EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN PROFESORES EN EJERCICIO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Cristian Alejandro Mejías Zamorano

Universitat de Girona

TESIS DOCTORAL

EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN PROFESORES EN EJERCICIO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

CRISTIAN ALEJANDRO MEJÍAS ZAMORANO

2019

TESIS DOCTORAL

EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA EN PROFESORES EN EJERCICIO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

CRISTIAN ALEJANDRO MEJÍAS ZAMORANO

2019

PROGRAMA DE DOCTORADO EN EDUCACIÓN

DIRECTOR DE TESIS: DR. ÁNGEL ALSINA I PASTELLS

Memoria presentada para optar al título de doctor por la Universidad de Girona

PUBLICACIONES DERIVADAS DE LA TESIS DOCTORAL

Artículos

Mejías C., y Alsina Á. (2018). Conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de primer ciclo básico respecto a la transición de la aritmética al álgebra. *Actas VIII Congreso Iberoamericano de Pedagogía*, *(4)*, 138-156. Buenos Aires, Argentina.

Mejías, C., Alsina, Á. (2019). La incorporación del álgebra temprana en el currículo de Educación Primaria. *Números* (En prensa).

Mejías, C., Alsina, Á. (2019). Álgebra: Inicios y evolución hacia distintos significados. *Bolema*, (En revisión).

Exposiciones en congresos

Mejías C., Alsina Á. (2016). Conocimientos de los docentes en ejercicio en los primeros años de educación en torno al álgebra. *VII Congreso Uruguayo de Educación Matemática.* Montevideo, Uruguay.

Mejías C., Alsina Á. (2017). Conocimientos didáctico-matemáticos de profesores de Educación General Básica en formación en torno al álgebra. *VI Congreso Internacional de Psicología y Educación*. Lima, Perú.

Mejías C., Alsina Á. (2018). Conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de primer ciclo básico respecto a la transición de la aritmética al álgebra. *VIII Congreso Iberoamericano de Pedagogía*. Buenos Aires, Argentina.

Mejías C., Alsina Á. (2018). Formación docente a través del análisis del error en álgebra. *VII Congreso Internacional de Psicología y Educación*. Santa Marta, Colombia.

Mejías C., Alsina Á. (2019). Instrumento para evaluar los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de Educación Primaria. *VIII Congreso Uruguayo de Educación Matemática*. Montevideo, Uruguay.

INDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

El Dr. Ángel Alsina i Pastells, de la Universitat de Girona,

DECLARO:

Que el trabajo titulado "Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de Educación Primaria", que presenta Cristian Mejías Zamorano para la obtención del título de doctor, se ha realizado bajo mi dirección.

Y para que así conste y tenga los efectos oportunos, firmo el presente documento.

Firma

Girona, ………. de 2019

Dedicado a todas las personas que permitieron

que compartiera el tiempo que por derecho les correspondía,

con este trabajo de investigación.

Muchas gracias por vuestra comprensión.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente la colaboración, orientación y ayuda que me ha brindado mi director de tesis Dr. Ángel Alsina i Pastells, quien encaminó de excelente forma esta tesis doctoral, asimismo siempre me concedió palabras de ánimo cuando las energías decaían. La disposición, guía y consejos fueron fundamentales para dar término a este trabajo de investigación.

Agradezco a las autoridades de la Universidad de Playa Ancha campus San Felipe, quienes han entregado las facilidades para hacer uso de los espacios del campus universitario en momentos y días, muchas veces inadecuados.

Agradezco a todos los familiares, colegas, amigos, alumnos y exalumnos que colaboraron en la tarea de convocar a los profesores que contestaron el instrumento de evaluación.

Agradezco a cada uno de los docentes de educación general básica que en forma desinteresada respondieron el instrumento.

Agradezco a las personas que en forma fraternal me incentivaron al inicio y fundamentalmente a finalizar esta tesis doctoral.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

La finalidad de esta investigación es evaluar los conocimientos didácticos-matemáticos que poseen los profesores en ejercicio de educación general básica respecto al álgebra temprana. Este contenido se encuentra incorporado en el currículo escolar a través del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989 y 2000) y el Common Core State Standards Initiative (CCSSI, 2010), siendo también integrado al currículo chileno desde primer año de enseñanza primaria a partir del 2012 (MEC, 2007; MINEDUC, 2012). Considerando que las investigaciones en esta área son escasas y que la inclusión del álgebra temprana desde los primeros años de escolaridad básica es un tema complejo para los docentes de educación básica en Chile, hemos decidido elaborar un instrumento que permita pesquisar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los docentes en ejercicio de educación primaria.

Esta investigación se sustenta a través del aporte que realiza el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) planteado por Godino y su equipo, además del sostén que proporciona el Conocimiento profesional del profesor (Shulman, 1986). Nutriéndose de los aportes de varios modelos, Godino (2009) propone el Modelo del conocimiento didáctico-matemático que está compuesto por seis facetas o dimensiones para el conocimiento didáctico-matemático las cuales están en estrecho vínculo con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Lo anterior plantea una potente herramienta que dicta pautas para la formulación de consignas que permiten evaluar el conocimiento didáctico-matemático en profesores, que en nuestro caso, fueron docentes en ejercicio de educación primaria.

Lo anterior, sumado a un estudio del desarrollo histórico-epistemológico del objeto matemático álgebra y sus significados, al análisis de investigaciones previas referentes al aprendizaje del álgebra y la formación docente para enseñar álgebra, un estudio de la presencia del álgebra en los libros de texto chilenos de primero a sexto año de enseñanza básica y su incorporación en el currículo nacional, español y americano (USA), y la fundamentación teórica antes mencionada, se procedió al diseño, construcción y validación de instrumento que permite medir los conocimientos didáctico-matemáticos que tienen los profesores en ejercicio de educación primaria. Una vez finalizada la confección del instrumento fue sometido a un juicio de diez expertos de distintas nacionalidades, todos con grado de Doctor en Matemática, Didáctica de la Matemática o Educación Matemática, quienes se dedican a la docencia e investigación en didáctica de la matemática siendo su especialidad el álgebra escolar. Para fortalecer nuestro instrumento se optó por ingresar dos preguntas que pertenecen a un instrumento elaborado para analizar los conocimientos de los futuros profesores sobre la enseñanza del álgebra (Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi, 2015). A continuación realizamos una segunda etapa que fue la aplicación de la versión piloto del cuestionario a 8 profesores pertenecientes a instituciones municipalizadas, particular subvencionado y particular pagado, quedando conformado en su versión definitiva por 8 ítems que están categorizados en conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado con sus subcategorías conocimiento del contenido en relación a los estudiantes y conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. A la versión final del cuestionario se les realizó un análisis *a priori* de cada uno de los ítems y subítems.

El instrumento fue aplicado a 121 profesores en ejercicio de educación primaria en Chile. Los resultados obtenidos indicaron que los docentes poseen un insuficiente nivel de los conocimientos didáctico-matemáticos para la

enseñanza del álgebra, esto implica que los profesores no cuentan con el dominio de los conocimientos que le permita una ejecución adecuada de sus prácticas pedagógicas, más aun existiendo la necesidad que los docentes profundicen los contenidos matemáticos-algebraicos propuestos por el Ministerio de Educación chileno.

Finalmente podemos concluir que es imperiosa la ejecución de un programa que permita mejorar el nivel del conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria; mejorar el tratamiento del objeto matemático álgebra en los textos de estudio de educación primaria en Chile y realizar una reformulación de las estructuras curriculares en la formación de profesores de educación primaria considerando la necesidad que incorporar una ampliación de los contenidos algebraicos y de aquellos relativos a la didáctica del álgebra.

RESUM

La finalitat d'aquesta investigació és avaluar els coneixements didàctico-matemàtics sobre l'ensenyament de l'àlgebra primarenca del professorat d'Educació Primària en exercici. Aquest bloc de continguts es va incorporar en el currículum escolar a partir de la iniciativa del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1989 y 2000) i de la *Common Core State Standards Initiative* (CCSSI, 2010), i a partir del 2012 s'ha incorporat també en el currículum xilè des del primer nivell de l'Educació Primària (MEC, 2007; MINEDUC, 2012). Considerant que les investigacions d'aquesta àrea són escasses i que la inclusió de l'àlgebra primerenca des dels primers anys d'escolaritat bàsica és un tema complex per al professorat d'Educació Primària a Xile, hem decidit portar a terme una recerca que permeti analitzar el nivell de coneixements didàctico-matemàtics que té el professorat d'Educació Primària en exercici, com s'ha indicat.

Aquesta investigació es fonamenta teòricament en l'Enfocament Ontosemiòtic del Coneixement i la Instrucció Matemàtica (EOS) plantejat per Godino i el seu equip, a més a més del marc teòric que proporciona el coneixement professional del professor (Shulman, 1986). Nodrint-se de les aportacions de diferents models, Godino (2009) proposa el Model del Coneixement Didàctico-Matemàtic (CDM), composat per sis facetes o dimensions per al coneixement didàctico-matemàtic les quals estan en estret vincle amb el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques. Aquest model suposa una potent eina que dicta pautes per a la formulació de consignes que permeten avaluar el coneixement didàctico-matemàtic del professorat, que en aquest estudi, són mestres en exercici d'Educació Primària.

A partir d'aquesta fonamentació, i després de la revisió del desenvolupament històrico-epistemològic de l'objecte matemàtic "àlgebra" i els seus significats; l'anàlisi d'investigacions prèvies referents a l'aprenentatge de l'àlgebra i la formació docent per ensenyar l'àlgebra; i d'una recerca sobre la presència de l'àlgebra en els llibres de text xilens de primer a sisè d'Educació Primària i la seva incorporació al currículum xilè, espanyol i americà, es va procedir al disseny, construcció i validació d'un instrument que permet mesurar els coneixements didàctico-matemàtics sobre l'ensenyament de l'àlgebra primerenca que té el professorat d'Educació Primària en exercici. Una vegada finalitzada la confecció de l'instrument va ser sotmès a un judici de deu experts de diferents nacionalitats, tots amb grau de Doctor en Matemàtiques, Didàctica de la Matemàtica o Educació Matemàtica, qui es dediquen a la docència i a la investigació en didàctica de la matemàtica essent la seva especialitat l'àlgebra escolar. Per enfortir el nostre instrument es va optar per incorporar-hi dues preguntes que formen part d'un instrument previ elaborat per analitzar els coneixements sobre l'ensenyament de l'àlgebra dels futurs mestres (Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi, 2015). La validació va concloure amb l'aplicació de la versió pilot del qüestionari a 8 mestres d'escoles públiques i privades, de manera que la versió definitiva de l'instrument va quedar conformat per 8 ítems que estan categoritzats en coneixement comú del contingut, coneixement ampliat del contingut amb les seves subcategories, coneixement del contingut en relació als estudiants i coneixement del contingut en relació a l'ensenyament, fent una anàlisi *a priori* de cadascú dels ítems i subítems.

L'instrument va ser aplicat a 121 mestres xilens d'Educació Primària en exercici. Els resultats obtinguts van indicar que els docents tenen un nivell insuficient de coneixements didàctico-matemàtics per ensenyar àlgebra, la qual cosa implica una falta de domini dels coneixements que els permeten una execució adient de les seves pràctiques pedagògiques, més encara considerant la necessitat que els docents aprofundeixin els continguts algebraics proposats pel Ministeri d'Educació de Xile.

Finalment podem concloure que és imperiosa l'execució d'un programa que permeti millorar el nivell dels coneixements didàctico-matemàtics del professorat d'Educació Primària en exercici; millorar el tractament de l'objecte matemàtic "àlgebra" en els llibres de text xilens d'Educació Primària; i realitzar una reformulació de les estructures curriculars en la formació de professors d'Educació Primària tenint en compte la necessitat d'incorporar una ampliació dels continguts referents a l'àlgebra.

SUMMARY

The main purpose of this research is to assess the early algebra didactic-mathematical knowledge of primary school teachers. Its content has been introduced in the school curriculum of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989 and 2000) and the Common Core State Standards Initiative (CCSSI, 2010), and has also been included in the Chilean curriculum from the first year of primary school since 2012 (MEC, 2007; MINEDUC, 2012). Considering that research in this field is scarce and that inclusion of early algebra from the first years of primary school is a complex issue for primary education teachers in Chile, we decided to create an instrument to inquire into the didactic-mathematical knowledge of primary school teachers.

This research is based on the contributions of the Onto-Semiotic Approach (OSA) to Mathematical Knowledge and Instruction by Godino et al., and on the professional knowledge of teachers (Shulman, 1986). Using the input of several models, Godino (2009) proposed his didactic-mathematical knowledge model, which comprises six facets or dimensions that are closely related to the mathematics teaching and learning process to achieve didactic-mathematical knowledge. This creates a powerful tool for the preparation of guidelines to formulate slogans that allow evaluation of the didactic-mathematical knowledge of teachers who, in this case, work in primary education.

Using this theoretical background, together with a study of the historical-epistemological development of algebra as a mathematical object and its meanings, the analysis of previous research concerning the learning of algebra and teacher training to teach algebra, a study of the presence of algebra in Chilean textbooks from first to sixth year of primary education and its

incorporation into the Chilean, Spanish and American curricula, we then designed, created and validated an instrument to allow the measurement of the didactic-mathematical knowledge of teachers working in primary education. Upon completion, the instrument was tested by ten experts from different nationalities. All these experts have a Ph.D. in Mathematics, Didactics of Mathematics or Mathematics Education, are dedicated to teaching and research in didactics of mathematics and are specialized in school algebra. To reinforce our instrument, we chose to enter two questions that are part of an instrument that was developed to analyze the knowledge of future algebra teachers (Godino, Aké, Contreras, Diaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras and Wilhelmi, 2015). We then moved forward to the second stage: the application of the pilot version of the questionnaire to 8 teachers working for municipalized schools, state-subsidized schools and private institutions. The final version consists of 8 items categorized as common knowledge of the content, expanded knowledge of the content and specialized knowledge of the content with its subcategories of knowledge of the content in relation to the students and knowledge of the content in relation to teaching. The final version of the questionnaire underwent an a priori analysis of each of the items and sub-items.

The instrument was applied to 121 primary education teachers in Chile. The results indicated that teachers have an insufficient level of didactic-mathematical knowledge for teaching algebra. This implies that teachers have no mastery of the understanding that allows adequate execution of their pedagogical practice, even more considering the need for teachers to deepen the mathematical-algebraic contents proposed by the Chilean Ministry of Education.

We can eventually conclude that it is imperative to implement a program for improving the level of didactic-mathematical knowledge of primary education

teachers, improving the treatment of algebra as a mathematical object in textbooks for primary schools in Chile and reformulating the curricular structures in the training of primary education teachers, considering the need to extend the algebraic contents and algebra-related dialectics.

INTRODUCCIÓN GENERAL

La educación es un fenómeno social, cultural y humano complejo donde existe un intercambio de conocimientos, valores y patrones de conducta, no se trata de un cúmulo de conocimientos innatos, por el contrario, la educación se fundamenta en la interacción, en lo que una sociedad y los otros pueden enseñar a un individuo (León, 2007). La educación primaria, es aquella que es impartida a los niños y jóvenes que se encuentran en un grupo etario de 3 a 13 años aproximadamente. Relaciona el desarrollo evolutivo del niño en las diferentes áreas como la física, social, cognitiva, psicológica, emocional y sexual, con la planeación y aplicación de ciertos contenidos y estrategias pedagógicas apropiadas a este nivel.

Las matemáticas ocupan un lugar importante en todos los currículos educativos en la mayoría de los países del mundo; convirtiéndola en una asignatura reconocida como importante y útil, además de universal por su parecido en contenidos dictados en diferentes escuelas (Qualding, 1982). La importancia de las matemáticas incluidas en el currículo educativo, es la herencia o producto de una larga historia dentro el desarrollo científico de la humanidad. Ellas, al igual que la filosofía, la astronomía, la física y la biología; fueron las primeras áreas del conocimiento donde el individuo realizó sus primeras aproximaciones al saber y comenzó a obtener a partir de su práctica, resultados y desarrollos útiles en referencia al conocimiento de cómo funcionaba el mundo, facilitando su entendimiento y aprovechando sus propiedades para intercambios comerciales, descubrimientos, desarrollo de herramientas y dedicación a la investigación.

Desde la prehistoria con el uso de tablillas y la creación de los números como símbolos se facilitó el intercambio comercial, llegando a operaciones de alta complejidad, lo que permitió la creación de estructuras matemáticas complejas.

Existe consenso en impugnar la enseñanza escolar sin profundidad reflexiva, carente de rigor disciplinario y que no respeta la individualidad de la persona que aprende, por el contrario se validan los procesos educativos que están en una persistente actualización y crítica constante, donde los altos niveles de profesionalización, conocimientos técnicos y pedagógicos respondan a las exigencias del mundo actual y brinde a los estudiantes la oportunidad de desarrollar al máximo su potencial.

La educación promueve en el estudiante la curiosidad de conocer y aprehender más al mundo que le rodea, la necesidad de adquirir nuevas habilidades, de explorar nuevas áreas de saber, de investigar y asimilar nuevas culturas, nuevos contenidos, nuevas formas de ver el exterior; es decir, la educación enseña métodos de investigación para aproximarse a la realidad, creando una opinión y conciencia individual de los fenómenos. Esta misma premisa, debe ser una habilidad esencial en el docente, quien tiene como tarea, generar un campo de investigación amplio, constante, especializado y útil sobre temas que atañen a su investidura profesional.

Para la labor del profesor en el aula debe existir un apoyo importante en libros de textos escolares, documentos, revistas científicas, publicaciones, material audiovisual y cualquier recurso válido, coherente y pertinente al trabajo de aula, debiendo cumplir con estándares y revisiones previas de calidad, diseño y contenido, lo que colaborará al aprendizaje y motivación de los estudiantes.

Considerando el escaso nivel que presentan en álgebra y matemática en general los estudiantes de pedagogía en educación básica en Chile (Carnoy, Beteille, Brodziak, Loyalka y Luschei, 2009), y la dificultad que enfrentan los profesores de educación primaria para dominar los contenidos matemáticos y pedagógicos de la matemática que enseñan debido a la usencia de posibilidades de poder adquirirlos (Felmer y Varas, 2007), es que hemos querido evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria para la enseñanza del álgebra. Variados estudios realizados en Estados Unidos han empleado el desempeño escolar para diferenciar a los docentes que logran aumentar el rendimiento en forma significativa en sus estudiantes (Sanders y Rivers, 1996; Sanders y Horn, 1998; Wrigth, Horn y Sanders, 1997), con esto se desprendió la existencia de dos factores incidentes en la mejoría académica de los estudiantes, el profesor y el desempeño previo del alumno. En esta memoria nos hemos focalizado en el profesor en ejercicio de educación primaria, por ello esta investigación se centra en responder ¿qué conocimientos didáctico-matemáticos poseen los profesores de educación primaria en ejercicio en torno al álgebra?

Para dar respuesta a esta pregunta de investigación usamos como referente teórico al Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013) que se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). La construcción del instrumento de evaluación que nos permitió evaluar aspectos relativos al conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra que poseen profesores en ejercicio de educación primaria se basó en aquellos constructos teóricos. Indagamos el nivel que tienen en el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado junto con sus subcategorías conocimiento del contenido en relación a los estudiantes y conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.

El instrumento fue respondido por 121 profesores en ejercicio de enseñanza primaria que ejercen su labor docente en las regiones de Valparaíso, Metropolitana y O'Higgins en Chile. Los resultados de esta investigación son presentados en esta tesis doctoral.

CAPÍTULO 1: DEFINICIÓN DEL PROBLEMA, PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN Y OBJETIVOS

1.1 Presentación

La educación ha sido uno de los elementos fundamentales del desarrollo y evolución de la humanidad. Es reconocido a nivel mundial, que la educación es un derecho de cada ser humano desde su nacimiento, incluso es uno de los principios fundamentales de los tratados y cartas en derechos humanos: la educación debe orientarse hacia el pleno desarrollo de la personalidad humana y del sentido de su dignidad, debe fortalecer el respeto por los derechos humanos y las libertades fundamentales, además la prestación de la educación primaria debe ser libre, universal, gratuita, asequible y obligatoria (Asamblea General de las Naciones Unidas, 1966, p. 4).

Si bien es un derecho consagrado en tratados internacionales, la educación en el mundo aún dista de ser accesible para muchos niños. Según la UNESCO (2011), en la actualidad existen millones de niños sin escolarizar, muchos otros que desertan de los programas educativos y además, una gran escasez de docentes que bajo la implicación de la crisis económica mundial, generan progresos muy lentos en el área educativa. En este sentido, si bien existen avances por los diferentes países para ofrecer mayores oportunidades de acceso a la educación, es evidente que la multicausalidad del fenómeno hace de dicha labor, algo complejo.

El acceso a la educación debe considerar la infraestructura de un centro especializado para impartirla; niños, adolescentes y adultos que estén en la disposición y libertad de asistir para recibirla; y docentes formados y dedicados a la labor de la educación. Siendo estos tres elementos los principales para llevar a cabo un proceso formativo, no le restan importancia a otros aspectos como el marco jurídico e institucional que formalice el proceso de escolarización; la malla curricular y contenidos que deben ser estudiados; métodos y herramientas de enseñanza; útiles, libros y material didáctico de apoyo; además de la valorización cultural y social que una población le dé a la educación como derecho y deber para su desarrollo.

En este contexto, la labor del docente resalta en su importancia dentro del tema. La docencia, en líneas generales, es una profesión que involucra mucha dedicación y habilidades en quien la ejerce. Se considera al docente, como una figura de modelaje en sus alumnos, sean estos niños, adolescentes o adultos; por lo que el docente debe ser un profesional con filosofía humanista, reflexivo, crítico, orientado a la investigación; con habilidades y aptitudes para el diseño de programas, formulación de estrategias de enseñanza, construcción de modelos educativos y planes de evaluación eficientes y ajustados a cada grupo o individuo; y con capacidad de adaptación a los diferentes contextos socioeducativos y culturales cambiantes (Ministerio de Educación, Cultura y Deportes de Venezuela, 2001).

Un docente integral que se desarrolle de manera exitosa en su profesión, no sólo debe ser empático y tener la posibilidad de transmitir sus conocimientos; sino que también dichos conocimientos a impartir deben ser sólidos, actualizados y analizados a la luz de la crítica y la aptitud de la labor investigativa. De acuerdo con Braslavsky (2002), para el siglo XXI, las instituciones y los profesionales en educación deben estar preocupados por la remodelación de la formación docente y la innovación pedagógica. Sin embargo, la autora también considera que la evolución de la labor docente como profesión, está directamente relacionada con la estructura de las sociedades y las posibilidades que la misma le aporta para su desarrollo.

Parte de dichos conocimientos con los que debe contar un docente para llevar a cabo su profesión tienen que ver con la asignatura que enseñan. Parece obvio que un docente de lengua y literatura debe de conocer sobre el tema, así como uno que imparta historia debe saber de aquella disciplina y uno que imparta matemática debe saber de estas; sin embargo, la especialización docente y amplios conocimientos de la asignatura que enseñan es un lujo en muchos países de Latinoamérica, África e incluso, algunos países de Europa oriental y Asia (Braslavsky, 2002).

En el caso de las matemáticas, Tomás (1990) considera que la conveniencia de su inclusión como asignatura obligatoria en el currículo de enseñanza básica es de total aceptación entre la opinión de expertos en la materia. La autora considera que ellas posibilitan la adquisición de habilidades intelectuales, aumentan los conocimientos científicos en el alumno, desarrollan su pensamiento lógico y abstracto, contribuye con la aplicación de técnicas de trabajo y facilitan su inserción y adaptación a la vida social y cultural a través de actividades profesionales. En este sentido, la matemática forma parte fundamental de la malla curricular de la mayoría de los países del mundo, así como la labor docente en el área adquiere también vital importancia. A partir de allí, resulta prioritaria su actualización constante como parte de su quehacer profesional de docente a través del análisis de publicaciones científicas, desarrollo de investigaciones propias, indagación de estrategias innovadoras para su enseñanza y aprendizaje y análisis crítico de la labor actual a través de la renovación de contenidos.

Un currículo apropiado en el área de las matemáticas considera la importancia de trabajar los contenidos a través de los procesos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representaciones (NCTM, 2003). En este sentido, los contenidos deben estar orientados a que el alumno identifique el sentido utilitario de cada contenido, logre relacionar cada uno de los bloques de aprendizaje, reciba una educación orientada a la resolución de problemas y se inclinen hacia un método de aprendizaje y ensayo para problemas reales en futuro (Tomás, 1990). Alcanzar dichas metas depende en gran medida de la capacidad del docente para demostrarle al alumno el sentido que tienen las matemáticas como parte de su formación integral; esto no sólo a partir del saber los contenidos como las operaciones básicas, geometría, ecuaciones y el álgebra, sino también a partir de las estrategias que utiliza para relacionarlo con el contexto, facilitar la comprensión, invitar a la indagación e investigación y propiciar el interés y análisis crítico en cada tema y bloque de aprendizaje.

Como formas de la actualización que debe mantener un profesional de la educación, se pueden consultar los informes anuales, indicadores, boletines estadísticos y propuestas de diferentes instituciones y organizaciones internacionales que investigan y validan la situación global con respecto al tema. Algunas de las organizaciones de mayor relevancia son la UNESCO (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura), la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), la OMS (Organización Mundial para la Salud), o el Banco

Mundial, entre otras. En el caso de la OCDE, se encarga de realizar una evaluación cada tres años del nivel de adquisición de habilidades de los alumnos que están cercanos a graduarse de aquellos países que están adscritos. De esta manera, organiza la aplicación de una prueba de conocimientos y habilidades que se aplica a nivel internacional conocida como PISA (Programa de Evaluación Internacional de Alumno de OCDE). Los resultados de esta evaluación, aportan estadísticas actualizadas en educación con respecto al nivel de preparación con el que los alumnos de cada país terminan su educación obligatoria, específicamente en el área de lectura, matemáticas y ciencias; además de habilidades personales como motivación, autoconcepto y estrategias de aprendizaje. Asimismo, aporta recomendaciones a todos los países participantes para alcanzar mejores niveles de rendimiento en sus estudiantes y metas más ambiciosas (OCDE, 2017).

Otra alternativa que aporta indicadores confiables y está más enfocado en el área de aritmética y ciencias, son los resultados de la prueba TIMMS (Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias). Esta prueba también es desarrollada y aplicada por una organización internacional (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo), y aporta resultados sobre los estudiantes, las instituciones y los docentes. En esta iniciativa participan 59 países cada cuatro años, con sus estudiantes de cuarto y octavo año de enseñanza básica. Un docente de matemática orientado a la indagación e investigación en pro de mejorar su quehacer profesional, pudiera consultar en estos boletines las creencias de los estudiantes con respecto a su formación y aprendizaje, cumplimiento de los contenidos vistos, políticas de funcionamiento escolar, antecedentes didácticos de los docentes y demás tópicos de interés. Esta prueba busca realizar una comparación entre los contenidos propuestos, los impartidos y los realmente alcanzados por los estudiantes. Su última aplicación fue en el año 2015 y la organización a partir de los resultados permite el acceso a artículos de consultas, enciclopedias, procedimientos de elaboración de sus pruebas y los resultados en sí mismos (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo, 2017). La próxima aplicación de esta evaluación en Chile será en el mes de octubre del 2019.

Es importante conocer y ver lo que ocurre en las aulas de un mundo globalizado, sin embargo, también es fundamental realizar un análisis de lo que ocurre a nivel local, allí está el eje diferenciador de esta investigación, pues pretende dar luces de aquellos elementos que ocurren en las aulas a diario y que permiten mejorar el quehacer de nuestros docentes, sobre todo en un tema escasamente estudiado, como es la evaluación de los conocimientos didácticos-matemáticos para la enseñanza del álgebra en profesores chilenos en ejercicio de educación primaria.

1.2 Motivación y contextualización del estudio

Los resultados de las pruebas PISA aplicadas en el año 2015, obtenidos por los escolares chilenos dejan en evidencia una problemática al interior del país como también en América Latina.

Los resultados de los escolares nacionales ocupan un lugar con más sombras que destellos en Latinoamérica, están muy por debajo de la media internacional de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico. Esta situación es preocupante desde diferentes puntos de vista y enfoques. Como se conoce, los países de América Latina han sido clasificados y rotulados como países en vías de desarrollo, situación que podría explicar de alguna forma los bajos resultados obtenidos, no obstante, este argumento muestra su debilidad e inconsistencia cuando aparecen países como Moldavia[1] superando los resultados en las pruebas PISA de algunas naciones latinoamericanas que también presentan índices de pobreza bajos y donde se vislumbran otras clases

[1] Moldavia presenta un alto índice de pobreza en Europa.

de variables explicativas tales como: el gasto en educación como porcentaje del PIB, proactividad de los sistemas educativos nacionales, gasto per cápita en educación, etc., sin dejar de mencionar factores culturales, sociales y religiosos.

Limitándonos al área matemática, el problema no radica en los conceptos o procedimientos para resolver los ejercicios algebraicos sino, en la forma en que son transmitidos a los escolares, es decir, en los recursos pedagógicos y didácticos que están siendo aplicados.

En las mismas pruebas internacionales PISA, se ha incluido un componente que pretendía medir el interés de los jóvenes de 15 años de distintas nacionalidades por los temas relacionados con la ciencia, las matemáticas y la tecnología, encontrando una aversión a decidirse por cursar ciertas profesiones que se caracterizan por tener altos componentes de estas áreas como lo son las ciencias exactas (física, química, matemáticas, estadística, etc.), y las ingenierías.

Existe un descenso en el interés de estudiar áreas relacionadas con ciencias y matemáticas al evidenciar que el futuro vocacional de los participantes no contempla la posibilidad o el deseo de estudiar una carrera profesional en donde se haga uso de todo o parte del conocimiento científico adquirido en estas asignaturas, una explicación es que los estudiantes encuentra a las asignaturas del área científica como monótonas, aburridas y sin ninguna aplicabilidad práctica (Rocard, 2007).

Existe además, una relación inversamente proporcional en el grado de desarrollo del país de origen y el interés por las áreas de ciencias y matemáticas, es decir, en los países con menor grado de desarrollo, los escolares presentan un descenso menor en el interés de estas áreas y en los países desarrollados, el descenso es mayor, esto se ha querido explicar desde diversos enfoques como el rechazo hacia el deterioro gradual y creciente del medio ambiente a manos de las grandes industrias multinacionales abanderadas por el desarrollo y la implementación de la ciencia y la tecnología (Espinosa y Román, 1991).

Hay quienes se centran en la metodología que se desarrolla para la explicación de los temas relacionados con las áreas de ciencias y matemática, argumentando una falta de explicar didácticamente los contenidos y en consecuencia equívocamente lograr desestimular los deseos de los escolares de aprender, estudiar y ejercer en temas relacionados a estas disciplinas (Fensham y Harlen, 1999).

Por otro lado, constantemente la Educación Superior en Chile ha tenido una serie de cambios y transformaciones, que en algunos casos han sido sólo matices y en otros se ha experimentado cambios sustantivos. Los temas educacionales están en la palestra en forma contante a lo largo del tiempo, con frecuencia hay adecuaciones curriculares, instaurándose la última de ellas en el año 2010 que es precisamente la que nos rige en la actualidad.

Tan relevante como las grandes reformas educacionales, son las pequeñas transformaciones que suceden en cada institución escolar, aquellas que involucran directamente a nuestros niños y que se dan en las aulas de los establecimientos educacionales del país. Es valioso conocer cómo se realiza el acompañamiento del niño en etapa escolar, inculcándoles no sólo el aprendizaje de alguna disciplina, sino también aquellos elementos formadores de la persona que aprende.

Es de gran importancia llevar a cabo investigaciones que contribuyan a comprender el pensamiento y acciones del profesor en la enseñanza y aprendizaje. En este proceso debe haber condiciones para que el alumno realice el mismo sus aproximaciones, movilice sus conocimientos y sea capaz de explicitar sus procedimientos y los raciocinios utilizados.

Dado lo fundamental que es conocer, comprender y evaluar aspectos relativos a los procesos educativos, es que en esta investigación se evaluarán los conocimientos didácticos-matemáticos para la enseñanza del álgebra que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria.

Analizar los conocimientos matemáticos en torno al álgebra tiene una gran relevancia, considerando que el dominio de los contenidos matemáticos por parte del profesor es un elemento primordial en el proceso de aprendizaje en sus estudiantes. El docente debe conocer, manejar y tratar eficientemente el contenido que abordará en sus clases.

Las investigaciones respecto a la evaluación de los conocimientos matemáticos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria se encuentran en etapa embrionaria, más aún, no existen instrumentos que ayuden a evaluar los elementos constituyentes en torno al álgebra en Chile. Sin embargo, la profesora Lilia Aké Tec, de la Universidad de Colima en México, ha realizado una interesante evaluación de conocimientos sobre el razonamiento algebraico en futuros maestros (Aké, 2013).

En todo el estudio, estaremos bajo el amparo del Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático que se basa en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática, desarrollado gracias a la interacción que hubo entre investigadores españoles y latinoamericanos (Font y Godino, 2006; Godino, Contreras y Font 2006). El EOS es un sistema teórico inclusivo que trata de articular diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza (Godino, 2006).

El álgebra tiene una indisoluble relación con la aritmética, muchas veces es presentada como una generalización de ella, sin embargo, representa mucho más que eso, es un lenguaje que ayuda a comunicar ideas matemáticas, siendo una herramienta utilizada para resolver problemas permitiendo la elaboración de modelos matemáticos (Serres, 2011). La reciente inclusión del álgebra desde los primeros años de escolaridad en Chile y la importancia que tiene este contenido, dado que permite analizar relaciones entre cantidades, hacer generalizaciones, justificar, probar y predecir (Kieran, 2006), es que se hace necesario evaluar los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria.

Construimos un instrumento de medición que permitió explicitar el nivel de preparación de los profesores en ejercicio de primaria para abordar el álgebra. La finalidad fue poder indagar y analizar el conocimiento didáctico y matemático que poseen en torno al álgebra. El instrumento fue aplicado a 121 profesores que ejercen docencia en los cursos de primer a sexto año de educación básica en Chile.

La relevancia de estudiar este contenido, es que el álgebra es considerada como un potente instrumento en la modelización matemática. El pensamiento algebraico es otra arista que emana de ella, su principal contribución es que con él, es posible expresar de manera eficiente una gran variedad de ideas matemáticas o bien contextualizadas en otras disciplinas. El propósito del álgebra no sólo es resolver ecuaciones y analizar relaciones funcionales considerando que es más que un conjunto de reglas y técnicas, es una forma de razonar donde debemos desarrollar una serie de habilidades tales como generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, probar y predecir (Kieran, 2004), las cuales son fundamentales para el aprendizaje eficaz de la matemática.

1.3 Definición de la investigación

A pesar que en los últimos años se han realizado esfuerzos significativos para lograr una mejora en el currículo escolar y con ello en las prácticas pedagógicas de los docentes de Chile, siguen perdurando dificultades que podríamos considerar crónicas. Las deficiencias persisten, más aún en el ámbito de las ciencias naturales y exactas, ahondándose las problemáticas en la enseñanza de la matemática donde los profesores que enseñan álgebra inicial siguen centrándose en la manipulación mecánica de símbolos (Olfos, Soto y Silva, 2007).

Debido al déficit existente en investigaciones que aborden las problemáticas relativas al eje de Álgebra en los primeros años de enseñanza básica y partiendo como acontecimientos importantes cada una de las reformas educaciones que ha experimentado el país, siendo la primera en 1830 y la última en el año 2010, más la adecuación del currículo escolar con las nuevas bases curriculares, cuyos alcances están determinados por la ley N° 20370 que se denomina Ley General de Educación, podemos vislumbrar que uno de los tópicos a reforzar en Educación General Básica es el correspondiente al eje de álgebra, esto considerando que es un contenido con un corto tiempo de incorporación en la enseñanza inicial en Chile. Por otra parte, estando constantemente ligado a los establecimientos educaciones, observando sesiones clases y colaborando con las instituciones educacionales del Valle de Aconcagua en la quinta región de Chile, he observado las deficiencias que presentan los profesores de la zona cuando abordan este contenido. Esta situación ha quedado refrendada cuando trabajamos en la construcción y puesta en marcha de un postítulo en matemática para profesores de segundo ciclo básico en la Universidad de Playa Ancha campus San Felipe. Allí se pudieron observar los temores, deficiencias y obstáculos didácticos-matemáticos que los docentes presentan en su quehacer diario.

Debido a lo incipiente que es la instalación de contenidos referentes a álgebra en los niveles iniciales de escolaridad, es que existen escasas investigaciones que se han realizado referentes a la enseñanza del álgebra en la educación chilena, siendo nuestro enfoque principal analizar la enseñanza del álgebra en los primeros niveles por parte de los profesores de básica de las regiones de Valparaíso, Metropolitana y O'Higgins en Chile, con el fin de determinar las concepciones y preconcepciones de los profesores que se encuentran en ejercicio en los primeros años de educación básica en aquellos lugares territoriales.

Otro de los aspectos a considerar son los bajos rendimientos que presentó el alumnado en las pruebas estandarizadas (PISA-TIMMS, 2015) en comparación con los estándares mundiales, por esta razón el año 2009 se decide incorporar el eje de álgebra desde quinto año de enseñanza básica con el fin de establecer nuevos patrones en la enseñanza de las matemáticas, y en el año 2012 se incluye la enseñanza del álgebra desde los primeros niveles de educación, pues se vio reflejada la importancia de que los alumnos a temprana edad desarrollen un pensamiento algebraico, enriqueciendo su conocimiento matemático adquiriendo progresos significativos en su aprendizaje.

Uno de los aspectos a considerar es que "el dominio del profesor en relación a los conocimientos que debe enseñar es un elemento clave, con efectos directos en el aprendizaje de sus alumnos, pues un profesor no puede enseñar lo que no sabe bien. En consecuencia, para la mejora de los aprendizajes de los alumnos es indispensable elevar el nivel de preparación de los profesores, sobre todo en aquellos temas recientemente incorporados en el currículo y para los cuales no recibieron preparación durante su formación inicial" (Alsina y Vásquez, 2015, p. 682).

Es fundamental que en la enseñanza del álgebra el docente establezca diversas estrategias, pues el ejercicio de enseñar va más allá de enfoques procedimentales, ya que en la enseñanza del álgebra ayuda a pensar, conjeturar y desarrollar un razonamiento matemático. Por ende, es necesario promover en los alumnos una enseñanza con sentido, esto a través de un adecuado y sólido transitar en los primeros niveles de enseñanza básica, la instalación de procesos de algebrización en el currículo chileno es un elemento altamente beneficioso, entre otras cosas ayudará a una transición menos compleja hacia los niveles superiores de educación secundaria. Por lo cual, es primordial analizar si los profesores de enseñanza básica están preparados para afrontar el proceso de enseñanza-aprendizaje de este contenido desde los niveles básicos de educación primaria.

1.4 Pregunta de investigación

Las investigaciones en torno al álgebra en educación primaria son incipientes en Chile, aún no se consolida como un tema ampliamente estudiando en el país existiendo escasas investigaciones en el área, no hallándose instrumentos de evaluación que midan los conocimientos didáctico- matemáticos en esta área.

Un aspecto a considerar es que en niveles más avanzados de la enseñanza escolar, los profesores enseñan el álgebra centrándose en aspectos memorísticos, enfocándose en una manipulación mecánica de ella. Es importante preguntarse, cómo están enfocando los profesores que ejercen docencia en los primeros ciclos los aspectos básicos de este contenido. Por ello nos centraremos en el análisis de los conocimientos didácticos- matemáticos de los profesores en ejercicio de educación primaria.

Se buscará responder la pregunta:

¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos poseen los profesores de educación primaria en ejercicio en torno al álgebra?

1.5 Objetivos

El interés se encuentra en dilucidar y explicitar qué conocimientos didácticos-matemáticos poseen los profesores en ejercicio de educación general básica en torno al álgebra temprana.

Considerando la dificultad que presenta el problema de investigación, iniciaremos la búsqueda de las respuestas a la interrogante, planteando una serie de objetivos generales y específicos los cuales tributarán a la respuesta de la pregunta de investigación.

En esta tesis doctoral, se planteará el siguiente objetivo general:
OG: Evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los profesores en activo de enseñanza básica para la enseñanza del álgebra.

Por la naturaleza de la investigación, es posible plantearse algunos objetivos específicos, entre los cuales podemos mencionar:

OE1: Estudiar el tratamiento que le otorgan los textos de estudio chilenos de Educación Primaria y el currículum nacional e internacional a los aspectos relativos al álgebra.

OE2: Construir y validar un instrumento que permita evaluar el conocimiento didáctico-matemático sobre álgebra de los profesores de educación primaria en activo.

OE3: Analizar los datos obtenidos para describir las principales debilidades y fortalezas en el conocimiento didáctico-matemático de los docentes de educación primaria en ejercicio.

1.6 Estructura de la tesis doctoral

Nuestra investigación consta de ocho capítulos troncales, más lo que respecta a referencias bibliográficas y anexos.

Primer Capítulo: Definición del problema, pregunta de investigación y objetivos.

Se describe la motivación y contextualización del estudio, así como los aspectos relacionados a la definición de la problemática, concreción de la pregunta de investigación y los objetivos. Además en ese apartado desarrollamos el enfoque metodológico y las fases de la investigación.

Segundo Capítulo: El álgebra.

Realizamos una organización de elementos que están relacionados con el álgebra. Efectuamos un estudio del desarrollo histórico-epistemológico del álgebra, recolectando información histórica desde que se originó esta área de la matemática. Analizamos el surgimiento de la matemática formal, y cómo fueron emergiendo los distintos tipos de álgebra y los significados intuitivo, clásico y matemático-axiomático de ella. Luego realizamos un resumen de las investigaciones que se han ejecutado sobre el aprendizaje del álgebra en educación primaria.

Tercer Capítulo: Enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática.

Expone los fundamentos teóricos que sustenta esta memoria. Para ello se utiliza el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), describiendo en forma detallada aquellos elementos que lo componen y que permiten entregar el soporte para el desarrollo de la investigación.

Cuarto Capítulo: Los conocimientos del profesor de matemática.
Presenta el conocimiento profesional del profesor, el conocimiento profesional del profesor de álgebra y el modelo que utilizamos en la construcción del instrumento de evaluación que es el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Font y Godino, 2013) que está basado en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática.

Quinto Capítulo: Estudio de la presencia del álgebra en los libros de texto chilenos.
Se realizó un estudio del álgebra en el currículo español, americano (USA) y chileno de educación primaria. Además se analizaron seis textos de estudio de primero a sexto año básico que son entregados gratuitamente por el Ministerio de Educación utilizando una herramienta del EOS como la “Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados” dado que entrega las orientaciones necesarias para visualizar los objetos matemáticos presentes.

Sexto Capítulo: Diseño, construcción y validación del cuestionario.
Se diseñó, construyó y validó el cuestionario que permite evaluar los conocimientos de los docentes de educación primaria en el eje de álgebra. La elaboración del instrumento constó de diversas etapas las que corresponden a la construcción de la versión inicial, generación de la solución experta, revisión del instrumento mediante juicio de expertos y aplicación piloto. A partir de esto se realiza un análisis cualitativo y cuantitativo de la aplicación piloto con el fin de obtener la versión definitiva del cuestionario.

Séptimo Capítulo: Evaluación de los conocimientos didácticos-matemáticos sobre el álgebra de los profesores de educación primaria en activo.
Exponemos los resultados luego del proceso de aplicación del instrumento a una muestra de 121 profesores en ejercicio de educación primaria. Se

analizaron las respuestas considerando el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado del contenido, este último desagregado en conocimiento del contenido en relación a los estudiantes y conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.

Octavo Capítulo: Discusión y conclusiones.
Mostramos la discusión de los resultados, así como las conclusiones obtenidas en relación con la pregunta de investigación y los objetivos planteados. Se exhiben las principales aportaciones, y las limitaciones del estudio, además se proponen las posibles futuras líneas de investigación.

Finalizamos con las referencias bibliográficas y los anexos que ayudaron a fortalecer y delinear el estudio presentado en esta tesis doctoral.

1.7 Enfoque metodológico y fases de la investigación

Esta investigación es de tipo exploratorio ya que hemos constatado que existen insuficientes investigaciones de la algebrización en el currículo chileno, a consecuencia de esto, se hace más complejo formular una hipótesis investigativa, pues a pesar de que la primera modificación al currículum se realizó en el año 2009, más aún existen escasos estudios que avalen el proceso de transición de la incorporación del álgebra en el currículo nacional desde los primeros niveles de educación.

Nuestra investigación está centrada en qué conocimientos didácticos y matemáticos tienen los profesores de educación primaria en ejercicio respecto al álgebra. En este apartado presentaremos sintéticamente los componentes que describen el marco metodológico empleado en esta investigación. Daremos a conocer el tipo de investigación, la población y la muestra de ella.

Esta investigación presenta un enfoque mixto, debido a la amplitud del tema investigativo, por ello, se decidió utilizar ambos enfoques metodológicos, ya que día a día se establece como una excelente alternativa para abordar temáticas de información en el campo educativo, brindándonos una mejor profundización y comprensión sobre el fenómeno educativo, a través de las cualidades que presenta cada enfoque investigativo. Por lo tanto, está orientada en comprender y describir un conjunto de procesos de recolección, análisis y vinculación de datos cuantitativos y cualitativos en un mismo estudio. La meta de esta investigación mixta no es reemplazar a la investigación cuantitativa ni a la investigación cualitativa, sino utilizar las fortalezas de ambos tipos de indagación, combinándolos y tratando de minimizar sus debilidades potenciales (Hernández, Fernández, Baptista, 2006). Como ya lo hemos descrito, nuestro interés se enfoca en conocer las dificultades y concepciones que presentan los profesores de educación primaria en relación a la enseñanza del álgebra en los primeros años de educación, a partir del instrumento evaluativo.

El diseño de esta investigación es explicativo secuencial (DEXPLIS), el cual consta de dos etapas, la primera será de modo cuantitativo que consistirá en una entrevista respecto a los aspectos generales de los profesores, tales como: Género, años de experiencia, conocimiento de estándares pedagógicos y disciplinarios, establecimiento educacional, entre otras. Los resultados obtenidos serán complementados mediante una segunda etapa cualitativa que consistirá en la aplicación de un cuestionario de preguntas abiertas respecto al conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores, con el fin de demostrar las deficiencias y concepciones que presentan los profesores de educación general básica en relación a la enseñanza del álgebra en los primeros años de educación.

El objeto fue establecer evidencia de los conocimientos, formas de abordar un problema y de qué manera los profesores explicarían a sus alumnos la situación planteada. Averiguamos las nociones que tienen los docentes respecto al razonamiento algebraico, que nos permitió conocer sus carencias formativas.

La investigación se realizó a profesores de educación primaria de las regiones de Valparaíso, Metropolitana y O'Higgins en Chile, con el fin de indagar sobre su conocimiento didáctico y matemático en el ejercicio de la enseñanza del álgebra en los primeros niveles de educación.

La población para esta investigación está formado por profesores de Educación General Básica que ya han ejercido durante un tiempo determinado. La muestra consta de 121 docentes de educación general básica de las regiones antes mencionadas.

Cabe mencionar, que sin perjuicio que hubo docentes de otras regiones del país, inicialmente nuestra investigación estaba orientada a profesores que trabajan en ciudades del Valle del Aconcagua dado que es el lugar donde se sitúa el campus San Felipe de la Universidad de Playa Ancha y donde existía una mayor accesibilidad a docentes de educación primaria lo que facilitaría la obtención de resultados para nuestro tema investigativo, además, podríamos profundizar sobre los conocimientos obteniendo conclusiones importantes respecto a la calidad de la educación que se genera en nuestro entorno educativo.

Para la obtención del objetivo general y los objetivos específicos, se ha seccionado la investigación en distintos microestudios:

Estudio 1: Indagación de la evolución histórico-espistemológico del álgebra, su surgimiento y los aspectos que envuelven y le dan un sustento teórico a esta área de la matemática.

Este aspecto se encuentra asociado al capítulo 2 de esta tesis, allí se describe el desarrollo que ha tenido a lo largo de historia, además de delinear las ramificaciones hacia los distintos elementos que envuelven a este tópico matemático. Finalizando con un estudio sobre distintas investigaciones que abordan aspectos de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en niveles primarios lo cual tributa a la obtención del OE1.

Estudio 2: Análisis de tratamiento que le otorgan los textos de estudio utilizados en Chile al álgebra y la forma en que es abordada esta unidad en el currículum nacional e internacional.

Esto se encuentra asociado al objetivo específico 2. Se realizó un estudio sobre los alcances y limitaciones que presentan aquellos textos de estudio distribuidos en forma gratuita en Chile por parte del MINEDUC, así como se examinó el tratamiento que se le otorga a nivel nacional e internacional a este tópico, se analizaron los estándares, bases curriculares, contuvimos mínimos y programas de estudio. Esto se encuentra desarrollado en el capítulo 5 de esta investigación.

Estudio 3: Elaboración de un cuestionario que permita acopiar evidencias sobre el conocimiento-didáctico matemático utilizado por los docentes de educación primaria en la enseñanza del álgebra.

Se realizó la construcción de un cuestionario que ha permitió recoger evidencias claras respecto al conocimiento didáctico-matemático que están utilizando los profesores de educación primaria, esto se encuentra abordado en el capítulo 6 de esta tesis. En la construcción se consideraron aspectos relacionados al análisis de las tareas de las investigaciones indagadas, así como elementos circundantes a los textos de estudio analizados, todo esto enlazado con el modelo del conocimiento-didáctico propuesto por el modelo del enfoque ontosemiótico. Luego de la construcción, se puso a disposición para realizar un juicio de expertos, se validaron los contenidos y la selección de preguntas. Se realizaron los ajustes y reformulaciones necesarios, de esta forma quedó la versión final la cual fue aplicada a un grupo de profesores de educación primaria de las regiones de Valparaíso, Metropolitana y O'Higgins en Chile.

Estudio 4: Evaluar los conocimientos didácticos-matemáticos para la enseñanza del álgebra de los profesores de enseñanza primaria en activo.

Esta sección de la investigación corresponde al objetivo general sobre el cual tributa el capítulo 7 de esta tesis, allí se realizó un acabado análisis de los resultados que se obtuvieron a partir de la aplicación de los cuestionarios sobre el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra en educación inicial aplicado a 121 profesores de enseñanza básica. Una instancia a desarrollar, fue el análisis a priori sustentado en elementos teóricos del enfoque ontosemiótico, esto tiene la finalidad de vislumbrar, categorizar e interpretar las producciones de los docentes.

CAPÍTULO 2: EL ÁLGEBRA

2.1 Presentación

Las matemáticas no son una ciencia que estaba desarrollada y sólo esperaban por el descubrimiento de la humanidad. Lo que hoy se conoce como matemáticas, aritmética y álgebra, han sido el resultado de la acumulación de proposiciones teóricas de muchos científicos y estudiosos del área a lo largo de las décadas. A diferencia de otros descubrimientos, en las matemáticas las propuestas teóricas así sean milenarias, se mantienen vigentes hasta la actualidad, aunque su uso se diversifique, se piensa que en ellas una teoría es permanente.

Desde sus inicios, han ido desarrollándose en paralelo con los avances de la humanidad y otras áreas del conocimiento de manera directamente proporcional y con un crecimiento exponencial. En este sentido, las matemáticas han ido expandiéndose y adquiriendo mayor cuerpo teórico.

La utilidad de la matemática se hace a veces intangible para la mayoría de las personas. Son milenarias y su desarrollo es visible en la mayoría de los avances científicos y usos tecnológicos actuales, operando de fondo a diferentes herramientas de uso cotidiano, sin que, muchas veces, los usuarios puedan identificar su aplicación.

Para Stewart (2007), las matemáticas iniciaron con la creación de los números o símbolos para representar los números que conocemos hoy en día y data de hace 1.500 años atrás. Antes de estos descubrimientos, 8.000 años a.C., los humanos utilizaban unas tablillas con marcas que representaban la posesión y cantidades de productos y propiedades como animales, tierras, granos, aceites, legumbres, etc.; método que se mantuvo vigente hasta los 3.000 años a.C. aproximadamente. Posteriormente, estos trazos horizontales representados en las tablillas de arcilla, fueron unidos por líneas horizontales entre una y otra, asemejándose entonces a los números que conocemos hoy en día.

Por su parte, para Ruíz (2003), las civilizaciones egipcia y babilónica son el punto de partida de la historia de las matemáticas. Específicamente, aquellos grupos que ocupaban los espacios territoriales alrededor de los ríos Nilo, Tigris y Eufrates los cuales obligaban a mantener un activo intercambio comercial. En la cultura egipcia, se encontraron papiros con 1800 a 1650 años a.C. con problemas matemáticos resueltos como los Papiro de Moscú y Papiro Rhind, de tipo aritmético aditivo, es decir, multiplicaciones reducidas a sumas repetidas. Así mismo, el autor expresa que la cultura egipcia mantuvo en sus papiros tres formas de representación de sus desarrollos matemáticos: sistema de jeroglíficos, el hierático y el demótico.

Por su parte, los babilónicos como parte del desarrollo de la agricultura, imprimieron en tablillas de arcilla, pictogramas, que se definen como símbolos de palabras simplificadas con una representación o significado en particular.

Estas tablillas, resultaron con marcas en formas de cuña y procuraban explicaciones matemáticas y astronómicas. Los babilónicos, con el tiempo fueron considerados astrónomos expertos, ya que desarrollaron símbolos coherentes y los utilizaron de forma sistemática para representar fenómenos astronómicos con gran detalle y precisión, basado principalmente en datos matemáticos con un sistema sexagesimal (los números desarrollados sólo llegaban al 60, y utilizaban el número de mayor denominación de forma repetida, si era necesario representar cantidades más grandes). De los babilónicos, la cultura moderna hereda los 60 minutos de una hora, los 60 segundos del minuto y los 360 grados de una circunferencia total (Stewart, 2007).

En paralelo, la cultura oriental, específicamente en China, también se daban desarrollos y avances en las matemáticas junto con los descubrimientos de los babilónicos y los egipcios. Dentro de los descubrimientos chinos, las horas solares son de los más destacados y data de los años 1.200 a.C. El Chou Pei fue el libro basado en compilaciones de escritos y pergaminos independientes donde se dejaron plasmados cerca de 246 problemas matemáticos resueltos que hacían referencia a elementos cotidianos como agricultura, ingeniería y comercio (impuestos), y algunos otros problemas más abstractos como ecuaciones lineales, incógnitas e indeterminadas, números negativos, propiedades de los triángulos (Galán, 2012).

Grecia también tuvo desarrollos importantes en el inicio de las matemáticas como ciencia. Galán (2012) explica que los griegos organizaron sus descubrimientos en definiciones, axiomas y demostraciones, alcanzando un gran nivel de similitud a lo que conocemos hoy en día. Sus representantes más significativos son Tales de Miletos y Pitágoras entre los años 630 a 495 a.C. Con ellos, el desarrollo de las matemáticas pauta un hito, dando un gran salto en el estudio de la geometría, conocimientos del ángulo recto, el cálculo del volumen de un cuerpo, cálculos de áreas, óptica, cónicas (elipse, parábola e hipérbola), curvas y el inicio del estudio de la gravedad como fenómeno. Los estudios griegos fueron la base de la trigonometría actual y un aporte importante a la astronomía; se menciona que su cercanía con el continente europeo hicieron que sus descubrimientos se mantuvieran muy similares a lo largo de los años hasta las matemáticas que se utilizan hoy en día.

La cultura árabe e hindú, crearon una comprensión matemática que les fuera útil para el desarrollo arquitectónico religioso para adorar a sus dioses en templos. Utilizaron los decimales, los números negativos y el cero. El salto más importante fue la acogida de los números irracionales como soluciones plausibles a los problemas que se planteaban, situación que los babilónicos se habían planteado y rechazaron siglos antes. Los hindús lograron resolver ecuaciones cuadráticas y utilizaron las raíces en sus problemas y soluciones. El sistema numérico utilizado era posicional, es decir, un número valía según la posición que ocupaba, siendo los árabes lo que los adaptaron a las fracciones. Su mayor aporte resalta en la edad Media, posterior a los grandes avances de los Griegos (Galán, 2012).

En la antigüedad, según Ruíz (2003), existen figuras de gran renombre imposibles de ignorar por su gran valor teórico no sólo para las matemáticas, sino también para otras ciencias y áreas de conocimiento como la astronomía, la medicina, la filosofía, el humanismo, entre otras. Entre estos personajes, Platón y Aristóteles tienen un valor incalculable. Platón es el responsable de desarrollos como el razonamiento deductivo matemático, estudios del círculo y la esfera, y avances en la astronomía. Por su parte, Aristóteles alcanzó a desarrollar las propiedades de los objetos, la distinción entre lo abstracto y lo real, uso de la regla y el compás, distinción entre axiomas y nociones, diferencia entre el punto y la recta, el estudio del infinito, entre otros aportes.

En el renacimiento, se admite el estudio de los números complejos, teorías de grupos, uso y resolución de ecuaciones, geometría descriptiva, probabilidades, ecuaciones diferenciales, desarrollo del cálculo como una rama de las matemáticas y el álgebra, estudio de la velocidad, cinemáticas, series infinitas y otros conceptos. Para el siglo XIX, las matemáticas comenzaron a complejizarse aún más con el uso de símbolos con significados matemáticos y estimaciones puntuales que permitieran dar resultados a problemas particulares irresolubles siglos atrás. En este siglo, el mayor avance se dio en el continente europeo, introduciendo los conceptos de límites y aproximaciones. La matemática empezó a utilizarse en otras áreas del conocimiento como la física, la medicina, abandonando la concepción de una ciencia aislada y abstracta de poca utilidad para otras profesiones. En esta era, se desarrollaron las series de Fourier con el uso de infinitos en trigonometría, el cálculo de las órbitas de los planetas, estudios de magnetismo, superficies topográficas y polinomios, en su mayoría, elementos que forman parte de la educación formal básica de los colegios en todo el mundo (Galán, 2012).

Considerando la modernidad como la era actual que vive la humanidad, las matemáticas en este momento, crecen exponencialmente. Todos los días y en cada lugar del mundo, existen estudiosos y científicos dedicados al desarrollo de teoremas y postulados matemáticos que den respuesta a un sin número de problemas reales y cotidianos, así como abstractos. El uso de computadoras con softwares avanzados de cálculos, calculadoras de alta complejidad y el uso de la web como herramienta básica en la investigación, hacen que los descubrimientos sean muy rápidos, cambiantes y universales a través de su publicación e intercambio. La modernidad avanza hacia el cálculo de tipo cuántico, teorías atómicas y subatómicas, mayor precisión y complejidad, con aparatos sofisticados que permitan alcanzar las metas de investigación para este siglo.

En la actualidad la educación y las estructuras curriculares se van actualizando según los avances de la era. Hace unos años era importante que un estudiante supiera utilizar una máquina de escribir, hoy en día la asignatura impartida es informática y su principal herramienta es una computadora con conexión a internet. En este sentido, se espera que con la educación formal, un individuo adquiera competencias básicas según su edad y nivel de desarrollo psíquico, físico y emocional; que le sirvan para enfrentarse al mundo y expectativas reales a su alrededor. Específicamente, las matemáticas tienen un uso innegable en la cotidianidad, facilitan el razonamiento inductivo y su aprendizaje aumenta el entendimiento y comprensión del mundo y su funcionamiento en general.

Las matemáticas han perdurado décadas de desarrollo, con avances en muchas áreas, manteniéndose vigentes y con una utilidad innegable. Su estudio procura en el individuo la disciplina de la práctica, el razonamiento inductivo y abstracto, altos niveles de concentración, consideración de la utilidad en las herramientas tecnológicas y su futuro uso en la que podría ser su profesión.

2.2 Desarrollo histórico-epistemológico del álgebra

2.2.1 Prehistoria del Álgebra

Antes de que los primeros hombres aprendieran a razonar, conocer su entorno e incluso a sí mismos, implícitamente comenzaban a utilizar los primeros conceptos matemáticos. El número de animales, las distancias recorridas, el tamaño de las presas que debían cazar, el crecimiento de la población, todo esto contribuyó hacia una incipiente construcción matemática.

A través de la comparación de elementos cotidianos, como contrastar un grupo de animales, los frutos recolectados, se tenía una preconcepción de lo que es contar, con ello a partir de las necesidades que se iban produciendo, se utilizaba una aritmética inicial. Como producto de la comparación entre objetos, el hombre poco tardará en darse cuenta de la importancia de los dedos de las manos para fijar colecciones pequeñas. Al comparar un reducido grupo de animales con los dedos de su mano, daba el primer paso para formar un sistema de numeración quinario, decimal o vigesimal. Sin embargo, más adelante se amplió el espectro de comparación, fue entones como se utilizaron otros elementos como piedras, marcas en los huesos y árboles para obtener una mejor contabilidad.

Un paso fundamental fue el que realizaron las primeras civilizaciones, al comparar dos conjuntos con elementos diferentes, pues con ello se logra una conciencia hacia lo abstracto naciendo el concepto de número.

El inicio de la matemática está asociado a los números, muchas civilizaciones construyeron complejas estructuras aritméticas y algebraicas a través de simbologías que más tarde dieron lugar a los números. Este atributo es una abstracción que representa la cardinalidad de un conjunto de elementos, es la base de innumerables concepciones teóricas ideadas a través de los años y soporte incluso de aquellas que están por desarrollarse.

Nuestro soporte numérico actual, con dígitos del 0 al 9, son una invención relativamente nueva debido a que nació hace mil quinientos años aproximadamente, asimismo la extensión decimal es aún más reciente, considerándose que los primeros escritos con aquella nomenclatura se inició hace cuatrocientos cincuenta años.

Antes del sistema de numeración contemporáneo existían simbologías o abstracciones distintas a las que conocemos en la actualidad. Así, por ejemplo, antiguas civilizaciones utilizaban fichas de arcilla que según su forma (cónica, esfera u ovalada) representaban porciones de granos, animales o jarras de aceite. También para estos fines, se utilizaron marcas en huesos de animales que se encontraron en la extinta Checoslovaquia y en Sudáfrica hace unos treinta mil años.

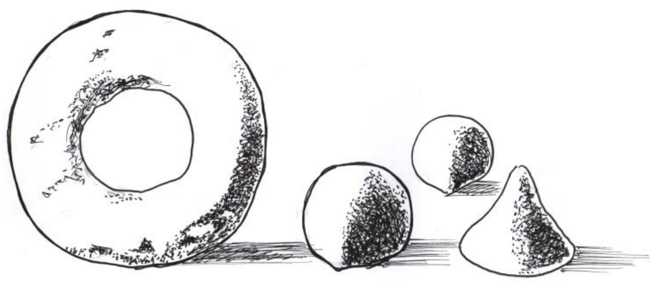


Figura 2.1 Envoltorio de arcilla con tres fichas en su interior (un cono y dos esferas) Encontrado en la actual Irán, hace 3.000 años a.C.

Con el correr de los años, las marcas realizadas en tablillas y huesos fueron transformándose en incipientes pictogramas y elementos simbólicos que representan palabras a través de las imágenes. Muchas culturas comenzaron a construir elementos rudimentarios en matemática, destacando los aportes de los egipcios, babilónicos, griegos, chinos, hindúes o árabes, entre otros.

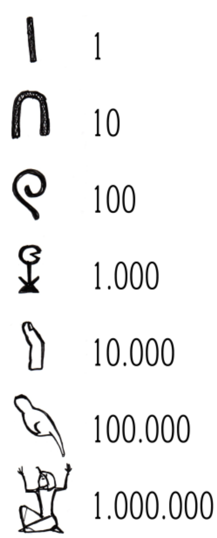


Figura 2.2 Números egipcios

Los matemáticos no sólo utilizaban símbolos, también usaban diagramas, esto conllevó a varios tipos razonamiento visual. Se descubrieron diagramas en tablillas babilónicas como la denominada YBC 7289 (Figura 2.3) la que muestra un cuadrado y dos diagonales. Los lados y las diagonales están marcados con distintos numerales en forma de cuñas. Este trabajo aritmético, geométrico y algebraico, obtuvo una excelente aproximación para la $\sqrt{2}$.

Figura 2.3 Tablilla babilónica YBC 7269

La instalación de la aritmética y el álgebra como disciplinas independientes de la geometría fue una situación gradual en Grecia. Arquímides, Apolonio y Ptolomeo usaron la aritmética sólo para calcular cantidades geométricas, por otra parte, Herón, Nicomaco y Diofanto utilizaron la aritmética y el álgebra en forma independiente de la geometría (Ruíz, 2003).

Diofanto entregó soluciones esencialmente algebraicas en las ecuaciones especiales de primer grado con dos o tres incógnitas. Desarrolló una serie de 13 libros, de los cuales sobreviven sólo 6, en lo que queda plasmada la simbología como una de sus principales contribuciones, además se desprende que uno de los aspectos más relevantes es la solución de ecuaciones indeterminadas. A pesar de los aportes que realizó al álgebra la civilización griega, no se buscó ofrecer una estructura lógica y deductiva que permitiera construir la teoría de los números y el álgebra.

2.2.2 Surgimiento del álgebra

Existe evidencia que los babilónicos resolvían ecuaciones complejas, incluso poco antes del 2.000 a. de C. Encontrar una solución a ecuaciones, que en los tiempos actuales podrían categorizarse como simples, era una tarea mayor dada la inexistencia de los números negativos y la imposibilidad de utilizar una manipulación simbólica (Stewart, 2007).

Álgebra es una palabra que viene del vocablo árabe "álgebra" (al-Jabr, الجبر), el cual es un término empleado por Muhammad al-Khwarizmi, siendo su significado el de "recomposición" o "reintegración". Él utilizaba palabras y no símbolos, aun así los métodos usados por Al-khwarizmi son similares a los utilizados en la actualidad, era posible que pudiera resolver 6 tipos de ecuaciones que ayudarán a dar solución a ecuaciones lineales y cuadráticas ($bx=ax^2$; $bx=c$; $ax^2=c$; $ax^2+bx=c$; $bx+c=ax^2$; $ax^2+c=bx$).

Quien entregó reglas para resolver ecuaciones cuadráticas y un método para resolver ecuaciones cúbicas con raíces reales, fue Omar Khayyam, sus trabajos tuvieron un amplio acercamiento a la geometría, de esta forma trabajó la dimensión algebraica de la teoría de proporciones de Euclides para extender el concepto de número de tal forma que fuera posible incluir a los números irracionales positivos, también usó un método geométrico para resolver ecuaciones de tercer grado con raíces positivas.

Para llegar a los simbolismos actuales se requirieron cientos de años, fueron los matemáticos italianos del renacimiento quienes comenzaron con una rudimentaria utilización de símbolos algebraicos, siendo uno de los precursores Diofanto de Alejandría. Sin embargo, uno de los que comenzó con la utilización de ellos es François Vieta a pesar que su simbología era distinta a la que utilizamos en la actualidad, consideraba que las letras consonantes representaban constantes, y que las vocales, incógnitas.

También los egipcios elaboraron elementos algebraicos, aunque su construcción es bastante primaria, su aplicación estaba relacionada con la repartición de víveres, cosechas y materiales. Ellos tenían un método para resolver ecuaciones de primer grado utilizando el método de falsa posición.

En el siglo I d.C., Herón de Alejandría, inventó un método que ayuda a aproximar el cálculo de raíces cuadradas y cúbicas inexactas. A inicios del siglo II, Nicómaco de Gerasa publicó un texto que denota reglas para el buen uso de los números, sus trabajos inician la separación de la aritmética de la geometría. Cuando Diofanto de Alejandría publicó su libro Aritmética, donde se trata de forma rigurosa las ecuaciones de primer y segundo grado, él en el siglo III comenzó a estructurar de forma rigurosa conceptos relacionados con ecuaciones y en particular de designar las incógnitas a través de símbolos (Ruíz, 2003).

En el siglo VII los hindúes desarrollaron reglas algebraicas para trabajar números positivos y negativos. En el siglo IX al-Khwarizmi escribió sobre los métodos de cálculo y de los procedimientos algebraicos para resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones. En el siglo siguiente, otros matemáticos árabes como Abu Kamil y Al-Bujzani continuaron los trabajos iniciados por al-Khwarizmi, todos estos avances fueron utilizados por Fibonacci.

A partir del siglo XV se comenzó a utilizar para los símbolos adición y sustracción, las letras “p” y “m” respectivamente, pero a pesar de esto, los símbolos + y – también aparecieron durante esta época, los cuales fueron utilizados por los mercaderes alemanes, y fue Widmann quien formalizó la utilización de esta escritura. Rudolff comenzó a utilizar el símbolo de raíz cuadrada. En 1557, el inglés Robert Recordé inventó el símbolo =. La simbología de > y < se debe a Thomas Harriot.

Cardano, Stevin, Pacioli y Stifel, empezaron con la utilización de números irracionales, por ejemplo, Vieta entregó una aproximación para el número π. Stifel usó irracionales en su forma decimal, lo cual difería de Pascal y Barrow quienes consideraban algunos números irracionales como simplemente magnitudes y no como números, más bien continuaba la línea de Descartes respecto a los irracionales.

En cuanto a los números complejos, Girard le dio valor como soluciones formales de ecuaciones, Descartes rechazó estos números, pues decía que no eran verdaderos números. En este siglo también Nicolás Chuquet introdujo en Europa occidental el uso de números negativos y notación exponencial.

También existen relaciones entre geometría y álgebra. Oresme, por ejemplo, trabajó con los conceptos de tiempo, rapidez, distancia y velocidad a través de representaciones graficas que mezclaban estos dos elementos. Vieta y Fermat trabajaron bajo la premisa de mezclar ambos elementos. Este último, a pesar de conocer los métodos de Vieta, sustentó sus investigaciones en trabajos de Diofanto y Apolonio, además también usaba los símbolos + y – para los positivos y negativos y comenzó con la utilización de la simbología que se usa en la actualidad para los números racionales.

En el siglo XVII, Rene Descartes fusionó la geometría y el álgebra, dando lugar a la geometría analítica. También en este siglo, Cramer elabora una técnica del álgebra lineal para la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Finalizando aquel siglo, Gauss publica el Teorema Fundamental del Álgebra.

Posteriormente en el siglo siguiente, Sarrus crea la regla de tres para el cálculo de determinantes de orden tres. Galois, de quien se dice que es el padre del álgebra abstracta, elaboró investigaciones sobre fracciones continuas, teoría de ecuaciones y teoría de números.

Cauchy en el siglo XIX, realizó investigaciones referentes en la teoría de permutación de grupos, convergencia y divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física, además estructura los cimientos del análisis infinitesimal. Hamilton trabajó en investigaciones en torno a la aritmética de los números complejos y cuaterniones. Además, Grassmann que es considerado el principal precursor del álgebra lineal, trabaja elementos referentes a combinación lineal, independencia lineal, subespacio y dimensión. George Boole, trabajó en ecuaciones lineales, cálculo de diferencias infinitas y probabilidades en general. Finalmente Peano, formaliza la definición del conjunto de los números naturales.

La construcción de la disciplina matemática nunca se ha detenido, constantemente surgen nuevas teorías y objetos de estudio, entre ellos transformaciones, permutaciones, matrices; junto con estos nuevos conceptos, comenzó a surgir la necesidad de crear nuevas estructuras que son llamadas anillos, campos y grupo. La conjunción de estas teorías, ayudó a la concepción de lo que llamaremos matemáticas abstractas.

Con el tiempo se fueron formalizando distintas estructuras algebraicas, así emergen el álgebra elemental, lineal, multilineal, homológica, conmutativa, booleana y álgebra no conmutativa, entre otras.

2.3 Emergiendo distintos tipos de álgebra

Con el tiempo, en el contexto de las matemáticas abstractas se fueron formalizando distintas estructuras algebraicas, así emergen el álgebra elemental, lineal, multilineal, homológica, conmutativa, booleana, y álgebra no conmutativa, entre otras.

2.3.1 El álgebra elemental

El álgebra elemental corresponde a la forma más esencial del álgebra. A diferencia de la aritmética, trabaja con números representados por símbolos usualmente *a*, *b*, *c*, *x*, *y*, *z*, lo que permite ampliar el espectro matemático.

De acuerdo a lo anterior, se puede visualizar una diferencia con la aritmética. En esta última, las cantidades se manifiestan en números con valores determinados. Por otro lado, el álgebra elemental trata con letras que representan el valor que la persona le asigne, pero si el individuo concede a la letra un valor determinado, no puede representar el mismo problema otro valor diferente al concedido (Swokowski y Cole, 2009).

Dentro de los contenidos que trabaja el álgebra elemental se encuentran: números reales; solución de ecuaciones y desigualdades lineales; formulas y aplicaciones del álgebra; exponentes y polinomios; factorización; expresiones racionales y ecuaciones; gráfica de ecuaciones lineales; raíces y radicales; ecuaciones cuadráticas, entre otras.

2.3.2 El álgebra lineal

A lo largo de la historia, el hombre se ha esforzado por entender los diversos aspectos que comprende la matemática y para ello se ha dedicado a disponer herramientas que le permitan entender fenómenos de la naturaleza. Para comprender esto, se han desarrollado modelos matemáticos que le han permitido resolver interrogantes, donde muchos de estos modelos tienen un comportamiento lineal.

El álgebra lineal tuvo un fuerte impulso gracias al estudio de las ecuaciones lineales, generando las distintas aristas que contemplan el álgebra lineal.

Una de las principales investigaciones fue del matemático y filósofo francés D'Alembert, quien descubrió que las soluciones de un sistema $ax = b$ forman una variedad lineal (Stewart, 2007). Del mismo modo, distintos autores van descubriendo distintos conceptos que hoy envuelven a este eje. Por ejemplo, el término matriz fue utilizado por el matemático inglés James Joseph, quien la definió como un arreglo cuadrilongo de términos. Luego, Cayley entendió la importancia del concepto de matriz y años más tarde establece la inversa de esta.

Los conceptos y los métodos de resolución asociado al álgebra lineal, han sido un aporte relevante al entendimiento de distintos fenómenos para comprender otras áreas del conocimiento matemático.

2.3.3 El álgebra multilineal

El álgebra multilineal corresponde a la continuación natural e inmediata del álgebra lineal (Martinez-Chavanz, 2006), es aquella que extiende y generaliza los resultados de esta última. Este, los generaliza de la forma de contener: Álgebra 0-lineal (escalares); Álgebra 1-lineal (vectores y formas); Álgebra 2-lineal (bilineal); Álgebra 3-lineal (trilineal); Álgebra p-lineal.

El álgebra multilineal estudia las funciones multivectoriales y multiformas en lo referido a la dependencia de función lineal, es decir, estudia los tensores que permiten satisfacer ampliamente las necesidades de la matemática y la física. Por consiguiente, el álgebra multilineal proporciona la base algebraica para estudiar los distintos espacios y geometrías.

2.3.4 El álgebra homológica

Estudia la homología en un marco algebraico general. No solo se estudian los objetos, alcanzando los morfismos entre ellas. Es una disciplina relativamente nueva, sus orígenes pueden asociarse a los estudios realizados en topología combinatoria y en álgebra abstracta y sus principales exponentes son Henri Poincaré y David Hilbert a finales del siglo XIX. Es considerada como una de las principales creaciones de la matemática, ya que es utilizada en todas sus áreas como en otras disciplinas de la ciencia.

Esta área contiene esencialmente la teoría de funtores derivados, la cual es desarrollada sobre categorías de módulos sobre un espacio anillado (Lluis-Puebla, 2005).

2.3.5 El álgebra conmutativa

Es entendida como el estudio de los anillos conmutativos, se presenta como la unificación de la Aritmética y la Geometría Afín. Su principal área de investigación son los anillos conmutativos, sus ideales, módulos y álgebras. Se desarrolló a partir de dos fuentes: La geometría algebraica y Teoría de números.

En Geometría algebraica el tipo de anillos estudiado es el anillo $k[x_1, .., x_n]$ de polinomios en varias variables sobre un cuerpo k, mientras que en la Teoría de Números es el anillo Z de los racionales enteros (Atiyah y MacDonald, 1978).

Uno de los precursores de este tipo de álgebra, es David Hilbert. El álgebra conmutativa es pensada como la teoría afín de la geometría algebraica y una de las principales nociones asociadas a este campo, es el de ideal primo, ya que proporciona una extensión común de los primos de la Aritmética y de la Geometría.

Hoy, el álgebra conmutativa es uno de los cimientos fundamentales de la Geometría Algebraica, ya que proporciona instrumentos para esta rama.

2.3.6 El álgebra no conmutativa

Se focaliza en el estudio de las propiedades algebraicas no conmutativas, las estructuras definidas sobre ellas. Se hablará de una geometría sin puntos, ya que existe ningún espacio definido. Se analizan las propiedades de un espacio conmutativo sin tener que definirlo de manera formal. El estudio general de anillos que no implica una conmutatividad, ello está asociado a la teoría de anillos, teoría de representación y otros campos como las teorías del álgebra de Banach.

En general, la matemática no conmutativa, se considera:

- Dado un objeto singular G, se comienza encontrando una desingularización *G que describa G en el sentido a estudiar. En variadas ocasiones, *G será un grupoide y el cociente del espacio de unidades de *G por acción del grupoide será G.
- *G debería tener una buena estructura, y de esta manera definir un álgebra de funciones C*(*G) cuyas propiedades reflejen las de G.
- Es buscar el anillo conmutativo C*(*G).

Por su parte la geometría no conmutativa tributa a la mecánica cuántica, física del estado sólido, geometría del espacio-tiempo, además con ella es posible reformular algunas herramientas clásicas del análisis en términos algebraicos e hilbertianos como teoría de la medida, topología, entre otros (Macho, 1998).

2.3.7 El Álgebra Booleana

Hacia 1850, el matemático irlandés George Boole, trabajó en un sistema matemático para desarrollar proposiciones lógicas con símbolos, el que se aplica en el diseño y análisis de sistemas digitales.

El álgebra de Boole, es un sistema matemático que utiliza variables y operadores lógicos, las que está enmarcada en un sistema de elementos *B={0,1}* y los operadores lógicos, las que corresponden a *OR (+)* y *AND (*)*. Luego, se establecen las expresiones de conmutación como un número finito de variables y constantes.

El 0 lógico, corresponde a la negación y suele ser utilizado como *false*, aunque también permite o es equivalente al valor natural, entero y decimal 0. Por su parte, el 1 lógico, apuntan al valor booleano de afirmación, el cual es representado como *true*. Cualquier número que sea distinto a cero, se comporta como un 1 lógico.

Cumple con las siguientes propiedades: conmutatividad; asociatividad; distributividad; elemento neutro; complemento; dominación; impotencia; doble complemento; absorción y ley de Morgan. El álgebra de Boole, utiliza el diseño de circuitos en ingeniería electrónica, en donde el cero y el uno, representan dos posibles estados en circuitos originales, 0 representa un circuito abierto o bien "no conduce", mientras que el 1 representa un circuito cerrado, o bien que "conduce".

En el álgebra booleana las reglas de operaciones se refieren a la forma de los signos y no al contenido. Boole propuso un sistema formal al que sólo después le buscaría una interpretación en lenguaje físico o ideal, los axiomas están reducidos a conceptos puramente lógicos y los formalismos se expresan en fórmulas que son tesis o reglas de deducción (Barco, 2005).

2.4 Los distintos significados del álgebra

Considerando el desarrollo histórico-epistemológico del álgebra descrito y la desagregación hacia distintos tipos de álgebra, en este último apartado se realiza una primera aproximación hacia una teoría del álgebra que permita distinguir distintos significados, junto con el análisis de algunos nexos con otros elementos y como se refunden en una estructura consolidada. Haciendo un símil con los significados de la probabilidad descritos por Batanero (2005), se considera que estos distintos significados del álgebra se deberían incluir en la enseñanza de manera progresiva, empezando desde las ideas intuitivas de los alumnos sobre los conocimientos algebraicos, puesto que "la comprensión se debería interpretar como un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los diferentes elementos del significado que atañen al concepto" (Batanero, 2005, p. 257).

2.4.1 Significado intuitivo del álgebra

Cuando hablamos de álgebra, inmediatamente pensamos en expresiones numéricas y literales que son asimilables sólo para entendidos en esta materia, sin embargo, desde pequeños realizamos aproximaciones tenues a esta área que más tarde se van profundizando en la enseñanza formal. Las personas inician una manipulación algebraica trayendo consigo nociones y enfoques que usaban en aritmética. Kieran y Filloy (1989) postulan que el álgebra no es una mera generalización de la aritmética, donde su aprendizaje no se basa en hacer explícito lo que de una u otra forma estaba implícito en la aritmética, sino que requiere un cambio de pensamiento del estudiante de las situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales.

Los inicios de la actividad intuitiva se remonta a los años 200-250 a.C. a partir del surgimiento de la necesidad de comunicar la matemática. Klein (1992) indicaba que en esos años, todo se limitaba al planteamiento y solución en forma verbal, centrándose en la descripción de aspectos procedimentales de los pasos para resolver el problema que se ha generado.

A medida que iba transcurriendo el desarrollo del álgebra, su concepción mutaba de acuerdo a la interpretación de su naturaleza y su posible carácter objetivo o subjetivo de ella, lo que produjo una serie de controversias entre los precursores de esta concepción matemática. Sin embargo, actualmente se asume que durante la primera infancia los niños empiezan a ser conscientes de los efectos de las acciones que llevan a cabo con la intención de buscar la complicidad y atención del adulto, es decir, se encuentran en una fase de exploración entre la acción y la reacción. Estas acciones son, para Mason (2011, p. 567), “las instancias en que el niño desarrolla el control sobre sus facultades a través del desarrollo de su conciencia (como una capacidad para actuar), mediante la generalización”. Mason (2008) indica que la generalización es una actividad humana e innata que los niños pequeños llevan a cabo de manera natural en el contexto escolar, y Papic, Mulligan, Mitchelmore (2011) añaden que es precisamente a través de la generalización como se inicia el desarrollo del pensamiento algebraico. Desde esta perspectiva, en la enseñanza actual podemos instar a los niños, ya desde las primeras edades, a ser perspicaces en la observación de su entorno, buscando formas, patrones geométricos, patrones numéricos y secuencias. Por ejemplo, se puede comparar la cardinalidad de elementos que encontramos en el hogar para introducir el contenido de igualdad y desigualdad. Esta observación colaborará en el tratamiento de nociones algebraicas considerando aspectos intuitivos, cimentando su aprendizaje, explotando el interés de los niños por los juegos y las actividades concretas para lograr la institucionalización y formalización la estructura matemática.

2.4.2 Significado clásico del álgebra

Existen miradas comunes entre los autores cada vez que hacemos alusión a la mirada clásica del álgebra. Allí se reúnen elementos que hacen referencia a generalizar expresiones aritméticas que en un comienzo eran tratadas de forma particular. Comienzan a existir convenciones de notación y escritura, simbolización de expresiones, formalización de estructuras complejas y un análisis concienzudo de una de las concepciones matemáticas más relevantes como es el de función, considerando que es una de las principales ideas matemáticas (Godino, 2003).

Uno de los principales objetivos de la enseñanza del álgebra es que el estudiante logre realizar la conversión y reconversión entre el lenguaje natural hacia el lenguaje algebraico, no debe centrarse en particularidades, sino más bien debe considerar la inferencia de procedimientos, relaciones y patrones como una habilidad a desarrollar, o bien manipular expresiones simbólicas obteniendo equivalencias. Esto está fuertemente asociado a elementos troncales del álgebra clásica, debiendo coexistir una adecuada manipulación de expresiones algebraicas, factorizaciones, potenciaciones, radicales, ecuaciones, inecuaciones, funciones exponenciales, logaritmos, progresiones, combinatorias y trigonometría, entre otros elementos, con la elaboración de incipientes modelos matemáticos que permitan obtener madurez en el contenido para la comprensión tópicos abstractos en matemática.

Existen lineamientos que se han mantenido inalterables a través de los años, ya en el año 1986, Love, mencionado en Kieran (1989) indicaba sobre el pensamiento algebraico: "hoy en día el álgebra no es meramente dar significados a los símbolos sino otro nivel más allá de eso; que tiene que ver con aquellos modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos – por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular. Ser consciente de esos procesos, y controlarlos, eso es lo que significa pensar algebraicamente". Esto último, es uno de los desafíos más relevantes en la enseñanza del álgebra, tomando en consideración la mirada mecanicista en la que está inmersa la matemática actual, la cual está centrada en la aplicación de fórmulas y algoritmos más que en la comprensión de la situación matemática planteada y menos aún en el desarrollo del pensamiento algebraico.

2.4.3 Significado matemático-axiomático del álgebra

En la construcción de los fundamentos del álgebra, se han elaborado axiomas, teoremas y corolarios, los cuales dan los cimientos a esta disciplina. Pasaron muchos años, antes de que existiera la formulación teórica que tenemos en la actualidad. Los egipcios usaban la matemática para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres y cosechas, además ellos poseían un método llamado *de la falsa posición*, el cual empleaban para resolver ecuaciones de primer grado. A pesar que existieron interesantes aportes de Herón de Alejandría y Nicómaco de Gerasa, estos aún se encuentran un poco alejados de las formalizaciones algebraicas situándose más cercano a la aritmética.

Diofanto de Aljendría, comenzó a utilizar simbolismos algebraicos, que aunque muy elementales, provocaron un cambio sustancial en la estructura matemática de aquellos tiempos, por ello y otros aportes, es conocido como el padre del álgebra. Leonardo de Pisa, publicó el tratado del ábaco, obra que inspiró a los estudiosos de la aritmética y el álgebra. Pisa, también conocido como Fibonacci continuó fortaleciendo los principales trabajos de predecesores como Al-Jwaritzmi, Kamil y Bujzani.

Como ya se ha indicado anteriormente, Chuquet introdujo los números negativos, Rudolff el símbolo de raíz cuadrada y Recorde inventó uno de los símbolos más versátiles en matemática, como es la igualdad. Viéte y Descartes, realizaron trabajos en los cuales impulsaron racionamientos axiomáticos del álgebra.

Con estas contribuciones, más las formalizaciones y los aportes de Cramer, Gauss, Sarrus, Galois, Cauchy, Abel, Hamilton y Grassman, entre otros, fueron conformando un cuerpo algebraico y axiomas de los números reales como:

Axiomas de cuerpo: Asumimos la existencia de dos operaciones, llamadas suma y producto, tales que cada par de números reales x e y la suma $x + y$ y el producto xy son números reales unívocamente determinados por x e y y satisfacen los siguientes axiomas (Pinter, 1990):

Axiomas de la suma

$$(x+y)+z = x+(y+z)\ ;\ \ \forall\, x,y,z\ \in \mathbb{R}$$

$$x+y = y+x\ ;\ \ \forall\, x,y\ \in \mathbb{R}$$

Existe un elemento de $\mathbb{R}$, denotado como 0 tal que

$$x+0 = x\ ;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Para cada $x\ \in \mathbb{R}$, existe un $y\ \in \mathbb{R}$ tal que $x+y=0$

Axiomas del producto

$$(xy)z = x(yz)\ ;\ \ \forall\, x,y,z\ \in \mathbb{R}$$

$$xy = yx\ ;\ \ \forall\, x,y\ \in \mathbb{R}$$

Existe un elemento de $\mathbb{R}$, distinto de 0, que denotamos 1, tal que

$$1x = x1 = x\ ;\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Para cada $x\ \in \mathbb{R}$, tal que no sea cero, existe un $y\ \in \mathbb{R}$ tal que $xy=1$

Axiomas de distributividad

Para todo $x,y,z\ \in \mathbb{R}$; $(x+y)z = xz+yz$

Axiomas de Orden

Asumimos la existencia de una relación $\leq$ que establece un orden entre los números reales y satisface los siguientes axiomas.

Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$

Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$

Para todo $x,y\ \in \mathbb{R}$; $x \leq y$ ó $y \leq x$

Si $x \leq y$ entonces $x+z \leq y+z$; $\forall\ z\ \in \mathbb{R}$

Es importante tener claridad que uno de los elementos importantes que no debemos soslayar, es la relación enseñanza y aprendizaje en el álgebra tomando una postura a través de los distintos significados del álgebra, comenzando por el significado intuitivo pasando por los otros significados, así podrá progresar y reorientar la instrucción matemática.

2.4.4 Conexiones algebraicas

Uno de los obstáculos importantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática es considerar que su estructura se basa en materias inconexas y aisladas respecto a otras ciencias, e incluso sobre otros temas de la misma disciplina. Por el contrario, el sistema matemático debe ser abordado como una estructura conectada, donde existen vínculos entre las distintas disciplinas que la componen. En este apartado se detallan las uniones que existen desde elementos básicos del álgebra hasta llegar a aquellos de ámbito superior, con ello se obtendrá una visión ampliada de este tópico matemático.

2.4.4.1 Relación aritmética-álgebra

Medir y contar fueron las primeras actividades matemáticas del hombre primitivo. Fueron distintas las civilizaciones que se embarcaron en esta labor, destacándose los griegos, romanos, egipcios y babilonios, es aquí donde surgió la aritmética, las primeras acciones de la matemática. Con el paso del tiempo esta matemática se fue desarrollando y perfeccionando, dando ascenso al álgebra.

Son diversas las definiciones que proponen los autores para la aritmética y el álgebra. Godino (2012) establece que en la escuela se tiene una concepción tradicional y limitada del álgebra, denominándola como una aritmética generalizada, estable una diferencia entre ambas. La aritmética trata con números específicos expresados mediante numerales. Por su parte, el álgebra considera números no especificados, incógnitas y variables, los que son representados mediante letras como *x*, *y*, *t* o *v*, o bien expresiones con variables.

El paso de la aritmética al álgebra es un cambio cualitativo en la forma de pensar. Los enfoques aritmético y algebraico se diferencian en términos de estrategias globales de resolución de problemas (Gavilán, 2011). Considerando diferentes estudios realizados respecto al tema, hay muchos pensamientos que relacionan el entender el álgebra escolar como una generalización de la aritmética, otra postura sobre el tema postula que el enfoque algebraico de un problema implica la identificación de las variables intervinientes y de los parámetros para, posteriormente, buscar las relaciones entre ellos y conseguir expresarlas en términos algebraicos, dando lugar a una o varias ecuaciones que aún deben ser resueltas (Bodansky, 1991).

De esta manera, en las civilizaciones antiguas, la escritura de expresiones algebraicas utilizaba abreviaturas de las incógnitas, y no fue hasta la edad media que los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x, y desarrollaron el álgebra fundamental de los polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio.

Esto ocurrió en el oriente, mientras que en occidente llegó a ser conocido gracias a la traducción del libro al latín "algorithmi de numero indorum" donde Europa Occidental fue el primero en conocer este novedoso sistema de numeración. No obstante, no fue hasta la segunda mitad del siglo XIX que se introdujo el principio de permanencia por George Peacock, quien rectifica que todos los estudios realizados anteriormente por los matemáticos sobre ecuaciones algebraicas, grupos, determinantes y matrices, cumplen tanto para números naturales, otros números y letras.

Si bien se considera recurrentemente el álgebra como una generalización de la aritmética, es necesario ampliar la idea respecto a ella, ya que cuando se manifiesta un problema aritmético mediante el álgebra, se genera un nuevo sistema en el que se exploran nuevas capacidades para analizar soluciones y generalizarlas, unificando las soluciones.

2.4.4.2 Relación geometría-álgebra

El álgebra ha ido evolucionando a través del tiempo y no ha permanecido estática. Uno de estos progresos ha sido en el área de la geometría, en donde se han relacionado ambas disciplinas.

El álgebra geométrica es un lenguaje de un alto nivel, que es utilizado para representar y operar la geometría de los problemas de matemáticas, física e ingeniería (Laguna-Sánchez, 2011). Esta se origina en base a la idea del profesor Hermann Grassmann, la que en un comienzo fue incomprendida y subestimada por sus pares. Lo esencial de la idea consistía en desarrollar una nueva álgebra que facilitara la representación y manipulación de objetos geométricos, sin la necesidad de utilizar coordenadas irrelevantes. Esto lleva a definir algunas operaciones entre los diferentes objetos geométricos, en específico, la generalización del producto exterior ($\wedge$) y el producto interior ($\cdot$). Este último se define como:

$$u \cdot v = |u||v|\cos(\theta)$$

Esto, que permite obtener una medida de la proyección perpendicular de un vector sobre otro, el que se puede representar geométricamente como:

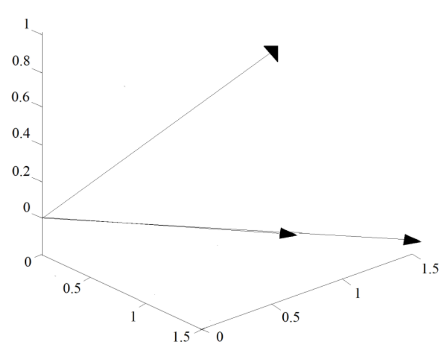


Figura 2.4 Proyección perpendicular de un vector sobre otro vector

Por su parte el producto progresivo, como lo definió Grassmann, el que corresponde al producto exterior corresponde a:

$$|u \wedge v| = |u \times v| = |u||v|\mathrm{sen}(\theta)$$

A partir de estas definiciones se remonta el origen del álgebra geométrica. De ahí en adelante, el álgebra geométrica se ha utilizado como un recurso didáctico para enseñar distintos contenidos de la disciplina, por ejemplo la generalización de expresiones algebraicas mediante la geometría.

2.4.5 Consideraciones de los significados algebraicos

Las civilizaciones anteriores, no sólo realizaron un desarrollo sustancial de la disciplina matemática, también lograron concebir modelos aritméticos, geométricos y algebraicos. Con el progreso de estos tópicos lograron expresar proposiciones, axiomas e incluso relaciones multifactoriales, además realizaron y demostraron teoremas los cuales son el sustento del algebra actual.

Los conceptos asociados e insertos en el álgebra han contribuido enormemente a variadas disciplinas de las ciencias naturales y exactas, algo que también ha ocurrido en otras áreas del conocimiento. Por mencionar algunos ejemplos, visualizamos elementos referentes al álgebra elemental en aplicaciones trigonométricas o logarítmicas, el álgebra lineal es utilizada en geotecnia y mecánica de fluidos y el álgebra booleana es fundamental en el diseño y de sistemas digitales.

La historia del álgebra y de la matemática en general, aún está muy ausente en la enseñanza escolar y universitaria. La mayor preocupación está en fortalecer aspectos instruccionales de esta ciencia, sus aplicaciones y los modelos que allí se encuentran, sin embargo, están ausentes los relatos y episodios ocurridos a través de los años. Trascendente es incorporar la historia, no sólo como un conjunto de anécdotas y biografías escritas en los textos con cierto grado de conexión con los temas que se tratan en las sesiones de clase, sino como un elemento que entrega lineamientos y sobretodo, propuestas didácticas en el tratamiento de los contenidos matemáticos.

Lo anterior ha servido como un sustento indispensable para la construcción de los distintos significados de álgebra. La elaboración de esta categorización no es una tarea sencilla, puesto que se enlazan diversos elementos teóricos con aquellos propios de los campos que aborda una tarea algebraica.

El significado intuitivo del álgebra se manifiesta luego de la necesidad de comunicar una idea matemática-algebraica. El significado clásico se revela como aquel elemento troncal que nos hace transitar entre las concepciones tradicionales del álgebra y el pensamiento algebraico, esto último es una concepción contemporánea fundamental para la persona que aprende.

Finalmente el significado matemático-axiomático que se nutre de los simbolismos y abstracción, dado que allí tributan las estructuras formales, los axiomas, teoremas y corolarios. Esta clasificación genera vínculos con otros tópicos matemáticos, creándose nexos entre el álgebra con la aritmética y la geometría.

Del mismo modo que lo indica Batanero (2005) haciendo referencia a los significados de la probabilidad, creemos que los significados del álgebra deberían incluirse en forma progresiva comenzando con ideas intuitivas de los alumnos respecto del álgebra, esto tomando en consideración que la comprensión de un contenido algebraico es un proceso continuo y creciente por el cual el alumno construye y relaciona progresivamente los elementos del significado asociados al concepto.

Si bien, la categorización realizada es aún incipiente y mejorable, su utilización en secuencia ayudará a la comprensión y consolidación de aquellos elementos que fueron tratados e introducidos de manera intuitiva por el estudiante, y que posteriormente requerirán de la fundamentación teórica e institucionalización que el contenido matemático-algebraico precisa.

2.5 Investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra en educación primaria

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en los niveles primarios en Chile se rige a partir de las orientaciones emanadas por el Ministerio de Educación a través de las bases curriculares (MINEDUC, 2012), allí se establece una organización de los contenidos mediante habilidades, contenidos y actitudes en cada uno de sus ejes curriculares. La elaboración de este documento, más las construcción de nuevos programas de estudio para los niveles de 1° a 6° año de enseñanza básica, han agregado un mayor grado de dificultad al quehacer de los profesores pues no siempre manejan los contenidos que deben tratar con sus estudiantes.

El Ministerio de Educación Chileno pretende en el eje de Patrones y Álgebra, que: Los estudiantes expliquen y describan relaciones de todo tipo, como parte del estudio de la matemática. Deben buscar relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, lo que los facultará para investigar las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra. Los patrones (observables en secuencias de objetos, imágenes o números que presentan regularidades) pueden ser representados en forma concreta, pictórica y simbólica y los estudiantes deben ser capaces de transportarlos de una forma de representación a otra, extenderlos, usarlos y crearlos. La percepción de los patrones les permite predecir y también fundamentar su razonamiento al momento de resolver problemas. Una base sólida en patrones facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico (Bases Curriculares, 2012, p. 91).

A pesar de los esfuerzos del Mineduc aún existen complicaciones por parte de los docentes pues presentan ciertas dificultades para abordar los contenidos, no obstante, existen escasos estudios para abordar el tema del álgebra en educación primaria.

Internacionalmente, el tema del álgebra ha sido mayormente abordado, tenemos a Godino como uno de los principales precursores, quien junto a Font, publican en el año 2003, "Razonamiento Algebraico y su Didáctica para Maestros", texto perteneciente al Proyecto Edumat-Maestros. Ellos elaboran un manual para el estudiante que aborda la enseñanza del álgebra tomando en consideración los conocimientos matemáticos y los conocimientos didácticos. En el texto se entregan herramientas para tratar este contenido matemático (Godino y Font, 2003).

También encontramos una propuesta de normas y estándares para la preparación inicial de profesores de matemática que describen una visión para las matemáticas escolares en los Estados Unidos y Canadá. En los documentos se entrega una organización del currículo, proporcionando herramientas de apoyo a la docencia y a la formación del profesorado. Desde el año 1995 se encarga de elaborar, ejecutar y revisar los estándares utilizados en Estados Unidos. En la actualidad el libro de Principios y Estándares de su autoría tiene la siguiente finalidad de exponer un conjunto amplio y coherente de objetivos para las matemáticas durante los 12 años de escolaridad, ser un recurso educativo para docentes y encargados de la política escolar y guiar el desarrollo de los marcos curriculares, evaluaciones y materiales de enseñanza (NCATE/NCTM, 2003).

