3. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

La asignación de flujos de mercancías al conjunto de rutas de la red troncal se puede expresar como un problema de programación matemática, con la identificación de una función objetivo de costes a minimizar y varias restricciones. En este contexto, debido a la consolidación de la carga de los clientes en las terminales y delegaciones, algunos de los flujos entre delegaciones suelen tener una masa crítica suficiente para justificar un envío directo entre éstas. Sin embargo, en algunas relaciones con poca demanda, los envíos pueden resultar más eficientes si se realiza una ruta con paradas múltiples o con alguna transferencia y cambio de vehículo en una terminal.

En este capítulo se abordará el problema de programación matemática mediante la definición de las variables, restricciones y la función de costes asociada a una red de distribución de muchos orígenes a muchos destinos con la posibilidad de estrategias de envíos directos, con paradas múltiples o vía *hub*.

El problema general se descompondrá en dos fases: en la primera etapa se realizará la asignación de envíos a carga completa con los distintos vehículos disponibles, mientras que en la segunda etapa se planificarán todos los envíos con carga inferior a la capacidad del vehículo. La descomposición es obvia porque si q_{ij} es el flujo entre el origen i y el destino j y C_k la capacidad de un vehículo de tipo k, se cumple la ecuación (3.1):

$$q_{ij} = \left[\frac{q_{ij}}{C_k}\right]^{-} C_k + \left\{\frac{q_{ij}}{C_k}\right\} C_k \tag{3.1}$$

donde $[\cdot]^{-}$ indica la parte entera por defecto y $\{\cdot\}$ la parte fraccionaria. Cualquier consolidación de la carga $\left[q_{ij}/C_k\right]^{-}C_k$ implica mayores costes que enviar $\left[q_{ij}/C_k\right]^{-}$ vehículos de tipo *k* llenos.

3.1. CONDICIONANTES Y ATRIBUTOS A CONSIDERAR EN LA ASIGNACIÓN DE FLUJOS EN LA RED TRONCAL

Para la formulación del problema, se parte de un grafo completo $G(N,E)$ donde el conjunto N de nodos representa la ubicación de las delegaciones y E los arcos entre las delegaciones. Se debe definir de forma complementaria el conjunto H de terminales que actuarán como *hub*, $H \subset N$. Las dimensiones de los conjuntos N y H determinan respectivamente el número de delegaciones del sistema $N_T=|N|$ y el número de terminales *hub* $h=|H|$. La distancia a recorrer para el transporte de mercancía entre las delegaciones $i,j \in N$ viene representada mediante la variable definida positiva $D_{i,j}$. Adicionalmente, la velocidad de recorrido en cada arco $e \in E$ viene definida por la variable $v_e>0$ y el volumen de mercancía total a transportar entre las delegaciones (i,j) es representado por la variable positiva W_{ij}.

Las restricciones a cumplir que se han considerado en el problema son:

- La capacidad de los vehículos, C. Se ha considerado una flota homogénea de vehículos para la red troncal, de forma que cada uno de ellos tiene un volumen máximo igual a C (m^3; la restricción más habitual en este tipo de envíos es por volumen más que por peso) disponibles para la carga de la mercancía.
- Las ventanas temporales de servicio de cada delegación ($h_{1,i}$; $h_{2,i}$). La variable $h_{1,i}$ representa el tiempo de apertura en la delegación origen i para iniciar la carga de los vehículos, mientras que $h_{2,i}$ representa el tiempo máximo de entrada a la delegación i para proceder a la descarga de los vehículos.
- Plazo de distribución, P_f. El problema a estudiar considera un plazo de entrega de la mercancía fijo para todas las demandas de servicio y que el envío entre una delegación origen y una delegación destino se produzca en un mismo ciclo de reparto o plazo de distribución (en un mismo día, varios días, etc.) para cumplir las restricciones ($h_{1O};h_{2,D}$).
- El número de muelles de carga en delegaciones para distribuir la mercancía, m_i . En cada delegación i, el número máximo de muelles destinado para el uso de los vehículos utilizados en la red troncal es fijo y se representa por la variable m_i .

