldsymbol{\chi}^{hist}$ in elastoplastic models.
$\boldsymbol{\chi}_k^{pl}$	Plastic state variables associated to the yield surface f_k .
ψ	$= e - (e_{CS})_a + \lambda \ln(p'/p_a)$

$\hat{\psi}$	Soil parameter in the model of Al-Tabbaa and Wood (1989) and in the 3-SKH model of Stallebrass and Taylor (1997).
ψ_i	Isotropic functions of two second-order symmetric tensors (σ' and ϵ).
ψ_0	$= e_0 - (e_{cs})_a + \lambda \ln(p'_0/p_a)$
Ψ	Potential denominated elastic strain energy.
Ψ_1	$= \partial\Psi/\partial\hat{I}_1^e$
ω	Soil parameter in the MIT-E3 model of Whittle (1987) and in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
ω_s	Soil parameter that controls nonlinearity during the application of shear stress in the MIT-S1 model of Pestana and Whittle (1999).
Ω	Domain on which the problem to be resolved is defined.
$\mathbf{\Omega}$	Second order symmetric tensor of constant coefficients that complies that $\mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{\Omega}$ is semi-defined positive.
$\#Z$	Number of tensorial zones.
$\mathbf{1}$	$(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$
\mathbb{I}	$(\mathbb{I})_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$
$\ \mathbf{A}\ $	$= \sqrt{A_{ij}A_{ij}}$
$ a $	$ a = a$ if $a > 0$ and $ a = -a$ if $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$.
$sign(a)$	$sign(a) = +1$ if $a > 0$ and $sign(a) = -1$ if $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$.
$a^{(n)}$	The superscript (n) indicates that a is evaluated in (n).
$\langle a \rangle$	Parenthesis of Macauley, where $\langle a \rangle = a$ if $a \geq 0$ and $\langle a \rangle = 0$ if $a < 0$.
$\dot{\mathbf{A}}$	Infinitesimal rate of \mathbf{A} .
$\Delta\mathbf{A}$	Finite rate in \mathbf{A} .
$\nabla\mathbf{A}$	Gradient of \mathbf{A} .
$\nabla^S\mathbf{A}$	$= 1/2(\nabla\mathbf{A} + \nabla^T\mathbf{A})$
$\hat{\mathbf{A}}$	$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\ \mathbf{A}\ $ if $\ \mathbf{A}\ \neq 0$ and $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ if $\ \mathbf{A}\ = 0$
\mathbf{A}^T	Transposed of \mathbf{A} .
\mathbf{A}^{-1}	Inverse of \mathbf{A} .
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$
$\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik}B_{jl}$
$\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il}B_{jk}$
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	$= A_{ij}B_{ij}$
$\det(\mathbf{A})$	$= \sum_{\sigma \in S_3}^{rg(\mathbf{A})} sign(\sigma) \prod_{i=1}^3 (\mathbf{A})_{\sigma(i),i}$, where $rg(\mathbf{A})$ is the rang of \mathbf{A} , σ is a permutation, S_3 is the group of all permutations of (1,2,3), $sign(\sigma) = 1$ if the permutation is even and $sign(\sigma) = -1$ if the permutation is odd.
CASM-c	Clay and Sand Model – c (Yu, 1995).
DEM	Discrete Element Method
EPHYSS	Elastoplastic Hysteretic Small Strain model (Castellón, 2019).
FC+MCC	Fahey Carter Modified Cam Clay model (Gryczmanski and Uliniarz, 2008).
HQH	Hysteretic Quasi-Hypoelastic model (Castellón, 2019).
HS	Hardening Soil model (Schanz, 1988; Schanz et al., 1999).
HS _{MOD}	Modified Hardening Soil model (Castellón, 2019, based on plastic part of HS-S).
HS-S	Hardening Soil Small model (Benz, 2007).
HS-S[MC]	Hardening Soil Small model with Mohr-Coulomb limit surface (Benz, 2007).
HS-SS	Hardening Soil with Small Strain model of Plaxis (based on the HS-S and recently implemented in other software).
KYS	Kinematic Yield Surfaces.
LER	Linear Elastic Region in the model of Puzrin and Burland (1998).
MCC	Modified Cam Clay model (Roscoe and Burland, 1968).
NAHOS	Elastoplastic NAHOS model of Gryczmanski et al. (1998).
SDMCC	Strain Dependent Modified Cam Clay model (Bolton et al., 1994).
SOM	Swept Out Memory region (Gudehus et al., 1977)
SSOM	Small Strain Overlay Model (Benz, 2007).
USC	Undrained Soft Clay model (Hsieh et al., 2010).
3-SKH	Three Surface Kinematic Hardening model (Stallebrass and Taylor, 1997).

REFERENCES

- Abbiss, C. P. (1986). The effects of damping on the interpretation of geophysical measurements. *Geotechnique*, 36(4), 565-580. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1986.36.4.565>.

- Addenbrooke, T. I., Potts, D. M. and Puzrin, A. M. (1997). The influence of pre-failure soil stiffness on the numerical analysis of tunnel construction. *Géotechnique*, 47(3), 693–712. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.3.693>.
- Ahlberg, J. H., Nilson, E. N., and Walsh, J. L. (1967). *Theory of Splines and Their Applications*. New York, USA: Academic Press.
- Al-Tabbaa, A. (1987). *Permeability and stress-strain response of speswhite kaolin*. PhD Thesis. Cambridge, England: Cambridge University.
- Al-Tabbaa, A. and Wood, D.M. (1989). An experimentally based “bubble” model for clay. In: Pietruszczak, S. and Pande, G.N. (eds.) *Proceedings of the Third International Conference (NUMOG III)*, Numerical Models in Geomechanics. Niagara Falls, Canada, 8-11 May. London; New York: Elsevier Applied Science. 5, 91-99.
- Anderson, D.G. and Stokoe, K.H. (1978). Shear modulus: A time-dependent soil property. *Dynamic Geotechnical Testing*. ASTM STP 654. American Society for Testing and Materials, 66-90.
- Arthur, J.R.F., Chua, K.S. and Dunstan, T. (1977). Induced anisotropy in a sand. *Géotechnique*, 27(1), 13-30.
- Arthur, J.R.F., Chua, K.S., Dunstan, T. and Rodriguez, J. I. (1980). Principal stress rotation: a missing parameter. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 106(4), 419-433.
- Aswin, L., Ou, C-Y. and Hsieh, P-G. (2010). Evaluation of clay constitutive models for analysis of deep excavation under undrained conditions. *Journal of GeoEngineering*, 5(1), 9-20.
- Atkinson, J.H. (2000). Nonlinear soil stiffness in routine design. *Géotechnique*, 50(5), 487-508. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.5.487>.
- Atkinson, J. and Little, J.A. (1988). Undrained triaxial strength and stress-strain characteristics of a glacial till soil. *Canadian Geotechnical Journal*, 25(3), 428-439. DOI: <https://doi.org/10.1139/t88-048>.
- Atkinson, J.H., Richardson, D. and Stallebrass, S.E. (1990). Effect of recent stress history on the stiffness of overconsolidated soil. *Géotechnique*, 40(4), 531-540. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1990.40.4.531>.
- Batdorf, S.B., Budiansky, B. (1949). *A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip*. NACA Technical Note (1871). Virginia, USA: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Bates, C. R. (1989). Dynamic soil property measurements during triaxial testing. *Géotechnique*, 39 (4), 721-726. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1989.39.4.721>.
- Baudet, B. and Stallebrass, S. (2004). A constitutive model for structured clays. *Géotechnique*, 54 (4), 269-278. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2004.54.4.269>.
- Bauer, E. (1996). Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soils and Foundations*, 36 (1), 13–36.
- Bazant, Z.P. and Oh, B.H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. *Journal of Engineering Mechanics*, 11(4), 559–582.
- Been, K. and Jefferies, M.G. (1985). A state parameter for sands. *Géotechnique*, 35(2), pp. 99-112. <https://doi.org/10.1680/geot.1985.35.2.99>.
- Bell, J. (1989). Experimental solid mechanics in the nineteenth century. The 1989 William Murray Lecture. *Experimental Mechanics*, 29(2) 57–165. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02321369>.
- Bennell, J. D., Taylor Smith, D. and Davis, A. M. (1984). Resonant column testing of marine sediments. *Oceanography International*. Brighton, England. 84.
- Benz, T. (2007). *Small-Strain Stiffness of Soils and its Numerical Consequences*. PhD Thesis. Stuttgart, Germany: Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- Besseling, J.F. (1958). A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material showing anisotropic strain hardening, creep recovery and secondary creep. *Journal of Applied Mechanics*, 25(1), 529-536.
- Biarez, J. and Hicher, P.-Y. (1994). *Elementary Mechanics of Soil Behaviour: Saturated Remoulded Soils*. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Bieniawski, Z. T. (1971). Deformational behavior of fractured rock under multiaxial compression. In: Te'eni, M. (ed.). *International Conference Structure, Solid Mechanics and Engineering Materials*. University of Southampton, 21-25 April 1969. London, England: Wiley-Interscience, 589-598.
- Bishop, A.W. and Henkel, D.J. (1962). *The measurement of soil properties in the triaxial test*. Second edition. London, England: Edward Arnold Ltd.
- Bishop, A.W. and Wesley, L.D. (1975). A hydraulic triaxial apparatus for controlled stress path testing. *Géotechnique*, 25(4), 657-670. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1975.25.4.657>.
- Bjerrum, L. (1973). Problems of soil mechanics and construction on soft clays and structurally unstable soils (collapsible, expansive and others). In: *Eighth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Moscow, Russia, 6-11 August. 3, 111-159.

- Bolton, M. D., Sun, H. W. and Britto, A. M. (1993). Finite element analyses of bridge abutments of firm clay. *Computers and Geotechnics*, 15(4), 221-245.
- Bolton, M.D., Dasari, G.R. and Britto, A.M. (1994). Putting small strain nonlinearity into the Modified Cam Clay model. In: Siriwardane, H. J. and Zaman, M. M. (eds.) *Eighth International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics*. Virginia, USA, 22-28 May. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema. 537-542.
- Bolton, M.D. and Whittle, R.W. (1999). A nonlinear elastic/perfectly plastic analysis for plane strain undrained expansion tests. *Géotechnique*, 49(1), 133-141.
- Borja, R.I., Tamagnini, C. and Amorosi, A. (1997). Coupling Plasticity and Energy-Conserving Elasticity Models for Clays. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(10), 948-957.
- Bowden, F. P. and Tabor, D. (1964). *The Friction and Lubrication of Solids. Part II*. London, England: Oxford University Press.
- Bressani, L. A. (1990). *Experimental Properties of Bonded Soils*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).
- Britto, A. M. and Gunn, M. J. (1987). *Critical state soil mechanics via finite elements*. Chichester, England: Ellis Horwood Limited.
- Broms, B.B. and Ratnam, M.V. (1963). Shear strength of an anisotropically consolidated clay. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(6), 1-26.
- Broms, B.B. and Casbarian, A.O. (1965). Effects of rotation of the principal stress axes and of the intermediate principal stress on the shear strength. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Montreal, Canada, 8-15 September. Toronto, Canada: University of Toronto Press, 1, 179-183.
- Budhu, M. (1984). Nonuniformities imposed by simple shear apparatus. *Canadian Geotechnical Journal*, 21(2), pp. 125-137. DOI: <https://doi.org/10.1139/t84-010>.
- Bui, M. T. (2009). *Influence of some particle characteristics on the small strain response of granular materials*. PhD Thesis. Southampton, England: University of Southampton.
- Burland, J.B. (1989). Ninth Laurits Bjerrum Memorial Lecture: "Small is beautiful"—the stiffness of soils at small strains. *Canadian Geotechnical Journal*, 26(4), 499-516. DOI: <https://doi.org/10.1139/t89-064>.
- Burland, J.B., Simpson, B. and St. John, H.D. (1979). Movements around excavations in London Clay. In: *Proceedings of the Seventh European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, The measurement, selection and use of design parameters in geotechnical engineering. Brighton, England: British Geotechnical Society, 1, 13-29.
- Campanella, R.G. and Vaid, Y.P. (1973). Influence of stress path on the plane strain behaviour of a sensitive clay. In: *Proceedings of the Eight International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Moscow, Russia, 6-11 August. Moscow: Papers Subcommittee, 1.1, 85-92.
- Campanella, R.G., Stewart, W.P., Roy, D. and Davies, M.P. (1994). Low strain dynamic characteristics of soils with the downhole seismic piezocone penetrometer. In: Ebelhar, R., Drnevich, V. and Kutter, B. (eds.) *STP1213-EB Dynamic Geotechnical Testing II*, 73-87. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP13207S>.
- Casagrande, A. and Carillo, H. (1944). Shear failure on anisotropic materials. In: *Contribution to Soil Mechanics 1941-1953*. Boston, USA: Boston Society of Civil Engineers, 31(2), 74-87.
- Castellón, J. (2013). *Análisis teórico, numérico and experimental del comportamiento de suelos en el rango de las pequeñas deformaciones*. Master Thesis. Barcelona, Spain: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Castellón, J. (2019). *Estudio del comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones and desarrollo del modelo constitutivo EPHYSS*. PhD Thesis. Barcelona, Spain: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Chambon, R. (1989). Une classe de loi de comportement incrémentalement non linéaire pour les sols non visqueux: résolution de quelques problèmes de cohérence. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 308(II), 1571-1576.
- Chambon, R., Desrues, J. J. M., Hammad, W. and Charlier, R. (1994). CLoE, a new rate-type constitutive model for geomaterials: theoretical basis and implementation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 18(4), 253-278. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610180404>.
- Chiaro, G., De Silva, L., Kiyota, T. and Koseki, J. (2011). An elasto-plastic model to describe the undrained cyclic behavior of saturated sand with initial static shear. In: Chung, C.-K., Kim, H.-K., Lee, J.-S., Jung, Y.-H., Kim, D.-S. (eds.) *Proceedings of the Fifth International Symposium on Deformation Characteristics of Geomaterials*. Seoul, South Korea, 1-3 September. IOS Press, 2, 1026-1033.
- Clarke, S. D. (2009). *Enhancement of the Brick constitutive model to incorporate viscous soil behaviour*. PhD Thesis. Sheffield, England: University of Sheffield.
- Clayton, C. R. I. (2011). Stiffness at small strain: research and practice. *Géotechnique*, 61(1), 5-37. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2011.61.1.5>.
- Clayton, C. R. I., Edwards, A. and Webb, M. J. (1991). Displacement within the London Clay during construction. In: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and*

- Foundation Engineering*, Deformation of soils and displacements of structures. Florence, Italy, 26-30 May. Rotterdam; Brookfield: A. A. Balkema, 2, 791-796.
- Clayton, C. R. I. and Heymann, G. (1999). Stiffness of geomaterials from small strain triaxial and field geophysical tests. In: Jamiolkowski, M., Lancellotta, R. and Presti, D. Lo (eds.) *Second International Conference on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Turin, Italia: A.A. Balkema, 1, 65–71.
- Clayton, C. R. I. and Heymann, G. (2001). Stiffness of Geomaterials at very small strains. *Géotechnique*, 51(3), 245–255. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2001.51.3.245>.
- Cole, K. W. and Burland, J. B. (1972). Observations of retaining wall movements associated with a large excavation. In: *Fifth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Structures Subjected to Lateral Forces. Madrid, Spain, 10-13 April. Madrid, Spain: Sociedad Española de Mecánica del Suelo e Ingeniería Geotécnica. 1, 442-453.
- Cornforth, D.H. (1964). Some experiments on the influence of strain conditions on the strength of sand. *Géotechnique*, 14(2), 143-167. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1964.14.2.143>.
- Cudny, M. (2013). *Some aspects of the constitutive modelling of natural fine grained soils*. PhD Thesis. Gdansk, Poland: Politechnika Gdanska.
- Cuellar, V. (1978). Intrinsic time theory applied to the behavior of dry sand under earthquake type of loading. In: Gudehus, G., Borm, G. W. and Prange, B. (eds.) *Proceedings of an International Symposium and a NATO Advanced Study Institute of Soil and Rock Mechanics*, Dynamical Methods in Soil and Rock Mechanics. Karlsruhe, Germany, 5-16 September 1977. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Dafalias, Y.F. (1975). *On cyclic and anisotropic plasticity: (i) A general model including material behaviour under stress reversal, (ii) Anisotropic hardening for initially orthotropic materials*. PhD Thesis. Berkeley, California, USA: University of California.
- Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. (1975). A model of nonlinearly hardening materials for complex loadings. *Acta Mechanica*, 21(3), 173-192.
- Dafalias, Y.F. and Popov, E.P. (1976). Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity. *Journal Applied Mechanics*, 43(4), 645-651. DOI: 10.1115/1.3423948.
- Dafalias, Y.F. and Herrmann, L.R. (1982). Bounding surface formulation of soil plasticity. In: Pande, G.N. and Zienkiewicz, O.C. (eds.) *Soil Mechanics, Transient and Cyclic Loads*, Constructive Relations and Numerical Treatment. Chichester, England: John Wiley and Sons, 253-282.
- Darendeli, M.B. and Stokoe (2001). *Development of a new family of normalized modulus reduction and material damping curves*. PhD Thesis. Austin, USA: The University of Texas.
- Darve, F. (1978). *Une formulation incrémentale nonlinéaire de lois rhéologiques; application aux sols*. PhD Thesis. Grenoble, France: Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- Darve, F. (1990). The expression of rheological laws in incremental form and the main classes of constitutive equations. In: *Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling*. Ed. by Darve, F. London, England: Elsevier.
- Darve, F. and Labanieh, S. (1982). Incremental constitutive law for sands and clays, simulations of monotonic and cyclic tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 6(2), 243-275. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610060209>.
- Darve, F. and Roguiez, X. (1999). Constitutive relations for soils: new challenges. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 4, 9-35.
- Darve, F. and Servant, G. (2004). Fundamentals of constitutive equations for geomaterials. In: *Degradations and Instabilities in Geomaterials*. Ed. by Darve, F. and Vardoulakis, I. New York, USA: Springer Wien Publication. 1-34.
- Desai, C. S. (1971). Nonlinear Analyses Using Spline Functions. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 97(10), pp 1461-1480.
- Dobry, R., and Vucetic, M. (1987). Dynamic properties and seismic response of soft clay deposits. In: Mendoza, M. and Montañez, L (eds.) *Proceedings of the International Symposium on Geotechnical Engineering of Soft Soils*. Mexico City, Mexico, 3-14 August. Mexico City, Mexico: Sociedad Mexicana de Ingeniería Geotécnica, 2, 51-87.
- Dos Santos, J.A. and Correia, A.G. (2001). Reference threshold shear strain of soil. Its application to obtain an unique strain-dependent shear modulus curve for soil. *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. Istanbul, Turkey, 27-31 August. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Drescher, A. and De Josselin De Jong, G. (1972). Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(5), 337–340. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(72\)90029-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(72)90029-4).
- Duffy, J. and Mindlin, R.D. (1957). Stress-strain relations and vibrations of granular medium. *Journal of Applied Mechanics*, 24, 585-593.

- Duncan, J.M. and Chang, C.Y. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 96(5), 1629-1953.
- Duncan, J.M. and Wong, K.S. (1974). *Hyperbolic Stress-Strain Parameters for Nonlinear Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Soil Masses*. Report No. TE-74-3. Berkeley, California, USA: National Science Foundation, University of California.
- Duncan, J.M., Byrne, P., Wong, K.S. and Mabry, P. (1980). *Strength, Stress-Strain and Bulk Modulus Parameters for Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Soil Masses*. Report No. UCB/GT/80-01. Berkeley, California, USA: Office of Research Services, University of California, 20-49.
- Duwez, P. (1935). On the plasticity of crystals. *Physical Review (American Physical Society)*, 47(6), 494-501. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.47.494>.
- Dyvik, R. and Madshus, C. (1985). Lab measurements of Gmax using bender elements. In: *ASCE Convention on Advances in the Art of Testing Soils Under Cyclic Conditions*. Detroit, USA, 24 October. New York, USA: American Society of Civil Engineers, 186-196.
- Dyvik, R. and Olsen, T. S. (1989). Gmax measured in oedometer and DSS tests using bender elements. In: *Proceedings of the Twelfth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Rio de Janeiro, Brazil, 13-18 August. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 1, 39-42.
- Ehret, A., Itskov, M., and Schmid, H. (2010). Numerical integration on the sphere and its effect on the material symmetry of constitutive equations - A comparative study. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(2), 189-206.
- Einav, I. (2004). Thermomechanical relations between stress-space and strain-space models. *Géotechnique*, 54(5), 315-318. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2004.54.5.315>.
- Einav, I. and Puzrin, A.M. (2004). Pressure-Dependent Elasticity and Energy Conservation in Elastoplastic Models for Soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 130(1), 81-92. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2004\)130:1\(81\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2004)130:1(81)).
- Eisenberg, M. A. and Phillips, A. (1971). A theory of plasticity with non-coincident yield and loading surfaces. *Acta Mechanica*, 11(3-4), 247-260. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01176559>.
- Elhakim, A.F. (2005). *Evaluation of shallow foundation displacements using small-strain stiffness*. PhD Thesis. Atlanta, USA: Georgia Institute of Technology.
- Ellison, K.C. (2009). *Constitutive modeling of London Clay*. First Year PhD Report. Cambridge, England: University of Cambridge.
- Ellison, K.C., Soga, K. and Simpson, B. (2010). An examination of strain space versus stress space for the formulation of elastoplastic constitutive models. In: Benz, T. and Nordal, S. (eds.) *7th European Conference on Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, NUMGE 2010. Norwegian University of Science and Technology (NTNU) in Trondheim, Norway, 2-4 June. London, England: Taylor & Francis Group, 33-38.
- Euler, L. (1727). *Dissertatio physica de sono (Physical dissertation on sound)* [online]. Available at: The Euler Archive <<http://eulerarchive.maa.org/>> [Accessed: 29 July 2019].
- Euler, L. (1728). *Solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata (Solution to the problem of finding curves which are formed by an elastic strip when a force is applied to a single point)* [online]. Available at: The Euler Archive <<http://eulerarchive.maa.org/>> [Accessed: 29 July 2019].
- Fahey, M. and Carter, J.P. (1993). A finite element study of the pressuremeter test in sand using a nonlinear elastic plastic model. *Canadian Geotechnical Journal*, 30(2), 348-362. DOI: <https://doi.org/10.1139/t93-029>.
- Fernandez, A.L. and Santamarina, J.C. (2001). Effect of cementation on the small-strain parameters of sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 38(1), 191-199. DOI: <https://doi.org/10.1139/t00-081>.
- Ferreira, C., da Fonseca, A. V. and Santos, J. A. (2006). Comparison of simultaneous bender elements and resonant column tests on Porto residual soil. In: Ling H.I., Callisto L., Leshchinsky D., Koseki J. (eds.) *Geotechnical symposium on soil stress-strain behavior: measurement, modeling and analysis*. Rome, Italy, 16-17 March. Dordrecht, Netherlands: Springer-Verlag, 146, 523-535.
- Frydman, S., Talesnick, M. and Puzrin, A. (1995). Colinearity of stresses, strains and strain increments during shearing of soft clay. *Journal of Geotechnical Engineering*, 121(2), 174-184. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1995\)121:2\(174\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1995)121:2(174)).
- Ganendra D. (1994). *Finite element analysis of laterally loaded piles*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).
- Gasparre, A. (2005). *Advanced laboratory characterisation of London clay*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).
- Gasparre, A., Nishimura, S., Minh, N. A., Coop, M. R. and Jardine, R. J. (2007). The stiffness of natural London Clay. *Géotechnique*, 57(1), 33-47. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2007.57.1.33>.

- Goddard, J.D. (1990). Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical and Physical Sciences*, 430(1878), 105-131. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1990.0083>.
- Green, G. (1828). *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*. Nottingham, England: T. Wheelhouse (Printer).
- Griffiths, D.V. and Prévost, J.H. (1990). Stress-strain curve generation from simple triaxial parameters. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 14(8), 587-594. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610140805>.
- Gryczmanski, M., Jastrzebska, M. and Sternik, K. (1998). *Single surface elasto-plastic model for clays with strongly nonlinear anisotropic hardening rule – calibration and numerical implementation*. Internal Report No. BK-254/RB- 7/98. Gliwice, Poland: Geotechnical Dept., Silesian University of Technology.
- Gryczmanski, M., Jastrzebska, M. and Sternik, J. (1999). *Single surface elasto-plastic model for clays with strongly nonlinear anisotropic hardening NAHOS 1- verification and application in geotechnical problems*. Internal Report No. BK-237/RB-7/99. Gliwice, Poland: Geotechnical Dept., Silesian University of Technology.
- Gryczmanski, M. and Uliniarz, R. (2008). A simple critical state model with small strain nonlinearity for overconsolidated soils. *Foundations of Civil and Environmental Engineering*, 12, 49-60.
- Gudehus, G. (1996). A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils and Foundations*, 36(1), 1–12. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf.36.1>.
- Gudehus, G. (2011). *Physical soil mechanics*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.
- Gudehus, G., Goldscheider, M. and Winter, H. (1977). *Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods: Some sources of errors and bounds of accuracy*. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 121-150.
- Gunn, M. J. (1992). The prediction of surface settlement profiles due to tunneling. En: Houlsby, G. T. and Schofield, A. N. (eds.) *Proceedings of the Wroth Memorial Symposium*, Predictive soil mechanics. St. Catherine's College, 27-29 July. London, England: Thomas Telford, 304-316.
- Habib, P. (1953). Influence of the variation of the average principal stress upon the shearing strength of soils. In: *Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Switzerland, 16-17 August. Zurich, Switzerland: Organizing Committee ICOSOMEF, 1, 131-136.
- Hansen, J. B. (1963). Discussion of Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(4), 241-242.
- Hara, A. (1980). *Dynamic deformation characteristics of soils and seismic response analyses of the ground*. Dissertation presented to the University of Tokyo.
- Hardin, B. O. (1961). *Study of Elastic Wave Propagation and Damping in Granular Materials*. PhD Thesis. Gainesville, Florida, USA: University of Florida.
- Hardin, B. O. (1978). The nature of stress-strain behavior for soils. *ASCE Special Conference on Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. Pasadena, California, USA, 3–90.
- Hardin, B.O. and Richart Jr., F.E. (1963). Elastic wave velocities in granular soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(1), 33-66.
- Hardin, B.O. and Black, W.L. (1966). Sand stiffness under various triaxial stresses. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 92(2), 27-42.
- Hardin, B.O. and Black, W.L. (1968). Vibration modulus of normally consolidated clays. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 94(2), 353-370.
- Hardin, B.O. and Drnevich, V.P. (1972). Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 98(6), 603-624.
- Hardin, B.O. and Blandford, G., (1989). Elasticity of Particulate Materials. *Journal of Geotechnical Engineering*, 115(6), 788–805.
- Hashiguchi, K. (1993). Fundamental requirements and formulations of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity. *International Journal of Plasticity*, 9(5), 525-549. DOI: [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(93\)90018-L](https://doi.org/10.1016/0749-6419(93)90018-L).
- Hepton, P. (1988). Shear wave velocity measurements during penetration testing. *Penetration Testing in the UK*, ICE. London, England: Thomas Telford. 35, 275-278.
- Herle, I. and Kolymbas, D. (2004). Hypoplasticity for soils with low friction angles. *Computers and Geotechnics*, 31(5), 365–373. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2004.04.002>.
- Hicher, P.-Y. (1996). Elastic properties of soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, 122(8), 641-648. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1996\)122:8\(641\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1996)122:8(641)).
- Hight, D.W. (1983). *Laboratory investigations of Seabed clays*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).

- Hight, D. W., McMillan, F., Powell, J. J. M., Jardine, R. J. and Allenou, C. P. (2003). Some characteristics of London clay. In: *International workshop on characterization and engineering properties of natural soils*. Singapore, 2-4 December 2002. CRC Press, 2, 851–907.
- Hoar, R.J. and Stokoe, K.H. (1978). Generation and measurement of shear waves *in situ*. In: *Dynamic Geotechnical Testing*, Ed. by Silver, M. and Tiedemann, D. West Conshohocken, Pennsylvania: ASTM International. 3-29. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP35669S>.
- Hooke, R. (1676). *A description of helioscopes and some other instruments made by Robert Hooke, Fellow of the Royal Society*. London, England: T.R., John Martyn (Printer).
- Houlsby, G.T., (1985). The use of a variable shear modulus in elastic-plastic models for clays. *Computers and Geotechnics*, 1, 3–13. DOI: [https://doi.org/10.1016/0266-352X\(85\)90012-6](https://doi.org/10.1016/0266-352X(85)90012-6).
- Houlsby, G.T., Amorosi, A. and Rojas, E. (2005). Elastic moduli of soils dependent on pressure: a hyperelastic formulation. *Géotechnique*, 55(5), 383-392. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.5.383>
- Houlsby, G.T. and Wroth, C.P. (1991). The variation of shear modulus of a clay with pressure and overconsolidation ratio. *Soils and Foundations*, 31(3), 138-143. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.31.3_138.
- Hsieh, P. G., Ou, C. Y., and Lim, A. (2010). Use of the total stress undrained model to the analysis of deep excavation. In: L., John and L., Meei-Ling (eds.) *Proceedings of the 17th Southeast Asian Geotechnical Conference*. Taipei, Taiwan, 10-13 May. Taiwan Geotechnical Society/Association of Geotechnical Societies in Southeast Asia/Southeast Asian Geotechnical Society, 227-230.
- Hueckel, T. (1976). Coupling of elastic and plastic deformations of bulk solids. *Meccanica*, 11(4), 227-235.
- Hueckel, T. and Nova, R. (1979). Some hysteresis effects of behaviour of geologic media. *International Journal of Solids and Structures*, 15(8), 625-642. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90076-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90076-3).
- Idriss, I.M., Dorby, R. and Singh, R.D. (1978). Nonlinear behaviour of soft clays during cyclic loading. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 104(12), 1427-1447.
- Ishibashi, I. (1981). Dynamic soil properties. In: *Joint US/PRC Microzonation Workshop*. Harbin, China, 11-16 September. Sinica Academy, 16, 1-21.
- Ishibashi, I. and Zhang, X. (1993). Unified dynamic shear moduli and damping ratios of sand and clay. *Soils and Foundations*, 33(1), 182–191. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.33.182>.
- Israelachvili, J.N. (1992). *Intermolecular and surface forces*. USA: Academic Press.
- Iwasaki, T., Tatsuoka, F. and Takagi, Y. (1978). Shear modulus of sands under torsional shear loading. *Soil and Foundations*, 18(1), 39-56. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.18.39>.
- Iwan, W. D. (1967) On a Class of Models for the Yielding Behavior of Continuous and Composite Systems. *Journal of Applied Mechanics*, 34(3), 612-617. <https://doi.org/10.1115/1.3607751>.
- Iwan, W.D. and Chelvakumar, K. (1988). Strain-space constitutive model for clay soils. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(9), 1454-1472. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1988\)114:9\(1454\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:9(1454)).
- Jamiolkowski, M., Ladd, C. C., Germaine, J. T. and Lancellotta, R. (1985). New developments in field and laboratory testing of soils - A State-of-the-Art Report. In: Comité de Publicaciones del XI ICSMFE (ed.) *Eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. San Francisco, USA, 12-16 August. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 1, 57–153.
- Jamiolkowski, M., Lancellotta, R. and Lo Presti, D. C. F. (1995). Remarks on the stiffness at small strains of six Italian clays. In: Shibuya, S., Mitachi, T. and Miura, S. (eds.) *Proceedings of the First International Conference on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Sapporo, Japan, 12-14 September 1994. Rotterdam, Netherlands: A.A. Balkema, 817-836.
- Janbu, N. (1963). Soil Compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. In: *Proceedings of the European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Problems of Settlements and Compressibility of Soils. Wiesbaden, Germany, 1963. 1, 19-25.
- Jardine, R. J. (1985). *Investigations of pile-soil behaviour with special reference to the foundations of offshore structures*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).
- Jardine, R. J. (1992). Some observations on the kinematic nature of soil stiffness. *Soil and Foundations*, 32(2), 111-124. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.32.2_111.
- Jardine, R. J. (1995). One perspective of the pre-failure deformation characteristics of some geomaterials. In: Shibuya, S., Mitachi, T. and Miura, S. (eds.) *Proceedings of the First International Conference on Pre-failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Sapporo, Japan, 12-14 September 1994. Rotterdam, Netherlands: A.A. Balkema. 855-885.

- Jardine, R.J., Symes, M.J., and Burland, J.B. (1984). The measurement of soil stiffness in the triaxial apparatus. *Géotechnique*, 34(3), 323-340. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1984.34.3.323>.
- Jardine, R.J., Potts, D.M., Fourie, A.B. and Burland, J.B. (1986). Studies of the Influence of Nonlinear Stress Strain Characteristics in Soil-Structure Interaction. *Géotechnique*, 36(3), 377-396. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1986.36.3.377>.
- Jardine, R. J. and Potts, D. M. (1988). Hutton tension leg platform foundations: prediction of driven pile behaviour. *Géotechnique*, 38(2), 231-252. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1988.38.2.231>.
- Jardine, R.J., Potts, D.M., St. John, H.D. and Hight, D.W. (1991). Some practical applications of a nonlinear ground model. In: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Florence, Italy, 26-30 May. Rotterdam; Brookfield: A.A. Balkema, 1, 223 - 228.
- Jardine, R. J., Zdravkovic, L. and Porovic, E. (1997). Anisotropic consolidation including principal stress rotation: experiments, results and practical applications. In: Simão, P. (ed.) *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Hamburg, Germany, 6-12 September. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 4. 2165–2168.
- Jardine, R. J., Kuwano, R., Zdravkovic, L. and Thornton, C. (2001). Some fundamental aspects of the prefailure behaviour of granular soils. In: Jamiolkowski, M., Lancellotta, R., Lo Presti, D. C. F. (eds.). *Proceedings of the Second International Symposium on Pre-Failure Deformation Characteristics of Geomaterials*. Torino, Italy, 28-30 September 1999. Rotterdam, Netherlands: A.A. Balkema, 2, 1077-1111.
- Jardine, R. J., Gens, A., Hight, D. W. and Coop, M. R. (2004). Developments in understanding soil behavior. In: Jardine, R. J., Potts, D. M., Higgins, K. G. (eds.). *Advances in geotechnical engineering. The Skempton conference*, Proceedings of a three-day conference on advances in geotechnical engineering. Royal Geographical Society, 29-31 March. London, England: Thomas Telford, 1, 101–206.
- Jastrzebska, M. (2000). Calibrage d'un modèle d'argile à une surface au renforcement anisotrope non lineaire. In: *Comptes-rendues du XII-ème Colloque Franco-Polonais de Mécanique de Sols et des Roches Appliquée*. Paris, 3-4 July. Wrocław University of Technology, 1.
- Jastrzebska, M. (2002). *Calibration and verification of a single surface elasto-plastic model for soil with strongly nonlinear anisotropic hardening law*. PhD Thesis. Gliwice, Poland: Silesian University of Technology.
- Jastrzebska, M. and Sternik, K. (2004). Application of elastoplastic model with anisotropic hardening to analysis of cyclic loading of cohesive soil. In: Triantafyllidis, T. (ed.) *Proceedings of the International Conference on Cyclic behavior of soils and liquefaction phenomena*. Bochum, Germany, 31 March-2 April. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 41-46.
- Johnson, K. L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139171731>.
- Jovicic, V. and Coop, M. (1998). The measurement of stiffness anisotropy in clays with bender element tests in the triaxial apparatus. *Geotechnical Testing Journal*, 21(1), 3–10. DOI: <https://doi.org/10.1520/GTJ10419>.
- Kavvas, M. (1982). *Nonlinear consolidation around driven piles in clays*. PhD Thesis. Cambridge, Massachusetts, USA: Massachusetts Institute of Technology.
- Khong, C.D. (2004). *Development and numerical evaluation of unified critical state models*. PhD Thesis. Nottingham, England: University of Nottingham.
- Kirkpatrick, W.M. (1957). The condition of failure for sands. In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. London, England, 12-24 August. Butterworths Scientific Publications, 1, 172-178.
- Kjellman, W. (1936). Report on an apparatus for consummate investigation of the mechanical properties of Soils. In: *Proceedings of the First International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Harvard University, 22-26 June. Cambridge, USA: Graduate School of Engineering, Harvard University, 2, 16-20.
- Kjellman, W. (1951). Testing the shear strength of clay in Sweden. *Géotechnique*, 2(3), 225-232. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1951.2.3.225>.
- Ko, H.-Y. and Scott, R.F. (1967). A new soil testing apparatus. *Géotechnique*, 17(1), 40-57. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1967.17.1.40>.
- Kokusho, T. (1980). Cyclic triaxial test of dynamic soil properties for wide strain range. *Soils and Foundations*, 20(2), 45-60. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.20.2_45.
- Kokusho, T., Yoshida, Y. and Esashi, Y. (1982). Dynamic properties of soft clay for wide strain range. *Soils and Foundations*, 22(4), 1-18. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.22.4_1.
- Kolymbas, D. (1977). A rate-dependent constitutive equation for soils. *Mechanics Research Communications*, 4(6), 367-372. DOI: [https://doi.org/10.1016/0093-6413\(77\)90056-8](https://doi.org/10.1016/0093-6413(77)90056-8).
- Kolymbas, D. and Wu, W. (1993). Introduction to hypoplasticity. In: *Modern Approaches to Plasticity*. Ed. by Kolymbas D. Amsterdam, Netherlands: Elsevier. 213-223.

- Kondner, R.L. (1963). Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(1), 115-144.
- Kondner, R.L. and Zelasko, J.S. (1963). A hyperbolic stress-strain formulation of sands. In: *Proceedings of the Second Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. San Paulo, Brazil, 1963. Associação Brasileira de Mecânica dos Solos, 1, 289-324.
- Krieg, R.D. (1975). A practical two-surface plasticity theory. *Journal of Applied Mechanics*, 42(3), 641-646. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3423656>.
- Kulhawy, F. H., Duncan, J. M. and Seed, H. B. (1969). *Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Embankments During Construction*. Contract Report S-69-8 for U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, under contract DACW39-68-C-0078. Berkeley, California: College of Engineering, Office of Research Services, University of California.
- Kung, G. T.-C., Hsiao, E. C.-L. and Juang, C. H. (2007). Evaluation of a simplified small-strain soil model for analysis of excavation-induced movements. *Canadian Geotechnical Journal*, 44(6), 726-736. DOI: <https://doi.org/10.1139/t07-014>.
- Lade, P. V. and Abelev, A. V. (2005). Characterization of cross-anisotropic soil deposits from isotropic compression test. *Soils and Foundations*, 45(5), 89-102. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf.45.5_89
- Landon, M. M., DeGroot, D. J. and Sheahan, T. C. (2007). Nondestructive sample quality assessment of a soft clay using shear wave velocity. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 133(4), 424-432. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2007\)133:4\(424\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2007)133:4(424)).
- Lanzo, G., Vucetic, M. and Doroudian, M. (1997). Reduction of shear modulus at small strains in simple shear. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 123(11), 1035-1042. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1997\)123:11\(1035\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(1997)123:11(1035)).
- Lambe, T.W. and Whitman, R.V. (1969). *Soil Mechanics*. New York, USA: John Wiley & Sons.
- Lee, J.H., and Salgado, R. (1999). Determination of pile base resistance in sands. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 125(8), 673-683. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(1999\)125:8\(673\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(1999)125:8(673)).
- Lee, J. and Salgado, R. (2000). Analysis of calibration chamber plate load tests. *Canadian Geotechnical Journal*, 37(1), 14-25. DOI: <https://doi.org/10.1139/t99-061>.
- Lee, J. and Salgado, R. (2002). Estimation of footing settlement in sand. *International Journal of Geomechanics*, 2(1), 1-28.
- Lee, J., Salgado, R. and Carraro, A.H. (2004). Stiffness degradation and shear strength of silty sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 41(5), 831-843. DOI: <https://doi.org/10.1139/t04-034>.
- Lehane, B. and Cosgrove, E. (2000). Applying triaxial compression stiffness data to settlement prediction of shallow foundations on cohesionless soil. *Geotechnical Engineering-Institute of Civil Engineers*, 143(4), 191-200. DOI: <https://doi.org/10.1680/geng.2000.143.4.191>.
- Leroueil, S. and Hight, D. W. (2003). Behaviour and properties of natural soils and soft rocks. In: *Characterisation and engineering properties of natural soils*. Ed. by Tan, T. S., Phoon, K. K., Hight, D. W., Leroueil, S. Singapur: A.A. Balkema, 1, 29-254.
- Li, X.S. and Dafalias, Y. F. (2000). Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*, 50(4), 449-460. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.4.449>.
- Lo Presti, D.C.F. and Jamiolkowski, M. (1998). Discussion: Estimate of elastic shear modulus in Holocene soil deposits. *Soils and Foundations*, 38(1), 263-265.
- Loret, B. (1985). On the choice of elastic parameters for sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 9(3), 285-292. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610090308>.
- Mair, R.K. and Taylor, R.N. (1993). Prediction of clay behavior around tunnels using plasticity solutions. In: Houlby, G. T. and Schofield, A. N. (eds.) *Proceedings of the Wroth Memorial Symposium*, Predictive soil mechanics. St Catherine's College, 27-29 July 1992. London, England: Thomas Telford. 449-463.
- Maier, G. and Hueckel, T. (1979). Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 16(2), 77-92. DOI: [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(79\)91445-1](https://doi.org/10.1016/0148-9062(79)91445-1).
- Mana A.I. and Clough, G.W. (1981). Prediction of movements for braced cuts in clays. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 107(6), 759-777.
- Manzari, M. T. and Dafalias, Y. F. (1997). A critical state two-surface plasticity model for sands. *Géotechnique*, 47(2), 255-272. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.2.255>.
- Masín, D. (2003). A kinematic hardening critical state model for anisotropic clays. In: Università degli Studi di Napoli Federico II. Dipartimento di Ingegneria Geotecnica (ed.) *Conference on Constitutive Modelling an Analysis of Boundary Value Problems in Geotechnical Engineering*. Naples, Italy, 22-24 April. Benevento, Hevelius.

- Masín, D. (2006). *Hypoplastic model for fined-grained soils*. PhD Thesis. Praga, Czech Republic: Charles University.
- Masín, D and Rott, J. (2013). Small strain stiffness anisotropy of natural sedimentary clays: review and a model. *Acta Geotechnica*, 9(2), 299–312.
- Masing, G. (1926). Residual stress and hardening the brass. In: Meissner, E. (ed.) *Second International Congress of Applied Mechanics*. Zurich, Switzerland, 12-17 September. 12-17.
- Matasovic, N. (1993). *Seismic response of composite horizontally-layered soil deposits*. PhD Thesis. Los Angeles, California, USA: University of California.
- Matasovic, N. and Vucetic, M. (1993). Cyclic Characterization of Liquefiable Sands. *Journal of Geotechnical Engineering*, 119(11), 1805-1822. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1993\)119:11\(1805\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1993)119:11(1805)).
- Matthews, M. C., Hope, V. S. and Clayton, C. R. I. (1996). The use of surface waves in the determination of ground stiffness profiles. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Geotechnical Engineering*, 119(2), 84-95. DOI: <https://doi.org/10.1680/igeng.1996.28168>.
- Mayne, P.W. (1994). CPT-based prediction of footing response. In: *Predicted and Measured Behavior of Five Spread Footings on Sand*. Ed. by Gibbens, R. M. and Briaud J. L. New York, USA: American Society of Civil Engineers, 41, 214-217.
- McDowell, G.R. and Bolton, M.D. (2001). Micro mechanics of elastic soil. *Soils and Foundations*, 41(6), 147-152. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf.41.6_147.
- McDowell, G.R. and Hau, K.W. (2003). A simple non-associated three surface kinematic hardening model. *Géotechnique*, 53(4), 433-437. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2003.53.4.433>.
- Mesri, G., Feng, T.W. and Benak, J.M. (1990). Post-densification penetration resistance of clean sands. *Journal of Geotechnical Engineering*, 116(7), 1095-1115. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1990\)116:7\(1095\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1990)116:7(1095)).
- Messerklinger, S. (2006). *Nonlinearity and small strain behavior in lacustrine clay*. PhD Thesis. Zurich, Switzerland: ETH Zurich. DOI: <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005194474>.
- Minh, N.A. (2006). *An investigation of the anisotropic stress-strain-strength characteristics of an Eocene clay*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).
- Mitchell, J.K. (1993). *Fundamentals of Soil Behaviour*. Segunda edición. Nueva Jersey, USA: John Wiley & Sons.
- Mitchell, J.K. and Soga, K. (2005) *Fundamentals of Soil Behaviour*. Third Edition. Nueva Jersey, USA: John Wiley & Sons.
- Mofiz, S.A., Sobhan, M.A., Sarker, D.C., Rahman, M.M: and Awall, M.R. (2005). Effective stress nonlinear model parameters and simulation of stress-strain for expansive soil. In: Bilsel, H. and Nalbantoglu, Z. (eds.) *International Conference on Problematic Soils*. Famagusta, Northern Cyprus, 25-27 May. Eastern Mediterranean University.
- Mróz, Z. (1967). On the description of anisotropic workhardening. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 15(3), 163-175. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90030-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90030-0).
- Nelson, I. (1977). Constitutive Models for use in Numerical Computations. In: *Proceedings of the Plastic and Long Term Effect, DMSR*. Karlsruhe, Germany, 1977. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema. 2, 45-97.
- Nelson, I. and Baron, M. L. (1971). Application of variable moduli models to soil behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 7(4), 399-417. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90111-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90111-9).
- Niemunis, A. and Herle, I. (1997). Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 2(4), 279-299. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199710\)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199710)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8).
- Niemunis, A. and Prada-Sarmiento, L.F. (2011). *Paraelasticity – a constitutive model for soils under small strains*. Seminario. Karlsruhe, Germany: Institute for Soil and Rock Mechanics-IBF.
- Niemunis, A., Prada-Sarmiento, L.F. and Grandas-Tavera, C.E. (2011a). Paraelasticity. *Acta Geotechnica*, 6(2), 67-80. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11440-011-0137-4>.
- Niemunis, A., Prada-Sarmiento, L.F. and Grandas-Tavera, C.E. (2011b). Extended paraelasticity and its application to a boundary value problem. *Acta Geotechnica*, 6(2), 81-92. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11440-011-0138-3>.
- Nigbor, R.L. e Imai, T. (1994). The suspension P-S velocity logging method. In: Publications Committee XIII ICSMFE (ed.) *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. New Delhi, 5-10 January. Rotterdam, Netherlands: A.A. Balkema, 6, 57-61.
- Nikolinakou, M.A., Whittle, A.J., Stavros, S. and Schran, U. (2011). Prediction and interpretation of the performance of a deep excavation in Berlin sand. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 137(11), 1047-1061. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0000518](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0000518).
- Nishimura, S. (2005). *Laboratory study on anisotropy of natural London Clay*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).

- Nishimura, S., Jardine, R. and Brosse, A. (2008). Simple shear testing of London Clay in hollow cylinder apparatus. In: Burns, S. E., Mayne, P. W. and Santamarina, J. C. (eds.) *Proceedings from the Fourth International Symposium, Deformation Characteristics of Geomaterials*. Atlanta, USA, 22-24 September. Amsterdam, Netherlands; Fairfax, USA: IOS Press.
- Obrzud, R. and Truty, A. (2018). *The hardening soil model – A practical guidebook*. ZSoil.PC 100701 report. Switzerland: Zace Services Ltd.
- Oda, M., (1972). The mechanics of fabric changes during compressional deformation of sand. *Soils and Foundations*, 12(2), 1–18. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.12.1>.
- Ohde, J. (1951). *Grundbaumechanik. Hütte III (Bautechnik)* Berlin, Germany: W. Ernst & Sohn, 27, 886-945.
- Okur, D.V. and Ansal, A. (2007). Stiffness degradation of natural fine grained soils during cyclic loading. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 27(9), 843-854. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2007.01.005>.
- Osman, A. S. and Bolton, M. D. (2005). Simple plasticity-based prediction of the undrained settlement of shallow circular foundations on clay. *Géotechnique*, 55(6), 435–447. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2005.55.6.435>.
- Owen, D. R. and Williams, W. O. (1969). On the time derivatives of equilibrated response functions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 33(4), 288-306. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00247688>.
- Oztoprak, S. and Bolton, M.D. (2013). Stiffness of sands through a laboratory test database. *Géotechnique*, 63(1), 54-70. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.10.P.078>.
- Pande, G.N., and Sharma, K.G. (1983). Multilaminate model of clays—a numerical evaluation of the influence of rotation of the principal stress axes. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 7(4), 397–418. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610070404>.
- Papadimitriou, A. G. (1999). *Elastoplastic modeling of monotonic and dynamic behavior of soils*. PhD Thesis. Atenas, Grecia: National Technical University of Athens.
- Papadimitriou, A.G., Bouckovalas, G.D. and Dafalias, Y.F. (2001). Plasticity model for sand under small and large cyclic strains. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 127(11), 973-983. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2001\)127:11\(973\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2001)127:11(973)).
- Papadimitriou, A.G. and Bouckovalas, G.D. (2002). Plasticity model for sand under small and large cyclic strains: a multiaxial formulation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 22(3), 191-204. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(02\)00009-X](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(02)00009-X).
- Pearce, J.A. (1971). A new triaxial apparatus. In: *On Stress-Strain behavior of Soils: Roscoe Memorial Symposium*. Ed. by Parry, R. H. G. Cambridge, England: Foulis and Co., 330-339.
- Pestana, J.M (1994). *A unified constitutive model for clays and sands*. PhD Thesis. Cambridge, Massachusetts, USA: Massachusetts Institute of Technology.
- Pestana, J.M. and Whittle, A.J. (1999). Formulation of a unified constitutive model for clays and sands. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23(12), 1215-1243. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199910\)23:12<1215::AID-NAG29>3.0.CO;2-F](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9853(199910)23:12<1215::AID-NAG29>3.0.CO;2-F).
- Pennington, D. S. (1999). *The anisotropic small strain stiffness of Cambridge Gault clay*. PhD Thesis. Bristol, England: University of Bristol.
- Piriyakul, K. (2006). *Anisotropic stress-strain behaviour of Belgium Boom Clay in the small strain region*. PhD Thesis. Gante, Bélgica: Ghent University.
- Plaxis (2015). *Material Models Manual* [online]. Available at: <<http://plaxis.us/updater/Plaxis%203D/2015.2.21300.12285/files/manuals/english/3D-3-Material-Models.pdf>> [Accessed: from 2015 to 2019].
- Popper, K.R. (1959). *The logic of scientific discovery*. London, England: Hutchinson.
- Potts, D.M. (2003). Numerical analysis: a virtual dream or practical reality? *Géotechnique*, 53(6), 535-573. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2003.53.6.535>.
- Potts, D.M. and Zdravkovic, L. (1999). *Finite element analysis in geotechnical engineering. Theory*. London, England: Thomas Telford.
- Poulos, H. G. (1972). Difficulties in prediction of horizontal deformations of foundations. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 98(8), 843-848.
- Prévost, J.H. (1977). Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behavior. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1(2), 195-216. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610010206>.
- Prévost, J.H. (1978). Plasticity theory for soil stress-strain behavior. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 104(5), 1177-1194.
- Prévost, J.H., Cuny, B., Hughes, T.J.R. and Scott, R.F. (1981). Offshore gravity structures: Analysis. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 107(2), 143-165.

- Prévost, J.H. and Keane, C.M. (1990). Shear stress-strain curve generation from simple material parameters. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 116(8), 1250-1254. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)07339410\(1990\)116:8\(1255\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)07339410(1990)116:8(1255)).
- Puzrin, A.M. and Burland, J.B. (1996). A logarithmic stress-strain function for rocks and soils. *Géotechnique*, 46(1), 157-164. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1996.46.1.157>.
- Puzrin, A.M. and Burland, J.B. (1998). Nonlinear model of small strain behaviour of soils. *Géotechnique*, 48(2), 217-233. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1998.48.2.217>.
- Pyke, R. (1979). Nonlinear soil models for irregular cyclic loadings. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, 105(6), 715-726.
- Pyke, R. (1986). The use of linear elastic and piecewise linear models in finite element analyses. In: *Geomechanical Modelling in Engineering Practice*. Ed. by Dungar, R. and Studer, J. A. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Ramberg, W. and Osgood, W.R. (1943). *Description of stress-strain curves by three parameters*. Report No. NACA-TN-902. Washington, DC, USA: National Advisory Committee for Aeronautics.
- Rampello, S., Viggiani, G. M. B. and Amorosi, A. (1997). Small-strain stiffness of reconstituted clay compressed along constant triaxial effective stress ratio paths. *Géotechnique*, 47(3), 475-489. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.3.475>.
- Riccati, G. (1782). Delle vibrazioni sonore dei cilindri. *Memorie di Matematica e fisica della Società italiana*. 1, 444-525.
- Richard, R. M. and Abbott, B. J. (1975). Versatile Elastic-Plastic Stress-Strain Formula. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 101(4), 511-515.
- Richardson, D. (1988). *Investigations of threshold effects in soil deformations*. PhD Thesis. London, England: City University London.
- Rix, G. J. and E. A. Leipski (1991). Accuracy and Resolution of Surface Wave Inversion. In: *Recent Advances in Instrumentation, Data Acquisition and Testing in Soil Dynamics*. New York, USA: American Society of Civil Engineers. 17-32.
- Robertson, P.K., Campanella, R.G., Gillespie, D. and Rice, A. (1986). Seismic CPT to measure *in situ* shear wave velocity. *Journal of Geotechnical Engineering*, 112(8), 781-803. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1986\)112:8\(791\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1986)112:8(791)).
- Roscoe, K. H. (1953). An apparatus for application of simple shear to soil samples. In: *Proceedings of the Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Zurich, 16-17 August. Switzerland: Organizing Committee, ICOSOMEF, 1, 186-191.
- Roscoe, K.H. and Schofield, A.N. (1963). Mechanical behaviour of an idealised 'wet' clay. In: *Second European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Wiesbaden, Germany, 1963. 1, 47-54.
- Roscoe, K.H. and Burland, J.B. (1968). On the generalized stress-strain behaviour of "wet" clay. In: *Engineering Plasticity*. Ed. by Heyman, J. and Leckie, F.A. Cambridge, England: Cambridge University Press. 535-609.
- Rouainia, M. and Wood, D. M. (2000). A kinematic hardening constitutive model for natural clays with loss of structure. *Géotechnique*, 50(2), 153-164. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.2.153>.
- Rowe, P.W. (1962). The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 269(1339), 500-527. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0193>.
- Saada, A. S. (1988). State of the Art Paper: Hollow cylinder torsional devices: their advantages and limitations. *STP977-EB Advanced Triaxial Testing of Soil and Rock*. Ed. by Donaghe, R., Chaney, R. and Silver, M. West Conshohocken, Pennsylvania: ASTM International. 766-789. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP29113S>.
- Saada, A.S. and Baah, A.K. (1967). Deformation and failure of a cross anisotropic clay under combined stress. In: *Proceedings of the Third Pan-American Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*. Celebrada el 8-15 julio 1967 en Caracas, Venezuela. Caracas: Sociedad Venezolana de Mecánica del Suelo e Ingeniería de Fundaciones, 67-88.
- Saada, A. S. and Townsend, F. (1981). State of the Art: Laboratory Strength Testing of Soils. In: *STP740-EB Laboratory Shear Strength of Soil*. Ed. by Young, R. and Townsend, F. West Conshohocken, Pennsylvania: ASTM International. 7-77. DOI: <https://doi.org/10.1520/STP28744S>.
- Saada, A. S. and Puccini, P. (1987). The development of a database using the Case hollow cylinder apparatus. In: Saada, A. S., Bianchini, G. (eds.) *Proceedings of the International Workshop*, Constitutive equations for granular non-cohesive soils. Cleveland, USA, 22-24 July. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 33-40.
- Saada, A. S., Bianchini, G. and Puccini, P. (1993). The mechanical properties of anisotropic granular soils. In: *Failure criteria in structured media*. Ed. by Bohler, J. P. Filadelfia, Pennsylvania: A. A. Balkema, 453-462.
- Sadrnejad, S.A. and Pande, G.N. (1989). A multi-laminate model for sand. In: Pietruszczak, S. and Pande, G.N. (eds.) *Proceedings of the Third International Conference (NUMOG III)*, Numerical Models in Geomechanics. Celebrada el 8-11 mayo 1989 en las Cascadas del Niágara, Canada. London; New York: Elsevier Applied Science, 17-27.

- Sandler, I. S. (1976). The Cap Model for Static and Dynamic Problems. In: *The Seventeenth U.S. Symposium on Rock Mechanics*. Utah, USA, 25-27 August. American Rock Mechanics Association, 1A2-1.
- Sandler, I. S. and Baron, M. L. (1979). Recent development in the constitutive modeling of geological materials. In: *Proceedings of the Third International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*. Celebrada el 2-6 abril 1979 en Aachen, Germany. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 363-376.
- Santagata, M., Geremaine, J. T. and Ladd, C. C. (2005). Factors affecting the initial stiffness of cohesive soils. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(4), 430-441. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2005\)131:4\(430\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:4(430)).
- Sayao, A. (1989). *Behaviour of sand under general stress paths in the hollow cylinder torsional device*. PhD Thesis. Vancouver, Canada: The University of British Columbia.
- Sayao, A. and Vaid, Y.P. (1988). A critical assessment of stress distribution on hollow cylinder test specimens. In: *Soil Mechanics Series Nº. 123*. Vancouver, Canada: Dept. of Civil Engineering, University of British Columbia.
- Schanz, T. (1998). *Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien*. Tesis de habilitación, Comunicación 45 del Instituto de Ingeniería Geotécnica. Stuttgart, Germany: Universität Stuttgart.
- Schanz, T., Vermeer, P.A. and Bonnier, P.G. (1999). The hardening soil model: Formulation and verification. In: *Beyond 2000 in Computational Geotechnics - 10 Years of PLAXIS*. Ed. by Brinkgreve, Ronald B.J. Rotterdam, Netherlands: A.A. Balkema, 281-296.
- Schädlich, B. and Schweiger, H.F. (2012). A multilaminate constitutive model accounting for anisotropic small strain stiffness. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 37(10), 1337-1362. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2089>.
- Schmertmann, J.H. (1991). The mechanical aging of soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117(9), 1288-1330. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1991\)117:9\(1288\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1991)117:9(1288)).
- Schultheiss, P. J. (1981). Simultaneous measurement of P and S wave velocities during conventional laboratory soil testing procedures. *Marine Geotechnology*, 4(4), 343-367. DOI: <https://doi.org/10.1080/10641198109379831>.
- Seed, R.B. and Duncan, J.M. (1986). FE analysis: compaction-induced stresses and deformations. *Journal of Geotechnical Engineering*, 112(1), 23-43. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1986\)112:1\(23\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1986)112:1(23)).
- Sellers, E. J. (1989). *Constitutive modelling of the behaviour of clays under cyclic loading*. Master Thesis. Cape Town, South Africa: University of Cape Town.
- Shibuya, S. and Mitachi, T. (1994). Small strain shear modulus of clay sedimentation in a state of normal consolidation. *Soils and Foundations*, 34(4), 67-77. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.34.4_67.
- Shibuya, S., Mitachi, T., Hosomi, A. and Hwang, S.C. (1996). Strain rate effects on stress-strain behaviour of clay as observed in monotonic and cyclic triaxial tests. In: *Measuring and Modeling Time Dependent Soil Behaviour*. Ed. by Sheahan, T.C. and Kalialin, V.N. New York, USA: Geotechnical Special Publication, ASCE, 61, 214-227.
- Shibuya, S., Mitachi, T., Fukuda, F. and Hosomi, A. (1997). Modeling of strain-rate dependent deformation of clay at small strains. In: Simão, P. (ed.) *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Hamburg, Germany, 6-12 September. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 1, 409-412.
- Shirley, D. J. (1978). An improved shear wave transducer. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(5), 1643-1645. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.381866>.
- Shirley, D. J. and Hampton, L. D. (1978). Shear wave measurements in laboratory sediments. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(2), 607-613. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.381760>.
- Siddiquee, M.S.A. (1991). *Finite element analysis of settlement and bearing capacity of footing on sand*. Master Thesis. Tokyo, Japan: The University of Tokyo.
- Siddiquee, M.S.A., Tanaka, T. and Tatsuoka, F. (1991). A FEM simulation of model footing tests on sands. In: Kogakkai, D. (ed.) *Proceedings of the Twenty-sixth Japan National Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Celebrada en Nagano, Japan. 1309-1312.
- Siddiquee, M.S.A., Tanaka, T. and Tatsuoka, F. (1992). A numerical simulation of bearing capacity of footing on sand. In: Kogakkai, D. (ed.) *Proceedings of the Twenty-seventh Japan National Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1413-1416.
- Simpson, B. (1981). Finite elements in design: with particular reference to deep basements in London Clay. In: *Finite elements in geotechnical engineering*. Ed. by Naylor, D.J. and Pande, G.N. Swansea, United Kingdom: Pineridge Press, 213-242.
- Simpson, B. (1992). Retaining structures: displacement and design. *Géotechnique*, 42(4), 541-576. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1992.42.4.541>.
- Simpson, B., O'Riordan, N. J. and Croft, D. D. (1979). A computer model for the analysis of ground movements in London clay. *Géotechnique*, 29(2), 149-175. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.2.149>.
- Simpson, B., Atkinson, J. H. and Jovicic, V. (1996). The influence of anisotropy on calculations of ground settlements above tunnels. In: *Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground*. Ed. by Mair, R. J. and Taylor, R. N. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 591-594.

- Skinner, A.F. (1975). *The effect of high pore water pressures on the mechanical behavior of sediments*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).
- Smith, P. R. (1992). *Properties of high compressibility clays with special reference to construction on soft ground*. PhD Thesis. London, England: University of London (Imperial College London).
- Soga, K., Nakagawa, K. and Mitchell, J.K. (1995). Measurement of stiffness degradation characteristics of clays using a torsional shear device. In: Ishihara, K., Kogakai, J., International Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering. TC4, Earthquake Geotechnical Engineering (eds.) *Proceedings of the First International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering*. Tokyo, 14-16 November. Rotterdam; Brookfield: A. A. Balkema, 107-112.
- Sorensen, K. K., Baudet, B. A. and Simpson, B. (2007). Influence of structure on the time-dependent behaviour of a stiff sedimentary clay. *Géotechnique*, 57(1), 113-124. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2007.57.1.113>.
- St. John, H. D. (1975). *Field and theoretical studies of the behavior of ground around deep excavations in London Clay*. PhD Thesis. Cambridge, England: University of Cambridge.
- St. John, H. D., Potts, D. M., Jardine, R. J. and Higgins, K. G. (1993). Prediction and performance of ground response due to construction of a deep basement at 60 Victoria Embankment. In: Houlsby, G. T. and Schofield, A. N. (eds.) *Proceedings of the Wroth Memorial Symposium*, Predictive soil mechanics. St Catherine's College, 27-29 July 1992. London, England: Thomas Telford.
- Stallebrass, S.E. (1990). *Modelling the effect of recent stress history on the deformation of overconsolidated soils*. PhD Thesis. London, England: City University London.
- Stallebrass, S.E. and Taylor, R.N. (1997). The development and evaluation of a constitutive model for the prediction of ground movements in overconsolidated clay. *Géotechnique*, 47(2), 235-253. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1997.47.2.235>.
- Sternik, K. (2003). *Analysis of effectiveness and numerical implementation of single surface elasto-plastic model for soil with strongly nonlinear anisotropic hardening law*. PhD Thesis. Gliwice, Poland: Silesian University of Technology.
- Stewart, J.P., Kwok, A.O., Hashash, Y., Matasovic, N., Pyke, R., Wang, Z. and Yang, Z. (2008). *Benchmarking of Nonlinear Geotechnical Ground Response Analysis Procedures*. PEER Report 2008/04. Pacific Earthquake Engineering Research Center; College of Engineering; University of California, Berkeley.
- Stokoe, K.H., Wright, S.G., Bay, J.A. and Roesset, J.M. (1994). Characterization of geotechnical sites by SASW method. In: Publications Committee XIII ICSMFE (ed.) *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. New Delhi, 5-10 January. Rotterdam, Netherlands: A.A. Balkema. 1, 15-25.
- Sture, S., Budiman, J., Ontuna, A. and Ko, H. (1987). Directional shear cell experiments on a dry cohesionless soil. *Geotechnical Testing Journal*, 10(2), 71-79. DOI: <https://doi.org/10.1520/GTJ10935J>.
- Sture, S., Alawi, M. and Ko, H. (1988). True triaxial and directional shear cell experiments on dry sand. Contract Report GL-88-1. Boulder, Colorado, USA: Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado at Boulder.
- Sulem, J., Vardoulakis, I., Papamichos, E., Oulahna, A. and Tronvoll, J. (1999). Elastoplastic modelling of Red Wildmoor sandstone. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 4(3), 215-245. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199905\)4:3<215::AID-CFM61>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199905)4:3<215::AID-CFM61>3.0.CO;2-8).
- Swidzinski, W. (2000). Determination of elastic moduli of sands from triaxial compression test. *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 47(1-4), 51-73.
- Tamagnini, C. and Viggiani, G. (2002). On the incremental nonlinearity of soils. Part I: theoretical aspects. *Rivista Italiana di Geotecnica*, 36(1), 44-61.
- Tatsuoka, F. e Ishihara, K. (1974). Drained deformation of sand under cyclic stresses reversing direction. *Soils and Foundations*, 14(3), 51-65. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.14.3_51.
- Tatsuoka, F., Iwasaki, T., Yoshida, S., Fukushima, S., Sudo, H. (1979). Shear modulus and damping by drained tests on clean sand specimens reconstituted by various methods. *Soils and Foundations*, 19(1), 39-54. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf1972.19.39>.
- Tatsuoka, F., Shibuya, S., Teachavorasinsun, S. and Park, C.-S. (1990). Discussion: An experimental and theoretical comparison between static and dynamic torsional soil tests, by M. D. Bolton and J. M. R. Wilson. *Géotechnique*, 40(4), 659-664. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1990.40.4.659>.
- Tatsuoka, F. and Shibuya, S. (1991). Modelling of nonlinear stress-strain relations of soils and rocks - Part 2, New equation. In: *Seisan-Kenkyu*, 43(10), 435-437.
- Tatsuoka, F. and Shibuya, S. (1992). Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests. In: *Proceedings of the Ninth Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Bangkok, Thailand, 9-13 December 1991. Southeast Asian Geotechnical Society, 2, 101-170.