El Ministerio de Educación en Chile en el año 2006, ha desarrollado "Nivelación restitutiva manual del docente, Matemática Álgebra primero medio", donde se entrega una nueva organización y secuencias de actividades propuestas para su enseñanza. La articulación en los contenidos algebraicos destaca como una fortaleza dentro de este manual, entregando directrices para el tratamiento de los contenidos algebraicos, su diagnóstico, el desarrollo y tiempos de aplicación de estos contenidos

García (2007), a partir de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, indaga sobre el papel del álgebra en educación secundaria considerando un modelo epistemológico como instrumento de modelización. En este estudio, se considera como objeto prioritario de investigación la actividad matemática escolar, todo desde una perspectiva epistemológica e institucional. Como consecuencia de esto, los procesos cognitivos de los estudiantes pasan a ser objetos secundarios, postulando que una vía de entrada a los fenómenos didácticos es a partir del cuestionamiento y modelización de su componente matemática.

En Chile, en el año 2009 se implementó el ajuste curricular en el sector de matemáticas, esto debido a las recomendaciones de los estudios realizados para incorporar nuevas unidades para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. Se organizó el currículum escolar matemático en los ejes: Números, Álgebra, Geometría y Datos y Azar**.** Paralelamente se definió "Razonamiento Matemático" como un eje transversal a los cuatro ya existentes. La unidad de Currículum y Evaluación perteneciente al Ministerio de Educación daba a conocer a los estudiantes cual es el fin de la incorporación del algebra en el currículum matemático: Se analizó la tendencia internacional a incluir el álgebra desde los primeros niveles. Se trata de hacer consciente a los docentes y estudiantes, de que hay elementos de abstracción y representación mediante símbolos que comienzan pronto en el aprendizaje de las matemáticas (MINEDUC, 2009).

Valoyes (2011) utiliza la Teoría Antropológica de lo Didáctico para realizar un análisis didáctico de la representación institucional dominante del álgebra en Colombia. La autora consigna entre otros elementos que al álgebra se le asigna un doble papel: se vincula a lo aritmético siendo un instrumento para generalizar los resultados que se obtienen en el campo numérico, además de ser una herramienta para modelar fenómenos de variación y cambio. Concluye que el álgebra es presentado como uno de los sistemas simbólicos para representar y manipular el sistema conceptual del pensamiento variacional.

Más actuales son los escritos de Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) referentes a la "Naturaleza del razonamiento algebraico elemental", el cual es un estudio que propone una forma de concebir el razonamiento matemático en educación primaria donde utilizando el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático, se define un modelo a través de los grados de algebrización de la actividad matemática. Esto es nuevamente abordado en el 2013, donde los mismos autores publican los "Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros", centrándose en que los profesores conozcan las características del razonamiento algebraico en la escuela primaria. Con el fin de valorar los conocimientos que poseen los docentes de educación primaria en torno al álgebra, se desarrolló el modelo de niveles de algebrización, Este consta de los siguientes niveles:

Nivel 0:

Objetos: Intervienen objetos intensivos de primer grado. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.

Transformaciones: Se opera con objetos intensivos de primer grado (números particulares).

Lenguaje: Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos.

Nivel 1:

Objetos: Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos objetos.

Transformaciones: Se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado, tanto en tareas estructurales como funcionales.

Lenguaje: Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos intervinientes

Nivel 2:

Objetos: Intervienen indeterminadas o variables como expresión de los intensivos de grado 2.

Transformaciones: En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

Lenguaje: Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal.

Nivel 3:

Objetos: Intervienen indeterminadas, incógnitas, ecuaciones, variables y funciones particulares.

Transformaciones: En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax + B = Cx + D$. Se opera con las indeterminadas o variables.

Lenguaje: Simbólico – literal; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto.

Fuentes Mardones en el año 2013, realiza una investigación referente al pensamiento funcional en edades tempranas. Dado el cambio en las bases curriculares de matemática en Chile las cuales plantean el tratamiento de contenidos algebraicos desde primero básico hasta cuarto año de enseñanza, la autora se cuestiona, ¿podrán los alumnos establecer relaciones funcionales? Su principal conclusión, indica que es factible de establecer relaciones funcionales en esos niveles de escolaridad (Fuentes, 2013).

Uno de los esfuerzos más connotados en Chile hace referencia a la publicación en el año 2014 de los textos asociados a la colección ReFIP (Recursos para la Formación Inicial de Profesores de Educación Básica), el cual es una serie de cuatro libros: Números, Geometría, Álgebra y Datos y Azar, los cuales fueron elaborados en el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile por autores de distintas instituciones chilenas. Participaron Renato Lewin, Alejandro López, Salomé Martínez, Daniela Rojas y Pierina Zanocco como autores del texto Números; Cristián Reyes, Luis Disset y Raúl Gormáz en Geometría; Ana María Araneda, Eugenio Chandía y María Alejandra Sorto en Datos y Azar; finalmente Salomé Martínez y María Leonor Varas fueron las autoras del texto de Álgebra. En este proyecto que duró tres años se contemplaron 16 universidades en el pilotaje de las versiones preliminares participando alrededor de 5.000 estudiantes de la carrera de Educación General Básica. Uno de los principales objetivos fue el contribuir al mejoramiento de la preparación para enseñar matemática de los futuros profesores de educación básica (ReFIP, 2014).

El año 2015, la facultad de educación de la Pontificia Universidad Católica de Chile construye el documento “Elaboración de orientaciones didácticas desde la reflexión docente: el caso del enfoque funcional del álgebra escolar”, que se preocupa de la construcción de directrices didácticas en forma conjunta con los docentes, con ello promueve un rol más activo del profesor en los procesos de innovación didáctica, específicamente en los relativos al desarrollo del álgebra en la escuela. La elaboración de orientaciones didácticas, reporta una serie de evidencias que analizarlas desde la reflexión del profesor permite generar orientaciones ricas en contenido y con múltiples dimensiones. Estas orientaciones didácticas sobre la gestión de procesos matemáticos es una herramienta fundamental para que el profesor pueda desarrollar los procesos en el aula de matemáticas y no centrarse sólo en el estudio de contenidos (Solar y Rojas, 2015).

Finalmente es importante mencionar los aportes que realiza constantemente el Centro de investigación en didácticas específicas e investigación en el aula perteneciente a la Universidad de Huelva, donde los profesionales congregados en el grupo de Formación Inicial y Desarrollo Profesional del Profesorado en Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas –DESYM-, desarrollan estudios referentes a la caracterización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, además de aquellas referidas al desarrollo del conocimiento especializado del profesor de matemática. Estas investigaciones son lideradas por los doctores J. Carrillo, J. Aguaded, N. Climent, L. Contreras, J. Estepa, W. Gadea, R. Jimenez, R. Rocha, M. Múñoz, B. Vázquez y A. Wamba.

CAPÍTULO 3: ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO DEL CONOCIMIENTO E INSTRUCCIÓN MATEMÁTICA

3.1 Presentación

Toda investigación debe ahondar en aquellos datos empíricos previos, sustentando sus tesis en teorías propuestas y probadas por expertos. En este sentido, el desarrollo de un marco teórico resulta siempre fundamental. Elaborar un marco conceptual obliga a los investigadores a hacer una revisión exhaustiva de variables que expliquen el fenómeno a investigar, sus componentes, características y formas de evidenciarse en la población. Consistentemente, el desarrollo de un marco teórico, facilita la actualización y revisión de información de manera permanente.

Para Baliache (2009) el marco teórico es el apartado de una investigación donde se reúnen las teorías, enfoques teóricos, investigaciones previas y los antecedentes que le son pertinentes al nuevo problema de investigación planteado, facilitando el encuadre correcto del tema a investigar. De manera complementaria, Méndez (1997), expone que el marco teórico es un marco de referencia donde se exponen y analizan las teorías o grupos de teorías que sirven para explicar los antecedentes y facilitan el análisis de resultados y la discusión, cumpliendo unas funciones básicas primordiales dentro del proceso investigativo, inscribiendo el tema de estudio dentro del conjunto de teorías existentes para ubicar la que le es más pertinente, describe elementos teóricos planteados por el autor, define las variables e hipótesis propuestas en el estudio, sustenta la investigación, se posiciona como una guía de referencia para el autor al momento de realizar el análisis de resultados, sintetiza y permite la discusión de diferentes perspectivas teóricas acerca de un mismo fenómeno incluso contrapuestas y permite la revisión del tema desde el punto de vista de ubicación o contextualización del problema y tendencias investigativas.

Existen múltiples enfoques con los que se puede desarrollar una investigación, sin embargo, nos hemos inclinado por utilizar aquella que nos brindará un mejor sostén, por ello que en este apartado se presentan los fundamentos teóricos que le darán sustento al análisis del conocimiento didáctico-matemático que tienen los profesores de enseñanza inicial respecto al álgebra, del mismo modo que entregará las bases que se utilizaron para examinar el tratamiento de este tópico en el currículum escolar y los textos de estudio. Por esto, es que el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática es el que ofreció una mejor perspectiva del fenómeno educativo como eje central de interés. Este enfoque nace con el estudio de las posibles estrategias didácticas que son más eficientes para la enseñanza de las matemáticas. El enfoque ontosemiótico plantea la posibilidad de articular diferentes puntos de vista y nociones teóricas sobre el conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje (Godino, 2014).

Dado su planteamiento, este enfoque propone los siguientes postulados como eje central de su propuesta:

- Supone un enfoque antropológico, social y cultural sobre las matemáticas y sus principios epistemológicos.
- Se plantea como un modelo de cognición matemática sobre las bases semióticas. Esto quiere decir que a través del tipo de razonamiento que mantiene un individuo en el proceso de respuesta a un problema matemático, se establecen los significados asociados.
- Se fundamenta sobre un modelo de instrucción en matemáticas basado en la construcción social.
- Considera un modelo de desarrollo sistémico y ecológico; relacionando las dimensiones entre sí, y con el entorno biológico, material y sociocultural donde se desarrolla el estudio y la comunicación en matemáticas.

El enfoque planteado se configura desde un planteamiento institucional e individual, considerando las prácticas (operativas, discursivas y normativas), los objetos (primarios y secundarios), los procesos y las funciones semióticas básicas (significado, comprensión, conocimiento, competencia y disposición), esto nos entregará el modelo de categorías de análisis ideal para estudiar los aspectos que se relacionan con el conocimiento-didáctico de que poseen los profesores de primaria.

3.2. Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática se funda a partir del modelo MKT, el cual realiza un esquema con las influencias entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido (Ball, 2008). El inicio de este marco teórico de la didáctica de la matemática se inicia en los años noventa con investigaciones llevadas a cabo por los profesores de la Universidad de Granada, Juan Godino y Carmen Batanero, como sus principales precursores, a quienes con el correr de los años, se les han unido diversos investigadores de España y Latinoamérica quienes adoptan este marco teórico para sus propias investigaciones.

En etapas primarias se desarrolló la noción de significado institucional y personal de un objeto matemático, como consecuencia de esto y ante la necesidad de ahondar este marco, se extiende a una segunda etapa, donde se abordan y elaboran elementos ontológicos y semióticos, puesto que se considera que un problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico (Godino, Batanero, Font, 2007). En una tercera etapa se propone diferenciar seis elementos en el proceso de instrucción matemática, cada una modelizable como un proceso estocástico con sus estados y trayectorias: epistémica, docente, discente, mediacional, cognitiva y emocional (Godino, Contreras y Font, 2006).

Existiendo variados puntos de vista y fundamentos teóricos, Godino plantea la adaptabilidad de distintos marcos teóricos con la finalidad de unificar criterios entorno a la cognición e instrucción matemática, considerando dimensiones epistemológicas, cognitivas e instruccionales, estos modelos teóricos son: Teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 1994, 1998 a y b); Teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002; Godino, Batenero y Roa, 2005; Font, Godino y D'Amore, 2007); Teoría de las configuraciones didácticas (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Font, Planas y Godino, 2010).

El enfoque ontosemiótico ha logrado concebir la matemática a partir de tres perspectivas (Vásquez; 2014):

- Como una actividad matemática, socialmente compartida, vinculada a la resolución de problemas internos o externos a la matemática.
- Como un lenguaje simbólico particular de la matemática, que permite expresar y comunicar ideas y conceptos matemáticos.
- Como un sistema conceptual que se encuentra lógicamente organizado.

3.2.1. Sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas

El modelo ontosemiótico del conocimiento considera práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino, Batanero, 1994, p. 134). Estas prácticas pueden ser un evento singular de un individuo, o bien, compartida por la institución que se interesa en resolver problemas comunes. Según Vásquez (2014) en el estudio de la matemática lo que interesa analizar son los sistemas de prácticas vinculados a la actuación de las personas ante la resolución de determinados tipos de situaciones-problemáticas, por lo cual se busca dar respuesta a la interrogante, ¿qué es un determinado objeto matemático?

Al interiorizarnos en el estudio de un objeto matemático, más que la práctica particular, debemos focalizarnos en los sistemas de prácticas, que ponen de manifiesto las personas en su actuación ante tipos de situaciones problemáticas. Estos significados, personal e institucional, son influenciados en alguna medida por el contexto social y las concepciones propias del individuo, esto llevó a introducir una tipología de significados institucionales y personales (Godino, 2003, p. 141), que podemos visualizar en el siguiente esquema (Godino, Batanero y Font, p. 6):

Figura 3.1 Tipos de significados institucionales y personales

Es posible diferenciar distintos tipos de significados institucionales y personales. Considerando la dimensión institucional se debe tener en cuenta los siguientes tipos:

- Implementado, corresponde a lo que el docente logra enseñar respecto a álgebra.
- Evaluado, las acciones que ejecuta el docente para evaluar los aprendizajes relativos a álgebra.
- Pretendido, lo que se desea enseñar en torno a álgebra.
- Referencial, establece el sistema de prácticas que utiliza para construir y tratar el álgebra.

Asimismo en los significados personales, se considera:

- Global, es la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar en relación al álgebra.
- Declarado, lo que es posible evaluar en torno al álgebra, en un individuo a partir de la aplicación de pruebas de evaluación propuestas, incluyendo las correctas e incorrectas.
- Logrado, son las prácticas manifestadas que son conformes con los estándares institucionales, como un diferencial entre los significados

personales iniciales del individuo y aquellos que efectivamente fueron logrados en álgebra.

Considerando el ajuste de forma sustancial y progresiva en cada uno de los significados personales e institucionales, supondrá la apropiación por el estudiante de dichos significados.

3.2.2 Configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Considerando los sistemas de prácticas, surgen nuevos objetos matemáticos los cuales contemplan las dimensiones social y personal del conocimiento. Godino (2006) indica que para la realización de una práctica matemática y para la interpretación de sus resultados como satisfactorios se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. A partir de esta mirada, propone tipos de objetos matemáticos que es posible observar en un texto matemático, estos están enmarcados como conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Font y Godino, 2006, p. 69), los cuales se muestran en la figura 3.2.

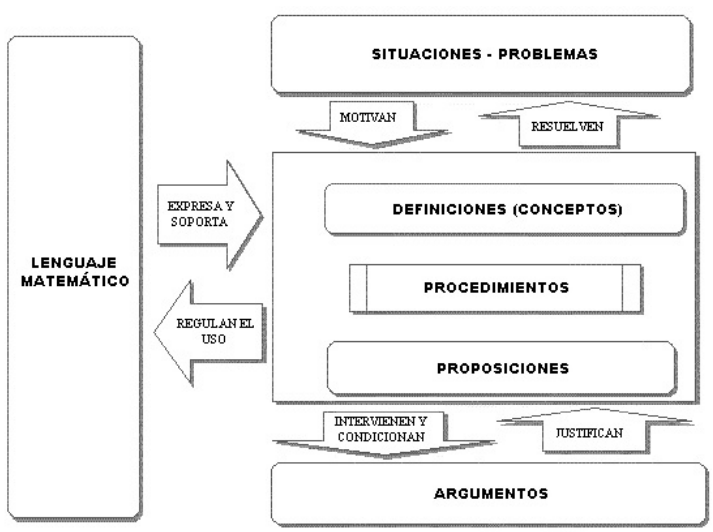


Figura 3.2 Configuración de Objetos Primarios

En el esquema presentado, podemos distinguir la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos Lingüísticos: corresponde a los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., los cuales pueden ser presentados en distinto registro como oral, escrito, gestual, entre otros.
- Situaciones-Problemas: son las aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios, los cuales conducen al desarrollo de una actividad matemática.
- Conceptos y Definición: son aquellas definiciones, reseñas o consignas vinculadas a un objeto matemático.
- Proposiciones: establecen enunciados sobre conceptos matemáticos.
- Procedimientos: abarcan los algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, que los estudiantes deben conocer y aplicar en la solución de una situación problema.
- Argumentos: atañe a los enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos.

Es importante señalar que es posible organizar estos objetos en entidades aún más complejas como sistemas conceptuales, teorías, y otros. Las seis entidades primarias antes nombradas incrementan la tradicional distinción entre unidades conceptuales y procedimentales al considerarlas insuficientes para describir los objetos intervinientes y emergentes en la actividad matemática (Godino, 2006).

Si deseamos un estudio más concienzudo de una actividad matemática, es necesario relacionar las seis entidades primarias, con ello se formarán configuraciones las cuales quedarán definidos como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas. Estas nuevas configuraciones, redes de objetos institucionales o redes de objetos personales, serán denominadas como socio-epistémicas o cognitivas, respectivamente.

El mismo autor plantea que los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, considerando el juego de lenguaje, dan origen a las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002).

- Personal – institucional: Los objetos emergentes son considerados "objetos institucionales", asimismo los sistemas específicos de una persona son considerados como "objetos personales", siempre que los sistemas de prácticas sean compartidas en la misma institución.
- Ostensivo – no ostensivo: Se entiende por objeto ostensivo a cualquiera que sea público, y que por consecuencia se puede mostrar a otro, esta visualización puede ser enseñada a través de ostensivos asociados al objeto (notaciones, símbolos, gráficos, etc.). La categorización ostensivo – no ostensivo es relativo al juego de lenguaje en el que participan, pudiendo estar implícito en el discurso matemático.
- Expresión – contenido: La utilización de estos objetos matemáticos son esencialmente relacionales, no se deben concebir como entidades aisladas, sino que deben estar ligadas a través de una función semiótica, en donde existirá una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado), establecida por una persona o institución.
- Extensivo – intensivo: Permite centrar la atención en la dialéctica entre lo general y particular, además es utilizada para explicar el uso de elementos genéricos en matemática.
- Unitario – sistémico: Estos objetos matemáticos son considerados como unitarios bajos ciertas circunstancias, y bajo otras, como un objeto compuesto por varios objetos.

Como hemos visualizado los objetos primarios tienen asociados procesos matemáticos, en la tipología de objetos secundarios también es posible distinguir otros procesos. La configuración de objetos y procesos se pueden observar en la figura 3.3.

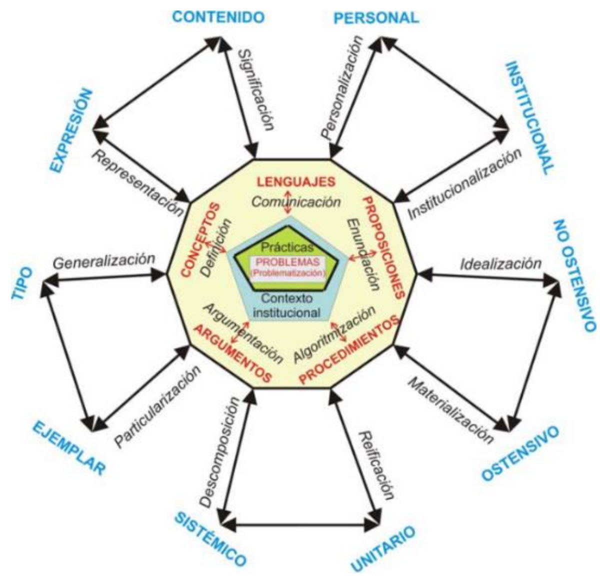


Figura 3.3 Configuración de objetos y procesos

Del mismo modo que las configuraciones de objetos primarios tienen asociados procesos matemáticos, en los objetos secundarios es posible ver procesos a través de un tándem cohesionado que da lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos:

- Institucionalización – personalización.
- Generalización – particularización.
- Análisis/descomposición – síntesis/reificación.
- Materialización/concreción – idealización/abstracción.
- Expresión/representación – significación.

La demarcación de los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización, a su vez estos con los procesos de reificación y descomposición, están dados por las facetas duales extensivo/intensivo, ostensivo/no ostensivo y unitario/sistémico (Font y Contreras, 2008). Esta es una actividad fundamental, ya que permite establecer con claridad la naturaleza del "objeto matemático" considerado como una entidad abstracta o ideal.

3.2.3 Comprensión y conocimiento en el enfoque ontosemiótico

El proceso de "comprensión" puede ser concebido como un proceso mental o competencia (Font, 2001), sin embargo, estas posturas presentan concepciones antagónicas, mientras que los enfoques cognitivos derivados de la didáctica de la matemática consideran la comprensión como un "proceso mental", los posicionamientos pragmatistas del enfoque ontosemiótico entienden la comprensión como competencia, asimismo es posible considerar la comprensión en términos de funciones semióticas (Godino, 2003).

3.2.4 Problemas, prácticas, procesos y objetos didácticos

La modelización de la enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático es visto como un proceso aleatorio en el cual intervienen seis subprocesos: epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional, esta actividad es concebida como la Teoría de Configuraciones Didácticas (Godino, Contreras y Font, 2006). Inicialmente se propone la configuración didáctica, la cual contiene todas las interacciones profesor-alumno en torno a un objeto o contenido matemático. La realidad organizacional es un sistema abierto a la relación con otras configuraciones didácticas de las que forman parte. La formalización de un objeto o contenido matemático debe trascurrir en un tiempo dado utilizando una secuencia de configuraciones didácticas. Esta configuración didáctica incluirá las actividades, tareas, procedimientos para la solución de una problemática, lenguajes, conceptos, proposiciones y argumentaciones, que estará determinado por el discurso formal del docente, esto llevará el nombre de configuración epistémica. Esta configuración epistémica estará asociada a una configuración instruccional, constituyéndose por objetos docentes y discentes que se pondrán en marcha a partir de una tarea matemática. La descripción de los aprendizajes que se van suscitando en el transcurso del proceso se realiza a través de las configuraciones cognitivas, que son los objetos intervinientes en los sistemas de prácticas personales que se utilizan en la implementación de una configuración epistémica. Este proceso es posible de observar en la figura 3.4.

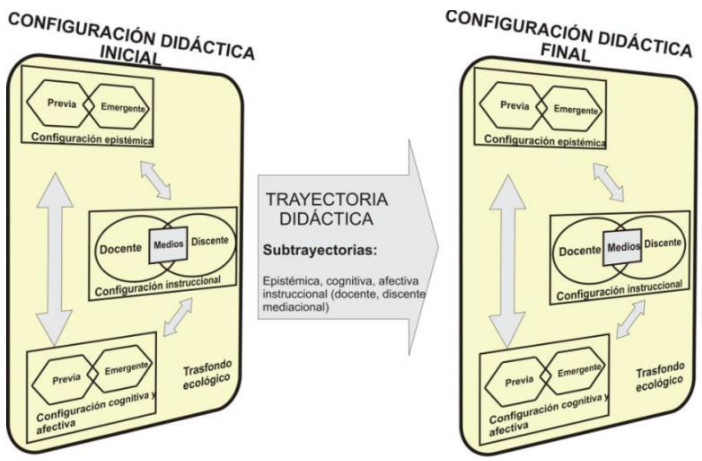


Figura 3.4 Interacciones didácticas

3.2.5 Dimensión normativa

Una norma establece los hábitos, convenciones que regulan el funcionamiento de una clase de matemática. Estas interacciones, que ocurren en el espacio escolar, son concebidas como atingente a una "microsociedad", pues es posible asimilarlas como un trozo de sociedad, donde el proceso de escolarización supone que allí, no solo se aprenden contenidos disciplinarios (matemáticos), sino también relaciones sociales.

En la figura 3.5, es posible observar los tipos de normas, donde a partir de la identificación de diferentes facetas de la dimensión normativa: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica, permitirá apreciar la importancia de las interacciones entre los profesores y sus alumnos, considerando las normas que condicionan el proceso de enseñanza y aprendizaje. Producto del dinamismo de la "pequeña estructura social" es posible implementar transformaciones que permitan ayudar a mejorar el funcionamiento y control de los sistemas didácticos.

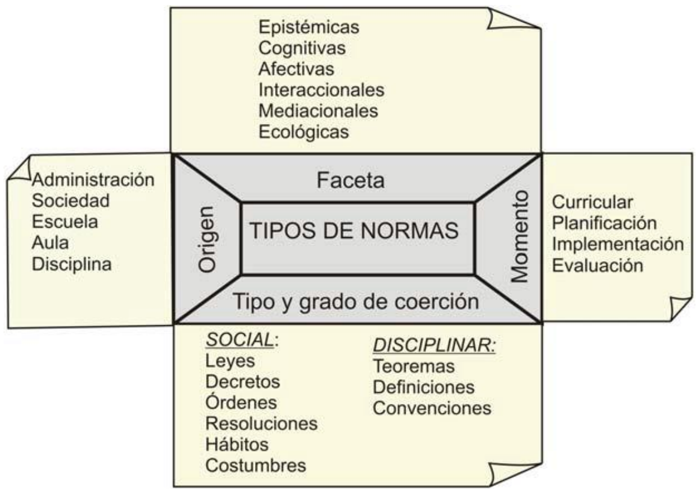


Figura 3.5 Dimensión normativa (tipos de normas)

3.2.6 Idoneidad didáctica

Otro aspecto que se encuentra ligado al enfoque ontosemiótico corresponde al de idoneidad didáctica, el cual es un componente que articula y entrega solidez sistémica a las seis componentes que se encuentran insertados en un proceso de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Ramos y Font, 2008), los cuales son: Idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Vásquez (2014) indica que la noción de idoneidad didáctica permite estudiar de manera sistemática, los problemas relacionados con el diseño, desarrollo y evaluación de situaciones didácticas y procesos de enseñanza aprendizaje. Considerando el estudio de la idoneidad didáctica en un proceso de instrucción matemática, se requiere un vínculo entre las seis componentes antes descritas y que a continuación se detallan:

- Idoneidad Epistémica: Hace referencia al grado de representatividad de los significados institucionales aprendidos (o pretendidos), en relación a un significado de referencia, es decir, en qué medida un objeto matemático es más adecuado respecto de otro.
- Idoneidad Cognitiva: Indica el grado en que los significados pretendidos/implementados sean interiorizados y aprendidos por los estudiantes.
- Idoneidad interaccional: Una mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional, estará dada si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar conflictos semióticos potenciales (a priori) y al mismo tiempo dar solución a los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, esto mientras se desarrollan los procedimientos de enseñanza – aprendizaje.
- Idoneidad Mediacional: Es el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje.
- Idoneidad Emocional: Apunta al grado de interés o motivación del estudiante en un proceso de estudio. Estos estímulos afectivos dependen de la interrelación de aspectos institucionales, como personales del estudiante considerando las particularidades de la persona que aprende.
- Idoneidad Ecológica: Es el grado de pertinencia y coherencia entre los procesos educativos de enseñanza – aprendizaje; proyecto educativo institucional; vinculación con el medio social externo.

Lo anterior queda esquematizado en la figura 3.6 (Godino et al., 2006, p. 6), allí se reúnen los criterios que forman la idoneidad didáctica. A través del hexágono regular se representa un proceso de estudio pretendido o programado, considerando que a priori es el grado máximo de las idoneidades parciales. Por otra parte, el hexágono irregular representa el grado de idoneidad real, es el que efectivamente ha sido alcanzado luego de la finalización de un proceso de estudio que ha sido implementado.

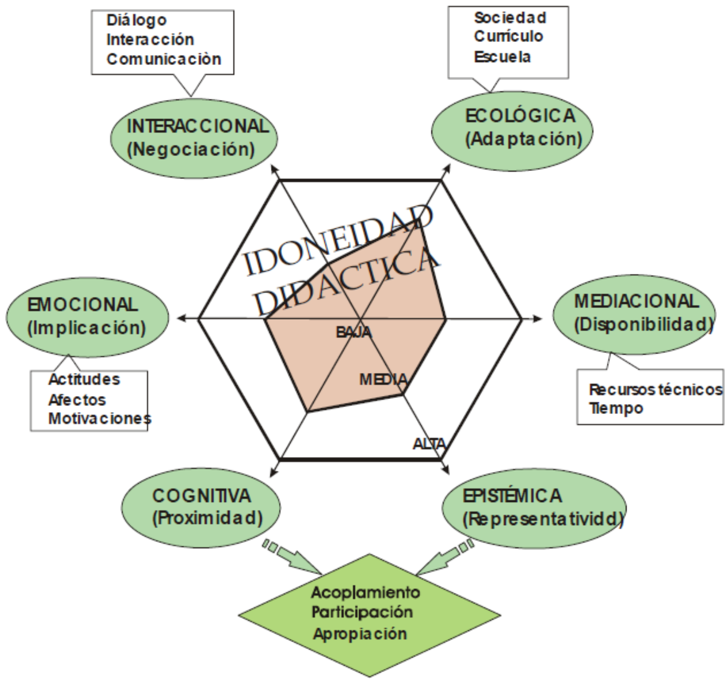


Figura 3.6 Componentes de la idoneidad didáctica

CAPÍTULO 4: LOS CONOCIMIENTOS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

4.1 Presentación

La educación es la acción que ejerce una persona o grupo de personas sobre otras que no han alcanzado un nivel de madurez o conocimiento sobre ciertos estados físicos, cognitivos, sociales, culturales, morales y emocionales para que puedan enfrentarse a las exigencias del medio físico que le rodea (Durkheim, 2002). En este sentido, esta acción se ejerce casi naturalmente a partir de la socialización entre humanos, a partir de la influencia de los roles sociales y la formalización e institucionalización de la educación a través de centros educativos, escuelas, fundaciones, universidades y demás espacios dedicados a la enseñanza. La educación busca potenciar y perfeccionar las capacidades de un individuo para que pueda enfrentarse exitosamente a las exigencias de su entorno.

En esta misma línea, las sociedades han establecido que, los recintos de aprendizaje como las escuelas y universidades, son el lugar o espacio físico destinado a la enseñanza teórica y práctica de diferentes conocimientos, áreas del saber y competencias. Dentro de este contexto, se ha interiorizado desde edades tempranas hasta la adultez que es un espacio dedicado a estudiar y adquirir formación en múltiples áreas, necesitando entonces de una persona dedicada a impartirla con conocimientos previos adquiridos y habilidades para llevar a cabo la labor.

En las matemáticas, el dominio del contenido permite al educando o al docente, reconocer el planteamiento de algún problema, el procedimiento que hay que seguir para la solución del mismo, y la veracidad de su resultado. Sin embargo, el disponer de conocimientos sobre un área en particular del saber cómo las matemáticas, no es condición suficiente para poder impartir estos conocimientos en un aula de clases bajo la figura de la docencia.

Para Shulman (1997), el conocimiento de un docente, se puede dividir en las siguientes dimensiones:
Conocimiento del contenido: referido a un conocimiento formal del conjunto de proposiciones teóricas y prácticas de un área del saber en particular, como es el caso de las matemáticas.
Conocimiento didáctico general: está relacionado con la gestión de una clase en general, la relación con los alumnos, la motivación, normas y organización.
Conocimiento del currículo: tiene que ver con la familiaridad que muestra un docente y el dominio con cada uno de los temas a impartir, la secuencia o el orden según grado de complejidad y diseño curricular, utilización de recursos, materiales, evaluación, seguimiento y monitoreo del proceso.
Conocimiento de los alumnos: Se refiere a la información que maneja un docente de su grupo de estudiantes, su nivel socioeconómico, sus necesidades y cualidades, sus fortalezas y preferencias en el proceso de aprendizaje.

Conocimiento teleológico: referido a aquella información y manejo institucional que tiene el docente de la escuela, marco gubernamental y mecanismos normativos y legales a seguir.
Conocimiento pedagógico: tiene que ver con el manejo de conocimientos referidos a las formas de enseñar, las estrategias y metodologías para el proceso de enseñanza – aprendizaje, elementos pedagógicos propios de la docencia.

El conocimiento avanzado en matemáticas, algebra y aritmética de los diferentes temas propuestos, problemas, soluciones, símbolos y cálculos necesarios, facilitan y son indispensables para el quehacer de un docente para la asignatura en todos los niveles educativos, es decir, desde la educación básica hasta la educación universitaria. Sin embargo, un conocimiento especializado en pedagogía y matemáticas, permite a un docente no solo plantear y solventar problemas en un aula, sino también poder plantear las secuencias paso a paso de la resolución del mismo, los errores más frecuentes o comunes de los estudiantes en dicho contenido, concepciones erróneas, estrategias de resolución utilizadas, y saber cómo es el proceso cognitivo y comprensivo de un estudiante al cual se le está presentando el contenido en particular, y ser capaz de discernir cual es el nivel de comprensión y etapa en la que se va ubicando el estudiante a medida que se imparte el problema, tema o asignatura en general (Velásquez y Cisneros, 2013).

Para Blanco, Fernández y Oliveras (2017), su investigación les aporta tres dimensiones que se deben considerar para valorar la práctica profesional de un docente en matemáticas. Los autores consideran que es importante que un docente domine los siguientes elementos, a saber, *dimensión matemática*, que tiene que ver con la comprensión del conocimiento matemático como un producto sociocultural; la *dimensión didáctica* que considera el desarrollo cognitivo, físico, social, emocional y cultural de los estudiantes, los elementos curriculares, los aspectos políticos y económicos que pueden influir en el

proceso de enseñanza – aprendizaje que se genera entre el docente y el alumno; finalmente la *dimensión meta didáctico-matemático*, que corresponde a la reflexión que genera en los docentes su propia práctica y ejercicio profesional.
Un docente que mantiene un nivel aceptable y suficiente de los diferentes tipos de conocimientos, puede tener dominio de un grupo de estudiantes, mantenerlos concentrados, facilitar la comprensión del tema, procurar la maximización del aprovechamiento de los recursos disponibles, adaptar el contenido al grupo y sus necesidades, procurar la relación del tema y lo abstracto con usos en la vida cotidiana y facilitar con sus habilidades personales un aprendizaje progresivo, significativo y permanente del tema. A este conjunto de elementos mencionados, Godino, Batanero y Font (2007) lo denominan "idoneidad didáctica", es decir, la pertinencia de las actividades propuestas por un docente para cubrir y facilitar el aprendizaje de un contenido específico para un grupo de estudiantes en particular.

El profesor de matemática, no sólo se enfrenta a las tareas rutinarias como preparar la clase, mantener el orden y la concentración del grupo, realizar labores de evaluación y planificación, tratar con problemas disciplinarios, procurar la motivación de los estudiantes; sino que también se enfrenta a dificultades específicas, recurrentes y esperadas con respecto al contenido y práctica de la asignatura de matemáticas. En este sentido, este docente se enfrenta a dificultades de los estudiantes en la comprensión teórica de los conceptos, en la dificultad para realizar cálculos, con la necesidad de explicaciones segmentadas y paso a paso de problemas y resultados. Por esto, la elección y planificación de los temas y contenidos, además de la estructuración de los recursos y materiales didácticos funcionan como un elemento clave que le ayudará a solventar las dudas de los estudiantes y facilitar la comprensión del tema a tratar; esto último forma parte de sus conocimientos en pedagogía como profesional de la docencia (Bosch y Gascón, 2001).

En definitiva, la docencia es una labor de gran responsabilidad vista desde cualquier arista. Un docente responde a su propia ética como profesional y sus necesidades sociales y económicas como trabajador. Así mismo, responde a las expectativas de los padres, los cuales procuran una formación de excelencia e integral para sus hijos; responde ante el estado como un funcionario dedicado a la transformación social de los habitantes y nuevas generaciones de un país que además, invierte gran parte de sus recursos para la educación de sus ciudadanos; y responde antes las propias necesidades de sus estudiantes que se frustran, se desmotivan, se interesan, se vinculan y necesitan de todas sus habilidades y capacidades para convertirse en un individuo productivo y capaz.

La docencia no sólo se resume en adquirir conocimientos para luego ser reproducidos a un grupo de personas, por el contrario, un docente se forma en ser estratega para que dichos contenidos se adapten a sus interlocutores, se forma en analizar las diferencias individuales de los integrantes del grupo, en estrategias que faciliten el aprendizaje, en el uso de recursos que posibiliten la integración de saberes, y en la práctica y uso de los conocimientos para ser útiles a quienes los adquieren.

4.2 Conocimiento profesional del profesor

A través de los años, muchos han sido los esfuerzos por caracterizar el conocimiento del profesor, su origen, sus fuentes y sus componentes. Quien ha realizado un potente desarrollo en esta área es Shulman (1986), cuyas investigaciones son una base teórica fundamental que ha sustentado otros modelos que caracterizan el conocimiento para la enseñanza de la matemática. Él indica que existe una falta de programa en investigación educativa sobre el estudio de la "comprensión cognitiva de los profesores sobre el conocimiento del contenido y las relaciones entre esa comprensión y la instrucción que los profesores ofrecen a sus alumnos" (Shulman, 1986, p. 25), estableciendo parámetros para sustentar que el conocimiento del profesor que es uno de los aspectos que tienen mayor relevancia en una clase.

El conocimiento del profesor incluye no sólo la información específica sobre datos y métodos de comprobación de resolución de problemas, sino también la información necesaria para definir y comprender los problemas con los que debe enfrentarse el profesional (Llinares, 1998); por otra parte Climent (2005) indica que el conocimiento está situado y contextualizado, con lo cual se desarrollan contextos profesionales únicos, dado que cada uno de ellos se consigue en un entorno social propio, por lo cual el conocimiento profesional es particular y personal, siento diferentes entre cada uno de los profesores. El conocimiento profesional se basa en la experiencia, a través de un conjunto de saberes que el docente va adquiriendo e interiorizando a lo largo de su trayectoria profesional.

Shulman sostiene que el conocimiento de un contenido para la enseñanza se debe profundizar en aspectos mucho más valiosos que en una simple transmisión de contenidos, sino que el docente debe cuestionarse las raíces del concepto y por qué es así. Este autor, ha sido fuente de inspiración para nuevos estudios en aquella línea investigación, en uno de sus estudios de mayor preponderancia propone siete categorías respecto a lo que un docente debe trabajar para lograr una enseñanza adecuada y eficaz (Shulman, 1987, p. 8).

Plantea lo que denomina conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos, conocimiento de las necesidades educativas, conocimiento curricular y conocimiento didáctico general. Cuatro de ellas están referidas a aspectos generales del conocimiento y las otras tres aluden a aspectos específicos relacionados con el contenido que se enseña.

Desde algunos años, Ball et al. (2008), han desarrollado un modelo denominado *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT). Este modelo nace a partir de la necesidad de sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para realizar su labor (Carrillo, 2013). El modelo MKT, enlaza lo que denomina Conocimiento del Contenido y los aspectos Didácticos-Pedagógicos del Contenido propuestos por Shulman, creando así un modelo propio para el profesor de matemática.

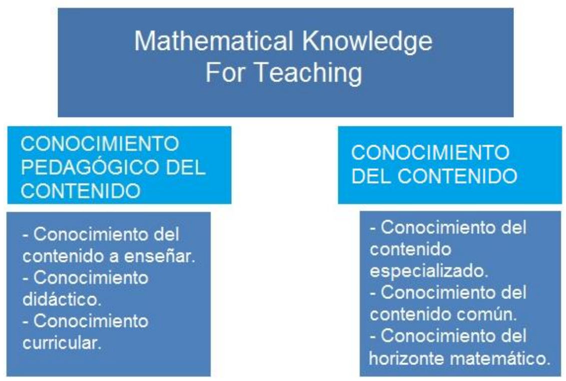


Figura 4.1 Segregación del Modelo MKT

El Conocimiento Pedagógico del Contenido nace como una consecuencia directa del esquema propuesto por Shulman, en él se consideran los apartados: Conocimiento del contenido a enseñar el cual junta los saberes propios de los estudiantes y el saber acerca de la matemática; en el Conocimiento Didáctico que establece la unión entre la enseñanza y el conocimiento del contenido matemático; finalmente el Conocimiento curricular que es aquel en el que predominan los programas de estudio, los contenidos mínimos obligatorios por nivel, los estándares disciplinarios y todos los temas que abarcan los planes de estudio.

Por otra parte el Conocimiento del Contenido queda particionado en tres ámbitos: Conocimiento del contenido especializado, que es aquel conocimiento matemático que para su comprensión se requiere un alto grado de experticia, incluye el saber de por qué las cosas se realizan de una determinada manera, lo que permite que el docente pueda no sólo conjeturar, sino que también explicar la procedencia matemática de los errores de sus alumnos (Carrillo, 2013). El conocimiento común del contenido es el conocimiento que el profesor aplica para operatoria común y básica, además de aplicar propiedades, axiomas y definiciones elementales. Por último el Conocimiento del Horizonte Matemático establecen las relaciones de todos los contenidos matemáticos que encontramos en el currículo escolar y cómo el docente se enfrenta a ellos.

El modelo de Ball et al. (2008), determina dos dominios: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico del Contenido, donde cada uno de ellos presenta las subdivisiones antes mencionadas.

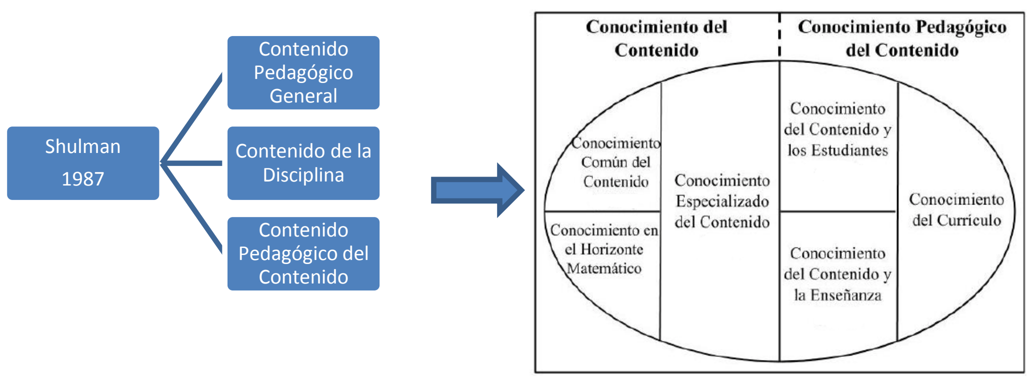


Figura 4.2 Dominios y subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 403)

Distinguir los dominios circundantes en una sala de clases en un tema complejo, al respecto el autor indica que es una tarea bastante dificultosa el diferenciar el Conocimiento Especializado del Conocimiento del Contenido y los estudiantes.

Un camino similar han transitado Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), quienes propusieron lo que denominaron *Knowledge Quartet* (cuarteto del conocimiento). Esta es una herramienta que favorece la observación del conocimiento del contenido matemático de los profesores en ejercicio. Ellos consideraron cuatro dimensiones, las cuales permitirán identificar y definir las diversas formas en que el conocimiento del contenido influye en las decisiones y acciones de los profesores en el aula. Estas dimensiones son:

- Fundamentos: Son los antecedentes teóricos, las creencias y preconcepciones de los profesores en formación. Abarca los conocimientos, la comprensión y los recursos que los nóveles docentes aprenden en la educación formal para su posterior desenvolvimiento en el aula, siendo esta acción premeditada o no intencionada.
- Transformación: Hace referencia a las modificaciones que realiza un profesor a un saber matemático, con la finalidad de ayudar a sus alumnos en el proceso de comprensión del conocimiento. Este acto incluye elección de material, ejemplos, explicaciones y demostraciones.
- Conexión: Es la coherencia en la planificación y en el discurso matemático de un contenido para su posterior enseñanza, la secuencia de los temas a tratar en la clases, su vínculo con otras sesiones, el orden en la tareas, ejercicios, etc.
- Contingencia: Son los sucesos casi imposibles de planificar. Aquí encontramos la disposición de responder a las ideas de los niños.

Finalmente podemos indicar que el conocimiento puede definirse como la información disponible que tiene un sujeto con la finalidad de alcanzar una meta, un propósito o una tarea (Schoenfeld, 2010, p. 25). Todo lo anterior tiene un punto de convergencia, y es que están íntimamente ligados a los trabajos de Shulman (1986, 1987), además de observar que el conocimiento profesional del profesor de matemática, toma elementos específicos del conocimiento del contenido, de la enseñanza, del aprendizaje y la didáctica.

4.3 Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)

Considerando los aportes de diversos modelos, Godino (2009) propone uno que incluye seis facetas o dimensiones para el conocimiento didáctico-matemático (CDM). Estas facetas (dimensiones), están directamente vinculadas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Para el análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje se deben considerar las siguientes facetas:

- Epistémica: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
- Cognitiva: Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
- Afectiva: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- Mediacional: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- Interaccional: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
- Ecológica: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etcétera, que soporta y condiciona el proceso de estudio.

A partir de estas facetas, se tienen diversos niveles que permiten el análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor con la finalidad de optimizar la toma de decisiones instruccionales. Los niveles involucrados son:

- Prácticas matemáticas y didácticas: explica las acciones para resolver las tareas matemáticas propuestas, contextualizando los contenidos y promoviendo el aprendizaje. Describe las líneas generales de actuación del docente y discente.

- Configuraciones de objetos y procesos (matemáticos y didácticos): describe los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. Este nivel tiene la intensión de especificar la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.
- Normas y metanormas: identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones.
- Idoneidad: identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica.

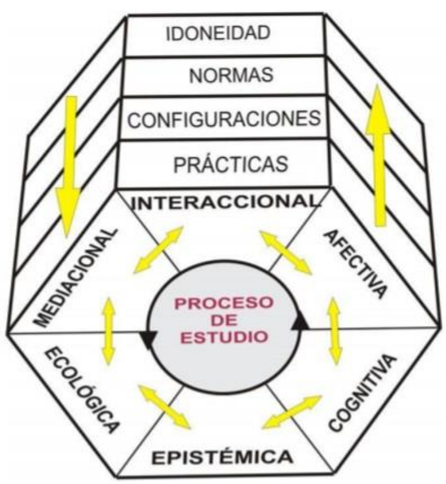


Figura 4.3 Facetas y niveles del conocimiento didáctico-matemático del profesor

El modelo del conocimiento didáctico-matemático del profesor, propone una serie de pautas para la formulación de consignas que permiten evaluar dicho conocimiento didáctico-matemático en los profesores.

La faceta epistémica, incorpora y depura el *conocimiento del contenido* (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático), allí se espera investigar en los conocimientos matemáticos correspondientes al contexto institucional en el que se efectúa en proceso de enseñanza y aprendizaje.

FACETA EPISTÉMICA	CONSIGNA
Conocimiento Común	Resuelve la tarea
Conocimiento Especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas.
- Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
- Lenguajes (representaciones)	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
- Conceptos/Propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
- Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	
- Conexiones	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Tabla 4.1 Conocimiento del Contenido (común, especializado y ampliado) (Godino 2009, p.25)

La relación de la facetas cognitiva y afectiva del conocimiento del profesor fundamenta el *conocimiento del contenido en relación a los estudiantes*, donde se incorporan conocimientos relativos a errores, dificultades y conflictos de aprendizaje, entre otros, por parte de los estudiantes. Además están inmersos en esta faceta, elementos relativos a la emocionalidad de la persona que aprende, como actitudes, creencias y valores.

FACETA COGNITIVA + AFECTIVA	**CONSIGNA**
Configuraciones cognitivas (estrategias, representaciones, Enunciados, argumentaciones,…)	Describe los tipos de configuraciones cognitivas que los alumnos han desarrollado al resolver la tarea (o tareas) propuesta.
Errores, dificultades, conflictos de aprendizaje, concepciones.	Describe los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de este tipo de tareas por los alumnos.
Evaluación de aprendizaje.	Formular cuestiones que permitan explicar los significados personales de los alumnos al resolver este tipo de tareas (o contenidos).
Actitudes, emociones, creencias, valores.	Describe estrategias que se pueden implementar para promover que los alumnos se involucren en la solución de estas tareas (o el estudio del tema).

Tabla 4.2 Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
(Godino 2009, p.26)

La dimensión interaccional y mediacional del conocimiento del profesor fundamenta el *conocimiento del contenido en relación a la enseñanza*, el cual involucra conocimientos relativos a los patrones de relación entre el docente y sus alumnos, además considera aspectos relativos a los conocimientos del profesor vinculados a los recursos tecnológicos, los tiempos destinados y las distintas acciones y procesos involucrados.

FACETA INSTRUCCIONAL (INTERACCIONAL + MEDIACIONAL)	**CONSIGNA**
Configuración didáctica: - Roles del profesor y de los estudiantes con relación a la tarea o contenido. - Modos de interacción profesor-alumnos; alumnos-alumnos. - Recursos materiales. - Tiempo asignado.	Describe la configuración didáctica que implementarías usando la tarea matemática dada.
Trayectoria didáctica (secuencia de configuraciones didácticas).	Describe otras tareas relacionadas con la dada y el modo de gestionar la trayectoria didáctica correspondiente.

Tabla 4.3 Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza
(Godino 2009, p.27)

La faceta ecológica del conocimiento del profesor fundamenta el *conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares* donde se encuentran las orientaciones curriculares que se visualizan a través de las tareas propuestas, también encontramos aquí los enlaces que se pueden realizar con otros temas de estudio, además del esclarecimiento de las conexiones con otras materias del programa de estudio esto es mediante la realización de tareas, es decir, considera elementos relativos a aspectos del currículo, entorno social y económico, que pueden condicionar el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante.

FACETA ECOLÓGICA	**CONSIGNA**
Orientaciones curriculares.	Identifica los elementos del currículo que son abordados mediante la realización de la tarea(s) propuestas (fines, objetivos).
Conexiones intradisciplinares.	Explica las conexiones que se pueden establecer con otros temas del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Conexiones interdisciplinares.	Explica las conexiones que se pueden establecer con otras materias del programa de estudio mediante la realización de la tarea o de variantes de la misma.
Otras factores condicionantes.	Identifica factores de índole social, material, o de otro tipo, que condicionan la realización de la tarea o el desarrollo del proyecto educativo pretendido o implementado.

Tabla 4.4 Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares (Godino 2009, p.27)

Godino (2009), señala que en diversos trabajos usa la expresión *conocimiento didáctico matemático (CDM)* del profesor, como una unión de conceptos inmersos en *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)* y *Pedagogical Content Knowledge (PCK)*, sin embargo, no refleja adecuadamente las diversas facetas que se deben tener en cuenta, esto ocurre también con la expresión *conocimiento pedagógico del contenido*. El termino *conocimiento* lo utiliza en el sentido de constructo epsitémico-cognitivo-afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino y Font, 2010). La comprensión establece todas las relaciones de los elementos que intervienen en la implementación de una configuración epistémica. La competencia se relaciona con la activación de la configuración cognitiva adecuada, considerando el contexto en el cual se desarrolla la práctica. La disposición se relaciona con los elementos matemáticos y didácticos que posibilitan la práctica.

A partir de los resultados de diversas investigaciones, los autores proponen el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) como una reestructuración del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*, considerando vinculaciones entre las dimensiones del CDM (Godino y Pino-Fan, 2013).

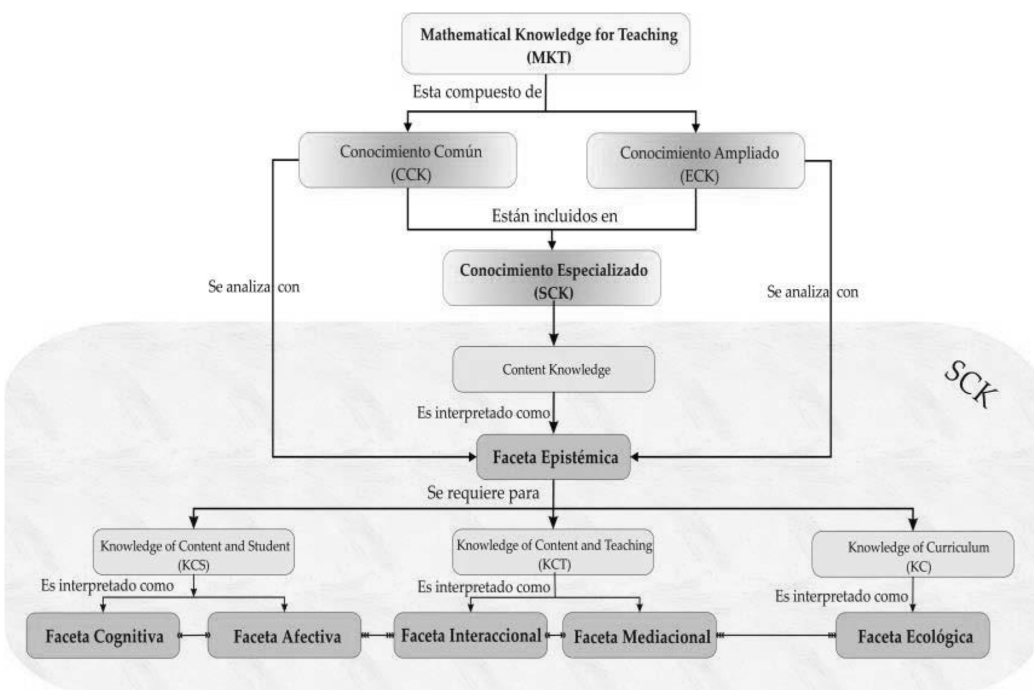


Figura 4.4 Relación entre las categorías del conocimiento MKT y el CDM

Finalmente el modelo del CDM propone que los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores pueden organizarse considerando dimensiones matemáticas, didáctica y meta didáctico-matemática (Breda et al., 2017; Pino-Fan et al., 2016), siendo:

- Dimensión Matemática: son los conocimientos que debe tener un profesor de las matemáticas escolares que enseña.
- Dimensión Didáctica: son los conocimientos sobre los aspectos involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.
- Dimensión Meta Didáctico-Matemática: son los conocimientos que debe tener un profesor para sistematizar la reflexión sobre la práctica y así realizar juicios valorativos sobre su propia práctica o la de otros.

Este modelo se ha presentado en varios trabajos como una herramienta teórico-metodológica que permite caracterizar y luego desarrollar competencias claves para la práctica del profesor de matemática, por ello ampliando el modelo del conocimiento didáctico-matemático sobre conocimientos del profesor se concibe el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas.

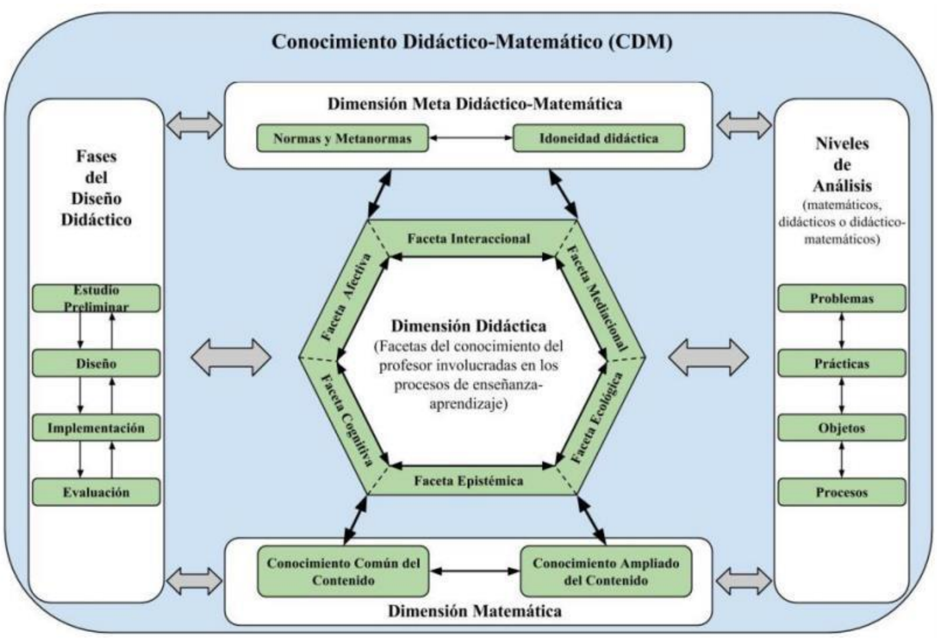


Figura 4.5 Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) (Pino-Fan y Godino, 2015, p. 103)

4.4 Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM)

En el apartado anterior se ha explicado los alcances del modelo de Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino et al., 2007) el cual se encuentra ceñido en el enfoque ontosemiótico. Este modelo inicialmente fue introducido como un sistema de categorías de análisis, realizando una articulación de la noción de conocimiento con la noción de competencia del profesor. A partir de esto y considerando las numerosas investigaciones relacionadas con las competencias del profesor de matemáticas, es que converge un modelo denominado Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de Matemáticas, siendo una ampliación del modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático.

Aspectos fundamentales en este modelo son la *competencia matemática* y la *competencia de análisis e intervención didáctica*, esta última está relacionada con el diseño, aplicación y valoración de secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora (Breda, 2017). En el desarrollo de esta competencia el docente necesita conocimientos que le permitan describir y explicar lo que ha sucedido en el proceso de enseñanza y aprendizaje, además de requerir conocimientos para valorar lo que ha sucedido y hacer propuestas de mejora para futuras implementaciones (Godino et al., 2018). Esta competencia global de análisis e intervención está formada por cinco sub-competencias asociadas a cinco herramientas conceptuales y metodológicas del enfoque ontosemiótico:

- Competencia de análisis de significados globales: que se basa en la identificación de situaciones-problemas y prácticas operativas, discursivas y normativas implicadas en su solución.
- Competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas: donde se identifican los objetos y procesos implicados en las prácticas.

- Competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas: identifica la secuencia de patrones en la interacción entre profesor, estudiante, contenido y recursos.
- Competencia de análisis normativa: inspecciona la trama de normas y metanormas que condicionan y soportan el proceso instruccional.
- Competencia de análisis de la idoneidad didáctica: establece la valoración del proceso instruccional, identifica las potenciales mejoras.

Figura 4.6 Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica (Godino et al., 2017, p. 103)

4.5 Conocimiento profesional del profesor de álgebra

A pesar que aún son incipientes las investigaciones en torno al álgebra inicial, existen caracterizaciones del conocimiento profesional del profesor de álgebra. Uno de los más destacados es el trabajo en el cual se realiza una distinción entre tres dimensiones ligadas, las cuales representan el conocimiento que un profesor ha adquirido u obtendrá, dejando de lado el conocimiento sobre los procesos y contextos en los que los profesores desarrollan tal conocimiento (Li, 2007). Esta red está articulada mediante tres dimensiones no independientes; dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica. Estas dimensiones tienen las siguientes características:

- Dimensión epistemológica: Obedece a la complejidad simbólica las cuales se han percibido a través de su desarrollo histórico. Mediante este conocimiento, es posible visualizar las dificultades que deberán afrontar los estudiantes en la actualidad. Se diversificó el dominio algebraico siendo una herramienta fundamental para solucionar problemas de otros ámbitos del conocimiento. Permite comprender con fundamentos teóricos la progresión del conocimiento algebraico en el currículo, a su vez que faculta el discernimiento de su pertinencia. Relaciona el álgebra con otras áreas del conocimiento matemático.
- Dimensión cognitiva: Esta dimensión se ocupa del conocimiento profesional potencial sobre los procesos de aprendizaje en álgebra. Se ha organizado en cuatro puntos principales vinculados a las dificultades de aprendizaje: la relación entre la aritmética y el álgebra, el sistema simbólico del álgebra, las relaciones entre diferentes representaciones semióticas utilizadas en álgebra y la relación algebraica con otros campos matemáticos. Las interpretaciones de los estudiantes de los conceptos, las ideas erróneas y la forma de motivar a los alumnos, se reúnen también en la dimensión cognitiva.
- Dimensión didáctica: En esta etapa toma relevancia todo lo concerniente a aspectos curriculares, los planes de estudio, los objetivos de enseñanza, tareas de evaluación, utilización de recursos digitales, como sitios y herramientas web, libros de estudio, entre otros.

Cabe destacar el modelo elaborado por McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase y Senk (2012), denominado Conocimiento para la enseñanza del álgebra: un marco de conocimientos y prácticas (*Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices*), el cual mediante una serie de entrevistas y grabaciones en video, desarrollan un marco con dos dimensiones denominadas:

- *Knowledge of algebra for teaching*: Esta dimensión incluye tres categorías, una referente al conocimiento del contenido que se enseña en los cursos de secundaria de álgebra (*knowledge of school algebra*); la otra de conocimientos universitarios, que se preocupa de entregar una visión más amplia del álgebra escolar (*Knowledge of advanced mathematics*) y finalmente el conocimiento de la matemática que es útil para la enseñanza (*Mathematics for teaching knowledge*).
- *Mathematical uses of knowledge in teaching (or teaching practices*): Está compuesto por el conocimiento del profesor que utiliza para descomprimir los procedimientos o algoritmos, asignándoles un significado a los símbolos y algoritmos que serán utilizados en forma automática en matemáticas avanzadas (*Descompressing*), encontramos el conocimiento de versiones simples de conceptos avanzados que serán utilizados en cursos posteriores (*Trimming*), concluyendo con el conocimiento que ayuda a vincular y conectar la matemática mediante los contenidos, conceptos y objetivos (*Bridging*).

Otro enfoque a considerar es el presentado por Alsina (2009), denominado modelo de formación activa, el cual desemboca en el aprendizaje realista. Este modelo basa sus cimientos en la Educación Matemática Realista de Freudenthal (1991). Si bien este enfoque no es propio de la enseñanza del álgebra, puede ser aplicado en nóveles estudiantes de educación inicial. Una de sus principales fortalezas es la utilización de situaciones de la vida cotidiana para aprender matemática. Allí debe existir una sólida interacción entre los profesores y los estudiantes, con ello los docentes pueden construir situaciones de aprendizaje utilizando las producciones de sus alumnos, además los estudiantes pueden componer y descomponer elementos matemáticos reinventando conceptos matemáticos bajo la tutela de su profesor.

La educación matemática realista está fundamentada en seis principios esenciales: de actividad, de realidad, de niveles, de reinvención guiada, de interacción y de interconexión.

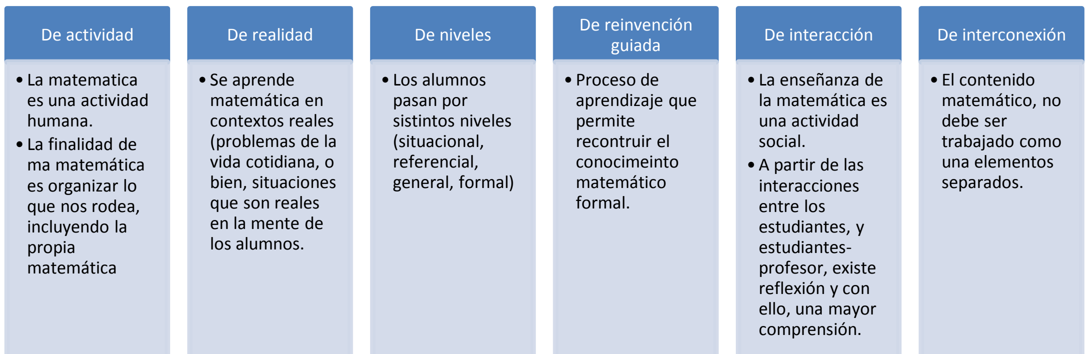


Figura 4.7 Principios fundamentales de la Educación Matemática Realista (Alsina, 2009)

No existe un solo modelo de conocimiento profesional de un profesor de álgebra, incluso es posible adaptar otros modelos existentes como es el caso del modelo de Educación Matemática Realista. Sin embargo, el esfuerzo es siempre el mismo, tratar de comprender y desarrollar aspectos relativos al conocimiento profesional que debe poseer un docente sobre un eje curricular, y su posterior enseñanza.

CAPÍTULO 5: ESTUDIO DE LA PRESENCIA DEL ÁLGEBRA EN LOS LIBROS DE TEXTO CHILENOS

5.1 Presentación

Un aspecto de preocupación permanente dentro de la educación es garantizar la calidad, lo que impulsa el desarrollo de múltiples y variadas iniciativas para su mejoramiento. Chile, con el fin de buscar equidad y calidad, crea distintas orientaciones curriculares para colegios, docentes, estudiantes, guiando los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Aunque se han estado trabajando en distintas estrategias que involucren el mejoramiento de la educación, una de las asignaturas que sigue siendo un desafío para los estudiantes y docentes es matemática. Según los resultados del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes del año 2015 (PISA)[2] (Agencia de Calidad de Educación, 2015), una alta proporción de estudiantes

[2] PISA 2015: Programa para la Evaluación Internacional de estudiantes OCDE - Agencia de Calidad de la Educación. (2015). Agencia de Calidad de la Educación. Obtenido de Gobierno de Chile http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf

no alcanza las competencias mínimas, es más, el 49,4% de los estudiantes se encuentra bajo el nivel dos[3] de acuerdo de los niveles de desempeño en esta área y de acuerdo a los resultados del Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias del año 2015 (TIMSS)[4] (Agencia de Calidad de Educación, 2016), el área de debilidad de los estudiantes se centró en la unidad álgebra.

La enseñanza del álgebra ha tenido una amplia presencia dentro del currículo nacional, sin embargo, sólo en los últimos años se ha focalizado en los primeros ciclos de enseñanza básica, introduciendo diversas propuesta de cambio curricular, como *Early Álgebra,* que pretende la algebrización del currículo desde el primer ciclo de educación básica.

Es fundamental analizar las orientaciones curriculares propuestas por el Ministerio de Educación de Chile en los cursos de primero a cuarto básico, las que corresponden a: Bases Curriculares, Contenidos mínimos obligatorios, Programas de Estudios y Estándares Pedagógicos.

El escenario educativo es cada vez más complejo, los métodos de enseñanza, las formas de aprender, la manera de la trabajar dentro del aula, es un proceso que no se debe manipular en forma precipitada. Si bien las orientaciones curriculares se conciben como un instrumento guía, es necesario reflexionar sobre estas propuestas buscando las debilidades y fortalezas de estos instrumentos.

En los últimos años el Ministerio de Educación ha definido diversas estrategias con el fin de optimizar la calidad de la enseñanza, efectuando diversos cambios

[3] Los estudiantes que se encuentran bajo el nivel 2 en el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes, establece que ellos no alcanzan las competencias mínimas requeridas para participar completamente en una sociedad moderna.
[4] Resultados TIMSS Chile 2015. (2016). Revista de Educación. Obtenido de Gobierno de Chile http://www.revistadeeducacion.cl/wp-content/uploads/2016/11/TIMSS-PRESENTACION.pdf

en el currículo nacional, en donde algunos representan la evolución de la reforma curricular de los años noventa y otros surgen en el marco de la Ley General de Educación[5]. Las nuevas Bases Curriculares suponen un cambio importante en la forma de organizar y estructura el currículum, en cómo se ordenan y comunican los contenidos de las diferentes asignaturas.

Una de estas modificaciones es la incorporación del álgebra en el currículo en los primeros cursos de enseñanza debido a los bajos resultados en las pruebas de medición internacional (TIMMS)[6]. La importancia de aprender álgebra desde los primeros años de escolaridad es que entrega la posibilidad al estudiante de desarrollar un pensamiento lógico, crítico y autónomo, habilidades primordiales para el desarrollo integral y social del estudiante (MINEDUC, 2017)[7]. Aprender álgebra implica simbolizar, generalizar y precisar patrones, en donde según Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005) citados por Aké, Godino, Gonzato, Wilhelmi (2013) establecen que algunas características del pensamiento algebraico desarrollados por los niños corresponden a: modificar expresiones matemáticas, desarrollar pensamiento relacional, desenvolver un conocimiento en base a conjuntos, operaciones entre ellos y propiedades asociadas.

A partir del desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes se genera un enriquecimiento del conocimiento, progresando significativamente en sus procesos de aprendizaje de la matemática.

[5] LEY-20370 12-SEP-2009 MINISTERIO DE EDUCACIÓN - Ley Chile - Biblioteca del Congreso Nacional. Obtenido de http://www.leychile.cl/Navegar?idNorma=1006043&idParte. La ley general de Educación representa el marco para una institucionalidad de la educación en Chile, la cual llega a derogar la LOCE (Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza), en lo referente a la educación general básica y media. Esta ley establece los principios y obligaciones, además de promover cambios en la forma en que los niños y jóvenes deben ser educados en las distintas áreas.

[6] Resultados TIMMS Chile 2011. (2012). www.agenciaeducacion.cl. Obtenido de http://www.agenciaeducacion.cl/wp-content/uploads/2013/02/resultados-timss-18-dic-2012.pdf

[7] Introducción a esta asignatura en los Programas de Estudio - Currículum en línea. MINEDUC. Gobierno de Chile. (2017). Curriculumenlineamineduc.cl. Obtenido de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-article-20851.html

Las Bases Curriculares, contenidos mínimos obligatorios, programas de estudios y los Estándares Pedagógicos para los profesores de educación básica en el área de matemática, son fundamentales dentro del proceso de enseñanza del álgebra, ya que guían los procesos de enseñar y aprender de las instituciones, profesores y estudiantes del país. Además, las propuestas establecidas por el Ministerio de Educación a través de las distintas modificaciones, apuntan a que el estudiante desarrolle desde pequeños el conocimiento matemático, el que será fundamental en su formación escolar, provechosa en la transición de la aritmética al álgebra y una base para modelización y formalización de los contenidos.

5.2 El álgebra en el currículo

Un aspecto de preocupación permanente dentro de la educación es garantizar la calidad, lo que impulsa el desarrollo de múltiples y variadas iniciativas para su mejoramiento. Aunque en las últimas décadas diversos organismos y autores de reconocido prestigio han estado trabajando en distintas estrategias que involucren el mejoramiento de la educación, una de las disciplinas que sigue siendo un desafío para los estudiantes y docentes es la matemática. En el caso de Chile, por ejemplo, los últimos resultados del *Programme for International Student Assessment* (PISA) han puesto de manifiesto que un 49,4% de los estudiantes de 14-15 años no alcanzan las competencias mínimas requeridas para participar completamente en una sociedad moderna. De manera más concreta, los datos obtenidos en la prueba *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS) han revelado que, en estudiantes de 9-10 años, el área de mayor debilidad se centró en el álgebra.

A raíz de estos datos, indagaremos acerca de la presencia del álgebra temprana (*Early Algebra*) en el currículo de matemáticas de Educación Primaria, al considerarse como una puerta de entrada a las matemáticas superiores, entre otras cosas porque aporta un lenguaje enriquecido capaz de crear la base con que se enseñan las matemáticas (Stacey y Chick, 2004).

El álgebra a nivel escolar fue incorporada en los currículos de matemáticas de Educación Secundaria de diversos países europeos y americanos a finales del siglo XIX. En términos generales, los contenidos algebraicos y su secuencia se han permanecido inalterables, de manera que muchos cursos de álgebra se inician con términos literales y su relación con referencias numéricas dentro del contexto, primero usando expresiones algebraicas y, más tarde, ecuaciones.

Después se introduce la simplificación de las expresiones y la resolución de ecuaciones por métodos formales, de manera que la manipulación y factorización de polinomios y expresiones racionales se convierten en actividades regulares. Eventualmente, algunos programas incluyen también funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y sus correspondientes representaciones algebraicas, ya sea mediante tablas o gráficos.

Sin embargo, la presencia del álgebra en los currículos de matemáticas de Educación Primaria ha sido escasa o nula, a pesar de que el pensamiento algebraico genera un enriquecimiento del conocimiento que permite progresar significativamente en el aprendizaje de la matemática. Con el propósito de subsanar esta situación, tanto Chile como otros países han ido introduciendo diversas propuestas de cambio curricular que pretende la algebrización del currículo desde el primer ciclo de Educación Primaria.

La importancia de aprender álgebra desde los primeros años de escolaridad es que entrega la posibilidad al estudiante de desarrollar un pensamiento lógico, crítico y autónomo, que son habilidades primordiales para el desarrollo integral y social del estudiante (MINEDUC, 2012). Partiendo de la base que aprender álgebra implica simbolizar, generalizar y precisar patrones (Carpenter, Levi, Franke y Zeringue, 2005) señalan que algunas de las principales características del pensamiento algebraico desarrollados por los niños corresponden a modificar expresiones matemáticas, desarrollar el pensamiento relacional y desenvolver un conocimiento en base a conjuntos, las operaciones entre ellos y las propiedades asociadas.

Con base a ello, la finalidad de este apartado es realizar un análisis de la presencia del álgebra temprana en las orientaciones curriculares de matemáticas contemporáneas de Educación Primaria, como se ha indicado. En concreto, se van a comparar los currículos de Estados Unidos, España y Chile, con el propósito de establecer las semejanzas y las diferencias y, más allá de ello, poder ofrecer orientaciones específicas acerca de la enseñanza del álgebra al profesorado de Educación Primaria preocupado por ofrecer a los estudiantes una enseñanza que dé respuesta a las necesidades sociales del S.XXI.

Para identificar los objetos matemáticos asociados al estudio del álgebra en dichos currículos se ha utilizado como referencia la "Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados" (Castro, Godino y Rivas, 2011), que corresponde a la identificación de los tipos de objetos puestos en juego en la solución de un problema.

5.2.1 El álgebra temprana incluida en el currículo americano (USA) de Educación Primaria

Las orientaciones curriculares americanas vigentes se recogen en los estándares comunes para las matemáticas de la *Common Core Standard Initiative*, y se basan en modelos de la más alta calidad aplicados en todo el país que han servido también de base para la práctica matemática en estudiantes fuera de las fronteras norteamericanas (CCSSAI, 2011). En su elaboración, a partir de directrices entregadas por el NCTM (2003), se ha favorecido no sólo el fortalecimiento de la comprensión conceptual, sino que también se ha puesto énfasis en aspectos organizativos del álgebra y las leyes de la aritmética para estructurar dichas ideas (Huang, 2002).

El NCTM (2003) destaca la importancia de incluir el estudio del álgebra a partir de los 3 años, asumiendo que el álgebra se aprende mejor como un conjunto de técnicas vinculadas a la representación de relaciones cuantitativas y como un estilo de pensamiento matemático que permite formalizar patrones, funciones y generalizaciones. Desde este prisma, señalan que los niños pequeños pueden ser alentados a usar el razonamiento algebraico mientras estudian números y operaciones y mientras investigan patrones y relaciones entre conjuntos de números (NCTM, 2003).

De forma más concreta, el NCTM explicita que los programas de enseñanza desde *Prekindergarden* hasta el grado 12 (de los 3 a los 18 años aproximadamente), deberían capacitar a los estudiantes para:

- Comprender patrones, relaciones y funciones.
- Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos.
- Utilizar modelos matemáticos para representar y comprender las relaciones cuantitativas.
- Analizar el cambio en diversos contextos.

Nivel	Contenidos algebraicos
Primer y segundo grado	Reconocer, describir y extender patrones tales como secuencias de sonidos y formas o patrones numéricos simples y traducir de una representación a otra. Analizar cómo se generan patrones de repetición y crecimiento. Ilustrar los principios generales y las propiedades de las operaciones, como la conmutatividad, utilizando números específico.

Tercer y cuarto grado	Describir, extender y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos. Representar y analizar patrones y funciones, utilizando palabras, tablas y gráfico. Identificar tales propiedades como conmutatividad, asociatividad y distributividad y utilizarlas para calcular con números enteros. Representan la idea de una variable como una cantidad desconocida usando una letra o un símbolo. Expresar relaciones matemáticas usando ecuaciones. Modelar situaciones problemáticas con objetos y utilizar representaciones tales como gráficos, tablas y ecuaciones para sacar conclusiones.
Quinto y sexto grado	Desarrollar una comprensión conceptual inicial de los diferentes usos de las variables. Explorar relaciones entre expresiones simbólicas y gráficos de líneas, prestando especial atención al significado de intercepción y pendiente. Utilizar álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas, especialmente aquellos que implican relaciones lineales. Reconocer y generar formas equivalentes para expresiones algebraicas simples y resolver ecuaciones lineales.

Tabla 5.1 Contenidos del álgebra en el currículo americano (USA)

Considerando los contenidos anteriores, en la tabla 5.2 se indican los objetos matemáticos asociados al álgebra temprana.

Objetos matemáticos algebraicos en el National Council of Teachers of Mathematics	Grados					
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
SITUACIONES-PROBLEMAS						
Identificar y describir patrones	x	x	x	x		
Resolver problemas con patrones	x	x	x	x		
Determinar reglas o técnicas generales			x	x	x	x
Resolver expresiones algebraicas					x	x
Desarrollar ecuaciones e inecuaciones					x	x
Relacionar expresiones simbólicas y gráficos de líneas						x
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS						
Lenguaje natural	x	x	x	x	x	x
Representación pictórica	x	x	x	x	x	
Representación en tablas						x
Lenguaje simbólico	x	x	x	x		
Lenguaje algebraico					x	x
CONCEPTOS – DEFINICIÓN						
Secuencia numérica	x	x				
Patrón numérico	x	x	x	x		
Igualdad			x	x	x	x
Operaciones inversas					x	x
Multiplicación	x	x	x	x	x	x
División			x	x	x	x
Ecuación			x	x	x	x
Expresión algebraica					x	x
PROPIEDADES						
Propiedad asociativa	x	x	x	x	x	x
Propiedad conmutativa	x	x	x	x	x	x
Propiedad distributiva			x	x	x	x
Ley de tricotomía					x	x
PROCEDIMIENTOS						
Distinguir y diseñar distintos tipos de patrones con figuras y numéricos	x	x	x	x		

Escribir reglas generales para diversos contextos			x	x	x	x
Comparar expresiones numéricas	x	x	x	x		
Construir expresiones algebraicas			x	x	x	x
Representar ecuaciones e inecuaciones mediante el uso de expresiones algebraicas					x	x
Verificar si se cumple la igualdad en una ecuación			x	x	x	x

Tabla 5.2 Objetos matemáticos algebraicos presentes en el currículo americano (USA)

Se destaca el ordenamiento que realiza el currículo americano (USA) a través de líneas temáticas transversales que abarcan los distintos niveles educativos. Están incorporados en él elementos concernientes a conocimientos mínimos que deben ser tratados en cada nivel educativo, se evidencia que en el primer y segundo nivel de enseñanza primaria la resolución de tareas es un elemento primordial, junto con el desarrollo de competencias matemáticas relativas al análisis y reconocimiento de patrones. Del mismo modo, se comienza un incipiente tratamiento en la aplicación de propiedades, axiomas y definiciones elementales. Lo anterior también está incorporado en los niveles de tercero, cuarto, quinto y sexto grado, sin embargo en estos últimos niveles también están incluidas las dificultades y los conflictos reflejados en su proceso de aprendizaje como un elemento propio de la enseñanza de la matemática.

El currículo americano (USA) presenta fortalezas en diversos aspectos, como por ejemplo la resolución de expresiones algebraicas, lo cual es tratado en quinto y sexto año; el uso de representaciones pictóricas en todos los cursos de Educación Primaria; o bien la utilización de expresiones algebraicas en los últimos años de primaria. Además, se introduce la propiedad distributiva a partir del tercer año y la representación de ecuaciones e inecuaciones mediante el uso de expresiones algebraicas es tratada de forma adecuada. Por otra parte, presenta algunas debilidades en la solución de problemas de desigualdad, lo cual no es tratado en el currículo; lo mismo ocurre con la elaboración de conjeturas que no es tratado en ningún curso de primaria; las operaciones inversas sólo son trabajadas en quinto y sexto año; se realiza un escaso tratamiento de porcentajes; se soslaya la comparación de cantidades mediante el uso de balanzas; y finalmente no impulsa la construcción de series numéricas.

5.2.2 El álgebra temprana incluida en el currículo español de Educación Primaria

El currículo español vigente de Educación Primaria está dividido en 5 bloques: procesos, métodos y actitudes en matemática; números; medida; geometría; estadística y probabilidad. No existe, pues, un bloque con contenidos propios al álgebra, sino que están presentes en los dos primeros bloques. Esta división no condiciona una estructura rígida, solo es una forma que permite organizar de diferentes maneras los contenidos adoptando la metodología más adecuada a las características de ellos y de los alumnos (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2007). En la tabla 5.3 se muestran los contenidos de estos bloques que se vinculan con el álgebra temprana.

Nivel	Contenidos algebraicos
Primer ciclo	Recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana. Comparación de números en contextos familiares. Búsqueda de elementos de regularidad en figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos. Identificación de patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio. Realización de predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontradas, analizando su idoneidad y los errores que se producen. Elaboran conjeturas y buscan argumentos que las validen o refuten, en situaciones a resolver, en contextos numéricos, geométricos o funcionales.

Segundo ciclo	Progresa en la identificación de patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales. Progresa en la realización de predicciones sobre los resultados esperados, utilizando patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y errores que se producen. Progresa en la elaboración de conjeturas y busca argumentos que las validen o las refuten, en situaciones a resolver, en contextos numéricos, geométricos o funcionales. Construye series de forma ascendente y descendente de cadencias básicas. Calcula el término que falta en una suma o resta. Calcula el término que falta en una multiplicación o división.
Tercer ciclo	Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales. Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen. Elabora conjeturas y busca argumentos que las validen o las refuten, en situaciones a resolver, en contextos numéricos, geométricos o funcionales. Calcula el término que falta en una suma o resta. Calcula el término que falta en una multiplicación o división.

	Construye series numéricas ascendentes y descendentes. Resuelven problemas de razonamiento lógico. Establece equivalencias entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. Calcula el porcentaje de una cantidad. Calcula mentalmente porcentajes sencillos. Aplica de forma correcta a regla de tres.

Tabla 5.3 Contenidos del álgebra en el currículo español

Siguiendo el mismo procedimiento, en la tabla 5.4 se realiza un análisis de los objetos matemáticos asociados al álgebra en las orientaciones curriculares españolas.

Objetos matemáticos algebraicos en la educación primaria española	Curso					
	1°	2°	3°	4°	5°	6°
SITUACIONES-PROBLEMAS						
Identificar y describir patrones	x	x	x	x		
Resolver problemas con patrones			x	x	x	x
Determinar reglas o técnicas generales	x	x	x	x	x	x
Resolver expresiones algebraicas						
Elabora conjeturas	x	x	x	x	x	x
Resuelve problemas de razonamiento lógico						x
Resuelve problemas de razonamiento inductivo						x
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS						
Lenguaje natural	x	x	x	x	x	x
Representación pictórica	x	x	x	x	x	x
Representación en tablas	x	x	x	x	x	x
Lenguaje simbólico			x	x	x	x
Lenguaje algebraico					x	x

CONCEPTOS – DEFINICIÓN						
Secuencia numérica	x	x				
Patrón numérico					x	x
Igualdad	x	x	x	x	x	x
Operaciones inversas			x	x	x	x
Multiplicación	x	x	x	x	x	x
División			x	x	x	x
Ecuación		x	x	x	x	x
Porcentajes						x
PROPIEDADES						
Propiedad asociativa					x	x
Propiedad conmutativa					x	x
Ley de tricotomía					x	x
PROCEDIMIENTOS						
Distinguir y diseñar distintos tipos de patrones con figuras y numéricos	x	x	x	x	x	x
Escribir reglas generales para diversos contextos				x	x	x
Comparar expresiones numéricas	x	x	x	x	x	x
Construir expresiones algebraicas					x	x
Verificar si se cumple la igualdad en una ecuación			x	x	x	x
Clasificar expresiones numéricas y algebraicas		x	x	x	x	x
Construye series numéricas			x	x	x	x

Tabla 5.4 Objetos matemáticos algebraicos presentes en el currículo español

En la tabla anterior se exhiben los contenidos algebraicos que se encuentran en Educación Primaria del currículo español, divididos en 5 bloques (Procesos, métodos y actitudes en matemática; Números; Medida; Geometría; Estadística y probabilidad).

El currículo español presenta varias fortalezas, entre ellas se destaca el trabajo en la obtención de reglas o técnicas generales, que es realizado a lo largo de todos los años de Educación Primaria; lo mismo ocurre con la elaboración de conjeturas; la resolución de problemas de razonamiento lógico e inductivo es realizado a partir del último año; se utiliza la representación pictórica y la representación de objetos algebraicos representados en tablas se encuentran en todos los cursos; el concepto de igualdad es reforzado en todo el currículo y las operaciones inversas se introducen desde el tercer año; el concepto de porcentaje se comienza a tratar a partir de los últimos cursos de educación primaria; el reconocimiento y diseño distintos de patrones con figuras y números es tratado en los primeros años; finalmente se induce a los alumnos a la construcción de series numéricas.

También se presentan algunas debilidades como la no aparición de la resolución de problemas de desigualdad como un elemento preponderante en el currículo; tampoco se realiza un tratamiento concienzudo de las expresiones algebraicas y su utilización; no es tratado el concepto de inecuación; tampoco aquellos referentes a la consolidación de la propiedad distributiva; se evidencia escasamente el tratamiento de la propiedad distributiva; así como el uso de balanzas para comparar cantidades.

5.2.3 El álgebra temprana incluida en el currículo chileno de Educación Primaria

A partir del año 2009 el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC) da inicio a un proceso de ajuste curricular para la enseñanza básica (6 a 11 años de edad). Dentro de este periodo de cambios se establecen las nuevas bases curriculares, que corresponden al principal documento del currículo chileno y que tiene por objetivo que todos los alumnos y alumnas sean partícipes de una experiencia educativa similar, asentando una base cultural común (MINEDUC, 2009, 2011). Esta nueva base curricular trae consigo los Objetivos de Aprendizaje, que definen los contenidos mínimos que deben trabajar los estudiantes en las distintas asignaturas y que deben lograr mediante el desarrollo de habilidades, actitudes y conocimientos propios de cada subsector.

En el año 2012 el MINEDUC hizo efectiva la integración del álgebra desde primer año básico. Para esta unidad, Patrones y Álgebra, el MINEDUC (2012, p. 91) propone:

> En este eje se pretende que los estudiantes expliquen y describan relaciones de todo tipo, como parte del estudio de la matemática. Los estudiantes buscarán relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, lo que los facultará para investigar las formas, las cantidades y el cambio de una cantidad en relación con otra. Los patrones (observables en secuencias de objetos, imágenes o números que presentan regularidades) pueden ser representados en forma concreta, pictórica y simbólica, y los estudiantes deben ser capaces de transportarlos de una forma de representación a otra, extenderlos, usarlos y crearlos. La percepción de los patrones les permite predecir y también fundamentar su razonamiento al momento de resolver problemas. Una base sólida en patrones facilita el desarrollo de un pensamiento matemático más abstracto en los niveles superiores, como es el pensamiento algebraico.

Lo planteado por el Ministerio de Educación chileno en el eje de álgebra, permite a los estudiantes desarrollar desde la educación básica hasta la educación media el razonamiento algebraico, necesario para desenvolverse en la sociedad actual debido a que en diversas situaciones se necesita generalizar, representar o formalizar fenómenos de la vida cotidiana. Para trabajar esta unidad se han propuesto los siguientes contenidos en los cursos de primer año básico a sexto año básico.

Nivel	Contenidos algebraicos
Primer y segundo año básico	Reconocer, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos...) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de

	manera manual y/o por medio de software educativo. Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=). Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes, de manera manual y/o usando software educativo. Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=) y los símbolos no igual (>, <).
Tercer y cuarto año básico	Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo. Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100. Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo. Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción.
Quinto y sexto año básico	Descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita hacer predicciones. Resolver problemas, usando ecuaciones e inecuaciones de un paso, que involucren adiciones y sustracciones, en forma pictórica y simbólica. Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos: identificando patrones entre los valores de la tabla; formulando una regla con lenguaje matemático.

	Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: usando una balanza; usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución.

Tabla 5.5 Contenidos del álgebra en el currículo chileno

En la tabla 5.5 se observa que el tratamiento del álgebra se inicia mediante el estudio de patrones y desigualdades, para luego iniciar el desarrollo de ecuaciones y expresiones algebraicas mediante el análisis de situaciones asociadas al quehacer diario de los estudiantes. En niveles superiores los estudiantes comienzan el estudio de funciones, análisis de situaciones expresadas en lenguaje algebraico, patrones numéricos y geométricos y reconocimientos de estructuras equivalentes.

Es posible inferir que en el currículo chileno de Educación Primaria se puede observar la presencia del significado intuitivo, clásico y matemático axiomático del álgebra, los que son abordados de modo explícito pero con variado nivel de profundidad a lo largo de los cursos que componen el ciclo básico. En la tabla 5.6 se muestran los objetos matemáticos presentes en dichos contenidos.

Objetos matemáticos algebraicos en la educación primaria chilena	**Curso**					
	1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**
SITUACIONES-PROBLEMAS						
Identificar y describir patrones	x	x	x		x	x
Resolver problemas con patrones	x	x	x		x	x
Identificar y resolver situaciones de desigualdad	x			x		
Determinar reglas o técnicas generales		x	x		x	x
Resolver expresiones algebraicas					x	x

Desarrollar ecuaciones e inecuaciones				x	x	x
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS						
Lenguaje natural	x	x	x	x	x	x
Representación pictórica	x	x	x	x	x	x
Representación en tablas			x	x	x	x
Lenguaje simbólico				x	x	x
Lenguaje algebraico					x	x
CONCEPTOS – DEFINICIÓN						
Secuencia numérica	x	x	x		x	x
Patrón numérico	x	x	x		x	x
Igualdad	x	x	x		x	x
Desigualdad	x	x	x	x	x	
Operaciones inversas				x		
Multiplicación			x	x	x	x
División			x	x	x	x
Ecuación			x		x	x
Inecuación			x		x	
Expresión algebraica					x	x
PROPIEDADES						
Propiedad asociativa		x	x	x	x	
Propiedad conmutativa			x	x	x	
Ley de tricotomía		x	x	x	x	
PROCEDIMIENTOS						
Distinguir y diseñar distintos tipos de patrones con figuras y numéricos	x	x	x		x	x
Escribir reglas generales para diversos contextos			x	x		x
Comparar cantidades mediante el uso de una balanza				x	x	x
Comparar expresiones numéricas	x	x	x	x	x	
Construir expresiones algebraicas				x	x	x
Valorizar expresiones algebraicas					x	x
Representar ecuaciones e inecuaciones mediante el uso de expresiones algebraicas					x	x
Verificar si se cumple la igualdad en una ecuación					x	x
Clasificar expresiones numéricas y algebraicas						x

Tabla 5.6 Objetos matemáticos algebraicos presentes en el currículo chileno

En los primeros años de escolaridad del currículo chileno se evidencia que existe principalmente la incorporación del reconocimiento y descripción de secuencias de patrones, el tratamiento de conceptos propios de la igualdad y desigualdad como equilibrio y desequilibrio, esto es algo que ocurre desde primero a cuarto año de enseñanza básica.

En los cursos inmediatamente superiores, quinto y sexto año de enseñanza básica, se efectúan conexiones con objetos matemáticos, se realizan predicciones, formalizaciones del lenguaje algebraico formal y la utilización de balanzas para la resolución de ecuaciones de primer grado. Se comienza a involucrar de forma activa al estudiante como un actor preponderante en su propio aprendizaje.

El currículo chileno tiene una serie de fortalezas, entre ellas está la identificación de patrones, lo cual se encuentra en casi todo el currículo básico nacional; se identifican y tratan problemas de desigualdad; el trabajo con ecuaciones e inecuaciones comienza a partir de cuarto año básico; la representación pictórica se encuentra inmerso en todo el currículo básico; lo mismo ocurre con la secuencia y patrón numérico; las expresiones algebraicas se incorporan en los últimos años de educación básica; el tratamiento de ecuaciones e inecuaciones también son tratados de forma adecuada; además se realiza un trabajo utilizando ecuaciones e inecuaciones a través del uso de expresiones algebraicas.

Presenta debilidades o mejoras en la no elaboración de conjeturas; escasamente aborda las operaciones inversas; tampoco formaliza la utilización de porcentajes; la propiedad distributiva no es institucionalizada; ni tampoco se construyen series numéricas.

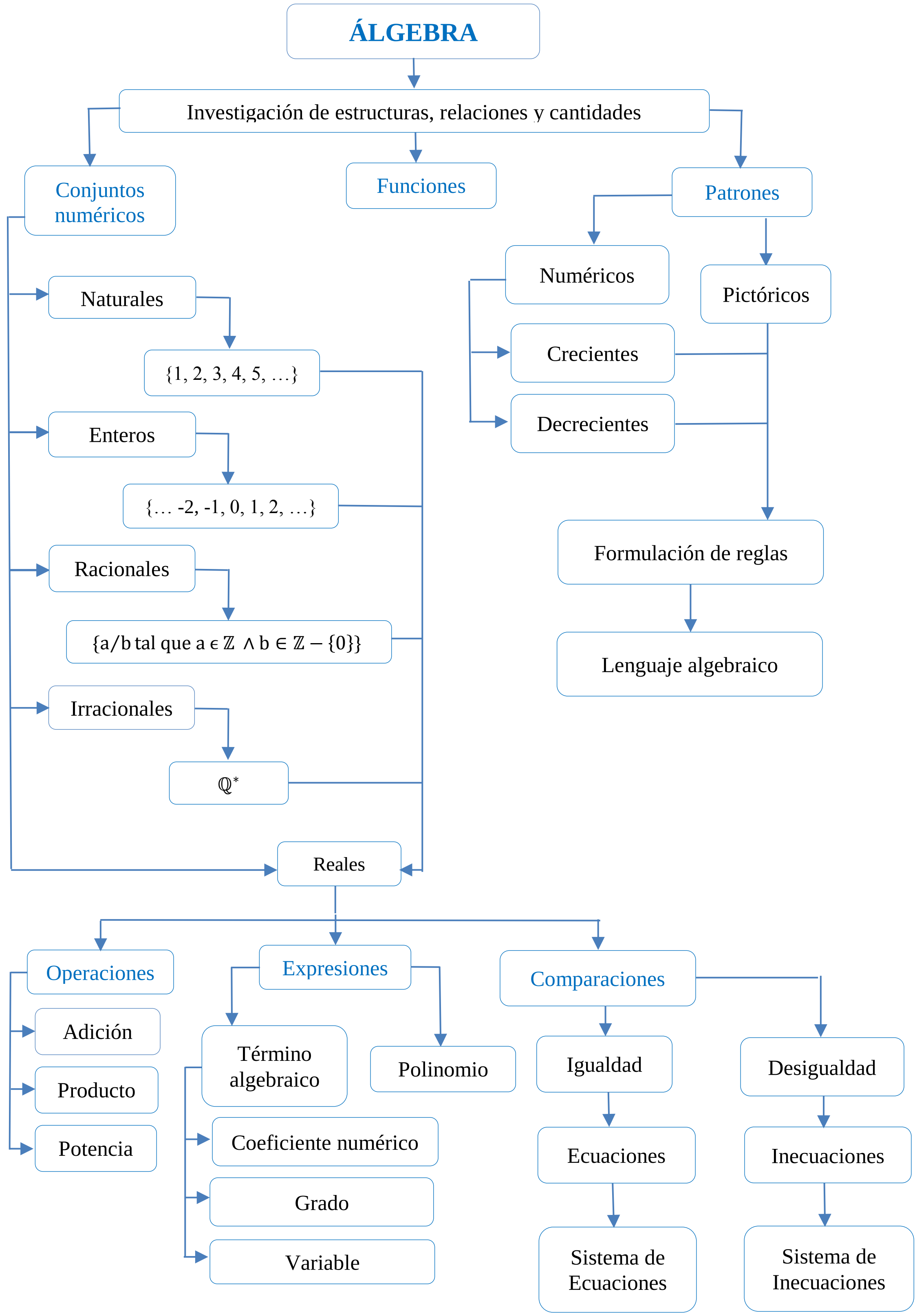


Figura 5.1 Vocablos utilizados frecuentemente en la enseñanza del álgebra escolar

Es importante señalar que existen objetos matemáticos algebraicos comunes en los tres currículos analizados. En la tabla 5.7 se muestran las convergencias existentes.

Objetos matemáticos algebraicos comunes en el currículo americano (USA), español y chileno	**Curso**					
	1°	**2°**	**3°**	**4°**	**5°**	**6°**
SITUACIONES-PROBLEMAS						
Identificar y describir patrones	x	x	x			
Resolver problemas con patrones			x			
Determinar reglas o técnicas generales					x	x
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS						
Lenguaje natural	x	x	x	x	x	x
Representación pictórica	x	x	x	x	x	x
Representación en tablas						x
Lenguaje simbólico					x	
Lenguaje algebraico					x	x
CONCEPTOS – DEFINICIÓN						
Secuencia numérica	x	x				
Igualdad					x	x
Multiplicación			x	x	x	x
División			x	x	x	x
Ecuación			x		x	x
PROPIEDADES						
Propiedad asociativa					x	
Propiedad conmutativa					x	
Ley de tricotomía					x	
PROCEDIMIENTOS						
Distinguir y diseñar distintos tipos de patrones con figuras y numéricos	x	x	x			
Escribir reglas generales para diversos contextos				x		x
Comparar expresiones numéricas	x	x	x	x		
Construir expresiones algebraicas					x	x

Verificar si se cumple la igualdad en una ecuación					x	x

Tabla 5.7 Objetos matemáticos algebraicos comunes en el currículo americano (USA), español y chileno

Se destacan concurrencias en todos los niveles educativos de al menos un objeto matemático algebraico, siendo aquellos que tienen una mayor convergencia los elementos lingüísticos de lenguaje natural y representación pictórica, lo cual es encontrado desde primero hasta sexto año de enseñanza básica en los tres currículos.

5.2.4 Análisis comparativo de la presencia del álgebra temprana en los currículos de Educación Primaria

Con el propósito de realizar un análisis más pormenorizado, a continuación se realiza una comparación de los contenidos de álgebra de los currículos de matemáticas de Educación Primaria americano (USA), español y chileno, haciendo especial hincapié en las semejanzas y diferencias encontradas.

Contenidos Curriculares Afines
Primer y Segundo grado (USA) / Primer Ciclo, Primaria (España) / Primer y Segundo año de Educación Básica (Chile)
Seleccionar, clasificar y ordenar objetos por tamaño, número y otras propiedades. Situaciones modelo que implican la suma y la resta de números enteros, usando objetos, cuadros y símbolos. Recuento, medida, ordenación y expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana. Comparación de números en contextos familiares. Resolución de problemas que impliquen la realización de cálculos, explicando oralmente el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. Búsqueda de elementos de regularidad en figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos. Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones

espaciales. Interés y curiosidad por la identificación de las formas y sus elementos característicos. Reconocer, describir, crear y continuar patrones repetitivos (sonidos, figuras, ritmos...) y patrones numéricos hasta el 20, crecientes y decrecientes, usando material concreto, pictórico y simbólico, de manera manual y/o por medio de software educativo. Crear, representar y continuar una variedad de patrones numéricos y completar los elementos faltantes, de manera manual y/o usando software educativo.
Tercer y Cuarto grado (USA) / Segundo Ciclo, Primaria (España) / Tercer y Cuarto año de Educación Básica (Chile)
Describir, extender y hacer generalizaciones sobre patrones geométricos y numéricos. Sistema de numeración decimal. Valor de posición entre cifras. Su uso en situaciones reales. Orden y relación entre números. Comparación y ordenación de unidades y cantidades de una misma magnitud. Elaboración y utilización de estrategias personales para medir. Estimación de medidas de objetos de la vida cotidiana. Identificación de figuras planas y espaciales en la vida cotidiana. Comparación y clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios. Generar, describir y registrar patrones numéricos, usando una variedad de estrategias en tablas del 100, de manera manual y/o con software educativo.
Quinto y Sexto grado (USA) / Tercer Ciclo, Primaria (España) / Quinto y Sexto año de Educación Básica (Chile)
Utilizar gráficos para analizar la naturaleza de los cambios en las cantidades en las relaciones lineales. Ordenación de números enteros, de decimales y de fracciones por comparación y representación gráfica. Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias personales de cálculo mental y relaciones entre números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida. Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en

mediciones y estimaciones. Sistema de coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos y giros. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición. Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. Representar generalizaciones de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones.