El transporte de los volúmenes de mercancía W_{ij} asociados a todos los pares de delegaciones origen-destino (i,j) constituye un conjunto de tareas a realizar por los recursos del sistema (vehículos, conductores e instalaciones). De este modo, se puede hablar indistintamente de tareas o envíos que tendrán un origen y un destino específico y por lo tanto constituirán un problema de scheduling o de programación puro.

Si bien las restricciones temporales condicionarán el número máximo de tareas y volumen de mercancías entre delegaciones, la capacidad de los vehículos juega un papel fundamental en la asignación de los recursos a las tareas o envíos de transporte. En este punto, se debe diferenciar el problema de envíos completos de los envíos con volumen de carga inferior a la capacidad. Los envíos completos se realizan cuando todo el volumen de mercancía entre un origen y un destino puede ser transportado en un solo vehículo sin violar las restricciones del sistema (capacidad o restricciones temporales).

Sin embargo, cuando la demanda de mercancía entre un origen y destino supera la capacidad del vehículo, la mercancía se divide o fracciona en distintos envíos asociados a distintas rutas para cumplir la restricción de capacidad. En estos casos, al igual que los envíos con una carga muy inferior a la capacidad, habrá como mínimo un vehículo que presentará una ocupación baja, al no aprovechar toda su capacidad potencial para el transporte. Estos casos, conocidos como *Less than TruckLoad* (LTL), constituyen un campo estratégico para aplicar estrategias de consolidación.

Cabe mencionar que en algunos sistemas de distribución también se puede realizar el fraccionamiento de un envío con un volumen inferior a la capacidad vehicular. Este caso sucede cuando existen varios vehículos *LTL* con servicio entre el punto origen y destino del envío y con unos factores de carga bajos; de forma que el fraccionamiento puede llenar la capacidad de éstos.

De este modo, los envíos entre delegaciones con volúmenes de carga inferiores a la capacidad del vehículo (generan vehículos *LTL*) constituyen el principal aspecto de optimización de los recursos del sistema.

Con el fin de evaluar el transporte fraccionado de una carga W_{ij} ($W_{ij} > C$) en unidades adecuadas a la capacidad del vehículo, se debe calcular la variable n_{ij} mediante la ecuación (3.2). La variable n_{ij} representa el número de envíos mínimo entre (i,j) para satisfacer el volumen $W_{ij.}$, siendo el operador $[x]^+$ el valor entero superior a x.

$$n_{ij} = \left[\frac{W_{ij}}{C}\right]^{+} \tag{3.2}$$

Por lo tanto, el transporte de la mercancía entre las delegaciones (i,j) con una carga W_{ij} >0 exige un total de n_{ij} tareas o envíos para cumplir con la restricción de capacidad de la flota de vehículos. En el caso que entre dos delegaciones (i,j) no exista volumen de carga (W_{ij}=0) se considerará n_{ij}=0. Cuando $W_{ij}>C$ y $W_{ij} \neq pC$ ($p \in \aleph$), se supone que existirá como mínimo un solo envío con carga inferior a la capacidad (*LTL*), representado por la fracción $0<\{W_{ij}/C\}<1$ en unidades de capacidad del camión, al que se le aplicarán estrategias de consolidación en terminal (*hub*) o a paradas múltiples (*peddling*) para optimizar los recursos y un número (n_{ij} -1) de envíos a carga completa.

La resolución del problema se basa en constituir un conjunto de rutas R ={1,2,..,R_T}que minimicen los costes totales de la distribución realizando todos los n_{ij} envíos para transportar la carga $W_{ij} \neq 0$ entre todas las delegaciones (i,j).

De este modo, el volumen de mercancía entre las delegaciones (i,j) asignado al envío k se representará por la variable w_{ij}^{k} >0, de forma que se cumpla la ecuación (3.3).

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} w_{ij}^{k} = W_{ij} \qquad \forall i, j \in N \tag{3.3}$$

En este sentido, el problema de asignación de envíos al conjunto de rutas R se puede analizar como un problema de asignación de tareas a un número finito de recursos. Cada envío k entre las delegaciones (i,j) se puede identificar por la variable a_{ij}^{k} que le asigna un número de referencia ascendente no repetitivo entre 1 y a_{max}, siendo a_{max} el número total de envíos a realizar $\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} n_{ij}$. De este modo, se puede crear el conjunto de tareas A^g constituido por cada tarea a_{ij}^{k} del sistema asociada a un envío con $w_{ij}^{k} \neq 0$.