- Tatsuoka, F., Jardine, R. J., Lo Presti, D., Di Benedetto, H. and Kodaka, T. (1997). Characterizing the pre-failure deformation properties of geomaterials. In: *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Hamburg, Germany, 6-12 September. A. A. Balkema, 4, 2129–2164.
- Teachavorasinskun, S., Shibuya, S. and Tatsuoka, F. (1991). Stiffness of sands in monotonic and cyclic torsional simple shear. *Geotechnical Engineering Congress*. ASCE, 2(27), 863-878.
- Terzaghi, K., Peck, R.B. and Mesri, G. (1996). *Soil Mechanics in Engineering Practice*. Third Edition. New York: USA: John Wiley & Sons.
- Thomann, T. and Hryciw, R. (1990). Laboratory measurements of small strain shear modulus under K0 conditions. *Geotechnical Testing Journal*, 13(2), 97–105. DOI: <https://doi.org/10.1520/GTJ10700J>.
- Timoshenko, S. and Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. New York, USA: McGraw-Hill.
- Tobita, Y. (1997). Importance of incremental nonlinearity in the deformation of granular materials. In: Fleck, N. A. and Cocks A. C. F. (eds.) *IUTAM Symposium on Mechanics of Granular and Porous Materials*. Cambridge, UK, 15-17 July 1996. Springer-Verlag, 139-50.
- Topolnicki, M., Gudehus, G. and Mazurkiewicz, B.K. (1990). Observed stress-strain behavior of remoulded saturated clay under plane strain conditions. *Géotechnique*, 40(2), 155-187. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1990.40.2.155>.
- Trhlíková, J., Bohac, J. and Masín, D. (2012). Small-strain behaviour of cemented soils. *Géotechnique*. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.9.P.100>.
- Truesdell, C. (1956). Hypo-elastic shear. *Journal of Applied Physics*, 27, 441-447. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1722399>.
- Truesdell, C. A. and Noll, W. (1965). *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- Valanis, K. C. (1972). Observed plastic behavior of metals vis-à-vis the endochronic theory of plasticity. In: *Foundations of Plasticity*. Ed. by Sawczuk, A. Leyden, Netherlands: Noordhoff International Publishing.
- Viggiani, G. (1992). *Small strain shear stiffness of fine grained soils*. PhD Thesis. London, England: City University London.
- Viggiani, G. (2000) Does engineering need science? In: *Constitutive Modelling of Granular Materials*. Ed. by Kolymbas, D. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 31.
- Viggiani, G. (2005). A key issue in Small Strain Modeling: capturing the dependence of soil response on the direction of loading. [Power Point]. *Workshop on Nonlinear Modeling of Geotechnical Problems: From Theory to Practice*. Available at: <https://www.ce.jhu.edu/raja/My%20Web%20Page/nsf%20workshop%202005/Presentations/Session%203/viggiani.pdf>. [Accessed: 06 April 2015].
- Viggiani, G. and Atkinson, J.H. (1995). Stiffness of fine-grained soil at very small strains. *Géotechnique*, 45(2), 249-265. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1995.45.2.249>.
- Vucetic, M. (1994). Cyclic threshold shear strains in soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(12), 2208-2228. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1994\)120:12\(2208\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:12(2208)).
- Vucetic, M. and Dobry, R. (1991). Effect of soil plasticity on cyclic response. *Journal of Geotechnical Engineering*. 177(1), 89-107. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1991\)117:1\(89\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1991)117:1(89)).
- Vucetic, M., Tabata, K. and Matesic, L. (2003). Effect of average straining rate on shear modulus at small cyclic strains. In: *Deformation Characteristics of Geomaterials*. Ed. by Di Benedetto, T. Doanh, H. Geoffroy and C. Sauzéat. Lisse; Abingdon; Exton; Tokyo: A.A. Balkema. 321-328.
- William, K. J., (2002). Constitutive models for engineering materials. In: *Encyclopedia of Physical Science and Technology*. Ed. by Meyers, R. Academic Press. 603-633.
- Wichtmann, T. (2005). *Explicit accumulation model for non-cohesive soils under cyclic loading*. PhD Thesis. Bochum, Germany: Ruhr-Universität Bochum.
- Wiltafsky, C. (2003). *A multilaminar model for normally consolidated clay*. PhD Thesis. Graz, Austria: Graz University of Technology.
- Wiltafsky, C., Koskinen, M. and Schweiger, H.F. (2003). An advanced constitutive model for normally consolidated clays based on multilaminar framework. In: *Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*. Boston; Oxford: Elsevier, 751-754. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-008044046-0.50184-6>.
- Whittle, A.J. (1987). *A constitutive model for overconsolidated clays with application to the cyclic loading of friction piles*. PhD Thesis. Cambridge, Massachusetts, USA: Massachusetts Institute of Technology.
- Whittle, A.J. (1993). Evaluation of a constitutive model for overconsolidated clays. *Géotechnique*, 43(2), 289-313. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1993.43.2.289>.
- Whittle, A. J. (1995). Discussion: Evaluation of constitutive model for overconsolidated clays. *Géotechnique*, 45(1), 169-173. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1995.45.1.169>.
- Whittle, A.J. and Kavvas, M.J. (1994). Formulation of MIT-E3 Constitutive Model for Overconsolidated Clays. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(1), 173-198. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1994\)120:1\(173\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:1(173)).

- Whittle, A.J., DeGroot, D.J., Ladd, C.C. and Seah, T.-H. (1994). Model prediction of anisotropic behavior of Boston Blue Clay. *Journal of Geotechnical Engineering*, 120(1), 199-224. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1994\)120:1\(199\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1994)120:1(199)).
- Wroth, C.P. and Bassett, R. H. (1965). A stress-strain relationship for the shearing behaviour of sand. *Géotechnique*, 15(1), 32-56. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1965.15.1.32>.
- Wolffersdorff, P.A. von (1996). A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 1(3), 251-271. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199607\)1:3<251::AID-CFM13>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199607)1:3<251::AID-CFM13>3.0.CO;2-3).
- Wongsaroj, J. (2005). *Three-dimensional finite element analysis of short and long-term ground response to open-face tunnelling in stiff clay*. PhD Thesis. Cambridge, England: Cambridge University.
- Woods, R.D. (1978). Measurement of dynamic soil properties. In: *Proceedings of the ASCE Geotechnical Engineering Division Specialty Conference, Earthquake Engineering and Soil Dynamics*. Pasadena, California, 19-21 June. New York, American Society of Civil Engineers, 1, 91-178.
- Wood, D. M. (1995). Kinematic hardening model for structured soil. In: Pande, G. N. and Pietruszczak, S. (eds.). *Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (NUMOG V)*. Davos, Switzerland, 6-8 September. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema. 83-88.
- Wu, W. (1998). Rational approach to anisotropy of sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(11), 921-940. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199811\)22:11<921::AID-NAG948>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9853(199811)22:11<921::AID-NAG948>3.0.CO;2-J).
- Yingren, Z., Jian, C. and Zhenhong, X. (1986). Strain space formulation of the elasto-plastic theory and its finite element implementation. *Computers and Geotechnics*, 2(6), 373-388. DOI: [https://doi.org/10.1016/0266-352X\(86\)90031-5](https://doi.org/10.1016/0266-352X(86)90031-5).
- Yoder, P.J. e Iwan, W.D. (1981). On the formulation of strain-space plasticity with multiple loading surfaces. *Journal of Applied Mechanics*, 48(4), 773-778. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3157732>.
- Yokota, K. and Konno, M. (1980). Dynamic Poisson's Ratio of soil. In: *Proceedings of the Seventh World Conference Earthquake Engineering*. Istanbul, Turkey, 8-13 September. Ankara, Turkey: Kelaynak, 3, 475-478.
- Yong, R.N. and Japp, R.D. (1967). A flow law for clays in dynamic compression. In: *Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials*. Albuquerque, New Mexico, USA: University of New Mexico Press, 183-188.
- Young, T. (1807). *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts* [online]. London, England: J. Johnson. Available at: Biodiversity Heritage Library. DOI: <https://doi.org/10.5962/bhl.title.22458>. [Accessed: 20 October 2018].
- Yu, H.S. (1995). *A unified critical state model for clay and sand*. Civil Engineering Research Report No. 112.08.1995. Callaghan, Australia: University of Newcastle, NSW 2308.
- Yu, H.S. (1998). CASM: A unified state parameter model for clay and sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(8), 621-653. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199808\)22:8<621::AID-NAG937>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1096-9853(199808)22:8<621::AID-NAG937>3.0.CO;2-8).
- Yun, T. S. and Santamarina, J. C. (2005). Decementation, softening, and collapse: changes in small-strain shear stiffness in K0 loading. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 131(3), 350-358. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2005\)131:3\(350\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:3(350)).
- Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. and King, I.P. (1968). Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material. *Géotechnique*, 18(1), 56-66. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1968.18.1.56>.
- Zienkiewicz, O.C. and Pande, G.N. (1977). Time-dependent multilaminar model of rocks—a numerical study of deformation and failure of rock masses. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1(3), 219–247. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610010302>.
- Zwanenburg, C. (2005). *The influence of anisotropy on the consolidation behavior of peat*. PhD Thesis. Delft, Netherlands: Delft University of Technology.
- Zytynski, M., Radolph, M.F., Nova, R. and Wroth, C.P. (1978). On modeling the unloading-reloading behavior of soils. *International Journal for Numerical Methods in Geomechanics*, 2(1), 87-93. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610020107>.

Anejo V

Paper 2 previous note

Development of a new soil constitutive model for small strains. The EPHYSS model.

1. The range of small strains in Geotechnical Engineering

At the beginning of the twentieth century, the application of soil mechanics to the new problems faced by civil engineers was focused on collapse prevention (Clayton, 2011), which seems logical given the background of the nineteenth century, when only some engineers used to conduct analysis of their designs before starting their construction because of the lack of information in which to base them (Bell, 1989). However, this conception changed in the 70s. As Clayton (2011) points out, some of the reasons that prompted this change were: (1) a good knowledge of most of the soil failure mechanisms, (2) the need to build new structures in consolidated urban areas and to calculate the displacements induced by them within the soil, in order to know the effect that these displacements could have on nearby elements and act accordingly, (3) the need to build especially sensitive structures, such as nuclear power plants and (4) advances in numerical analysis tools and computing power (as can be found in Zienkiewicz et al., 1968; Simpson, 1981; Britto and Gunn, 1987; Potts, 2003).

During the 70s, it was observed how the soil stiffness obtained in conventional laboratory tests did not coincide with those obtained in field tests, with the latter usually being an order of magnitude higher than the former (Jardine et al., 1991). Furthermore, the stiffness obtained in the field were similar to those obtained in dynamic tests, which later allowed to unify the theories that tried to explain soil shear modulus value. These facts questioned the efficacy of conventional tests for evaluating soil stiffness (Cole and Burland, 1972; St. John, 1975; Burland et al., 1979; Simpson et al., 1979; Clayton et al., 1991). Afterward, it was demonstrated that these differences were due to deficiencies in the techniques for measuring strains in conventional laboratory tests and to the alteration of the samples during their extraction process (Jardine et al., 1984). In the same way, Burland (1989) showed how, during the following years, measurements of the soil displacements in diverse London works, new instrumentation techniques in laboratory tests, and advances in numerical analysis techniques helped to improve significantly the understanding of the soil behavior in the range of small strains, in which stiffness plays a fundamental role. Nevertheless, despite the refinements in the techniques used in laboratory tests, the results they provide still differ from those of the *in situ* tests. Clayton (2011) explains these differences as follows: (1) field tests are applied on large land masses in natural state, whose geometry is usually limited by the scope of the study and by the range of depths that can be analyzed with each method and (2) the laboratory tests are applied to small samples of soil extracted from the ground, which can also be altered during the extraction process or during the test itself.

At present, multiple engineering problems, especially those related to works in urban areas, require precise calculations of soil displacements. Generally, in these problems only a small part of the ground is subjected to intermediate or large strains, while most of it is subjected to small or very small strains. The extension of ground masses subjected to small or very small strains is usually so large that their contribution to soil displacements can be very significant. Therefore, it is vitally important to correctly simulate the behavior of the soil in the range of small strains, corresponding to Zones I and

II of Jardine (1992). In Zone I, the behavior of the soil is considered linear reversible, while in Zone II it is considered nonlinear reversible, hysteretic and dependent on the recent history. On the other hand, any complete constitutive model must be able to simulate the behavior of the soil in the range of intermediate and large strains, close to failure, corresponding to Zone III and IV of Jardine, in which this behavior is not reversible, either in a linear or nonlinear way, due to the appearance of plastic strains.

There are numerous advanced constitutive models capable of simulating the behavior of the soil in the whole strain range, although the use of many of them is reduced to an academic use. According to Tamagnini and Viggiani (2002), this is due to: (1) its complex formalism, (2) the use of a large number of parameters difficult to obtain experimentally, (3) the use of a large number of internal variables difficult to initialize and (4) the difficulties associated with the formulation of precise, efficient and robust algorithms for the numerical implementation of the equations of the model (although there have been important advances in recent years in relation to this last point). However, some of these advanced models have managed to extend to the professional practice. Among them, stands out the well-known Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS) model, implemented in Plaxis and recently in other numerical software, and based on the Small Strain Overlay Model (SSOM) and the Hardening Soil Small (HS-S) model of Benz (2007). The widespread use of the HS-SS model is possibly due to its conceptual clarity and to the fact that it is based on the Hardening Soil (HS) plastic model of Schanz (1998) and Schanz et al. (1999), widely known, also implemented in the Plaxis code and used in the common practice of geotechnical engineering.

Nevertheless, after analyzing in depth the SSOM, HS-S and HS-SS models and comparing them with other 45 constitutive models that consider the soil behavior in the range of small strains, among them the incrementally multilinear model of Hueckel and Nova (1979), the incrementally multilinear advanced models of Simpson (1992) and Schädlich and Schweiger (2012) or the incrementally nonlinear model of Niemunis and Herle (1997), there have been identified some aspects that can be improved in the elastic part of the HS-SS model in relation to (1) nonlinear behavior, (2) hysteretic behavior (reversal criterion, memory rules, effect of reversals on the variables that control soil degradation and on its maximum stiffness), (3) the deviatoric strains reversals effect on the elastic volumetric modulus, (4) the consideration of the strain induced anisotropy and (5) the correction of the inconsistencies detected in the HS-SS model (Castellón, 2013; Plaxis, 2015). All these points have motivated the development of the EPHYSS model with the aim of being used in the geotechnical engineering professional practice. The entire code of the EPHYSS model is provided in Castellón (2019).

2. Theoretical framework of the EPHYSS model

The EPHYSS model has multiple tensorial zones (Darve, 1978; Darve and Labanieh, 1982) and, therefore, it is an incrementally multilinear model (Darve, 1990), although, its indirect stiffness dependence on $\hat{\epsilon}$ allows to consider it, in practice, as an incrementally nonlinear model when describing soil behavior in the range of small strains. Specifically, the EPHYSS model belongs to the subtype of models called as advanced models of the elastoplastic type in this note. Such model results from the combination of the Hysteretic Quasi-Hypoelastic model (HQH) and the modified Hardening Soil Modified model (HS_{MOD}) (Castellón, 2019). The HQH model aims to reproduce the behavior of the soil in the range of small strains, corresponding to Zones I and II of Jardine (1992), while the HS_{MOD} model aims to reproduce the behavior of the soil proper from Zones III and IV of Jardine (1992).

The HQH model is a Quasi-Hypoelastic Hysteretic model that intends to improve the approach to soil behavior in the range of small strains provided by the SSOM model. The Hysteretic denomination is due to the capacity of its structure to partially comply the extended Masing Rules (Masing, 1926; Pike, 1979), while the Quasi-Hypoelastic denomination is due to the use of nonlinear apparent stiffness moduli in the incremental constitutive equations, which depend on the total strain and not on the elastic strain. More concretely, the HQH model is a Quasi-Hypoelastic Hysteretic model of the variable moduli type (Nelson and Baron, 1971; Nelson 1977; Sandler et al., 1976; Sandler and Baron, 1979), since it uses the algebraic structure of the general constitutive equation of an isotropic elastic material to which introduces apparent stiffness moduli. According to Jardine (1992) and Jardine et al. (1991) these type of models are based on a semiempirical methodology that allows to achieve very accurate predictions thanks to the wide range of considered strains, although this entails a loss of generality and a lack of consistency in the theoretical framework on which they are based (for example, the inconsistency of the use of apparent stiffness moduli to explain the elastic behavior of the soil is evident, although, in practice, the degradation curves of the shear modulus are obtained as a function of the total shear strain). Furthermore, as indicated by Tamagnini and Viggiani (2002), the relative simplicity of these models allows their easy

incorporation into numerical finite elements codes to solve practical engineering problems, such as those studied by Jardine and Potts (1988) or by St. John et al. (1993). The HS_{MOD} model belongs to the models denominated Cap-Cone and has four yield surfaces, two of them (the Cone yield surface and the Cap surface) consider an isotropic hardening and the other two (the Mohr-Coulomb yield surface and the Tension Cut-Off yield surface) do not consider any type of hardening. As well as the plastic part of the HS-SS model, the HS_{MOD} model is based on the HS model, to which incorporates a group of modifications that affect the hardening rules and the dilatation criterion, all based on the HS-S model.

Regarding to the signal convention in the developed formulation and congruently with the criteria used in Plaxis (code in which the EPHYSS model has been implemented), tension is considered positive, and compression (water pressure included) negative. Furthermore, the theoretical framework of the small strains is always considered ($\epsilon_{ij} \ll 1$).

3. HQH model

3.1. Strain Domains of the model

Two Domains of strain are considered with a constitutive equation in each of them. The boundary between both Domains is defined by the strain value $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^{\alpha}$. Domain 1 corresponds to values $\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$ and, in it, the reversible component of the strain follows a behavior that is (1) nonlinear with the deviatoric strain and with the mean pressure, (2) hysteretic and (3) dependent on the recent history. Furthermore, in Domain 1 strain-induced anisotropy is considered. On the contrary, Domain 2 corresponds to values $\gamma_{oct}^{\Delta R} > \gamma_{ur}^{\alpha}$, where the reversible component of the strain follows a behavior that is (1) linear with the deviatoric strain and nonlinear with the mean pressure, (2) hysteretic and (3) dependent on the recent history. In the border, the constitutive equation of both Domains adopts the same expression, ensuring, therefore, the continuity, as long as $\dot{\gamma}_{oct}^H \approx \dot{\gamma}_{oct}^{\Delta R}$ and $\gamma_{oct}^H \approx \gamma_{oct}^{\Delta R}$ are complied. When these conditions are not complied, the existence of jumps in the degradation curves of the shear stiffness is possible, due to the fact that the model evaluates the belonging to one Domain or another through the strain $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, while the stiffness depends on the variable γ_{oct}^H .

3.2. General constitutive equation in Domain 2

The general constitutive equation in Domain 1 ($\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^{\alpha}$), initially considering an isotropic material, is the following:

$$(-p' \mathbf{1} + s^{\Delta R}) - \sigma'^{ini} = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}): (-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + e^{e,\Delta R}) \quad (01)$$

$$\mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}) = \left(\left(K'_s - \frac{2}{3} G_s^{ap} \right) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2 G_s^{ap} \mathbb{I} \right) \quad (02)$$

The constitutive equation (01) adopts a structure similar to the one from the models of Hueckel and Nova (1979) or Niemunis et al. (2011) regarding to the deviatoric behavior.

3.2.1. Elastic secant volumetric modulus in Domain 1

The elastic secant volumetric modulus K'_s in Domain 1 (as well as in Domain 2) adopts the following expression, which is widely accepted and based on the previous works of Duncan and Chang (1970) and Duncan et al. (1980):

$$K'_s = K_s^{ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,1}} \right)^{m_1} \quad (03)$$

3.2.2. Apparent secant shear modulus in Domain 1

In Domain 1, the degradation of the apparent secant shear modulus G_s^{ap} with the total historical octahedral deviatoric strain is considered. According to Simpson (1992) and Ellison et al. (2010), the models that formulate such degradation in the strain space are the most adequate to explain the mechanisms that govern the soil behavior.

The expression of the apparent secant shear modulus in Domain 1 is (04). Such expression is based, even though it introduces new elements, in the expression of the apparent secant shear modulus used in the HS-SS model, taken from the SSOM model. At the same time, all these expressions are based on that of Dos Santos and Correia (2001), which modifies the original expression of Hardin and Drnevich (1972).

$$G_s^{ap} = \frac{G_{s,0}^{ap,\alpha}}{1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^H}{\xi \gamma_{0.7}} \right)} \quad (04)$$

$$G_{s,0}^{ap,\alpha} = G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} \quad (05)$$

$$\gamma_{oct}^H = \sqrt{\frac{4}{3}} \|\mathbf{h}\| \quad (06)$$

For the G_s^{ap} calculation, the structure of the HQH model allows directly applying the Hashiguchi (1993) strategy, which consists in considering a value $\xi = 1$ in noval loading branch and $\xi = 2$ in unloading or reloading branches. However, since the intention is to compare the EPHYSS and HS-SS models, minimizing the differences caused by their respective plastic formulations, it has been adopted, in the EPHYSS model, the same strategy used in the HS-SS model, which is to use a value of $\xi = 2$ in all situations, while other variables that will be added in the plastic part of the model are the responsible for reproducing the stiffness of the soil in the noval loading branch.

The variable $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ resembles the variable $\gamma_{HIST}(\mathbf{H})$ from SSOM, HS-S and HS-SS models, although γ_{oct}^H responds to a different mathematical formulation. Unlike most incrementally multilinear models in which the maximum shear modulus G_0^{ref} remains constant and gives place to a single degradation curve of G_s^{ap} (Figure 1a), the HQH model considers that the maximum value of the shear modulus corresponding to the active degradation curve α is a state variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ that, as well as γ_{oct}^H , depends on the total recent deviatoric strain history, giving place to an area of possible values of G_s^{ap} (Figure 1b), so that the HQH model considers infinite degradation curves of soil shear stiffness as a function of the rotation in the recent deviatoric strain trajectory, which offers great versatility and adaptability to experimental data.

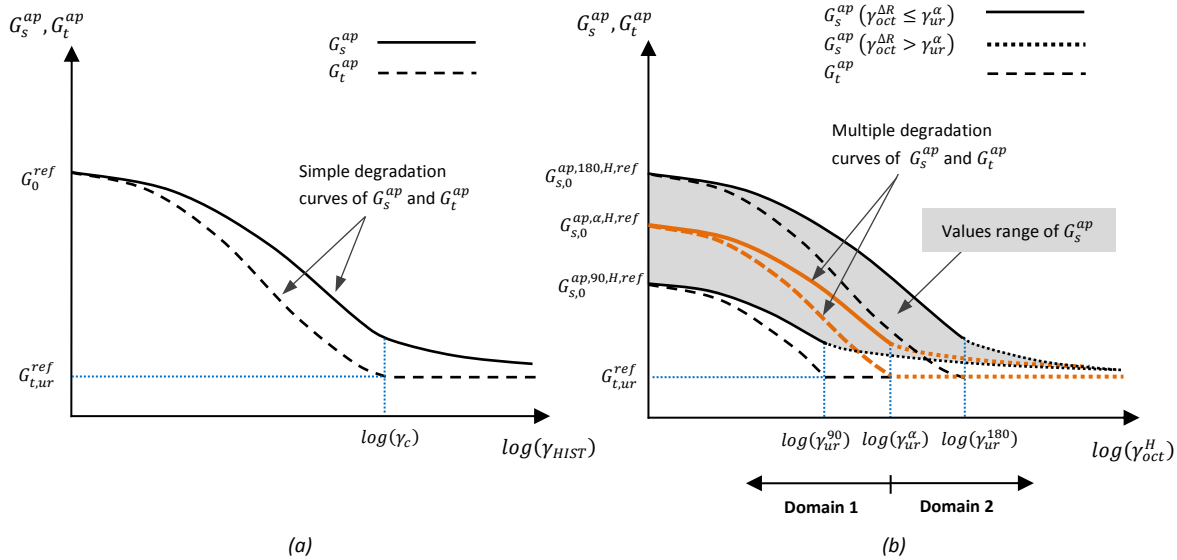


Figure 1. (a) Theoretical degradation curve in SSOM, HS-S and HS-SS models with $-\sigma'_3 = p'_{ref}$ and $-\dot{\sigma}'_3 = 0$.
 (b) Degradation curves and range of values of G_s^{ap} in the HQH and EPHYSS models with $-p' = p'_{ref,2}$ and $\dot{p}' = 0$.

3.2.3. Incremental constitutive equation in Domain 1

The incremental constitutive equation in Domain 1 can be deduced from the expression (01).

$$\dot{\sigma}' = \mathbf{E}'_s(K'_s, G_s^{ap}) : \dot{\epsilon}^e + \dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G_s^{ap}) : (-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R}) \quad (07)$$

Regarding to the term $\dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G_s^{ap}) : (-\epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,\Delta R})$ from the expression (7), that allows considering the strain induced anisotropy, it can be demonstrated that $\dot{\mathbf{E}}'_s(K'_s, G_s^{ap}) = \mathbf{E}'_s(\dot{K}'_s, \dot{G}_s^{ap})$. Furthermore, differentiating the expressions (03) and (04) leads to the following \dot{K}'_s and \dot{G}_s^{ap} expressions:

$$\dot{K}'_s = \left(\frac{K'_s}{\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e} \right) \dot{\epsilon}_{oct}^e \quad (08)$$

$$\dot{G}_s^{ap} = G_s^{ap} \left(\frac{3m_2 K'_s}{p'} \left(1 + \frac{\epsilon_{oct}^e}{\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e} \right) \dot{\epsilon}_{oct}^e + \frac{\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}}{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}} - \frac{a}{\xi \gamma_{0,7}} \frac{G_s^{ap}}{G_{s,0}^{ap,\alpha}} \dot{\gamma}_{oct}^H \right) \quad (09)$$

Since $sign(p') = sign(\epsilon_{oct}^e) = -1$ and $m_1 < 1$, $p'/3m_1 K'_s < p'/3K'_s < (p' - p'^{ini})/3K'_s = \epsilon_{oct}^e$, and, therefore, $p'/3m_1 K'_s - \epsilon_{oct}^e < 0$ will be complied.

3.3.1. Elastic volumetric tangent modulus in Domain 2

The expression of the elastic volumetric tangent modulus K'_t in Domain 2 is the same as the one considered in Domain 1. This can be deduced by taking the volumetric component of the expression (07), differentiating the expression (03) and considering the spherical part of the expression (01) according to which $-\dot{p}' = -\dot{p}'^{ini} - 3K'_s \dot{\epsilon}_{oct}^e$.

$$-\dot{p}' = -3K'_s \dot{\epsilon}_{oct}^e - 3 \frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \dot{\epsilon}_{oct}^e \epsilon_{oct}^e = -3 \left(K'_s + \frac{dK'_s}{d\epsilon_{oct}^e} \epsilon_{oct}^e \right) \dot{\epsilon}_{oct}^e = -3K'_t \dot{\epsilon}_{oct}^e \quad (12)$$

$$K'_t = K'_s \left(1 + \frac{\epsilon_{oct}^e}{\frac{p'}{3m_1 K'_s} - \epsilon_{oct}^e} \right) \quad (13)$$

3.3.2. (Hypo)elastic minimum tangent shear modulus in Domain 2

Regarding to the (hypo)elastic minimum tangent shear modulus G_t in Domain 2 and in a similar way to the SSOM, HS-S and HS-SS models, a minimum value $G_{t,ur}$ is considered from the border deformation between both Domains, $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^\alpha$, which adopts the following expression:

$$G_{t,ur} = G_{t,ur}^{ref} \left(\frac{-p'}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} \quad (14)$$

In the HS-SS model, the value of $G_{t,ur}^{ref}$ is calculated from the reference longitudinal elastic tangent modulus $E_{t,ur}^{ref}$ and Poisson's ratio ν'_{ur} , which is assumed to be constant. While in the HQT model, when combined with the HS_{MOD} model, the value of $G_{t,ur}^{ref}$ is calculated according to the expression (15) from $E_{t,ur}^{ref}$ (HS_{MOD} model parameter) and the reference elastic tangent stiffness modulus $K_t^{ref} = K_s^{ref} / (1 - m_1)$, resulting from considering $p'^{ini} = 0$ in the expression (13):

$$G_{t,ur}^{ref} = \frac{3K_t^{ref} E_{t,ur}^{ref}}{9K_t^{ref} - E_{t,ur}^{ref}} \quad (15)$$

The fact that γ_{ur}^α coincides with the maximum value of γ_{oct}^H allows applying the expression of G_t^{ap} in Domain 1 to deduce the value of $\gamma_{ur}^\alpha = \gamma_{ur}^\alpha(G_{t,ur})$. For that purpose, it is necessary to previously obtain the explicit expression of G_t^{ap} in Domain 1, which, unlike what happens with K'_t , is not possible in the general case, but it is under some restrictions in the strain trajectories, specifically when $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \approx 1$ and there has been a rotation in the previous recent deviatoric strain trajectory with $\alpha \geq 90^\circ$, accomplishing, in that case, $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H} = 0$, $\dot{\gamma}_{oct}^H \approx \dot{\gamma}_{oct}^{\Delta R} = \dot{\gamma}_{oct} = \dot{\gamma}_{oct}^{e,\Delta R} = \dot{\gamma}_{oct}^e$ and $\gamma_{oct}^H \approx$

$\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{oct}^{e,\Delta R}$. Under these assumptions and taking the deviatoric part of the expression (07) and differentiating the expression (04), the following is deduced:

$$\dot{\gamma}_{oct} = 2G_s^{ap} \dot{\gamma}_{oct}^e + 2 \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial \gamma_{oct}^{e,\Delta R}} \gamma_{oct}^{e,\Delta R} \dot{\gamma}_{oct}^e = 2 \left(G_s^{ap} + \frac{\partial G_s^{ap}}{\partial \gamma_{oct}^{e,\Delta R}} \gamma_{oct}^{e,\Delta R} \right) \dot{\gamma}_{oct}^e = 2G_t^{ap} \dot{\gamma}_{oct}^e \approx 2G_t^{ap} \dot{\gamma}_{oct}^H \quad (16)$$

$$G_t^{ap} = G_s^{ap} + \frac{\partial G_s}{\partial \gamma_{oct}^{e,\Delta R}} \gamma_{oct}^{e,\Delta R} \approx G_s^{ap} + \frac{\partial G_s}{\partial \gamma_{oct}^H} \gamma_{oct}^H = \frac{G_{s,0}^{ap,\alpha}}{\left(1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^H}{\xi \gamma_{0.7}} \right) \right)^2} \quad (17)$$

The expression (17) is similar to those considered in the SSOM, HS-S and HS-SS models. Based on the foregoing, the value of γ_{ur}^α is obtained by substituting $G_t^{ap} = G_{t,ur}$ and $\gamma_{oct}^H = \gamma_{ur}^\alpha$, in the expression (17). Unless stated otherwise, $\xi = 2$ is considered.

$$\gamma_{ur}^\alpha = \frac{\xi \gamma_{0.7}}{a} \left(\sqrt{\frac{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}}{G_{t,ur}^{ref}} - 1} \right) \quad (18)$$

3.4. Poisson's ratio

Drained Poisson's ratio will not be constant in any of the two Domains, since it depends on the value of the stiffness moduli according to $\nu'_s = \nu'_s(K'_s, G_s^{ap})$ in Domain 1 and according to $\nu'_t = \nu'_t(K'_t, G_{t,ur})$ in Domain 2. The value of G_s^{ap} in the range of small strains corresponding to Domain 1 can lead to values of ν' too small or even negative, and, therefore, unreal. To avoid this, it is possible to limit the value of the volumetric modulus $K_s^{corr} = \max\{K'_s, 2/G_s^{ap}(1 + \nu'_{min})/3(1 - 2\nu'_{min})\}$ and force the values of drained Poisson's ratio to be maintained above a threshold ν'_{min} when deviatoric loadings exist. The value of ν'_{min} usually adopts values between 0,05 and 0,20. In Domain 2, there will usually be values of $\nu' > \nu'_{min}$, although it is possible to use the same type of correction applied in Domain 1 when there are deviatoric loads $K_t^{corr} = \max\{K'_t, 2G_{t,ur}(1 + \nu'_{min})/3(1 - 2\nu'_{min})\}$. It is assumed $\nu'_{s,min} \approx \nu'_{t,min} \approx \nu'_{min}$.

3.5. State variables of the model

As Gudehus (2011) points out, the state variables that define the hysteretic behavior of the soil cannot be observed macroscopically and represent the spatial fluctuation of the chains of internal forces between soil particles, effect which Gudehus calls force-roughness. According to Gudehus, after a reversal and before a later monotonous deformation, the soil behavior suggests a gradual adaptation of its internal state, characterized by the aforementioned hidden state variables, until it depends exclusively on the stress tensor and the void ratio, state in which trajectories of proportional deformations lead to trajectories of proportional stresses, which means that it is inside the SOM region (Gudehus et al., 1977). According to Gudehus (2011), it is for this reason that the influence of the internal state of the soil in its own behavior can only be revealed during small deformations after reversals.

The proposed HQH model uses eight state variables. These variables are responsible for controlling the soil behavior, that it is nonlinear reversible, hysteretic and dependent of the recent history, both in Domain 1 and Domain 2. These state variables define different short and long-term memory levels that provide it with robustness for the reproduction of soil hysteretic behavior.

3.5.1. State variable \mathbf{h}

The \mathbf{h} tensor is a history tensor that stores the value of recent total deviatoric strains, understanding as recent those strains that have not yet been erased by reversal processes. The state variable \mathbf{h} acts as a short-term memory variable that can be reinitialized totally or partially after a reversal. The proposed formulation for the history tensor rate $\dot{\mathbf{h}}$ is based on that of the intergranular strain tensor rate $\dot{\delta}$ of Niemunis and Herle (1997) hypoplastic model, although significant modifications are introduced.

$$\dot{\mathbf{h}} = \begin{cases} ((\mathbb{I} - \hat{\mathbf{h}} \otimes \hat{\mathbf{h}} \rho_\alpha^w) : \dot{\mathbf{e}} - (\mathbb{I} - \hat{\mathbf{h}} \otimes \hat{\mathbf{e}}) : \mathbf{h}) & \text{if } \hat{\mathbf{h}} : \hat{\mathbf{e}} = \cos(\alpha) > 0 \\ \dot{\mathbf{e}} - \mathbf{h} & \text{if } \hat{\mathbf{h}} : \hat{\mathbf{e}} = \cos(\alpha) \leq 0 \end{cases} \quad (19)$$

Where $\rho_\alpha = \gamma_{oct}^H / \gamma_{ur}^\alpha$.

The intergranular strain tensor $\boldsymbol{\delta}$ of the hypoplastic model of Niemunis and Herle (1997) controls the value of the components of the stiffness tensor \mathbf{M} of such model and acts in a determined deformation range $\|\boldsymbol{\delta}\| \leq \tilde{R}$. Once the value $\|\boldsymbol{\delta}\| = \tilde{R}$ is reached, the model retrieves the original hypoplastic equation $\boldsymbol{\sigma}^J = \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e}): \mathbf{d} + \mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e})\|\mathbf{d}\|$. From a micromechanical point of view, the \tilde{R} parameter defines the range of deformations in which the soil particles deform while maintaining practically all the initial contacts, giving place to a reversible behavior. When the deformation exceeds the value of \tilde{R} , the soil particles not only deform, but slide and rotate, generating, at a macroscopic level, a degradation of the stiffness with the deformation. In a similar way, the variable $\gamma_{oct}^H = \gamma_{oct}^H(\mathbf{h}) \leq \gamma_{ur}^\alpha$ of the HQH model controls the value of the secant stiffness tensor \mathbf{E}'_s components and also acts in a determined strain range $\gamma_{oct}^{\Delta R} \leq \gamma_{ur}^\alpha$ corresponding to Domain 1. Once the value $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^\alpha$ has been reached, the model retrieves the equation $\boldsymbol{\sigma}' = 3K'_t \epsilon_{oct}^e \mathbf{1} + 2G_{t,ur} \mathbf{e}^e$ corresponding to Domain 2. The deformation γ_{ur}^α defines the higher value of the range of deformations in which the nonlinear regime of the soil develops with the deformation. This range contemplates different behaviors of the soil particles at a micromechanical level: initially, only the deformation in the points of contact between particles is considered and, subsequently, their sliding and rotating are also considered. When the deformation exceeds the value of γ_{ur}^α , the structure of the soil, that is the fabric and the forces between particles, remains stable until the emergence of the micromechanical mechanisms that give place to the plastic deformations.

When the closing of an active deformation cycle takes place between the active reversal points $s - 1$ and s , being necessarily $s \geq 2$, the history tensor \mathbf{h} is updated by modifying its modulus but maintaining the direction as follows:

$$\mathbf{h}^{(n+1)} = \left(\frac{\beta' \left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s-1}}{\|\mathbf{h}^{(n)}\|} \right) \mathbf{h}^{(n)} \quad \text{if} \quad \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} > \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s^{(n)}} - \left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s^{(n)-1}} \right) \\ \left| \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} \right| > \left| \sqrt{\frac{4}{3}} \left(\left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s^{(n)}} - \left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{s^{(n)-1}} \right) \right| \end{cases} \quad (20)$$

This history tensor \mathbf{h} updating allows recovering, with a reasonable computational cost, the value of the variable $\gamma_{oct}^{H, (n+1)} = \sqrt{4/3} \|\mathbf{h}^{(n+1)}\|$ corresponding to the immediate superior cycle to the one that closes.

3.5.2. State Variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$

The reversals effect on maximum soil stiffness is not considered in most constitutive models, except in some of them, such as the one of Niemunis and Herle (1997). Just as in that one, in the HQH model, the variation of such stiffness is considered through the state variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, which depends on the rotation in the recent deviatoric strain trajectory $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$ and stores the value of the maximum reference secant shear modulus corresponding to the active degradation curve. The state variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ acts as a short-term memory variable that can be totally or partially reinitialized after a reversal. Therefore, the HQH model considers infinite degradation curves of the apparent secant shear modulus which provides the model with versatility and great adaptability to experimental data.

$$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = \begin{cases} 0 & \text{if } (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^* < \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = \cos(\alpha) \\ (G_{s,0}^{ap,90,H,ref} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref})((\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^* - \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}) & \text{if } 0 < \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = \cos(\alpha) \leq (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^* \\ (G_{s,0}^{ap,90,H,ref} - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}) + (G_{s,0}^{ap,90,H,ref} - G_{s,0}^{ap,180,H,ref})(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}) & \text{if } \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} = \cos(\alpha) \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

Depending on the considered model, after a rotation in the recent deviatoric strain trajectory, the variable Υ which controls the degradation process may be only fully or both fully or partially reinitialized. In the models of Prévost (1977, 1978), Simpson (1992), Niemunis and Herle (1997), Benz (2007), Schädlich and Schweiger (2012) or even in the HS-SS model, as well as in the HQH and EPHYSS models, such variable can be fully or partially reinitialized, that is $\Upsilon^{R+} \geq 0$ and, therefore, $G_s^\alpha(\Upsilon^{R+}) \leq G_0^\alpha$ and $G_t^\alpha(\Upsilon^{R+}) \leq G_0^\alpha$.

Supposing that a partial strain reversal takes place in a model whose degradation variable can be fully or partially reinitialized, and in the case where the degradation curve defined by such model is unique, which means that it is defined from a single value of the maximum shear modulus G_0 (as in the case of the SSOM, HS-S and HS-SS models), the experimental degradation curves may be reproduced in the simulations by deformation of a stretch of the theoretical curves as shown in *Figure 2a*. Furthermore, supposing that the same partial reversal of the deformation takes place in a model that considers different degradation curves, that is to say, in which the degradation curves are defined by different values of the maximum shear modulus G_0^α (as in the case of the HQH and EPHYSS models), the experimental degradation curves, in general, will be reproduced, in the simulations, without deformation of the theoretical curves and, in addition, they will coincide with them, as shown in *Figure 2b*.

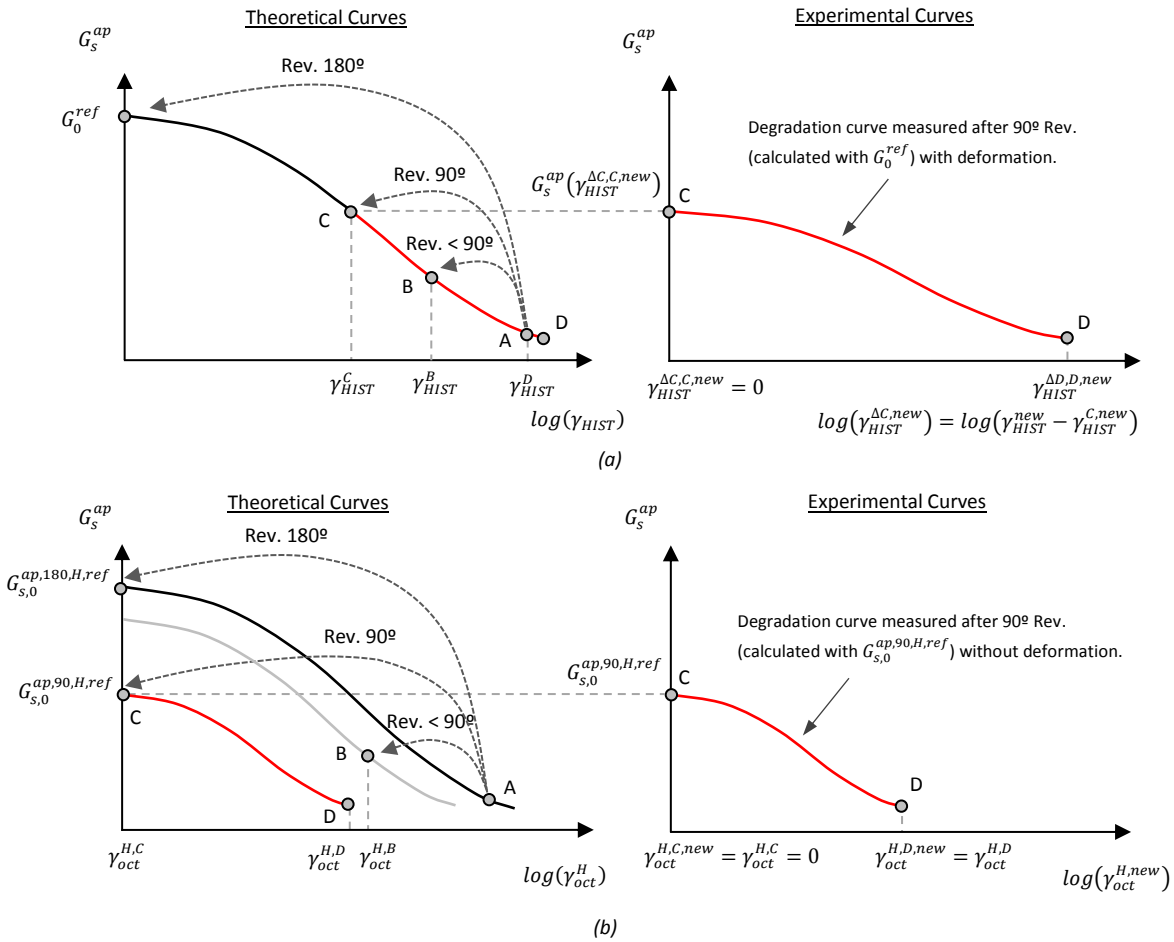


Figure 2. Full or partial reversals effect on the deformation of the degradation curves of (a) The SSOM, HS-S and HS-SS models. (b) The HQH and EPHYSS models.

However, for practical reasons, it is not possible to calibrate the degradation curves corresponding to each reversal degree, so this calibration will only be done in a finite number of these. In the HQH model, the degradation curve corresponding to a deviatoric strain rotation of 180° is calibrated with two parameters ($\gamma_{0,7}$ and $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$) and the degradation curve corresponding to a deviatoric strain rotation of 90° is calibrated with one parameter ($G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$) and is assumed to be homothetic to the curve corresponding to $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$. This implies that the curves corresponding to reversals with angles between α^* and 90° will suffer some deformation in such model.

In order to estimate the value of $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$, and given the clear lack of published experimental data, simulations with advanced models that consider the range of small strains have been reviewed. In these models, the value of the tangent shear stiffness modulus after rotations in the recent deviatoric strains or total strains of 90° is used as a parameter or can

be deduced. It must be recalled, in any case, that $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} \approx G_{t,0}^{ap,90,H,ref}$ for $\Upsilon^{R+} = 0$. The reviewed simulations correspond to the model of Niemunis and Herle (1997), and the one of Masín (2014), partially based on the model of Niemunis and Herle (1997). In addition, simulations were also reviewed with the models of Schädlich and Schweiger (2012), Simpson et al. (1979), Simpson (1992), Clarke (2009) and Ellison (2009), which also indirectly consider the partial stiffening of the shear modulus with rotations in the recent total deviatoric strains of 90° . In the case of the models of Niemunis and Herle (1997) and Masín (2014), the reversals depend on the rotations in the total deformations, thus giving place to a coupling between the variation of volumetric deformations and the variation of the shear stiffness. However, it is possible to show that if $\hat{\epsilon}^{\Delta R}: \hat{\epsilon} = 0$ is complied, $\hat{e}^{\Delta R}: \hat{e} = 0$ will be complied provided that $\epsilon_{oct} \dot{\epsilon}_{oct} = 0$ is present. Therefore, in these cases, for the estimation of $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ it will be assumed that the condition $\epsilon_{oct} \dot{\epsilon}_{oct} = 0$ is complied, that is, that the soil does not experience volumetric strains, or they are small before or immediately after the 90° reversal. Niemunis and Herle (1997) consider a value of $G_{t,0}^{ap,90,H,ref} / G_{t,0}^{ap,180,H,ref} = 0,40$ for Hochstetten and Ticino sand. Johansson and Konagai (2007), resorting to the model of Niemunis and Herle, consider a value of $G_{t,0}^{ap,90,H,ref} / G_{t,0}^{ap,180,H,ref} = 0,40$ for Toyoura sand. On the other hand, Schädlich and Schweiger (2012) refer to Benz et al. (2009), who obtained a value of $G_{t,0}^{ap,90,H,ref} / G_{t,0}^{ap,180,H,ref} = 0,44$ in numerical simulations of biaxial compression tests using the multilaminated model, with the sand parameters of Hochstetten and Ticino. And for its part, Masín (2014) considers a value of $G_{t,0}^{ap,90,H,ref} / G_{t,0}^{ap,180,H,ref} = 0,50$ for unaltered London clay. Although the available data are scarce, the previous relations allow estimating the value of $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ from that of $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ by the relation $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = \Lambda G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, taking Λ values of $0,40 - 0,44$ for sands and $0,50$ for clays.

3.5.3. State Variables e^R and $e^{e,R}$

The state variable e^R , which stores the value of the total deviatoric strain tensor at the last reversal point that conforms the endpoint of the active strain cycle, appears, on the one hand, in the expression for the calculation of $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, which allows to know if the incremental constitutive equation to apply is the one corresponding to Domain 1 or Domain 2, and, on the other hand, in the expression for the calculation of $e^{\Delta R}$, with which, at the same time, is possible to calculate the product $\hat{e}^{\Delta R}: \Delta \hat{e}$ that identifies the reversals in which the state variables e^R , $e^{e,R}$, H_{MEM} , E_{MEM} and E_{MEM}^e must be stored. Conversely, the state variable $e^{e,R}$, which stores the value of the elastic deviatoric strain tensor at the last reversal point that conforms the endpoint of the active strain cycle, appears in the deviatoric part of the elastic incremental constitutive equation of Domain 1, $\dot{s} = 2G_s^{ap} \dot{e}^e + 2G_s^{ap} (e^e - e^{e,R})$. Both state variables act as short-term memory variables that are totally reinitialized after a reversal, and their update occurs according to the following scheme:

1. A reversal that gives place to a new reversal point that will conform the endpoint of a new strain cycle occurs:

$$\begin{aligned} e^{R,(n+1)} &= e^{(n)} \\ e^{e,R,(n+1)} &= e^{e,(n)} \end{aligned} \quad \text{if} \quad \begin{cases} \hat{h}^{(n)}: \Delta \hat{e}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)}) \\ \hat{e}^{\Delta R,(n)}: \Delta \hat{e}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*(n)}) \end{cases} \quad (22)$$

2. The closing of the strain cycle between the active reversal points $s^{(n)} - 1$ and $s^{(n)}$ occurs:

$$\begin{aligned} e^{R,(n+1)} &= \left(\frac{(E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}-2}}{\|e^{R,(n)}\|} \right) e^{R,(n)} \\ e^{e,R,(n+1)} &= \left(\frac{(E_{MEM}^{e,(n)})_{s^{(n)}-2}}{\|e^{e,R,(n)}\|} \right) e^{e,R,(n)} \end{aligned} \quad \text{if} \quad \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)} > \sqrt{\frac{4}{3}} \left((E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}} - (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}-1} \right) \\ |\gamma_{oct}^{\Delta R,(n+1)}| > \left| \sqrt{\frac{4}{3}} \left((E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}} - (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}-1} \right) \right| \end{cases} \quad (23)$$

When $(E_{MEM}^{(n)})_1 = 0$, is complied, $e^{R,(n+1)} = \mathbf{0}$ and $e^{e,R,(n+1)} = \mathbf{0}$ will be considered.

3. Neither reversal that gives place to a new reversal point nor the closing of any strain cycle occur:

$$\begin{aligned} e^{R,(n+1)} &= e^{R,(n)} \\ e^{e,R,(n+1)} &= e^{e,R,(n)} \end{aligned} \quad \text{if the conditions of (22) and (23) are not met} \quad (24)$$

The first cycle to be closed will be the one corresponding to the lowest active strain cycle. The extremes of such cycle correspond to the last two values of $\|\mathbf{h}\|, \|\mathbf{e}\|$ and $\|\mathbf{e}^e\|$, memorized, respectively, in the state variables $\mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}$ and \mathbf{E}_{MEM}^e . Such values are those that have been identified, in expression (23), with the $s^{(n)} - 1$ and $s^{(n)}$ components of such variables, where s is the maximum number of active reversal points in the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$. Moreover, as can be seen in expression (23), when a cycle closure occurs, the state variables \mathbf{e}^R and $\mathbf{e}^{e,R}$ are updated by modifying their modulus, but maintaining the direction, in the same way that it is done with the tensor \mathbf{h} in the expression (20). This update allows partially recovering the characteristics of \mathbf{e}^R and $\mathbf{e}^{e,R}$ corresponding to the cycle that is immediately superior to the one being closed, with a reasonable computational cost.

3.5.4. State variables $\mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}$ and \mathbf{E}_{MEM}^e

The state variables $\mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}^e \in \mathbb{R}^{\bar{M}}$ store, respectively, the value of $\|\mathbf{h}\|, \|\mathbf{e}^R\|$ and $\|\mathbf{e}^{e,R}\|$, in the reversal points that conform the endpoints of strain cycles, provided that such strain cycles are kept open, being \bar{M} an internal parameter that determinates the maximum number of reversal points in which is possible to memorize these values. The state variables $\mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}$ and \mathbf{E}_{MEM}^e constitute long-term memory variables capable of storing information of all active historical reversals.

In general, all the components of $\mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}$ and \mathbf{E}_{MEM}^e have an initial value of zero and are updated according to the following scheme, where $s^{(n)}$ is the number of reversal points that are active at the beginning of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$:

1. A reversal that gives place to a new reversal point that will conform the endpoint of a new strain cycle occurs:

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} (H_{MEM}^{(n+1)})_{1, \dots, s^{(n+1)}-1} &= (H_{MEM}^{(n)})_{1, \dots, s^{(n)}} \\ (E_{MEM}^{(n+1)})_{1, \dots, s^{(n+1)}-1} &= (E_{MEM}^{(n)})_{1, \dots, s^{(n)}} \\ (E_{MEM}^{e, (n+1)})_{1, \dots, s^{(n+1)}-1} &= (E_{MEM}^{e, (n)})_{1, \dots, s^{(n)}} \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} (H_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}} &= \begin{cases} \min \{ \|\mathbf{h}^{(n)}\|, \gamma_{ur}^{\alpha, \xi=1, (n)} \} & \text{if } s^{(n+1)} = 1 \\ \|\mathbf{h}^{(n)}\| & \text{if } s^{(n+1)} > 1 \end{cases} \\ (E_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}} &= \|\mathbf{e}^{R, (n)}\| \\ (E_{MEM}^{e, (n+1)})_{s^{(n+1)}} &= \|\mathbf{e}^{e, R, (n)}\| \end{aligned} \right\} \text{if } \begin{cases} \hat{\mathbf{h}}^{(n)}: \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*, (n)}) \\ \hat{\mathbf{e}}^{\Delta R, (n)}: \Delta \hat{\mathbf{e}}^{(n+1)} \leq \cos(\alpha^{*, (n)}) \end{cases} \\ & \left. \begin{aligned} (H_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1, \dots, \bar{M}} &= 0 \\ (E_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1, \dots, \bar{M}} &= 0 \\ (E_{MEM}^{e, (n+1)})_{s^{(n+1)}+1, \dots, \bar{M}} &= 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

2. The closure of the strain cycle between the active reversal points $s^{(n)} - 1$ and $s^{(n)}$ occurs:

$$\left. \begin{aligned} & \left. \begin{aligned} (H_{MEM}^{(n+1)})_{1, \dots, s^{(n+1)}} &= (H_{MEM}^{(n)})_{1, \dots, s^{(n)}-2} \\ (E_{MEM}^{(n+1)})_{1, \dots, s^{(n+1)}} &= (E_{MEM}^{(n)})_{1, \dots, s^{(n)}-2} \\ (E_{MEM}^{e, (n+1)})_{1, \dots, s^{(n+1)}} &= (E_{MEM}^{e, (n)})_{1, \dots, s^{(n)}-2} \end{aligned} \right\} \\ & \left. \begin{aligned} (H_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1, \dots, \bar{M}} &= 0 \\ (E_{MEM}^{(n+1)})_{s^{(n+1)}+1, \dots, \bar{M}} &= 0 \\ (E_{MEM}^{e, (n+1)})_{s^{(n+1)}+1, \dots, \bar{M}} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{if } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} > \sqrt{\frac{4}{3}} \left((E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}} - (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}-1} \right) \\ \left| \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} \right| > \left| \sqrt{\frac{4}{3}} \left((E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}} - (E_{MEM}^{(n)})_{s^{(n)}-1} \right) \right| \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

3. Neither the reversal that gives place a new reversal point, nor the closure of any strain cycle occur:

$$\left. \begin{aligned} \left(H_{MEM}^{(n+1)} \right)_{1, \dots, s^{(n+1)}} &= \left(H_{MEM}^{(n)} \right)_{1, \dots, s^{(n)}} \\ \left(E_{MEM}^{(n+1)} \right)_{1, \dots, s^{(n+1)}} &= \left(E_{MEM}^{(n)} \right)_{1, \dots, s^{(n)}} \\ \left(E_{MEM}^{e, (n+1)} \right)_{1, \dots, s^{(n+1)}} &= \left(E_{MEM}^{e, (n)} \right)_{1, \dots, s^{(n)}} \\ \left(H_{MEM}^{(n+1)} \right)_{s^{(n+1)+1, \dots, \bar{M}}} &= 0 \\ \left(E_{MEM}^{(n+1)} \right)_{s^{(n+1)+1, \dots, \bar{M}}} &= 0 \\ \left(E_{MEM}^{e, (n+1)} \right)_{s^{(n+1)+1, \dots, \bar{M}}} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{if the conditions of (25) and (26) are not complied} \quad (27)$$

In relation to the $s^{(n+1)}$ values, the following must be considered:

- $s^{(n+1)} = s^{(n)} + 1$ when a reversal that gives place to a new reversal point that will conform the endpoint of a new strain cycle occur.
- $s^{(n+1)} = s^{(n)} - 2$ when the strain cycle defined by the reversal points corresponding to the components $s^{(n)} - 1$ and $s^{(n)}$ of these variables is closed. In this case, the $j^{(n)}$ -th components of these variables, that comply $j^{(n)} > s^{(n)} - 1$ and correspond to the reversal points that conform the endpoints of the active strain cycles imbricated in the cycle that is being closed, will be erased.
- $s^{(n+1)} = s^{(n)}$, when neither a reversal nor a closure of a strain cycle occur.

Furthermore, when $s = 0$, it is considered that the stress/strain state of the soil is located inside the SOM region, defined by Gudehus et al. (1977), and it does not depend on the internal state variables destined to define the nonlinear, hysteretic and recent history dependent soil behavior ($G_{s,0}^{ap, \alpha, H, ref}$, $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$, $\mathbf{e}^{e,R}$, \mathbf{e}^R , \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e), and, when $s \geq 1$, the stress/strain state of the soil is located out of SOM region, where it does depends of such state variables.

It must be considered that the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e are not capable to correctly define the hysteretic behavior of the soil when an exchange of principal strains that give place to a restart of $\gamma_{oct}^{\Delta R, (n)}$ occurs.

3.5.5. State variable $G_{t, min, \xi=1}^{ap}$

The HQH model does not directly apply the criterion of Hashiguchi (1993) for the calculation of G_s^{ap} , despite having an internal structure that allows it. To simulate the initial stiffness of the soil and its degradation in the range of small strains during the noval loading branch, the hardening laws of the plastic model with which the HQH model is combined are modified through the factor $h_i = h_i(G_{t, min, \xi=1}^{ap})$, in the same way as in the HS-S and HS-SS models, in order to facilitate the comparison between models, especially with the latter.

The state variable $G_{t, min, \xi=1}^{ap}$ is naturally identified with a plastic state variable of the HS_{MOD} model that depends on HQH state variables, although it will not be considered as such in the elastoplastic formulation deduction of the EPYSS model and, by convention, it will be identified as a state variable of the HQH model.

The state variable $G_{t, min, \xi=1}^{ap}$ is updated as follows in each calculation step:

$$G_{t, min, \xi=1}^{ap, (n+1)} = \min \left\{ G_{t, min, \xi=1}^{ap, (n)}, G_{t, \xi=1}^{ap, (n+1)} \right\} \quad (28)$$

$$G_{t, \xi=1}^{ap, (n+1)} \approx \frac{\Delta \tau_{oct, \xi=1}^{(n+1)}}{\Delta \gamma_{oct}^{(n+1)}} \quad (29)$$

$$\frac{\Delta \tau_{oct, \xi=1}^{(n+1)}}{\Delta \gamma_{oct}^{(n+1)}} = \begin{cases} \frac{G_{s, \xi=1}^{ap, (n+1)} |\gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)}| - G_{s, \xi=1}^{ap, (n)} |\gamma_{oct}^{\Delta R, (n)}|}{|\gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)}| - |\gamma_{oct}^{\Delta R, (n)}|} & \text{if } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R, (n)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha, (n)} \\ \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha, (n)} \end{cases} \\ \frac{G_{s, \xi=1}^{ap} (\gamma_{ur}^{\alpha, (n)}) \gamma_{ur}^{\alpha, (n)} - G_{s, \xi=1}^{ap, (n)} |\gamma_{oct}^{\Delta R, (n)}| + G_{t, ur}^{(n)} (|\gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)}| - \gamma_{ur}^{\alpha, (n)})}{|\gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)}| - |\gamma_{oct}^{\Delta R, (n)}|} & \text{if } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R, (n)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha, (n)} \\ \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} > \gamma_{ur}^{\alpha, (n)} \end{cases} \\ G_{t, ur}^{(n)} & \text{if } \begin{cases} \gamma_{oct}^{\Delta R, (n)} > \gamma_{ur}^{\alpha, (n)} \\ \gamma_{oct}^{\Delta R, (n+1)} > \gamma_{ur}^{\alpha, (n)} \end{cases} \end{cases} \quad (30)$$

3.6. Hysteretic behavior

The models that consider the hysteretic behavior of the soil must define the following concepts: (1) reversal criterion, (2) memory rules, (3) reversal effects on the degradation variable and (4) reversals effect on the maximum soil stiffness.

3.6.1. Reversal criterion

The reversal criterion allows identifying those points in which a change in the direction of the stress or the strain trajectories induces modifications in the soil stiffness.

The reversal criterion of the HQH model is intrinsic, which means that it arises from the own model equations, and it is formulated using strains, which is consistent with the philosophy of formulating, totally or partially, the constitutive model in the strain space instead of in the stress space, as pointed out in section 3.2.2. Moreover, the HQH model formulates the reversal criterion from the value of the deviatoric strains and does not consider the historical reversals generated by volumetric strains, considering that the variation of the volumetric stiffness between elastic isotropic unloadings and reloadings is negligible (Lade and Abelev, 2005). This distinguishes the HQH model, provided that $v' > v'_{min}$ is complied, from several models that consider the soil behavior in the range of small strains and $K' = K'(G, v')$ or $G = G(K', v')$, in which the reversals that affect the value of G also affect the value of K' .

The HQH model distinguishes between:

- Reversals that affect the value G_s^{ap} through the modification of the state variables $G_{s,0}^{ap, \alpha, H, ref}$ and $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$. This occurs when the condition $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ is complied.
- Reversals that affect the value G_s^{ap} and, also, give place to a reversal point that defines the endpoint of a new strain cycle. That occurs when the conditions $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} \leq (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*)$ are simultaneously complied, and implies a modification of the state variables value \mathbf{e}^R , $\mathbf{e}^{e, R}$, \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e , besides of $G_{s,0}^{ap, \alpha, H, ref}$ and $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$. Effectively, if $\Delta \mathbf{e}$ is applied in a determinate calculation step, which, in turn, is divided into N subincrements of calculation $\Delta \mathbf{e}_i = \Delta \mathbf{e}/N$, and that $\hat{\mathbf{h}}: \Delta \hat{\mathbf{e}}_1 \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \Delta \hat{\mathbf{e}}_1 \leq \cos(\alpha^*)$ are complied, a reversal point R^* that will define the endpoint of a new strain cycle will appear. After such reversal, it will be necessary to reinitialize $\mathbf{e}^{\Delta R^*}$. For numerical purposes, when $\mathbf{e}^{\Delta R} = \mathbf{0}$ is complied, it will be considered that $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R}: \hat{\mathbf{e}} = 1$. Bearing this in mind, in the following deformation subincrements and until applying the total value of $\Delta \mathbf{e}$, $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R^*}: \Delta \hat{\mathbf{e}}_i = 1$ will be complied for $i > 1$, appearing no new reversal points that affect the value of the variables \mathbf{e}^{R^*} , \mathbf{e}^{e, R^*} , \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e , although $\hat{\mathbf{h}}: \Delta \hat{\mathbf{e}}_i \leq \cos(\alpha^*)$ can be complied for $i > 1$, that is to say, even though reversals that modify the soil stiffness appear.

The HQH model considers that there is a reversal affecting the value G_s^{ap} when, in the calculation step $(n) \rightarrow (n+1)$, it is complied that $\|\hat{\mathbf{h}}^{(n+1)}\| \leq \|\hat{\mathbf{h}}^{(n)}\|$. From this condition can be deduced the minimum value of $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}}$, denominated $\cos(\alpha^*) = (\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}})^*$, which determines the threshold below which the reversals that affect the stiffness value take place, and which is obtained by imposing the condition $d(\|\hat{\mathbf{h}}\|) = \hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{h}} = 0$, equivalent to the condition $\hat{\mathbf{h}}: \mathbf{h} = 0$ (Figure 3). Geometrically, the condition $\hat{\mathbf{h}}: \mathbf{h} = 0$ implies that the tensors $\hat{\mathbf{h}}$ and \mathbf{h} are perpendicular to each other and, considering that $\|\hat{\mathbf{h}}\| \ll \|\mathbf{h}\|$ in the proximity of α^* , it is equivalent to \mathbf{h} a small rotation without modifying its modulus.

$$(\hat{\mathbf{h}} : \hat{\mathbf{e}})^* = \cos(\alpha^*) = \frac{1}{\frac{\|\dot{\mathbf{e}}\|}{\|\mathbf{h}\|} (1 - \rho_\alpha^w) + 1} \quad (31)$$

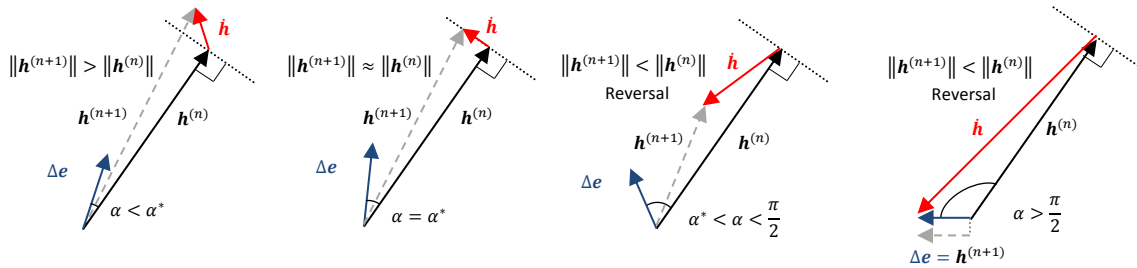


Figure 3. Evolution of $\hat{\mathbf{h}}$ according to $\cos(\alpha) = \hat{\mathbf{h}} : \hat{\mathbf{e}}$ and reversal criterion that affect the value of G_s^{ap} .

3.6.2. Memory rules

The HQH model uses the extended Masing Rules (Masing, 1926; Pyke, 1979) to reproduce the hysteretic soil behavior and it can memorize information in multiple reversal points. Such rules apply only to the deviatoric component of the strain, and the hysteretic behavior is not considered in the volumetric strain component. Furthermore, the criterion used to memorize information in the reversal points depends on the total deviatoric strains and not on the stress nor on the energy, and according to Schädlich and Schweiger (2012), this would be consistent with the theoretical approach in which the stiffness degradation depends on strain.