Tabla 5.8 Convergencias curriculares encontradas

Como puede apreciarse en la tabla 5.8, existen contenidos en las tres estructuras curriculares que son similares o bien idénticas. Esto ocurre en todos los ciclos (cursos) y en todos los ejes que cubren la enseñanza primaria. Las principales semejanzas se observan en los contenidos referentes al reconocimiento, descripción y continuación de patrones con sonidos, figuras, ritmos y números; el uso de material concreto, pictórico y simbólico para la construcción de patrones; las regularidades de figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos; las conexiones con la vida cotidiana utilizando estrategias de cálculo mental y relaciones entre números; y, finalmente, la representación de generalizaciones a partir de relaciones entre números naturales, usando expresiones con letras y ecuaciones.

Finalmente, en la tabla 5.9 se presentan las principales divergencias encontradas, considerando que se trata de contenidos que son específicos de cada una de las estructuras curriculares y responden a necesidades y criterios propios.

Divergencias Curriculares			
Primer y Segundo grado / Primer Ciclo / Primer y Segundo año básico	**USA**	**España**	**Chile**
Desarrollo de estrategias personales de cálculo mental		x	x

para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior, para el cálculo de dobles y mitades de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas.			
Describir y registrar la igualdad y la desigualdad como equilibrio y desequilibrio, usando una balanza en forma concreta, pictórica y simbólica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=).			x
Demostrar, explicar y registrar la igualdad y la desigualdad en forma concreta y pictórica del 0 al 20, usando el símbolo igual (=) y los símbolos no igual.			x
Describir el cambio cualitativo, como el crecimiento del estudiante.	x	x	
Describen el cambio cuantitativo, como el crecimiento de un estudiante de dos pulgadas en un año.	x	x	
Se inicia en la elaboración de conjeturas y búsqueda de argumentos que las validen o las refuten, en situaciones a resolver, en contextos numéricos, geométricos o funcionales.		x	
Tercer y Cuarto grado / Segundo Ciclo / Tercer y Cuarto año básico	**USA**	**España**	**Chile**
Números fraccionarios para expresar particiones y relaciones en contextos reales, utilización del vocabulario adecuado.		x	
Comparación entre fracciones sencillas: mediante ordenación y representación gráfica.		x	
Resolver ecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones y un símbolo geométrico que represente un número desconocido, en forma pictórica y simbólica del 0 al 100.			x
Identificar y describir patrones numéricos en tablas que involucren una operación, de manera manual y/o usando software educativo.			x
Resolver ecuaciones e inecuaciones de un paso que involucren adiciones y sustracciones, comprobando			x

los resultados en forma pictórica y simbólica del 0 al 100 y aplicando las relaciones inversas entre la adición y la sustracción.			
Representan la idea de una variable como una cantidad desconocida usando una letra o un símbolo.	x		x
Expresar relaciones matemáticas usando ecuaciones.	x		x
Modelar situaciones problemáticas con objetos y utilizar representaciones tales como gráficos y tablas.	x	x	
Identificar y describir situaciones con constantes o variables tasas de cambio y compararlas.	x		
Progresa en la estimación de conjeturas y busca argumentos que las validen o las refuten, en situaciones a resolver, en contextos numéricos, geométricos o funcionales.		x	
Quinto y Sexto grado / Tercer Ciclo / Quinto y Sexto año básico	**USA**	**España**	**Chile**
Expresiones de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.		x	x
Calculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales.		x	x
Demostrar que comprenden la relación entre los valores de una tabla y aplicarla en la resolución de problemas sencillos: identificando patrones entre los valores de la tabla; formulando una regla con lenguaje matemático.	x		x
Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita, utilizando estrategias como: usando una balanza; usar la descomposición y la correspondencia 1 a 1 entre los términos en cada lado de la ecuación y aplicando procedimientos formales de resolución.	x		x
Identificar las funciones como lineales o no lineales y contrastar sus propiedades de tablas, gráficos o ecuaciones.	x		
Explorar relaciones entre expresiones simbólicas y gráficos de líneas, prestando especial atención al	x		

significado de intercepción y pendiente.			
Establece equivalencias entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.		x	x
Aplica en forma correcta la regla de tres.		x	x

Tabla 5.9 Divergencias curriculares encontradas

Tal como se observa en la tabla 5.9, en el primer nivel de Educación Primaria chileno se introduce el concepto de igualdad y desigualdad como equilibrio y desequilibrio de una balanza, en forma concreta, pictórica y simbólica; por su parte, en el segundo año básico se profundiza en estos conceptos, utilizando la simbología =; >; <. En contraposición, en los currículos americano (USA) y español de los dos primeros niveles no se hace alusión al trabajo con estos elementos simbólicos.

Respecto a tercer y cuarto año básico, en el currículo chileno se inicia un primer tratamiento del concepto de ecuación; sin embargo, sólo a partir de cuarto año, se introducen las inecuaciones, estableciéndose soluciones en forma pictórica y simbólica. No se observa el tratamiento de estos contenidos en el segundo ciclo del currículo español, y sí en el currículo americano (USA). Por su parte, en Chile aún no se inicia en el tratamiento de números fraccionarios, elemento que es ampliamente tratado en el currículo español. En este último país no sólo se realiza un tratamiento de ellos en un contexto real y cercano al estudiante, sino que también se realizan incipientes formalizaciones matemáticas, estimulando al estudiante a la implementación de un vocabulario adecuado y la manipulación de estos números, realizando comparaciones entre ellos, ordenaciones numéricas e incluso representaciones gráficas de las fracciones, al igual que en el NCTM. Todos los currículos hacen un tratamiento de las propiedades conmutativa y asociativa; sin embargo, la propiedad distributiva sólo se trata en el currículo americano (USA).

Finalmente, en quinto y sexto año de enseñanza básica se observan diversos contenidos de naturaleza algebraica que no están considerados en el currículo español, pero si en el NCTM, como por ejemplo iniciarse en el descubrimiento de pequeñas reglas que expliquen algunas sucesiones y que además permitan hacer predicciones, profundizando en la solución de problemas donde se utilicen ecuaciones e inecuaciones (usando estrategias como el uso de balanzas, descomposición y correspondencia uno a uno entre los términos de cada lado de la ecuación, además de aplicar procedimientos formales en su solución). Por su parte, el tercer ciclo del currículo español, contempla la utilización de porcentajes, correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes; y el cálculo de tanto porciento básicos contextualizados en situaciones reales. En el currículo chileno estos conceptos aún no se comienzan a tratar, existiendo algunas excepciones en algunas instituciones escolares que comienzan con el tratamiento de porcentajes a partir de sexto año de enseñanza básica. Por su parte el NCTM aborda la generación de formas equivalentes para expresiones algebraicas simples y la utilización de álgebra simbólica para representar situaciones y resolver problemas que impliquen relaciones lineales, temas que no están considerados en el currículo español ni chileno.

En esta sección se ha puesto de manifiesto que el álgebra temprana está presente en los currículos de matemáticas de Educación Primaria de los países analizados, con diversas diferencias, pero con la intención compartida de que los estudiantes desarrollen diversas competencias como por ejemplo razonar, modelar, argumentar, comunicar o bien resolver problemas que involucren números y operaciones, además de la identificación, construcción, modelación, razonamiento y resolución de problemas asociados a patrones provenientes de diversas situaciones. Se sugiere también la incorporación del uso de herramientas tecnológicas como apoyo para fomentar la compresión de los contenidos propuestos (MINEDUC, 2009, 2011, 2012; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2007; NCTM, 2003).

Para lograr esto, la formación del profesorado de Educación Primaria debería contemplar la comunicación y construcción de nociones, procesos y significados algebraicos (Godino, 2014) ya que así podrán adquirir herramientas para afrontar de manera óptima la enseñanza del álgebra y en el desarrollo del razonamiento algebraico en el transcurso de la etapa escolar.

En concordancia con lo anterior, Godino (2011) indica que hay características del razonamiento algebraico que son sencillas de adquirir por los estudiantes y que deben ser trabajadas e identificadas por los docentes de Educación Primaria:

- Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
- Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
- Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
- Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

La comprensión de estos aspectos y su incorporación progresiva en la práctica docente va a contribuir, sin duda, a que los niños de 6 a 12 años construyan un pensamiento algebraico óptimo imprescindible tanto para comprender la base con que se enseñan las matemáticas, en el sentido planteado por Stacey y Chick (2004), como para fomentar un pensamiento lógico, crítico y autónomo, que son habilidades primordiales para el desarrollo integral y social de los estudiantes, en la línea indicada por el MINEDUC (2012).

5.3 Análisis de los textos de estudio de primero a sexto año de enseñanza básica utilizados en Chile en torno a la unidad de álgebra

En la sección anterior se ha realizado un análisis de la forma en que las orientaciones curriculares internacionales y nacionales proponen el estudio del álgebra desde 1° básico a 6° básico. A nivel general, se ha apreciado que las orientaciones curriculares proponen iniciar el estudio del álgebra de forma gradual, comenzando su trabajo con el desarrollo de patrones hasta llegar a trabajar ecuaciones, inecuaciones y expresiones algebraicas.

Se ha decidido ampliar este estudio sobre los objetos y significados vinculados al estudio del álgebra en la educación básica mediante el análisis de los textos escolares.

El diseño de una malla curricular se deriva del movimiento social que se va generando en el grupo en el cual se desea aplicar. Los currículos educativos de hace veinte años, distan mucho de los currículos actuales. Parte de los elementos que se deben considerar para formalizar el desarrollo de un pensum o currículo, tiene que ver con el contexto social, la institución educativa, la actualidad política de un país y las características de los individuos beneficiarios de dicho diseño curricular.

Cuando hablamos de enfoque curricular, según Carrillo (1998) es la forma como se estructura, visualiza, organiza y se ejecuta el proceso educativo; coincidiendo con Molina (2004, p. 24) quien lo define como posición teórica que se adopta y desde la cual se caracterizan los elementos y los procesos curriculares.

En Chile, según Educar Chile (2012), las nuevas bases curriculares fueron establecidas en la Ley General de Educación (LGE) del año 2009. Allí se definió la nueva estructura que organizaba el currículum en Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios, por una que vinculara más claramente las prescripciones del Currículum con su implementación en el aula, seguimiento y evaluación. De esta manera se estableció como categoría única el establecimiento de Objetivos de Aprendizaje, profundizando en el foco que tuvo la reforma curricular de centrar el proceso educativo en el logro de aprendizajes por parte de los estudiantes, y simplificando la anterior estructura de OF/CMO establecida en la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE) del año 1990.

Kapp (2014) indica que el estudiante exitoso es aquel que es activo, orientado a objetivos, auto regulado y que asume su responsabilidad personal para contribuir a su propio aprendizaje. Esto es lo que persigue el aprendizaje centrado en el estudiante, que sean dueños de su propio proceso educativo; propuesta curricular y de aprendizaje adoptada por el estado chileno en su última reforma. En este ámbito, se han realizado múltiples estudios acerca del aprendizaje o currículo centrado en la persona y su impacto sobre el desarrollo educativo de los individuos. En un estudio realizado por Jiménez (2008), el autor buscaba caracterizar el enfoque curricular adoptado en la educación formal vigente en Costa Rica, donde se percibe un postura ideológica de la enseñanza centrado en la persona, pero en la práctica, el autor explica que prevalecen los métodos cuantitativos centrados en el objeto. El autor expone que el asumir un tipo de enfoque curricular le da al proceso educativo coherencia y estructura general. Así mismo, expresa que en su opinión, los enfoques curriculares centrados en el objeto, si bien tienen objetivos claros que presentan conductas observables, puede desfavorecer el aprendizaje debido al control y el papel que se le asigna al docente como un consumidor curricular, relegándolo como un simple aplicador de un determinado currículo y no lo hace partícipe en la elaboración del mismo; así como el estudiante se relega a la simple adquisición de conocimientos, dejando de lado su área afectiva, física y volitiva entre otras áreas que permitan su desarrollo integral.

Para Jiménez (2008), la concepción curricular centrada en la persona se encuentra estrechamente enraizada en un amplio cuerpo de valores universales, por lo que se busca atender a la persona colaborando en la construcción de su proyecto personal de vida, de una manera libre, responsable y auténtica, atendiendo a cada estudiante de manera individual, pero rescatando a su vez la parte social. En este sentido, una institución que adopte este tipo de metodologías y filosofías de enseñanza – aprendizaje, debe adoptar actividades que fortalezcan los valores y principios éticos del individuo, así como su desarrollo físico y mental, elementos que deben ser observables en las actitudes y el quehacer diario de los estudiantes en las asignaturas que cursa y en la socialización que establecen con cada uno de los integrantes de la comunidad educativa.

Otra investigación acerca del tema fue realizada por Roldán (2000) con la intención de definir el concepto de aprendizaje centrado en la persona, describir los elementos que han contribuido a configurar este concepto en los últimos 30 años; y, ejemplificar la teoría que la sustenta. En este sentido, después de la revisión bibliográfica que hace el autor, concluye a cerca del aprendizaje centrado en la persona que los estudiantes tienen un gran potencial que debe ser desarrollado; tienen intereses, ideas, conocimientos y una cultura que sería un absurdo desaprovechar; hacen que el análisis de necesidades, tan influenciado por algún enfoque, se convierta en un hecho real y constante; pueden proporcionar el input necesario para el desarrollo de la clase; ya tienen una experiencia de aprendizaje que contribuye en mayor medida de lo que creemos a establecer un marco de trabajo en el aula; son el único elemento absolutamente imprescindible para propiciar el aprendizaje cooperativo favoreciendo el concepto de grupo y, en el que la contribución de cada miembro, en función de sus conocimientos y habilidades, es determinante.

Parte imprescindible de un diseño curricular y su aplicación, el cual está relacionado con los materiales didácticos a utilizar. Dentro de los materiales didácticos, se consideran las herramientas audio visuales (presentaciones, videos, películas, canciones), materiales de papelería (colores, papeles, recortes, pegamento); y finalmente, los libros como elemento central de importancia. En Chile, los textos escolares son seleccionados y asignados a cada grupo escolar mediante las Políticas de Textos Escolares desarrollado por el Ministerio de Educación de Chile. Esta institución, se encarga de considerar todos los textos disponibles en el mercado, y sugerir el uso de aquellos que cumplen con características tales como innovación, perfeccionismo, dinamismo, potenciadores del aprendizaje, actualización, y demás características positivas asociadas a un proceso de aprendizaje de calidad en niños y adolescentes (Ministerio de Educación de Chile, 2010).

Para Castañeda (2008), un texto escolar es una entrada del estudiante al espacio educativo donde puede construir saberes. Así mismo, explica que un texto escolar puede tener diferentes estructuras didácticas que se adapten a la malla curricular: capítulos, unidades, proyectos, contenidos, objetivos, actividades, evaluaciones, dibujos, gráficas y tablas, preguntas de evaluación, entre muchas otras opciones.

El texto escolar representa innumerables ventajas en el diseño y aplicación de un enfoque curricular. Un texto escolar permite al docente la planificación, preparación y desarrollo del contenido programático y estrategias de cada clase o tema a aprender. Así mismo, para los estudiantes juega un papel fundamental en su proceso de adquisición de conocimientos, ya que se estructura como un elemento articulador entre el docente, la actividad de aprendizaje, el contexto escolar y los espacios ajenos a la escuela donde el estudiante mantiene la posibilidad de seguir en contacto con el contenido a aprender a través del texto. Desde el punto de vista social, el texto escolar permite a los estudiantes de menos recursos y mayor vulnerabilidad social y cultural, enriquecer su contexto y el de su familia, ya que el texto escolar se traduce en un instrumento de equidad y oportunidades (Ministerio de Educación de Chile, 2010).

La construcción de un texto escolar responde a los currículos desarrollados por las instituciones encargadas de velar por la aplicación e implementación de un proceso educativo de calidad, en este caso el Ministerio de Educación. No se trata de un currículo adaptado al texto, sino al contrario; proceso en el que texto escolar se estructura como una herramienta de apoyo coherente con los contenidos y estrategias planificadas dentro del currículo, para su inserción dentro del sistema educativo. En síntesis, el texto escolar procura posicionarse como un instrumento pedagógico que apoye el proceso de educación de calidad para el estado, así como un instrumento de igualdad entre los diferentes estratos socioeconómicos de los niños y adolescentes que por derecho acceden al servicio educativo.

Para garantizar un texto escolar de calidad, lo que se traduciría en herramientas pedagógicas de calidad; El Ministerio de Educación de Chile lleva a cabo un proceso continuo y en paralelo durante todo el año, para garantizar a través de la adquisición, evaluación, acreditación, elegibilidad y seguimiento, escoge los textos asignados para los contenidos programáticos del currículo escolar anual (Ministerio de Educación de Chile, 2010). Considerando la calidad como premisa fundamental para la elección de un texto escolar, el Ministerio de Educación de Chile (2010) destaca los siguientes atributos:

- El texto escolar debe cumplir con el Marco Curricular, considerando los Objetivos Fundamentales, y los Contenidos Mínimos Obligatorios.

- El texto escolar debe presentar al estudiante, contenidos relevantes y pertinentes, debe ser riguroso en la información que muestra y sin errores en los conceptos y actividades sugeridas.
- Un texto escolar debe considerar la diversidad y las diferentes realidades culturales, sociales y regionales del país.

- A nivel metodológico, el texto debe adecuarse a los objetivos del sector y nivel de aprendizaje, facilitando al estudiante la adquisición del conocimiento.
- Su presentación debe mantener activa la motivación, el interés y la atención de los estudiantes, a través del uso de ilustraciones, presentaciones llamativas y actividades propuestas.

Algunos textos escolares pueden acompañar su presentación con guías para el uso del docente, cuadernos de trabajo para los estudiantes, CD’s para su uso de forma audio visual y formatos en diferentes idiomas para la práctica de lenguas extranjeras.

De acuerdo a lo planteado, resulta interesante plantearse cuestionamientos del tipo: ¿cómo se introduce el estudio del álgebra en los textos de estudio de educación primaria en Chile? ¿Cómo se construyen los conceptos asociados al estudio del álgebra? ¿Qué objetos intervienen en la construcción de los conceptos?

Para dar respuesta a estas interrogantes se ha analizado los textos escolares de primero básico a sexto básico en el eje de álgebra del año 2017 (Tabla 5.10). Este material es entregado gratuitamente y sistemáticamente a todos los estudiantes y profesores de los establecimientos municipales y particulares subvencionados.

Código	Título	Autores	Editorial	Edición
[A]	Matemática 1° básico	Camila Cortes Toro	Cal y Canto	2017
[B]	Matemática 2° básico	Fong Ho Kheong, Chelvi Ramakrishnan, Bernice Lau Pui Wah y Michelle Choo	Marshall Cavendish Education	2017
[C]	Matemática 3° básico	Randall Charles, Janet Caldwell, Mary Cavanagh, Dinah Chancellor, Juanita Copley, Warren Crown, Francis Fennell, Alma Ramírez, Kay Sammons, Jane Schielack, William Tate y John Van de Walle.	Pearson Educación de Chile Ltda.	2017
[D]	Matemática 4° básico	Silvia Alfaro Salas, Yuvica Espinoza Lagunas y Ingrid Guajardo González	Galileo	2017
[E]	Matemática 5° básico	Dr Fong Ho Kheong, Gan Kee Soon y Chelvi Ramakrishnan	Santillana - Marshall C.E.	2017
[F]	Matemática 6° básico	Lesly Maldonado Rodríguez y Carlos Castro Maldonado	Santillana	2017

Tabla 5.10 Serie de libros escolares 2017 del Ministerio de Educación de Chile

Para realizar el análisis se ha considerado algunos pasos de la metodología para la revisión de textos escolares propuesta por Cobo (2003):

- Seleccionar aquellos capítulos que trata el álgebra y los objetos vinculados a su estudio.

- Lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado que contienen: Campos de problemas, contextos, definiciones, algoritmos de cálculo, propiedades, etc. Todo ello como guía para establecer el significado que, desde la institución escolar, se da a estos conceptos. (p. 104).

Se da inicio a este análisis de los objetos matemáticos presente en los textos de estudio de los estudiantes exponiendo una panorámica de los contenidos asociados al eje de Patrones y álgebra.

Curso	Unidad	Lecciones	Páginas
1° básico	Patrones y Álgebra (4)	Lección 49: Identifico y describo patrones con figuras Lección 50: Identifico y describo patrones numéricos Lección 51: Resuelvo problemas con patrones Lección 52: Determino la igualdad y desigualdad Lección 53: Agrego o quito para igualar Lección 54: Resuelvo problemas de igualdad	146 – 166
2° básico	Figuras patrones y secuencias (8)	*En segundo básico las actividades no se presentan por lecciones, por lo que se identifican con los siguientes títulos: ¡Aprendamos a reconocer figuras en 2D! ¡Aprendamos a dibujar con figuras en 2D! ¡Aprendamos a identificar figuras 2D	116 – 135

		en nuestro entorno! ¡Aprendamos a conocer secuencias y patrones! ¡Aprendamos sobre formas y figuras 3D! ¡Aprendamos a hacer patrones y secuencias! ¡Aprendamos a crear secuencias! ¡Activa tu mente!	
3° básico	Patrones y Álgebra (3)	Lección 3.1: Patrones Lección 3.2: Patrones geométricos Lección 3.3: Secuencias numéricas Lección 3.4: Ampliar tablas Lección 3.5: Patrones numéricos en una tabla Lección 3.6: Escribir reglas de patrones para situaciones diversas Lección 3.7: Resolución de problemas: Hacer una tabla y buscar un patrón	90 – 112
4° básico	Números y Operaciones (1) Ecuaciones, ángulos y movimientos (6) Decimales, medición, datos y probabilidades (7)	Lección 1–6: Álgebra Relacionar la adición y sustracción Lección 2 -1: Relacionar operaciones Lección 6–1 Patrones: hallar una regla Lección 6–2 Ecuaciones de suma y de resta Lección 6–3 Inecuaciones de suma y de resta Lección 8–6 Hallar el área	18 – 19 Pág. 37 142- 152 220 – 224
5° básico	Números naturales, operaciones y patrones (1)	Lección 4: Patrones y secuencias	86 – 90

	Fracciones, números, decimales y álgebra (3)	Lección 4: Ecuaciones e inecuaciones	253 – 268
6° básico	Patrones y Álgebra (2)	* En sexto básico las actividades no se presentan por lecciones, por lo que se identifican por los siguientes temas: Tema 1: Relaciones numéricas en tablas Tema 2: Expresiones algebraicas Tema 3: Ecuaciones	90 – 134

Tabla 5.11 Unidades y lecciones vinculadas al estudio del álgebra en los textos de estudio de 1° a 6° básico

A partir de la tabla 5.11 se puede apreciar la presencia de los distintos contenidos involucrados en el estudio del álgebra. Esto refleja una primera aproximación referente a los contenidos que pretenden desarrollar los textos de educación primaria. En primero, tercero y sexto año básico se evidencia el trabajo explícito del eje Patrones y Álgebra, como lo expone el Ministerio de Educación, mientras que en los cursos restantes este eje se divide en distintas unidades y lecciones. Por otro lado, se clarifica que el trabajo con esta unidad hace presente en todos los niveles de educación primaria.

Al igual que para las orientaciones curriculares, se ha utilizado el GROS para identificar los objetos y significados vinculados al estudio del álgebra en los textos escolares de educación primaria en Chile, lo que se resume en la tabla 5.12.

Tipos de Objetos	**Significados**
Situaciones – Problemas	
Identificar y describir patrones	Aplicar y seleccionar modelos que involucren orden.
Resolver problemas con patrones	Desarrollar las habilidades de resolver problemas, representar y modelar.
Identificar y resolver situaciones de desigualdad	Desarrollo de las habilidades de representar y modelar.
Determinar reglas o técnicas generales	Comunicar el resultado de descubrimientos de relaciones, patrones y reglas, entre otros, empleando expresiones matemáticas.
Resolver expresiones algebraicas	Generalizar y expresar relaciones entre números naturales, utilizando expresiones con letras, símbolos y operaciones.
Desarrollar ecuaciones e inecuaciones	Abordan el planteamiento, resolución y comunicación de resultados de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
Elementos lingüísticos	
Lenguaje natural Representación pictórica Representación en tablas Lenguaje algebraico	Diversos términos y expresiones verbales con un significado matemático asociado al álgebra.
Conceptos – Definiciones	
Secuencia numérica	Una secuencia de elementos es un conjunto de elementos o formas ordenados por un patrón.
Patrón	Un patrón es una la regla que ordena

Desigualdad	las formas o elementos de una secuencia.
Igualdad	Corresponde a una expresión numérica que utiliza (menor que) o (mayor que).
Operaciones inversas	D1: Que tienen la misma cantidad o número. D2: Equivalencia de dos expresiones o cantidades, las cuales tienen el mismo valor.
Multiplicación	Operaciones que se anulan una a la otra, como la suma y la resta, o la multiplicación y la división.
División	D1: Significa sumar reiteradamente una misma cantidad. D2: Operación que da el número total de elementos que hay cuando juntas grupos iguales.
Ecuación	Operación que nos dice cuántos grupos iguales hay o cuántos objetos hay en cada grupo.
Inecuación	D1: Igualdad que contiene una o más incógnitas. D2: Una ecuación es una igualdad en la cual hay términos conocidos y por lo menos un término desconocido llamado incógnita. D3: Enunciado que afirma que dos expresiones en las que hay al menos un valor desconocido son iguales.
Expresión algebraica	D1: Son desigualdades que utilizan los signos > y <, para demostrar que un lado de la balanza es mayor o que el

	otro es menor. D2: Enunciado que afirma que dos expresiones en las que hay al menos un valor desconocido no son iguales. D1: Términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción. D2: Expresión que contiene al menos una variable o valor desconocido.
Propiedades	
Orden de las operaciones	Conjunto de reglas que indican el orden en el que se deben resolver las operaciones, "+", "–", "•" y ":"
Procedimientos	
Distinguir distintos tipos de patrones con figuras y numéricos Diseñar distintos tipos de patrones con figuras y números Anotar en una tabla patrones de secuencias creadas Escribir reglas generales para diversos contextos Comparar cantidades mediante el uso de una balanza Construir expresiones algebraicas	Describen diversos patrones con distintos atributos. Disciernen si corresponden a patrones numéricos o con figuras. Aplican distintos modelos de orden que le permitan crear patrones numéricos y con figuras. Relacionan entre sí pares de números y completan pares en una secuencia. Encuentran y desarrollan reglas para una tabla que ya tiene algunos pares de números. Comparan dos objetos, explicando y ordenando igualdades y desigualdades

	mediante el uso de una balanza.
Representar ecuaciones e inecuaciones mediante el uso de expresiones algebraicas	Manifiestan un problema mediante una ecuación o inecuación en donde el número desconocido es represando por un símbolo o una letra. Escriben y explican fórmulas para encontrar el área y perímetros de figuras planas. Usan letras para generalizan situaciones y describen la relación entre valores mediante una tabla.

Tabla 5.12 Objetos matemáticos y sus significados encontrados en los textos de estudio analizados

A continuación se describen los distintos objetos matemáticos asociados al álgebra en los textos de estudio.

5.3.1 Situaciones Problemas presentes en los textos de estudio

Al analizar los textos de estudio se han identificado seis situaciones problemas., las que se describen a continuación mediante la presentación de actividades presentes en los textos de estudio de 1° a 6° básico.

Identificar y describir patrones

En casi la totalidad de los cursos de enseñanza básica los estudiantes deben identificar y describir patrones, solo en cuarto año básico los niños no realizan esta actividad. Se proponen actividades que involucran, en primera instancia, reconocer patrones rítmicos y a partir de eso van trabajando gradualmente con patrones con figuras y numéricos. Un ejemplo de este tipo de actividades se muestra en la Figura 5.2:

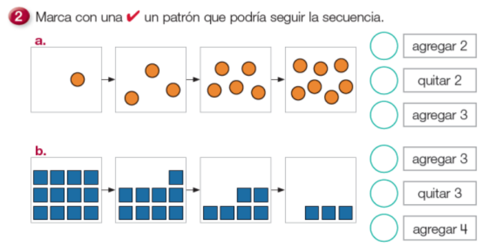
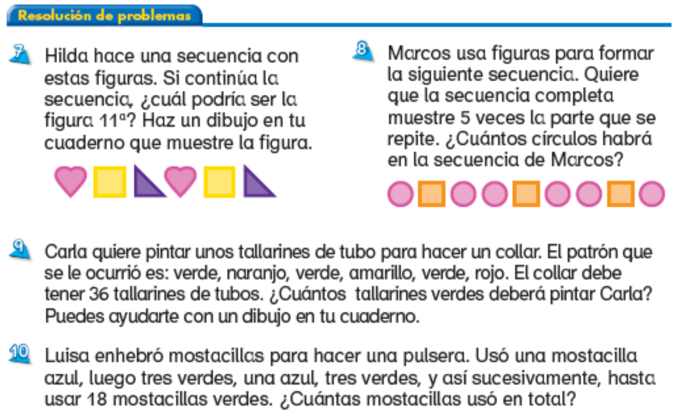


Figura 5.2 Identificar patrones de figuras (Texto [A], p. 149)

A partir de este tipo de actividades, los estudiantes se encaminan paulatinamente en la identificación de patrones, ya sean rítmicos, con figuras o numéricos. El propósito de estas actividades es desarrollar las competencias matemáticas de representar, modelar y resolver problemas asociados a las secuencias numéricas. Cuando los estudiantes estén trabajando a un nivel numérico es fundamental que comiencen estableciendo si la secuencia va en aumento o en descenso y a partir de esto, establecer el patrón numérico y por ende, lecciones como esta, se pueden vincular a la vida cotidiana mediante la observación de la numeración de las casas o locales ubicados en el colegio o en el lugar donde viven.

Resolver problemas con patrones

Al igual que la anterior, este tipo de situación-problemas se hace presente en los cursos de primero, segundo, tercero, quinto y sexto básico. Resolver problemas con patrones involucra que los estudiantes desarrollen diversas habilidades, entre ellas describir, explicar, representar y crear patrones y secuencias con figuras y numéricas. Un ejemplo de este tipo de actividades corresponde a la que se refleja en la Figura 5.3:


Resolución de problemas

7. Hilda hace una secuencia con estas figuras. Si continúa la secuencia, ¿cuál podría ser la figura 11º? Haz un dibujo en tu cuaderno que muestre la figura.

8. Marcos usa figuras para formar la siguiente secuencia. Quiere que la secuencia completa muestre 5 veces la parte que se repite. ¿Cuántos círculos habrá en la secuencia de Marcos?

9. Carla quiere pintar unos tallarines de tubo para hacer un collar. El patrón que se le ocurrió es: verde, naranjo, verde, amarillo, verde, rojo. El collar debe tener 36 tallarines de tubos. ¿Cuántos tallarines verdes deberá pintar Carla? Puedes ayudarte con un dibujo en tu cuaderno.

10. Luisa enhebró mostacillas para hacer una pulsera. Usó una mostacilla azul, luego tres verdes, una azul, tres verdes, y así sucesivamente, hasta usar 18 mostacillas verdes. ¿Cuántas mostacillas usó en total?

Figura 5.3 Resolución de problemas con patrones (Texto [C], p. 93)

Como se observa, mediante este tipo de actividades los estudiantes involucran diversas actividades. Al analizar la actividad propuesta en el ámbito de resolución de problemas con patrones y secuencia, se refleja que los estudiantes deben describir una regla, identificarlas ya sean ascendentes o descendentes. Explican los patrones involucrados en los ejercicios planteados y proponen uno como medio de solución al conflicto.

Identificar y resolver situaciones de desigualdad

Por medio de este tipo de situaciones los estudiantes desarrollan habilidades como representar y modelar. Desarrollar situaciones problemas como esta desde primer año básico genera un gran beneficio en los estudiantes, ya que como menciona Godino (2004) una de las mayores dificultades que manifiestan los estudiantes en el posterior desarrollo de ecuaciones es la idea o concepción que ellos tienen respecto a la igualdad. El autor menciona que se ha reflejado que los jóvenes asocian el signo igual a un símbolo que evidencia un cálculo, por lo que es necesario que amplíen esta concepción al sentido de equivalencia. Para esto, se le presentan actividades como las que exponen a continuación:

Figura 5.4 Desigualdad (Texto [A], p. 156)

Además, mediante una balanza los estudiantes igualan cantidades sumando o restanto elementos en una balanza (Figura 5.5). Este tipo de actividades permite a los estudiantes desarrollar habilidades matemáticas como representar y resolver problemas.

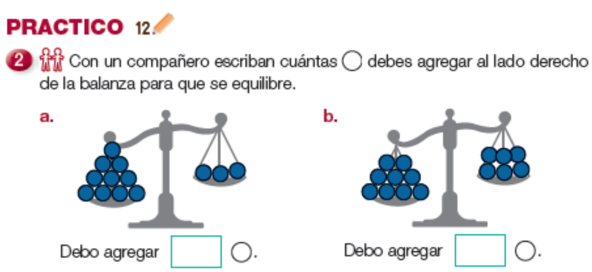
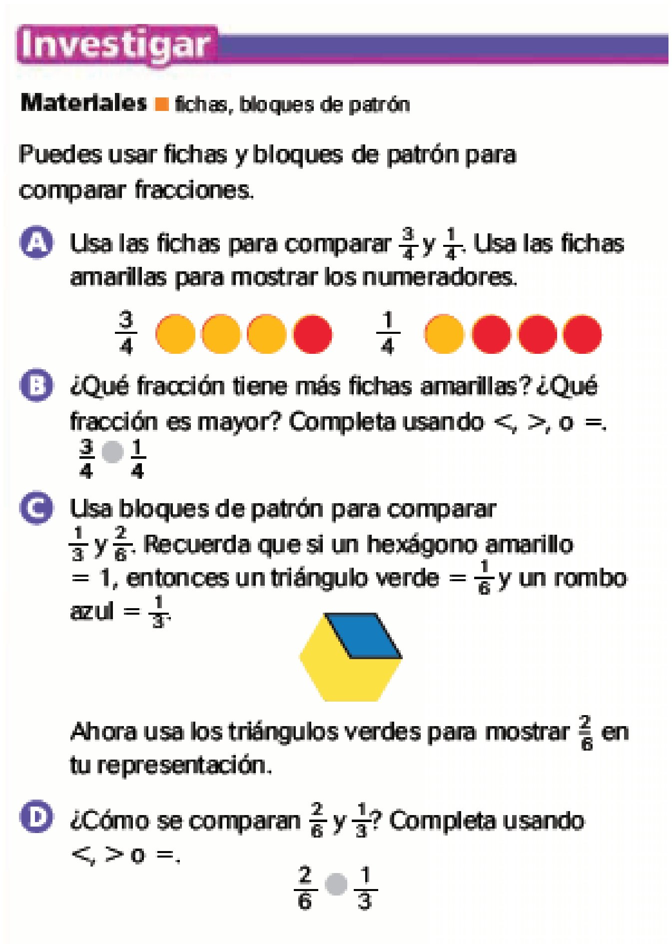


Figura 5.5 Comparación de cantidades mediante una balanza (Texto [A], p. 159)

Por otro lado, cuando los estudiantes hacen uso de una balanza para establecer relaciones de desigualdad pueden presentar dificultades para interpretar donde hay más o menos elementos, debido a que el plato que tiene mayor cantidad de elementos desciende mientras que el que tiene menor cantidad de elementos, asciende.

En cursos más grandes, los estudiantes comparan expresiones numéricas mediante diversas estrategias. En la Figura 5.6 se refleja una estrategia para comparar fracciones.



Investigar

Materiales ■ fichas, bloques de patrón

Puedes usar fichas y bloques de patrón para comparar fracciones.

A Usa las fichas para comparar $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{4}$. Usa las fichas amarillas para mostrar los numeradores.

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{4}$

B ¿Qué fracción tiene más fichas amarillas? ¿Qué fracción es mayor? Completa usando $<$, $>$, o $=$.
$\frac{3}{4}$ ● $\frac{1}{4}$

C Usa bloques de patrón para comparar $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{6}$. Recuerda que si un hexágono amarillo $= 1$, entonces un triángulo verde $= \frac{1}{6}$ y un rombo azul $= \frac{1}{3}$.

Ahora usa los triángulos verdes para mostrar $\frac{2}{6}$ en tu representación.

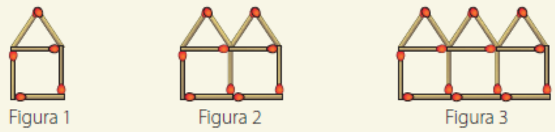
D ¿Cómo se comparan $\frac{2}{6}$ y $\frac{1}{3}$? Completa usando $<$, $>$ o $=$.
$\frac{2}{6}$ ● $\frac{1}{3}$

Figura 5.6 Comparación de fracciones (Texto [D], p. 122)

Determinar reglas o técnicas generales

Esta situación problema está orientada a descubrir alguna regla que explique una sucesión dada y que permita a los estudiantes predecir resultados. Este tipo de situaciones se trabajan en segundo, tercero, quinto y sexto año básico. Por ejemplo en el texto de estudio de quinto básico se puede encontrar situaciones como:

1 Analiza la siguiente secuencia de figuras y luego responde.



a. Identifica un patrón de formación entre las figuras. (1 punto)

b. Completa la tabla. (1 punto cada una)

Figura	4	5	6	7	8	9	10	11
Cantidad de fósforos								

Figura 5.7 Determinación de reglas generales (Texto [E], p. 90)

De esta forma, los estudiantes extienden un patrón de figuras (palitos de fósforos) y también numéricos o asociados a un contexto, como la situación que se presenta en la Figura 5.8:

3 Un recorrido de transporte público define la frecuencia de sus buses cada 15 minutos.

a. ¿Cuántos minutos transcurren entre el primer y el quinto bus? (2 puntos)

b. Si la frecuencia cambia a 20 minutos, ¿cuántos minutos transcurren entre el primer y el décimo bus?

Figura 5.8 Determinar regla general (Texto [E], p. 90)

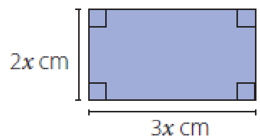
De esta forma, los estudiantes dan una regla para un patrón o sucesión y así completa los elementos que siguen en ella, haciendo uso de la regla encontrada.

Resolver expresiones algebraicas

Este tipo de situaciones problemas se encuentran presenten en los dos últimos cursos analizados en este trabajo, quinto básico y sexto básico. De esta forma, se pretende que los jóvenes estudiantes expliquen y resuelvan mediante el lenguaje algebraico, situaciones asociadas a la búsqueda de área y perímetro de figuras plana, como se muestra en la Figura 5.9:

¿Cómo lo hago?

1 Dibuja un rectángulo que represente la información.



2 Determina la expresión que corresponde al perímetro de estos rectángulos y remplaza los valores.

Como el perímetro (P) de un rectángulo se calcula sumando la medida de todos sus lados, obtienes lo siguiente:

$$P = (2x + 2x + 3x + 3x) \text{ cm}$$

Luego, remplaza los valores dados de x.

Para $x = 1 \rightarrow$ $P = (2x + 2x + 3x + 3x)$ cm
$= (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1)$ cm
$= 10$ cm

Para $x = 6 \rightarrow$ $P = (2x + 2x + 3x + 3x)$ cm
$= (2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6)$ cm
$= 60$ cm

Figura 5.9 Expresiones algebraicas aplicadas al cálculo de perímetro (Texto [F], p. 113)

Mediante este trabajo, los jóvenes utilizan letras y símbolos para generalizar propiedades y aplicaciones de la matemática en diversos contextos y de esta manera, los estudiantes podrán generalizan la regla de un patrón mediante el uso de una expresión en la que intervengan letras o símbolos.

4. Luego de conversar con sus padres, decide no donar aún el monto reunido y seguir juntando dinero por más tiempo con el mismo plan de ahorros.
   a. ¿Cuánto dinero tendrá reunido en el mes 20? (1 punto)
   b. Escribe una regla en lenguaje matemático que permita calcular la cantidad de dinero reunida por en cualquier mes y verifica tu respuesta anterior. (2 puntos)

Figura 5.10 Aplicación de expresiones algebraicas en patrones (Texto [F], p. 101)

El objetivo de este tema es generalizar relaciones entre números naturales utilizando expresiones con letras, símbolos y operaciones matemáticas, además de trabajar en la conversión de expresiones escritas lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa y de esta forma desarrollar el pensamiento algebraico. Por otro lado, las principales habilidades matemáticas a desarrollar mediante estas situaciones problemas, corresponden a las de representar y modelar, ya que los estudiantes trabajarán en la conversión de expresiones en distintos lenguajes, análisis de relaciones numéricas y representaciones algebraicas.

Desarrollar ecuaciones e inecuaciones

Esta última situación problema analizada en los textos de estudio, se hace presente en los tres últimos cursos (4°, 5°, 6°). Niveles anteriores, los estudiantes trabajan este tipo de situaciones de forma implícita mediante el uso de una balanza, situación que se usa como referencia en sexto año básico (Figura 5.11).

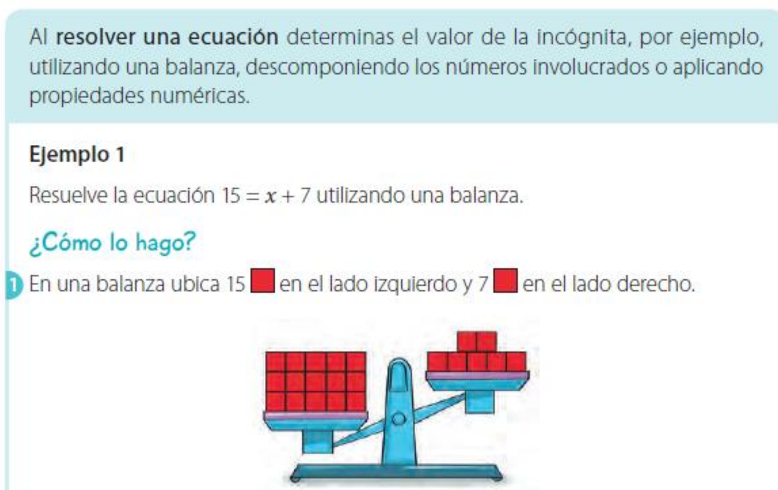
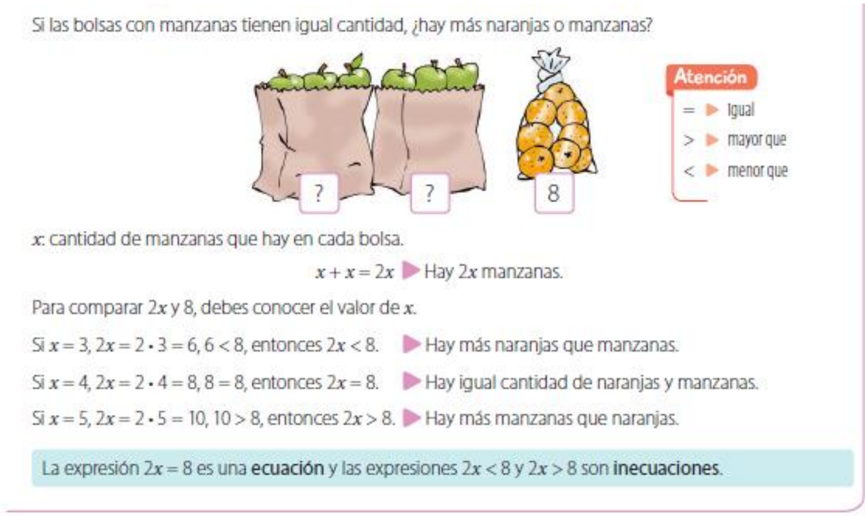


Figura 5.11 Relación entre una balanza y ecuaciones (Texto [F], p. 125)

De esta forma, los estudiantes determinan soluciones que involucran una ecuación, ya sea agregando o quintando elementos hasta equilibrar la balanza y así obtener la equivalencia. En lo que resta de la unidad, los estudiantes expresan números en una forma que involucre adiciones, sustracciones con números y/o incógnita y compararlas (Figura 5.12).



Si las bolsas con manzanas tienen igual cantidad, ¿hay más naranjas o manzanas?

x: cantidad de manzanas que hay en cada bolsa.

$x + x = 2x$ ▶ Hay $2x$ manzanas.

Para comparar $2x$ y 8, debes conocer el valor de x.

Si $x = 3$, $2x = 2 \cdot 3 = 6$, $6 < 8$, entonces $2x < 8$. ▶ Hay más naranjas que manzanas.

Si $x = 4$, $2x = 2 \cdot 4 = 8$, $8 = 8$, entonces $2x = 8$. ▶ Hay igual cantidad de naranjas y manzanas.

Si $x = 5$, $2x = 2 \cdot 5 = 10$, $10 > 8$, entonces $2x > 8$. ▶ Hay más manzanas que naranjas.

La expresión $2x = 8$ es una **ecuación** y las expresiones $2x < 8$ y $2x > 8$ son **inecuaciones**.

Figura 5.12 Construcción y comparación de una ecuación (Texto [E], p. 261)

5.3.2 Elementos lingüísticos presentes en los textos de estudio

Otro punto a considerar dentro del análisis de los textos de estudio de 1° a 6° básico en el eje de álgebra, son los elementos lingüísticos presentes en estos libros. Godino y Font (2006) establecen que este elemento corresponde a la parte ostensiva de la elaboración de argumentos al instante de resolver una situación problema y que permiten representar, por medio de representaciones, aquellos objetos considerados más abstractos y así, el estudiante genera una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado.

De acuerdo a lo que establece el Ministerio de Educación, el aprendizaje de la matemática está estructurado de acuerdo al modelo de aprendizaje COPISI, el que se destaca por considerar tres niveles de abstracción, los que corresponden:

- Nivel concreto: asociado a la manipulación de material como bloques, fichas u otros recursos.
- Nivel pictórico: consiste en comunicar lo trabajado de forma concreta mediante el papel, lo que se logra a través de representaciones o esquemas simples (cruces, marcas, círculos, cuadraditos, marco 10, tabla 100 y recta numérica), permitiendo a los estudiantes desarrollar imágenes mentales respecto del contenido a trabajar.
- Nivel simbólico: este último nivel requiere que los estudiantes trabajen principalmente con símbolos matemáticos.

De acuerdo al análisis de los textos de estudio se han identificado cuatro elementos lingüísticos, los que corresponden a: lenguaje natural; representación pictórica; representación en tablas y lenguaje algebraico y que se ejemplifican a continuación.

Lenguaje natural y lenguaje algebraico asociado al estudio del álgebra

Al referirse al lenguaje natural o común, se está planteando la idea de un código que se utiliza cotidianamente, con el que nos relacionamos mutuamente tanto al hablar como al escribirlo. Este lenguaje, se utiliza de igual manera en matemática para verbalizar una gran diversidad de objetos asociados a un lenguaje común del álgebra. Por otro lado, al referirse al lenguaje algebraico, se está planteando símbolos numéricos y literales que cumplen el rol de representar una determinada situación en un modelo matemático, ya que cuando se traduce del lenguaje natural al lenguaje algebraico, se está creando un modelo matemático. A continuación, se presentan las expresiones encontradas en los textos de estudio, realizando una comparación entre el lenguaje natural y el algebraico.

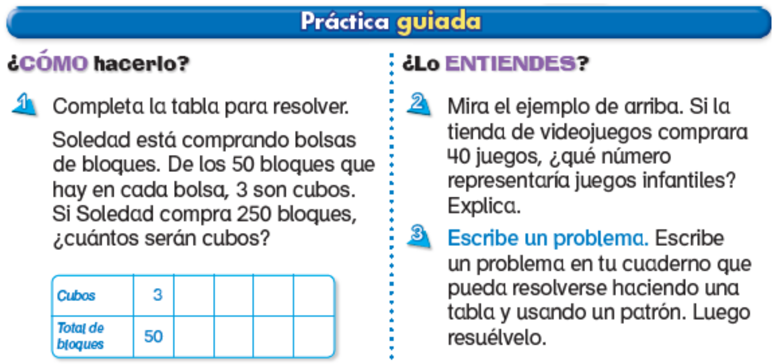
Expresión en lenguaje natural	**Expresión en lenguaje algebraico**
Suma (sumando con, agregar, la suma de, adición)	+
Resta (disminuido en, quitar, la resta de, sustracción)	-
Multiplicación (multiplicado por, por, producto)	*, x, ·
División (divido por, el cociente)	÷, **:**,
Misma cantidad, equilibrio, igualdad, equivalencia	=
Distinta cantidad, desequilibrio, desigualdad	≠
Mayor que , es más que	>
Menor que, es menos que	<
Número que está después de, sucesor	{n + 1; n ε ℕ}
Número que está antes de, antecesor	{n - 1; n ε ℕ}
Ecuación de primer grado	ax + b = c

Tabla 5.13 Lenguaje de uso común y algebraico asociado al estudio del álgebra en los textos escolares analizados

La Tabla 5.13 da cuenta de una gran diversidad de objetos, asociados al estudio del álgebra por medio del lenguaje común y algebraico, los que a pesar de estar en distintos códigos, son expresiones que tienen un significado igual o similar.

Representación en tablas

Otro tipo de representación encontrada en los textos de educación básica analizados es el uso de tablas para representar secuencias. Estas tablas se comienzan a trabajar desde tercer año básico, tal como se refleja en la Figura 5.13:



Práctica guiada

¿CÓMO hacerlo?

1. Completa la tabla para resolver.

Soledad está comprando bolsas de bloques. De los 50 bloques que hay en cada bolsa, 3 son cubos. Si Soledad compra 250 bloques, ¿cuántos serán cubos?

Cubos	3				
Total de bloques	50				

¿Lo ENTIENDES?

2. Mira el ejemplo de arriba. Si la tienda de videojuegos comprara 40 juegos, ¿qué número representaría juegos infantiles? Explica.

3. Escribe un problema. Escribe un problema en tu cuaderno que pueda resolverse haciendo una tabla y usando un patrón. Luego resuélvelo.

Figura 5.13 Representación en tablas de una secuencia (Texto [C], p. 106)

Buscar un patrón puede ser descubierto por diversas estrategias, entre ellas hacer este tipo de tablas, las que pueden ayudar a los estudiantes a organizar los datos del problema y de esta manera se presenta el patrón más aparente.

Representación pictórica

Por último, otra representación evidenciada en los textos escolares en el estudio del álgebra corresponde a la representación pictórica, asociada al trabajo en papel, en donde los estudiantes representan el objeto en estudio a través de esquemas simples y de esta manera desarrollar imágenes mentales respecto el contenido a trabajar. Por ejemplo, en primer año básico para comenzar a trabajar las desigualdades, se presenta de la siguiente forma:

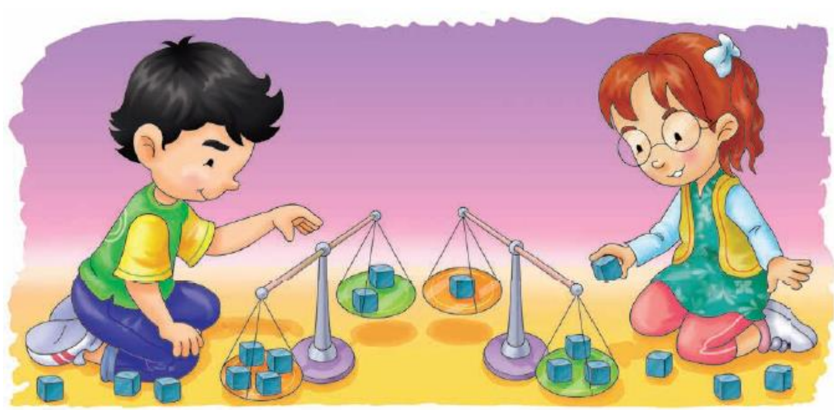


Figura 5.14 Contenido de desigualdades mediante la representación pictórica (Texto [A], p. 158)

Y así, mediante este tipo de representaciones los estudiantes comienzan a iniciarse en el trabajo del álgebra, para ir transitando gradualmente en los otros registros.

5.3.3 Conceptos y definiciones presentes en los textos de estudio

Se han analizado los diversos tipos de conceptos matemáticos para los que se puede desarrollar una definición, tanto implícitamente o explícitamente. Los conceptos y definiciones encontradas se presentan en la tabla que se expone a continuación:

Concepto matemático	**Definición presentada en el texto de estudio**
Secuencia numérica	Una secuencia de elementos es un conjunto de elementos o formas ordenados por un patrón.
Patrón	Un patrón es una la regla que ordena las formas o elementos de una secuencia.
Desigualdad	Corresponde a una expresión numérica que utiliza (menor que) o (mayor que).
Igualdad	D1: Que tienen la misma cantidad o número. D2: Equivalencia de dos expresiones o cantidades, las cuales tienen el mismo valor
Operaciones inversas	Operaciones que se anulan una a la otra, como la suma y la resta, o la multiplicación y la división.
Multiplicación	D1: Significa sumar reiteradamente una misma cantidad. D2: Operación que da el número total de elementos que hay cuando juntas grupos iguales.

División	Operación que nos dice cuántos grupos iguales hay o cuántos objetos hay en cada grupo
Ecuación	D1: Igualdad que contiene una o más incógnitas. D2: Una ecuación es una igualdad en la cual hay términos conocidos y por lo menos un término desconocido llamado incógnita. D3: Enunciado que afirma que dos expresiones en las que hay al menos un valor desconocido son iguales.
Inecuación	D1: Son desigualdades que utilizan los signos > y <, para demostrar que un lado de la balanza es mayor o que el otro es menor. D2: Enunciado que afirma que dos expresiones en las que hay al menos un valor desconocido no son iguales.
Expresión algebraica	D1: Términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción. D2: Expresión que contiene al menos una variable o valor desconocido.

Tabla 5.14 Conceptos algebraicos de los textos de estudio analizados

Cabe señalar que en los textos de estudio entregados por el Ministerio de Educación chileno a los alumnos de 1° a 6° básico, al final de cada uno se presenta un Glosario. Este, contiene las definiciones de los distintos conceptos involucrados en el estudio del álgebra. Por otro lado, estos conceptos van aumentando su complejidad en la medida que los cursos transcurren. Por ejemplo, para el término igualdad se produce la siguiente transición:

Primero básico:

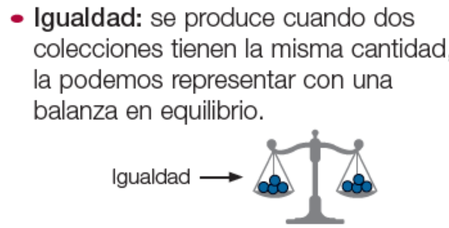


Figura 5.15 Definición de "Igualdad" (Texto [A], p. 262)

Segundo básico:

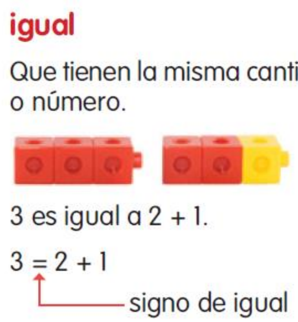


Figura 5.16 Definición de "Igualdad" (Texto [B], p. 216)

Tercero básico:
En este curso no se presenta una definición para el concepto de igualdad. Implícitamente se desarrolla mediante el trabajo de ecuaciones, en donde a los estudiantes se les expone la siguiente definición:

Ecuación: igualdad que contiene una o más incógnitas.

Figura 5.17 Definición de "Ecuación" (Texto [C], p. 269)

Cuarto básico:
Se presenta la definición de igual a (=) mediante la siguiente definición:

igual a (=) Que tienen el mismo valor.
Ejemplo: 4 + 4 es igual a 3 + 5

Figura 5.18 Definición de "igual a" (Texto [D], p. 239)

En cuarto básico se trabaja la igualdad como equivalencia de forma implícita, desarrollándola mediante el trabajo de ecuaciones, tal como se presentan en las definiciones de ecuaciones:

Una **ecuación** es una igualdad en la cual hay términos conocidos y por lo menos un término desconocido llamado incógnita.

Figura 5.19 Definición de "ecuación" (Texto [D], p. 146)

ecuación igualdad matemática entre dos expresiones en las que aparecen valores conocidos o datos y al menos un valor desconocido o incógnita.
Ejemplo: $12 + n = 21$

Figura 5.20 Definición de "ecuación" (Texto [D], p. 238)

Quinto básico:

Igualdad: Enunciado que afirma que dos expresiones numéricas son iguales.

Figura 5.21 Definición de "Igualdad" (Texto [E], p. 359)

Sexto básico:
En este curso se presenta de forma explica la igualdad con un sentido de equivalencia de forma explícita:

Igualdad: equivalencia de dos expresiones o cantidades, las cuales tienen el mismo valor.

Figura 5.22 Definición de "Igualdad" (Texto [F], p. 359)

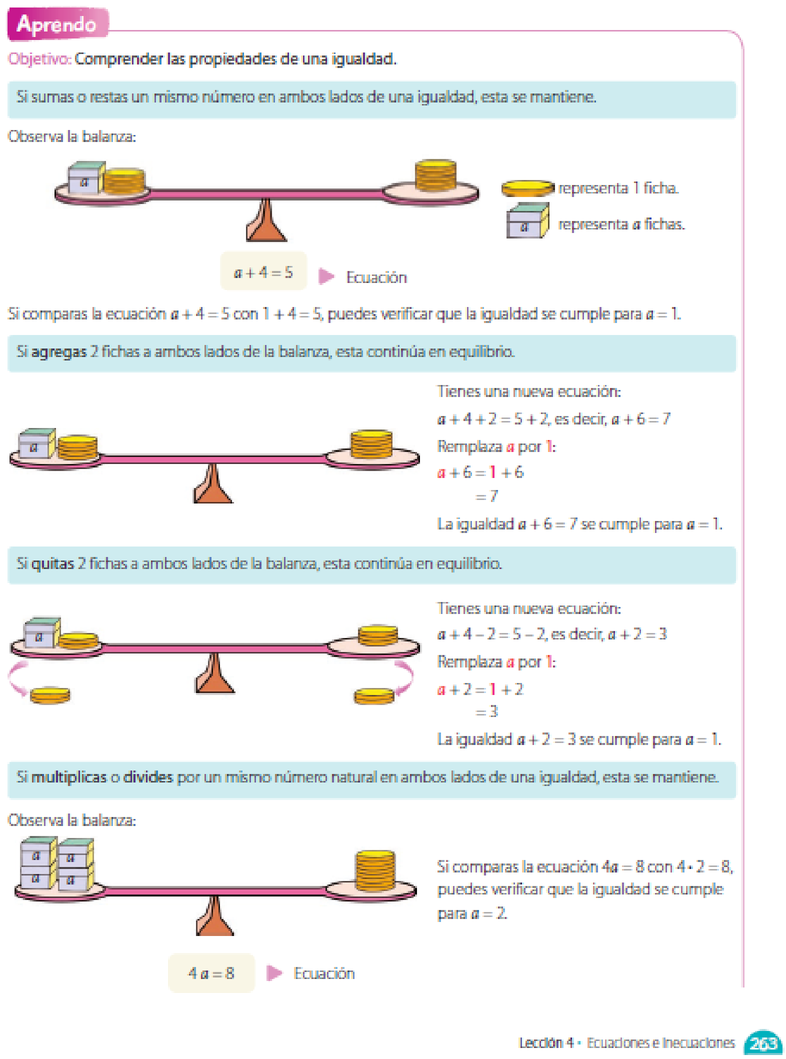
Al analizar la coherencia de los conceptos y definiciones presentes en los textos escolares de educación básica de 1° a 6° básico en el eje de Patrones y álgebra con la bases curriculares, se refleja una coherencia entre ambas, presentando y trabajando los conceptos que presentan las orientaciones curriculares.

5.3.4 Propiedades presentes en los textos de estudio

Al analizar los textos de estudio de los alumnos de 1° a 6° básico, se ha evidenciado que en el eje de patrones y álgebra no se enfatiza el trabajo de las propiedades. Se han identificado en los textos de estudio, y su respectivo trabajo, las siguientes propiedades:

Propiedades de la igualdad

En quinto año básico los estudiantes trabajan las propiedades de igualdad, las que se le presentan de la siguiente forma:



Aprendo

Objetivo: **Comprender las propiedades de una igualdad.**

Si sumas o restas un mismo número en ambos lados de una igualdad, esta se mantiene.

Observa la balanza:

representa 1 ficha.

representa a fichas.

$a + 4 = 5$ ▶ Ecuación

Si comparas la ecuación $a + 4 = 5$ con $1 + 4 = 5$, puedes verificar que la igualdad se cumple para $a = 1$.

Si **agregas** 2 fichas a ambos lados de la balanza, esta continúa en equilibrio.

Tienes una nueva ecuación:

$a + 4 + 2 = 5 + 2$, es decir, $a + 6 = 7$

Remplaza a por 1:

$a + 6 = 1 + 6$

$= 7$

La igualdad $a + 6 = 7$ se cumple para $a = 1$.

Si **quitas** 2 fichas a ambos lados de la balanza, esta continúa en equilibrio.

Tienes una nueva ecuación:

$a + 4 - 2 = 5 - 2$, es decir, $a + 2 = 3$

Remplaza a por 1:

$a + 2 = 1 + 2$

$= 3$

La igualdad $a + 2 = 3$ se cumple para $a = 1$.

Si **multiplicas** o **divides** por un mismo número natural en ambos lados de una igualdad, esta se mantiene.

Observa la balanza:

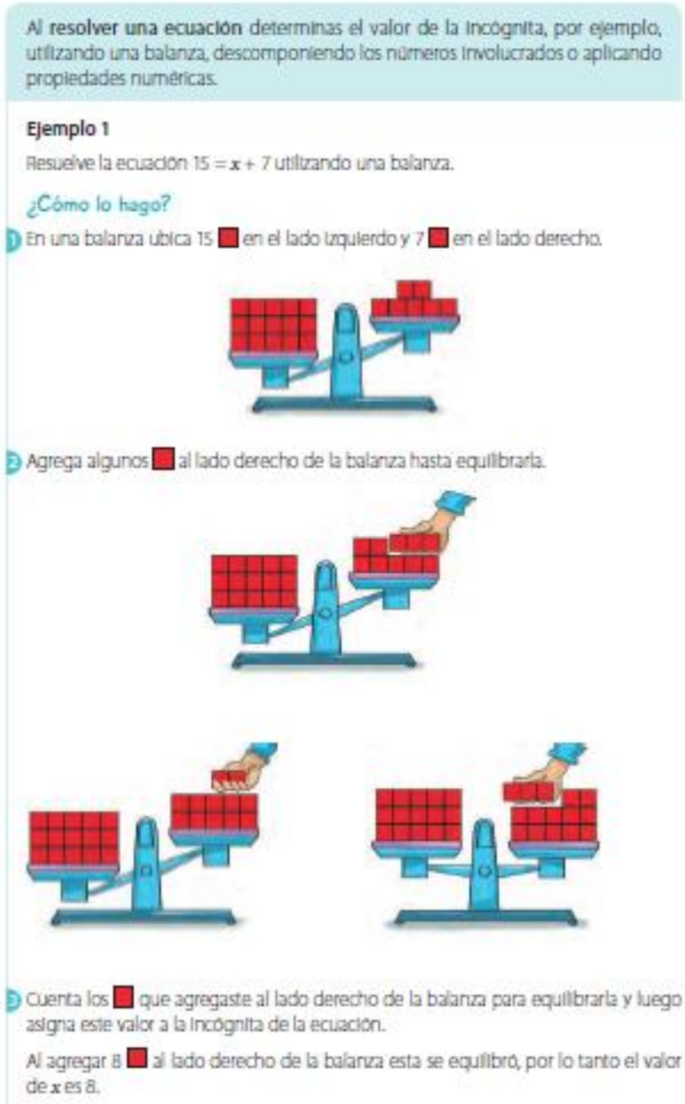
Si comparas la ecuación $4a = 8$ con $4 \cdot 2 = 8$, puedes verificar que la igualdad se cumple para $a = 2$.

$4a = 8$ ▶ Ecuación

Lección 4 • Ecuaciones e inecuaciones 263

Figura 5.23 Propiedades de la igualdad (Texto [E], p. 263)

En sexto básico, de igual forma se trabajan las propiedades al resolver una ecuación. Se presenta mediante el uso de una balanza, que busca equilibrarla para lograr la equivalencia. Si viene esta es considerada una estrategia para desarrollar dichos conocimientos, es necesario que en los textos de estudios, en cuando a las propiedades, se les presenten más variedades o caminos para trabajar estos elementos.



Al **resolver una ecuación** determinas el valor de la incógnita, por ejemplo, utilizando una balanza, descomponiendo los números involucrados o aplicando propiedades numéricas.

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $15 = x + 7$ utilizando una balanza.

¿Cómo lo hago?

1 En una balanza ubica 15 ■ en el lado izquierdo y 7 ■ en el lado derecho.

2 Agrega algunos ■ al lado derecho de la balanza hasta equilibrarla.

3 Cuenta los ■ que agregaste al lado derecho de la balanza para equilibrarla y luego asigna este valor a la incógnita de la ecuación.

Al agregar 8 ■ al lado derecho de la balanza esta se equilibró, por lo tanto el valor de x es 8.

Figura 5.24 Propiedades de la ecuación (Texto [F], p. 125)

5.3.5 Procedimientos presentes en los textos de estudio

En los textos de estudio de 1° básico a 6° básico se encontraron los siguientes procedimientos:

Distinguir distintos tipos de patrones con figuras y numéricos

Uno de los primeros procedimientos encontrados en los textos de estudios de 1° básico a 6° básico en el estudio del álgebra corresponde a *distinguir distintos* *tipos de patrones de figuras y numéricos.* Este procedimiento se comienza a trabajar a partir de primer año básico, tal como se refleja en la Figura 5.25:

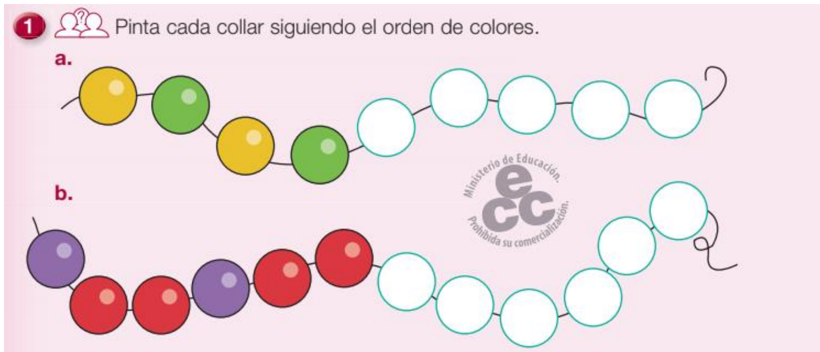


Figura 5.25 Distinguir un patrón de figura (Texto [A], p. 144)

De esta forma los estudiantes describen diversos patrones asociados a diferentes atributos, además disciernen si estos corresponden a patrones numéricos o con figuras.

Diseñar distintos tipos de patrones con figuras y números

Al igual que el procedimiento anterior, este se comienza a trabajar paulatinamente a partir de primer año básico, creando patrones de figuras y numéricos sencillos hasta niveles más excelsos. Dentro de este contexto, se evidencian actividades como la que se presenta a continuación:

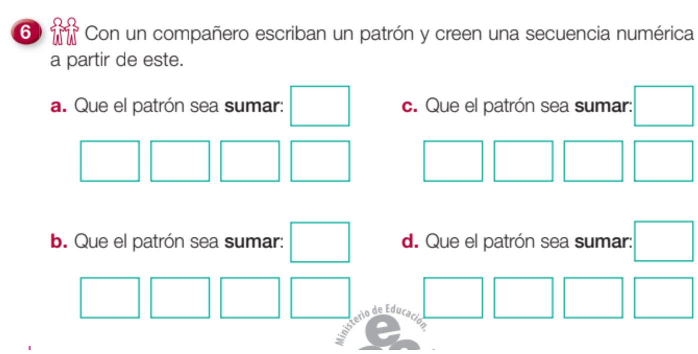


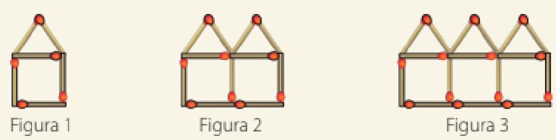
Figura 5.26 Diseñar distintos tipos de patrones con números (Texto [A], p. 150)

De esta forma, los estudiantes a partir de primer año básico aplican distintos modelos de orden, que van aumentando paulatinamente su complejidad con el traspaso de los años escolares, que le permitan crear patrones numéricos y con figuras. Además, mediante esta actividad los estudiantes aplican otros conceptos asociados al estudio de la matemática, como es *sumar*.

Anotar en una tabla patrones de secuencias creadas

Mediante este tipo de procedimientos, que se comienzan a trabajar a partir de tercer año básico, se pretende que los estudiantes identifiquen una regularidad asociada a un contexto cotidiano o bien a patrones creados, desarrollando la habilidad de modelar, tal como se refleja en la siguiente actividad:

1 Analiza la siguiente secuencia de figuras y luego responde.



a. Identifica un patrón de formación entre las figuras. (1 punto)

b. Completa la tabla. (1 punto cada una)

Figura	4	5	6	7	8	9	10	11
Cantidad de fósforos								

Figura 5.27 Anotar en una tabla patrones (Texto [E], p. 90)

Así, los estudiantes relacionan entre sí pares de números y completan pares en una secuencia.

Escribir reglas generales para diversos contextos

Para desarrollar este tipo de procedimientos, los estudiantes encuentran y desarrollan reglas para diversos contextos y tablas que ya tienen algunos pares de números. La Figura 5.27 refleja dicha situación, en la que se identifica una regla o patrón que permite explicar la sucesión entregada y así, realizar predicciones sobre el evento. De esta forma, los estudiantes desarrollan las cuatro habilidades propuestas por el Ministerio de Educación de Chile, como lo es modelar, argumentar, comunicar y representar.

Comparar cantidades mediante el uso de una balanza

La balanza ha sido un recurso utilizado constantemente para explicar diversas situaciones matemáticas, entre ellas para comparar cantidades.

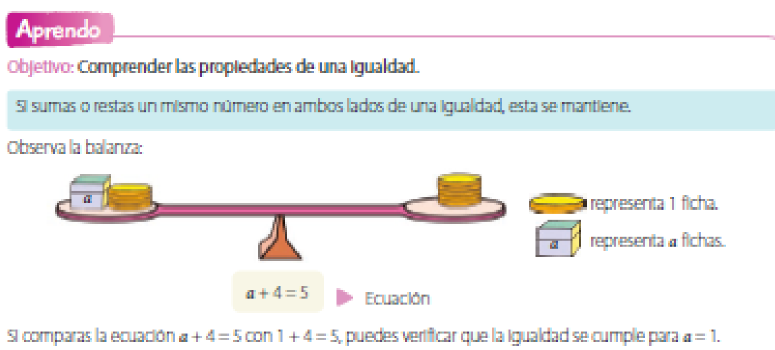
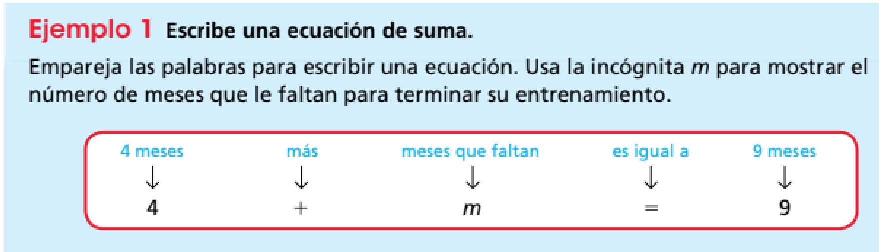


Figura 5.28 Propiedades de la igualdad (Texto [E], p. 263)

Como se refleja en la Figura 5.28, se utiliza la balanza para representar una de las propiedades que cumple una igualdad *si sumas o restas un mismo número en ambos lados de una igualdad, esta se mantiene.* De esta manera, los estudiantes comparan dos objetos, explicando y ordenando igualdades y desigualdades mediante el uso de este instrumento, facilitando la comprensión de los estudiantes en torno al estudio del álgebra.

Construir expresiones algebraicas

Los estudiantes comienzan construir expresiones algebraicas a partir de cuarto año básico.



Ejemplo 1 **Escribe una ecuación de suma.**

Empareja las palabras para escribir una ecuación. Usa la incógnita *m* para mostrar el número de meses que le faltan para terminar su entrenamiento.

4 meses	más	meses que faltan	es igual a	9 meses
↓	↓	↓	↓	↓
4	+	m	=	9

Figura 5.29 Escribe una ecuación de suma (Texto [D], p. 146)

Mediante este tipo de ejercicios y situaciones presentadas en los textos de estudio a partir de cuarto año básico, los jóvenes manifiestan un problema mediante una ecuación o inecuación, en donde el número desconocido es representado por un símbolo o una letra.

CAPÍTULO 6: DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y VALIDACIÓN DEL CUESTIONARIO

6.1 Presentación

La docencia es una labor compleja, en ella influyen infinidad de factores para poder determinar su éxito, entre ellos el conocimiento del docente sobre la materia a impartir, su habilidad para transmitir el conocimiento de forma pedagógica, la estrategia de enseñanza, el nivel educativo y cultural de los estudiantes, la edad y desarrollo cognitivo y físico de los estudiantes, el espacio disponible para impartir los conocimientos, los materiales de apoyo disponibles, la realidad socioeconómica de los participantes, complejidad del contenido, adecuación de la actividad, son elementos a considerar.

Los docentes asumen a través de su formación y vocación la responsabilidad de educar, enseñar, formar y modelar a un grupo de estudiantes las competencias, habilidades y conocimientos necesarios para enfrentarse a los retos y expectativas del mundo actual, siendo entonces los docentes y los alumnos los principales elementos que intervienen en el éxito del proceso de enseñanza – aprendizaje.

Las evaluaciones que afectan a los docentes, han sido temas ampliamente debatidos. Es relevante considerar elementos que midan estrategias pedagógicas, comunicación, preparación del material, conocimiento del área y manejo del grupo, entre otras.

Según Martínez y Guevara (2015), la evaluación del quehacer docente tiene un auge desde la década de los noventa, al reconocer la necesidad de la capacitación, profesionalización y evaluación permanente que debe mantener un docente, siendo la evaluación un elemento de acción y reflexión.

Existen en estos momentos estándares internacionales e instrumentos de evaluación que permiten distinguir a los docentes mejores capacitados en su labor profesional, esto sigue siendo un tema de candente discusión. Identificar las habilidades, fortalezas y poder categorizar a nivel macro, los grupos de docentes que posean una mayor preparación y niveles de excelencia dentro de las instituciones es algo improbable de obtener.

Dentro de la evaluación se consideran dos grandes áreas en la tarea docente, el hacer y el saber. Dentro del hacer, se evalúan elementos como la planeación didáctica como la capacidad de preparar las clases y cursos según las características del contenido, los alumnos y los recursos disponibles; habilidades personales como comunicación, respeto, escucha activa, análisis, cooperación, manejo del grupo, organización, asertividad, disciplina, entre otras; las estrategias organizativas y didácticas que utiliza el docente para brindar diferentes opciones y caminos de entendimiento, significado y aprendizaje a sus alumnos según sus capacidades individuales. Por el saber, se evalúa en el docente el conocimiento formal de la asignatura que imparte, la teoría sobre los métodos de enseñanza, los procesos de desarrollo cognitivo, físico, social y emocional de sus estudiantes, la actualización profesional en la labor docente y en el conocimiento formal de la asignatura. En el saber, se consideran evaluaciones de conocimientos generales y específicos disciplinarios (Gutiérrez, 2010).

Que un docente conozca sus fortalezas, le ayuda a planificar y orientar las actividades al provecho de las mismas para facilitar el entendimiento y desarrollar las competencias necesarias por parte de sus alumnos. En este sentido, si un docente logra discriminar cuáles son sus mejores habilidades, puede optar por estrategias didácticas y métodos pedagógicos que la potencien y permitan un desempeño de alta calidad dentro del aula. El conocer sus áreas de mejoras le facilita una orientación y guía para procurar la especialización, formación, actualización y desarrollo de las mismas a través de cursos, talleres, diplomados y extensiones que le permitan el entrenamiento o adquisición de la competencia y que en definitiva alcance una formación integral para tener un desempeño de calidad.

Por otro lado, luego de la implementación en el año 2012 de las unidades relativas a patrones y álgebra en los primeros años de escolaridad en Chile, se ha acrecentado el interés por abordar estos temas, sin embargo, hay que considerar que aún hay escasas investigaciones y que en algunos casos persisten problemas de autoconfianza en los docentes cuando llega el momento de tratar nuevos contenidos matemáticos, considerando que existe un bajo nivel de seguridad para enseñar la disciplina por parte de los docentes (Miranda, Wilhelmi, Martín, Arancibia y Osses, 2013).

Uno de los elementos de suma importancia es identificar el estado de la formación disciplinaria de profesores en ejercicio, así como evidenciar aspectos relacionados con la enseñanza de un contenido matemático, por ello se construyó un cuestionario que permitió mostrar los conocimientos didáctico-matemáticos respecto al álgebra que posee un grupo de profesores que ejercen docencia en Chile. Este instrumento se complementó con uno construido con anterioridad por el profesor Juan Díaz Godino y equipo (2015), el cual analiza los conocimientos de los futuros profesores sobre la enseñanza del álgebra.

Considerando esta necesidad elaboramos un cuestionario que abordó distintas dimensiones, entre ellas datos descriptivos y un cuestionario que ayudó a testimoniar las concepciones didáctico-matemáticas de los docentes.

6.2 Objetivos del instrumento

Al existir modificaciones en el currículo escolar, surgen obstáculos que los docentes deben ir sorteando. Una de estas dificultades ha quedado de manifiesto cuando se incluyó desde los primeros años de escolaridad tópicos relacionados con álgebra, esto debido a la escasa especialización que poseen los profesores que ejercen en esos niveles de escolaridad, dado que por lo general, la formación de los profesores de educación básica no es exclusiva en matemática, por lo cual a su egreso no tienen un dominio profundo del contenido matemático escolar, habitualmente desarrollan este tipo de conocimiento matemático para enseñar a través de la experiencia docente (Ávalos, 2010). Como consecuencia de lo anterior, urge una especialización en el área de las matemáticas a los docentes de educación general básica, sin embargo, antes que aquello ocurra, es fundamental realizar una evaluación sustancial de los conocimientos para la enseñanza del álgebra que utilizan profesores en ejercicio de educación primaria.

Diseñamos un instrumento que permitió recolectar datos referentes a los conocimientos didáctico-matemáticos que usan los profesores de educación primaria en la enseñanza del álgebra. Esto teniendo como referencia troncal los conocimientos didácticos matemáticos presentados por Godino y su equipo de trabajo en 2013 considerando sus adecuaciones presentadas en el trabajo Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). Este instrumento nos permitió identificar las dificultades que subyacen en la enseñanza de los contenidos algebraicos, optamos por un cuestionario de preguntas abiertas como el instrumento de recogida de información dado que una pregunta abierta puede capturar la riqueza y profundidad de una respuesta (Cohen, Manion y Morrison, 2011).

Partiendo del objetivo principal, se desprenden algunos objetivos que también son esenciales de abordar en esta investigación, siendo de interés conocer los niveles de conocimiento que tienen los docentes en referencia a los cambios curriculares acontecidos en el país, cuantificar la cantidad de docentes que resuelven en forma correcta las problemáticas relativas a los conocimientos didácticos-matemáticos para la enseñanza del álgebra y también testimoniar algunos obstáculos disciplinarios que deben soslayar sus propios estudiantes a la hora de solucionar una situación problema.

6.3 Diseño y construcción del instrumento

El cuestionario tributará para alcanzar el cuarto objetivo específico de esta investigación el cual es *construir un instrumento que permita evaluar el conocimiento sobre álgebra de los profesores de educación básica en activo.*

Se adaptó el esquema planteado por Vásquez (2014) que sirvió como una guía para la construcción y desarrollo del cuestionario. Las fases 1, 2 y 3 están referidas a la formulación de la problemática planteada y revisión de investigaciones referidas a la enseñanza del álgebra. Las siguientes fases están netamente relacionadas con la construcción del instrumento de evaluación.

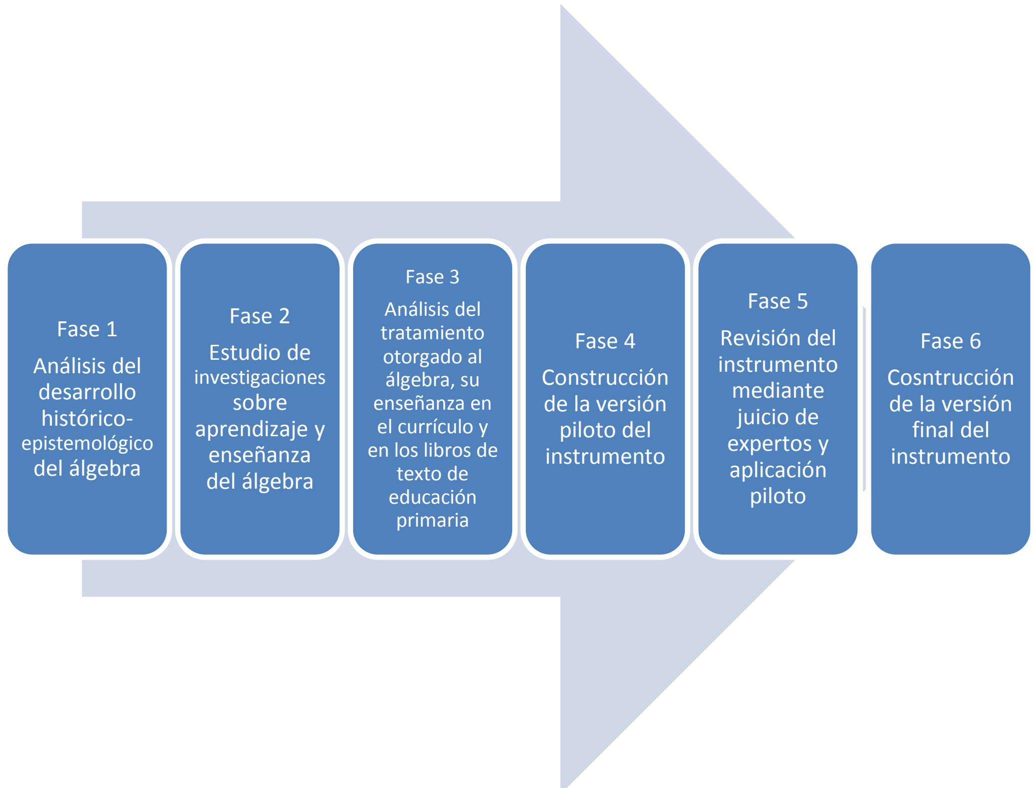


Figura 6.1 Fases del diseño y construcción del instrumento (adaptación de Vásquez, 2014)

6.3.1 Construcción de la versión inicial del cuestionario

Una vez concluidas las primeras tres etapas de las fases de diseño y construcción del instrumento nos aprestamos a comenzar la construcción de la versión inicial (piloto) del cuestionario, el cual está constituido de dos partes fundamentales. La primera recogerá datos descriptivos del profesor participante, planteándose idénticas preguntas y en el mismo orden a cada uno de ellos, quienes deben escoger la respuesta entre dos o tres alternativas que se les ofrecen (Sabino, 1992). Se iniciará recolectando información referente a la *identificación del docente* donde su foco está en la obtención de datos como run, género y edad, también aquellos relativos a *formación académica* donde deben indicar el nombre del título profesional y año de titulación, *experiencia laboral* donde se incluyen los años de experiencia trabajando en docencia, tipo de dependencia del establecimiento, el sector y nivel de escolaridad en el cual se desempeña el docente, finalmente se recolectan datos referentes al *conocimiento de los cambios curriculares y su formación académica docente,* pretendiendo identificar si los docentes tienen conocimiento de las innovaciones que ha realizado el currículum chileno durante los últimos años y si estos consideran estas innovaciones en sus prácticas pedagógicas. Finalmente, queremos identificar si los docentes a partir de estas modificaciones han realizado perfeccionamientos para mejorar la enseñanza del álgebra en los primeros niveles de educación.

Parte que aglutina los datos descriptivos:

DATOS DESCRIPTIVOS

Identificación del Docente

1. Run: ________________
2. Género: Masculino [ ] Femenino [ ]
3. Edad: ____

Formación Académica

4. Nombre Título Profesional: _____________________________________

   ____
5. Año de titulación. _________

Experiencia laboral

6. Indique los años de experiencia que tiene realizando clases de matemática en Educación Básica.

   Menos de 2 años [ ]

   De 2 a 4 años [ ]

   Más de 4 años [ ]

7. Indique que tipo de dependencia es el establecimiento en el cual actualmente usted se desempeña como profesor de matemática.

Municipal [ ]
Particular Subvencionado [ ]
Particular Pagado [ ]

8. Indique el sector al cual pertenece el establecimiento educacional en el que actualmente trabaja.

Rural [ ] Urbano [ ]

9. ¿En cuál de los siguientes cursos de educación básica se desempeña como profesor de matemáticas actualmente?

Primero Básico [ ] Segundo Básico [ ]
Tercero Básico [ ] Cuarto Básico [ ]
Quinto Básico [ ] Sexto Básico [ ]
Modalidad Multigrado [ ]

<u>Referentes al cambio curricular</u>

10. ¿Usted está de acuerdo con las modificaciones que se han realizado en el currículum chileno en relación a la incorporación del eje de álgebra desde los primeros niveles de educación?

Si [ ] Medianamente [ ] No [ ]

11. ¿Usted se siente preparado para realizar clases de álgebra desde los primeros niveles de educación?

Muy preparado [ ]
Medianamente preparado [ ]
No se siente preparado [ ]

12. ¿En su formación universitaria, tuvo cursos de álgebra?

    Si [ ]   No [ ]

13. ¿En su formación universitaria, tuvo cursos de didáctica del álgebra?

    Si [ ]   No [ ]

14. Durante los años que lleva trabajando como profesor de educación básica. ¿Usted ha realizado algún postítulo de mención en matemática, donde esté incluido el álgebra?

    Si [ ]   No [ ]

15. ¿Usted conoce los estándares pedagógicos y disciplinarios?

    Si [ ]   Medianamente [ ]   No [ ]

16. Con respecto a los estándares pedagógicos y disciplinarios, ¿Usted sabe cuántos están dirigidos al eje de álgebra?

    Si [ ]   No [ ]

La segunda parte estuvo asociada a la construcción de un cuestionario el cual es una de las principales técnicas de recogida de datos utilizadas en esta investigación, permitiendo conocer actitudes, creencias y concepciones de los participantes. En su construcción estuvimos bajo el alero del conocimiento didáctico matemático donde tomamos en cuenta las prácticas matemáticas y tareas que colaboran en la contextualización de los contenidos. Consideramos aspectos referentes a: (1) Situaciones-Problemas, (2) Proposiciones, (3) Procedimientos, (4) Argumentos.

En su elaboración tomamos aspectos referentes a los capítulos 1, 2, 3, 4 y 5, donde se incluyeron la definición de la investigación, el desarrollo histórico-epistemológico del álgebra, surgimiento, significados, investigaciones previas, el conocimiento del profesor de matemática, orientaciones curriculares y análisis de los textos de estudio escolares.

La incorporación del tratamiento de temas algebraicos desde los primeros años de escolaridad ha sido un cambio sustancial en la forma en que se tratan los contenidos matemáticos en el país. Primordial resulta realizar una evaluación de los conocimientos didácticos-matemáticos que poseen los docentes básicos que utilizan en la enseñanza de este tópico matemático, dado que la formación del maestro debe contemplar la comunicación y construcción de nociones, procesos y significados algebraicos, descubriendo su función central en la actividad matemática, solo así serán los maestros capaces de desarrollar el razonamiento algebraico a lo largo de los distintos niveles (Godino, 2014). Para Godino y Font (2003) el razonamiento algebraico implica:

> Representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla el razonamiento, se va progresando en el uso del lenguaje y el simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico, especialmente las ecuaciones, las variables y las funciones. Este tipo de razonamiento está en el corazón de las matemáticas concebida como ciencia de patrones y el orden, ya que es difícil encontrar un área de las matemáticas en la que formalizar y generalizar no sea central (p. 774).

Mora (2012) del mismo modo que Godino y Font (2003), comprende el razonamiento algebraico como el proceso que representa, generaliza y formaliza patrones y regularidades en cualquier ámbito de la matemática. Por otra parte, es necesario que los maestros tengan una visión del álgebra escolar más amplia que la que resulta de las generalizaciones aritméticas y el manejo de expresiones literales. Algunas características del álgebra que son fáciles de apreciar son el uso de símbolos, habitualmente letras, que designan elementos variables o genéricos de conjuntos de números u otras clases de objetos matemáticos y la expresión de relaciones entre objetos mediante ecuaciones, fórmulas, funciones, y la aplicación de unas reglas sintácticas de transformación de las expresiones (Godino, 2014).

Esto es sólo una parte de las características del álgebra, pues también existen aquellas asociadas a la modelación matemático-algebraico que los docentes deben incorporar toda vez que la concepción ampliada del álgebra como instrumento de modelización matemática es la que se puede y debe ir construyendo progresivamente desde los primeros niveles educativos (Godino, 2014), para lograr este objetivo es plausible afianzar el tándem álgebra con problemas contextualizados y cercanos al estudiante.

El docente debe ser capaz de vincular estos contenidos disciplinarios con los planes y programas del currículum en los primeros niveles, ya que es de gran importancia el dominio que posee el profesor en el ejercicio de la enseñanza.

Por todo lo anterior, es que indagamos sobre los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los docentes en ejercicio de educación básica inicial respecto del álgebra mediante la aplicación de un cuestionario de preguntas abiertas considerando que es un óptimo instrumento para la recogida de la información, puesto que este tipo de preguntas permiten al encuestado contestar con sus propias palabras, es decir, el investigador no limita las opciones de respuesta, además propician la obtención de información abundante (Bernal, 2010). Este sondeo contribuyó al objetivo del cuestionario y ayudó a averiguar aspectos sobre las fortalezas, pero también sus limitaciones a la hora de poner en práctica el ejercicio docente en profesores de enseñanza básica.

Con la finalidad de dar respuesta a la pregunta de investigación enunciada en el primer capítulo de esta investigación, ¿Qué conocimientos didácticos-matemáticos poseen los profesores de educación primaria en ejercicio en torno al álgebra?, construimos el cuestionario teniendo como eje fundamental el evidenciar los conocimientos didácticos-matemáticos que poseen los profesores de educación general básica respecto al RAE, considerando que de ser requeridas, permitirá tomar acciones remediales frente a la enseñanza del álgebra.

Debido a la imperiosa necesidad de evaluar la actividad matemática surge el razonamiento algebraico elemental, en él se propone la distinción de cuatro niveles de algebrización, teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico, los niveles 1 y 2, o niveles incipientes de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica (Godino, 2008). Estos niveles de algebrización los usaremos con el finalidad de identificar el nivel algebraico en el que se encuentran los problemas matemáticos utilizados en el instrumento evaluativo.

Tomando el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático, se elaboraron las problemáticas que se presentan en el cuestionario de preguntas abiertas, se consideraron aspectos relativos al contenido algebraico y contenido didáctico. En cuanto a los aspectos referentes al contenido algebraico se tomaron tres categorías, destacando: estructuras (relación de equivalencia; propiedades de las operaciones, ecuaciones, …), funciones (patrones aritméticos, patrones geométricos; función lineal, afín, cuadrática, …), modelización (problemas de contexto resueltos mediante el planteo de ecuaciones o relaciones funcionales) (Godino, 2014). No se utilizó la nueva reformulación del modelo, denominada

Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CCDM) debido que al momento de construir el instrumento aún no se encontraba publicado.

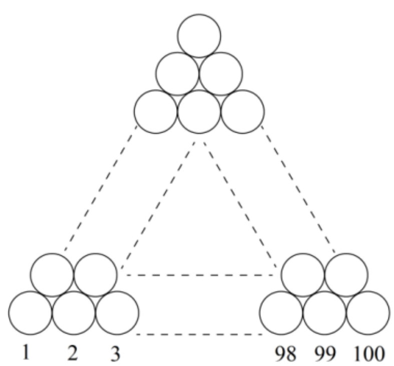
Luego de realizar la revisión bibliográfica y análisis de los textos de estudio propuestos en el capítulo 5, elaboramos un banco de tareas y preguntas abiertas, ellas pueden involucrar un contenido algebraico propio de educación primaria (conocimiento común del contenido), o propio de niveles superiores (conocimiento avanzado) (Godino, 2008).

Finalmente al concretar una selección de tareas y contenidos, aspectos relativos al conocimiento didáctico-matemático y situaciones problemas, construimos 11 ítems que componen nuestro cuestionario inicial.

<u>PREGUNTAS ABIERTAS</u>

Ítem 1:

Laura es una profesora que desea introducir un concepto matemático, lo realiza a través de la utilización del siguiente arreglo:



a. ¿Cuántas esferas en total utilizó? Encuentre una expresión general que permita encontrar el número total de esferas.
b. ¿Qué concepto matemático logró introducir?

Ítem 2:

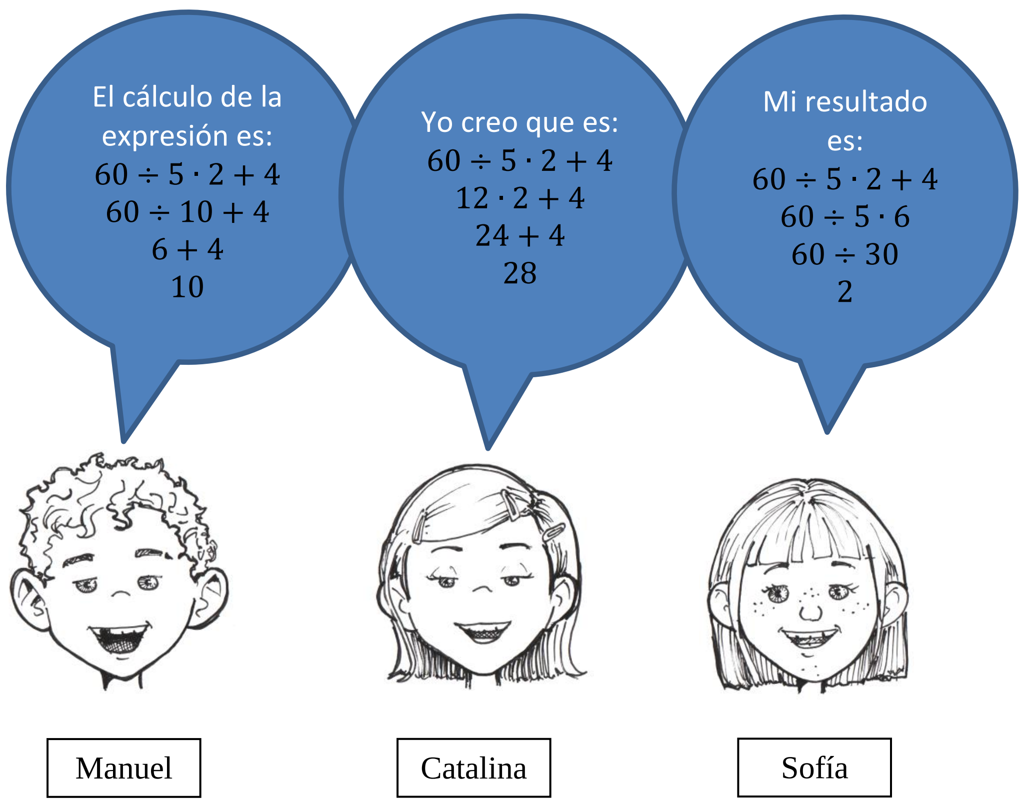
Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro distintos compradores:

- Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno.
- Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero.
- Al tercero, un ternero.
- Al cuarto, le vende el último un ternero que le quedaba.

¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Ítem 3:

La profesora le indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: "*Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades, ¿cuál es el resultado?*".

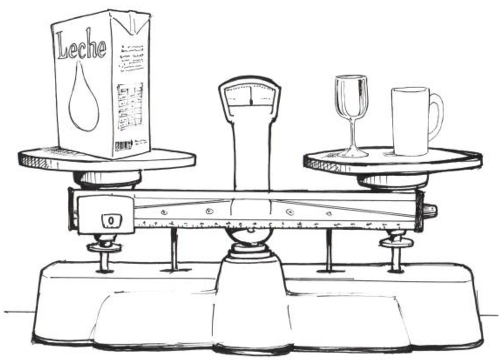


a. ¿Cuál de los niños tiene la respuesta correcta? Enumere la prioridad en las operaciones.
b. ¿Qué conceptos matemáticos o propiedades debe utilizar el alumno para resolver lo planteado?
c. Describa cuales son las posibles dificultades que presentarían los alumnos.

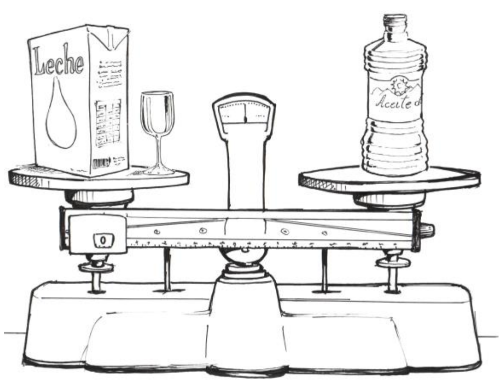
Ítem 4:

En una balanza se dan las siguientes situaciones de perfecto equilibrio:

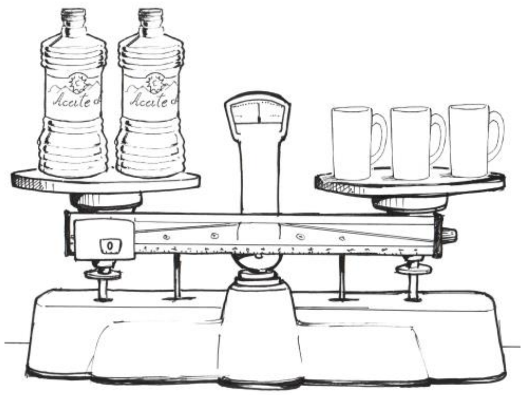
Una caja de leche equivale a una copa y un tazón.