Para la simplificación y obtención de una expresión consistente del problema, se define la variable $w_a^{'}$ como el volumen de mercancía asociada a la tarea $a \in A^g$ de modo que $w_a^{'} = w_{ij}^{k}$ si $a = a_{ij}^{k}$.

Los costes globales considerados en la distribución se componen de un coste de servicio de cada vehículo utilizado en el reparto, los costes proporcionales a la distancia recorrida, los costes de transferencia de vehículo en la terminal *hub* y los costes asociados a los tiempos muertos en que los vehículos esperan en las terminales o delegaciones a que un muelle quede libre para efectuar la carga o descarga. En este sentido se definen los siguientes parámetros:

- Coste de servicio de un vehículo de transporte en el sistema (F). Se asocia al coste temporal que representa a la empresa el alquiler diario de un vehículo si realiza la subcontratación del servicio. En el caso de flota propia, este parámetro representa principalmente al coste diario de amortización del recurso, salario del conductor, seguro, etc.
- Coste unitario de recorrido de un vehículo (c_d). Es el coste asociado a la superación de una unidad de distancia con el vehículo, e integra los costes de carburantes y mantenimiento. En el problema de análisis, este coeficiente se considera constante independientemente del volumen de mercancía transportada.
- Coste unitario de transferencia ($c_{t,i}$). Es el coste que representa la transferencia de una unidad de volumen de mercancía en la terminal *hub* i entre dos vehículos. Esta operación suele requerir operaciones de manipulación de la mercancía, maquinaria y tecnología diferencial al tratamiento de la mercancía sin transferencia. Este coste solamente afecta a aquellas mercancías que se transportan en estrategias *hubbing* con cambio de vehículo en una terminal.
- Coste de parada (c_p). Es el coste que representa la parada de un vehículo en una delegación para efectuar la carga y/o descarga de mercancía.
- Coste unitario de congestión en delegación (c_w). Es el coste de penalización que supondría el hecho de tener un vehículo en la delegación durante una unidad de tiempo a la espera de que un muelle de carga quedase libre para efectuar la carga y/o descarga de mercancía.

3.2. ASIGNACIÓN DE FLUJOS A LA RED COMO PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

La estrategia más sencilla para efectuar el transporte de mercancía entre las delegaciones (i,j) se basa en envíos directos en carga completa o con carga inferior a la capacidad del vehículo. Sin embargo, el transporte de la mercancía W_{ij} entre una delegación origen i y una delegación destino j puede ser realizado con envíos con paradas múltiples o envíos con transferencias (*hub*). Cada ruta $r \in R$ se definirá por el subconjunto de nodos N^r visitados y el conjunto de arcos E^r formado por los pares de puntos (i,j) $(i,j\in N^r)$ que se cubren de forma consecutiva, sin ninguna parada intermedia.

Adicionalmente, se define el conjunto A^r como aquellos pares de nodos (i,j) que disponen de un envío o tarea a=a_{ij}^k asignada a la ruta r. El número total de arcos que contiene una ruta $r\in R$ queda determinado por la variable b_r, de forma que $\left|E^r\right| = b_r$. Finalmente, el vector $n_r(i)$ determina la delegación visitada en la posición i=1,..,b_r+1 de la ruta $r\in R$

Para la resolución del problema se han generado cuatro variables discretas 0-1 para identificar los siguientes tipos de estrategias de transporte entre las delegaciones (i,j):