Combined with a plastic model, the HQH model partially complies the extended Masing Rules in a similar way to the HS-S and HS-SS models, and it does it significantly increasing the information about recent memorized history and, therefore, improving the degree of compliance of the extended Masing Rule No. 4. Furthermore, to comply with the extended Masing Rules No. 1 and No. 2, the HQH model does not directly apply the criterion of Hashiguchi (1993) for the calculation of G_s^{ap} , despite having an internal structure that allows it, but uses the same strategy of the HS-S and HS-SS models with the aim of minimizing the differences that may occur in the formulation of the plastic parts of these models and the EPHYSS model.

- **Rule No. 1:** To be able to reproduce the initial soil stiffness and its degradation in the small strain range during noval loading branch, the hardening rules of the plastic model with which the HQH model is combined are modified through the h_i factor.

$$h_i = (G_m)^{1 + \frac{E_i^{ref}}{E_i^{t,ur}}} \quad (32)$$

$$G_m = \frac{G_{t,min,\xi=1}^{ap}}{G_{t,ur}} \quad (33)$$

- **Rule No. 2:** To calculate the stress tensor increment from the strain tensor increment with the constitutive incremental equation in Domain 1, the values of G_s^{ap} and \dot{G}_s^{ap} calculated with $\xi = 2$ are used, as well in noval loading branch as in unloading/reloading branches. It will be precisely the h_i factor, which modifies the hardening rules of the plastic model with which the HQH is combined, the responsible of reproducing the initial soil stiffness within the small strain range and its degradation during noval loading branch, compensating, in this way, the effect introduced by G_s^{ap} and \dot{G}_s^{ap} when considering a value of $\xi = 2$.
- **Rule No. 3:** When the HQH model is part of an elastoplastic model, the restriction of the stress state over the yield surfaces is considered, forcing in this way the compliance of the extended Masing Rule No. 3.
- **Rule No. 4:** The HQH model partially complies this rule, although it does it in a higher degree than the HS-S or the HS-SS models, since the HQH model increases sensibly the quantity of stored information about the recent

strain history in relation to the HS-S or the HS-SS models. The recent history of the deviatoric strains of the HQH model is memorized in the \mathbf{h} history tensor, whose structure is based on that of the tensor $\boldsymbol{\delta}$ of Niemunis and Herle (1997) and considers all the possible reversals, as these take place in a continuous way with the rotation angle of the recent deviatoric strain trajectory $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$. Simultaneously, in the HQH model, the elastic recovery is less dependent on the accumulated value of the strain. In the HS-S and the HS-SS models, the recent history of the deviatoric strains are stored in the history tensor \mathbf{H} whose structure responds to a triple Simpson brick model, the reversals are given in a discontinuous way with the rotation angle of the recent deviatoric strain trajectory, provided that they depend on the product sign of the eigenvalues of $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ and $\mathbf{H} - \mathbf{1}$ and, if these reversals are not total, the elastic recovery of the shear modulus associated with them highly depends on the accumulated value of the strain. Therefore, the HS-S and the HS-SS models can store information in \mathbf{H} of a maximum of three recent reversals, while the HQH model can memorize information in \mathbf{h} of an unlimited number of recent reversals. Additionally, the HQH model can memorize the maximum shear stiffness modulus in the state variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ and all the information of the strain tensor in the last reversal point that conforms the endpoint of the active deformation cycle, which is done through the state variables \mathbf{e}^R and $\mathbf{e}^{e,R}$. Furthermore, the HQH model is capable to store partial information about the deformations in all the reversal points that configure endpoints of active strain cycles, through the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e .

3.6.4. Reversals effect on the degradation variable

The reversals effect on the degradation variable $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ derives from the expression of $\dot{\mathbf{h}}$:

- When $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}} > \cos(\alpha^*)$, no reversal takes place and, therefore, $\dot{\gamma}_{oct}^H > 0$ and $\gamma_{oct}^H > 0$.
- When $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \leq \cos(\alpha^*)$, a reversal takes place and $\dot{\gamma}_{oct}^H < 0$ will be complied. Furthermore, in this case, if $0 \leq \hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}} < \cos(\alpha^*)$ is complied after the reversal, then $\dot{\gamma}_{oct}^H > 0$, and if $-1.0 \leq \hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}} < 0$ is complied after the reversal, then $\dot{\gamma}_{oct}^H = 0$.

3.6.5. Reversals effect on the maximum soil stiffness

The reversals effect on the maximum soil stiffness $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ derives from the expression of $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ and it can be summarized, in a simplified way, as follows:

- When $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}} > \cos(\alpha^*)$, no reversal takes place and, therefore, $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = 0$
- When $0 < \hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}} < \cos(\alpha^*)$, a reversal takes place and $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < 0$ will be complied.
- When $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \leq 0$, a reversal takes place and $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} > 0$ or $\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} < 0$ will be complied, depending on the value $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ prior to such reversal.

3.7. Thermodynamic consistence

Taking the volumetric part of the expression (01) and introducing the resulting expression in the expression (03), it is deduced that the HQH model is conservative regarding to the volumetric behavior in Domain 1 and in Domain 2, provided that $v' \geq v'_{min}$ is complied, considering, in that case $K'_s = K'_s(-\epsilon'_{oct})$ and $K'_t = K'_t(-\epsilon'_{oct})$, resulting K'_s and K'_t , effectively, elastic stiffness modulus. In contrast, making the same operation with the expression (05), it is deduced that the model, in the general case, is not conservative regarding to the deviatoric behavior neither in Domain 1 nor in Domain 2, since $G_s^{ap} = G_s^{ap}(G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}, \gamma_{oct}^H, -\epsilon_{oct}^e)$ in the first one and $G_{t,ur} = G_{t,ur}(-\epsilon_{oct}^e)$ in the second one. The latter is necessary if pretending to reproduce the hysteretic soil behavior, as soil is a material formed by particles and, therefore, will experience energy dissipation during loading cycles, which will give place precisely to such hysteretic behavior (Sellers, 1989). On the other hand, to comply the stability criterion of Hill (1958), the following correction is applied to the variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, substituting it with $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$, so that the value of G_s^{ap} cannot be reduced after a reversal.

$$\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR} = \begin{cases} \dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} & \text{if } G_s^{ap,(n+1)} > G_s^{ap,(n)} \\ \left(G_s^{ap,(n+1)} \left(1 + a \left(\frac{\gamma_{oct}^{H,(n+1)}}{\xi \gamma_{0,7}} \right) \right) \left(\frac{-p'^{(n)}}{p'_{ref,2}} \right)^{-m_2} \right) - G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,(n)} & \text{if } G_s^{ap,(n+1)} \leq G_s^{ap,(n)} \end{cases} \quad (34)$$

4. EPHYSS model as a combination of HQH and HS_{MOD} models

The EPHYSS model is an advanced elastoplastic model that considers the soil behavior in the range of small strains. Elastoplastic equations are used for the case of $k = 1 \dots q$ yield surfaces: (1) yield surfaces $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$, (2) plastic potentials $g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$, (3) strain decomposition $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$, (4) constitutive equation within yield surfaces $\dot{\boldsymbol{\sigma}}' = \mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{el,hist}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}})$, (5) plastic deformations decomposition $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \sum_{k=1}^q \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k^p$, (6) flow rules $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_k^p = \dot{\lambda}_k \partial g_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) / \partial \boldsymbol{\sigma}'$, (7) hardening laws $\dot{\boldsymbol{\chi}}_k^{pl} = \dot{\lambda}_k \mathbf{h}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl})$, (8) consistency conditions $\dot{f}_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) = 0$ and (9) Karush-Kuhn-Tucker conditions $\dot{\lambda}_k \geq 0$, $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \leq 0$ and $f_k(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}_k^{pl}) \dot{\lambda}_k = 0$.

The elastic part of the EPHYSS model is described with the HQH model, so that $\mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{el,hist}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \mathbf{E}'_s(K'_s, G'_s)^{app} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \mathbf{E}'_s(K'_s, G'_s)^{app} : (-\boldsymbol{\epsilon}_{oct}^e \mathbf{1} + \mathbf{e}^{e,DR})$ in Domain 1 ($\gamma_{oct}^{DR} \leq \gamma_{ur}^\alpha$) and $\mathbf{G}(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\chi}^{el,hist}, \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \mathbf{E}'_t(K'_t, G'_{t,ur}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ in Domain 2 ($\gamma_{oct}^{DR} > \gamma_{ur}^\alpha$). On the other hand, the plastic part of the EPHYSS model is described with the HS_{MOD} model, whose theoretical fundament is exposed in this section.

The HS_{MOD} model is based on the HS model, which in turn is based on the Vermeer model (1978) and on some ideas previously developed by Ohde (1951), Rowe (1962), Kondner (1963), Kondner and Zelasko (1963), Janbu (1963), and Duncan and Chang (1970). Furthermore, the HS_{MOD} model use the same modifications of the hardening law and the dilatation criterion of the HS model that are considered in the HS-S model on which the HS-SS model is based. The HS model is a Cap-Cone elastoplastic model that has four yield surfaces: (1) Cone yield surface, (2) Mohr-Coulomb yield surface, (3) Cap yield surface and (4) Tension Cut-Off yield surface. Specifically, the Cone yield surface and the Cap yield surface consider isotropic hardening, which allows to reproduce the shear plastic deformations generated during deviatoric loading and the plastic volumetric deformations generated during oedometric and isotropic loading.

4.1. Yield surfaces of the EPHYSS model

Isotropic plasticity is assumed. As well, Koiter's Rules (Koiter, 1960) are used for the local integration of the constitutive equations in the elastoplastic regime when the stress state is located in the cone generated by the intersections of 2 or 3 yield surfaces.

4.1.1. Cone yield surface f_s and Mohr-Coulomb limit surface f_{mc}

The EPHYSS model considers the Cone yield surface that controls the plastic deformations of the soil under deviatoric loading. Such surface is formulated in terms of axial deformation as $f_s = 2\epsilon_1 - 2\epsilon_1^e - \gamma^p$, being $\gamma^p \approx 2\epsilon_1^p$ under the hypothesis of hard soils in which $\epsilon_v^p = 3\epsilon_{oct}^p \approx 0$. To define the Cone yield surface it is enough to do it in the stress space sectors corresponding to $-\sigma'_j \geq -\sigma'_k \geq -\sigma'_l$ with $\{j, k, l\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}\}$:

$$f_{s,jkl} = \frac{2q_a}{E'_i} \frac{(-\sigma'_j - (-\sigma'_i))}{q_a - (-\sigma'_j - (-\sigma'_i))} - \frac{2(-\sigma'_j - (-\sigma'_i))}{E'_{t,ur}} - \gamma^p \quad (35)$$

The EPHYSS model, in the same way as the HS-S model or the HS-SS model, does not use the E'_{50} modulus corresponding to the original HS model in the Cone yield surface formulation, but uses the initial longitudinal stiffness modulus E'_i , which is an internal parameter of the model related to E'^{ref}_{50} . This is due to the interaction that exists between the Cone yield surface and the Cap yield surface when both are simultaneously activated. Furthermore, the stiffness moduli that appear in the model formulation, E'_{50} , $E'_{t,ur}$ and E'_i , vary with the stress level, following the relations proposed by Ohde (1951), Janbu (1963) or Hardin and Richart (1963).

$$E'_{50} = E'^{ref}_{50} \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (37)$$

$$E'_{t,ur} = E'^{ref}_{t,ur} \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (38)$$

$$E'_i = E'^{ref}_i \left(\frac{-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (39)$$

The yield surface f_s can harden until the variable γ^p reaches the limit value determined by the resistance criterion of Mohr-Coulomb, which happens when $q = q_f = 2\sin(\varphi')/(1 - \sin(\varphi'))(-\sigma'_3 + c'\cot(\varphi'))$. Facing the numeric implementation of the EPHYSS model, it is interesting to express the Mohr-Coulomb yield surface f_{mc} in the same stress space sectors used for the Cone yield surface f_s :

$$f_{mc,jkl} = \frac{1}{2}(-\sigma'_j - (-\sigma'_l)) + \frac{1}{2}(-\sigma'_j + (-\sigma'_l))\sin(\varphi') - c'\cot(\varphi') \quad (36)$$

4.1.2. Cap yield surface f_c

The EPHYSS model considers a third yield surface denominated Cap yield surface, which allows to close the elastic region in the direction of the hydrostatic axis and reproduce the plastic volumetric soil behavior.

$$f_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'}\right)^2 + (-p')^2 - p_p^2 \quad (40)$$

Where $\tilde{q} = -\sigma'_1 + (1/\delta - 1)(-\sigma'_2) - 1/\delta(-\sigma'_3)$ and α' is an internal parameter of the model related to K_0^{NC} .

4.1.3. Tension Cut-Off yield surface f_t

Finally, the EPHYSS model considers a fourth yield surface, denominated Tension Cut-Off yield surface, which considers the soil tensile strength ($-\sigma'_3 = \sigma'_{trac} > 0$), which is usually very small. Such surface coincides with the Rankine surface, commonly used in the modeling of cohesive nature materials. To define the Tension Cut-Off yield surface it is enough to do it in the principal stress space sectors corresponding to $\{-\sigma'_j \geq -\sigma'_k \geq -\sigma'_l\} \cup \{-\sigma'_k \geq -\sigma'_j \geq -\sigma'_l\}$ with $\{j, k, l\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}\}$:

$$f_{t,jkl} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_l) \quad (41)$$

4.1.4. Auxiliary yield surfaces

In order to facilitate the use of Koiter's Rules (Koiter,1960) for the local integration of the constitutive equations of the model on the Cap and Tension Cut-Off yield surfaces, two auxiliary yield surfaces have been defined to maintain the stress state in the region $-\sigma'_1 \geq -\sigma'_2 \geq -\sigma'_3$ after the Return Mapping.

$$f_{aux,1} = -\sigma'_3 - (-\sigma'_2) \leq 0 \quad (42)$$

$$f_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \geq 0 \quad (43)$$

4.2. Plastic potentials and dilatancy

Assuming the hypothesis of associated plasticity for the Cone yield surface would be unrealistic in most of the soils. Therefore, the linear flow rule $-\dot{\epsilon}_v^p/\dot{\gamma}^p = \sin(\psi_m)$ is considered on such surface.

The plastic part of the EPHYSS model, as that of the HS-SS model, is based on the HS-S model, which partially modifies the dilatancy criterion used in the HS model, based, in turn, on the modified Rowe's criterion (1962). Specifically, the HS model formulation considers a value of $\psi_m = 0$ when φ'_m is small or when the value of ψ_m , calculated by Rowe's criterion, is negative. Such formulation can result in too small volumetric plastic strains when the mobilized friction angles are small. Therefore, based on the proposal of Benz (2007), the EPHYSS model, as the HS-SS model, resorts to the formulation of Li and Dafalias (2000) provided that the mobilized dilatancy angle results negative according to the original criterion of the HS model, that is, when the soil behavior is contractive. The Li and Dafalias formulation will not be considered when the soil behavior is dilatant, with the aim of avoiding an increase of the number of model parameters, because the simplification that is performed in such formulation would not be adequate. Based on the above, the EPHYSS model uses the following expression for the mobilized dilatancy angle:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sin(\psi_m) = \frac{1}{10} \left(-M_{comp} e^{\frac{1}{15} \ln \left(\frac{\eta \sin(\varphi'_m)(1-\sin(\varphi'_{cv}))}{M_{comp} \sin(\varphi'_{cv})(1-\sin(\varphi'_m))} \right)} + \eta \right) & \text{if } \sin(\varphi'_m) \leq \sin(\varphi'_{cv}) \\ \sin(\psi_m) = \min \left(\frac{\sin(\varphi'_m) - \sin(\varphi'_{cv})}{1 - \sin(\varphi'_m)\sin(\varphi'_{cv})}, \sin(\psi) \right) & \text{if } \sin(\varphi'_m) > \sin(\varphi'_{cv}) \text{ y } \psi > 0 \\ \sin(\psi_m) = \sin\psi & \text{if } \sin(\varphi'_m) \geq \sin(\varphi'_{cv}) \text{ y } \psi \leq 0 \\ \sin(\psi_m) = 0 & \text{if } \sin(\varphi') = 0 \end{array} \right. \quad (44)$$

$$\sin(\varphi'_m) = \max \left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{\sigma'_1 + \sigma'_3 + 2c' \cot(\varphi')}, \frac{\sigma'_1(1 - K_0^{NC})}{\sigma'_1(1 + K_0^{NC}) + 2c' \cot(\varphi')} \right) \quad (45)$$

$$M_{comp} = \frac{6 \sin \varphi'_{cv}}{3 - \sin \varphi'_{cv}} \quad (46)$$

$$\eta = \max \left\{ \frac{q}{p'}, \frac{1}{3} (1 + 2K_0^{NC}) \right\} \quad (47)$$

The definition of the flow rules for the Cone yield surface and the Mohr-Coulomb yield surface is done through the following expressions of the plastic potentials associated with them in the principal stress space sectors corresponding to $-\sigma'_j \geq -\sigma'_k \geq -\sigma'_l$ with $\{j, k, l\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}\}$.

$$g_{s,jkl} = \frac{-\sigma'_j - (-\sigma'_l)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_j + (-\sigma'_l)}{2} \right) \sin(\psi_m) \quad (48)$$

$$g_{mc,jkl} = \frac{-\sigma'_j - (-\sigma'_l)}{2} - \left(\frac{-\sigma'_j + (-\sigma'_l)}{2} \right) \sin(\psi) \quad (49)$$

Finally, regarding to the Cap yield surface, the Tension Cut-Off yield surface and the auxiliary surfaces, associated plasticity is assumed in all of them, considering, therefore, plastic potentials equal to the yield surfaces in the same stress space sectors in which the respective yield functions have been defined.

$$g_c = \left(\frac{\tilde{q}}{\alpha'} \right)^2 + (-p')^2 - p_p^2 \quad (50)$$

$$g_{t,jkl} = \sigma'_{trac} - (-\sigma'_l) \quad (51)$$

$$g_{aux,1} = -\sigma'_3 - (-\sigma'_2) \leq 0 \quad (52)$$

$$g_{aux,3} = -\sigma'_2 - (-\sigma'_1) \geq 0 \quad (53)$$

4.3. Hardening laws

The models that consider the hysteretic behavior of the soil can adopt diverse strategies to reproduce the loading/unloading/reloading cycles. Specifically, the EPHYSS model formulation allows complying the generalized Masing Rules, although the compliance of the fourth rule is partial. Both the HS-SS model and the EPHYSS model use the same strategy for the compliance of the first and the second generalized Masing Rules, which consist in the same modification of the hardening laws of the HS model that is considered in the HS-S model.

The EPHYSS model, as the HS, HS-S and HS-SS models, uses two hardening variables: the plastic deviatoric strain γ^p that controls the size of the Cone yield surface f_s and the preconsolidation stress p_p that controls the size of the Cap yield surface f_c . The hardening laws of the EPHYSS model are the following:

$$\dot{\gamma}^p = (\dot{\lambda}_{\gamma^p} h_{\gamma^p}) h_i = \dot{\lambda}_{\gamma^p} h_i \quad (54)$$

$$\dot{p}_p = (\dot{\lambda}_{p_p} h_{p_p}) h_i = \dot{\lambda}_{p_p} 2H(-p') \left(\frac{p_p + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m h_i \quad (55)$$

The h_i factor effect is maximum when $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_{s,0}^{ap,180}$ and vanishes when $G_{t,min,\xi=1}^{ap} = G_{t,ur}$. The evolution of $G_{t,min,\xi=1}^{ap}$ follows the degradation curve corresponding to the noval loading branch, which is lower than that of the elastic unloading or reloading branches. For that, in the calculation of $h_i = h_i(G_m)$ the value $\xi = 1$ is used following the Hashiguchi (1993) criterion.

Moreover, the plastic modulus H that appears in the expression (55) is calculated, in the EPHYSS model, in a different way than in the HS, HS-S or HS-SS models. In the EPHYSS model, the plastic modulus H depends on K_{ur}^{ref} according to the expression (56), where K_{ur}^{ref} is a parameter proper of the HQH model, while in the HS, HS-S or HS-SS models, the elastic relation $K_{ur}^{ref} = K_{ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, \nu'_{ur})$ is considered.

$$H = \frac{K_{ur}^{ref}}{K'_{t,ur}/K'_c - 1} \quad (56)$$

4.4. Parameters of the EPHYSS model

The parameters of the EPHYSS model are listed and described below.

Parameters associated with the HQH model

K_s^{ref}	[kN/m ²]	Drained secant elastic volumetric modulus for $-p' = p'_{ref,1}$.
$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	[kN/m ²]	Maximum secant shear modulus of the degradation curve corresponding to a 180° reversal ($\hat{\mathbf{n}}: \hat{\mathbf{e}} = -1$) and $-p' = p'_{ref,2}$.
$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	[kN/m ²]	Maximum secant shear modulus of the degradation curve corresponding to a 90° reversal ($\hat{\mathbf{n}}: \hat{\mathbf{e}} = 0$) and $-p' = p'_{ref,2}$.
$\gamma_{0.7}$	[-]	Value of γ_{oct}^H for which $G_s = 0,722 G_{s,0}^{180,ref}$.
m_1	[-]	Factor that controls the dependency level of K'_s with $-p'$ and adopts values between 0,00 and 1,00.
m_2	[-]	Factor that controls the dependency level of G_s and $G_{t,ur}$ with $-p'$ and usually takes values between 0,40 and 0,60 for sands, and between 0,50 and 1,00 for clays.
$p'_{ref,1}$	[kN/m ²]	Reference pressure in the expression of K'_s .
$p'_{ref,2}$	[kN/m ²]	Reference pressure in the expression of G_s and $G_{t,ur}$.
ν'_{min}	[-]	Minimum value of Poisson's ratio that usually takes values between 0,05 and 0,20.

Parameters associated with the HS_{MOD} model

$E'_{50}{}^{ref}$	[kN/m ²]	Secant longitudinal stiffness modulus for a mobilization of the 50% of q_f in a drained triaxial test for $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
$E'_{oed}{}^{ref}$	[kN/m ²]	Reference oedometric tangent modulus in noval loading for $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
$E'_{t,ur}{}^{ref}$	[kN/m ²]	Reference longitudinal stiffness tangent modulus in elastic unloadings and reloadings for $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
m	[-]	Coefficient that controls the dependence level of E'_{50} , E'_{oed} , $E'_{t,ur}$ and E'_i with the stress.
p'_{ref}	[kN/m ²]	Reference pressure ($p'_{ref} = 100 \text{ kPa}$ by default).
c'	[kN/m ²]	Effective cohesion.
φ'	[deg]	Maximum effective friction angle.
ψ	[deg]	Maximum dilatancy angle.

K_0^{NC}	[-]	Coefficient of lateral earth pressure for a normally consolidated stress state ($K_0^{NC} = 1 - \sin(\varphi')$ by default).
R_f	[-]	Ratio q_f/q_a ($R_f = 0,9$ by default).
σ'_{trac}	[kN/m ²]	Tension limit value ($\sigma'_{trac} = 0$ kN/m ² by default).

The value of the parameters K_s^{ref} , $p'_{ref,1}$ and m_1 can be obtained from unloadings and reloadings made in the isotropic consolidation phase of triaxial tests, while the value of the parameters $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, $\gamma_{0,7}$, $p'_{ref,2}$, m_2 and v'_{min} can be obtained from resonant column and triaxial tests with internal strain measurement. Furthermore, the value of $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ must be obtained from the results of tests with internal deformation measurement in which it is possible to control the rotation of the deviatoric strains, such as, for example, biaxial, true triaxial or hollow cylinder with torsion tests. The value of $\gamma_{0,7}$ is common in the EPHYSS and HS-SS models. The parameters associated with the HS_{MOD} model are the same as those associated with the plastic part of the HS, HS-S or HS-SS models. The determination or estimation of such parameters from tests, is widely known and can be found in Surarak et al. (2012) or in Obrzud and Truty (2018), for example.

In case of not having the tests results for the determination of the parameters associated with the HQH model, it is possible to estimate the value of the parameters K_s^{ref} , $p'_{ref,1}$, m_1 , $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$, $p'_{ref,2}$, m_2 and v'_{min} from the value of the parameters G_0^{ref} , $E'_{t,ur}$, v'_{ur} , m , p'_{ref} , c' and φ' of the HS-SS model, as follows ($\gamma_{0,7}$ value is the same for both models):

$$K_s^{ref} \approx \frac{1}{3} \frac{E'_{t,ur} (1 - m_1)}{(1 - 2v'_{ur})} \quad (57)$$

$$p'_{ref,1} \approx p'_{ref} \quad (58)$$

$$m_1 \approx m \quad (59)$$

$$v'_{min} \approx v'_{ur} \quad (60)$$

$$G_{s,0}^{ap,180,H,ref} \approx G_0^{ref} \quad (61)$$

$$G_{s,0}^{ap,90,H,ref} \approx \Lambda G_0^{ref} \quad (62)$$

$$p'_{ref,2} \approx p'_{ref} \quad (63)$$

$$m_2 \approx m \quad (64)$$

Where Λ takes values of 0,40 – 0,44 for sands and 0,50 for clays.

The above approximation is considered, in general, sufficient to reproduce soil stiffness in numerical essays in the absence of more data. However, the fact that K_s' and G_s^{ap} vary, respectively, with $(-p')^{m_1}$ and $(-p')^{m_2}$ in the EPHYSS model, while $E'_{t,ur}$ and G_0 do it so with $(-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi'))^m$ in the HS-SS model, leads to formulate a set of transformations based on the proposals by Obrzud and Truty (2018) for boundary value problems, in order to approximate the value of the parameters K_s^{ref} and $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ of the EPHYSS model from the HS-SS model parameters so that a similar profile of volumetric and shear stiffness is reproduced with depth. In this case, the value of the parameters K_s^{ref} and $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ are those that minimize, respectively, the objective function $J_1 = J_1(K_s^{ref})$ of the expression (65) and $J_2 = J_2(G_{s,0}^{ap,180,H,ref})$ of the expression (66), taking values $(-\sigma'_3)_i$ and $(-p')_i = (1/3)(1 + 2K_0^{NC})(-\sigma'_3)_i$, with $i = 1 \dots n$:

$$J_1(K_s^{ref}) = \sum_{i=1}^n \left(K_s^{ref} \left(\frac{(-p')_i}{p'_{ref,1}} \right)^{m_1} - \frac{1}{3} \frac{E'_{t,ur} (1 - m_1)}{(1 - 2v'_{ur})} \left(\frac{(-\sigma'_3)_i + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \right)^2 \quad (65)$$

$$J_2(G_{s,0}^{ap,180,H,ref}) = \sum_{i=1}^n \left(G_{s,0}^{ap,180,H,ref} \left(\frac{(-p')_i}{p'_{ref,2}} \right)^{m_2} - G_0^{ref} \left(\frac{(-\sigma'_3)_i + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \right)^2 \quad (66)$$

From the above expressions it follows that $K_s^{ref} = (1/3) \left(E_{t,ur}^{ref} (1 - m_1) / (1 - 2\nu'_{ur}) \right) \left(3K_0^{NC} / (1 + 2K_0^{NC}) \right)^m$ and $G_{s,0}^{ap,180,H,ref} = G_0^{ref} \left(3K_0^{NC} / (1 + 2K_0^{NC}) \right)^m$ is complied when $c' = 0$.

The previous process can be done inversely to adjust the value of the parameter G_0^{ref} of the HS-SS model from the value of the parameter $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ of the EPHYSS model by the function $J'_2 = J'_2(G_0^{ref})$, also with the aim of reproducing a similar profile of shear stiffness with depth. It is not advisable, however, to adjust the value of the parameters $E_{t,ur}^{ref}$ and ν'_{ur} of the HS-SS model from the value of the parameter K_s^{ref} of the EPHYSS model, since both appear in its plastic formulation, which is not convenient to modify.

4.5. Internal parameters

The EPHYSS model, as the HS, HS-S and HS-SS models, considers three internal parameters: (1) E_i^{ref} : initial longitudinal stiffness modulus that is related with the value of E_{50}^{ref} , (2) α' : coefficient that controls the shape of the Cap yield surface and is related with the value of K_0^{NC} and (3) $K'_{t,ur}/K'_c$: ratio between the elastic volumetric modulus and the secant volumetric modulus for the noval isotropic compression that is related with the value of E_{oed}^{ref} .

$$E'_{oed} = E_{oed}^{ref} \left(\frac{-\sigma'_1 + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m = E_{oed}^{ref} \left(\frac{-\sigma'_3 / K_0^{NC} + c' \cot g(\varphi')}{p'_{ref} + c' \cot g(\varphi')} \right)^m \quad (67)$$

Plaxis calculates these parameters through an internal algorithm that is not detailed in the manuals. In the EPHYSS model, an algorithm has been implemented to calculate such parameters from the information contained in De Santos (2015). First, a drained triaxial test is reproduced to obtain the value of E_i^{ref} , and subsequently, an oedometric test is reproduced to obtain the value of α' and $K'_{t,ur}/K'_c$ (Castellón, 2019).

5. Local integration of the constitutive equations

The standard calculation strategy in elastoplastic models is used for the local integration of the constitutive equations of the EPHYSS model. This strategy uses the trial stress $\sigma'^{(tr)} = \sigma'^{(n)} + \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)}$, which assumes that the soil behavior is totally elastic. The previous expression of $\sigma'^{(tr)}$ will be the one used when $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} > \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$, that is, in Domain 2. However, such expression will be modified when $\gamma_{oct}^{\Delta R,(n)} \leq \gamma_{ur}^{\alpha,(n)}$, that is, in Domain 1, according to $\sigma'^{(tr,NL)} = \sigma'^{(n)} + \mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)} + \Delta \mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} : (-\epsilon_{oct}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + e^{e,\Delta R,(n+1)})$. The second term in the previous expression is often neglected in many models ($\Delta \mathbf{E}'_s \approx \mathbf{0}$), although they consider the stress or strain nonlinearity, as it happens in the HS, HS-S or HS-SS models. After calculating the trial stress $\sigma'^{(tr)}$ or $\sigma'^{(tr,NL)}$ according to the case, and defining the elastic Domain as $\mathcal{D}_e = \{ \sigma'_k | f_k(\sigma', \chi_k^{pl}) < 0, k = 1 \dots q \}$, the procedure is as follows:

- In case that the trial stress tensor belongs to the elastic Domain, $\sigma'^{(tr)} \in \mathcal{D}_e$ or $\sigma'^{(tr,NL)} \in \mathcal{D}_e$ according to the case, it will be updated: (1) the stress tensor $\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(tr,NL)}$ or $\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(tr)}$ according to the case, (2) the plastic state variables according to $\chi_k^{pl,(n+1)} = \chi_k^{pl,(n)}$ and (3) the elastic state variables $\chi^{e, hist,(n+1)}$ as described in section 3.5.
- In case that the trial stress tensor does not belong to the elastic Domain $\sigma'^{(tr)} \notin \mathcal{D}_e$ or $\sigma'^{(tr,NL)} \notin \mathcal{D}_e$ according to the case, it will be necessary to apply the numerical scheme of the Return Mapping. According to the expression (58) is considered that the tensors $\Delta \mathbf{E}'_{s,[i]}{}^{(n+1)} = \mathbf{E}'_s \left(\Delta K'_{s,[i]}{}^{(n+1)}, \Delta G_{s,[i]}^{ap,(n+1)} \right)$ and $\epsilon_{oct,[i]}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + e_{[i]}^{e,\Delta R,(n+1)}$ should be calculated implicitly, iterating over the value of the elastic strain tensor increment $\Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}$. When convergence is reached ($\epsilon_{abs}^{e,(n+1)} = \left\| \Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)} - \Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)} \right\| < \text{TOL}_{\epsilon_{abs}^e}$ and $\epsilon_{rel}^{e,(n+1)} =$

$\Delta\epsilon_{abs}^{e,(n+1)} / \|\Delta\epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\| < TOL_{\epsilon_{ret}^e}$), the value $\Delta\epsilon^{e,(n+1)} = \Delta\epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$ will be adopted and the following variables will be updated: (1) the stress tensor $\sigma'^{(n+1)}$, according to the expression (58) or (59) as appropriate, (2) the plastic state variables $\chi_k^{pl,(n+1)}$ and (3) the elastic state variables $\chi^{el,hist,(n+1)}$ as described in section 3.5.

$$\sigma'_{[i]}^{(n+1)} = \sigma'_{[i]}^{(tr,NL)} - \sum_{k=1}^q \lambda_{k,[i]}^{(n+1)} \mathbf{E}'_s{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'_{[i]}^{(n+1)}, \chi_{k,[i]}^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \quad (68)$$

$$\sigma'^{(n+1)} = \sigma'^{(tr)} - \sum_{k=1}^q \lambda_k^{(n+1)} \mathbf{E}'_t{}^{(n+1)} : \frac{\partial g_k(\sigma'^{(n+1)}, \chi_k^{pl,(n+1)})}{\partial \sigma'} \quad (69)$$

For the local integration of the equations it has been used the so-called Implicit Closest Point Projection Algorithm, which uses a Backward Euler Elastic Predictor/Return Mapping type integration scheme within the methods of radial return, and belongs to the algorithms class denominated Generalized Midpoint Algorithms within the linear multistep methods, that have been widely described by Simo and Hughes (1998) and Simo (1998). Such formulation can be also found in Jeremic and Sture (1997) or Benz (2007). Furthermore, for the return on the intersection of 2 or 3 yield surfaces, as it has been commented, Koiter's Rules (Koiter, 1960) have been used. As well, iterative algorithms for the elastic part have been incorporated to the general algorithm.

5.1.1. Strategy for the selection of active yield surfaces

A major problem in multisurface elastoplastic calculations is to establish a strategy to determinate on which surface or surfaces must be done the Return Mapping, especially when the stress state is next to an intersection zone between several yield surfaces in which Koiter's Rules (Koiter, 1960) must be applied.

The proposal of Simo and Hughes (1998) and the one of Bonnier (2000) are considered as robust strategies for the surfaces selection. The strategy considered in the EPHYSS model is based on the proposal of Bonnier (2000) in which some modifications have been incorporated.

6. Validation and verification of the EPHYSS model

A partial verification of the EPHYSS model is made as well as a validation using experimental data obtained from laboratory tests, compiled from diverse thesis and papers. The simulations have been conducted with PLAXIS 2D 2015.

The parameters of Hostun sand (Rhône-Alpes, France) and reconstituted kaolinite clay, as well as the results of the tests conducted with them, have been taken from the thesis of Benz (2007), who, in turn, has taken them from the work of Biarez and Hicher (1994) and Desrues et al. (2000). The elastic parameters used in the simulations with Hochstetten sand (Karlsruhe, Germany) have been extracted from the work of Niemunis and Herle (1997), while those used to simulate the tests with Ticino sand (Italy) have been extracted from the work of Schädlich and Schweiger (2012). In both cases, the parameters related to the plastic behavior have been estimated from the available information. And the data related to reconstituted London clay and to the tests conducted with it have been taken from the thesis of Benz (2007), who, in turn, has taken them from the thesis of Richardson (1988).

In *Table 1* EPHYSS and HS-SS parameters for the different soils aforementioned are shown. As well, in *Table 2* internal parameters of EPHYSS are shown in each case. HS-SS internal parameters are not provided as cannot be extracted from Plaxis.

	Parameters	Loose Hostun Sand	Dense Hostun Sand	Hochstetten Sand	Ticino Sand	Reconstituted Kaolinite Clay	Reconstituted London Clay	Units		
ELASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0001	0,0002	0,000055	0,00013	0,0002	0,00055	[-]	
	HS-SS	G_0^{ref}	70.000	112.500	68.000	100.000	33.333	26.000	[kN/m ²]	
		ν'_{ur}	0,25	0,25	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	8.300	22.500	5.000	13.335	1.277	2.333	[kN/m ²]	
		m_1	0,75	0,55	0,50	0,50	0,80	0,80	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	100	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	70.000	112.500	68.000	100.000	33.333	26.000	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	28.000	45.000	27.000	40.000	16.666	13.000	[kN/m ²]	
		m_2	0,75	0,55	0,50	0,50	0,80	0,80	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	100	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]	
	PLASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	E_{50}^{ref}	12.000	30.000	6.000	16.000	2.150	7.000	[kN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	60.000	90.000	18.000	48.000	11.500	21.000	[kN/m ²]
			E_{oed}^{ref}	16.000	30.000	6.000	16.000	1.050	7.000	[kN/m ²]
c'			0,10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	[kN/ m ²]	
φ'			34	42	33	33	20	20	[deg]	
ψ			0	16	0	0	0	0	[deg]	
p'_{ref}			100	100	100	100	100	100	[kN/ m ²]	
m			0,75	0,55	0,50	0,50	0,80	0,80	[-]	
K_0^{NC}			0,44	0,40	0,45	0,50	0,50	0,66	[-]	
R_f			0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	[-]	
σ'_{trac}	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	[kN/ m ²]			

Table 1. Parameters of the EPHYSS and HS-SS models for different soils

	Internal Parameters	Loose Hostun Sand	Dense Hostun Sand	Hochstetten Sand	Ticino Sand	Reconstituted Kaolinite Clay	Reconstituted London Clay	Units
EPHYSS	E_i^{ref}	38.416	84.166	17.149	45.504	45.504	23.597	[kN/ m ²]
	α'	2,73	2,28	2,40	1,75	1,75	0,635	[-]
	$K'_{t,ur}/K'_c$	2,40	2,04	2,00	1,93	1,93	1,35	[-]

Table 2. Internal parameters of the EPHYSS model for different types of soils.

6.1. Triaxial tests

Numerical simulations of drained and undrained triaxial tests on loose and dense Hostun sand with different confinement pressures (Figures 4, 5 and 7), drained triaxial tests on reconstituted kaolinite clay with different confinement pressures (Figure 6), and triaxial tests with stress rotations in the deviatoric plane on London (Figure 8) clay have been conducted.

As can be seen in Figures 4 and 5, both models predict similar behaviors and, in general, approximate well the results or experimental trends of drained triaxial test on Hostun dense sand, excepting the dilatant behavior of the sand with $-\sigma'_3 = 100kPa$. Furthermore, both models provide volumetric stiffness superior to those obtained in the tests (Figure 4b and 5b) due to the dependence of K' with G and ν' (either in the entire range of deformations in the HS-SS model, or when $\nu' \leq \nu'_{min}$ in the EPHYSS). However, the EPHYSS model is able to significantly improve the approximation to the experimental curves when values $\nu' < \nu'_{min}$ are considered, although this would lead to important mistakes in the prediction of horizontal displacements in boundary value problems with significant deviatoric loadings and, therefore, it is no recommended. In any case, as Benz (2007) points out, since in most of the boundary value problems pure isotropic loadings, unloadings or reloadings are not usual, this effect is not considered an important limitation.

On the other hand, regarding to the drained triaxial tests on kaolinite clay, in Figure 6 it can be seen how the EPHYSS model provides slightly lower shear strengths as well as lower volumetric strains than those that result from the HS-SS model in all cases. The EPHYSS model better approximates the experimental data for $-\epsilon_1 \leq 0,025$, while the HS-SS model better approximates the experimental data for $-\epsilon_1 > 0,025$.

In Figure 4d, 5d and 6d a good adjustment is observed between the degradation curves of G_s^{ap} provided by the EPHYSS model and the theoretical curve G_s^{ap} according to the expression (04), although certain differences are appreciated that are explained as follows:

1. As Benz (2007) indicates for the HS-S model, by the effect that the factor h_i (also considered in the formulation of the HS-SS and EPHYSS models) introduces on the degradation curves of the shear modulus in presence of plastic deformations. If the soil behavior were purely elastic, there would be no plastic deformations and both curves would be coincident. According to Benz (2007), although this effect is generally small, it would be possible to improve the approximation of the numerical curve to the theoretical one by adjusting the factor h_i within the iterative algorithm to obtain the internal parameters of the model.
2. When $\gamma_{oct}^H \geq \gamma_{ur}^\alpha$ or $\gamma_{HIST} \geq \gamma_c$, the value of G_s^{ap} is affected by the condition $G_t^{ap} = G_{t,ur}$ in both models, which is not considered in the expression (04).

The principal differences between the results obtained with the EPHYSS model and the HS-SS model in triaxial test are explained as follows:

1. The stiffness moduli of the EPHYSS model depend on $-p'$, while the stiffness moduli of the HS-SS model depend on $(-\sigma'_3 + c'cotg(\varphi'))$. Since in a drained triaxial test there is an increase of the main pressure during the application of the deviatoric loading $-\Delta p' = 1/3\Delta q$, the EPHYSS model provides values of $G_s^{ap} = G_s^{ap}(-p')$ slightly superior than those of the HS-SS model, which considers $G_s^{ap} = G_s^{ap}(-\sigma'_3 + c'cotg(\varphi'))$, and $-\sigma'_3$ remains constant during the application of such deviatoric loading.
2. The previous point implies that both models consider different values of the internal parameters E_i^{ref} , α' and $K'_{t,ur}/K'_c$, which affects the plastic behavior.
3. Furthermore, the different values of the internal parameter E_i^{ref} give place to different values of the factor h_i , which modifies the hardening laws in both models and is reflected in the different curves of G_s^{ap} obtained.
4. The EPHYSS model considers independent K' and G values whenever $\nu' > \nu'_{min}$ is complied, while in the HS-SS the linear dependence $K' = (2/3)G(1 + \nu'_{ur})/(1 - 2\nu'_{ur})$ is considered.
5. The small differences in the dilatancy rules between both models.

As can be seen in Figure 7, both the EPHYSS and the HS-SS models present some limitations in the approximation of the experimental curves $q - (-\epsilon_1)$ of undrained triaxial tests on dense Hostun sand, while they are able to well approximate the respective curves $q - (-p')$. Similar results are observed in the HS-S model of Benz (2007), on which the HS-SS model is based, and, according to Benz, this is due to the fact that the adopted formulation for the dilatation does not consider the void ratio of the material as a state variable. Since the HS-SS and the EPHYSS models adopt a dilatancy formulation similar to that of the HS-S model, the results associated with this formulation are similar.

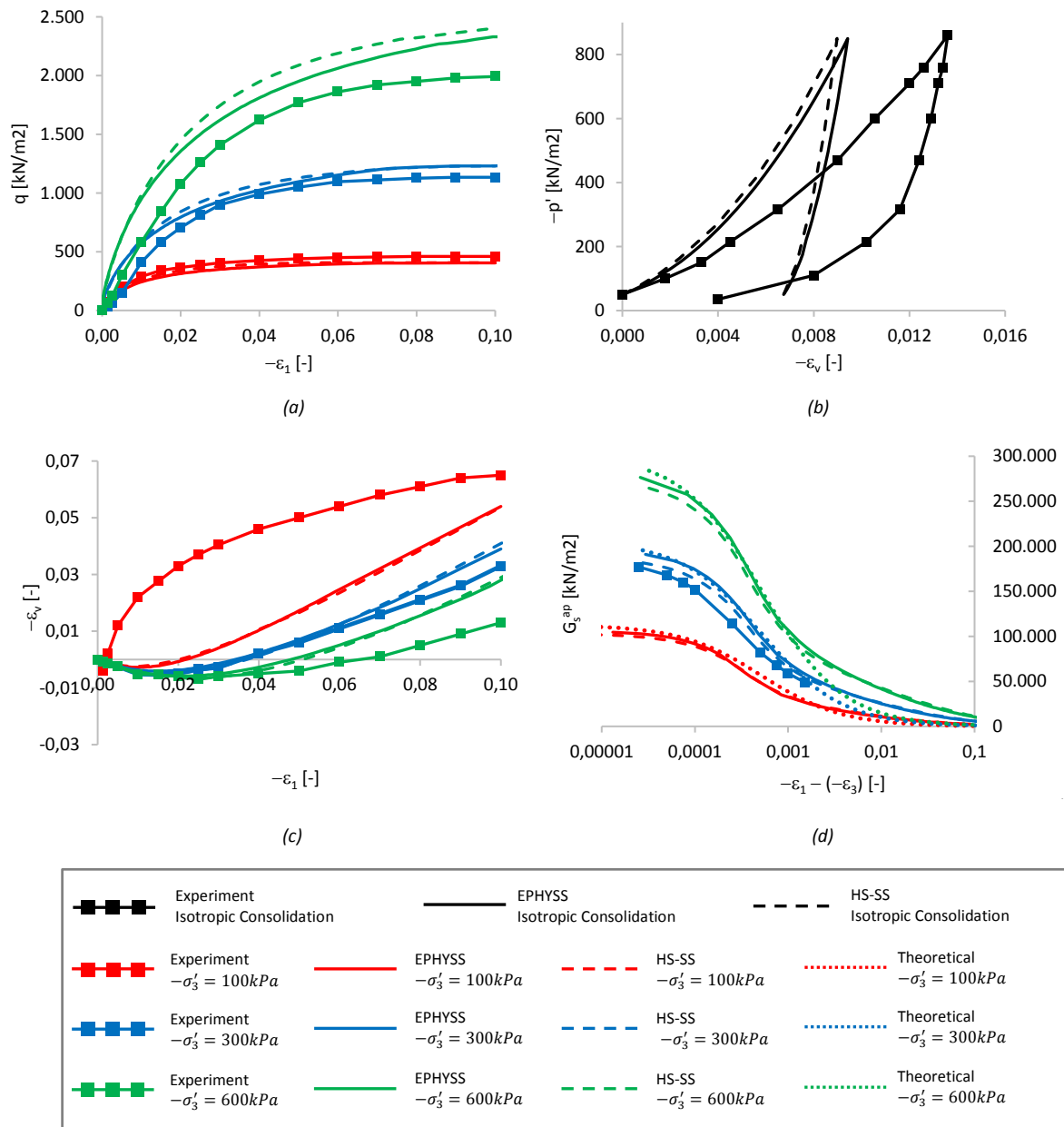


Figure 4. Drained triaxial tests on dense Hostun sand (Benz (2007), from Biarez and Hicher (1994); Desrues et al. (2000)) and simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

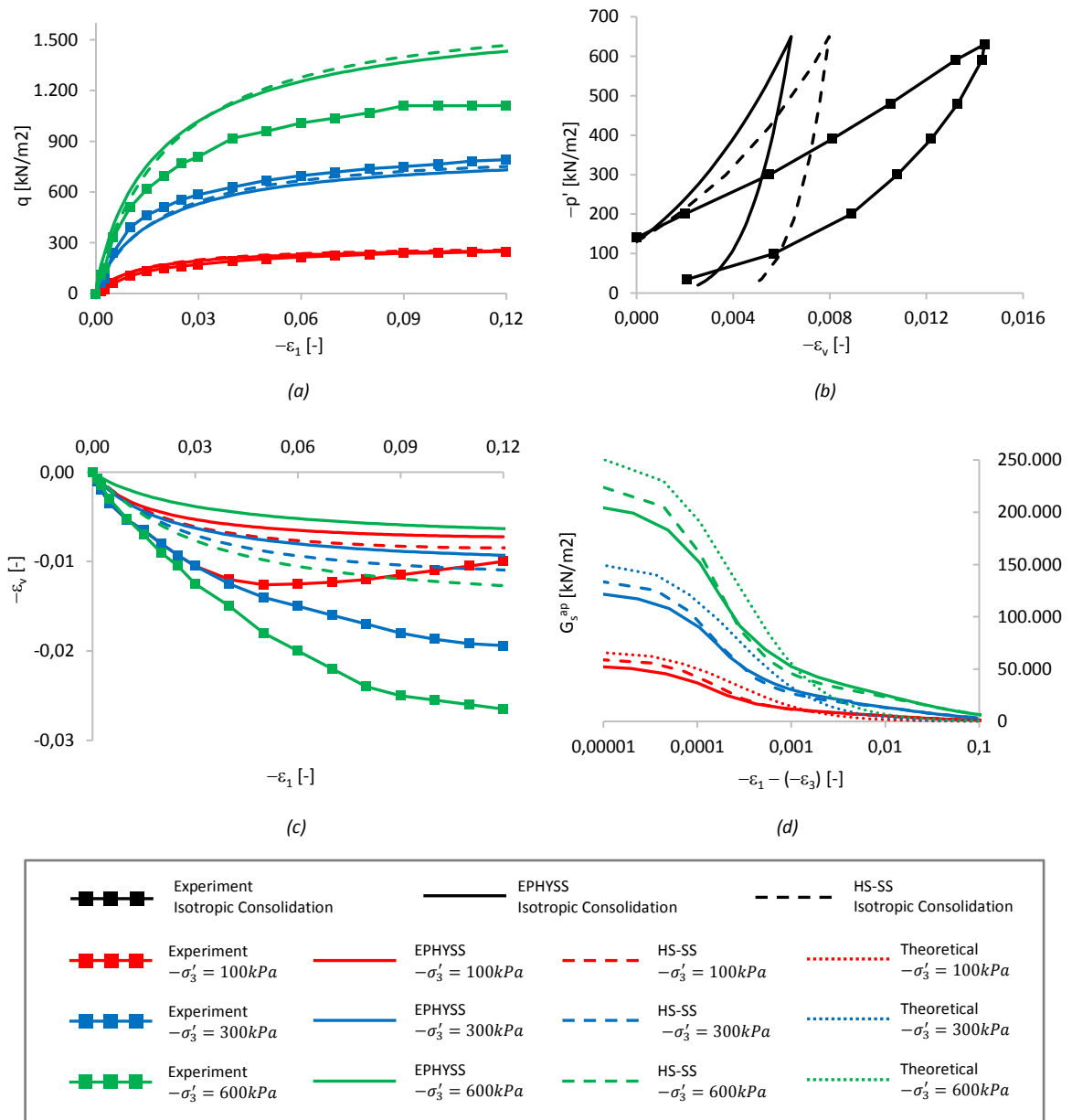


Figure 5. Drained triaxial tests on loose Hostun sand (Benz (2007), from Biarez and Hicher (1994); Desrues et al. (2000)) and simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

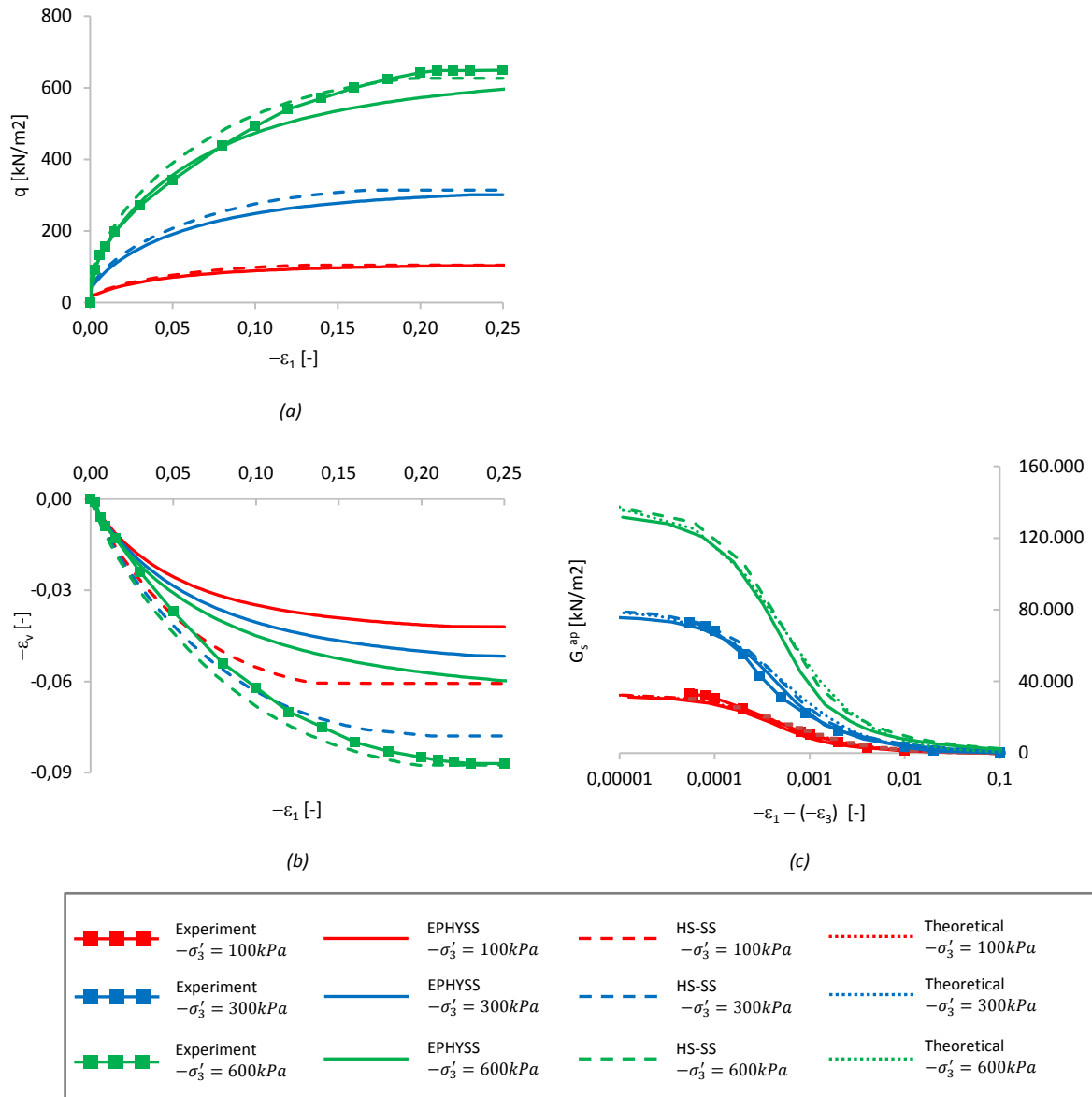


Figure 6. Drained triaxial tests on reconstituted kaolinite clay (Benz (2007), from Richardson (1988)) and simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

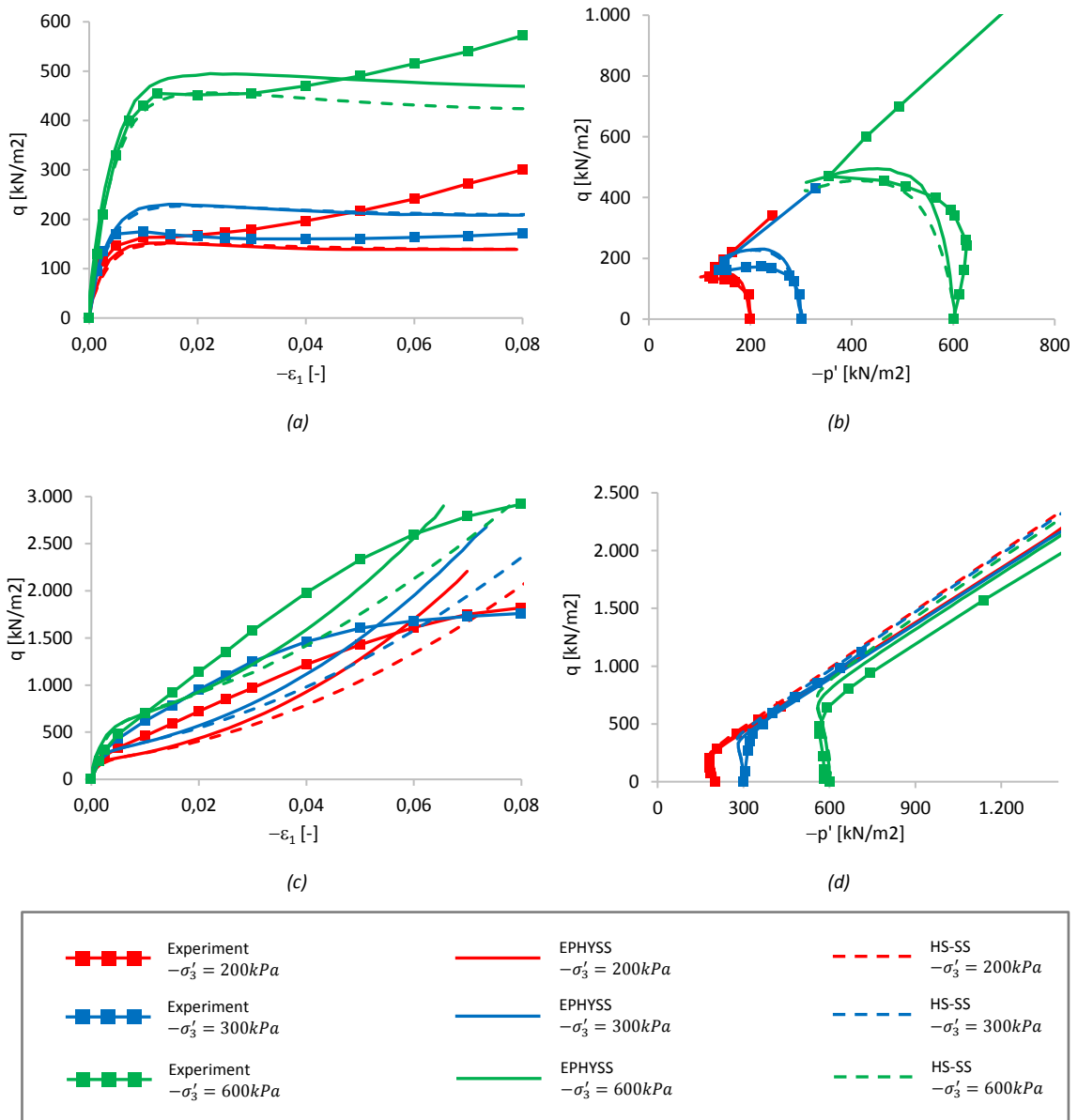


Figure 7. Undrained triaxial tests on dense Hostun sand (a and b), on loose Hostun sand (c and d) (Benz (2007), from Biarez and Hicher (1994); Desrues et al. (2000)) and simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

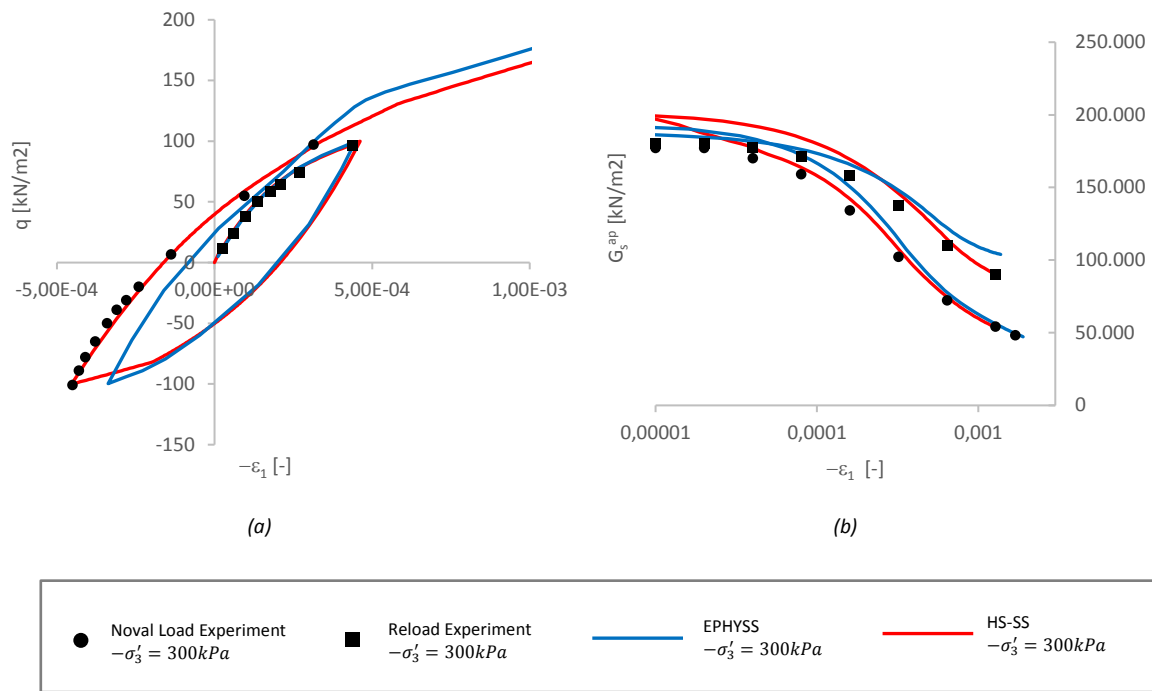


Figure 8. Drained triaxial test with loading/unloading/reloading cycle on Hostun dense sand, $-\sigma'_3 = 300\text{kPa}$ (Benz (2007), from Biarez and Hicher (1994)) and simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

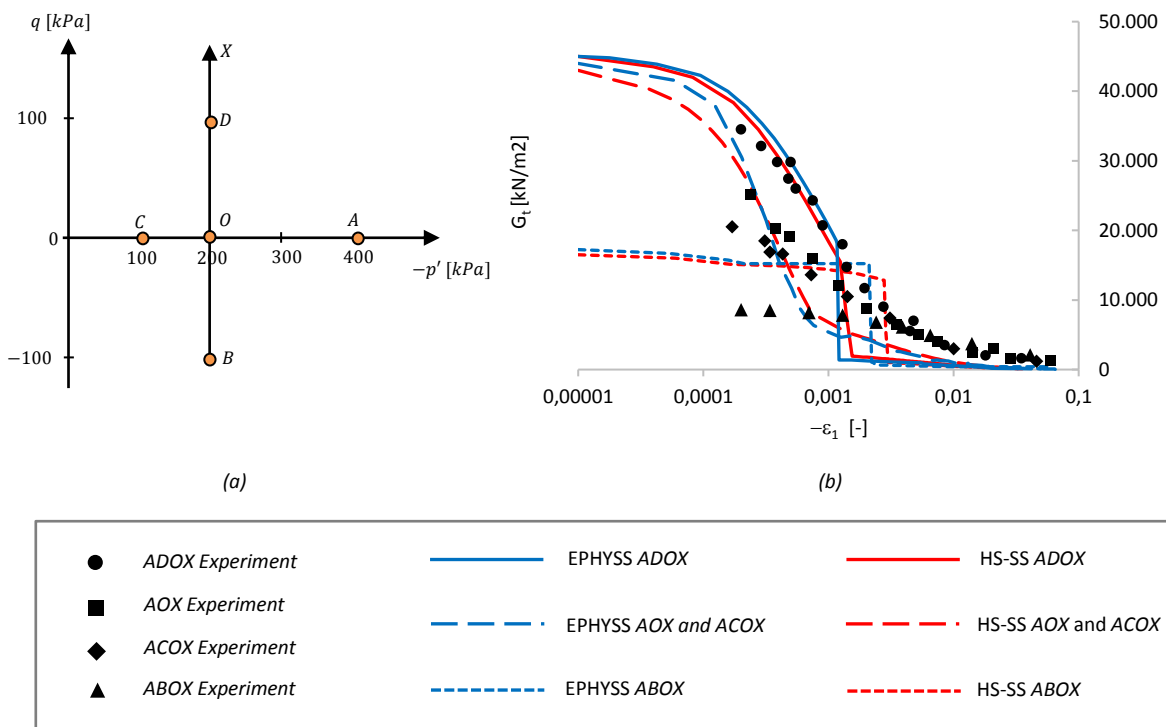


Figure 9. (a) Triaxial tests trajectory on reconstituted London clay according to Benz (2007), based on Richardson (1988) (in the thesis of Richardson, B and D are located at $q = 90\text{kPa}$), (b) Experimental data and simulations with the EPHYSS and HS-SS models of the curve $G_t - (-\epsilon_1)$ with rotations of the stresses of 0° , 90° and 180° in the deviatoric plane.

In *Figure 8b* it can be seen how both models overestimate the maximum shear modulus due to the election of the parameter $G_0^{ref} \equiv G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$. Moreover, the crossing of the loading and unloading degradation curves of the EPHYSS model in the strain range $-\epsilon_1 = 10^{-5} - 10^{-4}$ is due to what is stated in point (1) of the previous five points list. Finally, the values of $-\epsilon_1$ calculated with the EPHYSS model are lower than those predicted by the HS-SS model and by the experimental values during the reloading due to the slight modification of the stiffness in the plastic branch prior to the reloading, which is also explained as stated in the previous list. The differences in the values of $-\epsilon_1$ are attenuated both in the curve $q - \gamma_{oct}$ and in the curve $G_s^{ap} - \gamma_{oct}$, because the values of $-\epsilon_3$ resulting from the EPHYSS model are proportionally lower than those resulting from the HS-SS model, which is due, in turn, to the fact that the Poisson's ratio considered in the EPHYSS model complies $\nu'_{min} \leq \nu' \leq \nu'_{ur}$, given the selected parameters, while the HS-SS model complies $\nu' = \nu'_{ur}$.

In the experiment conducted by Richardson (1988) shown in *Figure 9*, four samples of reconstituted London clay are consolidated to point *A* and subsequently taken to point *O* ($OCR = 2$). Once at point *O*, a stress trajectory is applied to each of the samples following different angles $\theta_{q/p}$, in $q - (-p')$. It is necessary to remember that in this type of tests no rotation in the deviatoric strain takes place, that is $\alpha = 0^\circ$, except in the case of the trajectory *A - OCOX*, where such angle is $\alpha = 180^\circ$.

The results predicted by the EPHYSS and the HS-SS models are very similar, which is logical, since the rotation of the deviatoric strain is $\alpha = 180^\circ$ for the trajectory *A - OCOX* and $\alpha = 0^\circ$ for the rest, so the only active degradation curve in the EPHYSS model is the one corresponding to $G_{s,0}^{ap,180,H}$, which is the same considered in the HS-SS model (G_0^{ref}). Furthermore, both models predict the experimental data quite well.