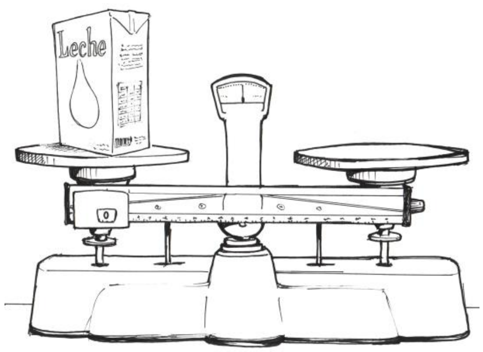
Una caja de leche y una copa equivale a una botella de aceite.



Dos botellas de aceite equivalen a tres tazones.

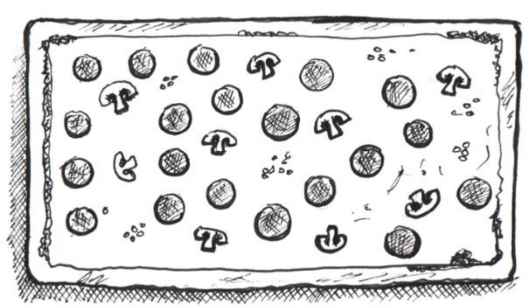


De acuerdo al dibujo, ¿cuántas copas se pueden colocar en el lado derecho de la balanza para alcanzar un perfecto equilibrio?



Ítem 5:

Un trozo de pizza está dividido en tres partes, la primera corresponde a dos tercios del peso total, la segunda a un séptimo del peso total y la tercera pesa 200 gramos.

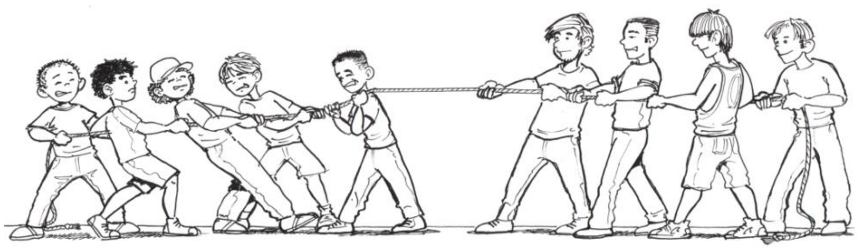


a. ¿Cuál era el peso total? Resuelva utilizando álgebra.
b. ¿Qué contenidos deben dominar los estudiantes para afrontar esta problemática y llegar a su solución?

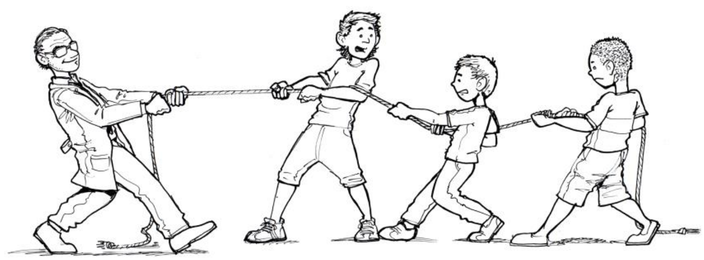
Ítem 6:

En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

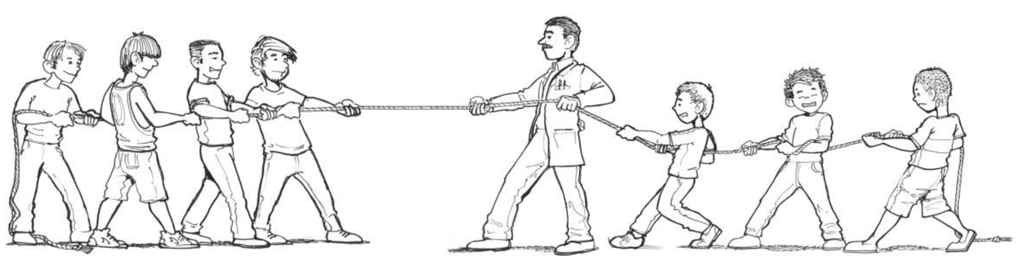
Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.



Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo “demoledores” conformado por cuatro jóvenes contra “invencibles” donde se encuentra un profesor y tres niños.



a. ¿Qué equipo es el vencedor?
b. ¿Qué conceptos algebraicos se encuentran implícitos al desarrollar lo planteado?

Ítem 7:

Traspase a lenguaje algebraico y resuelva: "*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

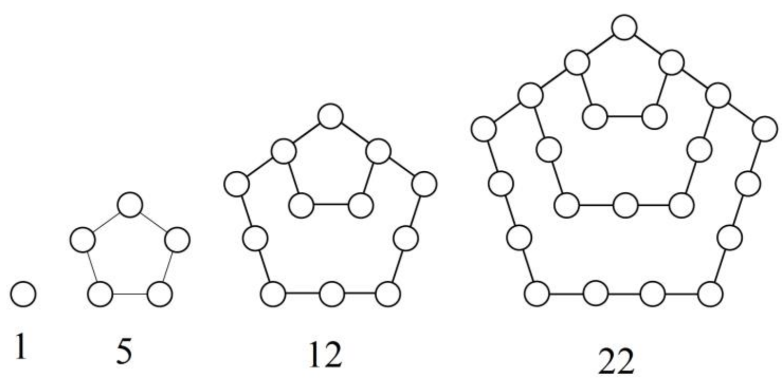
Ítem 8:

Considerando que una casa se revaloriza en forma lineal, el primero de abril de este año me he comprado una casa en 22 millones de pesos. Proyectando que el 1 de abril de 2030 su valor será de $30 millones.

a. ¿Cuál sería su valor el 1 de abril de 2021?
b. ¿Qué obstáculos disciplinarios presenta la problemática?

Ítem 9:

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.
b. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.

Ítem 10:

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120)

Para compartir con tus compañeros e incentivar una colación saludable puedes realizar un pícnic al aire libre.

- Para responder la pregunta, completa con la cantidad de estudiantes según corresponda. Considera que x representa el número de estudiantes que se reunirán en el tercer grupo.

Total

$$\square + \square + \boxed{x} = \square$$

- En el tercer grupo se reunirán ☐ estudiantes.

a. Bajo su punto de vista, ¿es una buena actividad para introducir el concepto de ecuación? Fundamente.

b. ¿Realizaría modificaciones a lo planteado por los autores? ¿cuáles?

Ítem 11:

Como tarea de investigación Margarita, profesora de sexto año de enseñanza básica, solicitó a los alumnos que definieran el concepto de álgebra.

Al día siguiente, Eduardo entregó la siguiente definición: *es la rama de la matemática que se responsabiliza de hacer general lo particular, utilizando coeficientes numéricos, factores literales y operaciones entre ellos. Es decir, combina números, letras, con algunas operaciones.*

¿Cuál es su valoración de la respuesta entregada por Eduardo?

Los ítems seleccionados cumplen con el objetivo de incluir variados contenidos referentes a tópicos algebraicos, entre ellos tenemos:

- Significados del álgebra: 1, 3, 4 y 7
- Comprensión del concepto de álgebra: 1, 3, 4, 6, 10 y 11
- Comprensión del concepto de patrones: 1 y 9
- Estructuras y propiedades algebraicas: 1, 3, 4, 6, y 9 y 10
- Funciones: 1, 8 y 9
- Modelación algebraica: 1, 2, 5, 6, 7, 8 y 9

Los ítems y subítem de las distintas categorías que se desean evaluar respecto de los conocimientos didácticos-matemáticos que poseen los docentes en ejercicio de primeros años de educación primaria, quedaron categorizados del siguiente modo:

Categorías y subcategorías de conocimiento sobre el contenido matemático del modelo CDM	ÍTEMS																		
	1		2	3			4	5		6		7	8		9		10		11
	a)	b)		a)	b)	c)		a)	b)	a)	b)		a)	b)	a)	b)	a)	b)	
Conocimiento común del contenido	X		X				X	X		X		X			X				
Conocimiento ampliado del contenido													X			X			
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido especializado		X			X									X					
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación con los estudiantes				X		X			X										
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación con la enseñanza																	X	X	X
Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto											X								

Tabla 6.1 Categorías y subcategoría del CDM integradas en los ítems del instrumento de evaluación

Realizamos un pequeño análisis donde se indicará el conocimiento matemático necesario para la solución, la categoría del modelo de conocimiento didáctico al que tributa, concluyendo con la aportación de los ítems y subítems al cuestionario.

Ítem 1:

Conocimiento matemático inherente: Deducción de formas generales mediante patrones y series numéricas.

Categoría del CDM: Conocimiento común del contenido y conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido especializado.

Contribución de la pregunta incluida: En el sub-ítem (a) se debe inferir términos generales utilizando elementos pictóricos los cuales puedes ser transferidos a un registro aritmético y algebraico. Respecto al sub-ítem (b) se desea que se reconozcan los contenidos y conceptos algebraicos que quedan en evidencia al encontrar la solución a la situación problema planteado.

Ítem 2:

Conocimiento matemático inherente: Obtener una óptima transferencia entre el lenguaje natural y lenguaje algebraico.

Categoría del CDM: Conocimiento común del contenido.

Contribución de la pregunta incluida: Establecer si el profesor es capaz de realizar un adecuado cambio de registro desde lo natural hacia lo algebraico.

Ítem 3:

Conocimiento matemático inherente: Transferencia entre el lenguaje natural y el lenguaje aritmético-algebraico.

Categoría del CDM: Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación a los estudiantes y conocimiento del contenido especializado.

Contribución de la pregunta incluida: En el sub-ítem (a) se deben analizar las producciones de sus estudiantes, discriminando la(s) respuesta(s) acertada(s) de la(s) incorrecta(s). Con el sub-ítem (b) se desea pesquisar si el docente logra deducir los conceptos o propiedades matemáticas utilizadas en la solución de la problemática planteada. Finalmente en el sub-ítem (c) los docentes analizan las dificultades disciplinarias, didácticas u otras, que tuvo el estudiante para la obtención de la respuesta correcta.

Ítem 4:

Conocimiento matemático inherente: Se consideran temas relativos a ecuaciones y desigualdades.

Categoría del CDM: Conocimiento común del contenido.

Contribución de la pregunta incluida: Que quede en evidencia que el docente es capaz de elucubrar una solución a través del análisis de patrones y una configuración pictórica.

Ítem 5:

Conocimiento matemático inherente: Realizar la transposición entre lenguaje natural y lenguaje algebraico. Resolver ecuaciones de primer grado.

Categoría del CDM: Conocimiento común del contenido y conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación a los estudiantes.

Contribución de la pregunta incluida: Mediante el sub-ítem (a) se pretende que los docentes logren realizar exitosamente el traspaso entre el lenguaje natural y la construcción de una ecuación que sea satisfactoria para la solución del problema planteado. Por su parte, con la sección (b) los docentes deben estar en conocimiento, o bien, deducir los contenidos que deben saber los estudiantes para resolver la problemática planteada.

Ítem 6:

Conocimiento matemático inherente: Desarrollar modelaciones algebraicas sencillas.

Categoría del CDM: Conocimiento común del contenido y conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación al currículo y el contexto.

Contribución de la pregunta incluida: Los docentes en el sub-ítem (a) deben mostrar la solución de la problemática planteada. En cuanto al sub-ítem (b) hay que reconocer los conceptos matemáticos-algebraicos que se encuentran inmersos de forma tácita en la problemática planteada.

Ítem 7:

Conocimiento matemático inherente: Construcción de una ecuación de primer grado con una incógnita.

Categoría del CDM: Conocimiento común del contenido.

Contribución de la pregunta incluida: Con esta pregunta se desea que los profesores puedan desarrollar de forma adecuada una ecuación luego de realizar la construcción de la misma.

Ítem 8:

Conocimiento matemático inherente: Aplicar conceptos y procedimientos para la solución de problemas cotidianos utilizando modelación algebraica.

Categoría del CDM: Conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido especializado.

Contribución de la pregunta incluida: A través del sub-ítem (a) los docentes deben utilizar la función lineal para modelar situaciones asociadas a problemáticas reales. Mediante el sub-ítem (b) hay que descubrir los obstáculos disciplinarios que están incluidos en la problemática presentada y que dificultan la solución del mismo.

Ítem 9:

Conocimiento matemático inherente: Hallar y generalizar una secuencia algebraica-geométrica para encontrar la forma universal de la sucesión. Determinar obstáculos disciplinarios en la solución del problema.

Categoría del CDM: Conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido

Contribución de la pregunta incluida: A través del sub-ítem (a) los docentes deben continuar con la serie presentada de tal forma que puedan comenzar a inferir una forma general. Con el sub-ítem (b), deben deducir la forma general de la serie presentada.

Ítem 10:

Conocimiento matemático inherente: Discriminar un adecuado tratamiento de ecuaciones en un texto de estudio de sexto año de enseñanza básica y proponer adecuaciones a lo expuesto.

Categoría del CDM: Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.

Contribución de la pregunta incluida: En el sub-ítem (a) los profesores deben dilucidar si el tratamiento del contenido es apropiado para iniciar a los estudiantes en el aprendizaje de las ecuaciones. En cuanto al sub-ítem (b) luego de analizar el cuestionamiento anterior, pueden proponer cambios a lo planteado por los autores del texto de estudio para mejorar el tratamiento de las ecuaciones de primer grado para un sexto año de enseñanza básica.

Ítem 11:

Conocimiento matemático inherente: Conocer y aunar criterios y definiciones básicas relativas al álgebra.

Categoría del CDM: Conocimiento especializado, subcategoría conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.

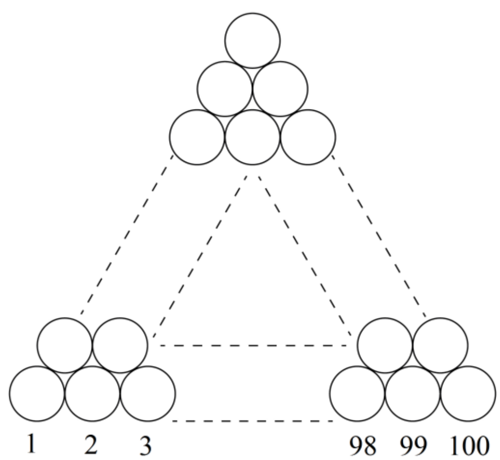
Contribución de la pregunta incluida: Que los docentes puedan discriminar de una colección de definiciones, aquella que más se acomode a un curso de un sexto año de enseñanza básica.

6.3.2 Solución experta del cuestionario

A continuación se presenta la solución experta del instrumento de evaluación la que permitirá realizar un análisis respecto al grado de dificultad de cada ítems, además de advertir aspectos relativos a la configuración didáctica, específicamente las concernientes a las configuraciones epistémicas y cognitivas (Dolores y García, 2014).

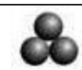
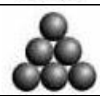
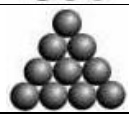
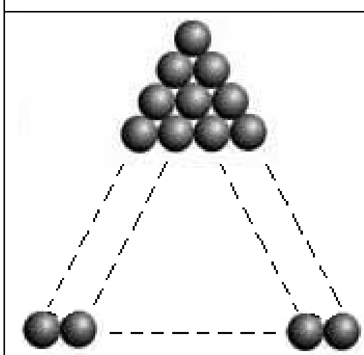
Ítem 1:

Laura es una profesora que desea introducir un concepto matemático, lo realiza a través de la utilización del siguiente arreglo:



a. ¿Cuántas esferas en total utilizó? Encuentre una expresión general que permita encontrar el número total de esferas.

Resp. Se deben considerar las esferas a partir de desglosar el diagrama:

Dibujo	Número de esferas	Total	Formulación
	1	1	$\frac{1 \times 2}{2}$
	1+2	3	$\frac{2 \times 3}{2}$
	1+2+3	6	$\frac{3 \times 4}{2}$
	1+2+3+4	10	$\frac{4 \times 5}{2}$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	1+2+3+4+.......+100	5050	$\frac{100 \times 101}{2}$

Se utilizaron 5050 esferas, donde el número total de ellas se obtuvo a través de esta secuencia se deduce una expresión general: $\frac{n(n+1)}{2}$

b. ¿Qué concepto matemático logró introducir?

Resp. Se pueden introducir los siguientes conceptos: números triangulares; operatorias básicas; construcción de formas generales; transformación de un lenguaje pictórico a lenguaje aritmético y algebraico.

Ítem 2:

Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro distintos compradores:

- Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno.
- Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero.
- Al tercero, un ternero.
- Al cuarto, le vende el último un ternero que le quedaba.

¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Resp. Consideremos $T :=$Número total de terneros.

La mitad del número de terneros más uno, lo podemos escribir como: $\left(\frac{T}{2}+1\right)$

La mitad de lo que le quedaban más un ternero, es: $\left(\frac{\frac{T}{2}-1}{2}+1\right)$

Con estos datos es posible construir la ecuación que nos permite resolver lo planteado:

$$\left(\frac{T}{2}+1\right)+\left(\frac{\frac{T}{2}-1}{2}+1\right)+(1)+(1)=T$$

$$\frac{T}{2}+1+\frac{T}{4}-\frac{1}{2}+3=T$$

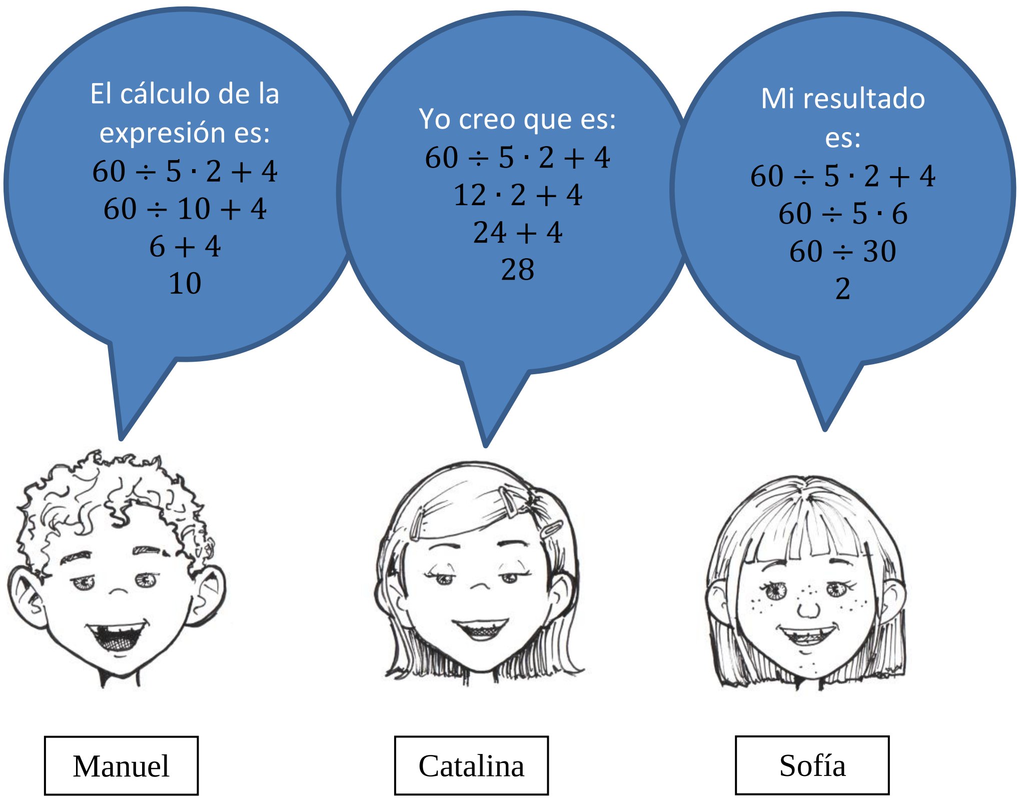
$$2T + 4 + T - 2 + 12 = 4T$$

$$T = 14$$

Por lo tanto, inicialmente el aldeano llevó a la feria 14 terneros.

Ítem 3:

La profesora le indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: "*Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades, ¿cuál es el resultado?*".



a. ¿Cuál de los niños tiene la respuesta correcta? Enumere la prioridad en las operaciones.

Resp. La respuesta correcta la tiene Catalina, pues ha respetado correctamente la prioridad de las operaciones, la cual es: división y multiplicación en un orden de izquierda a derecha, finalizando con las sumas y restas (si corresponde).

b. ¿Qué conceptos matemáticos o propiedades debe utilizar el alumno para resolver lo planteado?

Resp. Para dar respuesta a lo planteado, se deben utilizar los siguientes conceptos: transformación de lenguaje natural a lenguaje aritmético y algebraico; operaciones básicas; prioridad en las operaciones.

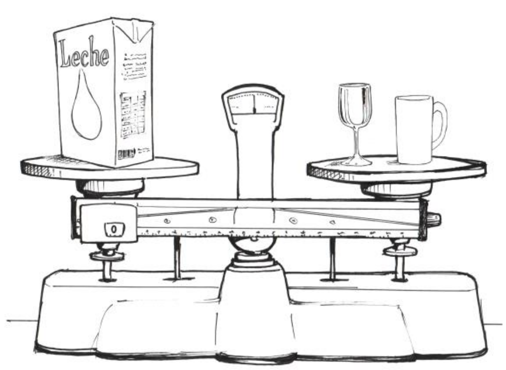
c. Describa cuales son las posibles dificultades que presentarían los alumnos.

Resp. La principal dificultad radica en la errónea utilización de la prioridad en las operaciones, a modo de ejemplo, Manuel establece una prioridad de la multiplicación por sobre la división y Sofía establece como primera operación a resolver, la adición. Catalina, realiza una adecuada lectura, operando correctamente según las prioridades.

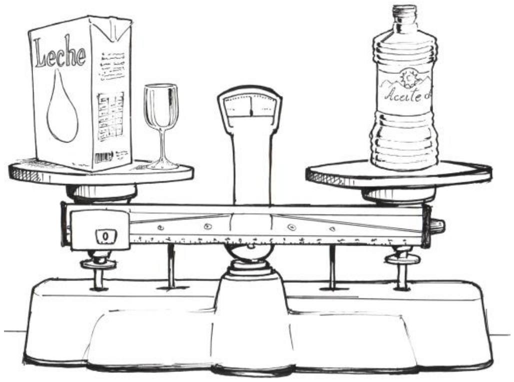
Ítem 4:

En una balanza se dan las siguientes situaciones de perfecto equilibrio:

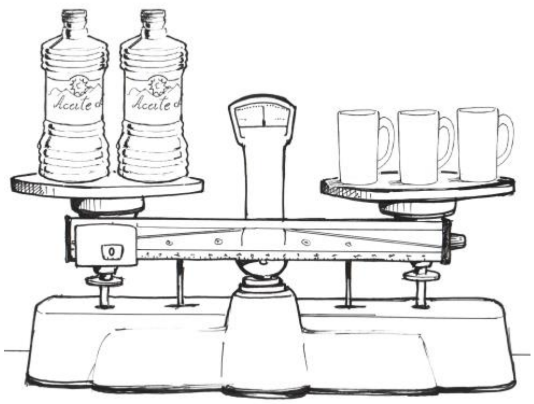
Una caja de leche equivale a una copa y un tazón.



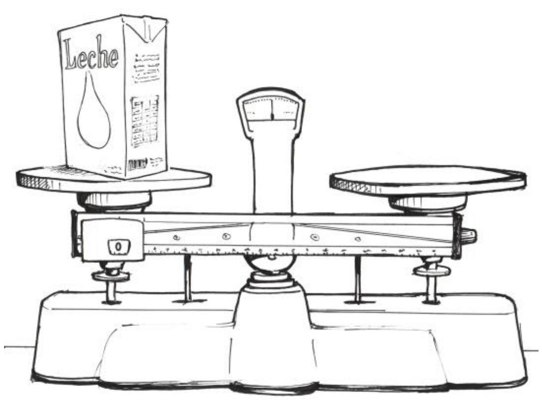
Una caja de leche y una copa equivale a una botella de aceite



Dos botellas de aceite equivalen a tres tazones



De acuerdo al dibujo, ¿cuántas copas se pueden colocar en el lado derecho de la balanza para alcanzar un perfecto equilibrio?



Resp. Podemos considerar:

L ≔Caja de Leche ; C ≔Copas ; T ≔ Tazón ; B ≔Botella de aceite

Con los datos entregados se construyen las siguientes ecuaciones:

$L = C + T$ (1)
$L + C = B$ (2)
$2B = 3T$ (3)

De la ecuación (3): $\frac{2B}{3} = T$

Lo cual reemplazamos en (1) $L = C + \frac{2B}{3}$

De (2) tenemos: $L = C + \frac{2(L+C)}{3}$

$$3L = 3C + 2(L + C)$$

$$3L = 3C + 2L + 2C$$

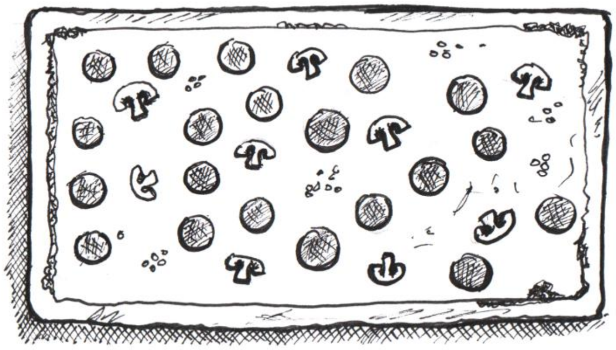
$$3L - 2L = 5C$$

$$L = 5C$$

Por lo tanto, para mantener el equilibrio se requieren 5 copas.

Ítem 5:

Un trozo de pizza está dividido en tres partes, la primera corresponde a dos tercios del peso total, la segunda a un séptimo del peso total y la tercera pesa 200 gramos.



a. ¿Cuál era el peso total? Resuelva utilizando álgebra.

Resp.

Los datos del problema se pueden obtener las siguientes expresiones, siendo $P \coloneqq$ Peso Total

Primer trozo de pizza: $\frac{2}{3}P$

Segundo trozo de pizza: $\frac{1}{7}P$

El peso del tercer trozo de pizza es de 200 gr.

Formamos la siguiente ecuación:

$$\frac{2}{3}P + \frac{1}{7}P + 200 = P$$

$$14P + 3P + 4200 = 21P$$

$$4T = 4200$$

$$T = 1050$$

Por lo tanto el peso total de la pizza es de 1050 gramos.

b. ¿Qué contenidos deben dominar los estudiantes para afrontar esta problemática y llegar a su solución?

Resp.

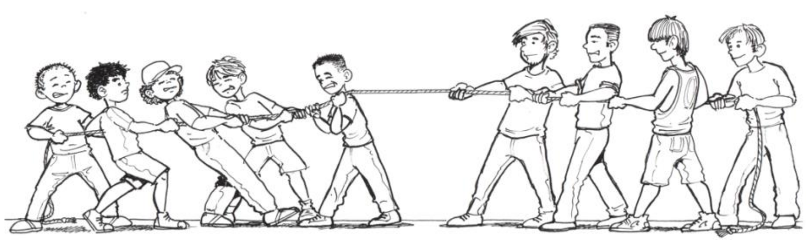
Para resolver el problema planteado, un estudiante debe:

- Realizar una óptima transferencia desde el lenguaje natural hacia el lenguaje algebraico.
- Construir una ecuación de primer grado que permita la obtención de la solución requerida.
- Operar adecuadamente y usar los inversos aditivos y multiplicativos.

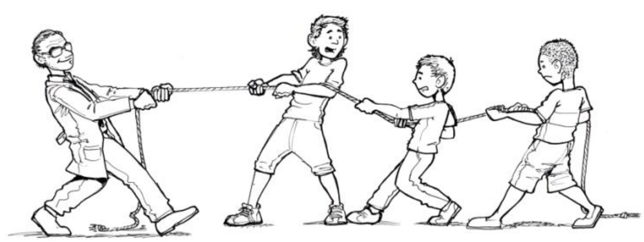
Ítem 6:

En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

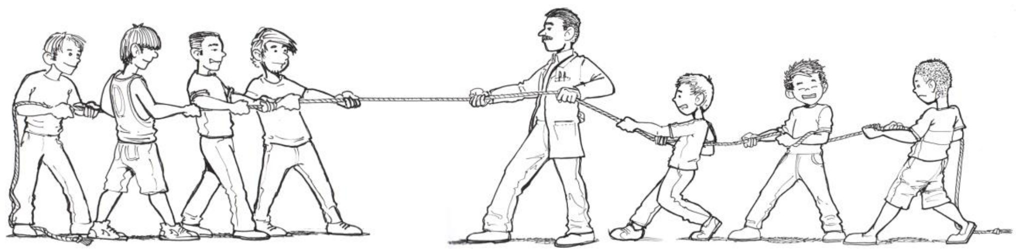
Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.



Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo "demoledores" conformado por cuatro jóvenes contra "invencibles" donde se encuentra un profesor y tres niños.



a. ¿Qué equipo es el vencedor?

Resp.

Podemos considerar:

N ≔Niños ; J ≔ Jóvenes ; P ≔Profesor

Se generan las siguientes ecuaciones:

De (1): $5N = 4J$

De (2): $P = J + 2N$

De (2) reemplazar el profesor, por un jóven y dos niños.

$$4J \stackrel{?}{=} P + 3N$$

$$4J \stackrel{?}{=} J + 2N + 3N$$

$$4J \stackrel{?}{=} 5N + J$$

Como de (1) $4J = 5N$ y al existir la "fuerza extra" de un jóven del lado de los cinco niños, entonces ellos ganarán la competencia, y como concecuencian los vencedores es el equipo "invencibles" conformado por un profesor y tres niños.

b. ¿Qué conceptos algebraicos se encuentran implícitos al desarrollar lo planteado?

Resp. Entre los conceptos algebraicos que se encuentran implícitos en la problemática planteada se encuentran: traspaso de lenguaje natural a algebraico; construcción de ecuaciones; reducción de términos algebraicos; uso de inversos aditivos y multiplicativos.

Ítem 7:

Traspase a lenguaje algebraico y resuelva: "*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Resp.

Nombremos como x el número incógnito, la ecuación es:

$$x + 3x - 4 = x + 2$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

El número buscado es 2.

Ítem 8:

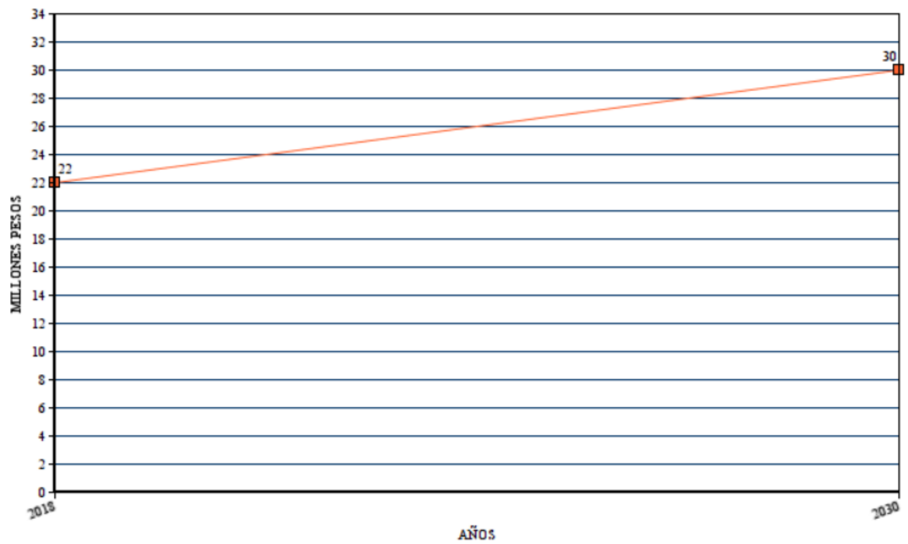
Considerando que una casa se revaloriza en forma lineal, el primero de abril de este año me he comprado una casa en 22 millones de pesos. Proyectando que el 1 de abril de 2030 su valor será de $30 millones.

a. ¿Cuál sería su valor el 1 de abril de 2021?

Resp.

Tenemos los siguientes pares ordenados:

$(2018{,}22) = (x_1, y_1)$ y $(2030{,}30) = (x_2, y_2)$



Luego: $$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Por lo cual: $$y = \frac{(y_2-y_1)(x-x_1)}{(x_2-x_1)} + y_1$$

Reemplazando: $$y = \frac{(30-22)(x-2018)}{(2030-2018)} + 22$$

$$y = \frac{8(x-2018)}{12} + 22$$

$$y = \frac{2(x-2018)}{3} + 22$$

Finalmente si $x = 2021$ entonces $y = 24$

Lo que implica que el año 2021, la casa tendrá un valor de 24 millones.

b. ¿Qué obstáculos disciplinarios presenta la problemática?

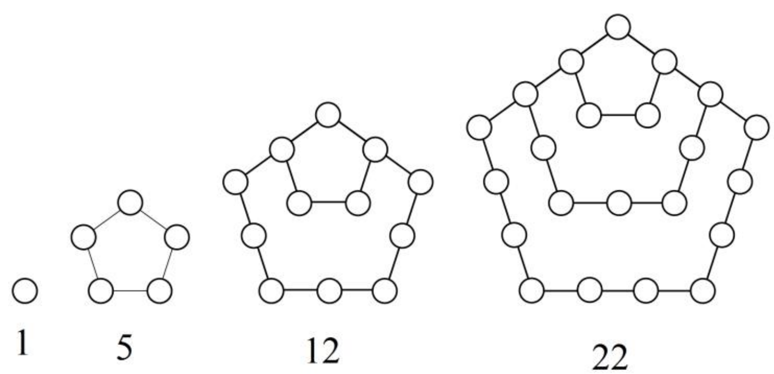
Resp.

Los obstáculos disciplinarios que presenta la problemática son:

- Obtención de adecuados puntos coordenados para generar la función lineal a partir del lenguaje natural.
- Graficar una representación de la función lineal.
- Olvido de la expresión algebraica que permite la construcción de una función lineal a partir de dos puntos.

Ítem 9:

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.

Resp.

De acuerdo al patrón presentado se puede establecer la siguiente secuencia:

N° de Figura	N° de círculos utilizados
1	1
2	5
3	12
4	22
5	35
6	51
7	70
8	92

b. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.

Resp.

Tomando como base la secuencia lograda en el tabla anterior, es posible deducir una expresión general, tal como:

N° de Figura	N° de círculos utilizados
1	1
2	5
3	12
4	22
5	35
6	51
7	70
8	92
.	.
.	.
N	$\frac{n(3n-1)}{2}$

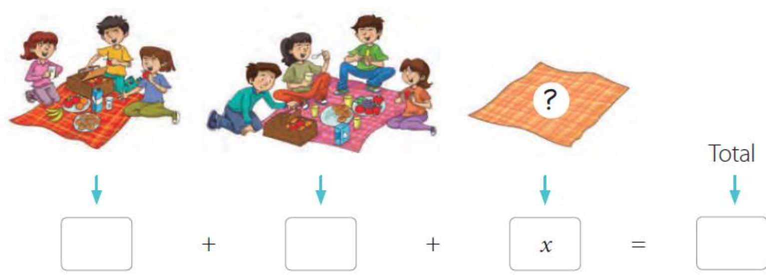
Por lo cual una expresión para encontrar los números pentagonales es: $P_{n=\frac{n(3n-1)}{2}}$

Ítem 9:

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120).

Para compartir con tus compañeros e incentivar una colación saludable puedes realizar un pícnic al aire libre.

- Para responder la pregunta, completa con la cantidad de estudiantes según corresponda. Considera que x representa el número de estudiantes que se reunirán en el tercer grupo.



- En el tercer grupo se reunirán ☐ estudiantes.

a. Bajo su punto de vista, ¿es una buena actividad para introducir el concepto de ecuación? Fundamente.

Resp.

Es una buena actividad para introducir los conceptos relativos a ecuaciones de primer grado para alumnos de sexto año de enseñanza básica. En ella encontramos:

- Una situación problema atingente y contextualizada en una actividad que no es ajena a la cotidianidad de los estudiantes.

- Una adecuada cardinalidad de los conjuntos que se forman.
- Es posible construir la ecuación sin mayor dificultad.
- El texto asiste al estudiante para encontrar los elementos de la ecuación que pudieran presentar alguna dificultad.
- Como objetivo transversal implícito insta a una alimentación sana y ayuda a fomentar actividades al aire libre.

b. ¿Realizaría modificaciones a lo planteado por los autores? ¿cuáles?

Resp.

No realizaría modificaciones a lo planteado por los autores, pues es una actividad adecuada para introducir las ecuaciones, sin embargo, la reforzaría con actividades donde deban descubrir una cantidad desconocida ampliando el espectro de factores literales usados saliendo de lo comúnmente utilizado como es *x.* Dejaría la incógnita en el lado derecho, rompiendo el esquema clásico de dejar el valor desconocido a la izquierda. Reforzaría las propiedades, principalmente aquellas referentes a los inversos aditivos y multiplicativos y fortalecería el tránsito entre lenguaje natural y construcción de una ecuación.

Ítem 11:

Como tarea de investigación Margarita, profesora de sexto año de enseñanza básica, solicitó a los alumnos que definieran el concepto de álgebra.

Al día siguiente, Eduardo entregó la siguiente definición: *es la rama de la matemática que se responsabiliza de hacer general lo particular, utilizando coeficientes numéricos, factores literales y operaciones entre ellos. Es decir, combina números, letras, con algunas operaciones.*

¿Cuál es su valoración de la respuesta entregada por Eduardo?

Resp.

Es una buena definición para el concepto de álgebra, siendo una de las descripciones estándar entregadas en las orientaciones curriculares del

Ministerio de Educación en Chile. Sin embargo, es necesario adecuar la descripción para que sea comprensible para todos los estudiantes.

6.3.3 Revisión del instrumento mediante juicio de expertos y aplicación de piloto

Después de la construcción del cuestionario se procedió a la confirmación de la validez de los ítems. Para tal efecto se consideró el juicio de diez expertos además de un análisis de los resultados de la aplicación de un cuestionario piloto a ocho profesores de educación primaria que ejercen sus labores profesionales en los primeros años de educación escolar (primer a sexto año de enseñanza básica).

6.3.3.1 Juicio de expertos

El juicio de expertos permitió la realización de un análisis cualitativo de la validez de los contenidos de los ítems. Con ello se verificó su alineamiento con las categorías del conocimiento sobre el contenido matemático: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, incluyendo las subcategorías conocimiento del contenido especializado: conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, conocimiento del contenido en relación a la enseñanza y conocimiento del contenido en relación al currículo y el contexto. Este juicio de expertos fue realizado por diez académicos con grado de Doctor (en Matemática, Didáctica de la Matemática o Educación Matemática) que tienen las siguientes nacionalidades: cinco expertos chilenos, tres españoles, uno de nacionalidad mexicana y un experto de Colombia. Todos se dedican a la investigación y docencia en el área de la didáctica de la matemática siendo su ámbito de especialización el álgebra escolar. Tanto el instrumento de evaluación como la pauta para realizar las valoraciones fueron enviados a través de los correos electrónicos de los evaluadores, quienes luego de tres semanas enviaron su valoración. En la figura 6.2 se presenta un extracto de la pauta de evaluación enviado a los expertos.

Instrumento: "Cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra para profesores en activo de educación general básica".

Estimado evaluador:
Le presentamos nuestra propuesta de instrumento para evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra en profesores de educación básica. Para lograr este objetivo, hemos definido las siguientes dimensiones y tipos de ítems:

FACETA	TIPO DE ÍTEM
Conocimiento del contenido: común, especializado y ampliado.	Resolución de problemas. Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.
Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes.	Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.
Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.	Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.
Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares.	Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.

- ESTIMADO EVALUADOR, POR FAVOR HAGA UNA VALORACIÓN DEL GRADO DE ADECUACIÓN QUE TIENE CADA ÍTEM CON LA DIMENSIÓN PROPUESTA RESPECTO A:

  - Grado de correspondencia: Defina si cada ítem en particular pertenece o no pertenece a la dimensión, considerando la definición entregada. Para esto refiérase en términos de "Pertenece" o "No pertenece".

  - Formulación: Juzgue el lenguaje y claridad utilizada en el desarrollo de cada ítem. Utilice los conceptos de "Adecuada", "No adecuada" o "A mejorar".

  - Pertinencia: Establezca la coherencia del ítem respecto a la dimensión. Refiérase en términos de "Pertinente"; "No pertinente" o "Con dudas".

C) Dimensión del conocimiento del contenido en relación a la enseñanza

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertenencia
10 a)			
10 b)			
11			

Figura 6.2 Fragmento de la carta y pauta enviada a los expertos evaluadores

Los evaluadores analizaron once ítems, en los cuales se consideró: el grado de correspondencia, indicando si pertenece o no a la dimensión; la formulación, donde se pronunciaron respecto al lenguaje y claridad de cada ítem, esto fue denominado bajo la categoría de adecuado, no adecuado o a mejorar; y la pertinencia, donde se debió valorar la coherencia respecto a los ítems en términos de pertinencia, no pertinente o con dudas. Asimismo los expertos dejaron recomendaciones generales y por ítems en cuadros dispuestos para tal efecto, tal como se muestra en la figura 6.3.

- **AGRADEZCO PUEDA RESPONDER RESPECTO AL PROCESO DE VALIDACIÓN DE LOS ÍTEMS: ¿ES CONVENIENTE REALIZAR UN PILOTAJE DEL CUESTIONARIO A UN GRUPO DE 5 PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA?**

- **EN CASO DE TENER ALGÚN COMENTARIO ADICIONAL EN RELACIÓN AL GRADO DE ADECUACIÓN QUE TIENE CADA ÍTEM CON LA DIMENSIÓN PROPUESTA, SE AGRADECE PUEDA ESCRIBIR UN COMENTARIO AL RESPECTO.**

Apuntes para el Ítem 1

Figura 6.3 Sección de la pauta utilizada por los expertos para escribir sus apreciaciones generales y por ítems

Las puntuaciones asignadas por cada experto evaluador a cada uno de los once ítems del instrumento se resumen en la tabla 6.2, donde se muestra la frecuencia y media de las puntuaciones.

Ítem		Dimensión	Correspondencia		Formulación			Pertinencia			Media
			FRECUENCIA DE LA PUNTUACIÓN								
			Pertenece (2)	No pertenece (1)	Adecuada (3)	A mejorar (2)	No adecuada (1)	Pertinente (3)	Con dudas (2)	No pertinente (1)	
1	a)	1	10	0	5	4	1	10	0	0	2,5
	b)	3	8	2	9	0	1	9	0	1	2,5
2		1	10	0	5	5	0	10	0	0	2,5
3	a)	4	9	1	7	3	0	8	2	0	2,5
	b)	3	9	1	6	4	0	8	1	1	2,4
	c)	4	10	0	7	3	0	9	1	0	2,5
4		1	10	0	4	6	0	6	4	0	2,3
5	a)	1	10	0	5	3	2	6	4	0	2,3
	b)	4	10	0	2	8	0	8	2	0	2,3
6	a)	1	10	0	6	3	1	9	1	0	2,5
	b)	6	4	6	5	2	3	3	3	4	1,8
7		1	10	0	6	3	1	9	1	0	2,5
8	a)	2	8	2	5	3	2	8	0	2	2,2
	b)	3	6	4	3	4	3	6	0	4	1,9
9	a)	1	10	0	7	3	0	10	0	0	2,6
	b)	2	10	0	9	1	0	10	0	0	2,6
10	a)	5	10	0	7	3	0	10	0	0	2,6
	b)	5	10	0	6	4	0	10	0	0	2,5
11		5	6	4	4	2	4	6	0	4	1,9

Tabla 6.2 Resumen de las frecuencias y media de las puntuaciones aportadas por los evaluadores expertos

Considerando los puntajes asignados por los evaluadores expertos, se han descartado aquellos ítems que tienen una baja valoración, es decir, bajo la puntuación 2 en su media. Si bien es recomendable la utilización de los ítems que obtuvieron una puntuación mayor o igual a dos, se utilizaron sólo aquellos que presentaron una máxima alineación al contenido específico que se pretende evaluar (aquellos que obtuvieron una puntuación mayor o igual a 2,5), a pesar de que es posible utilizar con toda propiedad aquellos ítems cuyas puntuaciones se encuentran entre las puntuaciones 2,0 y 2,4 (inclusive). De esta forma, a pesar de que existen comentarios y sugerencias que realizaron los evaluadores a la mayoría de los ítems del cuestionario que han evaluado, se consideraron sólo aquellos que obtuvieron una excelente puntuación según lo explicitado en la tabla anterior.

Basándonos en el resumen de las frecuencias y las medias de las puntuaciones mostradas en las tabla 6.3, se eliminaron los ítems 6b), 8b) y 11 debido a que su puntuación está por debajo de lo recomendable (bajo 2). Del mismo modo, a pesar que la media de las puntuaciones de los siguientes ítems se encuentra en un nivel óptimo, se descartan los ítems 3b), 4, 5a), 5b) y 8a).

Así, pues, se realizaron modificaciones a los ítems 1a), 1b), 2, 3a), 3c), 6a), 7, 9a), 9b), 10a) y 10b) para ser incluidas en el instrumento final.

A continuación se describen dichos cambios, que se refieren básicamente a aspectos de formulación:

En referencia al ítem 1, cuatro de los evaluadores sugieren cambiar la redacción de la sección (a) debido a que puede causar confusión a la persona que lo desarrolla. Proponen cambiar la pregunta presentada, dejando: *En total, ¿cuántas esferas utilizó?* Sólo uno de los evaluadores propone separar las preguntas indicando que debería quedar: "*En total, ¿Cuántas esferas utilizó?"*

y *"Encuentre una expresión general que permita determinar el número total de esferas"*, recomendación que no se consideró. Respecto a la sección (b) tres evaluadores proponen que debería cambiar la redacción de la pregunta eliminando el pretérito perfecto simple *logró*, por lo cual, la pregunta quedó como: *¿Qué concepto matemático se está intentando introducir?*

En relación al ítem 2, tres evaluadores proponen un cambio en la redacción del problema, se realizan las siguientes modificaciones: de *Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro distintos compradores* quedó *Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro compradores distintos.* Y se modifica *Al cuarto, le vende el último un ternero que le quedaba,* por *Al cuarto comprador le vende el último ternero*.

Respecto al ítem 3, las propuestas de los evaluadores estuvieron en eliminar la sección (b) y hacer algunos cambios en las preguntas (a) y (c). Originalmente se tenía:

(a) *¿Cuál de los niños tiene la respuesta correcta? Enumere la prioridad en las operaciones.*

(c) *Describa cuales son las posibles dificultades que presentarían los alumnos*.

Quedó la redacción del siguiente modo:

(a) *Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno.*

(b) *Examine los errores cometidos y dar una corrección para cada caso.*

En el ítem 6, sólo se realizará alguna modificación en la sección (a). Uno de ellos propone la necesidad de indicar que los alumnos participantes tengan el mismo peso, lo mismo debe ocurrir con los profesores. Además uno de los expertos propone cambiar la pregunta, que en un inicio era: *¿Qué equipo es el vencedor?* por *Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada,* sugerencia que fue aceptada. La parte (b) no fue considerada por obtener una baja puntuación en el análisis de los expertos.

En lo que se refiere al ítem 7, no existen mayores observaciones, sólo uno de los evaluadores indica su incomodidad con la consigna *Traspase a lenguaje algebraico*. A raíz de este comentario, el ítem queda redactado como: *Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva: si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos.*

Respecto al ítem 9, dos evaluadores proponen hacer explícita las posiciones en las figuras, pues existiría una ambigüedad respecto al número que aparece en ellas.

En el ítem 10, se proponen algunos cambios en la redacción del problema planteado evitando que una pregunta sea respondida con un adverbio de afirmación o negación. Se realizaron los siguientes cambios. En el subítem (a) de *Bajo su punto de vista, ¿es una buena actividad para introducir el concepto de ecuación? Fundamente,* cambió a *¿Cuál es la justificación que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?* Respecto a la sección (b) se produjo la siguiente modificación en la pregunta *¿Realizarías modificaciones a lo planteado por los autores? ¿Cuáles?,* dejando *Analice la problemática presentada en el texto, ¿Cómo complementaría el enunciado para que el alumno se comprometa en la tarea?*

Aparte de los comentarios anteriores, que como se ha indicado hacen referencia básicamente a aspectos de formulación, una de las observaciones recibidas por uno de los expertos hizo alusión a la existencia de un cuestionario previamente validado para analizar los conocimientos de los futuros profesores sobre la enseñanza del álgebra (Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi, 2015). Aunque nuestro estudio se centra en los profesores en ejercicio, una vez revisado dicho cuestionario se ha optado por incorporar dos de las preguntas validadas que tributarán de buena forma al cuestionario final y con ello al objetivo general de esta investigación.

Las preguntas son:

Tarea 1: Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica):

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \_\_ + 5$$

Un alumno responde que el número es 12.

a. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
b. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

Solución Esperada: Se espera que el profesor en formación indique que el alumno interpreta el signo = como resultado de la operación y no como relación de equivalencia. Escrituras del tipo “$8 + 4 = 12 + 5 = 17 + 3 = 20$” para referirse a una secuencia de sumas: $\big((8 + 4) + 5\big) + 3 = 20$. La igualdad aritmética es interpretada como acción (Wilhelmi, Lacasta y Godino, 2007).

Objetos y procesos: La igualdad como equivalencia de expresiones en contraposición a la igualdad como resultado de una operación aritmética.

Categoría del Conocimiento Didáctico-Matemático: Se sitúa en la faceta cognitiva; contenido algebraico sobre estructuras, etapa primaria.

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta:

1 a) "El alumno realizó la suma $8 + 4$ sin tener en cuenta lo que hay detrás del símbolo ="

1 b) "La interpretación que realiza del símbolo = es que se debe obtener un resultado exacto al realizar una operación aritmética. Una suma de sumandos da como resultado un número".

No hay en estas respuestas un indicador de la relación entre la introducción del signo igual en el texto escolar (como resultado de una acción) y su uso en esta cuestión como equivalencia.

Tarea 3: Un alumno formuló la siguiente conjetura:

"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número".

a. ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?
b. ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?

Solución Esperada: Se espera que el maestro en formación indique la conjetura formulada por el alumno es correcta y válida para todos los números naturales, elaborando una justificación basada en el uso de una variable para expresar "un número natural cualquiera":

$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1); \frac{3(n+1)}{3} = n + 1,$ para todo n natural.

La justificación de la conjetura que puede dar el alumno de primaria estará basada muy posiblemente en la comprobación de algunos casos particulares.

Objetos y procesos: La solución esperada requiere la representación con una variable de un número natural cualquiera, y los dos números siguientes, operar con dichas expresiones y simplificar el resultado, identificándolo con el número intermedio.

Categoría del Conocimiento Didáctico-Matemático: El ítem (a) hace referencia a un enunciado de un alumno y su posible justificación basada en una en una inferencia empírica, la cual involucra conocimiento didáctico del tipo cognitivo. El ítem (b) requiere que ponga en juego su conocimiento sobre propiedades estructurales a un nivel más avanzado que el requerido en primaria.

Ejemplo de respuesta parcialmente correcta:
3 a) "La conjetura es correcta. El alumno ha realizado una media; al dividir la suma de tres números consecutivos por el número de números que ha sumado (3) se obtiene una medida que coincide con el valor del segundo número". Supone una interpretación, antes que una justificación.
3 b) "Su razonamiento puede ser dado por una división. Haciendo la operación de división te sigue saliendo el segundo número 1, 2, 3; $\frac{6}{3} = 2$". Así, el estudiante hace un razonamiento sobre un único caso particular (Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi, 2015, p. 134 y 135).

Se consultó también a los expertos sobre la posibilidad de realizar un análisis a través de la aplicación piloto del cuestionario a un grupo de ocho profesores de educación básica como parte del proceso de validación de los ítems, y nueve de ellos responden afirmativamente destacando los beneficios de realizar una versión piloto del cuestionario. Uno de ellos realiza la siguiente propuesta: *"creo que se debe considerar en la posible conformación del grupo de profesores a quienes se aplicará la prueba, profesores que enseñen* *matemáticas pero cuya especialidad no sea la matemática. Si tales profesores son parte del estudio, entonces se debería incluir representantes de ese grupo en esa prueba piloto".* Esta propuesta fue aceptada, pues hubo entre el grupo de docentes a los cuales se les aplicó la versión final del cuestionario, profesores de educación general básica con especialización en matemática, así como existió otros que no poseían esta profundización disciplinaria.

Luego del proceso de reformulación del instrumento reescribiendo algunos ítems, eliminando otros e incorporando dos nuevas preguntas pertenecientes al cuestionario de evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de estudiantes de magisterio sobre razonamiento algebraico elemental, validado por Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi (2015), en la tabla 6.3 se muestra el instrumento en su versión piloto.

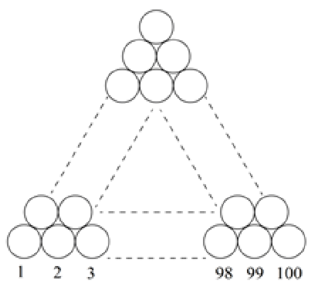
Ítem 1: Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica): ¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera? $8 + 4 = \_\_ + 5$ Un alumno responde que el número es 12. a. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta. b. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?
Ítem 2: Un alumno formuló la siguiente conjetura: "Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número" a. ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué? b. ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?

Ítem 3:

Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro compradores distintos: Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno. Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero. Al tercero, un ternero. Al cuarto comprador le vende el último un ternero. ¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Ítem 4:

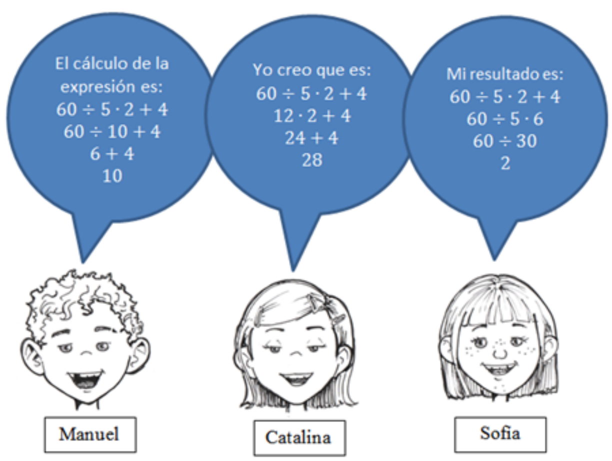
Laura es una profesora que desea introducir un concepto matemático, lo realiza a través de la utilización del siguiente arreglo:



a. En total ¿Cuántas esferas utilizó? Encuentre una expresión general que permita determinar el número total de esferas.
b. ¿Qué concepto matemático se está intentando introducir?

Ítem 5:

La profesora le indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: "*Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades, ¿cuál es el resultado?*".

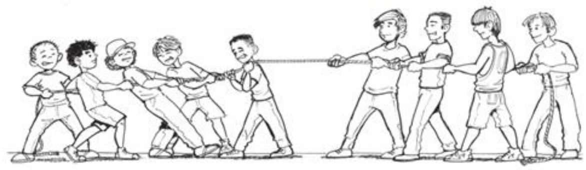


a. Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno.
b. Examine los errores cometidos y dar una corrección para cada caso.

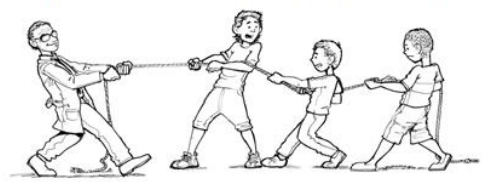
Ítem 6:

En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

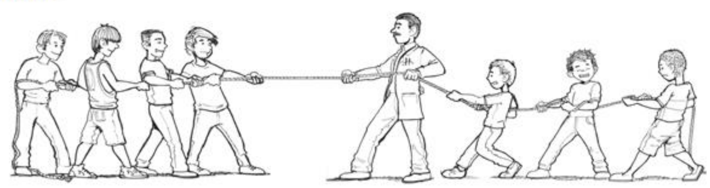
Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.



Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo "demoledores" conformado por cuatro jóvenes contra "invencibles" donde se encuentra un profesor y tres niños.



Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada.

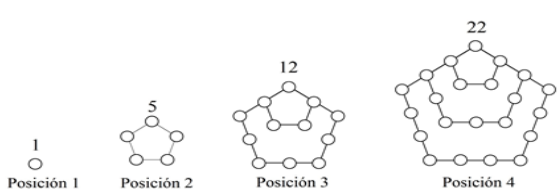
Ítem 7:

Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva:

"*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Ítem 8:

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.
b. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.

Ítem 9:

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120)

Para compartir con tus compañeros e incentivar una colación saludable puedes realizar un pícnic al aire libre.

- Para responder la pregunta, completa con la cantidad de estudiantes según corresponda. Considera que x representa el número de estudiantes que se reunirán en el tercer grupo.

Total

$\square + \square + \boxed{x} = \square$

- En el tercer grupo se reunirán $\square$ estudiantes.

a. **¿Cuál es la justificación que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?**

b. **¿Cómo complementaría el enunciado para que el alumno se comprometa en la tarea?**

Tabla 6.3 Ítems del cuestionario en su versión piloto luego de las sugerencias realizadas por los expertos

6.3.3.2 Aplicación de la versión piloto del cuestionario

Luego del juicio de expertos, se realizó una aplicación piloto del cuestionario a una muestra de ocho profesores de educación general básica. La finalidad es detectar si aún persisten problemas en la redacción, localizar errores, descubrir las preguntas que tienen un mayor grado de dificultad y establecer el tiempo que demoran en responder el cuestionario.

El cuestionario piloto fue aplicado a un total de ocho profesores, lo cuales se encuentran trabajando en establecimientos educacionales de dependencia municipal, particular subvencionada y particular pagada. La tabla 6.4 muestra la desagregación a través de las variables de género y tipo de establecimiento educacional.

	Masculino		Femenino		Total	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Municipal	1	12,5	1	12,5	2	25
Particular Subvencionado	1	12,5	2	25	3	37,5
Particular Pagado	2	25	1	12,5	3	37,5
Total	4	50	4	50	8	100

Tabla 6.4 Desagregación de la muestra de la aplicación piloto

A partir de la aplicación del cuestionario, se consideró un tiempo de realización correspondiente a 120 minutos. Al comenzar la aplicación se detalló concienzudamente las instrucciones para responder cada interrogante planteada, además a los docentes participantes, se les concedió la oportunidad de aclarar las posibles dudas que surgieran en la redacción de algunas preguntas.

6.3.3.3 Análisis cualitativo de la aplicación piloto

De los ocho docentes que participaron voluntariamente de la aplicación del piloto. Cuatro profesores ocuparon la totalidad del tiempo, es decir, 120 minutos, uno de ellos lo realizó en 95 minutos y tres ocuparon 60 minutos. Considerando que el 50% de ellos utilizó 120 minutos en la realización del cuestionario, es que consideramos adecuada esa cantidad de tiempo para la aplicación de la versión final.

Respecto a ítem 5, seis de los docentes considera que es beneficioso unificar ambas preguntas presentadas: a) *Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno* y b) *Examine los errores cometidos y dar una corrección en cada caso,* por lo cual, para el cuestionario final se ha dejado como *Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno verificando si existe coherencia entre lo dictado por la profesora y lo realizado por cada niño*.

En el ítem 4, al menos cuatro docentes indican que no comprenden como abordar la pregunta, indican que los datos entregados en la figura son confusos y no ayudan necesariamente a la solución. Durante la actividad se les explica la composición de ella y la razón por la que se encuentra la numeración descrita ahí.

En el ítem 9b) se optó por eliminar la pregunta *¿Cómo complementaría el enunciado para que el alumno se comprometa en la tarea?* Los docentes indican que es inoficiosa la consulta debido a que la actividad presentada, que es extraída de un texto de estudio, no requiere modificaciones, ni consignas complementarias para que el alumno se comprometa en la tarea, sino más bien, esa es labor del docente a cargo del grupo curso, lograr aquella actitud en los estudiantes. En aquel ítem se dejó la pregunta: *¿Cuál cree usted que es la justificación para que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?*

En cuanto a las otras preguntas de la versión piloto, no se realizaron cambios, ni complementos escritos en ellas. Tampoco fue necesaria la aclaración oral de algún cuestionamiento.

6.3.3.4 Análisis cuantitativo de la aplicación piloto

Para el análisis cuantitativo de cada una de las preguntas de la versión piloto, se asignaron los siguientes valores: 0 si la respuesta es incorrecta o se encuentra en blanco, 1 si es parcialmente correcta y 2 si la solución entregada es correcta. Considerando las puntuaciones establecidas para el grado de corrección de las respuestas, el puntaje máximo es 30 y el mínimo 0. La rúbrica con los criterios de corrección para evaluar la categorización de cada respuesta, se encuentra a continuación:

		Respuesta Correcta (2 puntos)	Respuesta Incompleta (1 punto)	Respuesta Incorrecta (0 puntos)
1	a)	El docente indica que el alumno efectuó la suma, sin considerar la relación de equivalencia.	El docente interpreta que el alumno realizó la suma $8+4$ sin tomar en cuenta lo que hay detrás del símbolo =.	No deduce ningún razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
	b)	La igualdad aritmética es interpretada como acción.	El profesor descifra que el estudiante piensa en obtener un resultado exacto al realizar la operación aritmética. Una suma de sumandos da un número.	No realiza ninguna interpretación a lo efectuado por el estudiante.
2	a)	Debe indicar que la conjetura es correcta y válida para todos los números naturales, elaborando una justificación basada en el uso de una variable para expresar "un número natural cualquiera". $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1);\ \frac{3(n+1)}{3}=n+1$ Para todo n natural.	La conjetura es correcta. El alumno ha realizado una media; al dividir la suma de tres números consecutivos por el número de números que ha sumado (3) se obtiene la medida que coincide con el valor del segundo número.	No logra determinar si la conjetura es válida para todos los números naturales.
	b)	La justificación está basada en la comprobación de algunos casos particulares.	Su razonamiento puede ser dado por una división. Haciendo la operación de división sigue saliendo el segundo número $1,2,3;\ \frac{6}{3}=2$. Establece el razonamiento a partir del único caso particular.	No deduce alguna justificación que podría dar el estudiante a la conjetura.
3		Construye una ecuación óptima solucionando correctamente el problema planteado cuyo resultado es: 14 terneros.	Llega a la solución del problema sin elaborar una ecuación. Usa el método de ensayo y error o método gráfico.	No obtiene la solución requerida.

4	a)	Obtiene la respuesta correcta de 5050 esferas y deduce la expresión general: $\frac{n(n+1)}{2}$.	Encuentra la respuesta correcta de 5050 esferas, pero no deduce la expresión general: $\frac{n(n+1)}{2}$; o bien, no responde correctamente la cantidad de esferas, pero si deduce la expresión general.	No infiere la expresión general, ni responde correctamente la cantidad de esferas utilizadas.
	b)	Identifica cuatro o más conceptos en la problemática planteada, por ejemplo: números triangulares, operatoria básica, construcción de formas generales, transformación de un lenguaje pictórico a lenguaje aritmético y algebraico.	Reconoce al menos dos o tres conceptos implicados en el problema.	Logra identificar uno o ningún concepto involucrado en la solución del problema.
5	a)	Logra dilucidar que sólo Catalina obtiene la respuesta correcta.	Indica que tanto Catalina como Manuel o Sofía tienen un procedimiento correcto.	No realiza ningún tipo de análisis.
	b)	Manuel: Detecta que el error es la priorización de la multiplicación por sobre la división. Catalina: Procedimiento correcto. Sofía: Descubre que la equivocación se suscita al realizar la adición antes que división y multiplicación.	Logra detectar el error cometido por uno de los niños (Manuel o Sofía), pero no de ambos.	No examina los errores de los estudiantes.
6		Elabora ecuaciones para dar solución a la problemática planteada cuya respuesta es que gana el equipo “invencibles”.	Entrega la solución al problema planteado usando el método de ensayo y error.	No obtiene la solución requerida.

7		Forma una ecuación que le permite encontrar la solución a lo planteado siendo su solución 2.	Encuentra la solución sin elaborar una ecuación, ni usa elementos algebraicos.	No encuentra la solución correcta.
8	a)	Encuentra la cantidad de círculos solicitados desde la primera a la octava posición.	Obtiene correctamente los círculos de dos o tres posiciones.	Obtiene uno o ningún círculo involucrado en alguna posición pedida.
	b)	Es capaz de encontrar una forma general para los números pentagonales, la cual es: $\frac{n(3n-1)}{2}$.	Desarrolla las secuencias numéricas, sin embargo, no logra obtener una expresión general correcta.	No desarrolla la secuencia numérica, ni obtiene una forma general correcta para los números pentagonales.
9	a)	Propicia una excelente forma para introducir el concepto de ecuación de primer grado con una incógnita, contextualizando a la cotidianidad.	Es una actividad mejorable para comenzar con el concepto de ecuación.	Considera que es una actividad inadecuada para iniciar el aprendizaje de las ecuaciones en alumnos de sexto año básico, no encontrando elementos destacables en ella.
	b)	No realizaría modificaciones, sólo reforzaría con otras situaciones problema los elementos relativos a los inversos aditivos y multiplicativos, simbología, despeje de incógnitas en el lado derecho de la ecuación y traspaso del lenguaje natural a ecuación.	Realizaría algunas modificaciones a lo planteado por los autores.	Desestima la actividad inclinándome por utilizar una forma totalmente distinta para que los alumnos comiencen a estudiar las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Tabla 6.5 Rúbrica correspondiente a los nueve ítems del cuestionario piloto

En la tabla 6.6 quedan en evidencia los resultados globales, estos se han agrupado para obtener una mejor visualización de la distribución de frecuencias. Podemos observar que el 75% de los docentes obtuvo una valoración menor a 20 puntos, esto indicaría que el instrumento presenta un grado de dificultad alto.

Intervalos de puntuación	Frecuencia absoluta	Porcentaje
0 – 5	0	0
5 – 10	1	12,5
10 – 15	3	37,5
15 – 20	2	25
20 – 25	1	12,5
25 – 30	1	12,5

Tabla 6.6 Distribución de frecuencias para la puntuación final

Ninguno de los docentes participantes en la versión piloto del instrumento ha obtenido la puntuación máxima. La media fue 16,25 puntos, esto se muestra en la tabla 6.7 que contiene los estadísticos descriptivos.

	Estadístico
Mínimo	9
Máximo	26
Rango	17
Media	16,25
Mediana	15
Desviación típica	5,092

Tabla 6.7 Estadísticos descriptivos

Para la obtención del índice de dificultad se clasificaron las respuestas en correctas e incorrectas, las respuestas en blanco no fueron consideradas. En general el cuestionario presentó una dificultad media con una puntuación de 0,54; siendo aquellos de mayor dificultad el ítem 3, 4a), 4b) y 9b) los que se encuentran vinculados al conocimiento común del contenido, conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido especializado y subcategoría conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. Por el contrario aquellos ítems que presentaron una menor dificultad fueron aquellos vinculados al conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación a los estudiantes y uno vinculado al conocimiento común del contenido, como lo son 5a), 5b) y 7. Lo anterior queda evidenciado en la tabla 6.8 donde se muestran los índices de dificultad de todos los ítems del cuestionario.

Ítem		**Índice de dificultad**	**%**
1	a)	0,50	50
	b)	0,50	50
2	a)	0,44	44
	b)	0,50	50
3		0,25	25
4	a)	0,44	44
	b)	0,19	19
5	a)	1,00	100
	b)	1,00	100
6		0,63	63
7		0,75	75
8	a)	0,50	50
	b)	0,56	56
9	a)	0,56	56
	b)	0,31	31
Media: 0,54			

Tabla 6.8 Índice de dificultad de los ítems del cuestionario

Todos los docentes que realizaron el cuestionario piloto han obtenido en ambas preguntas del ítem 1 una puntuación equivalente a parcialmente correcta. Interpretaron que el alumno realizó la suma $8 + 4$ sin tomar en cuenta lo que hay detrás del símbolo =, por lo cual, no hubo personas que tuvieron respuestas correctas la que indicaba que el alumno efectuó la suma, sin considerar la relación de equivalencia, incorrectas o en blanco, esto queda evidenciado en la tabla 6.9. Este ítem ha quedado íntegramente seleccionado para la aplicación del cuestionario final.

Ítem		**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
1	a)	0	0	0	0	8	100	0	0	0,50
	b)	0	0	0	0	8	100	0	0	0,50

Tabla 6.9 Frecuencia de respuestas al ítem 1 (n=8)

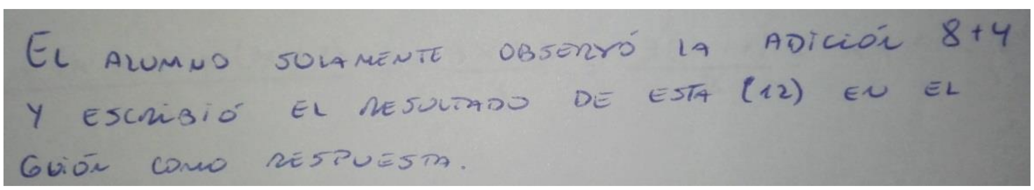

EL ALUMNO SOLAMENTE OBSERVÓ LA ADICIÓN 8+4 Y ESCRIBIÓ EL RESULTADO DE ESTA (12) EN EL GUIÓN COMO RESPUESTA.

Figura 6.4 Respuesta de P2 a la pregunta a) del ítem 1

Respecto al ítem 2, la mayoría de los docentes respondieron correctamente ambas secciones, o bien, sus respuestas se encuentran parcialmente correctas, esto se muestra en la tabla 6.10. En el subítem 2a) el 37,5% de los docentes indica que la conjetura es correcta, donde el estudiante al dividir la suma de tres números consecutivos por el número de números que ha sumado, se obtiene la medida que coincide con el valor del segundo número. El 25% obtiene la respuesta correcta, indicando que la conjetura es válida para todos los números naturales, elaborando una justificación basada en el uso de una variable para expresar un número natural cualquiera. En el subítem 2b) la mayoría consideró que la justificación está basada en la comprobación de algunos casos particulares, esta opción la obtuvo el 37,5% de ellos. Aun considerando que el índice de dificultad es medio-alto, este ítem ha sido elegido para formar parte de la batería de ítems del cuestionario final. La figura 6.5 muestra una respuesta donde el docente explicita que los estudiantes no son capaces de resolver este tipo de problemáticas.

Ítem		**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
2	a)	2	25	2	25	3	37,5	0	0	0,44
	b)	3	37,5	2	25	2	25	1	12,5	0,50

Tabla 6.10 Frecuencia de respuestas al ítem 2 (n=8)

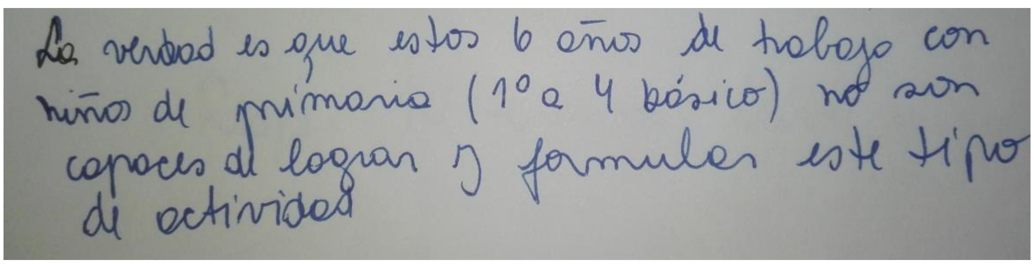


Figura 6.5 Respuesta de P6 a la pregunta b) del ítem 2

Considerando el ítem 3, donde se busca evidenciar el conocimiento común del contenido, la mayoría de los docentes ha elaborado respuestas incorrectas o bien entregan el ítem en blanco, el porcentaje de ellos que están en esta condición es el 75% de ellos, esto se presenta en la tabla 6.11. Sólo dos de ellos desarrollaron una respuesta correcta construyendo una ecuación óptima para solucionar correctamente el problema planteado. No hubo docentes que desarrollaron sus soluciones a través del método de ensayo y error, sin embargo, cuatro de ellos construyeron en forma equivocada una ecuación realizado un traspaso erróneo del lenguaje natural al lenguaje algebraico, ello produjo que la solución no fuera la correcta. Hemos considerado esta pregunta en el cuestionario final, debido a que con ella se puede visualizar el traspaso del lenguaje natural a lenguaje algebraico. En la figura 6.6 se presenta una elaboración correcta de la ecuación a construir.

Ítem	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Parcialmente correctas		En blanco		Índice de dificultad
3	2	25	4	50	0	0	2	25	0,25

Tabla 6.11 Frecuencia de respuestas al ítem 3 (n=8)

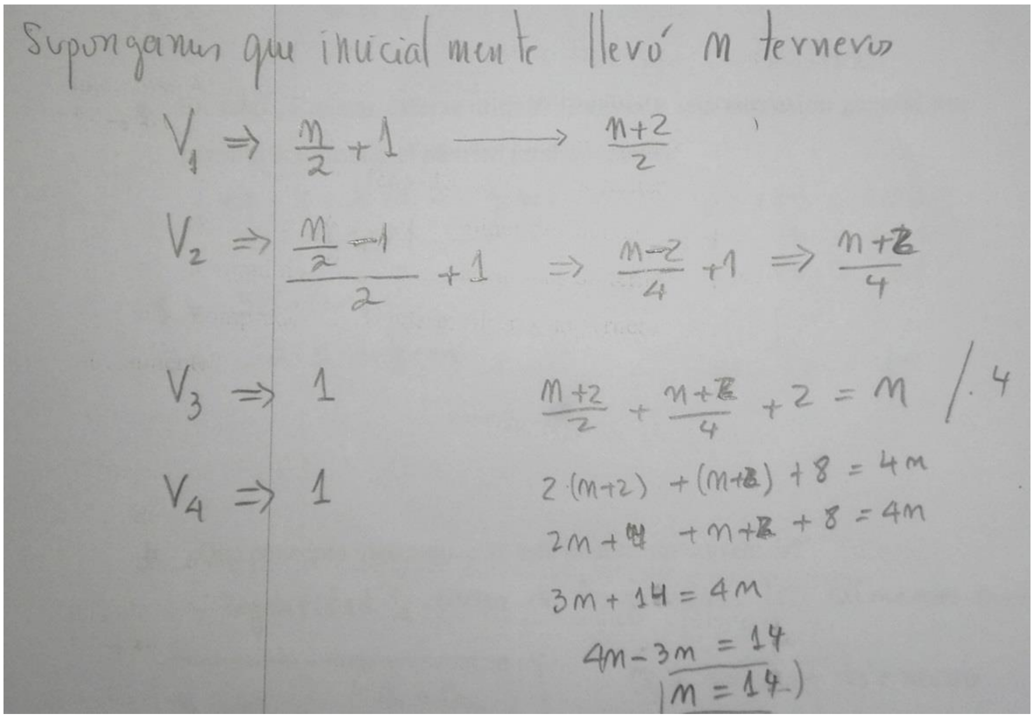


Figura 6.6 Respuesta de P7 al ítem 3

Observando la tabla 6.12 podemos ver que en el subítem 4a) el 62,5% de los docentes logra obtener la respuesta correcta, sin embargo, el 25% del total logra deducir una expresión general, 37,5% de los docentes ha tenido el subítem erróneo o bien lo ha dejado en blanco. Este cuestionamiento está referido al conocimiento común del contenido. Respecto al subítem 4b) el 50% de los docentes ha dejado sus respuestas en blanco y el 25% de ellos tiene su respuesta incorrecta, sólo el 12,5% tuvo la respuesta correcta, el mismo porcentaje se obtuvo para aquellos que tuvieron la respuesta parcialmente correcta, este ítem alude al conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido especializado. La figura 6.7 muestra la solución presentada por uno de los docentes. Debido a que muchos de los profesores que representan alrededor del 75% de ellos, han dejado el ítem en blanco, o bien no contestaron correctamente, hemos decidido eliminar esta pregunta.

Ítem		**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
4	a)	2	25	1	12,5	3	37,5	2	25	0,44
	b)	1	12,5	2	25	1	12,5	4	50	0,19

Tabla 6.12 Frecuencia de respuestas al ítem 4 (n=8)

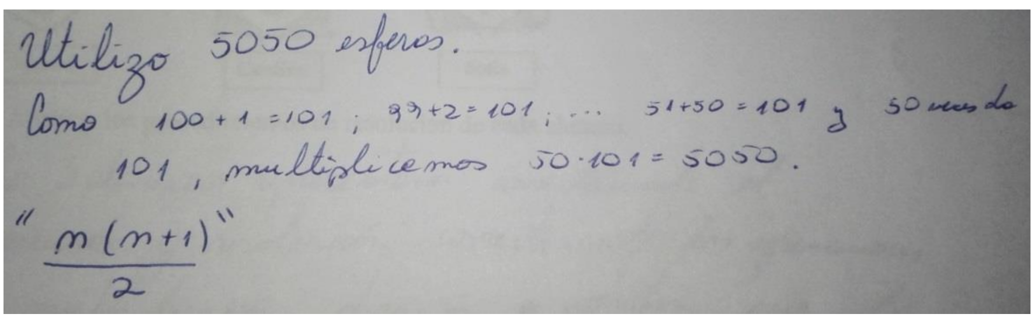


Figura 6.7 Respuesta de P2 a la pregunta a) del ítem 4

No es de extrañar que dado el bajo índice de dificultad que tiene el ítem 5, todos los docentes obtuvieran el máximo de puntaje en él, este tributa al conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación de los estudiantes. Como es observable en la tabla 6.13, no existieron respuestas incorrectas, en blanco o parcialmente correctas. La figura 6.8 muestra una respuesta presentada por uno de los docentes participantes en la versión piloto.

Ítem		Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Parcialmente correctas		En blanco		Índice de dificultad
5	a)	8	100	0	0	0	0	0	0	1,00
	b)	8	100	0	0	0	0	0	0	1,00

Tabla 6.13 Frecuencia de respuestas al ítem 5 (n=8)

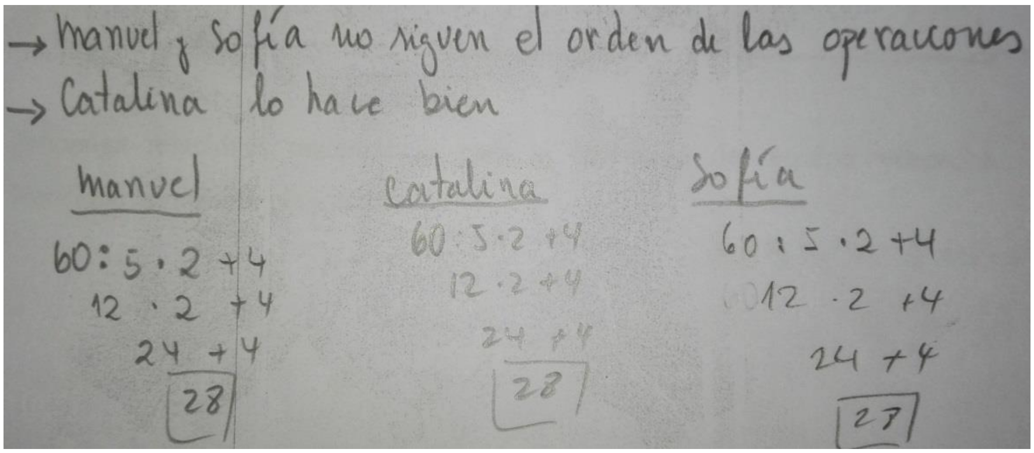


Figura 6.8 Respuesta de P8 a la pregunta b) del ítem 5

Con respecto al ítem 6, se observa que una gran cantidad de docentes obtuvieron una respuesta correcta, el porcentaje de ellos que realizaron un trabajo adecuado. El 62,5% de ellos construyeron ecuaciones para dar la solución a la problemática planteada, no hubo docentes que entregaran la respuesta utilizando el método de ensayo y error, lo cual sería considerado como parcialmente correcto. El resto de los docentes dejaron sus respuestas en blanco (37,5%). La tabla 6.14 muestra lo indicado anteriormente. En la figura 6.9 se observa la respuesta de unos de los docentes. Se seleccionó este ítem en la configuración del cuestionario final.

Ítem	Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Parcialmente correctas		En blanco		Índice de dificultad
6	5	62,5	0	0	0	0	3	37,5	0,63

Tabla 6.14 Frecuencia de respuestas al ítem 6 (n=8)

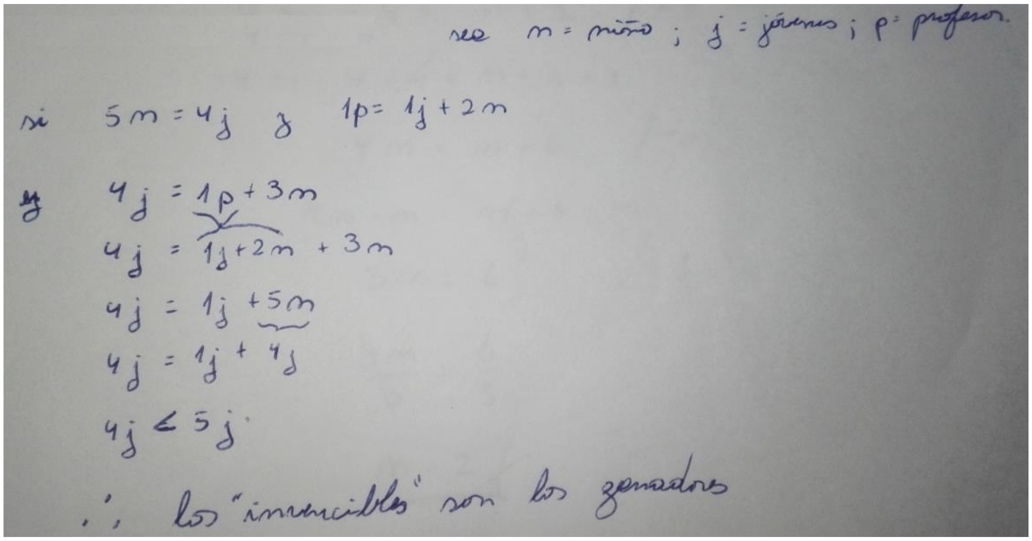


Figura 6.9 Respuesta de P2 al ítem 6

El ítem 7 presenta un índice de dificultad bajo, por lo cual los docentes, en su mayoría, tienen un conocimiento común del contenido adecuado. El porcentaje de ellos que lograron obtener una respuesta correcta es el 75% logrando un planteamiento y desarrollo de una óptima ecuación. Este ítem se ha seleccionado para la versión final del cuestionario sin realizar cambios en la redacción. La tabla 6.15 muestra los resultados, evidenciando que ninguno de ellos encontró la solución correcta a través del método de ensayo y error, ni usa elementos algebraicos en su solución. Nadie obtuvo respuestas incorrectas.

Ítem	**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
7	6	75	0	0	0	0	2	25	0,75

Tabla 6.15 Frecuencia de respuestas al ítem 7 (n=8)

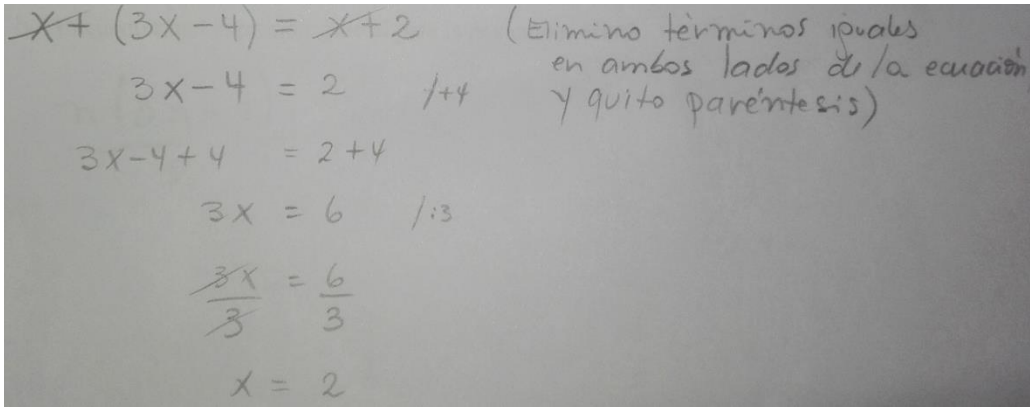


Figura 6.10 Respuesta de P1 al ítem 7

Observando la tabla 6.16 que muestra las frecuencias del ítem 8, queda en evidencia que el 50% de los docentes presenta un conocimiento común adecuado del contenido y el mismo porcentaje tiene un conocimiento ampliado del contenido. Además se visualiza un índice de dificultad medio y dado que la mayoría de los docentes obtuvieron la respuesta correcta, o bien, han elaborado una respuesta parcialmente correcta, este ítem se ha escogido en su totalidad para ser parte de la versión final del instrumento. Respecto al subítem 8a) la mitad de los docentes encuentra la cantidad correcta de círculos desde la primera a la octava posición. Considerando el subítem 8b) también sólo la mitad de los docentes es capaz de encontrar una forma general para los números pentagonales. La figura 6.11 muestra la respuesta entregada por un docente al subítem 8a). Este ítem se encuentra incluido en la versión final del cuestionario.

Ítem		**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
8	a)	4	50	2	25	0	0	2	25	0,50
	b)	4	50	0	0	1	12,5	3	37,5	0,56

Tabla 6.16 Frecuencia de respuestas al ítem 8 (n=8)

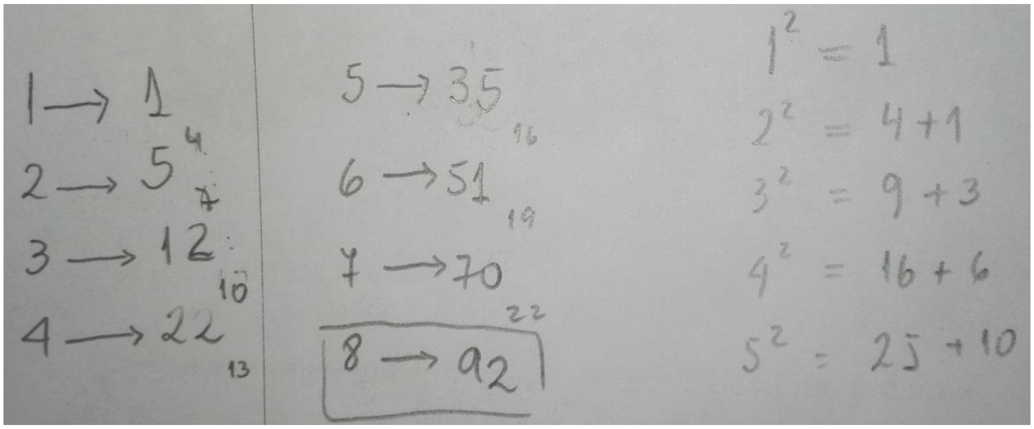


Figura 6.11 Respuesta de P7 a la pregunta a) del ítem 8

Finalmente considerando la tabla 6.17 que muestra los resultados del ítem 9, evidencia que la mayoría de los docentes se encuentra en el rango de respuestas parcialmente correcta, por lo cual se encuentran en una regular apreciación del conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación con la enseñanza. La figura 6.12 muestra la respuesta de un docente para el subítem 9a). Se han realizado algunas modificaciones a este ítem reuniendo los dos subítems iniciales en uno, con la finalidad de que sea incluido en la versión final del instrumento.

Ítem		**Respuestas correctas**		**Respuestas incorrectas**		**Parcialmente correctas**		**En blanco**		**Índice de dificultad**
9	a)	2	25	0	0	5	62,5	1	12,5	0,56
	b)	1	12,5	1	12,5	3	37,5	3	37,5	0,31

Tabla 6.17 Frecuencia de respuestas al ítem 9 (n=8)

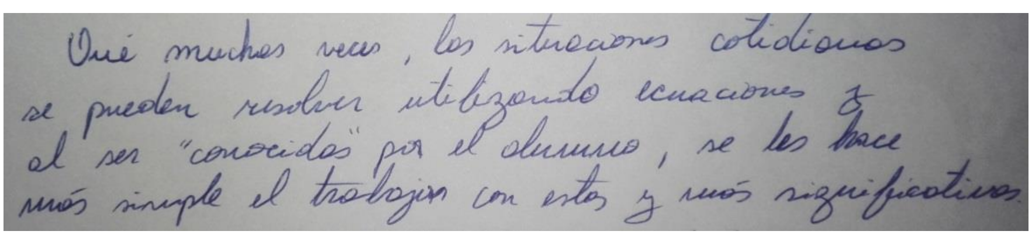


Figura 6.12 Respuesta de P2 a la pregunta a) del ítem 9

6.3.4 Versión definitiva del cuestionario

Como ha quedado de manifiesto a través del juicio de los diez expertos que realizaron la revisión de la versión inicial del cuestionario y luego de realizada la aplicación del cuestionario piloto, ha quedado la siguiente versión final de las preguntas abiertas del instrumento que fue aplicado a 121 profesores de educación primaria en Chile.

Ítem 1:

Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica):

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \_\_ + 5$$

Un alumno responde que el número es 12.

a. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
b. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

Ítem 2:

Un alumno formuló la siguiente conjetura:

"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"

a. ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?
b. ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?

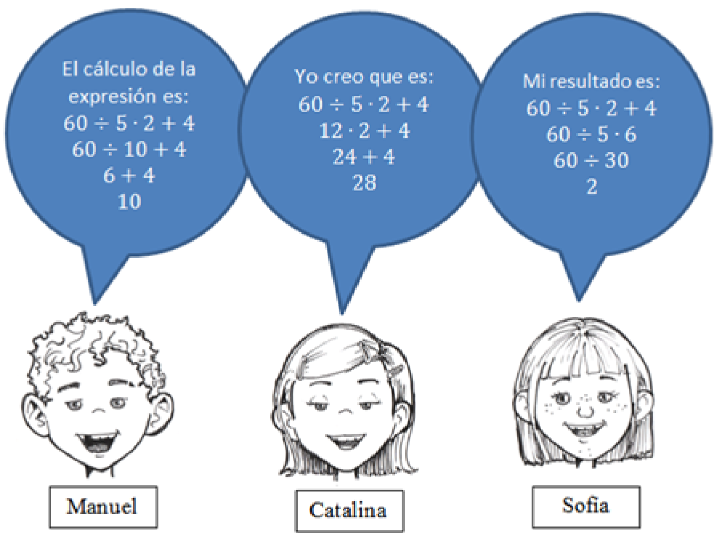
Ítem 3:

Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro compradores distintos: Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno. Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero. Al tercero, un ternero. Al cuarto comprador le vende el último un ternero. ¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Construya ecuaciones y resuelva.

Ítem 4:

La profesora le indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: "*Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades, ¿cuál es el resultado?*".

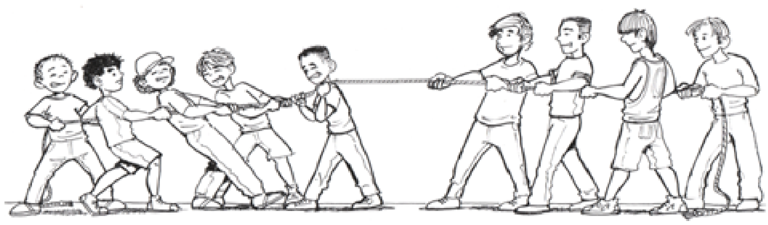


Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno verificando si existe coherencia entre lo dictado por la profesora y lo realizado por cada niño

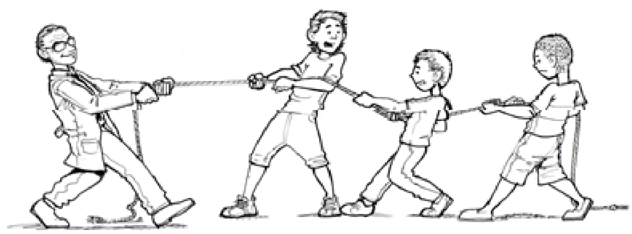
Ítem 5:

En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

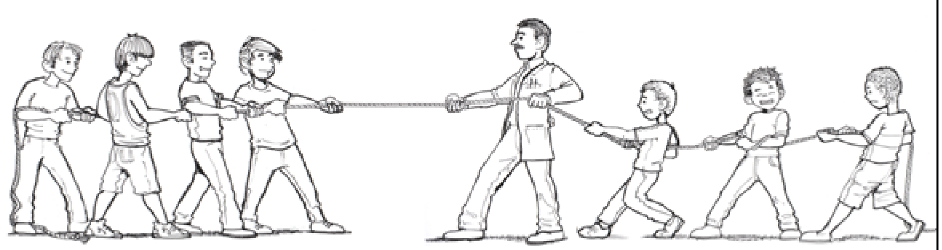
Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.



Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo "demoledores" conformado por cuatro jóvenes contra "invencibles" donde se encuentra un profesor y tres niños.



Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada.

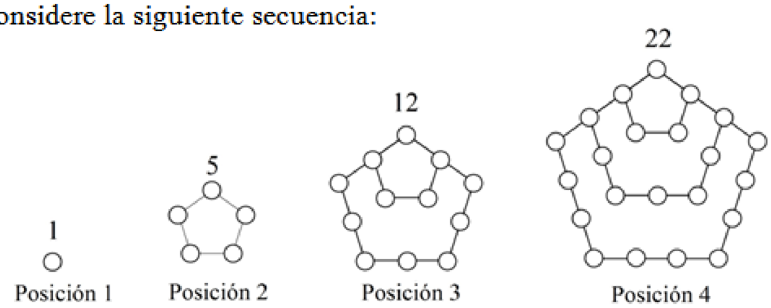
Ítem 6:

Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva:

"*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Ítem 7:

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.

b. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.

Ítem 8:

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120)

¿Cuál cree usted que es la justificación para que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?

En la tabla 6.18 se puede visualizar el conocimiento didáctico-matemático sobre el álgebra que está incluido en las consignas de los ítems y subítems de la versión final del cuestionario.

Ítem	Subítem	Consigna	Conocimiento didáctico-matemático evaluado
1	a)	Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
	b)	¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
2	a)	¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?	Conocimiento ampliado del contenido
	b)	¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
3		Construya ecuaciones y resuelva.	Conocimiento común del contenido
4		Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno verificando si existe coherencia entre lo dictado por la profesora y lo realizado por cada niño.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes
5		Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada.	Conocimiento común del contenido
6		Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva.	Conocimiento común del contenido
7	a)	Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.	Conocimiento común del contenido
	b)	Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.	Conocimiento ampliado del contenido
8		¿Cuál cree usted que es la justificación para que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza

Tabla 6.18 Conocimiento didáctico-matemático incorporado en las consignas del cuestionario final

6.3.5 Análisis a priori del cuestionario

En este apartado se detallarán las actividades propuestas en los distintos ítems del cuestionario. El análisis a priori consistirá en la formulación del objetivo del ítem, la descripción del cuestionamiento presentado, las dificultades que se manifiestan en el desarrollo del ítem, la descripción de las acciones esperadas en las producciones entregadas por los docentes, finalizando con la descripción de los objetos algebraicos involucrados.

6.3.5.1 Análisis del ítem 1

Objetivo del ítem: Deducir el razonamiento de un estudiante de educación básica respecto a los elementos que lo llevan a la respuesta entregada al docente.

Descripción: En base a la respuesta entregada por el alumno se debe dilucidar el razonamiento algebraico implícito utilizado en la solución, así como proporcionar una explicación convincente de la interpretación del signo =.

Ítem 1:

Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica):

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \_\_ + 5$$

Un alumno responde que el número es 12.

a. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
b. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

Figura 6.13 Ítem 1 del cuestionario

Dificultades:

- Qué el docente carezca de herramientas matemáticas para percibir las diferencias entre las distintas concepciones del signo =.
- No lograr deducir ningún razonamiento que llevó al estudiante a entregar la respuesta.
- No percibir que el estudiante está interpretando en signo igual como una acción que debe entregar un resultado y no como una relación de equivalencia.

Acciones esperadas por los docentes:

Deben lograr establecer que el estudiante realiza una operación sin considerar la relación de equivalencia, descifrando que piensa en la obtención de un resultado exacto al realizar la operatoria aritmética como acción principal.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Analizar la respuesta entregada por un estudiante de primer ciclo básico respecto a la igualdad.	Reflexión sobre la conceptualización de la igualdad como relación de equivalencia en contraposición de la igualdad como resultado de una operación aritmética.
Elementos Lingüísticos	
Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica). ¿qué número debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera? $8 + 4 = \_\_ + 5$ Un alumno responde 12 Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?	Elucubrar sobre el razonamiento del alumno. Analizar la respuesta entregada por el estudiante. Evaluar la interpretación dado respecto del signo =.

Conceptos-Definición	
Concepciones sobre el signo igual.	Distinguir la igualdad como equivalencia de expresiones o como resultado de una operación aritmética.
Aritmética.	Estudia las operaciones con números y sus propiedades fundamentales.
Álgebra.	Realiza una generalización de aspectos matemáticos.
Propiedades	
Relaciones de equivalencia. Cálculo operacional.	La igualdad como equivalencia de expresiones en contraposición a la igualdad como resultado de una operación aritmética.
Procedimientos	
Construcción formal de los números enteros.	Cálculo de la operación suma, desenmarcándose de la relación de equivalencia. Establecer una comparación entre ambos objetos matemáticos.
Argumentos	
El profesor indica que el estudiante realiza la suma sin considerar la relación de equivalencia.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 6.19 Configuración de objetos y significados del ítem 1

6.3.5.2 Análisis del ítem 2

Objetivo del ítem 2: Formular una o más hipótesis que permitan corroborar la conjetura realizada por el estudiante, esto es realizando una exhaustiva argumentación de ella.

Descripción: Se plantea una conjetura elaborada por un estudiante sobre la cual se debe decidir si ella es verdadera y bajo qué términos lo sería. Además se debe realizar un análisis de las posibles justificaciones, esto es bajo la mirada de un estudiante de primaria.

Ítem 2:

Un alumno formuló la siguiente conjetura:

"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"

a. ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?
b. ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?

Figura 6.14 Ítem 2 del cuestionario

Dificultades:

- Que el docente no pueda dilucidar si la conjetura es válida.
- No lograr elaborar una justificación basada en el uso de variables, para todo número natural.
- No deducir que se está realizando una operación utilizando la media aritmética.
- Realizar su razonamiento a partir sólo de casos particulares.

Acciones esperadas por los docentes:

Deben realizar la comprobación de la conjetura a partir de algunos casos particulares, buscando respuestas matemáticas que reafirmen o refuten la conjetura presentada.

Podrían realizar una demostración a través del método de inducción matemática.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS
Situaciones-Problemas	
Verificar si la conjetura presentada por un estudiante es correcta y analizar las justificaciones elaboradas por él.	Estudiar la validez de la conjetura, especulando sobre las justificaciones entregadas por el estudiante.
Elementos Lingüísticos	
Un alumno formula la siguiente conjetura: Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número.	Analizar si es plausible la comprobación mediante el uso de algunos casos particulares. Evaluar la obtención de una expresión general.

¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué? ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?	Evaluar las justificaciones entregadas.
Conceptos-Definición	
Construcción de términos generales. Operatoria.	Mostrar si las producciones de los estudiantes presentan robustez matemática. Concebir la importancia de formar y demostrar expresiones generales, por sobre un análisis de casos particulares.
Propiedades	
Cálculo operacional. Propiedades algebraicas.	Razonamiento basado en la división, avanzar hacia el uso de casos particulares, llegar a la construcción de una forma general.
Procedimientos	
A partir de la manipulación algebraica de casos particulares, obtener la forma general solicitada.	Verificar las conjeturas de los estudiantes, estudiando los casos óptimos y convenientes.
Argumentos	
Inicia utilizando la media y a través de la utilización de casos particulares, avanzar hacia la generalización para todo *n* natural.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 6.20 Configuración de objetos y significados del ítem 2

6.3.5.3 Análisis del ítem 3

Objetivo del ítem 3: Elaborar una estrategia de solución a un problema susceptible de ser realizado a través de la construcción de ecuaciones, o bien, en forma pictórica.