- Estrategia de envío directo de la carga o tarea $a=a_{ij}^k$ sin ninguna parada intermedia en la ruta r (k=1,..,n_{ij}). La fracción k de la mercancía entre delegaciones $i,j\in N$ se enviará de forma directa sin paradas intermedias en la ruta r cuando la variable discreta X_a^r presente un valor igual a 1 y con otra estrategia cuando la variable sea 0.
- Estrategia de envío *peddling* de la carga o tarea $a=a_{ij}^k$ en la ruta r (k=1,..,n_{ij}). El envío de la fracción k de mercancía entre las delegaciones $i,j\in N$ se realizará a través de una ruta existente $r\in R$ con paradas intermedias si la variable discreta Z_a^r toma valor igual a 1. En este caso, el envío o tarea $a=a_{ij}^k$ lo realiza la ruta r visitando todos los nodos intermedios $z\in N^r$ entre las delegaciones $i,\ j\in N^r$ que aparecen en la ruta r; mientras que coge un valor igual a 0 en caso contrario.
- Estrategia de envío de la carga o tarea $a=a_{ij}^k$ (k=1,..,n_{ij}) con una transferencia de la ruta r a una ruta s en la terminal *hub* l. Para identificar esta posibilidad, se han creado las variables discretas Y_{al}^r y B_{al}^s. La variable Y_{al}^r determina la primera etapa del envío *hub*, presentando un valor de 1 si el envío o tarea a=a_{ij}^k entre delegaciones (i,j) se realiza por la ruta r con origen en i y transferencia en la terminal l. Por su lado, la variable B_{al}^s representa la segunda etapa del envío *hub*, con un valor de 1 si la mercancía w_{ij}^k, una vez ha hecho escala en la terminal l, se envía a través de la ruta $s\in R$ hasta el punto j. En el resto de casos, el valor de estas variables es 0.

Por otro lado, se han creado dos variables discretas 0-1 auxiliares para poder determinar los arcos por los que se transporta la mercancía w_{ij}^k en cada ruta (equivalente a asignar la tarea a_{ij}^k); así como la correspondencia entre los segmentos y sus nodos respectivos en cada ruta:

- Variables $U^1_{a,b}$ y $U^2_{a,b'}$. Estas variables se utilizan para identificar los arcos de la ruta por los que discurre cada envío $w^k_{ij} \neq 0$. La variable discreta $U^1_{a,b}$ coge el valor de 1 en el caso que la tarea $a = a^k_{ij}$ asociada al volumen de mercancía w^k_{ij} se transporta por el arco *b* de la ruta $r \in R$ a la que ha sido asignada y 0 en caso contrario. La estrategia de envío puede ser a través de un envío directo (X^r_{ia} =1), envío con paradas múltiples (Z^r_a =1), o a través de la primera etapa de un envío *hub* entre nodo *i* y la terminal de transferencia *l* (Y^r_{al} =1). Cuando el envío de la mercancía w^k_{ij} asociada a la tarea $a = a^k_{ij}$ se realiza con estrategia *hub* a través de la transferencia en la terminal *l* entre rutas $r \in R$ y $s \in R$, cada arco *b* por el que circula la carga en la primera etapa (ruta *r*) se identifica con $U^1_{a,b}$ =1, mientras que cada arco *b'* de la segunda etapa (ruta *s*) se determina por $U^2_{a,b'}$ =1.
- Variable $S^r_{ij,b}$. La variable discreta tiene un valor igual a 1 cuando el arco $b \in E^r$ de la ruta *r* tiene como extremos los nodos o delegaciones $i,j \in N$ y 0 en caso contrario. Esta variable se genera para determinar una equivalencia entre arcos y nodos de cada ruta.

Con las variables definidas hasta el momento, se puede formular unívocamente el problema de asignación de envíos a rutas considerando exclusivamente los condicionantes de capacidad de los vehículos, sin tener en cuenta las limitaciones temporales del problema ni las limitaciones de capacidad de las instalaciones (muelles de *crossdocking*). Por este motivo, la formulación completa del problema de asignación necesita generar una serie de variables relacionadas con estas limitaciones:

- La variable p^r_b representa el tiempo muerto total que un vehículo perteneciente a la ruta $r \in R$ debe esperar en el nodo extremo superior del arco $b \in E^r$ para que se libere alguno de los muelles por problemas de congestión.
- La variable t^r_b representa el tiempo de viaje en el arco *b* de la ruta *r* a una velocidad *v*.
- La variable T^r_b determina el tiempo inicio de carga del vehículo en la delegación origen del arco *b* de la ruta *r* (delegación *i)* para dirigirse a la delegación final del arco (nodo *j*) cuando $(i,j) \in A^r$ y $S^r_{ij,b} = 1$.
- La variable l^r_b representa el tiempo total de carga en la delegación situada en el nodo origen del arco *b* de la ruta $r \in R$.