1. In the *A - ODOX* trajectory, the Cone yield surface is activated during the deviatoric loading *OD*. Subsequently, the stress state returns to the point *O* and, by the moment of initiating the *OX* loading, a stress and strain rotation of 180° takes place. Furthermore, during the *OX* deviatoric loading, the behavior of the soil is elastic until the Cone yield surface is reached again at point *D*. In the stretch with elastic behavior *OD* the shear modulus is the corresponding to the elastic branch, that is, $G_t^{el} = \Delta q / 3\Delta\gamma_s^e$, where $\Delta q = -\Delta\sigma'_1 - (-\Delta\sigma'_3)$ and $\Delta\gamma_s^e = 2/3(-\Delta\epsilon_1^e - (-\Delta\epsilon_3^e))$. Once the point *D* has been passed, the plasticity mechanisms are reactivated and the modulus G_t^{ap} corresponding to the elastoplastic branch is recovered, that is to say, $G_t^{ap} = \Delta q / 3\Delta\gamma_s$, where $\Delta\gamma_s = 2/3(-\Delta\epsilon_1 - (-\Delta\epsilon_3))$.
2. In the *A - OBOX* trajectory, the same behavior described in the previous point is observed, although in this case, there is no stress or strain rotation when passing through the point *O*, so that the stiffness modulus G_t^{ap} is lower than in the case of the *A - ODOX* trajectory. On the other hand, in the case of the *A - OBOX* trajectory, the Cone yield surface is located in values $q > \overline{OD}$ within the triaxial compression zone, due to the asymmetric shape of such surface in the deviatoric plane and since, previously, during the triaxial extension, a value $q = \overline{OB} = \overline{OD}$, had been reached. It is precisely for this reason that the drop in stiffness for the *A - OBOX* trajectory occurs for values of $-\epsilon_1$ higher than those of the *A - ODOX* trajectory.
3. Both in the trajectories *A - OAOX* and *A - OCOX*, the Cone yield surface is not activated until the trajectory stretch *OX* is started, so that the stiffness modulus G_t^{ap} measured in such stretch is the corresponding to the noval loading branch, and, therefore, to the elastoplastic one. This explains why the value of G_t^{ap} is lower than that corresponding to the elastic branch, that is, to the value of G_t^{el} in the *OX* stretch before arriving at point *D* of the *A - ODOX* trajectory. As indicated by Benz (2007) for the HS-S model, and being extensible to the EPHYSS and the HS-SS models, the fact that the formulation of the model does not depend on the void ratio as a state variable, makes the value of the hardening variable p_p of the Cap yield surface the only different variable in trajectories *A - OAOX* and *A - OCOX*, which, in case of a trajectory with $-p' = cte$ (*OX* trajectory), has a negligible effect.

6.2. Oedometric tests

Simulations of oedometric tests have been conducted on dense and loose Hostun sand.

As can be seen in *Figure 10*, the results predicted by the EPHYSS model and by the HS-SS model are very similar. Moreover, both models provide a good approximation of the experimental data, although the resulting stiffness during the noval loading and during the elastic unloadings and reloadings are higher than those measured in the tests.

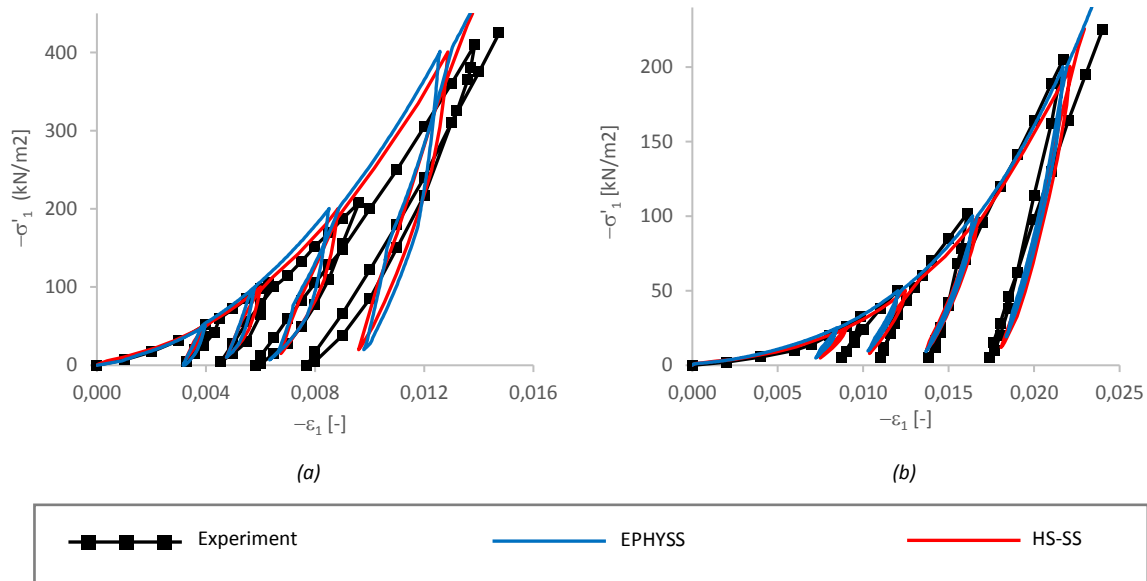


Figure 10. Oedometric test on (a) dense and (b) loose Hostun sand (Benz (2007), from Biarez and Hicher (1994); Desrues et al. (2000)) and simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

6.3. Biaxial tests

Numerical simulations of drained biaxial tests on loose and dense Hostun sand with different confinement pressures have been conducted (*Figure 11*). Furthermore, numerical simulations of biaxial tests have been performed with rotations in the recent strain trajectory on Hochstetten sand and on Ticino sand (*Figure 12*).

As can be seen in *Figure 11a*, the EPHYSS model and the HS-SS model predict similar results and the small differences between them are explained in the five points list from section 6.1. Furthermore, both models reasonably approximate the experimental data, especially in the range of small strains, although they underestimate the shear strength of the dense sand and overestimate it on loose sand. It is appreciated how the degree of approximation of the EPHYSS model to the experimental curves $-\epsilon_v - (-\epsilon_1)$ slightly improves in comparison with that of the HS-SS model in the case of dense sand. Finally, it can be seen that neither of the two models is capable of reproducing the localization phenomenon observed in the experimental data, since the considered formulations do not contemplate such phenomenon.

A biaxial test with strain reversal in Hochstetten sand is conducted. Following the scheme of *Figure 12a*, first, a biaxial loading (OA) with identical strain increments is made in both directions, until reaching values of $-\sigma'_{xx} = -\sigma'_{yy} = 150 \text{ kN/m}^2$. Subsequently, a biaxial unload (AO') is made with identical decrements of strain in both directions. And then a biaxial loading ($O'B$) with identical strain increments in both directions is made again, reaching a value of $-\sigma'_{xx} = -\sigma'_{yy} = 100 \text{ kN/m}^2$ in B with an increase of strain from O' of $-\Delta\epsilon_{xx} = -\Delta\epsilon_{yy} = 0.0005$. Finally, in B , the rotations are made in the trajectories of total strains of $\beta = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ and $\beta = 180^\circ$. It can be shown that a rotation of value β in the increments of the total strains corresponds to a rotation of value α in the increments of the deviatoric strains, which can be expressed as a function of the total strain increments $-\Delta\epsilon_{xx}$ and $-\Delta\epsilon_{yy}$ in the following way, considering that $-\Delta\epsilon_{zz} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta = \frac{\pi}{4} - \text{atan}\left(\frac{-\Delta\epsilon_{yy}}{-\Delta\epsilon_{xx}}\right) & \alpha = \frac{\pi}{4} - \text{atan}\left(\frac{2(-\Delta\epsilon_{yy}) - (-\Delta\epsilon_{xx})}{2(-\Delta\epsilon_{xx}) - (-\Delta\epsilon_{yy})}\right) \quad \text{if } 0 \leq \beta < \frac{\pi}{2} \\ \beta = \frac{3}{4}\pi + \text{atan}\left(\frac{-\Delta\epsilon_{xx}}{-\Delta\epsilon_{yy}}\right) & \alpha = \frac{3}{4}\pi + \text{atan}\left(\frac{2(-\Delta\epsilon_{xx}) - (-\Delta\epsilon_{yy})}{2(-\Delta\epsilon_{yy}) - (-\Delta\epsilon_{xx})}\right) \quad \text{if } \frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \pi \end{array} \right. \quad (69)$$

Furthermore, in the considered trajectories it is shown that $\alpha = \beta$ for angles of $\beta = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ and $\beta = 180^\circ$, since when $\beta = 0^\circ$ and $\beta = 180^\circ$ it is complied that $-\Delta\epsilon_{yy} = -\Delta\epsilon_{xx}$, and when $\beta = 90^\circ$ it is complied that $-\Delta\epsilon_{oct} = -1/3(\Delta\epsilon_{xx} + \Delta\epsilon_{yy} + \Delta\epsilon_{zz}) = 0$, existing, in such a case, an increase of pure deviatoric strain. For values of intermediate angles of α , the equality $\alpha = \beta$ is not complied when none of the two previous conditions are complied.

The lack of experimental data with measures of the shear stiffness in the range of the small strains after strain reversals less than 180° forces to compare the results predicted by EPHYSS model with other advanced models that consider small strain behavior of the soil. *Figure 12b* shows the degradation curves of the apparent tangent shear modulus G_t^{ap} in the simulations conducted with the following models: (1) Hypoplastic with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997) according to Benz (2007), (2) HS-SS and (3) EPHYSS. Moreover, the theoretical degradation curves of G_t^{ap} according to the EPHYSS model are added as verification thereof.

The three models are able to reproduce the shear stiffening of the soil induced by strain rotations, although there are some differences in the results obtained with each one of them.

- 1) When there is no strain reversal ($\alpha = \beta = 0^\circ$), the shear stiffness does not vary, and the maximum value of the shear modulus at the beginning of the deformed degradation curve resulting from resetting the value of $-\epsilon_1$ in *B*, is the remaining value of G_t^{ap} ($\xi = 2$) after the trajectory *O'B* in the three models. The maximum values of G_t^{ap} and the shape of the degradation curves are different in the three models, because of the different values of G_t^{ap} at point *B*. However, these differences are smaller between the EPHYSS and HS-SS models because the two components share a similar formulation of G_s^{ap} and deform the original curve for $\alpha = 0^\circ$ in a similar way.
- 2) When a strain rotation of $\alpha = \beta = 90^\circ$ takes place, generated by a reversal in $-\epsilon_{yy}$, while maintaining the same value of $-\Delta\epsilon_{xx}$:
 - a) In the EPHYSS model, the state variables adopt the values $\gamma_{oct}^H = 0$, since the history tensor \mathbf{h} is totally reinitialized, and $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = 27.000 \text{ kN/m}^2$, giving place to a value of G_t^{ap} ($\xi = 2$) = 27.000 kN/m^2 . Due to the application of the Hill (1958) stability criterion a value of $G_t^{ap} = 27.200 \text{ kN/m}^2$ is considered.
 - b) In the HS-SS model, the components H_{yy} and H_{zz} of the history tensor \mathbf{H} are reinitialized, giving place to the values $\gamma_{HIST}^i = 2,078 \cdot 10^{-4}$ and $\gamma_{HIST}^{i+1} = 2,115 \cdot 10^{-4}$, and, therefore, a value of G_t^{ap} ($\xi = 2$) = 22.600 kN/m^2 .
 - c) In the hypoplastic model with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997), the intergranular strain tensor δ is totally reinitialized and $\mathbf{M} = m_T \mathbf{L}(\sigma', e): \mathbf{d}$, giving place to a value of $G_t^{ap} = 27.000 \text{ kN/m}^2$.

The maximum values of G_t^{ap} in the EPHYSS model and in the hypoplastic model with intergranular strain are similar, while such value is different in the HS-SS model. This is due to the fact that the value of the parameter corresponding to the maximum shear modulus for strain rotations of the 90° is common in both models, but such thing does not exist in the HS-SS model, which reproduces the increase of the stiffness corresponding to such rotation only by the reduction of the state variable γ_{HIST} . Furthermore, the shape of the degradation curves is different in the EPHYSS and HS-SS models despite using a similar formulation, since the HS-SS model deforms the original curve for $\alpha = 90^\circ$, while the EPHYSS model does not. Finally, it is relevant to note that the shape of the degradation curves of the hypoplastic model with intergranular strain and the EPHYSS model have some similarities, as for example, the step in stiffness that is observed in the same range of strains. This is because both models adopt a similar algebraic structure for the respective history tensors, that is, the tensor of \mathbf{h} in the EPHYSS model and the intergranular strain tensor δ in the hypoplastic model with intergranular strain. In the case of the EPHYSS model, the mentioned jump, which appears in the deformation interval $1,5 \cdot 10^{-4} \leq -\epsilon_1 \leq 4,0 \cdot 10^{-4}$ of the degradation curve, is produced by the fact that the variable $\gamma_{oct}^H = \sqrt{4/3} \|\mathbf{h}\|$ reaches its maximum value $\gamma_{oct}^H = \gamma_{ur}^\alpha$ before the variable $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, which is the variable used to determine the strain Domain in each calculation step. The fact that the variable γ_{oct}^H evolves more quickly than $\gamma_{oct}^{\Delta R}$ is due to the fact that, after the rotation in the recent deviatoric strain trajectory, the variations of $\|\mathbf{e}\|$ and, therefore, of $\gamma_{oct}^{\Delta R}$,

are small until the moment when the tensor \mathbf{e} adopts the new direction of the strains trajectory, moment in which $\|\mathbf{e}\|$, and therefore $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, vary in the same way as $\|\mathbf{h}\|$ and γ_{oct}^H , respectively. In summary, this effect is due to the fact that belonging to one Domain or another in the EPHYSS model is evaluated by the strain $\gamma_{oct}^{\Delta R}$, while the stiffness depends on the state variable γ_{oct}^H .

- 3) When a strain rotation of $\alpha = \beta = 180^\circ$ takes place, generated by a reversal in $-\epsilon_{yy}$ and in $-\epsilon_{xx}$:
 - a) In the EPHYSS model, the state variables adopt the values $\gamma_{oct}^H = 0$, since the history tensor \mathbf{h} is totally reinitialized, and $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} = G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = 68.000 \text{ kN/m}^2$, giving place to a value of $G_t^{ap}(\xi = 2) = 68.000 \text{ kN/m}^2$. A value of $G_t^{ap} = 67.800 \text{ kN/m}^2$ is obtained for $-\epsilon_1 = 1,0 \cdot 10^{-6}$.
 - b) In the HS-SS model, the components H_{xx} , H_{yy} and H_{zz} of the history tensor \mathbf{H} are reinitialized, giving place to the values $\gamma_{HIST}^i = 0$ and $\gamma_{HIST}^{i+1} = 1,658 \cdot 10^{-6}$, and, therefore, to a value of $G_t^{ap}(\xi = 2) = 64.600 \text{ kN/m}^2$.
 - c) In the hypoplastic model with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997), the intergranular strain tensor δ is totally reinitialized and $\mathbf{M} = m_R \mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e}) : \mathbf{d}$, giving place to a value of $G_t^{ap} = 68.000 \text{ kN/m}^2$.

The maximum values of G_t^{ap} are similar in the three models due to fact that the parameter value corresponding to the maximum shear modulus is common in all of them. Furthermore, the shape of the degradation curves of G_t^{ap} of the EPHYSS and the HS-SS models are similar because both use a similar formulation of G_s^{ap} . On the other hand, the shape of the curve for the case of Niemunis and Herle (1997) model is notably different since it uses a different formulation.

For greater detail of the formulation of the HS-SS model and the hypoplastic model with intergranular strain, more information can be found in Plaxis Manuals (Plaxis, 2015) and in the work of Benz (2007) and Niemunis and Herle (1997).

Regarding the numerical degradation curves of the EPHYSS model, as can be seen in *Figure 12b*, they fairly approximate to the theoretical degradation curves thereof, although the latter have been obtained with the expression (17), which is not entirely correct, being necessary to calculate G_t^{ap} as $G_t^{ap} = \Delta\tau/\Delta\gamma_{oct}$ after the application of expressions (07), (08), (09), (10), (13) and (17) incrementally.

Finally, a biaxial test with reversal of the deformation on Ticino sand is carried out (*Figure 12*), following the same methodology used with the Hochstetten sand. In this case, values $-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy} = 0,0165$ are adopted in A , $-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy} = 0,01425$ in O' and $\Pi = 0,01\%$, $\Pi = 0,02\%$, $\Pi = 0,04\%$, $\Pi = 0,06\%$, $\Pi = 0,10\%$ and $\Pi = 0,20\%$ in B . Furthermore, rotations of $\beta = 0^\circ$, $\beta = 22,5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\beta = 67,5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\beta = 112,5^\circ$, $\beta = 135^\circ$, $\beta = 157,5^\circ$ and $\beta = 180^\circ$ are made in the total strain trajectories.

Again, the lack of experimental data with measures of the shear stiffness in the range of small strains after deformation reversals less than 180° , forces to compare the results predicted by EPHYSS model with other advanced models that consider small strain behavior of the soil. *Figure 12* shows the curves $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ for different values of Π in the models (1) hypoplastic with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997) (*Figure 12c*), (2) multilaminated for small strains of Schädlich and Schweiger (2012) (*Figure 12d*), (3) HS-SS (*Figure 12e*) and (4) EPHYSS (*Figure 12f*).

The curves $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ given by Benz (2007) of the model of Niemunis and Herle (1997) do not correspond to the values of Π indicated in the previous paragraph, but correspond to values of $\rho = 0$ until $\rho = 1$ in intervals of 0,10 and $\chi = 2,0$ (*Figure 12d*). In the following analysis of the curves $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$, values of ρ and χ equivalent to Π are considered.

First, there are clear differences in the shape of the curves $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ that result from the models of Schädlich and Schweiger (2012) and Niemunis and Herle (1997).

- 1) For $0^\circ \leq \beta < 75^\circ$ both models provide similar values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ for any strain level.
- 2) For $75^\circ \leq \beta < 180^\circ$, the model of Schädlich and Schweiger (2012) provides higher values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ than those provided by the model of Niemunis and Herle (1997), specially for $\Pi > 0,01\%$. That means that the elastic recovery in the model of Schädlich and Schweiger (2012) depends less on the accumulated value of the strain than in the model of Niemunis and Herle (1997). However, both models provide values $G_t^{ap}/G_{t,ur} > 2$ for $\beta = 90^\circ$.
- 3) For $\beta = 180^\circ$, both models provide values of $G_t^{ap}/G_{t,ur} = 5$.

The recovery of the elastic stiffness in the HS-SS model takes place when any of the components of the history tensor \mathbf{H} is reinitialized. From the conducted simulations, it is verified that for $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ and $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, the component H_{yy} of \mathbf{H} is reinitialized, for $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ and $90^\circ \leq \beta < 180^\circ$ the components H_{yy} and H_{zz} of \mathbf{H} are reinitialized, and for $\alpha = 180^\circ$ and $\beta = 180^\circ$, all the components of \mathbf{H} (H_{xx} , H_{yy} and H_{zz}) are reinitialized. The obtained results clearly show the functioning of the triple brick model of Simpson considered in the SSOM model on which the nonlinear elastic part of the HS-SS model is based.

Unlike the HS-SS model, in the EPHYSS model, the recovery of the elastic stiffness of the soil is produced in a continuous way with the rotation angle of the recent deviatoric strain from a minimum value of such angle, which corresponds to $(\hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^* = \cos(\alpha^*)$.

Regarding to the values $G_t^{ap}/G_{t,ur} - \beta$ provided by the HS-SS and EPHYSS models, the following is considered:

- 1) $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$: The HS-SS and EPHYSS models provide, in general, similar values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ with the nuance that for $0^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$, the HS-SS model offers values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ slightly lower than those offered by the EPHYSS. Furthermore, the values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ of the HS-SS and EPHYSS are similar to those of the Schädlich and Schweiger (2012) model for $\Pi \leq 0,04\%$. For $\Pi > 0,04\%$, the EPHYSS continues providing values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ similar to the provided by the model of Schädlich and Schweiger (2012), while the HS-SS model, for $0,04\% \leq \Pi \leq 0,10\%$, provides values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ similar to those provided by the model of Niemunis and Herle (1997) and when $\Pi = 0,20\%$, provides values of $G_t^{ap}/G_{t,ur} = 1$ much lower than those obtained with the rest of the models, which implies that the strain rotations do not produce an increase of the soil stiffness. The latter is due to the high value of the strain $-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy} = \Pi = 0,20\%$ before the strain rotation is produced, which in turn, gives place to high levels of the \mathbf{H} components and, therefore, of γ_{HIST} ($\gamma_{HIST} \gg \gamma_c$). After the strain rotation, the H_{yy} component of the \mathbf{H} tensor is reinitialized, but not the component H_{xx} , which conserves the previous value of such rotation and is high enough to provide values of γ_{HIST}^i and γ_{HIST}^{i+1} , which still are superior than γ_c , therefore, no stiffness increase is produced.
- 2) $90^\circ \leq \beta < 120^\circ$: The values $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ of the EPHYSS model are close to those of the model of Niemunis and Herle (1997) for $\Pi < 0,04\%$, and to those from the model of Schädlich and Schweiger (2012) for $\Pi > 0,10\%$. On the other hand, the values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ of the HS-SS model are closer to those from the model of Schädlich and Schweiger (2012) for $\Pi < 0,04\%$, to those from the model of Niemunis and Herle (1997) for $0,06\% < \Pi \leq 0,10\%$, and to none of those two for $\Pi > 0,20\%$, because of the same reason stated in point (1).
- 3) $120^\circ \leq \beta < 180^\circ$: The values $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ provided by the EPHYSS are lower than those from the model of Niemunis and Herle (1997) for $\Pi < 0,04\%$, and superior for $\Pi > 0,04\%$, while these same values are lower to those provided by the model of Schädlich and Schweiger (2012) for all the strain levels. Furthermore, the values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ provided by the HS-SS model are similar to those provided by the model of Niemunis and Herle (1997) for $\Pi \leq 0,06\%$, superior for $\Pi = 0,10\%$, and lower, for all the strain levels, to those provided by the model of Schädlich and Schweiger (2012).
- 4) For $\beta = 180^\circ$, both the HS-SS and the EPHYSS models provide values of $G_t^{ap}/G_{t,ur} = 5$ in the same way as in the models of Niemunis and Herle (1997), and Schädlich and Schweiger (2012).

In summary, the four models are capable of reproducing to a greater or lesser extent the recovery of the soil elastic shear stiffness after a rotation in the recent deviatoric strain trajectory. However, the HS-SS model is not capable of reproducing such elastic recovery when the accumulated strain value Π previous to the rotation is high ($\gamma_{HIST} \gg \gamma_c$). The latter does not occur in any of the other three models, where the elastic recovery of the soil is less dependent on the value of the accumulated strain Π , being an added advantage of the EPHYSS model the use of very similar parameters to those of the HS-SS model, which facilitates its use in the geotechnical professional practice.

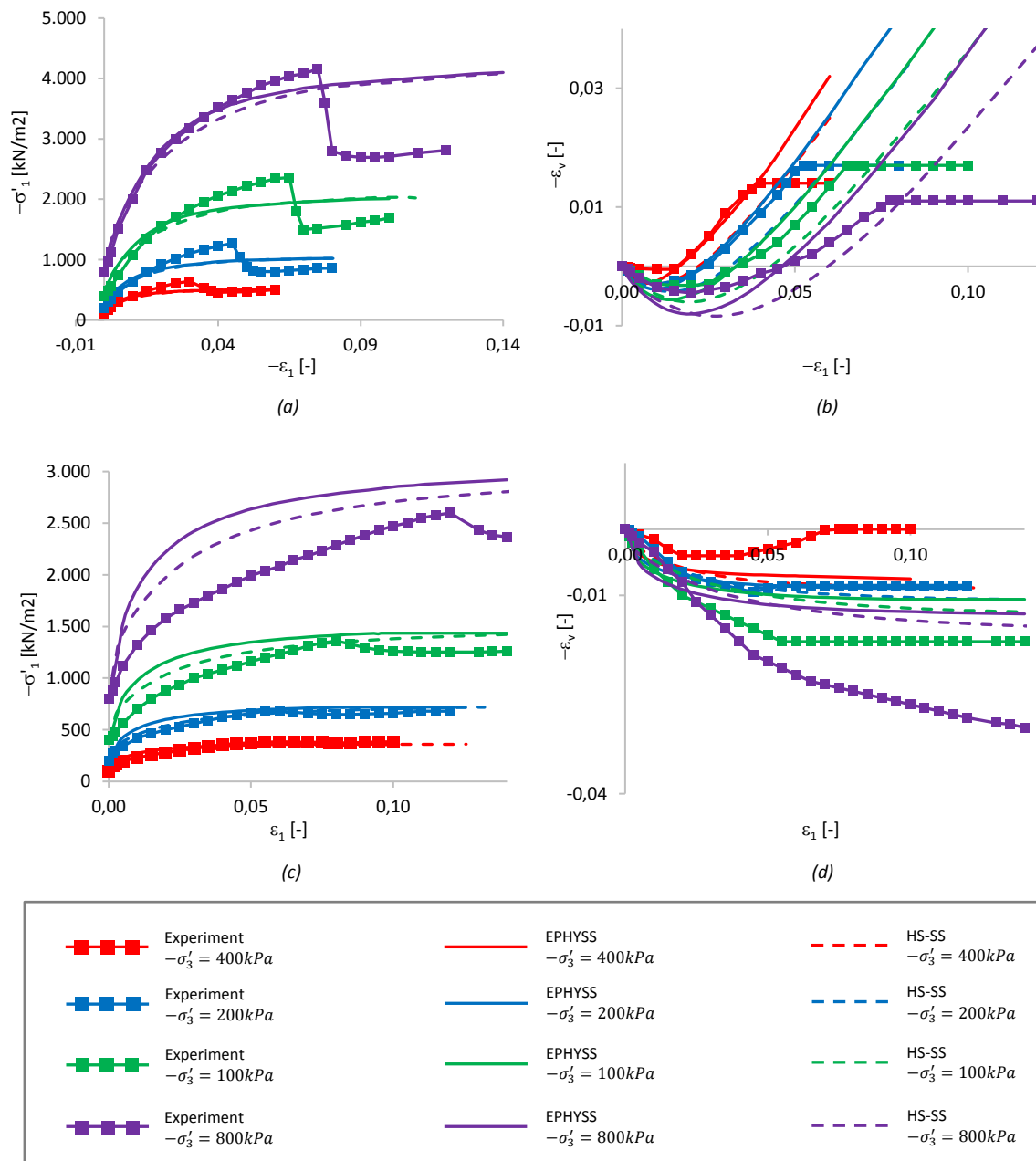


Figure 11. Drained biaxial tests on dense Hostun sand (a and b) and loose Hostun sand (c and d) (Benz (2007), from Biarez and Hicher (1994); Desrues et al. (2000)), and simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

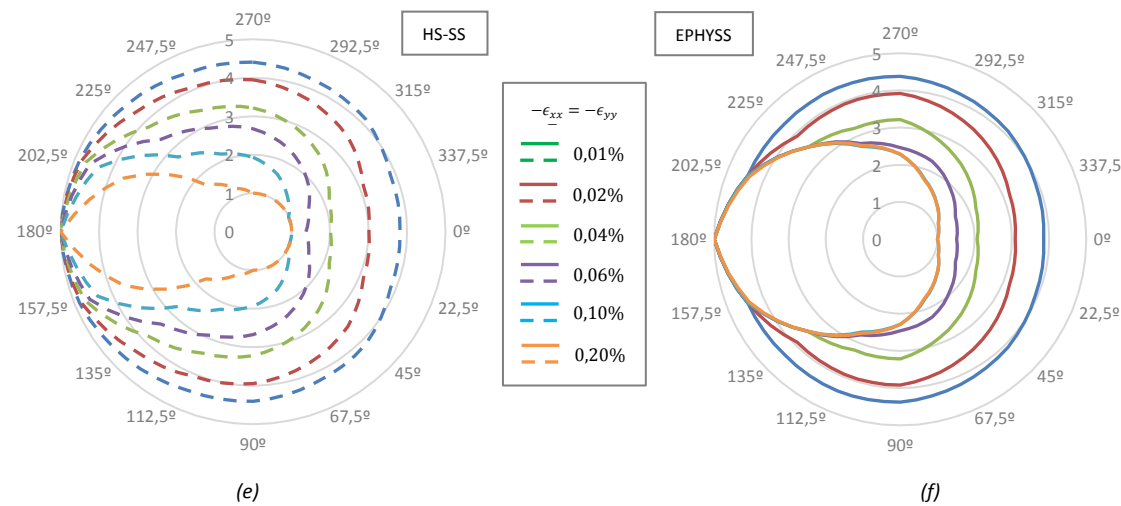
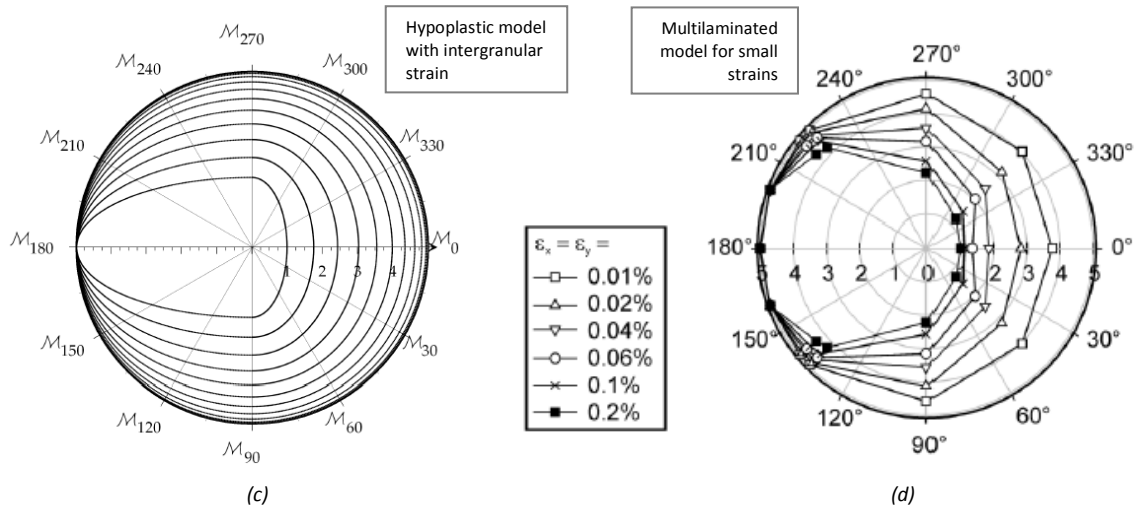
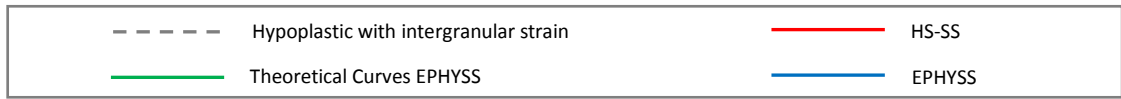
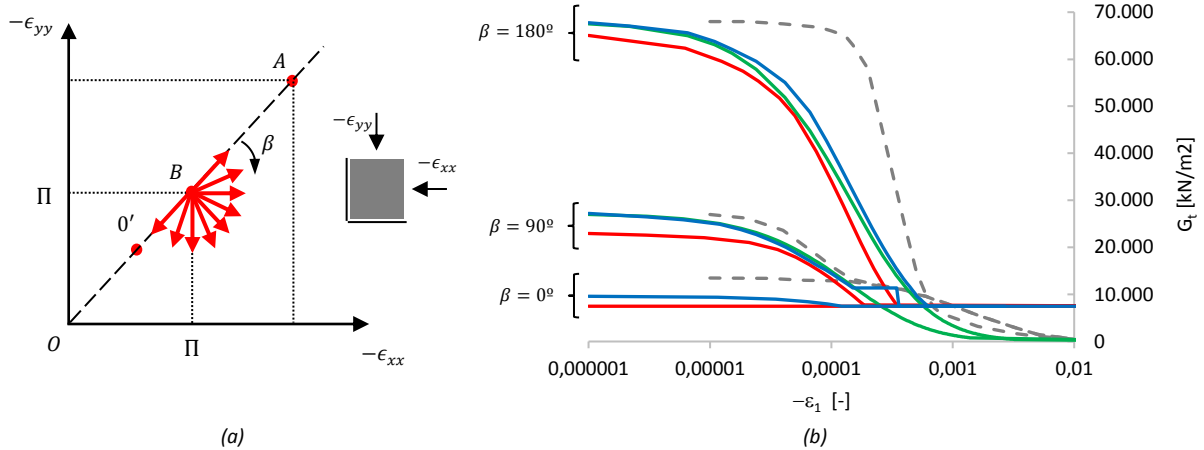


Figure 12. (a) Strains trajectory in the simulations of the biaxial tests, (b) degradation curves of G_t^{ap} on Hochstetten sand with rotations of $\beta = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$ and $\beta = 180^\circ$ in the model of Niemunis and Herle (1997) and in HS-SS and EPHYSS models, (c) $G_t^{ap} / G_{t,ur} - \beta$ curves on Ticino sand in the model of Niemunis and Herle (1997) for values of $L(\sigma', e) = 1$, $N(\sigma', e) = 0$, $m_R = 5$, $m_T = 2$ and values of $\chi = 2.0$, according to Benz (2007), (d) curves $G_t^{ap} / G_{t,ur} - \beta$ for different values of Π on Ticino sand in the multilaminated model of Schädlich and Schweiger (2012), (e) $G_t^{ap} / G_{t,ur} - \beta$ curves for different values of Π on Ticino sand in the HS-SS model, (f) $G_t^{ap} / G_{t,ur} - \beta$ curves for different values of Ticino sand in the EPHYSS model.

6.4. Comparative numerical tests between the HS-SS model and the EPHYSS model

Finally, a group of numerical simulations of oedometric (*Figure 13*) and triaxial (*Figures 14, 15 and 16*) tests have been conducted with the aim of demonstrating that the formulation of the EPHYSS model allows to correct the inconsistencies detected in the HS-SS model (Castellón, 2013). Parameters corresponding to Hostun loose sand (*Table 1*) will be used in all tests, incorporating values of the permeability coefficients $k_x = k_y = 1\text{ m/day}$. The simulations with the HS-SS model have been made, in this case, with the Plaxis 2D 2015 and Plaxis 2D 2018 versions, obtaining the same results with both.

In oedometric tests, the HS-SS model shows the same inconsistencies related to variations in stiffness during consolidation phases, nil phases (which are advertised in Plaxis, 2015) and phases with small unloadings/reloadings, which give place to deviations in the oedometric curves, both in the elastoplastic and in the elastic branch (*Figure 13 left*). In all these cases, the reinitialization of all the components of the history tensor \mathbf{H} has been detected. These effects can have a very relevant influence on the results of numerical simulations, since they are cumulative.

Furthermore, in the EPHYSS model no variations of the stiffness that give place to the deviation of the oedometric curves are observed (*Figures 13 right*). This is because the EPHYSS model, despite experiencing reversals similar to those observed in the HS-SS model in the simulations with consolidation phases, nil phases and phases with small unloadings/reloadings, is capable of correcting its effect in the subsequent calculation phases thanks to the introduction of the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e which accumulate enough information from the recent history of the soil to recover the historical stiffness corresponding to a specific branch of previous loading/unloading/reloading, despite the possible cycles embedded in it.

In triaxial test, as can be seen in *Figure 14*, the nil phases or phases with small isotropic unloadings/reloadings do not produce variations on the volumetric stiffness of the soil during the isotropic loading and unloading, in none of the two models.

In relation to the triaxial tests, it must be considered that the dissipation of pressures during the consolidation phases generates a rotation in the recent deviatoric strains trajectory with respect to the previous phases, which is due to the drainage boundary conditions and to the axisymmetric conditions of the essay. That is why, in this case, both in the HS-SS model and in the EPHYSS model, some soil stiffening will always take place, which does not allow analyzing the possible inconsistencies generated during the consolidation phases, and, consequently, this case is not analyzed.

Regarding to the deviatoric phases of the numeric triaxial tests conducted, the following is considered:

HS-SS model

1. No stiffness variations are observed when nil phases are introduced during the noval loading (*Figure 15 left*) since none of the history tensor \mathbf{H} components is reinitialized.
2. Stiffness variations that give place to deviations in the curves $q - (-\epsilon_1)$ are observed when nil phases are introduced during the unloading branch (*Figure 15 left*) due to the reinitialization of all the history tensor \mathbf{H} components.
3. Stiffness variations that give place to deviations in the curves $q - (-\epsilon_1)$ are observed when small unloadings/reloadings are introduced both in the noval loading and in the unloading branch (*Figure 16 left*) due to the reinitialization of all the components of the history tensor \mathbf{H} .

EPHYSS model

1. No stiffness variations are observed in any case (*Figures 15 right and 16 right*). As mentioned in the previous section, the EPHYSS model corrects the inconsistencies detected in the HS-SS model thanks to the introduction of the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e .

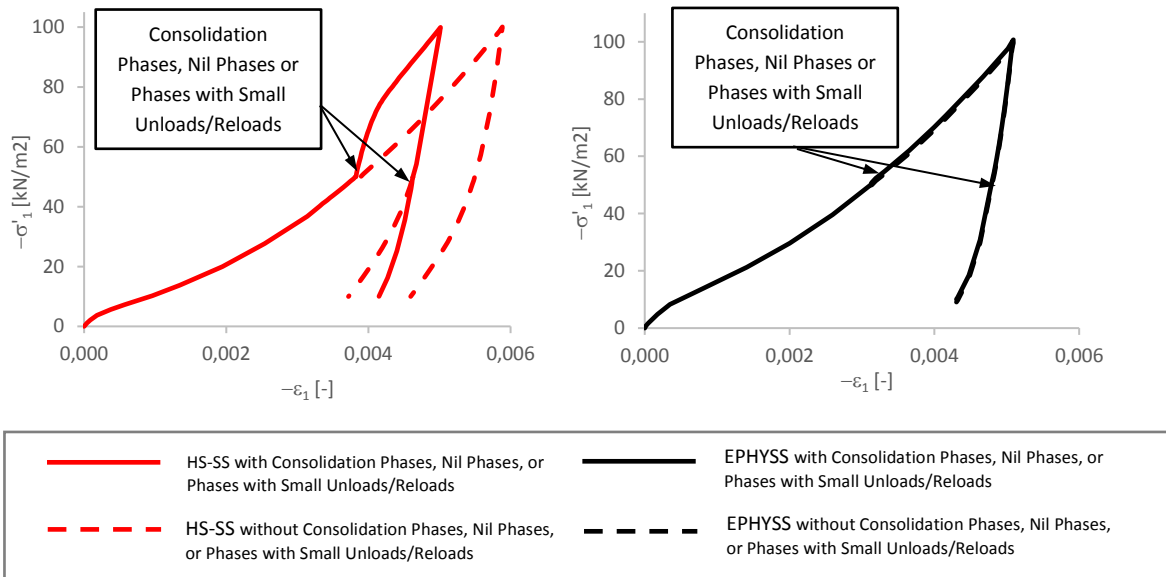


Figure 13. Curve $-\sigma'_1 - (-\epsilon_1)$ of the oedometric test with EPHYSS and HS-SS models, which introduces consolidation phases, nil phases, or phases with small unloadings/reloadings.

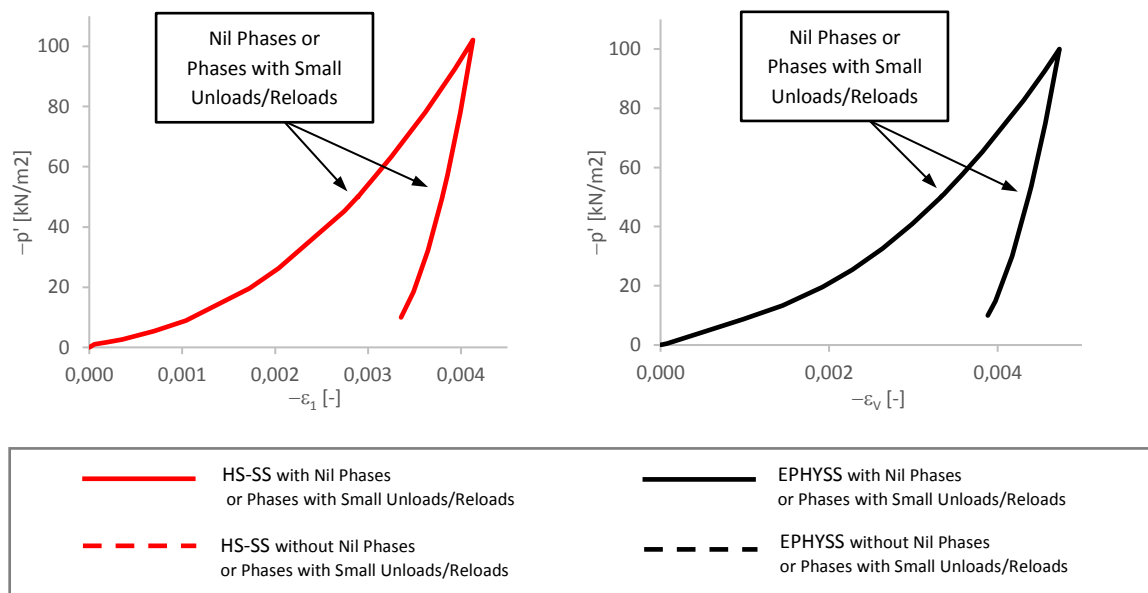


Figure 14. Isotropic phase of the numerical triaxial test with EPHYSS and HS-SS models, which introduces nil phases or phases with small unloadings/reloadings.

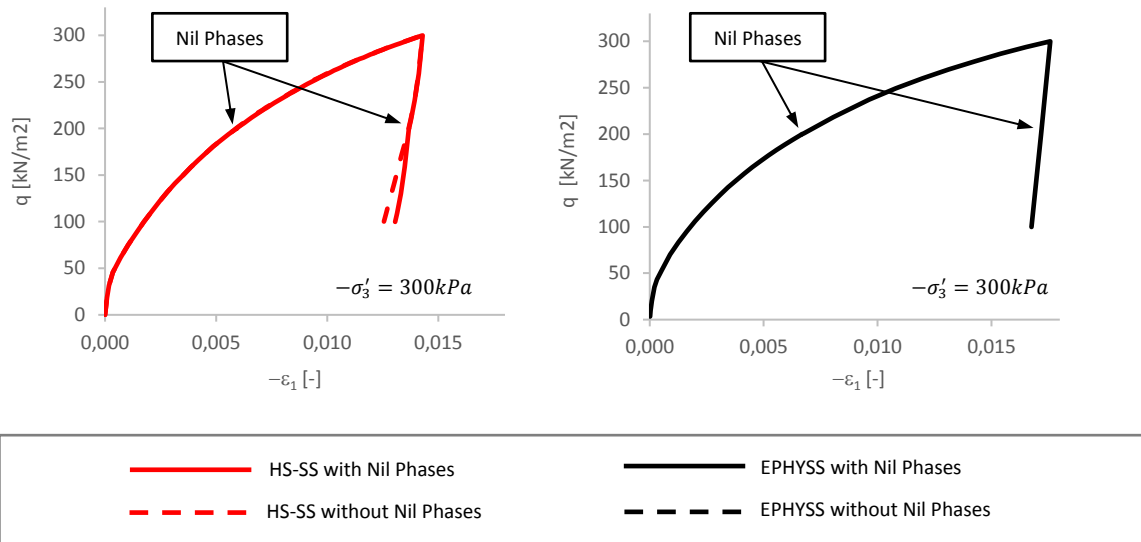


Figure 15. Deviatoric phase curve of the drained numerical triaxial test with EPHYSS and HS-SS, $-\sigma'_3 = 300kPa$, which introduces nil phases.

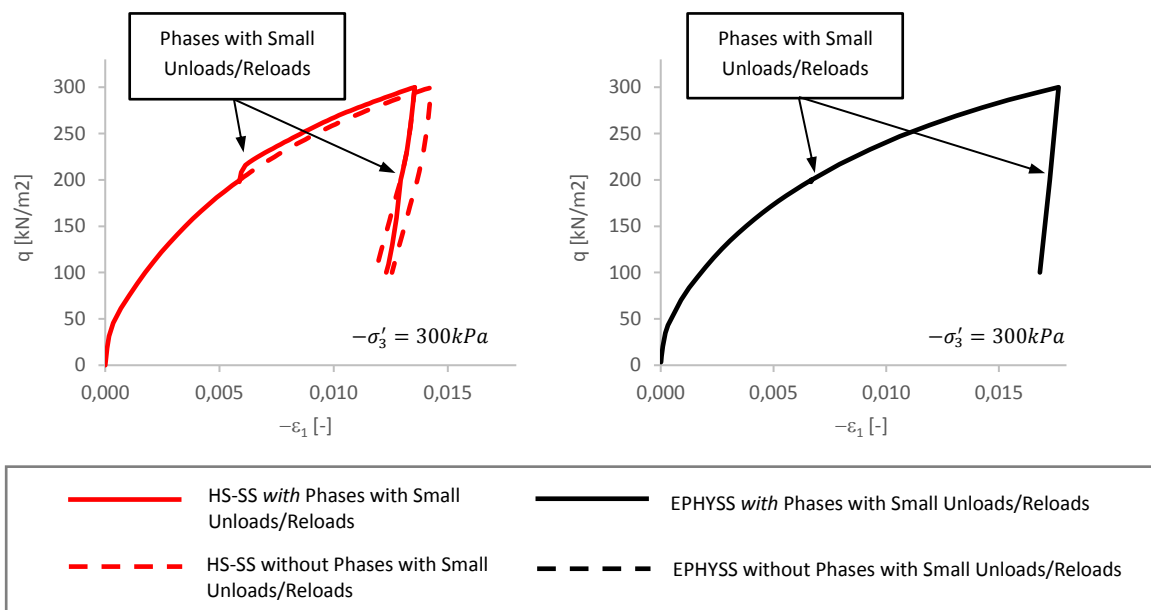


Figure 16. Deviatoric phase curve of the triaxial numerical test with EPHYSS and HS-SS, $-\sigma'_3 = 300kPa$, which introduces phases with small unloads/reloads.

7. Conclusions

The behavior of the soil in the range of small strains should be always considered in the analysis of geotechnical problems when sensitive elements are affected, which is very common in urban environments. However, some of the tests that allow measuring soil parameters in such range of strains, especially those capable of measuring the curves of shear stiffness degradation, are still not sufficiently extended in engineering professional practice, making it difficult to estimate these parameters (resorting to the use of empirical correlations on multiple occasions) as well as the use of this type of constitutive models. Nowadays, the constitutive model Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS) of Plaxis, based on the model Hardening Soil Small (HS-S) and recently implemented in other numerical software, is practically the only one with an extended use in the professional practice that considers such behavior, while the rest of this type of models are generally limited to an academic use, given their characteristics. Nevertheless, despite its great advantages, some aspects of the HS-SS model may be improved, and some inconsistencies whose effects can have a considerable influence on the numerical simulations of boundary value problems, as these are cumulative, should be corrected (Castellón, 2013, 2019; Plaxis, 2015).

The EPHYSS model is an incrementally multilinear advanced elastoplastic model, although its indirect soil stiffness dependence with the direction of the increment of the deviating strain tensor $\hat{\mathbf{e}}$ allows considering it as an incrementally nonlinear model when describing soil behavior in the range of small strains. This model is capable to reproduce the behavior of the soil in Zones I, II, III and IV of Jardine (1992). The linear elastic part and the nonlinear elastic, hysteretic and dependent on recent history part, corresponding to Zones I and II, respectively, are described by the Hysteretic Quasi-Hypoelastic model (HQH), which also considers the strain-induced anisotropy, while the plastic part, corresponding to Zones III and IV of Jardine, is described by the Hardening Soil Modified model (HS_{MOD}), which is a Cap-Cone type model, based on the HS model of Schanz (1998) and Schanz et al. (1999), and in the modifications introduced by the HS-S model of Benz (2007) to the latter.

The reversible part of the EPHYSS model considers two strain Domains, limited by the strain value $\gamma_{oct}^{\Delta R} = \gamma_{ur}^{\alpha}$. The elastic volumetric modulus is common in both Domains, while the apparent secant shear modulus is not. A degradation law of the shear modulus, based on an expression of Dos Santos and Correia (2001), which is based, in turn, on that of Hardin and Drnevich (1972), is considered in Domain 1; while, in Domain 2, a minimum value of such modulus is considered. Poisson's ratio is variable in both Domains, and always greater than ν'_{min} . Furthermore, the EPHYSS model considers 10 state variables, of which 8 correspond to the reversible part of it (HQH model), and 2 to the plastic part (HS_{MOD} model). These state variables define different short and long-term memory levels that provide the EPHYSS model with robustness for the reproduction of soil hysteretic behavior. The history tensor of the recent total deviatoric strain \mathbf{h} constitutes a state variable, which adopts a structure similar to that of the intergranular strain tensor of the hypoplastic model of Niemunis and Herle (1997). On the other hand, the maximum secant apparent shear modulus value $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ constitutes another state variable that, along with \mathbf{h} , allows reproducing infinite degradation curves of the soil shear stiffness according to the level of reversion of the deviatoric strain, which offers great versatility and adaptability to the experimental data. The rest of state variables of the EPHYSS model allow to consider the strain-induced anisotropy and provide the model with a layer structure memory similar to that proposed by Hueckel and Nova (1979), which allows to identify and control the behavior of the soil depending on whether the stress/strain state is within the SOM region (Gudehus et al., 1977), where it does not depend on the elastic internal state variables, or out of it, where it does depend on them. Likewise, the state variables of the EPHYSS model allow the Hashiguchi strategy (1993) to be directly applied to the memory rules, although in the present work the same strategy implemented in the HS-SS model has been used in order to minimize the differences generated by the plastic formulations of both models. The state variables \mathbf{h} , $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, \mathbf{e}^R and $\mathbf{e}^{e,R}$ constitute short-term memory variables, from which \mathbf{h} and $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ can be totally or partially reinitialized after a reversal and \mathbf{e}^R and $\mathbf{e}^{e,R}$ are always totally reinitialized after a reversal, while the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e constitute long-term memory variables capable of storing information of all active historical reversals.

Regarding to the constitutive elements of the hysteretic behavior of the soil (Castellón, 2019), the reversible part of the EPHYSS model considers an intrinsic reversal criterion based on the rotation of deviatoric strains and in which the reversals considered affect only the shear stiffness of the soil, and not its volumetric stiffness, provided that $\nu' > \nu'_{min}$ is complied. Likewise, the EPHYSS model complies with the generalized Masing Rules (Masing, 1926; Pyke, 1979) No. 1, No. 2 and No. 3 and partially the No. 4, although the latter in a greater degree than in the HS-SS model, since the EPHYSS

model increases significantly the amount of information stored on the strain recent history. On the other hand, the variable $\gamma_{oct}^H(\mathbf{h})$ that controls the degradation in the EPHYSS model can be totally or partially reinitialized after a reversal. And finally, the recovery of the maximum stiffness of the soil $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, unlike the HS-SS model, it is produced in a continuous way with the value of the angle of rotation in the recent deviatoric strain trajectory $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ and it can be total or partial. It should be added that the EPHYSS model complies the stability criterion of Hill (1958) through the introduction of a correction in the state variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$, which is transformed into $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$.

The EPHYSS model requires 20 parameters, of which 12 are shared with the HS-SS model, 7 can be easily deduced from the HS-SS model parameters in case that no specific test results are available for its determination, and the value of $G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$ can be estimated from that of $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ throughout the relation $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} = \Lambda G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, taking Λ values of 0,40 – 0,44 for sands and of 0,50 for clays, provided that it is not possible to obtain test results with an internal measurement of the strain in which controlling the deviatoric strain rotation is possible, such as, for example, biaxial, true triaxial or hollow cylinder with torsion tests.

The EPHYSS model has been implemented in Plaxis using the UDSM modulus in the versions Plaxis v9 and Plaxis 2D 2011 (valid for later versions), being the versions of Plaxis 2D 2015 and 2018 those used in the simulations with the EPHYSS and HS-SS models. For the local integration of the constitutive equations during the Return Mapping, it has been resorted to the so-called Implicit Closest Point Projection Algorithm, which uses an integration scheme of the *Backward Euler Elastic Predictor/Return Mapping Algorithm* type, within linear multistep methods, using iterative algorithms for the elastic part. Furthermore, for the return on the intersection of two or three yield surfaces, Koiter's Rules (Koiter, 1960) are used. And for the selection of surfaces, the strategy of Bonnier (2000) is applied, to which some modifications have been incorporated.

A partial verification of the EPHYSS model have been made, as well as a validation and a comparative analysis with the HS-SS model using the experimental results of oedometric tests with loadings/unloadings/reloadings, conventional triaxial tests with monotonous loading, triaxial cyclic tests, triaxial tests with stress rotations in the deviatoric plane and biaxial tests with monotonous loading, compiled from various thesis and papers. In these tests different materials, levels of confinement and drainage conditions are considered. Likewise, numerical biaxial tests have been simulated with different angles of rotation of the trajectory of recent deviatoric strains, of which results obtained from simulations with other advanced constitutive models are available.

Both in the simulations with the EPHYSS model and with the HS-SS model, in general and except for specific cases, a very good approximation to the tests experimental data is obtained. However, in the simulations of the consolidation phase of the conventional triaxial tests, both models provide volumetric stiffness higher than the measured ones due to the dependence of K' with G and ν' (either in the whole range of deformations in the HS-SS model, or when $\nu' = \nu'_{min}$ in the EPHYSS model), which could be solved in the EPHYSS model by reducing the value of ν'_{min} , in exchange for distorting the deformations in the soil when deviatoric loadings are applied, which is not recommended. On the other hand, in conventional triaxial tests with dense sand under undrained conditions, both models have certain limitations to reproduce the measured $q - (-\epsilon_1)$ curves, because the dilatancy laws of these do not consider the soil void ratio as a state variable, as Benz (2007) points out for the HS-S model on which the HS-SS model is based, however, the reproduction of the curves $q - (-p')$ measured in these same tests is satisfactory. Finally, it can be seen how neither of the two models can reproduce the phenomenon of localization observed in the experimental data of the biaxial tests, since the formulations considered do not contemplate such phenomenon. From the comparative analysis between the EPHYSS and the HS-SS model, it is concluded that, in general, the EPHYSS model provides similar results to those of the HS-SS model when the reversal in the soil is total ($\alpha = 180^\circ$), and different, to a greater or lesser extent, when the reversal is partial ($\alpha < 180^\circ$). Nevertheless, in all cases, differences have been detected and they are explained as follows: (1) the stiffness modulus of the EPHYSS model depend on $-p'$, while the stiffness modulus of the HS-SS model depend on $(-\sigma'_3 + c' \cot g(\varphi'))$, which generates differences in their values depending on the followed stress or strain trajectory, (2) the previous point implies that both models consider different values of the internal parameters E_i^{ref} , α' and $K'_{t,ur}/K'_C$, which affects the plastic behavior of the model, (3) the different values of the internal parameter E_i^{ref} give place to different values of the factor h_i , which modifies the hardening laws in both models and this is reflected in the different curves of G_s^{ap} obtained, (4) the EPHYSS model considers independent K' and G values whenever $\nu' > \nu'_{min}$ is

complied, while in the HS-SS the volumetric modulus depends linearly on the shear modulus according to $K' = (2/3)G(1 + \nu'_{ur})/(1 - 2\nu'_{ur})$ and (5) the small differences in the dilatancy rules between both models.

From the numerical biaxial tests in which the results of the simulations are compared with those of the EPHYSS model, the HS-SS model, the hypoplastic model with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997) and the multilaminated model of Schädlich and Schweiger (2012), it is concluded that the four models are capable of reproducing, to a greater or lesser extent, the recovery of the soil shear elastic stiffness after a partial or total rotation in the recent strain trajectory, although the HS-SS model is not capable of reproducing such recovery when the cumulated strain value prior to the rotation is high ($\gamma_{HIST} \gg \gamma_c$). The latter does not occur in any of the other three advanced models, where the soil elastic recovery is less dependent on the value of the accumulated strain, which represents an added advantage of the EPHYSS model, for being a model that is more easily offered to be used in the professional practice of geotechnical engineering than those of Niemunis and Herle (1997) or Schädlich and Schweiger (2012).

Finally, it is concluded from simulations of numerical oedometric and triaxial tests in which consolidation phases, nil phases or phases with small unloadings/reloadings have been introduced, that the EPHYSS model is capable to correct the effect of the inconsistencies detected in the HS-SS model (Castellón, 2013; Plaxis, 2015). In the model HS-SS, it has been detected, in all the analyzed cases in which there is a deviatoric loading, the reinitialization of all the components of the history tensor \mathbf{H} , whose effect is dragged to later phases, being, therefore, cumulative. While the EPHYSS model, despite experiencing these same reversions that give place to a reinitialization of the history tensor \mathbf{h} , is able to correct its effect in the subsequent calculation phases thanks to the introduction of the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e , which accumulate enough information from the recent history of the soil to recover the historical stiffness corresponding to a previous specific loading/unloading/reloading branch, in spite of the possible cycles imbricated in it.

In conclusion, the EPHYSS model provides similar results to those obtained with the HS-SS model in tests with monotonous loadings or with total reversals, and improves them in numerical tests with partial strain reversals; has a reasonable computational cost; provides flexibility in the use of different plastic formulations; and requires simple parameters, most of them common to those of the HS-SS model, which distinguishes it from some other complex constitutive models which have been limited to an academic use. All this makes the EPHYSS model a model that can be used for analysis and design in geotechnical professional practice.

LIST OF SYMBOLS AND ABBREVIATIONS

a	Parameter whose value is $a = 0,385$ according to Dos Santos and Correia (2001).
c'	Effective cohesion.
$\cos(\alpha)$	$= \hat{\mathbf{h}} : \hat{\mathbf{e}}$
$\cos(\alpha^*)$	$= (\hat{\mathbf{h}} : \hat{\mathbf{e}})^*$
\mathbf{d}	Strain rate tensor ($\dot{\epsilon} \approx \mathbf{d} = (1/2)(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T)$)
D_e	$= \{\sigma'_k f_k(\sigma'_k, \chi_k^{pl}) < 0, k = 1 \dots q\}$
e	Void ratio.
\mathbf{e}	$= \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct} \mathbf{1}$
\mathbf{e}^e	$= \boldsymbol{\epsilon}^e - \epsilon_{oct}^e \mathbf{1}$
$\mathbf{e}^{e,R}$	State variable that stores the elastic deviatoric strain tensor at the last reversal point R that conforms the endpoint of the active strain cycle.
$\mathbf{e}^{e,\Delta R}$	$= \mathbf{e}^e - \mathbf{e}^{e,R}$
\mathbf{e}^R	State variable that stores the total deviatoric strain tensor value at the last reversal point R that conforms the endpoint of the active strain cycle.
$\mathbf{e}^{\Delta R}$	$= \mathbf{e} - \mathbf{e}^R$
E'_i	Drained initial longitudinal stiffness modulus.
E'_{oed}	Drained tangent oedometric modulus.
$E'_{t,ur}$	Drained tangent longitudinal stiffness modulus during unloads and reloads.
E'_{50}	Drained secant longitudinal stiffness modulus for a mobilization of the 50% of the maximum deviatoric strain q_f in a drained triaxial test under a constant confining pressure $-\sigma'_3$.
E_i^{ref}	Value of E'_i for $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
E_{oed}^{ref}	Value of E'_{oed} for $-\sigma'_1 = p'_{ref}$.