Descripción: A partir de la problemática planteada se debe construir adecuadamente una ecuación lineal, resolver y entregar el resultado correcto. También es posible concretar la solución a través de una forma pictórica.

Ítem 3:

Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro compradores distintos: Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno. Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero. Al tercero, un ternero. Al cuarto comprador le vende el último un ternero. ¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Construya ecuaciones y resuelva.

Figura 6.15 Ítem 3 del cuestionario

Dificultades:

- No extraer del problema una ecuación que permita encontrar la solución.
- Obtener una ecuación inadecuada impidiendo obtener la solución requerida.
- No recordar la operatividad para resolver ecuaciones fraccionarias.
- Considerar el total de terneros como una unidad no designando una variable para aquello.
- No conseguir una interpretación algebraica, ni pictórica.

Acciones esperadas por los docentes:

Se espera que los docentes comiencen a construir expresiones algebraicas que interpreten las acciones de cada uno de los compradores. Luego, formar una ecuación lineal de una incógnita con la información anterior. Finalmente, deben resolver la ecuación.

En caso que esto se vuelva dificultoso, se cree que realizarán un tratamiento pictórico del problema.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Construcción de una ecuación lineal. Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Desarrollo de la traducción del lenguaje natural a lenguaje algebraico.
Elementos Lingüísticos	
El aldeano vende sus terneros a cuatro compradores distintos. Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno. Al segundo, la mitad del número que le quedaban más un ternero. Al tercero, un ternero. Al cuarto, el último ternero. ¿Cuántos terneros llevó inicialmente?	Interpretación del problema a través del lenguaje algebraico. Apreciación mediante algún tipo de registro pictórico. Evaluar el conocimiento de los contenidos matemáticos inmersos en la solución del problema. Evaluar distintas estrategias que permiten la solución del problema.
Conceptos-Definición	
Lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. Reducción de términos semejantes.	Redefinir el problema planteado considerando aspectos relativos al lenguaje algebraico. Asociar cada expresión algebraica como una ecuación lineal.
Propiedades	
Propiedades algebraicas de la suma. Propiedades algebraicas del producto.	Atributos matemáticos que nos permite simplificar expresiones algebraicas.
Procedimientos	
Construcción de expresiones algebraicas por cada comprador. Conectar las expresiones considerando una ecuación lineal. Resolver la ecuación encontrada.	Elaborar la transición entre el problema planteado y las expresiones algebraicas solapadas. Formar una ecuación lineal. A través de axiomas aritméticos y propiedades algebraicas, encontrar la solución.
Argumentos	
Deducciones basadas en la utilización de propiedades algebraicas.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 6.21 Configuración de objetos y significados del ítem 3

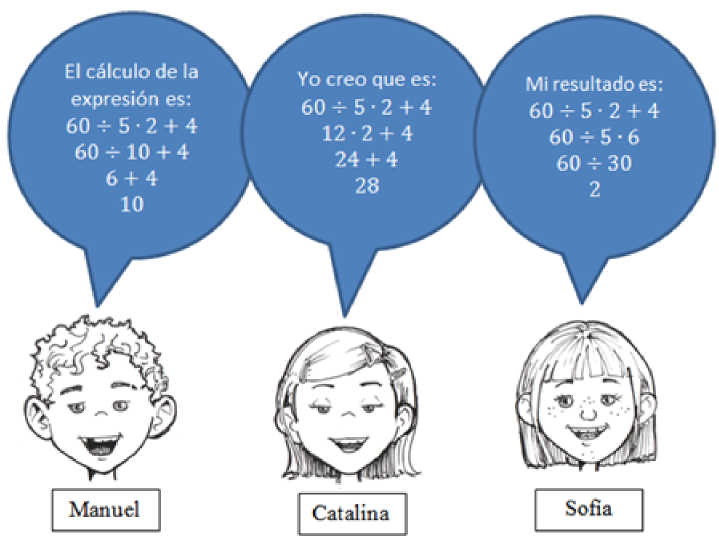
6.3.5.4 Análisis del ítem 4

Objetivo del ítem 4: Corroborar en los docentes la correcta utilización de la priorización en las operaciones analizando las respuestas entregadas por cada uno de los estudiantes.

Descripción: Se plantea una situación en la cual una profesora solicita a un grupo de tres niños que escriban y solucionen una tarea, a partir de las producciones de los niños, se debe dilucidar qué niño o niña obtuvo una buena interpretación de lo señalado por la docente, asimismo debe analizar el procedimiento de aquellos que ejecutaron la acción en forma incorrecta, reflexionando sobre las razones que llevaron a los estudiantes a una respuesta equivocada.

Ítem 4:

La profesora le indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: "*Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades, ¿cuál es el resultado?*".



Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno verificando si existe coherencia entre lo dictado por la profesora y lo realizado por cada niño

Figura 6.16 Ítem 4 del cuestionario

Dificultades:

- No conocer los aspectos relativos a la prioridad en las operaciones.
- Detectar los errores de los niños pero carecer de herramientas matemáticas para su explicación.

Acciones esperadas por los docentes:

Se espera que los docentes analicen minuciosamente la coherencia entre lo dictado por la profesora y lo escrito por los niños considerando la secuenciación de las operaciones que se deben realizar. Finaliza observando e interpretando las razones por las cuales algunas respuestas de los niños están erradas.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Prioridad y jerarquización de las operaciones matemáticas.	Desarrollo de las competencias de cálculo y prioridad en las operaciones matemáticas.
Elementos Lingüísticos	
La profesora les indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: *"Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades.* *¿Cuál es el resultado?* Analizar el procedimiento de resolución de cada alumno. Examine los errores cometidos y dar una corrección para cada caso.	Determinar el cálculo que está correctamente ejecutado. Evaluar los procedimientos realizados por cada uno de los estudiantes. Evaluar el conocimiento del contenido en relación a los estudiantes.
Conceptos-Definición	
Aritmética. Operaciones básicas. Álgebra.	Establecer la asociación entre la declaración realizada por la docente y lo desarrollado por los estudiantes.

Propiedades	
Axiomas y propiedades algebraicos. Prioridad en las operaciones.	Transformación de lenguaje natural a lenguaje aritmético y algebraico.
Procedimientos	
Construcción de la operación combinada. Cálculo de la operación.	Análisis de las producciones de los estudiantes considerando la prioridad de las operaciones, estableciendo las correcciones cuando la respuesta no sea correcta.
Argumentos	
Siguiendo las reglas de priorización de las operaciones, es posible obtener la respuesta óptima.	Justificación de las soluciones dadas

Tabla 6.22 Configuración de objetos y significados del ítem 4

6.3.5.5 Análisis del ítem 5

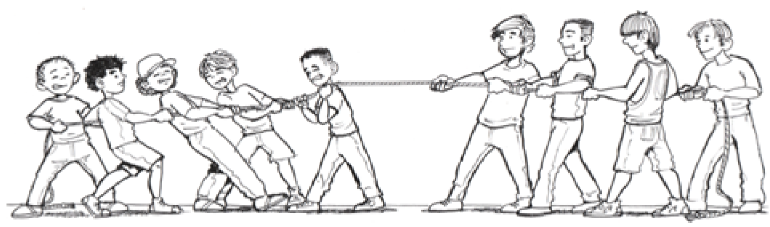
Objetivo del ítem 5: Analizar y resolver una situación cercana al medio de desenvolvimiento del niño, donde se requiera la realización de operaciones elementales de cálculo, la construcción de relaciones algebraicas y la obtención de algoritmos sencillos.

Descripción: Que los docentes puedan plantear relaciones algebraicas en dos juegos de tirar una cuerda, de tal forma que con ellas pueda dilucidar el equipo vencedor de un tercer juego. Es posible construir pequeños algoritmos que permitan verificar la solución obtenida.

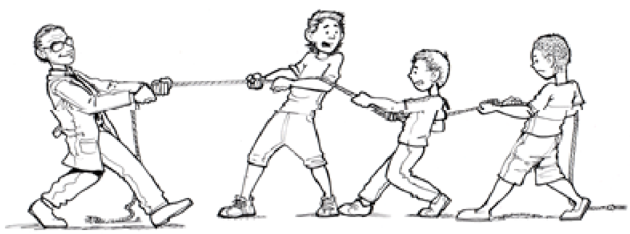
Ítem 5:

En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

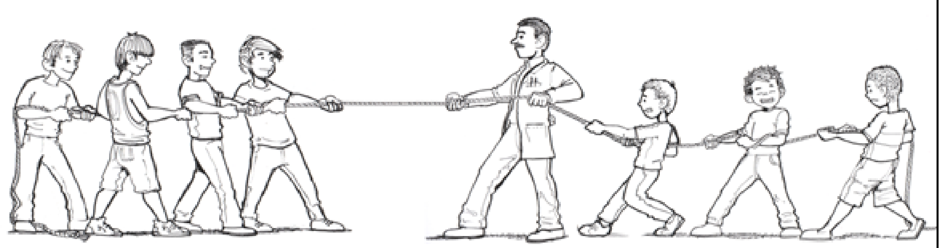
Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.



Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo "demoledores" conformado por cuatro jóvenes contra "invencibles" donde se encuentra un profesor y tres niños.



Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada.

Figura 6.17 Ítem 5 del cuestionario

Dificultades:

- No poder generar ecuaciones o relaciones algebraicas.
- No conseguir relacionar los dos primeros juegos, con el tercero que es el que se solicita solucionar.
- Carecer de la manipulación algebraica necesaria como, sustitución de variables y reducción de términos semejantes.

Acciones esperadas por los docentes:

Los docentes deben formar expresiones algebraicas o ecuaciones por cada uno de los dos primeros juegos y por aquel que se debe solucionar, vinculándose entre sí para lograr obtener el equipo vencedor.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Elaboración de sistemas de ecuaciones lineales. Solución del sistema ecuaciones de primer grado asociada.	Desarrollo de la traducción del lenguaje natural a lenguaje algebraico formando un sistema de ecuaciones lineal.
Elementos Lingüísticos	
En una jornada recreativa, se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar la cuerda. Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes. Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños. Se enfrenta el equipo “demoledores” conformado por cuatro jóvenes contra “invencibles” donde se encuentra un profesor y tres niños. Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada.	Interpretación del problema a través del lenguaje algebraico. Apreciación mediante algún tipo de registro pictórico. Evaluar el conocimiento común del contenido inmerso en la solución del problema. Evaluar y reflexionar sobre distintas estrategias que permiten la solución. Evaluar los sistemas de ecuaciones encontrados.

Conceptos-Definición	
Lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. Resolución de sistemas de ecuaciones.	Redefinir el problema planteado considerando aspectos relativos al lenguaje algebraico. Asociar cada expresión algebraica como una ecuación lineal con tres incógnitas.
Propiedades	
Propiedades de los sistemas de ecuaciones. Sistemas inconsistentes y sistemas equivalentes.	Atributos matemáticos que nos permite simplificar expresiones algebraicas.
Procedimientos	
Construcción de expresiones algebraicas por cada grupo de jugadores. Conectar las expresiones considerando una ecuación lineal. Resolver el sistema de ecuaciones encontrado.	Elaborar la transición entre el problema planteado y las expresiones algebraicas solapadas. Formar tres ecuaciones lineales. A través de axiomas aritméticos y propiedades algebraicas, encontrar la solución.
Argumentos	
Deducciones basadas en la utilización de propiedades algebraicas y referidas a los sistemas de ecuaciones.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 6.23 Configuración de objetos y significados del ítem 5

6.3.5.6 Análisis del ítem 6

Objetivo del ítem 6: Verificar la capacidad de realizar un óptimo traspaso de lenguaje natural a lenguaje algebraico que poseen los docentes en ejercicio, planteando una correcta ecuación, obteniendo el resultado correcto.

Descripción: El docente debe ser capaz de realizar una apropiada transferencia al lenguaje algebraico y obtener la solución de la ecuación obtenida.

Ítem 6:

Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva:

"*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Figura 6.18 Ítem 6 del cuestionario

Dificultades:

- Transferir inadecuadamente de lenguaje natural a lenguaje algebraico.
- Solucionar en forma incorrecta la ecuación obtenida.

Acciones esperadas por los docentes:

Los docentes deben hacer la construcción de una ecuación lineal de una incógnita a partir de lo descrito en la consigna y resolver utilizando los axiomas correspondientes.

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS
Situaciones-Problemas	
Construcción de una ecuación lineal. Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.	Desarrollo de la traducción del lenguaje escrito a ecuación.
Elementos Lingüísticos	
Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva. *"Si a un número se le suma el triple del mismo número menos cuatro unidades, resulta el número más dos"*	Realizar el tránsito entre lenguaje escrito y algebraico. Evaluar el conocimiento común del contenido. Evaluar la conversión del lenguaje natural a la construcción de una ecuación lineal.
Conceptos-Definición	
Lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. Reducción de términos semejantes.	Elaboración de una ecuación lineal a partir del lenguaje escrito.

Propiedades	
Propiedades algebraicas de la suma. Propiedades algebraicas del producto.	Atributos matemáticos que nos permite simplificar expresiones algebraicas.
Procedimientos	
Construcción de expresiones algebraicas. Resolver la ecuación encontrada.	Realizar la transferencia entre el lenguaje escrito y la ecuación a formar. A través de axiomas aritméticos y propiedades algebraicas, encontrar la solución.
Argumentos	
Deducciones basadas en la utilización de propiedades algebraicas.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 6.24 Configuración de objetos y significados del ítem 6

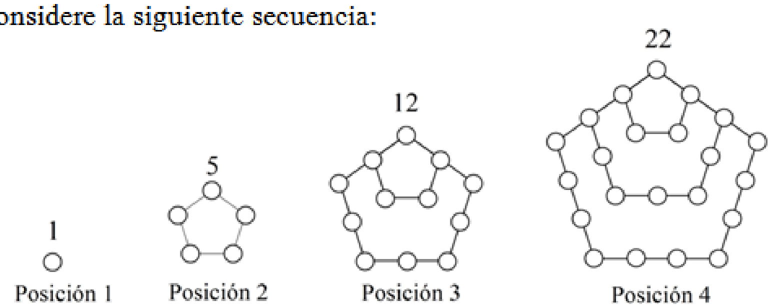
6.3.5.7 Análisis del ítem 7

Objetivo del ítem 7: Reconocer y aplicar procedimientos que permitan llegar a la obtención general de una expresión algebraica a partir de elementos particulares.

Descripción: A través de la entrega de la cantidad de círculos desde la primera a la cuarta posición, los docentes deben obtener la cantidad de ellos desde la quinta a la octava posición. Con lo anterior descubrir la forma n-ésima de los números pentagonales.

Ítem 7:

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.

b. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.

Figura 6.19 Ítem 7 del cuestionario

Dificultades:

- No encontrar la cantidad de círculos en las posiciones desde la quinta a la octava.
- No obtener un patrón para la secuencia numérica.
- No descubrir la forma n-ésima de los números pentagonales.

Acciones esperadas por los docentes:

A partir de la cantidad de círculos que se encuentran en las posiciones desde la primera a la cuarta, se deben encontrar el número de ellos en las posiciones desde la quinta a la octava (35, 51, 70 y 92 círculos respectivamente). A partir de este trabajo preliminar, obtener un patrón que permita generar la forma n-ésima de los números pentagonales.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Determinar una expresión general a partir de casos particulares. Inferir conceptos matemáticos que se deducen en el problema.	Reflexión, comprensión y deducción de un término general y conceptos matemáticos asociados.
Elementos Lingüísticos	
Considerando una secuencia pictórica: Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.	Mediante un arreglo se busca la construcción de una expresión general. Determinar el número de círculos usando la expresión general encontrada. Evaluar la generación de una expresión n-ésima. Evaluar si es posible incorporar conceptos matemáticos a través del problema. Si es posible, señalar cuales son estos conceptos.
Conceptos-Definición	
Expresiones generales. Utilización del elemento n-ésimo. Sucesión.	Construir una expresión general acreditando su veracidad a través de casos particulares hasta demostrar la expresión obtenida.

Propiedades	
Propiedades de las sucesiones. Significado de sucesiones acotadas, convergentes y divergentes. Propiedades de números pentagonales.	Representación de una expresión general y relaciones matemáticas con tópicos afines.
Procedimientos	
Realización de una formulación con un *n* pequeño hasta el uso términos mayores. Inferir un término general y utilizar para la obtención de círculos. Deducir conceptos matemáticos insertados en el problema.	Enumeración de casos a partir de un espacio muestral creciente hasta la obtención del término n-ésimo obteniendo conceptos matemáticos asociados.
Argumentos	
Deducciones basadas en la utilización de expresiones y términos algebraicos.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 6.25 Configuración de objetos y significados del ítem 7

6.3.5.8 Análisis del ítem 8

Objetivo del ítem 8: Analizar la pertinencia de una actividad matemática introductoria del concepto de ecuación de primer grado con una incógnita que se encuentra en un texto de estudio de sexto año de enseñanza básica utilizado a nivel nacional.

Descripción: Considerando una actividad inicial para el tratamiento de ecuaciones de primer grado en un nivel de sexto año de enseñanza básica, los docentes deben realizar una fundamentación y análisis didáctico-matemático para que los autores la consideren como una excelente actividad introductoria de aquel tópico matemático.

Ítem 8:

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120)

Para compartir con tus compañeros e incentivar una colación saludable puedes realizar un pícnic al aire libre.

- Para responder la pregunta, completa con la cantidad de estudiantes según corresponda. Considera que x representa el número de estudiantes que se reunirán en el tercer grupo.

- En el tercer grupo se reunirán ☐ estudiantes.

¿Cuál cree usted que es la justificación para que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?

Figura 6.20 Ítem 8 del cuestionario

Dificultades:

- Que relativice la trascendencia de utilizar una actividad cercana y realizable por los niños como una forma de introducir un concepto matemático.
- Uso de la mecanización algebraica como elemento principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Acciones esperadas por los docentes:

Que analice la actividad propuesta como un elemento importante para la introducción del concepto de ecuación de primer grado, realizando un juicio crítico de los aspectos didácticos-matemáticos encontrados en él.

TIPOS DE OBJETOS	**SIGNIFICADOS**
Situaciones-Problemas	
Valorar una actividad propuesta en un texto de estudio.	Reflexión, comprensión y análisis de la propuesta para introducir el concepto de ecuación a alumnos de sexto año de enseñanza básica.
Elementos Lingüísticos	
Considerando la ilustración de una actividad matemática para comenzar a introducir el trabajo de ecuaciones para un sexto año de enseñanza básica. ¿Cuál cree usted que es la justificación para que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?	Evaluar la actividad matemática presentada en el texto de estudio. Argumentar la importancia de utilizar esta actividad.
Conceptos-Definición	
Ecuaciones lineales.	Pertinencia de la utilización de esta actividad.
Propiedades	
Idoneidad de la propuesta.	Beneficios de la utilización de actividades cercanas y realizables en la cotidianidad.
Procedimientos	
Análisis y justificación de la utilización de la actividad.	Verificación del cumplimiento del objetivo plateado por los autores.
Argumentos	
Se debe testear y pilotear la actividad para ver su comportamiento con un grupo de estudiantes.	Justificación de las soluciones dadas.

Tabla 6.26 Configuración de objetos y significados del ítem 8

CAPÍTULO 7: EVALUACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS SOBRE EL ÁLGEBRA DE LOS PROFESORES EN EJERCICIO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

7.1 Presentación

Cuando se considera realizar una evaluación, ella debe pasar por diferentes etapas; desde el planteamiento de objetivos, diseño de instrumentos, criterios de evaluación, planificación de la aplicación de la evaluación, corrección, interpretación de resultados, devolución y diseño de estrategias para corregir las áreas con mayores dificultades.

En definitiva, todas las fases o procesos son indispensables para llevar a cabo una evaluación adecuadamente donde aporte resultados objetivos, válidos y confiables. Cuando pensamos en los objetivos planteados al inicio de cada proceso evaluativo, las fases de devolución y elaboración de estrategias pedagógicas para facilitar mejoras, cobran vital importancia. El conocer si un docente posee un nivel suficiente en aspectos didácticos-matemáticos, no aporta en sí mismos una mejora en su desempeño si no se acompaña de estrategias, capacitaciones y planes formativos en aquellos criterios donde se evidenciaron puntos débiles.

A diferencia de décadas pasadas donde bastaba la formación profesional, en la actualidad, los docentes en general requieren participar de cursos de especialización y perfeccionamiento pedagógico, debido a que están sometidos competencias y exigencias que requieren habilidades cognitivas, físicas, sociales y emocionales cada vez más altas (Martínez, 2016).

Para la UNESCO (2013), las acciones que emprende un país que busca la mejora del sistema educativo, deben estar centradas en los docentes como primera línea dentro del plan de inversión y desarrollo. Específicamente, esta organización considera que reclutar, preparar y mantener buenos docentes, se traduce en enriquecer las prácticas educativas, alcance de un rendimiento pleno de la institución educativa, y garantía del aprendizaje por parte del estudiante. Bajo esta aseveración, el docente ejerce una influencia significativa sobre el proceso educativo de los estudiantes; y reflejan en ellos, sus competencias, habilidades, métodos y calidad de su quehacer profesional. Pudiera percibirse como una afirmación reduccionista sobre la educación básica y su éxito; si bien es cierto que se concibe como un fenómeno multivariado, el docente es uno de los elementos que mantiene una relación más directa e importante con respecto a los resultados.

Mediante este planteamiento multifactorial, el desempeño profesional docente se complejiza aún más. Diversos estudios han demostrado que el desempeño profesional de un profesor depende en gran medida del ambiente institucional dentro del cual se desempeña (Fullan, 2000). El docente solo corresponde a la figura de individuo dentro de un gran sistema educativo que según su manera de funcionar, incide directamente sobre su labor profesional. Un ambiente profesional riguroso, invita al docente a prepararse y formarse para obtener un mejor desempeño y poder mantener un alto nivel de exigencia en la elaboración y ejecución de sus sesiones de clases; por el contrario, sistemas educativos poco estructurados y escasamente demandantes, facilitan una labor docente poco especializada, escasamente innovadora y de baja crítica y calidad.

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos en la aplicación de la versión final del cuestionario para evaluar los Conocimientos Didáctico-Matemáticos que poseen 121 profesores de educación básica respecto a la enseñanza del álgebra.

El instrumento en su versión final contiene: un apartado para los datos descriptivos de cada sujeto, siete preguntas referentes a los cambios curriculares y 8 ítems. Debemos considerar que esta investigación es de tipo exploratorio, siendo su enfoque mixto puesto que se consideran análisis de variables cuantitativas y cualitativas.

7.2 Descripción de los participantes

La versión final del cuestionario fue aplicada a 121 profesores de educación primaria que se encuentran realizando sus clases en alguno de los seis primeros niveles de educación básica en Chile.

7.3 Procedimiento utilizado.

Para la recolección de los datos, se ha utilizado la versión final del cuestionario que permite evaluar los Conocimientos Didácticos-Matemáticos del profesor en ejercicio de enseñanza básica para enseñar álgebra.

La recogida de los datos estuvo a cargo del investigador a cargo de esta tesis, esto fue realizado en distintos puntos de las regiones de Valparaíso, Metropolitana y O'Higgins en Chile.

- 32 docentes pertenecen a ciudades del Valle de Aconcagua (San Felipe, Calle Larga, Los Andes) y Región Metropolitana (Santiago; Colina).
- 35 son profesores que trabajan en el Gran Valparaíso (Viña del Mar; Quilpué; Valparaíso).
- 28 docentes de las Provincias de Quillota y Petorca (Quillota; La Calera; La Cruz; Nogales; Cabildo).
- 26 profesores pertenecientes a la Región de O'Higgins (Rancagua; San Vicente de Tagua Tagua).

Se logró reunir un total de 121 docentes de educación general básica que realizan clases en los niveles de primero a sexto año. Los establecimientos a los que pertenecen son de dependencia municipal, particular subvencionada y particular pagada de sectores rurales y urbanos de las regiones de Valparaíso, O'Higgins y Metropolitana.

Una vez congregados, se explicó que el propósito de la aplicación del cuestionario es sólo para fines académicos e investigativos. Se les indicó que es un instrumento confidencial y que sus respuestas no sufrirían filtraciones entre los mismos participantes, ni con las autoridades de sus respectivas instituciones. Se les entregó un consentimiento de confidencialidad para que ellos plasmaran su intención voluntaria de participar, este documento se firma en dos copias por ambas partes (investigador y docente), quedando un documento con cada uno de los interesados. Una vez finalizado este procedimiento, se les proporcionó una copia a cada docente del cuestionario y se leyó en voz alta las instrucciones poniendo hincapié en que las respuestas deben ser claras y contestadas en forma individual utilizando sólo lápiz negro o azul. Se indicó que deben considerar un máximo de cinco minutos por cada uno de los ítems, argumentando lo que el docente haría o diría en cada situación planteada y que respondan todas o en su defecto, la mayoría de las preguntas propuestas. Tuvieron un tiempo máximo de una hora y treinta minutos para dar respuesta a la totalidad del instrumento.

Una vez que se reunieron todos los instrumentos, se examinaron los ítems, codificaron las respuestas y transcribiéndolas a una planilla. Para el análisis de los datos se utilizó el programa estadístico informático SPSS en su versión 21.

7.4 Análisis de los resultados generales

Se presentan los análisis de los resultados obtenidos luego de la aplicación del cuestionario para evaluar los conocimientos didácticos matemáticos contestados por 121 profesores de educación primaria. Se analizaron 18 variables, donde los análisis estadísticos consistieron en el cálculo de estadísticas de centralidad, posición, variación y forma; gráficas de caja, tallo y hoja, e histograma. También se aplicaron los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wills, esto es para verificar la hipótesis de normalidad, además de la prueba de Levene para probar la homogeneidad de varianzas. Para probar la hipótesis de igualdad de medias de aplicó el Tests F (ANOVA) para más de dos categorías, o la prueba T de Student para solo dos categorías, y el test no paramétrico de Kruskal Wallis o la prueba de Mann Whitney. Para probar la fiabilidad del instrumento se aplicó el Alfa de Cronbach. Finalmente se analizó el índice de dificultad de los ítems y el índice de discriminación.

7.4.1 Análisis de la puntuación total del cuestionario

Una vez reunidos todos los instrumentos, se procedió a categorizar las respuestas entregadas por los 121 profesores de educación primaria, esto según el grado de corrección. Se asignaron las siguientes puntuaciones: “2” si la respuesta es correcta, “1” si la respuesta está incompleta y “0” si la respuesta es incorrecta o no es contestada. El puntaje máximo del cuestionario fue de 22 puntos.

En el resumen estadístico (tabla 7.1), se puede observar que de los 121 sujetos, no hubo ningún profesor que haya realizado correctamente todo el instrumento. El puntaje máximo fue de 21 puntos y el mínimo de 1, el 50% de los docentes obtuvo a lo más 8 puntos. La media del puntaje total fue de 8,40 con una variabilidad de 3,868 puntos. Finalmente podemos observar que el 25% de ellos logró a lo más 6 puntos y el 75% de ellos consiguieron a lo más 11 puntos.

	Estadísticos	Error Típico
Total *n*	121	
Media	8,40	0,352
Mediana	8	
Moda	8	
Desviación Típica	3,868	
Varianza	14,960	
Asimetría	0,588	0,220
Curtosis	0,603	0,437
Mínimo	1	
Máximo	21	
Rango	20	
Percentiles		
25	6,00	
50	8,00	
75	11,00	

Tabla 7.1 Estadísticos descriptivos de las puntuaciones totales

El gráfico de cajón con bigotes muestra dos datos atípicos que se encuentran en la posición 33 y 96 de la base de datos. El rango del cuartil es de 5 puntos. Además es observable que la amplitud de los bigotes inferior y superior es 5 y 10 puntos respectivamente. La media supera a la mediana en 0,4 puntos, sin embargo, la media coincide con la moda o puntaje con mayor frecuencia.

Además se observa que la parte superior de la caja es mayor que la inferior, esto sugiere que las puntuaciones que se encuentran entre el 50% y 75% de la población, está más dispersa que aquellos que se encuentran entre el 25% y el 50%.

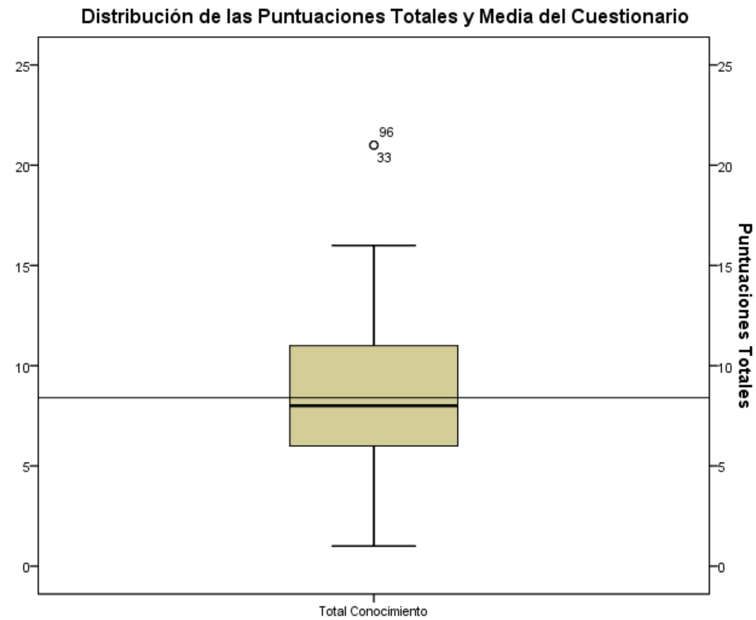


Figura 7.1 Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media del cuestionario.

Para visualizar en forma simultanea la distribución de frecuencias de las variables en forma conjunta con su representación gráfica, utilizaremos en gráfico de Tallo y Hoja.

```
Frecuencia    Tallo &  Hola

    2           1 .  00
    2           2 .  00
    8           3 .  00000000
    8           4 .  00000000
    8           5 .  00000000
   12           6 .  000000000000
   10           7 .  0000000000
   20           8 .  00000000000000000000
    8           9 .  00000000
    6          10 .  000000
   13          11 .  0000000000000
    8          12 .  00000000
    4          13 .  0000
    6          14 .  000000
               15 .
    4          16 .  0000
    2    Extremos    (>=21,0)

Ancho del Tallo:        1
Cada hoja:       1 case(s)
```

Figura 7.2 Distribución de las puntuaciones totales a través de la Gráfica de Tallo y Hoja

Este gráfico muestra una frecuencia de 20 profesores en 8 puntos, donde sólo dos de ellos obtuvieron 21 puntos, los cuales son considerados como puntos extremos.

El gráfico histograma de frecuencia (figura 7.3) presenta una distribución asimétrica con sesgo positivo, es decir la mayoría de los profesores presentaron puntajes bajo los 8 puntos que corresponden a la mediana.

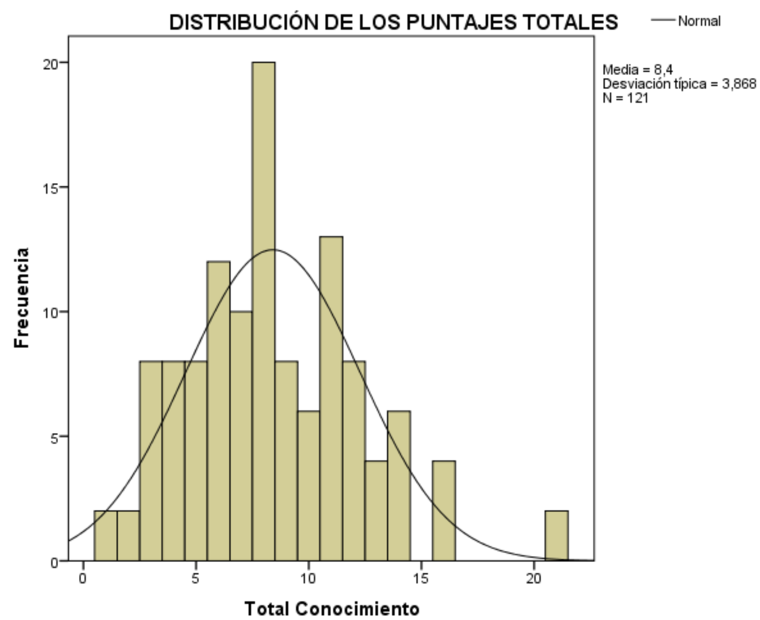


Figura 7.3 Puntuaciones totales

Además en el histograma se evidencia que las puntuaciones totales están concentradas mayoritariamente en la puntuación 8,40 con una desviación típica de 3,868 puntos.

La prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk indican que la distribución de los puntajes totales no es normal, se evidencia que el valor *p* es menor a 0,01.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Total	0,120	121	0,000	0,968	121	0,006

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.2 Prueba de normalidad para las puntuaciones totales

La tabla 7.3 muestra las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los profesores que accedieron a contestar el cuestionario. Todos los docentes obtuvieron al menos un punto, en este caso dos docentes alcanzaron la puntuación mínima de 1. La mayoría tiene a lo más 16 puntos, sin embargo, hay dos docentes que se escaparon a esta tendencia quienes tienen un máximo de 21 puntos de un máximo de 22.

Puntajes totales	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
1	2	1,65	1,65
2	2	1,65	3,30
3	8	6,61	9,91
4	8	6,61	16,52
5	8	6,61	23,13
6	12	9,92	33,05
7	10	8,26	41,31
8	20	16,53	57,84
9	8	6,61	64,45
10	6	4,96	69,41
11	13	10,75	80,16
12	8	6,61	86,77
13	4	3,31	90,08
14	6	4,96	95,04
15	0	0	95,04
16	4	3,31	98,35
17	0	0	98,35
18	0	0	98,35
19	0	0	98,35
20	0	0	98,35
21	2	1,65	100
22	0	0	100
Total	121	100	

Tabla 7.3 Frecuencia y porcentaje de las puntuaciones totales del cuestionario

7.4.2 Validez del contenido del cuestionario

Considerando el análisis a priori realizado en el capítulo 6 (6.3.5 Análisis a priori del cuestionario), es posible corroborar que el instrumento en su versión final presenta una validez de contenido. Muñiz (2010) indica que para el estudio de validez de contenido se debe probar que el instrumento constituye una muestra adecuada y representativa de todos los contenidos que con él se pretenden evaluar. Esto queda en evidencia en el punto 6.3.1 Construcción de la versión inicial del cuestionario, allí se muestra que los contenidos a evaluar están considerados en todo el instrumento.

En esta misma línea Lacave, Molina, Fernández y Redondo (2015), concluyen que es recomendable realizar un juicio de expertos para medir la validez y verificar el grado de comprensión de las preguntas con que consta el cuestionario. Esto se realizó íntegramente dentro del capítulo 6 de esta tesis (6.3.3 Revisión del instrumento mediante juicio de expertos y aplicación de piloto).

Por lo anterior, a través de la aplicación del juicio de expertos, más la evidencia que los ítems del cuestionario cubren todos los contendidos previamente seleccionados, es posible asegurar la validez del contenido del instrumento.

7.4.3 Análisis de fiabilidad del cuestionario

Como se ha indicado con anterioridad, el cuestionario permite evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el álgebra, esto es a través de las respuestas que entregan los docentes a los 8 ítems que lo conforman.

La tabla 7.4 muestra que el *Alfa de Cronbach* presenta una buena confiabilidad para las puntuaciones totales obtenidas en los ocho ítems que realizaron los 121 docentes. Se tiene un $\propto = 0{,}798$ lo cual sugiere una fuerte correlación entre los ítems.

Alfa de Cronbach	Número de Elementos
0,798	11

Tabla 7.4 Estadístico de confiabilidad Alfa de Cronbach

7.4.4 Análisis del índice de dificultad de los ítems

El índice de dificultad tomará valores entre 0 y 1, donde cero indica que el ítem o subítem tiene un alto grado de dificultad, por el contrario el valor 1 advierte que tiene un máximo grado de facilidad. Los índices de dificultad media son los que mejor discriminan. Para el cálculo del índice de dificultad clasificamos en respuestas correctas e incorrectas, las respuestas en blanco no se consideraron.

Ítem		Índice de dificultad	Porcentajes
1	a)	0,050	5,0
	b)	0,084	8,4
2	a)	0,210	21,0
	b)	0,159	15,9
3		0,204	20,4
4		0,623	62,3
5		0,358	35,8
6		0,726	72,6
7	a)	0,573	57,3
	b)	0,217	21,7
8		0,295	29,5

Tabla 7.5 Índice de dificultad de los ítems del cuestionario

Además a través de la tabla se puede observar que la dificultad del instrumento es bastante heterogénea, está compuesto por ítems y subítems que están en un amplio rango de dificultad, hay algunos muy sencillos y otros con un alto grado de complejidad.

Ítem		Conocimiento didáctico-matemático evaluado	Comentario
1	a)	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes	Este subítem resultó muy complejo para los profesores.
	b)	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes	Este subítem resultó muy complejo para los profesores.
2	a)	Conocimiento ampliado del contenido	Este subítem presentó una dificultad moderada para los profesores.
	b)	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes	Este subítem resultó muy complejo para los profesores.
3		Conocimiento común del contenido	Este ítem presentó una dificultad moderada para los profesores.
4		Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes	Este ítem ha presentado un escaso nivel de dificultad para los profesores.
5		Conocimiento común del contenido	Este ítem presentó una dificultad moderada para los profesores.
6		Conocimiento común del contenido	Este ítem ha presentado un escaso nivel de dificultad para los profesores.
7	a)	Conocimiento común del contenido	Este subítem ha presentado un escaso nivel de dificultad para los profesores.
	b)	Conocimiento ampliado del contenido	Este subítem presentó una dificultad moderada para los profesores.
8		Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza	Este ítem presentó una dificultad moderada para los profesores.

Tabla 7.6 Dificultad de los ítems y subítems del cuestionario considerando el conocimiento didáctico-matemático evaluado

En la tabla 7.6 es posible notar que el subítems que presenta una mayor dificultad para los docentes es el 1a) que mide el *conocimiento del contenido en relación con los estudiantes* (Figura 7.4) y el que presenta un menor grado de dificultad es el ítem 6 (Figura 7.5).

Ítem 1:

Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica):

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \_\_ + 5$$

Un alumno responde que el número es 12.

a. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.

Figura 7.4 Subítem que presenta la mayor dificultad en el cuestionario

Ítem 6:

Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva:

"*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Figura 7.5 Ítem que presenta la menor dificultad en el cuestionario

En tabla 7.7 se observa el resumen estadístico de los índices de dificultad, allí se muestra que el promedio de aciertos en los 8 ítems es de 0,318 con una variabilidad de 0,227. Por otra parte, en el histograma (figura 7.6) presenta una distribución asimétrica positiva, es decir la mayoría de los ítems y subítems fueron menores a la mediana.

	Estadísticos	Error Típico
Total *n*	11	
Media	0,318	0,0683
Mediana	0,217	
Moda	0,05	
Desviación Típica	0,22657	
Varianza	0,051	
Asimetría	0,766	0,661
Curtosis	-0,704	1,279
Mínimo	0,05	
Máximo	0,726	
Rango	0,676	
Percentiles		
25	0,159	
50	0,217	
75	0,573	

Tabla 7.7 Estadísticos descriptivos de los índices de dificultad

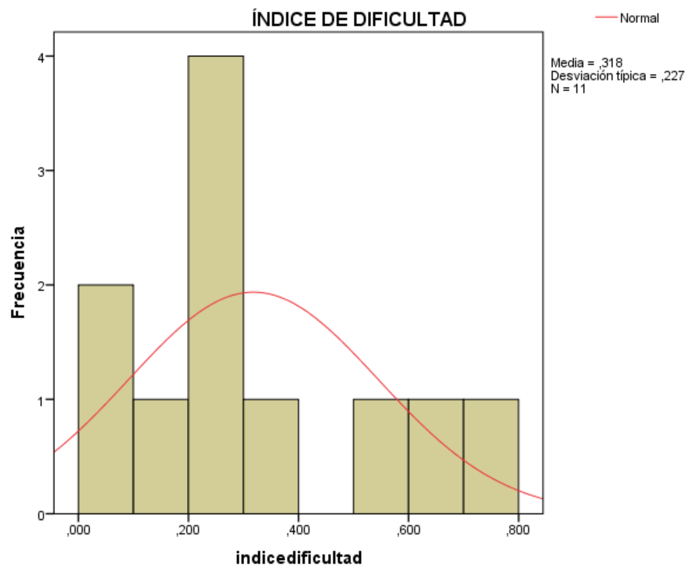


Figura 7.6 Histograma de los índices de dificultad

La prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov y Shapiro-Wilk, establecen que la distribución de los ítems no es normal, se evidencia que el valor *p* es menor a 0,01.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Total	0,120	121	0,000	0,968	121	0,006

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.8 Prueba de normalidad para las puntuaciones totales

El gráfico de cajón con bigotes no muestra datos atípicos, el rango del cuartil es de 0,414. La media es superada por la mediana en 1,101. El bigote superior tiene una distancia de 0,153 el cual supera al bigote inferior que es de 0,109. La parte superior de la caja es ostensiblemente mayor que parte inferior, esto sugiere que las puntuaciones que se encuentran entre el 50% y 75% de la población están más dispersas que aquellos que se encuentran entre el 25% y el 50%. Además es observable que la distribución de los datos tiene una mayor concentración en los índices de dificultad bajos, lo que evidencia que el cuestionario resultó bastante difícil para los docentes.

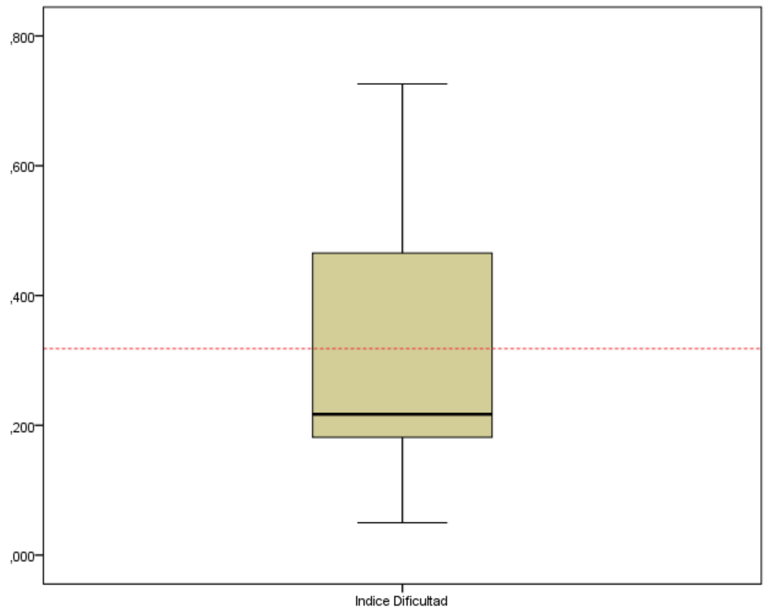


Figura 7.7 Gráfico de cajón y bigote del índice de dificultad en el cuestionario

7.4.5 Análisis del índice de discriminación de los ítems

Considerando que el instrumento está conformado por ítems y subítems que están referidos a diferentes elementos del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra, es que se ha aplicado un índice de discriminación, esto describe como ha funcionado una pregunta en una situación dada, un índice bajo en discriminación pueden estar indicando que esos ítems miden algo distínto que los otros, es decir, colabora a la homogeneidad y consistencia interna del cuestionario (Morales, 2007).

Las tablas numeradas de 7.9 al 7.12 muestran que existe una correlación lineal y fuerte entre todos los ítems y subítems, esto indica que el conocimiento del contenido en relación a los estudiantes; conocimiento ampliado; conocimiento común del contenido y el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza presentan un muy buen índice de discriminación, es decir, cada uno de ellos permite contribuir de forma adecuada a diferenciar entre aquellos sujetos que han obtenido una elevada puntuación en el cuestionario y aquellos cuya puntuación ha sido baja.

Conocimiento común del contenido	
Ítem y Subítem	**Correlación de Pearson**
3	0,720**
5	0,558**
6	0,511**
7 a)	0,662**
**La correlación es significativa al 0,01	

Tabla 7.9 Correlación de Pearson respecto al conocimiento común del contenido

Conocimiento ampliado del contenido	
Subítem	**Correlación de Pearson**
2 a)	0,428**
7 b)	0,670**
**La correlación es significativa al 0,01	

Tabla 7.10 Correlación de Pearson respecto al conocimiento ampliado del contenido

Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes	
Ítem y Subítem	**Correlación de Pearson**
1 a)	0,233*
1 b)	0,411**
2 b)	0,392**
4	0,301**
* La correlación es significativa al 0,05 **La correlación es significativa al 0,01	

Tabla 7.11 Correlación de Pearson respecto al conocimiento del contenido en relación al estudiante

Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza	
Ítem	**Correlación de Pearson**
8	0,360**
**La correlación es significativa al 0,01	

Tabla 7.12 Correlación de Pearson respecto al conocimiento en relación con la enseñanza

7.4.6 Análisis de los resultados generales considerando las características de los sujetos

En esta sección se muestran los resultados luego de la utilización de análisis de varianza ANOVA con un factor, lo que buscará explicar el efecto el efecto de una variable independiente sobre la variable dependiente, es decir, estudiamos la posible dependencia de las puntuaciones totales obtenidas en el cuestionario para evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza del álgebra en los primeros años de escolaridad, respecto a las variables:

- Género: Masculino; Femenino.
- Especialidad: Docentes con especialidad matemática; Sin especialidad matemática; Con otra especialidad distinta a matemática.
- Años de Experiencia: Menos de dos años de experiencia laboral; Experiencia entre 2 y 4 años inclusive; Con más de cuatro años de experiencia laboral.
- Dependencia del Establecimiento: Municipal; Particular Subvencionado; Particular Pagado.
- Sector: Localización en que se encuentra la institución escolar, Rural; Urbano.
- Curso en que realiza su labor profesional: Si los docentes realizan sus clases en Primer Año; Segundo Año; Tercer Año; Cuarto Año; Quinto Año; Sexto Año; Multigrado.

Estos datos fueron obtenidos a través de la categoría datos descriptivos, numerados desde el 1 hasta el 9 en el cuestionario en su versión final.

7.4.6.1 Efecto de la variable *Género* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la variable *GÉNERO* observamos cómo se comportan las puntuaciones totales respecto a las variables Masculino y Femenino. En el gráfico de caja y bigotes (figura 7.8) se nota que el género masculino obtuvo una diferencia que supera al femenino, sin embargo, el género Femenino obtuvo dos puntos extremos y su máximo puntaje supera al género masculino. Además en la gráfica se evidencia que el género masculino presenta una ligera mayor puntuación que el correspondiente al género femenino, sin embargo, las dos puntuaciones que tuvieron un 95% de respuestas correctas en el cuestionario son del género femenino.

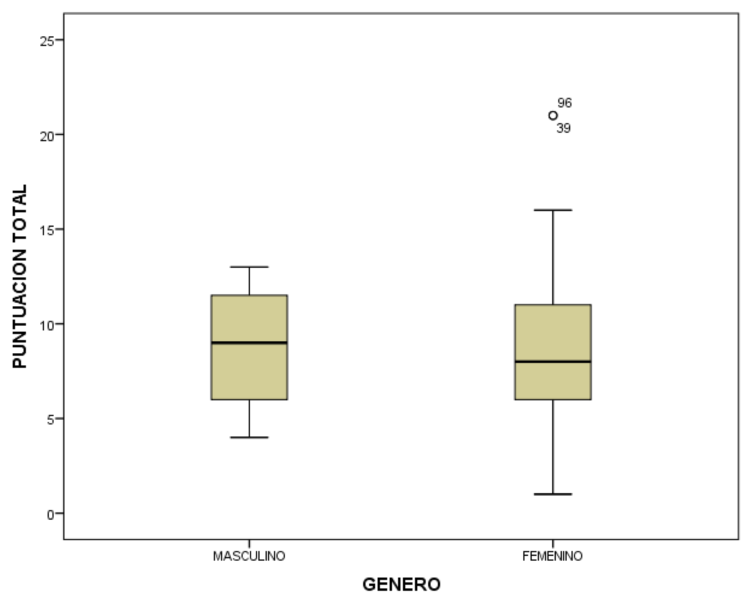


Figura 7.8 Gráfico de cajón y bigote que muestra las puntuaciones de *GÉNERO* en relación al Conocimiento Didáctico-Matemático respecto al álgebra

En la tabla 7.13 se puede observar que en el género masculino la media de los puntajes es de 8,75 puntos con una variabilidad de 3,495 puntos. Además existe un 95% de confianza que la media verdadera entre 5,83 y 11,67 puntos en el género masculino. Finalmente podemos percibir que la amplitud de los intervalos de media es de 5,84 y 1,46 en el género masculino y femenino respectivamente.

Género	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Masculino	8	8,75	3,495	1,236	5,83	11,67	4	13
Femenino	113	8,38	3,906	0,367	7,65	9,11	1	21
Total	121	8,40	3,868	0,352	7,71	9,10	1	21

Tabla 7.13 Estadísticos de la variable *GÉNERO* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Respecto a las pruebas de normalidad se aprecia que el género masculino la distribución de los puntajes totales es normal, es decir, valor *p* mayor a 0,05, sin embargo, en el género femenino esta distribución normal no se obtiene, valor *p* menor a 0,01.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Masculino	0,165	8	0,200	0,987	8	0,269
Femenino	0,123	113	0,000	0,965	113	0,005

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.14 Prueba de normalidad para la variable *GÉNERO* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Respecto a prueba de igualdad de varianza se puede observar que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,130	0,719

Tabla 7.15 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *GÉNERO* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba T de Student de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico T-Student	Sig.
0,260	0,795

Tabla 7.16 Estadístico de T-Student para igualdad de medias para la variable *GÉNERO* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba U de Mann-Whitney, que es un estadístico no paramétrico de igualdad de medias se puede observar que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico U	Sig.
408,0	0,645

Tabla 7.17 Estadístico U para para la variable *GÉNERO* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

7.4.6.2 Efecto de la variable *Especialidad* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Respecto a la variable *ESPECIALIDAD* se percibe cómo se comportan las puntuaciones totales respecto a las variables docentes *con especialidad*, *sin especialidad* y con *otra especialidad*. En el gráfico de caja y bigotes se aprecia que las medianas de los puntajes de las tres especialidades son iguales, además aquella variable denominada *con especialidad* presenta dos puntajes extremos superiores, estos son más distantes que los que se observan en la variable *otra especialidad*.

Además en la figura 7.9 es posible advertir que la puntuación más baja la obtienen aquellos docentes que poseen *otra especialidad distinta a la matemática*, sin embargo, es destacable que a pesar que las medias de las categorías *con especialidad* y *sin especialidad matemática* son muy similares, presenta una ligera superioridad aquellas puntuaciones de los docentes que no poseen especialidad matemática.

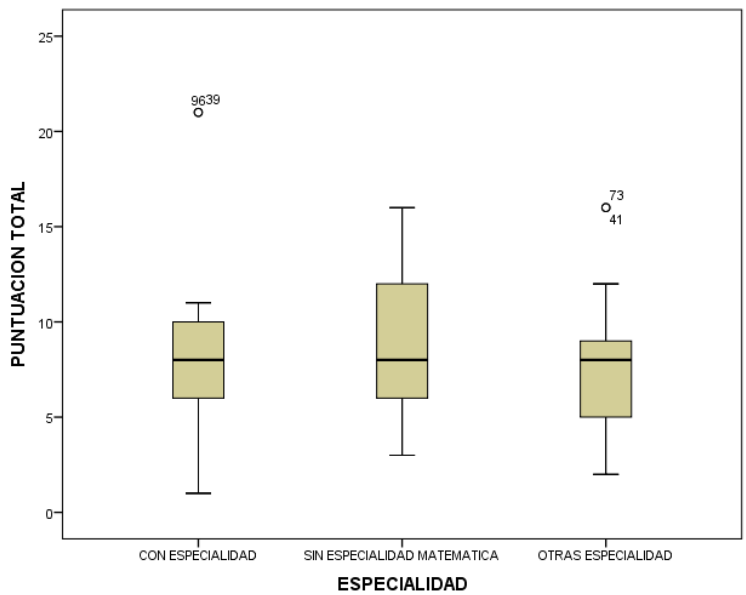


Figura 7.9 Gráfico de cajón y bigote que muestra las puntuaciones de ESPECIALIDAD en relación al Conocimiento Didáctico-Matemático respecto al álgebra

En la tabla 7.18 se puede notar que la media de la variable *sin especialidad* supera a las medias *con especialidad* y *otra especialidad*. Sin embargo, aquella denominada *con especialidad* es más alta la variabilidad de los puntajes totales en comparación con las otras especialidades. Considerando el 95% de confianza para la media de los puntajes totales la amplitud mayor la obtuvo la variable *con especialidad*, posee una amplitud igual a 3,33.

Especialidad Matemática	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Con especialidad	31	8,23	4,529	0,813	6,56	9,89	1	21
Sin especialidad	62	8,81	3,561	0,452	7,90	9,71	3	16
Otra especialidad	28	7,71	3,76	0,711	6,26	9,17	2	16
Total	121	8,40	3,868	0,352	7,71	9,10	1	21

Tabla 7.18 Estadísticos de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la tabla 7.19 se muestran las pruebas de normalidad de los puntajes totales en las tres especialidades, se puede advertir que ninguna que las variables *con especialidad* y *sin especialidad* son normales, valor *p* menor a 0,05. La variable *otra* especialidad tiene una distribución normal.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Con especialidad	0,206	31	0,002	0,873	31	0,002
Sin especialidad	0,138	62	0,005	0,949	62	0,012
Otra especialidad	0,152	28	0,097	0,944	28	0,138

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.19 Prueba de normalidad para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

El estadístico de Levene permite contrastar la hipótesis de igualdad de varianzas poblacionales, es una la prueba de igualdad de varianza, se puede inferir que las varianzas de los puntajes totales de las tres variables de *especialidad* son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,070	0,933

Tabla 7.20 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede apreciar que las medias de los puntajes en las tres especialidades son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	24,346	2	12,173	0,811	0,447
Intra-grupos	1770,811	118	15,007		
Total	1795,157	120			

Tabla 7.21 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella nos percatamos que las medianas de los puntajes de las tres especialidades son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
1,835	0,400

Tabla 7.22 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la igualdad de medianas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

7.4.6.3 Efecto de la variable *Años de Experiencia* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Considerando la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* se observa cómo se comportan las puntuaciones totales respecto a las variables *menos de dos años* de experiencia; *entre dos y cuatro años* inclusive y *más de cuatro años de experiencia laboral*. En el gráfico de caja y bigotes (Figura 7.10) se nota que las medianas de los puntajes en la variable *entre 2 y cuatro años de experiencia (inclusive)* es levemente mayor a la variable *más de cuatro años*. Por otra parte, la variable *con menos de dos años de experiencia laboral* la puntuación total es igual al 75% y es igual al máximo del puntaje. La longitud de la caja es menor en comparación a las otras dos cajas, es decir, la variabilidad de los puntajes totales en *menos de dos* años es menor comparado a los otros dos tramos de años de experiencia, sin embargo, existen dos datos atípicos en el extremo superior de los puntajes totales. También en el gráfico de caja y bigote se considera que las puntuaciones de los docentes que tienen entre *dos y cuatro años de experiencia laboral* es menor a las variables *menos de dos años* y *más de cuatro años*, sin embargo, respecto a estas dos últimas, a pesar que sus puntuaciones son muy similares, presenta un ligero aumento aquella que categorizó a los docentes que poseen una mayor experiencia en el campo laboral. Los dos puntajes escapados, que obtuvieron 21 puntos de un máximo de 22, pertenecen a la categoría de los nóveles docentes, es decir, a aquellos que tienen *menos de dos años de experiencia laboral.*

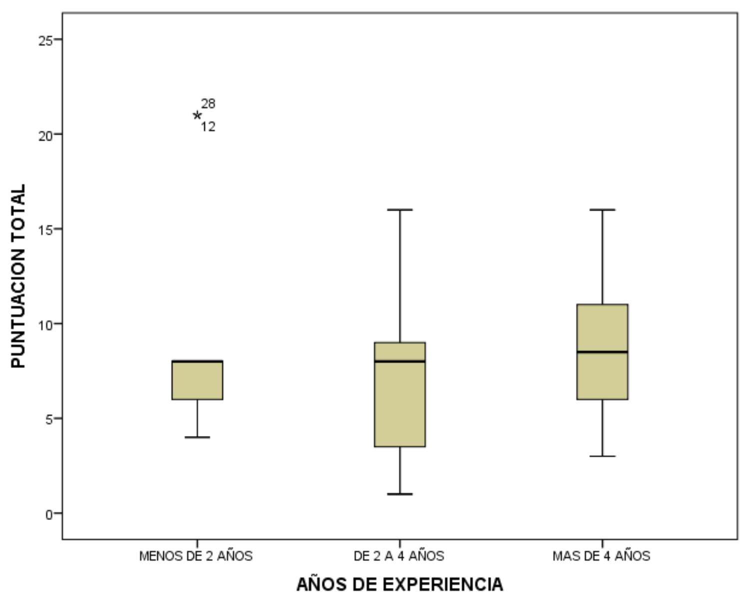


Figura 7.10 Gráfico de cajón y bigote que muestra las puntuaciones de *AÑOS DE EXPERIENCIA* en relación al Conocimiento Didáctico-Matemático respecto al álgebra

En los estadísticos de la variable *años de experiencia* se advierte que la media en *más de cuatro años*, supera a las medias de *dos a cuatro años* y *menos de* *dos años de experiencia laboral*. Por otro lado, en *más de cuatro años*, la variabilidad de los puntajes totales es menor en comparación con los otros dos rangos. Considerando el 95% de confianza para la media de los puntajes totales, la amplitud menor la obtuvo la categoría de *más de cuatro años*, que tiene una amplitud igual a 1,56.

Años de Experiencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Menos de dos años	14	8,71	5,398	1,443	5,60	11,83	4	21
De dos a cuatro años	31	7,26	4,025	0,723	5,78	8,73	1	16
Más de cuatro años	76	8,82	3,416	0,392	8,04	9,60	3	16
Total	121	8,40	3,868	0,352	7,71	9,10	1	21

Tabla 7.23 Estadísticos de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En las pruebas de normalidad apreciamos que en la variable *años de experiencia,* solo el tramo correspondiente a *dos a cuatro* años es normal, es decir, valor *p* mayor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Menos de dos años	0,410	14	0,000	0,660	14	0,000
De dos a cuatro años	0,122	31	0,200	0,949	31	0,149
Más de cuatro años	0,107	76	0,031	0,964	76	0,031

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.24 Prueba de normalidad para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la prueba de igualdad de varianza se puede notar que las varianzas de los puntajes totales en los tres rangos de la variable *años de experiencia* son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
0,482	2	118	0,618

Tabla 7.25 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias nos percatamos que las medias de los puntajes totales de los tres tramos de la variable *años de experiencia* son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	54,943	2	27,472	1,863	0,160
Intra-grupos	1740,214	118	14,748		
Total	1795,157	120			

Tabla 7.26 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales para los tres tramos de *años de experiencia* son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
3,877	0,144

Tabla 7.27 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

7.4.6.4 Efecto de la variable *Dependencia* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Para *DEPENDENCIA DEL COLEGIO* se aprecia cómo se comportan las puntuaciones totales respecto a las variables *municipal*; *particular subvencionado* y *particular pagado*. En el gráfico de caja y bigotes (figura 7.11) advertimos que la mediana de la categoría *particular pagado* es mayor, por otro lado, en las categorías *particular subvencionado* se presenta extremos superiores. Además en el gráfico de caja y bigotes es posible deducir que los docentes que obtuvieron una mayor puntuación son aquellos que pertenecen a colegios de dependencia *particular pagada*, esto es seguido de aquellos docentes que realizan sus clases en colegios *particulares subvencionados*, los docentes que obtuvieron una puntuación bastante más baja son aquellos que se encuentran en establecimientos educacionales que son *municipales.*

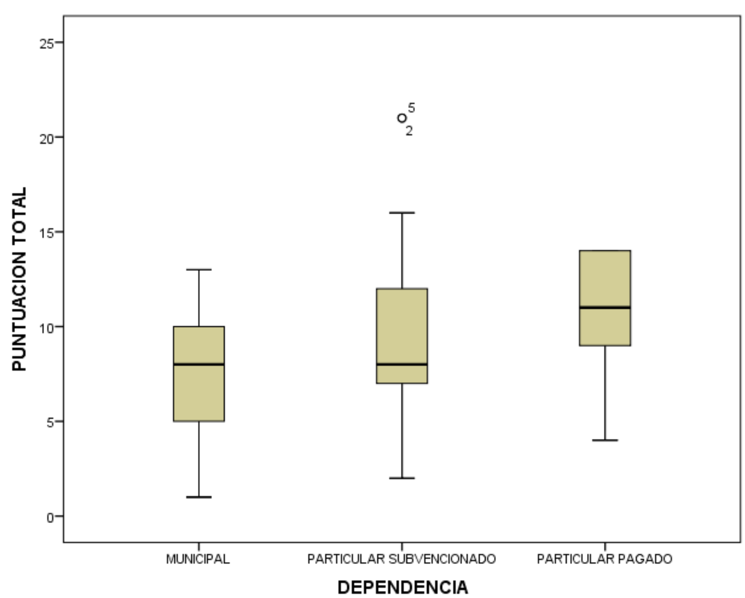


Figura 7.11 Gráfico de cajón y bigote que muestra las puntuaciones de *DEPENDENCIA* en relación al Conocimiento Didáctico-Matemático respecto al álgebra

En la tabla 7.28 se puede observar que la media en la variable *particular pagado* supera a las medias de las categorías *municipal* y *particular* *subvencionado*, sin embargo, presenta una variabilidad mayor. En la categoría *particular pagado* el intervalo de confianza del 95% para la media de los puntajes totales presenta una amplitud de 5,62.

Dependencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Municipal	65	7,31	3,206	0,398	6,51	8,10	1	13
Particular Subvencionado	46	9,52	4,278	0,631	8,25	10,79	2	21
Particular Pagado	10	10,40	3,921	1,240	7,59	13,21	4	14
Total	121	8,40	3,868	0,352	7,71	9,10	1	21

Tabla 7.28 Estadísticos de la variable *DEPENDENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la tabla 7.29 se muestran las pruebas de normalidad de los puntajes totales en los tres tipos de categorías en la variable *dependencia*. Se evidencia que solo las categorías *Municipal* y *Particular Pagado*, valor *p* mayor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Municipal	0,095	65	0,200	0,962	65	0,041
Particular Subvencionado	0,204	46	0,000	0,927	46	0,007
Particular Pagado	0,221	10	0,183	0,829	10	0,033

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.29 Prueba de normalidad para la variable *DEPENDENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la prueba de igualdad de varianza se muestra que las varianzas de los puntajes de las tres categorías de *dependencia* son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
1,607	2	118	0,205

Tabla 7.30 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias existe una diferencia en al menos una categoría de la variable *dependencia*, el valor *p* menor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	175,433	2	87,716	6,390	0,002
Intra-grupos	1619,724	118	13,726		
Total	1795,157	120			

Tabla 7.31 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *DEPENDENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede apreciar que existe una diferencia en al menos una de las categorías de dependencia, el valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
10,096	0,006

Tabla 7.32 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

7.4.6.5 Efecto de la variable *Sector* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Para *SECTOR* se muestra cómo se comportan las puntuaciones totales respecto a las variables *Rural* y *Urbano*, en la gráfica de caja y bigotes (figura 7.12) se nota que la mediana de la categoría *urbano* es mayor a *rural*, por otro lado, en solo la categoría urbano presenta extremos. Además se visualiza que los docentes que trabajan en establecimientos educacionales que se encuentran en sectores urbanos presentan una mayor puntuación que aquellos que trabajan en sectores rurales. Respecto a la variable *rural* el puntaje total mínimo es igual al percentil 25, a su vez el puntaje total máximo es igual al percentil 75, por otra parte la variabilidad de los puntajes es más alta que en la variable *urbano.*

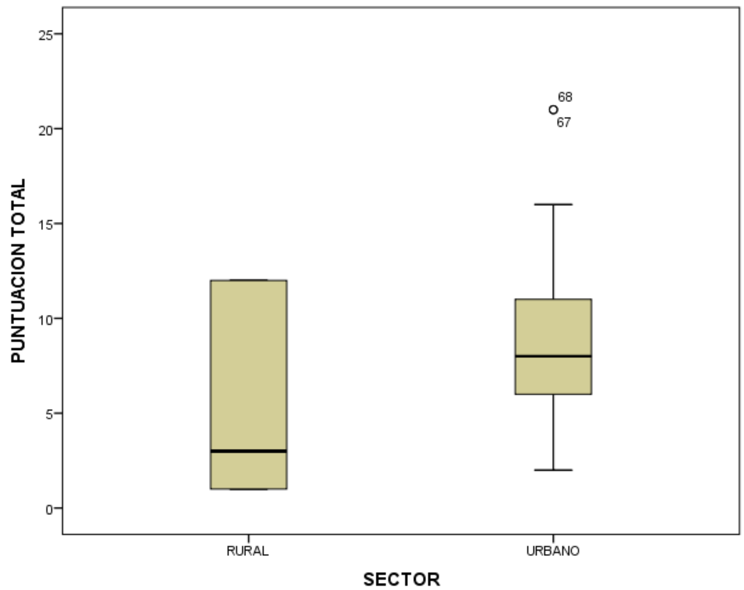


Figura 7.12 Gráfico de cajón y bigote que muestra las puntuaciones de la categoría *SECTOR* en relación al Conocimiento Didáctico-Matemático respecto al álgebra

En la tabla 7.33 se puede apreciar que la media en la variable *urbano* supera a las medias de las categorías *rural*.

Sector	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Rural	6	5,33	5,241	2,140	-0,17	10,83	1	12
Urbano	115	8,57	3,744	0,349	7,87	9,26	2	21
Total	121	8,40	3,868	0,352	7,71	9,10	1	21

Tabla 7.33 Estadísticos de la variable *SECTOR* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la tabla 7.34 se muestran las pruebas de normalidad de los puntajes totales en los tres tipos de categorías en la variable *dependencia*, allí se muestra que no son normales.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Rural	0,339	6	0,030	0,752	6	0,021
Urbano	0,134	115	0,000	0,957	115	0,001

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.34 Prueba de normalidad para la variable *SECTOR* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Respecto a prueba de igualdad de varianza se puede notar que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
2,462	0,119

Tabla 7.35 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *SECTOR* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba T de Student de igualdad de medias se puede considerar que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, el valor *p* ligeramente menor a 0,05.

Estadístico T-Student	Sig.
-2,021	0,046

Tabla 7.36 Estadístico de T-Student para igualdad de medias para la variable *SECTOR* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba U de Mann-Whitney, que es un estadístico no paramétrico de igualdad de medias se puede deducir que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico U	Sig.
202,0	0,086

Tabla 7.37 Estadístico U para para la variable *SECTOR* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

7.4.6.6 Efecto de la variable *Curso en que realiza su labor profesional* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Para la variable *CURSO EN QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* se aprecia cómo se comportan las puntuaciones totales respecto a las variables *Primer*, *Segundo*, *Tercer*, *Cuarto*, *Quinto*, *Sexto año* y *Multigrado*. En el gráfico de caja y bigotes (figura 7.13) se observa que considerando las medianas de los puntajes en las siete categorías, la de *quinto año* es levemente mayor, además en las categorías *tercer* y *cuarto año* se presentan puntajes extremos superiores, sin embargo, quienes lograron un puntaje total máximo superior en cada uno de los niveles, son los docentes de segundo año básico, por otra parte, quienes obtuvieron un puntaje total mínimo para cada uno de los niveles fueron aquellos pertenecientes a tercero básico.

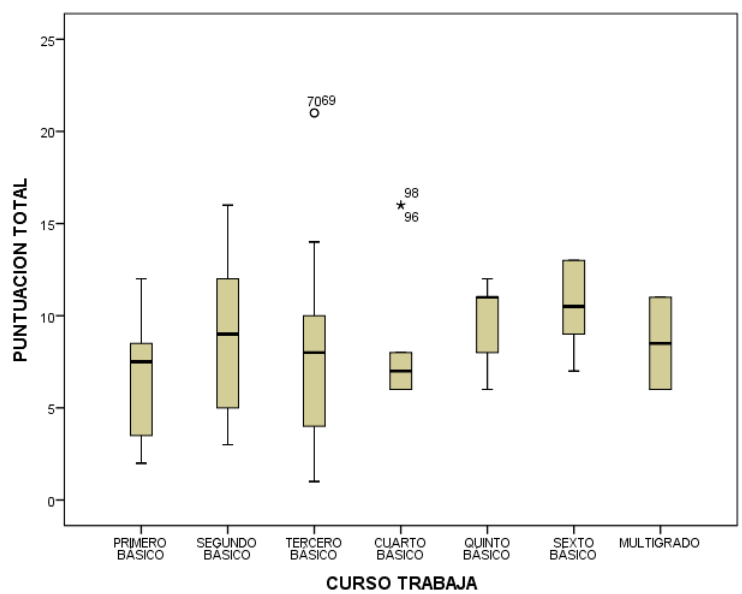


Figura 7.13 Gráfico de cajón y bigote que muestra las puntuaciones de la categoría *CURSO EN QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* en relación al Conocimiento Didáctico-Matemático respecto al álgebra

Además en la misma gráfica se nota que los docentes que realizan sus clases en *primer año de enseñanza básica* son aquellos que han obtenido una menor puntuación, por el contrario, los profesores que trabajan en los niveles superiores de la enseñanza básica (*quinto* y *sexto año de enseñanza*) son aquellos que lograron la mayor puntuación y entre ambos los que obtuvieron una mayor puntuación son los de *sexto año*.

En la tabla 7.38 se aprecia que la media en la categoría *sexto año básico* supera a las medias de las otras categorías. Además, en *quinto año* la variabilidad de los puntajes totales es menor en comparación con las otras categorías. En *sexto año* el intervalo de confianza del 95% para la media de los puntajes totales presenta una amplitud de 2,84.

Curso en el que realiza su labor profesional	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Primero Básico	24	6,75	3,313	0,676	5,35	8,15	3	12
Segundo Básico	26	8,92	4,185	0,821	7,23	10,61	3	16
Tercero Básico	24	8,00	5,357	1,093	5,74	10,26	1	21
Cuarto Básico	18	8,00	3,029	0,714	6,49	9,51	6	16
Quinto Básico	13	9,77	2,088	0,579	8,51	11,03	6	12
Sexto Básico	12	10,50	2,236	0,645	9,08	11,92	7	13
Multigrado	4	8,50	2,887	1,443	3,91	13,09	6	11
Total	121	8,40	3,868	0,352	7,71	9,10	1	21

Tabla 7.38 Estadísticos de la variable *CURSO EN QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Respecto a las pruebas de normalidad se advierte que el puntaje de los siete cursos, que solo las categorías de *cuarto* y *quinto* año no son normales, valor *p* menor a 0,01.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Primero Básico	0,147	24	0,194	0,909	24	0,034
Segundo Básico	0,142	26	0,189	0,927	26	0,065
Tercero Básico	0,176	24	0,053	0,888	24	0,012
Cuarto Básico	0,389	18	0,000	0,609	18	0,000
Quinto Básico	0,261	13	0,016	0,835	13	0,018
Sexto Básico	0,202	12	0,192	0,885	12	0,101
Multigrado	0,307	4		0,729	4	0,024

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.39 Prueba de normalidad para la variable *CURSO EN QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

Respecto a prueba de igualdad de varianza se puede notar que las varianzas de las siete categorías no presentan varianzas iguales, valor *p* menor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
2,833	6	114	0,013

Tabla 7.40 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *CURSO EN QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede observar que las medias de los puntajes totales de las siete categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	156,503	6	26,084	1,815	0,102
Intra-grupos	1638,654	114	14,374		
Total	1795,157	120			

Tabla 7.41 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *CURSO EN QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede observar que las medianas de los puntajes totales en las siete categorías se presentan diferencias, valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
10,096	0,006

Tabla 7.42 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *CURSO EN QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra

7.4.7 Efecto de las variables descriptivas sobre los conocimientos

A continuación se presentarán los resultados referentes a los datos descriptivos *Género*, *Especialidad*, *Años de experiencia*, *Dependencia*, *Sector* y *Curso en el cual realiza su labor profesional* respecto a los conocimientos considerados para la enseñanza del álgebra, los cuales fueron obtenidos mediante el cuestionario respondido por los 121 profesores encuestados.

7.4.7.1 Género

De los sujetos participantes, la gran mayoría son de sexo femenino, 113 personas que corresponden a un 93,39%; los sujetos de sexo masculino son 8 que equivalen a 6,61%.

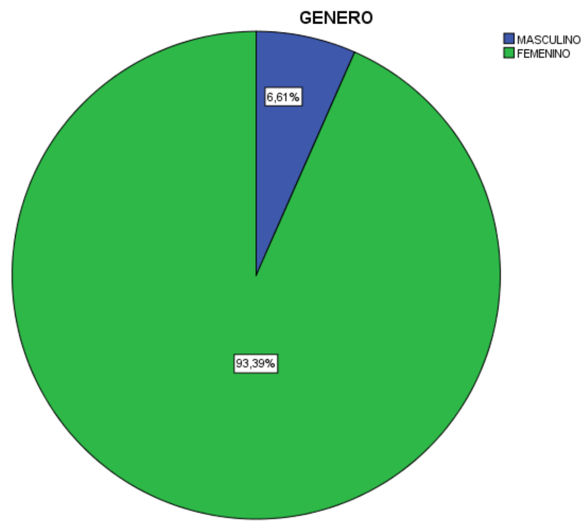


Figura 7.14 Distribución de los sujetos participantes según género

7.4.5.1.1 Efecto de la variable *Género* sobre el Conocimiento Común del Contenido

Considerando el conocimiento común del contenido, en la variable *masculino* se evidencia que la parte inferior de la caja es mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%; además el bigote superior es más corto que el inferior, en consecuencia el 25% de los puntajes más altos se encuentra más concentrado que aquellos que se están en el 25% más bajo. Respecto a la variable del género *femenino*, se cuenta con valores escapados, la parte superior de la caja es notoriamente mayor por lo cual existe una enorme dispersión en el rango de 50% a 75%, además el puntaje 25% es igual al puntaje de la mediana, finalmente vemos que el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos tiene una mayor concentración. Los puntajes mínimos en ambas variables son iguales.

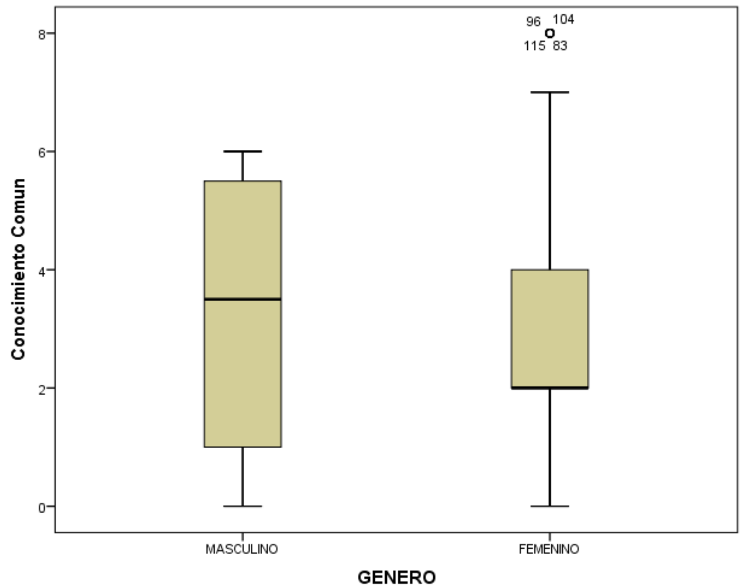


Figura 7.15 Gráfico de cajón y bigote de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

A partir de la tabla 7.43 podemos deducir que la media entre ambos géneros fue casi la misma y ambas con una dispersión muy similar.

Género	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Masculino	8	3,25	2,55	0,901	0,01	1,49	0	6
Femenino	111	3,26	2,434	0,231	2,80	3,72	0	8

Tabla 7.43 Estadísticos de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Queda en evidencia que sólo la variable *masculino* es normal, por el contrario, las puntuaciones de *femenino* no es normal.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Masculino	0,254	8	0,138	0,851	8	0,098
Femenino	0,202	111	0,000	0,906	111	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.44 Prueba de normalidad para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se deduce que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,225	0,636

Tabla 7.45 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Respecto a la Prueba T Student de igualdad de medias se puede considerar que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, donde el valor de *p* es mayor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
-0,013	0,990

Tabla 7.46 Estadístico de T-Student para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se muestra que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, dado que el valor *p* es mayor a 0,05.

Estadística U Mann-Whitney	Sig.
437,0	0,940

Tabla 7.47 Estadística U Mann-Whitney para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

7.4.5.1.2 Efecto de la variable *Género* sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

En la figura 7.16 advertimos que en la variable *masculino* la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%; existe extensión del bigote superior. Respecto a la variable *femenino,* los puntajes están dispersos entre el 25% y el 50%, al igual que en la variable *masculino*, presenta un bigote en la parte superior, sin embargo, tiene datos escapados. A través de los bigotes superiores de ambas variables, se puede deducir que los puntajes máximos son iguales. Finalmente la variabilidad de la variable *femenino,* es menor.

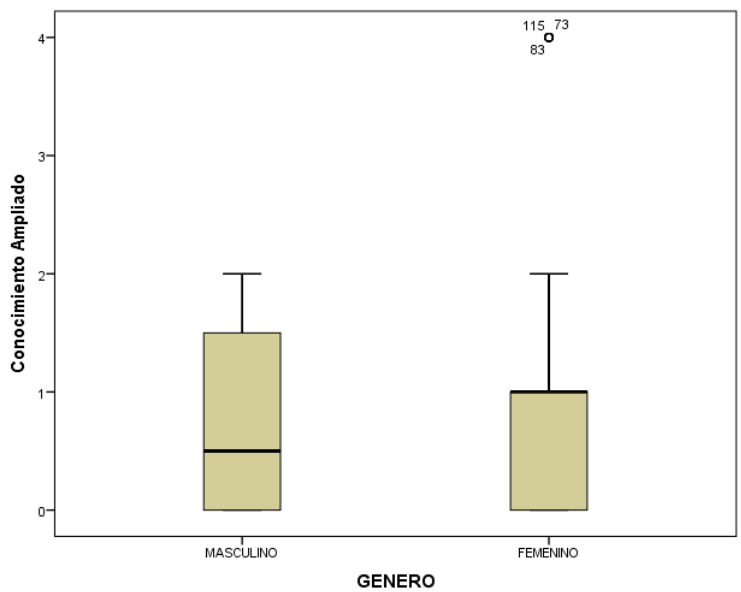


Figura 7.16 Gráfico de cajón y bigote de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

A partir de la tabla 7.48 se nota que los sujetos de género *masculino* han obtenido una ponderación más baja que el género *femenino*, esto es respecto al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes. La dispersión de los puntajes obtenidos por los docentes de género *femeninos* presentan una mayor dispersión que aquella correspondiente a los *masculinos*.

Género	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Masculino	8	0,75	0,886	0,313	0,01	1,49	0	2
Femenino	113	1,10	1,120	0,106	0,89	1,31	0	4

Tabla 7.48 Estadísticos de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la tabla 7.49 se muestra que ambas variables no son normales, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Masculino	0,301	8	0,031	0,782	8	0,018
Femenino	0,310	111	0,000	0,767	111	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.49 Prueba de normalidad para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se aprecia que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,003	0,956

Tabla 7.50 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Respecto a la Prueba T Student de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, donde el valor de *p* es mayor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
-0,861	0,391

Tabla 7.51 Estadístico de T-Student para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la tabla 7.52 correspondiente a la Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se muestra que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, dado que el valor *p* es mayor a 0,05.

Estadística U Mann-Whitney	Sig.
375,0	0,433

Tabla 7.52 Estadística U Mann-Whitney para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

7.4.5.1.3 Efecto de la variable *Género* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes

En la figura 7.17 se observa que en la variable *masculino* la parte inferior de la caja es mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%; el bigote superior es más corto que el inferior, esto implica que el 25% de los puntajes más altos se encuentra más concentrado que aquellos que están en el 25% más bajo. En la variable *femenino* existe un grado de homogeneidad en la dispersión de las puntuaciones. Por otra parte, la medina de la variable *masculino* es mayor a la correspondiente a la variable *femenino*, sin embargo, el puntaje total máximo es mayor que en la variable *masculino.* Lo mismo ocurre con el puntaje total mínimo, que es más bajo que en la variable *masculino.*

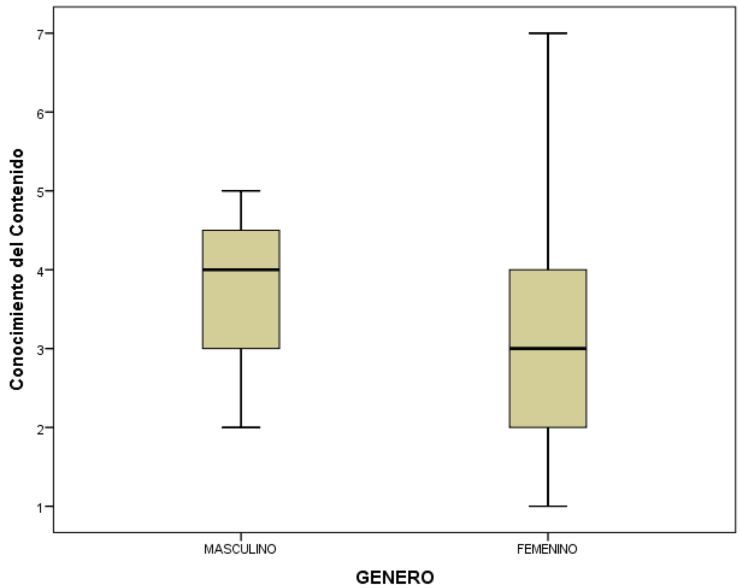


Figura 7.17 Gráfico de cajón y bigote de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la tabla 7.53 se aprecia que los sujetos de género masculino han obtenido una mejor ponderación en sus puntajes que el género *femenino*, esto es respecto al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes. Además se puede deducir que en esta última variable se presenta una mayor dispersión.

Género	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Masculino	8	3,75	1,165	0,412	2,78	4,72	2	5
Femenino	113	3,27	1,421	0,134	3,00	3,53	1	7

Tabla 7.53 Estadísticos de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la tabla 7.54 se muestra que ambas variables no son normales, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Masculino	0,335	8	0,009	0,804	8	0,032
Femenino	0,149	113	0,000	0,940	113	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.54 Prueba de normalidad para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la prueba de igualdad de varianzas se debe considerar que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, puesto que el valor *p* es mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,886	0,348

Tabla 7.55 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Respecto a la Prueba T Student de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, donde el valor de *p* es mayor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
0,941	0,348

Tabla 7.56 Estadístico de T-Student para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Finalmente en la Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se muestra que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, dado que el valor *p* es mayor a 0,05.

Estadística U Mann-Whitney	Sig.
342,0	0,240

Tabla 7.57 Estadístico U Mann-Whitney para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

7.4.5.1.4 Efecto de la variable *Género* sobre el Conocimiento Especializado Subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza

Al observar el gráfico de caja y bigotes de la variable *género* respecto al *conocimiento del contenido en relación a la enseñanza*, queda en evidencia que en la variable *masculino* la parte inferior de la caja es ostensiblemente mayor a la superior, indicando que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%. Además el puntaje mínimo y el 25% son iguales, como también el puntaje de la mediana, el 75% y puntaje máximo son iguales. El gráfico correspondiente a *femenino* se nota que la parte superior de la caja es mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% está más dispersa que aquella correspondiente al 25% y 50%. El 25% de los puntajes de *femenino* es igual a la mediana, y el 75% y el puntaje máximo también son iguales.

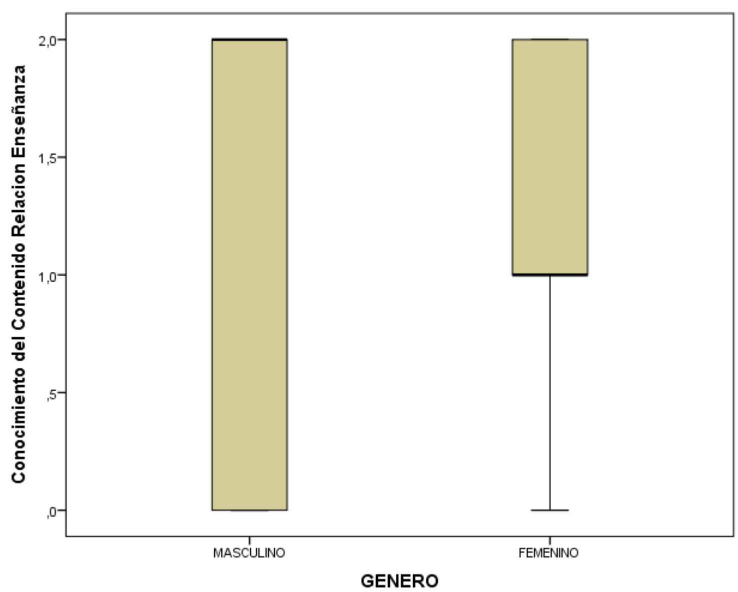


Figura 7.18 Gráfico de cajón y bigote de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Respecto al *conocimiento del contenido en relación a la enseñanza* podemos evidenciar que los sujetos de género *masculino* obtuvieron una leve mejor puntuación que el género *femenino*. La mayor dispersión se presenta en el género *masculino*.

Género	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Masculino	6	1,33	1,033	0,422	0,25	2,42	0	2
Femenino	89	1,06	0,697	0,074	0,91	1,20	0	2

Tabla 7.58 Estadísticos de la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

A continuación se muestra que ambas variables no son normales, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Masculino	0,407	6	0,002	0,640	6	0,001
Femenino	0,262	89	0,000	0,804	89	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.59 Prueba de normalidad para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Respecto a la prueba de igualdad de varianzas se observa que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
3,725	0,057

Tabla 7.60 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Respecto a la Prueba T Student de igualdad de medias se puede apreciar que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, donde el valor de *p* es mayor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
0,914	0,363

Tabla 7.61 Estadístico de T-Student para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

La Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se muestra que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, dado que el valor *p* es mayor a 0,05.

Estadística U Mann-Whitney	Sig.
207,0	0,319

Tabla 7.62 Estadístico U Mann-Whitney para la variable *GÉNERO* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

7.4.7.2 Especialidad

En cuanto al nivel de especialización que poseen los docentes, 31 posee un perfeccionamiento en el área de matemática, lo que equivale a un 25,62%, 62 profesores no tienen especialización (51,24%), finalmente 28 de ellos poseen una especialización en otras áreas distinta a matemática (23,14%).

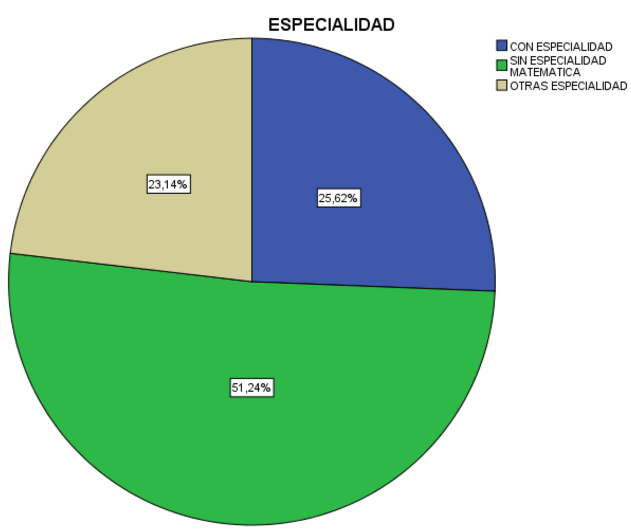


Figura 7.19 Distribución de los sujetos participantes según especialización

7.4.7.2.1 Efecto de la variable *Especialidad* sobre el Conocimiento Común del Contenido

Queda en evidencia que en la categoría *con especialidad matemática* se muestra que la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%; además tiene datos escapados, el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más altos. La variable *sin especialidad matemática,* tiene ambas partes de caja conformados de forma uniforme, el bigote inferior es ligeramente más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que están en el 25% más alto. Finalmente, en la variable *otra especialidad matemática* se observa que la parte superior de la caja es ampliamente mayor que la inferior, además tiene puntajes escapados. Todas las variables tienen puntajes mínimos similares, por otra parte en la variable *otra especialidad* el puntaje 25% es igual a la mediana. Aquella que obtuvo un mayor puntaje máximo corresponde a los docentes que se encuentran en la categoría *sin especialidad matemática.*

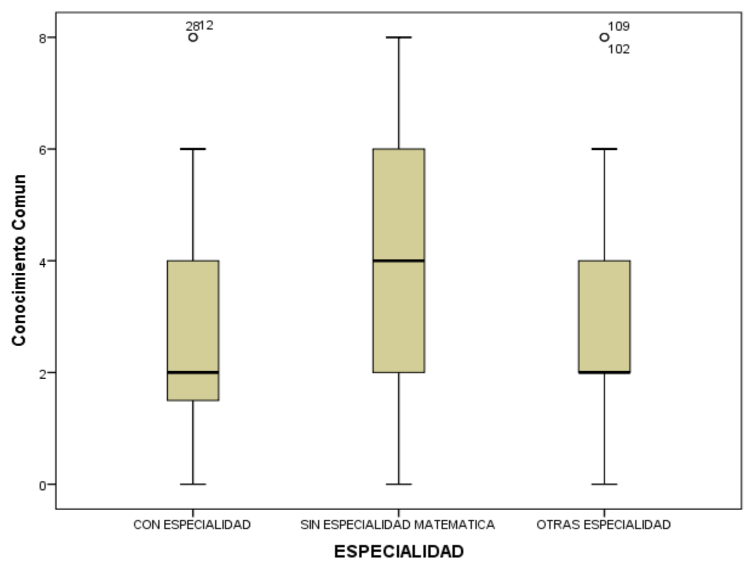


Figura 7.20 Grafico de cajón y bigote de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la tabla 7.63 queda en evidencia que la categoría que obtuvo una puntuación más alta corresponde a aquellos que están categorizados como *con especialidad*, esto es seguido por aquellos con *otra especialidad*, los que obtuvieron la menor ponderación son los que están *sin especialidad*, esta última categoría es la que tiene una mayor dispersión.

Especialidad	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Con Especialidad	31	2,84	2,192	0,394	2,03	3,64	0	8
Sin Especialidad	60	3,70	2,566	0,331	3,04	4,36	0	8
Otra Especialidad	28	2,79	2,283	0,431	1,90	3,67	0	8
Total	119	3,26	2,430	0,223	2,82	3,70	0	8

Tabla 7.63 Estadísticos de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

A continuación queda en evidencia a través de la tabla 7.64 que las tres variables no son no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Con Especialidad	0,161	31	0,031	0,914	31	0,016
Sin Especialidad	0,213	60	0,000	0,910	60	0,000
Otra Especialidad	0,206	28	0,004	0,889	28	0,006

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.64 Prueba de normalidad para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

A partir de la prueba de igualdad de varianzas se obtiene que las varianzas de los puntajes en todas las categorías son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
1,528	2	116	0,221

Tabla 7.65 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	23,417	2	11,708	2,017	0,138
Intra-grupos	673,508	116	5,806		
Total	696,924	118			

Tabla 7.66 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se puede apreciar que las medianas de los puntajes de las tres especialidades son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
3,166	0,205

Tabla 7.67 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

7.4.7.2.2 Efecto de la variable *Especialidad* sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

A partir de la figura 7.21 se aprecia que en la variable *con especialidad matemática* la parte inferior de la caja es ostensiblemente mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% está más dispersa que aquella correspondiente al 50% y 75%; además tiene datos escapados. La variable *sin especialidad matemática,* tiene un comportamiento similar al anterior. Por otra parte, en la variable *otra especialidad matemática* se nota que ambas partes del gráfico de caja y bigote es homogéneo, el bigote superior presenta una buena prolongación, esto implica que el 25% más largo no están aglutinados. En las tres variables el puntaje mínimo es igual al percentil 25. La variabilidad de las categorías *con especialidad* y *sin especialidad* es menor a aquella correspondiente a *otra especialidad.* Finalmente sin considerar los datos escapados de las dos primeras variables, aquella que tiene puntaje máximo es el que corresponde a *otra especialidad.*

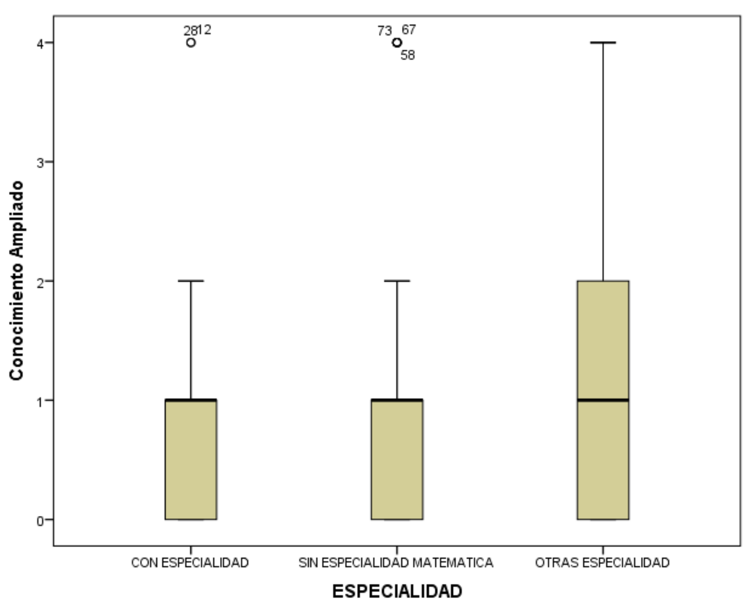


Figura 7.21 Gráfico de cajón y bigote de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Considerando la tabla 7.68 se muestra que los sujetos de las tres categorías presentan ponderaciones similares, sin embargo, aquellos que presentan una puntuación levemente superior son aquellos que están en el rango *sin* especialidad, respecto a aquellas que son *con* e*specialidad* y aquellos que tienen *otra especialidad.* Estos últimos también presentan una mayor dispersión.

Especialidad	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Con Especialidad	29	1,03	1,085	0,201	0,62	1,45	0	4
Sin Especialidad	62	1,13	1,109	0,141	0,85	1,41	0	4
Otra Especialidad	28	1,00	1,155	0,218	0,55	1,45	0	4
Total	119	1,08	1,106	0,101	0,87	1,28	0	4

Tabla 7.68 Estadísticos de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la tabla 7.69 se nota que las tres categorías no son normales, en todos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Con Especialidad	0,271	29	0,000	0,794	29	0,000
Sin Especialidad	0,353	62	0,000	0,732	62	0,000
Otra Especialidad	0,235	28	0,000	0,793	28	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.69 Prueba de normalidad para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se obtuvo que las varianzas de los puntajes en todas las variables son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
0,273	2	116	0,761

Tabla 7.70 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede apreciar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	0,386	2	0,193	0,156	0,856
Intra-grupos	143,933	116	1,241		
Total	144,319	118			

Tabla 7.71 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se dedujo que las medianas de los puntajes de las tres especialidades son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
0,477	0,788

Tabla 7.72 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

7.4.7.2.3 Efecto de la variable *Especialidad* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes

En las gráficas de caja y bigote se evidencia que respecto a la variable *con especialidad matemática* se muestra que la parte inferior de la caja es mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el

50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%; el bigote inferior es más corto que el superior, por lo cual el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. En la variable *sin especialidad matemática* se muestra una homogeneidad en la caja, el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. Respecto a la variable *otra especialidad matemática* se observa que la parte inferior de la caja es mayor a la superior, por consiguiente las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% está más dispersa que aquella correspondiente al 50% y 75%. Finalmente, hubo una similitud en los puntajes mínimos de cada categoría, sin embargo, obtuvieron un mayor puntaje máximo total los docentes con especialidad.

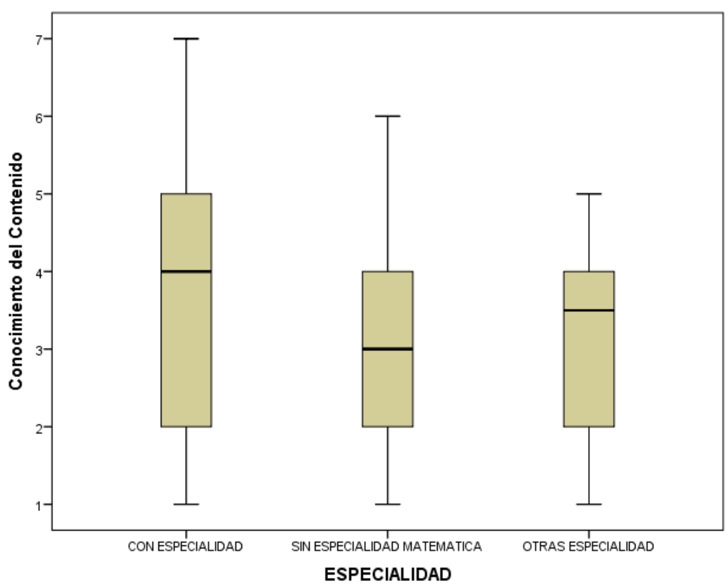


Figura 7.22 Gráfico de cajón y bigote de la variable ESPECIALIDAD sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la tabla 7.73 se nota que los sujetos que se encuentran en la categoría *con especialidad* lograron una mayor puntuación, les siguen aquellos que están en el rango *sin especialidad*. Los que han obtenido una puntuación más baja, del mismo modo que aquellos que presentaron una mayor dispersión es aquel correspondiente a la variable *con especialidad.*

Especialidad	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Con Especialidad	31	3,65	1,664	0,299	3,03	4,26	1	7
Sin Especialidad	62	3,26	1,280	0,163	2,93	3,58	1	6
Otra Especialidad	28	3,00	1,333	0,252	3,52	3,52	1	5
Total	121	3,30	1,406	0,128	3,04	3,55	1	7

Tabla 7.73 Estadísticos de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Respecto a la tabla 7.74 se muestra que en todas las variables no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Con Especialidad	0,161	31	0,039	0,936	31	0,065
Sin Especialidad	0,193	62	0,000	0,929	62	0,001
Otra Especialidad	0,273	28	0,000	0,845	28	0,001

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.74 Prueba de normalidad para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la prueba de igualdad de varianzas nos percatamos que las varianzas de las tres categorías son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
2,471	2	118	0,089

Tabla 7.75 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *ESPECIALIDAD Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede advertir que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	6,322	2	3,161	1,615	0,203
Intra-grupos	230,968	118	1,957		
Total	237,289	120			

Tabla 7.76 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede deducir que no existe diferencia en cada una de las categorías de especialidad (todas iguales), el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
1,807	0,405

Tabla 7.77 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

7.4.7.2.4 Efecto de la variable *Especialidad* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza

En la figura 7.23 se observa que en la categoría *con especialidad matemática* se muestra que la gráfica de caja y bigotes, ambas partes de la caja son homogéneas. En la variable *sin especialidad matemática*, se muestra que la parte superior de la caja es ostensiblemente mayor, esto implica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y 75% están más dispersas, lo mismo ocurre en la variable *otra especialidad*. Respecto a la variable *con especialidad* el puntaje total mínimo es igual al percentil 25, por otra parte en las variables *sin especialidad matemática* y *otra especialidad*, el puntaje correspondiente al 25 es igual a la mediana. Además en las tres variables, el puntaje total máximo, coincide con el percentil 75.