- La variable u_b^r representa el tiempo total de descarga en la delegación ubicada en el nodo final del arco *b* de la ruta $r \in R$.
- Finalmente, los parámetros τ_i^l, τ_i^u determinan respectivamente los tiempos unitarios de carga y descarga por volumen en la delegación $i \in N$.

De este modo, la función objetivo del problema que se plantea responde a la minimización de los costes totales del sistema de distribución Z1 con envíos con paradas múltiples, con transferencia o envíos directos. La citada función a minimizar se determina mediante la ecuación (3.4).

$$\min \ Z1 = \sum_{r \in R} \left(F + \sum_{b=1}^{b_r} \sum_{i \in N^r} \sum_{j \in N^r} \left(c_d D_{ij} + c_w p_b^r \right) S_{ij,b}^r + \sum_{a \in A^g} \sum_{o \in N^r} c_{t,o} Y_{a,o}^r w_a^{'} + \sum_{b=1}^{b_r+1} c_p \right) \tag{3.4}$$

El primer término de la función objetivo hace referencia a los costes fijos asociados a la prestación del servicio de un vehículo para cubrir la ruta $r \in R$. El segundo término hace referencia a los costes variables proporcionales a la distancia y los costes de espera por congestión de la delegación en todos los arcos $b=1,..,b_r$ servidos con todas las estrategias de envío. El tercer término evalúa el coste de manipulación en las transferencias de toda la mercancía con envíos *hub*. Finalmente, el cuarto término determina los costes asociados a todas las paradas efectuadas en cada ruta $r \in R$.

En este caso, la formulación propuesta para el problema es más compleja que la propuesta en Aykin (1995a) y otras contribuciones relativas a localización ya que aquellas proponían un problema basado en flujos, hecho que permitía desacoplar el problema de asignación de envíos a la red del problema de rutas y asignación de vehículos. En el caso que nos ocupa, es necesaria la determinación del número de vehículos utilizados y las rutas para cumplir las restricciones temporales y de capacidad. El conjunto de restricciones a considerar en el problema se detallan en las ecuaciones (3.5)-(3.13), y han sido adaptadas a partir del análisis de problemas de rutas realizado en Desaulniers *et al.* (2002).

$$\sum_{\forall r \in R} \left(X_a^r + Z_a^r + \sum_{\forall o \in N^r} \left(\frac{Y_{ao}^r + B_{ao}^r}{2} \right) \right) = 1 \qquad \forall a \in \mathrm{A}^g \tag{3.5}$$

$$\sum_{\forall a \in A^g} \left(X_a^{r*} U_{a,b}^1 + \left(1 - \sum_{\forall c \in A^g} X_c^{r*} U_{c,b}^1 \right) \left(\left(Z_a^{r*} U_{a,b}^1 \right) + \left(1 - \sum_{\forall d \in A^g} Z_d^{r*} U_{d,b}^1 \right) \left(\sum_{\forall o \in N^r} \left(Y_{a,o}^{r*} U_{a,b}^1 + B_{a,o}^{r*} U_{a,b}^2 \right) \right) \right) \right) = 1 \tag{3.6}$$

$$\forall r^* \in R; \quad \forall b = 1,..., b_r - 1$$

$$\sum_{\forall(j,q)\in A^r} S^r_{jq,b+1} - \forall \sum_{\forall(i,j)\in A^r} S^r_{ij,b} = 0 \qquad \forall r^* \in R; \quad \forall b = 1,\ldots,b_r - 1 \tag{3.7}$$

$$\sum_{\forall a\in A^g} w'_a \left(X^{r*}_a U^1_{a,b} + Z^{r*}_a U^1_{a,b} + \left(\sum_{\forall o\in N^{r*}} \left(Y^{r*}_{a,o} U^1_{a,b} + B^{r*}_{a,o} U^2_{a,b} \right) \right) \right) \le C \qquad \forall r^* \in R; \forall b = 1,..,b_r \tag{3.8}$$