$E'_{t,ur}{}^{ref}$	Value of $E'_{t,ur}$ for $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
$E'_{50}{}^{ref}$	Value of E'_{50} for $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
$(E_{MEM}^{(n)})_j$	$j - th$ component of \mathbf{E}_{MEM} at the beginning of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
$(E_{MEM}^{(n)})_{j\dots k}$	$j - th$ to $k - th$ components of \mathbf{E}_{MEM} at the beginning of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
$(E_{MEM}^{e,(n)})_j$	$j - th$ component of \mathbf{E}_{MEM}^e at the beginning of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
$(E_{MEM}^{e,(n)})_{j\dots k}$	$j - th$ to $k - th$ components of \mathbf{E}_{MEM}^e at the beginning of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
\mathbf{E}_{MEM}	Vector with the values $\ \mathbf{e}\ $ in the reversal points R_i that conforms the endpoints of the active strain cycles defined by the conditions $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$
\mathbf{E}_{MEM}^e	Vector with the values $\ \mathbf{e}^e\ $ in the reversal points R_i that conforms the endpoints of the active strain cycles defined by the conditions $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
\mathbf{E}'_s	Secant elastic strain tensor.
\mathbf{E}'_t	Tangent elastic strain tensor.
$f_{aux,i}$	$i - th$ auxiliar surface.
f_c	Cap yield surface.
f_k	$k - th$ yield surface.
f_{mc}	Mohr-Coulomb yield surface.
$f_{mc,jkl}$	Mohr-Coulomb yield surface in the sectors of the stress space corresponding to $-\sigma'_j \geq -\sigma'_k \geq -\sigma'_l$ with $\{j, k, l\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}\}$.
f_s	Cone yield surface.
$f_{s,jkl}$	Cone yield surface in the sectors of the stress space corresponding to $-\sigma'_j \geq -\sigma'_k \geq -\sigma'_l$ with $\{j, k, l\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}, \{2,1,3\}\}$.
f_t	Tension Cut-Off yield surface.
$f_{t,jkl}$	Tension Cut-Off yield surface in the sectors of the stress space corresponding to $\{-\sigma'_j \geq -\sigma'_k \geq -\sigma'_l\} \cup \{-\sigma'_k \geq -\sigma'_j \geq -\sigma'_l\}$ with $\{j, k, l\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3,2\}\}$.
$g_{aux,i}$	Plastic potential associated to the yield surfaces $f_{aux,i}$.
g_c	Plastic potential associated to the Cap yield surface.
g_k	Plastic potential associated to the yield surface f_k .
$g_{s,jkl}$	Plastic potential associated to the Cone yield surface in the same sectors of the stress space in which $f_{s,jkl}$ is defined.
$g_{mc,jkl}$	Plastic potential associated to the Mohr-coulomb yield surface in the same stress sectors of the space in which $f_{mc,jkl}$ is defined.
$g_{t,jkl}$	Plastic potential associated to the tension Cut-Off yield surface in the same stress sectors of the space in which $f_{t,jkl}$ is defined.
G_m	$= G_{t,min,\xi=1}^{ap} / G_{t,ur}$
G_{max}	Maximum shear modulus.
$G_{t,ur}$	Minimum value of the tangent apparent shear modulus in Domain 2.
G_{max}^α	Maximum shear modulus for the active degradation curve α .
G_s^{ap}	Secant apparent shear modulus in Domain 1.
$G_{s,0}^{ap,\alpha}$	Maximum value of the secant apparent shear stiffness modulus for the active degradation curve α .
$G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$	Maximum value of the secant apparent shear stiffness modulus for the active degradation curve α for $-p' = p'_{ref,2}$.
$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	Value of $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ for the curve corresponding to a 180° strain reversal.
$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	Value of $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ for the curve corresponding to a 90° strain reversal.
$\dot{G}_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref,CORR}$	Rate of the variable $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ corrected with the stability criterion.
G_s^α	Secant shear modulus for the active degradation curve α .
$G_{s,\xi=1}^{ap}$	Secant apparent shear modulus in Domain 1 with $\xi = 1$.
G_t^{ap}	Tangent apparent shear modulus.
G_t^{el}	Tangent elastic shear modulus.
$G_{t,\xi=1}^{ap}$	$\approx \Delta \tau_{oct,\xi=1}^{(n+1)} / \Delta \gamma_{oct}^{(n+1)}$
$G_{t,min,\xi=1}^{ap}$	$= \min\{G_{t,min,\xi=1}^{ap,old}, G_{t,\xi=1}^{ap}\}$
$G_{t,ur}^{ref}$	Value of $G_{t,ur}$ for $-p' = p'_{ref,2}$.
G_t^α	Tangent shear modulus for the active degradation curve α .
G_0^{ref}	Maximum value of the shear modulus when considering a single degradation curve for $-\sigma'_3 = p'_{ref}$.
\mathbf{G}	Tensorial function that relates $\boldsymbol{\sigma}'$ with $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}'$, $\boldsymbol{\chi}^{el,hist}$ and $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.
h_i	$= (G_m)^{1+E'_{t,ur}/E_i{}^{ref}}$

h_{pp}	Generalized plastic modulus associated to the Cap yield surface.
$h_{\gamma p}$	Generalized plastic modulus associated to the Cone yield surface.
\mathbf{h}	Recent total deviatoric strain history tensor in the HQH and EPHYSS models.
\mathbf{h}_k	Generalized plastic modulus associated to the yield surface f_k .
$(\hat{\mathbf{h}}; \hat{\mathbf{e}})^*$	Rotation angle in the recent total deviatoric strain trajectory from which reversals appear.
H	$= K_{t,ur}^{ref} / (K'_{t,ur} / K'_c - 1)$, plastic modulus.
H_{ij}	$ij - th$ component of the tensor \mathbf{H} .
$(H_{MEM}^{(n)})_j$	$j - th$ component of \mathbf{H}_{MEM} at the beginning of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
$(H_{MEM}^{(n)})_{j\dots k}$	$j - th$ to $k - th$ components of \mathbf{H}_{MEM} at the beginning of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
\mathbf{H}	Recent total deviatoric strains history tensors in the SSOM, HS-S and HS-SS models.
\mathbf{H}_{MEM}	Vector with the values $\ \mathbf{h}\ $ in the reversal points R_i that conform the endpoints of active strain cycles defined by the conditions $\hat{\mathbf{h}}; \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}; \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
J_1	Objective function to determine the value of the parameters K_s^{ref} , $p'_{ref,1}$ and m_1 of the EPHYSS model from the value of the parameters $E_{t,ur}^{ref}$, ν'_{ur} , c' , φ' , p'_{ref} and m of the HS-SS model with the aim of reproducing the same volumetric stiffness in the field.
J_2	Objective function to determine the value of the parameters $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, $p'_{ref,2}$ and m_2 of the EPHYSS model from the value of the parameters G_0^{ref} , c' , φ' , p'_{ref} and m of the HS-SS model with the aim of reproducing the same shear stiffness in the field.
K'_s	Drained secant elastic volumetric stiffness modulus.
K'_t	Drained tangent elastic volumetric stiffness modulus.
K_s^{ref}	Value of K'_s for $-p' = p'_{ref,1}$.
K_t^{ref}	Value of K'_t for $-p' = p'_{ref,1}$.
$K'_{t,ur} / K'_c$	Internal parameter that consists in the ratio between the unloading/reloading drained elastic volumetric modulus and the noval loading volumetric modulus.
K_0^{NC}	Coefficient of lateral earth pressure for a normally consolidated stress state.
$\mathbf{L}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e})$	Second order linear tensor in the hypoplastic model (Wolffersdorff, 1996; Gudehus, 1996).
m	Coefficient that controls stress dependence of E'_{s0} , E'_{oed} , $E'_{t,ur}$, E'_i and H which can take values between 0,0 and 1,0.
m_R	Stiffness factor after a rotation of the 180° strain trajectory in the model of Niemunis and Herle (1997).
m_T	Stiffness factor after a rotation of the 90° strain trajectory in the model of Niemunis and Herle (1997).
m_1	Soil parameter that controls the dependence level of K'_s with $-p'$ which can take values between 0,0 and 1,0.
m_2	Soil parameter that controls the dependence level of G_s and $G_{t,ur}$ with $-p'$ which usually take values between 0,40 and 0,60 for sands (Hardin and Black, 1966, 1968; McDowell and Bolton, 2001), and between 0,50 and 1,00 for cohesive soils.
\bar{M}	Internal parameter that determines the maximum number of reversal points in which is possible to memorize $\ \mathbf{h}\ $, $\ \mathbf{e}^R\ $ and $\ \mathbf{e}^{e,R}\ $.
M_{comp}	$= 6 \sin \phi'_{cv} / (3 - \sin \phi'_{cv})$, slope of the critical state line in compression according to the Mohr-Coulomb criterion in compression with $c' = 0$.
\mathbf{M}	Tangent stiffness tensor in the hypoplastic model with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997).
$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{e})$	Second order nonlinear tensor in the hypoplastic model (Wolffersdorff, 1996; Gudehus, 1996).
p'	$= \sigma'_{oct} = 1/3 \sigma'_{ii}$
p_p	Hardening variable that controls the size of the Cap yield surface.
p'_{ref}	Reference pressure in the expressions of E'_{s0} , $E'_{t,ur}$, E'_i , \dot{p}_p and E'_{oed} .
$p'_{ref,1}$	Reference pressure in the expression of K'_s .
$p'_{ref,2}$	Reference pressure in the expressions of G_s^{ap} and $G_{t,ur}$.
p_w	Water pressure.
$(-p')_i$	$(1/3)(1 + 2K_0^{NC})(-\sigma'_3)_i$
p^{ini}	Value of the initial mean pressure.
q	$= -\sigma'_1 - (-\sigma'_3)$
\tilde{q}	$= -\sigma'_1 + (1/\delta - 1)(-\sigma'_2) - 1/\delta(-\sigma'_3)$
q_a	$= q_f / R_f$
q_f	$= 2 \sin(\varphi')(-\sigma'_3 + c' \cot(\varphi')) / (1 - \sin(\varphi'))$
R	Reversal point that conforms an endpoint of the active strain cycle.
\bar{R}	Parameter with the maximum value of $\ \delta\ $ in the model of Niemunis and Herle (1997).
R_f	Coefficient that relates q_f and q_a , and usually takes a value of 0,9.
s	Number of reversal points that define the endpoint of some active strain cycle.
$\mathbf{s}^{\Delta R}$	$= \mathbf{s} - \mathbf{s}^R$

\mathbf{s}	$= \boldsymbol{\sigma}' - \sigma'_{oct} \mathbf{1}$
\mathbf{s}^R	Deviatoric strain tensor in the last reversal point R that conforms the endpoint of the active strain cycle.
$TOL_{\epsilon_{abs}^e}$	Absolute error tolerance $\epsilon_{abs}^{e,(n+1)}$ considered for the convergence of $\Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$.
$TOL_{\epsilon_{rel}^e}$	Relative error tolerance $\epsilon_{rel}^{e,(n+1)}$ considered for the convergence of $\Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)}$.
w	Parameter that controls the speed with which $\hat{\mathbf{h}}$ evolves (values $w \geq 100$ are adopted to have $\hat{\mathbf{h}} \approx \dot{\mathbf{e}}$ in degradation processes after a reversal with $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, complying $\rho_\alpha^w \rightarrow 0$ si $\rho_\alpha < 1$ and $\rho_\alpha^w \rightarrow 1$ if $\rho_\alpha \approx 1$).
α	Rotation angle in the recent total deviatoric strain trajectory.
α'	Internal parameter that controls the shape of the Cap yield surface.
α^*	Value $\alpha^* = \arccos(\hat{\mathbf{h}} : \dot{\mathbf{e}})^*$ from which a reversal that modified soil stiffness appears in the HQT and EPHYSS models.
β	Rotation angle of total strains.
β'	Factor that adopts values of $\beta' = 2$ if $s = 2$, and $\beta' = 1$ if $s > 2$.
γ_c	$= \xi \gamma_{0,7} / a \left(\sqrt{G_0^{ref} / G_{t,ur}^{ref}} - 1 \right)$
γ_{HIST}	History variable of the SSOM, HS-S and HS-SS models, $\gamma_{HIST} = \sqrt{4/3} \ \mathbf{H}\dot{\mathbf{e}}\ / \ \dot{\mathbf{e}}\ $.
γ_{oct}	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{e}\ $
$\gamma_{0,7}$	Value of the shear strain in the model of Dos Santos and Correia (2001) for which $G_s^{ap}(\gamma_{0,7}) = 0,722G_0$, used in the SSOM, HQT, HS-S, HS-SS and EPHYSS models.
γ^p	Plastic shear strain.
γ_{HIST}^i	Variable γ_{HIST} transformed after a possible reversal.
γ_{HIST}^i	Variable γ_{HIST} transformed after a possible reversal and the subsequent application of $\dot{\mathbf{e}}$.
γ_{oct}^e	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{e}^e\ $
$\gamma_{oct}^{e,R}$	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{e}^{e,R}\ $
$\gamma_{oct}^{e,\Delta R}$	$= \gamma_{oct}^e - \gamma_{oct}^{e,R}$
γ_{oct}^H	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{h}\ $
γ_{oct}^R	$= \sqrt{4/3} \ \mathbf{e}^R\ $
$\gamma_{oct}^{\Delta R}$	$= \gamma_{oct}^e - \gamma_{oct}^R$
γ_{ur}^α	$= \xi \gamma_{0,7} / a \left(\sqrt{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} / G_{t,ur}^{ref}} - 1 \right)$
$\gamma_{ur}^{\alpha,\xi=1}$	$= \gamma_{0,7} / a \left(\sqrt{G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref} / G_{t,ur}^{ref}} - 1 \right)$
γ_{ur}^{180}	Value of γ_{ur}^α for a deviatoric strain rotation of 180° .
γ_{ur}^{90}	Value of γ_{ur}^α for a deviatoric strain rotation of 90° .
δ	$= (3 - \sin(\varphi')) / (3 + \sin(\varphi'))$.
$\boldsymbol{\delta}$	Intergranular strain tensor of the model of Niemunis and Herle (1997) model.
$\partial g_k / \partial \boldsymbol{\sigma}'$	Plastic flow associated to the yield surface f_k .
$\Delta \mathbf{e}_i$	$= \Delta \mathbf{e} / N$
ϵ_i	$i - th$ total principal strain.
ϵ_{ij}	$ij - th$ component of the tensor $\boldsymbol{\epsilon}$.
ϵ_{oct}	$= 1/3 \epsilon_{ii}$
$\epsilon_{abs}^{e,(n+1)}$	$= \ \Delta \epsilon_{[i+1]}^{e,(n+1)} - \Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\ $ absolute error of $\Delta \epsilon^{e,(n+1)}$ during the iterative process.
ϵ_i^e	Elastic principal $i - th$ strain.
ϵ_{ij}^e	$ij - th$ component of the tensor $\boldsymbol{\epsilon}^e$.
ϵ_i^p	$i - th$ plastic principal strain.
ϵ_{ij}^p	$ij - th$ component of the tensor $\boldsymbol{\epsilon}^p$.
ϵ_{oct}^e	$= 1/3 \epsilon_{ii}^e$
ϵ_{oct}^p	$= 1/3 \epsilon_{ii}^p$
$\epsilon_{rel}^{e,(n+1)}$	$= \Delta \epsilon_{abs}^{e,(n+1)} / \ \Delta \epsilon_{[i]}^{e,(n+1)}\ $ relative error of $\Delta \epsilon^{e,(n+1)}$ during the iterative process.
ϵ_v^p	$= \epsilon_{ii}^p$
$\boldsymbol{\epsilon}$	Total strain tensor.
$\boldsymbol{\epsilon}^e$	Elastic strain tensor.
$\boldsymbol{\epsilon}^p$	Plastic strain tensor.
$\boldsymbol{\epsilon}^{\Delta R}$	$= \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^R$
$\boldsymbol{\epsilon}_{[i]}^{e,(n+1)}$	Elastic strain tensor in the $i - th$ iteration at the end of the calculation step $(n) \rightarrow (n + 1)$.
$\boldsymbol{\epsilon}_k^p$	Plastic strain tensor associated to the yield surface f_k .
η	$= q / (-p')$
λ_k	Plastic multiplier associated to the yield surface f_k .

λ_{yp}	Plastic multiplier associated to the Cone yield surface.
λ_{pp}	Plastic multiplier associated to the Cap yield surface.
$\lambda_{k,i}^{(n+1)}$	Plastic multiplier associated to the yield surface f_k in the i – th iteration at the end of the calculation step (n) \rightarrow ($n + 1$).
Λ	Parameter of the EPHYSS model that adopts the values of 0,40 – 0,44 for sands and 0,50 for clays.
v'_{min}	Drained Poisson's ratio minimum value.
v'_s	Drained secant Poisson's ratio.
$v'_{s,min}$	Minimum value of v'_s .
v'_t	Drained tangent Poisson's ratio.
$v'_{t,min}$	Minimum value of v'_t .
v'_{ur}	Drained Poisson's ratio in the HS-S and HS-SS models.
ξ	Scale factor that controls the shape of the degradation curve of G_s^{ap} . A value of $\xi = 2$ is considered for the calculation of G_s^{ap} and $\xi = 1$ for the calculation of $G_{s,\xi=1}^{ap}$.
Π	Strain value $-\epsilon_{11} = -\epsilon_{22}$ ($-\epsilon_{xx} = -\epsilon_{yy}$) in a biaxial test.
ρ	$= \ \delta\ /\tilde{R}$
ρ_α	$= \gamma_{oct}^H/\gamma_{ur}^\alpha$
σ'_i	i – th principal effective stress.
$(-\sigma'_3)_i$	Minor principal effective stress evaluated at $i = 1 \dots n$, where n are points corresponding to different depths.
σ'_{ij}	ij – th component of the tensor σ' .
σ'_{oct}	$= -1/3\sigma'_{ii}$
σ'_{trac}	Soil tensile strength.
σ	Total stress tensor.
σ'	$= \sigma - p_w \mathbf{1}$ effective stress tensor.
σ'^{ini}	Initial effective stress tensor.
σ'^J	Stress tensor of Jaumann.
$\sigma'^{(tr)}$	$= \sigma'^{(n)} + \mathbf{E}_t^{(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)}$ trial effective stress tensor in Domain 2.
$\sigma'^{(tr,NL)}$	$= \sigma'^{(n)} + \mathbf{E}_s^{(n+1)} : \Delta \epsilon^{(n+1)} + \Delta \mathbf{E}_s^{(n+1)} : (\epsilon_{oct}^{e,(n+1)} \mathbf{1} + e^{e,\Delta R,(n+1)})$ trial effective stress tensor in Domain 1.
$\sigma'_{[i]}^{(n+1)}$	Effective stress tensor in the i – th iteration at the end of the calculation step (n) \rightarrow ($n + 1$).
$\sigma'_{[i]}^{(tr,NL)}$	Trial effective stress tensor in the i – th iteration.
τ_{oct}	$= \sqrt{1/3} \ s\ $
$\tau_{oct,\xi=1}$	$= G_{s,\xi=1}^{ap} \gamma_{oct}$
Υ	Variable that controls the degradation process of the shear modulus in a determined model.
Υ^{R+}	Variable that controls the degradation process of the shear modulus after a reversal in the point R in a determined model.
φ'	Maximum value of the effective friction angle.
φ'_{cv}	Effective constant volume friction angle.
φ'_m	Effective mobilized friction angle.
χ	Parameter of the model of Niemunis and Herle (1997).
$\chi^{el,hist}$	$= (\mathbf{h}, G_{s,0}^{\alpha,H}, \mathbf{e}^R, \mathbf{e}^{e,R}, \mathbf{H}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}, \mathbf{E}_{MEM}^e)$ elastic state variables.
χ_k^{pl}	$= (\chi_{f_s}^{pl}, \chi_{f_c}^{pl})$ plastic state variables associated to the yield surface $f_k = (f_s, f_c)$.
$\chi_{k,i}^{pl,(n+1)}$	Plastic state variables associated to the yield surface f_k in the i – th iteration at the end of the calculation step (n) \rightarrow ($n + 1$).
ψ	Maximum value of the dilatancy angle.
ψ_m	Mobilized dilatancy angle.
$\mathbf{1}$	$(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$
\mathbb{I}	$(\mathbb{I})_{ijkl} = 1/2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$
$\ \mathbf{A}\ $	$= \sqrt{A_{ij}A_{ij}}$
$ a $	$ a = a$ if $a > 0$ and $ a = -a$ if $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$.
$sign(a)$	$sign(a) = +1$ if $a > 0$ and $sign(a) = -1$ if $a < 0$, $a \in \mathbb{R}$.
$a^{(n)}$	The superscript (n) indicates that a is evaluated in (n).
$\dot{\mathbf{A}}$	Infinitesimal rate of \mathbf{A} .
$\Delta \mathbf{A}$	Finite rate in \mathbf{A} .
$\hat{\mathbf{A}}$	$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\ \mathbf{A}\ $ if $\ \mathbf{A}\ \neq 0$ and $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ if $\ \mathbf{A}\ = 0$.
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	$= A_{ij}B_{ij}$
EPHYSS	Elastoplastic Hysteretic Small Strain model (Castellón, 2019).
SOM	Swept Out Memory region (Gudehus et al., 1977).

SSOM	Small Strain Overlay Model (Benz, 2007).
HS	Hardening Soil model (Schanz, 1988; Schanz et al., 1999).
HS-S	Hardening Soil Small model (Benz, 2007).
HS-SS	Hardening Soil with Small Strain model of Plaxis (based on HS-S).
HQH	Hysteretic Quasi-Hypoelastic model (Castellón, 2019).
HS _{MOD}	Hardening Soil Modified model (Castellón, 2019, based on plastic part of HS-S).

REFERENCES

- Bell, J. (1989). Experimental solid mechanics in the nineteenth century. The 1989 William Murray Lecture. *Experimental Mechanics*, 29(2), 57–165. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02321369>.
- Benz, T. (2007). *Small-Strain Stiffness of Soils and its Numerical Consequences*. PhD Thesis. Stuttgart, Germany: Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- Benz, T., Vermeer P.A. and Schwab, R. (2009) A small-strain overlay model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 33(1), 25-44.
- Biarez, J. and Hicher, P.-Y. (1994). *Elementary Mechanics of Soil Behaviour: Saturated Remoulded Soils*. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Bonnier, P.G. (2000). Implementational aspects of constitutive modeling. *Soft Clay Modelling for Engineering Practice Workshop*, 1. Trondheim, Norway: Norwegian University of Science and Technology.
- Britto, A. M. and Gunn, M. J. (1987). *Critical state soil mechanics via finite elements*. Chichester, England: Ellis Horwood Limited.
- Burland, J.B. (1989). Ninth Laurits Bjerrum Memorial Lecture: “Small is beautiful” – the stiffness of soils at small strains. *Canadian Geotechnical Journal*, 26(4), 499-516. DOI: <https://doi.org/10.1139/t89-064>.
- Burland, J.B., Simpson, B. and St. John, H.D. (1979). Movements around excavations in London Clay. In: *Proceedings of the Seventh European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, The measurement, selection and use of design parameters in geotechnical engineering. Brighton, England: British Geotechnical Society, 1, 13-29.
- Castellón, J. (2013). *Análisis teórico, numérico y experimental del comportamiento de suelos en el rango de las pequeñas deformaciones*. Master Thesis. Barcelona, Spain: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Clarke, S. D. (2009). *Enhancement of the Brick constitutive model to incorporate viscous soil behaviour*. PhD Thesis. Sheffield, South Yorkshire, England: The University of Sheffield.
- Clayton, C. R. I. (2011). Stiffness at small strain: research and practice. *Géotechnique*, 61(1), 5–37. DOI: 10.1680/geot.2011.61.1.5.
- Clayton, C. R. I., Edwards, A. and Webb, M. J. (1991). Displacement within the London Clay during construction. In: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Deformation of soils and displacements of structures. Florence, Italy, 26-30 May. Rotterdam; Brookfield: A. A. Balkema, 2, 791-796.
- Cole, K. W. and Burland, J. B. (1972). Observations of retaining wall movements associated with a large excavation. In: *Fifth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Structures Subjected to Lateral Forces. 10-13 April. Madrid, Spain: Spanish Society of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. 1, 442-453.
- Darve, F. (1978). *Une formulation incrémentale nonlinéaire de lois rhéologiques; application aux sols*. PhD Thesis. Grenoble, France: Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- Darve, F. (1990). The expression of rheological laws in incremental form and the main classes of constitutive equations. In: *Geomaterials: Constitutive Equations and Modelling*. Darve, F. (Ed.) London, England: Elsevier. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781482296532>.
- Darve, F. and Labanieh, S. (1982). Incremental constitutive law for sands and clays, simulations of monotonic and cyclic tests. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 6(2), 243-275. DOI: 10.1002/nag.1610060209.
- De Santos, C. (2015). *Backanalysis methodology based on multiple optimization techniques for geotechnical problems*. PhD Thesis. Barcelona, Catalonia, Spain: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Desrues, J., Vermeer, P.A. and Zwescher, B. (2000). *Database for test on Hostun RF Sand*. Institutsbericht 13. Stuttgart, Germany: Universität Stuttgart.
- Dos Santos, J.A. and Correia, A.G. (2001). Reference threshold shear strain of soil. Its application to obtain an unique strain-dependent shear modulus curve for soil. In: *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Soil*

- Mechanics and Geotechnical Engineering*. Istanbul, Turkey, 27-31 August. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Duncan, J.M. and Chang, C.Y. (1970). Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 96(5), 1629-1953.
- Duncan, J.M., Byrne, P., Wong, K.S. and Mabry, P. (1980). *Strength, Stress-Strain and Bulk Modulus Parameters for Finite Element Analyses of Stresses and Movements in Soil Masses*. Report No. UCB/GT/80-01. Berkeley, California, USA: Office of Research Services, University of California. 20-49.
- Ellison, K.C. (2009). *Constitutive modeling of London Clay*. First Year PhD Report. Cambridge, England: University of Cambridge.
- Ellison, K.C., Soga, K. and Simpson, B. (2010). An examination of strain space versus stress space for the formulation of elastoplastic constitutive models. In: *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*. Benz & Nordal (Ed.). London, UK: Taylor & Francis Group. 33-38.
- Gudehus, G. (1996). A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils and Foundations*. 36(1), 1-12. DOI: <https://doi.org/10.3208/sandf.36.1>.
- Gudehus, G. (2011). *Physical soil mechanics*. Heidelberg, Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Gudehus, G., Goldscheider, M. and Winter, H. (1977). *Mechanical properties of sand and clay and numerical integration methods: Some sources of errors and bounds of accuracy*. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema, 121-150.
- Hardin, B.O. and Richart Jr., F.E. (1963). Elastic wave velocities in granular soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 89(1), 33-66.
- Hardin, B.O. and Black, W.L. (1966). Sand stiffness under various triaxial stresses. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 92(2), 27-42.
- Hardin, B.O. and Black, W.L. (1968). Vibration modulus of normally consolidated clays. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 94(2), 353-370.
- Hardin, B.O. and Drnevich, V.P. (1972). Shear modulus and damping in soils: measurement and parameter effects. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 98(6), 603-624.
- Hashiguchi, K. (1993). Fundamental requirements and formulations of elastoplastic constitutive equations with tangential plasticity. *International Journal of Plasticity*. 9(5), 525-549. DOI: [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(93\)90018-L](https://doi.org/10.1016/0749-6419(93)90018-L).
- Hill, R. (1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 6(3), 236-249. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(58\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(58)90029-2).
- Hueckel, T. and Nova, R. (1979). Some hysteresis effects of behaviour of geologic media. *International Journal of Solids and Structures*. 15(8), 625-642. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90076-3](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90076-3).
- Janbu, N. (1963). Soil Compressibility as determined by oedometer and triaxial tests. *European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Wiesbaden, Germany. 1, 19-25.
- Jardine, R. J. (1992). Some observations on the kinematic nature of soil stiffness. *Soil and Foundations*. 32(2), 111-124.
- Jardine, R.J., Symes, M.J., and Burland, J.B. (1984). The measurement of soil stiffness in the triaxial apparatus. *Géotechnique*. 34(3), 323-340. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1984.34.3.323>.
- Jardine, R. J. and Potts, D. M. (1988). Hutton tension leg platform foundations: prediction of driven pile behaviour. *Géotechnique*. 38(2), 231-252. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1988.38.2.231>.
- Jardine, R.J., Potts, D.M., St. John, H.D. and Hight, D.W. (1991). Some practical applications of a nonlinear ground model. In: Associazione Geotecnica Italiana (ed.) *Proceedings of the Tenth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Florence, Italy, 26-30 May. Rotterdam; Brookfield: A.A. Balkema, 1, 223- 228.
- Jeremic, B. and Sture, S. (1997). Implicit integration in elastoplastic geotechnics. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*. 2(2), 165-183. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199704\)2:2<165::AID-CFM31>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199704)2:2<165::AID-CFM31>3.0.CO;2-3).
- Johannson, J. and Konagai, K. (2007). Fault induced permanent ground deformations: Experimental verification of wet and dry soil, numerical findings' relation to field observations of tunnel damage and implications for design. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 27(10), 938-956.
- Koiter, W.T. (1960). General theorems for elastic-plastic solids. In: *Progress in Solid Mechanics, Volume 1*. Sneddon, I.N. and Hill, R. (eds.). Amsterdam, Netherlands: North-Holland Publishing Co. 165-221.
- Kondner, R.L. (1963). Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 89(1), 115-144.
- Kondner, R.L. and Zelasko, J.S. (1963). A hyperbolic stress-strain formulation of sands. In: *Proceedings of the Second Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. São Paulo, Brazil, 1963. Associação Brasileira de Mecânica dos Solos, 1, 289-324.

- Lade, P. V. and Abelev, A. V. (2005). Characterization of cross-anisotropic soil deposits from isotropic compression test. *Soils and Foundations*. 45(5), 89-102. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf.45.5_89
- Li, X.S. and Dafalias, Y. F. (2000). Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*. 50(4), 449-460. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2000.50.4.449>.
- Masín, D. (2014). Clay hypoplasticity model including stiffness anisotropy. *Géotechnique*. 64(3), 232-238. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.13.P.065>
- Masing, G. (1926). Residual stress and hardening the brass. In: Meissner, E. (ed.) *Second International Congress of Applied Mechanics*. 12-17 September 1926. Zurich, Switzerland. 12-17.
- McDowell, G.R. and Bolton, M.D. (2001). Micro mechanics of elastic soil. *Soils and Foundations*. 41(6), 147-152. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf.41.6_147.
- Nelson, I. (1977). Constitutive Models for use in Numerical Computations. In: Proceedings of the Plastic and Long Term Effect, DMSR. 1977. Karlsruhe, Germany. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema. 2, 45-97.
- Nelson, I. and Baron, M. L. (1971). Application of variable moduli models to soil behavior. *International Journal of Solids and Structures*. 7(4), 399-417. DOI: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(71\)90111-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(71)90111-9).
- Niemunis, A. and Herle, I. (1997). Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*. 2(4), 279-299. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199710\)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199710)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8)
- Niemunis, A., Prada-Sarmiento, L.F. and Grandas-Tavera, C.E. (2011). Paraelasticity. *Acta Geotechnica*. 6(2), 67-80. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11440-011-0137-4>.
- Obrzud, R. and Truty, A. (2018). *The hardening soil model – A practical guidebook*. ZSoil.PC 100701 report. Switzerland: Zace Services Ltd.
- Ohde, J. (1951). *Grundbaumechanik. Hütte III (Bautechnik)* Berlin, Germany: W. Ernst & Sohn. 27, 886-945.
- Plaxis (2015). *Material Models Manual* [online]. Available at: <http://plaxis.us/updater/Plaxis%203D/2015.2.21300.12285/files/manuals/english/3D-3-Material-Models.pdf> [Accessed: from 2015 to 2019].
- Potts, D.M. (2003). Numerical analysis: a virtual dream or practical reality? *Géotechnique*. 53(6), 535-573. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2003.53.6.535>.
- Prévost, J.H. (1977). Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behavior. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 1(2), 195-216. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.1610010206>.
- Prévost, J.H. (1978). Plasticity theory for soil stress-strain behavior. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 104(5), 1177-1194.
- Pyke, R. M. (1979). Nonlinear soil models for irregular cyclic loadings. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 105(6), 715-726.
- Richardson, D. (1988). *Investigations of threshold effects in soil deformations*. Unpublished Doctoral Thesis. London, England: City University London.
- Rowe, P.W. (1962). The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proceedings of the Royal Society A*. 269(1339), 500-527. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0193>.
- Sandler, I. S. (1976). The Cap Model for Static and Dynamic Problems. In: *The Seventeenth U.S. Symposium on Rock Mechanics*. Utah, USA, 25-27 August. American Rock Mechanics Association, 1A2-1.
- Sandler, I. S. and Baron, M. L. (1979). Recent development in the constitutive modeling of geological materials. *3rd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*. Aachen, Germany. 363-376.
- Schädlich, B. and Schweiger, H.F. (2012). A multilaminar constitutive model accounting for anisotropic small strain stiffness. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 37(10), 1337-1362. DOI: <https://doi.org/10.1002/nag.2089>.
- Schanz, T. (1998). *Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien*. Habilitation Thesis. Communication 45 of the Institute of Geotechnical Engineering. Stuttgart, Germany: Universität Stuttgart.
- Schanz, T., Vermeer, P.A. and Bonnier, P.G. (1999). The hardening soil model: Formulation and verification. In: *Beyond 2000 in Computational Geotechnics - 10 Years of PLAXIS*. Ed. by Brinkgreve, Ronald B.J. Rotterdam, Netherlands: A.A. Balkema. 281-296.
- Sellers, E. J. (1989). *Constitutive modelling of the behaviour of clays under cyclic loading*. Master Thesis. Cape Town, South Africa: University of Cape Town.
- Simo, J.C. (1998). Numerical Analysis of Classical Plasticity. *Handbook for Numerical Analysis, Volume 4*. Ciarlet, P. G. and Lions, J. J.(Eds.) Amsterdam, Netherlands: Elsevier.
- Simo, J.C. and Hughes, T.J.R. (1998). *Computational Inelasticity*. New York, USA: Springer.

- Simpson, B. (1981). Finite elements in design: with particular reference to deep basements in London Clay. In: *Finite elements in geotechnical engineering*. Ed. by Naylor, D.J. and Pande, G.N. Swansea, UK: Pineridge Press. 213-242.
- Simpson, B. (1992). Retaining structures: displacement and design. *Géotechnique*. 42(4), 541-576. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1992.42.4.541>.
- Simpson, B., O'Riordan, N. J. and Croft, D. D. (1979). A computer model for the analysis of ground movements in London clay. *Géotechnique*. 29(2), 149-175. <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.2.149>.
- St. John, H. D. (1975). *Field and theoretical studies of the behavior of ground around deep excavations in London Clay*. PhD Thesis. Cambridge, England: University of Cambridge.
- St. John, H. D., Potts, D. M., Jardine, R. J. and Higgins, K. G. (1993). Prediction and performance of ground response due to construction of a deep basement at 60 Victoria Embankment. In: Houlsby, G. T. and Schofield, A. N. (eds.) *Proceedings of the Wroth Memorial Symposium*, Predictive soil mechanics. St. Catherine's College, 27-29 July 1992. Londres, Inglaterra: Thomas Telford.
- Surarak, C., Likitlersuang, S., Wanatowski, D., Balasubramaniam, A., Oh, E. and Guan H. (2012). Stiffness and strength parameters for hardening soil model of soft and stiff Bangkok clays. *Soils and Foundations*. 52(4), 682-697. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sandf.2012.07.009>.
- Tamagnini, C. and Viggiani, G. (2002). On the incremental nonlinearity of soils. Part I: theoretical aspects. *Rivista Italiana di Geotecnica*. 36(1), 44-61.
- Vermeer, P.A. (1978). A double hardening model for sand. *Géotechnique*. 28(4), 413-433. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1978.28.4.413>.
- Wolffersdorff, P.A. von (1996). A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*. 1(3), 251-271. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199607\)1:3<251::AID-CFM13>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199607)1:3<251::AID-CFM13>3.0.CO;2-3).
- Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. and King, I.P. (1968). Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material. *Géotechnique*. 18(1), 56-66. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1968.18.1.56>.

Anejo VI

Paper 3 previous note

Application of the EPHYSS model in different boundary value problems and comparative analysis with the HS-SS model of Plaxis.

1. Introduction

This note presents the results obtained in simulations with the Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS) model (Castellón, 2019) of different boundary value problems of executed works in which some type of monitoring has been performed. As well, these results are compared with those obtained in the same simulations with the Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS) model implemented in Plaxis and based on the Hardening Soil Small (HS-S) model of Benz (2007). The problems analyzed are the following:

- Steinhaldenfeld tunnel, excavated with the NATM in the northeast of Stuttgart, between 2002 and 2004.
- Second Heinenoord tunnel, excavated with a slurry shield TBM in the south of Rotterdam, between 1996 and 1998.
- Deep excavation between triple-anchored diaphragm walls in Berlin.
- Deep excavation in a construction pit between bored pile walls with three sets of struts in Offenbach, in 1992.
- Test on an experimental spread footing conducted at the Texas A&M University National Geotechnical Experimentation Site (NGES), in 1997.
- Large urban excavation corresponding to the work of the future La Sagrera intermodal station in Barcelona, started in 2010 and currently under development.

The analysis of the different boundary value problems provides a validation of the EPHYSS model and offer a broad view of the improvements and distinctive elements of the EPHYSS model with respect to the HS-SS model.

2. General comments

In order to reproduce an initial field stiffness profile with the EPHYSS model similar to that obtained with the HS-SS model, it will be applied, in each material and in the range of stresses given by the different phases of each boundary value problem, a least squares adjustment on the EPHYSS model parameters $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ and K_s^{ref} . As well, to estimate the rest of the EPHYSS model parameters from the HS-SS model ones if no more data are available, the following relations will be considered: $p'_{ref,1} \approx p'_{ref}$, $m_1 \approx m$, $v'_{min} \approx v'_{ur}$, $p'_{ref,2} \approx p'_{ref}$, $m_2 \approx m$ and $G_{s,0}^{ap,90,H,ref} \approx \Lambda G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$, where Λ takes values of 0,40 – 0,44 for sands and 0,50 for clays. In the results discussion of each boundary value problem, the effect that the difference between $G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$ (EPHYSS) and G_0^{ref} (HS-SS) generates in the $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ graphs should be taken into account, as well as the difference between $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, K_s^{ref}, m_1)$ (EPHYSS) and $G_{t,ur}^{ref} = G_{t,ur}^{ref}(E_{t,ur}^{ref}, v'_{ur})$ (HS-SS), both due to the adjustment aforementioned. In order to facilitate the results comparison, the values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ corresponding to the initial phase of each simulation are provided in the corresponding figures. Finally, after the calculation phase in which *in situ* field stresses are determined in each boundary value problem, both soil strain history and soil displacements have been reinitialized.

3. Steinhaldenfeld tunnel excavated with the NATM in Stuttgart

As Möller (2006) details, the Steinhaldenfeld urban tunnel, located in the northeast of Stuttgart and built between 2002 and 2005, runs from the Hauptfriedhof station to the Steinhaldenfeld station, and has a total length of 1.160m, from which 940m were executed using the NATM, while two stretches of 110m each were executed with the cut&cover system. The excavation process of the central stretch of 940m was executed in two phases. In the first phase, the support of the top heading of the tunnel was excavated and executed along its entire length and, in the second phase, the same process was done with the invert. In this study, a cross-section of the first phase of the excavation corresponding to the 940m stretch is analyzed.

The ground where the tunnel is excavated is constituted by a first 5.0m fill stratum, followed by a 15.5m Keuper marl stratum, which can be considered as a residual soil or as a soft rock and, finally, a lacustrine limestone stratum. Both Keuper marls and lacustrine limestone are overconsolidated. The permeability of the soil that surrounds the excavation allows to consider a drained behavior. No information has been found about the situation of the water table. A rock bolting in the marl around the tunnel excavation has been done during the construction process. According to Möller (2006) and Benz (2007), the rock bolting can be simulated numerically by introducing an increase in the effective cohesion of $\Delta c' = 25kPa$ in the bolted area.

The geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model are shown in Figure 1.

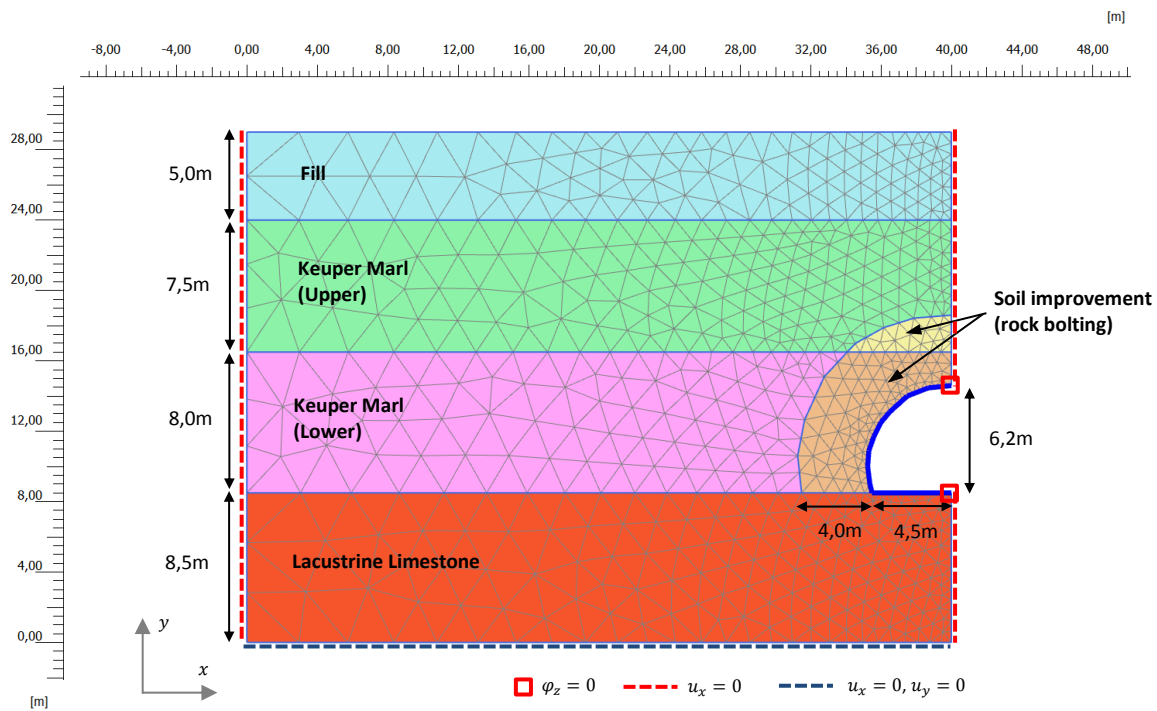


Figure 1. Geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model of the Steinhaldenfeld Tunnel.

The values of the soil parameters have been taken from the thesis of Möller (2006) and Benz (2007). Both authors indicate that some of them have been estimated from the results of the tests conducted by Möller et al. (2004) and Horning and Buchmaier (2005), and others have been based on specific correlations for soils which are detailed in the thesis of Möller (2006). It must be considered that this correlations for soils add some uncertainty as they are applied, in this case, on residual soils or soft rocks. Benz (2007) provides two SETS of parameters for the materials (SET 1 and SET 2), distinguishing SET 1 from SET 2 for considering the second a value of the maximum soil stiffness 40% higher than that of the first. The parameters of SET 2 of Benz (2007) closely approximate the soil parameters considered in Möller (2006).

Table 1 provides the OCR and K_0^{SC} values of the different materials and Table 2 provides the soils specific weight and the values of the parameters of SET 1 and SET 2 corresponding to the EPHYSS and HS-SS models. Furthermore, Table 3 provides the parameters corresponding to the tunnel support according to Benz (2007). The tunnel support is simulated

with plate elements (Plaxis, 2015) and the soil-structure interaction is simulated by a rigid interface, considering a value of $R_{inter} = 1,0$ in all materials (Table 3).

	Fill	Upper Keuper Marl	Lower Keuper Marl	Lacustrine Limestone	Units
OCR	1,0	2,0	2,0	2,0	[-]
K_0^{SC}	-	0,90	0,90	0,60	[-]

Table 1. OCR values according to Möller (2006) and Benz (2007), and values of K_0^{SC} according to Möller (2006).

		Fill		Upper Keuper Marl		Lower Keuper Marl		Lacustrine Limestone		Units			
		SET 1	SET 2	SET 1	SET 2	SET 1	SET 2	SET 1	SET 2				
Specific weight	γ_{unsat}	20,0	20,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	23,0	[kN/m3]			
ELASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,00005	0,00005	[-]		
	HS-SS	G_0^{ref}	50,0	70,0	167,7	233,3	80,0	112,0	1.000,0	1.400,0	[MN/m2]		
		ν'_{ur}	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]		
	EPHYSS	K_s^{ref}	8,4	8,4	28,2	28,2	13,3	13,3	167,0	167,0	[MN/m2]		
		m_1	0,50	0,50	0,40	0,40	0,40	0,40	0,30	0,30	[-]		
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	100	100	100	100	[kN/m2]		
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	52,2	73,1	142,7	206,5	67,0	95,8	766,9	1.073,7	[MN/m2]		
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	26,1	36,6	71,3	103,2	33,5	47,9	383,5	536,8	[MN/m2]		
		m_2	0,50	0,50	0,40	0,40	0,40	0,40	0,30	0,30	[-]		
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	100	100	100	100	[kN/m2]		
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]		
		PLASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	E_{50}^{ref}	10,0	10,0	33,0	33,0	16,0	16,0	190,0	190,0	[MN/m2]
				$E_{t,ur}^{ref}$	30,0	30,0	100,0	100,0	48,0	48,0	575,0	575,0	[MN/m2]
	E_{oed}^{ref}			10,0	10,0	33,0	33,0	16,0	16,0	190,0	190,0	[MN/m2]	
c'	10			10	25	25	25	25	200	200	[kN/ m ²]		
$c' + \Delta c'$	-			-	50	50	50	50	-	-	[kN/ m ²]		
φ'	25			25	25	25	25	25	35	35	[deg]		
ψ	0			0	0	0	0	0	0	0	[deg]		
p'_{ref}	100			100	100	100	100	100	100	100	[kN/ m ²]		
m	0,50			0,50	0,40	0,40	0,40	0,40	0,30	0,30	[-]		
K_0^{NC}	0,58			0,58	0,58	0,58	0,58	0,58	0,43	0,43	[-]		
R_f	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	[-]				
σ'_{trac}	0	0	0	0	0	0	0	0	[kN/ m ²]				

Table2. Soils specific weight and parameters of the EPHYSS and HS-SS models for SET 1.

The stress reduction method (β – method) has been used. This method is normally used in the 2D simulation of open-face tunnels, given the advantages that offers in practice compared to the complex step-by-step simulations in 3D. Details

of this method can be found in the thesis of Möller (2006). Table 4 provides the values of β and $p = \beta p_0$ used in the simulations, which have been adjusted so that the maximum calculate surface settlement coincides, in each case, with the maximum measured surface settlement.

	d [m]	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]	R_{inter} [-]
Support	0,25	15	$3,75 \cdot 10^6$	$1,95 \cdot 10^4$	6,0	0,20	1,0

Table 3. Support parameters extracted from the thesis of Benz (2007) and supposed value of R_{inter} .

SET	Model	β [-]	$p = \beta p_0$ [kN/m ²]	p_0 [kN/m ²]
SET 1	HS-SS	0,309	118,5	383,5
	EPHYSS	0,257	98,5	
SET 2	HS-SS	0,274	105,1	
	EPHYSS	0,245	94,0	

Table 4. Values of β and $p = \beta p_0$ used in simulations with the EPHYSS and HS-SS models for SET 1 and SET 2.

Figure 2 shows the measures of the surface settlements and the results of the simulations with SET 1 and SET 2. In this figure it can be seen how the EPHYSS model improves the approximation to the measured values when compared to the HS-SS model. Furthermore, when the parameters corresponding to SET 2 are used, more concentrated surface settlements around the tunnel axis are obtained in both models.

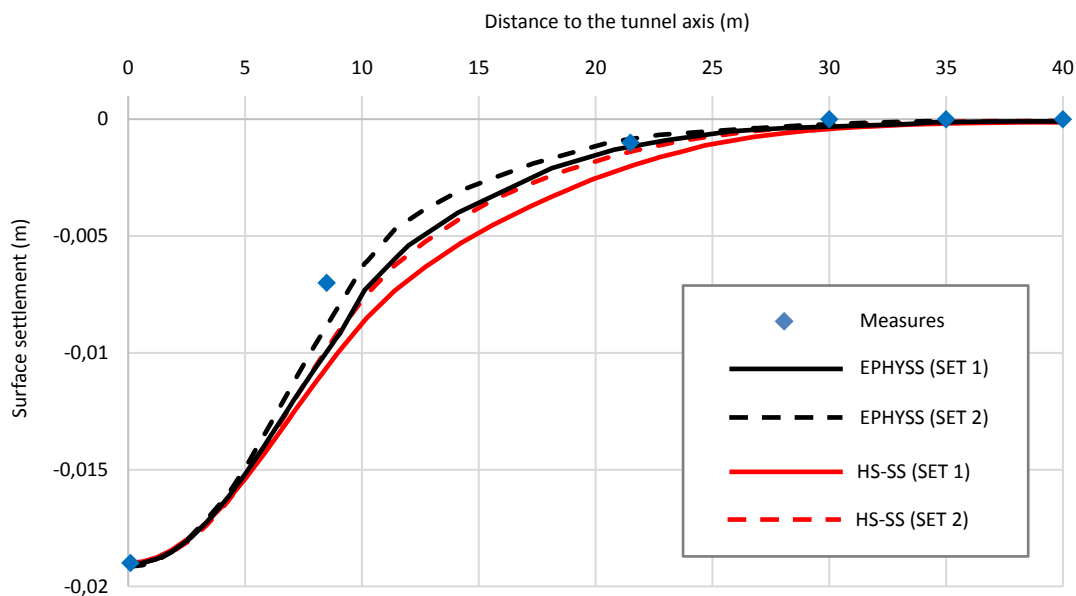


Figure 2. Measures of the surface settlements in the Steinhaldenfeld Tunnel and Simulations with the EPHYSS and HS-SS models for SET 1 and SET 2.

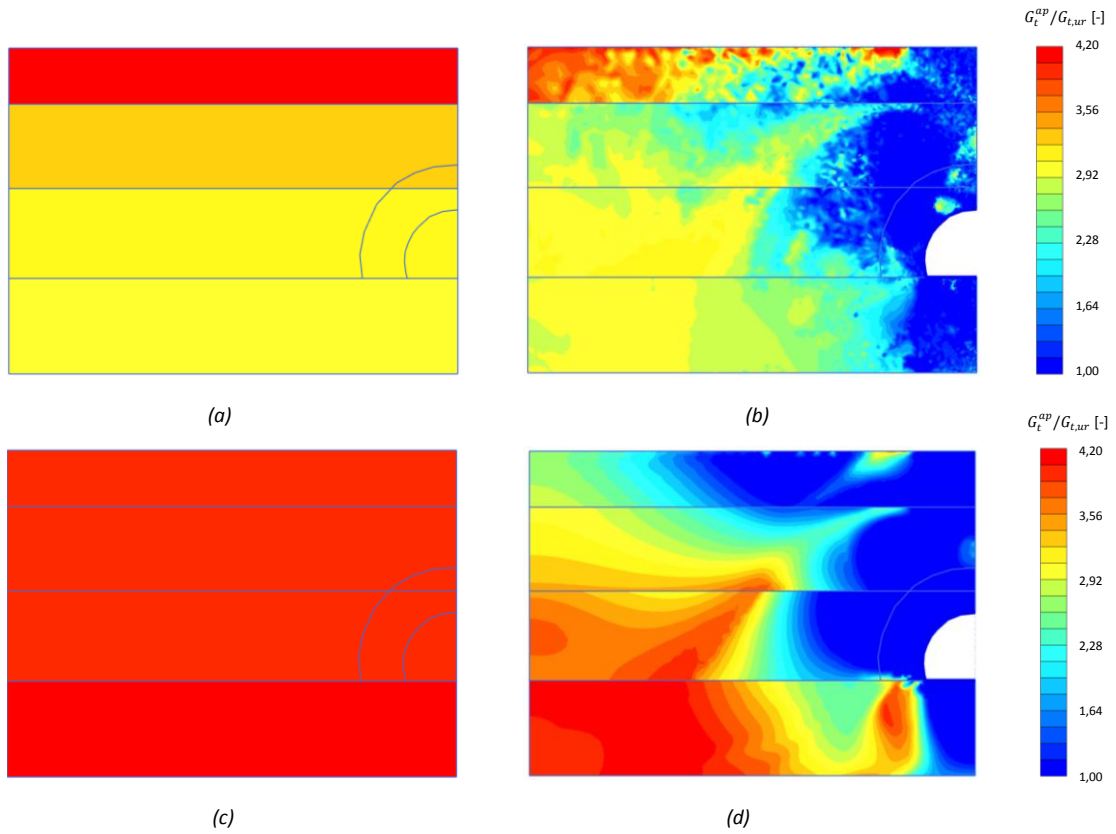


Figure 3. Above: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the EPHYSS model for SET 1. (a) Initial phase. (b) Final phase. Below: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the HS-SS model for SET 1. (c) Initial phase. (d) Final phase.

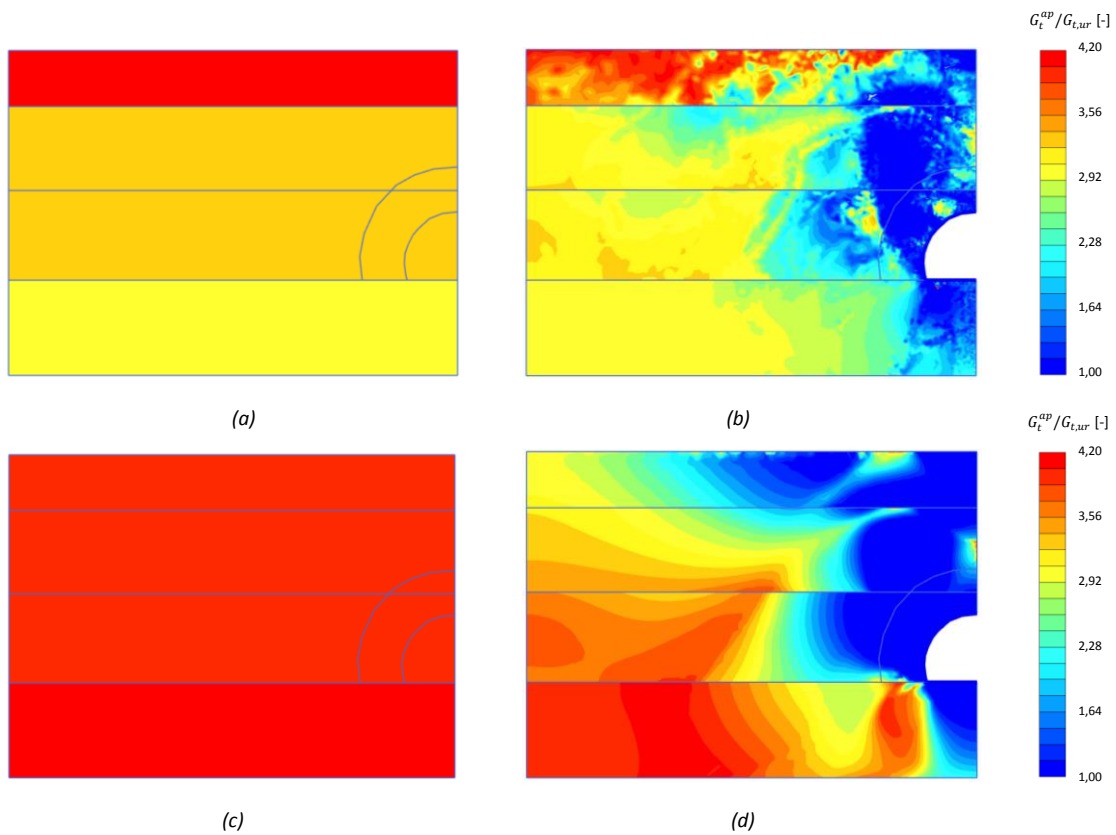


Figure 4. Above: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the EPHYSS model for SET 2. (a) Initial phase. (b) Final phase. Below: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the HS-SS model for SET 2. (c) Initial phase. (d) Final phase.

Figures 3 and 4 show the values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ that result from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models for SET 1 and SET 2, respectively, and the differences in the distributions of the values of shear stiffness between both models can be clearly seen. Compared to the HS-SS model, the EPHYSS model concentrates the zones with maximum elastic degradation in smaller zones near the tunnel, both in SET 1 and SET 2, while providing significantly larger zones with low or no elastic degradation. Furthermore, the zones with maximum elastic degradation change little from the simulation with SET 1 to simulation with SET 2 in the case of the HS-SS model, while these are considerably reduced in the case of the EPHYSS model, especially on the crown of the tunnel and under its invert. The horseshoe cross-section geometry and the heterogeneous ground seems to increase the mentioned differences in the stiffness values of both models if these are compared with the results obtained in the problem of a circular tunnel shape within a homogeneous ground that is studied in the next section (Second Heineoord Tunnel).

Figure 5 shows the strong similarity in the plastic behavior between both models, which is logical considering that the two have a very similar plastic formulation.

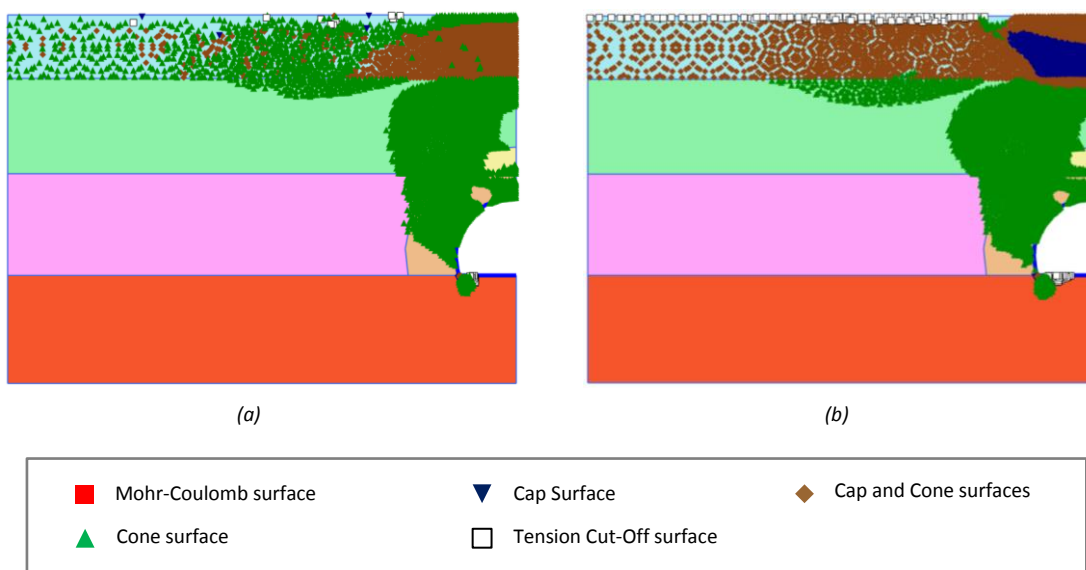


Figure 5. Plastic points for SET 1. (a) EPHYSS model. (b) HS-SS model.

4. Second Heineoord tunnel excavated with slurry shield TBM in Rotterdam

As Möller (2006) describes, the Heineoord Tunnel, located in the south of Rotterdam and built between 1997 and 1998, consists of two tubes excavated with a slurry shield TBM, with a total length of 1.350m and an outer diameter of 8,3m each of them. Both tubes pass under the Oude Maas river. The excavation of the Second Heineoord Tunnel is one of the first pilot projects for monitoring tunnels excavated with a slurry shield in the Netherlands.

The soil in which the tunnel is excavated is constituted by a first 4,0m fill stratum, followed by two sand strata of 19,25m, which can be simulated as the same material, and a final stratum of clay with local parts of sand. The permeability of the soil that surrounds the excavation allows to consider a drained behavior. The water table is 1,5m deep.

The geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model are shown in Figure 6.

Table 5 provides the soils specific weight and the values of the parameters of SET 1 and SET 2 corresponding to the EPHYSS and the HS-SS models. All materials are normally consolidated.

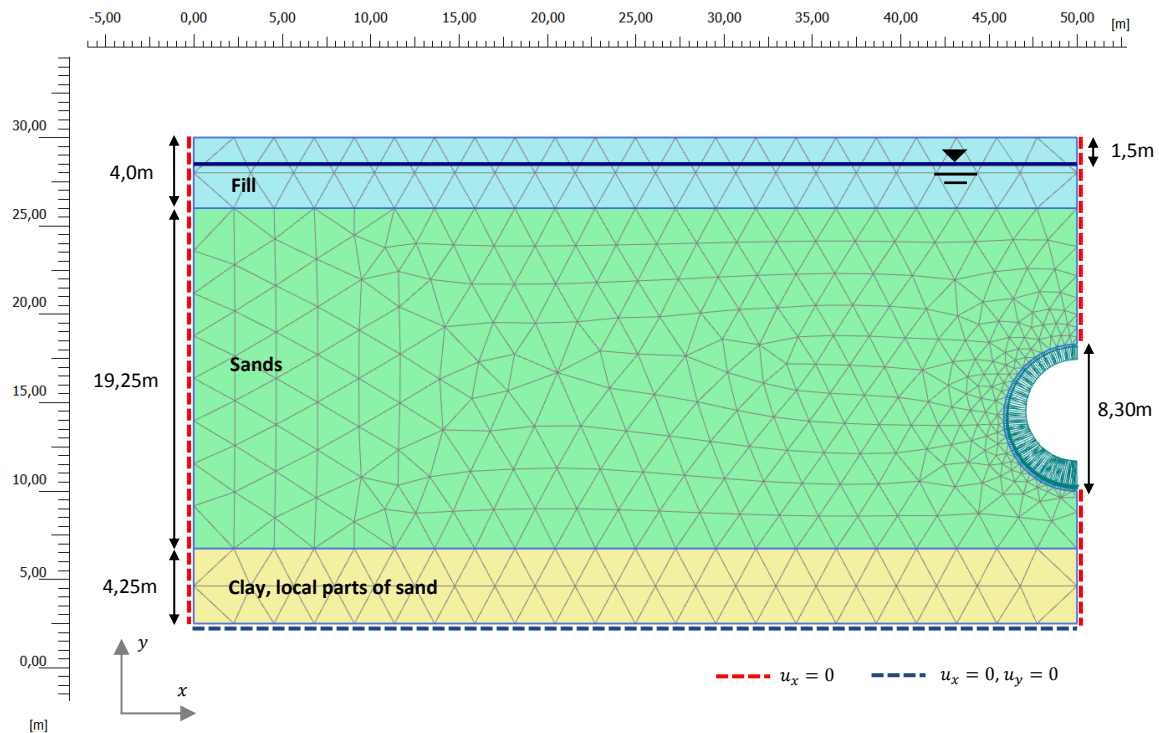


Figure 6. Geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model of the Second Heinenoord tunnel.

The grout pressure method has been used. This method is normally used in 2D simulation of excavated tunnels with shield TBM, given the advantages that offers in practice compared to the complex step-by-step simulations in 3D. Details of this method can be found in the thesis of Möller (2006). The maximum gap considered in the tunnel crown has a value of 20cm. Table 6 provides the slurry pressures in the crown that have been used in the simulations. These pressures have been adjusted so that the maximum calculated surface settlements coincide, in each case, with the measured ones.

Figure 7 (above) shows the measures of the surface settlements as well as the results of the simulations for SET 1 and SET 2, and Figure 7 (below) shows the measures of horizontal displacements resulting from the inclinometers installed at 6m, 10m and 16m from the tunnel axis, as well as the results of the simulations for SET 1 and SET 2. In these figures it can be seen how both models offer similar results and those approximate well the inclinometers measures (except in Figure 7 (below, a)), especially when the parameters corresponding to SET 2 are used.

Figures 8 and 9 show the values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$, resulting from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models for SET 1 and SET 2, respectively. These figures also show the differences in the distributions of the shear stiffness between both models. These differences are smaller than those observed in the case of the Steinhaldenfeld Tunnel analyzed in the previous section, which seems to be due to the circular geometry of the Second Heinenoord Tunnel and the homogeneity of the surrounding ground. In this case it is observed how the transition zones between the maximum and the minimum soil shear stiffness are similar in both models.

Figure 10 shows the similarity in the plastic behavior between both models, which is logical considering that the two have a similar plastic formulation.

		Fill SET 1 and SET 2	Sands SET 1	Sands SET 2	Clay with local parts of sand SET 1 and SET 2	Units			
Specific weight	γ_{sat}	17,5	–	–	–	[kN/m ³]			
	γ_{unsat}	17,5	20,0	20,0	20,0				
ELASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	[-]		
		HS-SS	G_0^{ref}	52.500	100.000	140.000	87.500	[kN/m ²]	
	ν'_{ur}		0,20	0,20	0,20	0,20	[-]		
	EPHYSS	K_s^{ref}	10.674	24.290	24.290	1.435	[kN/m ²]		
		m_1	0,50	0,50	0,50	0,90	[-]		
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	[kN/m ²]		
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	48.493	83.280	116.591	64.891	[kN/m ²]		
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	24.247	36.643	51.300	32.446	[kN/m ²]		
		m_2	0,50	0,50	0,50	0,90	[-]		
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	[kN/m ²]		
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]		
		PLASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	E_{50}^{ref}	14.000	35.000	35.000	12.000	[kN/m ²]
				$E_{t,ur}^{ref}$	42.000	105.000	105.000	35.000	[kN/m ²]
	E_{oed}^{ref}			14.000	35.000	35.000	7.000	[kN/m ²]	
c'	3			0	0	7	[kN/ m ²]		
φ'	27			35	35	31	[deg]		
ψ	0			0	0	0	[deg]		
p'_{ref}	100			100	100	100	[kN/ m ²]		
m	0,50			0,50	0,50	0,90	[-]		
K_0^{NC}	0,55			0,43	0,43	0,48	[-]		
R_f	0,90			0,90	0,90	0,90	[-]		
	σ'_{trac}	0	0	0	0	[kN/ m ²]			

Table 5. Soils specific weight and parameters of the EPHYSS and HS-SS model for SET 1 and SET 2.

Parameters	Model	p_{crown} [kN/m ²]	γ_{grout} [kN/m ³]
SET 1	HS-SS	-127,0	15,0
	EPHYSS	-126,5	
SET 2	HS-SS	-123,4	
	EPHYSS	-124,7	

Table 6. Values of p_{crown} used in the simulations with the EPHYSS and HS-SS models for SET 1 and SET 2.

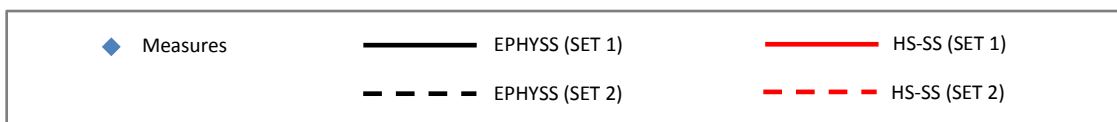
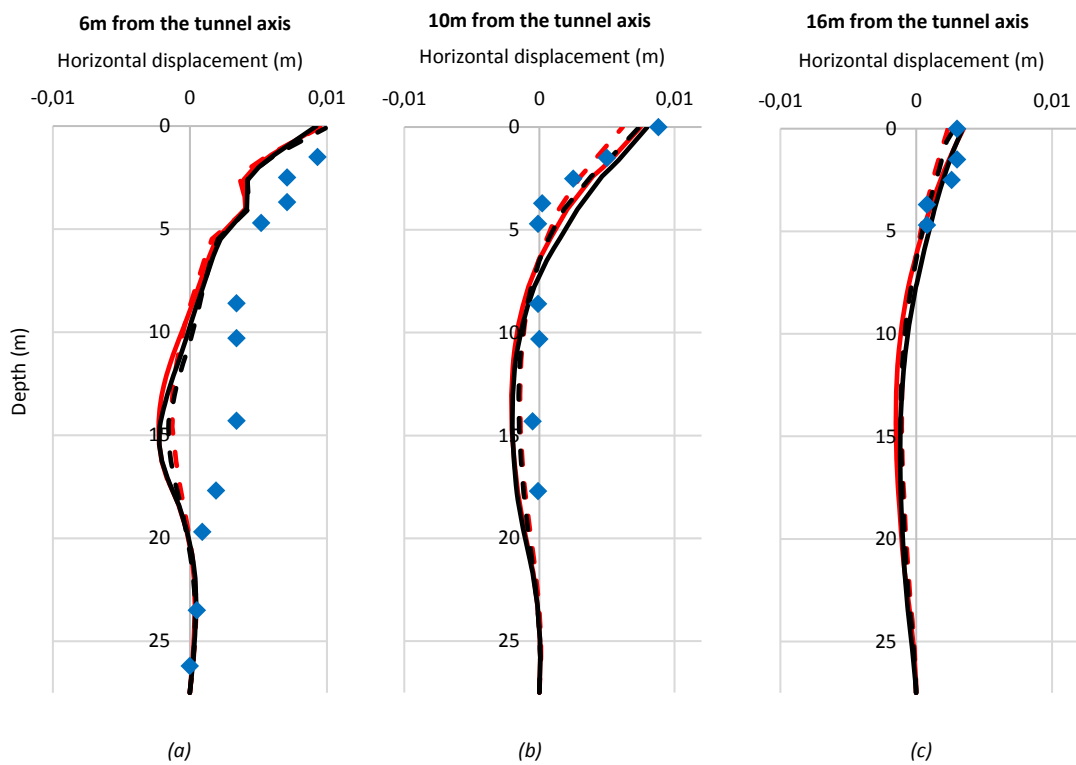
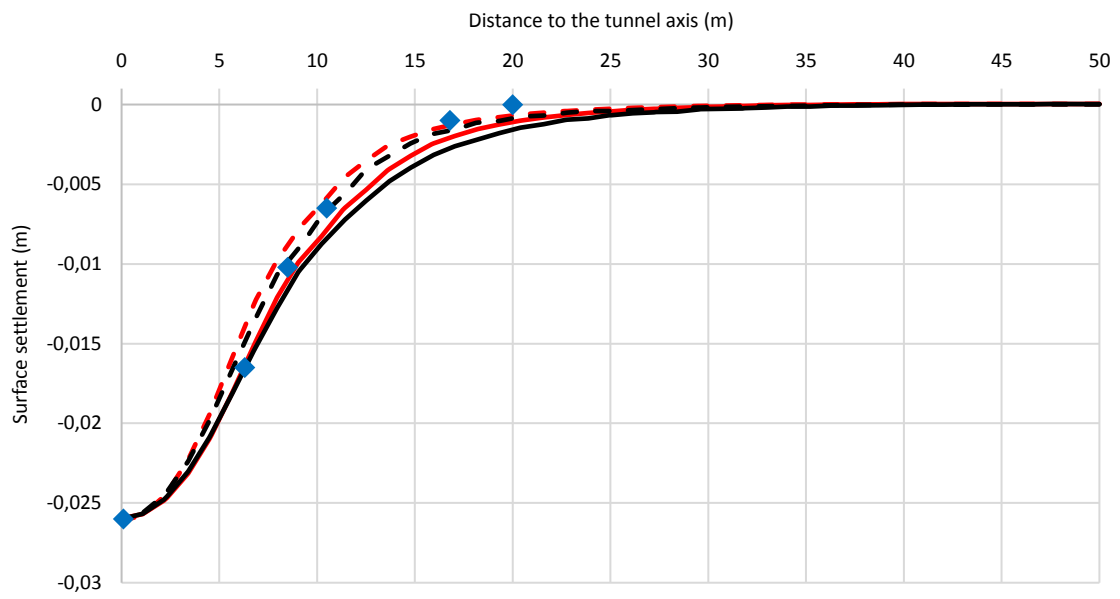


Figure 7. Above: measures of the surface settlements in the Second Heinoord Tunnel and simulations for SET 1 and SET 2 with the EPHYSS and HS-SS models. Below: measures of the horizontal displacements resulting from the inclinometers installed at different x distances from the axis of the Second Heinoord Tunnel and simulations for SET 1 and SET 2 with the EPHYSS and HS-SS models. (a) $x=6m$. (b) $x=10m$. (c) $x=16m$.