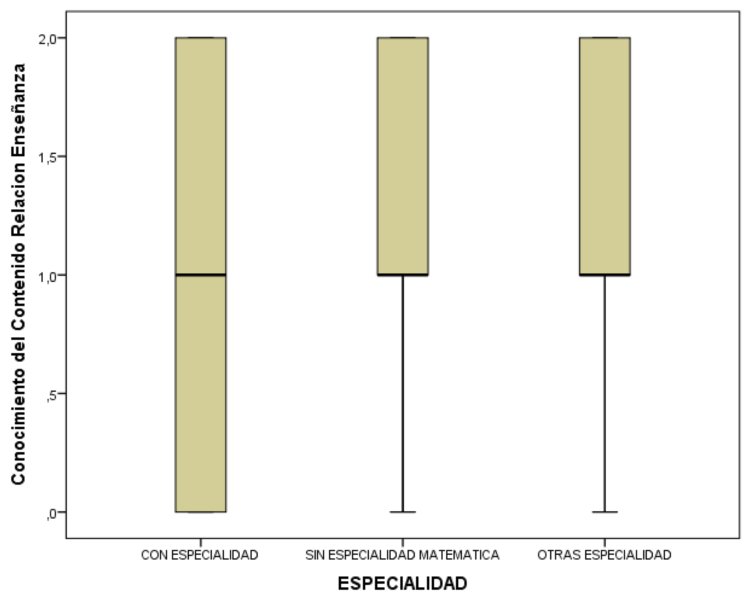


Figura 7.23 Grafico de cajón y bigote de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

A través de la tabla 7.78 se nota que la categoría *otra especialidad* es levemente superior a las categorías *con especialidad* y *sin especialidad*, sin embargo, *con especialidad* tiene una mayor dispersión.

Especialidad	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Con Especialidad	23	1,04	0,825	0,172	0,69	1,40	0	2
Sin Especialidad	50	1,04	0,727	0,103	0,83	1,25	0	2
Otra Especialidad	22	1,18	0,588	0,125	0,92	1,44	0	2
Total	95	1,07	0,718	0,074	0,93	1,22	0	2

Tabla 7.78 Estadísticos de la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Con los datos entregados en la tabla 7.79 nos percatamos que las tres variables no son normales, en todos los casos *p* es menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Con Especialidad	0,225	23	0,004	0,801	23	0,000
Sin Especialidad	0,242	50	0,000	0,809	50	0,000
Otra Especialidad	0,349	22	0,000	0,754	22	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.79 Prueba de normalidad para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la prueba de igualdad de varianzas se observa que las varianzas de los puntajes en todas las categorías son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
1,322	2	92	0,272

Tabla 7.80 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede apreciar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	0,335	2	0,167	0,320	0,727
Intra-grupos	48,149	92	0,523		
Total	48,484	94			

Tabla 7.81 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se puede notar que las medianas de los puntajes de las tres especialidades son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
0,560	0,756

Tabla 7.82 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *ESPECIALIDAD* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

7.4.7.3 Años de Experiencia

En la figura 7.24 se puede observar la distribución de los participantes según los años de experiencia. 14 de ellos (11,57%) son nóveles docentes, pues cuentan con menos de dos años de experiencia; 31 están insertos en el campo laboral entre dos y cuatro años (25,62%). 76 tienen más de cuatro años de experiencia de docencia (62,81%).

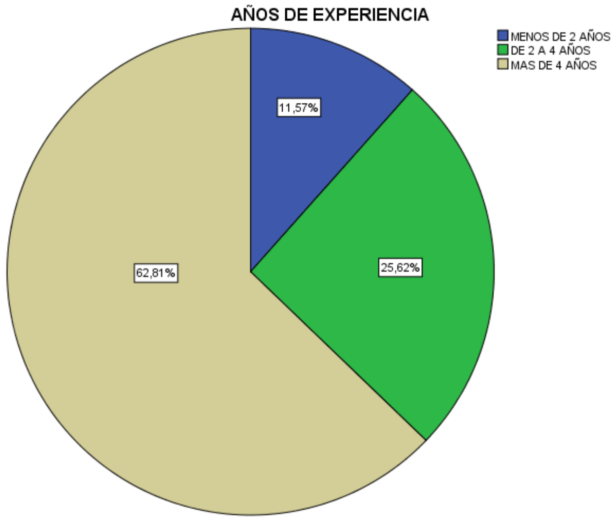


Figura 7.24 Distribución de los sujetos participantes según años de experiencia

7.4.7.3.1 Efecto de la variable *Años de Experiencia* sobre el Conocimiento Común del Contenido

Considerando la figura 7.25 se observa que en la variable *menos de dos años* la parte superior de la caja es notoriamente mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%. Respecto a la variable *de 2 a 4 años* se evidencia que la parte inferior de la caja es mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%. Respecto a la variable *más de cuatro años* se muestra que la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto implica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%; además tiene datos escapados, el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más altos. En la variable *de dos a cuatro años* el puntaje mínimo total es igual al percentil 25, algo contrario ocurre en la variable *menos de dos años* en la cual el puntaje máximo coincide con el percentil 75, además esta variable presenta una menor variabilidad.

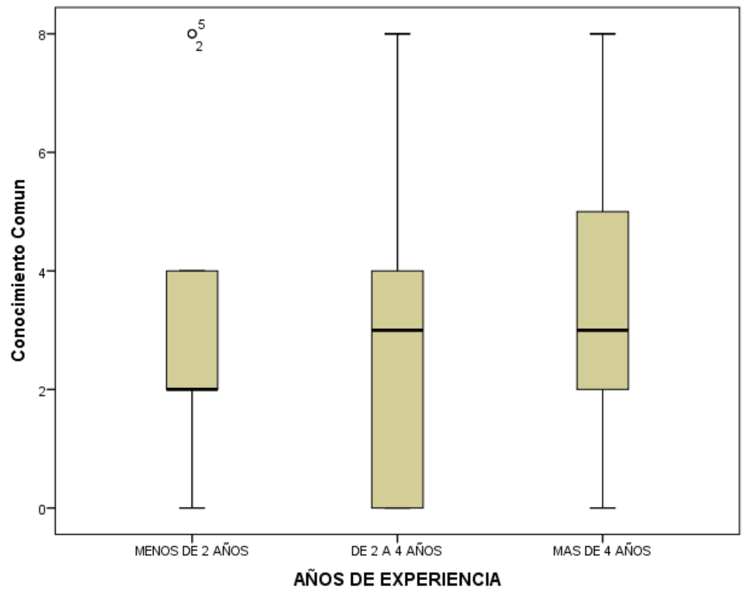


Figura 7.25 Gráfico de cajón y bigote de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

A partir de la tabla 7.83 queda en evidencia que los docentes en la categoría *más de cuatro años*, obtuvieron mejores ponderaciones, esto es seguido de aquellos que poseen *menos de dos años*, finaliza *de dos a cuatro años*; esta última variable es la que presenta una mayor dispersión de los datos.

Años de experiencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Menos de dos años	14	3,00	2,418	0,646	1,60	4,40	0	8
De dos a cuatro años	29	2,83	2,391	0,444	1,92	3,74	0	8
Más de cuatro años	76	3,47	2,452	0,281	2,91	4,03	0	8
Total	119	3,26	2,430	0,223	2,82	3,70	0	8

Tabla 7.83 Estadísticos de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Considerando la tabla 7.84 se muestra que la variable *más de cuatro años* no es normal, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05. Por el contrario aquellas correspondientes a *menos de dos años* y *de dos a cuatro años*, tienen un comportamiento normal.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Menos de dos años	0,232	14	0,040	0,822	14	0,010
De dos a cuatro años	0,157	29	0,064	0,901	29	0,010
Más de cuatro años	0,226	76	0,000	0,915	76	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.84 Prueba de normalidad para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se nota que las varianzas de los puntajes en todas las categorías son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
0,639	2	116	0,530

Tabla 7.85 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se advierte que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	9,839	2	4,920	0,831	0,438
Intra-grupos	687,085	116	5,923		
Total	696,924	118			

Tabla 7.86 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Respecto a la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se percibe que las medianas de los puntajes de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
1,414	0,493

Tabla 7.87 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

7.4.7.3.2 Efecto de la variable *Años de Experiencia* sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

Considerando la figura 7.26 se nota que en la variable *menos de dos años* la parte inferior de la caja es incuestionablemente mayor a la parte superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%. Lo mismo ocurre con las categorías *de dos a cuatro años* y *más de cuatro años*, sin embargo, estas dos últimas categorías presentan datos escapados. En las tres variables que el puntaje mínimo total es igual al percentil 25.

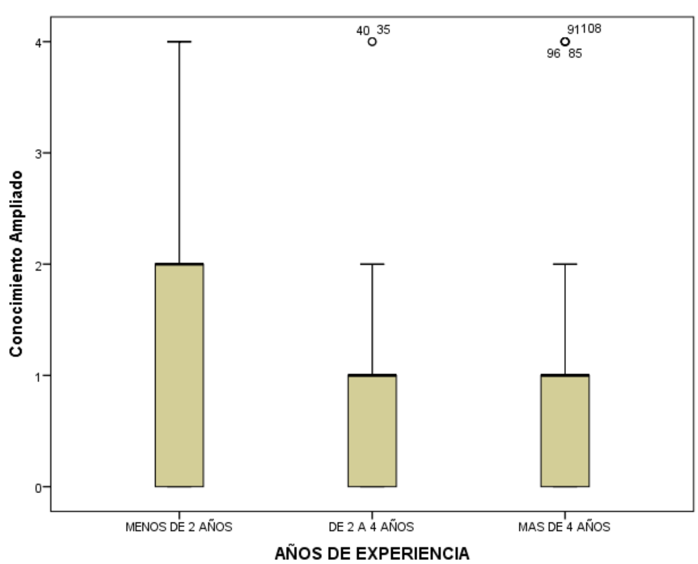


Figura 7.26 Grafico de cajón y bigote de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

A partir de la tabla 7.88 podemos advertir que los docentes que se encuentran categorizados en *menos de dos años*, han tenido una mayor puntuación entre las tres secciones, seguido de la variable *más de cuatro años*, aquellos que obtuvieron una menor ponderación es *de dos a cuatro años.* La primera variable además presenta una mayor dispersión.

Años de experiencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Menos de dos años	14	1,57	1,342	0,359	0,80	2,35	0	4
De dos a cuatro años	31	0,97	1,016	0,182	0,60	1,34	0	4
Más de cuatro años	74	1,03	1,085	0,126	0,78	1,28	0	4
Total	119	1,08	1,106	0,101	0,87	1,28	0	4

Tabla 7.88 Estadísticos de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Se evidencia en la tabla 7.89 que todas las categorías no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Menos de dos años	0,232	14	0,040	0,856	14	0,026
De dos a cuatro años	0,326	31	0,000	0,740	31	0,000
Más de cuatro años	0,321	74	0,000	0,746	74	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.89 Prueba de normalidad para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se muestra que las varianzas de los puntajes en todas las categorías son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
1,483	2	116	0,231

Tabla 7.90 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Respecto a la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	3,977	2	1,989	1,644	0,198
Intra-grupos	140,342	116	1,210		
Total	144,319	118			

Tabla 7.91 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se puede inferir que las medianas de los puntajes de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
3,279	0,194

Tabla 7.92 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

7.4.7.3.3 Efecto de la variable *Años de Experiencia* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes

A partir de la figura 7.27 se contempla que en la variable *menos de dos años* la parte inferior de la caja es mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%. Respecto a la variable *de 2 a 4 años* se evidencia que la parte inferior de la caja es mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondiente al 50% y 75%; el bigote inferior es más corto que el inferior, por consiguiente el 25% de los puntajes más bajo se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. En el gráfico de caja y bigotes de la variable *más de cuatro* años ambas partes de la caja presentan una forma homogénea; el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. Finalmente en la variable *menos de dos años* el puntaje total mínimo es igual al percentil 25, por otra parte, aquellos docentes categorizados es este rango, obtuvieron los puntajes más altos.

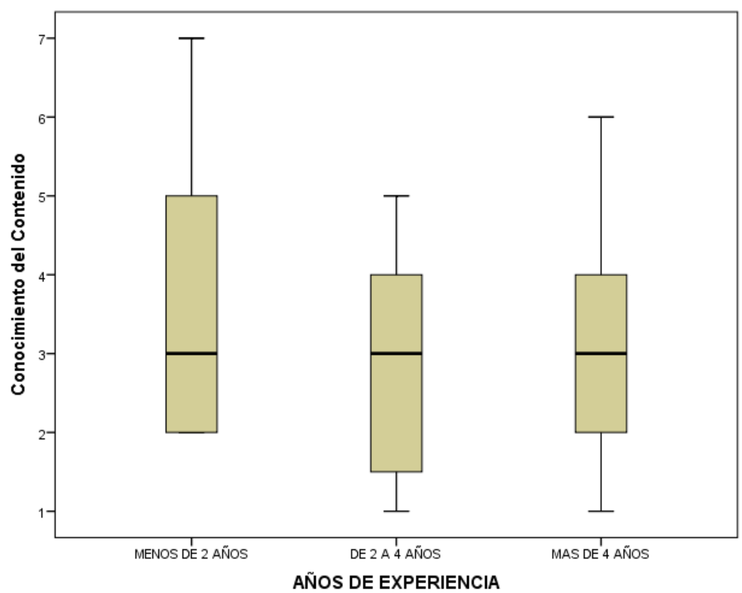


Figura 7.27 Gráfico de cajón y bigote de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Respecto al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, la categoría *menos de dos años* presenta la mayor puntuación, es seguido de la categoría *más de cuatro años,* finalmente la puntuación más baja fue obtenida por la categoría *de dos a cuatro años.* La mayor dispersión está en la variable *menos de dos años.*

Años de experiencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Menos de dos años	14	3,71	1,729	0,462	2,72	4,71	2	7
De dos a cuatro años	31	2,81	1,327	0,238	2,32	3,29	1	5
Más de cuatro años	76	3,42	1,339	0,154	3,12	3,73	1	6
Total	121	3,30	1,406	0,128	3,04	3,55	1	7

Tabla 7.93 Estadísticos de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la tabla 7.94 se deduce que todas las categorías no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Menos de dos años	0,232	14	0,040	0,854	14	0,025
De dos a cuatro años	0,203	31	0,002	0,870	31	0,001
Más de cuatro años	0,150	76	0,000	0,931	76	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.94 Prueba de normalidad para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el C*onocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la prueba de igualdad de varianzas se percibe que las varianzas de los puntajes en todas las categorías son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
0,775	2	118	0,463

Tabla 7.95 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede contemplar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	11,067	2	5,534	2,886	0,060
Intra-grupos	226,222	118	1,917		
Total	237,289	120			

Tabla 7.96 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se puede observar que las medianas de los puntajes de las categorías años de experiencia son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
3,804	0,149

Tabla 7.97 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

7.4.7.3.4 Efecto de la variable *Años de Experiencia* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza

En la figura 7.28 se nota que en la variable *menos de dos años* la parte superior de la caja es considerablemente mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% está más dispersa que aquella correspondiente al 25% y 50%. Algo similar acontece con la variable *de 2 a 4 años*. Algo inverso sucede con la variable *más de cuatro años*, es decir, la parte inferior es holgadamente mayor a la superior, implicando que las puntuaciones entre el 25% y 50% están más dispersas que la comprendida entre 50% y 75%. En la variable *menos de dos años* el puntaje total mínimo es igual a la mediana, lo mismo ocurre en la variable *de dos a cuatro años*, sin embargo, esta última presenta datos inferiores escapados. En *más de cuatro años* el puntaje total máximo es igual al percentil 75. Finalmente, en la variable de *dos a cuatro años* se presenta una menor variabilidad.

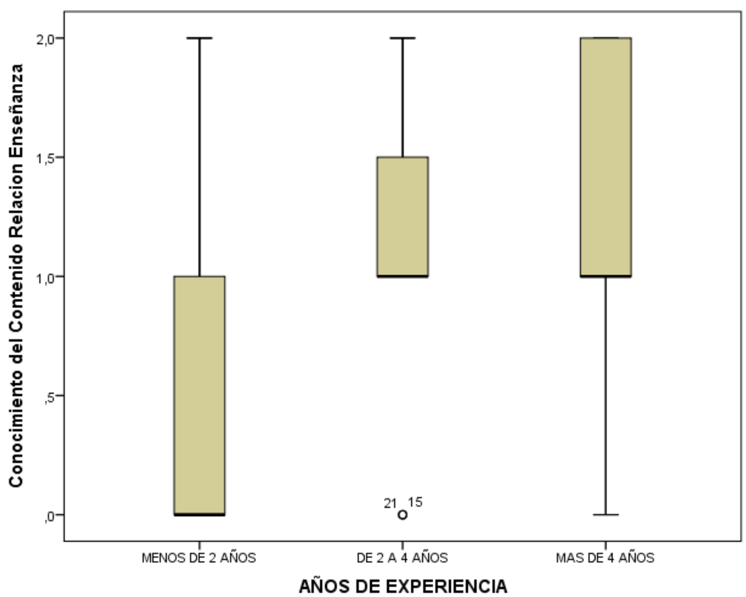


Figura 7.28 Gráfico de cajón y bigote de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la tabla 7.98 podemos ver que los profesores de las categorías *de dos a cuatro años* y *más de cuatro años* de experiencia laboral, han obtenido la misma ponderación. Aquellos que están en la sección *menos de dos años* han logrado la puntuación más baja, sin embargo, estos últimos tienen una mayor dispersión.

Años de experiencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Menos de dos años	10	0,60	0,843	0,267	0,00	1,20	0	2
De dos a cuatro años	23	1,13	0,626	0,130	0,86	1,40	0	2
Más de cuatro años	62	1,13	0,713	0,090	0,95	1,31	0	2
Total	95	1,07	0,718	0,74	0,93	1,22	0	2

Tabla 7.98 Estadísticos de la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Con los datos entregados en la tabla 7.99 se infiere que todas variables no son normales, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Menos de dos años	0,362	10	0,001	0,717	10	0,001
De dos a cuatro años	0,322	23	0,000	0,778	23	0,000
Más de cuatro años	0,249	62	0,000	0,803	62	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.99 Prueba de normalidad para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la prueba de igualdad de varianzas se nota que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
1,425	2	92	0,246

Tabla 7.100 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede apeciar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	2,508	2	1,254	2,509	0,087
Intra-grupos	45,976	92	0,500		
Total	48,484	94			

Tabla 7.101 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se puede ver que las medianas de los puntajes de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
4,540	0,103

Tabla 7.102 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *AÑOS DE EXPERIENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

7.4.7.4 Dependencia

En la figura 7.29 se puede advertir la distribución de los participantes según su dependencia, es importante mencionar que 65 profesores (53,72%), ejercen sus labores profesionales en establecimientos educacionales de dependencia municipal; 46 de ellos (38,02%) son de colegios particulares subvencionados; y 10 docentes (8,26) pertenecen a colegios particulares pagados.

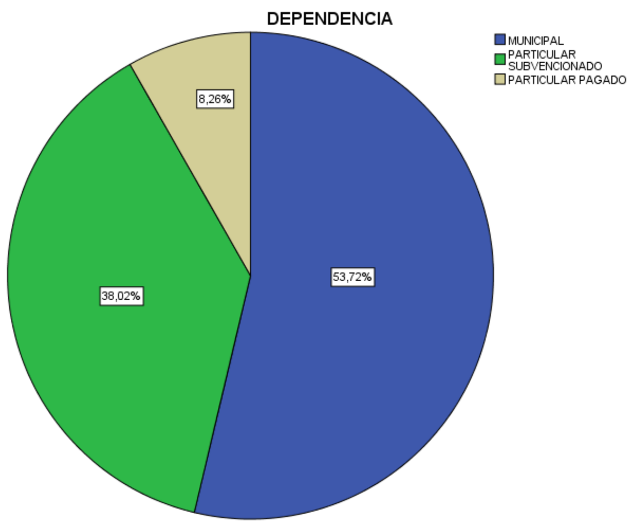


Figura 7.29 Distribución de los sujetos participantes según dependencia

7.4.7.4.1 Efecto de la variable *Dependencia* sobre el Conocimiento Común del Contenido

Considerando la figura 7.30 se aprecia en la gráfica de caja y bigote que en la variable *municipal* se evidencia que la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% está más dispersa que aquella correspondiente al 25% y 50%, el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. Respecto a la variable denominada *particular subvencionado*, la parte superior de la caja es mucho mayor que la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%, el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. Además el percentil 25 coincide con la mediana. Finalmente respecto a la variable *particular pagado*, la parte inferior de la caja es mayor que la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%, finalmente el puntaje máximo total es igual al percentil 75.

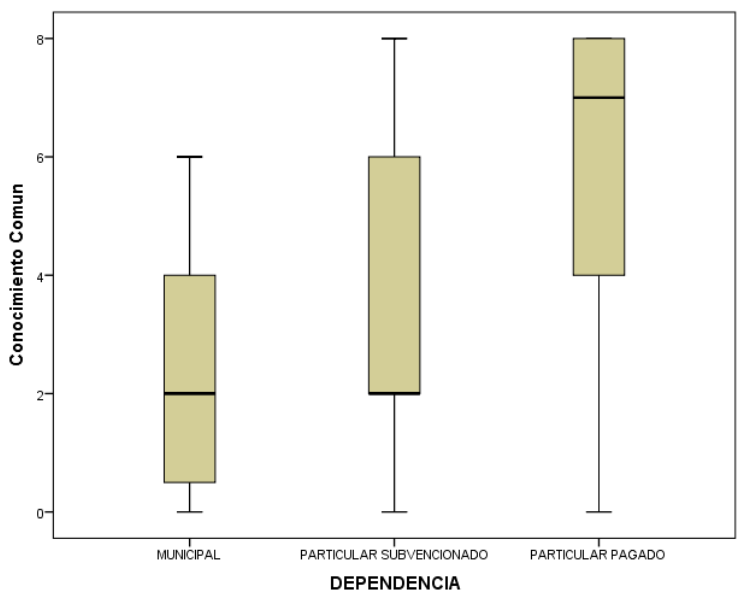


Figura 7.30 Gráfico de cajón y bigote de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Respecto al conocimiento común del contenido, los docentes pertenecientes a la categoría *particular pagado*, han logrado una mayor ponderación, esto es seguido de aquellos que se desempeñan en colegios *particular pagado*. Los docentes de dependencia *municipal* los que obtuvieron la ponderación más baja.

También las puntuaciones obtenidas por docentes que trabajan en instituciones *particulares pagadas* tienen una mayor dispersión.

Dependencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Municipal	63	2,48	1,882	0,237	2,00	2,95	0	6
Particular Subvencionado	46	3,87	2,500	0,369	3,13	4,61	0	8
Particular Pagado	10	5,40	3,239	3,239	3,08	7,72	0	8
Total	119	3,26	2,430	2,430	2,82	3,70	0	8

Tabla 7.103 Estadísticos de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la tabla 7.104 se muestra que las tres variables no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Municipal	0,160	63	0,000	0,899	63	0,000
Particular Subvencionado	0,294	46	0,000	0,858	46	0,000
Particular Pagado	0,289	10	0,017	0,778	10	0,008

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.104 Prueba de normalidad para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se advierte que las varianzas de los puntajes en las tres variables no son iguales, valor *p* menor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
7,243	2	116	0,001

Tabla 7.105 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede deducir que las medias de los puntajes totales de las tres categorías no son iguales, el valor *p* menor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	101,593	2	50,796	9,898	0,000
Intra-grupos	595,332	116	5,132		
Total	696,924	118			

Tabla 7.106 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede notar que existe diferencia en al menos una de las categorías de dependencia, el valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
12,359	0,002

Tabla 7.107 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

7.4.7.4.2 Efecto de la variable *Dependencia* sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

Considerando la figura 7.31 se observa en la gráfica de caja y bigote que en la variable *municipal* se evidencia que la parte inferior de la caja es considerablemente mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% están más dispersas que aquellas correspondientes al 50% y 75%. Por otra parte, el puntaje total mínimo es igual al percentil 25. En la variable *particular subvencionado* se muestra una distribución homogénea en ambas secciones de la caja, el puntaje total mínimo es igual al percentil 25. Respecto a la variable *particular pagado* la parte superior es ostensiblemente mayor a la inferior, el puntaje total mínimo es igual a la mediana y el puntaje total máximo es igual al percentil 75. Aquella variable que tiene una menor variabilidad es la correspondiente a *municipal.*

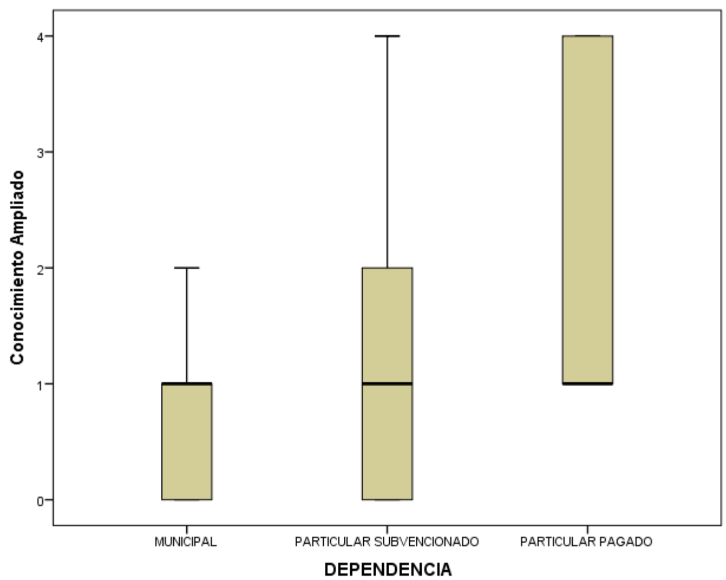


Figura 7.31 Gráfico de cajón y bigote de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la tabla 7.108 se aprecia que la mejor ponderación la lograron aquellos docentes que pertenecen a los establecimientos de dependencia *particular pagada*, seguida de *particular subvencionada*, los que obtuvieron la más baja ponderación son aquellos que pertenecen a una institución *municipal*. Por otra parte, la mayor dispersión está en la categoría *particular pagada.*

Dependencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Municipal	63	0,73	0,700	0,088	0,55	0,91	0	2
Particular Subvencionado	46	1,30	1,245	0,184	0,93	1,67	0	4
Particular Pagado	10	2,20	1,549	0,490	1,09	3,31	1	4
Total	119	1,08	1,106	0,101	0,87	1,28	0	4

Tabla 7.108 Estadísticos de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la tabla 7.109 se deduce que todas variables no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Municipal	0,264	63	0,000	0,784	63	0,000
Particular Subvencionado	0,292	46	0,000	0,798	46	0,000
Particular Pagado	0,381	10	0,000	0,640	10	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.109 Prueba de normalidad para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se nota que las varianzas de los puntajes en todas las categorías no son iguales, valor *p* menor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
11,768	2	116	0,000

Tabla 7.110 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se aprecia que las medias de los puntajes totales de las tres categorías no son iguales, el valor *p* menor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	22,567	2	11,284	10,751	0,000
Intra-grupos	121,752	116	1,050		
Total	144,319	118			

Tabla 7.111 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede notar que existe diferencia en al menos una de las categorías de dependencia, el valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
12,019	0,002

Tabla 7.112 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

7.4.7.4.3 Efecto de la variable *Dependencia* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes

En la figura 7.32 se observa que en la variable *municipal* se evidencia que la ambas partes de la caja son homogéneas, el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentran más concentrados que aquellos que están en el 25% más alto. Respecto a la variable *particular subvencionado* también se muestra una gráfica de caja y bigote donde la distribución es homogénea, el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. Presenta datos escapados en la variable *particular pagado,* además en esta variable el mínimo, el percentil 25, la mediana, el percentil 75 y el máximo de los puntajes son iguales, finalmente estos datos coinciden con el percentil 25 de las variables *municipal* y *particular subvencionado*.

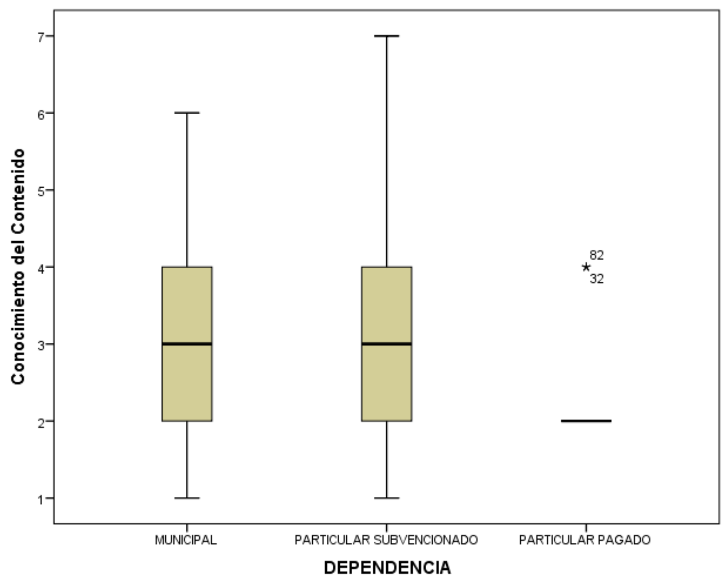


Figura 7.32 Gráfico de cajón y bigote de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Aquellos docentes que pertenecen a colegios de índole *municipal,* presentaron una mayor puntuación, esto seguido de los docentes que están en la categoría *particular subvencionado*, aquellos que obtuvieron la más baja ponderación son aquellos que están en instituciones *particulares pagados.*

Dependencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Municipal	65	3,40	1,434	1,78	3,04	3,76	1	6
Particular Subvencionado	46	3,35	1,418	0,209	2,93	3,77	1	7
Particular Pagado	10	2,40	0,843	0,267	1,80	3,00	2	4
Total	121	3,30	1,406	0,128	3,04	3,55	1	7

Tabla 7.113 Estadísticos de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la tabla 7.114 se muestra que todas las variables no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Municipal	0,154	65	0,001	0,933	65	0,002
Particular Subvencionado	0,192	46	0,000	0,916	46	0,003
Particular Pagado	0,482	10	0,000	0,509	10	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.114 Prueba de normalidad para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la prueba de igualdad de varianzas se infiere que las varianzas de los puntajes de todas las variables son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
2,217	2	118	0,113

Tabla 7.115 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	8,854	2	4,427	2,287	0,106
Intra-grupos	228,435	118	1,936		
Total	237,289	120			

Tabla 7.116 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se puede notar que las medianas de los puntajes de las tres dependencias son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
5,486	0,064

Tabla 7.117 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

7.4.7.4.4 Efecto de la variable *Dependencia* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza

En la figura 7.33 se observa en la gráfica de caja y bigote que en la variable *municipal* la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% está más dispersa que aquella correspondiente al 25% y 50%, el puntaje total máximo es igual al percentil 75. Respecto a la variable denominada *particular subvencionado*, la parte superior de la caja es mucho mayor que la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%, el percentil 25 es igual a la medina, además el puntaje total máximo coincide con el percentil 75. Finalmente respecto a la variable *particular pagado*, los cuatro docentes que están allí incluidos no presentan una mayor dispersión, donde el puntaje mínimo, el percentil 25, la mediana, el percentil 75 y el puntaje máximo son iguales.

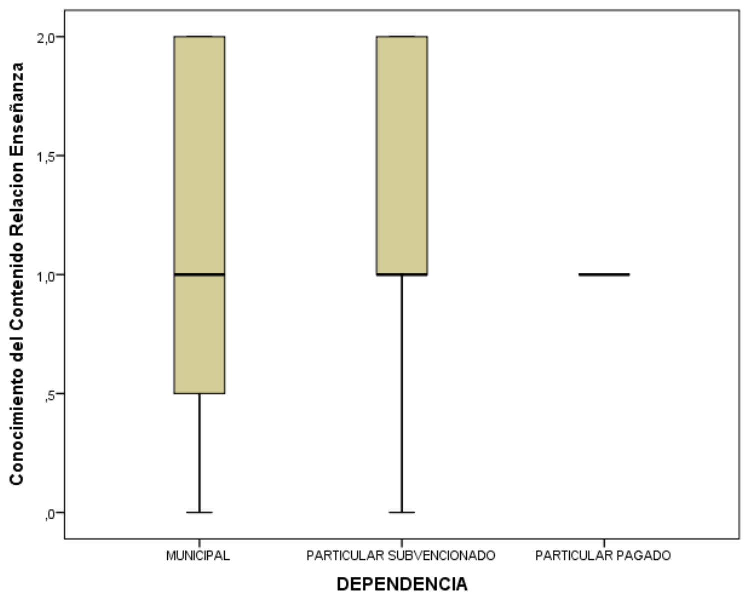


Figura 7.33 Grafico de cajón y bigote de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Respecto al conocimiento del contenido en relación a la enseñanza, los docentes incluidos en la variable *particular subvencionado* han logrado una mejor puntuación (tabla 7.118), esto seguido de aquellos que trabajan en instituciones de dependencia *municipal*, finalmente los docentes que pertenecen a colegios *particulares pagados* han obtenido la puntuación más baja.

Dependencia	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Municipal	51	1,02	0,735	0,103	0,81	1,23	0	2
Particular Subvencionado	40	1,15	0,736	0,116	0,91	1,39	0	2
Particular Pagado	4	1,00	0,000	0,000	1,00	1,00	1	1
Total	95	1,07	0,718	0,074	0,93	1,22	0	2

Tabla 7.118 Estadísticos de la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la tabla 7.199 se muestra que todas las variables no son normales, en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Municipal	0,236	51	0,000	0,810	51	0,000
Particular Subvencionado	0,231	40	0,000	0,803	40	0,000
Particular Pagado						

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.119 Prueba de normalidad para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la prueba de igualdad de varianzas se infiere que las varianzas de los puntajes en todas las variables son iguales, valor *p* igual a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
3,094	2	92	0,050

Tabla 7.120 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes totales de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	0,404	2	0,202	0,386	0,681
Intra-grupos	48,080	92	0,523		
Total	48,484	94			

Tabla 7.121 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

Para la igualdad de medianas se utilizó la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica), en ella se puede inferir que las medianas de los puntajes de las tres categorías son iguales, el valor *p* mayor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
0,824	0,662

Tabla 7.122 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *DEPENDENCIA* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a la Enseñanza*

7.4.7.5 Sector

La gran mayoría de los participantes ejercen docencia en establecimientos que se encuentran en sectores urbanos, bajo esta modalidad encontramos 115 docentes, lo cual es equivalente al 95,04%. Hubo sólo 6 profesores que trabajan en colegios situados en sectores rurales (4,96%).

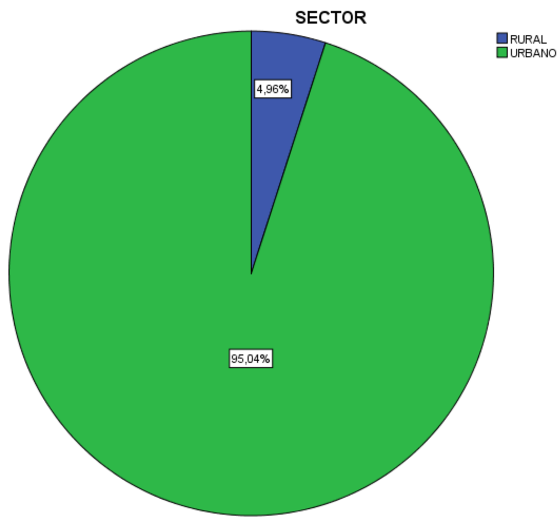


Figura 7.34 Distribución de los sujetos participantes según el sector (*Rural/Urbano*) en que se sitúa el establecimiento educacional

7.4.7.5.1 Efecto de la variable *Sector* sobre el Conocimiento Común del Contenido

En la figura 7.35 se muestra que en la variable *rural* la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%, el puntaje total mínimo es igual al percentil 25, además el puntaje total máximo es igual al percentil 75. En cuanto a la variable *urbano* la parte superior es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%, además presenta datos escapados, además el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto, finalmente la variable que presenta una menor variabilidad es esta variable.

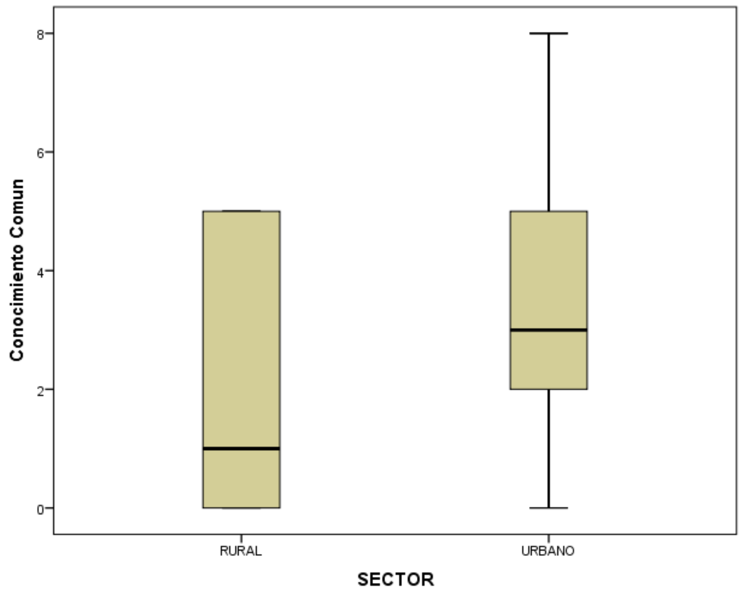


Figura 7.35 Gráfico de cajón y bigote de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la tabla 7.123 se evidencia que los docentes que pertenecen a establecimientos de sectores *urbanos*, han obtenido una mayor puntuación que aquellos que se encuentran trabajando en instituciones de sectores *rurales*, esto respecto al conocimiento común del contenido.

Sector	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Rural	6	2,00	2,366	0,966	-0,48	4,48	0	5
Urbano	113	3,33	2,425	0,228	2,88	3,78	0	8

Tabla 7.123 Estadísticos de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

La prueba de normalidad nos muestra que ambas variables no son normales, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Rural	0,330	6	0,039	0,762	6	0,026
Urbano	0,203	113	0,000	0,908	113	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.124 Prueba de normalidad para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se observa que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,002	0,967

Tabla 7.125 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Respecto a la Prueba T Student de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, donde el valor de *p* es mayor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
-1,308	0,194

Tabla 7.126 Estadística T-Student para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Finalmente en la Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se deduce que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, dado que el valor *p* es mayor a 0,05.

Prueba U de Mann-Whitney	Sig.
228,0	0,169

Tabla 7.127 Prueba U de Mann-Whitney para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

7.4.7.5.2 Efecto de la variable *Sector* sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

En las gráficas de caja y bigote se nota que en la variable *rural* existe una homogeneidad en la distribución de las puntuaciones, el puntaje total mínimo es igual al percentil 25, por otra parte el puntaje total máximo es igual al percentil 75. Respecto a la variable *urbano* se muestra que la parte inferior de la caja es considerablemente mayor a la superior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 25% y el 50% está más dispersa que aquella correspondiente al 50% y 75%, además observamos que presenta datos escapados, finalmente el puntaje total mínimo coincide con el percentil 25. La variable que muestra una menor variabilidad es la correspondiente a la categoría *urbana.*

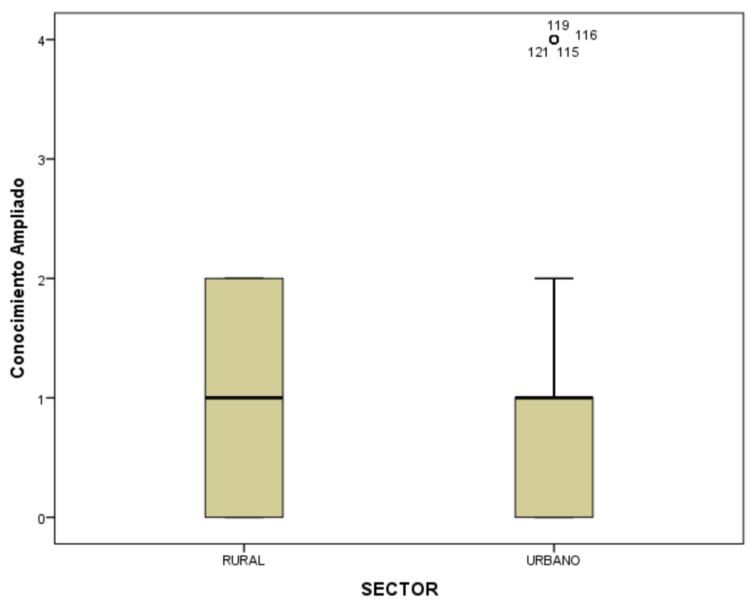


Figura 7.36 Grafico de cajón y bigote de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la tabla 7.128 se muestra que los docentes que realizan su labor docente en establecimientos de sectores *urbanos*, han obtenido una puntuación más alta que aquellos que están en sectores *rurales*.

Sector	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Rural	4	1,00	1,155	0,577	-0,84	2,84	0	2
Urbano	115	1,08	1,109	0,103	0,87	1,28	0	4

Tabla 7.128 Estadísticos de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

La prueba de normalidad arrojó que las variables no tienen un comportamiento normal, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Rural	0,307	4		0,729	4	0,024
Urbano	0,311	115	0,000	0,763	115	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.129 Prueba de normalidad para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se obtuvo que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,377	0,540

Tabla 7.130 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Respecto a la Prueba T Student de igualdad de medias se puede deducir que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, puesto que el valor de *p* es mayor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
-0,139	0,890

Tabla 7.131 Estadística T-Student para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se muestra que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, dado que el valor *p* es mayor a 0,05.

Prueba U de Mann-Whitney	Sig.
229,0	0,987

Tabla 7.132 Prueba U de Mann-Whitney para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

7.4.7.5.3 Efecto de la variable *Sector* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes

Considerando la figura 7.37 se observa que en la variable *Rural* la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%, el puntaje total mínimo es igual percentil 25, por el contrario, el puntaje total máximo es igual al percentil75. Respecto a la variable *urbano* se muestra una homogeneidad en la distribución de los sectores del gráfico de caja y bigote, asimismo el bigote inferior es más corto que el superior, esto implica que el 25% de los puntajes más bajos se encuentra más concentrado que aquellos que se encuentran en el 25% más alto. Es notoria la diferencia que se produce entre el puntaje mayor de la variable *urbano* y el mayor puntaje de la variable *rural.*

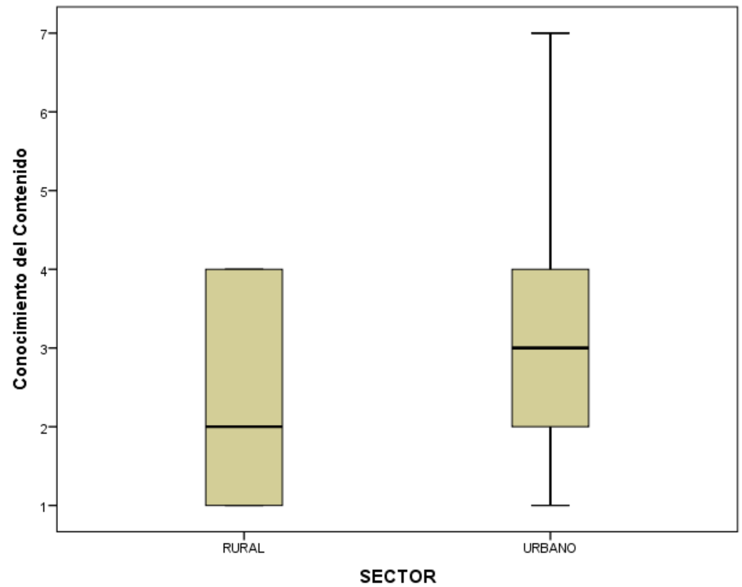


Figura 7.37 Gráfico de cajón y bigote de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

Respecto al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, los docentes que realizan su labor profesional en sectores *urbanos* han obtenido una mayor puntuación que aquellos que pertenecen a sectores *rurales*. La dispersión en ambas variables es similar, esto se muestra en la tabla 7.133.

Sector	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Rural	6	2,33	1,366	0,558	0,90	3,77	1	4
Urbano	115	3,35	1,396	0,130	3,09	3,61	1	7

Tabla 7.133 Estadísticos de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la tabla 7.134 se muestra que la variable *rural* tiene un comportamiento normal (*p* mayor a 0,05), sin embargo, las puntuaciones de *urbano* no son normales, *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Rural	0,263	6	0,200	0,823	6	0,093
Urbano	0,146	115	0,000	0,943	115	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.134 Prueba de normalidad para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la prueba de igualdad de varianzas se nota que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,012	0,915

Tabla 7.135 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la Prueba T Student de igualdad de medias se puede ver que las medias de los puntajes en ambos géneros son iguales, donde el valor de *p* es mayor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
-1,737	0,085

Tabla 7.136 Estadística T-Student para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

En la tabla 7.137 correspondiente a la Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se deduce que las medianas de los puntajes en ambos géneros son iguales, dado que el valor *p* es mayor a 0,05.

Prueba U de Mann-Whitney	Sig.
210,0	0,099

Tabla 7.137 Prueba U de Mann-Whitney para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación a los Estudiantes*

7.4.7.5.4 Efecto de la variable *Sector* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza

Con respecto a la variable *rural* se muestra (figura 7.38) que la parte superior de la caja es mayor a la inferior, esto indica que las puntuaciones comprendidas entre el 50% y el 75% están más dispersas que aquellas correspondientes al 25% y 50%. Lo mismo ocurre respecto a la variable *urbano.* El puntaje total mínimo de la variable *rural* es igual al percentil 25, por su parte, el puntaje total máximo es igual al percentil 75, esto ocurre en ambas variables.

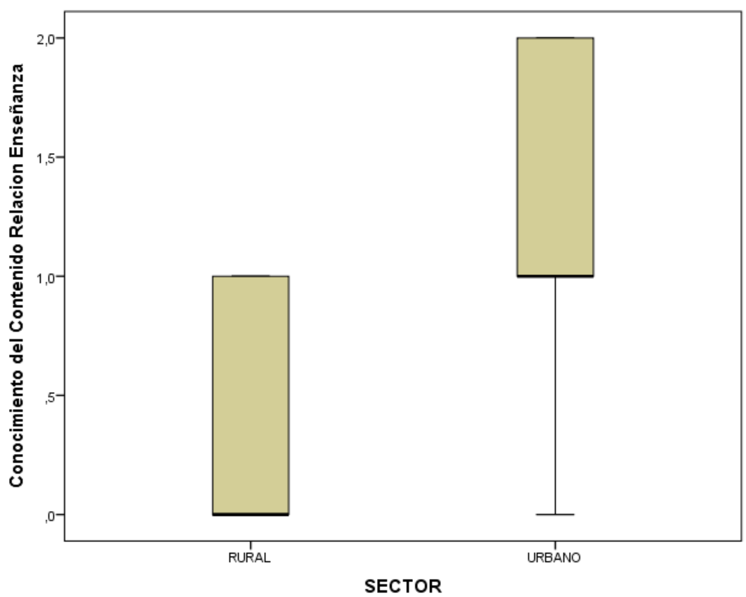


Figura 7.38 Gráfico de cajón y bigote de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

Mediante la tabla 7.138 queda en evidencia que en el conocimiento del contenido en relación a la enseñanza, los docentes que se desempeñan en colegios del ámbito *urbano* fue superior a aquellos de los sectores *rurales.*

Sector	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Rural	6	0,33	0,516	0,211	-0,21	0,88	0	1
Urbano	89	1,12	0,075	0,228	0,98	1,27	0	2

Tabla 7.138 Estadísticos de la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

En la tabla 7.139 se aprecia que ambas variables no son normales, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Rural	0,407	6	0,002	0,640	6	0,001
Urbano	0,255	89	0,000	0,802	89	0,000

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.139 Prueba de normalidad para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

En la prueba de igualdad de varianzas se infiere que las varianzas de los puntajes en ambos géneros son iguales, valor *p* mayor a 0,05.

Estadístico de Levene F	Sig.
0,358	0,551

Tabla 7.140 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

En la Prueba T Student de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes en ambos géneros no son iguales, donde el valor de *p* es menor a 0,05.

Estadística T-Student	Sig.
-2,694	0,008

Tabla 7.141 Estadística T-Student para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

Finalmente en la Prueba U de Mann-Whitney (estadístico no paramétrico) de igualdad de medias, se deduce que las medianas de los puntajes en ambos géneros no son iguales, dado que el valor *p* es menor a 0,05.

Prueba U de Mann-Whitney	Sig.
112,0	0,010

Tabla 7.142 Prueba U de Mann-Whitney para la variable *SECTOR* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

7.4.7.6 Curso en que realiza su labor profesional

La figura 7.39 muestra el curso en el cual trabajan mayormente los docentes que contestaron la versión final del cuestionario. 24 docentes (19,83%), trabajan en primer año de enseñanza básica. 26 profesores (21,49%), en segundo año básico. También 24 (19,83%), en tercero básico. 18 profesores están trabajando en cuarto año de enseñanza básica (14,88%). 13 de ellos ejercen docencia en quinto año básico (10,74%). 12 profesores en sexto año (9,91%). Finalmente, cuatro (3,306%) realizan sus clases en aulas multigrado (en una misma aula comparten alumnos de diferentes edades y niveles educativos).

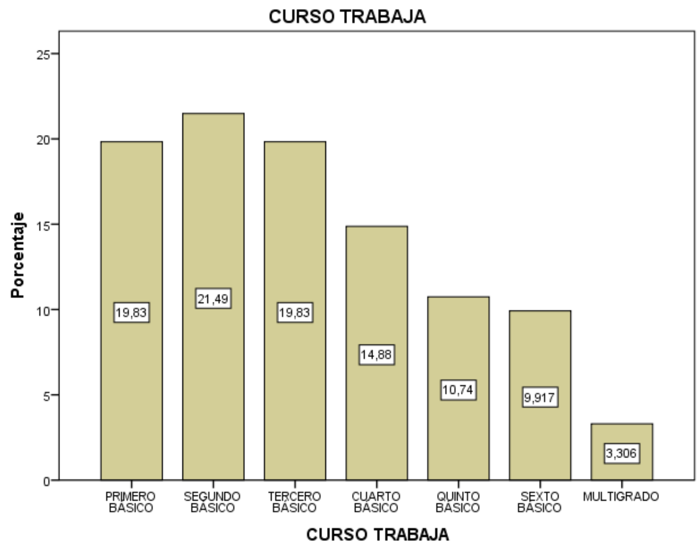


Figura 7.39 Distribución de los sujetos participantes según el curso en el que ejercen docencia

7.4.7.6.1 Efecto de la variable *Curso en la realiza su labor profesional* sobre el Conocimiento Común del Contenido

En las gráficas de caja y bigote de la figura 7.40, se infiere que entre todas variables, la que presenta una distribución más simétrica es aquella referente *quinto año básico*, sin embargo, la longitud de los bigotes difieren uno del otro. Tanto *cuarto año básico* y *sexto año básico* se tienen datos extremos. La variable que presenta una mayor variabilidad es la de *segundo básico* y aquella que tiene la menor variabilidad es *sexto año básico.*

En la tabla 7.143 queda en evidencia que aquellos docentes que obtuvieron una mayor puntuación fueron aquellos que realizan sus sesiones de clase en *quinto año de enseñanza básica*, en forma contraria aquellos que tuvieron un nivel de logro bajo, son aquellos que trabajan en el nivel de *primer año básico.*

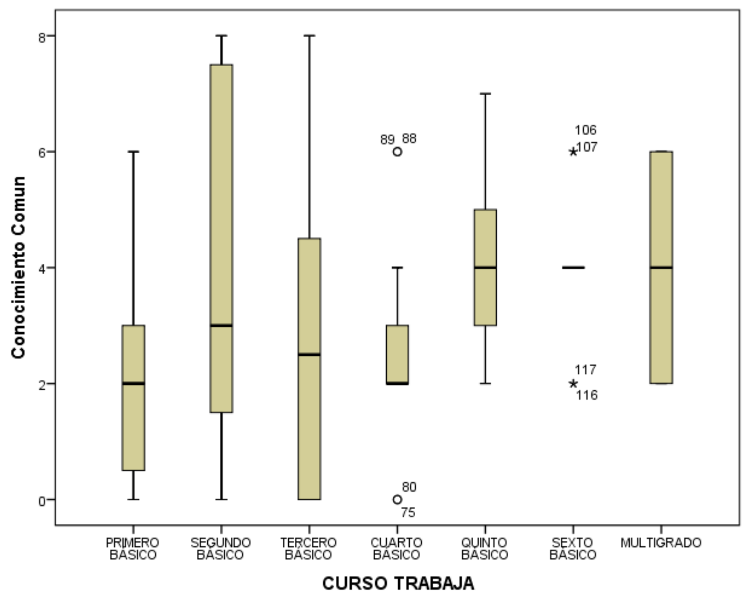


Figura 7.40 Grafico de cajón y bigote de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

Curso en el que realiza su labor profesional	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Primero Básico	24	2,17	1,903	0,389	1,36	2,97	0	6
Segundo Básico	24	4,08	3,216	0,656	2,73	5,44	0	8
Tercero Básico	24	3,00	2,859	0,584	1,79	4,21	0	8
Cuarto Básico	18	2,56	1,617	0,381	1,75	3,36	0	6
Quinto Básico	13	4,31	1,653	0,438	3,31	5,31	2	7
Sexto Básico	12	4,00	1,206	0,348	3,23	4,77	2	6
Multigrado	4	4,00	2,309	1,155	0,33	7,67	2	6
Total	119	3,26	2,430	0,223	2,82	3,70	0	8

Tabla 7.143 Estadísticos de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

La prueba de igualdad de varianzas indica que en la mayoría de las variables se observa que las varianzas de los puntajes no son iguales (*p* menor a 0,05), salvo en el caso de la variable *quinto año básico*, donde el valor *p* es mayor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Primero Básico	0,285	24	0,000	0,859	24	0,003
Segundo Básico	0,241	24	0,001	0,826	24	0,001
Tercero Básico	0,186	24	0,031	0,858	24	0,003
Cuarto Básico	0,301	18	0,000	0,831	18	0,004
Quinto Básico	0,189	13	0,200	0,929	13	0,328
Sexto Básico	0,333	12	0,001	0,774	12	0,005
Multigrado	0,307	4		0,729	4	0,024

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.144 Prueba de normalidad para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la prueba de igualdad de varianzas se deduce que las varianzas de los puntajes en ambos géneros no son iguales, valor *p* menor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
7,548	6	112	0,000

Tabla 7.145 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede inferir que existe diferencia en al menos una categoría de la categoría *curso en el que realiza su labor profesional,* el valor de *p* es menor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	78,544	6	13,091	2,371	0,034
Intra-grupos	618,380	112	5,521		
Total	696,924	118			

Tabla 7.146 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede apreciar que existe diferencia en al menos una de las categorías de dependencia, el valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
14,285	0,027

Tabla 7.147 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Común del Contenido*

7.4.7.6.2 Efecto de la variable *Curso en la realiza su labor profesional* sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

En la gráfica de caja y bigotes, se aprecia una distribución heterogenia en cada una de las variables, cada una de ellas tiene un comportamiento que difiere a los otros. En las variables *segundo*, *tercero* y *cuarto año* existen datos extremos. La variable que tiene una mayor variabilidad es la correspondiente a *multigrado*, por el contrario, aquella que posee una menor variabilidad es *cuarto básico*, en ella el puntaje mínimo, el percentil 25, la mediana y el percentil 75 tienen en mismo valor.

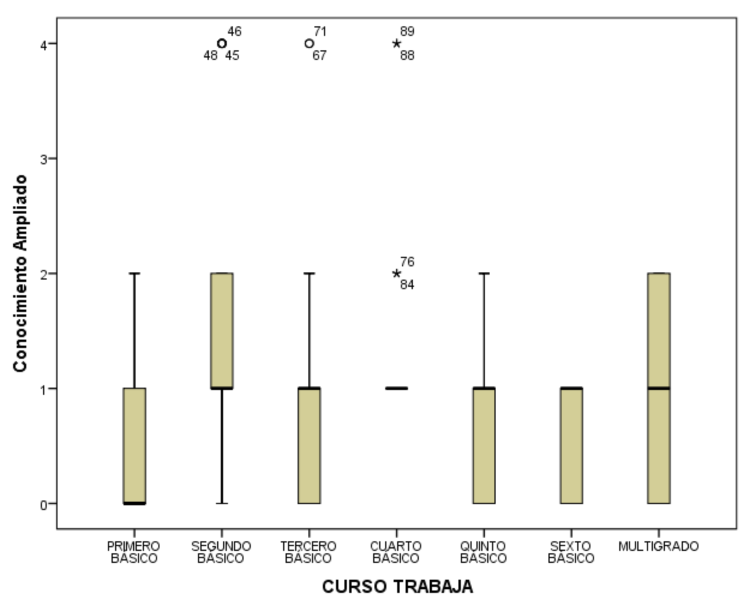


Figura 7.41 Gráfico de cajón y bigote de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

En la tabla 7.148 se muestra que considerando el conocimiento ampliado del contenido que los docentes que realizan su labor en *segundo año de enseñanza básica* han obtenido una mejor puntuación, por el contrario, los docentes que trabajan en el nivel de *primer año básico* obtuvieron la puntuación más baja.

Curso en el que realiza su labor profesional	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Primero Básico	22	0,55	0,800	0,171	0,19	0,90	0	2
Segundo Básico	26	1,62	1,472	0,289	1,02	2,21	0	4
Tercero Básico	24	1,00	1,103	0,225	0,53	1,47	0	4
Cuarto Básico	18	1,44	0,984	0,232	0,96	1,93	1	4
Quinto Básico	13	0,92	0,760	0,211	0,46	1,38	0	2
Sexto Básico	12	0,67	0,492	0,142	0,35	0,98	0	1
Multigrado	4	1,00	1,155	0,577	0,84	2,84	0	2
Total	119	1,08	1,106	0,101	0,87	1,28	0	4

Tabla 7.148 Estadísticos de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Respecto a la prueba de normalidad (tabla 7.149) queda en evidencia que todas las variables tienen un comportamiento normal, dado que en todos los casos tenemos *p* menor a 0,05.

En la tabla 7.150 correspondiente a la prueba de igualdad de varianzas se advierte que las varianzas de los puntajes en ambos géneros no son iguales, valor *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Primero Básico	0,389	22	0,000	0,674	22	0,000
Segundo Básico	0,277	26	0,000	0,809	26	0,000
Tercero Básico	0,333	24	0,000	0,735	24	0,000
Cuarto Básico	0,452	18	0,000	0,511	18	0,000
Quinto Básico	0,233	13	0,053	0,825	13	0,014
Sexto Básico	0,417	12	0,000	0,608	12	0,000
Multigrado	0,307	4		0,729	4	0,024

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.149 Prueba de normalidad para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
3,104	6	112	0,008

Tabla 7.150 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

La tabla 7.151 muestra la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias, ahí se puede deducir que existe diferencia en al menos una categoría de la variable *curso en el que realiza su labor profesional*, dado que el valor *p* es menor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	18,677	6	3,113	2,775	0,015
Intra-grupos	125,643	112	1,122		
Total	144,319	118			

Tabla 7.151 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

La Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, arrojó que existe una diferencia en al menos una de las categorías de dependencia, el valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
14,933	0,021

Tabla 7.152 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Ampliado del Contenido*

7.4.7.6.3 Efecto de la variable *Curso en la realiza su labor profesional* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes

En los gráficos de caja y bigote (figura 7.42), es posible observar que los docentes que pertenecen al rango *quinto año básico* han obtenido una puntuación más homogénea, incluso presenta una longitud similar en ambos extremos de los bigotes. En la variable *tercer año básico* presenta un bigote superior de mayor extensión, esto implica que los datos que se encuentran en los niveles más altos están más dispersos que aquellos que están en la parte inferior, además aquí se obtuvo la mejor puntuación. La variable que presenta una menor variabilidad es la correspondiente a *multigrado.*

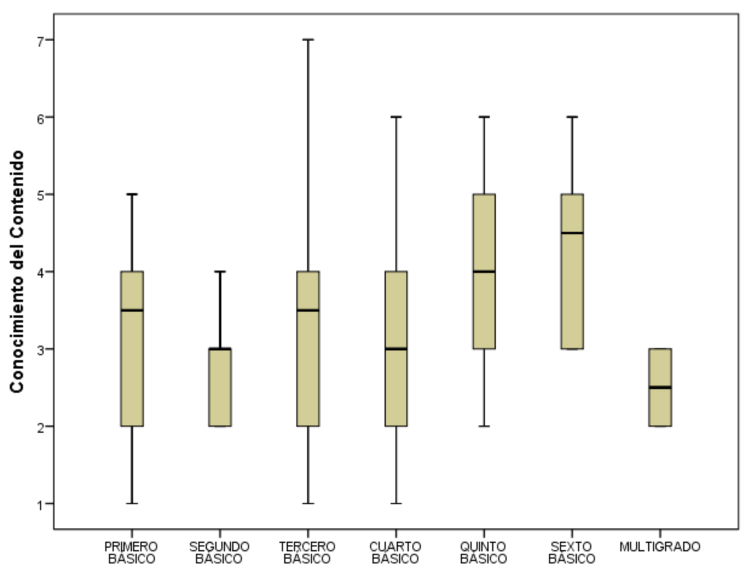


Figura 7.42 Gráfico de cajón y bigote de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes*

En la 7.153 es posible apreciar que los docentes que lograron una mejor puntuación respecto al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes son aquellos que realizar su labor profesional en los niveles superiores de educación básica, es decir, en quinto y sexto año. Por el contrario, aquellos que obtuvieron las puntuaciones más bajas, trabajan en aulas multigrado y en los primeros años de enseñanza básica (primer y segundo año). Las puntuaciones de los rangos *tercer y cuarto año básico*, son aquellas que tienen una mayor dispersión de los datos.

Curso en el que realiza su labor profesional	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Primero Básico	24	3,00	1,319	0,269	2,44	3,56	1	5
Segundo Básico	26	2,92	0,744	0,146	2,62	3,22	2	4
Tercero Básico	24	3,25	1,726	0,352	2,52	3,98	1	7
Cuarto Básico	18	3,22	1,665	0,392	2,39	4,05	1	6
Quinto Básico	13	4,08	1,382	0,383	3,24	4,91	2	6
Sexto Básico	12	4,33	1,155	0,333	3,60	5,07	3	6
Multigrado	4	2,50	0,577	0,289	1,58	3,42	2	3
Total	121	3,30	1,406	0,128	3,04	3,55	1	7

Tabla 7.153 Estadísticos de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes*

En la tabla 7.154 se muestra que las variables *primer, segundo* y *tercer año básico* no son normales, en estos casos tenemos *p* menor a 0,05. Por el contrario, las categorías *cuarto, quinto* y *sexto año básico* tienen un comportamiento normal dado que p mayor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Primero Básico	0,276	24	0,000	0,860	24	0,003
Segundo Básico	0,233	26	0,001	0,812	26	0,000
Tercero Básico	0,182	24	0,038	0,901	24	0,023
Cuarto Básico	0,131	18	0,200	0,922	18	0,141
Quinto Básico	0,209	13	0,123	0,912	13	0,194
Sexto Básico	0,218	12	0,120	0,859	12	0,048
Multigrado	0,307	4		0,729	4	0,024

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.154 Prueba de normalidad para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes*

En la prueba de igualdad de varianzas se deduce que las varianzas de los puntajes en ambos géneros no son iguales, valor *p* menor a 0,05.

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
4,345	6	114	0,001

Tabla 7.155 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede notar que las medias de los puntajes totales de todas las categorías no son iguales, el valor *p* menor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	29,242	6	4,874	2,671	0,018
Intra-grupos	208,047	114	1,825		
Total	237,289	120			

Tabla 7.156 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes*

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede deducir que existe diferencia en al menos una de las categorías de dependencia, el valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
14,844	0,022

Tabla 7.157 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con los Estudiantes*

7.4.7.6.4 Efecto de la variable *Curso en la realiza su labor profesional* sobre el Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza

En las gráficas de caja y bigote de la figura 7.43, se nota que no existe homogeneidad en las gráficas respecto al conocimiento en relación con la enseñanza. En las variables *segundo, cuarto* y *sexto año de enseñanza básica* existen valores extremos. Aquella variable que presenta una mayor variabilidad es la correspondiente a *multigrado*, por el contrario, aquellos que tienen una menor variabilidad son *segundo* y *sexto año básico.*

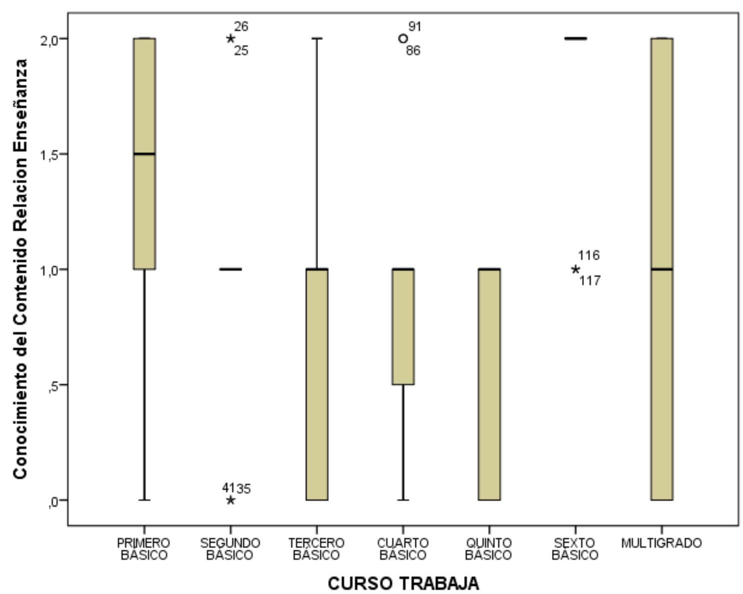


Figura 7.43 Gráfico de cajón y bigote de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

En la tabla 7.158 se aprecia que respecto al conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, los docentes que trabajan en *sexto año básico*, obtuvieron una mayor puntuación, por el contrario, los profesores de *quinto año básico* con los que lograron una menor puntuación en esta categoría.

Curso en el que realiza su labor profesional	*n*	Media	Desviación Típica	Error Típico	Intervalo de Confianza del 95% para la media		Mínimo	Máximo
					Límite inferior	Límite Superior		
Primero Básico	20	1,30	0,801	0,179	0,92	1,68	0	2
Segundo Básico	16	1,00	0,516	0,129	0,72	1,28	0	2
Tercero Básico	20	0,90	0,718	0,161	0,56	1,24	0	2
Cuarto Básico	16	0,88	0,619	0,155	0,55	1,20	0	2
Quinto Básico	9	0,67	0,500	0,167	0,28	1,05	0	1
Sexto Básico	10	1,80	0,422	0,133	1,50	2,10	1	2
Multigrado	4	1,00	1,155	0,577	-0,84	2,84	0	2
Total	95	1,07	0,718	0,074	0,93	1,22	0	2

Tabla 7.158 Estadísticos de la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

Respecto a la Prueba de normalidad, se deduce que todas las variables no son normales, en ambos casos tenemos *p* menor a 0,05 (tabla 7.159).

En la tabla 7.160 correspondiente a la prueba de igualdad de varianzas se percibe que las varianzas de los puntajes en ambos géneros no son iguales, valor *p* menor a 0,05.

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl.	Sig.	Estadístico	gl.	Sig.
Primero Básico	0,309	20	0,000	0,762	20	0,000
Segundo Básico	0,375	16	0,000	0,697	16	0,001
Tercero Básico	0,255	20	0,001	0,812	20	0,001
Cuarto Básico	0,330	16	0,000	0,778	16	0,001
Quinto Básico	0,414	9	0,000	0,617	9	0,000
Sexto Básico	0,482	10	0,000	0,509	10	0,000
Multigrado	0,307	4		0,729	4	0,024

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Tabla 7.159 Prueba de normalidad para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

Estadístico de Levene F	gl1	gl2	Sig.
3,701	6	88	0,003

Tabla 7.160 Estadístico de Levene F de igualdad de varianzas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

En la Prueba F (ANOVA) de igualdad de medias se puede apreciar que existe diferencia en al menos una categoría de la categoría *curso en el que realiza su labor profesional*, el valor de *p* es menor a 0,05.

	Suma de cuadrados	gl.	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	9,134	6	1,522	3,405	0,005
Intra-grupos	39,350	88	0,447		
Total	48,484	94			

Tabla 7.161 Prueba F (ANOVA) para igualdad de medias para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

En la Prueba Chi-cuadrado-Wallis (estadística no paramétrica) de igualdad de medianas de puntajes totales, se puede notar que existe diferencia en al menos una de las categorías de dependencia, el valor *p* menor a 0,05.

Estadística Chi-cuadrado	Sig.
18,395	0,005

Tabla 7.162 Prueba Chi-cuadrado-Wallis para la de igualdad de medianas para la variable *CURSO EN EL QUE REALIZA SU LABOR PROFESIONAL* sobre el *Conocimiento Especializado subcategoría Conocimiento del Contenido en Relación con la Enseñanza*

7.4.8 Efecto de las variables referentes a la reforma curricular sobre los conocimientos

Mediante la aplicación del instrumento, no tan sólo se recogieron datos descriptivos, también realizamos siete preguntas referentes a los cambios curriculares referentes al álgebra, esto a partir de las modificaciones impulsadas por el Ministerio de Educación. Las preguntas de esta categoría están numeradas a partir del 10 y hasta el 16 en el cuestionario en su versión final.

7.4.8.1 Referente a las modificaciones realizadas al currículo chileno

Pregunta 10: *¿Usted está de acuerdo con las modificaciones que se han realizado en el currículum chileno, en relación a la incorporación del eje de álgebra desde los primeros niveles de educación?* 97 profesores (80,17%) indican que están de acuerdo con las modificaciones; 24 (19,83%), dicen que están medianamente de acuerdo; no existen docentes que estén en oposición a las modificaciones impulsadas.

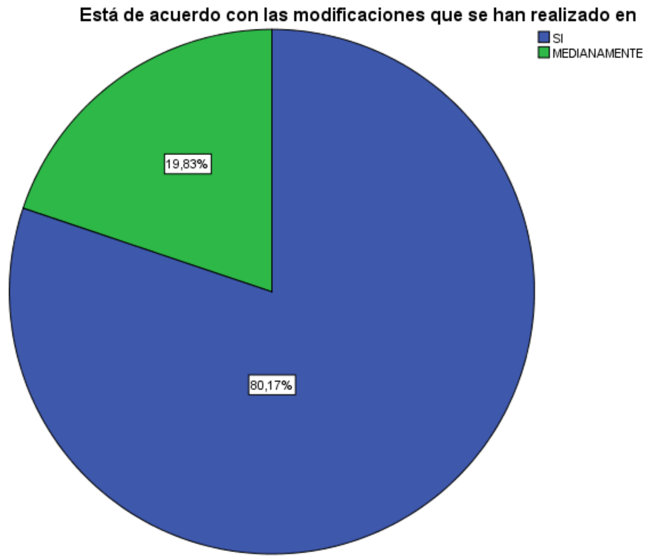


Figura 7.44 Respuesta a la pregunta: *¿Usted está de acuerdo con las modificaciones que se han realizado en el currículum chileno, en relación a la incorporación del eje de álgebra desde los primeros niveles de educación?*

7.4.8.2 Referente a la preparación académica para realizar clases de álgebra en enseñanza básica

Pregunta 11: *¿Usted se siente preparado para realizar clases de álgebra desde los primeros niveles de educación?* 86 profesores indican sentirse muy preparados, lo que equivale a un 71,07%; 23 aseguran estar medianamente preparados (19,01%); los docentes que no se sienten preparados para realizar un curso de álgebra son 12 (9,92%).

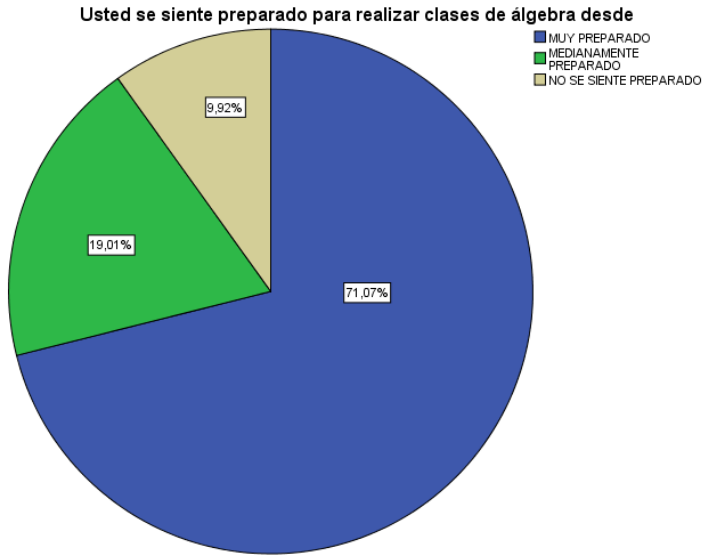


Figura 7.45 Respuesta a la pregunta: *¿Usted se siente preparado para realizar clases de álgebra desde los primeros niveles de educación?*

7.4.8.3 Referente a la formación disciplinaria algebraica

Pregunta 12: *¿En su formación universitaria, tuvo cursos de álgebra?* 67 docentes (55,37%) declaran haber tenido en su formación universitaria cursos de álgebra; por el contrario 54 de ellos (44,63%) indican que no tuvieron aquellos cursos.

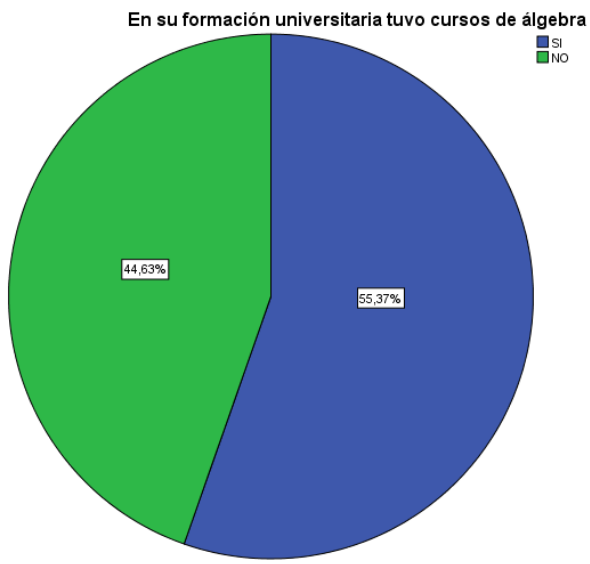


Figura 7.46 Respuesta a la pregunta:
¿En su formación universitaria, tuvo cursos de álgebra?

7.4.8.4 Referente a la formación didáctica algebraica

Pregunta 13: *¿En su formación universitaria, tuvo cursos de didáctica del álgebra?* Sólo 24 de los profesores indican que tuvieron cursos de didáctica de álgebra en su formación universitaria dado que las instituciones de educación superior en las que estudiaron, tenían contempladas estas asignaturas en sus estructuras curriculares (19,83%); por otra parte, 97 docentes (80,17%) no hicieron estos cursos.

Figura 7.47 Respuesta a la pregunta: *¿En su formación universitaria, tuvo cursos de didáctica del álgebra?*

7.4.8.5 Referente a la realización de una mención en matemática

Pregunta 14: *Durante los años que lleva trabajando como profesor de educación básica. ¿Usted ha realizado algún postítulo de mención en matemática, donde esté incluido el álgebra?* 31 de los docentes indican que han realizado un postítulo de matemática donde se incluyen contenidos referentes al álgebra, esto equivale a un 25,62%; en contraposición 90 de ellos (74,38%), no han realizado un postítulo en el área de la matemática.

Figura 7.48 Respuesta a la pregunta: *Durante los años que lleva trabajando como profesor de educación básica. ¿Usted ha realizado algún postítulo de mención en matemática, donde esté incluido el álgebra?*

7.4.8.6 Referente al conocimiento de los estándares pedagógicos y disciplinarios

Pregunta 15: *¿Usted conoce los estándares pedagógicos y disciplinarios?* 30 de los docentes declara conocerlos, esto es el 24,79%, la misma cantidad indica no conocerlos; aquellos que declaran conocerlos parcialmente son 61 (50,41%).

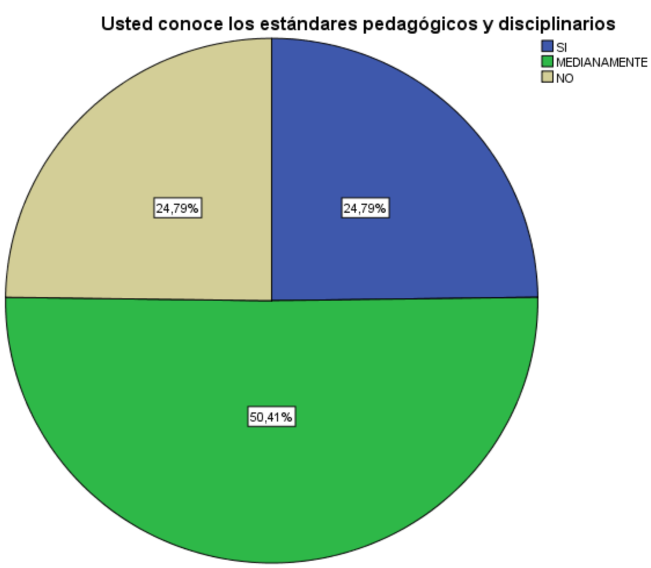


Figura 7.49 Respuesta a la pregunta: *¿Usted conoce los estándares pedagógicos y disciplinarios?*

7.4.8.7 Referente al conocimiento de los estándares pedagógicos y disciplinarios que incluyen álgebra

Pregunta 16: *Con respecto a los estándares pedagógicos y disciplinarios, ¿Usted sabe cuántos están dirigidos al eje de álgebra?* 40 docentes (33,06%) indican conocer cuántos estándares están orientados al eje del álgebra; en circunstancia que 81 (66,94%) dice no conocerlo.

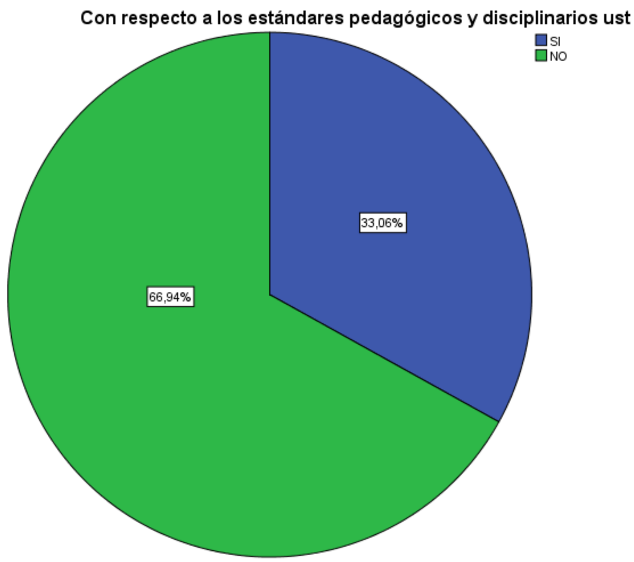


Figura 7.50 Respuesta a la pregunta: *Con respecto a los estándares pedagógicos y disciplinarios, ¿Usted sabe cuántos están dirigidos al eje de álgebra?*

7.4.9 Análisis de los tipos de conocimientos didáctico-matemático

Anteriormente se analizaron las respuestas de los 121 docentes que respondieron el cuestionario respecto a la relación entre los conocimientos con datos de los docentes como *género*, *especialidad*, *años de experiencia en el campo laboral*, *dependencia del establecimiento educacional*, *sector de ubicación del establecimiento* y *curso en el cual trabaja*. Además de examinar lo que respondieron a las preguntas concernientes a los últimos cambios curriculares que han ocurrido en el país.

Para el análisis de los ítems y subítems del cuestionario se categorizaron las respuestas docentes a partir del *grado de corrección* en *correcta*, *parcialmente correcta*, *incorrecta* y *no contesta.* Del mismo modo hemos clasificado estas respuestas a partir de distintas categorías a las cuales calculamos su frecuencia y porcentaje.

Debemos considerar que las citas que se mostrarán fueron reproducidas en forma literal, incluso se mantuvieron las faltas de ortografía y gramática que pudieran existir.

7.4.9.1 Análisis de las respuestas de los ítems y subítems sobre conocimiento común del contenido

El conocimiento común del contenido se fundamenta en la faceta epistémica del docente es el conocimiento que el profesor aplica para la operatoria común y básica, además de aplicar propiedades, axiomas y definiciones elementales, es decir, es aquel que posee cualquier persona que posee un mínimo de instrucción matemática.

En el análisis del conocimiento común de contenido que poseen los 121 profesores sobre álgebra, se analizaron las prácticas matemáticas presentes en las repuestas de los ítmes y subítems 3), 5), 6) y 7a).

7.4.9.1.1 Análisis del ítem 3

Este ítem que se encuentra asociado al conocimiento común del contenido pretende determinar si el docente logra realizar una óptima transferencia entre lenguaje natural y el lenguaje algebraico. En la figura 7.51 se muestra el planteamiento del ítem 3.

Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro compradores distintos: Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno. Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero. Al tercero, un ternero. Al cuarto comprador le vende el último un ternero. ¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Construya ecuaciones y resuelva.

Figura 7.51 Situación planteada en el ítem 3

En la tabla 7.163 muestra el grado de corrección del ítem 3 del cuestionario, en él se observa que 19 profesores alcanzaron la respuesta correcta, esto equivale a un 15,70%. Sólo cuatro lograron la pregunta parcialmente correcta. La mayoría de ellos, 70 docentes equivalente a un 57,85% tuvieron su respuesta incorrecta. Finalmente 28 profesores no contestaron la situación planteada.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	19	15,70
Parcialmente correcta	4	3,31
Incorrecta	70	57,85
No contesta	28	23,14
Total	121	100

Tabla 7.163 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al ítem 3

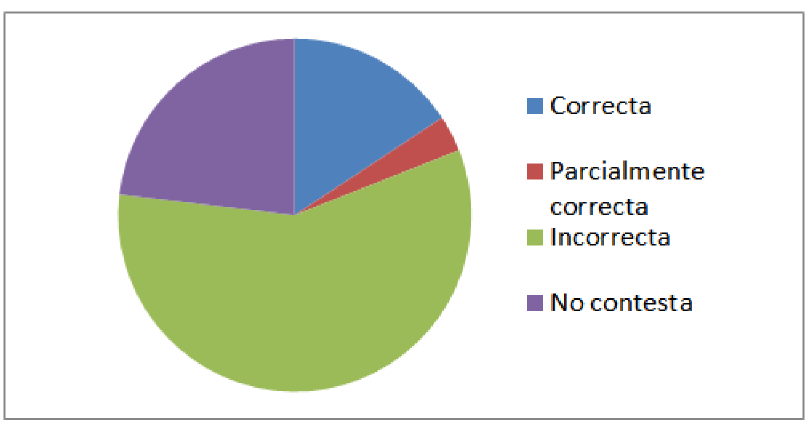


Figura 7.52 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al ítem 3

Las respuestas entregadas por los docentes las hemos categorizado en la tabla 7.164, en ella queda consignado que 19 docentes obtuvieron la respuesta correcta. Cuatro de ellos (3,31%) elaboraron correctamente la ecuación, sin embargo, la desarrollan de forma inadecuada. El mismo porcentaje de ellos utilizó el método de ensayo y error para lograr la respuesta correcta. Un alto porcentaje (52,89%), trata de obtener la solución requerida, empero, no lo logra, quienes están en esta situación son 64 profesores. Dejan el espacio en blanco para responder, el 23,14% de los docentes.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Construye adecuadamente una ecuación llegando a la respuesta correcta.	19	15,70
Elabora correctamente una ecuación, pero no llega al resultado solicitado.	4	3,31
Utiliza el método de ensayo y error para llegar a la respuesta.	4	3,31
Utiliza una forma gráfica para buscar la solución.	2	1,65
No obtiene la solución requerida.	64	52,89
No responde.	28	23,14
Total	121	100

Tabla 7.164 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al ítem 3

La figura 7.53 correspondiente a la producción del profesor 33 muestra una impecable construcción de la ecuación asociada a la problemática, elaboró una solución paso a paso utilizando los elementos algebraicos en forma adecuada.

Cuatro docentes (3,31%) construyeron correctamente la ecuación, sin embargo, por errores de operatoria, o debido a inconvenientes en el trabajo algebraico, no han llegado a la respuesta correcta. Un ejemplo de esto es lo evidenciado en el figura 7.54 y que correspondió a la respuesta entregada por el profesor 69. Del mismo modo, hubo la misma cantidad de docentes utilizaron el método de ensayo y error en la elaboración de sus soluciones, esto se exhibe en la figura 7.55 y corresponde al profesor 31.

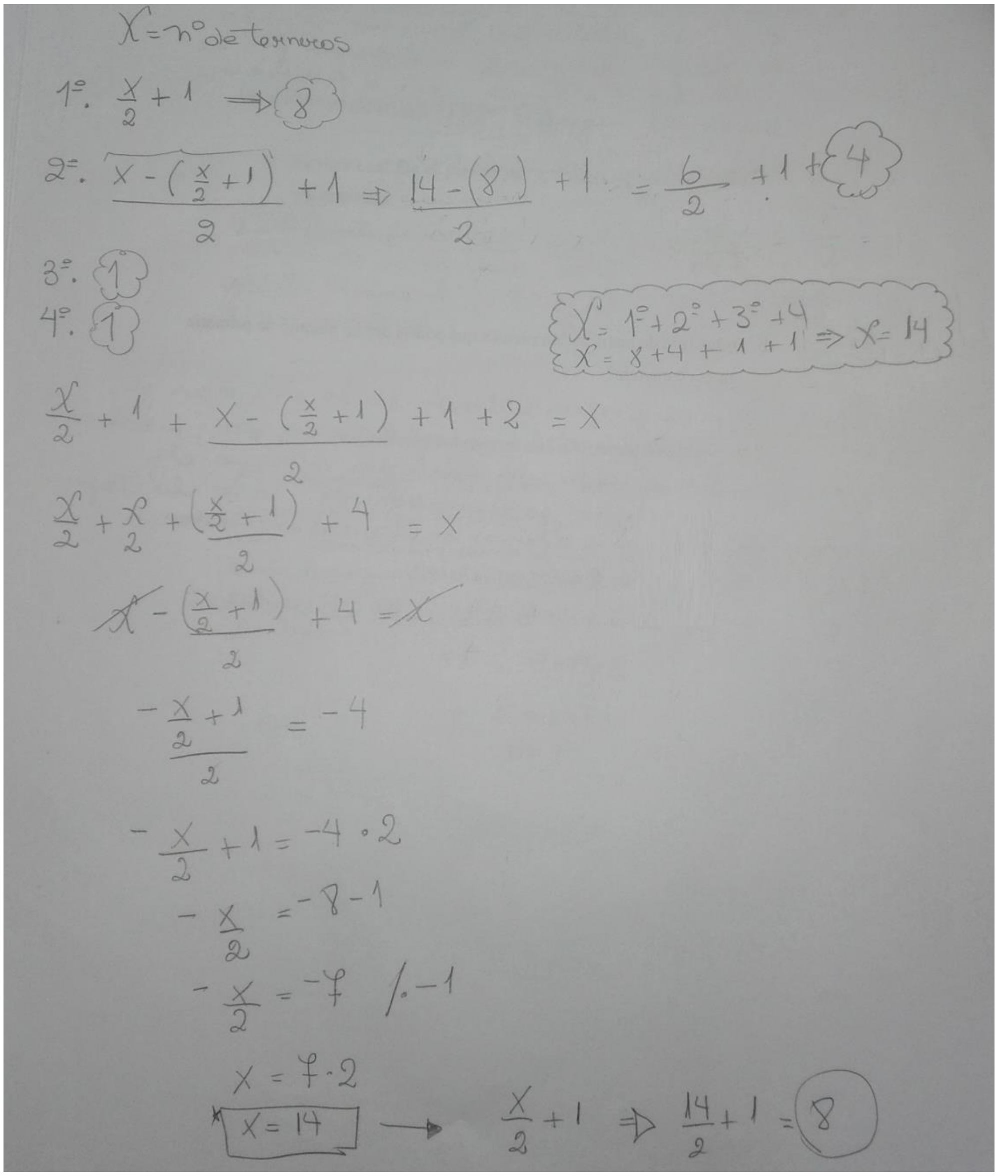


Figura 7.53 Respuesta del profesor 33 al ítem 3

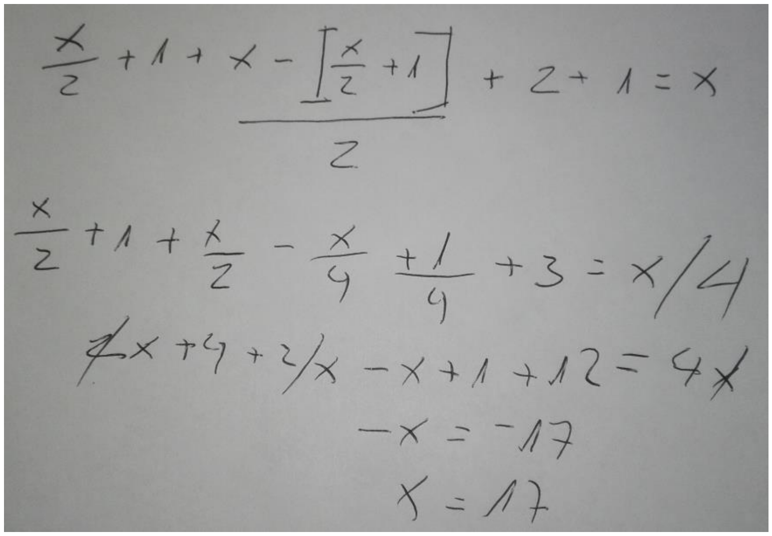


Figura 7.54 Respuesta del profesor 69 al ítem 3

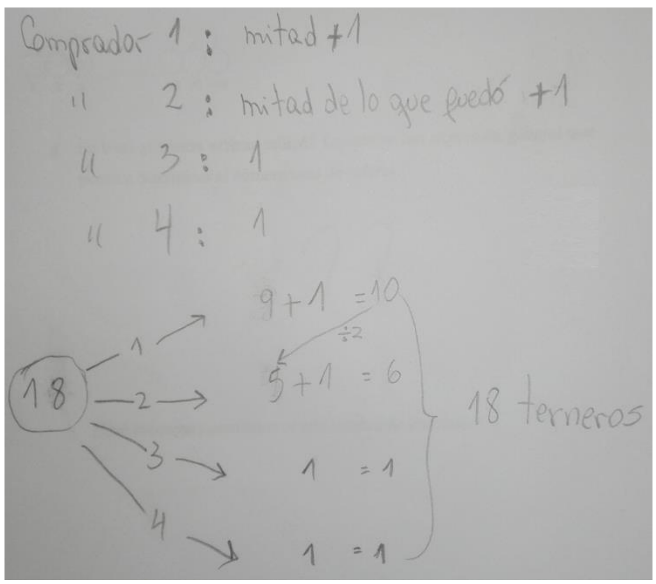


Figura 7.55 Respuesta del profesor 31 al ítem 3

Por otra parte hubo dos docentes (1,65%) que se escaparon de la norma y utilizaron elementos pictóricos para tratar de encontrar la solución a la problemática planteada, un ejemplo fue lo realizado por el profesor 119 (figura 7.56).

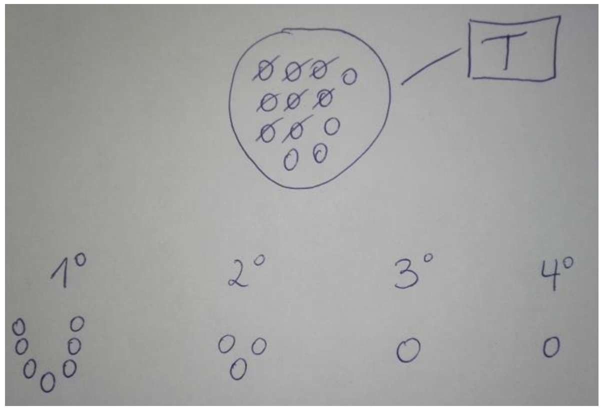


Figura 7.56 Respuesta del profesor 119 al ítem 3

Poco más de la mitad de los docentes (52,89%), no alcanzaron la solución requerida, esto independiente del recurso matemático que utilizaron (gráfico, construcción de ecuaciones, ensayo y error, u otro), fueron 64 docentes que no obtuvieron la respuesta correcta. Un ejemplo de una respuesta algebraica en la cual el profesor 6 (figura 7.57) no construyó de manera adecuada la ecuación necesaria para solucionar la problemática planteada. Finalmente 28 profesores (23,14%) no respondieron lo solicitado.

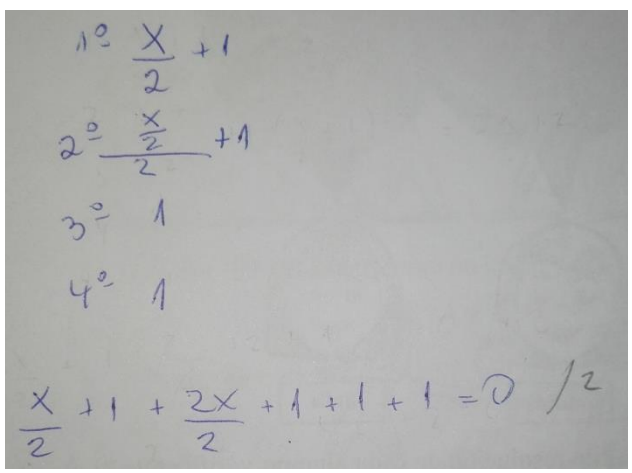


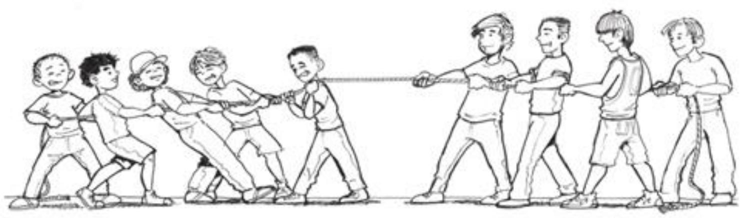
Figura 7.57 Respuesta del profesor 6 al ítem 3

7.4.9.1.2 Análisis del ítem 5

Este ítem también se encuentra asociado al conocimiento común del contenido, en él, a partir de una situación contextualizada en una salida recreacional entre profesores y alumnos juegan a tirar la cuerda. Con los equipos que se forman, deben dilucidar el equipo ganador a través de la elaboración de ecuaciones.

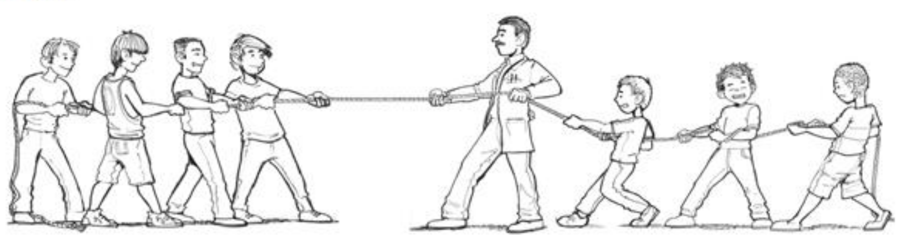
En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.

Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo "demoledores" conformado por cuatro jóvenes contra "invencibles" donde se encuentra un profesor y tres niños.



Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada.

Figura 7.58 Situación planteada en el ítem 5

La tabla 1.165 muestra las frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas de este ítem. Hubo 29 docentes que construyeron de forma adecuada las ecuaciones y dieron la solución correcta. Catorce (11,57%) encontraron una solución parcial usando el método de ensayo y error, y argumentaciones lingüísticas, entre otras. Los docentes que contestaron de forma incorrecta fueron 38, equivalente al 31,40% y aquellos que dejaron el espacio en blanco fueron 40 (33,06%).

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	29	23,97
Parcialmente correcta	14	11,57
Incorrecta	38	31,40
No contesta	40	33,06
Total	121	100

Tabla 7.165 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al ítem 5

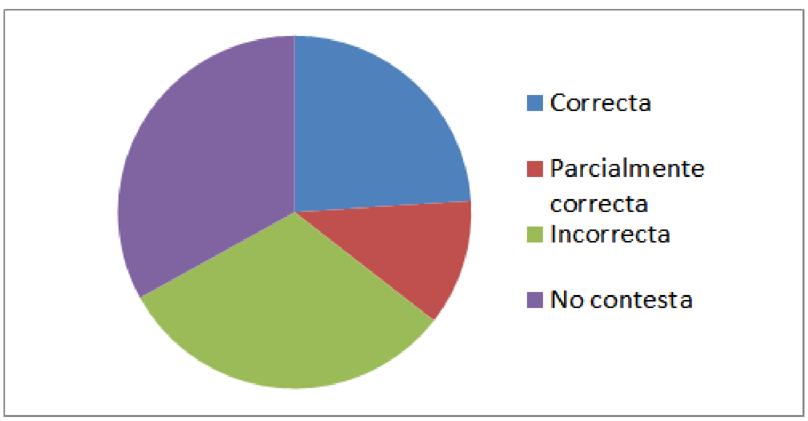


Figura 7.59 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al ítem 5

Como se indicó anteriormente, 29 profesores entregaron la respuesta correcta usando ecuaciones que el equipo ganador es “invencibles”. Seis llegaron a la respuesta correcta utilizando el método de ensayo y error, esto equivale al 4,96% del total. Fueron 8 docentes (6,61%) que usaron otro tipo de argumentaciones para llegar a la respuesta correcta, la misma cantidad también utilizaron otras argumentaciones sin llegar a la respuesta requerida. 28

profesores (23,14%) construyeron ecuaciones que no representaban algebraicamente lo que indicaba el problema, por lo cual, no dieron la solución correcta. Dos de ellos (1,65%) elaboraron ecuaciones llegando a la solución errónea que el equipo vencedor es “demoledores”. Muchos no respondieron esta problemática dejando en blanco el espacio dejado para estos efectos, los docente que no contestaron fueron 40 (33,06%).