$$\sum_{\forall(i,j)\in A^r} h_{1,i} S^{r*}_{ij,b} \le T^{r*}_b + l^r_b \le \sum_{\forall(i,j)\in A^r} h_{2,i} S^{r*}_{ij,b} \qquad \forall r^* \in R; \forall b = 1,\ldots,b_r \tag{3.9}$$

$$\sum_{\forall(i,j)\in A^r} h_{1,j} S^{r*}_{ij,b} \le T^{r*}_b + l^{r*}_b + u^{r*}_b + t^{r*}_b + p^{r*}_b \le \sum_{\forall(i,j)\in A^r} h_{2,j} S^{r*}_{ij,b} \qquad \forall r^* \in R; b = 1,\ldots,b_{r*} \tag{3.10}$$

donde:

$$l^r_b = \sum_{\forall a\in A^g} \sum_{\forall(i,j)\in A^r} S^r_{ij,b} \tau_{l,i} w'_a \left(X^r_a U^1_{a,b} + Z^r_a U^1_{a,b} \left(1 - U^1_{a,b-1}\right) + \left(\sum_{\forall o\in N^r} \left(Y^r_{a,o} U^1_{a,b} \left(1 - U^1_{a,b-1}\right) + B^r_{ao} U^2_{a,b} \left(1 - U^2_{a,b-1}\right) \right) \right) \right)$$

$$u^r_b = \sum_{\forall a\in A^g} \sum_{\forall(i,j)\in A^r} S^r_{ij,b} \tau_{u,j} w'_a \left(X^r_a U^1_{a,b} + Z^r_a U^1_{a,b} \left(1 - U^1_{a,b+1}\right) + \left(\sum_{\forall o\in N^r} \left(Y^r_{a,o} U^1_{a,b} \left(1 - U^1_{a,b+1}\right) + B^r_{ao} U^2_{a,b} \left(1 - U^2_{a,b+1}\right) \right) \right) \right)$$

$$U^1_{a,b+1} = 1; U^2_{a,b+1} = 1 \qquad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}^{\mathrm{g}}; b = b_r$$

$$U^1_{a,b-1} = 1; U^2_{a,b-1} = 1 \qquad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}^{\mathrm{g}}; b = 1$$

$$\left(T^r_b + l^r_b + t^r_b + u^r_b + p^r_b\right) \le T^s_c \tag{3.11}$$

$$\forall r, s \in R; \forall b \in \{1,..,b_r\}; \forall c \in \{1,..,b_s\}; \forall o \in N^r \cap N^s \left| \left\{ Y^r_{ao} S^r_{io,b} U^r_{a,b} = 1; B^s_{ao} S^s_{oj,c} U^s_{a,c} = 1 \right\}\right.$$

$$\sum_{\forall(i,j)\in A^s} \sum_{\forall r\in R-\{s*\}} \sum_{\forall(i,v)\in A^r} H\left[\left(T^{s*}_c S^{s*}_{ij,c}\right) - \left(T^r_b S^r_{iv,b}\right)\right] H\left[\left(\left(T^r_b + l^r_b\right) S^r_{iv,b}\right) - T^{s*}_c S^{s*}_{ij,c}\right] \le (m_i - 1) \tag{3.12}$$

$$\forall s^* \in R; a = 1,..,a_r$$

$$X^r_a \le 1; \quad Z^r_a \le 1; \; Y^r_{ao} \le 1; \; B^r_{ao} \le 1; U^1_{a,b} \le 1; \; U^2_{a,b} \le 1; \; S^r_{ij,a} \le 1 \tag{3.13}$$

$$\forall r \in R; \; \forall a \in A^g; \forall b = \{1,..,b_r\}; \quad \forall o \in N^r; \forall (i,j) \in A^r$$

La ecuación (3.5) hace referencia a que el transporte de la carga o tarea $a \in A^g$ por la ruta $r \in R$ sólo puede ser realizada con una estrategia de envío directo (X^r_a =1), con estrategia de paradas múltiples ($Z_a^{,r}$=1) o con estrategia de envío a *hub* utilizando dos rutas *r,s* $\in$ *R* ($Y_{ao}^r = 1; B_{ao}^s = 1$).