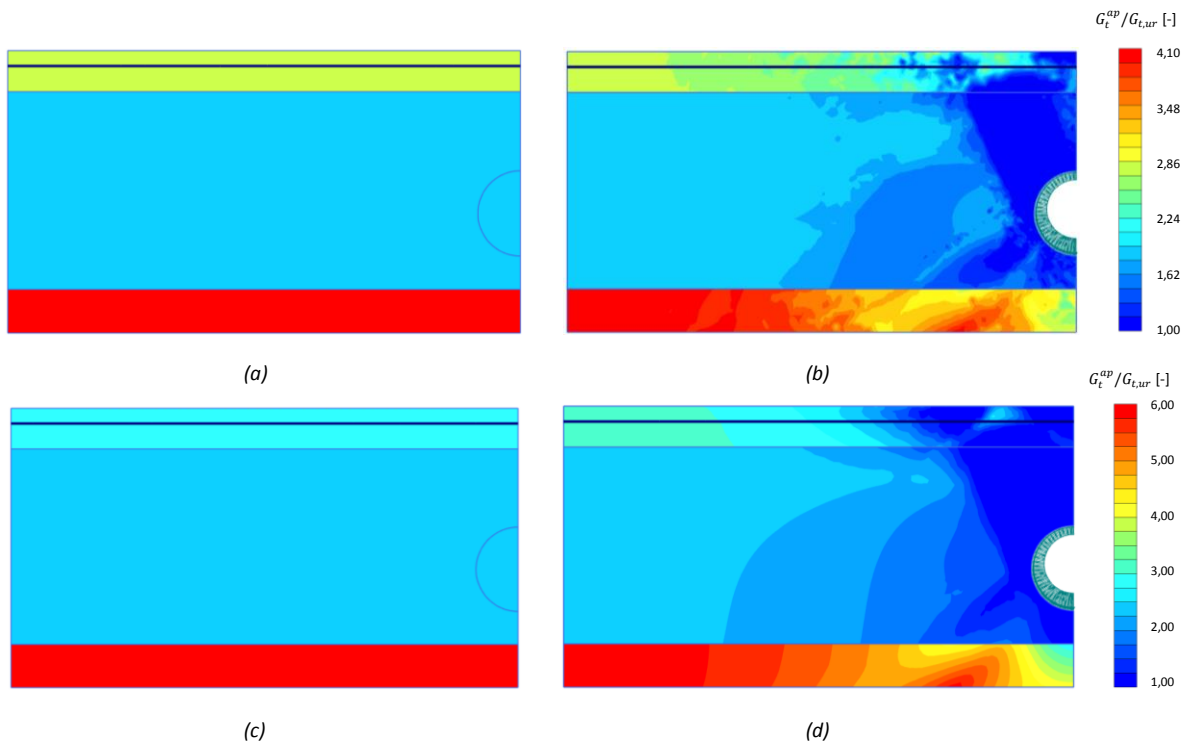


Figure 8. Above: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ for SET 1 with the EPHYSS model. (a) Initial phase. (b) Final phase. Below: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ for SET 1 with the HS-SS model. (c) Initial phase. (d) Final phase.

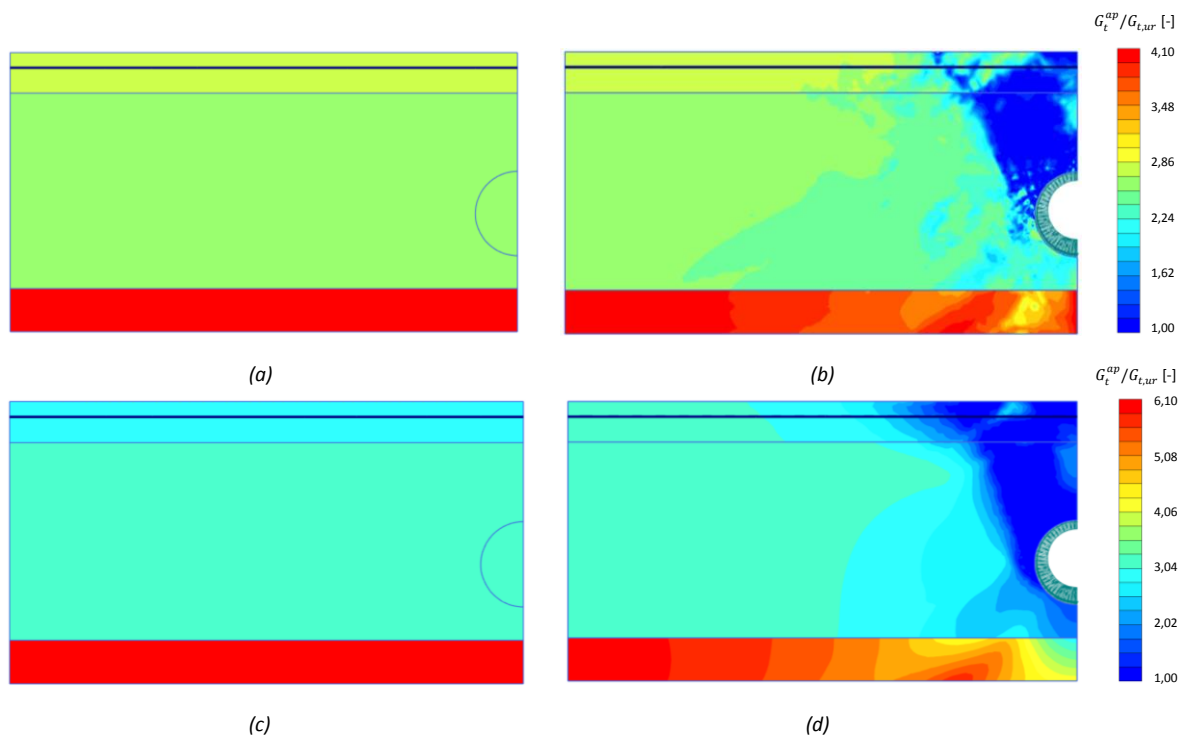


Figure 9. Above: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ for SET 2 with the EPHYSS model. (a) Initial phase. (b) Final phase. Below: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ for SET 2 with the HS-SS model. (c) Initial phase. (d) Final phase.

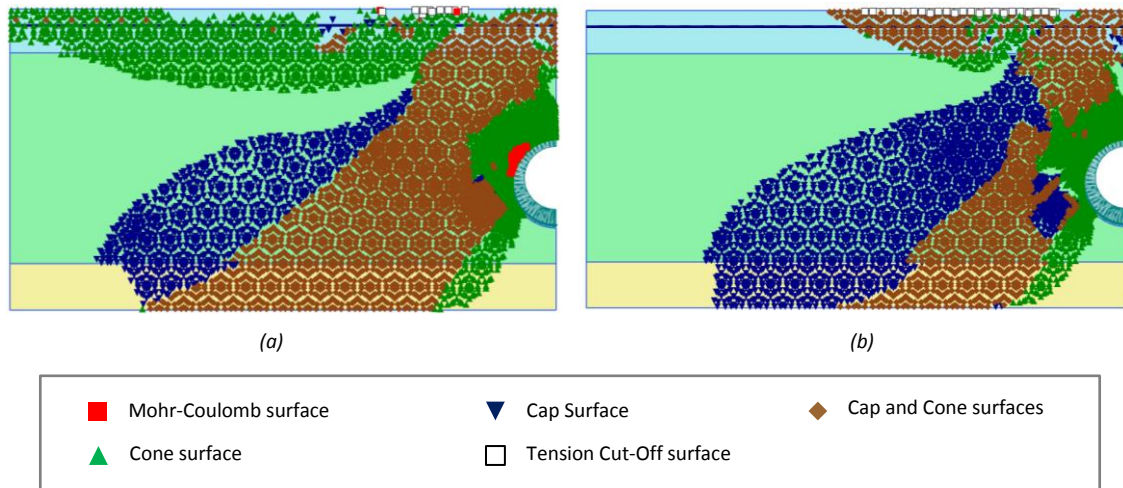


Figure 10. Plastic points for SET 2. (a) EPHYSS model. (b) HS-SS model.

5. Deep excavation between triple-anchored diaphragm walls in Berlin

Schweiger (2002) summarizes the benchmarking study developed by the “AK 1.6 Numerical Methods in Geotechnics” working group of the DGGT (German Society for Geotechnics) related to the numerical analysis of a deep excavation in Berlin between triple-anchored diaphragm walls.

The soil in which the excavation is executed consists of two strata of sand, the upper one being 20,0m and the lower one being more than 80,0m. The permeability of the soil that surrounds the excavation allows to consider a drained behavior. The water table is 3,0m deep, although it will be lowered within the excavation to 17,9m deep.

The geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model are shown in Figure 11.

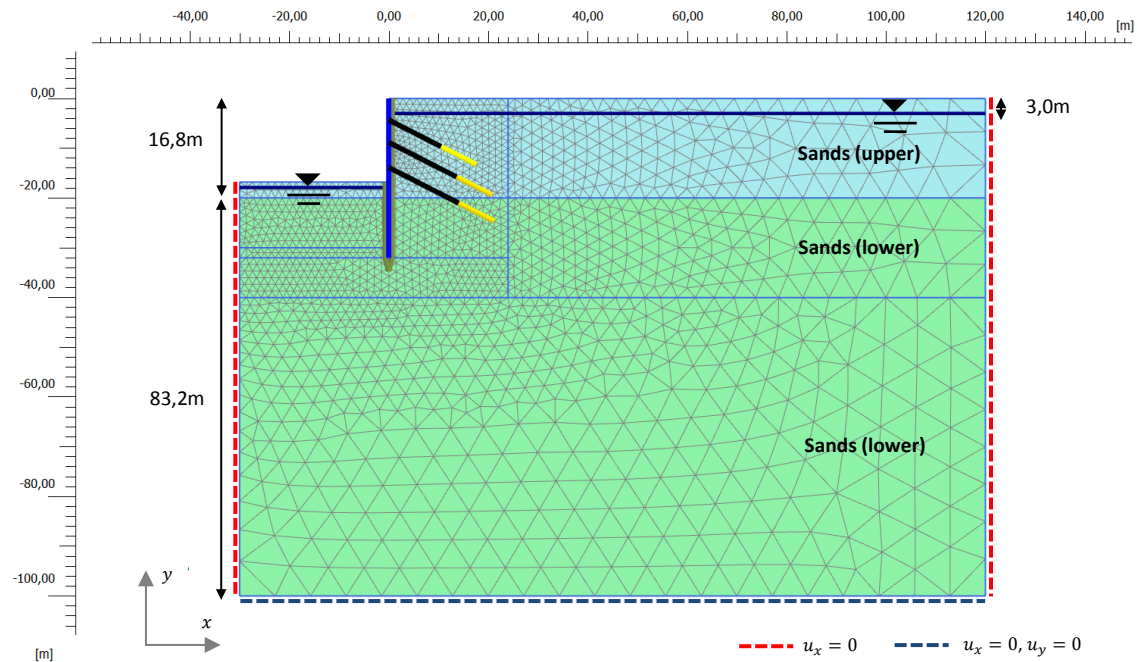


Figure 11. Geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model of the deep excavation in Berlin.

Table 7 provides soils specific weight and their parameter values corresponding to the EPHYSS and the HS-SS models. All materials are normally consolidated. Soil parameters values have been obtained from Benz (2007) and Schweiger (2002), who took them, in turn, from the existing literature, from oedometric tests executed on dense and loose sand, and from triaxial tests executed on dense sand. Furthermore, Tables 8 and 9 provide the parameters corresponding to the diaphragm walls, interfaces and anchors. The retaining walls have been simulated with plate type elements and their construction influence is not considered, while the anchors have been simulated with anchor type elements in their free length and geogrid type elements in their fixed length, whose parameters are taken from Schweiger (2007) (Plaxis, 2015). The soil-structure interaction is simulated by an interface on which a reduction in stiffness and strength is considered by means of the R_{inter} parameter, which is assumed to be equal value for all materials (Schweiger, 2007). Likewise, anchors heads are located, in the three rows, at 0,50m above the excavation plane in each phase (Schweiger, 2002). The reduction of the water table within the excavation, limited by a hydraulic barrier at -30,0m, is conducted in a single calculation phase once the construction of the diaphragm walls is finished. The resulting water pressures after this lowering are hydrostatic in all the domain, taking as reference the lowered level located at -17,9m within the excavation and the original water table level located at - 3,0m outside the excavation.

		Sands (upper)	Sands (lower)	Units		
Specific weights	γ_{sat}	20,0	20,0	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	19,0	19,0	[kN/m ³]		
ELASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0002	0,0002	[-]	
		HS-SS	G_0^{ref}	168.750	281.250	[kN/m ²]
	ν'_{ur}		0,20	0,20	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	37.015	58.867	[kN/m ²]	
		m_1	0,55	0,55	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	139.051	220.816	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	55.620	88.327	[kN/m ²]	
		m_2	0,55	0,55	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	[-]	
	PLASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	E_{50}^{ref}	45.000	75.000	[kN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	180.000	300.000	[kN/m ²]
			E_{oed}^{ref}	45.000	75.000	[kN/m ²]
c'			1	1	[kN/ m ²]	
φ'			35	38	[deg]	
ψ			5	6	[deg]	
p'_{ref}			100	100	[kN/ m ²]	
m			0,55	0,55	[-]	
K_0^{NC}			0,43	0,38	[-]	
R_f			0,90	0,90	[-]	
σ'_{trac}	0	0	[kN/ m ²]			

Table 7. Soils specific weight and parameters of the EPHYSS and HS-SS models.

	d [m]	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]	R_{inter} [-]	Hydraulic conditions
Diaphragm wall	0,80	30	$2,40 \cdot 10^7$	$1,28 \cdot 10^6$	7,5	0,15	0,80	Impermeable

Table 8. Diaphragm wall parameters extracted from the thesis of Benz (2007) and the work of Schweiger (2002, 2007). The same value of R_{inter} is assumed for all materials (Schweiger, 2007).

Row	Interdistance [m]	Free Length [m]	Fixed Length [m]	Angle [deg]	Tendon EA [kN]	Grout EA [kN/m]	Force [kN]
1	2,30	11,80	8,00	27	$3,15 \cdot 10^5$	$4,92 \cdot 10^5$	768
2	1,35	15,30	8,00	27	$3,15 \cdot 10^5$	$8,38 \cdot 10^5$	945
3	1,35	15,80	8,00	27	$3,15 \cdot 10^5$	$8,38 \cdot 10^5$	980

Table 9. Geometry and parameters of the anchors extracted from the work of Schweiger (2002, 2007) and the thesis of Benz (2007).

Figure 12 shows how the displacements obtained in the simulations with the EPHYSS model improve those obtained in the simulations with the HS-SS model. On the other hand, the results obtained with the hypoplastic model with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997), according to the charts provided by Schweiger (2002), fail to approximate the measured values. Figure 13 (above) shows how the EPHYSS model provides higher settlements beside the right wall than those provided by the HS-SS model, Figure 13 (below, a) shows how both models provide similar values of the right diaphragm wall bending moments, those of the EPHYSS model being slightly lower in the maximum moment zones, and Figure 13 (below, b) shows how the EPHYSS model predicts vertical displacements under the excavation similar to those predicted by the HS-SS model between -30,0m and -100,0m and lower between -16,8 m and -30,0 m. The lack of measures does not allow a full evaluation of the results.

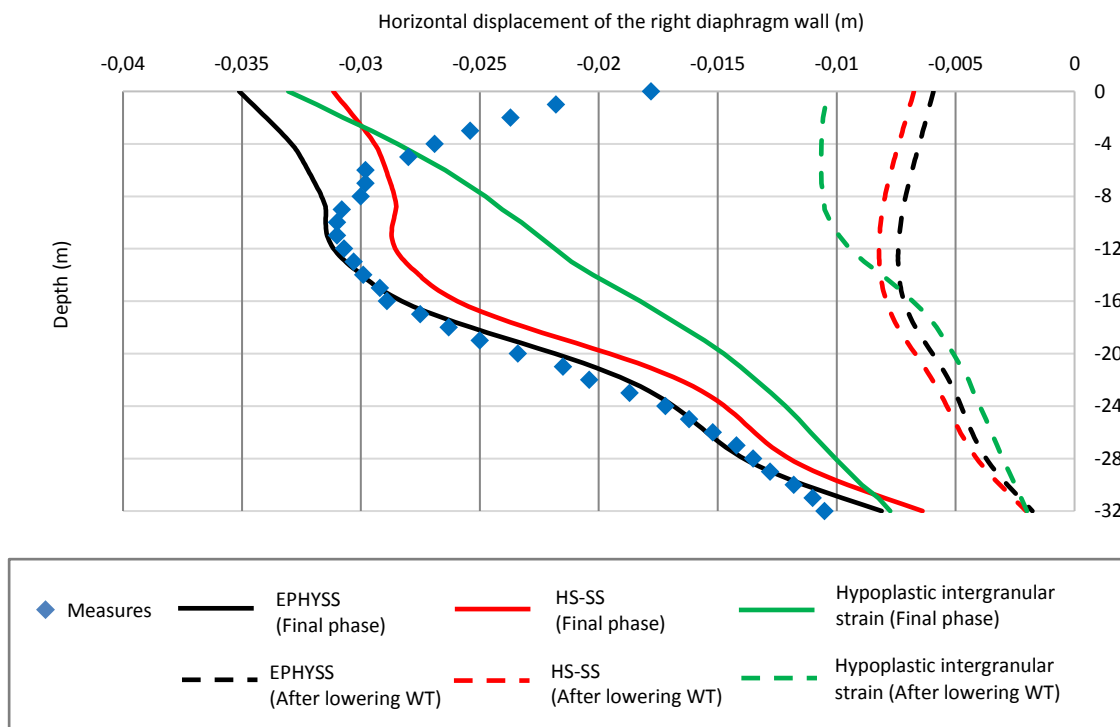


Figure 12. Measures of the horizontal displacements of the right diaphragm wall and simulation results with the EPHYSS model, HS-SS model and Hypoplastic models with intergranular strain of Niemunis and Herle (1997).

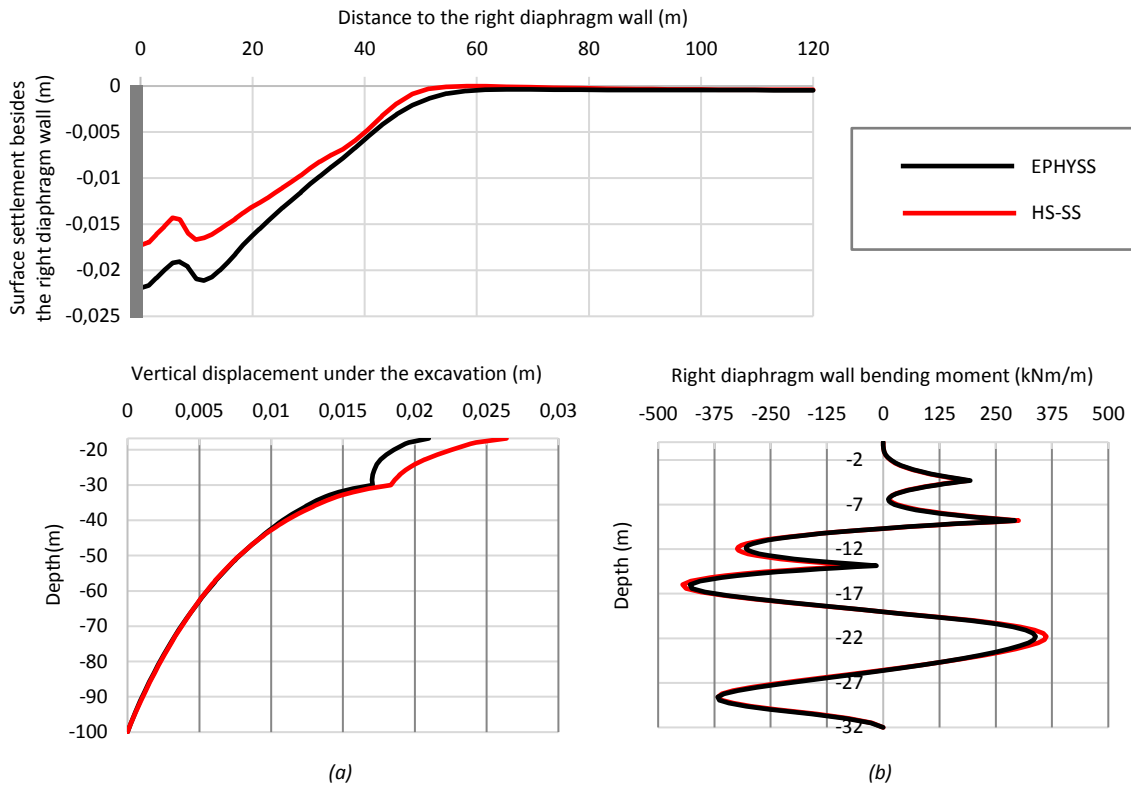


Figure 13. Above: surface settlements besides the right diaphragm wall in the final phase resulting from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models. Below: (a) Vertical displacements under the excavation in its final phase and along a vertical axis located at 10,0m from the right diaphragm wall resulting from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models. (b) Right diaphragm wall final phase bending moments resulting from the simulation with the EPHYSS and HS-SS models.

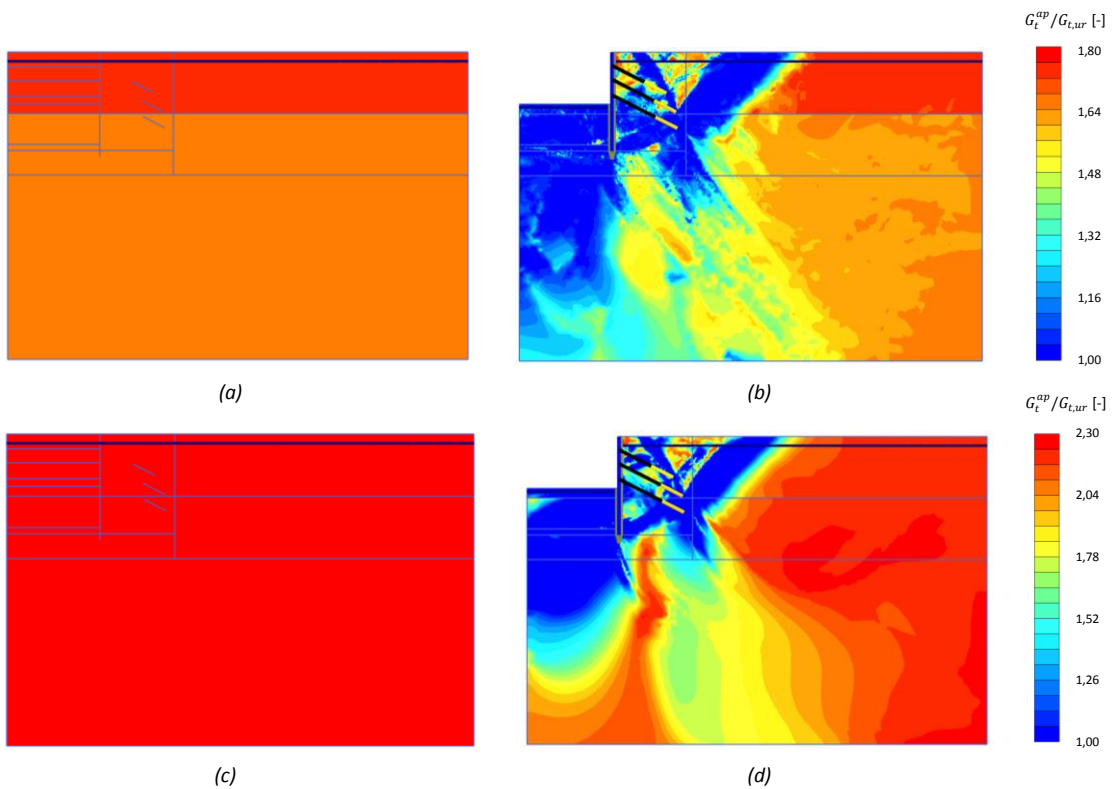


Figure 14. Above: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the EPHYSS model. (a) Initial phase. (b) Final phase. Below: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the HS-SS model. (c) Initial phase. (d) Final phase.

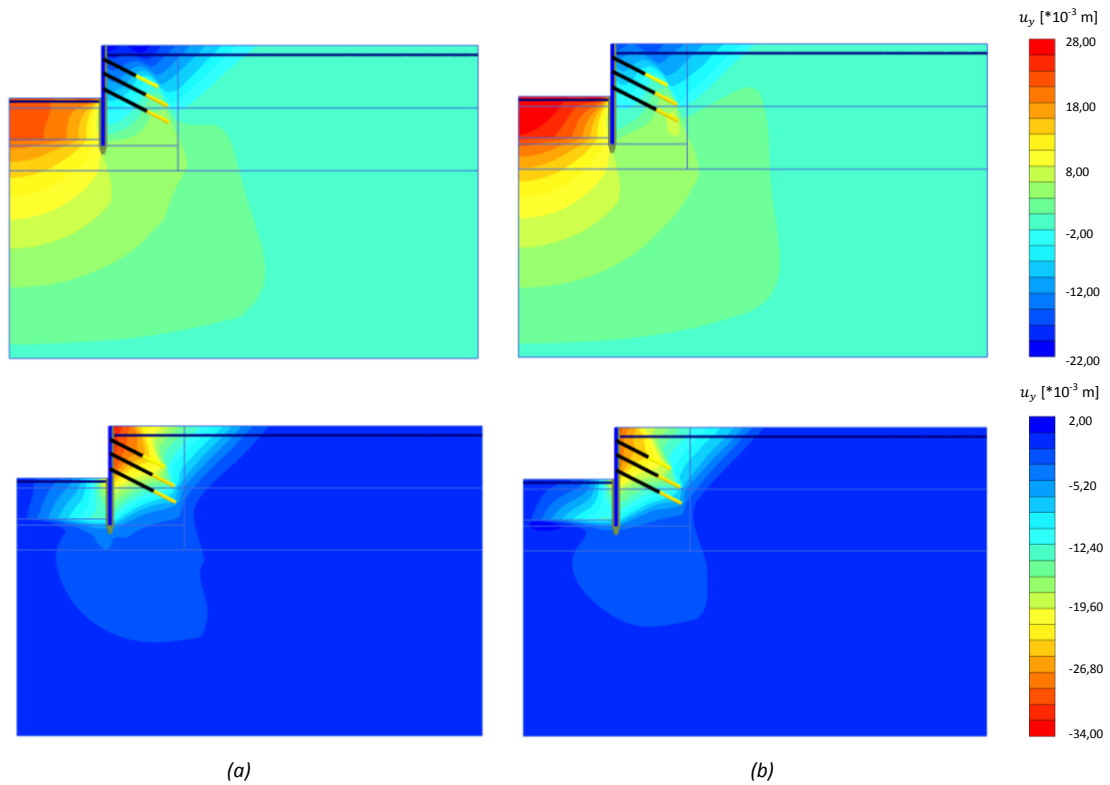


Figure 15. Above: vertical displacements. Below: horizontal displacements. (a) EPHYSS model ($u_{y,max,(+)}=0,0226m$, $u_{y,max,(-)}=-0,0224m$, $u_{x,max,(+)}\approx 0m$ and $u_{x,max,(-)}=-0,0349m$). (b) HS-SS model ($u_{y,max,(+)}=0,0282m$, $u_{y,max,(-)}=-0,0174m$, $u_{x,max,(+)}\approx 0m$ and $u_{x,max,(-)}=-0,0311m$).

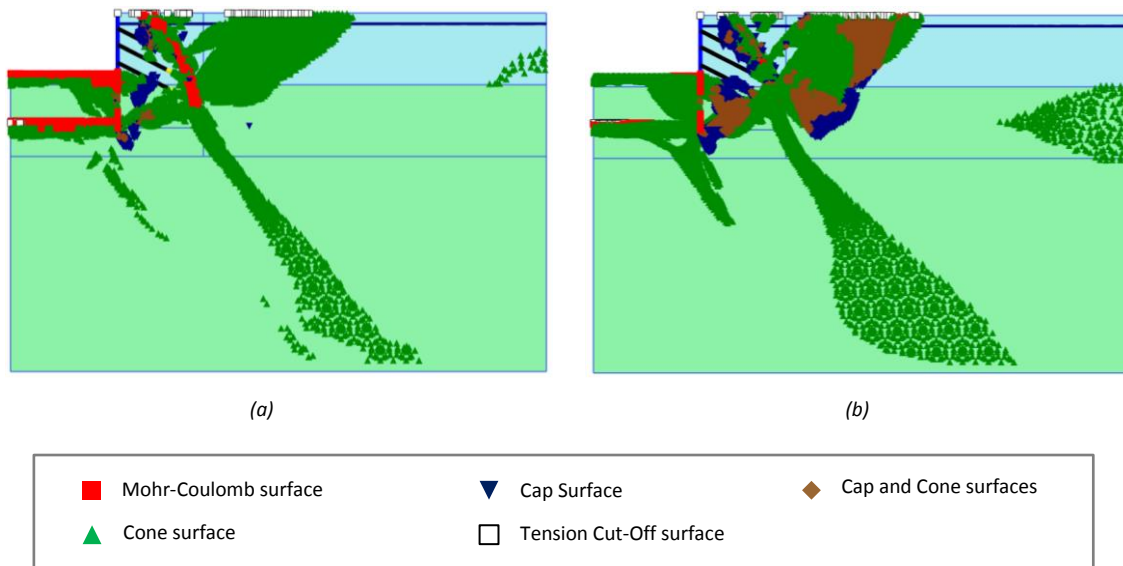


Figure 16. Plastic points. (a) EPHYSS model. (b) HS-SS model.

Figure 14 shows the values $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ resulting from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models. This figure shows the differences in the distribution of the values of the shear stiffness between both models. In this case, the EPHYSS model provides zones of maximum degradation larger than those provided by the HS-SS model. It is also observed how, in the zone under the excavation and near the lower horizontal boundary of the analysis domain, the EPHYSS model provides lower stiffness than those provided by the HS-SS model. These differences are rendered, in turn, into the differences in displacements of both the soil and the anchored diaphragm wall that have been shown in Figures 12 and 13, and that can be seen in Figure 15 in all the analysis domain.

Figure 16 shows the similarity in the plastic behavior of both models, which is logical considering that the two have a similar plastic formulation.

The results obtained with the EPHYSS model in comparison with those of the HS-SS model, in relation to the ground and diaphragm walls displacements as well as the diaphragm walls bending moments, can have, in the studied problem, a clear incidence (1) in control processes during the execution of the work and (2) in optimization processes using backanalysis techniques either the ground or the diaphragm wall displacements measurements are used.

6. Deep excavation between bored pile walls with three sets of struts in Offenbach

Krajewski et al. (2001) describes the process of building a 3,5km long tunnel in the city of Offenbach (Germany), near Frankfurt, where a 19,3m deep excavation in a construction pit between bored pile walls with three sets of struts was executed using the cut&cover technique. On both sides of the excavation there were buildings close to the pile walls.

The soil in which the excavation is executed consists of a first 4,0m stratum of Quaternary sand and gravels, followed by a second stratum of overconsolidated Rupel clays (tertiary). The water table is 2,8m deep, as indicated by Krajewski and Reul (2004), and before starting the excavation, it has been drawn down with wells.

The geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model are shown in Figure 17.

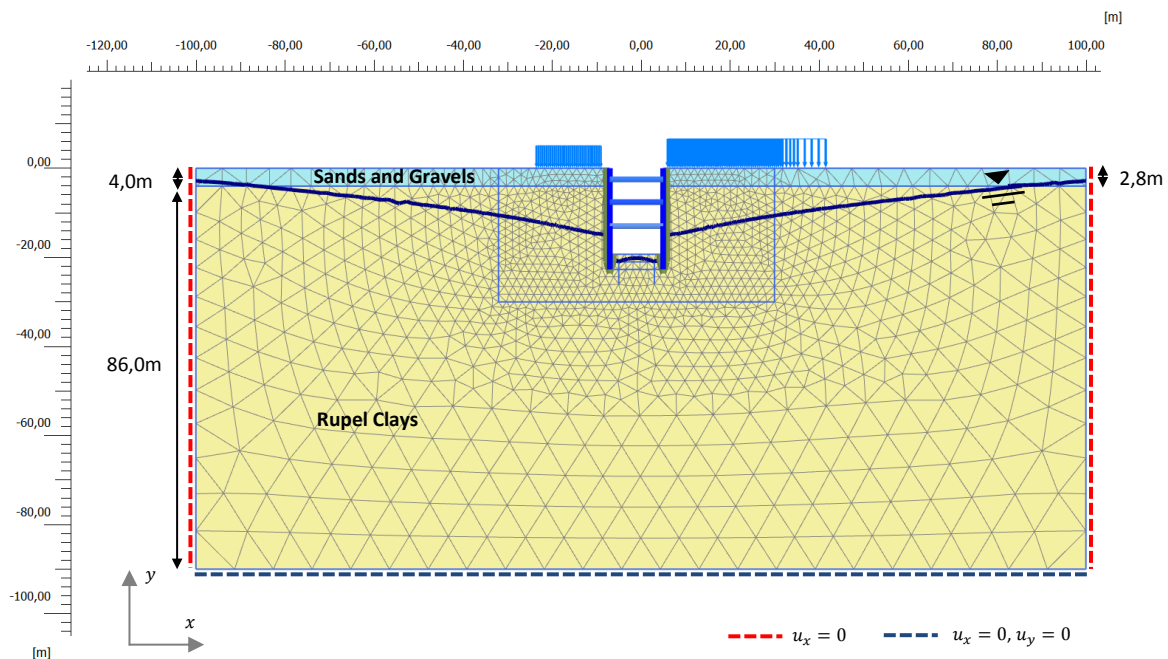


Figure 17. Geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model of the excavation in Offenbach. The image shows the water table after the draw down.

The sands and gravels are normally consolidated while the Rupel clays are overconsolidated, with a value $OCR = 2,80$ (Benz, 2007). The value of K_0^{SC} in the clays is estimated by the expression of Mayne and Kulhawy (1982), $K_0^{SC} = (1 - \sin(\varphi'))(OCR)^{\sin(\varphi')}$, resulting $K_0^{SC} = 0,95$.

Table 10 provides the soils specific weight and the parameters values corresponding to the EPHYSS model and the HS-SS model of Plaxis. Tables 10, 11, 12, 13, 14 and 15 provide, respectively, the parameters corresponding to the bored pile walls and interfaces, phases of excavation and struts installation, location and loadings generated by the buildings, assumed soil hydraulic parameters and, finally, wellpoint parameters for the dewatering prior to the excavation. The bored pile walls and the struts have been simulated with plate type elements (Plaxis,2015).

The bored piles have a "d" diameter and an "s" interdistance between axis. Likewise, the struts have "t" interdistances between axis. The phases of excavation and struts installation considered in Benz (2007) have been obtained indirectly by backanalysis from the adjustment of the horizontal displacements of the bored piled walls calculated by Benz (2007), using the HS-SS model. The soil-structure interaction in the walls is simulated by means of an interface in which, given the lack of data, a value $R_{inter} = 0,67$ factor is assumed. In relation to the soil-structure interaction in the buildings, none is considered, directly introducing the load transmitted by them on the ground surface. Finally, given the lack of data, the draw down within the excavation has been simulated by means of a decoupled hydraulic calculation and in a single phase, pumping water from wellpoints located under the bottom level of the excavation, ensuring that the water table level remains below that plane during the excavation.

		Sands and Gravels	Rupel Clays	Units		
Specific weights	γ_{sat}	20,0	20,0	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	18,0	19,0			
ELASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,00015	0,00025	[-]	
	HS-SS	G_0^{ref}	75.000	90.000	[kN/m ²]	
		ν'_{ur}	0,20	0,15	[-]	
	EPHYSS	K_s^{ref}	13.944	4.843	[kN/m ²]	
		m_1	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	62.889	61.321	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	27.671	30.661	[kN/m ²]	
		m_2	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	[kN/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,15	[-]	
	PLASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	E_{50}^{ref}	20.000	15.000	[kN/m ²]
			$E_{t,ur}^{ref}$	60.000	50.000	[kN/m ²]
			E_{oed}^{ref}	20.000	15.000	[kN/m ²]
c'			1	25	[kN/ m ²]	
φ'			32	20	[deg]	
ψ			2	0	[deg]	
p'_{ref}			100	100	[kN/ m ²]	
m			0,50	0,70	[-]	
K_0^{NC}			0,43	0,66	[-]	
R_f			0,90	0,90	[-]	
σ'_{trac}			0	0	[kN/ m ²]	

Table 10. Soils specific weight and parameters of the EPHYSS and HS-SS models.

	d [m]	s [m]	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]	R_{inter} [-]
Bored pile walls	0,90	1,20	30	$2,40 \cdot 10^7$	$1,28 \cdot 10^6$	7,5	0,15	0,67

Table 11. Parameters of the bored pile walls extracted from the thesis of Benz (2007) and R_{inter} value, which is assumed to be the same in all materials.

Phase	Strut row	t [m]	Relative excavation level [m]	Relative strut level [m]	Cross-section struts geometry	E [GPa]	EA [kN/m]	EI [kNm ² /m]	w [kN/m/m]	ν [-]
A	-	-	-2,5	-	-	-	-	-	-	-
B	1	2,45	-2,5	-2,5	IPB 340	210	$1,47 \cdot 10^6$	$3,14 \cdot 10^4$	0	0,30
C	-	-	-4,7	-	-	-	-	-	-	-
D	-	-	-11,0	-	-	-	-	-	-	-
E	2	1,95	-11,0	-7,6	IPB 360	210	$1,95 \cdot 10^6$	$4,65 \cdot 10^4$	0	0,30
F	-	-	-17,0	-	-	-	-	-	-	-
G	3	1,80	-17,0	-13,0	IPB 360	210	$2,11 \cdot 10^6$	$5,04 \cdot 10^4$	0	0,30
H	-	-	-19,3	-	-	-	-	-	-	-

Table 12. Excavation phases, struts installation phases and struts properties. Data extracted or calculated from the information contained in the thesis of Benz (2007).

Building	Distance to the nearest wall from the initial loading point [m]	Distance to the nearest wall from the final loading point [m]	Load [kN/m ²]
Left	2,0	16,5	30
Right	1,0	36,5	39

Table 13. Situation and value of the load generated by the buildings, extracted from the thesis of Benz (2007).

Material	Type	<2 μ m [%]	2 μ m-50 μ m [%]	>50 μ m [%]	k [m/day]
Sands and gravels	Coarse	10	13	77	0,60
Rupel clays	Very fine	74	11	15	0,10

Table 14. Hydraulic soil parameters of the Plaxis Standard model, based on the Hydraulic Properties of European Soils (HYPRES) classification. In the absence of data, an isotropic behavior is assumed $k_x = k_y$.

Wellpoint	Distance from the wellpoint to the nearest wall [m]	Upper wellpoint level [m]	Lower wellpoint level [m]	Q' [m ³ /day/m]	h _{min} [m]
Left	2,0m	-21,0	-26,0	1,25	-26
Right	2,0m	-21,0	-26,0	1,25	-26

Table 15. Wellpoint parameters for the down down.

Figure 18 (above) shows how the EPHYSS model concentrates the surface settlements in zones closer to the bored pile walls in relation to the HS-SS model and slightly improves the approximation of these settlements in the mentioned zones. On the other hand, in Figure 18 (below) it can be seen how the horizontal displacements of the left retaining wall obtained from the simulation with the EPHYSS model approximate the measured values well and improve the results of the simulation with the HS-SS model.

Figure 19 (left) shows how the EPHYSS model predicts vertical displacements significantly lower than those predicted by the HS-SS model, similar to the case of the excavation in Berlin analyzed in the previous section. The lack of measures does not allow a full evaluation of the results. Figure 19 (right) shows how both models provide similar bending moments in the left bored pile wall between the relative levels +0,0m and -3,0m and the relative levels -18,0m and -22,0m. Between the relative levels -13,5 and -18,0m, the EPHYSS model provides positive bending moments slightly higher than those provided by the HS-SS model, while, between the relative levels -3,0m and -13,5m, it is the HS-SS model that provides significantly higher negative bending moments (in absolute value) than those provided by the EPHYSS model. Likewise, it is observed how these differences give place to a moment sign reversal in determined zones. However, the lack of measures does not allow a full evaluation of the results.

The struts loadings values resulting from the measures and from the simulations made with the EPHYSS and HS-SS models in the final phase of the excavation are shown in Figure 20. Calculated struts loadings with the EPHYSS and HS-SS models present deviations of -22,1% and -51,5%, respectively, in the first strut row, of -14,6% and 14,5% in the second and of -31,8% and -27,6% in the third.

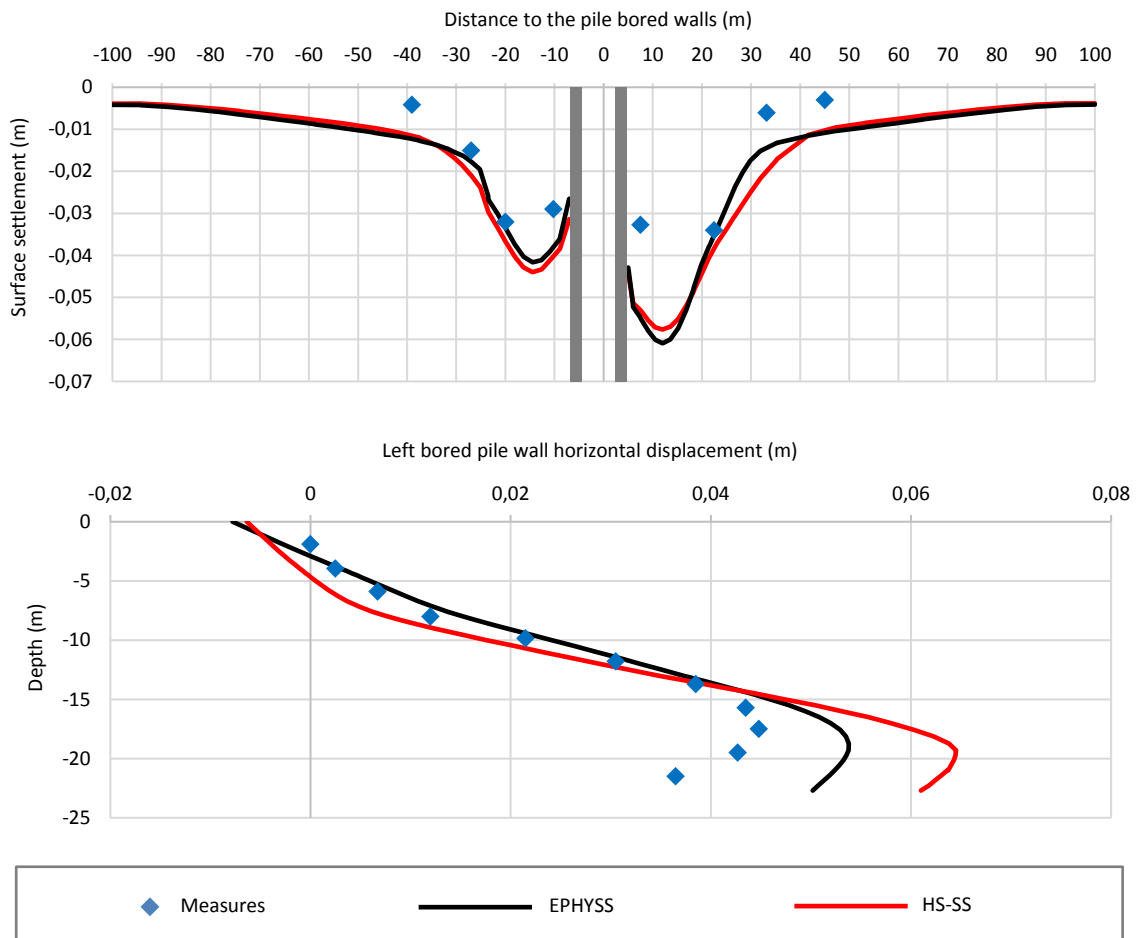


Figure 18. Above: measures of the settlements besides of the left and right bored pile walls at the final phase of the excavation and simulation results with the EPHYSS and HS-SS models. Below: measures of the horizontal displacements of the left bored pile wall and simulation results with the EPHYSS and HS-SS models.

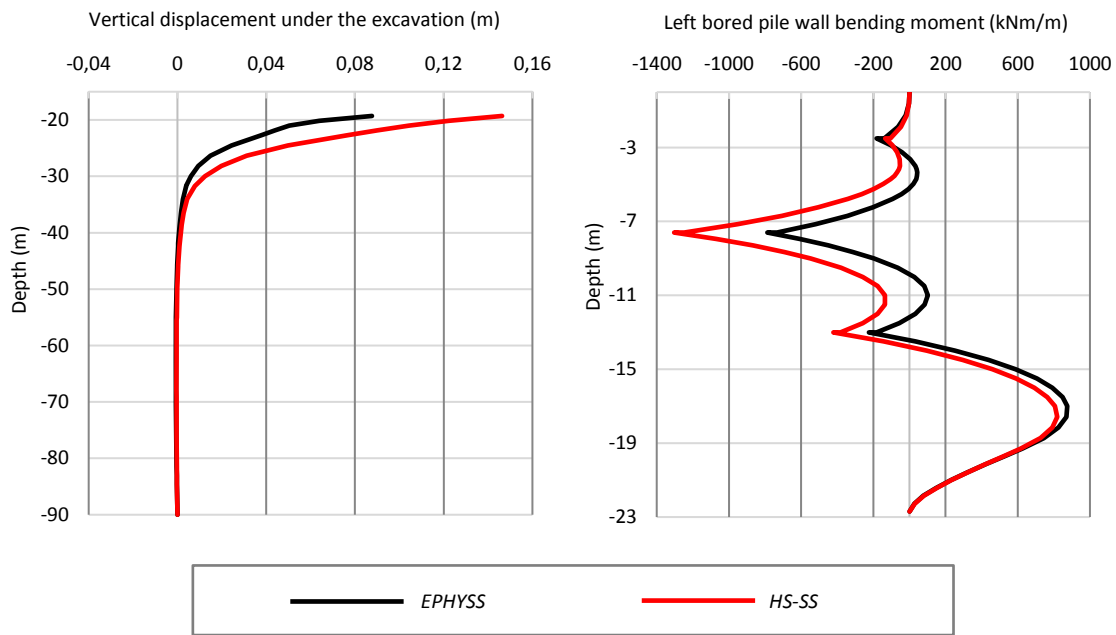


Figure 19. Above: vertical displacements under the excavation in its final phase and along a vertical axis located in the center of it, resulting from the simulations with the models EPHYSS and HS-SS. Below: bending moments of the left bored pile wall resulting from the simulations with EPHYSS and HS-SS models.

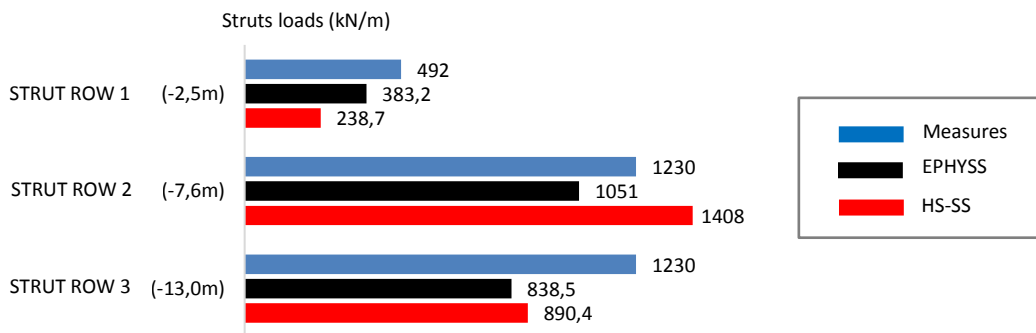


Figure 20. Measured values of the struts loadings in the final phase of the excavation (Krajewski et al., 2001) and results of the simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

Figure 21 shows the values $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ that result from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models, where the differences in the distribution of the shear stiffness values between both models can be seen. In this case, the shape of the zone with maximum soil degradation presents certain differences between both models, despite having similar areas. Similarly, the EPHYSS model provides lower stiffness than those provided by the HS-SS model in the zone between relative levels + 0,0m and -45,0m, and greater in the zone between relative levels -45,0m and -90,0m. The above is rendered into displacements differences of both the soil and the bored pile walls as shown in Figures 18 and 19.

Similar to the case of the excavation in Berlin studied in the previous section, in this case the results obtained with the EPHYSS model, compared to those of the HS-SS model, in relation to the soil displacements and the retaining walls bending moments have a clear impact (1) in the design of the retaining walls and struts within the project phase, (2) in the processes of control during the execution of the work or (3) in the optimization processes by means of backanalysis techniques, whether soil and retaining wall displacements, retaining walls bending moments or strut loadings are measured.

Finally, *Figure 22* shows some similarity in the plastic behavior of both models, which is logical considering that the two have a very similar plastic formulation, however, unlike the problems analyzed in previous sections, in this case, the differences between both models in relation to the distribution and magnitude of the shear stiffness in the soil are large enough so that the stress redistribution significantly affects the size of the plastic area near the excavation, being greater in the HS-SS model simulation.

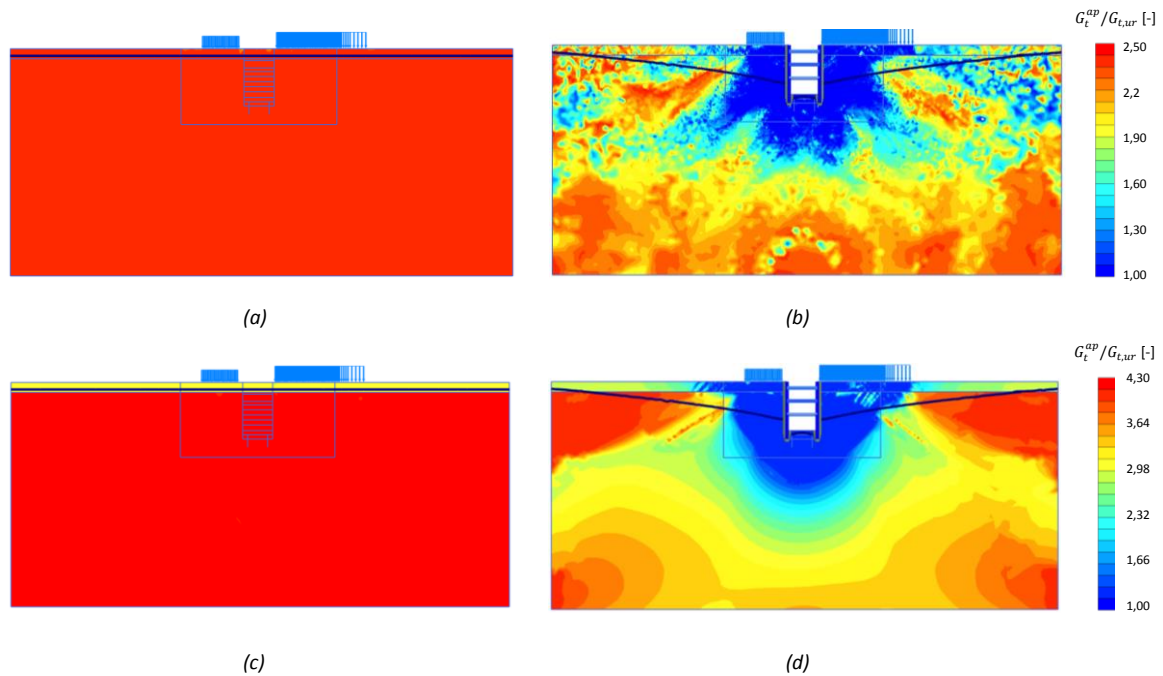


Figure 21. Above: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the EPHYSS model. (a) Initial phase. (b) Final phase. Below: values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ with the HS-SS model. (c) Initial phase. (d) Final phase.

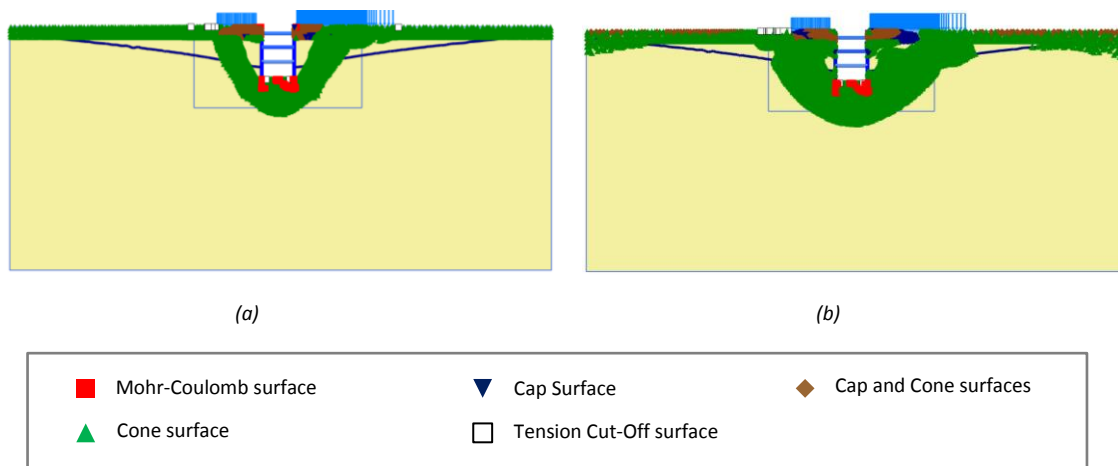


Figure 22. Plastic points. (a) EPHYSS model. (b) HS-SS model.

7. Test on an experimental spread footing conducted at the NGES of the Texas A&M University

Briaud and Gibbens (1997) describe the project conducted at the National Geotechnical Experimentation Site (NGES) of the Texas A&M University, which consisted of testing 5 experimental spread footings of different dimensions. As in the thesis of Benz (2007), it will be exclusively simulated the test conducted in the “North” spread footing of 3x3m.

The soil in which the experiment is conducted consists of a first overconsolidated sand stratum of 11m, followed by a hard clays stratum that extends, at least, to a depth of 33m. The sand stratum can be divided, in turn, into three sublayers: the first is 3,5m thick and contains medium-high density fine silty sands, the second is 3,5m thick and contains silty sands with clays and gravels, and the third is 4m thick and contains silty sands/clays with medium-high density sands with gravels. In the simulations conducted by Benz (2007), a 15,0m depth domain has been considered, in which clays located at a depth of -11,0m have not been considered. The permeability of the soil that surrounds the excavation allows to consider a drained behavior. The water table is 4,9m deep. The reactions of the jacks that apply the load on the spread footing are transmitted at depths close to 20m, corresponding to the hard clay layer outside the influence area of the pressure bulb.

The geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model are shown in *Figure 23*.

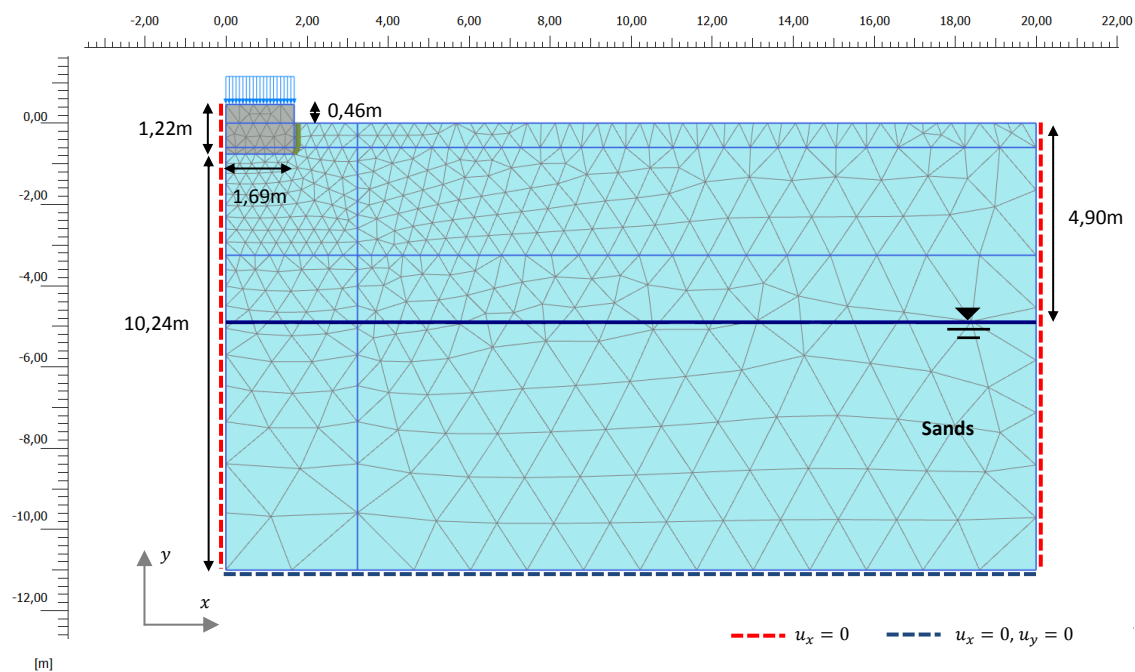


Figure 23. Geometry, materials, boundary conditions and mesh of the numerical model of the test with the "North" experimental spread footing of 3x3m.

Axisymmetric conditions are considered to approximate the 3D geometry of the boundary value problem. A circular shape of the spread footing is adopted with an equivalent radius $R_{eq} = 1,69m$, considering a spread footing side of $B = 3,0m$.

For the determination of the soil parameters, several laboratory and field tests were conducted, whose results can be consulted in the report of Briaud and Gibbens (1997), including several resonant column tests and triaxial tests whose graphs are shown in the thesis of Benz (2007). As in the latter, two SETs of parameters are considered for the sands (SET 1 and SET 2). SET 1 dispenses with the results obtained in the field tests and only considers those provided by the laboratory tests, while SET 2 increases the maximum shear stiffness of the soil by 40% with respect to SET 1, approaching the field test stiffness measures.

As described by Briaud and Gibbens (1997), the sands are slightly overconsolidated due to the drying of the fines they contain and the excavation of approximately 1m of the overburden. Given the lack of data in relation to the level of overconsolidation, an estimation has been made. To this end, it has been considered that overconsolidation can be reproduced, in this case, by the application and removal of a surface load prior to the test as Benz (2007) does, although Benz does not provide the value of such load. Based on this hypothesis, it has been calculated, using the HS-SS model and SET 1, the magnitude of the mentioned load by adjusting the curves obtained by Benz, resulting a value of 300kPa.

Table 16 provides soils specific weight and the parameters values of SET 1 and SET 2 corresponding to the EPHYSS and HS-SS models. On the other hand, Table 17 provides the parameters corresponding to the spread footing, which are simulated with continuum elements and a linear elastic constitutive model, as well as the interface parameters between the vertical plane of the spread footing and the soil. The soil-structure interaction is simulated by means of an interface on which a reduction in stiffness and strength is considered by the parameter R_{inter} . Table 18 provides the value of the total load applied on the spread footing in each phase.

		Sands SET 1	Sands SET 2	Units			
Specific weights	γ_{sat}	20,0	20,0	[kN/m ³]			
	γ_{unsat}	18,0	18,0				
ELASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	0,0002	0,0002	[-]		
		HS-SS	G_0^{ref}	108.333	151.667	[kN/m ²]	
	ν'_{ur}		0,20	0,20	[-]		
	EPHYSS	K_s^{ref}	20.552	20.552	[kN/m ²]		
		m_1	0,50	0,50	[-]		
		$p'_{ref,1}$	100	100	[kN/m ²]		
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	89.059	124.683	[kN/m ²]		
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	39.186	54.861	[kN/m ²]		
		m_2	0,50	0,50	[-]		
		$p'_{ref,2}$	100	100	[kN/m ²]		
		ν'_{min}	0,20	0,10	[-]		
		PLASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	E_{50}^{ref}	16.000	16.000	[kN/m ²]
				$E_{t,ur}^{ref}$	90.000	90.000	[kN/m ²]
	E_{oed}^{ref}			22.000	22.000	[kN/m ²]	
c'	0			0	[kN/ m ²]		
φ'	37			37	[deg]		
ψ	1,5			1,5	[deg]		
p'_{ref}	100			100	[kN/ m ²]		
m	0,50			0,50	[-]		
K_0^{NC}	0,41			0,41	[-]		
R_f	0,90			0,90	[-]		
σ'_{trac}	0	0	[kN/ m ²]				

Table 16. Soils specific weight and parameters of the EPHYSS and HS-SS models for SET 1 and SET 2.

	Dimensions [m]x[m]x[m]	Embedded Depth [m]	Constitutive Model	E [GPa]	ν [-]	γ_{unsat} [kN/m ³]	R_{inter} [-]
Spread footing "North" 3x3m	3x3x1,76	0,76	Linear Elastic	30	0,20	25	0,67

Table 17. Geometry of the spread footing deduced from the work of Briaud and Gibbens (1997) and parameters of the constitutive model assumed.

Phase	Distributed Load q [kN/m ²]	Total Load Q [kN]
A	-501,5	-4.500
B	0	0
C	-891,6	-8.000
D	0	0
E	-1.114,5	-10.000

Table 18. Loads applied on the spread footing taken from Briaud and Gibbens (1997).

In this case, the reinitialization of the history of soil strains and displacements is applied after the calculation phase in which the *in situ* field stresses are determined and the phase in which the 300kPa load is applied and removed with which the overconsolidation of the sands is reproduced.

Figure 24 shows the measures of the spread footing load-displacement curves and the results of the simulations for SET 1 (Figure 24, left) and SET 2 (Figure 24, right) with the EPHYSS and HS-SS models. In Figure 24 (left) it can be seen how both models predict a similar noval loading curve, which approximates the measured values quite well. Nevertheless, in the first stretch of such curve, between the loading values of 0kN and 4.500kN, both models show a stiffness lower than the one measured. Regarding the unloading-reloading curves, the EPHYSS model presents stiffness closer to the measures compared to the HS-SS model, although the cycles calculated with the EPHYSS model are narrower than those calculated with the HS-SS model and those measured. Furthermore, in Figure 24 (right) it can be seen how the increment in soil stiffness in both models allows the slope of the noval loading curve to be adjusted well between the loading values of 0kN and 4.500kN, being the EPHYSS model approximation slightly better than that of the HS-SS model. In relation to the unloading-reloading curves, the EPHYSS model, in the same way as with SET 1, has stiffness closer to the measures compared to the HS-SS model, although, again, the cycles calculated with the EPHYSS model are narrower than those calculated with the HS-SS model and those measured.

On the other hand, Figure 25 shows the values $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ for SET 2, which result from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models. In such figure, the differences in the distribution of the shear stiffness values between both models can be seen, although, in this case, these differences are small compared to the differences observed in other boundary value problems analyzed in previous sections. These small differences in the stiffness are rendered, in turn, into the small differences of soil displacements under the spread footing, as can be seen in Figure 24. The values of the settlements measured with extensometers under the spread footing indicate that the soil does not suffer vertical displacements at depths below the spread footing greater than $2B = 6m$. The simulation that best approximates the depth of the pressure bulb is that corresponding to the EPHYSS model for SET 2 (Figure 26).

Finally, Figure 27 shows the similarity in the plastic behavior between both models, which is logical considering that the two have a very similar plastic formulation.

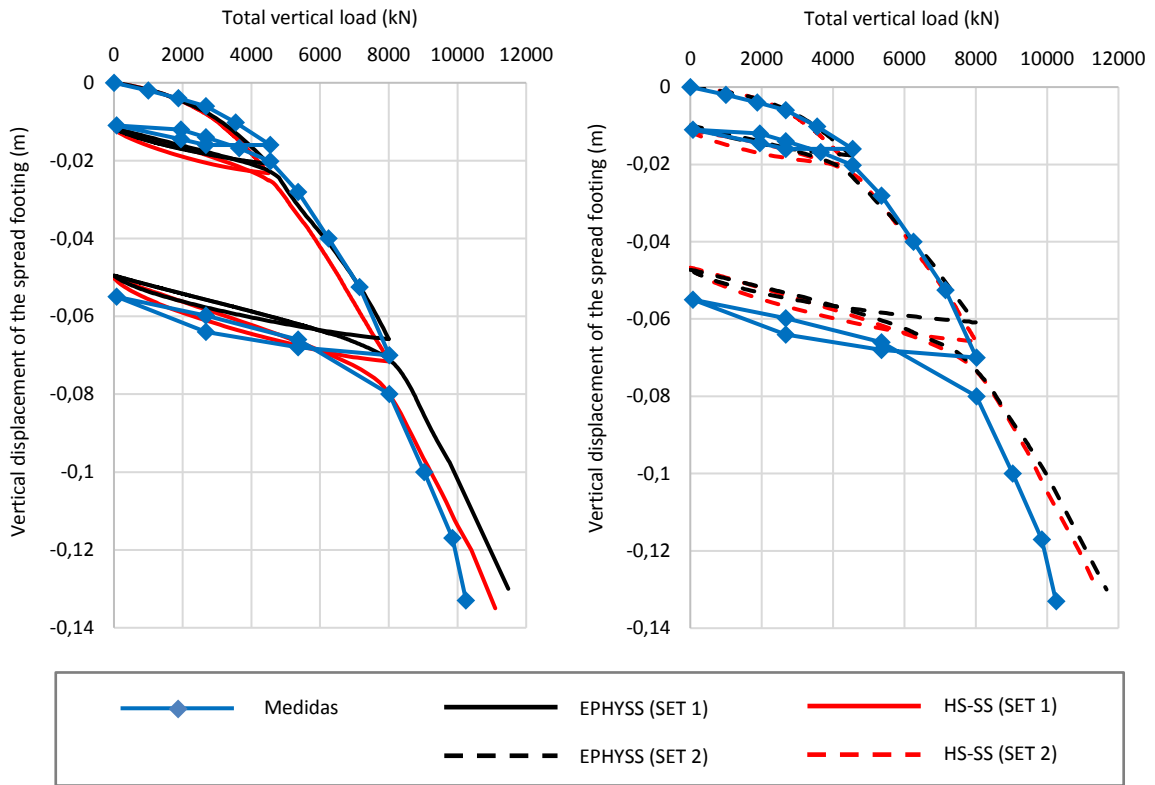


Figure 24. Measures of the load-displacement curves of the “North” spread footing of 3x3m and results of the simulations with the EPHYSS and HS-SS models for SET 1 (left) and SET 2 (right).