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Elabora ecuaciones llegando a la solución que gana el equipo “invencibles”.	29	23,97
Entrega como solución que gana la competencia el equipo “invencibles” utilizando el método de ensayo y error.	6	4,96
Utiliza otras argumentaciones para llegar a la respuesta correcta.	8	6,61
Utiliza otras argumentaciones, sin embargo, no llega a la respuesta correcta.	8	6,61
Construye ecuaciones, sin llegar a la solución solicitada.	28	23,14
A través de ecuaciones llega a la conclusión que el equipo vencedor es “demoledores”.	2	1,65
No contesta.	40	33,06
Total	121	100

Tabla 7.166 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al ítem 5

Un ejemplo de aquellos docentes que entregaron la solución correcta utilizando ecuaciones fue lo elaborado por el profesor 6 (figura 7.60).

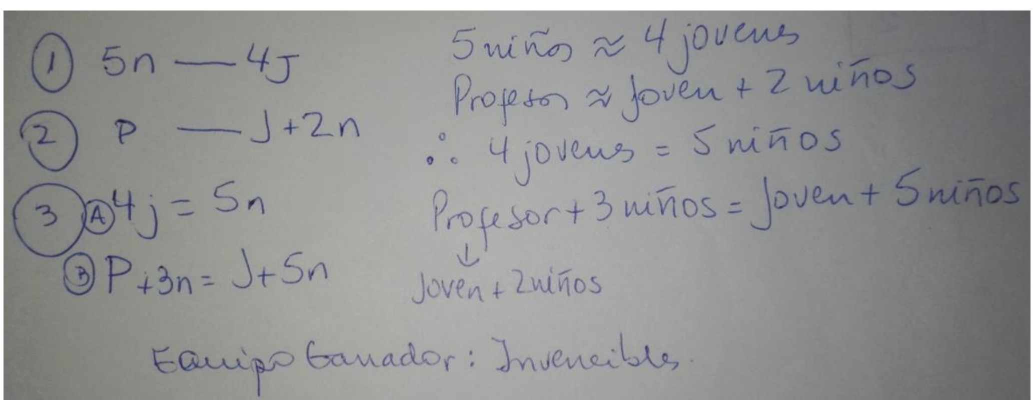


Figura 7.60 Respuesta del profesor 6 al ítem 5

A pesar de no ser una solución óptima, seis profesores encontraron la solución que el equipo vencedor es “invencibles” utilizando el método de ensayo y error, esto equivale el 4,96% de los docentes que contestaron el cuestionario. Ellos fueron asignando valores o edades a los participantes de cada equipo. Un ejemplo de esto, fue lo realizado por el profesor 56 y presentado en la figura 7.61.

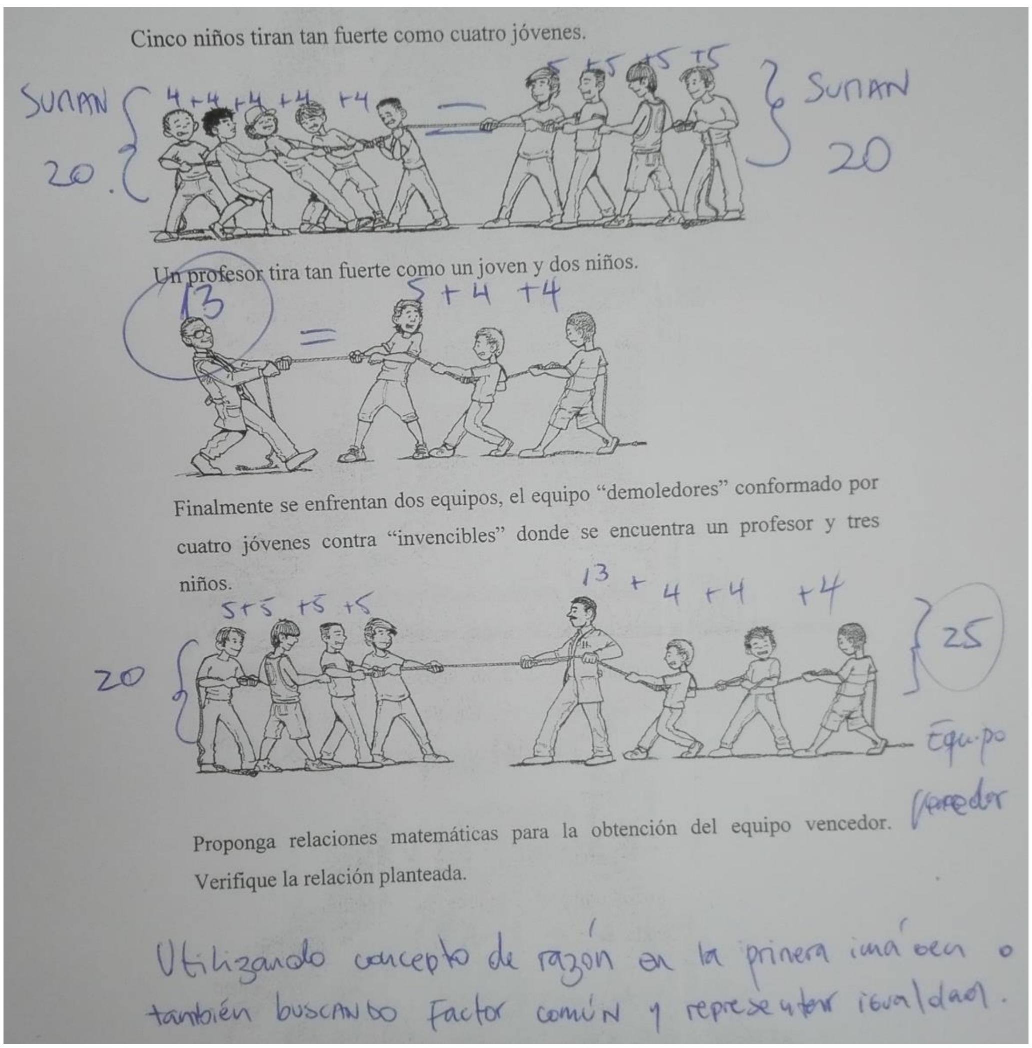


Figura 7.61 Respuesta del profesor 56 al ítem 5

Algunos docentes omitieron la posibilidad de utilizar ecuaciones para resolver la problemática planteada, un ejemplo de ello es lo realizado por el profesor 29 quien argumentó: "*el equipo ganador serán los "invencibles" porque un profesor es como si en ese equipo estuviera un joven y dos niños mas, y 5 niños es lo mismo que 4 jovenes, y mas un joven ellos ganarían por la fueza",* esto se muestra en la figura 7.62.

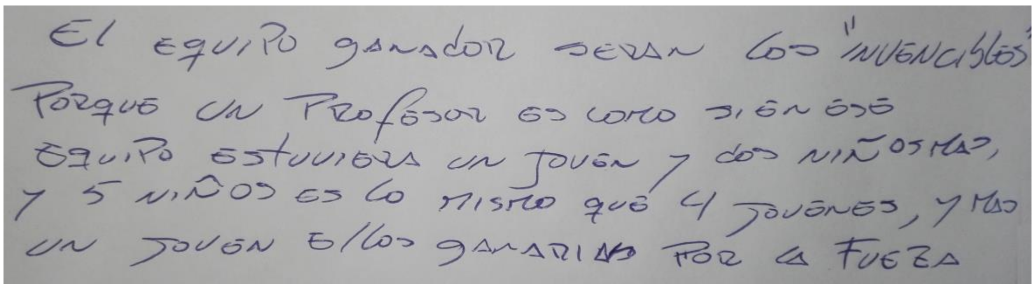
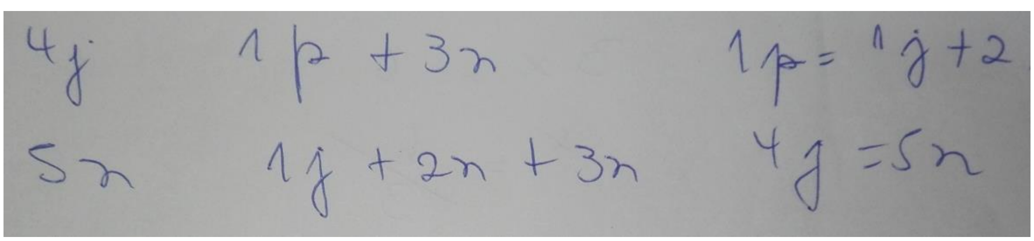

EL EQUIPO GANADOR SERAN LOS "INVENCIBLES" PORQUE UN PROFESOR ES COMO SI EN ESE EQUIPO ESTUVIERA UN JOVEN Y DOS NIÑOS MAS, Y 5 NIÑOS ES LO MISMO QUE 4 JOVENES, Y MAS UN JOVEN ELLOS GANARIAN POR LA FUEZA

Figura 7.62 Respuesta del profesor 29 al ítem 5

Por su parte el profesor 38 (figura 7.63), sólo construye ecuaciones, pero sin llegar al resultado requerido, ni realiza un trabajo algebraico con ellas.


4j   1p + 3n   1p = 1j + 2

5n   1j + 2n + 3n   4j = 5n

Figura 7.63 Respuesta del profesor 38 al ítem 5

Hubo dos docentes que realizaron ecuaciones, sin embargo, no llegan a la respuesta correcta, dado que con ellas concluyeron que el equipo vencedor es "demoledores", un ejemplo de ello es lo presentado en la figura 7.64 y que correspondió al desarrollo efectuado por el profesor 13.

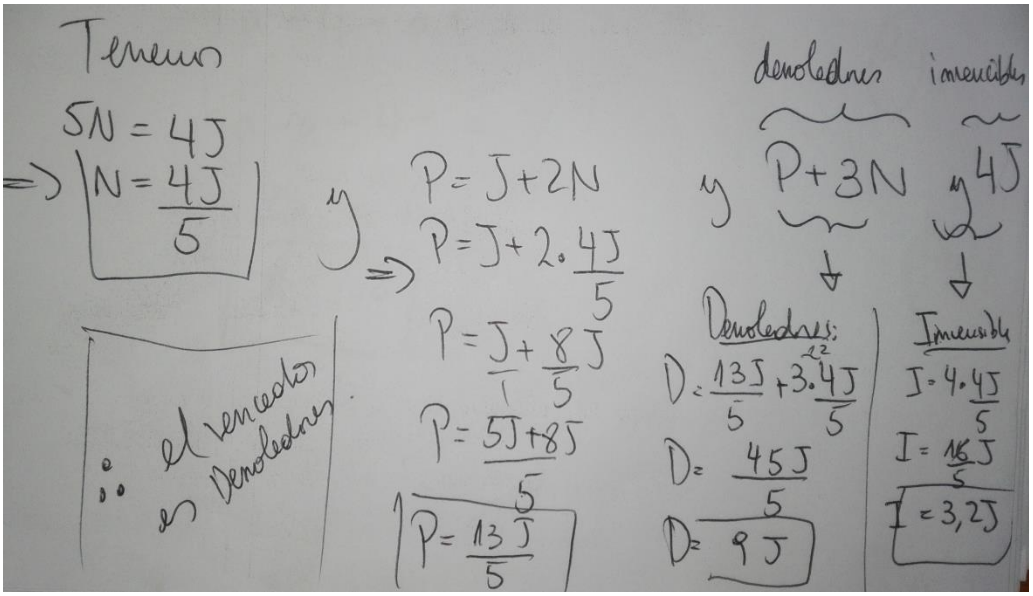


Figura 7.64 Respuesta del profesor 13 al ítem 5

7.4.9.1.3 Análisis del ítem 6

A través de la consigna se pretende analizar si el docente es capaz de realizar un adecuado traspaso entre lenguaje natural a lenguaje algebraico, además de solucionar en forma óptima la ecuación que debe formar (figura 7.65).

> Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva:
> "*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Figura 7.65 Situación planteada en el ítem 6

Podemos considerar que la pregunta es considerada como de sencilla solución, ello explica los 82 docentes (67,77%) que la realizaron forma acertada. A pesar de lo anterior, hubo 31 profesores (25,62%) que la realizaron en forma incorrecta y ocho que no la resolvieron (6,61%). La tabla 7.167 exhibe las puntuaciones correspondientes al grado de corrección que obtuvieron los docentes.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	82	67,77
Parcialmente correcta	0	0
Incorrecta	31	25,62
No contesta	8	6,61
Total	121	

Tabla 7.167 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al ítem 6

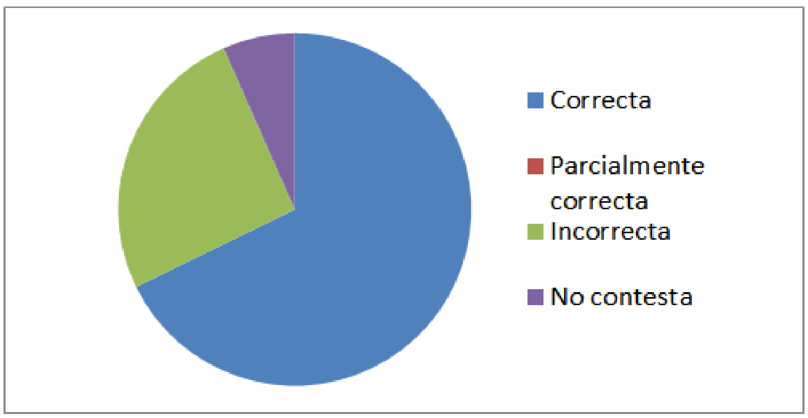


Figura 7.66 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al ítem 6

En la tabla 7.168 podemos visualizar la categorización de las respuestas entregadas por los profesores. 82 obtuvieron la respuesta correcta. Hubo 15 docentes (12,40%) que formaron en forma adecuada la ecuación, sin embargo, no lograron encontrar la respuesta óptima. Dos de ellos (1,65%) usaron el método de tanteo (ensayo y error) logrando obtener la respuesta. Finalmente catorce construyeron mal la ecuación, no llegando a la solución correcta.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Forma una ecuación óptima y entrega la solución correcta.	82	67,77
Forma adecuadamente la ecuación, sin embargo, no entrega la solución óptima.	15	12,40
Ocupa método de ensayo y error sin llegar a la respuesta correcta.	2	1,65
Elabora incorrectamente la ecuación, entregando mal la respuesta.	14	11,57
No contesta.	8	6,61
Total	121	100

Tabla 7.168 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al ítem 6

Una forma óptima de la construcción de la ecuación requerida y su posterior solución óptima, es la presentada en la figura 7.67, que corresponde al profesor 23.

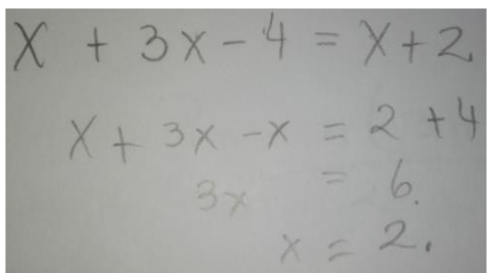


Figura 7.67 Respuesta del profesor 23 al ítem 6

Quince docentes (12,40%) forman adecuadamente la ecuación, sin embargo, cometen errores en su desarrollo, un ejemplo de aquello fue lo presentado por el profesor 52 (figura 7.68). Además dos de ellos ocuparon el método de ensayo y error para encontrar la solución correcta.

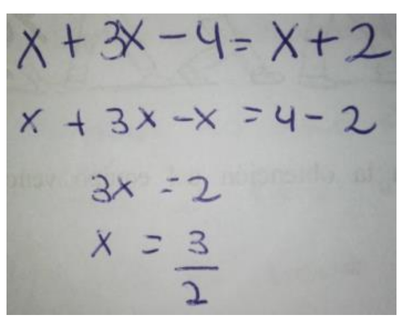


Figura 7.68 Respuesta del profesor 52 al ítem 6

A pesar que la pregunta planteada es considerada de escasa dificultad, catorce profesores (11,57%) no construyeron en forma adecuada la ecuación, por lo tanto no lograron obtener la respuesta correcta. Un ejemplo fue lo elaborado por el profesor 46 (figura 7.69). Finalmente hubo 8 docentes (6,61%) que no contestaron.

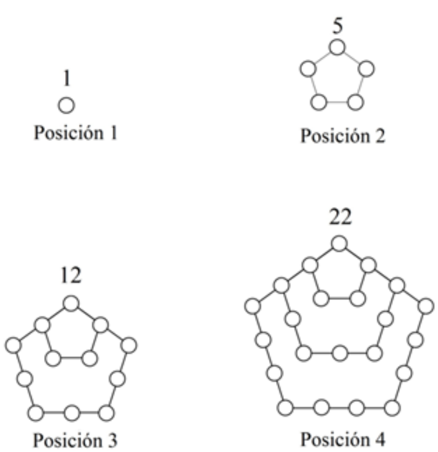
$$n + n^3 - 4 = n + 2$$

Figura 7.69 Respuesta del profesor 46 al ítem 6

7.4.9.1.4 Análisis del subítem 7a)

En este último subítem que se encuentra asociado al conocimiento común del contenido, los docentes deben dilucidar cuál es el patrón que existe, con la finalidad que encuentren la secuencia numérica desde la primera hasta la octava posición (figura 7.70), este trabajo previo debe servir de base para la obtención de una expresión general que permita conocer los números pentagonales, lo que corresponde al subítem 7b) de esta situación problema.

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.

Figura 7.70 Situación planteada en el subítem 7a)

En la tabla 7.169 se puede evidenciar que 51 profesores contestaron correctamente, cantidad que equivale a un 42,14% de ellos. Sólo 8 docentes la tuvieron parcialmente correcta (6,61%), treinta (24,79%) no lograron tener una respuesta satisfactoria y aquellos que no contestaron fueron 32 (26,45%).

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	51	42,14
Parcialmente correcta	8	6,61
Incorrecta	30	24,79
No contesta	32	26,45
Total	121	100

Tabla 7.169 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al subítem 7a)

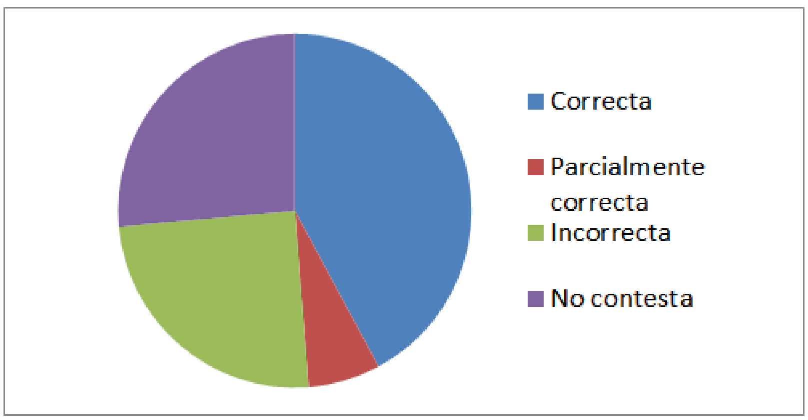


Figura 7.71 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al subítem 7a)

Las respuestas de los docentes fueron clasificadas según lo mostrado en la tabla 7.170. Fueron 51 docentes (42,15%) los que realizaron de forma correcta el subítem planteado cuya solución es 288 círculos desde la primera a la octava posición. Uno de ellos anotó como respuesta correcta 248 círculos (0,83%). Tres (2,48%) encontraron 92 círculos, respuesta que coincide no con el total de círculos, sino, con la cantidad asociada a la octava posición. Aquellos que hallaron la cantidad correspondientes a dos o tres posiciones fueron 4 docentes (3,31%). Finalmente más de la mitad de profesores no logró obtener una respuesta correcta, de ellos 30 (24,79%) trató de resolver la problemática planteada, sin embargo, no logró obtener la respuesta correcta, por otra parte, 32 (26,45%) no respondieron dejando en blanco el espacio disponible.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Encuentra 288 círculos desde la primera hasta la octava posición.	51	42,15
Halla 248 círculos.	1	0,83
Indica que son 92 círculos.	3	2,48
Encuentra los círculos correspondientes a dos o tres posiciones.	4	3,31
Señala una cifra incorrecta en la cantidad de círculos.	30	24,79
No responde.	32	26,45
Total	121	100

Tabla 7.170 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al subítem 7a)

Un ejemplo de la obtención correcta de círculos desde la primera a la octava posición, fue lo efectuado por el profesor 22 y que se muestra en la figura 7.72, 51 docentes (42,14%) logró el objetivo planteado en este subítem. También existieron tres docentes (2,48%) que tal vez por una mala lectura de la consigna, indicaron que 92 era su respuesta correcta, sin embargo, este número corresponde al número de círculos en la octava posición y no al total solicitado.

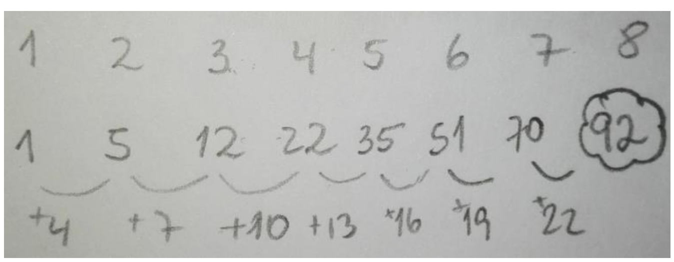


Figura 7.72 Respuesta del profesor 22 al subítem 7a)

Hubo cuatro docentes (3,31%) que encontraron la cantidad de círculos correspondientes a las posiciones quinta, sexta, séptima u octava. El profesor 43 (figura 7.73) obtuvo la cantidad correspondiente a tres posiciones.

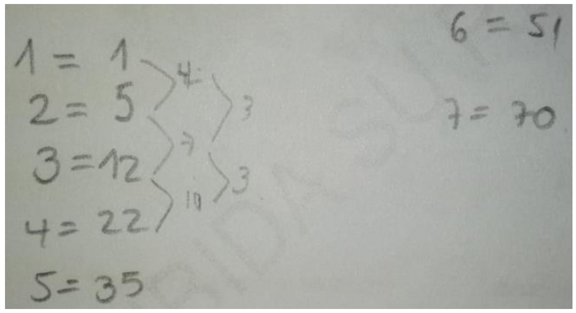


Figura 7.73 Respuesta del profesor 43 al subítem 7a)

Treinta docentes, lo que equivale a un 24,79% de ellos, no logró obtener la respuesta correcta. Un ejemplo de ello, fue lo realizado por el profesor 47 (figura 7.74), una cifra similar 32 profesores, no contestó nada.

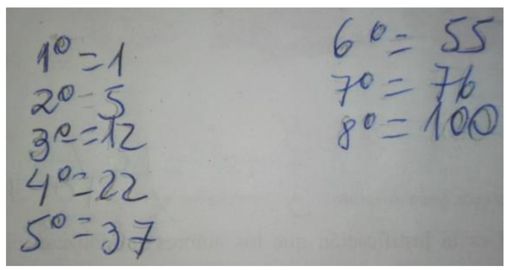


Figura 7.74 Respuesta del profesor 47 al subítem 7a)

7.4.9.2 Análisis de las respuestas de los ítems y subítems sobre conocimiento ampliado del contenido

El conocimiento ampliado del contenido consiste en generalizar tareas sobre el conocimiento común y conectar la resolución de la tarea con contenidos matemáticos más avanzados. Este tipo de conocimiento tiene un carácter relativo al currículo del nivel educativo, por lo que las conexiones con objetos matemáticos más avanzados son dependientes de las diferentes etapas escolares (Aké, 2013). Los subítems que tributan a esta dimensión del contenido son 2a) y 7b).

7.4.9.2.1 Análisis del subítem 2a)

Este subítem se encuentra asociado al conocimiento ampliado del contenido. En ella el docente debe inferir si es válida la afirmación realizada por un estudiante, fundamentando la respuesta proporcionada (figura 7.75).

Un alumno formuló la siguiente conjetura:

"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"

a. ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?

Figura 7.75 Situación planteada en el subítem 2a)

En la tabla 7.171 queda en evidencia que 25 profesores (20,66%) encontraron la respuesta correcta. La mayoría quedó ubicada en el rango correspondiente a parcialmente correcto, aquí encontramos a 52 docentes, lo que equivale a un 42,98%. En forma incorrecta contestaron 42 profesores y quienes dejaron en blanco su espacio para estos efectos, fueron dos.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	25	20,66
Parcialmente correcta	52	42,98
Incorrecta	42	34,71
No contesta	2	1,65
Total	121	100

Tabla 7.171 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al subítem 2a)

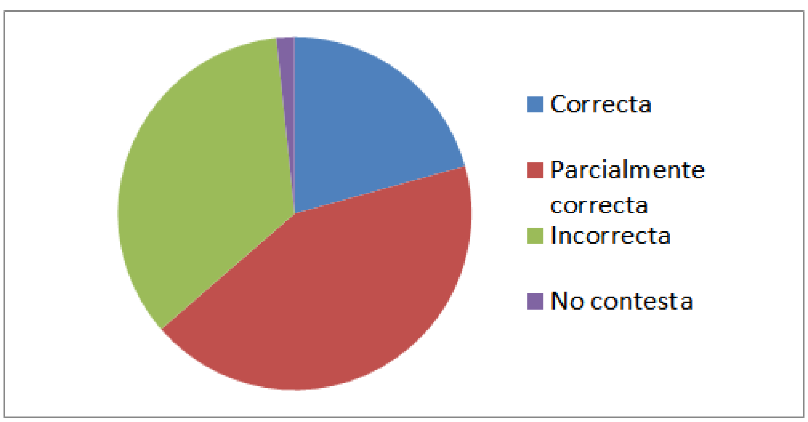


Figura 7.76 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al subítem 2a)

A partir de la tabla 7.172 que categorizó las respuestas de los docentes del subítem 2a) se observó que 25 de ellos (20,66%) fundamentó la conjetura realizada por el estudiante considerándola válida para todos los números naturales construyendo una forma general para ella. La mayoría de los docentes optó por realizar la fundamentación a través de la utilización de la media, esta forma la utilizaron 40 docentes. Diez encontraron la respuesta correcta, sin embrago, no realizaron ningún tipo de justificación. Ocho no logran determinar la validez de la conjetura, o bien, establecen que no es válida para todos los números naturales. También un número alto de ellos utilizó otras argumentaciones, sin embargo, no indicaban la validez. Finalmente no respondieron dos docentes.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Fundamenta que la conjetura es válida para todos los números enteros, construyendo una forma general.	25	20,66
Argumenta la validez de la conjetura a través de la media.	40	33,06
Indica que la conjetura es válida para todos los números naturales sin realizar una justificación solicitada.	10	8,26
No logra determinar si la veracidad de la conjetura o establece que no es válida.	8	6,61
Otras argumentaciones.	36	29,75
No responde.	2	1,65
Total	121	100

Tabla 7.172 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al subítem 2a)

Considerando las producciones de los docentes, 25 que indicaron que la conjetura es válida para todos los números enteros, y que es posible construir su forma general, un ejemplo de esto es lo visualizado en la figura 7.77 y que fue realizado por el profesor 13.

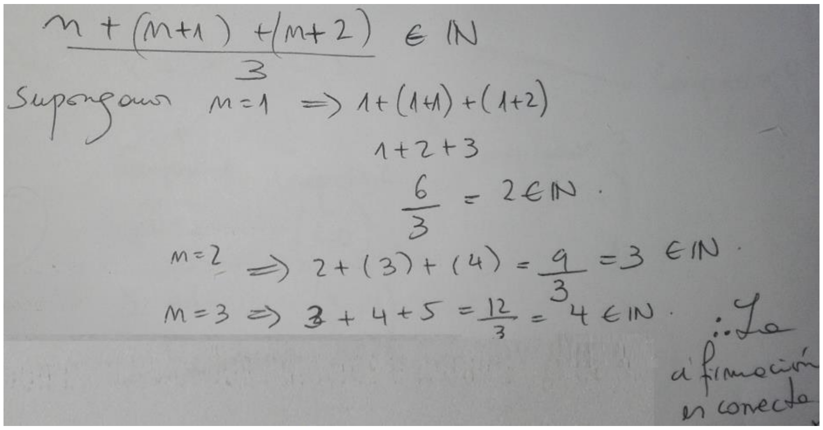


Figura 7.77 Respuesta del profesor 13 al subítem 2a)

La mayoría de los docentes verificó la validez de la conjetura a través de la utilización de la media. Un ejemplo de ello fue lo realizado por el profesor 27 y mostrado en la figura 7.78 y que representa la solución al subítem 2a).

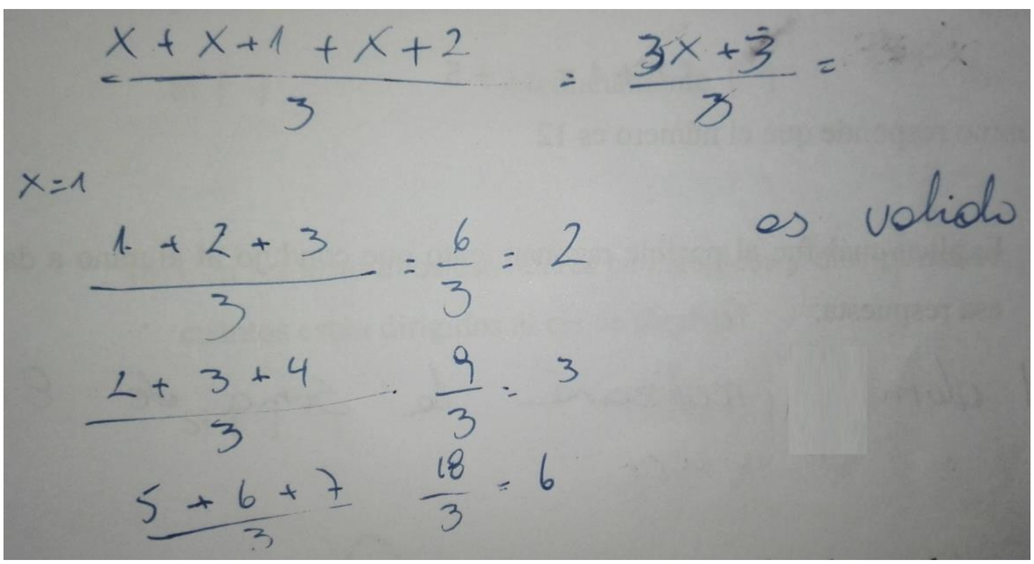


Figura 7.78 Respuesta del profesor 27 al subítem 2a)

Diez docentes (8,26%) se inclinaron por indicar que la conjetura es válida, sin embargo, no realizan una justificación de aquello. Un ejemplo es la figura 7.79 que muestra lo realizado por el profesor 3: "*Sí, teóricamente no tengo idea porqué, pero si pruebo con los números dá*".

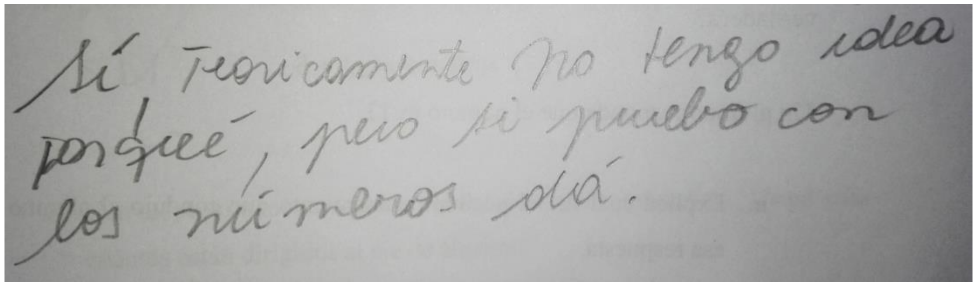

Sí Teóricamente no tengo idea porqué, pero si pruebo con los números dá.

Figura 7.79 Respuesta del profesor 2 al subítem 2a)

Una baja cantidad de docentes no logró determinar la veracidad de la conjetura, o bien indicaron que no es válida, sólo 8 profesores se inclinaron por este argumento. Un ejemplo lo entregó el profesor 94 y que en la figura 7.80 indicó: *no es válida la afirmación Porqué al dividir el resultado no es el segundo número, obtienes la tercera parte de la suma”.*

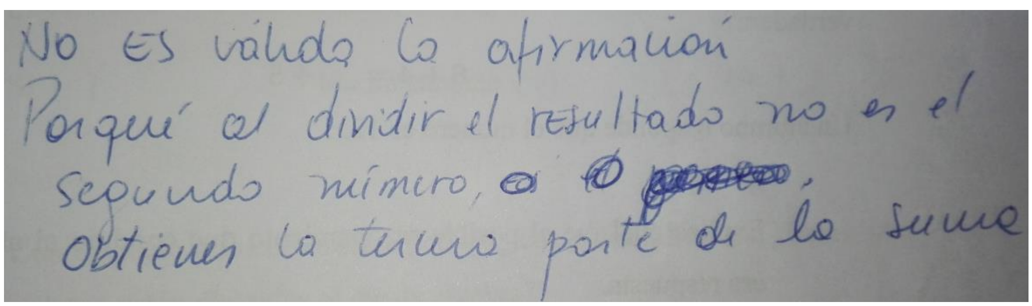

No es válida la afirmación
Porqué al dividir el resultado no es el
segundo número,
Obtienes la tercera parte de la suma

Figura 7.80 Respuesta del profesor 94 al subítem 2a)

Por otra parte, 36 profesores, que equivalen a un 29,75%, se inclinaron por realizar otro tipo de argumentaciones. El profesor 66 (figura 7.81) señaló: “*sí, es válida porque son “tres” números consecutivos. Por ende los resultados que se obtengan al sumar serán multiplos de 3”.*

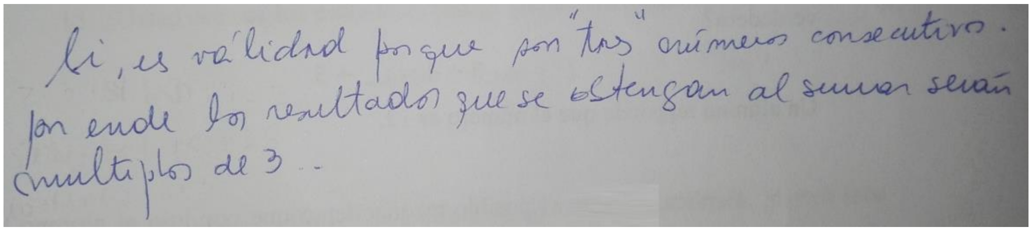


Figura 7.81 Respuesta del profesor 66 al subítem 2a)

Finalmente dos profesores no respondieron la consulta dejando en blanco el espacio destinado para estos efectos.

7.4.9.2.2 Análisis del subítem 7b)

De la misma forma que la anterior, este subítem está asociado al conocimiento ampliado del contenido. Con la utilización de una secuencia pictórica que representa los números pentagonales (figura 7.82), se les solicita a los docentes que determinen una forma general para la posición n-ésima.

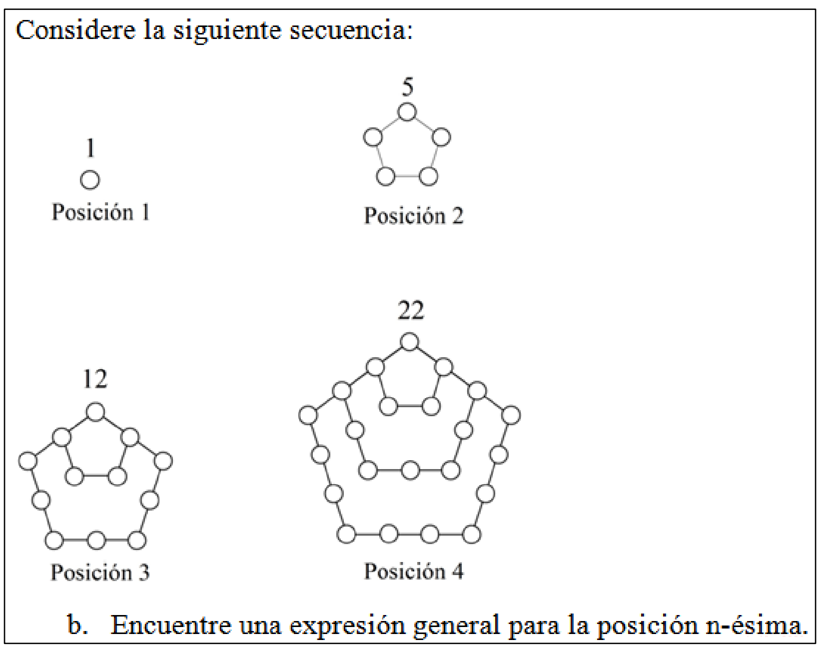


Figura 7.82 Situación planteada en el subítem 7b)

En la tabla 7.173 podemos apreciar que 10 docentes (8,26%) encontraron de buena forma la respuesta al subítem. Seis obtuvieron una puntuación parcialmente correcta (4,96%). Treinta (24,79%) llegaron a una respuesta incorrecta. Finalmente 75 docentes no entregaron ninguna respuesta, dejando en blanco el espacio destinado, esto equivale a un 61,98% de ellos.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	10	8,26
Parcialmente correcta	6	4,96
Incorrecta	30	24,79
No contesta	75	61,98
Total	121	100

Tabla 7.173 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al subítem 7b)

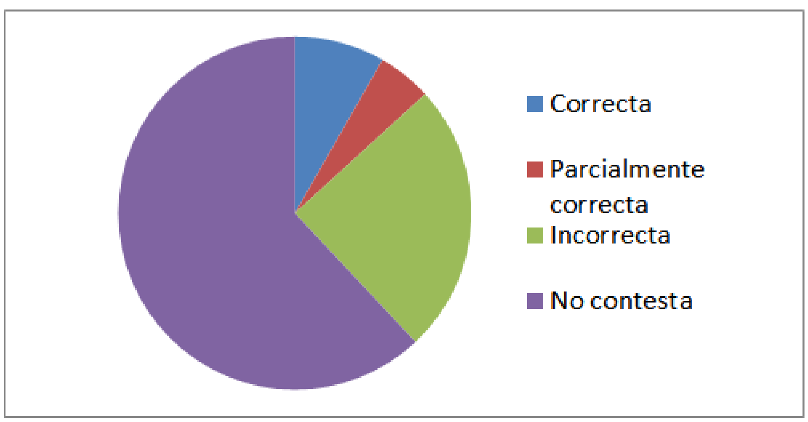


Figura 7.83 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al subítem 7b)

En la tabla 7.174 se muestra una categorización de las respuestas docentes para este ítem. Queda evidenciado que 10 docentes entrega la solución óptima. Seis argumenta de forma lingüística, encontrando la forma n-ésima (4,96%). Aquellos que encontraron de forma incorrecta la forma general, fueron 22 profesores (18,18%). Además ocho sólo trabajó con formas numéricas, sin encontrar la expresión n-ésima. La gran mayoría no respondió, esto equivale a que un 61,98% dejó en blanco el espacio destinado para la respuesta a este subítem.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Descubre la forma general correcta de los números pentagonales utilizando patrones y expresiones algebraicas.	10	8,26
Argumenta en forma lingüística encontrando la forma n-ésima de los números pentagonales.	6	4,96
Encuentra una forma general incorrecta de los números pentagonales.	22	18,18
Sólo encuentra formas numéricas, sin encontrar el término general.	8	6,61
No responde.	75	61,98
Total	121	100

Tabla 7.174 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al subítem 7b)

Considerando las respuestas de los docentes al subítem 7b), podemos indicar que 10 de ellos descubren correctamente la forma general para números pentagonales, utilizando patrones y expresiones algebraicas. Un ejemplo fue lo realizado por el profesor 33 (figura 84).

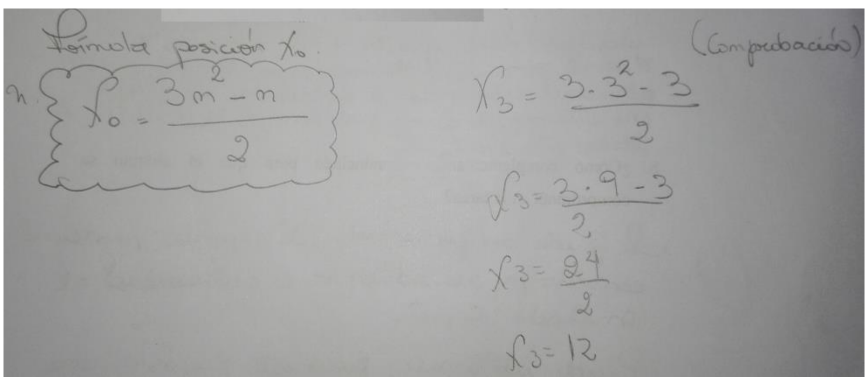


Figura 7.84 Respuesta del profesor 33 al subítem 7b)

Seis de ellos se inclinaron por la obtención de la forma general sin el uso de elementos aritméticos o algebraicos, es decir, sólo argumentaron la obtención de la forma n-ésima. Un ejemplo de esto se aprecia en la figura 7.85, donde el profesor 3 sólo argumentó con palabras, aunque su respuesta es incorrecta: *"la incógnita menos el número de círculos anterior, es igual a la regla de 3 que va abajo".*

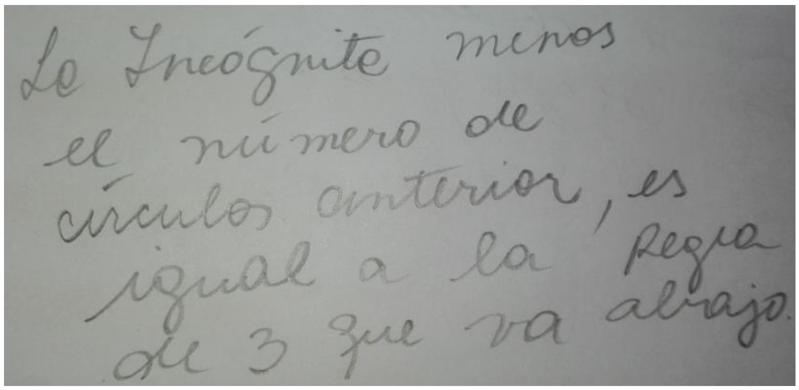


Figura 7.85 Respuesta del profesor 3 al subítem 7b)

Hubo 22 profesores que a pesar de utilizar elementos algebraicos en sus respuestas, obtuvieron una forma general incorrecta, tal es el caso del profesor 20, que es mostrado en la figura 7.86.

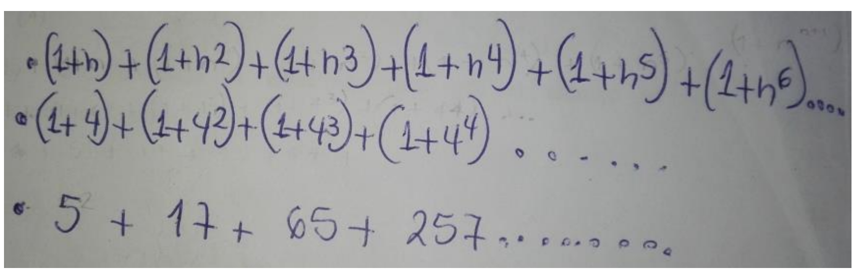


Figura 7.86 Respuesta del profesor 20 al subítem 7b)

Por otra parte, 8 trabajaron con sólo formas numéricas sin encontrar el término general, es el caso del profesor 56 (figura 7.87), quien indicó: *"la cantidad que va aumentando es 3".* Finalmente hubo 75 profesores (61,98%) que dejaron sin respuesta este subítem.

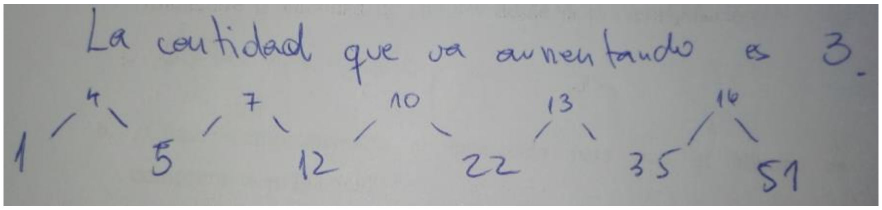


Figura 7.87 Respuesta del profesor 56 al subítem 7b)

7.4.9.3 Análisis de las respuestas de los ítems y subítems sobre conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación a los estudiantes

El conocimiento del contenido especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación a los estudiantes se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva del conocimiento del docente, por lo tanto está asociada a los conocimientos personales de los estudiantes, lo errores cometidos en la práctica matemática, dificultades y los conflictos reflejados en su proceso de aprendizaje, además de las actitudes, emociones y creencias que encontramos junto al proceso de estudio.

Los ítems y subítem del cuestionario que se preocupan de esta dimensión del conocimiento son 1a), 1b), 2b) y 4 del cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra para profesores en activo de educación general básica.

7.4.9.3.1 Análisis del subítem 1a)

Este ítem está asociado al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes. A través de una situación matemática planteada a un alumno de primer ciclo de enseñanza básica, se debe entregar una explicación a la solución entregada por el niño.

Se observa en la figura 7.88 el planteamiento del subítem 1a), allí se debe entregar una o más interpretaciones a la producción dada por el estudiante.

Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica):

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \_\_ + 5$$

Un alumno responde que el número es 12.

a. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.

Figura 7.88 Situación planteada en el subítem 1a)

En la tabla 7.175 es posible observar los resultados de las respuestas a esta situación problema. Quedó de manifiesto que sólo 6 docentes han obtenido una respuesta correcta, esto equivale a un 4,96%. La mayoría de los profesores (109) que corresponden al 90,08% del total, obtuvieron una respuesta considerada parcialmente correcta. Cuatro (3,31%) contestaron en forma errónea. Finalmente dos no respondieron.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	6	4,96
Parcialmente correcta	109	90,08
Incorrecta	4	3,31
No contesta	2	1,65
Total	121	100

Tabla 7.175 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al subítem 1a)

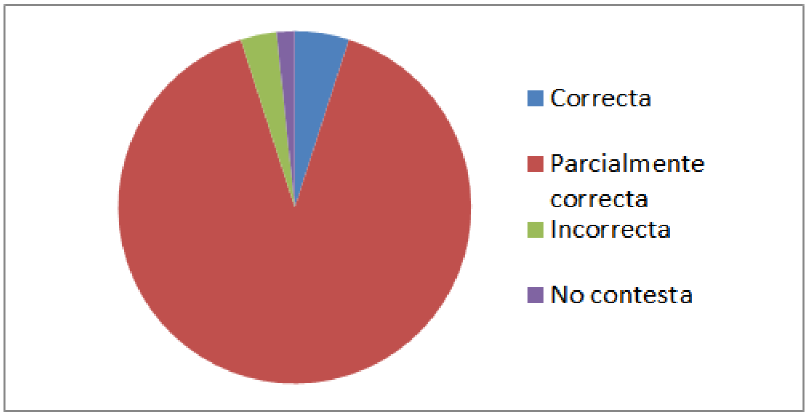


Figura 7.89 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al subítem 1a)

A través del análisis de las prácticas matemáticas presentes en las producciones de los docentes, llegamos a la siguiente categorización de las respuestas (tabla 7.176). Existieron seis personas (4,96%) que identifican la suma sin considerar la relación de equivalencia. Los docentes que han expresado que la suma es realizada sin tomar en cuenta lo que hay detrás del símbolo de igualdad, son 94 (77,69%). Sólo hay cuatro docentes (3,31%) que no lograron deducir ningún razonamiento que condujo al alumno a dar la respuesta. Quince (12,39%) entregaron otras respuestas o argumentaciones y dos no respondieron el cuestionamiento.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Identifica la suma sin considerar la relación de equivalencia.	6	4,96
Realiza la suma sin considerar toman en cuenta lo que hay detrás del símbolo de igualdad.	94	77,69
No deduce ningún razonamiento que condujo al alumno a dar la respuesta.	4	3,31
Otras respuestas o argumentaciones.	15	12,39
No responde.	2	1,65
Total	121	100

Tabla 7.176 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al subítem 1a)

En cuanto a las respuestas entregadas por los docentes, el profesor 57 (figura 7.90) indicó "*el alumno da esa respuesta porque suma el 4+8, no logro ver que es una igualdad, donde se debe equilibrar, por esto el manifiesta este error, que además es un error recurrente en los estudiantes"*.

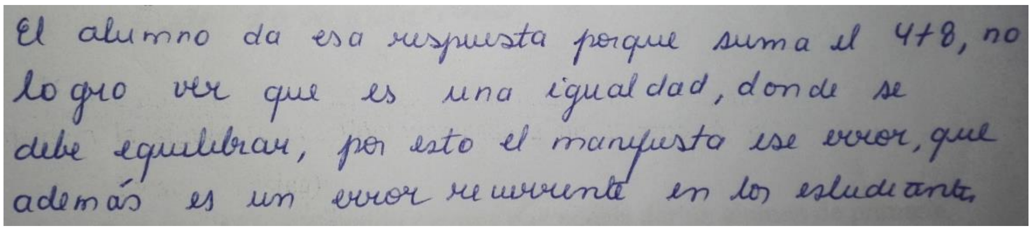

El alumno da esa respuesta porque suma el 4+8, no logro ver que es una igualdad, donde se debe equlibrar, por esto el manifiesta ese error, que además es un error recurrente en los estudiantes

Figura 7.90 Respuesta del profesor 57 al subítem 1a)

La gran mayoría de los docentes indicó que el estudiante realizó la suma sin tomar en cuenta lo que hay detrás del símbolo de igualdad, esta respuesta se consideró como parcialmente correcta. El profesor 49 expresó (figura 7.91): "*el alumno no comprendió el concepto de igualdad y simplemente desarrolló la adición 8+4".*

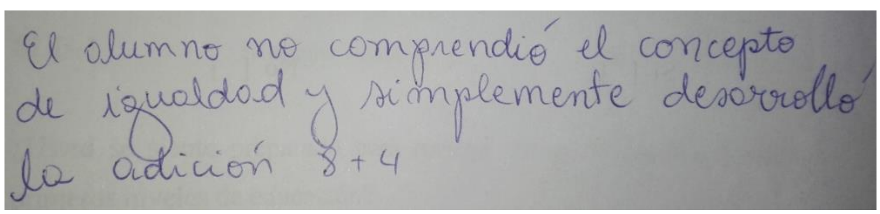

El alumno no comprendió el concepto de igualdad y simplemente desarrolló la adición 8 + 4

Figura 7.91 Respuesta del profesor 49 al subítem 1a)

También existen cuatro respuestas de los docentes donde no se dedujo ningún razonamiento que condujo al estudiante a dar la respuesta, un ejemplo es lo entregado por el profesor 99 (figura 7.92) quien exclamó: "*sumar los sumando del lado izquierdo de la igualdad"*.

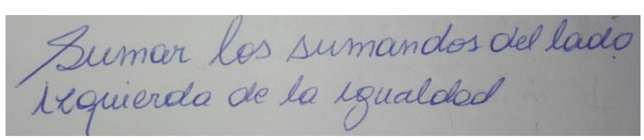

Sumar los sumandos del lado Izquierdo de la igualdad

Figura 7.92 Respuesta del profesor 99 al subítem 1a)

Quince docentes (12,40%) entregaron otras respuestas o utilizaron argumentaciones diferentes. Un ejemplo lo proporcionó el docente 111 (figura 7.93): "*pueden ser dos los errores, primero que el estudiante no entendió la instrucción y segundo que no entiende el concepto de igualdad teniendo que encontrar una incógnita, ya que solamente aplicó la lógica y sumó 8+4 y al tener como resultado 12 él consideró se allí se encontraba la igualdad, sin embargo no considero el número 5 como sumando para poder lograr la igualdad*".

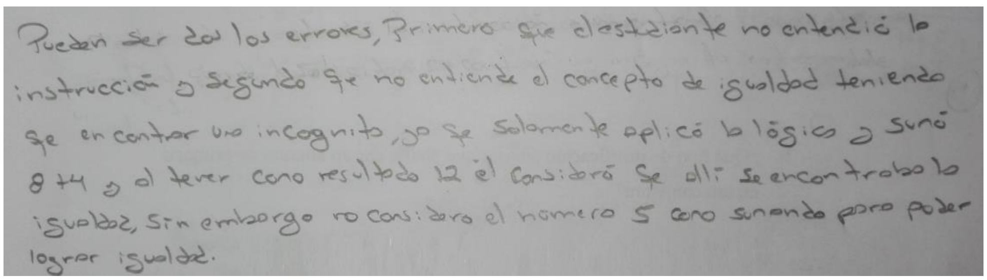

Pueden ser dos los errores, Primero que el estudiante no entendió la
instrucción y segundo que no entiende el concepto de igualdad teniendo
que encontrar una incognita, ya que solamente aplicó la lógica y sumó
8+4 y al tener como resultado 12 él consideró se allí se encontraba la
igualdad, sin embargo no considero el numero 5 como sumando para poder
lograr igualdad.

Figura 7.93 Respuesta del profesor 111 al subítem 1a)

Dos docentes no respondieron o dejaron en blanco el espacio destinado para contestar el subítem 1a), lo que equivale a 1,65% de ellos.

7.4.9.3.2 Análisis del subítem 1b)

Este subítem también está asociado al conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación a los estudiantes. El docente debe deducir una posible interpretación que realiza el estudiante del signo igual.

En la figura 7.94 se muestra el subítem 1b), los profesores deben entregar una o más inferencias de la producción dada por el estudiante.

Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica):

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \_\_ + 5$$

Un alumno responde que el número es 12.

b. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

Figura 7.94 Situación planteada en el subítem 1b)

En la tabla 7.177 es posible observar los resultados de las respuestas a este subítem. Queda de manifiesto que 10 de ellos lograron la solución correcta, lo cual es equivalente a un 8,26%. Poco más de 50% de ellos, es decir, 63 docentes no obtuvo una respuesta satisfactoria, entregando una incorrecta, o bien, no contestando lo consultado. 48 alcanzaron una ponderación considerada parcialmente correcta.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	10	8,26
Parcialmente correcta	48	39,67
Incorrecta	61	50,41
No contesta	2	1,65
Total	121	100

Tabla 7.177 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al subítem 1b)

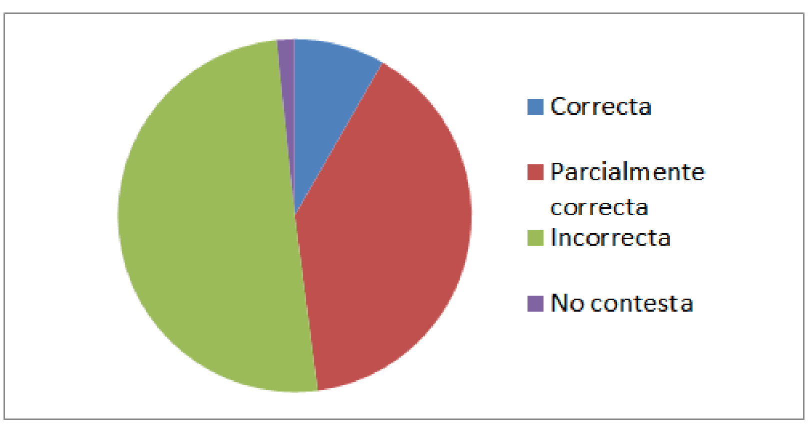


Figura 7.95 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al subítem 1b)

Analizando las prácticas matemáticas que se encuentran inmersas en las producciones de los docentes, elaboramos la tabla 7.178 la cual muestra una clasificación de las respuestas entregadas por los docentes.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Interpreta la igualdad aritmética como acción.	10	8,26
Se debe obtener un resultado exacto al realizar la operación aritmética.	39	32,23
Considera que el signo = es de resultado y no de igualdad.	25	20,66
Entrega argumentaciones erróneas o carentes de fundamentación.	45	37,19
No responde.	2	1,65
Total	121	100

Tabla 7.178 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas al subítem 1b)

Existe un 32,23% de los docentes que indicó que se debe obtener el resultado exacto al realizar la operación aritmética, un ejemplo fue lo expresado por el profesor 47 (figura 7.96):*“prima que debe sumar 8+4”*.

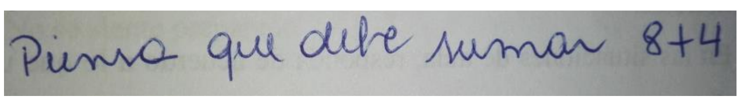


Figura 7.96 Respuesta del profesor 47 al subítem 1b)

Una de las respuestas entregadas por los docentes es la que entregó el profesor 5 (figura 7.97): “*la interpretación que está haciendo el alumno con el signo = es de resultado y no de igualdad”.*

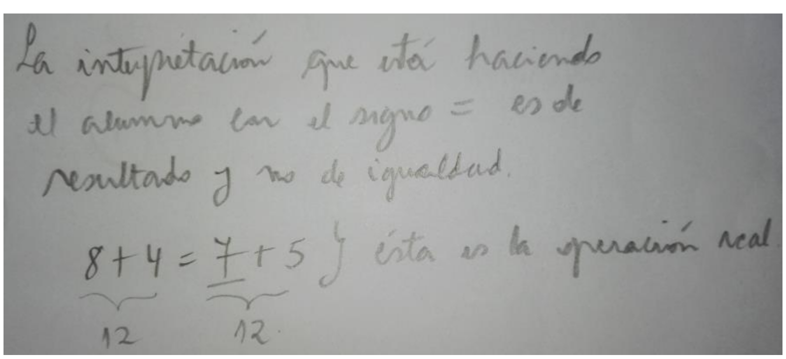


Figura 7.97 Respuesta del profesor 5 al subítem 1b)

Muchos docentes entregaron respuestas con argumentaciones débiles o carentes de fundamentación, 45 de ellos fueron categorizados en este rango. Un ejemplo es el profesor 14 (figura 7.98) respecto a la interpretación del alumno del signo igual: *"como resultado final y no como igualdad"*.

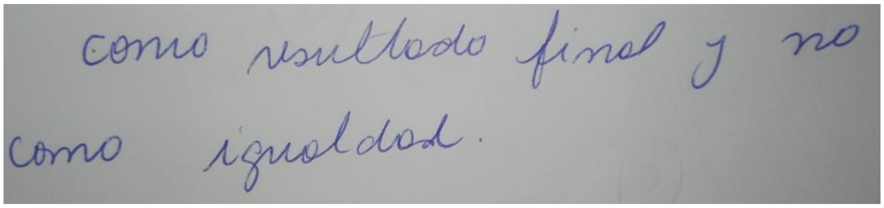


Figura 7.98 Respuesta del profesor 14 al subítem 1b)

Finalmente dos docentes no respondieron o dejaron en blanco el espacio destinado para contestar el subítem 1b), esto equivale al 1,65% de ellos.

7.4.9.3.3 Análisis del subítem 2b)

A través de una conjetura construida por un estudiante, el docente debe elucubrar una argumentación que justifique la construcción matemática del estudiante. Esta situación también está asociada al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes.

Un alumno formuló la siguiente conjetura:

"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"

b. ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?

Figura 7.99 Situación planteada en el subítem 2b)

Los resultados de los profesores en este subítem se muestran en la tabla 7.179, los docentes que lograron la respuesta correcta son 17 (21,49%), aquellos que tuvieron una puntuación categorizadas como parcialmente correcta son 26 (21,49%). Poco más de la mitad de ellos (64 docentes), han tenido sus respuestas incorrectas. Finalmente 14 profesores no contestaron dejando en blanco el espacio para estos efectos.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	17	14,05
Parcialmente correcta	26	21,49
Incorrecta	64	52,89
No contesta	14	11,57
Total	121	100

Tabla 7.179 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al subítem 2b)

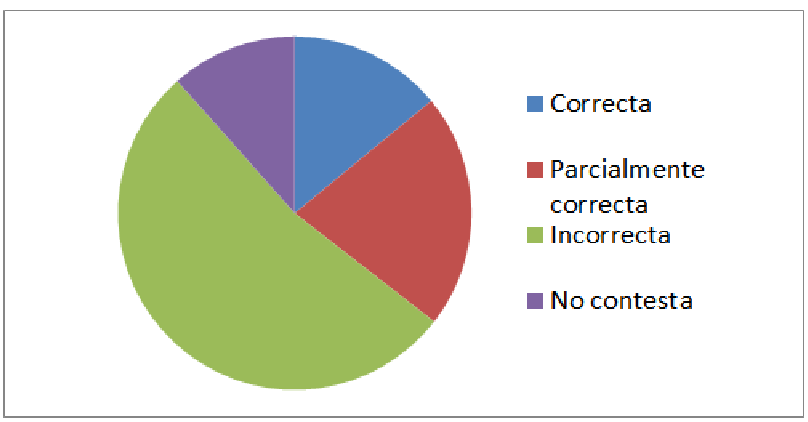


Figura 7.100 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al subítem 2b)

Con el análisis de las prácticas matemáticas que se encuentran presentes en las respuestas docentes se logró categorizar las respuestas, lo cual queda de manifiesto en la tabla 7.180. Aquellos profesores que indicaron que el alumno justifica basado a algunos casos particulares son 17, un número similar argumentó mediante la utilización de divisiones. 26 usa otro tipo explicaciones. Finalmente 42 de ellos (34,71%) realizó una fundamentación equivocada.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Justifica basado a algunos casos particulares.	17	14,04
Depende de los números que utilicen.	4	3,31
Argumenta mediante la utilización de divisiones.	18	14,88
Otras explicaciones.	26	21,49
Realiza una fundamentación errónea.	42	34,71
No responde.	14	11,57
Total	121	100

Tabla 7.180 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al subítem 2b)

A partir de las respuestas de los docentes, el profesor 24 (figura 7.101) indicó: *"un chico al leer el enunciado por hábito utilizará los 3 primeros números (1, 2, 3) y en aquellos si se cumple, pero si no comprueba con otros números no se dará cuenta, por lo cual su respuesta sería si, si utilizar la comprobación"*.

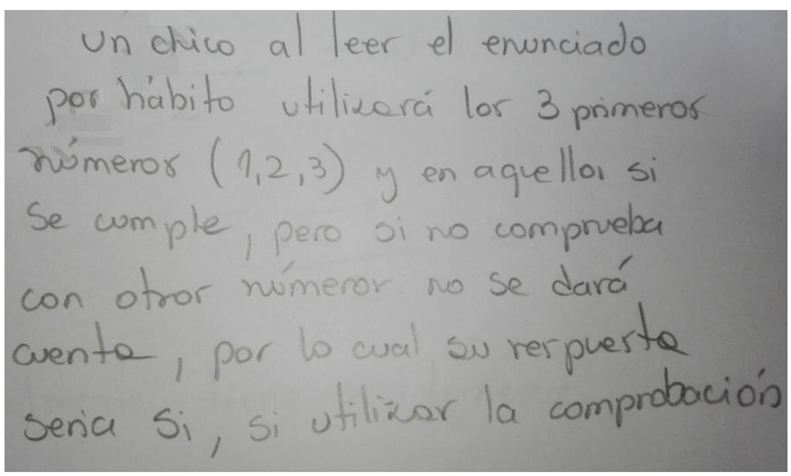


Figura 7.101 Respuesta del profesor 24 al subítem 2b)

Cuatro docentes argumentaron que la justificación que realizaría un alumno de enseñanza básica depende de los números que se usen, un ejemplo de esto lo tenemos en el profesor 106, quien señaló: *"que depende de los números que se utilicen"*.

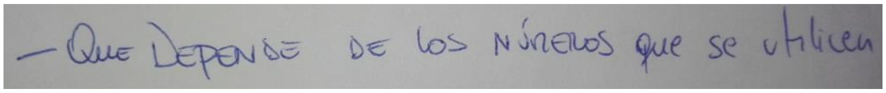

— QUE DEPENDE DE LOS NÚMEROS QUE SE UTILICEN

Figura 7.102 Respuesta del profesor 106 al subítem 2b)

Además 18 docentes dijeron que la argumentación es a través de la utilización de divisiones. Por otra parte, 26 de ellos entregaron otro tipo de explicaciones, un ejemplo de ello fue lo expresado por el profesor 115: *"difícilmente, creo que un alumno de primaria pueda justificar esa conjetura con facilidad, pues están adquiriendo habilidades analíticas. Me retracto, creo que lo experimentaré con estudiantes de 4° básico"*.

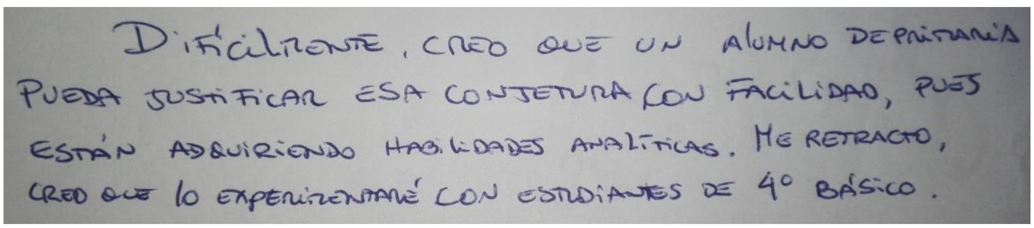

DIFÍCILMENTE, CREO QUE UN ALUMNO DE PRIMARIA PUEDA JUSTIFICAR ESA CONJETURA CON FACILIDAD, PUES ESTÁN ADQUIRIENDO HABILIDADES ANALÍTICAS. ME RETRACTO, CREO QUE LO EXPERIMENTARÉ CON ESTUDIANTES DE 4° BÁSICO.

Figura 7.103 Respuesta del profesor 115 al subítem 2b)

El 34,71% de ellos, realizó una fundamentación errónea (figura 7.104) un ejemplo fue lo indicado por el profesor 47: *"probablemente diriá que no se puede ya que normalmente no siguen la instrucción a seguir"*. Finalmente, 47 docentes, equivalentes a un 11,57% no respondieron en forma correcta.

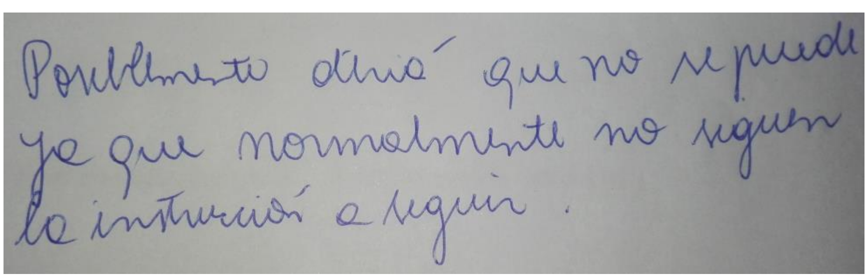

Probablemente diría que no se puede ya que normalmente no siguen la instrucción a seguir.

Figura 7.104 Respuesta del profesor 47 al subítem 2b)

7.4.9.3.4 Análisis del ítem 4

Es este ítems se plantea una situación en la cual una profesora les solicita a tres estudiantes que escriban y calculen lo que ella les solicita. A partir de esta consigna se revisan y analizan las producciones de los alumnos verificando si existe coherencia entre los pedido por la docente y lo realizado por los niños.

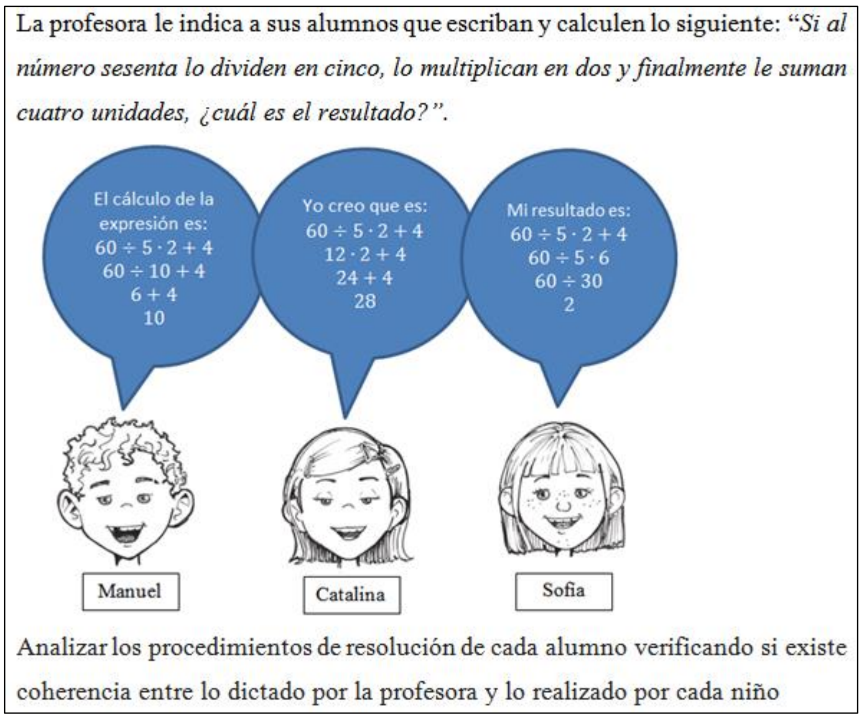


Figura 7.105 Situación planteada en el ítem 4

En la tabla 7.181 es posible visualizar los resultados a la situación anterior. Queda de manifiesto que la mayoría de los docentes obtuvo la respuesta correcta, esto equivale a un 54,54%. Dieciocho de ellos logró una puntuación equivalente a parcialmente correcta (14,88%). En forma incorrecta respondieron 22 docentes. Finalmente, 15 de ellos no contestó el ítem.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	66	54,54
Parcialmente correcta	18	14,88
Incorrecta	22	18,18
No contesta	15	12,40
Total	121	100

Tabla 7.181 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al ítem 4

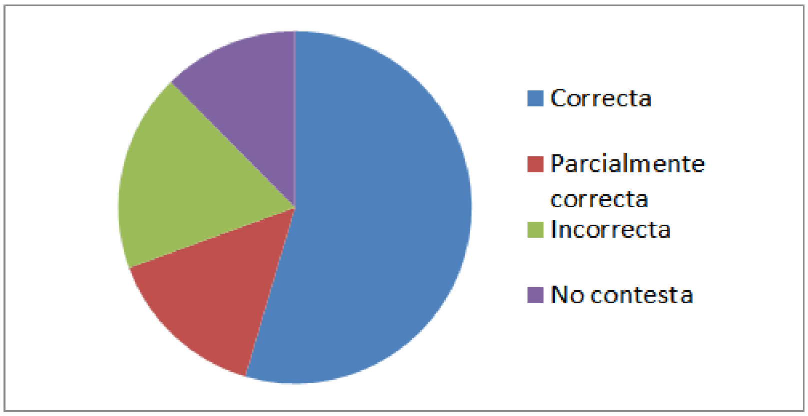


Figura 7.106 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al ítem 4

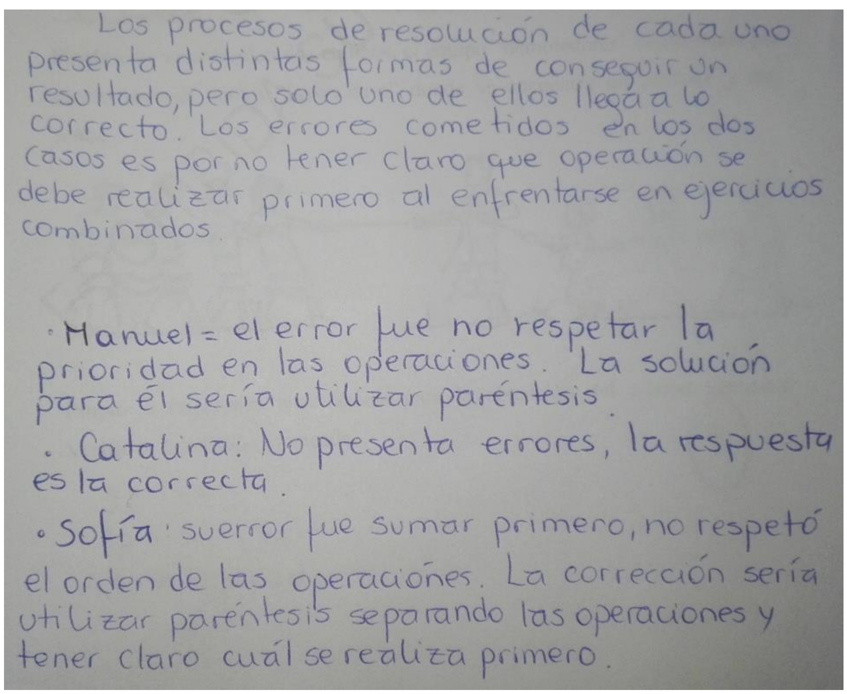
Considerando las respuestas proporcionadas por los docentes en este ítem, fueron reunidas en la tabla 7.182.

Respuestas	Frecuencia	Porcentaje
Analiza las producciones de los estudiantes, deduciendo los errores cometidos por dos de los estudiantes e indicando que Catalina tiene la respuesta correcta.	58	47,93
Señala que Catalina tiene la respuesta correcta, sin emitir juicios sobre las producciones de los alumnos.	8	6,61
No logra deducir los errores en las producciones de los alumnos. Indica que Manuel tiene la respuesta correcta.	18	14,88
No logra deducir los errores en las producciones de los alumnos. Indica que Sofía tiene la respuesta correcta.	4	3,31
Analiza las producciones, sin embargo, no indica quien presentó una resolución adecuada.	18	14,88
No contesta.	15	12,40
Total	121	100

Tabla 7.182 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al ítem 4

Se muestra que 58 docentes (47,93%) obtuvieron la respuesta óptima quienes analizan las producciones de los alumnos, deduciendo los errores cometidos por dos de los estudiantes e indicando que Catalina tiene la respuesta correcta. En esta misma línea, ocho señalaron que Catalina tiene la solución a lo planteado por la profesora, sin embargo, no realizaron un análisis de las otras producciones de Manuel y Sofía. Dieciocho docentes (14,88%) obtuvieron que Manuel entregó la respuesta correcta. Sólo cuatro se inclinaron que Sofía tenía la respuesta correcta. También dieciocho docentes analizaron las producciones de los alumnos, sin embargo, no llegaron a la solución de lo plateado. Quince de ellos no contestó.

Apreciando las respuestas de los docentes, se notó que 58 de ellos (47,93%) analizaron las producciones de los estudiantes encontrando los errores de Manuel y Sofía y estableciendo que Catalina tiene la respuesta correcta, esto se muestra a partir de la producción del profesor 43 (figura 7.107).



Los procesos de resolución de cada uno presenta distintas formas de conseguir un resultado, pero solo uno de ellos llega a lo correcto. Los errores cometidos en los dos casos es por no tener claro que operación se debe realizar primero al enfrentarse en ejercicios combinados.

· Manuel = el error fue no respetar la prioridad en las operaciones. La solución para él sería utilizar paréntesis.

· Catalina: No presenta errores, la respuesta es la correcta.

· Sofía: suerror fue sumar primero, no respetó el orden de las operaciones. La corrección sería utilizar paréntesis separando las operaciones y tener claro cuál se realiza primero.

Figura 7.107 Respuesta del profesor 43 al ítem 4

Por su parte, ocho docentes señalaron que Catalina tiene la respuesta correcta, sin embargo, no emitieron juicios sobre las producciones de Manuel y Sofía, esto se ve reflejado en la figura 7.108 que corresponde al profesor 16.

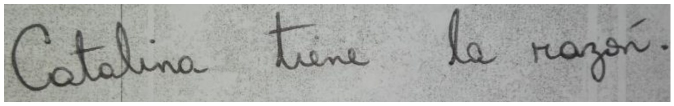

Catalina tiene la razón.

Figura 7.108 Respuesta del profesor 16 al ítem 4

De las incorrectas, aquella que tuvo una mayor aceptación es que Manuel tenía la respuesta correcta. Un ejemplo de esto es lo presentado en la figura 7.109 que correspondió a la producción del profesor 20.

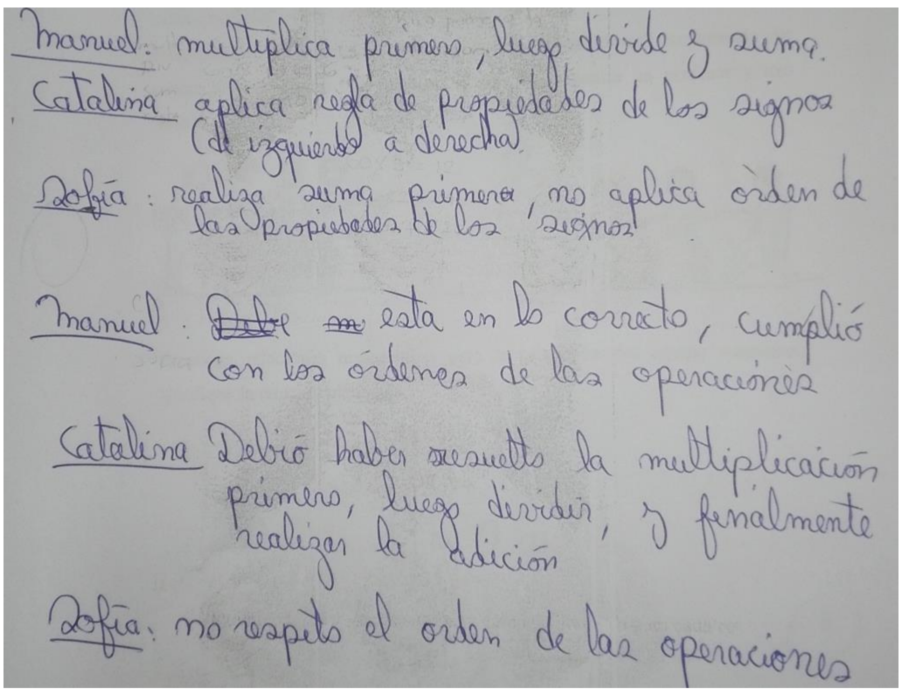

Manuel: multiplica primero, luego divide y suma.
Catalina aplica regla de propiedades de los signos (de izquierda a derecha)
Sofía: realiza suma primero, no aplica orden de las propiedades de los signos
Manuel: ~~Debe~~ ~~en~~ esta en lo correcto, cumplió con los órdenes de las operaciónes
Catalina Debió haber resuelto la multiplicación primero, luego dividir, y finalmente realizar la adición
Sofía: no respeto el orden de las operaciones

Figura 7.109 Respuesta del profesor 20 al ítem 4

Hubo cuatro docentes que indicaron que Sofía tenía la respuesta correcta, esto se muestra en la figura 7.110 y que correspondió a lo elaborado por el profesor 4 quien indicó como justificación: *"... Sofía: Para mi es la más coherente porque la división debe ser el ultimo paso"*.

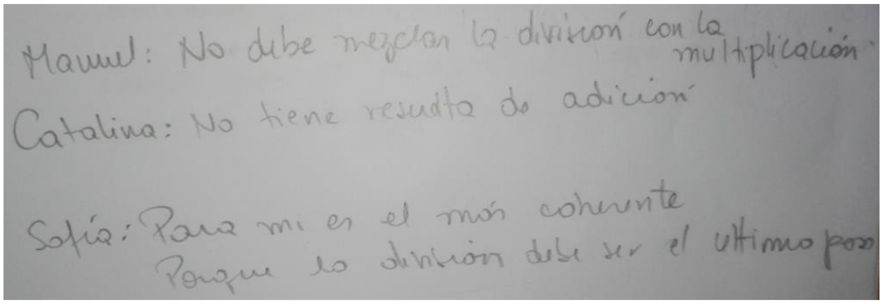

Manuel: No debe mezclar la división con la multiplicación.
Catalina: No tiene resultado de adición
Sofía: Para mi es el más coherente
Porque la división debe ser el ultimo paso

Figura 7.110 Respuesta del profesor 4 al ítem 4

Finalmente, 18 docentes, equivalentes a un 14,88% realizaron un análisis de las producciones presentadas, sin embargo, no indicaron en forma explícita cuál estudiante tiene la respuesta correcta, esto queda visualizado en la figura 7.111 que correspondió al profesor 71: *"Manuel multiplica ×2 luego suma. Catalina aplica la regla de las propiedades de los signos de izquierda a derecha. Sofía realiza la suma y no aplica la regla de los signos. De derecha a izquierda".*

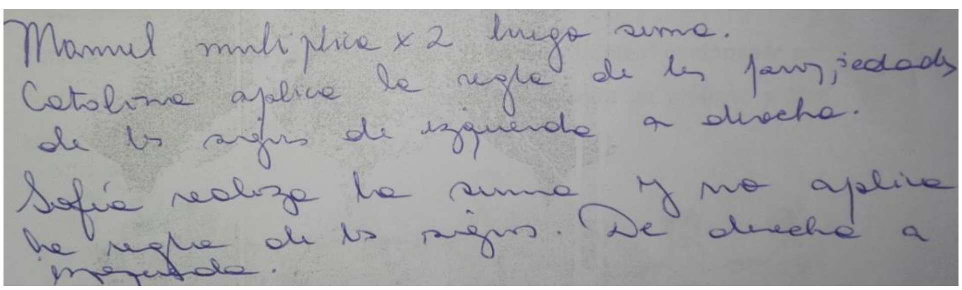

Manuel multiplica x 2 luego suma.
Catalina aplica la regla de las propiedades
de los signos de izquierda a derecha.
Sofía realiza la suma y no aplica
la regla de los signos. De derecha a
izquierda.

Figura 7.111 Respuesta del profesor 71 al ítem 4

7.4.9.4 Análisis de las respuestas del ítem sobre conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación a la enseñanza

El conocimiento especializado subcategoría conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, se fundamenta en las facetas interaccional y mediacional del conocimiento del docente, involucrando el rol del docente y del estudiante con relación a la tarea o contenido a trabajar, identificando las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje de los alumnos el modo de gestión de la clase por parte del docente. El ítem 8 del cuestionario que permite evaluar los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación básica.

7.4.9.4.1 Análisis del ítem 8

Luego de la aplicación de la versión piloto del cuestionario y el análisis de diez expertos con estudios e investigaciones en Matemática, Didáctica de la Matemática o Educación Matemática que se mencionó en el capítulo 6 de esta tesis, se ha considerado que este ítem será el único concerniente a la categoría del conocimiento del contenido en relación a la enseñanza. Los docentes deben discernir si el tratamiento de una parte de un texto Santillana es adecuado para introducir el concepto de ecuación de primer grado para alumnos de sexto año de enseñanza básica (niños de 11-12 años), además tienen que elucubrar las razones por las cuales los autores se inclinaron por esta actividad matemática.

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120)

Para compartir con tus compañeros e incentivar una colación saludable puedes realizar un pícnic al aire libre.

- Para responder la pregunta, completa con la cantidad de estudiantes según corresponda. Considera que x representa el número de estudiantes que se reunirán en el tercer grupo.

Total

$\square + \square + \boxed{x} = \square$

- En el tercer grupo se reunirán $\square$ estudiantes.

¿Cuál cree usted que es la justificación para que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?

Figura 7.112 Situación planteada en el ítem 8

En la tabla 7.183 es posible ver los resultados de las respuestas del planteamiento anterior. Se evidencia que 28 profesores (23,14%) han justificado de forma adecuada la utilización de esta actividad matemática por parte de los autores. Parcialmente correcta la respondieron 46 docentes, lo que equivale a un 38,02%. 21 personas (17,36%) no justificaron de manera óptima su inclusión en el texto de sexto año de enseñanza básica. Finalmente 26 no esbozaron ninguna respuesta a este cuestionamiento.

Grado de corrección	Frecuencia	Porcentaje
Correcta	28	23,14
Parcialmente correcta	46	38,02
Incorrecta	21	17,36
No contesta	26	21,49
Total	121	100

Tabla 7.183 Frecuencias y porcentajes del grado de corrección de las respuestas al ítem 8

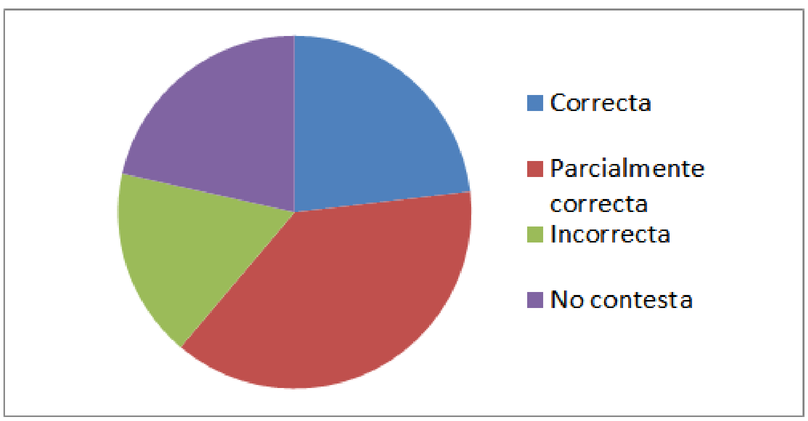


Figura 7.113 Gráfico circular correspondiente al grado de corrección de las respuestas al ítem 8

Luego de analizar las respuestas de los docentes, efectuamos una clasificación de aquellas producciones en cinco categorías que son mostradas en la tabla 7.184. Fueron 28 docentes (23,14%) los que se inclinaron por justificar la inclusión de la actividad matemática debido a que asocia el tratamiento de ecuaciones con una situación cotidiana para los alumnos, esto se consideró como la respuesta correcta. Una cantidad similar de docentes indicaron que la ilustración muestra los pasos para realizar una ecuación y buscar el valor de la incógnita, esto indicaron 29 profesores (23,97%), mientras que 17 (14,05%) indicó como justificación, que sólo ayuda a encontrar el valor de "*x*". A pesar que se les solicitó a los profesores que deben escribir una explicación a la inclusión de la actividad, 21 personas (17,36%) resolvieron una ecuación inmersa en la actividad sin realizar ningún tipo de justificación. Finalmente 26 (21,49%) profesores dejaron los espacios en blanco destinados para responder.

Respuestas	**Frecuencia**	**Porcentaje**
Asociar una ecuación con una situación cotidiana y en contexto a la realidad de los estudiantes.	28	23,14
La ilustración muestra los pasos para realizar una ecuación y buscar el valor de la incógnita.	29	23,97
Encontrar el valor de "*x*".	17	14,05
Resuelve la ecuación sin entregar una justificación.	21	17,36
No responde.	26	21,49
Total	121	100

Tabla 7.184 Frecuencias y porcentajes para las distintas categorías de las respuestas de los docentes al ítem 8

Una respuesta considerada correcta, fue la presentada por el profesor 3 en la figura 7.114, el cual indicó: *"que son actividades de la vida cotidiana, cercanas al entorno del estudiante, he de suponer que si se realizaran de verdad no en supuestos como lo hace el libro, sería mucho más significativo".*

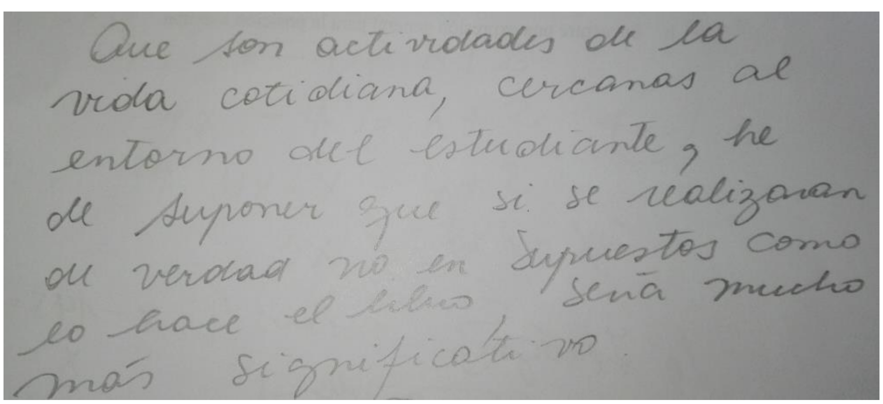


Figura 7.114 Respuesta del profesor 3 al ítem 8

Un ejemplo de una respuesta parcialmente correcta, fue la entregada por el profesor 1, en la figura 7.115, quien escribió en su respuesta: *"la ilustración muestra los pasos para realizar una ecuación y buscar el valor de x (la incógnita)".*

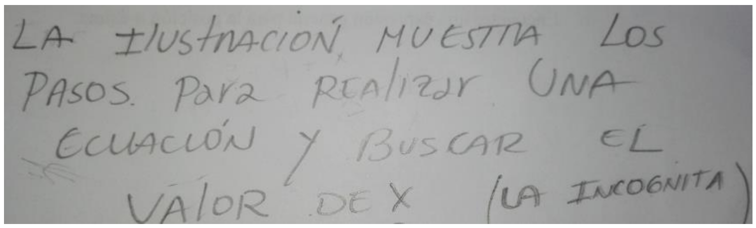


Figura 7.115 Respuesta del profesor 1 al ítem 8

17 docentes (14,05%) que indicaron que los autores incluyeron la actividad sólo con la finalidad de que los estudiantes encuentren el valor de "*x*". Un ejemplo de esto lo entregó en su respuesta el profesor 55 lo cual se puede observar en la figura 7.116.

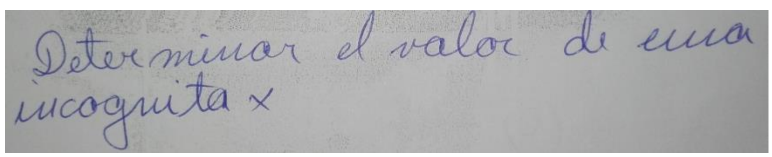


Figura 7.116 Respuesta del profesor 55 al ítem 8

Además 21 profesores, equivalente al 17,36%, resolvieron la ecuación sin entregar ningún tipo de justificación requerida. Un ejemplo de esto fue lo entregado por el profesor 14, la figura 7.117 muestra la producción del docente.

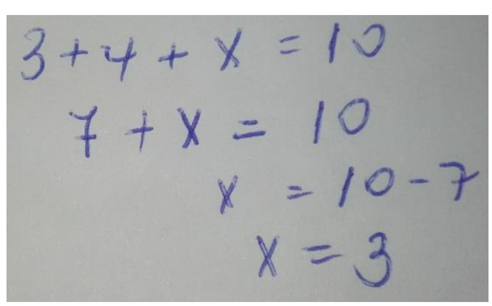


Figura 7.117 Respuesta del profesor 14 al ítem 8

CAPÍTULO 8: DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

8.1 Presentación

La docencia, en líneas generales, implica un gran nivel de responsabilidad por parte de quien la ejerce como profesión. Bajo esta mirada, incluye el compromiso tácito de promover el aprendizaje de contenidos específicos en un grupo de estudiantes, los cuales disponen de pocos o ningún bagaje previo en el tema tratado. El conocimiento técnico del área del saber a impartir es uno de los tantos elementos indispensables para llevar la labor docente con éxito. Tal como refiere Zarzar (1993), conocer el tema a impartir es una condición necesaria, más no suficiente para ser un buen docente; agregando que, la experticia en un área es indispensable para un profesor, sin embargo, esto no garantiza ni certifica que la enseñanza sea eficaz y adecuada.

Para el mismo autor, las habilidades de enseñanza y de aprendizaje son dos procesos totalmente diferentes vistos desde cualquier arista. El dominio técnico y conceptual de un área, requiere de un individuo que estudie, aprenda y practique cada contenido; sin embargo, la docencia, implica habilidades diferentes como la de transmitir los conocimientos y propiciar en otros el aprendizaje adecuado de los contenidos. Hacer esta distinción a nivel de investigación, facilita la posibilidad de brindar una visión más clara y objetiva de la labor docente. Poder transferir esta diferencia conceptual a los estudiosos del área e interesados por los procesos educativos tales como directivos, comunidad educativa, ministerios, instituciones y el estado; facilitaría una mejor administración de los recursos, las capacitaciones y formaciones; y atención necesaria para procurar la mejora de todo el proceso.

Por su parte el NCTM (2003, p. 17) establece que "la enseñanza eficaz de las matemáticas requiere reconocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender, y luego estimularlos y ayudarlos para que aprendan bien". Esta prestigiosa asociación de profesores de matemáticas completa esta idea con los tres requisitos siguientes (NCTM, 2000, p. 18, 19 y 20: "1) La eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los alumnos son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas; 2) una enseñanza eficaz requiere un entorno de aprendizaje que apoye y estimule; y 3) una enseñanza eficaz requiere tratar continuamente de mejorar".

Cuando consideramos la evaluación de los contenidos disciplinares, contemplamos elementos como las estructuras, conceptos y prácticas correspondientes a cada disciplina, contenido y bloque. Un buen docente sabe que sus alumnos son personas cuyo desarrollo humano están colaborando, por lo que cultivan y promueven en ellos el desarrollo de las competencias culturales básicas de comunicación, pensamiento crítico, resolución de problemas y de participación, así como el desarrollo y consolidación de los valores cívicos y culturales fundamentales (Gutiérrez, 2005).

En muchos países del mundo, la educación y su excelencia son un derecho fundamental y constitucional de los ciudadanos, donde el estado debe ser garante que esto ocurra. Por ello, la idoneidad docente y su profesionalización, además de otros elementos como condiciones físicas de los establecimientos educativos, acceso, calidad de los recursos y materiales pedagógicos y los métodos atraen especial atención e interés por parte de los encargados de velar por el cumplimiento de la ley por parte del estado.

Bajo esta perspectiva, cada vez más son los esfuerzos por optimizar el funcionamiento de todo el sistema educativo, evaluar y reevaluar cada elemento para garantizar su correcto funcionamiento. Existen múltiples procedimientos, capacitaciones, cursos de actualización, formaciones de postgrado y evaluaciones de desempeño y conocimientos para los docentes, que procuran estandarizar el nivel de calidad y excelencia, y favorecer a aquellos más preparados en ocupar cargos docentes y administrativos con la responsabilidad de procurar el mejor nivel en el servicio de la educación.

En esta misma línea, resultan de mucha utilidad en el campo de la docencia y la investigación, desarrollar propuestas y realizar estudios que aborden la temática de la evaluación del quehacer docente, desde el punto de vista del conocimiento técnico, y también desde el dominio de métodos y habilidades en pedagogía.

Fundamentalmente esta investigación se basa en un estudio exploratorio sobre el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria.

Para la concreción de los objetivos propuestos, hemos construido, validado y aplicado en Chile, un cuestionario a 121 docentes de educación primaria el cual se ha apoyado en el modelo del conocimiento didáctico-matemático que procura medir el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013 y Pino-Fan, Font, Godino, 2013).

A continuación presentaremos la discusión de los resultados obtenidos, junto con ello exhibiremos las principales conclusiones que permitirán responder a la pregunta de investigación y los objetivos planteados. Mostraremos un reconocimiento de las contribuciones del estudio, así como una descripción de sus limitaciones. Finalmente hemos reconocido y descrito futuras líneas de investigación las cuales entregarán la posibilidad de dar continuidad a este estudio sobre la *evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria*.

8.2 Discusión de los resultados obtenidos

Uno de los aspectos fundamentales de realizar este trabajo de investigación es pesquisar el conocimiento didáctico-matemático para enseñar álgebra que tienen interiorizados los profesores en ejercicio de educación primaria, con lo cual se da respuesta a la pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos poseen los profesores de educación primaria en ejercicio en torno al álgebra?

La inclinación por entregar soluciones a esta interrogante investigativa se apoya en el apartado Motivación y contextualización, incluido en el Capítulo 1 de esta memoria, allí quedan en evidencia los bajos resultados que han obtenido los escolares chilenos en las pruebas PISA del año 2015, lo cual ubica a nuestro país debajo de la media internacional para este tipo de evaluaciones, siendo una de las razones que explicaría esta situación la forma en que son transmitidos a los escolares los contenidos concernientes al álgebra elemental y clásica. En forma habitual los alumnos aprenden a manipular y operar expresiones algebraicas y a resolver ecuaciones, labor que realizan sin que tenga un significado para ellos, no existiendo una vinculación de las problemáticas planteadas con su contexto real y cotidiano, ni las relacionen con procesos de modelación (Olfos, Soto y Silva, 2007).

A raíz que existen variados modelos que caracterizan el conocimiento del profesor, destaca el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Schilling y Ball, 2004; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), el cual propone una caracterización de los componentes del conocimiento matemático que deben tener los profesores para la enseñanza, haciendo una diferenciación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido (Vásquez, 2014). Por otra parte hemos optado por utilizar el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013) como referente teórico el cual está fundamentado en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007).

Para contestar la pregunta de investigación, esta tesis doctoral se ha estructurado en dos partes, en una de ellas está organizada con todos los elementos teóricos y la otra es íntegramente empírica.

Parte Teórica	Parte Empírica
Motivación y contextualización del estudio.	Estudio exploratorio sobre el tratamiento del álgebra en el currículo americano (USA).
Definición de la investigación.	Estudio exploratorio sobre el tratamiento del álgebra en el currículo español.
Desarrollo histórico-epistemológico del álgebra.	Estudio exploratorio sobre el tratamiento del álgebra en el currículo chileno.
Significado intuitivo, clásico y matemático-axiomático del álgebra.	Análisis de los textos de estudio de primero a sexto año de enseñanza básica utilizados en Chile en torno a la unidad de álgebra.
Evolución a distintos tipos de álgebra (elemental, lineal, multilineal, homológica, conmutativa, no conmutativa, booleana).	Construcción del cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra para profesores en ejercicio de educación general básica (primaria).
Investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra en educación primaria.	Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos de los profesores en ejercicio de educación general básica (primaria).

Tabla 8.1 Secciones teóricas y empíricas de la tesis doctoral

En el Capítulo 2 encontramos el apartado Investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra en educación primaria, allí realizamos un resumen de las investigaciones que se han realizado sobre el aprendizaje del álgebra en educación primaria, evidenciando que el Ministerio de Educación en Chile mediante las bases curriculares estableció una nueva organización curricular a través de cuatro ejes.

A partir de las producciones analizadas se ha podido extraer la importancia que tiene para los profesores de educación primaria el razonamiento algebraico como un elemento que colabora en el desarrollo del lenguaje algebraico y la trascendencia de los simbolismos que son necesarios para el apoyo del aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos. Estos planteamientos se encuentran alineados con los presentados en el documento Razonamiento algebraico y didáctica para maestros (Godino y Font, 2003) quienes indican que los maestros en formación tienen que construir una visión centrada en el razonamiento algebraico como un eje fundamental en las ideas algebraicas de la actividad matemática. Existe una plena correlación entre las necesidades previstas para los maestros en formación y aquellos que se encuentran en ejercicio actual de la docencia.

A considerar es la oposición que surge a raíz que los docentes reconocen la importancia del razonamiento algebraico, sin embargo, el desarrollo diario de esta actividad matemática en el aula es considerada más una idealización que aterriza con fuerza en sus prácticas pedagógicas, puesto que indican que ellas se encuentran centradas en una visión tradicional del álgebra escolar. Por su parte García (2007) detalla que el álgebra escolar es considerada simplemente como una manipulación de letras que representan números no especificados. Esta visión de la enseñanza del álgebra escolar está presente desde los primeros años de educación primaria, sin embargo, se requieren docentes con una visión más amplia en la enseñanza del álgebra escolar y que no sólo se centren en generalizaciones aritméticas y de la manipulación de expresiones literales.

Por otra parte, se evidenció dificultades en los docentes en la interpretación del signo igual (=), siendo estas similares a las conclusiones presentadas por García (2007) cuando estudiantes de secundaria deben analizar el mismo símbolo. En contrapartida no se constató en las producciones docentes la ambigüedad que el autor expresa en el uso de notaciones en aritmética y álgebra que explicarían las dificultades en el aprendizaje, un ejemplo que expone es lo que acontece con las expresiones 27 y $2x$, el 2 de 27 indica el lugar en las decenas, por lo cual representa 20, por su parte, $2x$ significa que el 2 multiplica a la x, el signo de multiplicar muchas veces de omite y cuando se escribe se confunde con la letra x.