La ecuación (3.6) se exige para garantizar que no existe ningún arco de una ruta por el que no se transporte mercancía (no se permiten los desplazamientos sin carga durante la jornada laboral). Por su lado, la ecuación (3.7) pretende reproducir la condición que en el servicio de dos arcos correlativos de una ruta debe existir un nodo común.

La restricción de capacidad de los vehículos se establece en la desigualdad (3.8), donde se consideran conjuntamente las cargas de envíos directos, paradas múltiples y envíos *hubs* para un mismo arco b=1,…,b_r de la ruta $r \in R$.

Por otro lado, las restricciones (3.9), (3.10) y (3.11) hacen referencia a las restricciones temporales del problema. En el cubrimiento del arco b=1,..,b_r de la ruta $r \in R$ que corresponde al transporte entre dos puntos $i,j \in N^r$ que se visitan consecutivamente $(i,j) \in A^{\mathrm{r}}$, la ecuación (3.9) exige que el tiempo de ocupación para la efectuar la carga de mercancía en la delegación *i* esté dentro de la ventana temporal (h_{1i}; h_{2i}). Bajo estas condiciones, en la ecuación (3.10) se obliga a que el tiempo de ocupación para la descarga de mercancía en la delegación *j* siendo transportada desde el punto *i* debe verificar la ventana temporal admisible de la delegación. En el caso de mercancías en transferencia en una terminal $o \in N^{r,}$ la restricción temporal (3.11) obliga a que la descarga de mercancía de un vehículo de la ruta *r* en el *hub o (r*: ruta entrante al *hub*) se realice previamente a la carga a la ruta *s* (*s*: ruta saliente al *hub*).

Finalmente, la ecuación (3.12) hace referencia a que el número de vehículos que están en la delegación durante la carga y descarga de la mercancía sea inferior o igual al número total de muelles m_i para efectuar la distribución, siendo *H(·)* la función escalón de Heaviside que tiene como expresión la ecuación (3.14). Las restricciones determinadas en la ecuación (3.13) definen el rango de variación de las variables enteras de decisión del modelo.

$$H(x-a) = \begin{cases} 1 & \mathrm{x > a} \\ 0 & \mathrm{x < a} \end{cases} \tag{3.14}$$

3.3. DESCOMPOSICIÓN DEL PROBLEMA

La resolución del problema implica la consideración de un alto número de soluciones posibles y constituye un problema de optimización combinatoria. Tal y como ya se ha avanzado, el problema de optimización combinatoria anteriormente descrito es *NP-Hard*. Este hecho implica que el tiempo de computación para resolverlo es superior a cualquier polinomio del tamaño del problema (N_T), hecho que supone una dificultad computacional muy elevada. Con la finalidad de simplificar su resolución, se propone la descomposición del problema Z1 de asignación de flujos a las rutas en un problema de identificación de las rutas directas entre delegaciones con vehículo a carga completa (*P1*) y el problema de envíos entre delegaciones a carga inferior a capacidad (*Less than TruckLoad, LTL*) con estrategias a paradas múltiples en origen o destino, envíos directos con carga inferior a la capacidad y la posibilidad que la mercancía realice una transferencia de vehículo en una terminal *hub* (*P2*).

Dado el conjunto de tareas de puntos a visitar a carga completa, el problema (*P1*) en cuestión se reconoce como un problema de *scheduling* puro ya que el único factor a tener en cuenta es la asignación de tareas (trayectos asociados a las demandas de carga) a recursos (vehículos) para poder satisfacer las restricciones temporales del problema. Debido que la ocupación del vehículo siempre es máxima, no existen posibilidades de transporte múltiple de mercancía asociada a distintos pares de puntos, por lo que la componente de ruteo no es el factor determinante del coste. Adicionalmente, la estrategia *hubbing* no tiene ningún sentido ya que no se puede consolidar más mercancía en el trayecto de un vehículo ya que este siempre se realiza a máxima ocupación. Sin embargo, la resolución del problema *P2* admite y se beneficia de la aplicación de todas las estrategias de envío existentes, por lo que el orden de visita de los puntos en una misma ruta puede influir en la optimización de la ocupación de la carga del vehículo.