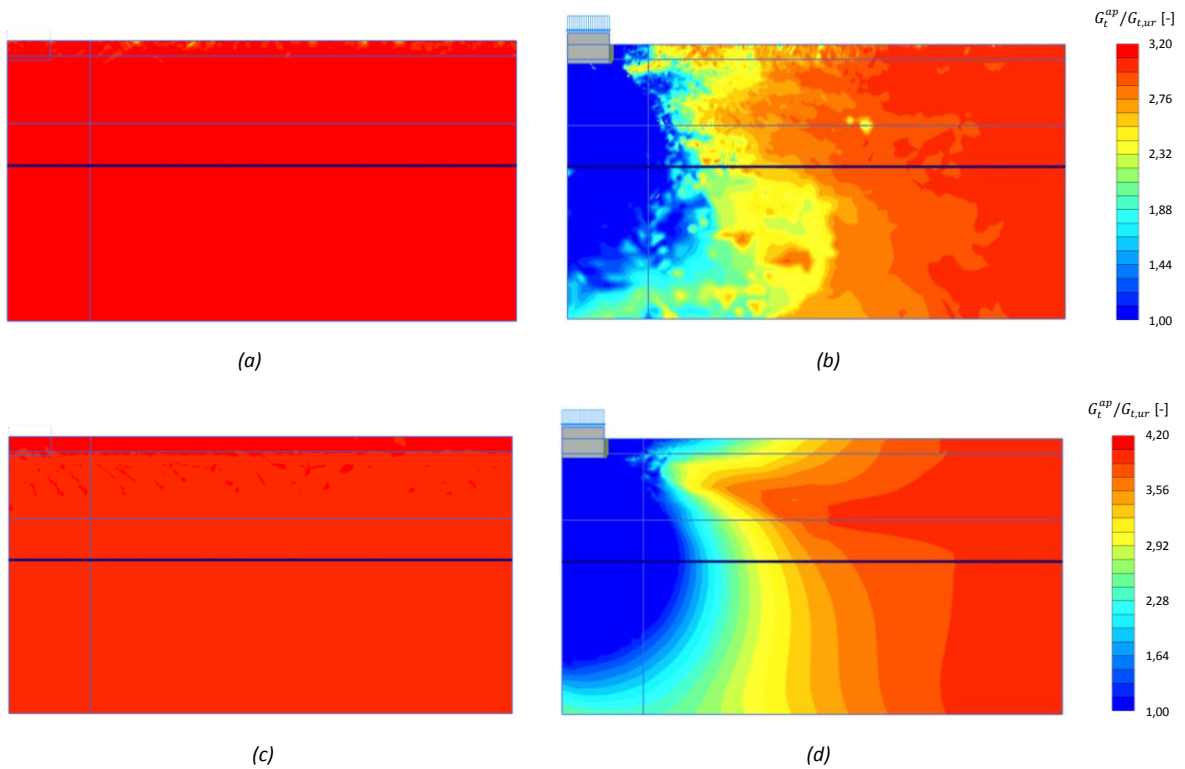


Figure 25. Above: values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ with the EPHYSS model for SET 2. (a) Initial phase. (b) Final phase. Below: values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ with the HS-SS model for SET 2. (c) Initial phase. (d) Final phase.

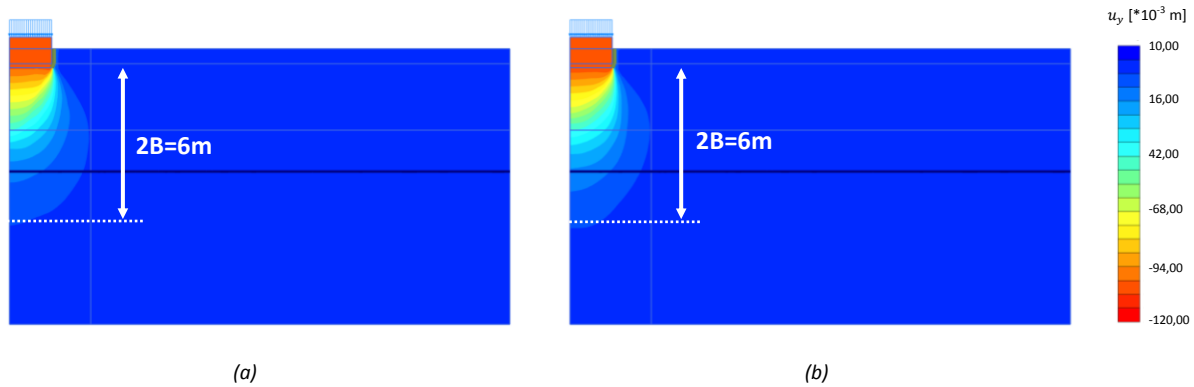


Figure 26. Settlements under the spread footing for SET 2. (a) EPHYSS model ($u_{y,max}=-0,102\text{m}$). (b) HS-SS model ($u_{y,max}=-0,105\text{m}$).

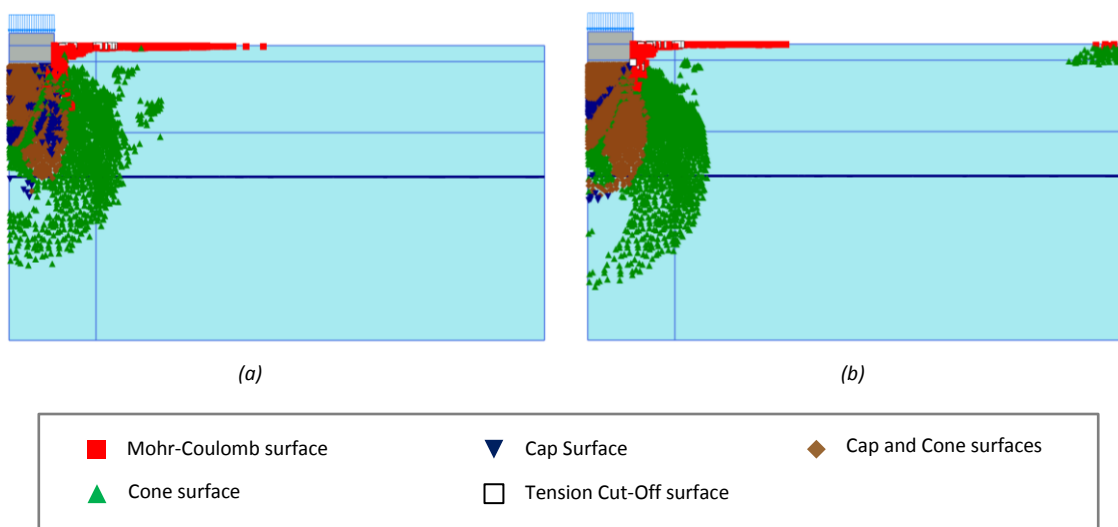


Figure 27. Plastic points for SET 2. (a) EPHYSS model. (b) HS-SS model.

8. Study of a large urban excavation in Barcelona

The future intermodal station of La Sagrera in Barcelona, with an execution budget of 2.250M€, will constitute an important intermodal node in the local, national and European public transport network. The dimensions of the excavation that has been conducted for the construction of the station have been 650m long, 35 to 80m wide and 20m deep. It is expected that the structures of the platforms, parking and access to the station transmit the loads to the ground through a large foundation slab of up to 4m thick.

The geology corresponding to the area in which the future La Sagrera station will be located is described in the original project and is complemented by subsequent geotechnical site investigations, cited in the report of Vázquez-Suñé et al. (2011). This report describes the stratigraphy and sedimentary geometry of the project area, from the bottom up, as follows:

- Compact grey or blue marls/limolites, with a few meters thick greenish or yellowish altered stratum in the upper part corresponding to the Pliocene substrate.
- Succession of gray-greenish or yellowish silty sands more or less arkosic, slightly rounded gravels with metamorphic elements, clayey matrix and green, beige and yellow silty clay levels. In some boreholes, sandy materials attributed to the upper Pliocene appear.
- A succession of reddish and brown clays with sand intercalations and angular gravel layers with abundant clayey matrix. Intercalated in this set there are various carbonated strata, that either form nodules between soil

particles or well-defined carbonated deposits, which correspond to colluvial facies, torrential flow materials and, in some cases, alluvium. Quaternary soils are formed by recent sedimentation Collserola materials over these carbonated strata.

Finally, soil hydrogeology is also described in depth in the mentioned report. For the hydrogeological characterization of the subsoil of the future station, Vázquez-Suñé et al. (2011) calibrated the transmissivities of the different layers of the soil from: (a) the information available in the historical background, (b) the information of the different geotechnical site investigations carried out during and after the project and (c) the results obtained in the analysis of the pumping tests performed in March 2011. From these transmissivities, the permeabilities of the different materials have been established. Given the nature of the soil concerned, anisotropy of permeability has been considered by adopting values of $k_y = 0,1k_x$ in all the materials.

Table 19 shows the geotechnical units considered from the available information.

Fill	Anthropic fill	Ra	
Quaternary	Red clays and yellow carbonated silts	Qa1-Qa2	
	Gravels and sands	Qa3	
Pliocuaternary	Sands and gravels	PQ1	
	Clays and silts	PQ2	
Pliocene	Sands with intercalated clay, silt and greenish marl layers	PI1	
	Blue-gray marly clays	PI2	

Table 19. Geotechnical units.

The magnitude of the work has required a large site investigation including field and laboratory tests that are described in the project and other documentation. Multiple field and laboratory tests have been conducted, including: pressuremeter tests, SPT, pumping tests, soil gradation tests with sieve and hydrometer analysis, soil density determination, Atterberg limits, water content, CD, CU and UU simple compression tests, direct shear tests, oedometric tests and chemical analysis of the soil and the groundwater. Furthermore, within this investigation 4 high-quality hand-carved block samples were taken from the excavation vessel in order to conduct resonant column tests using different confinement pressures (100kPa, 200kPa and 300kPa) to determine soil parameters in the range of small strains. One of the 4 block samples is located in the Qa1-Qa2 unit and the remaining three in the PQ2 unit. A total of 20 cylindrical samples were obtained from the 4 block samples, 13 of them verticals and 7 horizontal. The tests conducted provided isotropic values $G_0^{ref} = 103MPa$ and $\gamma_{0.7} = 1,20 \cdot 10^{-4}$ in the unit Qa1-Qa2 and $G_0^{ref} = 100MPa$ and $\gamma_{0.7} = 2,00 \cdot 10^{-4}$ in the PQ2 unit. No tests are available for the direct determination of the values of the parameters G_0^{ref} and $\gamma_{0.7}$ of the materials corresponding to the geotechnical units Ra, Qa3, PQ1, PI1 and PI2, and, therefore, these are estimated from correlations with the results of other tests conducted. The expression of Hardin and Black (1968) has been used considering the function $f(e)$ given by Hardin and Richart (1963) with $\hat{B} = 2,97$, resulting the relation $G_0 = 33(2,97 - e)^2 / (1 + e) (-p'/p'_{ref})^{0,50}$. The value of e can be obtained from the relation $e = w\gamma_s / S_r\gamma_w$, where is usual to consider $\gamma_s/\gamma_w \approx 2,65$. Likewise, for materials located below the water table, $S_r \approx 1,0$ can be considered, and in the case of unit Qa3, $S_r \approx 0,75$ is considered. Otherwise, empirical correlations of type $G_0 = A'(N_{60})^{B'}$ have been used, specifically those proposed by Hara et al. (1974) for tertiary soils and the expressions of Ohsaki and Iwasaki (1973) for all types of soils, cohesive soils and granular soils. It has been found that the expression of Ohsaki and Iwasaki (1973) for cohesive soils provides values of $G_0 = 105 MN/m^2$ for the materials corresponding to the geotechnical unit Qa1-Qa2 and $G_0 = 115 MN/m^2$ for the materials corresponding to the geotechnical unit PQ2, approximating well the values obtained with the resonant column tests. The previous empirical relations implicitly consider the effect of p' on G_0 . Such effect depends on the soil pressure at which the tests for the determination of N_{60} , e , w and S_r are carried out. However, the alteration of the field stress conditions when the SPT test is conducted and the alteration of the sample extracted for the determination of e , w and S_r lead to the fact that, in general, the value of the G_0 obtained by means of the aforementioned correlations may be lower than the real one, consequently a correction using the factor $(-p'/p'_{ref})^m$

could lead to a greater error than the one committed if this correction is not considered. In the absence of more data, and based on the depths at which G_0 is evaluated, $G_0 \approx G_0^{ref}$ will be considered, being $p'_{ref} = 100kPa$. To estimate the value of $\gamma_{0.7}$, two correlations have been used: (1) in the case of cohesive soils, the empirical chart of Vucetic and Dobry (1991) that relates $IP - \gamma - G_0$ has been used and (2) in the case of granular soils, the expression of Dos Santos and Correia (2001) for normally consolidated soils, which results from combining the expression $\gamma_{0.7} = \alpha\tau_{max}/G_0$ with the Mohr-Coulomb strength criterion (considering $G_0 \approx G_0^{ref}$) allows to apply directly such value in the calculation expression of $\gamma_{0.7}$ and, since none of the numerical models used consider $\gamma_{0.7}(-p')$, the value of $-\sigma'_1$ corresponding to the layers midpoint depth in the expression of $\gamma_{0.7}$ is used. The value of $\gamma_{0.7}$ estimated for the material of the geotechnical unit PI1 provides vertical displacements in the numerical simulations with the EPHYSS and HS-SS models significantly smaller than those measured, and it has been proven that a value of $\gamma_{0.7} = 4 \cdot 10^{-5}$ maximizes the approximation of these displacements simultaneously in both models.

Table 20 provides soils specific weight, permeabilities and parameter values of the EPHYSS and HS-SS models for each of the geotechnical units. All the materials are normally consolidated, so that $OCR = 1$.

In order to optimize the design of the large foundation slab by adjusting the values of the ballast coefficient used in the calculations of the original project, 4 extensometers of 60m depth each were installed along the longitudinal axis of the excavation. With these extensometers it has been possible to measure the response of the ground vertical displacement during the different phases of the excavation.

Likewise, the measurements of the extensometers have been taken simultaneously with the surface topographic measurement of the transversal profiles of the excavation in which each of these extensometers is located. Considering the high number of measurements made, it was decided to choose those corresponding to the most relevant excavation phases: PHASE 0 (initial state), PHASE A (02/03/2011 - 03/03/2011), PHASE B (05/05/2011 - 06/05/2011), PHASE C (06/30/2011) and PHASE D (03/30/2012 - 04/02/2012). Figure 28 shows in the work plant the situation of the transversal cross-sections that contain each of the extensometers and the longitudinal cross-section that contains all of them.

Based on the geometry of the excavation and the selected phases, a total of five 2D numerical models have been made, corresponding, respectively, to the four transversal cross-sections and the longitudinal one, which correspond to the profiles shown in Figure 28. The purpose of analyzing the excavation cross-sections in different directions is to study the possible 3D effect of the excavation on the ground displacements. The geometry of the models analyzed, in each of the calculation phases, is shown in Figures 29 to 33. Earth stockpiles during the work have been simulated as equivalent loadings. The lower horizontal boundary of the domain of each model has been placed at the maximum depth of the extensometers, thus achieving that the origin of the displacement measurements coincides with that of the simulations. Likewise, an analysis of the effect on the results that generates both the extension of the calculation domain in the horizontal direction and the refinement of the calculation mesh, have been performed. From this analysis it is concluded that both the geometry and the mesh size adopted are adequate, with no significant changes taking place when considering a larger domain or a finer mesh. The water table is at the reference level + 2,5m. In no phase of excavation analyzed has reached that level. Note that in Phase D of extensometer No. 2 no information of the displacements in the first 5m below the surface is provided.

Two types of analysis have been performed:

- 1) **Drained analysis:** Drained conditions ($-\Delta p_w = 0$) for materials corresponding to all geotechnical units.
- 2) **Undrained-consolidated analysis:**
 - a) In the materials corresponding to the less permeable geotechnical units (Ra, Qa1-Qa2, PQ2 and PI2) it has been considered, in each excavation phase, a first subphase with undrained conditions ($-\Delta\epsilon_v = 0$), followed by a second consolidation subphase ($\Delta p_w \rightarrow 0$), whose duration corresponds to the period between the respective phases of excavation. After the application of the undrained loading in Phase D, no subsequent consolidation phase is applied. In the undrained loading subphases it has been considered: (a) $S_r \approx 1$ and $T = 100kN/m^2$ in the materials located under the water table, (b) $S_r \approx 0$ without generating water pressure in (dry) materials located above the water table in order to simplify the problem.

- b) In the materials corresponding to the most permeable geotechnical units (Qa3, PQ1 and PI1), drained conditions have been considered ($-\Delta p_w = 0$) in the two subphases of each calculation phase described in point (a).

		Ra	Qa1-Qa2	Qa3	PQ1	PQ2	PI1	PI2	Units		
Specific weight	γ_{sat}	18	19	19,5	19	19	18,5	18,5	[kN/m ³]		
	γ_{unsat}	20	21	21,5	21	21	20,5	20,5			
Permeability	k_x	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	11	17	$1,0 \cdot 10^{-1}$	1,40	$8,0 \cdot 10^{-3}$	[m/day]		
	k_y	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	1,1	1,7	$1,0 \cdot 10^{-2}$	0,14	$8,0 \cdot 10^{-4}$	[m/day]		
ELASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	$\gamma_{0,7}$	$1,50 \cdot 10^{-4}$	$1,20 \cdot 10^{-4}$	$1,58 \cdot 10^{-4}$	$2,76 \cdot 10^{-4}$	$2,00 \cdot 10^{-4}$	$4,00 \cdot 10^{-5}$	$2,20 \cdot 10^{-4}$	[-]	
		HS-SS	G_0^{ref}	41,9	103,0	168,7	205,4	100,0	182,1	188,4	[MN/m ²]
	ν'_{ur}		0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]
	EPHYSS	K_s^{ref}	14,6	11,4	156,8	17,0	8,9	20,4	9,5	[MN/m ²]	
		m_1	0,50	0,60	0,50	0,50	0,65	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,1}$	100	100	100	100	100	100	100	[MN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	38,5	87,7	141,6	167,5	76,4	143,5	115,6	[kN/m ²]	
		$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	16,9	43,9	62,3	73,7	38,2	63,2	57,8	[kN/m ²]	
		m_2	0,50	0,60	0,50	0,50	0,65	0,50	0,70	[-]	
		$p'_{ref,2}$	100	100	100	100	100	100	100	[N/m ²]	
		ν'_{min}	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	[-]
		PLASTIC BEHAVIOR	HS-SS and EPHYSS	E_{50}^{ref}	19,0	20,0	24,0	25,0	20,0	31,0	31,0
	$E_{t,ur}^{ref}$			57,0	60,0	72,0	75,0	60,0	93,0	93,0	[MN/m ²]
	E_{oed}^{ref}			15,2	16,0	19,2	20,0	16,0	24,8	24,8	[MN/m ²]
	c'			5	30	1	1	30	20	70	[kN/ m ²]
φ'	28			29	34	38	29	35	25	[deg]	
ψ	0			0	0	0	0	0	0	[deg]	
p'_{ref}	100			100	100	100	100	100	100	[kN/ m ²]	
m	0,50			0,60	0,50	0,50	0,65	0,50	0,70	[-]	
K_0^{NC}	0,53			0,52	0,44	0,40	0,52	0,43	0,56	[-]	
R_f	0,90			0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	[-]	
σ'_{trac}	0	0	0	0	0	0	0	[kN/ m ²]			

Table 20. Soils specific weight and parameters of the EPHYSS and HS-SS models for each of the geotechnical units.

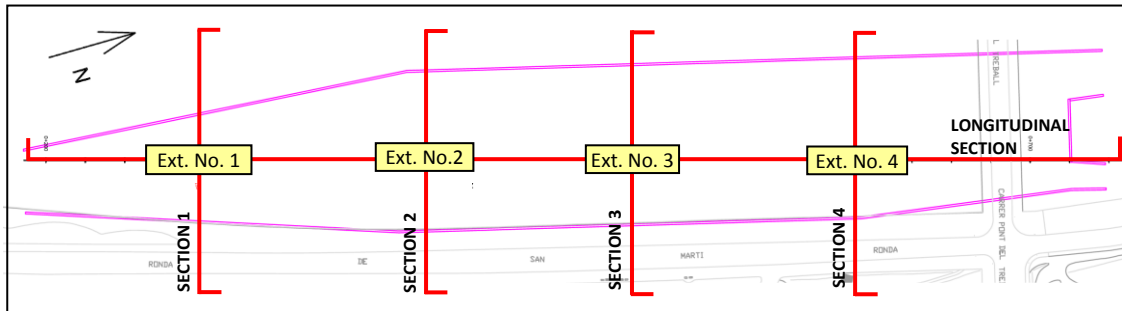


Figure 28. Plant with transversal cross-section and longitudinal cross-section.

A first analysis of *Figures 34 to 49* allows to affirm that the excavation simulations conducted with the EPHYSS or HS-SS models are not able to reproduce the upper part of the displacement profiles measured with the extensometers, in which a remarkable reduction in vertical soil displacements is appreciated. This behavior can be explained by the progressive drying of the soil near the water table as the excavation progresses, which generates gradual increases in suction in the unsaturated zone of the soil and, therefore, a shrinkage of it (Castellón, 2013). According to the simulations performed with the Barcelona Basic Model (BBM), the value of these displacements caused by shrinkage can be of the order of 5mm, thus approaching the observations (Castellón, 2013).

Except for the above, the following is concluded from the information contained in *Figures 34 to 49*:

- *Figures 34 to 37*: it is not possible to approximate well the displacements measured in the extensometer No. 1 from the simulations with the EPHYSS model nor with the HS-SS model, even the calculated displacements being of opposite sign to those measured.
- *Figures 38 to 41*: the results of the simulations with the EPHYSS model significantly improve the approximation to the measurements of the extensometer No. 2 in the different calculation phases, if compared with the results of the simulations with the HS-SS model, both in the transversal and longitudinal cross-section. Specifically, the simulation with the EPHYSS model in the transversal cross-section (*Figure 38*) is the one that provides the best results.
- *Figures 42 to 45*: the results of the simulations with the EPHYSS model approximate quite well the measurements of the extensometer No. 3 in the different calculation phases, especially in the transversal cross-section of the drained analysis. Furthermore, simulations with the HS-SS model approximate these measures better or worse depending on whether, in a certain calculation phase, the results of the transversal or longitudinal cross-section of the drained or undrained-consolidated analysis are considered, there being no simulation of the calculation phases with this model that improves, in all of them, the results obtained with the EPHYSS model.
- *Figures 46 to 49*: the results of the simulations with the EPHYSS model approximate well the measurements of the extensometer No. 4 in the different calculation phases, especially in the transversal cross-section of the drained analysis. On the other hand, simulations with the HS-SS model approximate these measures better or worse depending on whether, in a certain calculation phase, the results of the transversal or longitudinal cross-section of the drained or undrained-consolidated analysis are considered, there being no simulation of the calculation phases with this model that improves, in all of them, the results obtained with the EPHYSS model.

It is concluded, therefore, that the use of the EPHYSS model allows to improve the approximation to the measures taken with the extensometers with respect to the values calculated with the HS-SS model.

In the results of the simulations with the HS-SS model corresponding to the transversal and longitudinal cross-sections of the extensometers No. 2, No. 3 and No. 4, the effect of the inconsistencies generated by the consolidation phases in the undrained-consolidated analysis can be seen, which are due to the reinitialization of the components of the history tensor \mathbf{H} , giving place to significantly lower displacements than those obtained in the corresponding drained phases. This problem is solved in the EPHYSS model by defining new state variables. The effect of such inconsistencies in the HS-SS

model is especially evident in the results of phases B and C of extensometers No. 3 and No. 4. On the other hand, note that part of the difference between the displacement profile of the drained and undrained-consolidated analysis corresponding to phase D, both in the HS-SS model and in the EPHYSS model, is because, in such phase, no consolidation has been done after the application of the corresponding undrained loading.

Inconsistencies in the consolidation phases of the simulations with the HS-SS model can be easily detected in the graphs $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ corresponding to the consolidation phase of the undrained-consolidated analysis, when compared with the same graphs corresponding to the respective undrained loading phases of the undrained-consolidated analysis (e.g., for extensometer No. 2 in *Figures 50 to 52*). It can be clearly seen how both the EPHYSS and the HS-SS models have numerical reversals during the consolidation phase that give place to a soil stiffening. Nevertheless, unlike the HS-SS model, in which these reinitializations influence the subsequent soil history (as can be seen if the concatenation of calculation phases is analyzed in detail in the undrained-consolidated analysis, especially in the cross-section corresponding to extensometer No. 2, *Figures 51 and 52*), in the EPHYSS model this effect does not accumulate and therefore, have no influence in next phases. This is due to the fact that the EPHYSS model, despite suffering similar reversals to those observed in the HS-SS model (resulting in a reinitialization of the history tensor \mathbf{h}), is able to correct its effect in the subsequent calculation phases thanks to the introduction of the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e , which accumulate enough information from the recent history of the soil to recover the historical stiffness corresponding to a particular branch of previous loading/unloading/reloading, despite the possible cycles embedded in it.

It should be mentioned that the $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ values resulting from the simulations in the drained analysis and in the undrained phase of the undrained-consolidated analysis are similar for a same model. This similarity is due to the fact that, both in the EPHYSS model and in the HS-SS model, the shear soil behavior under an elastic regime does not depend on water pressures, except for the relation of $G_s^{ap}(-p')$ in the first and $G_s^{ap}(-\sigma'_3)$ in the second.

The simulations of the drained analysis with the HS-SS model provide significantly higher vertical displacements than those provided by the EPHYSS model (as can be seen, e.g., in *Figure 53*), while the simulations of the undrained-consolidated analysis seemingly provide more similar results in both models, especially in transversal cross-section corresponding to extensometers No. 2 and No. 4, and in the longitudinal cross-section. Although the effect generated by the inconsistencies in the HS-SS model during the consolidation phases should always be considered in this case.

Finally, in *Figures 54 and 55* it can be seen respectively, how the maximum value of the excess water pressure generated during the undrained loading phases of the undrained-consolidated analysis and the distributions of such excesses are very similar in the simulations performed with both models. The small existing differences can be attributed to the nonlinear behavior of K'_s with $-p'$ and, therefore, with $-\epsilon_{oct}^e$.

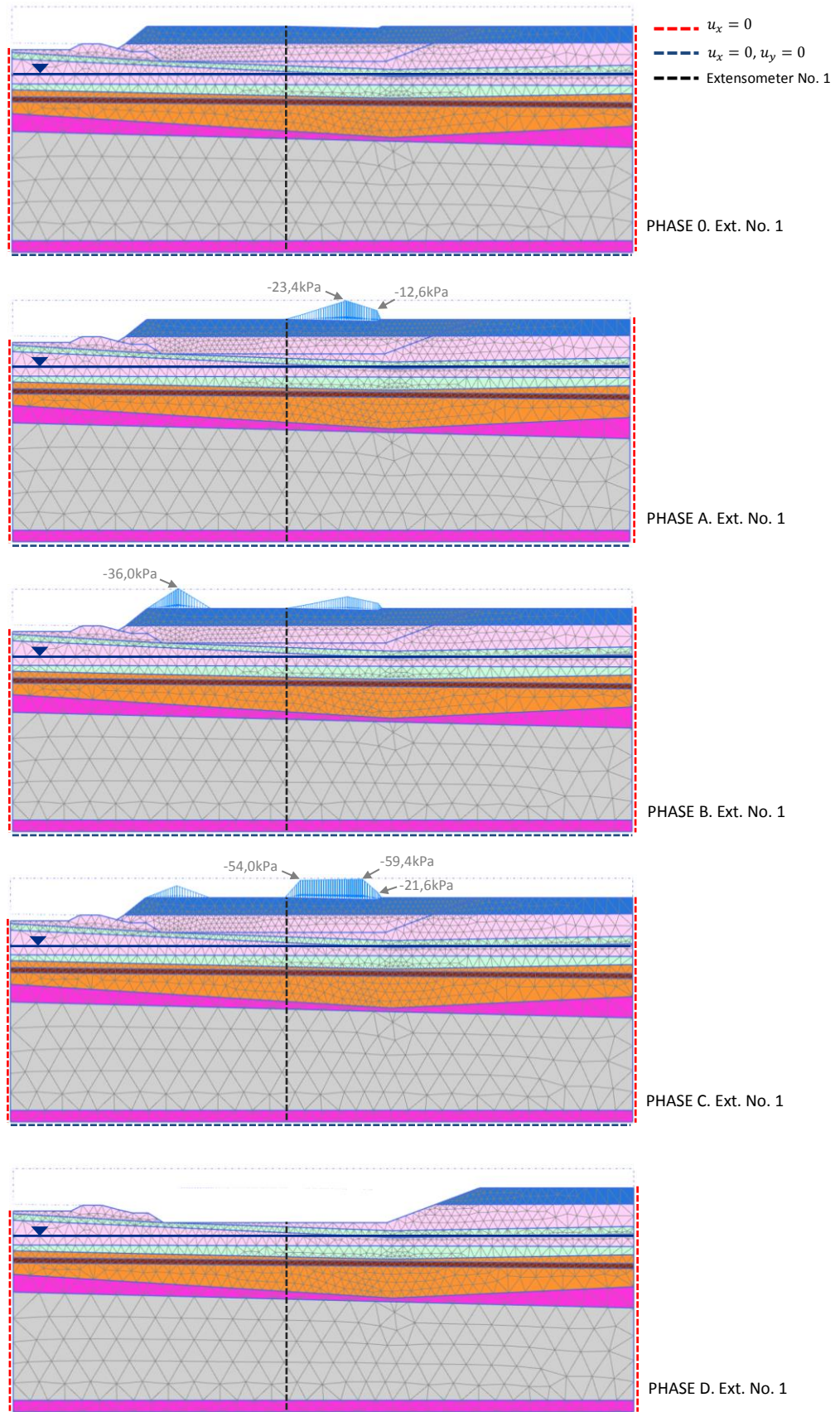


Figure 29. Geometry, loadings, materials, water table, boundary conditions, mesh and excavation phases of the numerical model corresponding to the transversal cross-section where the Ext. No. 1 is located. Dimensions $H=161m$, $V=63m$.

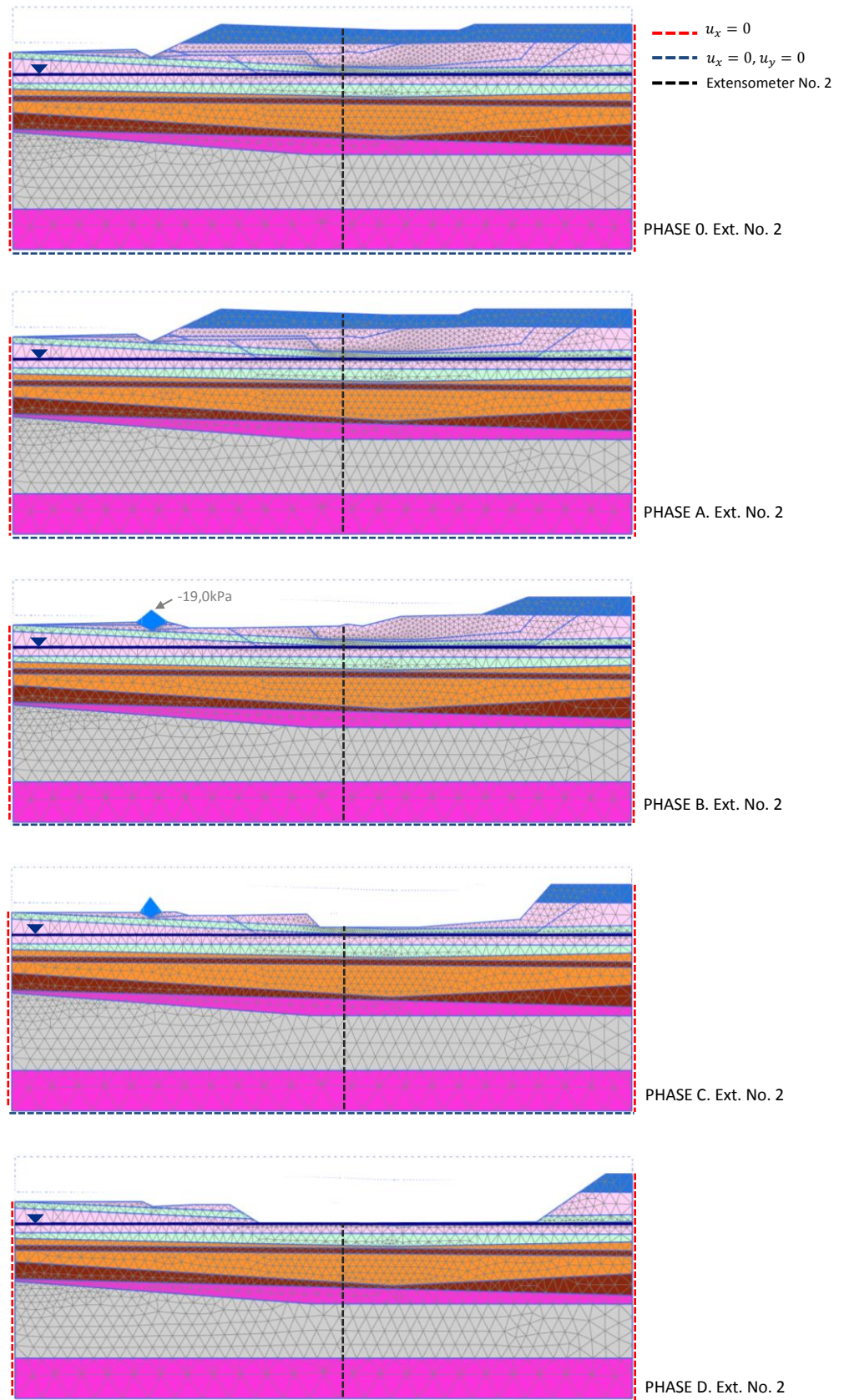


Figure 30. Geometry, loadings, materials, water table, boundary conditions, mesh and excavation phases of the numerical model corresponding to the transversal cross-section where the Ext. No. 2 is located. Dimensions $H=161m$, $V=63m$.

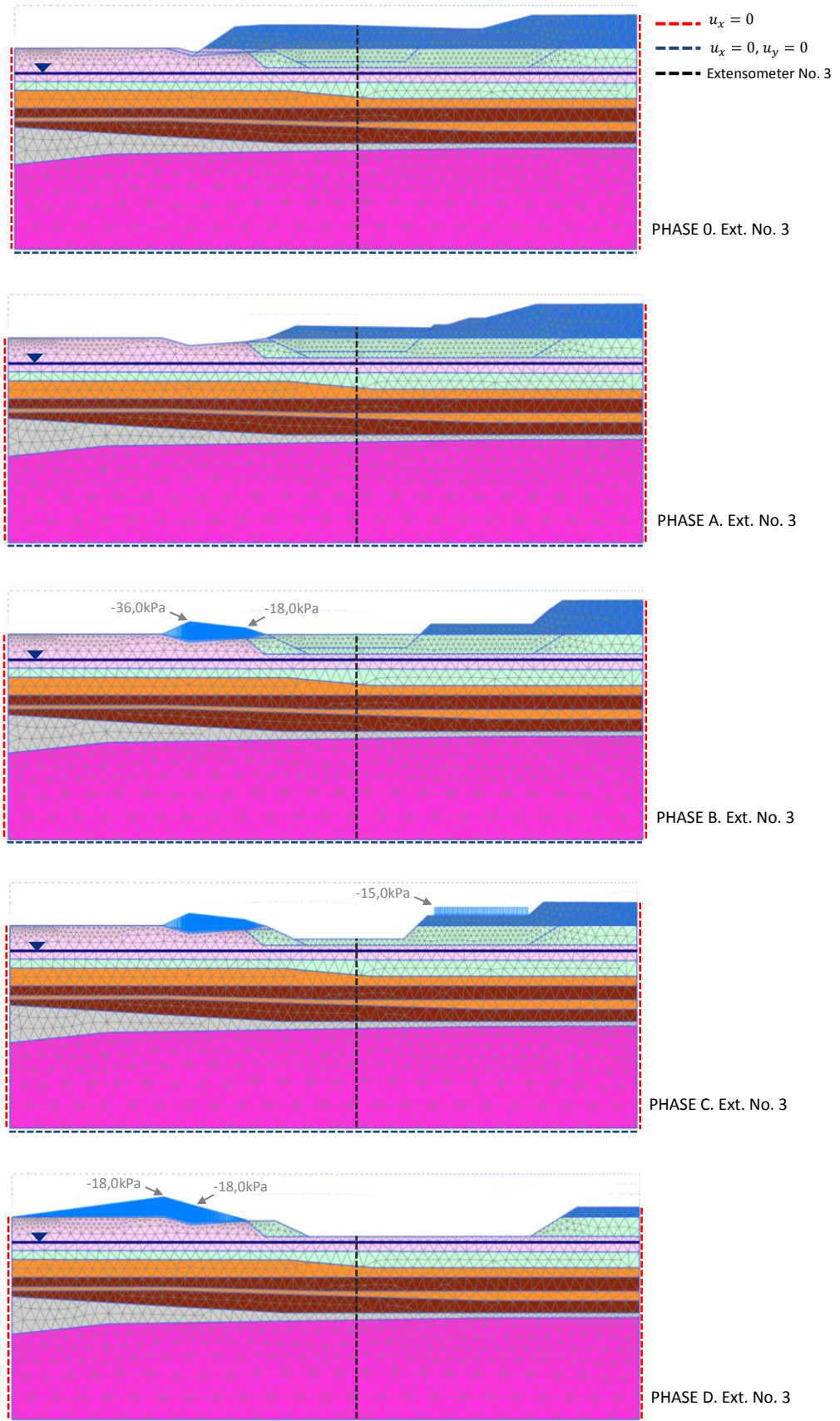


Figure 31. Geometry, loadings, materials, water table, boundary conditions, mesh and excavation phases of the numerical model corresponding to the transversal section where the Ext. No. 3 is located. Dimensions $H=161m$, $V=63m$.

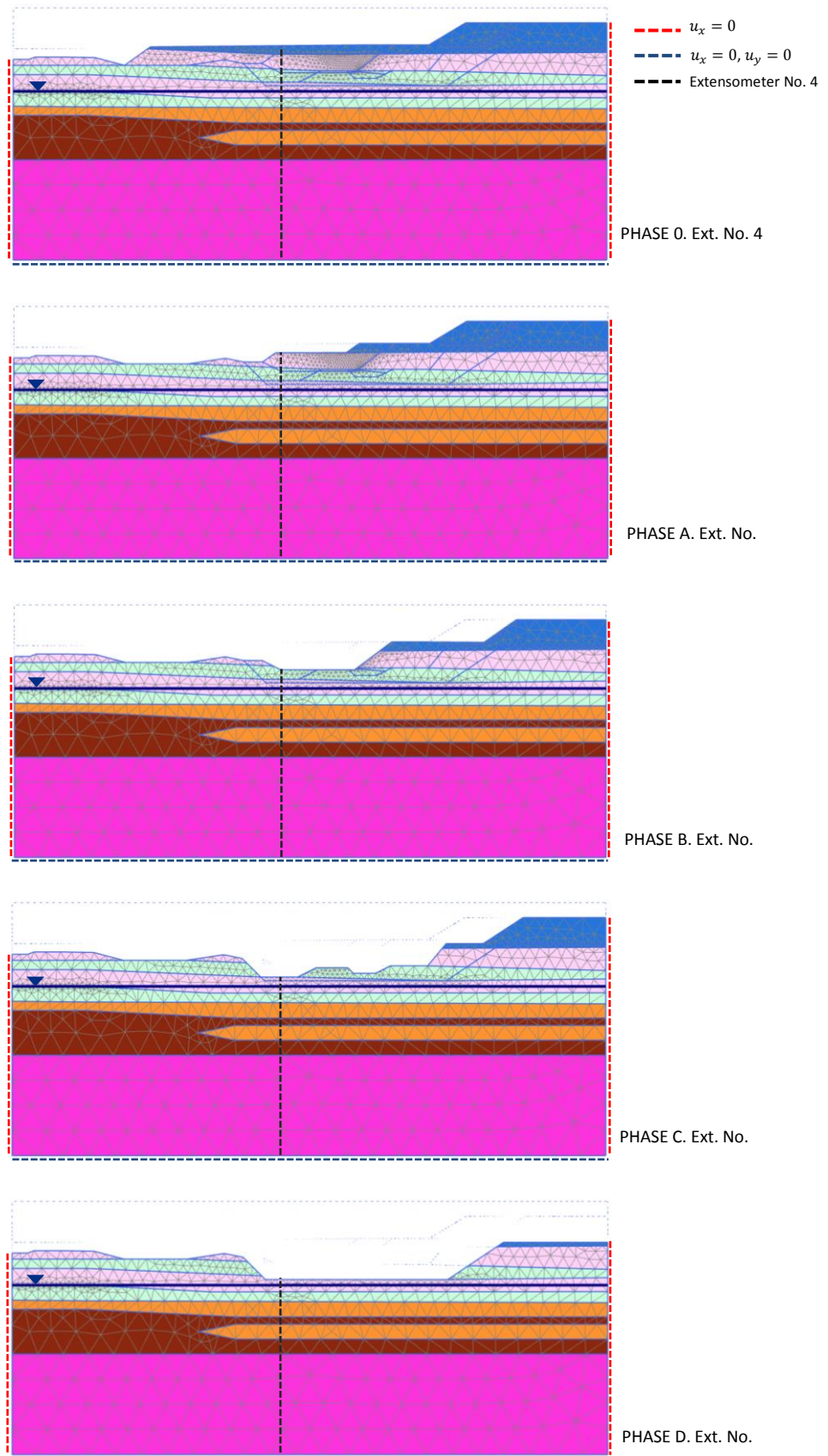


Figure 32. Geometry, loadings, materials, water table, boundary conditions, mesh and excavation phases of the numerical model corresponding to the transversal section where the Ext. No. 4 is located. Dimensions. $H=160m$, $V=68m$.

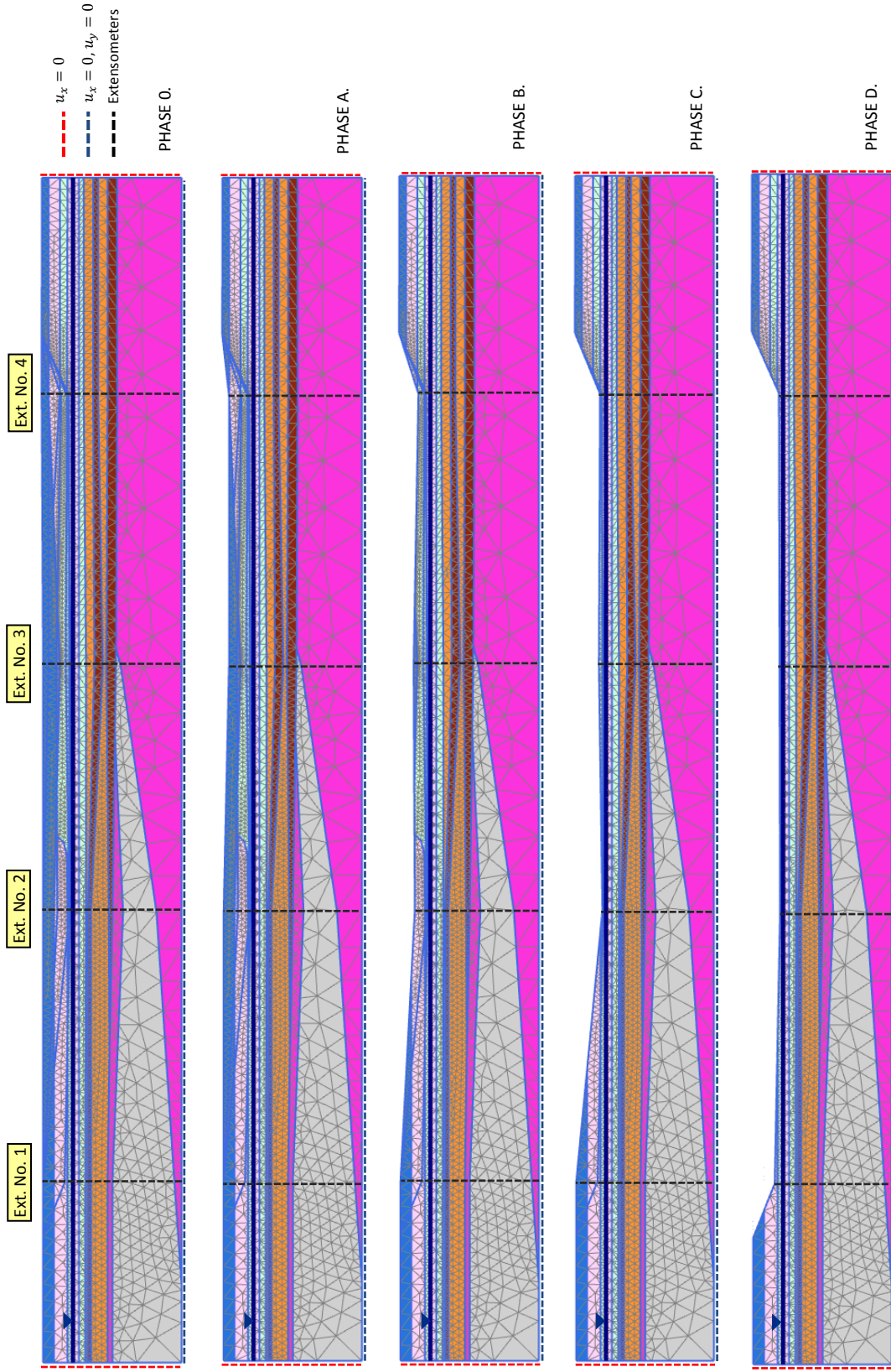


Figure 33. Geometry, loadings, materials, water table, boundary conditions, mesh and excavation phases of the numerical model corresponding to the transversal cross-section where all the extensometers are located. $H=500m$, $V=59m$.

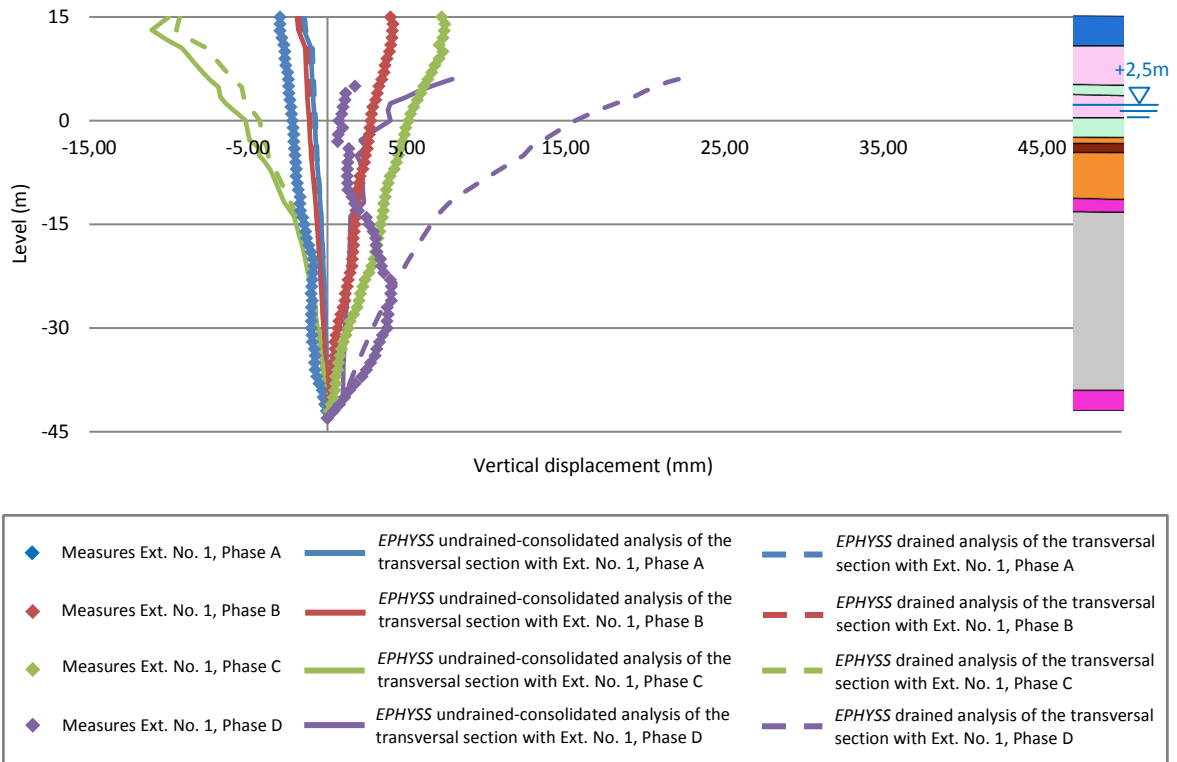


Figure 34. Measures of the extensometer No. 1 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding transversal cross-section.

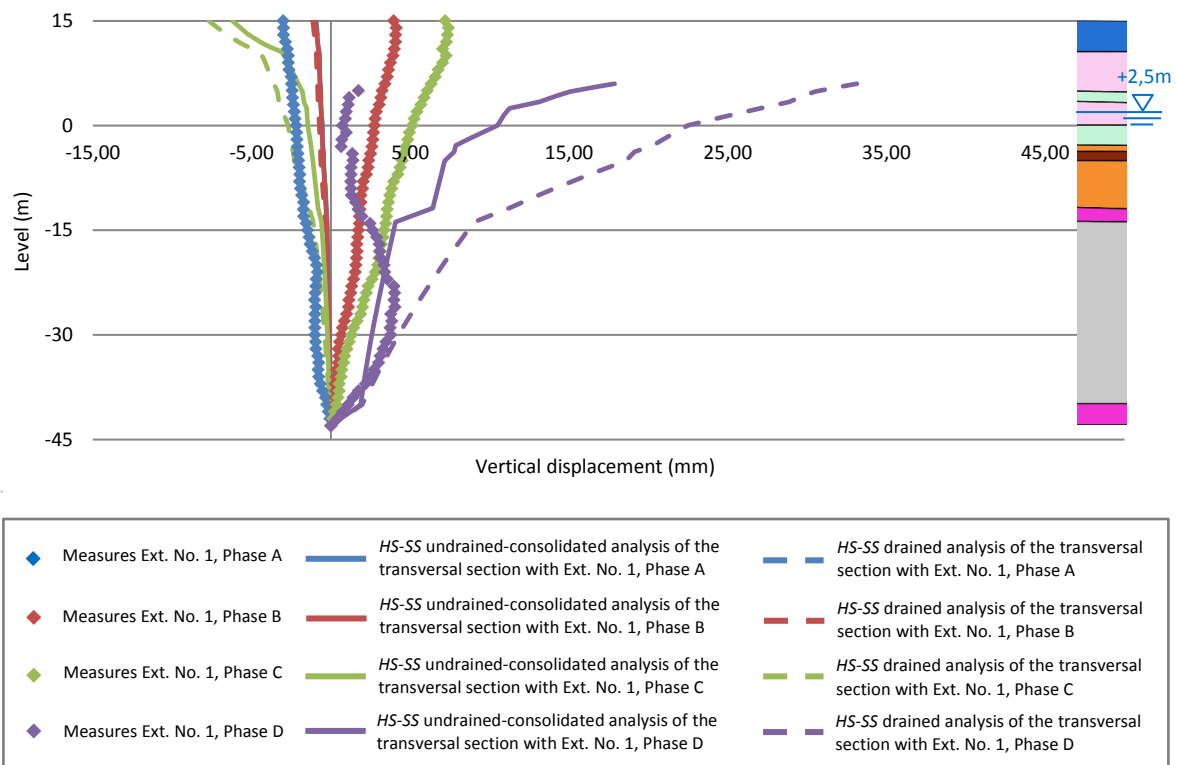


Figure 35. Measures of the extensometer No. 1 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding transversal cross-section.

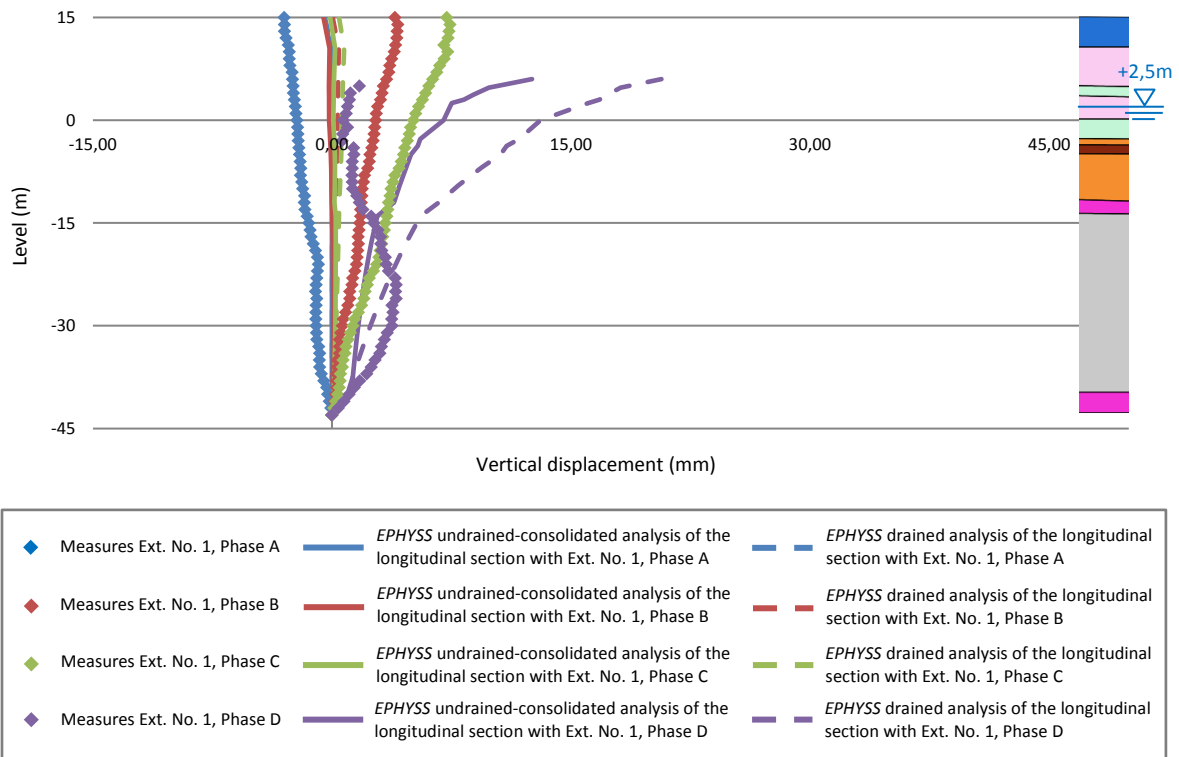


Figure 36. Measures of the extensometer No. 1 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding longitudinal cross-section.

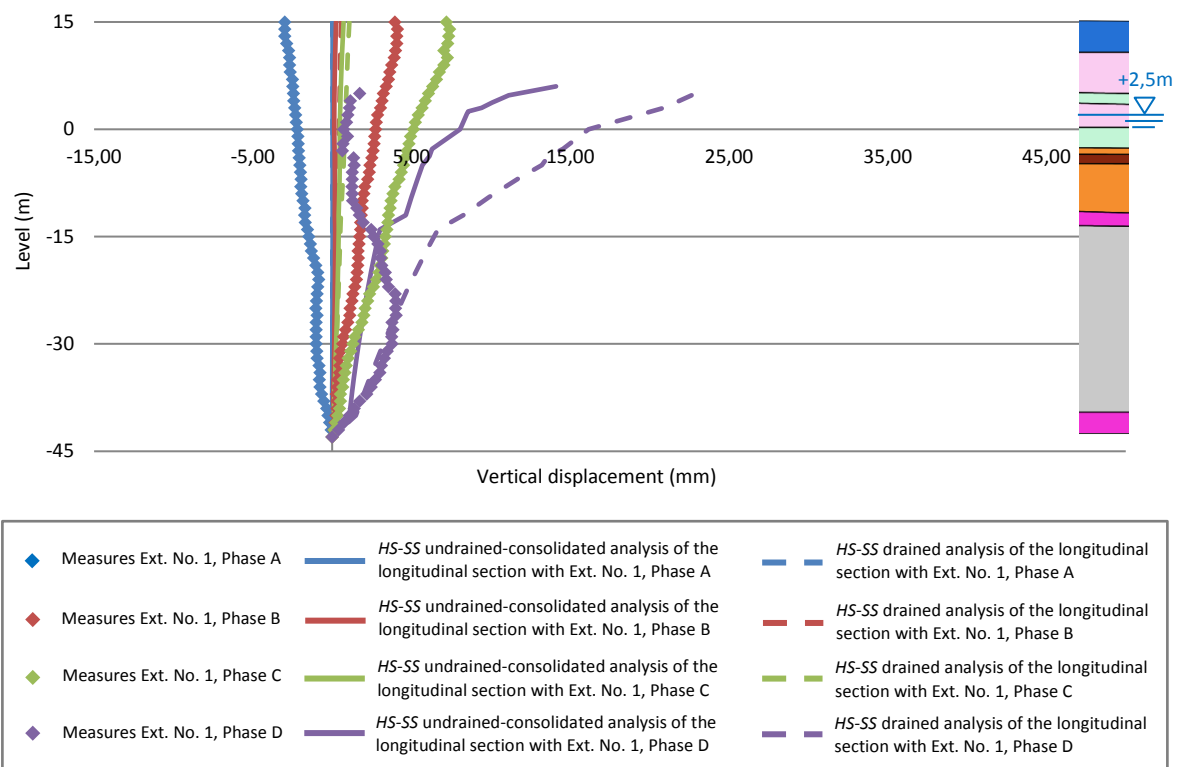


Figure 37. Measures of the extensometer No. 1 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding longitudinal cross-section.

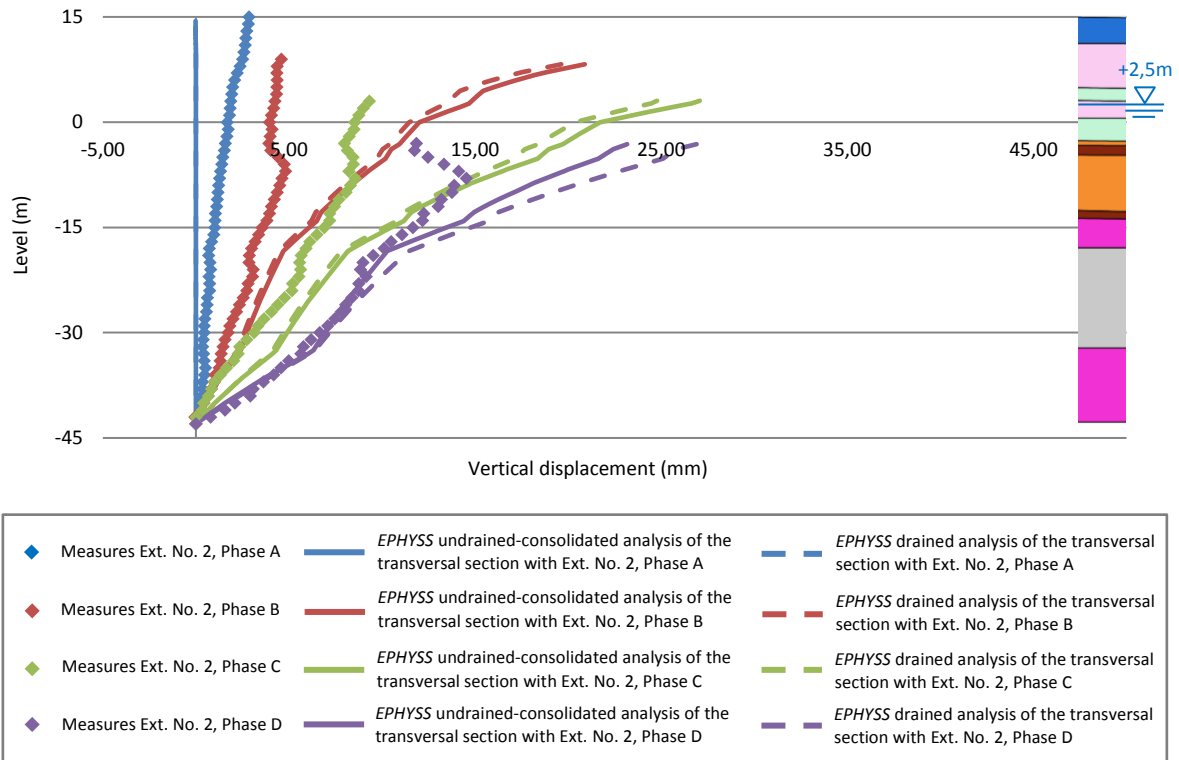


Figure 38. Measures of the extensometer No. 2 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding transversal cross-section.

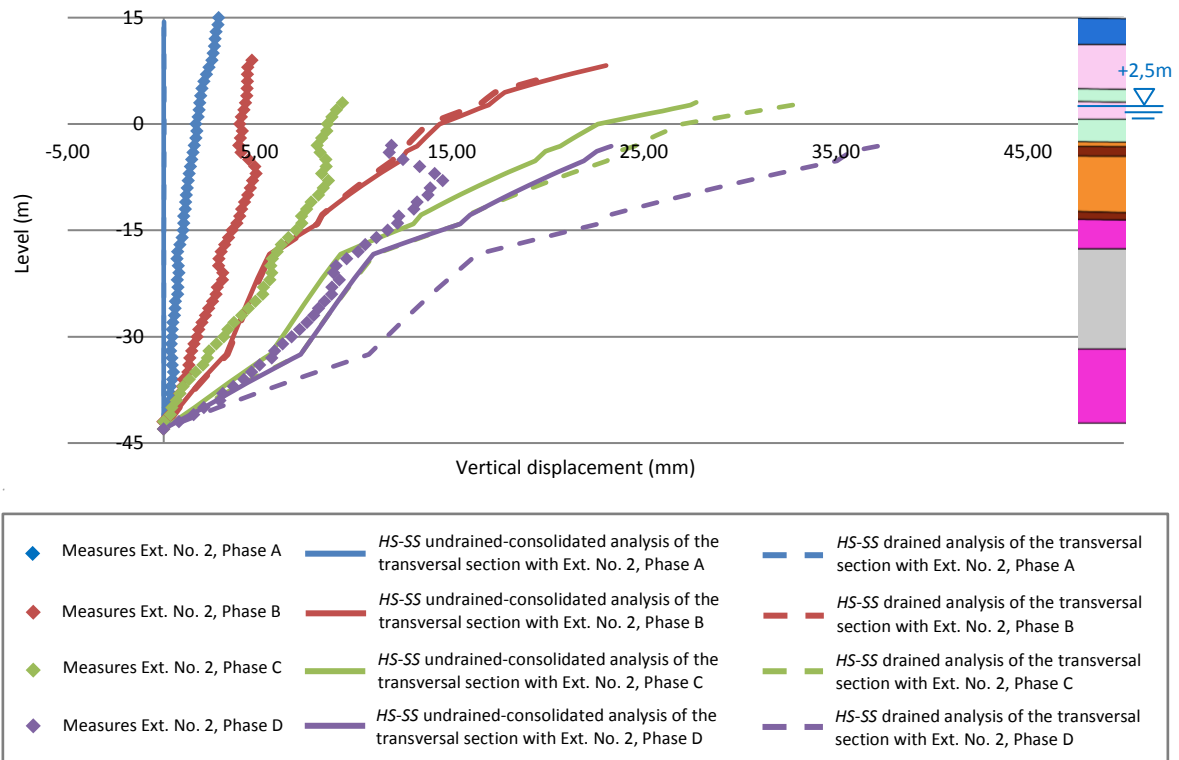


Figure 39. Measures of the extensometer No. 2 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding transversal cross-section.

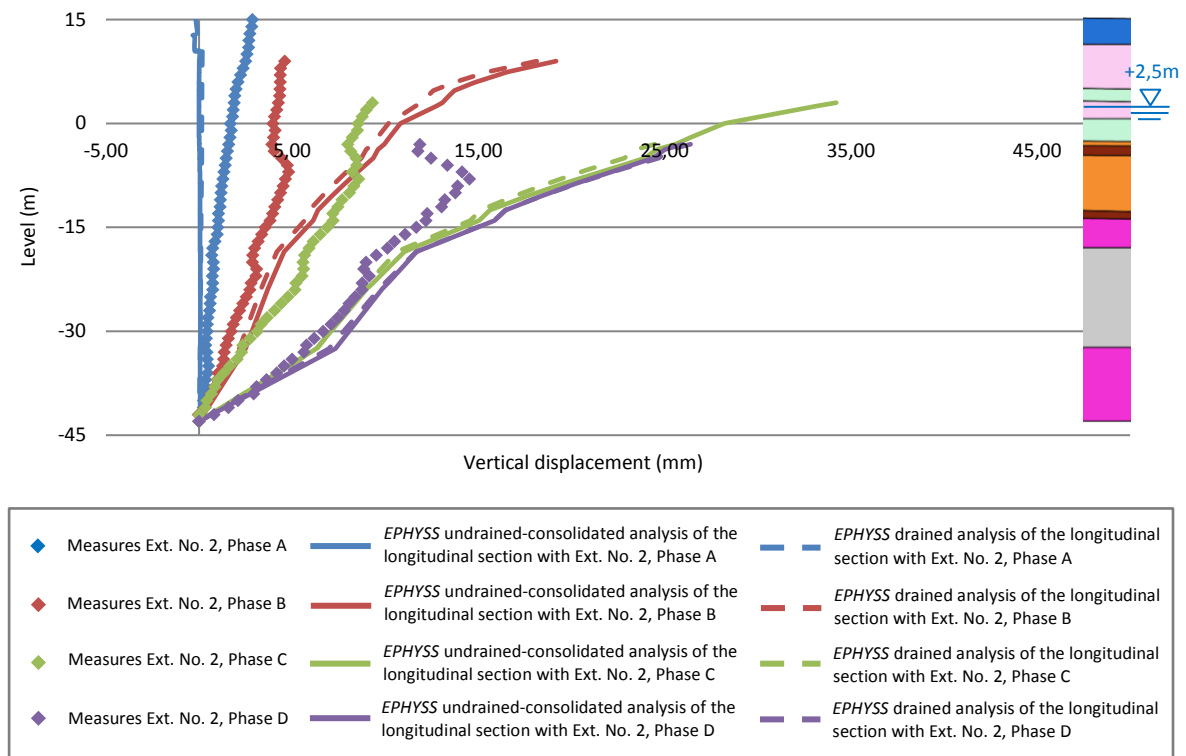


Figure 40. Measures of the extensometer No. 2 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding longitudinal cross-section.