A través de las respuestas entregadas por los docentes se deduce la necesidad de realizar un plan de fortalecimiento mediante un programa de intervención que ayude a mejorar la enseñanza del álgebra y permita un mejor desenvolvimiento del docente en la enseñanza utilizando las herramientas del razonamiento algebraico, asimismo que permita enriquecer el nivel en los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los docentes en ejercicio de educación primara. Esto se vislumbraba y se hacía hincapié en la importancia que el razonamiento algebraico penetre las aulas en el texto Naturaleza del razonamiento algebraico elemental (Godino, Castro, Aké y Wilhelmi, 2012). Los autores indican que para mejorar en tratamiento del álgebra en las aulas de primaria y secundaria es fundamental que el profesor sea el principal agente de cambio, no bastando con nuevas propuestas curriculares (o reformulaciones), sin que los profesores participen de una visión amplia del álgebra escolar. Más aun comprendiendo que el razonamiento algebraico implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades en cualquier aspecto de las matemáticas. A medida que se desarrolla este razonamiento, se progresa en el uso del lenguaje y simbolismo necesario para apoyar y comunicar el pensamiento algebraico (Godino, Aké, Gonzato y Wihelmi, 2012).

Resultan relevantes los hallazgos entregados en la tesis doctoral Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación (Aké, 2013), que analizó las producciones de los maestros en formación concluyendo que resuelven regularmente bien las tareas relacionadas con el conocimiento común, sin embargo, manifiestan dificultades al momento de resolver las tareas del conocimiento avanzado. En esta misma línea los análisis de aspectos relacionados con el conocimiento especializado del contenido sugieren que la identificación de objetos matemáticos en general y la determinación de objetos algebraicos en particular son un reto para los futuros docentes. Las aseveraciones entregadas por la profesora Aké fueron las mismas que se extrajeron de las producciones de los docentes en ejercicio que realizaron nuestro el instrumento, no produciéndose cambios significativos entre el tránsito de maestros en formación a los profesores en ejercicio, también hubo una mayor cantidad de respuestas correctas en aquellos ítems que están orientados al conocimiento común del contenido. Los resultados respecto al conocimiento ampliado del contenido y al conocimiento especializado sobre álgebra entre ambos estudios también confluyen a la existencia de carencias en dichos conocimientos.

Es importante sostener que a pesar que existen investigaciones en esta área, aún son esfuerzos aislados, constatando que hay una carencia de estudios referidos a la enseñanza del álgebra escolar. Por otra parte, esto nos ha ayudado a fundamentar el diseño y posterior construcción del instrumento de evaluación que nos permitió evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los profesores de primaria.

En el capítulo 6 se presenta todo el proceso de diseño, construcción y validación del cuestionario, a través de él se pudo recoger datos referentes a los conocimientos didáctico-matemáticos que utilizan los profesores en ejercicio de educación primaria. Luego de la realización del juicio de expertos, se optó por fortalecer el instrumento mediante la incorporación de dos preguntas que pertenecen a un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos de estudiantes de magisterio sobre el razonamiento algebraico elemental (Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi, 2015), que al igual que nuestro instrumento se encuentra sustentado en el Conocimiento Didáctico Matemático (Godino, 2009). Ambas preguntas (ítems) se encuentran completamente alineados con los objetivos propuestos para nuestro instrumento el cual fue elaborado y orientado para que fuera respondido por profesores en ejercicio de educación primaria, con ello se pudo evidenciar la existencia de semejanzas y disparidades que se produjeron entre docentes en formación y aquellos que están inmersos en el mundo laboral.

8.2.1 Evaluación del conocimiento común del contenido sobre álgebra que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria

En el análisis del conocimiento común del contenido sobre álgebra que tienen los 121 profesores en ejercicio de educación primaria que realizaron el cuestionario, nos centremos en la incidencia de las variables descriptivas y posteriormente en el desarrollo de los ítems y subítems que tributan a este conocimiento, que en este caso son el 3), 5), 6) y 7a).

Respecto al conocimiento común del contenido, las variables masculino y femenino correspondiente a *Género*, han obtenido puntuaciones extremadamente similares. Algo singular ocurre con la variable *Especialidad*, sin embargo, los docentes que no tienen especialidad matemática obtuvieron una mayor cantidad de respuestas correctas. Considerando los *Años de Experiencia*, los docentes que poseen más de cuatro años en el campo laboral han obtenido una mejor ponderación respecto a los docentes que llevan menos años en el campo laboral. En la variable *Dependencia* de la institución educativa, aquellos profesores pertenecientes a colegios particulares pagados han obtenido una notoria puntuación mayor que sus colegas que trabajan en establecimientos de otra dependencia. Considerando el *Sector* en el que se encuentra el establecimiento en el cual trabajan, los docentes que se desempeñan en el ámbito urbano han obtenido mejores resultados. Los docentes que mayoritariamente concentran su labor docente en el *Curso* de quinto año de enseñanza básica, han obtenido una mejor puntuación respecto a sus colegas de otros cursos de enseñanza básica.

A partir de los datos que se recogieron de los ítems podemos dilucidar que el conocimiento común del contenido que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria es regular-bajo. El porcentaje de respuestas correctas no logra superar el 38%. Los profesores que contestaron de forma incorrecta los ítems o que no respondieron (dejan el espacio en blanco), alcanza un 57% y el 5% restante tuvo una respuesta parcialmente correcta. Considerando la media del índice de dificultad que poseen los ítems y subítems de este rango, podemos indicar que la agrupación de las preguntas consideradas para evaluar el conocimiento común del contenido, son consideradas en su conjunto como moderadamente fáciles (ítem 3: difícil; ítem 5: difícil; ítem 6: fácil; subítem 7a: moderadamente fácil).

Los docentes presentan serias dificultades en el traspaso del lenguaje natural a lenguaje algebraico, esta situación ya era descrita por Drijvers y Hendrikus (2003) quienes sostenían que existe una relación entre aritmética y álgebra, donde la aritmética proporciona al álgebra raíces y fundamentación, y el álgebra entrega a la aritmética la posibilidad de simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Por su parte Kieran y Filloy (1989) indican que la transición desde lo que puede considerarse como un modo informal de representación y de resolver problemas, a uno formal. Resulta difícil para muchos de los que comienzan a estudiar álgebra dado que siguen usando los métodos que les funcionaba en aritmética.

En algunos casos los docentes optaron por tratar de obtener la respuesta correcta a través del método de ensayo y error evitando construir una ecuación para optimizar la solución de la problemática. Este método heurístico proporciona lentitud en la obtención de la solución a una problemática, toda vez que se debe elegir un valor posible entre un rango muchas veces extenso, imponer aquel valor a las restricciones del problema y finalmente probar si satisface condiciones propuestas. Si el resultado está errado, se debe repetir el proceso con un nuevo valor. Si bien es un método que puede ser utilizado para algún tipo de problemas, nada garantiza el éxito en alcanzar la solución a corto plazo, ni mucho menos que logre entregar la solución. A pesar que es un método utilizado desde el inicio de las civilizaciones donde una primera aproximación al método de ensayo y error es observable en el papiro de Rhin el cual contiene 85 problemas resueltos usando el método de Regula falsi o falsa posición y que también era utilizado por los babilónicos quienes muchas veces sustentaban sus descubrimientos matemáticos basados en la experiencia práctica (Ruiz, 2003). Habrá que analizar caso a caso si el método de ensayo y error facilita la obtención de una solución o bien conllevará una mayor inversión de tiempo en la entrega de la respuesta correcta.

Los docentes comprenden que la forma óptima de llegar a una solución es elaborando una ecuación, sin embargo, la construyen de manera inadecuada lo que se traduce en la entrega de una respuesta incorrecta, sin perjuicio de lo anterior, al tener una ecuación (equivocada respecto a la problemática planteada) la desarrollan adecuadamente. Interesante resulta lo plateado por Kieran y Filloy (1989) indicando que los estudiantes para desarrollar ecuaciones se circunscriben a una de las siguientes clasificaciones: a) intuitivo, donde se incluye el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de redescubrimiento; b) sustitución por tanteo, donde debemos probar varios números; y c) formal, donde se utilizan las propiedades, axiomas y estructuras formales. Todos los docentes que realizaron el instrumento ocuparon alguna de las tres formas para solucionar ecuaciones.

Los resultados muestran que los docentes no logran realizar una adecuada manipulación algebraica, ni tampoco existe un buen tratamiento de aspectos vinculados a la modelación. Estos resultados concuerdan con los entregados por Aké (2013) en su estudio de evaluación del desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación y que pone en evidencia las carencias en el conocimiento común del contenido y son similares a los obtenidos por Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi (2015).

Resumiendo, los resultados mostraron que muchos docentes en ejercicio de educación primaria que respondieron nuestro instrumento, poseen un nivel básico en el conocimiento común del contenido sobre álgebra, careciendo de conceptos elementales del álgebra a pesar que deben ser tratados con sus alumnos en los niveles educativos en que se desempeñan.

8.2.2 Evaluación del conocimiento ampliado del contenido sobre álgebra que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria

Realizaremos el análisis del conocimiento ampliado del contenido que tienen los docentes en ejercicio que desarrollaron el instrumento de evaluación mediante los subítems 2a) y 7b).

Considerando la variable *Género* es observable que el género femenino obtuvo una mayor puntuación respecto al género masculino. Por otra parte, en *Especialidad*, los docentes sin especialidad matemática han obtenido una puntuación levemente superior a las otras dos categorías. Respecto a los *Años de Experiencia*, aquellos docentes que recién se están integrando al campo laboral y que tienen un año de experiencia han obtenido una mayor puntuación en esta categoría. En la variable *Dependencia* de la institución educativa, aquellos docentes que pertenecen a colegios en la categoría de particular pagado han obtenido una mayor cantidad de respuestas correctas. Por otra parte, los docentes que se desempeñan en el *Sector* urbano tuvieron mayores logros que aquellos que se desempeñan en sectores rurales. Los docentes que trabajan principalmente en un *Curso* de segundo año de educación básica, obtuvieron mejores resultados que sus colegas que se sitúan en otros niveles educativos.

A partir de los datos que se recogieron de los ítems podemos indicar que el conocimiento ampliado del contenido que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria es muy insuficiente. El porcentaje de respuestas correctas alcanzó un 14%. Los docentes que contestaron de forma incorrecta los ítems o que no respondieron (dejan el espacio en blanco), alcanzó un 62%, el 24% restante tuvo una respuesta parcialmente correcta. Si analizamos la media del índice de dificultad que poseen los subítems de este rango, podemos indicar que en su conjunto fueron categorizadas como preguntas difíciles (subítem 2a: difícil; subítem 7b: difícil).

Generalmente los docentes optaron por realizar justificaciones mediante la utilización de casos particulares y en muchos casos realizan una serie de fundamentaciones carentes de significado algebraico. Por otra parte, salvo excepciones, no logran encontrar términos generales vinculados a la generación de patrones. Las producciones docentes se alejan del planteamiento entregado por Arcavi (1994) que considera el álgebra como una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, revelando estructuras y estableciendo conexiones para formalizar argumentos matemáticos.

Las respuestas muestran un insuficiente manejo de las estructuras y propiedades algebraicas, estos resultados son similares a los obtuvo Aké (2013) en su tesis doctoral que evalúa el razonamiento algebraico elemental en maestros en formación y semejantes a los obtenidos por Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi (2015). Los resultados evidenciaron que se exhiben carencias en el significado matemático-axiomático del álgebra. Existe comprensión del concepto de patrón, sin embargo, no obtienen con facilidad el término n-ésimo de una secuencia pictórica.

Las producciones elaboradas por los docentes en ejercicio de educación primaria demostraron que poseen un nivel insuficiente en el conocimiento ampliado del contenido sobre álgebra, no pudiendo identificar los contenidos inherentes en la solución de los ítems y subítems planteados y careciendo de la capacidad de realizar las conexiones con otros temas.

8.2.3 Evaluación del conocimiento especializado sobre álgebra que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria

En este apartado consideramos dos subcategorías, uno relativo al conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, que corresponde al desarrollo de los ítems y subítems 1a), 1b), 2b) y 4; y el otro al conocimiento del contenido en relación a la enseñanza, que corresponde al ítem 8.

Al considerar la variable *Género* y el conocimiento especializado del contenido, el género masculino ha obtenido una mayor puntuación que el género femenino. Respecto a la variable *Especialidad*, los docentes que están en posesión de un perfeccionamiento en el área matemática han obtenido una mayor cantidad de respuestas correctas, esto se explicaría por el grado de preparación que se requiere en relación a la enseñanza y los contenidos a tratar. En la variable *Años de Experiencia,* los docentes que tienen mayor tiempo trabajando en instituciones educativas han obtenido una mayor puntuación que los docentes con menos experiencia laboral. Considerando el *Sector* en el que se sitúa el establecimiento donde trabajan los docentes, aquellos que están en lugares urbanos han obtenido mejores resultados. Los profesores que concentran su trabajo en un *Curso* de sexto años de educación básica, lograron puntajes mayores a sus colegas de otros niveles educativos.

A partir de los datos que se recogieron de los ítems y subítems podemos indicar que el conocimiento especializado sobre álgebra que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria es muy insuficiente. El porcentaje de respuestas correctas alcanzó un 21%. Los docentes que contestaron de forma incorrecta los ítems o que no respondieron (dejando el espacio en blanco), alcanza un 38%, el 41% restante tuvo una respuesta parcialmente correcta. Observando la media del índice de dificultad que poseen los ítems y subítems de este rango, podemos indicar que en su conjunto son consideradas preguntas difíciles (subítem 1a: muy difícil; subítem 1b: muy difícil; subítem 2b: muy difícil; ítem 4: fácil; ítem 8: difícil).

En las respuestas de los docentes se evidencia una deficiencia en el manejo del lenguaje algebraico no interpretando de forma adecuada el signo igualdad entendiéndolo como una acción a ejecutar. Esta situación se ha mantenido a través de tiempo, Kieran (1989) señalaba que los estudiantes tienen incrustada la idea que en álgebra el signo igual es la "señal de hacer algo" antes que un símbolo de la equivalencia entre los lados izquierdo y derecho de una ecuación, lo cual también es observable en estudiantes de secundaria. Esta situación es extensible a la mayoría de los docentes en ejercicio que solucionaron nuestro instrumento donde se pudo evidenciar la necesidad de resolver una adición y no visualizar la relación de equivalencia incorporada en los ítems.

Mayoritariamente realizaron argumentaciones basadas en la obtención de casos particulares y no a través de la utilización de estructuras algebraicas. Un gran porcentaje de docentes analiza de forma adecuada las producciones de los estudiantes, sin embargo, es preocupante que existan respuestas donde se evidencie una nula claridad en la prioridad de las operaciones. En algunos casos anteponen la adición sobre la multiplicación, o bien, no consideran la ejecución de una operación combinada en un orden de izquierda a derecha. Si bien Bermejo (2004) establece que las dificultades del alumno no sólo aparecen en el ámbito del cálculo, sino también en otros dominios matemáticos, esto queda reflejado en lo expresado por Godino, Batanero y Font (2003) para quienes la resolución de problemas es esencial si queremos conseguir un aprendizaje significativo de las matemáticas. No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas.

Preocupa la importancia que le entregan a las acciones mecánicas en el álgebra, declarando que lo significativo en la solución de una ecuación es la obtención del valor de una incógnita no entregando un valor significativo a la contextualización de una problemática o que sea orientado a la cotidianeidad de los niños. Esta situación se contrapone con los escritos de autores que han caracterizado el álgebra escolar (Filloy, Rojano y Puig, 2008; Kaput, 2008; Kieran, 2007), los cuales de igual manera que Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012) definían el álgebra como una forma de pensar y actuar en matemática, una actitud a generalizar, y, por tanto, a simbolizar y operar con símbolos, que penetra todas sus ramas y las impulsa hacia nuevos niveles de creatividad.

Respecto al conocimiento del contenido en relación a la enseñanza ha existido dificultades en interpretar las producciones de los alumnos, analizando de manera inadecuada el signo igual. Tampoco entrega elementos que permitan justificar lo realizado por los estudiantes. Se evidencia un conocimiento insuficiente para describir estrategias que permitan sortear y superar los errores que podrían presentar sus alumnos en el tratamiento de los contenidos algebraicos y que son visualizados en las problemáticas presentadas en los ítems y subítems. Esta es una situación de mucha seriedad toda vez que los profesores que participaron en la solución del instrumento se encuentran plenamente vigentes y realizando sus clases de forma habitual en las aulas del país.

Por su parte en el caso de conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, se muestra que los profesores en ejercicio cuentan con un precario conocimiento, lo que no les permite adelantarse a los ineludibles conflictos de aprendizaje que se encuentran constantemente en sus aulas, no logrando argumentar y justificar los errores y obstáculos que podrían verse enfrentados sus estudiantes.

Los resultados obtenidos para el conocimiento del contenido en la relación a la enseñanza y el conocimiento del contenido en relación a los estudiantes, son análogos a los obtenidos por Aké (2013) en el cuestionario que evalúa el razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.

8.3 Conclusiones del estudio

El foco de este trabajo estuvo en evaluar qué conocimientos didáctico-matemáticos para enseñar álgebra poseen los profesores en ejercicio de educación de primaria. Nos hemos inclinado por esta temática al existir una reciente reformulación del currículo nacional donde las temáticas relativas al objeto matemático álgebra fueron incorporadas desde los primeros años de escolaridad en educación primaria. Además de considerar el desafío que representa para los docentes de enseñanza básica el tratar contenidos algebraicos en los cuales no han recibido una formación académica adecuada, además hemos considerado que la cantidad de investigaciones que se refieren al conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra son escasas.

Recordando que fueron 121 docentes de educación primaria en ejercicio que desarrolló el cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza, el 80,17% de ellos indicó estar completamente de acuerdo con la incorporación del álgebra desde los primeros años de escolaridad primaria. Asimismo, 71,07% dice sentirse muy preparado para tratar contenidos algebraicos propios de un curso de enseñanza básica. Por otra parte, sólo el 55,37% indicó que tuvo cursos de álgebra en su formación profesional, cifra que disminuye drásticamente ante la consulta si tuvieron cursos de didáctica del álgebra durante su formación de pregrado, pues declaran haber realizado estos cursos, sólo el 19,83%. A pesar de no ser una cifra significativa, el 25,62% de los docentes declaró que ha realizado un curso de especialización en matemática donde está incluido el tratamiento del álgebra.

Por todo lo anterior, consideramos que esta tesis doctoral entrega un aporte relevante pues permite descubrir los conocimientos didáctico-matemáticos que presentan los profesores en ejercicio de educación primaria para enseñar álgebra.

A continuación presentaremos las conclusiones más significativas de nuestra investigación considerando la recolección de los datos a través de las respuestas del cuestionario analizado. Esta recogida de información permitió responder a los objetivos planteados contribuyendo además a dar respuesta a la pregunta de investigación.

¿Qué conocimientos didáctico-matemáticos poseen los profesores de educación primaria en ejercicio en torno al álgebra?

Tomando en consideración esta pregunta de investigación y los objetivos propuestos en esta tesis, las principales conclusiones de este estudio son:

1. *El insuficiente nivel de los conocimientos didáctico-matemático que poseen los profesores de educación primaria en ejercicio para la enseñanza del álgebra.*

Considerando el cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra para profesores de educación primaria, el cual tenía por objetivo el determinar qué conocimientos didáctico-matemáticos poseen los profesores en ejercicio respecto a la enseñanza del álgebra.

A partir de la participación de 121 docentes de educación primaria en Chile, podemos indicar que existe un exiguo nivel en los conocimientos didáctico-matemáticos.

Presentan deficiencia en la elucubración del razonamiento que condujo a un estudiante a entregar una respuesta determinada, entregan escasas argumentaciones matemáticas cuando deben realizar algún tipo de justificación o interpretación algebraica. Existe una gran cantidad de docentes que presentan deficiencias en temas de base como es la prioridad en las operaciones, del mismo modo que presentan una gran dificultad en la obtención de términos generales o de la posición n-ésima. Existen deficiencias en la transformación de lenguaje natural a lenguaje algebraico, no concretando la elaboración de ecuaciones de primer grado e incluso algunos tienen problemas en la solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Respecto a los conocimientos didáctico-matemáticos si realizamos un ordenamiento a través de los niveles de logro, podemos indicar que aquel que tuvo la mayor cantidad de aciertos son los referentes a los conocimientos común del contenido, seguido del conocimiento especializado, siendo el que obtuvo un menor nivel de logro en los profesores en ejercicio de educación primaria, los referentes al conocimiento ampliado.

2. *Se debe mejorar el tratamiento del objeto matemático álgebra en los textos de estudio de educación primaria en Chile.*

Es indispensable realizar una revisión y mejoría a la calidad de los textos de estudio que se entregan a los establecimientos educacionales del país. De acuerdo a lo se ha evidenciado a través del capítulo 5 *Estudio de la presencia del álgebra en los libros de texto chilenos* queda en evidencia que el álgebra es abordado sin la profundidad que algunos contenidos requieren, además muchos de ellos no se encuentran alineados con las orientaciones curriculares. Por otra parte, no se visualizan con claridad los tópicos relativos al álgebra entremezclándose con los propios de geometría, esto sucede principalmente en aquellos textos que se trabajan en los primeros tres años de enseñanza primaria.

Escasamente se promueve el razonamiento matemático-algebraico y la resolución de problemas. Si bien los conceptos están presentados de forma correcta y los contenidos actualizados, son tratados de forma superficial. No presentan una jerarquización de los contenidos, no existiendo precisión sobre los contenidos más relevantes, muchas veces muestran una matemática descontextualizada de la realidad entregando contenidos sin ejemplos reales de aplicación. Principalmente en los niveles superiores los textos de estudio no muestran todos los pasos importantes cuando muestran problemáticas resueltas.

Hay una ausencia de entregan orientaciones a la familia dificultando en apoyo y refuerzo que ellos pueden realizar. Suponen que por definir, explicar un procedimiento y exigir su aplicación mecánica repetidamente, se logrará la construcción de los distintos significados algebraicos. Escasamente son elaborados por un equipo multidisciplinario, tampoco existe una relación entre los textos que elaboran las distintas editoriales.

Las dificultades en los contenidos de los textos de estudio en Chile no es un tema nuevo, Eyzaguirre y Fontaine (1997) entregaban una cruda visión de las falencias que ya presentaban los textos de estudio que eran entregados a los estudiantes del país. En el estudio realizado aquel año concluyeron que existían deficiencias importantes en los textos de estudio escolares al no facilitar al alumno el aprendizaje de la matemática ni apoyaban la labor del profesor, detectaron falta de conocimiento de la matemática y de su metodología de enseñanza por parte de los autores, dificultaban innecesariamente los contenidos con un empleo abusivo de símbolos, nomenclaturas y términos que muchas veces ni siquiera utilizan los matemáticos y también presentaban una matemática desconectada de la realidad. Como podemos observar, estas dificultades en algunos puntos se han mantenido invariantes a lo largo de los años.

Es importante señalar que los textos de estudio deben ser construidos y evaluados por distintos equipos multidisciplinarios, presentando los contenidos de la forma más simple posible pero sin restar la esencia matemática del contenido. Debe utilizar un lenguaje natural apoyando la intuición de los alumnos, asimismo deben incorporar diversos diseños que den oportunidades de aprendizaje a los alumnos con necesidades educativas especiales y potenciar a alumnos talentosos.

3. *Ahondar los contenidos matemáticos-algebraicos propuestos por el Ministerio de Educación en Chile.*

Muchos docentes declararon estar completamente de acuerdo con las modificaciones al currículo que fueron impulsadas por el Ministerio de Educación chileno por cuanto se incorpore en tratamiento del álgebra desde los primeros años de escolaridad primaria, sin embargo, cerca del 30% indicó que no se siente preparado o bien no se siente totalmente competente para afrontar este desafío, ello redunda en que los contenidos que trabajan con sus estudiantes son tratados en forma liviana, incluso existiendo otros que no son trabajados con sus estudiantes.

Por lo cual es trascendental que se trabajen y traten todos los contenidos propuestos por el Ministerio de Educación con profundidad y rigurosidad disciplinar, con ello no se dejan fisuras curriculares que más tarde podrían deteriorar la comprensión de otros tópicos matemáticos por parte de los estudiantes de educación primaria.

4. *Consolidar los distintos significados del álgebra.*

Considerando lo complejo que es el tratamiento del objeto matemático álgebra desde los primeros años de escolaridad primaria, se considera primordial la introducción y el tratamiento en forma gradual de los distintos significados de él a lo largo del currículo escolar. Se recomienda comenzar con el significado intuitivo del álgebra de tal forma que los estudiantes puedan ir interiorizando elementos de algebrización, permitiendo la consolidación del razonamiento productivo e inductivo, esto les permitirá incorporar paulatinamente el significado clásico y significado matemático-axiomático del álgebra.

Una parte fundamental de este proceso es que el profesor de educación primaria en ejercicio tenga integrado y utilice los conocimientos didáctico-matemáticos para la construcción, desarrollo y puesta en marcha de sus sesiones de clases, lo que permitirá una transición del proceso de enseñanza y aprendizaje de manera óptima.

5. *La obtención de los mejores resultados en el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra fueron de los profesores:*
    - *Sin especialidad matemática.*
    - *Con mayor experiencia laboral.*
    - *Que están en establecimientos de dependencia particular pagada.*
    - *Que trabajan en instituciones ubicadas en sectores urbanos.*
    - *Que realizan sus clases en sexto año de enseñanza básica.*

A través del cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico matemático para la enseñanza del álgebra para profesores en ejercicio de educación primaria, se pudo evidenciar algunos resultados impensados y otros esperables.

Respecto a la variable *especialidad*, los profesores que no tienen una especialización matemática obtuvieron una ponderación levemente superior a aquellos que si tienen una especialización matemática, la explicación a esta inusitada situación se debe a la construcción del instrumento el cual no tenía la finalidad de pesquisar el nivel de conocimiento disciplinario que poseen los profesores, sino que se consideraron las prácticas matemáticas y tareas que colaboran en la contextualización de los contenidos además de aspectos didáctico-matemáticos que intervienen en dichas prácticas. Por tal razón, no necesariamente el docente que conoce más y mejor el contenido disciplinario algebraico, iba a tener un mejor desempeño en el cuestionario que evalúa los conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los profesores de educación primaria en ejercicio respecto al álgebra. Por otra parte, los docentes que tienen mayor cantidad de *años de experiencia* también lograron sobresalir respecto a aquellos con menos años de inserción en el mundo laboral, esto se debe al perfeccionamiento que van adquiriendo con los años en la enseñanza de la matemática y el álgebra en particular. Cabe señalar que respecto a la *dependencia* del establecimiento educacional, los profesores que pertenecen a colegios particulares pagados son poseedores de un conocimiento didáctico-matemático mayor, eso seguido de los docentes que pertenecen a instituciones de dependencia particular subvencionada, por debajo de las categorías anteriores, están los profesores que pertenecen a instituciones municipalizadas; los profesores que pertenecen a las instituciones privadas señalan que es requisito estar en un constante perfeccionamiento de sus prácticas pedagógicas. En los docentes que trabajan en instituciones educativas del *sector* urbano tienen una mayor adquisición de los conocimientos didáctico-matemáticos que aquellos que se encuentran en zonas rurales; esto se justifica puesto que los profesores de sectores rurales deben trabajar en aulas multigrado perdiendo la especificidad en la enseñanza de un contenido matemático. Finalmente es importante señalar que los profesores que *realizan sus clases en un curso* de sexto año de enseñanza básica obtuvieron niveles de logro superiores a aquellos que trabajan en los niveles educativos inferiores.

6. *Ejecución de un programa de intervención que permita mejorar el nivel del conocimiento didáctico-matemático que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria.*

Tomando en consideración los resultados de la *evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el álgebra de los profesores en ejercicio de educación primaria*, es preocupante la necesidad de realizar una intervención que permita mejorar aquellos aspectos de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria, toda vez que la medición de los conocimientos que poseen los profesores de matemática para enseñar es fundamental, ya que cada vez se hace imperioso establecer el vínculo entre conocimiento de los profesores y el rendimiento de los alumnos (Mesa y Leckrone, 2014; Carreño, Rodríguez, Ochsenius y Muñoz, 2014). Es importante indicar que el 52,33% de los docentes contestó en forma incorrecta el instrumento, o bien, dejó en blanco el espacio destinado para las respuestas a los ítems y subítems formulados.

7. *Reformulación de las estructuras curriculares en la formación de profesores de educación primaria de tal forma que sean incluidos una profundización de los contenidos algebraicos y aquellos relativos a la didáctica del álgebra.*

Dado que sólo el 19,83% de los profesores declaró que tuvo cursos de didáctica de la matemática o didáctica del álgebra durante el periodo de formación profesional en sus distintas instituciones de educación superior, además considerando que de las 61 universidades -privadas y públicas- que existen en Chile, 35 de ellas ofrecen la carrera de educación general básica. De ellas sólo 7 instituciones de educación superior tienen cursos de didáctica del álgebra incorporadas como cursos obligatorios a sus estudiantes, 19 poseen en sus estructuras curriculares cursos genéricos de didáctica de la matemática, 7 universidades tienen la carrera de pedagogía en educación general básica sin ningún curso de didáctica de la matemática o didáctica del álgebra en sus mallas curriculares y finalmente 2 no presentan información. Por lo anterior creemos que es urgente la reformulación de las estructuras curriculares de las carreras de pedagogía en educación básica de las universidades que no han incorporado cursos de didáctica de la matemática, del mismo modo es indispensable incorporar los contenidos relativos a didáctica del álgebra en aquellos programas de estudio que son de didáctica de la matemática. Con esto se incorporaría en las estructuras curriculares de todas las carreras de pedagogía en educación básica los conocimientos didáctico-matemáticos relativos a la enseñanza del álgebra.

8.4 Aportaciones del estudio

Hemos considerado que el presente estudio presenta una serie aportaciones significativas, siendo las principales de ellas:

- Es un estudio que consideró la indagación de la evolución histórico-epistemológico del álgebra, su surgimiento y los aspectos que envuelven y le dan un sustento teórico a esta área de la matemática. Se investigaron aspectos relativos a la prehistoria y su surgimiento como una estructura algebraica formal. Considerando estos antecedentes, se presenta una primera aproximación hacia una teoría del álgebra que considera distintos significados (intuitivo, clásico y matemático-axiomático). Se finaliza con el análisis de algunas conexiones con otros elementos matemáticos y como se refunden en una estructura consolidada a través de los años.

- Se analizaron distintas investigaciones nacionales e internacionales sobre el aprendizaje del álgebra, efectuándose una síntesis de estudios relacionados con el álgebra y con la formación del profesorado para enseñar álgebra.

- Se realizó un análisis de la presencia del álgebra en el currículo de Educación Primaria. En concreto, se compararon los currículos de Estados Unidos, España y Chile a partir de la "Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados", el cual que permite identificar los tipos de objetos puestos en juego en la solución de un problema. El análisis realizado indica que el álgebra temprana está presente en los currículos de matemáticas de Educación Primaria analizados, con diversas diferencias, pero con la intención compartida de que los estudiantes desarrollen diversas competencias matemáticas.

- Desarrollamos un estudio de la presencia del álgebra en los libros de textos chilenos, en el cual se analizaron seis ejemplares de las editoriales Cal y Canto, Marshall Cavendish, Pearson Education, Galileo y Santillana. Esto permitió identificar los distintos objetos matemáticos-algebraicos y sus significados presentes en ellos, asimismo como las conexiones con las orientaciones curriculares entregadas por el Ministerio de Educación chileno.

- La principal contribución de este estudio ha sido la elaboración de un cuestionario que permite evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza del álgebra para profesores en ejercicio de educación primaria. Con él se pudo valorar qué conocimientos didáctico-matemáticos poseían, considerando las categorías: conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del álgebra, este último con las categorías – conocimiento del contenido en relación con los estudiantes y conocimiento del contenido en relación con el currículo – que se desprenden de él. Es importante señalar que de los 8 ítems que lo conformaron, hubo dos preguntas que pertenecen a un instrumento previamente validado para analizar los conocimientos de los futuros profesores sobre la enseñanza del álgebra (Godino, Aké, Contreras, Díaz, Estepa, Blanco, Lacasta, Lasa, Neto, Oliveras y Wilhelmi, 2015), las siguientes seis preguntas son inéditas y al igual que las tomadas del instrumento diseñado por el profesor Godino y equipo, permitieron evaluar aspectos de las distintas facetas presentes en el conocimiento didáctico-matemático. Antes de ser realizado por los 121 docentes en ejercicio de educación primaria, el instrumento fue sometido a un juicio de diez expertos y la aplicación de una versión piloto a 10 docentes que cumplían con las mismas características que se exigieron a los 121 profesores. Es importante señalar que el instrumento presentó una alta validez y una buena confiabilidad lo cual sugirió una fuerte correlación entre los ítems. La aplicación del instrumento permitió la obtención de resultados originales, además de información relevante en relación a los conocimientos didáctico-matemáticos sobre álgebra que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria.

- Una de las contribuciones más relevantes es contar con resultados inéditos respecto a los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza del álgebra que poseen los profesores en ejercicio de educación primaria en Chile, lo cual servirá como información relevante para conocer las facetas y áreas donde los docentes requieren un fortalecimiento, además de conocer las líneas y necesidades que deben ser cubiertas en la formación profesional del profesorado de educación primaria.

- Finalmente esta investigación contribuye con datos que entregan directrices que permiten aportar a la visualización de la necesidad de poner en marcha una serie de perfeccionamientos en las prácticas pedagógicas y con ello se establezca un desarrollo profesional del profesorado, dado que enseñar matemáticas en educación primaria implica poseer un conocimiento de y sobre las matemáticas y un conocimiento del aprendizaje de las nociones matemáticas y su proceso de enseñanza (García, Llinares, Blanco y Escudero, 2000).

8.5 Limitaciones del estudio

Una vez finalizada esta investigación es posible ver en perspectiva algunas limitaciones que presenta este estudio, sin embargo, si se realizan los correctivos necesarios se pueden saldar en investigaciones posteriores:

- La muestra de los docentes establece una cantidad aceptable de docentes - 121 profesores de educación primaria en ejercicio - no obstante podría ser ampliada para hacer aún más generalizados los resultados y conclusiones obtenidas.

- Hubo participación de profesores que trabajan en la zona central del país abarcando las ciudades de San Felipe, Los Andes, Calle Larga, Santiago, Colina, Viña del Mar, Valparaíso, Quilpué, Quillota, La Calera, La Cruz, Nogales, Cabildo, Rancagua y San Vicente de Tagua Tagua, pertenecientes a las regiones de Valparaíso, Metropolitana y O'Higgins, sin embargo, sería interesante que se aumentara la cobertura geográfica incluyendo docentes que se encuentren situados en las zonas norte y sur del país.

- Es posible mejorar el cuestionario que se construyó para evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos para enseñar álgebra que poseen los profesores en ejercicio de enseñanza primaria, debido que luego de la evaluación de los expertos no se consideró en la dimensión relativa al conocimiento especializado del contenido la subcategoría conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares, centrándonos sólo en algunos aspectos propuestos por Godino (2009).

- Dado que su publicación ocurrió cuando este estudio tenía un avance importante, no fue posible incorporar en esta investigación elementos pertenecientes al Modelo del Conocimiento y Componentes Didáctico-Matemáticos (CCDM), por lo cual sólo se utilizó el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM).

- No se pudo efectuar filmaciones de clases para identificar las relaciones que se dan en el aula, tampoco la realización de entrevistas a los profesores, acciones que no se pudieron ejecutar a pesar que ayudaría a la profundización de este estudio.

- Aumentar la cobertura del análisis de los textos de estudio de primero a sexto año de enseñanza básica a todos los libros presentes en el mercado, dado que en esta oportunidad sólo nos hemos restringido a aquellos textos que son entregados de forma gratuita a los establecimientos educacionales por parte del Ministerio de Educación en Chile.

8.6 Líneas de investigaciones futuras

Las perspectivas futuras de indagación no se agotan con la finalización de esta tesis doctoral, más aun considerando que las investigaciones en esta área de estudio son escasas, por ello se propone:

- Aumentar las experiencias formativas sobre el Razonamiento Algebraico Elemental en las estructuras curriculares de las escuelas y carreras de formación de profesorado.

- Incrementar la muestra de profesores de educación primaria en ejercicio a distintas zonas geográficas de Chile, con la finalidad de analizar si existe un comportamiento homogéneo y similar respecto a este estudio.

- Complementar el cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra para profesores en ejercicio de educación primaria, con la finalidad que se abarquen todas las dimensiones y facetas del conocimiento didáctico-matemático.

- Aumentar el estudio de la presencia del álgebra en los libros de textos chilenos a todos aquellos que están a disposición en el mercado y que son exigibles por algunas instituciones educativas y que no son los entregados gratuitamente por el Ministerio de Educación en Chile.

- Realizar una intervención que sea un aporte significativo a la mejoría en la preparación de las sesiones de clases que involucren la enseñanza del álgebra, debiendo considerar conocimientos vinculados a la didáctica del álgebra y sus conexiones entre el conocimiento común del contenido, el conocimiento ampliado del contenido y el conocimiento especializado. La finalidad es que los profesores de enseñanza primaria puedan tener mejoras en sus prácticas docentes.

Referencias Bibliográficas

Aké, L. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros en formación.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Aké, L., Castro, W. F., y Godino, J. D. (2011). Conocimiento didáctico-matemático sobre el razonamiento algebraico elemental: un estudio exploratorio. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XV Simposio de la SEIEM* (227-236). Ciudad Real.

Aké, L., Godino, J. D., y Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *UNION: Revista de Educación Matemática*, *33*, 39-52.

Aké, L., Godino, J., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. In Lindmeier, A. & Heinze, A. (Eds.), *Proceeding of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2,* 1-8. Kiel, Germany: PME.

AGNU (1966): Pacto internacional de derechos económicos, sociales y culturales. *Asamblea general de las naciones unidas.* Disponible en, http://www.ohchr.org/SP/ProfessionalInterest/Pages/CESCR.aspx

Alfaro, S., Espinoza, Y., y Guajardo, I. (2014). *Texto del Estudiante. Matemática 4° Básico.* Galileo Libros & Educación.

Alsina, Á. (2009). El aprendizaje realista: Una contribución de la investigación en educación matemática a la formación del profesorado. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (119-127). Santander: SEIEM.

Alsina, Á. (2009). Matemáticas en educación primaria. En N. Planas y Á. Alsina (2009). *Educación matemática y buenas prácticas.* (93-144). Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. (2012). Hacia un enfoque globalizado de la educación matemática en las primeras edades. *Números, 80,* 7-24.

Alsina, Á., y Vásquez, C. (2015). Conocimiento didáctico-matemático del profesorado de educación primaria sobre probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Bolema, Rio Claro (SP), 29(52),* 681-703.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. En *For the Learning of Mathematics 14*, 24-35. Canadá: FLM Publishing Association.

Atiyah, M., y MacDonald I. (1978). *Introduction to commutative algebra*. London, Great Britain: Addison-Wesley Publishing Company.

Ávalos, B., y Matus, C. (2010). *La formación inicial docente en Chile desde una perspectiva internacional*. (Informe nacional del estudio internacional IEA TEDS M). Santiago: Ministerio de Educación de Chile.

Baliache, D. (2009). Guía unidad II: Marco teórico. Disponible en, http://www.unsj.edu.ar/unsjVirtual/comunicacion/seminarionuevastecnologias/wp-content/uploads/2015/06/02_Marco-teorico.pdf

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying mathematics teaching and learning. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 365-402). Dordrecht. Netherlands: Kluwer.

Ball, D. L., Hill, H. C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), (pp. 14-17, 20-22, 43-46).

Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Eds.), *Handbook of Research on Teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, *59(5),* 389-407.

Barco, C. (2005). *Álgebra Booleana. Aplicaciones tecnológicas*. Cali, Colombia: Editorial Universidad de Caldas.

Bardin, L. (1996). *Análisis del contenido.* Madrid, España: Ediciones Akal.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8(3),* 247-263.

Bednarz, N., y Guzmán, J. (2003ª). ¿Cómo abordan los estudiantes de secundaria la resolución de problemas antes de ser introducidos en álgebra? Un estudio exploratorio Quebec-México. En Filloy, E., *Matemática Educativa, Aspectos de la investigación actual, Fondo de Cultura Económica* (FCE, Editorial), ISBN 968-16-7028-0, 11-40.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra.* Dordrecht: Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bermejo, V. (2004). *Cómo enseñar matemáticas para aprender mejor.* Madrid: Editorial CCS.

Bernal, C. (2010). *Metodología de la investigación.* Bogotá, Colombia: Prentice Hall.

Blanco, H, Fernández, A., y Oliveras, M. (2017). Formación de profesores de matemáticas desde la etnomatemática: estado de desarrollo. *Bolema Río Claro, 31(58),* 564-589.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience Part II. In H. Chick, K. Stacey, J. Vicente (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra*, Vol. 1 (87-102). Melbourne, Australia. University of Melbourne.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears: Understanding Characteristics of Professional Development that Promote Generative and Self-Sustaining Change in Teacher Practice". *Teaching Children Mathematics, 10,* 70-77.

Blanton, M. T., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. J. Hoines y A. B. Funglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2,* 135-142. Bergen, Norway. University College.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(5),* 412-446.

Blanton, M. L., y Kaput, J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai, E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. Advances in mathematics education.* 5-21. Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Bodansky, F. (1991). The formation of an algebraic method of problem-solving in primary school children. En V. Davidov (Eds.), *Soviet studies in mathematics educations.* (vol. 6, 275-338). Reston, VA: NCTM.

Bosch, M., y Gascón, J. (2001). Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. *Seminario inter-universitario de investigación en didáctica de la matemática*. Universidad de Granada. Disponible en, https://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF

Boyer, C. (1968). *A history of mathematics*. New York. United States of America: Wiley International Edition.

Braslavsky, C. (2002). La demanda aumenta pero las condiciones siguen siendo insuficientes. *Revista perspectiva, 32(3),* 1-3.

Breda, A., Pino-Fan, L., y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 13(6),* 1893-1918.

Butto, C., y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: Abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática, 16(1),* 113-148.

Cai, J., y Knuth, E. (2011). *Early Algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Heidelberg, Germany: Springer-Verlag.

Careaga, A. (2001). La evaluación como herramienta de trasformación de la práctica docente. *Revista Educere, 5(15)* 345-352.

Carpenter, T., y Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades.* Madison, WI: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA).

Carpenter, T., Franke, M., y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically. Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School.* Postsmouth, England: Heinemann.

Carpenter, T., Levi, L., Franke, M., y Zeringue, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education,* 37, 53-59.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* Vol. 2, 669-705. Charlotte, N.C.: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D. W., Martínez, M. V., y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM): The International Journal on Mathematics Education, 40(1),* 3-22.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. En M. L. Fernández (Eds.), Conferencia magistral presentada en el *22nd Annual Meetinf of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).* Tucson, Arizona.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., y Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37(2),* 87.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., y Schwartz, J. L. (2008). Early is not the same as algebra early. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades,* 235-272, Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carreño, X., Rodríguez, B., Ochsenius, H., y Muñoz, V. (2014). ¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona este saber con sus prácticas de enseñanza? *III Congreso Interdisciplinario de Investigación en Educación*. Santiago, Chile.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología y relaciones.* Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J., Climent, N., Aguilar, A., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M., y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK. *VII CIBEM.* Montevideo, Uruguay.

Castañeda, A. (2008). El texto escolar y su uso. Fundación Promigas. Disponible en, http://escuelasqueaprenden.org/imagesup/El%20texto%20escolar%20y%20su%20uso.pdf

Castro, E., Rico, L., y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de las estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15(3),* 361-371.

Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Castro, W. F., y Godino, J. D. (2008). Evaluación del razonamiento algebraico elemental en futuros maestros: Un estudio exploratorio. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XII Simposio de la SEIEM,* 273-282. Badajoz.

Castro, W., Godino, J. D., y Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 25,* 73-88.

Chandía, E., López, A., Martínez, S., Martínez, F., y Rojas, D. (2014). *Álgebra para futuros profesores de educación Básica. Texto para el formador*. Recursos para la formación inicial de profesores de educación Básica. Santiago, Chile: Ediciones SM.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* (Doctoral dissertation). Michigan: Proquest Michigan University.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cohen, L., y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa.* Madrid, España: La Muralla. [Traducción de Francisco Agudo López de la obra original de Cohen, L. & Manion, L (1989). *Research Methods in Education.* Routledge].

Colás, M. P., y Buendía, L. (1998). *Investigación Educativa.* Sevilla, España: Ediciones Alfar S. A.

Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core Standards for Mathematics. From, http://www.corestandards.org/assents/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Cortés, C. (2013). *Texto del Estudiante: Matemática 1° Básico.* Ediciones Cal y Canto.

Drijvers, P., y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding on the concept of parameter.* Tesis doctoral no publicada. Utrecht, Países Bajos: Utrecht University.

Durkheim, E. (2002). *La educación moral.* Madrid, España: Editorial Morata.

Espinosa, J., y Román, T. (1991). Actitudes hacia la ciencia y las asignaturas pendientes: Dos factores que afectan al rendimiento en ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, *9(2)*, 151-154.

Eyzaguirre, B., y Fontaine, L. (1997). El futuro en riesgo: nuestros textos escolares. *Centro de estudios públicos, 68,* 340-354.

Felmer, P., y Varas, L. (2007). ¿Porqué fallamos los chilenos en matemática? Disponible en, http://www.dim.uchile.cl/~pfelmer/doc/FELMER%20VARAS.12.12.2007.pdf

Fensham, P., y Harlen, W (1999). School science and public understanding of science. *International Journal of Science Educaction,12,* 755-763.

Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,14,* 75-91.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach.* Berlin: Springer.

Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix 19,* 33-36.

Font, V., y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 33-52.

Font, V., y Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa, 8(1),* 67-98.

Font, V., Godino, J. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 27(2),* 2-7.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33(1),* 89-105.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fuentes, S. (2013). Pensamiento funcional en edades tempranas. Un estudio exploratorio. Universidad San Sebastián. Disponible en, http://villarrica.uc.cl/files/matematica/materialweb/CB%2051.pdf

Fullan, M. (2000). El significado del cambio educativo: un cuarto de siglo de aprendizaje. Universidad de Toronto. Disponible en, https://www.ugr.es/~recfpro/rev61ART1.pdf

Galán, B. (2012). *Matemáticas: de dónde vienen y hacia dónde se dirigen.* Santander. España: Editorial Universidad de Cantabria.

García, J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria. En Camacho, Matías; Flores, Pablo; Bolea, María Pilar (Eds.), *Investigación en Educación Matemática,* 71-92. Tenerife.

García, V., Llinares, S., Blanco, M., y Escudero, I. (2000). La formación de profesores de primaria desde la didáctica de las matemáticas. *Números, 43,* 143-146.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Revista de Educación Matemática, 11(1),* 77-88.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14(2),* 203-231.

Gavilán, P. (2011). Dificultades en el paso de la aritmética al álgebra escolar: ¿puede ayudar el aprendizaje cooperativo? *Revista de Investigación en la Escuela*, 73, 95-108.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22, (2/3),* 237-284.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_tfs.htm

Godino, J. D. (2004). *Didáctica de la matemática para maestros.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Godino, J. D. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático: ¿es posible compatibilizar postulados pragmáticos y realistas sobre las matemáticas? *Revista Diálogo Filosófico, 64*, 63-76.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME.* Recife, Brasil.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (49-68). Jaén, España: SEIEM.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en, https://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14(3).* 325-355.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1988a). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority área of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1988b). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale y J. Portela (Eds.), *IX Reunión de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* (25-45). Guimaraes, Portugal.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Matematiques, 14(3),* 325-355.

Godino, J. D., y Font, V. (2003). Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros. Universidad de Granada. Disponible en, https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/6_Estocastica.pdf

Godino, J. D., y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (3325-3326).* Antalya, Turkey: CERME.

Godino, J. D., Aké, L., Contreras, A., Díaz, C., Estepa, A., Blanco, T., Lacasta, E., Lasa, A., Neto, T., Oliveras, M., y Wilhelmi, M. R. (2015). Diseño de un cuestionario para evaluar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental. *Enseñanza de las ciencias,* 33.1, 127-150.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M., y Wilhelmi, M. R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. Penalva, F. García, y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. XVI Simposio de la SEIEM* (285-294). Jaén, España.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de granada. Disponible en, https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The international Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Roa, R. (2005). A semiotic analysis of combinatorial problems and its resolution by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60(1),* 2-36.

Gonino, J. D., Batanero, C., y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio,* 165-185. Universidad de Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V., y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27(2),* 221-252.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L., y Wilhelmi, M. R. (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Boletim de Educação Matemática, 42B,* 483-511.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Matematiques, 26(1),* 39-88.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *XX Simposio de la SEIEM, Bolema, Rio Claro (SP), 31(57)*, 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V., y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 13,* 63-83.

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., y Bencomo, D. (2005). Suitability criteria of a mathematical instruction process. A teaching experience of the function notion. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 4.2:* 1-26.

Greenes, C., y Rubenstein R. (2008). *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Gutiérrez, E. (2010). Un modelo de evaluación de desempeño docente que contribuye en la mejora de la calidad de los servicios educativos. *Congreso Iberoamericano de Educación: Metas 2021*. Buenos Aires, Argentina.

Gutiérrez, J. (2005). ¿Cómo reconocemos a un buen maestro? *Revista Mexicana de Investigación Educativa.* 1299-1303.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México D. F., México: McGraw-Hill Interamericana.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Hill, H. C., Schilling, S. G., y Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, 105(1), 11-30.

Hoch, M., y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in the school algebra. The effect of brackets. In M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME),* 49-56. Bergen, Normay: Bergen University College.

Huang, R. (2002). *Mathematics teaching in Hong Kong and Shanghai: A classroom analysis from the perspective of variation.* Doctoral Thesis. University of Hong Kong.

Jiménez, L. (2008). Enfoque curricular centrado en la persona. *Revista Educación, 32(1),* 63-76.

Kapp, K. M., Blair, L., y Mesch, R. (2014). *The gamification of learning and instruction fieldbook ideas into practice.* San Francisco CA: John Wiley & Sons.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity of an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum:* National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science (NCISLA). Dartmouth, MA.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades,* 5-17. New York: Routledge.

Kaput, J. J., y Blanton, M. L. (2000). Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making in implementable on a massive scale. *Annual Meeting of the North American Educational Research Association.* Montreal, Canada.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the Early Grades.* New York: Lawrence Erlbaum, Associates and National Cpuncil of Teachers of Mathematics.

Kheong, F., Ramakrishnan, C., Pui, B., y Choo, M. (2013). *Mi matemática. Texto del estudiante 2° Básico.* Marshall Cavendish Education.

Kheong, F., Kee, G., y Ramakrishnan, C. (2017). *Texto del Estudiante. Matemática 5° Básico.* Marshall Cavendish Education.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. D. A. Grows (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 3-38. New York, USA: Macmillan Publishing.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra.* New York, USA: Dover Publications.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator, 8(1),* 139-151.

Kieran, C. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future.* Montreal, Canada: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, (2),* 707-762. Charlotte, N. C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Kieran, C., y Filloy E. (1989). A perspective on algebraic thinking. *Proceeding of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), 2,* (163-171). Paris, France.

Lacave, C., Molina, A., Fernández, M., y Redondo, Á. (2015). Análisis de la fiabilidad y validez de un cuestionario docente. *Actas de las XXI Jornadas de la Enseñanza Universitaria de la Informática,* 136-143.

Laguna-Sánchez G. (2011). Un acercamiento práctico al álgebra geométrica. Universidad Autónoma Metropolitana. Disponible en, http://casanchi.com/mat/acercamientoag01.pdf

León, A. (2007). Qué es la educación. *Revista Educere, 11(39),* 595-604.

Li, X. (2007). *An investigation of secondary school algebra teacher's mathematical knowledge for teaching algebraic equation.* Austin, Texas: University of Texas.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 17,* 51-63.

Lluis-Puebla E. (2005). *Álgebra homológica, cohomología de grupos y k-teoría algebraica clásica.* México D.F. México: Addison-Wesley Iberoamericana.

LOCE (1990). *Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza.* Diario Oficial de Chile, 10 de marzo de 1990.

Macho, M. (1998). *Algunas ideas sobre Geometría no conmutativa*. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. Bilbao, España.

Maldonado, L., y Castro, C. (2017). *Texto del Estudiante. Matemática 6° Básico.* Santillana.

Martínez, F. (2016). *La evaluación de docentes de educación básica*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). México.

Martínez-Chavanz, R. (2006). *Álgebra multilineal.* Medellín, Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Martínez, G., y Guevara, A. (2015). La evaluación del desempeño docente. *Ra Ximhai, 11(4),* 113-124.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum/Taylor, Francis Group y National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (2011). What makes 'Algebra' early? En J. Cai, y E. Knuth (Eds), *Algebra in the Early Grades: A global dialogue from multiple perspectives,* 566-568. Berlin: Spinger.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M. D., y Senk, S. L. (2012). Knowledge of Algebra for Teaching: A Framework of Knowledge and Practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43(5),* 584-615.

Méndez, C. (1997). *Metodología: Guía para elaborar diseños de investigación en ciencias económicas, contables y administrativas.* Bogotá, Colombia: Santafé de Bogotá McGrall-Hill.

Mesa, V., y Leckrone, L. (2014). Assessment of Mathematics Teachers Knowledge. En S. Lerman (Eds.), *Encyclopedia of Mathematics Education, (13),* 48-51. Springer: Netherlands.

Ministerio de Educación (2009). *Ajuste Curricular.* Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2011). *Estándares Orientadores para la Formación Inicial Docente.* Unidad de Curriculum y Evaluación. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Boletín oficial del estado. ORDEN ECI/2211/2007, del 20 de julio, por la que se establece el currículo y regula la ordenación de la Educación Primaria.* Madrid, España.

Ministerio de Educación, Cultura y Deportes (2001). Aproximación al perfil del docente para la educación preescolar o inicial, Venezuela. *Educere, Intervías Educativas, 5(13),* 241-245.

Miranda, C., Wilhelm, K., Martín, G., Arancibia, M., y Osses, S. (2013). Autoestima profesional en docentes beneficiarios del programa de postítulo de matemáticas en el contexto de la evaluación docente. *Revista de Estudios Pedagógicos, 39(1).*

Molina, Z. (2004). *Planeamiento didáctico: fundamentos, principios, estrategias y procedimientos para el desarrollo.* San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

Mora, L. (2012). *Álgebra en primaria.* Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Pedagógica Nacional.

Morales, P. (2007). La fiabilidad de los tests y escalas. Universidad Pontificia Comillas. Disponible en, https://web.upcomillas.es/personal/peter/estadisticabasica/Fiabilidad.pdf

Muñiz, J. (2010). Las teorías de los tests: teoría clásica y teoría de respuesta de los ítems. *Revista Papeles del Psicólogo, 31(1),* 57-66.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM (Trad. Castellana, *principios y estándares para la educación matemática*, Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2003). New York, USA: Spinger-Verlag.

OCDE (2009). *Pisa 2009. Assessment framework: Key competencies in Reading, Mathematics and Science, PISA.* OEDC Publishing.

OCDE (2011). *Students on line – digital technologies and performance. PISA 2009 Result-vol.VI.* Paris: OECD.

OCDE (2012). *Equity and quality in education: Supporting disadvantaged and schools.* Disponible en, http://dx.doi.org/10.1787/9789264130852

OCDE (2017). *Revisión de recursos escolares: Chile.* OEDC Publishing.

Olfos, R., Soto, D., y Silva, H. (2007). Renovación de la enseñanza del álgebra elemental: un aporte desde la didáctica. *Revista de estudios pedagógicos, 23(2)*, 81-100.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

Papic, M. M., Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers ’Mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42(3)*, 237-268.

Pino-Fan, L., Font, V., y Godino, J. D. (2013). El conocimiento didáctico-matemático de los profesores: pautas y criterios para su evaluación y desarrollo. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores*, 137-151. México, D. F.: Ediciones D. D. S. y Universidad Autónoma de Guerrero.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2010). *Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada.* Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Nuevo León, México, 206-213.

Pinter, C. (1990). *A book of abstract algebra.* New York, USA: Dover Publications.

Puig, E. L., y Cerdan, P. F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. En E. Filloy y T. Rojano (Eds.), *Artículo presentado en el Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, 35-48. Cuernavaca, México.

Qualding, D. (1982). La importancia de las matemáticas en la enseñanza. *Revista Trimestral de Educación, 12(4)*, 443-452.

Ramos, A., y Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 11(2)*, 233-265.

Randall, C., Caldwell, J., Cavanagh, M., Chancellor, D., Copley, J., Crown, W., Fennell, F., Ramírez, A., Sammons, K., Scielack, J., Tate, W., y Van de Walle, J. (2013). *Texto del Estudiante. Matemática 3° Básico.* Pearson Educación de Chile.

Rocard, M. (2007). *Science Education NOW: A renewed pedagogy for the future of Europe, Brussels: European Commission.* From, http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-onscience- education_en.pdf

Roldán, A. (2000). El aprendizaje centrado en el alumno: de la teoría a la práctica. I.E.S. Alhaken II. Universidad de Córdoba. Disponible en, http://www.encuentrojournal.org/textos/11.22.pdf

Rowland, T, Hucktep, P., y Thwaites, A. (2005). 'Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8(3)*, 255-281.

Ruíz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas.* San José, Costa Rica: Editorial Universidad Estatal a Distancia.

Sabino, C. (1992). *El proceso de investigación.* Caracas, Venezuela. Editorial Panapo.

Sanders, W., y Horn, S. (1998). Research finding from the Tennessee Value-Added Assessment System (TVAAS). Database: Implications for Educational Evaluation and Research. *Journal of Personnel Evaluation in Education, 12(3),* 247-256.

Sanders, W., y Rivers, J. (1996). *Cumulative and residual effects of teachers on future student academic achievement*. Knoxville: University of Tennessee Value-Added Research and Assessment Center.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think.* New York, USA: Routlege.

Serres, Y. (2011). Iniciación del aprendizaje del álgebra y sus consecuencias para la enseñanza. *Revista Universitaria de Investigación, 12(1),* 122-142.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2),* 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. *Harvard Educational Review, 57(1),* 1-22.

Socas, M. (2011). La enseñanza del algebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77,* 5-34.

Solar, H., y Rojas, F. (2015). Elaboración de orientaciones didácticas desde la reflexión docente: el caso del enfoque funcional del álgebra escolar. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, 10(1),* 14-34.

Stacey, K. y Chick, H. (2004). *Solving the problem with algebra*. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), The Future of Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study (pp. 1-20). Boston: Kluwer.

Steward, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años.* London, Great Britain: Critica.

Swokowski, E., y Cole, J. (2009). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. London, Great Britain: Cengage.

Tomás, M. (1990). Los problemas aritméticos de la enseñanza primaria. Estudio de dificultades y propuesta didáctica. *Revista Educar, 17,* 119-140.

Valoyes, L. (2011). Representación institucional dominante del álgebra en el sistema educativo colombiano. *XIII CIAEM-IACME.* Recife, Brasil.

Vasco, L. (2015). *Conocimiento especializado del profesor de álgebra lineal: un estudio de casos en el nivel universitario.* Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.* Tesis Doctoral. Universidad de Girona.

Velásquez, H., y Cisneros, J. (2013). Conocimiento didáctico matemático del maestro que enseña matemáticas. *I CEMACYC.* Santo Domingo, República Dominicana.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15(2),* 122-137.

Warren, E. (2009). Early Childhood Teacher's Professional Learning in aerly algebraic thiking: A model that supports new knowledge and pedagogy. *Mathematics Education Research Journal, 9,* 30-45.

Wilhelmi, M. R., Lacasta, E., y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Reserches en Didactique des Mathematiques, 27(1),* 77-120.

Wrigth, P., Horn, S., y Sanders, W. (1997). Teachers and Classroom Context Effects on Student Achievement: Implications for Teachers Evaluation. *Journal of Personnel Evaluation in Education, 11(1),* 57-67.

Zarzar, C. (1993). *Habilidades básicas para la docencia.* Editorial Patria. México.

ANEXOS

ANEXO I: Versión Inicial del Cuestionario

ANEXO II: Pauta para los expertos

ANEXO III: Consentimiento informado

ANEXO IV: Versión Final del Cuestionario

ANEXO V: Rúbrica para la corrección

ANEXO I: Versión Inicial del Cuestionario

CUESTIONARIO PARA PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

(Versión Inicial)

DATOS DESCRIPTIVOS

Identificación del Docente

1. Run: ________________
2. Género: Masculino [ ] Femenino [ ]
3. Edad: ____

Formación Académica

4. Nombre Título Profesional: ______________________________________
   ____
5. Año de titulación. __________

Experiencia laboral

6. Indique los años de experiencia que tiene realizando clases de matemática en Educación Básica.

   Menos de 2 años [ ]
   De 2 a 4 años [ ]
   Más de 4 años [ ]

7. Indique que tipo de dependencia es el establecimiento en el cual actualmente usted se desempeña como profesor de matemática.

   Municipal [ ]
   Particular Subvencionado [ ]
   Particular Pagado [ ]

8. Indique el sector al cual pertenece el establecimiento educacional en el que actualmente trabaja.

   Rural [ ] Urbano [ ]

9. ¿En cuál de los siguientes cursos de educación básica se desempeña como profesor de matemáticas actualmente?

   Primero Básico [ ] Segundo Básico [ ]
   Tercero Básico [ ] Cuarto Básico [ ]
   Quinto Básico [ ] Sexto Básico [ ]
   Modalidad Multigrado [ ]

<u>Referentes al cambio curricular</u>

10. ¿Usted está de acuerdo con las modificaciones que se han realizado en el currículum chileno en relación a la incorporación del eje de álgebra desde los primeros niveles de educación?

    Si [ ] Medianamente [ ] No [ ]

11. ¿Usted se siente preparado para realizar clases de álgebra desde los primeros niveles de educación?

    Muy preparado [ ]
    Medianamente preparado [ ]
    No se siente preparado [ ]

12. ¿En su formación universitaria, tuvo cursos de álgebra?

    Si [ ] No [ ]

13. ¿En su formación universitaria, tuvo cursos de didáctica del álgebra?

    Si [ ]   No [ ]

14. Durante los años que lleva trabajando como profesor de educación básica. ¿Usted ha realizado algún postítulo de mención en matemática, donde esté incluido el álgebra?

    Si [ ]   No [ ]

15. ¿Usted conoce los estándares pedagógicos y disciplinarios?

    Si [ ]   Medianamente [ ]   No [ ]

16. Con respecto a los estándares pedagógicos y disciplinarios, ¿Usted sabe cuántos están dirigidos al eje de álgebra?

    Si [ ]   No [ ]

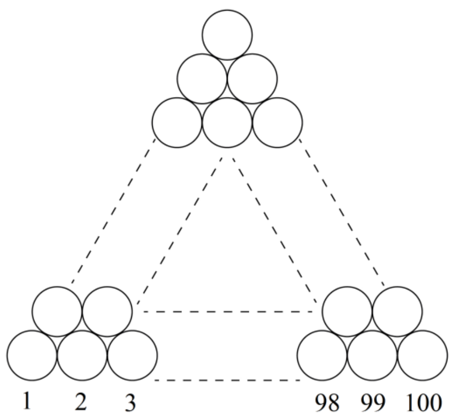
Instrucciones para responder las preguntas abiertas:

- En cada uno de los ítems debe considerar un tiempo máximo de 5 minutos.
- En las situaciones de aula, responda de acuerdo a lo que usted haría o diría en aquel momento.
- Toda respuesta en confidencial y voluntaria.
- Se agradece que responda todas o en su defecto, la mayoría de las preguntas propuestas.

PREGUNTAS ABIERTAS

Ítem 1:

Laura es una profesora que desea introducir un concepto matemático, lo realiza a través de la utilización del siguiente arreglo:



a. ¿Cuántas esferas en total utilizó? Encuentre una expresión general que permita encontrar el número total de esferas.

b. ¿Qué concepto matemático logró introducir?

Ítem 2:

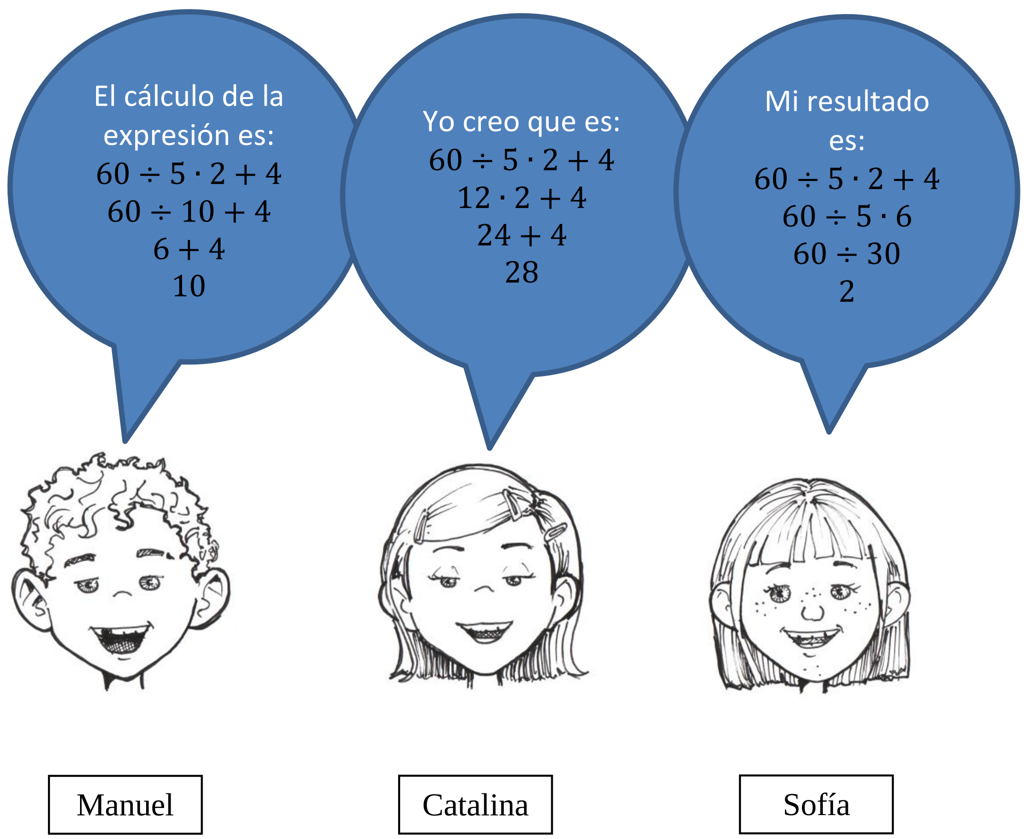
Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro distintos compradores:

- Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno.
- Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero.
- Al tercero, un ternero.
- Al cuarto, le vende el último un ternero que le quedaba.

¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Ítem 3:

La profesora le indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: "*Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades, ¿cuál es el resultado?*".



a. ¿Cuál de los niños tiene la respuesta correcta? Enumere la prioridad en las operaciones.

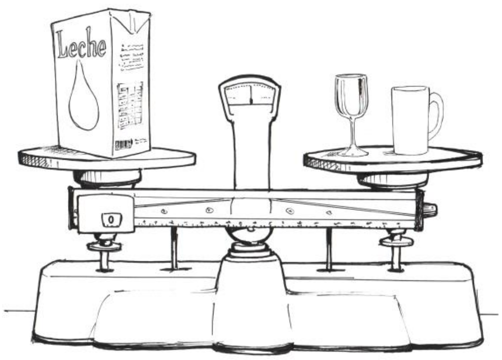
b. ¿Qué conceptos matemáticos o propiedades debe utilizar el alumno para resolver lo planteado?

c. Describa cuales son las posibles dificultades que presentarían los alumnos.

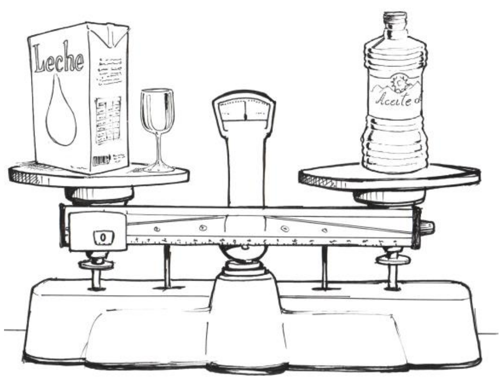
Ítem 4:

En una balanza se dan las siguientes situaciones de perfecto equilibrio:

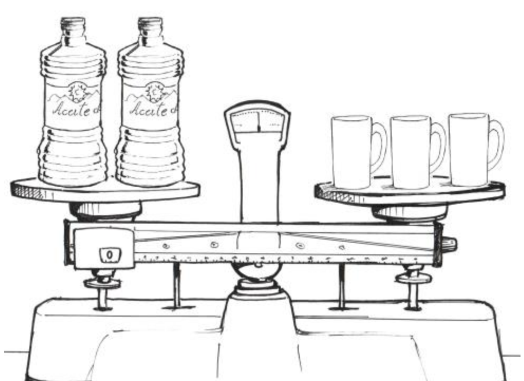
Una caja de leche equivale a una copa y un tazón.



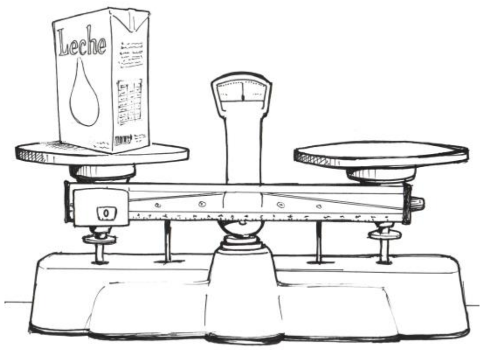
Una caja de leche y una copa equivale a una botella de aceite.



Dos botellas de aceite equivalen a tres tazones.

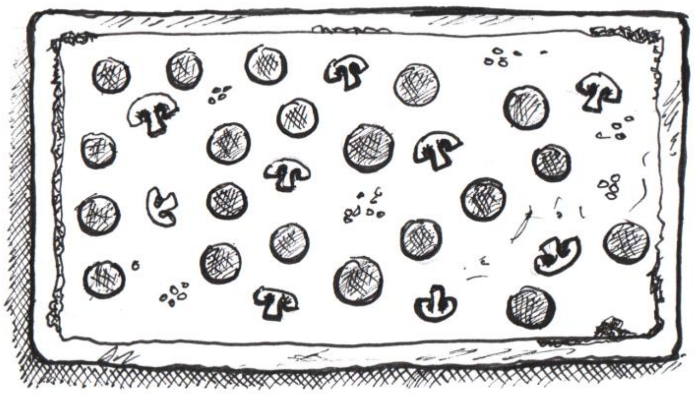


De acuerdo al dibujo, ¿cuántas copas se pueden colocar en el lado derecho de la balanza para alcanzar un perfecto equilibrio?



Ítem 5:

Un trozo de pizza está dividido en tres partes, la primera corresponde a dos tercios del peso total, la segunda a un séptimo del peso total y la tercera pesa 200 gramos.



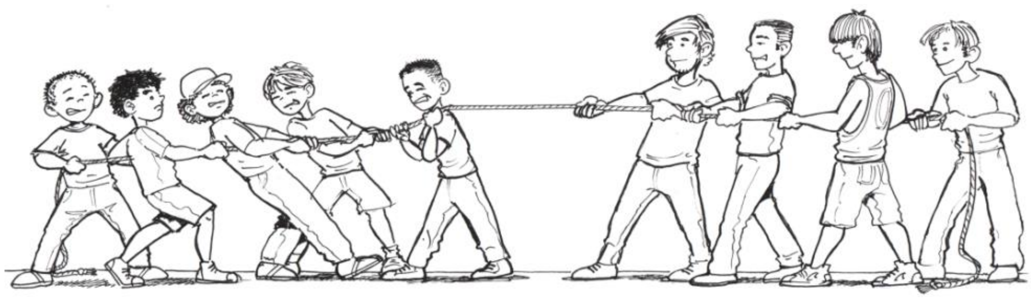
a. ¿Cuál era el peso total? Resuelva utilizando álgebra.

b. ¿Qué contenidos deben dominar los estudiantes para afrontar esta problemática y llegar a su solución?

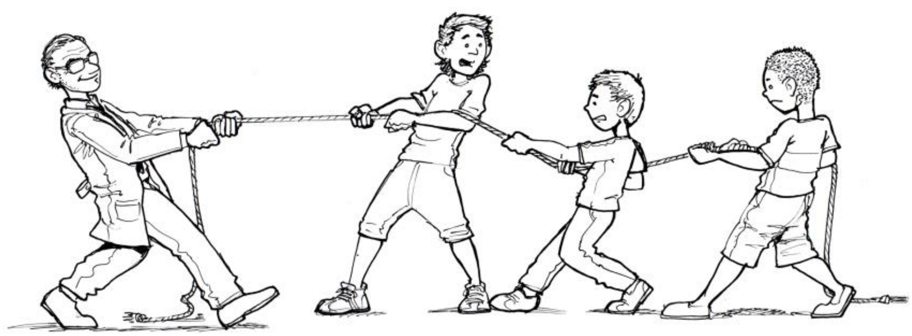
Ítem 6:

En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

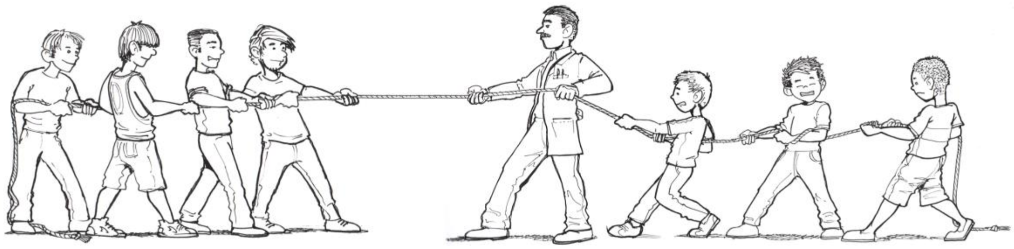
Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.



Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo "demoledores" conformado por cuatro jóvenes contra "invencibles" donde se encuentra un profesor y tres niños.



a. ¿Qué equipo es el vencedor?

b. ¿Qué conceptos algebraicos se encuentran implícitos al desarrollar lo planteado?

Ítem 7:

Traspase a lenguaje algebraico y resuelva: "*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Ítem 8:

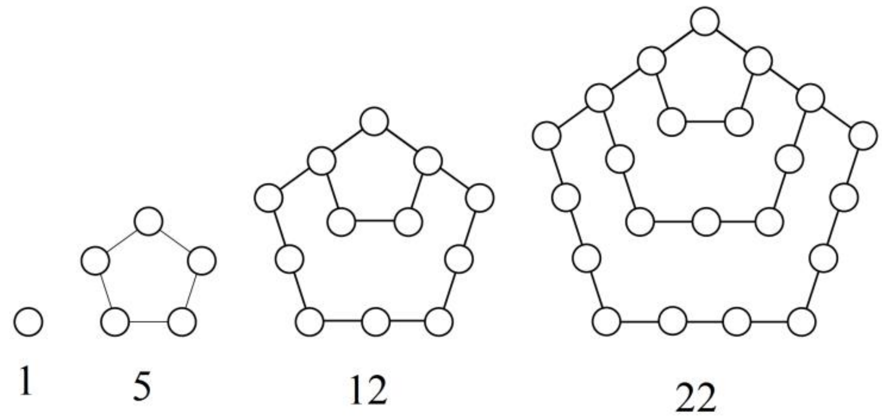
Considerando que una casa se revaloriza en forma lineal, el primero de abril de este año me he comprado una casa en 22 millones de pesos. Proyectando que el 1 de abril de 2030 su valor será de $30 millones.

a. ¿Cuál sería su valor el 1 de abril de 2021?

b. ¿Qué obstáculos disciplinarios presenta la problemática?

Ítem 9:

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.

b. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.

Ítem 10:

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120)

Para compartir con tus compañeros e incentivar una colación saludable puedes realizar un pícnic al aire libre.

- Para responder la pregunta, completa con la cantidad de estudiantes según corresponda. Considera que x representa el número de estudiantes que se reunirán en el tercer grupo.

Total

$$\square + \square + \boxed{x} = \square$$

- En el tercer grupo se reunirán $\square$ estudiantes.

a. Bajo su punto de vista, ¿es una buena actividad para introducir el concepto de ecuación? Fundamente.

b. ¿Realizaría modificaciones a lo planteado por los autores? ¿cuáles?

Ítem 11:

Como tarea de investigación Margarita, profesora de sexto año de enseñanza básica, solicitó a los alumnos que definieran el concepto de álgebra.

Al día siguiente, Eduardo entregó la siguiente definición: *es la rama de la matemática que se responsabiliza de hacer general lo particular, utilizando coeficientes numéricos, factores literales y operaciones entre ellos. Es decir, combina números, letras, con algunas operaciones.*

¿Cuál es su valoración de la respuesta entregada por Eduardo?

ANEXO I: Pauta para los expertos

EVALUACIÓN DE EXPERTO

Instrumento: “Cuestionario de evaluación del conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra para profesores en ejercicio de educación general básica”.

Estimado evaluador:
Le presentamos nuestra propuesta de instrumento para evaluar el conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del álgebra en profesores de educación básica. Para lograr este objetivo, hemos definido las siguientes dimensiones y tipos de ítems:

FACETA	TIPO DE ÍTEM
Conocimiento del contenido: común, especializado y ampliado.	Resolución de problemas. Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.
Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes.	Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.
Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.	Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.
Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares.	Casos con preguntas. Pregunta de respuestas abiertas.

Para la elaboración del instrumento, se ha utilizado el sistema de categorías o componentes del conocimiento del profesor (del contenido matemático y didáctico) propuesto por Godino (2009), esto nos llevará a un conceptualización del conocimiento didáctico-matemático. Este modelo categoriza el conocimiento del profesor de acuerdo a conjunto de facetas y niveles para el análisis didáctico que interactúan entre sí (Figura 1).

Figura 1**:** Facetas y niveles del conocimiento del profesor
(Godino, 2009, pág. 21)

Considerando estas facetas, Godino propone una segregación del conocimiento didáctico-matemático del profesor, formulando una serie de categorías de conocimientos necesarios para poner en práctica en proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático:

Conocimiento del contenido: común especializado y ampliado.
Esta categoría se fundamenta en la faceta epistémica del docente, en la que se espera estudiar en los conocimientos matemáticos del profesional en el contexto institucional en el que se lleva a cabo en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Para identificar, clasificar y evaluar el conocimiento de los docentes se desarrollan las siguientes consignas:

- El conocimiento matemático que es suficiente para dar una solución a tareas propias del nivel educativo en que está inmerso el docente corresponde al conocimiento común.

- El conocimiento matemático que considera la variedad de representaciones, ideas y problemas matemáticos, así como los distintos procedimientos, conceptos, propiedades y argumentos que le permiten alcanzar una solución se denomina conocimiento especializado.

- El conocimiento matemático que permite al docente generalizar soluciones y relacionar los contenidos a trabajar con aquellos que están más avanzados en el currículo de matemática, corresponde al conocimiento ampliado.

Conocimiento del contenido en relación a los estudiantes.
Se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva del conocimiento del docente, por lo tanto está asociado a los conocimientos personales de los estudiantes, los errores cometidos en la práctica matemática, dificultades y los conflictos reflejados en su proceso de aprendizaje, además de las actitudes, emociones y creencias que encontramos junto al proceso de estudio.

Conocimiento del contenido en relación a la enseñanza.
Se fundamenta en las facetas interaccional y mediacional del conocimiento del docente, involucrando el rol del docente y del estudiante con relación a la tarea o contenido a trabajar, identificando las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje de los alumnos el modo de gestión de la clase por parte el docente.

Conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares.
Se fundamenta en la faceta ecológica del conocimiento del profesor, considerando aspectos del currículo, entorno social, político y económico. Son aquellas actividades y tareas que se proponen para lograr los objetivos de aprendizaje.

- **ESTIMADO EVALUADOR, POR FAVOR HAGA UNA VALORACIÓN DEL GRADO DE ADECUACIÓN QUE TIENE CADA ÍTEM CON LA DIMENSIÓN PROPUESTA RESPECTO A:**

  - Grado de correspondencia: Defina si cada ítem en particular pertenece o no pertenece a la dimensión, considerando la definición entregada. Para esto refiérase en términos de "Pertenece" o "No pertenece".

  - Formulación: Juzgue el lenguaje y claridad utilizada en el desarrollo de cada ítem. Utilice los conceptos de "Adecuada", "No adecuada" o "A mejorar".

  - Pertinencia: Establezca la coherencia del ítem respecto a la dimensión. Refiérase en términos de "Pertinente"; "No pertinente" o "Con dudas".

A) Dimensión del conocimiento del contenido

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertenencia
1 a)			
1 b)			
2			
3 b)			
4			
5 a)			
6 a)			
7			
8 a)			
8 b)			
9 a)			
9 b)			

B) Dimensión del conocimiento del contenido en relación a los estudiantes

Ítem	Correspondencia	Formulación	Pertenencia
3 a)			
3 c)			
5 b)			

C) Dimensión del conocimiento del contenido en relación a la enseñanza

Ítem	**Correspondencia**	**Formulación**	**Pertenencia**
10 a)			
10 b)			
11			

D) Dimensión del conocimiento del currículo y conexiones intra e interdisciplinares

Ítem	**Correspondencia**	**Formulación**	**Pertenencia**
6 b)			

- **AGRADEZCO PUEDA RESPONDER RESPECTO AL PROCESO DE VALIDACIÓN DE LOS ÍTEMS: ¿ES CONVENIENTE REALIZAR UN PILOTAJE DEL CUESTIONARIO A UN GRUPO DE 5 PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA?**

- **EN CASO DE TENER ALGÚN COMENTARIO ADICIONAL EN RELACIÓN AL GRADO DE ADECUACIÓN QUE TIENE CADA ÍTEM CON LA DIMENSIÓN PROPUESTA, SE AGRADECE PUEDA ESCRIBIR UN COMENTARIO AL RESPECTO.**

Apuntes para el Ítem 1

Apuntes para el Ítem 2

Apuntes para el Ítem 3

Apuntes para el Ítem 4

Apuntes para el Ítem 5

Apuntes para el Ítem 6

Apuntes para el Ítem 7

Apuntes para el Ítem 8

Apuntes para el Ítem 9

Apuntes para el Ítem 10

Apuntes para el Ítem 11

GRACIAS POR SU AMABILIDAD AL REVISAR EL INTRUMENTO

ANEXO III: Consentimiento informado

Consentimiento Informado

La Universidad de Playa Ancha campus San Felipe, Chile y la Universitat de Girona, Catalunya, España, están desarrollando una investigación denominada "Evaluación de los conocimientos para la enseñanza del álgebra en profesores en ejercicio de educación primaria". Esta indagación contribuirá con datos y apuntes que ayudará a los docentes a la comprensión de elementos referentes al álgebra, primordialmente la valoración de los conocimientos didácticos-matemáticos de los docentes de educación básica, así como la preparación para la enseñanza de este tópico matemático.

Se aplicará un cuestionario para recoger las concepciones de los docentes de educación básica para enseñar álgebra, solicitándoles a los profesores que contesten con la máxima rigurosidad y sinceridad, toda vez que la información recogida no será utilizada con otros fines que no sea el netamente investigativo. No se divulgará ningún tipo de información personal, tampoco existirán referencias individualizadas a personas o instituciones que han participado en el sondeo.

CONSENTIMIENTO:

Yo, ………………………………………………………… profesor de educación básica del establecimiento ………………………………., acepto participar en el cuestionario sobre los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza del álgebra en profesores de educación básica.

Ratifico mediante mi firma, el asentimiento otorgado.

……………………………………

Cristian Mejías Zamorano, RUN 12.695.267-8, email cristian.mejias@upla.cl, profesor de la Universidad de Playa Ancha campus San Felipe, académico a cargo del proyecto de investigación, suscribe el compromiso de respetar las condiciones antes detalladas.

…………………………………

En ………….. a ………………….. de 2018

(Se firman dos copias, una para el docente participante y otro para el encargado del proyecto de investigación)

ANEXO IV: Versión Final del Cuestionario

CUESTIONARIO PARA PROFESORES DE EDUCACIÓN BÁSICA

(Versión Final luego del Juicio de Expertos y Pilotaje)

DATOS DESCRIPTIVOS

Identificación del Docente

1. Run: ________________
2. Género: Masculino [ ] Femenino [ ]
3. Edad: ____

Formación Académica

4. Nombre Título Profesional: _____________________________________
____
5. Año de titulación. _________

Experiencia laboral

6. Indique los años de experiencia que tiene realizando clases de matemática en Educación Básica.

Menos de 2 años [ ]
De 2 a 4 años [ ]
Más de 4 años [ ]

7. Indique que tipo de dependencia es el establecimiento, en el cual actualmente usted se desempeña como profesor de matemática.

Municipal [ ]
Particular Subvencionado [ ]
Particular Pagado [ ]

8. Indique el sector al cual pertenece el establecimiento educacional en el que actualmente trabaja.

Rural [ ] Urbano [ ]

9. ¿En cuál de los siguientes cursos de educación básica se desempeña como profesor de matemáticas actualmente?

Primero Básico	[ ]	Segundo Básico	[ ]
Tercero Básico	[ ]	Cuarto Básico	[ ]
Quinto Básico	[ ]	Sexto Básico	[ ]
Modalidad Multigrado	[ ]		

<u>Referentes al cambio curricular</u>

10. ¿Usted está de acuerdo con las modificaciones que se han realizado en el currículum chileno, en relación a la incorporación del eje de álgebra desde los primeros niveles de educación?

Si [ ] Medianamente [ ] No [ ]

11. ¿Usted se siente preparado para realizar clases de álgebra desde los primeros niveles de educación?

Muy preparado [ ]
Medianamente preparado [ ]
No se siente preparado [ ]

12. ¿En su formación universitaria, tuvo cursos de álgebra?

Si [ ] No [ ]

13. ¿En su formación universitaria, tuvo cursos de didáctica del álgebra?

Si [ ] No [ ]

14. Durante los años que lleva trabajando como profesor de educación básica. ¿Usted ha realizado algún postítulo de mención en matemática, donde esté incluido el álgebra?

    Si [ ] No [ ]

15. ¿Usted conoce los estándares pedagógicos y disciplinarios?

    Si [ ] Medianamente [ ] No [ ]

16. Con respecto a los estándares pedagógicos y disciplinarios, ¿Usted sabe cuántos están dirigidos al eje de álgebra?

    Si [ ] No [ ]

Instrucciones para responder las preguntas abiertas:

- En cada uno de los ítems debe considerar un tiempo máximo de 5 minutos.
- En las situaciones de aula, responda de acuerdo a lo que usted haría o diría en aquel momento.
- Toda respuesta en confidencial y voluntaria.
- Se agradece que responda todas o en su defecto, la mayoría de las preguntas propuestas.

PREGUNTAS ABIERTAS

Ítem 1:

Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria (educación básica):

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

$$8 + 4 = \_\_ + 5$$

Un alumno responde que el número es 12.

a. Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.

b. ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

Ítem 2:

Un alumno formuló la siguiente conjetura:

"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"

a. ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?

b. ¿Qué tipo de justificación piensas que podría dar un alumno de primaria en esa conjetura?

Ítem 3:

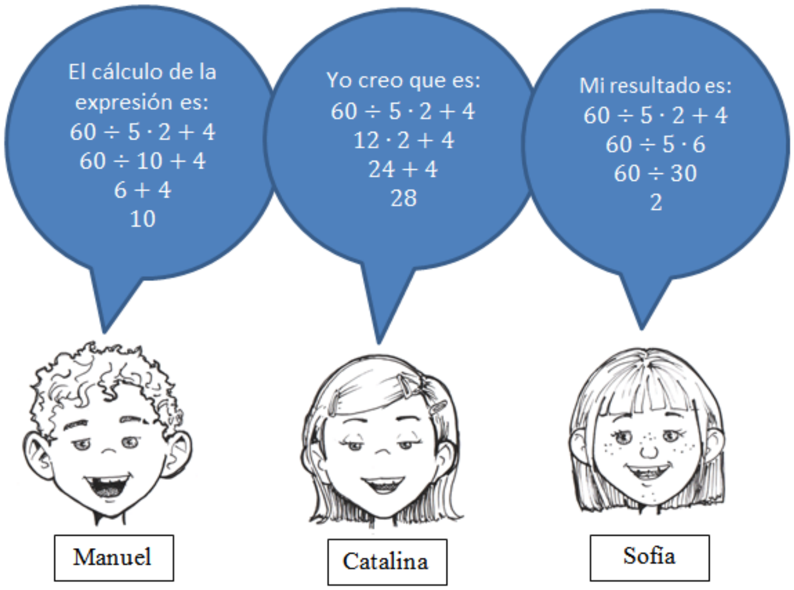
Un aldeano vende en la feria del pueblo sus terneros a cuatro compradores distintos: Al primero le vende la mitad del número de terneros más uno. Al segundo, la mitad de lo que le quedaban más un ternero. Al tercero, un ternero. Al cuarto comprador le vende el último un ternero.

¿Cuántos terneros llevó inicialmente?

Construya ecuaciones y resuelva.

Ítem 4:

La profesora le indica a sus alumnos que escriban y calculen lo siguiente: "*Si al número sesenta lo dividen en cinco, lo multiplican en dos y finalmente le suman cuatro unidades, ¿cuál es el resultado?*".

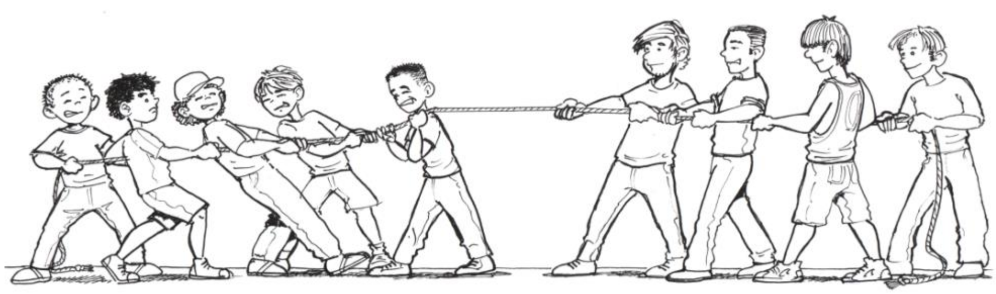


Analizar los procedimientos de resolución de cada alumno verificando si existe coherencia entre lo dictado por la profesora y lo realizado por cada niño

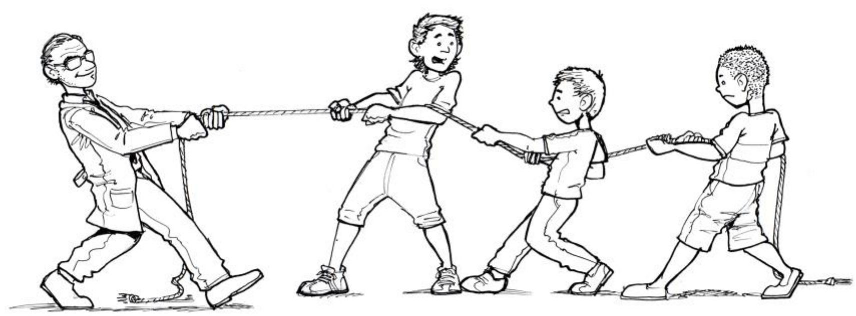
Ítem 5:

En la jornada recreativa del día del profesor se enfrentan niños, jóvenes y profesores en un juego de tirar de una cuerda, dándose las siguientes situaciones:

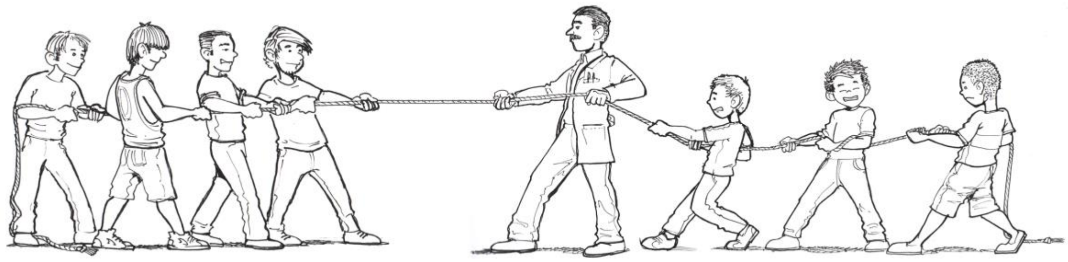
Cinco niños tiran tan fuerte como cuatro jóvenes.



Un profesor tira tan fuerte como un joven y dos niños.



Finalmente se enfrentan dos equipos, el equipo “demoledores” conformado por cuatro jóvenes contra “invencibles” donde se encuentra un profesor y tres niños.



Proponga relaciones matemáticas para la obtención del equipo vencedor. Verifique la relación planteada.

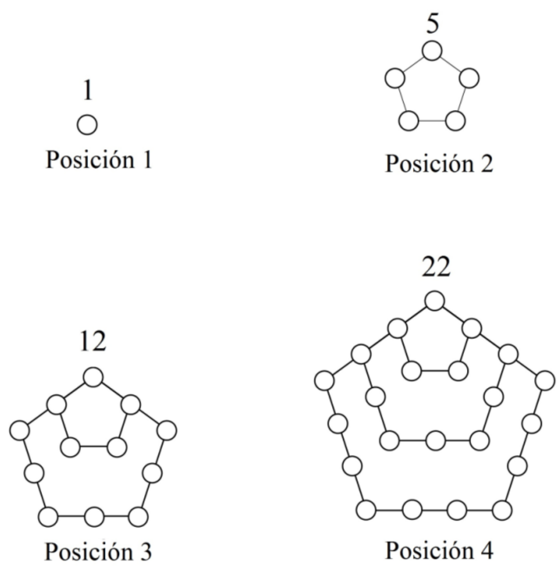
Ítem 6:

Haga la transferencia a lenguaje algebraico y resuelva:

"*si a un número se le suma el triple del mismo número menos 4 unidades, resulta el número más dos*".

Ítem 7:

Considere la siguiente secuencia:



a. Encuentre la cantidad de círculos desde la primera posición hasta la octava.

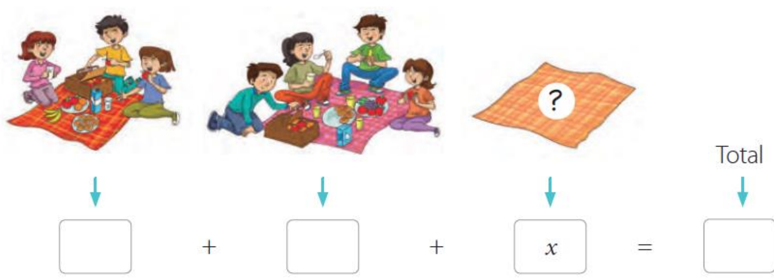
b. Encuentre una expresión general para la posición n-ésima.

Ítem 8:

La siguiente ilustración fue extraída del libro de sexto año de enseñanza básica (Editorial Santillana, página 120)

Para compartir con tus compañeros e incentivar una colación saludable puedes realizar un pícnic al aire libre.

- Para responder la pregunta, completa con la cantidad de estudiantes según corresponda. Considera que x representa el número de estudiantes que se reunirán en el tercer grupo.



- En el tercer grupo se reunirán ☐ estudiantes.

¿Cuál cree usted que es la justificación para que los autores introduzcan el concepto de ecuación con esta actividad?

ANEXO V: Rúbrica para la corrección

		Respuesta Correcta (2 puntos)	Respuesta Incompleta (1 punto)	Respuesta Incorrecta (0 puntos)
1	a)	El docente indica que el alumno efectuó la suma sin considerar la relación de equivalencia.	El docente interpreta que el alumno realizó la suma $8 + 4$ sin tomar en cuenta lo que hay detrás del símbolo =.	No deduce ningún razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.
	b)	La igualdad aritmética es interpretada como acción.	El profesor descifra que el estudiante piensa en obtener un resultado exacto al realizar la operación aritmética. Una suma de sumandos da un número.	No realiza ninguna interpretación a lo efectuado por el estudiante.
2	a)	Debe indicar que la conjetura es correcta y válida para todos los números naturales, elaborando una justificación basada en el uso de una variable para expresar "un número natural cualquiera". $n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1);\ \frac{3(n+1)}{3}=n+1$ Para todo n natural.	La conjetura es correcta. El alumno ha realizado una media; al dividir la suma de tres números consecutivos por el número de números que ha sumado (3) se obtiene la medida que coincide con el valor del segundo número.	No logra determinar si la conjetura es válida para todos los números naturales.
	b)	La justificación está basada en la comprobación de algunos casos particulares.	Su razonamiento puede ser dado por una división, estableciendo el razonamiento a partir del único caso particular.	No deduce alguna justificación que podría dar el estudiante a la conjetura.

3	Construye una ecuación óptima solucionando correctamente el problema planteado cuyo resultado es 14 terneros.	Llega a la solución del problema sin elaborar una ecuación. Usa el método de ensayo y error o método gráfico.	No obtiene la solución requerida.
4	Analiza las producciones de los estudiantes indicando que: Manuel: Detecta que el error es la priorización de la multiplicación por sobre la división. Catalina: Tiene el procedimiento y la respuesta correcta. Sofía: Descubre que la equivocación se produce al realizar la adición antes que división y multiplicación.	Logra dilucidar que sólo Catalina obtiene la respuesta correcta, sin embargo, no analiza las producciones de los otros niños.	Indica que Manuel o Sofía obtuvieron las respuesta correcta.
5	Elabora ecuaciones para dar solución a la problemática planteada cuya respuesta es que gana el equipo "invencibles".	Entrega la solución al problema planteado usando el método de ensayo y error.	No obtiene la solución requerida.
6	Forma una ecuación que le permite encontrar la solución a lo planteado siendo su la respuesta correcta 2.	Encuentra la solución sin elaborar una ecuación, ni usa elementos algebraicos.	No encuentra la solución correcta.

7	a)	Encuentra la cantidad de círculos solicitados desde la primera a la octava posición.	Obtiene correctamente los círculos de dos o tres posiciones.	Obtiene uno o ningún círculo involucrado en alguna posición pedida.
	b)	Es capaz de encontrar una forma general para los números pentagonales, la cual es: $\frac{n(3n-1)}{2}$.	Desarrolla las secuencias numéricas, sin embargo, no logra obtener una expresión general correcta.	No desarrolla la secuencia numérica, ni obtiene una forma general correcta para los números pentagonales.
8		Propicia una excelente forma para introducir el concepto de ecuación de primer grado con una incógnita, contextualizando a la cotidianidad.	Es una actividad mejorable para comenzar con el concepto de ecuación.	Considera que es una actividad inadecuada para iniciar el aprendizaje de las ecuaciones en alumnos de sexto año básico, no encontrando elementos destacables en ella.