A partir de las ecuaciones (3.2) y (3.3), la carga total W_{ij} a transportar entre dos puntos $i,j \in N$ se puede descomponer en (n_{ij} -1) envíos o tareas a carga completa a_{ij}^k k=1,..,n_{ij}-1 y un solo envío o tarea $a_{ij}^{n_{ij}}$ con carga inferior a la capacidad según la expresión (3.15).

$$w_{ij}^k = \begin{cases} C & \text{si k} = 1,\dots,(\text{n}_{\text{ij}} - 1) \\ W_{ij} - n_{ij}C & \text{si k} = \text{n}_{\text{ij}} \end{cases} \tag{3.15}$$

El reparto de las fracciones de la carga W_{ij} según los valores de la ecuación (3.15) con un servicio exclusivo de envíos directos a carga completa permite simplificar la función objetivo del problema P1 a la ecuación (3.16). Las restricciones asociadas a este problema también sufren una simplificación significativa y se caracterizan por las expresiones (3.17-3.19) y las expresiones definidas para el problema Z1 (3.7), (3.9), (3.10) y (3.12).

$$Min\,\mathrm{P1} = \sum_{r\in R}\left(F + \sum_{b=1}^{b_r}\sum_{i\in N^r}\sum_{j\in N^r}\left(c_d D_{ij} + c_w p_b^r\right) S_{ij,b}^r + \sum_{b=1}^{b_r+1} c_p \right) \tag{3.16}$$

$$\sum_{\forall r\in R}(X_a^r) = 1 \qquad \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}^{\mathrm{r}} \tag{3.17}$$

$$\sum_{\forall a\in A^g}\left(X_a^{r*} U_{a,b}^1\right) = 1 \qquad \forall r^* \in R;\ \ \forall b = 1,\ldots,b_r - 1 \tag{3.18}$$

$$X_a^r \le 1;\ U_{a,b}^1 \le 1;\ S_{ij,a}^r \le 1$$
$$\forall r \in R;\ \forall\, a \in A^g; \forall b = \{1,..,b_r\};\ \ \forall(i,j) \in A^r \tag{3.19}$$

En el caso de la restricción (3.10), las variables l_b^r y u_b^r se simplifican con las expresiones (3.20) y (3.21):

$$l_b^r = \sum_{\forall a\in A^g}\ \sum_{\forall(i,j)\in A^r} S_{ij,b}^r \tau_{l,i} w_a^{'}\left(X_a^r U_{a,b}^1\right) \qquad \forall r^* \in R;\ \ \forall b = 1,\ldots,b_r - 1 \tag{3.20}$$

$$u_b^r = \sum_{\forall a\in A^g}\ \sum_{\forall(i,j)\in A^r} S_{ij,b}^r \tau_{u,j} w_a^{'}\left(X_a^r U_{a,b}^1\right) \qquad \forall r^* \in R;\ \ \forall b = 1,\ldots,b_r - 1 \tag{3.21}$$

En este caso, las variables de decisión de las estrategias de envío del problema se reducen a X_a^r que toma un valor igual a 1 cuando la tarea $a = a_{ij}^k$, k=1,..,n_{ij}-1 es enviada por la ruta *r* y 0 en caso contrario.

Con todo, si se define A^C como el conjunto de tareas o cargas cuyo volumen asociado w_{ij}^k es igual a la capacidad *C*, la resolución se basará en la asignación de estos envíos o tareas a un conjunto de rutas R^c que determinarán la solución del problema. Cada ruta *r* estará compuesta por un conjunto A_C^r de pares de puntos $(i,j)\in \mathrm{N}$ con tareas asociadas a_{ij}^k servidas con estrategia directa. De este modo, también se construirá un conjunto de nodos (delegaciones) N_C^r que forman el esqueleto de la ruta *r*. La resolución para el problema *P2* se realizará considerando la formulación matemática general, con todas las restricciones y las variables de decisión propias de estrategias de envíos directos, *hub* y de paradas múltiples detalladas en las expresiones (3.4)- (3.14).