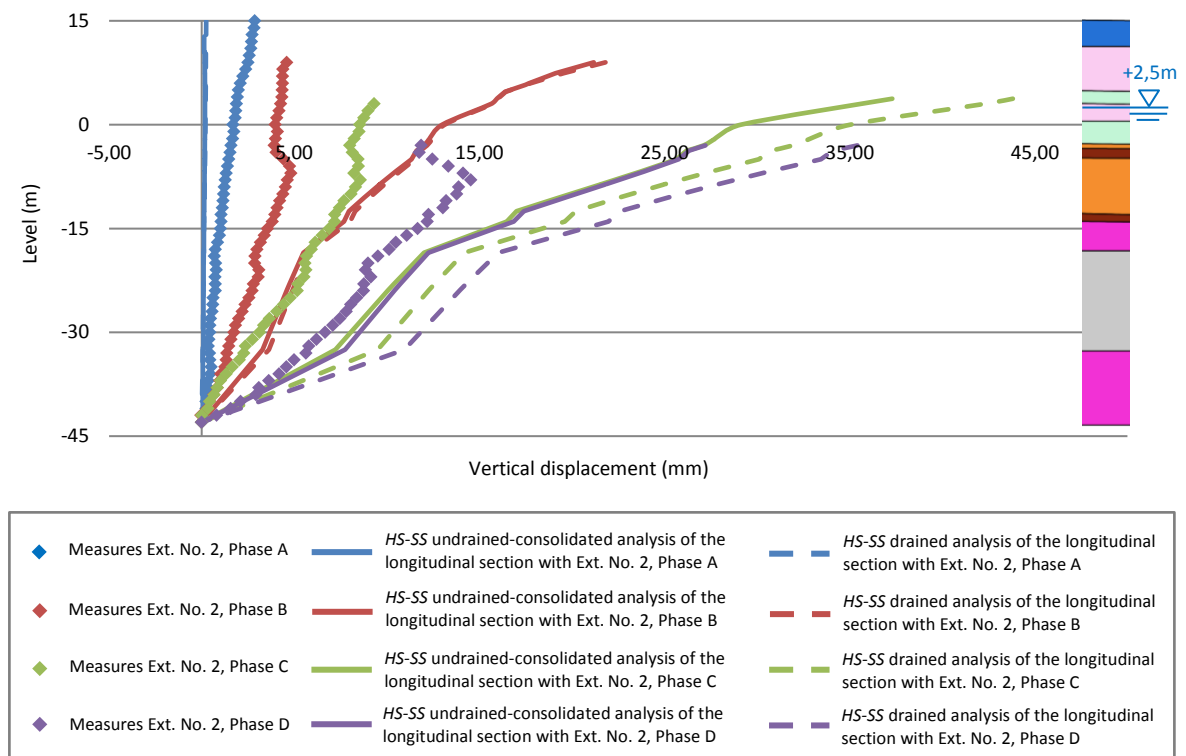


Figure 41. Measures of the extensometer No. 2 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding longitudinal cross-section.

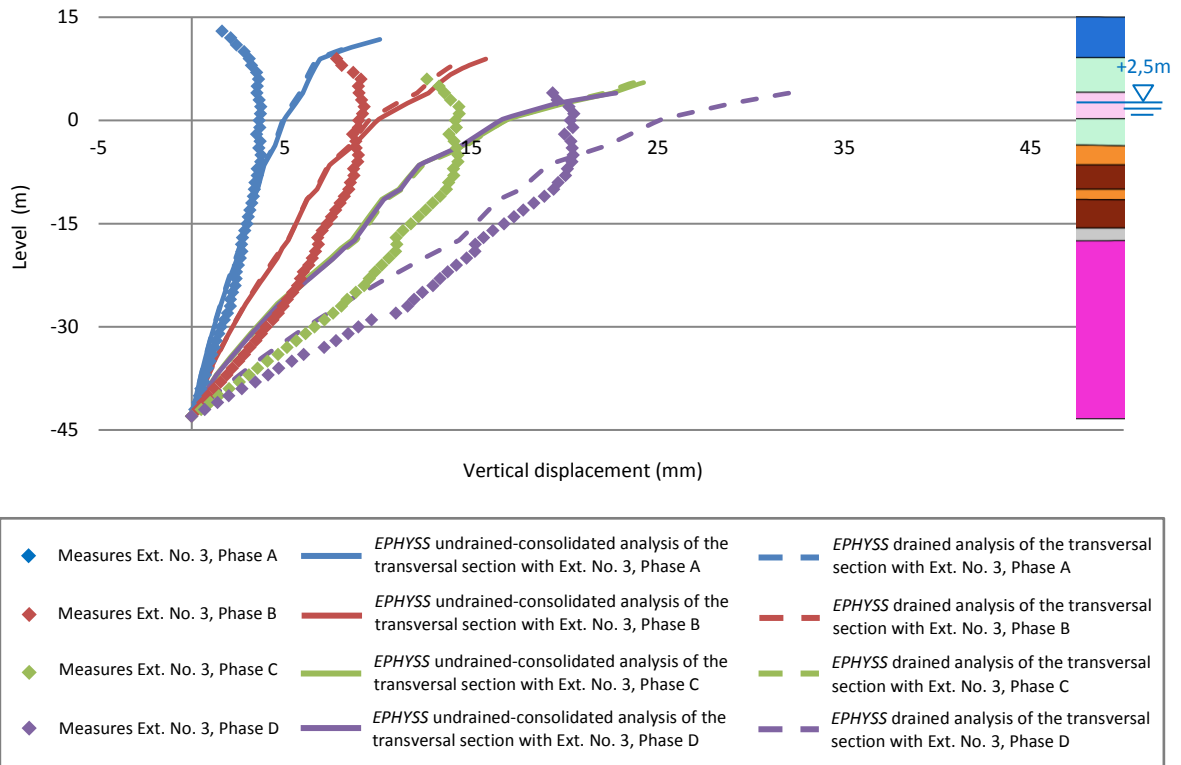


Figure 42. Measures of the extensometer No. 3 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding transversal cross-section.

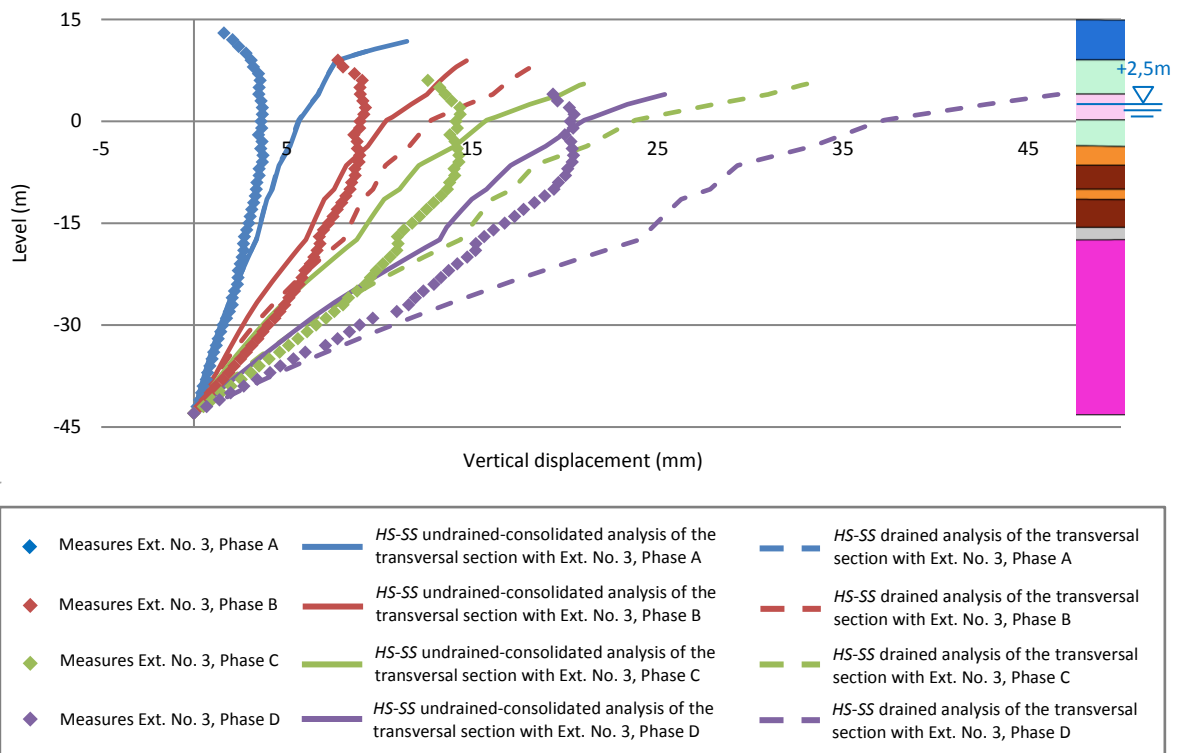
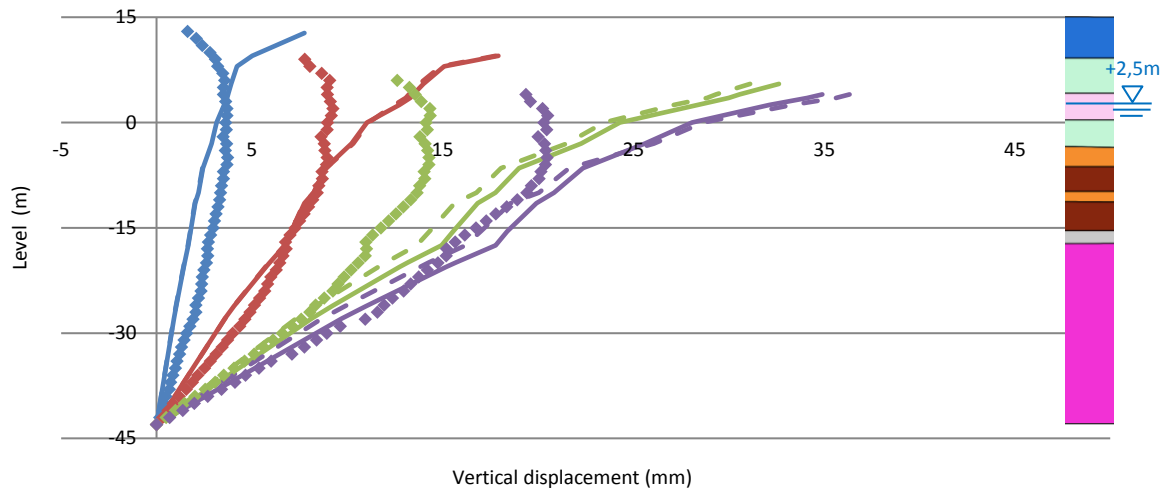
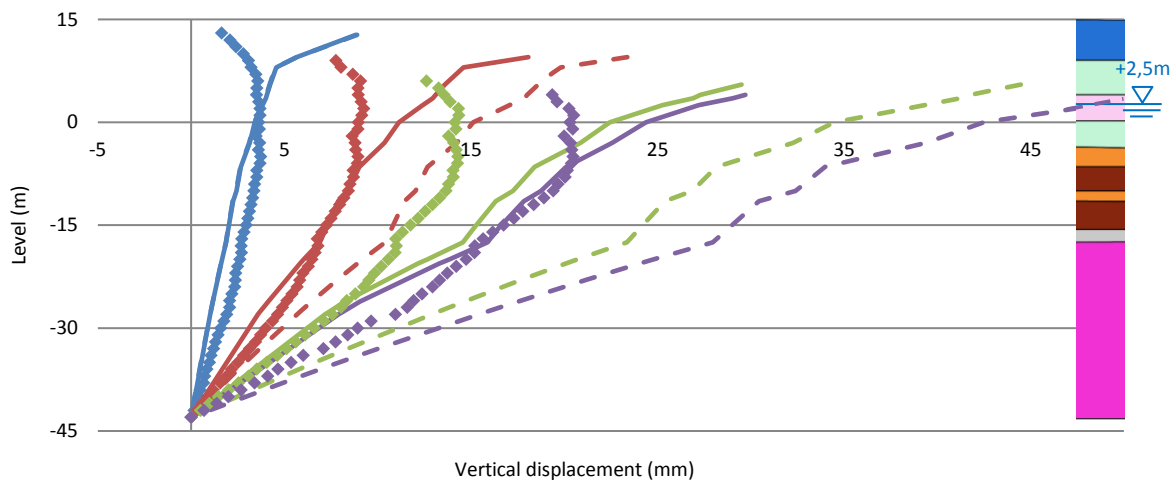


Figure 43. Measures of the extensometer No. 3 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding transversal cross-section.



◆ Measures Ext. No. 3, Phase A	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase A	- - - EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase A
◆ Measures Ext. No. 3, Phase B	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase B	- - - EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase B
◆ Measures Ext. No. 3, Phase C	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase C	- - - EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase C
◆ Measures Ext. No. 3, Phase D	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase D	- - - EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase D

Figure 44. Measures of the extensometer No. 3 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding longitudinal cross-section.



◆ Measures Ext. No. 3, Phase A	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase A	- - - HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase A
◆ Measures Ext. No. 3, Phase B	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase B	- - - HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase B
◆ Measures Ext. No. 3, Phase C	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase C	- - - HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase C
◆ Measures Ext. No. 3, Phase D	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase D	- - - HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 3, Phase D

Figure 45. Measures of the extensometer No. 3 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding longitudinal cross-section.

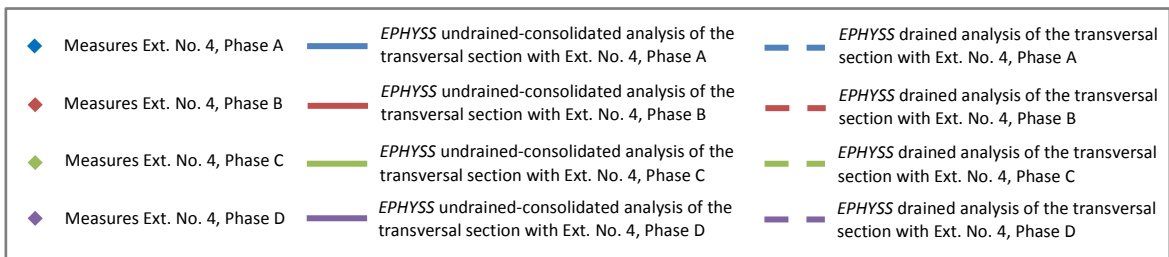
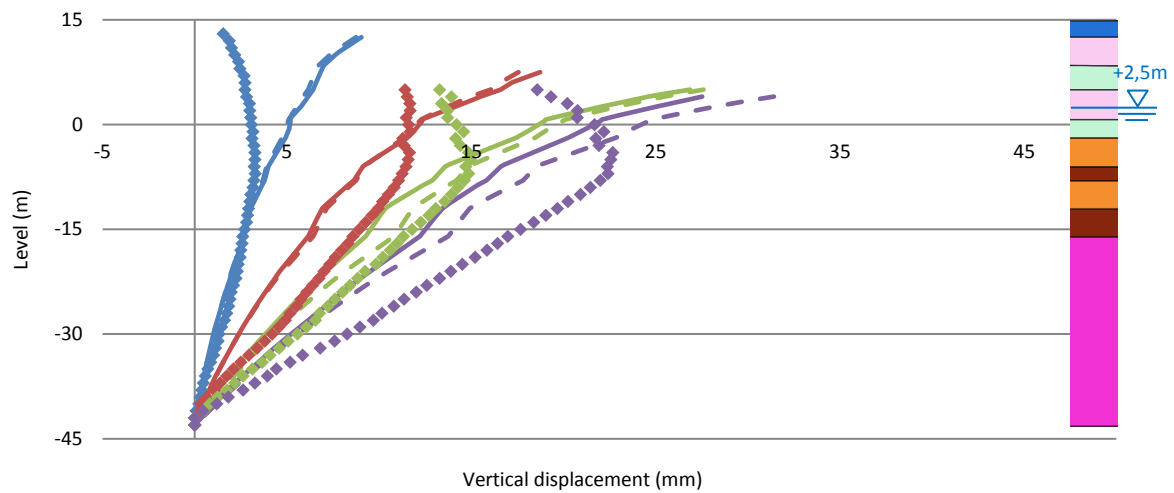


Figure 46. Measures of the extensometer No. 4 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding transversal cross-section.

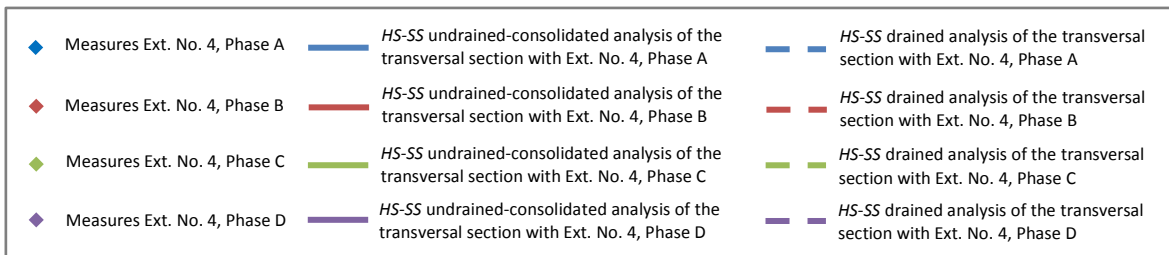
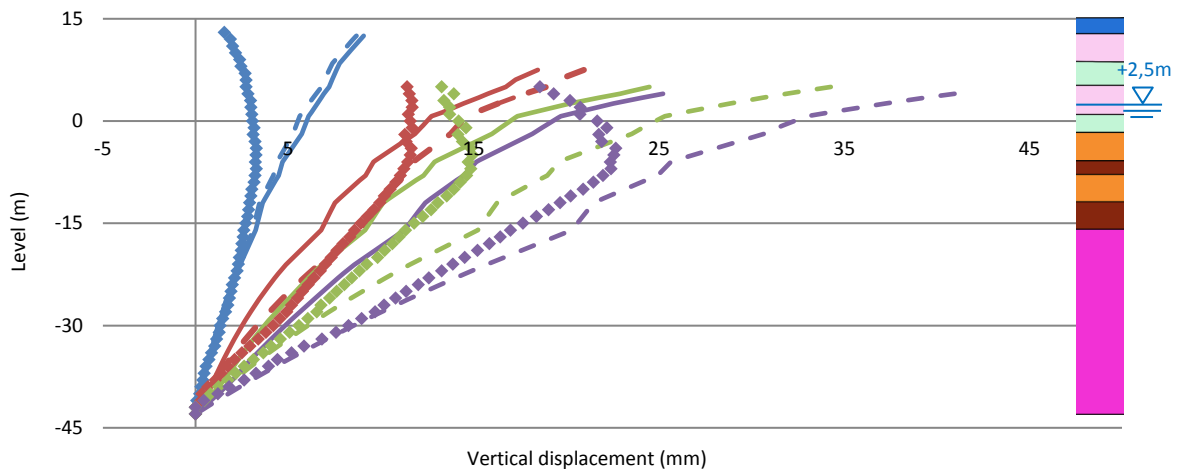
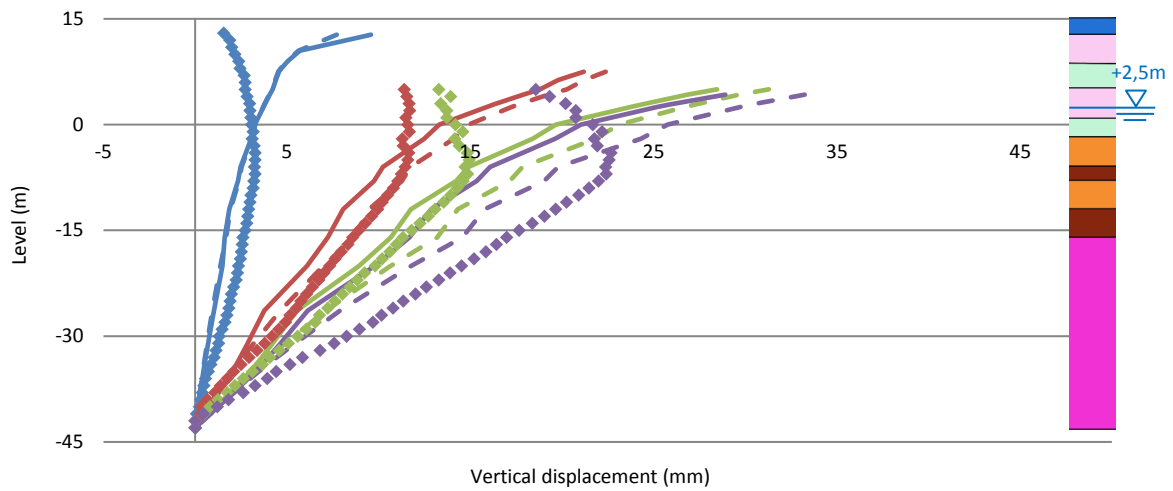
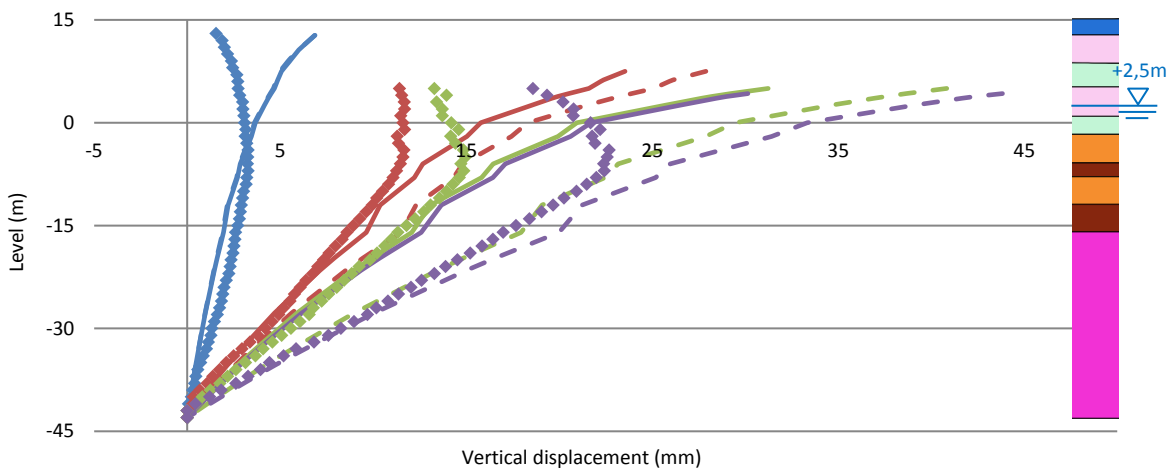


Figure 47. Measures of the extensometer No. 4 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding transversal cross-section.



◆ Measures Ext. No. 4, Phase A	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase A	— EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase A
◆ Measures Ext. No. 4, Phase B	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase B	— EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase B
◆ Measures Ext. No. 4, Phase C	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase C	— EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase C
◆ Measures Ext. No. 4, Phase D	— EPHYSS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase D	— EPHYSS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase D

Figure 48. Measures of the extensometer No. 4 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the EPHYSS model, in the corresponding longitudinal cross-section.



◆ Measures Ext. No. 4, Phase A	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase A	— HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase A
◆ Measures Ext. No. 4, Phase B	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase B	— HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase B
◆ Measures Ext. No. 4, Phase C	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase C	— HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase C
◆ Measures Ext. No. 4, Phase D	— HS-SS undrained-consolidated analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase D	— HS-SS drained analysis of the longitudinal section with Ext. No. 4, Phase D

Figure 49. Measures of the extensometer No. 4 and numerical drained and undrained-consolidated simulations, with the HS-SS model, in the corresponding longitudinal cross-section.

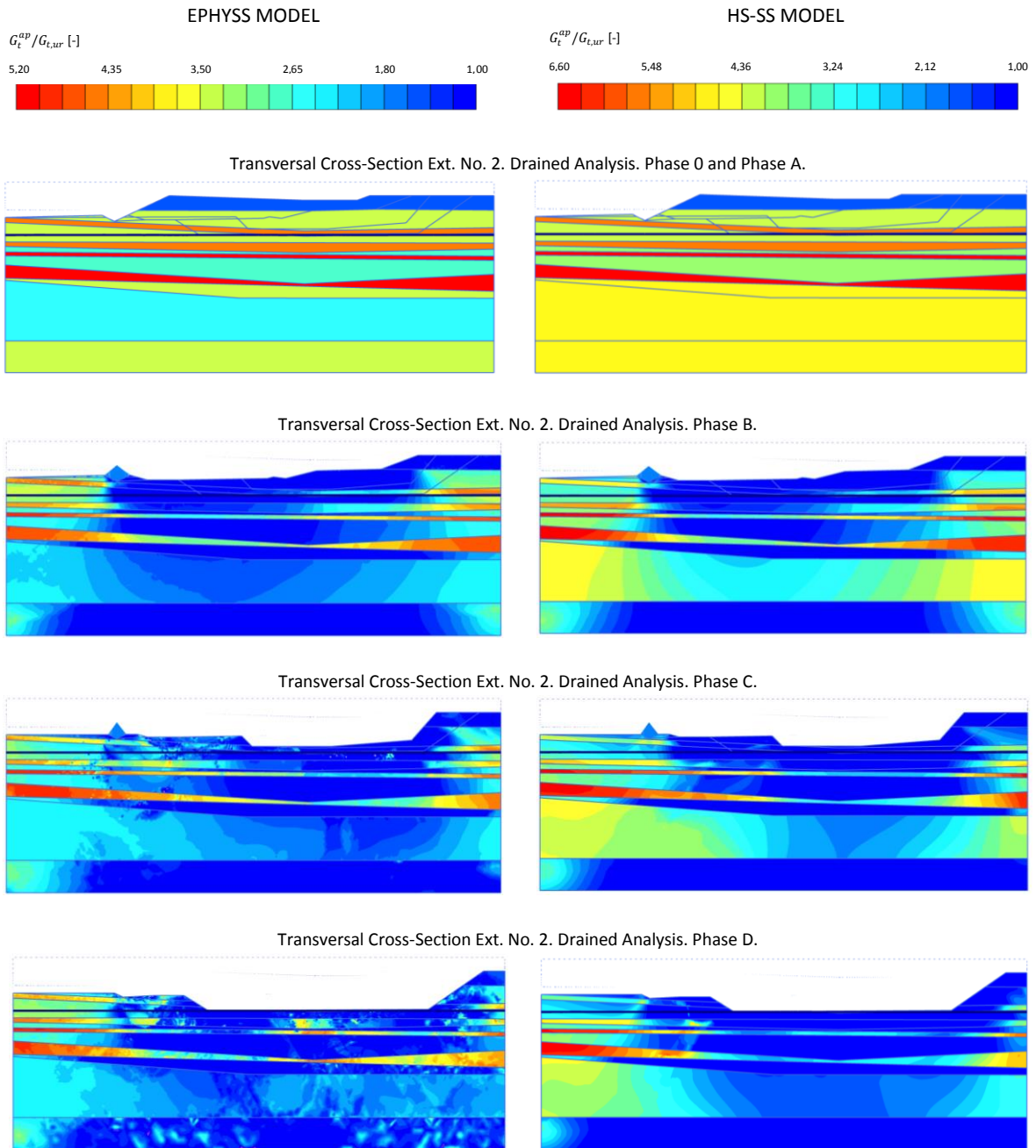


Figure 50. Values of $G_t^{ap} / G_{t,ur}$ in the transversal cross-section corresponding to the extensometer No. 2 with the EPHYSS model (left) and with the HS-SS model (right) in the drained analysis.

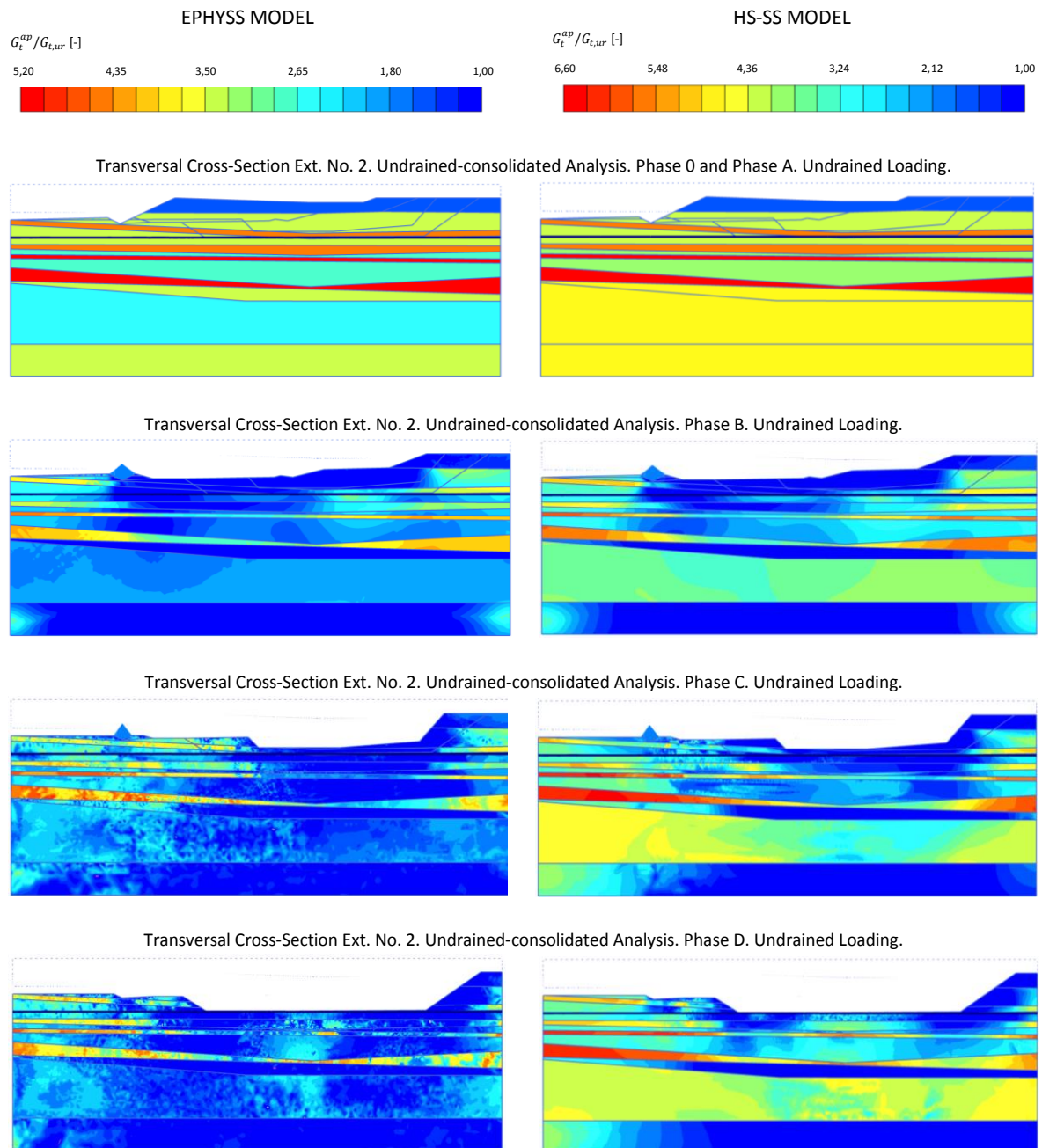


Figure 51. Values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ in the transversal cross-section corresponding to the extensometer No. 2 with the EPHYSS (left) and the HS-SS (right) models in the undrained loading subphases of the undrained-consolidated analysis.

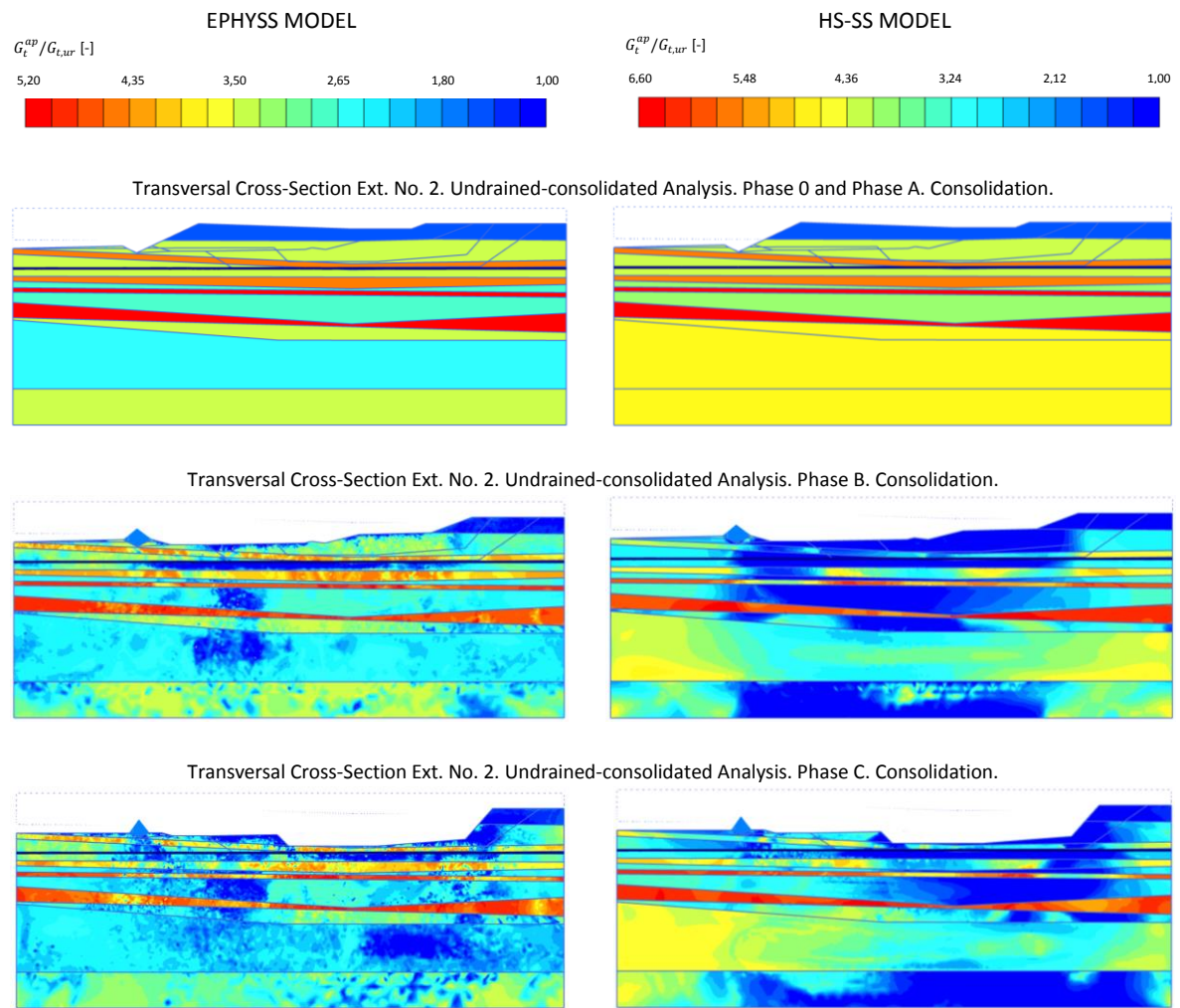


Figure 52. Values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ in the transversal cross-section corresponding to the extensometer No. 2 with the EPHYSS (left) and the HS-SS (right) models in the consolidation subphases of the undrained-consolidated analysis.

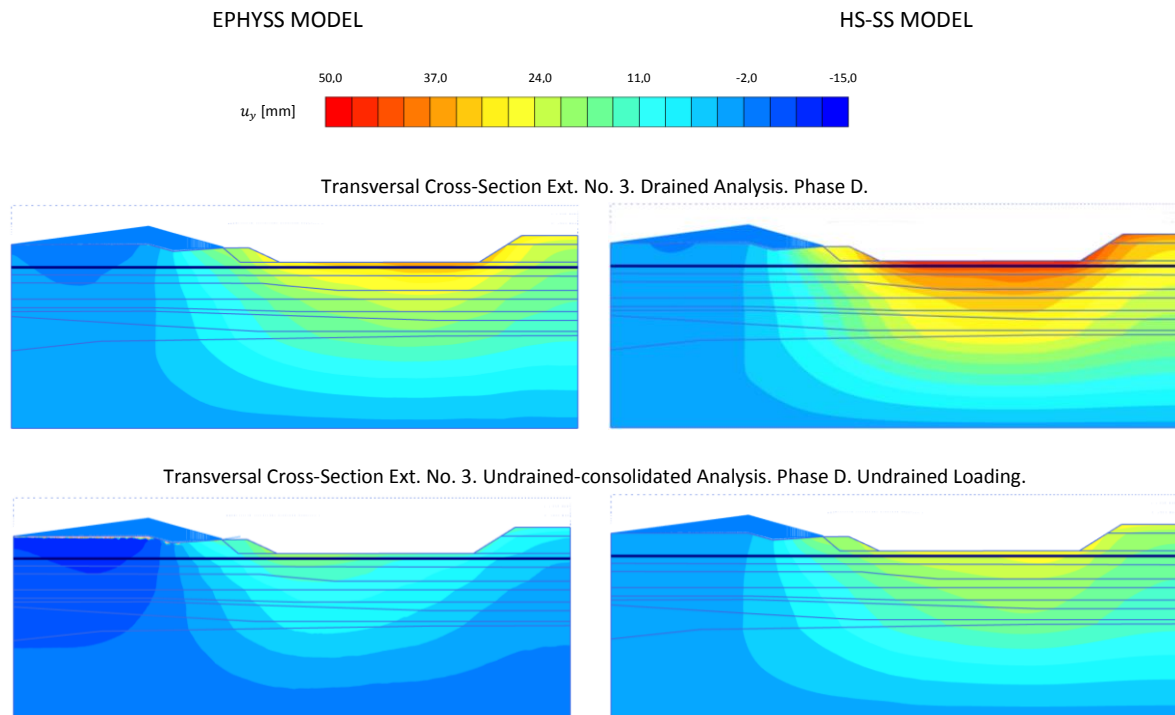


Figure 53. Values of the displacements u_y in the transversal cross-section corresponding to extensometer No. 3 with the EPHYSS (left) and the HS-SS (right) models in Phase D of the drained analysis (above) and the undrained loading in Phase D of the undrained-consolidated analysis (below).

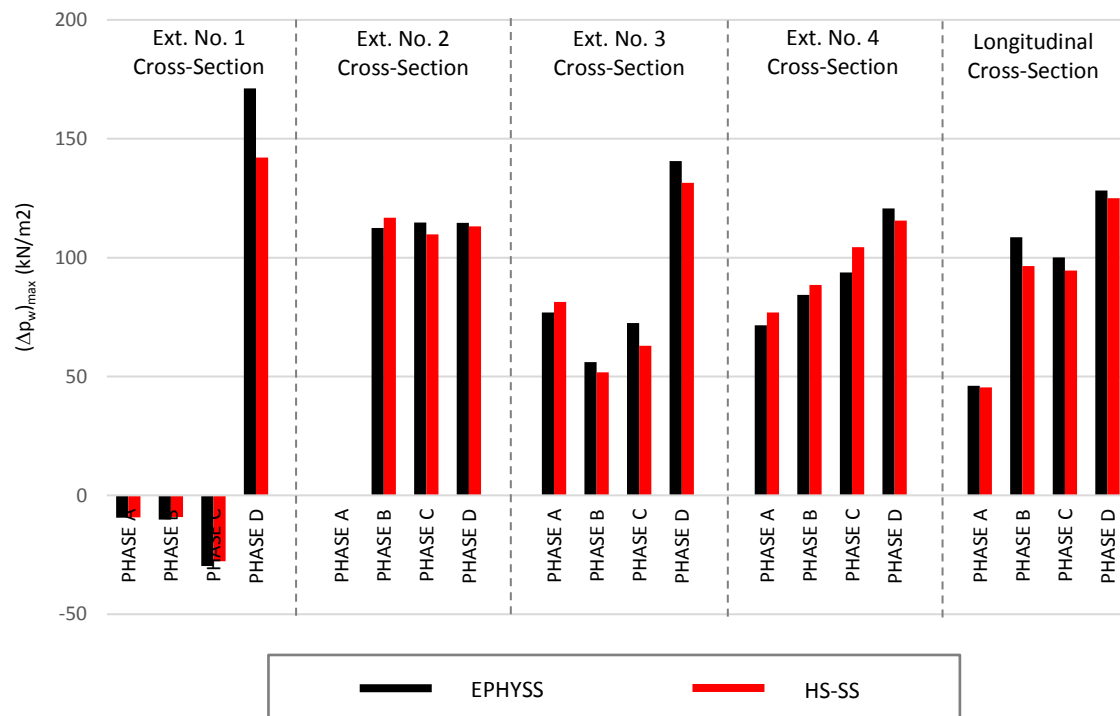


Figure 54. Maximum value of excess (positive or negative) water pressure $(\Delta p_w)_{max}$ in the excavation phases selected for each of the transversal and longitudinal cross-sections that result from the simulations with the EPHYSS and HS-SS models.

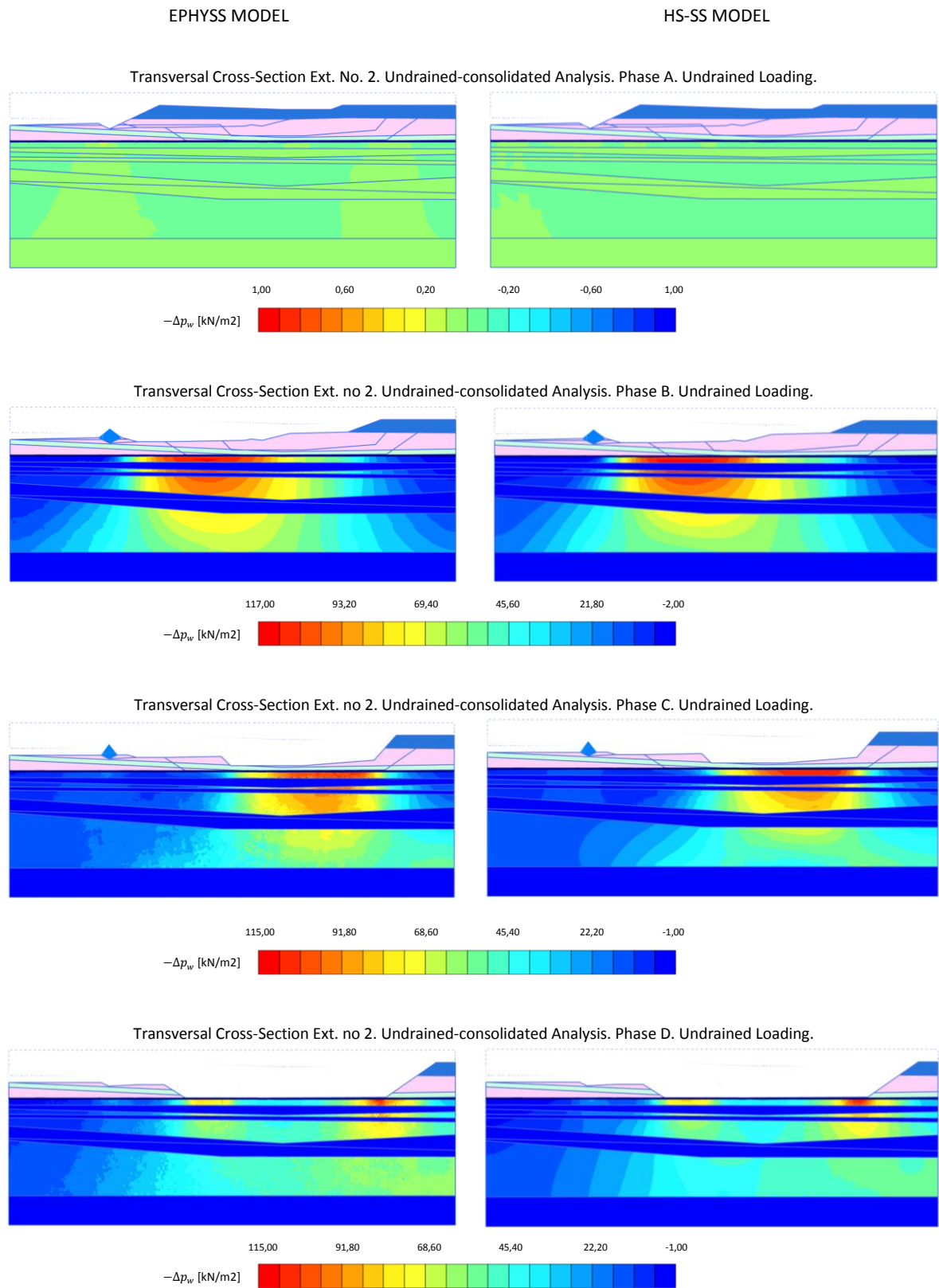


Figure 55. Distribution of excess water pressure $-\Delta p_w$ in the subphases with undrained loading of the excavation phases selected in the transversal cross-section corresponding to the extensometer No. 2, which result from the simulations with the models EPHYSS and HS-SS.

9. Conclusions

This note presents the results obtained in simulations with the Elastoplastic Hysteretic Small Strain (EPHYSS) model (Castellón, 2019) of different boundary value problems of executed works in which some type of monitoring has been performed. As well, these results are compared with those obtained in the same simulations with the Hardening Soil with Small Strain Stiffness (HS-SS) model. The analysis of the different boundary value problems provides a validation of the EPHYSS model and offer a broad view of the improvements and distinctive elements of the EPHYSS model with respect to the HS-SS model.

In first place, the same problems analyzed in the thesis of Benz (2007) have been simulated from the information contained therein and in the original sources: a tunnel excavated with the NATM, a tunnel excavated with a slurry shield TBM, a deep excavation between triple-anchored diaphragm walls, a deep excavation between bored pile walls with three sets of struts and a test on an experimental spread footing. The results obtained in the simulations with the EPHYSS model improve the approximation to the measures resulting from work monitoring with respect to those obtained with the HS-SS model. These improvements are especially noticeable in the two deep excavations and in the tunnel excavated with the NATM and less evident in the experimental spread footing. Likewise, the results in the case of the tunnel excavated with slurry shield TBM are very similar in the simulations with both models, due to the circular geometry of the tunnel and the homogeneity of the surrounding ground, which provides relative values of $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ very similar in the two models. In general, surface settlements are more concentrated in the simulations with the EPHYSS model compared to those obtained with the HS-SS model, as can be seen both in the tunnel excavated with the NATM and in the deep excavations. This is because the EPHYSS model tends to concentrate the areas with maximum elastic degradation in smaller areas which are close to the acting zone, while providing significantly larger areas with small or no degradation. It is also observed, in general, how the EPHYSS model predicts ground vertical displacements in deep excavations significantly lower than those predicted by the HS-SS model, although there are no data available for an evaluation of these results. Likewise, the value of the bending moments on the retaining walls of the excavations that are obtained in the numerical simulations with both models is very similar in the triple-anchored diaphragm walls excavation and slightly different in the bored pile walls with three sets of struts excavation, although, again, no data are available for an evaluation of these results. In relation to the values of the struts loadings in the final phase of the bored pile walls excavation, the deviations with respect to the measured loadings are, on average, higher in the HS-SS model. Based on all these observations, it follows that the results of simulations of deep excavations with the EPHYSS model, compared to those of the HS-SS model, can have a clear impact on: (1) the design of the retaining wall, struts and anchors in the project phase, (2) the control processes during the execution of the work and (3) the optimization processes by means of backanalysis techniques whether soil and retaining walls displacements, retaining walls bending moments or strut loadings are measured. In relation to the boundary value problem of the experimental spread footing, the simulations with the EPHYSS model provide stiffness closer to the measurements in the test when compared with the simulations performed with the HS-SS model, although the cycles calculated with the EPHYSS model are narrower than those calculated with the HS-SS model or the measured ones. Finally, in all the problems analyzed, the enormous similarity in the plastic behavior between both models can be seen, except in the case of bored pile walls with three sets of struts excavation, where the differences in the values of soil stiffness are high enough to give place to a plastic redistribution.

In second place, a large urban excavation is studied, corresponding to the works of the future intermodal station of La Sagrera, in Barcelona. A deep study of the geology and hydrogeology has been conducted and a set of geotechnical units with their respective geometries has been established. The soil parameters have been obtained from: (1) the results of the tests carried out during the project of the station and empirical correlations and (2) 20 resonant column tests conducted, on the occasion of this investigation, in cylindrical samples obtained from high-quality block samples corresponding to two of the geotechnical units identified. The excavation phases used in the numerical simulations have been selected from the joint analysis of the measurements taken with four 60m extensometers installed in the excavation vessel and the measurements of the surface topographic profiles during the excavation progress. Numerical simulations of the excavation have been conducted in four transversal cross-sections that contain, each of them, one of the installed extensometers, and in a longitudinal cross-section that contains them all. The EPHYSS and HS-SS models have been used and the results obtained with them have been compared, both with each other and with the extensometers measurements. In the study conducted, two types of analysis were performed: (1) a drained analysis, with drained conditions in all geotechnical units and (2) an undrained-consolidated analysis, in which a first phase was defined with undrained conditions in the less permeable geotechnical units and drained conditions in the most permeable ones, and

a second consolidation phase with the corresponding excavation times. From the results of the simulations with the EPHYSS and HS-SS models it is concluded that neither of them is capable of reproducing the upper part of the displacement profiles measured with the extensometers, in which an evident reduction in the vertical displacements is observed. This behavior can be explained by the progressive drying of the soil near the water table as the excavation progresses, which generates gradual increments in suction in the unsaturated area of the soil and, therefore, a shrinkage of it (Castellón, 2013). Except for this consideration, it is concluded that, in general, simulations with the EPHYSS model significantly improve the approximation to the measurements of the extensometers in the different calculation phases if compared with the results of the simulations obtained with the HS-SS model, both in the transversal and in the longitudinal cross-sections. It is also concluded that there is no simulation with the HS-SS model that improves, simultaneously in all the calculation phases of any of the cross-sections analyzed, the results obtained with the EPHYSS model. On the other hand, in the results of the simulations with the HS-SS model, the effect of the inconsistencies generated by the consolidation phases in the undrained-consolidated analysis with such model can be clearly seen, which lead to displacements markedly lower than those obtained in the corresponding drained phases. These inconsistencies are also detected in the graphs $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ corresponding to the consolidation phase of the undrained-consolidated analysis of the simulations with the HS-SS model, when compared with the graphs $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ of the respective undrained loading phases of the undrained-consolidated analysis. The EPHYSS model is able to correct the effect of these inconsistencies thanks to the state variables \mathbf{H}_{MEM} , \mathbf{E}_{MEM} and \mathbf{E}_{MEM}^e . In relation to the values $G_t^{ap}/G_{t,ur}$ that result from the simulations in the drained analysis and in the undrained phase of the undrained-consolidated analysis, it is concluded that are similar for a same model, which is explained by the fact that the shear soil behavior in elastic regime does not depend on water pressure, except for the relation of $G(-p')$ in the EPHYSS model and $G(-\sigma'_3)$ in the HS-SS model. Finally, it can be seen that both the distributions of excess water pressure generated in the different undrained loading phases of the undrained-consolidated analysis, and the maximum value of such excesses, are very similar in both models. The small existing differences can be mainly attributed to the nonlinear behavior of K_s with $-p'$.

Finally, the computational cost in the EPHYSS model slightly increases compared with the HS-SS model, which implies a longer calculation time. However, it should be noted that the EPHYSS code has not been optimized to minimize the number of operations performed and a 32-bit compiler has been used, thus limiting the available RAM. However, the calculation times measured in the simulations with EPHYSS, using a conventional processor, fall within the allowable calculation times of a commercial geotechnical calculation software.

It is concluded that, in general, the EPHYSS model significantly improves the approximation to the experimental measures with respect to the HS-SS model, especially in those boundary value problems that present reversals in the deviatoric loadings; resolves the inconsistencies of the latter with a reasonable computational cost; and requires simple parameters, most of them common to those of the HS-SS model. All this makes EPHYSS a model that can be used for analysis and design in geotechnical professional practice.

LIST OF SYMBOLS AND ABBREVIATIONS

a	Parameter whose value is $a = 0,385$ according to Dos Santos and Correia (2001).
A'	Soil parameter in the expression of Hara et al. (1974) that correlates G_0 with N_{60} .
B	Side of a square spread footing.
B'	Soil parameter in the expression of Hara et al. (1974) that correlates G_0 with N_{60} .
\hat{B}	Soil parameter in the expression of Hardin and Richart (1963) to obtain the value of G_0 .
c'	Effective cohesion.
d	Thickness/diameter of a certain structural element.
e	Void ratio.
\mathbf{e}	$= \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_{oct} \mathbf{1}$
\mathbf{e}^e	$= \boldsymbol{\epsilon}^e - \epsilon_{oct}^e \mathbf{1}$
$\mathbf{e}^{e,R}$	State variable that stores the elastic deviatoric strain tensor at the last reversal point R that conforms the endpoint of the active strain cycle.
$\mathbf{e}^{e,\Delta R}$	$= \mathbf{e}^e - \mathbf{e}^{e,R}$
\mathbf{e}^R	State variable that stores the total deviatoric strain tensor value at the last reversal point R that conforms the endpoint of the active strain cycle.

$\mathbf{e}^{\Delta R}$	$= \mathbf{e} - \mathbf{e}^R$
E	Elastic modulus of a certain structural material.
E'_i	Drained initial longitudinal stiffness modulus.
$E'^{ref}_{t,ur}$	Value of the tangent longitudinal stiffness modulus during unloadings and reloadings for $-\sigma'_3 = p'^{ref}_i$
E'^{ref}_{oed}	Value for tangent oedometric modulus for $-\sigma'_3 = p'^{ref}_i$.
E'^{ref}_{50}	Value of the secant longitudinal stiffness modulus for a mobilization of the 50% of the maximum deviatoric strain q_f in a drained triaxial test for $-\sigma'_3 = p'^{ref}_i$.
\mathbf{E}_{MEM}	Vector with the values $\ \mathbf{e}\ $ in the reversal points R_i that conforms the endpoints of the active strain cycles defined by the conditions $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
\mathbf{E}^e_{MEM}	Vector with the values $\ \mathbf{e}^e\ $ in the reversal points R_i that conforms the endpoints of the active strain cycles defined by the conditions $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
EA	Axial stiffness.
EI	Bending stiffness.
G	Shear stiffness modulus.
$G_{t,ur}$	Tangent elastic shear modulus.
G_0	Maximum shear modulus.
G_s^{ap}	Secant apparent shear modulus.
$G_{s,0}^{ap,180,H,ref}$	Value of $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ for the curve corresponding to a 180° strain reversal.
$G_{s,0}^{ap,90,H,ref}$	Value of $G_{s,0}^{ap,\alpha,H,ref}$ for the curve corresponding to a 90° strain reversal.
G_t^{ap}	Tangent apparent shear modulus.
$G_{t,ur}^{ref}$	Value of $G_{t,ur}$ for $-p' = p'^{ref}_{i,2}$.
G_0^{ref}	Maximum value of the shear modulus when considering a single degradation curve for $-\sigma'_3 = p'^{ref}_i$.
h_{min}	Minimum height at which the water table can be reduced inside a well point.
\mathbf{h}	Recent total deviatoric strain history tensor in the EPHYSS model.
H	Plastic modulus.
\mathbf{H}	Recent total deviatoric strain history tensor in the HS-S and HS-SS models.
\mathbf{H}_{MEM}	Vector with the values $\ \mathbf{h}\ $ in the reversal points R_i that conform the endpoints of active strain cycles defined by the conditions $\hat{\mathbf{h}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$ and $\hat{\mathbf{e}}^{\Delta R_{i-1}}: \hat{\mathbf{e}} \leq \cos(\alpha^*)$.
k_x	Horizontal permeability.
k_y	Vertical permeability.
K'_s	Drained secant elastic volumetric stiffness modulus.
K'^{ref}_s	Value of K'_s for $-p' = p'^{ref}_{i,1}$.
K_0^{NC}	Coefficient of lateral earth pressure for a normally consolidated stress state.
K_0^{SC}	Coefficient of lateral earth pressure for an overconsolidated stress state.
m	Coefficient that controls stress dependence of E'_{50} , E'_{oed} , $E'_{t,ur}$, E'_i and H which can take values between 0,0 and 1,0.
m_1	Soil parameter that controls the dependence level of K'_s with $-p'$ which can take values between 0,0 and 1,0.
m_2	Soil parameter that controls the dependence level of G_s and $G_{t,ur}$ with $-p'$ which usually takes values between 0,40 and 0,60 for sands (Hardin and Black, 1966, 1968; McDowell and Bolton, 2001), and between 0,50 and 1,00 for cohesive soils.
N_{60}	Result of the SPT.
OCR	$\sigma'_{v,max}/\sigma'_v$
p	Pressure applied at the boundary of the excavation in the stress reduction method.
p'	$= \sigma'_{oct} = 1/3\sigma'_{ii}$
p_{crown}	Grout pressure in the excavation crown.
p'^{ref}	Reference pressure.
$p'^{ref}_{i,1}$	Reference pressure in the expression of K'_s .
$p'^{ref}_{i,2}$	Reference pressure in the expressions of G_s^{ap} and $G_{t,ur}$.
p_w	Water pressure.
p_0	Initial soil pressure at the boundary of the excavation in the stress reduction method.
PI	Plasticity index.
q	Distributed load.
q_a	$= q_f/R_f$
q_f	$= 2\sin(\varphi')(-\sigma'_3 + c' \cot(\varphi'))/(1 - \sin(\varphi'))$
Q	Punctual load.
Q'	Extracted flow in a well point during the reduction of the groundwater table.
R	Reversal point.
R_{eq}	$= B\pi^{-1/2}$
R_f	Coefficient that relates q_f and q_a , and usually adopts a value of 0,9.

R_{inter}	Factor that allows simulating the behavior of the soil-structure interfaces (Plaxis, 2015).
s	Interdistance between axes of a certain discontinuous structural element embedded in the ground.
S_r	Soil saturation degree.
t	Interdistance between axes of a certain discontinuous structural element not embedded in the ground.
T	Water cavitation stress.
u_x	Imposed displacement in the global x-direction.
u_y	Imposed displacement in the global y- direction.
w	Weight of a certain constitutive material of a structural element.
w	Water content.
α^*	Value $\alpha^* = \arccos(\hat{\mathbf{n}}: \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^*$ from which a reversal that modified soil stiffness appears in the HQH and EPHYSS model.
β	Factor in the stress reduction method that adopts values between 0 and 1.
γ_{grout}	Grout specific weight.
γ_s	Soil particles specific weight.
γ_{sat}	Saturated soil specific weight.
γ_{unsat}	Unsaturated soil specific weight.
γ_w	Water specific weight.
$\gamma_{0,7}$	Value of shear strain in the model of Dos Santos and Correia (2001) for which $G_s^{ap}(\gamma_{0,7}) = 0,722G_0$, used in the HS-SS and EPHYSS models.
ϵ_{ij}	$ij - th$ component of the tensor $\boldsymbol{\epsilon}$.
ϵ_{ij}^e	$ij - th$ component of the tensor $\boldsymbol{\epsilon}^e$.
ϵ_{oct}^e	$= 1/3\epsilon_{ii}^e$
ϵ_v	$= 1/3\epsilon_{ii}$
$\boldsymbol{\epsilon}$	Total strain tensor.
$\boldsymbol{\epsilon}^e$	Elastic strain tensor.
Λ	Parameter of the EPHYSS model that adopts the values of 0,40 – 0,44 for sands and 0,50 for clays.
ν	Poisson's ratio of a specific material.
ν'_{min}	Soil drained Poisson's ratio minimum value.
ν'_{ur}	Soil drained Poisson's ratio in reversible unloading/reloading processes.
σ'_i	$i - th$ principal effective stress.
σ'_{ij}	$ij - th$ component of the tensor $\boldsymbol{\sigma}'$.
σ'_{oct}	$= 1/3\sigma'_{ii}$
σ'_{trac}	Soil tensile strength.
$\sigma'_{v,max}$	Maximum historical effective vertical stress.
σ'_v	Effective vertical stress.
$\boldsymbol{\sigma}$	Total stress tensor.
$\boldsymbol{\sigma}'$	$= \boldsymbol{\sigma} - p_w \mathbf{1}$ effective stress tensor.
τ_{max}	$= a/4(2c'(1 + \cos(2\phi')) + (-\sigma'_1)(1 + K_0^{NC})\sin(2\phi'))$
ϕ'	Maximum value of the effective friction angle.
ϕ_z	Rotation around z-axis.
ψ	Maximum value of the dilatancy angle.
$\hat{\mathbf{A}}$	$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\ \mathbf{A}\ $ if $\ \mathbf{A}\ \neq 0$ and $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$ if $\ \mathbf{A}\ = 0$.
EPHYSS	Elastoplastic Hysteretic Small Strain model (Castellón, 2019).
HS-S	Hardening Soil Small model (Benz, 2007).
HS-SS	Hardening Soil with Small Strain model of Plaxis (based on HS-S).
NATM	New Austrian Tunneling Method.
TBM	Tunnel Boring Machine.
SPT	Standard Penetration Test.

REFERENCES

- Benz, T. (2007). *Small-Strain Stiffness of Soils and its Numerical Consequences*. PhD Thesis. Stuttgart, Germany: Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- Briaud, J.K. and Gibbens, R. (1997). *Large scale load test and data base of spread footings on sand*. Report No. FHWA-RD-97-068. Virginia, USA: United States Department of Transportation.
- Castellón, J. (2013). *Análisis teórico, numérico y experimental del comportamiento de suelos en el rango de las pequeñas deformaciones*. Master Thesis. Barcelona, Spain: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Castellón, J. (2019). *Estudio del comportamiento del suelo en el rango de las pequeñas deformaciones and desarrollo del modelo constitutivo EPHYSS*. PhD Thesis. Barcelona, Spain: Universitat Politècnica de Catalunya.

- Dos Santos, J.A. and Correia, A.G. (2001). Reference threshold shear strain of soil. Its application to obtain an unique strain-dependent shear modulus curve for soil. *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. Istanbul, Turkey, 27-31 August. Rotterdam, Netherlands: A. A. Balkema.
- Hara, A., Ohta, T., Niwa, M., Tanaka, S. and Banno, T. (1974). Shear modulus and shear strength of cohesive soils. *Soils and Foundations*, 14(3), 1-12. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.14.3_1.
- Hardin, B.O. and Richart Jr., F.E. (1963). Elastic wave velocities in granular soils. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 89(1), 33-66.
- Hardin, B.O. and Black, W.L. (1966). Sand stiffness under various triaxial stresses. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 92(2), 27-42.
- Hardin, B.O. and Black, W.L. (1968). Vibration modulus of normally consolidated clays. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 94(2), 353-370.
- Horning, E.D. and Buchmaier, R.F. (2005). Laboratory and field tests investigating the stress strain behaviour of weathered Keuper Mudstone. In: Bilsel, H. and Nalbantoglu, Z. (eds.) *International Conference on Problematic Soils*. Famagusta, Northern Cyprus, 25-27 May. Eastern Mediterranean University, 1, 389-396.
- Krajewski, W., Edelmann, L. and Plamitzer, R. (2001). Ability and limits of numerical methods for the design of deep construction pits. *Computer and Geotechnics*, 28(6-7), 425-444. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(01\)00008-8](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(01)00008-8).
- Krajewski, W. and Reul, O. (2004). Deep excavation in stiff clay: comparison between numerical analyses and in-situ-measurements. In: Pande, G. N. and Pietruszczak, S. (eds.) *Nineth International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (NUMOG IX)*. Ottawa, Canada, 25-27 August. Leiden; London: A. A. Balkema.
- Mayne, P.W. and Kulhawy, F.H. (1982). K_0 -OCR relationships in soil. *Journal of Geotechnical Engineering Division*, 108(6), 851-872.
- McDowell, G.R. and Bolton, M.D. (2001). Micro mechanics of elastic soil. *Soils and Foundations*, 41(6), 147-152. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf.41.6_147.
- Möller, S. (2006). *Tunnel induced settlements and structural forces in linings*. PhD Thesis. Stuttgart, Germany: Institut für Geotechnik der Universität Stuttgart.
- Möller, S., Lehmann, T. and Rogowski, E. (2004). Dreidimensionale Finite-Element-Berechnung der Setzungsmulde am Beispiel des Steinhaldenfeldtunnels in Stuttgart. In: *Kolloquium Bauen in Bolden und Fels*. Ostfildern, Germany: Technische Akademie Esslingen, 275-282.
- Niemunis, A. and Herle, I. (1997). Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic strain range. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 2(4), 279-299. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1484\(199710\)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1484(199710)2:4<279::AID-CFM29>3.0.CO;2-8).
- Ohsaki, Y. e Iwasaki, R. (1973). On dynamic shear moduli and Poisson's ratio of soil deposits. *Soils and Foundations*, 13(4), 61-73. DOI: https://doi.org/10.3208/sandf1972.13.4_61.
- Plaxis (2015). *Material Models Manual* [online]. Available at: <<http://plaxis.us/updater/Plaxis%203D/2015.2.21300.12285/files/manuals/english/3D-3-Material-Models.pdf>> [Accessed from 2015 to 2019].
- Schweiger, H.F. (2002). *Benchmarking in Geotechnics 1*. Graz, Austria: Computational Geotechnics Group, Institute for Soil Mechanics and Foundation Engineering, Graz University of Technology.
- Schweiger, H.F. (2007). *Modelling issues for numerical analysis of deep excavations*. Graz, Austria: Computational Geotechnics Group, Institute for Soil Mechanics and Foundation Engineering, Graz University of Technology.
- Vázquez-Suñé, E., Pujades, E., Escorcía, J. and Jurado, A. (2011). *Informe técnico: Evaluación de efecto barrera, efecto dren y caudales de drenaje durante la excavación del recinto de la estación de La Sagrera*. Barcelona, Spain: Grup de Hidrologia Subterrànea, IDÆA (CSIC)-UPC.
- Vucetic, M. and Dobry, R. (1991). Effect of soil plasticity on cyclic response. *Journal of Geotechnical Engineering*. 177(1), 89-107. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1991\)117:1\(89\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1991)117:1(89)).